



HAL
open science

Diagnostiques sismiques des intérieurs stellaires avec Kepler : rotation et interfaces

Steven Christophe

► **To cite this version:**

Steven Christophe. Diagnostiques sismiques des intérieurs stellaires avec Kepler : rotation et interfaces. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2019. Français. NNT : 2019PSLEO011 . tel-02883979

HAL Id: tel-02883979

<https://theses.hal.science/tel-02883979>

Submitted on 29 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'Observatoire de Paris

**Diagnostics sismiques des intérieurs stellaires avec *Kepler* :
rotation et interfaces**

Soutenue par

Steven CHRISTOPHE

Le 19 Septembre 2019

École doctorale n°127

**Astronomie et Astrophysique
d'Île de France**

Spécialité

Astronomie et Astrophysique

Composition du jury :

Pierre KERVELLA Astronome, LESIA, Observatoire de Paris	<i>Président</i>
Andrea MIGLIO Senior Lecturer, School of Physics and Astronomy, University of Birmingham	<i>Rapporteur</i>
Mário J.P.F.G. MONTEIRO Professeur associé, CAUP, Universidade do Porto	<i>Rapporteur</i>
Marc-Antoine DUPRET Professeur, STAR Institute, Université de Liège	<i>Examineur</i>
Sébastien DEHEUVELS Maître de conférence, IRAP, Université de Toulouse	<i>Examineur</i>
Yveline LEBRETON Astronome, LESIA, Observatoire de Paris	<i>Directrice de thèse</i>
Marie-Jo GOUPIL Astronome, LESIA, Observatoire de Paris	<i>Directrice de thèse</i>
Rhita-Maria OUZZANI Astronome-adjoint, LESIA, Observatoire de Paris	<i>Encadrante de thèse</i>

Copyright © 2019 by Steven Christophe
This work is licensed under the Creative Commons Attribution 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>.

The popular view that scientists proceed inexorably from well-established fact to well-established fact, never being influenced by any unproved conjecture, is quite mistaken. Provided it is made clear which are proved facts and which are conjectures, no harm can result. Conjectures are of great importance since they suggest useful lines of research.

— Alan M. Turing

Table des matières

Table des matières	III
Liste des tableaux	VI
Liste des figures	VIII
Introduction	3
1 La physique des étoiles	3
1.1 Structure interne des étoiles	3
1.1.1 Le modèle standard de la physique stellaire	3
1.1.2 Équations de la structure interne	3
1.1.3 Évolution stellaire	5
1.2 Astérosismologie	10
1.2.1 Théorie linéaire des oscillations adiabatiques	10
1.2.2 Mécanismes d'excitation des pulsations	17
1.2.3 Les pulsations stellaires dans le diagramme Hertzsprung-Russell	19
1.2.4 Contexte observationnel récent : l'ère spatiale	24
1.3 Enjeux de la thèse	25
I Rotation et transport de moment cinétique dans les étoiles γ Doradus	27
2 La rotation des étoiles	29
2.1 Structure et évolution des étoiles en rotation	29
2.1.1 Rotation en coquille (<i>shellular rotation</i>) : $\Omega(r)$	29
2.1.2 Transport de moment cinétique et mélange rotationnel	29
2.1.3 Impact sur la structure et l'évolution	30
2.2 Sismologie des modes basse fréquence dans les étoiles en rotation	32
2.2.1 Oscillations linéaires adiabatiques d'une étoile en rotation	32
2.2.2 Résolution numérique des équations complètes	32
2.2.3 Approche perturbative de la rotation	33
2.2.4 L'approximation traditionnelle de la rotation (TAR)	34
2.2.5 Effets de variations rapides de la fréquence de Brunt-Väisälä	37
2.3 Les pulsateurs basse fréquence sur la séquence principale	38
2.3.1 Observations et interprétation des spectres d'oscillation	38
2.3.2 Intérêts pour la physique stellaire	41
3 Mesures sismiques de la rotation interne des pulsateurs basse fréquence	43
3.1 MORSE : décoder le spectre des oscillations des pulsateurs basse fréquence	43

3.1.1	Étirement du spectre et mise en évidence de régularités	43
3.1.2	L'algorithme de MORSE	44
3.1.3	Diagrammes échelle en période étirée	47
3.1.4	Évaluation des incertitudes sur v_{rot} et P_0	48
3.2	Tests sur des spectres synthétiques	48
3.2.1	Validité et performance dans la TAR asymptotique	49
3.2.2	Erreurs systématiques de la TAR asymptotique	58
3.3	Rotation interne et temps caractéristique d'Archimède pour un échantillon d'étoiles <i>Kepler</i>	65
3.3.1	Mesures dans un échantillon de 36 étoiles γ Dor	65
3.3.2	Exemple d'une étoile SPB : KIC3459297	66
3.4	Discussion et conclusions	68
	<i>A&A 618, A47: Deciphering the oscillation spectrum of γ Doradus and SPB stars</i>	70
4	Les étoiles γ Doradus comme test des modèles de transport de moment cinétique	85
4.1	Des modèles aux observables	86
4.1.1	Modélisation 1D du transport de moment cinétique avec CESTAM	86
4.1.2	Le temps caractéristique d'Archimède P_0 : un marqueur de l'état d'évolution	87
4.1.3	Rotation moyenne $\langle v_{\text{rot}} \rangle$ dans la cavité résonante des modes g	87
4.2	Résultats : comparaison des modèles 1D rotationnels aux observations	88
	<i>A&A 626, A121: γ Doradus stars as a test of angular momentum transport models</i>	88
II	Seismic probing of stellar tachoclines	101
5	From the solar tachocline to stellar tachoclines	103
5.1	The internal structure and rotation profile of the Sun	104
5.1.1	Calibrating models of the Sun	104
5.1.2	Inversion of the solar internal structure	105
5.1.3	Inversion of the rotation profile	107
5.2	The solar tachocline: characterisation and current issues	109
5.2.1	Structure of the tachocline	109
5.3	Towards a study of stellar tachoclines	113
5.3.1	The <i>Kepler</i> LEGACY project	113
5.3.2	Seismic signature of the base of the convective zone in solar-type stars	116
6	Constraining the extent of penetrative convection under the convection zone	119
6.1	Penetrative convection: the formalism of Zahn (1991)	120
6.2	Seismic ratios $rr_{01/10}$: a diagnostic for stellar structure	122
6.2.1	Core structure and evolutionary state (smooth component)	122
6.2.2	Base of the convective envelope (oscillatory component)	123
6.3	Glitch analyses of the BCZ in <i>Kepler</i> LEGACY stars	123
6.3.1	Target selection	123
6.3.2	Target classification	126
6.3.3	Glitch fitting strategy	132
6.3.4	Results	133
6.4	Diagnostic potential of seismic ratios for the extent of penetrative convection	138
6.4.1	A grid of stellar models	139
6.4.2	Comparison with observations	140
6.5	Calibration of the extent of penetrative convection in <i>Kepler</i> stars	141

6.5.1	Forward modelling with c2kSMO	141
6.5.2	Input physics	146
6.5.3	Choice of observational constraints and adjusted parameters	146
6.5.4	Initialisation of parameters and the problem of secondary minima . . .	146
6.5.5	The initial helium abundance-mass degeneracy	148
6.5.6	KIC6603624 (aka Saxo)	148
6.5.7	KIC8006161 (aka Doris)	150
6.6	Discussion and conclusions	151
 Conclusions and prospects		155
7	Conclusions and prospects	155
7.1	Rotation and angular momentum transport in γ Dor stars	155
7.1.1	Efficiency of non-standard angular momentum transport processes . . .	156
7.1.2	Seismic diagnostic of rotation: beyond the hypothesis of uniform rotation	157
7.2	Tachoclines and penetrative convection in solar-like stars	157
7.2.1	Ensemble study of penetrative convection	159
7.2.2	Impact of uncertainties in the input physics of stellar models	159
7.2.3	Comparison with numerical simulations	159
7.3	Towards a new generation of stellar models	159
 Bibliography		161
 Appendices		177
A	Properties of <i>Kepler</i> LEGACY stars	177
B	Examples of the MCMC fitting of seismic ratios.	185

Liste des tableaux

1.1	Durée de la séquence principale en fonction de la masse de l'étoile.	9
3.1	Performance de MORSE lorsque plusieurs séries de modes coexistent	53
3.3	Fréquences de rotation et temps d'Archimède déterminés par MORSE pour le modèle A en rotation solide.	62
3.4	Fréquences de rotation et temps caractéristiques retrouvés par MORSE selon les approximations utilisées dans le calcul des oscillations.	62
3.5	Fréquences de rotation et temps d'Archimède déterminés par MORSE pour le modèle A en rotation solide.	64
3.6	Fréquences de rotation et temps d'Archimède déterminés par MORSE pour le modèle A en rotation différentielle.	64
3.7	Temps caractéristiques d'Archimède P_0 et fréquences de rotation interne ν_{rot} pour 36 γ Dor observées par <i>Kepler</i>	67
5.1	Solar properties	105
6.1	Classification of the 19 targets selected for glitch analyses.	131
6.2	Results from the glitch fitting analysis of seismic ratios $rr_{01/10}$ in <i>Kepler</i> stars. .	134
6.3	Parameters of stellar models in the grid computed with CESTAM	140
6.4	Possible combinations of observational constraints and adjusted parameters for model optimisation.	147
6.5	Best fit models of KIC6603624 as a function of the penetrative convection parameter ξ_{PC}	149
6.6	Best fit models of KIC8006161 as a function of the penetrative convection parameter ξ_{PC}	150
A.1	Atmospheric and seismic parameters	177
A.2	Optimal models from c2KSMO	180

Table des figures

1.1	Évolution d'étoiles de masse $M = 1.0, 5$ et $25M_{\odot}$ dans le diagramme de Hertzsprung-Russell.	6
1.2	Structure des étoiles de séquence principale en fonction de leur masse	8
1.3	Harmoniques sphériques de degré angulaire $\ell \leq 2$	12
1.4	Diagrammes de propagation pour un modèle solaire, de sous-géante et d'étoile δ Scuti.	15
1.5	Spectre des oscillations de l'étoile 16 Cygni A calculé observée par le satellite <i>Kepler</i>	16
1.6	Profil lorentzien dans l'espace de Fourier d'un mode d'oscillation du Soleil	20
1.7	Diagramme de Hertzsprung-Russell des étoiles pulsantes.	21
1.8	Illustration des effets de surface dans le cas du Soleil	22
1.9	Distribution de la vitesse équatoriale projetée $v \sin i$ en fonction du type spectral.	23
2.1	Traces évolutives pour des étoiles de 1, 2.5 et 5 M_{\odot} et $Z = 0.014$ avec ou sans les effets de la rotation.	31
2.2	Domaines de validité des méthodes perturbatives pour les modes $\ell = 1$	34
2.3	Valeurs propres $\lambda_{m,k}$ de l'équation des marées de Laplace pour $m = -2$	36
2.4	Effets d'une variation rapide de la fréquence de Brunt-Väisälä sur les modes g	38
2.5	Effets de la rotation sur les périodes d'oscillation des modes g	39
2.6	Effets de la rotation sur les <i>period spacings</i> ΔP	40
2.7	Durée des observations et résolution du spectre d'oscillation.	42
3.1	Illustration du principe d'étirement du spectre	45
3.2	Exemple d'une carte de puissance et du diagramme échelle en période étirée correspondant.	47
3.3	Évaluation des incertitudes sur (v_{rot}, P_0) dans le cas de l'étoile KIC6935014.	49
3.4	Performance de MORSE selon le nombre de modes.	51
3.5	Performance de MORSE lorsque des ordres radiaux sont manquants.	52
3.6	Performance de MORSE lorsque plusieurs familles de modes coexistent	54
3.7	Illustration de dégénérescences possibles dans l'identification des modes.	56
3.8	Valeurs propres $\lambda_{m,k}$ des modes g dipolaires ($k + m = 1$) et des modes r ($k = -2, m = 1$).	57
3.9	Recherche de régularités dans les combinaisons de fréquences	57
3.10	Impact d'un <i>glitch</i> d'Archimède simulé sur la recherche de régularité avec MORSE	59
3.11	Étude des erreurs systématiques liées à l'utilisation de la TAR asymptotique dans MORSE	63
3.12	Comparaison des mesures MORSE de (v_{rot}, P_0) avec les résultats de Van Reeth et al. (2016)	68
3.13	Exemple de résultats obtenus pour l'étoile KIC3459297, observée par <i>Kepler</i>	69
5.1	Structural and average kernels for the inversion of the solar structure.	106
5.2	Inversion of the squared soundspeed and density profiles of the Sun.	107

5.3	Structural inversions for various input physics of the reference model	108
5.4	Example of 2D average kernels \mathcal{K} for the inversion of the solar rotation profile with the SOLA implementation.	109
5.5	2D solar rotation profile	109
5.7	Acoustic glitches in a solar model.	111
5.8	Signature of the base of the convective zone in solar p modes.	112
5.9	Amplitude of the seismic oscillatory signature of the bottom of the convective zone with the extent of penetrative convection.	113
5.10	<i>Kepler</i> LEGACY sample stars in the Hertzsprung-Russell diagram.	114
5.11	Échelle diagram of an “F-like” and of a “Simple” star.	115
6.1	Schematic view of the structure at the base of the convective zone.	121
6.2	123
6.3	Seismic ratios $rr_{01/10}$ across the evolution on the main-sequence and early subgiant phases.	124
6.4	Signature of the BCZ acoustic glitch in the seismic ratios $rr_{01/10}$	125
6.5	Seismic ratios $rr_{01/10}$ of the LEGACY targets selected for glitch analyses.	127
6.5	Seismic ratios $rr_{01/10}$ of the LEGACY targets selected for glitch analyses.	128
6.5	Seismic ratios $rr_{01/10}$ of the LEGACY targets selected for glitch analyses.	129
6.5	Seismic ratios $rr_{01/10}$ of the LEGACY targets selected for glitch analyses.	130
6.6	Classification of the 19 selected LEGACY targets in the $\langle rr_{010} \rangle$ - Δv plane.	132
6.7	Comparison of the acoustic radii of the bottom of the CZ determined in this study with those measured by Verma et al. (2017)	136
6.8	Dependence of T_{CZ}/T_0 with $[\text{Fe}/\text{H}]$ and T_{eff}	138
6.9	Amplitude of the signature in $rr_{01/10}$ due to the BCZ glitch with $[\text{Fe}/\text{H}]$ and T_{eff}	139
6.10	Seismic ratios $rr_{01/10}$ as a diagnostic of the penetrative convection under the convective envelope.	142
6.10	Seismic ratios $rr_{01/10}$ as a diagnostic of the penetrative convection under the convective envelope (continued).	143
6.11	Seismic ratios $rr_{01/10}$ as a diagnostic of the penetrative convection under the convective envelope (continued).	143
6.12	Calibration of the penetrative convection parameter (ξ_{PC}) for KIC6603624.	149
6.13	Calibration of the penetrative convection parameter (ξ_{PC}) for KIC8006161.	150
B.1	MCMC fitting of the seismic ratios $rr_{01/10}$ of the <i>Kepler</i> star KIC12258514.	186
B.2	MCMC fitting of the seismic ratios $rr_{01/10}$ of the <i>Kepler</i> star KIC8938964.	187

Introduction

Chapitre 1

La physique des étoiles

La théorie de la structure et de l'évolution stellaire est un sujet vaste et en constante construction. Le modèle standard de la physique stellaire offre un cadre théorique simple pour la description physique des étoiles tout en ayant un pouvoir prédictif et explicatif puissant. On se contentera de donner un aperçu succinct du modèle standard de façon à mieux pouvoir en pointer les insuffisances et présenter les enjeux et axes de travail de cette thèse. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons quasi-exclusivement aux étoiles de séquence principale, c'est-à-dire aux étoiles qui transforment l'hydrogène central en hélium par fusion nucléaire. On fera donc l'impasse sur une description des étapes successives de la vie d'une étoile pour se concentrer plus précisément sur la séquence principale. Le lecteur trouvera un développement approfondi des concepts introduits ci-après (et plus encore) dans les ouvrages de référence *Cox and Giuli's Principles of Stellar Structure* (Weiss et al., 2004) et *Stellar Structure and Evolution* (Kippenhahn et al., 2012).

1.1 Structure interne des étoiles

1.1.1 Le modèle standard de la physique stellaire

Le modèle standard de la physique stellaire fait l'hypothèse d'une étoile sphérique de sorte que la structure et l'évolution puissent être décrites à partir d'une seule coordonnée spatiale, le rayon r des coordonnées sphériques classiques, et le temps t . En l'espèce, cela revient à faire les quatre hypothèses suivantes : rotation nulle, pas de champ magnétique, pas de perte de masse et pas d'interactions avec le milieu environnant (étoiles, planètes, disques de gaz...).

1.1.2 Équations de la structure interne

Les équations de la structure interne d'une étoile sont écrites pour une coquille sphérique d'épaisseur dr de masse dm située à un rayon r du centre et contenant une masse m de gaz,

soit :

$$\frac{\partial p}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad \text{équilibre hydrostatique} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad \text{équation de continuité} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^2} \frac{T}{p} \nabla_T \quad \text{transport de l'énergie} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu - T \frac{\partial s}{\partial t} \quad \text{conservation de l'énergie} \quad (1.4)$$

où les quantités physiques sont définies dans la coquille : p est la pression, ρ la densité, T la température, l la luminosité, ϵ_{nuc} le taux de production d'énergie par les réactions nucléaires, ϵ_ν le taux de perte d'énergie par l'émission de neutrinos, et s l'entropie. G est la constante gravitationnelle. On introduit par ailleurs le gradient de température :

$$\nabla_T = \frac{d \ln T}{d \ln p}. \quad (1.5)$$

Transport de l'énergie et critère de Schwarzschild

L'énergie dans les étoiles est essentiellement transportée par les photons (radiation) ou les mouvements convectifs macroscopiques de matière (convection). Il est usuel de découper la structure de l'étoile en des zones radiatives et des zones convectives selon quel est le processus de transport le plus efficace¹. Dans le cas d'un transport radiatif de l'énergie, le gradient thermique dépend de l'opacité κ du gaz selon l'expression :

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi a c G} \frac{\kappa l p}{m T^4} \quad (1.6)$$

où a correspond à la constante radiative, et c est la vitesse de la lumière. Lorsque le transport de l'énergie est assuré par la convection, le gradient thermique peut être, en bonne approximation, supposé adiabatique, et vaut :

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \quad (1.7)$$

où $\gamma = c_p/c_V$ est le rapport de la capacité thermique isobare c_p sur la capacité thermique isochore c_V .

Dans le modèle standard, les zones convectives et radiatives sont délimitées par le critère de Schwarzschild selon lequel le milieu est convectivement stable si :

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}} \quad (1.8)$$

Le gradient thermique réel ∇_T est en réalité quelque part entre ces deux extrêmes. On verra dans la suite que cette description quelque peu simpliste n'est pas sans poser de problèmes en particulier au niveau des interfaces radiative-convective (voir Partie II).

Évolution de la composition chimique

Les équations de la structure interne sont complétées par les équations d'évolution de la composition chimique :

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_{\text{nuc}} + \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_{\text{transport}} \quad (1.9)$$

¹Mis à part dans les étoiles compactes (naines blanches, étoiles à neutrons), le transport de l'énergie par conduction reste négligeable.

où X_i désigne la fraction massique de l'élément chimique i . Dans une coquille sphérique donnée, la création ou la destruction de l'élément i par les réactions nucléaires se traduit par l'équation :

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)_{\text{nuc}} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_j r_{j,i} - \sum_k r_{i,k} \right) \quad (1.10)$$

où m_i est la masse du noyau pour l'élément i . Le taux de réactions nucléaires créant l'élément i en détruisant l'élément j est noté $r_{j,i}$. Celui des réactions qui détruisent l'élément i pour créer l'élément k est $r_{i,k}$. L'équation de transport des éléments chimiques s'écrit :

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial t}\right)_{\text{transport}} = \frac{\partial}{\partial m} (4\pi r^2 \rho V_i X_i) + \frac{\partial}{\partial m} \left[(4\pi r^2)^2 D \frac{\partial X_i}{\partial m} \rho \right] \quad (1.11)$$

où V_i est la vitesse de diffusion de l'espèce i et D est un coefficient de diffusion dont la valeur dépend des phénomènes de transport pris en compte.

La composition chimique d'une étoile est souvent ramenée au poids moléculaire moyen, noté μ et défini par :

$$\mu = \frac{\bar{m}}{m_{\text{H}}} \quad (1.12)$$

soit la masse moyenne par particule \bar{m} en unité de masse de l'atome d'hydrogène m_{H} . On utilisera également la notation suivante pour le gradient de composition chimique :

$$\nabla_{\mu} = \frac{d \ln \mu}{d \ln p} \quad (1.13)$$

1.1.3 Évolution stellaire

Tout au long de sa vie, une étoile lutte contre son propre effondrement gravitationnel. Son évolution est ainsi régie par la compétition entre la force de gravité et la pression du fluide, qui tend à s'y opposer. L'étoile alterne des phases où elle est en équilibre hydrostatique et pendant lesquelles l'énergie des réactions nucléaires générée au centre contrebalance la force de gravité (e.g. la séquence principale), et des phases de contraction gravitationnelle.

Le diagramme de Hertzsprung-Russell (HR) est communément employé pour décrire les étapes d'évolution des étoiles. Dans ce diagramme, chaque étoile est repérée par sa luminosité globale L et sa température effective T_{eff} . Cette dernière quantité correspond à la température qu'aurait un corps noir de même R et de même L que l'étoile. Elle suit la loi de Stefan-Boltzmann :

$$L = 4\pi\sigma R^2 T_{\text{eff}} \quad (1.14)$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann. La Fig. 1.1 représente l'évolution d'étoiles de 1.0, 5.0 et 25 M_{\odot} dans le diagramme HR dans lequel on a mis en évidence les étapes majeures de leur vie. Les étoiles de type solaire et γ Doradus étudiées dans cette thèse sont des étoiles de séquence principale. Intéressons-nous de plus près à ce stade évolutif.

La séquence principale

Le stade de séquence principale (*main sequence*, MS) démarre lorsque l'étoile – résultat de l'effondrement gravitationnel (et de la fragmentation) d'un nuage de gaz moléculaire – atteint une température centrale suffisante pour fusionner l'hydrogène en hélium ($T_c \gtrsim 5 \times 10^6$ K).

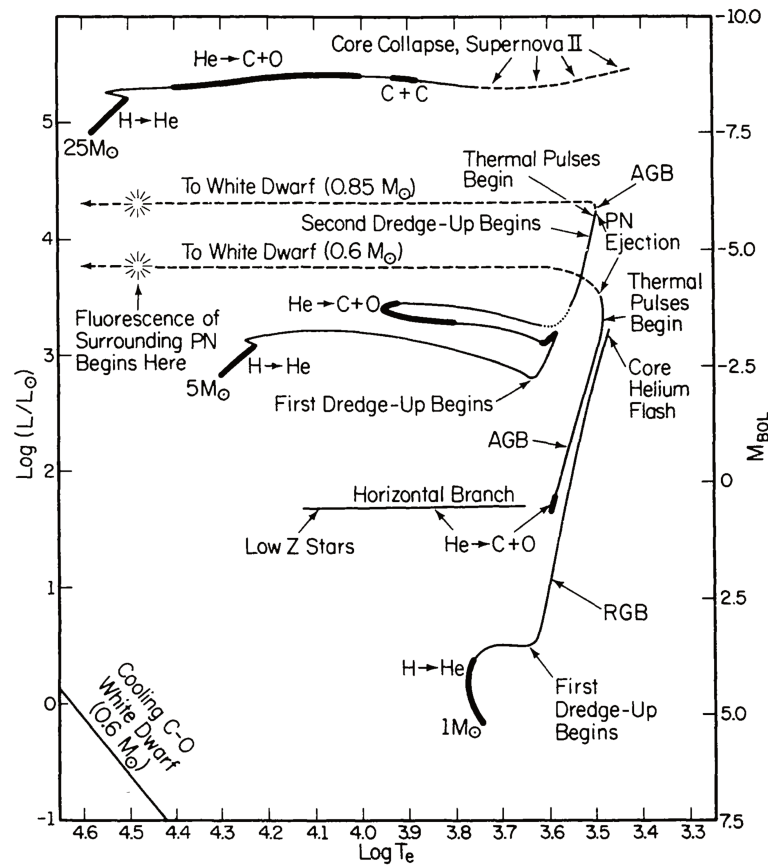


FIGURE 1.1: Évolution d'étoiles de masse $M = 1.0, 5.0$ et $25 M_{\odot}$ dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (à partir de la séquence principale). Les lignes en traits épais correspondent aux phases de fusion nucléaire dans le cœur de l'étoile. RGB = Branche des Géantes Rouges. AGB = Branche Asymptotique des Géantes rouges. PN = Nébuleuse Planétaire. Figure tirée de Iben (1985).

C'est l'âge zéro de la MS (ou ZAMS). Le taux de production d'énergie nucléaire par les réactions de fusion suit une loi de la forme :

$$\epsilon_{\text{nuc}} \approx \epsilon_0 \rho T^\nu \quad (1.15)$$

où ϵ_0 est une constante, $\nu \approx 4$ pour la chaîne proton-proton (p-p) et $\nu \approx 16$ pour le cycle carbone-azote-oxygène (CNO). À l'âge terminal de la MS (TAMS), l'étoile a épuisé son réservoir d'hydrogène central, le cœur d'hélium est inerte. Elle reprend alors sa contraction gravitationnelle.

La structure d'une étoile sur la MS est largement déterminée par sa masse (voir Fig. 1.2). On distinguera les configurations suivantes :

- $0.80 \lesssim M \lesssim 1.10M_\odot$, l'étoile brûle son hydrogène via la chaîne p-p. L'intérieur est radiatif et l'enveloppe est convective.
- $1.10 \lesssim M \lesssim 2.0M_\odot$: la température centrale est telle que le cycle CNO devient plus efficace que la chaîne p-p pour la fusion centrale de l'hydrogène. À cause de la forte dépendance de ϵ_{CNO} avec la température, le gradient radiatif augmente drastiquement au centre et un cœur convectif se développe. L'enveloppe convective se fait de plus en plus fine à mesure que la masse augmente. Dans cette zone, l'opacité est dominée par les transitions libre-libre et libre-lié. Elle suit approximativement une loi de Kramers, $\kappa \propto \rho T^{-3.5}$. Lorsque la masse augmente, la température des couches externes devient de plus en plus élevée, ce qui implique que l'opacité et donc le gradient radiatif diminuent. Le critère de Schwarzschild est alors satisfait de plus en plus haut dans l'étoile.
- $M \gtrsim 2.0M_\odot$: l'enveloppe est entièrement radiative. Le cœur convectif grandit de plus en plus avec la masse de manière à pouvoir transporter l'énergie générée par le cycle CNO vers la surface de l'étoile.

Les limites en masse ci-dessus ne sont qu'indicatives, la masse n'étant pas l'unique facteur influant sur la structure. On citera par exemple la composition chimique de l'étoile ou la fraction massique d'hydrogène en son centre X_C .

Échelles de temps caractéristiques

Échelle de temps nucléaire

L'échelle de temps nucléaire correspond au temps nécessaire à l'étoile pour épuiser son combustible pendant les phases de fusion nucléaire :

$$\tau_{\text{nuc}} \approx \eta \frac{(m_{\text{nuc}})c^2}{L} \quad (1.16)$$

où η est le rendement énergétique des réactions nucléaires, m_{nuc} est la masse de combustible disponible, c est la vitesse de la lumière dans le vide.

La MS est la phase évolutive la plus longue de la vie d'une étoile. L'échelle de temps caractéristique nucléaire sur la MS s'écrit :

$$\tau_{\text{MS}} \approx \eta_{\text{H} \rightarrow \text{He}} \frac{(m_{\text{cœur}}X)c^2}{L} \quad (1.17)$$

où $\eta_{\text{H} \rightarrow \text{He}} \approx 7 \times 10^{-3}$ est le rendement énergétique de la fusion de l'hydrogène en hélium et $m_{\text{cœur}}X$, la masse d'hydrogène effectivement disponible pour les réactions nucléaires. Pour le Soleil, environ 10% de la masse de l'étoile est disponible comme combustible, ce qui donne

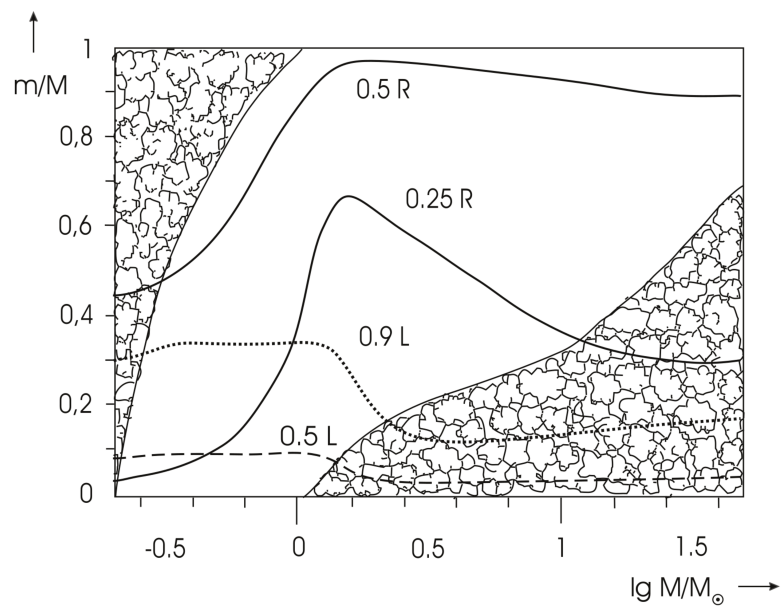


FIGURE 1.2: Structure des étoiles de séquence principale en fonction de leur masse M . Les zones nuageuses distinguent les zones convectives des zones radiatives d'après le critère de Schwarzschild. Les lignes continues indiquent les valeurs de m/M pour lesquelles $r/R = 0.25$ et 0.50 . Les lignes en tirets et pointillés représentent la valeur de m/M en dessous de laquelle 50 et 90% de la luminosité L est produite, respectivement. Les modèles stellaires employés dans cette figure sont calculés pour des masses allant de 0.1 à $55 M_{\odot}$ à l'âge zéro de la séquence principale (ZAMS). La fraction massique en hydrogène a été fixée à $X = 0.70$, celle de l'hélium est $Y = 0.28$. Figure extraite de [Kippenhahn et al. \(2012\)](#).

TABLE 1.1

Durée de la séquence principale en fonction de la masse de l'étoile dans une série de modèles stellaires. La composition chimique initiale des modèles est $(X, Y, Z) = (0.71, 0.27, 0.02)$. Adapté de Iben (1967).

M/M_{\odot}	1.0	1.25	1.5	2.25	3.0	5.0	7.0	15.0
τ_{MS} (années)	9×10^9	3×10^9	1.7×10^9	5×10^8	2.3×10^8	6.7×10^7	2.2×10^7	1×10^7

$\tau_{\text{MS},\odot} \approx 1 \times 10^{10}$ ans. En étalonnant l'Eq. 1.17 sur les valeurs solaires et en utilisant la relation masse luminosité ($L \propto M^{\zeta}$, $\zeta \approx 2.5 \dots 4.5$), on obtient :

$$\tau_{\text{MS}} \approx 1 \times 10^{10} \frac{M}{M_{\odot}} \frac{L_{\odot}}{L} \approx 1 \times 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1-\zeta} \text{ années.} \quad (1.18)$$

Ainsi, plus l'étoile est massive, plus elle est lumineuse et plus elle brûle son hydrogène rapidement, autrement dit plus son temps de vie est court. La Table 1.1 donne le temps de vie sur la MS pour une série de modèles stellaires. Par exemple, une étoile de $1M_{\odot}$ vit environ 1000 fois plus longtemps qu'une étoile de $15M_{\odot}$.

Échelle de temps de Kelvin-Helmholtz

L'échelle de temps de Kelvin-Helmholtz, ou échelle de temps thermique, représente le temps qu'il faudrait à une étoile pour rayonner l'intégralité de son réservoir d'énergie potentielle par contraction gravitationnelle, soit :

$$\tau_{\text{KH}} \approx \frac{GM}{R^2 L} = \tau_{\text{KH},\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right) \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right). \quad (1.19)$$

C'est aussi l'ordre de grandeur du temps d'évolution pour les phases de contraction gravitationnelle (comme la pré-MS par exemple). Pour le Soleil, $\tau_{\text{KH},\odot}$ est de l'ordre de 3×10^7 années.

Échelle de temps dynamique

L'échelle de temps dynamique est le temps que mettrait l'étoile à s'effondrer sur elle-même si la pression disparaissait soudainement (temps de chute libre). On peut également la voir comme le temps nécessaire au rétablissement de l'équilibre hydrostatique suite à une perturbation. Elle s'écrit :

$$\tau_{\text{dyn}} \approx \frac{1}{\sqrt{G\langle\rho\rangle}} \quad (1.20)$$

en notant $\langle\rho\rangle = 3M/4\pi R^3$ la densité moyenne de l'étoile. Pour le soleil, le temps dynamique est de l'ordre de quelques minutes.

Le temps dynamique est très inférieur aux échelles de temps d'évolution d'une étoile, c'est-à-dire aux temps nucléaire et de Kelvin-Helmholtz :

$$\tau_{\text{dyn}} \ll \tau_{\text{KH}} \ll \tau_{\text{nuc}}.$$

Cet état de fait justifie pleinement d'avoir fait l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique dans les équations de la structure interne (Eq. 1.1-1.4). Inversement, les phénomènes dynamiques tels que les oscillations stellaires (qui feront l'objet de la Sect. 1.2), peuvent se décrire en les considérant comme une perturbation de la structure de l'étoile en équilibre hydrostatique.

1.2 Astérosismologie

La sismologie stellaire étudie les oscillations des étoiles avec l'objectif de contraindre les lois physiques régissant les milieux dans lesquels elles se propagent. Divers mécanismes physiques entretiennent l'excitation des modes propres d'oscillation des étoiles et leurs propriétés sont directement reliées aux grandeurs physiques décrivant leurs structures internes. Ainsi, du point de vue du physicien stellaire, ces pulsations représentent un moyen unique de sonder les intérieurs stellaires, inaccessibles par ailleurs².

Dans cette introduction, je rappelle les principaux éléments de la théorie linéaire des oscillations stellaires. On se limitera ici (et dans la suite du manuscrit) au cas des oscillations adiabatiques. Autrement dit, on supposera que les oscillations n'échangent pas d'énergie avec le milieu dans lequel elles se propagent. Le cas des oscillations non-adiabatiques est traité par exemple dans l'ouvrage de référence *Nonradial Oscillations of Stars* (Unno et al., 1989, Chap. IV). Les pulsations sont quasi-omniprésentes dans les étoiles si bien que toute une zoologie d'étoiles pulsantes a été construite au fil des années et des découvertes. J'introduirai les principaux mécanismes d'excitation des oscillations et les classes de pulsateurs qui seront étudiées dans ce manuscrit. Enfin, le contexte observationnel actuel est particulièrement favorable au développement de l'astérosismologie. Je reviendrai sur les différentes missions spatiales à l'origine de ces progrès.

1.2.1 Théorie linéaire des oscillations adiabatiques

Mise en équation des oscillations stellaires

La structure d'une étoile suit les équations classiques de l'hydrodynamique,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{conservation de la masse (1.21)}$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi = -\nabla p - \rho \mathbf{g} \quad \text{conservation de la quantité de mouvement (1.22)}$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) S = \rho \epsilon - \nabla \cdot F_{\text{tot}} \quad \text{conservation de l'énergie (1.23)}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad \text{équation de Poisson (1.24)}$$

L'équation de Poisson peut aussi se trouver sous sa forme intégrée :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x} \quad (1.25)$$

où V correspond au volume de l'étoile.

La théorie linéaire des pulsations stellaires décrit les oscillations comme des petites perturbations de la structure de l'étoile supposée à l'équilibre hydrostatique. Dans une description eulérienne du fluide, une quantité physique a de la structure en une position \mathbf{r} peut alors s'exprimer sous la forme,

$$a(\mathbf{r}, t) = a_0(\mathbf{r}) + a'(\mathbf{r}, t) \quad \text{tel que} \quad \frac{a'}{a_0} \ll 1 \quad (1.26)$$

²On notera tout de même que, pour les étoiles évoluées, les phases de dragage convectif offrent des contraintes sur la nucléosynthèse stellaire et la composition chimique des couches centrales.

où a_0 est la valeur de a à l'équilibre et a' désigne la perturbation eulérienne associée à l'oscillation. De façon similaire, on notera dans une description lagrangienne,

$$a(\mathbf{r}_0, t) = a_0(\mathbf{r}_0) + \delta a(\mathbf{r}_0, t) \quad \text{tel que} \quad \frac{\delta a}{a_0} \ll 1, \quad (1.27)$$

δa étant la perturbation lagrangienne de la quantité a et \mathbf{r}_0 la position à l'équilibre de la particule fluide suivie. Les perturbations lagrangienne et eulérienne sont reliées par,

$$\delta a(\mathbf{r}, t) = a'(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla a_0(\mathbf{r}) \quad (1.28)$$

où $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ est le vecteur déplacement.

Les équations 1.21–1.24 sont linéarisées en remplaçant les grandeurs physiques par leurs équivalents

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p', & \rho &= \rho_0 + \rho', & \mathbf{v} &= \mathbf{v}' = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}, \\ \mathbf{g} &= \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}', & \Phi &= \Phi_0 + \Phi'. \end{aligned}$$

Nous nous plaçons dans l'approximation adiabatique pour laquelle les perturbations de T , S , ϵ et F_{tot} sont négligées et où les perturbations de la pression et de la densité sont reliées par l'équation,

$$\rho' = \frac{p'}{c^2} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0, \quad \text{ou} \quad \delta \rho = \frac{\delta p}{c^2}. \quad (1.29)$$

où c^2 est le carré de la vitesse du son adiabatique, défini par :

$$c^2 = \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \quad \text{où} \quad \Gamma_{1,0} = \left. \frac{\partial \ln p_0}{\partial \ln \rho_0} \right|_s \quad \text{est le premier exposant adiabatique} \quad (1.30)$$

Après avoir éliminé les termes non-linéaires de la perturbation, le système de trois équations suivant est obtenu,

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}') = 0 \quad (1.31)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' + \rho_0 \nabla \Phi' + \rho' \nabla \Phi_0 = 0 \quad (1.32)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (1.33)$$

Pour une étoile sphérique, il est possible de montrer que les variables spatiales (r, θ, φ) et temporelle sont séparables. De plus, comme on s'intéresse aux modes propres d'oscillation de l'étoile, on recherche des solutions périodiques de t pour les quantités perturbées de sorte que pour un mode propre donné, de pulsation ω ,

$$a' = \bar{a}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad \text{ou} \quad \delta a = \overline{\delta a}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (1.34)$$

D'autre part, la résolution de la composante horizontale des équations 1.31–1.33 permet d'établir que la partie horizontale de chaque mode propre est décrite par une harmonique sphérique Y_ℓ^m définie par,

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (1.35)$$

où P_ℓ^m est un polynôme de Legendre. Les nombres entiers ℓ et m désignent le degré angulaire et l'ordre azimutal de l'harmonique sphérique vérifiant les inégalités suivantes,

$$\ell \geq 0 \quad \text{et} \quad \ell + 1 \leq m \leq -\ell - 1. \quad (1.36)$$

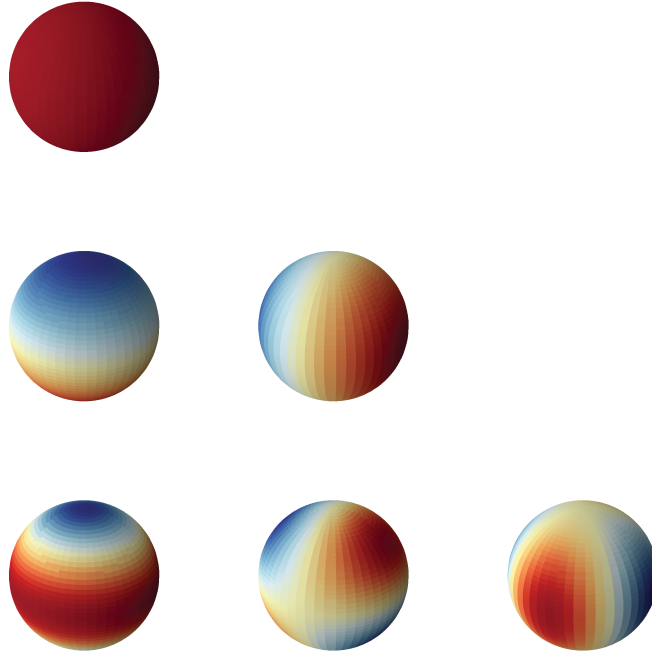


FIGURE 1.3: Harmoniques sphériques de degré angulaire $\ell \leq 2$. Les zones rouges (bleues) représentent les valeurs positives (négatives). De haut en bas, $\ell = 0, 1, 2$ et de gauche à droite $m = 0, 1, 2$.

À titre illustratif, quelques harmoniques sphériques sont représentées en Fig. 1.3. Le degré angulaire ℓ quantifie le nombre total de lignes nodales en surface et l'ordre azimutal m dénombre celles qui passent par les pôles de l'étoile. Ces deux nombres quantiques sont complétés par l'ordre radial n , le nombre de nœuds dans la direction radiale.

La partie radiale du problème se met sous la forme d'un système de trois équations à trois inconnues p' , Φ' et ξ_r , la composante radiale du vecteur déplacement. Il s'écrit,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) - \frac{g_0}{c^2} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\omega^2}\right) \frac{p'}{\rho_0 c^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2 r^2} \Phi' \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp'}{dr} + \frac{g_0}{\rho_0 c^2} p' + (N_{\text{BV}}^2 - \omega^2) \xi_r = -\frac{d\Phi'}{dr}, \quad (1.38)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' = 4\pi G \rho_0 \left(\frac{p'}{\rho_0 c^2} + \frac{N_{\text{BV}}^2}{g_0} \xi_r \right). \quad (1.39)$$

où deux fréquences caractéristiques du problème sont introduites : N_{BV} la fréquence de Brunt-Väisälä et L_ℓ la fréquence de Lamb.

Dans un milieu stratifié convectivement stable, la *fréquence de Brunt-Väisälä* est la fréquence d'oscillation d'une particule fluide après qu'elle a été déplacée de sa position d'équilibre dans la direction verticale. Elle s'exprime sous la forme,

$$N_{\text{BV}}^2 = g_0 \left(\frac{1}{\Gamma_{1,0}} \frac{d \ln p_0}{dr} - \frac{d \ln \rho_0}{dr} \right), \quad (1.40)$$

Pour un gaz parfait totalement ionisé, l'expression se simplifie en,

$$N_{\text{BV}}^2 = \frac{g_0 \rho_0}{p_0} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla_T + \nabla_\mu) \quad (1.41)$$

La *fréquence de Lamb* correspond à l'inverse du temps de propagation d'une onde acoustique horizontale. Son expression est donnée par,

$$L_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)c^2}{r^2} \quad (1.42)$$

On aura l'occasion de revenir sur le rôle de ces deux fréquences dans la physique des oscillations.

Notons que les équations des oscillations 1.31–1.33 peuvent être reformulées sous la forme d'un problème aux valeurs propres de la forme,

$$\mathcal{L}(\xi) = -\omega^2 \xi, \quad (1.43)$$

où \mathcal{L} est un opérateur différentiel hermitien défini par,

$$\mathcal{L}(\xi) = \frac{1}{\rho_0^2} \nabla p_0 \nabla \cdot (\rho_0 \xi) - \frac{1}{\rho_0} \nabla (\nabla p_0 \cdot \xi) - \frac{1}{\rho_0} \nabla (c^2 \rho_0 \nabla \xi) + \nabla \left[G \int_V \frac{\nabla \cdot (\rho_0 \xi) \, d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} \right]. \quad (1.44)$$

De la nature hermitienne de l'opérateur \mathcal{L} , il vient que les oscillations linéaires adiabatiques satisfont au principe variationnel (Chandrasekhar, 1964; Lynden-Bell & Ostriker, 1967). Ce formalisme intervient notamment dans les inversions sismiques de la structure des étoiles comme on le verra dans le Chap. 5.

Approximation de Cowling

L'approximation de Cowling (1941) consiste à négliger la perturbation du potentiel gravitationnel ($\Phi' = 0$) dans les équations d'oscillation. Elle est justifiée lorsque la longueur d'onde radiale ou horizontale des oscillations est très faible devant l'échelle de variation de la structure à l'équilibre, comme dans le cas des modes d'ordres radiaux n élevés ou de hauts degrés angulaires ℓ . Les étoiles de type solaire et les étoiles γ Doradus oscillent par exemple selon des modes de n élevés. Cette hypothèse simplifie le traitement mathématique des équations. Les équations 1.37–1.39 se réduisent ainsi à un système de deux équations du premier ordre :

$$\frac{dp'}{dr} + \frac{g_0}{c^2} p' + (N_{\text{BV}}^2 - \omega^2) \rho_0 \xi_r = 0, \quad (1.45)$$

$$\frac{d\xi_r}{dr} + \left(\frac{2}{r} - \frac{g_0}{c^2} \right) \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\omega^2} \right) \frac{p'}{\rho_0 c^2} = 0, \quad (1.46)$$

Diagrammes de propagation

Pour mieux comprendre la nature et le comportement des oscillations stellaires, il est intéressant de simplifier plus encore le problème. Pour les n élevés, la longueur d'onde des modes dans la direction radiale est petite devant l'échelle de hauteur de pression H_p (sauf dans les couches centrales et superficielles). En première approximation, on peut choisir de négliger les termes incluant une dérivée des grandeurs de la structure d'équilibre, ce qui donne :

$$\frac{dp'}{dr} + (N_{\text{BV}}^2 - \omega^2) \rho_0 \xi_r = 0, \quad (1.47)$$

$$\frac{d\xi_r}{dr} + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\omega^2} \right) \frac{p'}{\rho_0 c^2} = 0, \quad (1.48)$$

que l'on peut réécrire sous la forme d'une équation du second ordre :

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} + k(r) \xi_r = 0, \quad (1.49)$$

où k_r est la composante radiale du vecteur d'onde ayant pour expression :

$$k_r(r) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{N_{\text{BV}}^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\omega^2} \right). \quad (1.50)$$

Lorsque k est négatif, la solution de l'équation est une onde évanescente. Pour k strictement positif, l'onde sismique peut se propager au sein de l'étoile. Cela se produit dans deux cas de figure qui définissent la nature et la zone de propagation des modes :

- $|\omega| > |N_{\text{BV}}|$ et $|\omega| > |L_\ell|$, qui correspond aux modes de pression (modes p). Il s'agit d'ondes acoustiques stationnaires dont la force de rappel est liée au gradient de pression.
- $|\omega| < |N_{\text{BV}}|$ et $|\omega| < |L_\ell|$, qui sont les conditions vérifiées par les modes de gravité (modes g). Ce sont des ondes de gravité stationnaires entretenues par la poussée d'Archimède. En conséquence, ils ne peuvent s'établir que dans les zones radiatives ($N_{\text{BV}} > 0$).

La Fig. 1.4 représente des diagrammes de propagation pour un modèle solaire, un modèle d'étoile sous-géante et un modèle d'étoile A en fin de séquence principale. Pour le modèle solaire, les modes g ont des fréquences basses et restent confinés dans l'intérieur radiatif. Au contraire, les modes p ont des fréquences hautes et leur cavité résonnante s'étend jusqu'en surface mais n'atteint pas le cœur de l'étoile (à l'exception des modes p radiaux). Dans le modèle de sous-géante, un gradient de composition chimique s'est développé à la frontière du cœur convectif pendant la phase de séquence principale, ce qui résulte en un pic de la fréquence de Brunt-Väisälä au niveau du cœur (radiatif au stade de sous-géante). En conséquence, des modes g de haute fréquence peuvent exister et sont même favorisés par la contraction gravitationnelle du cœur. Si la zone évanescente séparant les cavités p et g est suffisamment mince, un mode g du cœur peut se coupler à un mode p de fréquence similaire résonnant dans les couches supérieures. On parle alors de modes mixtes p - g . Ce type de modes est d'un intérêt particulier puisqu'ils sondent à la fois les régions de surface et les régions les plus profondes de l'étoile. De tels modes mixtes peuvent également s'établir dans les étoiles de séquence principale de masse intermédiaire et massive comme dans le cas du modèle d'étoile A proposé dans le panneau de droite de la Fig. 1.4.

Théorie asymptotique

En l'état, les équations d'oscillation 1.45–1.46 ne sont pas résolubles analytiquement. La théorie asymptotique (e.g. Shibahashi, 1979; Unno et al., 1989) permet d'obtenir une expression analytique des fréquences d'oscillation. Ce développement asymptotique se base sur l'approximation Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin (JWKB) qui suppose que la longueur d'onde radiale des oscillations est très petite devant l'échelle de variation spatiale des grandeurs de la structure d'équilibre loin des points tournants (les extrémités de la cavité). Cette hypothèse est adaptée à la description des modes d'ordre radial élevé ($n \gg \ell$). Succinctement, la méthode consiste à développer une solution à chaque extrémité de la cavité résonnante en tenant compte des conditions aux limites puis à raccorder les deux solutions asymptotiquement dans les régions centrales. La solution globale obtenue permet ainsi d'écrire une condition de résonance pour les modes stationnaires :

$$\int_{r_1}^{r_2} k_r dr = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \quad (1.51)$$

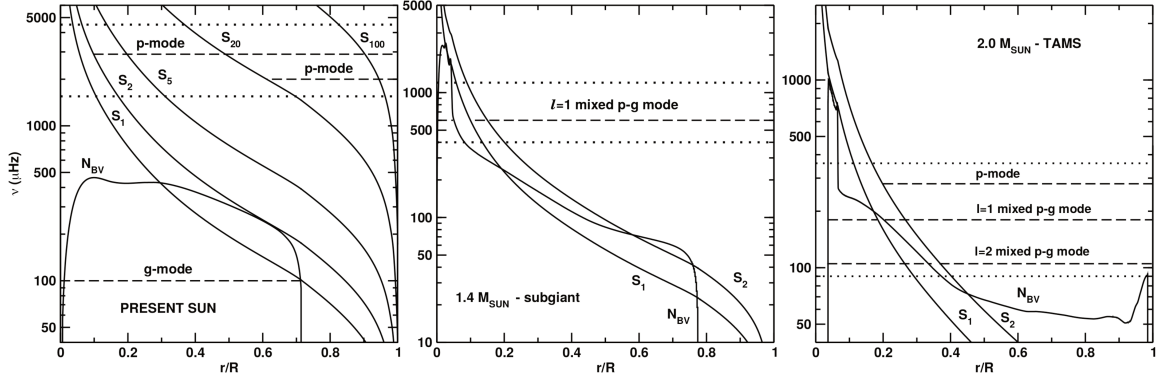


FIGURE 1.4: Diagrammes de propagation pour un modèle solaire (à gauche), un modèle d'étoile sous-géante (au centre) et un modèle d'étoiles δ Scuti (à droite). Pour chacun des modèles, les lignes pointillées délimitent l'intervalle en fréquences des modes observables. Les lignes en tirets montrent les zones de propagation pour des modes de pression (p), de gravité (g) ou mixtes (p - g). Les fréquences de Lamb sont notées S_ℓ ici. Figure issue de [Lebreton & Montalbán \(2009\)](#).

où r_1 et r_2 sont les rayons qui délimitent la cavité résonnante.

Modes de pression. Dans le cadre de la théorie asymptotique, les fréquences des modes p ($n \gg \ell$) peuvent être approximées par l'expression suivante dérivée de [Tassoul \(1980\)](#) par [Scherrer et al. \(1983\)](#) :

$$\nu_{n,\ell} \approx \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha \right) \Delta\nu - \ell(\ell+1)D_0, \quad (1.52)$$

où α est un terme de phase lié aux couches de surface (e.g. [Christensen-Dalsgaard & Perez Hernandez, 1992](#)). Il dépend peu de n et ℓ , et peut généralement être considéré constant. De l'équation 1.52, on remarquera que les modes de n consécutifs et de même ℓ sont régulièrement espacés en fréquence de la quantité $\Delta\nu$, appelée la grande séparation en fréquence, d'expression :

$$\Delta\nu_{n,\ell} = \nu_{n,\ell} - \nu_{n-1,\ell} = \left(2 \int_0^{R_\star} \frac{dr}{c} \right)^{-1}. \quad (1.53)$$

Physiquement, la grande séparation correspond à l'inverse du temps mis par une onde acoustique pour parcourir le diamètre de l'étoile. On introduit également la petite séparation définie comme :

$$\delta\nu_{\ell,\ell+2} = \nu_{n,\ell} - \nu_{n-1,\ell+2} = (4\ell+6)D_0 \quad (1.54)$$

où

$$D_0 = \frac{1}{4\pi^2 \Delta\nu} \left(\frac{c(R_\star)}{R_\star} - \int_0^{R_\star} \frac{1}{r} \frac{dc}{dr} dr \right) \quad (1.55)$$

Pour une étoile de séquence principale, la petite séparation dépend fortement de l'état d'évolution à cause des changements du gradient de la vitesse du son causés par les réactions nucléaires dans le cœur ([Christensen-Dalsgaard, 1988](#)). La Fig. 1.5 montre le spectre des oscillations de 16 Cygni A sur lequel sont illustrées ces deux régularités caractéristiques du spectre de modes p .

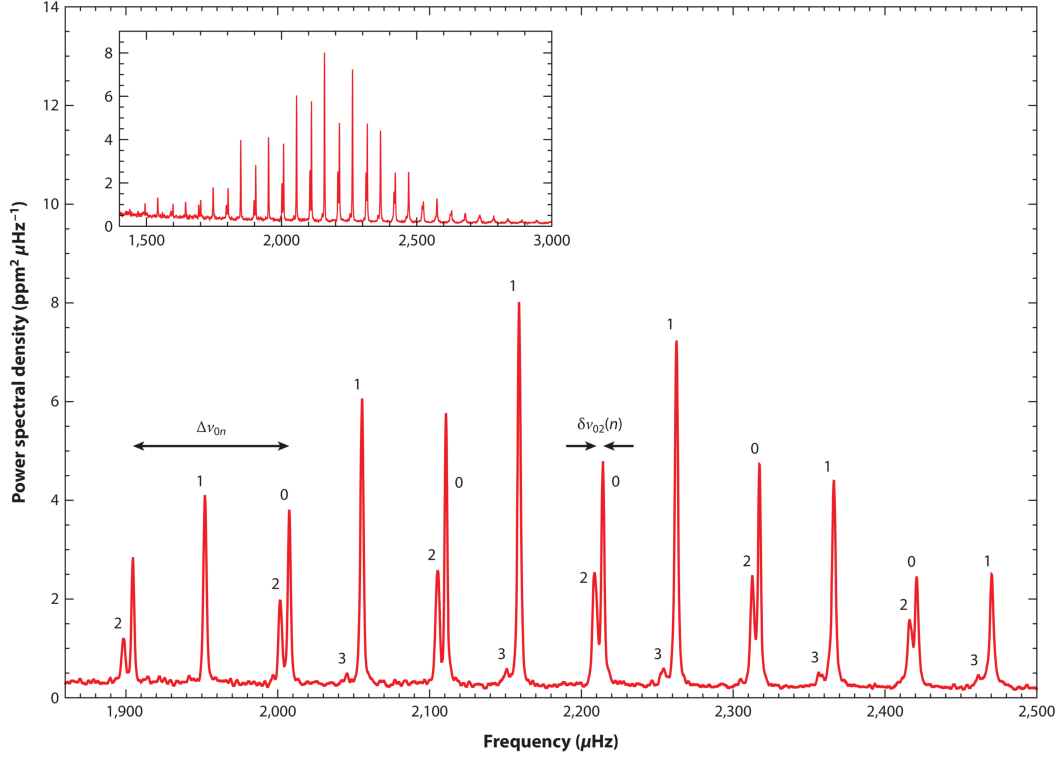


FIGURE 1.5: Spectre des oscillations de l'étoile 16 Cygni A (un oscillateur de type solaire) tel qu'observée par le satellite *Kepler*. L'encart en haut à gauche montre le spectre en entier. La modulation de la puissance des modes est une enveloppe gaussienne. Le cadre principal agrandit le spectre autour de la fréquence de puissance maximale ν_{\max} , correspondant au maximum de l'enveloppe gaussienne. Le degré angulaire ℓ des modes est indiqué au dessus de chaque pic. La grande séparation $\Delta\nu_{n,0}$ et la petite séparation $\delta\nu_{0,2}(n)$ sont indiquées par des flèches. Le spectre a été lissé avec un filtre de largeur $0.2 \mu\text{Hz}$ pour des raisons de clarté. Figure adaptée de [Chaplin & Miglio \(2013\)](#).

Modes de gravité. L'expression asymptotique obtenue par [Tassoul \(1980\)](#) donne la période des modes g sous la forme :

$$P_{n,\ell} \approx \frac{P_0 (n + \epsilon_\ell)}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}}. \quad (1.56)$$

Le terme de phase ϵ_ℓ dépend de la structure de l'étoile. Si le cœur est radiatif, $\epsilon_\ell = \epsilon + \frac{\ell}{2}$. Si le cœur est convectif, $\epsilon_\ell = \epsilon$. Dans les deux cas, ϵ est une constante liée aux réflexions au niveau des points tournants. La quantité P_0 est le temps caractéristique d'Archimède, aussi appelé parfois le rayon d'Archimède bien qu'il ait la dimension d'un temps. Il correspond au temps de propagation d'une onde de gravité traversant la cavité résonnante et s'écrit :

$$P_0 = 2\pi^2 \left(\int_{\mathcal{R}} \frac{N_{\text{BV}}}{r} dr \right)^{-1} \quad (1.57)$$

où \mathcal{R} désigne l'intervalle en rayon délimitant la cavité. À degré ℓ donné, les modes g d'ordres radiaux consécutifs sont régulièrement espacés de la quantité :

$$\Delta P_\ell = P_{n+1,\ell} - P_{n,\ell} = \frac{P_0}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}}, \quad (1.58)$$

appelée la séparation en période (ou *period spacing* en anglais). Comme on le verra dans la suite du manuscrit, le *period spacing* est un diagnostic important pour les pulsateurs g .

On retiendra donc que, asymptotiquement, les modes p sont régulièrement espacés en fréquence tandis que les modes g sont régulièrement espacés en période.

1.2.2 Mécanismes d'excitation des pulsations

En l'absence de mécanisme d'excitation, les modes sont amortis par dissipation radiative et sont donc stables vis-à-vis de la structure en équilibre. On se propose de revenir brièvement sur les mécanismes physiques impliqués dans l'entretien des modes d'oscillation (voir [Samadi et al., 2015](#), pour une revue récente).

Oscillations auto-entretenues

Les modes propres d'oscillation d'une étoile peuvent être entretenus par l'étoile elle-même du fait de certaines caractéristiques de sa structure interne, ce sont les "pulsateurs classiques". Dès 1926, [Eddington \(1926\)](#) discute des conditions d'instabilité des modes d'oscillation d'une étoile et propose un mécanisme de valve dans lequel l'énergie thermique entretient un cycle de compression-décompression du gaz à la manière d'un moteur thermique (voir aussi, [Zhevakin, 1963](#)). On distingue trois mécanismes de ce type selon les causes de l'entretien des pulsations : le mécanisme κ (pic d'opacité), le mécanisme ϵ (modulation du taux de production d'énergie nucléaire) ou le "blocage convectif" (modulation du flux radiatif par une enveloppe convective). Ces trois processus sont efficaces à condition que l'énergie mécanique injectée dans la pulsation au niveau des régions d'excitation ne soit pas complètement dissipée dans les zones stables de l'étoile au cours d'un cycle de pulsation. En outre, pour qu'un mode soit instable, il doit satisfaire les conditions suivantes (e.g. [Pamyatnykh, 1999](#)) :

- l'amplitude du mode doit être grande et varier faiblement avec le rayon dans la région d'excitation. Cela traduit simplement le fait qu'il est plus difficile d'exciter un mode de pulsation au niveau d'un de ses noeuds ou entre deux noeuds spatialement très rapprochés.
- l'échelle de temps de relaxation thermique $\tau_{\text{th}} \approx \int_{m_0}^M c_v \frac{T}{L} dm$ dans la zone d'excitation doit être comparable ou plus longue que la période d'oscillation sans quoi l'équilibre thermique est atteint avant d'avoir pu exciter le mode.³

Mécanisme κ .

Hors des régions d'ionisation, lorsque le gaz est comprimé localement par une perturbation de la structure d'équilibre, sa température augmente, ce qui provoque une diminution de l'opacité κ et un amortissement de la perturbation par dissipation radiative. Dans les régions d'ionisation majeures (hydrogène, hélium, éléments du pic du fer), une grande partie du flux de photons venant de l'intérieur est absorbé ce qui donne lieu à un pic localisé de l'opacité. La compression du gaz par la perturbation augmente κ . L'énergie s'accumule peu à peu à la base de la zone d'ionisation, la température augmente, jusqu'à entraîner une dilatation du gaz et une diminution de l'opacité. Lorsque le surplus d'énergie est évacué, le gaz n'arrive plus à supporter le poids des couches supérieures. Il se contracte de nouveau et réengage un cycle de pulsation.

Ce mécanisme est à l'œuvre dans de nombreuses classes d'étoiles pulsantes. On introduira succinctement les caractéristiques de certaines de ces classes – les étoiles δ Scuti, SPB, et β Cephei – dans la Sect. 1.2.3.

³On remarquera que τ_{th} est équivalent à l'échelle de temps de Kelvin-Helmholtz τ_{KH} pour $m_0 = 0$.

Mécanisme ϵ .

Le taux de production d'énergie ϵ_{nuc} par les réactions nucléaires dans le cœur d'une étoile peut être approximé par une expression de la forme :

$$\epsilon_{\text{nuc}} \propto \rho^a T^b \quad (1.59)$$

où a et b sont déterminés par le cycle de réactions nucléaires à l'œuvre dans l'étoile : $(a, b) = (1, 4)$ pour la chaîne p-p, $(1, 16)$ pour le cycle CNO et $(2, 40)$ pour le brûlage de l'hélium par les réactions triple α .

Dans le mécanisme ϵ , une compression induite par une perturbation du fluide dans le cœur nucléaire augmente le taux de production d'énergie nucléaire ϵ_{nuc} et chauffe le gaz. La structure s'ajuste, se dilate et libère l'excédent d'énergie nucléaire de sorte que la température et ϵ_{nuc} diminuent progressivement. Lorsque le gaz ne peut plus soutenir le poids des couches supérieures, il se contracte à nouveau et le cycle est réamorcé.

Aucune classe d'étoiles pulsantes connue n'a pu être expliquée par le mécanisme ϵ seul. Des études suggèrent néanmoins qu'il pourrait être à l'origine de pulsations dans les étoiles naines M (e.g. [Palla & Baraffe, 2005](#); [Rodríguez-López et al., 2012, 2014](#)) sans qu'elles n'aient été détectées jusqu'à présent (e.g. [Baran et al., 2011](#); [Krzyszinski et al., 2012](#); [Baran et al., 2013](#); [Berdinias et al., 2017](#)). Ce mécanisme pourrait également être efficace dans les étoiles massives évoluées lorsqu'elles brûlent l'hydrogène en couche (e.g. [Shibahashi & Osaki, 1976](#); [Moravveji et al., 2012](#)).

Blocage convectif

Le mécanisme de "blocage convectif" permet d'expliquer les modes de pulsation des étoiles γ Doradus et de façon générale s'applique à des étoiles possédant une enveloppe convective. En se fondant sur les travaux de [Pesnell \(1987\)](#), [Guzik et al. \(2000\)](#) ont expliqué la variabilité des γ Dor par un mécanisme de blocage et de libération successifs du flux convectif à la base de la zone convective externe (ZCE), dans le cadre d'une approximation de convection figée (*frozen convection*). Dans une approche non-adiabatique et tenant compte du couplage convection-pulsation (*time-dependent convection*), [Dupret et al. \(2005\)](#) ont pu confirmer ce résultat bien que l'hypothèse de convection gelée ait été relâchée. Ils montrent que l'excitation dépend très étroitement des caractéristiques de la ZCE. Malgré le réalisme de leur approche, [Dupret et al. \(2005\)](#) ne sont pas parvenus à expliquer l'excitation des pulsations dans les γ Doradus les plus chaudes, pour lesquelles l'enveloppe convective devient très fine. Cela demeure encore aujourd'hui un point à éclaircir. Plus récemment, [Bouabid et al. \(2013\)](#) ont étendu l'étude de [Dupret et al. \(2005\)](#) au cas des étoiles en rotation dans le formalisme de la TAR. Néanmoins, un traitement complet des interactions dynamiques et thermodynamiques des pulsations avec la rotation et la convection manque encore à ce jour.

Concrètement, le mécanisme de blocage convectif fonctionne de la façon suivante. À la base de la ZCE, le flux radiatif décroît très rapidement avec le rayon, la convection étant plus efficace pour transporter l'énergie vers la surface. Or, dans cette zone, l'échelle de temps caractéristique de la convection τ_c reste très faible. Lorsque τ_c est plus faible que la période de l'oscillation ($\omega\tau_c \ll 1$), l'excédent de flux radiatif dû à la compression du milieu par l'oscillation n'a pas le temps d'être transporté par la convection (il est "bloqué"). Le surplus d'énergie est alors injecté dans la pulsation sous forme d'énergie mécanique. Pour les étoiles γ Doradus, il est en réalité plus correct de parler de modulation du flux radiatif à la base de l'enveloppe convective car la zone où $\omega\tau_c \ll 1$ est très fine de sorte que l'excès de flux radiatif n'est pas entièrement bloqué.

Excitation stochastique : les oscillations de type solaire

Dans les étoiles possédant une enveloppe convective ($M \lesssim 2M_{\odot}$), les mouvements convectifs turbulents peuvent exciter des modes de pression en “tapant” aléatoirement sur la surface de l'étoile. Paradoxalement, ce processus d'excitation stochastique n'étant pas cohérent, il participe aussi à l'amortissement des modes. L'amplitude d'un mode résulte donc de la compétition entre la puissance injectée dans le mode par la convection turbulente et son taux d'amortissement. Cette compétition est responsable de la modulation gaussienne du spectre dans les oscillateurs de type solaire (voir le spectre de 16 Cyg B en Fig.1.5), de laquelle est déduite ν_{\max} , la fréquence de puissance d'oscillation maximale.

Des oscillations de type solaire sont observées dans le Soleil (e.g. Ulrich, 1970; Leibacher & Stein, 1971), les étoiles de type solaire et les géantes rouges (e.g. Chaplin & Miglio, 2013). Des pulsations stochastiquement excitées semblent aussi présentes dans le spectre de certaines étoiles chaudes (e.g. Belkacem et al., 2009, 2010; Samadi et al., 2010; Neiner et al., 2012), qui seraient excitées au niveau du coeur convectif ou une zone convective intermédiaire.

Il est à noter également que, contrairement aux modes auto-entretenus, un mode de type solaire a une largeur intrinsèque dans l'espace de Fourier. Son amplitude \hat{A} dans le spectre de puissance suit en très bonne approximation un profil lorentzien (e.g. Baudin et al., 2005) de la forme :

$$\hat{A}(\nu) = \frac{H}{1 + \frac{4(\nu - \nu_0)^2}{\Gamma^2}} \quad (1.60)$$

où H et ν_0 sont la hauteur et la fréquence du mode, respectivement. Γ est sa largeur à mi-hauteur, reliée au taux d'amortissement η par $\eta = \pi\Gamma$. Ainsi, plus le mode est amorti, plus sa durée de vie est courte et plus sa largeur dans l'espace de Fourier est grande. La Fig. 1.6 représente le profil dans l'espace de Fourier d'un mode p du Soleil. Le bruit qui se superpose au profil lorentzien s'explique par la nature stochastique du processus d'excitation.

1.2.3 Les pulsations stellaires dans le diagramme Hertzsprung-Russell

Comme le montre le diagramme HR sismique tracé en Fig. 1.7, des pulsations sont observées dans une grande diversité d'étoiles. Cette section (Sect. 1.2.3) rappelle les caractéristiques des classes étudiées dans ce manuscrit à savoir les oscillateurs de type solaire et les pulsateurs basse-fréquence de la séquence principale – les étoiles γ Doradus et SPB. Le lecteur pourra se référer à Aerts et al. (2010, Chap. 2) pour une description plus exhaustive des classes d'étoiles pulsantes.

Oscillateurs de type solaire

Les oscillations de type solaire correspondent à des modes p d'ordre radial élevé excités stochastiquement. On les trouve dans les étoiles de faible masse à différents stades de leur évolution, de la séquence principale à la branche asymptotique des géantes. À partir de la phase de sous-géante, certains modes d'oscillation adoptent un caractère mixte p - g : ils se comportent comme un mode g dans les régions centrales et comme un mode p dans le reste de l'étoile.

Paramètres sismiques globaux $\langle \Delta\nu \rangle$ et ν_{\max} .

Dans les oscillateurs de type solaire, les paramètres sismiques globaux – $\langle \Delta\nu \rangle$ la grande séparation moyenne et ν_{\max} la fréquence de puissance d'oscillation maximale – sont communément utilisés pour caractériser une étoile en complément des paramètres classiques ($L, T_{\text{eff}}, \log g$,

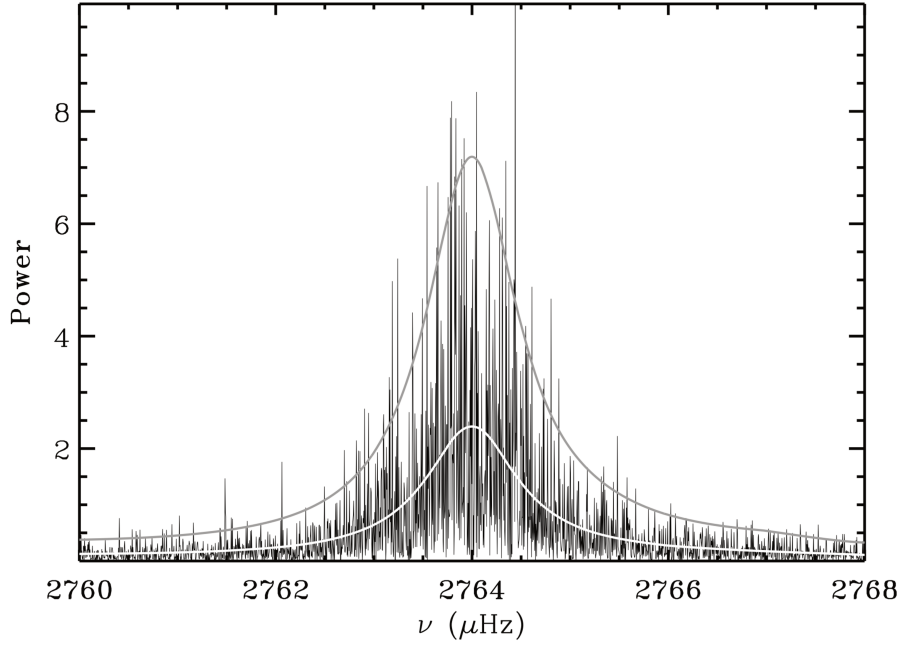


FIGURE 1.6: Profil dans l'espace de Fourier d'un mode d'oscillation excité stochastiquement dans le Soleil, tel qu'observé par le réseau de télescopes BiSON (Chaplin et al., 2002). La courbe blanche représente un ajustement des données par un profil lorentzien. La courbe noire montre ce même profil multiplié par 3. Figure tirée de Aerts et al. (2010).

[Fe/H]). D'une part, ils sont facilement mesurables dans un spectre d'oscillation (même quand les modes individuels sont mal résolus). D'autre part, ils apportent des contraintes précises sur la masse et le rayon des étoiles en particulier via les relations d'échelle, qu'on introduira ci-après.

Le spectre des oscillations est modulé par une enveloppe gaussienne, résultat de la compétition entre l'excitation et l'amortissement des modes dans les couches proches de la surface de l'étoile (Fig. 1.5). Ainsi, la fréquence de puissance d'oscillation maximale ν_{\max} reflète les propriétés de ces couches superficielles, de sorte que :

$$\nu_{\max} \propto \nu_c \propto \frac{g}{\sqrt{T_{\text{eff}}}} \propto \frac{M}{R^2 \sqrt{T_{\text{eff}}}} \quad (1.61)$$

où ν_c est la fréquence de coupure acoustique, au-delà de laquelle les ondes acoustiques ne sont plus réfléchies à la surface de l'étoile (Brown et al., 1991; Bedding & Kjeldsen, 2003; Stello et al., 2009; Belkacem et al., 2011).

La grande séparation moyenne $\langle \Delta \nu \rangle$ équivaut en bonne approximation à la grande séparation asymptotique $\Delta \nu$, définie précédemment par l'Eq. 1.53. Elle est donc reliée au rayon acoustique total de l'étoile $T_0 \approx (2\langle \Delta \nu \rangle)^{-1}$, qui est lui-même approximativement proportionnel à $\langle \rho \rangle^{-1/2}$. Ainsi, $\langle \Delta \nu \rangle$ est un bon diagnostic de la densité moyenne (e.g. Ulrich, 1986) puisque :

$$\langle \Delta \nu \rangle \propto \langle \rho \rangle^{1/2} \propto \left(\frac{M}{R^3} \right)^{1/2} \quad (1.62)$$

Relations d'échelle.

À partir des relations d'homologie (e.g. Kippenhahn et al., 2012) et des équations 1.61 et 1.62, des relations d'échelle ont été construites de façon à obtenir le rayon et la masse d'une étoile à partir

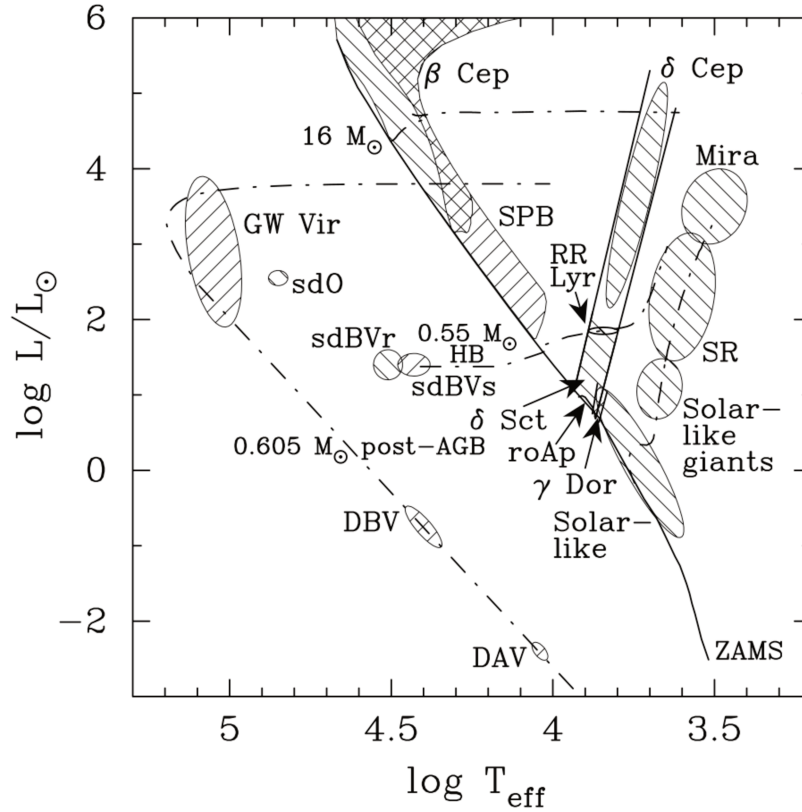


FIGURE 1.7: Diagramme de Hertzsprung-Russell des étoiles pulsantes. Les classes d'étoiles oscillant selon des modes p (modes g) sont représentées par des hachures penchées vers la droite (vers la gauche). Figure tirée de [Handler \(2009\)](#).

des observables sismiques globales et de la température effective (e.g. [Kjeldsen & Bedding, 1995](#); [Belkacem et al., 2013](#)) :

$$\frac{R_{\star}}{R_{\odot}} \approx \left(\frac{v_{\max}}{v_{\max,\odot}} \right) \left(\frac{\langle \Delta\nu \rangle}{\langle \Delta\nu \rangle_{\odot}} \right)^{-2} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff},\odot}} \right)^{1/2} \quad (1.63)$$

$$\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \approx \left(\frac{v_{\max}}{v_{\max,\odot}} \right)^3 \left(\frac{\langle \Delta\nu \rangle}{\langle \Delta\nu \rangle_{\odot}} \right)^{-4} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff},\odot}} \right)^{3/2} \quad (1.64)$$

où $v_{\max,\odot} = 3050 \mu\text{Hz}$, $\langle \Delta\nu \rangle_{\odot} = 134.9 \mu\text{Hz}$ et $T_{\text{eff},\odot} = 5777 \text{ K}$.

Bien qu'elles soient dérivées d'approximations relativement grossières, les relations d'échelle donnent généralement des estimations très précises du rayon et de la masse au-delà de ce qui est atteignable avec les observables classiques seules. Elles sont donc des outils extrêmement puissants pour caractériser une étoile. Cela dit, les relations d'échelle ne sont pas totalement exactes et un certain nombre de travaux visent à les étalonner empiriquement à partir de systèmes binaires à éclipses, dans lesquels le rayon et la masse peuvent être mesurés indépendamment (e.g. [Gaulme et al., 2016](#)). Notons qu'on parle ici de corrections de l'ordre de quelques pourcents.

Effets de surface.

La convection turbulente responsable de l'excitation des oscillations dans les couches de surface est un processus intrinsèquement 3D qui implique plusieurs échelles temporelles et spatiales. Pour ces raisons, il est très difficile à modéliser et qui plus est, à inclure correctement dans les modèles stellaires 1D. Ces incertitudes engendrent un décalage systématique entre les

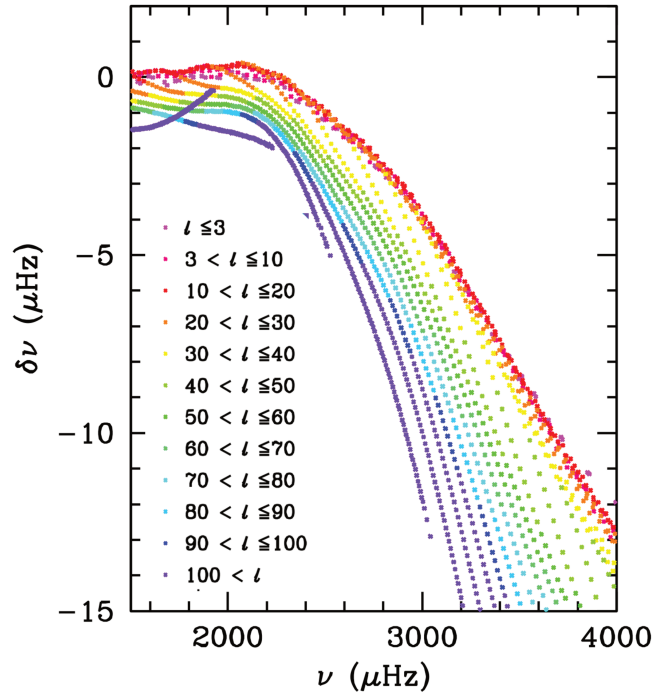


FIGURE 1.8: Différences entre les fréquences du Model S de Christensen-Dalsgaard et al. (1996) – un modèle 1D sismique du Soleil – et les fréquences solaires observées issues de données BiSON (Basu et al., 2009). Figure adaptée de Basu (2016).

fréquences d’oscillation observées et modélisées, ce sont les effets de surface. À titre illustratif, la Fig. 1.8 montre ces différences de fréquences entre un modèle sismique 1D du Soleil et les fréquences observées. On y voit notamment qu’elles sont plus importantes à haute fréquence et à haut degré angulaire ℓ .

Des corrections empiriques des effets de surface ont été développées dans lesquelles un ou plusieurs paramètres libres sont ajustés sur les différences de fréquences (Kjeldsen et al., 2008; Ball & Gizon, 2014; Sonoi et al., 2015). Elles sont aujourd’hui quasi-systématiquement utilisées dans la modélisation sismique des pulsateurs de type solaire. Néanmoins, leur exactitude reste difficile à évaluer et elles sont sources d’incertitudes supplémentaires sur les paramètres stellaires estimées par la modélisation. Les effets de surface demeurent un problème majeur de la sismologie des oscillateurs de type solaire.

Étoiles γ Doradus (γ Dor)

Les étoiles γ Doradus (ci-après, γ Dor) sont des étoiles de séquence principale de type spectral A tardif à F précoce, et de masses comprises entre 1.3 et 2.0 M_{\odot} . Ces étoiles sont typiquement des rotateurs modérés à rapides avec des périodes de rotation inférieures au ou de l’ordre du jour, bien que certaines d’entre elles puissent tourner relativement lentement (une ou plusieurs dizaines de jours). Pour des étoiles de types spectraux comparables à ceux des γ Dor, Royer (2009) montre que la moyenne de la vitesse équatoriale projetée ($\nu \sin i$) varie d’environ 120 $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ (A5) à $\sim 40 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ (F5) (voir Fig. 1.9).

Du point de vue sismique, les γ Dor oscillent selon des modes g d’ordre radial élevé dont les périodes sont de l’ordre de 0.3 à 3 jours. Ils sont excités par le mécanisme de blocage convectif (voir Sect. 1.2.2). Par ailleurs, des travaux récents ont mis en évidence la présence de modes de Rossby (ou modes r) dans le spectre des γ Dor (Van Reeth et al., 2016; Saio et al., 2018a). Ces modes n’apparaissent que dans les étoiles en rotation et correspondent à un couplage des mouvements toroïdaux et sphéroïdaux du fluide causés par la force de Coriolis. On aura l’occasion d’y revenir dans le Chap. 2.

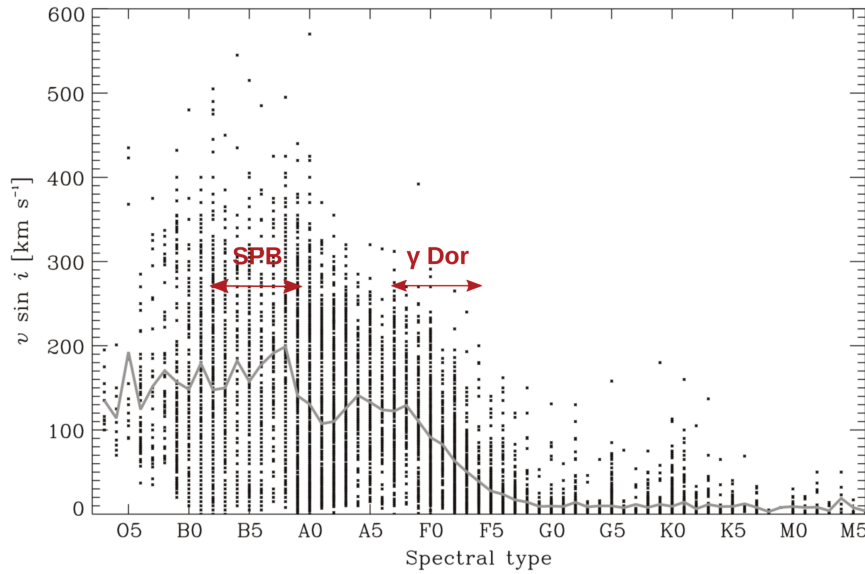


FIGURE 1.9: Distribution de la vitesse équatoriale projetée $v \sin i$ en fonction du type spectral. Les points représentent les mesures individuelles compilées de [Glebocki et al. \(2000\)](#), [Abt et al. \(2002\)](#) et [Royer et al. \(2002\)](#). La ligne grise correspond à la variation de la moyenne par type spectral. Les types spectraux couverts par les étoiles γ Dor et SPB sont indiqués par des flèches rouges. Figure adaptée de [Royer \(2009\)](#).

Étoiles SPB

Les étoiles SPB – de l’acronyme anglais *Slowly-Pulsating B (stars)* – sont des étoiles de séquence principale de type spectral B3 à B9, et de masses comprises entre ~ 2.5 et $8 M_{\odot}$. Ces étoiles sont souvent des rotateurs rapides ($\langle v \sin i \rangle \sim 180 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, voir Fig. 1.9). Des pulsations basse-fréquence (de type SPB) sont d’ailleurs observées dans les étoiles Be qui tournent à une vitesse proche de leur vitesse de rotation critique (e.g. [Walker et al., 2005](#); [Saio et al., 2007](#); [Pápics et al., 2017](#)).

Les SPB oscillent selon des modes g d’ordre radial élevé de périodes de l’ordre de 0.5 à 5 jours. Ils sont excités par le mécanisme κ au niveau du pic d’opacité des métaux à $T \sim 2 \times 10^5 \text{ K}$ (e.g. [Dziembowski et al., 1993](#)).

Hybridité

Comme on peut le voir sur le diagramme HR sismique (Fig. 1.7), les bandes d’instabilité des différentes classes d’étoiles pulsantes se recoupent parfois rendant possible l’existence de pulsateurs hybrides qui revêtent alors les caractéristiques sismiques de deux types de pulsateurs à la fois. Parmi ces chimères sismiques figurent les β Cephei/SPB et les δ Scuti/ γ Dor. Le caractère hybride de ces pulsateurs présente l’avantage de donner accès aux propriétés des couches externes, via les modes p , ainsi qu’à celles de l’intérieur, via les modes g .

Les δ Scuti sont des étoiles de type spectral A, de masses allant de 1.5 à $2.5 M_{\odot}$. Ces étoiles pulsent selon des modes p avec des périodes de l’ordre de 20 min à 8h. Les oscillations sont excitées par le mécanisme κ dans la région d’ionisation de HeII.

Les β Cephei sont des étoiles de séquence principale de type spectral B0 à B2, et de masses dans l’intervalle $8\text{-}20 M_{\odot}$. Elles sont le siège d’oscillations de type p et g d’ordre radial faible,

entretenues par le mécanisme κ dû au pic d'opacité des métaux. Les périodes des pulsations vont typiquement de 2 à 8 h.

1.2.4 Contexte observationnel récent : l'ère spatiale

Jusqu'au début des années 2000⁴, les observations spectroscopiques et photométriques destinées à l'astérosismologie ne pouvaient être acquises que depuis le sol avec les limites que cela implique : l'interruption du suivi en temps par le cycle jour/nuit et les contraintes météorologiques, la durée relativement courte des observations, ou encore les effets de l'atmosphère terrestre sur la précision des mesures. Ces limitations n'ont pourtant pas empêché la détection d'oscillations dans les pulsateurs de type solaire (e.g. [Brown et al., 1991](#); [Kjeldsen et al., 1995](#); [Bouchy & Carrier, 2001](#); [Bedding et al., 2001](#); [Frandsen et al., 2002](#)) ou dans la plupart des classes de pulsateurs classiques. Cependant, en s'affranchissant de ces contraintes, les missions spatiales dédiées à la photométrie de haute précision ont produit des spectres d'oscillation d'une qualité jusqu'alors inégalée pour des dizaines de milliers d'étoiles, révolutionnant le champ de l'astérosismologie et plus largement de la physique stellaire. On revient ici rapidement sur les missions passées, actuelles et futures qui ont contribué, et continueront de contribuer à cette révolution.

Les premières missions spatiales à s'être intéressées à l'étude des oscillations stellaires ont été WIRE⁵ ([Buzasi, 2000, 2002, 2004](#)) et MOST⁶ ([Matthews, 2007](#)). WIRE devait initialement faire un balayage complet du ciel dans l'infrarouge, en s'intéressant notamment aux galaxies à sursaut de formation d'étoiles et aux protogalaxies. Cependant, une avarie survenue peu après le lancement a compromis le système de refroidissement de l'instrument rendant impossible la mission primaire du télescope. Dans le but d'obtenir tout de même un retour scientifique, la mission a été reconvertie pour l'étude des oscillations d'étoiles brillantes en utilisant le viseur d'étoiles comme instrument. En ce qui concerne MOST, elle a été la première mission dédiée à l'astérosismologie, fournissant des courbes de lumière quasi-continues sur des périodes pouvant aller jusqu'à 60 jours. Ces deux missions ont contribué à l'extension du nombre d'oscillateurs de type solaire connus jusqu'alors.

Capitalisant sur les connaissances techniques et scientifiques acquises avec MOST et WIRE, et dans un contexte où les détections d'exoplanètes depuis le sol se multiplient, les missions CoRoT⁷ ([Auvergne et al., 2009](#)) et *Kepler*⁸ ([Borucki et al., 2010](#)) sont lancées à la fin des années 2000 avec un objectif double et concomitant : la détection d'exoplanètes par la méthode du transit et l'astérosismologie. CoRoT a observé plusieurs champs de vue sur des cycles courts de 25 jours et des cycles longs de 150 jours selon les cibles pointées et les objectifs scientifiques prioritaires du cycle. Le rapport cyclique atteint 90% et limite fortement les effets du fenêtrage dans les spectres d'oscillation. Les résultats scientifiques sont nombreux et touchent autant la physique stellaire que l'exoplanétologie ([CoRoT Team, 2016](#)). En rapport avec cette thèse, on évoquera notamment les premières détections de la signature sismique des zones d'ionisation de l'hélium et de la base de la zone convective dans les pulsateurs de type solaire ([Miglio et al., 2010](#); [Mazumdar et al., 2012](#); [Lebreton & Goupil, 2012](#)), ou la détection d'oscillations de type γ Dor et δ Scu/ γ Dor dans des centaines d'étoiles ([Hareter, 2012](#)), dont certaines ont été étudiées plus en détail (e.g. [Chapellier et al., 2011, 2012](#); [Chapellier & Mathias, 2013](#); [Maceroni et al., 2013](#)).

⁴Des observations sismiques depuis le sol sont encore effectués aujourd'hui notamment avec le réseau de télescopes SONG (e.g. [Grundahl et al., 2017](#), pour la sous-géante μ Her).

⁵Wide-field InfraRed Explorer, NASA, lancé en 1999.

⁶Microvariability and Oscillations of STars, Agence Spatiale Canadienne, lancé en 2003

⁷Convection, Rotation et Transits planétaires, CNES/ESA, lancé en 2006

⁸*Kepler*, NASA, lancé en 2009

Le satellite *Kepler* avait pour mission première la détection d'exo-Terres autour d'étoiles de type solaire dans la zone habitable, et donc nécessairement avec des périodes orbitales de l'ordre de l'année. C'est pourquoi le télescope fut pointé vers un seul champ de vue pendant les 4 ans qu'a duré la mission (2009-2013). Cette stratégie a aussi profité à l'étude des oscillations stellaires. Du fait de la longue durée des observations et de la précision de sa photométrie, *Kepler* a fourni des spectres d'oscillation d'une qualité sans précédent aussi bien en termes de résolution que de rapport signal sur bruit, qui plus est, pour un grand nombre d'étoiles. En l'occurrence, le présent manuscrit s'appuie entièrement sur ces données mais la moisson de données est telle que nous sommes encore loin d'avoir explorée tout son potentiel. Suite à un dysfonctionnement des deux roues de réaction, *Kepler* est reconverti en K2 (Howell et al., 2014). Il a observé plusieurs champs de vue le long de l'écliptique sur des périodes d'environ 80 jours, avant de prendre sa retraite en mars 2019.

La 3ème génération de missions d'envergure pour l'astérosismologie (et les exoplanètes) sont TESS⁹ (Ricker et al., 2015) et PLATO¹⁰ (Rauer et al., 2014). Bien qu'ayant des objectifs quelque peu différents, ces deux missions prévoient d'élargir les champs d'observation de CoRoT et *Kepler* et d'augmenter le nombre de pulsateurs observés d'un ordre de grandeur au moins. Cela ne sera d'ailleurs pas sans poser de nouveaux défis à la communauté pour exploiter au mieux ce flot conséquent de données. TESS est en opération depuis juillet 2018 et a déjà obtenu de nombreux résultats tant en astérosismologie qu'en détection d'exoplanètes. On citera en exemple la détection d'une Saturne chaude autour d'une sous-géante dont les oscillations de type solaire ont permis de caractériser précisément le système (Huber et al., 2019).

1.3 Enjeux de la thèse

Le modèle standard de la physique stellaire représente un modèle de base sur lequel s'appuyer pour interpréter les caractéristiques observables des étoiles. Il prédit la structure interne des étoiles, leurs différents stades évolutifs ainsi que leur paramètres fondamentaux, d'ailleurs avec un certain succès. Il suffit par exemple à décrire qualitativement, et quantitativement jusqu'à un certain point, la position et le parcours des étoiles dans le diagramme HR. Cela dit, les données observationnelles dont on dispose aujourd'hui (et en réalité depuis des dizaines d'années) sont d'une qualité suffisante pour en questionner la plupart des aspects.

Tout d'abord, sans même sortir des hypothèses du modèle standard, un certain nombre d'incertitudes sont constatées dans la pratique. L'intégration numérique des équations de la structure interne (Eq. 1.1-1.4) et de l'évolution chimique (Eq. 1.9) s'appuie sur tout une batterie de données décrivant le comportement microphysique de la matière : tables d'opacités, équation d'état, réactions nucléaires, transitions électroniques. C'est autant de mesures que d'incertitudes basées pour certaines d'entre elles sur des extrapolations aux régimes stellaires. En outre, la convection est traitée de manière approchée dans le cadre de la théorie de la longueur de mélange (Böhm-Vitense, 1958) avec un paramètre libre à ajuster aux observations, ce qui est finalement peu satisfaisant.

D'autre part, il est plutôt évident que le modèle standard souffre d'insuffisances dans sa description physique puisque aucune de ses hypothèses ne sont réellement vérifiées : les étoiles tournent, produisent des champs magnétiques, ont des vents stellaires et interagissent avec le milieu environnant.

En nous donnant accès aux conditions physiques dans les intérieurs stellaires, l'astérosismologie nous permet de constater précisément l'ampleur de notre ignorance mais aussi de tester et

⁹Transiting Exoplanet Survey Satellite, NASA, lancé en 2018.

¹⁰PLAnetary Transits and Oscillations of stars, ESA, lancement prévu pour 2026.

valider de nouvelles lois physiques plus précises et plus justes. Le contexte actuel n'a d'ailleurs jamais été aussi favorable pour l'entreprise de telles études.

Dans ce manuscrit, je me suis attelé au développement de diagnostics sismiques pour la rotation dans les pulsateurs basse-fréquence de séquence principale (Part. I) et les interfaces convective-radiative dans les pulsateurs de type solaire (Part. II). On donne ici quelques éléments d'introduction sur chacune des problématiques abordées en sachant qu'ils seront développés dans les Chap. 2 et 5, respectivement.

Rotation et transport de moment cinétique dans les étoiles γ Doradus

La distribution et l'évolution du moment cinétique dans les étoiles restent parmi les incertitudes majeures de la physique stellaire. La rotation a pourtant des effets majeurs sur la structure et l'évolution des étoiles. Les forces de Coriolis et centrifuge modifient l'équilibre des forces et déclenchent un certain nombre d'instabilités hydrodynamiques qui peuvent à leur tour agir sur la structure et la distribution du moment cinétique. Les études de la rotation du Soleil, des sous-géantes et des géantes rouges montrent que les processus de transport de moment cinétique habituellement pris en compte dans les modèles stellaires (circulation méridienne, turbulence de cisaillement, éventuellement freinage magnétique) sont insuffisants pour rendre compte des observations sismiques.

Cette partie du manuscrit étend l'étude du transport de moment cinétique aux pulsateurs de type γ Doradus. Progéniteurs de géantes rouges, ces pulsateurs offrent un point de vue nouveau sur le problème du transport de moment cinétique. Avec le Soleil, il s'agit des seules étoiles du bas de la séquence principale pour lesquelles nous avons accès à la rotation interne. Ce n'est qu'avec *Kepler* que nous avons pu résoudre et comprendre leur spectre d'oscillation. Pour étudier la rotation dans les γ Dor, il a fallu en premier lieu développer une méthode de mesure de la rotation interne des γ Dor à partir de leurs modes basse fréquence et de façon indépendante des modèles stellaires. C'est ce qui a donné naissance au code MORSE dont je ferai la présentation dans le Chap. 3. Dans un second temps, je montrerai les résultats d'une première comparaison de la rotation de modèles rotationnels incluant les mécanismes classiques de transport avec les mesures sismiques réalisées dans des γ Dor ciblées par *Kepler* (Chap. 4).

Sondage sismique des tachoclines stellaires

La tachocline désigne à l'origine la couche de cisaillement entre l'enveloppe convective du Soleil en rotation différentielle et son intérieur radiatif en rotation quasi-solide. Elle est fortement impliquée dans la génération du champ magnétique solaire par effet dynamo. La position et l'épaisseur de cette zone particulière du Soleil a pu être mesurée grâce à l'héliosismologie. En effet, les variations rapides de la structure interne laissent une signature bien identifiable dans les fréquences d'oscillation ce qui permet de remonter aux caractéristiques de la discontinuité. Néanmoins, il est toujours difficile de déduire des propriétés générales à partir d'un seul exemple, si bien que la modélisation de la tachocline reste incertaine tant au niveau de sa structure (température, composition chimique) que de la génération du champ magnétique solaire.

Grâce à la qualité des observations *Kepler*, l'étude des tachoclines dans les étoiles de type solaire autre que le Soleil est aujourd'hui possible, ce qui permettrait de généraliser notre compréhension des processus physiques engagés au niveau de cette interface. La difficulté réside dans le fait que seules les fréquences des modes de bas degré ($\ell \leq 3$) nous sont accessibles. Dans cette partie, j'examine le potentiel des rapports sismiques – construits à partir des modes $\ell = 0$ et $\ell = 1$ – comme diagnostic de la structure des tachoclines stellaires et en particulier de l'extension de la zone de pénétration des mouvements convectifs dans l'intérieur radiatif.

Première partie

Rotation et transport de moment cinétique dans les étoiles γ Doradus

Chapitre 2

La rotation des étoiles

2.1 Structure et évolution des étoiles en rotation

Une description complète de la rotation et de ses effets sur la structure et l'évolution d'une étoile est intrinséquement multi-dimensionnelle (2D si la rotation est axiale). L'accélération centrifuge modifie l'équilibre hydrostatique et déforme l'étoile, ce qui est à l'origine d'instabilités hydrodynamiques agissant sur la structure, la rotation et l'évolution de l'étoile via des phénomènes de transport des éléments chimiques et du moment cinétique. La résolution numérique des équations de la structure est complexe et coûteuse en temps de calcul. Des codes numériques 2D ont été développés en ce sens mais le coût de calcul reste trop élevé pour faire évoluer un modèle de façon auto-cohérente. On citera en exemple le code ESTER (Rieutord et al., 2016). Dans cette section, je me limiterai à une description 1D de la rotation et des processus associés, qui plus est, dans le cas particulier de la rotation différentielle radiale. L'ouvrage *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars* (Maeder, 2009) pourra servir de référence au lecteur qui souhaiterait en connaître davantage.

2.1.1 Rotation en coquille (*shellular rotation*) : $\Omega(r)$

Dans une approche standard 1D, le transport de moment cinétique (MC) est modélisé comme un processus advectif-diffusif et associé à un transport des éléments chimiques purement diffusif. Dans ce contexte, Zahn (1992) propose que la turbulence induite par la rotation différentielle est plus forte dans la direction horizontale que verticale. Cela revient à considérer que la rotation angulaire Ω est constante sur les isobares de la structure : c'est l'hypothèse de rotation en coquille ou *shellular rotation*. Chaque quantité physique est alors seulement fonction de la pression. Pour une rotation suffisamment faible, les isobares sont quasi-confondues avec les iso-rayons et on pourra considérer que $\Omega = \Omega(r)$.

2.1.2 Transport de moment cinétique et mélange rotationnel

Dans l'hypothèse de rotation en coquille, le transport de MC dans les zones radiatives suit une équation d'advection-diffusion de la forme :

$$\frac{dj}{dt} = -\frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial(r^2 F)}{\partial r} + \frac{dj_{\text{ext}}}{dt} \quad (2.1)$$

où $j = r^2 \Omega$ est le MC spécifique, F est le flux de MC réunissant les contributions de différents processus de transport et (dj_{ext}/dt) est la perte de MC en surface.

Les contributions au flux de MC sont diverses et ne sont pas toutes nécessairement prises en compte dans les modèles stellaires. Parmi les processus de transport actuellement identifiés, on compte le transport par :

- la circulation méridienne $F_{\text{CM}} = -\frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 \Omega U_r)$, où U_r est la vitesse verticale de la circulation.
- la turbulence de cisaillement, modélisée comme un processus diffusif $F_{\text{turb}} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho r^4 \nu_v \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)$, où ν_v est un coefficient de viscosité verticale.
- les ondes de gravité internes, elles pourraient être suffisamment efficaces pour transporter du moment cinétique et mélanger les éléments chimiques (e.g. [Schatzman, 1993](#); [Zahn et al., 1997](#); [Charbonnel & Talon, 2005](#); [Fuller et al., 2014](#); [Pinçon et al., 2017](#)).
- le couple exercé par la force de Lorentz et les instabilités magnéto-hydrodynamiques en présence d'un champ magnétique (e.g. [Charbonneau & MacGregor, 1993](#); [Ruediger & Kitchatinov, 1996](#); [Spruit, 1999, 2002](#); [Eggenberger et al., 2005](#); [Cantiello et al., 2014](#)).

Une modélisation "standard" de la rotation prend usuellement en compte le transport de MC par la circulation méridienne et la turbulence de cisaillement. L'Eq 2.1 s'écrit alors :

$$\rho \frac{d}{dt} (r^2 \Omega) = \frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 \Omega U_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho r^4 \nu_v \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \quad (2.2)$$

En outre, dans les étoiles possédant une enveloppe convective profonde, l'effet dynamo peut être suffisamment efficace pour générer un champ magnétique à grande échelle et induire un freinage magnétique de l'étoile par les vents stellaires magnétisés. Dans l'Eq. 2.2, cela se traduit par l'ajout d'un terme dont l'expression exacte dépendra de la prescription utilisée (e.g. [Kawaler, 1988](#); [Reiners & Mohanty, 2012](#); [Matt et al., 2012, 2015](#)).

Le transport d'éléments chimiques suit une équation de diffusion de la forme :

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial m} \left[(4\pi r^2 \rho)^2 (D_{\nu_v} + D_{\text{eff}}) \frac{\partial X_i}{\partial m} \right] + \frac{dX_i}{dt} \Big|_{\text{nucl}} \quad (2.3)$$

où $D_{\nu_v} = \nu_v$ est la composante verticale de la diffusion turbulente et où D_{eff} prend en compte la diffusion due aux courants méridiens et la diffusivité verticale liée au cisaillement dans la direction horizontale.

La modélisation du transport de MC et du mélange rotationnel dans les zones radiatives reste incertaine. Dans le transport induit par la rotation d'abord, les coefficients de diffusion et de viscosité sont fixés de manière *ad hoc* ou étalonnés directement sur les observations. Des travaux sont en cours pour tenter de sortir de ces prescriptions phénoménologiques, en s'appuyant sur les résultats de simulations 3D et d'expériences de laboratoire (e.g. [Mathis et al., 2018](#)). Quant aux processus de transport par les ondes internes et le champ magnétique, leurs efficacités respectives et les échelles de temps sur lesquelles ils agissent restent mal quantifiées, ce qui par conséquent contraint relativement peu les prescriptions théoriques 1D implémentables dans les modèles d'évolution stellaire.

Dans les zones convectives, l'échelle de temps du transport de MC et des éléments chimiques est très courte si bien qu'elles sont généralement supposées en rotation solide avec un mélange chimique instantané.

2.1.3 Impact sur la structure et l'évolution

La rotation et les processus de transport qui y sont associés ont de multiples effets sur la structure et l'évolution d'une étoile et représentent un important facteur d'incertitudes dans la détermination des paramètres stellaires (M , R , âge).

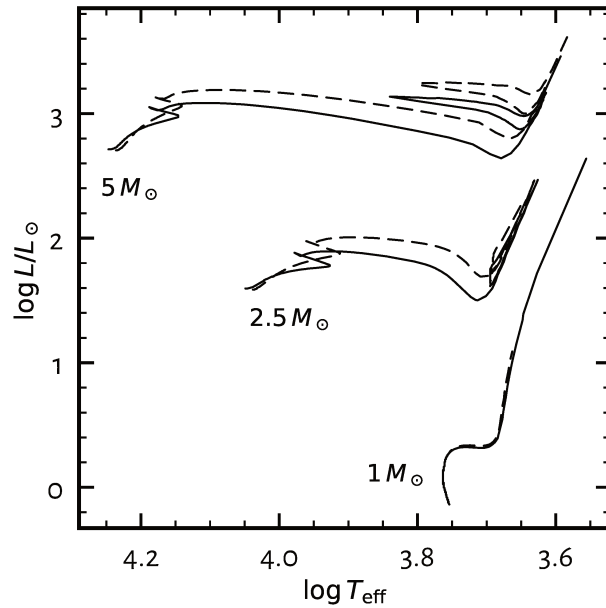


FIGURE 2.1: Traces évolutives pour des modèles de 1, 2.5 et $5 M_{\odot}$ et $Z = 0.014$ calculés avec (tirets) ou sans (traits pleins) les effets de la rotation. Les données sont issues de la grille de modèles Geneva calculés par Ekström et al. (2012).

Le mélange rotationnel lisse les gradients de composition chimique au niveau du cœur nucléaire (convectif ou non) et des interfaces radiative-convective. Ceci a deux effets principaux : (i) les abondances de surface des éléments chimiques sont modifiées par rapport à une étoile équivalente sans rotation et (ii) l'apport de carburant supplémentaire dans le cœur nucléaire prolonge les stades de fusion nucléaire (dont la séquence principale). Ainsi, négliger ces processus conduit à sous-estimer l'âge des étoiles et mésestimer leur composition chimique initiale.

On citera également les phénomènes de perte de masse qui jouent un rôle important dans l'évolution des étoiles massives. Leur efficacité est affectée par la rotation à cause de la modification de la structure et de l'intensité des vents stellaires induits par la pression de radiation. Inversement, en emportant du MC, la perte de masse ralentit la vitesse de rotation de l'étoile. En outre, si l'étoile atteint sa vitesse de rotation critique, du matériel stellaire pourra s'échapper du champ gravitationnel généré par l'étoile.

Enfin, du point de vue purement observationnel, il est à noter que du fait de l'assombrissement gravitationnel provoqué par la distorsion centrifuge, une étoile pourra changer d'aspect (T_{eff} ou L) selon son angle d'inclinaison par rapport à la ligne de visée.

À titre d'illustration, la Fig. 2.1 compare des traces évolutives pour des modèles de 1, 2.5 et $5 M_{\odot}$ calculées avec ou sans les effets de la rotation. Les données sont issues de la grille de modèles Geneva calculées par Ekström et al. (2012). La rotation est modélisée dans l'hypothèse de rotation en coquille avec une vitesse initiale sur la ZAMS égale à 40% de la vitesse de rotation critique. Les processus de transport de MC inclus sont la circulation méridienne, la turbulence de cisaillement et le freinage magnétique par les vents stellaires magnétisés ($M < 1.7 M_{\odot}$). Le transport des éléments chimiques suit l'équation 2.3.

Pour le modèle de $1 M_{\odot}$, les deux traces évolutives sont quasi-confondues suggérant que l'impact de la rotation sur la structure et l'évolution sont relativement faibles dans cette gamme de masse. Pour les modèles plus massifs (2.5 et $5 M_{\odot}$), les traces évolutives diffèrent très rapidement l'une de l'autre. La rotation peut augmenter le temps passé sur la séquence principale jusqu'à 25%. Cette différence se manifeste en réalité dès qu'un cœur convectif apparait et que l'étoile n'est plus freinée magnétiquement, ce qui concerne à la fois les γ Dor (1.3 à $2.0 M_{\odot}$) et les SPB (2.5 à $8 M_{\odot}$).

2.2 Sismologie des modes basse fréquence dans les étoiles en rotation

2.2.1 Oscillations linéaires adiabatiques d'une étoile en rotation

Pour une étoile en rotation, le calcul des oscillations linéaires adiabatiques suit la même démarche que pour le cas sans rotation (Sect. 1.2.1) : les pulsations sont des petites perturbations de la structure en rotation supposée à l'équilibre. À la différence du cas sans rotation, la vitesse du fluide perturbée se décompose sous la forme :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v}' = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \quad (2.6)$$

dans laquelle on a négligé la contribution de la circulation méridienne et où $\boldsymbol{\Omega}$ est le vecteur vitesse angulaire. Les équations des pulsations linéarisées (Eq. 1.31-1.33 et 1.29) se réécrivent alors sous la forme :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}') = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p_0 - \nabla \Phi' \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (2.9)$$

$$\frac{p'}{\rho_0} = \Gamma_{1,0} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}_0 \right) \quad \text{où } \mathbf{A}_0 = \frac{1}{\Gamma_{1,0}} \frac{\nabla p_0}{p_0} - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \quad (2.10)$$

La vitesse du fluide dans l'étoile en équilibre étant non nulle, des termes inertiels apparaissent et vont pouvoir agir sur la dynamique des modes d'oscillation. De plus, en l'état, le système d'équations n'est pas séparable.

2.2.2 Résolution numérique des équations complètes

Une approche possible consiste à résoudre numériquement les équations 2.7-2.10. Des codes numériques 2D ont été développés à cet effet parmi lesquels on trouve notamment ACOR (*Adiabatic Code of Oscillation including Rotation*, Ouazzani et al., 2012, 2015) et TOP (*Two-dimensional Oscillation Program*, Reese et al., 2006, 2009).

Ces codes utilisent une méthode spectrale multi-domaine dans laquelle la partie horizontale des solutions est développée sur une somme finie d'harmoniques sphériques $Y_{\ell,m}$. Le nombre d'harmoniques sphériques à prendre en compte est choisi de manière à ce que l'ajout d'une harmonique sphérique supplémentaire pour le calcul ne modifie pas la valeur propre trouvée. En ce qui concerne la partie radiale, elle est généralement mal adaptée à une description spectrale en raison des variations rapides de la structure, en particulier à la frontière du cœur convectif ou au niveau de la surface. Ainsi, des méthodes de type différences finies ou basées sur l'interpolation de splines sont souvent préférées par rapport à une décomposition spectrale sur des polynômes de Tchebychev.

Une interprétation sismique ou une modélisation directe des observations du type de celle que l'on peut mener en 1D restent actuellement inaccessibles dans une approche entièrement 2D (évolutions et oscillations), ayant trait au coût de calcul des modèles d'évolution stellaires 2D. Une approche alternative consiste à déformer un modèle stellaire 1D *a posteriori* (e.g. Roxburgh,

2006) puis d'en calculer les oscillations en 2D (e.g. [Ouazzani et al., 2015](#)). Le temps de calcul de tels modèles est relativement modeste, suffisamment en tout cas pour envisager de les utiliser dans une chaîne d'interprétation sismique (même si cela n'a jamais été testé jusqu'à présent). Notons toutefois que la résolution numérique 2D complète du problème est essentielle pour guider et valider les développements théoriques approchés, comme les méthodes perturbatives ou l'approximation traditionnelle de la rotation (voir Sect. 2.2.4), et pour, d'autre part, aiguiller l'interprétation des spectres d'oscillation observés.

2.2.3 Approche perturbative de la rotation

À rotation faible, les modes de pulsations sont en bonne approximation décrits par le formalisme perturbatif dans lequel la rotation est considérée comme une perturbation du cas sans rotation. Ainsi, l'approche perturbative calcule l'écart à la fréquence de pulsation non perturbée (c'est-à-dire d'une étoile équivalente sans rotation) que l'on appelle communément *splittings* rotationnels, en référence à la terminologie employée en mécanique quantique.

Le premier ordre, c'est-à-dire les termes en $O(\Omega)$, contient les effets sur les modes de pulsations venant du changement de référentiel (du repère co-tournant au repère inertiel), de la force de Coriolis et de la rotation différentielle ([Ledoux, 1951](#)). Dans le cas général d'une rotation axiale, les *splittings* rotationnels sont de la forme :

$$\delta v_{n,\ell,m} = v_{n,\ell,m} - v_{n,\ell,0} = \frac{m}{2\pi} \int_0^R \int_0^\pi K_{n,\ell,m}(r,\theta) \Omega(r,\theta) r d\theta dr \quad (2.11)$$

où $K_{n,\ell,m}$ sont les noyaux rotationnels, dont une expression complète pourra être trouvée dans e.g. [Schou et al. \(1994\)](#). Ils expriment en quelque sorte la sensibilité du mode (n, ℓ, m) au profil de rotation de l'étoile. Ainsi, il est possible de remonter au profil de rotation $\Omega(r, \theta)$ par des méthodes d'inversion, à condition de connaître les fréquences d'un nombre suffisant de modes (voir 5.1.3 pour un exemple dans le cas du Soleil).

Dans le cas d'une étoile en rotation solide, l'équation 2.11 se simplifie en :

$$\delta v_{n,\ell,m} = \frac{m}{2\pi} \Omega (1 - C_{n,\ell}) \quad (2.12)$$

où $C_{n,\ell}$ est la constante de Ledoux définie par :

$$C_{n,\ell}(r) = \frac{\int_0^R \rho_0 r^2 (2\xi_r \xi_h + \xi_h^2) dr}{\int_0^R \rho_0 r^2 (\xi_r^2 + \Lambda \xi_h^2) dr} \quad \Lambda = \ell(\ell + 1) \quad (2.13)$$

Pour les modes de gravité de bas degré observés dans les étoiles γ Dor et les SPB, $C_{n,\ell} \approx 1/\Lambda$. Les *splittings* sont ainsi une mesure quasi-directe de la fréquence de rotation à un facteur constant multiplicatif près.

Ce formalisme a été étendu au second ordre par [Saio \(1981\)](#) et [Dziembowski & Goode \(1992\)](#), et au troisième ordre par [Soufi et al. \(1998\)](#). Les termes supplémentaires incluent entre autres la contribution de la déformation centrifuge.

[Ballot et al. \(2010\)](#) ont étudié la validité du formalisme perturbatif en comparant les fréquences d'oscillation obtenues par la résolution numérique complète et celles issues du calcul des perturbations pour des polytropes radiatifs. La comparaison a été menée pour deux polytropes équivalents d'une étoile γ Dor de masse $1.55 M_\odot$ et d'une SPB de masse $4 M_\odot$. Les domaines de validité pour les modes $\ell = 1$ (les plus détectés dans les pulsateurs BF) sont présentés en Fig. 2.2. Comme on l'a vu dans la Sect. 1.2.3, les étoiles γ Dor et SPB sont en majorité des rotateurs modérés à rapides. Par ailleurs, les fréquences des modes dipolaires de ces étoiles sont

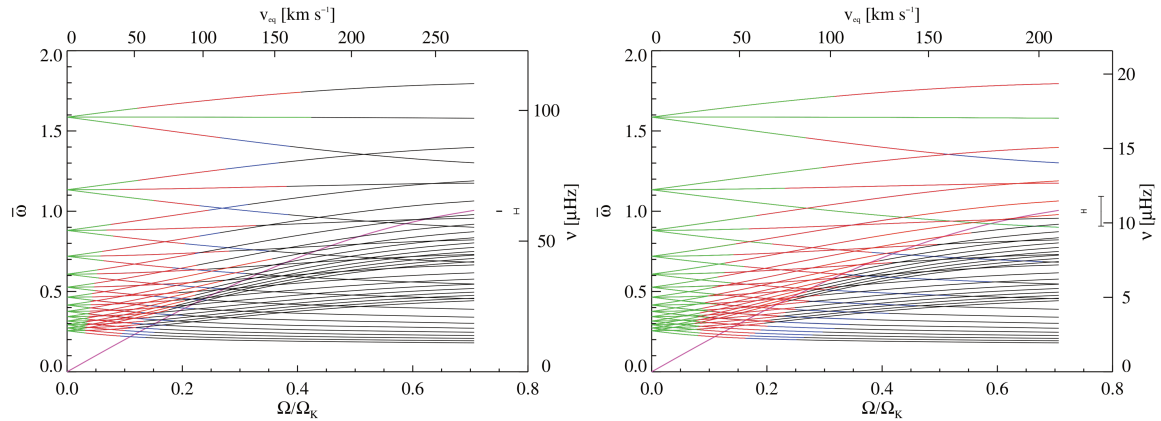


FIGURE 2.2: Domaines de validité des méthodes perturbatives pour les modes $\ell = 1$ dans des polytropes radiatifs représentatifs d’une étoile γ Dor de masse $1.55 M_{\odot}$ (à gauche) et d’une SPB de $4 M_{\odot}$ (à droite). Les lignes représentent les fréquences des modes issues des calculs complets en fonction de la fréquence de rotation (en fraction de la fréquence de rotation critique $\Omega_K = \sqrt{GM/R^3}$). Les couleurs indiquent le domaine de validité du 1er ordre (vert), 2nd ordre (rouge) et 3ème ordre (bleu). Le domaine de validité est défini comme la zone où les fréquences perturbées et issues des calculs complets diffèrent de moins de $\sigma_v = 0.1 \mu\text{Hz}$. Les barres d’erreur dans la partie droite des figures indiquent σ_v et $10\sigma_v$. La ligne magenta trace la courbe définie par $v_{\text{rot}} = 2v$. Figure adaptée de [Ballot et al. \(2010\)](#).

typiquement $\lesssim 50 \mu\text{Hz}$ pour les γ Dor ([Bouabid et al., 2013](#); [Van Reeth et al., 2015a](#); [Li et al., 2019b](#)) et $\lesssim 20 \mu\text{Hz}$ pour les SPB. Or dans ces régimes de paramètres, le formalisme perturbatif est insuffisant pour décrire correctement le spectre des oscillations. On introduit dans la Sect. 2.2.4 suivante, l’approximation traditionnelle de la rotation, un traitement simplifié mais non perturbatif des équations, qui s’avère particulièrement adapté aux pulsateurs BF.

2.2.4 L’approximation traditionnelle de la rotation (TAR)

L’approximation traditionnelle de la rotation (TAR) simplifie les équations des pulsations tout en prenant en compte les principaux effets de la force de Coriolis sur les modes d’oscillation. Elle fut initialement introduite par [Eckart \(1960\)](#) dans le contexte de la géophysique et ce n’est que bien plus tard qu’elle fut appliquée au problème des pulsations stellaires (e.g. [Berthomieu et al., 1978](#); [Lee & Saio, 1987](#); [Townsend, 2003](#)).

La TAR consiste à négliger la composante horizontale du vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$ et l’accélération centrifuge dans les équations de pulsations et fait l’hypothèse d’un profil de rotation constant¹. [Berthomieu et al. \(1978\)](#) montrent que ces hypothèses sont raisonnables pour les modes d’oscillation basse fréquence dans la limite $\Omega/\Omega_K \ll 1$, où $\Omega_K = \sqrt{GM/R^3}$ est la fréquence angulaire de rotation critique. Cela se justifie physiquement par le fait que les mouvements induits par les oscillations basse fréquence sont principalement horizontaux. Il convient toutefois de préciser que ce n’est pas tout à fait le cas près du centre de l’étoile, où les mouvements radiaux et horizontaux sont d’amplitude comparable. Grâce à ces approximations, les équations des pulsations peuvent être intégrées numériquement avec un coût de calcul nettement réduit par rapport aux calculs complets. En outre, en faisant l’approximation de [Cowling \(1941\)](#), valable pour les modes BF d’ordre radial élevé des étoiles γ Dor et SPB, le système d’équations devient séparable en les trois coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) dans le repère co-tournant avec l’étoile.

¹[Mathis \(2009\)](#) a généralisé la TAR à un profil de rotation en coquille faiblement différentiel.

La composante azimutale des équations reste identique au cas sans rotation. La partie latitudinale du problème est gouvernée par le problème aux valeurs propres des marées de Laplace :

$$\mathcal{L}_s \Theta_{m,k}(\mu, s) = -\lambda_{m,k}(s) \Theta_{m,k}(\mu, s). \quad (2.14)$$

où \mathcal{L}_s est un opérateur linéaire défini par :

$$\mathcal{L}_s \Theta_{m,k}(\mu, s) = \frac{d}{d\mu} \left[\frac{1-\mu^2}{1-\mu^2 s^2} \frac{d}{d\mu} \Theta_{m,k}(\mu, s) \right] - \frac{1}{1-\mu^2 s^2} \left(\frac{m^2}{1-\mu^2} + ms \frac{1+\mu^2 s^2}{1-\mu^2 s^2} \right) \Theta_{m,k}(\mu, s). \quad (2.15)$$

Les vecteurs propres $\Theta_{m,k}$ sont les fonctions de Hough, qui comme les valeurs propres $\lambda_{m,k}$, dépendent de $\mu = \cos\theta$ et du paramètre de spin $s = 2v_{\text{rot}}/v_{n,m,k}^{\text{co}}$, où $v_{\text{rot}} = \Omega/2\pi$ et $v_{n,m,k}^{\text{co}}$ est la fréquence d'un mode dans le repère co-tournant. Plus le paramètre de spin est grand, plus la force de Coriolis a une influence importante sur le mode d'oscillation. Chaque mode est identifié par (n, m, k) . Les nombres n et m correspondent à ceux déjà définis dans le cas sans rotation. Par convention, on choisit de prendre $m < 0$ pour les modes progrades et $m > 0$ pour les modes retrogrades. Le nombre k est un index d'ordre introduit par [Lee & Saio \(1997\)](#). En particulier, $k = \ell - |m| \geq 0$ pour les modes g , et $k < 0$ pour les modes n'existant qu'à rotation non nulle (dont les modes r). La Fig. 2.3 donne quelques exemples de valeurs propres $\lambda_{m,k}$ pour $m = -2$. En particulier, on remarquera que $\lambda_{m,k} \rightarrow \ell(\ell+1)$ quand $s, v_{\text{rot}} \rightarrow 0$. La dépendance radiale suit une équation de la même forme que pour le cas sans rotation mis à part que $\ell(\ell+1)$ est remplacé par les nouvelles valeurs propres $\lambda_{m,k}$.

Sous cette forme, les équations des pulsations sont résolubles par la méthode asymptotique du type de celle utilisée pour le cas sans rotation ([Shibahashi, 1979](#); [Tassoul, 1980](#)). Il suit que les périodes des modes d'oscillations dans le repère co-mobile s'écrivent :

$$P_{n,m,k}^{\text{co}} \approx \frac{P_0(n+\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{m,k}(s)}} \quad (2.16)$$

où ϵ est un terme de phase constant lié aux réflexions aux bords de la cavité résonnante. La séparation en période n'est désormais plus constante et vaut :

$$\Delta P_{\text{co}} \approx \frac{P_0}{\sqrt{\lambda_{m,k}(s)} \left(1 + \frac{d \ln \lambda_{m,k}}{d \ln s} \right)}. \quad (2.17)$$

Les périodes dans le repère inertiel sont ensuite déduites de la formule :

$$P_{n,m,k}^{\text{in}} = \left(v_{n,m,k}^{\text{co}} - m v_{\text{rot}} \right)^{-1} = \frac{P_{n,m,k}^{\text{co}}}{1 - m v_{\text{rot}} P_{n,m,k}^{\text{co}}} \quad (2.18)$$

La TAR (asymptotique ou non) semble donner une description satisfaisante des modes BF dans les étoiles en rotation uniforme. Les comparaisons des séparations en périodes entre les calculs complets et la TAR asymptotique montrent un bon accord général, que ce soit pour des polytropes radiatifs ([Ballot et al., 2012](#)) ou un modèle typique de γ Dor ([Ouazzani et al., 2017](#)). Néanmoins, on notera qu'à haut paramètre de spin, des différences significatives apparaissent pour les modes rétrogrades. [Ballot et al. \(2012\)](#) suggère que cela est dû à une modification de la zone de propagation de ces modes induite par la distorsion centrifuge (qui est négligée dans la TAR).

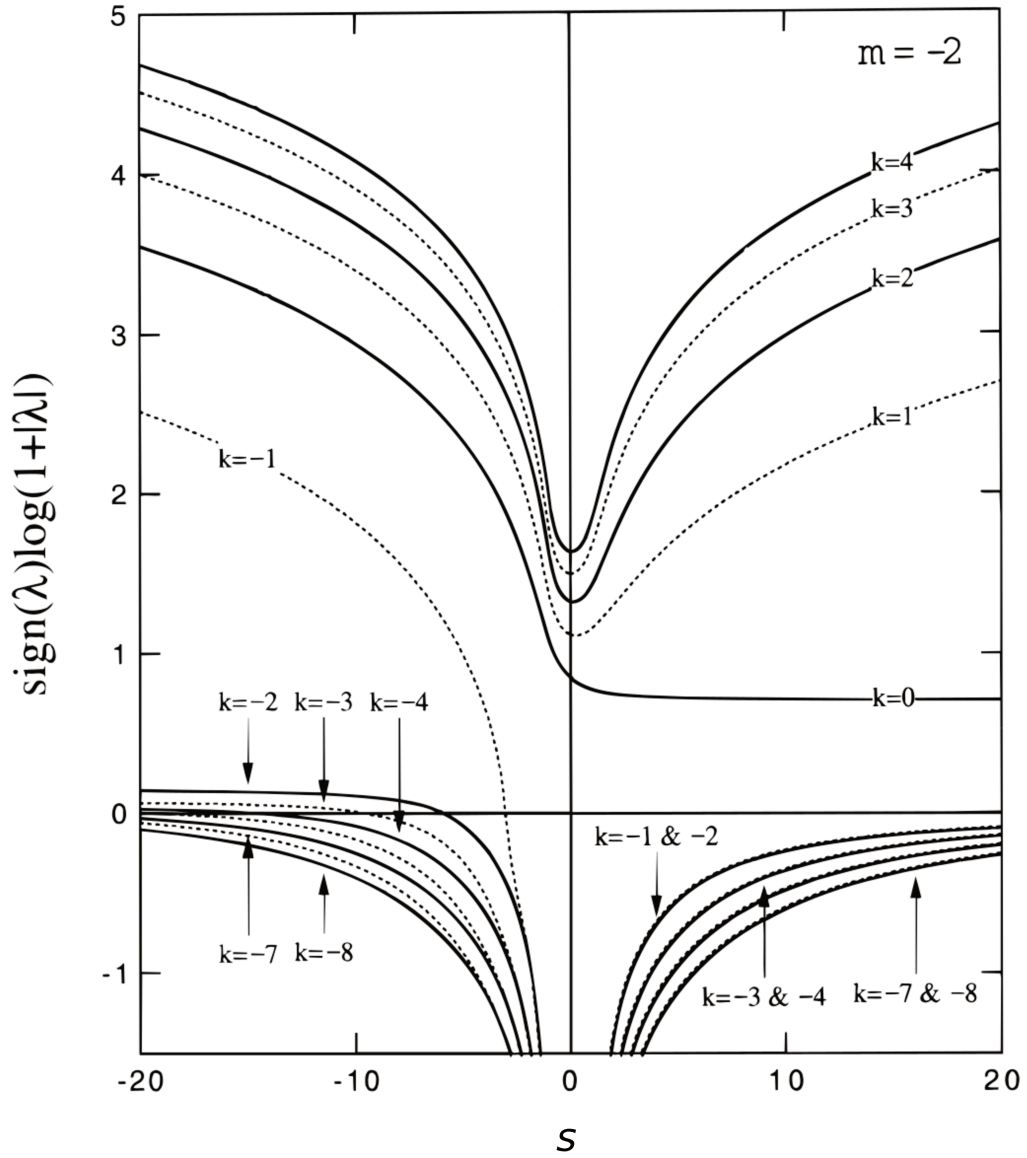


FIGURE 2.3: Valeurs propres $\lambda_{m,k}$ de l'équation des marées de Laplace pour $m = -2$. Les courbes représentent $(\lambda/|\lambda|)\log(1+|\lambda|)$, en fonction du paramètre de spin $s = 2v_{\text{rot}}/v_{n,m,k}^{\text{co}}$. Figure tirée de Lee & Saio (1997).

2.2.5 Effets de variations rapides de la fréquence de Brunt-Väisälä

Pour comprendre ce qui peut provoquer une variation rapide de la fréquence de Brunt-Väisälä (ou *glitch* d'Archimède), il est utile de considérer son expression pour un gaz parfait totalement ionisé dans laquelle la contribution de gradient de μ est explicite :

$$N_{\text{BV}} \approx \frac{g^2 \rho}{p} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla_T + \nabla_{\mu}), \quad (2.19)$$

Ainsi, toute variation brutale du poids moléculaire moyen dans la structure se traduira par une variation concomitante de la fréquence de Brunt-Väisälä. De telles variations sont notamment attendues à la frontière des cœurs convectifs. En effet, les réactions de fusion de l'hydrogène central entraînent une augmentation de μ dans le cœur convectif, sa taille évolue, ce qui crée un gradient de composition chimique de plus en plus important à sa frontière à mesure que l'étoile progresse sur la séquence principale. Pour les étoiles ayant de petits cœurs convectifs (~ 1.2 à $1.5 M_{\odot}$)², la contribution du cycle CNO au taux de production d'énergie nucléaire devient de plus en plus importante avec l'évolution, le cœur convectif grossit et une discontinuité structurelle s'établit à sa frontière. Pour les étoiles de masse $M \gtrsim 1.5 M_{\odot}$, le cœur rétrécit à cause de la diminution de l'opacité associée à la diminution de l'abondance en hydrogène central et laisse derrière lui un gradient de composition chimique dans la zone radiative.

À partir du principe variationnel, Miglio et al. (2008) démontrent que ce type de discontinuité piège les modes g de façon périodique avec l'ordre radial n dans la région du gradient de composition chimique. En considérant la discontinuité comme une perturbation de la structure de l'étoile, ils dérivent une expression pour la déviation des périodes des modes g par rapport à celles d'une étoile fictive équivalente mais sans discontinuité :

$$\delta P_n \propto A(P_n) \frac{P_0}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \cos\left(\frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{\pi} \frac{P_n}{P_{\mu}} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.20)$$

Ainsi, la discontinuité imprime une signature oscillante sur les périodes. L'amplitude de l'oscillation et sa dépendance avec la période $A(P_n)$ sont reliées à la hauteur α et à la forme du gradient de composition chimique, respectivement. La période donne le rayon d'Archimède de la discontinuité défini comme :

$$P_{\mu} = 2\pi \left(\int_{r_0}^{r_{\mu}} \frac{N_{\text{BV}}}{r} dr \right)^{-1} \quad (2.21)$$

où r_0 est le rayon à la base de la cavité résonnante et r_{μ} est le rayon de la discontinuité. Le spectre de modes g d'une étoile sans rotation étant régulièrement espacé en période, ΔP adopte le même comportement oscillatoire.

La Fig. 2.4 représente un diagramme $\Delta P - n$ pour deux modèles de $1.8 M_{\odot}$, soit dans la gamme de masse des γ Dor. L'un est sur la Pré-MS et n'a pas eu le temps de créer un gradient de composition chimique, l'autre est déjà bien avancé sur la MS et montre clairement la signature oscillante d'une discontinuité structurelle. Le panneau droit de la Fig. 2.4 représente le profil de N_{BV} correspondant aux deux modèles. Pour le modèle de séquence principale, on y retrouve la discontinuité de ∇_{μ} à la frontière du cœur convectif alors que le modèle sur la Pré-MS n'en montre aucune, ce qui est cohérent avec un ΔP quasi-constant.

Bouabid et al. (2013) et Ouazzani et al. (2017) retrouvent un comportement similaire pour des étoiles en rotation.

²L'intervalle en masse est donné à titre indicatif et peut varier substantiellement avec la métallicité de l'étoile et l'extension de la zone d'*overshoot* convectif au dessus du cœur.

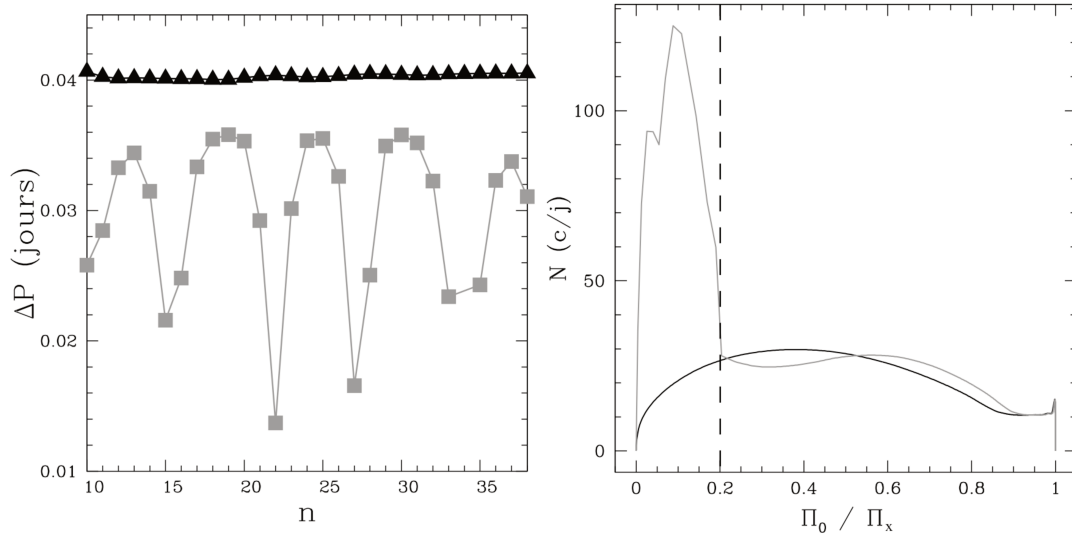


FIGURE 2.4: Effets d’une variation rapide de la fréquence de Brunt-Väisälä sur les modes g ($k = 0, m = -1$) d’un modèle de $1.8 M_{\odot}$ sur la Pré-MS (*en noir*) et sur la MS *en gris*. **À gauche :** Espacement en période ΔP en fonction de l’ordre radial n . **À droite :** Profil de la fréquence de Brunt-Väisälä (ici N) en fonction du rayon d’Archimède normalisé. La ligne en tirets indique la localisation de la discontinuité dans le modèle de séquence principale. Figure extraite de [Bouabid \(2011, p.127\)](#).

2.3 Les pulsateurs basse fréquence sur la séquence principale

2.3.1 Observations et interprétation des spectres d’oscillation

Structure du spectre des oscillations et régularités

On rappelle ici le comportement des modes basse fréquence d’ordre radial élevé dans les étoiles en rotation, en se plaçant dans le repère de l’observateur.

Modes de gravité

La Fig. 2.5 illustre le comportement des modes g avec l’augmentation de la vitesse de rotation.

Dans les étoiles en rotation faible ($s \ll 1$), le spectre de modes g est organisé en multiplets (n, ℓ) régulièrement espacés les uns des autres. L’information sur la rotation de l’étoile est portée par les *splittings* rotationnels $\delta\nu_{n,\ell} = \nu_{n,\ell,m} - \nu_{n,\ell,0}$, tel que décrit par les méthodes perturbatives (Sect. 2.2.3) et illustré par le spectre situé en bas de la Fig. 2.5.

Quand la période de rotation approche celle des modes d’oscillation ($s \sim 0.1$), les multiplets commencent à se superposer et il devient de plus en plus difficile de les distinguer visuellement dans le spectre. Néanmoins, les *period spacings* restent quasi-constants, ce qui rend possible la détection de structures régulières et la séparation des composantes du multiplet, notamment à l’aide d’un diagramme échelle (e.g. [Bedding et al., 2015](#)).

Pour une étoile en rotation modérée à rapide ($s \gtrsim 0.5$), la structure du spectre est fondamentalement différente. La rotation tend à séparer les modes selon leur géométrie, représentée par (ℓ, m) . Lorsque la fréquence de rotation augmente, les modes progrades ($m < 0$) et zonaux ($m = 0$) se décalent vers les faibles périodes alors que les modes retrogrades ($m > 0$) se déplacent vers des périodes plus longues. Si la rotation est suffisamment rapide, les modes de

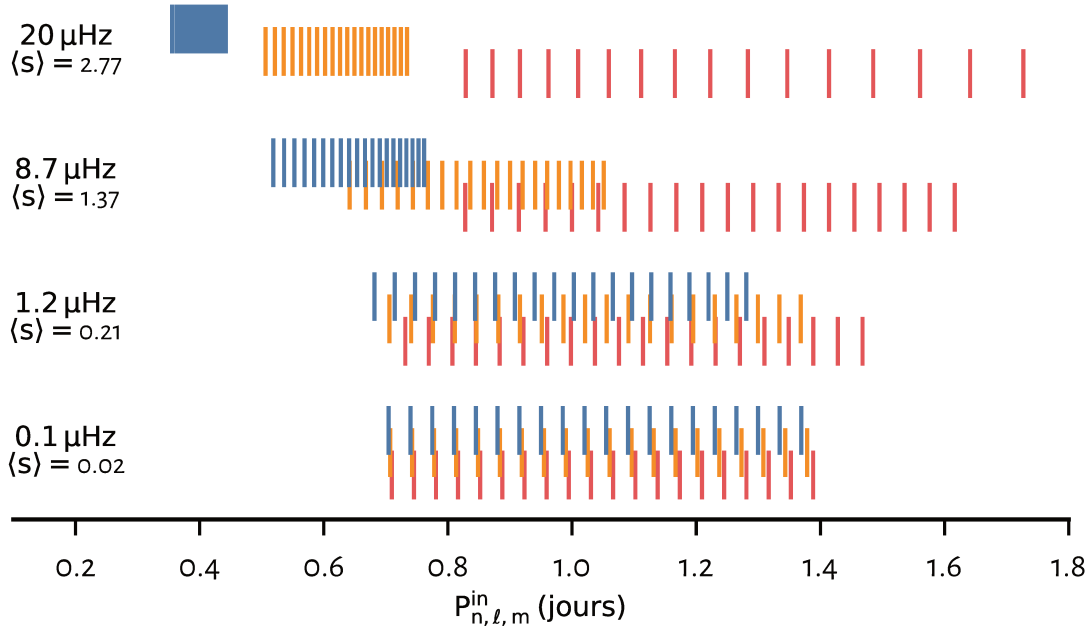


FIGURE 2.5: Effets de la rotation sur les périodes d'oscillation des modes g . Quatre fréquences de rotation sont considérées dans cet exemple. Elles sont indiquées pour chaque spectre avec le paramètre de spin moyen. Les spectres ont été calculés dans la TAR asymptotique (Eq. 2.16) pour $P_0 = 4320$ s, une valeur typique des γ Dor. Les barres bleues, oranges, et rouges sont les modes dipolaires progrades ($m = -1$), zonaux ($m = 0$) et retrogrades ($m = 1$), respectivement. Elles sont décalées verticalement pour des raisons de clarté.

différents (ℓ, m) se séparent en groupements bien séparés, sinon ils se recouvrent partiellement.

En pratique, les étoiles γ Dor en rotation lente montrent un spectre de multiplets de degré $\ell = 1$ et dans certaines étoiles, $\ell = 2$ (Li et al., 2019a). Dans les rotateurs modérés à rapides, ce sont principalement les modes progrades sectoriaux $\ell = -m$ qui sont détectés (Van Reeth et al., 2016; Li et al., 2019b), jusqu'à $\ell = 4$ dans certains cas (e.g. KIC5608334, Saio et al., 2018b). Similairement, les étoiles SPB semblent se comporter de façon similaire puisqu'elles montrent des *splittings* rotationnels $\ell = 1$ en rotation lente (Pápics et al., 2014) et des modes progrades sectoriaux pour les rotateurs plus rapides (e.g. Moravveji et al., 2016; Pápics et al., 2017; Szweczek & Daszyńska-Daszkiewicz, 2018).

Modes de Rossby

Les modes de Rossby résultent du couplage des mouvements toroïdaux avec les mouvements sphéroïdaux provoqués par la force de Coriolis. Ainsi, ils n'existent que dans les étoiles en rotation. Ce sont des modes gravito-inertiels qui ont la particularité d'être dominés par leur composante toroïdale³. Ils sont communément indexés par les nombres m et $k < 0$ déjà définis dans la Sect. 2.2.4. Un mode (m, k) ne s'établit dans une étoile que si sa fréquence d'oscillation $\nu_{n,m,k}^{\text{co}}$ est telle que $s > -k(-k + 1)$. Par ailleurs, dans le repère de l'observateur, ils admettent une asymptote qui est $\nu_{n,m,k}^{\text{in}} < |m| \nu_{\text{rot}}$.

Bien que les modes r soient théoriquement prédits depuis longtemps (Provost et al., 1981; Saio, 1982; Berthomieu & Provost, 1983), ce n'est que très récemment qu'ils ont été détectés et iden-

³Ils sont d'ailleurs parfois nommés modes quasi-toroïdaux dans la littérature (e.g. Provost et al., 1981).

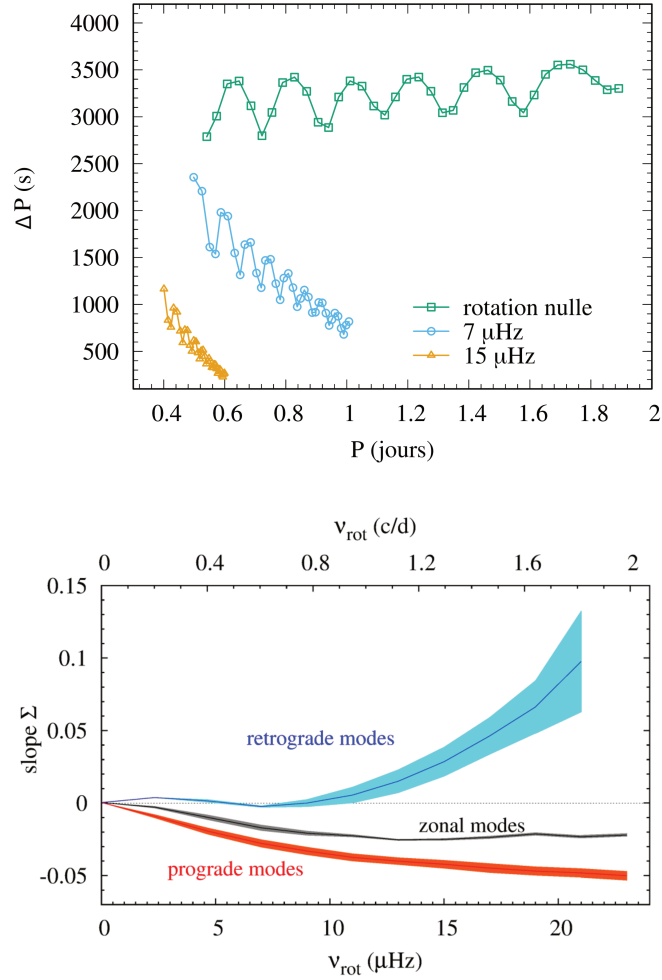


FIGURE 2.6: Effets de la rotation sur les *period spacings* ΔP . **En haut :** Diagramme ΔP - P pour les modes progrades sectoraux ($\ell = 1, m = -1$) d'un modèle d'étoile γ Dor ($1.6 M_{\odot}$). Trois fréquences de rotation sont considérées : nulle, $7 \mu\text{Hz}$ et $15 \mu\text{Hz}$. **En bas :** Relation entre la pente Σ dans le diagramme ΔP - P et la fréquence de rotation de l'étoile ν_{rot} . Figure extraite de Ouazzani et al. (2017).

tifiés dans les γ Dor (Van Reeth et al., 2016, 2018; Saio et al., 2018a), ainsi que d'autres classes d'étoiles (Saio et al., 2018a). Parmi les modes détectés dans les γ Dor, on compte principalement les modes $(m, k) = (1, -2)$, ainsi que des modes $(m, k) = (1, -1)$ dans certaines étoiles (Li et al., 2019b).

Effets de la rotation sur les séparations en périodes

La rotation se manifeste également dans les espacements en période ΔP . Le panneau haut de la Fig. 2.6 représente l'évolution des *period spacings* avec la rotation dans le diagramme ΔP - P dans l'exemple des modes dipolaires progrades. Les *period spacings* des modes progrades décroissent presque linéairement avec la période. La pente de cette tendance linéaire est négative et diminue de plus en plus à mesure que la fréquence de rotation augmente. On notera le comportement oscillatoire de ΔP avec la période dû à un gradient de composition chimique à la frontière du cœur convectif du modèle employé pour calculer les modes.

Ouazzani et al. (2017) établissent en fait que la pente des modes g dans le diagramme ΔP - P est un diagnostic de la vitesse de rotation d'une étoile. On reproduit dans le panneau bas de la

Fig. 2.6 leurs résultats pour les modes dipolaires. Une relation unique existe entre la pente des *spacings* et la fréquence de rotation. On retiendra que les modes progrades et zonaux ont des pentes négatives et qu'elle est positive ou quasi-nulle pour les modes rétrogrades. Les modes de Rossby sont rétrogrades par nature et leur pente dans le plan ΔP - P est positive.

Contraintes observationnelles et résolution du spectre des oscillations

Dans les pulsateurs basse fréquence, la densité des modes d'oscillation est très élevée, et d'autant plus que la vitesse de rotation est grande. Pour une durée d'observation ΔT , la résolution en période R_P du spectre d'oscillation s'écrit :

$$R_P = \frac{P^2}{\Delta T} \quad (2.22)$$

ou de manière équivalente la résolution en fréquence vaut $R_\nu = 1/\Delta T$. Ainsi si on souhaite résoudre individuellement tous les modes, il est nécessaire d'observer ces étoiles sur de très longues périodes de temps à l'échelle d'une ou plusieurs centaines de jours. Si on ajoute à cela que les périodes d'oscillation de ces pulsateurs sont de l'ordre du jour, on constate que leur observation sismique depuis le sol est spécifiquement impraticable même avec des campagnes d'observations multi-sites. Ainsi, pendant longtemps, l'application de l'astérosismologie à ces étoiles a été fortement limitée.

Avec pourtant des cycles d'observation de 150 jours, la résolution spectrale atteinte par CoRoT est resté trop mauvaise pour déchiffrer la structure du spectre des pulsateurs basse fréquence. Ce n'est qu'avec les observations du satellite *Kepler* que nous avons pu disposer des données nécessaires à l'exploitation sismique des pulsateurs basse fréquence. Grâce à presque 4 ans de photométrie de haute précision quasi-continue pour des centaines d'étoiles γ Dor, le satellite *Kepler* a complètement changé la donne. De façon à illustrer le gain en qualité des spectres permis par *Kepler*, la Fig. 2.7 trace le spectre d'oscillation de la cible KIC5608334 (Saio et al., 2018b) pour différents temps d'observation. Si avec 88 ou 179 jours, les modes de grande amplitude sont nettement visibles, la structure fine du spectre révélée avec la durée totale des observations *Kepler* permet d'envisager des études sismiques bien plus poussées.

2.3.2 Intérêts pour la physique stellaire

Les pulsations basse fréquence des étoiles γ Dor et SPB sondent les couches radiatives les plus internes, près du cœur convectif, là où leur amplitude est la plus forte. Il s'agit des seules classes de pulsateurs sur la séquence principale dans lesquels ces régions sont accessibles par l'astérosismologie. En premier lieu, ces pulsateurs apportent des contraintes sismiques sur la rotation interne des étoiles et donc sur les mécanismes de transport de moment cinétique sous-jacents. On en explorera certains aspects dans ce manuscrit. En outre, ils permettent d'explorer la physique des cœurs convectifs et les processus de mélange ayant lieu à leur frontière. Les propriétés des modes g sont particulièrement sensibles au gradient de composition chimique à la frontière du cœur convectif. La signature sismique que ce gradient génère dans les *period spacings* nous informe sur la structure et la localisation de cette zone (voir aussi Sect. 2.2.5). Enfin, si ces questions restent relativement peu étudiées dans ces classes de pulsateurs, l'amplitude des modes observés donne potentiellement des contraintes sur les processus physiques responsables de leur excitation.

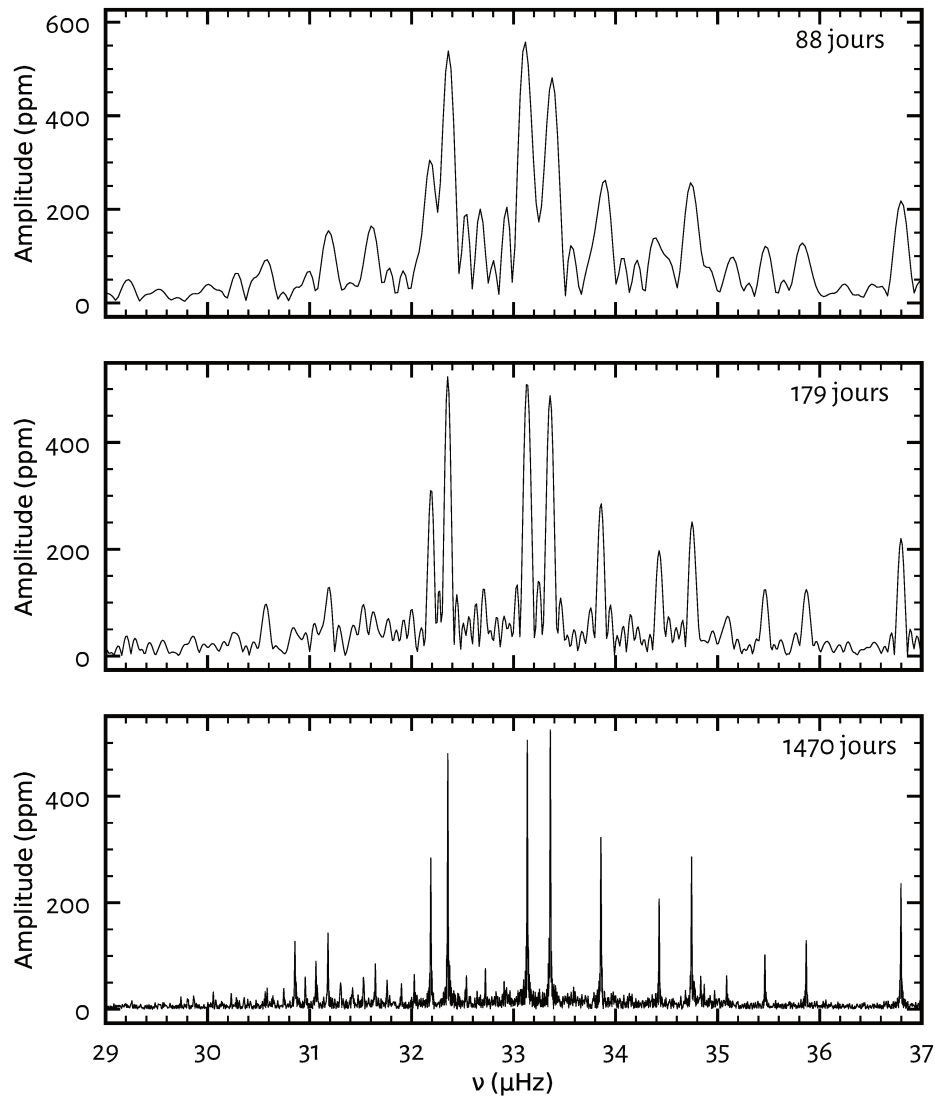


FIGURE 2.7: Lien entre la durée des observations et la résolution du spectre des oscillations dans l'exemple de l'étoile γ Dor KIC5608334, observée par *Kepler*. Les courbes de lumière correspondantes couvrent des durées de 88 jours (*haut*), 179 jours (*milieu*) et la durée totale de la mission *Kepler* soit 1470 jours (*bas*).

Chapitre 3

Mesures sismiques de la rotation interne des pulsateurs basse fréquence

La description du spectre des oscillations des pulsateurs basse fréquence (BF) se révèle être particulièrement complexe. Si la densité élevée des modes propres était un des obstacles à l'application de l'astérosismologie sur ces étoiles, les missions spatiales dédiées à la photométrie d'ultra-haute précision telles CoRoT, et dans une plus grande mesure, *Kepler*, nous en ont affranchi. Reste que l'absence de régularités simples, telles que prédites par l'analyse asymptotique classique ou perturbative, a empêché l'utilisation des outils de diagnostic sismique développés jusqu'alors, ceux-ci étant principalement dédiés aux pulsateurs de type solaire. Ce chapitre est consacré à la description d'un outil que j'ai développé spécifiquement pour décoder le spectre basse fréquence des pulsateurs de type γ Doradus et SPB, dénommé MORSE (*MOde Regularity SEarcher*). Il s'appuie sur un étirement astucieux du spectre afin de mettre en évidence de nouvelles régularités. De celles-ci est ensuite déduit, de manière simultanée et indépendante des modèles stellaires, l'identification des modes propres d'oscillation, la fréquence de rotation interne et le temps caractéristique d'Archimède. Après avoir décrit le principe de MORSE, je discuterai des performances de l'algorithme au moyen de tests réalisés sur des spectres synthétiques et j'illustrerai ses possibilités en l'appliquant aux données de 36 étoiles observées par *Kepler*.

N.B. : Most of the work presented in this chapter was also published in *Astronomy and Astrophysics* ([Christophe et al., 2018b](#)). The article is attached at the end of the chapter. Only Sects. 3.2.1 and 3.3.1 are exclusive to this manuscript.

3.1 MORSE : décoder le spectre des oscillations des pulsateurs basse fréquence

3.1.1 Étirement du spectre et mise en évidence de régularités

Dans la TAR asymptotique, les périodes des modes propres d'oscillation dans le repère co-tournant s'écrivent :

$$P_{n,m,k}^{\text{co}}(s) \approx \frac{P_0(n+\epsilon)}{\sqrt{\lambda_{m,k}(s)}}. \quad (3.1)$$

comme introduit dans le Chap. 2, Sect. 2.2.4. Les espacements en période ne sont pas constants à moins de se placer dans le cas particulier de la rotation nulle. Néanmoins, un changement de variable permet de régulariser l'espacement des périodes. De l'équation 3.1, il vient :

$$\sqrt{\lambda_{m,k}(s)} P_{n,m,k}^{\text{co}}(s) \approx P_0(n + \epsilon), \quad (3.2)$$

Ainsi, pour un couple (m, k) donné, les modes sont équidistants de P_0 en période étirée $\sqrt{\lambda_{m,k}(s)} P_{n,m,k}^{\text{co}}(s)$. Notons que la fonction étirante $\sqrt{\lambda_{m,k}}$ dépend du paramètre de spin et donc de la fréquence de rotation de l'étoile. Autrement dit, la régularité des modes (m, k) n'est obtenue que pour un jeu particulier de paramètres (m, k, ν_{rot}) , P_0 étant déduit de l'espacement des modes dans ce nouvel espace. Des exemples illustratifs sont proposés en Fig. 3.1. On verra dans la Sect. 3.2.1 que des dégénérescences peuvent exister. Néanmoins, des considérations physiques sur les modes ou la structure du type d'étoile étudié, nous permettront de les lever dans la majorité des cas.

3.1.2 L'algorithme de MORSE

Le code MORSE s'appuie sur cette propriété des modes dans la TAR asymptotique. Il consiste à explorer l'espace des paramètres (m, k, ν_{rot}) jusqu'à trouver une régularité des périodes étirées. En pratique, l'algorithme suit la séquence suivante :

Étape préliminaire. *Extraction des fréquences de la courbe de lumière.* Cette étape ne fait pas à proprement parler parti de l'algorithme de MORSE et on notera que l'établissement d'une liste de fréquences se fait indépendamment de l'exploitation qui en est faite ensuite par le code. L'analyse fréquentielle de la courbe de lumière présente des avantages certains par rapport à l'utilisation du périodogramme brut. D'une part, l'amplitude des modes est souvent très variable au sein d'une série de modes (m, k) . Or l'algorithme s'appuie sur la détection d'un effet collectif des modes – leur espacement régulier. Dans le cas d'une utilisation directe du périodogramme, cet effet est diminué par la forte disparité des amplitudes au sein du motif, ce qui complique la détection de la régularité. D'autre part, une fois la liste établie, il est possible d'identifier et d'écarter de l'analyse les combinaisons de fréquences, qui sont parfois nombreuses dans le spectre des pulsateurs basse fréquence. L'ajustement du spectre par un modèle, par exemple dans une approche de type *peak-bagging* (e.g. Handberg & Campante, 2011), reste actuellement hors de portée en raison des incertitudes sur le mécanisme d'excitation des pulsations et donc sur l'amplitude des modes d'oscillation. Ainsi, l'analyse fréquentielle de la courbe de lumière est généralement réalisée par blanchiment successif du périodogramme (ou *successive pre-whitening*). À chaque itération, la fréquence d'amplitude la plus grande dans le périodogramme est soustraite de la courbe de lumière.

Étape 1. *Filtrage en période de la liste de fréquences (optionnel).* L'étirement des périodes n'est valable que pour une série de modes (m, k) particulière. Le périodogramme des pulsateurs BF contient fréquemment des dizaines voire des centaines de fréquences où plusieurs séries d'identifications différentes peuvent coexister. Dans certains cas, il s'avère fructueux de filtrer la liste obtenue à l'étape précédente selon les valeurs de périodes. Il s'agit en fait de sélectionner une partie du spectre dans laquelle on s'attend à ce qu'une série de modes domine en s'appuyant sur notre connaissance théorique de la structure du spectre (voir Sect. 2.3.1). En pratique, on inspecte visuellement le spectre à la recherche de groupements de fréquences ou de variations de densité. Une part de subjectivité intervient évidemment dans cette sélection et une approche type essai-erreur peut devenir nécessaire pour les étoiles à périodogrammes complexes. Bien que non-implémentée dans MORSE à ce jour, l'automatisation de cette étape est réalisable à l'aide des formules asymptotiques valables à haut paramètre de spin (Takata et

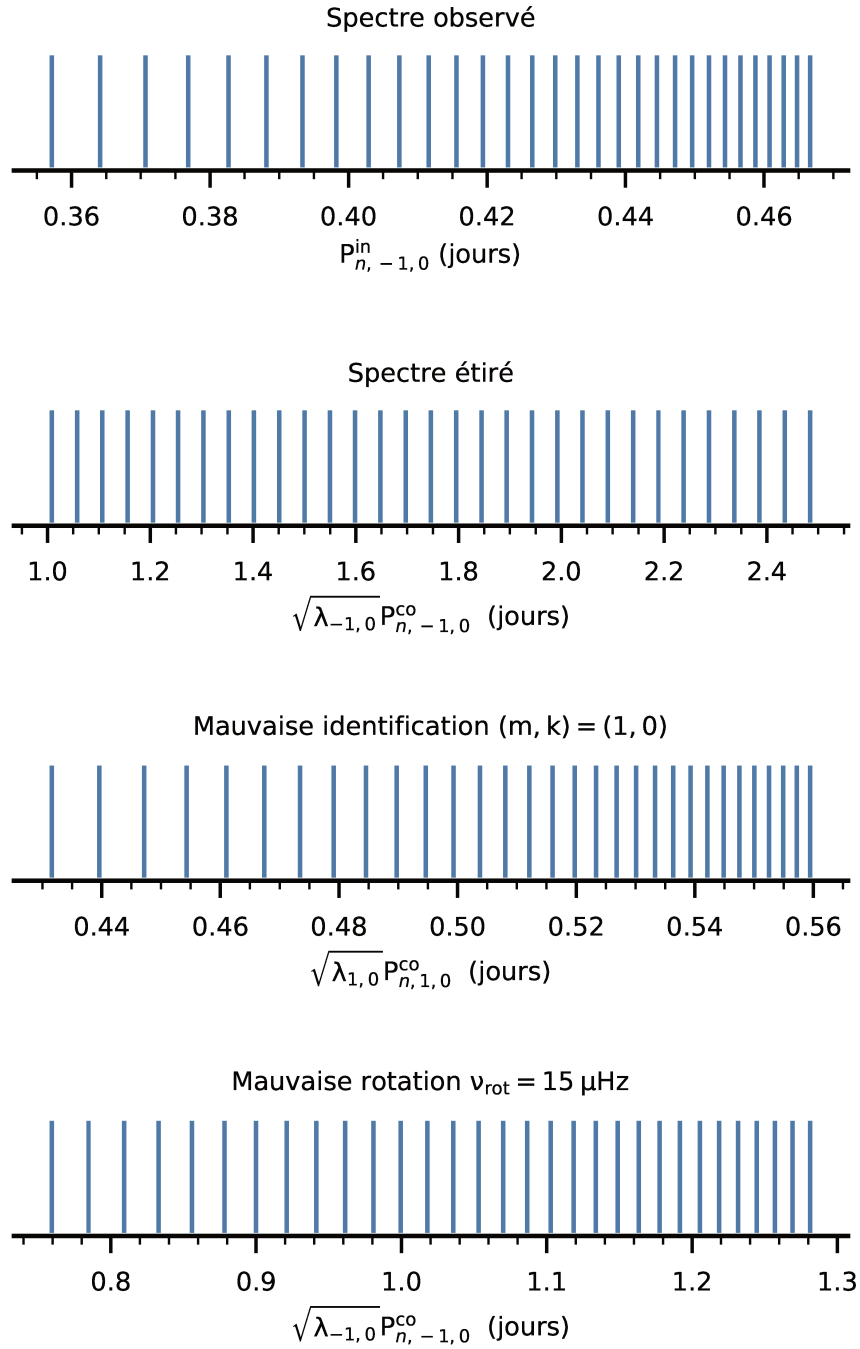


FIGURE 3.1: Illustration du principe d'étirement des périodes pour un spectre synthétique généré dans la TAR asymptotique (Eq. 3.1). Les paramètres utilisés sont typiques d'une étoile de type γ Dor : $m = -1$, $k = 0$, $\nu_{\text{rot}} = 20 \mu\text{Hz}$ et $P_0 = 4250$ s. L'espace régulier des périodes étirées n'est obtenu que pour ce jeu de paramètres.

al. soumis) ou d'algorithmes de partitionnement de données. Celle-ci permettrait d'appliquer MORSE à un grand nombre d'étoiles pour réaliser des diagnostics sismiques d'ensemble.

Étape 2. *Choix des identifications (m, k) et des fréquences de rotation ν_{rot} à tester.* Les visibilitées des modes sont limitées par les effets d'annulation surfaciques qui se manifestent d'autant plus que le nombre de nœuds des modes à la surface est grand. On se limitera ainsi à la recherche des régularités pour les modes $|k| \leq 4$. En ce qui concerne le choix des fréquences de rotation, les valeurs propres des modes de gravité progrades sectoriaux et de Rossby admettent une asymptote à haut paramètre de spin, ce qui permet de placer une valeur limite supérieure sur ν_{rot} . Pour les autres modes, on remarquera seulement que les mesures de rotation interne réalisées jusqu'à maintenant dans les pulsateurs BF donnent toutes des valeurs inférieures à $30 \mu\text{Hz}$, sans que cela constitue nécessairement une limite supérieure comprise théoriquement (voir le désert des rotateurs rapides, Sect. 4.2).

Étape 3. *Pour chaque fréquence de rotation :*

- *Passage du repère inertiel au repère co-tournant (Eq. 2.18),*
- *Étirement des périodes,*
- *Calcul de la densité spectrale de puissance (Power Spectral Density, PSD) du spectre étiré, définie pour une fréquence f par :*

$$\left| \text{DFT} \left(\sqrt{\lambda_{m,k}} P_{\text{co}} \right) \right|^2 (f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i2\pi f \sqrt{\lambda_{m,k}} P_j^{\text{co}}} \right|^2, \quad (3.3)$$

où N désigne le nombre de périodes P_j^{co} considérées et DFT est l'acronyme anglais pour Transformée de Fourier Discrète.

Étape 4. *Empilement des spectres DFT par fréquence de rotation croissante (carte de puissance).* La carte de puissance obtenue est représentative de l'espace des paramètres explorés. Un exemple est présenté en Fig. 3.2(a). Une crête de puissance traduit typiquement une détection de régularité. La largeur horizontale de la crête est liée à la résolution spectrale. La corrélation entre les paramètres P_0 et ν_{rot} explique un étalement de la puissance en diagonale. Autrement dit, un petit changement de la fréquence de rotation peut presque compenser un petit changement du temps d'Archimède, et inversement.

Étape 5. *Vérification de la significativité statistique du maximum de PSD :*

- *Il est significatif : on identifie formellement les modes et on déduit (ν_{rot}, P_0) de l'emplacement du maximum de PSD.*
- *Il ne l'est pas : on continue le processus essai-erreur en modifiant soit le filtre en période (Étape 1), soit l'identification des modes ou l'intervalle en rotation exploré (Étape 2).*

La significativité statistique de la détection est établie par comparaison du pic de PSD à une valeur seuil issue d'un critère de fausse alarme, dite valeur- p . Considérons une liste de N périodes P_j^{co} réparties aléatoirement entre $P_{\text{min}}^{\text{co}}$ et $P_{\text{max}}^{\text{co}}$ suivant une distribution quelconque. Selon le théorème central limite, si N est suffisamment grand alors les distributions suivies par les parties réelle et imaginaire de la DFT sont toutes deux des distributions normales. La norme au carré de la DFT (ou PSD), définie par l'Eq. 3.3, suit alors une loi du χ^2 à deux degrés de liberté. La normalisation par N dans la définition de la PSD permet de s'assurer que, dans le cas d'une distribution des périodes purement aléatoire, la moyenne et la variance de la statistique valent 1 (et donc ne dépendent pas du nombre de périodes considérées). Pour une fréquence f donnée, la probabilité pour qu'un pic de PSD généré par du bruit dépasse une valeur seuil

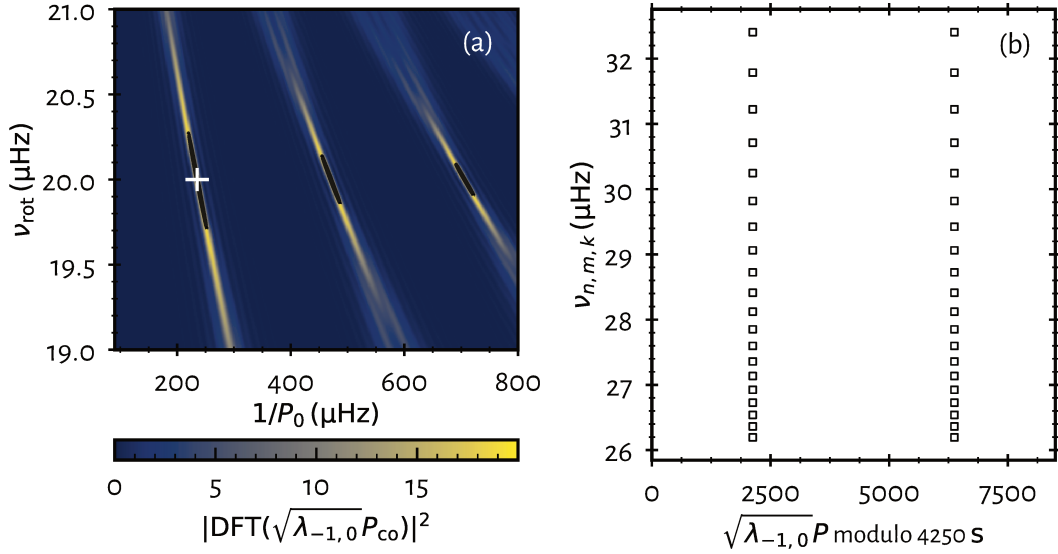


FIGURE 3.2: (a) Exemple d'une carte de puissance pour un spectre synthétique généré dans la TAR asymptotique (Eq. 3.1). La ligne noire représente le contour à 95% du maximum de puissance. La croix blanche représente les paramètres utilisés pour générer le spectre synthétique ($\nu_{\text{rot}} = 20 \mu\text{Hz}$, $P_0 = 4250 \text{ s}$). (b) Diagramme échelle en période étirée correspondant.

T vaut $p = \exp(-T)$. Par conséquent, pour un ensemble de M fréquences f indépendantes, le seuil de détection s'écrit :

$$T = -\ln \left[1 - (1 - p)^{1/M} \right] \quad (3.4)$$

Dans le cas présent, le nombre de fréquences indépendantes correspond à $M = \Delta f / \delta f$, où :

- $\delta f = (\sqrt{\lambda_{m,k} P_{\text{max}}^{\text{co}}} - \sqrt{\lambda_{m,k} P_{\text{min}}^{\text{co}}})^{-1}$ est la résolution spectrale,
- Δf est la fenêtre en fréquence f dans laquelle on cherche la régularité $1/P_0$.

Nous avons vérifié numériquement que le nombre N de modes typiquement rencontré dans les observations ($N > 10$) est suffisamment grand pour pouvoir se placer dans le cadre de la statistique décrite ci-dessus. Nous avons choisi une probabilité de fausse alarme $p = 0.01$ pour fixer le seuil T . En d'autres termes, un pic de PSD au dessus du seuil a une probabilité de moins de 1% d'être imputable au bruit.

3.1.3 Diagrammes échelle en période étirée

Le diagramme échelle (Grec et al., 1983) est un outil largement utilisé en sismologie pour visualiser le spectre des oscillations. Il tire parti du fait que dans le régime asymptotique, les modes d'une étoile sans rotation (ou en rotation très faible) sont quasi-équidistants en fréquence (modes p) ou en période (modes g). Dans le cas des pulsateurs BF en rotation, les modes d'oscillation sont régulièrement espacés en période étirée. En conséquence, un diagramme échelle peut aussi être construit pour ces étoiles (Fig. 3.2b). Il permet de visualiser facilement les différents ordres participant à la régularité identifiée, et de caractériser une déviation à la TAR asymptotique à partir de la courbure ou d'un comportement oscillatoire dans le cas d'un *glitch*.

3.1.4 Évaluation des incertitudes sur ν_{rot} et P_0

La fréquence de rotation et le temps d'Archimède déterminés par MORSE sont affectés par deux sources d'incertitudes principales : l'incertitude statistique sur les périodes des modes liée à leur mesure dans le périodogramme et l'usage de la TAR asymptotique pour modéliser le spectre des oscillations. Les approximations faites pour dériver l'équation des périodes dans le repère en co-rotation sont en effet susceptibles de biaiser la mesure de ν_{rot} et P_0 . En outre, la TAR asymptotique ne tient pas compte des effets de variations rapides de la structure sur les espacements en période. Comme exposé dans la Sect. 2.2.5, ces *glitches* provoquent une oscillation périodique des espacements en période autour de leur tendance globale dans le plan ΔP - P . On se propose ici d'évaluer de la même manière les incertitudes d'origine statistique et celles dues aux effets d'un *glitch*, ces derniers pouvant être vus comme une dispersion ajoutée aux ΔP autour de la tendance globale. Les biais introduits par la TAR asymptotique seront discutés dans la Sect. 3.2.2.

En premier lieu, on cherche à quantifier la contribution relative de ces deux sources d'incertitudes. Pour cela, on effectue une première analyse du spectre des oscillations avec MORSE. Sous réserve que la détection soit statistiquement significative, on calcule les périodes des modes dans la TAR asymptotique à partir des valeurs (ν_{rot}, P_0) obtenues et l'Eq. 3.1, puis on identifie chacun des modes observés pour calculer les résidus $(P_{n,m,k} - P_{n,m,k}^{\text{TAR}})$. Si l'écart-type des résidus est plus grand que la moyenne des erreurs statistiques sur les périodes, alors ils sont considérés comme la source dominante d'incertitudes. Sinon, on garde les incertitudes individuelles déterminées par la procédure d'extraction des fréquences.

Dans un second temps, on propage les erreurs à l'aide d'une simulation Monte-Carlo. On tire aléatoirement 500 réalisations des périodes observées en admettant qu'elles suivent une distribution normale et qu'elles soient indépendantes entre elles. Si l'erreur statistique sur les périodes n'est pas la source dominante des incertitudes, on utilise l'écart-type des résidus comme barres d'erreur pour tous les modes. Ensuite, pour chaque réalisation des périodes, on détermine (ν_{rot}, P_0) avec MORSE. Les valeurs finales de (ν_{rot}, P_0) sont déduites de l'emplacement du maximum de PSD lors de la première analyse. Les incertitudes associées correspondent à l'écart-type à 1σ des distributions résultant de la simulation Monte-Carlo.

Cette procédure est illustrée en Fig. 3.3 dans son application au spectre de l'étoile KIC6935014. Un motif régulier constitué de modes prograde $(m, k) = (-1, 0)$ a été trouvé par MORSE. Les insuffisances de la TAR asymptotique engendrent des erreurs largement prédominantes devant les incertitudes sur les périodes d'oscillation. Par conséquent, on utilise ici l'écart-type des résidus ($\sigma_{\text{res}} = 4.08 \times 10^{-4}$ jours) pour générer les 500 réalisations des périodes à analyser avec MORSE.

3.2 Tests sur des spectres synthétiques

Avant d'appliquer MORSE aux données photométriques du satellite *Kepler*, j'ai effectué de nombreux tests sur des spectres synthétiques dans l'objectif de caractériser ses performances et faciliter l'interprétation des résultats. D'abord, je suis resté dans le cadre de la TAR asymptotique (Sect. 3.2.1). La formulation paramétrique des périodes d'oscillations permet de simuler facilement et rapidement des spectres synthétiques réalistes qui tiennent compte de la diversité des situations rencontrées dans les observations. Dans un deuxième temps, les erreurs systématiques introduites par la TAR asymptotique sont estimées à partir de spectres synthétiques issues de la résolution numérique des équations de pulsations complètes pour un modèle typique d'étoile γ Dor (Sect 3.2.2).

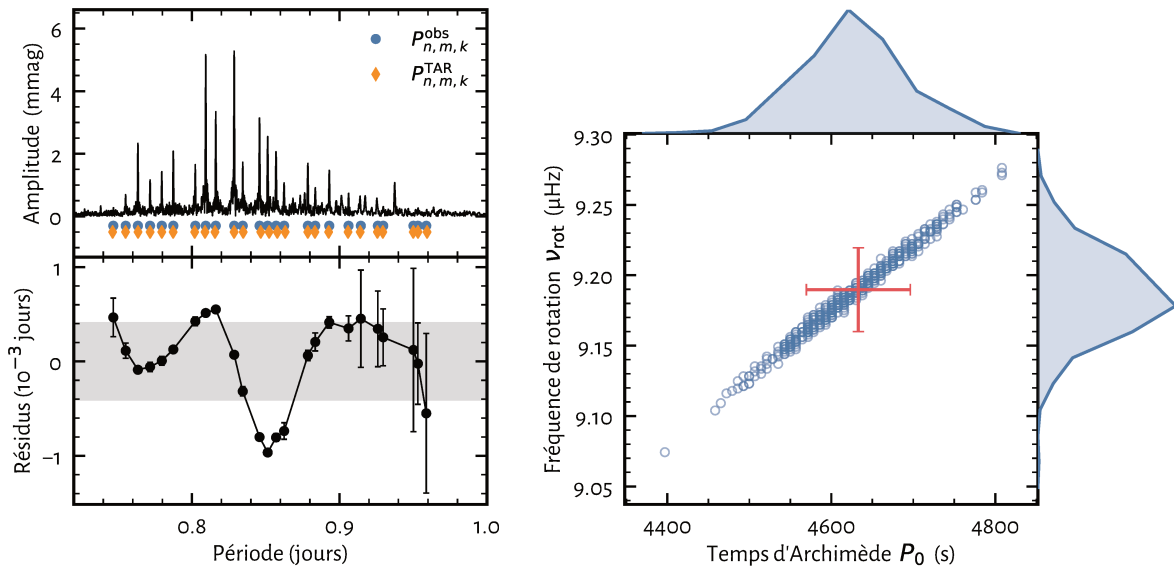


FIGURE 3.3: Évaluation des incertitudes sur (v_{rot}, P_0) dans le cas de l'étoile KIC6935014. **À gauche :** Le périodogramme de la courbe de lumière de KIC6935014. Les périodes extraites par le *pre-whitening* sont indiquées par des points bleus. Les losanges oranges représentent les périodes calculées dans la TAR asymptotique à partir des (v_{rot}, P_0) trouvés. En dessous, sont tracés les résidus $(P_{n,m,k}^{\text{obs}} - P_{n,m,k}^{\text{TAR}})$. Les barres d'erreurs sont grossies d'un facteur 10. La zone grise correspond à l'écart-type des résidus, qui est ici utilisé comme incertitude sur les périodes pour la simulation Monte-Carlo. **À droite :** Distribution résultant de la simulation Monte-Carlo. Chaque cercle bleu représente le résultat d'un tirage des périodes d'oscillation analysé par MORSE. Les distributions marginales pour v_{rot} et P_0 sont tracées sur les bords. La croix rouge montre l'estimation finale avec les incertitudes à 1σ .

3.2.1 Validité et performance dans la TAR asymptotique

Par soucis de concision et de clarté, j'ai limité la présentation des tests de cette section à un jeu de paramètres restreint représentatif de ceux que l'on peut trouver dans une étoile γ Dor typique. Ainsi, tous les spectres synthétiques utilisés ici (sauf mention contraire) sont calculés pour les valeurs suivantes : $v_{\text{rot}} = 12 \mu\text{Hz}$, $P_0 = 4200$ s, et pour des modes progrades sectoriaux dipolaires $(m,k) = (-1,0)$. Le choix de la gamme d'ordres radiaux à calculer est basé sur les calculs non-adiabatiques de stabilité des modes de Bouabid et al. (2013). Les conclusions de cette étude sont généralisables aux autres familles de modes et pour d'autres valeurs de (v_{rot}, P_0) .

Nombre de modes et ordres radiaux manquants

L'excitation des modes d'oscillations des pulsateurs BF dépend de nombreux facteurs : la masse, la température effective, le stade évolutif, la composition chimique, la vitesse de rotation, le paramètre de convection notamment (e.g. Dupret et al., 2004, 2005; Bouabid et al., 2011, 2013). À cela s'ajoute : (i) la question de la visibilité des modes liée à l'inclinaison de l'étoile par rapport à la ligne de visée, (ii) la dépendance horizontale des perturbations de luminosité engendrées par les modes et (iii) le filtre utilisé pendant l'acquisition des données photométriques. Ainsi, on s'attend à ce que le nombre de modes observés au sein d'une série (m, k) donnée soit variable d'une étoile à une autre et que dans cette série, il puisse manquer un ou plusieurs ordres radiaux.

Le principe de MORSE consiste à chercher une régularité dans le spectre, ce qui implique que plusieurs modes au sein d'une série (m, k) sont observés. Combien de modes sont nécessaires à la détection fiable d'une régularité ? Comment le nombre de modes affecte la précision de la mesure du temps d'Archimède et de la fréquence de rotation ? Pour répondre à ces questions, j'ai généré trois spectres contenant 5 ($n = 28..32$), 10 ($n = 25..34$) et 15 modes ($n = 20..39$). La Figure 3.4 montre les trois cartes de puissance obtenues avec MORSE. Plus le nombre de modes contribuant à la régularité est grand, plus la contrainte sur les paramètres est importante et plus la crête de puissance occupe une zone restreinte sur la carte. Pour le spectre de 5 modes, la crête de puissance s'étale sur une zone trop étendue pour envisager une détermination exploitable. Le maximum de PSD (5.0) est d'ailleurs inférieur au seuil de détection défini dans la section 3.1.2 ($T = 7.16$). Un nombre minimum de modes, de l'ordre de $N \approx 10$, est requis pour obtenir une détection statistiquement significative et contraignante pour les paramètres (v_{rot}, P_0) .

Un second effet rentre également en jeu : l'effet de fenêtrage. Les périodes des modes, une fois passées dans le repère co-mobile et étirées, peuvent se décrire comme un peigne de Dirac de période P_0 modulé par une fonction porte Π :

$$S(P) = \Pi_{[a,b]}(P) \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(P - jP_0), \quad (3.5)$$

où j est un entier et $[a, b]$ représente l'intervalle en période étirée couvert par les modes. En notant N le nombre de modes, cet intervalle a pour longueur $\Delta\tau = b - a = (N - 1)P_0$. La transformée de Fourier de ce signal $\hat{S}(v)$ s'écrit alors :

$$\hat{S}(v) = \text{TF}\{\Pi_{[a,b]}\} * \text{TF}\left\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(P - jP_0)\right\} \quad (3.6)$$

$$= \left[\frac{\sin(\pi v \Delta\tau)}{\pi v} e^{i2\pi v \frac{b+a}{2}} \right] * \left[\frac{1}{P_0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta\left(v - \frac{j}{P_0}\right) \right] \quad (3.7)$$

Il vient alors que la régularité dans l'espace de Fourier est convoluée par un sinus cardinal, de largeur $\frac{2}{\Delta\tau} = \frac{2}{(N-1)P_0}$.

Lorsque des ordres radiaux sont manquants dans le spectre, cet effet de fenêtrage intervient également. Le spectre étiré est alors un peigne de Dirac de période P_0 modulé par une somme de D fonctions portes. Ainsi, la régularité est convoluée par une somme de D sinus cardinaux :

$$\hat{S}(v) = \left[\sum_{d=0}^D \frac{\sin(\pi v \Delta\tau_d)}{\pi v} e^{i2\pi v P_{\text{centre},d}} \right] * \left[\frac{1}{P_0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta\left(v - \frac{j}{P_0}\right) \right] \quad (3.8)$$

où la porte d est centrée sur $P_{\text{centre},d}$ et de largeur $\Delta\tau_d$. Pour simuler l'absence de certains ordres radiaux, j'ai construit trois spectres synthétiques en sélectionnant aléatoirement 10, 15 et 25 modes dans un spectre contenant tous les modes de $n = 15$ à 44, soit 30 modes. La Figure 3.5 représente les cartes de puissance correspondantes. Le fenêtrage crée des crêtes de puissance "secondaires" (les lobes de la somme de sinus cardinaux) qui peuvent potentiellement être confondues avec la régularité que l'on cherche. C'est plus particulièrement le cas lorsque le nombre d'ordres radiaux manquants est grand. Les cartes de la Figure 3.5 suggèrent que dans une série de modes (m, k) , environ la moitié des ordres radiaux doivent être présents dans le spectre pour détecter une régularité sans ambiguïté, ce qui est généralement vérifié dans les observations.

Plusieurs séries de modes

Des modes d'identification (m, k) différente cohabitent *a priori* dans le périodogramme d'un pulsateur BF. Dès lors, il est intéressant de savoir comment cela affecte la recherche de régu-

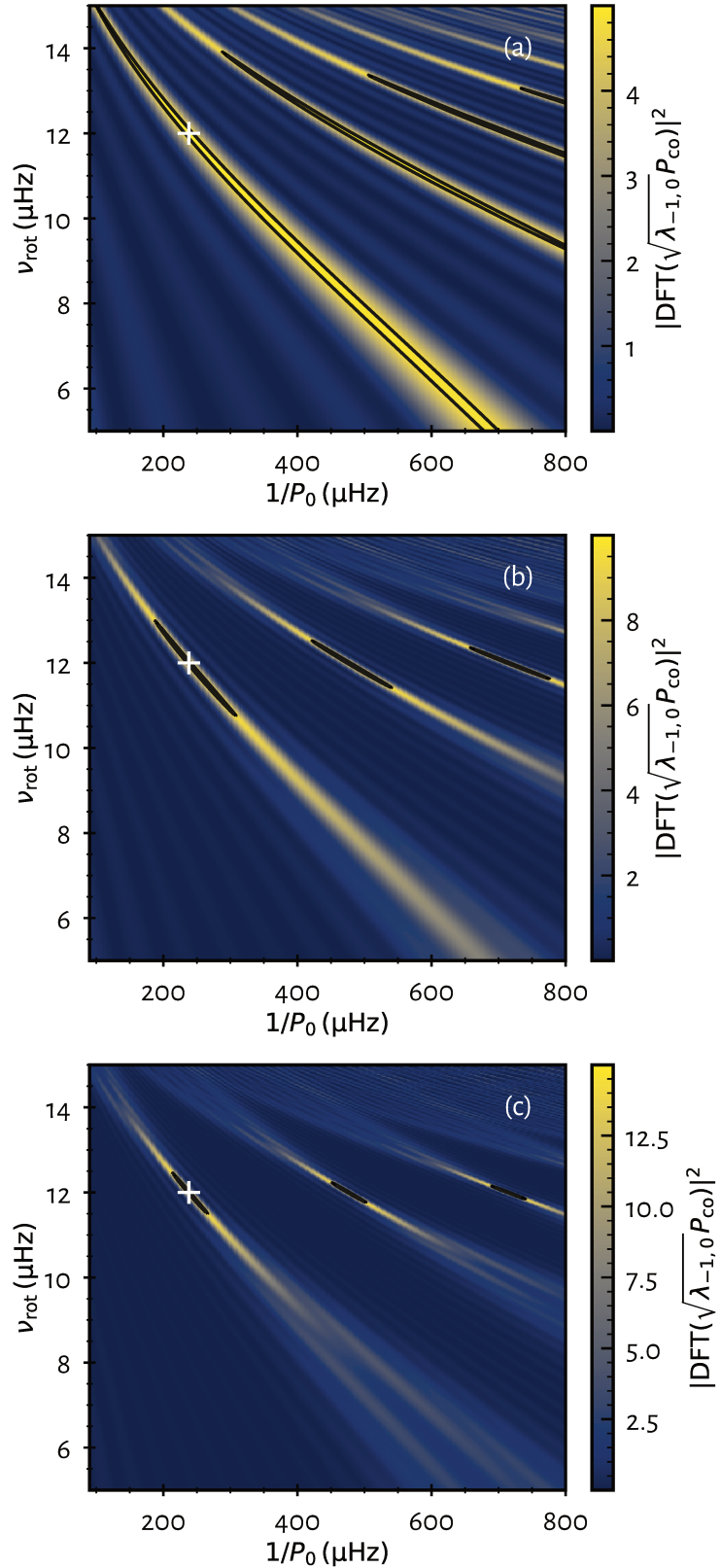


FIGURE 3.4: Performance de MORSE selon le nombre de modes. Le spectre est constitué de 5 (a), 10 (b) et 15 modes (c). Les lignes noires sont les contours à 95% du maximum de PSD. La croix représente les paramètres utilisés pour générer les spectres synthétiques. La carte montre le fondamental ($1/P_0$) et ses deux premiers harmoniques.

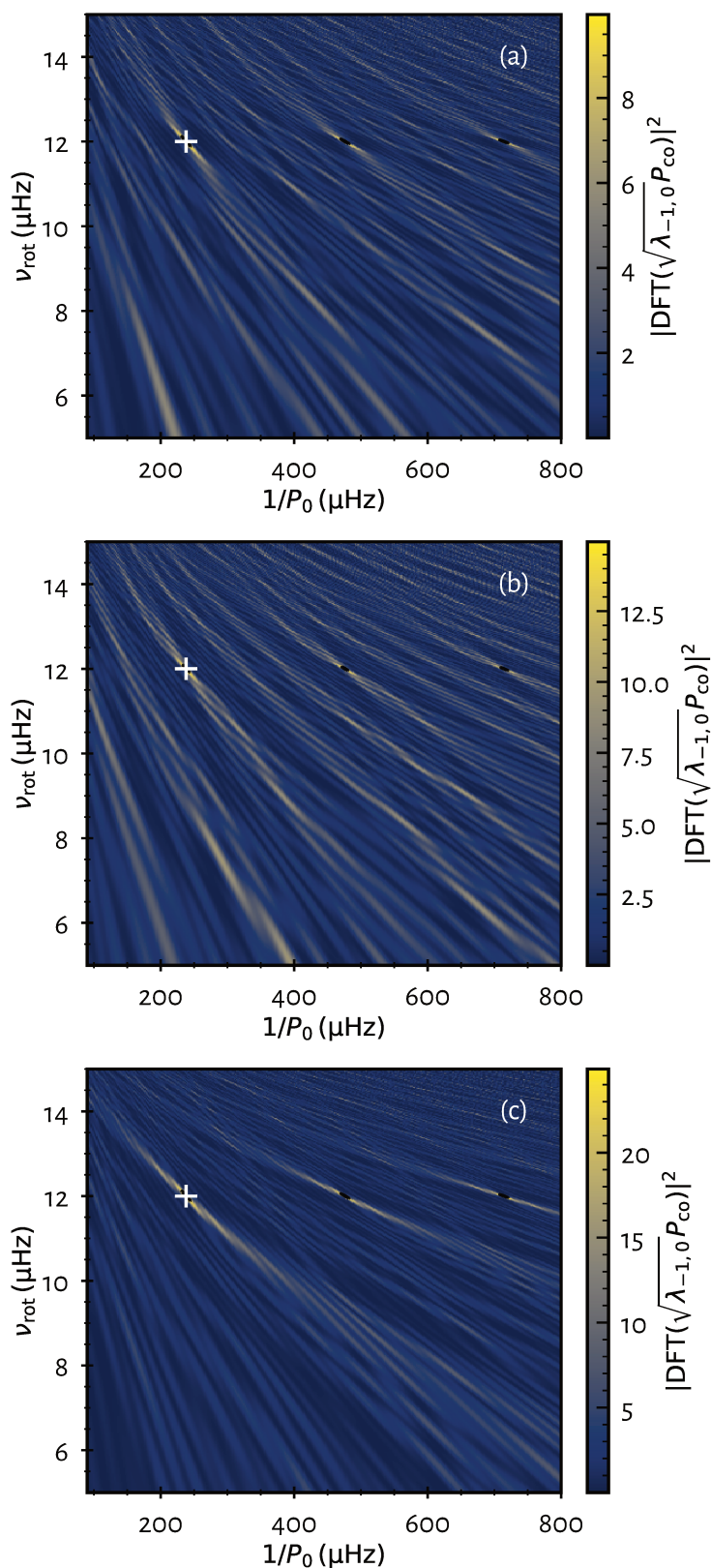


FIGURE 3.5: Performance de MORSE lorsque certains ordres radiaux sont manquants. Les spectres synthétiques sont constitués de 10 (a), 15 (b) et 25 modes (c) sélectionnés aléatoirement parmi une série de 30 modes ($n = 15..44$). La légende est identique à celle de la Fig. 3.4.

TABLE 3.1

Composition des spectres synthétiques utilisés pour le test de performance de MORSE dans le cas où plusieurs séries de modes coexistent. (voir Sect. 3.2.1).

	m	k	n	Nombre de modes
Spectre (a)	-1	0	25..34	10
	0	1	23..37	15
	1	0	23..37	15
Spectre (b)	-1	0	20..39	20
	0	1	23..37	15
	1	0	23..37	15
Spectre (c)	-1	0	23..37	15
	0	1	23..37	15
	1	0	23..37	15

larités, sachant que l'étirement du spectre n'est possible que pour un couple (m, k) à la fois. J'ai généré trois spectres synthétiques constitués de modes g progrades dipolaires, tous ordres azimutaux confondus mais en proportions différentes. Les modes progrades sont tour à tour minoritaires, majoritaires, et en proportions égales devant les modes zonaux et rétrogrades. Les compositions exactes sont indiquées dans la Table 3.1.

Les résultats de la recherche des modes progrades $(m, k) = (-1, 0)$ avec MORSE sont présentés en Fig. 3.6. Deux séries de crêtes apparaissent, l'une correspond à la régularité attendue pour les modes progrades à $12 \mu\text{Hz}$, l'autre, à plus faible rotation ($\sim 5.8 \mu\text{Hz}$), est liée aux modes zonaux. Les valeurs propres $\lambda_{m,k}$ pour les modes progrades et zonaux sont toutes deux croissantes avec le paramètre de spin et d'allure similaire, ce qui peut entraîner des incertitudes quant à l'identification des modes. On reviendra sur cet aspect précis dans la partie suivante. Néanmoins, il est intéressant de noter ici que, tant que les modes que l'on cherche à identifier sont majoritaires en nombre, leur régularité est identifiable dans la carte de puissance. Dans le cas contraire, il est toujours possible de filtrer la liste des fréquences en recherchant des groupements ou des variations de densité de fréquences, comme évoqué dans la Sect. 3.1.2.

Dégénérescences et mauvaises identifications

Pour une série de modes (m_1, k_1) donnée, plusieurs identifications peuvent être envisageables si l'on se base uniquement sur les cartes de puissance. En supposant une identification différente (m_2, k_2) , il est parfois possible d'imiter le motif des modes (m_1, k_1) en adaptant les valeurs des autres paramètres intervenant dans l'étirement du spectre (v_{rot} et P_0). En d'autres termes, il faut pouvoir déformer $\sqrt{\lambda_{m_2, k_2}(s)}$ de manière à ce qu'elle soit très similaire à $\sqrt{\lambda_{m_1, k_1}(s)}$ sur l'intervalle de périodes considéré, ce qui est plus susceptible d'arriver lorsque les modes couvrent un intervalle restreint en termes de paramètres de spin et, pour les modes g , que la rotation de l'étoile est faible.

À titre illustratif, j'ai généré trois spectres de modes dipolaires d'identifications distinctes, c'est-à-dire, uniquement constitués de modes progrades, zonaux ou rétrogrades. Puis, j'ai cherché à identifier les modes dans chacun de ces spectres sans *a priori* si ce n'est qu'ils sont dipolaires. Les 9 cartes de puissance obtenues (3 identifications possibles pour chacun des 3 spectres) sont rassemblées en Fig. 3.7. Dans cette figure, je montre par exemple que des modes zonaux

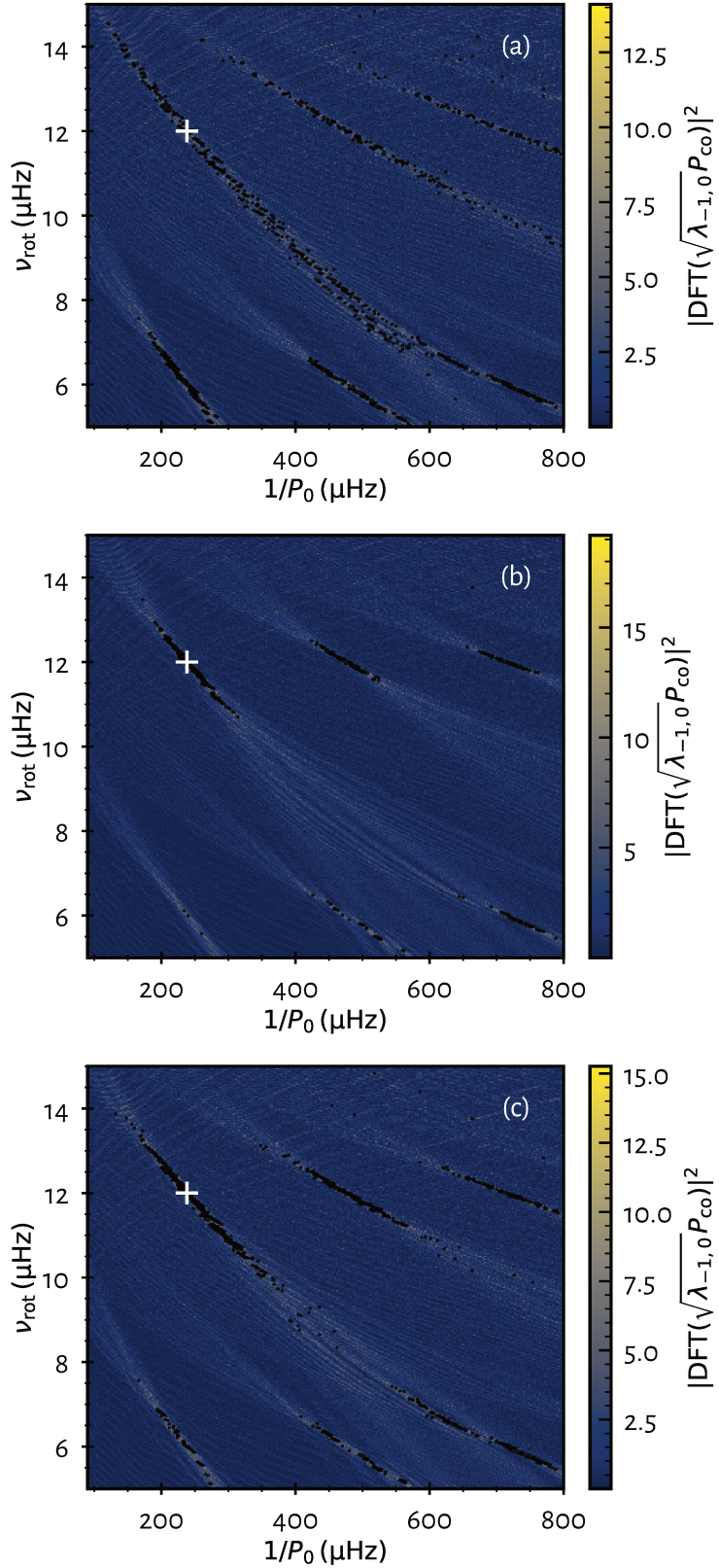


FIGURE 3.6: Performance de MORSE lorsque plusieurs familles de modes coexistent dans le spectre des oscillations. Les modes $(m, k) = (-1, 0)$ sont recherchés. Ils sont tour à tour majoritaires (a), minoritaires (b) et en proportions égales (c) par rapport aux autres modes $(m, k) = (0, 1)$ et $(1, 0)$. La croix représente les paramètres utilisés pour générer les spectres synthétiques. Les lignes noires sont les contours à 50% du maximum de PSD.

sont identifiables comme des modes progrades avec une fréquence de rotation et un temps d'Archimède moindres. Les effets de la rotation sur les modes progrades et zonaux sont en effet très semblables. Dans les deux cas, les périodes sont décalées vers des valeurs plus faibles et les motifs d'espacements en période adoptent des pentes négatives (voir Sect. 2.3.1). Ainsi, en l'absence d'information supplémentaire, il est souvent difficile de trouver l'identification correcte des modes.

Cette ambiguïté sur l'identification des modes a notamment été discutée par [Van Reeth et al. \(2016\)](#). Pour chaque classe de pulsateurs BF, les temps caractéristiques d'Archimède physiquement accessibles sont compris dans un certain intervalle de valeurs. [Van Reeth et al. \(2016\)](#) ont par exemple calculé une grille de modèles représentative de la bande d'instabilité des γ Dor pour calculer cet intervalle. Ces estimations dépendent bien sûr de la physique d'entrée des modèles mais permettent tout de même de restreindre le nombre d'identifications potentielles. À titre indicatif, P_0 est approximativement compris entre 3000 et 5000 s pour une étoile γ Dor et entre 5000 et 11500 s pour une SPB. D'autres stratégies consistent à combiner les informations de plusieurs séries de modes pour lever la dégénérescence, ou encore, à se fier à des considérations physiques (excitation des modes) ou géométriques (visibilité). Cela ne permettra pas toujours de lever l'incertitude sur l'identification.

Pour une identification donnée, il n'existe pas de dégénérescence entre ν_{rot} et P_0 puisque les valeurs propres $\lambda_{m,k}$ sont monotones avec le paramètre de spin (Fig. 3.8).

Combinaisons de fréquences

Les combinaisons de fréquences apparaissent fréquemment dans le périodogramme des pulsateurs BF. Elles sont généralement considérées comme étant des harmoniques ou des combinaisons linéaires simples ($\sum_i c_i \nu_i$, où les coefficients $c_i \in \mathbb{Z}$) des fréquences de base (ou indépendantes). La somme $\sum_i |c_i|$ qualifie l'ordre des combinaisons. Deux difficultés se posent néanmoins quant à leur identification. D'une part, les processus de physique non-linéaire à l'origine de leur apparition dans le spectre de Fourier sont encore mal compris. D'autre part, le nombre et la densité des modes d'oscillations étant particulièrement élevés dans ces pulsateurs, la probabilité qu'une combinaison coïncide avec un mode propre est non-négligeable. On pourra se rapporter à [Kurtz et al. \(2015\)](#) ou [Saio et al. \(2018b\)](#) pour une discussion plus détaillée. Malgré cela, elles doivent être identifiées pour éviter toute mauvaise interprétation du périodogramme.

Je propose ici d'analyser des spectres synthétiques constitués uniquement de combinaisons de fréquences comme s'il s'agissait de fréquences indépendantes. L'un contient seulement les premiers harmoniques des modes $(m, k) = (-1, 0)$, l'autre des combinaisons d'ordre 2 de la forme $\nu_i + \nu_j$, où les $\nu_{\{i,j\}}$ sont 5 modes choisis aléatoirement parmi les modes $(-1, 0)$. Dans la Figure 3.9, on met en évidence la possibilité de retrouver un motif régulier de modes $(m, k) = (-2, 0)$ dans ces deux cas.

Comme le suggère la Fig. 3.9a, le cas des harmoniques des modes progrades sectoriaux est particulier : MORSE retombe sur les valeurs de ν_{rot} et P_0 qui ont servies à générer le spectre. Cela s'explique analytiquement dans le cadre de la TAR asymptotique. [Saio et al. \(2018b\)](#) démontrent en effet que, si le paramètre de spin $s = 2\nu_{\text{rot}}/\nu_{n,m,k}^{\text{co}}$ est strictement supérieur à 1, la fréquence des modes progrades sectoriaux dans le repère inertiel s'écrit :

$$\nu_{n,m,k}^{\text{in}} \approx |m| \left(\frac{1}{nP_0} + \nu_{\text{rot}} \right) \quad (3.9)$$

En d'autres termes, les fréquences des $i^{\text{ème}}$ harmoniques des modes $(m, k) = (-1, 0)$ sont très proches de celles des modes $(-i-1, 0)$ et n'occasionnent pas de problèmes d'interprétation.

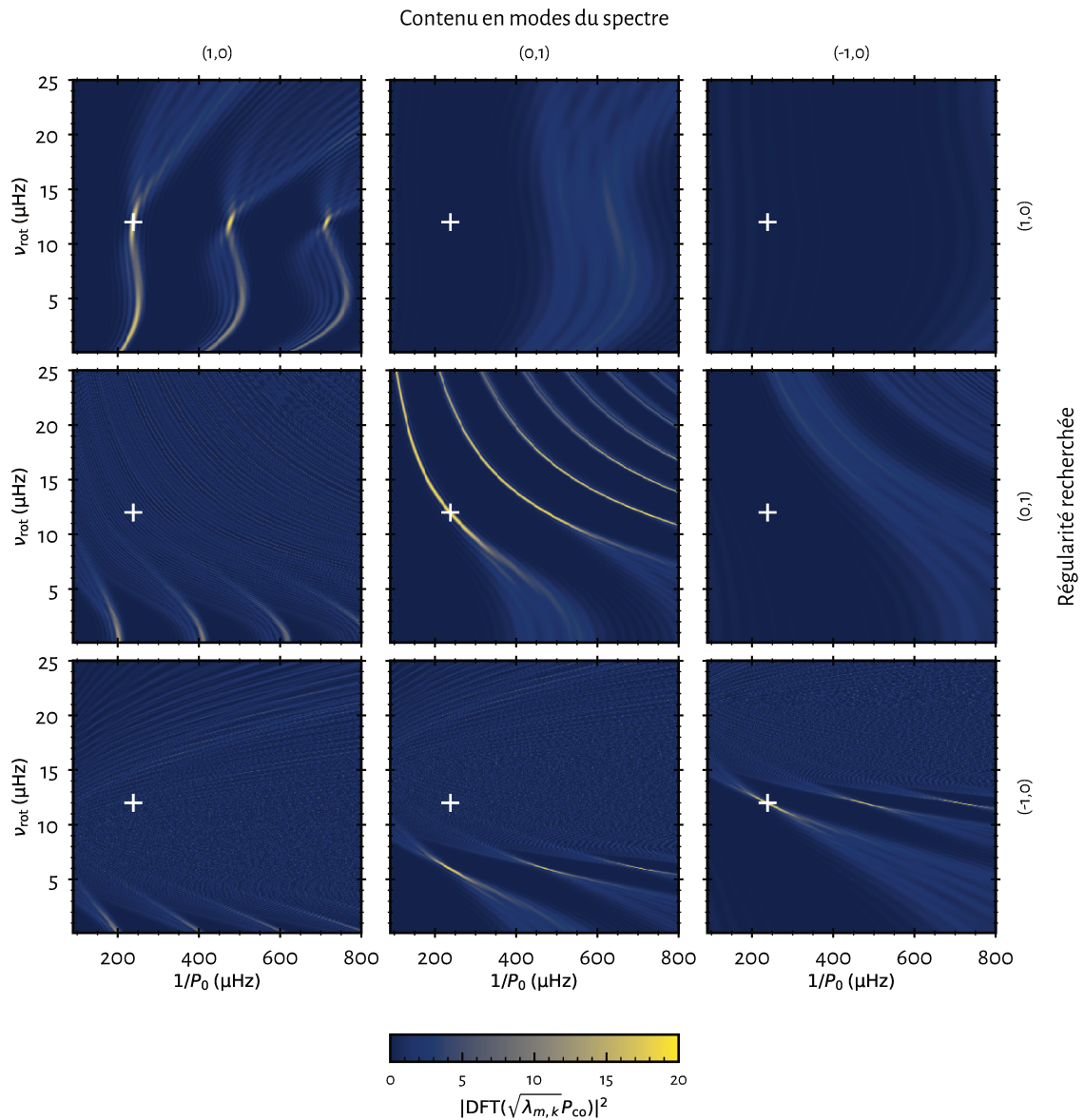


FIGURE 3.7: Illustration de dégénérescences possibles dans l'identification des modes. La croix représente les paramètres utilisés pour générer les spectres synthétiques. Sur une colonne, le spectre synthétique donné en entrée de MORSE est le même et contient uniquement des modes dont l'identification (m, k) est indiquée en haut de colonne. Sur une ligne, on recherche une régularité associée aux modes (m, k) dont l'identification est indiquée en bout de ligne. Par exemple, le résultat de la recherche des modes $(0,1)$ dans un spectre de modes $(1,0)$ correspond à la carte située à l'intersection de la deuxième ligne et de la première colonne.

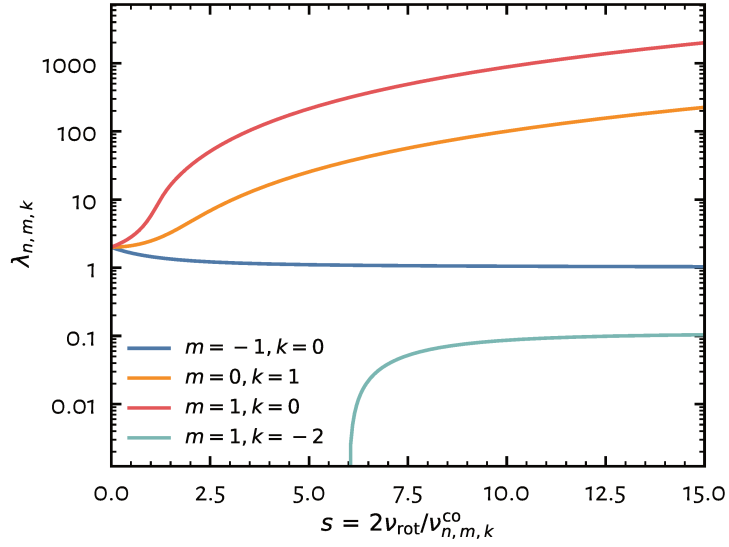


FIGURE 3.8: Valeurs propres $\lambda_{m,k}$ des modes g dipolaires ($k + |m| = 1$) et des modes r ($k = -2, m = 1$) en fonction du paramètre de spin s .

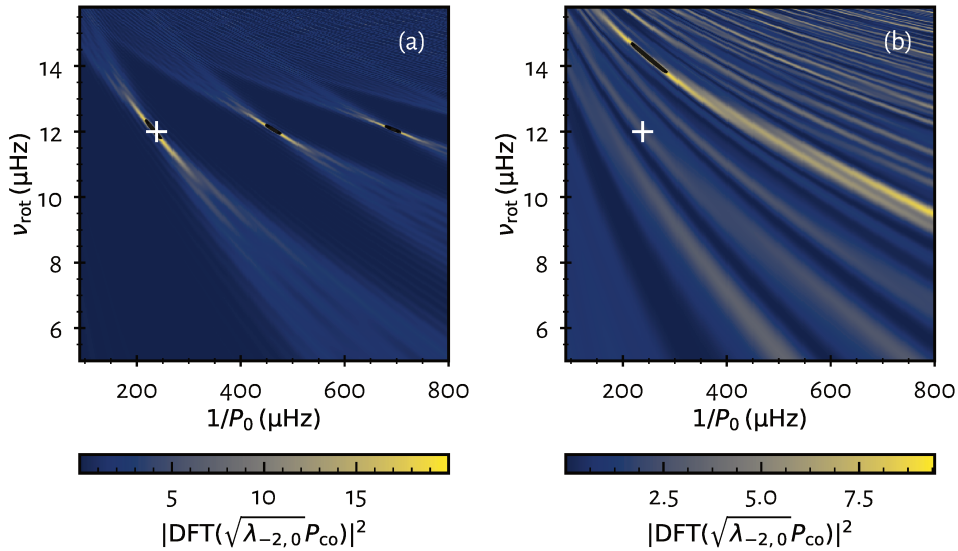


FIGURE 3.9: Recherche de régularités dans des spectres synthétiques qui ne contiennent que les premiers harmoniques des modes $(m, k) = (-1, 0)$ (a), ou des combinaisons de la forme $\nu_i + \nu_j$ de ces mêmes modes (b). La croix représente les paramètres utilisés pour générer les spectres synthétiques. Les lignes noires sont les contours à 95% du maximum de PSD.

En revanche, les combinaisons linéaires de fréquences peuvent produire, de manière plus accidentelle, des motifs quasi-réguliers. La Figure 3.9b montre l'exemple d'une détection de régularité significative, au sens du seuil de fausse alarme défini en Sect. 3.1.2. Ainsi, bien que significatif, le pic de puissance à $\sim 14.25 \mu\text{Hz}$ et $\sim 1/P_0 = 248 \mu\text{Hz}$ est totalement factice. Rechercher ces combinaisons et les écarter est donc profitable pour une interprétation correcte du périodogramme.

Variations rapides de la fréquence de Brunt-Väisälä

La formulation asymptotique de la TAR ne prend pas en compte les effets d'une variation rapide de la structure sur les modes d'oscillations. Or, les étoiles de masse intermédiaire (et massives) développent un fort gradient de composition chimique à la frontière du cœur convectif, siège des réactions nucléaires, et de l'enveloppe radiative (du moins en l'absence de processus de mélange). Les modes d'ordre radial élevé ont un nombre d'onde élevé dans cette région et sont sensibles à cette discontinuité. Comme on l'a vu dans la Sect. 2.2.5, les modes sont piégés périodiquement dans la région du gradient et les espacements en période correspondants adoptent un comportement oscillatoire autour de la tendance asymptotique (Miglio et al., 2008; Bouabid et al., 2013). La période de cette oscillation est liée à la localisation de la discontinuité tandis que l'amplitude est liée à sa taille.

Pour comprendre comment cela affecte la détection d'un motif, ce comportement oscillatoire est simulé en ajoutant artificiellement un écart périodique à la valeur asymptotique :

$$P_{n,m,k}^{\text{co}} = \frac{P_0 \left[n + A \sin \left(2\pi \frac{n}{\Pi_n} \right) + \epsilon \right]}{\sqrt{\lambda_{m,k}(s)}} \quad (3.10)$$

où A et Π_n sont l'amplitude relative et la période de l'oscillation, respectivement. La Figure 3.10 donne deux exemples pour les jeux de paramètres ($A = 0.10, \Pi_n = 5.8$) et ($A = 0.20, \Pi_n = 2.3$) (représentatif de ce que l'on peut trouver dans les pulsateurs BF), puis leur analyse avec MORSE. Plus l'amplitude du *glitch* est grande, plus le pic de puissance spectrale (et ses harmoniques) s'étale autour de la valeur asymptotique dans la carte. En effet, une fois étirées, les périodes d'oscillation ne sont plus exactement espacées de P_0 mais d'une valeur comprise dans l'intervalle $[P_0(1 - 2A), P_0(1 + 2A)]$.

La détection reste robuste à l'effet du glitch puisque le seuil de fausse alarme est dépassé dans les deux cas. On remarquera cependant que la détermination de la fréquence de rotation et du temps d'Archimède est légèrement biaisée : ($\nu_{\text{rot}} = 12.11 \mu\text{Hz}, P_0 = 4311 \text{ s}$) pour le jeu de paramètres ($A = 0.10, \Pi_n = 5.8$) et ($\nu_{\text{rot}} = 12.06 \mu\text{Hz}, P_0 = 4274 \text{ s}$) pour ($A = 0.20, \Pi_n = 2.3$). Ces valeurs sont à comparer aux paramètres d'entrée ($\nu_{\text{rot}} = 12.00 \mu\text{Hz}, P_0 = 4200 \text{ s}$). On reviendra en détail sur les causes de ce biais dans la Sect. 3.2.2.

3.2.2 Erreurs systématiques de la TAR asymptotique

La TAR asymptotique repose sur un certain nombre d'hypothèses et d'approximations qui, si elles sont justifiées physiquement et offrent une compréhension qualitative du spectre, peuvent être à l'origine de biais quant à l'aspect quantitatif des modes d'oscillation et de l'information qu'ils portent sur la rotation et la structure de l'étoile. On cherche ici à évaluer ces biais et à en identifier les causes. Dans cet objectif, nous avons résolu numériquement les équations complètes des oscillations pour des modèles représentatifs des étoiles γ Doradus. Les spectres obtenus sont ensuite étudiés avec MORSE de manière à comparer les valeurs qu'il retrouve avec celles obtenues directement à partir des modèles. Trois cas test ont été choisis pour rendre

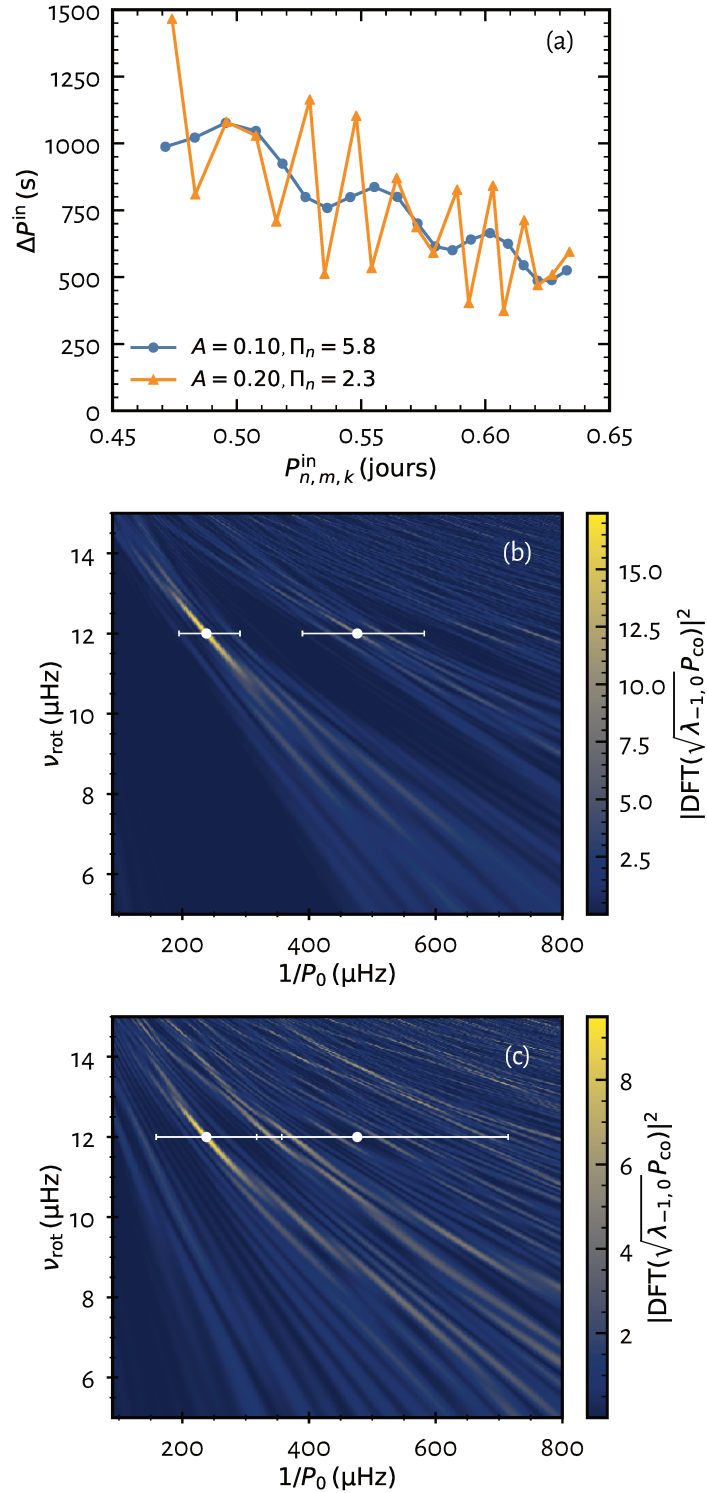


FIGURE 3.10: Impact d'un *glitch* d'Archimède simulé sur la recherche de régularité avec MORSE. (a) Effets sur les modes d'oscillation dans le plan $\Delta P^{\text{in}} - P^{\text{in}}$, simulés pour deux jeux de paramètres à partir de l'Eq. 3.10. Analyse du spectre en bleu (b) et du spectre en orange (c) avec MORSE. Les points blancs représentent les valeurs utilisées pour générer les spectres et les harmoniques d/P_0 ($d \in \mathbb{N}^*$). Les barres d'erreur prennent en compte l'oscillation de l'espacement en période et délimitent les intervalles $\left[\frac{d}{P_0(1+2A)}, \frac{d}{P_0(1-2A)} \right]$.

compte des situations rencontrées dans les observations : (i) rotation uniforme sans *glitch* structurel, (ii) rotation uniforme avec *glitch* d'Archimède et (iii) rotation différentielle sans *glitch*.

Dans un premier temps, ces tests sont restreints aux modes dipolaires. Ce sont les modes majoritairement identifiés dans les γ Dor (Van Reeth et al., 2016; Li et al., 2019a) et les SPB (Pápics et al., 2017). Pour chaque spectre synthétique, les modes progrades, zonaux et rétrogrades sont examinés séparément et nous nous sommes assurés que le seuil de fausse alarme est dépassé. Les trois cartes de puissance obtenues sont compilées sous la forme d'une carte de contours où pour chaque carte de puissance, les contours à 50 et 95% du maximum de puissance sont représentés.

Modèles stellaires et calcul des oscillations

Dans cette étude, nous avons opté pour des modèles stellaires 1D respectant la symétrie sphérique. Les modes g dans ces modèles 1D ont été confrontés à des calculs entièrement 2D dans des modèles polytropiques (Ballot et al., 2012), ou dans des modèles d'étoiles γ Dor (Ouazzani et al., 2017). Selon ces comparaisons, l'approche non-perturbative 1D, qui a l'avantage de nécessiter moins de ressources numériques, donne des résultats satisfaisants en comparaison de l'approche entièrement 2D.

Les modèles stellaires sont calculés avec le code d'évolution stellaire 1D CLÉS (Scuflaire et al., 2008a) pour une masse de $1.86 M_{\odot}$ (soit dans l'intervalle de masse couvert par les γ Dor) et une composition chimique initiale solaire ($Y = 0.27$, $Z = 0.014$). Nous avons adopté la mixture AGSS09 (Asplund et al., 2009) et les tables d'opacités OPAL correspondantes (Iglesias & Rogers, 1996), complétées à basse température ($\log T < 4.1$) par les tables de Ferguson et al. (2005). Nous avons utilisé l'équation d'état OPAL2001 (Rogers & Nayfonov, 2002) et les taux de réactions nucléaires NACRE (Angulo et al., 1999), mis à part pour la réaction $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ pour laquelle la section efficace de Formicola et al. (2004) est adoptée. Les conditions aux limites de surface à $T = T_{\text{eff}}$ sont données par les modèles d'atmosphère ATLAS9 (Castelli & Kurucz, 2003). La convection est traitée dans le formalisme de la théorie de la longueur de mélange (MLT, Böhm-Vitense, 1958) où le paramètre $\alpha_{\text{MLT}} = 1.70$. Cette valeur permet de reproduire au mieux la bande d'instabilité des γ Dor.

Nous avons considéré des modèles avec et sans diffusion turbulente. Comme le code CLES n'inclut pas les effets de la rotation sur le transport de moment cinétique ou les espèces chimiques, on introduit à la place un coefficient de mélange turbulent D_t en suivant l'approche de Miglio et al. (2008). Il permet de reproduire les effets du mélange induit par la rotation en lissant les gradients de composition chimique dans l'étoile, notamment à la frontière du cœur convectif. Pour le modèle incluant ce mélange supplémentaire, le coefficient est fixé à $D_t = 700 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ et gardé constant dans l'ensemble du modèle pendant toute la durée de l'évolution. Cette valeur est issue d'une calibration des modèles CLES sur des modèles Geneva d'étoiles de masses similaires et incluant les effets hydrodynamiques de la rotation (Maeder & Meynet, 2000). Les propriétés des modèles utilisés dans cette section sont compilées dans la Table 3.2.

Le code CLES ne génère pas de profils de rotation, ainsi ils sont ajoutés *ad hoc* après les calculs d'évolution. Lorsque le profil de rotation est choisi différentiel, il est adapté à la structure en utilisant une fonction erreur, centrée au dessus du cœur convectif, avec une largeur liée au profil du gradient de composition chimique.

Les modes d'oscillation sont calculés dans une approche non-perturbative avec le code d'oscillation ACOR (Ouazzani et al., 2012, 2015) qui prend en compte à la fois la force de Coriolis et l'accélération centrifuge. Le code ACOR résout les équations hydrodynamiques perturbées par

TABLE 3.2
Propriétés des modèles CLES d'étoiles γ Dor utilisés dans la Sect. 3.2.2.

	Modèle A	Modèle B
M/M_{\odot}	1.86	1.86
T_{eff} (K)	7960	8025
$\log L/L_{\odot}$	1.269	1.202
$\log g$	3.99	4.08
R/R_{\odot}	2.27	2.07
Âge (Myr)	1048	782
X_{C}	0.34	0.32
D_{t} ($\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)	700	-
P_0 (s)	4579	4453

des fluctuations eulériennes grâce à une méthode spectrale multi-domaine. Une présentation du code est donnée en Sect. 2.2.2. Pour sélectionner les ordres radiaux, nous nous sommes basés sur les calculs non-adiabatiques de stabilité des modes g réalisés par Bouabid et al. (2013). Tous les spectres étudiés ici contiennent les ordres radiaux de $n = 20$ à 50.

Cas simple : rotation solide et mélange à la frontière du cœur convectif

On cherche d'abord à se rapprocher au plus près des hypothèses de la TAR asymptotique en considérant un modèle en rotation uniforme et sans *glitch* au sein de la structure. Le spectre des oscillations est calculé à partir du modèle A (Table 3.2) et un profil de rotation constant à $7 \mu\text{Hz}$. Cette valeur est comprise dans l'intervalle des rotations observées dans les γ Dor (voir Sect. 3.3.1).

Le panneau en haut à gauche de la Fig. 3.11 montre les contours des trois cartes de puissance obtenues. Les contours de chaque famille de modes sont en bon accord entre eux. Néanmoins, on notera de légers écarts avec les valeurs d'entrée du modèle. Les résultats détaillés des trois analyses sont compilés dans la Table 3.3. Les erreurs systématiques ne dépassent pas les quelques pourcents. En outre, elles dépendent de l'identité (m, k) des modes considérés. Le diagramme échelle pour les modes progrades $(m, k) = (-1, 0)$ est présenté dans le panneau en haut à droite (Fig. 3.11). Si la TAR asymptotique était complètement appropriée à la description des modes, la crête serait une droite verticale. Or, la crête ondule légèrement le long de cette droite. Les diagrammes échelle pour les autres séries de modes présentent des caractéristiques similaires. Cette ondulation s'explique par le fait que, bien qu'il ait été lissé, le gradient de composition chimique à la frontière du cœur convectif reste toute de même important, suffisant en tout cas pour affecter les modes.

Ces erreurs systématiques sont supérieures d'un ordre de magnitude par rapport aux incertitudes statistiques (ou liées aux *glitches*) que l'on pourrait évaluer avec une simulation Monte-Carlo (Sect. 3.1.4). Cela suggère que, même dans ce cas simple, les insuffisances de la TAR asymptotique sont la principale source d'erreur sur l'estimation de la rotation et du temps d'Archimède.

Pour aller plus loin et comprendre quelles sont les hypothèses qui interviennent dans ces biais, nous avons calculé des spectres supplémentaires. La TAR asymptotique repose à la fois sur la TAR et le traitement asymptotique des équations d'oscillation. Pour comparer les contributions de ces deux approximations à l'erreur et si elles varient avec la fréquence de rotation, nous avons choisi trois fréquences de rotation (7, 15 et 23 μHz) pour le Modèle A et nous avons cal-

TABLE 3.3

Fréquences de rotation et temps d'Archimède déterminés par MORSE pour le modèle A en rotation solide. Les erreurs relatives ($\delta v_{\text{rot}}, \delta P_0$) par rapport aux paramètres d'entrée (7 μHz , 4579 s) sont indiquées dans le tableau.

(m, k)	v_{rot} (μHz)	δv_{rot} (%)	P_0 (s)	δP_0 (%)
(-1, 0)	6.95	0.75	4495	1.84
(0, 1)	6.88	1.74	4484	2.09
(1, 0)	7.15	2.14	4580	0.02

TABLE 3.4

Fréquences de rotation et temps d'Archimède retrouvés par MORSE selon les approximations utilisées dans le calcul des spectres synthétiques : TAR non-asymptotique ou calculs complets avec ACOR.

	Valeurs d'entrée	Recovered values	
	(Model A)	Non-asymptotic TAR	ACOR
v_{rot} (μHz)	7.00	6.97	6.95
P_0 (s)	4579	4531	4495
v_{rot} (μHz)	15.00	14.95	14.94
P_0 (s)	4579	4498	4459
v_{rot} (μHz)	23.00	22.95	22.89 ^a
P_0 (s)	4579	4497	4394 ^a

Notes. ^a Pour ce modèle, les modes g autour de l'ordre radial $n = 45$ se couplent avec des modes inertiels se propageant dans le cœur convectif, ce qui provoque un croisement évité.

culés les fréquences d'oscillation soit dans la TAR non asymptotique, soit avec ACOR. L'étude est limitée ici aux modes progrades (-1, 0) de façon à éviter le plus possible d'avoir des modes mixtes (*i.e.* couplés à des modes inertiels du cœur convectif) dans la gamme d'ordres radiaux considérés. En effet, si ces derniers seront bien visibles dans les calculs ACOR, ils ne le seront pas dans ceux de la TAR faussant ainsi la comparaison. On notera par ailleurs que les modes progrades dipolaires sont aussi les plus fréquemment identifiés dans les étoiles γ Dor et les SPB en rotation modérée à rapide. La Table 3.4 compare les estimations de MORSE aux valeurs du modèle pour chaque spectre synthétique. Comme on aurait pu s'y attendre, les biais sont plus grands lorsqu'on utilise les spectres ACOR que ceux calculés dans la TAR non-asymptotique. Il apparaît donc que, à la fois la TAR et le formalisme asymptotique, participent aux erreurs systématiques, en des proportions qui sont approximativement égales. D'autre part, il semblerait que le temps d'Archimède est d'autant plus mal estimé que la fréquence de rotation du modèle est grande tandis qu'aucune tendance claire n'est visible pour la fréquence de rotation retrouvée par MORSE.

Glitch d'Archimède à la frontière du cœur convectif

On cherche maintenant à comprendre les effets d'un *glitch* d'Archimède à la frontière du cœur convectif sur la détermination des paramètres (v_{rot}, P_0) par MORSE. Le Modèle B a été calculé sans diffusion turbulente pour qu'un fort gradient de composition chimique puisse se développer au dessus du cœur convectif au fil de son évolution sur la séquence principale. Pour

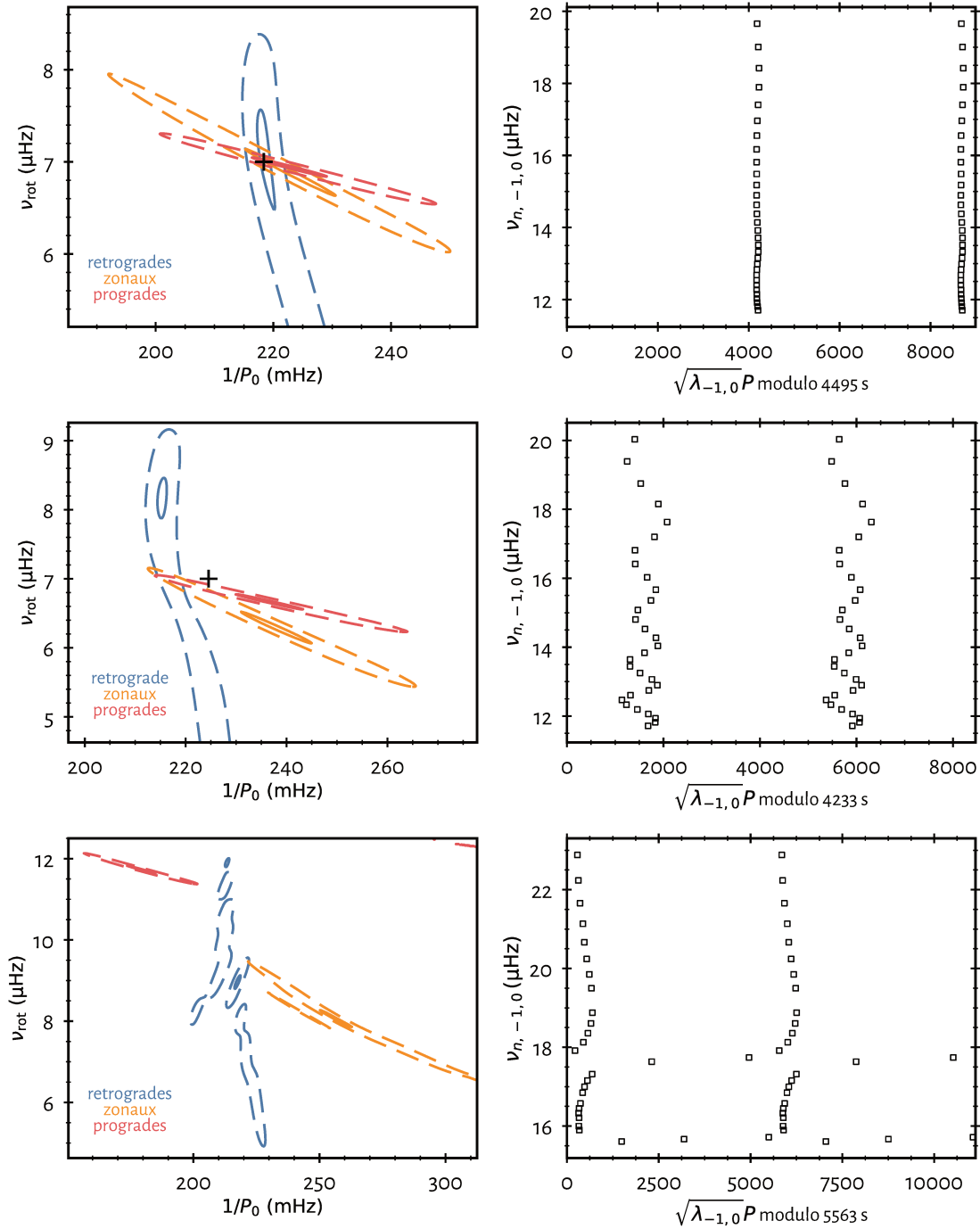


FIGURE 3.11: Étude des erreurs systématiques liées à l'utilisation de la TAR asymptotique dans MORSE. **À gauche :** Cartes de contours à 95% (trait plein) et 50% (tirets) du maximum de puissance pour le Modèle A en rotation uniforme (*en haut*), le Modèle B en rotation uniforme (*au milieu*), et le Modèle A en rotation différentielle (*en bas*). Les couleurs indiquent la famille de modes à laquelle est associée chaque contour. Quand cela est pertinent, des croix représentent les valeurs d'entrée du modèle étudié. **À droite :** Exemples de diagrammes échelle en périodes étirées pour les modes progrades. Ils sont tracés deux fois par souci de clarté.

TABLE 3.5

Fréquences de rotation et temps d'Archimède déterminés par MORSE pour le modèle B en rotation solide. Les paramètres d'entrée sont ($7 \mu\text{Hz}$, 4453 s).

(m, k)	$\nu_{\text{rot}} (\mu\text{Hz})$	$\delta\nu_{\text{rot}} (\%)$	$P_0 (\text{s})$	$\delta P_0 (\%)$
$(-1, 0)$	6.67	4.71	4233	4.94
$(0, 1)$	6.29	10.14	4202	5.64
$(1, 0)$	8.17	16.77	4645	4.31

TABLE 3.6

Fréquences de rotation et temps d'Archimède déterminés par MORSE pour le modèle A en rotation différentielle.

(m, k)	$\nu_{\text{rot}} (\mu\text{Hz})$	$P_0 (\text{s})$
$(-1, 0)$	11.74	5592
$(0, 1)$	8.06	3899
$(1, 0)$	8.97	4598

calculer les fréquences d'oscillation, nous avons fixé un profil de rotation solide à $7 \mu\text{Hz}$.

Les résultats (Table 3.5 et panneau au milieu à gauche de la Fig. 3.11) mettent en évidence un désaccord significatif entre les 3 séries de modes dipolaires. En outre, des écarts substantiels sont constatés avec les valeurs d'entrée du modèle. Ces derniers sont supérieurs à ceux trouvés avec le modèle lisse de la section précédente puisque les erreurs relatives atteignent jusqu'à $\sim 17\%$ sur ν_{rot} et $\sim 6\%$ sur P_0 . Le panneau au milieu à droite de la Fig. 3.11 montre un exemple de diagramme échelle pour les modes progrades où le comportement oscillatoire des espacements en période est clairement visible. Les diagrammes échelle pour les deux autres séries de modes ont des comportements identiques.

Dans le cas général, la composante oscillatoire, qui se superpose à la tendance moyenne en présence d'un *glitch*, n'est pas symétrique. En utilisant le maximum de puissance comme estimateur de ν_{rot} et P_0 , on obtient en réalité l'espacement moyen des périodes d'oscillation étirées. Les biais montrés ici peuvent être en majeure partie attribués à la différence entre cet espacement moyen et la valeur "vraie" de P_0 . On notera par ailleurs que les erreurs systématiques liées aux approximations de la TAR asymptotique et mises en évidence dans la section précédente contribuent également aux biais constatés ici.

Rotation différentielle

L'hypothèse de rotation uniforme utilisée dans la TAR asymptotique simplifie considérablement les équations des oscillations et permet une description relativement simple des modes d'oscillation basse fréquence. Cependant, elle n'est pas pleinement justifiée physiquement. Dès lors, la rotation différentielle reste une éventualité à considérer. Ainsi, nous cherchons à savoir si nous pouvons retrouver des régularités dans le spectre g d'un modèle en rotation différentielle, et si oui, comment sont impactés les paramètres de sortie de MORSE. Dans ce but, nous avons appliqué un profil de rotation bi-zone au Modèle A puis nous avons calculé les fréquences des modes dipolaires avec ACOR. Le cœur convectif tourne à $\nu_{\text{rot,cœur}} = 15 \mu\text{Hz}$ et l'enveloppe à $\nu_{\text{rot,env}} = 7 \mu\text{Hz}$. Le gradient de composition chimique est lissé par la diffusion turbulente dans le Modèle A, ce qui nous évite d'avoir à prendre en compte les effets d'un *glitch* dans la suite.

Les panneaux en bas de la Fig. 3.11 montrent les cartes de contours et un exemple de diagramme échelle en période étirée pour les modes progrades. La Table 3.6 liste les estimations fournies par MORSE. Ces résultats montrent qu’il est possible de trouver des régularités dans le spectre g d’une étoile en rotation différentielle, même avec le formalisme de la TAR asymptotique. En outre, chaque série de modes donne des valeurs différentes pour les paramètres (v_{rot}, P_0) . Ces différences sont bien plus élevées que les biais attendus dans une étoile en rotation uniforme (voir sections précédentes), ce qui suggère qu’elles sont liées à la rotation différentielle du modèle. Le diagramme échelle présente également des spécificités. D’une part, la crête est presque verticale mais est aussi courbée. D’autre part, deux croisements évités sont visibles à ~ 15.5 et $\sim 17.5 \mu\text{Hz}$, ce qui s’explique par des résonances avec les modes inertiels du cœur convectif. Tout ceci est symptomatique des insuffisances de la TAR asymptotique.

Dans un cas général, la cavité résonnante varie d’un mode propre à l’autre. Pour (m, k) fixés, on peut supposer que la cavité varie très peu sur la gamme d’ordres radiaux étudiée – cela semble être approximativement le cas pour les modes g étudiées ici. En outre, deux séries de modes (m, k) ont des cavités résonnantes sensiblement différentes et donc ne “voient” pas tout à fait la même rotation ni la même partie de la structure. Dans cette perspective, il est normal de retrouver des valeurs de (v_{rot}, P_0) discordantes pour chacune des séries de modes. On retiendra tout de même qu’à condition de disposer de plusieurs séries de modes de (m, k) différents, il sera en principe possible de mettre en évidence la rotation différentielle d’une étoile avec MORSE.

3.3 Rotation interne et temps caractéristique d’Archimède pour un échantillon d’étoiles *Kepler*

3.3.1 Mesures dans un échantillon de 36 étoiles γ Dor

Nous avons cherché à mesurer la rotation interne et le temps caractéristique d’Archimède des étoiles γ Dor observées par *Kepler*. Un des objectifs était de pouvoir confirmer les possibilités de MORSE mises en évidence dans les tests. D’autre part, ces mesures s’inscrivaient dans un projet plus conséquent visant à tester les modèles de transport du moment cinétique dont les résultats seront présentés dans le Chap. 4.

Sélection des 36 cibles de l’échantillon

Ayant pour but final de tester les modèles de transport de moment cinétique dans les étoiles γ Dor, il nous fallait pouvoir disposer d’un nombre statistiquement significatif de cibles pour lesquelles les paramètres spectroscopiques étaient déterminés. Ainsi, nous avons choisi de construire notre échantillon à partir des travaux de [Van Reeth et al. \(2015a\)](#), qui établissent une liste de γ Dor à partir de mesures spectroscopiques et de l’analyse de la photométrie *Kepler*. Dans un deuxième temps, [Van Reeth et al. \(2016\)](#) retiennent celles qui contiennent des motifs dans les espacements en période. Ces cibles forment le cœur de notre échantillon (30 étoiles) auquel nous avons ajouté les 4 étoiles étudiées par [Ouazzani et al. \(2017\)](#) et 2 autres étoiles identifiées comme γ Dor par V. Antoci.

Analyse fréquentielle des courbes de lumières

L’analyse fréquentielle des courbes de lumière *Kepler* est réalisée par blanchiment itératif du spectre (*pre-whitening*). À chaque étape, le pic d’amplitude la plus haute dans le périodo-

gramme est soustrait de la courbe de lumière. La significativité de chaque pic est établie à partir d'un critère de fausse alarme (Scargle, 1982) qui donne des résultats robustes pour les données *Kepler*. L'extraction des fréquences par *pre-whitening* itératif peut introduire des fréquences spacieuses en cours d'analyse, par exemple lorsque des fréquences ne sont pas résolues ou qu'elles sont mal ajustées (Van Reeth et al., 2015b). Pour s'assurer que les fréquences extraites ne sont pas introduites par le *pre-whitening*, l'amplitude du pic extrait est comparée à sa valeur dans le périodogramme d'origine. Si ces valeurs diffèrent de $\alpha\%$ alors le pic est écarté de la liste des fréquences. Ce critère α sur l'amplitude n'est pas absolu et peut varier d'une étoile à l'autre. Néanmoins, plus α est haut, plus la probabilité de conserver des fréquences spacieuses est haute (Van Reeth et al., 2015b). Il est à noter également que l'identification d'une régularité par MORSE est robuste à ces fréquences, sous réserve qu'elles soient en minorité en comparaison des modes recherchés. Le code utilisé ici est basé sur Timeseries Tools (Handberg, 2017) et sera décrit plus en détail dans Antoci et al. (in prep.).

Le mouvement des étoiles sur la ligne de visée introduit un décalage Doppler des fréquences d'oscillations, qui peut être supérieur aux incertitudes sur les fréquences dans les données *Kepler* (Davies et al., 2014b). L'impact de ces décalages Doppler sur les estimations de ν_{rot} et P_0 est largement inférieur aux biais et incertitudes statistiques mises en avant jusqu'ici, même en supposant des vitesses radiales élevées ($\pm 150 \text{ km s}^{-1}$). C'est pourquoi nous les avons négligés ici.

Résultats et comparaison avec Van Reeth et al. (2016)

Les spectres des 36 étoiles ont été analysés avec MORSE. La Table 3.7 répertorie les mesures de ν_{rot} et P_0 obtenues à partir des modes *g* progrades dipolaires $(m, k) = (-1, 0)$, seuls modes présents dans toutes les étoiles de l'échantillon. On verra, dans le Chap. 4, comment ces mesures apportent des contraintes sur les processus de transport du moment cinétique.

Van Reeth et al. (2016) ont mené une étude similaire bien que différente dans l'approche. En effet, les espacements en période γ sont modélisés de manière directe à l'aide de modèles stellaires. En se basant sur la TAR asymptotique, ils calculent les périodes des modes *g* dans une grille de modèles représentative de la bande d'instabilité des γ Dor. Puis, les espacements en période observés sont ajustés par minimisation des moindres carrés. Ce type d'approche présente *a priori* l'inconvénient de dépendre de la physique d'entrée des modèles et de ses incertitudes. Les estimations de MORSE étant indépendantes des modèles stellaires, j'ai entrepris de comparer les résultats pour les 30 étoiles communes aux deux études (Fig. 3.12). Les fréquences de rotation interne mesurées par les deux méthodes sont en bon accord à l'exception d'une poignée d'étoiles. Cela suggère que l'information portée par les modes *g* sur la rotation des γ Dor est peu dépendante des détails de la modélisation stellaire (voir aussi Ouazzani et al., 2017; Saio et al., 2018b). Quant aux temps d'Archimède, l'accord est globalement satisfaisant à l'exception notable des faibles P_0 ($< 3700 \text{ s}$). Deux facteurs peuvent expliquer ces différences. D'une part, les critères pour l'extraction des fréquences adoptés dans notre étude sont plus conservatifs que ceux utilisés par Van Reeth et al. (2016), résultant parfois en un nombre réduit de fréquences extraites. D'autre part, la majorité des étoiles concernées montre des signes d'un glitch dans leurs espacements en période, ce qui rend les mesures du temps d'Archimède et de la fréquence de rotation plus difficiles et surtout moins précises.

3.3.2 Exemple d'une étoile SPB : KIC3459297

Comme il a été mentionné auparavant, les pulsations des étoiles SPB sont très similaires à celles des γ Dor (modes *g* d'ordre radial élevé). Ainsi, le code MORSE est aussi adapté à l'inter-

TABLE 3.7

 Temps caractéristiques d'Archimède P_0 et fréquences de rotation interne ν_{rot} déterminés par MORSE à partir des modes $(m, k) = (-1, 0)$ de 36 γ Dor observées par *Kepler*.

KIC	ν_{rot} (μHz)	$\sigma_{\nu_{\text{rot}}}$ (μHz)	P_0 (s)	σ_{P_0} (s)
2710594	11.17	0.06	3489	85
3448365	12.22	0.45	3662	500
4177905 ⁽¹⁾	9.20	0.04	4006	23
4253413 ⁽¹⁾	9.71	0.06	4116	51
4846809	14.75	0.08	4085	111
5114382	13.30	0.12	4311	188
5476299 ⁽¹⁾	16.16	0.05	3867	54
5522154	24.81	0.05	4620	43
5708550	8.81	0.16	3260	222
5788623	4.56	0.05	3915	52
6062766 ⁽²⁾	17.17	0.03	4572	58
6291473 ⁽²⁾	18.49	0.07	4251	92
6468146	11.38	0.04	4375	46
6468987	16.90	0.20	3177	165
6678174	6.57	0.05	5044	70
6762992 ⁽¹⁾	8.47	0.03	3610	21
6935014	9.19	0.03	4633	64
7023122	11.40	0.33	4779	228
7365537	25.50	0.37	4176	323
7380501	7.14	0.21	4148	394
7434470	20.34	0.02	4122	22
7583663	13.64	0.05	4643	97
7939065	12.68	0.04	4086	39
8364249	17.62	0.02	4461	21
8375138	19.12	0.08	4307	115
10224094	4.49	0.23	4164	183
11080103	6.28	0.12	3514	134
11099031	11.29	0.20	3367	346
11294808	9.13	0.06	4078	101
11456474	12.22	0.02	4110	43
11721304	5.09	0.02	4024	23
11826272	4.19	0.02	4367	23
11907454	15.49	0.05	4199	65
11917550	10.39	0.02	4103	30
11920505	8.67	0.05	4197	71
12066947	24.95	0.05	4181	63

Notes. La majorité des étoiles sont issues de l'échantillon de [Van Reeth et al. \(2016\)](#). ⁽¹⁾ Étoiles γ Dor étudiées dans [Ouazzani et al. \(2017\)](#). ⁽²⁾ Étoiles γ Dor identifiées par V. Antoci.

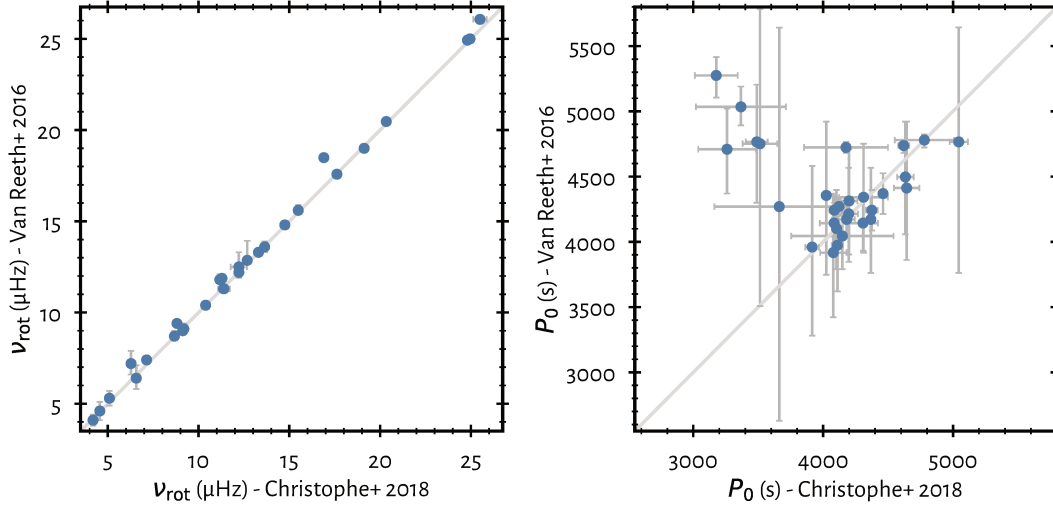


FIGURE 3.12: Comparaison des mesures MORSE de (ν_{rot}, P_0) avec les résultats de Van Reeth et al. (2016).

prétation du spectre des oscillations de ces étoiles. J'en présente un exemple ici, l'étoile *Kepler* KIC3459297, également étudiée par Pápics et al. (2017).

Le périodogramme de Lomb-Scargle (Fig. 3.13, en haut) montre un premier groupement de fréquences autour de $\sim 12 \mu\text{Hz}$ et un second vers $\sim 25 \mu\text{Hz}$. Ce dernier est probablement composé de combinaisons de fréquences ou de modes $(-2, 0)$, mais trop peu de modes sont disponibles pour obtenir une interprétation robuste avec MORSE. Les fréquences du premier groupement correspondent à des modes $(m, k) = (-1, 0)$. On mesure $\nu_{\text{rot}} = 6.86 \pm 0.07 \mu\text{Hz}$ pour la rotation interne de KIC3459297, et $P_0 = 7042 \pm 190 \text{ s}$ pour le temps d'Archimède (Fig. 3.13, en bas). En utilisant une méthode analogue à celle de Van Reeth et al. (2016), Pápics et al. (2017) obtiennent des résultats comparables bien que plus imprécis : $\nu_{\text{rot}} = 7.3 \pm 0.5 \mu\text{Hz}$ et $P_0 = 8260^{+1400}_{-1300} \text{ s}$.

Le diagramme échelle en période étirée révèle un comportement oscillatoire de l'espacement en période, suggérant qu'une variation rapide de la fréquence de Brunt-Väisälä existe quelque part au sein de la structure. Un gradient de composition chimique à la frontière du cœur convectif pourrait en être la cause (Miglio et al., 2008) mais une étude plus approfondie est nécessaire pour caractériser cette discontinuité (e.g. Moravveji et al., 2016).

3.4 Discussion et conclusions

Le *MOde Regularity SEarcher* (MORSE) est un nouvel outil développé pour identifier les modes d'oscillation des pulsateurs BF de séquence principale et réaliser des mesures sismiques de la rotation et du temps caractéristique d'Archimède, sans nécessiter le calcul de modèles stellaires. Il repose sur un étirement adroit du spectre des oscillations par les fonctions $\sqrt{\lambda}$ dérivées de la formulation asymptotique des équations d'oscillation dans l'approximation traditionnelle de la rotation. De nombreux tests ont permis de caractériser ses performances. En particulier, l'exactitude des estimations de la rotation et du temps d'Archimède est établie par comparaison à des spectres synthétiques tirés de calculs numériques complets. En outre, des simulations Monte-Carlo testent la précision de chaque mesure. L'intérêt d'un tel outil a été illustré à travers la mesure de la rotation interne et du temps d'Archimède de 36 étoiles γ Dor observées par *Kepler*. Une conclusion intéressante de ce travail est que l'information portée par les modes

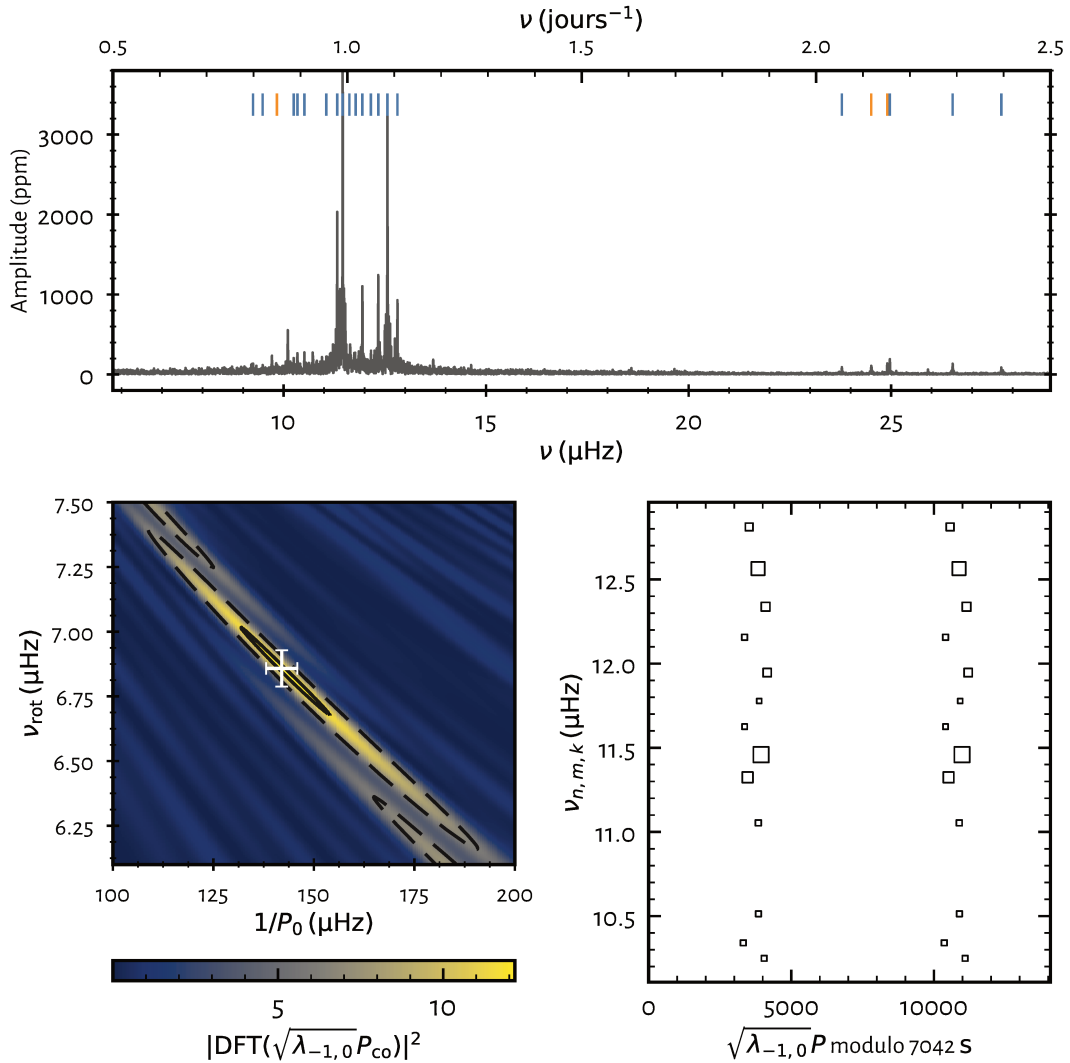


FIGURE 3.13: Exemple de résultats obtenus pour l'étoile KIC3459297, observée par *Kepler*. **En haut :** Périodogramme de Lomb-Scargle. Les barres verticales indiquent les fréquences extraites indépendantes (en bleu) et identifiées comme combinaisons (en orange). **En bas :** Carte de puissance (à gauche) et diagramme échelle en période étirée (à droite) obtenus pour le groupement de fréquences à $\sim 12 \mu\text{Hz}$. Ces fréquences sont identifiées comme des modes $(m, k) = (-1, 0)$. La croix blanche représente l'estimation finale des paramètres $(\nu_{\text{rot}}, 1/P_0)$ et les erreurs issues d'une simulation Monte-Carlo.

g progrades sectoraux ($k = 0, m > 0$) sur la rotation interne semble peu dépendante des paramètres stellaires, un constat aussi partagé par [Ouazzani et al. \(2017\)](#) et [Saio et al. \(2018b\)](#). Ces mesures sont aussi essentielles pour tester les modèles de transport de moment cinétique sur la séquence principale, ce qui sera l'objet du Chap. 4. Un exemple d'application à une étoile *Kepler* de type SPB a aussi été présenté confirmant la validité de l'outil pour cette classe de pulsateurs.

Développé avant tout pour des rotateurs modérés à rapides, MORSE offre aussi la possibilité de caractériser les rotateurs lents en identifiant les *splittings* rotationnels grâce aux diagrammes échelle en période étirée. On notera tout de même que les méthodes basées sur une approche perturbative de la rotation sont valides dans ce régime de rotation et sont généralement plus appropriées.

Certaines insuffisances de la TAR asymptotique ont été mises en évidence grâce aux tests de performance. En effet, plusieurs phénomènes ne sont pas pris en compte dans ce formalisme. Notamment, une variation rapide de la structure de l'étoile à l'échelle de la longueur d'onde des modes imprime un comportement oscillatoire des espacements en période qui n'est pas retranscrit par la TAR asymptotique. En outre, l'hypothèse de rotation solide reste une approximation et peut limiter la portée des diagnostics lorsque le profil de rotation s'en éloigne substantiellement. Pour un modèle en rotation solide avec une structure lissée et qui pourtant s'approche des hypothèses de la TAR asymptotique, des erreurs systématiques de l'ordre de quelques pourcents affectent les mesures. Les approximations asymptotique et traditionnelle sont toutes deux mises en cause mais les origines physiques précises restent à déterminer. La TAR fait l'hypothèse que le déplacement radial d'un mode est négligeable par rapport à son déplacement horizontal. Or cette hypothèse n'est pas valable au niveau du cœur où les deux déplacements sont du même ordre de grandeur ([Berthomieu et al., 1978](#)), ce qui pourrait expliquer une partie des erreurs systématiques. Dans l'approximation asymptotique, on suppose que la longueur d'onde radiale du mode est faible devant l'échelle spatiale de variation de la structure de l'étoile (i.e. $n \gg \ell$), ce qui permet de faire les approximations de Cowling et JWKB. Néanmoins, même si les ordres radiaux des modes dans les pulsateurs basse fréquence sont élevés, il est possible qu'ils ne le soient pas assez pour rentrer dans le régime asymptotique. Enfin, on insistera encore sur le fait que les limites imposées par la TAR asymptotique ne sont en aucun cas inhérentes à la méthode d'étirement proposée ici. Cette technique pourrait s'appuyer sur d'autres formalismes pour autant que les fonctions étirantes soient indépendantes des modèles stellaires et ne dépendent que d'un nombre réduit de paramètres devant le nombre de modes. [Prat et al. \(2016, 2017, 2018\)](#) se sont par exemple intéressés au développement d'une meilleure formulation asymptotique dans le cadre de la théorie des rayons. Cela pourrait constituer une perspective intéressante pour une amélioration des diagnostics avec MORSE. On ajoutera aussi que des techniques analogues d'étirement sont utilisées pour interpréter le spectre de modes mixtes des géantes rouges ([Mosser et al., 2015](#); [Vrard et al., 2016](#); [Gehan et al., 2018](#)).

Outre l'approche de [Van Reeth et al. \(2016\)](#) et celle utilisée par MORSE, on mentionnera également la méthode proposée par [Li et al. \(2019a\)](#) qui se base sur la pente des espacements en période, un diagnostic sismique de la rotation établie par [Ouazzani et al. \(2017\)](#). Brièvement, la détection des motifs d'espacements en période repose sur la corrélation croisée du spectre des oscillations avec des patrons linéaires paramétriques. Dans un deuxième temps, ces motifs sont ajustés par la formulation asymptotique de la TAR ou, dans le cas des rotateurs lents, les *splittings* rotationnels sont identifiés.

Deciphering the oscillation spectrum of γ Doradus and SPB stars

S. Christophe^{1,2}, J. Ballot², R.-M. Ouazzani^{1,3}, V. Antoci³, and S. J. A. J. Salmon⁴

¹ LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 Place Jules Janssen, 92195 Meudon, France
e-mail: steven.christophe@obspm.fr

² IRAP, Université de Toulouse, CNRS, UPS, CNES, 14 Avenue Édouard Belin, 31400, Toulouse, France

³ Stellar Astrophysics Centre, Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, 8000 Aarhus C, Denmark

⁴ STAR Institute, Université de Liège, Allée du Six Août 19C, 4000 Liège, Belgium

Received 6 February 2018 / Accepted 4 July 2018

ABSTRACT

Context. The space-based *Kepler* mission provided four years of highly precise and almost uninterrupted photometry for hundreds of γ Doradus stars and tens of slowly pulsating B-type (SPB) stars, finally allowing us to apply asteroseismology to these gravity mode pulsators. Without rotation, gravity modes are equally spaced in period. This simple structure does not hold in rotating stars for which rotation needs to be taken into account to accurately interpret the oscillation spectrum.

Aims. We aim to develop a stellar-model-independent method to analyse and interpret the oscillation spectrum of γ Dor and SPB stars.

Methods. Within the traditional approximation of rotation, we highlight the possibility of recovering the equidistance of period spacings by stretching the pulsation periods. The stretching function depends on the degree and azimuthal order of gravity modes and the rotation rate of the star. In this new stretched space, the pulsation modes are regularly spaced by the stellar buoyancy radius.

Results. On the basis of this property, we implemented a method to search for these new regularities and simultaneously infer the rotation frequency and buoyancy radius. Tests on synthetic spectra computed with a non-perturbative approach show that we can retrieve these two parameters with reasonable accuracy along with the mode identification. In uniformly rotating models of a typical γ Dor star, and for the most observed prograde dipole modes, we show that the accuracy on the derived parameters is better than 5% on both the internal rotation rate and the buoyancy radius. Finally, we apply the method to two stars of the *Kepler* field, a γ Dor and an SPB, and compare our results with those of other existing methods.

Conclusions. We provide a stellar-model-independent method to obtain the near-core rotation rate, the buoyancy radius, and the mode identification from gravity-mode spectra of γ Dor and SPB stars.

Key words. asteroseismology – stars: oscillations – stars: rotation – methods: data analysis

1. Introduction

In stellar physics, the treatment of interfaces between convective and radiative regions remains rather simplistic and subject to large uncertainties despite the critical effects on the stellar structure and evolution. This is especially true for main-sequence stars that possess a convective core. Indeed, mixing processes at the interface can extend the central mixed zone and increase the amount of hydrogen fuel available for nuclear fusion reactions, that is, they can increase the time spent on the main sequence. A better treatment of these interfaces will thereby result in more precise determinations of stellar ages. In standard models, the convective core boundary is set by the Schwarzschild criterion that is equivalent to the location where the acceleration of convective motions cancels out. Comparison of standard stellar models with observations of eclipsing binaries (Andersen et al. 1990) or open clusters (Maeder & Mermilliod 1981) showed that this criterion actually underestimates the size of the convective core and proved the need for including extra-mixing processes in stellar models. If this fact is well-established, the nature of these processes (overshooting, rotationally induced mixing, internal gravity waves), the extent of the extra-mixed region, and their dependence on stellar parameters are still not fully understood.

Another major uncertainty of stellar physics is the distribution and evolution of angular momentum (e.g. Meynet et al. 2013). Rotation distorts stars and triggers supplementary hydrodynamical instabilities, which mixes stellar interiors and feeds back into rotation by transporting angular momentum. In particular, meridional circulation and shear instabilities are commonly accepted as operating mechanisms in stellar interiors. However, several studies (Chaboyer et al. 1995; Maeder & Zahn 1998; Mathis & Zahn 2004) pointed out that these mechanisms are insufficient to reproduce the solar rotation profile as measured by helioseismology (e.g. Schou et al. 1998; García et al. 2007; Fossat et al. 2017). To explain the discrepancy between observations and rotating models, several additional processes of angular momentum transport have been proposed that either involve internal gravity waves (Charbonnel & Talon 2005) or magnetic fields (Eggenberger et al. 2005), but whether one is dominating over the others remains somewhat unclear. Similar uncertainties hold in evolved low-mass stars. The internal rotation rates of red giants, as measured by asteroseismology, are a few orders of magnitude smaller than what is predicted by rotating stellar models (Mosser et al. 2012), indicating that one or several missing angular momentum transport processes are at

work in these evolved stars (e.g. Fuller et al. 2014; Rüdiger et al. 2015; Belkacem et al. 2015; Eggenberger et al. 2017).

Among the variety of pulsating stars, γ Doradus (γ Dor) and slowly pulsating B-type (SPB) stars are promising targets for obtaining constraints on both convective boundary mixing and angular momentum transport processes. These stars pulsate in high radial order gravity modes that probe the innermost radiative layers close to their convective core, where they have larger amplitude. Notably, Miglio et al. (2008) and Bouabid et al. (2013) demonstrated that the properties of gravity modes (g modes) in these stars is particularly sensitive to the shape of the chemical gradient at the edge of the convective core. Stars of γ Dor type are late A- to early F-type main-sequence stars with masses between roughly 1.3 and $2.0 M_{\odot}$. Their g -mode pulsations are thought to be excited by the modulation of the radiative flux at the base of their thin convective envelope, or so-called convective blocking mechanism (Guzik et al. 2000; Dupret et al. 2005). It is worth noting that a more specific interest of γ Dors lies in the fact that they are progenitors of red giants. SPB stars are main-sequence stars that have spectral types B3-B9 and masses between 2.5 and $8 M_{\odot}$. In these stars, the pulsations are driven by the κ -mechanism due to the metal opacity bump at $T \sim 2 \times 10^5$ K (Dziembowski et al. 1993).

From the point of view of seismology, ground-based observations of these pulsators are especially impractical as their g -mode pulsations typically have periods of around one day. This seriously hindered the application of asteroseismology to γ Dor and SPB stars until the advent of space missions dedicated to high precision photometry. In particular, *Kepler* provided four years of highly precise and nearly uninterrupted photometry for many of these stars allowing the detection of g -mode series nearly equally spaced in periods as predicted by theory (Tassoul 1980; Ledoux 1951). Thus, in recent years, detailed seismic studies of slowly rotating γ Dor (Kurtz et al. 2014; Saio et al. 2015; Keen et al. 2015; Bedding et al. 2015; Murphy et al. 2016) and SPB stars (Pápics et al. 2014; Moravveji et al. 2015) targeted by *Kepler* could be undertaken. However, this regular structure does not hold for moderately and rapidly rotating stars which, nevertheless, constitute the majority of these pulsating variables. Indeed, the projected equatorial velocities of B- and A-type stars is commonly around 100 km s^{-1} but this can reach 250 km s^{-1} in some stars (Abt et al. 2002; Royer et al. 2007).

Moderate or rapid rotation significantly affects the g -mode oscillation spectrum because of the Coriolis force. Observationally, the Fourier spectrum of the photometric time series often contains hundreds of peaks with no apparent structure, at least not as predicted by classical perturbative treatments of rotation. This leads Van Reeth et al. (2015a) to develop a new algorithm to search for non-equally spaced g -mode series during the pre-whitening process. Successfully, they reported the detection of period spacing patterns in 50 γ Dor stars (Van Reeth et al. 2015b). To identify the g modes and estimate their interior rotation rates, Van Reeth et al. (2016) subsequently modelled the patterns following a direct approach. Using the asymptotic formulation of the traditional approximation that accounts for the main effects of the Coriolis force, the authors computed the gravity mode periods in a grid of stellar models representative of the γ Dor instability strip and then fitted the observed patterns with a least-square minimisation. Following a similar approach, Pápics et al. (2017) conducted a detailed seismic study of five rotating SPB stars in the *Kepler* field.

Given the uncertainties contained in stellar models, we propose a different method that is model-independent and solely relies on the asymptotic traditional approximation. Section 2

revisits the theoretical background of the traditional approximation and introduces the details of this method. In Sect. 3, we validate it on synthetic spectra of representative γ Dor models in which oscillations are computed with a two-dimensional (2D) non-perturbative approach. We also assess the biases on our estimates of the buoyancy radius and near-core rotation frequency. In Sect. 4, we confirm the potential of such a method on two already studied *Kepler* targets, the γ Dor star KIC12066947 and the SPB star KIC3459297. Finally, we discuss the limitations of the method in its current implementation and conclude in the last section.

2. Method

2.1. Theoretical background

Formally, the pulsation periods are obtained by solving the equations of hydrodynamics perturbed by small fluctuations around an equilibrium structure. Two approaches may be adopted: solving the whole system of equations numerically or conducting an asymptotic analysis assuming reasonable approximations. With this latter approach, in a non-rotating spherical star, Tassoul (1980) demonstrated that the pulsation periods of high-order gravity modes ($|n| \gg \ell$) can be well-approximated to first order by the expression

$$P_{n,\ell,m} \approx \frac{P_0 (|n| + \epsilon)}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}}, \quad (1)$$

where n is the radial order, ℓ the angular degree, and m the azimuthal order of the pulsation mode. We note that, by convention, radial orders of g modes are negative. We adopt the convention that $m > 0$ are prograde modes and $m < 0$ retrograde modes. The phase term ϵ is near-constant and linked to the star's structure. The buoyancy radius P_0 can be expressed as,

$$P_0 = 2\pi^2 \left(\int_{\mathcal{R}} \frac{N_{\text{BV}}}{r} dr \right)^{-1}, \quad (2)$$

where N_{BV} is the Brunt-Vaisala frequency and \mathcal{R} represents the resonant cavity of g modes. Hence, modes of same degree ℓ and consecutive radial orders n are equally spaced in period, which is characterised by constant period spacings defined as,

$$\Delta P_{\ell} = P_{n+1,\ell,m} - P_{n,\ell,m} \approx \frac{P_0}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}}. \quad (3)$$

This is a particularly interesting property of high-order g modes when searching for mode series in an observed spectrum. The pulsation periods do not depend on m .

In a rotating star, pulsations are described by a coupled set of equations that is both computationally expensive and numerically complex to solve. First introduced in the context of geophysics (Eckart 1960) and later applied to stellar pulsations (e.g. Lee & Saio 1987, 1997; Townsend 2003), the traditional approximation of rotation (TAR) is a non-perturbative, but simplified, treatment of rotation that allows the separability of these equations while still acknowledging the main effects of the Coriolis force. Assuming the star is in solid-body rotation, the TAR neglects the horizontal component of the rotation vector. In other words, the radial motions due to the Coriolis force and the radial component of the Coriolis force associated with horizontal motions are discarded. This approximation is well-justified for low-frequency pulsations as it is discussed here (Berthomieu et al. 1978), except near the stellar centre where

radial and horizontal motions become comparable. To obtain the separability of the system, the Cowling (1941) approximation, which neglects the perturbation of the gravitational potential, is further made. Finally, the centrifugal distortion is neglected ensuring the spherical symmetry of the star's structure. This latter hypothesis can be justified by the fact that the g modes are mostly sensitive to the innermost radiative layers, where centrifugal distortion remains minimal.

Thus, in the reference frame in co-rotation with the star, the equations of pulsations become separable in the three spherical coordinates (r, θ, φ) . The dependence in latitudinal coordinate is governed by the Hough functions, $\theta_{\ell,m}$, which are the eigenfunctions of the well-known Laplace's tidal eigenvalue problem,

$$\mathcal{L}_s[\theta_{\ell,m}(\mu, s)] = -\lambda_{\ell,m}(s)\theta_{\ell,m}(\mu, s), \quad (4)$$

where \mathcal{L}_s is a linear operator, $\lambda_{\ell,m}$ are the eigenvalues of the problem, and $\mu = \cos \theta$. A complete derivation of the problem is derived for example in Lee & Saio (1997). Both the Hough functions and associated eigenvalues depend on ℓ , m , and the spin parameter $s = 2P_{n,\ell,m}^{\text{co}}/P_{\text{rot}}$, where $P_{n,\ell,m}^{\text{co}}$ is the mode period in the co-rotating frame and P_{rot} is the rotation period of the star. This latter reduced parameter appears naturally in the frame of the TAR and is indicative of the influence of the Coriolis force on pulsation modes. The equation for the radial component is similar to that of the non-rotating case, except that $\ell(\ell + 1)$ are replaced by the new eigenvalues $\lambda_{\ell,m}$. The azimuthal dependence stays identical.

As their form is akin to the non-rotating case, the asymptotic analysis of Tassoul (1980) may also be applied to the pulsation equations obtained within the TAR. It follows a more general asymptotic formula for periods of high-order g modes in the co-rotating frame,

$$P_{n,\ell,m}^{\text{co}}(s) \approx \frac{P_0(|n| + \epsilon)}{\sqrt{\lambda_{\ell,m}(s)}}. \quad (5)$$

The mode periods in the inertial frame are subsequently deduced from

$$P_{n,\ell,m}^{\text{in}} = \frac{1}{\nu_{n,\ell,m}^{\text{co}} + m\nu_{\text{rot}}} = \frac{P_{n,\ell,m}^{\text{co}}}{1 + m\nu_{\text{rot}}P_{n,\ell,m}^{\text{co}}}, \quad (6)$$

where $\nu_{n,\ell,m}^{\text{co}}$ is the mode frequency in the co-rotating frame and ν_{rot} is the cyclic rotation frequency. Therefore, in rotating stars, the degeneracy in azimuthal order is lifted and the regular structure of the spectrum no longer holds as period spacings now also depend on the spin parameter.

2.2. Behaviour of gravity modes in rotating stars

We recall here the behaviour of high-order g modes in rotating stars. We refer the reader to the works of Miglio et al. (2008), Bouabid et al. (2013), and Ouazzani et al. (2017) for a more complete and detailed picture. In slowly-rotating stars ($s \ll 1$), the spectrum is organised in well-separated multiplets (n, ℓ) . Information on the rotation of the star is carried by the rotational splittings, which are expressed by $\delta\nu_{n,\ell} = \nu_{n,\ell,m} - \nu_{n,\ell,0}$ in terms of the observed mode frequencies. At moderate rotation, when the rotation period approaches that of the modes ($s \sim 0.1$), these multiplets start to overlap and it becomes difficult to disentangle them visually. Nonetheless, period spacings remain almost constant, which makes the detection of a regular structure still possible (see e.g. Bedding et al. 2015). For

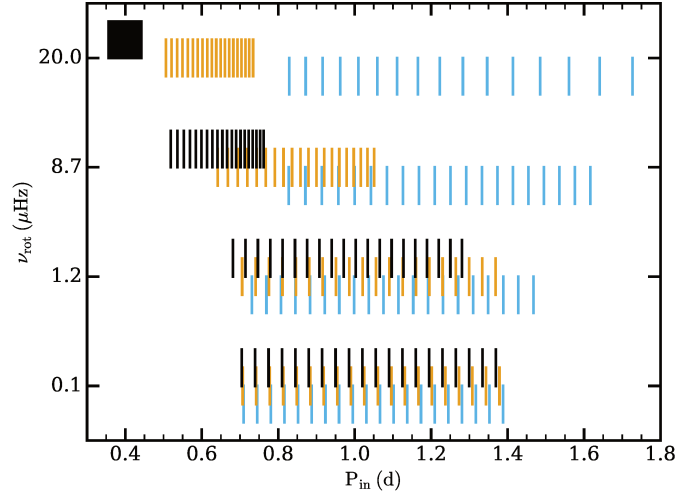


Fig. 1. Illustration of the rotational shift of observed pulsation periods, in the inertial frame, for four rotation rates. The oscillation spectra were computed within the asymptotic TAR (see Eq. (5)) using $P_0 = 4320$ s, a value typical of γ Dors. Black, orange, and blue bars are dipole prograde ($m = 1$), zonal ($m = 0$), and retrograde ($m = -1$) modes, respectively. They are shifted vertically for clarity.

rapid rotation, when the rotation period is of the same order (or greater) than the pulsation periods, the structure of the spectrum is fundamentally different. Indeed, rotation tends to separate modes according to their geometry, that is, according to their values of (ℓ, m) . In the inertial frame, prograde and zonal modes are shifted towards shorter periods whereas retrograde modes tend to drift towards longer periods. If the rotation frequency is sufficiently high, (ℓ, m) modes form clusters of modes distinct from each other. These clusters partially overlay otherwise. This evolution of the g -mode spectrum with rotation is illustrated in Fig. 1.

Rotation also leaves its imprint on the period spacings. Indeed, in the inertial frame, the period spacings of prograde and zonal modes decrease almost linearly with increasing mode periods. At fixed rotation frequency, the slope of this linear trend is smaller for prograde than for zonal modes. Also, for a given star, this slope get steeper with increasing rotation rate. As for retrograde modes, the change of reference frame and rotation have competitive effects on the mode periods, and so, on the period spacings, resulting in more complicated behaviour. However, the spacings tend to have an upper trend in the $\Delta P_{\text{in}} - P_{\text{in}}$ plan for the most part.

As γ Dor and SPB stars evolve on the main sequence, a chemical composition gradient develops near the convective core boundary. If no mixing processes smooth this gradient, this leads to a local sharp variation of the Brunt-Vaisala frequency. Such a buoyancy glitch periodically traps the g modes in the gradient region. As a result, the period spacings slightly oscillate around the linear trend. The period of this oscillatory component is related to the location of the glitch while the amplitude gives information about its abruptness (Miglio et al. 2008; Bouabid et al. 2013).

2.3. The method

In the frame of the asymptotic TAR, we highlight the possibility of recovering the equidistance of the period spacings by stretching the pulsation periods. Indeed, rearranging the terms of Eq. (5),

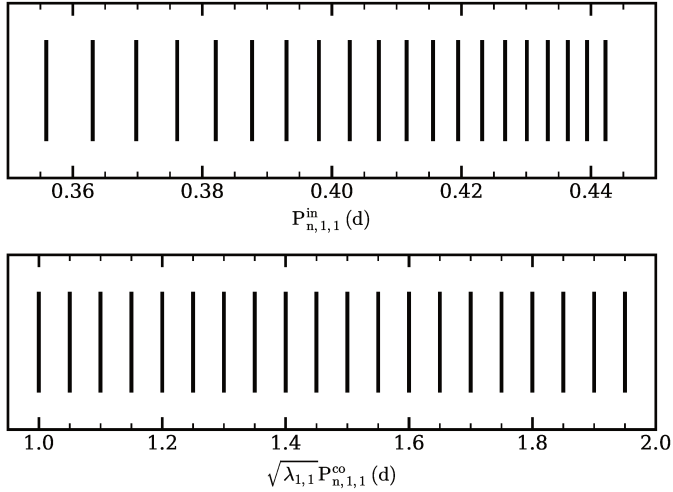


Fig. 2. Stretching of the pulsation periods in the example of a series of dipole prograde modes. Mode periods were generated using the asymptotic TAR with $\nu_{\text{rot}} = 20 \mu\text{Hz}$ and $P_0 = 4320 \text{ s}$ (or 0.05 d). *Top panel:* before the stretching as they would be seen by an observer. *Bottom panel:* after the change of reference frame and the stretching, assuming the correct mode identity and rotation rate.

$$\sqrt{\lambda_{\ell,m}(s)} P_{n,\ell,m}^{\text{co}} \approx P_0 (|n| + \epsilon), \quad (7)$$

shows that, by multiplying the period scale by the square root of the Laplace's eigenvalue $\lambda_{\ell,m}(s)$, where s matches the star's rotation frequency, the associated (ℓ, m) modes become regularly spaced of P_0 . This is illustrated in Fig. 2 where we applied the stretching to a synthetic series of prograde dipole modes ($\ell = 1, m = 1$).

On the basis of this property, we implemented a method to search for these new regularities in the g -mode spectrum of γ Dor and SPB stars, and simultaneously infer ν_{rot} and P_0 . Here, we describe the methodology used in detail. Similar stretching techniques have been developed to interpret the mixed mode oscillation patterns of red giant stars (Mosser et al. 2015).

First, while not absolutely necessary, we carry out the frequency analysis of the oscillation spectrum (e.g. by pre-whitening the periodogram). This simplifies greatly the subsequent steps and allows us to identify possible combination frequencies that arise from non-linear processes occurring in the star. The periodogram of γ Dor and SPB stars is typically dense and often contains a large amount of frequency peaks, where several series of (ℓ, m) modes may coexist. The equidistance of the period spacings can only be recovered for a given series of (ℓ, m) modes at once. In other words, for the method to work correctly, the (ℓ, m) modes searched for need to be dominant in the list of frequencies used for the analysis. The strategy adopted here consists in selecting a part of the spectrum where we expect modes of given (ℓ, m) to be prevailing, relying on the behaviour of g modes in rotating stars (Sect. 2.2). In the current implementation, this step is performed by visual inspection of the periodogram or of the period distribution. Typically, we look for frequency groupings or mode density variations. Such filtering is obviously subjective and may be a matter of trial and error when the g -mode spectrum appears especially disordered. Automation of this step is possible and is currently under study. At this point, we consider that a given mode series is dominant over other series possibly present in the spectrum.

Once the list of mode periods to analyse is established, we pick a guess for ℓ and m and choose a range of rotation frequency

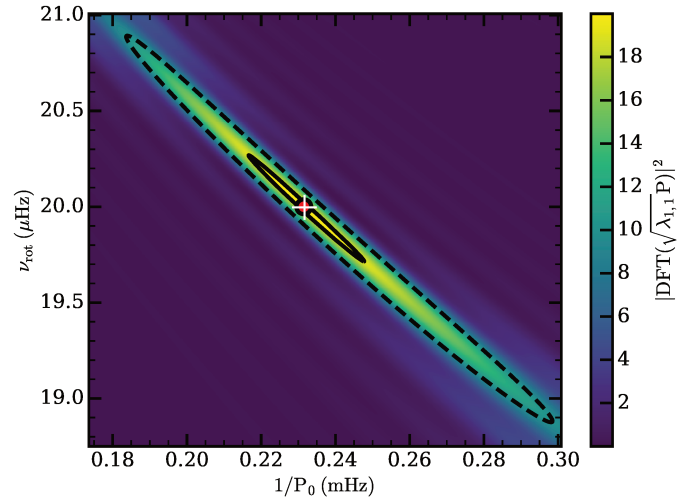


Fig. 3. DFT map obtained for the synthetic prograde mode series of Fig. 2. The red dot represents the true parameter values. The white cross indicates the maximum of PSD. Solid and dashed lines are the contours at 95% and 50% of the maximum of PSD, respectively.

to test. In practice, surface cancellation effects limit greatly the visibilities of high degree modes ($\ell \geq 4$). As for the rotation rate, we restrain the interval to $0\text{--}35 \mu\text{Hz}$, which largely contains all the rotation frequencies measured in γ Dor and SPBs until now. Then, for each rotation rate, we compute the pulsation periods in the co-rotating frame using Eq. (6) and stretch the spectrum according to Eq. (7).

To detect a regularity, we subsequently compute the power spectral density (PSD) of each stretched spectrum from the Discrete Fourier Transform (DFT). For a frequency f , this is given by

$$\left| \text{DFT} \left(\sqrt{\lambda_{\ell,m}} P_{\text{co}} \right) \right|^2 (f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N e^{i2\pi f \sqrt{\lambda_{\ell,m}} P_{\text{co}}^i} \right|^2, \quad (8)$$

where P_i^{co} are the mode periods in the co-rotating frame and N the total number of modes in the list. The DFT spectra obtained are then stacked vertically by increasing rotation rate to build a DFT map representative of the space of parameters explored. Figure 3 shows an example of such a map. The detection of a regularity materialises into a characteristic ridge of high PSD. Such a ridge is indicative of the correlation between P_0 and ν_{rot} . Indeed, because ν_{rot} and P_0 are related through Eq. (5), the effect of a small change in ν_{rot} can be nearly, but not exactly, counterbalanced by a small change in P_0 .

Finally, to ensure the detection is not coincidental, we compare the maximum of PSD to a threshold value computed from a false-alarm probability $p = 0.01$ of having a peak generated by random noise. Further details are provided in Sect. 2.4. If greater than this threshold, the maximum of PSD is used as an estimator of ν_{rot} and P_0 (or more exactly $1/P_0$). The period échelle diagram of the stretched spectrum may then be plotted to have an overview of the modes actually participating in the regularity detected. Otherwise, the trial and error process may be continued by changing either the filtering of mode periods, the guess for ℓ and m , or the interval of rotation rate tested.

Briefly, the algorithm proceeds as follows:

1. Establishing a list of frequencies (e.g. from Fourier analyses).
2. (Optional) Filtering of pulsation modes according to their period values.

3. Pick a guess for (ℓ, m) and choose the interval of rotation frequencies to test.
4. For each rotational frequency:
 - (a) Switch from the inertial to the co-rotating frame.
 - (b) Stretch the spectrum.
 - (c) Compute the DFT.
5. Stack the DFT spectra obtained on top of one another by increasing rotation rate (DFT map).
6. Check if the maximum of PSD is significant.
 - (a) If significant: formally identify modes and estimate ν_{rot} and P_0 from the maximum of PSD.
 - (b) If not: continue the trial and error process by returning to step 2 or 3.

2.4. Detection threshold

We derive here the detection threshold needed to achieve a specified probability of false alarm p for a peak found in a DFT map. This p -value corresponds to the probability for that peak to be generated by pure noise. Each line of the map is computed as the norm square of the DFT of a stretched spectrum. From Eq. (8), we can show that the noise in the power spectrum asymptotically (i.e. for large N) follows a two-degrees-of-freedom χ^2 statistics (e.g. Abramowitz & Stegun 1964) when the period set P_i^{co} is purely random¹. These statistics are correct as long as N , the number of periods in the set, is large enough. We have numerically verified that a dozen is sufficient in practice, which is often the case for real observations. The normalisation used for the DFT in Eq. (8) ensures that the mean and variance of the statistics is 1. Thus, the probability for pure noise to generate, in a given DFT bin, a peak larger than a threshold T is $p = \exp -T$. As a consequence, given M independent bins in the DFT, the detection threshold is

$$T = -\ln[1 - (1 - p)^{1/M}]. \quad (9)$$

The number of independent bins is then $M = \Delta f / \delta f$, where δf is the spectral resolution and Δf is the frequency window of interest, that is, the range in which we look for $1/P_0$. The spectral resolution expresses $\delta f = \left(\sqrt{\lambda_{\ell, m} P_{\text{max}}^{\text{co}}} - \sqrt{\lambda_{\ell, m} P_{\text{min}}^{\text{co}}} \right)^{-1}$ where $P_{\text{max}}^{\text{co}}$ and $P_{\text{min}}^{\text{co}}$ are the largest and smallest periods in the set. For $p = 0.01$ and a typical value of $M = 50$, the detection threshold is then $T = 8.5$.

2.5. Estimating the uncertainties

Due to the rotation-pulsation coupling, the mode identity, the rotation frequency, and the buoyancy radius are intrinsically related, which can give rise to degeneracies in the process of mode identification. Indeed, several mode identities can be found for a given (ℓ_1, m_1) mode series. This is due to the fact that, assuming another geometry (ℓ_2, m_2) , it is sometimes possible to mimic the (ℓ_1, m_1) pattern by adjusting the values of ν_{rot} and P_0 accordingly. This problem has already been noticed by Van Reeth et al. (2016). To break the degeneracy, the authors compare the found value of the asymptotic period spacing ΔP_ℓ (or equivalently P_0) to expected values in models, as a consistent check. We used the same strategy in this work. The buoy-

ancy radius adopts a sufficiently narrow range of values in γ Dor (roughly between 3500 and 5000 s) and SPB stars (approximately from 5000 to 11 500 s) to infer the correct mode identity in most cases (Miglio et al. 2008). If that is insufficient, other expected properties of g modes can be considered such as the pulsation periods of excited modes or the slope of the pattern in the $\Delta P - P$ plan.

The rotation frequency and buoyancy radius as determined by our method is affected by two main sources of uncertainties: errors on oscillation mode periods and the adequacy of the asymptotic TAR to assess the properties of gravity modes. The former uncertainties can be taken into account by simply propagating the errors throughout the analysis. On the other hand, the evaluation of errors caused by the use of the asymptotic TAR is more complicated as it requires knowledge of the “true” parameter values. It is nonetheless possible to assess the effect of a sharp feature of the stellar structure, such as a buoyancy glitch, or any other effect that does not affect the global trend of the period spacing patterns. This can be treated in the same way as a statistical error on the mode periods would be. Here, we describe the procedure used to evaluate the impact of these two types of uncertainties on the estimate of ν_{rot} and P_0 . Other potential error sources or biases will be addressed in Sect. 3.

As a first step, it is necessary to quantify the relative contributions from each source. This is achieved by performing a first analysis of the oscillation spectrum. From the values of ν_{rot} and P_0 obtained, we compute the mode periods in the asymptotic TAR using Eq. (5) and identify each observed mode by comparing the two period values. If the standard deviation of the residuals $(P_{n, \ell, m} - P_{n, \ell, m}^{\text{TAR}})$ is significantly larger than the mean error on the observed mode periods, we consider it to be the dominant source of errors. Otherwise, we keep the individual uncertainty on each observed mode period that was determined during the mode extraction process.

Secondly, we propagate these errors by means of a Monte-Carlo simulation. To this end, we draw 500 random samples of the observed pulsation periods assuming the errors on them follow a normal distribution and are not correlated. In case the uncertainty on pulsation periods is not the dominant source of error, we adopt the standard deviation of the residual $(P_{n, \ell, m} - P_{n, \ell, m}^{\text{TAR}})$ as being the error bar on all mode periods. Then we apply the method to each sample to get the distributions of ν_{rot} and P_0 . The final values of the rotation rate and buoyancy radius are determined from the maximum of PSD during the first analysis and their error bars are evaluated as the $1-\sigma$ deviation of the distributions.

3. Tests on synthetic spectra

As validation, we tested the method on a set of synthetic oscillation spectra computed for representative models of γ Doradus stars, which are presented in Sect. 3.1. In particular, we investigate the ability of the method to detect regularities in situations that are likely to be encountered in observations. This also lets us gauge potential biases introduced by the use of the asymptotic TAR as a prescription of the rotation-pulsation coupling. To this end, we selected three test cases. Firstly, we examine the simple case of a uniformly rotating star with no structural glitch (Sect. 3.2). With the second model, we assess the method’s robustness against the effect of a buoyancy glitch (Sect. 3.3). Finally, the effect of differential rotation is addressed with the last model (Sect. 3.4).

¹ Since P_i^{co} are random set, both real and imaginary parts of the DFT follow normal distributions according to the Central Limit theorem when N is large enough. Hence, by definition, the norm square follows a two-degrees-of-freedom χ^2 distribution.

We restrained our study to dipole modes only as it is mostly those which are observed in high-order g -mode pulsators. For each synthetic spectrum, we analysed the three mode series independently ensuring that the maximum of PSD found is above the detection threshold defined in Sect. 2.4. The DFT maps obtained are compiled under the form of a contour map, where, for each of three DFT map, we depict the contours at 50% and 95% of the maximum of PSD.

3.1. Stellar structure and oscillation models

Here we explain the choices made for the calculation of the stellar structure and oscillation used to generate the synthetic oscillation spectra. Let us first discuss the hypotheses made for the stellar structure calculation. Throughout this study, we opted for one-dimensional (1D) spherical stellar models. Indeed, spherically symmetric 1D calculations have been tested against complete 2D calculations for g modes in polytropic models (Ballot, et al. 2012), as well as for a model of a γ Dor star (Ouazzani et al. 2017). According to them, the 1D non-perturbative approach, which presents the advantage of requiring less numerical resources, gives satisfactory results compared to the full 2D approach.

Under this assumption, stellar models were computed with the stellar evolution code CLES (Scuflaire et al. 2008) for a mass of $1.86 M_{\odot}$, and with initial helium mass fraction $Y = 0.27$ and metallicity $Z = 0.014$. We adopted the AGSS09 metal mixture (Asplund et al. 2009) and corresponding opacity tables obtained with OPAL opacities (Iglesias & Rogers 1996), completed at low temperature ($\log T < 4.1$) with Ferguson et al. (2005) opacity tables. We used the OPAL2001 equation of state (Rogers & Nayfonov 2002) and the nuclear reaction rates from NACRE compilation (Angulo et al. 1999), except for the $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$ nuclear reaction, for which we adopted the cross-section from Formicola et al. (2004). Surface boundary conditions at $T = T_{\text{eff}}$ were provided by ATLAS model atmospheres (Kurucz 1998). Convection was treated using the mixing-length theory (MLT) formalism (Böhm-Vitense 1958) with a parameter $\alpha_{\text{MLT}} = 1.70$.

We considered models with and without turbulent diffusion. Since the CLES code does not include effects of rotation on transport of angular momentum or chemical species, we instead introduced mixing by turbulent diffusion, following the approach of Miglio et al. (2008). This reproduces an effect of rotationally-induced mixing that is quite similar to overshooting, but in addition tends to smooth chemical composition gradients inside the star. In models including this type of mixing, the coefficient of turbulent diffusion was set to $D_t = 700 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ and kept constant to this value during evolution and in every layer of the models. This value was selected from a previous calibration to Geneva models with similar masses. Since the evolution code does not generate rotation profiles, those are then added ad hoc after evolution calculations. When a differential rotation profile is considered, it is adapted to the structure by the mean of an error function, centred right above the convective core, with a width depending on the profile of chemical gradient.

The oscillation modes of such 1D models were computed with a non-perturbative method using the ACOR oscillation code (Ouazzani et al. 2012, 2015), which accounts for both the Coriolis and the centrifugal force. The ACOR code solves the hydrodynamics equations perturbed by Eulerian fluctuations, performing direct integration of the problem. The numerical method is based on a spectral multi-domain method that

Table 1. Properties of CLES γ Dor models used in Sect. 3.

	Model A	Model B
M/M_{\odot}	1.86	1.86
T_{eff} (K)	7960	8025
$\log L/L_{\odot}$	1.269	1.202
$\log g$	3.99	4.08
R/R_{\odot}	2.27	2.07
Age (Myr)	1048	782
X_{C}	0.34	0.32
D_t ($\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$)	700	–
P_0 (s)	4579	4453

expands the angular dependence of eigenfunctions into spherical harmonics series, and whose radial treatment is particularly well adapted to the behaviour of equilibrium quantities in evolved models (at the interface of convective and radiative regions, and at the stellar surface). In order to determine the range of radial orders to investigate, we have relied on the non-adiabatic stability calculations provided in Bouabid et al. (2013). All the pulsations spectra studied here are calculated for g -mode radial orders between $n = -50$ and -20 .

3.2. Simple case: Solid-body rotation and smooth period spacing patterns

We started with the simplest case and computed a model of a γ Dor star in solid-body rotation with no glitches in the structure (Model A in Table 1). Initially, we set the rotation frequency of the model at $7 \mu\text{Hz}$, which is included in the range observed in γ Dor stars (Van Reeth et al. 2016).

The top left panel of Fig. 5 shows the contours of the three DFT maps obtained. While the three contours seem to agree on the values of ν_{rot} and P_0 , there are still small departures from the true parameter values as measured directly from the model. Table 2 compiles the results of the three analyses. We found that relative systematic errors on the parameters do not exceed a few percent but vary according to the mode geometry considered. The stretched period échelle diagram for prograde dipole modes ($\ell = 1, m = 1$) is plotted on the top right panel of Fig. 5 as an example. The ridge slightly weaves along a vertical line that would represent the ridge if the asymptotic TAR was perfectly suited. Period échelle diagrams for other series present identical features. Although Model A has turbulent diffusion mixing, the chemical gradient at the convective core boundary is still quite substantial and gives rise to a light undulation of the period spacings.

In order to compare the systematic errors against other sources, we estimated the uncertainties on ν_{rot} and P_0 by proceeding as described in Sect. 2.5 where we assumed a typical uncertainty on the mode periods of 1×10^{-4} d. The standard deviations on the residuals ($P_{n,\ell,m} - P_{n,\ell,m}^{\text{TAR}}$) are 6×10^{-5} , 1×10^{-4} and 5×10^{-4} d for the prograde, zonal, and retrograde modes, respectively. The uncertainties derived in this manner stay one order of magnitude smaller than the biases highlighted in Table 2, suggesting the latter is actually the critical source of errors on the parameter values.

To investigate the provenance of these systematic errors, we compared the period spacings that can be obtained with the TAR using either the parameter values determined from the method analysis (Table 2) or from the model, to those of the complete calculations. From Eq. (5), the asymptotic period spacings

Table 2. Rotation frequencies and buoyancy radii as determined from our method for Model A in solid-body rotation (see Sect. 3.2).

(ℓ, m)	ν_{rot} (μHz)	$\delta\nu_{\text{rot}}$ (%)	P_0 (s)	δP_0 (%)
(1, 1)	6.95	0.75	4495	1.84
(1, 0)	6.88	1.74	4484	2.09
(1, -1)	7.15	2.14	4580	0.02

Notes. Relative differences ($\delta\nu_{\text{rot}}$, δP_0) compared to the parameter inputs ($7\ \mu\text{Hz}$, $4579\ \text{s}$) are also indicated.

within the TAR can be expressed as

$$\Delta P_{\text{co}} \simeq \frac{P_0}{\sqrt{\lambda_{\ell,m}(s)} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \lambda_{\ell,m}(s)}{d \ln s}\right)}, \quad (10)$$

in the co-rotating frame (see appendix of Bouabid et al. 2013, for a derivation). The spacings in the inertial frame are then derived from the expression

$$\Delta P_{\text{in}} = \frac{\Delta P_{\text{co}}}{\left(1 + \frac{m}{2} s(n)\right) \left(1 + \frac{m}{2} s(n+1)\right)}. \quad (11)$$

These functions were interpolated on the period values of the complete calculations to work out the differences $\delta(\Delta P_{\text{in}}) = \Delta P_{\text{in}}^{\text{TAR}} - \Delta P_{\text{in}}^{\text{ACOR}}$. Figure 4 displays the results of each comparison. The parameter values output by the method are those that minimise the differences $\delta(\Delta P_{\text{in}})$, which turn out to be different from the true parameter values. In other words, the stretched spectrum using the true values is less regular than if we used the output values of the method. This means that the asymptotic TAR does not perfectly model the spacings of complete calculations.

The approximations made in the derivation of the asymptotic TAR, that is either the asymptotic approximation or the TAR (or both), then cause the disparity between the true parameter values and those recovered by the method. To investigate this further, we computed additional synthetic spectra. We set three rotation rates (7 , 15 , and $23\ \mu\text{Hz}$) in Model A and computed the oscillation frequencies either within the non-asymptotic TAR or with ACOR. In this way, we are able to compare the relative contribution of each approximation to the bias and how it may vary with the rotation frequency. We limited this study to prograde modes ($\ell = 1, m = 1$) since other dipole modes are affected by an avoided crossing for model at 15 and $23\ \mu\text{Hz}$ in the range of radial orders calculated with ACOR. We note also that prograde modes are mostly those detected in γ Dor and SPB stars. The results of the analyses are listed in Table 3. The buoyancy radius is even more mis-estimated when the model is rotating quickly, while no clear trend is visible for the recovered rotation frequencies. Moreover, the retrieved values are biased whether we take the non-asymptotic TAR or complete calculations. As could be expected, the errors obtained for the ACOR calculations are more important than for those in the non-asymptotic TAR. This indicates that both the asymptotic treatment and the TAR contribute to the bias.

3.3. Effect of a buoyancy glitch

The effect of a buoyancy glitch on the pulsation periods and therefore on the period spacings is not taken into account within the asymptotic TAR. Although the global trend of the period

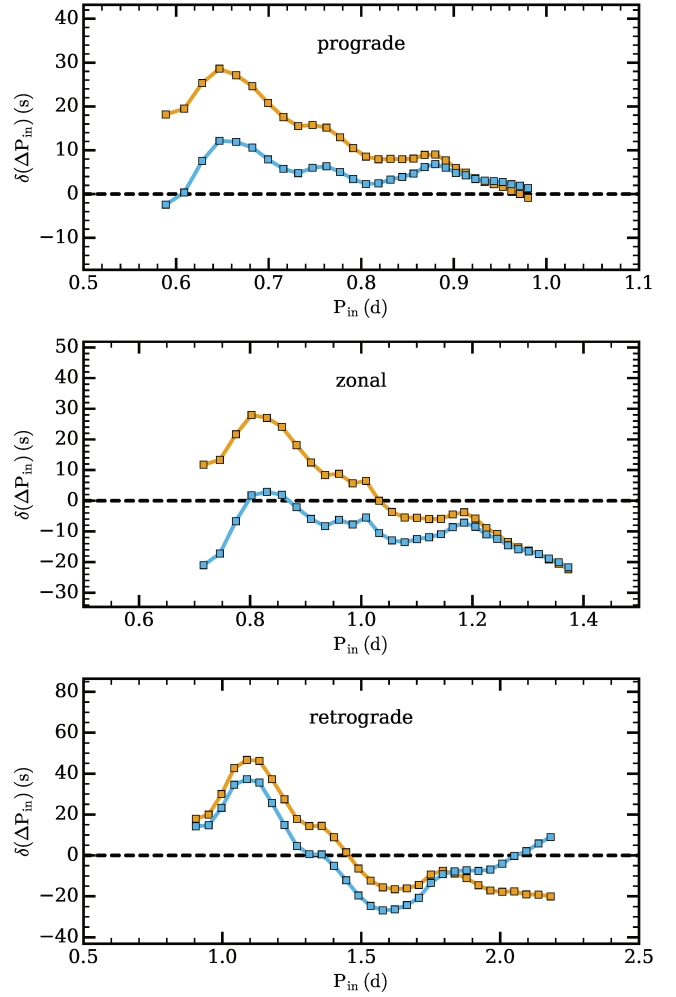


Fig. 4. Differences between the period spacings computed within the asymptotic TAR and those derived from complete calculations with ACOR. Orange squares: period spacings within the asymptotic TAR were computed using the parameter values of the model ($\nu_{\text{rot}} = 7\ \mu\text{Hz}$ and $P_0 = 4579\ \text{s}$). Blue squares: using the parameter values found by the analysis of the spectrum (see Table 2).

spacing pattern is not affected, it should be made clear if this impacts upon our estimates of ν_{rot} and P_0 . Model B was computed without turbulent diffusion mixing so that a sharp chemical composition gradient grows at the convective core boundary forming a buoyancy glitch. We set the rotation frequency of this model to $7\ \mu\text{Hz}$ to compute the mode periods.

Our results (Table 4 and middle left panel of Fig. 5) show significant disagreements between the three dipole mode series. In addition, substantial deviations from the true parameter values are found. These are one order greater than for the smooth model used in Sect. 3.2, reaching up to a maximum relative difference of $\sim 17\%$ for ν_{rot} and $\sim 6\%$ for P_0 . The middle right panel of Fig. 5 displays the stretched period échelle diagram for prograde modes where the oscillatory component due to the buoyancy glitch is clearly visible. Other échelle diagrams show identical behaviour.

In the general case, the oscillatory component, which is superposed to the smooth period spacing pattern in the presence of a buoyancy glitch, is not symmetrical. By using the location of the maximum of PSD as an estimator of P_0 , we actually find the mean spacing of the stretched pattern. The systematic errors

Table 3. Recovered parameter values from the application of the method to synthetic oscillation spectra computed from Model A.

	True values (Model A)	Recovered values	
		Non-asymptotic TAR	ACOR
ν_{rot} (μHz)	7.00	6.97	6.95
P_0 (s)	4579	4531	4495
ν_{rot} (μHz)	15.00	14.95	14.94
P_0 (s)	4579	4498	4459
ν_{rot} (μHz)	23.00	22.95	22.89 ^a
P_0 (s)	4579	4497	4394 ^a

Notes. The non-asymptotic TAR and the complete treatment of rotation (ACOR) are compared for three different rotation rates. ^(a) For this specific model, an accumulation of higher ℓ modes occurs around the pulsation period of the radial order $n = -45$, which causes an avoided crossing.

Table 4. Same as Table 2 for Model B in solid-body rotation (see Sect. 3.3).

(ℓ, m)	ν_{rot} (μHz)	$\delta\nu_{\text{rot}}$ (%)	P_0 (s)	δP_0 (%)
(1, 1)	6.67	4.71	4233	4.94
(1, 0)	6.29	10.14	4202	5.64
(1, -1)	8.17	16.77	4645	4.31

Notes. Parameter inputs are $7 \mu\text{Hz}$ for ν_{rot} and 4453 s for P_0 .

underlined here can be, for the most part, attributed to the difference between this mean spacing and the true value of P_0 . We note, however, that the biases found in Sect. 3.2 also contribute here.

3.4. Differential rotation

The TAR is a simplified treatment of rotation. One of its major and limiting hypotheses is the assumption of solid-body rotation, which is more invoked for the sake of mathematical simplification rather than from physical considerations. As differentially rotating stars will almost surely be encountered in observational data, it is interesting to test if we are able to find regularities in the stretched spectrum for such stars and, if so, investigate the impact of differential rotation on the estimate of the near-core rotation rate and buoyancy radius as obtained with our method. With this aim, we modelled a synthetic spectrum from Model A (Table 1) on which we applied a two-zone rotation profile. The convective core rotates at $\nu_{\text{rot,core}} = 15 \mu\text{Hz}$ while the rotation rate is $\nu_{\text{rot,env}} = 7 \mu\text{Hz}$ in the envelope. In Model A, the gradient of chemical composition at the convective core boundary is smoothed, which allows us to dismiss the effect of a buoyancy glitch hereafter.

The bottom left panel of Fig. 5 shows the contours for each DFT map. Table 5 lists the results of the analysis. Our results suggest that we should be in a position to find regularities in the stretched spectrum of a differentially rotating star. Moreover, the values of ν_{rot} and P_0 obtained from each mode series differ from each other at a substantial level. These differences are superior to the expected biases and errors in an equivalent model in solid-body rotation (Model A and B, see Sects. 3.2 and 3.3). The

bottom right panel of Fig. 5 represents the stretched period échelle diagram in the case of the prograde dipole modes. The ridge is almost vertical but also slightly curved. Moreover, two avoided crossings occur at ~ 15.5 and $\sim 17.5 \mu\text{Hz}$ due to an accumulation of higher degree modes ($\ell = 5$ and $\ell = 7$, respectively) at these frequencies. This illustrates the extent of the TAR limitations.

In a rotating star, the resonant cavity of gravity modes varies from one pulsation mode to another, which in turn impacts on their properties like the pulsation period. While this variation is small (but still noticeable) within modes of the same (ℓ, m) , it can be quite large between modes of distinct (ℓ, m) couples. Then, we have a signature of differential rotation. In particular, prograde modes probe deeper into the star than zonal and retrograde modes, which is consistent with much faster rotation. This is less clear for zonal and retrograde modes as the two rotation frequencies obtained are quite similar and this slight difference could indeed be explained by other factors. In particular, the corresponding ridges are not vertical in the stretched period échelle diagram. For this same reason, it is also difficult to reliably interpret the estimate of the buoyancy radii.

4. Applications on Kepler targets

As a proof of concept, we applied our method to two stars targeted by *Kepler*, the γ Dor star KIC12066947 and the SPB star KIC3459297. Both were previously studied in the literature hence giving us a point of comparison with other existing methods.

4.1. Frequency analysis

For the two stars, the frequency analysis was performed using the classical iterative pre-whitening process, where, at each step, the peak with the highest amplitude in the periodogram was subtracted from the light curve. The statistical significance of each peak was derived on the basis of the false alarm probability (Scargle 1982), which gives robust results for *Kepler* data. To make sure that the peak extracted was not introduced during the pre-whitening process, we compare the amplitude of the extracted peak with the value in the original data. If these deviate more than 25%, we disregard this peak. A similar procedure was also used by Van Reeth et al. (2015a). A detailed description of the code used here will be given in Antoci et al. (in prep.).

Despite these precautions, noise peaks or spurious frequencies created by the pre-whitening process may still be extracted. Robustness of the stretching method is ensured as long as these frequencies remain in the minority compared to the modes that are looked for, which justifies being conservative in the frequency analysis. On the contrary, actual pulsation mode frequencies of a series may not be extracted because of overly cautious criteria. This would introduce windowing in the DFT map or, in the worst case, prevent us from identifying the mode series. In this case, accepting frequencies with a worst agreement between extracted and original amplitude may improve the detection of the regularity. We tested the effect of missing orders in a modes series with simulated spectra. We found that a regularity could be detected as long as more than approximately half of the modes were present in the frequency list.

Line-of-sight motions of stars introduce Doppler shifts of the pulsation frequencies, which can be larger than their associated uncertainties in *Kepler* data (Davies et al. 2014). Here, we neglected these Doppler frequency shifts as we could not find

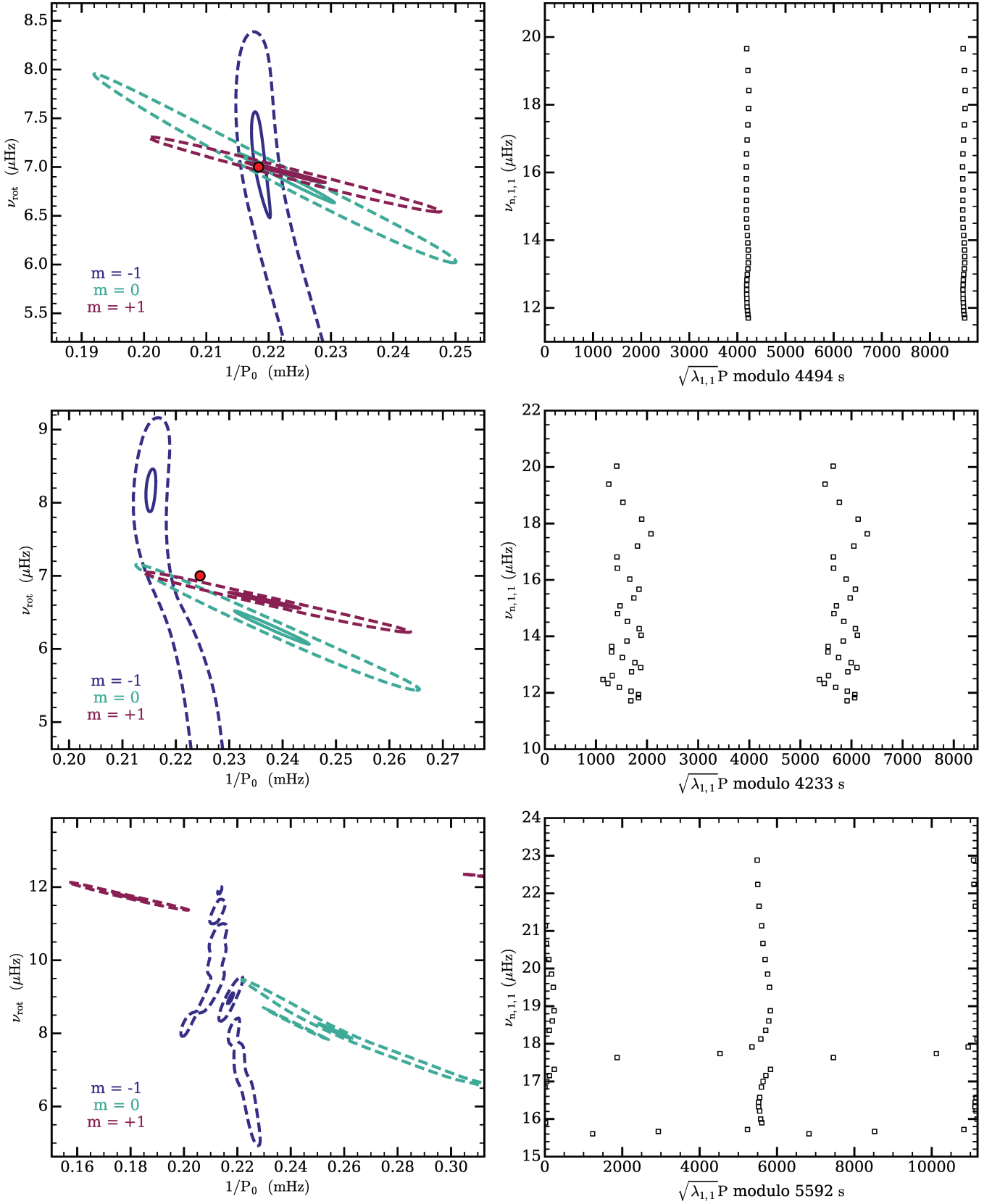


Fig. 5. Left panels: contour maps at 95% (solid) and 50% (dashed) of the maximum of power spectral density for Model A in solid-body rotation (top), Model B in solid-body rotation (middle), and Model A in differential rotation (bottom). Colours are indicative of the type of modes (ℓ, m) on which was applied the method. Red dots indicates the input value of ν_{rot} and $1/P_0$ as measured from the models, when relevant. Right panels: example of stretched period échelle diagrams for prograde modes, which are plotted twice for clarity.

Table 5. Same as Table 2 for Model A in differential rotation (see Sect. 3.4).

(ℓ, m)	ν_{rot} (μHz)	P_0 (s)
(1, -1)	8.97	4598
(1, 0)	8.06	3899
(1, 1)	11.74	5592

line-of-sight velocity measurements in the literature for these two stars. The impact on the measured ν_{rot} and P_0 is expected to be contained within our internal uncertainties, even assuming large radial velocities ($\pm 150 \text{ km s}^{-1}$).

4.2. The γ Dor star KIC12066947

The γ Dor star KIC12066947 was observed by the *Kepler* spacecraft in long-cadence mode during quarters 0–1 and 10–17 thus gathering almost 670 days of high-quality photometric data. We could extract 22 peak frequencies from the Lomb-Scargle periodogram (Table A.1). As shown in Fig. 6, most extracted peaks cluster in two groups in frequency roughly between 20 and $23 \mu\text{Hz}$ (hereafter referred as Cluster A), and between 27 and $35 \mu\text{Hz}$ (Cluster B). We analysed each cluster of peaks independently ensuring that we explored a sufficiently broad parameter space.

The analysis of Cluster B frequencies leads to a detection for several trial values of (ℓ, m) . However, unless we suppose they are (1,1) modes, the buoyancy radius given by the maximum of PSD is much larger than generally expected values for γ Dor stars. We therefore identify these peaks as prograde dipole modes. The left panel of Fig. 7 shows the DFT map obtained in this case. We found $\nu_{\text{rot}} = 24.95 \pm 0.05 \mu\text{Hz}$ ($2.156 \pm 0.004 \text{ c/d}$) and $P_0 = 4181 \pm 63 \text{ s}$ ($0.0484 \pm 0.0008 \text{ d}$). The quoted uncertainties were computed from a Monte-Carlo simulation as explained in Sect. 2.5 and do not account for systematic errors. The stretched échelle diagram built using these values is shown on the right panel of Fig. 7. The ridge shows important curvatures indicating a substantial deviation from the asymptotic TAR. Such a feature is, however, difficult to explain without a proper detailed study of the star. Furthermore, there is a great gap between the frequency at $\sim 27.8 \mu\text{Hz}$ and the rest of the ridge, causing a severe window effect in the DFT map. We checked if this has any influence on the derived values of ν_{rot} and P_0 by discarding the frequency and re-analysing this part of the spectrum. In this manner, we derived $\nu_{\text{rot}} = 24.94 \pm 0.04 \mu\text{Hz}$ and $P_0 = 4157 \pm 51 \text{ s}$ in good agreement with the previously determined values.

Despite searching for modes up to $\ell = 4$ and trying rotation frequencies from 2 to $35 \mu\text{Hz}$, we could not identify Cluster A peaks. Given their high amplitudes, these peaks are more likely to be dipole modes. Using Eq. (5) and the parameter values derived from the analysis of Cluster B peaks, we computed the pulsation periods of dipole retrograde and zonal modes within the asymptotic TAR and then checked if they were consistent with the range of periods observed. Unfortunately, they do not agree well suggesting that these peaks do not originate from gravito-inertial mode pulsations.

The oscillation spectrum shows an excess of power around $55\text{--}65 \mu\text{Hz}$ with peaks of very low amplitude that are not extracted. Although they are located in the expected frequency range for (2,2) modes, the majority of these peak frequencies

are simple combinations ($\nu_i + \nu_j$) or first harmonics ($2\nu_i$) of the highest amplitude peaks.

KIC12066947 was studied by Van Reeth et al. (2015b, 2016) as part of their sample. Using the method of Van Reeth et al. (2015a) to analyse the oscillation spectrum, they detected two non-equidistant period spacing patterns. The first mode series consists of pulsation modes with frequencies in the range $27\text{--}37 \mu\text{Hz}$ and a downwards slope in the $\Delta P - P$ plane. Modelling this pattern, they identified them as (1, 1) pulsation modes and found $\nu_{\text{rot}} = 25.00 \pm 0.10 \mu\text{Hz}$ ($2.160 \pm 0.008 \text{ c/d}$). From their best-fit model, they could also estimate the asymptotic period spacing $\Delta P_\ell = 2950 \pm 70 \text{ s}$, which translates into $P_0 = 4171 \pm 99 \text{ s}$ ($0.0484 \pm 0.0012 \text{ d}$) using Eq. (1). These results agree very well with our determination from Cluster B peaks. The second pattern has an upward slope consisting of pulsation frequencies in the range $19\text{--}22 \mu\text{Hz}$, corresponding to our Cluster A. The authors could not identify them as g modes. The upward slope in the $\Delta P - P$ diagram suggest their retrograde character, however, assuming the found ν_{rot} is accurate, their pulsation periods are much shorter than what would be expected from retrograde g modes. On the other hand, the authors were able to show that the period spacing pattern is consistent with retrograde Rossby modes (or r modes) using the asymptotic expression of Townsend (2003). This seems also supported by theory and numerical computations that predict the excitation of r modes in fast-rotating stars due to an interaction between toroidal motion and rotation (Townsend 2003; Salmon et al. 2014; Saio et al. 2018). Interestingly, this would also explain why we could not identify these modes with our method. The TAR also predicts the r -mode periods with the same expression as Eq. (5). Our stretching method can then also be applied to these modes by providing the λ functions. First attempts are encouraging.

4.3. The SPB star KIC3459297

The SPB star KIC3459297 was observed by *Kepler* in long cadence mode during quarters Q0–5, 7–9, 11–13, and 15–17, which represents 1069 days of high-quality photometric data. The Lomb-Scargle periodogram computed from the light curve is plotted in Fig. 8. We extracted 27 peak frequencies, of which six are found to be combinations and are discarded for the rest of the analysis (Table A.2). Two groups of peaks clearly stand out. The cluster at very low frequency is most likely due to instrumental effects or may have been introduced by the detrending of the light curve. We analysed the other group in the $9\text{--}14 \mu\text{Hz}$ interval.

From a first analysis, we could detect a series of modes, but due to numerous missing orders and consequent windowing, we could not reliably obtain ν_{rot} and P_0 . In the following, we therefore included peaks with a lower agreement between the amplitude extracted and that of the original data (50%). The 14 independent frequencies added are indicated by yellow bars on Fig. 8. The detection threshold was reached for several trial (ℓ, m) values. However, similarly to the case of KIC12066947, only (1, 1) gives a buoyancy radius consistent with expected values for SPB stars. The peaks are thereby identified as prograde dipole modes. We estimated $\nu_{\text{rot}} = 6.85 \pm 0.07 \mu\text{Hz}$ and $P_0 = 7018 \pm 190 \text{ s}$ (see left panel of Fig. 9). To obtain this estimate, we discarded the two isolated peaks at 9.25 and $9.48 \mu\text{Hz}$ to avoid the effect of windowing. Furthermore, as can be seen on the stretched period échelle diagram (right panel of Fig. 9), the belonging of these two frequencies to the prograde series is debatable. Remarkably, the period spacing pattern shows an

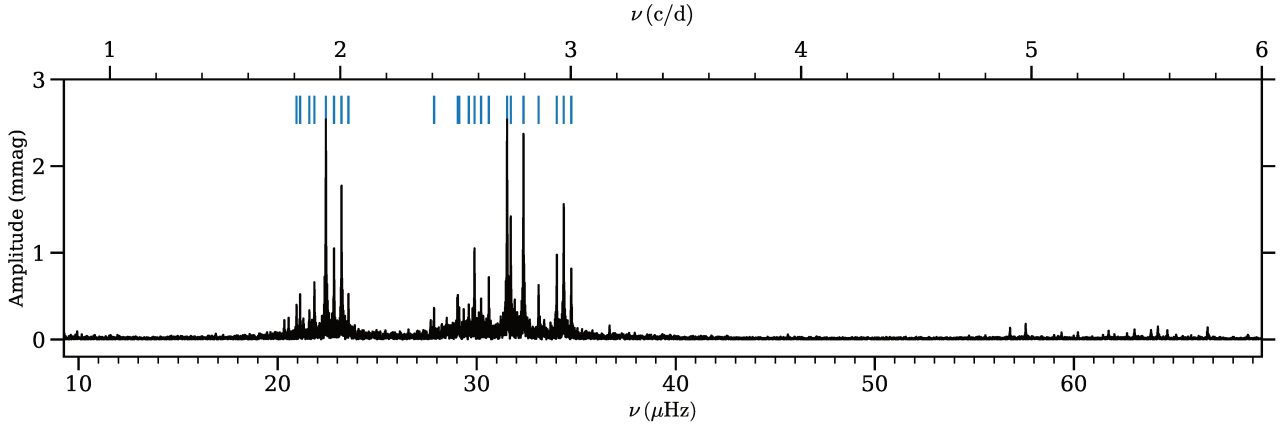


Fig. 6. Part of the Lomb-Scargle periodogram of KIC12066947 computed from the *Kepler* light curve. Blue bars indicate the peak frequencies that were extracted and kept for the analysis.

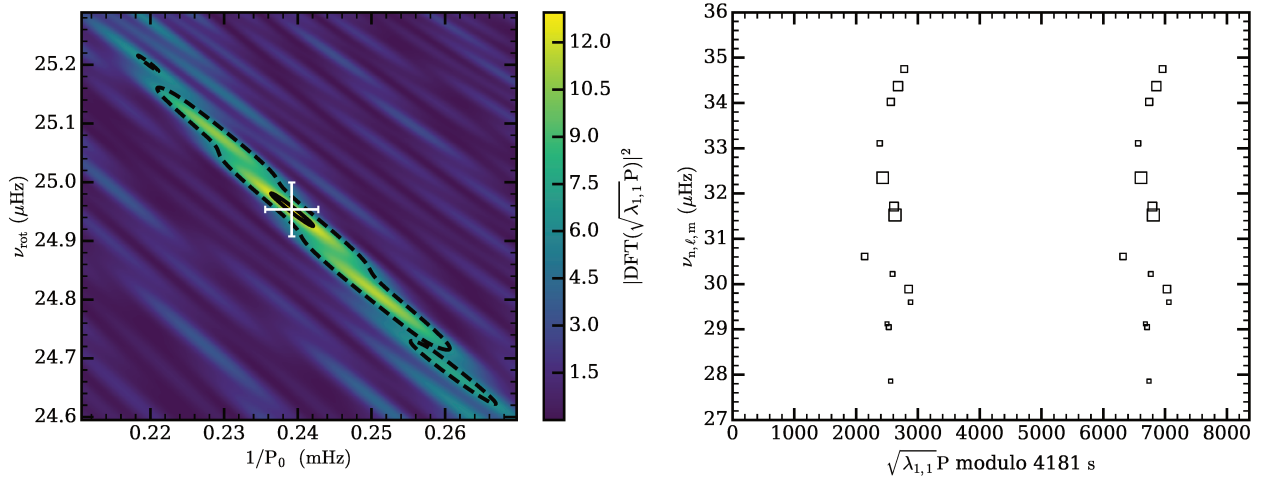


Fig. 7. *Left panel:* DFT map resulting from the analysis of Cluster B peaks, assuming they are prograde dipole modes ($\ell = 1, m = 1$). The white cross is located at the maximum of power spectral density. Error bars were calculated as explained in Sect. 2.5 and do not include systematic errors. Solid and dashed lines are the contours at 95% and 50% of the maximum of PSD. *Right panel:* period échelle diagram of the stretched spectrum composed of Cluster B pulsation modes, plotted twice for clarity. Marker size is representative of their amplitude in the Lomb-Scargle periodogram.

oscillatory behaviour, which is a typical signature of a buoyancy glitch (Miglio et al. 2008).

The power excess between 23 and 28 μHz is dominated by simple combination frequencies of high amplitude peaks ($\nu_i + \nu_j$). The couple of remaining frequencies may be actual (2, 2) modes but cannot be formally identified with our method due to their restricted number.

This SPB star was studied in Pápics et al. (2017). The authors found a long period spacing pattern consisting of 43 modes in the 9–14 μHz domain with a downward slope in the $\Delta P - P$ plane. Following the method of Van Reeth et al. (2016), they identified the mode series as dipole prograde modes. Moreover, they estimated $\nu_{\text{rot}} = 7.3 \pm 0.5 \mu\text{Hz}$ (0.63 ± 0.04 c/d) and $\Delta P_\ell = 5840^{+950}_{-860}$ s, which translates into a buoyancy radius of $P_0 = 8260^{+1400}_{-1300}$ s ($0.096^{+0.016}_{-0.014}$ d). These findings are compatible at a 1- σ level with ours although are somewhat greater. We made the choice to stay more conservative in the frequency analysis of the light curve. This results in a lesser number of extracted frequencies than Pápics et al. (2017). We analysed the list of prograde mode periods provided in their Table 6 using our method. The results ($\nu_{\text{rot}} = 6.81 \pm 0.02 \mu\text{Hz}$, $P_0 = 6857 \pm 66$ s) are not

significantly different from our first estimate showing that the difference does not come from the period list. Pápics et al. (2017) found a second series of eight modes in the 25–32 μHz range that they do not identify as combination frequencies. They suggested these are (2, 2) modes.

5. Discussion and conclusions

We have developed and tested a stellar-model-independent method to disentangle the g -mode spectrum of moderately to rapidly rotating γ Dor and SPB stars. Using this method, we are able to simultaneously obtain the mode identity and estimate the near-core rotation frequency and buoyancy radius of these stars. Moreover, we successfully apply this method to two *Kepler* targets. Our results are compatible with preceding determinations that used a different method (Van Reeth et al. 2016; Pápics et al. 2017), but the uncertainties on ν_{rot} and P_0 intrinsic to our method are substantially lower. It should be noted, however, that the dominant source of errors comes from the inadequacies of the asymptotic TAR on which Van Reeth et al. (2016) also relied. It is also expected that the non-asymptotic formulation that was used by Pápics et al. (2017) suffers from systematic

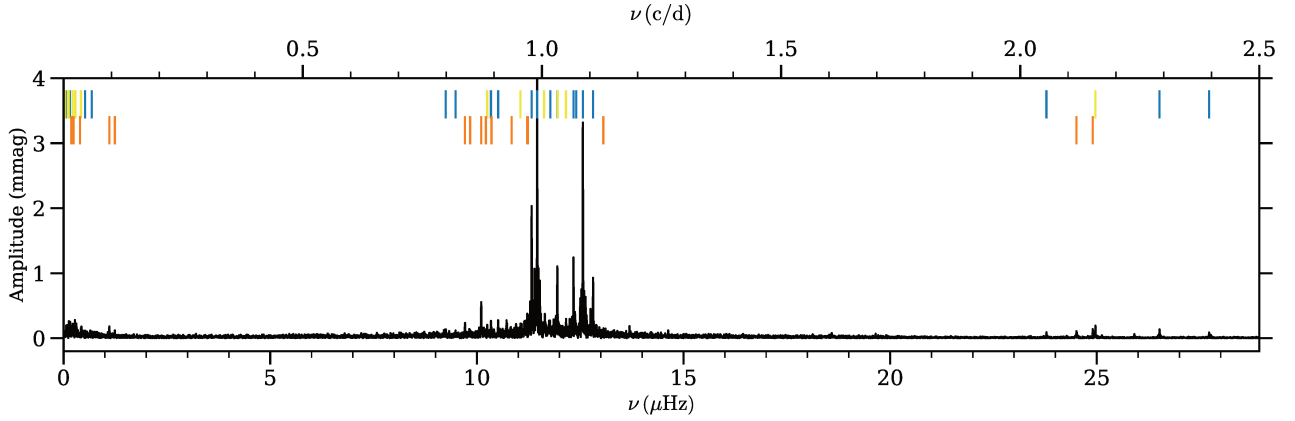


Fig. 8. Lomb-Scargle periodogram of KIC3459297 computed from the *Kepler* light curve. Blue bars indicate independent peak frequencies for which the amplitude extracted and that of the original data agrees within 25%. Yellow bars are independent frequencies that are subsequently added to the frequency list (see text in Sect. 4.3). Orange bars are identified combination frequencies.

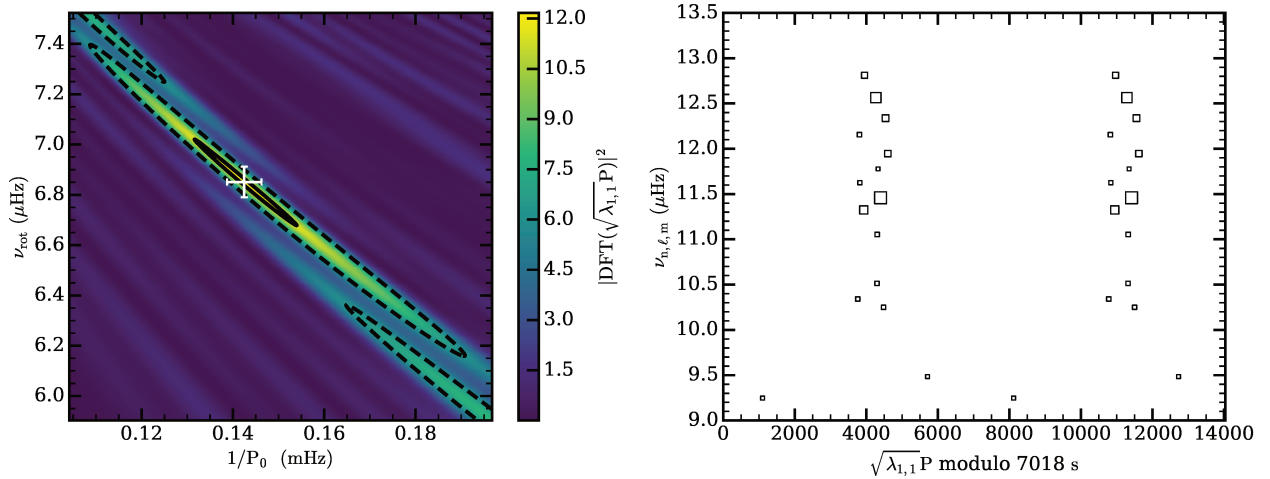


Fig. 9. *Left panel:* DFT map resulting from the analysis of the group of peaks in the 9–14 μHz interval of KIC3459297 periodogram, assuming they are prograde dipole modes ($\ell = 1, m = 1$). The white cross is located at the maximum of PSD. Error bars were calculated as explained in Sect. 2.5 and do not include systematic errors. Solid and dashed lines are the contours at 95% and 50% of the maximum of PSD. *Right panel:* period échelle diagram of the stretched spectrum, plotted twice for clarity. Marker size is representative of their amplitude in the Lomb-Scargle periodogram.

biases. While the method works well in most cases, precautions need to be taken during the analysis or in the interpretation of results in some specific cases.

Because we use the DFT to detect regularities in the stretched spectrum, modes in a given series must be in sufficient number so that a peak in the DFT map can be unambiguously attributed to a regularity, that is, with an amplitude that is above the detection threshold (see Sect. 2.4). We are also subject to the effects of windowing especially in the case of missing orders in a ridge. Therefore, particular attention should be paid to the results when signatures of these effects are visible in the DFT map.

As a result of the non-linear coupling of pulsation modes, combination frequencies are common in the oscillation spectrum of γ Dor and SPB stars. These combinations are generally considered to be harmonics or simple combinations of the frequencies of highest amplitude but this has been subject to debate as the underlying physical mechanism is not understood (see Kurtz et al. 2015, and references therein). Possible combination frequencies must be identified. The analysis of combination frequencies, as if there were independent frequencies, can lead to

wrong interpretations. For instance, the first harmonics of (1, 1) may be misidentified as (2, 2) modes with the same rotation rate and buoyancy radius that can be derived from the fundamental frequencies. In this work, to avoid these misinterpretations, we searched for frequencies that could be explained as linear combinations ($\sum c_i \nu_i$ where $c_i \in \mathbb{Z}$) and we discarded those of order 3 or less ($\sum |c_i| \leq 3$) from the analyses.

Numerous γ Dor and SPB stars are in the *Kepler* field of view. Few of them are slow rotators with rotational splittings that can be accurately interpreted with classical perturbative treatments of rotation. In this regard, we emphasise that the method presented in this paper complements the perturbative approach by allowing the interpretation of the spectrum of moderate to fast rotators. Thus, for rapid rotators, the analysis is straightforward as each mode series (ℓ, m) is well separated from the others. In moderate rotators, several g -mode series may overlap, which slightly complicates the identification process as the stretching function is relevant only for a given (ℓ, m) couple. This can be easily overcome by using the expected distribution of g modes in rotating stars as an indicator to guide the analysis (see Sect. 2.2). As long as some (ℓ, m) modes are dominant in number

in the portion of the spectrum studied, the associated regularity should be detectable. Then, proceeding iteratively (identifying the dominant mode series, removing these modes from the list of frequencies, and re-analysing the remaining frequencies) allows the identification of overlapping series.

In the current implementation of the method, we assess the rotation-pulsation coupling in the framework of the asymptotic TAR. While the hypotheses behind this approximation are rather crude, it seems to offer reasonably accurate results. For a typical model of a γ Dor star in uniform rotation and no structural glitch, we evaluated that the derived rotation rate and buoyancy radius are biased by only a few per cent. The TAR and the asymptotic approximations contribute to this bias in approximately equal proportions. In an equivalent model with a buoyancy glitch, the systematic errors can reach up to $\sim 17\%$ for ν_{rot} and 6% for P_0 because the effects of the buoyancy glitch on the pulsation periods are not accounted for in the asymptotic approximation. For most observed dipole prograde modes, these biases remain limited to 5% for both ν_{rot} and P_0 . In a differentially rotating model, we show a clear signature of differential rotation although the full interpretation of the g -mode spectrum is not straightforward. The TAR assumes solid-body rotation and describes the pulsations in the co-rotating frame, which cannot be properly defined when there is differential rotation. Secondly, as mentioned before, the g -mode cavity changes from mode to mode. This questions the definition of a unique rotation frequency for a given mode series.

We stress that the limitations and potential biases shown here are not specifically linked to our stretching method but are inherited from the asymptotic TAR, thus any method based on it would suffer the same issues. Furthermore, such a method can be adapted to better prescriptions for pulsations in rotating stars. As long as the expression of pulsation periods adopts a suitable form, it is possible to define a stretching function such that the pulsation periods are regularly spaced once stretched. In which case, the determination of ν_{rot} and P_0 can be refined without modifying the core principle of the method. Recent theoretical studies (Prat et al. 2016, 2017) have taken an interest in developing new and more accurate asymptotic theories on the basis of ray theory, which provides an interesting lead for future improvements of this method.

Kepler provided high-quality photometric data for large numbers of γ Dor and SPB stars. Thanks to recent progress in the theory of pulsations in rotating stars as well as in the interpretation of their oscillation spectra, we are now in a good position to exploit the *Kepler* data to their full potential. That promises to put tight constraints on convective-core boundary mixing and angular momentum transport.

Acknowledgements. We acknowledge the International Space Science Institute (ISSI) for supporting the SoFAR international team². The authors would like to thank M.J. Goupil for her comments and suggestions on the manuscript. J.B. acknowledges financial support from Programme National de Physique Stellaire (PNPS) of CNRS/INSU, France, and from the Centre National d'Études Spatiales (CNES, France). S.J.A.J.S. is funded by ARC grant for Concerted Research Actions, financed by the Wallonia-Brussels Federation.

References

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. 1964, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables* (New York: Dover)
 Abt, H. A., Levato, H., & Grosso, M. 2002, *ApJ*, 573, 359
 Andersen, J., Clausen, J. V., & Nordstrom, B. 1990, *ApJ*, 363, L33
 Angulo, C., Arnould, M., Rayet, M., et al. 1999, *Nucl. Phys. A*, 656, 3

- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., & Scott, P. 2009, *ARA&A*, 47, 481
 Ballot, J., Lignières, F., Prat, V., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2012, *Progress in Solar/Stellar Physics with Helio- and Asteroseismology*, 462, 389
 Bedding, T. R., Murphy, S. J., Colman, I. L., & Kurtz, D. W. 2015, *Eur. Phys. J. Web Conf.*, 101, 01005
 Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015, *A&A*, 579, A31
 Berthomieu, G., Gonczi, G., Graff, P., Provost, J., & Rocca, A. 1978, *A&A*, 70, 597
 Böhm-Vitense, E. 1958, *Z. Astrophys.*, 46, 108
 Bouabid, M.-P., Dupret, M.-A., Salmon, S., et al. 2013, *MNRAS*, 429, 2500
 Chaboyer, B., Demarque, P., & Pinsonneault, M. H. 1995, *ApJ*, 441, 865
 Charbonnel, C., & Talon, S. 2005, *Science*, 309, 2189
 Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, 101, 367
 Davies, G. R., Handberg, R., Miglio, A., et al. 2014, *MNRAS*, 445, L94
 Dupret, M.-A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., & Scuflaire, R. 2005, *A&A*, 435, 927
 Dziembowski, W. A., Moskalik, P., & Pamyatnykh, A. A. 1993, *MNRAS*, 265, 588
 Eckart, C. 1960, *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres* (Oxford: Pergamon Press)
 Eggenberger, P., Maeder, A., & Meynet, G. 2005, *A&A*, 440, L9
 Eggenberger, P., Lagarde, N., Miglio, A., et al. 2017, *A&A*, 599, A18
 Ferguson, J. W., Alexander, D. R., Allard, F., et al. 2005, *ApJ*, 623, 585
 Formicola, A., Imbriani, G., Costantini, H., et al. 2004, *Phys. Lett. B*, 591, 61
 Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., et al. 2017, *A&A*, 604, A40
 Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., & Brown, B. 2014, *ApJ*, 796, 17
 García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, 316, 1591
 Guzik, J. A., Kaye, A. B., Bradley, P. A., Cox, A. N., & Neuforge, C. 2000, *ApJ*, 542, L57
 Iglesias, C. A., & Rogers, F. J. 1996, *ApJ*, 464, 943
 Keen, M. A., Bedding, T. R., Murphy, S. J., et al. 2015, *MNRAS*, 454, 1792
 Kurtz, D. W., Saio, H., Takata, M., et al. 2014, *MNRAS*, 444, 102
 Kurtz, D. W., Shibahashi, H., Murphy, S. J., Bedding, T. R., & Bowman, D. M. 2015, *MNRAS*, 450, 3015
 Kurucz, R. L. 1998, *Highlights of Astronomy*, 11, 646
 Ledoux, P. 1951, *ApJ*, 114, 373
 Lee, U., & Saio, H. 1987, *MNRAS*, 224, 513
 Lee, U., & Saio, H. 1997, *ApJ*, 491, 839
 Maeder, A., & Mermilliod, J. C. 1981, *A&A*, 93, 136
 Maeder, A., & Zahn, J.-P. 1998, *A&A*, 334, 1000
 Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2004, *A&A*, 425, 229
 Meynet, G., Ekstrom, S., Maeder, A., et al. 2013, *Lect. Notes Phys.*, 865, 3
 Miglio, A., Montalbán, J., Noels, A., & Eggenberger, P. 2008, *MNRAS*, 386, 1487
 Moravveji, E., Aerts, C., Pápics, P. I., Triana, S. A., & Vandoren, B. 2015, *A&A*, 580, A27
 Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, *A&A*, 548, A10
 Mosser, B., Vrad, M., Belkacem, K., Deheuvels, S., & Goupil, M. J. 2015, *A&A*, 584, A50
 Murphy, S. J., Fossati, L., Bedding, T. R., et al. 2016, *MNRAS*, 459, 1201
 Ouazzani, R.-M., Dupret, M.-A., & Reese, D. R. 2012, *A&A*, 547, A75
 Ouazzani, R.-M., Roxburgh, I. W., & Dupret, M.-A. 2015, *A&A*, 579, A116
 Ouazzani, R.-M., Salmon, S. J. A. J., Antoci, V., et al. 2017, *MNRAS*, 465, 2294
 Pápics, P. I., Moravveji, E., Aerts, C., et al. 2014, *A&A*, 570, A8
 Pápics, P. I., Tkachenko, A., Van Reeth, T., et al. 2017, *A&A*, 598, A74
 Prat, V., Lignières, F., & Ballot, J. 2016, *A&A*, 587, A110
 Prat, V., Mathis, S., Lignières, F., Ballot, J., & Culpin, P.-M. 2017, *A&A*, 598, A105
 Rogers, F. J., & Nayfonov, A. 2002, *ApJ*, 576, 1064
 Royer, F., Zorec, J., & Gómez, A. E. 2007, *A&A*, 463, 671
 Rüdiger, G., Gellert, M., Spada, F., & Tereshin, I. 2015, *A&A*, 573, A80
 Saio, H., Kurtz, D. W., Takata, M., et al. 2015, *MNRAS*, 447, 3264
 Saio, H., Kurtz, D. W., Murphy, S. J., Antoci, V. L., & Lee, U. 2018, *MNRAS*, 474, 2774
 Salmon, S. J. A. J., Montalbán, J., Reese, D. R., Dupret, M.-A., & Eggenberger, P. 2014, *A&A*, 569, A18
 Scargle, J. D. 1982, *ApJ*, 263, 835
 Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., et al. 1998, *ApJ*, 505, 390
 Scuflaire, R., Théado, S., & Montalbán, J. 2008, *Ap&SS*, 316, 83
 Tassoul, M. 1980, *ApJS*, 43, 469
 Townsend, R. H. D. 2003, *MNRAS*, 340, 1020
 Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015a, *A&A*, 574, A17
 Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015b, *ApJS*, 218, 27
 Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, *A&A*, 593, A120

² <http://www.issi.unibe.ch/teams/sofar/>.

Appendix A: Lists of extracted frequencies

Table A.2. Frequencies for KIC3459297.

Table A.1. Frequencies for KIC12066947.

#	ν (μHz)	σ_ν (μHz)
1	31.52532	0.00004
2	22.42224	0.00003
3	32.34848	0.00003
4	23.20940	0.00006
5	34.37178	0.00003
6	31.71185	0.00006
7	22.83401	0.00007
8	29.88961	0.00018
9	34.02406	0.00004
10	34.74865	0.00004
11	30.61035	0.00020
12	21.84573	0.00011
13	33.10856	0.00010
14	23.55624	0.00014
15	30.22282	0.00036
16	29.05031	0.00041
17	21.12773	0.00016
18	20.94863	0.00019
19	29.60103	0.00049
20	27.85636	0.00035
21	29.12221	0.00057
22	21.59091	0.00020

#	ν (μHz)	σ_ν (μHz)	
1	11.45892	0.00002	
2	12.56457	0.00001	
3	11.32431	0.00003	
4	12.33807	0.00003	
5	11.94646	0.00004	
6	12.81174	0.00004	
7	10.10531	0.00012	$2\nu_1 - \nu_6$
8	11.21814	0.00017	$\nu_1 + \nu_2 - \nu_6$
9	12.15636	0.00013	
10	11.05385	0.00018	
11	0.27316	0.00037	
12	10.51394	0.00021	
13	0.12457	0.00039	
14	0.14769	0.00046	
15	10.34129	0.00022	
16	10.24943	0.00024	
17	0.10236	0.00057	
18	0.22518	0.00059	$\nu_2 - \nu_4$
19	9.71168	0.00031	$\nu_3 - \nu_5 + \nu_{15}$
20	11.62550	0.00023	
21	1.10575	0.00043	$\nu_2 - \nu_1$
22	0.06223	0.00061	
23	0.27982	0.00063	
24	0.18418	0.00050	$\nu_4 - \nu_9$
25	10.35381	0.00031	$2\nu_1 - \nu_2$
26	24.96855	0.00010	
27	0.21483	0.00072	
28	10.21922	0.00039	$\nu_1 - \nu_2 + \nu_3$
29	30.29326	0.00005	
30	10.84022	0.00039	$\nu_1 - \nu_2 + \nu_5, \nu_1 + \nu_3 - \nu_5$
31	9.24711	0.00035	
32	13.05932	0.00019	$\nu_2 - \nu_1 + \nu_5$
33	9.48398	0.00048	
34	11.23270	0.00038	$\nu_1 - \nu_2 + \nu_4$
35	0.41900	0.00089	
36	0.28797	0.00089	
37	26.51890	0.00010	
38	1.24003	0.00065	$\nu_2 - \nu_3$
39	11.77798	0.00038	
40	24.90285	0.00015	$\nu_2 + \nu_4$
41	0.39570	0.00106	$\nu_4 - \nu_5$
42	0.52098	0.00087	
43	29.40322	0.00007	
44	24.50931	0.00016	$\nu_2 + \nu_5$
45	23.78280	0.00015	
46	0.68074	0.00101	
47	0.23975	0.00131	$\nu_6 - \nu_2$
48	27.71991	0.00011	
49	9.83608	0.00071	$2\nu_3 - \nu_6$
50	0.02418	0.00155	

Chapitre 4

Les étoiles γ Doradus comme test des modèles de transport de moment cinétique

La rotation affecte de manière importante la structure et l'évolution d'une étoile. C'est pourquoi il est nécessaire de la prendre en compte dans les modèles stellaires. Néanmoins, de larges incertitudes demeurent encore sur la description physique des processus qui y sont liés. Ces dernières années, de plus en plus d'éléments attestent qu'un ou plusieurs processus de transport de moment cinétique (MC) sont manquants dans les modèles rotationnels 1D n'incluant que les processus induits par la rotation (Zahn, 1992; Talon & Zahn, 1997; Maeder & Zahn, 1998; Mathis & Zahn, 2004). En particulier, l'hélio- et l'astérosismologie ont permis de mettre en évidence des différences significatives entre les observations et les modèles rotationnels 1D que ce soit dans le Soleil, les sous-géantes ou les géantes rouges.

Le profil de rotation du Soleil est précisément contraint par les inversions héliosismiques (e.g. Schou et al., 1998; Chaplin et al., 1999; García et al., 2007; Eff-Darwich et al., 2008, voir aussi le Chap. 5) : son enveloppe convective est en rotation différentielle alors que l'intérieur radiatif tourne de façon quasi-solide. Un tel profil de rotation est en désaccord avec les modèles qui n'incluent que le transport par la circulation méridienne, la turbulence induite par le cisaillement et le freinage magnétique de surface (Pinsonneault et al., 1989; Chaboyer et al., 1995; Maeder & Zahn, 1998; Mathis & Zahn, 2004). En conséquence, des processus de transport de MC additionnels ont été considérés – le transport par les ondes de gravité interne (Zahn et al., 1997; Talon et al., 2002; Charbonnel & Talon, 2005) ou des mécanismes liés au champ magnétique (e.g. Charbonneau & MacGregor, 1993; Ruediger & Kitchatinov, 1996; Spruit, 1999, 2002; Eggenberger et al., 2005). Ils ont permis de réconcilier les prédictions des modèles avec les observations sismiques du Soleil. Toutefois, les détails concernant les efficacités relatives de ces deux types de processus et les échelles de temps sur lesquelles ils agissent restent encore mal compris.

Dans le sillage des missions spatiales CoRoT et Kepler, la sismologie des étoiles évoluées de faible masse a apporté de nouveaux indices. En effet, la rotation du cœur des sous-géantes et des géantes rouges peut être mesurée à partir des modes d'oscillations mixtes, qui se comportent comme des modes p dans l'enveloppe et comme des modes g dans le cœur (Mosser et al., 2012; Deheuvels et al., 2014; Gehan et al., 2018). Les vitesses de rotation du cœur de ces étoiles, telles que mesurées par la sismologie, sont plusieurs ordres de grandeur plus faibles que celles déduites des modèles stellaires rotationnels classiques (e.g. Eggenberger et al., 2012; Marques et al., 2013). Là encore, plusieurs processus pour extraire du MC supplémentaire du cœur de

ces étoiles ont été explorés dans la littérature (e.g. Fuller et al., 2014; Cantiello et al., 2014; Belkacem et al., 2015; Rüdiger et al., 2015; Pinçon et al., 2017) et des contraintes sur l’efficacité des processus de transport manquants ont été obtenues (e.g. Spada et al., 2016; Eggenberger et al., 2017, 2019). Cependant, comme pour le cas du Soleil, des incertitudes majeures subsistent.

En ce qui concerne le problème du transport du moment cinétique, les étoiles γ Dor sont des cibles d’intérêt : (i) ce sont les seules étoiles sur le bas de la séquence principale pour lesquelles nous avons accès à la fréquence de rotation interne (le Soleil excepté); (ii) elles sont placées à la limite du “Kraft (1967) break” délimitant les étoiles ralenties par freinage magnétique de celles qui ne le sont pas; (iii) elles sont progénitrices de géantes rouges ce qui nous permet de suivre la distribution du MC au cours de l’évolution des étoiles. Par ailleurs, grâce aux 4 ans de données photométriques de la mission spatiale *Kepler*, nous sommes maintenant en capacité de résoudre les modes d’oscillation de centaines d’étoiles γ Dor et de mesurer précisément leur rotation interne grâce à la sismologie (e.g. Keen et al., 2015; Murphy et al., 2016; Van Reeth et al., 2016; Christophe et al., 2018b; Li et al., 2019a).

Dans le Chap. 3, nous avons présenté MORSE un outil modèle-indépendant pour le diagnostic sismique de la rotation interne moyenne v_{rot} et du temps caractéristique d’Archimède P_0 des pulsateurs BF. Nous avons mesuré ces deux quantités dans 36 étoiles γ Dor observées par *Kepler*. Dans ce chapitre, nous menons une première comparaison des mesures sismiques avec les modèles stellaires rotationnels CESTAM dans l’objectif de répondre à la question suivante : les processus de transport de MC induits par la rotation (turbulence de cisaillement, circulation méridienne) sont-ils suffisants pour rendre compte de la rotation interne des étoiles γ Dor tels que mesurée par la sismologie ? Ou avons-nous au contraire besoin de mécanismes supplémentaires pour les expliquer comme dans le cas du Soleil, des sous-géantes ou des géantes rouges ? Cette étude a fait l’objet d’une publication dans *Astronomy & Astrophysics*, reproduite à la fin de ce chapitre. Les résultats principaux sont résumés ci-après.

4.1 Des modèles aux observables

4.1.1 Modélisation 1D du transport de moment cinétique avec CESTAM

Les modèles 1D rotationnels sont calculés avec le code d’évolution stellaire CESTAM. La rotation dans les zones convectives est supposée solide. La rotation dépend *a priori* peu du rayon dans ces régions. Dans les zones radiatives, le transport de MC et d’éléments chimiques est modélisé dans l’hypothèse de la rotation en coquille (*shellular* en anglais) selon le formalisme développé par Zahn (1992) et Maeder & Zahn (1998). Cela inclut le transport par la circulation méridienne et la turbulence de cisaillement. La perte de moment cinétique en surface par les vents stellaires magnétisés est négligée. L’enveloppe convective externe des γ Dor étant beaucoup plus fine que celle des étoiles de type solaire, la génération d’un champ magnétique à grande échelle par effet dynamo est supposée peu efficace.

Dans CESTAM, le transport de MC est modélisé depuis la pré-séquence principale. En plus des mécanismes de transport, des conditions initiales doivent être définies pour fixer le contenu en moment cinétique initial. La phase de pré-séquence principale des étoiles γ Dor est trop brève pour que les processus de transport liés à la rotation aient le temps d’agir sur la distribution interne du moment cinétique. En revanche, les interactions de l’étoile avec le disque d’accrétion résiduel contrebalancent l’augmentation de la vitesse de rotation de l’étoile lors de sa contraction gravitationnelle de sorte que la rotation de l’étoile tend à s’équilibrer avec celle du disque. Afin de fixer le contenu initial en MC dans CESTAM, ce mécanisme est décrit par un modèle empirique simplifié de type *disc locking* tel que décrit dans Bouvier et al. (1997). Dans ce modèle,

l'étoile est contrainte à tourner à la période de rotation du disque d'accrétion P_{disc} pendant un temps τ_{disc} correspondant à la durée de vie du disque. Ces deux paramètres sont calibrés de manière à reproduire la distribution des rotations de surface des étoiles de pré-séquence principale dans trois jeunes amas ouverts âgés de 3 à 13 millions d'années : NGC2264 (Venuti et al., 2017), NGC2362 (Irwin et al., 2008), hPer (aka NGC869, Moraux et al., 2013). Seules les étoiles de masses comparables aux γ Dor ont été considérées (1.3 à $1.9M_{\odot}$). Trois jeux de paramètres permettent de couvrir les rotations observées dans ces amas.

Un ensemble de modèles CESTAM est constitué de façon à pouvoir être comparé à l'échantillon de 36 γ Dor réuni dans le Chap. 3. Pour chacune des trois conditions initiales de *disc locking*, des modèles de masses de 1.4, 1.6 et 1.8 M_{\odot} et de métallicités représentatives de l'échantillon sont calculés. Il s'agit maintenant de construire les observables (P_0, v_{rot}) à partir de la structure interne des modèles.

4.1.2 Le temps caractéristique d'Archimède P_0 : un marqueur de l'état d'évolution

Le temps caractéristique d'Archimède P_0 est défini par,

$$P_0 = 2\pi^2 \left(\int_{\mathcal{R}} \frac{N_{\text{BV}}(r)}{r} dr \right)^{-1} \quad (4.1)$$

$$\text{où } N_{\text{BV}}^2(r) = g \left(\frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \approx \frac{g^2 \rho}{p} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + \nabla_{\mu}). \quad (4.2)$$

Cette quantité présente l'avantage d'être une fonction monotone décroissante de l'état d'évolution. En effet, au cours de l'évolution sur la séquence principale, les réactions nucléaires au centre de l'étoile créent un gradient de composition chimique de plus en plus important à la frontière du coeur convectif. Par conséquent, l'intégrale dans l'Eq. 4.1 devient de plus en plus grande et le P_0 de plus en plus petit. Il est à noter que P_0 dépend également de la taille du coeur convectif étant donné que celui-ci limite la partie inférieure de la cavité résonante des modes g . Pour un même P_0 , il existe donc une dégénérescence entre la masse, la métallicité et le paramètre d'overshoot du coeur convectif. Toutefois, le caractère monotone du temps d'Archimède avec l'état d'évolution subsiste si bien qu'il peut être utilisé comme proxy de l'évolution à condition de tenir compte de ces dégénérescences. Dans les modèles CESTAM, le temps d'Archimède P_0 est évalué directement à partir de l'Eq. 4.1.

4.1.3 Rotation moyenne $\langle v_{\text{rot}} \rangle$ dans la cavité résonante des modes g

Dans sa version actuelle, le code MORSE suppose que l'étoile étudiée est en rotation rigide. En d'autres termes, la rotation mesurée dans les 36 γ Dor de l'échantillon avec MORSE correspond à une fréquence de rotation moyennée dans la cavité résonante des modes g progrades dipolaires. Or, les modèles CESTAM calculés pour la comparaison ont *a priori* un profil de rotation différentiel qui n'est pas directement comparable avec les observations. Nous avons donc construit la quantité "observable" effectivement mesurable à partir des modes g en calculant la moyenne de la fréquence de rotation dans la cavité g pondérée par la fréquence de Brunt-Väisälä, soit

$$\langle v_{\text{rot}} \rangle = \frac{\int_{\mathcal{R}} v_{\text{rot}}(r) N_{\text{BV}}(r) \frac{dr}{r}}{\int_{\mathcal{R}} N_{\text{BV}}(r) \frac{dr}{r}}. \quad (4.3)$$

Christophe et al. (2018a) montre que $\langle v_{\text{rot}} \rangle$ est effectivement comparable à la rotation mesurée avec MORSE pour un des modèles CESTAM utilisé pour la comparaison. Des justifications théoriques pourront aussi être trouvées dans Dziembowski et al. (2007) et Mathis (2009), notamment.

4.2 Résultats : comparaison des modèles 1D rotationnels aux observations

Les modèles 1D incluant le transport de MC par la circulation méridienne et la turbulence de cisaillement surestiment de manière systématique les rotations mesurées par la sismologie des étoiles γ Dor (Fig. 6, [Ouazzani et al., 2019](#), ci-joint). Cela suggère que, comme pour les géantes rouges, un mécanisme de transport supplémentaire extrait du MC du cœur de ces étoiles. En particulier, on notera que très peu d'étoiles (voire aucune) n'atteignent les vitesses de rotation des modèles les plus rapides. Ce désaccord pourrait s'expliquer par un biais de sélection. Les étoiles de notre échantillon s'appuient sur celui construit par [Van Reeth et al. \(2015a\)](#) qui visait notamment à mesurer leurs paramètres spectroscopiques. De fait, les rotateurs trop rapides ont été exclus, les raies spectrales d'absorption étant trop élargies par la rotation pour permettre une mesure correcte. Néanmoins, cet échantillon a récemment été étendu à 82 étoiles par [Li et al. \(2019b\)](#). Les fréquences de rotation interne mesurées par ces auteurs restent toutes inférieures à $\sim 26 \mu\text{Hz}$, dont une majorité est en dessous de $\sim 20 \mu\text{Hz}$, tendant à disqualifier ce biais de sélection comme explication.

Dans une démarche similaire à celle employée par [Eggenberger et al. \(2017\)](#) dans le cas des géantes rouges, nous avons cherché à caractériser le processus de transport manquant. Pour cela, les paramètres de viscosité turbulente dans l'équation de transport du MC sont artificiellement augmentés jusqu'à reproduire au mieux les observations. Si cette approche permet de modéliser la plupart des rotateurs lents, elle échoue à exclure le désert des rotateurs rapides, et cela, même en forçant la rotation solide des modèles. Il est probable que la physique des modes d'oscillation BF soit différente lorsqu'on atteint des rotations aussi rapides (par exemple au niveau de l'excitation des modes) mais des études plus approfondies seront nécessaires pour apporter une réponse à cette question.

γ Doradus stars as a test of angular momentum transport models[★]

R.-M. Ouazzani¹, J. P. Marques², M.-J. Goupil¹, S. Christophe¹, V. Antoci³, S. J. A. J. Salmon⁴, and J. Ballot⁵

¹ LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France
e-mail: Rhita-Maria.Ouazzani@obspm.fr

² Univ. Paris-Sud, Institut d'Astrophysique Spatiale, UMR 8617, CNRS, Bâtiment 121, 91405 Orsay Cedex, France

³ Stellar Astrophysics Centre, Department of Physics and Astronomy, Aarhus University, Ny Munkegade 120, 8000 Aarhus C, Denmark

⁴ STAR Institute, Université de Liège, Allée du 6 août 19, 4000 Liège, Belgium

⁵ IRAP, Université de Toulouse, CNRS, UPS, CNES, 14 avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France

Received 8 January 2018 / Accepted 17 March 2019

ABSTRACT

Helioseismology and asteroseismology of red giant stars have shown that distribution of angular momentum in stellar interiors, and the evolution of this distribution with time remains an open issue in stellar physics. Owing to the unprecedented quality and long baseline of *Kepler* photometry, we are able to seismically infer internal rotation rates in γ Doradus stars, which provide the main-sequence counterpart to the red-giants puzzle. Here, we confront these internal rotation rates to stellar evolution models which account for rotationally induced transport of angular momentum, in order to test angular momentum transport mechanisms. On the one hand, we used a stellar model-independent method developed by our team in order to obtain accurate, seismically inferred, buoyancy radii and near-core rotation for 37 γ Doradus stars observed by *Kepler*. We show that the stellar buoyancy radius can be used as a reliable evolution indicator for field stars on the main sequence. On the other hand, we computed rotating evolutionary models of intermediate-mass stars including internal transport of angular momentum in radiative zones, following the formalism developed in the series of papers started by Zahn (1992, A&A, 265, 115), with the CESTAM code. This code calculates the rotational history of stars from the birth line to the tip of the RGB. The initial angular momentum content has to be set initially, which is done here by fitting rotation periods in young stellar clusters. We show a clear disagreement between the near-core rotation rates measured in the sample and the rotation rates obtained from the evolutionary models including rotationally induced transport of angular momentum following Zahn's prescriptions. These results show a disagreement similar to that of the Sun and red giant stars in the considered mass range. This suggests the existence of missing mechanisms responsible for the braking of the core before and along the main sequence. The efficiency of the missing mechanisms is investigated. The transport of angular momentum as formalized by Zahn and Maeder cannot explain the measurements of near-core rotation in main-sequence intermediate-mass stars we have at hand.

Key words. stars: evolution – stars: low-mass – stars: oscillations – stars: rotation – stars: statistics – asteroseismology

1. Introduction

Distribution of angular momentum in stellar interiors, and its evolution with time remains an open issue in stellar physics. The first reason is that internal angular momentum distribution has been poorly constrained by observations until recently. The tightest constraint on internal angular momentum is provided by seismic measurements of rotation profiles, thanks to helio- and asteroseismology.

One recent success of this approach was obtained for sub-giant and red giant stars. Being in the late stages of stellar evolution, these stars have a highly condensed core, and hence present non-radial mixed modes of oscillation. These modes are of particular interest for the determination of the rotation profile throughout the star, as they carry information on the star's innermost layers and are detectable at the surface. The NASA *Kepler* spacecraft has allowed a significant leap forward

providing exquisite seismic observations of thousands of such stars. Their rotationally split multiplets give access to near-core rotation rates (Beck et al. 2012; Deheuvels et al. 2012; Mosser et al. 2012), which were found to be much slower than predicted by the current models including physically motivated angular momentum transport mechanisms (Eggenberger et al. 2012; Marques et al. 2013; Cantiello et al. 2014; Fuller et al. 2014; Belkacem et al. 2015). The disagreement with observations points toward the existence of missing mechanisms which would extract angular momentum from the core. Currently, the community effort is into two complementary approaches. On the one hand increasing the number of measurements and inferring correlations with other stellar properties (Gehan et al. 2016), and on the other hand developing parametrized models of core-to-envelope coupling processes (in terms of e.g., time-scales and efficiency, see for instance Eggenberger et al. 2017).

A crucial path forward is to get an insight on the angular momentum distribution at earlier stages of evolution, that is on the main sequence. Unfortunately, solar-like stars on the main sequence only exhibit pressure modes to the level of detection, and these modes probe their superficial layers. The only solar-like star on the main sequence for which seismology provides

[★] Evolutionary sequences (Fig. 7) and evolution of stellar global parameters are only available at the CDS via anonymous ftp to cdsarc.u-strasbg.fr (130.79.128.5) or via <http://cdsarc.u-strasbg.fr/viz-bin/qcat?J/A+A/626/A121>.

information on the deeper layers is the Sun. The long-lived satellite SoHO has successfully provided seismic observations of the Sun's interior, which allowed the inversion of the solar internal rotation profile (e.g. Schou et al. 1998; García et al. 2007; Fossat et al. 2017). As with red giant stars, these seismic measurements first questioned the understanding of angular momentum transport mechanisms.

In order to obtain inner rotation profiles for a number of stars on the main sequence, and for stars that are progenitors of red giant stars, one has to consider stars that are slightly more massive than the Sun. Among these stars, a quite interesting sample is that of γ Doradus (γ Dor) stars which are late A- to early F-type stars with masses ranging from 1.3 to 1.9 M_{\odot} . They burn hydrogen in their convective cores, surrounded by a radiative region where a shallow convective layer subsists. Such shallow convective layers give birth to gravity oscillation modes (g -modes) excited by the convective blocking mechanism (Dupret et al. 2005). Due to the structure of these stars, the detected oscillations are able to probe the deep internal region of these stars. With periods typically of the order of one day, these oscillations were extremely difficult to detect from ground. One had to wait for the four years of nearly continuous observations from *Kepler* to obtain data of sufficient quality in order to perform seismic studies of these stars. Moreover, unlike solar-type stars, the convective envelopes in γ Dor stars are too shallow to generate a magnetic field able to act as a magnetic torque and slow down their surfaces (Schatzman 1962). For that reason these stars have projected rotation velocities of around 100 km s⁻¹ in average (Abt & Morrell 1995). These high-rotation velocities have long hampered the interpretation of γ Dor stars seismology.

The first *Kepler* γ Dor stars analysed were slow rotators, for which it was still possible to retrieve rotationally split g -modes. Hence, the first internal rotation periods, by choice of method, were found to be very slow (of the order of a few tens of days, see Kurtz et al. 2014; Saio et al. 2015; Schmid et al. 2015; Keen et al. 2015; Murphy et al. 2016). New methods had to be developed before the rapid rotators could be analysed. Based on patterns in the oscillation periods of their seismic spectra, it was finally possible to infer the near-core rotation rates, for rapid rotators (Van Reeth et al. 2016; Ouazzani et al. 2017). In particular, Ouazzani et al. (2017) established a one-to-one relation between an observable of the periodogram and the inner rotation rate, which is valid for the whole γ Dor instability strip. These studies allowed us to find near-core rotation frequencies for these stars ranging from 5 to 25 μ Hz -periods of 0.5 to 2.5 days- for dozens of these stars.

The present study is a first attempt to confront these findings with the models of angular momentum (AM) evolution in intermediate-mass stars. In particular, we have made use of the stellar evolution code CESTAM (Marques et al. 2013), which models AM evolution from the stellar birth-line to the tip of the red-giant branch. These models are presented in Sect. 2, where the choices for angular momentum transport processes are explained. Such calculations require the definition of appropriate initial conditions, which set the initial AM content. These initial conditions are chosen using observations of young stellar forming regions as a constraint. This constitutes Sect. 3. In order to follow AM distribution along evolution, we defined a core-averaged property, the buoyancy radius, and show that it can be readily used as an age indicator on the main sequence of these stars (Sect. 4). Finally, we report on the results in Sect. 5, before discussing them, and drawing conclusions in Sect. 6.

2. Angular momentum evolution modelling

2.1. Angular momentum transport

The stellar models used in this study have been computed with the CESTAM evolution code which originates from the CESAM code Morel (1997), Morel & Lebreton (2008), where rotationally induced transport has been implemented (Marques et al. 2013). In convective zones, although there is differential rotation in latitude, the mean rotation at a given radius weakly depends on the radius. Therefore, in CESTAM models, that are one-dimensional, we assumed that convective zones rotate as solid bodies. In radiative zones, the transport of angular momentum and chemical elements is modelled following the formalism of Zahn (1992, hereafter Z92), refined in Maeder & Zahn (1998). According to these studies, because of the stable stratification in radiative zones, turbulence is much stronger in the horizontal than in the vertical direction. Thus we make the hypothesis of shellular rotation -that is the rotation rate is almost constant on isobars.

The transport of angular momentum obeys an advection-diffusion equation:

$$\rho \frac{d}{dt} (r^2 \Omega) = \frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^4 \Omega U_2) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho r^4 \nu_v \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right), \quad (1)$$

where ρ is the stellar density, r the radial coordinate, Ω the rotation angular velocity, U_2 is the vertical component of the meridional circulation, and ν_v is the vertical component of the turbulent viscosity. Meridional circulation components are calculated following Maeder & Zahn (1998). The shear induced turbulence is considered to be a highly anisotropic diffusive process. For the diffusion coefficients, we chose the prescriptions for horizontal turbulent diffusion coefficient from Mathis & Zahn (2004), and for the vertical one Talon et al. (1997). According to Amard et al. (2016), this combination, together with Matt et al. (2012, 2015) for the loss of AM by magnetized winds, give the best fit to rotation periods of solar-like stars in clusters. In the current study, we did not consider loss of AM at the surface. The external convective zone in γ Dor stars being much shallower than that of solar-like stars, it has been assumed that generation of magnetic field by a dynamo-like process would be inefficient. Turbulence in the vertical direction also mixes chemical elements. This mixing is further enhanced by the large-scale meridional circulation coupled to a strong horizontal turbulence (Chaboyer & Zahn 1992). As a result, the equation of the chemical composition evolution follows:

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial m} \left[(4\pi r^2 \rho)^2 (D_v + D_{\text{eff}}) \frac{\partial X_i}{\partial m} \right] + \left(\frac{dX_i}{dt} \right)_{\text{nucl}}, \quad (2)$$

where X_i is the abundance by mass of the i -th nuclear species, $D_v = \nu_v$ is the vertical component of turbulent diffusion, and D_{eff} the vertical diffusivity and the diffusion coefficient associated with meridional circulation. It should be noted that in the present study, we neglect atomic diffusion, whose effects should be small compared to turbulent diffusion induced by differential rotation. In the following, for shortness, we refer to the formalism and prescriptions mentioned in this section as Z92.

2.2. Stellar models

These prescriptions have been used in order to compute stellar models for masses between 1.4 and 1.8 M_{\odot} . At each metallicity, we have derived the helium mass fraction using a primordial

$Y_p = 0.248$ (Peimbert et al. 2007), and a helium-to-metal enrichment ratio of $\frac{\Delta Y}{\Delta Z} = 2.1 \pm 0.9$ (Casagrande et al. 2007). We adopted the AGSS09 solar metal mixture (Asplund et al. 2009) and corresponding opacity tables obtained with OPAL opacities (Iglesias & Rogers 1996), completed at low temperature ($\log T < 4.1$) with Alexander & Ferguson (1994) opacity tables. We used OPAL equation of state (Rogers et al. 1996). We used NACRE nuclear reaction rates of Angulo et al. (1999) except for the $^{14}\text{N} + p$ reaction, for which we used the reaction rates given in Formicola et al. (2004). The Schwarzschild criterion was used to determine convective instability. Convection was treated using the mixing-length theory (MLT) formalism (Böhm-Vitense 1958) with a parameter $\alpha_{\text{MLT}} = 1.70$. The centrifugal acceleration is taken into account by adding the average centrifugal acceleration $2\Omega^2 r/3$ to gravity in the hydrostatic equilibrium equation. The atmosphere is matched to a $T(\tau)$ law at an optical depth of $\tau = 20$.

2.3. Initial conditions

As mentioned in introduction, stellar evolution calculations require the definition of appropriate initial conditions, which set the initial AM. Stars with masses lower than about $2 M_\odot$ are born fully convective on the Hayashi track, and then develop a radiative zone on the Henyey track before they reach the zero-age-main-sequence and ignite nuclear reactions through the CNO cycle. There, they develop a convective core and the outer convective zone shrinks drastically in a mainly radiative envelope.

This whole pre-main-sequence (PMS) stage for a stellar mass typical of γ Dor stars lasts around 8–10 Myrs depending on the metallicity. The PMS is too short for internal transport of angular momentum by rotationally induced processes or stellar winds to slow down the star significantly. While contracting, these stars are prevented to spin up due to tight interaction with their residual accretion disc, before it fully dissipates after a few Myrs (up to around 5 Myrs for the low-mass end of γ Dor stars).

The star-disc interaction in this early stage involves a series of complex mechanisms which include accretion and magnetic interaction between the star and the disc, and the issue of AM exchange between the star and its environment still remains controversial. The choice here is to rely on an empirical description of that interaction, which simply assumes that the stellar angular velocity remains constant as long as the star interacts with its disc (see Bouvier et al. 1997). The problem is then reduced to two free parameters: the accretion disc lifetime τ_{disc} , that is the time during which the star is forced to co-rotate with its disc, and the period of rotation of the disc P_{disc} .

3. Rotation distributions in young clusters

In a similar fashion as in Amard et al. (2016), or before them Gallet & Bouvier (2013), we aim at anchoring the evolution of AM at the pre-main-sequence stage by reproducing the rotational distributions found in very young stellar clusters. The specificity here is that we narrow down the mass range of stars in these clusters to the corresponding masses of γ Dor stars, that is $1.3\text{--}1.9 M_\odot$.

In order to set up the free parameters of the disc locking model (see Sect. 2.3), we have selected stellar clusters younger than 20 Myrs, which have surface rotation measurements available in the literature, and which would contain a significant number of stars in our mass range ($1.3\text{--}1.9 M_\odot$). Three clusters fulfil these requirements: NGC 2264, NGC 2362, and hPer.

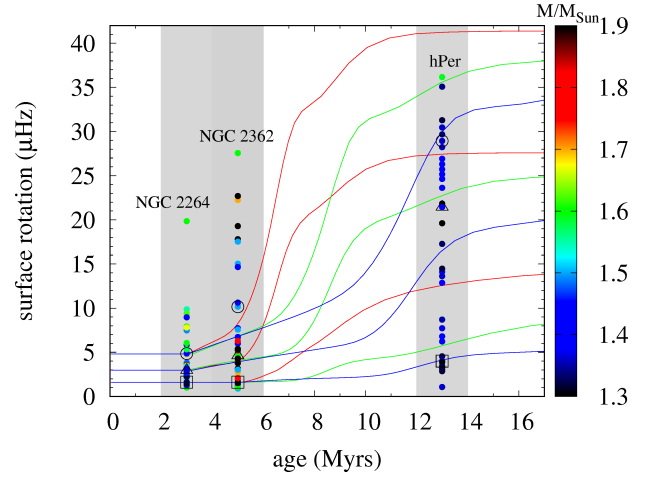


Fig. 1. Surface rotation distributions in the three selected clusters NGC 2264, NGC 2362 and hPer, as a function of age. The colour codes for the stellar mass (from 1.3 to $1.9 M_\odot$). The solid lines are given by evolutionary models of 1.4 (in blue), 1.6 (in green) and $1.8 M_\odot$ (in red). The grey coloured areas symbolize the uncertainty on the age of the clusters which is of around 1 Myr. The squares, the triangles and the open circles represent the 20th percentiles, the median, and the 80th percentile of the rotation distributions in each cluster, respectively.

The youngest, NGC 2264 has an age around 3 Myrs (Affer et al. 2013, and references therein), its stellar surface rotation periods have been measured by rotational signature in the stellar light-curves by Venuti et al. (2017). NGC 2362 is about 5 Myrs old, and the rotational data have been taken from Irwin et al. (2008). Finally hPer (NGC 869) is around 13 Myr old, and its stellar surface rotations have been measured by Moraux et al. (2013). We have computed the median, 20th and 80th percentiles of these distributions. These have been taken respectively as reference points for initial conditions of typical models of 1.4 , 1.6 and $1.8 M_\odot$ (computed as described in Sect. 2). In other words, τ_{disc} and P_{disc} have been tuned in order to fit these reference points in NGC 2264 and NGC 2362, and we have ensured that the models for the lowest mass also agree with the rotational distribution in hPer, when the disc has dissipated.

The result is shown in Fig. 1. The three sets of disc-locking parameters which allow us to reproduce the distributions satisfactorily are:

- $P_{\text{disc}} = 2.4$ days and $\tau_{\text{disc}} = 3$ Myrs,
- $P_{\text{disc}} = 3.9$ days and $\tau_{\text{disc}} = 3$ Myrs,
- $P_{\text{disc}} = 7.2$ days and $\tau_{\text{disc}} = 5$ Myrs.

The aim here is not to reproduce precisely the observed rotational distributions in these clusters, but to rather get the overall orders of magnitude correct. One should bear in mind that the uncertainties on age can be relatively important for these clusters ages. Indeed, the observed ages (data points: filled circles in Fig. 1) are obtained by isochrone fitting, and therefore are contaminated by inaccuracies in the stellar evolution models used to generate the isochrones. Moreover, dispersion in age can come from different generation of stars in the stellar forming region. Finally, concerning the stellar models which are fitted to these data points (solid lines in Fig. 1), they are also altered by the uncertainties on the birth lines location compared to what has been taken as age zero in the stellar evolution.

While the distributions in NGC 2264 and NGC 2362 are correctly reproduced by the three sets of models, only the $1.4 M_\odot$ models manage to fit the rotation distribution in hPer.

Unfortunately, given that hPer only contains stars with masses around 1.3–1.5 M_{\odot} , it does not allow us to constrain the higher mass models. At these very young age, we were not able to find clusters containing a significant number of stars of higher masses.

4. Buoyancy radius as an age indicator

For field stars on the main sequence, it is even less straightforward to determine the age with accuracy. Saio et al. (2015) mention the possibility to use the period spacing as a constraint of the evolution stage. Given the dependency of the period spacing on the rotation rate in the cavity probed by the g -modes, we would rather use the buoyancy radius as an age indicator for γ Dor stars on the main sequence.

4.1. Behaviour of the buoyancy radius P_0

The reason for this is that the buoyancy radius, P_0 , of a star is a monotonously decreasing function of age. P_0 depends on the internal structure only, via N , the Brunt-Väisälä frequency, and can be expressed as:

$$P_0 = 2\pi^2 \left(\int_{\text{gc}} \frac{N(r)}{r} dr \right)^{-1}, \quad (3)$$

$$\text{where } N(r)^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \approx \frac{g^2 \rho}{P} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + \nabla_{\mu}). \quad (4)$$

where the Brunt-Väisälä frequency is expressed by the help of g , the gravitational acceleration, P , the local pressure and Γ_1 the adiabatic exponent. $\nabla = d \ln T / d \ln P$ is the thermal gradient, ∇_{ad} the adiabatic gradient, and $\nabla_{\mu} = d \ln \mu / d \ln P$, where μ is the mean molecular weight. This last term shows the explicit contribution of the mean molecular weight gradient to the Brunt-Väisälä frequency, and hence to the buoyancy radius. The integral in Eq. (3) is computed over the g -modes cavity. We get back to this in Sect. 4.2.

In the convective core, the efficient convection induces an almost adiabatic stratification and mixes the material, N^2 is therefore equal to 0. Above the convective core, the N^2 profile depends on whether the star is on a core-contracting or core-expanding main sequence. For the physics we have considered, above around 1.3 M_{\odot} , the convective core retreats along the main sequence, and leaves behind, in the radiative zone, a region of strong molecular weight gradient ∇_{μ} . The buoyancy radius strongly depends on both the extent of the convective core, and the chemical stratification above the core. As a result, it is a good indicator of evolution on the main sequence of γ Dor stars. The evolution of a star's P_0 is then straightforward to understand: along the main sequence evolution, the chemical abundance contrast increases at the edge of the core, thereby increasing the mean molecular weight gradient ∇_{μ} , and the convective core contracts, therefore increasing the interval where N^2 is non-zero, which induces a monotonously increasing peak in the Brunt-Väisälä frequency.

The behaviour of P_0 is illustrated in Fig. 2, where it is plotted against the central hydrogen abundance, for models with varying masses (left) or varying metallicities (right). As expected, both a higher metallicity and a higher mass result in larger convective cores, and therefore a higher buoyancy radius at a given age. This degeneracy of mass and metallicity has to be carefully accounted for when comparing models with observations (see Sect. 5).

The wiggles in the buoyancy radius in Fig. 2 are likely due to the numerical implementations of the criterium for convective

stability, and its sensitivity to numerical parameters (e.g. radial resolution). This is a numerical issue often encountered in stellar evolution codes, and which does not change significantly the buoyancy radius P_0 .

4.2. Seismic measurement of the buoyancy radius and the near-core rotation

Conveniently, by making reasonable approximations, P_0 can be determined from γ Dor stars g -modes spectra. As they pulsate in high radial order g -modes, their pulsations are located in the asymptotic regime of g -modes. Without rotation, their spectra can be well approximated by the first order asymptotic theory of Tassoul (1980), which predicts that the periods of oscillation can be approximated at first order as:

$$P_{n,\ell,m}^{\text{co}} \approx \frac{P_0 (n + \epsilon)}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}}, \quad (5)$$

where n is the radial order, ℓ the angular degree, m the azimuthal order, and ϵ is nearly constant. For γ Dor stars, which are moderate to fast rotators, rotation can be accounted for through the traditional approximation of rotation (TAR) to a certain extent. The TAR assumes that a star is spherically symmetric and that the latitudinal component of the rotation vector in the Coriolis force can be neglected. We refer to Unno et al. (1989) for a complete mathematical derivation. The first authors to apply the TAR in the stellar case were Berthomieu et al. (1978). The principle is that under such assumptions, and assuming solid body rotation, the equation system of stellar oscillations including rotation is separable in terms of a radial component and the Hough functions. The Eigenvalues of the Hough functions are the $\lambda_{\ell,m}(s)$ functions which depend on the angular degree, the azimuthal order and the spin factor $s = 2P_{n,\ell,m}^{\text{co}}/P_{\text{rot}}$. In the asymptotic regime, the TAR allows us to express the period of modes in the co-rotating frame, including the effect of rotation, at first order, as:

$$P_{n,\ell,m}^{\text{co}} \approx \frac{P_0 (n + \epsilon)}{\sqrt{\lambda_{\ell,m}(s)}}. \quad (6)$$

In Christophe et al. (2018), the authors derived a new method to determine the rotation period P_{rot} and the buoyancy radius P_0 from *Kepler* observations of g -modes series in γ Dor stars. The principle is to use a set of trial rotation periods, that allows us to change from the inertial frame to the co-rotating frame of reference, and then stretch the periodogram by multiplying it by the corresponding $\sqrt{\lambda_{\ell,m}(s)}$ functions, and search for periodicities in the stretched periodogram by the mean of a direct Fourier transform. The systematic errors due to uncertainties in modes frequency determination are calculated by propagating them by means of a Monte-Carlo simulation. The authors also assess the biases induced by the use of the traditional approximation, by testing it against complete calculations performed with the ACOR code (Ouazzani et al. 2012, 2015). These inaccuracies are difficult to assess directly for each measurement, because they require the knowledge of the true stellar structure. They are therefore determined with the help of hare and hounds exercises on synthetic oscillation spectra – calculated with the non-perturbative method – and amounts to maximum 8.2% for the buoyancy radius and 16.8% for the rotation frequency in the worst case.

This method was used in order to determine the buoyancy radii and the rotation periods for the four stars previously presented in Ouazzani et al. (2017). We complete the sample with

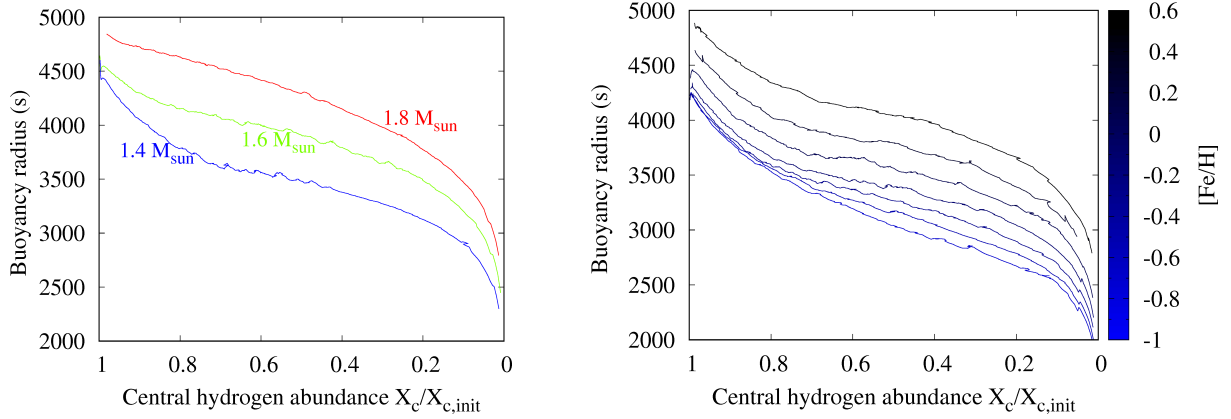


Fig. 2. Buoyancy radius as a function of central hydrogen abundance X_c (relative to the initial X_c) along main-sequence evolution. *Left:* for three different masses typical of γ Dor: 1.4 in blue, 1.6 in green and $1.8 M_{\odot}$ in red, same metallicity $[M/H] = 0.1$. The colour coding is the same as in Fig. 1. *Right:* for a $1.4 M_{\odot}$ model, with varying metallicities from $[M/H] = -0.9$ to 0.5 , with increments of 0.2 dex. The $X_c/X_{c,init}$ axis has been inverted to emphasize the behaviour with evolution. The models were computed with disc locking during 5 Myrs, to a disc rotating with a period of 7.2 days.

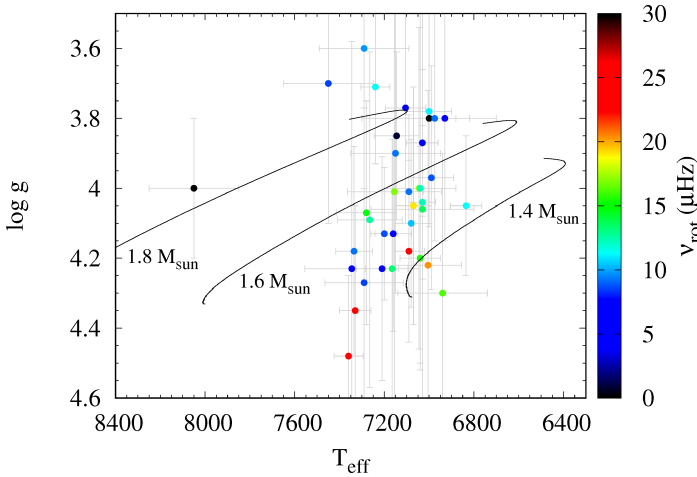


Fig. 3. Kiel diagram with the observed stars sample (coloured circles). The atmospheric data use to build this diagram were taken from Van Reeth et al. (2016) and the KASOC catalogue. The colour codes for their measured near-core rotation. To guide the eye, stellar models of 3 typical masses of γ Dor stars have been plotted in black solid lines.

a sub-set of 32 stars of the Van Reeth et al. (2015) sample. Two stars previously modelled by Kurtz et al. (2014) and Saio et al. (2015) are included in the sample. The results are given in a Kiel diagram Fig. 3, where we show that the stars in the sample cover the whole γ Dor stars instability strip. The distribution in terms of near-core rotation frequency (ν_{rot}) seem to indicate that slow core-rotators lie all over the instability strip, while the faster ones occur more in the young-and-less-massive area of the diagram.

These measurements are then compared with evolutionary models, for which we have computed P_0 using the integral expression (Eq. (3)). The rotation periods, on the one hand, are derived using the method of Christophe et al. (2018, hereafter SC18) based on the TAR that considers the star as a rigid rotator. In principle, we assume that it is equivalent to considering a rotation period averaged over the cavity of the observed modes, given that among a series of high-order g -modes the cavity extent varies little.

On the other hand, the models result from evolutionary calculations including transport of AM by the processes defined in Sect. 2. Transport by shear induced turbulence and meridional

circulation Z92 give a shellular rotation profile. Rather than a central rotation period, one should consider the near-core rotation period for comparison with observations. In order to calculate these near-core rotation periods, or angular velocities, we choose to take the average velocity over the g -modes cavity, weighted by the Brunt-Väissälä frequency:

$$\langle \Omega \rangle = \frac{\int_{gc} \Omega(r) N(r) \frac{dr}{r}}{\int_{gc} N(r) \frac{dr}{r}}. \quad (7)$$

In order to determine the integral boundaries in Eq. (3) and Eq. (7), the extent of g -modes cavity has to be determined in each of the numerous computed stellar models. Our concern was to do so, without having to calculate the oscillation spectra at each evolutionary time step. Non-adiabatic calculations in γ Dor stars (Dupret et al. 2005; Bouabid et al. 2013) showed that the excited modes had their radial orders comprised between around -15 and -50 . The lower boundary (-15) is set by the necessity of having the oscillation time-scale close to the convective turnover time-scale at the bottom of the convective envelope, while the higher boundary (-50) is set by the fact that high radial order modes are radiatively damped. Considering that the modes cavity vary little over the range of excited radial order, the g -modes cavity is determined as being the cavity for the $n = -25$ mode, which frequency is computed by the use of the Tassoul (1980) asymptotic formula, and the effect of rotation being accounted for by a Ledoux (1951) splitting. Then, the g -modes cavity is defined as the interval where the thereby determined $n = -25$ mode frequency is lower than the Brunt-Väissälä frequency and the Lamb frequency. We consider that this is close enough to an average on g -modes cavity, for a first attempt to compare with observations.

4.3. Sample of observed stars

We have gathered a total of 37 γ Dor stars, which have been observed with *Kepler* during the nominal mission. Because we want global parameters determined as precisely as possible, we have built up from the sample of spectroscopically observed stars in Van Reeth et al. (2015), to which we added the four stars mentioned in Ouazzani et al. (2017). For these last four stars, we have relied on the *Kepler* input catalogue for the atmospheric

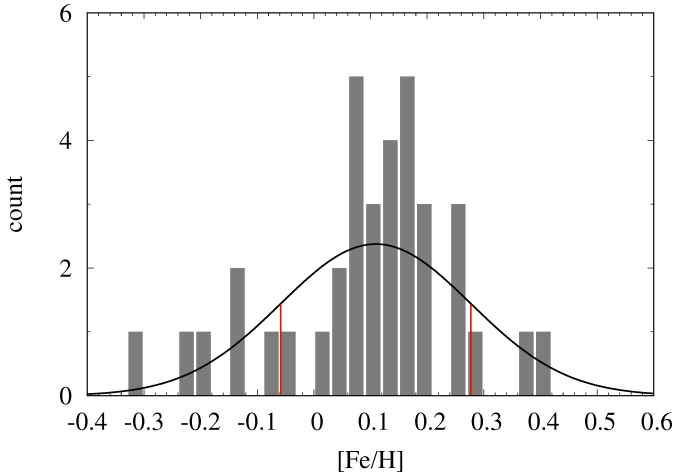


Fig. 4. Histogram of the distribution of metallicity in the sample of stars. The black line is the Gaussian fit with a mean metallicity of $\overline{[M/H]} = +0.11$ and a standard deviation $\sigma_{[M/H]} = 0.17$ dex. The red lines delimit the $\overline{[M/H]} \pm \sigma_{[M/H]}$ interval used for the computations of stellar models.

parameters. All the stars of the sample have been re-analyzed (Antoci et al., in prep.) and then run through the algorithm presented in SC18 for near-core rotation and buoyancy radius determinations. For four stars out of the 33 taken in Van Reeth et al. (2015) sample, we were not able to reliably decipher g -modes series (due to more conservative selection criteria), so we used Van Reeth et al. (2016, hereafter VR16) determinations of ν_{rot} and period spacings.

Before confronting models to observations, we have to handle the mass-metallicity degeneracy of the buoyancy radius. To do so, we explore the metallicity distribution of the sample of stars. For the four stars taken from Ouazzani et al. (2017), the metallicity was taken from the *Kepler* input catalogue, while for the rest of the stars, the values come from Van Reeth et al. (2015). The metallicities range from $[M/H] = -0.03$ to $+0.25$ with uncertainties reaching ± 0.30 dex. As illustrated in Fig. 4, they follow an overall close-to-Gaussian distribution, centred around $\overline{[M/H]} = +0.11$ with standard deviation of $\sigma_{[M/H]} = 0.17$ dex. The strategy here is to compute buoyancy radii along evolution for each of the stellar models masses we selected, and corresponding to the two metallicities: $\overline{[M/H]} - \sigma_{[M/H]}$ and $\overline{[M/H]} + \sigma_{[M/H]}$.

4.4. Comparison with Van Reeth et al. (2016)

The Christophe et al. (2018) method, used to derive the values of buoyancy radius and internal rotation of this work, consists of recovering the equidistance of period spacings by stretching the pulsation periods following the asymptotic formulation of the traditional approximation (Eq. (6)) while simultaneously inferring the rotation frequency and buoyancy radius. While suffering of the limitations inherent to the use of the asymptotic formulation of the traditional approximation, extensively reported in SC18, one of the main advantages of this method is that it is stellar-model-independent.

The first comparison with the method developed by VR16 was made in SC18 for the star KIC 12066947. Here we provide a comparison for 29 stars in our sample, showing dipolar prograde g -modes series in their seismic spectra, stars which were part of the VR16 sample originally. The comparison is presented in Fig. 5. Both methods agree very well on the determination

of the internal rotation frequency (Fig. 5, right). The differences between the two methods arise more drastically on the buoyancy radius (Fig. 5, left). In particular, for some stars (KIC 2710594, KIC 3448365, KIC 5708550, KIC 6468987, KIC 110099031 and KIC 110080103) VR16 seem to find much higher P_0 than SC18. Inspecting these stars g -modes in the ΔP versus P diagram, we find that they all present wiggly ridges. In that case, peak selection has a significant impact in the final P_0 value. The method used here for modes extraction (explained in SC18, Sect. 4.1) is more conservative than the one used for VR16. As a consequence, in our analysis, we include systematically fewer modes than VR16, but with higher confidence level. We note that in their mode selection process, after having selected a first set of modes in the spectrum, VR16 use models of period spacings including the effect of rotation in order to select additional modes. The additional peaks, selected in a very dense area of the spectrum, follow the trend imposed by the period spacing model. As a consequence, the addition of a handful of modes modifies the result noticeably for the buoyancy radius, without impacting much the rotation determination.

One should also mention that, in VR16, the buoyancy radii are taken on a grid of model, whereas our determinations are stellar-model-independent. In any case, it is worth noticing that the internal errors from SC18 are almost systematically lower than those from VR16.

5. Results

5.1. Rotational transport of angular momentum

We compare the observations to the evolutionary models including angular momentum transport as described in Sect. 2 in a near-core rotation versus buoyancy radius plane. The results are given in Fig. 8. Stars with detectable binary companions were excluded from the sample. We compared rotational evolution on the main sequence for three typical masses of γ Dor stars: $1.4 M_{\odot}$ (top), $1.6 M_{\odot}$ (middle) and $1.8 M_{\odot}$ (bottom), each time considering two metallicities: $[M/H] = -0.06$ and $[M/H] = +0.28$. In Fig. 8 (left) the evolutionary models account for transport of angular momentum via meridional circulation and shear-induced turbulence according to the formalism of Z92, as explained in Sect. 2.

The measured rotation frequencies are spread over a large range: from $0.8 \mu\text{Hz}$ for KIC 9751996, to $26.1 \mu\text{Hz}$ for KIC 7365537. But in terms of buoyancy radii, they only cover the higher half of the interval covered by the models. However, this can be explained by exploring the evolutionary tracks: the lower half of the buoyancy radius interval corresponds to the second contraction evolutionary stage, when the stars have exhausted their hydrogen reservoir, and gravitational contraction takes over. In other words, this stage lasts a very short amount of time at the end of the main sequence. For instance for a $1.8 M_{\odot}$ model, this represents around 30 Myr, that is 2.5 % of the total main-sequence duration. Statistically, there is much less chance to observe a star in that stage, than in the main sequence.

On each panel of Fig. 8, for each mass and initial condition, we have plotted two curves, corresponding to the $\pm 1\sigma$ of the metallicity distribution. The lower the metallicity, the higher the buoyancy radius is. Indeed, a lower metallicity induces a lower opacity, which impacts the radiative gradient, and therefore the limit of the convective core. The resulting increase of the extent of the convective core, generates a decrease of the integral in Eq. (3), leading to an increase of the buoyancy radius.

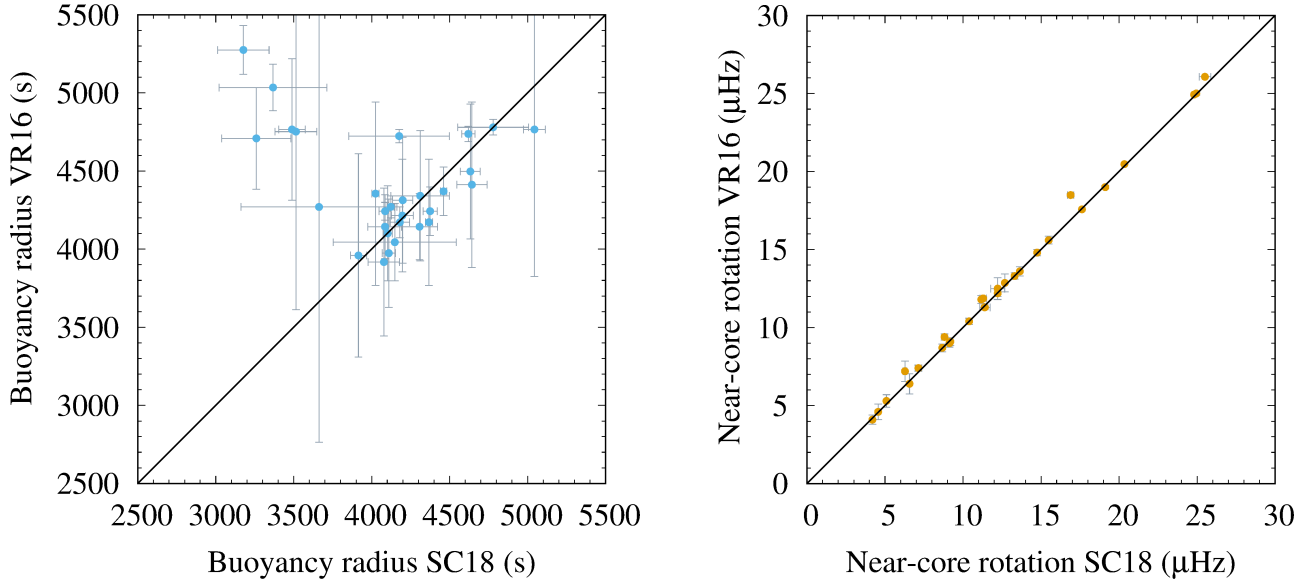


Fig. 5. Comparison between the buoyancy radii (*left*) and rotation frequencies (*right*) obtained by Van Reeth et al. (2016, VR16) and those used in this work, obtained the method developed by SC18.

Figure 6 shows the area in the $P_0 - \nu_{\text{rot}}$ plane covered by the models in Fig. 8 (left) with parameters given above, and for the initial conditions set in Sect. 3. We assume that they should be representative of the population of γ Doradus stars.

Compared to the models, the measured rotation rates seem to be globally shifted towards lower rotation. If the models agreed perfectly with the observations, we would have 40% of the data points within the shaded area, and 60 % of them evenly distributed above and below the shaded area in Fig. 6. This is certainly not the case.

In the sample studied here, there is no observed γ Dor star with rotation frequency higher than about $\sim 26 \mu\text{Hz}$, while all the models corresponding to the fast initial conditions ($P_{\text{disc}} = 2.4$ days and $\tau_{\text{disc}} = 3$ Myr) give such rotation values or higher. The stars which PMS progenitors were locked to their disc at 2.4 days are either not observed, or seem to be braked by a missing mechanism. Even for the low-mass stellar models, with a distribution of rotation periods constrained by hPer observations at 13 Myr, do not fit the observations later, on the main sequence. On the low-rotation end, even with the slowest initial conditions, the models cannot fit the observed slow rotators: 15 stars out of 37, that is 41%, fall out of the rotation interval covered by the models. 68% of the targets have metallicities within the $\pm 1\sigma$ interval. Therefore the spread in metallicity cannot explain the discrepancy between the rotation interval covered by the models and the observations.

5.2. Effect of convective overshooting

We tested the impact of core overshooting on the results. The overshooting is formalized by simple instantaneous mixing over a distance of $\alpha_{\text{ov}} H_{\text{p}}$ above the fully convective core, where H_{p} is the pressure scale height. The choice of α_{ov} is motivated by the calibration performed by Deheuvels et al. (2016) on eight solar-like stars with convective cores, using seismic inferences from *Kepler* observations. They found these stars seismic properties to be compatible with values of the overshooting parameter ranging from 0.07 to 0.18. Hence, we have tested the impact of convective overshooting using an intermediate value of $\alpha_{\text{ov}} = 0.15$. We calculated one evolutionary sequence for a $1.6 M_{\odot}$ star cor-

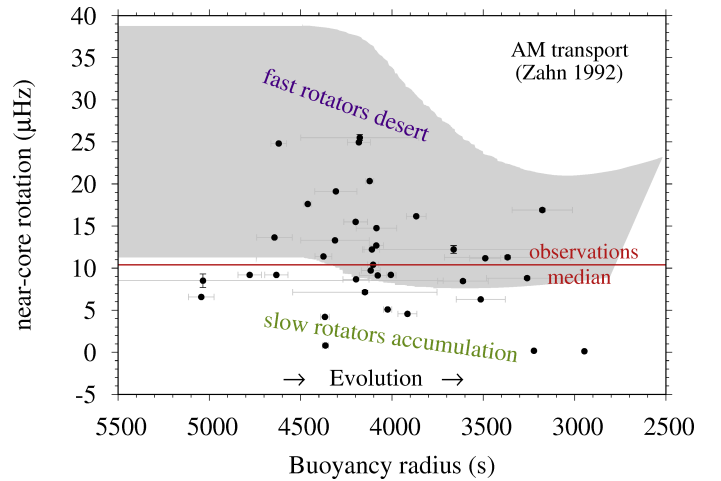


Fig. 6. Measured near-core rotation rates as a function of the buoyancy radius (black circles), error bars are taken from Van Reeth et al. (2016). The grey area represents the interval of possible rotation rates given the initial conditions set in Sect. 3, and for the transport of angular momentum as formalized by Z92. The red solid line gives the median of the rotation distribution in the main sequence observed sample.

responding to the fast initial conditions ($P_{\text{disc}} = 2.4$ days, and $\tau_{\text{disc}} = 3$ Myr, see Sect. 3) and low metallicity ($[M/H] = -0.06$), and one corresponding to the slow initial conditions ($P_{\text{disc}} = 7.2$ days, and $\tau_{\text{disc}} = 5$ Myr) and high metallicity ($[M/H] = +0.028$). Both these sequences have been computed with a core overshooting value of $\alpha_{\text{ov}} = 0.15$ (see Fig. 7, in purple). For comparison, the same sequences without overshooting have also been plotted in Fig. 7 (blue).

The main structural effect of adding overshooting above the convective core is to increase the size of the core. This has a two-fold effect in the $P_0 - \nu_{\text{rot}}$ plane. It reduces the interval on which the Brunt-Vaissala frequency N is non-zero, hence decreasing the integral which intervenes in the expression (Eq. (3)), hence resulting in an increase of the buoyancy radius, as seen on Fig. 7. Similarly, it reduces the extent of the g -modes cavity in radius,

and therefore, reduces the part of rotation profile probed by the modes (see Eq. (7)).

If the models with overshooting reproduced perfectly the observations, we should have a data set evenly distributed above and below the set of two yellow lines in Fig. 7. This is clearly not the case. Even if overshooting improves the agreement, we still are unable to explain the fast rotators desert seen in Fig. 6. On the low rotation end, while the effect on the buoyancy radius is noticeable, the impact on the rotation frequency is almost negligible, and certainly does not allow us to explain the slow rotators accumulation.

5.3. Enforcing rigid rotation

We have tested a different angular momentum transport hypothesis: solid body rotation all along evolution. This is not physically motivated, but it can be considered as a limiting case of instantaneous and highly efficient transport inside the star. The corresponding evolutionary models are confronted to observations in Fig. 8 (right). Here again, very few observed stars (and only for the models with $M = 1.8 M_{\odot}$) fall in the area corresponding to the fastest initial conditions. However, the comparison is more favourable than in the case of hydrodynamical angular momentum transport (Fig. 8, left). The real difference between the results obtained for the two transport prescriptions is at the low-rotation frequency end. The slow rotators (around $\sim 5 \mu\text{Hz}$) are much better reproduced by the models relying on the solid body assumption.

This suggests the existence of a mechanism transporting angular momentum from the core to the outer part of the star. In this study, we assumed that these stars cannot sustain generation of magnetic field through a solar-like dynamo process, therefore models do not lose AM at the surface. As a result, in the presented models, the AM transport mechanism rigidifies the rotation profile. However, the absence of constraint on the envelope rotation in these stars prevents any strong conclusions on the profile per say.

In the next subsections, we estimate the efficiency of the missing mechanism in a similar spirit as in Eggenberger et al. (2017) for the red-giant phase, in order to characterize the missing AM transport processes.

5.4. Uncertainties on the horizontal turbulent viscosity

We first attempt to extract AM from the core while remaining within the Z92 framework, by exploring the uncertainties in turbulent viscosity coefficients. It has been long known that large uncertainties remain concerning the turbulent coefficients in the formalism (see for instance Mathis et al. 2004, and references therein). In particular, the prescriptions for the horizontal coefficient of viscosity, ν_h , can differ by as much as two orders of magnitude. The results given in Sect. 5.1 are obtained with the Mathis et al. (2004) prescription. Here we choose to multiply ν_h by a factor of 10^2 . Such an increase of ν_h results in an enhancement of the meridional circulation by ensuring attenuation of the horizontal variation of the mean molecular weight (Marques et al. 2013). While it indirectly impacts the transport of chemical elements, the effect on the chemical stratification is marginal. The main effect is the enhancement of advective transport of AM through the meridional circulation.

The results of such calculations are given in Fig. 7 (yellow solid lines), by comparison with the unchanged Z92 models (purple solid lines), and the solidly rotating models (blue solid lines). This figure shows that amplifying ν_h by two orders of

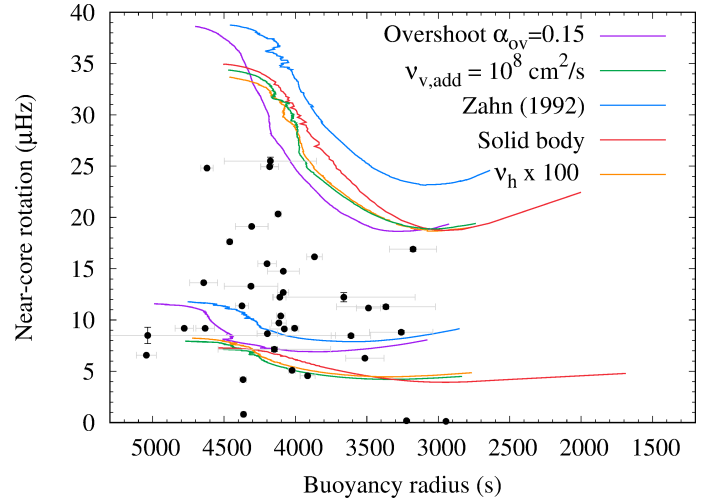


Fig. 7. Near core rotation rates as a function of the buoyancy radius. The observed values are given by the black circles. The solid lines stand for models of angular momentum transport with different prescription: Z92 without overshooting in blue (cf. Sect. 5.1), with overshooting of $\alpha_{ov} = 0.15$ (purple), with enhanced horizontal viscosity in yellow (cf. Sect. 5.4), with enhanced vertical viscosity in green (cf. Sect. 5.5), and with solid body enforced along evolution in red (cf. Sect. 5.3). These models have been computed for two models of $1.6 M_{\odot}$, one (top) corresponding to the fast rotation initial conditions given in Sect. 3, and for the lowest metallicity, and the other one (bottom) to slow initial conditions and high metallicity.

magnitude radically increases the core-to-envelope coupling to such an extent that it is equivalent to simply enforcing solid body rotation all along evolution.

The two sets of lines in Fig. 7 correspond to two combinations of metallicity and initial conditions for rotation: $[M/H] = -0.06$, $\tau_{disc} = 3 \text{ Myr}$, $P_{disc} = 2.4 \text{ days}$ for the upper one, and $[M/H] = +0.028$, $\tau_{disc} = 5 \text{ Myr}$, $P_{disc} = 7.2 \text{ days}$ for the lower one. They delimit the area where we expect to find at least 68% of the observations if the prescriptions for transport of AM are correct. Figure 7 shows that there is a clear improvement at the lower rotation end of the diagram, where an increased ν_h allows a much better agreement with observations. Indeed, 80% of the measured rotation values lie in the possible rotation-versus-buoyancy radius area. However, at the high rotation end, such an increased transport does not allow us to slow down the models with the fast initial conditions.

5.5. Additional vertical diffusion of AM

The rotational transport of angular momentum, as formalized by Z92 does not seem to satisfactorily reproduce the observed core rotation in γ Doradus stars, particularly in the fast rotation regime. Hence, additional AM transport is suspected to operate. Because the physical nature of the missing mechanism remains unclear, we choose to model its impact as an additional vertically diffusive process, which efficiency, function of the vertical viscosity coefficient $\nu_{v,add}$, has to be higher than provided by the standard Z92 processes. In the transport equation, it consists of adding $\nu_{v,add}$ to ν_v in the second term of the right hand side of Eq. (1), without modifying D_v in Eq. (2).

Different values for $\nu_{v,add}$ are tested. For this additional viscosity to have an impact on the internal transport, it has to be stronger than ν_v . Hence the process starts to be efficient for approximately $1 \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Higher values of $\nu_{v,add}$ are then tested as high

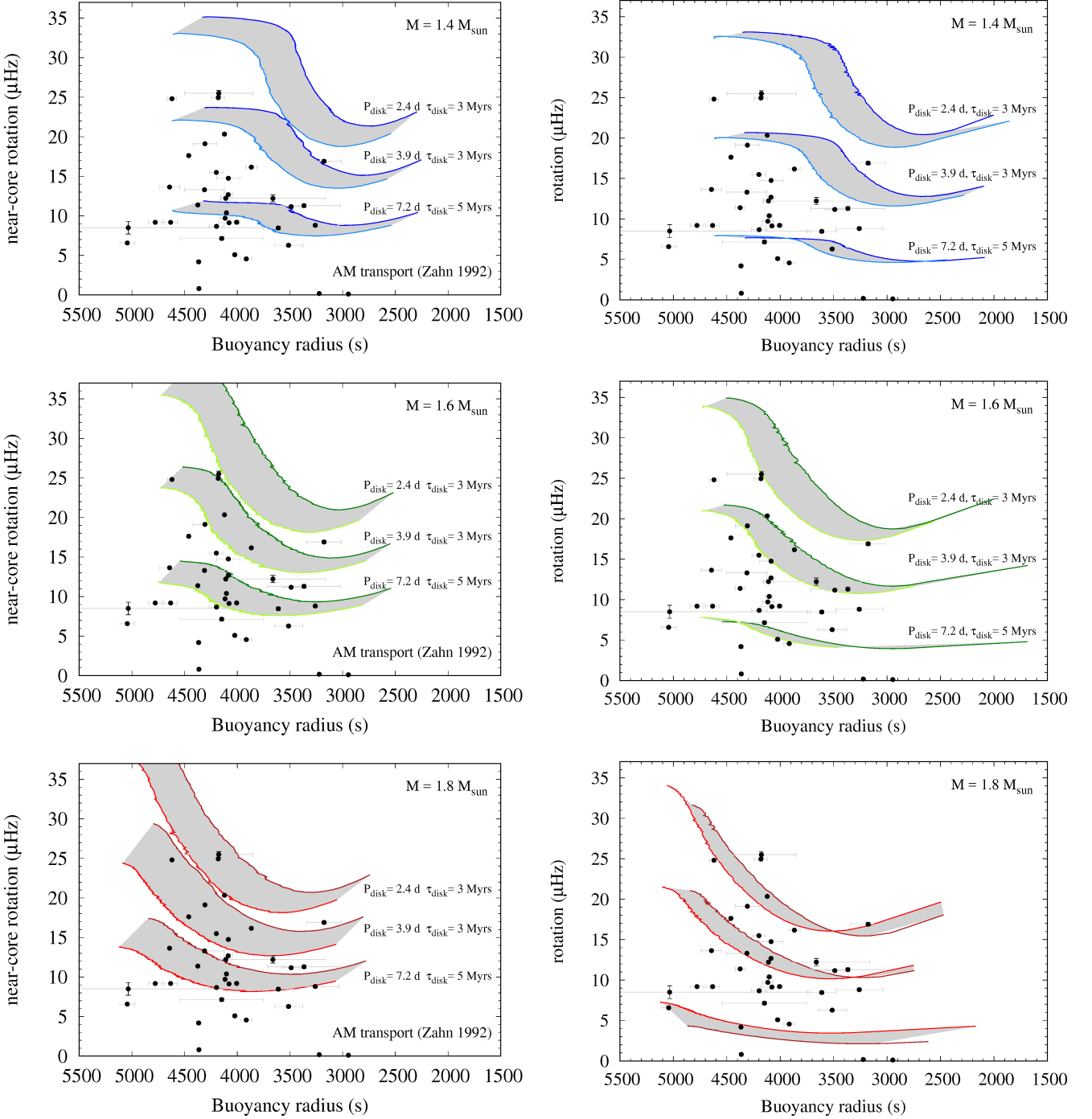


Fig. 8. Rotational evolution as a function of the buoyancy radius. We illustrate the observations in black filled circles. The grey areas represent the rotation rates versus buoyancy radius covered when the metallicity varies from $[\overline{M/H}] - \sigma_{[M/H]}$ to $[\overline{M/H}] + \sigma_{[M/H]}$, where the mean and the standard deviation of the observed sample are considered. The coloured solid lines are the evolutionary models for three typical masses of γ Dor stars: $1.4 M_{\odot}$ in blue (top), $1.6 M_{\odot}$ in green (middle) and $1.8 M_{\odot}$ in red (bottom). In each panel, the three sets of models relate to the different initial conditions set up in Sect. 3: from top to bottom: disc locking at a period of 2.4 days during 3 Myrs, 3.9 days during 3 Myrs, and 7.2 days during 5 Myrs. *Left:* evolution of the angular momentum distribution has been calculated with transport by meridional circulation and shears (Z92). *Right:* solid-body rotation is enforced all along evolution. The x-axis has been inverted so that the behaviour with evolution goes from left to right.

as $1 \times 10^8 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, the viscosity for which the evolution of the near core rotation overlaps with the one obtained assuming rigid rotation. This is illustrated Fig. 7 in green solid lines.

The value of $\nu_{v,\text{add}}$ which allows us to reproduce more than 64% of the observed rotations is found to be approximately $5 \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. In other words, in this case as in the previous

sub-section, this additional process allows us to spin down the core rotation for the models corresponding to slow initial conditions sufficiently to reproduce the observed slowest rotators satisfactorily. However, as with horizontal viscosity (Sect. 5.4), the models with fast initial conditions are not slowed down enough to be shifted into the observed regime.

6. Discussion and conclusions

We have measured near-core rotation rates of a sample of 37 γ Doradus stars on the main sequence, in order to test angular momentum transport models for intermediate-mass stars. We calculated rotational evolution of stellar models with masses typical of these stars from the PMS to the TAMS. To set the initial conditions for such evolution, we constrained simple disc-locking models to rotation distribution in young stellar clusters.

After being released from the disc, the angular momentum evolution of the stellar model is then dictated by the prescription for transport. The aim of this study is to use measurements of near core-rotation in γ Dor stars in order to constrain such prescriptions.

Before confronting evolutionary calculations to observations, it is necessary to define an evolution indicator. To that end, we have explored the dependence of the buoyancy radius P_0 (Eq. (3)) on stellar parameters, and showed that P_0 could play that role, provided the degeneracy in mass and metallicity is carefully handled.

The angular momentum transport by meridional circulation and shear-induced turbulence (as described by Z92) was first explored. Figure 6 summarizes the results obtained: such models do not allow us to reproduce the near-core rotation measured by g -modes period spacing in our sample of γ Dor stars. Not only does it fail to reach the particularly slow cores of 15 stars of the sample (slow rotators accumulation Fig. 6), but it also fails at slowing down models of stars which progenitors are the 20% of fast rotators observed in young stellar clusters (fast rotators desert Fig. 6). Considering these arguments, and as for the Sun and red giant stars, it is safe to assert that the transport of angular momentum as formalized by Z92 cannot explain the measurements of near-core rotation in main-sequence intermediate-mass stars we have at hand.

Before investigating other possible angular momentum transport processes, we evaluated the impact of core overshooting on the results obtained with the Zahn (1992)'s prescription for transport. By increasing the extent of the mixed region above the convective core, the effect of overshooting consists mainly in an increase of the buoyancy radius. Hence, while it only slightly reduces the disagreement on the fast rotators desert, the addition of core overshooting certainly does not explain the slow rotators accumulation. The dependence on the mixing length parameter value has also been explored (taking $\alpha = 1.6$ – 1.8 , as suggested in Trampedach et al. 2014, for the relevant area of the HR diagram), only to reach the same conclusions.

Furthermore, we compared the rotation measurements to models where solid-body rotation is enforced across evolution, mimicking the effect of an efficient, yet to be identified mechanism. But this hypothesis allows us to slow down the models corresponding to slow initial conditions so that more than 80% of the observed rotation velocities are recovered. The good agreement between these models and the observations, in the low rotation end, show that, as for red giant stars, in intermediate-mass stars on the main sequence, we also need a mechanism which efficiently transports angular momentum from the core of the star outward. However, the impact on the models evolved from fast initial conditions is marginal and does not allow us to explain the lack of observations in the high rotation regime, the so-called fast rotators desert (Fig. 6). Whether the thereby extracted angular momentum is preserved in the envelope, and results in rigid rotation, or is ejected outside the star through winds is not clear, and the data at hand cannot allow us to solve this issue.

Trying to characterize further such AM extraction mechanism, we have shown that a rotational evolution similar to the one with solid body rotation could be obtained in two different ways. First, remaining in the framework of Z92, such a transport can be mimicked by advective AM transport through meridional circulation enhanced by additional horizontal viscosity ($\nu_h \times 100$). Second, extraction of AM to that extent can be reached by adding vertical viscous transport with a viscosity of $\nu_{v,add} = 1 \times 10^8 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Although both transport processes allow us to reach the slow core rotations observed in γ Dor stars, they cannot explain the lack of measurement in the high rotation regime.

These results must be taken with a word of caution. The observed sample used for comparison with models here is mainly composed of *Kepler* γ Dor stars in the VR16 sample. The distribution of projected rotation velocities in this sample can reach up to about 200 km s^{-1} with an average around $\nu \sin i = 60 \text{ km s}^{-1}$. Royer (2009) compiled a large sample of stars with projected rotational velocities from the literature, and sorted them by spectral type. They found that for the spectral types covered by the known γ Dor stars (A3 to F3), the average velocities per spectral type are between 120 km s^{-1} for the stars of spectral type A3, to 50 km s^{-1} for the stars of spectral type F3. This can be explained by the fact that the sample was first gathered by Tkachenko et al. (2013) for spectroscopic analysis, avoiding too large line profile broadening caused for high values of $\nu \sin i$. This shows that the sample of stars used in the current study might suffer selection biases, and should be further investigated for completeness.

However, there seem to be a lack of AM transport process in the evolutionary models presented here, which is at work during the PMS and the main-sequence phase, and which can be efficient enough to slow down the core of intermediate-mass stars.

In the evolutionary models calculated in this work, braking through coupling to a magnetized wind has been neglected. The magnetic braking models available in 1D stellar evolution codes are much better suited for solar like stars. When stars are slightly more massive, and their external convective zones become much thinner than that of the Sun, braking laws calibrated on the solar case (Kawaler 1988) cease to be applicable. Even more sophisticated formalisms such that of Matt et al. (2015) give results, in the considered mass range, which are barely physical. We expect the stars of our sample to have masses between 1.3 and 1.9 solar masses. Therefore, some might undergo magnetic braking while others might not. The criteria for this distinction, as well as a well suited formalism which would allow us to account for this extraction of angular momentum will be investigated in future works.

However, we expect a significant part of the sample to be too massive to have a significant external convective zone. Hence, in absence of a dynamo-generated magnetic field, transport by IGWs, particularly generated by the convective core, should be explored as a possible explanation for the observed fast rotators desert (Fig. 6). Such transport could operate either during the PMS, or on the main sequence. Refining the developments of Talon & Charbonnel (2005), Charbonnel et al. (2013) investigated the effect of the transport by IGWs generated from both convective zones: from the core (for models with masses higher than about $1.6 M_\odot$) and from the envelope of PMS low and intermediate-mass stars. They have shown that IGWs could drastically reshape the internal rotation profile of these stars, in particular causing a spin down of the central rotation, when arriving to the ZAMS. Encouraged by the first rotation measurements for γ Doradus stars and slowly pulsating B stars in CoRoT and *Kepler* data, Rogers (2015) and Townsend et al. (2018) have

investigated the role of IGWs and transport by g -modes during the main-sequence for intermediate-mass stars, and have shown that those might play an important role in shaping their internal rotation profiles. However, those preliminary works rely on several assumptions which degrades their realism, and therefore do not allow us to conclude quantitatively on the matter of interest here, and the issue of a missing mechanism remains open.

While enforcing the core spin down, such a mechanism would not necessarily induce rigid rotation. Hence, on the asteroseismic side, additional constraints on the rotation radial differential rotation would allow us to put stronger constraints on the missing mechanism. Recent attempts to measure internal differential rotation (Van Reeth et al. 2018, and references therein) have resulted in finding a dozen of γ Doradus stars with rigid rotation profiles. Further efforts in that direction are needed in order to provide statistical significance and allow us to provide robust constraints for angular momentum transport processes.

Acknowledgements. This research was supported by the CNES. The authors would like to thank Marc-Antoine Dupret and Morgan Deal for fruitful discussions.

References

- Abt, H. A., & Morrell, N. I. 1995, *ApJS*, **99**, 135
- Affer, L., Micela, G., Favata, F., Flaccomio, E., & Bouvier, J. 2013, *MNRAS*, **430**, 1433
- Alexander, D. R., & Ferguson, J. W. 1994, *ApJ*, **437**, 879
- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., Gallet, F., & Bouvier, J. 2016, *A&A*, **587**, A105
- Angulo, C., Arnould, M., Rayet, M., et al. 1999, *Nucl. Phys. A*, **656**, 3
- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., & Scott, P. 2009, *ARA&A*, **47**, 481
- Beck, P. G., Montalbán, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, **481**, 55
- Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015, *A&A*, **579**, A31
- Berthomieu, G., Gonczi, G., Graff, P., Provost, J., & Rocca, A. 1978, *A&A*, **70**, 597
- Böhm-Vitense, E. 1958, *ZAp*, **46**, 108
- Bouabid, M.-P., Dupret, M.-A., Salmon, S., et al. 2013, *MNRAS*, **429**, 2500
- Bouvier, J., Forestini, M., & Allain, S. 1997, *A&A*, **326**, 1023
- Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, *ApJ*, **788**, 93
- Casagrande, L., Flynn, C., Portinari, L., Girardi, L., & Jimenez, R. 2007, *MNRAS*, **382**, 1516
- Chaboyer, B., & Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, **253**, 173
- Charbonnel, C., Decressin, T., Amard, L., Palacios, A., & Talon, S. 2013, *A&A*, **554**, A40
- Christophe, S., Ballot, J., Ouazzani, R.-M., Antoci, V., & Salmon, S. J. A. J. 2018, *A&A*, **618**, A47
- Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, *ApJ*, **756**, 19
- Deheuvels, S., Brandão, I., Silva Aguirre, V., et al. 2016, *A&A*, **589**, A93
- Dupret, M.-A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., & Scuflaire, R. 2005, *A&A*, **435**, 927
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *A&A*, **544**, L4
- Eggenberger, P., Lagarde, N., Miglio, A., et al. 2017, *A&A*, **599**, A18
- Formicola, A., Imbriani, G., Costantini, H., et al. 2004, *Phys. Lett. B*, **591**, 61
- Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., et al. 2017, *A&A*, **604**, A40
- Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., & Brown, B. 2014, *ApJ*, **796**, 17
- Gallet, F., & Bouvier, J. 2013, *A&A*, **556**, A36
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, **316**, 1591
- Gehan, C., Mosser, B., & Michel, E. 2016, ArXiv e-prints [arXiv:1612.05414]
- Iglesias, C. A., & Rogers, F. J. 1996, *ApJ*, **464**, 943
- Irwin, J., Hodgkin, S., Aigrain, S., et al. 2008, *MNRAS*, **384**, 675
- Kawaler, S. D. 1988, *ApJ*, **333**, 236
- Keen, M. A., Bedding, T. R., Murphy, S. J., et al. 2015, *MNRAS*, **454**, 1792
- Kurtz, D. W., Saio, H., Takata, M., et al. 2014, *MNRAS*, **444**, 102
- Ledoux, P. 1951, *ApJ*, **114**, 373
- Maeder, A., & Zahn, J. 1998, *A&A*, **334**, 1000
- Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, *A&A*, **549**, A74
- Mathis, S., & Zahn, J. 2004, *A&A*, **425**, 229
- Mathis, S., Palacios, A., & Zahn, J.-P. 2004, *A&A*, **425**, 243
- Matt, S. P., MacGregor, K. B., Pinsonneault, M. H., & Greene, T. P. 2012, *ApJ*, **754**, L26
- Matt, S. P., Brun, A. S., Baraffe, I., Bouvier, J., & Chabrier, G. 2015, *ApJ*, **799**, L23
- Moralex, E., Artemenko, S., Bouvier, J., et al. 2013, *A&A*, **560**, A13
- Morel, P. 1997, *A&AS*, **124**, 597
- Morel, P., & Lebreton, Y. 2008, *A&AS*, **316**, 61
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, *A&A*, **548**, A10
- Murphy, S. J., Fossati, L., Bedding, T. R., et al. 2016, *MNRAS*, **459**, 1201
- Ouazzani, R.-M., Dupret, M.-A., & Reese, D. R. 2012, *A&A*, **547**, A75
- Ouazzani, R.-M., Roxburgh, I. W., & Dupret, M.-A. 2015, *A&A*, **579**, A116
- Ouazzani, R.-M., Salmon, S. J. A. J., Antoci, V., et al. 2017, *MNRAS*, **465**, 2294
- Peimbert, M., Luridiana, V., & Peimbert, A. 2007, *ApJ*, **666**, 636
- Rogers, T. M. 2015, *ApJ*, **815**, L30
- Rogers, F. J., Swenson, F. J., & Iglesias, C. A. 1996, *ApJ*, **456**, 902
- Royer, F. 2009, in *The Rotation of Sun and Stars*, Lecture Notes in Physics (Berlin: Springer Verlag), 765, 207
- Saio, H., Kurtz, D. W., Takata, M., et al. 2015, *MNRAS*, **447**, 3264
- Schatzman, E. 1962, *Annales d'Astrophysique*, **25**, 18
- Schmid, V. S., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015, *A&A*, **584**, A35
- Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., et al. 1998, *ApJ*, **505**, 390
- Talon, S., & Charbonnel, C. 2005, *A&A*, **440**, 981
- Talon, S., Zahn, J., Maeder, A., & Meynet, G. 1997, *A&A*, **322**, 209
- Tassoul, M. 1980, *ApJS*, **43**, 469
- Tkachenko, A., Aerts, C., Yakushechkin, A., et al. 2013, *A&A*, **556**, A52
- Townsend, R. H. D., Goldstein, J., & Zweibel, E. G. 2018, *MNRAS*, **475**, 879
- Trampedach, R., Stein, R. F., Christensen-Dalsgaard, J., Nordlund, Å., & Asplund, M. 2014, *MNRAS*, **445**, 4366
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial Oscillations of Stars*, 2nd edn. (Tokyo: University of Tokyo Press)
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015, *ApJS*, **218**, 27
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, *A&A*, **593**, A120
- Van Reeth, T., Mombarg, J. S. G., Mathis, S., et al. 2018, *A&A*, **618**, A24
- Venuti, L., Bouvier, J., Cody, A. M., et al. 2017, *A&A*, **599**, A23
- Zahn, J. 1992, *A&A*, **265**, 115

Part II

Seismic probing of stellar tachoclines

Chapter 5

From the solar tachocline to stellar tachoclines

Interfaces between radiative and convective zones involve complex multidimensional physics and remains a major source of uncertainty in stellar models. Rotation, magnetism, convection, radiation, shearing, instabilities, and waves all interplay in a thin layer of the star making it especially difficult to model. In 1D stellar models, these interfaces are treated in a crude manner and are parametrised with one or several free parameters that are not well constrained (e.g. [Saslaw & Schwarzschild, 1965](#); [Shaviv & Salpeter, 1971](#); [Roxburgh, 1978](#); [Zahn, 1991](#); [Freytag et al., 1996](#); [Dintrans, 2009](#); [Pratt et al., 2017](#); [Christensen-Dalsgaard et al., 2018](#)), leading to uncertainties in stellar parameter estimates.

Main-sequence stars that possess a convective core ($M \gtrsim 1.1 M_{\odot}$) are a striking example. Mixing and transport processes occurring at the interface between the convective core and the above radiative layers can extend the central mixed zone and therefore increase the amount of hydrogen fuel available for nuclear reactions, meaning that the star spends more time on the main sequence. As a result, precision in stellar age determination, which is critical for the characterisation of exoplanetary systems and galactic archaeology studies, may be as low as 30% ([Lebreton et al., 2014](#)). Observational evidence for such an extra-mixing has been gathered for tenths of years in the literature. Model calibration on observations of eclipsing binaries (e.g. [Andersen et al., 1990](#); [Ribas et al., 2000b](#); [Stancliffe et al., 2015](#); [Claret & Torres, 2018](#)), open clusters (e.g. [Maeder & Mermilliod, 1981](#); [Rosvick & Vandenberg, 1998](#)) or seismic diagnostics in solar-like pulsating stars (e.g. [Montalbán et al., 2013](#); [Deheuvels et al., 2016](#)) and main-sequence classical pulsators (e.g. [Moravveji et al., 2015, 2016](#)) all agree on the necessity to take into account extra-mixing processes beyond the traditional Schwarzschild criterion. Nevertheless, no clear consistent picture has been depicted about the nature of these processes, the extent of the extra-mixed region and the dependence on stellar parameters.

Similar open questions subsist for the physical processes taking place at the base of the convective envelope of low-mass stars ($0.8 \lesssim M \lesssim 1.4 M_{\odot}$). In this regard, the Sun is the most well-studied star. Seismic data of exquisite quality could be combined with independent estimates of solar parameters (for instance the age determined by meteoritic measurements) to perform detailed solar modelling and helioseismic inversions of its internal structure. An important discovery of these investigations is the existence of a thin shear layer in between the convective envelope – in differential rotation – and the radiative interior – in quasi-rigid rotation. In a seminal paper, [Spiegel & Zahn \(1992\)](#) proposed to refer to this region as the solar *tachocline*¹, in analogy with the *thermocline* of oceans on Earth. It should be noted that, although

¹From Ancient Greek, *tachos* (ταχος) = speed and *klinó* (κλινω) = to cause to bend.

the tachocline originally refers to the layer connecting the two different rotation regimes of the Sun, it almost coincides with the base of the convective envelope, which is classically set by the Schwarzschild criterion. Therefore, the two expressions may be used indistinctly in the literature according to authors' concerns (see [Hughes et al., 2007](#), Chapter 14, for an interesting discussion). Out of pure curiosity, the tachocline is an important topic of study for stellar physics. It is established that the tachocline plays a major role in the solar dynamo (see [Charbonneau, 2014](#), for a recent review). Thus, a better knowledge of the dynamics of the tachocline is of great interest to nourish our understanding of solar (and stellar) dynamos. By extension, more will be known on the impact of magnetic fields on stellar structure and evolution of low-mass stars. Furthermore, there is evidence for mixing processes taking place under the convective zone (e.g. [Zahn, 1991](#)). For instance, the lithium surface abundance of the Sun is depleted by a factor of ~ 150 compared to meteoritic measurements ([Asplund et al., 2009](#)). The temperature in and at the base of the convective zone is significantly lower than that required to destruct lithium by thermonuclear reactions ($T \sim 2.5 \times 10^6$ K), implying that there has been some kind of mixing under the convective zone down to a region where the lithium can be destroyed (e.g. [Böhm, 1963](#); [Ahrens et al., 1992](#); [Chaboyer, 1998](#); [Schlattl & Weiss, 1999](#)).

Two problems however arise when studying the solar tachocline. First, it is too thin to be properly resolved by seismic inversions, which hinders our ability to constrain the physics at the interface. Furthermore, the Sun is only an example of a star holding such a layer, meaning that it cannot tell us how the physics involved varies with stellar parameters. Hence, as for convective core boundary mixing, we are left with no global satisfactory theory that describes how heat, chemical species and angular momentum are transported in the stably stratified layers right below the convective zone. In this part of the manuscript, I explore a lead to make progress on this subject by investigating *stellar* tachoclines rather than that of the Sun. This chapter (Chap. 5) briefly reviews the main results of helioseismic studies (Sect. 5.1) and our current knowledge of the solar tachocline (Sect. 5.2). I also introduce the current observational context with the results of the *Kepler* LEGACY sample project (Sect. 5.3), on which the work presented here relies. In Chapter 6, I focus on bringing constraints on the extent of penetrative convection under the convective envelope using the seismic signature left by acoustic glitches in LEGACY stars in combination with their asteroseismic modelling.

N.B. In this thesis, I have adopted the terminology employed by [Zahn \(1991\)](#) in which *overshooting* and *penetrative convection* are distinguished on the basis of the Péclet number (Pe) of the flow. This dimensionless number expresses the ratio of the turn-over time of convective motions to the thermal diffusion time. *Overshooting* describes convective motions that adjust fastly to the temperature gradient by diffusion while penetrating the stable zone (low Pe). The temperature gradient remains thus close to radiative in the convectively stable layers but chemical elements and momentum can be transported to substantial distances as convective motions are weakly braked by the buoyancy. *Penetrative convection* (PC) designates convective motions that keep most of their heat energy when penetrating the stratified zone (high Pe). The temperature gradient is then close to adiabatic in the penetrative region.

5.1 The internal structure and rotation profile of the Sun

5.1.1 Calibrating models of the Sun

As the closest star to the Earth, the Sun is the best-characterised star and has naturally become a reference star for stellar modelling and tests of our current knowledge of stellar physics. We have independent and extremely well-constrained estimates of solar fundamental parameters (see Table 5.1), although at the exception of the present-day photospheric chemical composi-

Table 5.1
Solar properties (as fixed in CESAM)

Quantity	Symbol	Value	Reference
Mass	M_{\odot}	1.98919×10^{33} g	Lite (1994)
Radius	R_{\odot}	6.9599×10^{10} cm	Allen (1973)
Luminosity	L_{\odot}	3.846×10^{33} erg · s ⁻¹	Willson et al. (1986)
Age	t_{\odot}	4.57×10^9 years	Bahcall et al. (1995)
Effective temperature	$T_{\text{eff},\odot}$	5777 K	
Metal-to-hydrogen mass ratio	$(Z/X)_{\odot}^{\text{GN93}}$	0.0245	Grevesse & Noels (1993)
...	$(Z/X)_{\odot}^{\text{AGSS09}}$	0.0181	Asplund et al. (2009) (photospheric)

tion. Based on sophisticated 3D non-local thermodynamic equilibrium (NLTE) models of radiative transfer and updated atomic data, the solar abundances derived by Asplund et al. (2009) are presumably the most accurate. However, the abundances obtained by Grevesse & Noels (1993) with 1D LTE models, are more consistent with helioseismology and the physics of stellar models. This inconsistency is commonly known and usually referred as the “solar abundance problem”. At this date, no definitive answer has been found to this issue but various leads have been investigated in the literature (see e.g. Bergemann & Serenelli, 2014, for a review). We will return to it in more details in Sect. 5.1.2.

Using these measurements and a given set of input physics, one may then *calibrate* a solar model. This calibration consists in optimising the free parameters of a $1M_{\odot}$ stellar model – initial helium mass fraction Y_0 , initial metal mass fraction Z_0 and convection parameter α – to best reproduce the solar observed properties L_{\odot} , R_{\odot} and $(Z/X)_{\odot}$ at the solar age t_{\odot} .

Oscillation mode properties are sensitive to the physical conditions inside their resonant cavity. Knowledge of the p -mode frequencies then gives direct information on the internal structure of the Sun. One approach to use this information consists in simply adding the frequencies or combinations thereof as constraints in the search of an optimal model. Nonetheless, this approach (forward modelling) has the major drawback that the optimal model is very dependent on the input physics of stellar models and suffers from the inadequacies of 1D models. To go further in the seismic inference, one has to formulate the issue as an *inverse problem*: given a set of observed frequencies, how does one need to change the structure of the optimal model to reconcile model and observed frequencies?

5.1.2 Inversion of the solar internal structure

The equations of oscillations around an equilibrium stellar structure (Eqs. 1.31–1.33) may be reformulated as an eigenvalue problem of the form

$$\mathfrak{L}(\xi_{n,\ell}) = -\omega_{n,\ell}^2 \xi_{n,\ell}, \quad (5.1)$$

where $\xi_{n,\ell}$ and $\omega_{n,\ell}$ are respectively the displacement vector and angular frequency of the mode (n, ℓ) . \mathfrak{L} is a Hermitian differential operator defined as

$$\mathfrak{L}(\xi_{n,\ell}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla p \nabla \cdot (\rho \xi_{n,\ell}) - \frac{1}{\rho} \nabla (\nabla p \cdot \xi_{n,\ell}) - \frac{1}{\rho} \nabla (c^2 \rho \nabla \xi_{n,\ell}) + \nabla \left[G \int \frac{\nabla \cdot (\rho \xi_{n,\ell}) \mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right]. \quad (5.2)$$

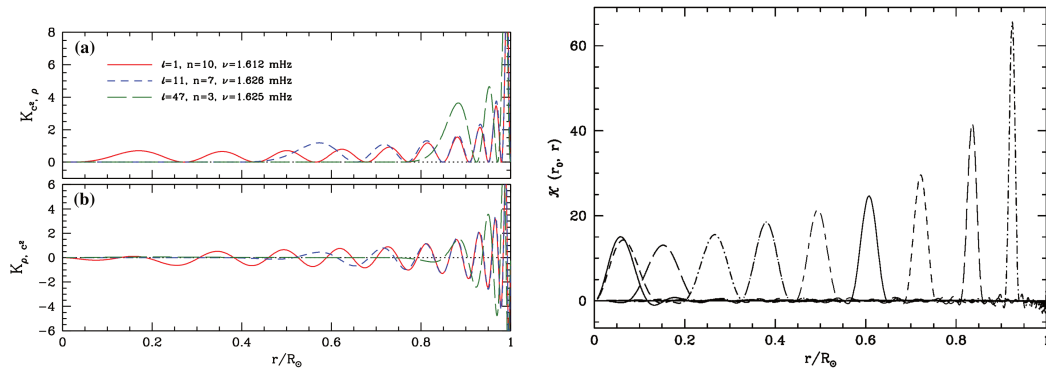


Figure 5.1: *Left panel:* Examples of structural kernels $K_{c^2, \rho}^{n, \ell}$ and $K_{\rho, c^2}^{n, \ell}$. *Right panel:* Examples of averaging kernels \mathcal{K} obtained with the SOLA method (see text). Figures are courtesy of Basu (2016).

The relation between p mode frequencies and the variables of the structure c^2 and ρ is highly non-linear meaning that Eq. 5.1 cannot be inverted as it is. Since \mathcal{L} is Hermitian, we can apply the variational principle to linearise the problem around a reference model,

$$(\mathcal{L} + \delta\mathcal{L})(\xi_{n, \ell} + \delta\xi_{n, \ell}) = -(\omega_{n, \ell} + \delta\omega_{n, \ell})^2 (\xi_{n, \ell} + \delta\xi_{n, \ell}). \quad (5.3)$$

The reference model must be sufficiently close to the real Sun so that a small difference of structure stays linearly related to the corresponding variation in the eigenfrequencies $\delta\omega_{n, \ell}$. Such a model is usually obtained by means of forward modelling as was described in Sect. 5.1.1. After some algebra, the relative differences in frequency can be expressed in terms of the relative differences in density ($\delta\rho/\rho$) and squared soundspeed ($\delta c^2/c^2$) through the expression,

$$\frac{\delta\omega_{n, \ell}}{\omega_{n, \ell}} = \int K_{c^2, \rho}^{n, \ell}(r) \frac{\delta c^2}{c^2}(r) dr + \int K_{\rho, c^2}^{n, \ell}(r) \frac{\delta\rho}{\rho}(r) dr + F_{\text{surf}}(\omega_{n, \ell}), \quad (5.4)$$

where the structural kernels $K_{c^2, \rho}^{n, \ell}$ and $K_{\rho, c^2}^{n, \ell}$ are known functions of the reference solar model. They express the sensitivity of the mode (n, ℓ) to the structure. The left panel of Fig. 5.2 gives examples of structural kernels. The term F_{surf} is a slowly varying function of frequency that accounts for near-surface effects.

Two groups of techniques are generally employed to invert Eq. 5.4 – the method of Regularised Least-Squares (RLS) and the Optimally Localised Averages (OLA) method. The RLS technique consists in fitting $\delta c^2/c^2$ and $\delta\rho/\rho$ to minimise the relative differences in frequency $\delta\omega_{n, \ell}/\omega_{n, \ell}$ between the model and observations. The OLA method linearly combines the frequency differences so that the corresponding *averaging* kernels \mathcal{K} are localised at a particular radius r_0 where one would like to estimate $(\delta c^2/c^2)$ and $(\delta\rho/\rho)$. Two variants of this latter method exist – the Multiplicative and Subtractive OLA (MOLA/SOLA). This is not the scope of this chapter to expose the details of these implementations although it is interesting to point out that the SOLA approach is much less computationally expensive compared to the MOLA method. We refer the reader to, e.g. Thompson et al. (2003), for the technical aspects. Examples of averaging kernels in the SOLA implementation are provided on the right panel of Fig. 5.2.

Relative differences of c^2 and ρ between the Sun and Model S of Christensen-Dalsgaard et al. (1996) are plotted in Fig. 5.2. This inversion uses the frequency set of Basu et al. (1997), which combines data from the LOWL instrument and the BiSON network of telescopes to get mode frequencies up to $\ell = 99$. Remarkably, the relative differences in squared soundspeed and density are overall very low, demonstrating the power of helioseismology to constrain the solar

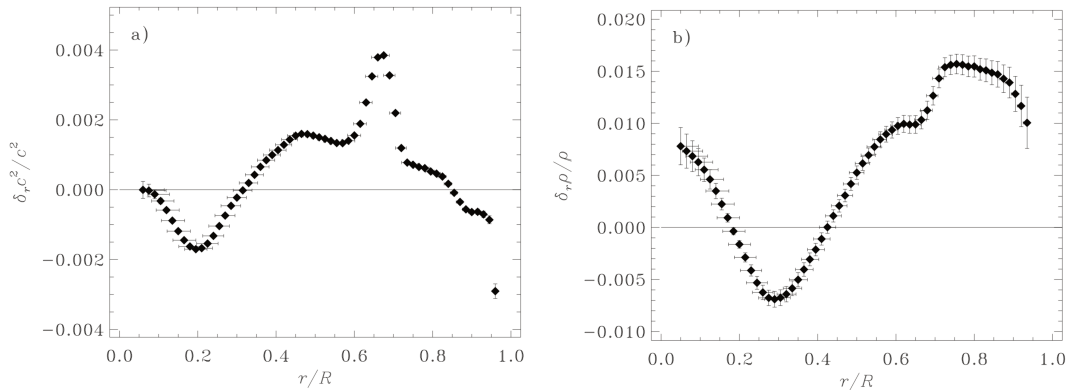


Figure 5.2: Inversion of the squared soundspeed (a) and density (b) profiles of the Sun, expressed as relative differences to the reference model (Model S, Christensen-Dalsgaard et al., 1996). Horizontal errorbars represent the resolution of the average kernels. Vertical errorbars are $1\text{-}\sigma$ errors on relative differences estimated from the inversion. Figures are courtesy of Aerts et al. (2010, p.512).

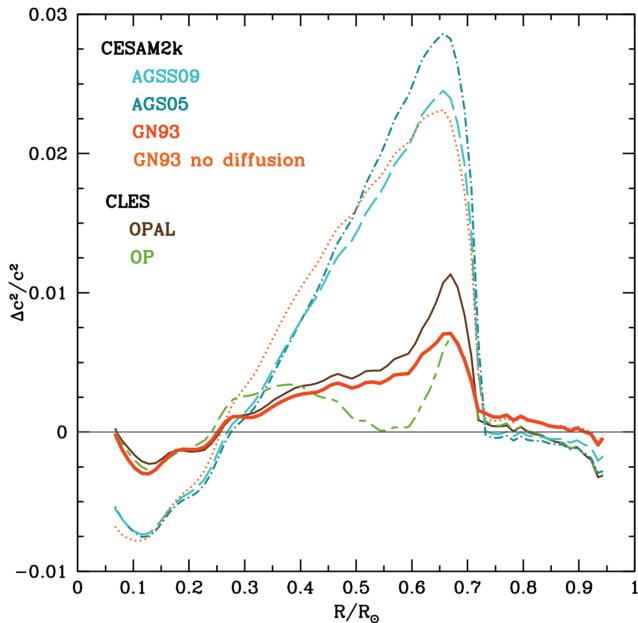
interior. Some highly significant mismatches occur nonetheless. For the soundspeed profile, the region at and below the convective envelope ($r/R_{\odot} \sim 0.65$) seems to be especially inadequately modelled due to the shortcomings of 1D standard models. The base of the convective zone is usually set by the Schwarzschild criterion at the location where the acceleration of convective motions cancels out. However, these latter motions have a non-zero velocity at the bottom of the convective zone and are likely to penetrate into the stably stratified region therefore modifying the temperature and/or chemical gradients and consequently the soundspeed (see e.g. Christensen-Dalsgaard et al., 2011; Zhang & Li, 2012; Christensen-Dalsgaard et al., 2018; Jørgensen & Weiss, 2018). Furthermore, this region is also where the tachocline is located. Rotationally- and magnetically-induced processes, which are not included in the standard model, could very possibly intervene here.

I shall add that identifying the causes of the acoustic anomaly under the BCZ has become more complex with the progressive revision of the solar photospheric element abundances. Over the years, the present metal-to-hydrogen abundance ratio of the Sun, $(Z/X)_{\odot}$, has been considerably reduced, passing from $(Z/X)_{\odot}^{\text{GN93}} = 0.0245$ in Grevesse & Noels (1993), $(Z/X)_{\odot}^{\text{AGS05}} = 0.0165$ in Asplund et al. (2005), to $(Z/X)_{\odot}^{\text{AGSS09}} = 0.0181$ in Asplund et al. (2009). As shown on Fig. 5.3, solar models computed with the updated abundances are in strikingly worse agreement with the solar structure than the GN93 solar model. Assuming that the new solar mixtures are accurate, various solutions have been tested in the literature such as for instance an increase of opacity (Christensen-Dalsgaard et al., 2009; Villante, 2010) or a larger neon abundance (e.g. Bahcall et al., 2005; Antia & Basu, 2005). It is yet unsure what is the correct solution as none of them seems persuasive enough (Bergemann & Serenelli, 2014, for a review). The solar modelling problem was revisited recently by Buldgen et al. (2019). By combining multiple structural inversions (of the adiabatic soundspeed, an entropy proxy and the Ledoux discriminant), they find that the acoustic anomaly likely results from multiple factors including an increase in opacity and a localised additional mixing at the base of the convective zone.

5.1.3 Inversion of the rotation profile

In case of the Sun, the rotation is sufficiently slow so that the first-order perturbative theory approximates reasonably well how the resonant p modes are affected by rotation. The mode

Figure 5.3: Structural inversions for various input physics of the reference model. Tests include chemical mixture: GN93 (Grevesse & Noels, 1993), AGS05 (Asplund et al., 2005), AGSS09 (Asplund et al., 2009); and opacities: OPAL (Iglesias & Rogers, 1996), OP (Badnell et al., 2005). Inversion for a reference model computed with GN93's chemical mixture but no diffusion is also shown. Figure courtesy of Y. Lebreton.



frequencies, which are no longer degenerate in m , are then given by

$$\omega_{n,\ell,m} = \omega_{n,\ell,0} + m \int_0^{R_\odot} \int_0^\pi K_{n,\ell,m}(r,\theta) \Omega(r,\theta) r dr d\theta \quad (5.5)$$

where the rotational kernel $K_{n,\ell,m}$ expresses the sensitivity of each mode (n, ℓ, m) to the rotation profile $\Omega(r, \theta)$. From the variation of sensitivity between modes, the rotation can be estimated as a function of position by means of inversion techniques. At a given radius r_0 and colatitude θ_0 , we may write the angular rotation frequency under the following form,

$$\Omega(r_0, \theta_0) = \sum_{n,\ell,m} c_{n,\ell,m}(r_0, \theta_0) d_{n,\ell,m} \quad (5.6)$$

where $c_{n,\ell,m}$ are the inversions coefficients and,

$$d_{n,\ell,m} = \frac{1}{2m} (\omega_{n,\ell,m} - \omega_{n,\ell,-m}) = \int_0^{R_\odot} \int_0^\pi K_{n,\ell,m}(r,\theta) \Omega(r,\theta) r dr d\theta. \quad (5.7)$$

Combining Eq. (5.6) and (5.7) we thus obtain,

$$\Omega(r_0, \theta_0) = \int_0^{R_\odot} \int_0^\pi \sum_{n,\ell,m} c_{n,\ell,m}(r_0, \theta_0) K_{n,\ell,m}(r,\theta) \Omega(r,\theta) r dr d\theta \quad (5.8)$$

$$= \int_0^{R_\odot} \int_0^\pi \mathcal{K}(r_0, \theta_0; r, \theta) \Omega(r, \theta) r dr d\theta. \quad (5.9)$$

The averaging kernels \mathcal{K} are constructed in order to peak at a particular location (r_0, θ_0) , the width of the peak giving us an idea of the resolution of the inversion. Both the OLA and RLS techniques may be used to invert the rotation profile, with some adjustments to suit this particular problem (see e.g. Thompson et al., 2003, for details). Figure 5.4 shows examples of 2D averaging kernels for the SOLA method. Notably, the resolution of averaging kernels deteriorates with depth. This is due to the fact that, as ℓ increases, the lower turning point of modes move closer and closer to the surface. In other words, less constraints are available with depth, which enlarges the kernels. In fact, any inference on the solar rotation profile is very uncertain under $r/R_\odot \sim 0.20$, at least from p modes. Solar g modes would put tight constraints on the solar core rotation, however, no strong evidence supports their detection at this date (Appourchaux et al., 2010; Fossat et al., 2017; Appourchaux & Corbard, 2019).

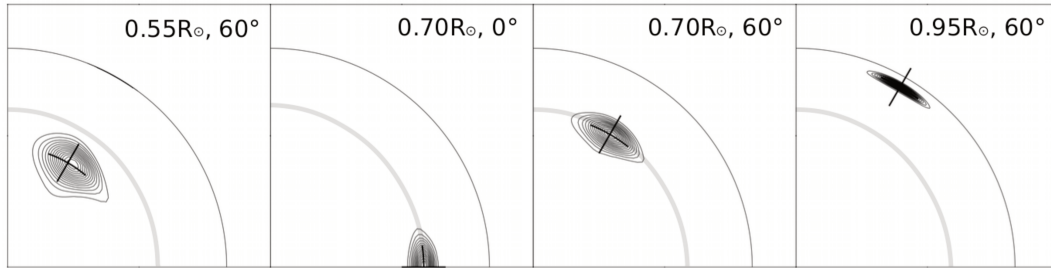


Figure 5.4: Example of 2D average kernels \mathcal{K} for the inversion of the solar rotation profile with the SOLA implementation (contour plots). Crosses show the targeted locations (r_0, θ_0) of the kernels, which are also indicated in upper right corners. The grey zone represents the location and radially-averaged width of the tachocline. Adapted from [Aerts et al. \(2010, p.524\)](#).

Figure 5.5:

2D solar rotation profile inverted using the SOLA technique on MDI data. Dashed line marks the base of the convective zone. Figure courtesy of [Thompson et al. \(2003\)](#).

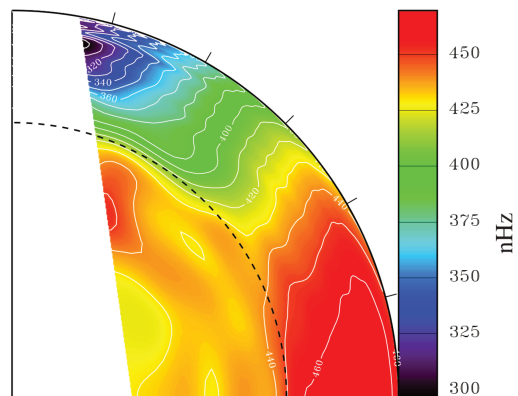


Figure 5.5 displays the 2D rotation profile inverted by [Schou et al. \(1998\)](#) from MDI data (modes of $\ell \leq 250$, [Kosovichev et al., 1997](#)). The inversions reveal that the convective envelope rotates faster at the equator than at the poles (i.e. latitudinal differential rotation) while the radiative interior is more or less rotating uniformly. The two regimes merge at the base of the convective zone in a thin shear layer called the tachocline ($r/R_\odot \sim 0.7$). I shall indicate here that the averaging kernels are too broad to fully resolve this layer, as can be seen from the two middle panels of Fig. 5.4. The localisation of the kernels at $0.7R_\odot$ (represented by the contours in Fig. 5.4) is much larger than the radially-averaged width of the tachocline (grey zone). In the next section (Sect. 5.2), I briefly review the key results on the solar tachocline to better highlight current questions on the physics of solar and stellar tachoclines.

5.2 The solar tachocline: characterisation and current issues

5.2.1 Structure of the tachocline

Location and width

Inversions of the solar rotation profile have a limited resolution fixed by the width of average kernels, which themselves depend on the number and precision of rotational splittings. As mentioned earlier, the tachocline is too thin to be resolved by inversions. To locate and characterise the width of the tachocline, one has to make further assumptions about this transitional layer and model forward how the rotation rate varies with depth.

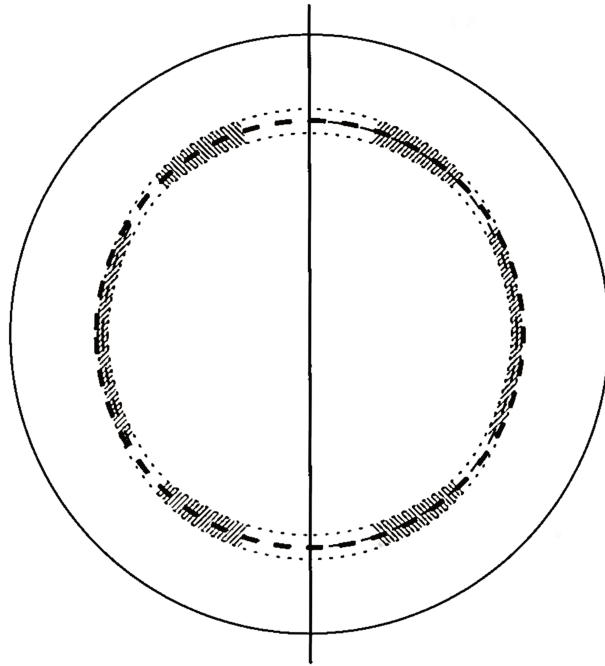


Figure 5.6:

Schematic view of the solar tachocline. Thin dashed lines mark its location while hatch zones represent its width (where it could be determined). Thick dashed line is the base of the convective zone ($r/R_{\odot} \sim 0.71$), vertical line the rotation axis. Figure courtesy of Hughes et al. (2007, p. 72)

Two *ad hoc* functional forms have been used in the literature. Kosovichev (1996) parametrised the transition in the rotation rate with an error function of width w_1 centred on r_c ,

$$\Phi_1(r) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(2 \frac{r - r_c}{w_1} \right) \right]. \quad (5.10)$$

The width w_1 measures the region in which Φ_1 changes from 0.08 to 0.92. Basu (1997) opted for the following form,

$$\Phi_2(r) = \left[1 + \exp \left(- \frac{r - r_c}{w_2} \right) \right]^{-1}, \quad (5.11)$$

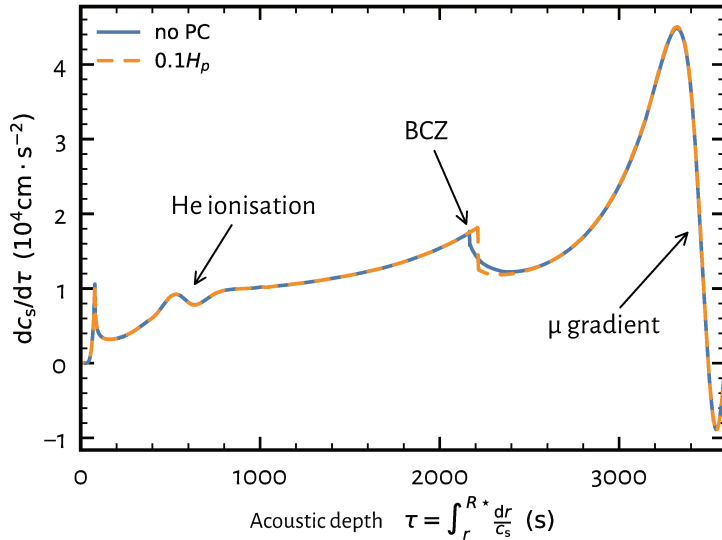
where w_2 designates the width of the region where Φ_2 goes from 0.269 to 0.731. The width w_2 catches less of the variation and is therefore inferior to w_1 , by a factor of ~ 5 .

Combining this parametric model with 2D inversions of the rotation rate, Charbonneau et al. (1999) studied the shape of the tachocline. They could demonstrate that the tachocline is in fact prolate (see also Antia et al., 1998; Basu & Antia, 2001). These results were later refined by Basu & Antia (2003), who confirmed the prolateness of the tachocline as well as showed that its width is larger at high latitudes than at the equator. It is also noteworthy that at the equator, the tachocline is located slightly below the seismically-inferred BCZ while the two regions coincides at higher latitude. Figure 5.6 represents their conclusions on a schematic picture (see also, Antia & Basu, 2011, for a more recent study).

Acoustic glitch analysis

Another way to look at this problem is to study the structure at this interface, rather than the rotation gradient. Pressure modes frequencies are directly sensitive to the squared adiabatic soundspeed $c_s^2 = \Gamma_1 p / \rho$. Abrupt variations of the adiabatic soundspeed on a spatial scale inferior or commensurate with the wavelength of oscillation modes create acoustic glitches that affect the propagation of p waves and therefore also the properties of p modes. In the Sun and solar-like stars, prominent acoustic glitches stem from: (i) the helium ionisation zones in which the ionisation of HeI and HeII produces a localised dip in Γ_1 , (ii) the base of the convective zone where the temperature gradient changes from adiabatic to radiative and, (iii) the

Figure 5.7: Derivative of the soundspeed as a function of acoustic depth in calibrated solar models with (dashed) or without (solid) penetrative convection. Acoustic glitches mentioned in Sect. 5.2 are indicated by arrows.



core boundary due to the chemical gradient built by nuclear reactions provided that the star is evolved enough (or has developed a convective core). As an illustration, Fig. 5.7 shows the derivative of the soundspeed as a function of acoustic depth,

$$\tau(r) = \int_r^{R_*} \frac{dr}{c_s}, \quad (5.12)$$

in solar models. The glitches mentioned above are pinpointed by arrows. The peak close to ~ 100 seconds is located at the connection between the Eddington grey atmosphere and the internal structure.

Monteiro et al. (1994) used the variational principle to derive an expression for the perturbation of mode frequencies caused by an acoustic glitch at the base of the convection zone. Considering a fictitious star where such a glitch is completely smoothed out, the authors found that the frequency difference between the real and the smooth star, $\delta\omega = \omega_{\text{real}} - \omega_{\text{smooth}}$, is an oscillatory function of frequency given by

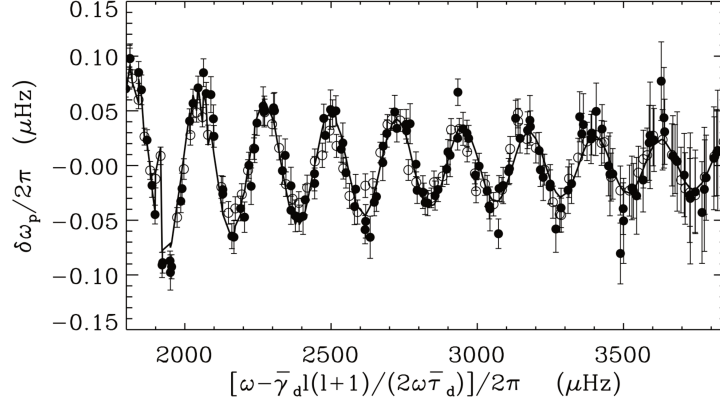
$$\delta\omega \approx A(\omega) \cos\left(2\omega\bar{\tau}_d - \bar{\gamma}_d \frac{\ell(\ell+1)}{\omega} + 2\phi_0\right), \quad (5.13)$$

The amplitude of the signal may be expressed as,

$$A(\omega) = \left[A_1^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^4 + A_2^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.14)$$

where $\tilde{\omega}$ is a reference frequency. The amplitude coefficients A_1 and A_2 are constant and depend on the shape of the temperature gradient ∇ at the base of the convective zone. In general, the more abrupt is the transition from the adiabatic to radiative gradient, the larger is the amplitude of the oscillating signature. The contribution from the term in A_2 ensues from the discontinuity of the first derivative of c_s , while A_1 is related to that of the second derivative. If penetrative convection (PC) occurs at the bottom of the convective zone, ∇ and so the first derivative of c_s , is discontinuous. This is illustrated in Fig. 5.7 for a solar model with PC. In this case, A_2 is non-zero and may possibly dominate over the A_1 term depending on the size of the gradient jump. Otherwise, solely the A_1 term contributes to the periodic signature as only the second derivative of c_s is discontinuous.

Figure 5.8: Signature of the base of the convective zone in solar p modes. Observed frequencies ($\ell = 5 - 20$) are measured from MDI data. The ℓ -dependence of the signature is corrected according to Eq. 5.13. Figure courtesy of Christensen-Dalsgaard et al. (2011).



The acoustic depth τ_d of the BCZ, located at the radius r_d from the centre, is linked to the period of the oscillation $\bar{\tau}_d$ by,

$$\bar{\tau}_d = \tau_d + a_\phi \quad \tau_d = \int_{r_d}^{R_\star} \frac{dr}{c_s} \quad (5.15)$$

where a_ϕ is a constant term that accounts for the frequency dependence of surface effects, which are not reproduced by stellar models. Note that this implies the period of the signature $\bar{\tau}_d$ does not equate the acoustic depth of the BCZ. For instance, Monteiro et al. (1994) found that $a_\phi \sim 200$ s for solar models.

The second term in the cosine function takes into account a ℓ -dependence of the periodic signature. As ℓ increases, the ray path of modes becomes less and less vertical between the surface and the glitch location and consequently also becomes longer and longer. This effect translates into a phase shift that depends on ℓ , ω and,

$$\bar{\gamma}_d = \gamma_d + a_\gamma \quad \gamma_d = \int_{r_d}^{R_\star} \frac{c_s}{r^2} dr \quad (5.16)$$

where the constant term a_γ is reflecting the ℓ -dependence of surface effects. The phase ϕ_0 (Eq. 5.13) is constant. Figure 5.8 shows the oscillatory component associated with the BCZ for modes of moderate degrees ($\ell = 5 - 20$, MDI data) and the results of the fit by Eq. 5.13, which appears to suit well the observations.

If only low degree data are considered ($\ell \leq 2$), the term that depends on ℓ in Eq. 5.13 is negligible. The expression of $\delta\omega$ then reduces to,

$$\delta\omega \approx \left[A_1^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega} \right)^4 + A_2^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \cos(2\omega\bar{\tau}_d + 2\phi_0) \quad (5.17)$$

Numerous studies undertook to constrain the extent of PC below the solar convective zone using acoustic glitch analyses (e.g. Monteiro et al., 1994; Basu et al., 1994; Roxburgh & Vorontsov, 1994; Basu & Antia, 1994; Christensen-Dalsgaard et al., 1995; Basu, 1997). In these studies, the amplitude of the BCZ glitch in the Sun is calibrated against a set of suitable solar models that includes more or less PC. This is modeled by extending the adiabatic gradient to the stably stratified region by a given amount in pressure scale height H_p with a sharp transition to the radiative gradient. As can be seen on Fig. 5.9, the amplitude of the oscillatory signature follows a linear increasing trend with the extent of PC, except for a low value ($\lesssim 0.10H_p$) where the amplitude increase is marginal. This approach allowed the authors to find a superior limit for the Sun of $\sim 0.10H_p$. Certainly, this limit is reliant on how one decides to

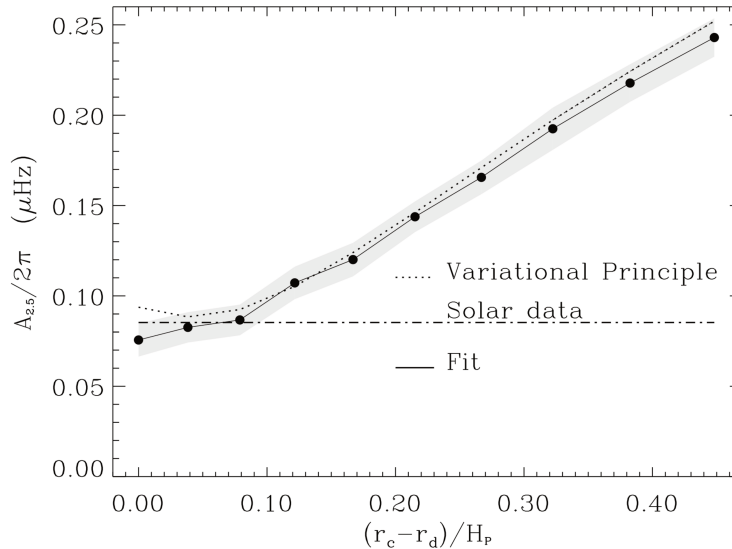


Figure 5.9: Amplitude (at $\nu = 2.5$ mHz) of the seismic oscillatory signature of the BCZ with the extent of PC in units of pressure scale height H_p , for solar models. Solid line represents the amplitude deduced from a fit of Eq. 5.13 to model frequencies. Dotted line is computed from the expression of the amplitude derived from the variational analysis (Christensen-Dalsgaard et al., 1995, Eq. 30). Dot-dashed line indicates the amplitude measured from observed solar frequencies. Figure courtesy of Monteiro (1996, p. 102).

model the transitional layer. It may be even argued that this transition to the radiative gradient is actually smoother in reality than what predicts the non-local MLT-based prescriptions used in the above cited works (e.g. Rempel, 2004; Christensen-Dalsgaard et al., 2011). Indeed, the frequencies $\nu_{n,\ell}$ only provide a latitudinally- and time-averaged view of the structure, which would tend to artificially smooth sharp features. Furthermore, it is not out of question that some physical processes related or not to the tachocline may be occurring and result in a similarly smooth transition. Further investigations looked for latitudinal or time variations of the glitch signature however evidence for such changes in the Sun is scarce (Monteiro & Thompson, 1998; Monteiro et al., 1998, 2001; Basu & Antia, 2001; Eff-Darwich et al., 2002; Verner et al., 2004; Baldner & Basu, 2008). In the case of a gradual transition to the radiative gradient, Christensen-Dalsgaard et al. (1995) and Christensen-Dalsgaard et al. (2011) noted that the glitch signature corresponds roughly to the region of steepest temperature gradient.

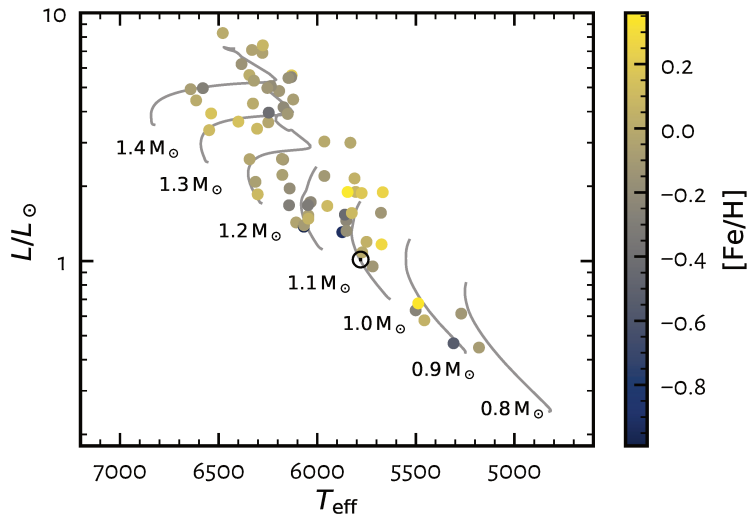
5.3 Towards a study of stellar tachoclines

5.3.1 The *Kepler* LEGACY project

The study of stellar tachoclines has been made possible only recently owing to the high-quality and long baseline of CoRoT and *a fortiori*, *Kepler* photometry. The *Kepler* LEGACY sample (Lund et al., 2017b; Silva Aguirre et al., 2017b) was an initiative led by the *Kepler* Asteroseismic Science Consortium (KASC) following the end of the nominal *Kepler* mission. The project aimed at (i) gathering a sample of main-sequence solar-like oscillating stars that were well-observed by *Kepler* during its nominal mission, (ii) measuring the parameters of their resonant p modes – frequencies, amplitudes, line widths, ν_{\max} , $\Delta\nu$ – to allow further studies by the stellar physics community and (iii) performing 1D asteroseismic modelling to obtain stellar radii, masses and ages.

Figure 5.10:

Kepler LEGACY stars in the Hertzsprung-Russell diagram. Stellar evolutionary tracks (solid lines) were computed with the CESAM2K stellar evolution code, assuming solar metallicity and a solar-calibrated value of the convection parameter.



The *Kepler* LEGACY sample: target selection and overview

The stars of the LEGACY sample were selected on the basis of two criteria: (i) the short cadence *Kepler* data spans more than 12 months – in order to have a sufficient signal-to-noise ratio to derive precise enough mode parameters – and (ii) the oscillation spectrum shows no mixed modes meaning that all stars are on the main sequence or in the early sub-giant phase. A total of 66 targets matches these criteria. Atmospheric parameters (T_{eff} , $[\text{Fe}/\text{H}]$) were determined for all stars by Lund et al. (2017b), using spectroscopic data obtained with the Tillinghast Reflector Echelle Spectrograph (TRES; Szentgyorgyi & Furész, 2007) on the 1.5-m Tillinghast telescope at the F.L. Whipple Observatory. It should be remarked that, for the spectroscopic analysis, the authors fixed the $\log g$ value to the asteroseismic one in such a way as to reduce uncertainties caused by correlations between T_{eff} , $[\text{Fe}/\text{H}]$ and $\log g$ (Torres et al., 2012).

Figure 5.10 displays the 66 stars in the Hertzsprung-Russell diagram. Interestingly, the sample covers a quite large range of masses, effective temperatures, metallicities and evolutionary stages, making it suitable for ensemble studies (e.g. Compton et al., 2018; Verma et al., 2019). As investigations of stellar tachoclines require precisely determined p -mode frequencies, I relied on this sample as a starting point for the work presented in this part of the manuscript.

Peak-bagging analysis of power density spectra

The p -mode parameters of the 66 LEGACY stars were obtained using a Bayesian Monte Carlo Markov Chain (MCMC) peak-bagging analysis (Handberg & Campante, 2011; Davies et al., 2016) of their power density spectra specifically optimised for asteroseismology. The peak-bagging approach consists in directly fitting a model to the whole observed power spectrum. Briefly, Lund et al. (2017b) adjusted p modes and the background granulation component simultaneously, using the following model,

$$\mathcal{P}(\nu) = \eta^2(\nu) \left(\sum_{n=n_0}^{n_{\max}} \sum_{\ell=\ell_0}^{\ell_{\max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} L_{n,\ell,m}(\nu) + N(\nu) \right) + W, \quad (5.18)$$

where the mode (n, ℓ, m) is represented by the Lorentzian function $L_{n,\ell,m}$, as is expected for stochastically-excited damped modes. The background signal $N(\nu)$ is a sum of two Harvey et al. (1993) models. The white-shot noise is taken into account with the constant term W . At

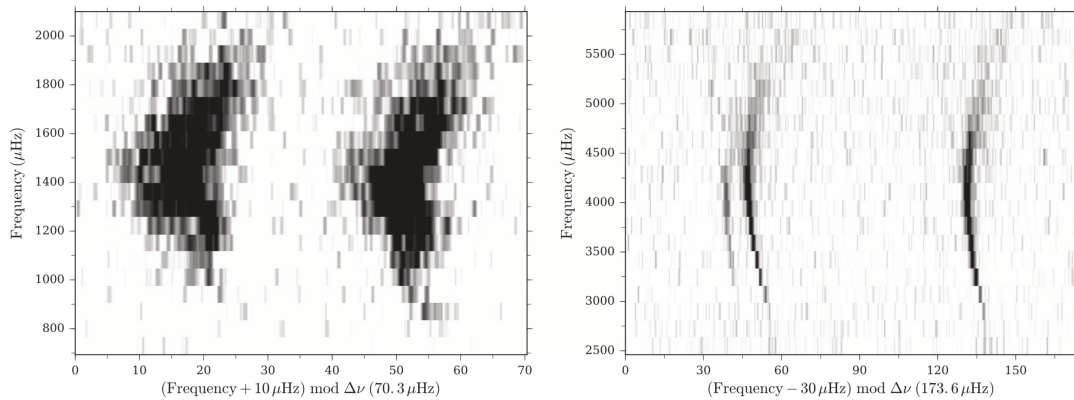


Figure 5.11: Échelle diagrams of an “F-like” star (*left*) and of a “Simple” star (*right*), following the classification introduced by Appourchaux et al. (2012) (see Sect. 5.3.1). The $\ell = 1$ ridge is on the right side for both panels. Figure adapted from Lund et al. (2017b).

each frequency ν , the function $\eta^2(\nu) = \sin^2(\pi\nu\Delta t) / \pi\nu\Delta t$ corrects for the effects of apodisation due to the short-cadence time sampling ($\Delta t = 58.89$ s). Full details of the fitting procedure including the definition of priors for parameters and quality control are available in Lund et al. (2017b). All results were made available online on Vizier (Lund et al., 2017a).

Lund et al. (2017b) classified the targets into two categories based on a visual inspection of the échelle diagrams: the “Simple” and “F-like” classes. This classification has been introduced by Appourchaux et al. (2012). The “F-like” class flags stars for which it is not straightforward to identify the $\ell = 0, 2$ and the $\ell = 1$ ridges unambiguously just from the échelle diagrams. In these stars (which are mostly F-type stars), the intrinsic mode linewidths are of the order of the small separation $\delta\nu_{02}$. As a consequence, the $\ell = 0$ and $\ell = 2$ ridges are not clearly separated in the échelle diagram and for this reason, may be confounded with the $\ell = 1$ ridge (see Fig. 5.11, for an example). This ambiguity in mode identification can be easily clarified on the basis of the relation between the asymptotic offset ϵ and the effective temperature T_{eff} (White et al., 2011).

1D asteroseismic modelling

In Silva Aguirre et al. (2017b), seven teams of modellers were subsequently asked to provide stellar properties for each star on the basis of its atmospheric parameters and p -mode frequencies. The objectives were manifold: (i) produce the best-characterised sample of main-sequence solar-like oscillating stars and encourage further studies by the astrophysics community, (ii) test the accuracy of stellar properties derived from asteroseismic modelling against those of independent measurements (e.g. angular diameters, *Gaia* parallaxes, binary evolution), (iii) explore uncertainties arising from variations in model input physics and fitting techniques. Additionally, a *degraded* Sun was included in the sample with a false KIC number as a hare-and-hounds exercise. The sun-as-a-star seismic frequencies were artificially degraded to match the *Kepler* noise level. Atmospheric parameters were generated by taking a random realisation of Gaussian noise to perturb the well-known solar values, assuming similar errors to those obtained for *Kepler* LEGACY stars.

Overall, the seven asteroseismic modelling pipelines agree well on stellar radii, masses and ages, with an average precision of 2%, 4% and 10%, respectively. The derived stellar properties are also fully consistent with *Gaia* parallaxes and radii determined from interferometry or the InfraRed Flux Method (IRFM; Casagrande et al., 2010, 2014). Among LEGACY stars, there are two binary systems for which solar-like oscillations are detected in both components (16

Cyg A & B and KIC9139151-9139163). They were modelled separately as a consistency check. For each binary, the components were found to be coeval as expected from binary formation and evolution. The properties deduced from the artificially-degraded solar data are in good agreement with real solar values with few exceptions, explainable by either the anti-correlation between initial helium abundance Y_0 and mass M that arises in model fitting (e.g. [Lebreton & Goupil, 2014](#)) or, by the underestimation of uncertainties due to the fitting technique employed.

Stellar properties derived by each pipeline are publically available on VizieR ([Silva Aguirre et al., 2017a](#)). Because I will use the c2kSMO pipeline in the following chapter, I adopt the stellar parameters fitted by c2kSMO as a reference, which are compiled in Appendix A. The details concerning the pipeline will be presented in Sect. 6.5.1.

5.3.2 Seismic signature of the base of the convective zone in solar-type stars

The signature of the BCZ is not easily detected in stars other than the Sun. Unlike the Sun, stars are not spatially resolved and surface cancellation effects limit the visibilities of modes to low angular degrees. In practice, only modes of $\ell \leq 3$ are detected in solar-like stars. As already mentioned in Sect. 5.2.1, sharp variations of the soundspeed $c_s^2 = \Gamma_1 p / \rho$ (or acoustic glitch) cause a characteristic periodic signature in the oscillation frequencies, which for low-degree modes is of the form,

$$\delta\nu \approx A_g(\nu) \cdot \cos(4\pi\bar{\tau}_g\nu_{n,\ell} + \phi_g), \quad (5.19)$$

where $\bar{\tau}_g = \tau_g + a_g$ is related to the acoustic depth of the glitch τ_g , a_g being a constant term accounting for surface effects. The amplitude A_g and its dependence on ν are related to the size and sharpness of the structural discontinuity, as was already described in Sect. 5.2.1. The quantity ϕ_g is a constant phase term.

As an important side note, it should be remarked that because eigenmodes are discrete in frequency, the acoustic depth τ_g of a glitch is aliased with the complementary quantity, the acoustic radius T_g ([Montgomery et al., 2003](#)). This is expressed by the following relation,

$$T_g = T_0 - \tau_g = \int_0^{r_g} \frac{dr}{c_s}, \quad \text{where} \quad T_0 = \int_0^{R_*} \frac{dr}{c_s} \approx \frac{1}{2\Delta\nu} \quad (5.20)$$

is the total acoustic radius of the star.

The oscillatory feature is of quite small amplitude compared to the uncertainties of mode frequencies even in *Kepler* data. The expected amplitude for solar-like stars is of the order of $\sim 0.1 \mu\text{Hz}$ (e.g. [Monteiro et al., 2000](#); [Verma et al., 2014](#)), which is also the typical precision reached by [Lund et al. \(2017b\)](#) on mode frequencies. To enhance the signature of acoustic glitches, [Gough \(1990\)](#) suggested to use the second order frequency differences

$$\Delta_2\nu_{n,\ell} = \nu_{n-1,\ell} - 2\nu_{n,\ell} + \nu_{n+1,\ell}. \quad (5.21)$$

Higher order differences may also be considered to further amplify the signal of the BCZ. For instance, the fourth order difference of frequencies,

$$\Delta_4\nu = \nu_{n+2,\ell} - 4\nu_{n+1,\ell} + 6\nu_{n,\ell} - 4\nu_{n-1,\ell} + \nu_{n-2,\ell} \quad (5.22)$$

were employed by [Basu \(1997\)](#) in the context of helioseismology or by [Mazumdar & Antia \(2001\)](#), for a seismic study of stellar convective cores. However, if the amplitude of the signal increases, so does the noise. Hence, a compromise has to be found depending on the quality of the seismic data and the type of study conducted ([Ballot et al., 2004](#)). In addition, these seismic indices are correlated meaning that if a given frequency is inaccurately measured for some reason, it contaminates three data points for $\Delta_2\nu$ or five for $\Delta_4\nu$.

To study the BCZ, the seismic ratios $rr_{01/10}$ introduced by [Roxburgh & Vorontsov \(2003\)](#) are particularly appropriate. They are defined as,

$$rr_{01}(n) = \frac{\nu_{n-1,0} - 4\nu_{n-1,1} + 6\nu_{n,0} - 4\nu_{n,1} + \nu_{n+1,0}}{8(\nu_{n,1} - \nu_{n-1,1})}, \quad (5.23)$$

$$rr_{10}(n) = -\frac{\nu_{n-1,1} - 4\nu_{n,0} + 6\nu_{n,1} - 4\nu_{n+1,0} + \nu_{n+1,1}}{8(\nu_{n+1,0} - \nu_{n,0})}. \quad (5.24)$$

Although they suffer from the same kind of flaws than frequency differences, these seismic indicators are weakly sensitive to the outer layers of stars and most notably to the near-surface effects ([Roxburgh & Vorontsov, 2003](#); [Roxburgh, 2005](#); [Oti Floranes et al., 2005](#); [Roxburgh, 2009](#)). The signature of the He ionisation glitch is considerably reduced as well. In fact, the variations of $rr_{01/10}$ may be described as follows: (i) a smooth component reflecting the properties of stellar cores (the central hydrogen mass fraction X_c or, if a convective core exists the extent of the central mixed zone) and (ii) a periodic modulation due to the acoustic glitch at the BCZ. For at least a dozen of stars in the LEGACY sample, *Kepler* achieved sufficient precision so that the periodic modulation in the $rr_{01/10}$ is not drowned in the noise (see Sect. 6.3).

In their paper, [Roxburgh & Vorontsov \(2003\)](#) also defined the small to large separation ratios

$$r_{02}(n) = \frac{\delta\nu_{02}}{\Delta\nu_1} = \frac{\nu_{n,0} - \nu_{n-1,2}}{\nu_{n,1} - \nu_{n-1,1}}, \quad (5.25)$$

which is primarily sensitive to the core properties as $rr_{01/10}$ unlike they do not show the oscillatory signature coming from the BCZ. Together they form a set of observational constraints somewhat complementary of the classic parameters (T_{eff} , $\log g$, $[\text{Fe}/\text{H}]$, L). In this regard, the seismic ratios are highly valuable for detailed asteroseismic modelling and particularly for age dating, as was demonstrated by [Lebreton & Goupil \(2014\)](#) in the case of the CoRoT star HD 52265.

For all these reasons, we have made the choice to use the seismic ratios $rr_{01/10}$ as a diagnostic for the physics occurring at the BCZs of *Kepler* LEGACY stars. The next chapter focuses on bringing constraints on the extent of PC under the BCZ using acoustic glitch analyses and forward modelling.

Chapter 6

Constraining the extent of penetrative convection under the convection zone

The overshooting is found small if supposed small, large if supposed large.

— *Renzini (1987)*

This famous quotation of the Italian astronomer Alvio Renzini summarises quite well the state of the understanding of convective boundaries before the golden age of helioseismology in the 1990s. As we have seen in the previous chapter, the Sun's p mode oscillations have brought precise constraints on the location, extent and shape of its convective envelope boundary. Furthermore, helioseismic inversions revealed the rotation profile of the Sun. In particular, the base of the convective envelope was found to be subject to a strong rotational shear, which owed this region the name of tachocline.

The tachocline is especially intriguing for stellar physics: it is heavily involved in the generation of the solar magnetic field by the dynamo effect but it appears as one of the least well-modelled part of the Sun. Among the physical processes possibly at stake, the penetration of convective motions (plumes) in the stably-stratified radiative interior is strongly supported by theory, simulations, laboratory experiments and astronomical observations. Helioseismology allowed us to put an upper limit to the extent of penetrative convection (PC) in the Sun. However the details of this process in the solar interior and by extension solar-like stars are still unclear. How is the temperature gradient structured under the convective envelope? To what extent are chemical species mixed? Should we account for the generation of internal gravity waves (IGW) induced by the penetrative plumes at the boundary? How does penetrative convection interact with rotation and magnetic fields? Owing to the lack of strong observational constraints, all these questions remain largely unanswered. On the other hand, 2D and 3D simulations have become more and more sophisticated, giving us some insight on these questions to some extent. Simulations at solar and stellar regimes are unattainable in practice due to the tremendous computational costs they require. Secondly, the comparison of simulation results with observations is not immediate. The dimensionless numbers that are used in simulations are not necessarily well-known in stellar interiors.

The advent of space missions dedicated to high-precision photometry, namely CoRoT and *Kepler*, opened a new window to characterise the physics occurring at the base of the convective zone (BCZ) in solar-like stars. The present chapter aims at obtaining more universal constraints on stellar tachoclines beyond what is offered by the Sun's p modes. I take a more

specific interest at quantifying the extent of PC under the convective envelope of the *Kepler* LEGACY stars on the basis of their p mode oscillations. Section 6.1 introduces the theoretical prescription we employed to model PC. In Sect. 6.3, I select targets in the LEGACY sample that are appropriate for glitch analyses and I perform an adjustment of the seismic ratios $r_{r01/10}$ to determine the amplitude and period of the BCZ glitch. Section 6.4 addresses the diagnostic potential of seismic ratios to constrain the PC extent. To this end, I computed a grid of stellar models and compared the previously measured amplitude and period of the glitch signature to those of representative models for each selected star. I then attempt to calibrate the extent of PC in a handful of prominent targets from forward modelling with the c2kSMO pipeline (Sect. 6.5). Lastly, I give conclusive remarks and discuss the results obtained in Sect. 6.6.

6.1 Penetrative convection: the formalism of Zahn (1991)

Throughout this chapter, I have relied on Zahn (1991)'s formalism to describe penetrative convection at the BCZ of solar-like stars. This section (Sect. 6.1) summarises his results and addresses the implementation of his prescription in the CESAM stellar evolution code. The impact of this choice on the results presented in this chapter will be discussed in Sect 6.6.

Schematically, the bottom of the convective envelope may be represented as shown in Fig .6.1. Region A is the convectively unstable zone as set by the Schwarzschild criterion. When reaching the bottom of region A, convective plumes penetrate in the convectively stable zone over a length L_p (region B) where they render the temperature gradient nearly adiabatic. In a thin layer (C), plumes are decelerated by buoyancy until thermal diffusion becomes more efficient than advection. In this layer, the temperature gradient progressively catches the radiative temperature gradient. Finally, region D is the radiative interior.

The prescription of Zahn (1991) relies on two main hypotheses. First, the temperature gradient ∇ is adiabatic and constant throughout regions A and B. Secondly, the convective flux F_{conv} is proportional to ρW^3 , where W is the root mean square of the downdrafts velocities. Such a scaling is a property of convection theories as for instance in the mixing length theory (Böhm-Vitense, 1958). The proportionality constant is usually of the order of unity. Under these conditions, Zahn (1991) demonstrated that the extent of the penetration region is expressed by,

$$\frac{L_p}{H_p} = \frac{1}{\chi_p} \left(\frac{cf}{c_* f_*} \right)^{1/2} = \frac{\xi_{\text{PC}}}{\chi_p}, \quad (6.1)$$

where $\chi_p = (\partial \log \chi / \partial \log p)_{\text{ad}}$ represents the conductivity gradient in which $\chi = 16\sigma T^3 / (3\rho\kappa)$ is the radiative conductivity. The parameter $\xi_{\text{PC}} = (cf/c_* f_*)^{1/2}$ designates the ratio of the convective efficiency in the unstable region to that of the stable region. Its value cannot be derived from first principles and has to be calibrated with observations. Zahn (1991) conjectured that ξ_{PC} is of the order of unity and should not differ much from a star to another.

The temperature gradient catches the radiative gradient in layer C, the thermal boundary layer, which thickness L_t scales as,

$$L_t \approx (K t_d)^{1/2} \quad (6.2)$$

with $K = \chi / (\rho C_p)$ the thermal diffusivity, C_p the specific heat at constant pressure and $t_d = (H_p/g)^{1/2}$ the local dynamical time scale. This layer is extremely thin (~ 1 km at base of the solar convective zone) and the velocity of convective downdrafts has already slowed down to very low values ($\sim 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). The discontinuity of the temperature gradient then occurs in this layer and may be written as follows,

$$\frac{\nabla_{\text{ad}} - \nabla}{\nabla} = \chi_p \frac{L_p}{H_p} = \xi_{\text{PC}}. \quad (6.3)$$

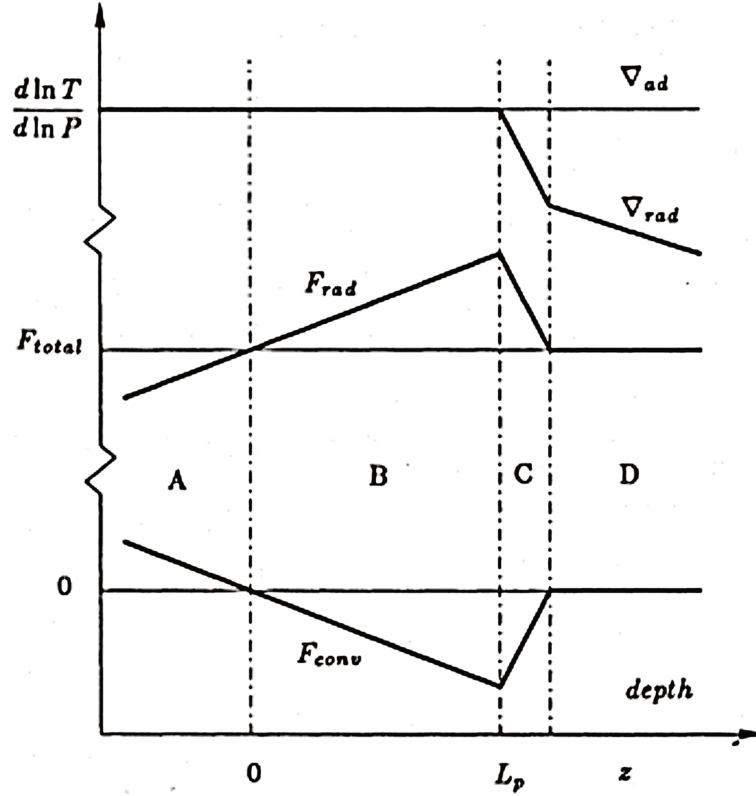


Figure 6.1: Schematic view of the structure at the base of the convective zone (after Zahn, 1991).

Hence, ξ_{PC} is directly related to the size of the discontinuity in the temperature gradient.

In the CESAM stellar evolution code, penetrative convection is implemented as an extension of the convective envelope over a length equal to L_p defined as in Eq. 6.1 and in which ξ_{PC} is user-defined. In the PC layer, the temperature gradient is adiabatic and the chemical elements are instantaneously mixed as in the convective zone. Because the thermal boundary layer (C) is very thin, the temperature gradient directly adopts the radiative value just under the PC layer with a discontinuity that follows Eq. 6.3. Importantly, I shall emphasise that acoustic glitches in p -mode frequencies arise because of abrupt gradients of the squared adiabatic soundspeed c_s^2 to which the temperature gradient is actually not the only contributor. Assuming that the gas at the BCZ is a fully ionised ideal gas, it follows that,

$$c_s^2 \approx \frac{\Gamma_1 k_B T}{\mu m_H} \text{ where } \Gamma_1 \approx 5/3 \quad (6.4)$$

$$\frac{d \log c_s^2}{dr} \approx \frac{d \log T}{dr} - \frac{d \log \mu}{dr} \quad (6.5)$$

Therefore, any important chemical composition gradient at the BCZ will impact on the size of the discontinuity in c_s^2 and so, on the amplitude of the glitch seismic signature. Diffusion (e.g. gravitational settling, radiative levitation) and mixing (e.g. rotationally-induced mixing) processes possibly play an important role in the interpretation of glitch analyses, which should be kept in mind. Notably, how we choose to model these processes in CESAM is likely to modify the value of the calibrated ξ_{PC} .

6.2 Seismic ratios $rr_{01/10}$: a diagnostic for stellar structure

As outlined in Sect. 5.3.2 (see also Fig. 6.3), the seismic ratios $rr_{01/10}$ consist of (i) a smooth component, which depends on the properties of the core structure and, (ii) an oscillatory component that is due to the acoustic glitch at the base of the convective zone. The near-surface effects and the He ionisation glitch have low contribution in $rr_{01/10}$, which makes them well-suited diagnostics of the core and BCZ structures. In this section, I portray in more detail the information they hold on stellar structure in three stellar models of 1.0 and $1.2M_{\odot}$ (without overshoot and with $\alpha_{\text{ov}} = 0.15$). The chemical composition and convection parameter are both set to calibrated solar values. The choice of input physics is described in Sect. 6.4.1.

6.2.1 Core structure and evolutionary state (smooth component)

Basically, the smooth component ($\Delta_{01/10}$) is resulting from the acoustic glitch occurring at the border of the core. The core boundary is located close to the centre, meaning that the oscillation provoked by the glitch has a very large period in the ratios. Only a small part of it is observable in *Kepler* targets, which then appears as a “smooth component”.

Figure 6.3 shows the evolution of $rr_{01/10}$ through the MS and early subgiant phases in each model. A convenient way to describe the smooth component of ratios consists in reducing it to two quantities: the mean ratio $\langle rr_{01/10} \rangle$ and the slope $\Delta_{01/10}$. To be comparable to observations, these quantities must be evaluated in a realistic range of observed ratios. For *Kepler* LEGACY targets, this range approximately spans the interval between 0.75 and $1.25v_{\text{max}}$ and, $\langle rr_{01/10} \rangle$ can be likened to $rr_{01/10}(v = v_{\text{max}})$.

As was discussed by [Silva Aguirre et al. \(2011\)](#), the slope of the ratios $\Delta_{01/10}$ is affected by up to three factors:

1. The decrease of the central hydrogen abundance X_{C} due to nuclear reactions increases the size of the chemical gradient at the core boundary. The amplitude of the glitch gets larger and the slope becomes steeper.
2. When the star has a convective core, an increase of the size of the soundspeed discontinuity at the border enlarges the amplitude of the glitch oscillation and thus also the absolute value of the slope.
3. The expansion of the convective core diminishes the glitch period and increases the slope (in absolute value).

For the $1M_{\odot}$ model (top panel, Fig. 6.3), the slope of ratios is solely controlled by factor 1 (it does not possess a convective core) and therefore increases progressively in absolute value as the chemical gradient builds up with the evolution on the MS. For $1.2M_{\odot}$ models (middle and bottom panel, Fig 6.3), factors 2 and 3 are dominating the behaviour of $\Delta_{01/10}$ as both develop a convective core on the MS. At given X_{C} , the model including core overshooting has a steeper slope than the one without. Indeed, overshooting extends the convective core and sharpens the discontinuity in the soundspeed at the boundary. On a side note, remark that the slope can reach null or positive values at the beginning of the subgiant phase.

The mean ratio $\langle rr_{01/10} \rangle$ is often used in conjunction with $\langle \Delta v \rangle$ to construct an asteroseismic diagram (e.g. [Mazumdar, 2005](#); [Miglio & Montalbán, 2005](#); [Lebreton & Goupil, 2014](#)). Figure 6.2 represents this $\langle rr_{01/10} \rangle$ - $\langle \Delta v \rangle$ diagram for a set of models in the mass range 0.9 - $1.3 M_{\odot}$. The location of stars in this plane is indicative of the evolutionary state and mass. The regions of low $\langle rr_{01/10} \rangle$ and high $\langle \Delta v \rangle$ are occupied by young and less massive stars, while the zones of high $\langle rr_{01/10} \rangle$ and low $\langle \Delta v \rangle$ are populated with higher mass stars and/or evolved stars.

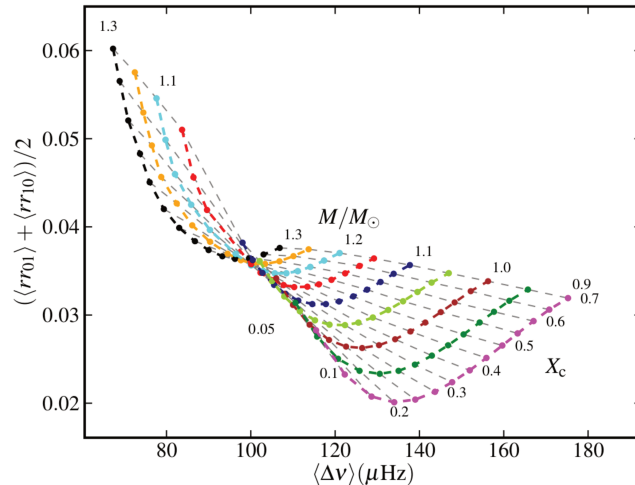


Figure 6.2: Asteroseismic diagram $\langle rr_{01/10} \rangle - \langle \Delta \nu \rangle$ for stellar models in the mass range $0.9\text{--}1.3 M_{\odot}$. Coloured lines show the evolution of a given model during the MS. Grey dashed lines connect models of same X_c . Figure from [Lebreton & Goupil \(2014\)](#).

A good demonstration of the diagnostic power of this smooth component is shown in [Deheuvels et al. \(2016\)](#), in which the authors calibrate the extent of core overshooting in a set of *Kepler* solar-like stars.

6.2.2 Base of the convective envelope (oscillatory component)

The left panels of Fig. 6.4 show the oscillatory component of seismic ratios $rr_{01/10}$ that arises from the acoustic glitch at the BCZ. The range of ratios is restricted to the 12 radial orders closer to ν_{max} , which is representative of what would be observable with *Kepler*. The period of the oscillation, as can be retrieved by the fitting of a sine wave function (Eq. 5.19), gives the acoustic radius of the BCZ (T_{CZ}). This is illustrated in the right panels of Fig. 6.4 in which the fitted acoustic radius is pinpointed in the derivative of the soundspeed. There is a close match between the location of the BCZ glitch and T_{CZ} within 40 s. This difference may be due to the fact that the fitted function is not a perfect model of the ratios.

The amplitude of the oscillatory component is slightly larger for the $1.0 M_{\odot}$ model than the that of $1.2 M_{\odot}$. In the former model, atomic diffusion by gravitational settling is included in the computations, which causes a slight increase in μ just under the convective envelope and tends to reinforce the acoustic glitch at the boundary. This effect is not included in the latter model. At $1.2 M_{\odot}$, diffusion by radiative levitation starts to be efficient enough to partially counteract gravitational settling (e.g. [Deal et al., 2018](#)) and it was made the choice here not to include atomic diffusion at all as a compromise between accounting for this effect and the computational cost of the evolutionary track. In any case, this emphasises the importance of atomic diffusion in the study of acoustic glitches.

6.3 Glitch analyses of the BCZ in *Kepler* LEGACY stars

6.3.1 Target selection

Not all LEGACY stars are suitable to glitch analyses. The oscillatory signature due to the BCZ glitch is of low amplitude even in the seismic ratios and for some stars the signal is drowned out in the noise. The error budget and the number of measurable mode frequencies is primarily dependent on the duration of observations and the stars' *Kepler* magnitude. For “F-like” stars,

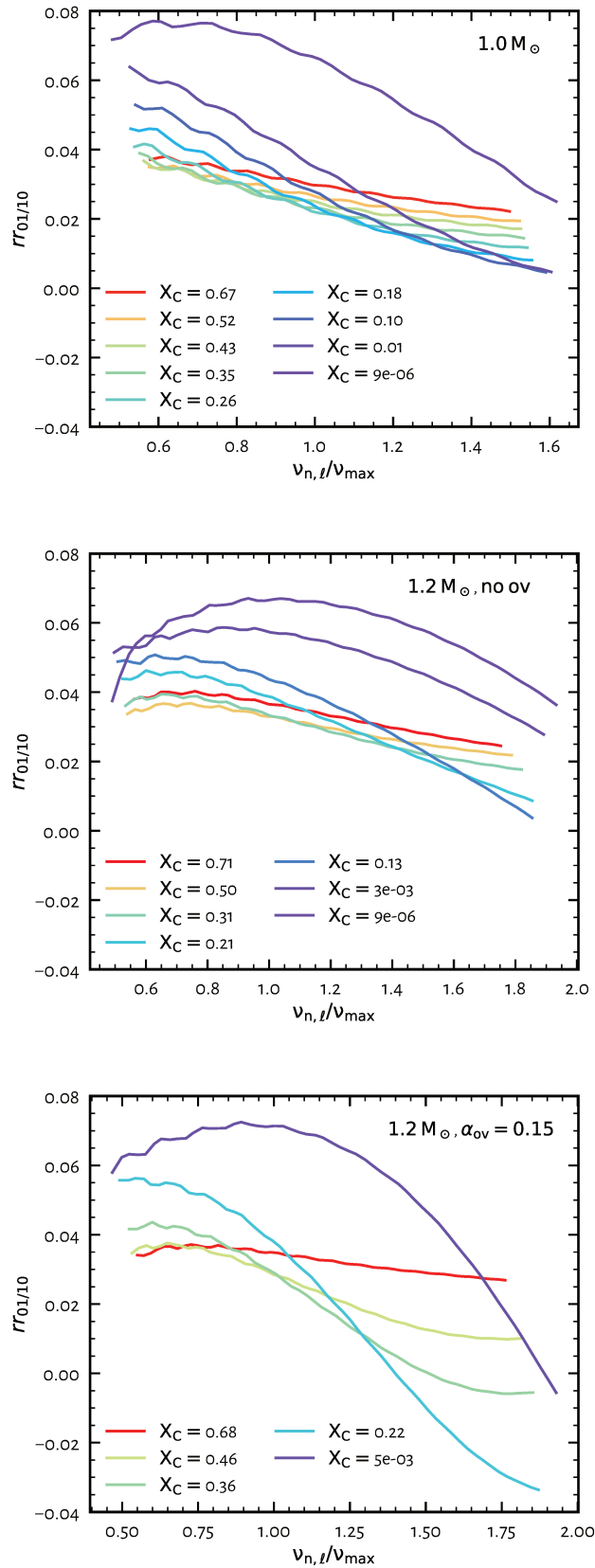


Figure 6.3: Seismic ratios $rr_{01/10}$ across evolution on the main-sequence and early subgiant phases. Models were computed using a solar chemical composition and a solar-calibrated value of the convection parameter. With *Kepler*, the observed range of ratios is approximately between 0.75 and $1.25 v_{\max}$. Note the different scales on the x-axis.

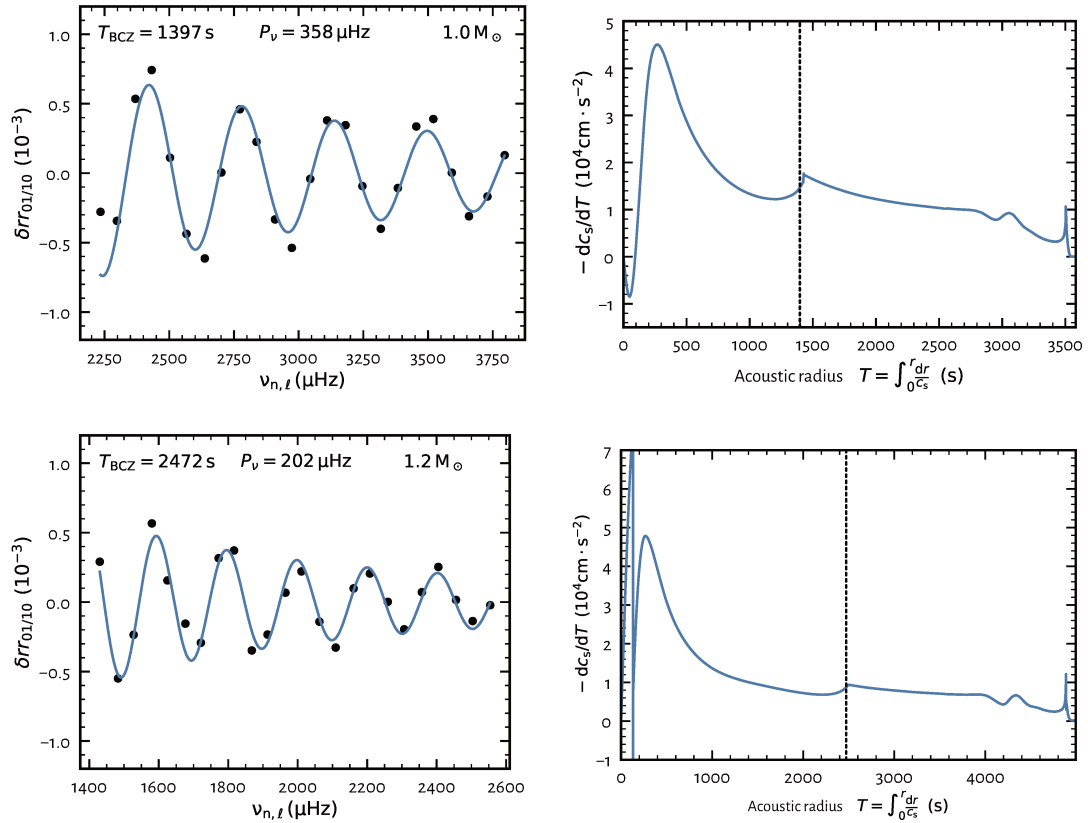


Figure 6.4: **Left:** Signature of the BCZ acoustic glitch in the seismic ratios $rr_{01/10}$ (black dots) shown for the models of 1.0 and $1.2 M_{\odot}$ (with overshoot) at $X_C = 0.35$. The smooth component was removed by fitting and subtracting a second order polynomial to the ratios. The blue solid line is the result of a sinusoidal fit. P_v is the fitted period and T_{CZ} is the corresponding acoustic radius of the BCZ (see Eq. 5.19). **Right:** Derivative of the soundspeed as a function of the acoustic radius. The dotted lines represent the acoustic radius of the BCZ (T_{CZ}) as deduced from the fitting of the ratios.

the ratios have large error bars due to the short life time of oscillation modes, which results in particularly high uncertainties on $rr_{01/10}$.

To choose the stars appropriate for this study, I highlighted the oscillatory signal by removing the smooth component of the ratios. This is done by fitting and subtracting a second-order polynomial. Then, the residuals are visually inspected. For some stars, the seismic ratios are precisely measured (say an error inferior to 5% for at least 10 points) but the amplitude of the glitch is so small that it is lower than (or of the order of) the noise level. We may still be able to put a firm upper limit to the PC extent thus they were selected for further study. 9 targets fall into this case. For other stars, only those that show an oscillation in the ratios larger than the typical error bars are kept in the sample. Ten targets satisfy this condition, making a total of 19 stars retained for glitch analyses. Their ratios $rr_{01/10}$ are reproduced in Fig. 6.5.

I note that a visual inspection is always subject to a certain degree of subjectivity but it is delicate to choose objective criteria without knowing how much we may be able to constrain the extent of PC. In any case, the sample can still be revisited after the first analysis is performed.

6.3.2 Target classification

The behaviour of seismic ratios with stellar parameters was outlined in Sect. 6.2. On this basis and using also the stellar parameters compiled in Table A.1, I split the 19 selected targets in 4 classes: Simple (S), F-like (F), Simple and Evolved (SE) and Peculiar (P). Table 6.1 details the classification for each star and Fig. 6.6 places them in the $\langle rr_{01/10} \rangle$ - $\langle \Delta\nu \rangle$ diagram. Here, I delineate the characteristics of each class.

Simple (S). Stars in this class are relatively cool ($T_{\text{eff}} < 6100$ K), have high $\langle \Delta\nu \rangle$ ($> 95 \mu\text{Hz}$) and v_{max} ($> 2000 \mu\text{Hz}$). The mean ratio $\langle rr_{01/10} \rangle$ is small (under 0.04) and the amplitude of the oscillatory component is low. Their location in the $\langle rr_{01/10} \rangle$ - $\langle \Delta\nu \rangle$ plane suggests that they are on the lower mass range of solar-like stars ($\lesssim 1.2M_{\odot}$) and still on the MS.

F-like (F). This class is populated with hot stars ($T_{\text{eff}} > 6100$ K), of $\langle \Delta\nu \rangle < 71 \mu\text{Hz}$ and $v_{\text{max}} < 1500 \mu\text{Hz}$. The amplitude of the BCZ glitch signature is high and $\langle rr_{01/10} \rangle$ goes from moderate to high values (> 0.04). These properties indicate that there are probably MS stars on the higher mass range ($\gtrsim 1.2M_{\odot}$).

Simple and Evolved (SE). The class consists of cool stars ($T_{\text{eff}} < 6100$ K), with intermediate values of $\langle \Delta\nu \rangle$ (71-95 μHz) and v_{max} (1450-2000 μHz). The mean ratio $\langle rr_{01/10} \rangle$ is high for all stars (above 0.05) and the ratios exhibit a positive or near null slope in a few stars. No coherent trend stands out for the amplitude of the BCZ signature. The class features hint at evolved MS stars or early subgiants in the lower mass range ($\lesssim 1.2M_{\odot}$). Note that KIC8694723 has a high T_{eff} of 6246 K for the class, which is explained by its low [Fe/H] of -0.42 ± 0.10 . It was still chosen to class it as SE because of its categorisation as Simple by Lund et al. (2017b) and the relatively low amplitude of the glitch oscillation in the ratios compared to other F stars.

Peculiar (P). The class of two stars in the sample seem ambiguous (namely KIC7106245 and KIC9139151) and are put apart in this “peculiar” class. Most of their characteristics are common with the S class apart from their high T_{eff} and the large amplitude of the BCZ signature in the ratios, which would associate them with the F class. KIC7106245 is among the least metallic star of the sample with [Fe/H] = -0.99 ± 0.19 , which explains the higher T_{eff} . As for KIC9139151, its position in the $\langle rr_{01/10} \rangle$ - $\langle \Delta\nu \rangle$ diagram is consistent with a young hot star (see Fig. 6.2).

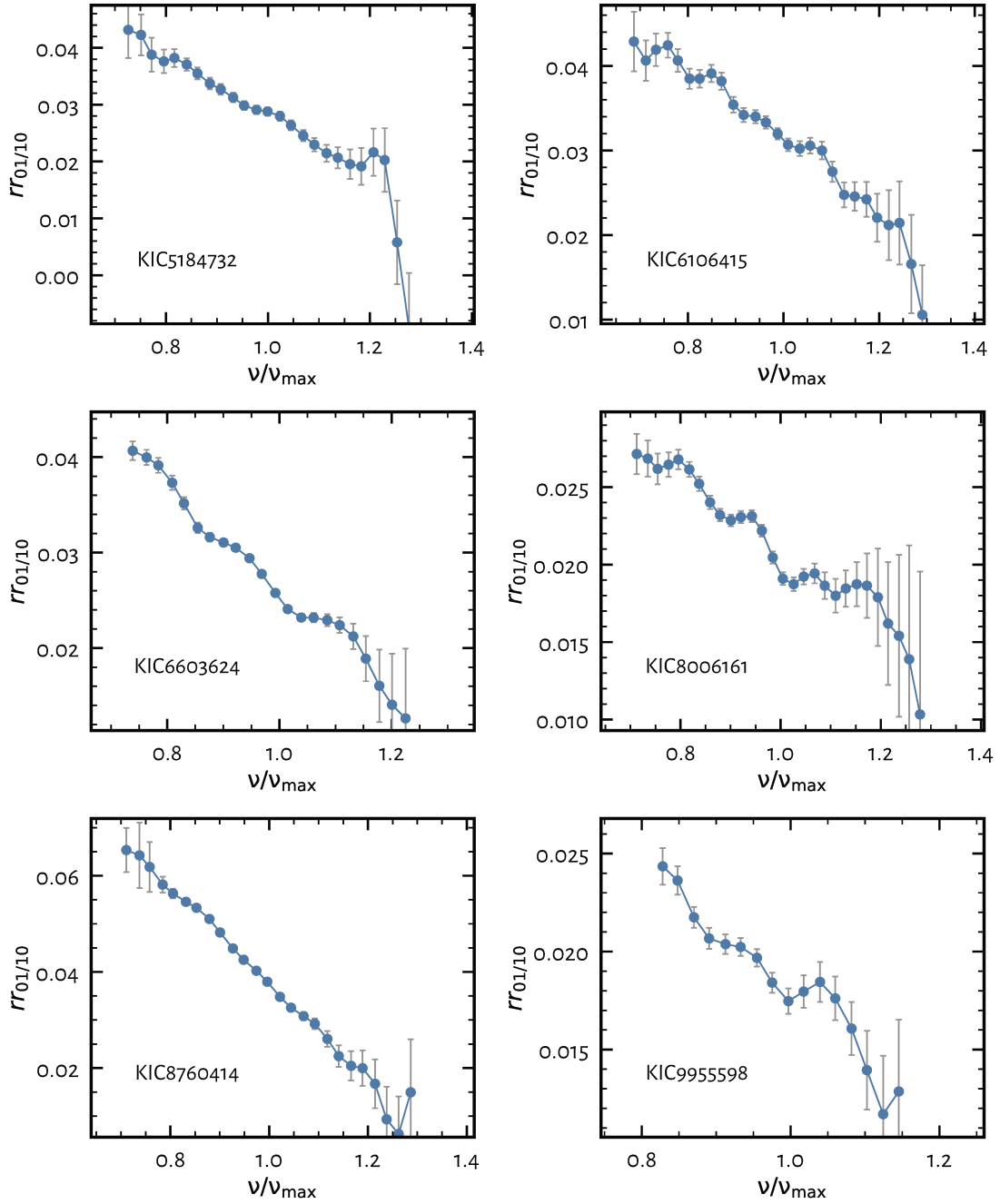


Figure 6.5: Seismic ratios $rr_{01/10}$ of the LEGACY targets selected for glitch analyses. (*continued on next page*).

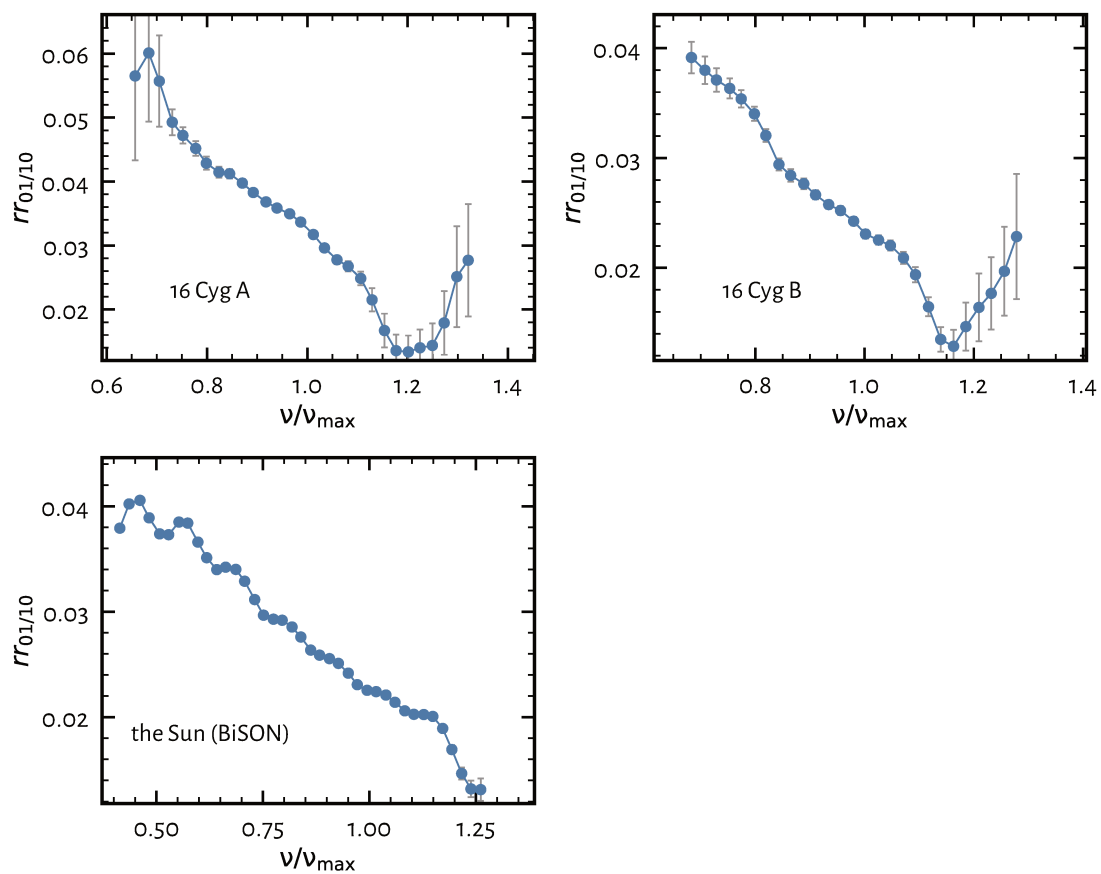


Figure 6.5: Seismic ratios $rr_{01/10}$ of the LEGACY targets selected for glitch analyses. Solar ratios computed from the BiSON frequency set (Davies et al., 2014a; Hale et al., 2016) are shown in the lower right panel, for comparison. (continued on next page)

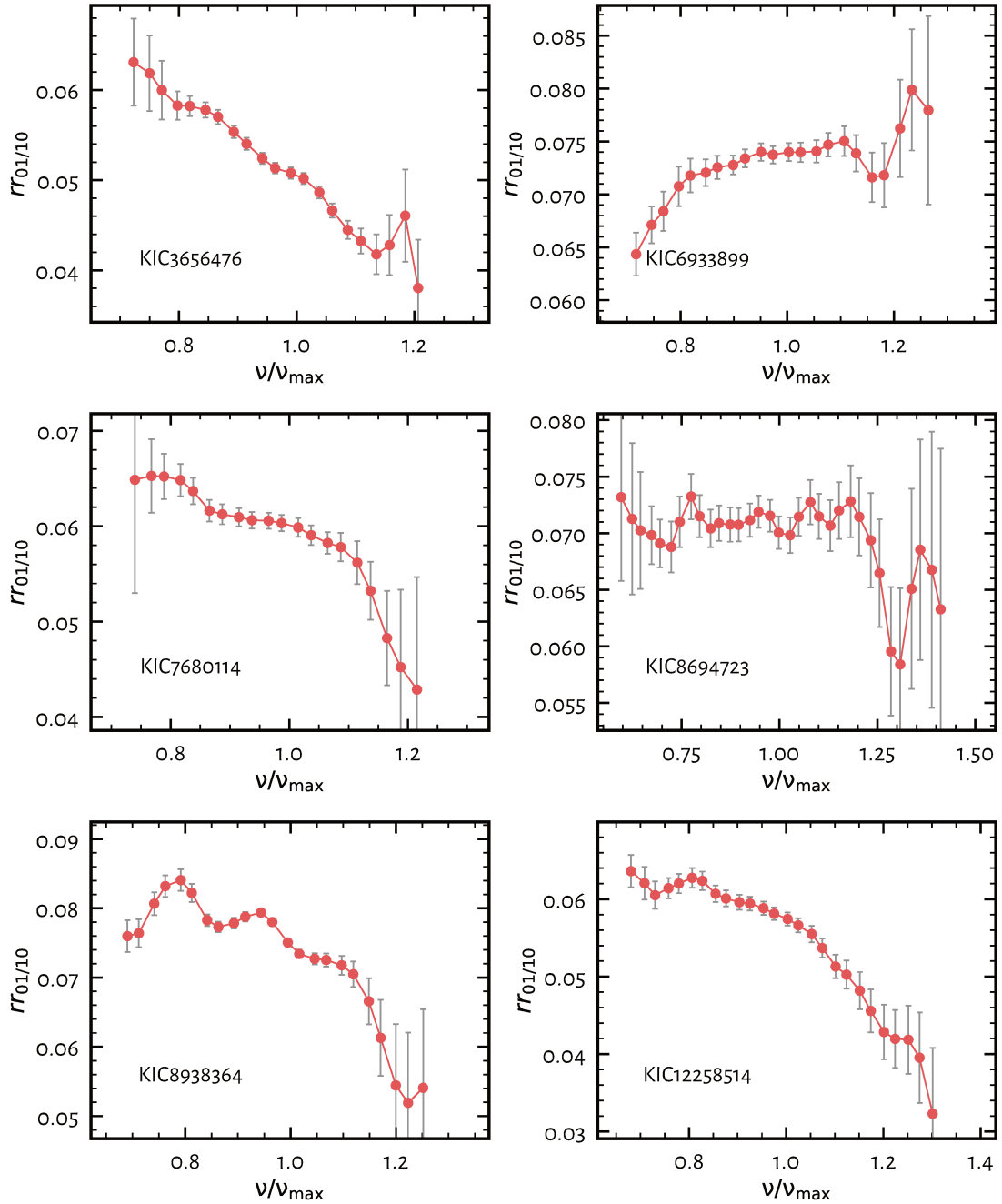


Figure 6.5: Seismic ratios $rr_{01/10}$ of the LEGACY targets selected for glitch analyses. (*continued on next page*)

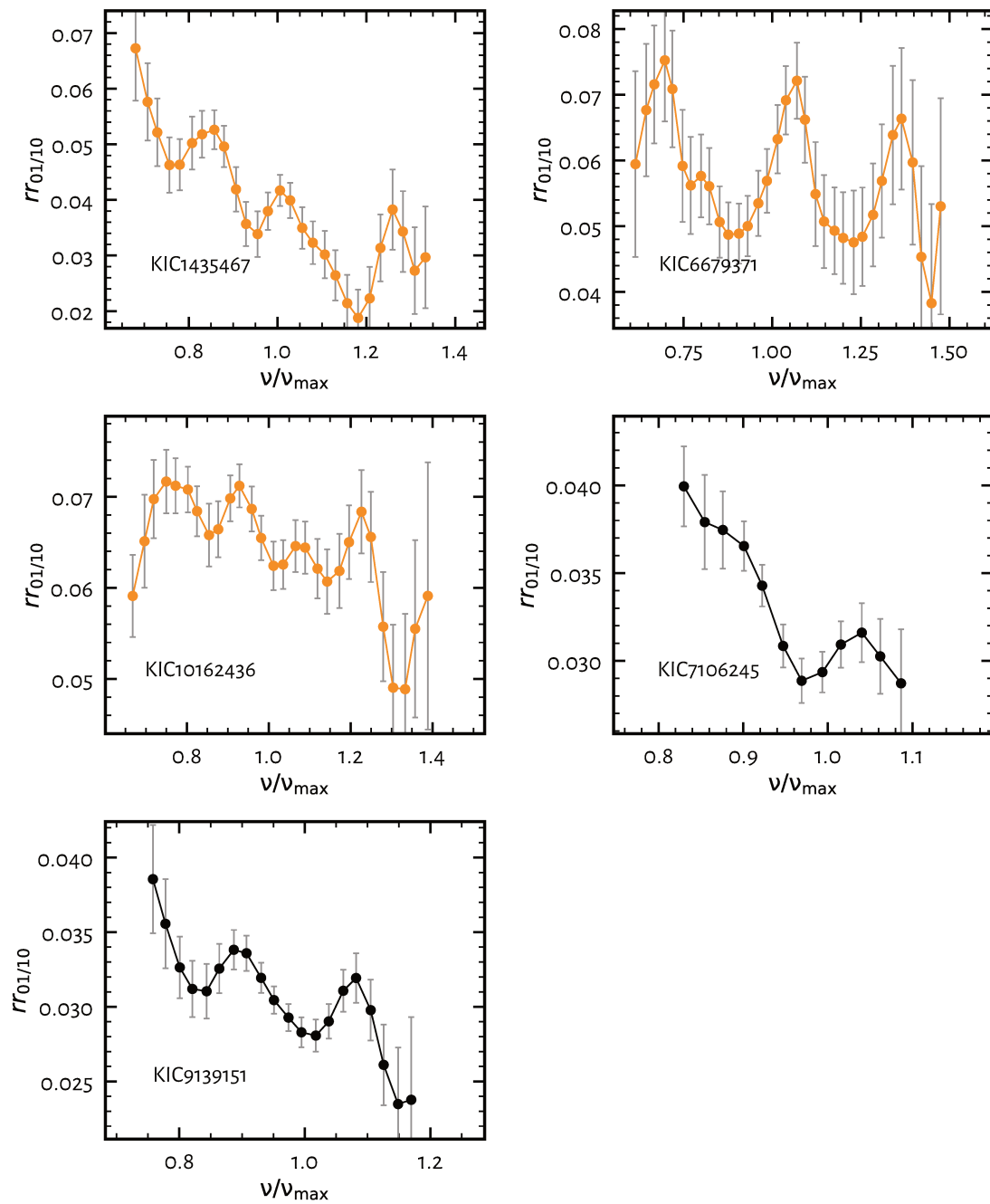


Figure 6.5: Seismic ratios $rr_{01/10}$ of the LEGACY targets selected for glitch analyses.

Table 6.1

Classification of the 19 targets selected for glitch analyses. Four classes were made: Simple (S), F-like (F), Simple and Evolved (SE), and Peculiar (P). See text in Sect. 6.3.2, for a description of each class.

KIC	v_{\max}	$\Delta\nu$	Cat	T_{eff}	$\langle rr_{01/10} \rangle$	Class
5184732	2089	95.5	Simple	5846	0.027	S
6106415	2249	104.1	Simple	6037	0.031	S
6603624	2384	110.1	Simple	5674	0.027	S
8006161	3575	149.4	Simple	5488	0.021	S
8760414	2455	117.2	Simple	5873	0.038	S
9955598	3617	153.3	Simple	5457	0.018	S
12069424 ^(a)	2188	103.3	Simple	5825	0.033	S
12069449 ^(b)	2561	116.9	Simple	5750	0.025	S
1435467	1407	70.4	F-like	6326	0.039	F
6679371	942	50.6	F-like	6479	0.057	F
10162436	1052	55.7	F-like	6146	0.064	F
3656476	1925	93.2	Simple	5668	0.052	SE
6933899	1390	72.1	Simple	5832	0.073	SE
7680114	1709	85.1	Simple	5811	0.059	SE
8694723	1471	75.1	Simple	6246	0.070	SE
8938364	1675	85.7	Simple	5677	0.073	SE
12258514	1513	74.8	Simple	5964	0.054	SE
7106245	2398	111.4	Simple	6068	0.033	P
9139151	2690	117.3	Simple	6302	0.031	P

Notes. ^(a) KIC12069424 \equiv 16 Cyg A. ^(b) KIC12069449 \equiv 16 Cyg B.

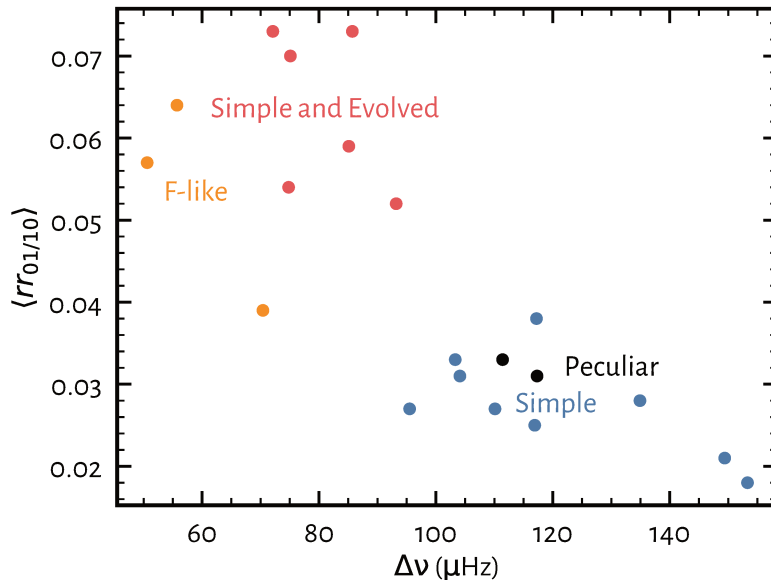


Figure 6.6: Classification of the 19 selected LEGACY targets in the $\langle rr_{01/10} \rangle$ - $\Delta\nu$ plane. Colours indicate the class to which each star belong (see Sect. 6.3.2).

6.3.3 Glitch fitting strategy

The functional form (Eq. 5.17) derived by Monteiro et al. (1994) to model the glitch signature at the BCZ is a non-linear function of the parameters. Regardless of the fitting procedure chosen, we shall expect that it may converge towards a secondary solution that is only a local minimum of the cost function. A way to bypass this issue consists in sampling an appropriately chosen region of the parameter space. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) fitting methods are typically designed to perform this kind of analyses. To fit the seismic ratios $rr_{01/10}$, I then used the Affine Invariant MCMC algorithm proposed by Goodman & Weare (2010) through its python implementation EMCEE (Foreman-Mackey et al., 2013). This algorithm outperforms the classic Metropolis-Hastings MCMC method in that it requires considerably less hand-tuning hyperparameters and is generally more efficient to sample the parameter space. Hereafter, I refer the seismic ratios $rr_{01/10}$ as simply r , for shortness.

The posterior probability density function (PDF), $p(\theta|\mathbf{r}_{\text{obs}}, \mathbf{W})$, of the model parameters θ is estimated in the framework of Bayesian inference, with

$$p(\theta|\mathbf{r}_{\text{obs}}, \mathbf{W}) \propto p(\theta) p(\mathbf{r}_{\text{obs}}, \mathbf{W}|\theta), \quad (6.6)$$

where \mathbf{r}_{obs} is a vector containing the observed ratios and \mathbf{W} the associated inverse covariance matrix. The probability $p(\mathbf{r}_{\text{obs}}, \mathbf{W}|\theta)$ is the maximum likelihood defined as,

$$\ln p(\mathbf{r}_{\text{obs}}, \mathbf{W}|\theta) = -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_{\text{obs}} - \mathbf{r}_{\text{mod}})^T \mathbf{W} (\mathbf{r}_{\text{obs}} - \mathbf{r}_{\text{mod}}) \quad (6.7)$$

where \mathbf{r}_{mod} designates the modelled seismic ratios. The symbol T in exponent denotes the transpose matrix. The probability $p(\theta)$ encodes known prior information on the parameters.

The dependence of the glitch signature amplitude on frequency is weak therefore the number of data points is critical to effectively constrain it. Yet, the number of observed seismic ratios $rr_{01/10}$ that can be measured from *Kepler* data is substantially reduced in comparison to solar data sets. For this reason, the fitting of Eq. 5.17 is unstable and leads to unreliable estimates of

the two amplitudes A_1 and A_2 . To still be able to estimate the amplitude of the glitch signature, I considered the three following models to fit the seismic ratios,

$$r_{\text{mod}}(\nu) = P_2(\nu; c_0, c_1, c_2) + a_0 \cos\left(4\pi \bar{T}_{\text{CZ}}\nu + \phi_{\text{CZ}}\right), \quad (6.8)$$

$$r_{\text{mod}}(\nu) = P_2(\nu; c_0, c_1, c_2) + \frac{a_1}{\tilde{\nu}} \cos\left(4\pi \bar{T}_{\text{CZ}}\nu + \phi_{\text{CZ}}\right), \quad (6.9)$$

$$r_{\text{mod}}(\nu) = P_2(\nu; c_0, c_1, c_2) + \frac{a_2}{\tilde{\nu}^2} \cos\left(4\pi \bar{T}_{\text{CZ}}\nu + \phi_{\text{CZ}}\right). \quad (6.10)$$

Each model comprises six adjustable parameters $\theta = (c_0, c_1, c_2, a_k, \bar{T}_{\text{CZ}}, \phi_{\text{CZ}})$. The P_2 function is a second-order polynomial of coefficients c_i , which accounts for the smooth component coming from the core. The amplitude a_1 and a_2 are scaled upon the reduced frequency defined as $\tilde{\nu} = \nu / (0.8\nu_{\text{max}})$. As mentioned earlier, the ratios are almost insensitive to the surface layers therefore the period \bar{T}_{CZ} of the signal is associated with the acoustic radius of the BCZ glitch instead of the acoustic depth. Lastly, ϕ_{CZ} is a phase term.

For *Kepler* data, the covariance matrix \mathbf{C} of the seismic ratios has a high condition number, which commonly reaches values of the order of $\sim 10^6$ to 10^8 . Its inversion then requires a certain form of regularisation that will make the inverse problem less sensitive to noise in the ratios. To this end, I used the truncated Singular Value Decomposition (SVD) approach in a similar fashion as in [Deheuvels et al. \(2016\)](#). Furthermore, at both ends of the observed frequency range, ratios may have very large error bars owing to their lower signal-to-noise ratio (see Fig. 6.5). Data points with errors larger than three times the median ratio error were then discarded for the fit.

For prior probabilities $p(\theta)$, I chose uniform distributions for all parameters. The coefficients c_i of P_2 are restricted to $[\tilde{c}_i - 3\sigma_i, \tilde{c}_i + 3\sigma_i]$, where the coefficients \tilde{c}_i and their associated errors σ_i are estimated from a least squares fit to the ratios of P_2 alone. The priors on amplitudes a_0 , a_1 and a_2 are limited to the interval $[0, 5 \cdot \max(rr_{01/10} - P_2(\tilde{c}_i))]$. The prior on the acoustic radius \bar{T}_{CZ} is set to $[\delta T, T_0 - \delta T]$, where $\delta T = (\max \nu - \min \nu)^{-1}$ and T_0 is the total acoustic radius as defined in Eq. 5.20. The phase ϕ_{CZ} can span the $[0, 2\pi]$ range.

The sample of the MCMC fitting consists of 250 walkers. Each walker runs for a total of 1000 steps. The first 500 steps are burn-in steps and only the last 500 steps are used to estimate the posterior PDF. A visual check of the evolution of walkers with the step number is done to ensure that there is no large-scale trend over the last 500 steps, which would mean that the sampler is run for too few steps (or alternatively, the PDF was determined from too many steps). The final parameter estimates are evaluated from the median of the marginal posterior PDFs. Their 16th and 84th percentiles determine the inferior and superior uncertainties, respectively. When the amplitude in the ratios is too low, the period cannot be constrained by the MCMC fit but a superior limit can be placed on the amplitude, which I chose to be the 84th percentile.

6.3.4 Results

Results of the MCMC fitting are compiled in Table 6.2. For five targets, the period of the glitch could not be determined. The top panel of Fig. B.1 shows the posterior PDF returned by the MCMC sampling for one of these stars, namely KIC12258514. The amplitude is clearly constrained to low values. The posterior PDF of T_{CZ} exhibits two peaks however they do not appear significantly more probable than any other period in the authorised range. The uncertainties on $rr_{01/10}$ are larger than the amplitude of the signature therefore signals of any period can model the observed signature provided that its amplitude is below the noise level. This appears clearly in the bottom left panel of Fig. B.1. For other stars, the period is constrained with a precision ranging from ~ 50 s to ~ 300 s, depending on the ratios uncertainties

and the glitch amplitude. As an illustration, Fig B.2 plots the results of the MCMC fitting for KIC8938964.

Table 6.2

Results from the glitch fitting analysis of seismic ratios $rr_{01/10}$ in *Kepler* stars.

KIC	a_0 (10^{-3})	a_1 (10^{-3})	a_2 (10^{-3})	\bar{T}_{CZ} (s)	\bar{T}_{CZ}/T_0
5184732	< 0.67	–	–	–	–
⋮	–	< 0.86	–	–	–
⋮	–	–	< 0.96	–	–
6106415	$0.75^{+0.22}_{-0.22}$	–	–	2102^{+74}_{-71}	$0.438^{+0.016}_{-0.019}$
⋮	–	$0.89^{+0.40}_{-0.43}$	–	2121^{+137}_{-124}	$0.442^{+0.029}_{-0.026}$
⋮	–	–	$1.02^{+0.45}_{-0.50}$	2127^{+123}_{-120}	$0.443^{+0.026}_{-0.025}$
6603624	$1.04^{+0.20}_{-0.21}$	–	–	1303^{+64}_{-66}	$0.287^{+0.015}_{-0.015}$
⋮	–	$1.16^{+0.19}_{-0.19}$	–	1344^{+63}_{-63}	$0.296^{+0.014}_{-0.014}$
⋮	–	–	$1.34^{+0.22}_{-0.22}$	1352^{+62}_{-62}	$0.298^{+0.014}_{-0.014}$
8006161	$0.79^{+0.18}_{-0.18}$	–	–	1087^{+75}_{-86}	$0.325^{+0.023}_{-0.026}$
⋮	–	$0.99^{+0.18}_{-0.19}$	–	1030^{+53}_{-53}	$0.308^{+0.016}_{-0.016}$
⋮	–	–	$1.08^{+0.21}_{-0.21}$	1030^{+49}_{-51}	$0.308^{+0.015}_{-0.016}$
8760414	$0.37^{+0.21}_{-0.20}$	–	–	1752^{+164}_{-178}	$0.411^{+0.039}_{-0.042}$
⋮	–	$0.38^{+0.32}_{-0.26}$	–	1813^{+281}_{-276}	$0.425^{+0.066}_{-0.065}$
⋮	–	–	$0.51^{+0.37}_{-0.34}$	1776^{+290}_{-263}	$0.416^{+0.068}_{-0.062}$
9955598	$0.61^{+0.22}_{-0.22}$	–	–	1331^{+115}_{-112}	$0.409^{+0.036}_{-0.035}$
⋮	–	$0.64^{+0.32}_{-0.33}$	–	1330^{+135}_{-148}	$0.408^{+0.042}_{-0.046}$
⋮	–	–	$0.77^{+0.36}_{-0.37}$	1328^{+134}_{-140}	$0.407^{+0.042}_{-0.043}$
12069424 ^(a)	$0.42^{+0.25}_{-0.25}$	–	–	1798^{+165}_{-174}	$0.372^{+0.035}_{-0.036}$
⋮	–	$0.42^{+0.31}_{-0.27}$	–	1891^{+196}_{-208}	$0.391^{+0.041}_{-0.043}$
⋮	–	–	$0.50^{+0.38}_{-0.35}$	1909^{+185}_{-218}	$0.394^{+0.039}_{-0.045}$
12069449 ^(b)	$0.20^{+0.05}_{-0.05}$	–	–	2601^{+66}_{-65}	$0.608^{+0.016}_{-0.016}$
⋮	–	$0.34^{+0.23}_{-0.22}$	–	1419^{+119}_{-114}	$0.332^{+0.028}_{-0.027}$
⋮	–	–	$0.34^{+0.22}_{-0.26}$	1408^{+127}_{-123}	$0.329^{+0.030}_{-0.029}$
1435467	$4.59^{+1.96}_{-2.03}$	–	–	1728^{+135}_{-131}	$0.243^{+0.019}_{-0.019}$
⋮	–	$6.38^{+1.55}_{-1.59}$	–	1771^{+92}_{-83}	$0.249^{+0.013}_{-0.012}$
⋮	–	–	$7.07^{+1.76}_{-1.79}$	1798^{+103}_{-89}	$0.253^{+0.015}_{-0.013}$
6679371	$8.97^{+2.83}_{-2.99}$	–	–	1559^{+166}_{-153}	$0.158^{+0.017}_{-0.016}$
⋮	–	$11.5^{+2.1}_{-2.1}$	–	1542^{+83}_{-88}	$0.156^{+0.009}_{-0.009}$
⋮	–	–	$12.5^{+2.3}_{-2.4}$	1516^{+84}_{-91}	$0.153^{+0.009}_{-0.010}$
10162436	$2.28^{+1.04}_{-1.00}$	–	–	2954^{+170}_{-158}	$0.329^{+0.019}_{-0.018}$
⋮	–	$3.14^{+1.09}_{-1.16}$	–	3009^{+157}_{-158}	$0.335^{+0.018}_{-0.018}$
⋮	–	–	$3.37^{+1.27}_{-1.37}$	2984^{+166}_{-186}	$0.332^{+0.019}_{-0.021}$
3656476	$0.65^{+0.37}_{-0.36}$	–	–	1557^{+222}_{-200}	$0.290^{+0.042}_{-0.038}$

continued on next page

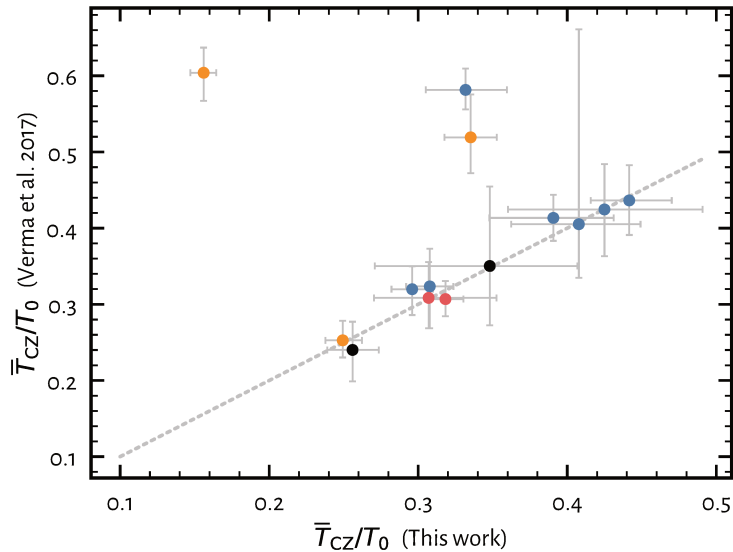
Table 6.2 – continued

KIC	a_0 (10^{-3})	a_1 (10^{-3})	a_2 (10^{-3})	\bar{T}_{CZ} (s)	\bar{T}_{CZ}/T_0
⋮	–	$0.70^{+0.35}_{-0.38}$	–	1647^{+244}_{-197}	$0.307^{+0.046}_{-0.037}$
⋮	–	–	$0.80^{+0.43}_{-0.44}$	1642^{+211}_{-229}	$0.306^{+0.040}_{-0.043}$
6933899	< 0.56	–	–	–	–
⋮	–	< 0.68	–	–	–
⋮	–	–	< 0.78	–	–
7680114	< 0.51	–	–	–	–
⋮	–	< 0.81	–	–	–
⋮	–	–	< 0.94	–	–
8694723	< 1.10	–	–	–	–
⋮	–	< 1.07	–	–	–
⋮	–	–	< 1.14	–	–
8938364	$1.63^{+0.33}_{-0.33}$	–	–	1790^{+89}_{-93}	$0.307^{+0.016}_{-0.016}$
⋮	–	$2.27^{+0.34}_{-0.33}$	–	1857^{+70}_{-73}	$0.318^{+0.012}_{-0.013}$
⋮	–	–	$2.68^{+0.39}_{-0.39}$	1857^{+67}_{-69}	$0.318^{+0.012}_{-0.012}$
12258514	< 0.74	–	–	–	–
⋮	–	< 0.74	–	–	–
⋮	–	–	< 0.86	–	–
7106245	$1.70^{+0.84}_{-0.78}$	–	–	1534^{+202}_{-236}	$0.342^{+0.045}_{-0.053}$
⋮	–	$2.03^{+0.93}_{-0.93}$	–	1562^{+264}_{-346}	$0.348^{+0.059}_{-0.078}$
⋮	–	–	$2.40^{+1.08}_{-1.14}$	1563^{+264}_{-345}	$0.348^{+0.059}_{-0.077}$
9139151	$2.29^{+0.64}_{-0.66}$	–	–	1091^{+72}_{-75}	$0.256^{+0.017}_{-0.018}$
⋮	–	$2.34^{+0.55}_{-0.55}$	–	1091^{+75}_{-72}	$0.256^{+0.018}_{-0.017}$
⋮	–	–	$2.68^{+0.68}_{-0.65}$	1099^{+73}_{-72}	$0.258^{+0.018}_{-0.017}$

Notes. ^(a) KIC12069424 \equiv 16 Cyg A. ^(b) KIC12069449 \equiv 16 Cyg B.

As could be expected, the results are reliant on the functional form fitted. In most cases, the fitted amplitude a_i is more important when the amplitude dependence in frequency scales as $1/\nu^2$ (Eq. 6.10) than when it does as $1/\nu$ (Eq. 6.9), which itself is larger than when the frequency dependence is completely ignored (Eq. 6.8). This is understandable in the sense that I evaluate the amplitude at a fiducial frequency ($\tilde{\nu} = 0.8\nu_{\max}$). If the fitted amplitudes were equal in all ratios models at the fiducial frequency, the amplitudes would be much more different at another frequency, meaning that at least two of the three models would not reflect the observed signature properly. Models that account for the frequency dependence of the signature yield very close estimates for the fitted \bar{T}_{CZ} and seem to perform equally well at modelling the ratios. On the contrary, the model with constant amplitude a_0 is generally less suited to reproduce the observed glitch and gives different estimates of T_{CZ} for some stars. It is actually expected from theory that the amplitude of the ratios decreases with frequency as for any seismic quantity sensitive to glitches. Hereafter, I will only rely on the results that take into account this frequency dependence in the fitting procedure.

Figure 6.7: Comparison of the acoustic radii of the bottom of the CZ determined in this study with those measured by Verma et al. (2017, Table 1). The acoustic radii are scaled to the total acoustic radii of the stars. Colours indicate the class to which each star belong (see Sect. 6.3.2).



Comparison with Verma et al. (2017)

In Verma et al. (2017), the authors conducted an analysis of the glitches in *Kepler* LEGACY stars using the signature in the frequencies themselves $\nu_{n,\ell}$ or in the second differences $\Delta_2\nu_{n,\ell}$. The glitches coming from both the He ionisation zones and the BCZ imprint their signature in these quantities and were fitted by Verma et al. (2017) using a non-linear least squares approach. They determined the amplitude and acoustic depth of the He glitch as well as the acoustic depth of the CZ glitch. Although it was adjusted as well, the amplitude of the CZ glitch was not studied by the authors as it is typically of the order of the uncertainties in the two seismic quantities they considered in their analyses.

I compare their estimates with my results from the MCMC fitting of the seismic ratios in Fig. 6.7. The acoustic depths obtained by Verma et al. (2017) were transformed to acoustic radii and scaled to the total acoustic radii estimated from $T_0 = (2\Delta\nu)^{-1}$. This scaling was also done for our measurements. Except for three stars, the agreement is excellent between the two studies. This suggests that the measurements of the glitch location is not sensitive to the seismic quantity considered nor to the fitting technique employed, as was also found by Mazumdar et al. (2014). The three outliers are KIC6679371, KIC10162436 and KIC12069449 (16 Cyg B). For 16 Cyg B, Verma et al. (2017) noticed that their fitted value is actually closer to the acoustic depth than to the acoustic radius by comparing it to their best fitted model for this star. This explains the discrepancy with my estimate. This is not the case for the two other stars for which the cause of the disagreement remains unclear.

Dependence on T_{eff} and $[\text{Fe}/\text{H}]$

Before investigating the extent of PC under the convective envelope of these stars, it is of interest to look at the variations of the amplitude and period of the CZ glitch signature with stellar parameters. Metallicity is expected to influence the depth of the convective zone. Indeed, an increase in metal abundances tends to increase the opacity and consequently also the radiative temperature gradient expressed by,

$$\nabla_{\text{rad}} \propto \frac{\kappa l p}{m T^4}, \quad (6.11)$$

where l is the luminosity of the shell of mass m and, T , p and κ are the temperature, pressure and opacity, respectively. Thus, the more metallic is the star, the deeper into the star the Schwarzschild criterion ($\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$) is satisfied. Furthermore, we expect that the convective envelope of stars becomes thinner and thinner as T_{eff} increases. In solar-like stars, the opacity is roughly dominated by bound-free (bf) and free-free (ff) transitions and can be approximated by a Kramers' law of the form

$$\kappa \propto f(Z)(1+X)\rho T^{-3.5}, \quad (6.12)$$

where f is a function of Z that I do not explicit here. Stars of lower mass are denser and cooler than their more massive counterparts. The opacity and so the radiative gradient is then larger in cool stars' envelope than that of hot stars, hence explaining their deeper convective envelope.

In their paper, [van Saders & Pinsonneault \(2012\)](#) computed a grid of stellar models ($0.4 \leq M/M_{\odot} \leq 1.6$ and $-4.2 \leq [\text{Fe}/\text{H}] \leq 0.65$) with the YREC stellar evolution code ([Demarque et al., 2008](#)) to assess the sensitivity of the acoustic depth of the CZ to stellar parameters. Diffusion was included using the gravitational settling coefficients from [Thoul et al. \(1994\)](#) multiplied by a factor of 0.8 to account for rotational mixing, following [Delahaye & Pinsonneault \(2006\)](#). The acoustic depth of the CZ and the total acoustic radius were computed directly from the structure of the models by integrating the inverse soundspeed profile between the appropriate limits. The grid parameters and acoustic depths were made publicly available on VizieR.

In Fig. 6.8, I compare the dependence of T_{CZ}/T_0 with $[\text{Fe}/\text{H}]$ and T_{eff} as found by [van Saders & Pinsonneault \(2012\)](#) with that of my measurements. The observed dependence of the acoustic radii with $[\text{Fe}/\text{H}]$ are consistent with the prediction of stellar models although I shall indicate that the range of acoustic radii spanned by models is rather large. On the other hand, the dependence on T_{eff} differs substantially between observations and models. Stars cooler than ~ 6100 K seem to follow the modelled trend but show a systematic shift of several percents towards lower values. Actually, this kind of discrepancy is expected owing to the fact that I do not compare exactly the same quantity. The fitting of the seismic signature gives access to the acoustic location of the glitch down to a constant term a_{ϕ} related to surface effects. For that matter, [van Saders & Pinsonneault \(2012\)](#) pointed out that when they include the contribution from a realistic atmosphere model instead of a grey atmosphere, the scaled acoustic radii is decreased by $\sim 5\%$ for stars with $M \leq 1.0M_{\odot}$ up to 20% for more massive models. For stars hotter than ~ 6100 K, the measured scaled acoustic radii are closer to the scaled acoustic depth of models (see right panel of Fig. 6.8), down to the systematic shift just evoked above. The four targets concerned are KIC1435467, KIC6679371, KIC9139151 and KIC10162436. In these stars, the convective envelope is expected to be very shallow due to their higher T_{eff} , which implies that the acoustic radius of the BCZ is very large. In particular, it is beyond the acoustic middle point of the stellar structure ($0.5T_0$). In other words, this means that the oscillatory signature in the ratios has a short period (in the frequency domain) that starts to be comparable with the large separation $\Delta\nu$. Thus, the acoustic depth is favoured by the fitting routine. For instance, let's assume that, for KIC6679371, I measured the acoustic depth instead of the radius. Then, the acoustic radius would equal $T_0 - \bar{T}_{\text{CZ}} = 9881 - 1542 = 8339$ s, which translated into the frequency domain would give a period of $60.0 \mu\text{Hz}$ when $\Delta\nu = 50.6 \mu\text{Hz}$.

Figure 6.9 shows the amplitude of the glitch signature as a function of metallicity and effective temperature. I considered the amplitude resulting from the fitting of Eq. 6.9 ($a \propto 1/\nu$) for these plots but similar results are obtained with Eq. 6.10 ($a \propto 1/\nu^2$). No clear trend with $[\text{Fe}/\text{H}]$ really stands out. When looking at the amplitude dependence on T_{eff} , two regimes may be distinguished. As T_{eff} increases, the glitch amplitude remains more or less steady, perhaps with a slight downwards trend, until reaching $T_{\text{eff}} \sim 6000$ K, where the amplitude increases

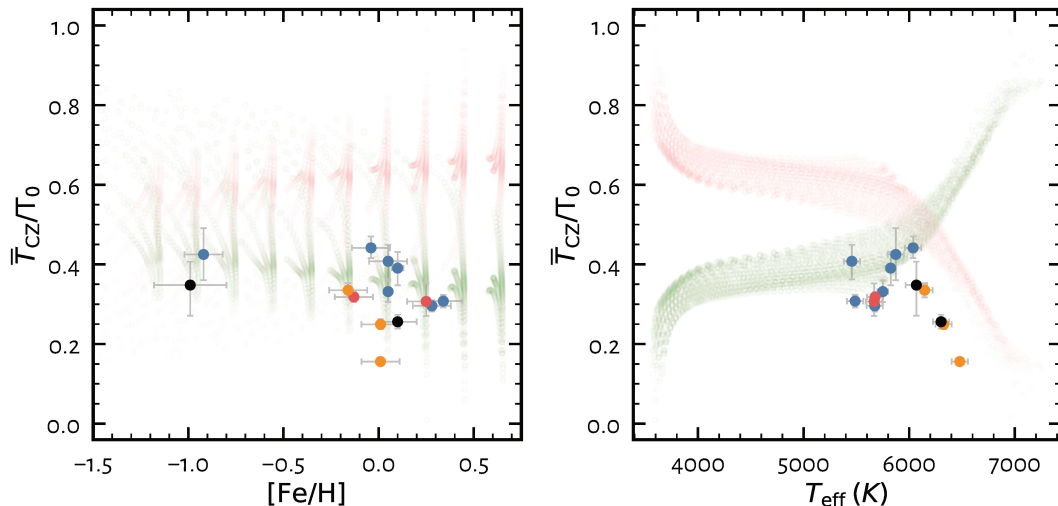


Figure 6.8: Dependence of the scaled acoustic radius of the BCZ (T_{CZ}/T_0), with iron-to-hydrogen abundance $[\text{Fe}/\text{H}]$ (*left*) and effective temperature T_{eff} (*right*). Large dots are my measurements from the fitting of the seismic ratios. Their colour is representative of their class (see Sect. 6.3.2). Small transparent green dots are the scaled acoustic radii T_{CZ}/T_0 for all stellar models in the grid of van Saders & Pinsonneault (2012). Transparent pink dots represent the complementary quantity τ_{CZ}/T_0 .

dramatically. A similar behaviour was noticed by Verma et al. (2014) in a set of standard stellar models.

Given the small size of the sample, we should stay cautious in the interpretation of these results but overall, the measurements of glitch parameters related to the BCZ are compatible with current stellar models.

6.4 Diagnostic potential of seismic ratios for the extent of penetrative convection

While numerous studies broach the relation between stellar parameters and the signature of the CZ glitch in solar-like stars (e.g. van Saders & Pinsonneault, 2012; Verma et al., 2014, 2017), few have accounted for PC under the convective envelope. Only the Sun benefits from a profuse literature on the subject owing to the great quality of solar data. Investigations on the PC seismic signature are scarce. Monteiro et al. (2000) extended the solar analysis to stellar models of solar-like stars in the mass range $0.85\text{-}1.2 M_{\odot}$. Using a similar model for PC than that of Zahn (1991), the authors showed that the amplitude of the signal increases with the extent PC while the change in the acoustic location of the bottom of the CZ is limited to less than 100 s. Additionally, they discussed the detectability of the signature and concluded that observational uncertainties of the order of $\sim 0.1 \mu\text{Hz}$ on mode frequencies would allow us to measure both amplitude and period with reasonable precision. Interestingly, this is the kind of uncertainties reached by *Kepler* data for the best stars of the LEGACY sample.

More recently, Lebreton & Goupil (2012) conducted a seismic study of the PC in the CoRoT star HD52262 ($M = 1.14\text{-}1.32 M_{\odot}$, Lebreton & Goupil, 2014). From the CZ glitch signature in the seismic ratios, they measured a significant extension of the convective envelope over a penetrative distance of $0.95 \pm 0.08 H_p$, which corresponds to $\zeta_{\text{PC}} = 1.3$ in Zahn's formalism.

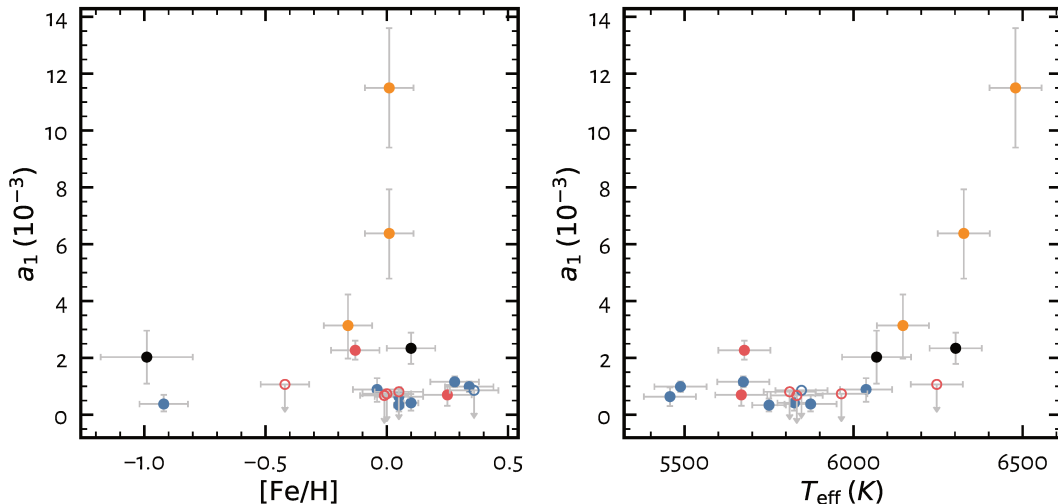


Figure 6.9: Amplitude of the signature in $rr_{01/10}$ due to the BCZ glitch with $[Fe/H]$ (*left*) and T_{eff} (*right*). Full dots show stars for which the amplitude is well constrained. Open dots are only upper limits deduced from the MCMC sampling (see Sect. 6.3.4). Colours indicate the class to which each star belong (see Sect. 6.3.2).

This is substantially larger than the upper limit derived for the Sun ($\sim 0.10 H_p$), which we may suspect is due to the higher mass, higher metallicity ($[Fe/H] = 0.22 \pm 0.05$) or the different evolutionary stage of the star.

In this section, I intend to explore the diagnostic potential of seismic ratios for constraining the PC extent in solar-like stars. To this end, I select a set of representative stellar models that include more or less PC for each star and compare the amplitude and period of the CZ glitch in the models with the measurements. I stress that a similar method was employed by [Deheuvels et al. \(2016\)](#) to study the existence and size of convective cores in solar-type stars.

6.4.1 A grid of stellar models

The grid of stellar models was computed with the CESAM stellar evolution code ([Morel, 1997](#); [Morel & Lebreton, 2008](#)). I adopted the GN93 metal mixture ([Grevesse & Noels, 1993](#)) and corresponding opacity tables obtained with OPAL opacities ([Iglesias & Rogers, 1996](#)), completed at low temperature ($\log T < 4.1$) with [Ferguson et al. \(2005\)](#) opacity tables. I used the OPAL2005 equation of state ([Rogers & Nayfonov, 2002](#)) and the nuclear reaction rates from the NACRE compilation ([Angulo et al., 1999](#)), except for the $^{14}N(p, \gamma)^{15}O$ nuclear reaction, for which I adopted the cross-section of [Formicola et al. \(2004\)](#). Convection was treated using the formalism of [Canuto et al. \(1996, CGM\)](#) with a mixing length $l = \alpha_{\text{CGM}} H_p$. Overshooting at the convective core (when it exists) extends the adiabatic gradient to a length $\alpha_{\text{ov}} = 0.15 \min(r_{\text{cc}}, H_p)$, where r_{cc} is the Schwarzschild radius of the convective core. Instantaneous chemical mixing is supposed in the overshoot region. Penetrative convection is parametrised according to the model of [Zahn \(1991\)](#), with a PC extent parameter ξ_{PC} . Atomic diffusion was taken into account according to [Michaud & Proffitt \(1993\)](#), except for models with $M = 1.2 M_{\odot}$ (see below). The atmospheric boundary condition is a grey model atmosphere following the classic Eddington $T - \tau$ law (τ is the optical depth here). The evolution was conducted from the pre-main sequence (Pre-MS) phase to the early subgiant (SG) stage ($X_C > 10^{-5}$). Pre-MS models were not considered hereafter. Pressure mode frequencies were computed with the oscillation code LOSC for all models ([Scuflaire et al., 2008b](#)). The seismic ratios $rr_{01/10}$ were then calculated

Table 6.3
Parameters of stellar models in the grid computed with CESTAM.

Parameter	Values
M/M_{\odot}	0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2
Y_0	0.26, 0.28, 0.30
$(Z/X)_0$	0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06
$[\text{Fe}/\text{H}]_0$	-0.39 to 0.39
α_{CGM}	0.55, 0.65, 0.75
ξ_{PC}	0.00, 0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50
Age	ZAMS to TAMS ($X_c = 10^{-5}$)

from Eq. 5.23 and 5.24.

The parameters of the stellar models constitutive of the grid are compiled in Table 6.3. The grid is voluntarily sparse as our intent is not to search for an optimal model but rather to establish the diagnostic potential of seismic ratios to quantify the PC extent. Parameters were chosen on the basis of the modelling results of the c2ksmo pipeline in order to cover most of the targets in our sample (see Table. A.2). I did not consider stellar models of mass higher than $1.2 M_{\odot}$ in this first investigation. Higher mass stellar models are indeed subject to supplementary uncertainties due to the presence of a convective core that can be extended by overshooting, which brings an additional free parameter α_{ov} into play. Furthermore, in these stars, the diffusion of chemical elements by radiative accelerations is expected to be efficient enough to counteract the gravitational settling (at least partially), which is also why diffusion was not included in the computations of models of $1.2 M_{\odot}$. Radiative levitation has substantial impact on the size of the convective envelope as was shown recently by Deal et al. (2018). Consequently, KIC1435467, KIC6679371, KIC9139151, KIC10162436, and KIC12258514 are not represented in our grid and cannot be studied thereafter. Finally, two stars in the sample have low iron-to-hydrogen abundance ratios: KIC7106245 with $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.99 \pm 0.19$ and KIC8760414 with $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.92 \pm 0.10$. For this reason, they fall outside the parameter space covered by the grid. This leaves a total of 12 stars.

6.4.2 Comparison with observations

For each star, I selected models that match the T_{eff} , $[\text{Fe}/\text{H}]$ and $\log g$ within 3σ . For each of these models, I only kept the ratios of same radial orders than observed and interpolated them in order to obtain the values of ratios at the star's resonant frequencies. Then, this latter set of ratios was fitted in the exact same manner than observations with the MCMC fitting algorithm. The acoustic radii were also scaled to the total acoustic radius computed from the large separation (Eq. 5.20) in both models and observations. I thus ensure that the estimated amplitude and period of the glitch signature in models are comparable with the observed measurements.

In Fig. 6.10 and Fig. 6.11, I confront the observations and selected models in the amplitude-acoustic radius plane. In all studied stars, the PC parameter ξ_{PC} is confined to values $\lesssim 0.40$. This contrasts with the higher ξ_{PC} derived by Lebreton & Goupil (2012) for HD52265. Nonetheless, with $T_{\text{eff}} = 6120 \pm 110$ K, this star is hotter than most stars considered here. I showed in Sect. 6.3.4 that the amplitude of the glitch signature increases with T_{eff} beyond ~ 6000 K, suggesting that ξ_{PC} is probably larger in hotter F-type stars. In any case, the diagnostic poten-

tial of $rr_{01/10}$ for constraining the PC extent under the convective envelope of solar-like stars is definitely established. I discuss peculiarities of some individual stars hereinafter.

KIC3656476, *KIC6603624*, *KIC8006161*. These three stars fall at the border of or outside the computed grid of models owing to their high metallicity ($[\text{Fe}/\text{H}] = 0.25 \pm 0.10, 0.28 \pm 0.10$ and 0.34 ± 0.10 , respectively). It owes to the fact that gravitational settling decreases the initial $[\text{Fe}/\text{H}]$ in the convective envelope. This is consistent with their position in the $a_1 - \bar{T}_{\text{CZ}}/T_0$ plane as an increased metallicity implies a deeper convective envelope. I expect the trends drawn by models to vary smoothly, therefore it seems safe to extrapolate them to cover the stars' positions in the plots.

KIC8694723. Although some models match its seismic signature, *KIC8694723* has a notably low metallicity of $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.42 \pm 0.10$, which is at the border of the grid used for the comparison.

KIC8938364. On the basis of the smooth trend of $rr_{01/10}$, [Deheuvels et al. \(2016\)](#) found this star to be in the early subgiant stage. This is in agreement with the best fit model from the *c2kSMO* pipeline, which has a $X_{\text{C}} < 10^{-4}$. The PC parameter seems to be higher than for most stars in our sample but a detailed analysis is required for imputing this to the evolutionary state. More so because *KIC3656476* is in a similar evolutionary stage ($X_{\text{C}} < 10^{-4}$) and appears more consistent with a low ξ_{PC} .

16 Cyg A & B. The glitch signature of the BCZ in these two stars has an amplitude that is substantially lower than models that match their parameters (which are similar to those of the Sun and therefore covered by the grid). They are the only stars in our sample that fall into this case. A possible explanation would be that the transition of the temperature gradient at the convective boundary is smoother than what is modelled by Zahn's formalism or this could also be due to diffusion or rotationally-induced mixing processes at the BCZ. Further investigation is required to clarify this point.

6.5 Calibration of the extent of penetrative convection in *Kepler* stars

6.5.1 Forward modelling with *c2kSMO*

Developed by Y. Lebreton, the *c2kSMO* code is a pipeline designed to model stars from a set of observational constraints and adjustable parameters picked by the user. This pipeline combines the *CESTAM* stellar evolution code with the *LOSC* oscillation code in order to find the model that reproduces the best the given set observables. This optimal model is found by minimising a cost function using the Levenberg-Marquardt (LM) algorithm (e.g. [Bevington & Robinson, 2003](#), p. 161-164), which was originally introduced in the context of stellar modelling by [Miglio & Montalbán \(2005\)](#)

In stellar modelling, we aim to adjust the free parameters of 1D stellar models – the mass, initial chemical composition, age, convection parameter, core overshooting...etc – to reproduce as best as possible the observational constraints (see e.g. [Miglio & Montalbán, 2005](#); [Deheuvels et al., 2010](#); [Lebreton & Goupil, 2014](#)). In *c2kSMO*, the goodness of the fit is evaluated through the chi-squared function,

$$\chi^2 = [\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}(\boldsymbol{\theta})]^T \mathbf{W} [\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}(\boldsymbol{\theta})] \quad (6.13)$$

where \mathbf{y}_{obs} and \mathbf{W} designate the observational constraints and their associated inverse covariance matrix, respectively. The vector \mathbf{y}_{mod} represents the values of the observables in the fitted model, which depends on the free parameters $\boldsymbol{\theta}$. The χ^2 function is a non-linear function

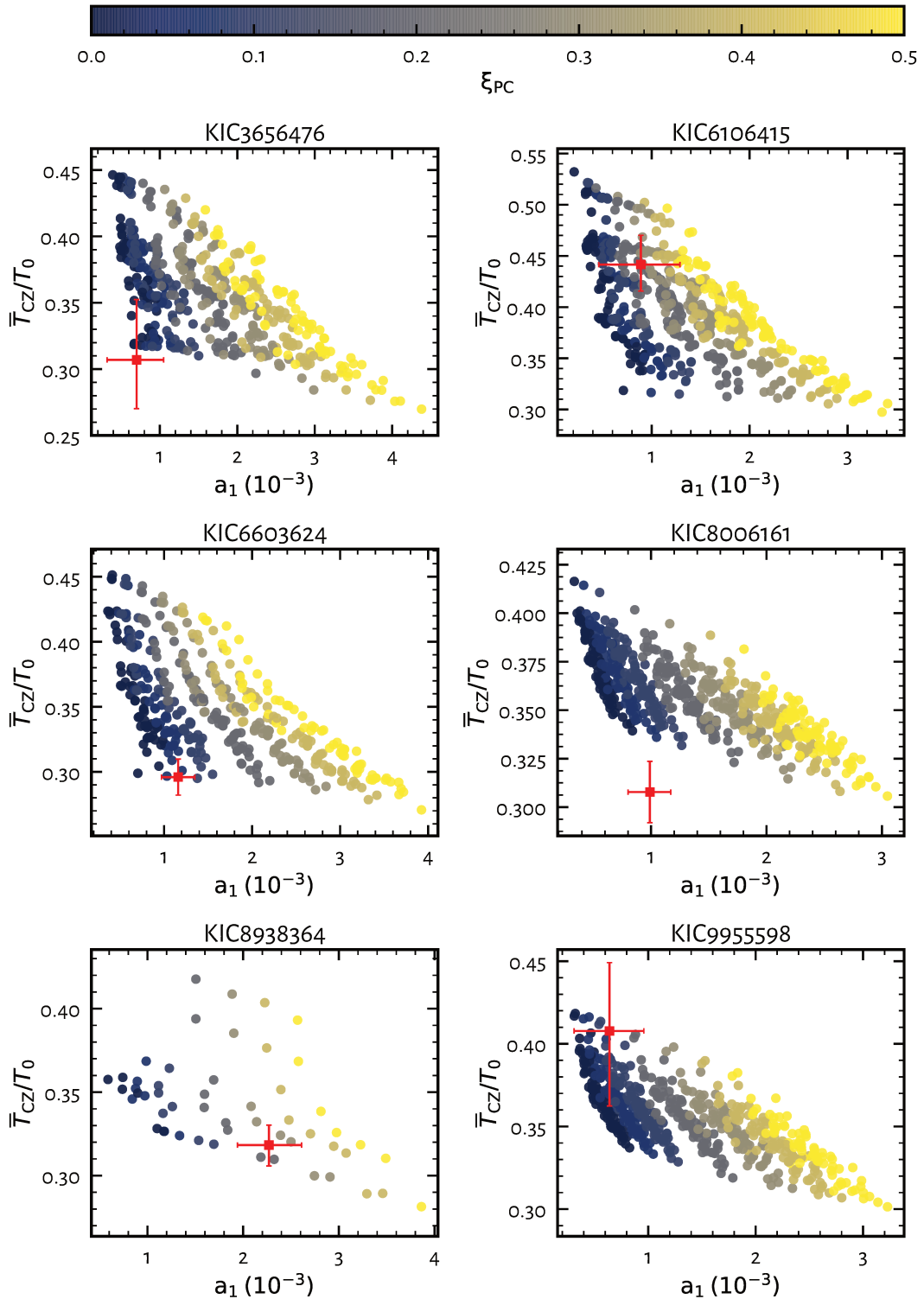


Figure 6.10: Seismic ratios $rr_{01/10}$ as a diagnostic of the penetrative convection under the convective envelope. The observed scaled acoustic radius of the bottom of the convective zone, \bar{T}_{CZ}/T_0 , and the amplitude of the glitch signature a_1 (red squares) are compared with their equivalents in models with different values of the PC parameter ξ_{PC} (coloured dots). (continued on next page).

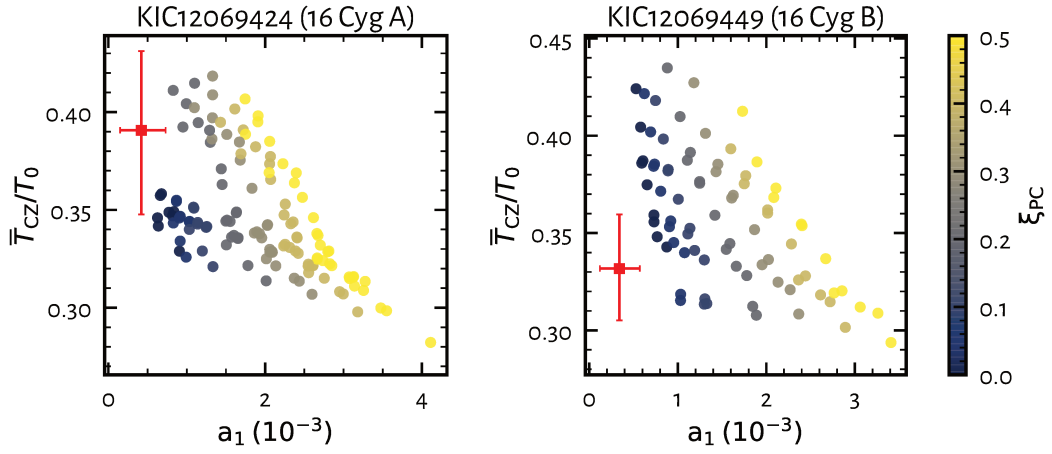


Figure 6.10: Seismic ratios $rr_{01/10}$ as a diagnostic of the penetrative convection under the convective envelope (continued).

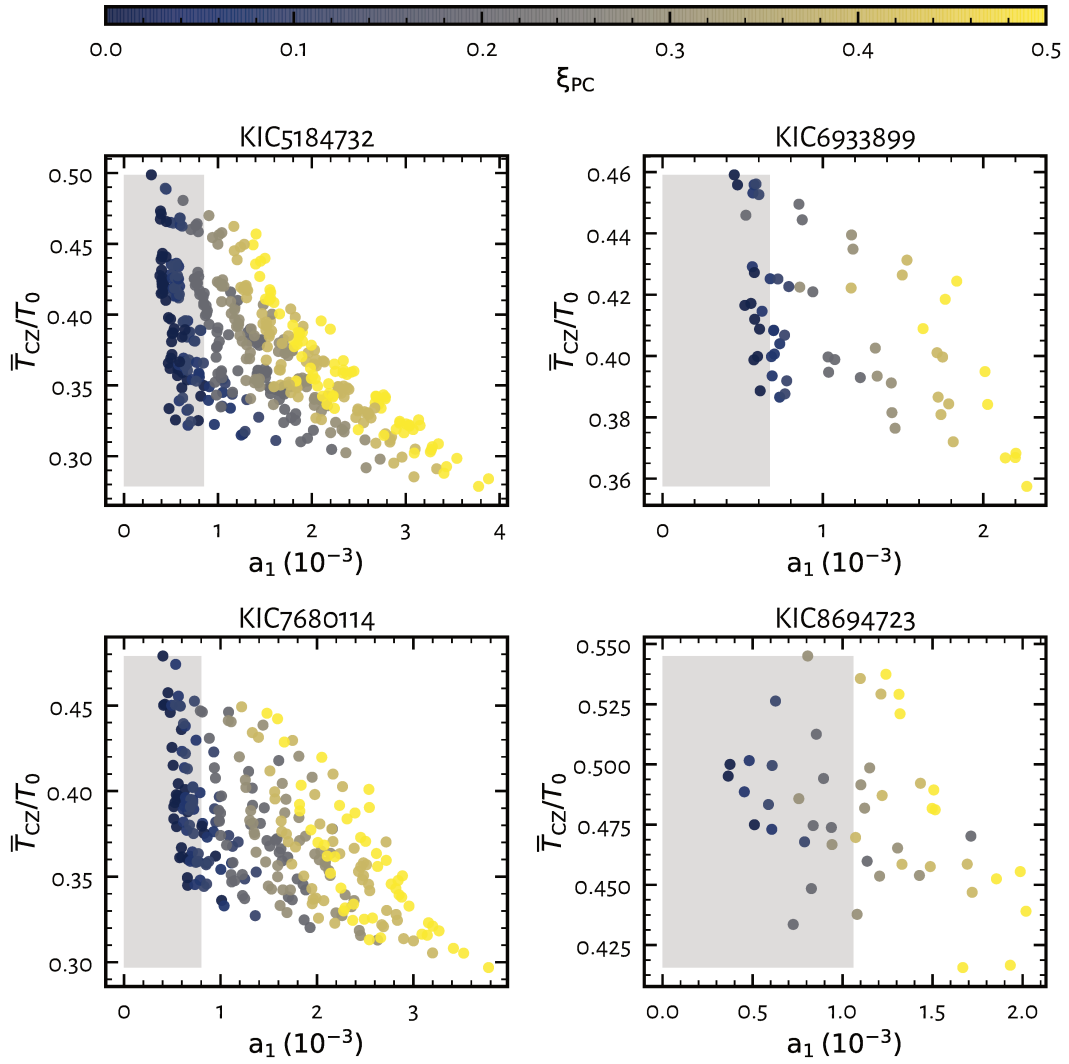


Figure 6.11: Same as Fig 6.10 but for stars in which only an upper limit on the amplitude of the glitch signature could be determined (grey areas).

of the parameters therefore it should be expected that a minimum of χ^2 may be only local and not necessarily global, regardless of the optimisation method.

The LM method solves non-linear least squares problems and proceeds by iteratively minimising the χ^2 function. It combines the advantages of two complementary fitting approaches: the gradient descent and Gauss-Newton methods.

The Gauss-Newton method

The Gauss-Newton method assumes that we are sufficiently close to the solution so that the χ^2 landscape can be approximated by a quadratic hypersurface. If this hypothesis is correct, we may approximate the χ^2 function by its second-order Taylor expansion,

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\delta\theta}) \approx \chi^2(\boldsymbol{\theta}) + \nabla\chi^2 \cdot \boldsymbol{\delta\theta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta\theta}^T \cdot \nabla^2\chi^2 \cdot \boldsymbol{\delta\theta}, \quad (6.14)$$

in the vicinity of the minimum. The χ^2 gradient with respect to the parameters $\boldsymbol{\theta}$ is expressed by,

$$\nabla\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = -2[\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}(\boldsymbol{\theta})]^T \mathbf{W} \mathbf{J} \quad (6.15)$$

where $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{y}_{\text{mod}}}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ is the Jacobian matrix of \mathbf{y}_{mod} with respect to $\boldsymbol{\theta}$. The Laplacian of χ^2 is given by,

$$\nabla^2\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = 2\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} - 2[\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}(\boldsymbol{\theta})]^T \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (6.16)$$

The second term in the right hand side of Eq. 6.16 is often considered negligible in comparison to the first term owing to the fact that $\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}$ is presumably small in the vicinity of the solution. This assumption is made in the c2kSMO pipeline. Rewriting the Taylor expansion in Eq. 6.14 then gives,

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\delta\theta}) \approx \chi^2(\boldsymbol{\theta}) - 2[\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}(\boldsymbol{\theta})]^T \mathbf{W} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta\theta} + \boldsymbol{\delta\theta}^T \cdot \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta\theta}. \quad (6.17)$$

We are searching for the parameters update that will minimise χ^2 . In other words, the update must verify,

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial (\boldsymbol{\delta\theta})} = 0, \quad (6.18)$$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta\theta} = [\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}(\boldsymbol{\theta})] \mathbf{W} \mathbf{J}, \quad (6.19)$$

$$\boldsymbol{\delta\theta} = (\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J})^{-1} [\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}(\boldsymbol{\theta})] \mathbf{W} \mathbf{J}. \quad (6.20)$$

Since the quadratic hypersurface is only an approximation of the χ^2 landscape, several iterations are generally needed to converge to the minimum.

The gradient descent method

At each iteration, the gradient descent method computes the gradient of the χ^2 function with respect to the parameters (see Eq. 6.15) and updates the parameters so as to move towards a minimum of χ^2 following the opposite direction of the χ^2 gradient. This update on parameters reads,

$$\boldsymbol{\delta\theta} = -\frac{\gamma}{2} \nabla\chi^2 = \gamma [\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}(\boldsymbol{\theta})] \mathbf{W} \mathbf{J} \quad (6.21)$$

where γ is the length of the step to make in the direction of gradient descent. This step must be chosen carefully: if the step is too large then we may miss the minimum, if it is too small a great number of iterations will be necessary to reach the χ^2 minimum. A smart choice consists in scaling the constant to the local curvature of the χ^2 landscape assessed by the Laplacian $\nabla^2 \chi^2$, for instance by writing out $\gamma = [\text{diag}(\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J})]^{-1}$.

This gradient descent approach is typically efficient when far from a solution but tends to converge slowly once close to a minimum of χ^2 . This is because the χ^2 landscape becomes flatter and flatter as we approach a solution. For example, a typical situation in which the algorithm performs badly is when the landscape has the form of a valley.

The Levenberg-Marquart (LM) algorithm

In the LM algorithm, the update of parameters is a compromise between the gradient descent and the Gauss-Newton methods. This is expressed by,

$$\delta\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda \cdot \text{diag}(\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J})]^{-1} [\mathbf{y}_{\text{obs}} - \mathbf{y}_{\text{mod}}(\boldsymbol{\theta})] \mathbf{W} \mathbf{J} \quad (6.22)$$

where λ is the *damping* parameter. When λ is very large, the parameters update becomes almost equivalent to that of the gradient descent method whereas for a very small λ it will resemble the update prescribed by the Gauss-Newton method. Formally, the Levenberg-Marquardt algorithm as implemented in c2ksmo may be described as follows,

Step 1. Provide an initial guess $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ and set an initial value for λ (this step is problem specific).

At the first iteration, nothing is known on the χ^2 landscape, meaning that we must provide the initial values for the parameters $\boldsymbol{\theta}$ from which the algorithm will start. The choice of this initial guess will be discussed in Sect. 6.5.4. The damping parameter is initially set to $\lambda = 10^{-4}$.

Step 2. Compute $\chi^2(\boldsymbol{\theta})$.

Step 3. Evaluate $\delta\boldsymbol{\theta}$ using Eq. 6.22 and compute $\chi^2(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta})$.

Step 4. If $\chi^2(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) < \chi^2(\boldsymbol{\theta})$ then accept the update $\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}$ and decrease the damping parameter $\lambda \leftarrow \lambda/4$.

In this case, we approach a minimum (global or local) thus we decrease the weight of the gradient descent term to favour the Gauss-Newton method at the next iteration.

Step 5. If $\chi^2(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) \geq \chi^2(\boldsymbol{\theta})$, decline the update $\delta\boldsymbol{\theta}$ and increase the damping parameter $\lambda \leftarrow 64 \times \lambda$.

Here, the parameter update makes the fit worse meaning that the Gauss-Newton term is probably inadequate to model the χ^2 landscape. By increasing λ , we favour the gradient descent method for the next iteration.

Step 6. Go back to Step 3.

The optimisation is stopped either when the maximum number of iterations set by the user – typically one or a few dozens – is reached or, when the χ^2 does not improve substantially, which is expressed by the condition,

$$0.99 < \frac{\chi^2(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta})}{\chi^2(\boldsymbol{\theta})} < 1.$$

Errors on adjusted parameters are evaluated from the curvature of the χ^2 landscape at the minimum found by the LM algorithm, that is to say,

$$\sigma_{\theta} = \sqrt{\text{diag}[\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}]^{-1}}. \quad (6.23)$$

Note that this supposes that the χ^2 function is well-approximated by a quadratic form while this may not be necessarily the case actually. Evaluating the errors in this manner also means that we do not get direct error measurements on non-fitted parameters such as the radius or the luminosity for example. Instead, they are deduced by propagating the errors on fitted parameters as was done by e.g. [Deheuvels et al. \(2016\)](#), using the relation,

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_{i,j} C_{i,j} \left(\frac{\partial X}{\partial \theta_i}\right) \left(\frac{\partial X}{\partial \theta_j}\right)} \quad (6.24)$$

where X represents a non-fitted parameter and C is the covariance matrix of fitted parameters.

6.5.2 Input physics

The choice of input physics is identical to that adopted for the grid of stellar models in Sect. 6.4.1 in order to ensure consistency throughout this study. I do not explore different choices here. This will be briefly addressed in Sect. 6.6.

6.5.3 Choice of observational constraints and adjusted parameters

Searching for an “optimal” model implies that we define criteria on the basis of which we consider that a model is more representative of a star than another. The c2kSMO pipeline leaves the choice of the constraining observables to the user. Depending on the star, the number of available constraints may be limited to the extent that some parameters need to be fixed, typically the initial helium mass fraction Y_0 and convective parameter α_{CGM} .

In the case of HD52562, [Lebreton & Goupil \(2014\)](#) evaluated the impact of different choices on the optimal model and on the precision of derived stellar parameters. I reproduced in Table 6.4 the list of cases that were investigated in their study. The authors concluded that cases 4, 6 and 7 yield the most precise age and mass. Cases 4 and 7 necessitate to correct individual frequencies for near-surface effects. These corrections are based on empirical prescriptions ([Kjeldsen et al., 2008](#); [Ball & Gizon, 2014](#); [Sonoii et al., 2015](#)) that introduce one or two additional parameters to be adjusted in the optimisation. On the other hand, individual ratios are insensitive to near-surface effects therefore case 6 was considered the best set of observational constraints by [Lebreton & Goupil \(2014\)](#). Guided by this work, I chose to adopt the same set of observables. Individual ratios are highly correlated meaning that in principle the covariance matrix should be taken into account in the computations of the χ^2 . [Lebreton & Goupil \(2014\)](#) showed that neglecting the correlations does not impact much the fitted parameters while it substantially complicates the fitting procedure. Thus, I did not account for them henceforth. As advised by [Roxburgh & Vorontsov \(2013\)](#), the ratios of models are interpolated at observed frequencies in order to obtain sets of ratios comparable with observations. As in Sect. 6.3.3, I discarded seismic ratios with too large uncertainties.

6.5.4 Initialisation of parameters and the problem of secondary minima

Because the parameters depend on observables in a non-linear way, a particular attention needs to be paid for secondary minima of the χ^2 landscape. In this regard, the choice of the

Table 6.4

Possible combinations of observational constraints and adjusted parameters for model optimisation (after [Lebreton & Goupil, 2014](#)).

Case	Observational constraints	Adjusted parameters	Fixed parameters
1	$T_{\text{eff}}, L, [\text{Fe}/\text{H}]$	age, $M, (Z/X)_0$	α_{CGM}, Y_0
2	$T_{\text{eff}}, L, [\text{Fe}/\text{H}], \langle \Delta v \rangle$	age, $M, (Z/X)_0, \alpha_{\text{CGM}}$	Y_0
3	$T_{\text{eff}}, L, [\text{Fe}/\text{H}], \langle \Delta v \rangle, v_{\text{max}}$	age, $M, (Z/X)_0, \alpha_{\text{CGM}}, Y_0$	–
4	$T_{\text{eff}}, L, [\text{Fe}/\text{H}], \langle \Delta v \rangle, \langle d_{02} \rangle$	age, $M, (Z/X)_0, \alpha_{\text{CGM}}, Y_0$	–
5	$T_{\text{eff}}, L, [\text{Fe}/\text{H}], \langle r_{02} \rangle, \langle rr_{01/10} \rangle$	age, $M, (Z/X)_0, \alpha_{\text{CGM}}, Y_0$	–
6	$T_{\text{eff}}, L, [\text{Fe}/\text{H}], r_{02}(n), rr_{01/10}(n), v_{n_0}$	age, $M, (Z/X)_0, \alpha_{\text{CGM}}, Y_0$	–
7	$T_{\text{eff}}, L, [\text{Fe}/\text{H}], v_{n,\ell}$	age, $M, (Z/X)_0, \alpha_{\text{CGM}}, Y_0$	–

initial guess for the adjusted parameters is of great importance. A sensible strategy consists in approaching the solution in several steps although I note that this does not guarantee the convergence to the global minimum.

A first optimisation is performed in which only the classical global properties ($T_{\text{eff}}, L, [\text{Fe}/\text{H}]$) are used as constraints (Case 1). We initialise the mass M using the seismic scaling relation,

$$\frac{M}{M_{\odot}} \approx \left(\frac{v_{\text{max}}}{v_{\text{max},\odot}} \right)^3 \left(\frac{\Delta v}{\Delta v_{\odot}} \right)^{-4} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff},\odot}} \right)^{3/2}, \quad (6.25)$$

where $v_{\text{max},\odot} = 3050 \mu\text{Hz}$, $\Delta v_{\odot} = 134.9 \mu\text{Hz}$, and $T_{\text{eff},\odot} = 5777 \text{ K}$. The parameter $(Z/X)_0$ is started from the current metal-to-hydrogen mass ratio measured from spectroscopy $(Z/X) = (Z/X)_{\odot} \cdot 10^{[\text{Fe}/\text{H}]}$. While gravitational settling depletes the metallic content at the surface of stars with $M \lesssim 1.2 M_{\odot}$, the current metal abundance is close enough to the initial value so that it remains a reasonably good choice of initial guess. To initialise the age, we relied on the age diagnostic provided by the small to large separation ratio r_{02} ([Lebreton & Montalbán, 2009](#)). More particularly, we used the empirical relation deduced by [Appourchaux et al. \(2015\)](#),

$$\text{Age } M^{\beta} = a_1 r_{02}^{\alpha} + a_0 \quad (6.26)$$

where $\alpha = 0.54$, $\beta = 2.37$, $a_0 = 29.6 \text{ Gyr}$ and $a_1 = -97.7 \text{ Gyr}$, as calibrated from a set of models. For this first optimisation, the initial helium mass fraction Y_0 is fixed to,

$$Y_0 = Y_{\text{p}} + \frac{\Delta Y}{\Delta Z} (Z_0 - Z_{\text{p}}), \quad (6.27)$$

$Y_{\text{p}} = 0.245$ and $Z_{\text{p}} = 0$ being the helium and metal primordial abundances (see e.g. [Aver et al., 2015](#)), respectively. The helium-to-metals enrichment ratio is set to a galactic value of $\Delta Y/\Delta Z \approx 2.0$. The convective parameter α_{CGM} is not fitted and set to the solar calibrated value $\alpha_{\text{CGM},\odot} = 0.688$ for this first optimisation.

Then, the inferred age, M , and $(Z/X)_0$ are used as initial guess for a second optimisation, this time using the observed individual ratios $rr_{01/10}(n)$, $r_{02}(n)$ and a mode frequency v_{n_0} in the lower frequency range of the spectrum as seismic constraints (Case 6). This latter observable acts as a guide to “grip” the smooth trend of the individual seismic ratios. It has to be a frequency at a radial order n_0 for which we have an observed $rr_{01/10}$ value and where we attain a good compromise between weak surface effects and low uncertainty. The two parameters α_{CGM} and Y_0 are now free parameters of the optimisation. The resulting model is our reference model without PC.

Finally, we include PC at the bottom of the CZ by running the LM algorithm for several fixed values of the PC extent parameter ξ_{PC} . All other parameters are free and initialised to that of the reference model without PC. As shown in Sect. 6.4.2, the PC layer is confined to a thin layer corresponding to $\xi_{\text{PC}} \lesssim 0.40$, which therefore constitutes the maximum of PC we investigate in this study.

6.5.5 The initial helium abundance-mass degeneracy

In addition to the sensitivity of the results on initial guess, a serious complication of model fitting arises from parameter degeneracies. A particularly problematic degeneracy is that of the initial helium mass fraction Y_0 with the mass M . An anti-correlation of these two parameters has been encountered in many stellar modelling studies (e.g. Baudin et al., 2012; Lebreton & Goupil, 2014; Verma et al., 2017). This is also suggested by homologous relations predicting that L scales as $\mu^x M^y$. The exponents (x, y) are determined by the dominating hydrogen burning process in the core ($p-p$ chains or CNO cycles). The mean molecular weight is approximately given by $\mu \approx 4 / (8 - 5Y - 6Z)$ for a fully ionised gas. Hence, at constant luminosity, if the helium abundance increases so does the mean molecular weight, which mechanically decreases the mass (see e.g. Lebreton et al., 2014, for more details).

Unfortunately, Y_0 is one of the least constrained stellar parameters in solar-like stars. Indeed, the Galactic helium-to-metal enrichment ratio $\Delta Y / \Delta Z$ is not consistently estimated. Its value varies substantially from a study to another (e.g. Ribas et al., 2000a; Jimenez et al., 2003; Casagrande et al., 2007). Furthermore, the current helium content in the convective envelope of solar-like stars cannot be estimated from spectroscopy owing to the fact that the surface temperature is not high enough to excite helium in the atmosphere and produce spectral lines. In this regard, asteroseismology could be of great help as encouraging progress has been achieved in recent years. The current helium mass fraction in the convective envelope Y_s is related to the amplitude of the seismic signature due to the He ionisation glitch (e.g. Houdek & Gough, 2007). Such a technique was applied to the *Kepler* LEGACY stars by Verma et al. (2017, 2019). The authors determined Y_s in 37 targets and evaluated the primordial helium abundance and the Galactic enrichment ratio ($Y_p = 0.244 \pm 0.019$, $\Delta Y / \Delta Z = 1.226 \pm 0.849$), albeit with large uncertainties because of the small sample size. The PLATO mission is expected to bring tighter constraints on these parameters, potentially breaking the $Y_0 - M$ degeneracy. The impact of this degeneracy on the inferred size of the PC layer will be explored in a future study.

In the following two sub-sections (Sects. 6.5.6 and 6.5.7), I present the results of the calibration of ξ_{PC} for KIC6603624 and KIC8006161. For these two stars, the seismic signature of the BCZ is prominent, which allowed the precise measurements of its amplitude and period. For this reason, they also appears as promising targets to constrain the PC extent.

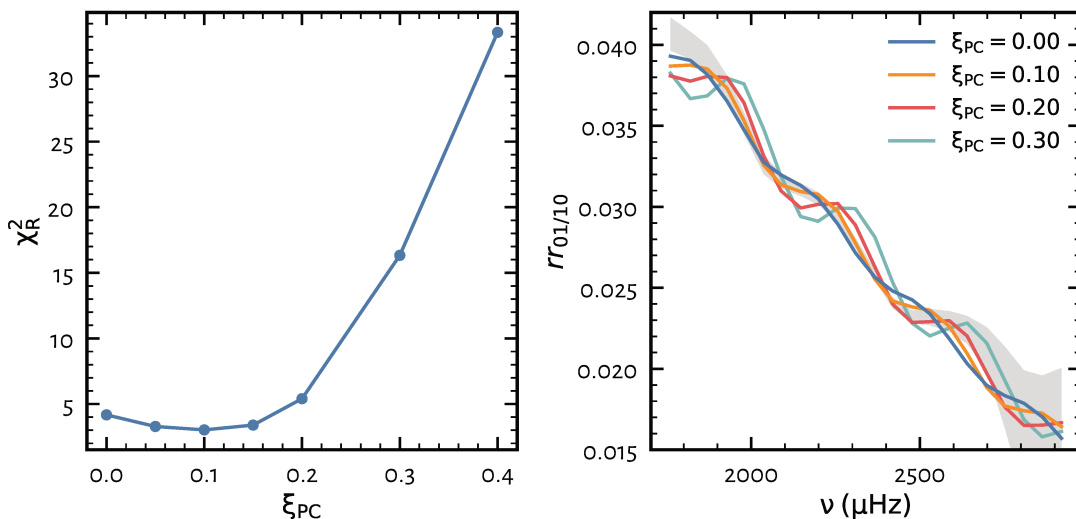
6.5.6 KIC6603624 (aka Saxo)

KIC6603624 is an old main-sequence star, possibly in the early subgiant phase. For the reference case with no PC, the best fit model obtained with the c2KSMO pipeline has an age of 8.0 Gyr and a hydrogen mass fraction in the core of $X_C \approx 0.03$. The fitted mass is $\sim 1.08 M_\odot$. Lund et al. (2017b) estimated a high metallicity of 0.28 ± 0.10 dex and an effective temperature of 5674 ± 77 K from spectroscopy (see Table A.1).

The parameters of the best fit models are compiled in Table 6.5 for different extents of PC, together with the value of the reduced χ^2 defined as $\chi_R^2 = \chi^2 / (M - N)$, M being the number of observational constraints and N the number of fitted parameters. The χ_R^2 as a function of the

Table 6.5Best fit models of KIC6603624 as a function of the penetrative convection parameter ξ_{PC} .

ξ_{PC}	age (Gyr)	M/M_{\odot}	$(Z/X)_0$	Y_0	α_{CGM}	χ_{R}^2
0.00	7.99 ± 0.12	1.08 ± 0.01	0.0669 ± 0.0054	0.281 ± 0.005	0.715 ± 0.014	2.51
0.05	7.98 ± 0.11	1.08 ± 0.01	0.0668 ± 0.0047	0.281 ± 0.005	0.715 ± 0.013	1.97
0.10	7.96 ± 0.09	1.08 ± 0.01	0.0668 ± 0.0041	0.282 ± 0.004	0.715 ± 0.012	1.82
0.15	7.88 ± 0.08	1.09 ± 0.01	0.0659 ± 0.0036	0.281 ± 0.004	0.720 ± 0.011	2.03
0.20	7.88 ± 0.07	1.09 ± 0.01	0.0659 ± 0.0032	0.281 ± 0.004	0.720 ± 0.010	3.24
0.30	7.60 ± 0.06	1.10 ± 0.01	0.0673 ± 0.0028	0.279 ± 0.003	0.742 ± 0.009	9.78
0.40	7.78 ± 0.05	1.09 ± 0.01	0.0694 ± 0.0025	0.282 ± 0.003	0.736 ± 0.008	20.0

**Figure 6.12:** Calibration of the penetrative convection parameter (ξ_{PC}) for KIC6603624. *Left:* Reduced χ^2 of the best fit stellar models as a function of ξ_{PC} . *Right:* Ratios $rr_{01/10}$ of KIC6603624 (grey area, 1σ) and those of best fit models (coloured lines).

PC extent parameter ξ_{PC} is plotted on the left panel of Fig. 6.12. The observed and modelled seismic ratios $rr_{01/10}$ are compared in the right panel of Fig. 6.12.

The change in fitted parameters is minor as can be seen in Table 6.5 and may be explained as follows. As ξ_{PC} increases, the convective envelope gets deeper and deeper while the transition from the adiabatic to the radiative temperature gradient is sharper and sharper. The signature of the CZ glitch in the $rr_{01/10}$ then has a larger period (in the frequency domain) and a higher amplitude. When looking for the optimal model with greater PC extent, the algorithm tries to decrease the CZ depth as to better reproduce the ratios but cannot act on the amplitude as ξ_{PC} is fixed. This translates into a lower age and metallicity and a higher mass until the amplitude becomes too large to recreate the signature satisfactorily.

The χ_{R}^2 shows a clear minimum between $\xi_{\text{PC}} = 0.05$ and 0.15 , which corresponds to the PC layer having a thickness in the range $0.002 - 0.09H_p$. Thus, although KIC6603624 is older, more metallic and more massive than the Sun, the extent of PC under the convective envelope remains of the same order than the solar upper limit derived from helioseismology.

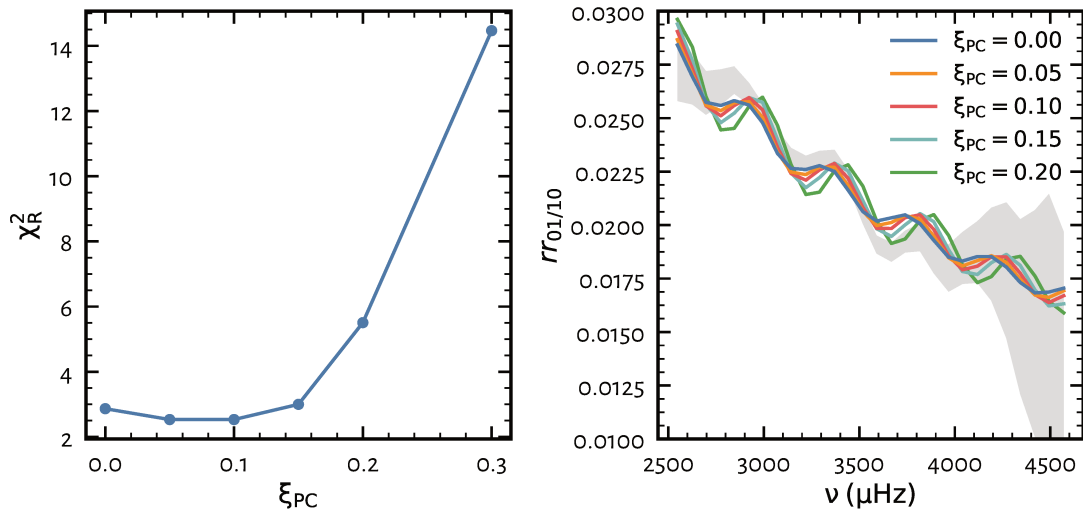


Figure 6.13: Calibration of the penetrative convection parameter (ξ_{PC}) for KIC8006161. *Left:* Reduced χ^2 of the best fit stellar models as a function of ξ_{PC} . *Right:* Ratios $rr_{01/10}$ of KIC8006161 (grey area, 1σ) and those of best fit models (coloured lines).

Table 6.6

Best fit models of KIC8006161 as a function of the penetrative convection parameter ξ_{PC} .

ξ_{PC}	age (Gyr)	M/M_{\odot}	$(Z/X)_0$	Y_0	α_{CGM}	χ_R^2
0.00	4.75 ± 0.17	0.99 ± 0.02	0.0679 ± 0.0131	0.303 ± 0.025	0.786 ± 0.016	2.86
0.05	4.75 ± 0.17	0.99 ± 0.02	0.0677 ± 0.0088	0.303 ± 0.021	0.786 ± 0.015	2.53
0.10	4.68 ± 0.23	0.99 ± 0.02	0.0661 ± 0.0071	0.304 ± 0.021	0.795 ± 0.015	2.53
0.15	4.64 ± 0.14	0.99 ± 0.02	0.0652 ± 0.0033	0.304 ± 0.013	0.800 ± 0.016	3.00
0.20	4.68 ± 0.17	0.99 ± 0.02	0.0663 ± 0.0094	0.304 ± 0.024	0.795 ± 0.011	5.51
0.30	4.67 ± 0.24	0.99 ± 0.02	0.0663 ± 0.0091	0.304 ± 0.024	0.798 ± 0.009	14.5

6.5.7 KIC8006161 (aka Doris)

KIC8006161 may be described as a super-metallic Sun. Indeed, the age of the reference model is ~ 4.75 Gyr, which is equivalent to $X_C \approx 0.37$. Its mass is very close to the solar value with $0.99M_{\odot}$. From spectroscopy, Lund et al. (2017b) measured $T_{\text{eff}} = 5488 \pm 77$ K and $[\text{Fe}/\text{H}] = 0.34 \pm 0.10$ dex.

Table 6.6 lists the optimal models found for the different ξ_{PC} values. In Fig. 6.13, I show the evolution of χ_R^2 as ξ_{PC} increases and confront the observed and modelled seismic ratios of the best fit models. I note a similar behaviour as that described for KIC6603624 in Sect. 6.5.6

The χ_R^2 is minimal between $\xi_{PC} = 0.05$ and 0.10 nonetheless it is only slightly larger at 0.00 and 0.15 . I thus derived a conservative upper limit of 0.15 , which corresponds to the thickness of the PC layer being inferior to $0.15 H_p$. This is again similar to the solar value, suggesting that metallicity does not influence substantially the extent of PC under convective envelopes.

6.6 Discussion and conclusions

Penetrative convection (PC) is a physical process that is ubiquitous in nature and so also takes place in stars. A large body of evidence supports this assessment starting from laboratory experiments, geophysical fluids to computer simulations, as was emphasised by Zahn (1991). In the Sun, the extent of the layer in which PC occurs was constrained with helioseismology as soon as the nineties, owing to the high quality of solar data gathered from ground and space. Nonetheless, only an upper limit $\sim 0.10H_p$ could be inferred (Christensen-Dalsgaard et al., 1995). Thanks to the long baseline and highly precise photometry of the recent CoRoT (Baglin et al., 2006) and Kepler (Borucki et al., 2010) space missions, I undertook to extend the seismic diagnostic to other stars with the aim of bringing more universal constraints on PC at the base of stellar convective envelopes but also on the wider perspective of solar and stellar tachoclines.

The seismic ratios $rr_{01/10}$ introduced by Roxburgh & Vorontsov (2003) are mainly sensitive to the interior of solar-like stars and are independent of the near-surface effects that retain all our ignorance on the topmost super-adiabatic layers. Therefore, they constitute an ideal diagnostic of stellar interiors, including the structure at the BCZ. On the basis of the *Kepler* LEGACY sample (Lund et al., 2017b), I selected 14 stars that show a clear oscillatory behaviour in their $rr_{01/10}$, which is characteristic of the acoustic discontinuity occurring at the bottom of the convective zone. Using a MCMC fitting algorithm, I measured the acoustic radii of the discontinuity as well as the amplitude of the oscillation in the ratios that is related to the size of the temperature gradient discontinuity. For five other targets, I could derive a constraining upper limit on the amplitude of the signature. I searched for the dependence of these two parameters on T_{eff} and $[\text{Fe}/\text{H}]$. The acoustic radius of the BCZ decreases with higher $[\text{Fe}/\text{H}]$ and increases with higher T_{eff} , as is established in stellar structure theory. I note a particular feature for stars in which the acoustic radii is beyond the acoustic middle point of the star's structure. In those stars, the measured acoustic radii is systematically closer to the complementary acoustic depth of the BCZ, at least when comparing them to models of similar stellar parameters. Regarding the glitch amplitudes, it appears to slightly decrease with increasing T_{eff} until ~ 6000 K where it starts to increase drastically in agreement with the study of Verma et al. (2014) in stellar models.

I demonstrated the diagnostic potential of seismic ratios to constrain the extent of PC under the convective envelope of solar-like stars. In a subset of 12 stars, I confronted the measured glitch parameters with those of a grid of stellar models in which PC under the CZ is included according to Zahn (1991)'s formalism. I showed that the PC parameter ξ_{PC} is consistently confined under ~ 0.40 for all studied stars regardless of their stellar parameters. I should indicate that stars with masses higher than $1.20M_{\odot}$ were discarded of the sample in this first study owing to the larger uncertainties of stellar modelling in this mass range. The measured amplitude of the glitch signatures in the binary system 16 Cyg A & B is significantly smaller than in representative models even those that do not include PC, a feature that seems specific to these two stars. I reckon that it may be explained by a more gradual transition to the radiative gradient than what is modelled, albeit without formally identifying the physical cause. Possible physical mechanisms at stake may be rotationally-induced mixing, internal gravity waves or even fingering convection triggered by accretion of planetary matter (Deal et al., 2015, for 16 Cyg B). Notably, using seismic inversion techniques, Buldgen et al. (2016) also found evidence for an extra-mixing process in 16 Cyg B.

Finally, using the c2kSMO stellar modelling pipeline developed by Y.Lebreton, I calibrated the extent of PC under the CZ of KIC6603624 and KIC8006161, two stars for which the CZ glitch parameters are precisely measured. I find that the thickness of the PC layer is in the range

0.002 – 0.09 H_p for KIC6603624 and under 0.10 H_p for KIC8006161. This is concordant with the upper limit derived for the Sun. KIC8006161 is a super-metallic Sun while KIC6603624 is older, more massive and more metallic than the Sun, suggesting that the thickness of the PC layer does not vary much with stellar parameters. I however note that this may not hold for hot solar-like pulsators as the glitch amplitude is significantly larger.

An extension of the studied sample would be highly desirable. The current sample is of too small size to conduct a proper ensemble study but we may envisage extending it substantially by studying other *Kepler* targets especially towards more massive solar-like stars. Solar-like pulsators in binary systems (e.g. [Appourchaux et al., 2015](#); [White et al., 2017](#); [Marcadon et al., 2018](#)) may also be highly valuable in this regard on condition that their p -mode frequencies are precise enough to effectively constrain the PC extent.

To strengthen the results exposed in this chapter, it would be sensible to thoroughly address their dependence on the inputs physics of stellar models. The depth of the convective envelope is known to be sensitive to the choice of metal mixture, opacity tables, equation of state, atomic diffusion processes (this list is not necessarily exhaustive). All may change the calibrated extent of the PC layer as well. “À la carte” stellar modelling, as was done for the CoRoT star HD52265 by [Lebreton & Goupil \(2014\)](#), would allow the evaluation of theoretical errors on stellar properties, including the thickness of the PC layer.

Furthermore, other theoretical prescriptions than [Zahn \(1991\)](#)’s model were developed to describe penetrative convection. In particular, several authors suggest a smoother structural transition at the convective boundary as it tends to be favoured by helioseismology (e.g. [Christensen-Dalsgaard et al., 2011](#)) and numerical simulations (e.g. [Freytag et al., 1996](#); [Blöcker et al., 1998](#); [Pratt et al., 2017](#)). In 1D stellar models, this is usually implemented as a “diffusive overshoot” law under the form of an exponential overshoot (e.g. [Schlattl & Weiss, 1999](#)), a power law ([Christensen-Dalsgaard et al., 2018](#)) or even an exponential of an exponential ([Baraffe et al., 2017](#); [Pratt et al., 2017](#)). Notice that, in all these prescriptions, a diffusion coefficient has to be calibrated against observations.

CoRoT and *Kepler* missions continue to nourish our understanding of stellar physics. In this part of the manuscript, we demonstrated that constraints on penetrative convection under the convective envelope of solar-like stars can be obtained from asteroseismology. Further investigations promise to offer a new perspective on numerous problems linked to solar and stellar tachoclines such as lithium depletion, the solar abundance problem or angular momentum transport. In a not-so-distant future, the PLATO mission ([Rauer et al., 2014](#)) will increase the number of solar-like stars with precisely determined frequencies by at least one order of magnitude, which will certainly induce a significant leap forward in the study of radiative-convective interfaces such as the BCZ.

Conclusions and prospects

Chapter 7

Conclusions and prospects

Asteroseismology is a powerful tool to study stellar interiors, which in combination with the unprecedented quality of seismic observations gathered by the space-based mission *Kepler*, has allowed us to make a significant leap forward in stellar physics. In my thesis, I further explored the wealth of data provided by the satellite, focusing on two specific aspects: rotation and angular momentum transport in γ Doradus stars and penetrative convection under stellar tachoclines in solar-like stars. I hereby review the main results of this thesis and consider some possible prospects.

7.1 Rotation and angular momentum transport in γ Dor stars

Angular momentum (AM) transport remain a major uncertainty of stellar modelling and impact significantly on stellar parameter estimations. Until the recent advent of CoRoT and *Kepler* missions, the lack of sufficiently constraining measurements from observations hindered progress on this issue. A breakthrough, and success of these missions, has been achieved with the asteroseismology of mixed p - g modes in evolved low-mass stars (subgiants and red giants). Indeed, seismic measurements of rotation in these stars show a systematic disagreement with predictions of 1D rotating stellar models that include rotationally-induced transport. A similar discrepancy is found in the Sun as well. This has lead researchers to reconsider the standard model of AM transport in low- and intermediate-mass stars. In particular, the efficiencies of supplementary transport processes (internal waves, magnetic-field related processes) have been investigated to extract AM from the internal layers towards the surface in order to reconcile models and observations. In this thesis, I followed a different path by extending the seismic diagnostic of stellar rotation to the pulsating class of γ Dor stars. As progenitors of sub- and red giants, they offer a unique complementary view to the problem of AM transport.

γ Dor stars are mostly moderate to rapid rotators. As a consequence, rotation cannot be treated as a perturbative effect in the description of pulsations, as it is done for solar-like oscillating stars. Therefore, classical tools of diagnostic are not applicable for these stars. Relying on the traditional approximation of rotation (TAR), a simplified but non-perturbative treatment of the pulsation-rotation coupling, I built a novel tool to probe the internal structure and rotation of γ Dor stars : the *MOde Regularity SEarcher* or MORSE. Independently from stellar models, MORSE achieves mode identification, and measures the rotation rate v_{rot} and buoyancy travel time P_0 . I led comprehensive tests to evaluate the applicability of MORSE and provided estimates of the measurement accuracy. In particular, for the most-detected prograde dipole modes and assuming a quasi-uniform rotation profile, I established that biases due to the use of the asymptotic formulation of the TAR are limited to about 6% for both P_0 and v_{rot} . On the other hand, a

difficulty related to mode identification has been highlighted. Indeed, zonal dipole modes can also be identified as prograde dipole modes. In this case, the measured v_{rot} and P_0 are lower than the real values. Currently, it is not obvious how the two mode identifications may be disentangled as both gives plausible values of (v_{rot}, P_0) , except in the case where several ridges are detected (whether they are g or r modes). A better understanding of the mode excitation mechanism in γ Dors would give the means to break this degeneracy.

In order to study AM transport processes, I used MORSE to obtain the internal rotation rate and buoyancy travel time from the prograde dipole modes of 36 *Kepler* targets. A comparison was then carried out with CESTAM stellar models that include transport caused by shear-induced turbulence and meridional circulation. We showed that these models systematically overestimate the internal rotation rates of γ Dor stars as measured by seismology, suggesting that a missing transport process is efficiently transporting AM from the core to the outer layers of these stars. Whether this mechanism is the same in red giants and γ Dor stars remains to be elucidated. Two major physical origins are generally considered to reconcile seismic measurements of stellar rotation with models: internal gravity waves (IGW) and magnetic fields. We discuss both possibilities in the following section.

7.1.1 Efficiency of non-standard angular momentum transport processes

In γ Dor stars, the AM content can be redistributed by internal transport processes and/or lost at the surface by magnetic winds.

IGWs are generated by convective motions at radiative-convective interfaces and propagate in radiative zones in which they are damped by radiative loss of energy. Many theoretical works and numerical simulations suggest that IGWs can efficiently transport AM and chemical elements inside radiative regions, making them a serious contestant to explain the disagreement between models and seismic measurements. Nonetheless, the physical description of these waves suffer from important uncertainties regarding their excitation on one hand and their efficiency to transport AM and mix chemicals on the other hand. Current research efforts are devoted to the improvement of state-of-the-art numerical simulations and the derivation (or refinement) of prescriptions to be implemented in 1D stellar models. Now that we have access to the interior rotation rates of γ Dor stars, tests of these prescriptions can be performed to at least find if they are compatible with seismic observations. Finally, progress on the physics of IGWs is also expected from the observational side by the characterisation of the photometric signature left by IGWs (e.g. [Bowman et al., 2019](#)). Transport induced by the Lorentz force or magnetic instabilities could also take action within radiative zones. However, similarly to the transport induced by IGWs, the generation of magnetic fields in stellar interiors remains uncertain and affects largely our capability to predict the efficiency of the induced transport. In addition, the resulting rotation profiles may be similar to those that can be obtain with IGWs, hence it is not straightforward to identify the origin of the discrepancy between models and observations.

Surface braking by magnetised winds is another item in the AM transport. Indeed, in the range of masses spanned by γ Dor stars, a thin convective envelope is still present at the surface. At its base, a magnetic field can potentially be generated by a dynamo. Should this dynamo be sufficiently efficient to maintain a large-scale magnetic field at the surface, magnetised winds could evacuate AM from the surface and actually brake the stars. To study this possibility in more details, a strategy would consist in trying to detect such large-scale magnetic fields in γ Dors using spectropolarimetry. In the case of a detection, the characterisation of the magnetic field strength could ensue from the same data. If no detection is made, this would still allow us to put an upper limit to the magnetic field strength. Another complementary approach

is getting estimates of the AM loss by magnetised winds from already existing prescriptions that model this process, as evoked in Sect. 2.1.2. In a second step, such investigations could be refined by using the result of the magnetic field detection survey. I am participating in a survey that is currently ongoing. Spectropolarimetric data will be obtained from the instrument ESPaDOnS (Donati et al., 2006) at the Canada France Hawaii Telescope (CFHT) for a sample of γ Dor stars in the *Kepler* and TESS field of view.

7.1.2 Seismic diagnostic of rotation: beyond the hypothesis of uniform rotation

Another sensible approach to progress on the AM transport problem in γ Dors would consist in obtaining finer observational seismic constraints on the rotation profile than just the mean internal rotation rate probed by prograde g modes alone.

The seismic diagnostic of rotation within the TAR is based on the hypothesis of uniform rotation, which permits the mathematical simplification of the equations of pulsations. However, it remains unclear whether or not γ Dor stars are actually rotating uniformly in their radiative zones. Observationally, only a few γ Dors could have their surface-to-internal rotation period ratio measured, which represents an insufficiently small sample to make any general inference on AM transport in γ Dors. It can also be argued that detection biases may be introduced by ignoring the effect of differential rotation on the pulsation modes. I should indicate that solid-body rotation would be expected provided that AM transport is efficient enough. On the other hand, on condition that the mode resonant cavities in a period spacing pattern does not vary much with radial order, it can be assumed that the rotation rate deduced from the TAR reflects a mean value in the cavity. Then, we should investigate cases in which such assumptions can be made and if we need to go beyond the TAR. Complete calculations of oscillations with ACOR or TOP will certainly help answer these questions as any *ad hoc* rotation profile can be passed as input in these codes.

As I showed in Chap. 3, Sect. 3.2.2, when modes series of different (m, k) are detected, some inference can still be made on the rotation profile within the TAR. In this regard, the recent detection of Rossby modes in dozens of γ Dor stars observed by *Kepler* should give us some interesting leads. Owing to the fact that they are dominated by their toroidal component, r modes are expected to probe rotation in a different way than g modes. Conveniently, r modes are predicted by the TAR, making it possible to detect them with MORSE. With this additional information, we will be able to put an upper limit to the rotation gradient of γ Dors, and possibly measure it. The preliminary work I have initiated in this direction are encouraging.

7.2 Tachoclines and penetrative convection in solar-like stars

The observational characterisation of stellar tachoclines in solar-like stars has remained hardly explored in the literature. Indeed, such studies requires a large number of detected p modes or/and extremely precise measurements of their frequencies. It is only with *Kepler* quality data that we can finally reach these requirements and undertake the study of the interface between convective envelopes and radiative interiors. In particular, I leaned on the *Kepler* LEGACY sample consisting of the 66 main-sequence solar-like stars that were best observed by *Kepler* and in which sufficiently precise mode parameters could be measured.

Stellar tachoclines result from complexly interacting and intrinsically multidimensional physical phenomena, which in a way also justifies the fact that theoretical prescriptions in 1D stellar

models are still crude. These layers are thought to be involved in the generation of stellar dynamos, which make them an important topic of study to understand magnetic fields and their effect on stellar structure and evolution. In this manuscript, I investigated more specifically the process of penetrative convection and how much it extends under the convective envelope of solar-like stars.

The transition from convective to radiative energy transport at the base of the convective envelope of solar-like stars is responsible for an abrupt variation of the structure on a short spatial scale. Such a structural glitch leaves a distinctive oscillatory feature in p mode frequencies that can be used to probe the local structure of the transition and determine its acoustic location inside the star. The seismic ratios $rr_{01/10}$ are particularly adapted to study this region. These frequency combinations present the advantages that they mainly probe the interior structure of stars and are not much impacted by near-surface effects or glitches in the upper layers (He ionisation zones). In other words, they allow both the isolation and the amplification of the oscillatory signal due to the BCZ glitch. Despite that, few studies have considered the ratios to analyse the glitch stemming from the BCZ. Moreover, their diagnostic power for constraining penetrative convection under the BCZ was only explored by [Lebreton & Goupil \(2012\)](#) in the specific case of HD52265. I further established the potential of this diagnostic and used it in 12 stars targeted by *Kepler* in this thesis. Clearly, some inconveniences come with the use of ratios. Firstly, the fact that they are correlated complicates the treatment of statistical uncertainties at each step of the analysis although it is far from impossible to account for it. Secondly, and more importantly, the ratios are weakly sensitive to the He ionisation glitch. This is problematic, especially in the context of forward modelling, because this is the only direct constraint on helium abundance we have access to in solar-like stars. In particular, it can help breaking the degeneracy between Y_0 and M . Therefore, a comprehensive analysis of all information is highly valuable in the problem of forward modelling. This is yet a complex endeavour as the correlations between observables and stellar parameters have to be assessed at the same time. [Farnir et al. \(2019\)](#) have started to look at this issue in more detail although they do not address the use of both the BCZ and He ionisation glitches in the modelling process.

Thereby, the results of glitch fitting analyses in a subset of the LEGACY sample were compared with stellar models of solar-like stars that include penetrative convection (PC) within [Zahn \(1991\)](#) approach. The subset consists of stars that show a manifest oscillatory signature (or absence of) in the ratios $rr_{01/10}$. In this first study, the hotter stars of the sample were excluded as significant uncertainties remains on the modelling of atomic diffusion processes, which are expected to play an important role in the structure of tachoclines and the size of convective envelope. From this comparison, I showed that we are in position to constrain the extent of PC with the data we have in hand and at least place an upper limit on the PC extent parameter ξ_{PC} of [Zahn \(1991\)](#) model. Overall, it is found that all studied stars are consistent with a low ξ_{PC} value of a few tenths.

Secondly, I performed a calibration of ξ_{PC} in two stars (KIC8006161 and KIC6603624) using forward modelling. KIC8006161 is a super-metallic solar analogue. KIC6603624 is old main-sequence star that is more metallic and more massive than the Sun. For both stars, models including PC are slightly favoured by the model fitting. Furthermore, there is a clear-cut upper limit above which models are significantly worse in reproducing global and seismic observables. The extent of PC is found to be inferior to $0.15 H_p$ for KIC8006161 and $0.09 H_p$ for KIC6603624. These values are of the same order of those derived for the Sun with helioseismology, which tends to suggest that metallicity, mass, or age do not impact much the extent of PC, at least not at detectable level.

7.2.1 Ensemble study of penetrative convection

Results presented in this thesis are preliminary but already show that some constraints can be obtained on the PC that takes action under the BCZ of solar-like stars. Although the *Kepler* precision on p mode frequencies seems barely sufficient to infer a precise estimate of the size of the PC region for an individual star, it should still be possible to derive a clear-cut upper limit in at least a dozen of stars in the LEGACY sample. The calibration of ξ_{PC} for a larger sample of stars would allow us to adopt an ensemble approach and deduce relationships (or a lack of) between the PC extent and stellar parameters. In this regard, the inclusion of F stars in this sample is highly desirable. The study of acoustic glitches in binary systems will also be beneficial as presumably the initial chemical composition and age are the same in both stars, which further restrain the range of possible solutions in forward modelling.

7.2.2 Impact of uncertainties in the input physics of stellar models

The calibration of the PC extent relies heavily on stellar models therefore the resulting estimates are necessarily biased by the choice of input physics. À la carte stellar modelling, in the same fashion as [Lebreton & Goupil \(2014\)](#) did for the CoRoT star HD52265, will help put theoretical uncertainties on the upper limits derived from model calibration.

[Zahn \(1991\)](#) prescription is not the only model that has been developed to describe PC. In particular, some other models account for a smoother transition in the temperature gradient at the BCZ, which would result in a different estimate for the PC extent. Given that we solely have access to an upper limit of the PC extent with current observations, it seems unlikely that we can favour one or several models against others. However, it would be interesting to know how precision on mode frequencies impact on the characterisation of the PC region and at which point we would be able to distinguish between different prescriptions.

Stellar tachoclines are actually defined by the layer of rotational shear between the convective envelope and the radiative interior of solar-like stars. Therefore, rotation and its associated effects should in principle be included in their study (for instance with CESTAM). However, this constitutes a significant step in terms of complexity, which is why it will only be considered in a second intention.

7.2.3 Comparison with numerical simulations

Comparing seismic constraints on penetrative convection with the results of numerical simulations would also be insightful. This endeavour is not an easy task as stellar regimes are not attainable with current computational capabilities. However, we can expect to find guidance for numerical simulations by excluding parts of the parameter space for instance and inversely, simulations can help interpreting the seismic results and guide future improvements of the seismic diagnostic.

7.3 Towards a new generation of stellar models

The modelling of rotation and convective-radiative interfaces are two shortcomings of the standard model of stellar physics. While I studied them in two specific classes of pulsators in this thesis, a more global viewpoint can (and should) be adopted to progress on these issues. With CoRoT and *Kepler* data in hand, these processes can be studied in almost all the

HR diagram with asteroseismology, providing constraints on a wide range of stellar parameters and evolutionary stages. Furthermore, the third generation of space mission dedicated to asteroseismology, embodied by TESS and PLATO, will greatly extend the number of observed pulsators, giving us the means to perform ensemble asteroseismology on very large samples. They will also observe bright stars that benefit from synergies with other observational techniques : astrometry (*Gaia*), interferometry, spectroscopy and spectropolarimetry. The detailed characterisation of such stars will offer a complementary view to ensemble study and promises to put tight constraints on current stellar models. On the long term, the stated goal is to construct a new generation of stellar models which will be essential to extend our knowledge about (exo)planetary systems, galaxies and our Universe.

Bibliography

- Abt H. A., Levato H., Grosso M., 2002, [ApJ](#), **573**, 359
- Aerts C., Christensen-Dalsgaard J., Kurtz D. W., 2010, *Asteroseismology*
- Ahrens B., Stix M., Thorn M., 1992, *A&A*, **264**, 673
- Allen C. W., 1973, *Astrophysical quantities*
- Andersen J., Clausen J. V., Nordstrom B., 1990, [ApJ](#), **363**, L33
- Angulo C., et al., 1999, [Nuclear Physics A](#), **656**, 3
- Antia H. M., Basu S., 2005, [ApJ](#), **620**, L129
- Antia H. M., Basu S., 2011, [ApJ](#), **735**, L45
- Antia H. M., Basu S., Chitre S. M., 1998, *MNRAS*, **298**, 543
- Appourchaux T., Corbard T., 2019, [A&A](#), **624**, A106
- Appourchaux T., et al., 2010, [A&A Rev.](#), **18**, 197
- Appourchaux T., et al., 2012, [A&A](#), **543**, A54
- Appourchaux T., et al., 2015, [A&A](#), **582**, A25
- Asplund M., Grevesse N., Sauval A. J., 2005, in Barnes III T. G., Bash F. N., eds, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series Vol. 336, Cosmic Abundances as Records of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*. p. 25
- Asplund M., Grevesse N., Sauval A. J., Scott P., 2009, [ARA&A](#), **47**, 481
- Auvergne M., et al., 2009, [A&A](#), **506**, 411
- Aver E., Olive K. A., Skillman E. D., 2015, [Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics](#), **2015**, 011
- Badnell N. R., Bautista M. A., Butler K., Delahaye F., Mendoza C., Palmeri P., Zeippen C. J., Seaton M. J., 2005, *MNRAS*, **360**, 458
- Baglin A., Michel E., Auvergne M., COROT Team 2006, in *Proceedings of SOHO 18/GONG 2006/HELAS I, Beyond the spherical Sun*. p. 34.1
- Bahcall J. N., Pinsonneault M. H., Wasserburg G. J., 1995, [Reviews of Modern Physics](#), **67**, 781
- Bahcall J. N., Basu S., Serenelli A. M., 2005, [ApJ](#), **631**, 1281
- Baldner C. S., Basu S., 2008, [ApJ](#), **686**, 1349

- Ball W. H., Gizon L., 2014, [A&A](#), **568**, A123
- Ballot J., Turck-Chièze S., García R. A., 2004, [A&A](#), **423**, 1051
- Ballot J., Lignières F., Reese D. R., Rieutord M., 2010, [A&A](#), **518**, A30
- Ballot J., Lignières F., Prat V., Reese D. R., Rieutord M., 2012, in Shibahashi H., Takata M., Lynas-Gray A. E., eds, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series Vol. 462, Progress in Solar/Stellar Physics with Helio- and Asteroseismology*. p. 389
- Baraffe I., Pratt J., Goffrey T., Constantino T., Folini D., Popov M. V., Walder R., Viallet M., 2017, [ApJ](#), **845**, L6
- Baran A. S., et al., 2011, *Acta Astron.*, **61**, 37
- Baran A. S., Winiarski M., Siwak M., Fox-Machado L., Koziel-Wierzbowska D., Krzesinski J., Drózd M., Winans A., 2013, *Acta Astron.*, **63**, 41
- Basu S., 1997, [MNRAS](#), **288**, 572
- Basu S., 2016, [Living Reviews in Solar Physics](#), **13**, 2
- Basu S., Antia H. M., 1994, [MNRAS](#), **269**, 1137
- Basu S., Antia H. M., 2001, [MNRAS](#), **324**, 498
- Basu S., Antia H. M., 2003, [ApJ](#), **585**, 553
- Basu S., Antia H. M., Narasimha D., 1994, [MNRAS](#), **267**, 209
- Basu S., et al., 1997, [MNRAS](#), **292**, 243
- Basu S., Chaplin W. J., Elsworth Y., New R., Serenelli A. M., 2009, [ApJ](#), **699**, 1403
- Baudin F., Samadi R., Goupil M. J., Appourchaux T., Barban C., Boumier P., Chaplin W. J., Gouttebroze P., 2005, [A&A](#), **433**, 349
- Baudin F., et al., 2012, [A&A](#), **538**, A73
- Bedding T. R., Kjeldsen H., 2003, [PASA](#), **20**, 203
- Bedding T. R., et al., 2001, [ApJ](#), **549**, L105
- Bedding T. R., Murphy S. J., Colman I. L., Kurtz D. W., 2015, in *European Physical Journal Web of Conferences*. p. 01005 ([arXiv:1411.1883](#)), [doi:10.1051/epjconf/201510101005](#)
- Belkacem K., et al., 2009, [Science](#), **324**, 1540
- Belkacem K., Dupret M. A., Noels A., 2010, [A&A](#), **510**, A6
- Belkacem K., Goupil M. J., Dupret M. A., Samadi R., Baudin F., Noels A., Mosser B., 2011, [A&A](#), **530**, A142
- Belkacem K., Samadi R., Mosser B., Goupil M. J., Ludwig H. G., 2013, in Shibahashi H., Lynas-Gray A. E., eds, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series Vol. 479, Progress in Physics of the Sun and Stars: A New Era in Helio- and Asteroseismology*. p. 61 ([arXiv:1307.3132](#))
- Belkacem K., et al., 2015, [A&A](#), **579**, A31

- Berdiñas Z. M., Rodríguez-López C., Amado P. J., Anglada-Escudé G., Barnes J. R., MacDonald J., Zechmeister M., Sarmiento L. F., 2017, *MNRAS*, **469**, 4268
- Bergemann M., Serenelli A., 2014, Solar Abundance Problem. pp 245–258, doi:10.1007/978-3-319-06956-2_21
- Berthomieu G., Provost J., 1983, *A&A*, **122**, 199
- Berthomieu G., Gonczi G., Graff P., Provost J., Rocca A., 1978, *A&A*, **70**, 597
- Bevington P. R., Robinson D. K., 2003, Data reduction and error analysis for the physical sciences
- Blöcker T., Holweger H., Freytag B., Herwig F., Ludwig H. G., Steffen M., 1998, *Space Sci. Rev.*, **85**, 105
- Böhm K.-H., 1963, *ApJ*, **138**, 297
- Böhm-Vitense E., 1958, *ZAp*, **46**, 108
- Borucki W. J., et al., 2010, *Science*, **327**, 977
- Bouabid M., 2011, PhD thesis, Université Nice - Sophia Antipolis et Université de Liège
- Bouabid M.-P., Montalbán J., Miglio A., Dupret M.-A., Grigahcène A., Noels A., 2011, *A&A*, **531**, A145
- Bouabid M.-P., Dupret M.-A., Salmon S., Montalbán J., Miglio A., Noels A., 2013, *MNRAS*, **429**, 2500
- Bouchy F., Carrier F., 2001, *A&A*, **374**, L5
- Bouvier J., Forestini M., Allain S., 1997, *A&A*, **326**, 1023
- Bowman D. M., et al., 2019, *A&A*, **621**, A135
- Brown T. M., Gilliland R. L., Noyes R. W., Ramsey L. W., 1991, *ApJ*, **368**, 599
- Buldgen G., Salmon S. J. A. J., Reese D. R., Dupret M. A., 2016, *A&A*, **596**, A73
- Buldgen G., et al., 2019, *A&A*, **621**, A33
- Buzasi D. L., 2000, in Teixeira T., Bedding T., eds, The Third MONS Workshop: Science Preparation and Target Selection. p. 9
- Buzasi D., 2002, in Aerts C., Bedding T. R., Christensen-Dalsgaard J., eds, Astronomical Society of the Pacific Conference Series Vol. 259, IAU Colloq. 185: Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics. p. 616
- Buzasi D. L., 2004, in Favata F., Aigrain S., Wilson A., eds, ESA Special Publication Vol. 538, Stellar Structure and Habitable Planet Finding. pp 205–213
- Cantiello M., Mankovich C., Bildsten L., Christensen-Dalsgaard J., Paxton B., 2014, *ApJ*, **788**, 93
- Canuto V. M., Goldman I., Mazzitelli I., 1996, *ApJ*, **473**, 550
- Casagrande L., Flynn C., Portinari L., Girardi L., Jimenez R., 2007, *MNRAS*, **382**, 1516
- Casagrande L., Ramírez I., Meléndez J., Bessell M., Asplund M., 2010, *A&A*, **512**, A54

- Casagrande L., et al., 2014, [MNRAS](#), **439**, 2060
- Castelli F., Kurucz R. L., 2003, in Piskunov N., Weiss W. W., Gray D. F., eds, IAU Symposium Vol. 210, Modelling of Stellar Atmospheres. p. A20 ([arXiv:astro-ph/0405087](#))
- Chaboyer B., 1998, in Deubner F.-L., Christensen-Dalsgaard J., Kurtz D., eds, IAU Symposium Vol. 185, New Eyes to See Inside the Sun and Stars. p. 25 ([arXiv:astro-ph/9803106](#))
- Chaboyer B., Demarque P., Pinsonneault M. H., 1995, [ApJ](#), **441**, 865
- Chandrasekhar S., 1964, [ApJ](#), **139**, 664
- Chapellier E., Mathias P., 2013, [A&A](#), **556**, A87
- Chapellier E., et al., 2011, [A&A](#), **525**, A23
- Chapellier E., Mathias P., Weiss W. W., Le Contel D., Deboscher J., 2012, [A&A](#), **540**, A117
- Chaplin W. J., Miglio A., 2013, [ARA&A](#), **51**, 353
- Chaplin W. J., et al., 1999, [MNRAS](#), **308**, 405
- Chaplin W. J., Elsworth Y., Isaak G. R., Marchenkov K. I., Miller B. A., New R., Pinter B., Apourchaux T., 2002, [MNRAS](#), **336**, 979
- Charbonneau P., 2014, [ARA&A](#), **52**, 251
- Charbonneau P., MacGregor K. B., 1993, [ApJ](#), **417**, 762
- Charbonneau P., Christensen-Dalsgaard J., Henning R., Larsen R. M., Schou J., Thompson M. J., Tomczyk S., 1999, [ApJ](#), **527**, 445
- Charbonnel C., Talon S., 2005, [Science](#), **309**, 2189
- Christensen-Dalsgaard J., 1988, in Christensen-Dalsgaard J., Frandsen S., eds, IAU Symposium Vol. 123, Advances in Helio- and Asteroseismology. p. 295
- Christensen-Dalsgaard J., Perez Hernandez F., 1992, [MNRAS](#), **257**, 62
- Christensen-Dalsgaard J., Monteiro M. J. P. F. G., Thompson M. J., 1995, [MNRAS](#), **276**
- Christensen-Dalsgaard J., et al., 1996, [Science](#), **272**, 1286
- Christensen-Dalsgaard J., di Mauro M. P., Houdek G., Pijpers F., 2009, [A&A](#), **494**, 205
- Christensen-Dalsgaard J., Monteiro M. J. P. F. G., Rempel M., Thompson M. J., 2011, [MNRAS](#), **414**, 1158
- Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O., Knudstrup E., 2018, [MNRAS](#), **477**, 3845
- Christophe S., Ouazzani R. M., Ballot J., Marques J. P., Goupil M. J., Antoci V., Salmon S. J. A. J., 2018a, in SF2A-2018: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics. p. Di
- Christophe S., Ballot J., Ouazzani R. M., Antoci V., Salmon S. J. A. J., 2018b, [A&A](#), **618**, A47
- Claret A., Torres G., 2018, [ApJ](#), **859**, 100
- CoRoT Team 2016, The CoRoT Legacy Book: The adventure of the ultra high precision photometry from space, by the CoRoT Team, [doi:10.1051/978-2-7598-1876-1](#).

- Compton D. L., Bedding T. R., Ball W. H., Stello D., Huber D., White T. R., Kjeldsen H., 2018, [MNRAS](#), **479**, 4416
- Cowling T. G., 1941, [MNRAS](#), **101**, 367
- Davies G. R., Broomhall A. M., Chaplin W. J., Elsworth Y., Hale S. J., 2014a, [MNRAS](#), **439**, 2025
- Davies G. R., Handberg R., Miglio A., Campante T. L., Chaplin W. J., Elsworth Y., 2014b, [MNRAS](#), **445**, L94
- Davies G. R., et al., 2016, [MNRAS](#), **456**, 2183
- Deal M., Richard O., Vauclair S., 2015, [A&A](#), **584**, A105
- Deal M., Alecian G., Lebreton Y., Goupil M. J., Marques J. P., LeBlanc F., Morel P., Pichon B., 2018, [A&A](#), **618**, A10
- Deheuvels S., et al., 2010, [A&A](#), **514**, A31
- Deheuvels S., et al., 2014, [A&A](#), **564**, A27
- Deheuvels S., Brandão I., Silva Aguirre V., Ballot J., Michel E., Cunha M. S., Lebreton Y., Ap-
pourchaux T., 2016, [A&A](#), **589**, A93
- Delahaye F., Pinsonneault M. H., 2006, [ApJ](#), **649**, 529
- Demarque P., Guenther D. B., Li L. H., Mazumdar A., Straka C. W., 2008, [Ap&SS](#), **316**, 31
- Dintrans B., 2009, *Communications in Asteroseismology*, **158**, 45
- Donati J. F., Catala C., Landstreet J. D., Petit P., 2006, in Casini R., Lites B. W., eds, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series Vol. 358, Solar Polarization 4*. p. 362
- Dupret M.-A., Grigahcène A., Garrido R., Gabriel M., Scuflaire R., 2004, [A&A](#), **414**, L17
- Dupret M.-A., Grigahcène A., Garrido R., Gabriel M., Scuflaire R., 2005, [A&A](#), **435**, 927
- Dziembowski W. A., Goode P. R., 1992, [ApJ](#), **394**, 670
- Dziembowski W. A., Moskalik P., Pamyatnykh A. A., 1993, [MNRAS](#), **265**, 588
- Dziembowski W. A., Daszyńska-Daszkiewicz J., Pamyatnykh A. A., 2007, [MNRAS](#), **374**, 248
- Eckart C., 1960, *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres*. Pergamon Press, Oxford
- Eddington A. S., 1926, *The Internal Constitution of the Stars*
- Eff-Darwich A., Korzennik S. G., Jiménez-Reyes S. J., Pérez Hernández F., 2002, [ApJ](#), **580**, 574
- Eff-Darwich A., Korzennik S. G., Jiménez-Reyes S. J., García R. A., 2008, [ApJ](#), **679**, 1636
- Eggenberger P., Maeder A., Meynet G., 2005, [A&A](#), **440**, L9
- Eggenberger P., Montalbán J., Miglio A., 2012, [A&A](#), **544**, L4
- Eggenberger P., et al., 2017, [A&A](#), **599**, A18
- Eggenberger P., et al., 2019, [A&A](#), **621**, A66
- Ekström S., et al., 2012, [A&A](#), **537**, A146

- Farnir M., Dupret M. A., Salmon S. J. A. J., Noels A., Buldgen G., 2019, *A&A*, **622**, A98
- Ferguson J. W., Alexander D. R., Allard F., Barman T., Bodnarik J. G., Hauschildt P. H., Heffner-Wong A., Tamanai A., 2005, *ApJ*, **623**, 585
- Foreman-Mackey D., Hogg D. W., Lang D., Goodman J., 2013, *PASP*, **125**, 306
- Formicola A., et al., 2004, *Physics Letters B*, **591**, 61
- Fossat E., et al., 2017, *A&A*, **604**, A40
- Frandsen S., et al., 2002, *A&A*, **394**, L5
- Freytag B., Ludwig H.-G., Steffen M., 1996, *A&A*, **313**, 497
- Fuller J., Lecoanet D., Cantiello M., Brown B., 2014, *ApJ*, **796**, 17
- García R. A., Turck-Chièze S., Jiménez-Reyes S. J., Ballot J., Pallé P. L., Eff-Darwich A., Mathur S., Provost J., 2007, *Science*, **316**, 1591
- Gaulme P., et al., 2016, *ApJ*, **832**, 121
- Gehan C., Mosser B., Michel E., Samadi R., Kallinger T., 2018, *A&A*, **616**, A24
- Glebocki R., Gnacinski P., Stawikowski A., 2000, *Acta Astron.*, **50**, 509
- Goodman J., Weare J., 2010, *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, Vol.~5, No.~1, p.~65-80, 2010, **5**, 65
- Gough D. O., 1990, in Osaki Y., Shibahashi H., eds, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag Vol. 367, *Progress of Seismology of the Sun and Stars*. p. 283, [doi:10.1007/3-540-53091-6](https://doi.org/10.1007/3-540-53091-6)
- Grec G., Fossat E., Pomerantz M. A., 1983, *Sol. Phys.*, **82**, 55
- Grevesse N., Noels A., 1993, in Prantzos N., Vangioni-Flam E., Casse M., eds, *Origin and Evolution of the Elements*. pp 15–25
- Grundahl F., et al., 2017, *ApJ*, **836**, 142
- Guzik J. A., Kaye A. B., Bradley P. A., Cox A. N., Neuforge C., 2000, *ApJ*, **542**, L57
- Hale S. J., Howe R., Chaplin W. J., Davies G. R., Elsworth Y. P., 2016, *Solar Physics*, **291**, 1
- Handberg R., 2017, rhandberg/timeseries: Initial release, [doi:10.5281/zenodo.400605](https://doi.org/10.5281/zenodo.400605), <https://doi.org/10.5281/zenodo.400605>
- Handberg R., Campante T. L., 2011, *A&A*, **527**, A56
- Handler G., 2009, *MNRAS*, **398**, 1339
- Hareter M., 2012, *Astronomische Nachrichten*, **333**, 1048
- Harvey J. W., Duvall Jr. T. L., Jefferies S. M., Pomerantz M. A., 1993, in Brown T. M., ed., *Astronomical Society of the Pacific Conference Series Vol. 42, GONG 1992. Seismic Investigation of the Sun and Stars*. p. 111
- Houdek G., Gough D. O., 2007, *MNRAS*, **375**, 861
- Howell S. B., et al., 2014, *PASP*, **126**, 398

- Huber D., et al., 2019, *AJ*, **157**, 245
- Hughes D. W., Rosner R., Weiss N. O., 2007, The Solar Tachocline
- Iben Icko J., 1967, *ARA&A*, **5**, 571
- Iben I. J., 1985, *QJRAS*, **26**, 1
- Iglesias C. A., Rogers F. J., 1996, *ApJ*, **464**, 943
- Irwin J., Hodgkin S., Aigrain S., Bouvier J., Hebb L., Irwin M., Moraux E., 2008, *MNRAS*, **384**, 675
- Jimenez R., Flynn C., MacDonald J., Gibson B. K., 2003, *Science*, **299**, 1552
- Jørgensen A. C. S., Weiss A., 2018, *MNRAS*, **481**, 4389
- Kawaler S. D., 1988, *ApJ*, **333**, 236
- Keen M. A., Bedding T. R., Murphy S. J., Schmid V. S., Aerts C., Tkachenko A., Ouazzani R.-M., Kurtz D. W., 2015, *MNRAS*, **454**, 1792
- Kippenhahn R., Weigert A., Weiss A., 2012, Stellar Structure and Evolution, doi:10.1007/978-3-642-30304-3.
- Kjeldsen H., Bedding T. R., 1995, *A&A*, **293**, 87
- Kjeldsen H., Bedding T. R., Viskum M., Frandsen S., 1995, *AJ*, **109**, 1313
- Kjeldsen H., Bedding T. R., Christensen-Dalsgaard J., 2008, *ApJ*, **683**, L175
- Kosovichev A. G., 1996, *ApJ*, **469**, L61
- Kosovichev A. G., et al., 1997, *Sol. Phys.*, **170**, 43
- Kraft R. P., 1967, *ApJ*, **150**, 551
- Krzyszinski J., Baran A. S., Winiarski M., Fox-Machado L., Drózdź M., Siwak M., Koziel-Wierzbowska D., 2012, *Acta Astron.*, **62**, 201
- Kurtz D. W., Shibahashi H., Murphy S. J., Bedding T. R., Bowman D. M., 2015, *MNRAS*, **450**, 3015
- Lebreton Y., Goupil M. J., 2012, *A&A*, **544**, L13
- Lebreton Y., Goupil M. J., 2014, *A&A*, **569**, A21
- Lebreton Y., Montalbán J., 2009, in Mamajek E. E., Soderblom D. R., Wyse R. F. G., eds, IAU Symposium Vol. 258, The Ages of Stars. pp 419–430 (arXiv:0811.2908), doi:10.1017/S1743921309032074
- Lebreton Y., Goupil M. J., Montalbán J., 2014, in EAS Publications Series. pp 99–176 (arXiv:1410.5336), doi:10.1051/eas/1465004
- Ledoux P., 1951, *ApJ*, **114**, 373
- Lee U., Saio H., 1987, *MNRAS*, **224**, 513
- Lee U., Saio H., 1997, *ApJ*, **491**, 839
- Leibacher J. W., Stein R. F., 1971, *Astrophys. Lett.*, **7**, 191

- Li G., Bedding T. R., Murphy S. J., Van Reeth T., Antoci V., Ouazzani R.-M., 2019a, *MNRAS*, **482**, 1757
- Li G., Van Reeth T., Bedding T. R., Murphy S. J., Antoci V., 2019b, *MNRAS*, **487**, 782
- Lide D. R., 1994, CRC Handbook of chemistry and physics. A ready-reference book of chemical and physical data
- Lund M. N., et al., 2017a, VizieR Online Data Catalog, 183
- Lund M. N., et al., 2017b, *ApJ*, **835**, 172
- Lynden-Bell D., Ostriker J. P., 1967, *MNRAS*, **136**, 293
- Maceroni C., Montalbán J., Gandolfi D., Pavlovski K., Rainer M., 2013, *A&A*, **552**, A60
- Maeder A., 2009, Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars, doi:10.1007/978-3-540-76949-1.
- Maeder A., Mermilliod J. C., 1981, *A&A*, **93**, 136
- Maeder A., Meynet G., 2000, *ARA&A*, **38**, 143
- Maeder A., Zahn J.-P., 1998, *A&A*, **334**, 1000
- Marcadon F., Appourchaux T., Marques J. P., 2018, *A&A*, **617**, A2
- Marques J. P., et al., 2013, *A&A*, **549**, A74
- Mathis S., 2009, *A&A*, **506**, 811
- Mathis S., Zahn J.-P., 2004, *A&A*, **425**, 229
- Mathis S., Prat V., Amard L., Charbonnel C., Palacios A., Lagarde N., Eggenberger P., 2018, *A&A*, **620**, A22
- Matt S. P., MacGregor K. B., Pinsonneault M. H., Greene T. P., 2012, *ApJ*, **754**, L26
- Matt S. P., Brun A. S., Baraffe I., Bouvier J., Chabrier G., 2015, *ApJ*, **799**, L23
- Matthews J. M., 2007, *Communications in Asteroseismology*, **150**, 333
- Mazumdar A., 2005, *A&A*, **441**, 1079
- Mazumdar A., Antia H. M., 2001, *A&A*, **377**, 192
- Mazumdar A., Michel E., Antia H. M., Deheuvels S., 2012, *A&A*, **540**, A31
- Mazumdar A., et al., 2014, *ApJ*, **782**, 18
- Michaud G., Proffitt C. R., 1993, in Weiss W. W., Baglin A., eds, Astronomical Society of the Pacific Conference Series Vol. 40, IAU Colloq. 137: Inside the Stars. pp 246–259
- Miglio A., Montalbán J., 2005, *A&A*, **441**, 615
- Miglio A., Montalbán J., Noels A., Eggenberger P., 2008, *MNRAS*, **386**, 1487
- Miglio A., et al., 2010, *A&A*, **520**, L6
- Montalbán J., Miglio A., Noels A., Dupret M.-A., Scuflaire R., Ventura P., 2013, *ApJ*, **766**, 118

- Monteiro M. J. P. F. G., 1996, PhD thesis, Queen Mary and Westfield College University of London England
- Monteiro M. J. P. F. G., Thompson M. J., 1998, in Korzennik S., ed., ESA Special Publication Vol. 418, Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars. p. 819
- Monteiro M. J. P. F. G., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M. J., 1994, *A&A*, [283](#), [247](#)
- Monteiro M. J. P. F. G., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M. J., 1998, in Korzennik S., ed., ESA Special Publication Vol. 418, Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars. p. 495
- Monteiro M. J. P. F. G., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M. J., 2000, *MNRAS*, [316](#), [165](#)
- Monteiro M. J. P. F. G., Christensen-Dalsgaard J., Schou J., Thompson M. J., 2001, in Wilson A., Pallé P. L., eds, ESA Special Publication Vol. 464, SOHO 10/GONG 2000 Workshop: Helio- and Asteroseismology at the Dawn of the Millennium. pp 535–538
- Montgomery M. H., Metcalfe T. S., Winget D. E., 2003, *MNRAS*, [344](#), [657](#)
- Moraux E., et al., 2013, *A&A*, [560](#), [A13](#)
- Moravveji E., Moya A., Guinan E. F., 2012, *ApJ*, [749](#), [74](#)
- Moravveji E., Aerts C., Pápics P. I., Triana S. A., Vandoren B., 2015, *A&A*, [580](#), [A27](#)
- Moravveji E., Townsend R. H. D., Aerts C., Mathis S., 2016, *ApJ*, [823](#), [130](#)
- Morel P., 1997, *A&AS*, [124](#), [597](#)
- Morel P., Lebreton Y., 2008, *Ap&SS*, [316](#), [61](#)
- Mosser B., et al., 2012, *A&A*, [548](#), [A10](#)
- Mosser B., Vrad M., Belkacem K., Deheuvels S., Goupil M. J., 2015, *A&A*, [584](#), [A50](#)
- Murphy S. J., Fossati L., Bedding T. R., Saio H., Kurtz D. W., Grassitelli L., Wang E. S., 2016, *MNRAS*, [459](#), [1201](#)
- Neiner C., et al., 2012, *A&A*, [546](#), [A47](#)
- Oti Floranes H., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M. J., 2005, *MNRAS*, [356](#), [671](#)
- Ouazzani R.-M., Dupret M.-A., Reese D. R., 2012, *A&A*, [547](#), [A75](#)
- Ouazzani R.-M., Roxburgh I. W., Dupret M.-A., 2015, *A&A*, [579](#), [A116](#)
- Ouazzani R.-M., Salmon S. J. A. J., Antoci V., Bedding T. R., Murphy S. J., Roxburgh I. W., 2017, *MNRAS*, [465](#), [2294](#)
- Ouazzani R. M., Marques J. P., Goupil M. J., Christophe S., Antoci V., Salmon S. J. A. J., Ballot J., 2019, *A&A*, [626](#), [A121](#)
- Palla F., Baraffe I., 2005, *A&A*, [432](#), [L57](#)
- Pamyatnykh A. A., 1999, *Acta Astron.*, [49](#), [119](#)
- Pápics P. I., Moravveji E., Aerts C., Tkachenko A., Triana S. A., Bloemen S., Southworth J., 2014, *A&A*, [570](#), [A8](#)

- Pápics P. I., et al., 2017, *A&A*, **598**, A74
- Pesnell W. D., 1987, *ApJ*, **314**, 598
- Pinçon C., Belkacem K., Goupil M. J., Marques J. P., 2017, *A&A*, **605**, A31
- Pinsonneault M. H., Kawaler S. D., Sofia S., Demarque P., 1989, *ApJ*, **338**, 424
- Prat V., Lignières F., Ballot J., 2016, *A&A*, **587**, A110
- Prat V., Mathis S., Lignières F., Ballot J., Culpin P.-M., 2017, *A&A*, **598**, A105
- Prat V., Mathis S., Augustson K., Lignières F., Ballot J., Alvan L., Brun A. S., 2018, *A&A*, **615**, A106
- Prat V., Mathis S., Buysschaert B., Van Beeck J., Bowman D. M., Aerts C., Neiner C., 2019, *A&A*, **627**, A64
- Pratt J., Baraffe I., Goffrey T., Constantino T., Viallet M., Popov M. V., Walder R., Folini D., 2017, *A&A*, **604**, A125
- Provost J., Berthomieu G., Rocca A., 1981, *A&A*, **94**, 126
- Rauer H., et al., 2014, *Experimental Astronomy*, **38**, 249
- Reese D., Lignières F., Rieutord M., 2006, *A&A*, **455**, 621
- Reese D. R., MacGregor K. B., Jackson S., Skumanich A., Metcalfe T. S., 2009, *A&A*, **506**, 189
- Reiners A., Mohanty S., 2012, *ApJ*, **746**, 43
- Rempel M., 2004, *ApJ*, **607**, 1046
- Renzini A., 1987, *A&A*, **188**, 49
- Ribas I., Jordi C., Torra J., Giménez Á., 2000a, *MNRAS*, **313**, 99
- Ribas I., Jordi C., Giménez Á., 2000b, *MNRAS*, **318**, L55
- Ricker G. R., et al., 2015, *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, **1**, 014003
- Rieutord M., Espinosa Lara F., Putigny B., 2016, *Journal of Computational Physics*, **318**, 277
- Rodríguez-López C., MacDonald J., Moya A., 2012, *MNRAS*, **419**, L44
- Rodríguez-López C., MacDonald J., Amado P. J., Moya A., Mullan D., 2014, *MNRAS*, **438**, 2371
- Rogers F. J., Nayfonov A., 2002, *ApJ*, **576**, 1064
- Rosvick J. M., Vandenberg D. A., 1998, *AJ*, **115**, 1516
- Roxburgh I. W., 1978, *A&A*, **65**, 281
- Roxburgh I. W., 2005, *A&A*, **434**, 665
- Roxburgh I. W., 2006, *A&A*, **454**, 883
- Roxburgh I. W., 2009, *A&A*, **493**, 185
- Roxburgh I. W., Vorontsov S. V., 1994, *MNRAS*, **268**, 880

- Roxburgh I. W., Vorontsov S. V., 2003, *A&A*, **411**, 215
- Roxburgh I. W., Vorontsov S. V., 2013, *A&A*, **560**, A2
- Royer F., 2009, On the Rotation of A-Type Stars. pp 207–230, doi:10.1007/978-3-540-87831-5_9
- Royer F., Grenier S., Baylac M. O., Gómez A. E., Zorec J., 2002, *A&A*, **393**, 897
- Rüdiger G., Gellert M., Spada F., Tereshin I., 2015, *A&A*, **573**, A80
- Ruediger G., Kitchatinov L. L., 1996, *ApJ*, **466**, 1078
- Saio H., 1981, *ApJ*, **244**, 299
- Saio H., 1982, *ApJ*, **256**, 717
- Saio H., et al., 2007, *ApJ*, **654**, 544
- Saio H., Kurtz D. W., Murphy S. J., Antoci V. L., Lee U., 2018a, *MNRAS*, **474**, 2774
- Saio H., Bedding T. R., Kurtz D. W., Murphy S. J., Antoci V., Shibahashi H., Li G., Takata M., 2018b, *MNRAS*, **477**, 2183
- Samadi R., Belkacem K., Goupil M. J., Dupret M. A., Brun A. S., Noels A., 2010, *Ap&SS*, **328**, 253
- Samadi R., Belkacem K., Sonoï T., 2015, in EAS Publications Series. pp 111–191 ([arXiv:1510.01151](https://arxiv.org/abs/1510.01151)), doi:10.1051/eas/1573003
- Saslaw W. C., Schwarzschild M., 1965, *ApJ*, **142**, 1468
- Scargle J. D., 1982, *ApJ*, **263**, 835
- Schatzman E., 1993, *A&A*, **279**, 431
- Scherrer P. H., Wilcox J. M., Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O., 1983, *Sol. Phys.*, **82**, 75
- Schlattl H., Weiss A., 1999, *A&A*, **347**, 272
- Schou J., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M. J., 1994, *ApJ*, **433**, 389
- Schou J., et al., 1998, *ApJ*, **505**, 390
- Scuflaire R., Théado S., Montalbán J., Miglio A., Bourge P.-O., Godart M., Thoul A., Noels A., 2008a, *Ap&SS*, **316**, 83
- Scuflaire R., Montalbán J., Théado S., Bourge P. O., Miglio A., Godart M., Thoul A., Noels A., 2008b, *Ap&SS*, **316**, 149
- Shaviv G., Salpeter E. E., 1971, *ApJ*, **165**, 171
- Shibahashi H., 1979, *PASJ*, **31**, 87
- Shibahashi H., Osaki Y., 1976, *PASJ*, **28**, 533
- Silva Aguirre V., Ballot J., Serenelli A. M., Weiss A., 2011, *A&A*, **529**, A63
- Silva Aguirre V., et al., 2017a, *VizieR Online Data Catalog*, **183**
- Silva Aguirre V., et al., 2017b, *ApJ*, **835**, 173
- Sonoï T., Samadi R., Belkacem K., Ludwig H. G., Caffau E., Mosser B., 2015, *A&A*, **583**, A112

- Soufi F., Goupil M. J., Dziembowski W. A., 1998, *A&A*, **334**, 911
- Spada F., Gellert M., Arlt R., Deheuvels S., 2016, *A&A*, **589**, A23
- Spiegel E. A., Zahn J.-P., 1992, *A&A*, **265**, 106
- Spruit H. C., 1999, *A&A*, **349**, 189
- Spruit H. C., 2002, *A&A*, **381**, 923
- Stancliffe R. J., Fossati L., Passy J.-C., Schneider F. R. N., 2015, *A&A*, **575**, A117
- Stello D., Chaplin W. J., Basu S., Elsworth Y., Bedding T. R., 2009, *MNRAS*, **400**, L80
- Szentgyorgyi A. H., Furész G., 2007, in Kurtz S., ed., *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica*, vol. 27 Vol. 28, *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*. pp 129–133
- Szewczuk W., Daszyńska-Daszkiewicz J., 2018, *MNRAS*, **478**, 2243
- Talon S., Zahn J. P., 1997, *A&A*, **317**, 749
- Talon S., Kumar P., Zahn J.-P., 2002, *ApJ*, **574**, L175
- Tassoul M., 1980, *ApJS*, **43**, 469
- Thompson M. J., Christensen-Dalsgaard J., Miesch M. S., Toomre J., 2003, *ARA&A*, **41**, 599
- Thoul A. A., Bahcall J. N., Loeb A., 1994, *ApJ*, **421**, 828
- Torres G., Fischer D. A., Sozzetti A., Buchhave L. A., Winn J. N., Holman M. J., Carter J. A., 2012, *ApJ*, **757**, 161
- Townsend R. H. D., 2003, *MNRAS*, **340**, 1020
- Ulrich R. K., 1970, *ApJ*, **162**, 993
- Ulrich R. K., 1986, *ApJ*, **306**, L37
- Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H., 1989, *Nonradial Oscillations of Stars*
- Van Reeth T., et al., 2015a, *ApJS*, **218**, 27
- Van Reeth T., et al., 2015b, *A&A*, **574**, A17
- Van Reeth T., Tkachenko A., Aerts C., 2016, *A&A*, **593**, A120
- Van Reeth T., et al., 2018, *A&A*, **618**, A24
- Venuti L., et al., 2017, *A&A*, **599**, A23
- Verma K., Antia H. M., Basu S., Mazumdar A., 2014, *ApJ*, **794**, 114
- Verma K., Raodeo K., Antia H. M., Mazumdar A., Basu S., Lund M. N., Silva Aguirre V., 2017, *ApJ*, **837**, 47
- Verma K., Raodeo K., Basu S., Silva Aguirre V., Mazumdar A., Mosumgaard J. R., Lund M. N., Ranadive P., 2019, *MNRAS*, **483**, 4678
- Verner G. A., Chaplin W. J., Elsworth Y., 2004, *MNRAS*, **351**, 311

- Villante F. L., 2010, [ApJ](#), 724, 98
- Vrard M., Mosser B., Samadi R., 2016, [A&A](#), 588, A87
- Walker G. A. H., et al., 2005, [ApJ](#), 635, L77
- Weiss A., Hillebrandt W., Thomas H. C., Ritter H., 2004, Cox and Giuli's Principles of Stellar Structure
- White T. R., et al., 2011, [ApJ](#), 742, L3
- White T. R., et al., 2017, [A&A](#), 601, A82
- Willson R. C., Hudson H. S., Frohlich C., Brusa R. W., 1986, [Science](#), 234, 1114
- Zahn J.-P., 1991, [A&A](#), 252, 179
- Zahn J.-P., 1992, [A&A](#), 265, 115
- Zahn J. P., Talon S., Matias J., 1997, [A&A](#), 322, 320
- Zhang Q. S., Li Y., 2012, [ApJ](#), 746, 50
- Zhevakin S. A., 1963, [ARA&A](#), 1, 367
- van Saders J. L., Pinsonneault M. H., 2012, [ApJ](#), 746, 16

Appendices

Appendix A

Properties of *Kepler* LEGACY stars

Table A.1
Atmospheric and seismic parameters

KIC	K_p	ν_{\max}	$\Delta\nu$	Cat	T_{eff}	e_Teff	[Fe/H]	e_[Fe/H]	$\nu \sin i$	e_vsini
1435467	8.88	1407	70.4	F-like	6326	77	0.01	0.1	11.9	0.5
2837475	8.48	1558	75.7	F-like	6614	77	0.01	0.1	23.3	0.5
3427720	9.11	2737	120.1	Simple	6045	77	-0.06	0.1	2.9	0.5
3456181	9.66	970	52.3	F-like	6384	77	-0.15	0.1	8.5	0.5
3632418	8.22	1167	60.7	F-like	6193	77	-0.12	0.1	8.5	0.5
3656476	9.52	1925	93.2	Simple	5668	77	0.25	0.1	2.3	0.5
3735871	9.71	2863	123.0	Simple	6107	77	-0.04	0.1	4.8	0.5
4914923	9.46	1817	88.5	Simple	5805	77	0.08	0.1	3.4	0.5
5184732	8.16	2089	95.5	Simple	5846	77	0.36	0.1	4.0	0.5
5773345	9.16	1101	57.3	F-like	6130	84	0.21	0.09		
5950854	10.96	1927	96.6	Simple	5853	77	-0.23	0.1	3.0	0.5
6106415	7.18	2249	104.1	Simple	6037	77	-0.04	0.1	4.9	0.5
6116048	8.42	2127	100.8	Simple	6033	77	-0.23	0.1	4.0	0.5
6225718	7.5	2364	105.7	Simple	6313	77	-0.07	0.1	5.5	0.5
6508366	8.97	958	51.6	F-like	6331	77	-0.05	0.1	22.5	0.5
6603624	9.09	2384	110.1	Simple	5674	77	0.28	0.1	0.7	0.5
6679371	8.73	942	50.6	F-like	6479	77	0.01	0.1	17.3	0.5
6933899	9.62	1390	72.1	Simple	5832	77	-0.01	0.1	3.6	0.5
7103006	8.86	1168	59.7	F-like	6344	77	0.02	0.1	12.1	0.5
7106245	10.79	2398	111.4	Simple	6068	102	-0.99	0.19		

continued on next page

Table A.1 – continued

KIC	K_p	v_{\max}	Δv	Cat	T_{eff}	e_{Teff}	[Fe/H]	$e_{\text{[Fe/H]}}$	$\nu \sin i$	$e_{\nu \sin i}$
7206837	9.77	1653	79.1	F-like	6305	77	0.1	0.1	9.3	0.5
7296438	10.09	1848	88.7	Simple	5775	77	0.19	0.1	1.8	0.5
7510397	7.77	1189	62.2	Simple	6171	77	-0.21	0.1	6.4	0.5
7680114	10.07	1709	85.1	Simple	5811	77	0.05	0.1	3.0	0.5
7771282	10.77	1465	72.5	F-like	6248	77	-0.02	0.1	8.3	0.5
7871531	9.25	3456	151.3	Simple	5501	77	-0.26	0.1	0.9	0.5
7940546	7.4	1117	58.8	F-like	6235	77	-0.2	0.1	9.1	0.5
7970740	7.78	4197	173.5	Simple	5309	77	-0.54	0.1	0.0	0.5
8006161	7.36	3575	149.4	Simple	5488	77	0.34	0.1	0.7	0.5
8150065	10.74	1877	89.3	Simple	6173	101	-0.13	0.15		
8179536	9.46	2075	95.1	Simple	6343	77	-0.03	0.1	9.9	0.5
8228742	9.37	1190	62.1	Simple	6122	77	-0.08	0.1	6.1	0.5
8379927	6.96	2795	120.3	Simple	6067	120	-0.1	0.15		
8394589	9.52	2397	109.5	Simple	6143	77	-0.29	0.1	6.4	0.5
8424992	10.32	2534	120.6	Simple	5719	77	-0.12	0.1	1.3	0.5
8694723	8.88	1471	75.1	Simple	6246	77	-0.42	0.1	7.1	0.5
8760414	9.62	2455	117.2	Simple	5873	77	-0.92	0.1	2.5	0.5
8938364	10.11	1675	85.7	Simple	5677	77	-0.13	0.1	2.4	0.5
9025370	8.85	2989	132.6	Simple	5270	180	-0.12	0.18		
9098294	9.76	2315	108.9	Simple	5852	77	-0.18	0.1	3.0	0.5
9139151	9.18	2690	117.3	Simple	6302	77	0.1	0.1	5.5	0.5
9139163	8.33	1730	81.2	F-like	6400	84	0.15	0.09		
9206432	9.08	1866	84.9	F-like	6538	77	0.16	0.1	6.7	0.5
9353712	10.84	934	51.5	F-like	6278	77	-0.05	0.1	6.8	0.5
9410862	10.71	2279	107.4	Simple	6047	77	-0.31	0.1	3.8	0.5
9414417	9.58	1155	60.1	F-like	6253	75	-0.13	0.1		
9812850	9.47	1255	64.7	F-like	6321	77	-0.07	0.1	12.5	0.5
9955598	9.44	3617	153.3	Simple	5457	77	0.05	0.1	1.1	0.5
9965715	9.34	2079	97.2	Simple	5860	180	-0.44	0.18		
10068307	8.18	995	53.9	Simple	6132	77	-0.23	0.1	6.4	0.5
10079226	10.07	2653	116.3	Simple	5949	77	0.11	0.1	4.0	0.5

continued on next page

Table A.1 – continued

KIC	K_p	v_{\max}	Δv	Cat	T_{eff}	e_Teff	[Fe/H]	e_[Fe/H]	$\nu \sin i$	e_vsini
10162436	8.61	1052	55.7	F-like	6146	77	-0.16	0.1	6.4	0.5
10454113	8.62	2357	105.1	Simple	6177	77	-0.07	0.1	6.1	0.5
10516096	9.46	1690	84.4	Simple	5964	77	-0.11	0.1	4.6	0.5
10644253	9.16	2900	123.1	Simple	6045	77	0.06	0.1	3.2	0.5
10730618	10.45	1282	66.3	F-like	6150	180	-0.11	0.18		
10963065	8.77	2204	103.2	Simple	6140	77	-0.19	0.1	4.5	0.5
11081729	9.03	1968	90.1	F-like	6548	83	0.11	0.1	24.1	0.5
11253226	8.44	1591	76.9	F-like	6642	77	-0.08	0.1	14.4	0.5
11772920	9.66	3675	157.7	Simple	5180	180	-0.09	0.18		
12009504	9.32	1866	88.2	Simple	6179	77	-0.08	0.1	7.7	0.5
12069127	10.7	885	48.4	F-like	6276	77	0.08	0.1	6.0	0.5
12069424	5.86	2188	103.3	Simple	5825	50	0.1	0.03	2.8	0.5
12069449	6.09	2561	116.9	Simple	5750	50	0.05	0.02	2.1	0.5
12258514	8.08	1513	74.8	Simple	5964	77	0.0	0.1	3.9	0.5
12317678	8.74	1212	63.5	F-like	6580	77	-0.28	0.1	8.4	0.5

Table A.2
Optimal models from c2ksmo

KIC	Mass	E_Mass	Rad	E_Rad	log(g)	E_log(g)	Age	E_Age	Lum	Xini	Yini	Xcen	MCcore	Rbce	alpha
1435467	1.3944	0.009	1.7039	0.058	4.1192	0.042	1.9347	0.1841	4.311	0.658	0.31	0.364	0.124	0.86	0.648
2837475	1.4231	0.0237	1.6364	0.052	4.1632	0.0344	1.421	0.1942	4.439	0.658	0.31	0.445	0.129	0.89	0.671
3427720	1.1016	0.0072	1.1127	0.0186	4.3869	0.0127	2.3038	0.0906	1.525	0.722	0.262	0.509	0.012	0.785	0.622
3456181	1.3154	0.0135	2.0532	0.0956	3.9319	0.097	2.3107	0.0997	6.215	0.647	0.335	0.11	0.098	0.836	0.681
3632418	1.3011	0.0186	1.8638	0.0734	4.0112	0.0522	2.8906	0.0509	4.844	0.67	0.311	0.092	0.088	0.784	0.732
3656476	1.1501	0.0219	1.3449	0.0173	4.2411	0.01	8.0973	1.2551	1.893	0.694	0.271	0.0	0.0	0.676	0.788
3735871	1.0757	0.0212	1.0858	0.0256	4.3979	0.0325	1.4544	0.1843	1.43	0.692	0.291	0.569	0.037	0.795	0.578
4914923	1.0936	0.008	1.3672	0.0402	4.2049	0.0391	6.4611	0.148	1.899	0.687	0.287	0.0	0.0	0.718	0.623
5184732	1.2756	0.0558	1.3674	0.0364	4.2716	0.06	4.9741	0.771	1.897	0.751	0.218	0.108	0.0	0.74	0.641
5773345	1.6682	0.0803	2.0985	0.0834	4.0162	0.0916	2.2356	0.1911	5.602	0.691	0.259	0.294	0.116	0.824	0.67
5950854	0.9611	0.0132	1.2339	0.035	4.2379	0.0638	9.8985	1.5343	1.456	0.73	0.256	0.004	0.0	0.703	0.578
6106415	1.0847	0.0083	1.2211	0.032	4.2995	0.0272	4.5709	0.2149	1.723	0.704	0.276	0.154	0.0	0.759	0.624
6116048	1.0185	0.0114	1.2212	0.0334	4.2721	0.043	5.845	0.116	1.727	0.712	0.274	0.062	0.0	0.757	0.603
6225718	1.2379	0.0544	1.2639	0.0314	4.327	0.0538	2.4734	0.3834	2.085	0.752	0.23	0.397	0.0	0.805	0.643
6508366	1.5891	0.0269	2.2346	0.0976	3.9405	0.0749	2.4106	0.0994	7.085	0.723	0.253	0.123	0.091	0.801	0.776
6603624	1.083	0.0038	1.1773	0.0199	4.3306	0.0138	7.9863	0.0625	1.167	0.674	0.281	0.027	0.0	0.668	0.715

continued on next page

Table A.2 – continued

KIC	Mass	E_Mass	Rad	E_Rad	log(g)	E_log(g)	Age	E_Age	Lum	Xini	Yini	Xcen	MCcore	Rbce	alpha
6679371	1.6545	0.0401	2.2911	0.1	3.9363	0.099	1.8103	0.031	8.292	0.692	0.278	0.215	0.11	0.856	0.767
6933899	1.1768	0.0648	1.6051	0.055	4.0974	0.0778	4.7625	0.7382	2.997	0.694	0.288	0.043	0.071	0.72	0.685
7103006	1.387	0.04	1.8969	0.0764	4.0237	0.0842	1.7804	0.0876	5.616	0.624	0.347	0.26	0.121	0.868	0.678
7106245	0.8689	0.0101	1.0688	0.0336	4.3189	0.0429	7.4454	0.2844	1.375	0.751	0.246	0.157	0.0	0.833	0.47
7206837	1.3439	0.0141	1.5578	0.0484	4.1811	0.0251	1.4683	0.1198	3.412	0.633	0.328	0.448	0.125	0.874	0.568
7296438	1.1018	0.0046	1.3717	0.0371	4.2053	0.0241	6.0205	0.1511	1.878	0.651	0.313	0.0	0.0	0.708	0.646
7510397	1.2387	0.0083	1.7935	0.0704	4.0233	0.0356	3.4384	0.0998	4.166	0.705	0.282	0.112	0.084	0.819	0.589
7680114	1.136	0.0195	1.4206	0.0426	4.1881	0.0682	7.671	0.1785	2.152	0.765	0.218	0.0	0.0	0.717	0.643
7771282	1.2293	0.049	1.6308	0.0554	4.1025	0.0724	3.727	0.1763	3.622	0.694	0.289	0.122	0.086	0.759	0.757
7871531	0.8492	0.0224	0.8764	0.0192	4.4813	0.0492	9.2585	1.4351	0.633	0.722	0.265	0.259	0.0	0.686	0.694
7940546	1.1759	0.0126	1.8256	0.0776	3.9853	0.0536	2.3091	0.0546	5.073	0.592	0.39	0.083	0.097	0.82	0.717
7970740	0.8086	0.0059	0.7887	0.0101	4.5516	0.0087	10.0956	0.315	0.466	0.758	0.232	0.348	0.0	0.686	0.793
8006161	0.9905	0.0141	0.9311	0.02	4.4956	0.0314	4.7567	0.1662	0.675	0.653	0.303	0.38	0.0	0.675	0.779
8150065	1.2703	0.026	1.4224	0.046	4.2356	0.0522	3.6158	0.5604	2.564	0.781	0.203	0.382	0.053	0.831	0.563
8179536	1.2597	0.0358	1.352	0.0368	4.276	0.0562	1.7632	0.2083	2.572	0.72	0.261	0.524	0.075	0.86	0.569
8228742	1.3005	0.0103	1.84	0.0706	4.0222	0.0566	3.4575	0.0952	4.476	0.699	0.283	0.051	0.077	0.759	0.738
8379927	1.0996	6.0E-4	1.1114	0.0088	4.3872	0.0069	1.7215	0.0344	1.394	0.724	0.261	0.548	0.0	0.797	0.535

continued on next page

Table A.2 – continued

KIC	Mass	E_Mass	Rad	E_Rad	log(g)	E_log(g)	Age	E_Age	Lum	Xini	Yini	Xcen	MCcore	Rbce	alpha
8394589	1.0446	0.0026	1.1637	0.0246	4.325	0.0181	3.8414	0.2416	1.678	0.716	0.271	0.307	0.0	0.794	0.583
8424992	0.8913	0.0199	1.0356	0.0254	4.3573	0.0556	10.2812	0.2942	0.951	0.705	0.279	0.103	0.0	0.685	0.62
8694723	1.2035	0.0034	1.5725	0.0393	4.125	0.0213	3.8834	0.0729	3.963	0.742	0.249	0.129	0.083	0.804	0.868
8760414	0.8428	0.0027	1.0342	0.0266	4.3343	0.0222	11.9711	0.1391	1.307	0.78	0.217	0.057	0.0	0.749	0.685
8938364	0.924	0.0496	1.3161	0.0418	4.1648	0.07	9.449	1.4646	1.564	0.688	0.297	0.0	0.0	0.709	0.508
9025370	0.89	0.0426	0.9698	0.042	4.4137	0.087	6.7906	1.0525	0.614	0.735	0.252	0.381	0.0	0.723	0.407
9098294	0.9701	0.0147	1.1419	0.0298	4.3093	0.0574	8.2498	0.2106	1.322	0.716	0.268	0.066	0.0	0.707	0.634
9139151	1.2167	0.0194	1.1695	0.0272	4.3869	0.0309	1.3428	0.0792	1.857	0.71	0.267	0.581	0.047	0.788	0.718
9139163	1.4087	0.0413	1.5569	0.0484	4.202	0.0541	1.2973	0.0671	3.645	0.65	0.31	0.483	0.126	0.866	0.631
9206432	1.6054	0.0766	1.5655	0.044	4.254	0.0393	0.2058	0.0319	3.933	0.736	0.23	0.711	0.104	0.926	0.556
9353712	1.5031	0.1099	2.1734	0.097	3.9404	0.101	2.2079	0.2215	6.898	0.684	0.292	0.133	0.096	0.821	0.74
9410862	0.9975	0.0084	1.1639	0.0302	4.3048	0.0568	6.3564	0.9852	1.679	0.723	0.266	0.069	0.0	0.743	0.695
9414417	1.3583	0.0395	1.8882	0.074	4.0186	0.085	2.598	0.1805	4.981	0.692	0.288	0.211	0.103	0.846	0.62
9812850	1.5709	0.0246	1.9053	0.0664	4.0739	0.0462	2.7918	0.1167	5.328	0.759	0.215	0.277	0.105	0.808	0.795
9955598	0.8608	0.0189	0.8725	0.0192	4.4911	0.0484	7.0983	1.1002	0.577	0.693	0.288	0.335	0.0	0.687	0.647
9965715	0.9428	0.0238	1.2095	0.0584	4.2469	0.0649	4.1664	0.2845	1.538	0.686	0.305	0.269	0.0	0.854	0.358
10068307	1.2755	0.0011	1.9766	0.0892	3.9515	0.0966	2.955	0.0385	5.509	0.703	0.287	0.077	0.086	0.839	0.632

continued on next page

Table A.2 – continued

KIC	Mass	E_Mass	Rad	E_Rad	log(g)	E_log(g)	Age	E_Age	Lum	Xini	Yini	Xcen	MCcore	Rbce	alpha
10079226	1.3149	0.0463	1.2137	0.0276	4.3884	0.0526	2.6298	0.2128	1.667	0.76	0.207	0.467	0.0	0.738	0.77
10162436	1.3584	0.0227	1.9823	0.0842	3.9764	0.065	2.5456	0.0568	5.464	0.686	0.296	0.157	0.098	0.841	0.626
10454113	1.318	0.0084	1.295	0.0224	4.3331	0.0135	1.7295	0.1219	2.223	0.772	0.209	0.589	0.04	0.82	0.634
10516096	1.0498	0.0055	1.3922	0.0432	4.1714	0.068	6.6038	0.2089	2.201	0.704	0.28	0.0	0.0	0.741	0.619
10644253	1.1726	0.0153	1.1209	0.0258	4.4078	0.0172	0.9427	0.118	1.481	0.714	0.264	0.633	0.033	0.783	0.621
10730618	1.3288	0.0241	1.7496	0.0938	4.0753	0.0563	2.2277	0.0662	3.915	0.648	0.321	0.323	0.118	0.868	0.516
10963065	1.0749	0.0116	1.2231	0.0322	4.2941	0.0318	4.2749	0.1578	1.961	0.715	0.271	0.254	0.025	0.784	0.656
11081729	1.3227	0.0225	1.4172	0.0412	4.2563	0.0302	0.8216	0.0486	3.368	0.636	0.333	0.525	0.092	0.883	0.666
11253226	1.459	0.0422	1.6492	0.0504	4.1672	0.0672	1.7013	0.0926	4.926	0.696	0.278	0.422	0.126	0.868	0.845
11772920	0.8181	0.0255	0.8424	0.0352	4.4995	0.0762	10.6479	1.6504	0.448	0.703	0.278	0.285	0.0	0.669	0.651
12009504	1.176	0.0621	1.399	0.0408	4.2165	0.0626	3.5789	0.5547	2.579	0.703	0.278	0.32	0.089	0.808	0.623
12069127	1.5612	0.0705	2.2873	0.1082	3.9125	0.1048	1.9877	0.1402	7.398	0.667	0.303	0.148	0.101	0.833	0.697
12069424	1.107	0.0084	1.2399	0.0264	4.2951	0.0294	6.9229	0.087	1.561	0.718	0.256	0.026	0.0	0.701	0.7
12069449	1.0244	0.0058	1.1098	0.0218	4.3577	0.0184	6.9829	0.0651	1.195	0.701	0.274	0.145	0.0	0.696	0.689
12258514	1.1994	0.0071	1.5812	0.0524	4.1187	0.0398	4.6312	0.0804	3.03	0.698	0.283	0.068	0.075	0.719	0.74
12317678	1.3199	0.0241	1.7187	0.0684	4.0879	0.066	2.9709	0.0789	4.972	0.737	0.251	0.2	0.097	0.834	0.862

Appendix B

Examples of the MCMC fitting of seismic ratios.

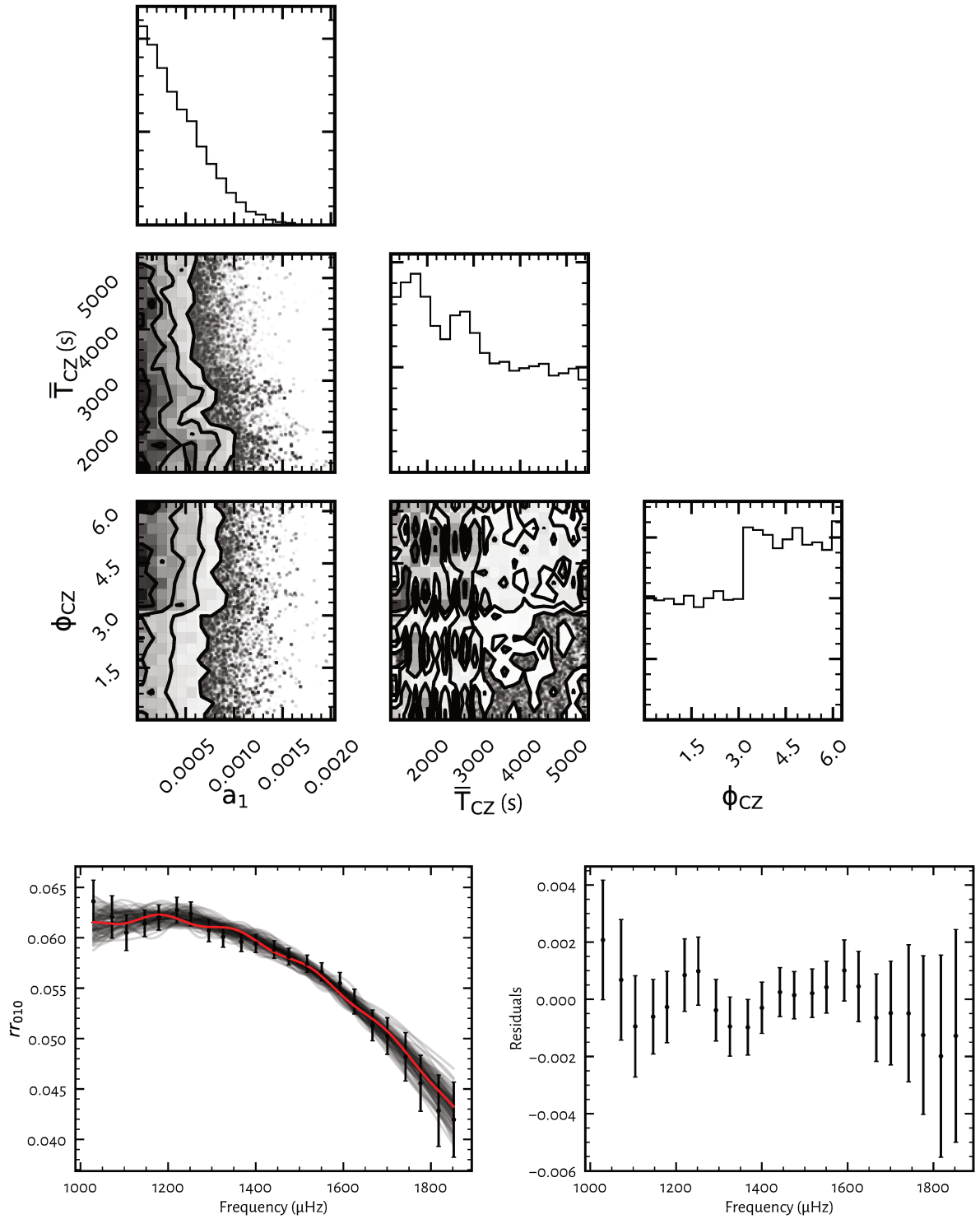


Figure B.1: MCMC fitting of the seismic ratios $rr_{01/10}$ of KIC12258514. The functional form fitted is Eq. 6.9. *Top:* Corner plot of the posterior PDF of the parameters. *Bottom left:* Observed seismic ratios (black dots) and the best model computed from the median of each marginal posterior PDFs (red line). The grey lines are 100 randomly-generated models issued from the evaluation of the PDFs. *Bottom right:* Residuals after subtracting the best ratio model.

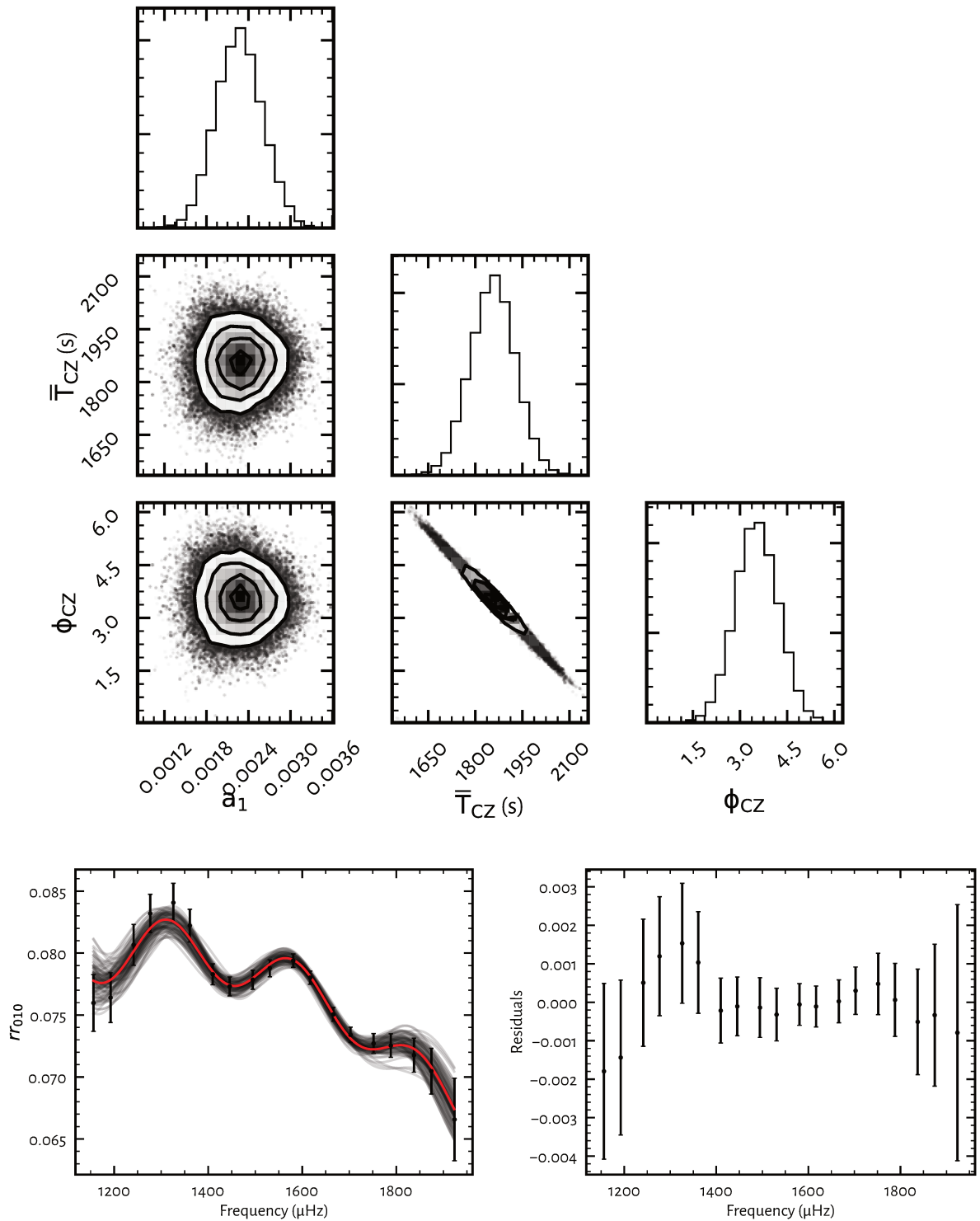


Figure B.2: MCMC fitting of the seismic ratios $rr_{01/10}$ of KIC8938964. The functional form fitted is Eq. 6.9. *Top:* Corner plot of the posterior PDF of the parameters. *Bottom left:* Observed seismic ratios (black dots) and the best model computed from the median of each marginal posterior PDFs (red line). The grey lines are 100 randomly-generated models issued from the evaluation of the PDFs. *Bottom right:* Residuals after subtracting the best ratio model.

RÉSUMÉ

L'astérosismologie s'intéresse aux oscillations des étoiles pour apporter des contraintes directes sur la physique des intérieurs stellaires. Avec quatre ans de données sismiques de grande qualité, la mission spatiale *Kepler* (NASA) nous permet de tester les modèles de structure et d'évolution stellaire sur des terrains qui étaient jusqu'alors inaccessibles. Dans un premier volet, j'aborde le problème de la rotation et du transport du moment cinétique dans les étoiles avec un point de vue nouveau : celui des pulsateurs de type γ Doradus. Les études sismiques du Soleil et des géantes rouges ont montré qu'un ou plusieurs mécanismes de transport sont manquants dans les modèles stellaires actuels. En tant que progénitrices de géantes rouges, les étoiles γ Dor sont d'un intérêt particulier mais ce sont aussi des rotateurs modérés à rapides pour lesquels un traitement approprié du couplage rotation-pulsation est nécessaire pour le diagnostic sismique. Ceci a mené au développement de MORSE, un outil de diagnostic pour l'identification des modes d'oscillation et pour la mesure de la rotation interne des γ Dor. Après m'être assuré de la fiabilité de cet outil, j'ai mesuré les rotations internes de 36 γ Dor observées par *Kepler*. Une première comparaison de ces mesures avec des modèles CESTAM incluant le transport par la circulation méridienne et la turbulence de cisaillement, montre qu'un mécanisme de transport supplémentaire extrait du moment cinétique du cœur de ces étoiles. Celui-ci reste encore à identifier. Dans un second volet, j'étudie de plus près le phénomène de pénétration convective ayant lieu à l'interface de l'enveloppe convective et de l'intérieur radiatif des étoiles de type solaire. J'utilise la signature sismique de cette interface pour étalonner l'extension de la zone de pénétration convective en m'appuyant sur le modèle proposé par Zahn (1991). Les résultats préliminaires obtenus pour deux pulsateurs solaires du *Kepler* LEGACY suggèrent que la taille de cette zone est peu dépendante de l'âge, la métallicité ou la masse de l'étoile.

MOTS CLÉS

intérieurs stellaires – astérosismologie – oscillations stellaires – rotation – étoiles gamma Doradus – interfaces radiative-convective – pénétration convective – étoiles de type solaire

ABSTRACT

Asteroseismology, the study of stellar oscillations, provides a direct way to probe the physics of stellar interiors. With four years of seismic data of unprecedented quality, the *Kepler* mission allows us to test stellar structure and evolution models on fields that were out of reach before. In a first part, I broach the problem of rotation and angular momentum transport in stars with a novel viewpoint : that of γ Doradus pulsators. Seismic studies of the Sun and red giants revealed that one or several transport mechanisms are missing in current stellar evolution models. As progenitors of redgiants, γ Dor stars are of particular interest but they are also moderate to rapid rotators for which an appropriate treatment of the rotation-pulsation coupling is needed. This led to the development of MORSE, a diagnostic tool for mode identification and the measurements of the Internal rotation rates of γ Dors. After ensuring the reliability of this tool, I measured the internal rotation rates of 36 γ Dors observed by *Kepler*. A first comparison of these measurements with CESTAM models that include transport by meridional circulation and shear turbulence, shows that a supplementary transport is extracting angular momentum from the core of these stars. This mechanism remains to be identified. In the second part, I started a systematic seismic study of the phenomenon of penetrative convection occurring at the interface of the convective envelope and radiative interior of solar-like stars. The seismic signature of the base of the convective envelope is used to calibrate the size of the penetration region on the basis of the model proposed by Zahn (1991). Preliminary results obtained for two solar-like pulsators of the *Kepler* LEGACY sample suggest that the size of this zone is weakly dependent on stellar age, metallicity or mass.

KEYWORDS

stellar interiors – asteroseismology – stellar oscillations – stellar rotation – γ Doradus stars – radiative-convective interfaces – penetrative convection – solar-like stars