



HAL
open science

Contribution à l'étude de la mise en forme de renforts secs unidirectionnels HiTape® pour structures primaires aéronautiques

Laure Bouquerel

► To cite this version:

Laure Bouquerel. Contribution à l'étude de la mise en forme de renforts secs unidirectionnels HiTape® pour structures primaires aéronautiques. Autre. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSEM014 . tel-02878705

HAL Id: tel-02878705

<https://theses.hal.science/tel-02878705>

Submitted on 23 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : 2019LYSEM014

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée au sein de
l'Ecole des Mines de Saint-Etienne

Ecole Doctorale N° 488
Sciences, Ingénierie, Santé

Spécialité de doctorat : Mécanique et Ingénierie

Soutenue publiquement le 25/06/2019, par :
Laure BOUQUEREL

**Contribution à l'étude de la mise en
forme de renforts secs unidirectionnels
HiTape® pour structures primaires
aéronautiques**

Devant le jury composé de :

Jean-Philippe PONTHOT	Professeur	Université de Liège	Président
Jean-Claude GRANDIDIER	Professeur	ENSMA	Rapporteur
Laurent ORGEAS	Directeur de recherche CNRS	Laboratoire 3SR	Rapporteur
Damien SOULAT	Professeur	Gemtex	Examineur
Sylvain DRAPIER	Professeur	Mines Saint-Etienne	Directeur de thèse
Philippe BOISSE	Professeur	INSA-Lyon	Co-directeur de thèse
Nicolas MOULIN	Maître-assistant	Mines Saint-Etienne	Co-encadrant
Jean-Marc BERAUD	R&T Reinforcements & Thermoplastic director	Hexcel Reinforcements	Encadrant industriel

Spécialités doctorales
 SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX
 MECANIQUE ET INGENIERIE
 GENIE DES PROCEDES
 SCIENCES DE LA TERRE
 SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT

Responsables :
 K. Wolski Directeur de recherche
 S. Drapier, professeur
 F. Gruy, Maître de recherche
 B. Guy, Directeur de recherche
 D. Graillot, Directeur de recherche

Spécialités doctorales
 MATHEMATIQUES APPLIQUEES
 INFORMATIQUE
 SCIENCES DES IMAGES ET DES FORMES
 GENIE INDUSTRIEL
 MICROELECTRONIQUE

Responsables
 O. Roustant, Maître-assistant
 O. Boissier, Professeur
 JC. Pinoli, Professeur
 N. Absi, Maître de recherche
 Ph. Lalevé, Professeur

EMSE : Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)

ABSI	Nabil	MR	Génie industriel	CMP
AUGUSTO	Vincent	CR	Image, Vision, Signal	CIS
AVRIL	Stéphane	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
BADEL	Pierre	MA(MDC)	Mécanique et ingénierie	CIS
BALBO	Flavien	PR2	Informatique	FAYOL
BASSEREAU	Jean-François	PR	Sciences et génie des matériaux	SMS
BATTON-HUBERT	Mireille	PR2	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BEIGBEDER	Michel	MA(MDC)	Informatique	FAYOL
BLAYAC	Sylvain	MA(MDC)	Microélectronique	CMP
BOISSIER	Olivier	PR1	Informatique	FAYOL
BONNEFOY	Olivier	PR	Génie des Procédés	SPIN
BORBELY	Andras	MR(DR2)	Sciences et génie des matériaux	SMS
BOUCHER	Xavier	PR2	Génie Industriel	FAYOL
BRODHAG	Christian	DR	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BRUCHON	Julien	MA(MDC)	Mécanique et ingénierie	SMS
CAMEIRAO	Ana	MA(MDC)	Génie des Procédés	SPIN
CHRISTIEN	Frédéric	PR	Science et génie des matériaux	SMS
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR1	Génie Industriel	CMP
DEBAYLE	Johan	MR	Sciences des Images et des Formes	SPIN
DEGEORGE	Jean-Michel	MA(MDC)	Génie industriel	Fayol
DELAFOSSE	David	PR0	Sciences et génie des matériaux	SMS
DELORME	Xavier	MA(MDC)	Génie industriel	FAYOL
DESRAYAUD	Christophe	PR1	Mécanique et ingénierie	SMS
DJENIZIAN	Thierry	PR	Science et génie des matériaux	CMP
BERGER-DOUCE	Sandrine	PR1	Sciences de gestion	FAYOL
DRAPIER	Sylvain	PR1	Mécanique et ingénierie	SMS
DUTERTRE	Jean-Max	MA(MDC)		CMP
EL MRABET	Nadia	MA(MDC)		CMP
FAUCHEU	Jenny	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	SMS
FAVERGEON	Loïc	CR	Génie des Procédés	SPIN
FEILLET	Dominique	PR1	Génie Industriel	CMP
FOREST	Valérie	MA(MDC)	Génie des Procédés	CIS
FRACZKIEWICZ	Anna	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	MR(DR2)	Sciences de la Terre	SPIN
GAVET	Yann	MA(MDC)	Sciences des Images et des Formes	SPIN
GERINGER	Jean	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	CIS
GOEURIOT	Dominique	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GONDRAN	Natacha	MA(MDC)	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
GONZALEZ FELIU	Jesus	MA(MDC)	Sciences économiques	FAYOL
GRAILLOT	Didier	DR	Sciences et génie de l'environnement	SPIN
GROSSEAU	Philippe	DR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	PR1	Génie des Procédés	SPIN
HAN	Woo-Suck	MR	Mécanique et ingénierie	SMS
HERRI	Jean Michel	PR1	Génie des Procédés	SPIN
KERMOUCHE	Guillaume	PR2	Mécanique et Ingénierie	SMS
KLOCKER	Helmut	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
LAFOREST	Valérie	MR(DR2)	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
LERICHE	Rodolphe	CR	Mécanique et ingénierie	FAYOL
MALLIARAS	Georges	PR1	Microélectronique	CMP
MOLIMARD	Jérôme	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
MOUTTE	Jacques	CR	Génie des Procédés	SPIN
NAVARRO	Laurent	CR		CIS
NEUBERT	Gilles			FAYOL
NIKOLOVSKI	Jean-Pierre	Ingénieur de recherche	Mécanique et ingénierie	CMP
NORTIER	Patrice	PR1	Génie des Procédés	SPIN
O CONNOR	Rodney Philip	MA(MDC)	Microélectronique	CMP
PICARD	Gauthier	MA(MDC)	Informatique	FAYOL
PINOLI	Jean Charles	PR0	Sciences des Images et des Formes	SPIN
POURCHEZ	Jérémy	MR	Génie des Procédés	CIS
ROUSSY	Agnès	MA(MDC)	Microélectronique	CMP
ROUSTANT	Olivier	MA(MDC)	Mathématiques appliquées	FAYOL
SANAUR	Sébastien	MA(MDC)	Microélectronique	CMP
SERRIS	Eric	IRD		FAYOL
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences et génie des matériaux	SMS
TRIA	Assia	Ingénieur de recherche	Microélectronique	CMP
VALDIVIESO	François	PR2	Sciences et génie des matériaux	SMS
VIRICELLE	Jean Paul	DR	Génie des Procédés	SPIN
WOLSKI	Krzysztof	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR0	Génie industriel	CIS
YUGMA	Gallian	CR	Génie industriel	CMP

À ma famille

Remerciements

Ce document constitue l'aboutissement de trois années de travail partagées entre Hexcel et l'Ecole des Mines de Saint-Etienne. Je tiens par ces quelques lignes à remercier toutes les personnes qui m'ont accompagnée, de près ou de loin, sur tout ou partie du chemin.

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à mon directeur de thèse Sylvain Drapier, professeur à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, pour son niveau d'exigence et sa rigueur intellectuelle, mais aussi pour les encouragements prodigués aux bons moments – je me souviendrai de l'histoire du petit oiseau de Terence Hill (*Mon Nom est Personne*)! Je remercie également particulièrement mon encadrant Nicolas Moulin, maître-assistant à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, pour son positivisme autant que pour sa patience et son temps pour mes multiples « petites questions » de code ou autre. Je les remercie conjointement pour leur implication et leur disponibilité, autant que pour le plaisir que j'ai eu à travailler avec eux. A leurs côtés j'ai beaucoup appris, tant d'un point de vue scientifique qu'humain. Je remercie également Philippe Boisse, professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, pour les moments d'échanges que nous avons eus, et pour avoir partagé ses compétences techniques sur le sujet.

Je souhaite également exprimer ma gratitude à Jean-Marc Béraud, directeur R&T Renforts et Thermoplastiques au sein de la société Hexcel Renforcements, pour m'avoir fait confiance pour ce projet de thèse, ainsi que pour la liberté accordée pour l'épanouissement des idées.

J'adresse mes plus vifs remerciements M. Jean-Philippe Ponthot, professeur à l'Université de Liège, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je remercie également Jean-Claude Grandidier, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique à Poitiers, et Laurent Orgéas, directeur de recherche CNRS au laboratoire 3SR à Grenoble, pour avoir accepté la tâche d'être rapporteurs de ce manuscrit, ainsi que Damien Soulat, professeur au Gemtex à Roubaix, pour avoir participé à mon jury. Je les remercie sincèrement d'avoir pris le temps de s'intéresser à ce travail de thèse, autant que pour les discussions étoffées et pleines de perspectives que nous avons pu avoir.

Cette thèse a été l'occasion de nombreux échanges avec mes collègues d'Hexcel, et je tiens à les remercier pour leur temps et leur sympathie. Je pense tout particulièrement à Maxime, que je remercie chaleureusement d'abord pour le support et la connaissance technique apportés pour la réalisation des bancs et la mise au point des méthodes notamment, mais aussi pour son soutien infailible, et les moments d'échanges que nous avons eus. Je pense également à Thomas et Jacques au début, qui m'ont accueillie dans le monde de la mise en forme.

Du côté des Mines, je souhaite remercier toutes les personnes qui ont rendu le quotidien plaisant et m'ont fait verser quelque larmes au moment de tourner cette page ! Je pense bien sûr à l'équipe de choc « Lo-Ko-Lau-Ma », à la fois pour nos discussions passées à réfléchir sur les problèmes des uns ou d'autres et pour l'amitié que nous avons construite et qui nous a permis de nous enrichir les uns des autres, mais aussi à Arnaud et ses entraînements sportifs, Inès et nos discussions, Daniella et son sourire, Dominique et ses attentions, Julien et nos discussions tensorielles animées, François et sa motivation sans bornes, Patrick et ses blagues, Mathieu et ses gâteaux, et tous les autres. Je leur souhaite bonne continuation dans leurs vie personnelles et professionnelles.

Enfin, je remercie affectueusement tous les membres de ma famille pour leurs conseils et leurs encouragements, sans bornes et à tout moment, ainsi que Benoît qui m'a accompagnée pendant ces trois ans, avec sa force incroyable et son optimisme infini.

Einstein's Three Rules of Work:

*Out of clutter, find simplicity;
From discord make harmony; and finally
In the middle of difficulty lies opportunity.*

Interview de John Archibald Wheeler dans Cosmic Search, Vol. 1, No. 4

Table des matières

Remerciements	v
Table des matières	xiii
Table des figures	xv
Liste des tableaux	xxiii
Liste des acronymes	xxv
Liste des symboles	xxvii
Préambule	1
I Introduction générale	5
1 Du contexte au besoin	7
1.1 Mise en œuvre des matériaux composites structuraux	8
1.1.1 Structure des matériaux composites hautes performances	8
1.1.2 Mise en œuvre par procédés directs et indirects	10
1.1.3 Drapage et mise en forme des renforts	13
1.1.4 Enjeux de la mise en forme des renforts secs	15
1.2 Position de l'étude	16
1.2.1 Contexte industriel	16
1.2.2 Contexte académique et objectif de la thèse	17
1.3 Modélisation et simulation de la mise en forme des renforts	18
1.3.1 Choix d'une échelle de représentation	18
1.3.2 Présentation des approches à l'échelle du pli	19
1.4 Démarche du travail	21
II Caractérisation expérimentale : étude bibliographique, mise en place d'essais, exploitation	23
2 Etat de l'art de la caractérisation du comportement mécanique des renforts	25

2.1	Les différentes sollicitations auxquelles les renforts peuvent être soumis	27
2.2	Réponses à des sollicitations intra-plis	29
2.2.1	Traction longitudinale	29
2.2.2	Traction transverse plane	30
2.2.3	Compaction	30
2.2.4	Cisaillement plan	33
2.2.5	Cisaillements transverses hors-plan	35
2.2.6	Flexion	36
2.3	Réponses à des sollicitations inter-plis	40
2.3.1	Glissement inter-ply	40
2.3.2	Adhésion/décohésion inter-ply	45
2.4	Conclusion du chapitre : synthèse de l'état de l'art et stratégie adoptée	46
2.4.1	Synthèse de la littérature	46
2.4.2	Stratégie de modélisation du renfort HiTape®	47
2.4.3	Stratégie de caractérisation du renfort HiTape®	47
3	Caractérisation du comportement intra-ply du renfort HiTape®	49
3.1	Réponses du renfort HiTape® à des sollicitations intra-plis	50
3.1.1	Traction longitudinale	50
3.1.2	Traction transverse plane	51
3.1.3	Compaction	51
3.1.4	Cisaillement plan	52
3.1.5	Cisaillements transverses hors-plan	53
3.1.6	Flexion	53
3.2	Mise en place d'un essai de flexion	55
3.2.1	Cahier des charges	55
3.2.2	Description du montage	55
3.2.3	Procédure	56
3.2.4	Validation de la procédure	59
3.3	Résultats expérimentaux de flexion	64
3.3.1	Caractéristiques des essais	64
3.3.2	Essais sur pli unitaire	64
3.3.3	Essais sur empilements	67
4	Caractérisation du comportement inter-ply du renfort HiTape®	71
4.1	Réponses du renfort HiTape® à des sollicitations inter-plis	72
4.1.1	Adhésion/décohésion inter-ply	72
4.1.2	Glissement inter-ply	73
4.2	Mise en place d'un essai de frottement inter-ply	74
4.2.1	Cahier des charges	74
4.2.2	Description du montage	74
4.2.3	Procédure	75
4.2.4	Validation de la procédure	76
4.3	Résultats expérimentaux de frottement inter-ply	78
4.3.1	Caractéristiques des essais	78
4.3.2	Résultats	79

4.3.3	Discussion	80
III	Modélisation mécanique et numérique, implémentation, validation	83
5	Modélisation mécanique du comportement du renfort	85
5.1	Mécanique des milieux continus en grandes transformations	87
5.1.1	Description de la géométrie et de la cinématique	87
5.1.2	Métrie et mesure des déformations	89
5.1.3	Description des contraintes	90
5.1.4	Equations de conservation et formulation du problème mécanique	91
5.1.5	Loi de comportement	93
5.2	Formulation hyperélastique	95
5.2.1	Des fondements thermodynamiques à la loi hyperélastique . . .	95
5.2.2	Loi constitutive hyperélastique générale	97
5.2.3	Conditions sur le potentiel	97
5.2.4	Premiers potentiels hyperélastiques pour décrire un comporte- ment isotrope transverse	99
5.2.5	Ecriture du potentiel en fonction d'invariants « physiques » . . .	101
5.3	Modélisation mécanique du comportement de l'intra-pli du renfort Hi- Tape®	105
5.3.1	Lien entre la caractérisation expérimentale et la modélisation de l'intra-pli	105
5.3.2	Identification des potentiels	106
5.3.3	Perspective : description du comportement de flexion spécifique	109
5.4	Modélisation mécanique du comportement de l'interface entre les plis du HiTape®	113
5.4.1	Retour sur le cadre thermodynamique en présence d'une inter- face et de phénomènes de dissipation	113
5.4.2	Potentiels	116
5.4.3	Caractérisation des constantes	122
6	Modélisation numérique et résolution par la MEF du problème de l'équilibre d'un solide hyperélastique en grandes transformations	125
6.1	Formulation et résolution du problème mécanique avec un solide hyper- élastique	126
6.1.1	Formulation	126
6.1.2	Discrétisation et approximation éléments finis	129
6.1.3	Résolution	130
6.2	Implémentation et validation de la loi hyperélastique	132
6.2.1	Implémentation	132
6.2.2	Validation de l'implémentation	132
6.2.3	Cohérence des résultats dans le cas des petites perturbations . .	135
6.3	Simulation de l'essai de flexion	137
6.3.1	Description du cas-test 6-B	137

6.3.2	Cas d'un comportement isotrope	138
6.3.3	Cas d'un comportement dominé par la direction des fibres	138
6.4	Perspective : description du comportement de flexion spécifique dans un cadre éléments finis	141
7	Modélisation numérique et résolution par la MEF du problème de l'équilibre de deux solides hyperélastiques en contact initialement	145
7.1	Formulation du problème mécanique avec deux solides en contact avec frottement et adhésion	146
7.1.1	Formulation du problème de minimisation sous contrainte	146
7.1.2	Méthode du Lagrangien augmenté	148
7.2	Formulation et résolution du problème mécanique de deux solides en contact avec adhésion (sans frottement)	150
7.2.1	Formulation	150
7.2.2	Discrétisation	155
7.2.3	Résolution	157
7.2.4	Illustration du comportement de l'élément fini mixte de Lorentz et limites pour notre application	158
7.3	Comparaison entre les éléments d'interface et un algorithme de contact pour la description de l'inter-ply	166
7.3.1	Introduction à la modélisation numérique du contact	166
7.3.2	Cas-test 7-C : sollicitation tangentielle	168
7.3.3	Cas-test 7-D : sollicitation en flexion	173
7.3.4	Conclusion	176
7.4	Formulation et résolution du problème mécanique de deux solides en contact avec frottement (sans adhésion)	177
7.4.1	Formulation du problème	178
7.4.2	Discrétisation et résolution	181
7.4.3	Implémentation de la loi de contact unilatéral couplé au frottement	182
7.4.4	Validation de la loi de contact unilatéral couplé au frottement	182
7.5	Défis et perspectives	187
7.5.1	Description de la physique du comportement	187
7.5.2	Défis numériques liés à la résolution du problème	188
	Conclusion générale	193
	Annexes	200
A	Potentiels hyperélastiques orthotropes	203
A.1	Saint-Venant, une généralisation de la loi de Hooke	203
A.2	En fonction des invariants classiques du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit	203
A.3	En fonction d'invariants « physiques » du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit	204

B Calcul tensoriel : les invariants et leurs dérivées dans le cas d'un	
matériau isotrope transverse	205
B.1 Invariants classiques	205
B.2 Invariants physiques	205
B.3 Dérivées premières des invariants classiques	206
B.4 Dérivées premières des invariants physiques	206
B.5 Dérivées secondes des invariants physiques	207
B.5.1 Expressions analytiques calculées par nos soins	207
B.5.2 Calcul par perturbation	208
C Évolutions du potentiel hyperélastique et des invariants physiques en	
fonction des invariants classiques	211
D Méthode de résolution par pilotage en longueur d'arc	215
Bibliographie	219

Table des figures

i	Temps et coûts cumulatifs alloués au cours du cycle de vie complet d'une pièce composite structurelle d'après [3,4]	2
1.1	Exemples de renforts : nappe unidirectionnelle (a), tissu sergé (b), tissu taffetas (c) et renfort multiaxial de type <i>non-crimp fabric</i> (d).	9
1.2	Les différentes étapes de la mise en œuvre des matériaux composites par procédés indirects traditionnels.	11
1.3	Les différentes étapes de la mise en œuvre des matériaux composites par procédés directs.	11
1.4	Exemples de pièces aéronautiques structurelles mises en œuvre par procédés directs : longeron de l'aileron de l'Airbus A380 par RTM [6] (a) et porte de cargo de l'Airbus A400M (b).	12
1.5	Différentes options pour l'étape de drapage des renforts UD (en complément des figures 1.2 et 1.3) : drapage manuel [6], dépose automatisée ATL (machine MAG Industrial Automation Systems), placement de fibres AFP (machine MTorres).	14
1.6	Machine de formage à chaud de LT Machines.	15
1.7	Les différentes étapes de la mise en forme d'un empilement de renforts secs par double membrane à chaud : mise en place (a), compaction entre les deux membranes (b), montée en température (c), mise en forme (d), refroidissement et démoulage (e).	15
1.8	Schémas des principaux défauts pouvant apparaître lors de la mise en forme : ondulation hors-plan (a), plissement hors plan (b), ondulation plane (c), défaut d'alignement (d), décohésion ou ouverture (e), rupture de fibre ou de pli (f).	16
1.9	Structure du renfort HiTape® (a) et comparaison de ses propriétés avec celles d'un pré-imprégné de référence (b) [13].	17
1.10	Les différentes échelles de représentation pour la mise en forme des renforts d'après [18,19].	19
1.11	Détermination de la position du point C connaissant celles de A et de B dans la méthode du filet [10].	20
1.12	Une particule « O » connectée à ses quatre voisins (a), avec modélisation de l'élongation (b), du cisaillement (c, d) et de la flexion (e) [21].	20
1.13	Approche semi-discrète pour un interlock [26] (a) et pour un NCF [27] (b).	22
2.1	Le renfort HiTape® présente la structure d'un paquet de fibre à l'échelle d'un pli (image fibre [18] ; image mèches [28]).	26
2.2	Illustration [13] (a) et modélisation (b) de la structure du renfort HiTape®, intermédiaire entre les renforts secs et pré-imprégnés.	27

2.3	Diverses sollicitations intra-pilis des renforts représentées dans la base \mathcal{B} : traction longitudinale (a), traction transverse plane (b), compaction (c), cisaillement plan (d) et cisaillements transverses hors-plan (e-f), et flexion hors-plan longitudinale et transverse (g-h).	28
2.4	Diverses sollicitations de l'interface entre les couches de renforts représentées dans la base \mathcal{B} : glissement inter-pili (a) et décohésion (b).	28
2.5	Comparaison du comportement en traction d'une mèche et d'un tissu [31].	29
2.6	Photographies d'un essai de traction transverse plane sur un empilement de 4 plis pré-imprégnés UD carbone/époxy de même orientation : état initial (a) et courant (b) [33] – la direction de sollicitation est indiquée en rouge, et le phénomène de décohésion est mis en évidence.	30
2.7	Exemple d'un banc de caractérisation en compaction [19].	31
2.8	Exemples de résultats de divers types de renforts sollicités en compaction [36].	32
2.9	Représentation schématique de la relation entre la contrainte, l'épaisseur de la préforme et le temps en présence de relaxation (a), d'influence de la vitesse de sollicitation (b) et d'un phénomène d'hystérésis (c) d'après [43].	33
2.10	Schémas des deux méthodes les plus communes de caractérisation du cisaillement plan : <i>picture-frame test</i> (a) et <i>bias-extension test</i> (b) d'après [46] – la direction de sollicitation est indiquée en rouge.	34
2.11	Exemples d'échantillons unidirectionnels testés en cisaillement plan avec le <i>picture-frame test</i> sur un empilement de 4 plis UD carbone/époxy de même orientation [33] (a) dans la configuration initiale (à gauche), et avec un angle de cisaillement d'environ 2° (au milieu) et 40° (à droite), et avec le <i>bias-extension test</i> sur un empilement croisé UD carbone/époxy [48] (b) – la direction de sollicitation est indiquée en rouge.	35
2.12	Schéma et illustrations d'un essai de cisaillement transverse hors-plan sur un interlock [37] – la direction de l'épaisseur du renfort et la direction de sollicitation (en rouge) sont mises en évidence.	36
2.13	Grandeurs associées au modèle de Peirce (équation 2.7) (a) et illustration d'un flexomètre à angle fixe commercialisé par Taber Industries (b).	38
2.14	Notations employées lors du calcul du moment de flexion avec l'équation 2.11.	39
2.15	Courbe de Stribeck et illustration schématique des différents régimes de lubrification d'après [77].	41
2.16	Schémas de principe des essais décrits par les normes ASTM D1894 (a) et ASTM D4521 (b) d'après [33].	42
2.17	Schémas de principe des essais de <i>pull-out</i> (a) et de <i>pull-through</i> (b).	43
2.18	Exemples de résultats obtenus avec un montage de type <i>pull-through</i> : forces tangente T_p et normale N_p caractérisant le frottement sec inter-pili d'un tissu satin de fibres de verre à 1000 mm/min, 0,2 bar (trait continu) et 1,0 bar (trait pointillé) [81] (a), et force tangente caractérisant le frottement lubrifié de divers renforts pré-imprégnés d'époxy [87] (b).	44
2.19	Schéma de principe du test d'adhésion [90].	46

3.1	Résultat expérimental [19] de la phase de charge du test de compression réalisé sur un empilement UD de renfort HiTape® sur une gamme réduite de taux volumiques de fibres, et optimisation des divers modèles utilisés dans la littérature pour le comportement en compaction des renforts.	53
3.2	Photographies d'un pli unitaire de renfort HiTape® soumis à un chargement en flexion à température ambiante (a) puis à la température de fusion du voile (b).	54
3.3	Schéma de principe de l'essai de flexion mis en place.	55
3.4	Étapes principales du traitement sur ImageJ : sur la photographie initiale (a), un seuillage (b) puis une squelettisation (c) sont appliqués.	57
3.5	Notations employées lors du calcul du moment de flexion avec l'équation 3.2.	58
3.6	Comparaison entre les données expérimentales de la déformée (en trait discontinu) et le modèle choisi (en trait plein) pour un échantillon quelconque de l'essai #1 ($err_{\%}^{(z)} = 1,3\%$).	60
3.7	Comparaison entre les résultats (en trait discontinu) et le modèle choisi (en trait plein) pour la relation moment vs. courbure pour un échantillon quelconque de l'essai #1 ($err_{\%}^{(M)} = 3,8\%$).	60
3.8	Représentation du modèle de Voce [96] et interprétation des paramètres de régression R_0 , R_{inf} et κ_{lim}	61
3.9	Données expérimentales de déformées obtenues lors des essais préalables #1 à #3 à T_{amb}	62
3.10	Comportements de flexion normalisés décrits par les modèles de Voce obtenus lors des essais préalables #1 à #3 à T_{amb}	63
3.11	Déformées des plis unitaires caractérisés à T_{fus} (données expérimentales en traits discontinus et modèles optimisés en traits pleins).	65
3.12	Comportement de flexion normalisé pour un pli unitaire à T_{fus} (données brutes en traits discontinus et modèles optimisés en traits pleins).	66
3.13	Comportement de flexion normalisé pour un pli unitaire et pour des empilements de 2 et 4 plis à T_{fus} (données expérimentales en pointillés et modèles moyens en traits pleins) (a) ; pour un plus grand nombre de plis, l'essai n'est plus valide : un échantillon constitué de 8 plis d'HiTape® présente du flambage au niveau de l'encastrement (b).	67
3.14	Comportements de flexion normalisés moyens pour différents empilements à T_{fus} , pour un milieu théorique homogène à 1 pli mais d'épaisseur double selon la théorie de Kirchhoff et les résultats expérimentaux sur 1 pli, et pour 1 pli d'après le comportement en traction et la mécanique des milieux continus.	68
3.15	Illustration du comportement en flexion d'un pli unitaire HiTape® sans cisaillement transverse hors-plan (a), et du comportement en flexion d'un empilement de plis HiTape® avec glissement inter-pli sans cisaillement transverse hors-plan intra-pli (b).	69

4.1	Schéma de principe de l'essai de <i>pull-through</i> mis en place (a) et schéma de l'ensemble des pièces constituant le banc de caractérisation du frottement inter-ply (b).	74
4.2	Plissements hors-plan (a) et décohésion de l'échantillon (b) pouvant apparaître lors de l'essai de frottement.	77
4.3	Allure de la force tangente en fonction du déplacement dans le cas d'un échantillon représentatif testé sous 1,5 bar et à 0,5 mm/min (essai #d).	79
4.4	Coefficients de frottements statiques et maxima en fonction de la pression, obtenus lors des essais #a à #e.	80
4.5	Coefficients de frottements statiques et maxima en fonction de la vitesse, obtenus lors des essais #a à #e.	81
4.6	Courbe de Stribeck pour le renfort HiTape® sur les gammes de pression et vitesse représentatives de la mise en forme.	81
5.1	Représentation schématique de la structure isotrope transverse d'un renfort unidirectionnel.	86
5.2	Description de la cinématique du solide Ω_0 dans la configuration initiale \mathcal{C}_0 , transformé en Ω dans la configuration courante déformée \mathcal{C}	87
5.3	Définition du vecteur contrainte et représentation des différents tenseurs contraintes en configurations initiale \mathcal{C}_0 et courante \mathcal{C} , d'après [99].	91
5.4	Conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann.	93
5.5	Modes de déformation d'un milieu isotrope transverse mis en évidence par la décomposition multiplicative du gradient de la transformation de Charmetant <i>et al.</i> [109] : élongation (a), compaction latérale (b), compaction isochore (c) et cisaillement (d).	102
5.6	Identification de la loi de comportement de compaction isochore à partir des mesures expérimentales faites par Blais [19].	108
5.7	Notations utilisées pour le problème de deux solides en contact initialement (a), et cinématique de l'interface (b).	114
5.8	Loi de contact unilatéral.	117
5.9	Comportement des filaments adhésifs lors du décollement : état initial avec adhésion (a), lors de la décohésion les filaments s'étirent (b), en cas de décharge ils se replient sur eux-mêmes (c), et si le déplacement relatif dépasse un certain seuil alors il y a rupture (d) [140].	119
5.10	Loi de décohésion affine proposée par Talon & Curnier [136].	119
5.11	Loi de frottement tangential (dans un cas bidimensionnel) (a) et cône de Coulomb (b).	121
5.12	Organigramme du couplage entre les comportements de contact, frottement et adhésion et synthèse des états possibles d'après [136].	122
5.13	Contributions aux pseudo-potentiels d'énergie libre et de dissipation du modèle couplant contact unilatéral, frottement et adhésion dans le modèle de Talon & Curnier.	123
6.1	Discrétisation du domaine continu étudié.	129
6.2	Illustration de la méthode de résolution de Newton-Raphson, dans le cas où une solution admissible est trouvée au bout de deux itérations.	131
6.3	Module fonctionnel de la loi de comportement hyperélastique appelée au niveau de chaque point d'intégration.	132

6.4	Maillage utilisé (a) et chargement imposé (b) lors du cas-test 6-A de validation de la loi hyperélastique implémentée.	133
6.5	Conditions aux limites pour chaque sous-cas-test du cas-test 6-A de validation de la loi hyperélastique : élongation (a), compaction latérale (b), compaction isochore (c) et cisaillement (d).	133
6.6	Etat de contrainte moyen et visualisation (avec une amplification de 2) de la déformée pour chaque sous-cas-test du cas-test 6-A de validation de la loi hyperélastique : élongation (a), compaction latérale (b), compaction isochore (c) et cisaillement (d) ($k = 2, 3$).	134
6.7	Vérification de l'inter-indépendance des énergies de déformation dans la loi hyperélastique implémentée au niveau d'un point d'intégration.	134
6.8	Vérification du calcul des contraintes au niveau d'un point d'intégration dans la loi hyperélastique implémentée.	135
6.9	Relations d'équivalence en petites perturbations entre les coefficients matériau de trois lois de comportement isotropes.	136
6.10	Comparaison des solutions (norme du vecteur des efforts de réaction) et temps de calcul CPU pour la phase de charge uniquement, obtenus avec les lois de comportement linéaire élastique, hyperélastique de Mooney-Rivlin et hyperélastique implémentée, pour chacune des quatre sollicitations en petites perturbations.	137
6.11	Géométrie (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 6-B.	137
6.12	Visualisation de la déformée et de la distribution de la densité d'énergie totale lors du cas-test 6-B pour un comportement hyperélastique isotrope.	138
6.13	Visualisation de la déformée et de la distribution de la densité d'énergie totale calculée en chaque point d'intégration lors du cas-test 6-B pour un comportement hyperélastique anisotrope dominé par la direction des fibres avec différentes valeurs de K_{elong} ; on mentionne également le poids relatif de chaque contribution à la densité d'énergie totale obtenue au niveau de la zone où cette dernière est maximale.	139
6.14	Visualisation de la déformée, et de la distribution de la densité d'énergie totale et de ses différentes contributions lors du cas-test 6-B pour un comportement hyperélastique anisotrope dominé par la direction des fibres avec $K_{elong} = 2 \times 10^5$ MPa.	140
6.15	Visualisation de la zone localisée où la densité d'énergie de déformation totale est maximale pour différents maillages ($10 \times 4 \times 1$, $20 \times 8 \times 2$ et $40 \times 16 \times 4$ éléments dans l'ordre) pour le cas-test 6-B avec $K_{elong} = 2 \times 10^5$ MPa à l'incrément de chargement tel que $U_3 = -8$ mm.	141
7.1	Un exemple de loi de décohésion scalaire affine par morceaux : la loi de comportement de Crisfield [155] lors de la charge, équivalente à celle de Talon & Curnier lors de la charge, pour différents états d'endommagement : état sain (a), endommagé (b) ou rompu (c).	154
7.2	Deux éléments volumiques (a) entre lesquels un élément d'interface est défini (b) – les nœuds verts possèdent dim degrés de liberté en déplacement, et les nœuds violet dim multiplicateurs de Lagrange.	156

7.3	Maillage utilisé (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 7-A.	159
7.4	Chargement pour le cas-test 7-A.	159
7.5	Illustration des comportements d'adhésion/décohésion de Talon & Curnier (a), de Crisfield (b) et de glissement tangentiel élastique (c), lors d'une ouverture en deça du seuil de rupture g_M (lorsqu'il existe) puis fermeture (en haut), et lors d'une ré-ouverture au-delà du seuil de rupture (lorsqu'il existe) après endommagement (en bas).	160
7.6	Visualisation de la composante normale \check{p}_n de la force cohésive définie au niveau des éléments d'interface pour le cas-test 7-A.	160
7.7	Comportement local d'un élément d'interface (force cohésive en fonction du déplacement relatif) dans le cas-test 7-A.	161
7.8	Maillage utilisé (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 7-B.	162
7.9	Chargement pour le cas-test 7-B.	162
7.10	Comportement local d'un élément d'interface (force cohésive et déplacement relatif) dans le cas-test 7-B.	163
7.11	Comportement global pour le cas-test 7-B : forces de réaction normale et tangentielle des surfaces sollicitées.	164
7.12	Signe de la solution analytique F_T d'après le comportement de frottement de Coulomb, d'une part lors d'une phase d'ouverture tangentielle de l'interface <i>i.e.</i> $sgn(\check{g}_{t1}) = sgn(\dot{\check{g}}_{t1})$ (a), et d'autre part dans une phase de fermeture tangentielle de l'interface <i>i.e.</i> $sgn(\check{g}_{t1}) \neq sgn(\dot{\check{g}}_{t1})$	165
7.13	Emboutissage de cinq plis, réalisé dans le logiciel PlasFib avec ajout du contact non standard arête-arête permettant la convergence du calcul [157].	167
7.14	Maillages de références avec des éléments d'interface (a) et dans le cas du contact (b) pour le cas-test 7-C.	168
7.15	Visualisation de la déformée et de la distribution de la déformation du solide d'intérêt $S1$ selon la direction de sollicitation à l'incrément de temps correspondant au déplacement tangentiel maximal ($t = 12$ s sur la figure 7.9) lors du cas-test 7-C, dans le cas des éléments d'interface (a) et du contact (b) avec les maillages de référence.	169
7.16	Comportement local d'un élément d'interface au niveau d'un point d'intégration (a), et au niveau d'un nœud en contact (b) avec les maillages de référence pour le cas-test 7-C.	170
7.17	Résultats de force normale F_N , quotient $ F_T/F_N $, et de l'erreur par rapport à la solution analytique dans le cas des éléments d'interface (a) et du contact (b) pour le cas-test 7-C avec les maillages de référence.	171
7.18	Erreurs relatives de la force normale F_N et du quotient F_T/F_N pris à l'instant de déplacement tangent maximal ($t = 12$ s sur la figure 7.9) par rapport à la solution analytique, en fonction du nombre de degrés de liberté <i>iddl</i> des maillages testés et du temps de calcul CPU nécessaire pour les phases ① et ② du chargement (<i>i.e.</i> jusqu'à $t = 12$ s), dans le cas des éléments d'interface (EI) et du contact (C) lors du cas-test 7-C.	173
7.19	Géométrie (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 7-D.	174

7.20	Visualisation de la déformée et de la distribution de la déformation selon l'axe horizontal au dernier incrément de chargement lors du cas-test 7-D, dans le cas des éléments d'interface (a) et du contact (b) avec les maillages raff.' _{EI} 1 et raff.' _C 2 respectivement.	174
7.21	Erreur relative de la réaction normale RU_3 au dernier incrément par rapport à la solution la plus raffinée, en fonction du nombre de degrés de liberté <i>iddl</i> des maillages testés et du temps de calcul CPU, dans le cas des éléments d'interface (EI), du contact (C) et d'un solide monolithique maillé avec des éléments quadratiques d'une part et linéaires d'autre part.	175
7.22	Visualisation de la déformée et de la distribution de la déformation selon l'axe horizontal au dernier incrément de chargement lors du cas-test 7-D dans le cas d'un solide monolithique sans interface, avec des éléments quadratiques (même nombre d'éléments volumiques que pour le maillage raff.' _{EI} 1) (a) et avec des éléments linéaires (même nombre d'éléments volumiques que pour le maillage raff.' _C 2) (b).	176
7.23	Module fonctionnel de la loi de comportement de contact avec frottement appelée au niveau de chaque point d'intégration des éléments d'interface.	182
7.24	Maillage utilisé (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 7-E.	183
7.25	Chargement pour le cas-test 7-E.	183
7.26	Comportement local d'un élément d'interface (force cohésive et déplacement relatif) dans le cas-test 7-E.	184
7.27	Comportement global pour le cas-test 7-E : forces de réaction normale et tangentielle des surfaces sollicitées.	185
7.28	Étude de l'influence du paramètre de régularisation sur les comportements local et global dans le cas-test 7-E ($CoF = 0,2$); on rappelle les erreurs relatives et temps de calcul obtenus tels que définis dans le tableau 7.10.	186
ii	Visualisation (<i>via</i> le déplacement vertical) du glissement inter-ply au cours de la mise en forme de trois couches de renforts (au comportement hyperélastique isotrope de Mooney-Rivlin et séparées par une interface au comportement de Crisfield) sur une géométrie de type raidisseur Omega (seule la moitié est visible) sans frottement sous l'effet d'une pression normale suiveuse homogène dans un cadre de grandes transformations.	196
iii	Visualisation (<i>via</i> le déplacement vertical) de la mise en forme d'un pli unitaire rectangulaire (au comportement hyperélastique isotrope de Mooney-Rivlin) sur une demi-sphère (seul un quart est visible) sans frottement sous l'effet d'une pression normale suiveuse homogène dans un cadre de grandes transformations. Sans prendre en compte la rigidité de flexion spécifique des renforts fibreux, des instabilités géométriques sont présentes et provoquent un saut de solution de la déformée de gauche (a) à celle de droite (b).	197

iv	Visualisation (<i>via</i> le déplacement vertical) de la mise en forme d'un pli unitaire rectangulaire (au comportement hyperélastique isotrope de Mooney-Rivlin) sur une géométrie de type raidisseur Omega (seule la moitié est visible) sans frottement sous l'effet d'une pression normale suiveuse homogène dans un cadre de grandes transformations. Une fois que la préforme est en contact avec le moule (①), la mise en forme débute jusqu'à contact de toute sa surface avec le moule (②) puis ③ puis ④).	199
C.1	Évolutions des invariants physiques en fonction de chacun des invariants classiques dans le cas-test 6-A.	212
C.2	Évolutions des différentes contributions du potentiel hyperélastique en fonction de chacun des invariants classiques dans le cas-test 6-A.	213
D.1	Algorithme de Newton-Raphson pour la résolution d'un problème piloté en longueur d'arc	217

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques des fibres de carbone Haut Module (HM) et Haute Résistance (HR) [5].	9
3.1	Plan des essais préalables de validation de la procédure de l’essai de flexion.	59
3.2	Caractéristiques du renfort HiTape® et des échantillons testés lors des essais de flexion.	64
3.3	Plan d’expérience des essais de flexion.	65
4.1	Identification des enjeux associés à la conception de l’essai de frottement et solutions technologiques apportées.	75
4.2	Caractéristiques du renfort HiTape® et des échantillons testés lors des essais de frottement inter-pli.	78
4.3	Plan d’expérience des essais de frottement inter-pli.	79
5.1	Principales mesures de déformations [98].	90
5.2	Correspondance entre les modes de déformation du modèle hyperélastique isotrope transverse considéré (les éléments de la figure 5.5 sont rappelés ici), et les combinaisons de sollicitations intra-plis nécessaires pour les décrire (illustrées sur la figure 2.3 et étudiées dans les chapitres 2 à 4).	106
5.3	Classification des milieux continus généralisés et quelques exemples d’après [123, 127].	110
5.4	Équations d’équilibre et mesures de déformation pour un milieu de second gradient [98].	110
5.5	Équations d’équilibre et mesures de déformation pour un milieu de Cosserat [98].	112
6.1	Problème mécanique \mathcal{P}_Ω de minimisation de l’énergie potentielle d’un solide hyperélastique.	127
7.1	Problème mécanique \mathcal{P}_Σ de minimisation sous contraintes de l’énergie potentielle de deux solides séparés par une interface comportant des phénomènes irréversibles et dissipatifs.	148
7.2	Problème mécanique \mathcal{P}_Σ^a de maxi-maxi-minimisation de l’énergie potentielle de deux solides séparés par une interface adhésive sans frottement avec le modèle de Talon & Curnier [140]. Les différents états sont : écart (E) ou contact (C) d’une part, et adhésion (A), décohésion (D) ou rupture (R) d’autre part.	151
7.3	Problème mécanique $\check{\mathcal{P}}_\Sigma^a$ de maxi-mini-minimisation de l’énergie potentielle de deux solides séparés par une interface adhésive sans frottement avec le modèle de Talon & Curnier adapté par Lorentz [146].	153

7.4	Capacité des éléments d'interface et de l'algorithme de contact à décrire les trois aspects souhaités du comportement inter-plis : non-pénétration, adhésion et frottement.	167
7.5	Caractéristiques des maillages de référence du solide d'intérêt $S1$ dans le cas des éléments d'interface et du contact pour le décompte des degrés de liberté <i>iddl</i> pour le cas-test 7-C.	169
7.6	Maillages utilisés pour l'étude de convergence du cas-test 7-C avec des éléments d'interface (EI) (en haut) et pour l'utilisation du contact (C) (en bas) : visualisation, niveau de raffinement et nombre de degrés de liberté <i>iddl</i>	172
7.7	Maillages utilisés pour l'étude de convergence du cas-test 7-D avec des éléments d'interface (en haut) et pour l'utilisation du contact (en bas) : visualisation, niveau de raffinement et nombre de degrés de liberté <i>iddl</i>	174
7.8	Comparaison qualitative entre deux stratégies de description de l'interface entre les plis de renforts : avec des éléments d'interface d'une part, et avec un algorithme de contact d'autre part (« - - » désignant un inconvénient et « + + » un avantage).	177
7.9	Problème mécanique \mathcal{P}_Σ^f de maxi-maxi-minimisation de l'énergie potentielle de deux solides séparés par une interface avec frottement (sans adhésion) avec le modèle de Alart & Curnier [147], qui correspond à celui de Talon & Curnier [140] sans le frottement. Les différents états sont : écart (E) ou contact (C) d'une part, et adhérence (A^{ce}) ou glissement (G) en cas de contact d'autre part.	179
7.10	Étude de l'influence du paramètre de régularisation sur le quotient F_T/F_N à l'instant de chargement $t = 5$ s (on en présente l'erreur relative par rapport au coefficient de frottement donné en entrée) et sur le temps de calcul CPU, pour différents coefficients de frottement dans le cas-test 7-E (« - » signifie qu'il y a divergence du calcul).	185

Liste des acronymes

Matériaux

NCF	Non-Crimp Fabric(s)
PA	PolyAmide
PEEK	PolyEtherEtherKetone (polyéthéthercétone)
PPS	PolyPhenylene Sulfide (polysulfure de phénylène)
TP	ThermoPlastique(s)
UD	UniDirectionnel(le)(s)

Procédés

AFP	Automated Fiber Placement
ATL	Automated Tape Laying
DMA	Dynamic Mechanical Analysis
LCM	Liquid Composite Molding
RTM	Resin Transfer Molding
VARTM	Vacuum Assisted Resin Transfer Molding

Autres

ASTM	American Society for Testing Material
CIFRE	Convention Industrielle de Formation par la Recherche
CPU	Central Processing Unit
DIN	Deutsches Institut für Normung
FOD	Foreign Objects Debris
IFRM	Ideal Fibre Reinforced Material
LBB	Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi
MEF	Méthode des Éléments Finis

Liste des symboles

Introduits dans la partie II

Généraux

$\mathcal{B} = (\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$	Base cartésienne orthonormée
(x, y, z)	Coordonnées dans le repère cartésien
(ξ, Ψ)	Coordonnées dans le repère plan de Frénet
t	Temps
T_{amb}	Température ambiante
T_{fus}	Température de fusion du voile thermoplastique

Sollicitations intra-plies

E	Module de traction d'un solide isotrope
ν	Coefficient de Poisson d'un solide isotrope
E_L	Module de traction du pli dans la direction des fibres
E_T	Module de traction du pli dans la direction transverse aux fibres
E_m	Module de la matrice
E_f	Module de traction des fibres dans leur direction principale
V_f	Taux volumique de fibres
ρ_f	Masse volumique des fibres
\mathcal{A}	Masse surfacique d'un renfort (grammage)
h	Épaisseur de la préforme ou de l'empilement
σ_C	Contrainte de compaction
B	Rigidité de flexion
g	Accélération de la pesanteur
θ	Angle de flexion formé par la corde et l'horizontale
c	Longueur de flexion (modèle de Peirce)
L	Longueur de l'échantillon
\mathcal{M}	Moment de flexion
κ	Courbure
s	Abscisse curviligne
k_1, k_2	Paramètres de la fonction de la déformée (essai de flexion)
m, m_i	Masse de la masselotte dans l'essai de flexion ($i = 1..7$)
b	Largeur de l'échantillon
$\mathcal{M}_0, R_0, R_{inf}, \kappa_{lim}$	Paramètres du modèle de Voce (essai de flexion)
$err_{\%}^{(x)}$	Racine carrée de l'erreur-type relative sur la grandeur x
$\sigma_{\%}^{(x)}$	Coefficient de variation de la grandeur x

Sollicitation inter-plis

CoF	Coefficient de frottement
CoF_{dyn}	Coefficient de frottement dynamique
CoF_{stat}	Coefficient de frottement statique
CoF_{max}	Coefficient de frottement maximal
F_N	Force normale
F_T	Force tangente ou de traction
F_{dyn}	Force tangente dynamique
F_{stat}	Force tangente statique
F_{max}	Force tangente maximale
H	Nombre de Hersey
H^*	Nombre de Hersey divisé par la viscosité
η	Viscosité de la matrice ou du voile TP
ν	Vitesse de déplacement ou de glissement
A	Aire de la surface contact

Introduits dans la partie III

Notations

a	Scalaire
\underline{a}	Vecteur de composantes a_i
$\underline{\underline{A}}$	Tenseur d'ordre 2 de composantes $(\underline{\underline{A}})_{ij}$ ou A_{ij}
$\underline{\underline{\underline{A}}}$	Tenseur d'ordre 3 de composantes $(\underline{\underline{\underline{A}}})_{ijk}$ ou A_{ijk}
$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$	Tenseur d'ordre 4 de composantes $(\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}})_{ijkl}$ ou A_{ijkl}
$[\underline{\underline{A}}] ([\underline{\underline{A}}]_{\mathcal{B}})$	Représentation matricielle de $\underline{\underline{A}}$ (dans la base \mathcal{B})
$[\underline{\underline{\underline{A}}}] ([\underline{\underline{\underline{A}}}]_{\mathcal{B}})$	Représentation matricielle de $\underline{\underline{\underline{A}}}$ (dans la base \mathcal{B})
\square	Solution du problème

Opérateurs

$\frac{\partial}{\partial \underline{X}}$	Dérivée partielle par rapport à \underline{X}
$\frac{d}{d\underline{X}}$	Dérivée totale par rapport à \underline{X}
$\dot{\underline{x}}$	Dérivée temporelle ou écriture incrémentale de \underline{x}
$\ \underline{x}\ $	Norme du vecteur \underline{x} définie par $\ \underline{x}\ = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}$
\cdot	Produit contracté
$:$	Produit doublement contracté
\wedge	Produit vectoriel
\otimes	Produit tensoriel
∇	Opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3} \right)$
$\nabla_{\underline{x}}$	Opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$
$\text{sgn}(\square)$	Signe
$\text{Tr}(\square)$	Trace
$\det(\square)$	Déterminant

\square^T	Transposée
$\mathcal{I}_{\mathbb{A}}(x)$	Fonction indicatrice de \mathbb{A} ($\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$) relativement à \mathbb{B} ($x \in \mathbb{B}$)
$\langle x \rangle_+$	Partie positive du réel x , <i>i.e.</i> x s'il est positif et 0 sinon
$\langle x \rangle_-$	Partie négative du réel x , <i>i.e.</i> $ x $ s'il est négatif et 0 sinon

Mécanique du solide et thermodynamique

$\mathcal{B}^* = (\underline{M}, \underline{N}_2, \underline{N}_3)$	Base cartésienne orthonormée définie par Criscione [1]
\mathcal{P}_{\square}	Problème mécanique à résoudre
dim	Dimension du problème
$\mathcal{C}_0, \mathcal{C}$	Configuration initiale / courante
$\Phi(\underline{X}, t)$	Transformation de \mathcal{C}_0 à \mathcal{C}
Ω_0, Ω	Corps matériel dans la configuration initiale / courante
Σ_0, Σ	Ensemble constitué par deux corps matériel dans $\mathcal{C}_0 / \mathcal{C}$
$\mathcal{D}_0, \mathcal{D}$	Sous-domaine d'un corps matériel dans $\mathcal{C}_0 / \mathcal{C}$
$\partial\Omega_0, \partial\Omega$	Surface de Ω_0 / Ω
$\partial\Sigma_0, \partial\Sigma$	Surface de Σ_0 / Σ
Γ^D	Partie de $\partial\Omega$ sur laquelle s'appliquent les conditions de Dirichlet
Γ^N	Partie de $\partial\Omega$ sur laquelle s'appliquent les conditions de Neumann
ρ_0, ρ	Masse volumique courante / initiale
dS_0, dS	Élément de surface élémentaire initial / courant
$\underline{N}, \underline{n}$	Normale de l'élément de surface élémentaire dS_0 / dS
dV_0, dV	Élément de volume élémentaire initial / courant
J	Jacobien de la transformation
$\underline{X}, \underline{x}$	Vecteur position dans la configuration initiale / courante
\underline{u}	Vecteur déplacement
\underline{u}^D	Déplacements imposés sur Γ^D
\underline{t}	Vecteur contrainte
\underline{f}_s	Efforts de contact imposés sur Γ^N
\underline{f}_v	Efforts volumiques
\underline{q}	Apport de chaleur surfacique
\underline{r}	Apport de chaleur volumique
$\underline{\underline{F}}$	Tenseur gradient de la transformation
$\underline{\underline{I}}$	Tenseur identité d'ordre 2
$\underline{\underline{Q}}$	Tenseur de rotation
$\underline{\underline{R}}$	Tenseur de rotation dans la décomposition multiplicative de $\underline{\underline{F}}$
$\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{V}}$	Tenseurs d'élongation dans la décomposition multiplicative de $\underline{\underline{F}}$
$\underline{\underline{B}}$	Tenseur de Cauchy-Green gauche
$\underline{\underline{C}}$	Tenseur de Cauchy-Green droit
$\underline{\underline{E}}$	Tenseur de déformation de Green-Lagrange
$\underline{\underline{D}}$	Tenseur des taux de déformation
$\underline{\underline{L}}$	Tenseur gradient des vitesses
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes de Cauchy

$\underline{\underline{P}}$	Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$\underline{\underline{S}}$	Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$\underline{\underline{L}}_i$	Tenseur de structure
$\underline{\underline{M}}$	Tenseur de structure d'un milieu isotrope transverse
\mathcal{C}	Tenseur des modules d'élasticité tangents
\tilde{K}_{\square}^t	Tenseur opérateur tangent
\mathcal{SO}_3	Groupe des rotations
\mathcal{G}	Groupe de symétrie d'un matériau
I_i	Invariants classiques de $\underline{\underline{C}}$ ($i = 1..5$) (cas isotrope transverse)
I_{elong}	Invariant physique d'élongation de $\underline{\underline{C}}$
$I_{cp\ lat}$	Invariant physique de compaction latérale de $\underline{\underline{C}}$
$I_{cp\ iso}$	Invariant physique de compaction isochore de $\underline{\underline{C}}$
I_{cis}	Invariant physique de cisaillement de $\underline{\underline{C}}$
W_{elong}	Densité d'énergie de déformation par élongation
$W_{cp\ lat}$	Densité d'énergie de déformation par compaction latérale
$W_{cp\ iso}$	Densité d'énergie de déformation par compaction isochore
W_{cis}	Densité d'énergie de déformation par cisaillement
W_{tot}	Densité d'énergie de déformation totale
K_{elong}	Rigidité matériau en élongation
$K_{cp\ lat}$	Rigidité matériau en compaction latérale
$K_{cp\ iso}$	Rigidité matériau en compaction isochore
K_{cis}	Rigidité matériau en cisaillement

Mécanique de l'interface

α_p^t	Variables internes ($p = 1..n$)
$\square^{(k)}$	Se rapporte au solide $\Omega^{(k)}$ ($k = 1, 2$)
$\square^{(12)}$	Se rapporte à l'interface entre les solides $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$
$\check{\square}$	Grandeur du modèle de Lorentz
$\underline{g} = \llbracket \underline{u} \rrbracket$	Vecteur de déplacement relatif à l'interface
\underline{p}	Effort cohésif (surfaccique) à l'interface
g_n	Composante normale de \underline{g}
\underline{g}_t	Composante tangentielle de \underline{g}
\underline{g}_t^t	Variable interne décrivant le frottement
g^a	Variable interne d'endommagement décrivant la décohésion
p^a	Force thermodynamique conjuguée à g^a
$s(g^a)$	Loi de décohésion
p_n	Composante normale de \underline{p}
p_n^c	Pression de contact contribuant à la composante normale de \underline{p}
\underline{p}_t	Composante tangentielle de \underline{p}
\underline{p}_t^f	Contribution du frottement pur de Coulomb à \underline{p}_t
g_M	Valeur maximale de g^a avant rupture
p_M	Seuil d'effort pour la décohésion
$\underline{\lambda}$	Multiplicateur de Lagrange

λ_n^c	Multiplicateur de Lagrange introduit pour le contact unilatéral
λ_t^f	Multiplicateur de Lagrange introduit pour le frottement de Coulomb
λ^a	Multiplicateur de Lagrange introduit pour l'adhésion
r	Paramètre de régularisation du Lagrangien augmenté

Thermodynamique

\mathcal{E}_{cin}	Énergie cinétique
\mathcal{E}_{int}	Énergie interne
\mathcal{W}_{ext}	Travail des efforts extérieurs
\mathcal{P}_{ext}	Puissance des efforts extérieurs
\mathcal{P}_{int}	Puissance des efforts intérieurs
\mathcal{U}_{\square}	Énergie potentielle
$\mathcal{L}_{\square}^{\square}$	Lagrangien augmenté
\mathcal{Q}	Apport de chaleur d'origine non mécanique
\mathcal{S}	Entropie
e	Énergie interne spécifique
$e^{(12)}$	Énergie interne surfacique de l'interface
s	Entropie spécifique
T	Température
W	Densité d'énergie libre de Helmholtz / Potentiel hyperélastique
w	Énergie libre spécifique de Helmholtz
ϕ	Dissipation volumique eulérienne
ϕ_0	Dissipation volumique lagrangienne
$\psi^{(12)}$	Énergie libre surfacique de l'interface
$\phi^{(12)}$	Dissipation surfacique de l'interface
ψ^c	Énergie libre surfacique de l'interface liée au contact unilatéral
ψ^f	Énergie libre surfacique de l'interface liée au frottement pur de Coulomb
ϕ^f	Dissipation surfacique de l'interface liée au frottement pur de Coulomb
ψ^a	Énergie libre surfacique de l'interface liée à l'adhésion
ϕ^a	Dissipation surfacique de l'interface liée à l'adhésion

Éléments finis

\square^h	Discrétisation éléments finis
$\{U\}$	Vecteur des inconnues nodales en déplacement
$\{\Lambda\}$	Vecteur des multiplicateurs de Lagrange (inconnues nodales)
$\{R\}$	Vecteur résidu pour le problème de l'équilibre d'un seul solide
$\left\{ \begin{matrix} R_U \\ R_{\Lambda} \end{matrix} \right\}$	Vecteur résidu pour le problème de l'équilibre de deux solides en contact
U_{\square}	Conditions aux limites en déplacement dans les cas-test
$iddl$	Nombre de degrés de libertés situés à l'interface entre deux solides, et appartenant à un seul des deux solides

Préambule

Le marché aéronautique est à l'heure actuelle le plus gros consommateur de fibres de carbone hautes performances, avec environ 30 000 tonnes par an. Ces fibres de carbone sont utilisées lors de l'élaboration des matériaux composites. De 5 % pour l'Airbus A320 dans les années 1980, la proportion du poids structurel en matériaux composites est ainsi passée à 53 % pour le récent A350 XWB, remplaçant peu à peu les matériaux métalliques. En effet, à performances mécaniques égales, les composites permettent notamment d'augmenter la charge utile d'un avion *via* l'allègement de sa structure, dans un contexte de réduction des émissions de gaz à effet de serre associées à la consommation de carburant. Les bonnes propriétés de résistance à la corrosion et à la fatigue des matériaux composites offrent en outre une durée de vie allongée des pièces et un espacement dans le temps des maintenances.

Les structures primaires aéronautiques en composites sont classiquement fabriquées à partir de renforts pré-imprégnés de résine, en général drapés à la main et cuits en autoclave. Employés depuis les années 60, ces procédés de mise en œuvre dits indirects sont aujourd'hui matures, mais ils ne permettent pas d'atteindre les cadences visées : à titre d'exemple, Airbus prévoit de produire 63 appareils A320 par mois en 2019 contre 55 en 2018 [2]. Le défi aujourd'hui est donc de développer de nouvelles solutions technologiques combinant matériaux et procédés, et permettant d'augmenter les cadences de production tout en réduisant les coûts et en assurant des performances mécaniques comparables à celles obtenues avec les matériaux pré-imprégnés. Une solution envisagée est celle des procédés dits directs, basés sur l'utilisation de renforts secs : dans ce cas l'association du renfort et de la matrice, et la cuisson de l'ensemble, se font lors de la même opération. Ces procédés sont déjà largement utilisés dans les industries nautique et éolienne, cependant uniquement pour des structures secondaires. L'avion Irkut MC-21-300, dont les premiers tests de vol sont prévus pour 2019, est aujourd'hui le premier avion dont les ailes sont mises en œuvre par un procédé direct – en l'occurrence par infusion.

Que ce soit pour les procédés directs ou indirects, les couches de renforts sont traditionnellement drapées manuellement les unes sur les autres sur le moule. Cependant, afin d'augmenter les cadences de production, une grande attention a été portée sur l'automatisation de cette phase de dépose. En particulier, une voie prometteuse consiste à draper le renfort à plat de façon automatisée, puis mettre en forme l'empilement sur la géométrie finale lors d'une étape spécifique. Cependant, au cours de cette étape de mise en forme, des défauts tels que des plissements peuvent apparaître. Dans cette phase de développement du procédé, l'enjeu économique pour les constructeurs aéronautiques est ainsi de prévoir les défauts potentiels le plus tôt possible au cours du cycle de vie du produit afin d'en réduire l'impact au maximum. Selon Boeing, la phase seule de recherche représente en effet déjà 70 % du coût total d'un produit, comme illustré sur la figure i.

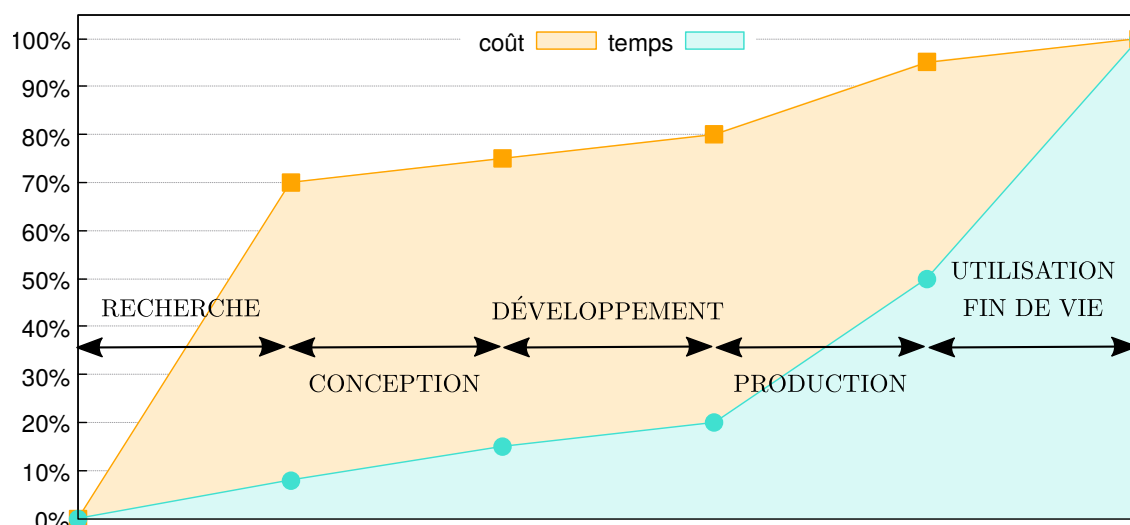


Figure i – Temps et coûts cumulatifs alloués au cours du cycle de vie complet d'une pièce composite structurale d'après [3, 4]

Dans ce contexte, l'entreprise Hexcel développe et commercialise des solutions (renforts, matrices, pré-imprégnés...) dans le domaine des composites hautes performances destinés à l'aéronautique. Hexcel est internationalement reconnu pour son savoir-faire et ses technologies permettant d'adapter les procédés aux pièces fabriquées. Dans le cadre du développement de ses activités, Hexcel Reinforcements, appartenant au groupe Hexcel, met au point des renforts structuraux secs spécifiques destinés à une mise en œuvre par procédé direct, et présentant des propriétés mécaniques finales compétitives par rapport à la référence des matériaux pré-imprégnés : en particulier le renfort sec HiTape®[®], sur lequel porte ce travail. Pour Hexcel, il s'agit de répondre aux contraintes actuelles des constructeurs aéronautiques en termes de coûts des matériaux et des procédés.

Dans un cadre industriel, parallèlement au développement des matériaux et procédés, la modélisation et la simulation numérique doivent aider à la conception des pièces composites de demain dans une approche d'ingénierie inverse en optimisant les procédés de mise en œuvre. Dans cette optique, Hexcel cherche à se munir d'un outil numérique à la fois représentatif de la physique et industriellement viable, permettant de prédire l'état du renfort au cours de sa mise en forme. Il s'agit notamment de prédire les orientations des fibres, la présence de défauts, mais aussi des propriétés locales induites par l'arrangement des fibres lors de cette phase de mise en forme.

Ainsi, l'objectif de ce travail de doctorat est la modélisation et la simulation numérique de la mise en forme du renfort HiTape®[®]. Il s'agit d'améliorer la connaissance du procédé de mise en forme, en vue d'en maîtriser parfaitement les paramètres pour atteindre les distributions de fibres (taux, orientations) et les tolérances géométriques visées. Le but, *in fine*, est d'assurer la fiabilité et la répétabilité du procédé tout en satisfaisant les exigences de qualité de l'aéronautique (taux de porosité inférieur à 1%)

en volume, taux de fibres, orientations...).

Ce travail de recherche s'inscrit dans le cadre d'un financement CIFRE¹. Il s'agit d'une collaboration entre le laboratoire Georges Friedel / centre Science des Matériaux et des Structures de Mines Saint-Étienne, et la société Hexcel Reinforcements. Ce travail implique également le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

1. CIFRE : Convention Industrielle de Formation par la Recherche



Introduction générale

1

Du contexte au besoin

Sommaire

1.1	Mise en œuvre des matériaux composites structuraux . . .	8
1.1.1	Structure des matériaux composites hautes performances . . .	8
1.1.2	Mise en œuvre par procédés directs et indirects	10
1.1.3	Drapage et mise en forme des renforts	13
1.1.4	Enjeux de la mise en forme des renforts secs	15
1.2	Position de l'étude	16
1.2.1	Contexte industriel	16
1.2.2	Contexte académique et objectif de la thèse	17
1.3	Modélisation et simulation de la mise en forme des renforts	18
1.3.1	Choix d'une échelle de représentation	18
1.3.2	Présentation des approches à l'échelle du pli	19
1.4	Démarche du travail	21

Introduction

Dans ce chapitre, les matériaux composites et leur mise en œuvre sont tout d'abord présentés, ce qui permet d'introduire et de positionner le travail de thèse dans le contexte aéronautique actuel. Puis, des éléments concernant l'état de l'art de la modélisation et de la simulation de la mise en forme d'une préforme fibreuse sont donnés et les verrous actuels sont mis en évidence. La démarche globale de ce travail de recherche est enfin énoncée.

1.1 Mise en œuvre des matériaux composites structuraux par procédés directs et enjeux de l'étape de mise en forme

1.1.1 Structure des matériaux composites hautes performances

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux constituants non miscibles, de telle sorte que le matériau final possède des propriétés que chacun des constituants ne présente pas individuellement. Plus particulièrement, les matériaux composites dits « hautes performances » présentent des propriétés mécaniques spécifiques (*i.e.* rapportées à la masse volumique) élevées mais un coût unitaire important. Ces matériaux composites sont constitués d'un type de renfort et d'une matrice. Le renfort assure la fonction mécanique, tandis que la matrice a pour rôle de maintenir la cohésion de l'ensemble de manière à répartir les sollicitations, et de donner la forme à la pièce finale, tout en protégeant le renfort des agressions extérieures. L'un et l'autre sont présentés ci-après.

Le renfort

Le renfort se présente généralement sous forme de fibres, les plus communes étant celles de verre, de carbone et d'aramide. Les fibres de carbone, qui nous intéressent dans le cadre de ce travail, ont les meilleures propriétés mécaniques spécifiques mais sont coûteuses donc restent réservées aux applications structurelles de hautes performances ou à très forte valeur ajoutée comme dans l'industrie des loisirs. On distingue principalement trois catégories de fibres de carbone : haut module, module intermédiaire, et haute résistance ; quelques-unes de leurs caractéristiques sont données dans le tableau 1.1.

Les fibres sont assemblées en mèches qui contiennent de 3 000 à 80 000 fibres selon les renforts. Les mèches peuvent présenter de la torsion, on les appelle alors torons. Les fibres peuvent être courtes (*i.e.* de l'ordre de quelques mm ou cm) ou continues (*i.e.* de l'ordre de la taille de la pièce). Les fibres courtes de l'ordre du millimètre peuvent renforcer un polymère pour être injectées, celles de l'ordre du centimètre peuvent être assemblées en nappes ; elles peuvent être orientées ou non. Les fibres continues quant à elles sont généralement disposées de manière ordonnée de sorte que leur direction privilégiée confère au matériau composite des bonnes propriétés mécaniques dans les directions souhaitées. Ces fibres continues peuvent se présenter sous plusieurs manières illustrées sur la figure 1.1 : les renforts unidirectionnels, les tissus et les renforts mul-

Caractéristiques		Carbone HR	Carbone HM
Diamètre	[μm]	6 à 7	6 à 7
Masse volumique	[$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$]	1750	1800
Rigidité sens fibre	[GPa]	230	390
Rigidité sens transverse	[GPa]	20	12
Coefficient de Poisson	[-]	0,3	0,35
Contrainte à rupture en tension	[MPa]	3200	2600
Coefficient de dilatation thermique	[$10^5 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$]	0,02	0,08
Prix	[$\text{€}/\text{kg}$]	40 à 90	60 à 150

Tableau 1.1 – Caractéristiques des fibres de carbone Haut Module (HM) et Haute Résistance (HR) [5].

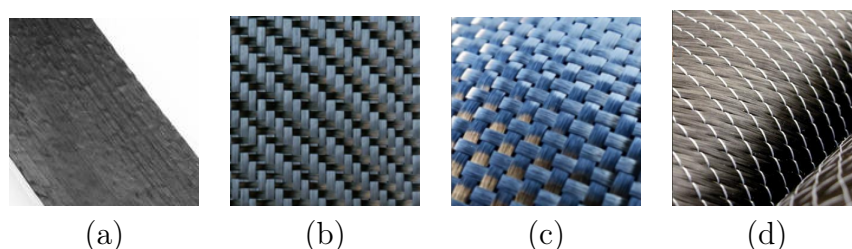


Figure 1.1 – Exemples de renforts : nappe unidirectionnelle (a), tissu sergé (b), tissu taffetas (c) et renfort multiaxial de type non-crimp fabric (d).

tiaciaux en sont des exemples.

Dans le cas des tissus surfaciques (2D), les mèches de fibres sont entrecroisées selon deux directions perpendiculaires appelées trame et chaîne, de manière relativement équilibrée (pas moins de 20 % des fibres dans la direction trame), ou bien avec plus de 80 % des fibres dans la direction chaîne (tissus quasi-UD¹). Dans le cas des tissus équilibrés, différents motifs appelés armures sont possibles (sergé, satin, taffetas) conférant au renfort des propriétés différentes. Les tissus présentent une bonne déformabilité et sont relativement faciles à manipuler, cependant le matériau final peut être sujet au délaminage. Pour pallier ce problème, une troisième direction de mèche peut être ajoutée dans l'épaisseur du renfort : c'est le cas des tissus tridimensionnels (3D) et des interlocks, ces derniers constituant un intermédiaire entre les tissus 2D et 3D : des mèches de chaîne s'entremêlent à des mèches de trame des couches supérieures et inférieures afin de lier ensemble les couches, menant à des renforts très épais (de l'ordre d'une dizaine de centimètres). Les tissus sont caractérisés par leur embuvage, *i.e.* la longueur supplémentaire de produit nécessaire pour atteindre une longueur totale donnée à cause de l'ondulation des mèches. La rigidité d'un pli dans la direction des fibres étant optimisée lorsqu'il n'y a pas d'embuvage, les renforts unidirectionnels présentent de meilleures propriétés mécaniques dans une direction : les fibres sont alors toutes orientées dans cette même direction. Parmi les renforts UD, on distingue les tissus quasi-UD, les nappes unidirectionnelles (ou plis), et les mèches (utilisées telles

1. UD : UniDirectionnel(le)(s)

quelles dans le cas de l'enroulement filamentaire par exemple). Les nappes unidirectionnelles présentent des propriétés mécaniques maximales dans leur direction, mais leur manipulation est plus difficile. Pour pallier cela, des plis secs de différentes orientations peuvent être superposés et cousus ensemble : ce sont les NCF², des renforts multiaxiaux. Ils présentent des avantages en terme de mise en œuvre (grammages élevés, bonne tenue à la manipulation).

La matrice

On distingue trois types de matrices : les matrices organiques, limitées par leur température d'utilisation (< 250 °C, voire 350 °C pour de courtes périodes d'exposition), les matrices métalliques pour des applications à haute température (< 800 °C), et enfin les matrices céramiques dédiées aux applications à très haute température (> 1000 °C). Dans le secteur aéronautique, les composites à matrice organique sont les plus utilisés car ils présentent des bonnes performances mécaniques, ainsi qu'un bon comportement au vieillissement et aux impacts, et car la température de service maximale d'une grande partie des pièces ne dépasse pas 150 °C. Ils sont en outre les plus faciles et les moins coûteux à mettre en œuvre.

Les matrices organiques peuvent être thermoplastiques ou thermodurcissables. Pour les résines thermodurcissables, le passage de l'état liquide à l'état solide est irréversible. Par opposition, les résines thermoplastiques ont pour particularité que le passage de l'état solide à l'état fondu est réversible sous l'effet de la température ; cela permet notamment l'assemblage de structures par thermosoudage, la transformation des pièces par semi-produits, et le recyclage. Cependant, la mise en œuvre des résines thermoplastiques nécessite une chauffe à plus haute température (la température de fusion du PEEK³ par exemple est de 343 °C) que les résines thermodurcissables (les époxyde, communément appelées époxy et destinées à l'aéronautique, polymérisent quant à elles typiquement à 180 °C). Cependant, la réaction chimique de ces dernières doit être maîtrisée car elle présente des risques d'exothermie.

1.1.2 Mise en œuvre par procédés directs et indirects

La mise en œuvre des matériaux composites comprend les étapes nécessaires pour passer du renfort et de la matrice considérés séparément, à la pièce finale. Le mélange entre les deux peut être fait soit au cours d'une étape préalable à la fabrication de la pièce finale, soit *directement*. Dans le premier cas, un semi-produit est fabriqué, constitué du renfort pré-imprégné de résine, en général thermodurcissable. Ces pré-imprégnés sont drapés sur la géométrie finale, puis passés en autoclave (enceinte pressurisée thermorégulée) pour réticuler la résine tout en chassant les porosités. Ces procédés dits « indirects » sont schématisés sur la figure 1.2. Dans le second cas, le renfort est drapé à l'état sec, et il est associé à la matrice lors de la même étape que celle de l'élaboration de la pièce et donc de la réticulation de la résine. On parle alors

2. NCF : Non-Crimp Fabric(s)

3. PEEK : PolyEtherEtherKetone

de « procédés directs » ou hors autoclave (ou encore par voie liquide, ou LCM⁴) ; ils sont illustrés sur la figure 1.3. Sur ces figures 1.2 et 1.3, l'étape de drapage n'est pas détaillée ; elle sera l'objet du paragraphe suivant. La mise en œuvre des composites structuraux par procédés directs constituant le cadre de ce travail, nous présentons ci-après les deux méthodes d'association du renfort et de la résine : l'injection et l'infusion.

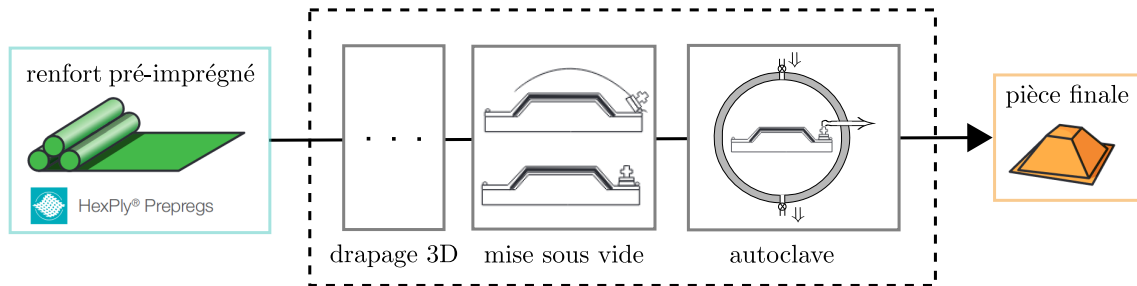


Figure 1.2 – Les différentes étapes de la mise en œuvre des matériaux composites par procédés indirects traditionnels.

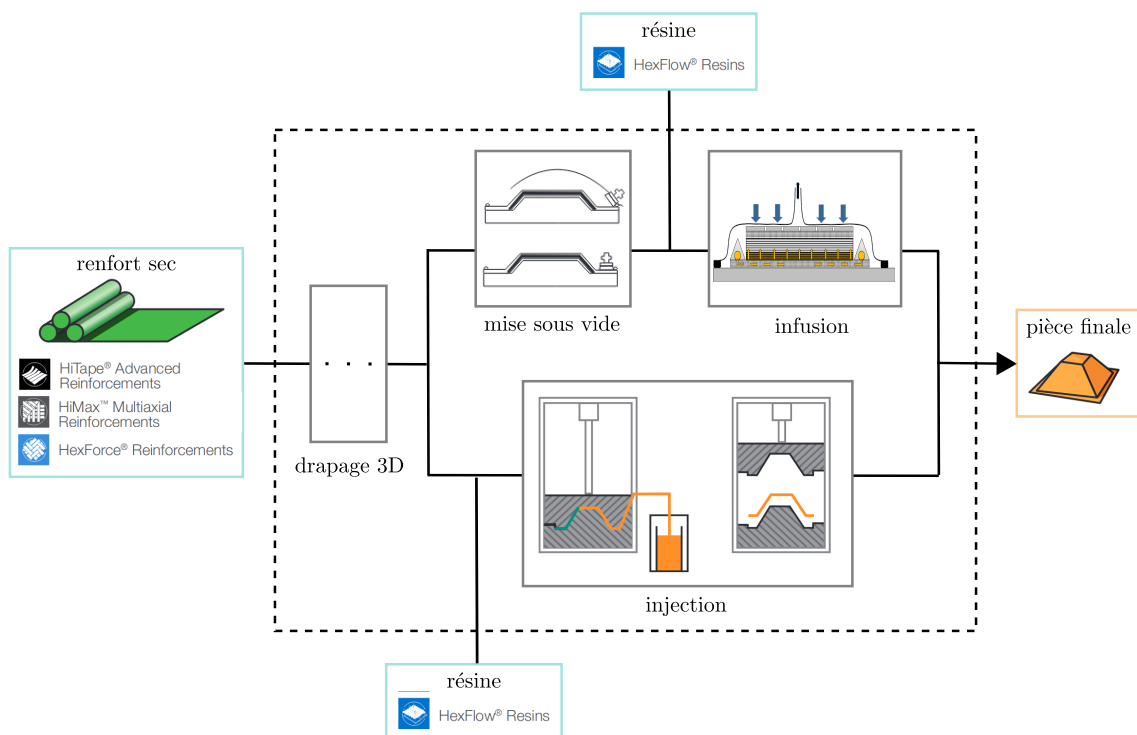


Figure 1.3 – Les différentes étapes de la mise en œuvre des matériaux composites par procédés directs.

Dans les procédés par injection (désignés généralement par RTM⁵), le renfort est placé entre un moule et un contre-moule, et la résine est injectée dans le plan du renfort éventuellement à haute pression. Ce type de procédé à moule fermé permet de

4. LCM : Liquid Composite Moulding
5. RTM : Resin Transfer Moulding

contrôler finement la géométrie finale de la pièce et son état de surface, et de maîtriser le taux volumique de fibres, tout en autorisant des cadences importantes. Les longerons de l'aileron de l'Airbus A380 illustrés sur la figure 1.4a, les caissons de dérive et les *winglets* du Falcon 7X, ou l'extrémité de carennage de l'empennage du Legacy 500 BizJet d'Embraer sont des exemples de pièces structurales fabriquées par RTM [6]. Cependant, l'injection nécessite une presse, un moule et un contre-moule, ce qui est possible pour les pièces de taille moyenne (de l'ordre du mètre), mais la viabilité économique de ce procédé n'a pas encore été démontrée pour des pièces structurales de grandes dimensions (plusieurs mètres) ou avec des peaux épaisses telles que des panneaux de fuselage.

La mise en œuvre de ces grandes pièces semble plus viable par infusion (ou VARTM⁶). Dans ce cas, le renfort est placé entre un moule et une bâche étanche, et des consommables sont ajoutés pour contrôler et optimiser les trajets d'écoulement. L'imprégnation du renfort par la résine se fait après mise sous vide, en étuve – sous la pression atmosphérique. Comparée au RTM, la mise en œuvre par infusion est moins onéreuse puisqu'elle ne nécessite pas de contre-moule, cependant l'épaisseur est moins maîtrisée et l'état de surface peut être moins bon à cause de la présence des consommables (pas d'aspect moule). La porte cargo de l'Airbus A400M illustrée sur la figure 1.4b est un exemple de pièce de structure mise en œuvre par infusion.

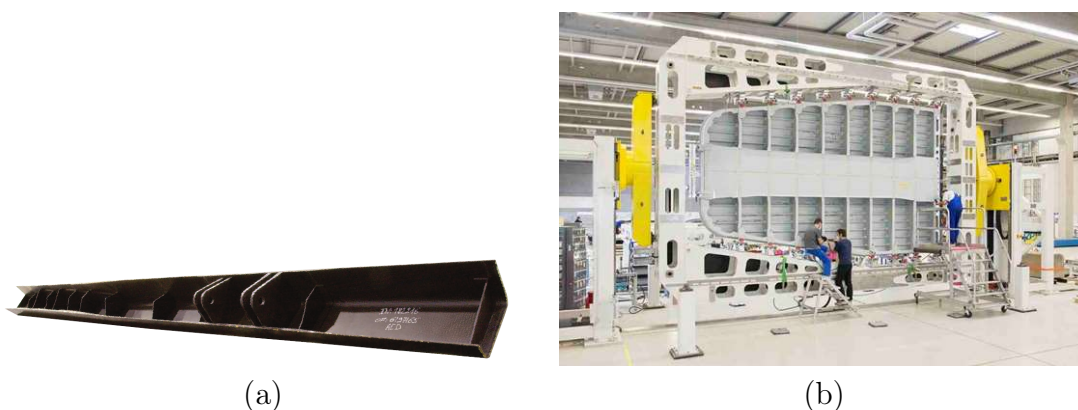


Figure 1.4 – Exemples de pièces aéronautiques structurales mises en œuvre par procédés directs : longeron de l'aileron de l'Airbus A380 par RTM [6] (a) et porte de cargo de l'Airbus A400M (b).

Pour conclure, l'utilisation de pré-imprégnés présente l'avantage d'une teneur en résine calibrée car la masse surfacique du semi-produit est contrôlée. De plus, leur mise en œuvre est facilitée car la résine n'est pas traitée à l'état liquide, et car la pégosité (« pouvoir collant ») du renfort permet son maintien en place lors du drapage des différentes couches [7]. Cependant, l'utilisation de l'autoclave et le stockage à -18°C du semi-produit pré-imprégné sont très onéreux : c'est une des raisons pour lesquelles les procédés hors autoclave n'impliquant pas de renforts pré-imprégnés sont aujourd'hui privilégiés par les constructeurs aéronautiques puisqu'ils permettent une réduction des

6. VARTM: Vacuum Assisted RTM

coûts liés au matériau, au stockage, au transport et à la mise en œuvre. Par ailleurs, afin d'augmenter les cadences de production, l'automatisation de l'étape de drapage, traditionnellement manuelle, a fait l'objet d'une grande attention. Les différents modes de drapage sont présentés dans le paragraphe suivant ; notons qu'on appelle préforme le semi-produit fibreux tridimensionnel, qu'il soit sec ou pré-imprégné.

1.1.3 Drapage et mise en forme des renforts

Dans le cas des procédés indirects, le renfort pré-imprégné de résine est traditionnellement déposé manuellement couche par couche ; on parle de drapage manuel. En vue d'augmenter les cadences de production, deux modes d'automatisation de la dépose ont été proposés pour les renforts unidirectionnels (secs ou pré-imprégnés). Tout d'abord, le drapage automatisé à l'aide d'une machine ATL⁷ consiste à déposer des couches de renforts UD de largeur calibrée de l'ordre de 1 à 50 cm, soit à plat soit sur une géométrie relativement simple. Le drapage sur des géométries plus complexes peut également être automatisé avec le placement automatique de fibres à l'aide d'une machine AFP⁸, qui dépose des nappes UD de 2 à 10 mm de large environ. Afin d'augmenter la vitesse de dépose et de limiter le temps d'immobilisation du moule, le renfort peut également être déposé de façon automatisée à plat, puis l'empilement de renforts peut être mis en forme au cours d'une étape ultérieure. Ces différentes options sont illustrées sur la figure 1.5, qui complète les figures 1.2 et 1.3. A titre d'exemple, les longerons arrières de l'Airbus A400M sont déposés à plat par ATL puis mis en forme à chaud, tandis que la même pièce de l'Airbus A350 est déposée par AFP directement sur la géométrie finale. Ces choix différents s'expliquent d'une part par la plus grande complexité géométrique du longeron A350, et d'autre part par les quelques années qui ont séparé le développement de ces deux pièces, et qui ont donc laissé le temps à la technologie AFP de gagner en maturité.

Dans le cas des procédés directs, les renforts ne bénéficient pas du pouvoir collant de la résine thermodurcissable non réticulée (ou thermoplastique fondue) qui fait le lien entre le renfort déposé et les autres couches. Un liant thermoplastique, généralement sous forme de poudre ne dépassant pas 5 % du grammage du renfort, est requis pour maintenir les couches entre elles. De la même façon que pour les procédés indirects, le renfort peut alors être déposé à chaud de façon automatisée avec des machines de type AFP ou ATL, soit directement sur la géométrie finale, soit à plat. Dans le cadre de notre étude, nous nous intéresserons à la mise en forme d'un empilement de renforts secs déposés à plat.

Que ce soit pour les procédés directs ou indirects, il existe deux méthodes générales de mise en forme d'un renfort déposé à plat : l'estampage, faisant appel à un moule et un contre-moule éventuellement de façon séquencée, et l'utilisation d'une membrane (ou diaphragme) associée à un moule en appliquant une pression ou bien en tirant le vide. Dans le cas de l'estampage, des serre-flancs (ou ressorts, *etc.*) peuvent être employés afin de maintenir le renfort sous tension pour limiter l'apparition de plissements. Dans le cas des procédés à membrane, l'utilisation d'une deuxième membrane

7. ATL : Automated Tape Laying

8. AFP : Automated Fibre Placement

remplit la même fonction. L'opération est généralement réalisée en température : soit pour diminuer la viscosité des pré-imprégnés thermodurcissables, soit pour permettre le thermoformage des pré-imprégnés thermoplastiques, soit pour activer le liant sur les renforts secs.

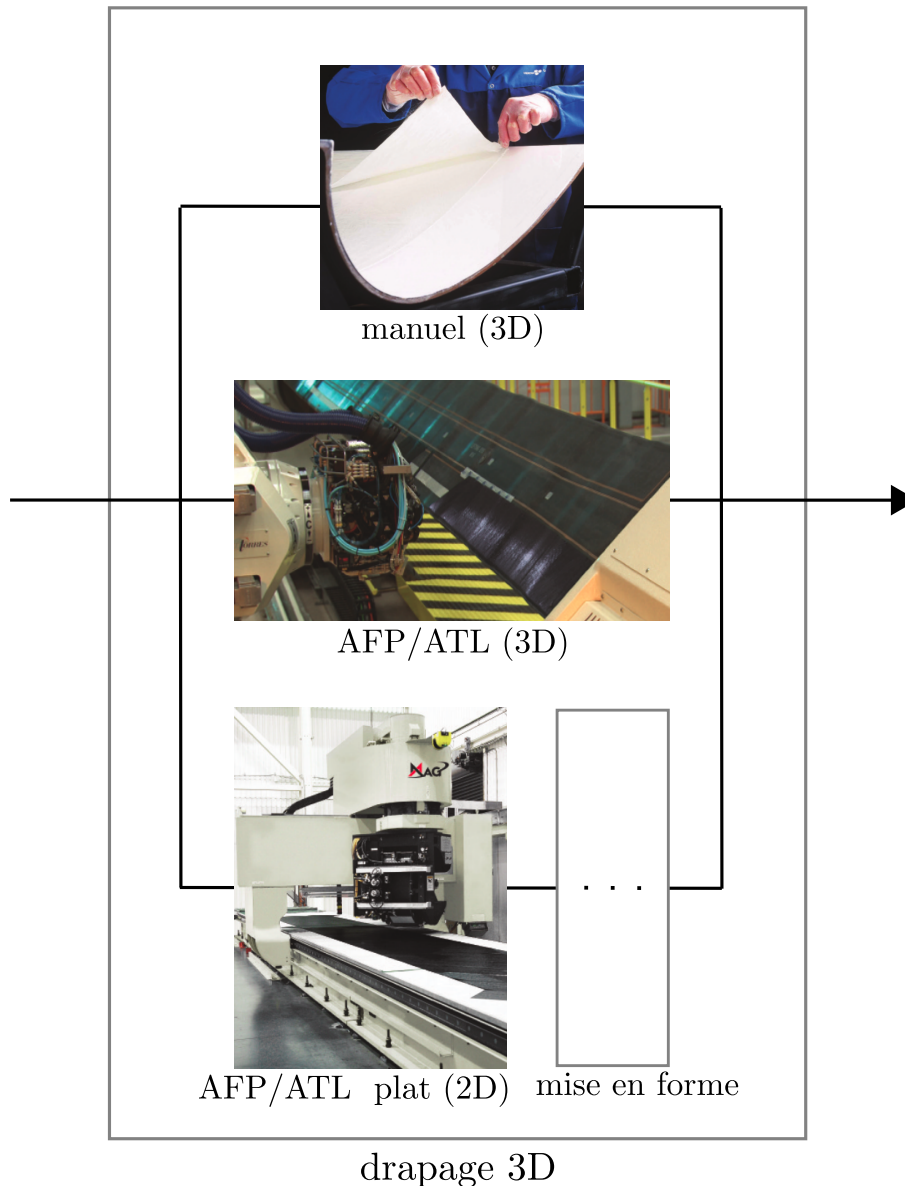


Figure 1.5 – Différentes options pour l'étape de drapage des renforts UD (en complément des figures 1.2 et 1.3) : drapage manuel [6], dépose automatisée ATL (machine MAG Industrial Automation Systems), placement de fibres AFP (machine MTorres).

La mise en forme de pré-imprégnés par simple membrane est utilisée dans le secteur aéronautique (longerons de l'Airbus A400M cités précédemment); une machine de mise en forme par simple membrane est illustrée sur la figure 1.6. En revanche, s'il n'y a pas, à notre connaissance, de pièce aéronautique structurale mise en œuvre par dépose à plat d'un renfort sec puis mis en forme de l'empilement sec, cette voie

semble néanmoins prometteuse en vue de l'augmentation des cadences de production. L'estampage, rapide, est employé dans l'automobile – par exemple pour le corps de base de l'habitacle de la BMW i3 –, cependant des défauts de mise en forme peuvent apparaître. Dans le secteur aéronautique, les procédés à membrane sous vide (pression de mise en forme de l'ordre de 1 bar) retiennent donc davantage l'attention, d'une part car ils sont plus adaptés à de larges structures (pas de contre-moule ni de presse), et d'autre part car ils permettent de réduire les défauts de mise en forme [8]. C'est ce procédé de mise en forme par double membrane sous vide qui constituera le cadre de notre étude. Les différentes étapes de ce procédé sont détaillées sur la figure 1.7.



Figure 1.6 – Machine de formage à chaud de LT Machines.

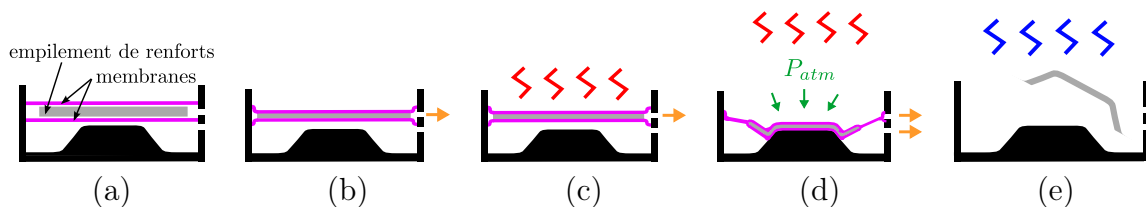


Figure 1.7 – Les différentes étapes de la mise en forme d'un empilement de renforts secs par double membrane à chaud : mise en place (a), compaction entre les deux membranes (b), montée en température (c), mise en forme (d), refroidissement et démoulage (e).

1.1.4 Enjeux de la mise en forme des renforts secs

La présence potentielle de défauts dans une pièce composite est due à la fois au *design* (géométrie, type de renfort, orientations) et à la mise en œuvre [9], dont chacune des étapes apporte ses difficultés. Par exemple, c'est au moment de la dépose automatisée que peuvent apparaître des écarts ou recouvrements entre les plis, ou de la contamination (peluches de fibres ou FOD⁹), tandis que c'est au moment de l'association avec la résine que des porosités ou zones sèches peuvent se former. Lors de

9. FOD : Foreign Objects Debris

l'étape de mise en forme, qui est celle qui nous intéresse dans le cadre de ce travail, divers défauts peuvent apparaître. Les principaux sont schématisés sur la figure 1.8.

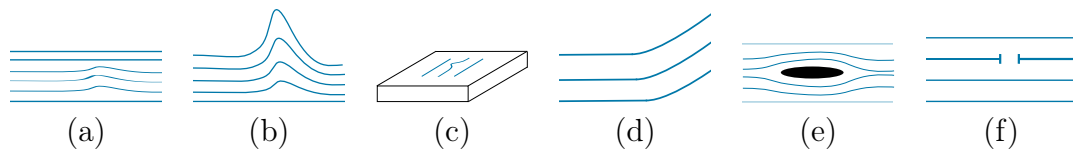


Figure 1.8 – Schémas des principaux défauts pouvant apparaître lors de la mise en forme : ondulation hors-plan (a), plissement hors plan (b), ondulation plane (c), défaut d'alignement (d), décohésion ou ouverture (e), rupture de fibre ou de pli (f).

Du point de vue du *design*, les géométries non développables en particulier constituent un défi : il s'agit des formes dont la surface est non applicable sur un plan sans étirement, telles qu'un hémisphère ou un coin de valise. Par opposition les surfaces développables ne présentent qu'une seule courbure ; une poutre à section en Z en est un exemple. Il a longtemps été considéré que seuls les tissus, par leur déformabilité en cisaillement plan, pouvaient permettre de mettre en forme des formes non développables [10]. Mais aujourd'hui des solutions sont étudiées pour les nappes UD, avec pour objectif de limiter l'apparition des défauts, comme c'est le cas dans cette étude. Notons que des défauts de mise en forme peuvent être présents même sur des géométries développables : des plissements hors-plan peuvent par exemple apparaître lors de la mise en forme de pré-imprégnés therm durcissables sur des raidisseurs en U [11]. Cela est dû à la structure et au comportement mécanique spécifiques des renforts, avec notamment une quasi-inextensibilité dans la direction des fibres.

Ces défauts peuvent fortement dégrader les propriétés de la pièce finale. Frommel *et al.* [12] estiment par exemple qu'une déviation de 13° de l'orientation des fibres réduit de moitié le module de traction du matériau, et que la contrainte de traction à rupture diminue déjà de moitié pour 6° de déviation. Lightfoot *et al.* [11] ayant observé jusqu'à 50° de défaut d'alignement des plis sur une géométrie développable en U, on comprend l'intérêt de maîtriser l'orientation des fibres lors de la mise en forme d'un renfort sur une forme potentiellement complexe, en vue de connaître les propriétés mécaniques de la pièce finale en fonction de la présence d'ondulations, déviations ou plissements par exemple.

1.2 Position de l'étude

1.2.1 Contexte industriel

Afin de répondre simultanément aux exigences de qualité et de performances mécaniques des structures primaires aéronautiques, et au besoin d'augmentation des cadences de production et de réduction des coûts, Hexcel Reinforcements a développé une solution technique : le renfort HiTape[®], destiné aux procédés directs *via* une dépose automatisée. HiTape[®] est un renfort unidirectionnel de fibres de carbone,

constitué d'un assemblage de plusieurs fils – mèches épanouies – maintenus par un voile thermoplastique situé sur chacune de ses faces comme représenté sur la figure 1.9a. Il concurrence les propriétés mécaniques des matériaux pré-imprégnés de dernière génération (figure 1.9b), et permet d'atteindre un taux volumique de fibres dans la pièce infusée de 58 à 60 % visé par les constructeurs aéronautiques. Grâce au voile thermoplastique partiellement fondu qui permet la cohésion mécanique des empilements, HiTape® permet de combiner les avantages de la dépose automatisée (jusqu'à $50 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$) avec ceux des procédés hors autoclave. Cependant, la structure particulière de ce renfort lui confère un comportement mécanique spécifique, intermédiaire entre un renfort sec (structure interne) et un pré-imprégné (à l'interface à cause de la présence du voile thermoplastique), par conséquent peu connu.

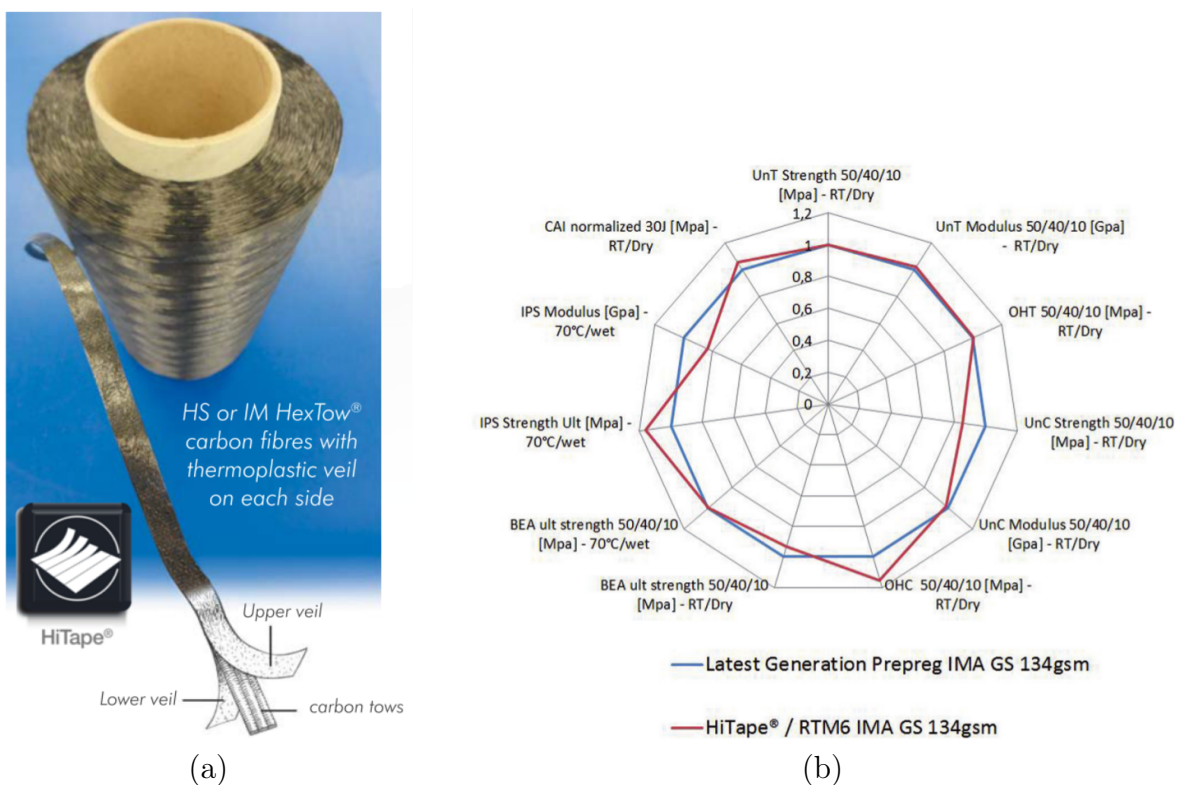


Figure 1.9 – Structure du renfort HiTape® (a) et comparaison de ses propriétés avec celles d'un pré-imprégné de référence (b) [13].

1.2.2 Contexte académique et objectif de la thèse

Ce travail de recherche s'inscrit dans le cadre d'un financement CIFRE. Il s'agit d'une collaboration entre le centre Science des Matériaux et des Structures (SMS) du Laboratoire Georges Friedel (LGF – UMR CNRS 5307) de Mines Saint-Étienne et la société Hexcel Reinforcements. Ce travail implique également le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS – UMR CNRS 5259) de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA).

Du point de vue académique, l'enjeu est une meilleure compréhension de la physique intervenant lors de la mise en forme en vue de la modélisation et de la simulation de l'ensemble du procédé de mise en œuvre des matériaux composites par procédés directs. Ce travail de thèse est ainsi à rapprocher de la chaire industrielle de recherche et d'enseignement entre Hexcel et Mines Saint-Étienne, constituée d'un budget consolidé de près de 2 M€ pour la période 2015 – 2020. Intitulée « Modélisation numérique avancée pour l'élaboration par infusion de composites structuraux de nouvelle génération », cette chaire vise à structurer le cadre numérique de la simulation de la mise en œuvre des matériaux composites hautes performances par infusion, avec plusieurs travaux de doctorats et post-doctorats ces dernières années [14–17]. La simulation de l'étape de mise en forme, préalable à l'infusion, est quant à elle initiée par ce travail de thèse.

L'objectif de ce travail de recherche est ainsi la modélisation et la simulation de la mise en forme d'empilements de renforts HiTape[®], dans le cadre de la mise en œuvre des grandes pièces structurelles aéronautiques par procédés directs avec une dépose automatisée à plat. Cela nécessite à la fois de comprendre le comportement de ce matériau intermédiaire entre un renfort sec et un pré-imprégné *via* des essais de caractérisation, et de mettre en place des outils numériques permettant de prédire l'état de la préforme au cours de sa transformation. En effet, non seulement la présence de défauts sur la préforme peut dégrader les performances mécaniques de la pièce finale, mais elle peut également modifier le déroulement de l'infusion *via* la création de chemins préférentiels d'écoulement si certaines zones sont moins compactées que d'autres. La compréhension des phénomènes en jeu permettra *in fine* de déterminer les conditions optimales de mise en forme.

Afin de disposer d'un outil unique pour simuler l'ensemble des étapes de la mise en œuvre des composites par infusion, ce travail de thèse s'inscrit dans la continuité des développements réalisés à Mines Saint-Étienne dans le solveur éléments finis Z-set¹⁰, notamment dans le cadre de la chaire. Ce choix permet par ailleurs de bénéficier des avantages de Z-set en terme de modularité et de flexibilité quant à l'implémentation.

Avant de présenter la démarche générale du travail de thèse (partie 1.4), un état de l'art de la modélisation et de la simulation de la mise en forme des renforts (partie 1.3) est tout d'abord réalisé, et quelques choix sont présentés.

1.3 Modélisation et simulation de la mise en forme des renforts

1.3.1 Choix d'une échelle de représentation

Les renforts fibreux ont une structure multi-échelle, comme représenté sur la figure 1.10, et l'échelle de modélisation choisie dépend de l'objectif :

- à l'échelle des fibres (microscopique), il s'agit d'étudier les fibres et leurs interactions ;

10. www.zset-software.com

- à l'échelle des mèches (mésoscopique), la simulation vise à étudier les mèches et leurs interactions et à déterminer les propriétés locales du renfort induites par l'arrangement des fibres ;
- à l'échelle des plis (mésoscopique), l'objectif est d'étudier le comportement des plis en prédisant l'apparition de plissements par exemple et leurs interactions (frottement inter-pli) ;
- à l'échelle de la pièce (macroscopique), il s'agit d'étudier l'empilement de renforts et son comportement.

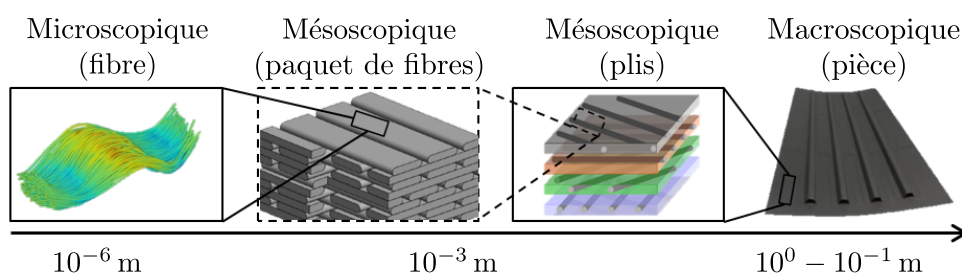


Figure 1.10 – Les différentes échelles de représentation pour la mise en forme des renforts d'après [18, 19].

Compte tenu de la faible épaisseur (de l'ordre de 0,2 mm) des renforts HiTape®[®], et de leur structure même de couche fibreuse dense avec un voile thermoplastique à l'interface entre les plis, l'échelle du pli est retenue comme pertinente pour la modélisation de leur comportement. Par rapport aux échelles inférieures, elle permet de plus de limiter les coûts de calcul. A l'échelle du pli, plusieurs approches existent pour la simulation de la mise en forme ; elles sont présentées ci-après dans la partie 1.3.2.

1.3.2 Présentation des approches à l'échelle du pli

Approche géométrique

L'approche géométrique – ou méthode du filet – a initialement été développée pour les tissus : le renfort est en effet représenté avant déformation par un quadrillage avec deux directions principales correspondant à celles de la trame et de la chaîne du tissu. Les trois hypothèses suivantes sont faites concernant l'étape de mise en forme : (i) pas de glissement entre chaîne et trame (*pin jointed-net*), *i.e.* les points géométriques de contact entre chaîne et trame restent constants et le renfort se déforme par rotation au niveau de ces points de contacts, (ii) pas de frottement entre le renfort et l'outil, et (iii) inextensibilité des mèches. Cette méthode, illustrée sur la figure 1.11, est très rapide. Elle permet d'identifier des zones critiques pour la mise en forme (insuffisance de matière ou nécessitant un « coup de ciseau ») dans une phase de pré-dimensionnement ou de pré-optimisation [20]. Divers outils commerciaux existent ; Catia CPD¹¹, PAM-

11. www.3ds.com

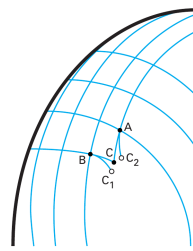


Figure 1.11 – Détermination de la position du point C connaissant celles de A et de B dans la méthode du filet [10].

QuikForm¹², FiberSim¹³ ou MSC Laminate Modeller¹⁴ en sont des exemples. Cependant, il n’y a pas de différenciation mécanique (*i.e.* le résultat ne dépend pas du type de renfort) et les interactions entre les plis ne sont pas décrites [9]. Pour une prédiction plus fine, des approches mécaniques sont alors proposées, comme présenté dans les paragraphes suivants.

Approche mécanique discrète

L’approche mécanique discrète consiste à modéliser le renfort par un ensemble discontinu d’éléments déformables. La figure 1.12 en montre un exemple : le renfort est représenté par un ensemble de nœuds reliés par des barres et des ressorts positionnés de sorte à modéliser les modes de déformation du renfort. Cependant, cette approche n’est pas utilisée à notre connaissance pour des renforts techniques, car elle n’offre pas un cadre mécanique suffisamment riche.

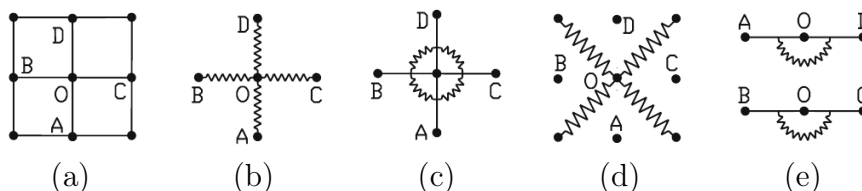


Figure 1.12 – Une particule « O » connectée à ses quatre voisins (a), avec modélisation de l’élongation (b), du cisaillement (c, d) et de la flexion (e) [21].

Approche mécanique continue

Les approches mécaniques continues sont basées sur l’hypothèse que le matériau est un milieu continu homogène, *i.e.* le matériau est le même en tout point. A l’échelle du pli, la structure mésoscopique (armure dans le cas des tissus par exemple) n’est donc pas prise en compte. En général, ces modèles sont basés sur l’hypothèse IFRM¹⁵,

12. www.esi-group.com

13. www.plm.automation.siemens.com

14. www.simcompanion.mscsoftware.com

15. IFRM : Ideal Fibre Reinforced Material

initialement proposée par Spencer *et al.* [22] puis adaptée par Rogers [23] et Johnson [24] au comportement des pré-imprégnés uni- et bidirectionnels, selon laquelle (*i*) le matériau est incompressible et (*ii*) les fibres sont inextensibles, ce qui peut poser des problèmes numériques.

Les principales solutions commerciales de solveurs spécifiquement développées pour la simulation de la mise en forme sont AniFormTM¹⁶ (solveur implicite) et PAM-FORMTM¹⁷ (solveur explicite). Par ailleurs, LS-DynaTM¹⁸ (solveur explicite) et AbaqusTM¹⁹ sont des solveurs multi-physiques nécessitant un travail de développement pour être adaptés au problème de la mise en forme des renforts, mais offrant par ailleurs davantage de flexibilité. Une comparaison de la capacité de ces différents solveurs à prédire la mise en forme d'un pré-imprégné TP²⁰ UD a été réalisée [25] ; elle révèle que la position et la direction des plissements est identifiée par tous les solveurs, mais que les résultats d'autres caractéristiques plus précises telles que la longueur ou la hauteur des plissements varie en fonction de la capacité des logiciels à pouvoir être adaptés au comportement du matériau considéré. Ainsi, des approches continues à l'échelle des plis ont déjà été utilisées et se sont révélées pertinentes pour la simulation de la mise en forme des renforts ; une telle approche mécanique continue est également sélectionnée dans le cadre de ce travail de thèse.

Enfin, notons que dans certains cas, des approches mécaniques semi-discrètes, combinaisons des deux approches précédentes, ont également été proposées pour représenter des comportements très spécifiques. Il s'agit alors de représenter une partie du comportement par un solide continu, et une autre par des éléments discrets. Ces deux parties peuvent être associées dans un même élément avec pour objectif de représenter plus fidèlement l'anisotropie du renfort : de Luycker *et al.* [26] ont par exemple combiné des éléments solides d'une part pour modéliser la compaction et le cisaillement transverse hors-plan, à des éléments solides barres volontairement discrets d'autre part pour la tension des mèches dans les interlocks, comme illustré sur la figure 1.13a. Les parties discrète et continue peuvent également être indépendantes et représenter des composants différents : Creech & Pickett [27] ont ainsi modélisé un NCF par un milieu continu pour les fibres et des éléments barres pour les coutures comme présenté sur la figure 1.13b – cependant cela implique de gérer le contact entre les deux (entre nappes et couture pour cet exemple).

1.4 Démarche du travail

La prochaine grande partie (partie II) de ce manuscrit s'intéresse à l'identification et la caractérisation des réponses mécaniques du renfort HiTape[®] sous diverses sollicitations à l'échelle d'un pli (couche) de renfort. Pour cela, le chapitre 2, bibliographique, répertorie les différentes sollicitations des renforts en général et les méthodes de caractérisation existantes, et permet de définir la stratégie de description du comportement

16. www.aniform.com

17. www.esi-group.com

18. www.lstc.com/products/ls-dyna

19. www.3ds.com

20. TP : ThermoPlastique(s)

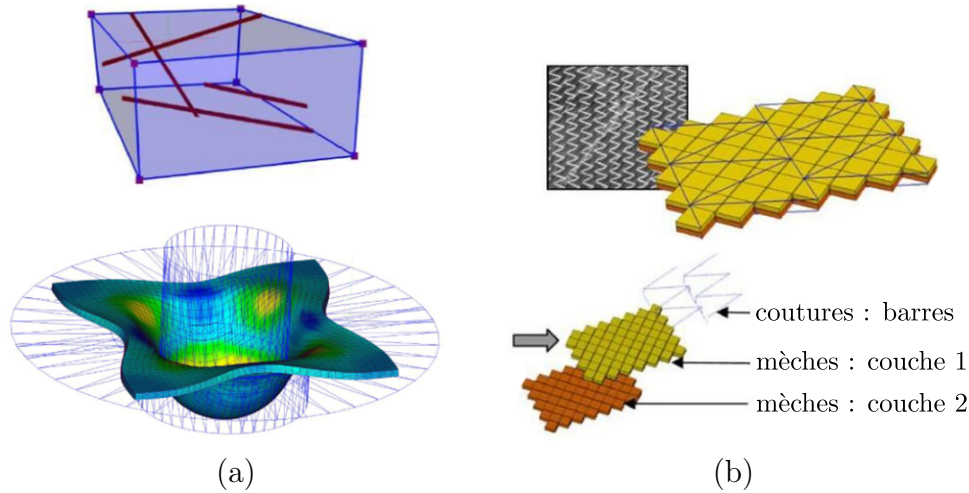


Figure 1.13 – Approche semi-discrète pour un interlock [26] (a) et pour un NCF [27] (b).

du renfort HiTape®. Dans le chapitre 3, le comportement intra-pli du renfort est caractérisé au moyen notamment d'un essai de flexion, préalablement conçu et mis en place. Enfin dans le chapitre 4, le comportement inter-pli (interface entre les plis) est caractérisé à l'aide d'un essai de frottement, également préalablement conçu et mis en place.

Dans la dernière grande partie de ce manuscrit (partie III), il s'agit de modéliser mécaniquement et numériquement la réponse mécanique du renfort HiTape® en vue de la simulation de sa mise en forme, en intégrant les grands déplacements et rotations. Dans cette optique, le chapitre 5 tout d'abord pose les bases de la mécanique des milieux continus et du cadre thermodynamique, et propose des modèles mécaniques pour le milieu intra-pli d'une part, et l'interface entre les plis d'autre part. Dans le chapitre 6, le problème de l'équilibre d'un seul solide figurant une couche de renfort est posé, et la résolution par la méthode des éléments finis est introduite. Une loi de comportement spécifique pour le milieu intra-pli est implémentée et validée par des cas-tests. Enfin dans le chapitre 7, le problème de l'équilibre mécanique de deux solides séparés par une interface figurant le voile thermoplastique est formulé, et résolu par la méthode des éléments finis intégrant des zones cohésives, après implémentation et validation de lois spécifiques.



**Caractérisation expérimentale :
étude bibliographique, mise en
place d'essais, exploitation**

2 Etat de l'art de la caractérisation du comportement mécanique des renforts

Sommaire

2.1	Les différentes sollicitations auxquelles les renforts peuvent être soumis	27
2.2	Réponses à des sollicitations intra-plis	29
2.2.1	Traction longitudinale	29
2.2.2	Traction transverse plane	30
2.2.3	Compaction	30
2.2.4	Cisaillement plan	33
2.2.5	Cisaillements transverses hors-plan	35
2.2.6	Flexion	36
2.3	Réponses à des sollicitations inter-plis	40
2.3.1	Glissement inter-ply	40
2.3.2	Adhésion/décohésion inter-ply	45
2.4	Conclusion du chapitre : synthèse de l'état de l'art et stratégie adoptée	46
2.4.1	Synthèse de la littérature	46
2.4.2	Stratégie de modélisation du renfort HiTape®	47
2.4.3	Stratégie de caractérisation du renfort HiTape®	47

Introduction

Comme nous l'avons vu, les renforts tels que les tissus, les UD ou les NCF sont élaborés à partir d'ensembles de fibres. Cette structure particulière confère des spécificités à leur comportement mécanique à l'échelle d'un pli.

Tout d'abord, les renforts présentent une structure multi-échelle ; le comportement à l'échelle des plis est donc fortement influencé par la réponse aux échelles inférieures (fibres et mèches). Par exemple, à l'échelle microscopique, les caractéristiques des fibres, leur arrangement, leur taux volumique, ainsi que leur mouvement relatif en rotation et en translation influencent les modes de déformation à l'échelle des mèches. Ensuite, la réponse mécanique des renforts à l'échelle d'un pli est souvent non-linéaire, dû à une combinaison de modes de déformation intra-mèches et inter-mèches (rotation, translation). De plus, un comportement mécanique fortement anisotrope des renforts en général est observé notamment à l'échelle macroscopique, dû surtout à la structure des renforts à fibres continues caractérisés par une ou plusieurs directions privilégiées. Enfin, la quasi-inextensibilité des fibres dans leur direction principale rend la réponse mécanique des renforts d'autant plus spécifique.

Compte tenu de ces particularités générales des renforts, la modélisation du renfort HiTape® nécessite une étape préliminaire de compréhension de son comportement lors de l'étape de mise en forme, *i.e.* de sa réponse sous diverses sollicitations. On rappelle que l'échelle du pli a été sélectionnée pour cette étude (partie 1.3.1), en considérant la faible épaisseur du renfort et sa structure intra-p pli unidirectionnelle. De plus, une approche mécanique continue a été jugée pertinente (partie 1.3.2) car elle permet la description du comportement du renfort HiTape® par un milieu équivalent au comportement élastique, hypothèse systématique pour les renforts. Finalement, l'étude du comportement intra-p pli du renfort HiTape® unidirectionnel découle directement du comportement d'une mèche sèche, comme illustré sur la figure 2.1.

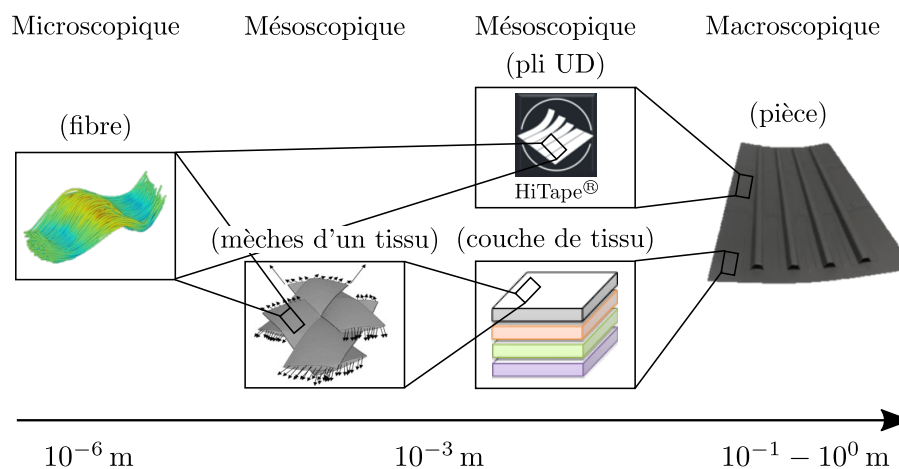


Figure 2.1 – Le renfort HiTape® présente la structure d'un paquet de fibre à l'échelle d'un pli (image fibre [18]; image mèches [28]).

À l'échelle d'un empilement de renforts HiTape®[®], la présence du voile thermoplastique à l'interface entre les plis (« inter-pli ») rapproche d'avantage le comportement attendu de celui des renforts pré-imprégnés, pour lesquels des effets visqueux sont observés, comme justifié par la figure 2.2.

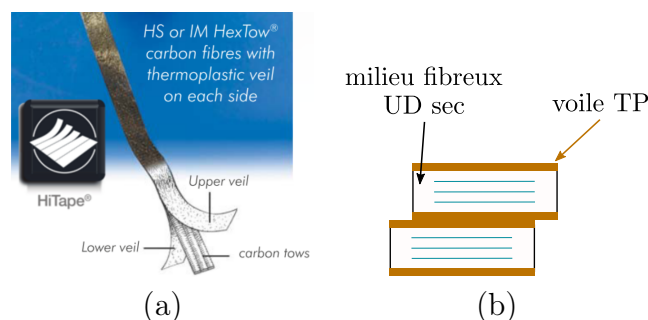


Figure 2.2 – Illustration [13] (a) et modélisation (b) de la structure du renfort HiTape®[®], intermédiaire entre les renforts secs et pré-imprégnés.

Ainsi, sous le prisme de l'approche sélectionnée, ce chapitre fait tout d'abord l'inventaire des différents types de sollicitations auxquelles les renforts peuvent être soumis (partie 2.1). La réponse à chaque sollicitation est ensuite détaillée et les méthodes de caractérisation correspondantes sont présentées (parties 2.2 et 2.3). L'objectif est d'en déduire une stratégie de modélisation et de caractérisation du renfort HiTape®[®] (partie 2.4). Nous mentionnons également quelques résultats de la littérature en nous intéressant particulièrement à des matériaux susceptibles de présenter un comportement proche du renfort étudié, à savoir des renforts (i) unidirectionnels, et (ii) secs pour le comportement plutôt induit par la couche fibreuse et pré-imprégnés pour l'inter-pli.

2.1 Les différentes sollicitations auxquelles les renforts peuvent être soumis

Par souci de clarté et de simplicité, on fait le choix de notation suivant pour tout le manuscrit (sauf contre-indication), où $\mathcal{B} = (\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$ forme une base cartésienne orthonormée de l'espace : le plan du renfort est caractérisé par les directions \underline{E}_1 et \underline{E}_2 , et \underline{E}_3 est normal au plan du renfort (*i.e.* dirigé selon son épaisseur). Dans le cas des tissus, \underline{E}_1 et \underline{E}_2 correspondent aux directions trame et chaîne ; dans le cas d'un renfort unidirectionnel, \underline{E}_1 correspond à la direction des fibres.

À l'échelle d'un pli, les différentes sollicitations possibles pour un pli unitaire unidirectionnel de renfort sont représentées sur la figure 2.3 : les tractions longitudinale (a) et transverse (b) dans le plan du renfort, la compaction dans la direction de l'épaisseur du renfort (c), les cisaillements plan (d) et transverses hors-plan (e-f), et la flexion hors-plan (g-h) dans chacune des directions du plan du renfort (longitudinale et transverse).

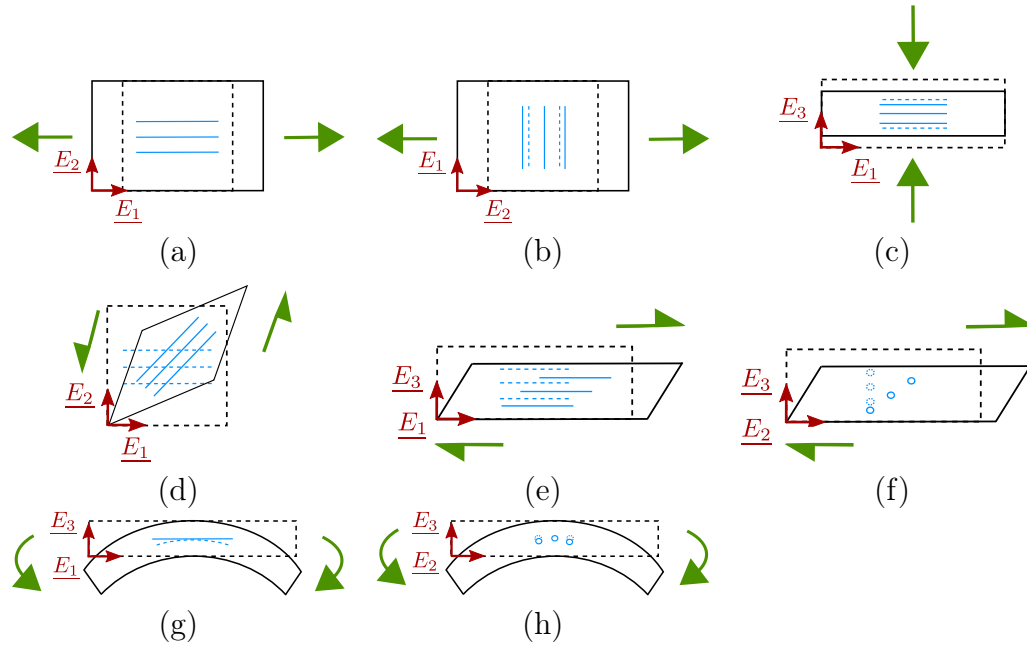


Figure 2.3 – Diverses sollicitations intra-plis des renforts représentées dans la base \mathcal{B} : traction longitudinale (a), traction transverse plane (b), compaction (c), cisaillement plan (d) et cisaillements transverses hors-plan (e-f), et flexion hors-plan longitudinale et transverse (g-h).

Dans l'optique de simuler la mise en forme d'un empilement de renforts sur un moule, les interactions inter-plis d'une part, et entre les plis et le moule d'autre part, sont également à prendre à compte. Dans le cadre de ce travail de thèse, nous nous concentrons sur les premières, et représentons les secondes *via* des conditions de contact standard (sans frottement). Parmi les interactions inter-plis, le glissement inter-ply (*i.e.* le frottement relatif des plis les uns par rapport aux autres) et l'adhésion entre les plis interviennent ; ils sont illustrés à l'échelle du pli sur la figure 2.4 dans la même base \mathcal{B} .

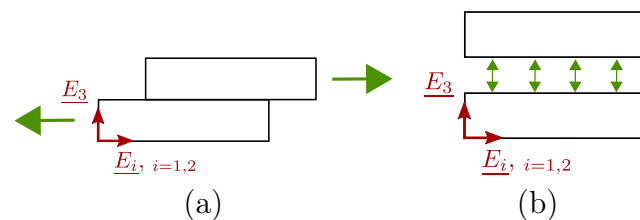


Figure 2.4 – Diverses sollicitations de l'interface entre les couches de renforts représentées dans la base \mathcal{B} : glissement inter-ply (a) et décohésion (b).

Dans les parties 2.2 et 2.3 de ce chapitre, nous considérons successivement tous les types de sollicitations schématisés sur les figures 2.3 et 2.4 en exposant les modèles utilisés pour décrire la réponse des renforts à ces sollicitations, et les méthodes classiques de caractérisation correspondantes.

2.2 Réponses à des sollicitations intra-plis

2.2.1 Traction longitudinale

Sollicitées en traction dans leur direction principale, les fibres de carbone ont un comportement quasi-linéaire élastique caractérisé par un module E_f et une rupture de type fragile avec un allongement à rupture typiquement très faible (de 1 à 3 %) [10,29]. Les comportements en traction d'une mèche de fibres de carbone et d'un tissu sont illustrés sur la figure 2.5. Ces comportements sont généralement caractérisés à l'aide d'une machine de traction standard. La mèche sollicitée dans sa direction présente un comportement linéaire élastique semblable à celui des fibres, tandis que dans le cas d'un tissu, l'embuvage crée une non-linéarité dans la première phase de la réponse.

La structure orientée d'un renfort unidirectionnel pré-imprégné de résine justifie donc de considérer que son comportement en traction est quasi-linéaire élastique. Dans le cas d'un milieu biphasique, le module de traction E_L équivalent dans la direction des fibres peut alors être approximé par la loi des mélanges de type Voigt considérant des déformations identiques pour tous les constituants (ressorts en parallèle) :

$$E_L = V_f E_f + (1 - V_f) E_m \quad (2.1)$$

où V_f est le taux volumique de fibres et E_m le module de la matrice. Cette approximation génère une erreur de 1 à 2 % seulement lorsqu'on la compare à des mesures expérimentales [30]. Dans le cas d'un renfort unidirectionnel sec, seules les fibres contribuent à la rigidité : le module de traction équivalent dans la direction des fibres devient alors $E_L \approx V_f E_f$. De façon similaire, l'allongement à rupture est le même que celui des fibres.

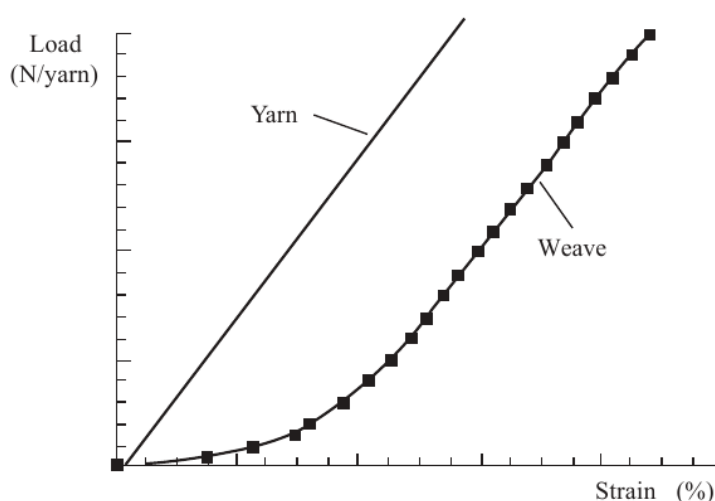


Figure 2.5 – Comparaison du comportement en traction d'une mèche et d'un tissu [31].

2.2.2 Traction transverse plane

Le comportement en traction transverse plane (figure 2.3b) peut théoriquement être décrit de la même façon par son module E_T équivalent dans la direction transverse. Dans le cas des renforts unidirectionnels, quelques tentatives de caractérisation sont recensées sur des pré-imprégnés, la matrice donnant une certaine cohésion au renfort dans la direction transverse. Ces essais ont été réalisés à l'aide d'une machine de traction standard (sur un UD carbone/époxy [32,33]) ou bien d'une DMA¹ à vitesse de chargement constante (sur un UD carbone/PA6² [34]). Le principal défi de ces essais est de maintenir l'intégrité de l'échantillon, l'allongement étant non uniforme et la décohésion intervenant à des niveaux de force très bas [32] comme illustré sur la figure 2.6. Pour contourner cette difficulté, des empilements de même orientation ou croisés ont été caractérisés [32]. Un module de traction transverse de l'ordre de 10^{-6} GPa a été obtenu sur un UD carbone/PA6 [34]. Dans le cas des renforts unidirectionnels secs, aucune valeur du module E_T n'a été proposée à notre connaissance. La cohésion du renfort dans la direction transverse étant encore plus faible que pour un renfort pré-imprégné, invalidant presque dès le début de l'essai l'hypothèse de continuité, on peut s'interroger sur la pertinence d'un tel essai.



Figure 2.6 – Photographies d'un essai de traction transverse plane sur un empilement de 4 plis pré-imprégnés UD carbone/époxy de même orientation : état initial (a) et courant (b) [33] – la direction de sollicitation est indiquée en rouge, et le phénomène de décohésion est mis en évidence.

2.2.3 Compaction

La sollicitation en compaction d'un renfort, schématisée sur la figure 2.3c, correspond à une compression dans le sens de son épaisseur. L'état de compaction de ce renfort est alors caractérisé par son taux volumique de fibres, défini de la manière suivante :

$$V_f = \frac{\mathcal{A} N}{\rho_f h} \quad (2.2)$$

1. DMA : Dynamic Mechanical Analysis
2. PA : PolyAmide

où h [m] est l'épaisseur de l'empilement donnée par l'essai, \mathcal{A} [$\text{g} \cdot \text{m}^{-2}$] la masse surfacique (ou grammage) du renfort, N [-] le nombre de plis et ρ_f [$\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$] la masse volumique des fibres. Ce type de sollicitation a un impact non négligeable dans les procédés directs. En effet, plus le renfort est compacté – *i.e.* plus le taux volumique de fibres est grand –, plus la perméabilité de la structure fibreuse diminue, donc plus le temps de remplissage lors de l'infusion augmente. De plus, si l'état de compaction du renfort n'est pas homogène sur toute la structure, des chemins de remplissage préférentiels peuvent apparaître et des défauts d'imprégnation peuvent se former. Ainsi, la connaissance du taux volumique de fibres permet de mieux maîtriser l'étape d'infusion. Dans les procédés de mise en forme par membrane(s) qui nous intéressent, les forces appliquées sont suiveuses, *i.e.* orientées suivant l'épaisseur de la préforme. Ainsi même si la compaction intervient dans l'épaisseur du renfort, petite au regard des dimensions du renfort dans son plan, la réponse associée a une influence importante sur la mise en forme des renforts secs, et a fait l'objet de nombreuses études.

Un essai de compaction a pour objectif de décrire la relation entre le taux volumique de fibres V_f et la contrainte de compaction σ_C , cette dernière étant définie comme le rapport entre la force de compaction et la surface de l'échantillon. Pour cela, l'essai consiste en général à comprimer dans la direction de son épaisseur un empilement de renforts entre deux plateaux à l'aide d'une machine de traction standard ; un exemple de montage est donné sur la figure 2.7. Les données de force et de déplacement sont interprétées en termes de contrainte de compaction et de taux volumique de fibres. La principale difficulté associée à ce type d'essai est d'assurer le parallélisme entre les plateaux de compression, ceci assurant une déformation homogène dans le plan du renfort. Par ailleurs, afin d'avoir un relevé précis du déplacement, un capteur supplémentaire est en général utilisé. Une limite de l'essai est l'hypothèse d'une déformation homogène dans l'épaisseur du renfort ; en effet il a été montré que les renforts épais sont plus comprimés dans la région proche des plateaux qu'au milieu de la préforme [35].

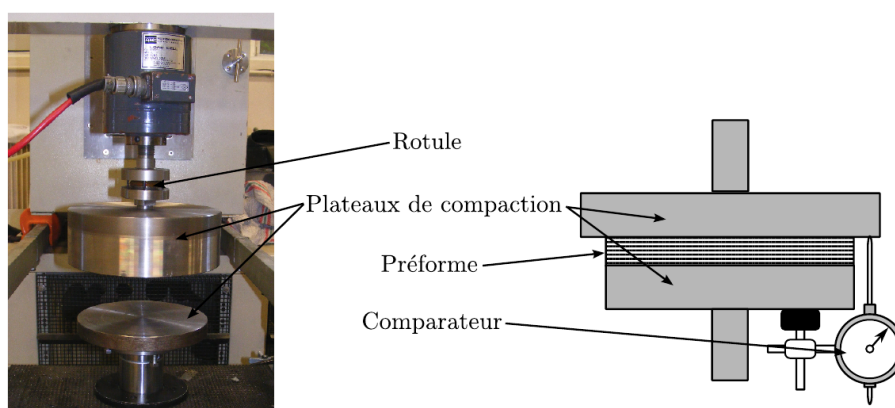


Figure 2.7 – Exemple d'un banc de caractérisation en compaction [19].

L'allure du comportement de compaction est la même pour tous les renforts, qu'ils soient secs ou pré-imprégnés [35, 36] comme illustré sur la figure 2.8 pour des renforts variés : un mat sec de fibres courtes (*OCS-random*), un UD sec cousu (*UD-stitched*),

un NCF bi-directionnel (*NCS*), un tissu taffetas sec (*PWF-dry*) et ce même tissu pré-imprégné (*PWF-wet*). Le comportement obtenu est ainsi fortement non-linéaire, car dû au réarrangement des fibres au cours de la sollicitation. Après une phase initiale très souple au cours de laquelle les fibres viennent en contact les unes des autres, la contrainte de compaction augmente fortement jusqu'à ce que les espaces vides entre les fibres disparaissent pour tendre vers un comportement quasi-linéaire de pente caractérisée par la rigidité transverse des fibres [37].

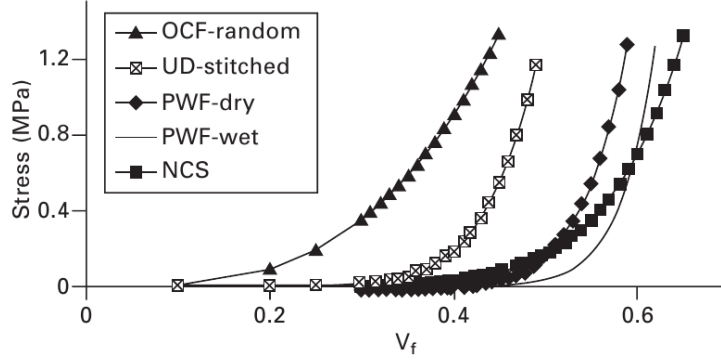


Figure 2.8 – Exemples de résultats de divers types de renforts sollicités en compaction [36].

Des premiers modèles purement élastiques dérivés de la théorie des poutres ont été proposés notamment par Van Wyk [38] ; celui de Gutowski [39] est souvent utilisé :

$$\sigma_C = k \frac{V_f/V_{f0} - 1}{(1/V_f - 1/V_{fmax})^4} \quad \text{avec } V_{f0} = V_f(\sigma_C = 0), \quad V_{fmax} = \lim_{\sigma_C \rightarrow \infty} V_f \quad (2.3)$$

où k est un paramètre à définir, et V_{f0} et V_{fmax} sont les taux volumiques de fibres respectivement dans un état libre de contrainte et maximum. Ces deux derniers étant difficiles à caractériser, ils sont souvent traités comme paramètres. D'autres modèles empiriques ont également été proposés, notamment des lois de puissance du type :

$$\sigma_C = m V_f^n \quad (2.4)$$

où m et n sont des paramètres à définir, n étant typiquement de l'ordre de 5 à 10 [40]. Des lois de puissance ont ainsi été utilisées pour un tissu sergé sec [41] ou un mat sec de fibres de verres [42], cependant elles présentent l'inconvénient de ne jamais s'annuler : il n'y a ainsi pas de point à zéro contrainte ($V_{f0}, 0$), ce qui n'est pas physique. Des modèles polynomiaux [36] ont également été employés, comme :

$$\sigma_C = \sum_{i=0}^n a_i (V_f - V_{fdat})^i, \quad a_0 = \sigma_{fdat} \quad (2.5)$$

où n et les a_i ($i = 1..n$) sont des paramètres à définir, et $(V_{fdat}, \sigma_{fdat})$ est un couple connu – par exemple $(V_{f0}, 0)$.

Cependant, le comportement en compaction des renforts n'est pas purement élastique. En effet, il peut présenter non seulement des aspects visco-élastiques associés à de la relaxation, une dépendance à la vitesse de sollicitation ou un effet adoucissant de l'histoire car les courbes ne superposent pas d'un cycle à l'autre [36], mais également un phénomène d'hystérésis – *i.e.* les courbes de charge et de décharge ne sont pas superposées à cause de la dissipation due au contact entre les fibres. Ces phénomènes sont illustrés sur la figure 2.9. Différents modèles visent à les prendre en compte ; ils ne sont pas détaillés ici.

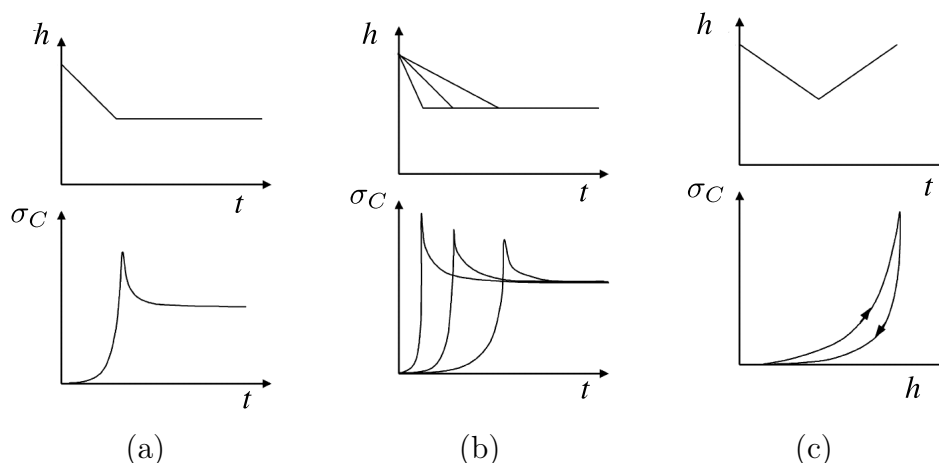


Figure 2.9 – Représentation schématique de la relation entre la contrainte, l'épaisseur de la préforme et le temps en présence de relaxation (a), d'influence de la vitesse de sollicitation (b) et d'un phénomène d'hystérésis (c) d'après [43].

2.2.4 Cisaillement plan

Le cisaillement plan est le mode de déformation prépondérant lors de la mise en forme d'un renfort de type tissu sec sur une forme non développable ; de nombreux travaux se sont donc attachés à le caractériser. Lorsqu'un renfort tissé est sollicité en cisaillement plan, les mèches commencent par tourner au niveau des points de contacts, puis elles rentrent en contact et les efforts augmentent fortement. Ce comportement est fortement non-linéaire, par conséquent on ne peut pas déduire un module de cisaillement équivalent à partir du module des fibres. Caractériser ce comportement consiste alors à identifier la relation entre la force et l'angle de cisaillement, défini par l'angle complémentaire de celui formé par la chaîne et la trame (*i.e.* leur somme vaut $\pi/2$).

Deux méthodes communes de caractérisation existent : le *bias-extension test* et le *picture-frame test* (ou *trellis-frame test*). Elles sont illustrées sur la figure 2.10. Elles nécessitent une machine de traction standard et ont pour donnée de sortie la force en fonction du déplacement. Le déplacement est ensuite géométriquement relié à l'angle de cisaillement. Dans le *picture-frame test*, le renfort est placé dans un cadre articulé initialement carré sollicité dans la direction d'une diagonale, les directions des fibres étant parallèles aux côtés du carré. Ce test vise à solliciter le renfort en cisaillement pur ; pour cela, le cadre est déformé en losange au cours de l'essai. Dans le *bias-extension*

test, un échantillon rectangulaire, dont la longueur dans la direction de sollicitation est au moins deux fois supérieure à la largeur, est testé en traction, les fibres étant orientées à $\pm 45^\circ$. Ces deux méthodes présentent l'avantage d'être assez simples à mettre en place, et sont très utilisées pour caractériser différents tissus, pré-imprégnés ou non, possiblement dans une enceinte thermique. Les principales limites du *picture-frame test* sont (i) sa sensibilité à un défaut d'alignement car si les fibres travaillent en tension, le test est perturbé puisque la rigidité en tension est bien supérieure à celle de cisaillement, et (ii) l'encastrement. En effet, pour solliciter l'échantillon en cisaillement pur, la rotation devrait être autorisée au niveau de la zone de maintien de l'échantillon dans le cadre (encastrement), or cela n'étant généralement pas le cas une forme de S apparaît et la déformation n'est plus homogène. Pour pallier cela, des variantes ont été proposées avec un système autorisant la rotation au niveau de l'encastrement [44], mais cela semble limité à des renforts ayant une tenue dans le sens transverse. La zone proche de l'encastrement ne se cisailant pas, le *bias-extension test* n'est pas sujet à ce dernier problème, cependant l'exploitation des résultats est plus difficile. D'autres tests de cisaillement plan ont également été proposés, tel que celui du Kawabata Evaluation System KES-FB1 [45].

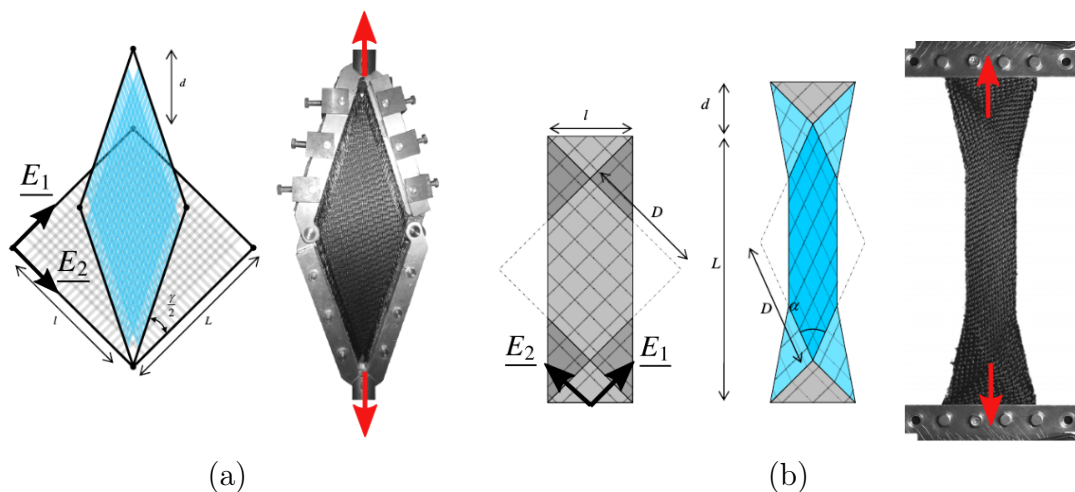


Figure 2.10 – Schémas des deux méthodes les plus communes de caractérisation du cisaillement plan : picture-frame test (a) et bias-extension test (b) d'après [46] – la direction de sollicitation est indiquée en rouge.

Dans le cas des renforts unidirectionnels, le cisaillement plan correspond au glissement relatif des fibres. La définition précédente de l'angle de cisaillement n'est plus valide ; il peut être redéfini comme l'angle entre la direction actuelle des fibres et la direction initialement perpendiculaire aux fibres. Pour le quantifier, une grille peut être dessinée sur le renfort non déformé. Un angle limite de cisaillement peut également être défini comme l'angle à partir duquel des plissements apparaissent.

Tout comme pour la traction transverse plane, la tenue en cisaillement plan d'un renfort unidirectionnel pré-imprégné est principalement liée aux caractéristiques de la matrice, avec un effet de la température et de la vitesse de déformation. Des essais

sur un fil AFP (pré-imprégnés UD carbone/époxy) tout comme sur des plis unitaires d'AFP (fils pré-imprégnés déposés côte à côte en contact) ne sont pas exploitables [33], d'une part à cause de la torsion des fils due à l'encastrement et d'autre part à cause de la faible tenue du matériau dans le sens transverse plan. Seuls des empilements de 4 plis de même orientation ont pu être caractérisés car il y a davantage de cohésion entre les fils, ce qui permet la transmission des contraintes de cisaillement – l'essai est illustré sur la figure 2.11a. Dans cette configuration, un angle de cisaillement limite a été visuellement évalué entre 2 et 4° ; au-delà il y a non seulement apparition de plissements mais aussi perte d'intégrité du matériau, une décohésion transverse plane due à la faible tenue du renfort en cisaillement plan.

Cependant, le maintien de la cohésion du renfort UD testé est nécessaire pour interpréter les résultats dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Plusieurs solutions ont donc été envisagées pour améliorer l'intégrité du renfort testé. En ce qui concerne le *picture-frame test*, le renfort a été placé entre deux membranes maintenues par le cadre, et l'ensemble constitué par le renfort et les membranes a été caractérisé [47]. Cependant, la contribution des membranes n'a pas pu être isolée de celle du renfort. Des empilements croisés (*cross-ply*) ont également été testés, mais tout comme pour les empilements UD, la déformation n'est pas homogène : une bande centrale illustrée sur la figure 2.11b apparaît.

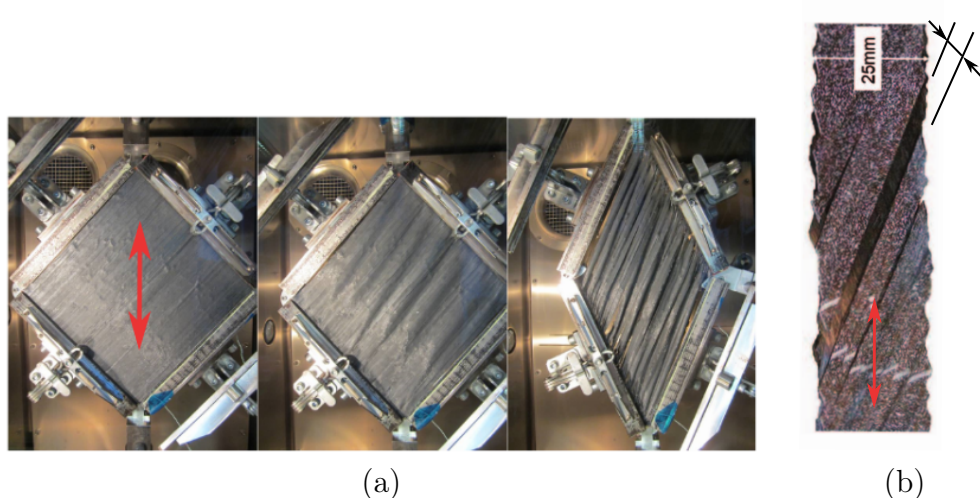


Figure 2.11 – Exemples d'échantillons unidirectionnels testés en cisaillement plan avec le *picture-frame test* sur un empilement de 4 plis UD carbone/époxy de même orientation [33] (a) dans la configuration initiale (à gauche), et avec un angle de cisaillement d'environ 2° (au milieu) et 40° (à droite), et avec le *bias-extension test* sur un empilement croisé UD carbone/époxy [48] (b) – la direction de sollicitation est indiquée en rouge.

2.2.5 Cisaillements transverses hors-plan

Tout comme la caractérisation de la traction transverse plane, celle du cisaillement transverse hors-plan d'un pli UD dépend principalement des propriétés de la matrice pour les renforts pré-imprégnés. Dans ce cas particulier, de nombreuses méthodes ont

été proposées, recensées par Haanappel *et al.* [29]. Elles visent à nourrir un modèle visco-élastique linéaire pour décrire le comportement en cisaillement transverse hors-plan.

Dans le cas des renforts secs, le comportement en cisaillement transverse hors-plan a été très peu étudié ; il est généralement négligé. Avec le développement de renforts épais de type interlock et 3D, différents montages ont été proposés. Un exemple est illustré sur la figure 2.12 : adapté à une machine de traction, il permet de soumettre l'échantillon à une sollicitation de cisaillement simple et est associé à une technique de corrélation d'images [46].

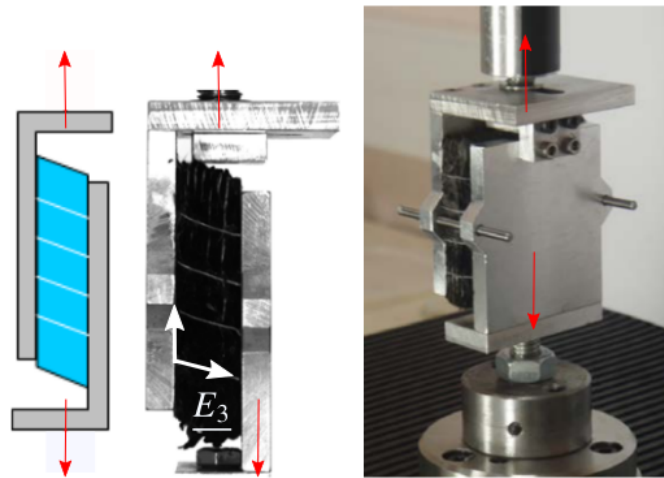


Figure 2.12 – Schéma et illustrations d'un essai de cisaillement transverse hors-plan sur un interlock [37] – la direction de l'épaisseur du renfort et la direction de sollicitation (en rouge) sont mises en évidence.

2.2.6 Flexion

D'après la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, la rigidité de flexion B par unité de largeur d'un solide élancé continu homogène est liée au module de traction E_L dans la direction du solide de telle façon que :

$$B = E_L \frac{h_s^3}{12} \quad (2.6)$$

pour un solide de section rectangulaire d'épaisseur h_s . Cependant, cette relation suppose une structure parfaitement continue, or, comme pour les autres sollicitations, le comportement de flexion est influencé par le réarrangement de la structure fibreuse au cours de l'essai. Il a d'ailleurs été montré que la relation (2.6) donne une rigidité de flexion très surestimée [49]. Par conséquent, une rigidité de flexion équivalente représentative ne peut pas être extraite de la rigidité de traction du milieu équivalent. Peirce [50] a été le premier à introduire un modèle à l'échelle du pli pour la rigidité de flexion des textiles fléchissant sous leur poids propre, basé sur l'hypothèse d'un comportement linéaire élastique. Pour cela, il introduit la notion de « longueur de flexion »

(*bending length*) c comme caractéristique intrinsèque des renforts en flexion, telle que deux textiles ayant la même longueur de flexion ont la même déformée. Peirce montre alors que rajouter le facteur correctif $\cos(\theta/2)$ dans la solution dans le cadre des petites perturbations donne une bonne approximation de la solution dans le cas des petites déformations et grandes déflexions :

$$c^3 = \frac{B}{\mathcal{A}g} = \frac{L^3 \cos(\theta/2)}{8 \tan(\theta)} \quad (2.7)$$

où θ [rad] est l'angle formé par la corde et l'axe horizontal, L [m] la longueur de la bande fléchie, et g [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$] l'accélération de la pesanteur comme représenté sur la figure 2.13a.

Dans le cas d'un comportement de flexion non-linéaire, la rigidité de flexion tangente par unité de largeur d'un renfort est plus généralement définie par [51] :

$$B(\kappa) = \frac{d\mathcal{M}(\kappa)}{d\kappa} \quad (2.8)$$

où \mathcal{M} [$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^{-1}$] est le moment de flexion par unité de largeur, B [$\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^{-1}$] la rigidité de flexion par unité de largeur, et κ [m^{-1}] la courbure. Plusieurs modèles ont été introduits pour prendre en compte la non-linéarité de la relation moment *vs.* courbure. On peut citer par exemple des relations bi-linéaires [52], des relations non-linéaires pour les petites courbures puis linéaires [51, 53], ou encore le modèle de Grosberg [54], pour lequel aucune déflexion n'apparaît avant une valeur seuil de moment (dite « moment coercitif ») à partir de laquelle la relation moment *vs.* courbure est linéaire. D'autres modèles encore visent à décrire le caractère irréversible (*i.e.* non élastique) du comportement de flexion, dû à la dissipation d'énergie par frottement inter-fibres, ce qui se traduit par un phénomène d'hystérésis – c'est le cas par exemple du modèle de Dahl [55], obtenu en généralisant le modèle de frottement de Coulomb.

A cause de la faible rigidité en flexion des renforts, les méthodes usuelles de caractérisation du comportement en flexion telles que la flexion trois ou quatre points ne peuvent pas être utilisées, et plusieurs méthodes standardisées ont été développées spécifiquement pour l'industrie textile. Dans la méthode du flexomètre à angle fixe, un échantillon de renfort est encastré d'un côté et laissé libre de l'autre, et fléchit sous son propre poids. La longueur de la bande fléchie est augmentée jusqu'à ce que le bout libre de l'échantillon touche un plan incliné à $41,5^\circ$, valeur de θ pour laquelle le quotient $\cos(\theta/2)/\tan(\theta)$ est environ égal à 1. La longueur de flexion c peut alors être calculée avec l'équation 2.7. Cette méthode est décrite dans les normes ASTM³ D1388 pour les tissus et ASTM D5732 pour les non-tissés. Un exemple de flexomètre à angle fixe vendu dans le commerce est donné sur la figure 2.13b. Cette méthode présente l'avantage d'être simple, économique et rapide, cependant elle présente plusieurs limites :

- 1 - le comportement en flexion doit être élastique ;
- 2 - le comportement en flexion doit être linéaire ;

3. ASTM : American Society for Testing Material www.astm.org/

- 3 - le facteur correctif $\cos(\theta/2)$ ajouté par Peirce dans l'équation 2.7 est empirique : il a été déterminé dans le cas des textiles non techniques et sa validité n'a pas été prouvée pour les renforts techniques depuis ;
- 4 - les renforts doivent être relativement souples car il faut que la bande fléchie atteigne le plan incliné (qui est de longueur finie) ;
- 5 - les essais sont réalisés à température ambiante.

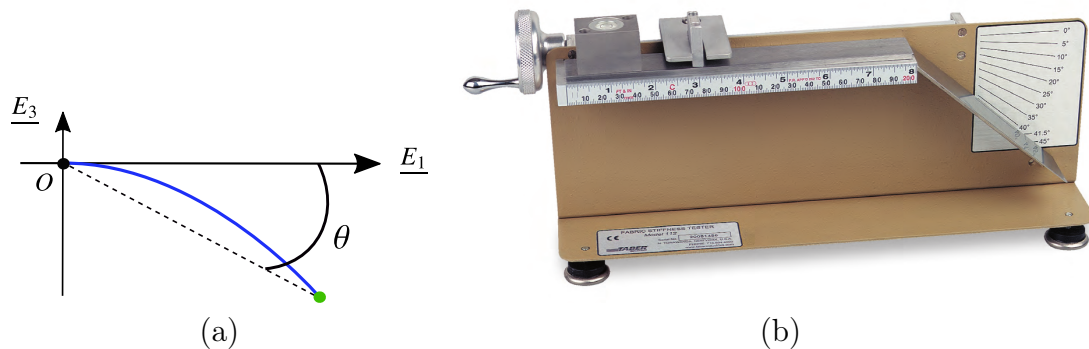


Figure 2.13 – Grandeurs associées au modèle de Peirce (équation 2.7) (a) et illustration d'un flexomètre à angle fixe commercialisé par Taber Industries (b).

Une deuxième méthode standardisée est celle du Kawabata Evaluation System KES-FB2 [45]. Elle permet de décrire la relation moment *vs.* courbure à la fois lors de la charge et de la décharge, et donc de caractériser le phénomène d'hystérésis. Les modèles de Grosberg [54] ou de Dahl [55] peuvent ensuite être utilisés pour représenter le comportement obtenu. Elle a été utilisée sur des multi-plies NCF [56] et sur un tissu [57] par exemple. Enfin, la méthode standardisée de Schlenker DIN⁴ 53864 peut également être citée : un échantillon de renfort fléchit sous son propre poids et une force ponctuelle est appliquée au bout de l'échantillon, ce qui permet de tester différents angles de flexion, et donne un résultat de rigidité de flexion en fonction de l'angle de flexion. Cependant, ces deux dernières méthodes permettent uniquement une caractérisation à température ambiante, du fait de la complexité des équipements.

Dans le but de contourner les limites des méthodes standardisées, des variantes ont été proposées, principalement du test du flexomètre à angle fixe car il reste le plus simple à mettre en place. Afin de caractériser la non-linéarité du comportement de flexion (limite - 2 -), Bilbao *et al.* ont réalisé le test avec différentes longueurs de bandes fléchies sur des renforts secs NCF et interlocks [58]. Pour ne plus être limité par la taille de l'équipement (limite - 4 -), Liang *et al.* ont placé des masselottes au bout de l'échantillon pour faire varier sa courbure [59]. Enfin, pour s'affranchir du modèle empirique de Peirce (limite - 3 -), le profil complet de l'échantillon déformé peut également être exploité afin de caractériser en chaque point la relation moment *vs.* courbure, et donc connaître avec un seul essai la relation moment *vs.* courbure sur une gamme de courbures. La démarche générale est alors la suivante [51, 58, 60, 61] :

- (1) photographier la déformée de l'échantillon en flexion ;

4. DIN : Deutsches Institut für Normung www.din.de

- (2) obtenir les coordonnées cartésiennes (x, z) de la déformée dans la base orthonormée $(\underline{E}_1, \underline{E}_3)$ par traitement d'image ;
- (3) définir une relation $z = f(x)$ à l'aide d'une régression avec un polynôme [51, 60], une série de fonctions exponentielles, ou des B-splines [61] par exemple ;
- (4) calculer la courbure $\kappa(x)$ avec la relation $z = f(x)$ telle que :

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} ; \quad (2.9)$$

- (5) calculer l'abscisse curviligne $s(x)$ telle que :

$$s(x) = \int_{u=0}^s \sqrt{1 + f'(x)^2} du ; \quad (2.10)$$

- (6) calculer le moment de flexion $\mathcal{M}(s)$ par unité de largeur pour chaque point $A(s)$ tel que :

$$\mathcal{M}(s) = \left\| \int_{\xi=s}^L \underline{AB}(\xi) \wedge -\mathcal{A} g \underline{E}_3 d\xi \right\| \approx \int_{\xi=s}^L \mathcal{A} g (\xi - s) \cos(\alpha(\xi)) d\xi \quad (2.11)$$

où s [m] est l'abscisse curviligne au point A telle que $s = 0$ à l'encastrement O et $s = L$ au bout libre C , et l'abscisse curviligne ξ [m] et l'angle α [rad] sont les coordonnées du point $B(\xi)$ courant de $A(s)$ à C dans le repère de Frénet associé, comme représenté sur la figure 2.14 ;

- (7) définir une relation entre le moment de flexion et la courbure $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\kappa)$.

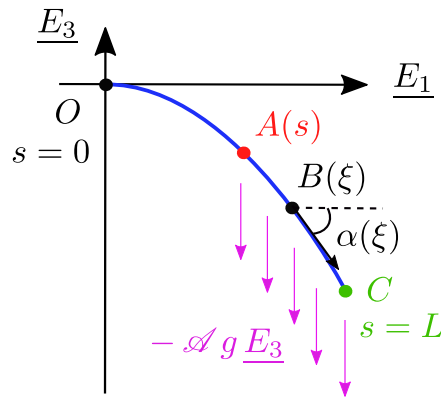


Figure 2.14 – Notations employées lors du calcul du moment de flexion avec l'équation 2.11.

Par ailleurs, des variantes en température (limite - 5 -) ont également été mises en place pour les renforts pré-imprégnés (UD carbone/PEEK et UD carbone/PPS⁵ par exemple [59]). Un premier point délicat est alors la montée en température de l'échantillon. Ainsi, un test de flexion vertical (*vertical cantilever*) à chaud [62, 63] a été proposé : il permet de n'appliquer le chargement qu'à partir du moment où la température souhaitée est atteinte. Cependant une déformation de l'échantillon est

5. PPS: PolyPhenylene Sulfide

déjà observée avant application du chargement due à la montée en température [64]. Une seconde difficulté concerne l'homogénéité de la température dans l'étuve malgré le pré-chauffage du montage. Pour pallier cela, des essais sont mis en place dans des volumes plus faibles : dans une machine de DMA en flexion 3-points [65], ou bien avec un rhéomètre [66]. Enfin la gestion de l'encastrement est également sensible, et peut influencer les résultats de manière significative [64].

A titre d'exemple, la caractérisation de la flexion hors-plan d'un matériau AFP de type UD carbone/époxy avec un flexomètre à angle fixe a donné une rigidité de flexion d'environ $10 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$ dans la direction des fibres, et $0,005 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$ dans la direction transverse plane [33] dans laquelle la cohésion est uniquement assurée par la matrice.

Dans cette partie 2.2, une description détaillée des réponses du milieu intra-ply des renforts fibreux sous diverses sollicitations, et de leurs méthodes de caractérisation a été proposée : les tractions longitudinale et transverse plane, la compaction, les cisaillements plan et transverses hors-plan et la flexion ont ainsi retenus l'attention dans le cas de divers travaux. Afin d'étudier la mise en forme d'un empilement de renforts fibreux, les modes inter-ply doivent de plus être caractérisés : il s'agit du glissement et de la décohésion inter-ply, présentés dans la partie 2.3 suivante.

2.3 Réponses à des sollicitations inter-ply

2.3.1 Glissement inter-ply

A l'échelle d'un empilement de renforts, le glissement inter-ply (ou cisaillement inter-laminaire) est déterminé par le comportement de frottement (tangential) entre les plys. Classiquement, deux grands types de contact entre deux solides sont considérés en tribologie : les contacts lubrifiés si un fluide lubrifiant est présent à l'interface, et les contacts secs lorsque deux solides sont directement en contact (ou séparés par un corps solide tel qu'un revêtement).

Dans le cas du frottement sec, la loi phénoménologique de Coulomb [67] énonce que la force de frottement dynamique – *i.e.* lorsque la vitesse de déplacement relatif entre les deux solides est non nulle – est proportionnelle à la force normale (équation 2.12). La constante de proportionnalité CoF_{dyn} [-] est appelée Coefficient de Frottement dynamique et ne dépend alors que du couple de matériaux considéré – elle est notamment indépendante de la vitesse relative de glissement des deux surfaces [68] :

$$\text{CoF}_{\text{dyn}} = \frac{F_{\text{dyn}}}{F_N} \quad (2.12)$$

où F_{dyn} [N] et F_N [N] sont les forces tangente dynamique et normale respectivement. Par ailleurs, dans certains cas, le glissement ne se déclenche pas avant d'atteindre un seuil de force minimal dit force de frottement statique F_{stat} [N] caractérisé par le Coefficient de Frottement statique CoF_{stat} [-] défini de façon similaire par [68] :

$$\text{CoF}_{\text{stat}} = \frac{F_{\text{stat}}}{F_N} . \quad (2.13)$$

Dès lors que le renfort contient une résine thermodurcissable ou thermoplastique à l'état fondu, cette dernière peut jouer le rôle de lubrifiant et influence fortement le comportement de frottement : il s'agit de contact lubrifié. Le coefficient de frottement dépend alors de la viscosité de la matrice η [Pa · s] (et donc de la température), la vitesse de glissement ν [m · s⁻¹] et l'effort normal, trois paramètres regroupés dans le nombre de Hersey H [m⁻¹] défini par :

$$H = \frac{\eta \nu}{F_N} . \quad (2.14)$$

Basée sur une approche phénoménologique, et initialement développée pour des paliers lisses lubrifiés avec de l'huile pour des applications ferroviaires, la théorie de Stribeck [69] exprime l'existence d'un minimum sur la courbe d'évolution du coefficient de frottement en fonction du nombre de Hersey. Trois régimes différents, schématisés sur la figure 2.15, sont alors mis en évidence. Dans le régime limite, le film lubrifiant est très mince *i.e.* d'épaisseur de l'ordre de la rugosité des deux surfaces ; dans ce cas le comportement de frottement dépend à la fois du lubrifiant et des propriétés physico-chimiques des surfaces. Dans le régime mixte, il y a à la fois des zones où les deux surfaces sont directement en contact et des zones où elles sont séparées par un film lubrifiant [68]. Dans le régime hydrodynamique, les deux surfaces sont complètement séparées par un film lubrifiant ; la rugosité des surfaces est alors négligeable. Dans ce cas, la relation entre le coefficient de frottement et le nombre de Hersey est croissante et plus précisément linéaire [70]. Il semble que la théorie de Stribeck ait été généralisée à tous types de solides et lubrifiants. Elle a notamment été fréquemment utilisée pour les renforts pré-imprégnés thermoplastiques [71–76].

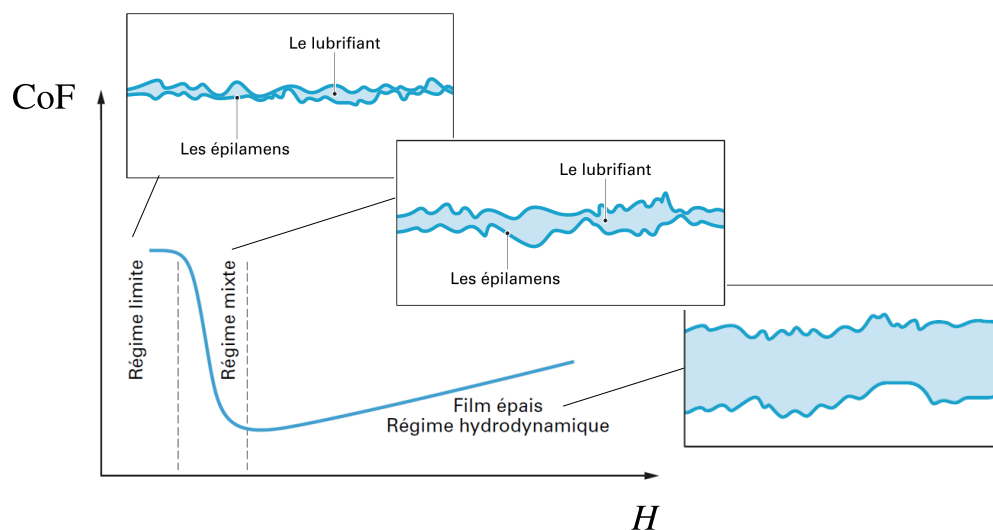


Figure 2.15 – Courbe de Stribeck et illustration schématique des différents régimes de lubrification d'après [77].

Deux principales méthodes standardisées ont été développées pour la caractérisation du comportement en frottement des plis de textiles (les standards liés au frotte-

ment inter-fibres ou inter-mèches ne sont pas abordés ici) : celle du plan horizontal et celle du plan incliné. Les coefficients de frottement statique et dynamique sont calculés avec la loi de Coulomb (équations 2.12 et 2.13), ce qui implique qu'ils sont supposés indépendants de la vitesse relative de glissement et de la pression normale notamment. Dans la première méthode, décrite par la norme ASTM D1894 et schématisée sur la figure 2.16a, un plan horizontal est revêtu du renfort testé et un bloc également revêtu de ce même renfort est déposé par-dessus. Le bloc est déplacé horizontalement, et la force de traction est mesurée – la force normale étant donnée par la masse du bloc. Le coefficient de frottement statique est obtenu avec le premier pic de force de traction, et le coefficient de frottement dynamique est atteint lorsque la vitesse de glissement est constante. L'essai KES-FB4 [45] utilise le même principe. Dans l'essai de plan incliné décrit par la norme ASTM D4521 et illustré sur la figure 2.16b, l'angle ι d'inclinaison du plan est augmenté jusqu'à ce que le bloc commence à glisser : le coefficient de frottement statique est alors obtenu géométriquement ($\text{CoF}_{\text{stat}} = \tan \iota$). En continuant encore à augmenter l'angle du plan incliné, le coefficient de frottement dynamique est obtenu par le même calcul lorsque le bloc glisse à vitesse constante. Cependant, ces méthodes ne permettent pas de reproduire les conditions de mise en forme des renforts : d'une part parce qu'elles sont limitées à la température ambiante, et d'autre part parce qu'elles ne permettent pas d'appliquer une contrainte normale réaliste pour la mise en forme. En effet, un calcul rapide montre que pour appliquer une pression normale de 1 bar sur une surface carrée de côté 5 cm il faudrait un bloc de 25 kg !

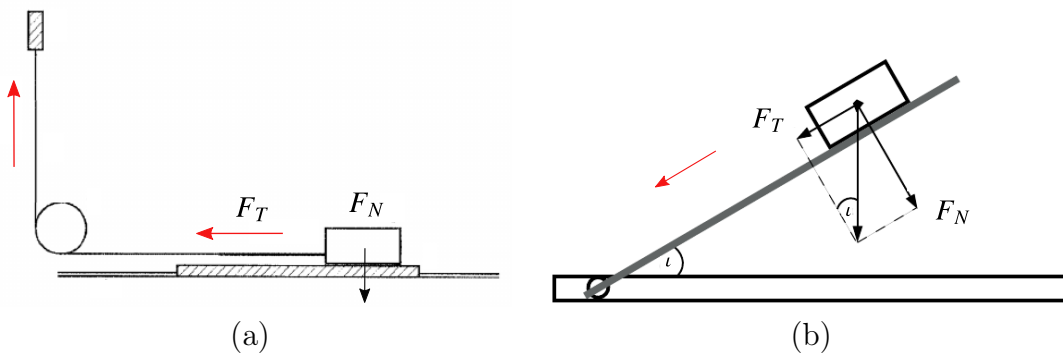


Figure 2.16 – Schémas de principe des essais décrits par les normes ASTM D1894 (a) et ASTM D4521 (b) d'après [33].

D'autres tests ont donc été développés pour pallier ces deux limites. Par exemple, un essai de plan horizontal avec un système spécifique d'application d'une pression normale a été proposé [78], mais la pression semble encore trop faible pour la mise en forme. Pour atteindre des pressions normales de l'ordre de 1 bar, les principes de test les plus fréquents sont le *pull-out* et le *pull-through*. Dans ces essais, un échantillon est placé entre deux plateaux sur lesquels une force normale est appliquée comme représenté sur la figure 2.17. L'échantillon est alors sollicité en traction et la force correspondante est mesurée. La différence entre les deux versions réside dans la surface de contact A : elle est constante pour le *pull-through* et diminue pour le *pull-out*. Ten

Thije & Akkerman conseillent de privilégier le *pull-through* [79] pour favoriser une distribution homogène de la pression normale. Un benchmark [80] décrit quelques-uns de ces montages. Enfin, l'essai du capstan [81] permet de caractériser le frottement entre une bande de renfort et un rouleau dans les systèmes d'enroulement/déroulement, mais il est moins représentatif du frottement inter-pli pouvant intervenir dans le procédé de mise en forme.

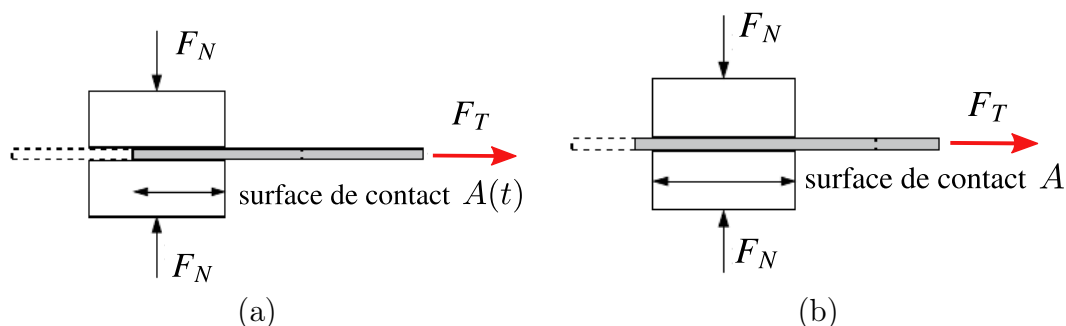


Figure 2.17 – Schémas de principe des essais de pull-out (a) et de pull-through (b).

Dans la littérature, la loi de frottement sec de Coulomb est en général utilisée pour modéliser le comportement de frottement lors du glissement inter-pli des renforts à l'état solide, *i.e.* soit les renforts secs [78], soit les renforts contenant du thermo-plastique testé en-dessous de sa température de fusion [80]. En effet, dans les essais, après une phase transitoire, le coefficient de frottement atteint une valeur palier visible sur la figure 2.18a, interprétée comme le coefficient de frottement dynamique. Cependant, l'hypothèse d'un coefficient de frottement constant unique pour un couple de matériau donné est simplificatrice : il a en effet été montré [74, 78] que la pression normale notamment a une forte influence. Ainsi des modèles plus complexes ont été proposés ; le modèle de Howell [82] par exemple décrit un coefficient de frottement dynamique fonction de la force normale $F_T = k F_N^m$ où k et m sont des paramètres à déterminer expérimentalement [81, 83, 84]. Un inventaire des modèles est proposé par Yuksekkay [85].

Dans le cas des renforts contenant une résine à l'état fluide (thermodurcissable ou thermoplastique à l'état fondu), le même type de courbe avec stabilisation du coefficient de frottement est obtenu ; un exemple est donné sur la figure 2.18b. Un régime hydrodynamique est en général observé *via* une relation croissante entre le coefficient de frottement et le nombre de Hersey. Dans ce cas, une relation – affine [84] ou puissance [29] par exemple – est alors posée et les coefficients sont déterminés par régression. Dans certains cas, le régime hydrodynamique est directement supposé [86]. Si la pression normale est importante, la résine située à l'interface peut migrer et de la lubrification limite peut intervenir : un modèle de lubrification mixte est alors plus adapté [33, 87].

Dans les deux cas (présence ou non d'une résine à l'état fluide), lors du régime transitoire précédant la stabilisation de la force tangente, celle-ci peut atteindre une

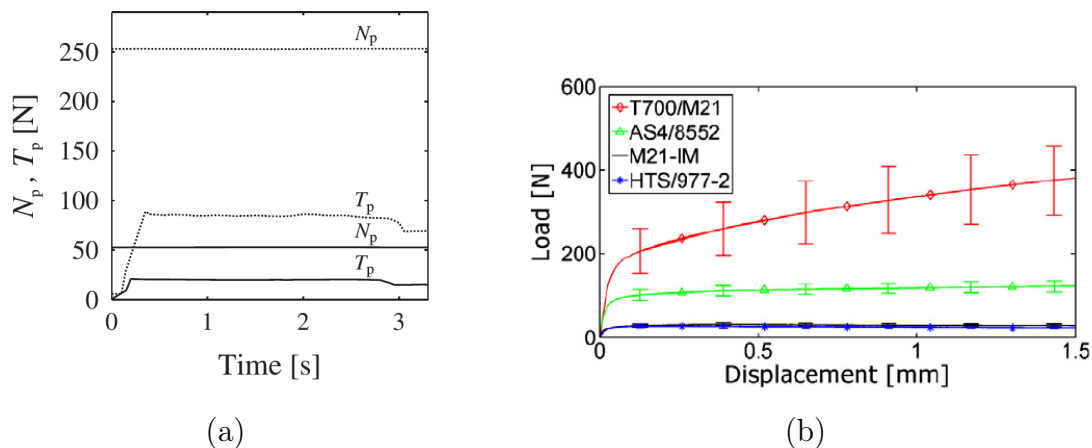


Figure 2.18 – Exemples de résultats obtenus avec un montage de type pull-through : forces tangente T_p et normale N_p caractérisant le frottement sec inter-ply d'un tissu satin de fibres de verre à 1000 mm/min, 0,2 bar (trait continu) et 1,0 bar (trait pointillé) [81] (a), et force tangente caractérisant le frottement lubrifié de divers renforts pré-imprégnés d'époxy [87] (b).

valeur maximale, d'autant plus marquée que la vitesse augmente sur un renfort contenant du thermoplastique fondu [72]. Si Fetfatsidis *et al.* [74] ont exploité cette valeur de force maximale pour déduire un coefficient de frottement statique, cette interprétation ne fait cependant pas l'unanimité. Selon Ten Thije *et al.* [72], le pic n'est pas atteint dès le début de l'essai, mais pour une valeur de déplacement supérieure à celle correspondant à l'allongement maximal de l'échantillon avant rupture : l'échantillon a donc déjà commencé à glisser, et ce coefficient de frottement maximal ne correspond pas à un coefficient de frottement statique. La transition du pic au palier peut plutôt être interprétée comme un réarrangement du renfort. Une analyse de sensibilité par la simulation numérique [74] a montré que le coefficient de frottement dynamique est largement dominant devant le coefficient statique ; autrement dit, le résultat de la simulation numérique est peu sensible à un petit changement du coefficient de frottement statique.

Enfin, une variation du coefficient de frottement avec l'orientation des fibres a été observée. Testant un UD carbone/époxy, Leutz *et al.* [33] ont par exemple obtenu un coefficient de frottement variant de 0,88 pour des orientations de $0^\circ/90^\circ$ à 1,37 pour du $0^\circ/0^\circ$, avec une valeur intermédiaire pour du $90^\circ/90^\circ$. De leur côté et sur le même type de matériau, Larberg *et al.* [87] ont obtenu un coefficient de frottement maximal pour du $0^\circ/45^\circ$ et du $0^\circ/30^\circ$, environ 25 % supérieur à celui obtenu avec des orientations de $0^\circ/90^\circ$ et $0/0^\circ$. Ces résultats ne sont pas intuitifs, puisqu'on aurait pu imaginer un coefficient de frottement maximal dans le cas où la surface de contact réel est maximale, *i.e.* pour des orientations $0^\circ/0^\circ$ et d'autant plus pour du $90^\circ/90^\circ$.

Dans le cas des renforts secs, un coefficient de frottement inter-ply de 0,3 est fréquemment supposé [74] en l'absence de données expérimentales ; cela est en accord avec les résultats de Hivet *et al.* sur un renfort tissé sec par exemple : entre 0,15 et 0,4 [78]. Pour les renforts contenant du thermoplastique à l'état fondu, la valeur du

coefficient de frottement varie sur une plage plus importante : Sachs *et al.* ont par exemple obtenu entre 0,1 et 1,8 [80].

2.3.2 Adhésion/décohésion inter-pli

Le dernier type de sollicitation intervenant au niveau de l'interface entre les plis est la décohésion ; elle correspond à l'ouverture de la préforme dans la direction de l'épaisseur. Par exemple, lors de la mise en forme d'un empilement initialement plat par simple membrane, une influence de l'adhésion entre les plis est attendue, notamment sur la position de l'empilement une fois qu'il a été positionné sur le moule. Cependant, ce type de sollicitation n'a été considéré que très récemment [9, 25], et n'a pas été étudié jusqu'à maintenant à notre connaissance dans le cadre de la mise en forme. En revanche, ce type de sollicitation retient l'attention depuis quelques années dans le cadre de la simulation de l'étape de la dépose automatisée de renforts pré-imprégnés [88], dont l'objectif est d'assurer que les fils restent en place après la dépose et la manipulation éventuelle de la préforme. Il s'agit alors de caractériser la pégosité (*tack*) du renfort pré-imprégné, c'est-à-dire son « pouvoir collant » ou, autrement dit, sa capacité à adhérer à une surface lorsqu'il est déposé de façon manuelle ou automatisée [88].

Deux méthodes principales de caractérisation de la pégosité des pré-imprégnés existent. Tout d'abord, le test d'adhésion (*probe tack test*), initialement développé pour les adhésifs sensibles à la pression, a été adapté pour les renforts pré-imprégnés par Seferis & Meissonnier [89]. Le test est similaire à celui de compaction, à la différence près que la sollicitation se fait en traction. En effet, deux couches de renforts sont placées entre deux plateaux parallèles à leur plan, chaque couche étant fixée au plateau avec lequel elle est en contact. L'empilement est d'abord compacté sous une pression représentative de la dépose (de l'ordre de 0,02 MPa par exemple [90]), puis séparé comme illustré sur la figure 2.19, et les données de force de séparation et de déplacement permettent de déduire l'énergie d'adhésion. L'autre méthode est celle du pelage, précisée dans la norme ASTM 3167, et adaptée par Crossley *et al.* [91], pour tester des renforts pré-imprégnés dans des conditions les plus proches possibles de celle de la dépose automatisée.

Le comportement observé en adhésion sur des renforts UD carbone/époxy est fortement non-linéaire, avec un pic de contrainte de séparation, ainsi qu'un phénomène viscoélastique de relaxation [90]. Une relation croissante linéaire entre le travail d'adhésion et la viscosité de la matrice a été observée [88]. Si les caractéristiques visqueuses de la résine ont une grande influence sur le comportement d'adhésion – effet de la température et de la vitesse de sollicitation –, il a néanmoins été montré qu'il en est de même de l'arrangement fibreux car des essais sur résine pure et sur pré-imprégnés donnent des résultats très différents [92]. A notre connaissance, il n'existe pas de caractérisation de l'adhésion créée par un liant entre deux renforts secs.

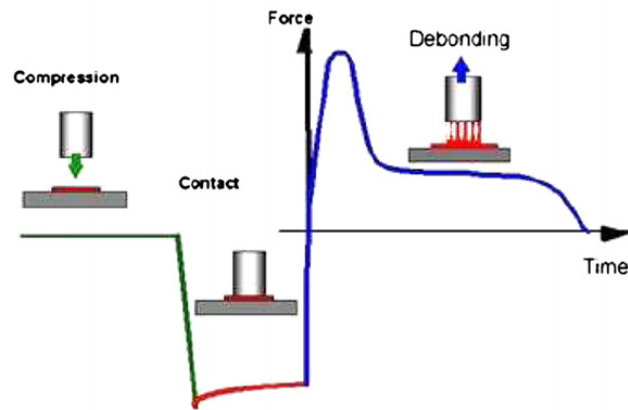


Figure 2.19 – Schéma de principe du test d'adhésion [90].

2.4 Conclusion du chapitre : synthèse de l'état de l'art et stratégie adoptée

Dans les parties 2.2 et 2.3, les réponses d'un empilement de renforts à différents types de sollicitations – figures 2.3 et 2.4 – et les méthodes de caractérisation ont été décrites. Sur la base des travaux de la littérature, nous cherchons donc à établir une stratégie pour modéliser et caractériser le comportement du renfort HiTape®.

2.4.1 Synthèse de la littérature

Toutes les réponses aux sollicitations considérées ne contribuent pas de façon égale au comportement global de la préforme, l'importance de chacune variant avec le type de renfort. Par exemple, dans le cas d'un tissu, les réponses prépondérantes sont celles à la traction dans les directions trame et chaîne – l'élongation étant notamment permise par l'embuvage – et le cisaillement plan par rotation relative des mèches autour des points de superposition des réseaux chaîne et trame [10], ce dernier mode ayant concentré une grande partie des recherches. Plus récemment, il a été montré que la flexion a également une forte influence [61]. Pour les renforts épais tels que les NCF et interlocks, les réponses aux sollicitations transverses hors-plan (compaction et cisaillements transverses) ne peuvent pas être négligées. Dans tous les cas, lors de la mise en forme non plus d'un pli unitaire mais d'un empilement, les réponses inter-plis interviennent également, et en particulier le frottement inter-pli.

Les travaux de la littérature concernant la réponse des renforts unidirectionnels à diverses sollicitations portent principalement sur les renforts pré-imprégnés. Les sollicitations considérées sont alors les tractions planes, le cisaillement plan, la flexion et le glissement inter-pli.

Si les sollicitations présentées dans les parties 2.2 et 2.3 sont généralement considérées comme indépendantes les unes des autres et caractérisées séparément, des couplages ont pourtant été observés. Par exemple dans le cas des tissus, les comportements de tractions dans les directions trame et chaîne sont liés, des bancs de traction biaxiale

ont été développés en vue de caractériser cela [93]. En outre, les serre-flancs ou la membrane dans les procédés de mise en forme d'un empilement visent à solliciter le renfort en traction plane pour limiter l'apparition de plissements car il y a un couplage entre la flexion hors-plan et la traction plane.

2.4.2 Stratégie de modélisation du renfort HiTape®

Afin de modéliser le comportement du renfort HiTape® en vue de la simulation de sa mise en forme, nous postulons tout d'abord que le voile ne pénètre pas dans la couche fibreuse au cours de la mise en forme lorsque la pression est appliquée. Cela a été vérifié au sein du laboratoire R&T d'Hexcel par l'observation de sections de préformes fibreuses. Cela permet de considérer que le renfort HiTape® présente la structure laminée illustrée sur la figure 2.2b, que ce soit initialement, au cours et à la fin de la mise en forme.

Postulat P-1 : *Le voile est situé de chaque côté de la couche fibreuse et ne pénètre pas au cours de la mise en forme.*

Par ailleurs, si le renfort HiTape® présente une structure de fils destinés à la dépose AFP, nous décidons de négliger les discontinuités entre les fils dans le plan du renfort dans le cadre de ce travail et de postuler qu'un pli peut être considéré comme un milieu continu dans son plan. Cette hypothèse présente cependant des limites dans le cas d'un unidirectionnel sec, pour lesquels le manque de cohésion entre les fibres est intrinsèque.

Postulat P-2 : *A l'échelle d'un pli unitaire, le matériau HiTape® peut être considéré comme un milieu continu dans son plan.*

Le postulat **P-1** permet de relier les réponses aux sollicitations intra-plis à la couche fibreuse, et celles aux sollicitations inter-plis à l'interface où se situe le voile. Ainsi, utilisant de plus le postulat **P-2**, nous pouvons scinder la modélisation du comportement du renfort HiTape® en deux études distinctes. D'une part, la couche fibreuse peut être modélisée par un milieu continu homogène équivalent dont le comportement décrit les réponses aux sollicitations intra-plis ; d'autre part, le voile peut être modélisé par un autre milieu continu homogène équivalent dont le comportement décrit les réponses aux sollicitations inter-plis.

2.4.3 Stratégie de caractérisation du renfort HiTape®

En se basant sur le travail bibliographique présenté dans ce chapitre, les comportements intra-p pli et inter-p pli du renfort HiTape® en particulier seront caractérisés dans les chapitres 3 et 4 respectivement, avec les objectifs suivants dans chacun des deux cas :

- déterminer les réponses prépondérantes aux sollicitations intra- et inter-plis et celles que l'on peut négliger ;
- déterminer les réponses que l'on a besoin de caractériser expérimentalement ;
- définir et mettre en place les méthodes de caractérisation appropriées lorsque nécessaire ;

— caractériser expérimentalement ces réponses.

L'objectif visé étant la simulation de l'étape de mise en forme, la caractérisation se veut représentative des conditions de mise en forme du procédé considéré, soit à double membrane et à chaud (*i.e.* à la température de fusion de voile afin de l'activer et permettre à la préforme le maintien de sa géométrie), schématisé sur la figure 1.7. De plus, dans ce procédé considéré, la mise en forme s'opère alors que le renfort est dans un état compacté sous environ 1 bar. Ainsi, la caractérisation du renfort HiTape® doit se faire d'une part à la température de fusion du voile, et d'autre part autour de la pression atmosphérique (entre 0,5 et 1,5 bar par exemple, la pression pouvant varier localement).

3

Caractérisation du comportement intra-pli du renfort HiTape®

Sommaire

3.1 Réponses du renfort HiTape® à des sollicitations intra-plis	50
3.1.1 Traction longitudinale	50
3.1.2 Traction transverse plane	51
3.1.3 Compaction	51
3.1.4 Cisaillement plan	52
3.1.5 Cisaillements transverses hors-plan	53
3.1.6 Flexion	53
3.2 Mise en place d'un essai de flexion	55
3.2.1 Cahier des charges	55
3.2.2 Description du montage	55
3.2.3 Procédure	56
3.2.4 Validation de la procédure	59
3.3 Résultats expérimentaux de flexion	64
3.3.1 Caractéristiques des essais	64
3.3.2 Essais sur pli unitaire	64
3.3.3 Essais sur empilements	67

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de caractériser le comportement intra-ply du renfort HiTape® suivant la stratégie de modélisation et de caractérisation établie dans les parties 2.4.2 et 2.4.3 (p.47), selon laquelle la couche fibreuse peut être décrite comme un milieu continu homogène équivalent. Ainsi, chacune des sollicitations intra-plis présentées dans la partie 2.2 (tractions longitudinale et transverse plane, compaction, cisaillements plan et transverses hors-plan, et flexion) est étudiée dans le cas du renfort HiTape®, afin d'identifier et de caractériser les réponses prépondérantes. Dans le cas de la flexion, nous verrons qu'une nouvelle méthode de caractérisation doit être mise en place ; elle est présentée dans la partie 3.2. Les résultats expérimentaux de flexion suivent dans la partie 3.3.

3.1 Réponses du renfort HiTape® à des sollicitations intra-plis

3.1.1 Traction longitudinale

La version considérée du renfort HiTape® est constituée de fibres Hexcel HexTow® IMA [94] dont les caractéristiques en traction dans leur direction principale sont les suivantes :

- module de traction dans la direction des fibres : $E_f = 297 \text{ GPa}$;
- allongement à rupture : 1,8 %.

Le renfort HiTape® étant unidirectionnel, le module de traction équivalent d'un pli dans la direction des fibres est alors donné par la loi des mélanges (équation 2.1 p.29), avec une erreur suffisamment petite pour que la caractérisation expérimentale de ce comportement ne soit pas nécessaire. Ensuite, remarquons d'une part que le module du voile à l'état fondu est négligeable devant celui des fibres, et d'autre part que le taux volumique de voile est très faible devant celui des fibres. La température de fusion du voile étant largement inférieure à la température de dégradation des fibres de carbone, le module de traction longitudinale du renfort à la température de fusion du voile peut finalement être approximé par $E_L \approx V_f E_f$.

Le module de traction longitudinale équivalent du renfort est directement dépendant du taux volumique de fibres. Il y a donc en réalité un couplage important avec le comportement en compaction. Toutefois, le taux volumique de fibres V_f obtenu sur des préformes HiTape® sous 1 bar est de 60 % environ [19] (ce qui correspond d'ailleurs à la valeur visée par les constructeurs aéronautiques dans la pièce infusée finale), et il a été montré que pour notre matériau, l'écart entre les taux volumiques de fibres avant et après infusion est inférieur à 3 % [19]. Etant donné que la mise en forme s'opère sur un renfort compacté entre deux membranes (figure 1.7 p.15), la valeur $V_f = 60 \%$ semble ainsi cohérente et sera considérée constante. Dans le cadre de ce travail, le couplage avec la compaction est donc négligé. Le comportement du renfort en traction longitudinale peut être résumé ainsi :

Lemme L-1 : *Le comportement du renfort HiTape® en traction longitudinale est linéaire élastique de module $E_L = 178 \text{ GPa}$ et d'allongement à rupture 1,8 %. Il est*

indépendant de la température et la contribution du voile est négligeable.

3.1.2 Traction transverse plane

Dans le plan du renfort, dans la direction transverse aux fibres, le maintien d'un pli HiTape® est uniquement permis par le voile. Au vu des difficultés présentées dans la littérature (partie 2.2.2) pour caractériser le comportement en traction transverse plane de renforts unidirectionnels pré-imprégnés qui présentent pourtant une meilleure tenue, il est estimé que la caractérisation en traction transverse du renfort HiTape® n'est pas pertinente. Nous faisons le choix de ne pas caractériser expérimentalement ce comportement, et de le considérer ainsi :

Lemme L-2 : *Le comportement du renfort HiTape® en traction transverse plane est linéaire élastique de module $E_T = 10^{-3}E_L$. Il est indépendant de la température et la contribution du voile est négligeable.*

3.1.3 Compaction

D'après la littérature (partie 2.2.3), le comportement de compaction a une forte influence sur l'étape d'infusion qui suit la mise en forme dans le chaînage du procédé de mise en œuvre. D'autre part, dans le procédé considéré (figure 1.7 p.15), la mise en forme s'opère sur un renfort compacté sous 1 bar environ entre deux membranes. La caractérisation du comportement en compaction est donc indispensable.

Du fait (i) du rapport d'épaisseur très petit entre le voile et la couche fibreuse, et (ii) du postulat **P-1** (partie 2.4.2) selon lequel le voile ne pénètre pas mais reste à l'interface entre les plis, on néglige l'effet du voile sur le comportement de compaction. Cela permet donc de négliger l'influence de la température, et par conséquent les effets visco-élastiques potentiels dus à la présence du voile. La caractérisation peut ainsi être réalisée à température ambiante ce qui facilite sa mise en œuvre. Par ailleurs, le postulat **P-1** justifie également que l'on peut caractériser le milieu intra-pli en compaction en testant un empilement. Notons quand même que ce postulat de non-pénétration du voile dans la couche fibreuse vaut essentiellement pour la modélisation de la mise en forme. En effet, une des fonctions du voile est de permettre le maintien géométrique de la préforme après sa mise en forme, or une application stricte de ce postulat impliquerait une absence de tenue dans le sens de l'épaisseur, les fibres ne présentant aucune cohésion entre elles dans le pli.

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à l'état de l'empilement au cours de sa mise en forme, c'est-à-dire lors du premier cycle de compaction. En outre, Blais [19] a observé que le taux volumique de fibres d'un empilement de renfort HiTape® sous une contrainte de compaction de 1 bar évolue peu d'un cycle à l'autre (variation inférieure à 1 % au cours de 5 cycles). Les effets d'adoucissement cyclique et d'hystérésis, qui ont par ailleurs retenu une grande attention dans la littérature, ne sont donc pas considérés ici. En revanche, la potentielle non-linéarité matérielle due

au réarrangement des fibres doit être décrite. Le comportement de compaction peut être résumé ainsi :

Lemme L-3 : *Le comportement du renfort HiTape® en compaction est élastique et potentiellement non-linéaire. Il est indépendant de la température et la contribution du voile est négligeable.*

Comme introduit dans la partie 2.2.3, la caractérisation du comportement de compaction consiste à décrire la relation entre la contrainte de compaction appliquée et le taux volumique de fibres. Nous utilisons les mesures expérimentales obtenues par Blais [19] sur le même renfort HiTape®. Les détails concernant le montage, la procédure et les résultats peuvent être trouvés dans la référence [19] ; nous en rappelons ici les points importants.

Le banc de compaction utilisé est illustré sur la figure 2.8a. L'épaisseur de l'empilement est mesurée à l'aide d'un capteur LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*), permettant de s'affranchir des potentielles déformations du banc d'essai. Les essais ont été réalisés à vitesse imposée (1 mm/min), en appliquant une contrainte de compaction de 0 à 1 bar pour être représentatif d'un procédé à membrane (mise en forme et infusion). Blais a réalisé des cycles de charges et décharges pour différentes orientations et différents modes de dépose. Les mesures qui nous intéressent dans le cadre de ce travail sont celles de la première charge sur un empilement unidirectionnel (configuration « AU_UD_0 » dans la référence [19]), afin d'être au plus proche de la structure d'un pli unitaire de renfort puisque l'objectif est de caractériser le comportement intra-pli.

Le comportement de compaction obtenu expérimentalement est présenté sur la figure 3.1. Il est très souple pour de faibles taux volumiques de fibres puis fortement rigidifiant, ce qui est en accord avec la littérature (figure 2.8b). Les principaux modèles utilisés dans la littérature pour le comportement de compaction ont été optimisés avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt [95] proposé dans le logiciel Gnuplot¹. Tous semblent décrire de façon satisfaisante le comportement obtenu expérimentalement, qu'il s'agisse du modèle de Gutowski (optimisation de k , V_{f0} et V_{fmax} dans l'équation 2.3), d'une loi puissance (m et n dans l'équation 2.4) ou des polynômes de Lagrange de degré 2 ou 3 – un degré supérieur introduirait des oscillations parasites. Le choix du modèle dépendra donc de la modélisation du comportement qui sera présentée dans le chapitre 5.

3.1.4 Cisaillement plan

Tout comme pour la traction transverse plane, il est considéré que les quelques degrés de cisaillement observés avec maintien de la cohésion dans la littérature sur des renforts unidirectionnels pré-imprégnés n'apparaîtraient pas dans le cas du renfort sec HiTape®, car la perte d'intégrité du renfort sec serait presque immédiate, rendant impossible l'interprétation des résultats dans le cadre choisi de la mécanique des

1. www.gnuplot.sourceforge.net

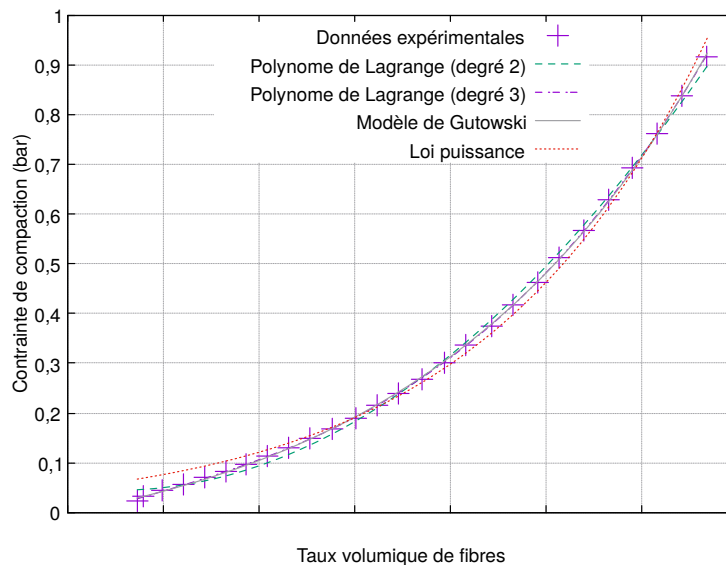


Figure 3.1 – Résultat expérimental [19] de la phase de charge du test de compression réalisé sur un empilement UD de renfort HiTape® sur une gamme réduite de taux volumiques de fibres, et optimisation des divers modèles utilisés dans la littérature pour le comportement en compaction des renforts.

milieux continus. En effet, à cause de la quasi-inextensibilité des fibres, la flexion hors-plan est favorisée au détriment du cisaillement plan. Ces considérations conduisent au comportement suivant :

Lemme L-4 : La réponse à une sollicitation de cisaillement plan du renfort HiTape® est négligeable devant celle de la flexion hors-plan.

3.1.5 Cisaillements transverses hors-plan

Un pli unitaire présentant une épaisseur faible – de l'ordre de 0,2 mm – au regard de ses autres dimensions, l'hypothèse des déformations planes dans le plan du pli est pertinente. D'autre part, la rigidité en traction longitudinale étant largement supérieure à celle du voile thermoplastique à l'état fondu, on considère que, dans les directions tangentes au plan du renfort, les déplacements relatifs inter-plis sont prépondérants devant les déformations intra-plis en cisaillements transverses hors-plan qui peuvent donc être négligées.

Lemme L-5 : Les déformations du renfort HiTape® en cisaillements transverses hors-plan sont négligeables devant les déplacements relatifs inter-plis.

3.1.6 Flexion

D'après la littérature (partie 2.2.6), on peut supposer que le comportement en flexion longitudinale (*i.e.* dans la direction des fibres comme représenté sur la figure

2.3g) du renfort HiTape® est élastique fortement non-linéaire. En outre, comme indiqué précédemment, le comportement en flexion ne peut pas être déduit de celui en traction [49] : il doit être caractérisé à l'aide d'un essai spécifique, réalisé à la température de fusion du voile. Un essai préliminaire très simple démontre en effet que l'influence de la température n'est cette fois pas négligeable : lorsqu'un échantillon de renfort est soumis à un certain chargement en flexion, on observe que ses déformées à température ambiante et à la température de fusion du voile sont très différentes, comme présenté sur la figure 3.2. Des effets visco-élastiques sont donc attendus. Cependant, le procédé de mise en forme considéré étant relativement lent, on peut le considérer comme une succession d'états d'équilibre.

Lemme L-6 : *Le comportement du renfort HiTape® en flexion hors-plan longitudinale est élastique non-linéaire et fortement dépendant de la température. Par ailleurs, le procédé de mise en forme est suffisamment lent pour que l'influence du temps sur le comportement en flexion soit négligeable.*

D'autre part, l'absence de cohésion du renfort dans la direction transverse aux fibres justifie de considérer la flexion hors-plan transverse (figure 2.3h) comme négligeable devant la flexion hors-plan longitudinale ; elle ne peut de toute façon que très difficilement être caractérisée. On peut raisonnablement supposer que l'effet de cette flexion anti-clastique sur les essais de flexion longitudinale sera donc négligeable.

Lemme L-7 : *Le comportement du renfort HiTape® en flexion hors-plan transverse est négligeable devant celui en flexion longitudinale.*

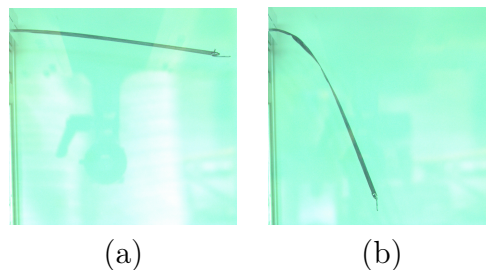


Figure 3.2 – Photographies d'un pli unitaire de renfort HiTape® soumis à un chargement en flexion à température ambiante (a) puis à la température de fusion du voile (b).

Un flexomètre à angle fixe existe déjà au sein du laboratoire d'Hexcel et est utilisé pour des tests préliminaires. Cependant, il ne permet pas de caractériser le comportement non-linéaire en flexion du renfort HiTape® avec un essai unique, puisqu'il est basé sur le modèle linéaire de Peirce (équation 2.7). Un flexomètre modifié, adapté à une caractérisation à la température de fusion du voile, a donc été développé au sein du laboratoire R&T d'Hexcel Reinforcements. Ce type d'essai de flexion simple est sélectionné car il est relativement aisé à mettre en place et a permis d'aboutir à des résultats quantitatifs sur des renforts secs dans le cadre d'autres travaux [60, 61]. Remarquons que dans le procédé considéré (figure 1.7 p.15), on attend que la température de consigne soit atteinte de façon homogène pour débiter la mise en forme. Ainsi,

dans le cadre de ce travail, nous ne cherchons pas à caractériser le comportement de flexion à diverses températures, mais uniquement à la température de fusion du voile en considérant la transformation isotherme.

Dans la partie suivante 3.2, la mise en place du flexomètre modifié est détaillée, ainsi que le principe d'essai et la procédure pour obtenir la relation entre le moment de flexion et la courbure. Dans la partie 3.3, les résultats obtenus sont présentés.

3.2 Mise en place d'un essai de flexion

3.2.1 Cahier des charges

Les points principaux du cahier des charges pour la conception du banc de flexion sont les suivants :

- enregistrer la déformée de l'échantillon au cours de l'essai ;
- réaliser l'essai à la température de fusion du voile ;
- limiter les effets de bord au niveau de l'encastrement ;
- ajouter une masse ponctuelle en bout d'échantillon pour augmenter sa courbure si nécessaire ;
- connaître la température réelle sur l'échantillon au cours de l'essai.

3.2.2 Description du montage

Le banc de flexion, schématisé sur la figure 3.3, consiste en un châssis et un boîtier de fixation de l'échantillon. Des emplacements pour thermocouples sont prévus. Le tout est placé dans une enceinte thermorégulée. Une caméra est positionnée à l'extérieur de l'enceinte et un programme LabVIEW² permet d'enregistrer en temps réel des photographies de l'échantillon ainsi que la température des thermocouples, avec une fréquence et une durée d'acquisition choisies.

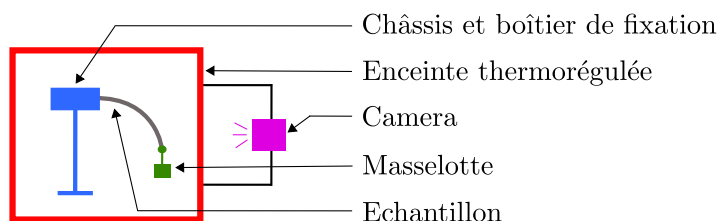


Figure 3.3 – Schéma de principe de l'essai de flexion mis en place.

Les spécificités du banc développé sont les suivantes : (i) l'essai peut être réalisé en température, (ii) le boîtier de fixation de l'échantillon présente un entrefer réglable en vue de limiter les effets de bord, et (iii) un ensemble de masselottes de poids divers

2. www.ni.com/fr-fr/shop/labview.html

est disponible pour augmenter la courbure de l'échantillon, et le système de fixation d'une masselotte à l'échantillon permet de l'assimiler à une force ponctuelle dirigée selon la gravité.

3.2.3 Procédure

Étape 1/3 : mesures expérimentales

Le châssis est placé dans l'étuve. Après réglage du système optique (position, netteté, contraste), l'étuve est mise en chauffe pour atteindre la température de fusion du voile. L'échantillon est positionné dans son boîtier et une masselotte pertinente est fixée. L'essai est instrumenté de thermocouples. Lorsque la température de consigne est atteinte, le boîtier est placé dans l'étuve sur le châssis, et l'acquisition est lancée à l'aide du programme LabVIEW.

L'acquisition est stoppée lorsque les deux conditions suivantes sont réunies : (i) la température de l'étuve est égale à la température de consigne et est homogène dans l'étuve d'après les thermocouples ($\pm 5^\circ\text{C}$), et (ii) l'échantillon ne se déforme plus. Les données de sortie sont les photographies de l'échantillon déformé et la température au cours du temps. Comme indiqué précédemment, la mise en forme est supposée suffisamment lente (lemme **L-6**) dans le cadre de ce travail. Seule la photographie de l'échantillon à l'état final est donc exploitée pour obtenir une relation entre la courbure et le moment de flexion. Dans le cadre de travaux ultérieurs, plusieurs photographies de l'échantillon pourraient être analysées afin d'étudier l'effet de la température (lors de la montée en température de l'étuve par exemple) ou bien celui du temps à une température donnée.

Étape 2/3 : traitement d'image

La photographie de l'échantillon est traitée avec le logiciel ImageJ³. Quelques opérations de morphologie mathématique notamment permettent d'extraire la ligne moyenne de l'échantillon par squelettisation, puis les coordonnées du nuage de points correspondant sont exportées, comme représenté sur la figure 3.4.

Étape 3/3 : obtention de la relation moment vs. courbure

Les coordonnées de la déformée sont traitées avec un programme Scilab⁴, dont les données d'entrée supplémentaires sont le rapport d'échelle, la largeur de l'échantillon, le poids surfacique du renfort, le nombre de plis, et la masse suspendue. Le programme réalise ensuite les étapes (3) à (7) de la démarche générale présentée dans la partie 2.2.6 (p.39). En particulier, la relation $z = f(x)$ est obtenue dans l'étape (3) en optimisant le couple (k_1, k_2) de la fonction suivante :

$$z(x) = -k_1 \ln(1 + (k_2 x)^2) \quad (3.1)$$

3. www.imagej.net

4. www.scilab.org

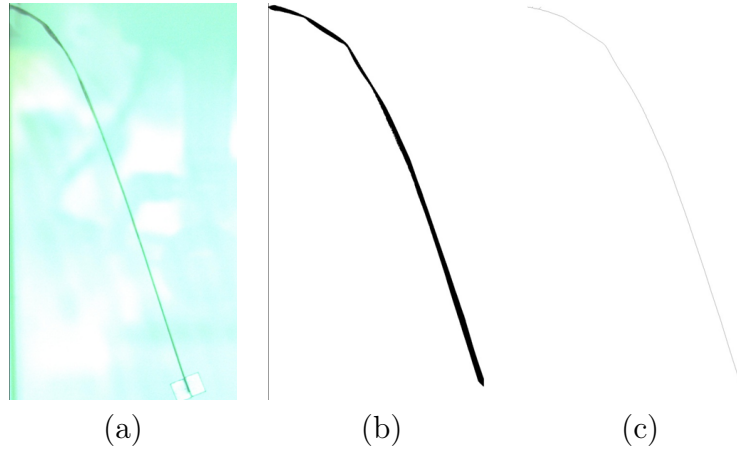


Figure 3.4 – Étapes principales du traitement sur ImageJ : sur la photographie initiale (a), un seuillage (b) puis une squelettisation (c) sont appliqués.

à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquardt [95] à nouveau, proposé dans Scilab. Le choix de ce type de fonction, que nous appellerons par la suite « fonction de la déformée », sera justifié dans la partie 3.2.4 suivante. Après avoir calculé la courbure et l'abscisse curviligne en chaque point de l'échantillon à partir de la fonction de la déformée (étapes (4) et (5)), le moment de flexion est calculé. Dans notre cas, il est égal à la somme de la contribution du poids propre de l'échantillon décrite par l'équation 2.11 et de celle de la masse suspendue. L'expression du moment de flexion utilisée dans l'étape (6) est alors la suivante, avec les notations de la figure 3.5 :

$$\mathcal{M}(s) = \int_{\xi=s}^L \mathcal{A} g (\xi - s) \cos(\alpha(\xi)) d\xi + \frac{m g}{b} \underline{A(s)C} \cdot \underline{E_1} \quad (3.2)$$

où m est la masse suspendue, g la constante de la pesanteur, b la largeur de l'échantillon, C le point d'application de la masse (*i.e.* le bout libre de l'échantillon), et $A(s)$ le point où est calculé le moment de flexion. Enfin dans l'étape (7), la relation entre le moment de flexion et la courbure est obtenue en optimisant le jeu de paramètres $(R_0, R_{inf}, \kappa_{lim})$ du modèle de Voce [96] :

$$\mathcal{M}(\kappa) = \mathcal{M}_0 + R_0 \kappa + R_{inf} (1 - e^{-\kappa/\kappa_{lim}}) \text{ avec } \mathcal{M}_0 = 0 \quad (3.3)$$

à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquardt [95]. Le choix de ce modèle, initialement développé pour traduire l'écroûissage en traction [97], sera justifié de même dans la partie 3.2.4 suivante.

Les données de sortie sont la gamme de courbures décrite par l'échantillon, l'équation de la déformée *via* le couple optimisé (k_1, k_2) de l'équation 3.1, la relation entre le moment de flexion et la courbure *via* le jeu optimisé de paramètres $(R_0, R_{inf}, \kappa_{lim})$ de l'équation 3.3, et enfin en chaque point de la déformée : l'abscisse curviligne, la courbure et le moment de flexion.

Les deux régressions successives – d'abord sur les coordonnées (x, z) de la défor-

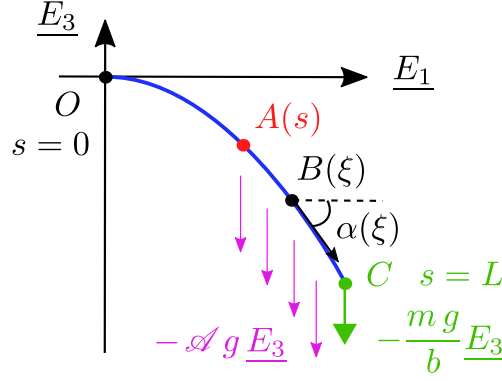


Figure 3.5 – Notations employées lors du calcul du moment de flexion avec l'équation 3.2.

mée puis sur les points (κ, \mathcal{M}) – génèrent une incertitude qu'il apparaît nécessaire de quantifier. Nous utilisons pour cela les grandeurs suivantes, qui caractérisent l'écart entre des valeurs expérimentales et leur prédiction par un modèle :

$$err_{\%}^{(z)} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{z}_i(x_i) - z_i)^2}{N}}}{|z|_{max} - |z|_{min}} ; \quad err_{\%}^{(\mathcal{M})} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{\mathcal{M}}_i(\kappa_i) - \mathcal{M}_i)^2}{N}}}{|\mathcal{M}|_{max} - |\mathcal{M}|_{min}} . \quad (3.4)$$

Ces deux grandeurs correspondent plus précisément à la racine carrée de l'erreur-type entre N valeurs expérimentales – z_i, \mathcal{M}_i – et leur prédiction – $\hat{z}_i(x_i), \hat{\mathcal{M}}_i(\kappa_i)$ – par le modèle sélectionné – équations (3.1) et (3.3). Pour des raisons de commodité, elles sont normalisées par la gamme de valeurs parcourues par les valeurs expérimentales. La condition nécessaire suivante est alors définie, pour que la qualité des deux régressions successives soit acceptable :

Condition nécessaire de validité des essais de flexion : *Pour chaque échantillon, les valeurs de $err_{\%}^{(z)}$ et $err_{\%}^{(\mathcal{M})}$ doivent être inférieures à 5 %.*

Dans certains cas – un exemple est illustré sur la figure 3.4 –, on observe un effet de « cassure » dans la zone à forte courbure proche de l'encastrement. Ce phénomène est lié à la propension des fibres de l'intra-dos de l'échantillon à adopter un mode de déformation hors-plan, *i.e.* du flambage local. Les échantillons présentent alors une ligne moyenne anguleuse, et donc une régression de mauvaise qualité. Cette condition de validité permet ainsi de les éliminer. Cependant elle est nécessaire mais non suffisante : la racine de l'erreur-type relative peut être inférieure à 5 % alors que le modèle est peu représentatif de la déformée réelle. En effet, cette grandeur est calculée sur les ordonnées (z ou \mathcal{M}), or la densité verticale de points est plus importante pour les petites que pour les grandes courbures, ainsi la partie non-linéaire (proche de l'encastrement) a plus de poids que la partie linéaire (proche de l'extrémité libre) dans le calcul de l'erreur-type. Il faut donc de plus vérifier qualitativement que la régression est de bonne qualité.

Nous introduisons enfin l'écart-type relatif (ou coefficient de variation) $\sigma_{\%}^{(a)}$, permettant de mesurer la dispersion d'un échantillon de N valeurs a_i autour de leur moyenne \bar{a} :

$$\sigma_{\%}^{(a)} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2}}{\bar{a}}. \quad (3.5)$$

3.2.4 Validation de la procédure

La procédure étant définie, on souhaite évaluer sa qualité avant de procéder à la campagne expérimentale : on réalise pour cela les essais #1 à #3 présentés dans le tableau 3.1. Ces essais préalables sont réalisés à température ambiante (T_{amb}) dans un souci de simplicité, et sur des plis unitaires dans le sens longitudinal ($[0^\circ]_1$). Trois masselottes différentes sont utilisées, telles que $m_4 < m_6 < m_7$.

<i>Essai</i>	<i>Séquence</i>	<i>Température</i>	<i>Masselotte</i>	<i>Nombre d'essais</i>
#1	$[0^\circ]_1$	T_{amb}	m_7	10
#2	$[0^\circ]_1$	T_{amb}	m_6	3
#3	$[0^\circ]_1$	T_{amb}	m_4	3

Tableau 3.1 – Plan des essais préalables de validation de la procédure de l'essai de flexion.

Justification des modèles sélectionnés

On commence par observer la déformée (figure 3.6) et la relation moment⁵ *vs.* courbure (figure 3.7) obtenues pour un échantillon quelconque représentatif de l'essai #1, respectant la condition nécessaire de validité. La figure 3.6 justifie le choix de la fonction de la déformée (équation 3.1). En effet, la fonction choisie présente les caractéristiques suivantes : elle positionne l'origine du graphe au niveau de l'encastrement ($z(0) = 0$), sa pente s'annule au niveau de l'encastrement ($z'(0) = 0$), et elle tend vers un comportement linéaire au niveau de l'extrémité libre.

En outre, la figure 3.7 montre que le modèle de Voce (équation 3.3) sélectionné décrit de manière satisfaisante les évolutions moment *vs.* courbure obtenues expérimentalement. En effet, il permet de représenter par une seule fonction de classe \mathcal{C}^2 le comportement observé : non-linéaire pour les petites courbures et quasi-linéaire à partir d'un certain seuil de courbure κ_{lim} . Ainsi R_0 correspond à la pente de la partie quasi-linéaire à partir de ce seuil κ_{lim} et sera dénommé par la suite rigidité de flexion tangente asymptotique (par unité de largeur) ; c'est la valeur minimale de la rigidité de flexion. Par ailleurs, $R_0 + R_{inf}/\kappa_{lim}$ correspond à la pente initiale et sera dénommé rigidité de flexion tangente initiale (par unité de largeur) ; c'est la valeur maximale de

5. Toutes les valeurs de moments présentées sont normalisées pour des raisons de confidentialité.

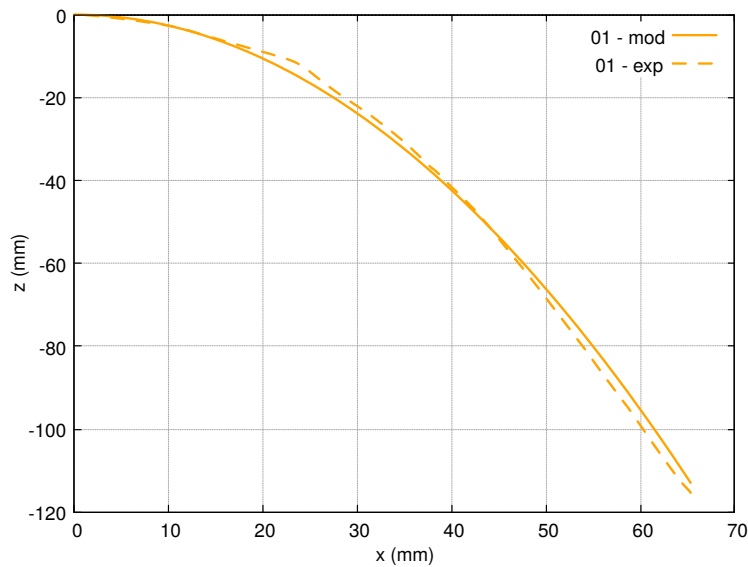


Figure 3.6 – Comparaison entre les données expérimentales de la déformée (en trait discontinu) et le modèle choisi (en trait plein) pour un échantillon quelconque de l'essai #1 ($err_{\%}^{(z)} = 1,3\%$).

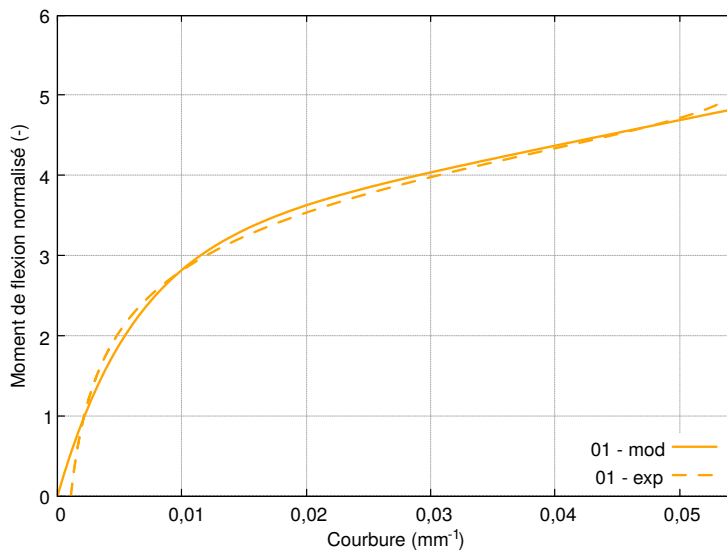


Figure 3.7 – Comparaison entre les résultats (en trait discontinu) et le modèle choisi (en trait plein) pour la relation moment vs. courbure pour un échantillon quelconque de l'essai #1 ($err_{\%}^{(M)} = 3,8\%$).

la rigidité de flexion. Ces différents paramètres sont indiqués sur la figure 3.8.

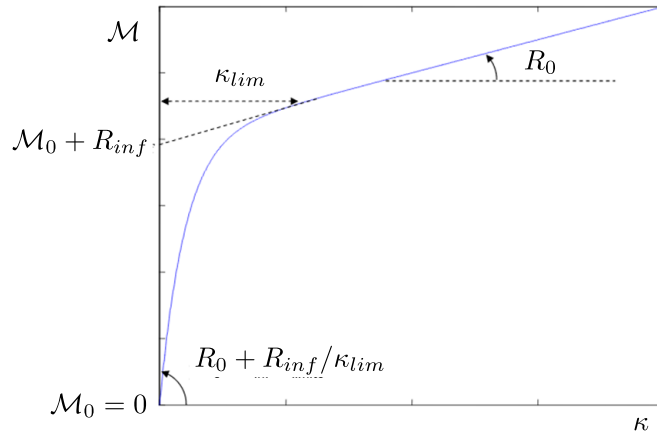


Figure 3.8 – Représentation du modèle de Voce [96] et interprétation des paramètres de régression R_0 , R_{inf} et κ_{lim} .

Sur la figure 3.7, on observe que les différences les plus notables entre les résultats bruts et le modèle de Voce [96] sont localisées au niveau du pied de courbe – correspondant à l’extrémité libre de l’échantillon où le moment est nul – et de la fin de courbe – correspondant à l’encastrement où le moment est maximal. Tout d’abord, pour ce qui est du pied de courbe, remarquons que, si le moment de flexion calculé est forcément nul au bout libre de l’échantillon, la courbure quant à elle tend vers zéro mais n’est pas exactement nulle à cause de la fonction de la déformée utilisée (équation 3.1). Cela n’est pas physique, car cela correspond à une déformation dans un état libre de contrainte. On choisit donc d’imposer $\mathcal{M}_0 = 0$ pour représenter la physique ; cela n’a pas été le cas dans d’autres travaux [60, 61]. Ensuite, remarquons que la fin de la courbe semble présenter une tangente verticale (également visible sur la figure 3.12), ce qui correspondrait à un plafonnement de la valeur de la courbure. Cet effet parasite est en réalité dû à l’encastrement : en effet, une pente nulle de la déformée est imposée à ce niveau par le montage, ce qui implique, pour la fonction de la déformée choisie, une dérivée nulle de la courbure. Par construction, le modèle de Voce sélectionné ne prend pas en compte cet effet parasite.

Par ailleurs, un calcul d’incertitude est réalisé pour évaluer l’influence d’une incertitude sur les paramètres de régression k_1 et k_2 sur le résultat de la rigidité de flexion. Nous montrons que pour $x = 0$ *i.e.* là où la courbure est la plus grande, l’incertitude relative sur la courbure dépend des incertitudes relatives sur k_1 et k_2 de la manière suivante :

$$\frac{\Delta\kappa}{\kappa} = \frac{\Delta k_1}{k_1} + 2 \frac{\Delta k_2}{k_2} \quad (3.6)$$

car les quantités traitées sont positives. Dans le cas où x est non nul, d’autres contributions doivent être ajoutées. L’incertitude sur la rigidité de flexion B due à l’incertitude

sur la courbure κ est donnée par :

$$\Delta B = \frac{R_{inf}}{\kappa_{lim}^2} e^{-\kappa/\kappa_{lim}} \Delta\kappa, \quad (3.7)$$

ce qui montre qu'une incertitude sur k_1 et k_2 n'a pas d'influence sur la rigidité tangente asymptotique (*i.e.* quand $\kappa \rightarrow +\infty$), tandis que l'incertitude sur la rigidité tangente initiale (*i.e.* pour $\kappa = 0$) est égale à celle sur la courbure multipliée par R_{inf}/κ_{lim}^2 .

Répétabilité

Dans l'essai #1 (en référence au tableau 3.1), 10 échantillons sont testés à température ambiante avec la même masselotte m_7 – même opérateur, même configuration, même procédure de préparation des échantillons, mêmes conditions d'essai – afin d'évaluer la répétabilité de l'essai. Leurs déformées sont tracées en orange sur la figure 3.9.

La dispersion observée dans les déformées des échantillons est responsable d'un écart-type relatif de 8% sur la valeur maximale du moment (calculé avec l'équation 3.2 au niveau de l'encastrement), majoritairement dû à la contribution de la masse pendue qui est fortement dépendante de la position de l'extrémité libre de l'échantillon. Les relations moment *vs.* courbure obtenues sont présentées sur la figure 3.10. Cette variabilité est attribuée principalement à la manipulation et à la mise en œuvre des échantillons, voire à la variabilité matériau. Toutefois, nous verrons qu'à chaud, la dispersion des déformées est largement réduite.

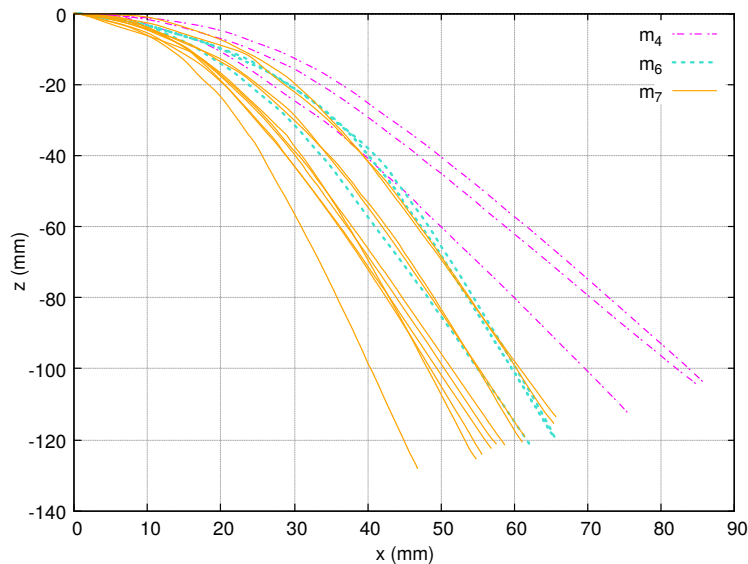


Figure 3.9 – Données expérimentales de déformées obtenues lors des essais préalables #1 à #3 à T_{amb} .

Cohérence des résultats

Afin d'évaluer la cohérence des résultats obtenus avec la procédure proposée, on les compare à ceux produits lors des tests préliminaires avec le flexomètre à angle fixe

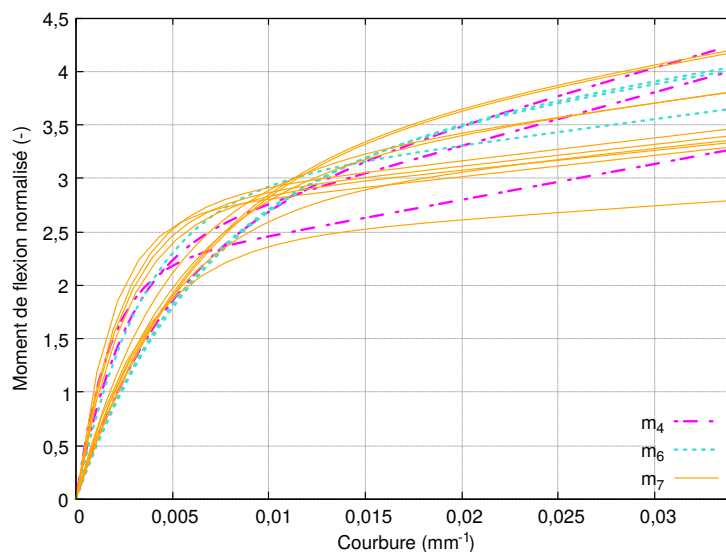


Figure 3.10 – Comportements de flexion normalisés décrits par les modèles de Voce obtenus lors des essais préalables #1 à #3 à T_{amb} .

existant (méthode présentée dans la partie 2.2.6). On vérifie bien que la valeur de rigidité de flexion donnée par le modèle de Peirce est comprise dans la gamme de rigidités de flexion – bornée par les rigidités tangentielles asymptotique et initiale – obtenue par la nouvelle méthode. Plus précisément, on observe que la rigidité de Peirce est plus proche de la rigidité initiale, ce qui est cohérent puisque le flexomètre à angle fixe ne génère que des faibles courbures car c'est un essai de flexion sous poids propre.

Comportement intrinsèque

Enfin, pour vérifier que la relation moment *vs.* courbure obtenue est bien caractéristique du comportement intrinsèque du matériau, le test est répété en modifiant la masse suspendue pour varier la contrainte maximale, avec notamment une différence de 50 % entre m_4 et m_7 (en référence au tableau 3.1). Notons que dans le cadre d'autres travaux [60], c'est la longueur de bande fléchie qui a été modifiée. La figure 3.9 illustre bien que plus la masse augmente, plus l'échantillon se déforme. Sur la figure 3.10, on observe que les modèles obtenus pour la relation moment *vs.* courbure lors des essais #2 et #3 sont situés dans l'enveloppe définie par les résultats de l'essai #1. Par conséquent, pour différents chargements, différentes gammes de courbures (entre 0 et $0,128 \text{ mm}^{-1}$) et de moments sont décrites, mais la réponse matériau reste la même (*i.e.* même relation moment *vs.* courbure). C'est donc bien la réponse intrinsèque du matériau qui est décrite par cet essai.

Les essais préalables permettent de valider la procédure proposée. Nous disposons donc d'une méthode permettant de caractériser le comportement non-linéaire intrinsèque en flexion des renforts, et donnant des résultats cohérents avec ceux obtenus par d'autres méthodes. La partie 3.3 suivante présente les résultats de la caractérisation du comportement en flexion du renfort HiTape®.

3.3 Résultats expérimentaux de flexion

3.3.1 Caractéristiques des essais

Paramètres matériau

Les caractéristiques des échantillons testés sont synthétisées dans le tableau 3.2. Afin d'être représentatif du procédé de mise en forme par double membrane, il faudrait idéalement pouvoir tester le matériau lorsqu'il est compacté sous 1 bar. Cela étant difficilement réalisable sans introduire d'artifices supplémentaires, nous décidons de consolider les échantillons avant essai : ils sont passés en étuve à la température de fusion du voile (T_{fus}) pendant 1 h sous bâche à vide pour que, pendant le test, ils soient dans des conditions proches de celles de la mise en forme.

<i>Fibre</i>	HexTow [®] IMA
<i>Grammage du renfort</i>	210 g · m ⁻²
<i>Dimension des échantillons</i>	12,7 mm × 150 mm
<i>Consolidation</i>	1 h à T_{fus} sous bâche à vide
<i>Dépose des empilements</i>	automatisée

Tableau 3.2 – Caractéristiques du renfort HiTape[®] et des échantillons testés lors des essais de flexion.

Plan d'expérience

Le tableau 3.3 résume le plan d'expérience. Dans un premier temps, le comportement en flexion longitudinale d'un pli unitaire est caractérisé (essai #4), puis des empilements unidirectionnels sont testés (#5 à #8). Selon le nombre de plis, des masselottes différentes sont employées ; elles sont notées $m_{1 \rightarrow 5}$ où $m_i < m_j$ pour $i < j$. Afin d'être représentatif d'un cycle réel de mise en forme, les échantillons de type empilements sont déposés de façon automatisée à plat. Notons que, à cause de leur faible largeur, les échantillons se sont étalés pendant la phase de consolidation sous bâche à vide car ils n'étaient pas contraints latéralement. Or le boîtier de fixation de l'échantillon étant conçu pour une largeur d'échantillon fixe de 12,7 mm, les échantillons sont donc ajustés en largeur *a posteriori*, ce qui génère une erreur liée à la valeur de la masse surfacique. Cependant, comme il a été observé que la contribution de la masselotte est prépondérante, cette erreur est négligée.

3.3.2 Essais sur pli unitaire

Résultats

La figure 3.11 présente les déformées des quatre échantillons obtenues après traitement des photographies sur ImageJ, ainsi que le modèle optimisé de l'équation 3.1 pour chacune. Le cinquième essai ne satisfaisant pas la condition nécessaire de validité

<i>Essai</i>	<i>Séquence</i>	<i>Température</i>	<i>Masselotte</i>	<i>Nombre</i>
#4	$[0^\circ]_1$	T_{fus}	m_1	5
#5	$[0^\circ]_2$	T_{fus}	m_2	3
#6	$[0^\circ]_4$	T_{fus}	m_3	3
#7	$[0^\circ]_6$	T_{fus}	m_3	3
#8	$[0^\circ]_8$	T_{fus}	m_5	3

Tableau 3.3 – Plan d'expérience des essais de flexion.

($err_{\%}^{(z)} < 5\%$ et $err_{\%}^{(M)} < 5\%$), il n'est pas considéré. La racine de l'erreur-type relative $err_{\%}^{(z)}$ entre les points expérimentaux et la fonction de la déformée est inférieure à 2,5% pour chacun des échantillons, ce qui justifie le choix de la fonction de la déformée (équation 3.1) pour le comportement à T_{fus} également.

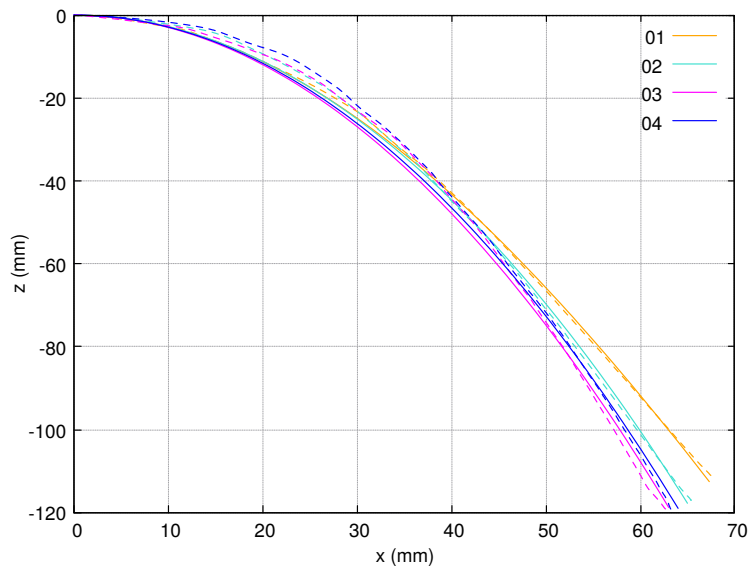


Figure 3.11 – Déformées des plis unitaires caractérisés à T_{fus} (données expérimentales en traits discontinus et modèles optimisés en traits pleins).

Sur la figure 3.12, le moment de flexion est tracé en fonction de la courbure, avec d'une part les résultats de courbure et de moment de flexion calculés séparément avec les équations 2.9 (p.39) et 3.2 (p.57) respectivement, et d'autre part le modèle de Voce optimisé (équation 3.3 p.57) pour chacun des quatre échantillons. Le modèle moyen est également tracé (ses paramètres R_0 , R_{inf} et κ_{lim} sont pris comme les moyennes des paramètres de chaque échantillon). La figure 3.12 montre que le modèle de Voce sélectionné décrit de manière satisfaisante l'évolution moment *vs.* courbure obtenue expérimentalement à la température de fusion du voile, avec $err_{\%}^{(M)}$ inférieure à 3% pour chacun des échantillons.

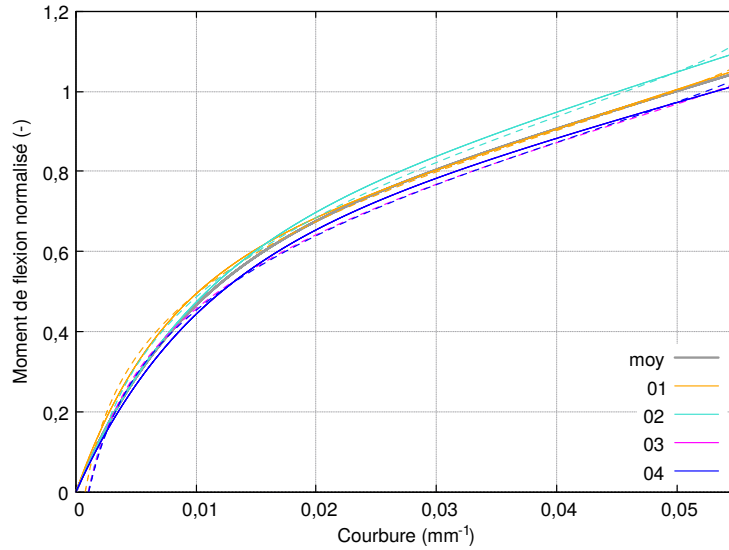


Figure 3.12 – Comportement de flexion normalisé pour un pli unitaire à T_{fus} (données brutes en traits discontinus et modèles optimisés en traits pleins).

Discussion

Nous avons ainsi caractérisé le comportement de flexion d'un pli unitaire HiTape® avec le modèle de Voce, rappelé ici :

$$\mathcal{M}(\kappa) = R_0 \kappa + R_{inf} (1 - e^{-\kappa/\kappa_{lim}})$$

où les R_0 , R_{inf} sont connus, et $\kappa_{lim} = 0,0088 \text{ mm}^{-1}$ est le seuil de courbure à partir duquel le comportement devient quasi-linéaire (figure 3.8). La connaissance de ces trois paramètres permet d'évaluer les rigidités de flexion tangentes initiale et asymptotique, qui sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de la gamme de rigidités de flexion.

Lors des essais, les courbures décrites par les déformées sont comprises entre 0,0576 et 0,0010 mm^{-1} , ce qui correspond à un rayon de courbure de 17 à 1000 mm environ. L'objectif est de représenter les courbures des pièces finales, sur lesquelles les rayons de courbure peuvent atteindre 5 mm, ce qui correspond à une courbure de 0,2 mm^{-1} . De telles courbures ne sont pas atteignables expérimentalement sans effet de « cassure » de l'échantillon. Cependant, le modèle de Voce étant linéaire à partir du seuil κ_{lim} largement inférieur à 0,2 mm^{-1} , la relation moment *vs.* courbure est alors connue par extrapolation pour des courbures plus grandes que celles de l'échantillon. Ainsi le modèle obtenu permet bien de décrire la gamme de courbure des géométries mises en forme.

De la même façon que dans la partie 3.2.4, on compare la rigidité de flexion tangente initiale obtenue au résultat du flexomètre de Peirce : on trouve une erreur relative de 4 %. Ainsi, par rapport au flexomètre à angle fixe, le flexomètre modifié permet de plus de décrire le comportement de flexion aux grandes courbures, ce qui est intéressant

pour décrire les géométries industrielles réelles.

3.3.3 Essais sur empilements

Résultats

Conformément au plan d'expérience (tableau 3.3), des essais de flexion sur des empilements unidirectionnels de 2, 4, 6 et 8 plis sont réalisés ; les essais sur 6 et 8 plis n'ayant cependant pas pu être exploités car la condition nécessaire de validité n'a pas été remplie. La figure 3.13a représente le moment de flexion en fonction de la courbure pour chaque configuration (pli unitaire compris). Suivant la même méthode, un comportement de flexion moyen est obtenu *via* l'optimisation du jeu de paramètres du modèle de Voce. On remarque à nouveau que le modèle de Voce sélectionné permet de décrire de façon adéquate les évolutions moment *vs.* courbure des différentes configurations, dans le cas d'empilements cette fois.

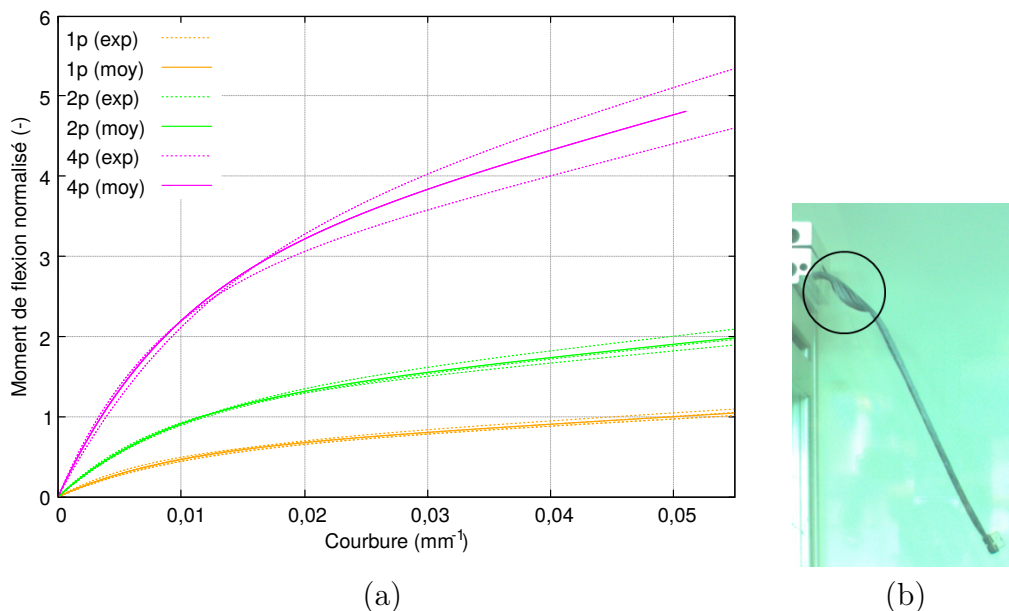


Figure 3.13 – Comportement de flexion normalisé pour un pli unitaire et pour des empilements de 2 et 4 plis à T_{fus} (données expérimentales en pointillés et modèles moyens en traits pleins) (a) ; pour un plus grand nombre de plis, l'essai n'est plus valide : un échantillon constitué de 8 plis d'HiTape® présente du flambage au niveau de l'encastrement (b).

Une limite de cet essai de flexion sur empilements concerne l'épaisseur des échantillons testés. En effet, une épaisseur (ou nombre de plis) trop importante conduit au phénomène de flambage local : une ouverture (*fish-eye*) induite par la décohésion de l'échantillon apparaît ; un exemple est illustré sur la figure 3.13b. Ce phénomène est dû à la fois à l'inextensibilité des fibres individuellement et aux singularités locales. L'hypothèse de continuité de la matière et par conséquent l'interprétation des résultats selon la méthode ci-avant ne sont plus valables. Il est donc décidé de minimiser ces effets – ce qui consiste, pour une épaisseur donnée, à diminuer voire supprimer la

masselotte. En revanche, cela implique que de plus faibles courbures sont obtenues, et que par conséquent le comportement quasi-linéaire n'est pas forcément décrit. Ainsi la valeur du paramètre de régression R_0 , et donc de la rigidité de flexion asymptotique, pourraient être surestimées. Le choix de la masselotte est ainsi le fruit d'un compromis entre maintien de la cohésion de l'échantillon, et étendue de la gamme de courbures.

Discussion

Le comportement de flexion d'empilements de 2 et 4 plis a ainsi été caractérisé, et un modèle moyen a été dégagé pour chaque configuration ; ils sont rappelés sur la figure 3.14. La courbe théorique correspondant au comportement de flexion d'un milieu homogène à un pli (donc de même comportement) mais de double épaisseur selon la théorie de Kirchhoff a été ajoutée, ainsi que celui théorique d'un pli déduit du comportement en traction selon la mécanique des milieux continus (équation (2.6)).

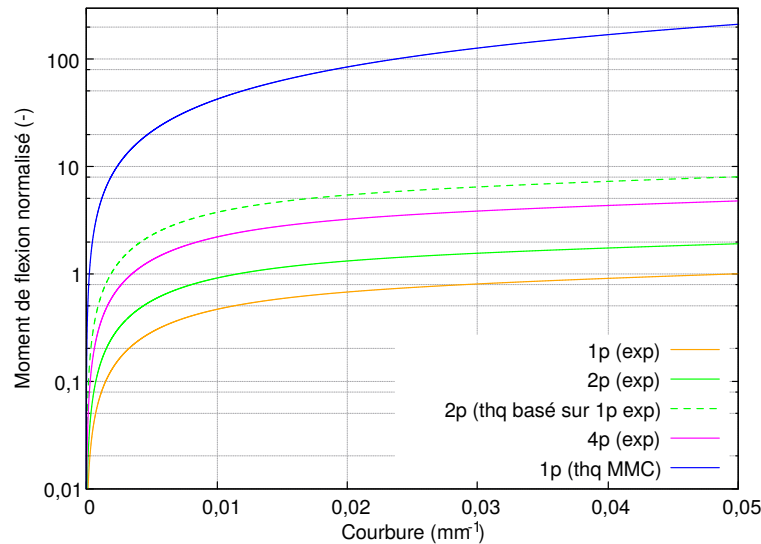


Figure 3.14 – *Comportements de flexion normalisés moyens pour différents empilements à T_{fus} , pour un milieu théorique homogène à 1 pli mais d'épaisseur double selon la théorie de Kirchhoff et les résultats expérimentaux sur 1 pli, et pour 1 pli d'après le comportement en traction et la mécanique des milieux continus.*

On vérifie l'invalidité de la théorie des milieux continus, avec environ deux ordres de grandeurs d'écart entre les comportements théorique et expérimental d'un pli unitaire. Par ailleurs, le comportement réel d'un empilement de 2 plis est quatre fois moins rigide que le comportement théorique d'un pli unitaire de double épaisseur. La différence peut certes être attribuée en partie à l'invalidité de la théorie des milieux continus dans ce contexte où il y a réarrangement fibreux au cours de la transformation, mais nous supposons également qu'elle est accentuée par la présence du voile thermoplastique au niveau de l'inter-pli. En effet, nous estimons que ce voile induit un glissement inter-pli, ce qui crée une souplesse de la structure globale en flexion. Ainsi, l'interface où est situé le voile contrôle en grande partie le comportement en flexion

d'un empilement de renfort. Comme le cisaillement transverse hors-plan à l'échelle d'un pli unitaire est négligeable (partie 3.1.5), un pli unitaire se déforme en flexion de la manière illustrée sur la figure 3.15a. Finalement, le comportement en flexion d'un empilement de renforts HiTape® peut être schématisé par la figure 3.15b.

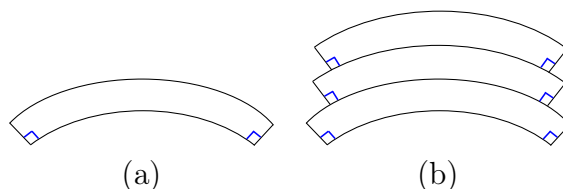


Figure 3.15 – Illustration du comportement en flexion d'un pli unitaire HiTape® sans cisaillement transverse hors-plan (a), et du comportement en flexion d'un empilement de plis HiTape® avec glissement inter-pli sans cisaillement transverse hors-plan intra-pli (b).

Cependant, le glissement inter-pli intervenant lors d'un essai de flexion d'un empilement est difficilement mesurable, à cause d'une part des conditions d'essais (enceinte thermorégulée) et d'autre part des faibles déplacements relatifs mis en jeu. En effet, si on approxime la déformée des échantillons à un quart de cercle et l'épaisseur d'un pli unitaire à 0,2 mm, un simple calcul géométrique montre que le déplacement relatif entre deux plis adjacents est de l'ordre de 0,3 mm. Il apparaît ainsi nécessaire de caractériser le comportement de glissement inter-pli *via* un essai spécifique. L'idée générale serait alors de confronter le comportement en flexion expérimental d'un empilement, à celui d'un empilement de plis issu de la simulation numérique, obtenu en empilant des plis présentant chacun le comportement d'un pli unitaire et séparés par une zone intégrant un comportement de glissement.

Conclusion du chapitre

Les sollicitations intra-plis dont la réponse du renfort HiTape® est prépondérante ont été identifiées : il s'agit de la traction dans le sens des fibres, la compaction, et la flexion. Le comportement en traction a été déduit des caractéristiques des fibres. Le comportement en compaction a été identifié grâce à des travaux passés. Enfin, le comportement en flexion fortement non-linéaire et dépendant de la température nécessite la conception et la mise en place d'une nouvelle méthode de caractérisation. Après validation de cette nouvelle méthode, les comportements de flexion d'un pli unitaire et d'empilements de deux et quatre plis ont pu être décrits à l'aide du modèle de Voce.

La caractérisation du comportement en flexion d'empilements a permis de mettre en évidence le rôle majeur de l'interface entre les plis, où se situe le voile. Ce comportement nécessite d'être caractérisé à l'aide d'un essai spécifique : ceci fait l'objet du chapitre suivant.

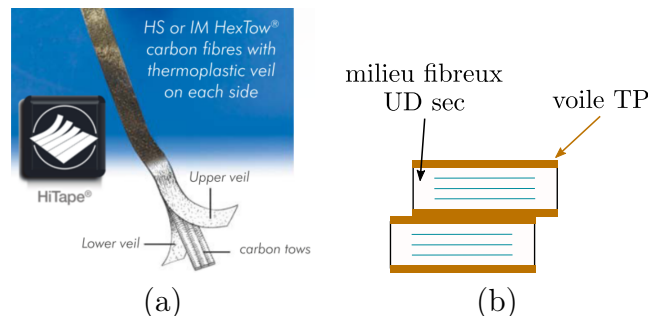
4 Caractérisation du comportement inter-ply du renfort HiTape®

Sommaire

4.1 Réponses du renfort HiTape® à des sollicitations inter-plis	72
4.1.1 Adhésion/décohésion inter-ply	72
4.1.2 Glissement inter-ply	73
4.2 Mise en place d'un essai de frottement inter-ply	74
4.2.1 Cahier des charges	74
4.2.2 Description du montage	74
4.2.3 Procédure	75
4.2.4 Validation de la procédure	76
4.3 Résultats expérimentaux de frottement inter-ply	78
4.3.1 Caractéristiques des essais	78
4.3.2 Résultats	79
4.3.3 Discussion	80

Introduction

Les réponses aux sollicitations intra-plis étudiées dans le chapitre 3 sont liées au comportement d'un pli unitaire isolé. Cependant, l'étape de mise en forme du procédé considéré (figure 1.7 p.15) s'opère sur un empilement, et les essais de flexion sur empilements présentés dans le chapitre précédent ont permis de mettre en évidence le rôle majeur de l'inter-pli, *i.e.* l'interface constituée par le voile, dans le comportement global. Contrairement aux réponses aux sollicitations intra-plis, pour lesquelles la contribution du voile et donc de la température est négligeable – sauf pour la flexion –, le comportement inter-pli est *a priori* largement dominé par le voile thermoplastique. En effet, d'après le postulat **P-1** (p.47), le voile est situé à l'interface entre les plis et ne migre pas au cours de la mise en forme. La figure 2.2 illustrant la modélisation du renfort est rappelée ci-dessous.



Rappel de la figure 2.2 – Illustration [13] (a) et modélisation (b) de la structure du renfort HiTape®, intermédiaire entre les renforts secs et pré-imprégnés.

L'objectif de ce chapitre est de caractériser le comportement inter-pli du renfort HiTape® où est localisé le voile, suivant la stratégie de modélisation et de caractérisation établie dans les parties 2.4.2 et 2.4.3 (p.47), selon laquelle le voile peut être modélisé par un milieu continu homogène équivalent. Ainsi, chacune des deux sollicitations inter-plis présentées dans la partie 2.3 (adhésion/décohésion, glissement inter-pli) est étudiée dans le cas du renfort HiTape®. Dans le cas du glissement inter-pli spécifique à nos matériaux, nous verrons qu'une nouvelle méthode de caractérisation doit être mise en place; elle est présentée dans la partie 4.2. Les résultats expérimentaux de frottement inter-pli suivent dans la partie 4.3.

4.1 Réponses du renfort HiTape® à des sollicitations inter-plis

4.1.1 Adhésion/décohésion inter-pli

La littérature présentée dans la partie 2.3.2 nous permet d'intuire un rôle important du comportement d'adhésion/décohésion entre les plis. Par ailleurs, des essais en laboratoire ont mis en évidence la moins bonne qualité des préformes déposées de façon automatisée et mises en forme à température ambiante plutôt qu'à chaud. Nous expliquons cela par le fait que le lien d'adhésion créé par le voile thermoplastique fondu

au moment de la dépose puis solidifié empêche la mobilité entre les plis lors de la mise en forme à température ambiante et favorise l'apparition de défauts.

S'il nous semble pertinent de nous intéresser à ce phénomène dans le cadre de travaux ultérieurs, le glissement inter-ply semble cependant prépondérant devant l'adhésion/ décohésion dans le cadre du procédé considéré (figure 1.7 p.15), notamment car (i) le renfort est maintenu entre deux membranes dans la direction de son épaisseur, et car (ii) la mise en forme est réalisée à la température de fusion du voile.

Lemme L-8 : *La réponse à une sollicitation en décohésion du renfort HiTape® n'a pas un rôle majeur au premier ordre, comparé au glissement inter-ply.*

4.1.2 Glissement inter-ply

Le glissement inter-ply des renforts secs et pré-imprégnés a été abondamment étudié dans la littérature (partie 2.3.1). En effet, pendant l'étape de mise en forme, les plis sont amenés à glisser à la fois les uns par rapport aux autres, et sur l'outillage (moule, membrane). Dans le cas du procédé considéré (figure 1.7 p.15), on peut supposer une adhésion parfaite entre les membranes et le renfort (*i.e.* pas de déplacement relatif à l'interface membrane-renfort), et un glissement parfait en première approximation entre la membrane et le moule (*i.e.* aucun frottement). En revanche, le comportement de glissement inter-ply, dont l'influence majeure sur le comportement d'un empilement a été mise en évidence dans le chapitre 3, nécessite d'être caractérisé à la température de fusion du voile. Compte tenu de l'amplitude des déplacements relatifs attendue, ce comportement de glissement inter-ply peut être caractérisé par le frottement inter-ply.

La présence du voile thermoplastique à l'interface entre les plis, à l'état fondu lors de la mise en forme, laisse supposer que le frottement inter-ply est de type lubrifié limite ou hydrodynamique, avec une influence de la pression normale et de la vitesse de déplacement relative entre les plis. Tout comme pour les essais de flexion, notons que nous ne cherchons donc pas dans le cadre de ce travail à étudier l'influence de la température, mais que nous considérons la transformation isotherme à la température de fusion du voile. En effet, dans le procédé de mise en forme considéré (figure 1.7 p.15), la mise en forme est opérée après que la température de consigne est atteinte de façon homogène. Le comportement attendu peut donc être résumé ainsi :

Lemme L-9 : *Le comportement du renfort HiTape® en glissement inter-ply est prépondérant lors de la mise en forme d'un empilement. Il est de type frottement lubrifié, et est fortement dépendant de la température.*

Aucun moyen de caractérisation du comportement de frottement inter-ply n'étant disponible, un nouveau banc a donc été conçu et mis en place au sein du laboratoire R&T d'Hexcel Reinforcements, avec pour objectif de caractériser le comportement de frottement inter-ply en se rapprochant au maximum des conditions de mise en forme. Ainsi, un essai de type *pull-through* est sélectionné. La mise en place de cette nouvelle méthode est présentée dans la partie 4.2, puis les résultats sont analysés dans la partie 4.3.

4.2 Mise en place d'un essai de frottement inter-ply

4.2.1 Cahier des charges

Les principaux points du cahier des charges pour la conception du nouveau banc de caractérisation du frottement inter-ply sont les suivants :

- tester le renfort à la température de fusion du voile (T_{fus}) ;
- appliquer une gamme de contraintes normales de 0,5 à 1,5 bar ;
- imposer une vitesse de déplacement relative de l'ordre de quelques millimètres en quelques secondes, soit une gamme de 1 à 10 mm/min.

4.2.2 Description du montage

On rappelle que dans l'essai de *pull-through*, un échantillon central est placé entre deux échantillons latéraux fixes. Une pression de serrage connue est appliquée dans le sens de l'épaisseur du renfort, et l'échantillon central est tiré ; un schéma de principe est donné sur la figure 4.1a. La force de traction F_T est alors mesurée en fonction du déplacement de l'échantillon. Ce principe d'essai a été sélectionné car il permet d'appliquer une pression normale à la fois homogène sur la surface et constante au cours de l'essai.

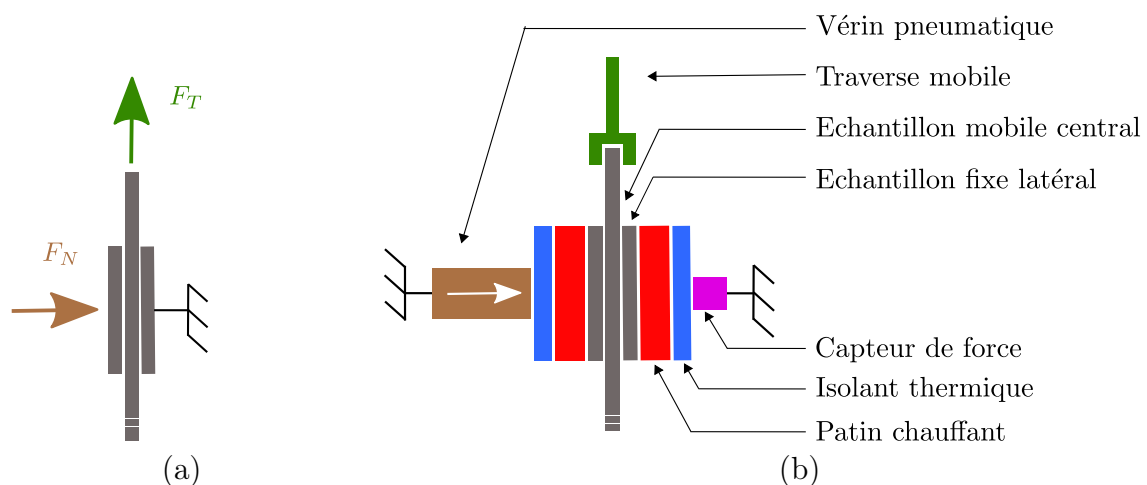


Figure 4.1 – Schéma de principe de l'essai de pull-through mis en place (a) et schéma de l'ensemble des pièces constituant le banc de caractérisation du frottement inter-ply (b).

Un montage est conçu à la fois pour maintenir les échantillons latéraux immobiles et pour appliquer la température et la pression de serrage souhaitées. L'ensemble de ses éléments est schématisé sur la figure 4.1b. La pression de fermeture est imposée par un vérin pneumatique, et un manomètre permet le réglage du flux d'air d'entrée pour la contrôler. Un capteur additionnel permet de mesurer la valeur exacte de la force normale imposée par le vérin pneumatique. Les échantillons latéraux sont placés au contact de patins chauffants et sont immobilisés à l'aide d'un système de fixation spécifique. Le montage présente également un guidage de l'échantillon central. Enfin,

des isolants thermiques sont ajoutés pour limiter l'influence de la montée en température des patins chauffants sur le vérin et le capteur de force.

Ce montage est adapté à la base d'une machine de traction standard Instron¹ 2 kN. L'essai est piloté *via* le logiciel de la machine de traction, et une station d'acquisition permet d'enregistrer en temps réel les données de force, déplacement et temps de la machine de traction, ainsi que la température des patins et la force normale réelle mesurée par le capteur.

L'échantillon central est fixé dans le mors supérieur de la machine. Lors de la conception de cet essai, diverses difficultés ont été rencontrées ; les solutions techniques apportées sont synthétisées dans le tableau 4.1.

<i>Enjeu identifié</i>	<i>Solution apportée</i>
Limiter les effets de la température sur la force normale appliquée	Choix des matériaux et pièces additionnelles isolantes thermiquement
Connaître la contrainte normale à chaque instant	Capteur de force
Assurer l'immobilité des échantillons latéraux dès le début de l'essai	Système de fixation spécifique des échantillons latéraux
Empêcher le glissement de l'échantillon central au niveau du mors supérieur	Conception d'un mors particulier, et vérification systématique au cours d'un essai
Assurer l'homogénéité de la pression sur la surface testée à l'état initial	Patins coplanaires, et vérification de leur coplanéité sur le montage
Assurer l'homogénéité de la pression sur la surface testée au cours de l'essai	Dimensionnement du montage (avec choix d'un vérin présentant une bonne tenue dans le sens transverse)
Supprimer les frottements parasites en-dehors de la surface testée	Système de fixation des échantillons latéraux, et guidage de l'échantillon central

Tableau 4.1 – *Identification des enjeux associés à la conception de l'essai de frottement et solutions technologiques apportées.*

4.2.3 Procédure

Étape 1/2 : mesures expérimentales

Les échantillons latéraux et central sont tout d'abord fixés sur le montage et dans le mors supérieur de la machine de traction respectivement. Le vérin pneumatique est ensuite activé afin d'appliquer la pression de fermeture, et la montée en température des patins jusqu'à la température de fusion du voile est lancée. Au bout de quelques

1. www.instron.fr/

minutes, suffisantes pour que la température de consigne soit atteinte de façon homogène sur les patins et dans les échantillons au niveau de la surface testée (vérifié par des thermocouples), l'essai est démarré. Il débute par une précharge à 10 N à une vitesse de déplacement de 10 mm/min, puis le déplacement de la traverse se poursuit à la vitesse de consigne présélectionnée.

L'essai est stoppé lorsqu'un des deux critères suivants est vérifié : soit la courbe force-déplacement est stabilisée (*i.e.* elle a atteint un palier), soit la distance de déplacement atteint 50 mm (ce qui correspond à la hauteur des patins). Les paramètres d'entrée du test sont la vitesse de déplacement de la traverse représentant la vitesse de déplacement relative des plis, et la contrainte normale appliquée. Les données de sortie sont le déplacement, la force de traction, la force normale et la température en fonction du temps.

Étape 2/2 : exploitation des résultats

A chaque instant de l'essai, le coefficient de frottement CoF et le nombre de Hersey divisé par la viscosité – on le notera H^* – peuvent être calculés avec les équations 2.12 et 2.14 rappelées ici :

$$\text{CoF} = \frac{F_T}{2 F_N} \quad \text{et} \quad H^* = \frac{H}{\eta} = \frac{\nu}{F_N} \quad (4.1)$$

où pour rappel, F_N et F_T sont les efforts normal et tangent respectivement, η la viscosité de la matrice, et ν la vitesse de glissement. Cette étude étant isotherme, on suppose que dans la gamme de pression considérée la valeur de la viscosité reste constante. L'étude peut donc être menée avec H^* , à la valeur de η près. Notons par ailleurs que par rapport à l'équation 2.12, un facteur 2 apparaît ici puisqu'on suppose le problème parfaitement symétrique (l'aire réelle de contact est égale au double de la surface testée).

4.2.4 Validation de la procédure

La procédure étant définie, on souhaite évaluer sa qualité avant de procéder à la campagne expérimentale. Dans cette partie, on cherche donc à vérifier que la température de consigne est bien atteinte dans l'échantillon et que cela n'affecte pas la mesure de la force normale. On justifie également la largeur d'échantillon sélectionnée pour le test.

Température de la zone testée

La montée en température des échantillons est réalisée à l'aide de patins chauffants ; une autre possibilité aurait été de mettre en place le test en étuve. Ce choix a été fait pour les raisons suivantes : *(i)* la montée en température est beaucoup plus rapide (de l'ordre de quelques minutes), *(ii)* l'essai est plus aisé à mettre en œuvre, et *(iii)* la manipulation est facilitée. Cependant, ce choix est potentiellement fait au détriment d'une température homogène dans l'échantillon. Afin de vérifier cet aspect, un thermocouple est placé au sein de l'échantillon central en amont de la zone testée,

puis le test est réalisé. On vérifie bien que la montée de l'échantillon à la température de consigne est quasi-immédiate. Cela s'explique notamment par le fait que le carbone est un bon conducteur de chaleur, que le renfort est fin, et que la vitesse de déplacement est faible.

Sélection d'une largeur d'échantillon

Des essais préalables sont réalisés avec des échantillons de diverses largeurs en vue de sélectionner une largeur appropriée. Il est observé que lorsque la largeur augmente, les conséquences d'un défaut d'alignement sont amplifiées, avec notamment risque de décohésion et de plissement hors-plan comme illustré sur la figure 4.2. En revanche, lorsque la largeur est trop faible, l'échantillon central a tendance à s'étaler sous l'effet de la pression de serrage, et l'aire réelle de la surface testée n'est plus maîtrisée. Si cela n'a pas d'influence sur le calcul du coefficient de frottement, cela modifie en revanche de manière incontrôlée la valeur de la pression réelle appliquée. Une largeur standard de 12,7 mm est sélectionnée. L'étalement observé sur des échantillons après essai est du même ordre de grandeur que la variabilité dimensionnelle du matériau, il est donc négligé.

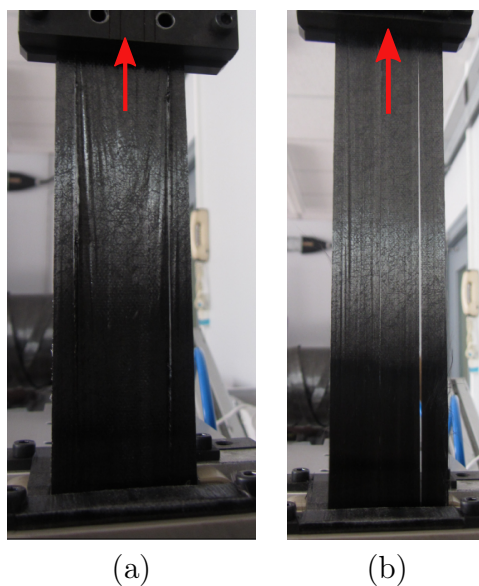


Figure 4.2 – *Plissements hors-plan (a) et décohésion de l'échantillon (b) pouvant apparaître lors de l'essai de frottement.*

Mesure de la force normale

Le vérin pneumatique et le capteur étant métalliques et proches des patins, leur température peut augmenter lors d'un essai. En ce qui concerne le vérin pneumatique, l'air contenu s'échauffe donc se dilate, ce qui modifie la pression appliquée. A titre d'exemple, un calcul rapide avec la loi des gaz parfaits montre qu'une augmentation de 10 °C de l'air contenu dans le vérin (de 25 à 35 °C par exemple) implique une augmentation de 3 % de la force appliquée. En ce qui concerne le capteur de force normale, une montée en température provoque une dérive de la mesure de force. Le coefficient

de frottement étant calculé avec les données de forces normale et tangente en temps réel, une légère variation de la force normale n'est pas problématique. En revanche, il est nécessaire de bien la mesurer. Un système permettant d'isoler thermiquement le capteur et le vérin est alors installé (indiqué sur la figure 4.1), et la fiabilité de la mesure de la force normale est bien vérifiée.

Les différents aspects sensibles de l'essai étant appréhendés, la procédure proposée est validée. Nous disposons donc d'une méthode permettant de caractériser le comportement de frottement inter-ply des renforts à chaud. La partie 4.3 suivante présente les résultats de la caractérisation du comportement en frottement inter-ply du renfort HiTape®.

4.3 Résultats expérimentaux de frottement inter-ply

4.3.1 Caractéristiques des essais

Paramètres matériau

Les caractéristiques des échantillons testés sont synthétisées dans le tableau 4.2. Le matériau est le même que celui utilisé pour les essais de flexion. Comme la contrainte normale représentative de la mise en forme est appliquée lors de l'essai de frottement, il n'est en revanche pas nécessaire de consolider les échantillons au préalable. L'échantillon central est calibré de largeur 12,7 mm, et les patins mesurent 55 mm de haut. Les échantillons latéraux présentent une plus grande largeur que l'échantillon central, de sorte à maintenir constante la surface testée.

<i>Fibre</i>	HexTow® IMA
<i>Grammage du renfort</i>	210 g · m ⁻²
<i>Surface testée</i>	12,7 mm × 55 mm

Tableau 4.2 – *Caractéristiques du renfort HiTape® et des échantillons testés lors des essais de frottement inter-ply.*

Plan d'expérience

Le plan d'expérience est présenté dans le tableau 4.3. L'objectif est d'évaluer le coefficient de frottement inter-ply du renfort sur des gammes de contrainte normale et de vitesse représentatives de la mise en forme. La contrainte normale appliquée sur l'empilement de renforts dans le procédé considéré (figure 1.7 p.15) est théoriquement de 1 bar, mais elle peut varier localement ; ainsi le coefficient de frottement est évalué pour des contraintes normales comprises entre 0,5 et 1,5 bar environ. Par ailleurs, il est difficile d'estimer la valeur de la vitesse de déplacement relatif entre deux plis adjacents dans les procédés de mise en forme à membrane. On estime qualitativement qu'elle est de l'ordre de quelques millimètres en quelques secondes, soit une gamme de 0,5 à 2,0 mm/min.

Par ailleurs, dans le cadre de ce travail, on caractérise le frottement inter-pli $0^\circ/0^\circ$ par souci de simplicité, même si dans un contexte industriel les plis adjacents sont rarement de même orientation. Si les essais révèlent un régime hydrodynamique (voir figure 2.15 p.41), alors cela signifie que l'interface est séparée par un film lubrifiant continu d'épaisseur plus grande que la rugosité de la surface. Dans un tel cas, l'hypothèse selon laquelle le coefficient de frottement est indépendant de l'orientation des fibres serait justifiée.

<i>Essai</i>	<i>Pression</i>	<i>Vitesse de déplacement</i>	<i>Nombre</i>
#a	1,35 bar	2,0 mm/ min	5
#b	1,00 bar	2,0 mm/ min	4
#c	0,50 bar	2,0 mm/ min	4
#d	1,35 bar	0,5 mm/ min	4
#e	0,50 bar	0,5 mm/ min	4

Tableau 4.3 – Plan d'expérience des essais de frottement inter-pli.

4.3.2 Résultats

La figure 4.3 illustre l'allure de la force tangente en fonction du déplacement dans le cas d'un échantillon représentatif. La force est normalisée par sa valeur maximale et est exprimée en pourcentage. Après la mise sous tension de l'échantillon, la force tangente augmente avec le déplacement jusqu'à atteindre une valeur maximale, puis elle décroît. Remarquons que la valeur de la force ne se stabilise pas clairement ; ce phénomène est attribué à un réarrangement fibreux au cours de l'essai et aux limites du postulat **P-1** selon lequel le voile reste à l'interface.

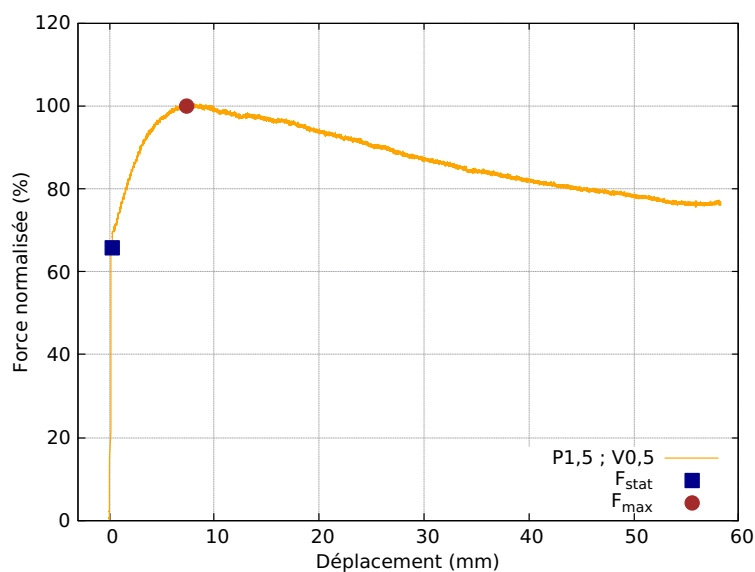


Figure 4.3 – Allure de la force tangente en fonction du déplacement dans le cas d'un échantillon représentatif testé sous 1,5 bar et à 0,5 mm/min (essai #d).

Lors de la mise en forme d'un empilement, le déplacement relatif attendu entre deux plis adjacents est de l'ordre de quelques millimètres. Rappelons que selon des considérations purement géométriques, la mise en forme sur un quart de cercle implique un déplacement relatif entre deux plis adjacents de 0,3 mm. Ainsi, ce sont les premiers millimètres de glissement qui nous intéressent. Deux valeurs de force sont donc exploitées : celle à partir de laquelle le déplacement commence – désignée par F_{stat} sur la figure 4.3 –, et la valeur maximale atteinte au cours de l'essai – désignée par F_{max} sur la même figure. La première correspond à la force de frottement statique et permet d'extraire le coefficient de frottement statique CoF_{stat} , tandis que la seconde donne le coefficient de frottement maximal CoF_{max} . Remarquons que la valeur de la force ne se stabilisant pas, on ne peut pas extraire de ces essais un coefficient de frottement dynamique au sens de la norme ASTM D1894.

Les résultats de coefficients de frottement statique et maximal sont présentés avec leurs écarts-types, en fonction de la pression sur la figure 4.4, et en fonction de la vitesse sur la figure 4.5. Une forte influence de la pression et de la vitesse est observée sur les gammes étudiées. Remarquons que les écarts-types sont faibles (inférieurs à 10 % relativement) au regard des différences observées d'une configuration à l'autre.

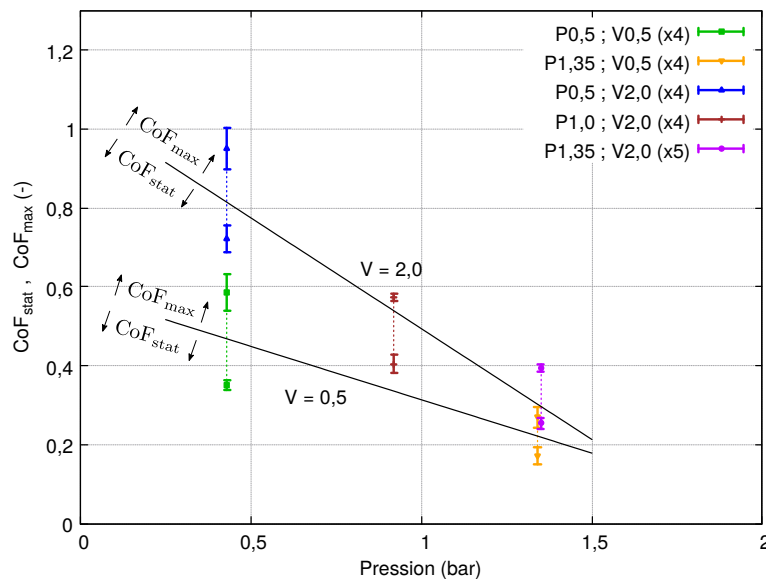


Figure 4.4 – Coefficients de frottements statiques et maxima en fonction de la pression, obtenus lors des essais #a à #e.

4.3.3 Discussion

Afin de conclure quant au type de régime lubrifié qui caractérise l'inter-ply durant la mise en forme à chaud, les coefficients de frottement obtenus CoF_{stat} et CoF_{max} sont tracés en fonction du nombre de Hersey divisé par la viscosité H^* ; les résultats sont présentés sur la figure 4.6. Une régression linéaire est réalisée dans chacun des deux cas, et le coefficient de détermination obtenu justifie la conclusion d'une relation linéaire croissante entre le coefficient de frottement et le nombre de Hersey modifié H^* ,

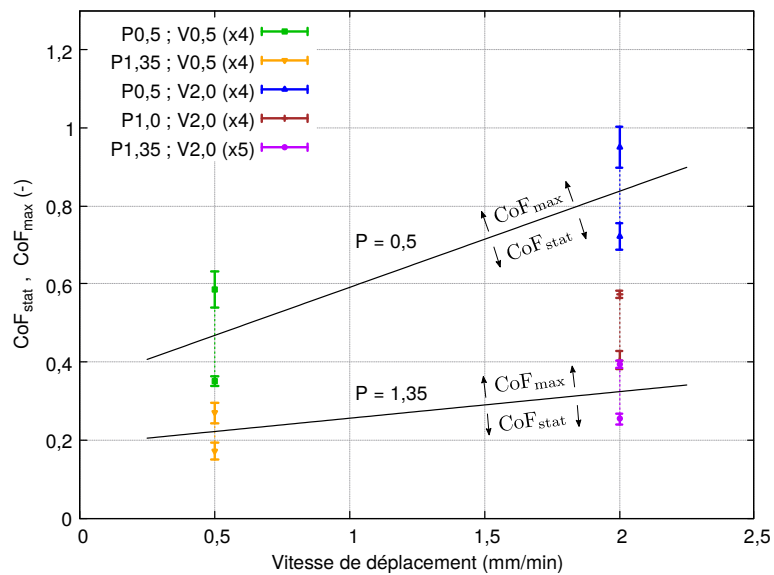


Figure 4.5 – Coefficients de frottements statiques et maxima en fonction de la vitesse, obtenus lors des essais #a à #e.

conformément à la courbe de Stribeck (figure 2.15). Il s'agit donc bien d'un régime hydrodynamique, ce qui correspond à la présence d'un film lubrifiant d'épaisseur plus grande que la rugosité du renfort. Cela justifie l'hypothèse faite en première approximation que le coefficient de frottement ne dépend pas de l'orientation du renfort.

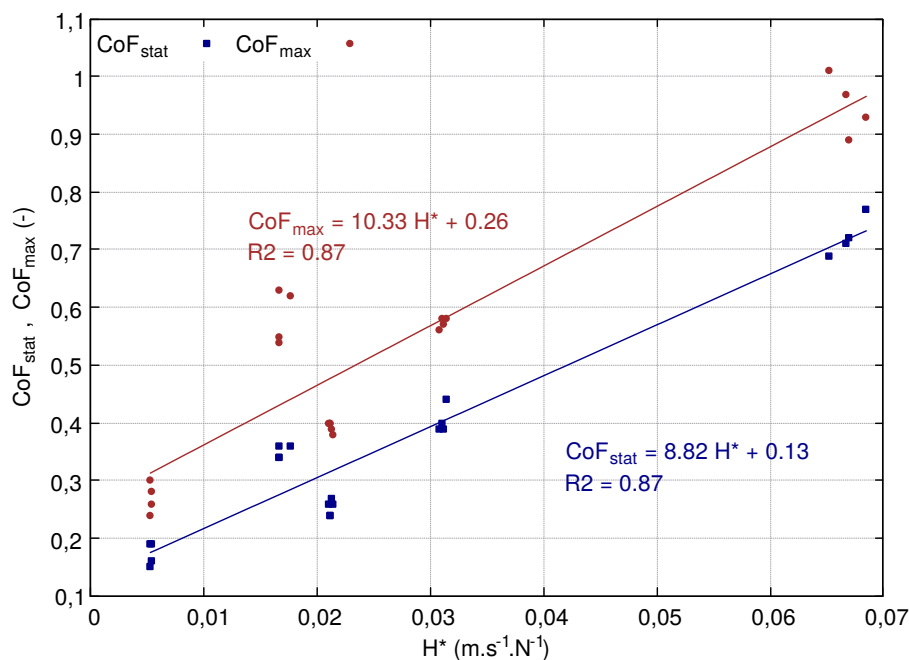
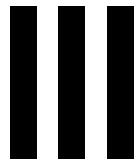


Figure 4.6 – Courbe de Stribeck pour le renfort HiTape® sur les gammes de pression et vitesse représentatives de la mise en forme.

Du point de vue de la mise en forme, une relation linéaire croissante entre le coefficient de frottement et le nombre de Hersey modifié H^* signifie que la mobilité inter-pli est favorisée aux faibles nombres de Hersey, donc à haute pression et basse vitesse.

Conclusion du chapitre

Parmi les sollicitations inter-plis intervenant lors de la mise en forme par double membrane d'un empilement de renforts HiTape®(®), la réponse prépondérante est le frottement inter-pli. Afin de l'étudier dans des conditions représentatives de la mise en forme, une nouvelle méthode de caractérisation du frottement inter-pli a été mise en place au sein du laboratoire R&T d'Hexcel Reinforcements. Après définition et validation de la procédure, le comportement de glissement inter-pli a été caractérisé. Le coefficient de frottement inter-pli est très dépendant de la contrainte normale appliquée et de la vitesse de déplacement relatif entre les plis. D'un point de vue industriel, une mise en forme à haute pression et basse vitesse semble être judicieuse pour favoriser la mobilité entre les plis et donc limiter l'apparition de défauts de type plissement, ceci quelles que soient leurs orientations respectives.



**Modélisation mécanique et
numérique, implémentation,
validation**

5

Modélisation mécanique du comportement du renfort

Sommaire

5.1	Mécanique des milieux continus en grandes transformations	87
5.1.1	Description de la géométrie et de la cinématique	87
5.1.2	Métrique et mesure des déformations	89
5.1.3	Description des contraintes	90
5.1.4	Equations de conservation et formulation du problème mécanique	91
5.1.5	Loi de comportement	93
5.2	Formulation hyperélastique	95
5.2.1	Des fondements thermodynamiques à la loi hyperélastique .	95
5.2.2	Loi constitutive hyperélastique générale	97
5.2.3	Conditions sur le potentiel	97
5.2.4	Premiers potentiels hyperélastiques pour décrire un comportement isotrope transverse	99
5.2.5	Ecriture du potentiel en fonction d'invariants « physiques »	101
5.3	Modélisation mécanique du comportement de l'intra-pli du renfort HiTape®	105
5.3.1	Lien entre la caractérisation expérimentale et la modélisation de l'intra-pli	105
5.3.2	Identification des potentiels	106
5.3.3	Perspective : description du comportement de flexion spécifique	109
5.4	Modélisation mécanique du comportement de l'interface entre les plis du HiTape®	113
5.4.1	Retour sur le cadre thermodynamique en présence d'une interface et de phénomènes de dissipation	113
5.4.2	Potentiels	116
5.4.3	Caractérisation des constantes	122

Introduction

Les deux chapitres précédents ont permis d’appréhender le comportement du renfort HiTape® et de le caractériser. Faisant écho à ces résultats, ce chapitre a pour objectif de proposer une modélisation physique et mécanique des comportements intra-ppli et inter-ppli du renfort HiTape® dans le cadre rigoureux de la mécanique des milieux continus.

En mécanique des milieux continus, le cadre restrictif des petites perturbations est fréquemment utilisé : dans ce cas il est supposé que le déplacement de chacun des points du domaine matériel est petit. Par conséquent, les configurations actuelle et initiale sont confondues. Cependant, l’étude de la mise en forme des renforts nécessite de sortir de ce cadre des petites perturbations. En effet, des non-linéarités géométriques sont induites : les déplacements imposés ($10^{-2} - 10^0$ m) ne sont plus négligeables devant les dimensions du solide considéré (notamment l’épaisseur de l’ordre de 10^{-2} m), et les rotations ne peuvent plus être négligées. Une description en grandes transformations est donc requise et mise en place dans la suite afin de décrire des grands déplacements, grandes rotations et grandes déformations. Par ailleurs, des non-linéarités matérielles à l’échelle des plis interviennent, engendrées par les mobilités des fibres aux échelles inférieures, comme cela a été observé et caractérisé dans les chapitres précédents. Ces non-linéarités matérielles en compaction notamment doivent être décrites. Ce cadre sera présenté dans la partie 5.1.

Le milieu intra-ppli du renfort HiTape® étant constitué de fibres unidirectionnelles, il présente une symétrie de révolution autour d’un axe correspondant à la direction des fibres. Il s’agit donc d’un milieu isotrope transverse, caractérisé par une direction privilégiée correspondant à la direction des fibres, et un plan d’isotropie normal à cette direction. Dans la continuité des conventions de notations utilisées, \underline{E}_1 correspond à la direction initiale des fibres d’un renfort unidirectionnel, et \underline{E}_3 est dirigé selon l’épaisseur dans la base cartésienne orthonormée $\mathcal{B} = (\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$. On notera \underline{M} la direction initiale des fibres, colinéaire à \underline{E}_1 . \underline{M} nous permettra de définir d’autres bases, telles que la base $\mathcal{B}^* = (\underline{M}, \underline{N}_2, \underline{N}_3)$ à l’échelle du paquet de fibres, illustrée sur la figure 5.1.

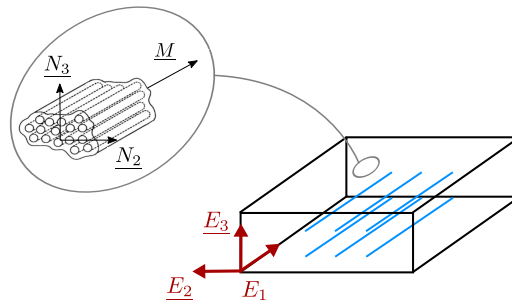


Figure 5.1 – Représentation schématique de la structure isotrope transverse d’un renfort unidirectionnel.

Après avoir établi le cadre de la mécanique des milieux continus en grandes trans-

formations (partie 5.1), nous introduirons les différentes stratégies de modélisation des milieux fibreux isotropes transverses (partie 5.2), afin de sélectionner et caractériser une loi de comportement judicieuse pour le milieu intra-pli du renfort HiTape[®] (partie 5.3) permettant de décrire les réponses observées à l'échelle d'un pli. Enfin, une loi de comportement spécifique pour le comportement de l'interface entre les plis est proposée (partie 5.4).

5.1 Mécanique des milieux continus en grandes transformations

En mécanique des milieux continus, la démarche classique consiste à définir une mesure cinématique du mouvement et de la déformation locale associée, puis de mesurer les efforts en jeu, et enfin de relier ces grandeurs cinématiques et statiques par une loi de comportement thermodynamiquement admissible et cohérente avec le choix de mesure de ces grandeurs.

5.1.1 Description de la géométrie et de la cinématique

Le mouvement de tout point d'un solide est décrit par la fonction bijective $\Phi(\underline{X}, t)$ telle que :

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t) \quad (5.1)$$

où $\underline{X}(t)$ est un vecteur dans la configuration initiale \mathcal{C}_0 qui se transforme en $\underline{x}(t)$ dans la configuration courante \mathcal{C} , comme représenté sur la figure 5.2. Le vecteur déplacement $\underline{u}(\underline{x}, t)$ correspond aux degrés de liberté standards (3 dans le cas tridimensionnel) du point associé ; il est défini par :

$$\underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{X}(t) + \underline{u}(\underline{x}, t). \quad (5.2)$$

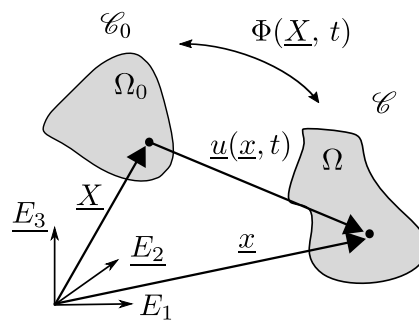


Figure 5.2 – Description de la cinématique du solide Ω_0 dans la configuration initiale \mathcal{C}_0 , transformé en Ω dans la configuration courante déformée \mathcal{C} .

Deux points de vue peuvent être adoptés pour décrire le mouvement. D'une part, la description lagrangienne considère l'évolution au cours du temps d'un point matériel occupant la position initiale \underline{X} . Une grandeur lagrangienne est donc fonction des trois composantes de ce vecteur initial \underline{X} et du temps t : ce sont les variables de Lagrange.

D'autre part, la description eulérienne considère l'évolution au cours du temps d'un point géométrique occupant la position \underline{x} . Une grandeur eulérienne est donc fonction des trois composantes de ce vecteur courant \underline{x} et du temps t : ce sont les variables d'Euler. Ces deux descriptions sont équivalentes et liées par la fonction Φ . En pratique, les grandeurs lagrangiennes sont plus adaptées à l'étude des mouvements des corps solides : elles sont donc privilégiées dans la suite.

Le tenseur gradient de la transformation \underline{F} transforme un vecteur matériel élémentaire $d\underline{X}$ dans la configuration initiale \mathcal{C}_0 en un vecteur $d\underline{x}$ dans la configuration courante \mathcal{C} . Il est défini par :

$$\underline{F} = \frac{d\underline{x}}{d\underline{X}} = \underline{I} + \frac{d\underline{u}}{d\underline{X}} = \underline{I} + \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \quad (5.3)$$

où \underline{I} est le tenseur identité du second ordre, et où $\underline{\nabla}$ est l'opérateur différentiel lagrangien défini par : $\underline{\nabla} = \underline{\nabla}_{\underline{X}} = \frac{\partial}{\partial X_1} \underline{E}_1 + \frac{\partial}{\partial X_2} \underline{E}_2 + \frac{\partial}{\partial X_3} \underline{E}_3$. Tout tenseur gradient de la transformation \underline{F} possède notamment les propriétés suivantes : il est inversible (*i.e.* son déterminant est non nul), et il présente une décomposition polaire unique – c'est-à-dire qu'il existe un unique tenseur orthogonal \underline{R} correspondant à la rotation de la transformation, et deux uniques tenseurs symétriques définis positifs \underline{U} et \underline{V} décrivant les élongations de la transformation, tels que :

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U} = \underline{V} \cdot \underline{R}. \quad (5.4)$$

Comme il relie les configurations initiale et courante, \underline{F} n'est ni lagrangien ni eulérien : c'est un tenseur mixte. Par ailleurs, si deux transformations successives sont appliquées sur un solide transformant \underline{X} en \underline{x}_1 puis \underline{x}_2 , telles que $d\underline{x}_1 = \underline{F}_1 \cdot d\underline{X}_1$ et $d\underline{x}_2 = \underline{F}_2 \cdot d\underline{x}_1$, alors le tenseur gradient de la transformation totale de \underline{X} en \underline{x}_2 est $\underline{F} = \underline{F}_2 \cdot \underline{F}_1$. Cela fait apparaître la propriété de décomposition multiplicative du tenseur gradient de la transformation \underline{F} . Pour n transformations successives, le tenseur gradient de la transformation totale est donc donné par :

$$\underline{F} = \prod_{i=1}^n \underline{F}_i. \quad (5.5)$$

La transformation d'un élément de surface élémentaire dS_0 de normale \underline{N} dans la configuration initiale en l'élément dS de normale \underline{n} dans la configuration courante (voir figure 5.3) est décrite par la formule de Nanson :

$$dS \underline{n} = J (\underline{F}^{-1})^T dS_0 \underline{N}. \quad (5.6)$$

La transformation d'un élément de volume élémentaire initial dV_0 en un volume élémentaire courant dV est donnée par le Jacobien J , correspondant au déterminant du tenseur gradient de la transformation, et tel que $J = 1$ si le solide est incompressible ou pour un mouvement de corps rigide :

$$dV = J dV_0 \text{ avec } J = \det(\underline{F}). \quad (5.7)$$

5.1.2 Métrique et mesure des déformations

Le tenseur gradient de la transformation décrit le mouvement local du milieu, mais il ne décrit pas les changements de forme. Les tenseurs des dilatations de Cauchy-Green gauche et droit sont donc respectivement introduits :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{V}}^2 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^2 . \quad (5.8)$$

Ils sont symétriques et définis positifs. $\underline{\underline{B}}$ est eulérien tandis que $\underline{\underline{C}}$ est lagrangien. Ils sont appelés tenseurs des dilatations car ils constituent une mesure des variations de longueur et d'angle. En effet, dans la base cartésienne orthonormée \mathcal{B} , les composantes C_{ii} ($i=1,2,3$) sont égales au carré de l'allongement du vecteur de base correspondant \underline{E}_i , et l'angle de glissement γ_{ij} entre deux vecteurs \underline{E}_i et \underline{E}_j ($i \neq j$) de la base est donné par :

$$\sin(\gamma_{ij}) = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}} . \quad (5.9)$$

En pratique, les tenseurs de déformation sont préférés aux tenseurs des dilatations car ils s'annulent pour un mouvement de corps rigide. Dans le cas non-linéaire, différentes définitions sont possibles pour le tenseur de mesure de déformation tant que les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) il est symétrique et sans dimension ;
- (2) il s'annule pour un mouvement de corps rigide et pour $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$;
- (3) son développement limité autour de $\underline{\underline{I}}$ s'écrit de la manière suivante, faisant apparaître le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ linéarisé des déformations infinitésimales :

$$\frac{1}{2} \underbrace{\left(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} + (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})^T \right)}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + o(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) .$$

Les tenseurs de déformation les plus fréquemment utilisés sont indiqués dans le tableau 5.1.

Nous introduisons également le tenseur taux de déformation $\underline{\underline{D}}$ (eulérien) dont nous aurons besoin dans la suite :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T) \quad \text{où} \quad \underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \dot{\underline{x}} \otimes \underline{\underline{\nabla}} , \quad (5.10)$$

où on note $\dot{\underline{x}}$ la dérivée temporelle de la grandeur \underline{x} . $\underline{\underline{L}}$ est appelé tenseur gradient des vitesses. La contrepartie lagrangienne de $\underline{\underline{D}}$ est $\underline{\underline{\dot{C}}}$, reliée à $\underline{\underline{D}}$ par :

$$\underline{\underline{\dot{C}}} = \frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{F}} . \quad (5.11)$$

Configuration lagrangienne \mathcal{C}_0	Configuration eulérienne \mathcal{C}
$\underline{\underline{E}}_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\underline{\underline{U}}^\alpha - \underline{\underline{I}}), \alpha \neq 0$ (cas général)	$\underline{\underline{e}}_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\underline{\underline{V}}^\alpha - \underline{\underline{I}}), \alpha \neq 0$ (cas général)
$\underline{\underline{E}}_0 = \ln \underline{\underline{U}} = \frac{1}{2} \ln \underline{\underline{C}}$ (Hencky ou logarithmique)	$\underline{\underline{e}}_0 = \ln \underline{\underline{V}} = \frac{1}{2} \ln \underline{\underline{B}}$ (logarithmique)
$\underline{\underline{E}}_1 = \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{I}}$ (Biot ou conventionnelle)	$\underline{\underline{e}}_1 = \underline{\underline{V}} - \underline{\underline{I}}$
$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_2 = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}}^2 - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$ (Green-Lagrange)	$\underline{\underline{e}}_{-2} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{V}}^{-2}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}^{-1})$ (Euler-Almansi)

Tableau 5.1 – Principales mesures de déformations [98].

5.1.3 Description des contraintes

L'équilibre d'un solide à la frontière est défini par l'existence d'efforts internes de cohésion. A tout instant (respectivement initialement), le vecteur contrainte $\underline{\underline{t}}$ (respectivement $\underline{\underline{T}}$) caractérise ces efforts internes de cohésion $d\underline{\underline{f}}$ exercés sur une partie du solide à travers la surface dS (respectivement dS_0) de normale $\underline{\underline{n}}$ (respectivement $\underline{\underline{N}}$) :

$$\underline{\underline{t}} = \frac{d\underline{\underline{f}}}{dS}. \quad (5.12)$$

D'après le postulat de Cauchy, le vecteur contrainte $\underline{\underline{t}}$ dépend linéairement du vecteur normal $\underline{\underline{n}}$, d'où l'existence du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ défini par :

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}. \quad (5.13)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy représente les efforts internes dans la configuration courante ; il est symétrique et eulérien. Avec l'équation (5.13) et la formule de Nanson (5.6), d'autres tenseurs de contraintes peuvent être définis : le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{P}}$ (mixte), le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ (lagrangien), et le tenseur de Kirchhoff $\underline{\underline{\tau}}$ (eulérien). Tous ces tenseurs de contraintes sont reliés à celui de Cauchy par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \frac{1}{J} \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \frac{1}{J} \underline{\underline{\tau}}. \quad (5.14)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est le seul tenseur de contraintes à avoir un sens

physique. Une représentation géométrique de ces différents tenseurs est donnée sur la figure 5.3.

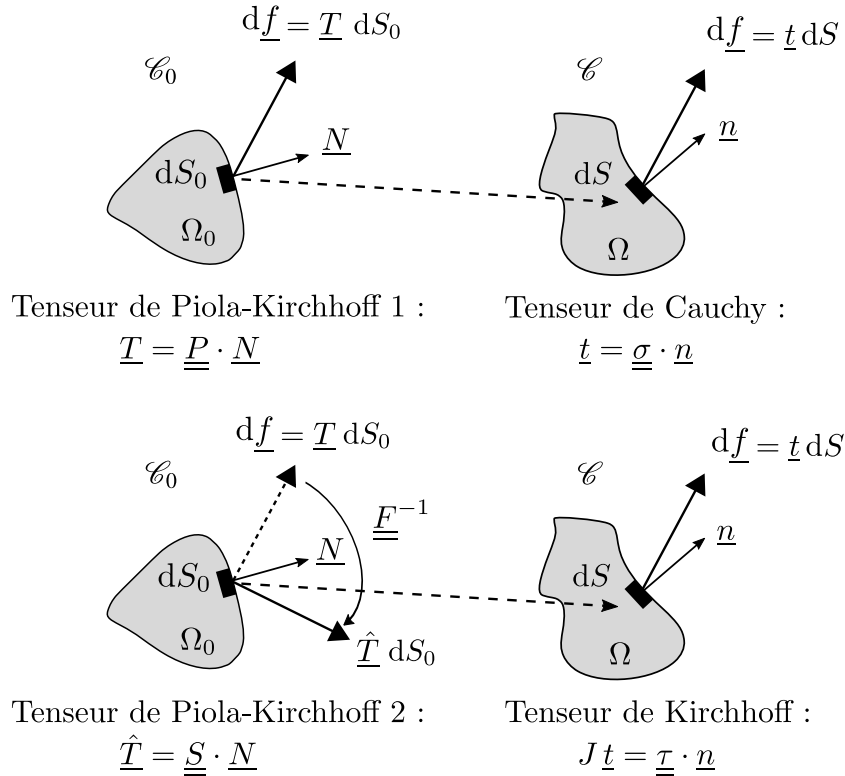


Figure 5.3 – Définition du vecteur contrainte et représentation des différents tenseurs contraintes en configurations initiale \mathcal{C}_0 et courante \mathcal{C} , d’après [99].

5.1.4 Equations de conservation et formulation du problème mécanique

En mécanique des milieux continus, des relations fondamentales sont à respecter lors d’un mouvement : la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, et la conservation du moment cinétique. Ces lois sont universelles. Elles vont nous permettre d’établir le formalisme du problème mécanique à résoudre.

On considère pour cela un corps matériel Ω en configuration courante (Ω_0 en configuration initiale) et de masse volumique ρ (respectivement ρ_0).

Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse exprime que la masse d’un corps reste constante au cours du temps, ce qui peut s’écrire ainsi :

$$\int_{\Omega} \rho dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 dV_0 \Leftrightarrow \rho dV = \rho_0 dV_0. \quad (5.15)$$

Avec la définition (5.7) de J , on peut ainsi passer d’une écriture sur la configuration courante à une écriture sur la configuration initiale pour les intégrales volumiques.

Conservation de la quantité de mouvement

En appliquant les relations fondamentales de la dynamique, le principe de la conservation de la quantité de mouvement exprime que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à l'ensemble des forces qui s'exercent sur le corps matériel, c'est la première loi d'Euler :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \underline{\dot{x}} dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f_v} dV + \int_{\partial\Omega} \underline{f_s} dS \quad (5.16)$$

où $\underline{f_v}$ et $\underline{f_s}$ sont les efforts volumiques (spécifiques) et de contact respectivement. En négligeant les effets d'inertie, cela implique sous sa forme locale eulérienne :

$$\underline{\nabla_x} \cdot \underline{\sigma} + \rho \underline{f_v} = 0 \quad (5.17)$$

et lagrangienne [100] :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{P} + \rho_0 \underline{f_v} = 0. \quad (5.18)$$

Conservation du moment cinétique

On appelle moment cinétique par rapport à un point fixe $\underline{x_0}$ d'un corps matériel Ω la grandeur suivante :

$$\int_{\Omega} (\underline{x} - \underline{x_0}) \wedge \rho \underline{\dot{x}} dV. \quad (5.19)$$

En appliquant les relations fondamentales de la dynamique, le principe de la conservation du moment cinétique exprime que la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale à la somme des moments qui s'exercent sur le corps matériel, c'est la deuxième loi d'Euler :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\underline{x} - \underline{x_0}) \wedge \rho \underline{\dot{x}} dV = \int_{\Omega} (\underline{x} - \underline{x_0}) \wedge \rho \underline{f_v} dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{x} - \underline{x_0}) \wedge \underline{f_s} dS, \quad (5.20)$$

ce qui implique sous sa forme locale eulérienne que le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T, \quad (5.21)$$

et sous sa forme locale lagrangienne que le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff présente la propriété suivante [100] :

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{P}}^T. \quad (5.22)$$

Formulation du problème mécanique

Le problème mécanique que nous cherchons à résoudre consiste à trouver le champ de déplacement \underline{u} vérifiant d'une part les lois de conservations précisées ci-avant, et d'autre part les conditions aux limites appliquées sur la surface du corps matériel Ω et représentées sur la figure 5.4. Ces conditions de bord peuvent être :

- soit de Dirichlet, *i.e.* en déplacement imposé : $\underline{u} = \underline{u}^D$ sur Γ^D ,
 - soit de Neumann, *i.e.* en contrainte imposée : $\underline{t} = \underline{f}_s$ sur Γ^N ,
- où $\Gamma^D \cup \Gamma^N = \partial\Omega$ et $\Gamma^D \cap \Gamma^N = \emptyset$, et où \underline{u}^D et \underline{f}_s sont connus.

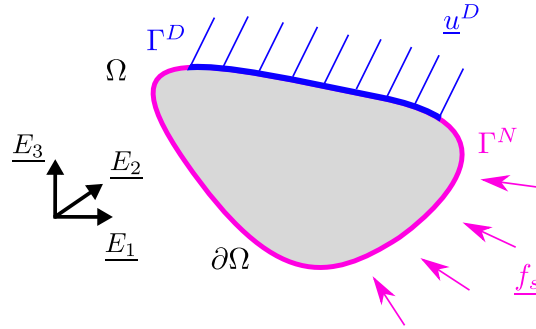


Figure 5.4 – Conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann.

Finalement, la formulation lagrangienne dite « forte » du problème mécanique s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} 0 &= \nabla \cdot \underline{P} + \rho_0 \underline{f}_v \\ \underline{E} &= \frac{1}{2} [(\underline{u} \otimes \nabla) + (\underline{u} \otimes \nabla)^T + (\underline{u} \otimes \nabla)^T (\underline{u} \otimes \nabla)] \\ \underline{u} &= \underline{u}^D \text{ sur } \Gamma^D \\ \underline{t} &= \underline{f}_s \text{ sur } \Gamma^N \end{cases} \quad (5.23)$$

Les 9 inconnues du problème sont les suivantes : 3 pour le déplacement \underline{u} et 6 pour la description des contraintes grâce à la conservation du moment cinétique (5.22). Cependant, seules 3 équations sont disponibles avec la conservation de la quantité de mouvement. Pour « fermer » le problème, il faut donc 6 équations supplémentaires reliant le tenseur des contraintes à celui de la mesure de déformation : c'est la loi de comportement, que nous présentons dans la partie suivante.

5.1.5 Loi de comportement

Définition et conditions d'admissibilité

L'état thermomécanique d'un solide à un instant donné est complètement défini par un ensemble de variables d'état indépendantes qui peuvent être de deux types [101] :

- les variables *observables* permettent la description de phénomènes mécaniques réversibles : ce sont la déformation \underline{E} et la température T , auxquelles s'ajoutent les directions matériaux dans le cas d'un comportement anisotrope ;
- les variables *internes* servent notamment à décrire les phénomènes irréversibles, chaque phénomène irréversible nécessitant en général l'addition d'une variable d'état interne.

Les lois d'état d'un solide sont des fonctions de ces variables d'état observables et internes. Contrairement aux équations de conservation présentées dans la partie précédente, qui sont des relations universelles, les lois d'état sont propres à chaque matériau. Dans le cadre mécanique isotherme qui nous intéresse, l'unique loi d'état relie les contraintes (variables duales-statiques) aux déformations (variables primales-cinématiques) et traduit la réponse de la matière à une sollicitation ; on l'appelle aussi « loi de comportement » ou « loi constitutive ».

Pour être admissible, cette loi de comportement doit vérifier plusieurs propriétés. Nous en citons quelques-unes qui nous seront utiles :

- (1) Etre physiquement admissible, *i.e.* en accord avec les lois fondamentales de la physique présentées dans la partie 5.1.4 précédente.
- (2) Etre invariante par changement de repère, ce qui est garanti par l'écriture tensorielle.
- (3) Etre invariante par changement de référentiel (*i.e.* par changement d'observateur) : c'est le principe d'objectivité (ou principe d'indifférence matérielle). Cette condition est vérifiée notamment si la formulation est en fonction des variables de Lagrange. En effet, les tenseurs lagrangiens étant définis par rapport à la configuration initiale, ils sont insensibles à un changement de référentiel dans la configuration courante [102] –, c'est pourquoi ces variables de Lagrange seront privilégiées dans le cadre de ce travail.
- (4) Etre cohérente, c'est-à-dire que les mesures de déformations utilisées et les contraintes associées doivent être énergétiquement conjuguées. En pratique, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ (lagrangien) est conjugué avec le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ (lagrangien), qui s'exprime en fonction du tenseur des dilatations de Cauch-Green droit $\underline{\underline{C}}$ (lagrangien) : nous manipulerons donc ces grandeurs par la suite.
- (5) Respecter les symétries matérielles (nous reviendrons sur cette condition).

Cas particulier des comportements élastiques en grandes transformations

Un matériau est élastique s'il satisfait les trois conditions suivantes [103] : *(i)* il ne dissipe pas (*i.e.* même relation contrainte-déformation en cas de charge ou de décharge), *(ii)* sa loi constitutive ne dépend que des variables d'état observables (*i.e.* dans notre cas la déformation $\underline{\underline{E}}$ actuelle et son histoire), et *(iii)* le tenseur des contraintes est une fonction d'état. Ce cadre des matériaux élastiques est classiquement adopté pour décrire le comportement mécanique des renforts fibreux qui nous intéressent. Plus spécifiquement lorsqu'on se place dans le cadre des grandes transformations, deux types de lois de comportements élastiques peuvent être adoptées : les lois hypoélastiques, initialement proposées par Truesdell [104], et les lois hyperélastiques, plus récentes.

Un matériau est hypoélastique d'une part lorsque la vitesse de déformation est liée à un taux de contrainte par une fonction tensorielle $\underline{\underline{f}}$ telle que :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{L}} . \quad (5.24)$$

Afin de respecter le principe d'objectivité, toutes les grandeurs impliquées doivent être objectives, or ce n'est pas le cas de la dérivée temporelle du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ [102] : la redéfinition d'une dérivée objective est donc nécessaire. Plusieurs dérivées objectives existent (Jaumann, Truesdell, Green-Nagdhi) mais Hagege [105] a montré qu'elles ne sont pas judicieuses pour un matériau fibreux. Une nouvelle dérivée objective a été établie par Badel [106], basée sur le repère d'isotropie transverse de la mèche. L'avantage de ce type de loi est de pouvoir être enrichi de manière à formaliser un comportement non-linéaire visco-plastique ou visco-élastique.

D'autre part, on qualifie d'hyperélastique un matériau élastique pour lequel le travail interne des contraintes ne dépend que de l'état actuel des déformations (et pas de leur histoire), et est totalement récupérable (non dissipatif). Il s'agit d'un cas particulier des lois hypoélastiques, avec de plus des fondements thermodynamiques. L'énergie de déformation peut alors s'exprimer comme un potentiel ne dépendant que de l'état actuel de la déformation. Ces modèles ont par exemple été utilisés pour des tissus à l'échelle des plis [99, 107, 108] ou pour des mèches de renforts [109]. Ces lois hyperélastiques offrent une approche physique par l'évaluation de l'énergie de déformation de chacun des modes de déformation du renfort, et permettent de plus de s'affranchir des problématiques liées aux dérivées objectives. Elles sont donc sélectionnées dans le cadre de ce travail et détaillées dans la partie 5.2 suivante.

5.2 Formulation hyperélastique

Nous commençons par rappeler les premier et second principes de la thermodynamique, desquels découlent les lois hyperélastiques.

5.2.1 Des fondements thermodynamiques à la loi hyperélastique

Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique décrit la conservation de l'énergie et peut être énoncé ainsi : dans un mouvement observé dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique et interne de tout sous-domaine \mathcal{D} d'un corps matériel Ω dans la configuration courante est due à la puissance mécanique des efforts extérieurs et à la quantité de chaleur fournie au système par unité de temps :

$$\dot{\mathcal{E}}_{cin}(\mathcal{D}) + \dot{\mathcal{E}}_{int}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{ext}(\mathcal{D}) + \mathcal{Q}(\mathcal{D}) \quad (5.25)$$

où les différentes contributions sont les suivantes :

- l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_{cin}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\underline{\dot{x}}} \cdot \underline{\underline{\dot{x}}} dV$;
- l'énergie interne du système : $\mathcal{E}_{int}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \rho e dV$ où e est l'énergie interne par unité de masse (*i.e.* spécifique) ;
- la puissance des efforts extérieurs : $\mathcal{P}_{ext}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\underline{f}}_v \cdot \underline{\underline{\dot{x}}} dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{f}}_s \cdot \underline{\underline{\dot{x}}} dS$;

- l'apport de chaleur d'origine non mécanique : $\mathcal{Q}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \rho r \, dV - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{q} \cdot \underline{n} \, dS$ où r et \underline{q} correspondent aux sources de chaleur volumiques et surfaciques respectivement.

Nous pouvons maintenant utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour ce même sous-domaine \mathcal{D} de Ω dans la configuration courante, selon lequel la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances des forces :

$$\dot{\mathcal{E}}_{cin}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{ext}(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_{int}(\mathcal{D}) \quad (5.26)$$

où apparaît la puissance des efforts intérieurs qu'on peut écrire en descriptions eulérienne et lagrangienne dans l'ordre : $\mathcal{P}_{int}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \, dV = \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} \, dV_0$. En utilisant le théorème de la divergence, l'équation (5.25) devient alors :

$$\int_{\mathcal{D}} (\rho \dot{e} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \rho r + \text{div } \underline{q}) \, dV = 0, \quad (5.27)$$

et est valable pour tout sous-domaine \mathcal{D} de Ω . Nous avons finalement la forme locale du premier principe de la thermodynamique en description eulérienne sous réserve de continuité des champs introduits :

$$\rho \dot{e} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \rho r + \text{div } \underline{q} = 0. \quad (5.28)$$

Deuxième principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique introduit la notion d'entropie \mathcal{S} de tout sous-domaine \mathcal{D} de Ω , qui correspond à une variation d'énergie interne associée à une variation de la température :

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \rho s \, dV \quad (5.29)$$

où s est l'entropie spécifique. Le second principe de la thermodynamique traduit la non-conservation de l'entropie dans un cadre irréversible, c'est-à-dire que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue, divisé par la température :

$$\dot{\mathcal{S}}(\mathcal{D}) \geq \frac{\mathcal{Q}(\mathcal{D})}{T}. \quad (5.30)$$

En utilisant la définition de l'apport de chaleur \mathcal{Q} et le premier principe (5.28), et en introduisant l'énergie libre spécifique de Helmholtz $w = e - Ts$, l'inégalité de Clausius-Duhem est obtenue sous sa forme eulérienne sous réserve de continuité des champs :

$$\phi = -\rho(\dot{w} + \dot{T}s) + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \underline{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (5.31)$$

avec ϕ [$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$] la densité de dissipation courante.

5.2.2 Loi constitutive hyperélastique générale

Dans le cadre de ce travail, la température est considérée comme homogène dans le solide et la transformation est isotherme (cadre « purement mécanique »). Par ailleurs, un matériau hyperélastique est par définition non dissipatif donc la dissipation volumique ϕ est nulle. L'inégalité de Clausius-Duhem (5.31) peut alors être simplifiée, ce qui donne en version lagrangienne :

$$\phi_0 = -\rho_0 \dot{w} + \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} = \left(\underline{\underline{S}} - \rho_0 \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{E}}} \right) : \underline{\underline{\dot{E}}} = 0, \quad (5.32)$$

d'où la loi hyperélastique qui nous intéresse :

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (5.33)$$

d'après la relation entre $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{E}}$ donnée dans le tableau 5.1. Cette relation montre que la densité d'énergie libre de Helmholtz $W = \rho_0 w$ est un potentiel d'élasticité qui correspond en fait à la densité d'énergie de déformation, et qui ne dépend que de l'état actuel de la déformation caractérisé par $\underline{\underline{F}}$ (et donc $\underline{\underline{C}}$ ou $\underline{\underline{E}}$).

Nous introduisons ici le tenseur d'ordre 4 des modules d'élasticité tangents, qui est défini de la manière suivante dans le cas d'un matériau hyperélastique :

$$\underline{\underline{\mathcal{C}}} = \frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial \underline{\underline{E}}} = 2 \frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial \underline{\underline{C}}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}}. \quad (5.34)$$

5.2.3 Conditions sur le potentiel

Le potentiel hyperélastique W défini correspond à la loi de comportement. Par conséquent, il doit vérifier les conditions d'admissibilité **(1)** à **(5)** présentées dans la partie 5.1.5. L'accord avec les lois de la physique (condition **(1)**) découle de la construction de ce potentiel avec les principes de la thermodynamique. L'invariance par changement de repère (condition **(2)**) est vérifiée par l'écriture tensorielle. Dans le cas hyperélastique, le principe d'objectivité (condition **(3)**) s'écrit ainsi :

$$W(\underline{\underline{F}}) = W(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}}), \quad \forall \underline{\underline{Q}} \in \mathcal{SO}_3 \quad (5.35)$$

où \mathcal{SO}_3 est le groupe orthogonal correspondant aux rotations dans l'espace. En choisissant $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{R}}^T$ où $\underline{\underline{R}}$ est obtenu par la décomposition polaire de $\underline{\underline{F}}$ telle que $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$, cette condition implique que $W(\underline{\underline{F}}) = W(\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{F}}) = W(\underline{\underline{U}}) = W(\underline{\underline{C}})$, ce qui montre que W peut être écrit comme une fonction de $\underline{\underline{C}}$. Ciarlet [110] a montré que cette écriture de W en fonction de $\underline{\underline{C}}$ permet de respecter le principe d'objectivité : elle sera donc privilégiée dans la suite.

La cohérence (condition **(4)**) est vérifiée puisque W relie $\underline{\underline{S}}$ à sa mesure de déformation conjuguée $\underline{\underline{E}}$. Enfin, avant de préciser la condition **(5)** de respect des symétries

matériau, nous introduisons la notion particulière à notre matériau architecturé de tenseurs de structure [111] : ce sont des tenseurs d'ordre 2 notés $\underline{\underline{L}}_i$ qui caractérisent les symétries matérielles d'un matériau anisotrope. Ils présentent les propriétés suivantes :

$$\sum_{i=1}^n \underline{\underline{L}}_i = \underline{\underline{I}} ; \quad \underline{\underline{L}}_i \cdot \underline{\underline{L}}_j = \underline{\underline{0}} ; \quad \text{Tr } \underline{\underline{L}}_i = 1 \quad (5.36)$$

où $i \neq j$ et $i, j = 1..n$. Dans le cas d'un matériau isotrope transverse de direction principale décrite par le vecteur unitaire $\underline{\underline{M}}$, les trois tenseurs de structure sont $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{L}}$ et $\underline{\underline{L}}'$ tels que $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \otimes \underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}' = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{M}})$. Dans le cas isotrope transverse, le groupe de symétries du matériau correspond aux rotations de corps rigide autour de la direction principale $\underline{\underline{M}}$ [112] :

$$\mathcal{G} = \{ \underline{\underline{Q}} \in \mathcal{SO}_3 \mid \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{M}} \}. \quad (5.37)$$

D'après le théorème de représentation et le théorème de Rychlewski [113], la condition (5) de respect de la symétrie matériau dans le cas d'un matériau isotrope transverse est vérifiée si et seulement si la densité d'énergie de déformation peut s'exprimer comme une fonction (i) à valeurs scalaires, et (ii) isotrope de $\underline{\underline{C}}$ vis-à-vis du groupe de symétries du matériau \mathcal{G} . Une fonction scalaire de $\underline{\underline{C}}$ est isotrope vis-à-vis de \mathcal{G} si et seulement si [114] :

$$W(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{M}}) = W(\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{Q}}), \quad \forall \underline{\underline{Q}} \in \mathcal{G} \subset \mathcal{SO}_3. \quad (5.38)$$

Par ailleurs, pour un potentiel admissible donné (*i.e.* vérifiant les conditions (1) à (5) que nous venons de préciser dans notre cas isotrope transverse), il reste à prouver l'existence et l'unicité (au moins localement) d'une solution en déplacement au problème mécanique formulé dans l'équation (5.23) (p.93) qui minimise l'énergie élastique du solide. Cela est assuré si la densité d'énergie de déformation satisfait les quatre conditions suivantes [111] :

- (i) Elle est \mathcal{C}^2 , *i.e.* sa première dérivée et sa seconde dérivée sont continues.
- (ii) La densité d'énergie de déformation et la contrainte induite s'annulent dans un état libre de contrainte :

$$W|_{\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{I}}} = 0 ; \quad \underline{\underline{S}}|_{\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{I}}} = 2 \left. \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} \right|_{\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{I}}} = 0. \quad (5.39)$$

- (iii) Elle est elliptique (ou coercive). Nous ne rentrerons pas dans les détails ici ; plus d'informations peuvent être trouvées dans Ball [115] et Müller *et al.* [116].
- (iv) Elle est quasi-convexe. Cette condition étant difficile à vérifier, c'est en général la poly-convexité, plus facile à manipuler, qui est étudiée. La poly-convexité présente également l'avantage d'impliquer à la fois la quasi-convexité et l'ellipticité [115, 117]. Nous précisons les résultats suivants qui nous serviront dans la suite [117] :

— Convexité \Rightarrow poly-convexité \Rightarrow quasi-convexité + ellipticité.

- Soit une fonction W de plusieurs variables I_i , $i = 1..n$. Si la fonction W peut être décomposée en une somme de fonctions de chacune de ses variables $W(I_1, \dots, I_n) = W_1(I_1) + \dots + W_n(I_n)$ et si chaque fonction W_i est convexe alors W est poly-convexe.
- Soit une fonction scalaire d'un tenseur d'ordre 2 notée $I_i(\underline{C})$. I_i est convexe si et seulement si sa dérivée seconde $\frac{\partial^2 I_i}{\partial \underline{C} \otimes \partial \underline{C}}$ est un tenseur défini positif, *i.e.* inversible (déterminant non nul) et positif (valeurs propres positives). Par conséquent, si le tenseur des modules d'élasticité tangents \mathcal{C} est défini positif alors l'existence et l'unicité de la solution sont assurées (condition suffisante mais non nécessaire) [98].

En pratique, la forme du potentiel est choisie de manière à être la plus pratique possible, tant qu'elle satisfait les conditions d'admissibilité (1) à (5) présentées dans la partie 5.1.5, ainsi que les conditions (i) et (ii) ci-dessus. La justification mathématique des points (iii) et (iv) en revanche requiert des calculs complexes qui ne sont pas toujours faits [37].

Dans la partie 5.2.4 suivante, différents choix de potentiels dans le cas d'un matériau hyperélastique isotrope transverse sont présentés. On retrouvera en annexe A des informations similaires dans le cas orthotrope.

5.2.4 Premiers potentiels hyperélastiques pour décrire un comportement isotrope transverse

Saint-Venant, une généralisation de la loi de Hooke

Le modèle de comportement de Saint-Venant est une généralisation de la loi de Hooke établie dans un cadre de petites transformations. Le potentiel est exprimé en fonction des constantes matériau classiques. Dans le cas plus général d'un matériau orthotrope, le potentiel de Saint-Venant s'exprime ainsi [118] :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 a_{ij} \text{Tr} \left(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}}_i \right) \text{Tr} \left(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}}_j \right) + \sum_{i,j \neq i}^3 G_{ij} \text{Tr} \left(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}}_i \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}}_j \right) + O(\|\underline{\underline{E}}\|^3) \quad (5.40)$$

où :

$$a_{ii} = \frac{1 - \nu_{jk}\nu_{kj}}{\Delta} E_i ; a_{ji} = a_{ij} = \frac{\nu_{ij} - \nu_{kj}\nu_{ik}}{\Delta} ; \Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

pour $i \neq j \neq k$. Les E_i , $G_{ij} = G_{ji}$ et $\nu_{ij} = \nu_{ji} E_j / E_i$ ($i \neq j = 1, 2, 3$) correspondent respectivement aux modules d'Young, aux modules de cisaillement de Lamé, et aux coefficients de Poisson.

Cependant, ce potentiel n'est valide que pour des transformations modérées (*i.e.* de faibles non-linéarités géométriques) [119]. De plus, il ne permet de décrire qu'un

comportement linéaire (donc pas de description possible des non-linéarités matérielles observées en compaction dans notre cas notamment). Par conséquent, il n'est pas adapté à notre problème.

Ecriture du potentiel en fonction des invariants classiques du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit

Afin de décrire des non-linéarités matérielles tout en assurant la condition de respect des symétries matériau énoncée dans l'équation (5.38), une solution consiste à exprimer le potentiel en fonction des invariants de $\underline{\underline{C}}$ et des tenseurs de structure du matériau. Les invariants d'un tenseur $\underline{\underline{C}}$ sont définis comme une fonction scalaire isotrope de ce tenseur $\underline{\underline{C}}$ – voir définition (5.38) [102]. Dans le cas d'un matériau isotrope, le potentiel peut être exprimé en fonction des invariants principaux I_i ($i = 1..3$) de $\underline{\underline{C}}$ définis dans l'équation (5.42) ci-après. Dans le cas d'un matériau anisotrope, des invariants supplémentaires peuvent être ajoutés comme fonctions du potentiel hyperélastique; dans d'autres cas, où l'anisotropie spécifique du comportement est induite par la morphologie du milieu, un comportement hyperélastique équivalent peut être recherché dans une démarche d'homogénéisation [120]. Dans le cas particulier d'un matériau isotrope transverse, le potentiel peut s'exprimer en fonction des invariants I_4 et I_5 supplémentaires du couple $(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{M}})$ où $\underline{\underline{M}}$ est le tenseur de structure du matériau :

$$W(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{M}}) = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5), \quad (5.41)$$

avec :

- $I_1 = \text{Tr} \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{I}} = \delta_{ij} C_{ij}$
- $I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{Tr} \underline{\underline{C}})^2 - \text{Tr} (\underline{\underline{C}}^2) \right] = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}} = C_{ij} C_{ij}$
- $I_3 = \det \underline{\underline{C}} = J^2$
- $I_4 = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}}$
- $I_5 = \underline{\underline{C}}^2 : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{M}}$.

(5.42)

Plusieurs modèles sont construits sur l'hypothèse que le potentiel peut être décomposé de façon additive en une partie purement isotrope et une partie isotrope transverse. Les potentiels les plus courants pour la partie purement isotrope sont alors le Néo-Hookeen (W_{NH}), développé pour des caoutchoucs et valable pour des grandes déformations, ou bien celui de Mooney-Rivlin (W_{MR}) [119]. Pour la partie isotrope transverse, un potentiel de type Saint-Venant non-linéaire ($W_{SV'}$) est un choix classique. Ces différents potentiels sont donnés ci-dessous à titre indicatif :

$$\begin{aligned} W_{NH}(I_1, I_2, I_3) &= \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) - 2\mu \ln(I_3) + \frac{\lambda}{2}(I_3^2 - 1)^2 \\ W_{MR}(I_1, I_2, I_3) &= c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) - (c_1 + 2c_2)(I_3 - 1) + c_3 \frac{c_1 + c_2}{2} (I_3 - 1)^2 \\ W_{SV'}(I_1, I_4, I_5) &= [\alpha + \beta(I_1 - 3) + \gamma(I_4 - 1)](I_4 - 1) - \frac{\alpha}{2}(I_5 - 1) \end{aligned} \quad (5.43)$$

où les différentes constantes $(\mu, \lambda, c_1, c_2, c_3, \alpha, \beta, \gamma)$ sont à déterminer.

Cette écriture du potentiel permet de décrire des non-linéarités matérielles – le tenseur des modules d'élasticité tangents défini dans (5.34) dépend alors de la déformation –, et est commode car seuls des scalaires sont manipulés. Cependant, l'inconvénient de cette approche apparaît lorsqu'on souhaite identifier les coefficients matériaux. En effet, un essai simple de traction uniaxiale isochore par exemple modifie à la fois I_1 , I_2 , I_4 et I_5 [1]. Il y a donc eu plusieurs tentatives de définition d'autres invariants porteurs de sens physique, avec pour objectif qu'à un invariant corresponde un seul mode de déformation.

5.2.5 Ecriture du potentiel en fonction d'invariants « physiques »

Ce type d'approche est basé sur l'expression du gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ dans une base bien choisie, puis la décomposition multiplicative de sa représentation dans cette base en vue de faire apparaître différents modes de déformation qui seront découplés par construction. Criscione *et al.* [1] ont proposé une base de représentation dans le cas d'un matériau isotrope transverse ; nous rappelons leur démarche ici.

Définition d'une base adéquate

Criscione *et al.* [1] ont montré l'existence de deux vecteurs unitaires \underline{N}_2 et \underline{N}_3 correspondant aux normales de deux plans qui (i) contiennent le vecteur unitaire \underline{M} , (ii) sont orthogonaux entre eux en configuration initiale \mathcal{C}_0 , et (iii) conservent cette orthogonalité en configuration courante \mathcal{C} . Avec la condition supplémentaire $\underline{N}_2 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{N}_2 \geq \underline{N}_3 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{N}_3$ qui permet d'ordonner ces vecteurs dans la base cartésienne orthonormée $\mathcal{B}^* = (\underline{M}, \underline{N}_2, \underline{N}_3)$, Criscione *et al.* [1] ont prouvé que ces deux vecteurs sont uniques (au signe près). Ils correspondent aux vecteurs propres de la représentation matricielle de $\underline{\underline{C}}^{-1}$ dans la base \mathcal{B}^* en supprimant la première ligne et la première colonne, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} C^{-1}_{22} & C^{-1}_{23} \\ C^{-1}_{32} & C^{-1}_{33} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}^*} . \quad (5.44)$$

La base \mathcal{B}^* étant ainsi définie, il existe donc une rotation de corps rigide $\underline{\underline{Q}}^*$ telle que :

$$\underline{m} = \underline{\underline{Q}}^* \cdot \underline{M} ; \quad \underline{n}_2 = \underline{\underline{Q}}^* \cdot \underline{N}_2 ; \quad \underline{n}_3 = \underline{\underline{Q}}^* \cdot \underline{N}_3 , \quad (5.45)$$

où \underline{m} , \underline{n}_2 et \underline{n}_3 sont les vecteurs unitaires colinéaires à $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{M}$, $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{N}_2$ et $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{N}_3$ respectivement. En posant $\underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{Q}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\underline{F}}$ et en utilisant la formule de Nanson (5.6) de transformation d'une normale à un plan, on observe que :

$$\begin{cases} \underline{\underline{F}}^* \cdot \underline{M} = \|\underline{\underline{F}} \cdot \underline{M}\| \underline{\underline{Q}}^{*\text{T}} \cdot \underline{m} = \|\underline{\underline{F}} \cdot \underline{M}\| \underline{M} \Rightarrow \underline{N}_i \cdot \underline{\underline{F}}^{*-1} \cdot \underline{M} = 0, \quad i = 2, 3 \\ \underline{n}_2 \cdot \underline{n}_3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Q}}^* \cdot \underline{\underline{F}}^{*\text{T}} \cdot \underline{N}_2 \cdot \underline{n}_3 = \underline{N}_2 \cdot \underline{\underline{F}}^{*-1} \underline{\underline{Q}}^{*\text{T}} \cdot \underline{n}_3 = \underline{N}_2 \cdot \underline{\underline{F}}^{*-1} \cdot \underline{N}_3 = 0 \end{cases} . \quad (5.46)$$

Ces relations (5.46) montrent finalement que, dans la base \mathcal{B}^* , les représentations matricielles de $\underline{\underline{F}}^{*-1}$ et donc de $\underline{\underline{F}}^*$ prennent la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}_{\{\mathcal{B}^*\}}. \quad (5.47)$$

Décomposition multiplicative du gradient de la transformation dans la base \mathcal{B}^*

En utilisant cette forme pour la représentation matricielle de $\underline{\underline{F}}^*$ dans la base \mathcal{B}^* , différentes décompositions multiplicatives de $\underline{\underline{F}}^*$ mettant en évidence des modes de déformation distincts ont été proposées [1, 109]. Celle de Charmetant *et al.* [109] en particulier définit des modes de déformation propres à une structure fibreuse unidirectionnelle sèche (nous les avons renommés ici par rapport à la référence) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}^*_{\{\mathcal{B}^*\}} = & \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{elong} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\{\mathcal{B}^*\}}}_{\text{élongation}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{cp lat} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{cp lat} \end{bmatrix}_{\{\mathcal{B}^*\}}}_{\text{compaction latérale}} \cdot \\ & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{cp iso} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{cp iso}^{-1} \end{bmatrix}_{\{\mathcal{B}^*\}}}_{\text{compaction isochore}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{cis} \cos \gamma & \alpha_{cis} \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\{\mathcal{B}^*\}}}_{\text{cisaillement}}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Ces différents modes sont illustrés sur la figure 5.5. L'« élancement » correspond à une élancement dans la direction des fibres sans déformation dans les autres directions. La « compaction latérale » est définie ici comme une iso-compression biaxiale dans le plan d'isotropie (avec réduction de volume) sans déformation dans la direction des fibres ; la « compaction isochore » est une déformation isochore dans le plan d'isotropie sans déformation dans la direction des fibres. Enfin, le « cisaillement » correspond aux cisaillements dans les plans transverses (\underline{M} , \underline{N}_2) et (\underline{M} , \underline{N}_3) contenant la direction des fibres.

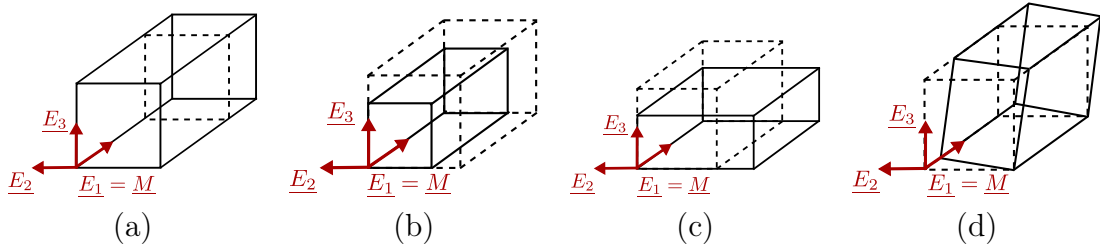


Figure 5.5 – Modes de déformation d'un milieu isotrope transverse mis en évidence par la décomposition multiplicative du gradient de la transformation de Charmetant *et al.* [109] : élancement (a), compaction latérale (b), compaction isochore (c) et cisaillement (d).

Une relation bijective existant entre les cinq paramètres α_{elong} , $\alpha_{cp lat}$, $\alpha_{cp iso}$, α_{cis} , γ de (5.48), et les cinq invariants I_i ($i = 1..5$) du couple $(\underline{C}, \underline{M})$, les premiers peuvent

donc être exprimés en fonction des seconds – le détail des calculs peut être trouvé dans la référence [46]. On remarque alors que l'angle γ décrit un couplage entre le cisaillement et la compaction isochore. Charmetant *et al.* ont négligé ce couplage, en postulant que les quatre modes de déformation ainsi définis sont indépendants, et caractérisé par leurs α_{\square} respectifs. Enfin, comme il est plus commode de travailler avec des grandeurs qui s'annulent dans un état libre de contrainte, les α_{\square} sont « normalisés » lorsque nécessaire avec la fonction logarithme. Finalement, quatre grandeurs « porteuses de sens physique » correspondant chacune à un mode de déformation sont proposées dans le cas d'un matériau isotrope transverse :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad I_{elong} &= \frac{1}{2} \ln(I_4) \\
\bullet \quad I_{cp\ lat} &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_3}{I_4}\right) \\
\bullet \quad I_{cp\ iso} &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}} + \sqrt{\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}}\right)^2 - 1}\right) \\
\bullet \quad I_{cis} &= \sqrt{\frac{I_5}{I_4^2} - 1}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Comme elles s'expriment en fonction des invariants I_i ($i = 1..5$) du couple $(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{M}})$, elles sont elles-mêmes des invariants du couple $(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{M}})$.

Potentiel retenu

L'écriture du potentiel hyperélastique isotrope transverse en fonction d'invariants d'élongation, compaction latérale, compaction isochore et cisaillement est commode ; nous la sélectionnons. Nous postulons que ces quatre modes de déformation sont découplés :

Postulat 3 : *Les modes de déformation suivants sont indépendants : élongation, compaction latérale, compaction isochore, cisaillement.*

Ainsi, le potentiel hyperélastique isotrope transverse retenu prend la forme suivante :

$$W = W_{elong}(I_{elong}) + W_{cp\ lat}(I_{cp\ lat}) + W_{cp\ iso}(I_{cp\ iso}) + W_{cis}(I_{cis}). \tag{5.50}$$

Les expressions des différents invariants physiques peuvent être trouvées dans (5.49). La loi hyperélastique s'écrit finalement ainsi :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2 \left(\frac{\partial W_{elong}}{\partial I_{elong}} \frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W_{cp\ lat}}{\partial I_{cp\ lat}} \frac{\partial I_{cp\ lat}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W_{cp\ iso}}{\partial I_{cp\ iso}} \frac{\partial I_{cp\ iso}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W_{cis}}{\partial I_{cis}} \frac{\partial I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right). \tag{5.51}$$

Nous donnons également ici la forme du tenseur des modules d'élasticité tangents défini dans (5.34) car nous en aurons besoin ultérieurement :

$$\underline{\mathcal{C}} = \underline{\mathcal{C}}_{elong} + \underline{\mathcal{C}}_{cp\ lat} + \underline{\mathcal{C}}_{cp\ iso} + \underline{\mathcal{C}}_{cis} \quad (5.52)$$

où les différentes contributions peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \underline{\mathcal{C}}_{elong} &= 4 \frac{\partial^2 W_{elong}}{\partial I_{elong}^2} \frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} \otimes \frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} + 4 \frac{\partial W_{elong}}{\partial I_{elong}} \frac{\partial^2 I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} \\ \bullet \quad \underline{\mathcal{C}}_{cp\ lat} &= 4 \frac{\partial^2 W_{cp\ lat}}{\partial I_{cp\ lat}^2} \frac{\partial I_{cp\ lat}}{\partial \underline{\underline{C}}} \otimes \frac{\partial I_{cp\ lat}}{\partial \underline{\underline{C}}} + 4 \frac{\partial W_{cp\ lat}}{\partial I_{cp\ lat}} \frac{\partial^2 I_{cp\ lat}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} \\ \bullet \quad \underline{\mathcal{C}}_{cp\ iso} &= 4 \frac{\partial^2 W_{cp\ iso}}{\partial I_{cp\ iso}^2} \frac{\partial I_{cp\ iso}}{\partial \underline{\underline{C}}} \otimes \frac{\partial I_{cp\ iso}}{\partial \underline{\underline{C}}} + 4 \frac{\partial W_{cp\ iso}}{\partial I_{cp\ iso}} \frac{\partial^2 I_{cp\ iso}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} \\ \bullet \quad \underline{\mathcal{C}}_{cis} &= 4 \frac{\partial^2 W_{cis}}{\partial I_{cis}^2} \frac{\partial I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}}} \otimes \frac{\partial I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}}} + 4 \frac{\partial W_{cis}}{\partial I_{cis}} \frac{\partial^2 I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Les expressions analytiques des dérivées premières et secondes des invariants physiques par rapport à $\underline{\underline{C}}$ sont données dans les annexes B.4 et B.5.1 respectivement. Les expressions des dérivées premières proviennent de Charmetant [109] ; en revanche, pour rendre les simulations ultérieures plus efficaces, nous avons calculé analytiquement les dérivées secondes.

Dans Charmetant *et al.*, une forme polynomiale est donnée à chaque contribution :

$$W_{\square}(I_{\square}) = \sum_{i=0}^{n_{\square}} a_{\square_i} I_{\square}^i \quad (5.54)$$

où le degré n_{\square} et les coefficients a_{\square_i} du polynôme sont déterminés par identification [109]. En effet, par construction, une telle forme de potentiel respecte les conditions d'admissibilité **(1)** à **(5)** présentées dans la partie 5.1.5 (p.93) : accord avec les lois de la physique, cohérence, invariance par changement de repère, principe d'objectivité et respect des symétries matérielles. Par ailleurs, elle est bien \mathcal{C}^2 (condition **(i)** p.98) et la contrainte supplémentaire $a_{\square_0} = a_{\square_1} = 0$ permet de vérifier par construction la condition d'annulation de l'énergie et de la contrainte dans un état libre de contrainte (condition **(ii)**).

En revanche, la condition de poly-convexité de W , suffisante pour l'ellipticité et la quasi-convexité (conditions **(iii)** et **(iv)**) qui permettent de garantir l'existence et l'unicité de la solution, n'est pas prouvée. En effet, comme W se décompose comme la somme de fonctions de chacune de ses variables, on pourrait à première vue utiliser la propriété (voir p.98) selon laquelle il suffit que chacune de ses contributions soit convexe, ce qui est le cas par construction. Cependant, nous avons, pour rappel, négligé un terme de couplage entre des modes de déformation (voire p.102), ce qui invalide ce raisonnement. En fait, la quasi-convexité de W n'a pas été démontrée à notre connaissance – elle ne l'a notamment pas été dans les références [109, 121] établissant ce modèle basé sur ces invariants physiques –, et sort du cadre de ce travail. Si W n'est

pas quasi-convexe, des instabilités peuvent apparaître.

5.3 Modélisation mécanique du comportement de l'intra-p pli du renfort HiTape®

5.3.1 Lien entre la caractérisation expérimentale et la modélisation de l'intra-p pli

D'une part, dans le chapitre 3, nous avons identifié et caractérisé les réponses du renfort HiTape® sous diverses sollicitations – traction longitudinale, traction transverse plane, compaction, cisaillement plan, cisaillements transverses hors-plan et flexion –, que nous avons définies sur la figure 2.3 (p.28) dans la base $\mathcal{B} = (\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$ pour rappel. D'autre part, dans la partie 5.2.5 de ce chapitre, nous avons présenté les modes de déformation d'un matériau isotrope transverse, définis sur la figure 5.5 dans la base $\mathcal{B}^* = (\underline{M}, \underline{N}_2, \underline{N}_3)$, selon un modèle hyperélastique mettant en jeu des invariants physiques. Afin de nourrir le modèle physique, une correspondance cinématique entre les réponses aux sollicitations et les modes de déformation est nécessaire.

Les réponses aux sollicitations étudiées diffèrent des modes de déformation définis de trois manières : premièrement les bases de descriptions (\mathcal{B} , \mathcal{B}^*) ne sont pas les mêmes, deuxièmement les unes sont définies en termes de sollicitations et les autres en termes de déformations (purements cinématiques), troisièmement les échelles d'études ne sont pas les mêmes car les réponses aux sollicitations sont caractérisées à l'échelle d'une couche de renfort tandis que les modes de déformation sont définis à l'échelle d'un paquet de fibres, comme illustré sur la figure 5.1. Nous allons commenter ces trois différences, afin de proposer une correspondance rigoureuse entre les deux jeux.

Concernant le premier aspect, remarquons que, les vecteurs \underline{N}_2 et \underline{N}_3 étant les vecteurs propres d'une sous-matrice de la représentation matricielle de \underline{C}^{-1} dans la base \mathcal{B}^* , ils possèdent un sens physique : ils correspondent en fait aux directions de déformations minimale et maximale [1]. Par conséquent, pour la compaction et les tractions longitudinale et transverse plane nous avons directement $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$ car $\underline{M} = \underline{E}_1$, $\underline{N}_2 = \underline{E}_2$ et $\underline{N}_3 = \underline{E}_3$. Nous négligeons par ailleurs les réponses aux divers cisaillements, mais nous pouvons simplement remarquer que dans le cas du cisaillement transverse au pli, dans le plan d'isotropie $(\underline{E}_2, \underline{E}_3)$, une rotation autour de \underline{M} est nécessaire pour passer de \mathcal{B} à \mathcal{B}^* , ce qui explique qu'un « cisaillement » soit équivalent à une « compaction ». Concernant les autres aspects, le tableau 5.2 suivant indique, pour chaque mode de déformation du modèle hyperélastique, quelle combinaison de sollicitation est nécessaire pour le décrire d'un point de vue purement cinématique.

On remarque qu'expérimentalement nous avons étudié les réponses à six sollicitations différentes, tandis que le modèle hyperélastique ne présente que quatre modes de déformation distincts. Cela s'explique d'une part par le fait que ce modèle hyperélastique ne permet pas de décrire le comportement de flexion, et d'autre part par la structure isotrope transverse du matériau. En effet, si théoriquement les réponses aux sollicitations de type traction transverse plane et compaction sont les mêmes, elles diffèrent en réalité du fait de la structure fibreuse du matériau et notamment de l'ab-

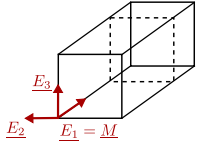
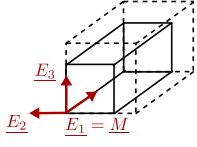
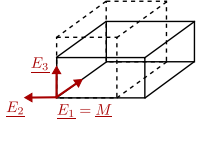
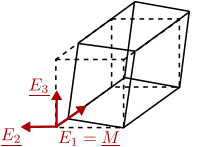
<i>Modes de déformation ~ Modèle</i>	<i>Sollicitations ~ Expérimental</i>
élongation 	traction longitudinale selon \underline{E}_1 traction selon \underline{E}_2 et \underline{E}_3 (si effet de Poisson)
compaction latérale 	compression selon \underline{E}_2 compression selon \underline{E}_3 cisaillement dans le plan ($\underline{E}_2, \underline{E}_3$)
compaction isochore 	traction transverse plane selon \underline{E}_2 compression selon \underline{E}_3 cisaillement dans le plan ($\underline{E}_2, \underline{E}_3$)
cisaillement 	cisaillement plan dans ($\underline{E}_1, \underline{E}_2$) cisaillement transverse dans le plan ($\underline{E}_1, \underline{E}_3$)
non décrite	flexion hors-plan

Tableau 5.2 – Correspondance entre les modes de déformation du modèle hyperélastique isotrope transverse considéré (les éléments de la figure 5.5 sont rappelés ici), et les combinaisons de sollicitations intra-plis nécessaires pour les décrire (illustrées sur la figure 2.3 et étudiées dans les chapitres 2 à 4).

sence de cohésion du milieu fibreux en traction transverse aux fibres. Elles ont donc été caractérisées indépendamment.

Dans la partie 5.3.2 suivante, la forme du potentiel de chacun des quatre modes de déformation du modèle hyperélastique est définie, l'objectif étant que le potentiel soit à la fois admissible et représentatif du comportement du renfort HiTape®.

5.3.2 Identification des potentiels

Potentiel d'élongation

On rappelle que selon le lemme **L-1** (p.50), le comportement du renfort HiTape® en traction dans la direction des fibres est linéaire élastique de module E_L et reste dans le domaine des petites déformations puisque son allongement à rupture est de 1,8 %. Une réponse en effort linéaire correspondant à une énergie de déformation quadratique,

on pose la forme suivante pour la densité d'énergie de déformation associée au mode de déformation par élongation :

$$W_{elong}(I_{elong}) = \frac{1}{2} E_L I_{elong}^2 \quad (5.55)$$

Ce potentiel vérifie directement par construction les conditions d'admissibilité (1) à (5) (p.93), (i) et (ii) (p.98).

Réciproquement, on considère généralement pour les renforts secs qu'il n'y a pas d'effet de Poisson [122]. Le mode de sollicitation en traction longitudinale correspond donc exactement au mode de déformation par élongation pure, avec :

$$[\underline{C}]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}^*}, [\underline{E}]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2 - 1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}^*}, [\underline{S}]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}^*} \quad (5.56)$$

La loi hyperélastique nous donne :

$$S_{11} = 2 \left(\frac{1}{2} 2 E_L I_{elong} \right) \left(\frac{1}{2 I_4} \right) = \frac{1}{2} E_L \frac{\ln I_4}{I_4} \approx E_L \frac{I_4 - 1}{2} = E_L E_{11}$$

puisqu'on reste dans un cadre de petites déformations ($\alpha \approx 1$). Le potentiel admissible proposé décrit donc bien le comportement linéaire élastique souhaité.

Potentiel de compaction isochore

Nous posons la forme polynomiale admissible (conditions (1) à (5), (i) et (ii)) suivante pour le potentiel de compaction isochore :

$$W_{cp\ iso} = \sum_{i=2}^n a_i I_{cp\ iso}^i \quad (5.57)$$

et nous cherchons à identifier les coefficients a_i et le degré n du polynôme tel que le potentiel soit représentatif du comportement du renfort HiTape®.

Pour ce faire, nous rappelons que les essais de compaction réalisés par Blais [19] et présentés dans la partie 3.1.3 (p.51) ont consisté en l'application d'une pression normale dans la direction \underline{E}_3 de l'épaisseur de l'empilement de renfort. L'empilement étant laissé libre sur ses côtés, nous supposons que le mode de déformation en jeu est la compaction isochore pure. Les données de sortie de l'essai réalisé par Blais sont la contrainte de Cauchy de compaction σ_C et le taux volumique de fibres V_f . La loi hyperélastique sélectionnée nous permet d'exprimer \underline{S} et $I_{cp\ iso}$ en fonction de σ_C et V_f . Nous pouvons donc optimiser le jeu de coefficients du polynôme avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt [95] proposé dans le logiciel Gnuplot, comme présenté sur la figure 5.6.

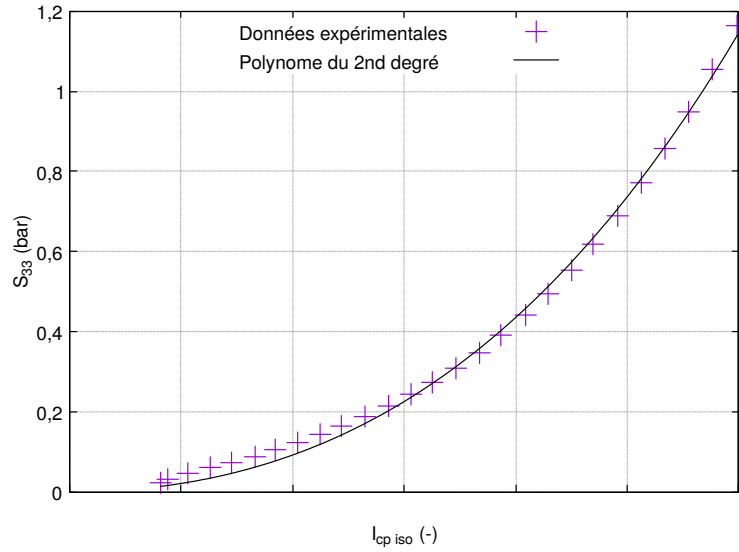


Figure 5.6 – Identification de la loi de comportement de compaction isochore à partir des mesures expérimentales faites par Blais [19].

Un polynôme de Lagrange de degré 2 permet de décrire la relation entre la contrainte et l'invariant de façon satisfaisante; nous choisissons donc la forme suivante pour le potentiel de compaction isochore :

$$W_{cp\ iso}(I_{cp\ iso}) = \frac{1}{2} K_{cp\ iso}^{(2)} I_{cp\ iso}^2 + \frac{1}{3} K_{cp\ iso}^{(3)} I_{cp\ iso}^3 \quad (5.58)$$

où les $K_{cp\ iso}^{(2)}$ et $K_{cp\ iso}^{(3)}$ sont des constantes matériau connues. Remarquons que $K_{cp\ iso}^{(2)}$ correspond à la rigidité initiale, *i.e.* au début de la sollicitation.

Potentiel de compaction latérale

En compaction latérale, nous intuitions une rigidité matériau plus grande qu'en compaction isochore à cause de la structure fibreuse du matériau. Nous choisissons la forme admissible suivante :

$$W_{cp\ lat}(I_{cp\ lat}) = \frac{1}{2} K_{cp\ lat} I_{cp\ lat}^2 \quad (5.59)$$

où par exemple $K_{cp\ lat}$ prend la valeur de la rigidité tangente finale du comportement en compaction isochore, *i.e.* pour la valeur maximale de $I_{cp\ iso}$ sur la figure 5.6.

Potentiel de cisaillement

Comme expliqué dans le chapitre 3 (p.49), nous négligeons la contribution des cisaillements transverses dans l'épaisseur du renfort, dû à sa faible épaisseur. Cette approximation se traduit, dans le modèle hyperélastique sélectionné, par des constantes matériau très faibles pour le cisaillement. Nous choisissons donc la forme admissible

suivante :

$$W_{cis}(I_{cis}) = \frac{1}{2} K_{cis} I_{cis}^2 \quad (5.60)$$

où par exemple $K_{cis} \sim K_{cp\ iso}^{(2)}$, avec $K_{cp\ iso}^{(2)}$ la rigidité initiale lors de l'essai de compaction.

Nous avons ainsi caractérisé les quatre modes de déformation indépendants du renfort HiTape® en associant à chacun un potentiel de déformation dont les paramètres matériau sont connus. Cependant, ce modèle hyperélastique ne permet pas de décrire le comportement en flexion hors-plan spécifique que nous avons caractérisé dans le chapitre 3. Ce travail n'a pas pu être mené dans le temps imparti pour la thèse ; quelques pistes de réflexions sont tout de même présentées dans la partie suivante.

5.3.3 Perspective : description du comportement de flexion spécifique

Le comportement de flexion du renfort HiTape® caractérisé dans le chapitre 3 présente deux spécificités majeures : (i) il est fortement non-linéaire, tel que la rigidité de flexion diminue fortement avec la courbure, et (ii) la rigidité de flexion réelle est largement inférieure à celle prédite par la mécanique des milieux continus – cf. figure 3.14 p.68.

Nous nous sommes placés jusqu'ici dans le cadre de la mécanique des milieux dits « matériellement simples » (ou milieux de Cauchy) pour lesquels la connaissance de \underline{F} (*i.e.* de $\underline{u} \otimes \underline{\nabla}$) et de son histoire suffisent pour déterminer l'état de contrainte *via* la loi d'état. Cependant, la description d'un comportement de flexion qui présente les spécificités (i) et (ii) introduites ci-avant, *i.e.* le fait qu'il ne soit pas directement lié au comportement de traction et qu'il puisse être modifié sans que le comportement de traction le soit, nécessite de sortir de ce cadre. En effet, la flexion est un mode de structure, *i.e.* lié aux dimensions : la déformation varie alors selon une dimension, par exemple selon \underline{E}_3 dans notre cas de flexion hors-plan autour de \underline{E}_2 . Une solution pour découpler tension et flexion est d'utiliser un milieu capable d'avoir des comportements dissociés : c'est le cas des milieux continus généralisés que nous introduisons dans le paragraphe suivant.

Introduction aux milieux continus généralisés

Il existe principalement deux types de milieux non matériellement simples dits « généralisés » qui permettent cette différenciation : d'une part les milieux d'« ordre supérieur » qui possèdent des degrés de liberté supplémentaires indépendants du déplacement \underline{u} , par exemple des micro-rotations ; et d'autre part les milieux de « degré supérieur » pour lesquels la contrainte dépend des gradients du déplacement jusqu'à l'ordre n [123]. Ces milieux continus généralisés sont classiquement utilisés pour rendre compte des effets d'échelle, par exemple de la microstructure sur le comportement macroscopique. En cela, ils nous paraissent être une approche intéressante pour prendre en compte le comportement de flexion, qui est fortement influencé par les mobilités

entre les fibres. Le tableau 5.3 liste certains types de milieux continus généralisés.

Type	Degrés de libertés	Dépendance de la contrainte
Milieu de Cauchy [124]	\underline{u}	$\underline{u} \otimes \underline{\nabla}$
Milieu d'ordre supérieur	\underline{u}, \dots	$\underline{u} \otimes \underline{\nabla}, \dots$
dont micromorphe [125]	$\underline{u}, \underline{\chi}$	$\underline{u} \otimes \underline{\nabla}, \underline{\chi}$
dont de Cosserat [126]	$\underline{u}, \underline{r}$	$\underline{u} \otimes \underline{\nabla}, \underline{r} \otimes \underline{\nabla}$
Milieu de degré supérieur	\underline{u}	$\underline{u} \otimes \underline{\nabla}, \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}, \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \otimes \dots \otimes \underline{\nabla}$
dont de 2nd gradient	\underline{u}	$\underline{u} \otimes \underline{\nabla}, \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}$

Tableau 5.3 – Classification des milieux continus généralisés et quelques exemples d'après [123, 127].

Nous nous proposons de développer succinctement ci-après trois approches possibles pour décrire le comportement de flexion spécifique de notre matériau dans la modélisation mécanique. Ces trois approches sont présentées dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Une étude plus approfondie pourrait être entreprise dans le cadre de travaux ultérieurs.

Quelques approches possibles

Approche n°1 : via un milieu de degré supérieur de type second gradient Pour un milieu de second gradient, une seconde mesure de déformation $\underline{\underline{K}}$ liée au second gradient du déplacement est ajoutée ; ainsi que sa contrainte conjuguée $\underline{\underline{S}}$ et une loi de comportement qui les relie. Le comportement peut être décrit par un unique potentiel. L'équation d'équilibre est modifiée pour prendre en compte l'effet du second gradient comme présenté dans le tableau 5.4. Ce type de milieu peut être vu comme un cas particulier des milieux micromorphes (voir tableau 5.3) obtenu en posant les degrés de liberté supplémentaires $\underline{\chi}$ du milieu micromorphe tels que $\underline{\chi} = \underline{u} \otimes \underline{\nabla}$.

Mesures de déformation	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{u} \otimes \underline{\nabla} + (\underline{u} \otimes \underline{\nabla})^T)$
	$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \otimes \underline{\nabla}$
Équation d'équilibre	$(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\nabla}) \cdot \underline{\nabla} + \underline{f}_v = 0$

Tableau 5.4 – Équations d'équilibre et mesures de déformation pour un milieu de second gradient [98].

Spencer & Soldatos [128] ont entrepris l'utilisation de cette théorie pour décrire la contribution de la flexion dans un milieu isotrope transverse constitué de fibres ;

ce travail a été poursuivi par d'autres [129, 130]. Cette approche consiste à supposer l'existence d'un potentiel hyperélastique de second gradient, *i.e.* dépendant à la fois du premier et du second gradient du déplacement, ou autrement dit du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit que nous avons déjà introduit et de son gradient. Plus particulièrement pour les milieux fibreux, on fait l'hypothèse plus restrictive que le terme de second gradient ne dépend que du gradient du vecteur porteur de la direction des fibres dans la configuration courante (noté \underline{G}) projeté sur la direction des fibres ramenée dans la configuration initiale (noté $\underline{\kappa}_0$), *i.e.* :

$$\underline{\kappa}_0 = \underline{F}^T \cdot \underline{G} \cdot \underline{M} ; \quad \underline{G} = (\underline{F} \cdot \underline{M}) \otimes \underline{\nabla} = \underline{M} \cdot (\underline{F}^T \otimes \underline{\nabla}) + \underline{F} \cdot (\underline{M} \otimes \underline{\nabla}) . \quad (5.61)$$

Faisant appel à la théorie des invariants introduite dans la partie 5.2.4 (p.100), la forme suivante est alors proposée pour le potentiel hyperélastique W_{II} du milieu de second gradient :

$$W_{II} \left(\underline{C}, \underline{M}, \underline{\nabla}(\underline{C}) \right) = W_{II} \left(\underline{C}, \underline{M}, \underline{G} \right) = W_{II} \left(\underline{C}, \underline{M}, \underline{\kappa}_0 \right) = W_{II}(I_1, I_2, \dots, I_{11}) \quad (5.62)$$

où les $I_{1 \rightarrow 5}$ ont été définis dans (5.42), et où les $I_{6 \rightarrow 11}$ (détaillés dans la référence [128]) sont construits de façon similaire comme des fonctions isotropes de $(\underline{C}, \underline{M}, \underline{\kappa}_0)$. S'intéressant plus particulièrement au comportement de flexion hors-plan des renforts secs, des travaux [131–134] proposent de supposer découplées les contributions du premier gradient et du second gradient. En sélectionnant uniquement la contribution correspondant à celle de la flexion hors-plan des fibres, caractérisée par l'évolution de l'angle entre la direction initiale des fibres et celle de l'épaisseur du renfort *i.e.* $I_{flex} = (\underline{E}_3 \cdot \underline{C} \cdot \underline{E}_1)_{,1} = C_{31,1}$ (en notant $_{,i}$ la dérivée $\frac{\partial}{\partial X_i}$), le potentiel hyperélastique devient finalement :

$$W_{II}(I_1, I_2, \dots, I_{11}) = W(I_{1 \rightarrow 5}) + W_{(II)}(I_{flex}) \quad (5.63)$$

où $W(I_{1 \rightarrow 5})$ correspond au potentiel hyperélastique établi précédemment (5.50). Afin de caractériser le comportement de notre renfort, il reste à définir la forme de $W_{(II)}(I_{flex})$.

Pour utiliser ce type de modèle pour décrire le comportement de notre renfort, l'étape suivante consisterait à relier ce modèle mécanique aux résultats expérimentaux que nous avons présentés dans le chapitre 3. Cependant, l'invariant I_{flex} ne s'exprimant pas directement en fonction de la courbure mesurée expérimentalement, une méthode inverse peut être utilisée pour déterminer les paramètres matériaux [131, 132].

Approche n°2 : via un milieu d'ordre supérieur de type Cosserat Dans un milieu de Cosserat (parfois aussi appelé milieu « micropolaire »), la cinématique est enrichie à l'aide d'un vecteur de micro-rotation \underline{r} . Les mesures de déformations (qui ne sont plus symétriques) sont donc redéfinies à partir de l'ensemble des degrés de liberté : apparaissent une déformation relative $\underline{\underline{\varepsilon}}_R$ et une déformation de courbure $\underline{\underline{\kappa}}$. Elles sont conjuguées respectivement au tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et de moment $\underline{\underline{M}}$. Le tableau 5.5 synthétise les équations importantes du problème mécanique pour la théorie des

milieux de Cosserat (avec \underline{c} un champ de couple). Ce type de milieu peut être vu comme un cas particulier des milieux micromorphes obtenu en posant $\underline{\chi} = -\underline{\epsilon} \cdot \underline{r}$ où $\underline{\epsilon}$ est le tenseur de permutation d'ordre 3 de Levi-Civita.

Mesures de déformation	$\underline{\epsilon}_R = \underline{u} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\epsilon} \cdot \underline{r}$
	$\underline{\kappa} = \underline{r} \otimes \underline{\nabla}$
Équations d'équilibre	$\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} + \underline{f}_v = \underline{0}$
	$\underline{\mathcal{M}} \cdot \underline{\nabla} - \underline{\epsilon} \cdot \underline{\sigma} + \underline{c} = \underline{0}$

Tableau 5.5 – Équations d'équilibre et mesures de déformation pour un milieu de Cosserat [98].

Pour utiliser ce type de modèle pour modéliser le comportement souhaité, certains auteurs [127, 132] contraignent de plus le milieu de Cosserat pour que le vecteur des micro-rotations \underline{r} décrive la rotation matérielle *via* la partie antisymétrique du gradient du déplacement, c'est-à-dire que :

$$\underline{r} = \frac{1}{2} (\underline{u} \otimes \underline{\nabla} - (\underline{u} \otimes \underline{\nabla})^T) = \frac{1}{2} \underline{\nabla} \wedge \underline{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_{3,2} - u_{2,3} \\ u_{1,3} - u_{3,1} \\ u_{2,1} - u_{1,2} \end{pmatrix}. \quad (5.64)$$

Cette contrainte peut être imposée par pénalité [127], ou bien à l'aide de degrés de liberté supplémentaires correspondant à des multiplicateurs de Lagrange [132].

On rappelle que les essais de flexion longitudinale hors-plan réalisés correspondent à une rotation de la direction des fibres (initialement selon \underline{E}_1) autour de l'axe \underline{E}_2 . Dans le cas particulier de notre étude, la seule composante non nulle du vecteur rotation serait donc r_2 . Par conséquent $\kappa_{21} = r_{2,1}$ serait la seule composante non nulle de $\underline{\kappa}$; elle serait à comparer à la courbure expérimentale mesurée dans le chapitre 3, prise au niveau du feuillet moyen de la structure par exemple.

Approche n°3 : *via* un milieu couple de contraintes Ce type de milieu à couple de contraintes est un cas limite des deux approches précédentes. D'une part, il est obtenu en prenant un milieu de second gradient et en restreignant $\underline{\chi}$ à la partie anti-symétrique du gradient du déplacement plutôt qu'au gradient du déplacement lui-même. D'autre part, il correspond également un milieu de Cosserat contraint par la condition (5.64) introduite ci-avant, *i.e.* telle que la micro-rotation et la rotation matérielle soient égales. Plus généralement, un milieu couple de contraintes est un milieu micromorphe avec de plus $\underline{\chi} = \frac{1}{2} (\underline{u} \otimes \underline{\nabla} - (\underline{u} \otimes \underline{\nabla})^T)$.

L'intérêt de cette approche par rapport à un milieu de Cosserat et un milieu de second gradient réside dans la définition des grandeurs manipulées. En effet, la cinématique ne décrit plus de déformations relatives mais permet de prendre en compte toute la déformation *via* des déformations et contraintes standards, ainsi que des courbures et micro-couples, tous des tenseurs du second ordre.

Conclusion

Conscients des limites de l'utilisation des milieux matériellement simples de Cauchy pour la description du comportement de flexion spécifique des renforts fibreux, nous avons présenté succinctement trois approches de modélisation mécanique qui pourraient permettre de décrire le comportement de flexion spécifique de notre matériau. Avant de faire un choix, ces approches doivent être développées, et le lien avec l'exploitation des résultats expérimentaux reste à préciser. Une difficulté envisagée liée à l'utilisation d'un milieu de Cosserat ou de second gradient est la gestion des conditions aux limites (statiques en particulier), à la fois en termes de mise en œuvre et de choix (sens physique). La sélection d'une stratégie appropriée dépendra également du cadre éléments finis proposé pour la résolution du problème, et nous verrons dans le chapitre 6 que dans ce cadre, des approches complémentaires de type « superposition » d'éléments peuvent également être considérées.

5.4 Modélisation mécanique du comportement de l'interface entre les plis du renfort HiTape®

La partie précédente 5.3 a permis d'établir une loi de comportement pour le milieu intra-pli du renfort HiTape®, *i.e.* pour un pli unitaire. Lorsqu'on considère un empilement, il faut de plus décrire le comportement de l'interface entre les plis. On rappelle que le chapitre 4 a permis de caractériser le comportement de frottement inter-plis et de mettre en évidence le rôle non négligeable de l'adhésion/décohésion entre les plis même si nous ne l'avons pas caractérisé. Nous cherchons donc à modéliser le comportement d'un empilement de renforts lors de sa mise en forme, tel que *(i)* les plis sont initialement en contact, *(ii)* au cours de la mise en forme du glissement inter-pli intervient au niveau de l'interface, *(iii)* ce glissement se traduit par du frottement inter-plis, et *(iv)* le voile à l'état fondu crée une adhésion entre les plis.

Pour cela, nous commençons par inscrire dans un cadre rigoureux le comportement de l'interface où interviennent deux phénomènes irréversibles : le frottement et l'adhésion/décohésion.

5.4.1 Retour sur le cadre thermodynamique en présence d'une interface et de phénomènes de dissipation

La cinématique de l'interface utilisée est tout d'abord présentée, puis les deux principes de la thermodynamiques énoncés dans la partie 5.2.1 sont établis en présence

d'une interface et de phénomènes de dissipation au niveau de cette interface.

Cinématique de l'interface

On considère un ensemble $\Sigma = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ constitué de deux solides $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ initialement en contact, et on note $\Gamma^{(12)} = \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)}$ leur surface de contact, interprétable comme l'inter-pli dans notre cas. La surface de Σ hors interface est notée $\partial\Sigma$, *i.e.* $\partial\Sigma = \partial\Omega^{(1)} + \partial\Omega^{(2)} - \Gamma^{(12)} = \Gamma^D + \Gamma^N$. Ces différentes notations sont illustrées sur la figure 5.7a. Dans la continuité des notations précédentes, on indiquera avec l'exposant « (k) » les grandeurs se rapportant au solide $\Omega^{(k)}$. La cinématique de l'interface est présentée sur la figure 5.7b. Un déplacement relatif entre deux points de l'interface initialement confondus $\underline{X}^{(1)} = \underline{X}^{(2)} \in \Gamma_0^{(12)}$ peut apparaître au cours de la transformation :

$$\underline{g} = \underline{x}^{(2)} - \underline{x}^{(1)} = \underline{u}^{(2)} - \underline{u}^{(1)} = \llbracket \underline{u} \rrbracket , \quad (5.65)$$

dont on peut distinguer les composantes normale et tangentielle relativement à la surface du solide $\Omega^{(1)}$:

$$\begin{aligned} g_n &= \underline{g} \cdot \underline{n} \\ \underline{g}_t &= \underline{g} - g_n \underline{n} . \end{aligned} \quad (5.66)$$

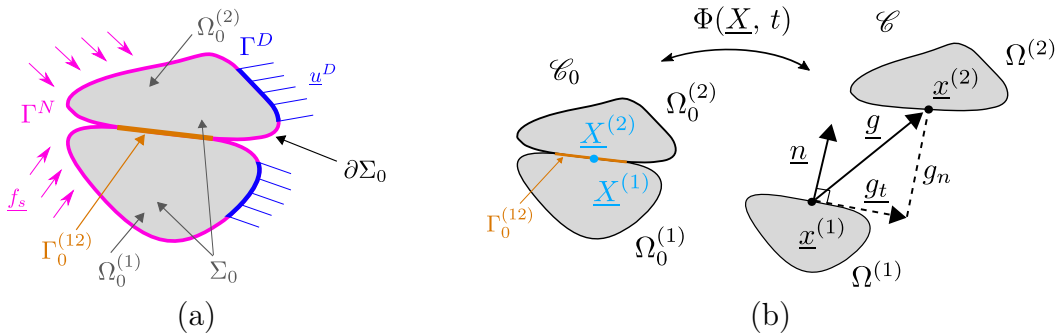


Figure 5.7 – Notations utilisées pour le problème de deux solides en contact initialement (a), et cinématique de l'interface (b).

Premier principe de la thermodynamique appliqué à deux solides initialement en contact

On suppose la non-additivité de l'énergie interne [135, 136] :

$$\mathcal{E}_{int}(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}) = \mathcal{E}_{int}(\Omega^{(1)}) + \mathcal{E}_{int}(\Omega^{(2)}) + \mathcal{E}_{int}(\Gamma^{(12)}) , \quad (5.67)$$

ce qui fait apparaître une énergie interne pour l'interface; on notera $e^{(12)}$ l'énergie interne surfacique de l'interface. Les différentes contributions apparaissant dans le

premier principe (5.25) sont réécrites pour l'ensemble $\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{cin}(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}) &= \sum_{k=1,2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega^{(k)}} \rho^{(k)} \underline{\dot{x}}^{(k)} \cdot \underline{\dot{x}}^{(k)} dV \right) \\
 \mathcal{E}_{int}(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}) &= \int_{\Gamma^{(12)}} e^{(12)} dS + \sum_{k=1,2} \left(\int_{\Omega^{(k)}} \rho^{(k)} e^{(k)} dV \right) \\
 \mathcal{P}_{ext}(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}) &= \sum_{k=1,2} \left(\int_{\Omega^{(k)}} \rho^{(k)} \underline{f}_v^{(k)} \cdot \underline{\dot{x}}^{(k)} dV + \int_{\partial\Omega^{(k)} \setminus \Gamma^{(12)}} \underline{f}_s^{(k)} \cdot \underline{\dot{x}}^{(k)} dS + \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{p}^{(k)} \cdot \underline{\dot{x}}^{(k)} dS \right) \\
 \mathcal{Q}(\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}) &= \sum_{k=1,2} \left(\int_{\Omega^{(k)}} \rho^{(k)} r^{(k)} dV - \int_{\partial\Omega^{(k)} \setminus \Gamma^{(12)}} q^{(k)} dS - \int_{\Gamma^{(12)}} q^{(k)} dS \right)
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

où les $\underline{p}^{(k)}$ sont les efforts surfaciques (ou « force cohésive ») sur le solide $\Omega^{(k)}$ au niveau de l'interface $\Gamma^{(12)}$.

Le premier principe de la conservation de l'énergie étant respecté sur l'ensemble $\Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$, on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma^{(12)}} \dot{e}^{(12)} dS &= \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{p}^{(1)} \cdot \underline{\dot{x}}^{(1)} dS + \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{p}^{(2)} \cdot \underline{\dot{x}}^{(2)} dS - \int_{\Gamma^{(12)}} q^{(1)} dS - \int_{\Gamma^{(12)}} q^{(2)} dS \\
 &= \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{p} \cdot \underline{\dot{g}} dS - \int_{\Gamma^{(12)}} q^{(1)} dS - \int_{\Gamma^{(12)}} q^{(2)} dS
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

où \underline{p} représente les efforts surfaciques en jeu à l'interface et peut se décomposer de la même façon que \underline{g} en ses parties normale et tangentielle, respectivement $p_n = \underline{p} \cdot \underline{n}$ et $p_t = \underline{p} - p_n \underline{n}$. D'après le principe des actions réciproques, cette définition des efforts surfaciques \underline{p} met en évidence l'hypothèse de base d'une telle formulation du comportement de l'interface entre les deux solides : deux points appartenant aux deux solides en vis-à-vis et initialement correspondants le restent au cours de la déformation. En fait, en dehors du cadre des petites perturbations au niveau de l'interface, la formulation ne respecte plus certaines lois de la Physique [137]. Dans toute la suite, on confondra donc les configurations initiale $\Gamma_0^{(12)}$ et courante $\Gamma^{(12)}$ pour l'interface, tout en conservant à l'esprit l'extension aux problèmes non-linéaires géométriques.

Second principe de la thermodynamique en présence de phénomènes dissipatifs

Comme nous l'avons vu dans la partie 5.1.5, des variables internes sont classiquement introduites pour décrire les phénomènes irréversibles. Nous notons de manière générale ces variables internes α_p^t avec $p = 1..n$ où n est le nombre de variables internes nécessaires ; elles peuvent être scalaires, vectorielles ou tensorielles (d'ordre éventuellement supérieur à 2). Ainsi, de la même façon que nous avons supposé l'existence d'un potentiel hyperélastique fonction des variables d'état et duquel dérive la loi de comportement, on peut supposer, en se plaçant dans le cadre des matériaux standards généralisés, l'existence d'un potentiel de dissipation duquel dérivent les lois de dissipa-

tion dites « lois complémentaires » [101]. Ce potentiel de dissipation est alors fonction des variables d'état et de leurs dérivées temporelles.

Afin de prendre en compte les phénomènes dissipatifs (comme le frottement) intervenant au niveau de l'interface, on peut, en se plaçant de ce cadre des matériaux standards généralisés, supposer l'existence d'une énergie libre surfacique de l'interface telle que $\psi^{(12)} = e^{(12)} - T^{(12)}s^{(12)}$ (de façon analogue à l'énergie libre spécifique de Helmholtz introduite dans (5.31) pour les solides), et d'un potentiel de dissipation de l'interface $\phi^{(12)}$. Ils dépendent des variables internes, ainsi que de leurs dérivées temporelles dans le cas du potentiel de dissipation :

$$\psi^{(12)} = \psi^{(12)}(\underline{u}; \alpha_1^t, \dots, \alpha_n^t) \quad ; \quad \phi^{(12)} = \phi^{(12)}(\underline{u}; \alpha_1^t, \dots, \alpha_n^t, \dot{\alpha}_1^t, \dots, \dot{\alpha}_n^t) \quad (5.70)$$

Dans ce cadre dissipatif et isotherme (« purement mécanique »), l'inégalité de Clausius-Duhem (5.32) (p.97) pour l'interface se réduit alors à :

$$\underline{p} \cdot \underline{\dot{g}} - \dot{\psi}^{(12)} \geq 0, \quad (5.71)$$

ce qui peut se réécrire :

$$\underbrace{\left(\underline{p} - \frac{\partial \psi^{(12)}}{\partial \underline{g}} \right)}_{\in \partial_{\underline{g}} \phi^{(12)}} \cdot \underline{\dot{g}} - \underbrace{\frac{\partial \psi^{(12)}}{\partial \underline{\alpha}^t}}_{\in \partial_{\underline{\alpha}^t} \phi^{(12)}} \cdot \underline{\dot{\alpha}^t} \geq 0 \quad (5.72)$$

5.4.2 Potentiels

Le cadre thermodynamique en présence de phénomènes de dissipation étant posé, nous cherchons maintenant à proposer des formes satisfaisantes des potentiels d'énergie libre et de dissipation.

Description de la non-pénétration

Un premier aspect du comportement de l'interface est la non-pénétration entre les deux solides considérés. De manière générale, cette condition de non-pénétration appartient aux trois conditions du contact unilatéral de Hertz-Signorini qui correspondent à la non-pénétration, non-adhésion et complémentarité ; respectivement :

$$g_n \geq 0 \quad ; \quad p_n^c \leq 0 \quad ; \quad g_n p_n^c = 0 \quad (5.73)$$

où on note p_n^c la pression de contact correspondant à la contribution du contact unilatéral à la composante normale de la force cohésive \underline{p} . Le contact unilatéral est un processus conservatif (*i.e.* dont le travail est indépendant du chemin suivi) et réversible. Ces trois conditions de Hertz-Signorini décrivent deux états possibles : soit les deux solides sont en contact ($g_n = 0$) et dans ce cas ils peuvent exercer une force de contact l'un sur l'autre ($p_n^c \leq 0$), soit les deux solides ne sont pas en contact ($g_n > 0$) et dans ce cas la force de contact est nulle car il n'y a pas d'adhésion ($p_n^c = 0$). Cette loi de contact unilatéral, représentée sur la figure 5.8, est convexe mais non-différentiable.

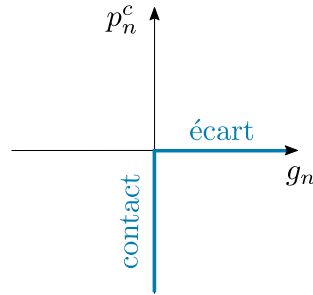


Figure 5.8 – Loi de contact unilatéral.

Comme nous l'avons vu, nous cherchons quant à nous à décrire un comportement d'adhésion entre les deux solides. C'est donc uniquement la condition de non-pénétration qui nous intéresse ici. Selon la définition de Moreau [138, 139], la non-pénétration entre deux solides est non-dissipative, et peut être décrite par le *pseudo*-potentiel d'énergie libre ψ^c («^c» désigne le contact) suivant :

$$\psi^c(g_n) = \mathcal{I}_{\mathbb{R}^+}(g_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_n \in \mathbb{R}^+ \\ \infty & \text{si } g_n \notin \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (5.74)$$

L'écriture de ce potentiel fait intervenir la fonction indicatrice $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^+}$. D'une manière générale $\mathcal{I}_{\mathbb{A}}$ est appelée fonction indicatrice de \mathbb{A} ($\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$) relativement à \mathbb{B} et est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbb{A}} : \mathbb{B} &\rightarrow \{0, \infty\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{A} \\ \infty & \text{si } x \notin \mathbb{A} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.75)$$

La pression de contact p_n^c est alors conjuguée à g_n et dérive du potentiel ψ^c *via* la loi d'état :

$$p_n^c \in \partial_{g_n} \psi^c(g_n). \quad (5.76)$$

Le contact unilatéral appartient à la mécanique du contact : c'est un phénomène purement mécanique. Nous allons voir que la décohésion sort de ce cadre purement mécanique.

Description de la décohésion *via* une approche cohésive

Deux surfaces en contact présentent de l'adhésion lorsqu'un certain seuil de force est nécessaire pour qu'un déplacement relatif ait lieu entre les deux solides, qu'il soit normal (ouverture), tangentiel (glissement), ou une combinaison des deux [140]. L'adhésion entre deux surfaces s'explique par des phénomènes thermo-physiques (comme le soudage), physico-chimiques (le collage) ou cohésifs (dans le solide) par exemple [141]. Une description de l'évolution des forces cohésives est alors nécessaire ; on parle d'approche cohésive.

Cette approche cohésive a initialement été développée pour la fissuration par Barenblatt [142] et Dugdale [143]. Elle a depuis été appliquée à de nombreux domaines, allant de la géophysique – pour la tectonique des plaques – au génie civil, en passant par les interfaces granulaires mais aussi les matériaux composites pour la décohésion fibre/matrice ou le délaminage par exemple [141]. Ce type d'approche considère l'existence d'une zone de transition entre un état d'adhésion parfaite et un état de rupture totale lors de la fissuration, admettant une discontinuité de déplacement tout en transmettant des efforts. Le comportement de l'interface est alors décrit par une loi de comportement propre, dite loi cohésive, reliant les efforts cohésifs \underline{p} aux discontinuités de déplacement \underline{g} . L'épaisseur de l'interface est négligée, et le trajet de fissuration est connu ou postulé.

La perte d'adhésion peut être décrite par une variable interne d'endommagement régie par une loi d'évolution, et à laquelle on associe une force thermodynamique. Il s'agit bien d'une variable d'état supplémentaire indépendante du déplacement relatif, car deux solides en contact (*i.e.* tels que $g_n = 0$) peuvent présenter des liens intacts, endommagés ou rompus. Ce type de description a initialement été développé par Frémond [144] qui décrit l'évolution de l'adhésion *via* une « intensité d'adhésion » – un scalaire évoluant de 1 lorsque les liens sont intacts (adhésion totale) à 0 lorsqu'ils sont rompus –, et qui introduit l'énergie de Dupré correspondant à la quantité d'énergie à fournir pour rompre les liens. Frémond considère également une condition de complémentarité entre l'intensité d'adhésion et le déplacement relatif (*i.e.* l'un des deux est forcément nul). Le modèle de Cangémi-Raous [145] s'affranchit de cette condition de complémentarité pour assouplir le modèle, en introduisant une « rigidité d'adhésion » : les liens se comportent alors comme des ressorts avant de rompre. Dans la continuité de ces travaux, Talon & Curnier [140] interprètent le phénomène adhésif entre deux surfaces collées comme un ensemble de filaments de longueur initialement nulle (état d'*adhésion*) qui sont créés lorsque les deux solides sont séparés (état de *décohésion*), l'idée étant que la longueur de ces filaments ne peut qu'augmenter jusqu'à atteindre l'état de *rupture* comme représenté sur la figure 5.9. En cas de décharge, ils se « replient » sur eux-mêmes et ne transmettent plus d'effort. Dans ce modèle [140], l'intensité d'adhésion de Frémond est alors remplacée par la variable interne scalaire g^a (« ^a » désignant l'adhésion), qui correspond à la longueur des filaments adhésifs. Elle est définie par la valeur maximale de la norme du déplacement relatif atteinte jusqu'à l'état courant :

$$g^a(t) = \sup_{t' < t} \|\underline{g}(\underline{u}(t'))\|. \quad (5.77)$$

La variable interne g^a est conjuguée à une force de traction adhésive scalaire p^a . Le comportement de décohésion est alors déterminé par trois conditions :

$$\dot{g}^a \geq 0 \quad ; \quad p^a \leq s(g^a) \quad ; \quad \dot{g}^a (p^a - s(g^a)) = 0 \quad (5.78)$$

qui décrivent deux états possibles : soit la longueur des filaments n'augmente pas ($\dot{g}^a = 0$), soit elle augmente ($\dot{g}^a \neq 0$) et dans ce cas la force cohésive d'adhésion suit une loi de décohésion $s(g^a)$. La loi de décohésion proposée présente la forme affine

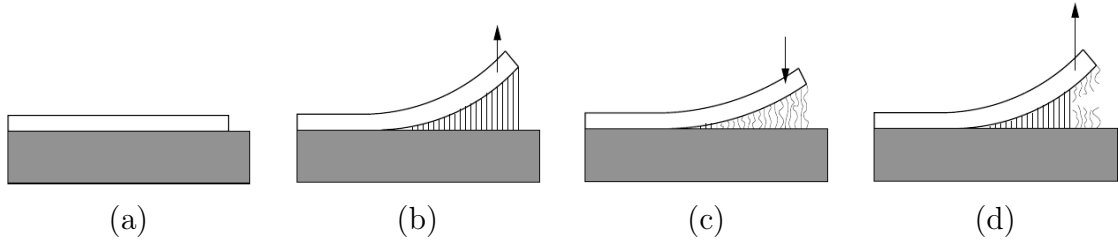


Figure 5.9 – Comportement des filaments adhésifs lors du décollement : état initial avec adhésion (a), lors de la décohésion les filaments s'étirent (b), en cas de décharge ils se replient sur eux-mêmes (c), et si le déplacement relatif dépasse un certain seuil alors il y a rupture (d) [140].

suivante :

$$s(g^a) = \begin{cases} p_M \left(1 - \frac{g^a}{g_M}\right) & \text{si } 0 \leq g^a \leq g_M \\ 0 & \text{si } g^a > g_M \end{cases}, \quad (5.79)$$

où p_M est le seuil adhésif *i.e.* l'effort surfacique nécessaire pour passer de l'état d'*adhésion* (figure 5.9a) à celui de *décohésion* (figure 5.9b), et g_M l'écart adhésif maximal *i.e.* la valeur maximale que peut prendre g^a avant rupture des filaments. Cette loi de décohésion est illustrée sur la figure 5.10. La variable g^a permet ainsi de décrire l'irréversibilité de la décohésion. Un tel modèle, basé sur l'idée de filaments s'étirant jusqu'à rupture, nous semble prometteur en vue de décrire la réponse à une sollicitation de décohésion comme celle que nous avons illustrée sur la figure 2.19 (p.46). En effet, on rappelle que l'interface entre les plis du renfort HiTape® est constituée du voile thermoplastique au-dessus de sa température de fusion lors de la mise en forme.

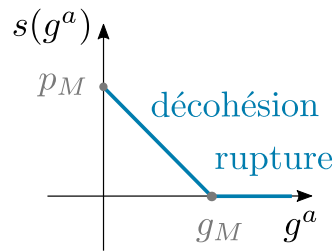


Figure 5.10 – Loi de décohésion affine proposée par Talon & Curnier [136].

Les pseudo-potentiels d'énergie libre et de dissipation suivants sont alors proposés par Talon & Curnier [140] :

$$\begin{aligned} \psi^a(g_n, \underline{g}_t; g^a) &= \mathcal{I}_{\mathbb{R}^-} \left(\sqrt{\langle g_n \rangle_+^2 + \|\underline{g}_t\|^2} - g^a \right) \\ \phi^a(\dot{g}^a, g^a) &= s(g^a) \dot{g}^a + \mathcal{I}_{\mathbb{R}^+}(\dot{g}^a) . \end{aligned} \quad (5.80)$$

Le pseudo-potential d'énergie libre $\psi^a(g_n, \underline{g}_t; g^a)$ permet d'imposer que la longueur des

filaments adhésifs g^a est toujours plus grande que la norme du saut de déplacement $\|g\|$, avec $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^-}$ la fonction indicatrice de \mathbb{R}^- définie dans (5.75), et $\langle x \rangle_+$ la partie positive du réel x , *i.e.* x s'il est positif et 0 sinon. Le premier terme du potentiel de dissipation $\phi^a(\dot{g}^a, g^a)$ contient la loi de décohésion $s(g^a)$. Enfin, le second terme du potentiel de dissipation $\phi^a(\dot{g}^a, g^a)$ permet d'imposer que la variable interne g_a ne peut qu'augmenter, c'est le terme d'irréversibilité. La force de traction adhésive p^a dérive alors des pseudo-potentiels précédents *via* la loi d'état et la loi complémentaire associées, et elle est dirigée selon \underline{g} :

$$p^a \in -\partial_{g^a} \psi^a(g_n, \underline{g}_t; g^a) \cap \partial_{\dot{g}^a} \phi^a(\dot{g}^a, g^a) \quad ; \quad \underline{p}^a = p^a \frac{\underline{g}}{\|g\|}. \quad (5.81)$$

En se basant sur les travaux de Talon & Curnier, et en utilisant la même loi de décohésion $s(g^a)$ illustrée sur la figure 5.10, Lorentz [146] propose la forme suivante pour l'énergie libre surfacique de l'interface :

$$\check{\psi}^a(\underline{g}(\underline{u}); g^a) = \frac{\max(\|\underline{g}(\underline{u})\|, g^a)}{2} (p_M + s(\max(\|\underline{g}(\underline{u})\|, g^a))) . \quad (5.82)$$

Cette forme décrit le même comportement que les potentiels de Talon & Curnier, mais nous verrons dans le chapitre 7 que son traitement numérique sera différent.

Description du frottement

Le troisième facette du comportement de l'interface entre les plis du renfort Hi-Tape® que nous souhaitons modéliser est le comportement de frottement que nous avons caractérisé dans le chapitre 4. Dans le cas de l'application d'une pression normale constante π ($\pi \leq 0$), le frottement pur de Coulomb est décrit par une loi de glissement, un critère d'adhérence et une condition de complémentarité ; respectivement :

$$\|\underline{p}_t^f\| \dot{\underline{g}}_t = \|\dot{\underline{g}}_t\| \underline{p}_t^f \quad ; \quad \|\underline{p}_t^f\| + \text{CoF} \pi \leq 0 \quad ; \quad \|\dot{\underline{g}}_t\| (\|\underline{p}_t^f\| + \text{CoF} \pi) = 0 . \quad (5.83)$$

où on note \underline{p}_t^f la contribution du frottement pur de Coulomb à la partie tangentielle \underline{p}_t de la force cohésive. Ces trois conditions décrivent deux états possibles : soit il y a « adhérence » [140] – définie comme l'absence de glissement tangentiel entre les deux solides ($\|\dot{\underline{g}}_t\| = 0$) –, et dans ce cas la force de frottement est à l'intérieur du cône de Coulomb ($\|\underline{p}_t^f\| < -\text{CoF} \pi$), soit il y a glissement entre les deux solides ($\|\dot{\underline{g}}_t\| > 0$) et dans ce cas la force de frottement est sur le bord du cône de Coulomb ($\|\underline{p}_t^f\| = -\text{CoF} \pi$). Cette loi de frottement est représentée sur la figure 5.11. C'est un processus irréversible dissipatif.

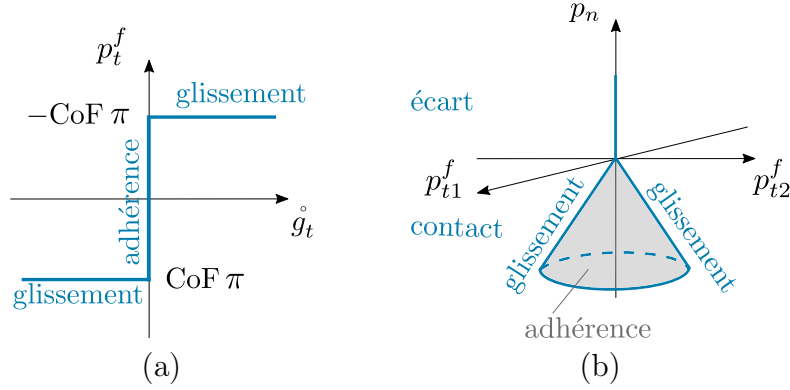


Figure 5.11 – Loi de frottement tangential (dans un cas bidimensionnel) (a) et cône de Coulomb (b).

De la même façon que nous avons introduit g^a pour la décohésion, le frottement peut être décrit par l'introduction d'une variable interne g_t^f mesurant le glissement tangential entre les deux corps, et que l'on peut identifier à la composante tangentielle du vecteur de déplacement relatif \underline{g}_t [136]. Le comportement de frottement de Coulomb peut alors être décrit par le pseudo-potential d'énergie libre ψ^f et le potentiel de dissipation ϕ^f suivants (« ^f » désigne le frottement) [147] :

$$\begin{aligned} \psi^f(\underline{g}_t; \underline{g}_t^f) &= \mathcal{I}_{\{0\}}(\underline{g}_t - \underline{g}_t^f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{\dot{g}}_t = \underline{\dot{g}}_t^f \\ \infty & \text{si } \underline{\dot{g}}_t \neq \underline{\dot{g}}_t^f \end{cases} \\ \phi^f(\underline{\dot{g}}_t^f) &= -\text{CoF} \pi \|\underline{\dot{g}}_t^f\|. \end{aligned} \quad (5.84)$$

où $\mathcal{I}_{\{0\}}$ est ici la fonction indicatrice de $\{0\}$ définie dans (5.75). La force cohésive tangentielle \underline{p}_t^f conjuguée à la variable cinématique \underline{g}_t , et la force « interne » $\underline{p}_t^{f'}$ conjuguée à la variable interne \underline{g}_t^f , dérivent alors des pseudo-potentiels précédents *via* la loi d'état et la loi complémentaire associées :

$$\underline{p}_t^f \in \partial_{\underline{g}_t} \psi^f(\underline{g}_t; \underline{g}_t^f) \quad ; \quad \underline{p}_t^{f'} \in -\partial_{\underline{g}_t^f} \psi^f(\underline{g}_t; \underline{g}_t^f) \cap \partial_{\underline{\dot{g}}_t^f} \phi^f(\underline{\dot{g}}_t^f). \quad (5.85)$$

Pour coupler les comportements de frottement et de contact unilatéral, il faut de plus prendre $\pi = p_n^c$ ce qui transforme ϕ^f en un *quasi*-potential dépendant de la pression de contact p_n^c ($p_n^c \leq 0$) qui est inconnue.

Synthèse pour le contact unilatéral couplé à l'adhésion et au frottement

Le modèle de contact couplé à l'adhésion et au frottement de Talon & Curnier [140] définit plusieurs états possibles pour l'interface, comme nous l'avons vu séparément pour le contact, le frottement et l'adhésion/décohésion. L'organigramme de la figure 5.12 présente le couplage entre ces trois facettes du comportement de l'interface, et synthétise les combinaisons d'états possibles *in fine*.

Ce modèle introduit deux variables d'état internes supplémentaires permettant de décrire les phénomènes dissipatifs en jeu : d'une part le déplacement relatif tangential

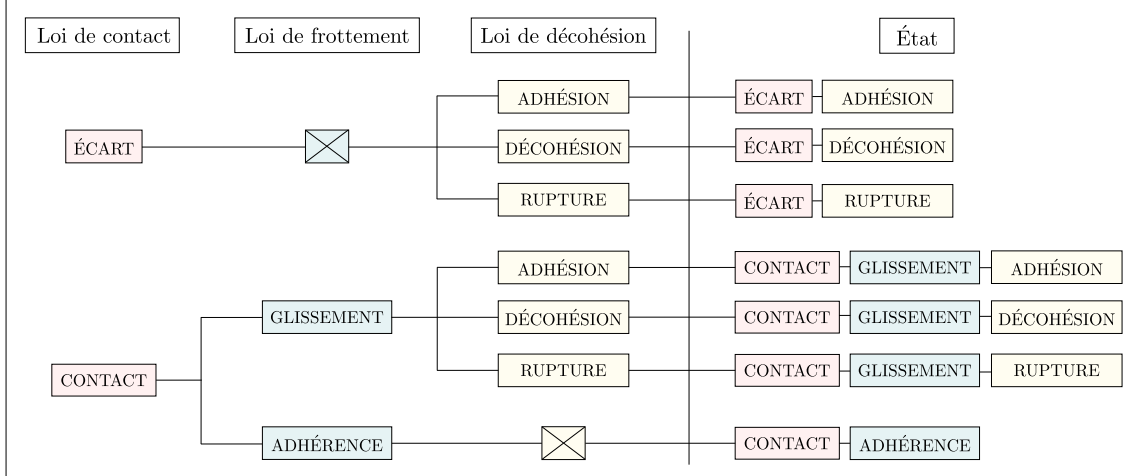


Figure 5.12 – Organigramme du couplage entre les comportements de contact, frottement et adhésion et synthèse des états possibles d'après [136].

g_t^l lié à la dissipation due au frottement, et d'autre part la longueur des filaments g^a caractérisant l'endommagement des liens adhésifs (phénomène de décohésion). Finalement, la force cohésive \underline{p} conjuguée au déplacement relatif $\underline{g}(\underline{u})$ est constituée de trois contributions : une pression de contact p_n^c , une force cohésive tangentielle de frottement \underline{p}_t^f et une force de traction adhésive \underline{p}^a , telles que $\underline{p} = p_n^c \underline{n} + \underline{p}_t^f + \underline{p}^a$. Les pseudo-potentiels d'énergie libre $\psi^{(12)}$ et de dissipation $\phi^{(12)}$ de l'interface décrivant le contact unilatéral couplé au frottement et à l'adhésion prennent alors la forme suivante (illustrée sur la figure 5.13) :

$$\begin{aligned} \psi^{(12)}(g_n, \underline{g}_t; \underline{g}_t^l, g^a) = & \underbrace{\mathcal{I}_{\mathbb{R}^+}(g_n)}_{\psi^c(g_n)} + \underbrace{\mathcal{I}_{\{0\}}(g_t - g_t^l)}_{\psi^f(\underline{g}_t; \underline{g}_t^l)} \\ & + \frac{1}{2} \mathcal{I}_{\mathbb{R}^-} \left(\underbrace{\sqrt{\langle g_n \rangle_+^2 + \|\underline{g}_t\|^2} - g^a}_{\psi^a(\underline{g}(\underline{u}); g^a)} \right) \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\phi^{(12)}(\underline{\dot{g}}_t^l, p_n) = \underbrace{-\text{CoF } p_n^c \|\underline{\dot{g}}_t^l\|}_{\phi^f(\underline{\dot{g}}_t^l, p_n^c)} + \underbrace{s(g^a) \dot{g}^a + \mathcal{I}_{\mathbb{R}^+}(\dot{g}^a)}_{\phi^a(g^a, \dot{g}^a)}. \quad (5.87)$$

5.4.3 Caractérisation des constantes

Les potentiels proposés contiennent des caractéristiques matériau : d'une part le coefficient de frottement (CoF), et d'autre part les paramètres de la loi de décohésion (p_M et g_M pour la loi affine (5.79) proposée).

Le coefficient de frottement a été caractérisé sur une gamme de pression et de vitesse de déplacement représentative du procédé de mise en forme ; cela a été présenté dans

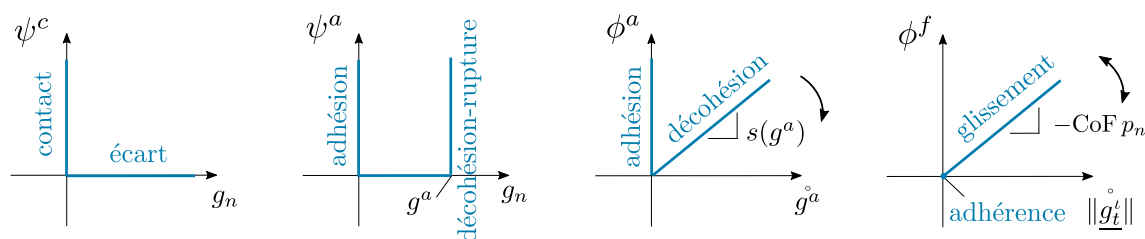


Figure 5.13 – Contributions aux pseudo-potentiels d'énergie libre et de dissipation du modèle couplant contact unilatéral, frottement et adhésion dans le modèle de Talon & Curnier.

le chapitre 4 (p.78). Des évolutions linéaires, croissante en fonction de la vitesse (figure 4.5 p.81) et décroissante (figure 4.4 p.80) en fonction de la pression, ont été observées. On se propose de considérer pour commencer que la mise en forme s'opère à vitesse constante et de se concentrer sur l'effet de la pression P , en décrivant l'évolution du coefficient de frottement avec une relation affine :

$$\text{CoF}(P) = a_P P + b_P \quad (5.88)$$

où les a_P et b_P sont des constantes matériau connues.

Pour les constantes d'adhésion, on peut utiliser des ordres de grandeurs de la littérature sur des pré-imprégnés d'époxy (aucune information de ce type n'a été trouvée pour les thermoplastiques au-dessus de leur température de fusion) [88,90] :

$$p_M = 0,02 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} \quad ; \quad g_M = 1 \text{ mm} \quad . \quad (5.89)$$

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons posé le cadre de la mécanique des milieux continus en grandes transformations nécessaire pour décrire les grands déplacements et *a priori* grandes rotations et grandes déformations qui interviennent lors de la mise en forme d'un empilement de renforts HiTape®. Nous avons présenté le problème mécanique, et vu que pour sa résolution la connaissance de la loi constitutive de l'empilement de renforts est nécessaire. L'établissement de cette loi constitutive globale a été l'objet de ce chapitre.

Une loi constitutive hyperélastique a tout d'abord été sélectionnée pour modéliser le comportement du milieu intra-p pli du renfort. Ainsi, quatre modes de déformation indépendants sont mis en évidence : élongation, compaction latérale, compaction isochore et cisaillement. En faisant le lien avec le travail de compréhension et de caractérisation du comportement intra-p pli du renfort HiTape® présenté dans le chapitre 3, des potentiels de déformation à la fois admissibles d'un point de vue thermodynamique, et représentatifs du comportement du renfort HiTape® ont été proposés. Dans son état actuel, ce modèle de comportement ne permet cependant pas de traduire l'influence du comportement en flexion hors-plan sur le comportement global de l'empilement ; des pistes de réflexion ont été proposées pour des travaux ultérieurs.

Ensuite, afin de prendre en compte l'influence de l'interface entre les plis sur le comportement global d'un empilement de renforts, une approche cohésive a été sélectionnée. En se plaçant dans le cadre des matériaux standards généralisés, un pseudo-potentiel d'énergie libre et un pseudo-potentiel de dissipation sont attribués à l'interface entre les plis, afin de décrire les phénomènes de dissipations mécaniques liés au frottement inter-ply (caractérisé dans le chapitre 4) et à l'adhésion/décohésion entre les plis.

Finalement, nous disposons à ce stade d'une loi de comportement pour un empilement de renforts à mettre en forme. L'objectif du travail de thèse étant la simulation numérique de cette étape de mise en forme, nous allons maintenant nous intéresser à l'aspect numérique de cette mise en œuvre.

6

Modélisation numérique et résolution par la MEF du problème de l'équilibre d'un solide hyperélastique en grandes transformations

Sommaire

6.1	Formulation et résolution du problème mécanique avec un solide hyperélastique	126
6.1.1	Formulation	126
6.1.2	Discrétisation et approximation éléments finis	129
6.1.3	Résolution	130
6.2	Implémentation et validation de la loi hyperélastique . . .	132
6.2.1	Implémentation	132
6.2.2	Validation de l'implémentation	132
6.2.3	Cohérence des résultats dans le cas des petites perturbations	135
6.3	Simulation de l'essai de flexion	137
6.3.1	Description du cas-test 6-B	137
6.3.2	Cas d'un comportement isotrope	138
6.3.3	Cas d'un comportement dominé par la direction des fibres .	138
6.4	Perspective : description du comportement de flexion spécifique dans un cadre éléments finis	141

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la formulation locale d'un problème mécanique décrivant l'équilibre d'un seul solide. Nous avons vu que pour la résolution de ce problème mécanique, nous avons besoin d'équations supplémentaires, données par la loi de comportement hyperélastique que nous avons retenue et caractérisée pour notre matériau. Dans ce chapitre, nous présentons la formulation et la résolution de ce problème mécanique par la Méthode des Éléments Finis¹. Nous nous intéressons spécifiquement à l'équilibre d'un seul solide au comportement hyperélastique, figurant une seule couche de renfort HiTape®. L'implémentation de la loi de comportement hyperélastique sélectionnée et sa validation sont explicitées, puis nous présentons un cas-test.

L'implémentation des lois et les calculs sont réalisés avec la suite logicielle *Z-set*², initialement développée par le Centre des Matériaux de Mines ParisTech et l'ONERA dans les années 80. Aujourd'hui, d'autres partenaires y contribuent, qu'ils soient industriels comme SAFRAN ou académiques comme Mines Saint-Étienne. Les utilisateurs du code appartiennent à des secteurs variés de l'industrie, tels que l'aéronautique (SAFRAN), l'énergie (EDF, CEA, Areva, *etc.*), l'automobile (Renault, PSA Peugeot Citroën, Siemens, Faurecia, *etc.*), le biomédical (Medtronic) ou les matériaux (3M, Saint-Gobain, *etc.*). Plusieurs modules existent ; ceux qui nous intéressent sont :

- le solveur éléments finis *Zébulon* implicite ou explicite en grandes déformations ;
- la bibliothèque de lois de comportement *Z-mat* qui peut être appelée par d'autres codes de calcul tels qu'Abaqus ou Ansys par exemple, c'est le point fort de *Z-set* ;
- *Z-master* pour la visualisation des résultats et leur post-traitement.

6.1 Formulation et résolution du problème mécanique avec un solide hyperélastique

Nous nous proposons de considérer dans un premier temps un seul solide hyperélastique. La formulation forte du problème d'équilibre de ce solide a été présentée dans le chapitre précédent (section 5.1.4 p.93). Nous reformulons maintenant ce problème afin de le résoudre par la méthode des éléments finis.

6.1.1 Formulation

Nous posons tout d'abord quelques notations : soient \mathcal{V} et \mathcal{V}_0 les espaces vectoriels des champs de déplacement cinématiquement admissibles satisfaisant respectivement les conditions aux limites de Dirichlet sur Γ^D et les conditions aux limites nulles homogènes sur Γ^D . Ce sont des sous-espaces de l'espace de Sobolev d'ordre 1 ($\mathcal{H}^1(\Omega_0)$)^{dim}

1. MEF : Méthode des Éléments Finis
2. <http://www.zset-software.com/>

que nous précisons également.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \{ \underline{u} \mid \underline{u} \in (\mathcal{H}^1(\Omega_0))^{dim} \text{ et } \underline{u} = \underline{u}^D \text{ sur } \Gamma^D \} \\
 \mathcal{V}_0 &= \{ \underline{w} \mid \underline{w} \in (\mathcal{H}^1(\Omega_0))^{dim} \text{ et } \underline{w} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^D \} \\
 (\mathcal{H}^1(\Omega_0))^{dim} &= \{ \underline{u} \mid \underline{u} \in (\mathcal{L}^2(\Omega_0))^{dim} \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \dots, dim\}^2, \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \in \mathcal{L}^2(\Omega_0) \}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

où $\mathcal{L}^2(\Omega_0)$ est l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur le domaine Ω_0 , et où dim est la dimension du problème.

D'après le théorème de l'énergie potentielle, le déplacement solution \tilde{u} du problème mécanique de l'équilibre d'un solide Ω minimise son énergie potentielle \mathcal{U}_Ω . L'écriture de l'énergie potentielle du solide Ω fait intervenir d'une part le travail des forces extérieures, écrit par rapport à la configuration initiale \mathcal{C}_0 :

$$\mathcal{W}_{ext}(\underline{u}) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{f}_v \cdot \underline{u} \, dV_0 + \int_{\partial\Omega_0} \underline{f}_{s_0} \cdot \underline{u} \, dS_0, \tag{6.2}$$

et d'autre part l'énergie interne du solide Ω que nous avons introduite dans (5.25). Comme le comportement du solide peut être décrit à l'aide de la densité d'énergie de déformation W que nous avons construite dans le chapitre précédent, son énergie interne prend la forme suivante :

$$\mathcal{E}_{int}(\underline{u}) = \int_{\Omega_0} W(\underline{C}) \, dV_0. \tag{6.3}$$

Le problème à résoudre est synthétisé dans l'encadré 6.1.

Problème \mathcal{P}_Ω

Trouver $\tilde{u} \in \mathcal{V}$ tel que :

$$\mathcal{U}_\Omega(\tilde{u}) = \min_{\underline{u} \in \mathcal{V}} \mathcal{U}_\Omega(\underline{u}) \tag{6.4}$$

où :

$$\mathcal{U}_\Omega(\underline{u}) = \underbrace{\int_{\Omega_0} W(\underline{C}) \, dV_0}_{\mathcal{E}_{int}(\underline{u})} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{f}_v \cdot \underline{u} \, dV_0 - \int_{\partial\Omega_0} \underline{f}_{s_0} \cdot \underline{u} \, dS_0}_{-\mathcal{W}_{ext}(\underline{u})}.$$

Encadré 6.1 – Problème mécanique \mathcal{P}_Ω de minimisation de l'énergie potentielle d'un solide hyperélastique.

Une condition nécessaire pour que $\tilde{\underline{u}}$ soit solution est que la dérivée directionnelle de \mathcal{U}_Ω en $\tilde{\underline{u}}$, le long de la direction $\delta\underline{u} \in \mathcal{V}_0$ quelconque, s'annule ; c'est-à-dire [148] :

$$\forall \delta\underline{u} \in \mathcal{V}_0, \delta\mathcal{U}_\Omega(\tilde{\underline{u}})[\delta\underline{u}] = 0. \quad (6.5)$$

En notant $\underline{u}' = \underline{u} \otimes \underline{\nabla} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}}$, la première variation de \mathcal{U}_Ω s'écrit :

$$\delta\mathcal{U}_\Omega = \int_{\Omega_0} \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} : \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{u}'}} : \delta\underline{\underline{u}'} dV_0 - \delta\mathcal{W}_{ext},$$

où $\delta\mathcal{W}_{ext} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{f}_v \cdot \delta\underline{u} dV_0 - \int_{\partial\Omega_0} \underline{f}_{s_0} \cdot \delta\underline{u} dS_0 + \int_{\partial\Omega_0} \delta\underline{u} \cdot \frac{\partial \underline{f}_{s_0}}{\partial \underline{u}} \cdot \underline{u} dS_0$, en considérant que l'effort volumique \underline{f}_v est indépendant du déplacement \underline{u} . Après avoir rappelé la forme de $\underline{\underline{C}}$, on peut écrire les deux termes suivants à l'aide des opérateurs $\underline{\otimes}$ et $\underline{\bar{\otimes}}$ définis dans l'annexe B (le deuxième terme sera utile dans la suite) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{u}'} + \underline{\underline{u}'^T} + \underline{\underline{u}'^T} \cdot \underline{\underline{u}'}, \\ \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{u}'}} &= \underline{\underline{C}'} = \underline{\underline{I}} \underline{\otimes} (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{u}'}) + (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{u}'}) \underline{\bar{\otimes}} \underline{\underline{I}}, \\ \frac{\partial \underline{\underline{C}'}}{\partial \underline{\underline{u}'}} &= \underline{\underline{C}''} = \frac{\partial^2 \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{u}'} \otimes \partial \underline{\underline{u}'}} = 2 \underline{\underline{I}} \underline{\otimes} \underline{\underline{I}} \underline{\bar{\otimes}} \underline{\underline{I}}. \end{aligned}$$

La condition nécessaire (6.5) pour que $\tilde{\underline{u}}$ soit solution s'écrit finalement :

$$\forall \delta\underline{u} \in \mathcal{V}_0, \delta\mathcal{U}_\Omega(\tilde{\underline{u}})[\delta\underline{u}] = \int_{\Omega_0} \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{C}'} : \delta\underline{\underline{u}'} dV_0 - \delta\mathcal{W}_{ext} = 0. \quad (6.6)$$

Pour résoudre l'équation (6.6) dans un schéma itératif incrémental, nous aurons besoin de caractériser la deuxième variation du problème à résoudre :

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{U}_\Omega &= \delta(\delta\mathcal{U}_\Omega) \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{C}'} : \delta\underline{\underline{u}'} \right) : \underline{\underline{C}'} : \delta\underline{\underline{u}'} dV_0 \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} : \left(\underline{\underline{C}''} : \delta\underline{\underline{u}'} \right) : \delta\underline{\underline{u}'} dV_0 - \delta^2 \mathcal{W}_{ext} \quad (6.7) \\ \delta^2 \mathcal{U}_\Omega &= \int_{\Omega_0} \delta\underline{\underline{u}'} : \underbrace{\left[\frac{1}{4} \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}'^2} : \delta\underline{\underline{u}'} + 2 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} \right]}_{\underline{\underline{K}}_\Omega^t} : \delta\underline{\underline{u}'} dV_0 - \delta^2 \mathcal{W}_{ext} \end{aligned}$$

où $\delta^2 \mathcal{W}_{ext} = \int_{\partial\Omega_0} \delta\underline{u} \cdot \frac{\partial^2 \underline{f}_{s_0}}{\partial \underline{u} \partial \underline{u}} \cdot \underline{u} \cdot \delta\underline{u} dS_0 + 2 \int_{\partial\Omega_0} \delta\underline{u} \cdot \frac{\partial \underline{f}_{s_0}}{\partial \underline{u}} \cdot \delta\underline{u} dS_0$. Ce dernier terme est en général intégré au problème global tangent prenant en compte l'évolution d'une surface lorsqu'elle est soumise à une force suiveuse [149]. Le terme $\underline{\underline{K}}_\Omega^t$ représente la rigidité tangente interne du système à résoudre, et nous voyons apparaître la contribution du

tenseur des modules d'élasticité tangents \mathcal{L} dont nous avons établi la forme dans le chapitre précédent (voir (5.52) et (5.53) p.104).

Nous utilisons maintenant la méthode des éléments finis pour résoudre ce problème (6.5), *i.e.* trouver la solution $\tilde{\underline{u}}$ du problème \mathcal{P}_Ω (encadré 6.1).

6.1.2 Discrétisation et approximation éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à résoudre le problème continu sur des sous-domaines définis par une discrétisation géométrique. Les nœuds qui servent à la discrétisation géométrique sont porteurs des inconnues du problème. Le domaine de référence Ω_0 est ainsi divisé en éléments isoparamétriques « volumiques », comme représenté sur la figure 6.1 suivante. Le milieu continu est alors remplacé par un milieu discret dans lequel on recherche la solution uniquement au niveau des nœuds en travaillant au niveau élémentaire. En tout point du milieu, la valeur du champ de déplacement est alors approchée comme la combinaison de fonctions et des inconnues nodales ; ces approximations sont désignées par l'exposant « h », par exemple \underline{u}^h . On introduit les espaces discrétisés $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_0^h \subset \mathcal{V}_0$ de dimensions finies pour le champ de déplacement discrétisé.

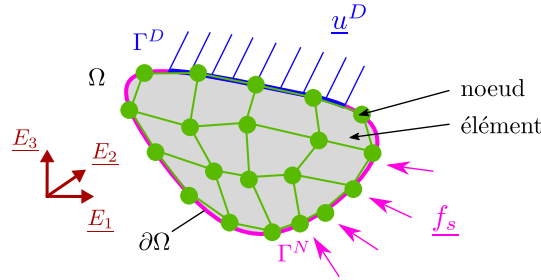


Figure 6.1 – Discrétisation du domaine continu étudié.

On adopte une représentation vectorielle, telle que le vecteur $\{U\}$ contient l'ensemble des degrés de liberté en déplacement du problème, *i.e.* de tous les nœuds du maillage. Ce vecteur global est construit par assemblage des contributions élémentaires de chaque élément volumique e_v , notées $\{U^{e_v}\}$. Le déplacement en tout point d'un élément volumique e_v , quelconque est alors approché par la somme des fonctions d'interpolations nodales multipliées par les déplacements nodaux :

$$\{\underline{u}^{e_v}\} \approx \{\underline{u}^{e_v h}\} = [N^{e_v}] \{U^{e_v}\} \tag{6.8}$$

où $[N^{e_v}]$ est la matrice des fonctions de forme quadratiques (approximation « P2-continue ») dans notre cas. Dans la suite, on utilise la notation de Voigt [98] qui permet d'écrire sous la forme d'un vecteur la représentation matricielle d'un tenseur d'ordre 2 (par exemple $\{\underline{\underline{u}}^{e_v}\}$ pour $\underline{\underline{u}}^{e_v}$), et de la même façon sous la forme d'une matrice la représentation d'un tenseur d'ordre 4 (par exemple $\{\underline{\underline{\underline{K}}}_\Omega^t\}$ pour $\underline{\underline{\underline{K}}}_\Omega^t$). On peut alors approcher le gradient du déplacement en tout point de l'élément e_v à l'aide de la matrice

gradient des fonctions de forme, de la même manière que pour le déplacement :

$$\{\underline{u}'^{e_v}\} \approx \{\underline{u}'^{e_v h}\} = \frac{\partial [N^{e_v}]}{\partial \underline{X}} \{U^{e_v}\} = [N'^{e_v}] \{U^{e_v}\}. \quad (6.9)$$

Une intégrale continue sur le domaine global est classiquement approchée numériquement par la méthode de quadrature de Gauss, *via* un passage par un élément de référence (de volume Ω^{ref} et d'élément de volume dV^{ref}) défini sur un espace normalisé plus propice à conduire les intégrations numériques. L'intégration continue sur le domaine se traduit par la somme sur les N_v éléments du maillage associés à un élément de référence :

$$\int_{\Omega_0} \square dV_0 \approx \sum_{e_v=1}^{N_v} \int_{\Omega_0^{e_v}} \square dV_0^{e_v} = \sum_{e_v=1}^{N_v} \int_{\Omega^{ref}} \square J_{e_v} dV^{ref} \approx \sum_{e_v=1}^{N_v} \sum_{g_v=1}^{G_v} w_{g_v} \square(\underline{a}_{g_v}) J_{e_v}(\underline{a}_{g_v}) \quad (6.10)$$

où apparaissent les positions \underline{a}_{g_v} des points de Gauss g_v de l'élément volumique e_v , leurs poids respectifs w_{g_v} et le Jacobien $J_{e_v}(\underline{a}_{g_v})$ de la transformation entre l'élément de référence et l'élément e_v . Le problème (6.5) peut ainsi être discrétisé de la manière suivante :

$$\forall \{\delta U\} \in \mathcal{V}_0^h, \sum_{e_v=1}^{N_v} \left(\int_{\Omega_0^{e_v}} \left\{ \frac{\partial W}{\partial \underline{C}} \right\}^T [\underline{C}'] [N'^{e_v}] \{\delta U^{e_v}\} dV_0^{e_v} - \{\delta U^{e_v}\}^T \{F^{ext e_v}\} \right) = 0. \quad (6.11)$$

où $\{F^{ext e_v}\}$ résulte de la discrétisation de $\delta \mathcal{W}_{ext}$. Finalement, compte tenu des conditions sur $\{\delta U\}$, le problème à résoudre peut s'écrire sous la forme d'un vecteur résidu $\{R\}$ que l'on cherche à annuler :

$$\{R\} = \sum_{e_v=1}^{N_v} \left(\int_{\Omega_0^{e_v}} \left\{ \frac{\partial W}{\partial \underline{C}} \right\}^T [\underline{C}'] [N'^{e_v}] dV_0^{e_v} - \{F^{ext e_v}\} \right) = \{0\}. \quad (6.12)$$

La norme de ce vecteur résidu $\|\{R\}\|$ constitue ainsi une mesure de la première variation de \mathcal{U}_Ω au voisinage de la solution.

6.1.3 Résolution

En pratique, on recherche une solution telle que la norme du résidu est inférieure à une tolérance ε bien choisie, c'est-à-dire $\|\{R\}\| \leq \varepsilon$. Pour cela on utilise la méthode de prédiction-correction itérative de Newton-Raphson dont nous rappelons le principe général ici.

Principe de la méthode de Newton-Raphson On recherche la racine $\tilde{\underline{u}}$ d'une fonction vectorielle $\underline{f}(\underline{u})$, *i.e.* $\tilde{\underline{u}} = \operatorname{argmin} \underline{f}(\underline{u})$. La méthode de Newton-Raphson consiste à

corriger incrémentalement une prédiction \underline{u}^0 de la solution par un processus itératif, afin de la faire converger vers la solution recherchée $\tilde{\underline{u}}$. A l'itération $i + 1$, la solution est égale à la somme de la prédiction, la correction incrémentale $\Delta\underline{u}^{(i)}$ et la correction de l'itération $\delta\underline{u}^{(i+1)}$:

$$\underline{u}^{(i+1)} = \underline{u}^{(0)} + \Delta\underline{u}^{(i+1)} = \underline{u}^{(0)} + \Delta\underline{u}^{(i)} + \delta\underline{u}^{(i+1)} = \underline{u}^{(i)} + \delta\underline{u}^{(i+1)}. \quad (6.13)$$

L'inconnue $\delta\underline{u}^{(i+1)}$ est alors obtenue avec le développement limité à l'ordre 1 de la fonction \underline{f} au voisinage de la solution à l'itération précédente $\underline{u}^{(i)}$:

$$\underline{f}(\underline{u}^{(i+1)}) \approx \underline{f}(\underline{u}^{(i)}) + \frac{\partial \underline{f}(\underline{u}^{(i)})}{\partial \underline{u}} \cdot \delta\underline{u}^{(i+1)}. \quad (6.14)$$

En cherchant à annuler la fonction \underline{f} à l'itération $(i + 1)$, on trouve :

$$\delta\underline{u}^{(i+1)} = - \left(\frac{\partial \underline{f}(\underline{u}^{(i)})}{\partial \underline{u}} \right)^{-1} \cdot \underline{f}(\underline{u}^{(i)}). \quad (6.15)$$

Cette démarche est répétée jusqu'à ce que l'image par \underline{f} du résultat $\underline{u}^{(i+1)}$ soit inférieure (en norme) à la tolérance choisie ε . La méthode est illustrée sur la figure 6.2 dans un cas de dimension 1.

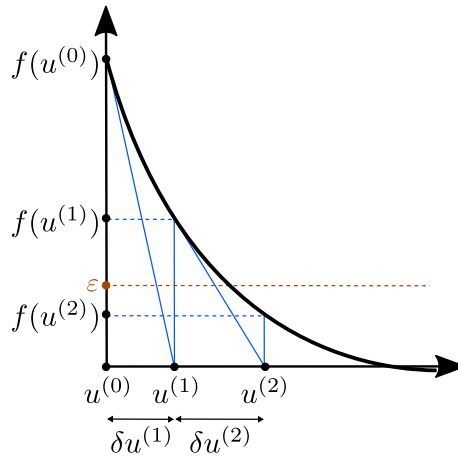


Figure 6.2 – Illustration de la méthode de résolution de Newton-Raphson, dans le cas où une solution admissible est trouvée au bout de deux itérations.

Application En vue d'utiliser cette méthode pour résoudre notre problème, le chargement est découpé en incréments de temps fictif. On utilise pour la prédiction à un instant $c + 1$ la solution convergée à l'instant précédent, et $\underline{0}$ pour le premier instant.

Résoudre le problème discrétisé (6.11) en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson revient alors à rechercher la correction de l'itération $\{\Delta U\}_{c+1}^{(i+1)}$ à l'itération $i + 1$ de

l'incrément $c + 1$ en résolvant le système suivant, issu de (6.15) :

$$\underbrace{\left[\frac{\partial \{R\}}{\partial \{U\}} \right]_{c+1}}_{[K_{\Omega}^t]_{c+1}} \{\Delta U\}_{c+1}^{(i+1)} = - \{R\}_{c+1}^{(i)} \quad (6.16)$$

où $[K_{\Omega}^t]$ est la matrice tangente globale correspondant à l'opérateur tangent \underline{K}_{Ω}^t que nous avons fait apparaître en calculant la deuxième variation de \mathcal{U}_{Ω} (6.7), en négligeant les termes non-linéaires dans les efforts extérieurs. Elle est obtenue par assemblage des contributions élémentaires calculées en chaque point de Gauss, en faisant notamment appel à la matrice des rigidités tangentes $[\mathcal{C}]$ liée au comportement, comme nous l'avons établi dans (6.7).

6.2 Implémentation et validation de la loi hyperélastique

6.2.1 Implémentation

Nous implémentons dans Z-set la loi hyperélastique spécifique sélectionnée *via* la création d'une nouvelle loi de comportement. La figure 6.3 suivante présente les entrées et sorties de cette loi de comportement qui est appelée au niveau de chaque point d'intégration de Gauss.

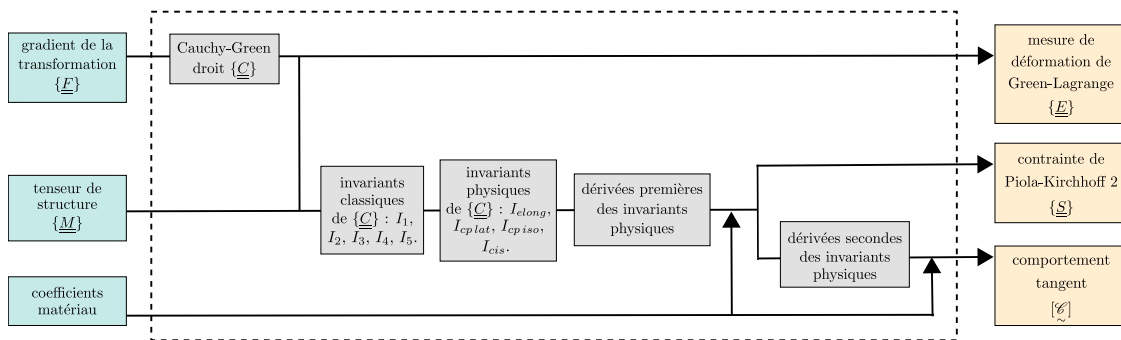


Figure 6.3 – *Module fonctionnel de la loi de comportement hyperélastique appelée au niveau de chaque point d'intégration.*

Afin de valider d'une part la bonne implémentation de cette nouvelle loi de comportement, et d'autre part sa cohérence avec un comportement linéaire élastique dans un cadre de petites perturbations, le cas-test 6-A de validation suivant est réalisé.

6.2.2 Validation de l'implémentation

Description du cas-test 6-A

On considère un solide cubique de côté 1 mm, constitué de $5 \times 5 \times 5$ éléments volumiques hexaédriques quadratiques, illustré sur la figure 6.4a. Ce solide est soumis

successivement à chacun des quatre modes de déformation que nous avons introduits dans la figure 5.5 (p.102) : élongation, compaction latérale, compaction isochore, et cisaillement, comme représenté sur la figure 6.4b. Les conditions aux limites en déplacement sont illustrées sur la figure 6.5.

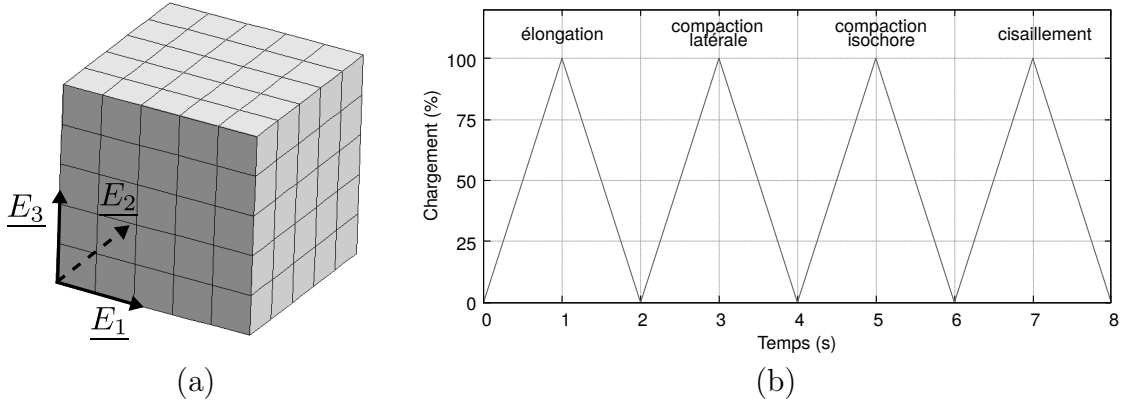


Figure 6.4 – Maillage utilisé (a) et chargement imposé (b) lors du cas-test 6-A de validation de la loi hyperélastique implémentée.

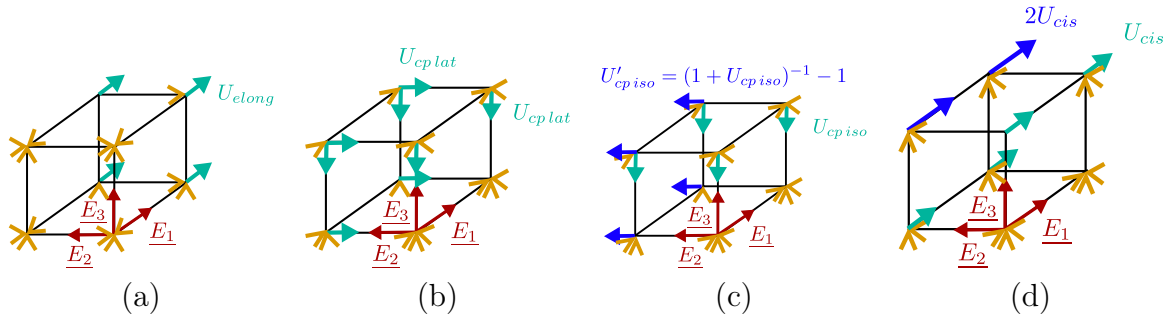


Figure 6.5 – Conditions aux limites pour chaque sous-cas-test du cas-test 6-A de validation de la loi hyperélastique : élongation (a), compaction latérale (b), compaction isochore (c) et cisaillement (d).

A des fins de comparaison comme nous allons le voir, on donne aux quatre contributions à l'énergie de déformation une forme quadratique du type $W_{\square} = K_{\square} I_{\square}^2$. Le comportement matériau est donc décrit par sa direction d'anisotropie \underline{M} et quatre constantes que nous noterons K_{elong} , $K_{cp lat}$, $K_{cp iso}$ et K_{cis} . Nous choisissons : $K_{elong} = 1,0 \times 10^5$ MPa, $K_{cp lat} = K_{cp iso} = 2,0 \times 10^5$ MPa et $K_{cis} = 0,5 \times 10^5$ MPa.

On impose tout d'abord : $U_{elong} = 2 \times 10^{-1}$ mm, $U_{cp lat} = -1 \times 10^{-1}$ mm, $U_{cp iso} = 2,5 \times 10^{-1}$ mm et $U_{cis} = 2 \times 10^{-1}$ mm (en référence à la figure 6.5). Pour chacun des quatre modes de déformation, l'état de contrainte est illustré sur la figure 6.6.

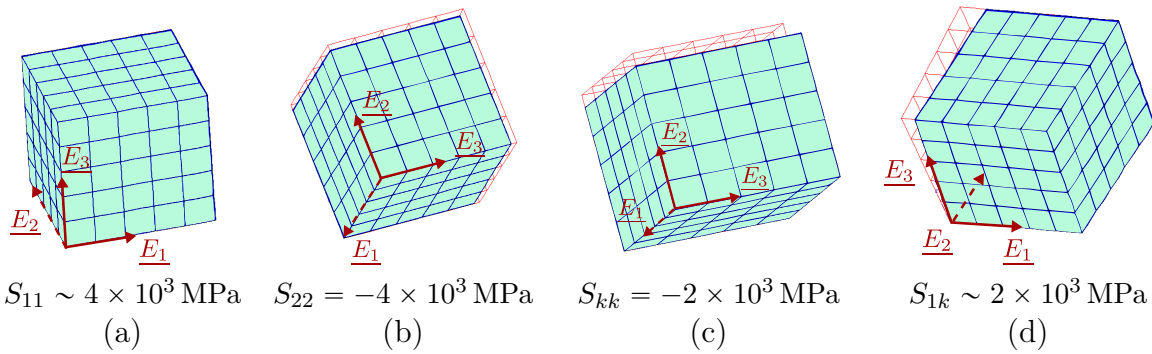


Figure 6.6 – Etat de contrainte moyen et visualisation (avec une amplification de 2) de la déformée pour chaque sous-cas-test du cas-test 6-A de validation de la loi hyperélastique : élongation (a), compaction latérale (b), compaction isochore (c) et cisaillement (d) ($k = 2, 3$).

Inter-indépendance des potentiels

A chaque instant sont extraites au niveau d'un point d'intégration d'un élément situé au centre du cube les quatre contributions W_{elong} , $W_{cp\ lat}$, $W_{cp\ iso}$ et W_{cis} à l'énergie de déformation, correspondant chacune à un mode de déformation supposé indépendant des autres. Ces résultats sont présentés sur la figure 6.7. On observe qu'à chaque instant, la seule contribution non nulle est bien celle du mode de déformation activé. Cela confirme que les modes de déformation sont bien indépendants.

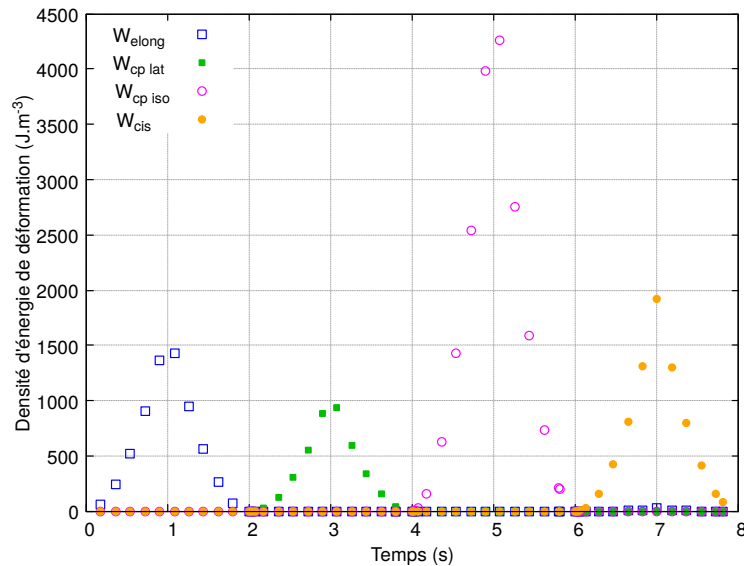


Figure 6.7 – Vérification de l'inter-indépendance des énergies de déformation dans la loi hyperélastique implémentée au niveau d'un point d'intégration.

A titre d'information, on donne dans l'annexe C les évolutions des invariants physiques d'une part, et des différentes contributions du potentiel hyperélastique d'autre part, en fonction de chacun des invariants classiques.

Calcul des contraintes

A chaque instant, nous récupérons le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ au niveau du même point d'intégration. Nous comparons alors la densité d'énergie imposée comme donnée d'entrée dans la loi de comportement – *i.e.* la somme des quatre contributions W_{elong} , $W_{cp\ lat}$, $W_{cp\ iso}$ et W_{cis} – à la densité d'énergie obtenue par post-traitement à partir de la contrainte et de la déformation au niveau de ce point d'intégration : $\frac{1}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{E}}$. Ces deux informations sont tracées sur la figure 6.8, et nous observons que les points sont bien superposés. Cela valide le calcul des contraintes réalisé dans la loi de comportement, et donc les expressions des dérivées premières des invariants physiques auxquelles il fait appel.

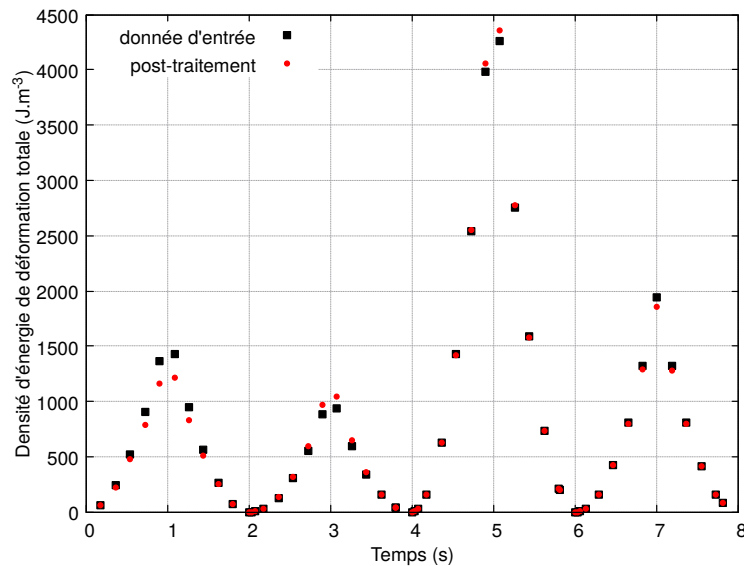


Figure 6.8 – Vérification du calcul des contraintes au niveau d'un point d'intégration dans la loi hyperélastique implémentée.

Calcul des matrices des rigidités tangentes

En vue de vérifier les expressions des dérivées secondes des invariants physiques que nous avons calculées analytiquement, nous implémentons également leur calcul par perturbation comme détaillé dans l'annexe B.5.2. Des valeurs numériques similaires de ces termes sont obtenues avec d'une part les expressions analytiques et d'autre part celles calculées par perturbation, validant ainsi les expressions analytiques. Dans les simulations présentées par la suite, les expressions analytiques sont privilégiées pour limiter le temps de calcul.

6.2.3 Cohérence des résultats dans le cas des petites perturbations

On se place cette fois dans le cadre des petites déformations en imposant : $U_{elong} = 1 \times 10^{-3}$ mm, $U_{cp\ lat} = -1 \times 10^{-3}$ mm, $U_{cp\ iso} = 1 \times 10^{-3}$ mm et $U_{cis} = 1 \times 10^{-3}$ mm

(en référence à la figure 6.5).

Nous comparons les solutions obtenues avec trois lois de comportement élastiques isotropes distinctes :

- la loi de Hooke isotrope en petites déformations qui correspond à un potentiel de Saint-Venant dans le cas isotrope :

$$W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \frac{E}{2(1+\nu)} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (6.17)$$

où E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson ;

- la loi hyperélastique isotrope de Mooney-Rivlin que nous avons citée dans (5.43) (p.100) et que nous rappelons ici :

$$W_{MR}(I_1, I_2, I_3) = c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_2 - 3) - (c_1 + 2c_2) (I_3 - 1) + c_3 \frac{c_1 + c_2}{2} (I_3 - 1)^2$$

où les coefficients c_1 , c_2 et c_3 sont des constantes matériau, et I_1 , I_2 , et I_3 les invariants classiques de $\underline{\underline{C}}$ que l'on peut trouver en annexe B.1 ;

- et la loi hyperélastique implémentée dans sa version isotrope.

Les coefficients de ces différentes lois sont choisis de sorte à ce qu'elles décrivent des comportements équivalents en petites déformations pour les modes considérés, ce qui se traduit par les relations entre les coefficients présentées dans le tableau 6.9. On prend $E = 1,0 \times 10^5$ MPa.

<i>Loi de comportement</i>	linéaire élastique (existante)	Mooney-Rivlin (existante)	hyperélastique (implémentée)
<i>Coefficient matériau</i>	E $\nu = 0$	$c_1 = E/8$ $c_2 = E/8$ $c_3 = 1$	$K_{elong} = E$ $K_{cp\ lat} = 2E$ $K_{cp\ iso} = 2E$ $K_{cis} = E/2$

Tableau 6.9 – Relations d'équivalence en petites perturbations entre les coefficients matériau de trois lois de comportement isotropes.

Le tableau 6.10 recense la norme du vecteur des efforts de réaction correspondant aux déplacements imposés pour chacun des quatre modes de déformations, et pour les trois comportements testés. Des résultats satisfaisants sont obtenus avec une erreur relative entre deux comportements inférieure à 1%. Cependant, le temps de calcul CPU³ est fortement impacté : il est de l'ordre de 10s CPU⁴ pour chaque mode de déformation de notre cas-test 6-A dans le cas de la loi hyperélastique sélectionnée, contre environ 1s CPU dans le cadre linéaire. Cependant, cela est cohérent avec la loi de Mooney-Rivlin testée (environ 5s CPU).

3. Calculs réalisés sur un processeur Intel[®] Core[™] i7-4710MQ CPU @ 2,50 GHz × 8 (1 seul cœur utilisé).

4. CPU : Central Processing Unit

<i>Loi de comportement</i>	linéaire élastique (existante)	Mooney-Rivlin (existante)	hyperélastique (implémentée)
<i>Solution numérique</i>			
élongation	26,68 N	26,72 N	26,64 N
compaction latérale	37,74 N	37,45 N	37,79 N
compaction isochore	37,72 N	37,72 N	37,72 N
cisaillement	12,35 N	12,35 N	12,35 N
<i>Temps de calcul CPU</i>			
élongation	0,74 s	5,22 s	11,86 s
compaction latérale	0,74 s	5,14 s	13,33 s
compaction isochore	0,68 s	5,15 s	13,57 s
cisaillement	0,76 s	5,04 s	13,86 s

Tableau 6.10 – Comparaison des solutions (norme du vecteur des efforts de réaction) et temps de calcul CPU pour la phase de charge uniquement, obtenus avec les lois de comportement linéaire élastique, hyperélastique de Mooney-Rivlin et hyperélastique implémentée, pour chacune des quatre sollicitations en petites perturbations.

Ainsi, l'implémentation de la loi hyperélastique est validée, et sa cohérence avec d'autres lois dans un cadre linéaire isotrope est vérifiée. Dans la partie suivante, nous nous intéressons à un cas-test correspondant à l'essai de flexion réalisé expérimentalement et dont nous avons présenté les résultats dans le chapitre 3.

6.3 Simulation de l'essai de flexion

6.3.1 Description du cas-test 6-B

Ce cas-test décrit un essai de flexion sur pli unitaire. On considère pour cela un solide de dimensions $h_1 \times h_2 \times h_3$ avec $h_1 = 150$ mm, $h_2 = 50$ mm et $h_3 = 10$ mm comme schématisé sur la figure 6.11a. Les conditions aux limites, schématisées sur la figure 6.11b, sont imposées en déplacement de façon monotone, avec $U_3 = -20$ mm. Il s'agit d'un essai en grands déplacements avec $U_3 = -2 h_3$. Le solide est maillé avec $20 \times 8 \times 2$ éléments volumiques hexaédriques quadratiques.

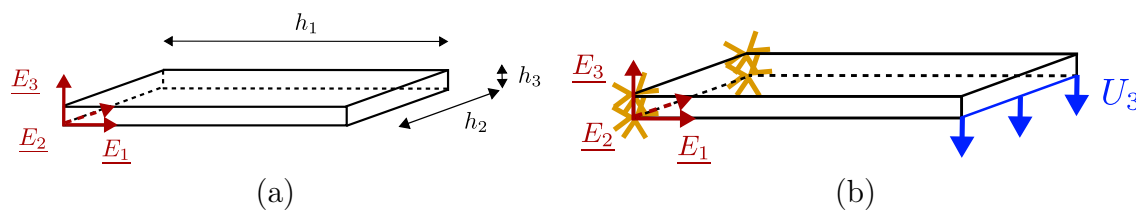


Figure 6.11 – Géométrie (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 6-B.

6.3.2 Cas d'un comportement isotrope

Le solide est tout d'abord doté de la loi de comportement hyperélastique implémentée, avec des coefficients matériau tels qu'elle décrit un comportement isotrope avec $E = 2 \times 10^5$ MPa et $\nu = 0$, ce qui correspond à $K_{elong} = E$, $K_{cplat} = K_{cpiso} = 2E$ et $K_{cis} = E/2$ (voir tableau 6.9). Sur la figure 6.12, nous visualisons la densité d'énergie totale (*i.e.* la somme des contributions de chacun des modes) en chaque point d'intégration. Le mode de déformation prépondérant dans cet essai de flexion est celui d'élongation, puisque l'intra-dos et l'extra-dos de la structure fléchissante sont respectivement en compression et traction longitudinales – on rappelle que \underline{E}_1 correspond à la direction initiale des fibres. La contribution du mode de déformation par élongation à la densité d'énergie de déformation totale au voisinage de l'encastrement représente plus de 99%. Comme pour le cas-test précédent, nous vérifions que le résultat numérique de la somme des réactions aux nœuds sur lesquels le déplacement U_3 est imposé est le même qu'avec d'autres comportements élastiques isotropes dans un cadre de grands déplacements – comportements hyperélastique de Mooney-Rivlin et linéaire élastique présentés dans le tableau 6.9 –, avec une erreur relative inférieure à 0,2%. L'erreur relative par rapport à la solution analytique (cadre linéaire élastique) est de 3%; elle est attribuée aux grands déplacements imposés.

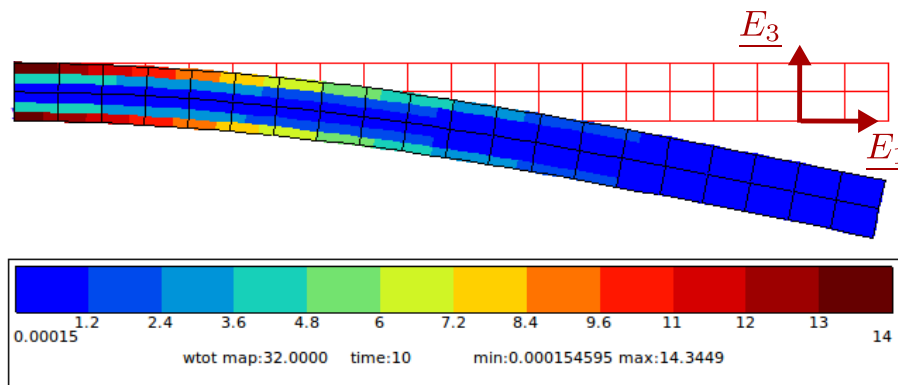


Figure 6.12 – Visualisation de la déformée et de la distribution de la densité d'énergie totale lors du cas-test 6-B pour un comportement hyperélastique isotrope.

6.3.3 Cas d'un comportement dominé par la direction des fibres

Afin de prendre en compte l'influence prépondérante de la rigidité longitudinale d'un renfort unidirectionnel due aux fibres, nous utilisons maintenant la loi de comportement hyperélastique implémentée, avec K_{elong} variable et $K_{cplat} = K_{cpiso} = K_{cis} = 1 \times 10^2$ MPa. Sur la figure 6.13, une visualisation de la déformée est présentée pour différentes valeurs de K_{elong} , avec, pour chaque cas, le poids de chacune des quatre contributions à la densité d'énergie de déformation totale obtenue au niveau de la zone de déformation maximale (proche de l'encastrement). Sur la figure 6.14 suivante, les différentes contributions sont illustrées dans le cas particulier de $K_{elong} = 2 \times 10^5$ MPa.

Lorsque l'écart entre les coefficients matériau augmente, le système est de moins en

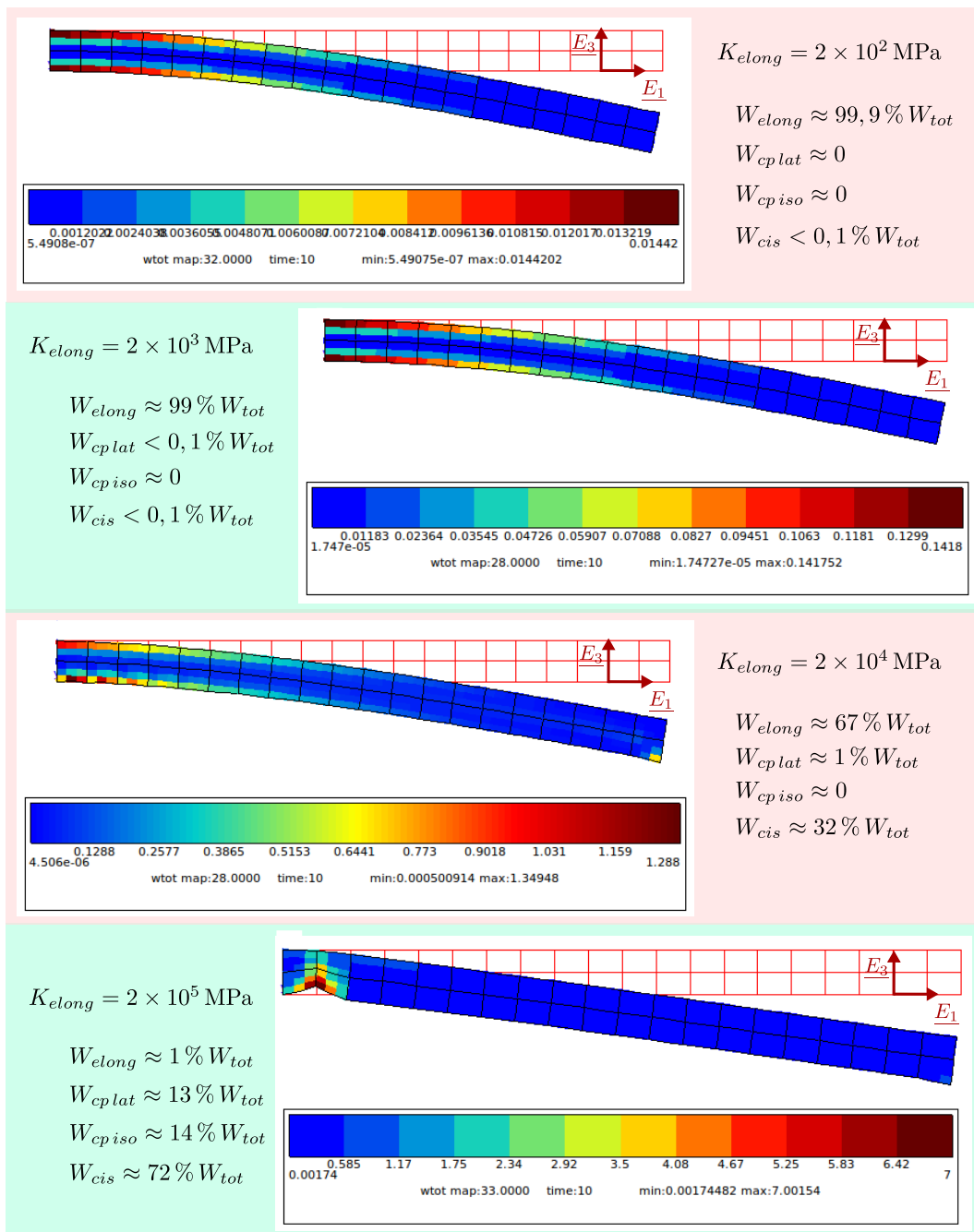


Figure 6.13 – Visualisation de la déformée et de la distribution de la densité d'énergie totale calculée en chaque point d'intégration lors du cas-test 6-B pour un comportement hyperélastique anisotrope dominé par la direction des fibres avec différentes valeurs de K_{elong} ; on mentionne également le poids relatif de chaque contribution à la densité d'énergie totale obtenue au niveau de la zone où cette dernière est maximale.

moins bien conditionné. Dans notre cas, le problème ne converge plus au-delà de trois ordres de grandeur de différence entre K_{elong} et les autres constantes matériau. On rappelle pourtant que pour les renforts unidirectionnels, des ordres de grandeurs des rigidités longitudinale et transverse plane sont respectivement 10^2 GPa (dans le cas du renfort HiTape®), voir p.50) et 10^{-6} GPa (dans le cas du renfort pré-imprégné, voir p.30). Cette difficulté numérique inhérente à la simulation du comportement des renforts fibreux, et tout particulièrement des renforts unidirectionnels, apparaît également avec d'autres modèles de comportements plus classiques [128], tels que la loi de Hooke isotrope transverse. Des stratégies numériques spécifiques doivent donc être mises en place pour traiter la quasi-inextensibilité des fibres au regard des autres constantes matériau pour un renfort unidirectionnel tel que le renfort HiTape®. Parmi ces stratégies, on peut mentionner l'utilisation d'éléments finis P1 associée à une sous-intégration et une stabilisation (nécessaire en cas de forte anisotropie [150]), mais cette option pose le problème du choix des paramètres de stabilisation. D'autres stratégies consistent à utiliser une méthode par pénalité ou bien une formulation mixte avec des multiplicateurs de Lagrange, cette dernière se révélant performante pour des matériaux quasi-incompressibles mais limitée en cas de grandes déformations. Pour résoudre ces problèmes, Wriggers *et al.* [150] proposent par exemple une formulation mixte avec un Lagrangien pour imposer la contrainte de quasi-inextensibilité au problème, avec un terme complémentaire permettant d'introduire la rigidité réelle des fibres agissant en tension uniquement, afin de décrire des phénomènes de flambage notamment. La sélection et la mise en place d'une stratégie adaptée pourraient faire l'objet de travaux futurs.

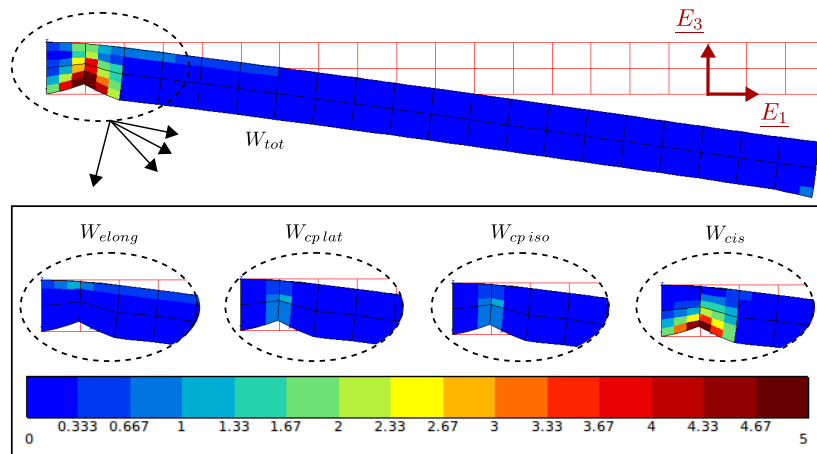


Figure 6.14 – Visualisation de la déformée, et de la distribution de la densité d'énergie totale et de ses différentes contributions lors du cas-test 6-B pour un comportement hyperélastique anisotrope dominé par la direction des fibres avec $K_{elong} = 2 \times 10^5$ MPa.

Lorsque K_{elong} devient grand au regard des autres constantes, l'intra-dos et l'extra-dos de la structure testée ne pouvant pas se comprimer et s'allonger respectivement, d'autres modes de déformations sont privilégiés : en particulier le cisaillement et les compactations latérale et isochore au niveau d'une zone localisée, proche de l'encastrement. Il semblerait que l'emplacement de cette zone ne dépende d'ailleurs pas du

maillage, comme illustré sur la figure 6.15. C'est ce même phénomène physique qui explique l'apparition du flambage local avec *fish-eye* (voir figure 3.13b p.67) dans l'essai de flexion expérimental sur empilements de renforts que nous avons présenté dans le chapitre 3. Cependant, l'emplacement de cette zone localisée dans les simulations ne peut pas être relié au comportement obtenu expérimentalement. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (partie 5.3.3), le potentiel hyperélastique utilisé ne permet pas de décrire le comportement de flexion spécifique à notre renfort. L'objet de la partie 6.4 suivante est de proposer des pistes pour avancer sur cette voie dans le cadre éléments finis.

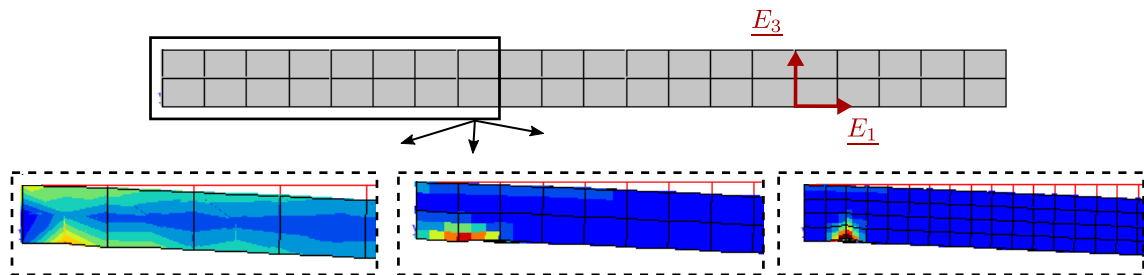


Figure 6.15 – Visualisation de la zone localisée où la densité d'énergie de déformation totale est maximale pour différents maillages ($10 \times 4 \times 1$, $20 \times 8 \times 2$ et $40 \times 16 \times 4$ éléments dans l'ordre) pour le cas-test 6-B avec $K_{elong} = 2 \times 10^5$ MPa à l'incrément de chargement tel que $U_3 = -8$ mm.

6.4 Perspective : description du comportement de flexion spécifique dans un cadre éléments finis

On rappelle les deux spécificités majeures du comportement de flexion du renfort HiTape® caractérisé dans le chapitre 3 : (i) il est fortement non-linéaire, tel que la rigidité de flexion diminue fortement avec la courbure, et (ii) la rigidité de flexion réelle est largement inférieure à celle de la mécanique des milieux continus. Dans le chapitre précédent (partie 5.3.3), nous avons vu que la description d'un tel comportement nécessite de sortir du cadre classique de la représentation des milieux matériellement simples de Cauchy, et nous avons proposé pour cela l'utilisation des milieux continus généralisés avec différentes approches possibles (second gradient, Cosserat, couple de contraintes). Dans cette partie, nous proposons quelques commentaires non exhaustifs concernant la mise en place d'une telle description d'un point de vue numérique en guise de perspective, pour des travaux futurs.

Les éléments finis de types coques ou plaques présentent des degrés de liberté supplémentaires en rotation, et constituent en cela un premier pas vers les théories enrichies des milieux continus généralisés. Ainsi, une option pourrait être de modifier le comportement en flexion des éléments coques afin d'intégrer le comportement souhaité. Cependant, ces éléments classiques présentent des comportements de flexion et de traction couplés. Par conséquent, avec une telle approche, le comportement en flexion résultant correspondrait à la contribution de celui en traction augmentée du

nouveau comportement. Or, on rappelle que la rigidité de flexion réelle est plus faible que la contribution seule de la rigidité de traction. Ainsi, ces éléments classiques ne permettraient pas de décrire le phénomène souhaité [151].

En fait, il faudrait pouvoir modifier la rigidité de flexion sans impact sur la rigidité en tension. Une solution consisterait à découpler les comportements de membrane et de flexion en superposant des éléments finis qui partagent les mêmes degrés de liberté. La rigidité de flexion serait ainsi décrite par des éléments avec une épaisseur donnée (coque ou volumique) et auxquels on donnerait le comportement de flexion souhaité, tandis que la rigidité en tension serait portée par un élément de type membrane positionné au niveau de la ligne neutre (seule solution pour que la rigidité de flexion soit plus faible que celle induite par la rigidité de traction) [63, 152]. Dans les logiciels existants de mise en forme, cette stratégie est mise en place en superposant des éléments coques et des éléments de membranes au niveau du feuillet moyen. On anticipe cependant des problèmes de verrouillage numérique avec l'utilisation des coques du fait des épaisseurs en jeu et de la quasi-inextensibilité des fibres. Enfin, en gardant à l'esprit l'objectif de la modélisation d'un empilement de renforts pour la mise en forme, la question de la gestion des interfaces entre les couches de renforts et avec le moule se pose avec l'utilisation d'éléments coques.

La stratégie envisagée à ce jour consiste à utiliser des éléments volumiques qui permettraient de décrire le comportement de flexion du renfort HiTape® en se plaçant dans le cadre de la mécanique des milieux continus généralisés, auxquels on superposerait des éléments de membranes au niveau d'un feuillet moyen à définir. Dans Z-set, des éléments volumiques de type micromorphe sont disponibles, et peuvent être traités comme des milieux de second gradient en ajoutant un terme de pénalisation [127]. Après une étude de faisabilité, les efforts pourraient se concentrer sur le développement d'un comportement de flexion spécifique adapté à ces éléments micromorphes.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation d'un problème mécanique et sa résolution par la méthode des éléments finis, en nous intéressant à l'équilibre d'un solide hyperélastique. La loi de comportement hyperélastique sélectionnée a été implémentée dans Z-set dans un cadre de grandes transformations, et l'implémentation a été validée *via* une étude des énergies, contraintes et matrices tangentes obtenues en sortie. Un cas-test en flexion a ensuite été présenté avec l'objectif de se rapprocher des essais réalisés expérimentalement, ce qui a permis de mettre en lumière les limites du modèle actuel. En effet, dans ce cadre de la mécanique des milieux continus généralisés, la réponse en flexion est complètement déterminée par le potentiel hyperélastique. Cependant, la description d'un comportement de flexion découplé de celui en traction nécessite d'envisager le cadre plus large de la mécanique des milieux continus généralisés, et nous avons proposé des pistes en fin de ce chapitre pour intégrer cette contribution à la résolution par la méthode des éléments finis.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à la résolution du problème méca-

nique de l'équilibre d'un empilement en prenant en compte le comportement particulier de l'interface entre les plis.

7

Modélisation numérique et résolution par la MEF du problème de l'équilibre de deux solides hyperélastiques en contact initialement

Sommaire

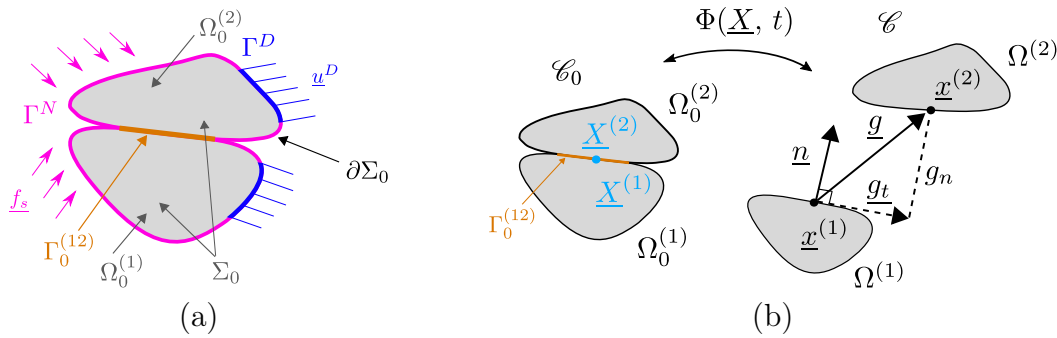
7.1	Formulation du problème mécanique avec deux solides en contact avec frottement et adhésion	146
7.1.1	Formulation du problème de minimisation sous contrainte	146
7.1.2	Méthode du Lagrangien augmenté	148
7.2	Formulation et résolution du problème mécanique de deux solides en contact avec adhésion (sans frottement)	150
7.2.1	Formulation	150
7.2.2	Discrétisation	155
7.2.3	Résolution	157
7.2.4	Illustration du comportement de l'élément fini mixte de Lorentz et limites pour notre application	158
7.3	Comparaison entre les éléments d'interface et un algorithme de contact pour la description de l'inter-ply	166
7.3.1	Introduction à la modélisation numérique du contact	166
7.3.2	Cas-test 7-C : sollicitation tangentielle	168
7.3.3	Cas-test 7-D : sollicitation en flexion	173
7.3.4	Conclusion	176
7.4	Formulation et résolution du problème mécanique de deux solides en contact avec frottement (sans adhésion)	177
7.4.1	Formulation du problème	178
7.4.2	Discrétisation et résolution	181
7.4.3	Implémentation de la loi de contact unilatéral couplé au frottement	182
7.4.4	Validation de la loi de contact unilatéral couplé au frottement	182
7.5	Défis et perspectives	187
7.5.1	Description de la physique du comportement	187
7.5.2	Défis numériques liés à la résolution du problème	188

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu la formulation et la résolution du problème mécanique de l'équilibre d'un solide hyperélastique. Le problème mécanique complet auquel nous nous intéressons maintenant implique deux solides hyperélastiques initialement en contact, et dont la surface de contact présente le comportement d'adhésion/décohésion et frottement qui a été présenté dans le chapitre 5. Ces deux solides modélisent deux couches de renforts séparées par le voile thermoplastique. Dans ce chapitre, nous nous proposons donc de rajouter cette contribution au problème de l'équilibre des solides. Nous présentons l'implémentation et la validation des lois de comportement retenues.

7.1 Formulation du problème mécanique avec deux solides en contact avec frottement et adhésion

Dans la continuité du chapitre 5, les deux solides sont notés $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$, et leur surface de contact $\Gamma^{(12)}$. Le système considéré est noté $\Sigma = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ et sa surface extérieure, *i.e* privée de $\Gamma^{(12)}$, est $\partial\Sigma$. Ces différentes notations sont rappelées ci-dessous. La formulation que nous allons proposer peut être généralisée à un plus grand nombre de solides en contact deux à deux.



Rappel de la figure 5.7 – Notations utilisées pour le problème de deux solides en contact initialement (a), et cinématique de l'interface (b).

7.1.1 Formulation du problème de minimisation sous contrainte

Tout comme pour un seul solide, le déplacement solution minimise l'énergie potentielle \mathcal{W}_Σ du système considéré Σ . L'écriture de l'énergie potentielle de ce système fait intervenir d'une part le travail des forces extérieures, écrit par rapport à la configuration initiale :

$$\mathcal{W}_{ext}(\underline{u}) = \int_{\Sigma_0} \rho_0 \underline{f}_v \cdot \underline{u} dV_0 + \int_{\partial\Sigma_0} \underline{f}_{s_0} \cdot \underline{u} dS_0, \quad (7.1)$$

et d'autre part l'énergie interne du système, qui peut se décomposer à l'aide de l'hypothèse de non-additivité de l'énergie interne (5.67) rappelée ici :

$$\mathcal{E}_{int}(\Sigma) = \mathcal{E}_{int}(\Omega^{(1)}) + \mathcal{E}_{int}(\Omega^{(2)}) + \mathcal{E}_{int}(\Gamma^{(12)}) .$$

Chaque solide $\Omega^{(k)}$ ($k = 1, 2$) présente un comportement hyperélastique ; son énergie interne $\mathcal{E}_{int}(\Omega^{(k)})$ a été introduite dans (6.3). Par ailleurs, l'interface $\Gamma^{(12)}$ présente des phénomènes irréversibles et dissipatifs, comme nous l'avons vu dans le chapitre 5 (section 5.4). Son comportement peut être décrit par un potentiel d'énergie libre $\psi^{(12)}$ et un potentiel de dissipation $\phi^{(12)}$ qui ont été définis dans (5.86) et (5.87) respectivement. Ils dépendent à la fois des variables d'état observables (et plus précisément de la discontinuité de déplacement $\llbracket \underline{u} \rrbracket = \underline{g}(\underline{u})$ précisée sur la figure 5.7) et internes (g^a pour la décohésion et \underline{g}_t^t pour le frottement). Ainsi, la contribution de l'interface à l'énergie interne totale du système s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_{int}(\Gamma^{(12)}) = \mathcal{E}_{int}^{(12)}(\underline{g}(\underline{u}); g^a, \underline{g}_t^t, \dot{\underline{g}}_t^t) = \int_{\Gamma^{(12)}} \left(\psi^{(12)}(\underline{g}(\underline{u}); g^a) + \phi^{(12)}(\dot{\underline{g}}_t^t, p_n) \delta t \right) dS \quad (7.2)$$

où δt ne correspond pas au temps physique mais à un temps paramétrique lié au chargement quasi-statique.

Comme nous l'avons vu, le pseudo-potentiel d'énergie libre $\psi^{(12)}$ introduit dans (5.86) a pour rôle d'imposer trois contraintes (au sens de l'optimisation sous contraintes) au problème :

- (a) La non-pénétration introduite dans (5.73) et la définition (5.77) de g^a pour la description de l'adhésion sont des contraintes d'*inégalités* :

$$g_n \geq 0 \quad ; \quad g^a(t) = \sup_{t' < t} \|\check{\underline{g}}(t')\|. \quad (7.3)$$

- (b) Pour la description du frottement, nous avons présenté (p.120) l'introduction d'une variable interne de frottement \underline{g}_t^t identifiée à la composante tangentielle du déplacement relatif \underline{g}_t , et conjuguée à la force « interne » \underline{p}_t^f . Dans ce cas, la contrainte est une *égalité* :

$$\underline{g}_t(\underline{u}) = \underline{g}_t^t. \quad (7.4)$$

Le problème mécanique de l'équilibre du système Σ est donc un problème de minimisation sous contraintes qui est résumé dans l'encadré 7.1. La force cohésive \underline{p} conjuguée au déplacement relatif $\underline{g}(\underline{u})$ est constituée de trois contributions : une pression de contact p_n^c , une force cohésive tangentielle de frottement \underline{p}_t^f et une force de traction adhésive \underline{p}^a , telles que $\underline{p} = p_n^c \underline{n} + \underline{p}_t^f + \underline{p}^a$.

Problème \mathcal{P}_Σ

Trouver $\tilde{\underline{u}} \in \mathcal{V}$ tel que :

$$\mathcal{U}_\Sigma(\tilde{\underline{u}}) = \min_{\underline{u} \in \mathcal{V}} \mathcal{U}_\Sigma(\underline{u}) \quad (7.5)$$

où $\mathcal{U}_\Sigma(\underline{u}) = \mathcal{E}_{int}^{(1)}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(2)}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{ext}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(12)}(g(\underline{u}); g^a, \underline{g}_t', \underline{g}_t^{\circ'})$. Les différentes contributions ont été précisées dans (6.3), (7.1) et (7.2) respectivement. Les lois d'états et les lois complémentaires pour l'interface $\Gamma^{(12)}$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} p_n^c & \in & \partial_{g_n} \psi^{(12)} \\ p_t^f & \in & \partial_{\underline{g}_t} \psi^{(12)} \\ p_t^{f\prime} & \in - & \partial_{\underline{g}_t'} \psi^{(12)} \cap \partial_{\underline{g}_t^{\circ'}} \phi^{(12)} \\ p^a & \in - & \partial_{g^a} \psi^{(12)} \cap \partial_{g^{\circ a}} \phi^{(12)}. \end{cases} \quad (7.6)$$

Encadré 7.1 – *Problème mécanique \mathcal{P}_Σ de minimisation sous contraintes de l'énergie potentielle de deux solides séparés par une interface comportant des phénomènes irréversibles et dissipatifs.*

7.1.2 Méthode du Lagrangien augmenté

Pour relaxer le problème afin de le résoudre, plusieurs méthodes sont envisageables : une pénalité, un Lagrangien, ou bien un Lagrangien augmenté. L'avantage du Lagrangien par rapport à la pénalité est que le problème est résolu de manière exacte tout en étant bien conditionné. En revanche, dans les deux cas, des problèmes de convergence peuvent apparaître ; ils peuvent être levés par l'utilisation du Lagrangien augmenté. Dans le cadre de ce travail, nous ne considérerons pas la méthode de résolution par pénalité.

La méthode du Lagrangien consiste à ajouter des inconnues (nodales) à unités de force ici appelées « multiplicateurs de Lagrange » afin d'imposer la condition souhaitée (7.3) ou (7.4). Comme celle-ci n'intervient qu'au niveau de l'interface, les multiplicateurs de Lagrange ne sont définis qu'au niveau de l'interface, et chaque multiplicateur scalaire appartient à l'espace $\mathcal{S}_- = \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma^{(12)})$ [146, 153, 154]. Dans le cas du Lagrangien augmenté, un terme de *régularisation* faisant intervenir un *paramètre de régularisation* (noté r) est ajouté afin de renforcer la contrainte et rendre le problème convexe. Cette technique permet de faire apparaître dans la formulation les variables internes du problème, qui ne sont pourtant pas des inconnues nodales au sens des éléments finis de Galerkin. Le problème de minimisation sous contrainte est alors remplacé par un problème de maxi-minimisation, autrement dit une recherche de point-selle. Le Lagrangien augmenté prend une forme différente selon la contrainte à imposer au problème.

D'une part, imposer une contrainte d'inégalité sur des arguments (ou fonctions d'arguments) d'une fonction scalaire f nécessite l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange scalaire. Dans le cas des contraintes d'inégalités (7.3), on introduit ainsi le multiplicateur de Lagrange λ_n^c pour la non-pénétration :

$$\min_{\substack{\underline{u} \in \mathcal{V} \\ g_n(\underline{u}) \geq 0}} f(\underline{u}) \leftarrow \min_{\underline{u} \in \mathcal{V}} \max_{\lambda_n^c \in \mathcal{S}_-} [f(\underline{u}) + \ell_n(g_n(\underline{u}), \lambda_n^c)] \quad (7.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} \ell_n(g_n(\underline{u}), \lambda_n^c) &= -\frac{1}{2r} \lambda_n^{c2} + \frac{1}{2r} \langle \lambda_n^c + r g_n(\underline{u}) \rangle_-^2 \\ &= \begin{cases} \left(\lambda_n^c + \frac{r}{2} g_n(\underline{u}) \right) g_n(\underline{u}) & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \\ -\frac{1}{2r} \lambda_n^{c2} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.8)$$

en posant le multiplicateur augmenté $\hat{\lambda}_n^c = \lambda_n^c + r g_n(\underline{u})$, et où on note $\langle x \rangle_-$ la partie négative d'un réel x , *i.e.* $|x|$ s'il est négatif et 0 sinon. De la même façon, on introduit le multiplicateur de Lagrange λ^a pour l'adhésion :

$$\min_{\substack{\underline{u} \in \mathcal{V} \\ g^a \geq \|g\|}} f(\underline{u}) \leftarrow \min_{\underline{u} \in \mathcal{V}} \max_{\lambda^a \in \mathcal{S}_-} [f(\underline{u}) + \ell^a(g(\underline{u}), \lambda^a; g^a)] \quad (7.9)$$

avec :

$$\begin{aligned} \ell^a(g(\underline{u}), \lambda^a; g^a) &= -\frac{1}{2r} \lambda^{a2} + \frac{1}{2r} \langle \lambda^a + r (\|g(\underline{u})\| - g^a) \rangle_+^2 \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2r} \lambda^{a2} & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 \\ \left(\lambda^a + \frac{r}{2} (\|g(\underline{u})\| - g^a) \right) (\|g(\underline{u})\| - g^a) & \text{si } \hat{\lambda}^a > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.10)$$

en posant le multiplicateur augmenté $\hat{\lambda}^a = \lambda^a + r (\|g(\underline{u})\| - g^a)$.

D'autre part, imposer la contrainte d'égalité (7.4) entre deux vecteurs arguments (ou fonctions d'arguments) de la fonction scalaire f nécessite l'introduction d'un vecteur de même dimension. Pour décrire le frottement, on introduit $\underline{\lambda}_t^f$:

$$\min_{\substack{\underline{u} \in \mathcal{V} \\ \underline{g}_t(\underline{u}) = \underline{g}_t^t}} f(\underline{u}; \underline{g}_t^t) \leftarrow \min_{\underline{u} \in \mathcal{V}} \max_{\underline{\lambda}_t^f \in (\mathcal{S}_-)^{dim}} [f(\underline{u}; \underline{g}_t^t) + \ell_t(\underline{g}_t(\underline{u}), \underline{\lambda}_t^f; \underline{g}_t^t)] \quad (7.11)$$

avec :

$$\begin{aligned} \ell_t(\underline{g}_t(\underline{u}), \underline{\lambda}_t^f; \underline{g}_t^t) &= -\frac{1}{2r} \|\underline{\lambda}_t^f\|^2 + \frac{1}{2r} \|\underline{\lambda}_t^f + r (\underline{g}_t(\underline{u}) - \underline{g}_t^t)\|^2 \\ &= \left(\|\underline{\lambda}_t^f\| + \frac{r}{2} \|\underline{g}_t(\underline{u}) - \underline{g}_t^t\| \right) \|\underline{g}_t(\underline{u}) - \underline{g}_t^t\|. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Ainsi, deux multiplicateurs de Lagrange scalaires λ_n^c et λ^a et un vectoriel $\underline{\lambda}_t^f$ sont

requis pour imposer toutes les conditions souhaitées. Cette formulation de Talon & Curnier [140] permettant de modéliser le comportement d'une interface présentant ces trois aspects de non-pénétration, frottement et adhésion n'est pas implémentée dans Z-set. Dans la suite, nous commençons par nous intéresser dans la partie 7.2 à la non-pénétration entre deux solides couplée à l'adhésion (sans frottement), puis nous considérons dans la partie 7.4 la non-pénétration entre deux solides couplée au frottement (sans adhésion).

7.2 Formulation et résolution du problème mécanique de deux solides en contact avec adhésion (sans frottement)

7.2.1 Formulation

La condition de non-pénétration est traitée, comme nous l'avons vu dans (7.7), avec l'ajout d'un multiplicateur de Lagrange noté λ_n^c . La modélisation de l'adhésion comporte quant à elle l'ajout d'une variable interne g^a décrivant la décohésion, définie pour rappel par $g^a(t) = \sup_{t' < t} \|\underline{g}(\underline{u}(t'))\|$ (5.77). L'interface étant supposée initialement saine (pas de décohésion), on considère que $g^a(0) = 0$.

Nous nous proposons dans la suite de présenter la formulation globale du problème mécanique de deux solides en contact avec adhésion (sans frottement) à l'aide de la modélisation proposée par Talon & Curnier [140]. Lorentz [146] a proposé une variante dans le traitement numérique de ce modèle. Comme nous le verrons, c'est cette variante qui a été adoptée et implémentée dans Z-set ; nous en présentons donc la formulation dans un second temps.

Modèle de Talon & Curnier en contact-adhésion La condition d'inégalité $g^a - \|\underline{g}(\underline{u})\| \geq 0$ est traitée avec l'ajout d'un multiplicateur de Lagrange scalaire λ^a selon la même méthode que pour la non-pénétration. Les contraintes d'inégalité pour la non-pénétration et l'adhésion sont alors traitées avec les termes $\ell_n(g_n(\underline{u}), \lambda_n^c)$ et $\ell^a(g(\underline{u}), \lambda^a; g^a)$ respectivement, introduits dans (7.8) et (7.10). Le problème de minimisation sous contraintes \mathcal{P}_Σ est remplacé par le problème de maxi-maxi-minimisation \mathcal{P}_Σ^a présenté dans l'encadré 7.2. La force cohésive \underline{p} conjuguée à la variable cinématique $\underline{g}(\underline{u})$ est définie par la somme de la force de traction adhésive \underline{p}^a et de la pression normale de contact due au respect de la non-pénétration et notée p_n^c (« c » permet de la distinguer de la composante normale de \underline{p}^a) qui sont obtenues par dérivation des termes ℓ^a et ℓ_n respectivement. La loi de décohésion $s(g^a)$ que nous avons illustrée sur la figure 5.10 est prise en compte lors de la dérivation du terme ℓ^a pour l'écriture de la force de traction adhésive \underline{p}^a . On note que, si la condition de non-pénétration est strictement respectée, *i.e.* si le problème est résolu de manière exacte (comme c'est le cas avec un Lagrangien augmenté), $\underline{g}_t = \underline{g}$ s'il y a contact. Nous ne détaillons pas les étapes du calculs ici, elles peuvent être trouvées dans la thèse de Talon [136].

Afin de résoudre le problème \mathcal{P}_Σ^a , on écrit qu'une condition nécessaire pour que $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n, \tilde{\lambda}^a)$ soit un point selle de \mathcal{L}_Σ^a est que la première variation de \mathcal{L}_Σ^a au voisinage

Problème \mathcal{P}_Σ^a

Trouver $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}^a) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}_- \times \mathcal{S}_-$ tel que :

$$\mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}^a) = \max_{\lambda_n^c \in \mathcal{S}_-} \max_{\lambda^a \in \mathcal{S}_-} \min_{\underline{u} \in \mathcal{V}} \mathcal{L}_\Sigma^a(\underline{u}, \lambda_n^c, \lambda^a) \quad (7.13)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Sigma^a(\underline{u}, \lambda_n^c, \lambda^a) &= \mathcal{E}_{int}^{(1)}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(2)}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{ext}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(12)}(\underline{u}, \lambda_n^c, \lambda^a; g^a) \\ &= \mathcal{E}_{int}^{(1)}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(2)}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{ext}(\underline{u}) \\ &\quad + \int_{\Gamma^{(12)}} \left[-\frac{1}{2r} \lambda_n^{c2} + \frac{1}{2r} \langle \lambda_n^c + r g_n(\underline{u}) \rangle_-^2 \right] dS \\ &\qquad\qquad\qquad \ell_n(g_n(\underline{u}), \lambda_n^c) \\ &\quad + \int_{\Gamma^{(12)}} \left[-\frac{1}{2r} \lambda^{a2} + \frac{1}{2r} \langle \lambda^a + r (\|g(\underline{u})\| - g^a) \rangle_+^2 \right] dS. \\ &\qquad\qquad\qquad \ell^a(g(\underline{u}), \lambda^a; g^a) \end{aligned}$$

où l'énergie interne des solides hyperélastiques et le travail des forces extérieures peuvent être trouvés dans (6.3) et (7.1) respectivement. Les deux contributions de la force cohésive $\underline{p} = p_n^c \underline{n} + \underline{p}^a$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} p_n^c \underline{n} = \frac{\partial \ell_n}{\partial \underline{g}} &= \begin{cases} \hat{\lambda}_n^c \underline{n} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 & \text{(C)} \\ \underline{0} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c > 0 & \text{(E)} \end{cases} \\ \underline{p}^a = \frac{\partial \ell^a}{\partial \underline{g}} &= \begin{cases} \underline{0} & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 & \text{(R)} \\ \hat{\lambda}^a \frac{\underline{g}_t}{\|g_t\|} & \text{si } 0 < \hat{\lambda}^a \leq s(g^a) & \text{(A)} \\ s(g^a) \frac{\underline{g}_t}{\|g_t\|} & \text{si } \hat{\lambda}^a > s(g^a) & \text{(D)} \end{cases} \left. \vphantom{\underline{p}^a} \right\} \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \text{ (C)} \\ &\quad \begin{cases} \underline{0} & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 & \text{(R)} \\ \hat{\lambda}^a \frac{\underline{g}}{\|g\|} & \text{si } 0 < \hat{\lambda}^a \leq s(g^a) & \text{(A)} \\ s(g^a) \frac{\underline{g}}{\|g\|} & \text{si } \hat{\lambda}^a > s(g^a) & \text{(D)} \end{cases} \left. \vphantom{\underline{p}^a} \right\} \text{si } \hat{\lambda}_n^c > 0 \text{ (E)} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Encadré 7.2 – Problème mécanique \mathcal{P}_Σ^a de maxi-maxi-minimisation de l'énergie potentielle de deux solides séparés par une interface adhésive sans frottement avec le modèle de Talon & Curnier [140]. Les différents états sont : écart (E) ou contact (C) d'une part, et adhésion (A), décohésion (D) ou rupture (R) d'autre part.

de $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n, \tilde{\lambda}^a)$ s'annule, c'est-à-dire que :

$$\forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, \forall \delta \lambda_n^c \in \mathcal{S}_-, \forall \delta \lambda^a \in \mathcal{S}_-, \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n, \tilde{\lambda}^a)[\delta \underline{u}, \delta \lambda_n^c, \delta \lambda^a] = 0. \quad (7.15)$$

Ces conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n, \tilde{\lambda}^a)[\delta \underline{u}] = 0 \\ \forall \delta \lambda_n^c \in \mathcal{S}_-, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n, \tilde{\lambda}^a)[\delta \lambda_n^c] = 0 \\ \forall \delta \lambda^a \in \mathcal{S}_-, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n, \tilde{\lambda}^a)[\delta \lambda^a] = 0, \end{cases} \quad (7.16)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, & \delta \mathcal{W}_\Sigma(\tilde{\underline{u}}) + \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot (p_n^c \underline{n} + \underline{p}^a) \, dS = 0 \\ \forall \delta \lambda_n^c \in \mathcal{S}_-, & \int_{\Gamma^{(12)}} \delta \lambda_n^c \cdot \frac{\partial \ell_n}{\partial \lambda_n^c} \, dS = 0 \\ \forall \delta \lambda^a \in \mathcal{S}_-, & \int_{\Gamma^{(12)}} \delta \lambda^a \cdot \frac{\partial \ell^a}{\partial \lambda^a} \, dS = 0, \end{cases} \quad (7.17)$$

le détail des expressions des dérivées partielles de ℓ_n et ℓ^a pouvant être trouvé dans la référence [140].

Modèle de Talon & Curnier en contact-adhésion adapté par Lorentz Dans le cas du travail de Lorentz [146], le déplacement relatif est considéré comme une variable observable supplémentaire indépendante notée $\check{\underline{g}}$ (où le symbole « $\check{}$ » permet de la distinguer de la variable cinématique $\underline{g}(\underline{u}) = \llbracket \underline{u} \rrbracket$ fonction du déplacement utilisée précédemment), que l'on peut décomposer en ses parties normale et tangentielle :

$$\underline{g}(\underline{u}) = \llbracket \underline{u} \rrbracket \leftarrow \check{\underline{g}} = \check{g}_n \underline{n} + \check{\underline{g}}_t. \quad (7.18)$$

Cette nouvelle inconnue $\check{\underline{g}}$ est définie sur l'espace $\mathcal{S}_+ = \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma^{(12)})$. Elle est soumise à la contrainte suivante : $\check{\underline{g}} = \underline{g}(\underline{u})$, traitée avec un multiplicateur de Lagrange vectoriel $\underline{\lambda}$ selon la méthode présentée dans (7.11), à la différence près que ce vecteur a cette fois une composante normale potentiellement non nulle. On peut alors distinguer deux cas exclusifs :

- soit il y a écart (E), et la composante normale de $\underline{\lambda}$ est entièrement déterminée par le comportement d'adhésion/décohésion ;
- soit il y a contact (C), et dans ce cas le comportement de décohésion ne porte que sur la composante tangentielle $\check{\underline{g}}_t$ du déplacement relatif et donc la composante normale de $\underline{\lambda}$ est entièrement déterminée par le contact unilatéral ($\lambda_n = \lambda_n^c$).

Ainsi, l'ajout du seul vecteur $\underline{\lambda}$ (de dimension *dim*) permet d'imposer à la fois la non-pénétration et le comportement d'adhésion/décohésion. Il peut se décomposer en ses parties normale et tangentielle : $\underline{\lambda} = \lambda_n \underline{n} + \underline{\lambda}_t$.

De la même façon, la variable interne d'histoire g^a que nous avons définie est

remplacée par \check{g}^a , définie à chaque instant t par :

$$\underline{g}^a(t) \leftarrow \check{g}^a(t) = \sup_{t' < t} \|\check{g}(t')\|, \quad (7.19)$$

et telle que l'interface est supposée saine initialement (pas de décohésion, *i.e.* $\check{g}^a(0) = 0$). Dans ce modèle, le comportement d'adhésion/décohésion est alors décrit par l'énergie interne spécifique de l'interface $e^{(12)}(\check{g}; \check{g}^a)$, et la contrainte $\check{g} = g(\underline{u})$ est imposée avec le terme $\ell(\underline{u}, \underline{\lambda}, \check{g}; \check{g}^a)$. Le problème de minimisation sous contraintes \mathcal{P}_Σ est alors remplacé par le problème de maxi-mini-minimisation $\check{\mathcal{P}}_\Sigma^a$ présenté dans l'encadré 7.3. La force cohésive \check{p} conjuguée à la variable \check{g} est obtenue par dérivation des termes $e^{(12)}$ et ℓ . On rappelle que la loi de décohésion du modèle de Talon & Curnier est scalaire et affine par morceaux ; elle prise en compte lors de la dérivation de l'énergie interne surfacique de l'interface $e^{(12)}$.

Problème $\check{\mathcal{P}}_\Sigma^a$

Trouver $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}}, \tilde{\check{g}}) \in \mathcal{V} \times (\mathcal{S}_-)^{dim} \times (\mathcal{S}_+)^{dim}$ tel que :

$$\check{\mathcal{L}}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}}, \tilde{\check{g}}) = \max_{\underline{\lambda} \in (\mathcal{S}_-)^{dim}} \min_{\underline{u} \in \mathcal{V}} \min_{\check{g} \in (\mathcal{S}_+)^{dim}} \check{\mathcal{L}}_\Sigma^a(\underline{u}, \underline{\lambda}, \check{g}) \quad (7.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{L}}_\Sigma^a(\underline{u}, \underline{\lambda}, \check{g}) &= \mathcal{E}_{int}^{(1)}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(2)}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{ext}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(12)}(\underline{u}, \underline{\lambda}, \check{g}; \check{g}^a) \\ &= \mathcal{E}_{int}^{(1)}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(2)}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{ext}(\underline{u}) \\ &\quad + \int_{\Gamma^{(12)}} e^{(12)}(\check{g}; \check{g}^a) \, dS \\ &\quad + \int_{\Gamma^{(12)}} \underbrace{\left[\underline{\lambda} \cdot (g(\underline{u}) - \check{g}) + \frac{r}{2} (g(\underline{u}) - \check{g})^2 \right]}_{\ell(\underline{u}, \underline{\lambda}, \check{g})} \, dS. \end{aligned}$$

Un exemple de loi de comportement associant la force cohésive \check{p} à sa variable cinématique conjuguée \check{g} au niveau de l'interface est illustré sur la figure 7.1.

Encadré 7.3 – Problème mécanique $\check{\mathcal{P}}_\Sigma^a$ de maxi-mini-minimisation de l'énergie potentielle de deux solides séparés par une interface adhésive sans frottement avec le modèle de Talon & Curnier adapté par Lorentz [146].

On cherche maintenant à résoudre ce problème $\check{\mathcal{P}}_\Sigma^a$. Une condition nécessaire pour que $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}}, \tilde{\check{g}})$ soit un point selle de $\check{\mathcal{L}}_\Sigma^a$ est que la première variation de $\check{\mathcal{L}}_\Sigma^a$ au voisinage

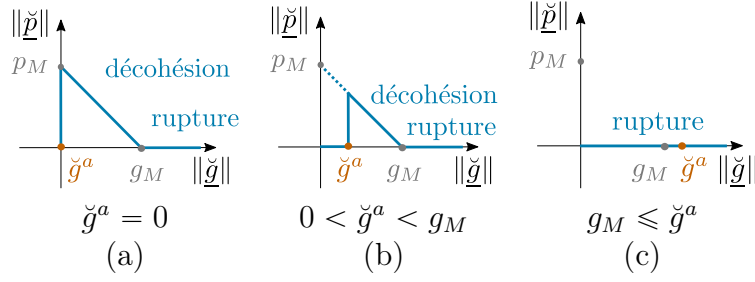


Figure 7.1 – Un exemple de loi de décohésion scalaire affine par morceaux : la loi de comportement de Crisfield [155] lors de la charge, équivalente à celle de Talon & Curnier lors de la charge, pour différents états d'endommagement : état sain (a), endommagé (b) ou rompu (c).

de la solution $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}}, \tilde{\underline{g}})$ s'annule, c'est-à-dire que :

$$\forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, \forall \delta \underline{\lambda} \in (\mathcal{S}_-)^{dim}, \forall \delta \underline{g} \in (\mathcal{S}_+)^{dim}, \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}}, \tilde{\underline{g}})[\delta \underline{u}, \delta \underline{\lambda}, \delta \underline{g}] = 0. \quad (7.21)$$

Ces conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}}, \tilde{\underline{g}})[\delta \underline{u}] = 0 \\ \forall \delta \underline{\lambda} \in (\mathcal{S}_-)^{dim}, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}}, \tilde{\underline{g}})[\delta \underline{\lambda}] = 0 \\ \forall \delta \underline{g} \in (\mathcal{S}_+)^{dim}, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}}, \tilde{\underline{g}})[\delta \underline{g}] = 0, \end{cases} \quad (7.22)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, & \delta \mathcal{U}_\Sigma(\tilde{\underline{u}}) + \int_{\Gamma(12)} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot \left(\tilde{\underline{\lambda}} + r(\underline{g}(\tilde{\underline{u}}) - \tilde{\underline{g}}) \right) dS = 0 \\ \forall \delta \underline{\lambda} \in (\mathcal{S}_-)^{dim}, & \int_{\Gamma(12)} \delta \underline{\lambda} \cdot \left(\underline{g}(\tilde{\underline{u}}) - \tilde{\underline{g}} \right) dS = 0 \\ \forall \delta \underline{g} \in (\mathcal{S}_+)^{dim}, & \int_{\Gamma(12)} \delta \underline{g} \cdot \left(\underline{p} - \tilde{\underline{\lambda}} - r(\underline{g}(\tilde{\underline{u}}) - \tilde{\underline{g}}) \right) dS = 0. \end{cases} \quad (7.23)$$

La première ligne correspond au principe des travaux virtuels, classiquement utilisé pour établir la formulation intégrale faible dans le cas d'un problème de mécanique du solide. La deuxième ligne permet d'imposer la contrainte $\underline{g}(\tilde{\underline{u}}) = \tilde{\underline{g}}$. Enfin, comme la force cohésive \underline{p} est une fonction affine (par morceaux) de $\|\underline{g}\|$ (un exemple de loi est illustré sur la figure 7.1), la troisième ligne nous permet d'exprimer *directement* l'inconnue \underline{g} en fonction des autres inconnues \underline{u} et $\underline{\lambda}$:

$$\underline{g} \leftarrow \underline{g}(\underline{u}, \underline{\lambda})$$

En pratique, le degré de liberté \underline{g} est ainsi éliminé par *condensation statique*. Il est déterminé de façon exacte dans la loi de comportement au niveau des points d'intégration de Gauss, et ne fait plus partie des inconnues du problème. Les conditions

d'optimalité (7.22) s'écrivent donc plus simplement :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}})[\delta \underline{u}] = 0 \\ \forall \delta \underline{\lambda} \in (\mathcal{S}_-)^{dim}, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^a(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{\lambda}})[\delta \underline{\lambda}] = 0, \end{cases} \quad (7.24)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, & \delta \mathcal{U}_\Sigma(\tilde{\underline{u}}) + \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot \left(\tilde{\underline{\lambda}} + r(\underline{g}(\tilde{\underline{u}}) - \check{\underline{g}}(\underline{u}, \underline{\lambda})) \right) dS = 0 \\ \forall \delta \underline{\lambda} \in (\mathcal{S}_-)^{dim}, & \int_{\Gamma^{(12)}} \delta \underline{\lambda} \cdot \left(\underline{g}(\tilde{\underline{u}}) - \check{\underline{g}}(\underline{u}, \underline{\lambda}) \right) dS = 0. \end{cases} \quad (7.25)$$

En vue de résoudre ce problème (7.25) dans un schéma itératif incrémental, nous pouvons dès à présent en caractériser la deuxième variation :

$$\begin{cases} \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^a(\underline{u}, \underline{\lambda})[\delta \underline{u}][\delta \underline{u}] = \delta^2 \mathcal{U}_\Sigma(\underline{u}) + \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot r \left(\underline{g}(\delta \underline{u}) - \frac{\partial \check{\underline{g}}(\underline{u}, \underline{\lambda})}{\partial \underline{u}} \cdot \delta \underline{u} \right) dS \\ \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^a(\underline{u}, \underline{\lambda})[\delta \underline{u}][\delta \underline{\lambda}] = \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot \left(\delta \underline{\lambda} - r \frac{\partial \check{\underline{g}}(\underline{u}, \underline{\lambda})}{\partial \underline{\lambda}} \cdot \delta \underline{\lambda} \right) dS \\ \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^a(\underline{u}, \underline{\lambda})[\delta \underline{\lambda}][\delta \underline{\lambda}] = \int_{\Gamma^{(12)}} -\delta \underline{\lambda} \cdot \frac{\partial \check{\underline{g}}(\underline{u}, \underline{\lambda})}{\partial \underline{\lambda}} \cdot \delta \underline{\lambda} dS \\ \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^a(\underline{u}, \underline{\lambda})[\delta \underline{\lambda}][\delta \underline{u}] = \int_{\Gamma^{(12)}} \delta \underline{\lambda} \cdot \left(\underline{g}(\delta \underline{u}) - \frac{\partial \check{\underline{g}}(\underline{u}, \underline{\lambda})}{\partial \underline{u}} \cdot \delta \underline{u} \right) dS. \end{cases} \quad (7.26)$$

Les inconnues du problème sont donc finalement les champs de déplacement \underline{u} et de multiplicateurs de Lagrange $\underline{\lambda}$. Cette résolution de façon exacte d'une partie du problème grâce à l'introduction de la variable d'état observable supplémentaire $\check{\underline{g}}$ est la force de l'adaptation du modèle de Talon & Curnier faite par Lorentz. C'est cette approche qui a été implémentée dans Z-set avec cette méthode du Lagrangien augmenté [156]. C'est donc celle sur laquelle nous nous basons dans la suite de ce travail. Afin de résoudre ce problème par la méthode des éléments finis, nous commençons par introduire la discrétisation du problème qui comporte maintenant une interface.

7.2.2 Discrétisation

En présence d'une interface, le domaine de référence Σ_0 est divisé en N_v éléments « volumiques » pour les solides $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ d'une part, et N_i éléments « d'interface » (ou « cohésifs ») au niveau de la surface initiale de contact $\Gamma^{(12)}$ d'autre part. En pratique, les nœuds situés au niveau de l'interface entre les deux solides (illustrée sur la figure 7.2a) sont dédoublés, afin de définir des éléments d'interface au niveau desquels un déplacement relatif entre ces nœuds initialement confondus peut apparaître. Des degrés de liberté supplémentaires correspondant aux multiplicateurs de Lagrange sont définis sur le plan médian de l'élément d'interface, comme représenté sur la figure 7.2b. Finalement, les degrés de liberté du problème global sont les déplacements au niveau de chacun des nœuds du maillage, et les multiplicateurs de Lagrange définis sur le plan

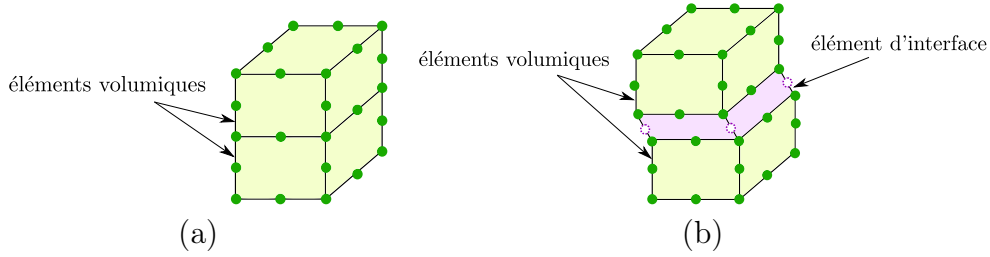


Figure 7.2 – Deux éléments volumiques (a) entre lesquels un élément d'interface est défini (b) – les nœuds verts possèdent \dim degrés de liberté en déplacement, et les nœuds violet \dim multiplicateurs de Lagrange.

médian de l'élément d'interface. Ils sont rassemblés dans le vecteur global $\begin{Bmatrix} U \\ \Lambda \end{Bmatrix}$, qui est construit par assemblage des contributions élémentaires de chaque élément volumique e_v , notées $\{U^{e_v}\}$ comme nous l'avons vu, et des contributions élémentaires de chaque élément d'interface e_i , notées $\begin{Bmatrix} U^{e_i} \\ \Lambda^{e_i} \end{Bmatrix}$. On note ici $\{U^{e_i}\}$ les degrés de liberté en déplacement des nœuds appartenant à la fois aux éléments volumiques et d'interface.

Nous avons présenté la démarche de discrétisation et de résolution d'un problème purement volumique dans la partie 6.1.2. De la même façon, une intégrale continue sur l'interface $\Gamma^{(12)}$ est classiquement approchée par la méthode de quadrature de Gauss, *via* un passage par un élément de référence (de surface Γ^{ref} et d'élément de surface dS^{ref}):

$$\int_{\Gamma^{(12)}} \square dS \approx \sum_{e_i=1}^{N_i} \int_{\Gamma^{e_i}} \square dS^{e_i} = \sum_{e_i=1}^{N_i} \int_{\Gamma^{ref}} \square J_{e_i} dS^{ref} \approx \sum_{e_i=1}^{N_i} \sum_{g_i=1}^{G_i} w_{g_i} \square(\underline{a}_{g_i}) J_{e_i}(\underline{a}_{g_i}) \quad (7.27)$$

où apparaissent les positions \underline{a}_{g_i} des points de Gauss g_i de l'élément d'interface e_i , leurs poids respectifs w_{g_i} et le terme $J_{e_i}(\underline{a}_{g_i})$ de la transformation entre l'élément de référence et l'élément e_i .

Tout comme pour le champ de déplacement, la valeur des multiplicateurs de Lagrange est approchée en tout point d'un élément d'interface e_i :

$$\{\underline{\lambda}^{e_i}\} \approx \{\underline{\lambda}^{e_i h}\} = [L^{e_i}] \{\Lambda^{e_i}\} \quad (7.28)$$

où le vecteur $\{\Lambda^{e_i}\}$ contient les multiplicateurs de Lagrange de tous les nœuds de l'élément d'interface e_i , et où $[L^{e_i}]$ est la matrice des fonctions de forme linéaires (approximation « P1-continue »). Ce type de formulation mixte P2/P1 pour l'élément d'interface proposée par Lorentz [146] permet de satisfaire la condition de stabilité de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (dite « LBB »). Le déplacement relatif en tout point du plan de l'interface au sein de l'élément e_i est alors approché de la manière suivante :

$$\{\underline{g}^{e_i}(\underline{u}^{e_i})\} \approx \{\underline{g}^{e_i h}(\underline{u}^{e_i h})\} = \{\llbracket \underline{u}^{e_i} \rrbracket^h\} = [D^{e_i}] \{U^{e_i}\} \quad (7.29)$$

où la matrice $[D^{e_i}]$ est égale à la différence des traces des matrices des fonctions de forme $[N^{e_v}]$ des éléments volumiques situés de part et d'autre de l'élément d'interface [146].

On introduit l'espace discrétisé $\mathcal{S}_-^h \subset \mathcal{S}_-$ de dimension finie pour les multiplicateurs de Lagrange discrétisés. Le problème (7.25) peut ainsi être discrétisé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \{\delta U\} \in \mathcal{V}_0^h, \quad \{0\} = \sum_{e_i=1}^{N_i} \left(\int_{\Gamma^{e_i}} \{\delta U^{e_i}\}^T [D^{e_i}]^T ([L^{e_i}] \{\Lambda^{e_i}\} + r[D^{e_i}] \{U^{e_i}\} - r\{\tilde{g}(\underline{u}, \lambda)\}) \, dS \right) + \{\delta \mathcal{W}_\Sigma\} \\ \forall \{\delta \Lambda\} \in (\mathcal{S}_-^h)^{dim}, \quad \{0\} = \sum_{e_i=1}^{N_i} \left(\int_{\Gamma^{e_i}} \{\delta \Lambda^{e_i}\}^T [L^{e_i}]^T ([D^{e_i}] \{U^{e_i}\} - \{\tilde{g}(\underline{u}, \lambda)\}) \, dS \right) \end{array} \right. \quad (7.30)$$

où le détail des expressions de $\{\tilde{g}(\underline{u}, \lambda)\}$ peut être trouvé dans la référence [156]. On retrouve la première variation $\{\delta \mathcal{W}_\Sigma\}$ correspondant au problème solide et contenant les efforts extérieurs. Finalement, le problème à résoudre se met sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} R_U \\ R_\Lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7.31)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{R_U\} = \{R\} + \sum_{e_i=1}^{N_i} \left(\int_{\Gamma^{e_i}} [D^{e_i}]^T ([L^{e_i}] \{\Lambda^{e_i}\} + r[D^{e_i}] \{U^{e_i}\} - r\{\tilde{g}(\underline{u}, \lambda)\}) \, dS \right) \\ \{R_\Lambda\} = \sum_{e_i=1}^{N_i} \left(\int_{\Gamma^{e_i}} [L^{e_i}]^T ([D^{e_i}] \{U^{e_i}\} - \{\tilde{g}(\underline{u}, \lambda)\}) \, dS \right) \end{array} \right.$$

où on retrouve le vecteur résidu $\{R\}$ introduit pour la résolution du problème standard dans le chapitre précédent.

7.2.3 Résolution

Résoudre le système (7.31) discrétisé en utilisant la méthode de Newton-Raphson revient à rechercher la correction de l'itération $\begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta \Lambda \end{Bmatrix}_{c+1}^{(i+1)}$ à l'itération $i + 1$ de l'in-

crément $c + 1$ en résolvant le système suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{UU}^t & K_{U\Lambda}^t \\ K_{\Lambda U}^t & K_{\Lambda\Lambda}^t \end{bmatrix}}_{[K_{\Sigma^a}^t]_{c+1}^{(i)}} \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta \Lambda \end{Bmatrix}_{c+1}^{(i+1)} = - \begin{Bmatrix} \Delta R_U \\ \Delta R_\Lambda \end{Bmatrix}_{c+1}^{(i)} \quad (7.32)$$

où $[K_{\Sigma^a}^t]$ est la matrice tangente globale du problème et est obtenue par assemblage des contributions élémentaires, en négligeant les termes non-linéaires dans les efforts extérieurs. Celles-ci sont calculées à l'aide de la la condensation statique et de la deuxième variation de \mathcal{L}_{Σ}^a dont nous avons donné les contributions dans (7.26) ; le détail des calculs et des expressions des sous-matrices de $[K_{\Sigma^a}^t]$ peut être trouvé dans l'annexe A de la référence [156].

Cet élément fini mixte, dont nous venons de présenter la formulation, est utilisé pour notre problème. Dans la partie suivante, nous illustrons son comportement à l'aide de cas-tests.

7.2.4 Illustration du comportement de l'élément fini mixte de Lorentz et limites pour notre application

Afin d'illustrer le comportement de l'élément fini mixte de Lorentz, nous réalisons deux cas-tests : tout d'abord, un cas de sollicitation en ouverture normale à la surface de contact pour le comportement d'adhésion/décohésion, puis une sollicitation tangente à la surface de contact. Ces deux cas-tests permettront de mettre en évidence les avantages et les limites de cette formulation pour décrire la mise en forme de deux plis en contact.

Cas-test 7-A : sollicitation normale

Description Ce cas-test est de type DCB (*Double Cantilever Beam*) avec une sollicitation en ouverture en grandes déformations. Deux solides de dimensions $8 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 0,2 \text{ mm}$ sont en contact initialement, et séparés par une interface saine (non endommagée). Chaque solide est maillé avec $8 \times 5 \times 1$ éléments volumiques hexaédriques quadratiques ; les deux solides sont séparés par une couche de $8 \times 5 \times 1$ éléments d'interface, comme illustré sur la figure 7.3a. Les conditions aux limites, schématisées sur la figure 7.3b, sont imposées en déplacement en suivant l'évolution « temporelle » décrite sur la figure 7.4 : lors de la phase ① de charge/décharge, une ouverture normale inférieure au seuil de rupture g_M est imposée, puis lors de la phase ② le seuil de rupture est dépassé.

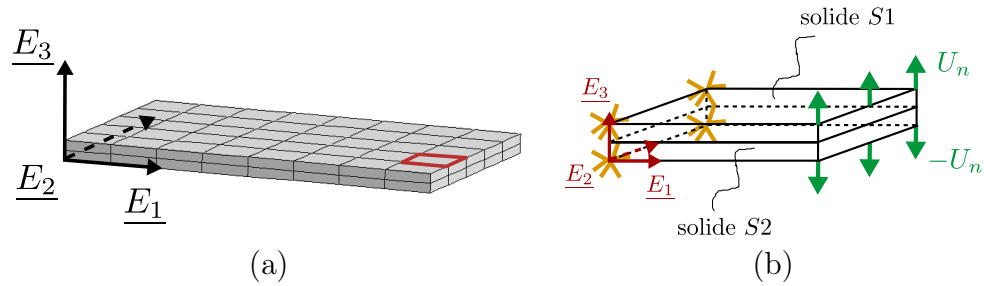


Figure 7.3 – Maillage utilisé (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 7-A.

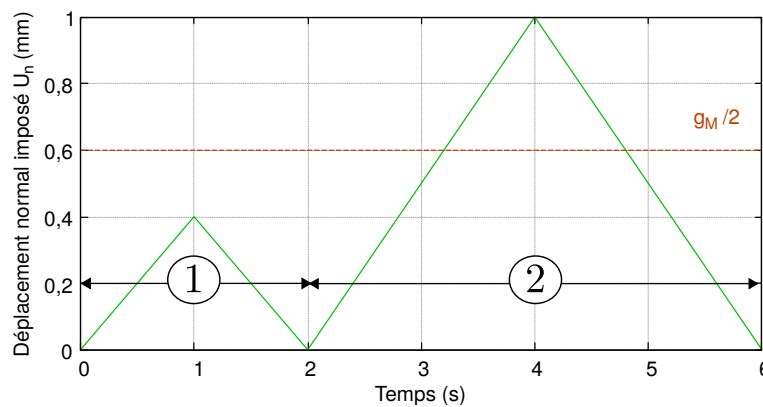


Figure 7.4 – Chargement pour le cas-test 7-A.

Les deux solides sont dotés d'une loi de comportement linéaire isotrope avec $E = 2 \times 10^5$ MPa et $\nu = 0$, tandis que l'interface présente un comportement de type Crisfield avec un seuil adhésif surfacique $p_M = 1 \times 10^2$ N \cdot mm $^{-2}$ et un écart adhésif maximal $g_M = 1,2$ mm. Le comportement de Crisfield [155] diffère de celui de Talon & Curnier uniquement par le chemin de décharge (*i.e.* fermeture de l'élément) et de recharge (*i.e.* ré-ouverture de l'élément) après endommagement comme cela est illustré sur la figure 7.5a-b; il est privilégié car il favorise la convergence. Par ailleurs, le paramètre de régularisation r influence principalement la convergence : il doit être suffisamment grand pour assurer la convexité du problème, mais pas trop pour que le système reste bien conditionné. Lorentz [146] conseille empiriquement de prendre $r = 100 p_M/g_M$, et montre que la sensibilité du résultat au paramètre de régularisation disparaît avec le raffinement du maillage. Dans ce cas-test, nous prenons $r = 1 \times 10^5$, qui convient comme nous le verrons.

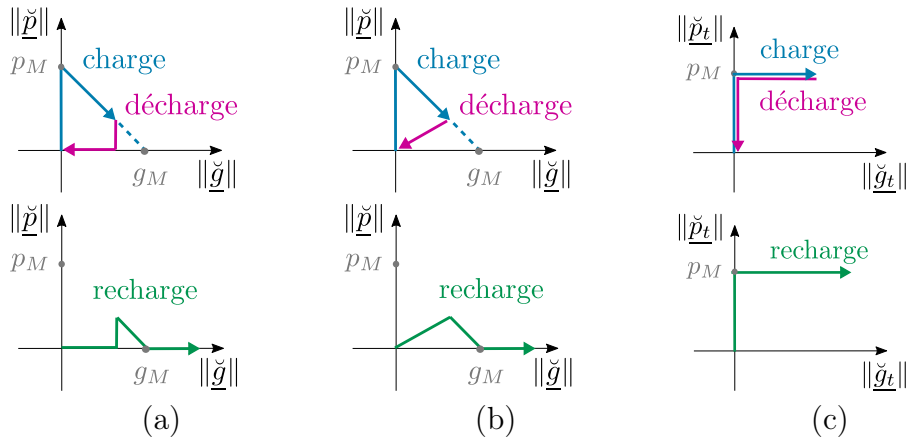


Figure 7.5 – Illustration des comportements d’adhésion/décohésion de Talon & Curnier (a), de Crisfield (b) et de glissement tangentiel élastique (c), lors d’une ouverture en deçà du seuil de rupture g_M (lorsqu’il existe) puis fermeture (en haut), et lors d’une ré-ouverture au-delà du seuil de rupture (lorsqu’il existe) après endommagement (en bas).

Observation du comportement d’adhésion/décohésion Sur la figure 7.6, une visualisation de la distribution de la composante normale de la force cohésive est proposée. Plus particulièrement, la figure 7.7 présente le comportement directement au niveau d’un point d’intégration d’un élément d’interface (situé à la verticale de l’élément en rouge sur la figure 7.3a). Nous observons que les grands déplacements sont bien pris en compte pour ce mode d’ouverture pur. Nous vérifions que la force cohésive est maximale (*i.e.* $\check{p}_n = p_M = 1 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$) lorsque la décohésion commence, et qu’elle décroît au fur et à mesure de l’endommagement (à $t = 1 \text{ s}$, $\check{p}_n = 50 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ en bout d’échantillon). Enfin, lorsque g_M est dépassé, comme c’est le cas en bout d’échantillon à l’instant $t = 4 \text{ s}$, la force cohésive s’annule.

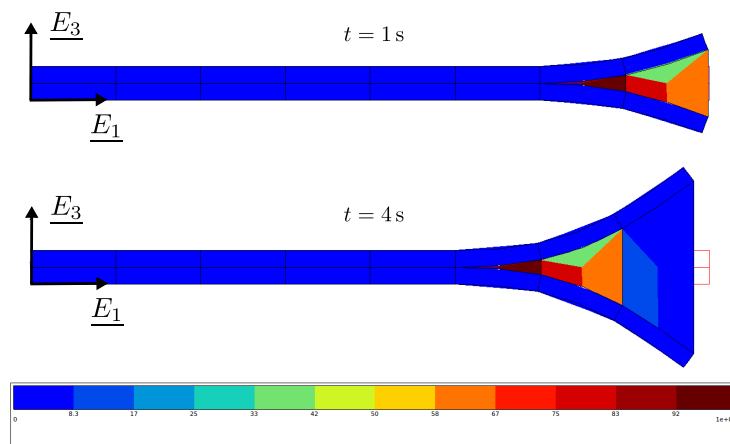


Figure 7.6 – Visualisation de la composante normale \check{p}_n de la force cohésive définie au niveau des éléments d’interface pour le cas-test 7-A.

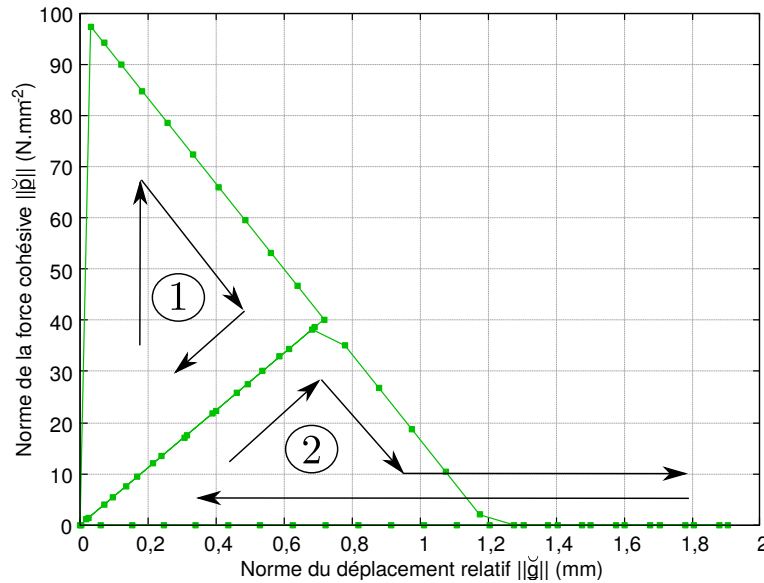


Figure 7.7 – Comportement local d’un élément d’interface (force cohésive en fonction du déplacement relatif) dans le cas-test 7-A.

Cas-test 7-B : sollicitation tangentielle

Description Ce cas-test de type *pull-through* décrit l’essai de glissement inter-ply réalisé expérimentalement et présenté dans le chapitre 4. Seule la moitié est représentée par symétrie selon le plan (E_1, E_2) . Nous cherchons ici à illustrer le comportement tangentiel de l’élément cohésif utilisé.

Un solide $S1$ de dimensions $10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ est initialement en contact avec un solide $S2$ de dimensions $20\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 2\text{ mm}$. Cette géométrie particulière permet de modéliser l’aspect essentiel de cet essai expérimental, à savoir que la surface de contact entre les deux solides reste constante. Ces deux solides sont maillés avec $10 \times 10 \times 2$ et $20 \times 10 \times 2$ éléments volumiques hexaédriques quadratiques respectivement, et sont séparés par une couche de $10 \times 10 \times 2$ éléments d’interface, comme illustré sur la figure 7.8a. Les conditions aux limites, schématisées sur la figure 7.8b, sont imposées en déplacement en suivant l’évolution tracée sur la figure 7.9. Tandis que le solide $S2$ est maintenu immobile (il peut être assimilé à un corps rigide), une force de compression est tout d’abord appliquée sur le solide $S1$ (phase ①) afin de figurer la force appliquée par le vérin dans l’essai expérimental. $S1$ est ensuite déplacé latéralement (phase ②), puis ramené à sa position initiale (phase ③).

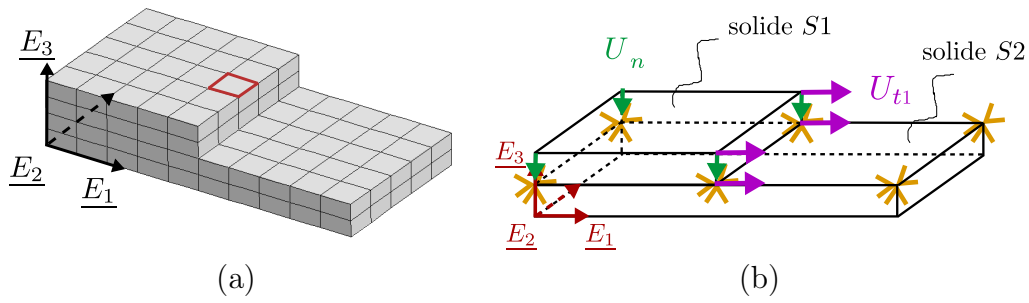


Figure 7.8 – Maillage utilisé (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 7-B.

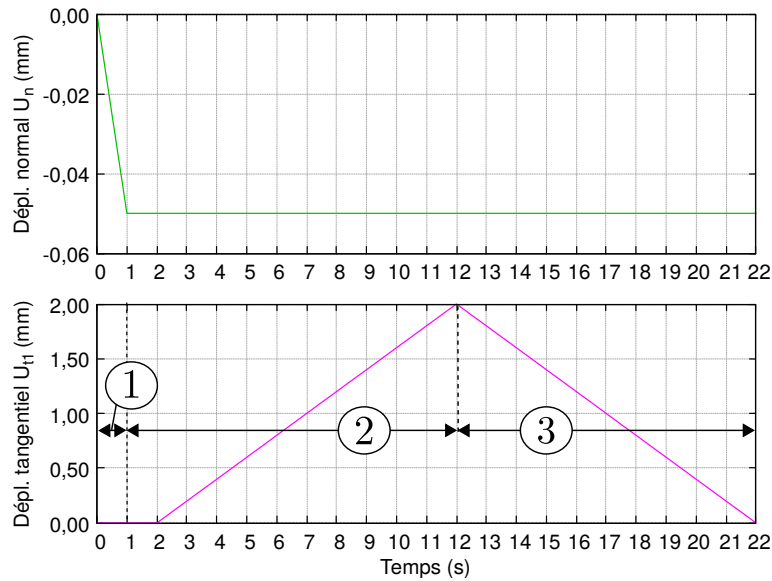


Figure 7.9 – Chargement pour le cas-test 7-B.

Les deux solides sont dotés d'une loi de comportement linéaire isotrope avec $E = 4 \times 10^{10}$ MPa et $\nu = 0$, tandis que l'interface présente un comportement de type glissement tangentiel élastique avec un seuil adhésif surfacique $p_M = 5 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ($r = 1 \times 10^{10}$), illustré sur la figure 7.5c. Ce type de comportement purement tangentiel avec ouverture normale proscrite est sélectionné car il ne comporte pas de seuil de rupture (*i.e.* son écart adhésif maximal g_M vers l'infini), ce qui constitue un premier pas vers un comportement de frottement. On notera que ce comportement est indépendant de l'effort normal en compression ; par conséquent, la norme de l'effort cohésif utilisé pour la loi de comportement n'inclut pas la composante normale \check{p}_n dans le cas où elle est négative.

Observation du comportement local Le déplacement relatif et la force cohésive extraits localement au niveau d'un point d'intégration d'un élément d'interface (situé à la verticale de l'élément en rouge sur la figure 7.8a) sont présentés sur la figure 7.10.

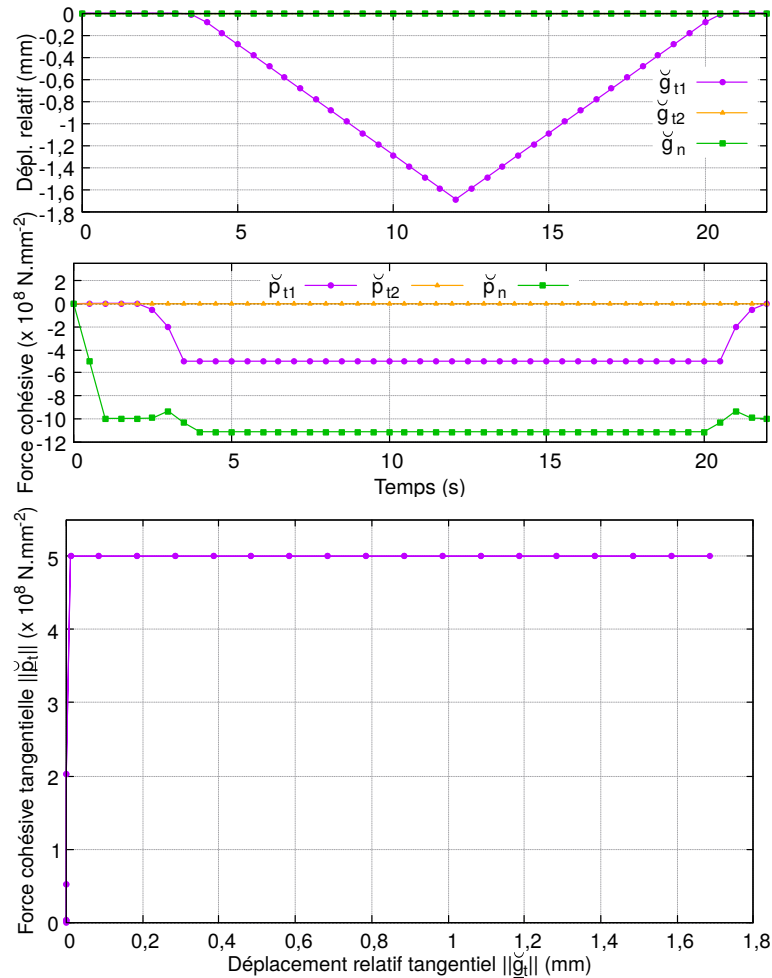


Figure 7.10 – Comportement local d'un élément d'interface (force cohésive et déplacement relatif) dans le cas-test 7-B.

La différence entre la valeur maximale du déplacement relatif ($\check{g}_{t1} = 1,7$ mm) et la valeur maximale imposée ($U_{t1} = 2,0$ mm) est due à la déformation du solide $S1$. La composante normale de la force cohésive peut être interprétée comme la force de réaction pour empêcher l'inter-pénétration des solides sous l'effet de la compression normale imposée (figurant l'effet du vérin dans l'essai expérimental). La force cohésive tangentielle quant à elle augmente (en norme) jusqu'à atteindre le seuil adhésif surfacique p_M au-delà duquel le déplacement relatif commence.

Observation du comportement global On extrait les forces de réaction F_N et F_T correspondant à la somme des réactions aux nœuds des faces sur lesquelles les déplacements U_n et U_{t1} respectivement sont imposés. Ces résultats numériques (« num ») sont comparés aux solutions analytiques (« an ») de F_N et F_T . La première est obtenue avec le comportement linéaire élastique isotrope de $S1$, et la seconde compte tenu de la sollicitation (F_N connu et $p_{t2} = g_{t2} = 0$) et d'un coefficient de frottement entre les

deux solides :

$$F_N = E \frac{U_n}{h_{S1}} L_{S1}^2 \quad ; \quad F_T = \text{sgn}(\dot{g}_{t1}) \text{CoF} F_N \tag{7.33}$$

où $L_{S1} = 10 \text{ mm}$, $h_{S1} = 2 \text{ mm}$, $\text{sgn}(x)$ correspond au signe du réel x , et d'après les conditions de frottement de Coulomb (5.83).

Pendant la phase ②, les solutions numérique et analytique se superposent comme présenté sur la figure 7.11. La force cohésive tangentielle étant plafonnée à la valeur p_M , on observe, pour un F_N connu, que le choix judicieux suivant de p_M permet d'imposer un coefficient de frottement équivalent :

$$p_M = \frac{\text{CoF} F_N}{L^2} .$$

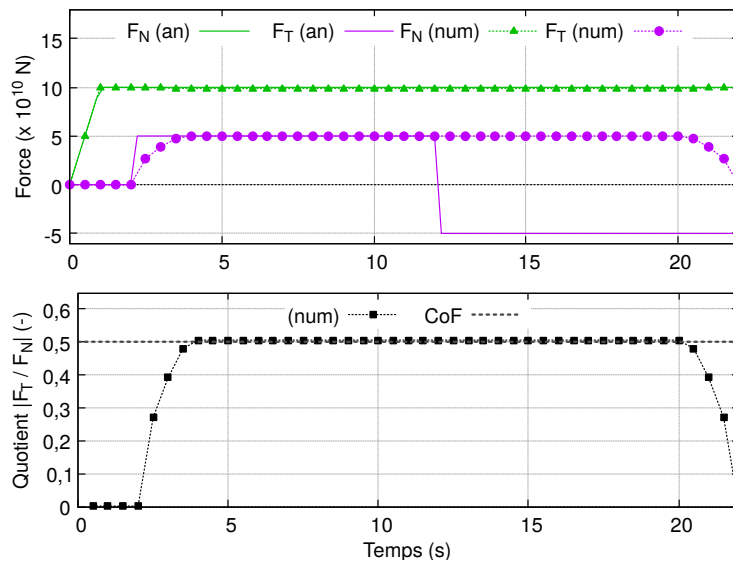


Figure 7.11 – Comportement global pour le cas-test 7-B : forces de réaction normale et tangentielle des surfaces sollicitées.

Le quotient $|F_T / F_N|$ représente ainsi un coefficient de frottement équivalent, égal à 0,5 dans ce cas-test 7-B.

En revanche, pendant la phase ③, les solutions numérique et analytique de F_T sont égales en normes mais de signes opposés comme présenté sur la figure 7.11. En effet, le signe de la solution analytique de F_T d'après le frottement de Coulomb dépend de celui de l'évolution de l'ouverture de l'élément cohésif, *i.e.* positif en ouverture et négatif en fermeture comme écrit dans l'équation 7.33 et illustré sur la figure 7.12. Au contraire, le signe du résultat numérique de la force F_T de réaction de l'élément cohésif dépend de la direction d'ouverture de l'élément cohésif. Cette différence fondamentale montre que, avec un choix judicieux de p_M connaissant F_N , l'élément cohésif permet de décrire de façon satisfaisante un comportement de frottement équivalent dans une

phase d'ouverture de l'élément ($sgn(\ddot{g}_{t1}) = sgn(\dot{\dot{g}}_{t1})$) mais pas dans une phase de fermeture ($sgn(\ddot{g}_{t1}) \neq sgn(\dot{\dot{g}}_{t1})$).

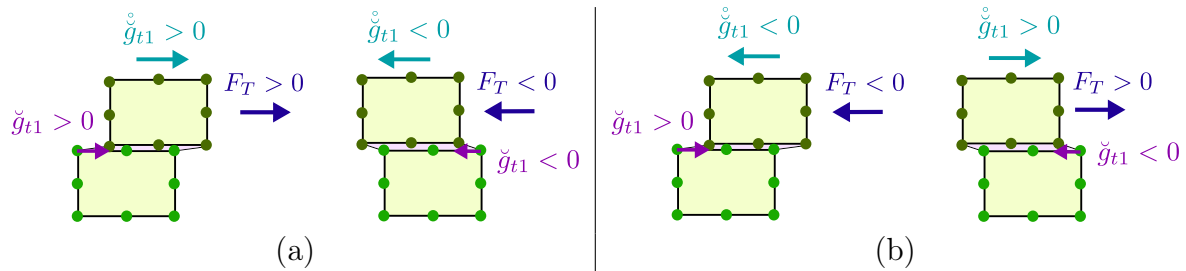


Figure 7.12 – Signe de la solution analytique F_T d'après le comportement de frottement de Coulomb, d'une part lors d'une phase d'ouverture tangentielle de l'interface i.e. $sgn(\ddot{g}_{t1}) = sgn(\dot{\dot{g}}_{t1})$ (a), et d'autre part dans une phase de fermeture tangentielle de l'interface i.e. $sgn(\ddot{g}_{t1}) \neq sgn(\dot{\dot{g}}_{t1})$.

Conclusion sur la capacité de cet élément cohésif à modéliser le comportement souhaité

Le cas-test 7-A de sollicitation normale a montré que l'élément mixte de Lorentz associé à un comportement de type Crisfield caractérisé par un seuil adhésif surfacique p_M et un écart adhésif maximal g_M permet de décrire de façon satisfaisante l'adhésion/décohésion entre les plis. Le cas-test 7-B de sollicitation tangentielle a montré que ce même élément associé à un comportement de type glissement tangentiel élastique caractérisé par p_M permet de décrire le comportement de frottement inter-pli à condition (i) que la force normale soit connue, et (ii) que l'élément soit en phase d'ouverture. Ainsi, si la non-pénétration et l'adhésion sont bien décrites, ces deux conditions constituent cependant des limites importantes pour que cet élément décrive le comportement de frottement souhaité; des développements supplémentaires sont nécessaires. Nous commentons ces deux limites l'une après l'autre.

Tout d'abord, le choix de valeur de p_M dans le cas-test 7-B a permis de représenter un comportement de frottement avec un coefficient de frottement équivalent de 0,5 car la force normale est connue et homogène sur la surface. Afin de décrire un comportement de frottement de Coulomb dans un cas plus général, un couplage entre les comportements normal et tangential devrait donc être ajouté, pour que la donnée matériau soit le coefficient de frottement, et que le seuil de force autorisant le déplacement tangential s'adapte à la sollicitation normale : $p_M \leftarrow p_M(\check{p}_n)$. Nous aborderons cela dans la partie 7.4 de ce chapitre. Ensuite, nous avons vu que lors de la fermeture de l'élément, la réaction tangentielle de l'élément cohésif n'est pas représentative de la physique d'un comportement de frottement pur de Coulomb; une modification du comportement de l'élément cohésif est donc nécessaire.

Dans le cas d'une sollicitation mixte (normale et tangentielle), il faudrait en fait deux comportements distincts mais couplés : d'une part un comportement normal d'adhésion avec un seuil d'adhésion/décohésion et un seuil de rupture, et d'autre part un comportement tangential avec un coefficient de frottement. Ainsi, l'établissement

d'un autre modèle est nécessaire afin de représenter le comportement inter-pli souhaité.

Classiquement, dans les simulations de la mise en forme d'un empilement de renforts, le contact avec frottement entre les plis est décrit à l'aide d'un algorithme de contact, et un coefficient de frottement est directement donné en entrée. Dans la partie suivante, nous nous proposons de donner des pistes de comparaison, sous le prisme de notre problème, entre l'utilisation du contact avec Z -set et celle de l'élément d'interface que nous venons de présenter, dans le cadre de leurs implémentations actuelles respectives dans Z -set. Nous mettrons ainsi en évidence que, même si des développements complémentaires sont requis, la stratégie présentée consistant à représenter le comportement de l'interface entre les plis *via* des éléments d'interface est prometteuse.

7.3 Comparaison entre les éléments d'interface et un algorithme de contact pour la description de l'inter-pli

7.3.1 Introduction à la modélisation numérique du contact

La simulation de la mise en forme d'un empilement de renforts nécessite de décrire les interactions d'un grand nombre de corps déformables, en contact deux à deux sur une grande partie de leur surface. Cela est en général [73, 157, 158] traité avec un algorithme de contact, dont nous présentons succinctement le principe ici. Un exemple de simulation de l'emboutissage d'un empilement de renforts est présenté sur la figure 7.13.

Un algorithme de contact permet décrire le contact unilatéral – *i.e.* non-pénétration et non-adhésion décrites par les conditions de Signorini (5.73) – et le frottement de Coulomb – présenté dans (5.83) – entre deux solides dont l'un est dit « impacteur » et l'autre « esclave ». A chaque incrément de calcul, la zone de contact est détectée en projetant les nœuds du solide esclave sur la surface de l'impacteur, avec une première étape de localisation grossière (pas forcément réalisée à chaque incrément de chargement) et une seconde étape plus locale. La gestion géométrique des corps est l'étape la plus coûteuse de l'algorithme de contact, avec environ 60 % du temps CPU total [157]. Notons que l'algorithme est fait de telle manière que le corps esclave ne peut pas pénétrer le corps impacteur, mais que l'inverse est *possible*. Afin d'assurer une non-pénétration réciproque, Hamila [157] a par exemple doublé les couples impacteur-esclave, mais ce au détriment de la rapidité du calcul.

Dans Z -set (version Z8), le problème global de contact est résolu par pénalité en plusieurs étapes. Tout d'abord, une première estimation de la solution est obtenue *sans* prendre en compte le problème de contact, puis une matrice dite de « flexibilité » est extraite du problème global et le sous-problème de contact *uniquement* est résolu avec les réactions de contact et les déplacements relatifs, enfin la solution globale est actualisée. Des itérations peuvent avoir lieu si le critère de convergence n'est pas satisfait. C'est cet algorithme de contact que nous utilisons dans cette partie 7.3. Notons qu'un autre algorithme de contact basé sur une approche monolithique en Lagrangien augmenté est implémenté dans Z -set. Cependant, dans la version disponible, le frotte-

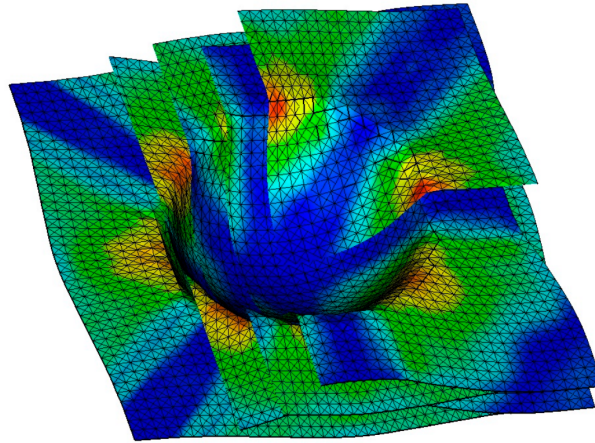


Figure 7.13 – *Emboutissage de cinq plis, réalisé dans le logiciel PlasFib avec ajout du contact non standard arête-arête permettant la convergence du calcul [157].*

ment entre les deux solides n'est pas pris en compte (contact unilatéral uniquement). Cet algorithme n'est donc pas considéré dans cette partie – cependant, étant plus performant, nous l'utilisons pour le contact entre le renfort et le moule supposé sans frottement comme nous le verrons par la suite.

Sous le prisme particulier de notre problème, nous souhaitons comparer la résolution numérique du problème avec des éléments cohésifs au niveau de l'interface, à l'utilisation d'un algorithme de contact. La capacité dans chacun des deux cas à représenter les trois aspects de la physique de notre problème est résumée dans le tableau 7.4. Nous avons commenté les limites et potentiels développements nécessaires pour que les éléments d'interface représentent le comportement de frottement souhaité dans la section précédente 7.2.4, et nous ne reviendrons pas sur cette question dans cette partie 7.3. Nous nous proposons plutôt de comparer uniquement des aspects numériques de la résolution à travers les deux cas-tests 7-C et 7-D suivants, ces aspects constituant également des critères de choix lors de l'élaboration d'une stratégie numérique.

	<i>Éléments d'interface mixtes de Lorentz</i>	<i>Contact (par pénalité)</i>
Respect de la non-pénétration	oui (exactement)	oui (approchée)
Adhésion	oui	non
Frottement	non (mais potentiellement)	oui

Tableau 7.4 – *Capacité des éléments d'interface et de l'algorithme de contact à décrire les trois aspects souhaités du comportement inter-plies : non-pénétration, adhésion et frottement.*

7.3.2 Cas-test 7-C : sollicitation tangentielle

Description Nous considérons de nouveau la géométrie, les conditions aux limites et l'évolution de chargement du cas-test 7-B de type *pull-through* qui ont été illustrés sur les figures 7.8 (p.162) et 7.9 (p.162) pour rappel. Pour ce cas-test 7-C, les maillages utilisés sont présentés sur la figure 7.14 ; celui du cas des éléments cohésifs est le même que pour le cas-test 7-B.

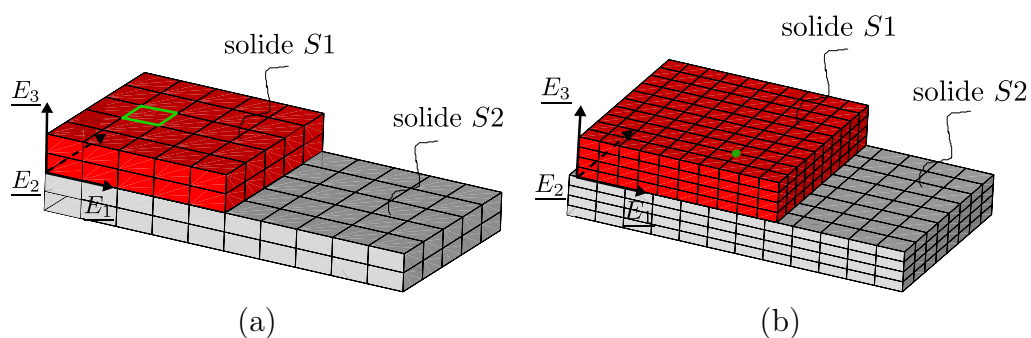


Figure 7.14 – Maillages de références avec des éléments d'interface (a) et dans le cas du contact (b) pour le cas-test 7-C.

Des maillages différents sont requis pour les éléments cohésifs et pour le contact. En effet, comme nous l'avons vu, les éléments d'interface sont créés par dédoublement des nœuds situés au niveau de la surface de contact. Les nœuds appartenant à chacun des deux solides et situés à de part et d'autre de l'interface sont donc coïncidents. En revanche, dans le cas du contact, il est préférable que les nœuds ne coïncident *pas* simultanément, ce qu'on peut assurer par exemple avec des tailles d'éléments non proportionnelles pour les deux solides. Par ailleurs, l'algorithme de contact est utilisé sur des éléments linéaires car dans le cas de Z-set, sa robustesse sur des éléments quadratiques n'est pas assurée. En revanche, on rappelle que l'élément d'interface utilisé présente une formulation P2/P1 pour satisfaire la condition LBB : il requiert donc quant à lui un maillage volumique quadratique (au moins autour de l'interface). Ainsi, une comparaison en fonction de la taille de maille n'est pas appropriée, et nous faisons le choix de comparer les résultats obtenus en fonction du nombre de degrés de liberté notés « *iddl* » situés à l'interface et appartenant au solide S1 d'intérêt. Le décompte de ces *iddl* dans le cas des maillages utilisés est présenté dans le tableau 7.5 ; celui-ci met en évidence que les deux maillages étudiés présentent environ le même nombre de *iddl*.

	<i>Éléments d'interface</i>	<i>Contact</i>
Type d'éléments volumiques	hexaèdre quadratique	hexaèdre linéaire
Nombre d'éléments volumiques	$5 \times 5 \times 2 = 50$	$10 \times 10 \times 4 = 400$
Nombre d'éléments cohésifs	$5 \times 5 \times 1 = 25$	-
Nombre total de nœuds	360	605
dont à l'interface	96	121
Nombre de <i>iddl</i>	$96 \times 3 + 36 \times 3/2 = 342$	$121 \times 3 = 363$

Tableau 7.5 – Caractéristiques des maillages de référence du solide d'intérêt *S1* dans le cas des éléments d'interface et du contact pour le décompte des degrés de liberté *iddl* pour le cas-test 7-C.

Tout comme pour le cas-test 7-B, les deux solides sont dotés d'un comportement linéaire isotrope avec $E = 4 \times 10^{10}$ MPa et $\nu = 0,01$ et l'interface présente un comportement de type glissement tangential élastique avec $p_M = 5 \times 10^8 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ($r = 1 \times 10^{10}$). Pour le contact, le coefficient de frottement CoF est de 0,5.

À titre d'illustration, la déformée dans chacun des deux cas est présentée sur la figure 7.15.

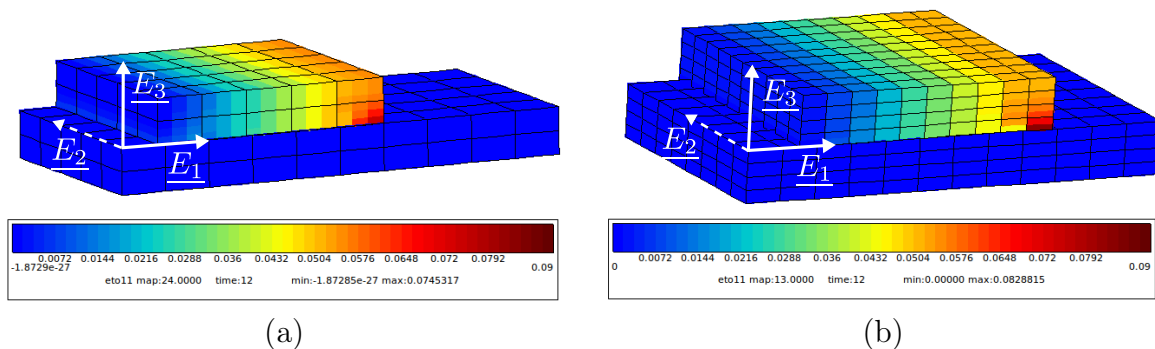
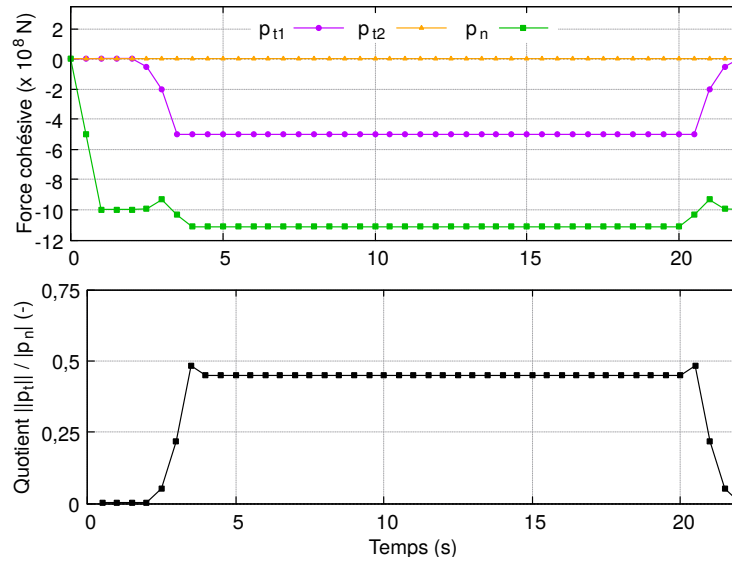
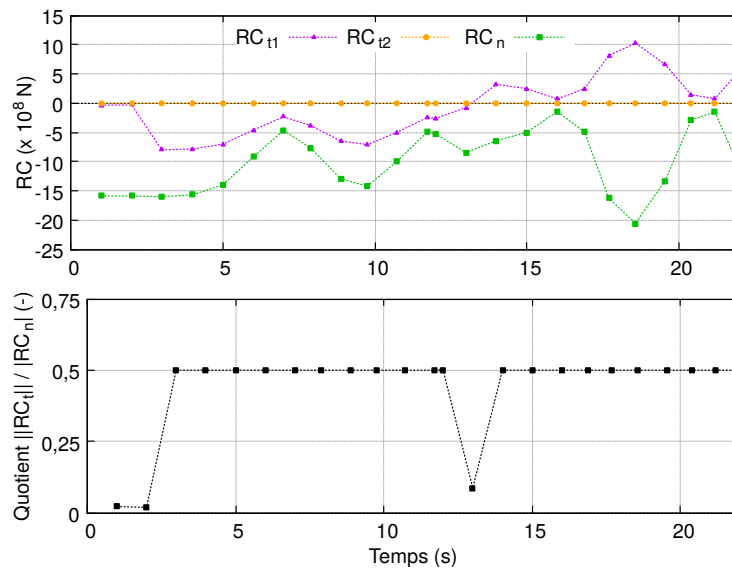


Figure 7.15 – Visualisation de la déformée et de la distribution de la déformation du solide d'intérêt *S1* selon la direction de sollicitation à l'incrément de temps correspondant au déplacement tangential maximal ($t = 12$ s sur la figure 7.9) lors du cas-test 7-C, dans le cas des éléments d'interface (a) et du contact (b) avec les maillages de référence.

Observation du comportement local La figure 7.16 présente le comportement local au niveau de l'interface dans le cas des éléments d'interface et dans le cas du contact. Le comportement de l'interface est extrait au niveau d'un point d'intégration de l'élément d'interface situé à la verticale de l'élément mis en évidence en vert sur la figure 7.14a, et les réactions de contact sont obtenues au niveau du nœud situé à la verticale du nœud indiqué en vert sur la figure 7.14b. Nous observons que le choix judicieux des constantes matériau introduit dans (7.33) permet de décrire, dans les deux cas, un coefficient de frottement local équivalent de 0,5. En revanche, tandis que le signe de la composante RC_{t1} pour le contact change de signe lorsque le sens de sollicitation est inversé, celui de la composante p_{t1} pour les éléments d'interface ne change pas de signe,

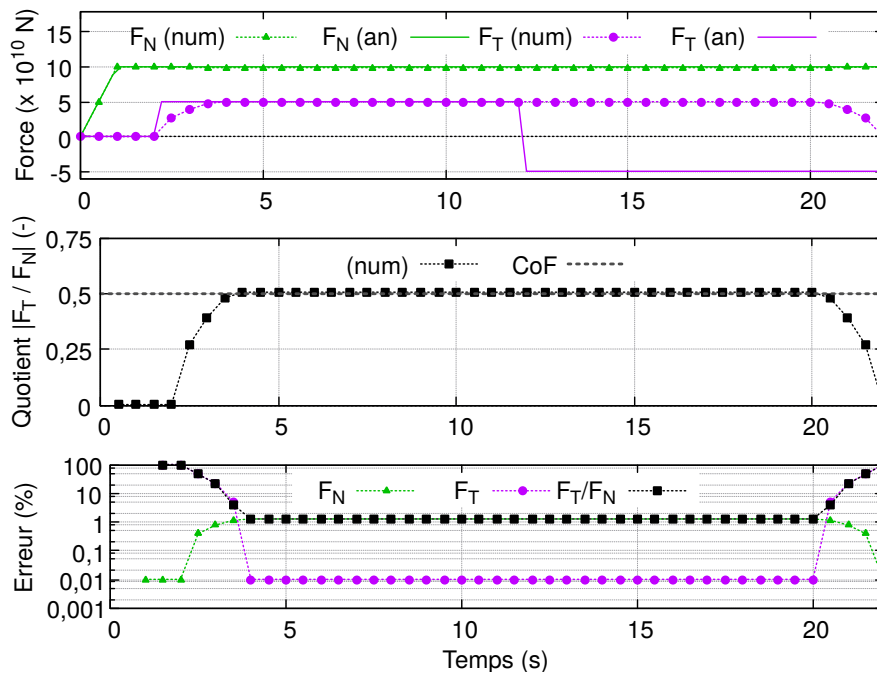


(a)

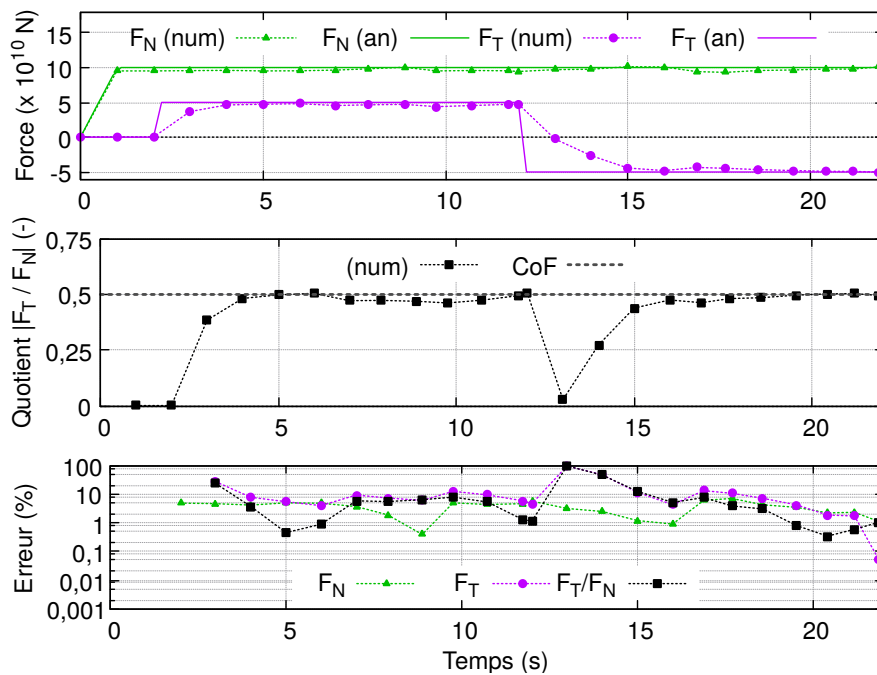


(b)

Figure 7.16 – Comportement local d'un élément d'interface au niveau d'un point d'intégration (a), et au niveau d'un nœud en contact (b) avec les maillages de référence pour le cas-test 7-C.



(a)



(b)

Figure 7.17 – Résultats de force normale F_N , quotient $|F_T/F_N|$, et de l'erreur par rapport à la solution analytique dans le cas des éléments d'interface (a) et du contact (b) pour le cas-test 7-C avec les maillages de référence.

ce qui n'est pas physique – nous avons déjà commenté cet aspect précédemment. Par ailleurs, dans le cas du contact, les composantes de la réaction de contact RC varient très fortement quand bien même le chargement est constant ; ces variations sont dues à la sensibilité au maillage (coïncidence des nœuds).

Observation du comportement global La figure 7.17 présente, dans le cas des éléments d'interface et dans le cas du contact, l'évolution de la force normale F_N et du quotient de la force tangente sur la force normale $|F_T/F_N|$ introduits pour le cas-test 7-B, et nous comparons ces résultats numériques à leurs valeurs analytiques (7.33). Dans le cas des éléments cohésifs, l'erreur relative est inférieure à 1 % pour tous les incréments de chargement ; dans le cas du contact, elle est variable et est plutôt de l'ordre de 5 à 10 %. Par ailleurs, dans les deux cas, un temps d'accommodation est observé pour la force tangente par rapport à la solution analytique (à $t = 12$ s) ; il est dû au fait que le déplacement relatif à l'interface ne commence pas au même incrément de chargement en tout point de l'interface.

Étude de convergence et temps de calcul CPU Les maillages de référence (figure 7.8a) sont raffinés et déraffinés dans les trois directions de l'espace, donnant naissance aux maillages présentés sur la figure 7.6.

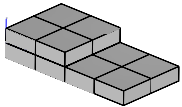
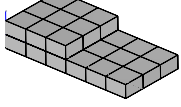
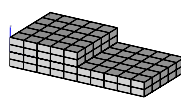
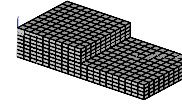
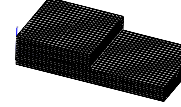
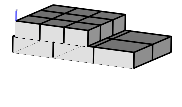
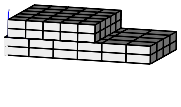
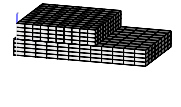
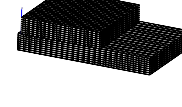
				
raff.EI 0,2 76,5 <i>iddl</i>	raff.EI 0,5 159 <i>iddl</i>	raff.EI 1 (ref) 342 <i>iddl</i>	raff.EI 2 1211,5 <i>iddl</i>	raff.EI 4 8347,5 <i>iddl</i>
				
raff.C 0,5 48 <i>iddl</i>	raff.C 1 108 <i>iddl</i>	raff.C 2 (ref) 363 <i>iddl</i>	raff.C 4 1323 <i>iddl</i>	

Tableau 7.6 – Maillages utilisés pour l'étude de convergence du cas-test 7-C avec des éléments d'interface (EI) (en haut) et pour l'utilisation du contact (C) (en bas) : visualisation, niveau de raffinement et nombre de degrés de liberté *iddl*.

L'erreur par rapport à la solution analytique en fonction du nombre de degrés de liberté *iddl* et du temps de calcul CPU est présentée sur la figure 7.18. Dans le cas des éléments d'interface, le maillage le plus grossier (raff.EI 0,2 avec 76,5 *iddl*) donne une solution qui diffère peu de celle avec le maillage le plus raffiné. Au contraire, pour le contact, le maillage de référence (raff.C 2 avec 363 *iddl*) est nécessaire pour que l'erreur relative soit inférieure à 5 %. Pour obtenir un résultat numérique avec une erreur relative par rapport à la solution analytique inférieure à 5 %, le temps de calcul CPU est 20 fois supérieur avec un algorithme de contact qu'avec des éléments d'interface.

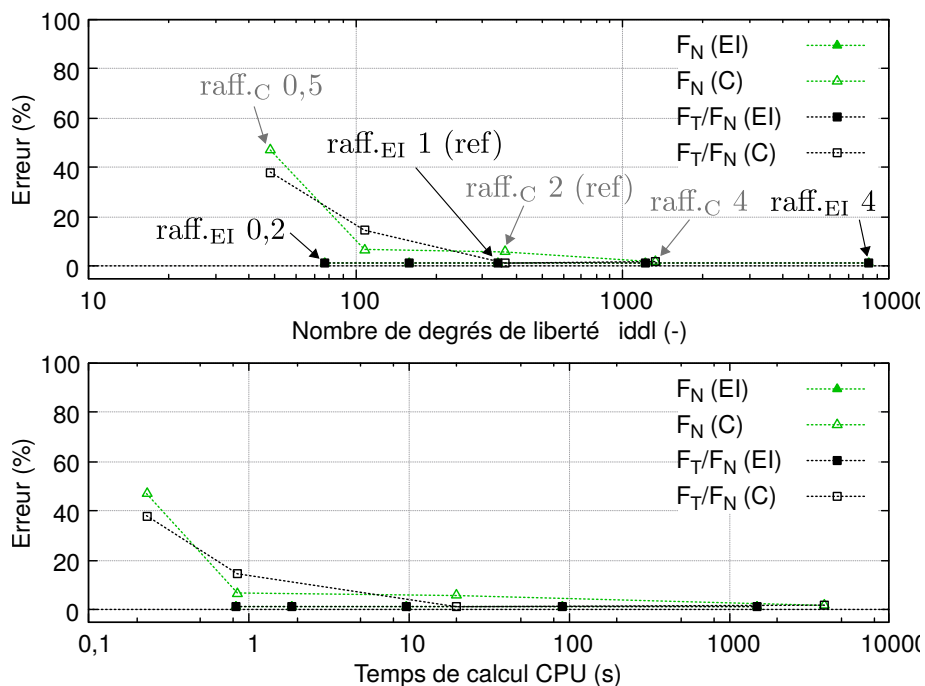


Figure 7.18 – Erreurs relatives de la force normale F_N et du quotient F_T/F_N pris à l'instant de déplacement tangent maximal ($t = 12$ s sur la figure 7.9) par rapport à la solution analytique, en fonction du nombre de degrés de liberté iddl des maillages testés et du temps de calcul CPU nécessaire pour les phases ① et ② du chargement (i.e. jusqu'à $t = 12$ s), dans le cas des éléments d'interface (EI) et du contact (C) lors du cas-test 7-C.

7.3.3 Cas-test 7-D : sollicitation en flexion

Description Ce cas-test décrit l'essai de flexion sur empilement réalisé expérimentalement et présenté dans le chapitre 3. Trois solides de mêmes dimensions $h_1 \times h_2 \times h_3$ avec $h_1 = 50$ mm, $h_2 = 10$ mm et $h_3 = 2$ mm comme schématisé sur la figure 7.19a sont superposés (en contact deux à deux). Les conditions aux limites, schématisées sur la figure 7.19b, sont imposées en déplacement de façon monotone, avec $U_3 = -15$ mm. Il s'agit d'un essai en grands déplacements avec $-U_3 = 7,5 h_3$. Les solides sont maillés avec des éléments volumiques hexaédriques quadratiques; les maillages utilisés sont présentés sur la figure 7.7.

Les trois solides sont dotés d'une loi de comportement linéaire isotrope avec $E = 4 \times 10^5$ MPa et $\nu = 0,01$. Les surfaces de contact deux à deux des solides présentent un comportement de type glissement tangentiel élastique avec un seuil adhésif surfacique $p_M = 2 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ($r = 1 \times 10^6$) dans le cas des éléments d'interface, et pour le contact un coefficient de frottement CoF de 0,5 est utilisé. Le choix de p_M est fait de sorte que la force de réaction RU_3 ait la même valeur *environ* dans les deux cas. RU_3 est définie comme la composante selon \underline{E}_3 de la somme des réactions aux nœuds de l'arête (en bleu sur la figure 7.19b) sur laquelle le déplacement est imposé.

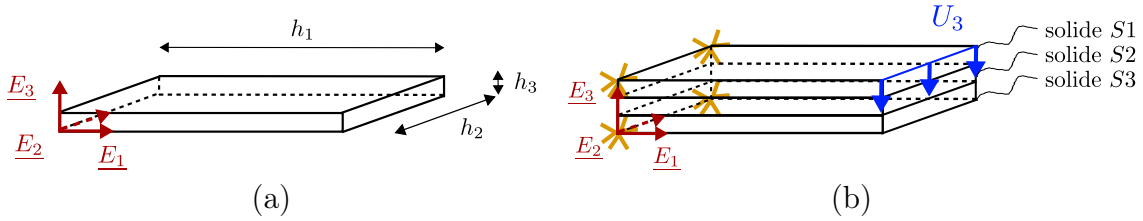


Figure 7.19 – Géométrie (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 7-D.

raff.' _{EI} 0,4 305 iddl	raff.' _{EI} 0,6 612 iddl	raff.' _{EI} 1 1722 iddl	raff.' _{EI} 2 5705 iddl	raff.' _{EI} 4 21905 iddl
raff.' _C 0,4 117 iddl	raff.' _C 0,6 218 iddl	raff.' _C 1 449 iddl	raff.' _C 2 1610 iddl	

Tableau 7.7 – Maillages utilisés pour l'étude de convergence du cas-test 7-D avec des éléments d'interface (en haut) et pour l'utilisation du contact (en bas) : visualisation, niveau de raffinement et nombre de degrés de liberté iddl.

À titre d'illustration, on présente sur la figure 7.20 une visualisation de la déformée dans chacun des deux cas au dernier incrément de chargement.

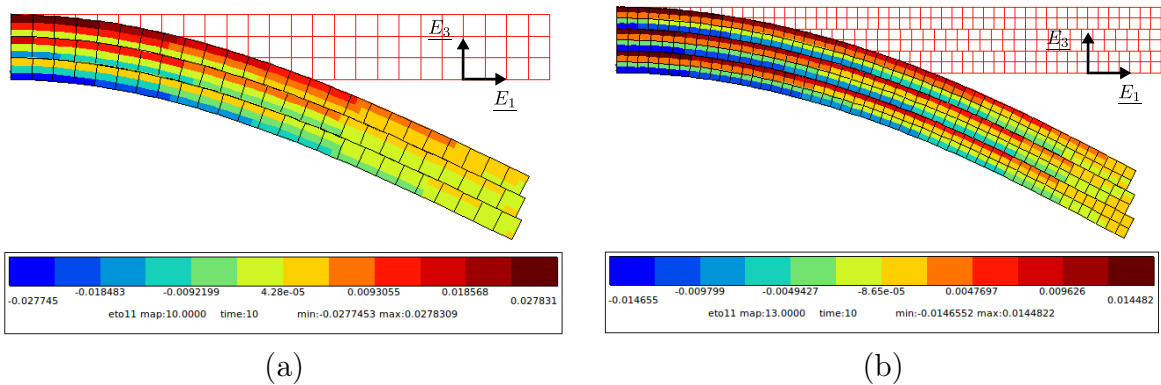


Figure 7.20 – Visualisation de la déformée et de la distribution de la déformation selon l'axe horizontal au dernier incrément de chargement lors du cas-test 7-D, dans le cas des éléments d'interface (a) et du contact (b) avec les maillages raff.'_{EI} 1 et raff.'_C 2 respectivement.

Étude de convergence et temps de calcul L'erreur sur RU_3 par rapport à la solution obtenue avec le maillage le plus raffiné dans chaque cas est présentée sur la figure 7.21 en fonction du nombre de degrés de liberté *iddl* et du temps de calcul CPU. Tout

comme pour le cas-test précédent, on observe que dans le cas des éléments d'interface, la solution avec le maillage le plus grossier (raff.EI 0,4 avec 305 *iddl*) diffère peu de celle avec le maillage le plus raffiné, tandis que pour le contact il y a un écart de 7,5 % entre les solutions obtenues avec les deux maillages les plus raffinés testés (il y a divergence du calcul pour des maillages encore plus raffinés). Pour obtenir un résultat numérique avec une erreur relative inférieure à 10 % par rapport à la solution obtenue avec le maillage le plus raffiné, le temps de calcul CPU est 30 fois supérieur avec un algorithme de contact qu'avec des éléments d'interface.

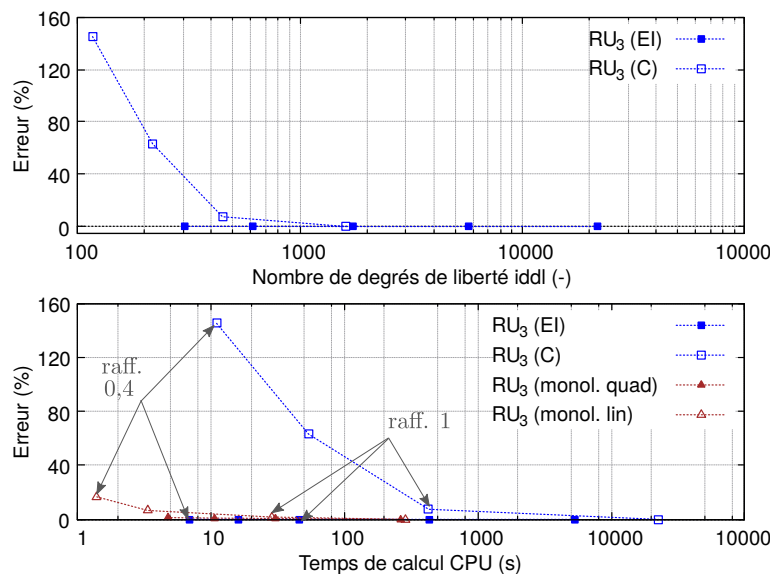


Figure 7.21 – Erreur relative de la réaction normale RU_3 au dernier incrément par rapport à la solution la plus raffinée, en fonction du nombre de degrés de liberté *iddl* des maillages testés et du temps de calcul CPU, dans le cas des éléments d'interface (EI), du contact (C) et d'un solide monolithique maillé avec des éléments quadratiques d'une part et linéaires d'autre part.

Cependant, nous rappelons que les éléments finis utilisés sont linéaires dans le cas du contact et quadratiques dans le cas des éléments d'interface. Par conséquent un phénomène de verrouillage numérique apparaît lorsque l'épaisseur de la structure fléchie est trop faible devant ses autres dimensions. Afin de quantifier ce phénomène dans ce cas-test, nous réalisons le même cas-test 7-D mais sur un seul solide monolithique *sans interface* constitué par l'assemblage « collé » de $S1$, $S2$ et $S3$, maillé avec des éléments volumiques hexaédriques quadratiques d'une part et linéaires d'autre part. Une visualisation de la déformation dans chacun des deux cas est proposée sur la figure 7.22. L'erreur relative, présentée sur la figure 7.21, montre que la contribution du verrouillage numérique dans l'erreur relative dans le cas du contact pour notre cas-test est faible.

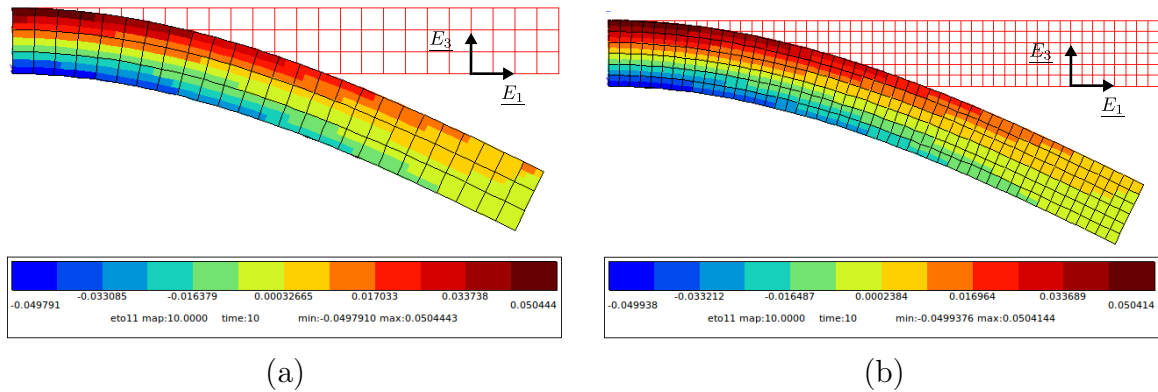


Figure 7.22 – Visualisation de la déformée et de la distribution de la déformation selon l'axe horizontal au dernier incrément de chargement lors du cas-test 7-D dans le cas d'un solide monolithique sans interface, avec des éléments quadratiques (même nombre d'éléments volumiques que pour le maillage raff. 'E1 1) (a) et avec des éléments linéaires (même nombre d'éléments volumiques que pour le maillage raff. 'C 2) (b).

7.3.4 Conclusion

Le choix d'une stratégie numérique est un compromis entre sa robustesse, sa rapidité, son adaptabilité et la représentativité de la physique notamment. Le tableau 7.8 synthétise de manière qualitative les points de comparaison entre les deux méthodes étudiées dans les paragraphes précédents, pour la modélisation du comportement de l'interface entre les plis. Ce tableau met en évidence l'intérêt potentiel de l'utilisation des éléments d'interface comparé à un algorithme classique de contact par pénalité qui présente des difficultés bien connues de convergence des calculs, de limitation des temps de calcul, de gestion de la sensibilité au maillage, et de choix des paramètres tels que la pénalité. Cependant, deux principales limites pour l'utilisation des éléments d'interface sont mises en évidence.

La première est celle de la conséquence des grandes transformations des solides reliés par des éléments d'interface sur la description de ceux-ci. En effet, comme nous l'avons vu, la notion de force cohésive entre deux points initialement confondus est conditionnée par l'hypothèse qu'un faible déplacement relatif apparaît entre ces deux points, puisque la valeur de la force cohésive est partagée par ces deux points. Lors de la mise en forme, de grandes rotations et de grands déplacements interviennent au niveau des solides. Localement au niveau des éléments d'interface, leur formulation dans leur repère local convient en cas de grandes rotations globales. En revanche, si les grands déplacements globaux se traduisent au niveau de l'interface par de grands déplacements relatifs, le plus proche voisin nécessite d'être recherché, ce qui rapproche la démarche de celle d'un algorithme de contact. Des précautions doivent donc être prises en termes de maillage, et si nécessaire des stratégies de remaillage des éléments d'interface peuvent être envisagées. De tels grands déplacements *relatifs* ne sont cependant pas prouvés, et nous considérons dans le cadre de ce travail que l'interface entre les plis reste dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements relatifs.

	<i>Éléments d'interface mixtes de Lorentz</i>	<i>Contact (par pénalité)</i>
Condition de non-pénétration	++ (exactement)	+ (approchée)
Comportement d'adhésion	++	--
Comportement de frottement	- (développements requis)	++
Sensibilité au maillage	++ (aucune)	-- (maillage complexe)
Temps de calcul CPU	++ (compétitif)	-- (augmente avec les <i>iddl</i>)
Convergence de la solution	++	-- (maillage raffiné requis)
Grandes transformations	-- (à évaluer)	++

Tableau 7.8 – Comparaison qualitative entre deux stratégies de description de l'interface entre les plis de renforts : avec des éléments d'interface d'une part, et avec un algorithme de contact d'autre part (« -- » désignant un inconvénient et « ++ » un avantage).

La seconde limite est celle de la description du comportement de frottement. En effet, telles que présentées dans ce chapitre, la formulation des éléments d'interface et les lois de comportement associées ne permettent pas de décrire le comportement de non-pénétration, adhésion et frottement simultanément. Dans la partie suivante, nous étudions la possibilité d'utiliser ces éléments d'interface pour décrire du contact avec frottement, avec un coefficient de frottement donné en entrée. Pour cela, nous commençons par formuler le problème, puis nous évaluons les modifications à apporter à l'élément d'interface mixte utilisé pour qu'il décrive le comportement souhaité.

7.4 Formulation et résolution du problème mécanique de deux solides en contact avec frottement (sans adhésion)

Le problème \mathcal{P}_Σ (encadré 7.1) complet décrivant l'équilibre de deux solides séparés par une interface présentant adhésion et frottement nécessite les multiplicateurs de Lagrange suivants pour sa résolution avec un Lagrangien (méthode présentée dans la partie 7.1.2) :

- un scalaire λ_n^c pour imposer la condition de non-pénétration,
- un scalaire λ^a pour décrire l'adhésion/décohésion,
- $dim - 1$ multiplicateurs (stockés dans un vecteur $\underline{\lambda}_t^f$ de composante normale nulle) pour décrire le frottement,

soit un total de $dim + 1$ multiplicateurs scalaires. Cependant, l'élément fini d'interface mixte utilisé jusqu'ici présente une formulation de type P2/P1 avec des multiplicateurs de Lagrange vectoriels de la dimension dim du problème. Tel qu'il existe dans Z-set, il ne peut donc pas respecter la non-pénétration tout en décrivant les comportements de

frottement et d'adhésion comme proposé dans le modèle de Talon & Curnier. Après avoir restreint le problème à celui du contact avec adhésion sans frottement dans la partie 7.2 de ce chapitre, on le restreint donc cette fois à un comportement de contact avec frottement sans adhésion.

Ainsi, l'objectif de cette partie est d'évaluer la capacité de l'élément fini de Lorentz à décrire du frottement, en changeant le sens physique des dim multiplicateurs de Lagrange pour qu'ils respectent la non-pénétration et décrivent un comportement de frottement plutôt que celui d'adhésion. Nous cherchons donc, sans modifier le nombre de degrés de liberté de l'élément fini d'interface mixte utilisé pour des contraintes de temps, à respecter la condition de non-pénétration tout en décrivant un comportement de frottement de Coulomb au niveau de l'interface.

7.4.1 Formulation du problème

Dans le chapitre 5 (partie 5.4.2), nous avons présenté les pseudo-potentiels d'énergie libre et de dissipation décrivant la non-pénétration et le frottement. D'une part, le pseudo-potential ψ^c de contact défini dans (5.74) vise à imposer la condition de non-pénétration $g_n(\underline{u}) \leq 0$. Cette condition est traitée avec un multiplicateur de Lagrange scalaire λ_n^c et l'introduction du Lagrangien augmenté ℓ_n de la même façon que dans les problèmes \mathcal{P}_Σ^a (encadré 7.2) et $\check{\mathcal{P}}_\Sigma^a$ (encadré 7.3). D'autre part, pour décrire le comportement de frottement, on rappelle que la variable interne \underline{g}_t^c est introduite, et que la contrainte $\underline{g}_t^c = \underline{g}_t$ est imposée par le pseudo-potential d'énergie libre ψ^f défini dans (5.84). Celle-ci est traitée avec le multiplicateur de Lagrange vectoriel $\underline{\lambda}_t^f$ et l'introduction du Lagrangien augmenté ℓ_t . On pose alors $\underline{\lambda}^f = \lambda_n^c \underline{n} + \underline{\lambda}_t^f$ (où « f » désigne le frottement). Le potentiel de dissipation ϕ^f est exploité lors de l'écriture de la loi de comportement par dérivation du Lagrangien augmenté ℓ_t – les détails peuvent être trouvés dans la référence [136]. On a introduit le multiplicateur augmenté pour le contact $\tilde{\lambda}_n^c = \lambda_n^c + r g_n(\underline{u})$ dans (7.8) ; on introduit de façon similaire pour le frottement :

$$\underline{\tilde{\lambda}}_{t0}^f = \underline{\lambda}_t^f + r(\underline{g}_t - \underline{g}_{t0}^c) \quad (7.34)$$

où \underline{g}_{t0}^c correspond à la valeur de la variable interne \underline{g}_t^c au début de l'incrément considéré.

Ainsi, le comportement à l'interface est décrit par la force cohésive \underline{p} conjuguée à la variable cinématique $\underline{g}(\underline{u})$, qui est caractérisée à la fois par une pression normale de contact due à la non-pénétration et notée p_n^c , et par une contribution tangentielle liée au frottement notée \underline{p}_t^f , telles que $\underline{p} = p_n^c \underline{n} + \underline{p}_t^f$. Le problème \mathcal{P}_Σ^f est présenté dans l'encadré 7.9.

On cherche maintenant à résoudre ce problème. Une condition nécessaire pour que $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}_t^f)$ soit un point selle de \mathcal{L}_Σ^f est que sa première variation au voisinage de la solution $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}_t^f)$ s'annule, c'est-à-dire que :

$$\forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, \forall \delta \lambda_n^c \in \mathcal{S}_-, \forall \delta \underline{\lambda}_t^f \in (\mathcal{S}_-)^{dim-1}, \delta \mathcal{L}_\Sigma^f(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}_t^f)[\delta \underline{u}, \delta \lambda_n^c, \delta \underline{\lambda}_t^f] = 0. \quad (7.37)$$

Problème \mathcal{P}_Σ^f

Trouver $(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}_t^f) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}_- \times (\mathcal{S}_-)^{dim-1}$ tel que :

$$\mathcal{L}_\Sigma^f(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}_t^f) = \max_{\lambda_n^c \in \mathcal{S}_-} \max_{\lambda_t^f \in (\mathcal{S}_-)^{dim-1}} \min_{\underline{u} \in \mathcal{V}} \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \lambda_n^c, \lambda_t^f) \quad (7.35)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \lambda_n^c, \lambda_t^f) &= \mathcal{E}_{int}^{(1)}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(2)}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{ext}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(12)}(\underline{u}, \lambda_n^c, \lambda_t^f; \underline{g}_t^t) \\ &= \mathcal{E}_{int}^{(1)}(\underline{u}) + \mathcal{E}_{int}^{(2)}(\underline{u}) - \mathcal{W}_{ext}(\underline{u}) \\ &\quad + \int_{\Gamma^{(12)}} \underbrace{\left[-\frac{1}{2r} \lambda_n^c{}^2 + \frac{1}{2r} \langle \lambda_n^c + r g_n(\underline{u}) \rangle_-^2 \right]}_{\ell_n(g_n(\underline{u}), \lambda_n^c)} dS \\ &\quad + \int_{\Gamma^{(12)}} \underbrace{\left[-\frac{1}{2r} \|\lambda_t^f\|^2 + \frac{1}{2r} \|\lambda_t^f + r(\underline{g}_t(\underline{u}) - \underline{g}_t^t)\|^2 \right]}_{\ell_t(g_t(\underline{u}), \lambda_t^f; \underline{g}_t^t)} dS. \end{aligned}$$

où l'énergie interne des solides hyperélastiques et le travail des forces extérieures peuvent être trouvés dans (6.3) et (7.1) respectivement. La force cohésive $\underline{p} = p_n^c \underline{n} + \underline{p}_t^f$ est caractérisée par :

$$\begin{aligned} p_n^c \underline{n} &= \frac{\partial \ell_n}{\partial \underline{g}} = \begin{cases} \hat{\lambda}_n^c \underline{n} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \quad (C) \\ \underline{0} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c > 0 \quad (E) \end{cases} \\ \underline{p}_t^f &= \frac{\partial \ell_t}{\partial \underline{g}} \\ &= \begin{cases} \underline{\lambda}_{t0}^f & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \quad (C) \quad \text{et } \|\underline{\lambda}_{t0}^f\| \leq -\text{CoF} \hat{\lambda}_n^c \quad (A^{ce}) \\ -\text{CoF} \hat{\lambda}_n^c \frac{\underline{\lambda}_{t0}^f}{\|\underline{\lambda}_{t0}^f\|} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \quad (C) \quad \text{et } \|\underline{\lambda}_{t0}^f\| > -\text{CoF} \hat{\lambda}_n^c \quad (G) \\ \underline{0} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c > 0 \quad (E). \end{cases} \end{aligned} \quad (7.36)$$

Encadré 7.9 – Problème mécanique \mathcal{P}_Σ^f de maxi-maxi-minimisation de l'énergie potentielle de deux solides séparés par une interface avec frottement (sans adhésion) avec le modèle de Alart & Curnier [147], qui correspond à celui de Talon & Curnier [140] sans le frottement. Les différents états sont : écart (E) ou contact (C) d'une part, et adhérence (A^{ce}) ou glissement (G) en cas de contact d'autre part.

Ces conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^f(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}_t^f)[\delta \underline{u}] = 0 \\ \forall \delta \lambda_n^c \in \mathcal{S}_-, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^f(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}_t^f)[\delta \lambda_n^c] = 0 \\ \forall \delta \lambda_t^f \in (\mathcal{S}_-)^{dim-1}, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^f(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}_n^c, \tilde{\lambda}_t^f)[\delta \lambda_t^f] = 0, \end{cases} \quad (7.38)$$

ou de façon équivalente avec $\underline{\lambda}^f = \lambda_n^c \underline{n} + \lambda_t^f \underline{t} \in (\mathcal{S}_-)^{dim}$ pour alléger les notations :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^f(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}^f)[\delta \underline{u}] = 0 \\ \forall \delta \underline{\lambda}^f \in (\mathcal{S}_-)^{dim}, & \delta \mathcal{L}_\Sigma^f(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\lambda}^f)[\delta \underline{\lambda}^f] = 0. \end{cases} \quad (7.39)$$

De la même façon que la force cohésive \underline{p} est la variable duale conjuguée du déplacement relatif $\underline{g}(\underline{u})$, on pose \underline{h} la variable duale conjuguée des multiplicateurs de Lagrange $\underline{\lambda}^f$, *i.e.* $\underline{h} = \frac{\partial(\ell_n + \ell_t)}{\partial \underline{\lambda}^f}$. Les conditions d'optimalité (7.39) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0, & \delta \mathcal{W}_\Sigma(\tilde{\underline{u}}) + \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot \underline{p} \, dS = 0 \\ \forall \delta \underline{\lambda}^f \in (\mathcal{S}_-)^{dim}, & \int_{\Gamma^{(12)}} \delta \underline{\lambda}^f \cdot \underline{h} \, dS = 0. \end{cases} \quad (7.40)$$

Pour résoudre ce problème (7.40) dans un schéma itératif incrémental, nous avons besoin d'en caractériser la deuxième variation, dont les différentes contributions sont les suivantes :

$$\begin{cases} \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \underline{\lambda}^f)[\delta \underline{u}][\delta \underline{u}] & = \delta^2 \mathcal{W}_\Sigma(\underline{u}) + \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot \frac{\partial \underline{p}}{\partial \underline{g}(\underline{u})} \cdot \underline{g}(\delta \underline{u}) \, dS \\ \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \underline{\lambda}^f)[\delta \underline{u}][\delta \underline{\lambda}^f] & = \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot \frac{\partial \underline{p}}{\partial \underline{\lambda}^f} \cdot \delta \underline{\lambda}^f \, dS \\ \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \underline{\lambda}^f)[\delta \underline{\lambda}^f][\delta \underline{u}] & = \int_{\Gamma^{(12)}} \delta \underline{\lambda}^f \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{g}(\underline{u})} \cdot \underline{g}(\delta \underline{u}) \, dS \\ \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \underline{\lambda}^f)[\delta \underline{\lambda}^f][\delta \underline{\lambda}^f] & = \int_{\Gamma^{(12)}} \delta \underline{\lambda}^f \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{\lambda}^f} \cdot \delta \underline{\lambda}^f \, dS, \end{cases} \quad (7.41)$$

et peuvent se réécrire (les détails sont présentés dans la référence [136]) :

$$\begin{cases} \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \underline{\lambda}^f)[\delta \underline{u}][\delta \underline{u}] & = \delta^2 \mathcal{W}_\Sigma(\underline{u}) + \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot \underline{r} \underline{T} \cdot \underline{g}(\delta \underline{u}) \, dS \\ \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \underline{\lambda}^f)[\delta \underline{u}][\delta \underline{\lambda}^f] & = \int_{\Gamma^{(12)}} \underline{g}(\delta \underline{u}) \cdot \underline{T} \cdot \delta \underline{\lambda}^f \, dS \\ \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \underline{\lambda}^f)[\delta \underline{\lambda}^f][\delta \underline{u}] & = \int_{\Gamma^{(12)}} \delta \underline{\lambda}^f \cdot \underline{T} \cdot \underline{g}(\delta \underline{u}) \, dS \\ \delta^2 \mathcal{L}_\Sigma^f(\underline{u}, \underline{\lambda}^f)[\delta \underline{\lambda}^f][\delta \underline{\lambda}^f] & = \int_{\Gamma^{(12)}} \delta \underline{\lambda}^f \cdot \frac{1}{r} (\underline{T} - \underline{I}) \cdot \delta \underline{\lambda}^f \, dS. \end{cases} \quad (7.42)$$

en introduisant l'opérateur tangent $\underline{\underline{T}}$ tel que :

$$\underline{\underline{T}} = \begin{cases} \underline{\underline{0}} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c > 0 \text{ (E)} \\ \underline{\underline{I}} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \text{ (C) et } \|\underline{\underline{\lambda}}_{t0}^f\| \leq -\text{CoF} \hat{\lambda}_n^c \\ -\text{CoF} \frac{\underline{\underline{g}}_t}{\|\underline{\underline{g}}_t\|} \otimes \underline{\underline{n}} + \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} - \text{CoF} \frac{\hat{\lambda}_n^c}{\|\underline{\underline{\lambda}}_{t0}^f\|} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} - \frac{\underline{\underline{g}}_t}{\|\underline{\underline{g}}_t\|} \otimes \frac{\underline{\underline{g}}_t}{\|\underline{\underline{g}}_t\|} \right) & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \text{ (C) et } \|\underline{\underline{\lambda}}_{t0}^f\| > -\text{CoF} \hat{\lambda}_n^c \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(A}^{ce}) \\ \\ \text{(G).} \end{matrix} \quad (7.43)$$

7.4.2 Discrétisation et résolution

On considère donc une discrétisation des champs de déplacement et des multiplicateurs de Lagrange telle que présentée dans la partie 7.2.2, avec une formulation P2/P1 pour satisfaire la condition LBB. On peut alors discrétiser le problème (7.40) :

$$\begin{cases} \forall \{\delta U\} \in \mathcal{V}_0^h, & \{0\} = \{\delta \mathcal{U}_\Sigma\} + \sum_{e_i=1}^{N_i} \int_{\Gamma^{e_i}} \{\delta U^{e_i}\}^T [D^{e_i}]^T \{\underline{\underline{p}}^{e_i}\} dS \\ \forall \{\delta \Lambda\} \in (\mathcal{S}_-^h)^{dim}, & \{0\} = \sum_{e_i=1}^{N_i} \int_{\Gamma^{e_i}} \{\delta \Lambda^{e_i}\}^T [L^{e_i}]^T \{\underline{\underline{h}}^{e_i}\} dS \end{cases} \quad (7.44)$$

où on retrouve encore la première variation $\{\delta \mathcal{U}_\Sigma\}$ correspondant au problème solide et contenant les efforts extérieurs. Les variables duales discrétisées $\{\underline{\underline{p}}^{e_i}\}$ et $\{\underline{\underline{h}}^{e_i}\}$ sont calculées à l'aide de la loi de comportement. Finalement, le problème \mathcal{P}_Σ^f à résoudre se met sous la même forme que le problème \mathcal{P}_Σ^a précédent :

$$\begin{Bmatrix} R_U \\ R_\Lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7.45)$$

avec des expressions différentes pour les résidus :

$$\begin{cases} \{R_U\} = \{R\} + \sum_{e_i=1}^{N_i} \int_{\Gamma^{e_i}} [D^{e_i}]^T \{\underline{\underline{p}}^{e_i}\} dS \\ \{R_\Lambda\} = \sum_{e_i=1}^{N_i} \int_{\Gamma^{e_i}} [L^{e_i}]^T \{\underline{\underline{h}}^{e_i}\} dS \end{cases}$$

où on retrouve le vecteur résidu $\{R\}$ introduit pour la résolution du problème standard dans le chapitre précédent. Ce système (7.45) est traité de la même manière avec la

méthode de Newton-Raphson en résolvant le système suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{UU}^t & K_{U\Lambda}^t \\ K_{\Lambda u}^t & K_{\Lambda\Lambda}^t \end{bmatrix}}_{[K_{\Sigma f}^t]_{c+1}^{(i)}} \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta \Lambda \end{Bmatrix}_{c+1}^{(i+1)} = - \begin{Bmatrix} \Delta R_U \\ \Delta R_\Lambda \end{Bmatrix}_{c+1}^{(i)} \quad (7.46)$$

où $[K_{\Sigma f}^t]$ est la matrice tangente globale du problème et est obtenue par assemblage des contributions élémentaires. Celles-ci sont calculées à l'aide de la deuxième variation de \mathcal{L}_Σ^f dont nous avons donné les contributions dans (7.42).

7.4.3 Implémentation de la loi de contact unilatéral couplé au frottement

Afin de résoudre ce problème à l'aide de Z-set, un nouvel élément fin d'interface mixte est créé sur la base de l'élément fini mixte P2/P1 de Lorentz, dans lequel les expressions des résidus sont adaptées pour qu'elles décrivent le problème discrétisé (7.44). Par ailleurs, nous implémentons dans Z-set la loi de contact avec frottement *via* la création d'une nouvelle loi de comportement. La figure 7.23 suivante présente les entrées et sorties de cette loi de comportement qui est appelée au niveau de chaque point d'intégration de Gauss des éléments d'interface.

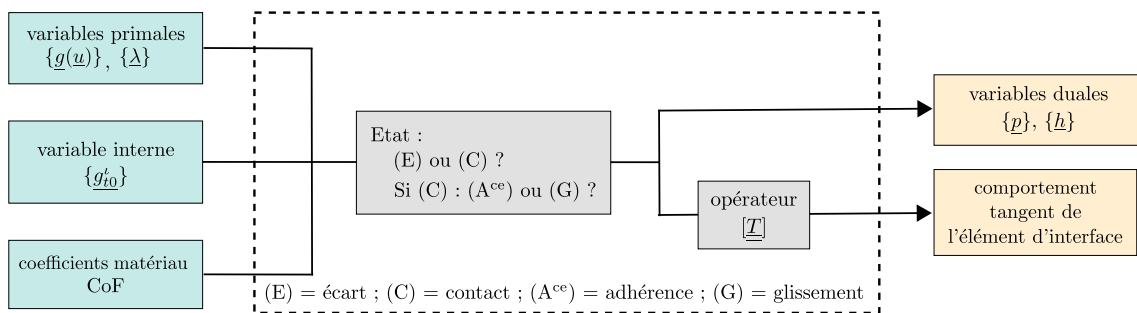


Figure 7.23 – Module fonctionnel de la loi de comportement de contact avec frottement appelée au niveau de chaque point d'intégration des éléments d'interface.

7.4.4 Validation de la loi de contact unilatéral couplé au frottement

Afin de valider l'implémentation de cet élément fini d'interface modifié et de la loi de comportement de frottement de Coulomb associée, nous réalisons le cas-test 7-E.

Description Deux solides $S1$ et $S2$ de mêmes dimensions $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$ sont initialement en contact. Ils sont tous deux maillés avec 1 seul élément volumique hexaédrique quadratique, et sont séparés par 1 élément d'interface, comme illustré sur la figure 7.24a. Les conditions aux limites, schématisées sur la figure 7.24b, sont imposées en déplacement en suivant l'évolution tracée sur la figure 7.25. Tandis que le solide $S2$ est maintenu immobile (il peut être assimilé à un corps rigide), une force de compression est tout d'abord appliquée sur le solide $S1$ (phase ①). $S1$ est ensuite déplacé latéralement selon \underline{E}_1 (phase ②), puis selon $-\underline{E}_1$ (phase ③), et enfin ramené à sa

position initiale (phase ④).

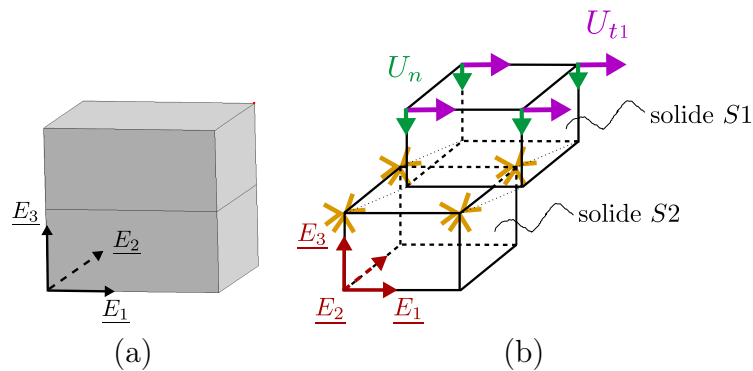


Figure 7.24 – Maillage utilisé (a) et conditions aux limites en déplacement (b) pour le cas-test 7-E.

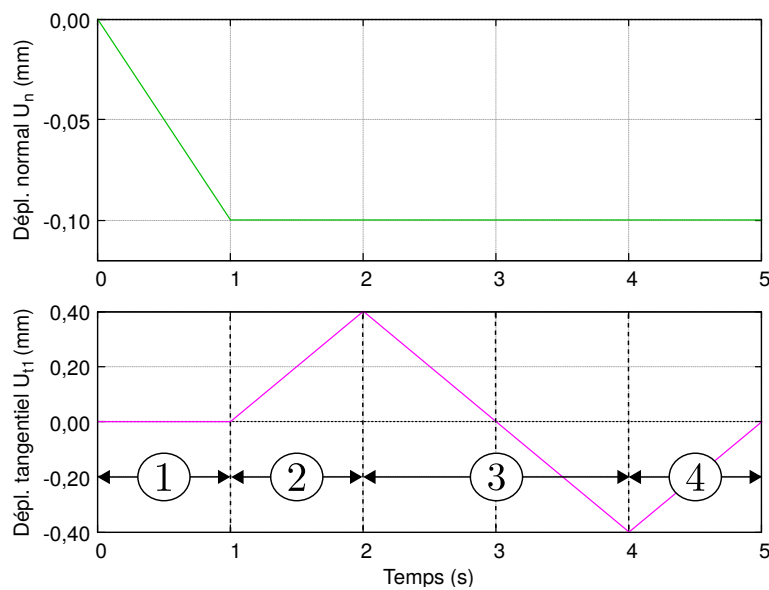


Figure 7.25 – Chargement pour le cas-test 7-E.

Les deux solides sont dotés d'une loi de comportement linéaire isotrope avec $E = 5 \times 10^4$ MPa et $\nu = 0$, tandis que l'interface présente un comportement de type frottement de Coulomb que nous venons d'implémenter, avec $\text{CoF} = 0,2$ (et $r = 5 \times 10^1$).

Observation du comportement local Le déplacement relatif et la force cohésive extraits localement au niveau d'un point d'intégration de l'élément d'interface sont présentés sur la figure 7.26. On vérifie qu'il y a bien non-pénétration (g_n reste nul). La loi de comportement tangentielle montre que le signe de p_{t1} dépend de la direction de sollicitation respectant les conditions de frottement de Coulomb (5.83); nous arrivons ainsi à décrire le comportement de frottement souhaité.

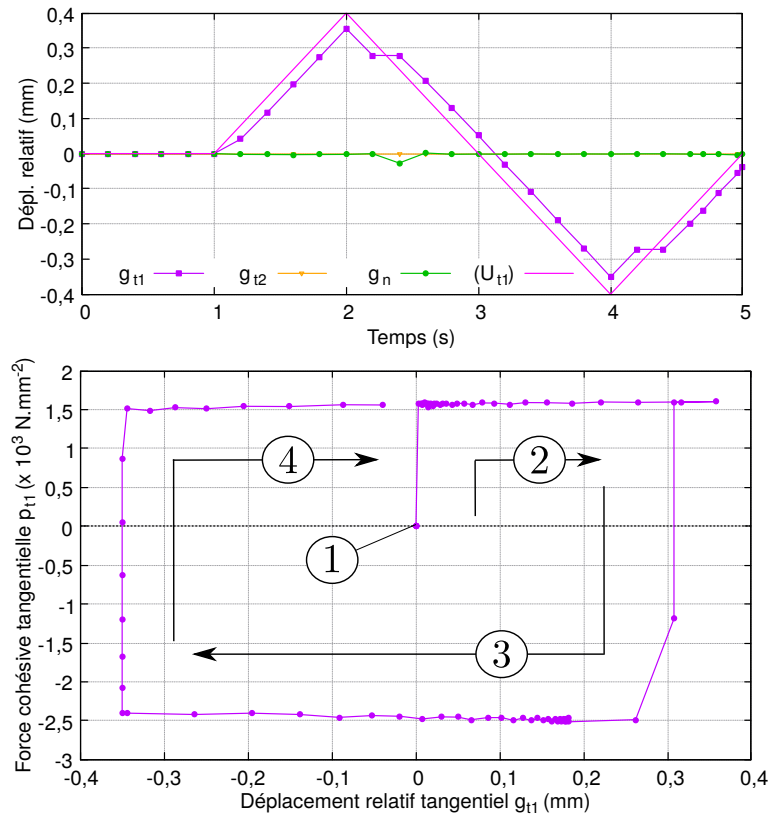


Figure 7.26 – Comportement local d'un élément d'interface (force cohésive et déplacement relatif) dans le cas-test 7-E.

Observation du comportement global Sur la figure 7.27, on présente les forces de réaction F_N et F_T correspondant à la somme des réactions aux nœuds des faces sur lesquelles les déplacements U_n et U_{t1} respectivement sont imposés. Ces résultats numériques (« num ») sont de nouveau comparés aux solutions analytiques (« an ») de F_N et F_T , dont nous avons donné les expressions dans (7.33). La réaction tangentielle F_T correspond bien à la solution analytique, que ce soit lors de l'ouverture ou de la fermeture de l'élément. Un temps d'accommodation est observé par rapport à la solution analytique, dû à la déformation matériau.

Influence du paramètre de régularisation Nous réalisons ce cas-test 7-E en changeant la valeur du paramètre r , tout d'abord en gardant le coefficient de frottement de 0,2, puis avec un coefficients de frottement de 0,5 ; les résultats sont consignés dans le tableau 7.10. Sur la figure 7.28, nous présentons les comportements local et global obtenus pour différentes valeurs de r avec un coefficient de frottement de 0,2.

Théoriquement, plus r est grand plus la contrainte est appliquée strictement, mais plus le système est mal conditionné. Nous visualisons bien ici que plus r est grand plus l'erreur relative sur le résultat est faible, mais plus le nombre d'incrément nécessaire à la convergence du calcul est grand (le calcul a été réalisé avec un pas de temps automatique). Dans les conditions de calculs admissibles sélectionnées, un paramètre de régularisation trop grand ou trop petit implique une divergence du calcul, ce qui met

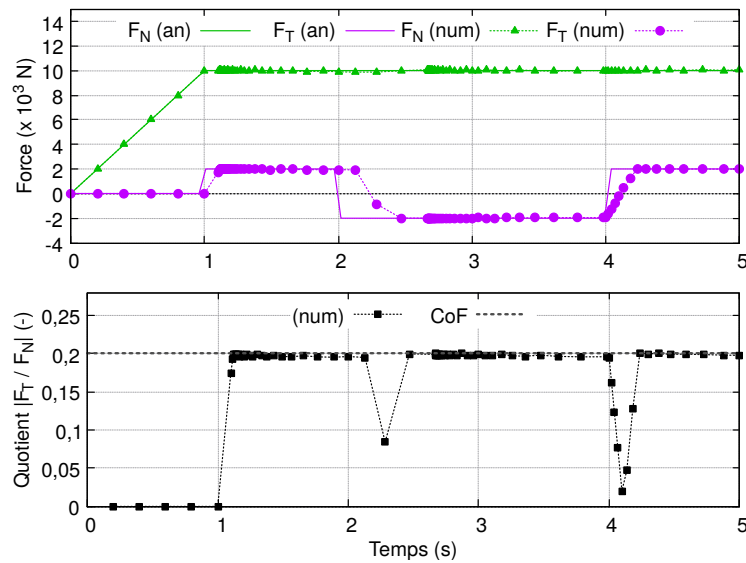


Figure 7.27 – Comportement global pour le cas-test 7-E : forces de réaction normale et tangentielle des surfaces sollicitées.

en évidence l'existence d'un optimum. Pour des coefficients de frottement plus élevés, il semblerait que la difficulté à converger augmente, tout comme l'influence de r sur le temps de calcul CPU : cela montre l'importance de bien choisir ce paramètre. On note que dans le cas présenté avec un coefficient de frottement de 0,2, le temps de calcul CPU est inférieur à 1 s.

Paramètre r	CoF = 0,2		CoF = 0,5	
	Erreur (%)	Temps CPU (s)	Erreur (%)	Temps CPU (s)
$\geq 1 \times 10^5$	–	–	–	–
1×10^4	4 %	0,98	4 %	1,1
1×10^3	2 %	0,24	5 %	2,5
1×10^2	1 %	0,96	6 %	13,62
1×10^1	–	–	–	–
1	11 %	0,38	–	–
1×10^{-1}	13 %	0,33	–	–
1×10^{-2}	15 %	0,52	–	–
$\leq 1 \times 10^{-3}$	–	–	–	–

Tableau 7.10 – Étude de l'influence du paramètre de régularisation sur le quotient F_T/F_N à l'instant de chargement $t = 5$ s (on en présente l'erreur relative par rapport au coefficient de frottement donné en entrée) et sur le temps de calcul CPU, pour différents coefficients de frottement dans le cas-test 7-E (« – » signifie qu'il y a divergence du calcul).

Conclusion Le cas-test présenté montre que l'élément fini de Lorentz que nous avons modifié permet de décrire le comportement de frottement de Coulomb souhaité, avec introduction d'une dépendance du comportement tangentiel au comportement normal.

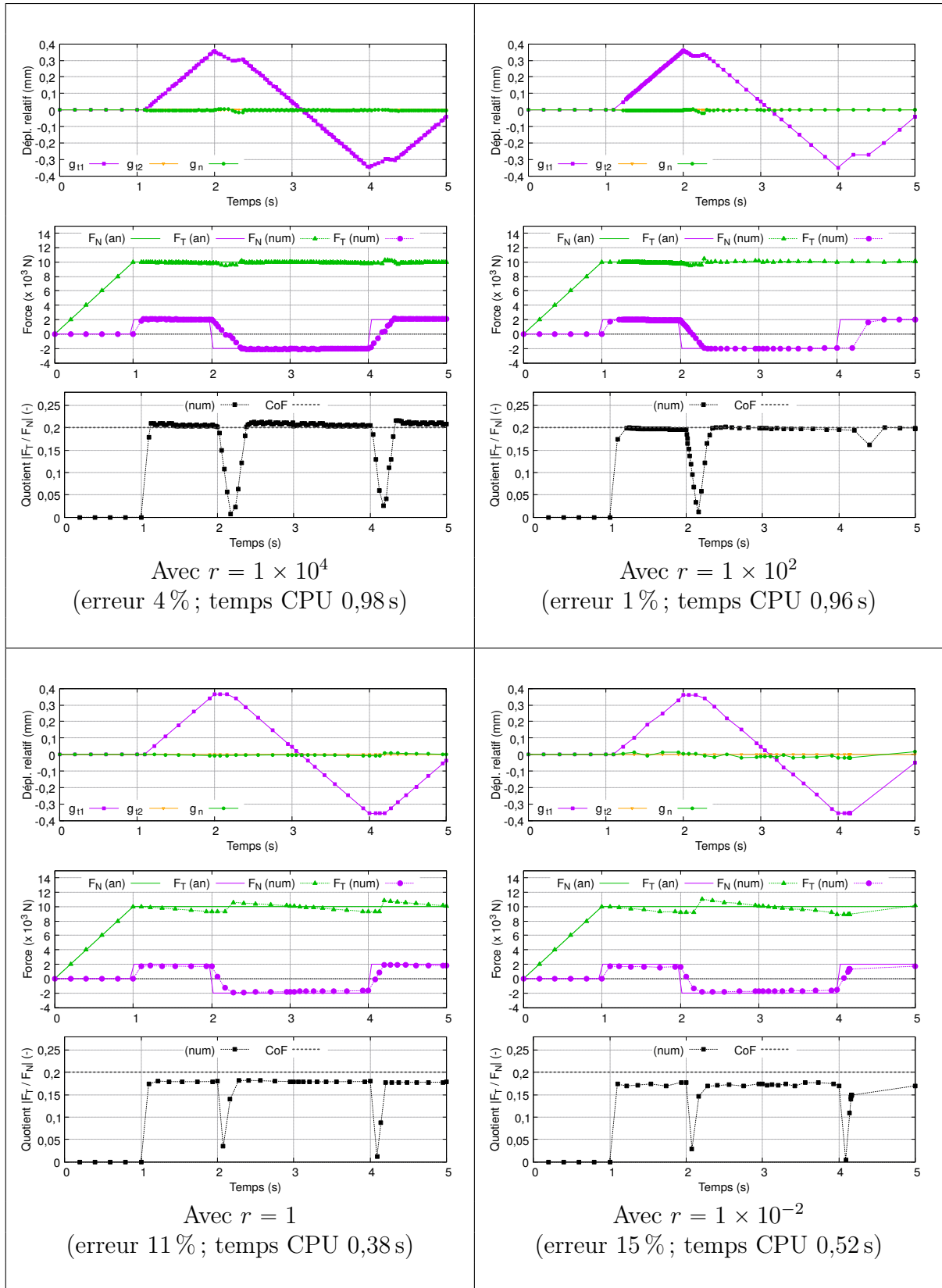


Figure 7.28 – Étude de l'influence du paramètre de régularisation sur les comportements local et global dans le cas-test 7-E (CoF = 0,2); on rappelle les erreurs relatives et temps de calcul obtenus tels que définis dans le tableau 7.10.

Un temps de calcul de l'ordre de 1 s sur le cas-test présenté est prometteur. Cependant, de nombreux incréments de calculs sont nécessaires, et le paramètre de régularisation doit être bien choisi ; la robustesse de cette méthode reste donc à améliorer. Pour cela, une étude plus approfondie sur les critères de définition du paramètre de régularisation pourrait être réalisée, et des solutions faisant intervenir un paramètre de régularisation adaptatif pourraient être étudiées [159].

7.5 Défis et perspectives

Jusqu'à maintenant, dans ce chapitre, nous avons vu plusieurs formulations (contact avec adhésion sans frottement, contact avec frottement sans adhésion), avec plusieurs stratégies (déplacement relatif considéré comme une variable indépendante ou pas), et plusieurs méthodes pour la résolution numérique du problème avec interface (algorithme de contact ou éléments d'interface). Nous nous proposons, dans cette dernière partie 7.5, de faire une synthèse des défis actuels des choix réalisés ainsi que des perspectives pour des travaux futurs, suivant deux axes principaux : d'une part la description de la physique du comportement, et d'autre part les défis numériques liés à la résolution du problème – un aspect peu abordé jusqu'ici.

7.5.1 Description de la physique du comportement

Avec un comportement bien choisi (Crisfield ou Talon & Curnier par exemple), la physique du comportement d'adhésion/décohésion couplé à la non-pénétration est décrit de manière satisfaisante. Nous avons proposé des modifications de la formulation de l'élément d'interface et de son comportement pour qu'il décrive le frottement de Coulomb couplé à la non-pénétration. Des développements supplémentaires sont requis pour décrire le comportement complet de non-pénétration couplé à l'adhésion et au frottement. Pour cela, des degrés de liberté supplémentaires (*i.e.* un multiplicateur de Lagrange par nœud médian des éléments d'interface) doivent être ajoutés ; cela n'affectant pas la satisfaction de la condition LBB *a priori*. Ce travail a été entamé ; il nécessite d'être poursuivi.

Pour se rapprocher du comportement de glissement inter-ply du renfort HiTape® que nous avons caractérisé dans le chapitre 4, deux axes de développements sont envisagés dans un second temps. Tout d'abord, on rappelle que le coefficient de frottement caractérisé est fortement dépendant de la pression normale. La prise en compte de cette dépendance nécessite de sortir du cadre du frottement pur de Coulomb, et pourrait être réalisée en modifiant la forme du potentiel, *via* une fonction affine décroissante du coefficient de frottement en fonction de la pression, fournie par l'utilisateur. En allant plus loin, en distinguant les comportements dans les deux directions du plan de l'interface, des coefficients de frottement différents dans les directions des fibres et transverse aux fibres par exemple pourraient également être adoptés. Cependant, des précautions seraient à prendre avec le cadre théorique car en grandes transformations, seules les lois d'endommagement isotropes sont thermodynamiquement acceptables [137].

Ensuite, le modèle de comportement pourrait être modifié en vue de décrire une adhésion dite « cicatrisante ». En effet, dans le cadre de la mise en forme du ren-

fort HiTape® au-dessus de la température de fusion du voile thermoplastique, on pressent que si deux couches de renforts sont séparées (au niveau d'un rayon interne par exemple) puis de nouveau en contact, elles présenteraient de nouveau un état d'adhésion. Certains modèles [160] ont cherché à décrire ce phénomène. Cet aspect pourrait ainsi être développé, une étude devant alors être menée pour inscrire cette cicatrisation dans un cadre thermodynamique rigoureux.

7.5.2 Défis numériques liés à la résolution du problème

Les lois cohésives, définies par morceaux, avec des grands écarts de rigidités d'un état à un autre ainsi que des effets d'adoucissement provoquant des phénomènes de *snapback* (points limites en effort et en déplacement), génèrent des difficultés de convergence. Ces effets d'adoucissement peuvent notamment provoquer des sauts de solution de la réponse locale lorsqu'il y a restitution brutale de l'énergie stockée par les éléments volumiques voisins [156]. Une solution peut résider dans l'utilisation d'une régularisation visqueuse pour retarder la restitution d'énergie [161], ou bien d'un pilotage par longueur d'arc par exemple [162]. Cette dernière solution a été étudiée; nous en présentons le principe général dans l'annexe D. Cependant, divers défis restent à relever pour son utilisation pour notre problème; les plus notables sont l'incompatibilité de ce type de pilotage avec l'algorithme de contact utilisé dans la partie 7.3 si toutefois les zones cohésives n'étaient pas utilisées, et l'impossibilité d'appliquer des conditions aux limites en plusieurs séquences.

Une difficulté apparaît notamment lorsqu'on souhaite piloter en force un problème tel que le cas-test *pull-through*, avec une force imposée supérieure à la valeur telle que l'ensemble des éléments cohésifs s'endommagent. Dans ce cas précis, le calcul diverge, et nous proposons deux explications à cela. La première est que la structure devient rapidement très souple, dans ce cas une régularisation visqueuse pourrait être utilisée. La seconde explication est que les lois de comportement utilisées présentent un seuil de décohésion (p_M) ce qui implique en fait que la force cohésive est plafonnée. Ainsi, lorsque l'essai est piloté en force, le calcul diverge dès lors que la force imposée dépasse ce seuil plafond. Cependant, ce type de problème auquel nous avons été confronté concerne un cas-test particulièrement sévère où tous les éléments de la structure s'endommagent, ce qui est en réalité peu probable lors d'un essai de mise en forme. De plus, l'ajout du frottement est susceptible de régulariser ce problème puisqu'il restera *a priori* un effort résiduel – cela restant à tester et étudier.

Enfin, la question de la conséquence des grandes transformations des solides reliés par des éléments d'interface sur la description de ceux-ci reste ouverte, comme nous l'avons vu dans la partie 7.3.4. Il reste notamment à évaluer si les grands déplacements globaux lors de la mise en forme se traduisent au niveau de l'interface par de grands déplacements relatifs. Le cas échéant, diverses options peuvent être envisagées : une solution de remaillage *via* une recherche du plus proche voisin, ou l'utilisation d'un algorithme de contact auquel on ajouterait un comportement d'adhésion. Un premier pas pourrait consister en l'établissement d'un critère purement géométrique reliant la taille de maille de la discrétisation éléments finis au glissement inter-pli qui peut être calculé compte tenu de la géométrie du moule et de l'épaisseur d'une couche de

renfort. On pourrait par exemple considérer que la taille de maille dans la direction du glissement doit être deux fois supérieure au déplacement relatif calculé par de simples considérations géométriques.

Conclusion du chapitre

En vue de modéliser un empilement de renforts HiTape®), nous nous sommes intéressés dans ce chapitre au problème de l'équilibre de deux solides en contact séparés par une interface dont le comportement de non-pénétration, adhésion et frottement a été établi au chapitre 5. En nous basant sur les implémentations dans Z-set antérieures à ce travail de thèse, nous avons identifié deux stratégies distinctes pour représenter le comportement souhaité pour l'interface : d'une part un algorithme de contact avec frottement traité par pénalité, et d'autre part des éléments d'interface en Lagrangien augmenté. L'algorithme de contact permet de décrire de manière satisfaisante la non-pénétration et le frottement de Coulomb, cependant il faudrait ajouter le comportement d'adhésion souhaité. Par ailleurs, il présente des limites liées au temps de calcul et à la sensibilité au maillage. En particulier, dans l'optique de simuler le comportement de plusieurs plis, le temps de calcul est critique.

Faisant le choix de l'utilisation des éléments d'interface, nous avons dans un premier temps restreint le problème à celui d'une interface adhésive (sans frottement), et montré que les éléments finis d'interface mixtes constituent une solution satisfaisante pour la modélisation de cette interface. Cependant, ces éléments et leur loi de comportement nécessitent d'être modifiés pour représenter le comportement de frottement souhaité. Restreignant dans un deuxième temps le problème à celui d'une interface présentant un comportement de frottement de Coulomb avec non-pénétration, nous avons proposé et validé une adaptation possible des éléments d'interface et de leur loi de comportement afin que celle-ci décrive la non-pénétration et le frottement de Coulomb. Plusieurs défis restent cependant à relever, dont les deux majeurs sont le couplage du frottement et de l'adhésion, et l'étude du comportement de ces éléments lorsque les solides sont soumis à de grandes transformations.

Conclusion générale

Conclusion générale

Contexte du travail de thèse

Industriel Ce travail de thèse a été initié par Hexcel Reinforcements dans un contexte de développement des procédés directs pour la mise en œuvre de pièces aéronautiques structurales, afin de répondre aux besoins des constructeurs aéronautiques en termes de cadence et de coût de production tout en satisfaisant les impératifs de qualité. Ce travail a porté particulièrement sur le renfort unidirectionnel sec HiTape®[®], développé spécifiquement pour répondre à ces exigences. La présence d'un voile thermoplastique de chaque côté du renfort unidirectionnel permet notamment l'automatisation de sa dépose, envisagée à plat dans un souci d'optimisation, ce qui implique une étape ultérieure de mise en forme de l'empilement de renforts. Cette thèse a visé à initier la modélisation et la simulation d'un empilement de renforts HiTape®[®] UD sec lors de sa mise en forme par double membrane à chaud, avec l'objectif de prédire l'état final de la préforme et l'éventuelle apparition de défauts. En termes de modélisation, nous avons considéré que ce procédé est isotherme (puisque à la température de fusion du voile) et suffisamment lent pour être vu comme une succession d'états d'équilibre.

Académique Cette thèse s'est déroulée au sein du laboratoire Georges Friedel de Mines Saint-Étienne, et a également impliqué le LaMCoS de l'INSA-Lyon. En parallèle, la chaire industrielle Hexcel à Mines Saint-Étienne (2015-2020) a pour objectif de structurer le cadre numérique de la simulation de l'étape d'infusion des renforts fibreux dans les procédés directs. Afin de disposer d'un outil unique pour simuler l'ensemble des étapes de la mise en œuvre des composites par infusion, ce travail de thèse s'est inscrit dans la continuité de l'ensemble des développements réalisés à Mines Saint-Étienne dans le solveur éléments finis Z-set.

Synthèse des travaux réalisés

Expérimental Partant du constat de la spécificité structurelle du renfort étudié, la première phase du travail a consisté en une compréhension de son comportement mécanique. Pour cela, une étude bibliographique sur le comportement des renforts fibreux en général a été menée, avec l'objectif d'établir une stratégie de caractérisation et de modélisation pertinente pour le renfort HiTape®[®]. Pour cela, il a été postulé que le voile ne pénètre pas dans le réseau de fibres au cours de la mise en forme, *i.e.* il reste à l'interface entre les plis. Par conséquent, la modélisation du renfort a pu être scindée en deux études : d'une part, celle du comportement intra-pli dont la structure est celle d'un milieu fibreux UD sec, et d'autre part celle de l'interface entre les plis, dont la structure est plus proche de celle entre deux renforts pré-imprégnés de TP au-dessus de sa température de fusion.

Les réponses du milieu intra-pli d'une part ont été analysées sous diverses sollicitations, et nous en avons identifié trois dont les réponses dominent le comportement au premier ordre : la traction longitudinale (sens fibres), la compaction et la flexion longitudinale hors-plan. Le comportement en traction longitudinale a été considéré linéaire élastique et a été déduit de la fraction volumique de fibres et du comportement connu des fibres. Ensuite, compte tenu du procédé de mise en forme considéré et de la structure fibreuse du matériau, le comportement de compaction a été pris en compte ; il est fortement non-linéaire et a été déduit de travaux expérimentaux précédents. Ces deux comportements ont été supposés indépendants de la présence du voile (et donc du temps et de la température). En revanche, en flexion hors-plan, l'influence de la température est non négligeable, comme nous l'avons observé expérimentalement. Les mobilités entre les fibres induisent un comportement non-linéaire qui influence fortement la présence et la nature des plissements qui peuvent apparaître lors de la mise en forme notamment. Pour caractériser ce comportement en flexion, un essai de type flexomètre de Peirce modifié et sa méthode associée ont été mis en place au sein du laboratoire R&T d'Hexcel. Des plis unitaires, puis des empilements, ont ainsi été caractérisés, ce qui a permis de mettre en évidence non seulement la faible rigidité en flexion d'un pli unitaire comparée à celle induite par sa rigidité longitudinale, mais aussi la souplesse supplémentaire en flexion induite par la présence du voile TP entre les couches d'un empilement.

D'autre part, nous nous sommes intéressés aux réponses de l'interface entre les plis du renfort HiTape® sous des sollicitations interlaminaires, *i.e.* la décohésion et le frottement inter-pli, ces réponses étant dominées par la présence du voile TP. Ce travail de thèse a mis l'accent sur le comportement de frottement inter-pli. Pour cela, nous avons mis en place une méthode de caractérisation spécifique avec un essai de type *pull-through*, réalisé à la température de fusion du voile et surtout permettant de caractériser le renfort dans des conditions d'essai représentatives de la mise en forme. Un régime de frottement lubrifié hydrodynamique a été obtenu *via* une relation linéaire croissante entre le coefficient de frottement et le nombre de Hersey divisé par la viscosité du TP supposée constante. Du point de vue industriel, ce résultat signifie que pour favoriser le glissement inter-pli afin de limiter l'apparition de défauts de type plissements, une mise en forme à haute pression et basse vitesse est préconisée.

Modélisations mécanique et numérique Nous avons sélectionné une approche continue à l'échelle d'une couche de renfort. De la même façon que nous avons scindé l'étude expérimentale en une caractérisation intra-pli et une caractérisation inter-pli, la modélisation mécanique d'un empilement de renforts HiTape® peut être réalisée *via* deux milieux distincts. D'un côté, le milieu intra-pli présente un comportement isotrope transverse non-linéaire dominé par la direction des fibres ; de l'autre, nous avons attribué à l'interface un comportement spécifique d'adhésion et de frottement. Ces deux milieux ont été superposés pour figurer un empilement de renforts, *i.e.* une préforme fibreuse. La modélisation a été proposée dans un cadre de grandes transformations, puisque de grands déplacements et de grandes rotations interviennent lors de la mise en forme.

Pour décrire le comportement du milieu intra-pli, nous avons sélectionné une for-

mulation hyperélastique adaptée aux grandes transformations. Elle est basée sur la définition de modes de déformations découplés : l'élongation, la compaction latérale, la compaction isochore et le cisaillement. Cette approche permet de décrire les non-linéarités matérielles, et l'identification du comportement matériau est facilitée par le sens physique des grandeurs manipulées. Cette loi de comportement vérifie la plus grande partie des conditions d'admissibilité thermodynamiques, mais on rappelle que sa quasi-convexité n'a pas été prouvée. Des formes quadratiques ont été proposées pour tous les potentiels, excepté la compaction isochore dont nous avons caractérisé le comportement non-linéaire à l'aide de travaux précédents. Cette loi de comportement hyperélastique a été implémentée dans la suite logicielle Z-set, et le problème numérique de l'équilibre d'un solide hyperélastique en grandes transformations a été résolu par la méthode des éléments finis. La cohérence de la loi implémentée avec d'autres lois dans un cadre de petites perturbations a été vérifiée. Un essai de flexion a également été simulé et a permis de décrire le phénomène suivant : lorsque la rigidité longitudinale est très grande au regard des autres rigidités du milieu intra-pli et indépendamment d'un éventuel verrouillage numérique, la structure adopte d'autres modes de déformations que l'élongation de l'extra-dos et la compression de l'intra-dos. En effet, un phénomène de localisation dominé par le cisaillement apparaît, se traduisant par du flambage local, qui a par ailleurs été observé expérimentalement sur des empilements épais.

Pour l'interface entre les plis, l'existence d'une énergie interne surfacique a été postulée. Des pseudo-potentiels d'énergie libre et de dissipation thermodynamiquement admissibles ont alors été proposés pour décrire le couplage entre le frottement et le phénomène de décohésion, tout en respectant la condition de non-pénétration entre les solides. D'un point de vue numérique, la présence d'une interface entre deux solides peut être traitée soit avec un algorithme de contact – conçu pour respecter les conditions de contact unilatéral avec éventuellement du frottement pur de Coulomb mais pas d'adhésion –, soit avec des éléments cohésifs – conçus plutôt pour respecter la non-pénétration et décrire l'adhésion mais pas de frottement. Nous avons proposé quelques points de comparaison entre ces deux options, et nous avons montré que le choix des éléments cohésifs est pertinent, notamment en termes de temps de calcul – ce qui n'est pas anodin dans l'optique de simuler la mise en forme tridimensionnelle de renforts multi-couches. L'utilisation des éléments cohésifs présente également les avantages de la complexification potentielle du comportement pour inclure des phénomènes dissipatifs tels que le frottement, de la stabilité de la réponse, et de la faible sensibilité au maillage. En cohérence avec cette stratégie, nous avons utilisé l'élément fini mixte d'interface de Lorentz pour modéliser l'interface entre les plis, et nous avons vu qu'il permet de façon satisfaisante de décrire le comportement souhaité restreint à la non-pénétration et à l'adhésion (pas de frottement) dans un premier temps. Ce type de comportement peut être utilisé pour simuler l'apparition de glissement inter-pli lors de la mise en forme d'empilements de renforts sur une géométrie de type raidisseur Omega comme illustré sur la figure ii ci-après. Dans un second temps, nous avons réalisé et validé les modifications nécessaires de l'élément fini mixte d'interface pour décrire le comportement souhaité, restreint cette fois au contact unilatéral avec frottement sans adhésion.

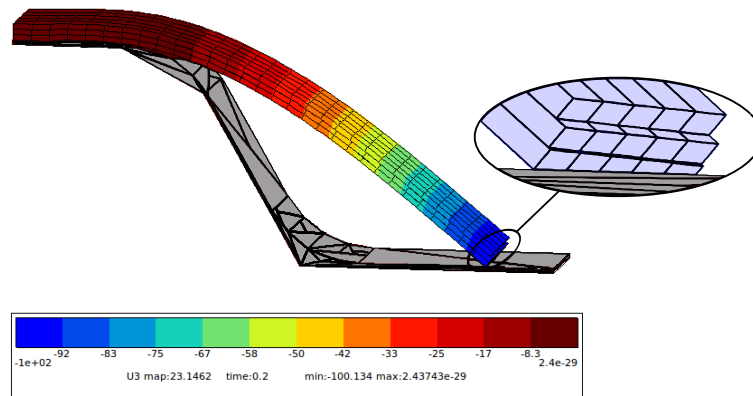


Figure ii – Visualisation (via le déplacement vertical) du glissement inter-pli au cours de la mise en forme de trois couches de renforts (au comportement hyperélastique isotrope de Mooney-Rivlin et séparées par une interface au comportement de Crisfield) sur une géométrie de type raidisseur Omega (seule la moitié est visible) sans frottement sous l'effet d'une pression normale suiveuse homogène dans un cadre de grandes transformations.

Défis et perspectives

Expérimental En vue d'améliorer la connaissance de notre matériau, divers essais supplémentaires pourraient être conduits. Tout d'abord, nous rappelons que nous avons observé un régime lubrifié hydrodynamique pour le frottement. Le coefficient de frottement a donc été supposé indépendant de l'orientation des fibres (car indépendant de la rugosité de la surface), ce qui constitue une hypothèse forte. Une étude complémentaire de l'influence de l'orientation des fibres sur le coefficient de frottement pourrait être entreprise. Nous avons également supposé que le voile ne pénètre pas dans le milieu intra-pli au cours de la mise en forme ; des essais de compression à chaud (plutôt qu'à température ambiante) pourraient être mis en place afin de vérifier cette hypothèse. Ensuite, en vue de quantifier le comportement d'adhésion/décohésion, un test de décohésion de type *probe tack test* par exemple pourrait être réalisé. Enfin, à l'échelle du procédé de mise en forme, les effets visqueux dus au voile (influence du temps et de la phase de montée en température par exemple) sur le comportement de l'empilement pourraient faire l'objet de travaux complémentaires.

Modélisations mécanique et numérique Nous voyons deux principaux axes de perspectives pour des travaux ultérieurs, qui découlent directement de ce travail de thèse. Après avoir présenté chacun d'entre eux, nous aborderons les défis à relever, plus globaux, non propres à l'HiTape® mais plutôt aux renforts fibreux de manière générale.

Le premier axe part du constat que le modèle hyperélastique proposé, basé sur l'écriture de la densité d'énergie de déformation, ne permet pas de décrire un comportement spécifique en flexion qui soit indépendant du comportement en traction. En fait, la rigidité de flexion induite par la rigidité de tension est largement surestimée, et ne permet pas de décrire l'apparition des défauts tels que des plissements ou ondulations qui nous intéressent notamment. Ce phénomène peut être illustré par la simulation de la mise en forme d'un pli unitaire rectangulaire sur une demi-sphère, présentée sur la

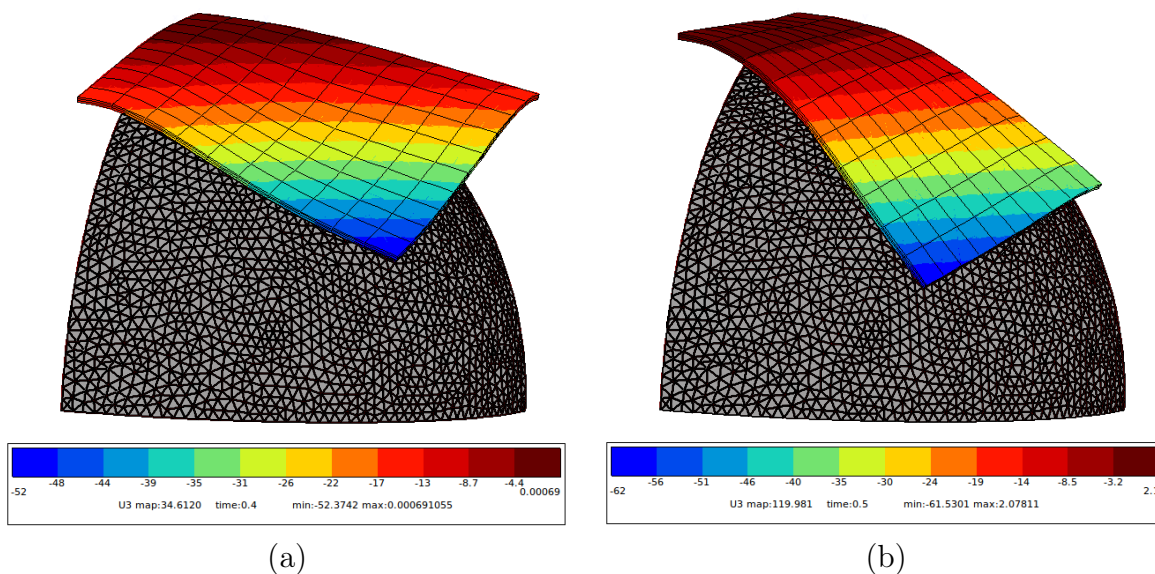


Figure iii – Visualisation (via le déplacement vertical) de la mise en forme d'un pli unitaire rectangulaire (au comportement hyperélastique isotrope de Mooney-Rivlin) sur une demi-sphère (seul un quart est visible) sans frottement sous l'effet d'une pression normale suivieuse homogène dans un cadre de grandes transformations. Sans prendre en compte la rigidité de flexion spécifique des renforts fibreux, des instabilités géométriques sont présentes et provoquent un saut de solution de la déformée de gauche (a) à celle de droite (b).

figure iii : sans prendre en compte la rigidité de flexion spécifique des renforts fibreux, les plissements ne peuvent pas se former et des instabilités géométriques typiques des structures apparaissent. La prise en compte de ce comportement spécifique en flexion nécessite de sortir du cadre des milieux de Cauchy, et nous proposons pour cela de faire appel aux milieux continus généralisés de type Cosserat, second gradient ou bien couple de contraintes. Ces milieux permettent d'avoir accès aux courbures et micro-moments conjugués ; ils apportent des informations sur la longueur interne des milieux fibreux. Les bases de cette démarche ont été posées, mais le modèle mécanique doit être plus amplement développé : le choix des conditions aux limites statiques et le sens physique des grandeurs manipulées restent des questions ouvertes à ce jour, ainsi que la méthode d'identification aux résultats expérimentaux (probablement méthode inverse). D'un point de vue numérique, l'exigence d'une rigidité de flexion plus faible que celle induite par le comportement en traction suggère une méthode de superposition d'éléments finis, avec un élément volumique présentant la rigidité de flexion souhaitée, sur le plan médian duquel on ajoute un élément de membrane porteur de la rigidité longitudinale.

Le second axe de perspectives dans la continuité directe de cette thèse consiste à approfondir le travail de modélisation du comportement de l'interface *via* des éléments cohésifs – la stratégie sélectionnée. En particulier, la robustesse de la résolution du problème avec l'élément d'interface modifié pour décrire du frottement est tout d'abord à étudier plus amplement, avec notamment un travail à poursuivre sur le paramètre de régularisation (en le rendant adaptatif par exemple). Dans un second temps, une nou-

velle version de l'élément d'interface mixte pourrait être implémentée, avec des degrés de libertés supplémentaires afin de coupler les comportements de contact-adhésion et de frottement comme proposé dans le modèle de Talon & Curnier. Enfin, en toile de fond, la question de la capacité des éléments cohésifs à décrire le comportement de l'interface entre des solides soumis à de grandes transformations est à approfondir. Il reste notamment à évaluer si les grands déplacements globaux lors de la mise en forme se traduisent au niveau de l'interface par de grands déplacements relatifs. Le cas échéant, diverses options peuvent être envisagées : l'établissement d'un critère lié au maillage, des solutions de remaillage *via* une recherche du plus proche voisin, ou l'utilisation d'un algorithme de contact auquel on ajouterait un comportement d'adhésion. Enfin, afin de se rapprocher du comportement obtenu expérimentalement, il serait judicieux rendre le coefficient de frottement dépendant de la pression, puis de la vitesse. Son orthotropie éventuelle (en fonction de l'orientation des plis) pourrait également être décrite, sous réserve de précautions à prendre pour rester dans un cadre thermodynamiquement admissible.

D'un point de vue plus général (hors de la formulation hyperélastique adoptée), nous devons faire face à plusieurs difficultés inhérentes à la simulation de la mise en forme des renforts fibreux. Tout d'abord, les renforts présentent une faible épaisseur au regard de leurs autres dimensions, ce qui peut générer des problèmes de verrouillage en cisaillement. Ensuite, la forte anisotropie du comportement des renforts implique des difficultés de convergence, accentuées dans notre cas puisque le renfort HiTape® présente une rigidité longitudinale largement supérieure aux autres rigidités (environ 8 ordres de grandeurs). Des stratégies numériques pourraient donc être étudiées (multiplicateurs de Lagrange, pénalité) pour faciliter la convergence dans notre cas de forte anisotropie due à la quasi-inextensibilité des fibres dans leur direction. Finalement, lors de la simulation d'un procédé de mise en forme spécifique, d'autres éléments « technologiques » doivent être pris en compte, tels que les membranes, ou le contact avec le moule. La figure iv illustre la mise en forme d'un pli unitaire sur une géométrie de type Omega, qui constitue une géométrie de référence pour la mise en forme. D'autres géométries non développables pourraient ensuite être considérées : des variations locales d'épaisseur sur le raidisseur Omega, puis des géométries à doubles courbures de type peau. Enfin, des difficultés inhérentes à l'utilisation des lois cohésives avec effets d'adoucissement ont été identifiées, et des solutions de régularisation visqueuse pour retarder la restitution éventuellement brutale d'énergie, ou bien d'autres méthodes pilotages du calcul pourraient être étudiées.

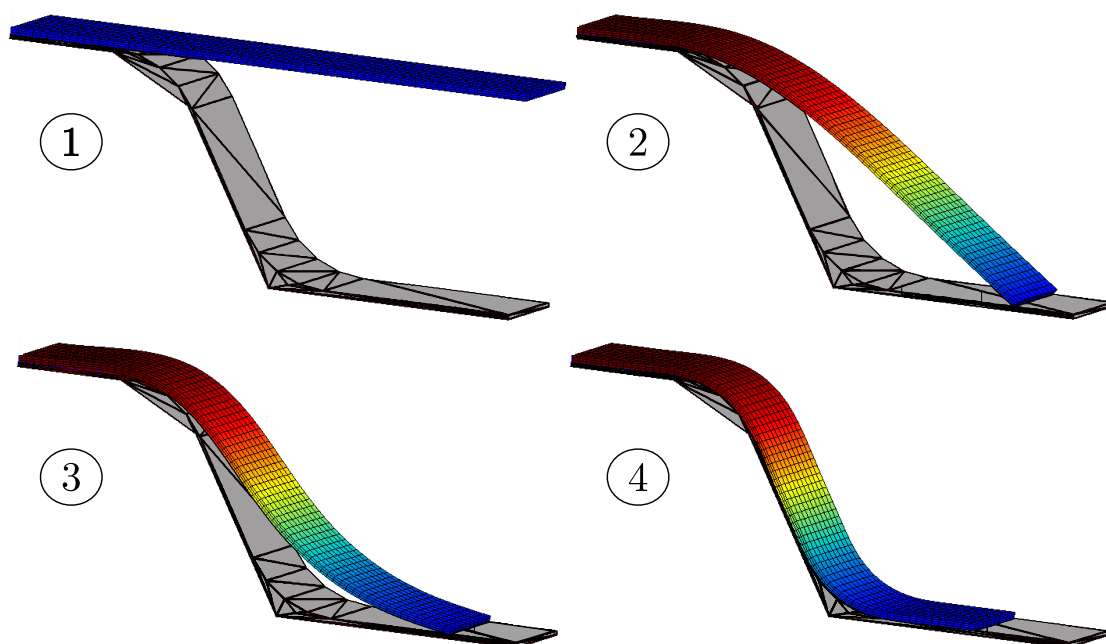


Figure iv – Visualisation (via le déplacement vertical) de la mise en forme d'un pli unitaire rectangulaire (au comportement hyperélastique isotrope de Mooney-Rivlin) sur une géométrie de type raidisseur Omega (seule la moitié est visible) sans frottement sous l'effet d'une pression normale suiveuse homogène dans un cadre de grandes transformations. Une fois que la préforme est en contact avec le moule (①), la mise en forme débute jusqu'à contact de toute sa surface avec le moule (② puis ③ puis ④).

Annexes

A orthotropes

Potentiels hyperélastiques

Un matériau est orthotrope s'il présente trois plans de symétrie normaux deux à deux, caractérisés chacun par leur normale unitaire \underline{M}_i ($i = 1, 2, 3$) dans la configuration initiale. Ses trois tenseurs de structure sont les $\underline{\underline{M}}_{ii} = \underline{M}_i \otimes \underline{M}_i$, ($i = 1, 2, 3$).

Nous listons ici des potentiels hyperélastiques dans le cas d'un matériau orthotrope.

A.1 Saint-Venant, une généralisation de la loi de Hooke

Le potentiel de Saint-Venant orthotrope est une généralisation de la loi de Hooke établie dans un cadre de petites transformations. Il est exprimé en fonction des constantes matériau classiques :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 a_{ij} \text{Tr} \left(\underline{\underline{E}} \underline{\underline{L}}_i \right) \text{Tr} \left(\underline{\underline{E}} \underline{\underline{L}}_j \right) + \sum_{i,j \neq i}^3 G_{ij} \text{Tr} \left(\underline{\underline{E}} \underline{\underline{L}}_i \underline{\underline{E}} \underline{\underline{L}}_j \right) + O(\|\underline{\underline{E}}\|^3)$$

où :

$$a_{ii} = \frac{1 - \nu_{jk}\nu_{kj}}{\Delta} E_i ; a_{ji} = a_{ij} = \frac{\nu_{ij} - \nu_{kj}\nu_{ik}}{\Delta} ; \Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

pour $i \neq j \neq k$. Les E_i , $G_{ij} = G_{ji}$ et $\nu_{ij} = \nu_{ji} E_j / E_i$ ($i \neq j = 1, 2, 3$) correspondent respectivement aux modules d'Young, aux modules de cisaillement de Lamé, et aux coefficients de Poisson [111, 118].

A.2 En fonction des invariants classiques du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit

D'après le théorème de Rychlewski dans le cas d'un matériau orthotrope :

$$W(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{M}}_1, \underline{\underline{M}}_2, \underline{\underline{M}}_3) = W(I_1, I_2, I_3, I_{41}, I_{42}, I_{43}, I_{412}, I_{423}, I_{51}, I_{52}, I_{53},)$$

avec I_1, I_2, I_3 rappelés dans l'annexe B.1 et :

- $I_{4i} = \underline{M}_i \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{M}_i = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{M}}_i$ où $i = 1, 2, 3$
- $I_{4ij} = \underline{M}_i \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{M}_j$ où $(i, j) = (1, 2), (2, 3)$
- $I_{5i} = \underline{M}_i \cdot \underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{M}_i$ où $i = 1, 2, 3$

La loi hyperélastique dans le cas d'un matériau orthotrope peut alors s'écrire [119] :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2 \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial W}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W}{\partial I_{4i}} \frac{\partial I_{4i}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W_{ortho}}{\partial I_{5i}} \frac{\partial I_{5i}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) + \frac{\partial W}{\partial I_{412}} \frac{\partial I_{412}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W}{\partial I_{423}} \frac{\partial I_{423}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right] \quad (\text{A.1})$$

où les $\frac{\partial I_i}{\partial \underline{\underline{C}}}$, $\frac{\partial I_{4i}}{\partial \underline{\underline{C}}}$, $\frac{\partial I_{4ij}}{\partial \underline{\underline{C}}}$, $\frac{\partial I_{5i}}{\partial \underline{\underline{C}}}$ peuvent être trouvés dans la référence [37].

A.3 En fonction d'invariants « physiques » du tenseur des dilata-tions de Cauchy-Green droit

Tout comme pour le cas isotrope transverse, des invariants physiques ont été proposés [37, 46] dans le cas orthotrope ($\alpha = 1, 2$) :

- $I_{elong\alpha} = \frac{1}{2} \ln(I_{4\alpha})$
- $I_{comp} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_3}{I_{41}I_{42}(1 - I_{cp}^2)}\right)$
- $I_{cp} = \frac{I_{412}}{\sqrt{I_{41}I_{42}}} = \sin(\gamma)$
- $I_{ct\alpha} = \frac{I_{4\alpha 3}}{\sqrt{I_{4\alpha}I_{43}}}$.

(A.2)

Ces invariants sont liés, dans l'ordre, à l'élongation dans la direction \underline{M}_α , à la compression dans l'épaisseur du renfort (direction \underline{M}_3), au cisaillement dans le plan du renfort (de normale \underline{M}_3), et au cisaillement transverse dans les plans de normales \underline{M}_α ($\alpha = 1, 2$). En faisant l'hypothèse que les modes de déformation sont découplés, l'énergie de déformation proposée s'écrit :

$$W_{ortho} = W_{elong1}(I_{elong1}) + W_{elong2}(I_{elong2}) + W_{comp}(I_{comp}) + W_{cp}(I_{cp}) + W_{ct1}(I_{ct1}) + W_{ct2}(I_{ct2})$$

et la loi hyperélastique devient :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left(\frac{\partial W_{elong1}}{\partial I_{elong1}} \frac{\partial I_{elong1}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W_{elong2}}{\partial I_{elong2}} \frac{\partial I_{elong2}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W_{cp}}{\partial I_{cp}} \frac{\partial I_{cp}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W_{ct1}}{\partial I_{ct1}} \frac{\partial I_{ct1}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial W_{ct2}}{\partial I_{ct2}} \frac{\partial I_{ct2}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)$$

où les dérivées partielles des invariants physiques sont données dans l'annexe de [37].

B Calcul tensoriel : les invariants et leurs dérivées dans le cas d'un matériau isotrope transverse

Notations

Nous nous intéressons à un matériau isotrope transverse de direction privilégiée décrite par le vecteur unitaire \underline{M} et le tenseur de structure associé $\underline{\underline{M}}$. Les notations suivantes sont adoptées :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{I}} &= \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i \\ (\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}})_{ijkl} &= A_{ij} B_{kl} \\ (\underline{\underline{A}} \bar{\otimes} \underline{\underline{B}})_{ijkl} &= A_{ik} B_{jl} \\ (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\otimes}} \underline{\underline{B}})_{ijkl} &= A_{il} B_{jk}\end{aligned}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et où la notation d'Einstein sur les indices répétés est utilisée.

B.1 Invariants classiques

Les invariants classiques du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit $\underline{\underline{C}}$ dans le cas d'un matériau isotrope transverse de tenseur de structure $\underline{\underline{M}}$ sont les suivants :

- $I_1 = \text{Tr } \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{I}} = \delta_{ij} C_{ij}$
- $I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{Tr } \underline{\underline{C}})^2 - \text{Tr } (\underline{\underline{C}}^2) \right] = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}} = C_{ij} C_{ij}$
- $I_3 = \det \underline{\underline{C}} = J^2$
- $I_4 = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}}$
- $I_5 = \underline{\underline{C}}^2 : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{M}}$

B.2 Invariants physiques

Les invariants « physiques » du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit $\underline{\underline{C}}$ dans le cas d'un matériau isotrope transverse de tenseur de structure $\underline{\underline{M}}$ sont les suivants [109] :

- $I_{elong} = \frac{1}{2} \ln(I_4)$
- $I_{cp\ lat} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_3}{I_4}\right)$
- $I_{cp\ iso} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}} + \sqrt{\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}}\right)^2 - 1}\right)$
- $I_{cis} = \sqrt{\frac{I_5}{I_4^2} - 1}$

B.3 Dérivées premières des invariants classiques

Les dérivées premières des invariants classiques du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit $\underline{\underline{C}}$ dans le cas d'un matériau isotrope transverse de tenseur de structure $\underline{\underline{M}}$ sont les suivantes. Elles interviennent dans le calcul du tenseur de contraintes dans la loi hyperélastique.

- $\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{I}}$
- $\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} = (\text{Tr } \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}$
- $\frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{C}}} = (\det \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{C}}^{-1}$
- $\frac{\partial I_4}{\partial \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{M}}$
- $\frac{\partial I_5}{\partial \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}$ car $\underline{\underline{C}}$ est symétrique

B.4 Dérivées premières des invariants physiques

Les dérivées premières des invariants « physiques » du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit $\underline{\underline{C}}$ dans le cas d'un matériau isotrope transverse de tenseur de structure $\underline{\underline{M}}$ sont les suivantes [109]. Elles interviennent dans le calcul du tenseur de contraintes dans la loi hyperélastique.

- $\frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{2 I_4} \underline{\underline{M}}$
- $\frac{\partial I_{cp\ lat}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{4} \left(\underline{\underline{C}}^{-1} - \frac{1}{I_4} \underline{\underline{M}} \right)$
- $\frac{\partial I_{cp\ iso}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{2 I_4 \underline{\underline{I}} - (I_1 I_4 - I_5) \underline{\underline{C}}^{-1} + \left(I_1 + \frac{I_5}{I_4} \right) \underline{\underline{M}} - 2 (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}})}{4 \sqrt{(I_1 I_4 - I_5)^2 - 4 I_3 I_4}}$
- $\frac{\partial I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{2 I_{cis}} \left[\frac{1}{I_4^2} (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}) - \frac{2 I_5}{I_4^3} \underline{\underline{M}} \right]$

Commentons les cas où ces dérivées ne sont pas définies :

- Ces quatre dérivées ne sont définies que si $I_4 \neq 0$ ce qui est toujours le cas car sinon cela signifierait que la transformation annule la composante selon la direction des fibres pour tout vecteur.
- La dérivée de $I_{cp\ iso}$ n'est définie que si son dénominateur est non nul. Dans le cas simple où $\underline{\underline{C}}$ est diagonal par exemple, le caractère nul de son dénominateur équivaut à $C_{22} = C_{33}$ soit de la compaction latérale et une absence de compaction isochore. Dans ce cas, l'énergie associée à la compaction isochore et sa contribution à la contrainte sont nulles par construction.
- La dérivée de I_{cis} n'est définie que pour $I_{cis} \neq 0$. Si $I_{cis} = 0$, alors par construction l'énergie associée à la déformation par cisaillement et sa contribution à la contrainte sont nulles.

B.5 Dérivées secondes des invariants physiques

B.5.1 Expressions analytiques calculées par nos soins

Les dérivées secondes des invariants « physiques » du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit $\underline{\underline{C}}$ dans le cas d'un matériau isotrope transverse de tenseur de structure $\underline{\underline{M}}$ sont les suivantes. Elles interviennent dans le calcul du tenseur de modules d'élasticité tangents \mathcal{E} dans la loi hyperélastique.

- $$\frac{\partial^2 I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} = -\frac{1}{2 I_4^2} \underline{\underline{M}} \otimes \underline{\underline{M}}$$
- $$\frac{\partial^2 I_{cp\ lat}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \underline{\underline{C}}^{-1}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{1}{I_4^2} \underline{\underline{M}} \otimes \underline{\underline{M}} \right)$$
- $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_{cp\ iso}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{1}{16 [(I_1 I_4 - I_5)^2 - 4 I_3 I_4]} \left[4 \sqrt{(I_1 I_4 - I_5)^2 - 4 I_3 I_4} \right. \\ &\quad \left. \left(2 \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes (I_4 \underline{\underline{I}} + I_1 \underline{\underline{M}} - (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}})) - (I_1 I_4 - I_5) \frac{\partial \underline{\underline{C}}^{-1}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \underline{\underline{M}} \otimes \left(\underline{\underline{I}} + \frac{1}{I_4} (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}) - \frac{I_5}{I_4^2} \underline{\underline{M}} \right) - 2 \left(\frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - 4 \left[2 I_4 \underline{\underline{I}} - (I_1 I_4 - I_5) \underline{\underline{C}}^{-1} + \left(I_1 + \frac{I_5}{I_4} \right) \underline{\underline{M}} - 2 (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}) \right] \right] \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} &= -\frac{1}{2 I_{cis}^2} \left[\frac{1}{I_4^2} (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}) - \frac{2 I_5}{I_4^3} \underline{\underline{M}} \right] \otimes \frac{\partial I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}}} \\ &\quad + \frac{1}{2 I_{cis}} \left[-\frac{2}{I_4^3} (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}) \otimes \underline{\underline{M}} + \frac{1}{I_4^2} \left(\frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{I_4^3} \left(\underline{\underline{M}} \otimes (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}) - \frac{3 I_5}{I_4} \underline{\underline{M}} \otimes \underline{\underline{M}} \right) \right] \end{aligned}$$

avec, puisque $\underline{\underline{C}}$ est symétrique :

$$\frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{C}}^{-1}}{\partial \underline{\underline{C}}} = -\frac{1}{2} (\underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1} + \underline{\underline{C}}^{-1} \otimes \underline{\underline{C}}^{-1})$$

Les cas où ces dérivées ne sont pas définies ont été commentés dans la partie B.4 précédente.

B.5.2 Calcul par perturbation

Les dérivées secondes des invariants « physiques » du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit $\underline{\underline{C}}$ que nous venons de présenter en un point donné peuvent par

ailleurs être approchées numériquement par perturbation. Nous présentons cette méthode, qui nous a permis de vérifier les expressions analytiques.

Soient $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{U}}$ des tenseurs d'ordre 2, et $\epsilon \in \mathbb{R}$. Rappelons la définition de la dérivée directionnelle de $\underline{\underline{G}}$ fonction de $\underline{\underline{C}}$ dans la direction $\underline{\underline{U}}$ [163] :

$$D\underline{\underline{G}}(\underline{\underline{C}})[\underline{\underline{U}}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\underline{\underline{G}}(\underline{\underline{C}} + \epsilon \underline{\underline{U}}) - \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{C}})] \quad (\text{B.1})$$

Appliquant cette définition, la dérivée directionnelle de $\frac{\partial I_{\square}}{\partial \underline{\underline{C}}}$ – où « \square » peut être remplacé indifféremment par « *elong* », « *cp lat* », « *cp iso* » ou « *cis* » – dans la direction $\underline{\underline{E}}_m \otimes \underline{\underline{E}}_n$, $(m, n) \in \{1, 2, 3\}^2$ est donc :

$$D \frac{\partial I_{\square}}{\partial \underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{C}})[\underline{\underline{E}}_m \otimes \underline{\underline{E}}_n] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial I_{\square}}{\partial \underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{C}} + \epsilon \underline{\underline{E}}_m \otimes \underline{\underline{E}}_n) - \frac{\partial I_{\square}}{\partial \underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{C}}) \right]. \quad (\text{B.2})$$

Ainsi chaque composante $ijmn$ du tenseur d'ordre 4 recherché est donnée par :

$$\left(\frac{\partial^2 I_{\square}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} \right)_{ijmn} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\frac{\partial I_{\square}(\underline{\underline{C}} + \epsilon \underline{\underline{E}}_m \otimes \underline{\underline{E}}_n)}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)_{ij} - \left(\frac{\partial I_{\square}(\underline{\underline{C}})}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)_{ij} \right] \quad (\text{B.3})$$

où $(i, j, m, n) \in \{1, 2, 3\}^4$. En choisissant ϵ suffisamment petit, par exemple $\epsilon = 10^{-8}$, on peut approcher la dérivée recherchant par la demi-somme des dérivées obtenues avec $+\epsilon$ et $-\epsilon$. Chaque composante $ijmn$ est alors obtenue séparément de la façon suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 I_{\square}}{\partial \underline{\underline{C}} \otimes \partial \underline{\underline{C}}} \right)_{ijmn} \approx \frac{1}{2\epsilon} \left[\left(\frac{\partial I_{\square}(\underline{\underline{C}} + \epsilon \underline{\underline{E}}_m \otimes \underline{\underline{E}}_n)}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)_{ij} - \left(\frac{\partial I_{\square}(\underline{\underline{C}} - \epsilon \underline{\underline{E}}_m \otimes \underline{\underline{E}}_n)}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)_{ij} \right]. \quad (\text{B.4})$$

C Évolutions du potentiel hyperélastique et des invariants physiques en fonction des invariants classiques

On considère le cas-test 6-A présenté dans la partie 6.2.2 (p.132). On représente ici, à titre d'information, d'une part les évolutions des invariants physiques en fonction de chacun des invariants classiques sur la figure C.1, et d'autre part les évolutions des différentes contributions du potentiel hyperélastique en fonction de chacun des invariants classiques sur la figure C.2.

On observe que les invariants physiques ne sont pas des fonctions convexes des invariants classiques, en particulier : I_{cis} est une fonction concave de tous les invariants classiques, I_{cpiso} est une fonction concave de I_1 , et les deux autres invariants physiques I_{cplat} et I_{elong} semblent également légèrement concaves. Cependant cela ne permet pas de conclure quant à la quasi-convexité du potentiel hyperélastique.

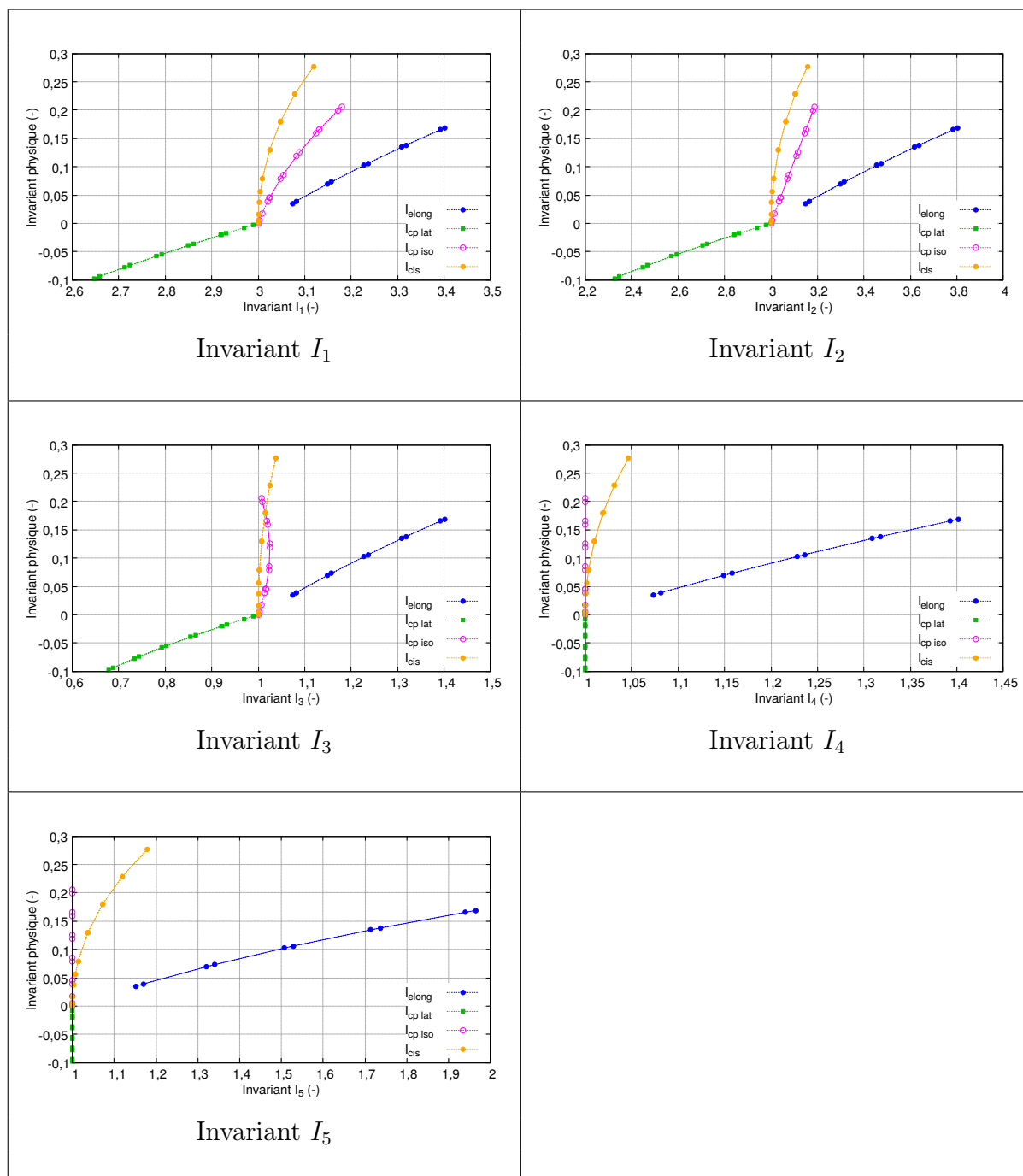


Figure C.1 – Évolutions des invariants physiques en fonction de chacun des invariants classiques dans le cas-test 6-A.

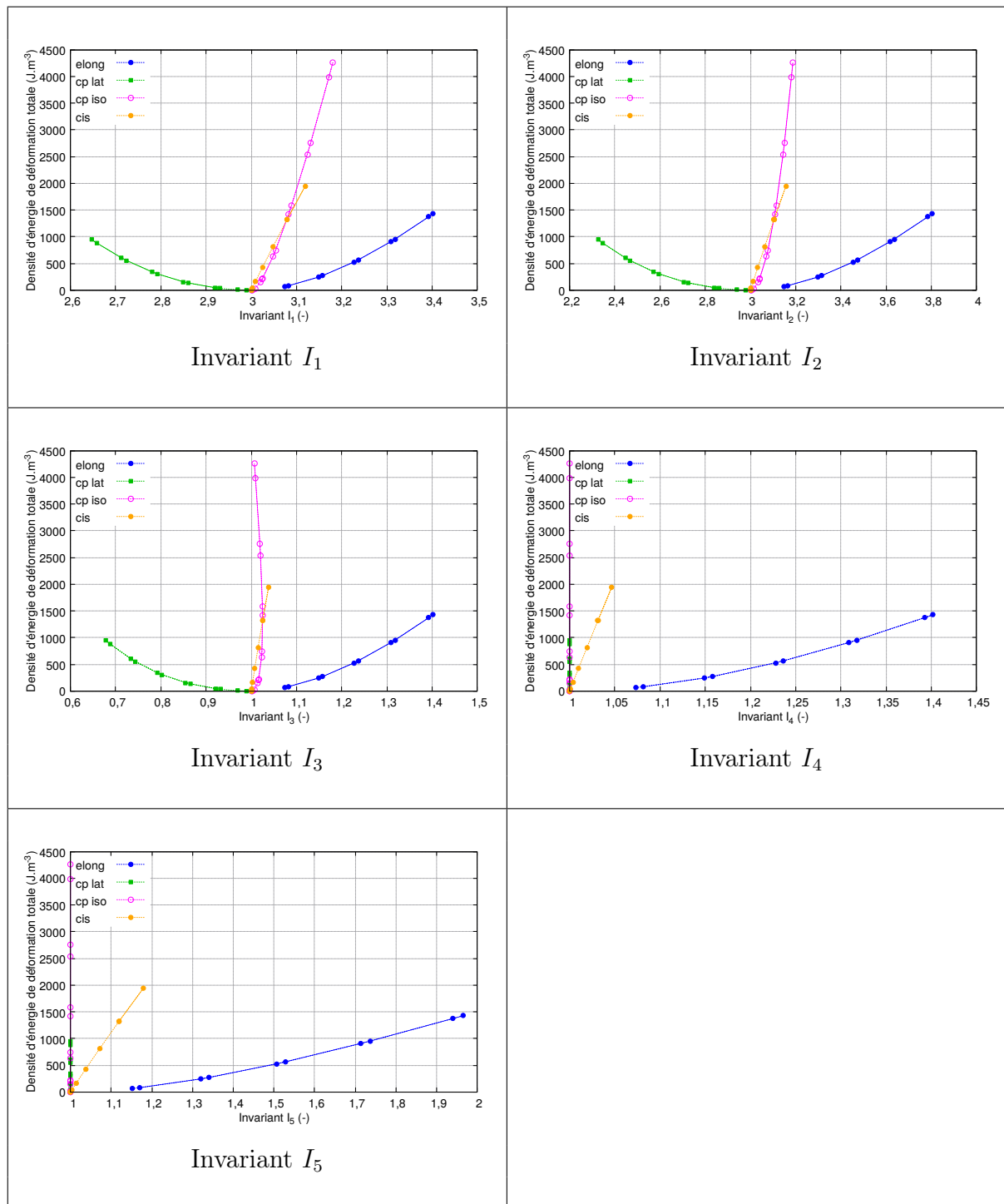


Figure C.2 – Évolutions des différentes contributions du potentiel hyperélastique en fonction de chacun des invariants classiques dans le cas-test 6-A.

D Méthode de résolution par pilotage en longueur d'arc

La résolution par pilotage en longueur d'arc [164–166] consiste à rajouter un degré de liberté scalaire β correspondant à une intensité de chargement, ainsi qu'une nouvelle équation scalaire. Ce paramètre β permet alors de ne plus résoudre le calcul en incrémentant en force ou en déplacement, mais en incrémentant en longueur d'arc L constante sur la courbe $\beta - U$. Le problème à résoudre se présente alors ainsi :

$$\begin{cases} h(\Delta u, \Delta \beta) = & \|(\Delta u, \Delta \beta)\|^2 = L^2 & \text{(a)} \\ R(u, \beta) = & F_{int}(u) - F_{ext}(\beta) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où la fonction scalaire $h(\Delta u, \Delta \beta)$ correspond à un produit scalaire à définir. Un choix classique sur lequel on se base ici est celui de la méthode de Crisfield :

$$h(\Delta u, \Delta \beta) = \|(\Delta u, \Delta \beta)\|^2 = (\Delta u, \Delta \beta) \circ (\Delta u, \Delta \beta) = \Delta u \cdot \Delta u + \Psi^2 \Delta \beta^2 = L^2 \quad (\text{D.2})$$

où Ψ est un scalaire choisi par l'utilisateur (par exemple : $\Psi = 1$).

Pour résoudre le problème D.1, l'algorithme itératif de Newton-Raphson est utilisé. On suppose que la solution convergée à l'incrément c notée (u_c, β_c) est connue, et on cherche la solution convergée (u_{c+1}, β_{c+1}) à l'incrément $c + 1$. A l'itération $i + 1$, la solution est égale à la somme de la solution convergée au précédent incrément, la correction incrémentale et la correction de l'itération :

$$\begin{cases} u_{c+1}^{(i+1)} = u_c + \Delta u_{c+1}^{(i+1)} = u_c + \Delta u_{c+1}^{(i)} + \delta u_{c+1}^{(i+1)} \\ \beta_{c+1}^{(i+1)} = \beta_c + \Delta \beta_{c+1}^{(i+1)} = \beta_c + \Delta \beta_{c+1}^{(i)} + \delta \beta_{c+1}^{(i+1)} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

où les inconnues du problème sont les $\delta u_{c+1}^{(i+1)}$ et $\delta \beta_{c+1}^{(i+1)}$. Pour les trouver, nous pouvons ré-écrire les expressions D.1b et D.1a.

D'une part, on fait un développement limité à l'ordre 1 du résidu à l'itération $i + 1$ donné par l'équation D.1b au voisinage de l'itération précédente $(u_{c+1}^{(i)}, \beta_{c+1}^{(i)})$, et on écrit que ce résidu est nul :

$$R(u_{c+1}^{(i+1)}, \beta_{c+1}^{(i+1)}) \approx R(u_{c+1}^{(i)}, \beta_{c+1}^{(i)}) + K_{c+1}^{(i)} \delta u_{c+1}^{(i+1)} - Q_{c+1}^{(i)} \delta \beta_{c+1}^{(i+1)} = 0 \quad (\text{D.4})$$

où :

$$\begin{cases} K_{c+1}^{(i)} = \frac{\partial R(u, \beta)}{\partial u} \Big|_{(u_c + \Delta u_{c+1}^{(i)}, \beta_c + \Delta \beta_{c+1}^{(i)})} = \frac{\partial F^{int}(u)}{\partial u} \Big|_{(u_c + \Delta u_{c+1}^{(i)}, \beta_c + \Delta \beta_{c+1}^{(i)})} \\ Q_{c+1}^{(i)} = - \frac{\partial R(u, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{(u_c + \Delta u_{c+1}^{(i)}, \beta_c + \Delta \beta_{c+1}^{(i)})} = \frac{\partial F^{ext}(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{(u_c + \Delta u_{c+1}^{(i)}, \beta_c + \Delta \beta_{c+1}^{(i)})} \end{cases} \quad (D.5)$$

La solution δu_{c+1}^{i+1} de l'équation D.4 peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\delta u_{c+1}^{(i+1)} = \delta \bar{u}_{c+1}^{(i+1)} + \delta \beta_{c+1}^{(i+1)} \hat{u}_{c+1}^{(i+1)} \quad (D.6)$$

avec :

$$\delta \bar{u}_{c+1}^{(i+1)} = -K_{c+1}^{(i)-1} R(u_{c+1}^{(i)}, \beta_{c+1}^{(i)}) \quad \text{et} \quad \hat{u}_{c+1}^{(i+1)} = -K_{c+1}^{(i)-1} Q_{c+1}^{(i)}$$

où $\delta \bar{u}_{c+1}^{(i+1)}$ représente la variation de la solution $\delta u_{c+1}^{(i+1)}$ pour corriger l'erreur linéarisée pour un β constant, et $\hat{u}_{c+1}^{(i+1)}$ la variation de la solution $\delta u_{c+1}^{(i+1)}$ avec β .

D'autre part, l'équation D.1a avec $h(\Delta u, \Delta \beta)$ donné par l'expression D.2 peut se mettre sous la forme :

$$a \delta \beta_{c+1}^{(i+1)2} + b \delta \beta_{c+1}^{(i+1)} + c = 0 \quad (D.7)$$

où :

$$\begin{cases} a = \hat{u}_{c+1}^{(i+1)} \cdot \hat{u}_{c+1}^{(i+1)} + \Psi^2 \\ b = 2 \hat{u}_{c+1}^{(i+1)} \cdot (\Delta u_{c+1}^{(i)} + \delta \bar{u}_{c+1}^{(i+1)}) + 2\Psi^2 \Delta \beta_{c+1}^{(i)} \\ c = (\Delta u_{c+1}^{(i)} + \delta \bar{u}_{c+1}^{(i+1)}) \cdot (\Delta u_{c+1}^{(i)} + \delta \bar{u}_{c+1}^{(i+1)}) + \Psi^2 \Delta \beta_{c+1}^{(i)} - L^2 \end{cases} \quad (D.8)$$

Il s'agit d'une équation quadratique de discriminant $\alpha = b^2 - 4ac$, dont la (ou les) solution(s), sous réserve d'existence, donne(nt) $\delta \beta_{c+1}^{(i+1)}$. S'il y a deux solutions réelles, l'une d'entre elles doit être choisie. Selon l'étape de l'algorithme (figure D.1), la stratégie peut être différente. En effet, pour la prédiction, la solution peut être sélectionnée en considérant par exemple le signe du déterminant de la matrice tangente, l'incrément de travail des forces extérieures, un "paramètre de rigidité", ou encore le point qui "va vers l'avant" [166]. Pour la correction, les critères classiques sont les suivants :

- minimisation de l'angle entre deux incréments, *i.e.* la solution choisie est celle qui correspond au point le plus proche de celui obtenu lors de la précédente itération sur la courbe $\beta - u$, *i.e.* celle qui minimise le produit scalaire $(\Delta u_{c+1}^{(i+1)}, \Delta \beta_{c+1}^{(i+1)}) \circ (\Delta u_{c+1}^{(i)}, \Delta \beta_{c+1}^{(i)})$ défini par exemple dans l'équation D.2 ;
- minimisation du résidu, ce qui nécessite de calculer les résidus pour chaque solution (lourd) ;
- minimisation de l'écart à la solution linéarisée.

Connaissant la solution convergée (u_c, β_c) à l'incrément c , l'algorithme itératif de Newton-Raphson adapté à la résolution en longueur d'arc et présenté sur la figure D.1 permet de calculer la solution (u_{c+1}, β_{c+1}) à l'incrément suivant $c + 1$.

- 1. Prédiction - initialisation** ($i = 0$) :
- => Initialisation $\delta \bar{u}_{c+1}^{(0)} = \Delta u_{c+1}^{(0)} = \Delta \beta_{c+1}^{(0)} = 0$
 - => Initialisation $\hat{u}_{c+1}^{(0)} = -K_c^{-1} Q_c$ (équation D.6)
 - => Calcul et sélection de $\delta \beta_{c+1}^{(0)}$ (équation D.7)
 - => Calcul de $\delta u_{c+1}^{(0)}$ (équation D.6)
 - => Calcul de la prédiction $(u_{c+1}^{(0)}, \beta_{c+1}^{(0)})$ (équation D.3)
 - => Calcul de la rigidité tangente globale $K_{c+1}^{(0)}$? ou bien K_c ???
 - => Calcul du résidu initial $R(u_{c+1}^{(0)}) = K_{c+1}^{(0)} u_{c+1}^{(0)} - F_{c+1}^{ext}$
- 2. Correction** ($i + 1 > 1$) pour $i=0,1,\dots$:
- => Calcul de la rigidité tangente globale $K_{c+1}^{(i+1)}$ *via* la loi de comportement
 - => Calculs de $\delta \bar{u}_{c+1}^{(i+1)}, \hat{u}_{c+1}^{(i+1)}$ (équation D.6)
 - => Calcul et sélection de la correction $\delta \beta_{c+1}^{(i+1)}$ (équation D.7) :
 - => Si 0 solution réelle : la longueur L est diminuée et retour à l'étape 1.
 - => Si 1 solution réelle : c'est la correction $\delta \beta_{c+1}^{(i+1)}$
 - => Si 2 solutions réelles : la correction $\delta \beta_{c+1}^{(i+1)}$ est sélectionnée parmi les 2 solutions
 - => Calcul de la correction $\delta u_{c+1}^{(i+1)}$ (équation D.6)
 - => Calcul de la nouvelle solution $(u_{c+1}^{(i+1)}, \beta_{c+1}^{(i+1)})$ (équation D.3)
 - => Calcul du nouveau résidu $R(u_{c+1}^{(i+1)}) = K_{c+1}^{(i+1)} u_{c+1}^{(i+1)} - F_{c+1}^{ext}$ avec l'équation D.4
 - => Test : y a-t-il convergence?
 - => Si oui : STOP et la solution $u_{c+1} = u_{c+1}^{(i+1)}$ est renvoyée
 - => Sinon, $i \leftarrow i+1$ et retour à 2.

Figure D.1 – *Algorithme de Newton-Raphson pour la résolution d'un problème piloté en longueur d'arc*

Bibliographie

- [1] J. C. CRISCIONE, A. S. DOUGLAS et W. C. HUNTER : Physically based strain invariant set for materials exhibiting transversely isotropic behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:871–897, 2001.
- [2] D. KNAB, S. COSKUN BABAN, A. SCHLOSSER, P. SEIDEL, C. LÖK et T. KNÖBLINGER : What’s next for aerospace composites? Rapport technique, disponible à <http://www.adlittle.com/en/insights/viewpoints/what’s-next-aerospace-composites>, 2018.
- [3] J. ROSKAM : *Airplane design Part VIII*. DARcorporation, 1985.
- [4] T. K. TSOTSIS : Challenges and opportunities for composites materials transitions in aerospace. *Dans 18th European Conference on Composite Materials ECCM18 (présentation orale)*, Athènes, 2018.
- [5] D. GAY : *Matériaux Composites*. Lavoisier, Édition 6, 2015 (ISBN 978-2-7462-1098-1).
- [6] HEXCEL : Direct processes technology manual. Rapport technique, disponible à <http://www.hexcel.com/Resources/Technology-Manuals>.
- [7] A. NEGRIER et J. C. RIGAL : Présentation des matériaux composites A 7 790-1. *Techniques de l’ingénieur Plasturgie : Procédés spécifiques aux composites*, 1991.
- [8] A. K. PICKETT : *Process and Mechanical Modelling of Engineering Composites*. IFB University of Stuttgart, 2018 (ISBN 978-3-9819-5390-9).
- [9] R. AKKERMAN, S. P. HAANAPPEL et U. SACHS : History and future of composites forming analysis. *Dans 13th International Conference on Textile Composites TEXCOMP-13*, volume 406, page 012003. IOP Publishing, 2018.
- [10] P. BOISSE : Mise en forme des renforts fibreux de composites AM 3 734-1. *Techniques de l’ingénieur Plasturgie : Procédés spécifiques aux composites*, 2004.
- [11] J. S. LIGHTFOOT, M. R. WISNOM et K. POTTER : A new mechanism for the formation of ply wrinkles due to shear between plies. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 49:139–147, 2013.
- [12] C. FROMMEL, M. MAYER, M. KÖRBER, A. SCHUSTER, M. MALECHA et M. WILLMEROOTH : Evaluating the draping quality of mechanical preformed carbon fibre textiles for double curved geometries. *Dans SAMPE Europe Conference*, 2018.
- [13] HEXCEL : HiTape® A new efficient composite technology for primary aircraft structures. *SAMPE Journal*, 51(4):7–15, 2015.
- [14] R. MEZHER, S. BREUMIER, N. MOULIN, J. BRUCHON et S. DRAPIER : Coupling multiphysics problems in transient regimes : application to liquid resin infusion process. *Dans 7th International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, 2017.

- [15] K. ANDRIAMANANJARA, N. MOULIN, J. BRUCHON, P. J. LIOTIER et S. DRAPIER : Numerical modeling of local capillary effects in porous media as a pressure discontinuity acting on the interface of a transient bi-fluid flow. *International Journal of Material Forming*, 2018 (DOI 10.1007/s12289-018-1442-3).
- [16] L. CHEVALIER, J. BRUCHON, N. MOULIN, P. J. LIOTIER et S. DRAPIER : Accounting for local capillary effects in two-phase flows with relaxed surface tension formulation in enriched finite elements. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(8):617–633, 2018.
- [17] D. NGUEMALIEU KOUETCHA, K. ANDRIAMANANJARA, N. MOULIN, J. BRUCHON et S. DRAPIER : Simulation numérique en configuration industrielle de procédés d'élaboration de composites structuraux par infusion de résine. *Dans 14ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA)*, Giens, 2019.
- [18] P. LATIL, L. ORGÉAS, C. GEINDREAU, P. J. J. DUMONT et S. ROLLAND DU ROSCOAT : Towards the 3D in situ characterisation of deformation micro-mechanisms within a compressed bundle of fibres. *Composites Science and Technology*, 71(4):480–488, 2011.
- [19] M. BLAIS : *Modélisation et suivi du procédé par infusion de résine sur une nouvelle génération de renforts structuraux pour l'aéronautique*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2016.
- [20] H. BOROUCAKI et A. CHEROUAT : Drapage géométrique des composites. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(6):437–442, 2003.
- [21] K. Y. SZE et X. H. LIU : A new skeletal model for fabric drapes. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2(3-4):225–243, 2005.
- [22] A. J. M. SPENCER, T. G. ROGERS, A. H. ENGLAND, A. C. PIPKIN et D. F. PARKER : *Continuum theory of the mechanics of fibre-reinforced composites*. Springer Vienna, Vienna, 1984.
- [23] T. G. ROGERS : Rheological characterization of anisotropic materials. *Composites*, 20(1):21–27, 1989.
- [24] A. F. JOHNSON : Rheological model for the forming of fabric-reinforced thermoplastic sheets. *Composites Manufacturing*, 6(3-4):153–160, 1995.
- [25] D. DÖRR, W. BRYMERSKI, S. ROPERS, D. M. LEUTZ, T. JOPPICH, L. KÄRGER et F. HENNING : A Benchmark Study of Finite Element Codes for Forming Simulation of Thermoplastic UD-Tapes. *Dans 1st Cirp Conference on Composite Materials Parts Manufacturing*, pages 101–106, 2017.
- [26] E. DE LUYCKER, F. MORESTIN, P. BOISSE et D. MARSAL : Simulation of 3D interlock composite preforming. *Composite Structures*, 88(4):615–623, 2009.
- [27] G. CREECH et A. K. PICKETT : Meso-modelling of non-crimp fabric composites for coupled drape and failure analysis. *Journal of Materials Science*, 41(20):6725–6736, 2006.
- [28] P. BOISSE, N. HAMILA, E. VIDAL-SALLÉ et F. DUMONT : Simulation of wrinkling during textile composite reinforcement forming. Influence of tensile, in-plane shear and bending stiffnesses. *Composites Science and Technology*, 71(5):683–692, 2011.

- [29] S. P. HAANAPPEL, R. H. W. ten THIJE, U. SACHS, B. RIETMAN et R. AKKERMAN : Formability analyses of uni-directional and textile reinforced thermoplastics. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 56:80–92, 2014.
- [30] D. HULL et T. W. CLYNE : *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, Édition 2, 1996 (ISBN 978-1-1391-7013-0).
- [31] A. LONG, P. BOISSE et F. ROBITAILLE : Mechanical analysis of textiles. Dans A. LONG, éditeur : *Design and manufacture of textile composites*, pages 62–109. Woodhead Publishing Limited, 2005 (ISBN 978-1-8557-3744-0).
- [32] K. POTTER : In-plane and out-of-plane deformation properties of unidirectional prepregged reinforcement. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 33(11):1469–1477, 2002.
- [33] D. M. LEUTZ : *Forming simulation of AFP material layups : material characterization, simulation and validation*. Thèse de doctorat, Technische Universität München, 2015.
- [34] A. MARGOSSIAN, S. BEL et R. HINTERHOELZL : On the characterisation of transvers tensile properties of molten unidirectional thermoplastic composite tapes for thermoforming simulations. *Composites Part A : Applied science and manufacturing*, 88:48–58, 2016.
- [35] S. COMAS-CARDONA, P. LE GROGNEC, C. BINETRUY et P. KRAWCZAK : Unidirectional compression of fibre reinforcements Part 1 : A non-linear elastic-plastic behaviour. *Composites Science and Technology*, 67:507–514, 2007.
- [36] P. A. KELLY : Transverse compression properties of composite reinforcements. Dans P. BOISSE, éditeur : *Composite Reinforcements for Optimum Performance*, chapitre 11, pages 333–366. Woodhead Publishing Limited, 2011.
- [37] S. MATHIEU : *Modélisation du comportement mécanique lors du procédé de mise en forme et pyrolyse des interlocks CMC*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2014.
- [38] C. M. van WYK : 20—Note on the compressibility of wool. *Journal of the Textile Institute Transactions*, 37(12):T285–T292, 1946.
- [39] T. GUTOWSKI et G. DILLON : The Elastic Deformation of Fiber Bundles. Dans T. GUTOWSKI, éditeur : *Advanced Composites Manufacturing*, chapitre 3, page 581. Wiley, 1997.
- [40] F. ROBITAILLE et R. GAUVIN : Compaction of textile reinforcements for composites manufacturing. I : Review of experimental results. *Polymer Composites*, 19(2):198–216, 1998.
- [41] Q. T. NGUYEN, E. VIDAL-SALLÉ, P. BOISSE, C. H. PARK, A. SAOUAB, J. BRÉARD et G. HIVET : Mesoscopic scale analyses of textile composite reinforcement compaction. *Composites Part B : Engineering*, 44(1):231–241, 2013.
- [42] Q. GOVIGNON, S. BICKERTON et P. A. KELLY : Simulation of the reinforcement compaction and resin flow during the complete resin infusion process. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 41(1):45–57, 2010.
- [43] S. BICKERTON, M. J. BUNTAİN et A. A. SOMASHEKAR : The viscoelastic compression behavior of liquid composite molding preforms. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(5):431–444, 2003.

- [44] S. ORAWATTANASRIKUL : *Experimentelle Analyse des Scherdeformation biaxial verstärkter Mehlagengestricke*. Thèse de doctorat, Technische Universität Dresden, 2006.
- [45] S. KAWABATA : *The standardization and analysis of hand evaluation*. Textile Machinery Society of Japan, Osaka, Édition 2, 1980.
- [46] A. CHARMETANT : *Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2011.
- [47] G. B. MCGUINNESS et C. O. BRADAIGH : Characterisation of thermoplastic composite melts in rhombus-shear : the picture-frame experiment. *Composites Part A : Applied science and manufacturing*, 29(1-2):115–132, 1998.
- [48] Y. R. LARBERG, M. AKERMO et M. NORRBY : On the in-plane deformability of cross-plyed unidirectional prepreg. *Journal of Composite Materials*, 46(8):929–939, 2012.
- [49] T. J. KANG et W. R. YU : Drape simulation of woven fabric by using the Finite-element method. *Journal of the Textile Institute*, 86(4):635–648, 1995.
- [50] F. T. PEIRCE : The “handle” of cloth as a measurable quantity. *Journal of the Textile Institute Transactions*, 21(9):T377–T416, 1930.
- [51] T. G. CLAPP, H. PENG, T. K. GHOSH et J. W. EISCHEN : Indirect measurement of the moment-curvature relationship for fabrics. *Textile Research Journal*, 60(9):525–533, 1990.
- [52] N. C. HUANG : Finite biaxial extension of completely set plain woven fabrics. *Journal of Applied Mechanics*, 46(3):651, 1979.
- [53] G. M. ABBOTT, P. GROSBURG et G. A. V. LEAF : The mechanical properties of woven fabrics Part VII : the hysteresis during bending of woven fabrics. *Textile Research Journal*, 41(4):345–358, 1971.
- [54] P. GROSBURG : The mechanical properties of woven fabrics Part II : the bending of woven fabric. *Textile Research Journal*, 36(3):205–211, 1966.
- [55] P. R. DAHL : Solid Friction Damping of Mechanical Vibrations. *AIAA Journal*, 14(12):1675–1682, 1976.
- [56] S. V. LOMOV, I. VERPOEST, M. BARBURSKI et J. LAPERRÉ : Carbon composites based on multiaxial multiply stitched preforms. Part 2. KES-F characterisation of the deformability of the preforms at low loads. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(4):359–370, 2003.
- [57] C. NGO NGOC, P. BRUNIAUX et J. M. CASTELAIN : Modeling friction for yarn/-fabric simulation Application to bending hysteresis. Dans V. KRUG, éditeur : *14th European Simulation Symposium*, Dresden, Germany, 2002. SCS Europe BVBA.
- [58] E. de BILBAO, D. SOULAT, G. HIVET, J. LAUNAY et A. GASSER : Bending test of composite reinforcements. *International Journal of Material Forming*, 1(Suppl. 1):835–838, 2008.
- [59] B. LIANG : *Experimental and numerical study of the bending behaviour of textile reinforcements and thermoplastic prepregs*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2016.

- [60] E. de BILBAO, D. SOULAT, G. HIVET et A. GASSER : Experimental study of bending behaviour of reinforcements. *Experimental Mechanics*, 50(3):333–351, 2010.
- [61] B. LIANG, N. HAMILA, M. PEILLON et P. BOISSE : Analysis of thermoplastic prepreg bending stiffness during manufacturing and of its influence on wrinkling simulations. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 67:111–122, 2014.
- [62] D. SOTEROPOULOS, K. A. FETFATSIDIS, J. A. SHERWOOD et J. LANGWORTHY : Digital method of analyzing the bending stiffness of non-crimp fabrics. *Dans 14th International ESAFORM Conference on Material Forming*, volume 1353, pages 913–917. AIP Conference Proceedings, 2011.
- [63] H. ALSHAHRANI et M. HOJJATI : A new test method for the characterization of the bending behavior of textile prepregs. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 97:128–140, 2017.
- [64] B. ANGEL et J. GRAEF : Study of the bending stiffness of fibre-reinforced thermoplastics at forming temperature. *JEC Composites Magazine*, (103):76–79, 2016.
- [65] A. MARGOSSIAN, S. BEL et R. HINTERHOELZL : Bending characterisation of a molten unidirectional carbon fibre reinforced thermoplastic composite using a Dynamic Mechanical Analysis system. *Composites Part A : Applied science and manufacturing*, 77:154–163, 2015.
- [66] U. SACHS, R. AKKERMAN et S. P. HAANAPPEL : Bending characterization of UD composites. *Key Engineering Materials*, 611-612:399–406, 2014.
- [67] C. A. COULOMB : *Théorie des machines simples*. Édition Hachette L, 1821.
- [68] J. FRÈNE et H. ZAÏDI : Introduction à la tribologie TRI 100-1. *Techniques de l'ingénieur : Frottement et usure*, 2011.
- [69] R. STRIBECK : *Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager*. Springer, Berlin, 1903.
- [70] M. D. HERSEY : The laws of lubrication of horizontal journal bearings. *Journal of the Washington Academy of Sciences*, 4(19):542–552, 1914.
- [71] J. L. GORCZYCA, J. A. SHERWOOD et J. CHEN : A friction model for thermo-stamping commingled glass-polypropylene woven fabrics. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38:393–406, 2007.
- [72] R. H. W. TEN THIJE, R. AKKERMAN, M. UBBINK et L. VAN DER MEER : A lubrication approach to friction in thermoplastic composites forming processes. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(8):950–960, 2011.
- [73] K. VANCLOOSTER, S. V. LOMOV et I. VERPOEST : Simulation of multi-layered composites forming. *International Journal of Material Forming*, 3(Suppl. 1):695–698, 2010.
- [74] K. A. FETFATSIDIS, D. JAUFFRÈS, J. A. SHERWOOD et J. CHEN : Characterization of the tool/fabric and fabric/fabric friction for woven-fabric composites during the thermostamping process. *International Journal of Material Forming*, 6(2):209–221, 2013.

- [75] B. ZHU, T. X. YU, H. ZHANG et X. M. TAO : Experimental investigation of formability of commingled woven composite preform in stamping operation. *Composites Part B : Engineering*, 42:289–295, 2011.
- [76] P. WANG, N. HAMILA et P. BOISSE : Thermoforming simulation of multilayer composites with continuous fibres and thermoplastic matrix. *Composites Part B : Engineering*, 52:127–136, 2013.
- [77] P. GUAY : Principes de base de la lubrification TRI 1 500-1. *Techniques de l'ingénieur : Lubrification*, 2014.
- [78] G. HIVET, S. ALLAOUI, B. T. CAM, P. OUAGNE et D. SOULAT : Design and Potentiality of an Apparatus for Measuring Yarn/Yarn and Fabric/Fabric Friction. *Experimental Mechanics*, 52(8):1123–1136, 2012.
- [79] R. H. W. ten THIJE et R. AKKERMAN : Design of an experimental setup to measure tool-ply and ply-ply friction in thermoplastic laminates. *International Journal of Material Forming*, 2(S1):197–200, 2009.
- [80] U. SACHS, K. A. FETFATSIDIS, J. SCHUMACHER, G. ZIEGMANN, S. ALLAOUI, G. HIVET, E. VIDAL-SALLÉ et R. AKKERMAN : A friction-test benchmark with Twintex PP. *Key Engineering Materials*, 504-506:307–312, 2012.
- [81] B. CORNELISSEN, U. SACHS, B. RIETMAN et R. AKKERMAN : Dry friction characterisation of carbon fibre tow and satin weave fabric for composite applications. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 56:127–135, 2014.
- [82] H. G. HOWELL et J. MAZUR : Amontons' law and fibre friction. *Journal of the Textile Institute Transactions*, 44(2):T59–T69, 1953.
- [83] A. DAS, V. K. KOTHARI et N. VANDANA : A study on frictional characteristics of woven fabrics. *AUTEX Research Journal*, 5(3), 2005.
- [84] W. NAJJAR, C. PUPIN, X. LEGRAND, S. BOUDE, D. SOULAT et P. DAL SANTO : Analysis of frictional behaviour of carbon dry woven reinforcement. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 33(11):1037–1047, 2014.
- [85] M. E. YUKSEKKAY : More about fibre friction and its measurements. *Textile Progress*, 41(3):141–193, 2009.
- [86] S. BEL, N. HAMILA, P. BOISSE et F. DUMONT : Finite element model for NCF composite reinforcement preforming: Composites Part A: Applied Science and Manufacturing : Importance of inter-ply sliding. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 43(12):2269–2277, 2012.
- [87] Y. R. LARBERG et M. AKERMO : On the interply friction of different generations of carbon/epoxy prepreg systems. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(9):1067–1074, 2011.
- [88] D. BUDELMANN, H. DETAMPEL, C. SCHMIDT et D. MEINERS : Interaction of process parameters and material properties with regard to prepreg tack in automated lay-up and draping processes. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 117:308–316, 2019.
- [89] J. C. SEFERIS et J. MEISSONNIER : Development of a tack and drape test for prepreps based on viscoelastic principles. *SAMPE Quarterly*, 20(3):55–64, 1989.

- [90] A. BEAKOU, M. CANO, J. B. LE CAM et V. VERNEY : Modelling slit tape buckling during automated prepreg manufacturing : a local approach. *Composite Structures*, 93(10):2628–2635, 2011.
- [91] R. J. CROSSLEY, P. J. SCHUBEL et N. A. WARRIOR : The experimental determination of prepreg tack and dynamic stiffness. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 43(3):423–434, 2012.
- [92] O. DUBOIS, J. B. LE CAM et A. BEAKOU : Experimental analysis of prepreg tack. *Experimental Mechanics*, 50(5):599–606, 2009.
- [93] V. CARVELLI : Biaxial tensile properties of reinforcements in composites. *Dans Composite Reinforcements for Optimum Performance*, chapitre 10, pages 306–332. Woodhead Publishing, 2011.
- [94] HEXCEL : HexTow IMA product data sheet. Rapport technique, Disponible à <http://www.hexcel.com/resources/datas>, 2016.
- [95] D. W. MARQUARDT : An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.
- [96] E. VOCE : A practical strain-hardening function. *Metallurgica*, 51:219–226, 1955.
- [97] Y. PANNIER : *Identification de paramètres élastoplastiques par des essais statiquement indéterminés : mise en oeuvre expérimentale et validation de la méthode des champs virtuels*. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech, 2006.
- [98] S. FOREST, M. AMESTOY, S. CANTOURNET, G. DAMAMME, S. KRUCH et V. MAUREL : *Mécanique des milieux continus*. 2007 (support de cours).
- [99] Y. AIMENE : *Approche hyperélastique pour la simulation des renforts fibreux en grandes transformations*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007.
- [100] P. WRIGGERS : Discretization Methods for Solids Undergoing Finite Deformations. *Dans P. WRIGGERS et J. SCHRÖDER, éditeurs : Advanced Finite Element Technologies*, chapitre 2, pages 17–51. Springer, Cham, Édition CISM Inter, 2016.
- [101] J. L. CHABOCHE et J. LEMAITRE : *Mécanique des matériaux solides*. Édition Dunod, 1988 (ISBN 2-10-001397-1).
- [102] J. P. PONTHOT : *Cours de mécanique des milieux continus solides en grandes transformations et traitement unifié par la méthode des éléments finis*. 1995 (support de cours).
- [103] F. SIDOROFF : *Mécanique des Solides Tome 1 Mécanique des Milieux Continus*. École Centrale de Lyon, 1980.
- [104] C. TRUESDELL : Hypo-elasticity. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 4:83–133, 1955.
- [105] B. HAGEGE : *Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations : application aux renforts tricotés*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2004.
- [106] P. BADEL : *Analyse mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites utilisant la tomographie aux rayons X*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2008.

- [107] I. GAIED et S. DRAPIER : Identification de la loi de comportement d'un tricot élastomérique. *Revue des composites et des matériaux avancés*, 13(3), 2003.
- [108] E. GUZMAN MALDONADO : *Modélisation et simulation de la mise en forme des matériaux composites préimprégnés à matrice thermoplastique et à fibres continues*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2016.
- [109] A. CHARMETANT, E. VIDAL-SALLÉ et P. BOISSE : Hyperelastic modelling for mesoscopic analyses of composite reinforcements. *Composites Science and Technology*, 71(14):1623–1631, 2011.
- [110] P. CIARLET : *Mathematical Elasticity, Volume 1 : Three dimensional elasticity*. Elsevier, 1988.
- [111] M. ITSKOV et N. AKSEL : A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. *International Journal of Solids and Structures*, 41(14):3833–3848, 2004.
- [112] M. E. GURTIN : *An introduction to continuum mechanics*. Academic Press, San Diego, 1981 (ISBN 978-8-1814-7735-4).
- [113] J. ZHANG et J. RYCHLEWSKI : Structural tensors for anisotropic solids. *Archives of Mechanics*, 42(3):267–277, 1990.
- [114] J. BONET et R. D. WOOD : *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, Édition 2, 2008 (ISBN 978-0-521-83870-2).
- [115] J. M. BALL : Convexity conditions and existence theoremes in nonlinear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 63(4):337–403, 1977.
- [116] S. MÜLLER, T. QI et B. S. YAN : On a new class of elastic deformations not allowing for cavitation. *Annales de l'Institut Henri Poincaré section C*, 11(2): 217–243, 1994.
- [117] J. SCHRÖDER et P. NEFF : Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. *International Journal of Solids and Structures*, 40:401–445, 2003.
- [118] M. ITSKOV : A generalized orthotropic hyperelastic material model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:1777–1799, 2001.
- [119] J. BONET et A. BURTON : A simple orthotropic, transversely isotropic hyperelastic constitutive equation for large strain computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162(1-4):151–164, 1998.
- [120] L. MEUNIER, G. CHAGNON, D. FAVIER et L. ORGÉAS : Anisotropic large deformation of geometrically architected unfilled silicone membrane. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 50:87–99, 2015.
- [121] S. MATHIEU, N. HAMILA, F. BOUILLON et P. BOISSE : Enhanced modeling of 3D composite preform deformations taking into account local fiber bending stiffness. *Composites Science and Technology*, 117:322–333, 2015.
- [122] S. COMAS-CARDONA, P. LE GROGNEC, C. BINETRUY et P. KRAWCZAK : Unidirectional compression of fibre reinforcements Part 1 : A non-linear elastic-plastic behaviour. *Composites Science and Technology*, 67(3-4):507–514, 2007.

- [123] S. FOREST : *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Édition Mines Paris Les Presses, 2006 (ISBN 2-911762-67-3).
- [124] A. L. CAUCHY : Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides. élastiques ou non élastiques. *Dans Bulletin de la Société philomatique*, pages 300–304. 1823.
- [125] A. C. ERINGEN : Mechanics of Micromorphic Continua. *Dans* E. KRÖNER, éditeur : *Mechanics of Generalized Continua*, pages 18–35. Springer, Berlin, Heidelberg, 1968.
- [126] E. COSSERAT et F. COSSERAT : Sur la théorie de l'élasticité. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Tome X*, 1896.
- [127] D. K. TRINH : *Méthodes d'homogénéisation d'ordre supérieur pour les matériaux architecturés*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011.
- [128] A. J. M. SPENCER et K. P. SOLDATOS : Finite deformations of fibre-reinforced elastic solids with fibre bending stiffness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(2):355–368, 2007.
- [129] K. P. SOLDATOS : Second-gradient plane deformations of ideal fibre-reinforced materials : implications of hyper-elasticity theory. *Journal of Engineering Mathematics*, 68(1):99–127, 2010.
- [130] T. ASMANOGLO et A. MENZEL : A multi-field finite element approach for the modelling of fibre-reinforced composites with fibre-bending stiffness. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317:1037–1067, 2017.
- [131] M. FERRETTI, A. MADEO, F. DELL'ISOLA et P. BOISSE : Modelling the onset of shear boundary layers in fibrous composite reinforcements by second gradient theory. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 65(3):587–612, 2014.
- [132] A. MADEO, M. FERRETTI, F. DELL'ISOLA et P. BOISSE : Thick fibrous composite reinforcements behave as special second-gradient materials: three-point bending of 3D interlocks. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 66(4):2041–2060, 2015.
- [133] G. BARBAGALLO, A. MADEO, F. MORESTIN et P. BOISSE : Modelling the deep drawing of a 3D woven fabric with a second gradient model. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(11):2165–2179, 2017.
- [134] P. BOISSE, J. COLMARS, N. HAMILA, N. NAOUAR et Q. STEER : Bending and wrinkling of composite fiber preforms and prepregs. A review and new developments in the draping simulations. *Composites Part B : Engineering*, 141:234–249, 2018.
- [135] A. CURNIER et N. RAMANIRAKA : Thermo-mechanical contact between two deformable bodies. *Journal of Thermal Stresses, special issue*, pages 355–358, 1997.
- [136] C. TALON : *Couplage d'une loi d'adhésion à une loi de contact avec frottement pour l'étude de la décohésion dans les matériaux composites*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2001.
- [137] T. HEITBREDER, N. S. OTTOSEN, M. RISTINMAA et J. MOSLER : Consistent elastoplastic cohesive zone model at finite deformations – Variational formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 106-107:284–293, 2017.

- [138] J. J. MOREAU : Application of convex analysis to some problems of dry friction. *Dans Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics Vol. 2 : A Collection of Papers Presented at a Symposium at Kozubnik*, pages 263–280, 1977.
- [139] J. J. MOREAU : On Unilateral Constraints, Friction and Plasticity. *Dans New Variational Techniques in Mathematical Physics*, pages 171–322. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [140] C. TALON et A. CURNIER : A model of adhesion coupled to contact and friction. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 22(4):545–565, 2003.
- [141] M. RAOUS : Interface models coupling adhesion and friction. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(7-8):491–501, 2011.
- [142] G. BARENBLATT : The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23(3):622–636, 1959.
- [143] D. DUGDALE : Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2):100–104, 1960.
- [144] M. FRÉMOND : Contact Unilateral Avec Adherence. *Dans Proceedings of the Second Meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis*, pages 57–79, Vienna, 1983. Springer Vienna.
- [145] M. RAOUS, L. CANGÉMI et M. COCU : A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3-4):383–399, 1999.
- [146] E. LORENTZ : A mixed interface finite element for cohesive zone models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:302–317, 2008.
- [147] P. ALART et A. CURNIER : A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92:353–375, 1991.
- [148] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS : *Méthode des éléments finis*. 2007 (ISBN 978-2-7462-0979-4).
- [149] T. BELYTSCHKO, W. K. LIU, B. MORAN et K. I. ELKHODARY : *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons Ltd, Édition 2, 2014 (ISBN 978-1-1186-3270-3).
- [150] P. WRIGGERS, J. SCHRÖDER et F. AURICCHIO : Finite element formulations for large strain anisotropic material with inextensible fibers. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3(1), 2016.
- [151] P. BOISSE, R. BAI, J. COLMARS, N. HAMILA, B. LIANG et A. MADEO : The Need to Use Generalized Continuum Mechanics to Model 3D Textile Composite Forming. *Applied Composite Materials*, 25(4):761–771, 2018.
- [152] D. DÖRR, F. J. SCHIRMAIER, F. HENNING et L. KÄRGER : A viscoelastic approach for modeling bending behavior in finite element forming simulation of continuously fiber reinforced composites. *Composites Part A : Applied science and manufacturing*, 94:113–123, 2017.

- [153] K. BATHE et F. BREZZI : Stability of finite element mixed interpolations for contact problems. *Rendiconti Lincei Matematica e Applicazioni*, 12(9):167–183, 2001.
- [154] N. KIKUCHI et J. T. OGDEN : *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988.
- [155] G. ALFANO et M. A. CRISFIELD : Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1701–1736, 2001.
- [156] N. RAKOTOMALALA : *Modélisation numérique de l'écaillage des barrières thermiques avec couplage thermo-mécanique*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2014.
- [157] N. HAMILA : *Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multi plis*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007.
- [158] E. GUZMAN MALDONADO, P. WANG, N. HAMILA et P. BOISSE : Experimental and numerical analysis of wrinkling during forming of multi-layered textile composites. *Composite Structures*, 208:213–223, 2019.
- [159] P. BUSSETTA, D. MARCEAU et J.-P. PONTHOT : Résolution du problème de contact mécanique frottant : méthode du lagrangien augmenté adapté. *Dans 9ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA)*, Giens, 2009.
- [160] M. SCHRYVE, M. RAOUS et M. COCOU : Loi de contact pour les élastomères : interface adhésive. *Dans 18ème Congrès Français de Mécanique*, 2007.
- [161] J. L. CHABOCHE, F. FEYEL et Y. MONERIE : Interface debonding models: A viscous regularization with a limited rate dependency. *International Journal of Solids and Structures*, 38(18):3127–3160, 2001.
- [162] H.-B. HELLWEG et M. A. CRISFIELD : A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Computers and Structures*, 66(5):705–709, 1998.
- [163] K. HASHIGUCHI et Y. YAMAKAWA : *Introduction to finite strain theory for continuum elasto-plasticity*. John Wiley and Sons Ltd, 2013.
- [164] E. LORENTZ et P. BADEL : A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(2):499–526, 2004.
- [165] N. GERMAIN : *Modélisation non locale de l'endommagement dans les structures composites*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006.
- [166] M. RITTO-CORRÊA et D. CAMOTIM : On the arc-length and other quadratic control methods: Established, less known and new implementation procedures. *Computers and Structures*, 86(11-12):1353–1368, 2008.

NNT: 2019LYSEM014

Laure BOUQUEREL

A CONTRIBUTION TO THE STUDY OF THE FORMING OF
DRY UNIDIRECTIONAL HiTape® REINFORCEMENTS FOR PRIMARY
AIRCRAFT STRUCTURES

Speciality: Mechanics and Engineering

Keywords: Composites, Unidirectional reinforcement, Forming, Simulation, Finite Element, Bending, Hyperelasticity, Friction, Cohesive zone.

Abstract:

In the context of developing out-of-autoclave processes for primary aircraft structures, this PhD (CIFRE Hexcel/Mines Saint-Etienne funding in partnership with INSA-Lyon) aims to model and simulate the forming of an initially flat stack of HiTape® reinforcements. Developed by Hexcel, HiTape® is a dry unidirectional carbon fiber reinforcement with a thermoplastic veil on each side, designed to achieve a performance comparable to state-of-the-art preimpregnated materials. Modeling the forming of structural reinforcements requires consideration of the material, geometrical and contact nonlinearities. First, HiTape® behavior is characterized; in particular, nonlinear out-of-plane bending behavior is measured using a modified Peirce flexometer, and the inter-ply coefficient of friction is assessed with a pull-through friction test. Then, a transversely isotropic hyperelastic law is therefore selected for the intra-ply behavior, while the interface where is located the melted thermoplastic veil is modeled using cohesive zones formulated in order to describe both friction and adhesion. The mechanical problem is finally solved using a finite element method with Z-set software. In order to simulate the forming of a stack of reinforcements, mold-to-preform contact is assumed to be perfect (frictionless).

NNT : 2019LYSEM014

Laure BOUQUEREL

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA MISE EN FORME DE RENFORTS
SECS UNIDIRECTIONNELS HiTape® POUR STRUCTURES
PRIMAIRES AÉRONAUTIQUES

Spécialité : Mécanique et ingénierie

Mots clefs : Composites, Renfort unidirectionnel, Mise en forme, Simulation, Éléments finis, Flexion, Hyperélasticité, Frottement, Zone cohésive.

Résumé :

S'inscrivant dans le contexte du développement des procédés hors autoclave pour les structures primaires aéronautiques, ce travail de thèse (financement CIFRE Hexcel/Mines Saint-Etienne avec implication de l'INSA-Lyon) a pour objectif de modéliser et simuler la mise en forme d'un empilement de renforts HiTape® préalablement déposés à plat. Développé par Hexcel, HiTape® est un renfort unidirectionnel sec de fibres de carbone avec un voile thermoplastique de part et d'autre, permettant d'atteindre un niveau de performance similaire aux matériaux pré-imprégnés standards. La modélisation de la mise en forme de ce type de renforts structuraux nécessite de rendre compte des non-linéarités à la fois matérielles, géométriques et de contact en jeu. Le comportement du renfort HiTape® est donc d'abord caractérisé sous diverses sollicitations. En particulier, le comportement non-linéaire en flexion hors-plan est quantifié à l'aide d'un flexomètre de Peirce modifié, et un essai de type *pull-through* permet d'évaluer le coefficient de frottement inter-plis. Ensuite, une loi de comportement hyperélastique isotrope transverse est sélectionnée pour modéliser la réponse du renfort unidirectionnel. L'interface entre les plis, où est situé le voile thermoplastique à l'état fondu, est modélisée *via* des zones cohésives reformulées pour prendre en compte frottement et adhésion. Le problème mécanique est résolu par la méthode des éléments finis dans la suite logicielle Z-set. Dans les simulations de mise en forme d'empilements, le contact entre le moule et la préforme fibreuse est supposé parfait.