



HAL
open science

Approches numérique et expérimentale pour des structures à interfaces frottantes : Application au crissement de frein

Grégoire Corradi

► **To cite this version:**

Grégoire Corradi. Approches numérique et expérimentale pour des structures à interfaces frottantes : Application au crissement de frein. Autre. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LY-SEC044 . tel-02870031

HAL Id: tel-02870031

<https://theses.hal.science/tel-02870031>

Submitted on 16 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre NNT : 2019LYSEC44



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de

l'École Centrale de Lyon

École Doctorale ED162

Mécanique - Énergétique - Génie Civil - Acoustique

Spécialité : Génie Mécanique

Soutenue publiquement le 09/12/2019, par :

Grégoire CORRADI

Approches numérique et expérimentale pour des
structures à interfaces frottantes.
Application au crissement de frein.

Devant le jury composé de :

Evelyne AUBRY, Professeure des Universités, Université de Haute-Alsace,
Jean-François DEÛ, Professeur des Universités, CNAM Paris,
Jean-Luc DION, Professeur des Universités, Supmeca Saint-Ouen,
David LENOIR, Ingénieur de recherche, École Centrale de Lyon,
Sébastien BESSET, Maître de Conférences HDR, École Centrale de Lyon,
Jean-Jacques SINOÛ, Professeur des Universités, École Centrale de Lyon,

Examinatrice
Rapporteur
Rapporteur, président
Examineur
Co-Directeur de thèse
Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à commencer par remercier mes directeurs de thèse Jean-Jacques Sinou et Sébastien Besset pour m'avoir donné l'opportunité d'effectuer cette thèse sur ce sujet passionnant. Je leur suis reconnaissant pour leur présence, leurs conseils avisés et pour le partage et la patience dont ils ont fait preuve pendant ces trois ans. C'est grâce à leur encadrement et leur implication que j'ai pu mener à bien ces travaux de thèse.

Je remercie Jean-Luc Dion d'avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire et d'avoir également accepté au dernier moment de présider ce jury décimé par la grève SNCF.

Je remercie également mon second rapporteur Jean-François Deü d'avoir accepté de relire ce manuscrit ainsi que pour ses remarques judicieuses.

Mes remerciements vont également à Evelyne Aubry pour avoir accepté d'examiner mon travail.

J'en profite également pour exprimer toute ma reconnaissance au professeur Louis Jézéquel qui m'a accompagné depuis mon arrivée à l'Ecole Centrale et pendant mon Master. Toutes ces discussions n'ont jamais manqué de piquer mon intérêt.

Je remercie aussi toutes les personnes que j'ai pu côtoyer au LTDS pendant ma thèse, que ce soit les permanents ou les autres doctorants ou étudiants de master. Les barbecues, pauses café ou autres apéros ont très certainement joué un rôle important du côté personnel.

Je ne remercie pas mon genou qui, par deux fois, est passé du pivot à la rotule.

Je salue plus généralement toutes les personnes que j'ai pu connaître également depuis mon arrivée à Ecully, les collègues centraliens, les rugbeux et le V6. Mes plus sincères sentiments.

Je remercie également mes amis, qu'ils soient anciens et lorrains, ou alors arrivés plus récemment, merci à vous pour tous ces bons moments passés ensemble, ces coups aux bistrots et pour ce soutien mutuel dont vous faites preuve, personnellement.

Une pensée également pour ma famille, notamment pour mes parents sans qui je ne serais jamais arrivé jusque là, mon frère et ma soeur, merci à vous.

Enfin je remercie Clémence pour son soutien lors de cette longue expérience et pour toutes ces années déjà passées ensemble. Pourvu que ce ne soit que le début.

Résumé

Les systèmes de freins sont parfois sujets au crissement qui sont des vibrations auto-entretenues induites par le frottement et caractérisées par un contenu fréquentiel formé de raies à hautes fréquences supérieures à $1kHz$. Ces vibrations et bruits intenses sont une source de gêne pour les usagers automobile, un problème de santé publique pour les riverains de gares lors du freinage de TGV et peuvent amener à l'endommagement du train d'atterrissage sur les avions.

Afin de comprendre ce phénomène et pour le reproduire numériquement, une stratégie complète d'étude est développée. Elle se base sur l'observation expérimentale d'essais de crissement sur un banc d'essais qui permet de formuler des hypothèses de modélisation. Ces dernières sont un guide pour la construction d'un modèle numérique de frein simple. Une méthode de Double Synthèse Modale est appliquée au modèle afin d'en réduire la taille et de permettre des simulations numériques en temps raisonnable et ne nécessitant pas trop de ressources informatiques.

La démarche numérique qui suit commence classiquement par une analyse de stabilité par la méthode CEA où les valeurs propres du modèle linéarisé autour de la position d'équilibre glissante sont évaluées. Puis une intégration temporelle est effectuée dans les cas détectés comme instables afin de calculer les niveaux de vibrations. L'étude se termine par une estimation du champ acoustique rayonné par la structure complète.

Dans chacune des phases de l'analyse numérique, des outils spécifiques sont utilisés pour comparer le modèle de référence aux modèles obtenus par les deux étapes de réduction. Un critère d'erreur sur les valeurs propres et un critère de MAC sont utilisés pour l'analyse de stabilité. Pour l'étude temporelle, les allures des signaux sont comparées, ainsi que leurs cycles limites et leurs spectrogrammes. Les participations des modes instables sont également calculées pour observer le régime transitoire. En ce qui concerne la partie acoustique, les signaux sont comparés dans un premier temps de façon qualitative pour observer les différences entre les champs émis en fonction des différentes tailles de bases de réduction. Puis un outil basé sur une décomposition en 2D par wavelet des motifs acoustiques est introduit et appliqué pour estimer de façon quantitative les convergences des champs rayonnés.

Mots Clés : vibrations induites par le frottement, crissement, systèmes de frein, méthode des éléments finis, analyse de stabilité, Double Synthèse Modale, multi-instabilités, simulations non-linéaires, banc d'essais FIVE@ECL, acoustique.

Abstract

Brake systems are sometimes prone to squeal noise, which is due to friction-induced self-sustained vibrations, characterized by a set of frequencies above 1kHz. Those vibrations and resulting noises are a source of perturbations for car occupants, which can be nowadays considered as a health issue.

This thesis deals with a global strategy to better understand this phenomenon from an experimental point of view and to propose the prediction of squeal noise by numerical approaches. Moreover, experimental observations of squeal occurrences are analyzed to lead to assumptions about the modelisation of numerical finite element models for squeal prediction. A Double Modal Synthesis is also applied to reduce the size of the discrete finite element model of brake system and to save computational time and resources. The proposed numerical approach starts with a stability analysis with the classical CEA method. Then the determination of nonlinear self-excited vibrations are performed for the unstable cases detected via the CEA method. Finally the acoustic field emitted by the brake system is computed to predict squeal noise.

Specific tools are applied for each computational step to assess the efficiency of reduced model versus the reference model : criteria based on the mean error on eigenvalues and the Modal Assurance Criterion analysis (MAC) are used for the stability analysis ; comparisons of the limit cycles, spectrograms and the modal contributions of unstable modes are undertaken for the transient responses ; patterns of the acoustic intensity are computed on several observations surfaces and a decomposition based on the theory of 2D wavelets is introduced and applied to assess the convergence of patterns.

Keywords : friction-induced vibrations, squeal noise, brake system, finite element method, stability analysis, Double Modal Synthesis, multi-instability, non-linear simulation, experiments FIVE@ECL, acoustics.



Table des matières

Table des matières	11
Introduction	15
1 Etat de l'art, systèmes de freinage et vibrations auto-entretenues	19
1.1 Vibrations engendrées par le frottement	20
1.1.1 Systèmes de freins et vibrations	21
1.1.2 Caractérisations expérimentales du crissement	23
1.2 Modélisation du problème de crissement	26
1.2.1 Formulations du problème mécanique	26
1.2.2 Problème du contact entre deux solides	28
1.3 Mécanismes d'instabilité	31
1.3.1 Coefficients de frottement statique et dynamique	31
1.3.2 Variations du coefficient de frottement	32
1.3.3 Sprag-slip	33
1.3.4 Couplage de modes	34
1.4 Méthodes de réduction	36
1.4.1 Méthodes de Ritz	36
1.4.2 Méthodes de réduction modale avec sous-structuration	36
1.4.3 Autres méthodes de réduction	38
1.5 Analyse de stabilité	39
1.6 Méthodes d'approximation des systèmes non-linéaires transitoires	40
1.6.1 Calcul transitoire, schémas d'intégration	40
1.6.2 Calcul du régime stationnaire	46
1.7 Acoustique des systèmes vibrants	48
1.7.1 Problème interne	48
1.7.2 Problème externe	49
1.8 Conclusion	50
2 Analyse expérimentale, banc FIVE@ECL	51
2.1 Banc expérimental FIVE@ECL	52
2.1.1 Architecture et description du banc	52
2.1.2 Instrumentation et acquisition	54
2.2 Analyse et caractérisation du système couplé non tournant	59
2.3 Analyse d'un essai de crissement de référence	59
2.3.1 Protocole	59
2.3.2 Evolution du coefficient de frottement	60
2.3.3 Analyse de la signature temporelle	61
2.3.4 Analyse fréquentielle	63
2.4 Etudes d'influence des paramètres opérationnels sur le crissement	68
2.4.1 Description du protocole d'essais	68
2.4.2 Répétabilité des essais	68

2.4.3	Influence de certains paramètres physiques	70
2.5	Conclusions expérimentales pour la modélisation	83
3	Modélisation, réduction et analyse de stabilité d'un système mécanique de frein simplifié	85
3.1	Construction du modèle Eléments Finis	86
3.1.1	Rappel des hypothèses formulées	86
3.1.2	Architecture	86
3.1.3	Gestion du contact aux interfaces	88
3.1.4	Choix de l'amortissement	91
3.1.5	Equation dynamique du modèle de frein simplifié	91
3.2	Rappel sur l'étude de la stabilité du système	92
3.3	Réduction du modèle	93
3.3.1	Application de la réduction de Craig et Bampton	94
3.3.2	Double Synthèse Modale (DMS)	95
3.4	Résultats de l'analyse de stabilité	97
3.4.1	Analyse de stabilité du modèle de référence	97
3.4.2	Critères d'évaluation de la convergence des modèles réduits pour la stabilité	99
3.4.3	Stabilité pour l'étape de réduction de Craig et Bampton	100
3.4.4	Stabilité pour la Double Synthèse Modale	103
3.5	Conclusion	106
4	Dynamique non-linéaire	109
4.1	Cadre de l'étude	110
4.1.1	Liste des différents Cas d'étude	110
4.1.2	Choix du schéma d'intégration pour le calcul des vibrations transitoires	111
4.2	Signal transitoire	114
4.2.1	Cas 1, un mode instable	114
4.2.2	Cas 2, deux modes instables à régime établi périodique	118
4.2.3	Cas 3, deux modes instables à régime établi pseudo-périodique	123
4.2.4	Exception : $\mu=0.74$ et bassin d'attraction du second mode instable	129
4.3	Cycles limites et Contenus Fréquentiels	132
4.3.1	Cas 1, un mode instable	132
4.3.2	Cas 2, deux modes instables à régime établi périodique	132
4.3.3	Cas 3, deux modes instables à régime établi pseudo-périodique	133
4.4	Participations modales des modes instables	139
4.4.1	Cas 1	139
4.4.2	Cas 2	140
4.4.3	Cas 3	142
4.5	Conclusion	144
5	Rayonnement acoustique du système de frein présentant des vibrations de crissement	147
5.1	Modélisation acoustique associée au système vibrant	148
5.1.1	Equation d'onde et problème en milieu ouvert	148
5.1.2	Méthode des Eléments Finis de Frontière (BEM)	150
5.1.3	Calcul BEM à partir d'une vibration non-harmonique	153
5.2	Analyse de motifs : 2-D wavelet	156
5.2.1	Transformée de Fourier fenêtrée pour les signaux non-stationnaires	156
5.2.2	Analyse par wavelet et échelles d'observation logarithmiques	157
5.2.3	Extension au cas 2 dimensions de l'analyse par wavelets	160
5.2.4	Application à l'analyse de motif et critère de comparaison	161

5.3	Résultats acoustiques	163
5.3.1	Définition des surfaces d'observation	163
5.3.2	Décomposition et observation du signal en 3 phases	163
5.3.3	Analyse de convergence des motifs acoustiques	168
5.4	Conclusion	176
	Conclusion	177
	Liste des figures	181
	Liste des tableaux	185
	Bibliographie	187

Introduction

Contexte scientifique

Le sujet des vibrations induites par le frottement et en particulier le phénomène de crissement est étudié depuis maintenant plusieurs décennies. Les systèmes de frein en particulier sont sujets à ces vibrations qui se caractérisent par des émissions acoustiques pouvant atteindre 110 dB lors de l'application de la pression de freinage. Ce bruit est souvent composé d'un ensemble de raies spectrales dont les fréquences sont en général supérieures à $1kHz$. Il est perçu par les usagers comme un dysfonctionnement du système de frein et comme une gêne, bien que le crissement en lui-même n'altère pas les performances de freinage. Les normes européennes relatives aux niveaux de bruit admissible ainsi que la recherche du confort acoustique pour les constructeurs automobiles font du phénomène de crissement un domaine d'étude particulièrement actif.

L'origine de ces vibrations est la présence de surfaces de frottement au sein du système de frein. Lors du freinage, ces surfaces sont mises en contact et créent du frottement, ce qui génère un couple de freinage permettant de faire décélérer le véhicule concerné, et en émettant parfois un bruit de crissement. La nature des phénomènes physiques aux interfaces est très riche, ce qui fait de l'étude du crissement un objectif complexe. En effet, les interactions microscopiques aux interfaces de contact influent sur la dynamique macroscopique du système complet. Dans certaines conditions, les efforts de contact et de frottement entraînent une instabilité et un couplage de modes géométriques entre les directions normale et tangentielle, ce qui fait apparaître des oscillations auto-entretenues et du bruit de crissement.

L'étude expérimentale du crissement est une tâche complexe car il est difficile de maîtriser parfaitement tous les paramètres du système, en particulier de connaître la physique aux interfaces de frottement. Les relations fortement non-linéaires qui régissent les comportements du système sur les différentes interfaces de contact rendent les résultats expérimentaux compliqués à extrapoler d'un banc d'essais à un autre. Certains bancs d'essais ne s'intéressent qu'à une partie des paramètres contrôlables et permettent une compréhension simple mais tronquée des phénomènes mis en jeu. Les bancs d'essais correspondant à l'étude des systèmes réels donnent des résultats plus complets mais qui sont plus difficiles à analyser. Dans l'ensemble l'analyse expérimentale du crissement est longue et coûteuse à mettre en place, c'est pourquoi sa prédiction par des modèles numériques est également étudiée et préconisée dans le cadre d'un dimensionnement dans l'industrie.

La modélisation des systèmes de frein est d'une grande difficulté. Les phénomènes intervenant aux interfaces font intervenir plusieurs physiques, comme de la mécanique, de la thermique, de la tribologie ainsi que de la chimie. Dans le cadre d'une étude numérique il n'est pas possible de prendre en compte toutes ces interactions et il est nécessaire de faire des choix de modélisation. A l'origine, il était question de proposer de modèles minimaux comportant peu de degrés de liberté mais capables d'exhiber des phénomènes principaux relatifs au crissement et la prédiction des vibrations auto-entretenues. Avec l'arrivée de plus grandes puissances de calcul les modèles sont devenus plus complexes avec une modélisation de la géométrie par la méthode des Eléments Finis associée à des méthodes de réduction de modèle. Une bonne description des interfaces et des interactions qui y ont lieu est alors primordiale pour pouvoir

reproduire le crissement de façon efficace.

La prédiction des occurrences de crissement se fait généralement en deux étapes. La première est une analyse de stabilité. Cette dernière s'effectue autour d'un point d'équilibre glissant du système de frein. Les valeurs propres du système sont alors calculées au voisinage de ce point d'équilibre pour le système linéarisé. Elle sont alors complexes car la force de frottement rend les opérateurs non symétriques. Cette approche permet de discriminer les cas stables et instables du système. La seconde étape consiste en l'évaluation des évolutions des vibrations transitoires du système à partir de sa position d'équilibre instable ainsi qu'à l'estimation du régime stationnaire associé aux vibrations de crissement. L'estimation du champ acoustique rayonné, bien qu'il soit en pratique la principale perturbation ressentie du crissement, reste encore très peu abordée.

Objectifs des travaux de thèse et plan du manuscrit

Le premier chapitre est un état de l'art qui rappelle les principaux résultats sur les bruits émis par les systèmes de frein ainsi que les différentes approches utilisées pour modéliser les problèmes comportant du contact frottant, les méthodes de réduction, les schémas d'intégration temporelle et les approches d'estimation du champ acoustique. L'objectif de ces travaux de thèse est de proposer une méthodologie d'étude complète du crissement. Afin de mener cette analyse, nous avons choisi une stratégie scientifique basée sur les résultats expérimentaux afin de proposer un modèle numérique cohérent avec les conclusions des observations issues des manipulations.

Pour cela, le deuxième chapitre se concentre sur un ensemble d'études sur un banc d'essais spécialement dédié au crissement qui est proposé et analysé. Le banc d'essai dénommé Friction-Induced Vibration and Noise at Ecole Centrale de Lyon (FIVE@ECL) y est d'abord décrit avec ses moyens d'acquisition. Un essai représentatif est décrit ce qui permet de caractériser le crissement de façon expérimentale. Puis une étude de reproductibilité dans une configuration fixe est effectuée ainsi que des études sur des paramètres contrôlables du banc afin d'en tirer des conclusions sur les dépendances du phénomène de crissement. A la suite de ces campagnes d'essais un ensemble d'hypothèses de modélisation sont exprimées, elles serviront alors de guide pour la construction d'un modèle numérique.

Dans le troisième chapitre, un modèle de frein simplifié est alors proposé en accord avec les hypothèses expérimentales. Une approche préconisant la notion de couplage de mode est privilégiée et la description des interfaces de contact est faite via des lois de contact et de frottement macroscopiques. Nous introduisons ensuite une méthode de double synthèse modale permettant de réduire le système numérique construit par Eléments Finis dans le but d'effectuer des simulations temporelles en temps raisonnable. L'analyse de stabilité est alors menée dans différentes configurations. L'objectif est d'observer l'efficacité des méthodes de réduction pour prédire le comportement du système de référence et plus particulièrement la bonne estimation des valeurs propres et des déformées propres, afin de détecter les bifurcations amenant des instabilités de crissement.

Puis dans le quatrième chapitre, plusieurs cas d'étude du système instable sont identifiés à la suite de l'analyse de stabilité : en particulier un cas mono-instable et deux cas bi-instables sont analysés en détail. L'analyse temporelle est menée avec un schéma d'intégration adapté afin de prédire les niveaux de vibrations engendrés par les instabilités. Là encore les performances des deux étapes de réduction sont observées pour la prédiction dans un premier temps des cycles limités associés au régime stationnaire, puis pour l'évolution transitoire et la participation des modes instables dans la réponse des modèles réduits.

Enfin dans le cinquième chapitre une estimation du champ acoustique émis par le système vibrant est proposée. Ici il s'agit des vibrations acoustiques émises par un système solide vibrant associées au problème extérieur et une approche par Eléments de Frontière est utilisée. Encore une fois l'efficacité des deux étapes de synthèse de modèle sont évaluées pour la prédiction

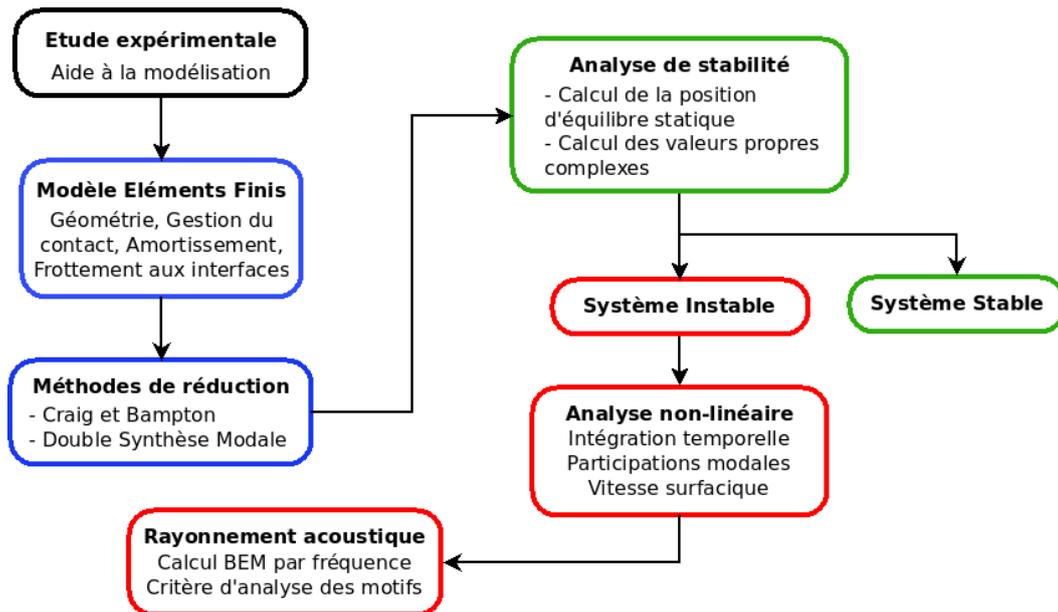


FIGURE 1 – Stratégie d’étude du problème de crissement numérique à partir des hypothèses expérimentales, de l’analyse de stabilité à l’estimation du champ acoustique rayonné

des champs acoustiques émis sur plusieurs surfaces d’observation. Une méthode d’analyse de motifs basée sur une décomposition des signaux par des wavelet en 2D est appliquée pour estimer la convergence des champs acoustiques en fonction de la taille des bases de réduction. La dernière partie fournit une conclusion sur l’ensemble des développements expérimentaux et numériques exposés dans ces travaux de thèse. Des perspectives sont finalement proposées pour de futurs travaux sur le sujet.

La stratégie complète de construction du modèle numérique ainsi que de l’étude de simulation est reprise dans le schéma de la Figure 1.

A noter que dans le cadre de ces travaux de thèse l’objectif n’est pas de faire une corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques. En effet le modèle numérique est trop simplifié pour prétendre à reproduire précisément les signaux mesurés sur le banc d’essais et la chronologie réelle du déroulement de la thèse n’a pas permis d’atteindre un tel objectif. L’idée principale est plutôt d’utiliser les essais comme guide pour proposer un modèle simple capable de reproduire les principales observations expérimentales, comme les régimes transitoires, l’allure des contenus fréquentiels ainsi que des niveaux de vibrations cohérents.

Chapitre 1

Etat de l'art, systèmes de freinage et vibrations auto-entretenu

Sommaire

1.1 Vibrations engendrées par le frottement	20
1.1.1 Systèmes de freins et vibrations	21
1.1.2 Caractérisations expérimentales du crissement	23
1.2 Modélisation du problème de crissement	26
1.2.1 Formulations du problème mécanique	26
1.2.2 Problème du contact entre deux solides	28
1.3 Mécanismes d'instabilité	31
1.3.1 Coefficients de frottement statique et dynamique	31
1.3.2 Variations du coefficient de frottement	32
1.3.3 Sprag-slip	33
1.3.4 Couplage de modes	34
1.4 Méthodes de réduction	36
1.4.1 Méthodes de Ritz	36
1.4.2 Méthodes de réduction modale avec sous-structuration	36
1.4.3 Autres méthodes de réduction	38
1.5 Analyse de stabilité	39
1.6 Méthodes d'approximation des systèmes non-linéaires transitoires	40
1.6.1 Calcul transitoire, schémas d'intégration	40
1.6.2 Calcul du régime stationnaire	46
1.7 Acoustique des systèmes vibrants	48
1.7.1 Problème interne	48
1.7.2 Problème externe	49
1.8 Conclusion	50

Introduction

Nous commençons la présentation de ces travaux de thèse par un résumé de l'état de l'art en matière de mécanique des systèmes vibrants, en particulier pour les systèmes sujets à des vibrations induites par le frottement.

Premièrement nous présentons les différentes architectures de systèmes de freins qui existent en fonction de leurs domaines d'utilisation ainsi que de la classification des différentes nuisances sonores qui peuvent être produites par de tels systèmes. Une partie des études expérimentales menées sur le sujet du crissement de frein d'un point de vue de la dynamique globale ou de la tribologie ainsi que leurs principaux résultats sont rappelés.

Dans un second temps, la modélisation de ce type de problème est présentée. Nous commençons par un rappel des formulations classiquement utilisées en mécanique des milieux continus ainsi que de la méthode des Eléments Finis qui est la méthode la plus couramment utilisée en mécanique pour décrire le comportement d'objets complexes. Nous rappelons ensuite les différentes lois de contact et de frottement utilisées pour modéliser les interactions entre deux solides, comme c'est le cas aux interfaces de frottement d'un système de frein. Les mécanismes pouvant engendrer des vibrations auto-entretenuës sont alors rappelés ainsi que les résultats issus de travaux antérieurs.

Puis nous présentons quelques méthodes de réduction de modèle qui sont habituellement utilisées afin de diminuer la taille des systèmes discrets issus d'une modélisation Eléments Finis. Nous présentons ensuite une méthode d'analyse de la stabilité d'un système basée sur l'étude de ses valeurs propres complexes et nous définissons ainsi la notion de bifurcation. Différentes méthodes de calcul des vibrations transitoires sont ensuite rappelées, telles que des schémas d'intégration numérique ou des algorithmes permettant d'accéder à la réponse en régime établi directement. Finalement un rappel des approches utilisées en acoustique concernant les systèmes vibrants est donné.

1.1 Vibrations engendrées par le frottement

Les frottements entre deux solides peuvent donner lieu à une très grande variété de sons. Les vibrations engendrées par ce frottement se transmettent à l'air ambiant et se propagent. Ces émissions acoustiques peuvent être recherchées dans le cas d'instruments de musique ou du bruit émis par certains insectes. Mais dans d'autres situations ces émissions sont nuisibles, c'est le cas du crissement de frein. Le coût financier associé aux bruits de freinage en tout genre a été estimé à plus d'un milliard de dollars par an rien qu'en Amérique du Nord [6]. En ce qui concerne le milieu automobile, le crissement de frein engendre des retours en usine qui coûtent très cher aux constructeurs. Dans le domaine ferroviaire, c'est plutôt l'aspect de santé publique qui est concerné, avec les riverains des gares qui peuvent être très régulièrement dérangés par le freinage de TGV. Dans le domaine aéronautique les freins d'avions sont également sujets à des vibrations lors du freinage mais l'impact acoustique est moins important devant le bruit produit par l'avion, le problème se situe dans la résistance mécanique des parties du frein soumises à des vibrations de forte amplitude.

Nous présentons dans une première partie les différentes architectures de systèmes de freins que l'on peut retrouver ainsi que les différents régimes de vibrations produites lors de l'apparition d'instabilités de freinage.

Ensuite nous faisons un résumé de l'état de l'art concernant les études déjà menées sur des systèmes expérimentaux cherchant à produire des vibrations en utilisant du frottement. Deux approches complémentaires sont usuellement utilisées pour leur analyse, celle de la dynamique des structures et celle de la tribologie qui est la science de l'étude microscopique des interfaces et de la lubrification.

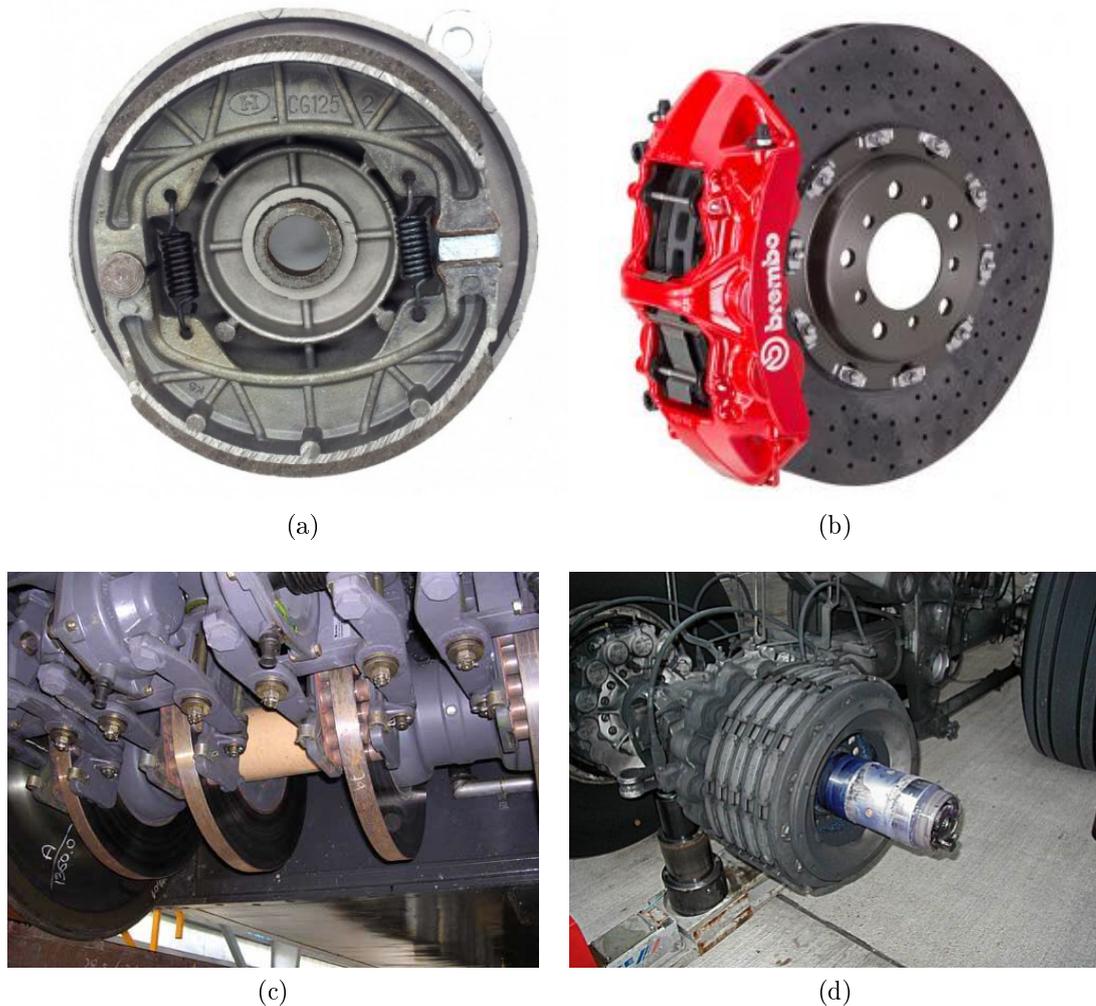


FIGURE 1.1 – Représentation de différents systèmes de freins, (a) frein tambour, (b) frein à disque automobile, (c) frein de TGV et (d) frein aéronautique

1.1.1 Systèmes de freins et vibrations

L'objectif d'un système de frein est de dissiper l'énergie cinétique du véhicule qu'il équipe afin de le ralentir. Dans le cas de freins utilisant le frottement comme mécanisme de dissipation, cette énergie est convertie en chaleur au niveau des interfaces de contact, qui est ensuite évacuée par ventilation. Plusieurs systèmes de freins utilisent ce principe mais leurs architectures peuvent être différentes.

Architectures de différents systèmes de freinage

Les premiers systèmes de freins qui équipaient les automobiles étaient des systèmes à tambour, illustrés à la Figure 1.1a. Dans ce mécanisme, le tambour est solidaire de la roue. Des patins sont situés à l'intérieur du tambour et sont solidaires au châssis. En temps normal un ou plusieurs ressorts de rappel empêchent ces patins de rentrer en contact avec la couronne intérieure du tambour. Lorsque la pression de freinage est appliquée les patins sont écartés et pressés contre le tambour, produisant un frottement et un couple de freinage. Ce système de frein équipait toutes les automobiles jusque dans les années 1950. Les performances de ce système sont cependant moyennes et il arrivait fréquemment que le frein se bloque lors de freinages importants, ce qui provoquait un glissement de la roue concernée, voire une perte

de contrôle du véhicule.

A partir des années 1960 le système de frein à disque représenté à la Figure 1.1b est apparu, dans un premier temps sur les véhicules haut de gamme, puis il s'est peu à peu répandu jusqu'à équiper aujourd'hui quasiment tous les véhicules sur les roues motrices. Ses performances sont bien meilleures et il n'est pas sujet au blocage qui handicape les freins à tambour, notamment grâce au système ABS. Deux types de systèmes de frein à disque existent, avec étrier fixe ou flottant. Dans un système à étrier fixe, l'étrier est encastré par rapport au châssis et le disque est solidaire de la roue. Lors de l'application de la pression de freinage, des pistons contenus dans l'étrier et situés de part et d'autre du disque se déplacent et viennent pincer le disque par l'intermédiaire de plaquettes en créant du frottement et un couple de freinage. Pour un système à étrier flottant, l'étrier peut se déplacer perpendiculairement à la surface du disque grâce à une liaison glissière par rapport au châssis. Lors de l'application de la pression un piston déplace l'une des plaquettes, forçant l'étrier à venir en butée de l'autre côté du disque. Le principe de génération du couple de freinage est alors le même que pour un système à étrier fixe mais avec un mécanisme plus simple et plus léger. Les systèmes à étrier fixes sont plutôt utilisés sur les véhicules de course ou haut de gamme car ils permettent des performances supérieures. Les disques sont généralement fabriqués en acier ou plus rarement en carbone ou céramique pour des utilisations intenses. Les plaquettes sont fabriquées par frittage et sont faites d'un matériau abrasable, elles sont le consommable et doivent être changées régulièrement.

Les TGV sont également équipés de freins à disque mais le système est un peu différent, comme illustré à la Figure 1.1c. Les boggies sont équipés sur leurs essieux de quatre disques en acier. Un système de timonerie permet d'actionner lors du freinage des plaquettes munies de plots. Le contact se fait donc aux interfaces disques/plots. La pression de freinage importante sur une zone de contact plus étendue permet la dissipation de l'énergie cinétique importante de plusieurs rames de TGV.

Les freins aéronautiques sont quant à eux constitués d'un empilement de disques en carbone alternant rotor et stator formant le puits de chaleur comme nous pouvons le voir à la Figure 1.1d. Cette architecture permet d'avoir une grande surface de frottement et de pouvoir dissiper rapidement beaucoup plus d'énergie que sur un système classique à plaquettes. Lors de la mise en pression, une couronne hydraulique distribue la pression sur un côté du puits de chaleur et vient presser sur l'empilement de disques en créant un couple de freinage dû aux frottements sur toutes les interfaces rotor/stator.

Différents régimes de vibration et de bruits de freinage

L'utilisation de freins à disque a permis une avancée dans les performances des systèmes de freinage grâce à l'arrivée de nouveaux matériaux capables de résister aux contraintes mécaniques et thermiques atteintes notamment sur le disque et l'étrier. L'utilisation de la force de frottement sec aux interfaces de frottement peut dans certains cas entraîner une instabilité et l'apparition de vibrations du système complet qui émet alors des vibrations acoustiques. Une classification des différents types de bruits associés a déjà pu être établie par Akay [6], Kinkaid [87] ou Elmaian [43] et sa base principalement sur la fréquence et le timbre des bruits perçus. La Figure 1.2 classe les différents bruits émis par des systèmes de freins en fonction de leur intensité et de leur gamme fréquentielle. Il semble exister un mécanisme particulier à l'origine de chaque type de bruit émis par un système de frein. Nous présentons ici les principaux bruits associés au freinage ainsi que la cause identifiée pour ces vibrations.

• Judder (trépidations)

Les vibrations de judder se caractérisent par des fréquences de l'ordre de 10 à 100 Hz et sont synchrones avec la vitesse de rotation du disque [76]. Elles sont causées par une variation de la force de contact aux interfaces, qui peut avoir plusieurs origines, comme une variation de l'épaisseur du disque, de la pression de freinage ou de la distribution de contraintes, ce qui

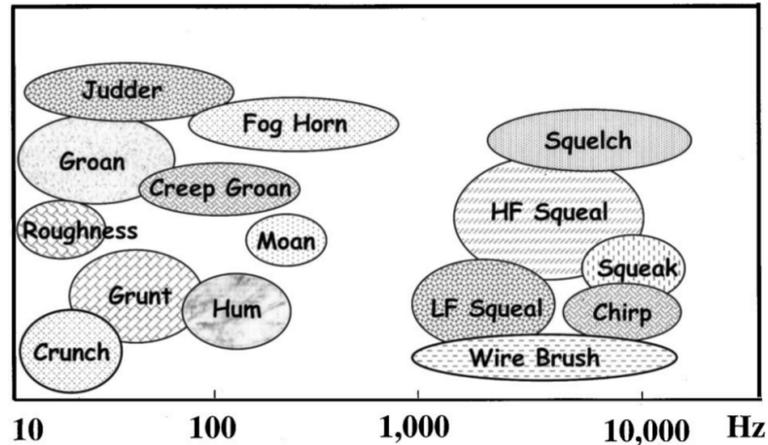


FIGURE 1.2 – Classification des bruits émis par des systèmes de frein, tiré de [6]

induit des oscillations forcées sur les plaquettes et l'étrier. Ce phénomène peut s'amplifier à cause d'une instabilité thermique, aussi appelée phénomène de *hot spot* [2], où les parties en contact chauffent et se dilatent localement en créant des efforts de contact toujours plus importants à ces endroits. Les niveaux acoustiques associés au judder sont relativement faibles, la principale nuisance est le retour de vibrations dans le volant.

- **Groan (broutement)**

Les vibrations de broutement sont caractérisées par des fréquences inférieures à 100 Hz. Deux mécanismes ont été identifiés comme potentielles causes de ces oscillations auto-entretenues. Le premier est le phénomène de *stick/slip* [87], qui intervient à faible vitesse de rotation et qui se caractérise par une alternance de phases de glissement et d'adhérence au niveau des interfaces de contact entre les plaquettes et le disque. Le second provient de la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement qui peut également causer une instabilité [68].

- **Hum (bourdonnement) et Moan (ronflement)**

Ces deux types de nuisances sonores ont des niveaux élevés et recouvrent une plage fréquentielle intermédiaire allant de 100 à 500 Hz. L'origine de ces vibrations est un couplage entre les déplacements de corps rigides dans les directions normale et tangentielle de l'étrier. Cette instabilité de type géométrique donne lieu à un phénomène de *sprag/slip* [158] et est due à un défaut de conformité des interfaces de contact, ce qui produit un mouvement de *whirl* qui peut également se retrouver sur les freins aéronautiques.

- **Squeal (crissement)**

Les vibrations de crissement se caractérisent par un contenu fréquentiel de raies à hautes fréquences, généralement supérieures à 1000 Hz. Le mécanisme à l'origine de ces oscillations est celui du couplage de modes (*mode lock-in*) [6] et fait intervenir un couple de modes de vibration dont les déformées sont proches. Bien que l'intensité acoustique produite par ce phénomène soit importante, jusqu'à 120 dB, il a pu être démontré qu'il ne dégrade pas les performances de freinage.

1.1.2 Caractérisations expérimentales du crissement

Le phénomène de vibrations auto-entretenues qui peut apparaître dans les systèmes de freins est étudié depuis plusieurs décennies. Un grand nombre de montages expérimentaux ont été étudiés afin de caractériser ces vibrations, d'un point de vue mécanique mais aussi sensoriel [75, 137]. Nous présentons quelques résultats importants issus de ces travaux ainsi que les

conclusions associées, en faisant la distinction sur l'approche employée, dans un premier temps nous nous concentrons sur les analyses faites du point de vue de la dynamique de la structure globale, puis dans un second temps du point de vue de la tribologie.

Etudes vibratoires

L'étude des vibrations produites par des systèmes frottants est ancienne ainsi que les approches utilisées pour essayer d'isoler le mécanisme à leur origine. L'influence de plusieurs paramètres est souvent étudiée. Un grand nombre de résumés de ces conclusions expérimentales [6, 73, 74, 87, 158] permettent de rendre compte de l'évolution de la compréhension de ce phénomène. Les paramètres mesurés lors de ces essais sont le plus souvent des accélérations, à l'aide d'accéléromètres ou de vibromètres laser, des contraintes à l'aide de jauges de déformation, des positions par des capteurs de proximité, des températures, taux d'humidité ou encore des mesures de champ de pression par des microphones.

Les premières études par Mills [113] à la fin des années 1930 ont constitué les premiers essais sur le crissement de frein et la première conclusion était que le phénomène était dû à la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement. D'autres études dans les années 1960 par Fosberry et Holubecki [49] ont abouti aux mêmes conclusions. Plus récemment Ouyang [130] a conclu que cette propriété peut élargir les zones d'instabilités de systèmes déjà instables.

Dans les années 1960, Spurr [158] puis Jarvis et Mills [78] ont proposé un nouveau mécanisme appelé *sprag/slip*, "arc-boutement/glisement" pour expliquer l'apparition de ces vibrations auto-entretenues à partir d'un montage *beam-on-disc* "poutre/disque" où les vibrations sont causées par l'alternance de phases d'adhérence où la poutre de section carrée ou circulaire plie en emmagasinant de l'énergie puis de phases de glissement où cette énergie élastique est libérée.

Plus récemment des systèmes *pin-on-disc* "pion/disque" proposés par Earles [41, 42], Abbasi [2] ou Butlin [22, 23] ont également été employés pour étudier l'influence de plusieurs paramètres comme la force normale, la température ou encore la vitesse de glissement sur les occurrences de crissement. L'utilisation d'un pion permet de mieux maîtriser la zone de contact et de faciliter la modélisation macroscopique du banc d'essai.

D'autres montages à mi-chemin entre les bancs purement expérimentaux de type *beam-on-disc* et les systèmes industriels ont également été introduits afin de proposer un comportement réaliste tout en permettant une interprétation assez simple des phénomènes physiques mis en jeu, et optimisés pour le placement de divers capteurs. Akay [7] présente deux de ces bancs. Le premier, appelé Laboratory Brake et proposé par Giannini [54–56], est une amélioration du système *beam-on-disc* où sont utilisées des plaquettes en contact avec un disque tournant. Il permet d'obtenir un crissement dont l'origine est un couplage de mode. Le second banc appelé Tribobrake proposé par Massi [24, 111, 112] permet à la fois d'effectuer des essais dynamiques et tribologiques. Il est lui aussi composé d'un morceau de plaquette mis en contact avec un disque tournant par l'intermédiaire d'un support élastique lesté.

L'étude des déformées du système a été proposée par Felske [46] à la fin des années 1970 à l'aide de l'interférométrie acoustique. Un grille de microphones est utilisée pour mesurer le champ acoustique en un ensemble régulier de points et des techniques d'holographie sont employées pour reconstruire la déformée du système vibrant, par une figure faite d'un ensemble de franges d'interférences comme illustré à la Figure 1.3. Cette technique a été par la suite employée également par Fieldhouse et Newcomb [47] en utilisant l'interférométrie laser. Il a pu être observé que le crissement s'accompagne généralement de vibrations de flexion des plaquettes et de vibrations hors plan du disque associés à des modes à diamètres nodaux.

Des essais ont également été menés sur des systèmes industriels avec des bancs de test dédiés. Oberst [122, 123], Fazio [44], Renaud [139] et Renault [140] ont mené des essais sur des systèmes de frein automobile en faisant varier la vitesse de rotation, la pression de freinage ou encore l'humidité et la température ambiante. Ils ont pu mettre en évidence, en fonction de ces



FIGURE 1.3 – Figure de franges d’interférences illustrant la déformée d’un système de frein à disque automobile crissant

paramètres de fonctionnement, des zones instables pour lesquelles le crissement est certain de se produire. Le spectre des vibrations est parfois formé d’un ensemble d’harmoniques associées à une fondamentale ou parfois d’un ensemble plus complexe de raies fréquentielles. Ils ont également observé les déformées expérimentales associées aux vibrations auto-entretenues formées de modes de disque à diamètres nodaux et de modes d’étrier. L’ajout d’amortissement est également étudié par l’intermédiaire de shims qui sont des amortisseurs viscoélastiques collés au dos des plaquettes.

Un ensemble de campagnes d’essais a également été mené sur des systèmes ferroviaires, particulièrement sur les TGV de la SNCF. Lorang [97, 99] puis Loyer [101, 102] ont mesuré sur des voitures et sur banc d’essai les déformées vibratoires ainsi que les champs acoustiques émis lors d’épisodes de crissement.

Des travaux similaires ont aussi été réalisés sur des systèmes dédiés à l’aéronautique par Sinou [145, 148] et ont pu mettre en évidence des modes de whirl associés aux vibrations de crissement.

Les conclusions générales qui peuvent être tirées de cet ensemble d’essais est que la dynamique de crissement peut être caractérisée expérimentalement par un nombre fini de séquences de freinage, d’un point de vue vibratoire et fréquentiel. C’est un phénomène qui, si les paramètres d’essais sont bien maîtrisés, est reproductible, ce qui indique que ce phénomène doit être de nature déterministe. Il a également pu être montré que l’amortissement joue un rôle complexe sur l’apparition des vibrations auto-entretenues, et qu’il peut déstabiliser un système avec Cantone [24] qui met en évidence expérimentalement le paradoxe de l’amortissement déstabilisant. L’influence des paramètres sur les occurrences de crissement est aussi mal comprise, en dehors de l’impact du coefficient de frottement. L’augmentation du coefficient de frottement a tendance expérimentalement à favoriser l’apparition du crissement. La mesure des fréquences associées au crissement montre qu’elles ne correspondent pas aux fréquences propres d’une sous-structure en particulier mais que certaines sont proches des fréquences propres du système couplé à l’arrêt avec l’application de la pression de freinage.

Aspects tribologiques

Beaucoup d’études se concentrent également sur la description fine de l’interface de frottement en adoptant une approche tribologique. Ici la description du frottement par un coefficient de frottement apparent global ne suffit plus. Le frottement est ici envisagé comme la résultante des interactions microscopiques entre les rugosités au niveau des deux surfaces de contact.

L'observation de cet état de contact et des pics de rugosité permet de décrire la surface d'un point de vue microscopique [16, 39, 66, 105, 106, 111]. Le coefficient de frottement global est donc directement relié à la distribution de ces aspérités de contact entre les deux surfaces en contact. L'adhérence est l'état pour lesquelles les forces de résistance dues aux interactions des rugosités dépassent celles qui tendent à mettre les surfaces en mouvement relatif. Il y a glissement lorsque ces forces de résistance ne sont pas assez intenses pour retenir ce mouvement relatif. La surface de contact apparente change donc en permanence lors de la phase de glissement. La dissipation d'énergie est donc assurée par la transmission de vibrations d'une surface à l'autre, ainsi qu'à la plastification ou l'arrachement des pics de rugosité.

Cet état de surface ainsi que la formation d'un troisième corps, aussi appelé plateau, formé de pics de rugosité arrachées et de particules extérieures [4, 58, 86, 89, 92, 119] en circulation conditionne donc la répartition des contraintes locales et modifie la surface de contact apparente. Le champ de température est également mesuré [53, 62, 85] et l'on peut observer la création dans certains cas de *hot spot* [133] qui peuvent entraîner le phénomène d'instabilités thermo-élastiques (TEI) [2], voire à des fissurations dues à la fatigue thermique [161]. L'effet de la texturation de l'état de surface a montré qu'il influe grandement sur les occurrences de crissement [160].

C'est la résultante de tous ces efforts qui dicte donc macroscopiquement les efforts normaux et tangentiels de frottement. A partir de ces observation certains auteurs proposent alors des lois de contact et de frottement empiriques [90, 134, 136]. Ces études permettent une approche du phénomène microscopique sous plusieurs aspects afin d'expliquer tous les phénomènes observés à l'échelle macroscopique [108].

1.2 Modélisation du problème de crissement

L'objectif de cette partie est d'apporter le cadre théorique nécessaire à la modélisation du problème mécanique du frein soumis à des oscillations auto-entretenues et de décrire les outils que nous allons utiliser dans la suite de cette étude. Nous commençons par rappeler les formulations de la mécanique des milieux continus suivant l'approche linéaire en petits déplacements ainsi que l'application de la méthode des Eléments Finis.

Puis nous détaillons les différentes lois habituellement utilisées pour traiter des problèmes de contact et frottement. Il s'agit ici de présenter les lois classiques susceptibles de s'appliquer aux interfaces de frottement sur un modèle de frein. Dans certains cas et suivant le type de lois utilisées il est possible qu'apparaissent des oscillations auto-entretenues. Nous présentons les mécanismes d'un point de vue mathématique qui peuvent être à l'origine des ces différentes instabilités.

1.2.1 Formulations du problème mécanique

Formulation continue - Rappels de mécanique des milieux continus

Nous nous intéressons ici à un seul solide élastique de volume \mathcal{V} délimité par une surface extérieure Σ , tel qu'illustré à la Figure 1.4. Le champ de déplacement est noté \mathbf{u} et est défini en tout point du volume solide. La surface du solide Σ se partage en deux ensemble disjoints complémentaires Σ_u et Σ_F définis comme tels :

- Σ_u est la portion de surface du solide sur laquelle les déplacements \mathbf{u}_s sont imposés, ce sont les conditions cinématiques,
- Σ_F est la portion de surface du solide sur laquelle les efforts \mathbf{F}_s sont imposés, ce sont les conditions statiques.

L'équation locale du principe fondamental de la dynamique appliquée au solide élastique et ses conditions aux limites est la suivante, avec \mathbf{n} la normale sortante sur Σ , \mathbf{f}_v les efforts

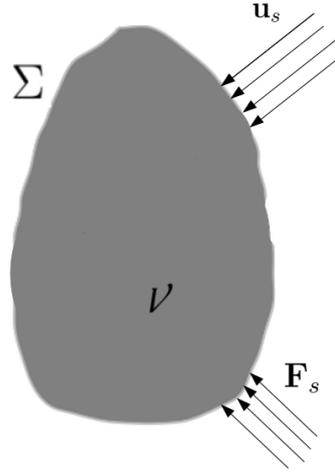


FIGURE 1.4 – Problème mécanique élastique

volumiques appliqués au solide, ρ la masse volumique et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy et où le point désigne la dérivée temporelle :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{dans } \mathcal{V} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_s & \text{sur } \Sigma_F \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_s & \text{sur } \Sigma_u \end{cases} \quad (1.1)$$

Nous utilisons la loi de Hooke 1.2 reliant les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ aux contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ via le tenseur \mathcal{A} . La loi de Hooke utilise les deux coefficients de Lamé λ et μ qui peuvent s'exprimer uniquement en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν du matériau. Ils permettent l'écriture de la loi de Hooke pour un matériau homogène et isotrope sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.2)$$

Dans le cas linéaire général, les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sont liées aux déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ via l'expression 1.3 où les tenseurs \mathcal{A} et \mathcal{B} expriment la dépendance de $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et des vitesses de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Le tenseur \mathcal{A} traduit les effets élastiques alors que le tenseur \mathcal{B} modélise les dissipations visqueuses.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{B}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.3)$$

L'équation de compatibilité 1.4 relie, dans l'approximation des petites déformations, le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ au champ de déplacements \mathbf{u} de façon linéaire :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \quad (1.4)$$

Il est possible de réécrire le problème sous une forme variationnelle, ou forme faible en appliquant le principe des travaux virtuels. Ici, la solution du problème mécanique sous cette forme variationnelle est le champ de déplacement \mathbf{u} solution de l'Equation intégrale 1.5 pour tout champ \mathbf{u}^* vérifiant les conditions cinématiques.

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{u}^* \text{ tel que } \mathbf{u}^*|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}_s, \\ &\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u}^* \cdot \ddot{\mathbf{u}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\sigma} d\mathcal{V} = \int_{\Sigma_F} \mathbf{u}^* \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma_F + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_v d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Les formulations locale ou faible sont continues et les solutions de ces équations peuvent se décomposer sur la base des modes propres de la structure. Ici cet ensemble de modes propres est infini et dénombrable, ils peuvent être ordonnés selon leurs fréquences propres. L'objectif des méthodes d'approximation telles que la méthode des Eléments Finis est d'estimer les premiers modes propres de la structure continue par une projection sur un nombre fini de fonctions de forme.

Méthode des Eléments Finis

Bien qu'il soit possible d'écrire les équations linéaires de la dynamique d'un système solide élastique, il n'est pas possible dans la grande majorité des cas d'en exhiber une solution. La formulation faible 1.5 est particulièrement bien adaptée à l'application de la méthode des Eléments Finis qui permet d'obtenir une approximation de la solution de l'équation du mouvement par une discrétisation spatiale du domaine \mathcal{V} en un maillage par éléments géométriques simples de type tétraèdres, hexaèdres, etc. De nombreux ouvrages [164] détaillent la construction de tels modèles et apportent la preuve mathématique de leur convergence vers la solution du problème continu lorsque le maillage est suffisamment fin.

Le découpage du domaine solide, le calcul des intégrales issues de 1.5 sur chaque élément puis leur assemblage nous permet d'aboutir à une équation matricielle 1.6 où le vecteur inconnue \mathbf{X} contient l'ensemble des degrés de liberté, qui dépendent du type d'éléments choisis.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{ext} \quad (1.6)$$

Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} désignent respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur. Elles sont intrinsèques au solide et ne dépendent que de sa géométrie, des propriétés du matériau et des conditions cinématiques. Le vecteur du second membre \mathbf{F}_{ext} est le vecteur des efforts extérieurs sur le solide. Les matrices de masse et de raideur \mathbf{M} et \mathbf{K} permettent alors de déterminer les modes propres du solide sans amortissement par la résolution du problème aux valeurs propres $(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{X} = 0$.

Ici le problème matriciel est de taille finie. Le nombre de modes propres approximés est donc égal à la taille du problème et correspond au nombre de degrés de liberté total considéré dans le modèle.

1.2.2 Problème du contact entre deux solides

La modélisation du contact frottant reste encore aujourd'hui l'objet de recherches actives. Suivant la finesse de la description des surfaces en contact ils existe des modèles pouvant décrire les contraintes liées à l'effort de contact normal et des lois décrivant les efforts tangentiels de frottement. Ces approches proviennent de descriptions microscopiques et mésoscopiques pour des études tribologiques et plutôt macroscopiques quand il s'agit de dynamique des structures. Nous ne nous intéresserons ici qu'à la seconde approche.

Lois de contact

De nombreuses formulations existent pour traiter des problèmes de contact dans toutes sortes de situations. Des approches spécifiques sont parfois développées pour des contacts particuliers de type roue/route [162] ou même roue/rail pour le ferroviaire [82, 135, 136]. Dans l'ensemble ce sont les expressions dans des situations plus ou moins complexes de deux grands types de modélisation : le contact unilatéral et le contact régularisé.

La modélisation de contact unilatéral proposé par Signorini en 1993 assure que les deux surfaces en contact ne s'interpénètrent pas et que les deux solides en contact n'exercent entre eux qu'une force répulsive qui ne travaille pas. En notant g l'écart local entre les interfaces de

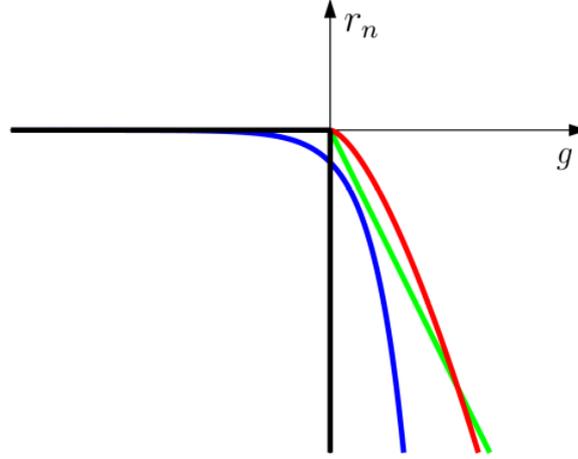


FIGURE 1.5 – Lois de contact, (noir) Signorini, (rouge) Hertz, (vert) linéaire, (bleu) exponentielle

contact et r_n la réaction normale, le contact de Signorini se traduit par l'ensemble d'inégalités suivantes :

$$\begin{cases} g \leq 0 \\ r_n \leq 0 \\ g \cdot r_n = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Cette loi de contact est non-univoque en effort-déplacement et possède un point anguleux en $(0; 0)$ où elle n'est pas différentiable. Cette propriété rend complexe l'utilisation d'algorithmes utilisant une estimation des gradients d'effort. La Figure 1.5 donne une représentation de cette loi dans l'espace g/r_n .

Une reformulation sous forme de projection peut quelques fois être employée suivant l'expression 1.8, pour une implémentation utilisant des méthodes à Lagrangien. Ici $\mathbf{proj}_{\mathbb{R}^+}$ est le projecteur sur les réels positifs. Lors de l'étude d'un problème dynamique, le problème de la prise de contact entre deux surfaces peut se traiter à l'aide d'une loi de Signorini-Moreau qui permet un choc inélastique sans phénomène de rebond numérique. La vitesse est alors discontinue et l'accélération n'est plus définie, ce qui impose un traitement mathématique particulier.

$$r_n = \mathbf{proj}_{\mathbb{R}^+}(r_n - \rho_n g) \quad \forall \rho_n > 0 \quad (1.8)$$

Les lois de contact régularisées forment un ensemble de relations permettant d'approximer le contact localement en s'affranchissant des difficultés inhérentes au contact de Signorini. Elles autorisent ainsi une interpénétration contrôlée des solides en contact. L'une des premières approches pour traiter le problème de contact régularisé a été proposée par Hertz qui a donné la solution analytique de la répartition de la contrainte au problème de deux ellipsoïdes en contact. Il a pu déterminer que la zone de contact forme une ellipse dépendant des rayons de courbure des solides au contact et que la relation liant l'effort normal au déplacement relatif suit une loi puissance du type $r_n \propto g^{\frac{3}{2}}$.

Plus généralement, les lois de contact généralisées cherchent à régulariser la loi de contact unilatérale de Signorini mais en donnant une relation bi-univoque entre l'effort normal et le rapprochement relatif. Nous pouvons citer parmi les plus simples les lois de type linéaire ou exponentielle. Un objectif supplémentaire peut être d'utiliser une loi partout différentiable, ce qui permet d'utiliser les algorithmes de résolution à gradient de type Newton-Raphson.

La loi linéaire du type $\forall g > 0, r_n = kg$ avec $k > 0$ permet de donner une relation simple entre l'effort de contact et le rapprochement relatif quand le contact a lieu. La valeur de la raideur de contact k doit être fixée avec précautions, une faible valeur permet une interpénétration trop importante et non réaliste alors qu'une valeur trop élevée peut entraîner un mauvais conditionnement des équations. De plus, ce type de loi présente toujours un point non régulier à l'origine.

La loi exponentielle $\forall g, r_n = k_1 e^{k_2 g}$ permet de mieux régulariser la loi de Signorini mais elle n'est pas causale car il existe des efforts de contact pour toute valeur de rapprochement relatif. Elle est en revanche différentiable partout.

Prise en compte du frottement

Le prise en compte du frottement est essentielle dans un grand nombre d'applications car il est à la source de pertes d'énergies et d'usure d'un grand nombre de systèmes mécaniques. C'est une force non conservative qui s'oppose toujours au mouvement. Nous nous intéressons ici en particulier au frottement sec. Le modèle le plus courant pour décrire le frottement sec est celui de Coulomb, qui exprime la réaction tangentielle \mathbf{r}_t en fonction de la vitesse de glissement relative \mathbf{v}_g des deux surfaces selon l'ensemble de relations décrites à l'Equation 1.9. Ici μ est le coefficient de frottement.

$$\|\mathbf{r}_t\| \leq -\mu r_n \Leftrightarrow \begin{cases} \|\mathbf{r}_t\| < -\mu r_n & \text{adhérence} \\ \|\mathbf{r}_t\| = -\mu r_n, \exists \rho_t > 0, \mathbf{v}_g = -\rho_t \mathbf{r}_t & \text{glissement} \end{cases} \quad (1.9)$$

La loi de Coulomb n'est pas régulière et non-univoque. Lorsque la résultante des efforts de contact se situe strictement à l'intérieur du cône de frottement $\mathcal{C}_{\mu r_n}$ défini par l'ouverture angulaire $\phi_c = \arctan(\mu)$ les surfaces en contact sont en situation d'adhérence. Lorsque la résultante est tangente au cône le système est en glissement, la réaction de frottement est proportionnelle à la réaction normale selon le facteur μ et elle est dirigée selon la vitesse de glissement mais de sens opposé.

Généralement le coefficient de frottement μ est considéré comme constant. Cependant il est possible de considérer que ce coefficient évolue en fonction de plusieurs paramètres tels que la vitesse de glissement ou la température du contact. Il existe également une version de la loi de Coulomb où nous pouvons distinguer un coefficient statique μ_s et un coefficient dynamique μ_d , avec $\mu_s > \mu_d$. Cette distinction traduit le fait qu'il est plus difficile de mettre deux solides en contact à partir d'une phase d'adhérence que de maintenir leur mouvement de glissement. Ces effets ont pour origine des phénomènes tribologiques et peuvent entraîner des cycles d'hystérésis.

Il est également possible de réécrire la loi de Coulomb à coefficient constant sous la forme d'une projection, avec dans ce cas $\mathbf{proj}_{\mathcal{C}_{\mu r_n}}$ le projecteur sur le cône de Coulomb à l'Equation 1.10.

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{proj}_{\mathcal{C}_{\mu r_n}}(\mathbf{r}_t - \rho_t \mathbf{v}_g) \quad \forall \rho_t > 0 \quad (1.10)$$

Il existe des régularisations de la loi de Coulomb pour obtenir une loi bi-univoque entre l'effort tangentiel de frottement et la vitesse de glissement, comme les lois linéaire ou arctangente comme représentées à la Figure 1.6. Ces lois nécessitent l'introduction de paramètres supplémentaires de calibrage et sont employées pour contourner des problèmes numériques qui se posent pour les algorithmes de résolution où l'état du système est une inconnue et doit être déterminé afin de savoir dans quel régime se situe le système.

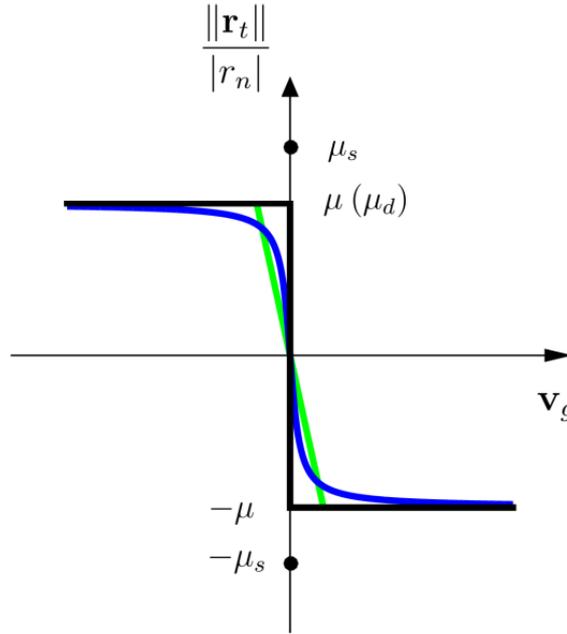


FIGURE 1.6 – Lois de frottement, (noir) Coulomb, (vert) linéaire, (bleu) arctangente

1.3 Mécanismes d'instabilité

Plusieurs mécanismes conduisant à des oscillations auto-entretenues induites par les frottements secs ont pu être identifiés dans le passé. Un grand nombre d'études se sont attachées à proposer des modèles analytiques simples permettant de générer ces vibrations. Deux grands types de modélisation permettent d'expliquer ces phénomènes et ils sont attachés à la nature de la loi de frottement choisie à l'interface de contact. Les deux premiers qui mènent au *stick/slip* sont la distinction des coefficients de frottement statique et dynamique ainsi que la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement, ce sont plutôt des modèles liés à la tribologie de l'interface. Les deux autres concernent les caractéristiques géométriques des deux systèmes mis en contact et sont le *sprag/slip* et le couplage de modes.

1.3.1 Coefficients de frottement statique et dynamique

Le cas d'une distinction entre coefficients de frottement statique et dynamique a depuis plusieurs décennies été discuté [13, 74, 116, 158]. Considérons le modèle illustré à la Figure 1.7 à un degré de liberté composé d'une masse m posée sur un tapis roulant à une vitesse V . Cette masse peut se déplacer selon l'horizontale dans la direction x et est maintenue en place par une raideur de rappel k . Le poids N ainsi que le coefficient de frottement entre la masse et le tapis crée une force tangentielle de frottement T dépendant de la vitesse de glissement $v_g = V - \dot{x}$. L'équation différentielle régissant le mouvement de la masse est donc :

$$m\ddot{x} + kx = T(v_g) \quad (1.11)$$

La valeur de la force de frottement dépend donc de la dynamique du système, à savoir s'il y a adhérence ou glissement entre la masse et le tapis. Ces relations se mettent alors sous la forme suivante dans le cas où l'on distingue coefficients de frottement statique et dynamique :

$$\begin{cases} |T(0)| \leq \mu_s N, \text{ adhérence} \\ T(v_g) = \mu_d N \cdot \text{sign}(v_g), \text{ glissement} \end{cases} \quad (1.12)$$

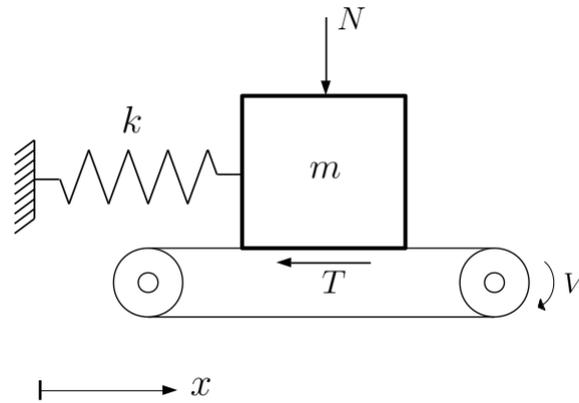


FIGURE 1.7 – Modèle de *stick/slip* à un degré de liberté

La force non linéaire de frottement T peut conduire à deux régimes d'oscillations établies suivant la valeurs des paramètres du problème et ses conditions initiales :

- Si les conditions initiales sont suffisamment proches du point d'équilibre $(x_{eq}, 0)$ du système défini par $kx_{eq} = T(0)$, la masse va osciller de façon harmonique autour de x_{eq} ,
- Si en revanche les conditions initiales sont trop éloignées du point d'équilibre, le régime établi va être une succession de phases d'adhérence et de glissement. Lorsque la masse adhère au tapis, il faut que la force de rappel puisse vaincre le coefficient de frottement statique pour mettre en glissement la masse par rapport au tapis. Lorsque la masse est en glissement la force à maintenir pour perpétuer le glissement est alors plus faible. La phase de glissement s'arrête lorsque la force de frottement quitte le cône de frottement et le cycle reprend.

Ce second cas de figure, où nous observons une alternance de phases de glissement et d'adhérence est nommé *stick/slip*. Ce modèle est l'un des premiers à avoir été proposé pour expliquer l'apparition d'oscillations auto-entretenues. L'ajout d'amortissement en parallèle au ressort de rappel permet de rendre le point d'équilibre attractif pour toutes les trajectoires harmoniques et stabilise le système. En revanche toutes les trajectoires admettant le cycle limite de *stick/slip* continueront à montrer des oscillations. Ce modèle simple permet alors de tracer les bassins d'attraction dans l'espace des phases qui vont conduire à un cycle d'oscillations auto-entretenues.

1.3.2 Variations du coefficient de frottement

Toujours en utilisant le modèle à un degré de liberté illustré à la Figure 1.7, il est également possible de faire apparaître des oscillations à partir d'un coefficient de frottement dont l'évolution est continue [21, 68]. En considérant l'allure du coefficient de frottement μ en fonction de la vitesse de glissement v_g illustré à la Figure 1.8, il a été montré que la pente négative de μ est équivalente à un amortissement négatif.

Au voisinage du point d'équilibre, la loi $\mu(v_g)$ peut alors se linéariser selon l'expression 1.13, avec α la pente à l'origine.

$$\mu(v_g) = \mu_s(1 - \alpha v_g) = \mu_s(1 - \alpha(V - \dot{x})) \quad (1.13)$$

En injectant cette expression dans l'équation du mouvement 1.11, nous obtenons alors l'équation régissant le système avec le terme d'amortissement négatif apporté par la pente décrois-

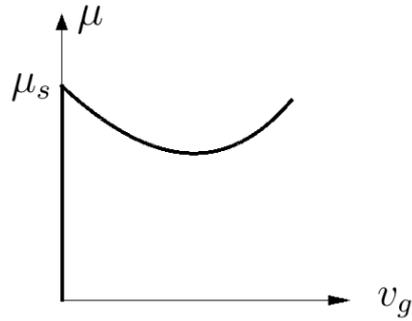


FIGURE 1.8 – Variation du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement

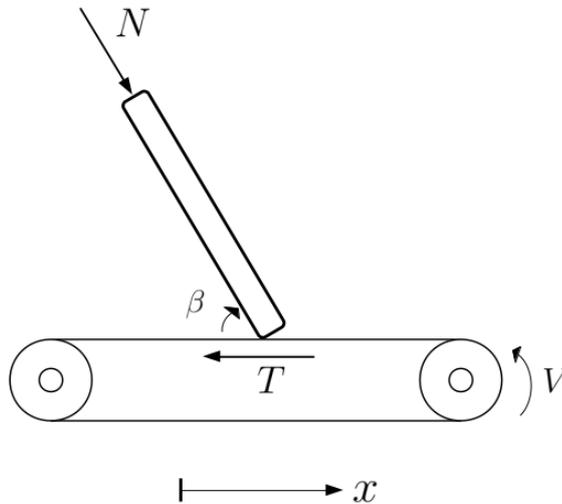


FIGURE 1.9 – Modèle de sprag/slip à un degré de liberté

sante du coefficient de frottement :

$$m\ddot{x} - \alpha\mu_s N \dot{x} + kx = \mu_s N(1 - \alpha V) \quad (1.14)$$

Cette évolution décroissante du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement permet d'injecter de l'énergie dans le système et d'en faire augmenter les amplitudes de vibration. La seconde partie de la courbe $\mu(v_g)$ présente alors une pente positive, ce qui assure une dissipation de l'énergie si le glissement devient trop important, ce qui permet de saturer les amplitudes de vibration. Un équilibre peut donc être atteint sur un cycle limite d'oscillations auto-entretenues. Tous les points de l'espace des phases mènent à ce cycle limite, le point d'équilibre est ici instable.

1.3.3 Sprag-slip

Le mécanisme de *sitck/slip*, bien qu'il prédise des oscillations auto-entretenues montre des limitations, car il a été observé expérimentalement que le crissement peut se dérouler avec un glissement constant et sans variation apparente du coefficient de frottement μ . Le mécanisme de *sprag/slip* a été introduit en 1961 par Spurr [158], étudié par Jarvis et Mills [78] et propose une instabilité d'origine géométrique. Le système étudié illustré à la Figure 1.9 est celui d'une poutre inclinée d'un angle β frottant avec un coefficient de frottement constant μ sur un tapis roulant à une vitesse V .

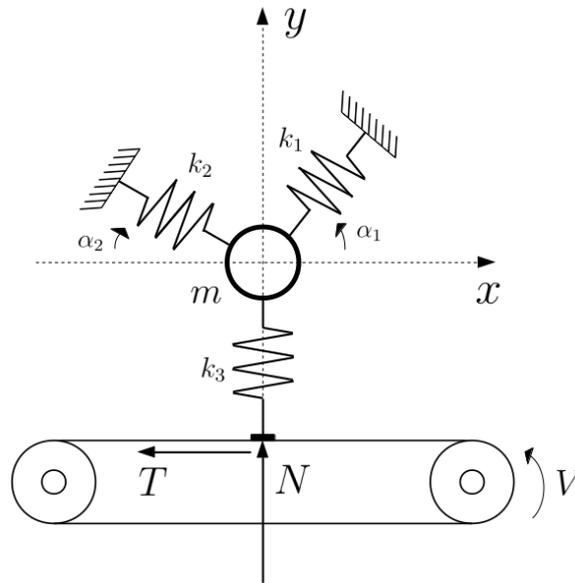


FIGURE 1.10 – Modèle de Hoffmann pour le couplage de modes

Un effort normal est appliqué sur l'extrémité supérieure de la poutre et il en résulte un effort de frottement T entre la poutre et le tapis roulant. L'effort de frottement peut alors s'exprimer en fonction des paramètres du problème selon la formule :

$$T = \frac{\mu N}{1 - \mu \tan(\beta)} \quad (1.15)$$

La première phase d'arc-boutement se déroule pour une phase d'adhérence de l'extrémité de la poutre avec le tapis roulant. La poutre fléchit et l'angle β augmente. Lorsque la valeur de β se rapproche de $\arctan(1/\mu)$ l'effort tangent devient suffisamment grand et le glissement se déclenche, ce qui permet à la poutre de revenir dans sa position initiale. L'alternance de ces deux phases permet d'obtenir un mouvement d'oscillation à partir d'un coefficient de frottement unique et constant. Ce mécanisme simple permet d'illustrer l'instabilité géométrique cependant il devient difficile à modéliser sur des systèmes plus complexes.

1.3.4 Couplage de modes

Le modèle du couplage de modes aussi appelé coalescence de modes ou encore *mode lock-in* a été introduit par Oden et Martins [128] afin d'expliquer le couplage dans les direction normales et tangentielles des vibrations observées expérimentalement. Il avait également été observé et étudié sous le nom de *flutter* dans l'étude des instabilités aéroélastiques d'ailes d'avions. Ce mécanisme a ensuite été repris et intensivement étudié [13, 48, 70, 71, 115, 129, 132, 145, 157, 159]. L'un des principaux objectifs des travaux sur le sujet a été de trouver des modèles minimaux permettant la prédiction d'un ensemble de vibrations auto-entretenues. Le couplage de modes nécessite un modèle possédant au minimum deux degrés de liberté. Le modèle de Hoffmann illustré à la Figure 1.10 est capable de reproduire le mécanisme de *mode lock-in* à partir des déplacements dans le plan d'une masse m maintenue par deux raideurs k_1 et k_2 et reposant via une troisième raideur k_3 sur un tapis roulant par l'intermédiaire d'un patin où se concentrent les efforts de contact et de frottement.

L'équation linéaire de la dynamique de ce système autour de la position d'équilibre est la suivante, avec $\mathbf{U} = [x \ y]^t$ le vecteur des 2 degrés de liberté du système :

$$\mathbf{M}_H \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_H \mathbf{U} = 0 \quad (1.16)$$

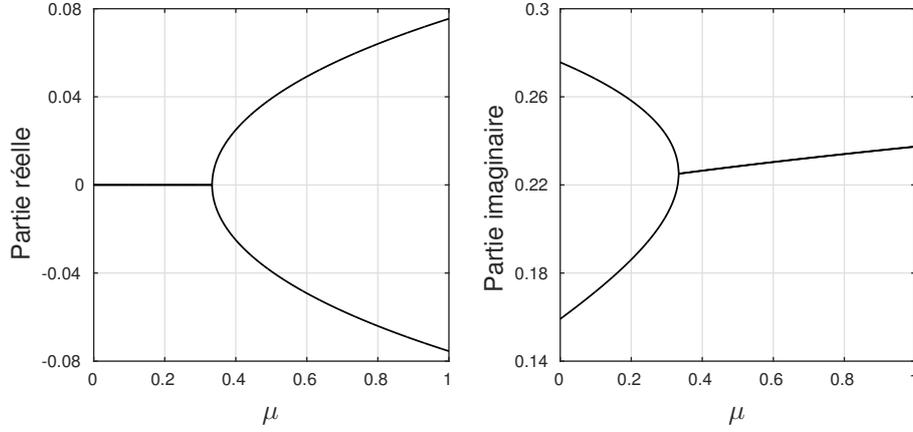


FIGURE 1.11 – Evolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres d'un système de Hoffmann en fonction du coefficient de frottement μ

avec les matrices \mathbf{M}_H et \mathbf{K}_H :

$$\mathbf{M}_H = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_H = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} - \mu k_3 \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } k_{11} &= k_1 \cos^2(\alpha_1) + k_2 \cos^2(\alpha_2) \\ k_{12} &= k_1 \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) + k_2 \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_2) \\ k_{22} &= k_1 \sin^2(\alpha_1) + k_2 \sin^2(\alpha_2) + k_3 \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer ici que l'effort tangentiel dissymétrise la matrice de raideur par l'intermédiaire du coefficient de frottement constant μ . Afin d'observer le couplage de modes nous faisons varier sa valeur et nous calculons les valeurs propres λ de l'Equation 1.16 qui sont alors complexes en mettant la solution sous la forme $\mathbf{U} = \phi e^{\lambda t}$. L'évolution des parties réelles et complexes des deux valeurs propres en fonction du coefficient de frottement μ est tracée à la Figure 1.11. La partie réelle est associée au taux de croissance du mode alors que la partie imaginaire est liée à sa fréquence propre.

Nous pouvons observer que pour une valeur du coefficient de frottement inférieure à une valeur seuil $\mu_c = 0.333$, les deux parties réelles sont nulles et les fréquences distinctes. L'évolution des parties réelles et imaginaires suit ici le schéma de la coalescence de modes où les parties imaginaires deviennent égales alors que les parties réelles ne sont plus nulles, l'une devient négative et l'autre positive. Cette évolution est celle d'une bifurcation de Hopf où la valeur μ_c fixe la valeur du coefficient de frottement à la bifurcation. La partie réelle positive amène l'apparition du mode instable associé, toute perturbation autour de la position d'équilibre sera amplifiée exponentiellement. Dans la pratique il existe d'autres phénomènes qui entrent en jeu lors de l'apparition d'amplitudes importantes et qui tendent à arrêter la croissance des amplitudes de vibrations liée à l'instabilité du régime linéaire. Les pertes de contact par exemple qui sont un phénomène de nature non-linéaire permettent la saturation des amplitudes de vibration.

L'impact de l'amortissement sur les systèmes présentant une coalescence de modes n'est pas

trivial [50, 51]. Il peut avoir un effet stabilisant s'il est équi-réparti entre les modes et fait augmenter la valeur de μ_c . Dans d'autres cas il est au contraire déstabilisant et étend la région où la position d'équilibre est instable.

1.4 Méthodes de réduction

La méthode des Eléments Finis permet de décrire avec précision des systèmes à la géométrie et aux propriétés complexes. En contrepartie la taille des matrices creuses décrivant ces systèmes peut devenir très importante si la maillage est très fin. L'utilisation de ces modèles peut alors s'avérer coûteuse lors de simulations numériques. L'ajout de non-linéarités comme du contact ou du frottement oblige à l'emploi d'algorithmes capables d'évaluer ces efforts, ce qui complexifie les méthodes de résolution numérique.

L'utilisation de méthodes de réduction est alors nécessaire afin de pouvoir effectuer des simulations en un temps raisonnable. Ces méthodes permettent une diminution du nombre de degrés de liberté physiques, qui sont alors projetés sur des bases de réduction. Nous obtenons ainsi des modèles plus petits mais il faut alors s'assurer que les systèmes réduits ont un comportement proche du modèle initial selon le type de simulation envisagé.

1.4.1 Méthodes de Ritz

Les méthodes de Ritz sont les plus simples pour la réduction de modèle. Le principe est d'approximer le champ solution \mathbf{X} par une combinaison linéaire de N fonctions de forme φ bien choisies, pondérées par des degrés de liberté généralisés λ , comme présenté à la relation 1.18. Les réductions de Ritz sont efficaces pour les problèmes linéaires du fait de la projection de la solution sur un espace vectoriel. La qualité de l'approximation dépend alors de la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces fonctions de forme ainsi que du type de fonctions choisies.

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^N \lambda_k(t) \varphi_k \quad (1.18)$$

Un exemple de famille de fonctions de forme que nous pouvons choisir sont les déformées propres de la structure. Cette décomposition est alors appelée projection en base modale. En général c'est la troncature sur les N premiers modes propres de la structure pondérée par les participations modales qui est choisie, ce qui assure que le modèle réduit soit valide en basse fréquence jusqu'à la fréquence du mode propre le plus haut. Un autre intérêt de la base modale est qu'elle permet de diagonaliser le système d'équations donné par la relation 1.6. La résolution du système se ramène donc à la résolution de N équations différentielles ordinaires du second ordre à une inconnue.

1.4.2 Méthodes de réduction modale avec sous-structuration

La présence d'interfaces de contact ainsi que de forces de frottement dans les systèmes de frein rend impossible l'utilisation de méthodes de Ritz pour la réduction de modèle. Il est alors nécessaire d'effectuer une sous-structuration et de différencier les degrés de liberté appartenant à ces interfaces de contact appelés ici \mathbf{X}_I , des autres degrés de liberté appelés degrés de liberté internes et notés \mathbf{X}_{int} . Une réduction est alors effectuée pour chaque sous-système [114]. La matrice de raideur du sous-système peut alors être partitionnée selon ce réarrangement des degrés de liberté comme montré à l'Equation 1.19.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{I,I} & \mathbf{K}_{I,int} \\ \mathbf{K}_{int,I} & \mathbf{K}_{int,int} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Les méthodes de sous-structuration se divisent en deux grandes catégories, les méthodes à interfaces fixes et les méthodes à interfaces libres.

Méthodes à interfaces fixes

L'une des méthodes la plus employée pour résoudre ce type de problème est celle de Craig et Bampton [34]. Cette méthode de réduction à interface fixe est l'une des plus simple à mettre en oeuvre et ne pose pas de problème de conditionnement matriciel, elle est particulièrement adaptée au cas où les surfaces sont rigides au niveau des interfaces. L'objectif de la réduction de Craig et Bampton est de décomposer les déplacements selon deux familles de modes. La première famille est formée des modes statiques de liaison qui sont les déformées statiques obtenues en imposant un déplacement unitaire sur un seul degré de liberté du vecteur \mathbf{X}_I et en laissant les autres à 0. Cette première famille est de taille fixe, égale au nombre de degrés de liberté à l'interface. La matrice Ψ contient sur chacune de ses colonnes les modes statiques de liaison et se calcule selon la relation 1.20.

$$\Psi = -\mathbf{K}_{int,int}^{-1} \mathbf{K}_{int,I} \quad (1.20)$$

La seconde famille est formée des modes propres de la structure calculés en encastrant l'interface, c'est à dire avec $\mathbf{X}_I = \mathbf{0}$. Le nombre de modes à interface fixe conditionne à la fois la taille de la réduction de Craig et Bampton ainsi que la précision du modèle réduit. La matrice Φ contient les modes à interface fixe, rangés par colonnes et le vecteur ξ contient les degrés de libertés généralisés associés à chacun de ces modes.

Les déplacements des degrés de liberté internes \mathbf{X}_{int} peuvent alors s'exprimer en fonction des modes statiques de liaison et d'une combinaison linéaire des modes à interface fixe :

$$\mathbf{X}_{int} = \Psi \mathbf{X}_I + \Phi \xi \quad (1.21)$$

La réduction des degrés de liberté du modèle initial peuvent alors s'écrire à l'aide de la matrice de passage \mathbf{T} définie à l'Equation 1.22.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_{int} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Psi & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \xi \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \xi \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Les matrices de raideur et de masse \mathbf{K} et \mathbf{M} sont alors réduites respectivement en \mathbf{K}_{CB} et \mathbf{M}_{CB} par projection à l'aide de la matrice \mathbf{T} dans la base réduite de Craig et Bampton selon les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{CB} &= \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_{CB} &= \mathbf{T}^t \mathbf{M} \mathbf{T} \end{aligned} \quad (1.23)$$

La méthode de Craig et Bampton permet donc de conserver tous les degrés de liberté physiques aux interfaces de contact et de réduire tous les degrés de liberté hors interface. Cette réduction se fait sur une base de modes propres à interface fixe et qui est agrémentée des modes statiques de liaison, ce qui permet de faire le lien entre la dynamique de l'interface et le reste de la structure.

Cette méthode est applicable à chaque sous-structure, où les degrés de liberté internes sont réduits séparément. Les interfaces sont ensuite mises en relation selon les lois de contact et de frottement choisies. La conservation de degrés de liberté physiques aux interfaces permet alors d'y appliquer directement des efforts aisément. Cette méthode permet une très bonne estimation des premières fréquences propres du système couplé.

Méthodes à interfaces libres

Les méthodes de réduction à interface libre [69] utilisent une formulation différente pour exprimer les degrés de liberté internes en fonction de modes de la structure et des degrés de liberté aux interfaces. Elles sont plutôt adaptées aux cas où les surfaces présentes au niveau des interfaces sont souples.

Dans ce cas les degrés de liberté internes sont exprimés en fonction des modes propres de la structure à interface libre Φ' pilotés par les degrés de liberté généralisés ξ' , ce qui inclut également les modes de corps rigide, et des modes d'attache Ψ' ou des modes d'attache résiduels Ψ'_R . Les modes d'attache sont calculés en imposant successivement l'opposé d'une force unitaire sur les degrés de liberté de \mathbf{X}_I . Les modes d'attache résiduels sont calculés de la même façon tout en enlevant la contribution des modes à interface libre Φ' de la réponse statique.

$$\mathbf{X}_{int} = \Psi' \mathbf{X}_I + \Phi' \xi' \quad (1.24)$$

Ces approches nécessitent cependant l'emploi de précautions car le calcul des modes d'attache et modes d'attache résiduel ne peut pas s'effectuer directement sur la structure libre. Il faut alors rendre la structure isostatique en la projetant sur ses modes de corps rigide avant de pouvoir calculer les modes d'attache ou les modes d'attache résiduels.

Méthodes à interfaces mixtes

Pour les méthodes de réduction à interface mixte [104], les degrés de liberté d'interface sont séparés en degrés de libertés fixes $\mathbf{X}_{I,F}$ et libres $\mathbf{X}_{I,L}$. Les modes propres de la structure à interface mixte Φ^m sont calculés en encastrant les degrés de liberté de $\mathbf{X}_{I,F}$ et en laissant libres ceux de $\mathbf{X}_{I,L}$. Le vecteur de degrés de liberté généralisé associé est ξ^m .

Les modes statiques de liaison Ψ sont calculés sur les degrés de liberté $\mathbf{X}_{I,F}$ en laissant ceux de $\mathbf{X}_{I,L}$ libres. Les modes d'attache Ψ' ou modes d'attache résiduels Ψ'_R sont calculés sur $\mathbf{X}_{I,L}$ en encastrant les degrés de liberté de $\mathbf{X}_{I,F}$. En règle générale l'utilisation des méthodes à interface mixte permet d'éviter le problème de modes de corps rigide pour le calcul des modes d'attache et modes d'attaches résiduels car les degrés de liberté $\mathbf{X}_{I,F}$ bloqués permettent d'avoir un système isostatique. Les déplacements internes de \mathbf{X}_{int} s'écrivent alors :

$$\mathbf{X}_{int} = \Psi \mathbf{X}_{I,F} + \Psi' \mathbf{X}_{I,L} + \Phi^m \xi^m \quad (1.25)$$

1.4.3 Autres méthodes de réduction

Il existe d'autres types de méthodes de réduction plus ou moins adaptées aux systèmes présentant des interfaces frottantes. La méthode de l'anti-oscillateur [77] permet d'effectuer une synthèse modale non plus basée sur les modes propres mais sur les modes statiques et les modes résiduels d'une structure. Cependant son efficacité n'a pas été testée sur des problèmes de frottement.

D'autres méthodes de réduction [152] basée sur la décomposition de la solution sur une base de variétés stables et de variétés centrées au voisinage d'un point de bifurcation permet également de réduire la taille d'un système. Cependant ces méthodes ne sont valables qu'au voisinage de la bifurcation et leurs mises en œuvre sur des systèmes de taille importante comme ceux habituellement issus d'une discrétisation par Eléments Finis posent des problèmes d'ordre numérique.

1.5 Analyse de stabilité

L'analyse de stabilité est la méthode la plus employée aujourd'hui dans l'industrie pour prévoir l'apparition du phénomène de crissement d'un point de vue numérique. La méthode analytique de Ruth est utilisable sur des modèles de petite taille. Lorsque les modèles en question sont issus d'une discrétisation par la méthode de Eléments Finis, la méthode Complex Eigenvalue Analysis (CEA) est la plus couramment employée. Cette méthode se décompose en deux étapes, la première est le calcul de la position d'équilibre et la seconde est le calcul des valeurs propres du système linéarisé autour de cette position d'équilibre.

L'équation du mouvement globale d'un système modélisant un système de frein peut se mettre sous la forme 1.26 où le second membre contient maintenant le terme \mathbf{F}_{NL} caractérisant des efforts potentiellement non linéaires associés à un effort de contact ou de frottement.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \quad (1.26)$$

La position d'équilibre \mathbf{X}_{eq} est définie par la relation 1.27, où la vitesse et l'accélération sont nulles.

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_{eq} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}_{eq}, \mathbf{0}) \quad (1.27)$$

Les efforts non-linéaires contenus dans le terme \mathbf{F}_{NL} peuvent se linéariser autour de la position d'équilibre \mathbf{X}_{eq} de la façon suivante, avec $\delta\mathbf{X}$ et $\delta\dot{\mathbf{X}}$ les petites variations en position et en vitesse autour de la position d'équilibre :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}_{eq} + \delta\mathbf{X}, \delta\dot{\mathbf{X}}) &\approx \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}_{eq}, \mathbf{0}) + \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_{eq}, \mathbf{0})\delta\mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \dot{\mathbf{X}}}(\mathbf{X}_{eq}, \mathbf{0})\delta\dot{\mathbf{X}} \\ &\approx \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}_{eq}, \mathbf{0}) + \mathbf{J}_{F_{NL}}\delta\mathbf{X} + \mathbf{L}_{F_{NL}}\delta\dot{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Le système dynamique alors linéarisé autour de la position d'équilibre peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{C} - \mathbf{L}_{F_{NL}})\delta\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{F_{NL}})\delta\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1.29)$$

En supposant que les solutions de cette équation linéaire peuvent se mettre sous la forme $\phi e^{\lambda t}$, le problème CEA se ramène alors au calcul des modes propres de l'Equation 1.30. Les valeurs propres λ sont également appelées exposants de Lyapunov.

$$\left(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda(\mathbf{C} - \mathbf{L}_{F_{NL}}) + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{F_{NL}}) \right) \phi = \mathbf{0} \quad (1.30)$$

L'ajout de forces de contact et de frottement rendent les matrices $\mathbf{L}_{F_{NL}}$ et $\mathbf{J}_{F_{NL}}$ non symétriques, les valeurs propres calculées λ sont donc complexes et peuvent se mettre sous la forme $\lambda_j = a_j + ib_j$. La partie réelle a_j de la valeur propre est associée au taux de croissance exponentiel du mode alors que sa partie imaginaire b_j est sa pulsation. Le système est considéré comme stable si toutes les parties réelles a_j sont négatives. Si au contraire il existe une partie réelle strictement positive le système est considéré comme instable :

$$\begin{cases} \forall j, a_j \leq 0, & \text{le système est stable} \\ \exists j, a_j > 0, & \text{le système est instable} \end{cases} \quad (1.31)$$

Habituellement la méthode CEA est utilisée en faisant varier un ensemble de paramètres afin de déterminer les régions stables et instables [18, 29, 56, 84, 91, 95, 131, 145, 155]. L'étude la plus courante menée sur les systèmes de freins consiste à faire varier le coefficient de frottement afin de déterminer la valeur du coefficient à la bifurcation.

La méthode CEA est locale et étudie la stabilité du système linéarisé autour d'une position d'équilibre. Dans certaines situations elle peut sous-estimer ou sur-estimer les instabilités qui

vont effectivement se développer lors d'une évolution temporelle [146]. Il existe des dérivés de la méthode CEA qui permettent dans certains cas de corriger ces défauts.

Brunetti [19] a développé une méthode se basant sur des considérations énergétiques pour sélectionner les modes issus de l'analyse CEA pour créer un Indice d'Absorption Modal (MAI) et éliminer des modes qui sont moins susceptibles d'apparaître lors d'une simulation temporelle. Sinou et Denimal [37, 118] ont développé la méthode MASA (Modal Amplitude Stability Analysis) qui permet de prédire des modes instables non calculés par la CEA à condition que la fondamentale du mode soit prédominante dans la réponse temporelle.

Une application récente des méthodes d'analyse de stabilité est l'étude des incertitudes ainsi que de la sensibilité d'un modèle à certains paramètres [63, 126]. L'utilisation du chaos polynomial [40, 121, 142, 143, 163] a permis de prédire d'un point de vue statistique la réponse de modèles de crissement en fonction de paramètres aléatoires et les méthodes de méta-modélisation [37, 120] ont permis d'étudier la stabilité de systèmes en fonction d'un grand nombre de paramètres, certains déterministes et d'autres aléatoires.

Des phénomènes annexes ont alors pu être intégrés aux modèles pour afin d'étudier leurs impacts sur le crissement, comme la modélisation des contacts ailleurs qu'entre les plaquettes et le disque [37, 38, 52] ou alors les effets des lois de contact sur ces interfaces annexes [88]. L'impact des shims qui sont des couches viscoélastiques amortissantes collées au dos des plaquettes a également pu être modélisé [44, 45, 83].

1.6 Méthodes d'approximation des systèmes non-linéaires transitoires

Le phénomène de crissement est dynamique et la prédiction CEA ne permet de détecter que les configurations potentiellement instables. Le calcul de la solution temporelle est nécessaire dans un premier temps pour connaître effectivement quelles seront les composantes fréquentielles présentes dans le signal transitoire. Ensuite l'analyse de stabilité ne permet pas de déterminer les niveaux de vibrations qui seront réellement atteints lors du développement des oscillations auto-entretenues [3, 25, 124, 141, 146].

Il existe alors deux classes de méthodes permettant d'évaluer les amplitudes vibratoires temporelles du système crissant. La première est l'intégration temporelle complète à l'aide d'un schéma numérique adapté. Ce genre de méthode permet la simulation de l'évolution complète d'un système à partir de sa condition initiale sur un intervalle de temps T et de décrire les phénomènes non-linéaires au niveau des interfaces de contact. Cette approche constitue la référence pour l'étude des vibrations transitoires d'un système, cependant sur des modèles comportant un grand nombre de degrés de liberté les ressources informatiques sont parfois insuffisantes pour mener ces simulations à terme.

La seconde classe de méthodes s'attache uniquement à déterminer le régime établi des oscillations en s'affranchissant de l'évolution transitoire. De telles méthodes permettent ainsi un énorme gain de temps de calcul mais présentent quelques difficultés qui sont présentées.

1.6.1 Calcul transitoire, schémas d'intégration

Il existe une multitude de schémas d'intégration temporelle visant à donner une solution approchée à l'équation dynamique du système discret 1.32. La nature de ces équations différentielles ne permet pas en général une résolution analytique.

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \\ \dot{\mathbf{X}}(t=0) = \dot{\mathbf{X}}^0 \\ \mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}^0 \end{cases} \quad (1.32)$$

Il est également possible d'écrire le système sous forme d'état comme indiqué Equation 1.33. La mise sous forme d'état permet de passer à un système d'équations différentielles du premier ordre, en doublant la taille de l'espace d'inconnues du système.

$$\mathbf{A}_M \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{A}_K \mathbf{Y} = \mathbf{A}_F(\mathbf{Y}, t) \quad (1.33)$$

avec \mathbf{Y} le vecteur des degrés de liberté sous forme d'état contenant le champ des déplacements ainsi que celui des vitesses, et \mathbf{A}_M , \mathbf{A}_K et \mathbf{A}_F les matrices du système sous forme d'état prenant la forme suivante :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_M = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_K = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

et $\mathbf{A}_F = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{NL} + \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Il est alors nécessaire de discrétiser le temps d'intégration représenté par l'intervalle $[0; T]$ et d'appliquer des schémas permettant la résolution de l'équation du mouvement 1.32 à chaque instant discret t_i . Les différents intervalles de temps $[t_i; t_{i+1}]$ sont caractérisés par leurs pas de temps h_i . Nous pouvons distinguer deux classes de schémas d'intégration. Les premiers sont les schémas explicites où les quantités calculées à un instant t_{i+1} ne dépendent que des quantités calculées aux instants précédents. Les schémas implicites expriment les quantités à l'instant t_{i+1} à la fois en fonction de celles aux instants précédents mais aussi au même instant t_{i+1} . Nous définissons alors les valeurs approchées de la solution \mathbf{X} aux instants t_i de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}(t_i) &= \ddot{\mathbf{X}}^i & \dot{\mathbf{X}}(t_i) &= \dot{\mathbf{X}}^i & \mathbf{X}(t_i) &= \mathbf{X}^i \\ \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}(t_i), \dot{\mathbf{X}}(t_i)) &= \mathbf{F}_{NL}^i & \mathbf{F}_{ext}(t_i) &= \mathbf{F}_{ext}^i \end{aligned} \quad (1.35)$$

Plusieurs qualités sont attendues d'un schéma d'intégration :

- La consistance : cette condition équivaut à dire que la discrétisation temporelle effectuée permet d'obtenir un schéma qui converge vers la solution si le pas de temps est suffisamment petit. Cela équivaut à la relation suivante qui exprime la convergence des dérivées temporelles du point de vue numérique :

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{X}^i}{h_i} = \dot{\mathbf{X}}(t_i) \quad (1.36)$$

- La stabilité : un schéma est considéré comme stable s'il existe un pas de temps h_s tel que si $\forall i, h_i < h_s$ alors une variation du vecteur d'état \mathbf{Y}^i à un temps t_i n'amènera qu'une variation finie du vecteur d'état \mathbf{Y}^{i+1} à l'instant t_{i+1} . Cette condition assure que la solution ne diverge pas à la moindre perturbation, et qu'elle reste dans un voisinage borné de la solution exacte, malgré les erreurs numériques dues aux troncatures et aux arrondis,
- La conservation d'énergie : le schéma ne dissipe ou n'apporte pas artificiellement de l'énergie au système de façon purement numérique [107]. Cette condition assure que le schéma n'apporte pas d'amortissement d'origine numérique. Si c'est le cas, il est alors qualifié de conservatif.

Nous présentons dans une première partie quelques schémas du premier ordre, puis des schémas du second ordre. Nous discutons ensuite des différences entre le choix d'un pas de temps fixe ou variable.

Schémas du premier ordre

En utilisant la forme d'état de l'Equation 1.33, il est possible d'obtenir la réponse \mathbf{Y}^{i+1} à l'instant t_{i+1} en fonction de \mathbf{Y}^i et de l'intégrale de $\dot{\mathbf{Y}}$ sur le pas de temps h_i :

$$\mathbf{Y}^{i+1} = \mathbf{Y}^i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{Y}}(\tau) d\tau \quad (1.37)$$

L'objectif des méthodes du premier ordre est donc d'obtenir une estimation de l'intégrale de la vitesse sous forme d'état $\dot{\mathbf{Y}}$.

- **Schéma de Runge-Kutta**

La méthode de Runge-Kutta permet d'évaluer l'intégrale de l'Equation 1.37 à l'aide d'une quadrature de la vitesse sur l'intervalle de temps $[t_i; t_{i+1}]$ de la forme suivante, avec s l'ordre du schéma de Runge-Kutta (à ne pas confondre avec l'ordre général du schéma d'intégration qui est toujours de 1 dans ce cas) :

$$\mathbf{Y}^{i+1} = \mathbf{Y}^i + h_i \sum_{n=1}^s b_n \mathbf{q}_n \quad (1.38)$$

Les \mathbf{q}_n sont les valeurs de $\dot{\mathbf{Y}}$ dans l'intervalle de temps considéré et ne servent qu'au calcul de l'itération \mathbf{Y}^{i+1} , elles sont obtenues par la relation suivante $\forall n \in \llbracket 1; s \rrbracket$:

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{A}_M^{-1} \left(-\mathbf{A}_K \left(\mathbf{Y}^i + h_i \sum_{k=1}^s a_{n,k} \mathbf{q}_k \right) + \mathbf{A}_F \left(\mathbf{Y}^i + h_i \sum_{k=1}^s a_{n,k} \mathbf{q}_k, t_i + c_n h_i \right) \right) \quad (1.39)$$

Les valeurs des coefficients b_n , c_n et $a_{n,k}$ des vecteurs \mathbf{b} , \mathbf{c} et de la matrice \mathbf{a} sont données par les tableaux de Butcher et doivent remplir un certain nombre de conditions afin de vérifier les conditions de consistance, stabilité et de conservation d'énergie. Le vecteur \mathbf{c} donne la position du point de quadrature à l'intérieur de l'intervalle de temps $[t_i; t_{i+1}]$.

Ce schéma nécessite alors la résolution d'un système algébrique non linéaire de taille s à chaque itération de temps, qui est implicite si la matrice \mathbf{a} est quelconque. Il devient explicite si \mathbf{a} est triangulaire inférieure, ce qui signifie que les \mathbf{q}_n sont obtenus successivement à partir des valeurs calculées précédemment.

L'augmentation de l'ordre s du schéma de Runge-Kutta améliore sa précision mais s'accompagne également d'une augmentation de la taille du système algébrique à résoudre à chaque pas de temps. Le meilleur compromis est un schéma explicite d'ordre 4 correspondant aux matrices \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} suivantes :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

- **Schéma d'Euler**

Le schéma d'Euler est un cas particulier du schéma de Runge-Kutta, où la quadrature de l'intégrale de l'Equation 1.37 est réalisée à l'aide d'un paramètre θ de la façon suivante :

$$\mathbf{Y}^{i+1} = \mathbf{Y}^i + h_i(1 - \theta)\dot{\mathbf{Y}}^i + h_i\theta\dot{\mathbf{Y}}^{i+1} \quad (1.41)$$

L'écriture des relations de l'Equation différentielle au pas de temps t_{i+1} sont équivalentes au système d'équations non-linéaires suivant, où l'inconnue est alors $\dot{\mathbf{Y}}^{i+1}$:

$$\left(\mathbf{A}_M - h_i\theta\mathbf{A}_K\right)\dot{\mathbf{Y}}^{i+1} = \mathbf{A}_K\left(\mathbf{Y}^i + h_i(1 - \theta)\dot{\mathbf{Y}}^i\right) + \mathbf{A}_F\left(\mathbf{Y}^i + h_i(1 - \theta)\dot{\mathbf{Y}}^i + h_i\theta\dot{\mathbf{Y}}^{i+1}, t_{i+1}\right) \quad (1.42)$$

Le choix du paramètre θ influe sur la qualité du schéma ainsi que sur ses propriétés. Le choix $\theta = 0$ donne le schéma d'Euler explicite, qui est conditionnellement stable. A l'inverse avec $\theta = 1$ le schéma obtenu est alors appelé Euler implicite, il est inconditionnellement stable mais non conservatif car il apporte de l'amortissement numérique. Le choix $\theta = 1/2$ donne lieu à une approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes et permet une meilleure précision.

• La θ -méthode

Le schéma de la θ -méthode a été introduit par Moireau, Jean et Acary [5, 79] en premier lieu pour traiter des problèmes transitoires en présence de lois de contact et de frottement non-régulières, ce qui a trouvé lieu à plusieurs application dans des problèmes de crissement avec la prise en compte du contact non-régulier [25, 97, 101]. Dans ce type de problème, certaines quantités comme l'accélération ne sont pas continues à cause des phénomènes de chocs, ce qui impose l'utilisation de schémas du premier ordre qui n'utilisent que la position et la vitesse. L'équation du mouvement du second ordre est alors intégrée sur un pas de temps h_i en séparant le terme en accélération des autres :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(\tau)d\tau = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\mathbf{K}\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(\tau)\right)d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\mathbf{F}_{ext}(\tau) + \mathbf{F}_{NL}(\tau)\right)d\tau \quad (1.43)$$

Comme les évolutions de l'accélération $\ddot{\mathbf{X}}$ et des forces de contact non-régulières \mathbf{F}_{NL} sont sujettes à des phénomènes irréguliers sur l'intervalle d'intégration $[t_i; t_{i+1}]$, leurs intégrales sont alors réécrites de la façon suivante, ce qui permet finalement de se ramener à un schéma d'intégration du premier ordre :

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(\tau)d\tau &= \mathbf{M}(\dot{\mathbf{X}}^{i+1} - \dot{\mathbf{X}}^i) \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}_{NL}(\tau)d\tau &= h_i\mathbf{F}_{NL}^{i+1} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Toutes les autres contributions des intégrales de quantités régulières sont évaluées par quadrature à l'aide du paramètre θ de la façon suivante :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{f}(\tau)d\tau = h_i\left(\theta\mathbf{f}^{i+1} + (1 - \theta)\mathbf{f}^i\right) \quad (1.45)$$

en supposant alors que la relation entre vitesse et position peut se mettre sous la même forme que pour le schéma d'Euler, nous obtenons le système d'Equations suivantes permettant le calcul des quantités d'un pas de temps t_{i+1} à partir de celles au pas de temps t_i :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\dot{\mathbf{X}}^{i+1} - \dot{\mathbf{X}}^i) = h_i \theta (\mathbf{F}_{ext}^{i+1} - \mathbf{K}\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^{i+1}) + h_i \mathbf{F}_{NL}^{i+1} \\ \phantom{\mathbf{M}(\dot{\mathbf{X}}^{i+1} - \dot{\mathbf{X}}^i) = } h_i (1 - \theta) (\mathbf{F}_{ext}^i - \mathbf{K}\mathbf{X}^i - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^i) \\ \mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i + h_i (\theta \dot{\mathbf{X}}^{i+1} + (1 - \theta) \dot{\mathbf{X}}^i) \end{cases} \quad (1.46)$$

En exprimant \mathbf{X}^{i+1} par la relation de quadrature 1.41 dans la première équation, nous obtenons une relation permettant d'obtenir $\dot{\mathbf{X}}^{i+1}$. Une fois que la vitesse est calculée, les déplacements sont mis à jour et la calcul au pas de temps $i + 1$ est terminé. Ce schéma est donc implicite est nécessite la résolution d'un système non linéaire à chaque itération. Il est cependant inconditionnellement stable si $\theta \geq 1/2$ et conservatif pour $\theta = 1/2$, ce qui explique pourquoi cette valeur du paramètre est presque exclusivement choisie.

Dans le cas non-régulier des algorithmes de prédiction-correction sont employés à chaque pas de temps pour déterminer l'état de contact à l'instant suivant afin de pouvoir estimer \mathbf{F}_{NL}^{i+1} et résoudre le système 1.46.

Schémas du second ordre

Lorsque les efforts contenus dans \mathbf{F}_{NL} sont assez réguliers ou que les lois sont régularisées de telle sorte que l'accélération soit définie à chaque instant, il est possible d'utiliser des schémas d'intégration du second ordre. Il permettent de résoudre alors directement l'équation différentielle 1.32 du mouvement sans la réécrire sous forme d'état.

- Schéma de Newmark

Le schéma de Newmark est une méthode utilisant une quadrature de l'accélération pour exprimer les vitesses et déplacements à l'instant $t_i + 1$ selon les développements de Taylor avec reste intégral suivants :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}^{i+1} = \dot{\mathbf{X}}^i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{\mathbf{X}}(\tau) d\tau \\ \mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i + h_i \dot{\mathbf{X}}^i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{\mathbf{X}}(\tau) (t_{i+1} - \tau) d\tau \end{cases} \quad (1.47)$$

En utilisant une quadrature des intégrales différente selon qu'elle concerne l'expression de la vitesse (avec le paramètre γ) ou celle du déplacement (avec le paramètre β) nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}^{i+1} = \dot{\mathbf{X}}^i + h_i (\gamma \ddot{\mathbf{X}}^{i+1} + (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}^i) \\ \mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i + h_i \dot{\mathbf{X}}^i + h_i^2 (\beta \ddot{\mathbf{X}}^{i+1} + (\frac{1}{2} - \beta) \ddot{\mathbf{X}}^i) \end{cases} \quad (1.48)$$

En appliquant alors ces décompositions à l'équation du mouvement écrite au pas de temps t_{i+1} , nous obtenons le système d'équations non-linéaire 1.49, où l'inconnue est $\ddot{\mathbf{X}}^{i+1}$, en exprimant

$\dot{\mathbf{X}}^{i+1}$ et \mathbf{X}^{i+1} dans \mathbf{F}_{NL}^{i+1} avec les relations de 1.48. Sa résolution permet ensuite de mettre à jour les vitesses et déplacements à l'aide des ces mêmes relations 1.48.

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + h_i\gamma\mathbf{C} + h_i^2\beta\mathbf{K}\right)\ddot{\mathbf{X}}^{i+1} &= \left(h_i(1-\gamma)\mathbf{C} + h_i^2(1/2-\beta)\mathbf{K}\right)\dot{\mathbf{X}}^i \\ &\quad \left(\mathbf{C} + h_i\mathbf{K}\right)\dot{\mathbf{X}}^i + \mathbf{K}\mathbf{X}^i + \mathbf{F}_{ext}^{i+1} + \mathbf{F}_{NL}^{i+1} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Les propriétés du schéma dépendent fortement des valeurs des paramètres γ et β choisis. Le schéma purement explicite avec le couple $(\gamma; \beta) = (0; 0)$ n'est jamais utilisé car instable. Certaines valeurs du couple permettent d'obtenir un schéma conditionnellement stable comme celui de Fox-Goodwin avec $(\gamma; \beta) = (1/2; 1/12)$. D'autres sont inconditionnellement stables comme le schéma à accélération moyenne constante avec $(\gamma; \beta) = (1/2; 1/4)$ mais présentent de l'amortissement numérique. Gérardin [59] donne les propriétés du schéma de Newmark en fonction des paramètres de quadrature et étudie ses zones stables et instables ainsi que sa consistance et leur amortissement numérique.

- **Schéma de Hilber-Hughes-Taylor, α -méthode**

Le schéma de Hilber-Hughes-Taylor (HHT) [67] est basé sur la quadrature des déplacements et des vitesses du schéma de Newmark explicités à l'Equation 1.48. Seulement, au lieu d'écrire l'équation de la dynamique à l'instant t_{i+1} , la méthode HHT propose de l'écrire en fonction des quantités de déplacement et de vitesse aux instants t_i et t_{i+1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}^{i+1} + (1-\alpha)\left(\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{X}^{i+1}\right) + \alpha\left(\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^i + \mathbf{K}\mathbf{X}^i\right) \\ = (1-\alpha)\left(\mathbf{F}_{ext}^{i+1} + \mathbf{F}_{NL}^{i+1}\right) + \alpha\left(\mathbf{F}_{ext}^i + \mathbf{F}_{NL}^i\right) \end{aligned} \quad (1.50)$$

Nous remarquons que le choix $\alpha = 0$ se ramène au schéma de Newmark. L'introduction du paramètre α permet d'obtenir des schémas inconditionnellement stables avec les valeurs suivante : $\alpha \in [0; 1/3]$, $\gamma = 1/2 + \alpha$ et $\beta = 1/4(1 + \alpha)^2$. L'avantage de ce schéma HHT est qu'il reste précis tout en limitant l'amortissement numérique pour les basses fréquences, cependant il est implicite.

- **Schéma explicite de Chung-Lee**

Nous présentons maintenant un schéma explicite du second ordre, proposé par Chung et Lee [30]. Il est également basé sur la quadrature de déplacements et de vitesses de Newmark donnés par les relations 1.48 et impose le choix du paramètre $\gamma = -1/2$. il reste donc un seul paramètre à choisir tel que $1 \leq \beta \leq 28/27$. La stabilité de ce schéma est conditionnelle et elle dépend du pas de temps d'intégration qui doit être suffisamment petit, ainsi que des fréquences propres du système dynamique.

L'accélération au pas de temps t_{i+1} est alors donnée par l'expression suivante :

$$\ddot{\mathbf{X}}^{i+1} = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{F}_{ext}^i + \mathbf{F}_{NL}^i - \mathbf{K}\mathbf{X}^i - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^i\right) \quad (1.51)$$

Les déplacements et les vitesses à l'instant t_{i+1} sont alors mises à jour à l'aide des relations de quadrature 1.48. Ce schéma implicite ne nécessite donc pas la résolution d'un système non-linéaire à chaque pas de temps, ce qui accélère beaucoup la vitesse de calcul des itérations temporelles, cependant afin de s'assurer d'une bonne convergence de la solution il est nécessaire de choisir un pas de temps très petit et donc de réaliser un grand nombre d'itérations.

Choix du pas de temps

Le choix du pas de temps pour un calcul d'intégration temporelle est souvent délicat. Deux solutions sont alors envisageables : celle d'un pas de temps constant sur toute la durée de l'intégration temporelle ou alors d'ajouter un schéma de pas de temps adaptatif en plus du schéma numérique d'intégration.

Le choix le plus simple est d'utiliser un pas de temps constant h . Dans le cas où le schéma choisi est conditionnellement stable il doit alors être pris suffisamment petit pour assurer la stabilité de la solution approximée.

Cependant, dans certaines situations la condition de stabilité impose un pas de temps extrêmement petit, ce qui peut amener à des temps de calculs relativement importants. La condition de stabilité est estimée à partir de l'équation différentielle et du schéma d'intégration choisi. Cette condition est calibrée au pire cas, c'est à dire pour le voisinage de l'espace des phases où la solution varie le plus rapidement. Or, pour d'autres voisinages de l'espace des phases, la condition de stabilité locale est moins contraignante et peut permettre un pas de temps d'intégration plus gros car la solution varie plus lentement.

Il est alors possible par des algorithmes de modifier le pas de temps h_i au cours de l'intégration temporelle afin d'accélérer la vitesse du calcul. La méthode d'extrapolation de Richardson [12] compare les résultats de deux intégrations à des pas de temps différents afin de sélectionner une combinaison optimale des deux. Les méthodes de prédiction-corrrection [60] permettent également d'adapter le pas de temps en extrapolant la solution au pas de temps suivant à partir des grandeurs connues puis en le corrigeant à partir d'une estimation de l'erreur. Le pas de temps évolue, dans les situations où la solution varie peu localement le pas de temps peut être grossi, alors qu'il est diminué dans le cas de forts gradients de la solution.

1.6.2 Calcul du régime stationnaire

Lorsque le régime établi est atteint, la réponse dynamique associée aux vibrations est périodique ou quasi-périodique. Il existe des techniques permettant d'obtenir uniquement ces solutions stationnaires sans avoir à calculer tout le régime transitoire. L'objectif global de ces méthodes est de projeter la solution sur une famille de fonctions trigonométriques. Nous présentons deux de ces méthodes, la méthode de la balance harmonique (HBM) ainsi que la méthode de tir.

Méthode de la balance harmonique

La méthode de la balance harmonique dans le cas périodique consiste à supposer une décomposition de la solution \mathbf{X} a priori sur une famille de fonctions de Fourier de la forme suivante, avec ω la pulsation associée à la période T_{per} et N_h le nombre d'harmoniques conservées :

$$\mathbf{X}(t) \approx \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{a}_k^{per} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{b}_k^{per} \sin(k\omega t) \quad (1.52)$$

Les coefficients \mathbf{a}_k^{per} et \mathbf{b}_k^{per} de la décomposition de \mathbf{X} peuvent se rassembler sous la forme compacte $\tilde{\mathbf{z}}$ suivante :

$$\tilde{\mathbf{z}} = [\mathbf{a}_0^{per} \quad \mathbf{a}_1^{per} \quad \mathbf{b}_1^{per} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{N_h}^{per} \quad \mathbf{b}_{N_h}^{per}]^t \quad (1.53)$$

Les efforts non-linéaires \mathbf{F}_{NL} et extérieurs \mathbf{F}_{ext} sont également projetés sur cette même famille

de fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) &\approx \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{c}_k^{per} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{d}_k^{per} \sin(k\omega t) \\ \mathbf{F}_{ext} &\approx \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{e}_k^{per} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{f}_k^{per} \sin(k\omega t)\end{aligned}\tag{1.54}$$

L'équation matricielle donnant les coefficients vectoriels $\tilde{\mathbf{z}}$ de la décomposition de \mathbf{X} est la suivante :

$$\mathbf{A}(\omega)\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{F}}_{NL}(\tilde{\mathbf{z}}) - \tilde{\mathbf{F}}_{ext} = \mathbf{0}\tag{1.55}$$

Les vecteurs $\tilde{\mathbf{F}}_{NL}(\tilde{\mathbf{z}})$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{ext}$ sont une concaténation des coefficients de leurs décomposition de Fourier \mathbf{c}_k^{per} et \mathbf{d}_k^{per} d'une part et \mathbf{e}_k^{per} et \mathbf{f}_k^{per} d'autre part, de la même façon que pour $\tilde{\mathbf{z}}$. La matrice $\mathbf{A}(\omega)$ est diagonale par blocs :

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & & & \\ & \mathbf{A}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{N_h} \end{pmatrix}\tag{1.56}$$

$$\text{avec, } \forall k \in \llbracket 1; N_h \rrbracket, \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & k\omega \mathbf{C} \\ -k\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{pmatrix}$$

La difficulté principale est d'exprimer les coefficients de $\tilde{\mathbf{F}}_{NL}$ en fonction de $\tilde{\mathbf{z}}$. L'une des méthodes principales est une technique AFT (alternance temps-fréquence) qui commence par exprimer dans le domaine temporel le vecteur \mathbf{X} afin de pouvoir calculer \mathbf{F}_{NL} et ensuite en extraire les coefficients \mathbf{c}_k^{per} et \mathbf{d}_k^{per} par transformée de Fourier. En général les méthodes de résolution de l'Equation 1.55 sont itératives, ce qui nécessite plusieurs allers-retours entre les domaines temporels et fréquentiels, d'où le nom de la méthode. La précision de la méthode dépend du paramètre de troncature N_h et la méthode n'est pas adaptée aux non-linéarités fortes ou aux problèmes très raides, comme cela peut être le cas avec des lois non-régulières. Coudeyras [31–33] a proposé une extension de cette méthode de balance harmonique au cas multi-instable et donc pseudo-périodique, puis une version modifiée de cette méthode appelée balance harmonique sous contrainte (CHBM) prenant en compte la pulsation ω comme inconnue et rajoutant des contraintes afin de forcer la solution de l'algorithme à se situer sur le cycle limite et pas sur la position d'équilibre statique comme c'est parfois le cas avec la version initiale de la balance harmonique. Cette extension CHBM permet de trouver la solution stationnaire de systèmes auto-entretenus.

Méthode de tir

La méthode de tir est une méthode itérative où le cycle limite est calculé par intégration temporelle sur une période du signal seulement. L'objectif de la méthode est de satisfaire à la condition de périodicité :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t + T_{per})\tag{1.57}$$

Si cette condition n'est pas remplie, la condition initiale ainsi que la période du cycle limite sont ajustés et une intégration temporelle est de nouveau lancée sur un nouveau cycle. Charroyer [25] applique cette méthode au cas d'un système crissant mono-instable avec la θ -méthode adaptée au cas non-régulier. L'inconvénient de cette méthode est le choix de son initialisation car elle risque de ne pas converger si les conditions initiales sont trop éloignées de la solution.

Elle nécessite également le calcul de dérivées pour estimer la correction en période et en condition initiale à chaque itération, et leurs estimations peuvent être complexes dans le cas de lois non-régulières, ce qui n'est pas le cas avec la méthode de balance harmonique.

1.7 Acoustique des systèmes vibrants

La suite logique de l'étude des systèmes vibrants est la prédiction du rayonnement acoustique associé. En effet, l'une des principale manifestation des systèmes de frein soumis au phénomène de crissement est le bruit intense perçu par les usagers. L'étude acoustique des vibrations de crissement d'un système numérique est récente et peu de travaux s'y sont pour le moment intéressés [93, 127].

La vibration d'une structure peut alors se transmettre au fluide dans lequel elle est plongée et ainsi générer une onde de pression qui se propage dans ce fluide. L'étude acoustique des systèmes vibrants peut se décomposer en trois parties, l'étude à basse fréquence, l'étude des moyennes fréquences puis celle des hautes fréquences.

A basse fréquence, la vibration de la structure est caractérisée par un nombre discret et dénombrable de modes qui ne se recouvrent pas. Des méthodes déterministes sont alors utilisées. Aux hautes fréquences la densité modale de la structure augmente et les modes tendent à se recouvrir, les méthodes modales déterministes ne sont plus adaptées à l'étude vibroacoustique du système. Il est alors nécessaire d'employer des méthodes statistiques comme la SEA (Statistical Energy Analysis) afin d'estimer le bruit rayonné. Cette méthode estime les transferts d'énergie entre les différentes parties de la structure par bandes fréquentielles et se base sur une étude de flux de puissance [103]. L'étude des moyennes fréquences peut se faire par des méthodes dérivées de la SEA.

Nous nous plaçons dans la suite de cette étude sous l'hypothèse d'une étude basse fréquence, c'est à dire dans des régimes de vibrations où les modes propres de la structure ne se recouvrent pas. L'équation de propagation des ondes de pression P en champ libre est celle de d'Alembert, avec c la vitesse de propagation des ondes dans le fluide :

$$\Delta P(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) \quad (1.58)$$

Le champ acoustique est créé par une onde de pression qui se propage dans un fluide, dans le cas qui nous intéresse de l'air. Les sources acoustiques sont caractérisées par des variations locales de débit de fluide, qui en pratique sont souvent causées par des vibrations de paroi solide. L'objectif de l'étude acoustique est le calcul de la variation du champ de pression autour de la pression ambiante et deux situations se distinguent, le cas d'un environnement clos et donc associé à un problème interne où la paroi vibrante excite le fluide qu'elle contient, et le cas d'un milieu ouvert et donc considéré comme infini associé au problème externe où un objet rayonne un champ acoustique vers l'extérieur.

Il existe plusieurs types de formulations mathématiques permettant d'écrire les équations de l'acoustique couplées aux équations de la mécanique. Nous choisissons dans notre étude de nous limiter à une formulation de type (\mathbf{X}, P) , c'est à dire en déplacement pour la structure et en pression pour l'acoustique. Deux cas de figure se distinguent alors pour l'étude des problèmes acoustiques, le problème interne associé à un fluide confiné à l'intérieur d'une structure et le problème externe où le système vibrant est plongé dans un milieu fluide considéré comme infini.

1.7.1 Problème interne

L'étude des problèmes acoustiques en basse fréquence appliquée au milieux confinés constitue le problème interne. Dans cette situation le volume de fluide dans lequel se propagent les

ondes acoustiques est fini et la méthode des Éléments Finis est principalement utilisée pour le discrétiser et résoudre le problème.

Les conditions aux limites associées au problème acoustique sont de trois sortes, de telle façon que la surface Σ du solide soit totalement séparée en trois ensemble disjoints Σ_D , Σ_N et Σ_R :

- Condition de Dirichlet : la pression est imposée : $P = P_D$ sur Σ_D
- Condition de Neumann : la variation de la pression par rapport à la normale locale à la surface est proportionnelle à la vitesse normale v_n de la paroi : $\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = -j\omega\rho v_n$ sur Σ_N . Cette loi est dépendante de la fréquence ω est entraîne donc l'obtention d'approches harmoniques. Cette condition est l'une des plus utilisées car elle permet de modéliser l'acoustique d'un système vibrant dont nous connaissons la vitesse surfacique.
- Condition de Robin : la variation de la pression par rapport à la normale est reliée à la pression par un facteur d'impédance Z : $\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = -j\omega\rho \frac{P}{Z}$ sur Σ_R . Cette loi est utilisée pour modéliser l'absorption acoustique de la paroi.

Nous pouvons distinguer plusieurs types de couplages avec les parois entre la mécanique du solide et les vibrations fluides. Un couplage faible, principalement utilisé avec des fluides légers, considère uniquement l'action du solide vers le fluide. Dans cette situation les mouvement mécaniques peuvent être déterminés en amont avant de les utiliser comme données d'entrée pour le calcul acoustique. Un couplage fort prend également en compte une action du fluide sur le solide, ce qui introduit un couplage entre la mécanique et l'acoustique et impose une résolution simultanée des deux problèmes.

1.7.2 Problème externe

L'étude d'un problème de propagation acoustique dans un milieu considéré comme infini doit s'accompagner d'une condition supplémentaire qui est la condition de Sommerfeld. Cette hypothèse suppose que l'énergie du champ acoustique décroît à mesure que nous nous éloignons du système vibrant et permet l'absence de réflexions provenant de l'infini.

Le développement des équations de l'acoustique dans le cadre de la condition de Sommerfeld nous amène à l'écriture de l'équation intégrale de Helmholtz-Kirchhoff. La méthode numérique qui est la plus adaptée à la résolution de ce problème est alors celle des Éléments Finis de Frontière (BEM ou Boundary Element Method), en effet elle devient la plus intéressante lorsque des volumes infinis de fluide entrent en jeu. La méthode ne nécessite que seule la surface de la structure vibrante soit maillée, ce qui évite de traiter le volume de fluide, quel que soit sa taille. Le calcul du champ extérieur est alors effectué en deux étapes, la première est l'estimation de la pression sur la surface vibrante, puis le champ acoustique peut être calculé en tout point de l'espace. Cependant cette méthode est harmonique et elle nécessite quelques développements supplémentaires afin de traiter tout signal vibratoire. Les matrices obtenues par la discrétisation sont pleines, et le calcul de certaines intégrales est délicat à cause de la présence de singularité pour l'intégrande. Une description plus détaillée de cette méthode et de ses principaux développements sera faite au Chapitre 5.

D'autres méthodes alternatives basées sur la méthode des Éléments finis peuvent néanmoins être utilisées pour résoudre le problème extérieur. Cependant elle doivent être modifiée pour éviter le problème du domaine de fluide infini non borné. Des techniques particulières peuvent être employées :

- Méthode PML (Perfectly Matched Layers) [96, 138] : avec cette approche le volume fluide est maillé sur un volume assez grand autour de la source solide vibrante. A la frontière extérieure du maillage fluide, une couche d'éléments absorbants est placée afin d'éviter la réflexion des ondes de pression et de simuler la condition de Sommerfeld. La méthode de la PML permet dans le cas discrétisé d'atténuer fortement les ondes incidentes à la frontière du maillage mais admettra néanmoins une légère réflexion.

- Eléments Finis infinis [11] : de la même façon que pour la PML, une couche d'éléments spéciaux peut être placée à la frontière du maillage fluide. Dans ce cas, le Eléments Finis infinis permettent de simuler le comportement asymptotique de la propagation au delà de la frontière du maillage.

1.8 Conclusion

Le phénomène de crissement a été intensivement étudié par le passé à la fois expérimentalement et numériquement et de nombreuses approches ont tenté de le modéliser afin de le simuler. L'analyse de stabilité est habituellement l'approche la plus classique pour étudier l'apparition du crissement et il est aujourd'hui largement admis qu'il est dû à une instabilité par couplage de modes. En amont de la simulation, la modélisation du système mécanique et le choix de la loi de contact et de frottement est un choix déterminant et parfois délicat.

L'approche qui est retenue dans ces travaux est celle classiquement utilisée en ingénierie. Dans un premier temps une étude expérimentale sur un banc d'essai dédié au crissement est menée, ce qui permet de faire un ensemble d'hypothèses de modélisation pour un modèle numérique. Puis un modèle est construit en cherchant à respecter au plus près les observations effectuées précédemment. Des techniques de réduction lui sont appliquées afin de pouvoir effectuer des simulations rapides et une étude de la convergence de ces réductions est menée sur l'analyse de stabilité du modèle.

Cependant il a été observé que l'étude de stabilité n'est pas suffisante pour prédire le crissement et qu'il est nécessaire de simuler la réponse temporelle du système pour avoir une estimation des niveaux maximaux de vibration [146]. Les approches concernant les schémas d'intégration sont là encore très nombreuses et le choix d'une méthode doit obéir aux contraintes du modèle. Des simulations transitoires sont alors menées sur le modèle et l'impact des réductions est là encore évalué.

L'étude acoustique qui vient à la suite de la simulation temporelle a été beaucoup moins abordée par le passé, notamment à cause des importants coûts de calcul déjà nécessaires pour la simulation temporelle. L'estimation du champ acoustique émis par le modèle est effectuée et des critères de comparaison sont là encore utilisés afin d'estimer la convergence des bases de réduction pour l'acoustique.

Chapitre 2

Analyse expérimentale, banc FIVE@ECL

Sommaire

2.1	Banc expérimental FIVE@ECL	52
2.1.1	Architecture et description du banc	52
2.1.2	Instrumentation et acquisition	54
2.2	Analyse et caractérisation du système couplé non tournant	59
2.3	Analyse d'un essai de crissement de référence	59
2.3.1	Protocole	59
2.3.2	Evolution du coefficient de frottement	60
2.3.3	Analyse de la signature temporelle	61
2.3.4	Analyse fréquentielle	63
2.4	Etudes d'influence des paramètres opérationnels sur le crissement	68
2.4.1	Description du protocole d'essais	68
2.4.2	Répétabilité des essais	68
2.4.3	Influence de certains paramètres physiques	70
2.5	Conclusions expérimentales pour la modélisation	83

Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons d'effectuer une étude expérimentale du crissement de frein. Le principal objectif est d'analyser et comprendre les phénomènes physiques mis en jeu lors de l'apparition du crissement et d'apporter des éléments d'observation pour proposer et valider des choix de modélisation de ce phénomène. Les travaux expérimentaux sont effectués sur le banc d'essais Friction-Induced Vibration and Noise @ Ecole Centrale de Lyon (FIVE@ECL) qui est un moyen d'essai entièrement conçu et développé au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon [149, 150] pour l'étude expérimentale du crissement. Dans ce qui suit, le banc d'essais et les moyens de mesure associés sont tout d'abord décrits. Le protocole expérimental retenu pour la campagne d'essais est ensuite expliqué. Dans un troisième temps, une analyse complète des résultats expérimentaux est effectuée. L'impact sur les occurrences et les niveaux de crissement de plusieurs paramètres de contrôle ou subis comme l'usure, la pression de freinage ou la vitesse de rotation est plus particulièrement étudié. Finalement nous établissons à partir de cette analyse expérimentale un ensemble d'hypothèses de modélisation nécessaires pour reproduire par la simulation numérique le phénomène de crissement.

2.1 Banc expérimental FIVE@ECL

2.1.1 Architecture et description du banc

Le parti pris lors de la conception de ce banc consiste à étudier le crissement en considérant la dynamique globale du système soumis à des vibrations auto-entretenues, et non pas du point de vue de la tribologie et de l'observation fine des interfaces de contact. Le banc a été conçu pour se concentrer sur les vibrations des éléments d'un système de frein en situation de crissement qui sont considérés comme ayant une contribution majeure au phénomène : le disque, les plaquettes et l'étrier. Il est donc essentiel que les supports de chacune de ces structures n'influencent pas la dynamique du système et n'introduisent pas de couplages indésirables. Les supports de la partie tournante (le disque) et des parties fixes (étrier et plaquettes) sont par conséquent des supports rigides, massifs et sans interconnexions. Le disque est supporté, par l'intermédiaire d'un arbre et deux roulements à billes, par une structure formée de poutres à section en I rigides et d'une plaque de support verticale, tandis que l'étrier est maintenu par une pièce massive appelée "pyramide". Chacun de ces supports est directement fixé au bâti de béton. Un moteur, lui aussi monté sur un support indépendant, entraîne par une courroie crantée un arbre sur lequel est positionné un disque d'inertie. Le disque de frein est fixé à l'arbre de rotation par un accouplement conique. L'étrier est monté fixe sur la structure "pyramide". On peut noter également que la plaque de support est recouverte d'un matériau fait d'une couche viscoélastique et de mousse pour venir en absorber les vibrations parasites causées par le moteur et le système d'entraînement. La Figure 2.1 donne une vue schématique de la structure mécanique de support sans les éléments du système de frein. La Figure 2.2 illustre le banc FIVE@ECL avec le système de frein monté.

Le design du banc et son dimensionnement ont été prévus pour deux types de freinage :

- un freinage classique avec une diminution de la vitesse de rotation jusqu'à l'arrêt du disque, ce qui correspond à un événement de freinage réel,
- un freinage à vitesse de rotation du disque constante.

Nous ne nous intéresserons dans notre étude qu'au second type de freinage, à vitesse de rotation constante.

En ce qui concerne le système de frein, composé d'un étrier, de plaquettes et d'un disque, il présente les caractéristiques suivantes :

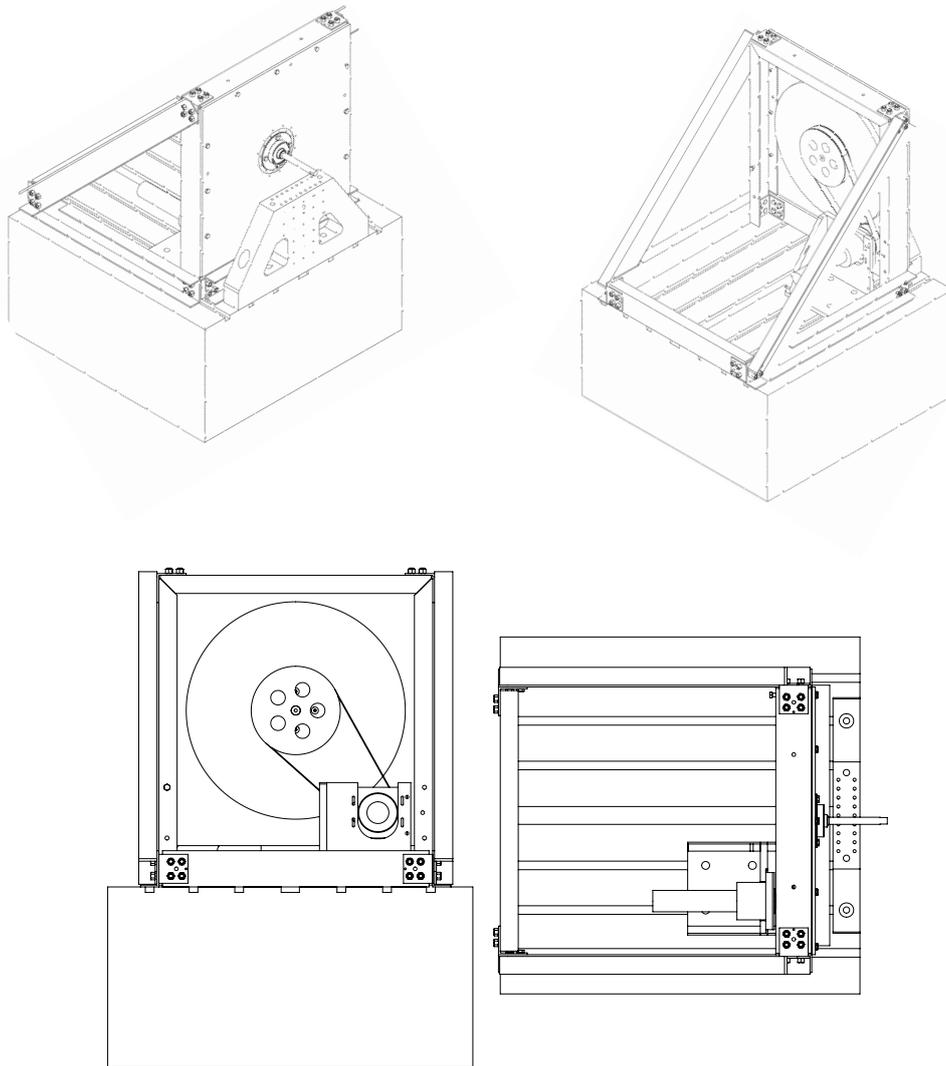


FIGURE 2.1 – Vue schématique du banc Friction-Induced Vibration and noise at Ecole Centrale de Lyon (FIVE@ECL) sans le disque, l'étrier et les deux plaquettes.

- Le disque est plein, en acier X2CrNi18-9 et de $0.16m$ de diamètre extérieur, $0.034m$ de diamètre intérieur et $0.002m$ d'épaisseur. Sa masse volumique est de $7900kg.m^{-3}$ et son module d'Young est de $200GPa$ à $20^{\circ}C$. Sans son accouplement conique il pèse $0.2kg$. La Figure 2.3 illustre le disque utilisé pendant les essais.
- L'étrier provient du commerce (marque Shimano) et de référence XT M785. Il est composé d'un étrier monobloc forgé portant deux pistons opposés en céramique de $22mm$ de diamètre. Il pèse $0.12kg$.
- Les deux plaquettes proviennent également du commerce (fabricant Shimano) et sont de la référence F03C. Chaque plaquette a une aire de friction d'environ $3.9, 10^{-4}m^2$. Elles sont composées d'un support plaquette en aluminium de $2mm$ d'épaisseur à laquelle est collée une épaisseur de $2mm$ de matériau de abrasable. La Figure 2.4 illustre un couple de plaquettes, celle de gauche qui est la plaquette extérieure, est munie d'un thermocouple afin de permettre un contrôle de la température au plus près des plaquettes de frein. Son utilité sera expliquée de façon plus détaillée par la suite. L'autre plaquette est nommée plaquette intérieure et est située du côté de la plaque de support.

La pression de freinage est appliquée par une pompe hydraulique manuelle et peut atteindre

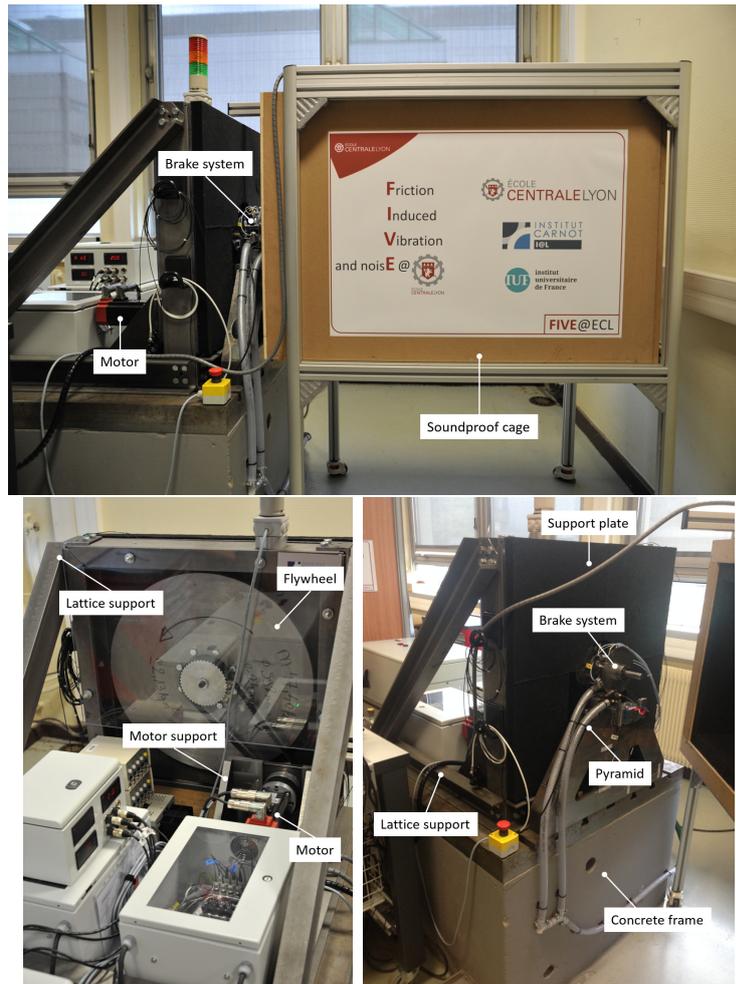


FIGURE 2.2 – Banc FIVE@ECL

15 bars. Lors de la mise en pression et de la réalisation d'un freinage, les pistons de l'étrier se déplacent et entraînent les plaquettes du système de freinage qui viennent ainsi pincer le disque.

Plusieurs choix concernant les conditions d'opération du banc ont été arrêtés. Premièrement les essais sont menés sur un système sec sans système de lubrification au niveau des disque/plaquettes. Ensuite, un monitoring de la température de l'interface est réalisé grâce à un thermocouple collé sur le support plaquette d'une des deux plaquettes. Si la température dépasse 75°C au niveau du thermocouple lors d'un essai, une procédure d'urgence ramène le système à l'arrêt rapidement, afin d'éviter d'endommager les différents capteurs et systèmes d'acquisition. Enfin un système d'aspiration évacuant les débris éjectés par les deux interfaces disque/plaquette lors d'un freinage et de refroidir plus rapidement le système entre deux essais est présent. Il n'est pas en fonctionnement lors d'un essai de freinage afin d'éviter le bruit additionnel propre généré par ce système.

2.1.2 Instrumentation et acquisition

Le banc est instrumenté par un ensemble de capteurs de différents types : accéléromètres, capteurs de proximité, microphones, sonde de pression, thermocouple, couplemètre et capteur de vitesse. Ils permettent l'acquisition des vibrations et des déplacements des pièces du système de frein ainsi que des paramètres de contrôle. La liste détaillée de l'ensemble des capteurs est la suivante :

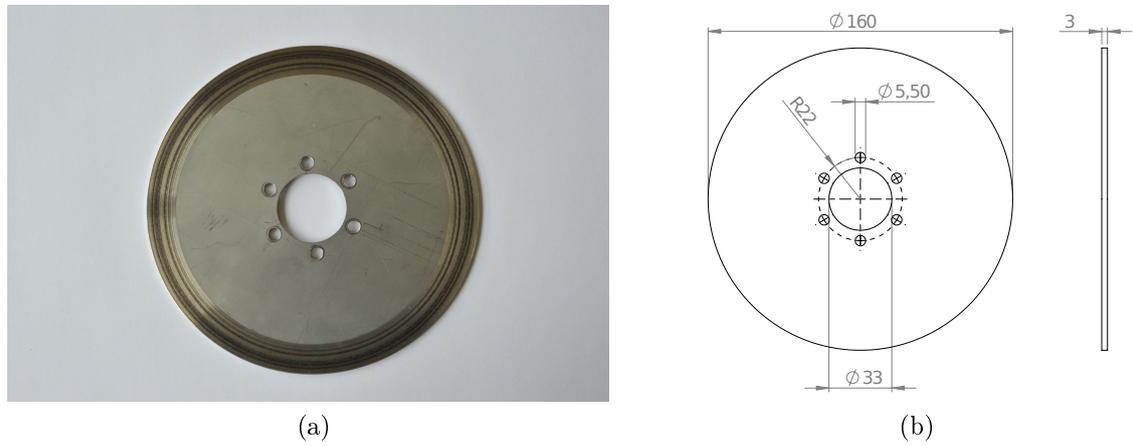


FIGURE 2.3 – Disque en acier utilisé lors des essais, (a) photo du disque, (b) schéma du disque

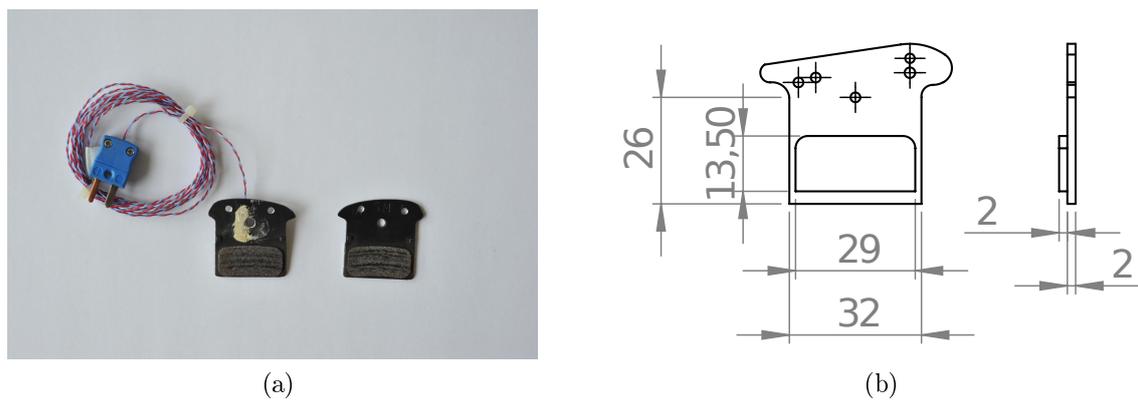


FIGURE 2.4 – Couple de plaquettes F03C, (a) photo des plaquettes, (b) schéma d'une plaquette

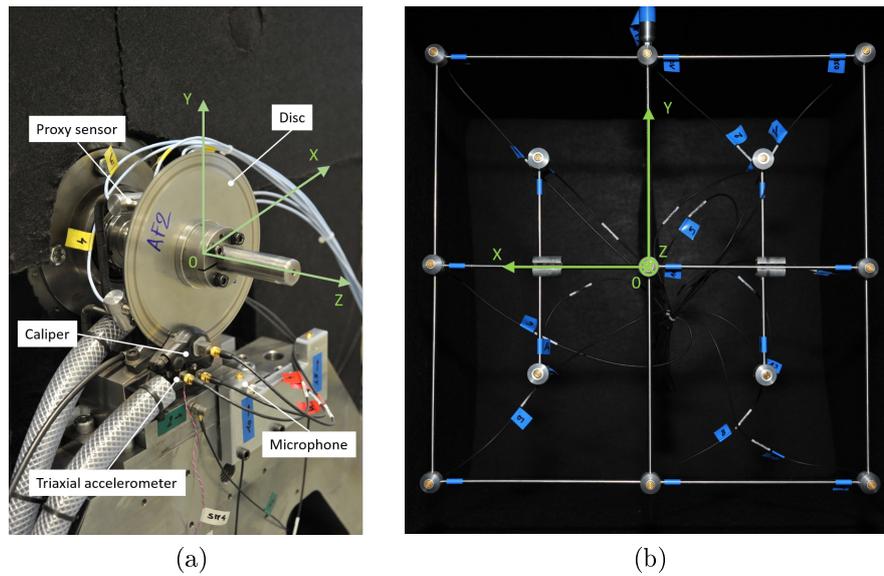


FIGURE 2.5 – Moyens de mesure expérimentaux sur le banc

- cinq accéléromètres triaxiaux Piézo-électriques à électronique intégrée (IEPE). Ces capteurs mesurent les accélérations dans les 3 directions de l'espace. Deux sont collés sur chaque plaquette au niveau du support plaquette. Le cinquième est collé sur l'étrier. Ces accéléromètres sont particulièrement légers (moins de $3g$). L'intervalle de température admissible pour ces capteurs se situe entre $[-51; +121]^{\circ}C$ (Ref. Brüel & Kjær Miniature Triaxial DeltaTron@Accelerometer - Type 4520)
- quatre accéléromètres monoaxes montés sur différentes parties de la structure de support. Ils mesurent les vibrations qui transitent dans les parties des différents supports rigides afin de vérifier que le phénomène de crissement n'est pas "parasité" par des transmissions ou couplages de vibrations des supports. (Ref. Brüel & Kjær Miniature Triaxial DeltaTron@Accelerometer - Type 4397A)
- quinze microphones pré-polarisés adaptés à la mesure non-stationnaire sont également répartis sur le banc. Deux sont montés sur le support rigide "pyramide", proches du système de frein et réalisent des mesures en champ proche. Les treize autres sont disposés sur une antenne acoustique illustrée Figure 2.5, qui est elle-même installée dans une cage acoustique insonorisée par une couche de mousse et de matériau viscoélastique de sorte à réduire au maximum les interférences et les réflexions parasites comme illustré en Figure 2.2. Cette antenne est placée à une distance de $0.3m$ du disque de frein et permet d'effectuer des mesures en champ lointain. (Ref. Brüel & Kjær 20kHz Prevision Array Microphone -Type 4958)
- six capteurs de proximité sont utilisés pour effectuer des mesures sur les parties tournantes du banc. Ce sont des capteurs inductifs qui permettent une mesure sans contact des déplacements du disque et de l'arbre. Quatre de ces capteurs sont disposés uniformément sur la circonférence du disque et mesurent le déplacement statique et les vibrations dans la direction normale de celui ci. Ils sont installés du côté de la plaque de support pour éviter d'interférer avec la mesure du champ acoustique. Les deux autres mesurent les déplacements de l'arbre dans les directions horizontale et verticale. (Ref. Bently Nevada 3300 XL NSv)

Il a été vérifié que la présence des capteurs, en particulier l'ajout des accéléromètres sur les plaquettes ne vient pas modifier la dynamique globale du système de frein ainsi que le phénomène de crissement à proprement parler. Les quatre accéléromètres monoaxes ainsi que les deux capteurs de proximité installés sur l'arbre sont utilisés afin de vérifier que le phénomène de crisse-

ment et les vibrations associées se focalisent au niveau du système "disque/plaquette/étrier" et que par conséquent les vibrations observées sur les supports et l'arbre sont négligeables. Ces mesures ne sont donc pas traitées dans la suite de la thèse pour l'analyse des essais de crissement.

Finalement, quatre autres quantités physiques qui correspondent aux paramètres de contrôle du banc d'essai sont également mesurés :

- la pression de freinage, qui est la pression normale appliquée au dos de chaque plaquette,
- la vitesse de rotation du disque,
- le couple moteur,
- la température au dos de la plaquette extérieure avec le thermocouple.

La liste complète des voies de mesure ainsi que le positionnement des capteurs associés est donnée dans la Table 2.1. Le système de coordonnées global pour les accéléromètres est celui associée au repère fixe dont l'origine est le centre du disque (comme indiqué Figure 2.5).

Toutes les acquisitions de signal sur l'ensemble de ces capteurs sont réalisées à l'aide d'une plateforme hardware dédiée. Elle permet la synchronisation et le transfert de toutes les entrées vers un PC où un logiciel développé spécifiquement sous Matlab permet de traiter et sauvegarder les données expérimentales. La fréquence d'échantillonnage a été fixée à $25600S.s^{-1}$ sur chaque voie avec une résolution de 24 bit. Cela permet d'obtenir des résultats exploitables jusqu'à $10kHz$ sur les mesures acoustiques et de vibration, dans la limite des caractéristiques propres à chaque capteur.

Num	Nom	Unité	Composant	Xpos (mm)	Ypos (mm)	Zpos (mm)	Repère global	Repère local
1	TriAxe.1.X	g	Pad Intérieur	-45	-90	-10	-Z	X ₁
2	TriAxe.1.Y	g	Pad Intérieur	-45	-90	-10	XY	Y ₁
3	TriAxe.1.Z	g	Pad Intérieur	-45	-90	-10	XY	Z ₁
4	TriAxe.2.X	g	Pad Intérieur	-25	-100	-10	-Z	X ₂
5	TriAxe.2.Y	g	Pad Intérieur	-25	-100	-10	XY	Y ₂
6	TriAxe.2.Z	g	Pad Intérieur	-25	-100	-10	XY	Z ₂
7	TriAxe.3.X	g	Pad Extérieur	-25	-100	10	+Z	X ₃
8	TriAxe.3.Y	g	Pad Extérieur	-25	-100	10	XY	Y ₃
9	TriAxe.3.Z	g	Pad Extérieur	-25	-100	10	XY	Z ₃
10	TriAxe.4.X	g	Pad Extérieur	-45	-90	10	+Z	X ₄
11	TriAxe.4.Y	g	Pad Extérieur	-45	-90	10	XY	Y ₄
12	TriAxe.4.Z	g	Pad Extérieur	-45	-90	10	XY	Z ₄
13	TriAxe.5.X	g	Etrier	-25	-70	20	+Z	X ₅
14	TriAxe.5.Y	g	Etrier	-25	-70	20	+Y	Y ₅
15	TriAxe.5.Z	g	Etrier	-25	-70	20	-X	Z ₅
16	Micro.1	Pa	Antenne (FF)	-200	-200	330	-	-
17	Micro.2	Pa	Antenne (FF)	0	200	330	-	-
18	Micro.3	Pa	Antenne (FF)	200	200	330	-	-
19	Micro.4	Pa	Antenne (FF)	-200	0	330	-	-
20	Micro.5	Pa	Antenne (FF)	0	0	330	-	-
21	Micro.6	Pa	Antenne (FF)	200	0	330	-	-
22	Micro.7	Pa	Antenne (FF)	-200	-200	330	-	-
23	Micro.8	Pa	Antenne (FF)	0	-200	330	-	-
24	Micro.9	Pa	Antenne (FF)	200	-200	330	-	-
25	Micro.10	Pa	Pyramide (NF)	10	-110	30	-	-
26	Micro.11	Pa	Antenne (FF)	-100	100	330	-	-
27	Micro.12	Pa	Antenne (FF)	100	100	330	-	-
28	Micro.13	Pa	Antenne (FF)	-100	-100	330	-	-
29	Micro.14	Pa	Antenne (FF)	100	-100	330	-	-
30	Micro.15	Pa	Pyramide (NF)	110	-110	30	-	-
31	Proxy.1	mm	Disque	64	-38	0	+Z	-
32	Proxy.2	mm	Disque	37	64	0	+Z	-
33	Proxy.3	mm	Disque	-49	57	0	+Z	-
34	Proxy.4	mm	Disque	-71	-26	0	+Z	-
35	Vitesse rotation	rpm	-	-	-	-	-	-
36	Couple	Nm	-	-	-	-	-	-
37	Pression de freinage	bar	-	-	-	-	-	-
38	Température	°C	-	-	-	-	-	-

TABLEAU 2.1 – Liste des moyens de mesure : numéro de voie et position de chaque capteur (FF : Far Field ; NF : Near Field)

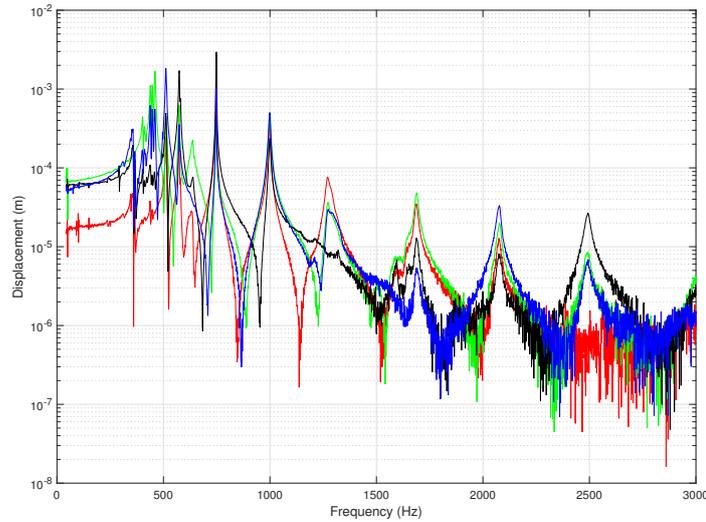


FIGURE 2.6 – Réponse impulsionnelle et pics de résonance du système couplé statique : noir=*Proxy.1*, vert=*Proxy.2*, bleu=*Proxy.3*, rouge=*Proxy.4*

2.2 Analyse et caractérisation du système couplé non tournant

Avant d’effectuer des analyses dédiées aux phénomènes de crissement, il est intéressant de pouvoir caractériser la signature vibratoire du système couplé à l’arrêt lors de l’application d’une pression de freinage comme préconisé dans [7, 54, 112, 150]. Les plaquettes et le disque sont alors en contact et la seule réaction aux interfaces est normale, la composante de frottement tangentielle n’existe pas. Cette procédure permet d’obtenir des informations sur la dynamique du système complet non tournant, en particulier de connaître les fréquences de résonance du système frottant non tournant. L’intérêt majeur d’une telle étude préliminaire réside également dans le fait de pouvoir par la suite analyser la signature vibratoire du système lors d’un freinage en s’appuyant sur les résultats de cette étude préliminaire.

L’essai expérimental dédié correspond à un essai d’analyse modale classique. L’excitation est réalisée à l’aide d’un marteau de choc et pour plusieurs valeurs d’application de la pression et de position de l’excitation.

La Figure 2.6 illustre les réponses impulsionnelles pour chacun des quatre capteurs de proximité du disque en considérant quatre essais spécifiques pour lesquels l’excitation est réalisée à la position du capteur observé ceci afin de retrouver la notion de colocalisation et de bien faire ressortir visuellement chaque pic de résonance. Les fréquences du système identifiées sur l’intervalle $[100; 3000] Hz$ sont $440 Hz$, $450 Hz$, $460 Hz$, $510 Hz$, $575 Hz$, $635 Hz$, $750 Hz$, $1000 Hz$, $1270 Hz$, $1690 Hz$, $2080 Hz$ et $2500 Hz$.

2.3 Analyse d’un essai de crissement de référence

2.3.1 Protocole

Dans cette section nous présentons l’analyse d’un essai caractéristique du phénomène de crissement. L’objectif est de présenter les caractéristiques générales de la signature vibratoire et acoustique du phénomène de crissement associé au système disque/plaquette utilisé lors de l’ensemble des essais expérimentaux. Ces premiers résultats serviront de base pour l’analyse

plus complexe des tendances en fonction de l'évolution de différents paramètres opératoires. L'essai sélectionné provient d'une des campagnes d'essais sur le montage déjà rodé (afin de ne pas mettre en avant des phénomènes liés à l'aspect non usé du système de frein). Nous cherchons dans ce qui suit à donner les principales tendances associées au crissement. Concernant les conditions de fonctionnement la vitesse de rotation est fixée à 200 rotations par minute (rpm) et la pression de freinage est de 7 bars, le temps total d'acquisition est de 20 secondes. Le protocole d'essai et de montée en pression est le suivant :

- Mise en rotation du disque à 200 rpm,
- Lancement de l'acquisition sur le PC de contrôle,
- Attente de 5 secondes avant l'application du freinage,
- Montée en pression avec la pompe hydraulique jusqu'à la valeur de pression de consigne, cette phase prenant 2 à 3 secondes,
- Poursuite de l'acquisition jusqu'à la fin des 20 secondes d'essai.

La phase initiale de 5s permet d'obtenir les niveaux vibratoires et acoustiques présents sur le banc en rotation sans freinage, et ainsi d'analyser la signature du banc en rotation et par conséquent d'éliminer lors de l'analyse des essais les comportements vibratoires non imputables au phénomène de crissement.

La Figure 2.7 donne l'évolution temporelle sur les 20s d'essai des quatre paramètres de contrôle qui sont la vitesse de rotation du disque, le couple moteur, la pression de freinage et la température. Nous pouvons distinguer trois phases lors du déroulement de l'essai :

- une phase d'attente où le banc est à vitesse de rotation constante entre $[0; 5]s$ où il n'y a pas de pression appliquée,
- une phase transitoire entre $[5; 10]s$ où la vitesse de rotation diminue puis revient à sa valeur de consigne et où le couple et la pression atteignent leurs valeurs nominales,
- un régime établi avec la génération du phénomène de crissement sur les dernières 10s de l'essai.

Nous remarquons que le moteur remplit totalement son rôle en ramenant la vitesse de rotation à sa consigne de vitesse nominale assez rapidement malgré l'effort de freinage croissant dans la partie transitoire. Nous observons également qu'une fois que les valeurs de pression et de couple se sont stabilisées après la phase transitoire, celles ci restent constantes lors du reste de l'essai ce qui va nous permettre d'étudier le phénomène de crissement sur l'ensemble de cette plage temporelle. Ainsi, nous observons que la température au dos de la plaquette augmente de façon linéaire à partir de la mise en pression du système jusqu'à une température de $55^{\circ}C$. Malgré cette faible variation de température, nous considérons pour la suite de l'étude que ces premières analyses sur les paramètres de contrôle nous permettent de comparer et suivre l'évolution du crissement sur la phase temporelle $[10; 20]s$.

2.3.2 Evolution du coefficient de frottement

A partir de l'évolution des paramètres de contrôle, nous pouvons tracer l'évolution du coefficient de frottement apparent μ_{app} en utilisant la formule classique donnée par

$$\mu_{app}(t) = \frac{C(t) - C_{init}}{2RSP(t)} \quad (2.1)$$

avec $C(t)$ le couple moteur instantané, C_{init} le couple initial dû à l'entraînement, R le rayon moyen d'application de la force de frottement, S la surface de frottement de la plaquette et $P(t)$ la pression instantanée de freinage. Le facteur 2 au dénominateur traduit l'existence de deux interfaces de contact (c'est à dire les deux zones de frottement entre le disque et les deux plaquettes). L'évolution du coefficient de frottement apparent est donnée sur la Figure 2.8. Bien que l'évolution de μ_{app} soit ici tracée sur tout l'intervalle de temps de l'essai, son interprétation doit se faire avec précautions étant donné que la première et la deuxième phase

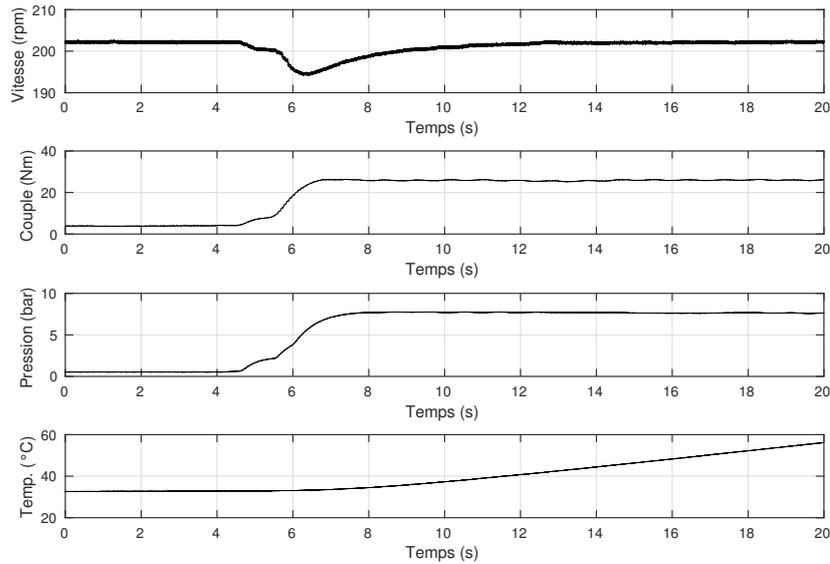


FIGURE 2.7 – Réponses temporelles pour les quatre paramètres de contrôle : vitesse de rotation du disque, couple moteur, pression de freinage et température

correspondent respectivement à une absence ou à un contact partiel du disque et des plaquettes. Aussi il est suggéré dans [75] que la formule ne serait valide que quand la valeur du couple instantané est suffisamment élevée.

Nous remarquons une augmentation rapide du coefficient de frottement apparent instantané avec une stabilisation de sa valeur une fois que le couple moteur et la pression sont stabilisés, à partir de 8s. A partir de cet instant la valeur du coefficient de frottement apparent reste quasiment constante avec une valeur comprise entre $[0.49; 0.51]$.

2.3.3 Analyse de la signature temporelle

La Figure 2.9 présente la mesure temporelle des accéléromètres TriAxe 1 et 5 qui sont respectivement collés sur la plaquette intérieure et l'étrier. Nous remarquons que pendant la phase d'attente en début d'essai le signal est quasiment nul. Lors de la mise en pression entre $[4.6; 7]s$ les plaquettes entrent en contact avec le disque et les vibrations de crissement apparaissent et croissent rapidement. Dans un troisième temps après un passage par un maximum d'amplitude, le signal se stabilise autour d'un niveau moyen vibratoire et présente de légères fluctuations. Nous notons que les niveaux vibratoires apparaissent dès la mise en contact du disque et des deux plaquettes (autour de 5.5s) et qu'ils atteignent des valeurs d'amplitude très importantes. Cette première analyse démontre également que les phénomènes vibratoires hors freinage (pour t entre $[0; 5]s$) sont négligeables par rapport au phénomène de crissement. L'évolution temporelle des déplacements normaux du disque est tracée en Figure 2.10. L'oscillation principale observée est synchronisée avec la vitesse de rotation du disque et provient d'un défaut d'alignement de l'axe du disque avec l'axe de l'arbre : ce mouvement de précession est caractérisé par le décalage de phase (entre les voies de mesure) induit par la répartition angulaire des capteurs inductifs. Cet effet n'est pas visible sur le tracé du couple moteur (voir Figure 2.7) et nous considérons qu'il est sans impact sur le reste des mesures et sur les occurrences de crissement. Ensuite un changement de position d'équilibre statique glissant durant l'intervalle $[4; 6]s$ est observé. Il correspond à la mise sous pression du système de frein. La détection des vibrations dues au phénomène de crissement est moins visible sur le disque du fait que les oscillations causées par la précession de ce dernier sont importantes. Cependant elles sont présentes et observables sur la porteuse comme des oscillations secondaires, comme illustré sur le zoom donné en Figure 2.10b. Le capteur de proximité 1 qui présente le plus

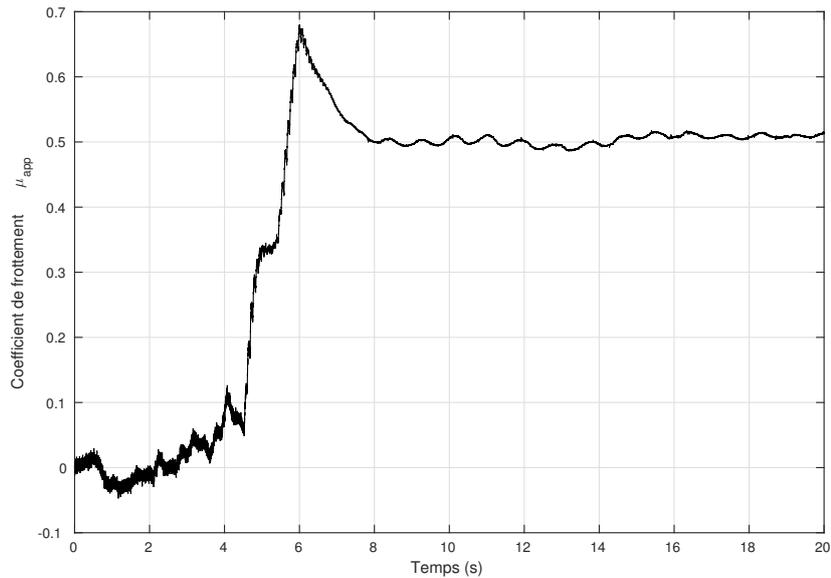


FIGURE 2.8 – Evolution du coefficient de frottement apparent lors d'un essai de crissement

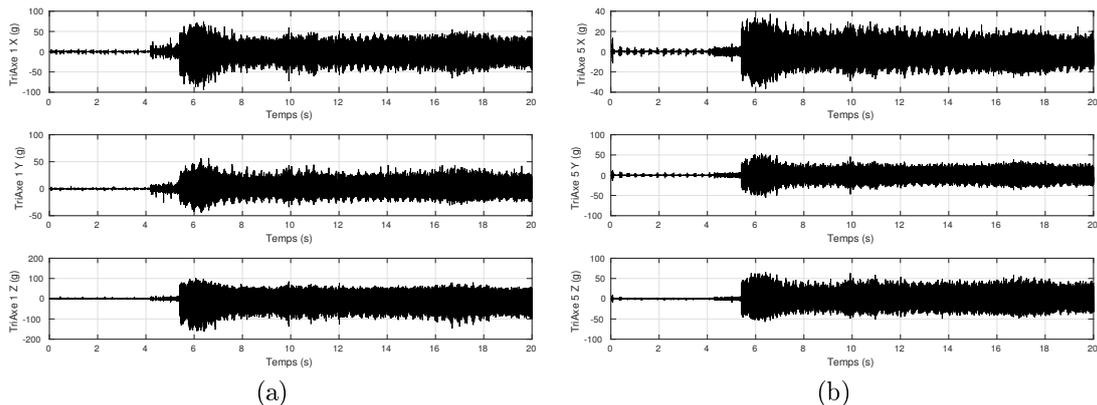


FIGURE 2.9 – Réponses temporelles pour les accéléromètres dans leurs repères locaux pour (a) la plaquette intérieure et (b) l'étrier

de vibrations secondaires est celui le plus proche de l'étrier et des plaquettes. L'écrêtage que nous subissons sur les capteurs de proximité est dû à un effet de seuil de la mesure lorsque le disque est trop loin du capteur.

La vibration de l'arbre a été analysée, mais ses résultats ne sont pas présentés ici. Il a été observé qu'il oscillait de façon synchrone et subissait également une légère déflexion lors de la mise en pression. Pour autant cet effet reste sans impact sur le reste des mesures du fait des très faibles déplacements enregistrés.

Nous traçons finalement la mesure de deux microphones, un en champ proche et l'autre en champ lointain au centre de l'antenne comme illustré en Figure 2.11. Nous constatons la même évolution temporelle de la signature acoustique que celle observée pour l'évolution temporelle de la signature vibratoire sur les accéléromètres, à savoir une phase d'attente où le bruit de fonctionnement du banc constitue un bruit de fond, puis une montée des niveaux acoustiques vers un régime d'amplitudes élevées d'environ $100dB$ en champ proche pour le Micro 10 et $90dB$ dans la cage au Micro 5.

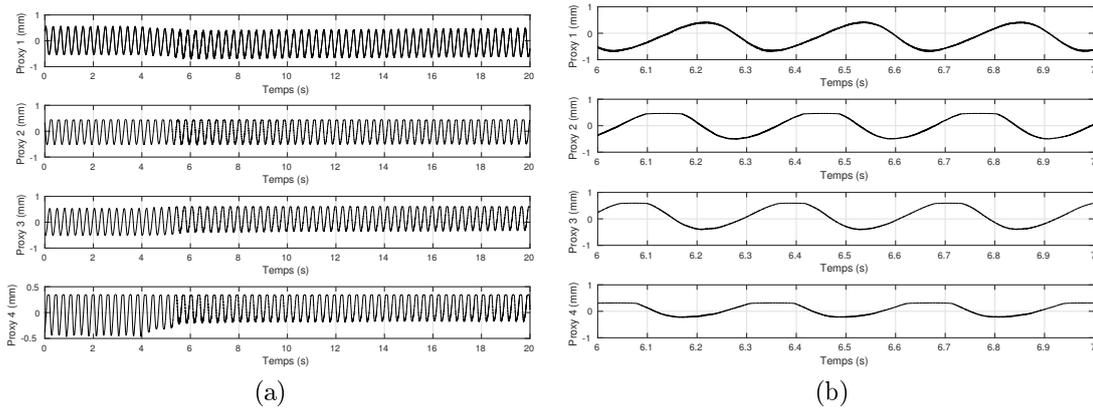


FIGURE 2.10 – Réponses temporelles pour les capteurs de proximité du disque, avec (a) toute la plage d’essai et (b) un zoom sur l’intervalle $[6; 7]$ s

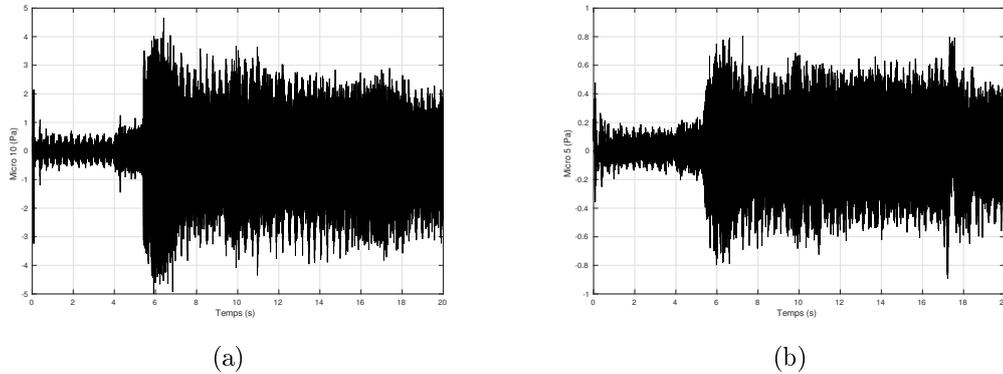


FIGURE 2.11 – Réponses temporelles du bruit de crissement sur deux microphones, (a) Micro 10 en champ proche (NF), (b) Micro 5 en champ lointain (FF)

2.3.4 Analyse fréquentielle

Nous choisissons d’analyser les spectres des différentes mesures du phénomène de crissement dans le domaine fréquentiel à l’aide d’une FFT calculée sur un intervalle de temps assez court afin de considérer que le signal y est "quasi stabilisé et stationnaire" tout en permettant de prendre en compte des composantes basse fréquence. Nous avons choisi trois intervalles d’observation de 1s pour l’exploitation des résultats :

- $[10; 11]$ s au début du régime établi,
- $[15; 16]$ s au milieu du régime établi,
- $[19; 20]$ s à la fin de l’essai.

Les Figures 2.12, 2.13 et 2.14 donnent les FFT de chaque voie de mesure sur ces trois intervalles d’observation. Ces FFT sont toutes normalisées de façon indépendante par rapport à une valeur donnée en abscisse. Avant de procéder à une analyse de ces résultats, il est bon de noter que les FFT des plaquettes et de l’étrier sont calculées sur un signal provenant d’un accéléromètre et celles du disque, de capteurs de déplacements. Ceci induit un facteur variant en ω^2 entre les deux types de densité spectrale, ce qui explique la différence sur le rendu visuel de ces résultats. Comme indiqué sur les Figures 2.12, 2.13 et 2.14 la signature du crissement se caractérise par un ensemble fini de raies spectrales sur l’ensemble des voies de mesures. La comparaison de ces trois figures met en évidence que la signature vibratoire ne change pas d’un

intervalle de temps à l'autre ce qui démontre de la capacité du banc d'essai de produire un phénomène de crissement quasi invariant lors d'un essai. Il est bon de noter que les amplitudes peuvent évoluer sur les trois intervalles de temps à l'inverse de la distribution fréquentielle. Nous pouvons observer que les fréquences qui apparaissent dans les réponses des accéléromètres TriAxe et des capteurs de proximité se retrouvent aussi dans le spectre des mesures acoustiques. Les contributions majeures se trouvent à $485Hz$, $595Hz \times n$ (avec ici $n = 1, \dots, 15$), $764Hz$, $880Hz$, $901Hz$ et $2032Hz$. Les fréquences $595Hz$, $764Hz$ et $2032Hz$ sont très proches des fréquences du système couplé à l'arrêt caractérisées en section 2.2. Les autres fréquences proviennent des effets non-linéaires apparaissant lors du freinage et se caractérise par des harmoniques ($595Hz \times n$ avec $n = 1, \dots, 15$) ou des contributions de combinaisons fréquentielles ($880Hz \simeq -2 \times 595Hz + 2032Hz$) de modes. Ainsi la signature vibratoire du système dynamique lors de l'apparition du phénomène de crissement est complexe et se compose à la fois des fréquences de résonance du système couplé, de leurs harmoniques et potentiellement de combinaisons d'harmoniques.

En ce qui concerne la réponse des deux plaquettes, nous notons la présence des même raies sur l'ensemble des voies de mesure. Il semble cependant que la vibration selon l'axe Y (dans la direction radiale) est plus faible que selon les axes normaux et tangentiels, comme les valeurs de normalisation l'indiquent. Les vibrations selon la direction tangentielle sont caractérisées surtout par la présence de fréquences jusqu'à $5000Hz$. Les vibrations de l'étrier ont une amplitude comparable dans les trois directions avec une signature fréquentielle similaire à celle des plaquettes.

Le disque présente une signature fréquentielle similaire à celle des plaquettes et de l'étrier avec des contributions plus visibles à basse fréquence.

Les signatures fréquentielles des micros en champ proche (Micro 10 et Micro 15) sont plus riches que les micros en champ lointain. L'échelle de normalisation indique également que le champ est plus intense à leur niveau. Chaque raie fréquentielle peut être associée à une raie fréquentielle observée sur les plaquettes, l'étrier ou le disque. Nous pouvons conclure que le phénomène de bruit de crissement est bien le résultat de la propagation des vibrations induites par le frottement de l'ensemble de la structure et du champ rayonné associé. Il est intéressant de constater que les raies fréquentielles qui possèdent la plus forte intensité au niveau de la structure ne sont pas forcément celles qui vont induire une raie fréquentielle plus marquée sur les mesures acoustiques, comme par exemple sur la raie à $5330Hz$.

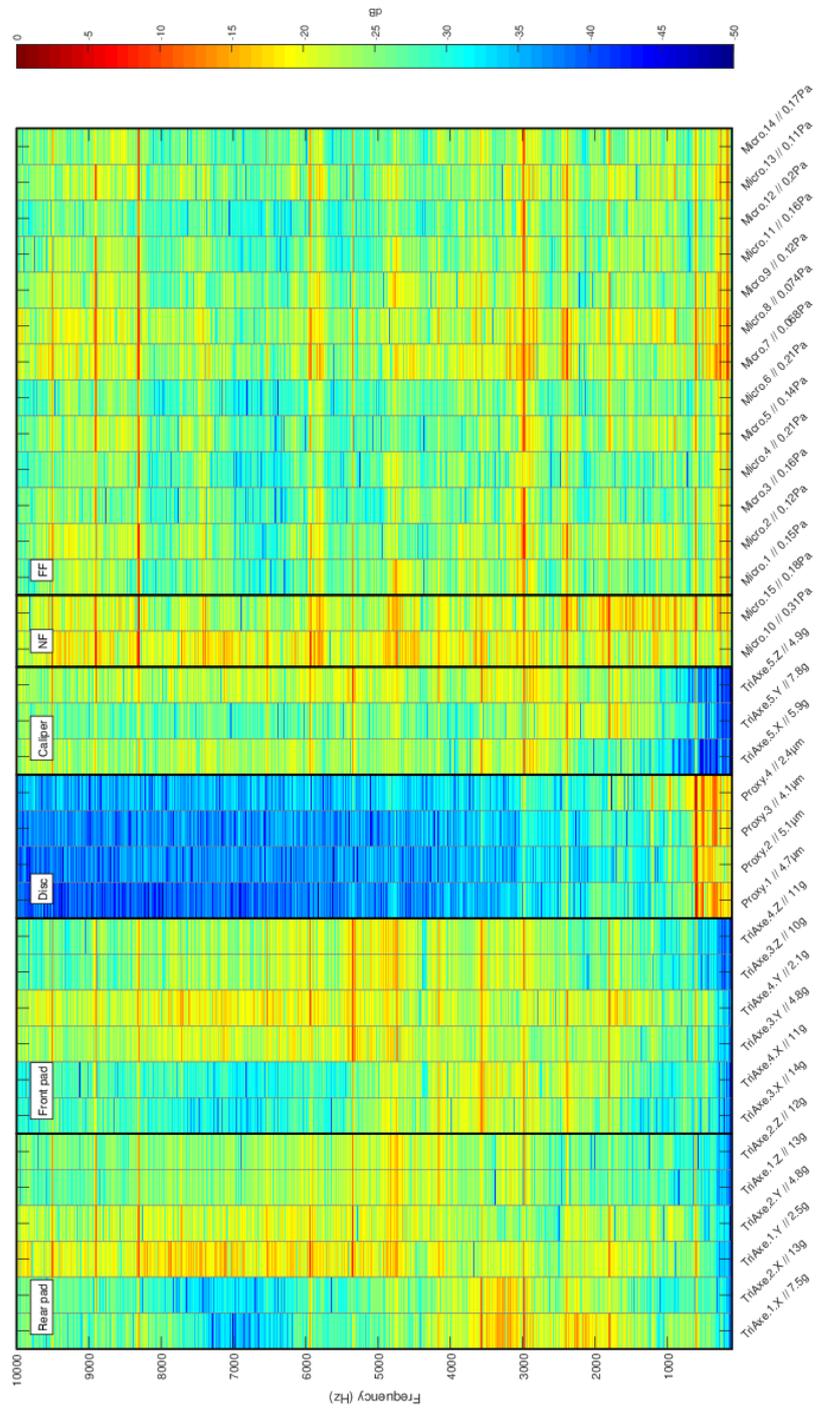


FIGURE 2.12 – Transformées de Fourier normalisées des voies de mesure sur l'intervalle $[10; 11]s$

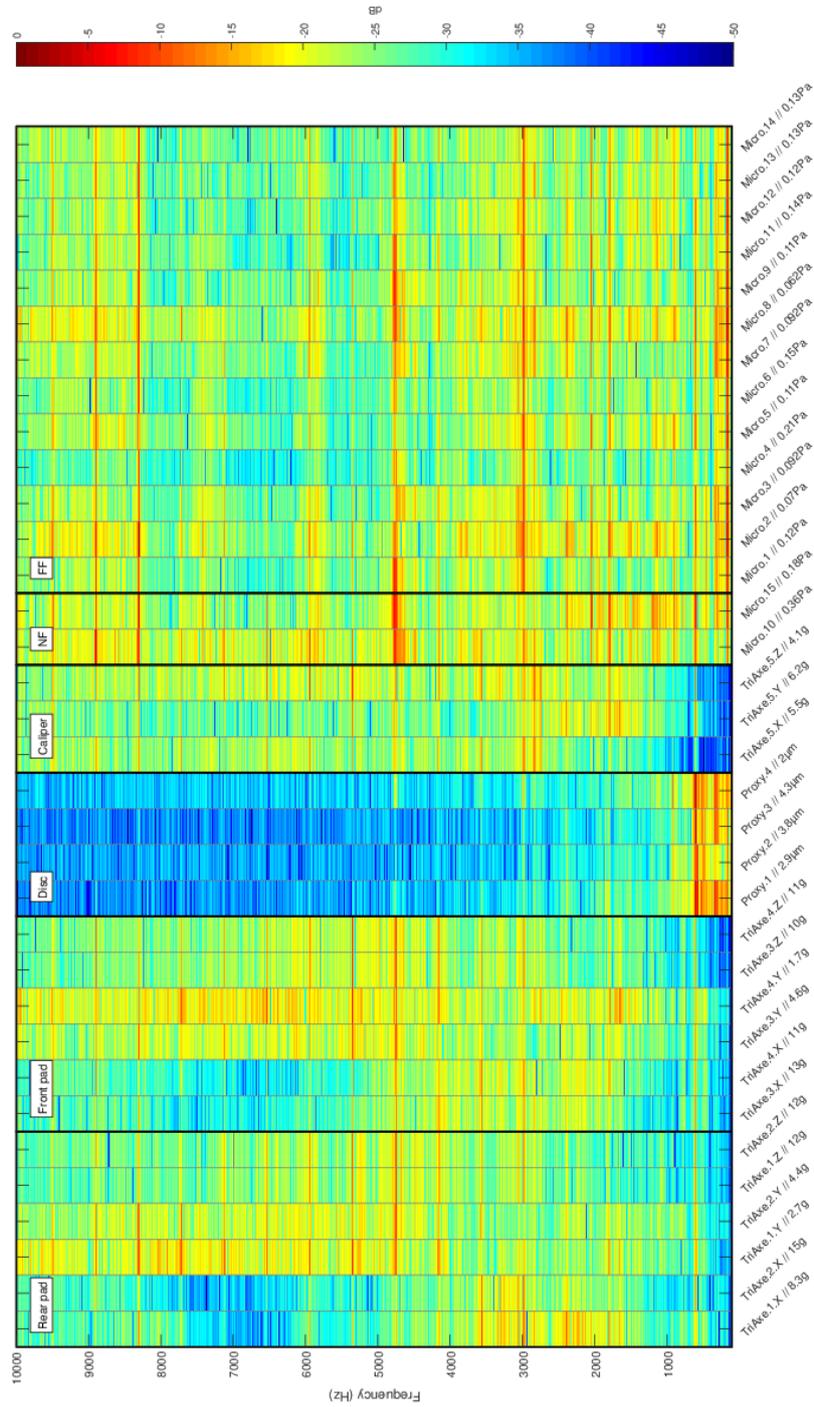


FIGURE 2.13 – Transformées de Fourier normalisées des voies de mesure sur l'intervalle $[15; 16]$ s

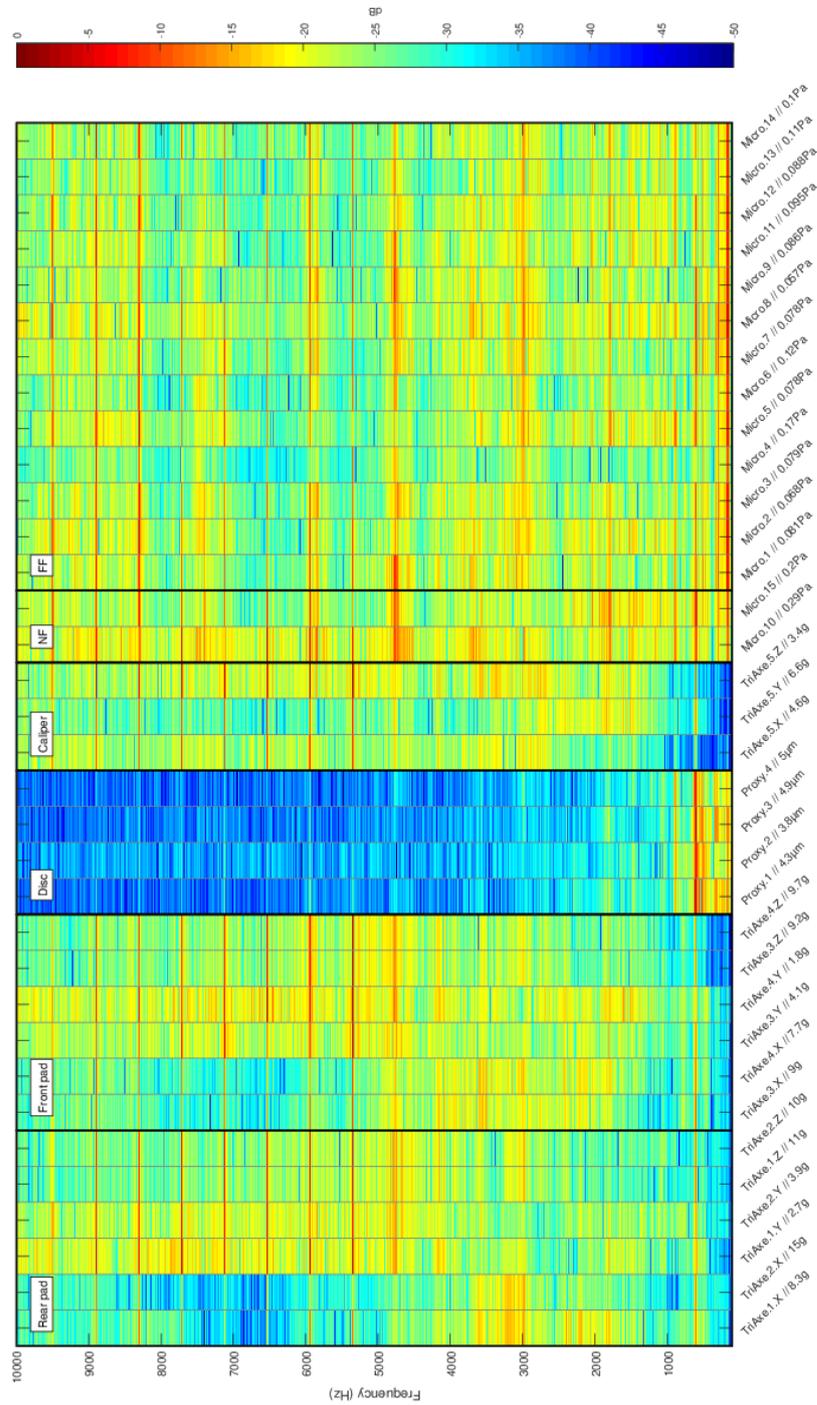


FIGURE 2.14 – Transformées de Fourier normalisées des voies de mesure sur l'intervalle $[19; 20]s$

2.4 Etudes d'influence des paramètres opérationnels sur le crissement

2.4.1 Description du protocole d'essais

Une campagne d'essais comportant un ensemble de 80 essais de freinage a été menée afin d'étudier l'influence de la pression de freinage, de la vitesse de rotation ainsi que l'effet de l'usure sur le crissement. La répartition des essais a été la suivante :

- Essais 1 à 10 : ils concernent l'étude de répétabilité des essais pour des conditions de fonctionnement fixées, à savoir dans le cadre de cette étude une vitesse de rotation de 200 rpm et une pression de 7 bars.
- Essais 1 à 10, 31 à 40 et 71 à 80 : ils concernent l'étude de l'usure du système de frein pour des conditions de fonctionnement identiques, à savoir une vitesse de rotation de 200 rpm et une pression de 7 bars. Ils rassemblent trois groupes d'essais correspondant au début, au milieu et à la fin de la campagne d'essais.
- Essais 11 à 20, 41 à 50 et 71 à 80 : ils concernent l'étude sur la variation de pression de freinage. Il se sont tous déroulés à la vitesse de rotation de 200 rpm, les essais 71 à 80 ont eu une pression de consigne de 7 bars, alors que les essais 11 à 20 et 41 à 50 rassemblent dix essais à une pression de consigne de 4 bars et dix essais à une pression de consigne de 11 bars.
- Essais 21 à 30 et 51 à 80 : ils concernent l'étude sur la variation de la vitesse de rotation. Ils se sont tous déroulés à une pression de consigne de 7 bars, les essais 71 à 80 se sont déroulés à une vitesse de rotation de 200 rpm, les essais 11 à 20 et 51 à 60 rassemblent en tout dix essais à 100 rpm et dix essais à 300 rpm et les essais 61 à 70 se sont déroulés à une vitesse de rotation de 400 rpm.

La Figure 2.15 illustre l'ensemble des essais réalisés. Les zones grisées correspondent à des essais à 200 rpm et 7 bars qui serviront à étudier l'influence de l'usure. Les zones bleues correspondent aux essais à 200 rpm et aux pressions de 4 et 11 bars alors que les zones rouges aux essais à 7 bars pour des vitesses de rotation de 100, 300 et 400 rpm.

Le protocole d'essai est identique à celui présenté au début de la section 2.3. La vitesse de rotation est réglée précisément avant le lancement de l'acquisition, ce qui explique sa grande régularité. En revanche le système de pompe manuelle pour l'application de la pression est moins robuste et très sensible, ce qui explique la dispersion des valeurs autour de la consigne. Nous avons montré lors de cette première partie que le crissement se caractérise par un contenu fréquentiel bien précis. Ce sera donc dans le domaine fréquentiel que nous chercherons principalement à trouver des tendances. Le premier objectif sera de savoir si le phénomène de crissement obtenu sur le banc FIVE@ECL est reproductible et donc si les essais sont robustes. Puis nous chercherons à obtenir les tendances qu'impliquent la variation de la vitesse de rotation et la pression de freinage sur le crissement et si l'usure a un effet sur les contributions fréquentielles ou les amplitudes mesurées.

2.4.2 Répétabilité des essais

Les résultats des essais effectués pour un ensemble de paramètres donné n'ont de sens que s'ils sont répétables, c'est à dire qu'ils présentent les mêmes tendances et peu de dispersions en termes de signature vibratoire et acoustique vis-à-vis du crissement. L'étude de répétabilité est réalisée sur les essais à 200 rpm et 7 bars (essais 1 à 10). La moyenne des pressions appliquées effectivement au cours des essais est de 7.24 bars, avec un écart type de 0.78 bars. Afin d'avoir une vision synthétique des résultats un ensemble réduit de 11 voies d'intérêt représentatives est utilisé pour les analyses :

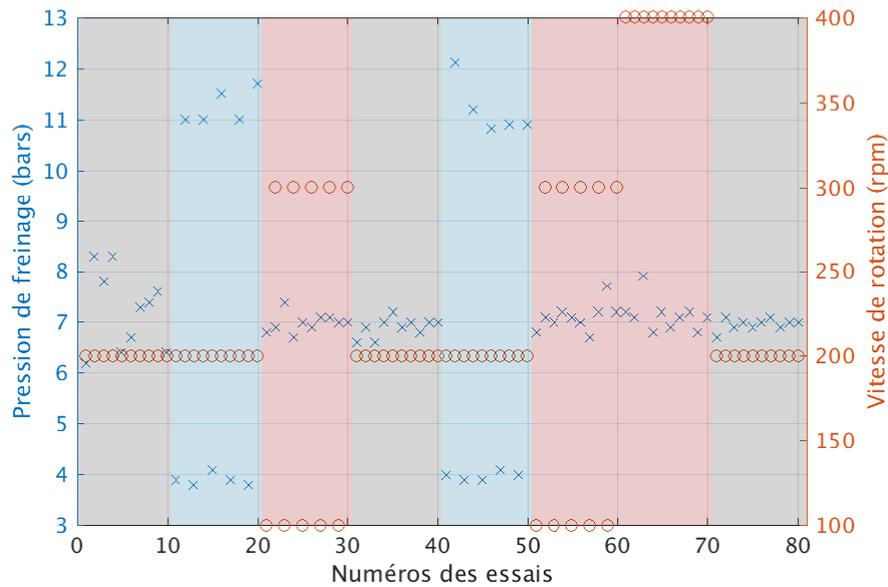


FIGURE 2.15 – Protocole global d'essais

- les Micro 10, 15 et 5 (soit les deux champs proche et un champ lointain pour les mesures acoustiques),
- l'accéléromètre TriAxe 4 positionné sur la plaquette extérieure,
- l'accéléromètre TriAxe 5 positionné sur l'étrier,
- les capteurs de proximité 1 et 3 pour le déplacement normal du disque.

Afin de statuer sur la problématique de répétabilité, les indicateurs suivants sont considérés :

- l'évolution des coefficients de frottement apparents, ainsi que leur moyenne et écart type, illustrés Figure 2.16,
- le tracé des pics fréquentiels associés aux 11 voies de mesures choisies. Ces pics sont sélectionnés manuellement sur les FFT de chaque voie et pour les trois intervalles d'observation définis en Section 2.3, à savoir $[10; 11]s$, $[15; 16]s$ et $[19; 20]s$. Ils sont illustrés à la Figure 2.17 et sont regroupés selon les 4 groupes de capteurs : microphone, accéléromètre sur la plaquette, accéléromètre sur l'étrier et les capteurs de proximité,
- les moyennes et écarts types en amplitude des ces mêmes pics fréquentiels tracés à la Figure 2.18. Ces diagrammes peuvent estimer la répétabilité de cet ensemble d'essais par rapport aux amplitudes des raies fréquentielles observées sur les voies de mesure. Nous ne présentons les résultats que sur 4 voies de mesures ici, par souci de concision, à savoir le Micro 10, la voie Z du TriAxe 4, la voie Y du TriAxe 5 et le capteur de proximité 3. Ces résultats sont représentatifs de l'ensemble des mesures sur les autres capteurs.

En ce qui concerne les évolutions des coefficients de frottement moyens à la Figure 2.16, nous remarquons une faible dispersion de la valeur du coefficient de frottement apparent, surtout dans la partie de régime établi. Toutes les courbes suivent une tendance similaire à celle décrite lors de l'analyse de l'essai de référence.

Pour les pics fréquentiels associés aux FFT des 11 voies de mesures choisies, le tableau 2.2 présente la signification des symboles dans les Figures qui vont suivre. Nous observons sur la Figure 2.17 des raies verticales pour les fréquences sur l'ensemble des capteurs, qui correspondent aux raies fréquentielles identifiées lors de la caractérisation de l'essai de référence, hormis l'ensemble de points à $800Hz$ sur les capteurs de proximité. L'intervalle d'observation de la FFT n'induit pas de changement sur les fréquences des pics. Les TriAxes 4 et 5

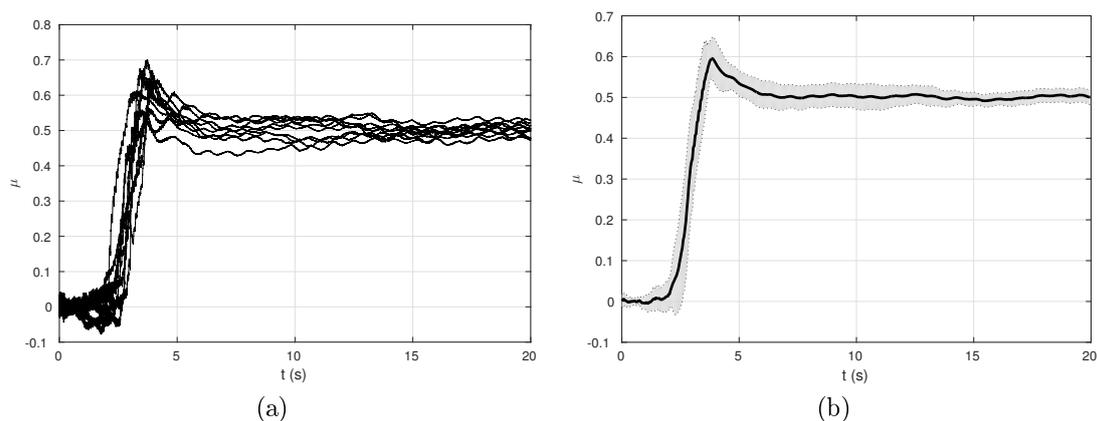


FIGURE 2.16 – Tracé des coefficients de frottement apparents μ_{app} , (a) pour les dix essais, (b) courbe moyenne et écart-type

Symboles	□	○	△
Micros	5	10	15
TriAxe 4 (plaquette)	X	Y	Z
TriAxe 5 (étrier)	X	Y	Z
Capteurs de proximité (disque)	1	3	-

TABLEAU 2.2 – Rappel des symboles utilisés dans les diagrammes de pics fréquentiels en fonction de l'ensemble de capteur considéré

montrent principalement les raies associées au mode à $595Hz$ ainsi que toutes ses harmoniques. Les diagrammes des capteurs de proximité et des micros montrent une plus grande richesse fréquentielle, notamment en dessous de $2500Hz$, où les modes de disque jouent un rôle plus important. Le choix d'un intervalle d'observation n'influe pas non plus sur l'amplitude des pics, à part sur les groupes $800Hz$ et $1800Hz$ pour les capteurs de proximité.

La Figure 2.18 montre les diagrammes de la moyenne et de l'écart type en niveau pour chaque fréquence. Ces graphiques sont directement construits à partir de ceux de la Figure 2.17 autour des fréquences concentrant un nombre suffisants de points. La Figure 2.18 permet de souligner une nouvelle fois que le choix de l'intervalle de temps d'observation n'a que peu d'impact sur la mesure des niveaux des pics fréquentiels. Les valeurs moyennes sur les trois instants choisis ($[10; 11]s$, $[15; 16]s$ et $[19; 20]s$) sont proches et les écarts types restent inférieurs à un demi ordre de grandeur de la moyenne.

L'ensemble de ces observations nous permettent d'affirmer que les essais sont reproductibles pour une condition de fonctionnement donnée et que le banc d'essai permet par conséquent d'obtenir des mesures vibratoires et acoustiques robustes. De plus, nous pouvons penser que les écarts et les déviations observés sont en partie dues à la dispersion des valeurs et montées en pression pour une valeur nominale de pression visée.

2.4.3 Influence de certains paramètres physiques

Le but de cette section est d'analyser l'influence de certains paramètres sur le phénomène de crissement. Comme précédemment indiqué les paramètres choisis pour cette étude sont les suivants :

- l'usure des plaquettes de frein,
- la pression de freinage,

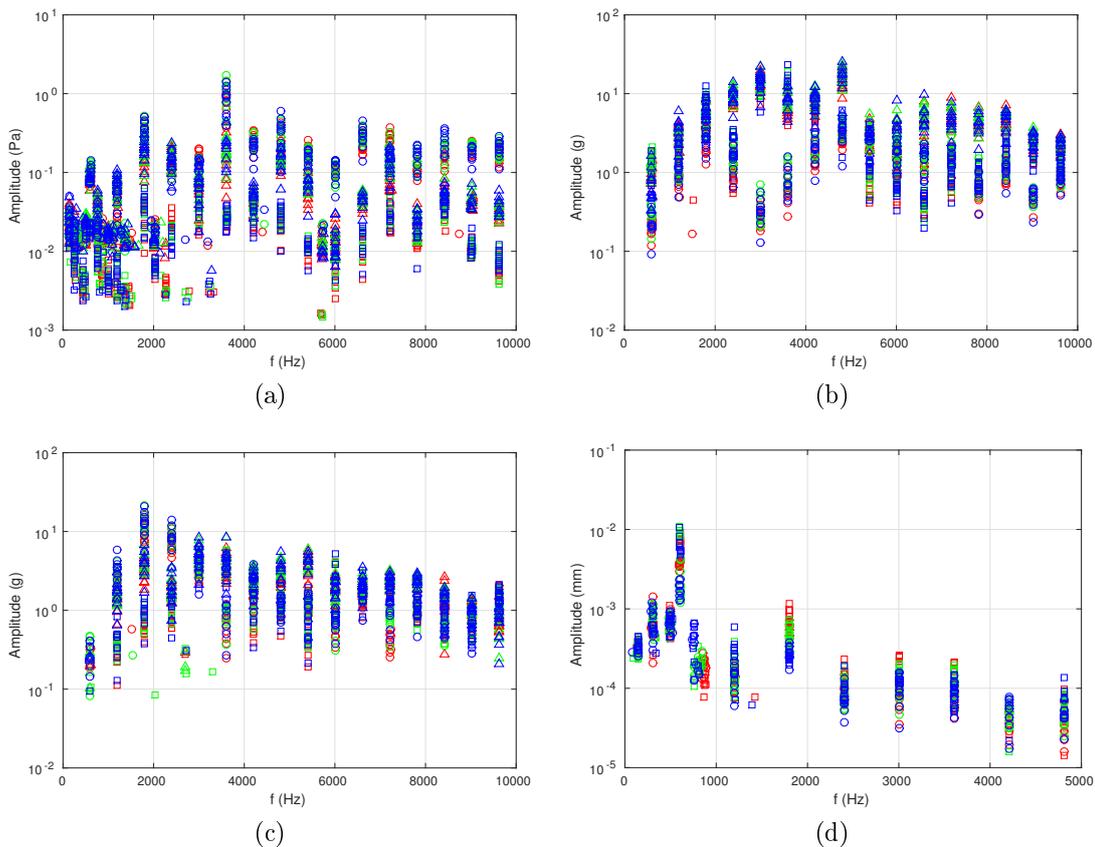


FIGURE 2.17 – Diagrammes rassemblant les pics fréquentiels sur les voies d’intérêt et sur les 3 intervalles d’étude : (rouge) $[10; 11]s$, (vert) $[15; 16]s$ et (bleu) $[19; 20]s$ pour la répétabilité ; (a) Micros, (b) TriAxe 4 plaquette, (c) TriAxe 5 étrier et (d) Capteurs de proximité du disque

- la vitesse de rotation du disque.

Nous observerons alors leurs effets sur plusieurs types de résultats expérimentaux issus des essais présentés en Section 2.4.1 :

- les évolutions des coefficients de frottement apparents moyens et leurs écarts types associées,
- les diagrammes regroupant les pics fréquentiels provenant des FFT des voies de mesure choisies,
- les moyennes et écarts types en amplitude associés à ces pics fréquentiels,
- l’évolution des positions d’équilibre statiques glissantes moyennes et leurs écarts types associés.

Impact de l’usure

Dans cette section, nous cherchons à quantifier l’impact de l’usure des parties frottantes du système de frein sur le phénomène de crissement. Nous utilisons pour cela les essais à 200 rpm et 7 bars portant les numéros 1 à 10, 31 à 40 et 71 à 80 et signalés par les zones grisées sur la Figure 2.15. Ils correspondent aux essais menés au tout début, au milieu et à la fin de l’ensemble des campagnes d’essais et seront nommés essais des groupes 1, 2 et 3 selon leur ordre chronologique.

La moyenne des coefficients de frottement apparents pour les groupes 1, 2 et 3 ainsi que les écarts types associées sont illustrés à la Figure 2.19. Les coefficients de frottement apparents

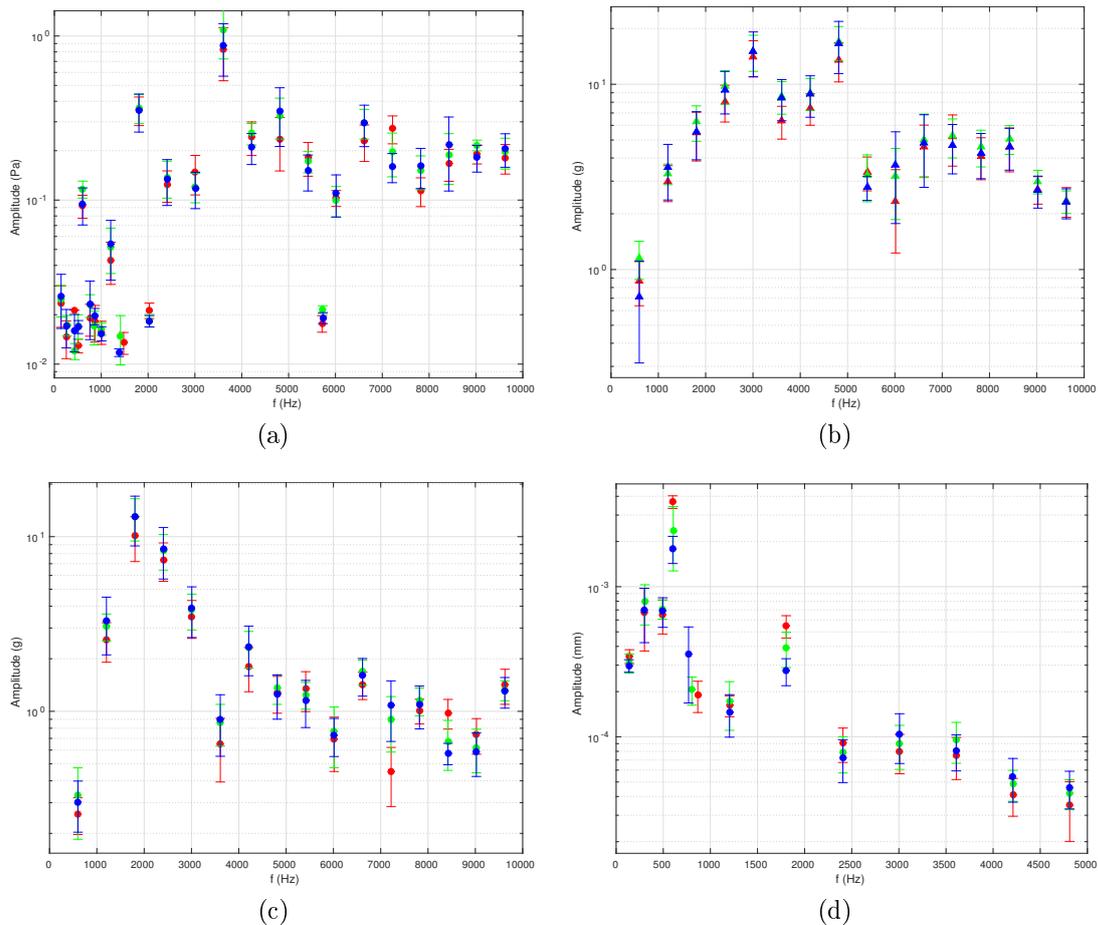


FIGURE 2.18 – Diagrammes rassemblant les moyennes et écarts types sur quatre voies de mesure : (rouge) $[10; 11]s$, (vert) $[15; 16]s$ et (bleu) $[19; 20]s$ pour la répétabilité ; (a) Micro 10, (b) TriAxe 4 Z, (c) TriAxe 5 Y et (d) Capteur de proximité 3

moyens suivent la même allure d'un groupe chronologique à l'autre, bien que le pic transitoire de frottement apparent (autour de $[3; 5]s$) soit moins prononcé sur les essais des groupes 2 et 3. Pour chaque groupe, le coefficient de frottement apparent moyen rejoint une valeur nominale une fois le régime établi atteint, autour de 0.51 pour le groupe 1 et 0.55 pour les groupes 2 et 3, ce qui indique un potentiel phénomène d'usure ou de rodage du système entre le groupe 1 et les groupes 2 et 3. Les essais des groupes 2 et 3 donnent des résultats moins dispersés que ceux du groupe 1 comme l'indiquent les valeurs d'écart type, ce qui peut également provenir des écarts de pression appliquée. Le système de frein avec les plaquettes neuves subit une phase de rodage au début de son utilisation, les plaquettes s'usent, se mettent en conformité avec le disque et se calent dans l'étrier.

En ce qui concerne les diagrammes de pics fréquentiels, la Figure 2.20 illustre les positions des pics fréquentiels pour les 4 ensembles de capteurs, les 3 groupes d'étude chronologiques et les 3 intervalles d'observation temporels ($[10; 11]s$, $[15; 16]s$ et $[19; 20]s$). Les symboles associés à chaque voie de mesure sont ceux définis dans le Tableau 2.2. Nous notons pour commencer que les raies fréquentielles restent verticales, ce qui indique que l'usure n'a pas d'effet sur les fréquences impliquées dans le phénomène de crissement. Les moyennes et les écarts types des amplitudes de ces pics fréquentiels par groupes chronologiques et par capteurs sont donnés à la Figure 2.21, qui rassemble les courbes de ces calculs pour les 4 voies représentatives introduites Section 2.4.2. L'usure des parties frottantes du système de frein semble entraîner une très légère hausse des amplitudes, en particulier sur quelques raies fréquentielles au dessus

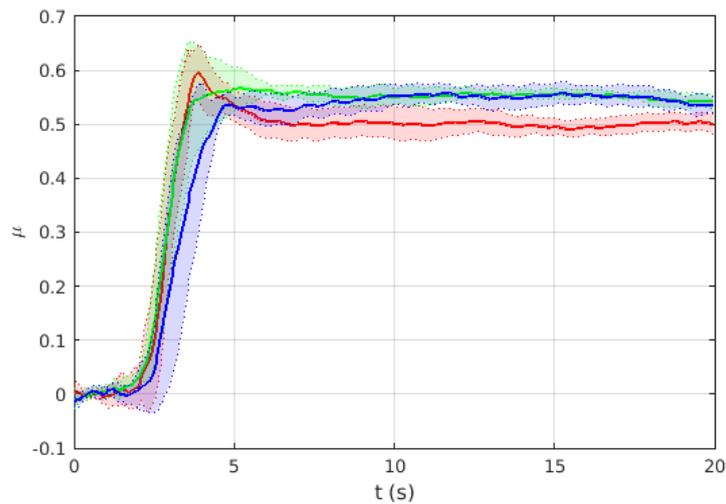


FIGURE 2.19 – Evolution des moyennes et écarts types de coefficients de frottement apparents pour les 3 groupes d’essais chronologiques, (rouge) groupe 1, (vert) groupe 2 et (bleu) groupe 3

de 5000Hz . Dans l’ensemble la signature fréquentielle du crissement reste constante sur toute la gamme d’essais à 200 rpm et 7 bars.

Nous pouvons conclure que l’usure des plaquettes du système de frein joue un rôle peu important sur les pics fréquentiels mais néanmoins observable sur la dynamique du système de frein crissant. Son impact semble surtout concentré sur la modification du coefficient de frottement apparent, qui augmente de 10% entre les premiers essais (groupe 1) et les essais des groupes 2 et 3. Cette augmentation du coefficient de frottement peut s’expliquer par l’usure des plaquettes. Nous observons également à la surface du disque les sillons parallèles et circulaires dus au frottement.

L’influence de l’usure du système de frein sur la distribution fréquentielle et les amplitudes des pics fréquentiels est en revanche moins marquée. Certaines raies fréquentielles voient une augmentation de leurs amplitudes et d’autres une diminution, sans que les écarts soient significatifs, ce qui ne permet pas de tirer de conclusions franches sur l’influence de l’usure par rapport à leurs niveaux.

Variation de la pression de freinage

Dans cette section nous nous intéressons aux effets de la pression de freinage sur le phénomène de crissement. La pression de freinage est appliquée par une pompe hydraulique manuelle, ce qui explique la dispersion des valeurs de pression de freinage autour d’une pression nominale visée.

L’influence de la pression de freinage est étudiée sur un ensemble de 30 essais qui se déroulent tous à une vitesse de rotation de 200 rpm. Les différentes pressions de freinage à l’étude sont 4, 7 et 11 bars. Les essais concernés portent les numéros 11 à 20, 41 à 50 et 71 à 80. Pour l’ensemble de ces essais nous pouvons considérer que le système est déjà rodé et que l’usure n’a pas influencé les résultats.

L’évolution des moyennes des coefficients de frottement apparents pour les essais à 4, 7 et 11 bars est illustrée sur la Figure 2.22. Nous observons que la pression joue un rôle important sur le coefficient de frottement apparent moyen. Pour une pression de 4 bars l’évolution du coefficient de frottement moyen ne présente pas de stabilisation mais une légère croissance sur la partie de régime établi, avec des valeurs entre $[0.42; 0.46]$. Pour une pression de freinage de 7 bars le coefficient de frottement a le comportement décrit en Section 2.3 avec une valeur

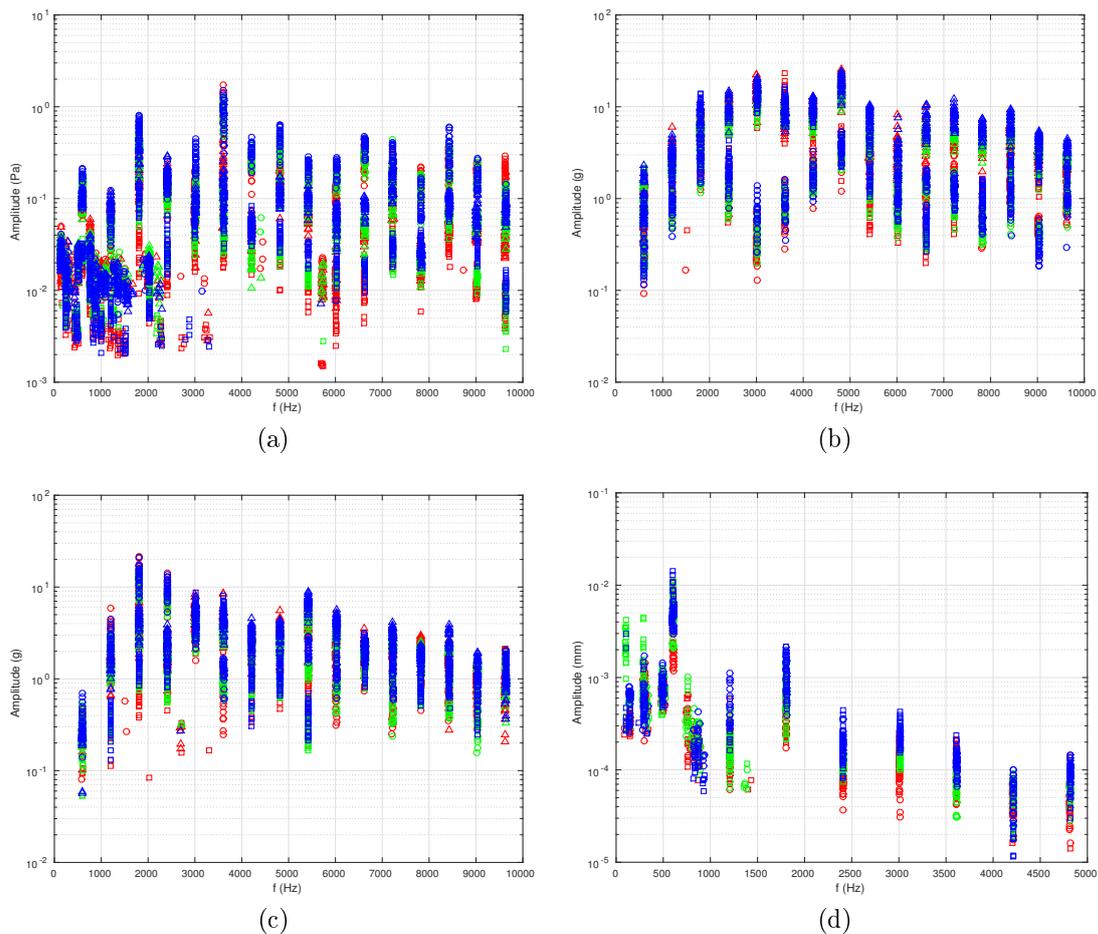


FIGURE 2.20 – Diagrammes rassemblant les pics fréquentiels sur les voies d’intérêt et sur les 3 intervalles d’étude : (rouge) groupe 1, (vert) groupe 2 et (bleu) groupe 3, influence de l’usure ; (a) Micros, (b) TriAxe 4 plaquette, (c) TriAxe 5 étrier et (d) Capteurs de proximité disque

nominale d’environ 0.54. En revanche pour une pression de freinage plus élevée de 11 bars, le coefficient de frottement apparent moyen se stabilise autour d’une valeur nominale de 0.49. Nous remarquons également que les intervalles d’écart type ne se chevauchent presque pas, ce qui indique une différence significative du coefficient de frottement apparent sous l’influence de la pression. Des effets tribologiques pourraient permettre d’expliquer ce comportement non monotone de μ_{app} en fonction de la pression.

L’évolution de la variation de position d’équilibre statique moyenne du disque en fonction du temps est illustrée sur la Figure 2.23 à partir des mesures effectuées sur les capteurs de proximité du disque de frein. Nous observons que la variation de la position d’équilibre statique du disque suit des trajectoires qui ont la même allure pour des pressions de freinage de 7 et 11 bars, ce qui suggère une dynamique proche. En revanche l’évolution de cette variation de position moyenne d’équilibre statique glissante est beaucoup moins marquée pour une pression de freinage de 4 bars. La pression de freinage ne semble pas suffisante pour venir contraindre fortement la position disque/plaquettes. Ce résultat va dans le sens d’un crissement plus faible en intensité pour une pression de 4 bars.

Sur l’ensemble de ces 3 pressions de freinage il est également possible de tracer les diagrammes regroupant les pics fréquentiels relevés sur l’ensemble des FFT des 11 voies d’intérêt. La Figure 2.24 illustre l’influence de la pression de freinage sur ces pics fréquentiels par ensembles de capteurs et pour les 3 intervalles temporels d’observation. Nous remarquons que la pression

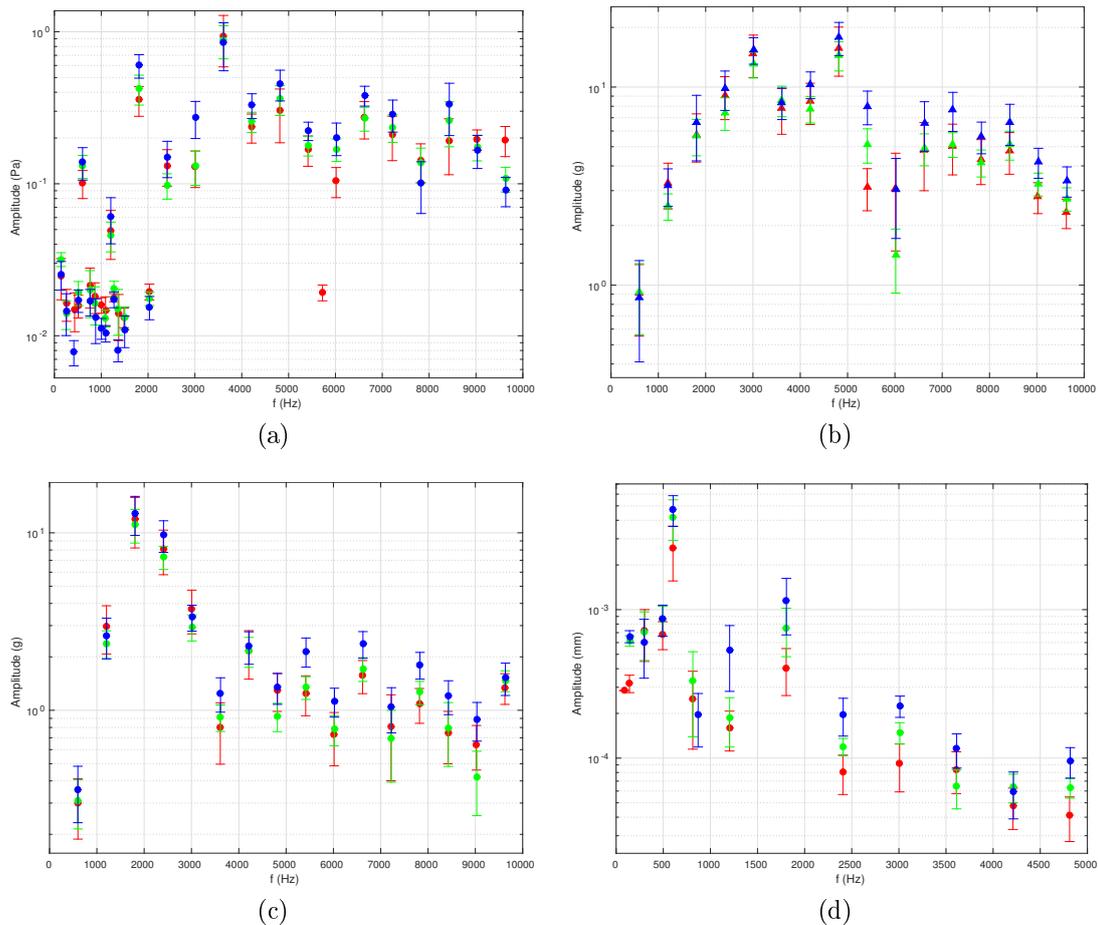


FIGURE 2.21 – Diagrammes rassemblant les moyennes et écarts types des raies fréquentielles sur quatre voies de mesure : (rouge) groupe 1, (vert) groupe 2 et (bleu) groupe 3, influence de l'usure ; (a) Micro 10, (b) TriAxe 4 Z, (c) TriAxe 5 Y et (d) Capteur de proximité 3

de freinage n'a pas d'impact sur la position des raies fréquentielles verticales formées par les pics fréquents, surtout pour les essais à 7 et 11 bars, les essais à 4 bars présentent cependant de fortes dispersions en fréquence. En revanche nous observons ici une évolution forte des amplitudes en fonction de la pression de freinage. Les essais à 4 bars montrent en effet des niveaux en amplitude des pics fréquents faibles et très dispersés, alors que les essais à 7 et 11 bars donnent des pics fréquents dont les amplitudes sont bien plus élevées, jusqu'à deux ordres de grandeur par rapport aux essais à 4 bars. Ce dernier résultat étant en accord avec la précédente observation sur l'influence de la pression vis-à-vis du coefficient de frottement. Dans la gamme de pression de freinage étudiée, l'augmentation de pression tend à augmenter les niveaux en amplitude des contributions fréquentielles. La différence est plus importante entre 4 bars et 7 bars qu'entre 7 bars et 11 bars.

Les valeurs moyennes des amplitudes et les écarts types associés sont illustrés sur la Figure 2.25 qui met en avant cette augmentation du niveau des amplitudes des contributions fréquentielles lorsque la pression de freinage augmente. La Figure 2.25 nous permet d'observer une grande dispersion sur les essais à 4 bars. Le phénomène de crissement pour cette pression de freinage reste faible et le régime entre $[10; 20]$ s, qui est établi et stable pour des pressions de freinage de 7 bars, ne l'est plus du tout à 4 bars. Les niveaux de la réponse temporelle sont faibles, bien qu'il suivent la même tendance que ceux à 7 bars. La signature vibratoire est donc la même que les essais de référence mais elle est dans l'ensemble plus faible en niveaux et moins robuste. Sur certains essais à 4 bars les amplitudes fréquentielles sont trop faibles pour

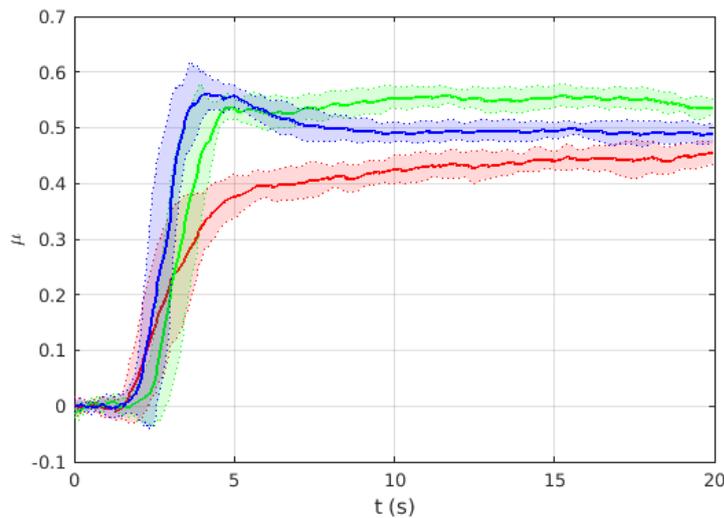


FIGURE 2.22 – Evolution des moyennes et écarts types de coefficients de frottement apparents pour les essais à 200rpm, pour des pressions de (rouge) 4 bars, (vert) 7 bars et (bleu) 11 bars

trouver un pic fréquentiel, comme au delà de 3000Hz pour les capteurs de proximité. Cette observation est renforcée par l'impression de faiblesse du crissement pendant les manipulations expérimentales, qui semblait parfois intermittent. En revanche les essais à 11 bars présentent le même comportement que les essais à 7 bars, avec des raies fréquentielles verticales formées par les pics fréquents. Le niveau moyen de ces raies est dans l'ensemble légèrement plus élevé que pour les essais à 7 bars, bien qu'il existe certaines fréquences sur certaines voies où l'inverse se produit comme par exemple à 6500Hz pour le TriAxe 5 voie Y.

Nous pouvons conclure de cette étude que la pression de freinage joue un rôle prépondérant dans la réponse du système de frein lors de l'apparition du phénomène de crissement. Une pression trop faible donne des niveaux faibles en amplitude sur les signaux temporels et fréquents, et si elle n'est pas suffisante le système peut même ne pas présenter de crissement. Une augmentation de la pression entraîne une augmentation des niveaux vibratoires et acoustiques, comme nous pouvons le noter à la fois sur les signaux temporels et fréquents. Dans notre étude nous avons été limités à une pression de freinage maximale de 11 bars car une pression de freinage trop importante amène le système de frein à atteindre les 75°C en température au niveau des plaquettes bien avant la fin de l'essai ce qui peut devenir problématique pour la sécurité des accéléromètres. Il serait intéressant de savoir si les niveaux de vibrations continuent d'augmenter ou non pour une pression de freinage encore supérieure. Nous avons pu remarquer également un changement de comportement du disque dans sa façon de se déformer lors de l'application de la pression de freinage : une pression trop faible à 4 bars n'a pas les mêmes effets qu'une pression de 7 bars. Finalement, la pression de freinage a des effets sur le coefficient de frottement apparent avec une évolution non monotone avec l'augmentation de la pression de freinage. Une pression plus forte a également tendance à amener le coefficient de frottement apparent à sa valeur nominale plus rapidement. Les dispersions observées sur les résultats peuvent être nuancées par la dispersion des valeurs de pression de freinage appliquée, qui représente une part plus importante de la pression de consigne sur un essai à 4 bars que sur un essai à 7 bars.

Variation de la vitesse de rotation

Dans cette dernière section, nous nous intéresserons à l'impact de la vitesse de rotation du disque de frein sur le phénomène de crissement. Les essais associés à cette étude, portant les numéros 21 à 30 et 51 à 80, ont été réalisés à une pression de freinage moyenne de 7 bars avec

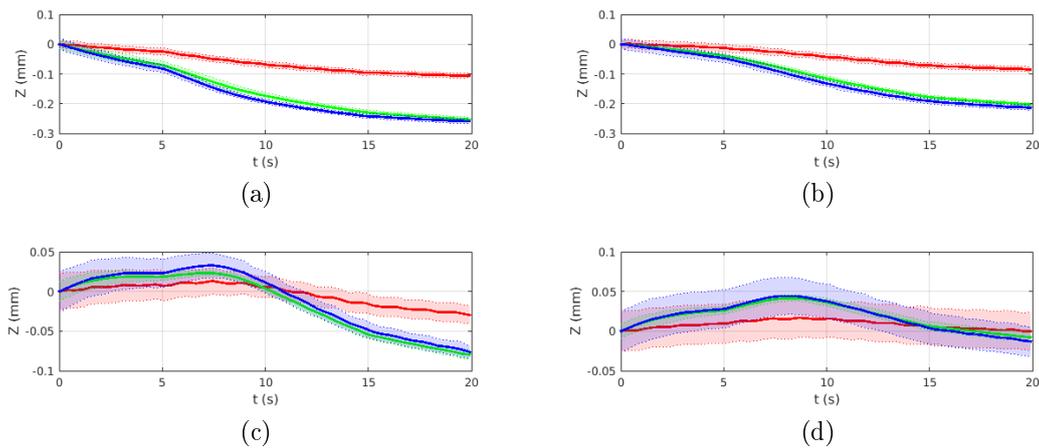


FIGURE 2.23 – Evolutions de la position d'équilibre statique moyenne du disque sur les 4 capteurs de proximité pour les 3 valeurs de pression de freinage : (rouge) 4 bars, (vert) 7 bars et (bleu) 11 bars; (a) Capteur de proximité 1, (b) Capteur de proximité 2, (c) Capteur de proximité 3 et (d) Capteur de proximité 4

une dispersion de 0.24 bars. La vitesse de rotation du disque étant bien maîtrisée et réglée en amont de l'essai, elle ne présente pas de dispersion. L'influence de la vitesse de rotation du disque va être étudiée sur un ensemble de 40 essais, soit 10 pour chaque vitesse de 100 rpm, 200 rpm, 300 rpm et 400 rpm. De la même façon que pour les essais sur la variation de pression de freinage nous considérons que le système est déjà bien rodé et que les essais sont répétables sur cette plage chronologique.

L'évolution moyenne des coefficients de frottement apparent moyen pour ces 4 différentes vitesses de rotation est présentée à la Figure 2.26. Nous observons que la vitesse de rotation du disque a un impact plus faible sur le coefficient de frottement apparent moyen que la pression de freinage. La brusque chute de la courbe concernant les essais à 400 rpm est due à plusieurs arrêts déclenchés automatiquement en fin d'essai à cause de la température plaquette trop importante, en conséquence cette baisse ne doit pas être prise en compte dans notre analyse. Nous pouvons ensuite noter que les valeurs se stabilisent vers les valeurs nominales dans le régime établi pour les vitesses de rotation de 200, 300 et 400 rpm alors que pour 100 rpm la valeur moyenne de μ_{app} semble continuer à augmenter lors du déroulement de l'essai. Nous avons un comportement là encore non monotone avec des valeurs nominales de μ_{app} qui décroissent de 100 à 300 rpm avec des valeurs respectivement de 0.59, 0.54 et 0.51 pour remonter à 400 rpm avec une valeur de 0.55. Les essais montrent peu de dispersion sur ces mesures, à part pour la vitesse de 100 rpm, où comme pour la pression de 4 bars dans la section 2.4.3 les essais présentaient un phénomène de crissement plus irrégulier.

L'évolution de la variation de position d'équilibre statique moyenne du disque en fonction du temps est illustré à la Figure 2.27 grâce aux mesures des quatre capteurs de proximité. Nous remarquons que les positions d'équilibre statique moyenne suivent la même tendance sur chacune des voies. L'augmentation de la vitesse de rotation du disque tend à amplifier la déflexion du disque. Les différentes phases du signal temporel peuvent être retrouvées, notamment avec l'apparition du phénomène de crissement au moment de la montée en pression qui provoque une cassure des courbes vers 5s.

La Figure 2.28 rassemble les pics fréquentiels relevés sur les 11 voies de mesure d'intérêt pour les 3 intervalles de temps d'observations définis. Nous observons que la vitesse de rotation du disque ne semble pas modifier les fréquences des pics relevés sur les différentes FFT, mis à part l'ensemble autour de $[800; 900] Hz$ sur les capteurs de proximité. Les essais à 100 et 400 rpm présentent un peu de dispersion en fréquence. L'influence de la vitesse de rotation du disque

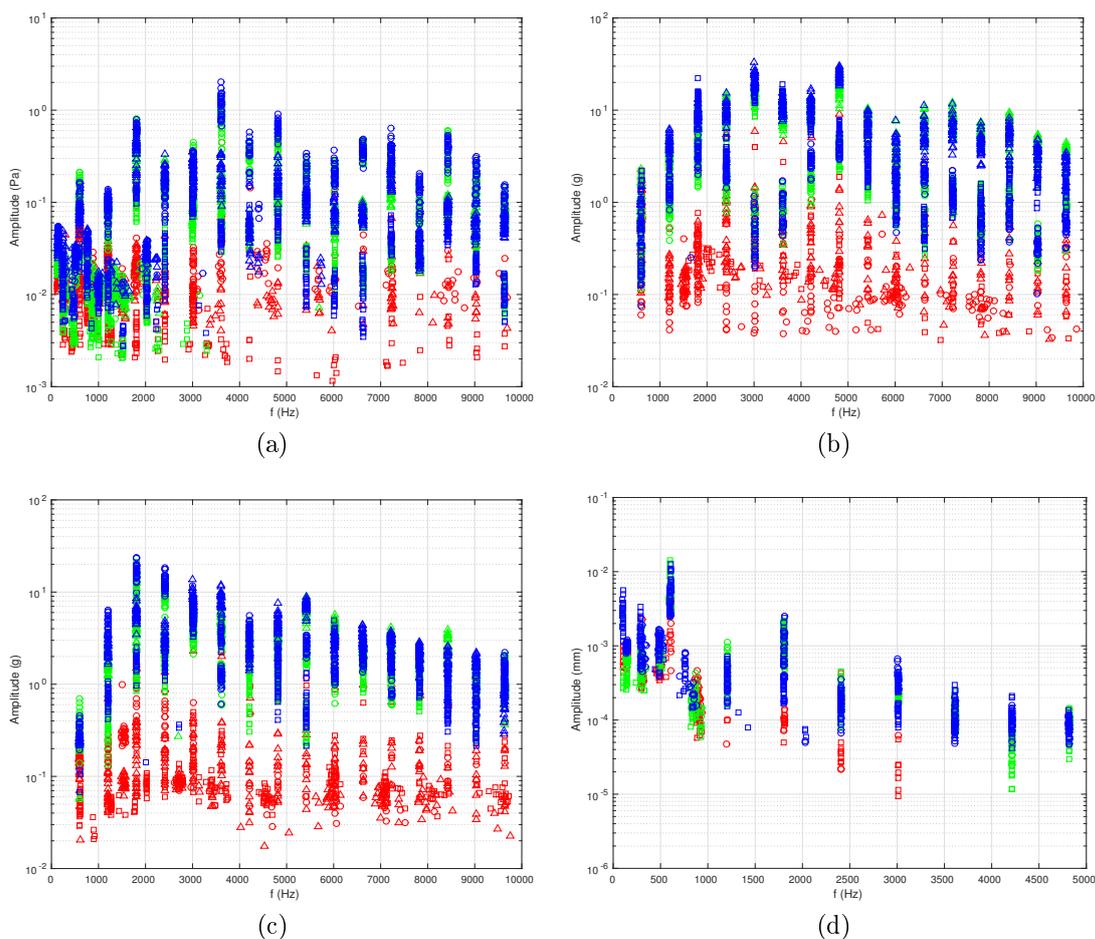


FIGURE 2.24 – Diagrammes rassemblant les pics fréquentiels sur les voies d’intérêt et sur les 3 intervalles d’étude, influence de la pression de freinage : (rouge) 4 bars, (vert) 7 bars et (bleu) 11 bars ; (a) Micros, (b) TriAxe 4 plaquette, (c) TriAxe 5 étrier et (d) Capteurs de proximité disque

est importante sur les amplitudes. Leurs évolutions n’est pas monotone avec la variation de la vitesse de rotation du disque, avec une très forte croissance entre 100 et 200 rpm, puis une faible baisse pour 300 rpm, et finalement un niveau équivalent aux niveaux de 100 rpm pour une vitesse de 400 rpm. Cependant la répartition des amplitudes entre les fréquences suit la même tendance d’un groupe de vitesse à l’autre.

Le tracé des valeurs moyennes des amplitudes et les écarts types associés à la Figure 2.29 permet d’observer dans quelle mesure les différentes contributions fréquentielles sont modifiées avec le changement de la vitesse de rotation du disque. Dans l’ensemble, sur les raies au delà de 2000Hz , on observe bien que les niveaux des essais à 200 rpm sont ceux qui ont les niveaux les plus importants, juste au dessus de ceux à 300 rpm, alors que les essais à 100 et 400 rpm ont des niveaux similaires, plus faibles de presque un ordre de grandeur. La fondamentale à 595Hz sur tous les essais et le groupe autour de $[800; 900]\text{Hz}$ sont les seules raies où l’augmentation de la vitesse de rotation entraîne une augmentation des niveaux. Aussi nous observons au niveau des harmoniques le passage au maximum d’amplitude en réponse pour une vitesse de rotation qui doit se situer en 200 et 300 rpm. Les vitesses de rotation de 100 et 400 rpm donnent lieu à des contributions faibles en amplitude en ce qui concerne les harmoniques, qui sont parfois inobservables comme par exemple pour les hautes fréquences sur les capteurs de proximité. Nous remarquons que quelle que soit la vitesse de rotation du disque, la répartition

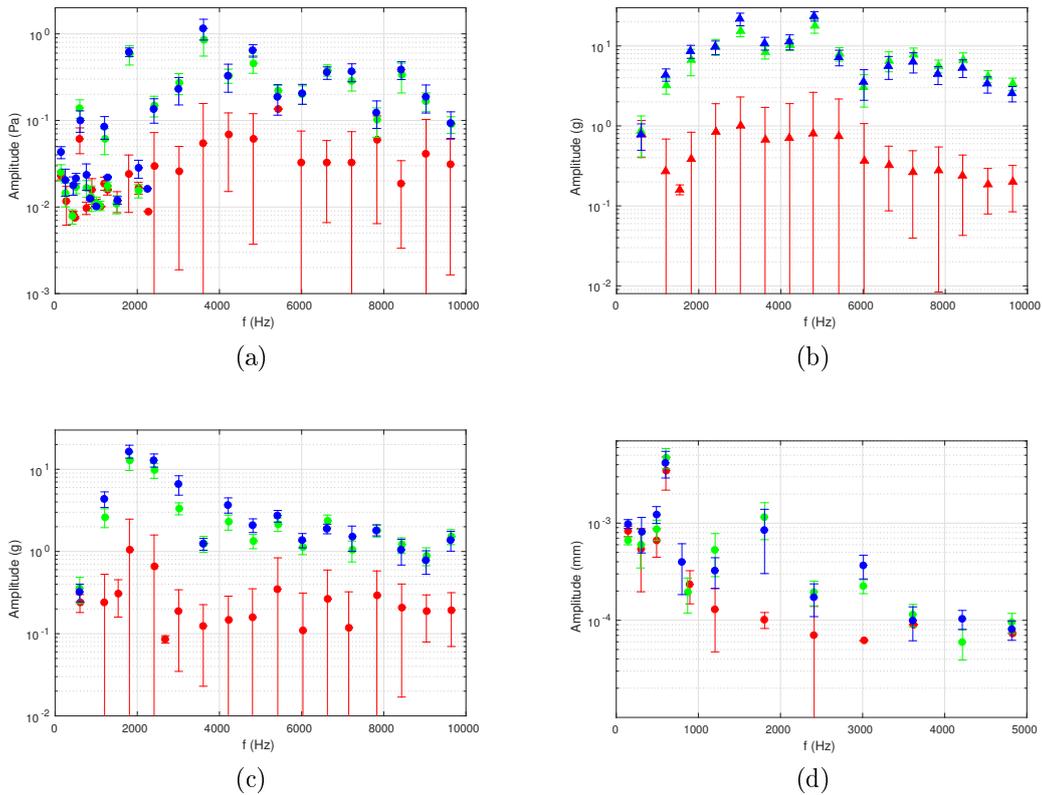


FIGURE 2.25 – Diagrammes rassemblant les moyennes et écarts types sur quatre voies de mesure, variation de la pression de freinage : (rouge) 4 bars, (vert) 7 bars et (bleu) 11 bars ; (a) Micro 10, (b) TriAxe 4 Z, (c) TriAxe 5 Y et (d) Capteur de proximité 3

fréquentielle conserve une signature spectrale relativement semblable sur la répartition globale des amplitudes. Le système de frein crissant émet un son reconnaissable, caractérisé par cette signature spectrale et seule son intensité totale varie selon les conditions d'opération.

Nous pouvons conclure de cette étude d'influence que la vitesse de rotation a également un impact important sur le crissement, mais d'une façon différente de la pression de freinage. Le système montre une réaction plus importante en amplitude pour des vitesses de rotation "moyennes" entre $[200; 300]$ rpm, alors qu'une vitesse trop faible entraîne un crissement peu important ou pas du tout de vibrations, et qu'une vitesse de rotation trop élevée tend à faire baisser les niveaux de vibrations et acoustiques. Cependant, nous observons que dès que le système produit le phénomène de crissement et que les vibrations auto-entretenues apparaissent, la signature fréquentielle associée est caractéristique du crissement type identifiable par une signature fréquentielle similaire. Des dispersions importantes peuvent être observées dans le cas d'un crissement faible, et la signature spectrale se stabilise lorsque les niveaux sont plus importants. A l'inverse, la valeur du coefficient de frottement apparent moyen passe par une valeur minimale pour une vitesse de rotation intermédiaire. Nous observons également une déflexion croissante du disque avec la vitesse de rotation.

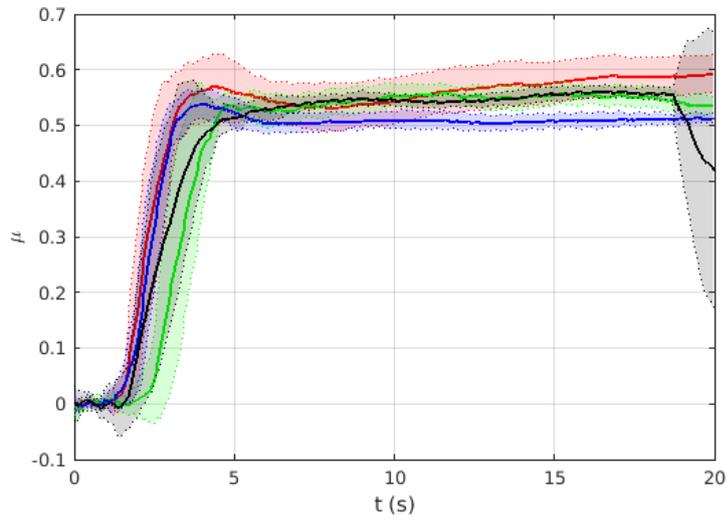


FIGURE 2.26 – Evolution des moyennes et écarts types de coefficients de frottement apparents pour les essais à 7 bars, pour des vitesses de rotation de : (rouge) 100 rpm, (vert) 200 rpm, (bleu) 300 rpm et (noir) 400 rpm

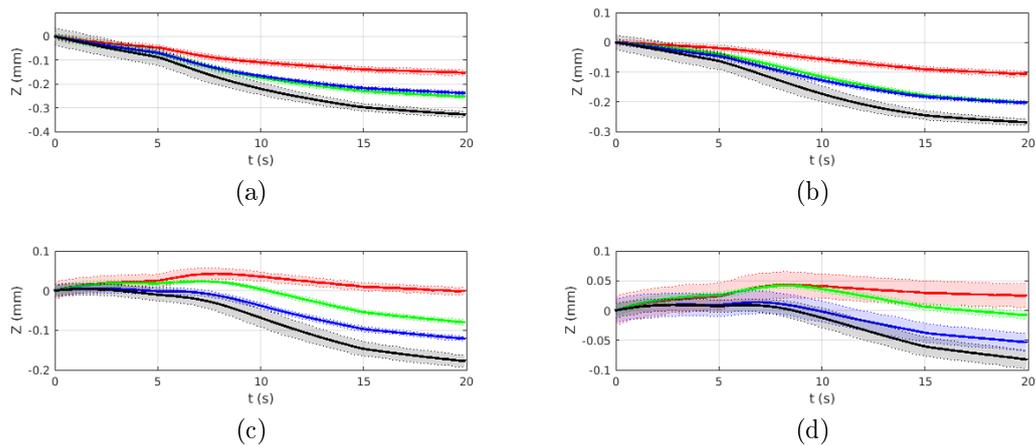


FIGURE 2.27 – Evolutions de la position d'équilibre statique moyenne du disque sur les 4 capteurs de proximité pour les 4 valeurs de vitesse de rotation : (rouge) 100 rpm, (vert) 200 rpm, (bleu) 300 rpm et (noir) 400 rpm ; (a) Capteur de proximité 1, (b) Capteur de proximité 2, (c) Capteur de proximité 3 et (d) Capteur de proximité 4

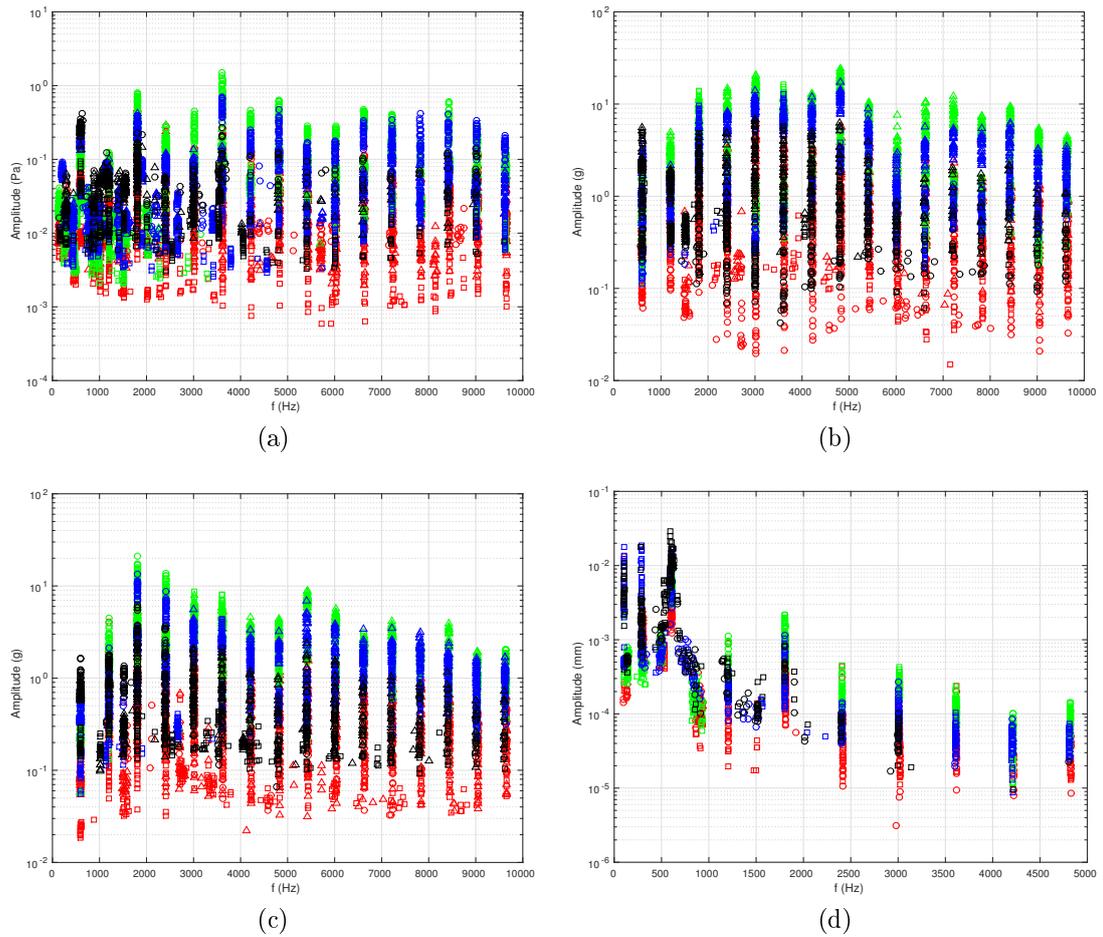


FIGURE 2.28 – Diagrammes rassemblant les pics fréquentiels sur les voies d'intérêt et sur les 3 intervalles d'étude, influence de la vitesse de rotation : (rouge) 100 rpm, (vert) 200 rpm, (bleu) 300 rpm et (noir) 400 rpm ; (a) Micros, (b) TriAxe 4 plaquette, (c) TriAxe 5 étrier et (d) Capteurs de proximité disque

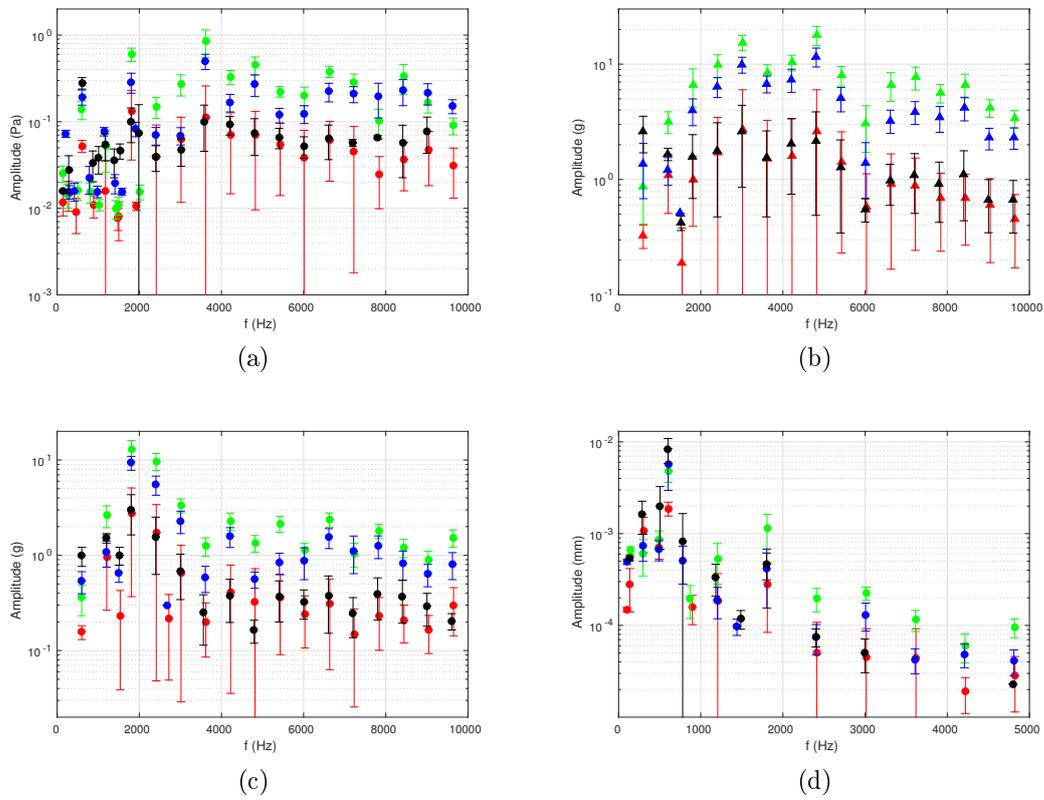


FIGURE 2.29 – Diagrammes rassemblant les moyennes et écarts types sur quatre voies de mesure, variation de la vitesse de rotation : (rouge) 100 rpm, (vert) 200 rpm, (bleu) 300 rpm et (noir) 400 rpm ; (a) Micro 10, (b) TriAxe 4 Z, (c) TriAxe 5 Y et (d) Capteur de proximité 3

2.5 Conclusions expérimentales pour la modélisation

Toutes les observations faites lors de cette étude vont nous permettre de tirer des conclusions expérimentales quant aux paramètres à prendre en compte dans la construction d'un modèle numérique. Ce type de raisonnement s'appuyant sur des observations expérimentales dans le but d'étudier numériquement le phénomène de crissement a déjà été employé plusieurs fois avec succès [7, 29, 39, 54, 140, 151]. L'étude expérimentale menée ici permet de statuer sur la nécessité de considérer ou non les paramètres d'entrée étudiés, sachant que l'objectif ne sera pas dans la suite de la thèse d'effectuer un recalage des simulations vis-à-vis des expériences, mais de retrouver les tendances principales observées sur le banc d'essais. Les conclusions expérimentales pour une aide à la modélisation sont :

- Le coefficient de frottement apparent μ_{app} reste relativement constant lors du régime établi de crissement. Lors de l'état de l'art exposé à la Section 1.3 il a été rappelé qu'un coefficient de frottement constant peut suffire à l'apparition du crissement par le mécanisme du couplage de modes ou du sprag-slip. L'expérience nous montre ici que cette hypothèse est vérifiée sur le régime établi de la dynamique du crissement. Nous pourrions donc choisir un coefficient de frottement constant pour un ensemble de paramètres de simulation donné.
- La modélisation de l'ensemble des pièces du système de frein, à savoir le disque, l'étrier et les plaquettes pour reproduire le champ acoustique rayonné semble nécessaire. En effet, les vibrations de crissement sont la manifestation d'une vibration du système couplé dans son ensemble et le champ acoustique rayonné tire sa complexité des vibrations combinées de tous les composants du système de frein. Chaque partie du frein semble apporter sa contribution particulière au rayonnement acoustique. Les vibrations du système couplé à l'arrêt correspondent de très près aux vibrations du système produisant du crissement lorsqu'il est en rotation, avec néanmoins des fréquences supplémentaires. Une analyse de type couplage de mode semble par conséquent pertinente pour la suite.
- Le phénomène de changement de position d'équilibre statique lors de l'application de la pression de freinage a été observé lors des mesures. Le système d'étrier fixe utilisé sur le banc entraîne une modification de la position d'équilibre statique glissant de l'ensemble du système lorsque la pression de freinage est appliquée. Cela entraîne une déflexion du disque et des réactions sur les liaisons qui relient l'étrier et le disque au reste du banc. Le modèle numérique doit être capable de montrer ce comportement observé expérimentalement et de prendre en compte l'influence de la pression et de la position d'équilibre glissant sur le phénomène de crissement.
- Nous avons constaté que l'usure pouvait avoir une influence, entre un système avec des plaquettes neuves et un système rodé, et qu'elle influait surtout sur la valeur du coefficient de frottement apparent. La valeur que nous attribuerons au coefficient de frottement constant lors de la modélisation correspondra par conséquent à un système rodé ou non.
- L'influence de la pression de freinage sur les niveaux vibratoires a également montré que c'est un paramètre important à prendre en compte dans un modèle. Il faudra donc trouver un moyen de l'intégrer et pouvoir en modifier la valeur numériquement. Cependant la pression mesurée lors des essais est celle du circuit hydraulique, et l'implémentation d'un modèle hybride avec un couplage fluide/structure devra être évitée au profit d'une application directe d'un champ de pression équivalent au dos des plaquettes.
- La vitesse de rotation joue un rôle important et non trivial dans l'apparition et les niveaux vibratoires liés au crissement. Sa prise en compte semble nécessaire. Toutefois, tous les essais réalisés ici ont été des essais à vitesse constante et la variation de vitesse au cours d'un essai n'a pas été étudiée.
- Nous n'avons pas dans cette étude envisagé l'impact de la température sur le crissement car c'est un paramètre qui était plus subi que maîtrisé. Cependant la température des

différentes pièces du système de frein joue certainement un rôle lors des occurrences de crissement mais nous n'avons pas pu être en mesure de le quantifier. Sous l'effet de la chaleur il semble que les différentes parties du système de frein se dilatent et se déforment, en particulier une pièce fine comme le disque, mais la encore la mise en place d'un modèle thermoélastique impliquant plusieurs solides en contact glissant semble compliquée dans une première approche.

Chapitre 3

Modélisation, réduction et analyse de stabilité d'un système mécanique de frein simplifié

Sommaire

3.1	Construction du modèle Eléments Finis	86
3.1.1	Rappel des hypothèses formulées	86
3.1.2	Architecture	86
3.1.3	Gestion du contact aux interfaces	88
3.1.4	Choix de l'amortissement	91
3.1.5	Equation dynamique du modèle de frein simplifié	91
3.2	Rappel sur l'étude de la stabilité du système	92
3.3	Réduction du modèle	93
3.3.1	Application de la réduction de Craig et Bampton	94
3.3.2	Double Synthèse Modale (DMS)	95
3.4	Résultats de l'analyse de stabilité	97
3.4.1	Analyse de stabilité du modèle de référence	97
3.4.2	Critères d'évaluation de la convergence des modèles réduits pour la stabilité	99
3.4.3	Stabilité pour l'étape de réduction de Craig et Bampton	100
3.4.4	Stabilité pour la Double Synthèse Modale	103
3.5	Conclusion	106

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter un modèle de système de frein à disque simplifié construit à partir des hypothèses de modélisation tirées des observations expérimentales de la Section 2.5. La construction du modèle par la méthode des Eléments Finis et les choix concernant la géométrie, le maillage et les conditions aux limites sont d'abord présentés. Puis l'application de deux méthodes de réduction successives est présentée. Dans un premier temps la méthode classique de Craig et Bampton appliquée à chaque sous structure est utilisée, puis une méthode de réduction des degrés de liberté restants aux interfaces est introduite et appliquée. Les résultats de l'analyse de stabilité du système ainsi obtenu sont présentés et une analyse de l'efficacité des techniques de réduction pour la prédiction des instabilités de crissement est menée.

3.1 Construction du modèle Eléments Finis

Les systèmes de freins à disque sont des mécanismes complexes, où les différentes interactions entre les sous-structures restent encore mal comprises ou non totalement maîtrisées. L'objectif du présent chapitre est de construire un modèle représentatif de la phénoménologie du crissement. Dans cette optique, nous proposons ici un modèle simplifié de frein à disque construit à partir des observations expérimentales menées sur le banc FIVE@ECL.

3.1.1 Rappel des hypothèses formulées

L'étude expérimentale réalisée au chapitre précédent nous a permis de tirer des observations de l'ensemble des campagnes d'essais. Un ensemble d'hypothèses de modélisation a été formulé :

- La coefficient de frottement apparent μ_{app} aux interfaces de contact est constant lors du régime établi de crissement, la valeur qu'on lui attribue prend également en compte les effets d'usure,
- La prise en compte du disque, des plaquettes et de l'étrier dans un modèle numérique est nécessaire pour reproduire fidèlement le champ acoustique rayonné,
- La pression de freinage doit être modélisée car elle influe directement sur les niveaux de vibration de crissement,
- La vitesse de rotation a une influence non négligeable sur la propension au crissement du système et sur les amplitudes de vibration,
- Le changement de position d'équilibre suite à l'application de la pression de freinage doit être intégré dans le modèle.

Nous nous baserons sur ces observations expérimentales et conclusions sur les hypothèses dans la suite de ce chapitre en apportant des précisions le cas échéant.

3.1.2 Architecture

L'architecture d'un système de frein complet comporte un certain nombre de détails structuraux parfois difficiles à modéliser numériquement ou demandant un effort et un temps de réalisation du modèle important. Dans le cadre de notre étude, nous choisissons une modélisation géométrique simplifiée composée uniquement du disque et des plaquettes de frein. Bien que les analyses expérimentales indiquent une participation de l'étrier dans les vibrations de la structure sur le banc FIVE@ECL, les interactions entre les plaquettes et l'étrier ne sont pas prises en compte dans notre modèle car leurs zones de contact sont potentiellement nombreuses et peuvent avoir des effets complexes sur la stabilité et la dynamique du système considéré [37, 38]. Le disque et les plaquettes sont circulaires comme illustré sur la Figure 3.1

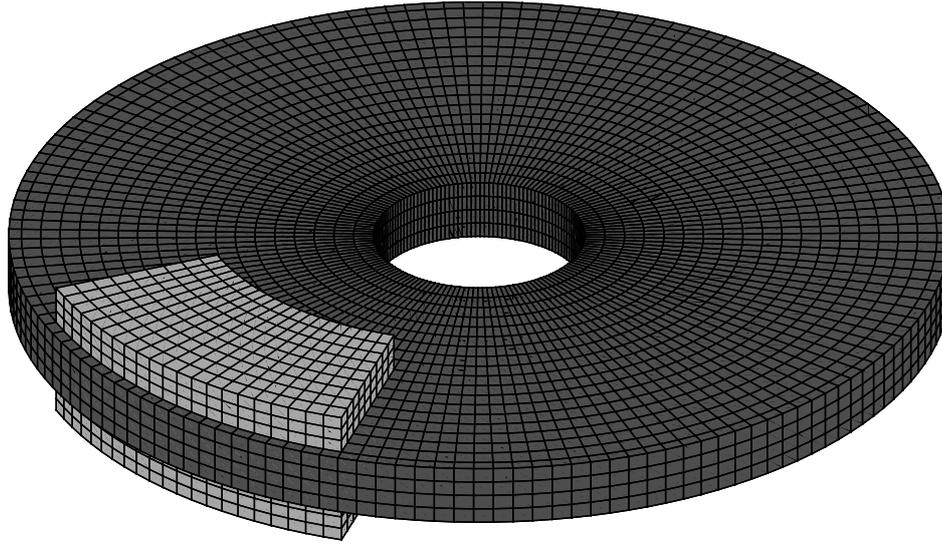


FIGURE 3.1 – Modèle Eléments Finis du système de frein simplifié

Paramètre du modèle	Disque	Plaquettes
Épaisseur (Z direction, m)	0.02	0.0128
Rayon extérieur (m)	0.151	0.147
Rayon intérieur (m)	0.034	0.091
Module d(Young E (Pa))	$1.25 * 10^{11}$	$2 * 10^9$
Coefficient de Poisson	0.3	0.1
Masse volumique ($kg.m^{-3}$)	7200	2500
Ouverture angulaire ($^\circ$)	-	50

TABLEAU 3.1 – Paramètres du modèle géométrique simplifié

et leurs dimensions ainsi que leurs propriétés mécaniques sont données dans la Table 3.1. Le disque est modélisé par un anneau plein en acier et sa géométrie est proche du disque expérimental. En revanche, les plaquettes sont constituées d'une plaque de support sur laquelle est collée la garniture qui est un matériau abrasable souvent fabriqué par frittage. La modélisation précise des plaquettes de frein n'étant pas l'objet de cette étude, nous supposons donc ici qu'elles sont homogènes et isotropes et constituées uniquement de la garniture.

Les contributions de l'étrier et des plaques de support sont modélisées par des conditions aux limites sur les plaquettes. Pour la plaquette supérieure, les quatre sommets hors de l'interface sont reliés rigidement à un nœud maître qui ne peut se déplacer que selon l'axe Z, soit perpendiculairement à l'interface de contact et ses rotations sont bloquées. Pour la plaquette inférieure, tous les nœuds de la face arrière sont reliés rigidement à un second nœud maître qui est encastré. Le traitement différent des deux plaquettes de frein assymétrise le système et permet lors de l'application de la pression de freinage un déplacement du système ainsi qu'une mise en position d'équilibre statique glissante permettant de simuler un montage à étrier fixe. L'anneau intérieur du disque est également encastré.

Ce modèle géométrique simplifié du système de frein est construit sous Matlab et discrétisé par la méthode des Eléments Finis à l'aide de la toolbox SDTools [1] au moyen d'éléments hexaédriques à huit nœuds et à interpolation linéaire. La finesse du maillage permet d'avoir une convergence des modes propres de chaque sous structure (le disque et les deux plaquettes) jusqu'à $20kHz$ à moins de 5% d'erreur. La Table 3.2 reprend les caractéristiques de maillage. Les deux interfaces de contact ont été traitées de sorte à avoir des maillages conformes de 220 nœuds, ce qui permet d'introduire facilement les lois de contact nœud à nœud sur les surfaces

Paramètre du modèle	Eléments Finis	Disque	Plaquettes
Nombre de nœuds en épaisseur		4	3
Nombre de nœuds sur la circonférence		150	-

TABLEAU 3.2 – Paramètres de maillage du modèle Eléments Finis simplifié

concernées. Le modèle final complet contient environ 50 000 degrés de liberté.

La discrétisation par Eléments Finis à l'aide de SDTools permet d'obtenir directement les matrices de masse et de raideur de chaque sous structure, ce qui entraîne la construction des matrices de masse \mathbf{M} et de raideur \mathbf{K} du système complet sans interactions aux interfaces par concaténation comme montré Equation 3.1 ou les exposants d , $p1$ et $p2$ désignent respectivement les matrices associées au disque, à la plaquette supérieure et à la plaquette inférieure. Ces matrices ne sont pour le moment que la juxtaposition des trois sous systèmes sans assemblage dans la base des degrés de liberté physiques.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^d & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{p1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^{p2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^d & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{p1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}^{p2} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Le vecteur des degrés de liberté du système total \mathbf{X} est lui aussi la concaténation des vecteurs de degrés de liberté des sous structures comme indiqué Equation 3.2.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^d \\ \mathbf{X}^{p1} \\ \mathbf{X}^{p2} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Un réarrangement des degrés de liberté de chaque sous structure est possible et nous séparons les degrés de liberté d'interface de ceux hors interfaces comme indiqué Equation 3.3, où les indices int , $I1$ et $I2$ désignent respectivement des degrés de liberté hors interfaces ou appartenant à l'interface de contact supérieure et inférieure.

$$\mathbf{X}^d = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{I1}^d \\ \mathbf{X}_{I2}^d \\ \mathbf{X}_{int}^d \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}^{p1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{I1}^{p1} \\ \mathbf{X}_{int}^{p1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}^{p2} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{I2}^{p2} \\ \mathbf{X}_{int}^{p2} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

3.1.3 Gestion du contact aux interfaces

Le système géométrique discrétisé par la méthode des Eléments Finis présente deux interfaces de contact, constituées chacune de maillages conformes de 220 couples de nœuds par interface de contact. L'approche choisie ici est macroscopique car le choix d'une approche microscopique prenant en compte les aspérités aux interfaces entraînerait un modèle beaucoup trop lourd à mettre en œuvre. Les surfaces de contact sont donc modélisées lisses et nous considérons la possibilité de déformations macroscopiques liées aux déformations de la garniture et du disque. Nous faisons le choix de conserver dans le modèle initial tous les nœuds au niveau des interfaces de contact plaquettes/disque afin de leur appliquer des efforts de contact et de frottement. L'un des objectifs de cette thèse est l'application d'une méthode de double synthèse modale permettant justement de réduire les degrés de liberté aux interfaces.

L'état de l'art présenté à la section 1.2.2 a permis de mettre en évidence deux types de traitement du contact, les lois de contact non-régulières ou les lois de contact régularisées. Bien que les lois de contact non-régulières permettent un traitement physique et réaliste de la mécanique du contact (non-pénétration des surfaces en contact), elles peuvent entraîner des temps de calculs numériques importants à cause de l'estimation des états de contact à chaque itération d'un algorithme. Nous choisissons donc une loi de contact régularisée, présentée

aux Equations 3.4 et 3.5 respectivement pour l'interface supérieure et l'interface inférieure, où à chaque couple de nœuds de contact i , la force de contact normale $\mathbf{F}_{n,d}^i$ au niveau du disque est calculée en fonction du rapprochement relatif normal à chaque interface. Pour l'interface supérieure nous définissons $\delta_{I1}^i = (\mathbf{X}_d^i - \mathbf{X}_{p1}^i) \cdot \vec{\mathbf{u}}_z$ entre le déplacement du nœud \mathbf{X}_d^i sur le disque et du nœud de la plaquette supérieure \mathbf{X}_{p1}^i , où l'on introduit le système de coordonnées polaires $(\vec{\mathbf{u}}_r, \vec{\mathbf{u}}_\theta, \vec{\mathbf{u}}_z)$ naturel du système géométrique avec l'axe Z qui est l'axe de symétrie cylindrique du disque, orienté vers le haut. Pour l'interface inférieure nous définissons $\delta_{I2}^i = (\mathbf{X}_{p2}^i - \mathbf{X}_d^i) \cdot \vec{\mathbf{u}}_z$ entre le déplacement du nœud \mathbf{X}_d^i sur le disque et du nœud de la plaquette inférieure \mathbf{X}_{p2}^i ,

$$\mathbf{F}_{n,d}^i = \begin{cases} -(k_L \delta_{I1}^i + k_{NL} \delta_{I1}^{i3}) \vec{\mathbf{u}}_z & \text{si } \delta_{I1}^i \geq 0 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_{n,d}^i = \begin{cases} (k_L \delta_{I2}^i + k_{NL} \delta_{I2}^{i3}) \vec{\mathbf{u}}_z & \text{si } \delta_{I2}^i \geq 0 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

Bien que ce type de loi autorise une interpénétration des surfaces en contact, elle permet d'obtenir une relation bi-univoque simple entre la réaction de contact normal et le rapprochement local normal des surfaces aux interfaces tout en prenant en compte la possibilité d'un décollement sans adhésion. Elle permet également d'un point de vue mathématique d'avoir directement la différentielle des efforts de contact normaux en fonction du rapprochement des interfaces de contact pour toute position possible \mathbf{X} du système, ce qui facilite le travail d'implémentation de la méthode de calcul de stabilité et d'intégration temporelle et accélère les temps de calcul. Le choix des coefficients k_L et k_{NL} peut se faire par identification à partir de lois de compression expérimentales mais nous avons choisi dans cette thèse de les prendre comme paramètres variables afin d'obtenir des cas d'étude particuliers tout en restant dans des résultats physiquement acceptables en termes de déplacement et de vitesse. Un choix de coefficients élevés permet de se rapprocher d'une loi de type non-régularisée mais raidit le système et complique la convergence des algorithmes alors qu'un choix de coefficients trop faible risque de permettre une interpénétration aberrante. La force normale de réaction sur les nœuds aux interfaces des deux plaquettes est donnée par la troisième loi de Newton $F_{n,p}^i = -F_{n,d}^i$. Pour finir, le choix de considérer 220 couples de nœuds de contact a été vérifié en terme de convergence.

Nous avons pu observer lors des campagnes d'essais sur le banc FIVE@ECL que lors de l'apparition du phénomène de crissement, le coefficient de frottement apparent reste constant en régime établi. Nous choisissons également de considérer un régime de glissement constant. L'analyse des différentes lois de frottement lors de l'état de l'art ainsi que les conclusions des études expérimentales nous amènent à choisir une loi de frottement de Coulomb à coefficient de frottement constant et en considérant le système en glissement permanent sans phase d'adhérence et effet de stick-slip. Nous choisissons également un frottement linéaire dans le sens de glissement principal donné par la rotation du disque par rapport aux plaquettes, par opposition à un frottement plan. La vitesse de rotation ne sera pas introduite directement dans le modèle numérique Eléments Finis. L'effort de frottement sur chaque couple i de nœuds coïncidents aux interfaces du disque $\mathbf{F}_{frott,d}^i$ est donc choisi dans la direction orthoradiale et introduit artificiellement dans le modèle par la relation donnée à l'Equation 3.6, pour les deux interfaces de contact.

$$\mathbf{F}_{frott,d}^i = -\mathbf{F}_{frott,p}^i = \mu \|F_{n,d}^i\| \vec{\mathbf{u}}_\theta \quad (3.6)$$

Finalement, les efforts non linéaires aux interfaces $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X})$ sont donnés par la somme des efforts normaux et des efforts tangentiels de frottement comme indiqué Equation 3.7. Ce sont ces efforts de couplage non-linéaires aux interfaces qui vont permettre de faire apparaître des

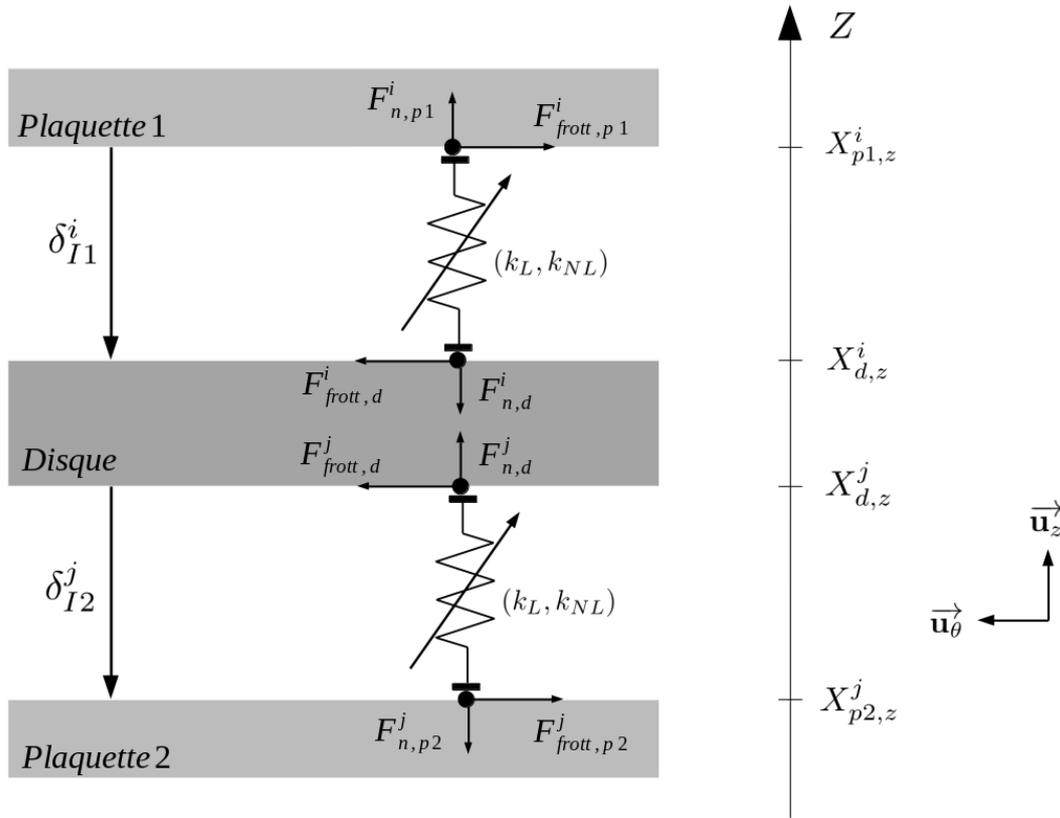


FIGURE 3.2 – Schéma des interactions entre les couples de nœuds coïncidents sur les deux interfaces de contact entre le disque et les deux plaquettes

instabilités par couplage de modes. La Figure 3.2 schématise les notations et les efforts entre un couple de nœuds sur chaque interface.

$$\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{frott} \quad (3.7)$$

L'intérêt majeur du choix de ces deux types de lois pour le contact normal et le frottement tangentiel, en dehors de la facilité de traitement informatique qu'elles permettent, est qu'il est aisé d'en obtenir la différentielle. La Jacobienne $\mathbf{J}_{F_{NL}}(\mathbf{X})$ des efforts de contact non-linéaires \mathbf{F}_{NL} au point \mathbf{X} est calculable analytiquement pour toute position possible du système et ne nécessite donc pas un calcul approché par différences finies comme dans le cas d'un contact non-régularisé. La linéarisation des efforts aux interfaces autour de tout point \mathbf{X} peut donc se faire comme indiqué Equation 3.8 :

$$\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) \approx \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) + \mathbf{J}_{F_{NL}}(\mathbf{X})\delta\mathbf{X} \quad (3.8)$$

L'introduction du frottement \mathbf{F}_{frott} dans l'expression des efforts de contact aux interfaces entraîne l'apparition de termes qui dissymétrisent la Jacobienne $\mathbf{J}_{F_{NL}}$. Ce sont ces termes supplémentaires qui vont pouvoir faire apparaître une instabilité de couplage de modes par bifurcation de Hopf.

Comme nous l'avons observé au Chapitre 2, la pression de freinage joue un rôle important sur les occurrences de crissement et les niveaux de vibration, et sa prise en compte est nécessaire. La modélisation de la pression de freinage est réalisée par un champ de force extérieur \mathbf{F}_{ext} dirigé selon Z , soit orthogonalement aux interfaces et distribué uniformément sur les nœuds des faces arrières des plaquettes. Ce champ est orienté vers le disque pour chacune des plaquettes. L'application de cet effort de freinage permet le contact et l'apparition de frottement au niveau des interfaces de contact.

3.1.4 Choix de l'amortissement

La modélisation de l'amortissement en dynamique des structures est un sujet complexe. Il est nécessaire de l'introduire dans notre modèle numérique, ce dernier jouant un rôle sur l'amplitude des vibrations, notamment dans le cas de vibrations auto-entretenues. Physiquement, l'amortissement est la manifestation d'une dissipation de l'énergie du système, principalement sous forme thermique, par divers mécanismes comme les frottements microscopiques et macroscopiques, la plasticité ou encore les viscosités. Sa modélisation est difficile et ses effets sur un phénomène comme le crissement sont de nature complexe, car il peut à la fois stabiliser ou déstabiliser un système [24, 26, 50, 51, 112].

L'amortissement d'une structure dépend de la fréquence à laquelle elle est excitée. Une fonction mesurant le rapport entre l'énergie dissipée par rapport à l'énergie de déformation restituée durant un cycle sinusoïdal définit le facteur de perte et est mesurable expérimentalement. Un coefficient d'amortissement visqueux peut être relié au facteur de perte et déterminé pour chaque type de matériau.

Il existe alors plusieurs façons de modéliser l'amortissement. La première est le choix d'un amortissement hystérétique qui correspond à un amortissement structural global. A partir de la matrice de raideur \mathbf{K} et d'un coefficient de perte global η on peut construire une matrice de raideur hystérétique $\mathbf{K}_h = (1 + i\eta)\mathbf{K}$. Cette méthode est très simple à implémenter mais elle suppose que le coefficient de perte est constant avec la fréquence d'excitation et que tous les modes de la structure sont amortis de la même façon. Son avantage est qu'avec une seule mesure il est possible de recalibrer le paramètre η directement. Il n'est en revanche pas adapté à tout type de simulation numérique comme un calcul temporel en raison du terme imaginaire. Une autre approche courante est d'utiliser un amortissement de Rayleigh qui est un amortissement visqueux proportionnel aux matrices de masse et de raideur. Nous pouvons l'écrire sous la forme $\mathbf{C} = \alpha_R\mathbf{K} + \beta_R\mathbf{M}$ avec α_R et β_R deux coefficients pouvant se calibrer à partir de deux pulsations ω_1 et ω_2 amorties au taux d'amortissement ζ et des formules indiquées Equation 3.9. Cette méthode a tendance à trop amortir les modes en dehors de l'intervalle des deux pulsations de calibrage mais elle reste valide sur un intervalle de fréquence plus grand que l'amortissement hystérétique.

$$\alpha_R = 2\zeta \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad \beta_R = 2\zeta \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \quad (3.9)$$

Pour pallier à ce problème, il est possible d'appliquer un amortissement modal visqueux qui fait la distinction entre les différents modes de la structure. Pour chaque mode propre de la structure i , il est possible d'appliquer un taux d'amortissement $\zeta_i = 2\xi_i\omega_i$, avec ξ_i qui représente un pourcentage d'amortissement et ω_i la pulsation propre du mode. La matrice d'amortissement modale \mathbf{C}_{mod} est alors reconstruite par passage dans la base physique selon la relation suivante : $\mathbf{C}_{mod} = \mathbf{\Phi}^t\mathbf{D}\mathbf{\Phi}$, avec $\mathbf{\Phi}$ la matrice de passage de la base modale à la base physique et \mathbf{D} la matrice diagonale des taux d'amortissement ζ_i . Le choix de ce type d'amortissement nécessite d'appliquer un pourcentage d'amortissement à chaque mode propre de la structure retenu et peut être compliqué à réaliser a priori. Il faut également choisir entre le calcul d'un amortissement modal par sous structure ou sur la structure totale couplée.

L'efficacité de l'amortissement de Rayleigh ainsi que sa facilité de mise en œuvre nous pousse à l'adopter dans notre étude. Le taux d'amortissement ζ est fixé à 0.5% et les deux pulsations de calibrage à 2000Hz et 5000Hz. Son avantage par rapport à l'amortissement modal est qu'il n'est pas nécessaire de calculer les modes de la structure pour pouvoir l'appliquer.

3.1.5 Equation dynamique du modèle de frein simplifié

L'équation de la dynamique totale du système discrétisé par la méthode des Eléments Finis peut finalement s'écrire comme indiqué Equation 3.10, où \mathbf{M} , \mathbf{K} et \mathbf{C} sont les matrices de masse, raideur et amortissement, \mathbf{X} est le vecteur des degrés de liberté du système total et où

le point désigne la dérivation temporelle. Les efforts appliqués au système sont présents dans le second membre avec \mathbf{F}_{ext} qui reprend les efforts de la pression de freinage sur la face arrière des plaquettes et \mathbf{F}_{NL} les efforts de contact et de frottement aux deux interfaces. C'est un système d'équations différentielles du second ordre couplé non linéaire.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_{ext} \quad (3.10)$$

Les matrices modélisant les effets gyroscopiques normalement associées à la rotation du disque ne sont pas prises en compte dans l'Equation 3.10. Ce choix a déjà été justifié par plusieurs études [146, 147, 153–156] et les résultats expérimentaux précédents qui ne montrent pas d'évolution des fréquences en fonction de la vitesse de rotation du système. Les effets thermo-mécaniques liés à la dilatation des matériaux sous l'effet de la chaleur ainsi que les aspects tribologiques aux interfaces ne sont également pas intégrés dans cette modélisation.

Cette équation servira de point de départ pour l'analyse de stabilité du système ainsi que l'étude de ses évolutions temporelles. Il est également possible de l'écrire sous forme d'état comme indiqué Equation 3.11 et présenté à la Section 1.6.1.

$$\mathbf{A}_M \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{A}_K \mathbf{Y} = \mathbf{A}_F \quad (3.11)$$

Avec \mathbf{Y} le vecteur des degrés de liberté sous forme d'état contenant le champ des déplacements ainsi que celui des vitesses, et \mathbf{A}_M , \mathbf{A}_K et \mathbf{A}_F les matrices du système sous forme d'état.

3.2 Rappel sur l'étude de la stabilité du système

Comme expliqué dans la Section 1.5, la stabilité du système dynamique s'étudie au voisinage d'un point d'équilibre \mathbf{X}_{eq} défini dans l'Equation non linéaire 3.12. Dans notre cas cet équilibre est dynamique et glissant car il fait intervenir les frottements aux interfaces et l'étude de stabilité s'effectue autour de cette position. Cette méthode appelée Complex Eigenvalue Analysis (CEA) est la méthode la plus largement répandue pour l'analyse des systèmes potentiellement instables [15, 27, 28, 37, 40, 55, 70, 72, 98, 99, 145, 148].

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_{eq} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}_{eq}) \quad (3.12)$$

Nous avons choisi d'effectuer le calcul de cette position d'équilibre à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson. L'algorithme est initialisé autour de la solution de la position de contact linéaire, en ne prenant en compte que le terme linéaire de l'effort de contact normal k_L :

$$\mathbf{X}_{eq}^0 = (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{F_{NL}}(\mathbf{0}))^{-1} \mathbf{F}_{ext} \quad (3.13)$$

Puis les itérations selon la méthode de Newton-Raphson sont effectuées selon l'Equation 3.14 jusqu'à ce que le résidu \mathbf{R}_{res} donné par l'Equation 3.15 soit suffisamment petit. L'intérêt de pouvoir évaluer rapidement la Jacobienne analytique $\mathbf{J}_{F_{NL}}$ en n'importe quel point \mathbf{X} permet un calcul rapide et ne nécessite pas l'évaluation des états de contact à chaque itération aux interfaces comme c'est le cas avec des lois de contact non régulières.

$$\mathbf{X}_{eq}^{i+1} = \mathbf{X}_{eq}^i - (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{F_{NL}}(\mathbf{X}_{eq}^i))^{-1} (\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}_{eq}^i)) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{R}_{res}(\mathbf{X}_{eq}^i) = \mathbf{K}\mathbf{X}_{eq}^i - \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}_{eq}^i) \quad (3.15)$$

Une fois le calcul de la position d'équilibre glissante terminé, nous pouvons passer à l'étude de la stabilité du système autour de \mathbf{X}_{eq} . En supposant de petites variations $\delta\mathbf{X}$ autour de la position d'équilibre glissante \mathbf{X}_{eq} telles que $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{eq} + \delta\mathbf{X}$, la linéarisation de l'équation du

mouvement autour de \mathbf{X}_{eq} permet d'obtenir l'Equation 3.16 qui régit l'évolution des petites perturbations autour de la position d'équilibre glissante.

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + \underbrace{(\mathbf{K} - \mathbf{J}_{F_{NL}}(\mathbf{X}_{eq}))}_{\mathbf{K}^{tot}}\delta\mathbf{X} = 0 \quad (3.16)$$

Nous introduisons la matrice de raideur totale au point d'équilibre \mathbf{K}^{tot} qui est la différence de la matrice de raideur et de la Jacobienne des efforts aux interfaces au point d'équilibre statique glissant, elle prend donc en compte les effets de raideur dus à la structure et ceux provenant des interactions aux interfaces, au voisinage du point d'équilibre glissant \mathbf{X}_{eq} .

L'Equation 3.16 est linéaire et ses solutions peuvent se mettre sous la forme $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_k e^{\lambda_k t}$. En introduisant cette expression dans l'Equation 3.16, nous obtenons l'Equation 3.17.

$$(\lambda_k^2 \mathbf{M} + \lambda_k \mathbf{C} + \mathbf{K}^{tot})\mathbf{X}_k = 0 \quad (3.17)$$

Le calcul de stabilité peut aussi se faire à partir des valeurs propres Λ_k de l'Equation 3.18 sous forme d'état :

$$(\Lambda_k \mathbf{A}_M + \mathbf{A}_{\mathbf{K}^{tot}})\mathbf{Y}_k = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_{\mathbf{K}^{tot}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K}^{tot} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

L'analyse de la stabilité du système se fait alors en étudiant les valeurs propres complexes $\Lambda_k = a_k + ib_k$ du problème aux valeurs propres généralisé donné par 3.18. La partie réelle a_k informe sur la stabilité du mode associé alors que la partie imaginaire b_k donne sa pulsation propre. S'il existe au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, le système est considéré instable.

3.3 Réduction du modèle

L'analyse des systèmes issus des méthodes de discrétisation, comme la méthode des Eléments Finis, pose des problèmes d'ordre numérique à cause la taille importante des matrices associées à ce système. Bien que ces matrices soient creuses, leur manipulation entraîne des temps de calculs souvent prohibitifs. Le système de frein que nous avons modélisé présente environ 50 000 degrés de liberté répartis entre les trois sous-structures en contact par le biais de deux interfaces de contact frottantes. Bien que l'inversion d'une matrice de cette taille soit possible, un algorithme d'intégration temporelle basé sur un schéma implicite nécessitera un temps de calcul trop important. Une réduction de modèle semble donc être un moyen de remédier à de tels problèmes numériques. Les matrices obtenues après réduction seront pleines mais de taille nettement plus raisonnable et vont nous permettre d'effectuer rapidement des études complètes sur le système de frein. Nous chercherons à évaluer l'efficacité d'un type de réduction et sa capacité à donner des prédictions proches du système initial.

Les méthodes de réduction permettent donc des calculs d'intégration temporelle en un temps acceptable. Il est possible de trouver un optimum entre d'une part la précision de calcul souhaitée et d'autre part les ressources informatiques et le temps de simulation. Ce gain de temps peut être un atout majeur dans le cadre d'études nécessitant un grand nombre de simulations comme c'est le cas avec un plan d'expérience ou lors d'une phase de conception en bureau d'étude.

Etant donné que les interfaces de contact en question sont fixes nous appliquerons dans un premier temps une réduction de Craig et Bampton à chaque sous structure, ce qui va condenser les degrés de liberté hors interfaces. Cette méthode présentée à la Section 1.4.2 est bien connue et son efficacité a déjà été prouvée lors de nombreuses études.

Après avoir réduit une première fois les sous structures du système de frein nous allons introduire et appliquer une seconde étape de réduction visant à réduire les degrés de liberté

physiques restants aux interfaces. Cette seconde réduction va nous permettre de réduire la taille du système dynamique au maximum afin de gagner en temps de calcul lors des différentes simulations que nous allons mener.

3.3.1 Application de la réduction de Craig et Bampton

Comme présentée à la Section 1.4.2, la méthode de Craig et Bampton est une méthode de réduction de modèle à interface fixe. En reprenant les résultats expliqués lors de l'état de l'art, nous distinguons pour chaque sous-structure les degrés de liberté internes et d'interface. Les degrés de liberté internes à chaque sous-structure \mathbf{X}_{int}^n (où l'exposant n prend la valeur d , $p1$ ou $p2$) vont être exprimés comme indiqué Equation 3.19 en fonction des degrés de liberté généralisés $\boldsymbol{\xi}^n$ correspondants aux modes à interface fixe $\boldsymbol{\Phi}^n$ et des degrés de liberté aux interfaces \mathbf{X}_I^n associés aux modes statiques de liaison $\boldsymbol{\Psi}^n$.

$$\mathbf{X}_{int}^n = \boldsymbol{\Phi}^n \boldsymbol{\xi}^n + \boldsymbol{\Psi}^n \mathbf{X}_I^n \quad (3.19)$$

L'application de cette décomposition par sous structure nous permet de réduire indépendamment chaque partie du modèle et de définir une matrice de réduction \mathbf{T} présentée à l'Equation 3.20. Elle permet de passer de la base des degrés de liberté physiques à ceux de la base que l'on nommera de Craig et Bampton. Les vecteurs et matrices projetés dans la base de réduction de Craig et Bampton porteront l'indice CB . L'ordre des degrés de liberté dans cette base réduite est rappelé Equation 3.20.

$$\mathbf{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{I1}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{I2}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\Psi}_{I1}^d & \boldsymbol{\Psi}_{I2}^d & \boldsymbol{\Phi}^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}^{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Psi}^{p1} & \boldsymbol{\Phi}^{p1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}^{p2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Psi}^{p2} & \boldsymbol{\Phi}^{p2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{I1}^d \\ \mathbf{X}_{I2}^d \\ \boldsymbol{\xi}^d \\ \mathbf{X}_{I1}^{p1} \\ \boldsymbol{\xi}^{p1} \\ \mathbf{X}_{I2}^{p2} \\ \boldsymbol{\xi}^{p2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_{CB}} = \mathbf{T} \mathbf{X}_{CB} \quad (3.20)$$

Les relations de passage pour les matrices du système dynamique 3.10 sont rappelées aux Equations 3.21, 3.22 et 3.23.

$$\mathbf{M}_{CB} = \mathbf{T}^t \mathbf{M} \mathbf{T} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{CB} = \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_{CB} = \mathbf{T}^t \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{F}_{NL,CB} = \mathbf{T}^t \mathbf{F}_{NL} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{ext,CB} = \mathbf{T}^t \mathbf{F}_{ext} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{K}_{CB}^{tot} = \mathbf{T}^t (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{F_{NL}}(\mathbf{X}_{eq})) \mathbf{T} \quad (3.23)$$

L'équation de la dynamique du système s'écrit alors dans la base de réduction de Craig et Bampton de la façon suivante :

$$\mathbf{M}_{CB} \ddot{\mathbf{X}}_{CB} + \mathbf{C}_{CB} \dot{\mathbf{X}}_{CB} + \mathbf{K}_{CB} \mathbf{X}_{CB} = \mathbf{F}_{NL,CB}(\mathbf{X}_{CB}) + \mathbf{F}_{ext,CB} \quad (3.24)$$

Nous optons pour un critère fréquentiel unique afin de mener des études de convergence et de fixer la taille des bases de réduction pour les trois sous structures. Nous choisissons une fréquence d'étude maximale f_{max} de $20kHz$ ainsi qu'un coefficient γ tel que nous conservons pour chaque sous structure les modes à interface fixe $\boldsymbol{\Phi}^n$ ayant une fréquence inférieure à la

fréquence de coupure $f_c = \gamma f_{max}$. L'intérêt de ce critère est qu'il permet de fixer simultanément la taille des bases de réduction pour chacune des trois sous-structures. Le coefficient γ sera le paramètre de contrôle permettant de faire varier la taille et la précision de la réduction de Craig et Bampton.

Cette technique de réduction à interface fixe permet de conserver dans la base de réduction les noeuds d'interface. Leur conservation comme degrés de liberté physiques nous permet d'appliquer directement dans cette base les lois de contact et de frottement non-linéaires définies dans l'expression de \mathbf{F}_{NL} .

3.3.2 Double Synthèse Modale (DMS)

La première étape de réduction de Craig et Bampton permet de condenser tous les degrés de liberté hors interface. L'objectif est maintenant de condenser les degrés de liberté restants aux interfaces. Pour cela nous allons introduire et appliquer une méthode de synthèse modale généralisée aux interfaces, appelée Double Synthèse Modale (DMS). L'intérêt et l'efficacité de cette méthode ont déjà pu être prouvés pour des problématiques de crissement lors de précédentes études [14, 15, 117, 147].

Cette méthode de réduction est réalisée sur le système linéarisé à l'équilibre glissant défini à l'Equation 3.16, c'est à dire autour de la position \mathbf{X}_{eq} .

La première étape de la DMS est d'extraire le système dynamique non amorti formé uniquement des degrés de liberté couplés aux interfaces. Nous extrayons donc le système dynamique formé uniquement des modes statiques d'interface, ce qui est équivalent à une décomposition de Guyan sur les degrés de liberté aux interfaces pour chaque sous-structure. Cette réduction de Guyan aux interfaces est équivalente à une réduction de Craig et Bampton avec un nombre nul de modes à interfaces fixes. Pour obtenir ce système dynamique à partir des matrices dans la base de Craig et Bampton de la Section précédente, nous introduisons une matrice d'extraction \mathbf{T}_{ext} définie Equation 3.25.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{I1}^d \\ \mathbf{X}_{I2}^d \\ \mathbf{X}_{I1}^{p1} \\ \mathbf{X}_{I2}^{p2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{I1}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{I2}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}^{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}^{p2} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{ext}^t} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{I1}^d \\ \mathbf{X}_{I2}^d \\ \boldsymbol{\xi}^d \\ \mathbf{X}_{I1}^{p1} \\ \boldsymbol{\xi}^{p1} \\ \mathbf{X}_{I2}^{p2} \\ \boldsymbol{\xi}^{p2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{ext}^t \mathbf{X}_{CB} \quad (3.25)$$

Nous pouvons donc obtenir les matrices de masse et de raideur extraites $\tilde{\mathbf{M}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$ à partir des relations données Equation 3.26.

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{T}_{ext}^t \mathbf{M}_{CB} \mathbf{T}_{ext} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{T}_{ext}^t \mathbf{K}_{CB}^{tot} \mathbf{T}_{ext} \quad (3.26)$$

La matrice extraite $\tilde{\mathbf{K}}$ n'est pas symétrique à cause de la contribution de la Jacobienne des efforts de contact et de frottement. Nous calculons donc les modes propres complexes à droite et à gauche, $\tilde{\mathbf{X}}_{dr}^i$ et $\tilde{\mathbf{X}}_{ga}^i$ du système extrait avec les Equations 3.27 et 3.28.

$$(-\omega_i^2 \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{K}}) \tilde{\mathbf{X}}_{dr}^i = 0 \quad (3.27)$$

$$(-\omega_i^2 \tilde{\mathbf{M}}^t + \tilde{\mathbf{K}}^t) \tilde{\mathbf{X}}_{ga}^i = 0 \quad (3.28)$$

Nous introduisons les matrices $\boldsymbol{\varphi}_{dr}$ and $\boldsymbol{\varphi}_{ga}$ qui contiennent les N_{DMS} premiers modes propres à droite et à gauche à l'Equation 3.29. Le paramètre N_{DMS} fixe la taille de la base de réduction

du système d'interfaces et devient le second paramètre de contrôle de la taille du système total réduit. Il fixe le nombre de modes d'interface retenus régis par les degrés de liberté généralisés $\boldsymbol{\eta}_I$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_{dr} = [\tilde{\mathbf{X}}_{dr}^1 \dots \tilde{\mathbf{X}}_{dr}^{N_{DMS}}] \\ \boldsymbol{\varphi}_{ga} = [\tilde{\mathbf{X}}_{ga}^1 \dots \tilde{\mathbf{X}}_{ga}^{N_{DMS}}] \end{cases} \quad (3.29)$$

Nous pouvons enfin définir à l'Equation 3.30 des matrices de passage à droite et à gauche \mathbf{T}_{dr} and \mathbf{T}_{ga} permettant de passer du système de coordonnées exprimé dans la base de réduction de Craig et Bampton à celui exprimé dans la base de réduction DMS.

$$\mathbf{T}_{dr} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{dr} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{CB}^{d+p1+p2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{ga} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{ga} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{CB}^{d+p1+p2} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Nous obtenons finalement le vecteur des degrés de liberté généralisés \mathbf{X}_{DMS} exprimé à partir du réarrangement des coordonnées exprimées dans la base de Craig et Bampton à l'Equation 3.31.

$$\mathbf{X}_{DMS} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_I \\ \boldsymbol{\xi}^d \\ \boldsymbol{\xi}^{p1} \\ \boldsymbol{\xi}^{p2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{dr}^{-1} \mathbf{X}_{CB} = \mathbf{T}_{dr}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{I1}^d \\ \mathbf{X}_{I2}^d \\ \mathbf{X}_{I1}^{p1} \\ \mathbf{X}_{I2}^{p2} \\ \boldsymbol{\xi}^d \\ \boldsymbol{\xi}^{p1} \\ \boldsymbol{\xi}^{p2} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Nous avons donc, en appliquant le même réarrangement des degrés de liberté dans la base de Craig et Bampton, les relations de passage pour toutes les matrices et les vecteurs du problème dynamique. Il peut toutefois être noté que le calcul des efforts non-linéaires de contact et de frottement ne se font pas aisément dans cette base, le vecteur position \mathbf{X}_{DMS} est projeté dans la base Craig et Bampton où le vecteur $\mathbf{F}_{NL,CB}$ se calcule rapidement à l'aide des relations présentées à la Section 3.1.3. Le vecteur $\mathbf{F}_{NL,DMS}$ est ensuite obtenu par projection dans la base DMS. La notation $\overline{\mathbf{A}}$ désigne le conjugué complexe de la matrice \mathbf{A} .

$$\mathbf{M}_{DMS} = \overline{\mathbf{T}_{ga}}^t \mathbf{M}_{CB} \mathbf{T}_{dr} \quad \text{and} \quad \mathbf{K}_{DMS} = \overline{\mathbf{T}_{ga}}^t \mathbf{K}_{CB} \mathbf{T}_{dr} \quad \text{and} \quad \mathbf{C}_{DMS} = \overline{\mathbf{T}_{ga}}^t \mathbf{C}_{CB} \mathbf{T}_{dr} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{F}_{NL,DMS} = \overline{\mathbf{T}_{ga}}^t \mathbf{F}_{NL,CB} \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_{ext,DMS} = \overline{\mathbf{T}_{ga}}^t \mathbf{F}_{ext,CB} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{K}_{DMS}^{tot} = \overline{\mathbf{T}_{ga}}^t \mathbf{K}_{CB}^{tot} \mathbf{T}_{dr} \quad (3.34)$$

L'équation de la dynamique du système s'écrit alors dans la base de réduction DMS de la façon suivante :

$$\mathbf{M}_{DMS} \ddot{\mathbf{X}}_{DMS} + \mathbf{C}_{DMS} \dot{\mathbf{X}}_{DMS} + \mathbf{K}_{DMS} \mathbf{X}_{DMS} = \mathbf{F}_{NL,DMS}(\mathbf{X}_{DMS}) + \mathbf{F}_{ext,DMS} \quad (3.35)$$

Cette méthode de réduction d'interface permet de condenser le système dynamique en autorisant initialement une description fine des interfaces de contact. Elle permet donc des interactions complexes au niveau des surfaces de frottement tout en limitant ensuite la taille du système d'équations à traiter. Ainsi cette méthode permet de conserver un maillage fin aux interfaces et une troncature spatiale à une faible longueur d'onde, sa précision ne sera

Pression de freinage	F_{ext}	2.10^5	Pa
Raideur linéaire	k_L	10^3	$N.m^{-1}$
Raideur cubique	k_{NL}	10^{12}	$N.m^{-3}$

TABLEAU 3.3 – Pression et paramètres de raideur de contact du modèle retenu

donc ici conditionnée que par la troncature fréquentielle des modes d'interface conservés. Ceci permet donc de s'affranchir de la troncature spatiale très forte imposée lors de précédents travaux [153–156] qui découlait de la sélection d'un nombre restreint de couples de points aux interfaces pour y imposer les efforts de contact et de frottement. En effet, un nombre trop faible de points de contact diminue fortement la résolution spatiale au niveau des interfaces, ce qui limite les transmissions d'efforts des modes à haute fréquence entre les différentes sous-structures.

Cependant, à l'inverse de la première étape de réduction, la réduction par Double Synthèse Modale est une réduction qui se fait autour du point d'équilibre \mathbf{X}_{eq} , pour un état de contact particulier et pour une valeur du coefficient de frottement μ fixée. Pour une étude paramétrique où les valeurs des coefficients induisent un changement de l'équilibre statique glissant, les modes d'interfaces doivent être recalculés à chaque fois alors que la réduction de Craig et Bampton reste valable. Dans la pratique, la réduction par Double Synthèse Modale sera effectuée une fois autour de la position d'équilibre glissante pour un jeu de paramètres donnés et cette base sera conservée pour tout le reste du calcul. De plus, l'expression des efforts de contact et de frottement n'est pas directement accessible dans la base DMS et un passage dans la base de Craig et Bampton est nécessaire pour évaluer $\mathbf{F}_{NL,DMS}(\mathbf{X}_{DMS})$.

3.4 Résultats de l'analyse de stabilité

Cette section se concentre sur l'analyse de stabilité du système de frein par l'analyse de ses valeurs propres complexes. Dans un premier temps, l'analyse de stabilité du modèle de référence est décrite. Puis des critères permettant de comparer les résultats de stabilité pour des modèles réduits sont présentés et les résultats de convergence associés sont discutés.

3.4.1 Analyse de stabilité du modèle de référence

L'analyse de stabilité du système mécanique se fait par l'analyse des valeurs propres de l'Equation 3.18. Nous analysons ici la stabilité du système de référence avant de la comparer à celle des systèmes réduits. La référence choisie pour valider la technique de réduction CB et DMS correspond au système réduit de Craig et Bampton avec $\gamma = 6$.

La méthode appelée Complex Eigenvalue Analysis (CEA), qui étudie la stabilité du système en fonction de la partie réelle des valeurs propres, permet de détecter l'apparition des instabilités par couplage de modes qui vont amener à des vibrations auto-entretenues. Nous effectuons une analyse paramétrique sur μ en discrétisant l'intervalle $[0; 1]$ en 501 valeurs pour lesquelles les modes propres sont calculés. La pression appliquée ainsi que les paramètres de raideur de contact k_L et k_{NL} sont choisis de façon à obtenir plusieurs cas d'étude différents sur la plage de μ considérée, avec des cas stables, ou présentant un ou deux modes instables. L'objectif n'est pas de corrélérer les valeurs numériques à celles habituellement observées sur le banc expérimental mais plutôt de conduire à un modèle numérique présentant un comportement similaire aux mesures expérimentales. Les valeurs retenues pour ces paramètres sont données Table 3.3. La Figure 3.3 présente la répartition des valeurs propres dans le plan complexe pour toutes les valeurs du coefficient de frottement μ considérées. La Figure 3.4 illustre l'évolution des parties réelles et imaginaires de ces valeurs propres en fonction du coefficient de frottement μ .

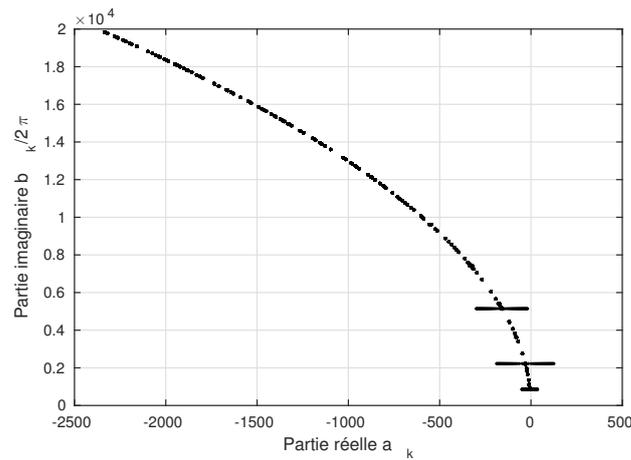


FIGURE 3.3 – Distribution des valeurs propres dans le plan complexe pour toutes les valeurs du coefficient de frottement μ

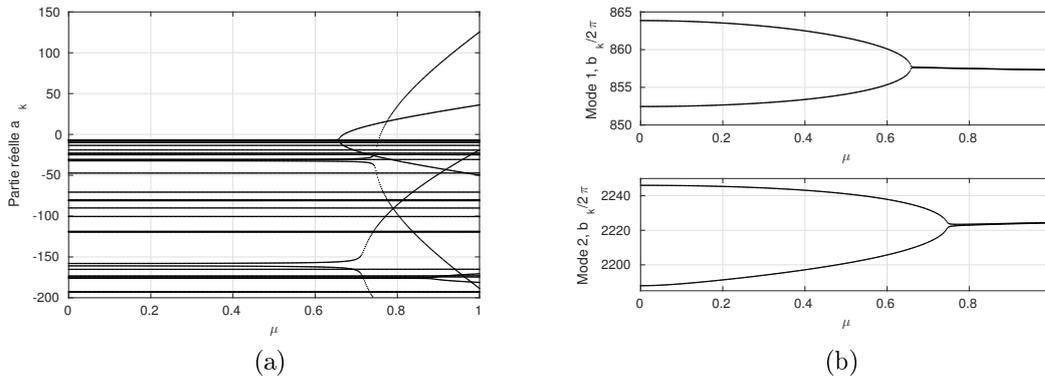


FIGURE 3.4 – Evolution en fonction du coefficient de frottement μ (a) des parties réelles des modes propres et (b) des fréquences pour les couples de modes propres coalescents menants aux modes instables

La répartition des valeurs propres dans le plan complexe pour les modes stables est typique de l'amortissement de Rayleigh, alors qu'un amortissement modal à taux constant aurait conduit à une répartition des modes stables selon une droite passant par l'origine. Le décalage des parties réelles vers des valeurs négatives dû à l'amortissement permet de stabiliser la grande majorité des modes propres par rapport à un système non amorti. Nous pouvons observer trois coalescences de modes à la Figure 3.4a. Leurs trajectoires dans le plan $\mu/Re(\lambda)$ indiquent un amortissement modal différent selon les 3 couples de modes. En effet l'amortissement de Rayleigh choisi dans cette étude n'est pas iso-réparti entre les modes et le phénomène de déstabilisation déjà observé par Fritz [50, 51] se retrouve avec des coalescences plus ou moins imparfaites. Nous pouvons observer que le phénomène conduit ces trois modes du système à coalescer mais que seulement deux modes deviennent instables dans la plage d'étude de $\mu \in [0; 1]$. La première instabilité est causée par une bifurcation qui a lieu pour une valeur de $\mu_1 = 0.67$ et pour une fréquence f_1 d'environ $857Hz$ alors que la deuxième instabilité apparaît pour une bifurcation à une valeur de $\mu_2 = 0.76$ pour une fréquence f_2 d'environ $2223Hz$. Le troisième couplage de modes qui ne mène pas à une instabilité supplémentaire dans ce cas d'étude voit ses modes coalescer en restant stables pour une valeur $\mu \approx 0.7$: l'amortissement amené empêche ces modes de devenir instables dans l'intervalle de coefficient de frottement considéré.

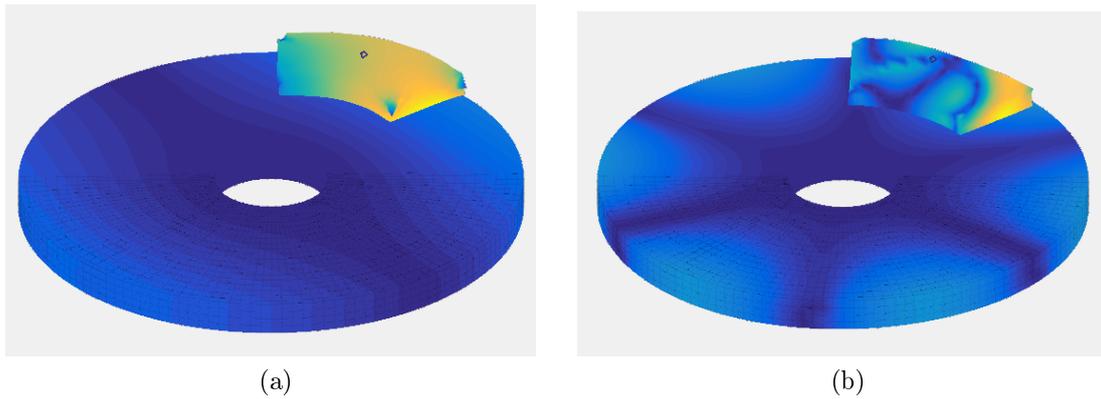


FIGURE 3.5 – Déformées des deux modes propres instables à $\mu = 0.8$ (a) premier mode propre à $857Hz$ et (b) second mode propre à $2223Hz$, les couleurs correspondent à l'amplitude totale des déplacements

Comme expliqué à la Section 1.5, la partie réelle des valeurs propres mesure le taux de divergence de la réponse dynamique au voisinage du point d'équilibre. La partie réelle du premier mode instable a un taux de croissance en fonction de μ plus faible que la partie réelle du second mode instable, ce qui fait que pour des valeurs de μ supérieures à 0.78 le second mode instable a un taux de divergence supérieur au premier mode instable, bien qu'il ne soit apparu que pour des valeurs de coefficient de frottement plus élevées.

Les déformées associées à ces deux modes instables pour une valeur de $\mu = 0.8$ sont illustrées Figure 3.5. Le premier mode à $857Hz$ présente un mode de disque à un diamètre nodal, associé à un mode de translation horizontale de la plaquette supérieure. Le second mode à $2223Hz$ est lui la combinaison d'un mode de disque à trois diamètres nodaux, associé à un mode de flexion complexe de la plaquette supérieure. Dans les deux cas la plaquette inférieure ne présente pas de déformation visible, en effet elle est encastree sur sa face arriere et donc très rigide. Du décollement est possible entre les plaquettes et le disque lors de l'application de la pression de freinage, la mise en position d'équilibre statique glissante est ici bien recrée.

Les résultats de l'analyse de stabilité permettent de sélectionner 4 cas d'étude particuliers :

- $\mu = 0$, le système mécanique présente uniquement le contact normal aux interfaces sans frottement, il est ici stable,
- $\mu = 0.7$, le système présente une seule instabilité, menée par un seul mode instable,
- $\mu = 0.8$, le système présente deux instabilités dont les valeurs propres ont des parties réelles du même ordre de grandeur,
- $\mu = 1$, le système présente deux instabilités où l'une des valeur propres a une partie réelle beaucoup plus grande que l'autre.

Dans la suite, chacun de ces 4 cas est utilisé pour étudier la convergence et la performance des deux étapes de réduction de modèle pour les modes propres de la structure complète. Nous faisons varier les paramètres de contrôle de la taille des bases de réduction γ et N_{DMS} en observant des critères d'évaluation de la convergence des modèles réduits que nous présentons maintenant.

3.4.2 Critères d'évaluation de la convergence des modèles réduits pour la stabilité

Nous définissons maintenant des critères servant à évaluer la précision du calcul de stabilité effectué dans une base réduite. Nous proposons deux critères, l'un sur les valeurs propres et l'autre associé aux déformées propres.

Le premier critère d'évaluation de la précision du calcul de stabilité d'un modèle réduit est donc basé sur les valeurs propres. Nous calculons l'erreur moyenne sur les parties réelles δr et imaginaires $\delta\omega$ des valeurs propres d'un système réduit par rapport à un calcul de référence, sur tous les modes ayant une fréquence inférieure à f_{max} . Les Equations 3.36 et 3.37 définissent ces deux critères, où a_k^{ref} et b_k^{ref} désignent les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de référence, a_k et b_k les parties réelles et imaginaires du calcul approché et N^{tot} le nombre total de modes en dessous de f_{max} pour le calcul du système réduit.

$$\delta r = \frac{1}{N^{tot}} \sum_{k=1}^{N^{tot}} \left| \frac{a_k^{ref} - a_k}{a_k^{ref}} \right| \quad (3.36)$$

$$\delta\omega = \frac{1}{N^{tot}} \sum_{k=1}^{N^{tot}} \left| \frac{b_k^{ref} - b_k}{b_k^{ref}} \right| \quad (3.37)$$

Il est également possible de définir ces deux critères uniquement sur les modes instables, ce qui donne δr^{ins} and $\delta\omega^{ins}$, définis par les Equations 3.38 et 3.39, où N^{ins} est le nombre de modes instables sur une configuration donnée pour le calcul du système réduit.

$$\delta r^{ins} = \frac{1}{N^{ins}} \sum_{k=1}^{N^{ins}} \left| \frac{a_k^{ref,ins} - a_k^{ins}}{a_k^{ref,ins}} \right| \quad (3.38)$$

$$\delta\omega^{ins} = \frac{1}{N^{ins}} \sum_{k=1}^{N^{ins}} \left| \frac{b_k^{ref,ins} - b_k^{ins}}{b_k^{ref,ins}} \right| \quad (3.39)$$

Le critère d'évaluation basé sur les déformées propres est un critère de MAC (Modal Assurance Criterion, voir [8, 9]) qui est une matrice désignée \mathbf{M}^{MAC} . Chaque élément de la matrice \mathbf{M}^{MAC} est un produit scalaire normé entre une déformée propre de référence et une déformée du système approché, et est donc toujours compris entre 0 et 1. Ce critère permet d'évaluer la ressemblance entre deux déformées et deux systèmes dont les comportements modaux sont proches auront un critère de MAC dont la diagonale est formée de coefficients proches de 1. Les éléments de la matrice sont calculés selon l'Equation 3.40, où les vecteurs \mathbf{X}^{ref} et \mathbf{X} sont les déformées propres du système de référence et du système réduit exprimés dans la base physique.

$$\mathbf{M}^{MAC}_{i,j} = \frac{\left\| \mathbf{X}_i^{ref} \mathbf{X}_j \right\|^2}{\left\| \mathbf{X}_i^{ref} \right\|^2 \left\| \mathbf{X}_j \right\|^2} \quad (3.40)$$

3.4.3 Stabilité pour l'étape de réduction de Craig et Bampton

Nous cherchons dans cette partie à évaluer le comportement du système réduit par la méthode de réduction de Craig et Bampton d'un point de vue de la stabilité. Nous étudierons de quelle façon le paramètre γ défini Section 3.3.1 influe sur la taille du système et ses modes propres. Dans un premier temps nous observons le nombre de modes à interface fixe retenus par sous structure en fonction du paramètre de réduction $\gamma \in [0; 6]$ à la Figure 3.6. Nous remarquons que le disque est capable de fournir des modes à interface fixe même pour de petites valeurs de γ , alors que les deux plaquettes ont leurs premiers modes à interface fixe assez hauts en fréquence à cause de leurs conditions aux limites contraignantes. Le premier mode à interface fixe de la plaquette supérieure a une fréquence de $10980Hz$ (soit $\gamma \approx 0.55$) alors que la plaquette inférieure a son premier mode à interface fixe à une fréquence de $24470Hz$ (soit $\gamma \approx 1.22$). Pour observer une contribution significative de chacune des plaquettes de frein il faudra donc se placer au delà de ces fréquences et choisir une valeur de γ appropriée.

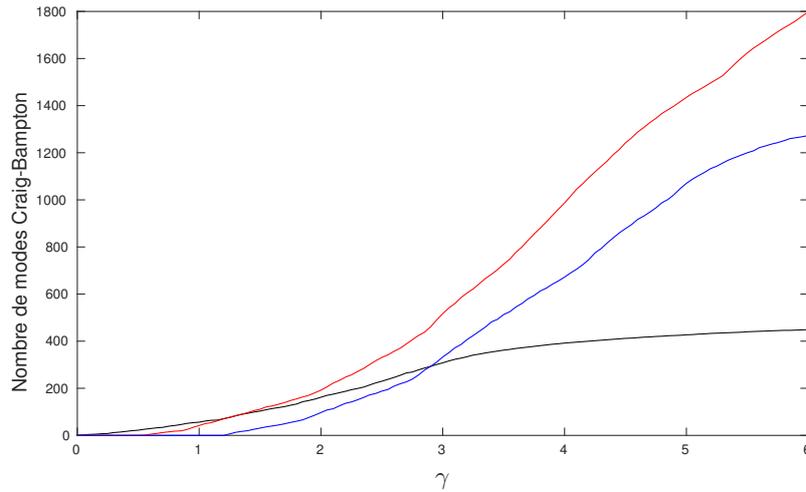


FIGURE 3.6 – Evolution du nombre de modes à interfaces fixes en fonction de γ pour (noir) le disque, (rouge) la plaquette supérieure et (bleu) la plaquette inférieure

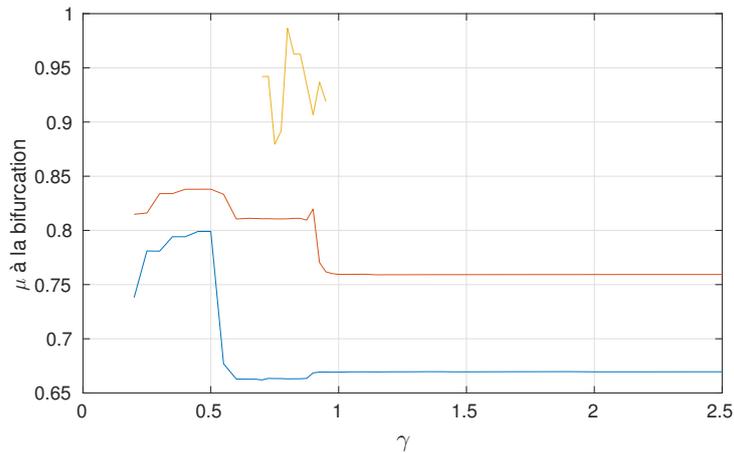


FIGURE 3.7 – Evolution des valeurs de μ pour les bifurcations en fonction de γ , dans le plan $Re(\lambda) = 0$, (bleu) : premier mode instable, (rouge) : deuxième mode instable, (jaune) : troisième mode instable

Nous suivons ensuite l'évolution des bifurcations des modes instables du système en fonction du paramètre de réduction de Craig et Bampton γ à la Figure 3.7, où nous nous plaçons dans le plan $Re(\lambda) = 0$. Nous observons que si le paramètre de réduction γ est trop petit le système ne présente plus deux bifurcations mais trois pour $\gamma \in [0.65; 0.95]$, avec le troisième couple de modes coalescent qui devient instable. L'augmentation du nombre de modes à interface fixe fait converger les valeurs de μ des deux bifurcations principales du modèle de référence vers des valeurs acceptables à partir de $\gamma = 1.2$ tout en assurant que le troisième couple de modes coalescents reste stable. Nous pouvons observer que la convergence est brutale pour $\gamma \approx 1$ et que la disparition du troisième mode instable correspond à la convergence du second mode instable.

Nous nous limitons dans la suite de l'étude aux modes dont la fréquence propre est inférieure à $f_{max} = 20kHz$. Les diagrammes à la Figure 3.8 illustrent le critère d'erreur sur les parties réelles δr et imaginaires $\delta \omega$ de tous ces modes propres pour la réduction de Craig et Bampton en fonction du paramètre de réduction γ et pour les quatre valeurs du coefficient de frottement

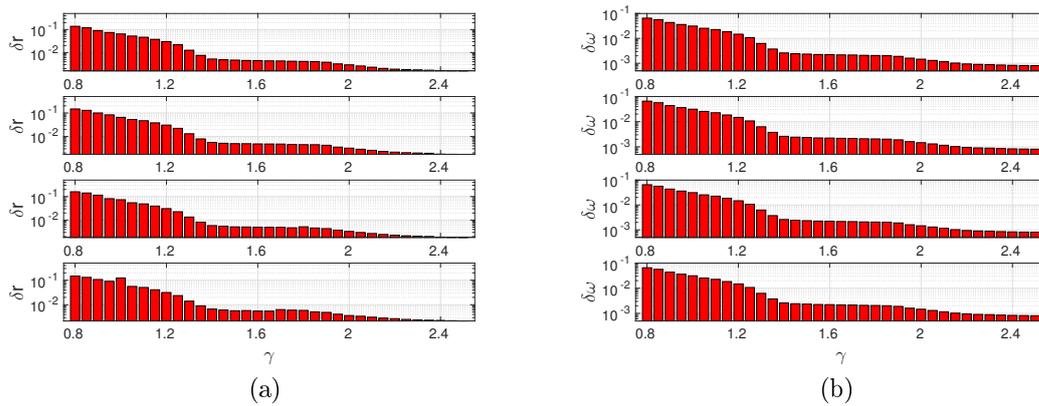


FIGURE 3.8 – Critère d'erreur sur les valeurs propres de tous les modes des modèles réduits par la méthode de Craig et Bampton en fonction du paramètre de réduction γ , (a) sur les parties réelles δr et (b) sur les parties imaginaires $\delta\omega$ (pour $\mu = 0$, $\mu = 0.7$, $\mu = 0.8$ et $\mu = 1$ de haut en bas)

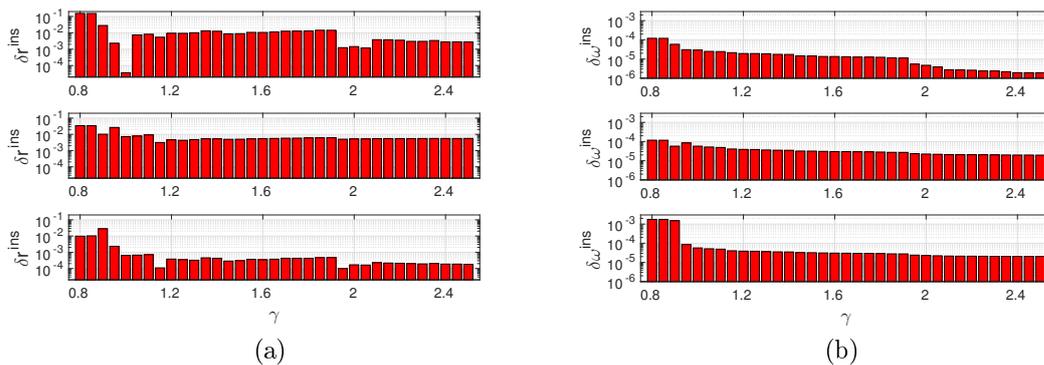


FIGURE 3.9 – Critère d'erreur sur les valeurs propres des modes instables des modèles réduits par la méthode de Craig et Bampton en fonction du paramètre de réduction γ , (a) sur les parties réelles δr^{ins} et (b) sur les parties imaginaires $\delta\omega^{ins}$ (pour $\mu = 0.7$, $\mu = 0.8$ and $\mu = 1$ de haut en bas)

définies Section 3.4.1. Nous pouvons observer une convergence des modèles réduits vers le modèle de référence pour les deux critères d'estimation de l'erreur. Un paramètre de contrôle de $\gamma = 1.5$ assure dans notre cas une erreur moyenne inférieure à 1% sur les parties réelles et à 0.5% pour les parties imaginaires.

La Figure 3.9 présente les critères d'erreur δr^{ins} et $\delta\omega^{ins}$ appliqués spécifiquement aux parties réelles et imaginaires des deux modes instables principaux. Sur la plage $\gamma \in [0.8; 2.5]$ présentée ici les critères ont bien convergé et une valeur de $\gamma = 1.5$ permet une erreur inférieure à 0.1% sur les parties réelles des modes instables et à 0.01% sur leurs parties imaginaires. Nous remarquons toutefois que la convergence des modèles réduits vers la référence n'est pas uniforme pour ces critères concernant les modes instables. En effet les trajectoires que décrivent les valeurs propres dans le plan complexe en fonction du paramètre de réduction γ n'assurent pas une convergence simple du modèle réduit vers le modèle de référence.

Nous observons à la Figure 3.10 une comparaison de deux matrices de MAC calculées pour un coefficient de frottement $\mu = 0.8$ pour les modes inférieurs à $f_{max} = 20kHz$. Deux tailles de réductions sont ici comparées au modèle de référence, l'une pour $\gamma = 0.8$ et l'autre pour

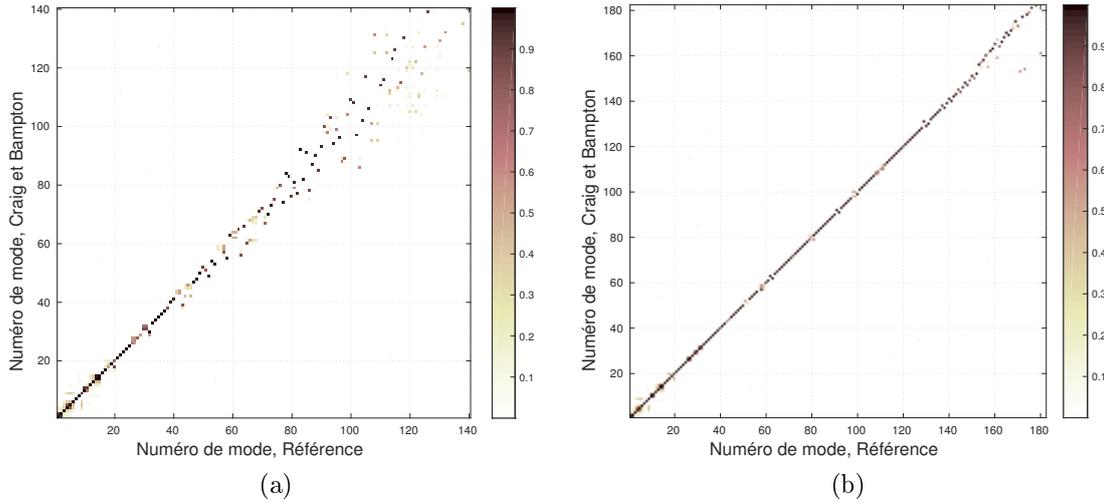


FIGURE 3.10 – Matrices \mathbf{M}^{MAC} pour un coefficient de frottement $\mu = 0.8$ et pour un coefficient γ de contrôle de la réduction de Craig et Bampton de (a) 0.8 et (b) 1.5

$\gamma = 1.5$. Nous pouvons dans ce cas remarquer que pour $\gamma = 0.8$, seuls les quelques 40 premières déformées modales du système couplé sont bien approximées avant que la diagonale ne disparaisse complètement. Pour une taille de réduction plus importante à $\gamma = 1.5$ le modèle réduit donne une très bonne estimation des 150 premières déformées modales, ce qui correspond aux modes jusqu'à une fréquence de $17500Hz$ environ et que le restant des modes jusqu'à $20000Hz$ sont une approximation acceptable de ceux de la référence.

Pour conclure cette étude concernant la stabilité du système réduit par la première étape de réduction de Craig et Bampton, nous avons pu remarquer qu'il est nécessaire de prendre suffisamment de modes à interface fixe pour chacune des sous structures pour permettre la convergence des modes propres du modèle total couplé. A partir de l'étude des bifurcations dans le plan γ/μ et des critères de convergence sur les parties réelles et imaginaires des modes propres nous pouvons conclure qu'un paramètre de contrôle $\gamma = 1.5$ est un choix efficace de taille de réduction car il permet d'obtenir un système réduit dont les caractéristiques de stabilité sont très proches de celles de la référence tout en assurant un bon compromis au niveau de la taille du système. Les déformées propres et en particulier celles des modes instables sont très bien reproduites par le système réduit à $\gamma = 1.5$. Le système réduit avec cette valeur du paramètre γ comporte alors 2885 degrés de liberté, divisés en 2640 degrés de liberté physiques aux interfaces sur les trois sous structures et en 245 degrés de liberté généralisés correspondants aux modes à interfaces fixes, eux même répartis entre le disque (103), la plaquette supérieure (111) et la plaquette inférieure (31). C'est cette taille de réduction qui est le point de départ pour l'application de la seconde étape de réduction : la Double Synthèse Modale.

3.4.4 Stabilité pour la Double Synthèse Modale

Nous cherchons dans cette partie à évaluer le comportement du système réduit par la méthode de la Double Synthèse Modale à partir du modèle déjà réduit par la méthode de Craig et Bampton du point de vue de la stabilité. Nous étudierons de quelle façon le nombre de modes d'interface N_{DMS} défini Section 3.3.2 influe sur la taille du système et ses modes propres.

Nous observons l'évolution de la fréquence propre associée à son mode d'interface correspondant, illustrée à la Figure 3.11. Le premier mode d'interface a une fréquence de $865Hz$ et les suivants ont une fréquence qui augmente rapidement, la fréquence f_{max} est atteinte pour $N_{DMS} = 102$. L'application d'un coefficient $\gamma = 1.5$ lors de la réduction de Craig et Bampton

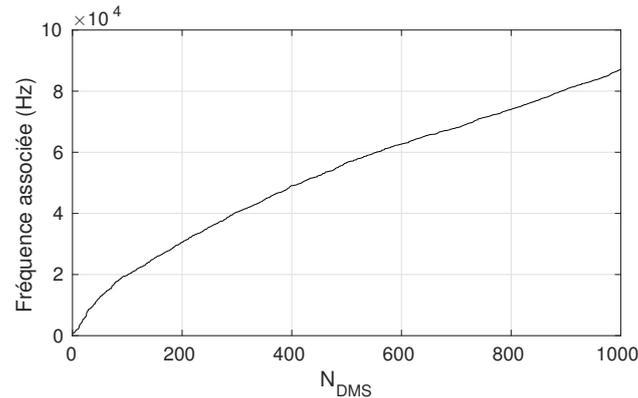


FIGURE 3.11 – Fréquences des modes d’interfaces en fonction de leur numéro N_{DMS}

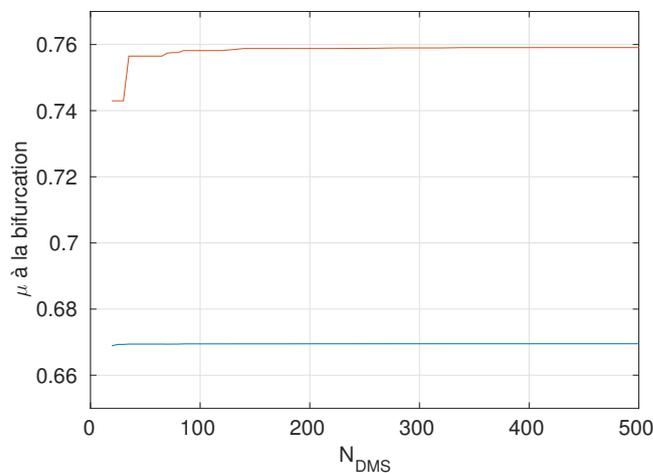


FIGURE 3.12 – Evolution des valeurs de μ pour les bifurcations en fonction de N_{DMS} , dans le plan $Re(\lambda) = 0$, (bleu) : premier mode instable, (rouge) : second mode instable

permettait de fixer simultanément la taille de réduction pour le disque et les deux plaquettes, l’équivalent de ce critère pour la Double Synthèse Modale pour la sélection fréquentielle des modes d’interface donne ici un nombre de modes $N_{DMS} = 195$.

L’évolution des valeurs de μ pour les bifurcations instables en fonction de N_{DMS} dans le plan $Re(\lambda) = 0$ est présentée à la Figure 3.12. Un nombre trop faible de modes d’interface n’assure pas la même dynamique au système avec des décalages des bifurcations vers les faibles valeurs de μ . Puis avec l’augmentation du nombre de modes d’interface N_{DMS} les valeurs des deux coefficients de frottement aux bifurcations des deux modes instables converge vers la référence. Un nombre $N_{DMS} = 150$ assure la bonne convergence des valeurs des deux coefficients de frottement μ_1 et μ_2 liés aux deux bifurcations.

La Figure 3.13 présente l’évolution des critères de mesure de l’erreur moyenne sur les parties réelles δr et imaginaires $\delta \omega$ des valeurs propres des modes en dessous de $20kHz$ en fonction du nombre de modes d’interface N_{DMS} . Là encore, comme pour l’étude sur la réduction de Craig et Bampton, les quatre valeurs de coefficient de frottement 0, 0.7, 0.8, et 1 sont étudiées. Nous constatons que l’augmentation du nombre de modes d’interface retenus tend bien à faire diminuer l’erreur moyenne sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres. Un nombre de modes d’interface $N_{DMS} = 150$ permet d’assurer une erreur inférieure à 1% à la fois sur les parties réelles et imaginaires.

Nous pouvons ensuite observer la restriction du critère d’erreur moyenne sur les parties réelles

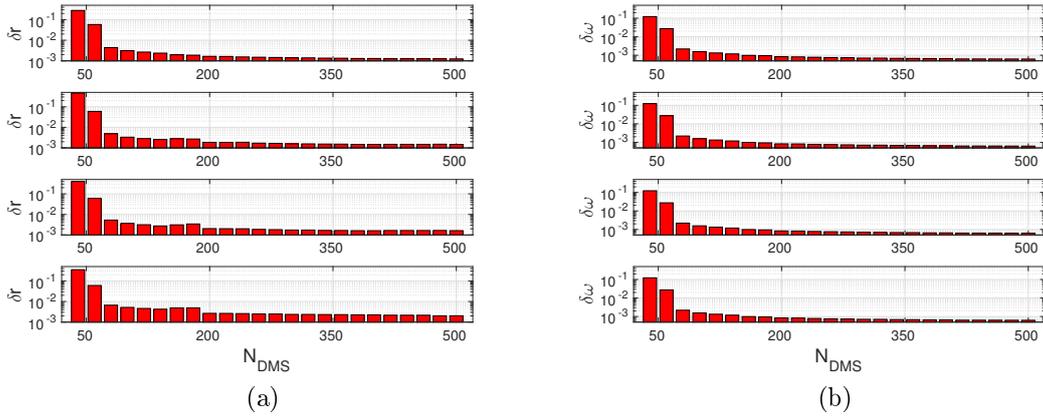


FIGURE 3.13 – Critère d'erreur sur les valeurs propres de tous les modes des modèles réduits par la Double Synthèse Modale en fonction du paramètre de réduction N_{DMS} , (a) sur les parties réelles δr et (b) sur les parties imaginaires $\delta \omega$ (pour $\mu = 0$, $\mu = 0.7$, $\mu = 0.8$ et $\mu = 1$ de haut en bas)

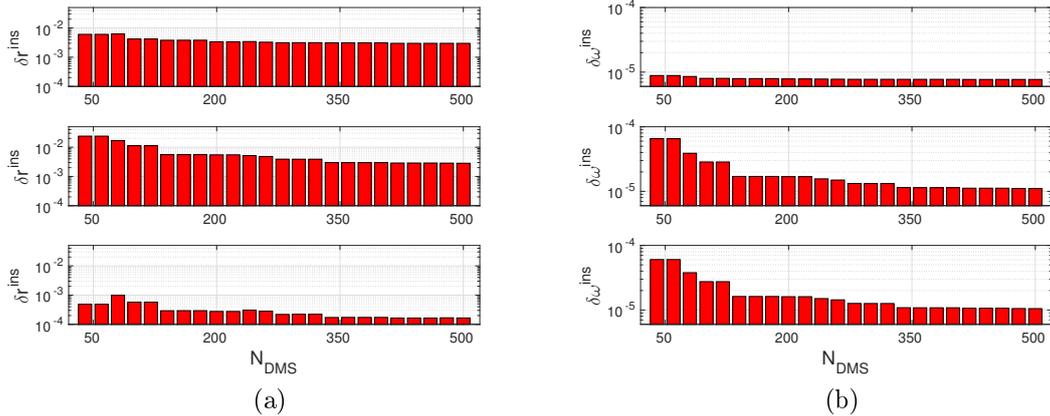


FIGURE 3.14 – Critère d'erreur sur les valeurs propres des modes instables des modèles réduits par la Double Synthèse Modale en fonction du paramètre de réduction N_{DMS} , (a) sur les parties réelles δr^{ins} et (b) sur les parties imaginaires $\delta \omega^{ins}$ (pour $\mu = 0.7$, $\mu = 0.8$ and $\mu = 1$ de haut en bas)

δr^{ins} et imaginaires $\delta \omega^{ins}$ de valeurs propres des modes instables à la Figure 3.14 pour les valeurs de coefficient de frottement qui permettent d'observer des instabilités, soit 0.7, 0.8 et 1. Les parties réelles des valeurs propres sont déjà très proches de celles du modèle de référence, même pour un faible nombre de modes d'interface. Nous observons sur les parties imaginaires une diminution de l'erreur moyenne, en particulier pour $\mu \in \{0.8, 1\}$. Dans l'ensemble, un nombre de modes d'interface $N_{DMS} = 150$ permet d'assurer une erreur moyenne inférieure à 1% sur les parties réelles des valeurs propres des modes instables et inférieure à 0.01% sur leurs parties imaginaires. Le critère sur les modes instables converge beaucoup plus rapidement que le critère global, en effet les modes instables se trouvent dans les modes aux plus basses fréquences et convergent plus rapidement que ceux proches de f_{max}

La Figure 3.15 présente les matrices de MAC pour une coefficient de frottement $\mu = 0.8$ et pour deux valeurs de nombre de modes d'interface $N_{DMS} \in \{50, 150\}$ et calculées pour les modes du modèle réduit dont la fréquence est inférieure à $20kHz$. L'effet de la taille de la

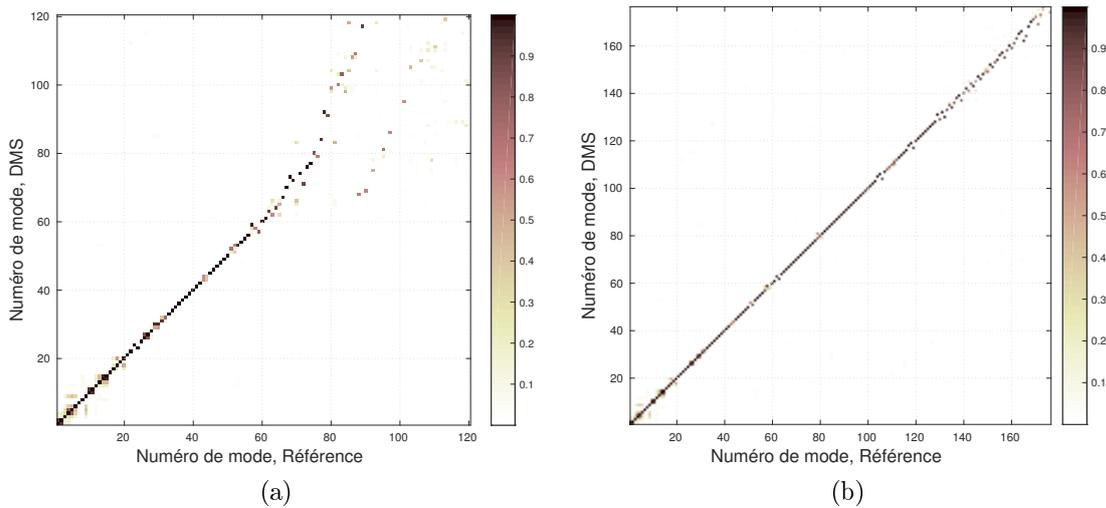


FIGURE 3.15 – Matrices \mathbf{M}^{MAC} pour un coefficient de frottement $\mu = 0.8$ avec un nombre N_{DMS} de modes d'interface de (a) 50 et (b) 150

base de réduction est ici bien visible, une base trop réduite a tendance à dégrader les modes hauts en fréquence. Un nombre de modes d'interface $N_{DMS} = 50$ ne permet d'assurer que les déformées propres sont bien approximées jusqu'au mode 60 de la structure totale couplée, alors qu'un nombre de modes d'interface $N_{DMS} = 150$ permet une bonne approximation des déformées propres jusqu'à f_{max} .

L'étude de la stabilité du système suite à l'application de la seconde étape de réduction, la Double Synthèse Modale, à la suite de la réduction de Craig et Bampton pour un paramètre de contrôle $\gamma = 1.5$ montre là encore qu'un compromis doit être fait sur le choix du nombre de modes d'interface N_{DMS} à conserver. Cette seconde étape permet la réduction des degrés de liberté d'interface, sur lesquels sont appliquées les efforts non linéaires de contact et de frottement et il semble important de porter une attention particulière à la performance du modèle doublement réduit afin de s'assurer qu'il reproduise bien le comportement du modèle de référence. Un nombre trop faible de modes d'interface montre que les valeurs propres, les modes propres et même le nombre total de bifurcations seront mal estimés. Un nombre trop faible de modes d'interface risque de filtrer l'information qui est donnée à chaque sous structure lors de l'application des efforts de contact et de frottement aux interfaces.

Nous avons pu mettre en évidence qu'un choix de modes d'interface de $N_{DMS} = 150$ permet d'assurer un bon comportement du système réduit du point de vue de l'analyse de stabilité tout en réduisant efficacement les 2640 degrés de liberté d'interface. Avec cette valeur de N_{DMS} nous obtenons donc un système réduit de 395 degrés de liberté généralisés reproduisant fidèlement le comportement du système complet de plus de 50 000 degrés de liberté dans le cadre de l'analyse de stabilité.

3.5 Conclusion

A partir des observations expérimentales, un modèle géométrique simplifié d'un système de frein comportant un disque et deux plaquettes a été construit. Il a été choisi de ne pas modéliser l'étrier car la prise en compte de cet élément complique fortement la modélisation en raison des nombreux contacts qu'il entretient avec les plaquettes. Ce modèle a été discrétisé en utilisant la méthode des Eléments Finis et en introduisant des lois de contact et de frottement aux interfaces entre le disque et les plaquettes. Un modèle d'amortissement simple a également été utilisé. Une analyse de stabilité du système autour de sa position d'équilibre glissante a été

proposée afin de statuer sur l'apparition des modes instables. Elle nous a permis de mettre en lumière plusieurs cas d'étude : une configuration stable, une configuration instable à un mode instable et deux configurations instables présentant deux instabilités. Cette analyse de stabilité montre des caractéristiques que l'on retrouve dans la littérature et nous permet de valider la pertinence du modèle à un disque et deux plaquettes.

Une réduction de chaque sous structure par la méthode classique de Craig et Bampton a été mise en place en considérant les interfaces de contact fixes. Ce modèle a été validé à l'aide d'un paramètre basé sur un critère fréquentiel. Une méthode de réduction des degrés de libertés physiques restants aux interfaces appelée Double Synthèse Modale, basée sur une synthèse modale généralisée du système formé par tous les degrés de liberté des interfaces, a ensuite été introduite. Le nombre de modes d'interface conservé est le second paramètre de réduction contrôlant la taille du système final. Finalement les performances des deux étapes de réduction vis-à-vis de l'analyse de stabilité ont été étudiées et deux paramètres $\gamma = 1.5$ et $N_{DMS} = 150$ ont été identifiés comme permettant une réduction efficace du système tout en assurant une convergence en ce qui concerne l'analyse de stabilité du système. Ceci permet finalement d'aboutir à une taille de système réduite d'un facteur 126 par rapport au système de référence.

Pour la suite des travaux présentés dans cette thèse le système réduit par la méthode de Craig et Bampton avec un paramètre $\gamma = 1.5$ sera désigné comme la référence intermédiaire, permettant de comparer les réductions par la méthode DMS à ce système uniquement réduit par la première étape de réduction.

Chapitre 4

Dynamique non-linéaire

Sommaire

4.1	Cadre de l'étude	110
4.1.1	Liste des différents Cas d'étude	110
4.1.2	Choix du schéma d'intégration pour le calcul des vibrations transitoires	111
4.2	Signal transitoire	114
4.2.1	Cas 1, un mode instable	114
4.2.2	Cas 2, deux modes instables à régime établi périodique	118
4.2.3	Cas 3, deux modes instables à régime établi pseudo-périodique	123
4.2.4	Exception : $\mu=0.74$ et bassin d'attraction du second mode instable	129
4.3	Cycles limites et Contenus Fréquentiels	132
4.3.1	Cas 1, un mode instable	132
4.3.2	Cas 2, deux modes instables à régime établi périodique	132
4.3.3	Cas 3, deux modes instables à régime établi pseudo-périodique	133
4.4	Participations modales des modes instables	139
4.4.1	Cas 1	139
4.4.2	Cas 2	140
4.4.3	Cas 3	142
4.5	Conclusion	144

Introduction

La grande majorité des études concernant les systèmes instables se cantonnent généralement au calcul des configurations instables par la CEA comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. Cependant il a déjà été observé que cette étude de stabilité seule ne permet pas de prédire le comportement transitoire du système. En effet plusieurs études [3, 102, 146, 154] ont pu montrer que le calcul CEA peut sur-estimer ou sous-estimer les instabilités qui seront effectivement présentes lors de l'évolution temporelle d'un système instable. L'étude de stabilité ne peut également pas prendre en compte des effets transitoires comme une rampe de chargement en pression ou une dynamique de perte de contact/reprise de contact. Cette étude se concentre également au voisinage d'un point d'équilibre et n'est plus valide lorsque le système s'en écarte. Nous nous intéressons ici à l'évolution transitoire du système à partir d'une configuration d'équilibre glissante instable. Plusieurs méthodes existent comme nous l'avons décrit à la Section 1.6. Ce calcul nécessite des ressources informatiques plus importantes et l'intérêt des méthodes de réduction pour le gain de temps et de mémoire pourra être démontré.

L'objectif de ce chapitre est d'effectuer un ensemble des simulations numériques afin d'obtenir l'évolution transitoire du système de frein. Ces calculs sont réalisés pour différentes tailles des bases de réduction afin d'en évaluer la performance pour ce type de simulation. Après avoir construit un modèle géométrique simplifié de système de frein à la Section 3.1, nous avons identifié le comportement des systèmes réduits vis-à-vis des deux étapes de réduction pour le calcul de stabilité. Une analyse du système de référence nous a permis d'identifier plusieurs cas d'étude qui illustrent une variété de comportements dynamiques possibles. Nous allons donc calculer les niveaux vibratoires induits par le frottement. L'estimation des niveaux transitoires complets sur toute la durée de la simulation est importante car il a pu être montré dans certains cas qu'ils sont plus élevés en régime transitoire qu'en régime établi. Le calcul de la réponse totale permet de donner plus d'informations que le calcul seul des cycles limites comme cela a pu être proposé par de précédentes études, notamment par des méthodes de balance harmonique ou des méthodes de tir [25, 27, 31–33].

Nous commençons par rappeler le cadre de l'étude ainsi que le schéma d'intégration retenu pour l'étude de ces vibrations transitoires. Puis nous nous intéressons à l'étude, pour les différents cas, des signaux temporels et de leurs contenus fréquentiels. Ensuite nous étudions les cycles limites de ces signaux pour finir par observer les participations modales des modes instables au cours de l'évolution du système. Pour chacune de ces études les performances des deux étapes de réduction sont évaluées et mises en lien avec les résultats de l'analyse de stabilité.

4.1 Cadre de l'étude

4.1.1 Liste des différents Cas d'étude

L'analyse de stabilité menée au Chapitre 3 a permis de mettre en évidence plusieurs comportements possibles pour l'équilibre glissant du système en fonction de la valeur du coefficient de frottement constant aux interfaces de contact. Il existe une région stable pour $\mu \leq 0.67$, une région à un mode instable pour $0.67 < \mu \leq 0.76$ et une région à deux modes instables dont les fréquences sont incommensurables pour $0.76 < \mu \leq 1$. Le Tableau 4.1 présente les trois différents cas d'étude retenus pour l'analyse transitoire des vibrations induites par le couplage de modes ainsi que les caractéristiques des valeurs propres pour chacun des modes instables, concernant le modèle de référence.

Le Cas 1 correspond à la configuration à 1 mode instable, les Cas 2 et 3 correspondent aux cas à deux modes instables, le Cas 2 correspond à $\mu = 0.8$ où les parties réelles des valeurs propres sont proches et le Cas 3 correspond à $\mu = 1$ où l'une des parties réelles des valeurs

propres est bien plus grande que l'autre.

Cas	μ	Mode 1		Mode 2	
		f_1 (Hz)	$Re(\lambda_1)$	f_2 (Hz)	$Re(\lambda_2)$
1	0.7	857.6	6.5	-	-
2	0.8	857.5	18.6	2222.9	34.8
3	1	857.3	36.2	2224.2	125.5

TABLEAU 4.1 – Liste des différents Cas d'étude pour le calcul des vibrations transitoires, valeurs propres des modes instables calculées par l'analyse de stabilité

4.1.2 Choix du schéma d'intégration pour le calcul des vibrations transitoires

L'objectif de cette étude est de résoudre le problème dynamique discret donné par l'équation non linéaire du mouvement 4.1 avec ses conditions initiales associées en position \mathbf{X}_0 et en vitesse $\dot{\mathbf{X}}_0$. La solution transitoire $\mathbf{X}(t)$ est approximée par un schéma d'intégration temporel discret comme nous avons pu le voir Section 1.6.1.

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_{ext} \\ \dot{\mathbf{X}}(t=0) = \dot{\mathbf{X}}^0 \\ \mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}^0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Le choix du schéma d'intégration est une question cruciale car il va déterminer la qualité de la solution approximée ainsi que la durée et les ressources informatiques nécessaires à l'intégration numérique. Nous nous orientons dans cette étude vers une méthode d'intégration de type θ -méthode à pas de temps constant. Ce type de solveur d'ordre 1 est habituellement utilisé dans les problèmes où la formulation du contact est non-régulière car il ne fait pas intervenir l'expression de l'accélération, celle-ci n'étant alors pas définie [5, 25, 27, 79]. Nous choisissons ici une méthode à pas d'intégration constant par soucis de facilité de mise en œuvre. D'autres méthodes auraient pu être utilisées mais la simplicité de mise en œuvre de cet algorithme de résolution ainsi que son efficacité nous ont poussé à le choisir. Il est à noter que les méthodes classiques de résolution implémentées dans les codes de calcul habituels et basées sur des schémas de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas de temps adaptatif ont également été testées. Ces méthodes sont capables de procurer des résultats dans les cas simples mais se sont révélées incapables de fournir une solution au problème dynamique sur des temps d'intégration suffisamment longs.

Le temps est discrétisé en intervalles constants de longueur h tels que $t_i = ih$, et les vecteurs position $\mathbf{X}(t)$ et vitesse $\dot{\mathbf{X}}(t)$ prennent respectivement les valeurs discrètes \mathbf{X}^i et $\dot{\mathbf{X}}^i$ définies à l'Equation 4.2.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}^i = \dot{\mathbf{X}}(t_i) \\ \mathbf{X}^i = \mathbf{X}(t_i) \end{cases} \quad (4.2)$$

En reprenant le schéma d'intégration temporel de la θ -méthode présenté à la Section 1.6.1 adapté au système modélisé par l'Equation 4.1, nous pouvons obtenir le système d'équations non-linéaires présenté à l'Equation 4.3. Ici les efforts non-linéaires de contact et de frottement ne dépendent que de la position \mathbf{X} et pas de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$. De plus ces efforts sont régularisés, ce qui permet de les traiter comme les autres termes de l'intégrale. La première équation

donne la relation discrétisée de l'équation du mouvement alors que la deuxième donne une relation liant les positions et vitesses entre les instants t_i et t_{i+1} .

$$\begin{cases} \mathbf{M}[\dot{\mathbf{X}}^{i+1} - \dot{\mathbf{X}}^i] = h\theta[\mathbf{F}_{ext}^{i+1} - \mathbf{K}\mathbf{X}^{i+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^{i+1} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}^{i+1})] + \\ \quad h(1-\theta)[\mathbf{F}_{ext}^i - \mathbf{K}\mathbf{X}^i - \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}^i + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}^i)] \\ \mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i + h(\theta\dot{\mathbf{X}}^{i+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{X}}^i) \end{cases} \quad (4.3)$$

En remplaçant l'expression de \mathbf{X}^{i+1} dans la première équation de 4.3, nous obtenons la relation 4.4, non linéaire, exprimant la vitesse $\dot{\mathbf{X}}^{i+1}$ à l'instant t_{i+1} en fonction des positions et vitesses \mathbf{X}^i et $\dot{\mathbf{X}}^i$ exprimées à l'instant t_i , et des valeurs de pression de freinage aux instants t_i et t_{i+1} qui sont imposées et donc connues.

$$\widehat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{X}}^{i+1} = \mathbf{E}_i + h\theta\mathbf{F}_{NL}[\mathbf{X}^i + h(\theta\dot{\mathbf{X}}^{i+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{X}}^i)] \quad (4.4)$$

Les définitions de \mathbf{E}_i ainsi que de $\widehat{\mathbf{M}}$ sont données Equation 4.5.

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i = -h\mathbf{K}\mathbf{X}^i + [\mathbf{M} - h(1-\theta)(\mathbf{C} + h\theta\mathbf{K})]\dot{\mathbf{X}}^i + \\ \quad h\theta\mathbf{F}_{ext}^{i+1} + h(1-\theta)[\mathbf{F}_{ext}^i + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}^i)] \\ \widehat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + h\theta\mathbf{C} + h^2\theta^2\mathbf{K} \end{cases} \quad (4.5)$$

L'objectif de la résolution temporelle discrète est donc de calculer à chaque itération de temps la vitesse $\dot{\mathbf{X}}^{i+1}$ à l'aide de la relation 4.4 afin de pouvoir obtenir la position \mathbf{X}^{i+1} à l'aide de la seconde équation de 4.3. Nous utilisons ici une méthode de Newton-Raphson pour résoudre l'équation matricielle non-linéaire 4.4. L'initialisation de la valeur de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}_0^{i+1}$ est fixée à la valeur $\dot{\mathbf{X}}^i$. Nous cherchons à définir une relation de récurrence pour l'itération $\dot{\mathbf{X}}_{k+1}^{i+1}$ en fonction de $\dot{\mathbf{X}}_k^{i+1}$. Pour cela la fonction \mathbf{G}_i est définie à l'Equation 4.6 et permet de définir la relation de récurrence de Newton-Raphson pour le pas de temps t_{i+1} .

$$\mathbf{G}_i(\dot{\mathbf{Y}}) = \widehat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{Y}} - \mathbf{E}_i - h\theta\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}^i + h(\theta\dot{\mathbf{Y}} + (1-\theta)\dot{\mathbf{X}}^i)) \quad (4.6)$$

L'équation à résoudre pour obtenir $\dot{\mathbf{X}}^{i+1}$ est donc $\mathbf{G}_i(\dot{\mathbf{X}}^{i+1}) = \mathbf{0}$. La relation de récurrence permettant d'obtenir $\dot{\mathbf{X}}_{k+1}^{i+1}$ en fonction de $\dot{\mathbf{X}}_k^{i+1}$ est donc donnée par 4.7 qui est le schéma de Newton-Raphson.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{k+1}^{i+1} &= \dot{\mathbf{X}}_k^{i+1} - \left[\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \dot{\mathbf{Y}}}(\dot{\mathbf{X}}_k^{i+1}) \right]^{-1} \mathbf{G}_i(\dot{\mathbf{X}}_k^{i+1}) \\ &= \dot{\mathbf{X}}_k^{i+1} - \left[\widehat{\mathbf{M}} - h^2\theta^2\mathbf{J}_{F_{NL}}(\mathbf{X}^i + h(\theta\dot{\mathbf{X}}_k^{i+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{X}}^i)) \right]^{-1} \mathbf{G}_i(\dot{\mathbf{X}}_k^{i+1}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Le calcul de la vitesse au pas de temps t_{i+1} est supposée convergée si le résidu donné par la fonction \mathbf{G}_i est suffisamment petit et que le nombre d'itérations n'est pas trop important, ce qui équivaut au système de relations 4.8 suivant, avec ϵ_θ (de l'ordre de 10^{-9}) une tolérance pour la valeur du résidu et N_θ (limité à quelques centaines d'itérations) un nombre maximal pour les itérations de Newton-Raphson à chaque pas de temps. Si ces conditions sont vérifiées pour une itération $\dot{\mathbf{X}}_k^{i+1}$, nous choisissons cette valeur de la vitesse pour $\dot{\mathbf{X}}^{i+1}$:

$$\begin{cases} \|\mathbf{G}_i(\dot{\mathbf{X}}_k^{i+1})\| < \epsilon_\theta \\ k \leq N_\theta \end{cases}, \text{ alors } \dot{\mathbf{X}}^{i+1} = \dot{\mathbf{X}}_k^{i+1} \quad (4.8)$$

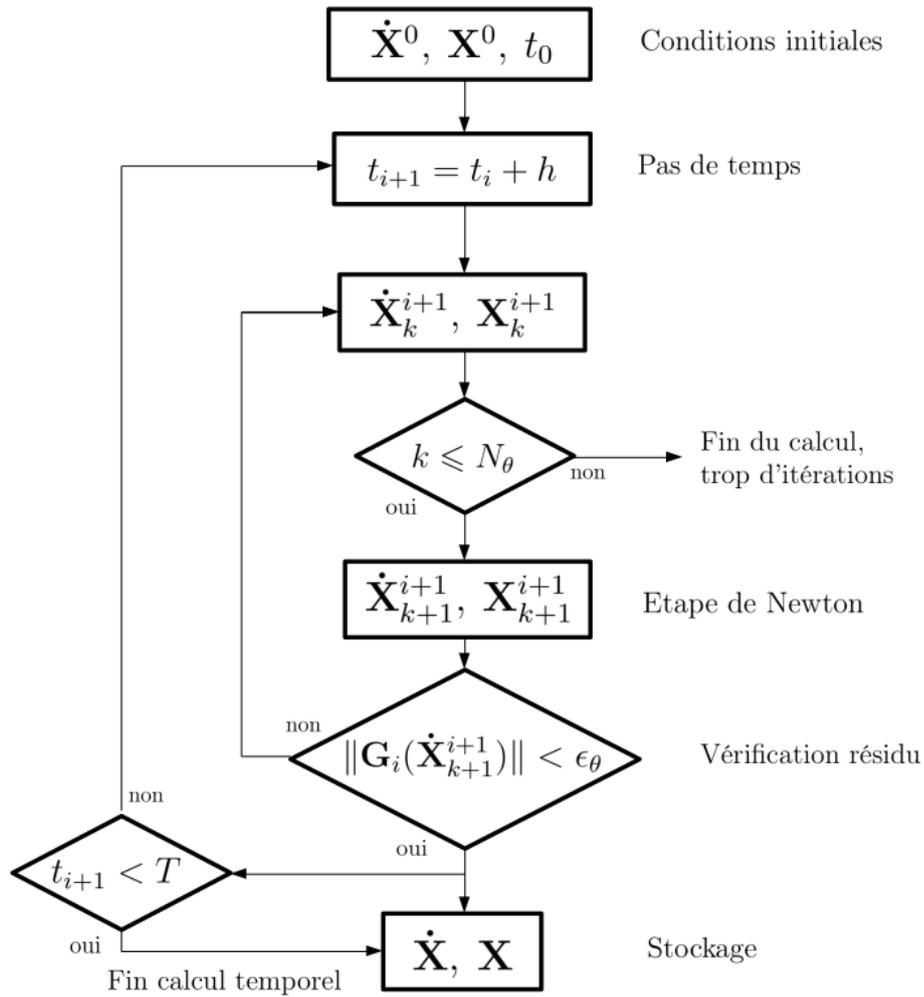


FIGURE 4.1 – Schéma décrivant le méthode d'intégration temporelle utilisant la θ -méthode et un algorithme de Newton-Raphson

La Figure 4.1 illustre le fonctionnement de cet algorithme de résolution. La valeur du paramètre θ est fixée à $\theta = 0.5$ car il a été montré que cette valeur permet d'obtenir un schéma conservatif en énergie et stable. Le pas de temps est quant à lui fixé à $h = 10^{-5}s$, ce qui assure une précision suffisante dans l'estimation des amplitudes vibratoires et assure que le schéma fonctionne tout en permettant des simulations raisonnables en coût de calcul et en temps.

L'intérêt d'avoir des relations régularisées pour les lois de contact et de frottement se retrouve encore ici où le calcul direct et exact de la Jacobienne $\mathbf{J}_{F_{NL}}$ est nécessaire pour le calcul des itérations de Newton-Raphson. Les méthodes de réduction influant sur les tailles de matrices, notamment celles de $\widehat{\mathbf{M}}$ et de la Jacobienne, nous illustrons mieux leur intérêt ici dans le calcul des évolutions temporelles avec cette méthode qui nécessite de nombreuses inversions matricielles.

Nous devons à présent déterminer les conditions initiales du calcul transitoire $\dot{\mathbf{X}}^0$ et \mathbf{X}^0 permettant de lancer le calcul temporel. Nous choisissons dans notre étude de nous placer au voisinage perturbé de la position d'équilibre glissante calculée lors de l'analyse de stabilité, avec $\delta\mathbf{X}$ une très petite perturbation en position et à vitesse nulle (4.9). La perturbation $\delta\mathbf{X}$ de l'équilibre glissante doit être suffisamment faible pour rester dans un voisinage proche de

Point	Emplacement	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	Disque, Surface supérieure hors interface	-0.0898	-0.0148	0
2	Plaquette supérieure, interface de contact	0.0834	0.0712	0

TABLEAU 4.2 – Liste des différents points d’observation du modèle Eléments Finis ainsi que leurs caractéristiques

\mathbf{X}_{eq} et ainsi permettre le développement des instabilités prédites lors de l’analyse CEA.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}^0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{X}^0 = \mathbf{X}_{eq} + \delta\mathbf{X} \end{cases} \quad (4.9)$$

Le choix de la condition initiale et de sa perturbation peut modifier le résultat de l’intégration temporelle, notamment en ce qui concerne le contenu fréquentiel des vibrations, en fonction de la projection de cette condition initiale sur les modes instables. L’influence de l’historique du système n’est ici pas prise en compte. La montée en pression qui intervient dans un système de freinage réel n’est pas ici reproduite. Le fait de partir du système sous pression dans sa configuration instable est un choix fort, la trajectoire du système dans l’espace des phases est différente et la solution obtenue serait différente en partant d’un système à pression nulle. L’influence de cette perturbation n’étant pas le sujet de cette étude, nous choisissons pour toutes les simulations que nous effectuons la même perturbation $\delta\mathbf{X}$ égale à un vecteur de perturbations unitaires dans toutes les directions pondérées d’un facteur 10^{-9} dans la base de degrés de liberté physiques. Ce vecteur de perturbation est ensuite projeté dans la base réduite correspondant au système concerné.

4.2 Signal transitoire

Les évolutions temporelles du système dynamique à partir de sa position d’équilibre glissante associées aux cas présentés Section 4.1.1 sont maintenant calculées à l’aide de la θ -méthode dans sa formulation adaptée à notre modélisation rappelée dans la Section précédente. Les performances des deux étapes de réduction pour les signaux transitoires et leurs spectrogrammes associés sont étudiées. Nous ne nous intéressons ici qu’à des configurations présentant au moins un mode instable prédit par le calcul CEA. Les configurations prédites stables par le calcul CEA ont été simulées et nous avons bien observé un retour à la position d’équilibre glissante sans le développement de vibrations auto-entretenu. Le calcul de référence ici sera effectué pour une valeur de $\gamma = 3$ pour le paramètre de réduction de Craig et Bampton défini à la Section 3.3.1.

Nous définissons un ensemble de points d’observation sur lesquels les signaux sont représentatifs de la dynamique du système. Le Tableau 4.2 présente la position et les coordonnées de ces points dans le modèle Eléments Finis du frein simplifié. Nous choisissons un point sur le disque hors interface et un point sur l’interface de la plaquette supérieure.

4.2.1 Cas 1, un mode instable

Le Cas d’étude 1 correspond au coefficient de frottement $\mu = 0.7$. L’analyse de stabilité effectuée à la Section 3.4.1 a prédit dans cette situation un seul mode instable à la fréquence $f_1 = 857.6Hz$. Nous observons à la Figure 4.2, pour les points d’observation 1 et 2 et pour le système de référence, l’évolution de la position sur les 3 degrés de liberté ainsi que les spectrogrammes associés. La dynamique de ce système à un mode instable se déroule comme suit :

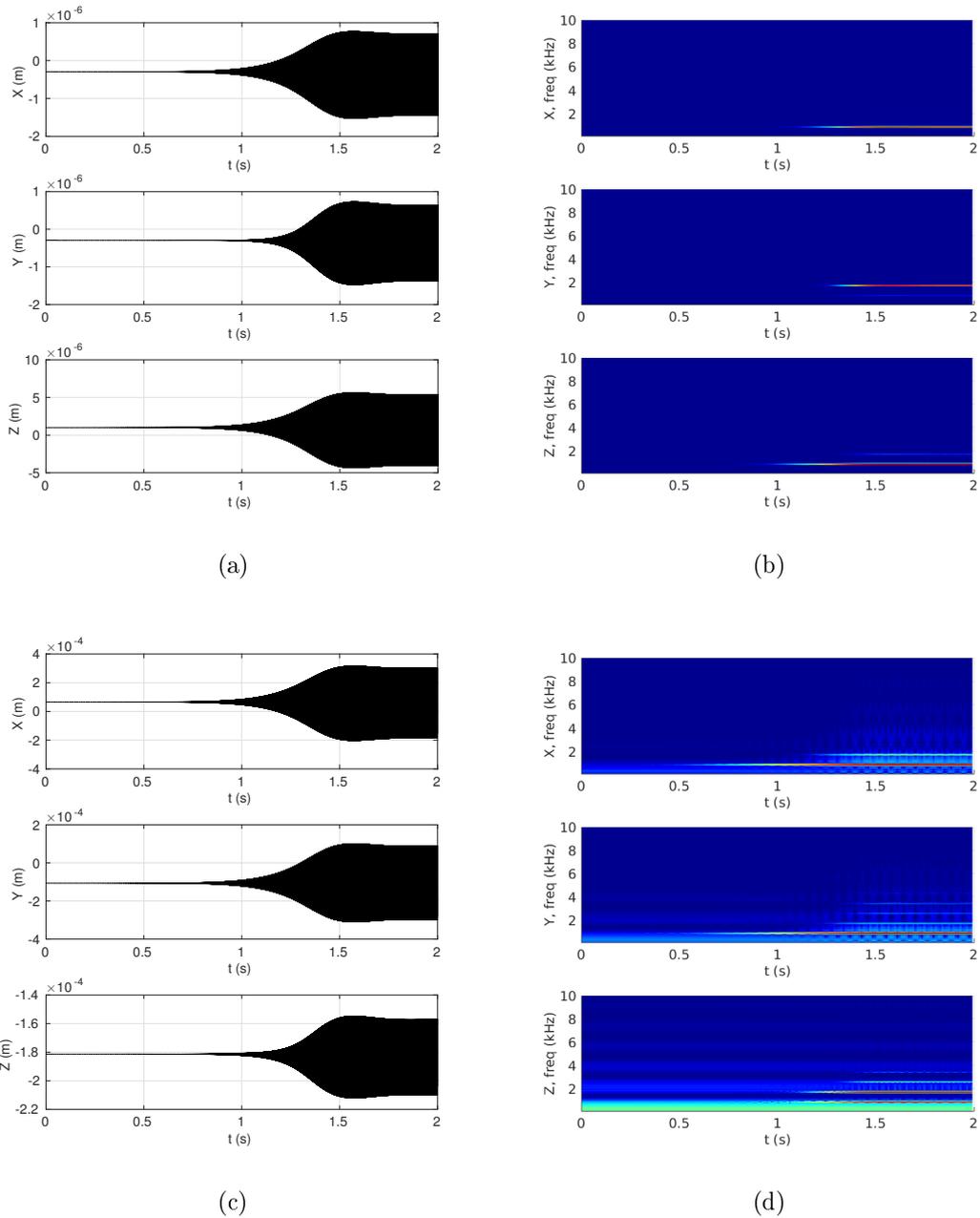


FIGURE 4.2 – Système de référence, (a) Signaux transitoires pour le point d'observation 1, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d'étude 1 à $\mu = 0.7$, (b) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires du point 1 sur les trois degrés de liberté, (c) Signaux transitoires pour le point d'observation 2, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d'étude 1 à $\mu = 0.7$ et (d) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires du point 2 sur les trois degrés de liberté

- $t = [0; 1.4]s$: le système part de sa position d'équilibre glissante à $t = 0s$ et des oscillations à la fréquence $f_1 = 857Hz$ apparaissent et augmentent de façon exponentielle au taux de croissance fixé par la partie réelle du mode instable $Re(\lambda_1)$, le système réagit ainsi dans son domaine linéaire,
- $t = [1.4; 1.8]s$: les oscillations du système passent par un maximum et peuvent subir une légère diminution selon les degrés de liberté, les effets non-linéaires apparaissent et des décollements interviennent aux interfaces, ce qui a pour conséquence de limiter les amplitudes des vibrations et de stopper la croissance exponentielle associée au régime linéaire,
- $t > 1.8s$: les oscillations se stabilisent vers des niveaux constants et le régime établi est atteint, caractérisé par des oscillations auto-entretenuées périodiques. Les spectrogrammes associés indiquent la présence du mode instable, dont la fréquence est de $f_1 = 857Hz$ ainsi que de ses harmoniques $2f_1$ et $3f_1$. La fondamentale du mode instable est plus marquée sur certains degrés de liberté comme sur le degré de liberté X du point 1, alors qu'on observe plutôt l'harmonique $2f_1$ sur le degré de liberté Y de ce même point. Nous observons plus d'harmoniques sur le signal du point 2, associé à un point de l'interface de la plaquette supérieure, qui est aussi beaucoup plus bruité. Ces évolutions sont bien représentatives des systèmes présentant une instabilité par couplage de modes. Nous pouvons également observer une très légère différence, inférieure à 0.1%, de la fréquence instable par rapport à celle prédite lors du calcul de stabilité.

L'efficacité de la première étape de réduction de Craig et Bampton en fonction du paramètre de contrôle γ est maintenant évaluée. Le système est réduit avec un paramètre de réduction $\gamma \in \{0.5; 1; 1.5; 2.5\}$ et est lancé à partir des mêmes conditions initiales que le système de référence. Les évolutions temporelles des systèmes ainsi réduits sont simulées sur un intervalle de 2s. La Figure 4.3 présente pour les points d'observation 1 et 2 et pour leurs 3 degrés de liberté, les évolutions transitoires des systèmes réduits et de la référence.

Nous observons que les réponses transitoires entre la référence et les systèmes réduits ont la même allure et que les régimes établis présentent des amplitudes égales, sauf pour $\gamma = 0.5$. Cette observation conforte celle qui avait été faite lors de l'étude de stabilité où nous avons pu remarquer la convergence brutale des résultats quand le nombre de modes à interface fixe conservé était suffisant. Un paramètre de réduction inférieur à $\gamma = 1$ n'assure pas dans notre cas que le système réduit va suivre la même dynamique que la référence. Au delà de cette valeur seuil, la taille de la base de réduction influe très peu en apparence sur la réponse du système par rapport à la référence.

Nous pouvons mesurer l'évolution de la fréquence du mode instable en fonction du paramètre de contrôle γ dans le Tableau 4.3, celle ci varie de moins de 0.1% avec la taille de la base de réduction par rapport à la référence. L'écart de fréquence du mode instable observé entre le calcul de stabilité et le modèle de référence peut s'expliquer par le fait que les vibrations du système lors de son évolution transitoire l'écartent de sa position d'équilibre glissante et que l'analyse de stabilité ne permet pas de s'éloigner du point de linéarisation. Les pertes de contact modifient également l'état de contact aux interfaces et le système n'est plus dans la même configuration que pour le calcul de stabilité. Les conditions ne sont donc plus les mêmes que celle de l'équilibre glissant. La taille de la base de réduction de Craig et Bampton ne semble influencer ici que sur la capacité du modèle réduit à reproduire des vibrations semblables au modèle de référence. Cette convergence semble ici brutale et il semble judicieux de se placer au delà de $\gamma = 1$ pour l'observer. En accord avec les conclusions établies à la fin de l'étude de stabilité, nous choisissons un paramètre de réduction optimal pour la première étape de synthèse modale de $\gamma = 1.5$ avant de passer à la DMS, ce qui correspond au modèle de référence intermédiaire.

Nous nous intéressons maintenant à l'influence de la DMS dans ce cas d'étude pour les signaux transitoires. Le paramètre de contrôle de la taille de réduction est ici choisi parmi les valeurs $N_{DMS} \in \{50; 150; 500; 1000\}$ et est donc appliqué au système déjà réduit par la méthode de

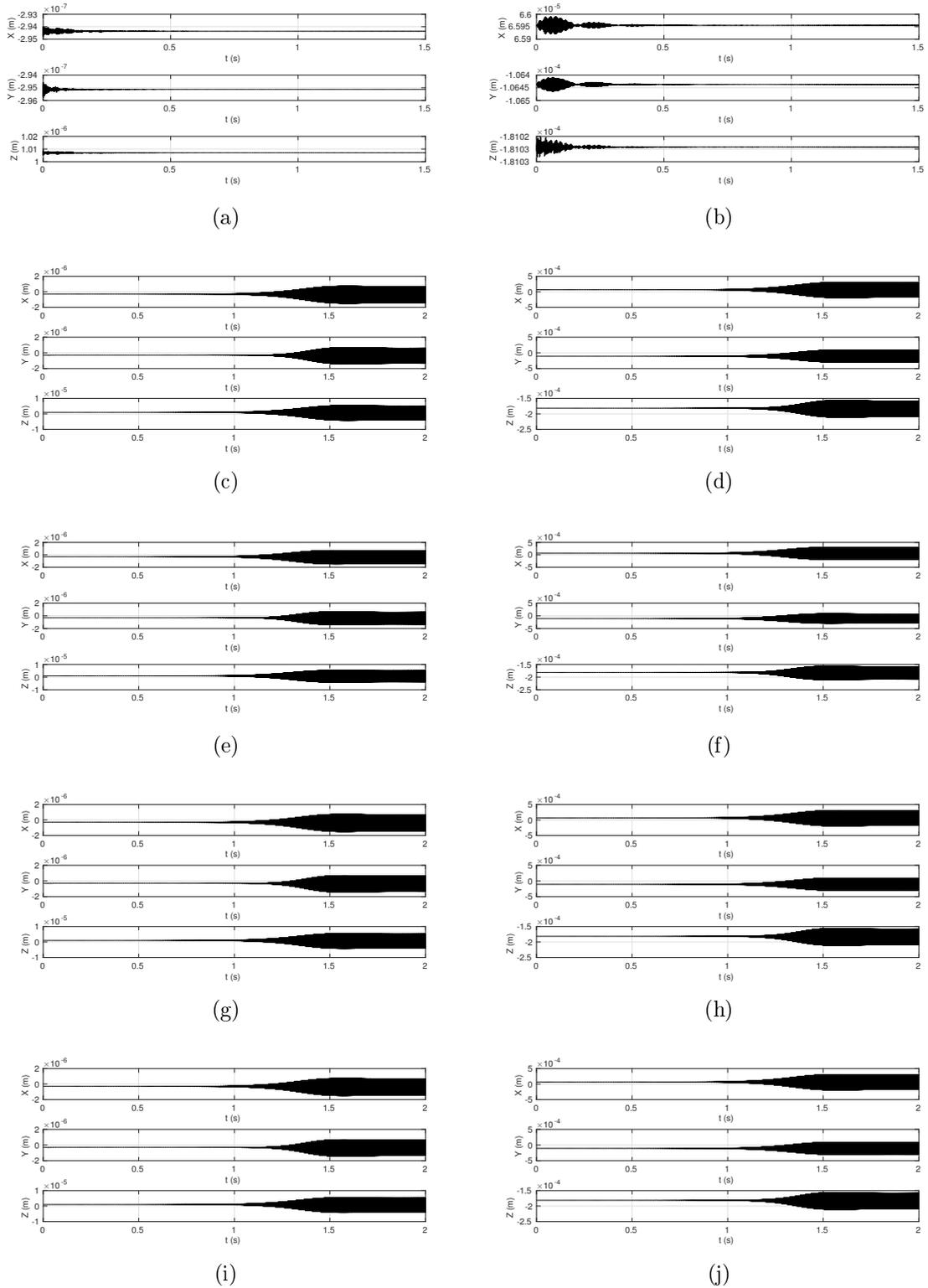


FIGURE 4.3 – Signaux transitoires pour le Cas $\mu = 0.7$, réduction de Craig et Bampton (a) Point 1 - $\gamma=0.5$ (b) Point 2 - $\gamma=0.5$ (c) Point 1 - $\gamma=1$ (d) Point 2 - $\gamma=1$ (e) Point 1 - $\gamma=1.5$ (f) Point 2 - $\gamma=1.5$ (g) Point 1 - $\gamma=2.5$ (h) Point 2 - $\gamma=2.5$ (i) Point 1 - Référence (j) Point 2 - Référence

	CEA	Ref	$\gamma =$	1	1.5	2.5
Mode 1 (Hz)	858	857		857	857	857

TABLEAU 4.3 – Evolution de la fréquence instable en fonction du paramètre γ pour la réduction de Craig et Bampton, Cas 1 avec $\mu = 0.7$

Craig et Bampton avec $\gamma = 1.5$. La Figure 4.4 présente toujours pour les points d’observation 1 et 2 et pour les 3 degrés de liberté les évolutions transitoires du système de référence intermédiaire et des systèmes réduits par la DMS.

Nous observons ici que la taille de la base de réduction influe sur les transitions entre les différentes phases du signal. Celles-ci sont accélérées et en avance pour des bases de réduction de petite taille. Plus le nombre de modes d’interfaces N_{DMS} est faible et plus cet effet est marqué. En revanche, quand le nombre de modes d’interface est plus important, ici $N_{DMS} = 1000$, la dynamique du système est ralentie, avec un déclenchement plus tardif de l’instabilité. Cet effet n’est observable que si l’on procède à une intégration temporelle, il est masqué lors du calcul CEA où si nous nous limitons à l’observation des cycles limites. Les niveaux vibratoires sont ici légèrement affectés, en particulier sur des systèmes très réduits. Le Tableau 4.4 présente les fréquences du mode instable en fonction du nombre de modes d’interface retenus et nous pouvons observer que la seconde étape de réduction n’influe pas ici sur ce paramètre. La Double Synthèse Modale semble dans ce cas d’étude apte à reproduire les vibrations auto-entretenues à un mode instable induites par le couplage de modes. Ces résultats ont également pu être reproduits avec des solveurs numériques plus classiques de type Runge-Kutta d’ordre 4.

	CEA	Ref _{inter}	$N_{DMS} =$	50	150	500	1000
Mode 1 (Hz)	858	857		857	857	857	857

TABLEAU 4.4 – Evolution de la fréquence instable en fonction du paramètre N_{DMS} pour la Double Synthèse Modale, Cas 1 avec $\mu = 0.7$

4.2.2 Cas 2, deux modes instables à régime établi périodique

Le Cas d’étude 2 correspond au coefficient de frottement $\mu = 0.8$, où l’analyse de stabilité a prédit deux modes instables aux fréquences incommensurables f_1 et f_2 dont les parties réelles sont du même ordre de grandeur. Nous observons à la Figure 4.5 pour le système de référence les évolutions transitoires des positions dans les 3 directions des points d’observation 1 et 2 ainsi que les spectrogrammes associés. La dynamique associée à ce cas d’étude à deux modes instables est ici différente de la précédente à $\mu = 0.7$:

- $t = [0; 0.25]s$: le système part de sa position d’équilibre glissante à $t = 0s$ et des oscillations apparaissent selon la fréquence fondamentale $f_2 = 2205Hz$ et sa première harmonique. Cette valeur de f_2 est différente de celle prévue lors du calcul de stabilité de moins de 0.8%. Ces oscillations augmentent de façon exponentielle au taux de croissance fixé par la partie réelle du second mode instable $Re(\lambda_2)$, le système réagit ainsi dans son domaine linéaire et seules les contributions du second mode instable et de ses premières harmoniques sont observées sur les spectrogrammes,
- $t = [0.25; 0.5]s$: les oscillations du système passent par un maximum et peuvent subir une légère diminution selon les degrés de liberté, les effets non-linéaires apparaissent et des décollements interviennent aux interfaces, ce qui a pour effet de limiter les amplitudes des vibrations et de stopper la croissance exponentielle associée au régime linéaire,

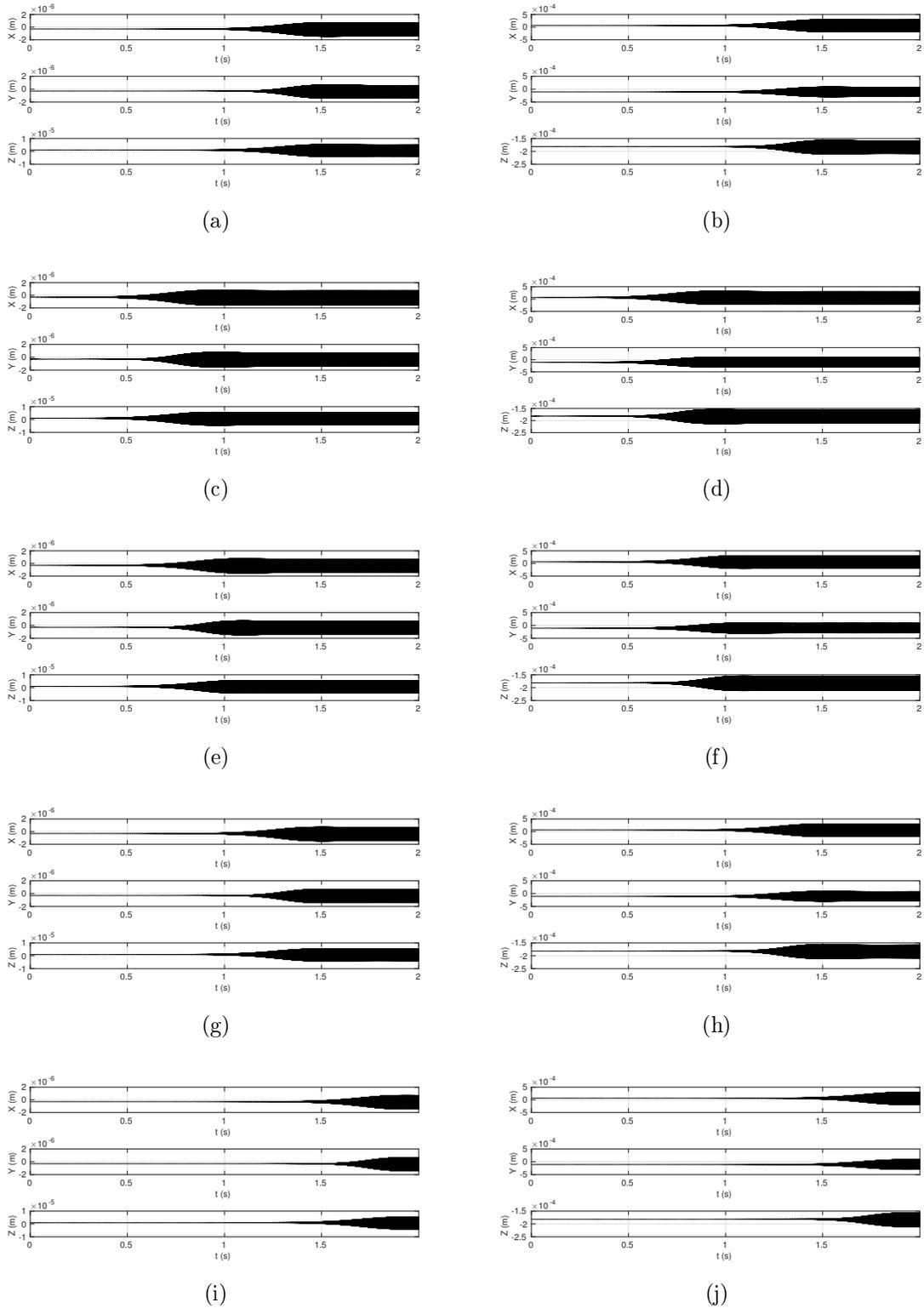


FIGURE 4.4 – Signaux transitoires pour le Cas $\mu = 0.7$, réduction DMS (a) Point 1 - Référence (b) Point 2 - Référence (c) Point 1 - $N_{DMS}=50$ (d) Point 2 - $N_{DMS}=50$ (e) Point 1 - $N_{DMS}=150$ (f) Point 2 - $N_{DMS}=150$ (g) Point 1 - $N_{DMS}=500$ (h) Point 2 - $N_{DMS}=500$ (i) Point 1 - $N_{DMS}=1000$ (j) Point 2 - $N_{DMS}=1000$

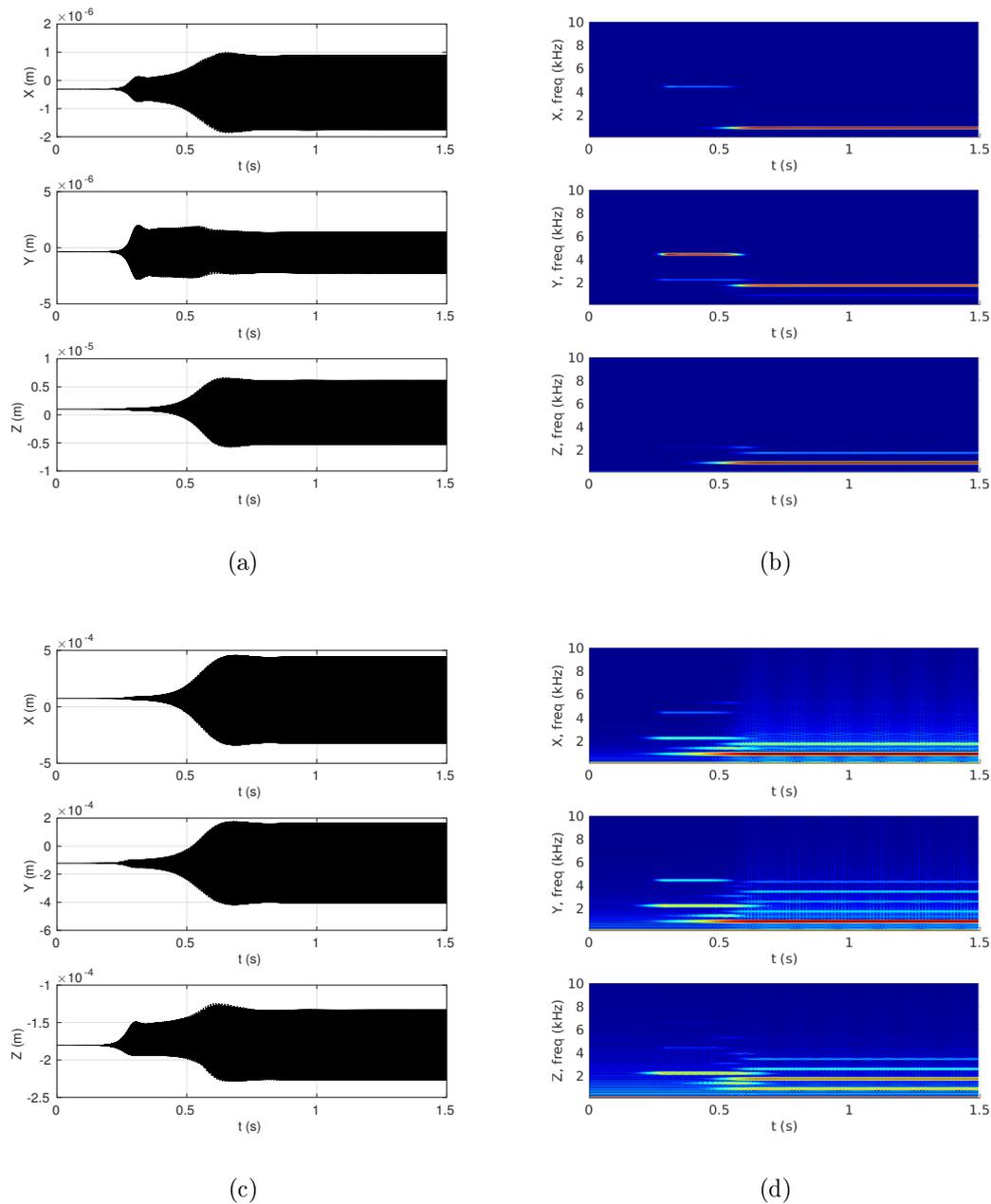


FIGURE 4.5 – Système de référence, (a) Signaux transitoires pour le point d'observation 1, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d'étude 2 à $\mu = 0.8$, (b) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires sur les trois degrés de liberté, (c) Signaux transitoires pour le point d'observation 2, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d'étude 2 à $\mu = 0.8$ et (d) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires sur les trois degrés de liberté

un régime pseudo-établi est atteint, gouverné par le second mode instable où les niveaux sont presque stabilisés,

- $t = [0.5; 0.75]s$: nous observons une deuxième croissance des oscillations qui passent de nouveau par un maximum de niveau avant de diminuer vers des amplitudes différentes de la seconde phase du signal, nous pouvons observer sur les spectrogrammes que le second mode instable et ses harmoniques disparaissent au profit du premier mode instable à la fréquence $f_1 = 857Hz$ et de ses premières harmoniques,
- $t > 0.75s$: les niveaux des oscillations du système sont stabilisées et uniquement gouvernées par le premier mode instable. Un régime établi est atteint et ne contient la participation que d'un seul mode instable, ce qui suggère une dynamique périodique.

La première étape de réduction par la méthode de Craig et Bampton est appliquée au Cas 2 à deux mode instables pour $\mu = 0.8$. Le paramètre de contrôle de la taille de réduction est choisi dans l'ensemble $\gamma \in \{0.5; 1; 1.5; 2.5\}$ et les évolutions des systèmes réduits sont comparées à la Figure 4.6 pour des conditions initiales identiques, pour les points d'observation 1 et 2 sur leurs trois degrés de liberté. Nous observons là encore que les réponses des systèmes réduits ont la même allure que le système de référence, avec des niveaux similaires sur leurs régimes correspondant aux phases pseudo-établie et établie, sauf pour le système $\gamma = 0.5$ où la dynamique est complètement différente de celle du système de référence, comme nous l'avons observé pour le Cas 1. Le Tableau 4.5 rassemble l'évolution des fréquences des fondamentales des deux modes instables en fonction du paramètre de contrôle γ . Nous pouvons remarquer une variation de la fréquence du second mode instable réellement présente dans le signal transitoire par rapport à celle prédite lors du calcul CEA de l'ordre de 1%, en revanche la différence des modèles réduits par rapport à la référence est faible. Là encore la première étape de réduction de Craig et Bampton ne semble influencer que sur la capacité d'un système réduit à reproduire la dynamique du système de référence, avec une convergence brutale. La fréquence du second mode instable est aussi différente de celle prévue par le calcul de stabilité. Toujours en accord avec les conclusions issues du calcul de stabilité, nous choisissons une valeur $\gamma = 1.5$ pour le paramètre de contrôle de la taille de la réduction de Craig et Bampton avant d'appliquer la seconde étape de réduction de modèle.

	CEA	Ref	$\gamma =$	1	1.5	2.5
Mode 1 (Hz)	858	857		857	857	857
Mode 2 (Hz)	2223	2205		2206	2205	2205

TABLEAU 4.5 – Evolution des fréquences instables en fonction du paramètre γ pour la réduction de Craig et Bampton, Cas 2 avec $\mu = 0.8$

Nous appliquons maintenant la seconde étape de réduction par la technique DMS, pour un nombre de modes d'interface $N_{DMS} \in \{50; 150; 500; 1000\}$. La Figure 4.7 illustre pour les points d'observation 1 et 2 les signaux temporels pour les 3 degrés de liberté des différents systèmes réduits par la DMS et du système de référence intermédiaire. Nous observons une convergence des niveaux sur les régimes pseudo-établi et établi avec l'augmentation de la taille de la base de réduction DMS, nous pouvons considérer ici que pour $N_{DMS} = 150$ les niveaux du régime établi sont bien estimés à moins de 1.5% d'erreur alors que 50 modes d'interface induisent une erreur de 5%. Les transitions entre les différentes phases du signal sont encore accélérées pour les systèmes réduits, l'effet étant toujours amplifié sur des bases de réduction de petite taille, un nombre $N_{DMS} = 50$ de modes d'interface entraîne des avances de 0.16s et 0.25s sur la référence pour les transitions vers les régimes pseudo-établis et établis, alors que cette avance n'est plus que de 0.12s et 0.18s pour $N_{DMS} = 150$. Les durées des phases sont raccourcies et les système réduits prennent de plus en plus d'avance sur la référence intermédiaire au fil de l'évolution transitoire. Nous n'observons plus dans ce cas un retard des

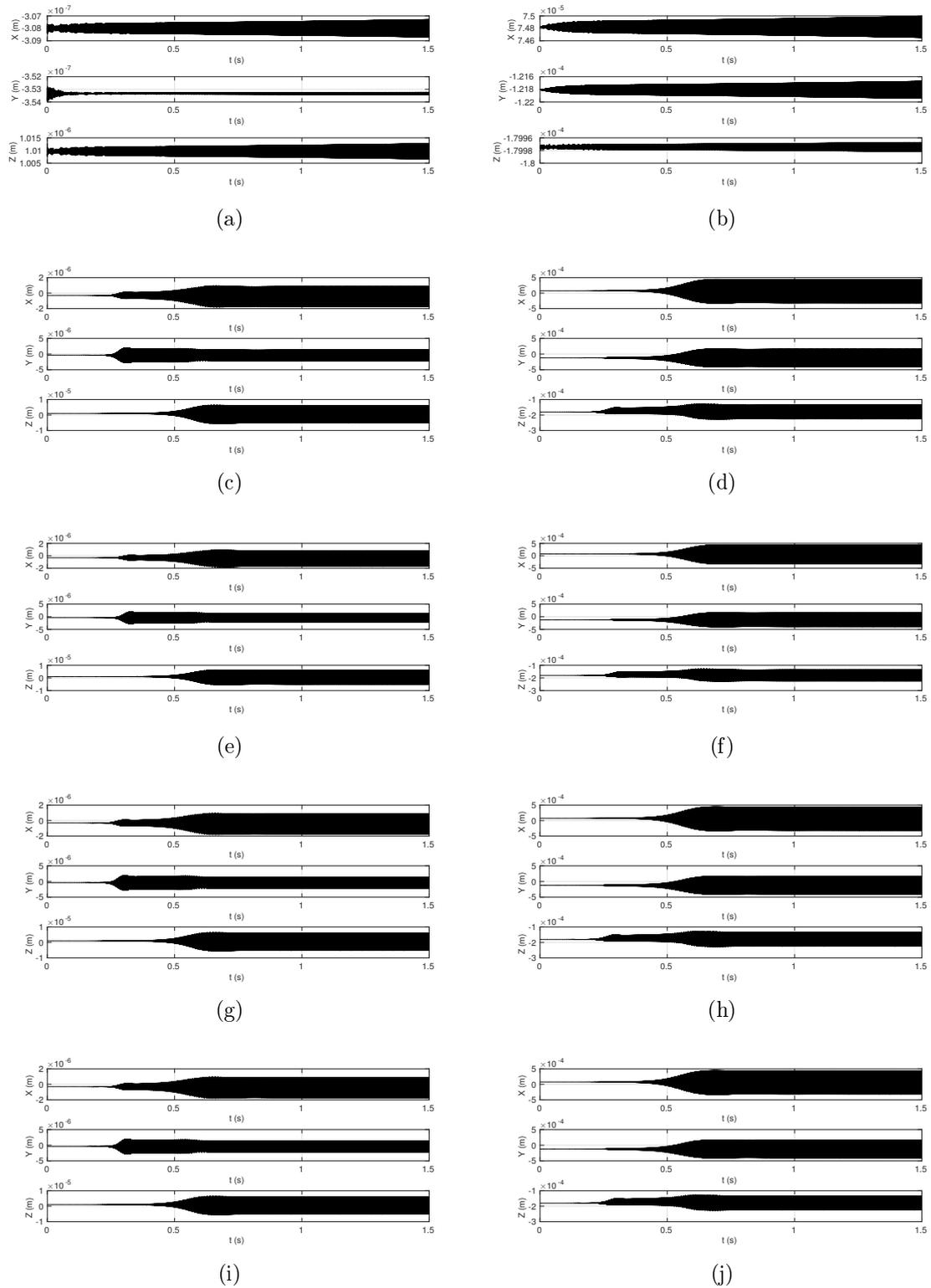


FIGURE 4.6 – Signaux transitoires pour le Cas $\mu = 0.8$, réduction de Craig et Bampton (a) Point 1 - $\gamma=0.5$ (b) Point 2 - $\gamma=0.5$ (c) Point 1 - $\gamma=1$ (d) Point 2 - $\gamma=1$ (e) Point 1 - $\gamma=1.5$ (f) Point 2 - $\gamma=1.5$ (g) Point 1 - $\gamma=2.5$ (h) Point 2 - $\gamma=2.5$ (i) Point 1 - Référence (j) Point 2 - Référence

évolutions transitoires du système par rapport à la référence intermédiaire pour des réduction DMS avec un grand nombre de modes d'interface comme dans le Cas 1 avec $N_{DMS} = 1000$. Le Tableau 4.6 rassemble l'évolution des fréquences des fondamentales des deux modes instables en fonction du nombre de modes d'interface retenus. Nous pouvons remarquer que les deux fréquences instables sont estimées avec une erreur inférieure à 0.2% déjà pour seulement 50 modes d'interface par rapport à la référence intermédiaire. La Double Synthèse Modale est toujours capable dans ce cas à deux modes instables de reproduire les vibrations auto-entretenues et de prédire le bon ordre d'apparition et de disparition des fréquences instables dans le signal. Elle permet une bonne estimation des niveaux quand suffisamment de modes d'interface sont conservés mais elle induit une accélération des transitions entre les phases et les changements dynamiques du signal. La θ -méthode est, dans ce cas à deux modes instables, la seule méthode numérique à notre disposition capable de mener sur la durée de temps d'intégration nécessaire les simulations transitoires. Les autres méthodes classiques de Runge-Kutta 4 présentent des problèmes numériques de convergence.

	CEA	Ref. _{inter}	$N_{DMS} =$	50	150	500	1000
Mode 1 (Hz)	857	857		857	857	857	857
Mode 2 (Hz)	2223	2205		2202	2204	2205	2205

TABLEAU 4.6 – Evolution des fréquences instables en fonction du paramètre N_{DMS} pour la Double Synthèse Modale, Cas 2 avec $\mu = 0.8$

4.2.3 Cas 3, deux modes instables à régime établi pseudo-périodique

Le Cas d'étude 3 à $\mu = 1$ présente lui aussi deux modes instables, comme pour le Cas 2, mais leurs parties réelles prédites par le calcul de stabilité sont plus grandes, en particulier celle du second mode instable qui est maintenant beaucoup plus grande que celle du premier mode instable (voir Tableau 4.1). Les fréquences des modes instables prédits sont quasiment identiques à celles du Cas $\mu = 0.8$. La Figure 4.8 illustre pour le système de référence l'évolution transitoire aux points d'observation 1 et 2, toujours sur les trois degrés de liberté, ainsi que les spectrogrammes associés à ces signaux temporels. La dynamique observée dans ce cas est proche de celle du Cas $\mu = 0.8$ sur les premières phases du signal mais le régime établi est différent :

- $t = [0; 0.08]s$: le système part de sa position d'équilibre glissante à $t = 0s$ et des oscillations à la fréquence fondamentale $f_2 = 2195Hz$ et ses premières harmoniques apparaissent. Elles augmentent de façon exponentielle au taux de croissance fixé par la partie réelle du second mode instable $Re(\lambda_2)$, le système réagit ainsi dans son domaine linéaire et seules les contributions du second mode instable et de ses première harmoniques s'observent sur les spectrogrammes. La fréquence du second mode instable est ici différente de celle prédite lors du calcul CEA d'environ 1.3%,
- $t = [0.08; 0.22]s$: les oscillations du système passent par un maximum et peuvent subir une légère diminution selon les degrés de liberté, les effets non-linéaires apparaissent et des décollements interviennent aux interfaces, ce qui permet de limiter les amplitudes des vibrations et de stopper la croissance exponentielle associée au régime linéaire, un régime pseudo-établi est atteint, gouverné par le second mode instable où les niveaux sont presque stabilisés,
- $t = [0.22; 0.85]s$: une deuxième croissance des oscillations est observée, qui passent par un maximum de niveaux avant de diminuer vers des amplitudes différentes de la seconde phase du signal. Ici, à la différence du cas précédent, le premier mode instable apparaît à la fréquence fondamentale $f_1 = 857Hz$ sans que le second mode instable ne

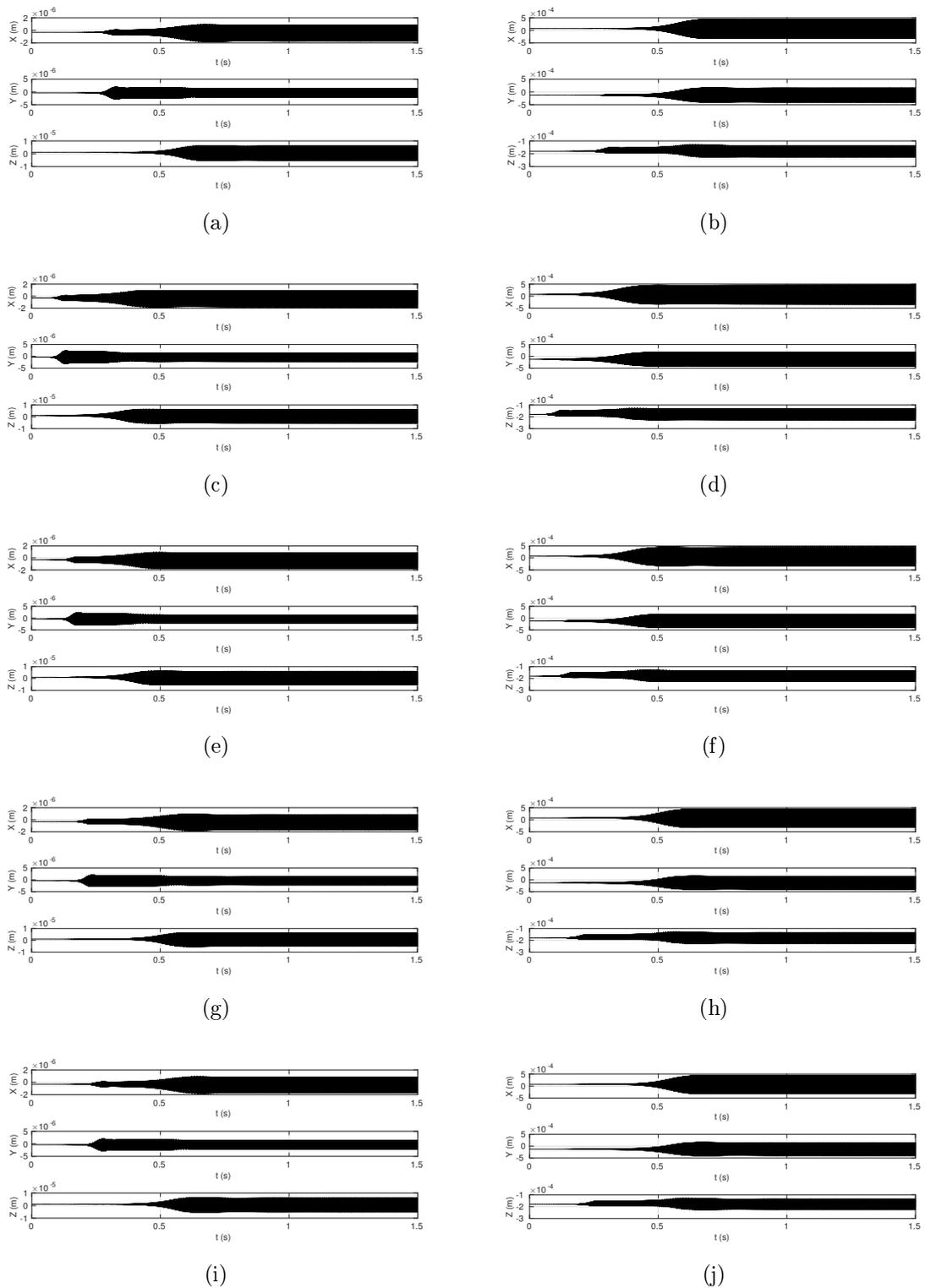


FIGURE 4.7 – Signaux transitoires pour le Cas $\mu = 0.8$, réduction DMS (a) Point 1 - Référence (b) Point 2 - Référence (c) Point 1 - $N_{DMS}=50$ (d) Point 2 - $N_{DMS}=50$ (e) Point 1 - $N_{DMS}=150$ (f) Point 2 - $N_{DMS}=150$ (g) Point 1 - $N_{DMS}=500$ (h) Point 2 - $N_{DMS}=500$ (i) Point 1 - $N_{DMS}=1000$ (j) Point 2 - $N_{DMS}=1000$

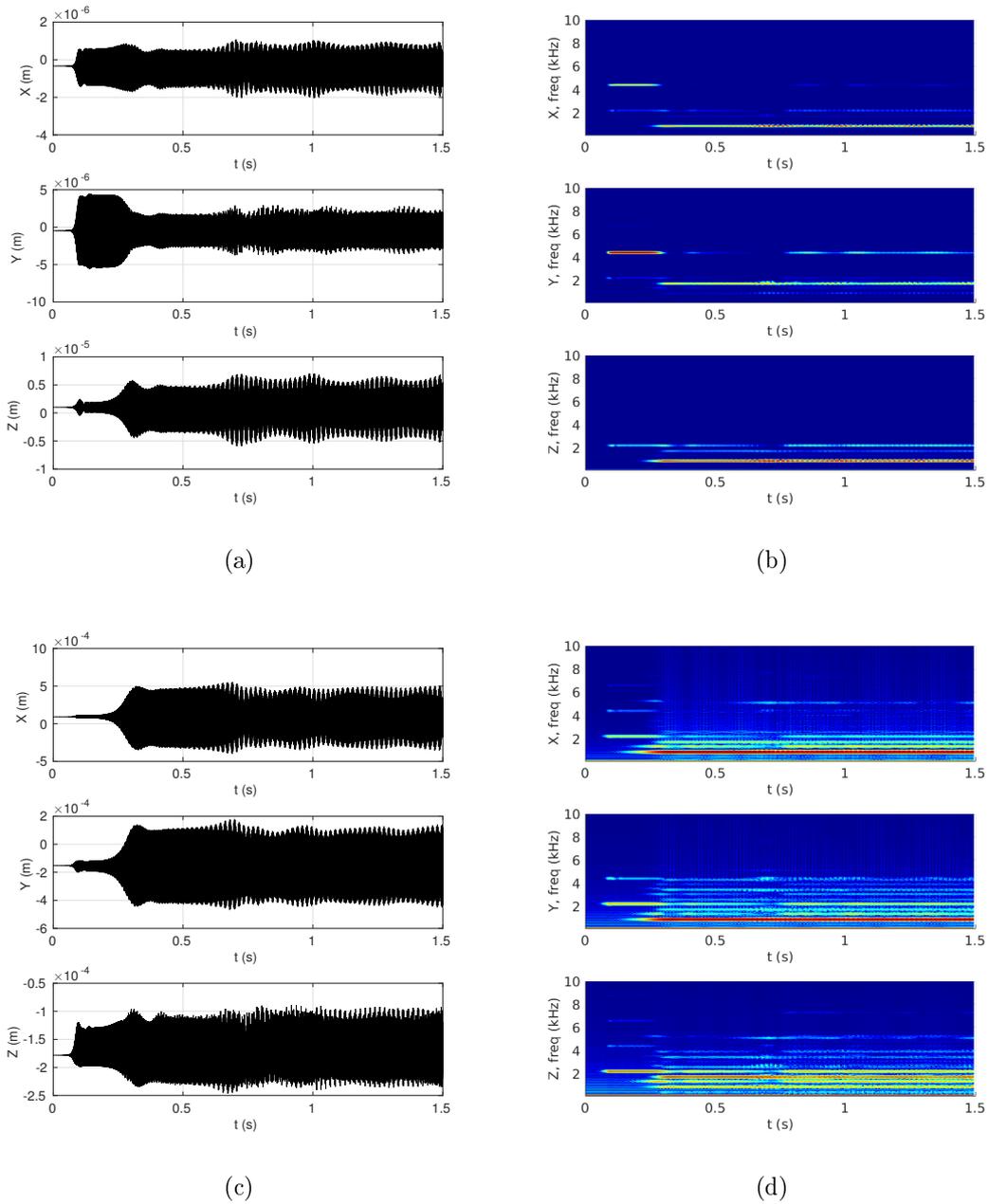


FIGURE 4.8 – Système de référence, (a) Signaux transitoires pour le point d'observation 1, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d'étude 3 à $\mu = 1$, (b) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires sur les trois degrés de liberté, (c) Signaux transitoires pour le point d'observation 2, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d'étude 3 à $\mu = 1$ et (d) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires sur les trois degrés de liberté

disparaisse de la réponse. Les contributions fréquentielles des deux modes instables et de leurs premières harmoniques sont visibles dans le spectre de la réponse transitoire ainsi que des combinaisons linéaires des fondamentales de ces deux modes.

- $t > 0.85s$: les niveaux des oscillations du système se stabilisent globalement, bien que des oscillations basse fréquence modulent l’enveloppe des amplitudes de vibration. Le régime établi est ici régi par les deux modes instables, ce qui indique un comportement pseudo-périodique des vibrations.

Nous commençons par évaluer la performance de la méthode de réduction de Craig et Bampton pour la prédiction des vibrations dans ce cas à deux modes instables à régime établi pseudo-périodique. Les différentes tailles de systèmes réduits comparées sont contrôlées par le paramètre de réduction $\gamma \in \{0.5; 1; 1.5; 2.5\}$. Les signaux temporels sont illustrés à la Figure 4.9 pour les points d’observation 1 et 2 sur les trois degrés de liberté. La première étape de réduction permet là encore d’obtenir sur les systèmes réduits une bonne estimation des niveaux de vibration dès que γ est assez grand. Nous observons de nouveau dans ce cas d’étude que la taille des bases de réduction permet surtout d’obtenir la bonne dynamique du système. Le comportement des modèles réduits converge brusquement quand $\gamma \geq 1$ avec des niveaux très proches de ceux de la référence. Le Tableau 4.7 rassemble l’évolution des fréquences des fondamentales des deux modes instables en fonction du paramètre de contrôle γ . Nous remarquons que la valeur de référence pour les fréquences des deux modes instables est différente de celle prédite par l’analyse de stabilité, de 1.3% pour le second mode instable et de moins de 0.1% pour le premier. Le paramètre $\gamma = 1.5$ est donc conservé pour la suite et l’application de la seconde étape de réduction.

	CEA	Ref	$\gamma =$	1	1.5	2.5
Mode 1 (Hz)	857	857		857	857	857
Mode 2 (Hz)	2224	2195		2196	2195	2195

TABLEAU 4.7 – Evolution des fréquences instables en fonction du paramètre γ pour la réduction de Craig et Bampton, Cas 3 avec $\mu = 1$

L’application de la seconde réduction par la méthode DMS est effectuée avec un nombre de modes d’interface $N_{DMS} \in \{50; 150; 500; 1000\}$ sur le système de référence intermédiaire. La Figure 4.10 présente les évolutions temporelles pour les points d’observation 1 et 2 sur leurs trois degrés de liberté pour les différentes tailles de réduction DMS. Nous observons que la convergence des niveaux de vibration est plus lente avec l’augmentation du nombre de modes d’interface que pour le cas $\mu = 0.8$. L’erreur en amplitude sur le régime établi pour 150 modes d’interface est d’environ 5%, et de 15% pour uniquement 50 modes d’interface. Nous observons encore des décalages temporels entre les différentes phases du signal en fonction du nombre de modes d’interfaces retenus, avec toujours une accélération des transition et une évolution plus rapide du système vers son régime pseudo-périodique quand N_{DMS} est faible. L’avance du modèle réduit avec 150 modes d’interface sur la référence intermédiaire lors des deux transitions de phase est de 0.02s et 0.14s, cette avance passe à 0.04s et 0.18s quand $N_{DMS} = 50$. Le Tableau 4.8 rassemble l’évolution des fréquences des fondamentales des modes instables en fonction du nombre de modes d’interface retenus. Nous pouvons remarquer que les fréquences des modes instables ne changent quasiment pas avec la taille de la réduction DMS, bien que la valeur de la fréquence du second mode instable soit différente de celle prédite par le calcul CEA. Cependant la méthode de Double Synthèse Modale permet là encore de prédire les bons régimes de vibrations sur les systèmes réduits tout en réduisant le temps de calcul informatique par rapport au système initial d’un facteur 2 à 10 en fonction du nombre de modes d’interface conservés dans la base DMS. Dans ce cas d’étude la θ -méthode est la seule méthode d’intégration numérique à notre disposition capable de simuler la réponse jusqu’au régime pseudo-périodique.

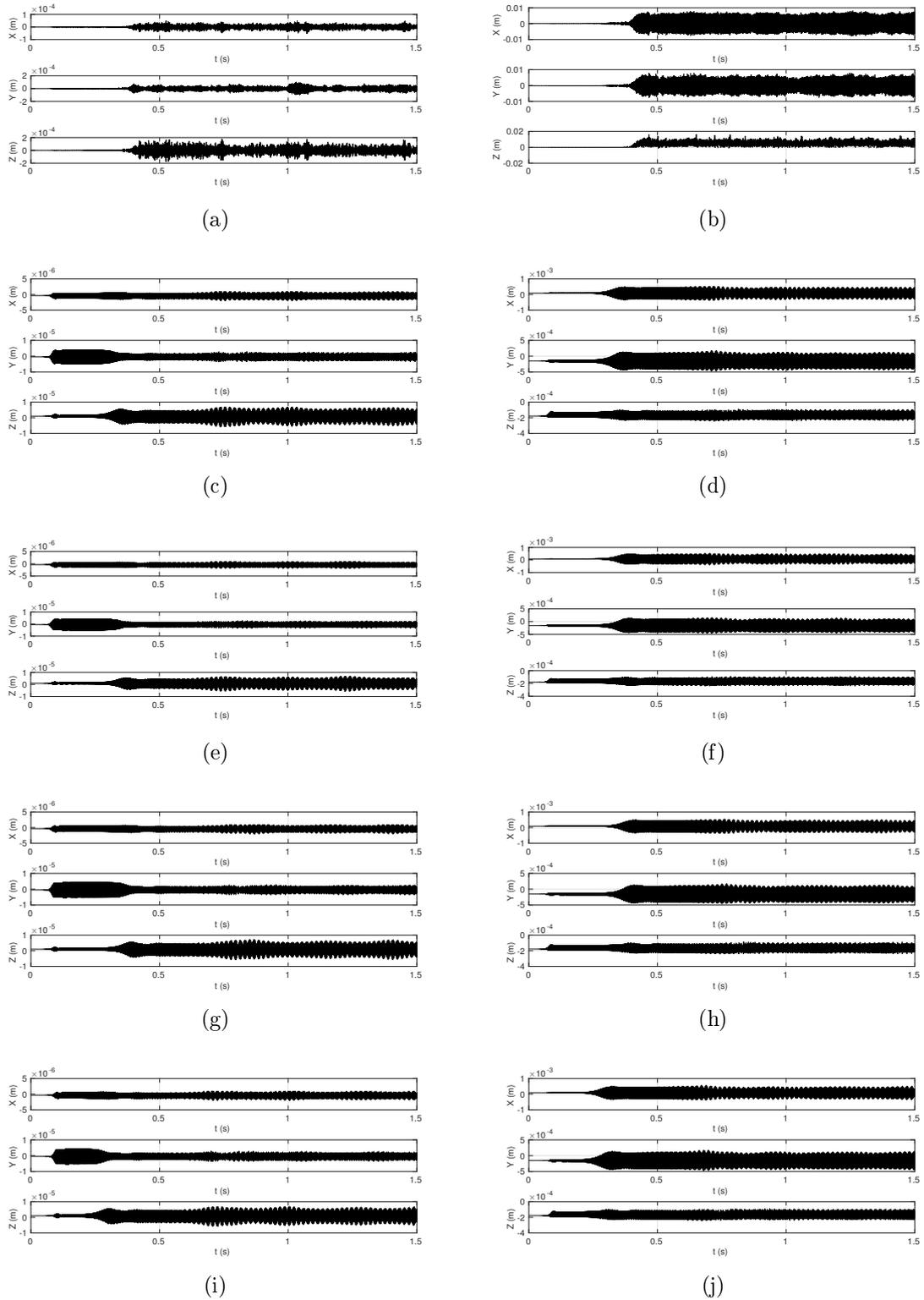


FIGURE 4.9 – Signaux transitoires pour le Cas $\mu = 1$, réduction de Craig et Bampton (a) Point 1 - $\gamma=0.5$ (b) Point 2 - $\gamma=0.5$ (c) Point 1 - $\gamma=1$ (d) Point 2 - $\gamma=1$ (e) Point 1 - $\gamma=1.5$ (f) Point 2 - $\gamma=1.5$ (g) Point 1 - $\gamma=2.5$ (h) Point 2 - $\gamma=2.5$ (i) Point 1 - Référence (j) Point 2 - Référence

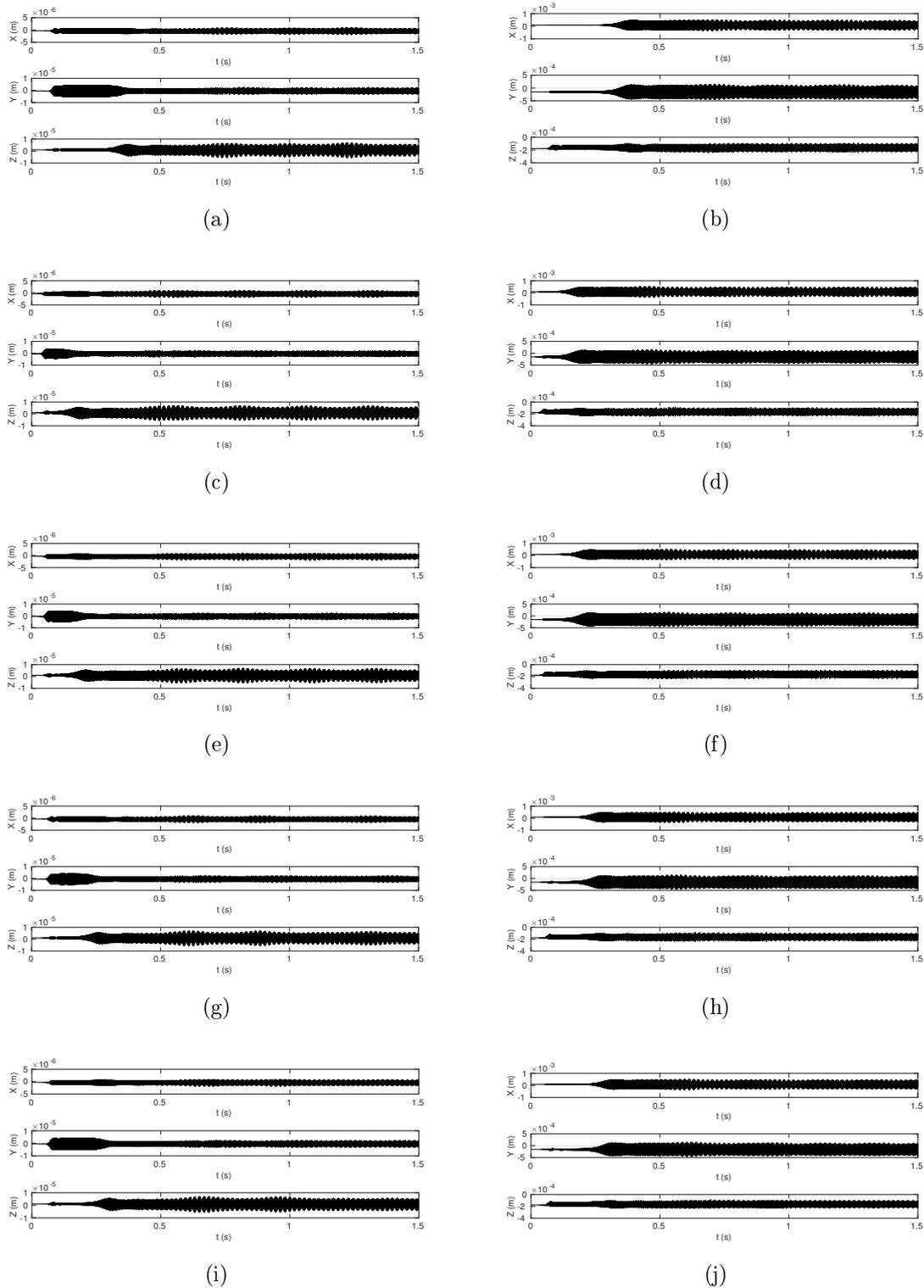


FIGURE 4.10 – Signaux transitoire pour le Cas $\mu = 1$, réduction DMS (a) Point 1 - Référence (b) Point 2 - Référence (c) Point 1 - $N_{DMS}=50$ (d) Point 2 - $N_{DMS}=50$ (e) Point 1 - $N_{DMS}=150$ (f) Point 2 - $N_{DMS}=150$ (g) Point 1 - $N_{DMS}=500$ (h) Point 2 - $N_{DMS}=500$ (i) Point 1 - $N_{DMS}=1000$ (j) Point 2 - $N_{DMS}=1000$

	CEA	Ref _{inter}	$N_{DMS} =$	50	150	500	1000
Mode 1 (Hz)	857	857		856	857	857	857
Mode 2 (Hz)	2224	2195		2195	2195	2195	2195

TABLEAU 4.8 – Evolution de la fréquence instable des 2 modes en fonction du paramètre N_{DMS} pour la Double Synthèse Modale, Cas 3 avec $\mu = 1$

Le pas de temps choisi pour cette étude, $h = 10^{-5}$ s nous a permis d’effectuer un ensemble de simulations en un temps acceptable. Cependant sur le Cas $\mu = 1$ il semble que les oscillations d’amplitude sur le régime établi soient d’origine numérique. Un pas de temps deux fois plus faible $h = 5.10^{-6}$ s permet de faire disparaître en grande partie ces oscillations. Cette valeur du pas de temps a été testée sur un modèle $\gamma = 1.5$ et les résultats aux points d’observation 1 et 2 sont illustrés Figure 4.11. Les niveaux observés sur la réponse du système sont identiques à ceux présentés Figure 4.9 pour le même système et les transitions entre les différentes phases sont identiques. Le contenu fréquentiel est lui aussi très similaire au calcul effectué avec le pas de temps initial sur les contributions principales des fréquences instables, leurs harmoniques et leurs combinaisons linéaires. Nous considérons donc que les résultats obtenus avec le pas de temps initial, bien que perturbés par des oscillations d’origine numérique, restent valables et que le seul effet indésirable soit des oscillations basse fréquence de l’enveloppe du signal sur le régime établi pseudo-périodique.

4.2.4 Exception : $\mu=0.74$ et bassin d’attraction du second mode instable

Nous présentons ici un cas d’étude supplémentaire, illustrant la nécessité d’effectuer des intégrations temporelles afin de prévoir les amplitudes qui vont réellement apparaître lors d’une évolution temporelle complète du système. Nous choisissons ici un coefficient $\mu = 0.74$, ce qui correspond à un système présentant une seule instabilité, la seconde bifurcation apparaît pour $\mu_2 = 0.76$. Il n’est pas ici question d’évaluer les performances des bases de réduction pour la prédiction des évolutions temporelles du système mais plutôt de les utiliser pour obtenir rapidement un résultat exploitable. Nous fixons les valeurs des paramètres de contrôle des tailles de bases de réductions successives à $\gamma = 1.5$ et $N_{DMS} = 150$ pour mener ce calcul à la limite de la seconde bifurcation. Nous observons à la Figure 4.12 les résultats de cette simulation temporelle sur les points d’observation 1 et 2 pour les trois degrés de liberté ainsi que les spectrogrammes associés. Nous observons bien ici la croissance exponentielle associée à la partie linéaire de la dynamique du système, menée par le mode instable à la fréquence f_1 et ses premières harmoniques. Puis le passage à une troisième phase semble débuter avant que le système ne se stabilise brusquement sur un régime périodique à la fréquence f_1 . En s’écartant de sa position d’équilibre glissante et avec l’augmentation des niveaux de vibrations, il semble que le système s’approche d’une région où le deuxième mode devient instable et la transition vers une troisième phase analogue à celle du Cas 2 à $\mu = 0.8$ s’enclenche avant que la trajectoire ne se stabilise finalement sur un cycle périodique où seul le premier mode est présent. Le système s’approche d’un bassin d’attraction du second mode instable durant son évolution temporelle, mais il reste finalement dans une dynamique mono-instable. Durant les évolutions transitoires du système, les maxima d’amplitude sont ici bien plus élevés que les niveaux du régime établi, et bien plus élevés que ceux du Cas à $\mu = 0.7$, ce qui confirme la nécessité de mener des calculs transitoires totaux. L’estimation du cycle limite par des méthodes comme la balance harmonique ou une méthode de tir ne permettent pas de prédire la singularité observée sur le signal transitoire. L’analyse de stabilité par CEA ne prévoyait dans ce cas une dynamique qu’à un seul mode instable, en effet le caractère local de cette méthode ne permet pas de faire des prédictions hors du point de linéarisation.

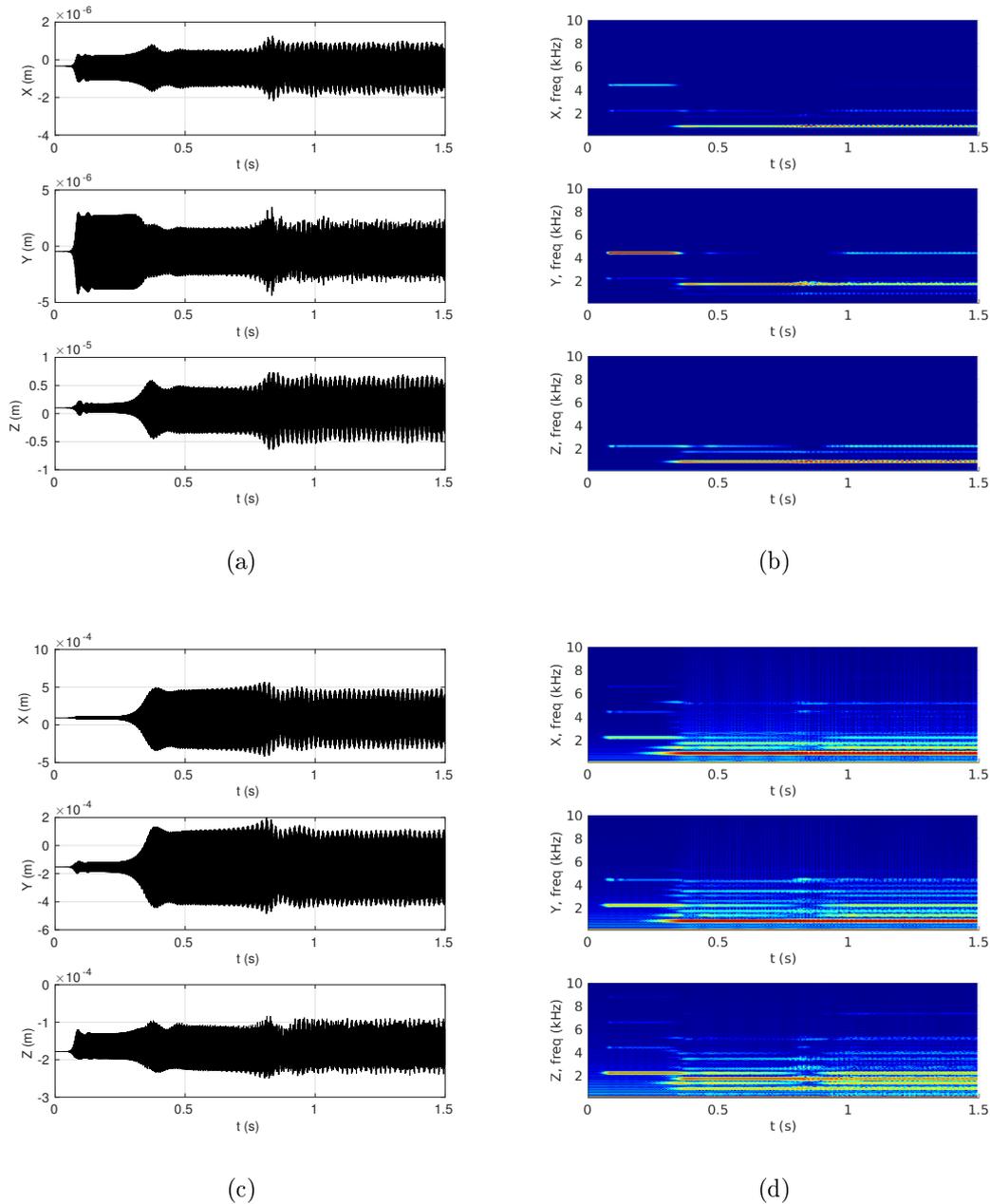


FIGURE 4.11 – Système réduit à $\gamma = 1.5$, intégration numérique avec un pas de temps fin $h = 5 * 10^{-6}s$, (a) Signaux transitoires pour le point d'observation 1, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d'étude 3 à $\mu = 1$, (b) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires sur les trois degrés de liberté, (c) Signaux transitoires pour le point d'observation 2, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d'étude 3 à $\mu = 1$ et (d) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires sur les trois degrés de liberté

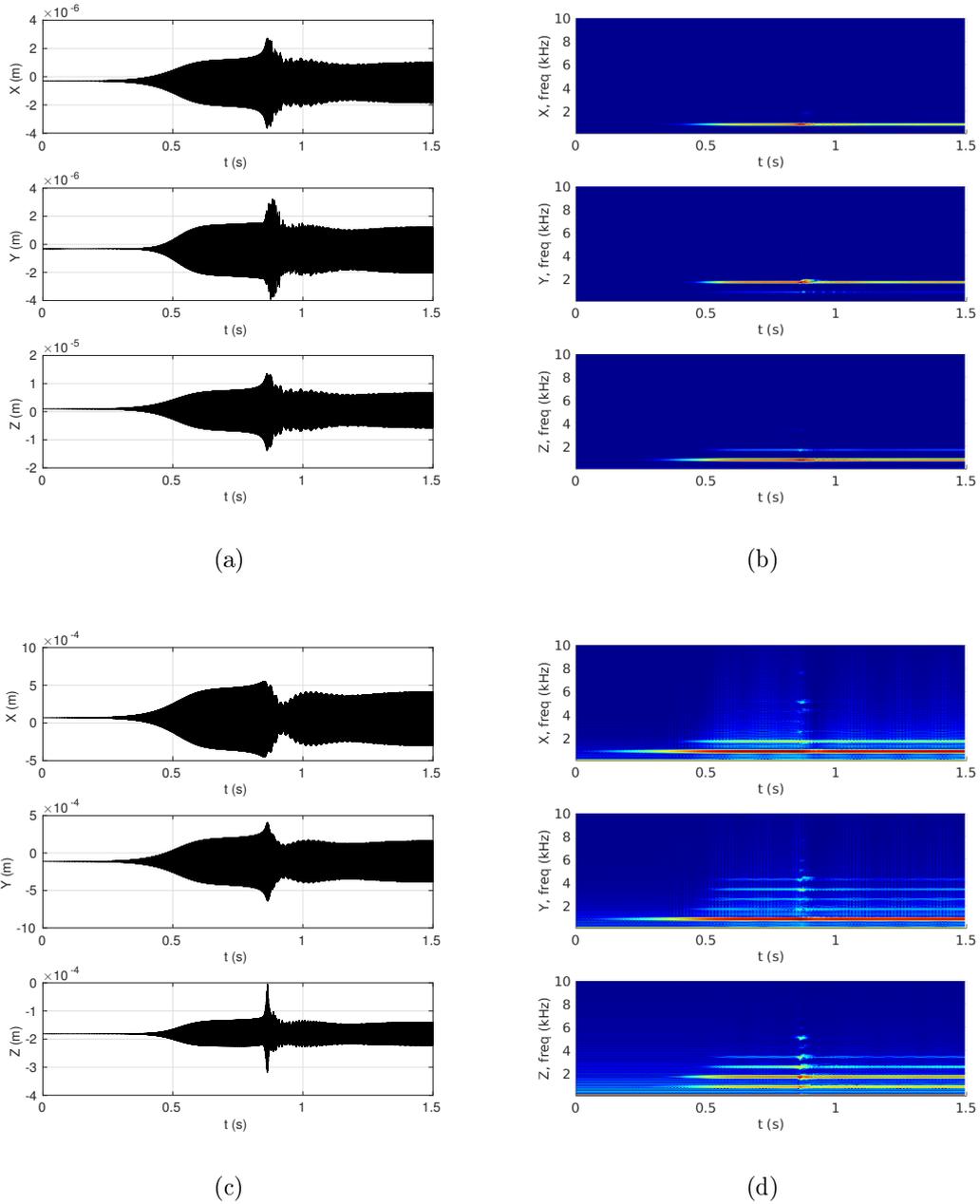


FIGURE 4.12 – Système réduit par la DMS avec $N_{DMS} = 150$, (a) Signaux transitoires pour le point d’observation 1, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d’étude supplémentaire à $\mu = 0.74$, (b) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires sur les trois degrés de liberté, (c) Signaux transitoires pour le point d’observation 2, sur les trois degrés de liberté pour le Cas d’étude supplémentaire à $\mu = 0.74$ et (d) Spectrogrammes associés aux signaux transitoires sur les trois degrés de liberté

4.3 Cycles limites et Contenus Fréquentiels

Nous avons vu dans la Section précédente que les deux étapes de réduction permettent une bonne estimation des niveaux vibratoires mais induisent des décalages temporels ainsi que des accélérations dans les transitions des différentes phases du signal temporel dans le cas de la DMS. Mais ces phases transitoires sont très rapides et se déroulent sur une durée de l'ordre de la seconde. Le régime établi qui constitue le véritable crissement peut être audible pendant une durée beaucoup plus importante. L'objectif de cette partie est d'évaluer les performances des méthodes de réduction pour reproduire fidèlement les cycles limites périodiques ou pseudo-périodiques correspondants aux régimes établis des différents cas d'étude, ainsi que leurs contenus fréquentiels.

4.3.1 Cas 1, un mode instable

Les états stationnaires associés aux régimes établis sont analysés sur la toute dernière partie du signal pour le Cas $\mu = 0.7$, sur l'intervalle de temps $[1.9; 2]s$. La Figure 4.13 présente pour le point d'observation 2 les cycles limites dans l'espace des phases Position/Vitesse dans les trois directions ainsi que la FFT du signal en position, pour le système de référence et les modèles réduits par la méthode de Craig et Bampton. Nous pouvons observer ici pour la référence que le régime établi est périodique et piloté par le mode instable à une fréquence $f_1 = 857Hz$ très légèrement différente de celle prédite lors de l'analyse de stabilité, comme rappelé dans le Tableau 4.3. Nous observons également les participations des premières harmoniques du mode instable dans ce régime établi périodique. En ce qui concerne les modèles réduits, la convergence des cycles limites périodiques est observée au niveau des amplitudes pour les positions et les vitesses avec l'augmentation de la taille de la base de réduction. Un paramètre $\gamma = 1.5$ semble ici déjà suffisant pour assurer une très bonne approximation des cycles limites, ce qui justifie son utilisation pour le calcul de la seconde étape de réduction. Nous pouvons observer sur la distribution spectrale de puissance associée que les pics fréquentiels sont très bien prédits par les modèles réduits et que seules leurs amplitudes peuvent très légèrement varier.

La Figure 4.14 présente les cycles limites au point d'observation 2 pour les systèmes réduits par la DMS comparés au modèle de référence intermédiaire. Les cycles limites des modèles doublement réduits convergent assez rapidement vers la référence intermédiaire ce qui montre que la DMS est dans ce cas bien capable de reproduire efficacement les cycles limites d'un système présentant une instabilité. Les pics fréquentiels dans les distributions spectrales montrent également que les fréquences sont très bien estimées sur la fondamentale et ses harmoniques et que seules les amplitudes peuvent varier d'un modèle réduit à l'autre.

4.3.2 Cas 2, deux modes instables à régime établi périodique

Les spectrogrammes des Figures 4.5b et 4.5d indiquent pour le Cas d'étude 2 à $\mu = 0.8$ un régime établi périodique. L'intervalle de temps d'étude de cette phase est ici fixé à $[1.4; 1.5]s$. Les cycles limites des modèles réduits par la méthode de Craig et Bampton sont tracés à la Figure 4.15 et confirment bien cette observation avec des cycles limites périodiques sur les points d'observation 1 et 2, pour les trois degrés de liberté. Le cycle limite périodique est caractérisé par une fréquence fondamentale $f_1 = 857Hz$. En fonction du degré de liberté observé, les harmoniques de la FFT du signal en position ont des proportions différentes, en particulier sur la direction Y du point 1 ou la direction Z du point 2 où la seconde harmonique est prépondérante, ce qui se retrouve sur le cycle limite où la trajectoire effectue deux larges boucles. Les modèles réduits par Craig et Bampton donnent une très bonne approximation du cycle limite périodique et les amplitudes en position et vitesse convergent très rapidement avec γ , un paramètre $\gamma = 1.5$ permet bien de s'assurer que le régime établi est finement reproduit. Les raies fréquentielles présentées sur les FFT montrent que les fréquences de la

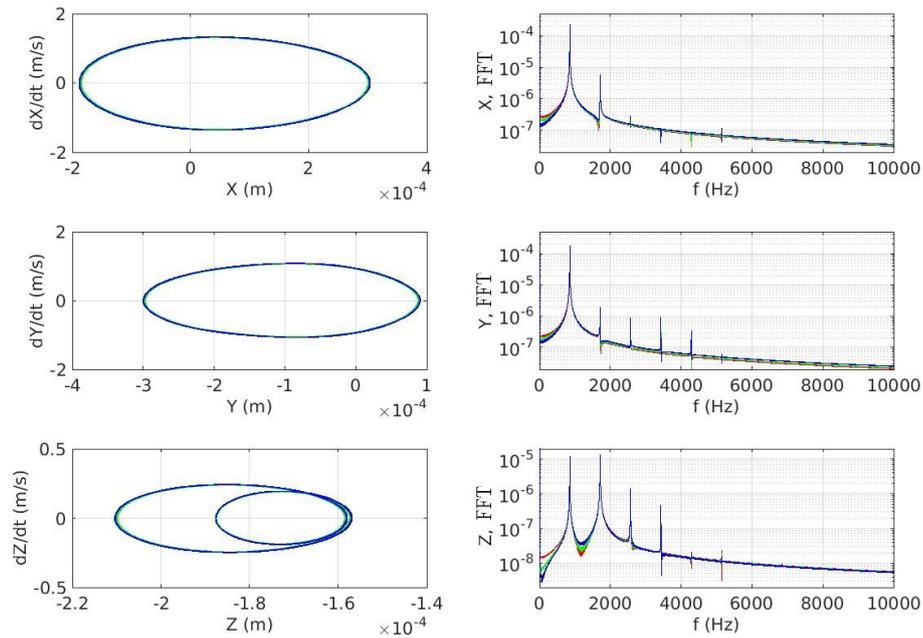


FIGURE 4.13 – Cas $\mu = 0.7$ et réduction de Craig et Bampton, cycles limites au point d’observation 2 pour les trois degrés de liberté ainsi que les FFT de la position associées (noir : Référence, rouge : $\gamma = 1$, vert : $\gamma = 1.5$ et bleu : $\gamma = 2.5$)

fondamentale et de ses harmoniques sont très précisément estimées par les modèles réduits et que seules les amplitudes varient faiblement d’un modèle à l’autre.

La Figure 4.16 illustre les cycles limites des modèles réduits par la DMS aux points d’observation 1 et 2 pour différentes valeurs du nombre de modes d’interface N_{DMS} retenus, comparés aux cycles du modèle de référence intermédiaire. Nous observons encore que les trajectoires des cycles limite périodiques sont déjà bien approchées avec seulement 50 modes d’interface mais que les niveaux des amplitudes de position et de vitesse sont un peu supérieurs à ceux de la référence intermédiaire. Il est dans ce cas nécessaire d’enrichir la base DMS pour obtenir des niveaux corrects pour les amplitudes sur les cycles limite. Les distributions spectrales montrent que les fréquences de la fondamentale du premier mode instable et de ses harmoniques sont très précisément estimées par les modèles réduits, même de petite taille.

4.3.3 Cas 3, deux modes instables à régime établi pseudo-périodique

Nous nous intéressons à présent au Cas 3 à $\mu = 1$ qui présente une dynamique pseudo-périodique pour son cycle limite en régime établi, qui est caractérisé par la présence des deux modes instables dans la réponse temporelle. Ces deux modes possèdent des fréquences non commensurables. Nous pouvons comparer à la Figure 4.17 les cycles limites pseudo-périodiques aux points d’observation 1 et 2 de la référence et du modèle réduit par la méthode de Craig et Bampton avec $\gamma = 1.5$ sur l’intervalle de temps $[1.48; 1.5]s$, ainsi que les FFT associées des signaux en position. La modulation d’amplitude associée aux oscillations basse fréquence d’origine numérique est négligeable sur la longueur de l’intervalle de temps d’étude considéré. Nous remarquons que bien que les figures ne soient pas identiques, les motifs sont très proches entre la référence et le modèle réduit. Cette observation est confortée par les contenus fréquentiels, qui montrent des spectres bien plus complexes que dans le Cas 2. Les principales raies fréquentielles sont identiques entre les deux modèles et les niveaux très

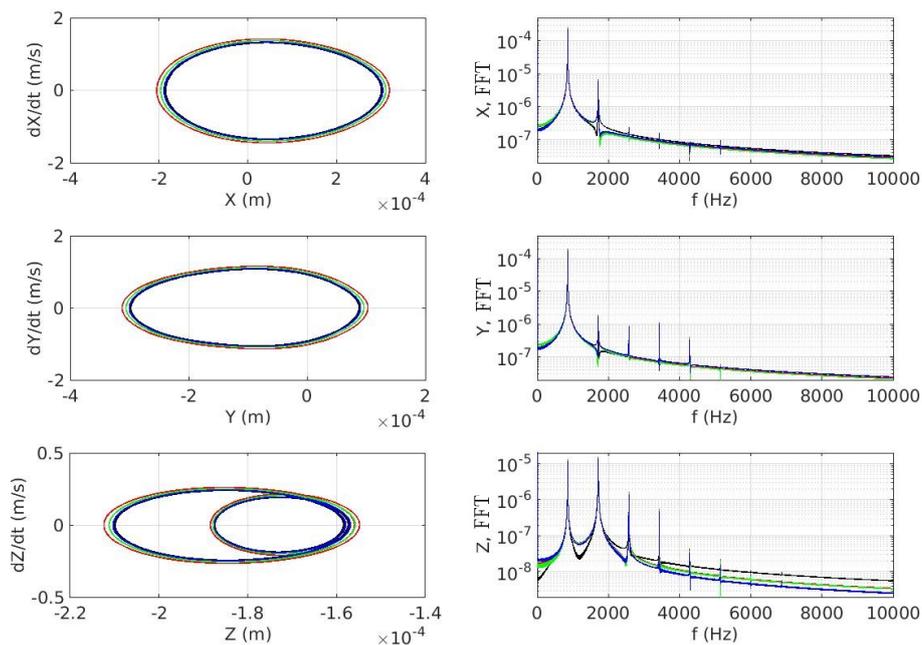
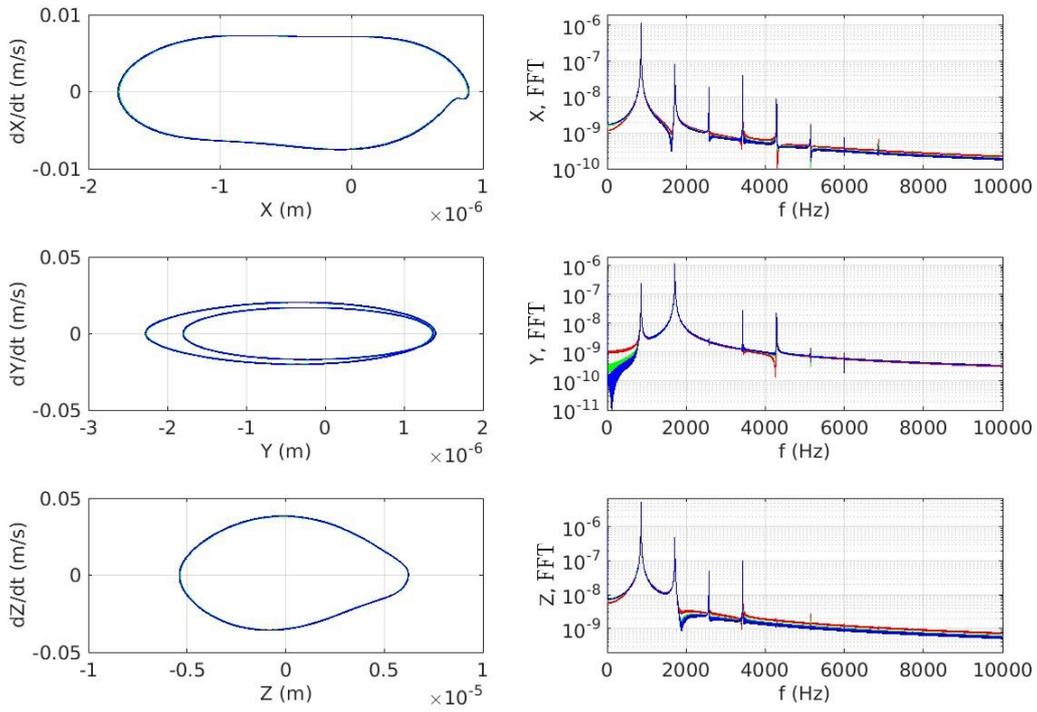


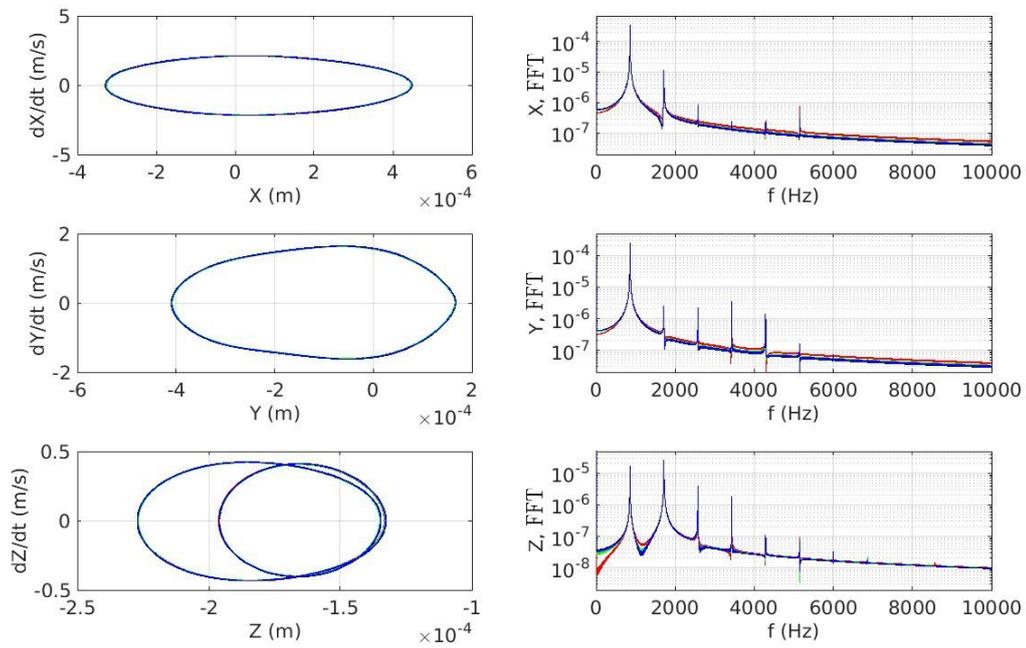
FIGURE 4.14 – Cas $\mu = 0.7$ et réduction DMS, cycles limites au point d’observation 2 pour les trois degrés de liberté ainsi que les FFT de la position associées (noir : Référence intermédiaire, rouge : $N_{DMS} = 50$, vert : $N_{DMS} = 150$ et bleu : $N_{DMS} = 500$)

proches. Nous pouvons ainsi retrouver dans le spectre les deux fondamentales f_1 et f_2 , leurs harmoniques de la forme mf_1 et nf_2 , avec n et m deux entiers naturels ou bien encore des combinaisons linéaires des deux fondamentales sous la forme $mf_1 + nf_2$, avec $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Le Tableau 4.9 reprend les principales contributions fréquentielles et en fait le lien avec les deux fréquences des modes instables pour toutes les harmoniques d’ordre inférieur ou égal à 4 ($|m| + |n| \leq 4$).

Nous comparons à la Figure 4.18 ces mêmes cycles entre le modèle de référence intermédiaire et la réduction DMS à $N_{DMS} = 150$ pour les points d’observation 1 et 2. Nous pouvons dans ce cas noter une petite différence dans les amplitudes des cycles limites pseudo-périodiques où la modulation en amplitude de l’enveloppe des trajectoires du modèle réduit par la DMS est plus importante. Cependant les motifs sont très proches entre le modèle de référence intermédiaire et le modèle réduit par la DMS. Le contenu fréquentiel des signaux permet de montrer que la dynamique globale sur ces deux cycles limite est proche, les raies fréquentielles sont encore bien approchées malgré quelques différences de niveaux.

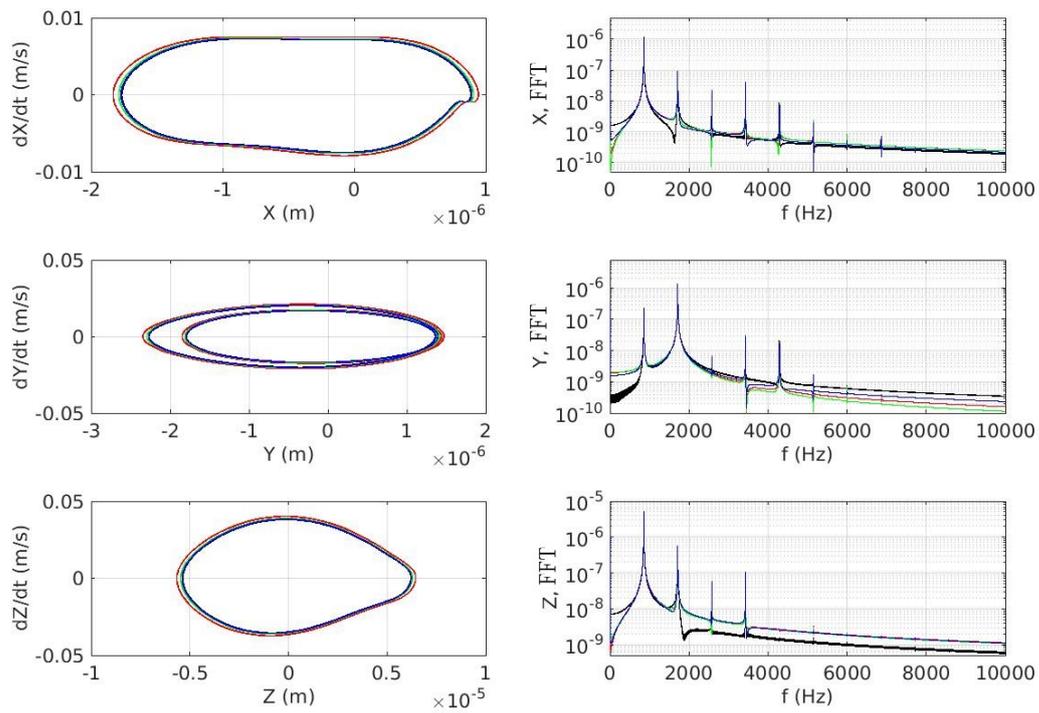


(a)

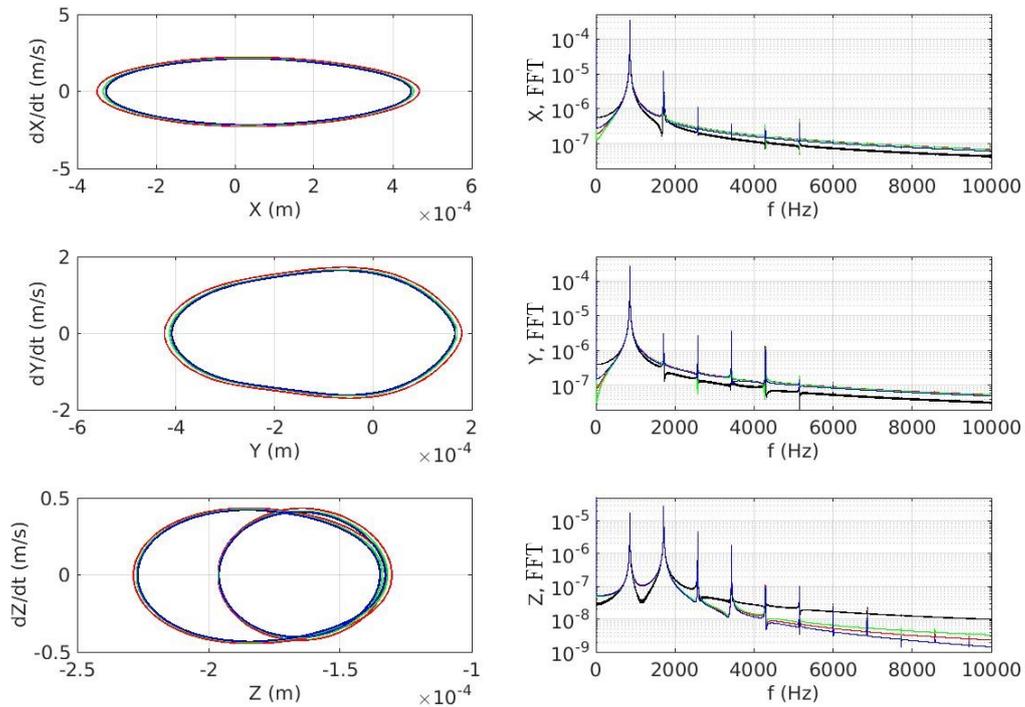


(b)

FIGURE 4.15 – Cas $\mu = 0.8$ et réduction de Craig et Bampton, cycles limites aux points d'observation 1 et 2 pour les trois degrés de liberté ainsi que les FFT de la position associées (a) Point 1 et (b) point 2 (noir : Référence, rouge : $\gamma = 1$, vert : $\gamma = 1.5$ et bleu : $\gamma = 2.5$)

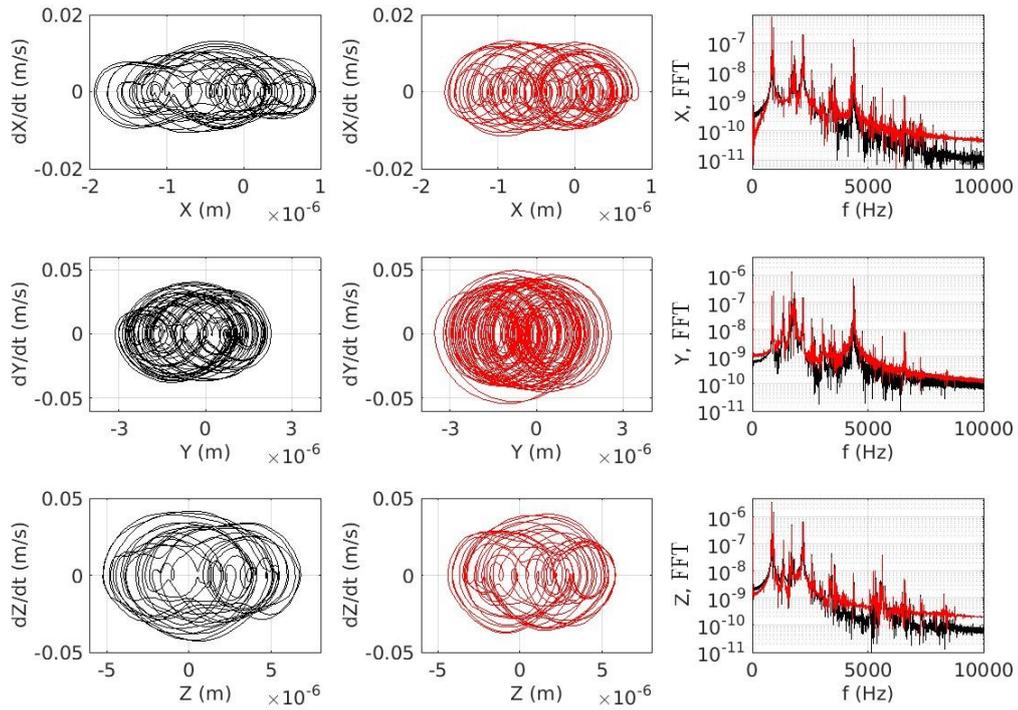


(a)

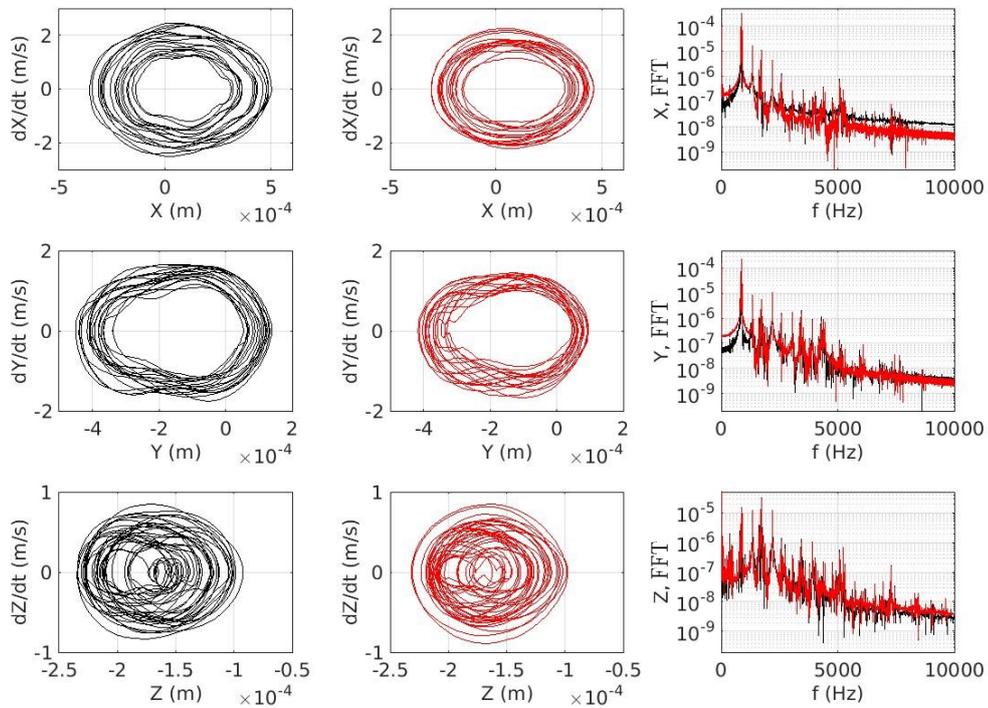


(b)

FIGURE 4.16 – Cas $\mu = 0.8$ et réduction DMS, cycles limites aux points d'observation 1 et 2 pour les trois degrés de liberté ainsi que les FFT de la position associées (a) Point 1 et (b) point 2 (noir : Référence intermédiaire, rouge : $N_{DMS} = 50$, vert : $N_{DMS} = 150$ et bleu : $N_{DMS} = 500$)

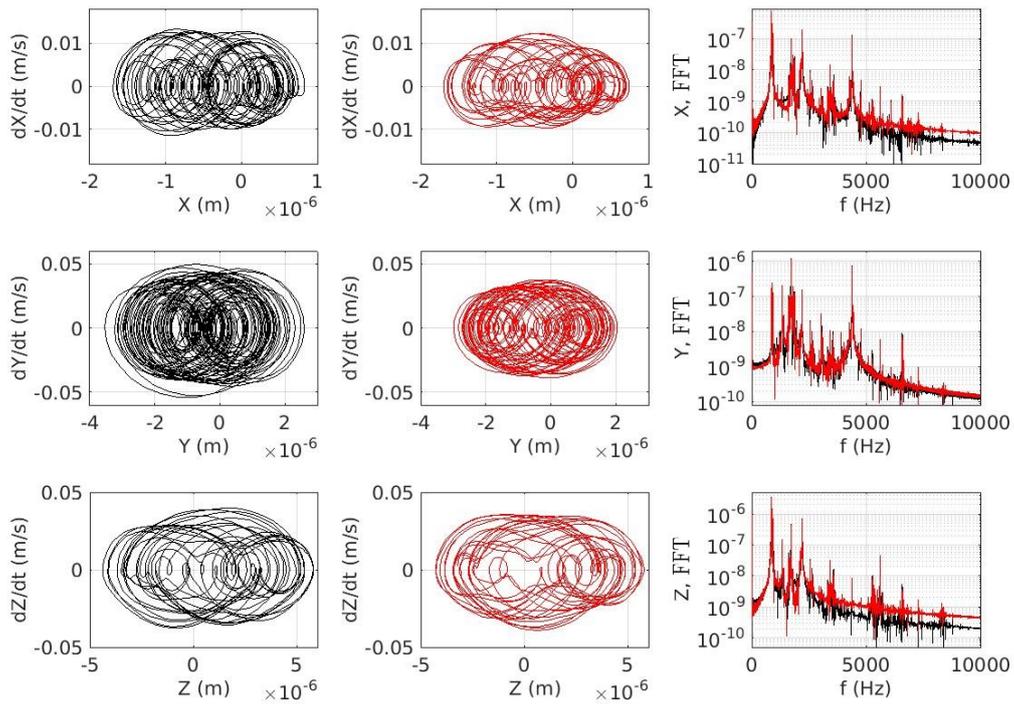


(a)

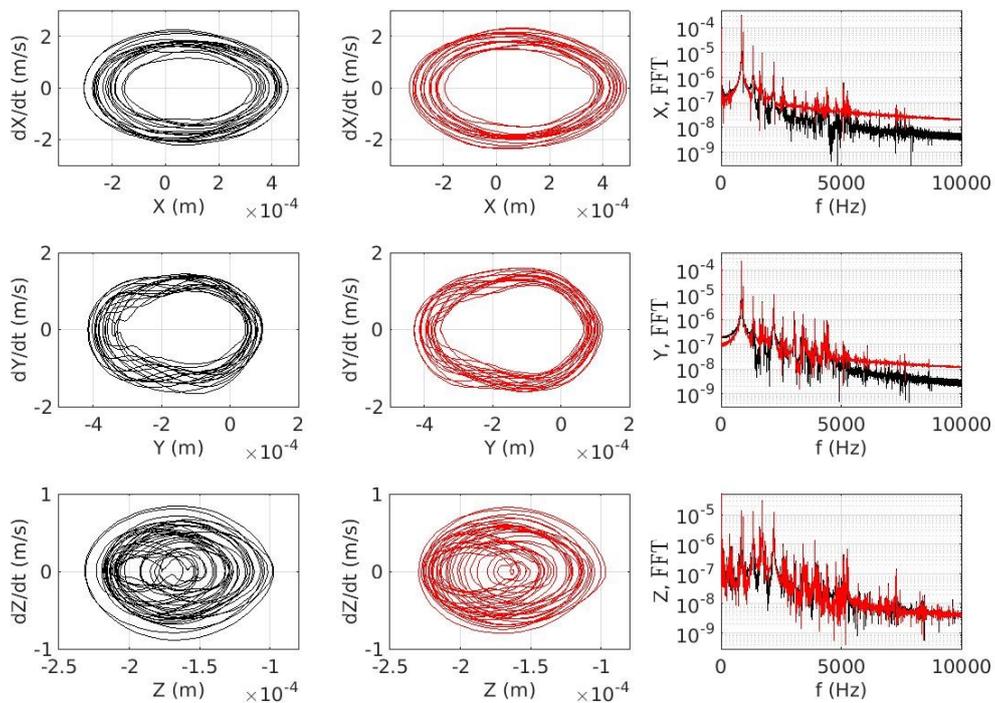


(b)

FIGURE 4.17 – Cas $\mu = 1$ et réduction de Craig et Bampton, cycles limites aux points d'observation 1 et 2 pour les trois degrés de liberté ainsi que les FFT de la position associées (a) Point 1 et (b) point 2 (noir : Référence, rouge : $\gamma = 1$, vert : $\gamma = 1.5$ et bleu : $\gamma = 2.5$)



(a)



(b)

FIGURE 4.18 – Cas $\mu = 1$ et réduction DMS, cycles limites aux points d'observation 1 et 2 pour les trois degrés de liberté ainsi que les FFT de la position associées (a) Point 1 et (b) point 2 (noir : Référence intermédiaire, rouge : $N_{DMS} = 50$, vert : $N_{DMS} = 150$ et bleu : $N_{DMS} = 500$)

Fréquence (Hz)	Combinaisons
857	f_1
1366	$-f_1 + f_2$
1714	$2f_1$
2223	f_2
2571	$3f_1$
2732	$-2f_1 + 2f_2$
3080	$f_1 + f_2$
3428	$4f_1$
3589	$-f_1 + 2f_2$
3937	$2f_1 + f_2$
4446	$2f_2$
4794	$3f_1 + f_2$
6669	$3f_2$

TABLEAU 4.9 – Fréquences des raies fréquentielles et combinaisons correspondantes pour les cycles pseudo-périodiques du Cas $\mu = 1$

4.4 Participations modales des modes instables

Afin de pouvoir comprendre la dynamique transitoire du système il est possible d'analyser la contribution des modes instables (voir [98, 102, 151]) prédits lors de l'analyse de stabilité, qui sont les modes prépondérants lors de l'apparition des vibrations auto-entretenues dans le signal vibratoire. Cette projection modale sur les modes complexes instables permet aussi de valider l'efficacité des méthodes de réduction et permet de mettre en évidence les phénomènes d'avance ou de retard induits par les différentes tailles des bases de réduction, en particulier pour l'étape de réduction DMS.

En considérant la réponse d'un modèle sous sa forme d'état $\mathbf{Y}(t) = (\dot{\mathbf{X}}(t) \ \mathbf{X}(t))^t$ dans la base des degrés de liberté physiques, nous définissons à l'Equation 4.10 la contribution modale $\beta_i(t)$ d'un mode instable i d'un point de vue énergétique comme le produit scalaire par rapport à une matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ de l'état du système \mathbf{Y} à un instant donné t par rapport à la déformée du mode instable \mathbf{Y}_i^{ref} calculé lors de l'analyse de stabilité, le tout normé par l'énergie de ce même mode instable.

$$\beta_i(t) = \frac{\overline{\mathbf{Y}_i^{ref}{}^t} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{Y}(t)}{\overline{\mathbf{Y}_i^{ref}{}^t} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{Y}_i^{ref}}, \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}/2 \\ \mathbf{C}/2 & \mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Ici $\overline{\mathbf{Y}_i^{ref}}$ est le transconjugué du mode instable \mathbf{Y}_i^{ref} sous forme d'état. Les contributions modales $\beta_i(t)$ sont ensuite filtrées par un filtre passe bas afin d'en obtenir l'évolution moyenne $\langle \beta_i(t) \rangle$. Suivant les différents cas d'étude nous observons l'évolution des contributions modales moyennes du ou des modes instables sur l'ensemble du signal transitoire dans le cas du développement de vibrations auto-entretenues.

4.4.1 Cas 1

Pour le Cas d'étude 1, la projection des signaux transitoires sur le mode instable est réalisée pour les différentes tailles des bases de Craig Bampton étudiées. La Figure 4.19 présente l'évolution des participations $\langle \beta_1(t) \rangle$ du mode instable pour $\gamma \in \{1; 1.5; 2.5\}$ ainsi que pour le modèle de référence. L'allure globale de la participation modale de ce mode instable suit la dynamique transitoire observée à la Figure 4.2, à savoir une croissance à partir de

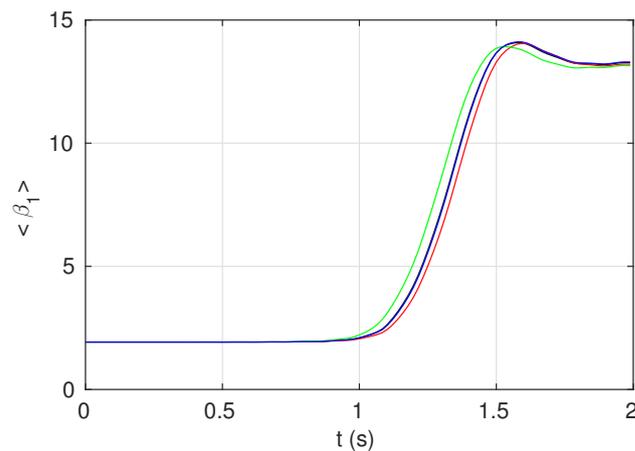


FIGURE 4.19 – Evolution de la contribution modale pour le Cas $\mu = 0.7$, réduction de Craig et Bampton (noir : Référence, rouge : $\gamma = 1$, vert : $\gamma = 1.5$ et bleu : $\gamma = 2.5$)

1.2s et une stabilisation vers 1.8s après le passage par un maximum vers 1.5s. Nous pouvons remarquer, comme pouvaient le suggérer les signaux temporels et les spectrogrammes, que la taille de la base de réduction de Craig et Bampton n'influe quasiment pas sur la participation modale du mode instable. De petits décalages temporels autour de la transition à la phase de régime établi peuvent être observés mais restent faibles et aucune tendance ne se dégage. Nous observons que les niveaux ainsi que les allures des contributions modales pour les différentes bases sont très similaires, et que la convergence se fait rapidement vers le modèle de référence une fois que γ est suffisamment grand pour assurer au système réduit la bonne dynamique. Nous considérons que le modèle réduit à $\gamma = 1.5$ constitue donc une très bonne approximation de la référence.

La Figure 4.20 illustre la contribution modale du mode instable dans les modèles réduits avec la DMS comparés au modèle de référence intermédiaire. L'allure de cette contribution moyenne ainsi que son allure dans la partie transitoire reste très proche de celle de la référence intermédiaire. L'enrichissement de la base DMS permet de faire converger le niveau de la contribution modale du mode instable vers celui de la référence. Là encore l'effet de la taille de la base de réduction DMS influe uniquement sur le déclenchement de l'apparition de la contribution du mode instable. L'avance du système sur la référence intermédiaire est de 0.60s pour $N_{DMS} = 50$, et de 0.45s pour $N_{DMS} = 150$. Nous pouvons cependant observer que le système prend du retard (0.42s) sur la référence intermédiaire pour une base DMS de taille importante avec 1000 modes d'interface, ce qui suggère que la convergence de la méthode DMS vers la référence intermédiaire pour la synchronisation des signaux temporels, en particulier pour les contributions modales, est lente et non monotone.

4.4.2 Cas 2

Pour le Cas d'étude 2, nous effectuons la projection des signaux transitoires sur les deux modes instables calculés lors de l'analyse de stabilité pour un coefficient de frottement $\mu = 0.8$ dans un premier temps dans le cas de la réduction de Craig et Bampton. La Figure 4.21a présente les évolutions de ces contributions modales pour les différentes tailles des bases de réduction de Craig et Bampton. La dynamique observée sur les signaux temporels et les spectrogrammes et ici bien mise en évidence, à savoir pour la référence :

- $t = [0; 0.3]s$: la croissance exponentielle des oscillations depuis la position d'équilibre glissante est principalement gouvernée par la participation modale du second mode instable qui voit sa contribution augmenter à partir de $t = 0.2s$

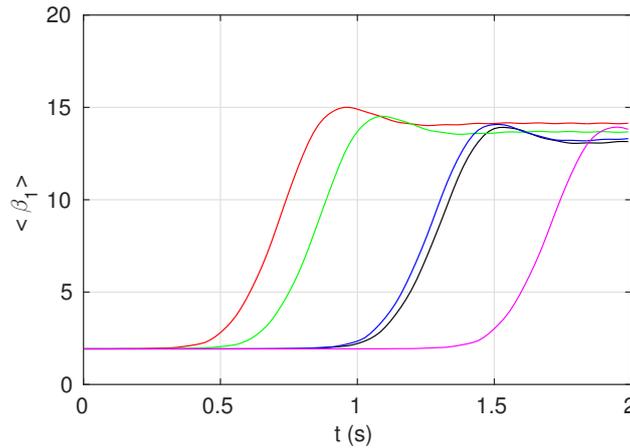


FIGURE 4.20 – Evolution de la contribution modale pour le Cas $\mu = 0.7$, réduction DMS (noir : Référence intermédiaire, rouge : DMS50, vert : DMS150, bleu : DMS500, magenta : DMS1000)

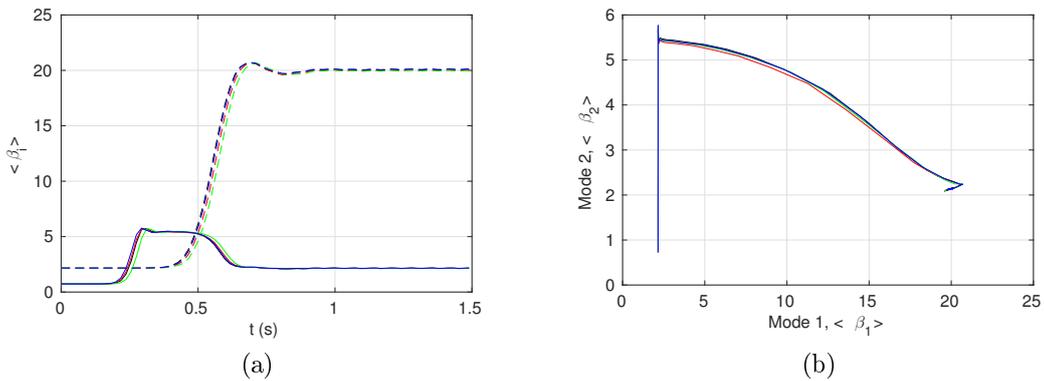


FIGURE 4.21 – (a) Evolution des contributions modales pour le Cas $\mu = 0.8$, réduction de Craig et Bampton et (b) trajectoire du système dans le plan $\langle \beta_1 \rangle / \langle \beta_2 \rangle$ (trait plein = mode 2, pointillés = mode 1 ; noir : Référence, rouge : $\gamma = 1$, vert : $\gamma = 1.5$ et bleu : $\gamma = 2.5$)

- $t = [0.3; 0.7]s$: la seconde phase est caractérisée dans un premier temps ($t = [0.3; 0.5]s$) par la stabilisation de la contribution du second mode instable ainsi qu'une augmentation de la contribution du premier mode instable, puis dans un second temps ($t = [0.5; 0.7]s$) par la diminution de la contribution du second mode instable et la saturation de la contribution du premier mode
- $t > 0.7s$: la phase finale voit les niveaux des contributions des deux modes instables se stabiliser vers un régime gouverné exclusivement par le premier mode instable.

Nous pouvons ici observer que les tailles des bases de réduction de Craig et Bampton n'ont pas beaucoup d'influence sur les participations modales des modes instables. De légers décalages temporels entre les différentes tailles de réduction peuvent être observés mais aucune tendance générale n'est observable. Les niveaux des contributions des modes instables sont ici très proches de ceux de la référence intermédiaire sur le régime établi. La Figure 4.21b où la contribution du mode 2 est tracée en fonction de celle du mode 1 nous permet d'observer que la synchronisation entre les deux modes instables est bien respectée pour chaque taille de la base de réduction Craig et Bampton, en particulier sur la phase de la dynamique où le changement de mode prépondérant intervient.

	Référence intermédiaire	$N_{DMS} =$	50	150	500	1000
1 ^{er} mode	19.9		21.1	20.3	20.1	19.9
2 ^{eme} mode	2.1		2.3	2.2	2.1	2.1

TABLEAU 4.10 – Valeurs des niveaux des contributions modales des deux modes instables pour le régime établi pour la réduction DMS dans le Cas $\mu = 0.8$

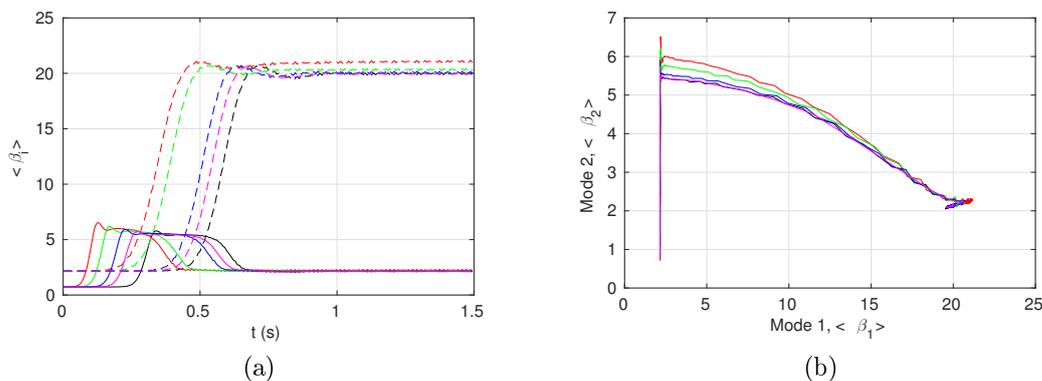


FIGURE 4.22 – (a) Evolution des contributions modales pour le Cas $\mu = 0.8$, réduction DMS et (b) trajectoire du système dans le plan $\langle \beta_1 \rangle / \langle \beta_2 \rangle$ (trait plein = mode 2, pointillés = mode 1 ; noir : Référence intermédiaire, rouge : DMS50, vert : DMS150, bleu : DMS500, magenta : DMS1000)

La Figure 4.22a permet d'effectuer la comparaison des participations modales du modèle $\gamma = 1.5$ sans réduction DMS et les modèles réduits avec DMS pour plusieurs valeurs de N_{DMS} , toujours dans le Cas $\mu = 0.8$, à deux modes instables et à régime établi périodique. Les allures des contributions des modes instables sont très proches de celles de la référence intermédiaire et les niveaux des contributions en régime établi des modèles réduits convergent très rapidement avec le nombre de modes d'interface conservés. Le Tableau 4.10 présente l'évolution des niveaux des participations modales en fonction de N_{DMS} lors du régime établi. L'effet principal de la taille de la réduction DMS concerne les croissances et décroissances des contributions modales, où une base de réduction avec N_{DMS} petit a tendance à avoir des évolutions en avance par rapport à un modèle plus gros et à la référence intermédiaire, cette avance est de 0.20s et 0.25s sur les deux changements de phase pour $N_{DMS} = 50$, alors qu'elle devient de 0.11s et 0.08s pour $N_{DMS} = 500$. La synchronisation entre les participations modales, en particulier lors de la phase où la contribution du second mode décroît pendant que celle du premier mode croît est bien respectée, comme nous pouvons le constater à la Figure 4.22b où est tracée la trajectoire du système dans l'espace des contributions modales. Nous remarquons que cette trajectoire est très rapidement bien approximée, même avec un faible nombre de modes d'interface.

4.4.3 Cas 3

Nous étudions à présent les contributions des modes instables dans le signal transitoire pour le Cas 3, associé à un coefficient de frottement $\mu = 1$. L'analyse des signaux temporels, de leurs contenu fréquentiels et des cycles limites ont pu mettre en évidence que les deux modes instable apparaissent l'un après l'autre et sont tout les deux présents dans le signal du régime établi. La Figure 4.23a illustre l'évolution de ces contributions des deux modes instables pour la référence et les modèles réduits par la méthode de Craig et Bampton et pour différentes valeurs de γ . Les différentes phases du signal se retrouvent dans les contributions des modes

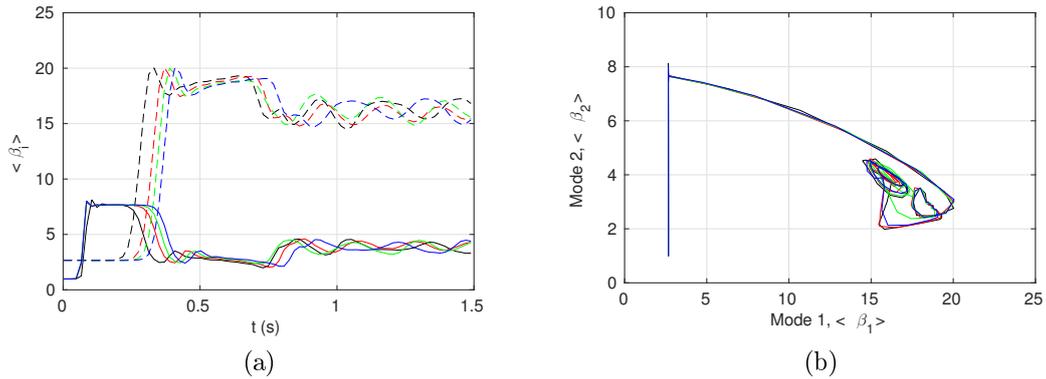


FIGURE 4.23 – (a) Evolution des contributions modales pour le Cas $\mu = 1$, réduction de Craig et Bampton et (b) trajectoire du système dans le plan $\langle \beta_1 \rangle / \langle \beta_2 \rangle$ (trait plein = mode 2, pointillés = mode 1 ; noir : Référence, rouge : $\gamma = 1$, vert : $\gamma = 1.5$ et bleu : $\gamma = 2.5$)

instable, à savoir :

- $t = [0; 0.1]$ s : l'apparition du second mode instable dans la réponse transitoire se traduit par l'augmentation de sa contribution modale,
- $t = [0.1; 0.35]$ s : la contribution du second mode instable se stabilise, et à partir de $t = 0.25$ s la contribution du premier mode instable se met à augmenter rapidement. A $t = 0.3$ s la contribution du second mode instable diminue jusqu'à $t = 0.35$ s,
- $t > 0.35$ s : les contributions des modes instables n'évoluent pas globalement, les oscillations d'amplitude observées sur les régimes établis se retrouvent ici, avec des variations des niveaux des participations modales sur toute la plage du régime établi, avec globalement une domination de la contribution du premier mode instable sur le second mode instable. La figure est proche de celle obtenue pour le Cas $\mu = 0.8$ bien qu'ici le régime établi soit pseudo-périodique. Il semble ici difficile à partir des participations modales des cas à deux modes instables $\mu = 0.8$ et $\mu = 1$ de savoir a priori si le régime établi sera périodique ou pseudo-périodique.

L'effet de la taille de la base de réduction de Craig et Bampton est ici de modifier les instants de déclenchement sur les différentes transitions entre les phases du signal. Là encore, aucune tendance claire n'est observable, l'évolution de ces instants de déclenchements n'est pas monotone en fonction de γ et du mode instable considéré. Les niveaux des contributions modales sont difficiles à estimer à cause des oscillations d'origine numérique causées par le pas de temps h grand, mais nous pouvons observer que toutes les contributions modales oscillent aux mêmes amplitudes et autour de la même valeur moyenne. Là encore la synchronisation entre les différentes phases du signal et notamment la transition entre le second et le premier mode instable est très bien respectée, comme nous pouvons le voir à la Figure 4.23b où est tracée la trajectoire du système dans l'espace des contributions modales des deux modes instables.

Nous effectuons ensuite la projection des signaux obtenus à partir des modèles doublement réduits par la méthode DMS. La Figure 4.24a compare les contributions modales de la référence intermédiaire à $\gamma = 1.5$ et des modèles DMS pour différentes valeurs de N_{DMS} . Les allures des contributions modales des modèles réduits par la méthode DMS sont très proches de la référence intermédiaire. L'effet d'avance pour les petites bases de réduction est toujours visible ici et la convergence vers la référence intermédiaire est lente, les écarts temporels sur les deux transitions de phase sont de 0.04 et 0.19s pour $N_{DMS} = 50$, 0.03s et 0.16s pour $N_{DMS} = 150$ et de 0.01s et 0.07s pour $N_{DMS} = 1000$. Nous observons ici que les niveaux des contributions fréquentielles ne convergent pas vers une valeur précise à cause des oscil-

	Référence intermédiaire	$N_{DMS} =$	50	150	500	1000
1 ^{er} mode	16.0		15.9	16.0	16.0	16.0
2 ^{eme} mode	3.9		3.9	3.9	3.9	3.9

TABLEAU 4.11 – Valeurs des niveaux des contributions modales des deux modes instables pour le régime établi pour la réduction DMS dans le Cas $\mu = 1$

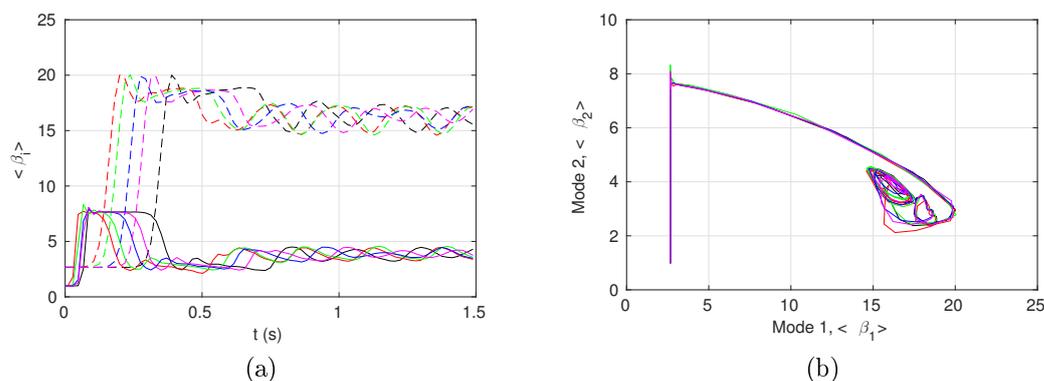


FIGURE 4.24 – (a) Evolution des contributions modales pour le Cas $\mu = 1$, réduction DMS et (b) trajectoire du système dans le plan $\langle \beta_1 \rangle / \langle \beta_2 \rangle$ (trait plein = mode 2, pointillés = mode 1 ; noir : Référence intermédiaire, rouge : DMS50, vert : DMS150, bleu : DMS500, magenta : DMS1000)

lations numériques imposées par le pas de temps h grand. Néanmoins les valeurs moyennes estimées sont regroupées dans le Tableau 4.11 et nous pouvons voir que les valeurs moyennes sont rapidement bien estimées, même avec un faible nombre de modes d'interface conservé. La trajectoire du système dans l'espace des contributions des modes instables est tracée à la Figure 4.24b. nous pouvons observer que la synchronisation entre les deux modes instables est bien respectée pour toutes les bases de réduction étudiées et que le comportement global du système instable est bien approximé même avec N_{DMS} faible.

4.5 Conclusion

A partir du modèle de frein simplifié construit au Chapitre précédent nous avons pu étudier le comportement dynamique transitoire dans plusieurs configurations instables. L'utilisation d'un schéma d'intégration numérique simple et robuste nous a donné accès aux évolutions temporelles du système dans ses configurations instables. L'identification de trois coefficients de frottement permettant des régimes de vibrations auto-entretenues différents nous a permis d'observer l'évolution transitoire du système à partir de sa position d'équilibre glissante prévue par l'étude de stabilité. Les résultats ainsi obtenus rejoignent les résultats classiques déjà observés dans la littérature sur ce type de comportement vibratoire. Nous avons pu à travers l'étude des signaux temporels, de leurs contenus fréquentiels, de leurs cycles limites et des projections modales sur les déformées des modes instables, observer la convergence des deux étapes de réduction vers le système de référence. En particulier pour la méthode de réduction DMS dont les résultats sont satisfaisants en termes d'amplitudes vibratoires déjà pour un faible nombre de modes d'interface conservés. L'observation globale de l'effet de la réduction de modèle par la méthode DMS est dans notre cas une avance temporelle ou plus rarement un retard dans les transitions entre les différentes phases des signaux transitoires, que nous avons pu observer à la fois sur les signaux transitoires, les spectrogrammes et les projections modales.

Les niveaux de vibration convergent quant à eux rapidement vers ceux de la référence. Cette étude de vibrations non linéaires va nous permettre d'effectuer des calculs de rayonnement acoustique à partir du champ de vitesses surfaciques de vibration du système de frein simplifié.

Chapitre 5

Rayonnement acoustique du système de frein présentant des vibrations de crissement

Sommaire

5.1	Modélisation acoustique associée au système vibrant . . .	148
5.1.1	Equation d'onde et problème en milieu ouvert	148
5.1.2	Méthode des Eléments Finis de Frontière (BEM)	150
5.1.3	Calcul BEM à partir d'une vibration non-harmonique	153
5.2	Analyse de motifs : 2-D wavelet	156
5.2.1	Transformée de Fourier fenêtrée pour les signaux non-stationnaires	156
5.2.2	Analyse par wavelet et échelles d'observation logarithmiques .	157
5.2.3	Extension au cas 2 dimensions de l'analyse par wavelets . . .	160
5.2.4	Application à l'analyse de motif et critère de comparaison . .	161
5.3	Résultats acoustiques	163
5.3.1	Définition des surfaces d'observation	163
5.3.2	Décomposition et observation du signal en 3 phases	163
5.3.3	Analyse de convergence des motifs acoustiques	168
5.4	Conclusion	176

Introduction

Le crissement est un phénomène d'origine mécanique mais sa perception est principalement acoustique pour les usagers automobiles ou ferroviaires [6]. La nuisance sonore associée aux vibrations de crissement est un bruit complexe dont le spectre est composé d'un ensemble de raies fréquentielles comme nous avons pu l'identifier lors des essais expérimentaux sur le banc FIVE@ECL et dont l'intensité acoustique dépasse souvent 100 dB. L'étude numérique de l'acoustique rayonnée par les systèmes crissants est un sujet encore peu étudié [93, 125, 127, 153–155] car il nécessite de grandes ressources numériques et l'évaluation des réponses vibratoires non-linéaires temporelles de la structure dans un premier temps dans le cas d'un couplage faible, ou la résolution simultanée des problèmes mécanique et acoustique dans le cas d'un couplage fort.

Les calculs transitoires effectués à la Section 4.2 vont servir dans ce chapitre de donnée d'entrée pour le calcul des émissions acoustiques car nous faisons l'hypothèse d'un couplage faible entre la structure et le fluide. Cette hypothèse de chaînage suppose que le fluide n'influe pas sur le mouvement du solide et que les vibrations du fluide sont déterminées uniquement à partir des vibrations de la surface de la structure. Les vibrations du système et en particulier la vitesse normale sur sa surface en font un système pulsant qui est une source acoustique.

Nous présentons dans une première partie la formulation d'un problème acoustique, sa résolution par la méthode des Éléments Finis de Frontière dans le cas mono-fréquentiel puis multi-fréquentiel. Nous décrivons ensuite une méthode d'analyse des motifs acoustiques calculés sur des surfaces d'observation à l'aide d'une analyse par wavelet 2-D. Nous appliquons enfin cette méthode afin de comparer les champs émis par des modèles de différentes tailles en fonction des paramètres de réduction γ et N_{DMS} .

5.1 Modélisation acoustique associée au système vibrant

Nous rappelons dans cette Section les principes de modélisation en acoustique linéaire ainsi que les équations qui gouvernent la propagation des ondes de pression émises par un système pulsant.

5.1.1 Equation d'onde et problème en milieu ouvert

Les principes généraux de la propagation d'ondes acoustiques peuvent se retrouver dans [17]. Pour rappel, nous considérons dans notre étude un système solide continu de volume \mathcal{V} et de surface Σ orientée par sa normale sortante \mathbf{n} plongé dans un milieu fluide léger infini, ce qui correspond au problème acoustique extérieur associé à la condition de Sommerfeld. Le problème est représenté à la Figure 5.1. Ce système est animé d'un mouvement vibratoire stationnaire (*i.e.* établi) dont nous connaissons en particulier le champ de vitesse surfacique $\dot{\mathbf{X}}_{surf}$. L'objectif du problème acoustique est de calculer le champ de pression P rayonné par le système vibrant en tout point de l'espace fluide. Nous considérons que le milieu fluide léger est de l'air, caractérisé par sa masse volumique ρ et la vitesse de propagation du son c . La propagation des ondes acoustiques dans ce milieu infini est gouvernée par l'équation de d'Alembert 5.1. Ici Δ désigne l'opérateur Laplacien et \mathbf{r} la position d'un point quelconque dans l'espace hors du volume \mathcal{V} .

$$\Delta P(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) \quad (5.1)$$

Cette équation aux dérivées partielles ne prend pas en compte les effets dissipatifs, considère que le milieu fluide est homogène et n'est valable qu'en dehors des sources. Elle décrit la

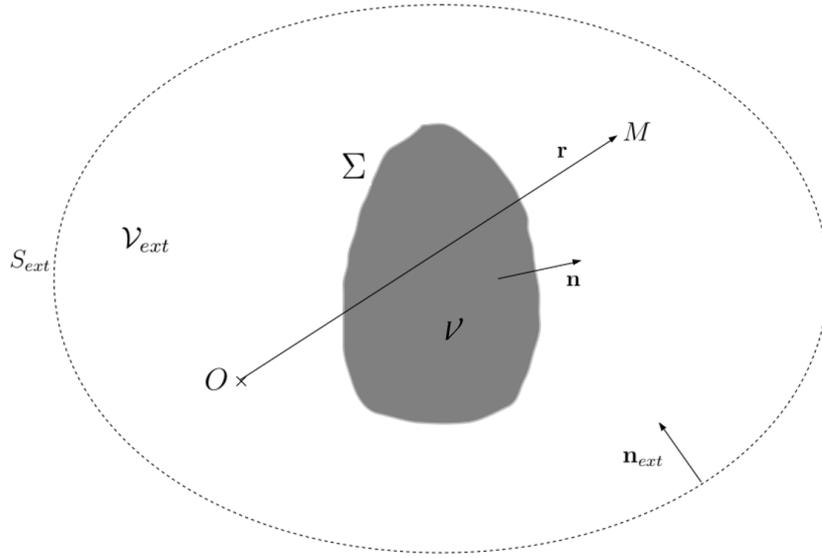


FIGURE 5.1 – Problème acoustique extérieur

propagation spatio-temporelle d'une onde de pression dans le milieu fluide. Ici la seule source que nous considérons est le système solide pulsant. Nous nous intéressons dans un premier temps aux ondes harmoniques de pulsation ω , ce qui permet de séparer les variables de temps et de position dans l'expression du champ acoustique P et d'obtenir l'équation d'onde vérifiée par P_r , avec $k = \omega/c$ le nombre d'onde :

$$P(\mathbf{r}, t) = P_r(\mathbf{r})e^{j\omega t} \quad , \text{ avec } P_r \text{ vérifiant } (\Delta + k^2)P_r(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.2)$$

L'expression de la fonction de Green G en espace libre est donnée par la relation 5.3 dans le cas d'un problème tridimensionnel. Cette expression de la solution du problème en espace libre permet de traiter le problème acoustique lors de la présence de sources.

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \quad (5.3)$$

La fonction de Green G est solution dans le cas harmonique de l'Equation 5.1 sans conditions aux limites mais avec un second membre, qui est donnée par l'Equation 5.4 :

$$(\Delta + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.4)$$

La combinaison des Equations 5.2 et 5.4 donne la relation suivante, valable sur tout le volume extérieur à \mathcal{V} :

$$\Delta P_r(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')P_r(\mathbf{r}) = P_r(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.5)$$

Puis, en considérant un volume extérieur \mathcal{V}_{ext} de fluide englobant totalement le volume solide \mathcal{V} et délimité par une surface extérieure S_{ext} , il est possible d'intégrer l'expression 5.5 sur ce volume de fluide \mathcal{V}_{ext} :

$$\int_{\mathcal{V}_{ext}} P_r(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v})d\mathcal{V}_{ext} = P_r(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}_{ext}} \left(\Delta P_r(\mathbf{v})G(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{v})P_r(\mathbf{v}) \right) d\mathcal{V}_{ext} \quad (5.6)$$

L'application du théorème de Green au second membre de l'Equation 5.6 permet de passer d'une intégrale volumique à une intégrale surfacique où interviennent les dérivées partielles

des quantités P_r et G par rapport à la normale sortante \mathbf{n} des surfaces délimitant le volume \mathcal{V}_{ext} , soit Σ et S_{ext} :

$$P_r(\mathbf{r}) = \int_{S_{ext} + \Sigma} \left(P_r(\mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \frac{\partial P_r(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (5.7)$$

Les conditions de Sommerfeld traduisent le fait que le système est plongé dans un milieu infini, sans réflexions extérieures. Le front d'onde ne se propage qu'à partir du système pulsant délimité par sa surface Σ . L'application de ces conditions revient à rejeter la surface de contrôle S_{ext} à l'infini et à considérer que sa contribution dans l'Equation 5.7 est nulle à cause du principe de causalité. La relation restante ne concerne plus que la partie sur Σ , c'est l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz 5.8, qui est valable sur tout le volume de fluide extérieur au volume \mathcal{V} .

$$\epsilon(\mathbf{r}) P_r(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} \left(P_r(\mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} - G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \frac{\partial P_r(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (5.8)$$

Cette équation intégrale est une équation de Fredholm de seconde espèce car l'inconnue de pression P_r apparaît à la fois dans l'intégrale et en dehors. L'introduction du paramètre $\epsilon(\mathbf{r})$ permet de rendre valable l'équation sur la surface vibrante Σ , il correspond à la proportion d'angle solide de fluide au point M défini par le vecteur \mathbf{r} et prend donc les valeurs suivantes :

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in \mathcal{V}_{ext} \\ \frac{1}{2} & \text{si } M \in \Sigma \text{ sur une portion localement plane} \\ \in]0; 1[& \text{si } M \in \Sigma \text{ sur une portion non-régulière} \end{cases} \quad (5.9)$$

Nous choisissons ici un couplage faible entre la structure et le fluide dans lequel elle est immergée. Les sources acoustiques sont directement liées au mouvement vibratoire de la surface Σ . A partir de l'équation d'Euler linéarisée, il est possible d'exprimer la dérivée de la pression P_r sur Σ en fonction de la vitesse de vibration de la paroi et des conditions de continuité en vitesse. En particulier, pour une vibration harmonique, la dérivée pariétale qui apparaît dans 5.8 peut s'exprimer en fonction de la vitesse surfacique normale $V_n(\mathbf{r})$ qui est la projection du champ de vitesse surfacique $\dot{\mathbf{X}}_{surf}$ sur la normale sortante \mathbf{n} , ce qui correspond à la condition de Neumann sur toute la surface Σ :

$$\frac{\partial P_r(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = -j\omega\rho V_n(\mathbf{r}) = -j\omega\rho \dot{\mathbf{X}}_{surf}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \quad (5.10)$$

L'équation de Kirchhoff-Helmholtz se met sous la forme 5.11, valable sur tout le volume extérieur à \mathcal{V} . Elle permet d'obtenir le champ rayonné par la structure vibrante à une fréquence spécifique ω . Sa résolution s'effectue en deux étapes, la première est le calcul de la pression pariétale en tout point de Σ , qui apparaît dans l'intégrale. Cela nécessite l'estimation d'une intégrale singulière qui s'effectue par le calcul de sa valeur principale au sens de Cauchy. La vitesse normale surfacique du solide \mathcal{V} est supposée connue et issue des simulations transitoires. Puis à partir de l'expression de la pression pariétale il est possible de calculer le champ de pression en tout point du fluide extérieur hors de la surface Σ . Cette procédure n'est valable qu'à une valeur fixée de ω et implique une vibration et une radiation acoustique harmonique.

$$\epsilon(\mathbf{r}) P_r(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} \left(P_r(\mathbf{s}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{n}} + j\omega\rho G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) V_n(\mathbf{s}) \right) dS \quad (5.11)$$

5.1.2 Méthode des Eléments Finis de Frontière (BEM)

La résolution de l'équation de Kirchhoff-Helmholtz telle que présentée dans 5.11 n'est possible analytiquement que dans de très rares cas. Dans le cas de géométries et de sources

complexes il est nécessaire d'utiliser des méthodes d'approximation numériques. Tout comme les équations de la mécanique sont approximées par la méthode des Eléments Finis, le problème acoustique est également résolu par discrétisation spatiale. Différentes approches pour traiter les problèmes acoustiques ont été présentées succinctement dans la Section 1.7. Cependant l'Equation 5.11 se prête mieux à une méthode surfacique comme la méthode des Eléments Finis de Frontière (Boundary Element Method - BEM) qui est couramment utilisée en acoustique. Ici, seule la surface du solide vibrant est maillée, cette discrétisation va permettre d'obtenir un problème matriciel approché équivalent à la formulation continue donnée par l'équation de Krichhoff-Helmholtz. Toute l'approche théorique de la BEM peut se retrouver dans [17, 64, 65, 80], nous reprenons ici les principales étapes du raisonnement permettant la résolution de ce problème.

La géométrie de la surface Σ est donc approximée par un maillage surfacique, composé de N_{ddl} noeuds et de N_s éléments de surface Σ_i de telle sorte que $\Sigma \approx \bigcup_{i=1}^{N_s} \Sigma_i$.

L'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz sous la forme présentée à l'Equation 5.11 avec la condition de Neumann peut alors s'adapter au problème surfacique discrétisé, avec la surface d'intégration Σ discrétisée :

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{r})P_r(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Sigma_i} \left(P_r(\mathbf{s}_i) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i)}{\partial \mathbf{n}} + j\omega\rho G(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) V_n(\mathbf{s}_i) \right) dS_i \\ &= \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Sigma_i} P_r(\mathbf{s}_i) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i)}{\partial \mathbf{n}} dS_i + j\omega\rho \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Sigma_i} G(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) V_n(\mathbf{s}_i) dS_i \end{aligned} \quad (5.12)$$

Les deux types d'intégrales de l'Equation 5.12 sont calculés numériquement par une méthode de Gauss par exemple, suivant le type d'élément de surface choisi et leur degré d'interpolation. Un soin tout particulier doit être apporté au calcul numérique des intégrales colocalisées, où $\mathbf{r} \in \Sigma_i$, car l'intégrande y devient singulière [80]. Ces calculs mènent au système matriciel suivant, où \mathbf{P}_s est le vecteur des pression pariétales aux points du maillage, \mathbf{V}_n le vecteur des vitesses normales sur le solide \mathcal{V} , et \mathbf{P} un vecteur de valeurs de pression en un ensemble de points quelconques, \mathbf{N} et \mathbf{L} sont les matrices associées au calcul des intégrales de l'Equation 5.12 et \mathbf{E} est la matrice contenant les facteurs ϵ sur sa diagonale :

$$\mathbf{E}\mathbf{P} = \mathbf{N}\mathbf{P}_s + j\omega\rho\mathbf{L}\mathbf{V}_n \quad (5.13)$$

Les matrices \mathbf{N} et \mathbf{L} obtenues par cette méthode sont pleines, et elles dépendent de la fréquence ω qui apparaît dans l'expression de la fonction de Green G . Les coûts d'inversion de matrice sont donc plus importants que pour un système discret issu d'une approximation par éléments finis classique. La résolution du problème se déroule toujours selon les deux étapes décrites à la section précédente, à savoir dans un premier temps le calcul des valeurs de la pression pariétale \mathbf{P}_s en chaque nœud du maillage. En imposant $\mathbf{P} = \mathbf{P}_s$ dans l'Equation 5.13 il est possible d'obtenir un système matriciel carré donnant la pression pariétale en fonction des valeurs de vitesse normale surfacique \mathbf{V}_n , avec \mathbf{E}_s , \mathbf{N}_s et \mathbf{L}_s les matrices associées à la résolution du problème surfacique :

$$(\mathbf{E}_s - \mathbf{N}_s)\mathbf{P}_s = j\omega\rho\mathbf{L}_s\mathbf{V}_n \quad (5.14)$$

La matrice $\mathbf{E}_s - \mathbf{N}_s$ est généralement bien conditionnée et assure normalement une unique solution. Cependant pour des valeurs particulières de la fréquence d'étude ω , qui correspondent aux fréquences de résonance du problème interne associé (les *spurious modes*), l'unicité de la solution n'est plus observée et le problème n'est plus bien conditionné. Il faut donc s'assurer que les fréquences d'étude ne concordent pas avec ces résonances parasites. Plusieurs méthodes permettent de s'affranchir de ce type de problème [20, 80, 144].

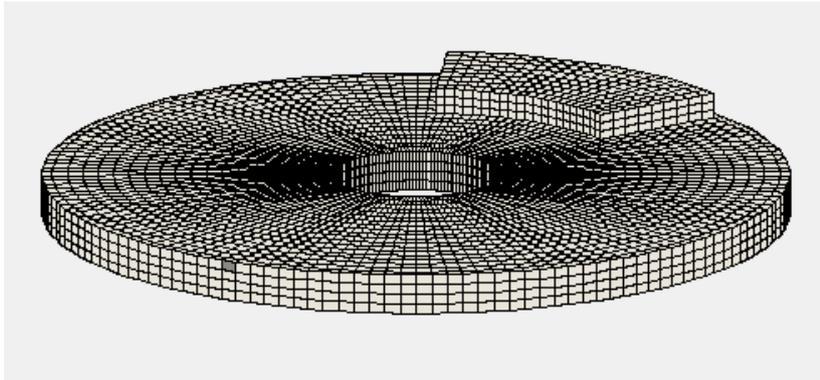


FIGURE 5.2 – Maillage surfacique du système de frein adapté à la formulation BEM

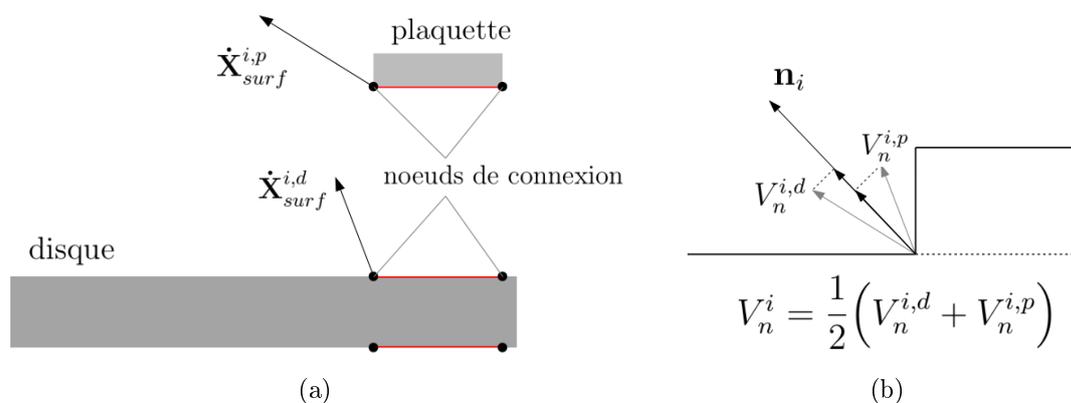


FIGURE 5.3 – Raccordement des sous structures aux bords des interfaces, (a) illustration sur un couple de points des bords de l’interface supérieure dont les vitesses surfaciques sont connues et (b) principe de projection et calcul de la vitesse pariétale selon la normale locale au point de raccordement sur la peau du modèle éléments finis

Une fois que les pressions pariétales connues il est possible de construire les matrices \mathbf{N} et \mathbf{L} pour un ensemble quelconque de points d’observation extérieurs. Le coefficient ϵ est toujours égal à 1 et le calcul est immédiat, sans inversion matricielle.

Nous pouvons appliquer la méthode BEM au modèle de frein simplifié complet construit au Chapitre 3 où nous ne gardons que la peau du maillage éléments finis, ce qui construit automatiquement un maillage surfacique adapté à la méthode des éléments de frontière. Cette méthode appelée *wrapping skin* a déjà été utilisée avec succès lors de précédentes études [127, 153]. Nous obtenons donc un maillage de quadrangles comme illustré à la Figure 5.2 et nous choisissons une interpolation linéaire sur ces éléments de surface.

Le calcul transitoire réalisé au chapitre précédent fournit la donnée d’entrée au calcul acoustique, le champ de vitesse surfacique faisant vibrer le système dans l’air ambiant. Il est alors nécessaire de récupérer le champ de vitesse normal au système. En ce qui concerne les nœuds hors arrêtes et sommets cette projection est simple. Pour les nœuds situés sur des arrêtes et des sommets, la normale sortante est prise comme la moyenne des vecteurs normaux des surfaces concourantes en ces nœuds. Il reste le cas des nœuds de connexion au niveau des interfaces de contact. Nous adoptons une stratégie déjà éprouvée [153] décrite à la Figure 5.3. Les vitesses surfaciques du disque et d’une plaquette sont projetées sur la normale définie par la peau à la jonction entre les deux sous-structures et ensuite moyennées. Nous ne prenons pas en compte les décollements possibles au niveau des interfaces de contact et les effets de *horn* et considérons que le système vibre d’un bloc.

Le calcul des matrices associées au problème BEM est réalisé à l'aide du logiciel OpenBEM [81] ainsi que le calcul de pressions surfaciques et en champ libre associées. La finesse du maillage éléments finis conditionne donc la taille du maillage surfacique et la précision du calcul acoustique. Une étude de convergence a permis de montrer que le maillage permet le calcul acoustique engendré par des vibrations jusqu'à la fréquence f_{max} .

Le champ de pression est ensuite calculé sur des surfaces d'observation dans l'espace extérieur. Ces surfaces sont maillées et le champ est calculé à chacun des nœuds de ce maillage directement par la méthode BEM. Une méthode courante en acoustique consiste à compter entre 6 et 10 éléments par longueur d'onde pour assurer une bonne approximation du champ acoustique sur ces surfaces d'observation.

5.1.3 Calcul BEM à partir d'une vibration non-harmonique

Le calcul BEM s'effectue donc pour une source vibrante harmonique stationnaire. L'étude dynamique menée au chapitre précédent a pu mettre en évidence un contenu fréquentiel complexe de la réponse en fonction des cas d'étude, en particulier sur les phases de régime établi où les les FFT des cycles limites montrent la présence de plusieurs raies fréquentielles. Une approche possible pour traiter ce genre de problème est de décomposer le champ de vitesse surfacique $\dot{\mathbf{X}}_{surf}$ en série de Fourier et de traiter chaque composante fréquentielle indépendamment. Une méthode d'optimisation du calcul par le choix des contributions fréquentielles prépondérantes est également présentée et appliquée.

Décomposition du champ de vitesse surfacique et calcul multi-fréquentiel

La réponse transitoire du système soumis à des oscillations auto-entretenues calculée au chapitre précédent possède un spectre fréquentiel comportant plusieurs contributions, dont les fondamentales des modes instables, leurs harmoniques et même des combinaisons linéaires des fondamentales des modes instables. Le champ de vitesse surfacique n'est donc pas harmonique et le calcul acoustique doit être décomposé par contribution fréquentielle. Soient ω_i les pulsations fondamentales des p modes instables présentes dans le signal temporel, les raies fréquentielles peuvent alors prendre la forme définie Equation 5.15, avec $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \dots \omega_p]^t$ le vecteur des pulsations fondamentales et $\mathbf{k} = [k_1 \dots k_p] \in \mathbb{Z}^p$ le vecteur des ordres des pulsations :

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_p\omega_p = \mathbf{k}\boldsymbol{\omega} \quad (5.15)$$

L'ordre N de la pulsation $\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}$ est défini par $N = \sum_{i=1}^p |k_i|$. Le champ de vitesse et notamment le champ de vitesse surfacique V_n peut être décomposé en série de Fourier généralisée sur cet ensemble de pulsations comme indiqué Equation 5.16 avec les coefficients $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ et $b_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ qui sont les coefficients de Fourier associés à la pulsation $\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} V_n(\mathbf{r}, t) &\approx \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} \mathbf{a}^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \cos\left[(k_1\omega_1 + \dots + k_p\omega_p)t\right] + \mathbf{b}^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \sin\left[(k_1\omega_1 + \dots + k_p\omega_p)t\right] \\ &\approx \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} \mathbf{a}^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}t) + \mathbf{b}^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \sin(\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} V_n^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Un calcul BEM peut alors être mené pour chaque pulsation $\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}$, pour laquelle nous connaissons la contribution en vitesse surfacique $V_n^{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$. Le problème surfacique associé à cette pulsation particulière est donc le suivant, avec $\mathbf{P}_s^{\mathbf{k}}$ la pression pariétale associée à cette pulsation particulière, avec le vecteur complexe de vitesses normales aux points du maillage surfacique

$\mathbf{V}_n^{\mathbf{k}} = \mathbf{a}_{BEM}^{\mathbf{k}} + i\mathbf{b}_{BEM}^{\mathbf{k}}$, où $\mathbf{a}_{BEM}^{\mathbf{k}}$ et $\mathbf{b}_{BEM}^{\mathbf{k}}$ sont les vecteurs des coefficients de Fourier du champ de vitesse normale estimés aux points du maillage BEM :

$$(\mathbf{E}_s^{\mathbf{k}} - \mathbf{N}_s^{\mathbf{k}})\mathbf{P}_s^{\mathbf{k}} = j\rho \mathbf{k}\omega \mathbf{L}_s^{\mathbf{k}}\mathbf{V}_n^{\mathbf{k}} \quad (5.17)$$

Puis le problème extérieur sur un ensemble de points d'observation correspond à l'Equation 5.18 permet d'obtenir le vecteur de pression $\mathbf{P}^{\mathbf{k}}$ en ces points. Ce vecteur de pression est complexe car il exprime le déphasage entre deux points de l'espace pour une onde de pression rayonnant à partir du système de frein à la pulsation $\mathbf{k}\omega$.

$$\mathbf{E}^{\mathbf{k}}\mathbf{P}^{\mathbf{k}} = \mathbf{N}^{\mathbf{k}}\mathbf{P}_s^{\mathbf{k}} + j\rho \mathbf{k}\omega \mathbf{L}^{\mathbf{k}}\mathbf{V}_n^{\mathbf{k}} \quad (5.18)$$

La reconstruction du champ total instantané complexe $\mathbf{P}(t)$ en ces points d'observation est effectuée en prenant la partie réelle de la somme pondérée des contributions de chaque pulsation $\mathbf{k}\omega$ et en introduisant le déphasage $\varphi_{\mathbf{k}}$ naturellement présent entre chacune de ces contributions :

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} \mathbf{P}^{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k}\omega t + \varphi_{\mathbf{k}})} \quad (5.19)$$

Cette méthode permet d'obtenir le champ de pression émis par une source vibrante possédant un spectre de vitesse normale plus riche qu'une seule harmonique. Le calcul de chaque contribution fréquentielle peut ainsi être estimé indépendamment des autres et dans la pratique leur traitement peut être parallélisé. Nous définissons le niveau de pression acoustique en décibels L_{dB} à la relation 5.20 comme une mesure du ressenti auditif. Ici P_{ref} est la pression de référence et correspond au minimum de variation de pression audible et vaut $2.10^{-5}Pa$.

$$L_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{\langle \mathbf{P}\bar{\mathbf{P}} \rangle}{P_{ref}^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} |\mathbf{P}^{\mathbf{k}}|^2}{P_{ref}^2}\right) \quad (5.20)$$

Dans la pratique, la moyenne des FFT des vitesses normales aux nœuds du maillage est calculée et une sélection est faite sur les pics principaux du spectre de ces vitesses. Un nombre M de fréquences $\mathbf{f}_{BEM} = (f_{BEM}^1 \dots f_{BEM}^M)$ croissantes est ainsi retenu pour le calcul BEM multi-fréquentiel qui compte alors un nombre fini de pulsations de calcul.

Optimisation du choix des fréquences prépondérantes

La méthode de calcul multi-fréquentielle du champ acoustique émis par une source dont le champ de vitesse est non-harmonique permet en théorie d'obtenir les valeurs d'intensité acoustique en tout point de l'espace. Cependant elle nécessite l'évaluation d'un grand nombre de composantes fréquentielles. En pratique, seul un petit nombre de ces composantes ont un impact significatif sur le champ acoustique, la contribution des autres est négligeable. Le calcul de la pression pariétale nécessite de grandes ressources informatiques et doit être effectué pour chaque pulsation considérée. Nous utilisons dans notre étude un algorithme de choix de ces contributions fréquentielles basé sur un critère énergétique sur les vitesses normales surfaciques qui a déjà été utilisé avec succès auparavant [153] afin de réduire ce coût de calcul. L'objectif est de choisir parmi les fréquences de \mathbf{f}_{BEM} celles qui assurent la majeure partie du rayonnement acoustique.

En utilisant la décomposition sur la base de Fourier généralisée de la vitesse pariétale $V_n(t)$ aux points du maillage :

$$V_n(t) \approx \text{Re}\left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} (\mathbf{a}_{BEM}^{\mathbf{k}} + i\mathbf{b}_{BEM}^{\mathbf{k}}) e^{-i(\mathbf{k}\omega t + \varphi_{\mathbf{k}})}\right) = \text{Re}\left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} \mathbf{V}_n^{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k}\omega t + \varphi_{\mathbf{k}})}\right) \quad (5.21)$$

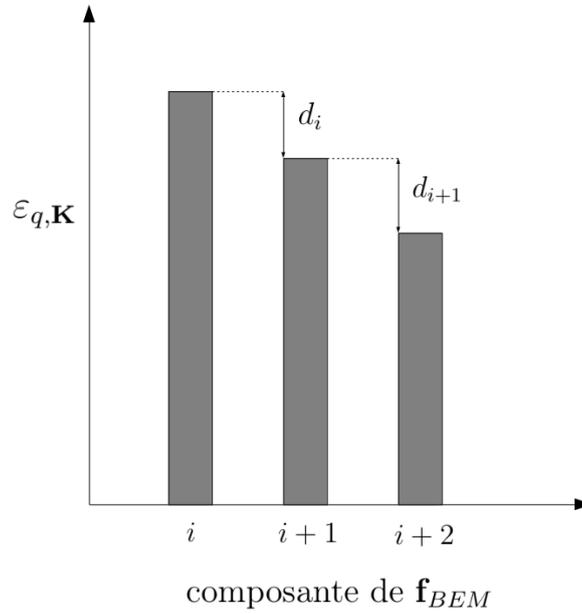


FIGURE 5.4 – Principe de calcul des erreurs relatives successives d_i sur les composantes de \mathbf{f}_{BEM}

nous pouvons pour un sous-ensemble de composantes fréquentielles \mathbf{K} définir $V_{n,q}^{\mathbf{K}}$ la vitesse normale quadratique moyenne de chaque contribution $\mathbf{v}_n^{\mathbf{k}}$ avec $\mathbf{k} \in \mathbf{K}$:

$$V_{n,q}^{\mathbf{K}} = \sqrt{\frac{1}{N_{ddl}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \overline{\mathbf{v}_n^{\mathbf{k}t} \mathbf{v}_n^{\mathbf{k}}} = \sqrt{\frac{1}{N_{ddl}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \left(\mathbf{a}_{BEM}^{\mathbf{k}t} \mathbf{a}_{BEM}^{\mathbf{k}} + \mathbf{b}_{BEM}^{\mathbf{k}t} \mathbf{b}_{BEM}^{\mathbf{k}} \right)} \quad (5.22)$$

La vitesse quadratique moyenne de référence $V_{n,q}^{ref}$ correspond au cas où toutes les composantes sélectionnées dans la FFT des vitesses normales sont conservées dans le calcul : $V_{n,q}^{ref} = V_{n,q}^{\mathbf{f}_{BEM}}$. Nous pouvons finalement définir $\varepsilon_{q,\mathbf{K}}$ l'erreur relative sur les vitesses quadratiques moyennes pour un ensemble de contributions fréquentielles \mathbf{K} :

$$\varepsilon_{q,\mathbf{K}} = \left\| \frac{V_{n,q}^{ref} - V_{n,q}^{\mathbf{K}}}{V_{n,q}^{ref}} \right\| \quad (5.23)$$

Une tolérance cible α_1 sur l'erreur relative est d'abord fixée. L'algorithme est initialisé en ne sélectionnant dans un premier temps aucune contribution de \mathbf{f}_{BEM} . Nous calculons ensuite les erreurs relatives d_i consécutives où les fréquences de \mathbf{f}_{BEM} sont rajoutées une par une telles que $d_i = \varepsilon_{q,i} - \varepsilon_{q,i+1}$, avec $\varepsilon_{q,i}$ l'erreur relative sur les i premières fréquences de \mathbf{f}_{BEM} , comme illustré à la Figure 5.4. Nous ne cherchons alors à ne conserver que les composantes de \mathbf{f}_{BEM} qui permettent un gain supérieur à une seconde tolérance α_2 , soit $d_i > \alpha_2$. Les composantes fréquentielles sélectionnées viennent enrichir l'ensemble \mathbf{K}_{opt} . Si jamais $\varepsilon_{q,\mathbf{K}_{opt}}$ ne vérifie pas l'objectif fixé par la tolérance cible α_1 , la seconde tolérance α_2 est divisée par 2 et l'algorithme est relancé. Cette méthode permet de choisir les contributions fréquentielles qui transmettent le plus de puissance au fluide par la vibration de la surface du système de frein.

Le calcul des pressions surfaciques et rayonnées est donc réduit aux contributions fréquentielles prépondérantes retenues dans \mathbf{K}_{opt} , ce qui permet d'économiser une grande quantité de puissance de calcul.

5.2 Analyse de motifs : 2-D wavelet

Tout comme pour les autres phases de l'analyse de la convergence des bases de réductions pour les parties concernant l'analyse de stabilité et les évolutions transitoires, nous proposons un outil permettant de comparer les champs acoustiques émis sur des surfaces d'observation issus de différents modèles réduits à ceux d'une référence. Pour cela nous utilisons une méthode d'analyse basée sur une décomposition de motifs acoustiques par des ondelettes en 2 dimensions (wavelets 2D). Cette méthode d'analyse d'image permet l'analyse des détails d'un motif sur un ensemble d'échelles d'observation allant du pixel à la taille du motif lui même ce qui va nous permettre dans notre cas d'avoir une notion de convergence par rapport à un motif du champ acoustique émis lors du crissement. Dans un premier temps nous faisons un rapide rappel sur les wavelets et leur extension au cas 2 dimensions ainsi que sur un algorithme de décomposition proposé par Mallat. Puis nous appliquons cet algorithme de décomposition à l'analyse de champs acoustiques et nous introduisons les notations utilisées par la suite.

5.2.1 Transformée de Fourier fenêtrée pour les signaux non-stationnaires

L'analyse des signaux se fait traditionnellement à l'aide des décompositions de Fourier sur une base de fonctions trigonométriques pour un signal périodique, ou plus généralement à l'aide de la transformée de Fourier \hat{f} d'une fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ quelconque comme indiqué Equation 5.24. Ces méthodes permettent pour un signal de durée finie d'en exprimer le contenu fréquentiel. Cependant la transformée de Fourier n'est pas adaptée aux signaux non-stationnaires et pose un problème de localisation des hautes fréquences.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (5.24)$$

Une première approche pour pallier à ce problème de localisation est d'effectuer des transformées de Fourier fenêtrées sur des portions de signal pour mieux cerner la position des composantes à haute fréquence. Considérant une fonction de fenêtrage g , nous pouvons définir à l'Equation 5.25 une transformée de Fourier fenêtrée Gf , centrée autour d'un point d'observation x_0 . La fonction g permet de filtrer spatialement la fonction f autour d'un intervalle d'étude centré sur x_0 à analyser pour y isoler les composantes fréquentielles transitoires qui pourraient y être concentrées.

$$Gf(\omega, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} g(x - x_0) dx \quad (5.25)$$

En définissant les valeurs σ_x et σ_ω comme étant respectivement les écarts types associés aux fonctions g et \hat{g} , le principe d'incertitude appliqué à la fonction g implique la relation suivante 5.26. Cette inégalité définit le compromis à faire entre résolution spatiale et fréquentielle quant au choix de la fonction de fenêtrage g . Quand la fonction g est une gaussienne nous obtenons alors la transformée de Gabor, la relation 5.26 devient une égalité ce qui assure une résolution maximale de la Gf dans l'espace des phases x/ω .

$$\sigma_x^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{\pi}{2} \quad (5.26)$$

Nous pouvons donc tracer dans l'espace x/ω à la Figure 5.5 une représentation de l'inégalité 5.26. La transformée Gf ne permet la description de f qu'autour du point (x_0, ω_0) qu'avec un intervalle $[x_0 - \sigma_x; x_0 + \sigma_x] \times [\omega_0 - \sigma_\omega; \omega_0 + \sigma_\omega]$, ce qui définit des cellules d'aire constante et d'aspect constant.

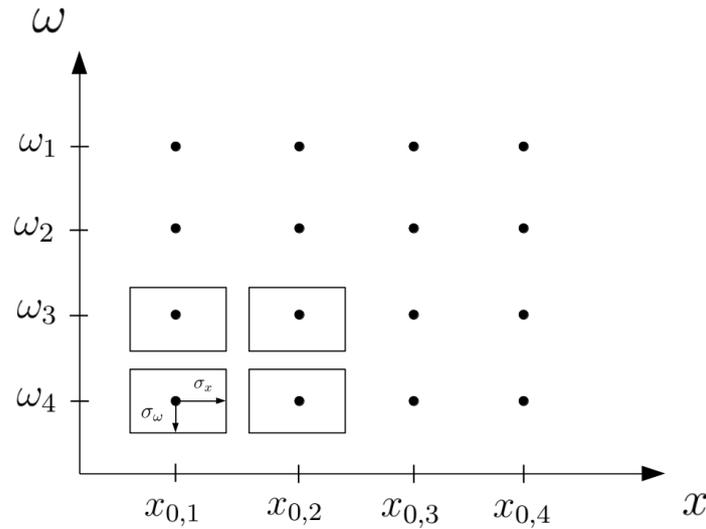


FIGURE 5.5 – Espace des phases x/ω , schématisation des cellules d'observation et du maillage régulier adapté à l'étude par transformée de Fourier fenêtrée

L'information contenue par la fonction Gf est redondante dans le sens où une transformée discrète permet de conserver toutes les informations de la transformée continue tout en permettant un échantillonnage des variables d'entrée, ce qui rend possible un traitement informatique. Si nous choisissons de discrétiser uniformément la variable d'entrée x de la fonction f , le pavage de l'espace des phases x/ω va être uniforme dans les deux directions, car les cellules définies par σ_x et σ_{ω} sont de taille constante et ne dépendent que de la fonction de fenêtrage g comme illustré à la Figure 5.5.

Ce maillage régulier impose donc la discrétisation du vecteur fréquentiel d'étude soit lui aussi régulier et uniforme. Les intervalles d'étude en fréquence ont donc tous la même taille et sont répartis de façon linéaire, ce qui impose donc un compromis entre le raffinement spatial et temporel de la fonction de fenêtrage g . La transformée de Fourier fenêtrée est donc bien adaptée à l'étude d'un signal non-stationnaire dont les composantes non-stationnaires ont une fréquence du même ordre de grandeur afin d'éviter de devoir mailler une large plage fréquentielle ou temporelle.

Ici les signaux que nous cherchons à analyser présentent des composantes fréquentielles réparties sur plusieurs ordres de grandeurs, ce qui rend la transformée de Fourier fenêtrée inadaptée à leur étude.

5.2.2 Analyse par wavelet et échelles d'observation logarithmiques

Dans le cas où le signal à analyser contient des composantes non-stationnaires réparties sur des plages fréquentielles très différentes, la transformée de Fourier fenêtrée ne suffit plus. Morlet a introduit pour cela [61] la transformée wavelet Wf qui est une projection sur une unique fonction ϕ qui est translatée et dilatée comme présenté Equation 5.27, avec s le facteur de dilatation.

$$Wf(s, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sqrt{s} \phi(s(x - x_0)) dx \quad (5.27)$$

La fonction ϕ est appelée wavelet mère et doit remplir un certain nombre de conditions [10, 35, 36, 57, 94, 100] et constitue un filtre passe bande centré autour d'une fréquence particulière. Le facteur de dilatation s permet à la fonction ϕ d'observer le signal étudié f à

une position particulière x_0 . A partir de la wavelet mère, il est possible de définir une fonction $\phi_s = \sqrt{s}\phi(sx)$, où le facteur de dilatation s permet ici de déplacer la fréquence du filtre passe bande de la fonction de base et de modifier la largeur de la bande fréquentielle. En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, il est alors possible de réécrire la transformée wavelet Wf comme un produit de convolution entre la fonction f et la wavelet ϕ_s :

$$Wf(s, x_0) = \langle f(x), \phi_s(x - x_0) \rangle \quad (5.28)$$

Tout comme la transformée de Fourier fenêtrée, l'information contenue dans la transformée wavelet est redondante et une transformée discrète permet d'obtenir toutes les informations nécessaires sur la fonction f . Il a pu être démontré [36] que la famille de wavelets $(\varphi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ définie par la relation 5.29 forme une base orthonormée de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

$$\varphi_{j,k}(x) = \sqrt{2^{-j}}\phi_{2^j}(x - 2^{-j}k), \text{ avec } (j, k) \in \mathbb{Z}^2 \quad (5.29)$$

Toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ peut donc se décomposer sur la base $(\varphi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ comme indiqué Equation 5.30 à l'aide des coefficients définis par le produit scalaire défini à l'Equation 5.28. Cette expression est simplement l'écriture de la décomposition d'un vecteur quelconque sur les éléments de la base, les produits scalaires étant les coefficients de cette expansion sur les vecteurs de cette base.

$$f(x) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \langle f(y), \varphi_{j,k}(y) \rangle \varphi_{j,k}(x) \quad (5.30)$$

Pour une échelle d'observation 2^j , l'ensemble de fonctions $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ forme le sous-espace vectoriel V_{2^j} . Cet espace forme l'ensemble des approximations à la résolution 2^j de toute fonction de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Il est alors facile de montrer que $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{2^j} \subset V_{2^{j+1}}$, ce qui traduit le fait que les ensembles successifs d'approximations de fonctions permettent une description toujours plus précise de toute fonction d'un facteur 2. Nous pouvons définir avec la relation 5.31 l'application A_{2^j} comme la projection d'une fonction f sur V_{2^j} :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, A_{2^j} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(y), \varphi_{j,k}(y) \rangle \varphi_{j,k}(x) \quad (5.31)$$

Les coordonnées $A_{2^j} f$ de cette décomposition forment ce qui se nomme une approximation discrète de la fonction f à la résolution 2^j . Ces coordonnées forment une suite de \mathbb{Z} et sont composées de l'ensemble des produits scalaires de f sur les éléments de V_{2^j} : $A_{2^j} f = (\langle f(y), \varphi_{j,k}(y) \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Afin de définir la différence d'information contenue entre la projection sur V_{2^j} et $V_{2^{j+1}}$, nous introduisons le complément orthogonal O_{2^j} de V_{2^j} dans $V_{2^{j+1}}$ tel que :

$$O_{2^j} \oplus V_{2^j} = V_{2^{j+1}} \quad (5.32)$$

L'information contenue dans O_{2^j} représente la différence d'approximation entre les résolutions 2^j et 2^{j+1} . Il est alors possible de construire [109, 110] une fonction ψ à partir de la fonction wavelet mère ϕ qui permette de construire de façon analogue aux fonctions $(\varphi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ un ensemble de fonctions $(\psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ telles que $\forall j \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de O_{2^j} .

Il est alors possible de définir à l'Equation 5.33 un projecteur D_{2^j} sur le sous-espace O_{2^j} qui peut s'interpréter comme le signal discret de différence de détail de résolution 2^j . L'ensemble de coefficients $D_{2^j} f$ défini alors les détails de toute fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ à la résolution 2^j seulement. Cette projection permet donc un filtrage des détails d'une certaine échelle à l'intérieur

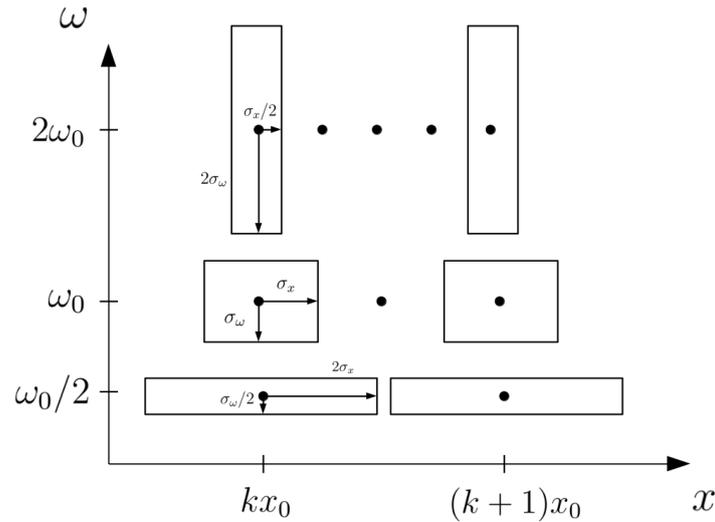


FIGURE 5.6 – Espace des phases x/ω , schématisation des cellules d'observation et du maillage variable adapté à l'étude par wavelets

d'un signal quelconque.

$$\forall j \in \mathbb{Z}, D_{2^j} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(y), \psi_{j,k}(y) \rangle \psi_{j,k}(x) \quad (5.33)$$

avec $D_{2^j} f = (\langle f(y), \psi_{j,k}(y) \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$

Mallat a montré [109, 110] qu'il est possible de calculer de façon efficace les projections A_{2^j} et D_{2^j} à l'aide de filtres discrets spéciaux appelés filtres en quadrature miroirs. Il propose également un algorithme itératif permettant de calculer progressivement à partir d'un signal $A_{2^{j+1}}$ à une résolution 2^{j+1} le signal à la résolution inférieure A_{2^j} ainsi que la différence de détails entre les deux échelles d'observation D_{2^j} .

A partir d'un signal mesuré à une résolution de 1, il est alors possible d'obtenir sa décomposition $\mathcal{N}(f)_J$ jusqu'à un ordre $J > 0$ telle que présenté dans l'Equation 5.34. Cet ensemble discret est appelé représentation par wavelet orthogonales à un ordre J . Il représente le signal à une résolution grossière 2^J ainsi que tous les détails associés pour les résolutions intermédiaires 2^j avec $-J \leq j \leq -1$.

$$\mathcal{N}(f)_J = \left(A_{2^{-j}} f, (D_{2^j} f)_{-J \leq j \leq -1} \right) \quad (5.34)$$

L'avantage de cette décomposition par wavelet est que le changement d'échelle est ici logarithmique alors qu'il était linéaire pour la transformée de Fourier fenêtrée. La validité fréquentielle d'une résolution dépend donc du facteur d'échelle et varie ici en puissance de deux. Cela affecte la forme des cellules d'observation dans le plan x/ω . En supposant que la fonction ψ ait une moyenne nulle, un écart-type σ_x et que sa transformée de Fourier $\hat{\psi}$ soit centrée autour de ω_0 avec un écart-type de σ_ω , les cellules décrites par les différents wavelet de la forme $\psi_s(x - x_0)$ recouvrent le domaine $[x_0 - (\sigma_x/s); x_0 + (\sigma_x/s)] \times [s\omega_0 - s\sigma_\omega; s\omega_0 + s\sigma_\omega]$ comme illustré à la Figure 5.6.

Quand l'échelle d'observation s est faible, la résolution spatiale est grossière alors que la résolution fréquentielle est fine. Quand s augmente, la résolution spatiale s'affine mais le domaine fréquentiel augmente en taille également. La résolution spatiale n'est donc pas la même d'une échelle à l'autre. Cette propriété permet de localiser les composantes d'une certaine fréquence dans le signal. Elle est donc adaptée à l'étude des signaux non stationnaires quand plusieurs de ses composantes fréquentielles n'ont pas le même ordre de grandeur.

Le problème associé à la transformée de Fourier fenêtrée est ici évité pour l'analyse de signaux dont les composantes fréquentielles sont réparties sur une large bande. L'utilisation de l'analyse par wavelet est donc particulièrement bien indiquée dans notre situation.

5.2.3 Extension au cas 2 dimensions de l'analyse par wavelets

Cette décomposition sur une base de wavelet peut s'étendre pour des fonctions de $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^p)$, $p \in \mathbb{N}^*$. Nous nous intéressons ici au cas des motifs en 2 dimensions donc nous détaillerons seulement l'extension de cette analyse au cas des fonction de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$, où le produit scalaire est défini à l'Equation 5.35.

$$\forall (f, g) \in \left(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)\right)^2, \langle f, g \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)g(x, y)dx dy \quad (5.35)$$

Il est possible à partir des fonctions ϕ et ψ génératrices respectivement des espaces V_{2^j} et O_{2^j} , définies dans le cas à une dimension, de construire des bases de fonctions orthonormées de sous espaces de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ aux différentes résolutions 2^j .

En définissant $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{V}_{2^j} = V_{2^j} \otimes V_{2^j}$ comme étant les sous-espaces de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ contenant les fonctions d'approximation à une résolution 2^j , nous construisons une fonction wavelet à deux variables $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$ permettant de générer une base pour chacun de ces sous espaces 5.36. Cette décomposition privilégie les directions horizontale et verticale. Le facteur d'échelle est le même dans les deux directions et la translation dans le plan est maintenant gérée par un couple d'entiers relatifs.

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{Z}, \left(\Phi_{j,k,l}(x, y)\right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} &= \left(2^{-j}\phi_{2^j}(x - 2^{-j}k)\phi_{2^j}(y - 2^{-j}l)\right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} \\ &= \left(\varphi_{j,k}(x)\varphi_{j,l}(y)\right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} \end{aligned} \quad (5.36)$$

est une base orthonormée de \mathbf{V}_{2^j}

En écrivant le produit tensoriel de l'espace $\mathbf{V}_{2^{j+1}}$ à la dimension 2^{j+1} et en le développant sur les espaces de la résolution inférieure, nous pouvons obtenir l'expression 5.37.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{2^{j+1}} &= V_{2^{j+1}} \otimes V_{2^{j+1}} = (V_{2^j} \oplus O_{2^j}) \otimes (V_{2^j} \oplus O_{2^j}) \\ &= \mathbf{V}_{2^j} \oplus (V_{2^j} \otimes O_{2^j}) \oplus (O_{2^j} \otimes V_{2^j}) \oplus (O_{2^j} \otimes O_{2^j}) \\ &= \mathbf{V}_{2^j} \oplus \mathbf{O}_{2^j}^1 \oplus \mathbf{O}_{2^j}^2 \oplus \mathbf{O}_{2^j}^3 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Nous pouvons remarquer que l'expression de l'espace de détails relatif à une résolution 2^j est plus compliquée que dans le cas à une dimension et est formé par la somme de trois sous espaces. Les fonctions wavelet mères pour chacune de ces trois directions sont alors définies à la relation 5.38 : Ψ^1 , Ψ^2 et Ψ^3 , elles concernent respectivement les détails dans les directions verticale, horizontale et diagonale.

$$\begin{aligned} \Psi^1(x, y) &= \phi(x)\psi(y) \\ \Psi^2(x, y) &= \psi(x)\phi(y) \\ \Psi^3(x, y) &= \psi(x)\psi(y) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Pour une résolution donnée 2^j nous construisons des bases orthonormées (b.o.n.) des sous-

espaces $\mathbf{O}_{2^j}^1$, $\mathbf{O}_{2^j}^2$ et $\mathbf{O}_{2^j}^3$ comme indiqué à la relation 5.39.

$$\begin{aligned}
 \forall j \in \mathbb{Z}, \\
 \left(\Psi_{j,k,l}^1(x, y) \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} &= \left(\varphi_{j,k}(x) \psi_{j,l}(y) \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}, \text{ b.o.n. de } \mathbf{O}_{2^j}^1 \\
 \left(\Psi_{j,k,l}^2(x, y) \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} &= \left(\psi_{j,k}(x) \varphi_{j,l}(y) \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}, \text{ b.o.n. de } \mathbf{O}_{2^j}^2 \\
 \left(\Psi_{j,k,l}^3(x, y) \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} &= \left(\psi_{j,k}(x) \psi_{j,l}(y) \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}, \text{ b.o.n. de } \mathbf{O}_{2^j}^3
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Tout signal f peut donc se décomposer à une résolution donnée 2^j sur les sous espaces \mathbf{V}_{2^j} , $\mathbf{O}_{2^j}^1$, $\mathbf{O}_{2^j}^2$ et $\mathbf{O}_{2^j}^3$ à l'aide des produits scalaires sur les éléments de leurs bases propres. En appelant $\mathbf{A}_{2^j} f$ l'approximation de f à la résolution 2^j ainsi que $\mathbf{D}^1_{2^j} f$, $\mathbf{D}^2_{2^j} f$ et $\mathbf{D}^3_{2^j} f$ les détails associés dans les trois direction définies précédemment, nous avons donc les relations permettant d'en calculer les coefficients à l'Equation 5.40.

$$\begin{aligned}
 \forall j \in \mathbb{Z}, \\
 \mathbf{A}_{2^j} f &= \left(\langle f, \Phi_{j,k,l} \rangle \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} \\
 \mathbf{D}^1_{2^j} f &= \left(\langle f, \Psi_{j,k,l}^1 \rangle \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} \\
 \mathbf{D}^2_{2^j} f &= \left(\langle f, \Psi_{j,k,l}^2 \rangle \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} \\
 \mathbf{D}^3_{2^j} f &= \left(\langle f, \Psi_{j,k,l}^3 \rangle \right)_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

De la même façon que pour le cas à une dimension, il existe un algorithme pyramidal itératif qui permet de calculer rapidement les étapes successives de la décomposition sur les bases de wavelet en partant d'un signal à une résolution quelconque et en diminuant la résolution par 2 à chaque étape. En partant alors d'un signal à une résolution de 1 et en appliquant J itérations de l'algorithme de décomposition pyramidal à chaque $\mathbf{A}_{2^j} f$, nous pouvons obtenir une décomposition $\mathcal{N}(f)_J$ du signal f de la forme suivante :

$$\mathcal{N}(f)_J = \left(\mathbf{A}_{2^{-J}} f, (\mathbf{D}^1_{2^k} f, \mathbf{D}^2_{2^k} f, \mathbf{D}^3_{2^k} f)_{-J \leq k \leq -1} \right) \tag{5.41}$$

5.2.4 Application à l'analyse de motif et critère de comparaison

Les figures acoustiques que nous allons étudier sont des matrices de coefficients représentant l'intensité acoustique sur une surface discrétisée de l'espace. Ce sont donc des motifs bornés qui possèdent une certaine résolution. Il existe donc une résolution maximale au delà de laquelle il n'est plus possible d'extraire de détail du signal. Cette résolution est celle du maillage de la surface d'observation et définit la résolution de départ de l'algorithme de décomposition.

Etant donné que la surface d'observation acoustique est bornée, il existe une échelle d'observation minimale au delà de laquelle l'algorithme de décomposition atteint une résolution qui est celle de la taille de la surface elle même. En supposant que la surface d'observation soit une matrice de taille $N \times M$ avec $N \geq M$, cette résolution minimale est égale à $J_{opt} = \lceil \log_2(N) \rceil$, où $\lceil . \rceil$ définit l'arrondi à l'unité supérieure. La décomposition $\mathcal{N}(f)_{J_{opt}}$ est donc une décomposition complète du signal f à toutes les échelles possibles d'observation et elle est constituée de $3J_{opt} + 1$ matrices, où $\mathbf{A}_{2^{-J_{opt}}} f$ est un scalaire. Les premières matrices obtenues avec j petit sont celles qui décryptent les détails à une résolution fine, associés à une petite longueur d'onde qui caractérisent les détails fins du motif ; alors que les matrices associées à un j plus grand sont celles qui traduisent les fluctuations à grande longueur d'onde, caractérisant l'aspect global de la figure étudiée.

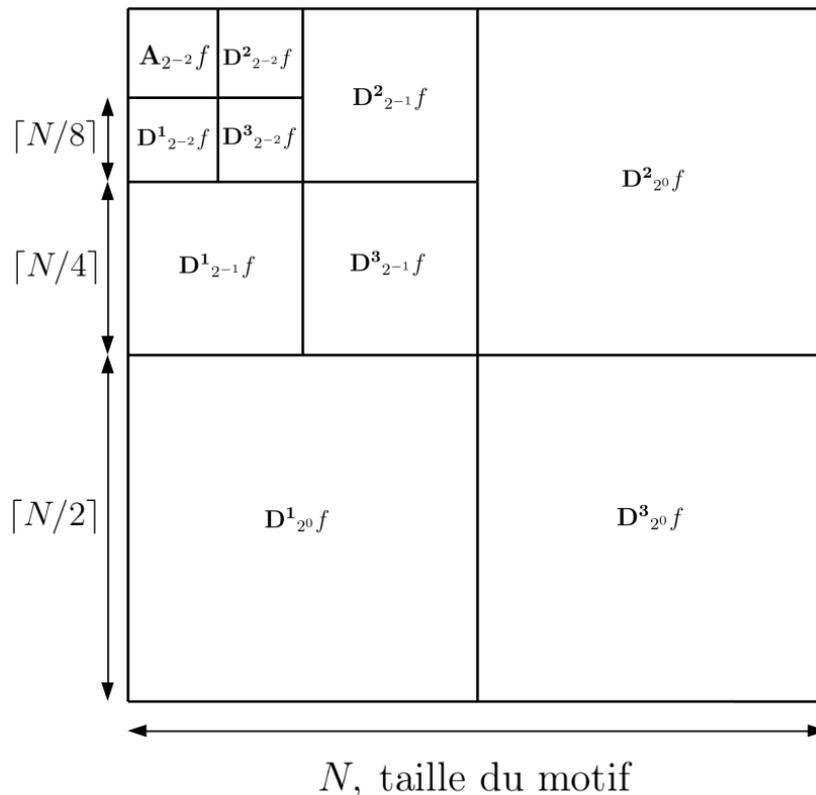


FIGURE 5.7 – Illustration de la décomposition par wavelet 2D d'un motif de taille N sur trois itérations selon l'algorithme de Mallat

La Figure 5.7 illustre l'application de cet algorithme de décomposition sur trois itérations, à partir d'un motif de taille $N \times N$.

Pour toute décomposition $\mathcal{N}(f)_{J_{opt}}$ d'un signal f , nous proposons une application Δ qui renvoie un vecteur de taille J_{opt} , dont chaque élément concerne la norme de la décomposition à une échelle d'observation donnée comme proposé à la définition 5.42.

$$\Delta\left(\mathcal{N}(f)_{J_{opt}}\right) = \left(\delta_j^{ac}(f)\right)_{1 \leq j \leq J_{opt}} \quad (5.42)$$

où les $\delta_j^{ac}(f)$ sont définis à l'Equation 5.43, où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius appliquée à une matrice quelconque.

$$\begin{cases} \delta_{J_{opt}}^{ac}(f) = \|\mathbf{A}_{2^{-J_{opt}}} f\|_F + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{D}^i_{2^{-J_{opt}}} f\|_F \\ \delta_j^{ac}(f) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\|\mathbf{D}^i_{2^{-j}} f\|_F}{2^{2(J_{opt}-j)}}, \quad \text{pour } 1 \leq j < J_{opt} \end{cases} \quad (5.43)$$

Nous pouvons alors définir un critère d'erreur relative $\epsilon^{ac}(f)$ entre un signal f et un signal de référence f_{ref} qui est un vecteur prenant une valeur pour chaque échelle d'observation $j \in \llbracket 1; J_{opt} \rrbracket$ à la relation 5.44. Le calcul des matrices de la décomposition étant linéaire, il suffit de calculer les décompositions de chaque motif acoustique afin de pouvoir évaluer le critère d'erreur entre deux signaux.

$$\epsilon_j^{ac}(f) = \frac{\delta_j^{ac}(f_{ref} - f)}{\delta_j^{ac}(f_{ref})}, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq J_{opt} \quad (5.44)$$

Nous définissons également un critère global λ^{ac} à l'Equation 5.45 permettant d'obtenir une évaluation de l'erreur globale entre un motif f et le motif de référence f_{ref} .

$$\lambda^{ac}(f) = \frac{\sum_{j=1}^{J_{opt}} \delta_j^{ac}(f_{ref} - f)}{\sum_{j=1}^{J_{opt}} \delta_j^{ac}(f_{ref})} \quad (5.45)$$

Les critères d'évaluation d'erreur relative entre deux motifs ϵ^{ac} et λ^{ac} vont nous permettre d'évaluer plus précisément la convergence des champs acoustiques sur des surfaces d'observation quelconques en fonction des différentes tailles des bases de réduction de Craig et Bampton et de Double Synthèse Modale.

5.3 Résultats acoustiques

Nous présentons maintenant les résultats des calculs acoustiques associés au rayonnement du système crissant dans l'air ambiant. Nous commençons par définir trois surfaces d'observation et nous présentons le résultat des calculs acoustiques du système de référence qui leur sont associés. Puis nous définissons plusieurs plages d'études temporelles du signal afin d'y évaluer l'évolution des signaux acoustiques en fonction de la taille des modèles pour les deux étapes de réduction. Puis nous analysons cette évolution à l'aide des critères basés sur l'analyse par wavelet 2D présentés dans la partie précédente.

5.3.1 Définition des surfaces d'observation

La réponse acoustique est observée sur trois surfaces discrétisées :

- Un carré dans le plan XY appelé plan horizontal, situé à une altitude Z_c de l'origine et de côté L_c . Cette surface est donc parallèle au disque et aux plaquettes. Ce plan horizontal est maillé de façon régulière de telle sorte que l'algorithme de Mallat est directement applicable à la matrice d'intensité acoustique donnée par \mathbf{L}_{dB} aux nœuds de ce maillage,
- Une sphère de rayon R_s dont le centre est l'origine. Le maillage de cette sphère est construit par la projection des nœuds d'un cube maillé régulièrement. Pour appliquer l'algorithme de décomposition par wavelet 2D nous projetons la sphère sur un maillage plan régulier à l'aide d'une projection de Mercator,
- Deux surfaces verticales rectangulaires comprenant l'axe de rotation du disque, l'une est le plan de symétrie du système coupant les plaquettes en deux et l'autre lui est perpendiculaire. Leurs extrémités inférieures sont affleurantes au système solide vibrant et leurs extrémités supérieures sont données par Z_v . Leurs largeurs sont données par l_v .

Le calcul des FFT des vitesses surfaciques permettant le calcul BEM fréquentiel doit se faire sur une portion relativement courte du signal pour s'assurer de la cohérence du calcul acoustique. La Figure 5.8 illustre un calcul des champs acoustiques sur ces trois surfaces d'observation, avec $Z_c \in \{0.25; 0.75; 1.25\}m$ et $L_c = 1.5m$ pour le plan horizontal, $R_s = 0.5m$ pour la sphère et $Z_v = 1.5m$ et $l_v = 0.3m$ pour les plans verticaux pour le système de référence dans le cas $\mu = 0.8$. Ici la FFT est calculée pour le régime établi sur l'intervalle $[1.4; 1.5]s$.

5.3.2 Décomposition et observation du signal en 3 phases

Nous nous intéressons au comportement des systèmes réduits d'un point de vue de leur rayonnement acoustique. Les résultats sont présentés et analysés de façon qualitative dans un pre-

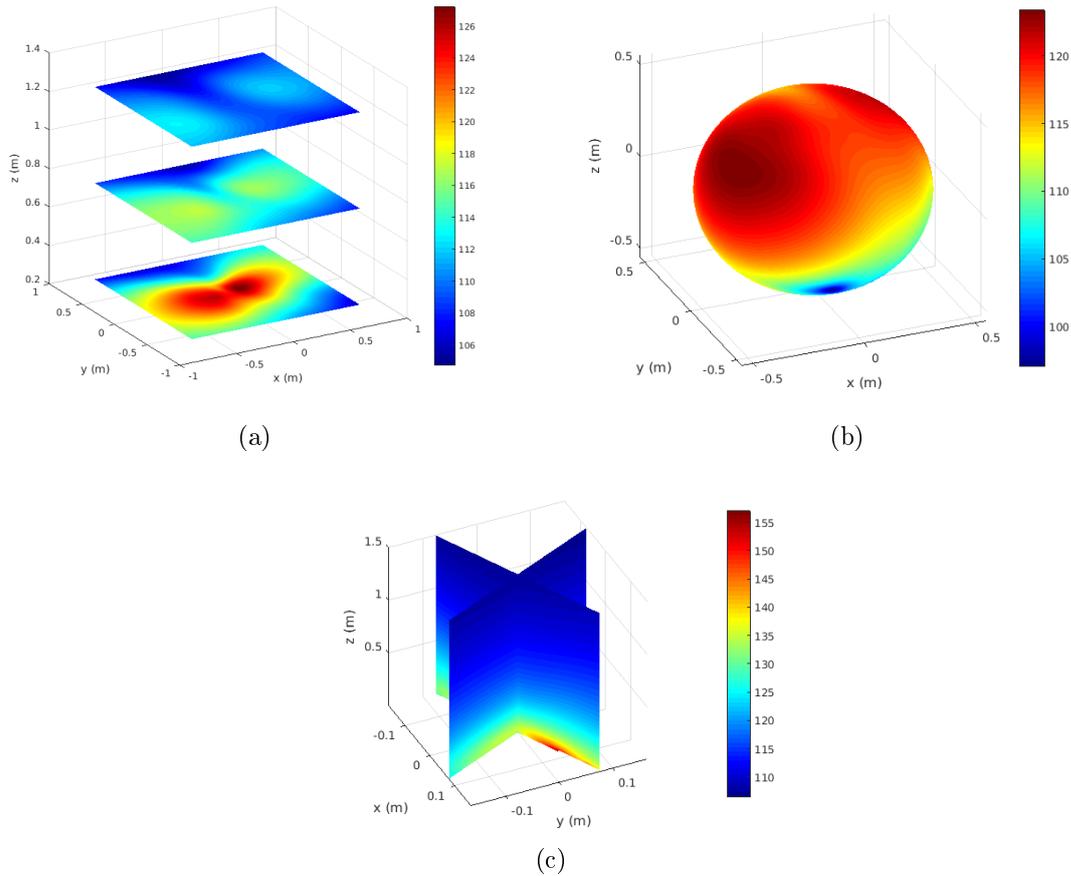


FIGURE 5.8 – Motifs acoustiques de l'intensité \mathbf{L}_{dB} pour le système de référence et le cas $\mu = 0.8$ en régime établi, (a) sur le plan horizontal avec $Z_c \in \{0.25, 0.75, 1.25\}m$ et $L_c = 1.5m$, (b) sur la sphère avec $R_s = 0.5m$ et (c) sur les plans verticaux avec $Z_v = 1.5m$ et $l_v = 0.3m$

mier temps et l'effet des deux étapes de réduction est observé. Nous choisissons ici d'analyser les résultats issus des cas d'étude $\mu = 0.8$ sur trois phases différentes et $\mu = 1$ sur sa phase de régime pseudo-périodique. Les trois phases d'analyse du cas $\mu = 0.8$ illustrées à la Figure 5.9 sont les suivantes :

- La phase I est celle de la montée en amplitude associée au régime linéaire, avant la saturation des amplitudes. Seul le second mode instable est présent dans le spectre de la réponse transitoire,
- La phase II correspond à la transition entre le régime pseudo-établi et le régime établi, où les contributions des deux modes instables et de leurs combinaisons sont présentes dans le signal transitoire,
- La phase III correspond au régime établi.

Nous pouvons comparer pour les trois phases du signal dans le cas $\mu = 0.8$ et pour le régime établi du cas $\mu = 1$, l'évolution des figures acoustiques obtenues pour le plan horizontal à la Figure 5.10 et pour la projection de la sphère à la Figure 5.11 dans le cas de systèmes réduits par la première étape de Craig et Bampton. Les intervalles de temps choisis pour le calcul des FFT sont regroupés dans le Tableau 5.1. La position temporelle de ces trois phases change d'un modèle réduit à l'autre afin d'être cohérent avec le décalage temporel déjà observé sur les signaux temporels au chapitre précédent. Les signaux des phases II et III correspondent à des épisodes transitoires du signal et leur comparaison ne peut être que qualitative car les

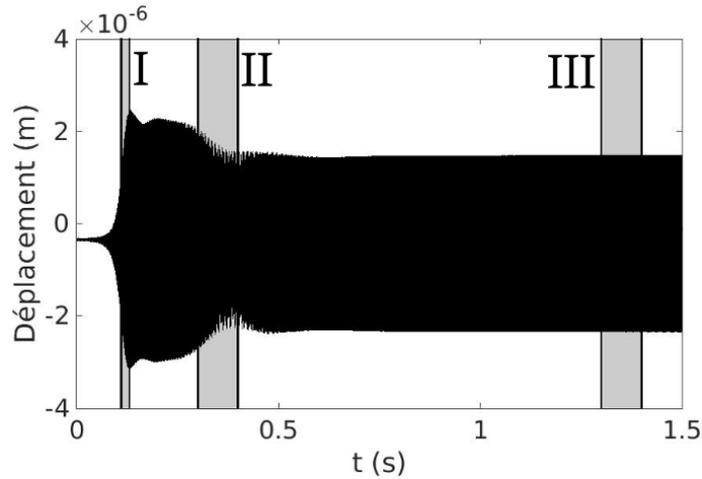


FIGURE 5.9 – Illustration sur la réponse temporelle d'un degré de liberté de la position des trois phases d'étude du signal pour le cas $\mu = 0.8$

	$\gamma = 3$	$\gamma = 1$	$\gamma = 1.25$	$\gamma = 1.5$	$\gamma = 2.5$
Phase I, $\mu = 0.8$	[0.31; 0.33]	[0.29; 0.31]	[0.31; 0.33]	[0.36; 0.38]	[0.31; 0.33]
Phase II, $\mu = 0.8$	[0.54; 0.64]	[0.54; 0.64]	[0.62; 0.72]	[0.54; 0.64]	[0.54; 0.64]
Phase III, $\mu = 0.8$	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]
Phase III, $\mu = 1$	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]

TABLEAU 5.1 – Intervalles des temps du signal transitoire sur lesquels sont calculées les FFT des vitesses surfaciques pour le calcul BEM dans le cas de la réduction de Craig et Bampton, sur les trois phases du cas $\mu = 0.8$ et pour le régime établi du cas $\mu = 1$

motifs acoustiques obtenus sont très sensibles à l'intervalle de temps sélectionné.

Nous pouvons commencer par observer pour le modèle de référence l'évolution des champs acoustiques sur ces deux surfaces d'observation. La directivité ainsi que les intensités évoluent notablement d'une phase à l'autre pour le cas $\mu = 0.8$, ce qui indique que le champ acoustique évolue comme le signal temporel en fonction des différentes phases transitoires et stationnaire. Les champs acoustiques des régimes établis des cas $\mu = 0.8$ et $\mu = 1$ sont également très différents, ce qui suggère bien que la dynamique de régime périodique ou pseudo-périodique a également un impact important sur le champ rayonné en termes de directivité et d'intensité. Nous ne pouvons identifier les trois phases du signal pour l'étude acoustique dans le signal temporel qu'à partir d'une taille de réduction suffisante avec $\gamma = 1$ pour le modèle réduit par la méthode de Craig et Bampton (voir les Figures 4.6). Nous observons ici la convergence des régimes acoustiques, à la fois pour la directivité que pour les niveaux d'intensité acoustique lorsque le paramètre de contrôle γ augmente. Un modèle réduit avec $\gamma = 1.5$, qui correspond à la référence intermédiaire, semble donner une bonne approximation des champs acoustiques par rapport à la référence en termes de niveaux acoustiques et de directivité. Toutefois les motifs acoustiques ici représentés sur le plan horizontal et la sphère sont déjà plutôt bien approximés par les modèles plus petits comme avec $\gamma = 1$.

Nous pouvons ensuite observer les évolutions des motifs acoustiques pour les systèmes réduits par la DMS comparés à la référence intermédiaire, à la Figure 5.12 pour le plan horizontal et à la Figure 5.13 pour la projection de la sphère. Les intervalles de temps sur lesquels sont calculées les FFT sont regroupés dans le Tableau 5.2. Nous observons que pour la réduction DMS les motifs acoustiques sont déjà bien estimés, même pour de faibles valeurs de N_{DMS} ,

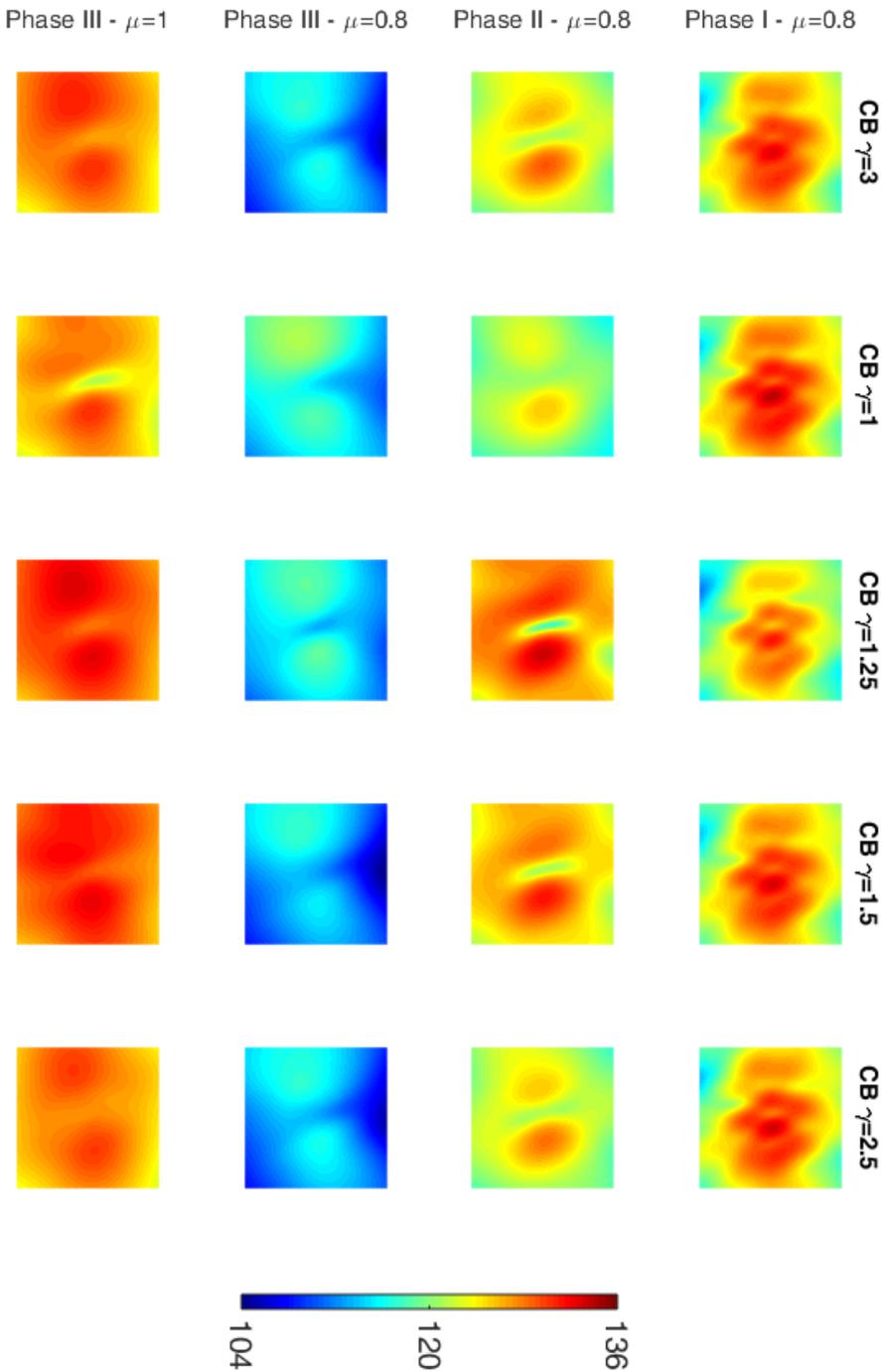


FIGURE 5.10 – Motifs de l'intensité acoustique sur le plan horizontal pour l'étape de réduction de Craig et Bampton, phases I, II et III pour le cas $\mu = 0.8$ et phase III pour le cas $\mu = 1$,

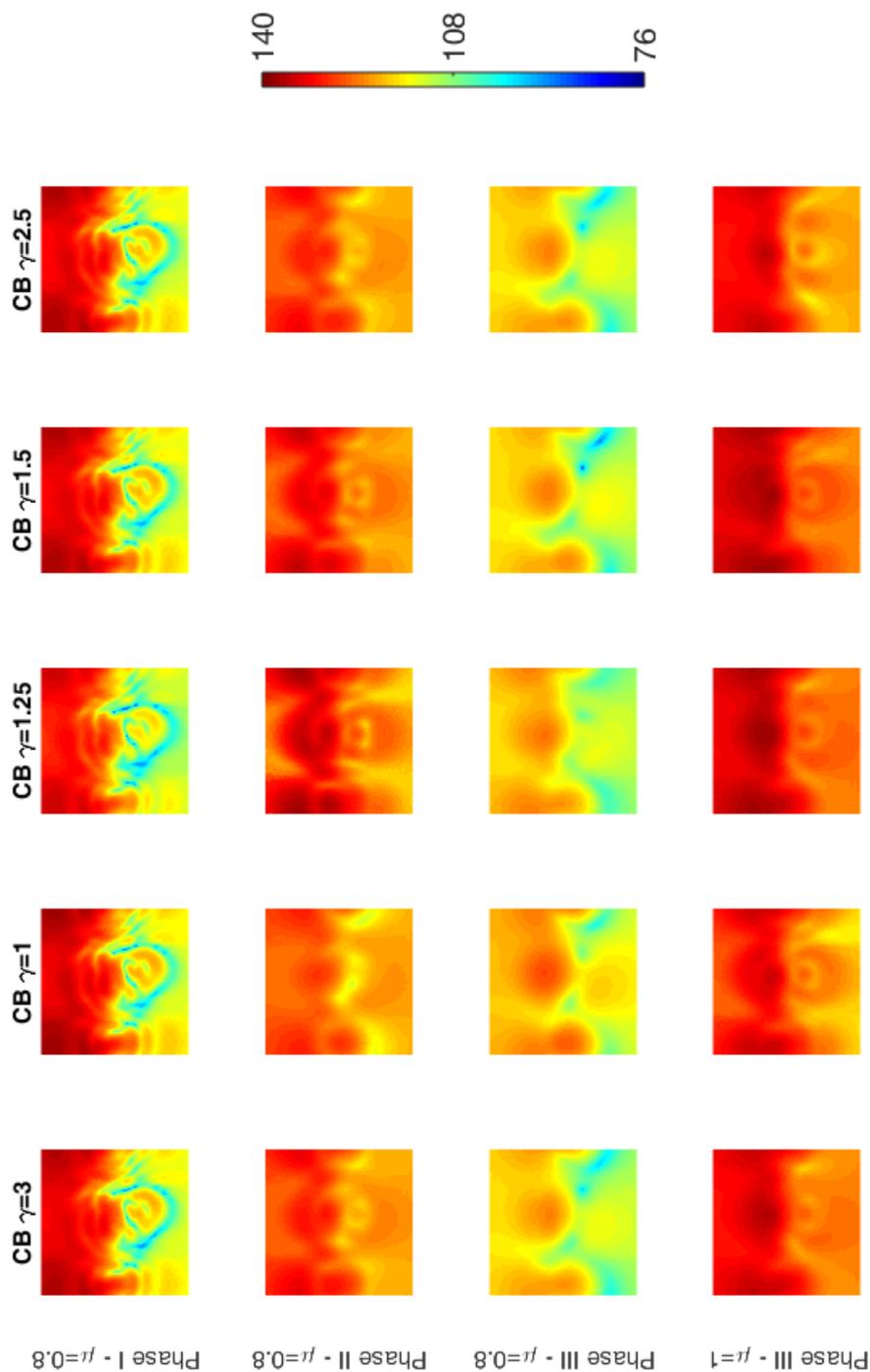


FIGURE 5.11 – Motifs de l'intensité acoustique sur la sphère pour l'étape de réduction de Craig et Bampton, phases I, II et III pour le cas $\mu = 0.8$ et phase III pour le cas $\mu = 1$

	$\gamma = 1.5$	$N_{DMS} = 50$	$N_{DMS} = 150$	$N_{DMS} = 500$	$N_{DMS} = 1000$
Phase I, $\mu = 0.8$	[0.36; 0.38]	[0.11; 0.13]	[0.16; 0.18]	[0.22; 0.24]	[0.27; 0.29]
Phase II, $\mu = 0.8$	[0.54; 0.64]	[0.3; 0.4]	[0.33; 0.43]	[0.45; 0.65]	[0.5; 0.6]
Phase III, $\mu = 0.8$	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]
Phase III, $\mu = 1$	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]	[1.4; 1.5]

TABLEAU 5.2 – Intervalles des temps du signal transitoire sur lesquels sont calculées les FFT des vitesses surfaciques pour le calcul BEM dans le cas de la réduction DMS, sur les trois phases du cas $\mu = 0.8$ et pour le régime établi du cas $\mu = 1$

seuls les détails sont affectés par la taille de la base de réduction. Les conclusions sur l'efficacité de la réduction DMS sont alors les mêmes que pour l'étude du signal temporel : une fois que le modèle réduit est capable de reproduire les principales phases de la dynamique transitoire, les niveaux et les motifs acoustiques sont également bien approximés, ici de façon qualitative. Dans la partie suivante nous allons évaluer la convergence des motifs acoustiques sur la phase III du signal qui correspond au régime établi à l'aide de l'analyse par wavelet 2D.

5.3.3 Analyse de convergence des motifs acoustiques

Nous appliquons le critère d'analyse des motifs acoustiques par wavelet 2D tel que nous l'avons défini dans la Section 5.2 afin de comparer les motifs acoustiques sur le plan horizontal, la sphère et les plans verticaux. Les intervalles de temps sont ceux de la phase III pour les deux cas d'étude $\mu = 0.8$ et $\mu = 1$, qui correspondent aux régimes établis pour les régimes périodique et pseudo-périodique.

Nous choisissons de ne pas appliquer le critère de comparaison acoustique aux autres phases du signal car le champ acoustique est très sensible à l'intervalle de temps choisi et sur les phases I et II le signal est de nature transitoire, il est alors difficile de choisir sur un signal donné correspondant à une réduction particulière, l'intervalle correspondant exactement à la dynamique qui aura été sélectionnée sur le système de référence. Les motifs acoustiques peuvent alors correspondre à des dynamiques légèrement différentes et leurs comparaison n'est plus cohérente.

Cette décomposition sur trois itérations de l'algorithme peut être observée à la Figure 5.14 où le motif de la sphère pour le modèle de référence calculé à la phase I du signal du cas $\mu = 0.8$, où trois étapes de décomposition sont exposées par rapport au motif à l'échelle. Les différents niveaux de détails sont alors extraits du motif de base pour les trois itérations de l'algorithme et nous pouvons y retrouver les contours principaux du motif de la figure de base.

Nous appliquons le critère de comparaison des motifs acoustiques pour les trois surfaces d'observation dans le cas $\mu = 0.8$ pour les régimes établis, ce qui correspond à la phase III. La Figure 5.15 montre l'évolution du critère ϵ^{ac} pour les différentes tailles de réduction, à la fois pour l'étape de Craig et Bampton et pour l'étape DMS. Les Figures 5.16 et 5.17 montrent les évolutions de ce même critère respectivement pour les plans verticaux et pour la sphère.

La première observation que nous pouvons effectuer sur ces résultats détaillés par échelles d'observation se base sur la comparaison à échelle constante de l'impact d'une étape de réduction. Nous remarquons qu'à une échelle j donnée l'augmentation de la taille de la base de réduction de Craig et Bampton permet dans la grande partie des cas de faire baisser l'erreur relative ϵ_j^{ac} , ce qui indique que l'augmentation du paramètre γ permet d'augmenter la précision du calcul acoustique.

En revanche la même analyse sur l'effet de la taille de la base de réduction DMS montre que l'erreur relative à une échelle j donnée ne converge pas avec l'augmentation de N_{DMS} .

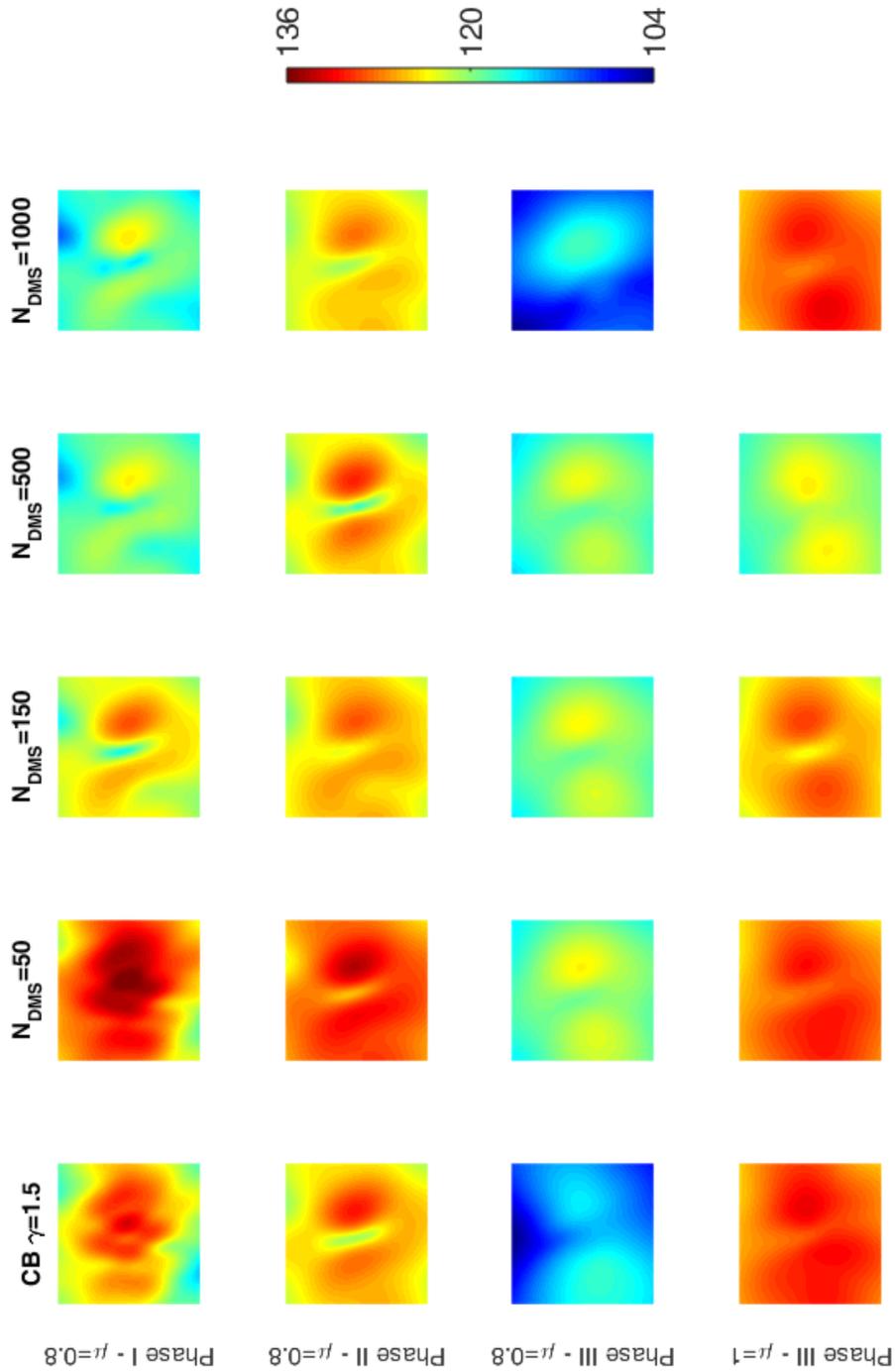


FIGURE 5.12 – Motifs de l'intensité acoustique sur le plan horizontal pour l'étape de réduction DMS, phases I, II et III pour le cas $\mu = 0.8$ et phase III pour le cas $\mu = 1$,

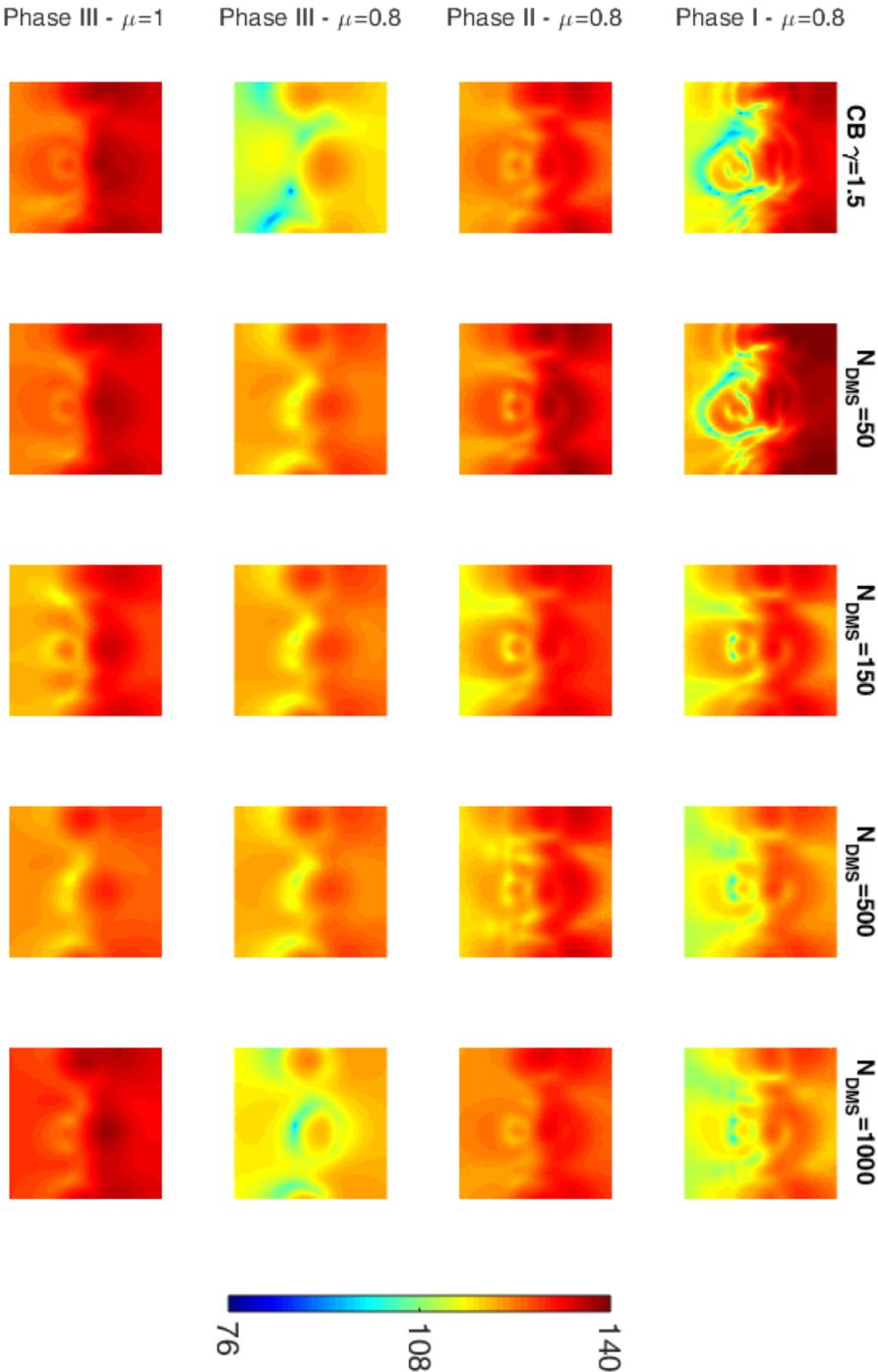


FIGURE 5.13 – Motifs de l'intensité acoustique sur la sphère pour l'étape de réduction DMS, phases I, II et III pour le cas $\mu = 0.8$ et phase III pour le cas $\mu = 1$

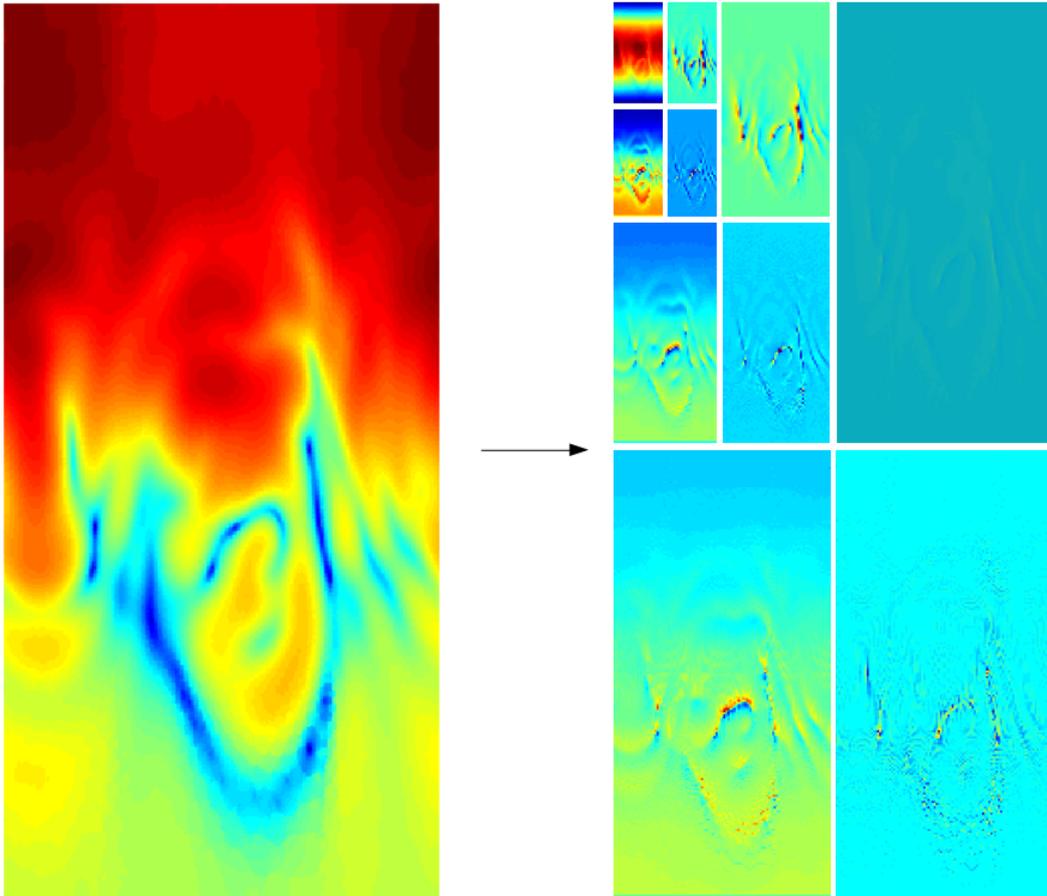


FIGURE 5.14 – Illustration de la décomposition par wavelet 2D d'un motif de la sphère pour le modèle de référence à $\mu = 0.8$ pour la phase I du signal, application sur trois itérations selon l'algorithme de Mallat selon le schéma de principe présenté à la Figure 5.7

La répartition des erreurs relatives entre les différentes taille de bases de réduction semble rester la même quelle que soit l'échelle d'observation donnée. La difficulté pour la réduction DMS de faire converger le calcul acoustique par rapport à la réduction Craig et Bampton peut s'expliquer selon plusieurs hypothèses, les deux premières ayant déjà été identifiées pour l'analyse des signaux transitoires et établis au Chapitre précédent :

- La description des interfaces de contact n'est plus complètement pertinente avec la base de réduction DMS car des décollements locaux transitoires peuvent modifier l'état de contact global par rapport à la configuration de l'équilibre glissant. Les modes d'interfaces ne sont alors plus tout à fait adaptés à la description des interactions au niveau des surfaces de contact,
- Les modes DMS sont calculés localement autour de la position d'équilibre glissante et ne sont valables en théorie que sur un voisinage de cette position. Or lors des évolutions temporelles le système instable se met à évoluer loin de cette position, ce qui fait que la jacobienne des efforts linéarisés autour de la position d'équilibre utilisée pour le calcul des modes d'interface n'est plus valable,
- La dernière hypothèse concerne le type de nœuds que permettent de réduire les deux méthodes. Le calcul acoustique se base sur la vibration de la peau du modèle Eléments Finis, or les nœuds qui recouvrent la peau sont principalement réduits par les méthodes de Craig et Bampton. Une description fine de la dynamique des structures hors interface permise par un paramètre γ important entraîne une plus grande richesse des

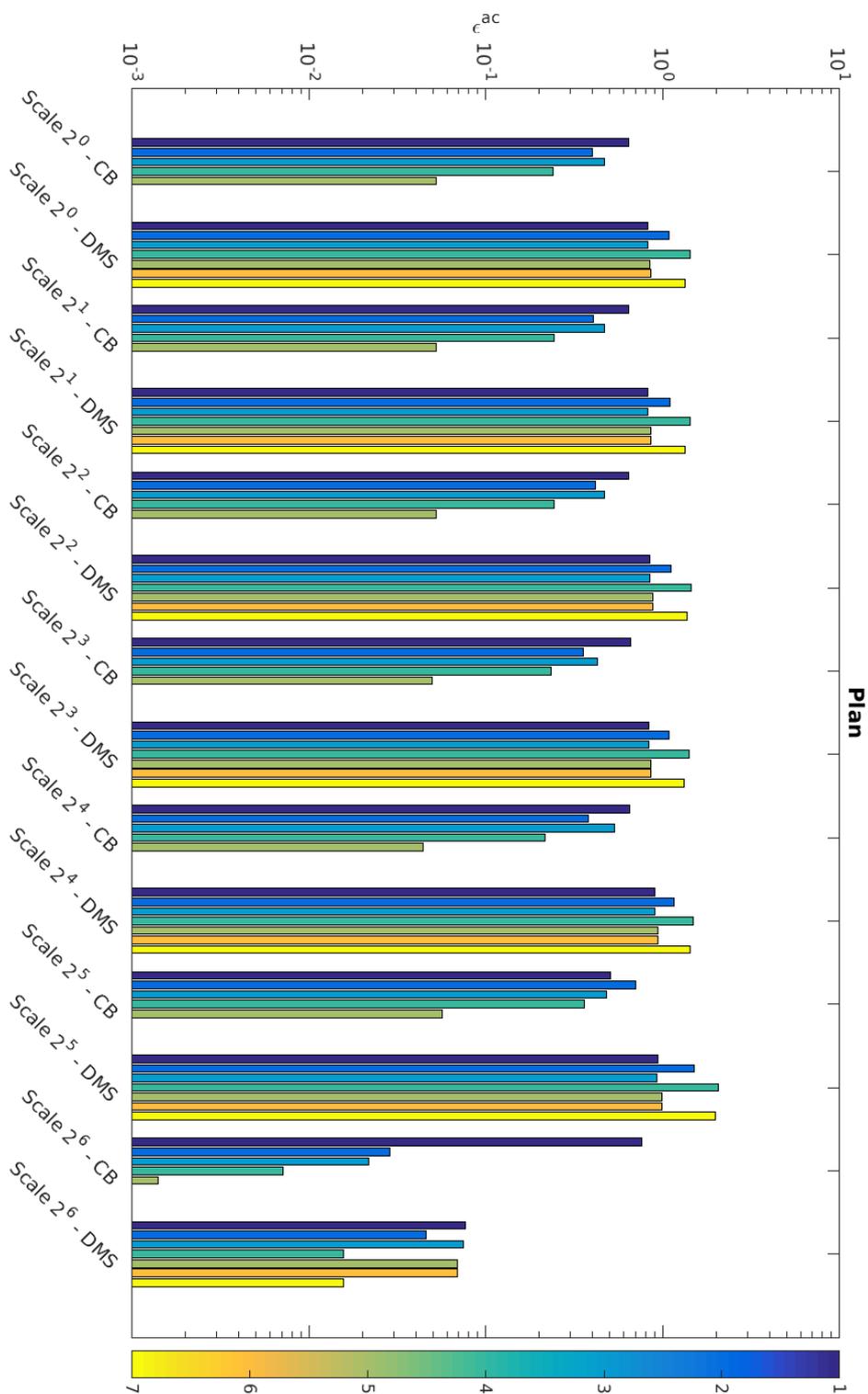


FIGURE 5.15 – Critère d'erreur relative e^{ac} pour les plans calculés dans le cas $\mu = 0.8$ sur la phase III. Les différentes couleurs correspondent aux tailles de réduction suivantes : Craig et Bampton 1 : $\gamma = 0.5$, 2 : $\gamma = 1$, 3 : $\gamma = 1.25$, 4 : $\gamma = 1.5$, 5 : $\gamma = 2.5$. Pour la DMS : 1 : $N_{DMS} = 50$, 2 : $N_{DMS} = 100$, 3 : $N_{DMS} = 150$, 4 : $N_{DMS} = 220$, 5 : $N_{DMS} = 500$, 6 : $N_{DMS} = 750$, 7 : $N_{DMS} = 1000$,

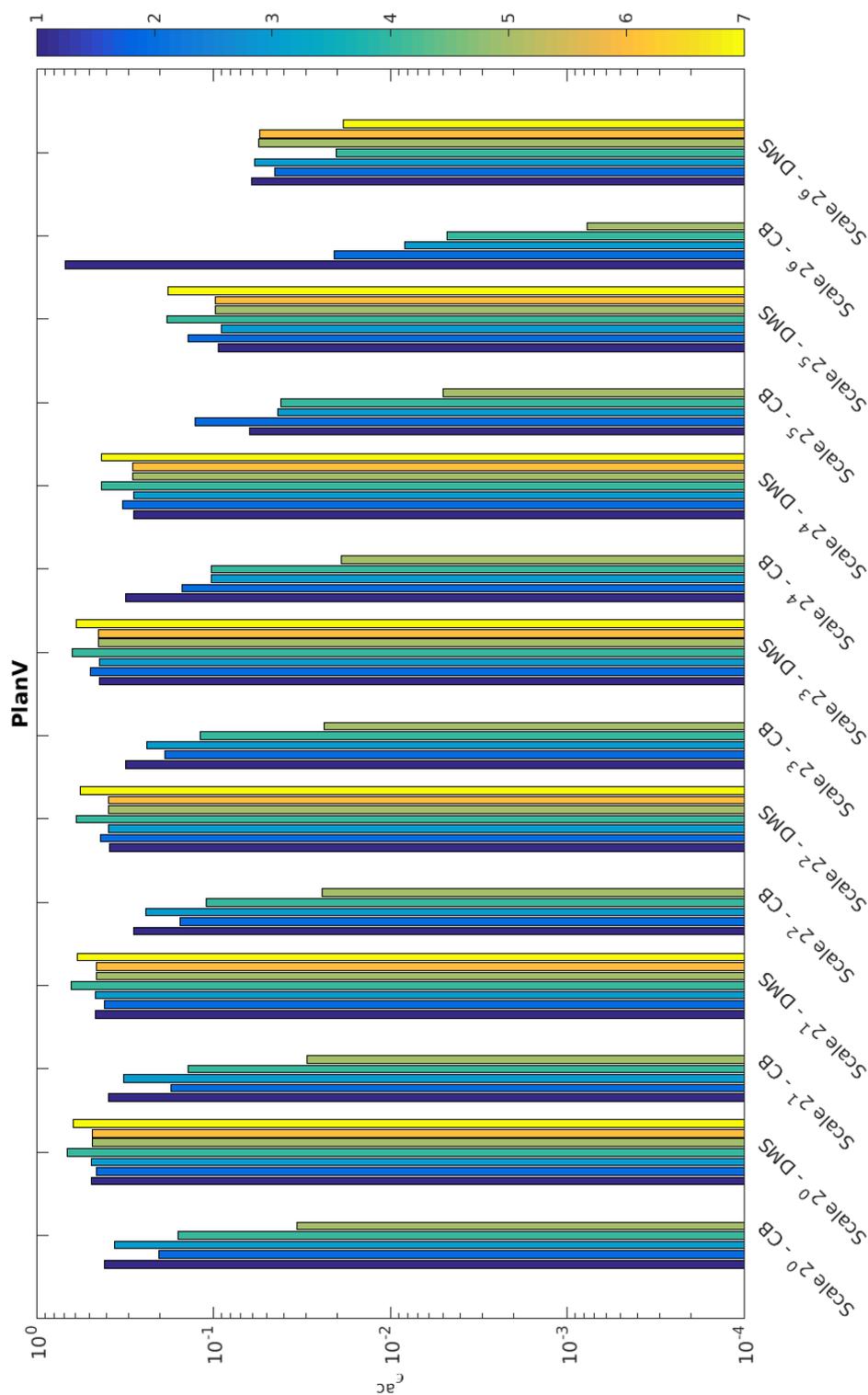


FIGURE 5.16 – Critère d'erreur relative ϵ^{ac} pour les plans verticaux calculés dans le cas $\mu = 0.8$ sur la phase III. Les différentes couleurs correspondent aux tailles de réduction suivantes : Craig et Bampton 1 : $\gamma = 0.5$, 2 : $\gamma = 1.25$, 4 : $\gamma = 1.5$, 5 : $\gamma = 2.5$. Pour la DMS : 1 : $N_{DMS} = 50$, 2 : $N_{DMS} = 100$, 3 : $N_{DMS} = 150$, 4 : $N_{DMS} = 220$, 5 : $N_{DMS} = 500$, 6 : $N_{DMS} = 750$, 7 : $N_{DMS} = 1000$,

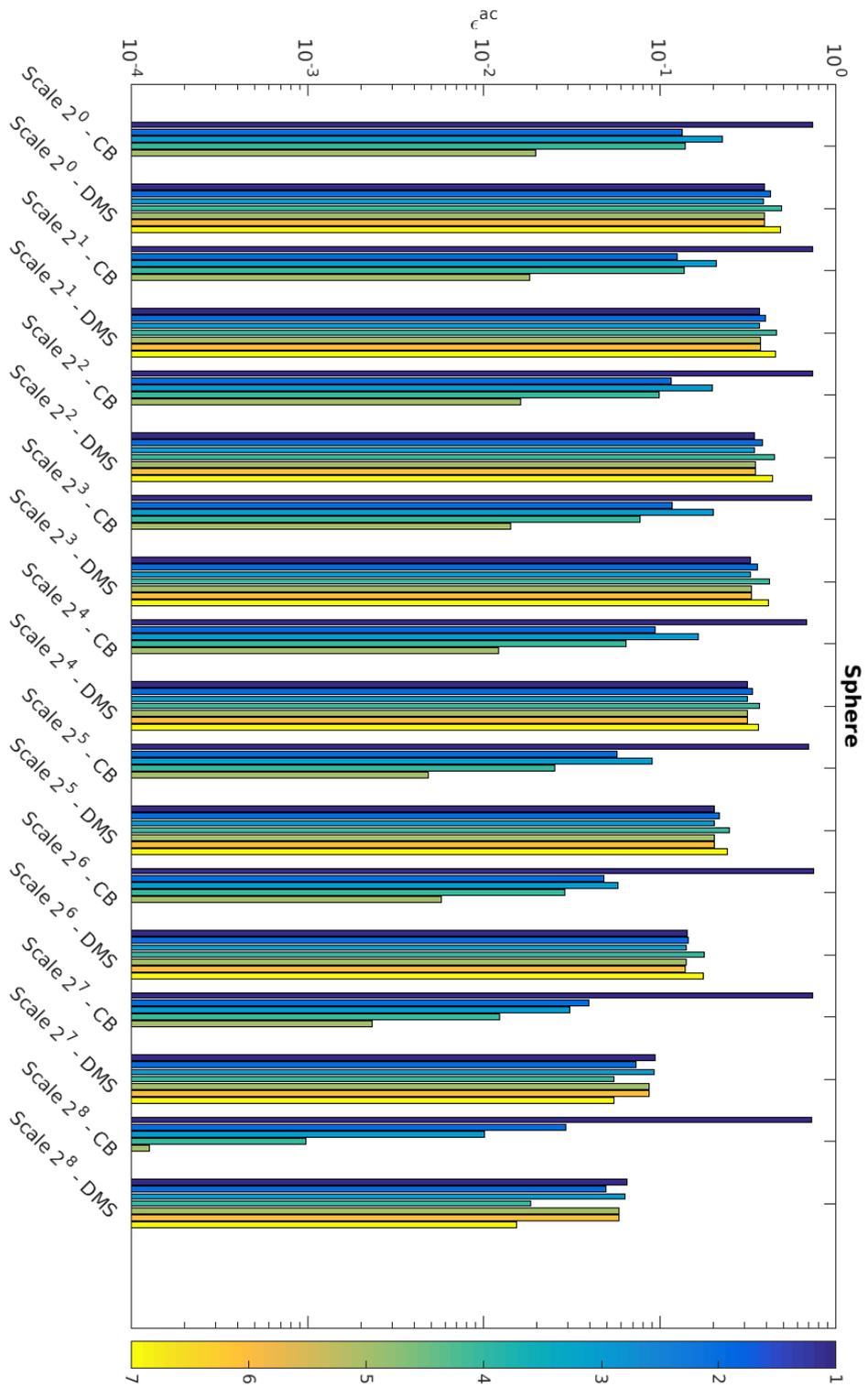


FIGURE 5.17 – Critère d'erreur relative ϵ^{ac} pour les sphères calculés dans le cas $\mu = 0.8$ sur la phase III. Les différentes couleurs correspondent aux tailles de réduction suivantes : Craig et Bampton 1 : $\gamma = 0.5$, 2 : $\gamma = 1$, 3 : $\gamma = 1.25$, 4 : $\gamma = 1.5$, 5 : $\gamma = 2.5$. Pour la DMS : 1 : $N_{DMS} = 50$, 2 : $N_{DMS} = 100$, 3 : $N_{DMS} = 150$, 4 : $N_{DMS} = 220$, 5 : $N_{DMS} = 500$, 6 : $N_{DMS} = 750$, 7 : $N_{DMS} = 1000$,

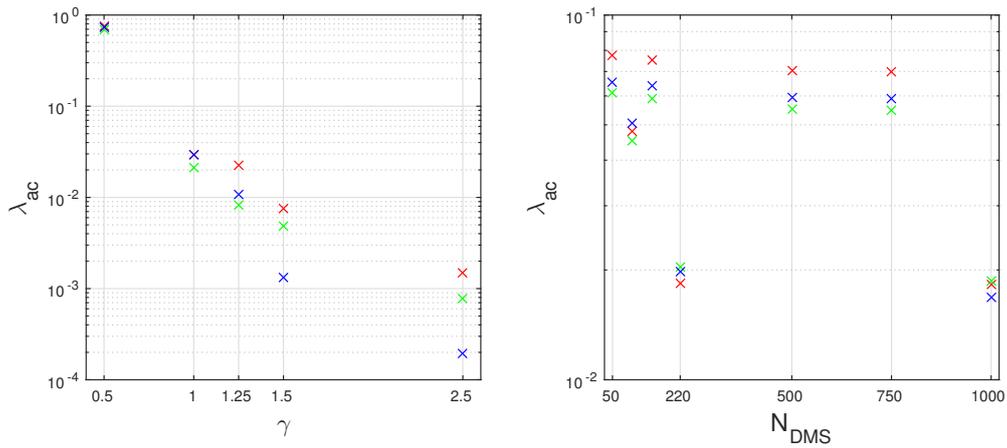


FIGURE 5.18 – Critère d’erreur global λ^{ac} pour le cas $\mu = 0.8$ pour la phase III, (rouge) : plan, (vert) : plans verticaux, (bleu) : sphère

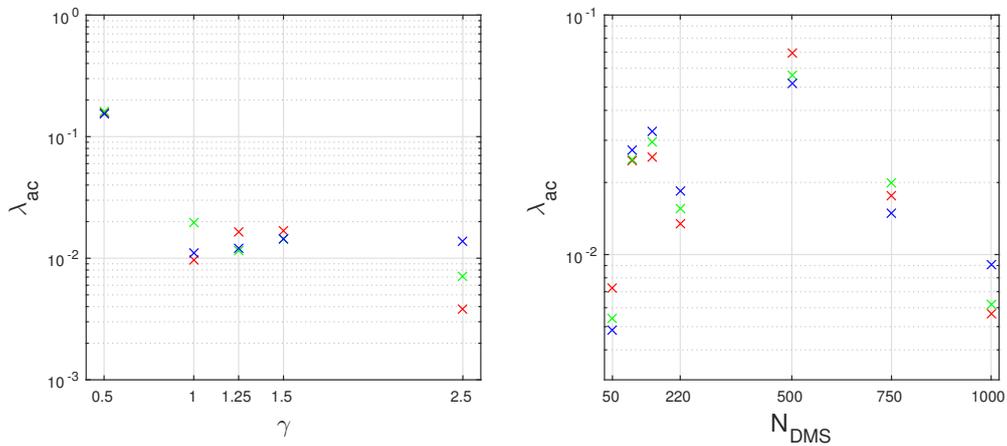


FIGURE 5.19 – Critère d’erreur global λ^{ac} pour le cas $\mu = 1$ pour la phase III, (rouge) : plan, (vert) : plans verticaux, (bleu) : sphère

déplacements de la peau et donc du calcul BEM. En revanche les seuls nœuds de la peau réduits par la DMS et qui participent au rayonnement acoustique sont ceux situés aux raccords d’interfaces et sont donc très peu nombreux, comme nous l’avons expliqué à la Section 5.1.2. Cela peut expliquer la faible variation des erreurs relatives en fonction du nombre de modes d’interface retenus.

Nous pouvons ensuite comparer l’évolution des erreurs relatives d’une échelle à une autre. L’échelle 2^0 correspond ici au pixel et les échelles suivantes correspondent aux dé-zooms successifs et à des tailles d’observation plus grossières jusqu’à la taille du motif lui-même. Dans l’ensemble nous pouvons observer une décroissance de l’erreur relative ϵ_j^{ac} quand la taille d’échelle augmente. Cela indique que les erreurs sont plus importantes au niveau des pixels et des détails fins et que les plus grosses structures qui dessinent le motif global sont mieux estimées. La plus grosse échelle d’observation qui donne la valeur moyenne de l’intensité acoustique sur le motif est celle qui montre l’erreur relative la plus faible.

Finalement nous calculons les critères d’erreur globaux λ^{ac} pour les différents motifs sur les régimes établis des différents cas $\mu = 0.8$ à la Figure 5.18 et $\mu = 1$ à la Figure 5.19 pour les deux étapes de réduction.

Là encore nous pouvons observer une convergence des motifs d’intensité acoustique pour le

critère d'erreur global pour la première étape de réduction de Craig et Bampton où les motifs produits par les modèles réduits permettent une erreur inférieure à l'ordre de 1% dès que γ devient assez grand. La valeur de $\gamma = 1.5$ utilisée dans les analyses de stabilité et d'intégration temporelle pour l'obtention du modèle de référence intermédiaire est ici encore judicieuse.

En revanche, bien que les motifs produits par les modèles réduits par la DMS à partir de la référence intermédiaire soient très proches de leur référence, le critère d'erreur globale λ^{ac} ne montre pas de convergence dans la précision du champ acoustique émis, pour les trois surfaces d'observation considérées. L'erreur globale reste faible, bien que pour certaines tailles de réduction comme pour $N_{DMS} = 500$ l'erreur est plus grande de presque un ordre de grandeur que pour les autres modèles réduits pour le cas $\mu = 1$. Les différences que nous pouvons observer pour ce champ acoustique émis par le régime établi pseudo-périodique peut s'expliquer par les modulations d'amplitude basse fréquence dues au pas de temps trop gros ; la portion de signal sur laquelle la FFT est calculée pour obtenir les composantes fréquentielles des vitesses normales n'a pas la même amplitude que pour les autres modèles réduits.

5.4 Conclusion

Ce Chapitre a permis de compléter l'étude des vibrations auto-entretenues dues au frottement par l'étude du champ acoustique rayonné par le système de frein simplifié. Nous avons appliqué pour cela une méthode d'Éléments Finis de Frontière (BEM) au modèle surfacique total du modèle de frein pour estimer le champ rayonné par la structure vibrante dans l'air ambiant avec des conditions de Sommerfeld à l'infini. L'analyse du spectre des vitesses normales de vibrations ainsi qu'un algorithme permettant le choix des contributions fréquentielles principales en termes d'énergie de vibration nous a ensuite permis d'effectuer les calculs BEM pour chacune des ces fréquences principales. Ici le champ de vitesse surfacique est exprimé en fonction des degrés de liberté physiques qui forment la peau du modèle Éléments Finis. La taille du problème BEM ainsi obtenu est donc toujours la même, quelle que soit la taille des réductions de Craig et Bampton et DMS choisies pour l'intégration temporelle. La taille du calcul du champ de pression surfacique dans un premier temps, puis du calcul sur une surface d'observation est toujours du même ordre de grandeur pour une fréquence d'étude particulière et une surface d'observation donnée. Seul le nombre d'harmoniques conservées dans le calcul BEM multi-fréquentiel influe sur les ressources numériques nécessaires en sachant que les calculs mono-fréquentiels peuvent facilement être mis en parallèle.

Nous avons ensuite choisi d'observer l'intensité du champ acoustique émis sur trois surfaces d'observation ainsi que sur plusieurs phases caractéristiques du signal temporel. Nous avons alors pu observer le comportement des différentes tailles de bases de réduction sur l'estimation du champ d'intensité acoustique. La première étape de réduction de Craig et Bampton permet bien de montrer la convergence des motifs acoustiques lorsque la base de modes à interfaces fixes est assez riche. En revanche le comportement des champs acoustiques émis par les modèles réduits par la DMS est plus chaotique en fonction du nombre de modes d'interface conservés. Plusieurs hypothèses ont été avancées à la Section 5.3.3 afin d'expliquer ce comportement.

L'application d'un critère d'analyse de ces motifs basé sur une décomposition par wavelet en deux dimensions basée sur l'algorithme proposé par Mallat permet d'avoir une estimation quantitative du comportement acoustique des modèles réduits par rapport à la référence. Nous observons une bonne convergence selon ces critères pour la première étape de réduction alors que pour la réduction DMS le comportement est plus irrégulier. Cependant nous pouvons observer que les modèles réduits par le DMS avaient déjà bien convergé en termes de vibrations mécaniques et que les variations que nous pouvons observer sur les champs acoustiques restent minimales.

Conclusions et perspectives

Conclusions générales

L'objectif de ces travaux de thèse est de proposer une démarche complète de l'étude du crissement, à la fois d'un point de vue expérimental avec un ensemble de mesures vibratoires et acoustiques pour différentes conditions de fonctionnement que d'un point de vue numérique, avec la construction d'un modèle Eléments Finis et une étude de simulation complète (une analyse de stabilité, un calcul temporel et estimation du champ acoustique rayonné).

La première étape qui est la partie expérimentale effectuée sur un banc spécialement conçu pour l'étude du crissement nous a permis d'observer les caractéristiques du crissement sur un essai représentatif et de vérifier la reproductibilité des essais de crissement vis à vis des réponses temporelles et de leur contenu fréquentiel. L'impact de plusieurs paramètres de fonctionnement a également pu être observé, comme celui de la vitesse de rotation du disque, la pression de freinage ou l'état d'usure du système. Ces observations expérimentales nous ont permis d'établir un ensemble d'hypothèses de modélisation qui sont un ensemble de recommandations pour l'étude numérique du crissement.

A l'aide de ces hypothèses de modélisation un modèle de frein à disque simplifié est construit à l'aide de la méthode des Eléments Finis. Il est composé d'un disque annulaire et de deux plaquettes, réparties de part et d'autre du disque. Une loi de contact régularisée cubique ainsi qu'une loi de frottement de Coulomb sont introduites aux deux interfaces de frottement directement aux nœuds surfaciques grâce aux maillages conformes entre le disque et les plaquettes. Le coefficient de frottement constant peut être utilisé comme le seul paramètre du modèle et selon sa valeur, l'étude de stabilité par CEA permet de mettre en évidence des régions stables ou instables selon le mécanisme du couplage de modes. Dans ce dernier cas le modèle peut admettre un ou plusieurs modes instables.

La taille du modèle issu de la discrétisation par éléments finis nous empêche d'effectuer des simulations coûteuses en ressources de calcul telles que des intégrations temporelles. Pour remédier à ce problème nous avons appliqué une stratégie de Double Synthèse Modale. La première étape de synthèse est une réduction de Craig et Bampton classique sur chacune des trois sous-structures. La seconde étape de réduction appelée Double Synthèse Modale est basée sur une réduction du système dynamique formé par les degrés de liberté restants aux interfaces.

L'efficacité de cette Double Synthèse Modale a dans un premier temps été évaluée pour l'analyse de stabilité du système. Pour chacune des deux étapes de réduction, le comportement des modèles réduits a pu être comparé à celui d'un modèle de référence pour l'estimation des valeurs propres obtenues par la CEA ainsi que des déformées propres. La convergence des deux étapes de réduction a alors pu être mise en évidence.

Ensuite des simulations temporelles effectuées à l'aide du schéma numérique de la θ -méthode nous a permis d'obtenir les évolutions transitoires et le régime stationnaire dans des cas mono-instable et bi-instable à régime établi périodique et pseudo-périodique. Là encore le comportement des modèles réduits par la méthode Craig et Bampton puis par la DMS a été observé et comparé à celui de la référence. Les cycles limite et les allures générales des réponses temporelles sont bien reproduites par les modèles réduits à la condition que les

bases de réduction soient assez riches. En revanche, la projection des signaux sur les modes instables ainsi que les spectrogrammes ont pu mettre en évidence un phénomène de retard ou d'avance des participations modales des modes instables par rapport à la référence. Le contenu fréquentiel obtenu pour les évolutions temporelles des systèmes instables est formé de raies dont les fréquences correspondent de près à celles calculées lors de l'analyse de stabilité, aux multiples de ces fondamentales, et dans le cas multi-instable, de combinaisons linéaires de ces fondamentales.

Le rayonnement acoustique de ce système vibrant soumis à ces oscillations auto-entretenues a été estimé à l'aide d'une approche par Eléments de Frontière, à partir de la peau du système Eléments Finis. La décomposition du champ de vitesse normal sur la surface du système frein simplifié ainsi que la sélection des composantes fréquentielles principales nous a permis d'appliquer efficacement la méthode harmonique BEM et ainsi obtenir le rayonnement acoustique extérieur composé de plusieurs contributions fréquentielles. L'estimation du champ acoustique sur des surfaces d'observation variées nous a permis d'observer de façon qualitative la convergence de ces champs en fonction de la taille des deux bases de réduction. Puis l'application d'un critère de comparaison de motifs basé sur la décomposition par wavelet en 2D a confirmé la convergence du calcul acoustique et l'efficacité de la Double Synthèse Modale jusqu'à l'estimation du rayonnement acoustique.

Perspectives

Les résultats issus des observations expérimentales et des simulations numériques amènent à plusieurs perspectives concernant l'étude du crissement.

Corrélation essais-calcul Dans cette étude les résultats expérimentaux ont été utilisés dans le but de caractériser le crissement, d'observer les influences de plusieurs paramètres de fonctionnement et de proposer des hypothèses de modélisation pour la construction d'un modèle numérique. Cependant le système considéré dans ces travaux est trop simplifié pour pouvoir prétendre à une corrélation entre les essais et les prédictions numériques. Si tel est l'objectif d'une prochaine étude, la modélisation du système devra être beaucoup plus précise et se rapprocher de la géométrie du banc. D'autres éléments devront en outre être modélisés, comme l'étrier et les supports reliant les éléments au bâti. Les conditions aux limites sur les plaquettes et le disque devront également être modélisées plus finement et les multiples contacts annexes introduits dans le modèle.

Cependant l'objectif de la corrélation essai-calcul n'est pas seulement dépendant d'une bonne modélisation géométrique du système expérimental. La prise en compte et l'identification de toutes les incertitudes liées aux paramètres incertains ou non-contrôlés est nécessaire pour estimer justement les variations présentes naturellement dans les résultats expérimentaux. En particulier les lois de contact et de frottement sont fortement dépendantes des variabilités aux interfaces, comme les variations d'état de surface, de topographie ou de température. Leur prise en compte permettrait de mieux calibrer les valeurs des raideurs de la loi de contact cubique et le coefficient de frottement. De telles méthodes ont déjà été employées sur des systèmes complexes pour une analyse de stabilité mais pas encore pour des simulations temporelles et acoustiques.

Application du critère acoustique sur un système réel La mesure d'un champ acoustique expérimental sur un ensemble important de points pourrait permettre l'application du critère d'analyse de motifs selon la décomposition par wavelet 2D et l'algorithme de Mallat. Les champs acoustiques devraient être mesurés sur un maillage de points de l'espace, à l'aide d'un grille de microphones. Les champs acoustiques discrets pourraient alors être comparés d'un essai à l'autre, pour une analyse de reproductibilité dans un premier temps pour trouver

les invariants du champ acoustique. Dans un second temps les champs émis par des systèmes dans différentes conditions d'opération pourraient également être comparés.

Développement de la DMS et application à des cas plus complexes La méthode de Double Synthèse Modale utilisée dans ces travaux pour la réduction des degrés de liberté au niveau des interfaces de frottement a montré son efficacité. Nous pourrions envisager d'utiliser la base des modes d'interface amortis en calculant les modes d'interfaces avec la matrice extraite de la matrice d'amortissement de Rayleigh. Nous pourrions également étendre la DMS à des cas où les contacts ne se situent plus uniquement au niveau des interfaces de contact. L'introduction de sous-structures supplémentaires comme un étrier entraînerait la création de zones de contact supplémentaires avec les plaquettes. La réduction de ces zones de contact par la DMS permettrait alors la simulation de systèmes beaucoup plus complexes. La méthode DMS se base sur une réduction au voisinage du point d'équilibre, ce qui implique un état de contact particulier entre les surfaces de contact. Lors de l'évolution temporelle du système les états de contact sont parfois amenés à changer. Un enrichissement de la base de réduction DMS en fonction des états de contact peut également être envisagé à partir de ceux qui sont effectivement observés lors des évolutions temporelles car le calcul des modes d'interface pour tous les états de contact n'est pas envisageable et ferait perdre tout l'intérêt de la double réduction.

Modélisation des interfaces plus complète L'une des limitations du modèle est la description simplifiée des surfaces de contact aux interfaces. Les surfaces sont considérées comme totalement lisses et les efforts de contact et de frottement y sont introduits artificiellement. La prise en compte d'effets tribologiques comme de la rugosité, une topographie particulière ainsi que la température permettrait d'avoir une meilleure estimation des interactions qui ont réellement lieu aux interfaces de contact. Ces paramètres supplémentaires pourraient éventuellement intégrer une méthode de réduction DMS étendue où les modes d'interface seraient alors dépendant de paramètres tribologiques.

CONCLUSION

Liste des figures

1	Schéma d'étude numérique du crissement	17
1.1	Représentation de différents systèmes de freins	21
1.2	Classification des bruits émis par des systèmes de frein	23
1.3	Figure de franges d'interférences illustrant la déformée d'un système de frein	25
1.4	Problème mécanique élastique	27
1.5	Lois de contact	29
1.6	Lois de frottement	31
1.7	Modèle de <i>stick/slip</i> à un degré de liberté	32
1.8	Variation du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement	33
1.9	Modèle de <i>sprag/slip</i> à un degré de liberté	33
1.10	Modèle de Hoffmann pour le couplage de modes	34
1.11	Couplage de modes, système de Hoffmann	35
2.1	Vue schématique du banc FIVE@ECL	53
2.2	Banc FIVE@ECL	54
2.3	Disque en acier utilisé lors des essais	55
2.4	Couple de plaquettes F03C	55
2.5	Moyens de mesure expérimentaux sur le banc	56
2.6	Réponse impulsionnelle et pics de résonance du système couplé statique	59
2.7	Réponses temporelles pour les quatre paramètres de contrôle	61
2.8	Evolution du coefficient de frottement apparent lors d'un essai de crissement	62
2.9	Réponses temporelles pour les accéléromètres	62
2.10	Réponses temporelles pour les capteurs de proximité du disque	63
2.11	Réponses temporelles du bruit de crissement sur deux microphones	63
2.12	Transformées de Fourier normalisées des voies de mesure sur l'intervalle $[10; 11]$ s	65
2.13	Transformées de Fourier normalisées des voies de mesure sur l'intervalle $[15; 16]$ s	66
2.14	Transformées de Fourier normalisées des voies de mesure sur l'intervalle $[19; 20]$ s	67
2.15	Protocole global d'essais	69
2.16	Tracé des coefficients de frottement apparents μ_{app}	70
2.17	Pics fréquentiels pour la répétabilité	71
2.18	Moyennes et écarts types fréquentiels pour la répétabilité	72
2.19	Moyennes et écarts types de coefficients de frottement pour l'usure	73
2.20	Pics fréquentiels pour l'usure	74
2.21	Moyennes et écarts types fréquentiels pour l'usure	75
2.22	Moyennes et écarts types de coefficients de frottement pour la pression	76
2.23	Evolutions de la position d'équilibre statique moyenne du disque pour la pression	77
2.24	Pics fréquentiels pour la pression	78
2.25	Moyennes et écarts types fréquentiels pour la pression	79
2.26	Moyennes et écarts types de coefficients de frottement pour la vitesse	80
2.27	Evolutions de la position d'équilibre statique moyenne du disque pour la vitesse	80
2.28	Pics fréquentiels pour la vitesse de rotation	81
2.29	Moyennes et écarts types fréquentiels pour la vitesse de rotation	82

3.1	Modèle Eléments Finis du système de frein simplifié	87
3.2	Schéma des interactions sur les deux interfaces de contact	90
3.3	Distribution des valeurs propres dans le plan complexe	98
3.4	Evolution des parties réelles et imaginaires	98
3.5	Déformées des deux modes propres instables	99
3.6	Evolution du nombre de modes à interfaces fixes en fonction de γ	101
3.7	Evolution des valeurs de μ pour les bifurcations en fonction de γ	101
3.8	Critère d'erreur sur les valeurs propres en fonction de γ	102
3.9	Critère d'erreur sur les valeurs propres instables en fonction de γ	102
3.10	Matrices \mathbf{M}^{MAC} pour la réduction de Craig et Bampton	103
3.11	Fréquences des modes d'interfaces en fonction de leur numéro N_{DMS}	104
3.12	Evolution des valeurs de μ pour les bifurcations en fonction de N_{DMS}	104
3.13	Critère d'erreur sur les valeurs propres en fonction de N_{DMS}	105
3.14	Critère d'erreur sur les valeurs propres instables en fonction de N_{DMS}	105
3.15	Matrices \mathbf{M}^{MAC} pour la réduction DMS	106
4.1	Schéma décrivant la θ -méthode	113
4.2	Système de référence pour le Cas 1	115
4.3	Réduction de Craig et Bampton pour le Cas 1	117
4.4	Réduction DMS pour le Cas 1	119
4.5	Système de référence pour le Cas 2	120
4.6	Réduction CB pour le Cas 2	122
4.7	Réduction DMS pour le Cas 2	124
4.8	Système de référence pour le Cas 3	125
4.9	Réduction CB pour le Cas 3	127
4.10	Réduction DMS pour le Cas 3	128
4.11	Pas d'intégration fin sur le Cas 3, référence intermédiaire	130
4.12	Cas supplémentaire à $\mu = 0.74$ sur le système réduit optimal	131
4.13	Cycles limites et FFT, Cas 1 et réduction CB	133
4.14	Cycles limites et FFT, Cas 1 et réduction DMS	134
4.15	Cycles limites et FFT, Cas 2 et réduction CB	135
4.16	Cycles limites et FFT, Cas 2 et réduction DMS	136
4.17	Cycles limites et FFT, Cas 3 et réduction CB	137
4.18	Cycles limites et FFT, Cas 3 et réduction DMS	138
4.19	Contribution modale, Cas 1 et réduction CB	140
4.20	Contribution modale, Cas 1 et réduction DMS	141
4.21	Contributions modales, Cas 2 et réduction CB	141
4.22	Contributions modales, Cas 2 et réduction DMS	142
4.23	Contributions modales, Cas 3 et réduction CB	143
4.24	Contributions modales, Cas 3 et réduction DMS	144
5.1	Problème acoustique extérieur	149
5.2	Maillage surfacique du système de frein adapté à la formulation BEM	152
5.3	Raccordement des sous structures aux bords des interfaces	152
5.4	Principe de calcul des erreurs relatives successives d_i	155
5.5	Espace des phases x/ω par transformée de Fourier fenêtrée	157
5.6	Espace des phases x/ω par wavelets	159
5.7	Illustration de la décomposition par wavelet 2D d'un motif	162
5.8	Exemples de motifs acoustiques de l'intensité \mathbf{L}_{dB}	164
5.9	Illustration ddes 3 phases d'observation acoustiques	165
5.10	Motifs du plan pour la réduction CB	166
5.11	Motifs de la sphère pour la réduction CB	167
5.12	Motifs du plan pour la réduction DMS	169

5.13	Motifs de la sphère pour la réduction DMS	170
5.14	Illustration de la décomposition par wavelet 2D	171
5.15	Critère d'erreur relative ϵ^{ac} pour les plans	172
5.16	Critère d'erreur relative ϵ^{ac} pour les plans verticaux	173
5.17	Critère d'erreur relative ϵ^{ac} pour les sphères	174
5.18	Critère d'erreur global λ^{ac} pour le cas $\mu = 0.8$	175
5.19	Critère d'erreur global λ^{ac} pour le cas $\mu = 1$	175

Liste des tableaux

2.1	Liste des moyens de mesure : numéro de voie et position de chaque capteur	58
2.2	Symboles utilisés dans les diagrammes de pics fréquentiels	70
3.1	Paramètres du modèle géométrique simplifié	87
3.2	Paramètres de maillage du modèle Eléments Finis simplifié	88
3.3	Pression et paramètres de raideur de contact du modèle retenu	97
4.1	Liste des différents Cas d'étude pour le calcul des vibrations transitoires	111
4.2	Liste des points d'observation	114
4.3	Fréquences pour le Cas 1 et réduction CB	118
4.4	Fréquences pour le Cas 1 et réduction DMS	118
4.5	Fréquences pour le Cas 2 et réduction CB	121
4.6	Fréquences pour le Cas 2 et réduction DMS	123
4.7	Fréquences pour le Cas 3 et réduction CB	126
4.8	Fréquences pour le Cas 3 et réduction DMS	129
4.9	Raies fréquentielles du Cas 3 en régime établi	139
4.10	Contributions modales en régime établi, Cas 2 et réduction DMS	142
4.11	Contributions modales en régime établi, Cas 3 et réduction DMS	144
5.1	Intervalles d'observation CB pour l'acoustique	165
5.2	Intervalles d'observation DMS pour l'acoustique	168

Bibliographie

- [1] *Structural Dynamics Toolbox User's Guide*, SDTools. [87](#)
- [2] ABBASI, S., S. TEIMOURIMANESH, T. VERNERSSON, U. SELLGREN, U. OLOFSSON R. LUNDEN. 2014, «Temperature and thermoelastic instability at tread braking using cast iron friction material», *Wear*, 314, 171–180. [23](#), [24](#), [26](#)
- [3] ABUBAKAR, A. H. OUYANG. 2006, «Complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis in predicting brake squeal», *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 2(2), 143–155. [40](#), [110](#)
- [4] ABUBAKAR, A. H. OUYANG. 2008, «Wear prediction of friction material and brake squeal using the finite element method», *Wear*, 264, 1069–1076. [26](#)
- [5] ACARY, V. 2014, «Energy conservation and dissipation properties of time-integration methods for the nonsmooth elastodynamics with contact», *Research Report RR8602, INRIA*. [43](#), [111](#)
- [6] AKAY, A. 2002, «Acoustics of friction», *Journal of Acoustical Society of America*, 11, 1525–1548. [20](#), [22](#), [23](#), [24](#), [148](#)
- [7] AKAY, A., O. GIANNINI, F. MASSI A. SESTIERI. 2009, «Disc brake squeal characterization through simplified test rigs», *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23, 2590–2607. [24](#), [59](#), [83](#)
- [8] ALLEMANG, R. 2003, «The modal assurance criterion - twenty years of use and abuse», *Sound and Vibration*, Aug, 14–21. [100](#)
- [9] ALLEMANG, R. A. PHILLIPS. 2015, «Techniques for evaluation of modal vector contamination», *Sound and Vibration*, Jan, 8–11. [100](#)
- [10] ANTOINE, J.-P., P. CARRETTE, R. MURENZI B. PIETTE. 1993, «Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform», *Signal Processing*, 31, 241–272. [157](#)
- [11] AUTRIQUE, J. F. MAGOULÈS. 2006, «Studies of an infinite element method for acoustical radiation», *Applied Mathematical Modelling*, 30, 641–655. [50](#)
- [12] BELFORT, B., J. CARRAYROU F. LEHMANN. 2007, «Implementation of richardson extrapolation in an efficient adaptative time stepping method : applications to reactive transport and unsaturated flow in porous media», *Transport in Porous Media*, 69, 123–138. [46](#)
- [13] BENGISU, M. A. AKAY. 1994, «Stability of friction-induced vibrations in multi-degree-of-freedom systems», *Journal of Sound and Vibration*, 171, 557–570. [31](#), [34](#)
- [14] BESSET, S. 2006, *Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l'aide d'une synthèse modale généralisée*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [95](#)
- [15] BESSET, S. J.-J. SINOÛ. 2017, «Modal reduction of brake squeal systems using complex interface modes», *Mechanical Systems and Signal Processing*, 85, 896–911. [92](#), [95](#)
- [16] BONNAY, K., V. MAGNIER, J.-F. BRUNEL, P. DUFRENOY G. DE SAXCÉ. 2015, «Influence of geometry imperfections on squeal noise linked to mode lock-in», *International Journal of Solids and Structures*, 75-76, 99–108. [26](#)
- [17] BONNET, M. 1999, *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. [148](#), [151](#)

- [18] BRIZARD, D., O. CHIELLO, J.-J. SINOÛ X. LORANG. 2011, «Performances of some reduced bases for the stability analysis of a disc/pads system in sliding contact», *Journal of Sound and Vibration*, 330, 703–720. [39](#)
- [19] BRUNETTI, J., F. MASSI, W. D’AMBROGIO Y. BERTHIER. 2016, «A new instability index for unstable mode selection in squeal prediction by complex eigenvalue analysis», *Journal of Sound and Vibration*, 377, 106–122. [40](#)
- [20] BURTON, A. G. MILLER. 1971, «The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems», *Proceedings of the Royal Society of London*, 323, 201–210. [151](#)
- [21] BUTLIN, T. J. WOODHOUSE. 2009, «Sensitivity of friction-induced vibration in idealised systems», *Journal of Sound and Vibration*, 319, 182–198. [32](#)
- [22] BUTLIN, T. J. WOODHOUSE. 2011, «A systematic experimental study of squeal initiation», *Journal of Sound and Vibration*, 330, 5077–5095. [24](#)
- [23] BUTLIN, T. J. WOODHOUSE. 2013, «Friction-induced vibration : Model development and comparison with large-scale experimental tests», *Journal of Sound and Vibration*, 332, 5302–5321. [24](#)
- [24] CANTONE, F. F. MASSI. 2011, «A numerical investigation into the squeal instability : effect of damping», *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25, 1727–1737. [24](#), [25](#), [91](#)
- [25] CHARROYER, L. 2017, *Méthodes numériques pour le calcul des vibrations auto-entretenues liées au frottement. Application au crissement ferroviaire*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [40](#), [43](#), [47](#), [110](#), [111](#)
- [26] CHARROYER, L., O. CHIELLO J.-J. SINOÛ. 2016, «Parametric study of the mode coupling instability for a simple system with planar or rectilinear friction», *Journal of Sound and Vibration*, 384, 94–112. [91](#)
- [27] CHARROYER, L., O. CHIELLO J.-J. SINOÛ. 2018, «Self-excited vibrations of a non-smooth contact dynamical system with planar friction based on the shooting method», *International Journal of Mechanical Sciences*, 144, 90–101. [92](#), [110](#), [111](#)
- [28] CHEVILLOT, F., J.-J. SINOÛ N. HARDOUIN. 2009, «Nonlinear transient vibrations and coexistences of multi-instabilities by friction in an aircraft braking system», *Journal of Sound and Vibration*, 328, 555–574. [92](#)
- [29] CHEVILLOT, F., J.-J. SINOÛ, N. HARDOUIN L. JEZEQUEL. 2010, «Simulations and experiments of a nonlinear aircraft braking system with physical dispersion», *Journal of Vibration and Acoustics*, 132 (4), 041010–11. [39](#), [83](#)
- [30] CHUNG, J. J. LEE. 1994, «a new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics», *International journal for numerical methods in engineering*, 37, 3961–3976. [45](#)
- [31] COUDEYRAS, N. 2009, *Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [47](#), [110](#)

- [32] COUDEYRAS, N., J.-J. SINOÛ S. NACIVET. 2009, «A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, 319, 1175–1199.
- [33] COUDEYRAS, N., J.-J. SINOÛ S. NACIVET. 2009, «Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, 328, 520–540. [47](#), [110](#)
- [34] CRAIG, R. M. BAMPTON. 1968, «Coupling of substructures for dynamic analyses», *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 6, 1313–1319. [37](#)
- [35] DALE, M. M. MAH. 1998, «The use of wavelets for spatial pattern analysis in ecology», *Journal of Vegetation Science*, 9, 805–814. [157](#)
- [36] DAUBECHIES, I. 1988, «Orthonormal bases of compactly supported wavelets», *Communications on pure and applied mathematics*, 41, 909–996. [157](#), [158](#)
- [37] DENIMAL, E. 2018, *Prédiction des instabilités de frottement par méta-modélisation et approches fréquentielles. Application au crissement de frein automobile*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [40](#), [86](#), [92](#)
- [38] DENIMAL, E., S. NACIVET, L. NECHAK J.-J. SINOÛ. 2017, «On the influence of multiple contact conditions on brake squeal», *Procedia Engineering*, 199, 3260–3265. [40](#), [86](#)
- [39] DI BARTOLOMEO, M., G. LACERRA, L. BAILLET, E. CHATELET F. MASSI. 2017, «Parametrical experimental and numerical analysis on friction-induced vibrations by a simple frictional system», *Tribology International*, 112, 47–57. [26](#), [83](#)
- [40] DO, H., F. MASSA, T. TISON B. LALLEMAND. 2017, «A global strategy for the stability analysis of friction induced vibration problem with parameter vibrations», *Mechanical Systems and signal Processing*, 84, 346–364. [40](#), [92](#)
- [41] EARLES, S. 1977, «A mechanism of disc-brake squeal», *Tech. Rep. 770181, SAE, Warrendale, PA*. [24](#)
- [42] EARLES, S. G. SOAR. 1971, «Squeal noise in disc brakes», *Proceedings of the Vibration and Noise in motor vehicles conference, Institution of mechanical engineers*, 61–69. [24](#)
- [43] ELMAIAN, A., F. GAUTIER, C. PEREZAT J. DUFFAL. 2014, «How can automotive friction-induced noises be related to physical mechanisms?», *Applied Acoustics*, 76, 391–401. [22](#)
- [44] FAZIO, O. 2016, *Amélioration de la prédictivité des calculs de crissement de frein*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [24](#), [40](#)
- [45] FAZIO, O., S. NACIVET J.-J. SINOÛ. 2015, «Reduction strategy for a brake system with local frictional non-linearities - application for the prediction of unstable vibration modes», *Applied Acoustics*, 91, 12–24. [40](#)
- [46] FELSKE, A., G. HOPPE H. MATTHAI. 1978, «Oscillations in squealing disc brakes - analysis of vibration modes by holographic interferometry», *Tech. Rep. 780333, SAE*. [24](#)
- [47] FIELDHOUSE, J. T. NEWCOMB. 1996, «Double pulsed holography used to investigate noisy brakes», *Optics and Lasers in Engineering*, 25, 455–494. [24](#)

- [48] FLINT, J. J. HULTEN. 2002, «Lining-deformation-induced modal coupling as squeal generator in a distributed parameter disc brake model», *Journal of Sound and Vibration*, 254, 1–21. [34](#)
- [49] FOSBERRY, R. Z. HOLUBECKI. 1961, «Disc brake squeal : its mechanism and suppression», *Tech. Rep., Motor Industry Research Institution*. [24](#)
- [50] FRITZ, G., J.-J. SINOÛ, J.-M. DUFFAL L. JEZEQUEL. 2007, «Effects of damping on brake squeal coalescence patterns - application on a finite element model», *Mechanics Research Communications*, 34, 181–190. [36](#), [91](#), [98](#)
- [51] FRITZ, G., J.-J. SINOÛ, J.-M. DUFFAL L. JEZEQUEL. 2007, «Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, 307, 591–609. [36](#), [91](#), [98](#)
- [52] GATT, A. 2017, *Instabilités vibratoires des freins aéronautiques : approche transitoire et multi-physique*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [40](#)
- [53] GHADIMI, B., F. KOWSARY M. KHORAMI. 2013, «Thermal analysis of locomotive wheel-mounted brake disc», *Applied Thermal Engineering*, 51, 948–852. [26](#)
- [54] GIANNINI, O., A. AKAY F. MASSI. 2006, «Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup», *Journal of Sound and Vibration*, 292, 1–20. [24](#), [59](#), [83](#)
- [55] GIANNINI, O. F. MASSI. 2008, «Characterization of the high-frequency squeal on a laboratory brake setup», *Journal of Sound and Vibration*, 310, 394–408. [92](#)
- [56] GIANNINI, O. A. SESTIERI. 2006, «Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake», *Journal of Sound and Vibration*, 296, 583–601. [24](#), [39](#)
- [57] GOUPILLAUD, P., A. GROSSMANN J. MORLET. 1984, «Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis», *Geoexploration*, 23, 85–102. [157](#)
- [58] GRAF, M. G. OSTERMEYER. 2011, «Instabilities in the sliding of continua with surface inertias : an initiation mechanism for brake noise», *Journal of Sound and Vibration*, 330, 5269–5279. [26](#)
- [59] GÉRARDIN, M. D. RIXEN. 1997, *Mechanical Vibrations - Theory and application to structural dynamics*. [45](#)
- [60] GRESHO, P., D. GRIFFITHS D. SILVESTER. 2008, «Adaptative time-stepping for incompressible flow part 1 : scalar advection-diffusion», *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30, 2018–2054. [46](#)
- [61] GROSSMANN, A. J. MORLET. 1984, «Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape», *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15, 723–736. [157](#)
- [62] GRZES, P., W. OLIFERUK, A. ADAMOWICZ, K. KOCHANOWSKI, P. WASILEWSKI A. YEVTUSHENKO. 2016, «The numerical-experimental scheme for the analysis of temperature field in a pad-disc braking system of a railway vehicle at single braking», *International Communications in heat and mass transfer*, 75, 1–6. [26](#)
- [63] GUAN, D., X. SU F. ZHANG. 2006, «Sensitivity analysis of brake squeal tendency to substructure’s modal parameters», *Journal of Sound and Vibration*, 291, 72–80. [40](#)

-
- [64] HENRIQUEZ, V. P. JUHL. 2010, «Openbem - an open source boundary element method software in acoustics», *InterNoise2010*. 151
- [65] HENRIQUEZ, V. C. 2001, *Numerical transducer modeling*, Thèse de doctorat, Danish Academy of Technical Sciences. 151
- [66] HETZLER, H. K. WILLNER. 2012, «On the influence of contact tribology on brake squeal», *Tribology international*, 46, 237–246. 26
- [67] HILBER, M., T. HUGHES R. TAYLOR. 1977, «Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics», *Earthquake engineering and structural dynamics*, 5, 283–292. 45
- [68] HINRICHS, N., M. OESTREICH K. POPP. 1998, «On the modelling of friction oscillators», *Journal of Sound and Vibration*, 216, 435–459. 23, 32
- [69] HINTZ, R. M. 1975, «Analytical methods in component modal synthesis», *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 13, 1007–1016. 38
- [70] HOFFMANN, N., M. FISCHER, R. ALLGAIER L. GAUL. 2002, «A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations», *Mechanics Research Communications*, 29, 197–205. 34, 92
- [71] HOFFMANN, N. L. GAUL. 2004, «A sufficient criterion for the onset of sprag-slip oscillations», *Archive of Applied Mechanics*, 73, 650–660. 34
- [72] HUANG, J., C. KROUSGRILL A. BAJAJ. 2006, «Modeling of automotive drum brakes for squeal and parameter sensitivity analysis», *Journal of Sound and Vibration*, 289, 245–263. 92
- [73] IBRAHIM, R. 1994, «Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos part 1 : mechanics of contact and friction», *Applied Mechanics Review*, 47, 209–226. 24
- [74] IBRAHIM, R. 1994, «Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos part 2 : Dynamics and modelling», *Applied Mechanics Review*, 47, 227–253. 24, 31
- [75] J2521, S. I. 2006, «Surface vehicle recommended practice, disc and drum brake dynamometer squeal noise matrix», , Technical report SAE J2521. 23, 61
- [76] JACOBSSON, H. 2003, «Aspects of disc brake judder», *Proceedings of the institution of Mechanical Engineers*, 217, 419–430. 22
- [77] JACQUELIN, E., J.-P. LAINE M. MASSENZIO. 2009, «The antioscillator model and the finite element method», *Journal of Sound and Vibration*, 324, 317–331. 38
- [78] JARVIS, R. B. MILLS. 1963, «Vibrations induced by dry friction», *Proceedings of the institution of Mechanical Engineers*, 178, 847–857. 24, 33
- [79] JEAN, M. 1999, «The non-smooth contact dynamics method», *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 177, 235–257. 43, 111
- [80] JUHL, P. 1993, *The Boudary Element Method for Sound Field Calculations*, Thèse de doctorat, Technical University of Denmark. 151
- [81] JUHL, P. V. HENRIQUEZ. 2015, «Open bem», <http://www.openbem.dk>. [Online]. 153
- [82] KALKER, J. 1991, «Wheel-rail rolling contact theory», *Wear*, 144, 243–261. 28

- [83] KANG, J. 2012, «Finite element modelling for the investigation of in-plane modes and damping shims in disc brake squeal», *Journal of sound and Vibration*, 331, 2190–2202. [40](#)
- [84] KANG, J. 2017, «Automotive brake squeal analysis with rotating finite elements of asymmetric disc in time», *Journal of sound and Vibration*, 393, 388–400. [39](#)
- [85] KASEM, H., J. THEVENET, X. BOIDIN, M. SIROUX, P. DUFRENOY, B. DESMET Y. DESPLANQUES. 2010, «An emissivity-corrected method for the accurate radiometric measurement of transient surface temperatures during braking», *Tribology International*, 43, 1823–1830. [26](#)
- [86] KCHAOU, M., A. MAT LAZIM, M. ABDUL HAMID A. ABU BAKAR. 2017, «Experimental studies of friction-induced brake squeal : Influence of environmental sand particles in the interface brake pad-disc», *Tribology International*, 110, 307–317. [26](#)
- [87] KINDKAID, N., O. O'REILLY P. PAPADOPOULOS. 2003, «Automotive disc brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, 267, 105–166. [22](#), [23](#), [24](#)
- [88] KRUSE, S., M. TIEDMANN, B. ZEUMER, P. REUSS, H. HETZLER N. HOFFMANN. 2015, «The influence of joints on friction induced vibration in brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, 340, 239–252. [40](#)
- [89] KUMAR, M., X. BOIDIN, Y. DESPLANQUES J. BIJWE. 2011, «Influence of various metallic fillers in friction materials on hot-spot appearance during stop braking», *Wear*, 270, 371–381. [26](#)
- [90] LACERRA, G., M. DI BARTOLOMEO, S. MILANA, L. BAILLET, E. CHATELET F. MASSI. 2018, «Validation of a new frictional law for simulating friction-induced vibrations of rough surfaces», *Tribology International*, 121, 468–480. [26](#)
- [91] LAXALDE, D. F. THOUVEREZ. 2009, «Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces», *Journal of Sound and Vibration*, 322, 1009–1025. [39](#)
- [92] LAZIM, A., M. KCHAOU, M. ABDUL HAMID A. ABU BAKAR. 2016, «Squealing characteristics of worn brake pads due to silica sand embedment into their friction layers», *Wear*, 358-359, 123–136. [26](#)
- [93] LEE, H. R. SINGH. 2004, «Determination of sound radiation from a simplified disk-brake rotor by a semi-analytical method», *Noise Control Engineering Journal*, 52, 225–239. [48](#), [148](#)
- [94] LEE, T. 1996, «Image representation using 2d gabor wavelets», *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 18, 959–971. [157](#)
- [95] LESAFFRE, N. 2007, *Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [39](#)
- [96] LIU, Q. J. TAO. 1997, «The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media», *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102, 2072–2082. [49](#)
- [97] LORANG, X. 2007, *Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV*, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique. [25](#), [43](#)

-
- [98] LORANG, X. O. CHIELLO. 2008, «Stability and transient analysis in the modeling of railway disc brake squeal», *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 99, 447–453. [92](#), [139](#)
- [99] LORANG, X., F. FOY-MARGIOCCHI, Q. NGUYEN P. GAUTIER. 2006, «Tgv disc brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, 293, 735–746. [25](#), [92](#)
- [100] LORIS, I., G. NOLET, I. DAUBECHIES F. DAHLEN. 2007, «Tomographic inversion using l1-norm regularization of wavelet coefficients», *Geophysics Journal international*, 170, 359–370. [157](#)
- [101] LOYER, A. 2012, *Etude numerique et experimentale du crissement des systemes de freinage ferroviaires*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [25](#), [43](#)
- [102] LOYER, A., J.-J. SINOUE, O. CHIELLO X. LORANG. 2012, «Study of nonlinear behaviors and modal reductions for friction destabilized systems, applications to an elastic layer», *Journal of Sound and Vibration*, 47, 1011–1041. [25](#), [110](#), [139](#)
- [103] LYON, R. G. MAIDANIK. 1962, «Power flow between linearly coupled oscillators», *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34, 623–639. [48](#)
- [104] MACNEAL, R. 1971, «A hybrid method of component mode synthesis», *Computers and structures*, 1, 581–601. [38](#)
- [105] MAGNIER, V., J.-F. BRUNEL P. DUFRENOY. 2014, «Impact on contact stiffness heterogeneities on friction-induced vibration», *International Journal of Solids and Structures*, 51, 1662–1669. [26](#)
- [106] MAGNIER, V., D. NAIDOO RAMASAMI, J.-F. BRUNEL, P. DUFRENOY T. CHANCELLIER. 2017, «History effect on squeal with a mesoscopic approach to friction materials», *Tribology International*, 115, 600–607. [26](#)
- [107] MAHÉO, L. 2006, *Etude des effets dissipatifs de différents schémas d'intégration temporelle en calcul dynamique par éléments finis*, Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud. [41](#)
- [108] MAJCHERCZAK, D., P. DUFRENOY Y. BERTHIER. 2007, «Tribological, thermal and mechanical coupling aspects of the dry sliding contact», *Tribology International*, 40, 834–843. [26](#)
- [109] MALLAT, S. 1989, «Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models», *IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing*, 37, 2091–2110. [158](#), [159](#)
- [110] MALLAT, S. 1989, «A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation», *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 11, 674–693. [158](#), [159](#)
- [111] MASSI, F., Y. BERTHIER L. BAILLET. 2008, «Contact surface topography and system dynamics of brake squeal», *Wear*, 11-12, 1784–1792. [24](#), [26](#)
- [112] MASSI, F., O. GIANNINI L. BAILLET. 2006, «Brake squeal as dynamic instability : An experimental investigation», *The Journal of the Acoustic Society of America*, 120, 1388–1398. [24](#), [59](#), [91](#)
- [113] MILLS, H. 1938, «Brake squeal», *Tech. Rep., Institution of Automobile Engineers*. [24](#)

- [114] MINH, D. 2015, *HDR - Réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques*. 36
- [115] MOIROT, F. Q. NGUYEN. 2000, «Brake squeal : a problem of flutter instability of the steady sliding solution?», *Archives of Mechanics*, 52, 645–661. 34
- [116] MOIROT, F. Q. NGUYEN. 2000, «An example of stick-slip waves», *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 328, 663–669. 31
- [117] MONTEIL, M., S. BESSET J.-J. SINOÛ. 2016, «A double modal synthesis approach for brake squeal prediction», *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70-71, 1073–1084. 95
- [118] NACIVET, S. J.-J. SINOÛ. 2017, «Modal amplitude stability analysis and its application to brake squeal», *Applied Acoustics*, 116, 127–138. 40
- [119] NASARUDDIN, M., M. ABDUL HAMID, A. MAT LAZIM A. ABU BAKAR. 2013, «Effects of external hard particles on brake noise of disc braking system», *Applied Mechanics and Materials*, 388, 213–216. 26
- [120] NECHAK, L., F. GILLOT, S. BESSET J.-J. SINOÛ. 2015, «Sensitivity analysis and kriging based models for robust stability analysis of brake systems», *Mechanics Research Communications*, 69, 136–145. 40
- [121] NOBARI, A., H. OUYANG P. BANNISTER. 2015, «Statistics of complex eigenvalues in friction-induced vibration», *Journal of Sound and Vibration*, 338, 169–183. 40
- [122] OBERST, S. J. LAI. 2011, «Chaos in brake squeal noise», *Journal of Sound and Vibration*, 330, 955–975. 24
- [123] OBERST, S. J. LAI. 2011, «Statistical analysis of brake squeal noise», *Journal of Sound and Vibration*, 330, 2978–2994. 24
- [124] OBERST, S. J. LAI. 2015, «Nonlinear transient and chaotic interactions in disc brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, 342, 272–289. 40
- [125] OBERST, S. J. LAI. 2015, «Squeal noise in simple numerical brake models», *Journal of Sound and Vibration*, 352, 129–141. 148
- [126] OBERST, S. J. LAI. 2015, «A statistical approach to estimate the lyapunov spectrum in disc brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, 334, 120–135. 40
- [127] OBERST, S., J. LAI S. MARBURG. 2013, «Guidelines for numerical vibration and acoustic analysis of disc brake squeal using simple models of brake systems», *Journal of Sound and Vibration*, 332, 2284–2299. 48, 148, 152
- [128] ODEN, J. J. MARTINS. 1985, «Models and computational methods for dynamic friction phenomena», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52, 527–634. 34
- [129] OUYANG, H. J. MOTTERSHEAD. 2001, «Unstable travelling waves in the friction-induced vibration of discs», *Journal of Sound and Vibration*, 248, 768–779. 34
- [130] OUYANG, H., J. MOTTERSHEAD, M. CARTMELL M. FRISWELL. 1998, «Friction-induced parametric resonances in discs : effect of a negative friction-velocity relationship», *Journal of Sound and Vibration*, 209(2), 251–264. 24

- [131] OUYANG, H., J. MOTTERSHEAD, S. JAMES M. CARTMELL. 2000, «A methodology for the determination of dynamic instabilities in a car disc brake», *International Journal of Vehicle Design*, 23, 241–262. [39](#)
- [132] OUYANG, H., W. NACK, Y. YUAN F. CHEN. 2005, «Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review», *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 1, 207–231. [34](#)
- [133] PANIER, S., P. DUFRENOY D. WEICHERT. 2004, «An experimental investigation of hot spots in railway disc brakes», *Wear*, 256, 764–773. [26](#)
- [134] PIERINGER, A. 2014, «A numerical investigation of curve squeal in the case of constant wheel/rail friction», *Journal of Sound and Vibration*, 333, 4295–4313. [26](#)
- [135] PIERINGER, A., W. KROPP J. NIELSEN. 2014, «The influence of contact modelling on simulated wheel/rail interaction due to wheel flats», *Wear*, 314, 273–281. [28](#)
- [136] PIERINGER, A., W. KROPP D. THOMPSON. 2011, «Investigation of the dynamic contact filter effect in vertical wheel/rail interaction using a 2d and a 3d non-hertzian contact model», *Wear*, 271, 328–338. [26](#), [28](#)
- [137] POLETTI, J.-C., P. NEIS, N. FERREIRA, D. MASOTTI L. MATOZO. 2017, «An experimental analysis of the methods for brake squeal quantification», *Applied Acoustics*, 122, 107–112. [23](#)
- [138] QI, Q. T. GEERS. 1998, «Evaluation of the perfectly matched layer for computational acoustics», *Journal of Computational Physics*, 139, 166–183. [49](#)
- [139] RENAUD, F., G. CHEVALLIER, J.-L. DION G. TAUDIERE. 2012, «Motion capture of a pad measured with accelerometers during squeal noise in a real brake system», *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3, 155–166. [24](#)
- [140] RENAULT, A., F. MASSA, B. LALLEMAND T. TISON. 2016, «Experimental investigations for uncertainty quantification in brake squeal analysis», *Journal of Sound and Vibration*, 367, 37–55. [24](#), [83](#)
- [141] VERMOT DES ROCHES, G. 2011, *Frequency and time simulation of squeal instabilities. Application to the design of industrial automotive brakes*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris. [40](#)
- [142] SARROUY, E., O. DESSOMBZ J.-J. SINOÛ. 2013, «Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear brake system», *Journal of Sound and Vibration*, 332, 577–594. [40](#)
- [143] SARROUY, E., O. DESSOMBZ J.-J. SINOÛ. 2013, «Stochastic study of a non-linear self-excited system with friction», *European Journal of Mechanics A/Solids*, 40, 1–10. [40](#)
- [144] SCHENCK, H. 1968, «Improved integral formulation for acoustic radiation problems», *The journal of the Acoustical Society of America*, 44, 41–58. [151](#)
- [145] SINOÛ, J.-J. 2002, *Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [25](#), [34](#), [39](#), [92](#)
- [146] SINOÛ, J.-J. 2010, «Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal – on the need to consider both stability and non-linear analysis», *Mechanics Research Communications*, 37, 96–105. [40](#), [50](#), [92](#), [110](#)

- [147] SINOÛ, J.-J. S. BESSET. 2017, «Simulation of transient nonlinear friction-induced vibrations using complex interfaces modes : application to the prediction of squeal events», *Shock and Vibrations*. [92](#), [95](#)
- [148] SINOÛ, J.-J., O. DEREURE, G.-B. MAZET, F. THOUVEREZ L. JEZEQUEL. 2006, «Friction-induced vibration for an aircraft brake system - part 1 : Experimental approach and stability analysis», *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(5), 536–554. [25](#), [92](#)
- [149] SINOÛ, J.-J., D. LENOIR, S. BESSET F. GILLOT. 2018, «Dataset of vibrational and acoustic measurements for squeal analysis from the laboratory brake setup friction-induced vibration and noise at ecole centrale de lyon (five@ecl)», *Data in Brief*, 21, 639–643. [52](#)
- [150] SINOÛ, J.-J., D. LENOIR, S. BESSET F. GILLOT. 2018, «Squeal analysis based on the laboratory experimental bench 'friction-induced vibration and noise at ecole centrale de lyon' (five@ecl)», *Mechanical Systems and Signal Processing*, 119, 561–588. [52](#), [59](#)
- [151] SINOÛ, J.-J., A. LOYER, O. CHIELLO, G. MOGENIER, X. LORANG, F. COCHETEUX S. BELLAJ. 2013, «A global strategy based on experiments and simulations for squeal prediction on industrial railway brakes», *Journal of Sound and Vibration*, 332(20), 5068–5085. [83](#), [139](#)
- [152] SINOÛ, J.-J., F. THOUVEREZ L. JEZEQUEL. 2004, «Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation», *Archives of computational methods in engineering*, 11(3), 255–342. [38](#)
- [153] SOOBBARAYEN, K. 2014, *Dynamique non linéaire et rayonnement acoustique de structures comportant des interfaces frottantes*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. [92](#), [97](#), [148](#), [152](#), [154](#)
- [154] SOOBBARAYEN, K., S. BESSET J.-J. SINOÛ. 2013, «Noise and vibration for a self-excited mechanical system with friction», *Applied Acoustics*, 74, 1191–1204. [110](#)
- [155] SOOBBARAYEN, K., S. BESSET J.-J. SINOÛ. 2015, «A simplified approach for the calculation of acoustic emission in the case of friction-induced noise and vibration», *Mechanical Systems and Signal Processing*, 50-51, 732–756. [39](#), [148](#)
- [156] SOOBBARAYEN, K., J.-J. SINOÛ S. BESSET. 2014, «Numerical study of friction-induced instability and acoustic radiation - effect of ramp loading on the squeal propensity for a simplified brake model», *Journal of Sound and Vibration*, 333, 5475–5493. [92](#), [97](#)
- [157] SPELSBERG-KORSPETER, G. 2012, «Eigenvalue optimization against brake squeal : Symmetry, mathematical background and experiments», *Journal of Sound and Vibrations*, 331, 4259–4268. [34](#)
- [158] SPURR, R. 1961, «A theory of brake squeal», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1, 33–52. [23](#), [24](#), [31](#), [33](#)
- [159] VON WAGNER, U., D. HOCHLENERT P. HAGEDORN. 2007, «Minimal models for disc brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, 302, 527–539. [34](#)
- [160] WANG, D., J. MO, M. LIU, H. OUYANG Z. ZHOU. 2016, «Noise performance improvements and tribological consequences of a pad-on-disc system through groove-textured disc surface», *Tribology International*, 102, 222–236. [26](#)

- [161] WU, S., S. ZHANG Z. XU. 2016, «Thermal crack growth-based fatigue life prediction due to braking for a high-speed railway brake disc», *International Journal of Fatigue*, 87, 359–369. [26](#)
- [162] WULLENS, F. W. KROPP. 2004, «A three-dimensional contact model for tyre/road interaction in rolling conditions», *Acta Acustica united with Acustica*, 90, 702–711. [28](#)
- [163] ZHANG, Z., S. OBERST . J. LAI. 2016, «On the potential of uncertainty analysis for prediction of brake squeal propensity», *Journal of Sound and Vibration*, 377, 123–132. [40](#)
- [164] ZIENKIEWICZ, O. R. TAYLOR. 2000, *The Finite Element Method*. [28](#)

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur J-J. SINOÛ

et les rapports de

M. J-F. DEU

Professeur - CNAM Paris - LMSSC Mécanique - case courrier 2D6R10 - 292 rue Saint-Martin
75141 Paris cedex 03

et de

J-L. DION

Professeur - Supméca Saint-Ouen - Vibration Acoustique et Structures - 3 rue Fernand Hainaut
93400 Saint-Ouen

Monsieur CORRADI Grégoire

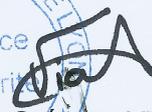
est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 2 décembre 2019

P/Le directeur de l'E.C.L.
Le directeur des Etudes




Grégory VIAL