



**HAL**  
open science

## Stratégies de jeux pour quelques problèmes inverses

Rabeb Chamekh

► **To cite this version:**

Rabeb Chamekh. Stratégies de jeux pour quelques problèmes inverses. Analyse numérique [math.NA]. COMUE Université Côte d'Azur (2015 - 2019); Université de Tunis El Manar, 2019. Français. NNT : 2019AZUR4103 . tel-02880777

**HAL Id: tel-02880777**

**<https://theses.hal.science/tel-02880777>**

Submitted on 25 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

# THÈSE DE DOCTORAT

## Stratégies de jeux pour quelques problèmes inverses

**Rabeb CHAMEKH**

INRIA - LAMSIN

**Présentée en vue de l'obtention  
du grade de docteur en *Mathématiques*  
d'Université Côte d'Azur  
et de l' Université de Tunis El Manar  
Dirigée par : Abderrahmane HABBAL /  
Moez KALLEL  
Soutenue le : 13-12-2019**

**Devant le jury, composé de :**  
Hend Ben Ameer, Professeur, Université de  
Tunis El Manar  
Makki Ayadi, Professeur, Université de  
Sousse  
Rajae Aboulaich, Professeur , Université de  
Rabat  
Didier Auroux, Professeur, Université côte  
d'Azur  
Moez Kallel, Maitre de conférence,  
Université Tunis El Manar  
Abderrahmane Habbal, Maitre de  
conférence, Université côte d'Azur

# Stratégies de jeux pour quelques problèmes inverses

## **Jury :**

Président du jury

Hend Ben Ameer, Professeur, Université de Tunis El Manar

Rapporteurs

Makki Ayadi, Professeur, Université de Sousse

Rajae Aboulaich, Professeur, Université de Rabat

Examineur

Didier Auroux, Professeur, Université côte d'Azur

Directeurs de Thèse

Moez Kallel, Maitre de conférence, Université de Tunis El Manar

Abderrahmane Habbal, Maitre de conférence, Université de Tunis El Manar

# Remerciements

*L'achèvement de ce travail mené sur plusieurs années procure une grande satisfaction. Il est l'occasion de se remémorer les différentes embûches qu'il a fallu surmonter mais surtout les personnes qui m'ont aidé.*

*Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à mes directeurs de thèse Messieurs Moez KALLEL et Abderrahmane HABBAL, pour leur direction avisée et exigeante, leurs qualités humaines et scientifiques et leur soutien constant tout au long de cette thèse. C'est grâce à eux que j'ai pu poursuivre avec bonheur mes recherches. C'était un très grand plaisir de travailler avec eux.*

*Je remercie vivement Monsieur Nejib ZEMZEMI, pour son aide précieuse dans mes recherches et son soutien scientifique et moral pendant le stage de recherche que j'ai effectué à l'INRIA Bordeaux.*

*Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Makki AYADI et Madame Rajea ABOULAICH qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger ce travail et d'en être les rapporteurs.*

*Mes remerciements vont chaleureusement à Madame Hend BEN AMEUR d'avoir accepté de présider mon jury de thèse et à Monsieur Didier AUROUX d'avoir bien voulu en être l'examineur.*

*Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe ACUMES pour leur soutien et leur accueil aimable durant les stages des recherches que j'ai effectués à l'INRIA Nice Sophia Antipolis.*

*Ma gratitude revient aussi à tous les membres du laboratoire LAMSIN pour l'ambiance conviviale et le bon environnement pour la réalisation de ce travail. Je remercie tous mes amis, en particulier, Marwa KCHAW pour son amitié et encouragement.*

*J'exprime enfin un geste modeste de remerciement et de reconnaissance à ma famille pour l'infatigable soutien et l'incroyable patience.*

# Résumé

L'objectif de ce travail de thèse est la résolution du problème de couplage de complétion des données et identification des paramètres. Le problème de Cauchy est un problème de détermination des mesures sur une partie inaccessible du bord d'un solide à partir des données surabondantes sur le bord. L'identification des paramètres est un problème de détermination du paramètre de système. Ces deux problèmes sont connus pour être mal posés au sens d'Hadamard. Le mémoire de thèse se divise en quatre parties. La première partie est consacrée à une étude bibliographique. Dans le deuxième chapitre, nous avons appliqué la théorie des jeux pour la résolution du problème de couplage de complétion des données et identification de conductivité en électrocardiographie. On a évoqué la question d'identifiabilité de la conductivité. On a montré l'unicité de ce paramètre en utilisant seulement les données de Cauchy sur une partie du bord. Nos expériences numériques ciblent les applications médicales en électrocardiographie. Nous avons appliqué notre procédure dans un thorax bidimensionnel et tridimensionnel. La troisième partie est consacré à la résolution du problème de couplage en élasticité linéaire en appliquant la stratégie des jeux. Une étude numérique a été effectuée où on a considéré une configuration particulière pour assurer l'identifiabilité des paramètres. Dans la dernière partie, on s'intéresse à un problème de thermoélasticité. Il s'agit de coupler deux disciplines différents, la thermique et l'élasticité. Le problème de l'identification de fissure est une application naturelle dans ce cas.

**mots-clés :** jeu de Nash, complétion des données, identification des paramètres, identifiabilité, élasticité, thermoélasticité...

# Abstract

In this PHD-Thesis, we focused on solving the coupling problem of data completion and parameter identification. The Cauchy problem is a problem of identification of boundary condition on a part of the boundary from overabundant data on the remaining part. Parameter identification is a problem of the system parameter. These two problems are known to be ill-posed in the sense of Hadamard. This Thesis is divided into four parts. The first part is dedicated to a bibliography study. In the second chapter, we applied the game theory on the resolution of the coupling problem of data completion and the conductivity identification in electrocardiography. We talked about the identifiability of the conductivity. We have shown the uniqueness of this parameter using only the Cauchy data on a part of the edge. Our numerical experiments target medical applications in electrocardiography. We applied our procedure in a two-dimensional and three-dimensional thorax. The third part is dedicated to the resolution of the coupling problem in linear elasticity applying the game theory. A numerical study has been done where we considered a particular configuration to ensure the parameters identifiability. In the last part, we are interested in a problem of thermoelasticity. It's about coupling two different disciplines : thermal and elasticity. The problem of crack identification is a natural application in this case.

**Keywords :** Nash games, data completion, parameters identification, identifiability, elasticity, thermoelasticity,...

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Problèmes inverses et algorithmes d'identification</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Complétion des données . . . . .	4
1.2.1 Minimisation d'une fonctionnelle de type energie . . . . .	7
1.2.2 Approche par jeux de Nash . . . . .	8
1.2.3 Méthode de régularisation de Tikhonov . . . . .	12
1.3 Identification des paramètres . . . . .	13
1.3.1 Identifiabilité des paramètres de Lamé en utilisant deux mesures sur le bord . . . . .	14
1.4 Conclusion . . . . .	16
<b>2 Problème de couplage entre la complétion des données et l'identification de conductivité en Électrocardiographie</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Problème inverse de couplage de complétion des données et identification de conductivité . . . . .	18
2.2.1 Identifiabilité de la conductivité . . . . .	19
2.2.2 Problème de couplage par une formulation de jeu . . . . .	21
2.3 Procédure numérique . . . . .	22
2.4 Résultats numériques : modèle anatomique . . . . .	25
2.4.1 Le domaine du calcul et solution exacte . . . . .	25
2.4.2 Cas test 1 : . . . . .	27
2.4.3 Cas test 2 : . . . . .	31
2.4.4 Thorax 3D : . . . . .	32
2.5 Conclusion . . . . .	35

<b>3</b>	<b>Complétion des données et identification des paramètres en élasticité linéaire</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.2	Résolution du problème de complétion des données par l'approche de jeu de Nash . . . . .	38
3.3	Problème de couplage de complétion des données et identification des paramètres	41
3.3.1	Principe de la méthode . . . . .	41
3.4	Algorithme . . . . .	43
3.5	Résultats numériques . . . . .	48
3.5.1	Cas test 1 . . . . .	49
3.5.2	Cas test 2 . . . . .	52
3.5.3	Cas test 3 . . . . .	55
3.6	Conclusion . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Complétion de données en thermoélasticité</b>	<b>59</b>
4.1	Introduction . . . . .	59
4.2	Complétion de données en thermoélasticité . . . . .	60
4.2.1	Algorithme de reconstruction . . . . .	61
4.2.2	Approche de minimisation . . . . .	63
4.2.3	Expérience numérique . . . . .	68
4.3	Conclusion . . . . .	71
	<b>Conclusion générale</b>	<b>73</b>



# Introduction générale

Un problème inverse en sciences mathématiques est un processus qui consiste à déterminer à partir d'un ensemble d'observations les causes qui les ont produites. On peut trouver des applications dans nombreux domaines, par exemple en géophysique, en imagerie médicale et en mécanique des structures.

Le problème inverse commence par les effets et calcule les causes. Ce type de problème revient à reconstruire l'état passé d'un système physique connaissant son état actuel, contrairement au problème direct qui consiste à prédire le futur connaissant son état actuel. Les problèmes directs sont en général bien posés. Cette notion a été introduite par le mathématicien français Jacques Hadamard dans [34]. Un problème est dit bien posé si et seulement si il existe une unique solution qui dépend continûment des données. Dans le cas contraire, le problème est dit problème inverse mal posé, c'est à dire que la solution n'existe pas ou n'est pas unique ou elle ne dépend pas continûment des données.

Les problèmes inverses sont très importants en sciences et en mathématiques car ils nous renseignent sur des paramètres que nous ne pouvons pas observer directement. Leur résolution mathématique est assez délicate où plusieurs stratégies ont été développées.

Dans cette thèse, nous allons introduire une approche basée sur les stratégies des jeux pour la résolution de problème inverse. La théorie des jeux définit un cadre pour traiter les problèmes d'optimisation multicritère et multidisciplinaire. Elle a été introduite par le mathématicien Von Neumann [63] dans les années 30.

La théorie des jeux étudie la décision des joueurs. Chacun opte son propre choix qui dépend de celui des autres. Pour cette raison, la théorie des jeux est parfois nommée "théorie de la décision en interaction". Le problème inverse est transformé en  $N$  sous problèmes d'optimisation ou  $N$  disciplines qui sont considérés comme des joueurs. Chacun a pour objectif la minimisation de son propre critère. Le résultat du jeu dépend de ces règles et des actions des joueurs. Il existe plusieurs types de jeux :

Le jeu de Pareto où les joueurs communiquent entre eux de façon coopérative. Les joueurs se concertent et s'engagent à coopérer avant de choisir la stratégie à adopter.

Le jeu de Nash qui prend son nom du mathématicien américain John Forbes Nash, est un jeu non-coopératif où les joueurs interagissent de façon compétitive. Chacun cherche à améliorer son critère simultanément et indépendamment des autres.

Le jeu de Stackelberg est un autre type de jeu non-coopératif. Les joueurs n'ont pas un rôle symétrique, mais ils communiquent de façon hiérarchique en désignant l'un d'eux comme leader et les autres comme suiveurs.

Le problème inverse que nous allons traiter est le problème de couplage de complétion des données avec l'identification des paramètres. Ce type de problème intervient dans nombreuses applications. On peut citer par exemple l'électrocardiographie. Les maladies cardiovasculaires sont une classe de maladie qui affectent le coeur et les vaisseaux sanguins. Elles sont la première cause de décès dans le monde. L'électrocardiographie (ECG) est un examen médical qui détecte les anomalies cardiaques par la mesure de l'activité électrique du coeur en utilisant des électrodes placés sur la poitrine du patient. Le coeur est une source du courant dans le corp, il dégage plusieurs signaux électriques. Ces derniers peuvent être présentés par des courbes en utilisant l'électrocardiogramme. La présence d'une pathologie cardiaque entraîne un dérèglement du système électrique du coeur et entraîne des troubles du rythme.

La résolution du problème de complétion des données permet d'identifier le flux et le potentiel électrique sur le coeur à partir des données sur la surface de thorax. Chaque organe du thorax est caractérisé par une conductivité. Des valeurs approchées peuvent être mesurées (ou estimées) par les cardiologues. L'amélioration de ces valeurs conduit à des reconstructions plus précises sur le coeur.

Cette thèse est composée de quatres chapitres. Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique. On présente des travaux de la littérature qui traitent le problème de complétion des données. Différentes méthodes de résolution sont utilisées pour différents opérateurs. Des travaux sont aussi présentés concernant la résolution du problème d'identification de paramètres. Nous introduisons le problème d'identifiabilité et les conditions nécessaires pour assurer l'unique identification de ces paramètres. Quelques méthodes de résolution sont développées avec plus de details dans ce chapitre.

Le deuxième chapitre est dédié à la résolution du problème de couplage de complétion des données et identification de conductivité en électrocardiographie, qui a fait l'objet de la publication [19]. Nous utilisons une formulation dans le cadre de la théorie des jeux pour la résolution de ce problème. Dans la première partie, on présente le problème inverse et on introduit aussi le problème d'identifiabilité de conductivité où nous prouvons l'unicité de ce paramètre. La méthode de jeu de Nash est développée pour la résolution du problème de couplage. On introduit les fonctionnelles utilisées ainsi que l'algorithme de jeu de Nash. Dans la deuxième partie, on présente une étude numérique qui cible les applications médicales. Trois tests numériques ont été effectués dans un thorax en bidimensionnel (2D) et en tridimensionnel (3D) qui montrent l'efficacité de notre méthode.

Dans le troisième chapitre, on résout le problème de couplage de complétion de données et identification des paramètres de Lamé en élasticité linéaire. Dans la première partie, on développe l'approche de jeu de Nash pour la résolution du problème de complétion des données

en élasticité linéaire. On présente les fonctionnelles et l'algorithme utilisés. On définit l'équilibre de Nash et on montre son existence et unicité. Pour des données de Cauchy compatibles, cet équilibre correspond exactement aux données manquantes du problème de complétion des données. Dans la deuxième partie, on introduit une nouvelle stratégie pour la résolution du problème de couplage entre complétion des données et identification des paramètres de Lamé. On développe le principe de la méthode de jeu de Nash comme les fonctionnelles coûts et l'algorithme de reconstruction. Enfin, on termine par une étude numérique où nous avons utilisé des conditions particulières pour assurer l'unicité des paramètres de Lamé reconstruits.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à un problème de thermoélasticité. Il s'agit de coupler deux disciplines différents, la thermique et l'élasticité pour la résolution d'un problème de complétion de données. Le problème de l'identification de fissure est une application naturelle dans ce cas. Dans ce chapitre, on présente d'abord l'approche de jeu de Nash pour la résolution du problème de complétion de données afin de le tester, dans la suite, dans le cadre de reconstruction des fissures en thermoélasticité.

# Chapitre 1

## Problèmes inverses et algorithmes d'identification

### 1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est la présentation des travaux issus de la littérature concernant la résolution du problème de complétion des données et identification des paramètres. Dans la première section, plusieurs stratégies pour la résolution du problème de Cauchy sont présentées. Dans la deuxième section, on discute le problème de l'unique identification des paramètres pour lequel une variété des méthodes ont été développées.

### 1.2 Complétion des données

Nous considérons ici le problème de complétion de données, connu sous le nom du problème de Cauchy. Ce problème consiste à reconstruire des données manquantes sur une partie inaccessible du bord en utilisant des données surabondantes sur la partie du bord accessible aux mesures. Ce problème a de nombreuses applications telles que l'imagerie médicale, l'industrie pétrolière, la géophysique, le traitement des images, etc... ([5, 13, 21, 44]). Par exemple, dans la technique des travaux de contrôle non destructifs des structures, qui est une technique d'évaluation des matériaux sans les dégrader, on peut citer l'exemple de la détection de fissures dans un solide, en l'absence de mesures au voisinage de ces fissures. Afin de caractériser l'état d'intégrité de ce solide et en utilisant des mesures accessibles sur sa surface, la technique de contrôle non destructif consiste à résoudre un problème de complétion de données pour l'identification complète de la fissure.

En 1932, Jacques Hadamard [34] a montré le caractère mal posé du problème de Cauchy par le fait que, même lorsque la solution existe, elle ne dépend pas continûment des données. Des données légèrement bruitées sur une partie du bord peuvent conduire à une forte perturbation

des données reconstruites sur l'autre partie.

**Instabilité du problème de Cauchy.** Dans [35], l'exemple d'Hadamard d'instabilité a été présenté avec une discussion approfondie. Il s'agit du problème suivant :

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , On considère la solution du problème de Cauchy dans le demi-plan supérieur :

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0, & \text{dans } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}, \\ u_n(x, 0) = 0, & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ u_{n,y}(x, 0) = A_n \sin(nx), & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La solution de ce problème est :

$$u_n = \frac{A_n}{n} \sin(nx) \sinh(ny).$$

Si on choisit  $A_n = \frac{1}{n}$  ou  $A_n = \frac{1}{n^p}$  pour  $p > 0$  ou  $A_n = e^{-\sqrt{n}}$ , on trouve que :

$$u_{n,y}(x, 0) \longrightarrow 0 \quad \text{uniformement quand } n \longrightarrow \infty$$

alors que, pour tout  $y > 0$ , la solution :

$$u_n(x, y) = \frac{A_n}{n} \sin(nx) \sinh(ny) \longrightarrow \infty \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

Dans un article de Alessandrini et al [4], les auteurs ont mentionné que la dépendance continue peut être assurée si on connaît une borne supérieure de la norme de la solution, ce qui est appelé la stabilité conditionnelle. Ils utilisent le même exemple de Hadamard pour présenter les conditions pour l'assurer. Pour cela, ils décrivent le problème de Cauchy dans un cadre plus simple et plus favorable. Ils considèrent le problème de Cauchy dans un rectangle :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } ]0, \pi[ \times ]0, 1[, \\ u(x, 0) = 0, & \text{pour tout } x \in ]0, \pi[, \\ u_y(x, 0) = \psi(x), & \text{pour tout } x \in ]0, \pi[. \end{cases} \quad (1.1)$$

et pour simplifier le problème, ils supposent une condition de Dirichlet nulle sur les côtés verticaux du rectangle :

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad \text{pour tout } y \in ]0, 1[. \quad (1.2)$$

La solution  $u$  appartient à l'espace de Sobolov  $\mathbb{H}^1(]0, \pi[ \times ]0, 1[)$  et comme une information supplémentaire sur l'inconnu  $u$ , ils utilisent :

$$\int \int_{(0, \pi) \times (0, 1)} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \leq E^2, \quad \text{pour une donnée } E > 0. \quad (1.3)$$

La donnée  $\psi$ , qui présente la condition de Neumann (partielle) sur le côté horizontal inférieur du rectangle, est dans l'espace  $\mathbb{H}^{-1/2}]0, \pi[$ . Ils supposent que :

$$\|\psi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(0, \pi)} \leq \eta, \quad \text{pour une donnée } \eta > 0. \quad (1.4)$$

Ils choisissent :

$$\psi_n(x) = A_n \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1.5)$$

Ils déterminent  $A_n$  tel que l'inégalité (1.3) soit vérifiée :

$$A_n^2 = \frac{2}{\pi} \frac{2n}{\sinh(2n)} E^2. \quad (1.6)$$

Par conséquent, dans (1.4),  $\eta = \eta_n$  est donnée par :

$$\eta_n^2 = E^2 \frac{2}{\sinh(2n)} \sim 4E^2 e^{-2n}, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Pour estimer la norme  $\mathbb{L}^2$  de  $u$  dans le rectangle  $]0, \pi[ \times ]0, T[$ , pour  $T \in ]0, 1[$ , la solution de (1.1), (1.2) avec  $\psi$  donnée par (1.5), (1.6), satisfait :

$$\|u_n\|_{\mathbb{L}^2((0,\pi) \times (0,T))} \sim \frac{E}{\sqrt{2}} \left(\frac{\eta_n}{2E}\right)^{(1-T)} \left(\log \frac{2E}{\eta_n}\right)^{-1} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

En général, les auteurs distinguent deux façons pour assurer la stabilité. Si  $\Omega$  est un domaine ouvert connexe tel que les données de Cauchy soient disponibles sur une partie  $\Sigma$  du bord  $\partial\Omega$  :

(i) Stabilité à l'intérieur : l'estimation de  $u$  dans un sous domaine ouvert connexe  $G$  de  $\Omega$  tel que la distance entre  $G$  et  $\partial\Omega \setminus \Sigma$  est positive.

(ii) Stabilité globale : l'estimation de  $u$  dans tout le domaine  $\Omega$  avec une borne supérieure de la norme de la solution est connue.

Plusieurs auteurs s'intéressent à développer des méthodes numériques permettant d'approcher la solution du problème de Cauchy. Plusieurs travaux théoriques et numériques ont été proposés. Nous pouvons citer par exemple le travail de Aboulaich et al [1], où une méthode de contrôle optimale a été introduite. Andrieux et al ont posé une fonctionnelle de type énergie pour la résolution du problème de Cauchy [8]. Marin et al ont présenté une méthode BEM (Boundary Element Method) itérative qui construit des approximations de la solution du problème de Cauchy par la résolution successive des problèmes bien posés. Ils présentent aussi une méthode BEM couplée à une méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) ou à la méthode de Lanweber. Ces méthodes sont appliquées à l'équation de Helmholtz et au problème d'élasticité linéaire [51, 52, 53, 54]. Pour la résolution du problème de Cauchy dans [62], Reinhardt et al ont utilisé la méthode de régularisation de Tikhonov couplée avec la méthode de gradient conjugué. Kozlov et al proposent l'algorithme de Kozlov pour la résolution dans le cas de l'opérateur de Helmholtz [39].

**Données compatibles et séparation de deux sous-problèmes.** Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=2$  ou  $3$ ). On divise son bord, noté  $\partial\Omega$ , en deux parties non vides et disjointes  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_c$  tel que :

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_i} \cup \overline{\Gamma_c} \text{ et } \Gamma_i \cap \Gamma_c = \emptyset$$

$\Gamma_c$  est une partie accessible où des mesures surabondantes sont disponibles et  $\Gamma_i$  est une partie inaccessible. Le problème de Cauchy est le suivant : chercher  $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ k\nabla u \cdot n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $\phi$  est un flux imposé sur  $\Gamma_c$  et appartient à l'espace  $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ .  $f$  est un champ de potentiel mesuré sur la même partie et appartient à  $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)$ . Les données  $f$  et  $\phi$  sont appelées les données de Cauchy.  $k \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$ , tel que  $k > 0$ , est un coefficient de conductivité et  $n$  est la normale extérieure au domaine.

On dit que les données  $(f, \phi)$  sont **compatibles**, si elles appartiennent à l'espace qui suit :

$$\mathcal{D} = \{(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c), \exists u \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ tel que } \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } (u|_{\Gamma_c}, k\nabla u \cdot n|_{\Gamma_c}) = (\varphi, \psi)\} \quad (1.8)$$

Dans ce cas, la question de complétion des données est de trouver  $(\eta_c, \tau_c) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$  tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, \quad k\nabla u \cdot n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c, \\ u = \tau_c, \quad k\nabla u \cdot n = \eta_c, & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases} \quad (1.9)$$

Une idée introduite dans certaines procédures de résolution [6, 1, 17] consiste à diviser (1.9) en deux sous problèmes directs bien posés, présentés comme suit :

$$(SP1) \begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla u_1) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ k\nabla u_1 \cdot n = \eta, & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases} \quad (SP2) \begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla u_2) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_2 = \tau, & \text{sur } \Gamma_i, \\ k\nabla u_2 \cdot n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (1.10)$$

Ces deux systèmes sont généralement distincts pour des valeurs quelconques de  $\eta$  et  $\tau$ . Mais, les deux solutions coïncident dès que  $\eta = \eta_c$  et  $\tau = \tau_c$ . Dans ce cas, l'unique solution du problème de Cauchy  $u$  vérifie :  $u = u_1 = u_2$ .

### 1.2.1 Minimisation d'une fonctionnelle de type énergie

Dans un papier de Andrieux et al [6], on trouve une méthode de résolution de problème de Cauchy basée sur la minimisation d'une fonctionnelle de type énergie en utilisant un algorithme itératif. Le problème inverse est donné par (1.7). Les auteurs exploitent les problèmes (SP1) et (SP2) de (1.10), pour résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\text{Trouver } (\eta_N, \tau_N) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i) \text{ tel que } (\eta_N, \tau_N) = \arg \min_{\eta, \tau} E(\eta, \tau)$$

avec la fonctionnelle de type énergie :

$$E(\eta, \tau) = \int_{\Omega} (k(x)\nabla u_1 - k(x)\nabla u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2) d\Omega$$

En appliquant la formule de Green, l'expression de la fonctionnelle peut être exprimée par une intégrale uniquement sur le bord :

$$E(\eta, \tau) = \int_{\Gamma_i} (\eta - k(x)\nabla u_2)(u_1 - \tau) + \int_{\Gamma_c} (k(x)\nabla u_1 - \phi)(f - u_2) d\Gamma_i$$

Cette méthode se compare avec la méthode introduite par Kozlov et al [45] :

### Algorithme

1. On fixe  $\eta^0$ , la première approximation  $u^0$  est obtenue par la résolution du problème (1.10) avec  $\eta = \eta^0$ .  
Pour  $j \geq 1$  on construit une suite décrite comme suit :
2.  $u^{2j+1}$  est caractérisé par :  
 $u^{2j+1} = u_2(\tau^{2j+1}) \Leftrightarrow \tau^{2j+1} = \operatorname{argmin} E(\eta^{2j}, \tau)$  avec  $\eta^{2j} = \nabla u^{2j} \cdot n_{|\Gamma_i}$ .
3.  $u^{2j+2}$  est solution de :  
 $u^{2j+2} = u_1(\eta^{2j+2}) \Leftrightarrow \eta^{2j+2} = \operatorname{argmin} E(\eta, \tau^{2j+1})$  avec  $\tau^{2j+1} = u_{|\Gamma_i}^{2j+1}$ .
4. On répète les étapes 2 et 3 jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt sera satisfait.

Au cours de la procédure de minimisation, les auteurs ont besoin d'évaluer la différentielle de  $E$  par rapport à  $\eta$  et  $\tau$ . Ils l'ont calculé en utilisant la méthode de l'état adjoint.

### Proposition 1.2.1 [6]

Pour tout  $(\psi, h) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$ , les dérivées partielles de  $E$  sont les suivantes :

$$\frac{\partial E(\eta, \tau)}{\partial \eta} \cdot \psi = - \int_{\Gamma_i} 2v_1 \psi,$$

$$\frac{\partial E(\eta, \tau)}{\partial \tau} \cdot h = - \int_{\Gamma_i} 2(\eta - k\nabla u_2 \cdot n - k\nabla v_2 \cdot n) h.$$

avec  $v_1$  et  $v_2$  sont les solutions de deux problèmes adjoints :

$$\begin{cases} \left. \begin{array}{l} \operatorname{div}(k\nabla v_1) = 0, \\ v_1 = 0, \\ k\nabla v_1 \cdot n = k\nabla u_2 \cdot n - \eta, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \\ \text{sur } \Gamma_c, \\ \text{sur } \Gamma_i. \end{array} & \left. \begin{array}{l} \operatorname{div}(k\nabla v_2) = 0, \\ v_2 = 0, \\ k\nabla v_2 \cdot n = k\nabla u_1 \cdot n - \phi, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \\ \text{sur } \Gamma_i, \\ \text{sur } \Gamma_c. \end{array} \end{cases} \quad (1.11)$$

### 1.2.2 Approche par jeux de Nash

La théorie des jeux est l'étude mathématique de la stratégie et des conflits, dans laquelle le succès d'un décideur à faire des choix dépend du choix des autres. Elle a été initialement développée en économie pour comprendre une grande collection de comportements économiques,



y compris les comportements d'entreprises, les marchés et les consommateurs. Elle est ensuite étendue à des domaines plus vastes où les décideurs traitent des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires, appelées jeux différentiels. Sur ce dernier, on peut citer le travail de Isaacs [37]. Récemment, certains auteurs ont formulé dans un cadre théorique du jeu des problèmes d'ingénierie avec objectifs antagonistes et des décideurs. Par exemple, Leòn et al [47] pour l'aérodynamique. Habbal et al [33] pour la conception de la topologie structurelle et Habbal et Kallel [32] pour les problèmes de complétion des données manquantes. Dans [32], les auteurs utilisent l'approche de jeux de Nash pour la résolution du problème de complétion des données.

Soit le problème de Cauchy (1.7). La condition de Neumann  $\phi$  est le flux appliqué sur  $\Gamma_c$  et la condition de Dirichlet  $f$  est le potentiel mesuré. Le couple  $(f, \phi)$  sont les données de Cauchy dans  $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$  et le champ inconnu  $u$  dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  est la solution de Cauchy.

Supposons que les données  $(f, \phi)$  sont compatibles (1.8), la question de complétion des données est de trouver  $(\tau_N, \eta_N) \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$  qui vérifient (1.9). Les auteurs décomposent la solution  $u$  en deux fonctions  $u_1$  et  $u_2$  solutions de (1.10).  $u_1$  est la solution du problème direct (SP1) dans lequel ils utilisent la donnée de Cauchy  $f$  sur  $\Gamma_c$  et un flux quelconque  $\eta$  sur  $\Gamma_i$ . Pour la deuxième solution  $u_2$ , ils utilisent la donnée surabondante  $\phi$  sur  $\Gamma_c$  et un potentiel quelconque  $\tau$  sur  $\Gamma_i$ .  $\eta$  et  $\tau$  sont appelées deux variables stratégiques.

Pour la résolution de ce problème inverse, les auteurs présentent l'approche de jeu de Nash, qui est un jeu non coopératif et traitent les problèmes d'optimisation multicritère. Pour cela, ils introduisent les deux fonctionnelles coût : pour tout  $\eta \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$  et  $\tau \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$

$$J_1(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \| k\nabla(u_1).n - \phi \|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \| u_1 - u_2 \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (1.12)$$

$$J_2(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \| u_2 - f \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \| u_1 - u_2 \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (1.13)$$

Le jeu est composé de deux joueurs. Ils communiquent entre eux de façon compétitive. Le premier joueur contrôle la variable  $\eta$  qui appartient à l'espace  $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$  et le deuxième joueur contrôle la variable  $\tau$  qui appartient à  $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$ .

Les deux fonctionnelles sont composées d'un écart en Neumann  $\| k\nabla(u_1).n - \phi \|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2$  qui dépend de la variable stratégique  $\eta$  et un écart en Dirichlet  $\| u_2 - f \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2$  qui dépend de la variable stratégique  $\tau$ . Le terme  $\| u_1 - u_2 \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2$  est un terme de couplage entre les deux fonctionnelles, qui représente un terme de régularisation introduit dans le cadre du jeu pour minimiser l'écart entre  $u_1$  et  $u_2$ . En fait, la minimisation de  $J_1$  selon  $\eta$  est effectuée avec  $u_2$  fixé et inversement pour  $J_2$  selon  $\tau$  avec  $u_1$  fixé.

La solution de ce problème inverse est un équilibre de Nash défini comme suit :

### Définition 1.2.1

Une paire  $(\eta_N, \tau_N) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$  est dite un équilibre de Nash si :

$$\begin{cases} J_1(\eta_N, \tau_N) \leq J_1(\eta, \tau_N), & \forall \eta \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i), \\ J_2(\eta_N, \tau_N) \leq J_2(\eta_N, \tau), & \forall \tau \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i). \end{cases} \quad (1.14)$$

Les auteurs ont montré dans l'article [32] l'existence et l'unicité de cet équilibre. Quand les données de Cauchy sont compatibles, l'équilibre trouvé correspond exactement aux données manquantes du problème de Cauchy. Le choix des fonctionnelles et la structure séparable du jeu sont indispensables pour la preuve, par le fait que l'écart en Neumann dans  $J_1$  dépend uniquement de  $\eta$  et l'écart en Dirichlet dans  $J_2$  dépend uniquement de  $\tau$ . Rappelons dans ce cas les caractéristiques des fonctionnelles :

**Proposition 1.2.2** [32]

L'application  $\eta \rightarrow J_1(\eta, \tau)$  (respectivement  $\tau \rightarrow J_2(\eta, \tau)$ ) est quadratique et fortement convexe dans  $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$  (respectivement  $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$ ) dans le sens où :

$$\begin{cases} \forall \psi \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i), & d_{\eta\eta}^2 J_1(\eta, \tau)(\psi, \psi) \geq c' \|\psi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)}^2, & \text{avec } c' > 0 \\ \text{et} \\ \forall \xi \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i), & d_{\tau\tau}^2 J_2(\eta, \tau)(\xi, \xi) \geq c \|\xi\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2, & \text{avec } c > 0 \end{cases}$$

Dans la suite, un théorème est présenté qui indique que le jeu de Nash est bien défini :

**Proposition 1.2.3** [32]

Considérons le jeu de Nash défini par (1.12), (1.13) et (1.14) :

i) Il existe toujours un unique équilibre de Nash  $(\eta_N, \tau_N) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$ , il est aussi le minimiseur de la fonctionnelle  $L(\eta, \tau)$ , qui est donnée par :

$$L(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \|k \nabla u_1 \cdot n - \phi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_2 - f\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (1.15)$$

ii) Si le problème de Cauchy a une solution  $u$ , alors  $u_1(\eta_N) = u_2(\tau_N) = u$  et  $(\eta_N, \tau_N)$  sont les données manquantes, tel que  $\eta_N = \nabla u \cdot n|_{\Gamma_i}$  et  $\tau_N = u|_{\Gamma_i}$ .

D'après le théorème de Nash [32], l'existence de l'équilibre de Nash a été prouvé grâce à l'ellipticité partielle de  $J_1$  et  $J_2$  par rapport à  $\eta$  et  $\tau$  respectivement. Cette propriété permet de limiter la recherche de l'équilibre de Nash à des sous-ensembles bornés des espaces de stratégie, ce qui reste cohérent avec les résultats classiques de la stabilité conditionnelle du problème de Cauchy [4]. La stricte convexité de la fonctionnelle  $L$  (1.15) assure l'unicité de l'équilibre. Par contre,  $L$  n'est pas elliptique par rapport aux variables, ce qui montre l'importance du choix des coûts  $J_1$  et  $J_2$  et la structure séparable du jeu.

**Stabilité de l'approche de jeu de Nash.** Vu le caractère mal posé du problème de Cauchy,

un point important que les auteurs ont étudié est la stabilité de la solution vis à vis des faibles perturbations des données. Ils considèrent alors le cas des données bruitées. Ils prennent une famille des données  $(f^\delta, \phi^\delta) \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$  non nécessairement compatibles tel que :

$$\| f^\delta - f \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \| \phi^\delta - \phi \|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 \leq \delta^2. \quad (1.16)$$

Pour  $(\eta, \tau) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$ , les champs  $u_1^\delta(\eta)$  et  $u_2^\delta(\tau)$  sont solutions des problèmes respectifs :

$$(SP1) \begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla(u_1^\delta)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_1^\delta = f^\delta, & \text{sur } \Gamma_c, \\ k\nabla(u_1^\delta).n = \eta, & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases} \quad (SP2) \begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla(u_2^\delta)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_2^\delta = \tau, & \text{sur } \Gamma_i, \\ k\nabla(u_2^\delta).n = \phi^\delta, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (1.17)$$

Ils définissent les fonctionnelles coûts associées :

$$J_1^\delta(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \| k\nabla(u_1^\delta).n - \phi^\delta \|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \| u_1^\delta - u_2^\delta \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2, \quad (1.18)$$

$$J_2^\delta(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \| u_2^\delta - f^\delta \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \| u_1^\delta - u_2^\delta \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2. \quad (1.19)$$

Les fonctions  $J_1^\delta$  et  $J_2^\delta$  ont les mêmes propriétés que  $J_1$  et  $J_2$ . Il existe un unique équilibre de Nash correspondant  $(\eta_N^\delta, \tau_N^\delta) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$ . Le théorème suivant présente un résultat de robustesse.

### **Théorème 1.2.1**

*Supposons qu'il existe une unique solution du problème de Cauchy  $u$  pour une paire de données  $(f, \phi) \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$  compatibles. Soit  $(f^\delta, \phi^\delta) \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$  une suite de données bruitées telle que*

$$\| f^\delta - f \|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \| \phi^\delta - \phi \|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 \leq \delta^2.$$

*Ensuite, le jeu de Nash correspond aux coûts  $J_1^\delta$  et  $J_2^\delta$  définis par (1.18)-(1.19) a un unique équilibre de Nash  $(\eta_N^\delta, \tau_N^\delta) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$  qui converge fortement, lorsque  $\delta$  tend vers zéro, vers les données de Cauchy manquantes  $(k\nabla u.n|_{\Gamma_i}, u|_{\Gamma_i})$ . En outre, les solutions des problèmes (1.17),  $u_1^\delta$  et  $u_2^\delta$ , convergent fortement dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  vers la solution du problème de Cauchy  $u$ .*

Dans la littérature, diverses méthodes de régularisation ont été exploitées [62, 26, 23, 11, 18]. Le principe de cette méthode consiste à commuer le problème mal posé par une suite de problèmes bien posés dont la suite des solutions converge vers la solution du problème inverse original.

### 1.2.3 Méthode de régularisation de Tikhonov

La régularisation de Tikhonov est la procédure la plus utilisée pour la résolution des problèmes inverses. Elle a été présentée par le mathématicien russe Andréi Nicolaievitch Tikhonov [55]. Cette procédure consiste à approcher la solution le mieux possible en utilisant une fonctionnelle de moindre carré à laquelle un terme régularisant est ajouté. Dans ce cas, il faut chercher le coefficient de régularisation optimal multiplié à ce terme, afin de ne pas trop perturber la solution du problème de Cauchy.

Dans un article de Cimitière et al [23], une procédure déduite de la régularisation de Tikhonov a été exploitée pour la résolution du problème de Cauchy. Cette procédure est basée sur la résolution successive de problèmes bien posés. Nous donnons un peu plus de détail ci-après : Le problème inverse considéré dans l'article est pour l'opérateur de Laplace. Le problème de Cauchy est présenté par (1.7) avec une conductivité  $k = 1$ . Soit  $\varphi_c = (f, \phi)$  les données de Cauchy sur  $\Gamma_c$ .

L'idée présentée dans l'article [23] est de reconstruire une fonction harmonique  $u$  qui correspond aux données prescrites sur  $\Gamma_c$ . La solution appartient alors à l'espace :

$$\mathcal{H}(\Omega) := \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega), \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

On définit aussi l'espace  $\mathcal{H}(\partial\Omega)$ , espace des couples compatibles  $(v|_{\partial\Omega}, \nabla v \cdot n|_{\partial\Omega})$ , où  $v \in \mathcal{H}(\Omega)$  :

$$\mathcal{H}(\partial\Omega) := \{\varphi = (\rho, \psi) \in \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\partial\Omega); \exists v \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ tel que } v|_{\partial\Omega} = \rho \text{ et } \nabla v \cdot n|_{\partial\Omega} = \psi\}.$$

Les auteurs prouvent que cet espace est un sous espace fermé de  $\mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Il est donc un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle_{\partial\Omega} = \langle \rho, \rho' \rangle_{\frac{1}{2}, \partial\Omega} + \langle \psi, \psi' \rangle_{\frac{-1}{2}, \partial\Omega} \quad \text{où } \varphi = (\rho, \psi) \text{ et } \varphi' = (\rho', \psi')$$

Le problème de complétion des données est le suivant :

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{H}(\partial\Omega) \text{ tel que } u = \varphi_c \text{ sur } \Gamma_c \tag{1.20}$$

L'idée de la résolution consiste à considérer un problème de moindres carrés. L'originalité de cette approche est d'utiliser des données entachées d'erreurs. Elles sont utilisées pour la recherche d'une fonction harmonique qui est la plus proche de ces données sur  $\Gamma_c$ .

Si  $\varphi_c$  est une paire de données compatibles, alors le problème (1.20) admet une solution unique, grâce au théorème de Holmgren [24], mais elle ne dépend pas continûment des données. Si les données ne sont pas compatibles, la solution n'existe plus. D'après [14], l'ensemble des données compatibles est dense dans l'ensemble de toutes les données. Alors, on peut s'approcher de ces données sur  $\Gamma_c$  par des données compatibles. Afin de transformer le problème de moindres carrés en un problème bien posé, les auteurs définissent une mesure  $\varphi \in \mathcal{H}(\partial\Omega)$ , appelée

gabarit, qui impose à la solution  $u$  de rester dans son voisinage. Ils introduisent un terme de contrôle dans la fonctionnelle. Le problème d'optimisation est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{H}(\partial\Omega) \text{ tel que } J_c(u) \leq J_c(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}(\partial\Omega) \\ \text{avec } J_c(v) = \|v - \varphi_c\|_{\Gamma_c}^2 + c \|v - \varphi\|_{\partial\Omega}^2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Le coefficient de pondération positif  $c$  est essentiel pour rendre le problème de moindre carré un problème bien posé. Son rôle peut également être vu comme un équilibre de la confiance accordée au patron  $\varphi$ , par rapport à celle accordée aux données  $\varphi_c$ . Les auteurs prouvent dans [23] que (1.21) admet une unique solution.

L'objectif est de chercher le couple  $\varphi = (\rho, \psi)$  dans  $\mathcal{H}(\partial\Omega)$  qui étend  $(f, \phi)$  sur toute la frontière. Pour cela, les auteurs présentent l'opérateur  $T$  suivant :

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H}(\partial\Omega) &\rightarrow \mathcal{H}(\partial\Omega) \\ \varphi &\mapsto u_\varphi \end{aligned}$$

avec  $u_\varphi$  est la solution du problème (1.21) associée à  $(\varphi_c, \varphi)$ . Ils ont prouvé aussi que si les données  $\varphi_c = (f, \phi)$  sont compatibles, alors  $T$  admet un unique point fixe, qui est l'unique extension de ces données sur tout le bord. Ils ont proposé le processus suivant :

- Initialisation : choisir  $u^0 \in \mathcal{H}(\partial\Omega)$
- Itération : étant donnée  $u^k \in \mathcal{H}(\partial\Omega)$ , résoudre le problème (1.21) associée aux données  $(\varphi_c, u^k)$  pour calculer  $u^{k+1} = T(u^k) \in \mathcal{H}(\partial\Omega)$ .

Dans l'article, une étude numérique a été effectuée pour prouver l'efficacité de la méthode.

### 1.3 Identification des paramètres

Le problème d'identification des paramètres, distribués dans un modèle décrit par des équations aux dérivées partielles, est un problème inverse qui consiste à déterminer un ou plusieurs paramètres d'un modèle en connaissant des mesures expérimentales. Dans la littérature, plusieurs auteurs ont étudié ce problème pour différents cas. Dans un article de Nachmann et al [56], les auteurs ont considéré le problème de la récupération de la conductivité d'un objet à partir de la connaissance du champ de densité du courant à l'intérieur du domaine. Pour cela, ils proposent une procédure de reconstruction itérative où ils montrent son efficacité par des expériences numériques.

Brown a présenté dans [15] une autre méthode pour l'identification de conductivité. Il donne une formulation de sa valeur sur le bord du domaine en utilisant l'application "Dirichlet-to-Neumann". Dans des travaux plus anciens de Kohn et al [42, 43], des résultats sont présentés concernant la détermination de la valeur de conductivité à l'intérieur du domaine à partir des mesures sur le bord.

Les matériaux élastiques sont caractérisés par deux paramètres de Lamé. Plusieurs auteurs ont étudié le problème inverse d'identification de ces paramètres. Par exemple, Akamatsu et al ont présenté dans l'article [3] une formule pour le calcul des dérivées des paramètres de Lamé dans un matériau élastique isotrope non homogène à partir de l'application "Dirichlet-to-Neumann". Khan et al ont proposé une méthode itérative utilisée pour la récupération des paramètres de Lamé en élasticité linéaire. Le principe est basé sur la minimisation des moindres carrés régularisées [28].

Le problème d'identifiabilité des paramètres était toujours un obstacle pour la reconstruction de ces valeurs. Ce problème consiste à choisir les conditions qui assurent l'unique identification des paramètres. Plusieurs travaux sont confrontés à ce problème. On peut citer l'article de Gutmman et al [30] où ils présentent un théorème qui prouve l'identifiabilité de la conductivité dans un domaine non homogène à partir de nombreuses observations en des points équidistants. De même, Nachman et al ont introduit dans l'article [57] un résultat qui montre l'unicité de la conductivité à partir de la connaissance d'une densité de courant à l'intérieur du domaine. Concernant les matériaux élastiques, il existe plusieurs travaux qui traitent ce sujet comme l'article de Nakamura et al [58] où les auteurs utilisent l'application "Dirichlet-to-Neumann" pour la preuve d'identifiabilité. Dans un article de Zhongyan Lin [48], une preuve d'identifiabilité des paramètres de Lamé est présentée en utilisant deux mesures sur le bord. L'auteur utilise une configuration particulière comme la forme du domaine utilisée et les conditions imposées sur le bord.

### 1.3.1 Identifiabilité des paramètres de Lamé en utilisant deux mesures sur le bord

La plupart des auteurs utilisent un ensemble des mesures sur le bord pour prouver l'identifiabilité des paramètres. Zhongyan Lin a présenté un cas particulier dans [48], où il introduit un théorème d'unicité des paramètres de Lamé dans un matériau élastique en utilisant deux mesures sur le bord.

Dans l'article, le domaine utilisé est le disque unité élastique isotrope, caractérisé par deux paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Grâce à la géométrie, Lin a utilisé les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . Les deux composantes du champ de déplacement sont notées  $u$  et  $v$ .

Si on note  $\sigma$  le tenseur des contraintes, les relations entre les déplacements et les contraintes sont données par la loi de Hooke :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda U + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda U + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda U + 2\mu \left( \frac{u}{r} + \frac{\cot\varphi}{r} v \right),\end{aligned}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right),$$

Avec

$$U = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\mu}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cot \varphi}{r} v.$$

Lin a introduit l'ensemble des données sur le bord du disque  $\{u(1, \varphi), v(1, \varphi), \sigma_{rr}(1, \varphi), \sigma_{r\varphi}(1, \varphi)\}$  qui représente le déplacement normal, le déplacement tangential, la contrainte normale et la contrainte tangentielle.

Avant d'énoncer les résultats principaux de l'article, l'ensemble des paramètres admissibles est présenté :

$$H = \{(\lambda, \mu) / \lambda \in \mathbf{C}[0, 1], \mu \in \mathbf{C}^2[0, 1], \mu > 0, 3\lambda + 2\mu > 0\}$$

Il a noté  $\{P_n(x)\}_0^\infty$  l'ensemble des polynomes de Legendre avec la notation

$$(f, g)_w := \int_0^\varphi f(\varphi)g(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi.$$

Le théorème d'identifiabilité est le suivant :

**Théorème 1.3.1** [48]

i) Si on a les données sur le bord  $\{u(1, \varphi), v(1, \varphi), \sigma_{rr}(1, \varphi), \sigma_{r\varphi}(1, \varphi)\}, 0 \leq \varphi \leq \pi \}$  qui satisfait :

$$\text{La contrainte normale } \sigma_{rr}(1, \varphi) = 0 \text{ ou la contrainte tangentielle } \sigma_{r\varphi}(1, \varphi) = 0$$

et

$$\sum_{n \in \mathbb{M}} \frac{1}{n} = \infty \quad (1.22)$$

avec  $\mathbb{M} := \{n \in \mathbb{N}; |(u(1, \varphi), P_n(\cos \varphi))_w| + |(v(1, \varphi), \frac{d}{d\varphi} P_n(\cos \varphi))_w| \neq 0\}$ .

Alors on peut déterminer  $\mu(1)$  de façon unique.

ii) Si en plus des données dans (i), soit une deuxième mesure sur le bord  $\{u(1, \varphi), v(1, \varphi), \sigma_{rr}(1, \varphi), \sigma_{r\varphi}(1, \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  qui satisfait :

$$\sigma_{rr}(1, \varphi) + 2\mu(1) \left( \frac{\partial v(1, \varphi)}{\partial \varphi} + \cot \varphi v(1, \varphi) \right) = 0$$

ou

$$\sigma_{r\varphi}(1, \varphi) = 2\mu(1) \frac{\partial u(1, \varphi)}{\partial \varphi}$$

et

$$\sum_{n \in \mathbb{M}} \frac{1}{n} = \infty.$$

donc on peut déterminer uniquement  $\lambda(r)$  et  $\mu(r)$ ,  $\forall r \in [0, 1]$ .

Le théorème décrit un processus permettant de déterminer les coefficients de Lamé :

Dans la première partie (i) : l'auteur utilise une seule mesure sur la moitié supérieure du bord du domaine pour prouver l'unicité de  $\mu(1)$ , c'est à dire, l'unicité de  $\mu$  sur la frontière du domaine.

Dans la deuxième partie (ii) : après détermination de  $\mu(1)$ , une deuxième mesure a été ajoutée sur tout le bord afin de prouver l'identifiabilité des deux paramètres dans le disque.

La condition (1.22) est vérifiée, si  $u(1, \varphi)$  ou  $v(1, \varphi)$  est une fonction linéaire par morceaux et n'est pas constante par rapport à  $\varphi$ .

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons posé le problème de complétion des données et le problème d'identification des paramètres. Il s'agit de deux problèmes inverses mal posé où plusieurs travaux sont rencontrés dans la littérature afin de développer des méthodes de résolution. Le problème de couplage de complétion des données et identification des paramètres n'a pas été considéré auparavant par aucune approche. Dans les chapitres qui suivent, nous allons utiliser l'approche de jeux de Nash pour la résolution de ce problème de couplage.



# Chapitre 2

## Problème de couplage entre la complétion des données et l'identification de conductivité en Électrocardiographie

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous aborderons le problème de couplage entre la complétion des données et l'identification du paramètre de conductivité dans un problème de Cauchy elliptique. Ce travail est publié dans "Mathematical Modelling of Natural Phenomena" [19]. Le problème de complétion des données a fait l'objet de plusieurs travaux. Diverses méthodes ont été proposées comme la méthode de contrôle optimal [1], minimisation d'une fonctionnelle de type énergie [8] et un algorithme alternatif présenté par Kozlov et al [45]. Dans les articles de Habbal et Kallel [31, 32], une approche par jeux de Nash est utilisée pour résoudre le problème de Cauchy. En outre, les auteurs comparent l'algorithme de jeu de Nash à une méthode de type contrôle et prouvent son efficacité. Dans un autre article [40], l'approche de jeu de Nash est utilisée pour résoudre le problème de désocclusion d'image (inpainting) en tant qu'un problème de Cauchy non linéaire.

Le problème d'identification du paramètre de conductivité a également été étudié dans plusieurs articles. On peut citer le travail de Brown [15] qui donne une formulation pour récupérer la conductivité en utilisant l'application "Dirichlet-to-Neumann" et le travail de Nachmann et al [56] dans lequel les auteurs utilisent un champ de densité de courant à l'intérieur du domaine.

Dans ce travail, notre but principal consiste à coupler les deux problèmes inverses : nous visons à identifier simultanément les données manquantes sur une partie inaccessible du bord et la

valeur du conductivité dans le domaine à partir des données mesurées sur un bord accessible aux mesures. Nous allons introduire une méthode originale basée sur une approche de théorie des jeux pour résoudre notre problème inverse couplé. Nos expériences numériques ciblent les applications médicales et en particulier l'électrocardiographie (ECG). Cette dernière consiste à mesurer l'activité électrique dans le coeur, à partir des électrodes placées sur le thorax, afin de détecter des problèmes cardiaques. Le thorax contient plusieurs tissus comme les poumons, les os et la graisse. Chacun se caractérise par une conductivité dont la valeur varie d'un organe à l'autre et varie également d'une personne à l'autre. L'objectif de notre travail est de reconstruire le potentiel et le flux sur la surface du coeur et la valeur de la conductivité des différents tissus à partir des mesures effectuées sur la surface de thorax.

Dans la section 2, nous avons développé une approche de jeu de Nash pour la résolution du problème de couplage. Nous avons discuté le problème d'identifiabilité de la conductivité et nous avons prouvé un théorème d'unicité de ce paramètre. Nous avons consacré la section 3 à présenter l'algorithme de jeu de Nash et nous avons effectué une étude numérique qui montre l'efficacité et la robustesse de notre méthode, trois tests sont effectués dans un thorax en 2D et 3D. Ensuite, nous avons fini par une conclusion.

## 2.2 Problème inverse de couplage de complétion des données et identification de conductivité

On considère un domaine  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=2, 3$ ). Son bord  $\partial\Omega$  est divisé en deux parties non vides et disjointes  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_i$  tel que :

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_i} \cup \overline{\Gamma_c} \quad \text{et} \quad \Gamma_i \cap \Gamma_c = \emptyset.$$

On rappelle que  $\Gamma_i$  est la partie du bord inaccessible aux mesures et sur  $\Gamma_c$ , les données de Cauchy sont connues. Soit  $f$  et  $\phi$  le potentiel et le flux surabondants et compatibles dans  $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)$  et  $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$  respectivement. Notre but dans ce chapitre est de chercher le potentiel et le flux sur la partie inaccessible du bord  $\Gamma_i$  et la conductivité dans le domaine. Le problème inverse est le suivant : trouver  $(\eta, \tau, k) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{L}(\Omega)$  tel qu'il existe un potentiel  $u$  qui satisfait :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k \nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ k \nabla u \cdot n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\mathbb{L}(\Omega) = \{k \in \mathbb{L}^\infty(\Omega); k \geq k_{min} > 0\}$ , avec  $k_{min}$  est une constante positive. Afin de résoudre notre problème inverse, nous allons appliquer l'approche de jeu de Nash, présentée

dans la section 1.2.2 du premier chapitre.

L'une des questions difficiles à étudier est le problème d'identifiabilité de la conductivité. Elle a été étudiée dans la littérature par plusieurs auteurs. Dans la suite, on présente un résultat d'identifiabilité du paramètre de conductivité adapté à notre situation.

### 2.2.1 Identifiabilité de la conductivité

Le problème de l'identifiabilité de la conductivité revient à chercher les conditions sous lesquels on est capable de garantir l'unicité de ce paramètre par rapport aux données de Cauchy. L'identifiabilité de la conductivité trouvée n'est pas toujours garantie [16]. Pour cette raison, ce problème difficile a été étudié par de nombreux auteurs (voir par exemple [29, 59]). Une des méthodes pour la prouver consiste à utiliser l'application "Dirichlet to Neumann" définie comme suit :

$$\Lambda_k : \mathbb{H}^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$$

$$u|_{\partial\Omega} \mapsto (k\nabla u \cdot n)|_{\partial\Omega}$$

où  $k \in L(\Omega)$  et  $u$  est la solution d'un problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k \nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce qui signifie qu'il faut un nombre infini de mesures sur la frontière. Dans notre travail, nos expériences numériques ciblent les applications d'électrocardiographie. Le domaine  $\Omega$  modélise un thorax, composé de nombreux sous-domaines  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j$ . On suppose que le bord accessible  $\Gamma_c \subset \partial\Omega_1$ . La conductivité  $k$  du domaine est supposée constante par morceaux, c'est-à-dire, sur chaque  $\Omega_j$ .

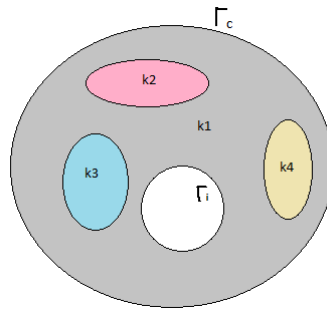


FIGURE 2.1 – La répartition de la conductivité dans le domaine.

L'identifiabilité de  $k$  à l'aide d'une unique mesure sur le bord est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1**

Soit  $\Omega$  un domaine tel que  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j$ , avec  $1 < n < \infty$ . Chaque  $\Omega_j$  est caractérisé par une conductivité constante  $k_j$  et la valeur de  $k_1$  est supposée connue dans  $\Omega_1$ , (voir Figure (2.1)). Si  $k^{(1)}$  et  $k^{(2)}$  sont deux conductivités qui vérifient le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (k^{(p)} \nabla u^{(p)}) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u^{(p)} = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ k^{(p)} \nabla u^{(p)} \cdot n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c, \end{cases}$$

avec  $p = 1, 2$  et le potentiel  $f$  n'est pas une fonction constante sur  $\Gamma_c$ , alors  $k_j^{(1)} = k_j^{(2)}$  dans  $\Omega_j$ ,  $\forall j$ .

**Preuve**

Le domaine  $\Omega$  s'écrit :  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j$ , avec  $1 < n < \infty$ . Dans le sous-domaine  $\Omega_1$ , la conductivité  $k^{(1)} = k^{(2)} = k_1$ . On considère  $u^{(p)}$ ,  $p \in \{1, 2\}$ , la solution du problème de Cauchy dans  $\Omega_1$ , il satisfait l'équation suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (k_1 \nabla u^{(p)}) = 0, & \text{dans } \Omega_1, \\ u^{(p)} = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ k_1 \nabla u^{(p)} \cdot n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

En utilisant le théorème de Holmgren [24] et la continuité de flux sur le bord de  $\Omega_2$ , noté par  $\Gamma_2$ , on obtient l'égalité du potentiel et de flux sur  $\Gamma_2$  où  $\Gamma_2 = \partial\Omega_2$  :

$$\begin{cases} u^{(1)} = u^{(2)} = f_2, \\ k_1 \nabla u^{(1)} \cdot n = k_1 \nabla u^{(2)} \cdot n = \phi_2. \end{cases}$$

Dans  $\Omega_2$ ,  $u^{(p)}$  vérifie le problème direct suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (k_2^{(p)} \nabla u^{(p)}) = 0, & \text{dans } \Omega_2, \\ u^{(p)} = f_2, & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

où  $k_2^{(p)}$ ,  $p \in \{1, 2\}$ , est une constante, alors on peut simplifier d'après l'unicité de la solution du problème direct et on obtient  $u^{(1)} = u^{(2)}$  dans  $\Omega_2$ .

D'après la continuité de flux et les conditions de transmission sur  $\Gamma_2$ , on obtient :

$$k_2^{(1)} \nabla u^{(1)} \cdot n = k_2^{(2)} \nabla u^{(2)} \cdot n = \phi_2$$

Si  $\nabla u^{(p)} \cdot n \neq 0$ , on conclut que  $k_2^{(1)} = k_2^{(2)}$  dans  $\Omega_2$  et on prouve l'identifiabilité.

Si on a  $\nabla u^{(p)} \cdot n = 0$  sur  $\Gamma_2$ , alors  $u^p$  vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (k_2^{(p)} \nabla u^{(p)}) = 0, & \text{dans } \Omega_2, \\ k_2^{(p)} \nabla u^{(p)} \cdot n = 0, & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Le potentiel constant est la solution de ce problème dans  $\Omega_2$ . D'après le théorème de continuité, on conclut que le potentiel  $u$  est constant dans  $\Omega$ , ce qui est absurde car  $f$  est par hypothèse n'est pas constante sur  $\Gamma_c$ . La preuve s'étend aux  $\Omega_j$ ,  $j > 2$  de la même manière.

## 2.2.2 Problème de couplage par une formulation de jeu

Nous commençons par définir l'espace admissible  $\mathbb{A}_{ad}$  des fonctions de conductivités recherchées :

$$\mathbb{A}_{ad} = \{k \text{ est constante par morceaux, tel que } k_{\min} \leq k \leq k_{\max} \text{ dans } \Omega \text{ et } k = k_1 \text{ dans } \Omega_1\},$$

où les deux bornes inférieure et supérieure des valeurs de conductivités  $k_{\min}$  et  $k_{\max}$ , respectivement, sont des constantes positives. On suppose que les données de Cauchy  $f$  et  $\phi$  appartiennent à  $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$ . Dans cette partie, on suppose que le jeu est composé de trois joueurs. Chacun a comme objectif la minimisation d'un critère et ils communiquent entre eux afin de converger vers un équilibre qui représente la solution du problème inverse. Dans ce cas, on définit trois sous-problèmes directs bien posés, dont les solutions sont respectivement  $u_1 := u_1(\eta, k)$ ,  $u_2 := u_2(\tau, k)$  et  $u_3 := u_3(\tau, k)$  :

$$(SP1) \begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla u_1) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ k\nabla u_1 \cdot n = \eta, & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases} \quad (SP2) \begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla u_2) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_2 = \tau, & \text{sur } \Gamma_i, \\ k\nabla u_2 \cdot n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (SP3) \begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla u_3) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_3 = \tau, & \text{sur } \Gamma_i, \\ u_3 = f, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (2.2)$$

On définit une fonctionnelle coût pour chaque joueur. Pour la complétion des données, on utilise les mêmes fonctions  $J_1$  (1.12) et  $J_2$  (1.13), présentées dans la section 1.2.2 du premier chapitre, et on accorde au troisième joueur une fonction  $J_3$  de Kohn-Vogelius. Les trois coûts sont les suivants :

$$J_1(\eta, \tau, k) = \frac{\nu_1}{2} \|k\nabla(u_1) \cdot n - \phi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (2.3)$$

$$J_2(\eta, \tau, k) = \frac{\nu_2}{2} \|u_2 - f\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (2.4)$$

$$J_3(\eta, \tau, k) = \|\sqrt{k}\nabla(\beta u_1 + (1 - \beta)u_2 - u_3)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \quad (2.5)$$

$\nu_1$  et  $\nu_2$  sont des poids spécifiques à chaque fonction coût et  $\beta \in [0, 1]$  est un poids de la fonctionnelle  $J_3$  dédié à prendre en compte une combinaison convexe des solutions de (SP1) et (SP2). En pratique, nous avons choisi  $\nu_1 = \nu_2 = 1$  et nous avons essayé plusieurs valeurs pour  $\beta$  afin d'observer l'effet d'utiliser les deux informations provenant de  $u_1$  et  $u_2$ .

Pour la complétion des données, les deux premiers joueurs contrôlent le potentiel  $\tau$  et le flux  $\eta$  et ils jouent un jeu de Nash pour minimiser l'écart de Neumann  $\|k\nabla(u_1) \cdot n - \phi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}$  contre

l'écart de Dirichlet  $\|u_2 - f\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}$ . Le terme de couplage en commun est la différence entre  $u_1$  et  $u_2$  sur  $\Gamma_i$ , qui représente un terme de régularisation. Pour l'identification de conductivité, le paramètre  $k$  est utilisé pour minimiser la fonctionnelle de Kohn-Vogelius  $J_3$  à laquelle on ajoute un terme de régularisation de type Tikhonov au cours des itérations et il sera contrôlé par le troisième joueur.

L'état d'équilibre souhaité est atteint lorsqu'aucun joueur ne peut améliorer son propre critère :

### Définition 2.2.1

Un triplet  $(\eta_N, \tau_N, k_N) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{A}_{ad}$  est un équilibre de Nash pour le jeu des trois joueurs si :

$$\begin{cases} J_1(\eta_N, \tau_N, k_N) \leq J_1(\eta, \tau_N, k_N), & \forall \eta \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i), \\ J_2(\eta_N, \tau_N, k_N) \leq J_2(\eta_N, \tau, k_N), & \forall \tau \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i), \\ J_3(\eta_N, \tau_N, k_N) \leq J_3(\eta_N, \tau_N, k), & \forall k \in \mathbb{A}_{ad}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Dans [32], Habbal et Kallel abordent le problème de l'existence de l'équilibre de Nash pour le problème de complétion des données dans le cas où la conductivité  $k$  est fixée et connue. Ils ont prouvé l'ellipticité partielle des fonctionnelles  $J_1$  et  $J_2$  et ils ont appliqué le théorème de Nash. Cela assure l'existence de l'équilibre de Nash à l'étape de la complétion des données de notre algorithme (étape 1 de l'algorithme 1). Le problème d'existence d'un triplet de Nash n'est pas facile à prouver. Le problème d'identification de conductivité seul est assez difficile quand on a une seule donnée de Cauchy  $(f, \phi)$  sur le bord [29, 42].

## 2.3 Procédure numérique

Nous présentons maintenant un algorithme dédié au calcul de l'équilibre de Nash, solution du problème de couplage de complétion des données et identification de conductivité. La méthode de gradient à pas fixe est utilisée pour résoudre les problèmes d'optimisation partielle de  $J_1$  et  $J_2$  et un algorithme de Newton est utilisé pour minimiser la fonctionnelle  $J_3$ . L'algorithme de jeu de Nash est fourni dans Algorithme 1 suivant :

---

**Algorithm 1** Calcul de l'équilibre de Nash  $(\eta_N, \tau_N, k_N)$  du jeu de couplage de complétion des données et identification de paramètre de conductivité.

---

Les paramètres utilisés :

$0 \leq t < 1$  : paramètre de relaxation

$\alpha > 0$  : paramètre de regularization

$\rho > 0$  et  $\varepsilon > 0$  : tolérances d'arrêt

---

Les initialisations :

Soit  $p = 0$  et  $M^p = (\eta^p, \tau^p)$  une estimation initiale

Soit  $q = 0$  et  $k^q$  une estimation initiale

**Étape 1** Calculer  $(\eta^{p+1}, \tau^{p+1})$ , solution de

1. Calculer  $\bar{\eta}^p$ , solution de  $\min_{\eta} J_1(\eta, \tau^p, k^q)$  et évaluer  $\eta^{p+1} = t\eta^p + (1-t)\bar{\eta}^p$ .
2. Calculer  $\bar{\tau}^p$ , solution de  $\min_{\tau} J_2(\eta^p, \tau, k^q)$  et évaluer  $\tau^{p+1} = t\tau^p + (1-t)\bar{\tau}^p$ .
3. Soit  $M^{p+1} = (\eta^{p+1}, \tau^{p+1})$ .

Retourner à 1 jusqu'à ce que la suite  $M^p$  converge. Comme un critère d'arrêt, on utilise :

$$\| M^{p+1} - M^p \| \leq \varepsilon.$$

**Étape 2** Calculer  $k^{q+1}$ , solution de

$$\min_k J_3(\eta^{p+1}, \tau^{p+1}, k) + \frac{\alpha}{2} \| k - k^q \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2,$$

**Étape 3** Calculer  $\| u_2 - f \|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_c)}$ .

Retourner à **Étape 1** si  $\| u_2 - f \|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_c)} > \rho$ .

---

On suppose que les mesures sont bruitées et on note par  $\sigma$  le niveau de bruit. Le paramètre de relaxation  $t$  dans la boucle d'optimisation est utilisé pour accélérer la convergence [32]. L'algorithme comporte deux boucles, une boucle principale et une secondaire. La boucle secondaire notée (étape 1) dans l'algorithme 1 sert à l'optimisation du problème de complétion des données à partir des valeurs de conductivités fixées. L'étape 2 dans l'algorithme concerne l'optimisation des conductivités en minimisant la fonctionnelle  $J_3$  en utilisant la solution optimale de complétion des données obtenue à l'étape 1. Le critère d'arrêt global de l'algorithme est  $\| u_2 - f \|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_c)} \leq \rho$  où  $\rho$  dépend du taux de bruit  $\sigma$  ( $\rho = \rho(\sigma) = a\sigma + b$  où les coefficients  $a$  et  $b$  sont ajustés expérimentalement, voir [32, 2]). Remarquons que, dans l'algorithme 1, ci-dessus, à l'étape 1, les joueurs  $J_1$  et  $J_2$  jouent quelques itérations d'un sous-jeu de préconditionnement de Nash, ensuite, ils envoient leurs stratégies optimales au troisième joueur  $J_3$ . Dans un algorithme de Nash classique, chacun des trois joueurs minimise en parallèle son propre coût, sans l'étape de préconditionnement. En effet, bien que cela puisse ressembler à une sorte de jeu de Stackelberg. Ce n'est pas le cas, car le troisième joueur n'utilise pas les réponses optimales  $\eta^{opt}(k), \tau^{opt}(k)$  des joueurs  $J_1$  et  $J_2$ . D'après nos expériences, ça serait trop coûteux à déterminer. Plus précisément, le joueur  $J_3$  ne résout pas le problème :  $\min_k J_3(\eta^{opt}(k), \tau^{opt}(k), k)$ . Afin de résoudre les problèmes de minimisation, nous devons calculer le gradient des coûts  $\nabla_{\eta} J_1, \nabla_{\tau} J_2$  et  $\nabla_k J_3$ , ainsi que la dérivée seconde de  $J_3$ . Pour cela, on utilise la méthode de

l'état adjoint. Pour simplifier le calcul des dérivées de  $J_3$ , on choisit dans la suite le coefficient  $\beta$  égal à 0.

### Proposition 2.3.1

Nous avons les dérivées partielles suivantes de  $J_1$  et  $J_2$  par rapport à  $\eta$  et  $\tau$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_1}{\partial \eta} \cdot \xi = - \int_{\Gamma_i} \lambda_1 \xi \, d\Gamma_i, \quad \forall \xi \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \\ \text{avec } \lambda_1 \in W_1 = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\Gamma_c} = 0\}, \text{ solution du problème adjoint :} \\ \int_{\Omega} k \nabla \lambda_1 \nabla \gamma = - \int_{\Gamma_c} (k \nabla u_1 \cdot n - \phi) k \nabla \gamma \cdot n \, d\Gamma_c - \int_{\Gamma_i} (u_1 - \tau) \gamma \, d\Gamma_i, \quad \forall \gamma \in W_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_2}{\partial \tau} \cdot h = \int_{\Gamma_i} (k \nabla \lambda_2 \cdot n - (u_1 - \tau)) h \, d\Gamma_i, \quad \forall h \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i) \\ \text{avec } \lambda_2 \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ solution du problème adjoint :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(k \nabla \lambda_2) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \lambda_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i, \\ k \nabla \lambda_2 \cdot n = f - u_2 \quad \text{sur } \Gamma_c. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour la résolution du problème de minimisation de  $J_3$  (étape 2), on utilise l'algorithme de Newton. Pour cela, nous devons évaluer les dérivées premières et secondes de  $J_3$  par rapport à la conductivité.

### Proposition 2.3.2

On suppose que  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j$  et la conductivité  $k = k_j$  dans  $\Omega_j$ . On définit les espaces  $\mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\Gamma_i} = 0\}$  et  $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\partial\Omega} = 0\}$ . Les dérivées sont les suivantes :

$$i) \frac{\partial J_3}{\partial k_j} \cdot \varphi = \int_{\Omega_j} |\nabla(u_2 - u_3)|^2 \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega_j} \nabla u_2 \nabla v_2 \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega_j} \nabla u_3 \nabla v_3 \varphi \, d\Omega, \quad \forall \varphi \in \mathbb{L}(\Omega)$$

tel que  $v_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega)$  et  $v_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} k \nabla v_2 \nabla \gamma_2 = - \int_{\Omega} 2k \nabla(u_2 - u_3) \nabla \gamma_2 \, d\Omega, \quad \forall \gamma_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\ \text{and} \\ \int_{\Omega} k \nabla v_3 \nabla \gamma_3 = \int_{\Omega} 2k \nabla(u_2 - u_3) \nabla \gamma_3 \, d\Omega, \quad \forall \gamma_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

$$ii) \frac{\partial^2 J_3}{\partial k_i \partial k_j} \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Omega_i} \nabla \gamma_2 \nabla v_2 \, d\Omega + \int_{\Omega_i} 2 \nabla(u_2 - u_3) \nabla \gamma_2 \varphi_2 \, d\Omega - \int_{\Omega_i} 2 \nabla(u_2 - u_3) \nabla \gamma_3 \varphi_2 \, d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega_i} \nabla u_2 \nabla \xi_2 \varphi_2 \, d\Omega + \int_{\Omega_i} \nabla u_3 \nabla \xi_3 \varphi_2 \, d\Omega, \quad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{L}(\Omega) \times \mathbb{L}(\Omega)$$

tel que  $(\xi_2, \xi_3, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes



*adjoints suivants :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} k \nabla \xi_2 \nabla w_2 = - \int_{\Omega_j} 2 \nabla (u_2 - u_3) \nabla w_2 \varphi_1 d\Omega - \int_{\Omega_j} \nabla w_2 \nabla v_2 \varphi_1 d\Omega - \int_{\Omega} 2k \nabla w_2 \nabla \gamma_2 d\Omega \\ + \int_{\Omega} 2k \nabla w_2 \nabla \gamma_3, \quad \forall w_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} k \nabla \xi_3 \nabla w_3 = \int_{\Omega_j} 2 \nabla (u_2 - u_3) \nabla w_3 \varphi_1 d\Omega - \int_{\Omega_j} \nabla w_3 \nabla v_3 \varphi_1 d\Omega - \int_{\Omega} 2k \nabla w_3 \nabla \gamma_3 d\Omega \\ + \int_{\Omega} 2k \nabla w_3 \nabla \gamma_2, \quad \forall w_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} k \nabla \gamma_2 \nabla h_2 = - \int_{\Omega_j} \nabla u_2 \nabla h_2 \varphi_1 d\Omega, \quad \forall h_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\ \text{et} \\ \int_{\Omega} k \nabla \gamma_3 \nabla h_3 = - \int_{\Omega_j} \nabla u_3 \nabla h_3 \varphi_1 d\Omega, \quad \forall h_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

## 2.4 Résultats numériques : modèle anatomique

Notre code principal est implémenté avec FreeFem ++ [36], un langage et environnement puissant qui permet la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles en utilisant la méthode des éléments finis. Puisque nous ciblons les applications d'électrocardiographie, nous allons présenter trois situations, les deux premières sont pour un modèle  $2D$  réaliste du thorax et le troisième est pour un modèle  $3D$ . La frontière du domaine est divisée en deux parties. Le bord extérieur du thorax est la partie accessible  $\Gamma_c$  où les données de Cauchy sont disponibles et le bord du coeur est la partie interne inaccessible  $\Gamma_i$  où le potentiel électrique et le flux sont manquants.

Chaque partie du thorax est caractérisée par un coefficient de conductivité de telle sorte que nous ne connaissons qu'une valeur approximative de celui-ci. Notre objectif est de trouver le potentiel électrique sur la surface du coeur et améliorer l'estimation de la conductivité dans le domaine.

### 2.4.1 Le domaine du calcul et solution exacte

Pour effectuer les calculs, nous devons distinguer les différentes régions du domaine de calcul pour lesquelles nous souhaitons estimer les valeurs de conductivité, pour cela, nous segmentons une tranche de thorax en deux dimensions en utilisant l'imagerie par résonance magnétique (IRM). L'IRM mesure la diffusion des molécules d'eau dans les tissus biologiques, ce qui est utile pour distinguer les différentes régions du torse. Nous avons segmenté l'image dans Figure 2.2 (gauche) afin de construire les différentes régions.

Dans notre étude, nous allons considérer quatre organes : la surface du coeur, les poumons, les muscles (cavités) et la graisse.

Après la segmentation, nous construisons un maillage  $2D$  de la section transversale du thorax

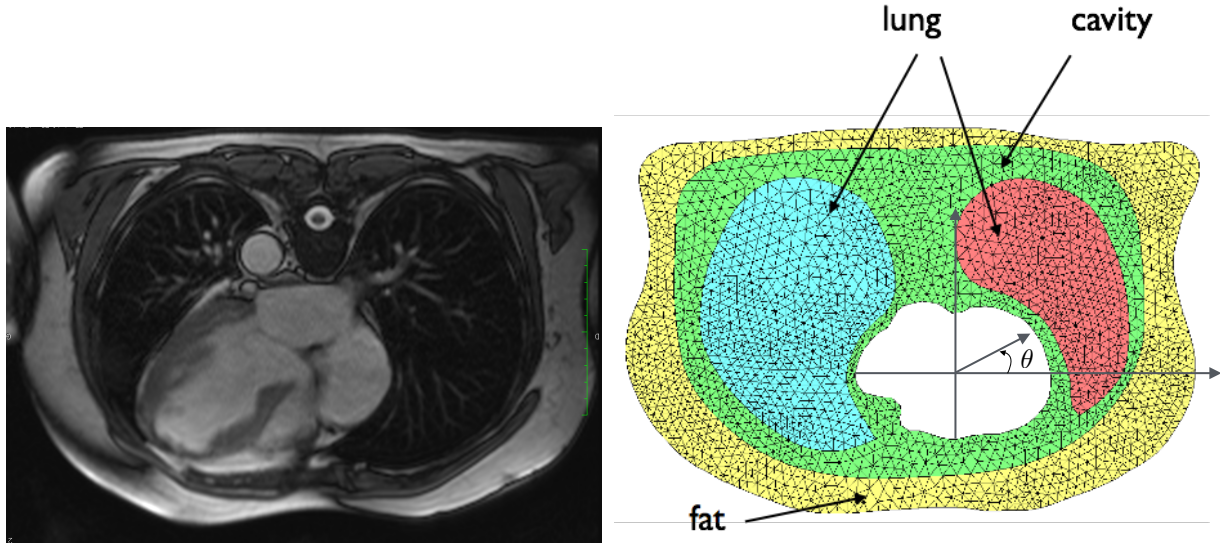


FIGURE 2.2 – Coupe IRM 2D du thorax (gauche), maillage de calcul 2D de la géométrie du thorax montrant les différentes régions considérées dans ce travail : graisse, poumon et cavité du thorax, (droite). L'angle  $\theta$  est la deuxième coordonnée polaire.

dans lequel nous identifions les organes comme illustré dans la figure 2.2 (droite). Dans cette représentation, on considère que toute la région de la cavité est occupée par les muscles. Le maillage 2D contient 2395 sommets et 4540 éléments. Chaque couche est caractérisée par une conductivité constante :

$$k^{ex} = \begin{cases} k_1 = 1, & \text{dans } \Omega_1 = \text{graisse}, \\ k_2 = 1, & \text{dans } \Omega_2 = \text{cavité}, \\ k_3 = 0.8, & \text{dans } \Omega_3 = \text{poumon}. \end{cases}$$

Le bord extérieur du thorax joue le rôle de  $\Gamma_c$ , où les données de Cauchy sont disponibles. Le bord du coeur joue le rôle de  $\Gamma_i$ , où le potentiel et le flux sont manquants. Les données de Cauchy  $f$  et  $\phi$  sont générées via la solution du problème direct suivant.

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k^{ex} \nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = e^x \cos(y), & \text{sur } \Gamma_i, \\ k^{ex} \nabla u \cdot n = \phi = 0, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (2.7)$$

Durant les itérations, on choisit une valeur des paramètres  $\alpha$  et  $t$ , tel que  $\alpha$  vaut  $1.5 \times 10^{-4}$  dans test 1 sans bruit et  $8 \times 10^{-4}$  pour des données de Cauchy bruitées. Dans test 2,  $\alpha$  vaut  $5 \times 10^{-4}$ . Le paramètre  $t$  est égal à 0.1 dans les deux tests.

**Remarque 2.4.1** *D'après nos expériences numériques, nous avons remarqué que notre algorithme de Nash prend beaucoup du temps pour converger vers l'équilibre. Pour gagner du temps*

et accélérer la convergence, nous limitons le nombre d'itérations dans la partie complétion des données (étape 1), ensuite, nous passons à la procédure d'identification de conductivité (étape 2).

### 2.4.2 Cas test 1 :

Dans ce cas test, nous souhaitons montrer comment l'optimisation des conductivités améliore la solution du problème inverse. L'idée est, tout d'abord, de résoudre le problème de complétion des données où les conductivités ne sont pas exactes, fournies par des valeurs expérimentales. Ils seront appelés les conductivités mesurées. Puis, nous allons résoudre le problème de couplage en optimisant la conductivité pendant la résolution du problème de complétion des données, cela montrera le gain que nous obtenons en résolvant le problème de couplage.

Dans ce test, la conductivité mesurée est supposée  $k_3^0 = 0.5$  tandis que la conductivité exacte  $k_3 = 0.8$ . Nous résolvons le problème de complétion des données qui consiste à reconstruire le potentiel et le flux sur  $\Gamma_i$  en utilisant l'algorithme de Nash (étape 1 de l'algorithme 1). Pendant les itérations, la conductivité est égale à la conductivité mesurée :

$$k^0 = \begin{cases} k_1 = 1, & \text{dans } \Omega_1 = \text{graisse,} \\ k_2 = 1, & \text{dans } \Omega_2 = \text{cavité,} \\ k_3^0 = 0.5, & \text{dans } \Omega_3 = \text{poumon.} \end{cases}$$

Nous commençons par une estimation initiale  $(\eta^0, \tau^0) = (0, 0)$ .

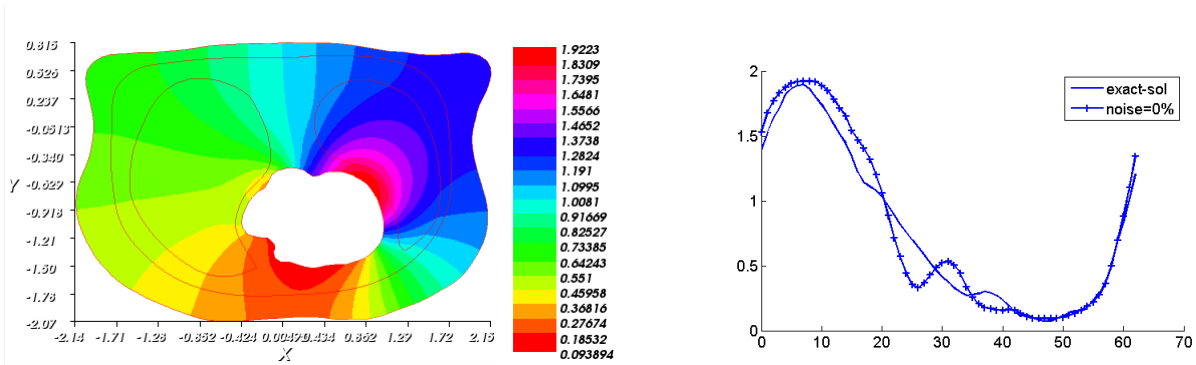


FIGURE 2.3 – Le potentiel reconstruit  $u_1$  (gauche) et la condition de dirichlet reconstruite (droite) comparés à la solution exacte sur  $\Gamma_i$  en utilisant une valeur approximative de  $k_3 = k_3^0 = 0.5$ .

La figure 2.3 présente le potentiel reconstruit sur  $\Gamma_i$  comparé à la solution exacte et la solution optimale  $u_1^{opt} := u_1(\eta^{opt}, k^0)$ . À la convergence, l'erreur relative  $\frac{\| \tau^{opt} - u^{ex} \|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}{\| u^{ex} \|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}$  est égale à 0.13 et  $\frac{\| u_1^{opt} - u^{ex} \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\| u^{ex} \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}$  est 0.04, où  $u^{ex}$  est la solution de (2.7). Pour obtenir une

meilleure reconstruction, nous avons appliqué notre algorithme, présenté dans la section 2.3, pour améliorer la valeur de la conductivité et donc pour améliorer la complétion des données. La valeur de l'estimation initiale est  $(\eta^0, \tau^0, k_3^0) = (0, 0, 0.5)$ . La figure 2.5 présente le potentiel reconstruit sur  $\Gamma_i$ , comparé à la solution exacte. Nous montrons également la solution optimale  $u_1$  dans le thorax et l'évolution de la conductivité reconstruite au cours des itérations de Nash. À la convergence, la conductivité obtenue  $k_3^{opt}$  est égale à 0.794542 et les erreurs relatives  $\frac{\|\tau^{opt} - u^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}{\|u^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}$ ,  $\frac{\|u_1^{opt} - u^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\|u^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}$  sont égales à 0.032 et 0.0054 respectivement. Nous avons répété le même test mais en utilisant deux maillages différents. Le premier maillage est plus grossier, il contient 2206 sommets et le second est plus fin et contient 17432 sommets. Les figures des deux maillages sont illustrées dans la figure 2.4. À la convergence, pour le maillage grossier (respectivement fin), la conductivité obtenue vaut 0.84 (respectivement, 0.752) et l'erreur relative de la partie Dirichlet de la solution est égale à 0.026 (respectivement, 0.035). Dans les trois différents degrés de précision de la géométrie de calcul, l'erreur relative sur la conductivité n'excède pas 6% et l'erreur relative sur le potentiel électrique reconstruit (condition de Dirichlet) ne dépasse pas 0.5%. Nous montrons dans la Figure 2.3 les résultats de la donnée de Dirichlet récupérée, obtenue pour une connaissance approximative ou initiale du paramètre de conductivité. Ensuite, dans Figure 2.5, nous présentons les résultats de la donnée de Dirichlet récupérée pour une conductivité identifiée de manière optimale. On peut facilement constater à partir de ces deux résultats l'influence de l'identification des conductivités sur la qualité de reconstruction des données manquantes sur le bord inaccessible  $\Gamma_i$ .

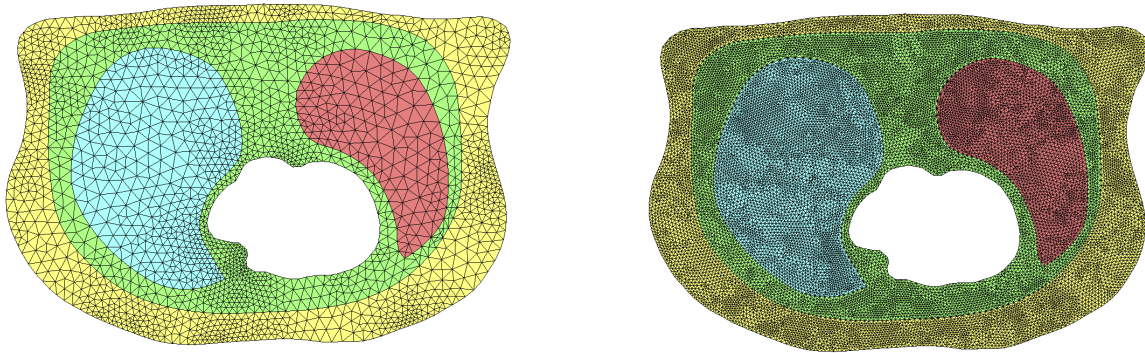


FIGURE 2.4 – Deux degrés de raffinement du maillage du torax. le maillage grossier (gauche) contient 2206 sommets et le maillage le plus fin (droite) contient 17432 sommets.

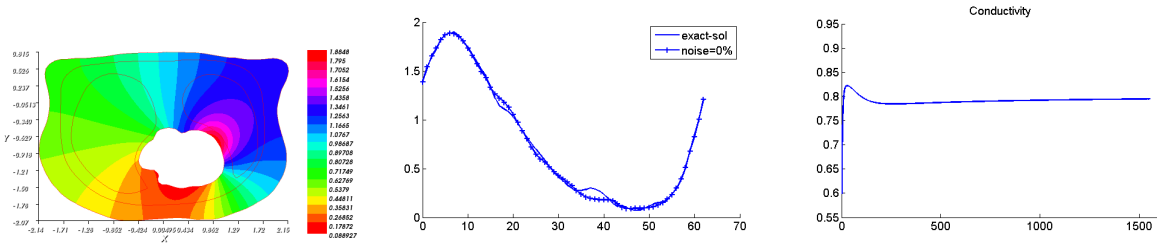


FIGURE 2.5 – Le potentiel reconstruit  $u_1$  (gauche) et condition de dirichlet reconstruite (milieu) comparés à la solution exacte sur  $\Gamma_i$  sans bruit. Le comportement de la conductivité durant les itérations est également tracé (droite). À la convergence, la conductivité reconstruite vaut  $k_3^{opt} = 0.794542$ .

Dans la Figure 2.6, nous présentons le comportement des trois fonctionnelles lors des 100 premières itérations. D'après les courbes, on observe que les valeurs sont très proches de zero près de la 100<sup>ème</sup> itération, mais pour atteindre la solution optimale, nous continuons pour plus d'itérations.

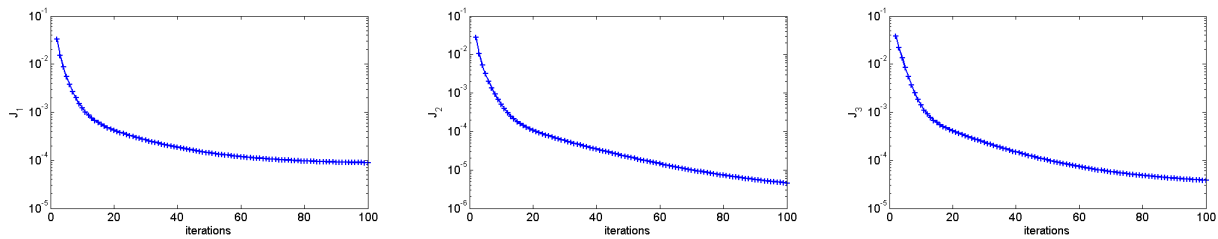


FIGURE 2.6 – Le comportement des fonctionnelles  $J_1$  (gauche),  $J_2$  (milieu) et  $J_3$  (droite) durant les premiers 100 iterations.

Pour évaluer la robustesse de notre procédure numérique, nous perturbons les données de Cauchy en ajoutant du bruit. La Figure 2.7 montre le potentiel reconstruit sur  $\Gamma_i$  comparé au potentiel exact et le comportement de la conductivité  $k_3$  au cours du processus d'optimisation pour différents niveaux de bruit. La valeur estimée de  $k_3^{opt}$  à la convergence est 0.7752, 0.8236 et 0.8733 pour 1%, 3% et 5% taux de bruit respectivement. Afin de montrer la performance de notre méthode, nous calculons différents indicateurs d'erreur. Les résultats numériques sont présentés dans le tableau 2.1. Nous remarquons que l'erreur relative de la conductivité estimée est beaucoup plus sensible par rapport au niveau de bruit que la solution reconstruite. Afin de prouver le choix de  $\alpha$ , nous présentons dans la Figure 2.8 l'erreur de conductivité  $\frac{\|k^{ex} - k^{opt}\|_2}{\|k^{ex}\|_2}$  et l'erreur de Dirichlet  $\frac{\|\tau^{opt} - u^{ex}\|_{L^2(\Gamma_i)}}{\|u^{ex}\|_{L^2(\Gamma_i)}}$  par rapport au différentes valeurs de  $\alpha$ . On remarque d'après les courbes que le paramètre optimal est entre  $10^{-4}$  et  $3 \cdot 10^{-3}$  sans bruit (identiquement dans le cas de 3% de bruit).

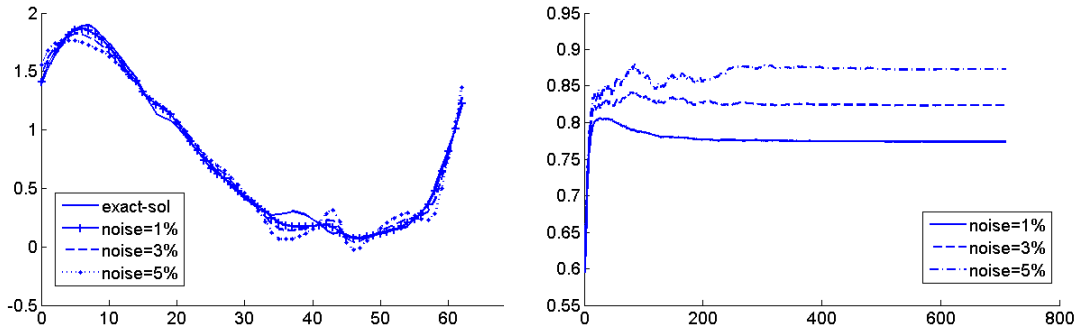


FIGURE 2.7 – La condition de Dirichlet reconstruite comparée à la solution exacte sur  $\Gamma_i$  pour différent niveaux de bruit (1%, 3%, 5%) (gauche). Le comportement de la conductivité durant les itérations de l’algorithme d’optimisation (droite).

Noise level	$\frac{\ \tau^{opt} - u^{ex}\ _{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}{\ u^{ex}\ _{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}$	$\frac{\ u_1^{opt} - u^{ex}\ _{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\ u^{ex}\ _{\mathbb{L}^2(\Omega)}}$	$\frac{\ u_1^{opt} - u_2^{opt}\ _{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\ u^{ex}\ _{\mathbb{L}^2(\Omega)}}$	$\frac{\ k^{ex} - k^{opt}\ _2}{\ k^{ex}\ _2}$
0%	0.032	0.0054	0.00015	0.006
1%	0.038	0.008	0.0011	0.0309
3%	0.066	0.017	0.0034	0.029
5%	0.11	0.028	0.0061	0.091

TABLE 2.1 – L’effet du niveau de bruit des données de Cauchy sur la solution reconstruite : les erreurs relative de la solution reconstruite sur le bord du coeur et dans l’ensemble du domaine, et l’erreur relative de  $k_3$  estimée par rapport au niveau de bruit.

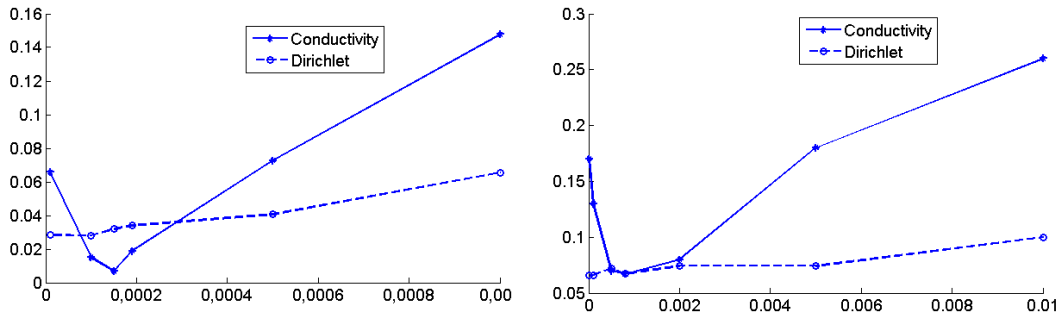


FIGURE 2.8 – L’erreur de conductivité  $\frac{\|k^{ex} - k^{opt}\|_2}{\|k^{ex}\|_2}$  et l’erreur de Dirichlet  $\frac{\|\tau^{opt} - u^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}{\|u^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}$  sont présentées par rapport aux différents valeurs de  $\alpha$  sans bruit (gauche) et pour 3% de bruit (droite).

### 2.4.3 Cas test 2 :

Dans ce cas test, on considère le même thorax, mais on suppose que le patient présente une pathologie affectant les conductivités dans le poumon, de sorte que les parties droite et gauche du poumon ont différentes valeurs de conductivité constantes. Nous avons divisé le thorax en quatre couches : graisse, cavité, partie droite et gauche du poumon. La conductivité dans le domaine suit la même décomposition, étant constante dans chacun des quatres sous domaines.

$$k^{ex} = \begin{cases} k_1 = 1, & \text{dans } \Omega_1=\text{graisse}, \\ k_2 = 1, & \text{dans } \Omega_2=\text{cavité}, \\ k_3 = 0.8, & \text{dans } \Omega_3=\text{poumon droite}, \\ k_4 = 0.4, & \text{dans } \Omega_4=\text{poumon gauche}. \end{cases}$$

Les données de Cauchy sont simulées numériquement, comme dans le premier cas test, en résolvant le problème direct suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (k^{ex} \nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = e^x \cos(y), & \text{sur } \Gamma_i, \\ k^{ex} \nabla u \cdot n = \phi = 0, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

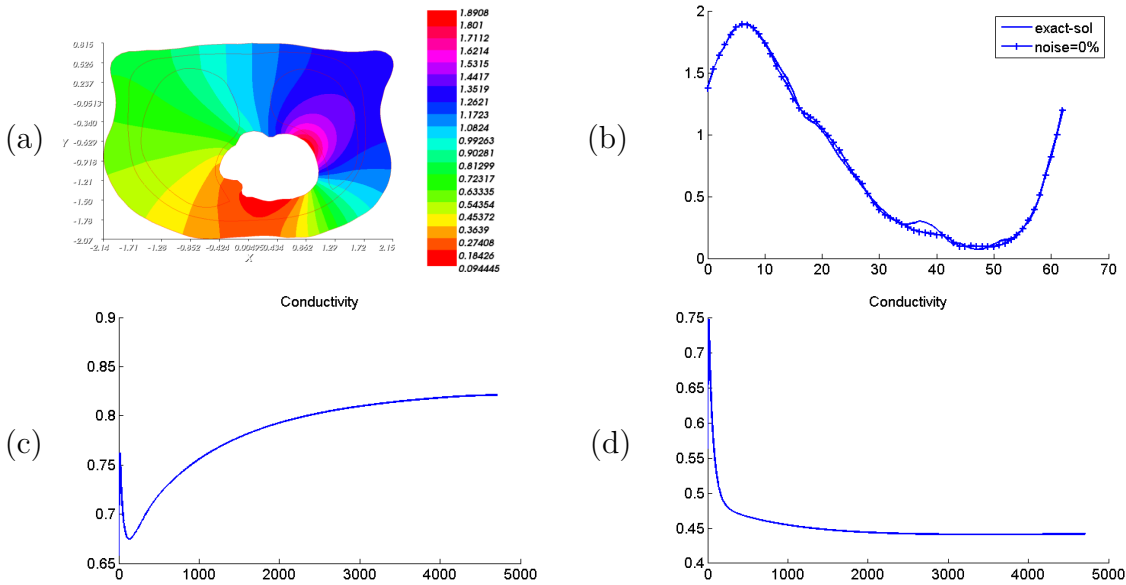


FIGURE 2.9 – (a) Potentiel reconstruit  $u_1$  dans le domaine, (b) condition de Dirichlet reconstruite sur  $\Gamma_i$ . (c) Le comportement des conductivités  $k_3$  and (d)  $k_4$  durant les itérations sans bruit. À la convergence, les conductivités sont égales à  $k_3^{opt} = 0.821142$  et  $k_4^{opt} = 0.441652$ .

Nous supposons que nous avons une valeur approximative des conductivités  $k_3$  et  $k_4$ . Notre objectif est d'améliorer ces mesures ainsi que le potentiel et le flux sur le bord du coeur.

Nous partons d'une hypothèse initiale  $(\eta^0, \tau^0, k_3^0, k_4^0) = (0, 0, 0.6, 0.6)$ . Nous exposons dans la Figure 2.9 la condition de Dirichlet reconstruite sur  $\Gamma_i$  comparée à la solution exacte, le potentiel reconstruit  $u_1$  dans le domaine et le comportement des conductivités durant les itérations pour des données non bruitées. À la convergence, les conductivités reconstruites sont égales à  $k_3^{opt} = 0.821142$  et  $k_4^{opt} = 0.441652$ . Dans la Figure 2.10, nous présentons les mêmes reconstructions illustrant la stabilité de notre méthode par rapport aux données bruitées.  $k_3^{opt}$  reconstruite est 0.71969, 0.831021 et 0.912696 pour 1%, 3% et 5% des taux de bruit respectivement et  $k_4^{opt}$  vaut 0.5079, 0.510126 et 0.506341 respectivement pour les mêmes niveaux de bruit. Table 2 montre différentes erreurs pour différents taux de bruit.

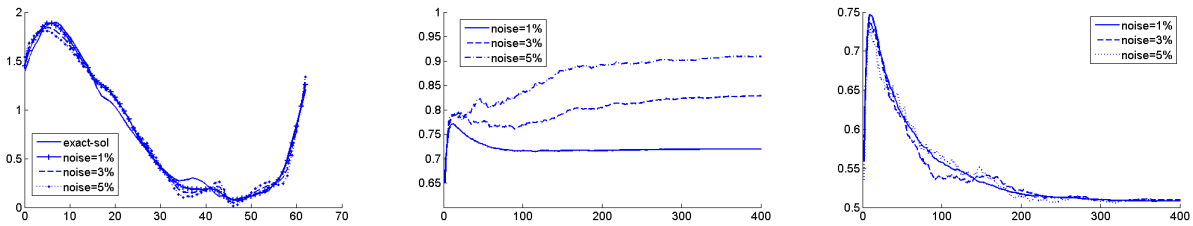


FIGURE 2.10 – Condition de Dirichlet reconstruite sur  $\Gamma_i$  (gauche) et le comportement des conductivités  $k_3$  (milieu) et  $k_4$  (droite) durant les itérations pour différent taux de bruit (1%, 3%, 5%).

Noise level	$\frac{\  \tau^{opt} - u^{ex} \ _{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}{\  u^{ex} \ _{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}$	$\frac{\  u_1^{opt} - u^{ex} \ _{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\  u^{ex} \ _{\mathbb{L}^2(\Omega)}}$	$\frac{\  u_1^{opt} - u_2^{opt} \ _{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\  u^{ex} \ _{\mathbb{L}^2(\Omega)}}$	$\frac{\  k^{ex} - k^{opt} \ _2}{\  k^{ex} \ _2}$
0%	0.027	0.0054	0.00017	0.05
1%	0.051	0.012	0.0011	0.15
3%	0.07	0.018	0.0035	0.12
5%	0.09	0.026	0.0059	0.17

TABLE 2.2 – Effet du niveau de bruit des données de Cauchy sur la solution reconstruite : les erreurs relatives de la solution reconstruite sur le bord du coeur et dans l'ensemble du domaine, et erreur relative du couple estimé  $(k_3, k_4)$  par rapport au niveau de bruit.

#### 2.4.4 Thorax 3D :

Dans ce paragraphe, nous appliquons notre procédure numérique au thorax en 3D (figure 2.11). La surface extérieure du thorax joue le rôle de  $\Gamma_c$  et la surface du coeur est la partie  $\Gamma_i$ . Nous divisons le corp humain  $\Omega$  en trois parties : le poumon, les os et le reste du tissu.



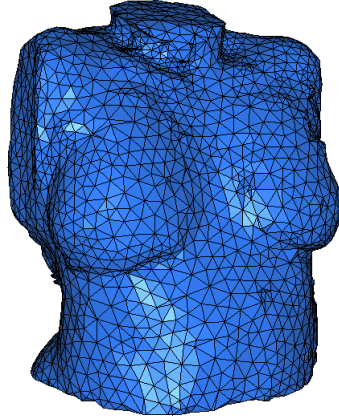


FIGURE 2.11 – Le thorax en 3D.

Chaque partie est caractérisée par une valeur de conductivité, qui sont issues d'expériences faites sur un thorax réel :

$$k^{ex} = \begin{cases} k_1 = 0.045, & \text{dans } \Omega_1=\text{os}, \\ k_2 = 0.096, & \text{dans } \Omega_2=\text{poumons}, \\ k_3 = 0.5, & \text{dans } \Omega_3=\text{reste de tissu}. \end{cases}$$

La contraction du coeur est provoquée par la propagation d'un courant électrique. Partant du noeud sinusal vers l'ensemble des deux ventricules, ce qui provoque un champ de potentiel sur la surface  $\Gamma_i$ . On suppose que le thorax n'est soumis à aucune sollicitation extérieure, donc la contrainte normale est nulle sur  $\Gamma_c$ . Les données de Cauchy sur la surface du thorax sont des données synthétiques. Elles sont générées par la résolution du problème direct suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (k^{ex} \nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = d, & \text{sur } \Gamma_i, \\ k^{ex} \nabla u \cdot n = 0, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases}$$

où  $d$  est un potentiel électrique expérimental, mesuré lors du contraction du coeur. On suppose qu'on a une valeur approximative de la conductivité  $k_2$  du poumon qui vaut  $k_2^0 = 0.5$ .

On considère maintenant que le champ  $d$  est inconnu sur la surface du coeur. En connaissant le couple  $(f, \phi)$  sur la surface de thorax, on peut déterminer le potentiel et le flux sur  $\Gamma_i$ , ainsi que la valeur de la conductivité du poumon. Dans ce but, on applique notre procédure numérique. Au cours des itérations, les calculs des éléments finis sont effectués avec 21449 noeuds et 119124 éléments tétraédriques, par conséquent, le coût de calcul est assez coûteux. La figure 2.12 présente une coupe transversale du thorax. Dans (b) le champ de potentiel  $u_1$ , solution du problème (SP1), et dans (c) le potentiel  $u_2$ , solution du problème (SP2) sont exposés et comparés à la solution exacte dans (a). La figure 2.13 fait un zoom sur les mêmes

reconstructions sur la surface du coeur sans bruit. Chaque couleur correspond à une valeur qui est présentée dans l'échelle. La valeur de la conductivité  $k_2$  a été améliorée au cours des itérations. À la convergence,  $k_2^{opt}$  vaut 0.251881. La figure 2.14 expose le comportement de la conductivité durant les itérations.

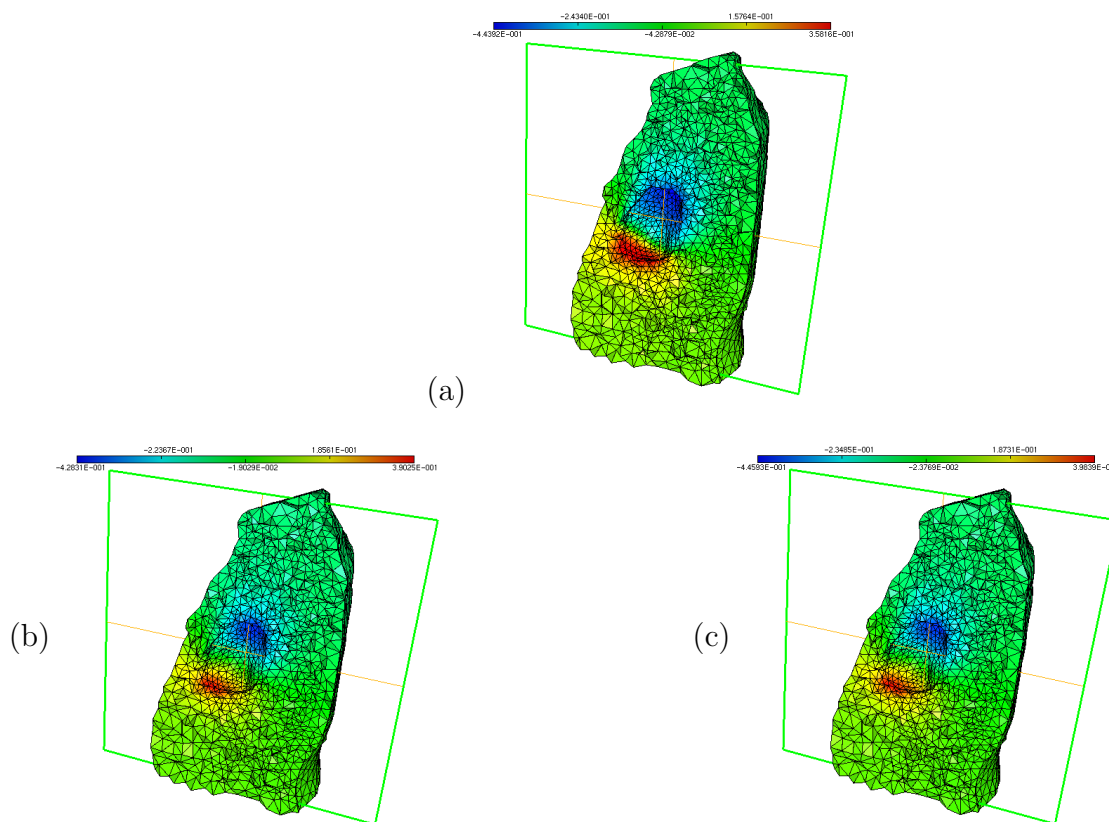


FIGURE 2.12 – Reconstruction du champ de potentiel  $u_1$  (b) et  $u_2$  (c) comparé à la solution exacte (a) dans le domaine.

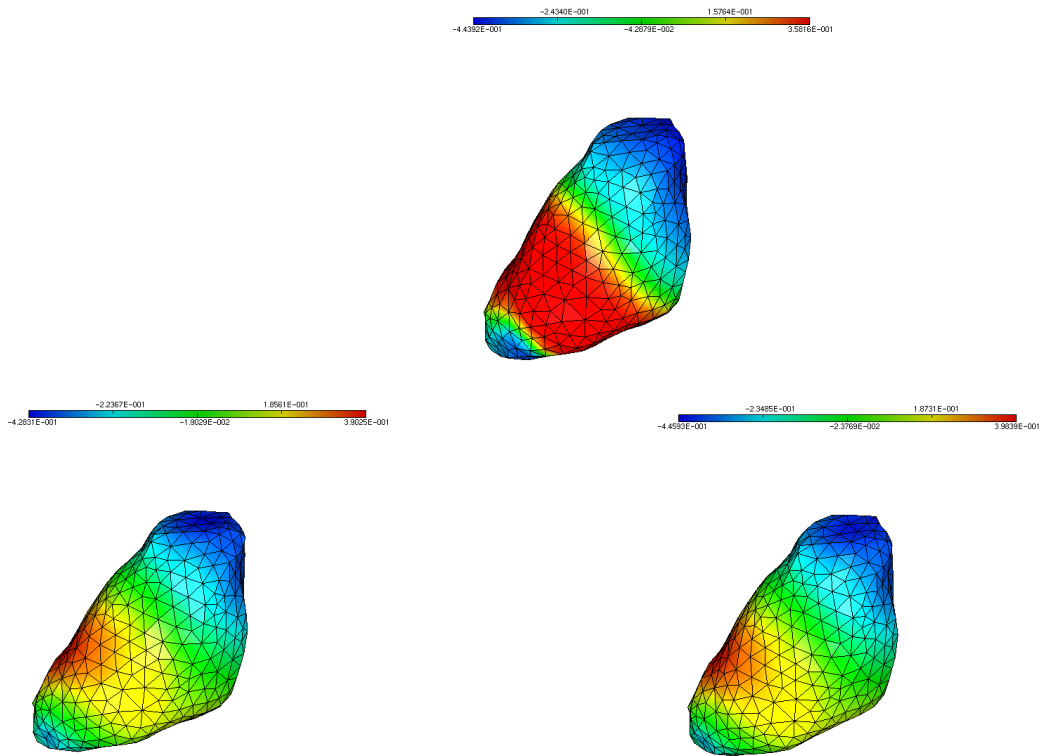


FIGURE 2.13 – Reconstruction du champ de potentiel  $u_1$  (b) et  $u_2$  (c) comparé à la solution exacte (a) sur la surface du coeur.

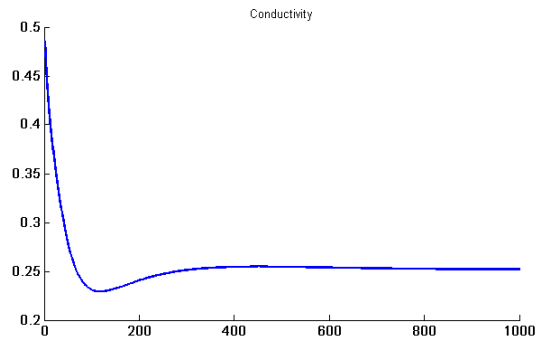


FIGURE 2.14 – Evolution de la conductivité au cours des itérations.

## 2.5 Conclusion

La technique d'imagerie électrocardiographique est largement utilisée pour détecter les pathologies cardiaques. Le problème mathématique de cette technologie est de résoudre le problème de complétion des données où la mesure du potentiel électrique sur la surface de thorax et la condition de flux nul sont considérées comme des données de Cauchy. Outre ce problème inverse, les mesures expérimentales de conductivité de chaque partie du thorax ne sont pas

très précises. Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche permettant de résoudre le problème de couplage en résolvant la complétion des données et en optimisant les conductivités des organes de thorax en utilisant une stratégie originale de jeu de Nash. Trois joueurs sont définis qui jouent de manière non coopérative un jeu de Nash : les deux premiers joueurs consacrent leurs coûts au problème de complétion des données, tandis que le troisième coût est lié au problème d'identification de la conductivité. Nous présentons l'algorithme qui est implémenté avec FreeFem++. Nous avons effectué trois expériences numériques, évaluant le cas où les données mesurées sont également perturbées par bruit aléatoire. Les résultats obtenus prouvent que notre algorithme est efficace pour résoudre le problème de couplage complétion/identification et qu'il est stable vis-à-vis des données bruitées.

# Chapitre 3

## Complétion des données et identification des paramètres en élasticité linéaire

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas des matériaux élastiques. Ces matériaux sont caractérisés par la capacité de retrouver leur forme et leur taille d'origine après suppression des forces provoquant la déformation. Ces forces ont une limite qui s'appelle limite d'élasticité, c'est la contrainte à partir de laquelle le matériau cesse de réagir d'une façon élastique, réversible (linéaire) et commence donc à réagir de façon irréversible (non linéaire). Pour notre étude, on s'intéresse au cas d'élasticité linéaire où la déformation du matériau est due à des faibles forces. La contrainte est linéairement liée à la déformation par une loi de comportement qui s'appelle loi de Hooke, et s'écrit comme suit :

$$\sigma = \mathbf{C} \cdot \varepsilon \quad (3.1)$$

Cette loi a été énoncée par le physicien anglais Robert Hooke en 1676.  $\sigma$  et  $\varepsilon$  sont deux tenseurs symétriques qui représentent le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations respectivement. Ce dernier peut s'exprimer en fonction du champ de déplacement  $u$  comme suit :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (3.2)$$

Dans la formule (3.1),  $\mathbf{C}$  est le tenseur d'élasticité qui est un tenseur symétrique d'ordre 4. La formule est très générale et on peut la simplifier si on considère un matériau élastique isotrope, c'est à dire, ses propriétés physiques ne dépendent pas de la direction. L'expression peut être réduite pour des raisons de symétrie à la forme suivante :

$$\sigma = 2 \mu \varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon) I \quad (3.3)$$

où  $I$  est la matrice identité,  $\text{tr}$  est l'opérateur trace et  $(\lambda, \mu)$  sont deux coefficients, appelés, de Lamé qui caractérisent les propriétés du matériau.

Dans [32], les auteurs ont proposé une méthode de résolution du problème de complétion des données en utilisant l'approche de jeux de Nash pour l'opérateur de Laplace. Durant [20], nous avons adapté la même méthode pour la résolution du problème de Cauchy pour l'opérateur d'élasticité linéaire. Nous avons montré les mêmes propriétés des fonctionnelles et prouvé les mêmes résultats présentés dans l'article tel que l'existence et l'unicité de la solution ainsi qu'un résultat de stabilité. Dans ce chapitre, nous allons aborder le problème de couplage de complétion des données et identification des paramètres de Lamé.

Dans la littérature, on trouve plusieurs travaux qui traitent le problème de Cauchy et d'identification de paramètres de Lamé en élasticité linéaire séparément par plusieurs méthodes. Dans [10, 9], les auteurs introduisent une méthode, dite énergétique, pour la résolution du problème de Cauchy qui consiste à introduire deux champs distincts et à minimiser l'écart entre eux. Marin et al ont déterminé des approximations de la solution du problème de Cauchy en élasticité linéaire à l'aide de la méthode BEM (Boundary Element Method) itérative. Cette méthode consiste à réduire le problème de Cauchy à la résolution successive des problèmes bien posés [51]. Les auteurs ont couplé cette méthode à une méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) dans [52].

Concernant le problème d'identification des paramètres de Lamé, dans [38], une méthode a été présentée en utilisant une fonctionnelle de type moindres-carrés. Dans ce travail, les auteurs utilisent une mesure à l'intérieur du domaine pour assurer l'unicité des paramètres. Nous pouvons citer aussi le travail de Khan et al [41] où ils introduisent une méthode itérative à point fixe pour l'identification des paramètres de Lamé en élasticité linéaire.

Nous allons consacrer ce chapitre à présenter le problème de couplage de complétion des données et d'identification des paramètres de Lamé dans un matériau élastique en utilisant une seule mesure sur une partie du bord. Nous introduisons trois fonctionnelles appropriées à ce problème de couplage afin d'élaborer un jeu de Nash pour la résolution simultanée de la reconstruction des données manquantes et l'identification des paramètres de Lamé.

## 3.2 Résolution du problème de complétion des données par l'approche de jeu de Nash

Comme nous avons signalé dans l'introduction, dans [20], nous avons utilisé la stratégie de jeu de Nash pour la résolution de problème de complétion des données en élasticité linéaire.

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ), son bord  $\partial\Omega$  est divisé en deux parties  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_c$ .  $\Gamma_c$  est la partie accessible aux mesures et  $\Gamma_i$  est la partie où les données sont manquantes.

Le problème de Cauchy pour l'opérateur d'élasticité linéaire est le suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma(u)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma(u).n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (3.4)$$

On note  $\phi$  la contrainte normale exercée sur la partie du bord  $\Gamma_c$  et  $f$  le déplacement mesuré. Les données appartiennent à  $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$  et  $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)$  respectivement, appelées données de Cauchy. Rappelons que pour  $f$  et  $\phi$  compatibles, il s'agit de chercher le déplacement  $\tau \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$  et la contrainte normale  $\eta \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$ , solution de ce problème inverse.

Le jeu de Nash est composé de deux joueurs, où chacun a comme objectif la minimisation d'un critère afin d'atteindre un équilibre. Nous avons introduit les fonctionnelles appropriées à notre procédure :

$$J_1(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \|\sigma(u_1).n - \phi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (3.5)$$

$$J_2(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \|u_2 - f\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (3.6)$$

Comme dans [32], les champs de déplacement  $u_1$  et  $u_2$  sont les solutions respectives de deux problèmes directs. Chacun est composé d'une donnée surabondante sur  $\Gamma_c$  et une donnée manquante quelconque sur  $\Gamma_i$ . Les problèmes sont les suivants :

$$(SP1) \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma(u_1)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma(u_1).n = \eta, & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases} \quad (SP2) \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma(u_2)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_2 = \tau, & \text{sur } \Gamma_i, \\ \sigma(u_2).n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (3.7)$$

Dans la section 1.2.2 du chapitre 1, nous avons présenté les propriétés des fonctionnelles et quelques résultats sur la solution du problème pour l'opérateur de Laplace. L'opérateur d'élasticité linéaire est un opérateur elliptique, on a pu montrer les mêmes résultats pour cet opérateur.

**Proposition 3.2.1** [20]

L'application  $\eta \rightarrow J_1(\eta, \tau)$  (respectivement  $\tau \rightarrow J_2(\eta, \tau)$ ) est quadratique et fortement convexe dans  $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$  (respectivement  $\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$ ) dans le sens où :

$$\begin{cases} \forall \psi \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i), & d_{\eta\eta}^2 J_1(\eta, \tau)(\psi, \psi) \geq c' \|\psi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad \text{avec } c' > 0 \\ \text{et} \\ \forall \xi \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i), & d_{\tau\tau}^2 J_2(\eta, \tau)(\xi, \xi) \geq c \|\xi\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad \text{avec } c > 0 \end{cases}$$

En théorie des jeux, la solution de ce problème inverse est un équilibre de Nash, c'est une solution optimale où aucun joueur n'a intérêt à dévier de la situation obtenue. La proposition suivante prouve qu'il existe un unique équilibre de Nash qui s'avère être les données

manquantes quand une solution de Cauchy existe. On introduit d'abord la fonctionnelle  $L$  telle que :

$$L(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \|\sigma(u_1).n - \phi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_2 - f\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2$$

**Proposition 3.2.2** [20]

i) Il existe toujours un unique équilibre de Nash  $(\eta_N, \tau_N) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$ , il est aussi le minimiseur de  $L(\eta, \tau)$ .

ii) Lorsque le problème de Cauchy a une solution  $u$ , alors  $u_1(\eta_N) = u_2(\tau_N) = u$  et  $(\eta_N, \tau_N)$  sont les données manquantes, tel que  $\eta_N = \sigma(u).n|_{\Gamma_i}$  et  $\tau_N = u|_{\Gamma_i}$ .

Afin de chercher le couple  $(\eta_N, \tau_N)$ , nous avons appliqué l'algorithme de jeu de Nash (étape 1 de l'algorithme 2). L'algorithme est composé de deux étapes parallèles, où les joueurs cherchent à améliorer leurs critères. Nous avons montré aussi un résultat de stabilité de la solution par rapport au faible perturbation des données de Cauchy. Le résultat est illustré dans le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1** [20]

Supposons qu'il existe une unique solution du problème de Cauchy  $u$  pour une paire de données  $(f, \phi) \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$  compatibles. Soit  $(f^\delta, \phi^\delta) \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c) \times \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$  une suite de données bruitées telle que

$$\|f^\delta - f\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \|\phi^\delta - \phi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 \leq \delta^2.$$

Ensuite, le jeu de Nash correspond aux coûts  $J_1^\delta$  et  $J_2^\delta$  définis par

$$J_1^\delta(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \|\sigma(u_1^\delta).n - \phi^\delta\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1^\delta - u_2^\delta\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (3.8)$$

$$J_2^\delta(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \|u_2^\delta - f^\delta\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1^\delta - u_2^\delta\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (3.9)$$

a un unique équilibre de Nash  $(\eta_N^\delta, \tau_N^\delta) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$  qui converge fortement, lorsque  $\delta$  tend vers zéro, vers les données de Cauchy manquantes  $(\sigma(u).n|_{\Gamma_i}, u|_{\Gamma_i})$ . En outre,  $u_1^\delta$  et  $u_2^\delta$ , les solutions de

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(u_1^\delta)) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ u_1^\delta = f^\delta, \quad \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma(u_1^\delta).n = \eta_N^\delta, \quad \text{sur } \Gamma_i. \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(u_2^\delta)) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ u_2^\delta = \tau_N^\delta, \quad \text{sur } \Gamma_i, \\ \sigma(u_2^\delta).n = \phi^\delta, \quad \text{sur } \Gamma_c. \end{array} \right. \end{cases} \quad (3.10)$$

convergent fortement dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  vers la solution du problème de Cauchy  $u$ .



### 3.3 Problème de couplage de complétion des données et identification des paramètres

On considère le même domaine élastique isotrope  $\Omega$  tel que  $\partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_i$ , le bord  $\Gamma_c$  est soumis à une force  $\phi \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)$  et  $f \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)$  est le déplacement mesuré sur la même partie. Le domaine élastique est caractérisé par deux coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Ces deux paramètres appartiennent à l'espace :

$$\mathbf{A}_{ad} = \{\lambda, \mu \text{ sont des constantes dans } \Omega \text{ tel que } \mu > 0 \text{ et } \lambda > 0\}.$$

Notre but est de chercher la contrainte normale  $\eta$  et le champ de déplacement  $\tau$  sur le bord inaccessible  $\Gamma_i$ , ainsi que la valeur des paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Le problème inverse est le suivant : trouver  $\eta \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$ ,  $\tau \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{A}_{ad}$  tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_{\lambda,\mu}(u)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_{\lambda,\mu}(u) \cdot n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \text{où } \sigma_{\lambda,\mu}(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u)).I. \end{cases} \quad (3.11)$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  dans le problème (3.11) sont implicites dans l'opérateur d'élasticité. Les coefficients relient le tenseur des contraintes  $\sigma$  et le tenseur des déformations  $\varepsilon$  par la loi de Hooke.

#### 3.3.1 Principe de la méthode

Le problème (3.11) peut être divisé en trois sous-problèmes bien posés (SP1), (SP2) et (SP3) :  $u_1 := u_1(\eta, \lambda, \mu)$ ,  $u_2 := u_2(\tau, \lambda, \mu)$  et  $u_3 := u_3(\tau, \lambda, \mu)$  sont les solutions respectives dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  :

$$(SP1) \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_{\lambda,\mu}(u_1)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = f, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_{\lambda,\mu}(u_1) \cdot n = \eta, & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases} \quad (SP2) \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_{\lambda,\mu}(u_2)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_2 = \tau, & \text{sur } \Gamma_i, \\ \sigma_{\lambda,\mu}(u_2) \cdot n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (SP3) \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_{\lambda,\mu}(u_3)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_3 = \tau, & \text{sur } \Gamma_i, \\ u_3 = f, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (3.12)$$

Pour résoudre le problème de couplage, il suffit que les données  $(\eta, \tau, \lambda, \mu)$  mènent au même champ  $u_1 = u_2 = u_3$  dans  $\Omega$ .

Nous convertissons ensuite le problème inverse en un problème d'optimisation par le biais de

ces trois fonctionnelles :

$$J_1(\eta, \tau, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \|\sigma(u_1).n - \phi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (3.13)$$

$$J_2(\eta, \tau, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \|u_2 - f\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2 \quad (3.14)$$

$$J_3(\eta, \tau, \lambda, \mu) = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(\beta u_1 + (1 - \beta)u_2 - u_3)^2 + 2 \mu \varepsilon(\beta u_1 + (1 - \beta)u_2 - u_3)^2 \quad (3.15)$$

On considère un jeu de Nash pour la résolution du problème de couplage de complétion des données sur  $\Gamma_i$  et identification des paramètres de Lamé. Le jeu est composé de trois joueurs, les deux premiers sont consacrés à contrôler les données manquantes sur  $\Gamma_i$  et le troisième joueur contrôle les paramètres de Lamé. La contrainte normale  $\eta$  est une variable stratégique qui est utilisée pour minimiser l'écart en Neumann  $\|\sigma(u_1).n - \phi\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}$  dans  $J_1$  et le déplacement  $\tau$  est une variable stratégique utilisée pour minimiser l'écart en Dirichlet  $\|u_2 - f\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}$  dans  $J_2$ . Le terme en commun  $\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}$  est un terme de régularisation qui est la différence entre les solutions de (SP1) et (SP2).  $J_3$  est la fonctionnelle de Kohn-Vogelius en élasticité, exploitée pour la recherche des paramètres de Lamé. Cette fonctionnelle est composée des solutions des trois problèmes directs avec une combinaison convexe entre  $u_1$  et  $u_2$  pondérée par  $\beta \in [0, 1]$ .

Les joueurs sont en compétition pour la recherche d'une solution optimale. C'est un équilibre de Nash défini comme suit :

### Définition 3.3.1

On dit que  $(\eta_N, \tau_N, \mu_N, \lambda_N) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{A}_{ad}$  est un équilibre de Nash si :

$$\begin{cases} J_1(\eta_N, \tau_N, \mu_N, \lambda_N) \leq J_1(\eta, \tau_N, \mu_N, \lambda_N), & \forall \eta \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i), \\ J_2(\eta_N, \tau_N, \mu_N, \lambda_N) \leq J_2(\eta_N, \tau, \mu_N, \lambda_N), & \forall \tau \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i), \\ J_3(\eta_N, \tau_N, \mu_N, \lambda_N) \leq J_3(\eta_N, \tau_N, \mu, \lambda), & \forall (\mu, \lambda) \in \mathbb{A}_{ad}. \end{cases} \quad (3.16)$$

**Identifiabilité des paramètres de Lamé.** Le problème d'identifiabilité des paramètres de Lamé est un problème qui a été étudié par différentes méthodes [46, 27, 50, 25]. Parmi les stratégies proposées, une est d'utiliser l'application "Dirichlet-to-Neumann", c'est à dire une infinité de mesure sur le bord ou bien une mesure à l'intérieur du domaine. Nous avons développé plus de détails dans la section 1.3 du chapitre 1. Dans notre travail, on s'intéresse à l'identification des paramètres de Lamé avec une seule mesure incomplète sur le bord dans un cadre d'identifiabilité. Dans un article de Zhongyan Lin [48], un cas particulier a été présenté pour assurer l'identifiabilité du paramètre de Lamé. Nous avons présenté le théorème détaillé dans la section 1.3.1 du chapitre 1, où il montre un résultat d'unicité avec des conditions particulières.

Pour des paramètres de Lamé dans  $\mathbf{A}_{ad}$ , on déduit de la première partie de ce théorème une

configuration identifiable avec une seule mesure sur le bord : il utilise un disque élastique isotrope de rayon 1 comme domaine et il impose des conditions sur le bord tel que une contrainte normale ou tangentielle nulle sur le demi-cercle supérieur.

### 3.4 Algorithme

Nous présentons maintenant l'algorithme de jeu de Nash pour la recherche du problème de couplage en élasticité. L'algorithme est divisé en deux étapes principales. À l'étape 1, on résout un problème de complétion des données en utilisant des paramètres de Lamé fixés. À cette étape, les deux joueurs jouent quelques itérations d'un sous-jeu de Nash pour aboutir à une reconstruction d'un champ de déplacement et une contrainte normale sur  $\Gamma_i$ . En utilisant ces champs reconstruits, on passe à l'étape 2 où le troisième joueur résout un problème de minimisation afin de reconstruire les paramètres de Lamé. Deux termes de régularisations de Tikhonov sont ajoutés à la fonctionnelle  $J_3$  qui sont multipliés par deux paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , les valeurs optimales seront choisies numériquement.

---

**Algorithm 2** Calcul de l'équilibre de Nash  $(\eta_N, \tau_N, \lambda_N, \mu_N)$  du jeu de couplage de complétion des données et identification des paramètres de Lamé.

---

Les paramètres utilisés :

$0 \leq t < 1$  : paramètre de relaxation

$\alpha > 0$  : paramètre de regularization

$\rho > 0$  et  $\varepsilon > 0$  : tolérances d'arrêt

Les initialisations :

Soit  $p = 0$  et  $M^p = (\eta^p, \tau^p)$  une estimation initiale

Soit  $q = 0$  et  $(\lambda^q, \mu^q)$  une estimation initiale

**Étape 1** Calculer  $(\eta^{p+1}, \tau^{p+1})$ , solution de

1. Calculer  $\bar{\eta}^p$ , solution de  $\min_{\eta} J_1(\eta, \tau^p, \lambda^q, \mu^q)$  et évaluer  $\eta^{p+1} = t\eta^p + (1-t)\bar{\eta}^p$ .
2. Calculer  $\bar{\tau}^p$ , solution de  $\min_{\tau} J_2(\eta^p, \tau, \lambda^q, \mu^q)$  et évaluer  $\tau^{p+1} = t\tau^p + (1-t)\bar{\tau}^p$ .
3. Soit  $M^{p+1} = (\eta^{p+1}, \tau^{p+1})$ .

Retourner à 1 jusqu'à ce que la suite  $M^p$  converge. Comme un critère d'arrêt, on utilise :

$$\| M^{p+1} - M^p \| \leq \varepsilon$$


---

**Étape 2** Calculer  $(\lambda^{q+1}, \mu^{q+1})$ , solution de

$$\min_{(\lambda, \mu)} J_3(\eta^{p+1}, \tau^{p+1}, \lambda, \mu) + \frac{\alpha_1}{2} \|\mu - \mu^q\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha_2}{2} \|\lambda - \lambda^q\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2, \quad (3.17)$$

**Étape 3** Calculer  $\|u_2 - f\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_c)}$ .

Retourner à **Étape 1** si  $\|u_2 - f\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_c)} > \rho$ .

La résolution du notre problème inverse se ramène à la résolution de trois problèmes de minimisations partielles. Afin de chercher  $\eta$  et  $\tau$ , on utilise un algorithme de gradient à pas fixe. Un algorithme de Newton a été exploité pour la recherche des paramètres de Lamé. Au cours des itérations, nous avons besoin de calculer le gradient des fonctionnelles  $\nabla_\eta J_1$ ,  $\nabla_\mu J_2$ ,  $\nabla_{(\mu, \lambda)} J_3$  ainsi que la dérivée seconde de  $J_3$  en utilisant la méthode de l'état adjoint. Cette méthode est une méthode générale pour le calcul du gradient d'une fonctionnelle coût indépendamment de la direction. Elle est introduite dans la théorie des problèmes inverses par Chavent [22] et inspirée de la théorie du contrôle par Lions dans [49]. Par souci de simplicité, nous supposons dans le calcul suivant que le coefficient  $\beta$  est égal à 0.

**Proposition 3.4.1** [20]

*Nous avons les deux dérivées partielles :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_1}{\partial \eta} \cdot \xi = - \int_{\Gamma_i} \lambda_1 \xi \, d\Gamma_i, \quad \forall \xi \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \\ \text{avec } \lambda_1 \in W_1 = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\Gamma_c} = 0\}, \text{ solution de ce problème adjoint :} \\ \int_{\Omega} \sigma(\lambda_1) : \varepsilon(\gamma) = - \int_{\Gamma_c} (\sigma(u_1) \cdot n - \phi) \sigma(\gamma) \cdot n \, d\Gamma_c - \int_{\Gamma_i} (u_1 - \tau) \gamma \, d\Gamma_i, \quad \forall \gamma \in W_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_2}{\partial \tau} \cdot h = \int_{\Gamma_i} (\sigma(\lambda_2) \cdot n - (u_1 - \tau)) h \, d\Gamma_i, \quad \forall h \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i) \\ \text{tel que } \lambda_2 \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ solution de ce problème adjoint :} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\sigma(\lambda_2)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \lambda_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \sigma(\lambda_2) \cdot n = f - u_2 & \text{sur } \Gamma_c. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Avant de calculer les dérivées partielles et la hessine de  $J_3$ , on définit les espaces

$$\mathbb{H}_{0, \Gamma_i}^1(\Omega) = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\Gamma_i} = 0\}$$

et

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

**Proposition 3.4.2**

Les dérivées partielles de  $J_3$  sont les suivants :

$$i) \frac{\partial J_3}{\partial \mu} \cdot \varphi = \int_{\Omega} 2 \varphi \varepsilon(u_2 - u_3)^2 d\Omega + \int_{\Omega} 2 \varphi \varepsilon(u_2) : \varepsilon(v_2) d\Omega + \int_{\Omega} 2 \varphi \varepsilon(u_3) : \varepsilon(v_3) d\Omega,$$

$$\forall \varphi \in \mathbb{A}_{ad}$$

tel que  $v_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega)$  et  $v_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma(v_2) : \varepsilon(\gamma_2) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega, \\ \forall \gamma_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\ \text{et} \\ \int_{\Omega} \sigma(v_3) : \varepsilon(\gamma_3) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(-\gamma_3) - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(-\gamma_3) d\Omega, \\ \forall \gamma_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

$$ii) \frac{\partial J_3}{\partial \lambda} \cdot \varphi = \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(u_2 - u_3)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(u_2) \operatorname{div}(v_2) d\Omega + \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(u_3) \operatorname{div}(v_3) d\Omega,$$

$$\forall \varphi \in \mathbb{A}_{ad}$$

tel que  $v_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega)$  et  $v_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma(v_2) : \varepsilon(\gamma_2) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega, \\ \forall \gamma_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\ \text{et} \\ \int_{\Omega} \sigma(v_3) : \varepsilon(\gamma_3) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(-\gamma_3) - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(-\gamma_3) d\Omega, \\ \forall \gamma_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

**Preuve**

Pour le calcul de  $\frac{\partial J_3}{\partial \mu} \cdot \varphi$ , on définit d'abord le Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda, \mu, u_2, u_3, v_2, v_3) &= \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3)^2 + 2\mu \varepsilon(u_2 - u_3)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sigma(u_2) : \varepsilon(v_2) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_c} \phi v_2 d\Gamma_c + \int_{\Omega} \sigma(u_3) : \varepsilon(v_3) d\Omega \end{aligned}$$

Pour une direction quelconque  $\varphi$ , la différentielle de  $J_3$  par rapport à  $\mu$  vaut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_3}{\partial \mu} \cdot \varphi &= \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(u'_2 - u'_3) + \int_{\Omega} 2\varphi \varepsilon(u_2 - u_3)^2 d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) \varepsilon(u'_2 - u'_3) d\Omega \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec  $u'_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \mu} \cdot \varphi$  et  $u'_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \mu} \cdot \varphi$

On dérive le Lagrangien par rapport à  $u_2$ ,  $\forall \gamma_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1$

$$\int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(v_2) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) \varepsilon(\gamma_2) d\Omega \quad (3.19)$$

En particulier, pour  $\gamma_2 = u'_2$  :

$$\int_{\Omega} \sigma(u'_2) : \varepsilon(v_2) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(u'_2) \, d\Omega - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) \varepsilon(u'_2) \, d\Omega \quad (3.20)$$

De la même façon, on dérive le Lagrangien par rapport à  $u_3$  appliqué à une direction  $\gamma_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \sigma(\gamma_3) : \varepsilon(v_3) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(-\gamma_3) \, d\Omega - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) \varepsilon(-\gamma_3) \, d\Omega \quad (3.21)$$

On remplace  $\gamma_3$  par  $u'_3$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma(u'_3) : \varepsilon(v_3) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(-u'_3) \, d\Omega - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) \varepsilon(-u'_3) \, d\Omega \quad (3.22)$$

$u_2$  est la solution du problème direct (SP2).  $\forall w_2$  un champ test dans  $\mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} \sigma(u_2) : \varepsilon(w_2) \, d\Omega = \int_{\Gamma_c} \phi w_2 \, d\Gamma_c$$

Si on dérive cette formulation variationnelle par rapport à  $\mu$  et on remplace  $w_2$  par  $v_2$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma(u'_2) : \varepsilon(v_2) \, d\Omega = - \int_{\Omega} 2\phi \varepsilon(u_2) : \varepsilon(v_2) \, d\Omega \quad (3.23)$$

De la même façon, on obtient la formulation variationnelle de  $u'_3$  :

$$\int_{\Omega} \sigma(u'_3) : \varepsilon(v_3) \, d\Omega = - \int_{\Omega} 2\phi \varepsilon(u_3) : \varepsilon(v_3) \, d\Omega \quad (3.24)$$

D'après (4.13), (3.22), (3.23) et (3.24), on déduit que :

$\frac{\partial J_3}{\partial \mu} \cdot \varphi = \int_{\Omega} 2 \varphi \varepsilon(u_2 - u_3)^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} 2 \varphi \varepsilon(u_2) : \varepsilon(v_2) \, d\Omega + \int_{\Omega} 2 \varphi \varepsilon(u_3) : \varepsilon(v_3) \, d\Omega,$   
 $\forall \varphi \in \mathbb{A}_{ad}$  tel que  $v_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega)$  et  $v_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes adjoints (3.19) et (3.21) suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma(v_2) : \varepsilon(\gamma_2) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(\gamma_2) \, d\Omega - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(\gamma_2) \, d\Omega, \\ \forall \gamma_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\ \text{et} \\ \int_{\Omega} \sigma(v_3) : \varepsilon(\gamma_3) = - \int_{\Omega} 2\lambda \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(-\gamma_3) - \int_{\Omega} 4\mu \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(-\gamma_3) \, d\Omega, \\ \forall \gamma_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

De la même façon, on calcule la différentielle de  $J_3$  par rapport à  $\lambda$ .

On a besoin aussi d'évaluer la hessinne de  $J_3$  :

### Proposition 3.4.3

*Les différentielles secondes de  $J_3$  sont les suivantes :*

$$\begin{aligned}
 i) \frac{\partial^2 J_3}{\partial \mu^2}(\varphi_1, \varphi_2) &= \int_{\Omega} 4 \varphi_2 \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega + \int_{\Omega} 4 \varphi_2 \varepsilon(u_2 - u_3) \varepsilon(-\gamma_3) d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega} 2 \varphi_2 \varepsilon(v_3) : \varepsilon(\gamma_3) d\Omega + \int_{\Omega} 2 \varphi_2 \varepsilon(v_2) : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega + \int_{\Omega} 2 \varphi_2 \varepsilon(u_2) : \varepsilon(\xi_2) d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega} 2 \varphi_2 \varepsilon(u_3) : \varepsilon(\xi_3) d\Omega, \quad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{A}_{ad} \times \mathbb{A}_{ad}
 \end{aligned}$$

tel que  $(\xi_2, \xi_3, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Omega} \sigma(\xi_2) : \varepsilon(w_2) = - \int_{\Omega} 4 \varphi_1 \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(w_2) d\Omega - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \varepsilon(w_2) : \varepsilon(v_2) d\Omega \\
 \quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(w_2) \operatorname{div}(\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(w_2) : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega \\
 \quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(w_2) \operatorname{div}(-\gamma_3) d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(w_2) : \varepsilon(-\gamma_3), \quad \forall w_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\
 \int_{\Omega} \sigma(\xi_3) : \varepsilon(w_3) = - \int_{\Omega} 4 \varphi_1 \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(-w_3) d\Omega - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \varepsilon(w_3) : \varepsilon(v_3) d\Omega \\
 \quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(-w_3) \operatorname{div}(\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(-w_3) : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega \\
 \quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(-w_3) \operatorname{div}(-\gamma_3) d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(-w_3) : \varepsilon(-\gamma_3), \quad \forall w_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \\
 \int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(h_2) = - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \varepsilon(u_2) : \varepsilon(h_2) d\Omega, \quad \forall h_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\
 \text{et} \\
 \int_{\Omega} \sigma(\gamma_3) : \varepsilon(h_3) = - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \varepsilon(u_3) : \varepsilon(h_3) d\Omega, \quad \forall h_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).
 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 ii) \frac{\partial^2 J_3}{\partial \lambda^2}(\varphi_1, \varphi_2) &= \int_{\Omega} 2 \varphi_2 \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(\gamma_2) d\Omega + \int_{\Omega} 2 \varphi_2 \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(-\gamma_3) d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega} \varphi_2 \operatorname{div}(v_2) \operatorname{div}(\gamma_2) d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_2 \operatorname{div}(v_2) \operatorname{div}(\gamma_3) d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_2 \operatorname{div}(u_2) \operatorname{div}(\xi_2) d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega} \varphi_2 \operatorname{div}(u_3) \operatorname{div}(\xi_3) d\Omega, \quad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{A}_{ad} \times \mathbb{A}_{ad}
 \end{aligned}$$

tel que  $(\xi_2, \xi_3, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Omega} \sigma(\xi_2) : \varepsilon(w_2) = - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(w_2) d\Omega - \int_{\Omega} \varphi_1 \operatorname{div}(w_2) \operatorname{div}(v_2) d\Omega \\
 \quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(w_2) \operatorname{div}(\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(w_2) : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega \\
 \quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(w_2) \operatorname{div}(-\gamma_3) d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(w_2) : \varepsilon(-\gamma_3), \quad \forall w_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\
 \int_{\Omega} \sigma(\xi_3) : \varepsilon(w_3) = - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(-w_3) d\Omega - \int_{\Omega} \varphi_1 \operatorname{div}(w_3) \operatorname{div}(v_3) d\Omega \\
 \quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(-w_3) \operatorname{div}(\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(-w_3) : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega \\
 \quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(-w_3) \operatorname{div}(-\gamma_3) d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(-w_3) : \varepsilon(-\gamma_3), \quad \forall w_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \\
 \int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(h_2) = - \int_{\Omega} \varphi_1 \operatorname{div}(u_2) : \operatorname{div}(h_2) d\Omega, \quad \forall h_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\
 \text{et} \\
 \int_{\Omega} \sigma(\gamma_3) : \varepsilon(h_3) = - \int_{\Omega} \varphi_1 \operatorname{div}(u_3) \operatorname{div}(h_3) d\Omega, \quad \forall h_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).
 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad \frac{\partial^2 J_3}{\partial \lambda \partial \mu}(\varphi_1, \varphi_2) &= \int_{\Omega} 2 \varphi_2 \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(\gamma_2) \, d\Omega + \int_{\Omega} 2 \varphi_2 \operatorname{div}(u_2 - u_3) \operatorname{div}(-\gamma_3) \, d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \varphi_2 \operatorname{div}(v_2) \operatorname{div}(\gamma_2) \, d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_2 \operatorname{div}(v_3) \operatorname{div}(\gamma_3) \, d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_2 \operatorname{div}(u_2) \operatorname{div}(\xi_2) \, d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \varphi_2 \operatorname{div}(u_3) \operatorname{div}(\xi_3) \, d\Omega, \quad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{A}_{ad} \times \mathbb{A}_{ad}
\end{aligned}$$

tel que  $(\xi_2, \xi_3, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{H}_{0, \Gamma_i}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_{0, \Gamma_i}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_{\Omega} \sigma(\xi_2) : \varepsilon(w_2) = - \int_{\Omega} 4 \varphi_1 \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(w_2) \, d\Omega - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \varepsilon(w_2) : \varepsilon(v_2) \, d\Omega \\
\quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(w_2) \operatorname{div}(\gamma_2) \, d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(w_2) : \varepsilon(\gamma_2) \, d\Omega \\
\quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(w_2) \operatorname{div}(-\gamma_3) \, d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(w_2) : \varepsilon(-\gamma_3), \quad \forall w_2 \in \mathbb{H}_{0, \Gamma_i}^1(\Omega), \\
\int_{\Omega} \sigma(\xi_3) : \varepsilon(w_3) = - \int_{\Omega} 4 \varphi_1 \varepsilon(u_2 - u_3) : \varepsilon(-w_3) \, d\Omega - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \varepsilon(w_3) : \varepsilon(v_3) \, d\Omega \\
\quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(-w_3) \operatorname{div}(\gamma_2) \, d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(-w_3) : \varepsilon(\gamma_2) \, d\Omega \\
\quad - \int_{\Omega} 2 \lambda \operatorname{div}(-w_3) \operatorname{div}(-\gamma_3) \, d\Omega - \int_{\Omega} 4 \mu \varepsilon(-w_3) : \varepsilon(-\gamma_3), \quad \forall w_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \\
\int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(h_2) = - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \varepsilon(u_2) : \varepsilon(h_2) \, d\Omega, \quad \forall h_2 \in \mathbb{H}_{0, \Gamma_i}^1(\Omega), \\
\text{et} \\
\int_{\Omega} \sigma(\gamma_3) : \varepsilon(h_3) = - \int_{\Omega} 2 \varphi_1 \varepsilon(u_3) : \varepsilon(h_3) \, d\Omega, \quad \forall h_3 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).
\end{array} \right.$$

### 3.5 Résultats numériques

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons présenter trois tests numériques. Dans chacun, on choisit un matériau élastique tel que son bord est scindé en deux parties :  $\Gamma_c$ , où les données sont surabondantes, et  $\Gamma_i$ , qui est une partie inaccessible. Sur  $\Gamma_c$ , nous avons besoin des données de Cauchy. Le champ de déplacement  $f$  et la contrainte normale  $\phi$  sont des données synthétiques, c'est à dire simulées numériquement par la résolution d'un problème direct. Notre but est de chercher la contrainte normale et le champ de déplacement manquants sur  $\Gamma_i$  et estimer la valeur des paramètres de Lamé dans le domaine. Dans la section 3.4, nous avons parlé du problème d'identifiabilité des paramètres de Lamé. Dans l'article [48], Zhongyan Lin a imposé des conditions pour l'assurer. Il a choisi le disque unité comme un domaine  $\Omega$ . On divise son bord en trois parties :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Gamma_{c1} := \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ tel que } 0 < \theta \leq \pi\} \\
\Gamma_{c2} := \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ tel que } \pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}\} \\
\Gamma_i := \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ tel que } \frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi\}
\end{array} \right.$$

D'après la première partie (i) du théorème 1.3.1, on considère une contrainte normale nulle sur la partie  $\Gamma_{c1}$ . Sur  $\Gamma_i$  on choisit une condition de Dirichlet  $g = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$  tel que une



valeur arbitraire de  $\alpha$  vaut  $5 \cdot 10^{-2}$  et  $\Gamma_{c2}$  est une partie du bord encastree. Avec ces conditions, si le paramètre  $\lambda$  est une constante connue, alors, la constante  $\mu$  est unique dans le domaine. On choisit aussi, une valeur exacte des paramètres de Lamé, notée par  $\lambda_{ex}$  et  $\mu_{ex}$ , qui sont égales à 2 et 1 respectivement. On considère donc ce problème direct pour la génération des données :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_{\lambda_{ex}, \mu_{ex}}(u)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = g, & \text{sur } \Gamma_i, \\ \sigma_{\lambda_{ex}, \mu_{ex}}(u) \cdot n = 0, & \text{sur } \Gamma_{c1}, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_{c2}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Une fois les données  $f = u|_{\Gamma_c}$  et  $\phi = \sigma(u) \cdot n|_{\Gamma_c}$  sont disponibles, on suppose que le champ de déplacement, la contrainte normale sur  $\Gamma_i$  et les paramètres de Lamé sont inconnus et on va essayer de les retrouver en utilisant notre procédure numérique. Les résultats numériques sont obtenus en utilisant FreeFem++.

### 3.5.1 Cas test 1

Pour le premier cas test, on considère le domaine  $\Omega$  prescrit précédemment, discrétisé par un maillage de 135 noeuds sur  $\Gamma_c = \Gamma_{c1} \cup \Gamma_{c2}$  et 45 noeuds sur  $\Gamma_i$ . Pour des données de Cauchy  $(f, \phi)$  sur  $\Gamma_c$  et un paramètre de Lamé  $\lambda$  connu dans le domaine, notre but est de chercher le champ de déplacement  $\tau$ , la contrainte normale  $\eta$  et le paramètre de Lamé  $\mu$  en utilisant notre procédure numérique. On choisit une estimation initiale  $(\eta^0, \tau^0, \mu^0) = (0.1, 0.1, 2)$ .

La figure 3.1 présente la reconstruction des deux composantes du champ de déplacement et de la contrainte normale sur  $\Gamma_i$ , comparée à la solution exacte fournie par (3.25) avec des données non bruitées. On peut voir que les reconstructions sont proches de la solution exacte mais elles sont perturbées sur les extrémités de  $\Gamma_i$ , à cause du changement de conditions aux limites différentes sur  $\Gamma_c$ . La figure 3.2(a) montre l'évolution de la valeur du paramètre  $\mu$  au cours des itérations. À la convergence, le paramètre obtenu  $\mu^{opt}$  vaut 1.00055 sachant que la valeur exacte est 1. Pour étudier la robustesse de notre procédure numérique, nous avons perturbé les données de Cauchy en ajoutant un bruit aux champs  $f$  et  $\phi$ . La figure 3.3 présente les mêmes reconstructions pour des différents taux de bruits. À la convergence,  $\mu^{opt}$  vaut 0.999304, 0.986312 et 0.963522 respectivement pour 1%, 3% et 5% de bruit. La figure 3.2(b) montre le comportement du paramètre de lamé  $\mu$  au cours des itérations, on constate que les résultats sont satisfaisants. Pour illustrer la stabilité de notre méthode, on présente différentes erreurs dans le tableau 3.1. On note :

$$ERD = \frac{\|\tau^{opt} - \tau^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}{\|\tau^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}} \quad ERN = \frac{\|\eta^{opt} - \eta^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}}{\|\eta^{ex}\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_i)}} \quad (3.26)$$

$$ER\mu = \frac{\|\mu^{opt} - \mu^{ex}\|_2}{\|\mu^{ex}\|_2}$$

avec  $\tau^{ex} = u_{|\Gamma_i}^{ex}$  et  $\eta^{ex} = \sigma(u^{ex}) \cdot n_{|\Gamma_i}$  sachant que  $u^{ex}$  est la solution du problème (3.25).  $\tau^{opt}$  et  $\eta^{opt}$  sont le champ de déplacement et la contrainte normale reconstruits à la convergence. Les valeurs trouvées dans le tableau pour les différents taux de bruit sont conformes à ce qui est trouvé numériquement dans les figures.

Pour la recherche du paramètre de Lamé  $\mu$ , on minimise la fonctionnelle de Kohn-Vogelius  $J_3$  à laquelle nous avons ajouté un terme de régularisation.  $\alpha_1$  est un paramètre de régularisation qui contrôle la balance entre la fonctionnelle et le terme de régularisation. Nous avons choisi la valeur optimale dans l'intervalle  $[4.10^{-3}, 4.5 \cdot 10^{-3}]$ .

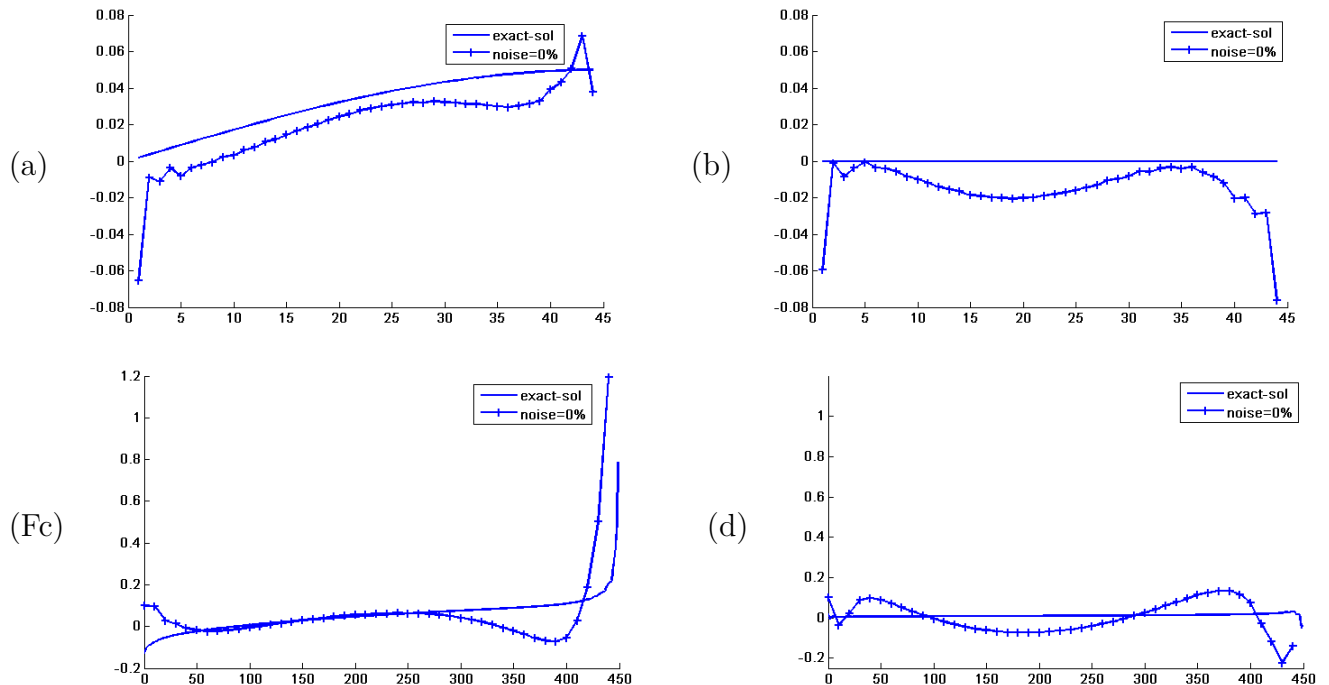


FIGURE 3.1 – **Reconstructions.** (a) : première composante du déplacement, (b) : deuxième composante de déplacement, (c) : première composante de la contrainte normale, (d) : deuxième composante de la contrainte normale sur  $\Gamma_i$  avec des données de Cauchy non bruitées.

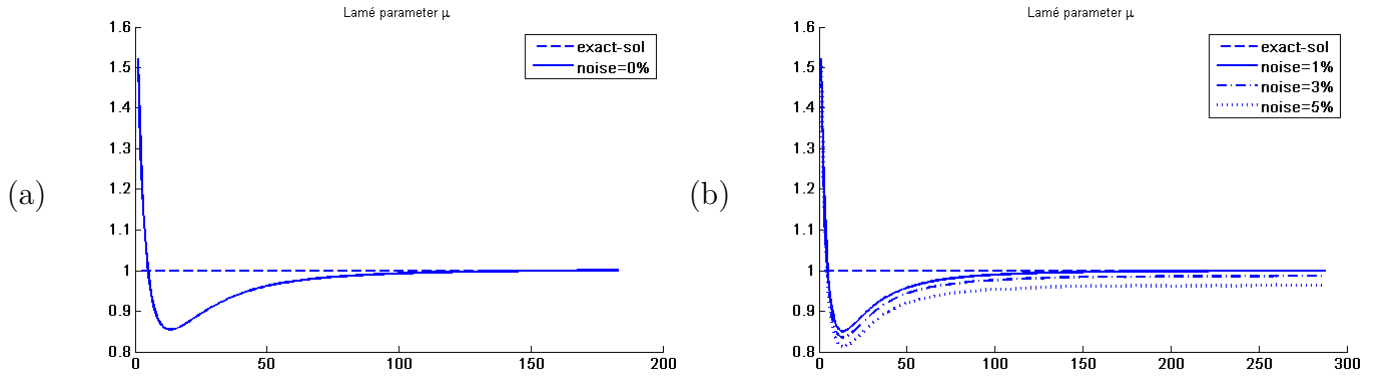


FIGURE 3.2 – Evolution du paramètre de lamé  $\mu$  au cours des itérations, (a) : sans bruit, (b) : avec 1%, 3% et 5% de bruit.

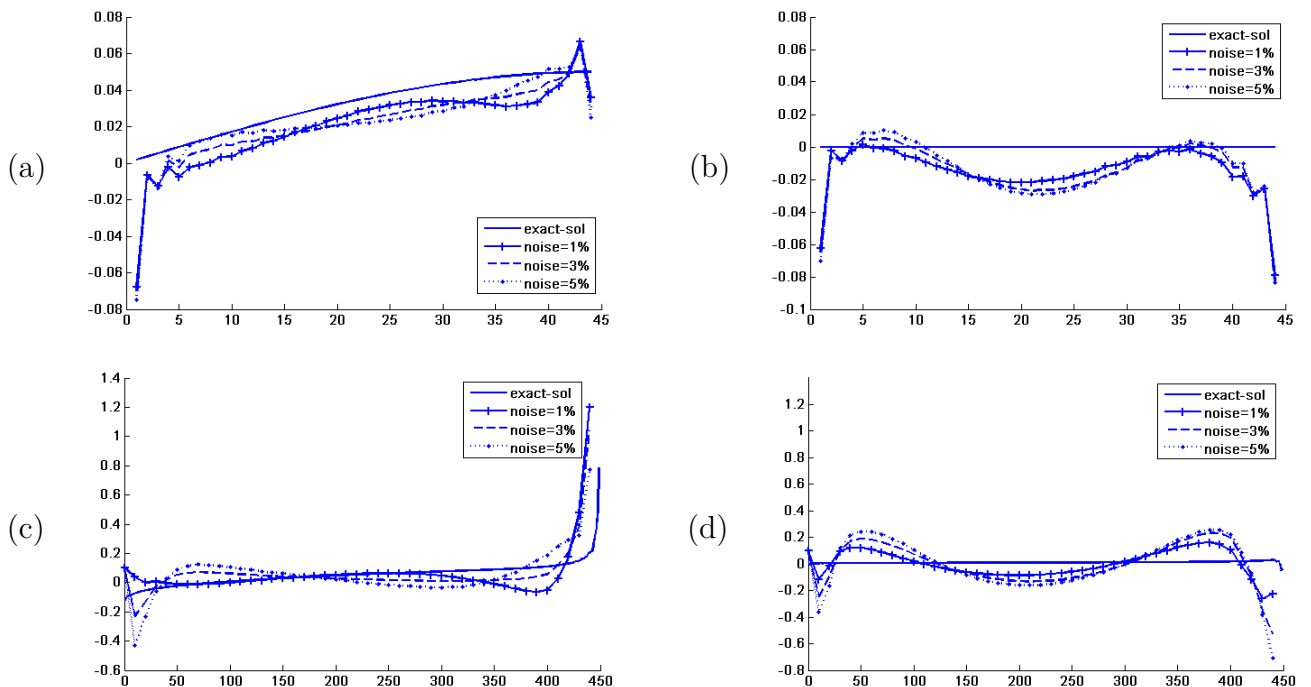


FIGURE 3.3 – **Reconstructions.** (a) : première composante du déplacement, (b) : deuxième composante de déplacement, (c) : première composante de la contrainte normale, (d) : deuxième composante de la contrainte normale sur  $\Gamma_i$  pour 1%, 3% et 5% de bruit.

Noise level	ERD	ERN	ER $\mu$
0%	3.1%	21.7%	0.055%
1%	3.1%	22.3%	0.069%
3%	3.2%	24.5%	1.36%
5%	3.3%	27.9%	3.64%

TABLE 3.1 – L’effet du taux de bruit des données de Cauchy sur les reconstructions : l’erreur des solutions reconstruites sur  $\Gamma_i$ , et l’erreur de la valeur estimée de  $\mu$  par rapport au taux de bruit.

### 3.5.2 Cas test 2

On considère ici le disque  $\Omega$  présenté auparavant. Les données de Cauchy  $(f, \phi)$  sont simulées numériquement par la résolution du problème (3.25). Notre but dans ce cas est de trouver le champ de déplacement  $\tau$  et la contrainte normale  $\eta$  sur  $\Gamma_i$ , ainsi que les deux paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\Omega$ . Comme estimation initiale, on choisit  $(\eta^0, \tau^0, \lambda^0, \mu^0) = (0.1, 0.1, 3, 2)$  et on rappelle que la valeur exacte des paramètres est  $(\lambda^{ex}, \mu^{ex}) = (2, 1)$ . Au cours du processus de minimisation de la fonctionnelle  $J_3$ , par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$ , on utilise un terme de régularisation de Tikhonov pour chaque paramètre (3.17). Pour régler l’influence de ces termes sur les reconstructions, on choisit la valeur de  $\alpha_1$  dans l’intervalle  $[4.10^{-3}, 4.5 \cdot 10^{-3}]$  et  $\alpha_2$  dans  $[7.5 \cdot 10^{-4}, 8.10^{-4}]$ .

La figure 3.4 présente les reconstructions du champ de déplacement et la contrainte normale sur  $\Gamma_i$ . À la convergence, les paramètres de Lamé reconstruits sont égaux à  $\lambda^{opt} = 2.01508$  et  $\mu^{opt} = 0.998809$ . Les courbes dans la figure 3.7 (a)(c) présentent l’évolution des paramètres au cours des itérations. Les résultats dans la figure 3.5 et la figure 3.7 (b)(d) montrent encore la stabilité de notre méthode en montrant les reconstructions pour des différents taux de bruit. Le couple  $(\lambda^{opt}, \mu^{opt})$  vaut  $(2.01472, 0.997512)$ ,  $(2.00556, 0.98427)$  et  $(1.98094, 0.960363)$  pour 1%, 3% et 5% de bruit respectivement. On collecte dans le tableau 3.2 différentes erreurs pour confirmer la robustesse de notre méthode. ERD, ERN et ER $\mu$  sont les mêmes erreurs définies précédemment et ER $\lambda$  est l’erreur du deuxième paramètre  $\lambda$  calculée de cette façon :

$$ER\lambda = \frac{\|\lambda^{opt} - \lambda^{ex}\|_2}{\|\lambda^{ex}\|_2}$$

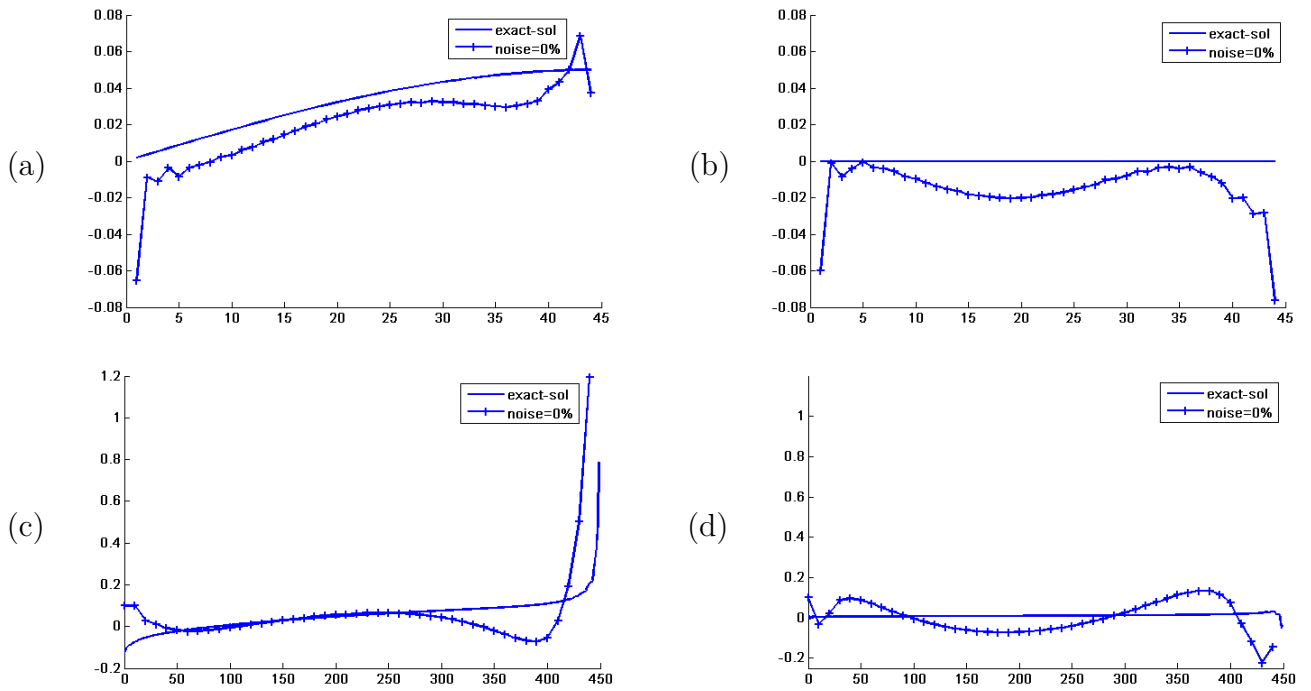


FIGURE 3.4 – **Reconstructions.** (a) : première composante du déplacement, (b) : deuxième composante de déplacement, (c) : première composante de la contrainte normale, (d) : deuxième composante de la contrainte normale sur  $\Gamma_i$  avec des données de Cauchy non bruitées.

Noise level	ERD	ERN	ER $\mu$	ER $\lambda$
0%	3.1%	21.7%	0.11%	0.75%
1%	3.1%	22.2%	0.24%	0.73%
3%	3.2%	24.9%	1.57%	0.27%
5%	3.2%	27%	3.96%	0.95%

TABLE 3.2 – L'effet du taux de bruit des données de Cauchy sur les reconstructions : l'erreur des solutions reconstruites sur  $\Gamma_i$ , et l'erreur de la valeur estimée de  $\lambda$  et  $\mu$  par rapport au taux de bruit.

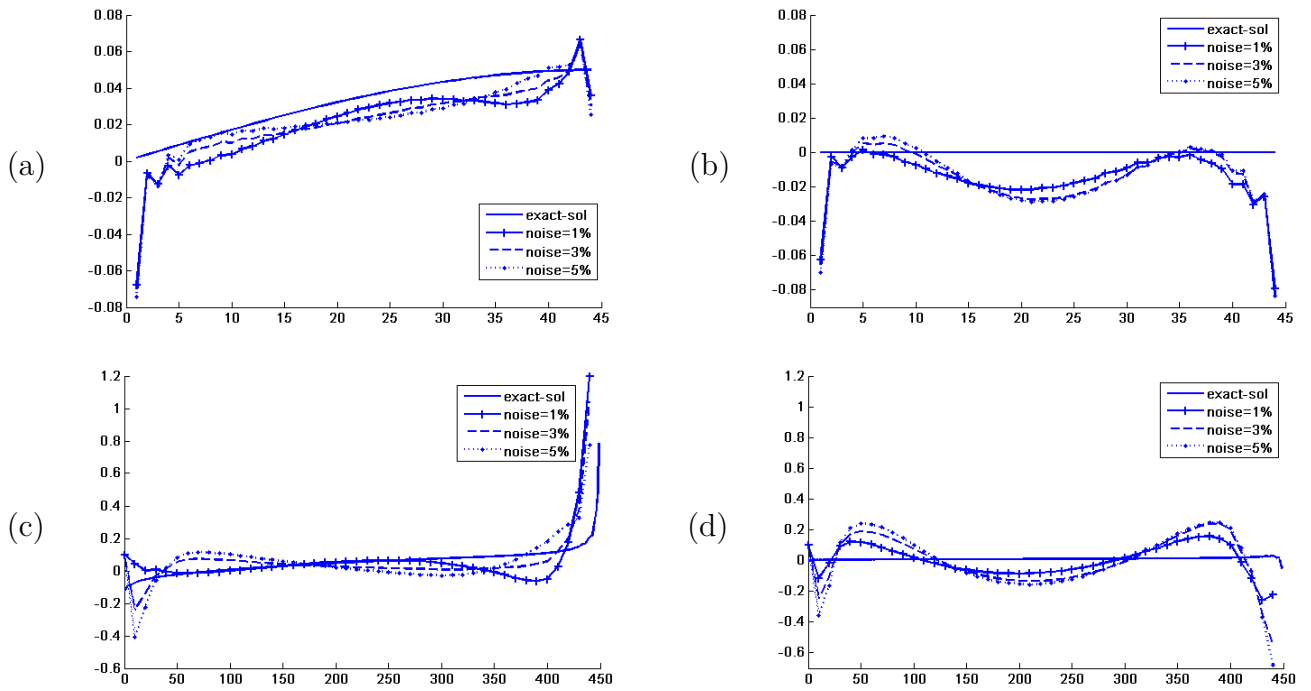


FIGURE 3.5 – **Reconstructions.** (a) : première composante du déplacement, (b) : deuxième composante de déplacement, (c) : première composante de la contrainte normale, (d) : deuxième composante de la contrainte normale sur  $\Gamma_i$  avec différent taux de bruit (1%, 3% et 5%).

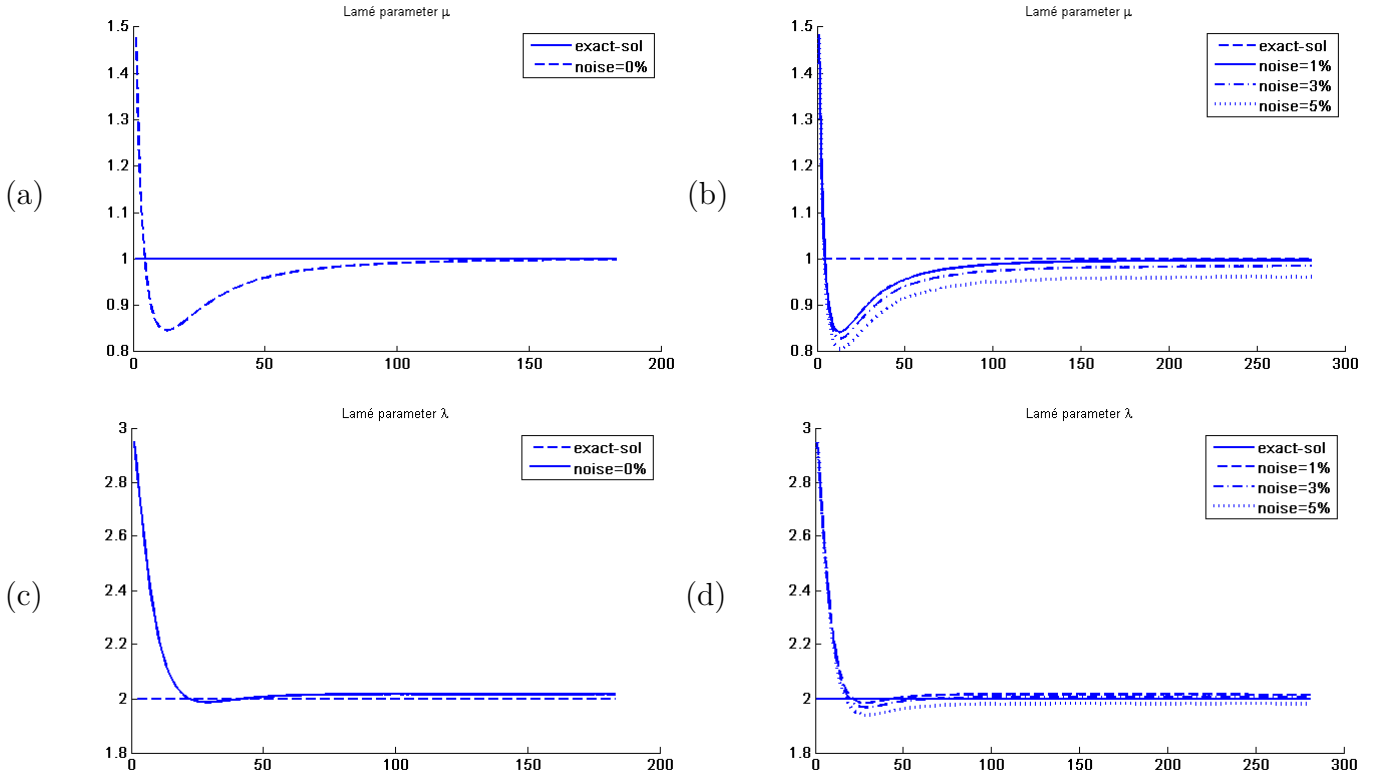


FIGURE 3.6 – Evolution des paramètres de lamé au cours des itérations, (a), (b) : évolution de  $\mu$  avec et sans bruit. (c), (d) : évolution de  $\lambda$  avec et sans bruit.

### 3.5.3 Cas test 3

Dans ce test, nous allons tester un autre domaine défini par une couronne  $\Omega$  entre le cercle extérieur de rayon 1 qui représente  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_i$  le cercle intérieur de rayon 0.5. Dans ce test, le paramètre  $\lambda$  est supposé connu, nous visons donc à déterminer le champ de déplacement  $\tau$  et la contrainte normale  $\eta$  sur  $\Gamma_i$ , ainsi que le paramètre  $\mu$  dans la couronne. Le domaine est discrétisé en utilisant 135 noeuds sur  $\Gamma_c$  et 45 noeuds sur  $\Gamma_i$ .

On considère une contrainte normale nulle sur la moitié supérieure de  $\Gamma_c$ , qu'on note  $\Gamma_{c1}$ . La moitié inférieure du cercle, notée  $\Gamma_{c2}$ , est encastrée, c'est à dire que le champ de déplacement sur cette partie est nul. Sur le bord  $\Gamma_i$ , nous avons la condition de Dirichlet  $g$ . Les données  $f$  et  $\phi$  sont générées par la résolution du problème (3.25) où les paramètres exacts  $(\lambda^{ex}, \mu^{ex})$  sont égaux à  $(2, 1)$ . Comme initialisation de l'algorithme, nous avons pris  $(\eta^0, \tau^0, \mu^0) = (0.1, 0.1, 2)$ . La figure 3.7 présente les reconstructions du champ de déplacement et de la contrainte normale sur  $\Gamma_i$ , comparées à la solution exacte pour des données non bruitées. On note que les champs reconstitués sont proches de la solution que l'on cherche à approcher, mais, on observe des perturbations au milieu des courbes et aux extrémités. Ces parties sont les plus proches des extrémités de  $\Gamma_{c1}$  et  $\Gamma_{c2}$ , où on a un changement des données. Le paramètre de Lamé

reconstruit  $\mu^{opt}$  vaut 1.0247 sachant que la valeur exacte  $\mu^{ex}$  est 1. Dans la figure 3.8, on montre l'évolution de  $\mu$  au cours des itérations. Nous souhaitons maintenant éprouver l'efficacité et la robustesse de notre procédure, nous introduisons sur les données des différents taux de bruit. Nous présentons dans la figure 3.9 les reconstructions du champ de déplacement et de contrainte normale sur  $\Gamma_i$  pour 1%, 3% et 5% de bruit. De même, on montre dans la figure 3.8 (b) le comportement du paramètre  $\mu$  au cours des itérations. À la convergence, ce paramètre vaut 1.03002, 1.00763 et 0.964721 respectivement pour les mêmes niveaux de bruit. Afin de confirmer les reconstructions obtenues, on a présenté dans le tableau 3.3 des valeurs de quelques erreurs pour des différents taux de bruit. Concernant le paramètre  $\alpha_1$ , la constante multipliée dans le terme de régularisation, on choisit une valeur dans l'intervalle  $[5.10^{-3}, 10^{-2}]$ .

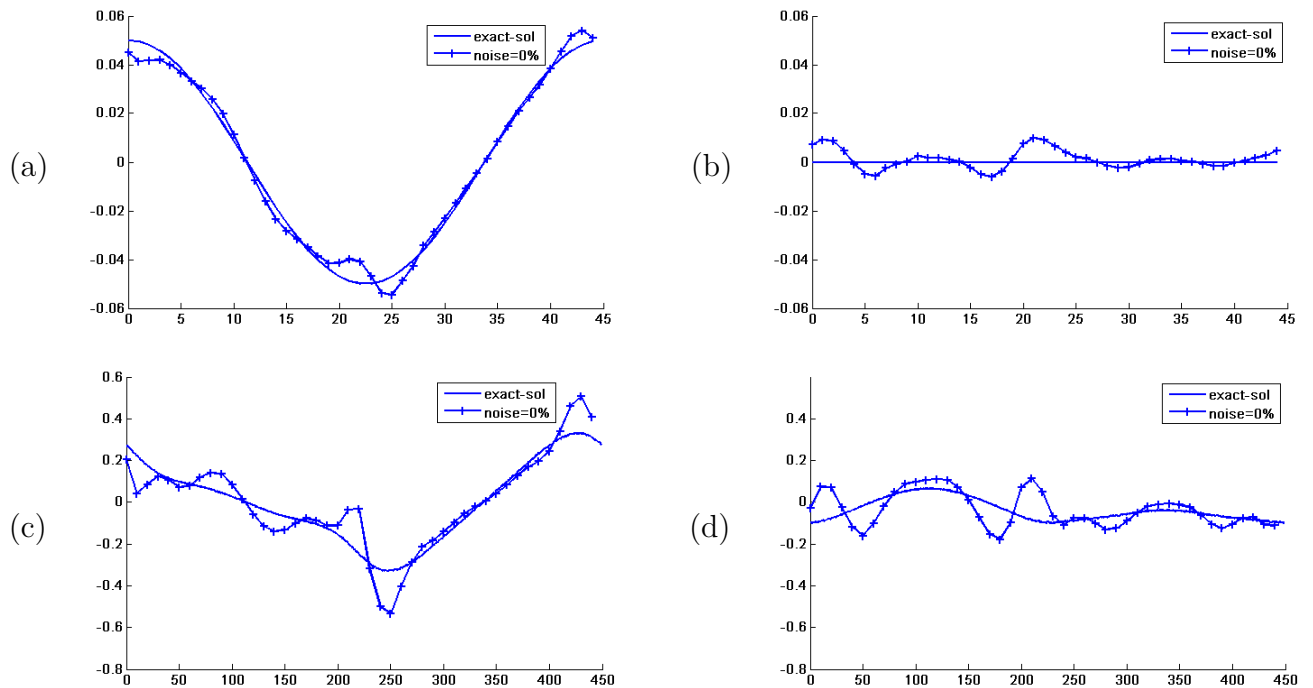


FIGURE 3.7 – **Reconstructions.** (a) : première composante du déplacement, (b) : deuxième composante de déplacement, (c) : première composante de la contrainte normale, (d) : deuxième composante de la contrainte normale sur  $\Gamma_i$  avec des données de Cauchy non bruitées.



Noise level	ERD	ERN	ER $\mu$
0%	0.96%	18.6%	2.9%
1%	1.4%	31.3%	3%
3%	1.5%	37.1%	0.7%
5%	1.6%	42.8%	3.2%

TABLE 3.3 – L’effet du taux de bruit des données de Cauchy sur les reconstructions : l’erreur des solutions reconstruites sur  $\Gamma_i$ , et l’erreur de la valeur estimée  $\mu$  par rapport au taux de bruit.

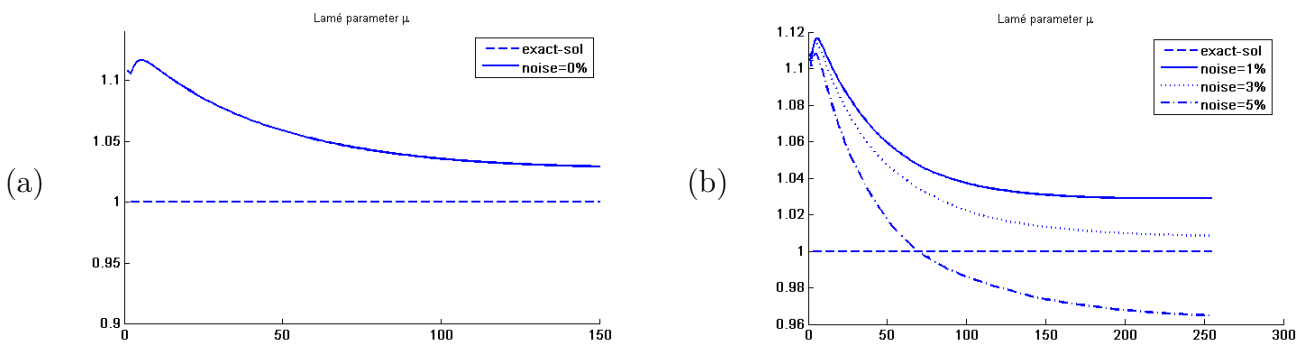


FIGURE 3.8 – Evolution de paramètre de lamé au cours des itérations, (a) : sans bruit, (b) : avec 1%, 3% et 5% de bruit.

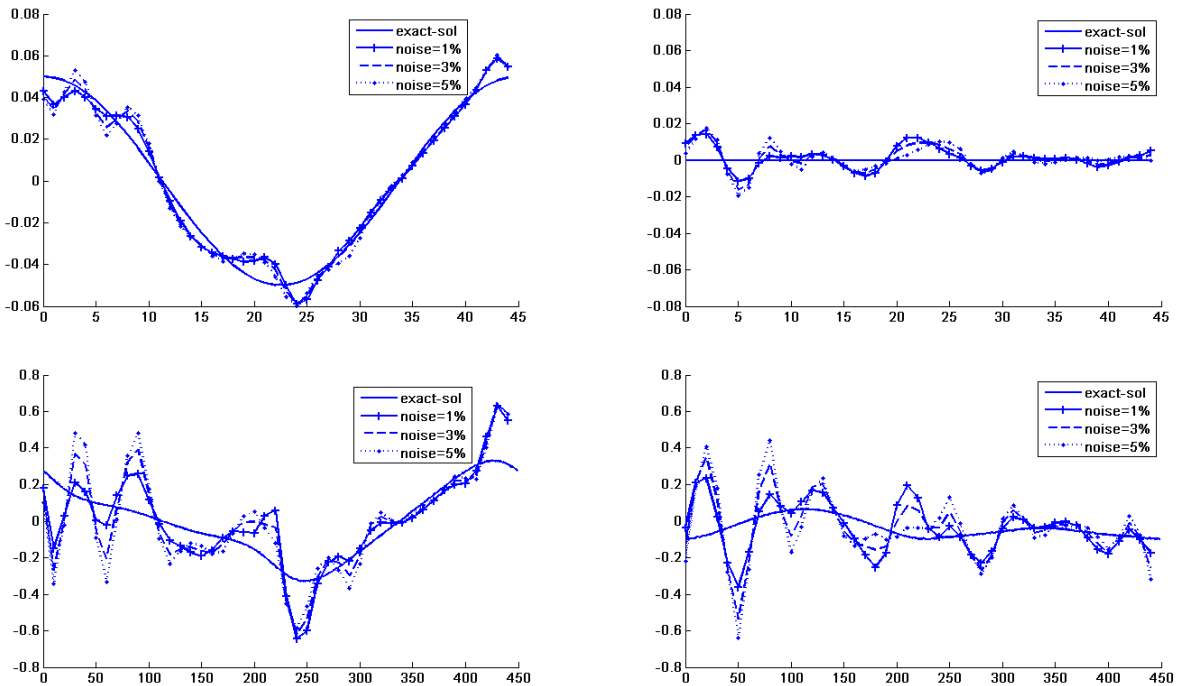


FIGURE 3.9 – **Reconstructions.** (a) : première composante du déplacement, (b) : deuxième composante de déplacement, (c) : première composante de la contrainte normale, (d) : deuxième composante de la contrainte normale sur  $\Gamma_i$  pour 1%, 3% et 5% de bruit.

## 3.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la méthode de jeu de Nash permettant de résoudre le problème de couplage de complétion des données et identification des paramètres de Lamé dans un matériau élastique isotrope en utilisant une seule mesure sur une partie du bord. Nous avons présenté l'algorithme et les fonctionnelles exploités. Nous avons réalisé trois tests numériques. Dans les deux premiers, le domaine est le disque unité. Nous avons considéré une configuration assurant l'identifiabilité du paramètre à partir des données incomplètes sur le bord selon le travail introduit dans [48]. Dans le troisième test,  $\Omega$  est une couronne limitée par  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_i$ . Les résultats dans les trois tests que nous avons obtenu sont satisfaisants pour la reconstruction du champ de déplacement, ce qui prouve l'efficacité de notre algorithme vis à vis des données bruitées. Par contre, nous n'avons pas réussi à trop améliorer les reconstructions des contraintes normales d'après le calcul de l'erreur  $ERN$  pour chaque test.

# Chapitre 4

## Complétion de données en thermoélasticité

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la complétion des données dans un cadre thermoélastique. Il s'agit de coupler la thermique avec l'élasticité afin de reconstruire des données manquantes. La thermoélasticité est utilisée dans un matériau élastique, à lequel, on applique des sollicitations d'origine thermique. Contrairement à l'élasticité, la thermoélasticité fait intervenir le champ de température qui cause la dilatation du milieu.

Dans notre travail, on s'intéresse au cas linéaire, le matériau est soumis à des petites perturbations. En effet, le tenseur des contraintes est linéairement lié au tenseur des déformations et au tenseur de dilatation thermique par une loi de comportement, s'appelle la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_T = C : (\varepsilon - \alpha T)$$

avec  $(:)$  est le produit tensoriel contracté.  $\sigma_T$  et  $\varepsilon$  sont le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations respectivement, ce sont deux tenseurs symétriques.  $\alpha$  est le tenseur de dilatation, il est aussi symétrique et  $T$  est le champ de température dans le matériau. Le tenseur  $C$  est le tenseur de rigidité, ces caractéristiques varient selon le type du matériau.

Nous considérons un domaine élastique isotrope, c'est à dire, ces propriétés physiques sont les mêmes suivant chaque direction. Dans ce cas, les composantes du tenseur de rigidité dépendent seulement de deux constantes qui sont les paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Dans le cas d'un milieu

tridimensionnel,  $C$  s'écrit sous cette forme :

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}$$

Le tenseur de dilatation s'écrit sous forme  $\alpha I$ , où  $I$  est le tenseur identité et  $\alpha$  est le coefficient de dilatation. La loi de Hooke en thermoélasticité linéaire isotrope en dimension 3, par exemple, est présentée par cette expression :

$$\sigma_T = C : \varepsilon - C : (\alpha TI) = \lambda \text{tr}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon - 3K\alpha TI, \quad (4.1)$$

avec  $\text{tr}$  est l'opérateur trace et  $K$  est le module de compressibilité élastique du matériau tel que :  $3K = 3\lambda + 2\mu$ .

Dans la littérature, nous pouvons trouver des travaux sur des problèmes inverses liés à l'opérateur de thermoélasticité. Par exemple, le travail de Ben Ameer et al [12] où un problème d'identification de cavité a été étudié en élasticité linéaire et en thermoélasticité. Les auteurs utilisent une formulation de moindres carrés pour la reconstruction à partir un champ de déplacement et de température sur une partie du bord. Nous pouvons citer aussi l'article de Andrieux et Bui [7] sur l'identification des fissures dans un cas tridimensionnel élastique isotrope et soumis à un chargement d'origine thermique. Le domaine contient une ou plusieurs fissures planes, le but de ce travail est de présenter un algorithme basé sur l'écart à la réciprocité pour déterminer seulement le plan porteur de la fissure. Dans ce chapitre, nous allons développer une approche de jeu de Nash pour la résolution du problème de complétion des données dans ce cadre.

## 4.2 Complétion de données en thermoélasticité

Nous considérons un domaine élastique isotrope  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d=2$  ou  $3$ , son bord  $\partial\Omega$  est divisé en deux parties non vides et disjointes  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_c$ . Rappelons que  $\Gamma_c$  est la partie du bord sur-abondante et  $\Gamma_i$  est la partie inaccessible aux mesures.

On applique un flux de chaleur  $\phi$  sur la partie  $\Gamma_c$ . À cause du phénomène de dilatation du matériau, un champ de déplacement se propage dans tout le domaine. Seule une mesure de ce champ sera considérée sur  $\Gamma_c$ , qu'on notera  $u^{mes}$ . En absence de chargement mécanique, la contrainte normale sera nulle sur cette partie. Notre objectif dans la suite est le suivant :

Connaissant les données de Cauchy ( $u^{mes}, F = 0$ ), écrire un algorithme de jeu de Nash permettant de retrouver des données manquantes sur  $\Gamma_i$  et le champ de température  $T$  dans  $\Omega$ .

Le problème direct dans ce cas est le suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_T(u)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \Delta T = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_T(u).n = 0, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \nabla T.n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_T(u).n = 0, & \text{sur } \Gamma_i, \\ \nabla T.n = 0, & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases}$$

Le problème inverse est le suivant :

Etant donné  $u^{mes}$  une donnée mesurée de  $u|_{\Gamma_c}$ , on cherche  $(u, T) \in \mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$  qui satisfait le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_T(u)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = u^{mes}, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_T(u).n = 0, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $\sigma_T$  est le tenseur des contraintes en thermoélasticité défini par :

$$\sigma_T = C : \varepsilon - C : (\alpha T I) = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon - \xi T I, \quad (4.3)$$

tel que  $\xi = D\alpha$ , où  $D = 2\lambda + 2\mu$  en  $2D$  (resp.  $3\lambda + 2\mu$  en  $3D$ ).

En utilisant cette dernière, on peut développer l'expression de l'équation d'équilibre  $\operatorname{div}(\sigma_T(u))$  et les conditions aux limites. La température  $T$  va apparaître comme un second membre, elle est considéré comme un terme source. Le problème de Cauchy peut être exprimer comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma(u)) = \operatorname{div}(\xi T I), & \text{dans } \Omega, \\ u = u^{mes}, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma(u).n = \xi T I.n, & \text{sur } \Gamma_c, \end{cases}$$

avec  $\sigma$  est le tenseur des contraintes en élasticité définie par (3.3).

### 4.2.1 Algorithme de reconstruction

On introduit deux sous problèmes dont les solutions sont  $u_1 := u_1(\eta, T)$  et  $u_2 := u_2(\tau, T)$  comme suit :

$$(SP1) \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_T(u_1)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = u^{mes}, & \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_T(u_1).n = \eta, & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases} \quad (SP2) \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_T(u_2)) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u_2 = \tau, & \text{sur } \Gamma_i, \\ \sigma_T(u_2).n = 0, & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (4.4)$$

Outre que les deux variables stratégiques  $\eta \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$  et  $\tau \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)$ , le champ de température  $T$  sera considéré comme une variable stratégique implicite, qui appartient à l'espace :

$$\mathcal{H} = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega); \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

On associe à ces trois variables stratégiques, un jeu composé par trois joueurs, qui considère respectivement les fonctionnelles coûts données par :

$$J_1(\eta, \tau, T) = \frac{1}{2} \|\sigma_T(u_1) \cdot n\|_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2$$

$$J_2(\eta, \tau, T) = \frac{1}{2} \|u_2 - u^{mes}\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_c)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i)}^2$$

$$J_3(\eta, \tau, T) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_T(u_1 - u_2) : \varepsilon(u_1 - u_2) + \frac{\delta}{2} \int_{\Gamma_c} (T - T^{mes})^2 d\Gamma_c, \quad \delta \geq 0$$

On considère un jeu de Nash dont les deux premiers joueurs contrôlent les variables  $\eta$  et  $\tau$  et minimisent les fonctionnelles  $J_1$  et  $J_2$  respectivement, le troisième joueur s'occupe du champ  $T$  qui va être la solution optimale d'un problème de minimisation de la fonctionnelle  $J_3$  sous la contrainte  $T \in \mathcal{H}$ . Notons que  $T^{mes}$  représente la température mesurée sur  $\Gamma_c$ . Si cette mesure n'est pas disponible, alors dans ce cas, on prend  $\delta = 0$ .

Les trois joueurs interagissent de façon compétitif pour la recherche d'un équilibre de Nash. On cherche alors un triplet  $(\eta_N, \tau_N, T_N) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i) \times \mathcal{H}$  qui assure un équilibre de Nash dans ce jeu. D'où l'algorithme suivant :

---

**Algorithm 3** Calcul de l'équilibre de Nash  $(\eta_N, \tau_N, T_N)$  du jeu de complétion des données en thermoélasticité.

---

Les paramètres utilisés :

$0 \leq t < 1$  : paramètre de relaxation.

$\rho > 0$  et  $\varepsilon > 0$  : tolérances d'arrêt.

Les initialisations :

Soit  $p = 0$  et  $M^p = (\eta^p, \tau^p)$  une estimation initiale.

Soit  $q = 0$  et  $T^q$  une estimation initiale dans  $\mathcal{H}$ .

**Étape 1** Calculer  $(\eta^{p+1}, \tau^{p+1})$ , solution de

1. Calculer  $\bar{\eta}^p$ , solution de  $\min_{\eta} J_1(\eta, \tau^p, T^q)$  et évaluer  $\eta^{p+1} = t\eta^p + (1-t)\bar{\eta}^p$ .
2. Calculer  $\bar{\tau}^p$ , solution de  $\min_{\tau} J_2(\eta^p, \tau, T^q)$  et évaluer  $\tau^{p+1} = t\tau^p + (1-t)\bar{\tau}^p$ .
3. Soit  $M^{p+1} = (\eta^{p+1}, \tau^{p+1})$ .

Retourner à 1 jusqu'à ce que la suite  $M^p$  converge. Comme un critère d'arrêt, on utilise :

$$\|M^{p+1} - M^p\| \leq \varepsilon$$


---

**Étape 2** Calculer  $T^{q+1}$ , solution de

$$\min_{T \in \mathcal{H}} J_3(\eta^{p+1}, \tau^{p+1}, T).$$

**Étape 3** Calculer  $\|u_2 - f\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_c)}$ .

Retourner à **Étape 1** si  $\|u_2 - f\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_c)} > \rho$ .

---

## 4.2.2 Approche de minimisation

L'algorithme est composé de deux étapes principales. Dans la première étape, on cherche les données manquantes sur  $\Gamma_i$  par la résolution de deux problèmes de minimisations de  $J_1$  et  $J_2$ . Dans la deuxième étape et après la dualisation de la contrainte (T harmonique), nous pourrons utiliser la méthode de Newton pour résoudre le système d'optimalité associé ou faire directement la minimisation par l'algorithme d'UZAWA.

Il s'agit de : pour  $\eta$  et  $\tau$  fixés,

$$\begin{cases} \min_T f(T) = J_3(\eta, \tau, T), \\ T \in \mathbb{H}^1(\Omega), \Delta T = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Le lagrangien associé à ce problème d'optimisation est de la forme : Pour  $T \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ ,

$$L(T, \lambda) = f(T) + \langle \lambda, c(T) \rangle,$$

avec  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange et  $c(T) = \Delta T$ . Notons que ce dernier est linéaire par rapport à T. Si on note par  $(T^*, \lambda^*)$  la solution optimale de ce problème, alors, elle vérifie le système d'optimalité d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} \nabla_T L(T, \lambda) = \nabla f(T) + c'(T)^* \lambda = 0, \\ \nabla_\lambda L(T, \lambda) = c(T) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

avec  $c'(T)^*$  est l'opérateur adjoint de la jacobienne  $c'(T)$ .

### Algorithme d'UZAWA

Cet algorithme consiste à chercher un point selle du Lagrangien. Le couple  $(T^*, \lambda^*)$  est la solution du problème d'optimisation :

$$L(T^*, \lambda^*) = \max_\lambda \min_T L(T, \lambda).$$

1. On choisit une estimation initiale  $(T^0, \lambda^0)$ .
2.  $T^{k+1}$  est la solution du problème :

$$\min_T L(T, \lambda)$$

3.  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \zeta_k c(T^k)$ , avec  $\zeta_k$  est un pas fixé numériquement.

### Algorithme de Newton

Le but de l'algorithme est de construire une suite  $(T^k, \lambda^k)$  qui converge vers une paire  $(T^*, \lambda^*)$  vérifiant l'équation d'optimalité (4.6).

1. On choisit une estimation initiale  $(T^0, \lambda^0)$ .
2. Si on note  $d_1^k$  et  $d_2^k$  deux directions de descentes :

$$\begin{cases} T^{k+1} = T^k + d_1^k \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + d_2^k \end{cases}$$

telles que  $(d_1^k, d_2^k)$  est la solution de l'équation de Newton :

$$\begin{pmatrix} \nabla_{TT}^2 L(T^k, \lambda^k) & c'(T^k)^* \\ c'(T^k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^k \\ d_2^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla J_3(T^k) + c'(T^k)^* \lambda^k \\ c(T^k) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Pour simplifier le système linéaire (4.7), on note  $\Upsilon_k := \lambda^k + d_2^k = \lambda^{k+1}$ . Alors, on cherche  $(d_1^k, \Upsilon_k)$  la solution de :

$$\begin{pmatrix} \nabla_{TT}^2 L(T^k, \lambda^k) & c'(T^k)^* \\ c'(T^k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^k \\ \Upsilon_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla J_3(T^k) \\ c(T^k) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

L'implémentation numérique de la méthode de Newton nécessite le développement du problème discret associé à (4.5). Nous considérons une discrétisation du domaine  $\Omega$  dont  $h$  est le paramètre de discrétisation correspondant à la taille maximale des éléments. Nous supposons que le domaine comporte  $N$  noeuds.

Soit  $V_h(\Omega)$  l'espace engendré par les fonctions affines par morceaux. On définit  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$  les fonctions de la base canonique de  $V_h(\Omega)$  et nous allons présenter une expression discrète associée au système (4.8). Soit une matrice  $A$  définie par quatres blocs :

$$A := \left( \begin{array}{c|c} H & C^T \\ \hline C & 0 \end{array} \right)$$

On note  $H = \nabla_{TT}^2 L(T^k, \lambda^k)$  dont ces coefficients  $(H_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  sont données par :

$$H_{ij} = \langle \nabla_{TT}^2 L(T^k, \lambda^k) \varphi_i, \varphi_j \rangle = d^2 f(T^k)(\varphi_i, \varphi_j).$$

On note  $C$  la matrice associée à  $c'(T^k)$ , ces coefficients  $(C_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  sont définis par :

$$C_{ij} = \langle c'(T^k) \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \Delta \varphi_i, \varphi_j \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi_i \cdot n \varphi_j \, d\partial\Omega.$$

L'adjoint de la matrice  $C$  est présenté par la matrice transposé  $C^T$ . Le dernier bloc de  $A$  est la matrice nulle de taille  $N$ .



Le second membre est un vecteur composé de deux sous vecteurs  $B_1$  et  $B_2$  de longueur  $N$ . Les coefficients de  $B_1$  sont  $(b_i^1)_{1 \leq i \leq N}$  tel que :

$$b_i^1 = df(T^k) \cdot \varphi_i = \langle \nabla f(T^k), \varphi_i \rangle_{1 \leq i \leq N}.$$

Le deuxième sous vecteur  $B_2 = (b_i^2)_{1 \leq i \leq N}$  :

$$b_i^2 = \langle \Delta T^k, \varphi_i \rangle_{1 \leq i \leq N} = - \int_{\Omega} \nabla T^k \nabla \varphi_i \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla T^k \cdot n \varphi_i \, d\partial\Omega.$$

La solution de ce système linéaire est un vecteur de longueur  $2N$ , composé de la première direction de descente  $d_1^k$  et le vecteur  $\Upsilon_k$ .

Les calculs des dérivées nécessaires seront présentés dans les propositions suivantes :

### Proposition 4.2.1

Les deux dérivées partielles de  $J_1$  et  $J_2$  par rapport à  $\eta$  et  $\tau$  sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_1}{\partial \eta}(\eta, \tau) \cdot \xi = - \int_{\Gamma_i} \lambda_1 \xi \, d\Gamma_i, \quad \forall \xi \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_i) \\ \text{avec } \lambda_1 \in W_1 = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\Gamma_c} = 0\}, \text{ solution de ce problème adjoint :} \\ \int_{\Omega} \sigma(\lambda_1) : \varepsilon(\gamma) = - \int_{\Gamma_c} (\sigma_T(u_1) \cdot n) \sigma(\gamma) \cdot n \, d\Gamma_c - \int_{\Gamma_i} (u_1 - \tau) \gamma \, d\Gamma_i, \quad \forall \gamma \in W_1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_2}{\partial \tau}(\eta, \tau) \cdot h = \int_{\Gamma_i} (\sigma(\lambda_2) \cdot n - (u_1 - \tau)) h \, d\Gamma_i, \quad \forall h \in \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_i) \\ \text{tel que } \lambda_2 \in \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ solution de ce problème adjoint :} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\sigma(\lambda_2)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \lambda_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \sigma(\lambda_2) \cdot n = u^{mes} - u_2 & \text{sur } \Gamma_c. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### Preuve

Les démarches du calcul sont identiques avec la proposition (3.4.1).

### Proposition 4.2.2

Les différentielles première et seconde de  $L(T, \lambda)$  sont les suivantes :

$$i) \frac{\partial L}{\partial T}(T, \lambda) \cdot \varphi = \int_{\Omega} \operatorname{div}(D\alpha\varphi I) v_1 + \int_{\Omega} \operatorname{div}(D\alpha\varphi I) v_2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha\varphi I : \varepsilon(u_1 - u_2) \, d\Omega \\ - \int_{\Gamma_i} D\alpha\varphi I n v_1 \, d\Gamma_i - \int_{\Gamma_c} D\alpha\varphi I n v_2 \, d\Gamma_c - \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \lambda \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi \cdot n \lambda \, d\partial\Omega$$

$\forall \varphi \in \mathcal{H}$  tel que  $v_1 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_c}^1(\Omega)$  et  $v_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma(v_1) : \varepsilon(\gamma_1) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\gamma_1) : \varepsilon(u_1 - u_2) \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_T(u_1 - u_2) : \varepsilon(\gamma_1) \, d\Omega, \quad \forall \gamma_1 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_c}^1(\Omega), \\ \text{et} \\ \int_{\Omega} \sigma(v_2) : \varepsilon(\gamma_2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(u_1 - u_2) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_T(u_1 - u_2) : \varepsilon(\gamma_2) \, d\Omega, \quad \forall \gamma_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega). \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 ii) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial T^2}(T, \lambda)(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}(T)(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(D\alpha\varphi_2 I)\xi_1 \, d\Omega - \int_{\Gamma_i} D\alpha\varphi_2 I n \xi_1 \, d\Gamma_i \\
 &+ \int_{\Omega} \operatorname{div}(D\alpha\varphi_2 I)\xi_2 \, d\Omega - \int_{\Gamma_c} D\alpha\varphi_2 I n \xi_2 \, d\Gamma_c - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha\varphi_2 I : \varepsilon(\gamma_1) \, d\Omega \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha\varphi_2 I : \varepsilon(\gamma_2) \, d\Omega
 \end{aligned}$$

$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  tel que  $(\xi_1, \xi_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_c}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_{0,\Gamma_c}^1(\Omega) \times \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega)$  sont solutions des problèmes adjoints suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Omega} \sigma(\xi_1) : \varepsilon(w_1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha\varphi_1 I : \varepsilon(w_1) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\gamma_1) : \varepsilon(w_1) \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(w_1) : \varepsilon(\gamma_1) \, d\Omega \\
 \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(w_1) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(w_1) : \varepsilon(\gamma_2) \, d\Omega, \quad \forall w_1 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_c}^1(\Omega), \\
 \int_{\Omega} \sigma(\xi_2) : \varepsilon(w_2) = \frac{-1}{2} \int_{\Omega} D\alpha\varphi_1 I : \varepsilon(w_2) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\gamma_1) : \varepsilon(w_2) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(w_2) : \varepsilon(\gamma_1) \, d\Omega \\
 \quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(w_2) \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(w_2) : \varepsilon(\gamma_2) \, d\Omega, \quad \forall w_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega), \\
 \int_{\Omega} \sigma(\gamma_1) : \varepsilon(h_1) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(D\alpha\varphi_1 I)h_1 \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} D\alpha\varphi_1 I n h_1 \, d\Gamma_i, \quad \forall h_1 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_c}^1(\Omega), \\
 \text{et} \\
 \int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(h_2) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(D\alpha\varphi_1 I)h_2 \, d\Omega + \int_{\Gamma_c} D\alpha\varphi_1 I n h_2 \, d\Gamma_c, \quad \forall h_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega).
 \end{array} \right.$$

### Preuve

Le Lagrangien est défini par :

$$L(T, \lambda) = f(T) - \int_{\Omega} \nabla T \nabla \lambda \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla T \cdot n \lambda \, d\partial\Omega$$

Pour une direction  $\varphi \in \mathcal{H}$ , la dérivée de  $L$  par rapport à  $T$  est la suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial T}(T, \lambda) \cdot \varphi = \frac{\partial f}{\partial T}(T) \cdot \varphi - \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \lambda \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi \cdot n \lambda \, d\partial\Omega$$

On commence par le calcul de  $\frac{\partial f}{\partial T}(T) \cdot \varphi$  par la méthode de l'état adjoint, on définit le Lagrangien suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(T, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3) &= \int_{\Omega} \sigma_T(u_1 - u_2) : \varepsilon(u_1 - u_2) \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma(u_1) : \varepsilon(v_1) \, d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega} \operatorname{div}(D\alpha T I)v_1 \, d\Omega - \int_{\Gamma_i} \eta v_1 \, d\Gamma_i - \int_{\Gamma_i} D\alpha T I n v_1 \, d\Gamma_i \\
 &+ \int_{\Omega} \sigma(u_2) : \varepsilon(v_2) \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div}(D\alpha T I)v_2 \, d\Omega - \int_{\Gamma_c} D\alpha T I n v_2 \, d\Gamma_c.
 \end{aligned}$$

La différentielle de  $f$  par rapport à  $T$  vaut :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial T}(T) \cdot \varphi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u'_1 - u'_2) : \varepsilon(u_1 - u_2) \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha\varphi I : \varepsilon(u_1 - u_2) \, d\Omega \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_T(u_1 - u_2) : \varepsilon(u'_1 - u'_2) \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

avec  $u'_1 = \frac{\partial u_1}{\partial T} \cdot \varphi$  et  $u'_2 = \frac{\partial u_2}{\partial T} \cdot \varphi$ .

Les dérivées du Lagrangien par rapport à chaque variable est nulle. On dérive  $\mathcal{L}$  par rapport à  $u_1$ ,  $\forall \gamma_1 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_c}^1$  :

$$\int_{\Omega} \sigma(\gamma_1) : \varepsilon(v_1) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\gamma_1) : \varepsilon(u_1 - u_2) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha TI : \varepsilon(\gamma_1) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_1 - u_2) \varepsilon(\gamma_1) d\Omega \quad (4.10)$$

En particulier, pour  $\gamma_1 = u'_1$  :

$$\int_{\Omega} \sigma(u'_1) : \varepsilon(v_1) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u'_1) : \varepsilon(u_1 - u_2) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha TI : \varepsilon(u'_1) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_1 - u_2) \varepsilon(u'_1) d\Omega \quad (4.11)$$

De la même façon, on dérive le Lagrangien par rapport à  $u_2$  appliqué à une direction  $\gamma_2 \in \mathbb{H}_{0,\Gamma_i}^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(v_2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\gamma_2) : \varepsilon(u_1 - u_2) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha TI : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_1 - u_2) : \varepsilon(\gamma_2) d\Omega \quad (4.12)$$

En particulier, pour  $\gamma_2 = u'_2$  :

$$\int_{\Omega} \sigma(u'_2) : \varepsilon(v_2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u'_2) : \varepsilon(u_1 - u_2) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha TI : \varepsilon(u'_2) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u_1 - u_2) : \varepsilon(u'_2) d\Omega \quad (4.13)$$

$u_1$  est la solution du problème direct (SP1). Si on dérive formellement sa formulation variationnelle par rapport à  $T$  et pour le champ test  $v_1$ , nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \sigma(u'_1) : \varepsilon(v_1) d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(D\alpha\varphi I)v_1 d\Omega = \int_{\Gamma_i} D\alpha\varphi I n v_1 d\Gamma_i \quad (4.14)$$

De la même façon, nous obtenons la formulation variationnelle de  $u'_2$  :

$$\int_{\Omega} \sigma(u'_2) : \varepsilon(v_2) d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(D\alpha\varphi I)v_2 d\Omega = \int_{\Gamma_c} D\alpha\varphi I n v_2 d\Gamma_c \quad (4.15)$$

D'après (4.11), (4.15), (4.14) et (4.15), on déduit l'expression de  $\frac{\partial f}{\partial T}(T) \cdot \varphi$  est de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial T}(T) \cdot \varphi &= \int_{\Omega} \text{div}(D\alpha\varphi I)v_1 d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(D\alpha\varphi I)v_2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\alpha\varphi I : \varepsilon(u_1 - u_2) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_i} D\alpha\varphi I \cdot n v_1 d\Gamma_i - \int_{\Gamma_c} D\alpha\varphi I \cdot n v_2 d\Gamma_c \end{aligned}$$

tel que  $v_1$  et  $v_2$  sont les solutions des problèmes adjoints : (4.10) et (4.12). On déduit, ensuite, l'expression de  $\frac{\partial L}{\partial T}(T, \lambda) \cdot \varphi$ .

Le terme  $\langle \lambda, c(T) \rangle$  est linéaire par rapport à  $T$ , alors,  $\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}(T, \lambda) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}(T) \cdot (\varphi_1, \varphi_2)$ . De la même façon, nous appliquons la méthode de l'état adjoint pour le calcul de  $\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}(T) \cdot (\varphi_1, \varphi_2)$ .

### 4.2.3 Expérience numérique

Nous allons considérer comme test numérique, un problème lié à l'identification de fissures en thermoélasticité. Andrieux et Bui [7] ont étudié le cas d'un solide tridimensionnel qui contient une ou plusieurs fissures planes et ils ont donné des formules explicites permettant de trouver le plan porteur des fissures. Dans ce travail, les auteurs ont considéré un domaine en 3D élastique homogène isotrope et soumis à un chargement d'origine thermique. Le domaine contient une ou plusieurs fissures portées par un même plan. Ils supposent que le champ de déplacement et la force sont disponibles sur le bord. Le flux imposé et la température sont supposés *inconnus*. Les auteurs ont présenté dans ce cas un algorithme basé sur l'écart à la réciprocité permet de déterminer le plan hôte du fissure.

On note par  $\Sigma$  une fissure incluse dans  $\Omega$ , tel que  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$  sont respectivement les lèvres supérieure et inférieure de la fissure. L'idée dans notre travail consiste à diviser le domaine  $\Omega$  en deux sous domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

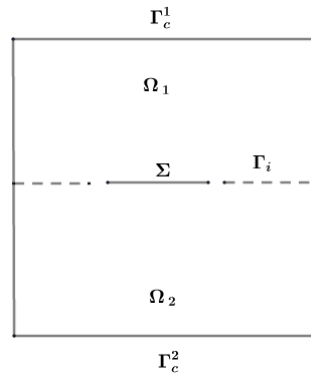


FIGURE 4.1 – Domaine divisé en deux parties

Le bord de  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2$ , est divisé en deux parties  $\Gamma_c^j$  et  $\Gamma_i$ , où  $\Gamma_i$  est la droite (ou le plan) de la fissure qui contient les lèvres  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$  et  $\Gamma_c^j = \partial\Omega_j \cap \partial\Omega$  (voir figure (4.1)).

Notre procédure consiste à appliquer l'approche de complétion des données présentée dans la section (4.2.2), dans les deux sous domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  afin de reconstruire les champs de déplacements et de température sur  $\Gamma_i$ .

Si on note  $\tau_N^1$  et  $\tau_N^2$  les champs de déplacement reconstruits sur  $\Gamma_i$  de côté  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement et de même,  $T_N^1$  et  $T_N^2$  les températures reconstruites.

La localisation de la fissure sur le plan  $\Gamma_i$  est donc déterminé par le support des fonctions saut associés aux champ du déplacement et la température sur  $\Gamma_i$ . Il suffit de considérer le support de la fonction :

$$\psi = \beta[\tau_N] + (1 - \beta)[T_N],$$

où  $\beta \in [0, 1]$ ,  $[\tau_N] = \tau_N^1 - \tau_N^2$  et  $[T_N] = T_N^1 - T_N^2$ .

Dans un premier temps, nous présentons un test numérique simplifié dans le cadre  $2D$  concernant l'identification de fissure. On suppose que le domaine est un carré de longueur 2 tel que une fissure  $\Sigma$  est située sur l'axe des abscisses d'extrémités  $[-0.5, 0.5]$  (Figure (4.1)). Un flux de chaleur est imposé sur le bord extérieur du carré vérifiant la condition de compatibilité  $\int_{\Omega} \phi = 0$ , on choisit :

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{sur } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } -1 < x < 1 \text{ et } y = -1\}, \\ -1, & \text{sur } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } -1 < x < 1 \text{ et } y = 1\}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la simulation des données de Cauchy sur  $\Gamma_c$ , on résout le problème direct :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma_T(u)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Delta T = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_T(u).n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \nabla T.n = \phi & \text{sur } \partial\Omega, \\ u = g & \text{sur } \Sigma, \\ \nabla T.n = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $\partial\Omega$  est le bord extérieur du carré et  $g$  est le champ de déplacement sur la fissure qui vaut

$$g = \begin{pmatrix} x + y \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

La température  $T$  est unique dès qu'on ajoute la condition de normalisation ( $\int_{\partial\Omega} T = 0$ ). Dans ce test, notre procédure consiste à déterminer à partir ( $u^{mes}, \phi, T^{mes}$ ) les données manquantes sur la droite porteuse de la fissure puis identifier sa position. Nous avons divisé le domaine  $\Omega$  en deux sous domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (Figure 4.1). Dans  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ), la droite porteuse de la fissure est la partie  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } -1 < x < 1 \text{ et } y = 0\}$ . Elle joue le rôle de  $\Gamma_i^1$  (resp.  $\Gamma_i^2$ ) et  $\Gamma_c^1$  (resp.  $\Gamma_c^2$ ) est le reste du bord où les données sont disponibles. Dans ce test, notre variable stratégique  $T^j$ ,  $j = 1, 2$ , est supposé solution du problème (SP3) suivant :

$$(SP3) \begin{cases} \Delta T^j = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla T.n = \phi, & \text{sur } \Gamma_c^j, \\ T^j = \theta^j, & \text{sur } \Gamma_i^j. \end{cases} \quad (4.17)$$

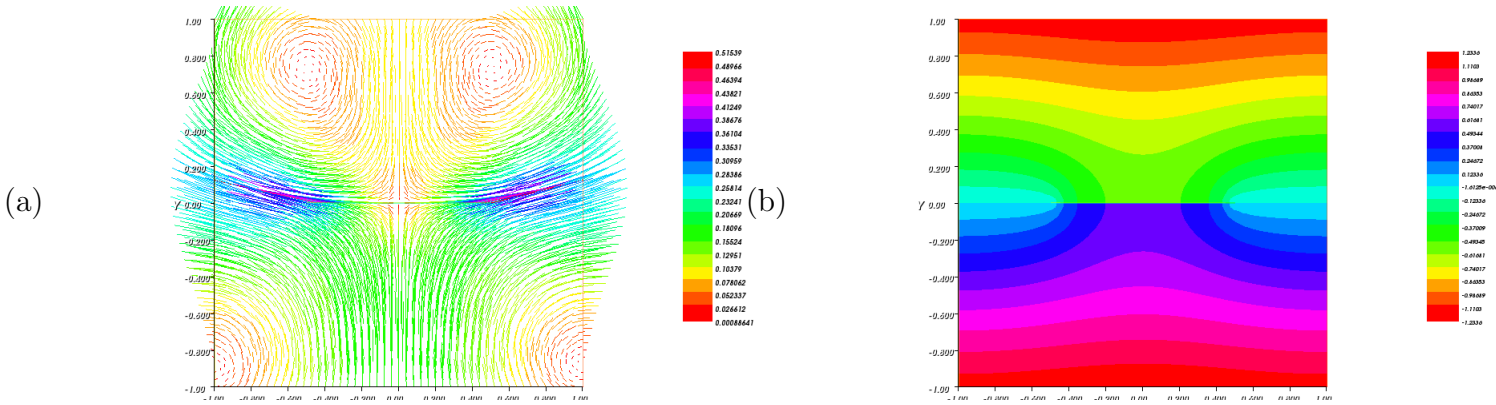
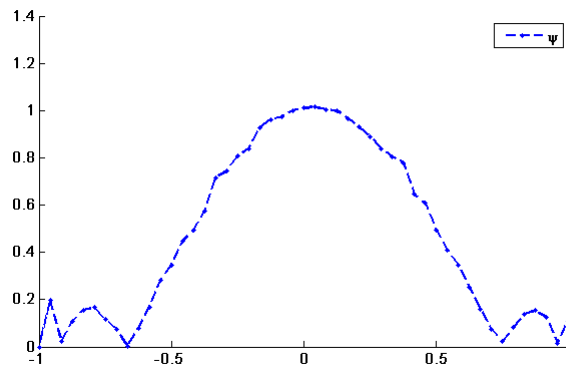


FIGURE 4.2 – Les isovaleurs du champ de déplacement et de température.

FIGURE 4.3 – Le saut de la fonction  $\psi$ .

La figure (4.2) représente les isovaleurs du vecteur déplacement et de la température dans le domaine  $\Omega$ . La discontinuité de ces champs est apparait à travers la fissure. Nous avons utilisé la méthode de gradient à pas fixe pour la minimisation des trois fonctionnelles  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  avec un pas qui vaut 0.1. Comme estimation initiale, nous choisissons  $(\eta^{j,0}, \tau^{j,0}, \theta^{j,0}) = (0, 0, 0)$ ,  $j = 1, 2$ . Dans la figure (4.4), nous avons présenté le résultat de reconstruction des deux composantes du champ de déplacement et contrainte normale, ainsi que la température sur  $\Gamma_i^1$ . Nous avons exploité aussi l'algorithme de Nash pour la reconstruction des mêmes champs sur  $\Gamma_i^2$ .

La fissure  $\Sigma$  est de coordonnées  $x \in [-0.5, 0.5]$  et  $y = 0$ . Nous avons tracé la fonction saut  $\psi$  dans la figure (4.3). D'après le support de cette dernière, la fissure reconstruite est d'extrémités  $[-0.58, 0.6]$ , après élimination des petites perturbations. Alors, notre algorithme permet d'identifier la position de la fissure dans le domaine.

L'objectif principal du test numérique sera le cas où la mesure du flux de chaleur est supposée non disponible. Dans ce cas, le but sera la reconstruction du champ de déplacement, la

contrainte normale sur  $\Gamma_i$  et la température  $T$  dans le domaine à partir des mesures mécaniques sur le bord  $\Gamma_c$ . Ce travail est en cours d'implémentation.

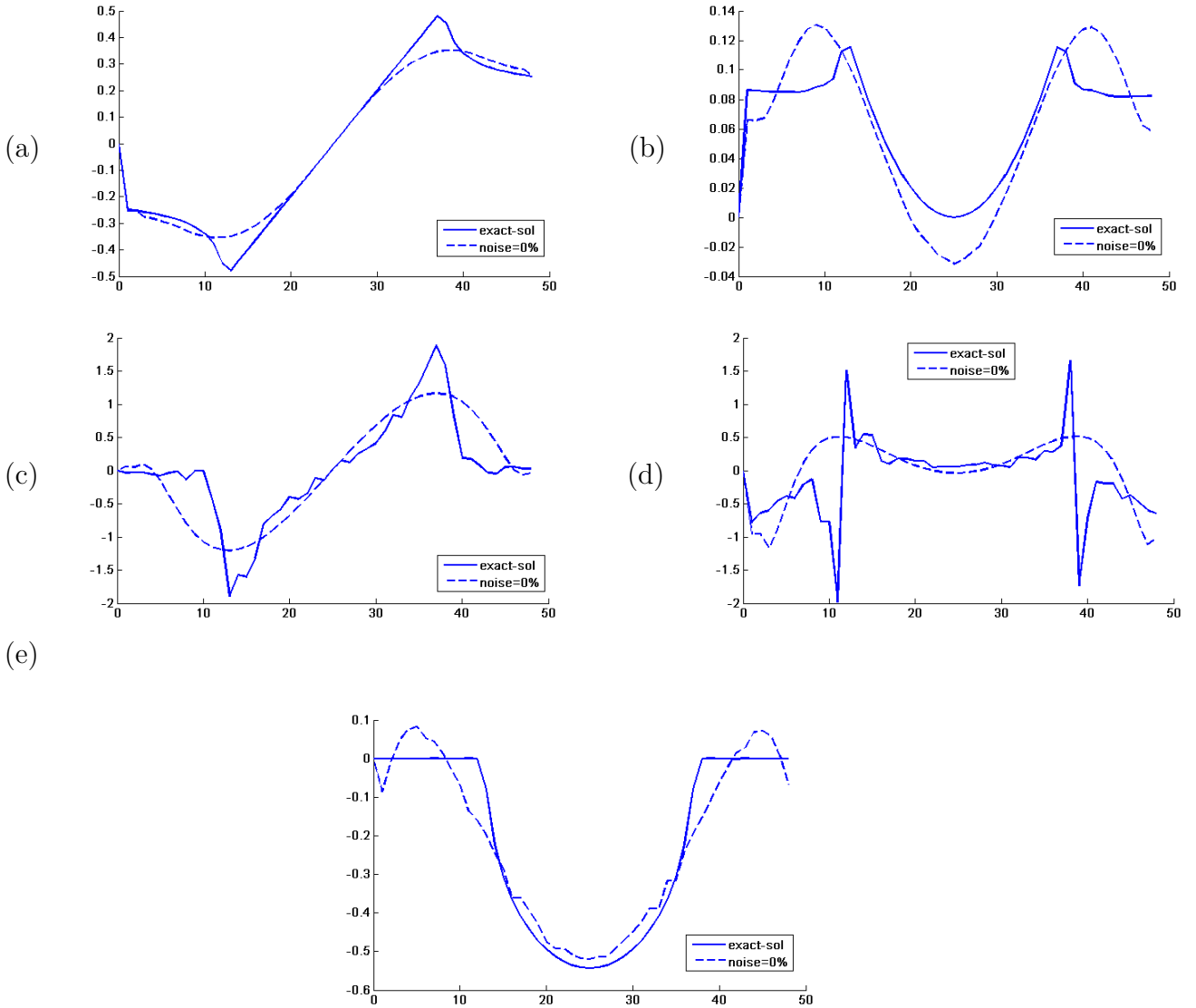


FIGURE 4.4 – (a) Première composante du déplacement reconstruit sur  $\Gamma_i^1$ , (b) deuxième composante du déplacement reconstruit sur  $\Gamma_i^1$ , (c) première composante du contrainte normale reconstruite sur  $\Gamma_i^1$ , (d) deuxième composante du contrainte normale reconstruite sur  $\Gamma_i^1$  et (e) température reconstruite sur  $\Gamma_i^1$ .

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons posé le problème de complétion des données pour le cas de la thermoélasticité isotrope. Nous avons présenté le problème inverse ainsi que les fonctionnelles considérées dans un jeu de Nash défini dans un cadre multidisciplinaire. Nous avons développé

l'approche de minimisation pour la recherche des inconnus dans le cas où un champ de déplacement et une force nulle sont disponibles sur le bord du matériau. Numériquement, nous avons testé un exemple simplifié de détection de fissure en utilisant des mesures mécaniques et thermiques sur le bord accessible du domaine. Les résultats obtenus sont satisfaisants. Une perspective de ce travail est la localisation des fissures en utilisant seulement des mesures mécaniques.



# Conclusion générale

Au cours de cette thèse, nous avons porté notre intérêt à la résolution du problème de couplage de complétion des données et identification des paramètres. Le problème de Cauchy est un problème d'identification des conditions aux limites sur une partie du bord à partir des données surabondantes sur la partie restante. L'identification des paramètres est un problème de détermination du paramètre de système. Ces deux problèmes sont connus pour être mal posés au sens d'Hadamard. Il y a une littérature théorique et numérique foisonnante pour l'approximation de la solution. Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques exemples de ces travaux.

Dans notre travail, nous avons utilisé la théorie des jeux pour la résolution de notre problème inverse. Cette théorie est efficace pour résoudre le problème d'optimisation multicritères d'après Périaux et al [60, 61]. Elle s'intéresse aux interactions des joueurs. Dans les jeux de Nash, ces derniers interagissent parallèlement où chacun fixe comme objectif la minimisation d'un critère.

Dans le deuxième chapitre, nous avons appliqué notre stratégie sur la résolution du problème de couplage de complétion des données et identification de conductivité en électrocardiographie. Dans [32], l'approche de jeu de Nash a été développée pour la résolution du problème de complétion des données pour l'opérateur de Laplace. Nous avons adapté la même méthode dans notre travail. On a décrit le problème inverse, et ensuite les trois critères à minimiser par les trois joueurs. On a évoqué la question d'identifiabilité de la conductivité. On a montré l'unicité de ce paramètre en utilisant seulement les données de Cauchy sur une partie du bord. L'algorithme de jeu de Nash a été présenté, il est composé de deux étapes principales. Dans la première étape, les deux premiers joueurs résolvent un problème de complétion des données avec une conductivité fixée, puis, le troisième joueur minimise une fonctionnelle de Kohn-Vogelius pour la recherche du paramètre de conductivité dans la deuxième étape. Nos expériences numériques ciblent les applications médicales d'électrocardiographie. Nous avons considéré un thorax comme un domaine, tel que chaque partie est caractérisée par une conductivité. Le bord extérieur du thorax est la partie où les données de Cauchy sont disponibles et le bord du coeur est considéré comme une partie inaccessible. Trois tests numériques ont été effectués. Dans les deux premiers tests, nous avons appliqué notre procédure dans un thorax bidimensionnel et dans le troisième, nous avons considéré un thorax tridimensionnel. Notre

stratégie a fournit des résultats prometteurs, en particulier, lorsque les données de Cauchy sont bruitées.

Dans le troisième chapitre, nous avons appliqué la stratégie des jeux pour la résolution du problème de couplage en élasticité linéaire. L'identifiabilité des paramètres est un problème difficile à étudier, où de nombreux chercheurs ont montré des différents pistes de résolution. En utilisant un article de Z. lin [48], on a extrait des conditions particulières pour assurer l'unicité des paramètres de Lamé. L'algorithme de jeu de Nash pour la résolution du problème de couplage a été implémenté avec la méthode de gradient à pas fixe dans l'étape de complétion des données et la méthode de Newton a été exploitée pour l'identification des paramètres. Trois tests numériques ont été présentés. Dans chacun, nous avons précisé le domaine et les conditions surabondantes sur le bord. Les reconstructions trouvées sont satisfaisantes pour les différents taux de bruit.

Dans la dernière partie du travail, nous avons couplé la thermique et l'élasticité pour la résolution du problème de complétion des données en thermoélasticité. Nous avons considéré un domaine élastique à lequel nous appliquons un flux thermique. Le problème inverse de complétion des données a été présenté. L'approche de jeu de Nash a été exploitée pour la résolution en connaissant un déplacement et un flux nul sur une partie accessible du bord. Les trois joueurs se sont engagés à chercher les données manquantes sur le bord et un champ de température harmonique dans le domaine. Ensuite, nous avons exploité ces reconstructions pour résoudre le problème d'identification de fissure en thermoélasticité. En connaissant le plan porteur de la fissure et le champ de déplacement sur la surface extérieur, nous avons développé une procédure pour la recherche de la position de la fissure.

# Bibliographie

- [1] R. Aboulaich, A. Ben Abda et M. Kallel, *Missing boundary data reconstruction via an approximate optimal control*, Inverse Problems and Imaging, 2 (2008) 411–426, doi :10.3934/ipi.2008.2.411.
- [2] R. Aboulaich, A. Ben Abda et M. Kallel, *A control type method for solving the Cauchy–Stokes problem*, Applied Mathematical Modelling 37 (2013) 4295—4304.
- [3] M. Akamatsu, G. Nakamura et S. Steinberg, *Identification of Lamé coefficients from boundary observations*, Inverse problems, 7 (1991).
- [4] G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset et S. Vessella, *The stability for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems 25 (2009) 123004.
- [5] A. Allers et F. Santosa, *Stability and resolution analysis of a linearized problem in electrical impedance tomography*, Inverse Problems, 7 (1991), 515–533.
- [6] S. Andrieux, T. N. Baranger et A. Ben Abda, *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional*, Inverse Problems, 22 (2006), 115–133.
- [7] S. Andrieux et H-D Bui, *Ecart à la réciprocité et identification de fissures en thermoélasticité isotrope transitoire*, C.R.Mecanique, (2006) 225–229.
- [8] S. Andrieux, A. Ben Abda et T.N. Baranger, *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional*, Inverse Problems, 22 (2006) 115–133, doi :10.3934/ipi.2008.2.411.
- [9] S. Andrieux et T.N. Baranger, *An energy error-based method for the resolution of the Cauchy problem in 3D linear elasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197 (2008) 902–920.
- [10] S. Andrieux et T.N. Baranger, *An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 35 (2007) 141–152.
- [11] M. Azaïez , F. Ben Belgacem et H. El Fekih, *On Cauchy’s problem : II. Completion, regularization and approximationl*, Inverse Problems, 22 (2006) 1307–1336.
- [12] H. Ben Ameer, M. Burger et B. Hackl, *Cavity identification in linear identification and thermoelasticity*, Mathematical Methods in the Applied Sciences , 30(2007) 625–647.
- [13] A. Bamberger, G. Chavent et P. Lailly, *An optimal control solution of the inverse problem of reflection seismics*, Computing methods in applied sciences and engineering, (1980).

- 
- [14] L. Baratchart et J. Leblond, *Hardy approximation of  $L^p$  functions subsets of the circle with  $1 \leq p < \infty$* , *Constructive approximation*, 14, 41–56.
- [15] R. M. Brown, *Recovering the conductivity at the boundary from Dirichlet to Neumann map : a point wise result*, *Inverse and ill-posed Problems*, 9 (2013) 567–574, doi :10.1515/jiip.2001.9.6.567.
- [16] R. M. Brown et R. H. Torres, *Uniqueness in the inverse conductivity problem for conductivities with  $3/2$  derivatives in  $\mathbb{L}^p$ ,  $p > 2n$* , *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 6(2003)563–574.
- [17] F. Ben Belgacem et H. El Fekih, *On Cauchy’s problem : I. A Variational Steklov-Poincaré theory* *Inverse Problems*, 21(2005), 1915–1936.
- [18] F. Ben Belgacem, *Parameter choice in the Lavrentiev regularization of the data completion problem*, 6th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, 235(2008), Institute of Physics Publishing.
- [19] R. Chamekh, A. Habbal, M. Kallel et N. Zemzemi, *A Nash game algorithm for the solution of coupled conductivity identification and data completion in cardiac electrophysiology*, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 14 (2019) 201.
- [20] R. Chamekh et M. Kallel, *Problème de Cauchy pour les équations de l’élasticité linéaire*, *Mastère en Math. App.*, FST, Tunis (2013).
- [21] D. Colton, *The inverse scattering problem for time-harmonic waves*, *SIAM*, 26 (1984)323–350.
- [22] G. Chavent, *Identification of functional parameters in partial differential equations*, *Symposium of the American Automatic Control Council*, (1974)31–48.
- [23] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua et F. Pons, *Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization*, *Inverse Problems*, 17(2001), 553–570.
- [24] T. Daniel, *Unique continuation for solutions to pde’s; between hörmander’s theorem and holmgren’s theorem*, *Communications in Partial Differential Equations*, 20 (1995) 855–884.
- [25] J. Eskin et J. Ralston, *On the inverse boundary value problem for linear isotropic elasticity*, *Inverse Problems*, 18 (2002), 907–921.
- [26] H. W. Engl, M. Hanke et A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer, dordrecht ed., 1996.
- [27] M. S. Gockenbach, B. Jadamba et A. A. Khan, *Equation error approach for elliptic inverse problems with an applications to the identification of Lamé parameters*, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 16 (2008), 349–367.

- [28] M. Gockenbach et A. A. Khan, *Identification of Lamé parameters in linear elasticity : a fixed point approach*, Journal of industrial and Management optimization, 1 (2005) 487–497.
- [29] S. Gutman et J. Ha, *Identifiability of piecewise constant conductivity in a heat conduction process*, SIAM J. Control Optim, 64 (2007) 694–713, doi :10.1137/060657364.
- [30] S. Gutman et J. Ha, *Identifiability of piecewise constant conductivity and its stability*, 47th IEEE Conference on Decision and Control, (2009) 9–11.
- [31] A. Habbal et M. Kallel, *Data completion problems solved as Nash games*, Journal of Physics : Conference Series, 386 (2012), 012004.
- [32] A. Habbal et M. Kallel, *Neumann-Dirichlet Nash strategies for the solution of elliptic Cauchy problems*, SIAM J. Control Optim, 51 (2013) 4066–4083, doi :10.1137/120869808.
- [33] A. Habbal, J. Petersson et M. Thellner, *Multidisciplinary topology optimization solved as a Nash game*, Int J Numer Meth Engng, 61 (2004) 949–963.
- [34] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear Partial Differential Equation*, Dover, New York, (1953).
- [35] J. Hadamard, *La théorie des équations aux dérivées partielles*, (Peking : éditions scientifiques), (1964).
- [36] F. Hecht, A. Le Hyaric et O. Pionneau, *Freefem++*, <http://www.freefem.org/ff++/>.
- [37] R. Isaacs, *Differential games : A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*, John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, (1965).
- [38] B. Jadamba, A. A. Khan et F. Raciti, *On the inverse problem of identifying Lamé coefficient in linear elasticity*, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008), 431–443.
- [39] B. T. Johansson et V. A. Kozlov, *An alternating method for Cauchy problems for Helmholtz-type operators in non-homogeneous medium*, Journal of Applied Mathematics, 74 (2009), 62–73.
- [40] M. Kallel, M. Moakher et A. Theljani, *The Cauchy problem for a nonlinear elliptic equation : Nash-game approach and application to image inpainting*, Inverse Problems and Imaging, 9 (2015), 853–874.
- [41] A. A. Khan et M. Gockenbach, *Identification of Lamé parameters in linear elasticity : a fixed point approach*, Journal of Industrial and Management Optimization, 1 (2005), 487–497.

- 
- [42] R. Kohn et M. Vogelius, *Identification of an unknown conductivity by means of measurements at the boundary*, SIAM - AMS Proceedings, 14 (1984), 113–123.
- [43] R. V. Kohn et M. Vogelius, *Determining conductivity by boundary measurements : interior results*, Communication on pure and applied mathematics, (1985).
- [44] R. V. Kohn et A. McKenney, *Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography*, Inverse Problems, 6 (1990), 389–414.
- [45] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya et A.V. Fomin, *An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 31 (1991), 45–52.
- [46] A. Lechleiter et J.W. Schlasche, *Identifying Lamé Parameters from time-dependent elastic wave measurements*, Inverse Problems in Science and Engineering, 25 (2017).
- [47] E. R. Leòn, A. L. Pape, J. A. désidéri, D. Alfano et M. Costes, *Concurrent aerodynamic optimization of rotor blades using a nash game method*, Journal of the American Helicopter Society, (2014).
- [48] Z. Lin, *On the determination of radially dependent Lamé coefficients*, SIAM J. Appl. Math, 58 (1998), 875–903.
- [49] J. L. Lion, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (Optimal control of systems governed by partial differential equations)*, Dunod, Paris, (1968).
- [50] J. R. McLaughlin et J. R. Yoon, *Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement*, Inverse Problems, 20 (2004), 25–45.
- [51] L. Marin, L. Elliot, P. Heggs, D. Ingham, D. Lesnic et X. Wen, *Boundary element method for the Cauchy problem in linear elasticity*, Engineering Analysis with boundary elements, 25 (2001), 783–793, Elsevier.
- [52] L. Marin et D. Lesnic, *Boundary element method for the Cauchy problem in linear elasticity using singular value decomposition*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191 (2002), 3257–3270, Elsevier.
- [53] L. Marin, L. Elliot, P. Heggs, D. Ingham, D. Lesnic et X. Wen, *An altering iterative algorithm for the Cauchy problem associated to the Helmholtz equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192(2003), 709–722, Elsevier.
- [54] L. Marin, L. Elliot, P. Heggs, D. Ingham, D. Lesnic et X. Wen, *BEM solution for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations by Landweber method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 28(2004), 1025–1034, Elsevier.
- [55] C. Maes, *A regularized Active-set method for sparse convex quadratic programming*, PhD Thesis, Institute for Computational and Mathematical Engineering, Stanford University, USA, November 2010.

- [56] A. Nachman, A. Tamasan et A. Timonov, *Recovering the conductivity from a single measurement of interior data*, Inverse Problems, 25 (2009) 035014, doi :10.1088/0266-5611/25/3/035014.
- [57] A. Nachman et J. Ha, *Identifiability of piecewise constant conductivity and its stability*, 47th IEEE Conference on Decision and Control, (2009) 9–11.
- [58] G. Nakamura et G. Uhlmann, *Identification of Lamé parameters by boundary measurements*, American Journal of Mathematics, (1993) 1161–1187.
- [59] L. Päivärinta, A. Panchenko et G. Uhlmann, *Complex geometrical optics solutions for Lipschitz conductivities*, Rev. Mat. Iberoamericana, 19 (2003) 57–72.
- [60] J. Périaux, *Genetic algorithms and evolution strategy in engineering and computer science : recent advances and industrial applications*, JohnWiley and Son Ltd, (1998).
- [61] R.G. Ramos et J. Périaux, *Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations*, Journal of Optimization Theory and Applications, 112 (2002) 457—498.
- [62] H.J. Reinhardt, D.N. Hào, J. Frohne et F.T. Suttmeier, *Numerical solution of inverse heat conduction problems in two spatial dimentions* , Journal of Inverse Ill-posed Problems, 15 (2007) 181—198.
- [63] J. Von Neumann, *Zur theorie der gesllschaftsspiele*, Math. Ann., (1928) 295—320.