



HAL
open science

Modélisation analytique et numérique de l'évolution des restes de supernova en phase radiative

Antoine Gintrand

► **To cite this version:**

Antoine Gintrand. Modélisation analytique et numérique de l'évolution des restes de supernova en phase radiative. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2019. Français. NNT : 2019PSLEO012 . tel-02884251

HAL Id: tel-02884251

<https://theses.hal.science/tel-02884251>

Submitted on 29 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'Observatoire de Paris

Modélisation analytique et numérique de l'évolution des restes de supernova en phase radiative

Soutenue par

Antoine GINTRAND

Le 22 octobre 2019

Ecole doctorale n° 127

**Astronomie et Astrophysique
d'Ile de France**

Spécialité

Astrophysique



Composition du jury :

Rosine LALLEMENT *Présidente*
Directrice de recherche,
Observatoire de Paris

Thierry PASSOT *Rapporteur*
Directeur de recherche,
Observatoire de la Côte d'Azur

Xavier RIBEYRE *Rapporteur*
Chercheur CEA ,
Université de Bordeaux

Vladimir TIKHONCHUK *Examineur*
Professeur émérite,
Université de Bordeaux

Laurent DI-MENZA *Examineur*
Professeur,
Université de Reims

Claire MICHAUT *Co-encadrante de thèse*
Directrice de recherche,
Observatoire de la Côte d'Azur

Serge BOUQUET *Directeur de thèse*
Directeur de recherche,
CEA

Lorsqu'une étoile massive arrive à la fin de sa vie, elle devient une supernova. Après l'explosion, un choc fort commence à se propager avec les éjectas de l'étoile dans le milieu circumstellaire puis dans le milieu interstellaire (MIS). Cet objet est appelé un reste de supernova (RSN). Lors de son expansion, le RSN accumule de la matière derrière le front du choc et une coquille se forme. La théorie décrit trois phases d'expansion du RSN. La première phase correspond à la phase d'expansion balistique avec un rayon R du RSN proportionnel à son âge t . Dans la seconde phase, appelée la phase de Sedov-Taylor (ST), l'évolution est adiabatique (l'énergie totale du RSN est conservée) et R croît comme $R(t) \propto t^{2/5}$. Dans ce travail de thèse, nous présentons une modélisation analytique et numérique de l'évolution du RSN dans la 3ème phase (phase radiative tardive) où l'énergie du RSN n'est plus conservée. Le reste peut alors perdre son énergie par des processus d'émission de rayonnement ou par ionisation du MIS. Dans cette dernière phase, le rayon est donné par $R(t) \propto t^n$ où l'exposant n satisfait $1/4 < n < 2/5$. Dans une première partie, nous étudions la structure d'un choc qui ionise le MIS et on montre que le taux de compression du choc peut devenir très élevé (de l'ordre de 40 au lieu de 4 pour un choc adiabatique dans un milieu monoatomique). En effet une partie de l'énergie du choc sert à ioniser le gaz et n'est plus disponible pour chauffer le milieu choqué, ce qui a pour effet de le comprimer. Ensuite, nous appliquons cette propriété pour modéliser le RSN en phase tardive et montrer que la coquille du RSN peut devenir dense et mince. Dans une deuxième partie nous effectuons l'étude analytique auto-semblable d'un RSN qui perd son énergie en volume de manière homogène par des processus radiatifs. Cette analyse démontre qu'il existe deux types de solutions hydrodynamiques. Des solutions de type ST régulières jusqu'au centre du reste et des solutions de type coquilles où la coquille est bornée par une discontinuité de contact interne qui la sépare de la partie interne chaude et raréfiée (bulle) du RSN. On montre également que la coquille du RSN devient dense et mince pour des pertes suffisamment élevées. Enfin nous complétons l'étude de la transition en phase radiative du RSN pour des pertes radiatives plus réalistes en utilisant la simulation numérique. On montre que bien que le processus de formation de la coquille fine et dense soit complexe (refroidissement catastrophique de Falle et formation de chocs secondaires), l'évolution du RSN en phase tardive conserve des propriétés communes à un grand nombre de refroidissements. En particulier, on montre que presque dans tout les cas on a $R(t) \propto t^n$ avec n proche de $2/7$. Ce comportement est en accord avec la théorie, car cette valeur a déjà été trouvée antérieurement par d'autres auteurs et nous la mettons aussi en évidence dans notre approche auto-semblable.

MOTS CLÉS

Restes de supernova, Phase radiative, Solutions auto-semblables, Chocs ionisants, Refroidissement

ABSTRACT

At the end of a massive (typically more than 5 to 6 solar masses) star life, the star becomes a supernova. After the explosion, the strong shock begins to propagate with the ejecta of the star in the circumstellar medium and later in the interstellar medium (ISM). This object is called a supernova remnant (SNR). During its expansion, the SNR accumulates matter behind the shock front to form a shell. Theory describes three stages of the SNR. The first stage corresponds to a ballistic expansion with a radius R of the SNR proportional to its age t . In the second stage, called the Sedov-Taylor (ST) regime, the evolution is adiabatic (energy conservation) and R increases like $R(t) \propto t^{2/5}$. In this PhD thesis, we present an analytical and numerical modeling of the SNR evolution in its third stage (radiative late stage) where the energy is not anymore conserved. The remnant loses its energy by radiative emission processes or by ionization of the ISM. In this last stage, the radius is given by $R(t) \propto t^n$ where the exponent n satisfies $1/4 < n < 2/5$. First, we study the structure of the shock which ionizes the ISM and show that the compression ratio can become high (of the order of 40 compared to 4 for a adiabatic shock in a monoatomic gas). Indeed, a portion of the shock energy is used to ionize the gas and is no longer available to heat the post-shock medium, so the gas will be compressed. Then, we apply this property to the modeling of a SNR in late stage and show that the SNR shell can become dense and thin. In a second part, we perform the self-similar analysis of a SNR where energy losses are described by a spatially uniform cooling function. This study demonstrates that there are two types of hydrodynamic solutions : ST-type solutions which are smooth up to the center of the remnant and shell-type solutions where the shell is bounded by a contact discontinuity that separates it from the hot and rarefied interior (bubble) of the SNR. Also, we show that the shell becomes dense and thin when the energy loss is strong enough. Finally, we complete the study of the transition to the radiative stage of the SNR for more realistic radiative losses using the numerical simulation. We show that although the formation process of the thin and dense shell is complex (catastrophic cooling of Falle and secondary shocks), the evolution of SNR in the radiative stage shares common properties for a wide variety of cooling functions. In particular, we show that in almost every cases the SNR radius follows the law $R(t) \propto t^n$ where n is close to $2/7$. This behavior is consistent with theory, because this value has been found previously by other authors and we highlight it also in our self-similar analysis.

KEYWORDS

Supernova Remnant, Radiative stage, Self-similar solutions, Ionizing shocks, Cooling

Remerciements :

Ce manuscrit est le fruit d'un travail réalisé au CEA et à l'Observatoire de Paris. De nombreuses personnes ont participé à l'élaboration de cette thèse et je voudrais ici leur exprimer ma profonde gratitude pour leur aide et leur soutien. Tout d'abord je tiens à remercier les membres du jury à commencer par Rosine Lallement avec qui j'ai eu la chance de discuter et échanger longuement sur les restes de supernova et le milieu interstellaire. Ensuite je voudrais remercier les deux rapporteurs de cette thèse Xavier Ribeyre et Thierry Pasot pour avoir accepté la tâche difficile de relecture et de correction de mon manuscrit et enfin les deux examinateurs Laurent Di Menza et mon ancien professeur de physique des plasmas Vladimir Tikhonchuk sans qui je n'aurais pas eu les bases nécessaires pour aborder cette thèse. Ensuite je tiens à remercier mes deux encadrants de thèse. Tout d'abord, mon directeur de thèse Serge Bouquet qui a su m'encadrer et me guider durant ces trois années avec une grande bienveillance et m'a transmis son goût pour la physique et la modélisation analytique avec une grande générosité. Sa disponibilité m'a aidé à avancer dans mes réflexions et à ne pas me perdre dans mon travail de recherche. Ensuite, je remercie Claire Michaut pour m'avoir accueilli et encadré au sein du LUTH (Laboratoire Univers et Théories) de l'Observatoire de Meudon et pour m'avoir initié et aidé à la réalisation de simulations numériques hydrodynamiques à l'aide du code HADES développé par son équipe. Je souhaite aussi remercier l'équipe informatique, Marco Mancini, Stéphane Méné et Fabrice Roy. Ils ont toujours été présents pour m'aider dans mes nombreux problèmes informatiques. Je souhaite adresser en particulier à Marco ma profonde gratitude qui a toujours été là pour m'aider sur les problèmes numériques et informatiques. Les simulations présentées dans cette thèse n'auraient pas pu être réalisées sans son aide précieuse. Je souhaite également remercier Javier Sanz qui a eu la gentillesse de m'accueillir à plusieurs reprises à l'université de Madrid et travailler avec moi pour m'aider à trouver les solutions autosemblables présentées dans le chapitre 3. Sa grande connaissance du calcul analytique et de la modélisation physique ont grandement contribué à ma formation de jeune chercheur et je lui serai toujours reconnaissant d'avoir partagé tout ceci avec moi. Je voudrais aussi remercier toutes les personnes du laboratoire au CEA et du LUTH avec qui j'ai eu la chance de discuter et échanger durant ces trois années ainsi que tous les doctorants qui ont contribué à rendre cette aventure agréable et enrichissante : Pedro, Jeremy, Bertrand, Julien, Gaétan, Marine, Pierre-Louis, Alizée, David, Arnaud, Mikael, Quentin, Jean-Etienne, Laurent, Patrick, Manuel, Florian, Céline, Karim, Eric, Jérôme, Aurélien, Philippe et toutes les autres personnes que je n'ai pas pu citer ici. Je voudrais aussi remercier Ba-

sile Grammaticos qui m'a initié au travail de modélisation physique durant mes années de "prépa" et a contribué à mon choix de faire de la recherche. Enfin, je veux remercier mes parents et tous mes amis qui ont toujours été présents pour me soutenir même dans les moments difficiles.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Le contexte astrophysique	7
1.2	Etat de l'art sur l'étude de l'écoulement de base dans le RSN en phase radiative	12
1.3	Etat de l'art sur l'étude des instabilités dans le RSN en phase radiative	18
1.4	Objectifs et présentation de la thèse	22
2	Effet d'ionisation et densification au front du choc dans un reste de supernova	27
2.1	L'ionisation dans les équations de Rankine-Hugoniot	28
2.2	Les résultats pour le milieu choqué	33
2.3	La zone transitoire du choc avec ionisation	38
2.4	Etude de l'effet de l'ionisation simplifiée sur le gaz choqué pour un RSN	45
2.5	Conclusion	50
3	Solutions auto-semblables décrivant le refroidissement d'un reste de supernova	53
3.1	Analyse dimensionnelle et solutions auto-semblables	56
3.2	Solution auto-semblable de Sedov-Taylor	59
3.2.1	L'analyse dimensionnelle appliquée aux ondes de souffle	59
3.2.2	Les équations décrivant l'onde de souffle	61
3.2.3	Solutions auto-semblables et transformations homothé- tiques	62
3.2.4	Les équations différentielles ordinaires et la solution auto-semblable	65
3.3	Solution auto-semblable de Barenblatt	68
3.3.1	Le refroidissement de Barenblatt au front du choc . . .	68
3.3.2	Formalisme et solution du problème de Barenblatt . . .	71
3.3.3	Bilan d'énergie pour la solution de Barenblatt	79

3.3.4	Application du modèle de Barenblatt pour les ondes de choc avec ionisation	80
3.4	Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume . . .	81
3.4.1	Equations générales et formalisme auto-semblable . . .	82
3.4.2	Le cas d'un refroidissement homogène : Deux classes de solutions	83
3.4.3	Analyse des équations et des types de solutions	86
3.4.4	Les solutions de type coquille	90
3.4.5	Les solutions de type Sedov-Taylor	96
3.4.6	Structure de la bulle chaude interne	103
3.4.7	Analyse pour les grands taux de refroidissement	105
3.5	Quelques résultats complémentaires : le refroidissement en loi de puissances	111
3.6	Conclusion	114
4	Simulation numérique d'un reste de supernova en phase radiative	119
4.1	Présentation du code de simulation HADES	119
4.1.1	Le modèle physique	119
4.1.2	Le schéma numérique	121
4.2	Méthode de simulation et traitement du refroidissement	126
4.2.1	La condition initiale de Sedov-Taylor	126
4.2.2	Le traitement du refroidissement	130
4.2.3	Test analytique du refroidissement pour le cas d'un gaz statique	132
4.3	Résultats numériques pour plusieurs refroidissements	134
4.3.1	Le cas d'un refroidissement constant	134
4.3.2	Refroidissement catastrophique de Falle	144
4.3.3	Refroidissements avec $b > 3/2$	147
4.3.4	Refroidissements avec $b < 3/2$	151
4.3.5	Formation de la coquille dense et fine	162
4.4	Conclusion	173
5	Conclusion	177
5.1	Résumé des résultats de la thèse	177
5.2	Perspectives	181
	Table des figures	187
	Bibliographie	197
	Publications et conférences	205

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Le contexte astrophysique	7
1.2	Etat de l'art sur l'étude de l'écoulement de base dans le RSN en phase radiative	12
1.3	Etat de l'art sur l'étude des instabilités dans le RSN en phase radiative	18
1.4	Objectifs et présentation de la thèse	22

1.1 Le contexte astrophysique

Lorsqu'une étoile massive arrive à la fin de sa vie, l'étoile devient une supernova. Cette explosion libère une énergie de l'ordre de 10^{44} J (10^{51} ergs) et peut être classée en deux catégories distinctes. Les supernovae thermonucléaires et les supernovae à effondrement de cœur ou gravitationnelles. Les premières font intervenir un système qui se compose d'un couple d'étoiles, où l'une d'entre elles est un cadavre dégénéré (une naine blanche) et l'autre une étoile compagnon dont la matière se fait drainer par sa voisine plus compacte. Cette phase d'accrétion par la naine blanche s'achève lorsque sa masse devient supérieure à 1,4 fois la masse du Soleil (masse de Chandrasekhar) et elle se désintègre totalement en une gigantesque explosion thermonucléaire. Contrairement à la première catégorie de supernovae, les supernovae gravitationnelles laissent derrière elles un objet central. En effet ce type de supernova se produit lors de l'effondrement gravitationnel d'une étoile massive (masse d'au moins 5 à 6 fois celle du Soleil). Lorsque les réactions de fusion ne sont plus suffisantes, la force due à la pression thermique ne peut plus compenser la force de gravité de l'étoile qui se met à s'effondrer sur son noyau de fer.

L'objet central qui résulte de cet effondrement peut devenir une étoile à neutrons ou un trou noir. Dans les deux cas de supernovae, après l'explosion, un choc fort commence à se propager avec les éjectas de l'étoile dans le milieu circumstellaire puis dans le milieu interstellaire (MIS). Cet ensemble est appelé un reste de supernova (RSN). Finalement, le RSN balaye la matière du MIS sur son passage en formant une coquille. Lors de la première phase d'expansion du RSN, appelée phase balistique, la vitesse des éjectas est constante et le rayon r_0 du RSN suit la loi $r_0(t) \propto t$ où t est l'âge du rémanent. Ensuite, lorsque la masse du MIS balayée par l'onde de choc devient du même ordre de grandeur que la masse initiale de l'étoile, le reste entre dans la phase de Sedov-Taylor où le rayon suit la loi $r_0(t) \propto t^{2/5}$. Nous verrons que cette solution est une solution auto-semblable (SAS) et dans cette phase le RSN conserve son énergie totale et nous expliquerons dans le chapitre 3 l'origine de la valeur $2/5$ de l'exposant. Durant la transition de la phase balistique à la phase de Sedov-Taylor, un choc retour et une discontinuité de contact sont générés. Le choc retour converge vers le centre de l'explosion et la discontinuité de contact qui sépare les éjectas denses et le milieu circumstellaire est sujet à une instabilité appelée instabilité de Rayleigh-Taylor (RT) [1], [2], [3], [4], [5]. Durant la vie du RSN, des processus d'émissions vont opérer dans le reste qui va se mettre à perdre de l'énergie par radiation (aussi appelé refroidissement). Lorsque cette énergie devient non négligeable par rapport à l'énergie totale du RSN, celui-ci va entrer dans sa dernière phase qui est la phase radiative. Durant cette phase, la décélération du rayon du RSN va s'amplifier à cause des pertes radiatives. Sur les Figures 1.1, 1.2 et 1.3, on peut observer les structures complexes que forment les RSN en phase radiative.



FIGURE 1.1 – Image du RSN Simeis 147 (ou Nébuleuse du Spaghetti) âgé d'environ 40 000 ans, source : Rogelio Bernal Andreo.

En effet, si on relève les zones émissives qui émettent dans le domaine visible [6], [7], [8], [9], celles-ci dévoilent une structure de type coquille du RSN, chaotique et filamentaire dans sa phase tardive. Ces structures sont le résultat d'instabilités hydrodynamiques encore mal connues à ce jour, mais parmi elles on peut citer l'instabilité de Rayleigh-Taylor mentionnée plus haut, et l'instabilité de Vishniac (voir plus loin).



FIGURE 1.2 – Image du RSN IC443 (ou Nébuleuse de la Méduse) âgé d'environ 30 000 ans, source : Georges Chassaigne.



FIGURE 1.3 – Image zoomée du RSN IC443 (ou Nébuleuse de la Méduse) âgé d'environ 30 000 ans, source : NASA.

Par ailleurs, il est clair que deux effets physiques majeurs vont jouer un rôle prépondérant pour la formation de ces structures filamenteuses. Premièrement, le MIS est un milieu très inhomogène [10], [11], [12] où la matière se répartit entre milieux froids atomiques denses, milieux moléculaires plus denses, poussières encore plus denses et milieux ionisés chauds et dilués. Le MIS étant un système dynamique turbulent [13], [14], il s'organise sur des structures où des couplages dynamiques forts se retrouvent entre toutes les échelles. La propagation d'un choc dans un tel milieu peut conduire à des structures complexes dans la coquille du RSN [15], [16], [17], [18], [19] qui vont contribuer elles-mêmes aux inhomogénéités du MIS [20], [21], [22]. Deuxièmement le refroidissement de cette coquille par les processus d'émissions en phase radiative du RSN et l'ionisation du MIS (voir aussi le chapitre 2) neutre par le passage du choc [23] vont modifier la structure de la coquille qui va devenir dense et mince en perdant de l'énergie. Cette coquille froide peut alors être le siège des instabilités hydrodynamiques que nous avons mentionnées juste avant. Dans la suite, nous allons passer en revue différents résultats de la littérature qui ont permis de mieux comprendre la structure d'un RSN en phase radiative.

1.2 Etat de l'art sur l'étude de l'écoulement de base dans le RSN en phase radiative

Lorsque le RSN entre dans la phase radiative les pertes d'énergie par refroidissement deviennent non négligeables par rapport à l'énergie totale du RSN et on quitte alors la phase de Sedov-Taylor et l'énergie totale n'est plus conservée. Dans un papier de Falle [24], l'auteur montre qu'une instabilité thermique (appelée "refroidissement catastrophique") dans le RSN intervient lors de la formation de la coquille fine et dense. Cette instabilité vient du fait que le temps caractéristique de refroidissement devient inférieur au temps que met une onde sonore à parcourir la zone qui se refroidit. A partir de ce moment, tout déficit de pression créé par le refroidissement va s'amplifier irrémédiablement, conduisant à des mouvements supersoniques violents de matière qui, dans un premier temps, vont mener à la formation d'une région surdense (coquille) et, ensuite, créer des chocs secondaires dans le RSN. L'apparition de cette instabilité dépend du processus de refroidissement que l'on définit dans le RSN. Pour tous les refroidissements physiquement pertinents utilisés dans les simulations numériques [24], [25], [26], [27], [28] la transition vers la phase radiative du RSN passe par le refroidissement catastrophique de Falle et mène à la formation d'une coquille fine et dense où le rayon du RSN converge pour des temps longs vers la loi $r_0(t) \propto t^\alpha$ avec $1/4 \leq \alpha < 2/5$ (nous expliquerons la valeur $1/4$ un peu plus loin) où le paramètre de décélération α dépend du processus de refroidissement et des conditions initiales. La densité dans la coquille peut alors être de l'ordre de cent fois la densité du MIS. De plus, il semble que le paramètre α converge dans de nombreux cas vers une valeur proche de $2/7$. Ce comportement asymptotique de la solution a été interprété par un modèle analytique 0D développé par McKee & Ostriker [20] puis revisité par Petruk & Bandiera [29] qui prédit une phase appelée "Pressure-Driven Snowplow" (PDS) du RSN. Dans ce modèle, on considère une coquille infiniment mince poussée par une bulle interne chaude dans laquelle la pression est p_B et dont la densité est supposée négligeable comparée à celle de la coquille. De plus, cette bulle est supposée être adiabatique, i.e., $p_B r_0^{3\gamma} = \text{constante}$ où γ est l'indice adiabatique du milieu. Si le rayon suit la loi $r_0(t) \propto t^\alpha$, sachant que $r_0^2 p_B \propto (d^2 r_0 / dt^2)$, alors $\alpha = 2/(2 + 3\gamma)$. Pour un RSN, on a $\gamma = 5/3$ et on obtient $\alpha = 2/7$, valeur mentionnée juste avant. Dans un modèle analytique 1D développé par Barenblatt [30], le reste possède un indice adiabatique γ^* pour la condition au bord au front du choc différent de l'indice adiabatique γ pour le MIS et l'intérieur du RSN (voir le chapitre 3). Ce coefficient adiabatique effectif revient de manière équivalente à considérer un gain ($\gamma^* > \gamma$) ou une perte d'énergie ($1 < \gamma^* < \gamma$) seulement au niveau

1.2. Etat de l'art sur l'étude de l'écoulement de base dans le RSN en phase radiative

du choc et proportionnel à la température du milieu choqué. On trouve alors des SAS différentes du cas de Sedov-Taylor lorsque $\gamma^* \neq \gamma$ avec $r_0(t) \propto t^\alpha$ et $\alpha < 2/5$. Lorsque $\gamma^* \rightarrow 1$, le refroidissement devient très intense (il diverge pour $\gamma^* = 1$) et on retrouve la phase PDS avec $r_0(t) \propto t^{2/(3\gamma+2)} = t^{2/7}$ pour $\gamma = 5/3$.

Venons-en maintenant à la valeur inférieure $\alpha = 1/4$ mentionnée plus haut. Elle peut être expliquée par le modèle 0D de Oort [31] dans lequel une coquille infiniment fine est également considérée, mais cette fois-ci, la pression dans la bulle vaut $p_B = 0$. Cette phase tardive où la pression dans la bulle n'est plus suffisante pour pousser la coquille est appelée "Momentum-Conserving Snowplow" (MCS) [32], [33] car elle provient de la conservation de la quantité de mouvement, puisque la force de pression devient négligeable. Pour obtenir $\alpha = 1/4$, il suffit d'écrire $M(t)(dr_0/dt) = \text{constante}$ où $M(t) \propto r_0^3(t)$ est la masse du RSN et d'intégrer cette équation différentielle. Le résultat $r_0(t) \propto t^{1/4}$ est immédiat. Cette phase finale du RSN est aussi observée dans plusieurs simulations numériques [34], [35]. Enfin la présence d'un champ magnétique peut altérer la dynamique du RSN lors de la formation de la coquille fine et dense. En effet, il existe dans le MIS un champ magnétique ambiant de l'ordre du microgauss. Si celui-ci n'a aucune influence sur la dynamique du RSN en phase de Sedov-Taylor, il peut en revanche avoir un fort impact lors de la transition en phase radiative [36]. La partie du champ magnétique perpendiculaire à la direction de propagation du choc induit une pression magnétique qui tend à contrebalancer les effets du refroidissement en élargissant la coquille qui devient alors moins dense. La loi d'évolution suit aussi la loi asymptotique $r_0(t) \propto t^\alpha$ mais la valeur de $\alpha < 2/5$ augmente avec l'intensité du champ magnétique pour un refroidissement donné.

Il est aussi possible d'étudier en laboratoire la dynamique de chocs radiatifs représentatifs de la phase tardive d'un RSN grâce aux expériences d'astrophysique de laboratoire [37], [38], [39]. Une première méthode pour créer le choc radiatif consiste à focaliser des lasers de haute intensité sur une cible qui peut être soit une épingle plongée dans un gaz [40], soit un milieu constitué d'amas atomique, [41], [42], [43], ou encore un piston collé à une cellule de gaz [44], [45], [46]. En focalisant les lasers sur la cible, on va générer le dépôt d'énergie qui sera à l'origine de l'onde de souffle sphérique. Une seconde approche consiste à utiliser une machine à striction axiale (plus couramment appelé "Z-pinch") qui produit une forte décharge électrique le long d'une tige cylindrique creuse contenant du gaz. Le courant généré selon l'axe de la tige est d'environ 1 MA. La décharge va créer un choc cylindrique convergent qui va se propager à l'intérieur de la tige mais la longueur de propagation est alors limitée à 3 mm [47], [48]. Des expériences plus récentes utilisent une

méthode différente (en anglais "inverse liner Z-pinch") afin de créer des chocs divergents qui peuvent alors se propager sur une distance d'environ 50 mm durant plusieurs microsecondes [49] pour une même intensité du courant. Dans cette configuration, la tige est enfermée dans une enceinte remplie de gaz.

Naturellement, les expériences de laboratoire ont permis de reproduire aussi la phase de Sedov-Taylor du RSN. La méthode consiste à propager le choc dans un gaz qui ne perd pas d'énergie de manière significative par rayonnement en prenant un gaz de faible numéro atomique Z . Les différentes expériences montrent que le front du choc suit bien la loi $r_0(t) \propto t^{2/5}$ [50], [40], [43]. Ensuite il est nécessaire de déterminer les critères qui permettent de reproduire des chocs qui perdent de l'énergie par rayonnement et qui peuvent être représentatifs d'un RSN en phase radiative. Dans un papier de Ryutov et ses collègues [51], les auteurs déterminent les conditions de température et de densité du plasma afin de définir un régime radiatif optiquement mince pour les expériences d'astrophysique de laboratoire représentatives d'un RSN en phase radiative. Pour que le flux radiatif puisse s'échapper de l'onde de souffle, il faut que le libre parcours des photons, λ_{rad} soit supérieur à la taille caractéristique h du système. Enfin, il faut que le temps de refroidissement du plasma (noté τ_{rad}) soit inférieur au temps que met une onde sonore à traverser le système (noté τ_{conv} pour temps de transport convectif). Ce critère étant aussi le critère d'instabilité thermique de Falle [24] à l'origine de la formation de la coquille fine et dense du RSN. Dans les expériences de laboratoire, la température du plasma doit être suffisamment haute et la densité suffisamment basse pour que le système se trouve dans le régime du flux radiatif défini par Drake [37] où le flux d'énergie radiative F_{rad} est supérieur au flux d'énergie cinétique de la matière F_m . Dans ce régime, les deux premières équations d'Euler (conservation de la masse et de la quantité de mouvement) sont inchangées mais l'équation d'énergie fait apparaître un terme supplémentaire lié au flux radiatif F_{rad} que l'on ne peut plus négliger. Si le plasma est optiquement mince $\lambda_{rad} \gg h$ alors les photons s'échappent du système. Si le plasma est optiquement épais $\lambda_{rad} \ll h$, les photons sont réabsorbés dans le plasma et ils ne peuvent pas s'échapper du système (pas de pertes d'énergie par rayonnement). La température du plasma doit cependant être suffisamment basse pour ne pas tomber non plus dans le régime dominé par les radiations [37] où la pression radiative P_{rad} devient supérieure à la pression thermique du gaz P_m . Il faudrait alors tenir compte d'un terme supplémentaire de pression radiative dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. En effet, ce régime est à exclure car il n'est pas représentatif d'un RSN en phase radiative.

1.2. Etat de l'art sur l'étude de l'écoulement de base dans le RSN en phase radiative

Afin de réaliser une onde de souffle qui perd de l'énergie par rayonnement, il faut contrairement au cas de Sedov-Taylor choisir un gaz de numéro atomique Z élevé ce qui aura pour effet de favoriser l'émission de photons dans le plasma [50], [52]. Si celui-ci vérifie les conditions thermodynamiques précédentes alors l'onde de souffle va entrer dans une phase radiative. Différentes expériences ont pu valider ce régime en observant que le front du choc ne suit plus la loi $r_0(t) \propto t^{2/5}$ mais décélère plus fortement, ce qui permet de conclure que l'onde de souffle perd de l'énergie. Un diagnostic supplémentaire identifie la présence d'un précurseur radiatif qui vient confirmer l'existence d'un flux radiatif. Ce flux radiatif va venir chauffer et ioniser le milieu en amont du choc [53], [54], [40]. Prenons maintenant l'exemple des expériences de laboratoire menées sur le "Texas Petawatt Laser" à UT Austin et sur le "Z-Beamlet Laser" aux "Sandia National Laboratories" par Riley et ses collègues [52]. Cette expérience vise à étudier de manière expérimentale la propagation d'une onde de souffle dans un milieu de densité homogène pour deux gaz différents, en focalisant une impulsion laser d'une intensité d'environ 10^{15} W/cm² sur une cible solide d'extension spatiale faible par rapport à la taille du milieu gazeux. Dans le premier cas, on étudie la propagation du choc dans du Néon, ce gaz de faible numéro atomique Z possède peu de degrés de liberté et sert d'expérience de référence pour la phase de Sedov-Taylor où les pertes radiatives sont négligeables (figure 1.4). Dans le deuxième cas, on étudie la propagation du choc dans du Xénon (figure 1.5) qui possède un numéro atomique beaucoup plus grand et le milieu choqué va donc perdre de l'énergie par radiation. Dans cette expérience on génère également un champ magnétique ambiant constant de l'ordre de 5 à 14 Tesla, suffisamment fort pour affecter la structure globale de l'onde de souffle. Le diagnostic du caractère radiatif pour le Xénon est confirmé par la décélération du rayon moyen r_0 de l'onde de souffle qui suit approximativement une loi en $r_0(t) \propto t^{0.35}$ contrairement cas du Néon qui suit une loi en $r_0(t) \propto t^{0.45}$ (voir la figure 1.6).

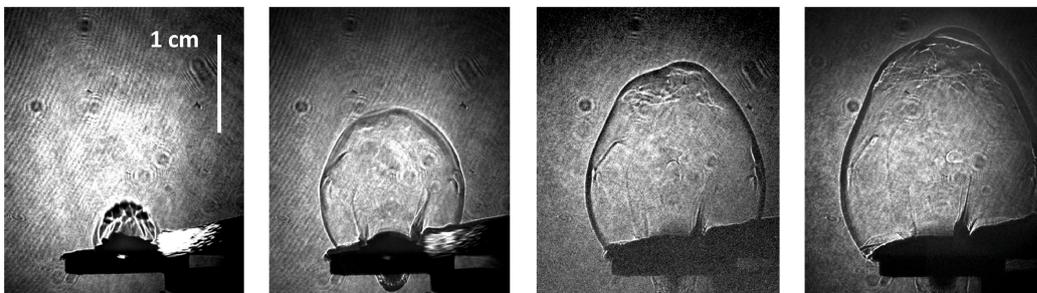


FIGURE 1.4 – Photos à différents instants de l'onde de souffle dans du néon.

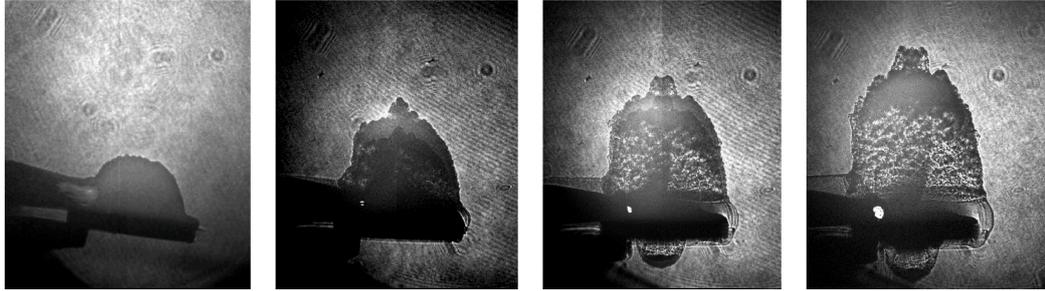


FIGURE 1.5 – Photos à différents instants de l’onde de souffle dans du xénon.

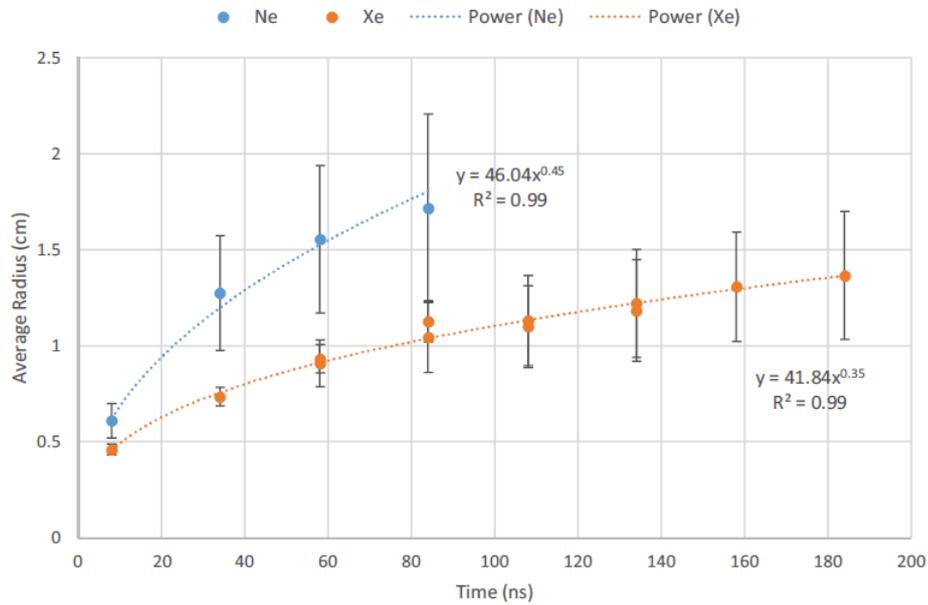


FIGURE 1.6 – Evolution du rayon de l’onde de souffle (en cm) en fonction du temps (en ns) pour du néon en bleu et pour du xénon en orange. Tiré des expériences de Riley et ses collègues [52].

Dans les expériences de Edens et ses collègues [40], on observe un amincissement de la coquille lorsque celle-ci décélère fortement et entre dans sa phase radiative. Sur la figure 1.7, on peut voir que l’épaisseur de la coquille croît linéairement avec la position du front du choc pour une onde de souffle dans la phase de Sedov-Taylor (pour de l’argon en noir). En effet, dans la phase de Sedov-Taylor la face interne et externe de la coquille évoluent proportionnellement à $t^{2/5}$ et on en déduit que l’épaisseur évolue proportionnellement avec le rayon de l’onde de souffle. Cependant, lorsque l’on entre dans la phase radiative l’épaisseur de coquille ne croît plus linéairement avec le rayon du

1.2. Etat de l'art sur l'étude de l'écoulement de base dans le RSN en phase radiative

front du choc, ce qui traduit le fait que les pertes radiatives tendent à rendre la coquille plus mince (voir les courbes du xénon en rouge et en bleu). Enfin, dans le papier de Hohenberger et ses collègues [43], une onde de souffle en géométrie cylindrique est générée au moyen d'un laser intense focalisé dans un rayon d'environ 0.02 mm avec une énergie déposée de quelques joules. On observe alors un amincissement de la coquille et une légère densification de la coquille où le taux de compression peut atteindre 5.5 ce qui est plus grand que 4 pour un choc fort adiabatique.

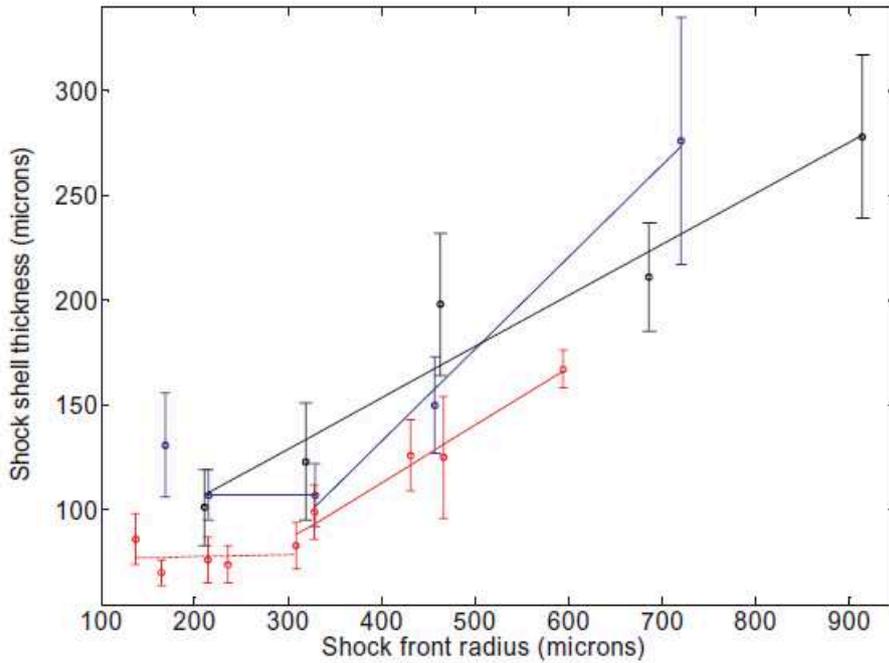


FIGURE 1.7 – Epaisseur de la coquille en fonction du rayon de l'onde de souffle pour du xénon à une densité de $1,6 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ (rouge), du xénon à une densité de $2,47 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ (en bleu) et de l'argon à une densité de $1,4 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ (en noir). La ligne en tirets rouges correspond à la transition visible pour la trajectoire de faible densité. Les lignes en trait plein correspondent à des interpolations linéaires des données. Tiré de Edens et ses collègues [40].

1.3 Etat de l'art sur l'étude des instabilités dans le RSN en phase radiative

Jusqu'ici, nous avons passé en revue les différentes avancées théoriques faites par le passé sur l'écoulement de base d'un RSN en phase radiative en utilisant des modèles analytiques et la simulation numérique. Nous allons présenter maintenant les résultats connus concernant les instabilités se développant dans un RSN en phase radiative. Tout d'abord, nous allons présenter l'instabilité de Rayleigh-Taylor (RT) [1]. Le mécanisme de l'instabilité se développe par exemple lorsqu'un système composé d'un fluide dense (à gauche) et d'un fluide plus léger (à droite) séparé par une discontinuité de contact (ou une interface) verticale est en décélération vers la droite. Si l'on perturbe le système, les perturbations à l'interface vont croître et le fluide plus dense va alors se propager dans le fluide moins dense du fait de sa plus grande inertie sous formes de "doigts" ou "champignons". En contrepartie, des bulles de fluide léger pénétreront dans le fluide lourd. Dans un article de Chevalier et ses collègues [3], l'instabilité de RT est mise en évidence pour un RSN en transition vers la phase de Sedov-Taylor où les éjectas denses viennent pénétrer le milieu circumstellaire. L'amplitude X de la perturbation pour les quantités hydrodynamiques et la surface de contact est donnée par $X(t) \propto t^\sigma$ où le taux de croissance σ est un réel positif que l'on doit calculer numériquement. On notera qu'ici on n'a pas une loi de croissance exponentielle car la perturbation se développe sur un écoulement de base instationnaire. D'un autre côté on peut aussi montrer qu'une coquille qui accélère ($\alpha > 1$) est instable au sens de RT [55]. Dans un papier de Drake & Doss [56], il est montré que les coquilles qui décélèrent mais qui possèdent une densité croissante en partant du front du choc et les coquilles qui accélèrent avec une densité croissante ou décroissante sont instables au sens de RT. Enfin, dans les simulations numériques de Badjin et ses collègues [35], on observe en effet l'instabilité de RT en lien notamment avec des épisodes d'accélération transitoires lors de la formation de la coquille fine en phase radiative du RSN (voir aussi les chapitres 3 et 4 de ce manuscrit).

Une autre instabilité essentielle s'appelle l'instabilité de Vishniac, du nom de l'auteur de la publication [57], qui fait l'étude de stabilité en régime linéaire d'une coquille infiniment fine poussée par une bulle chaude de pression p_B . Dans ce papier, Vishniac [57] met en évidence pour la première fois un mécanisme instable qu'il appelle "pressure-driven thin shell overstability" (PDTSO). Par cette dénomination complexe, l'auteur veut dire que l'amplitude de la perturbation va devenir alternativement positive puis négative, et réciproquement (on a donc des oscillations), mais son module va toujours

1.3. Etat de l'art sur l'étude des instabilités dans le RSN en phase radiative

être croissant. Dans le détail, le mécanisme physique est le suivant. Si on considère la coquille initialement perturbée par une modulation spatiale, la force due à la pression bélière $\rho_1 D^2$ (avec ρ_1 la densité du MIS et D la vitesse du choc) du MIS qui tend à ralentir l'expansion du RSN n'est plus colinéaire à la force de la pression p_B de la bulle qui pousse la coquille, ce qui a pour conséquence de déplacer la matière d'une bosse vers une vallée de la sinusoïde qui perturbe la coquille. Sous cet effet, la matière se met à s'accumuler dans la vallée et via le principe fondamental de la dynamique, la vallée étant plus massive, elle se retrouve moins ralentie (grâce à sa forte inertie) que la bosse et finalement la vallée devient la bosse et la bosse devient la vallée. Ensuite la matière se remet à se déplacer dans la coquille suivant le même mécanisme et on peut montrer que l'amplitude $X(t)$ de la déformation croît avec le temps comme $X(t) \propto t^\sigma$ (où σ est le taux de croissance à valeur complexe de partie réelle positive) si la coquille est suffisamment fine. Dans le cas d'une coquille infiniment fine (Vishniac fait tendre γ au niveau du choc vers 1) [57], on peut obtenir la relation de dispersion qui s'écrit,

$$\begin{aligned} &(\sigma + 3\alpha)(\sigma + 5\alpha - 1)[(\sigma + \alpha)(\sigma + 7\alpha - 1) - \alpha(1 - \alpha)] \\ &= -3\beta\alpha^3(1 - \alpha)\ell(\ell + 1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

où ℓ est le mode de la perturbation (le nombre d'onde de la perturbation est $k = \ell/r_0$ où la solution est perturbée en harmoniques sphériques) et $\beta = p_B/(\rho_1 D^2) = (4\alpha - 1)/(3\alpha)$ est le rapport de la pression dans la bulle sur la pression bélière dont la valeur dépend directement de α puisque $D = dr_0(t)/dt \propto \alpha t^{\alpha-1}$ et que $d^2r_0/dt^2 = 4\pi r_0^2 p_B$. La partie réelle du taux de croissance σ est présentée sur la figure 1.8. Pour un mode ℓ suffisamment grand (environ $\ell > 10$) la coquille est donc instable en régime linéaire.

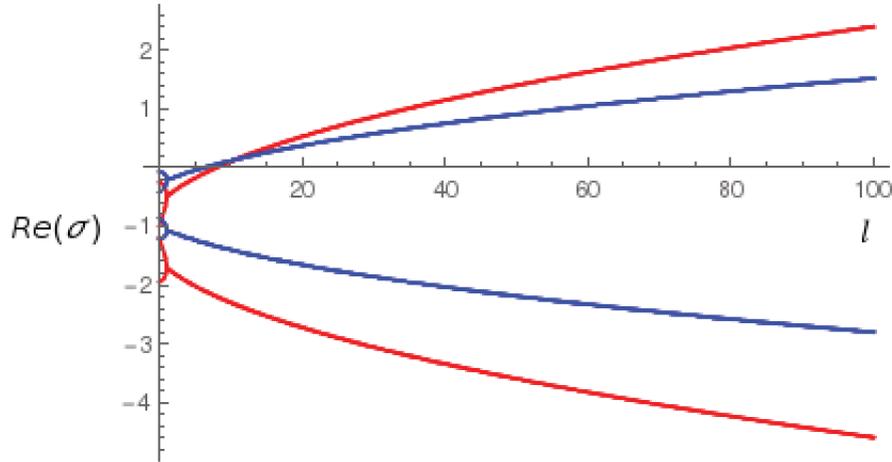


FIGURE 1.8 – La partie réelle du taux de croissance σ en fonction du mode ℓ pour $\alpha = 2/5$ - RSN en phase de Sedov-Taylor (en rouge) et $\alpha = 2/7$ - RSN en phase PDS (en bleu).

Ensuite dans un second papier par Ryu & Vishniac [58], l'étude de stabilité est généralisée pour $\alpha = 2/5$ mais avec une coquille d'épaisseur finie en 1 dimension d'espace où l'épaisseur de la coquille varie en fonction de l'indice adiabatique γ du milieu considéré. Cependant comme remarqué par Sanz et ses collègues [59], cette étude de stabilité comporte des erreurs, notamment, la relation de dispersion du papier de Vishniac [57] de 1983 n'est pas retrouvée dans la limite où $\gamma \rightarrow 1$, i.e., pour une coquille infiniment fine. Aussi, ces auteurs [59] ont repris l'étude de stabilité de la solution de Sedov-Taylor (le cas où $\alpha = 2/5$) et la relation de dispersion correcte pour toute valeur de γ est déduite. En particulier, ils retrouvent la relation de dispersion initiale de Vishniac pour une coquille infiniment mince. On trouve que la solution de Sedov-Taylor est instable lorsque $\gamma < 1.2$. En 1994, Vishniac [60] publie un autre papier où il met en évidence un autre mécanisme instable uniquement en régime non linéaire lorsque la coquille fine (d'épaisseur L) est cette fois bornée de chaque côté par un choc isotherme ($\gamma \rightarrow 1$ au front du choc). En effet la configuration est instable si l'amplitude de la perturbation satisfait $X > L$ et si le nombre d'onde de la perturbation k vérifie $1/M < kL < 1$ (où M est le nombre de Mach du choc). La première condition est nécessaire pour que la déformation puisse croître et la deuxième condition permet d'éviter que l'élargissement de la coquille dû à son expansion ne la rende plus épaisse que la longueur d'onde de la perturbation. Cette instabilité est appelée "Non-linear Thin Shell Instability" (NTSI) et l'étude analytique de Vishniac est confirmée par une étude numérique réalisée par Blondin & Marks [61]. Dans

1.3. Etat de l'art sur l'étude des instabilités dans le RSN en phase radiative

une autre étude numérique de la transition en phase radiative d'un RSN, Blondin et ses collègues [26] observent les deux instabilités lors de la formation de la coquille fine en incluant des pertes radiatives via une fonction de refroidissement. Lorsque la densité du MIS augmente, cela a pour effet d'augmenter l'efficacité du refroidissement et la transition en phase radiative se manifeste plus rapidement et donc à nombre de Mach plus élevé. Par conséquent, l'instabilité NTSI opère lorsque la densité du MIS est grande et l'instabilité PDTSO opère dans le cas contraire.

Enfin, une instabilité thermique joue un rôle essentiel dans la formation de la coquille fine en phase radiative du RSN. En effet, la présence du refroidissement en phase radiative peut générer une instabilité appelée "refroidissement catastrophique". Cette instabilité de refroidissement est mise en évidence dans un papier de Falle en 1981 [24]. Elle se développe lorsque le temps que met une particule fluide à se refroidir dans la zone de refroidissement est plus faible que le temps de traversée d'une onde sonore dans cette même zone de refroidissement. Ce mécanisme instable entraîne une baisse de plus en plus forte de la pression dans la zone de refroidissement et la matière est alors mise en mouvement vers ce puits de pression. Ces mouvements deviennent finalement supersoniques jusqu'à entraîner une collision (et une forte densification) à l'intérieur de la zone de refroidissement qui vont générer des chocs secondaires dans le RSN. Un des chocs secondaires va alors rattraper le front du choc principal du RSN et lui donner un gain d'énergie cinétique permettant à celui-ci d'être accéléré pendant une période transitoire. Enfin, un choc secondaire retour se dirige en direction du centre du RSN et peut éventuellement repartir dans l'autre sens, lorsqu'il rebondit au centre de la configuration. Ces chocs secondaires ont aussi été observés dans des simulations à une dimension radiale par Blondin et ses collègues [26] et Badjin et ses collègues [35]. Cette instabilité a aussi pour effet de comprimer considérablement la matière, de former une coquille et de comprimer aussi cette dernière. En effet, après l'apparition du puits de pression dans la coquille, les mouvements de matière mènent finalement à la formation d'une coquille fine et dense.

Dans la section 1.2, nous avons parlé des expériences d'astrophysique de laboratoire qui ont permis de mettre en évidence une modification de la structure et de l'évolution de l'onde de souffle lorsque celle-ci entre dans la phase radiative. Les expériences ont aussi montré que l'onde de souffle devient instable lorsqu'elle perd de l'énergie par rayonnement. Dans les expériences de Riley et ses collègues [52], on observe que contrairement au cas d'une onde de souffle qui se propage dans du néon et qui suit une évolution de Sedov-Taylor relativement stable (voir la figure 1.4), le cas du xénon (voir

la figure 1.5) dévoile une structure instable de l'onde de souffle radiative (le front de l'onde souffle est déformé) qui est interprétée dans cette expérience comme une manifestation de l'instabilité de Vishniac. Ce comportement a déjà été observé dans d'autres expériences de laboratoire [50], [40]. Dans les expériences de Riley et ses collègues, la présence d'un champ magnétique de 5 Tesla semble inhiber la croissance des perturbations aux petites échelles et l'onde de souffle conserve sa symétrie sphérique. Pour un champ magnétique plus fort (14 Tesla), l'onde de souffle perd sa symétrie sphérique et on peut alors observer des structures en filaments selon l'axe du faisceau. Enfin, dans les expériences de Hohenberger et ses collègues [43], une oscillation périodique de la vitesse du choc est mise en évidence, ce qui serait la signature d'une instabilité thermique où le choc perd de l'énergie par refroidissement qui est ensuite récupérée lorsque le choc s'expand dans le milieu préchauffé par radiations. Cependant, cette instabilité présente une différence avec celle de Chevalier & Imamura [62] où le milieu est lui optiquement très mince, ce qui correspond mieux à une situation de RSN en phase radiative.

1.4 Objectifs et présentation de la thèse

Bien que de nombreux auteurs aient étudié la phase radiative d'un RSN comme nous l'avons vu précédemment, il reste beaucoup de questions en suspens. Premièrement, en ce qui concerne l'évolution du RSN, le modèle de McKee & Ostriker [20] prédit une phase radiative asymptotique (phase PDS) du RSN où le rayon du reste varie comme $r_0(t) \propto t^{2/7}$ et la coquille est poussée par la pression de la bulle interne. D'un autre côté, le modèle de Oort [32] prédit une autre phase radiative asymptotique (phase MCS) où $r_0(t) \propto t^{1/4}$ et la pression dans la bulle est nulle. Enfin, Petruk & Bandiera affirment [29], que les deux branches de solution existent mais que celle de Oort n'est pas pertinente dans un RSN. En effet, la pression de la bulle qui pousse la coquille ne sera jamais négligeable dans l'équation du mouvement pour des conditions initiales réalistes à moins de considérer des pertes d'énergie dans la bulle. Pour ce qui est des simulations numériques, il est également difficile de trancher sur la question. En effet, bien que le rayon tende toujours vers une loi asymptotique en $r_0(t) \propto t^\alpha$ lors de la phase radiative aux temps longs, l'exposant α peut prendre des valeurs différentes en fonction du processus de refroidissement dans le RSN [26], [34], [35]. Deuxièmement en ce qui concerne la structure du RSN en phase radiative le modèle analytique de Barenblatt avec des pertes d'énergie localisées uniquement au front du choc permet de retrouver dans le cas limite d'un taux de refroidissement infini ($\gamma^* \rightarrow 1$ au front du choc) la phase PDS en $r_0(t) \propto t^{2/7}$ où la coquille devient infiniment

fine et dense mais ne retrouve pas la loi d'évolution de Oort [32] en $r_0(t) \propto t^{1/4}$. Dans le modèle de Barenblatt, le refroidissement a pour effet de rendre la coquille plus dense et plus fine ce qui est confirmé par toutes les simulations de RSN en phase radiative. Si aucun refroidissement n'est pris de manière explicite dans les équations et dans les conditions limites des équations, alors à ce jour on connaît trois valeurs pivot de α ,

$$\begin{aligned}
 - \alpha = 2/5 & \quad \text{Sedov-Taylor} \\
 - \alpha = \frac{2}{3\gamma + 2} & \quad \text{phase PDS et qui vaut } \alpha = 2/7 \text{ pour } \gamma = 5/3 \quad (1.2) \\
 - \alpha = 1/4 & \quad \text{phase MCS}
 \end{aligned}$$

Si on prend un refroidissement explicite au travers des CL (modèle analytique de Barenblatt) alors selon l'intensité du refroidissement, l'exposant α est situé dans l'intervalle $2/(3\gamma + 2) \leq \alpha \leq 2/5$. On n'a plus trois valeurs discrètes connue plus haut, mais tout un continuum possible pour les valeurs de α . Par ailleurs les bornes de l'intervalle correspondent à la phase ST et à la phase PDS, ce qui constitue une cohérence des différentes approches. Malgré tout, la phase MCS reste en dehors du modèle de Barenblatt. Une des idées principales de la thèse est alors de prendre un modèle avec un refroidissement en volume et de voir si on peut retrouver les trois valeurs discrètes $2/5$, $2/(3\gamma + 2)$ et $1/4$ au travers d'un modèle cohérent généralisant l'intervalle trouvé par Barenblatt à $1/4 \leq \alpha \leq 2/5$. De plus le refroidissement dans un RSN se fait en volume et non pas seulement au front du choc. On peut alors se demander quel serait l'effet du refroidissement en volume sur la structure interne du RSN et l'évolution du rayon du reste et si elle serait différente de celle de Barenblatt. Considérons un RSN dans sa phase radiative asymptotique où $r_0(t) \propto t^\alpha$ avec une coquille d'épaisseur e très faible devant le rayon du RSN. Dans le cas limite où presque toute l'énergie du choc est transmise en énergie radiative qui est représentée par le refroidissement Λ (énergie par unité de volume et de temps) dans la coquille, on trouve l'égalité sur les flux,

$$\Lambda e \simeq \frac{1}{2} \rho_1 D^3 \quad (1.3)$$

où ρ_1 est la densité du MIS et D la vitesse du choc. On en déduit en utilisant $r_0(t) \propto t^\alpha$ que le refroidissement en volume suit une loi,

$$\Lambda \propto t^{2\alpha-3} \tag{1.4}$$

Si on décide d'étendre cette propriété autosemblable du refroidissement dans le cas général où seulement une fraction de l'énergie du choc est transmise en énergie radiative alors on peut espérer trouver comme pour Barenblatt [30] des solutions auto-semblables qui serviront de référence pour l'étude d'un RSN qui perd de l'énergie en volume. On pourra alors étudier sur un modèle simplifié l'effet du refroidissement en volume sur la structure interne et sur l'évolution du RSN afin de mieux comprendre et interpréter les simulations numériques de la transition en phase radiative du reste pour une plus grande variété de refroidissements. Le refroidissement par les processus d'émission sont très importants lors de la rentrée en phase radiative du RSN. Cependant il existe un autre processus de perte d'énergie qui pourrait s'avérer important dans cette phase. Ce processus est l'ionisation du MIS lors du passage du front du choc. En effet si l'on considère que le RSN s'expand dans un milieu froid non ionisé, alors l'ionisation du MIS requiert une fraction de l'énergie du choc. Cela a pour conséquence de faire perdre de l'énergie au RSN dans le sens où l'énergie du choc utilisée pour ioniser le gaz n'est plus disponible pour chauffer le gaz et la température du milieu choqué sera plus faible qu'elle ne le serait sans ionisation. On pourrait alors s'attendre à ce que ces pertes modifient la structure et l'évolution du RSN tout comme le refroidissement par processus d'émission.

Dans cette thèse nous allons donc étudier les deux effets majeurs qui vont impacter l'évolution du RSN en phase radiative, à savoir les effets d'ionisation lors du passage du choc dans un MIS froid atomique et les effets radiatifs par les processus d'émission dans le reste. Le second chapitre sera consacré à l'étude analytique d'un choc ionisant dans le MIS qui servira de base pour une application au RSN où l'on montrera que pour des RSN en phase tardive l'évolution va être différente de celle de Sedov-Taylor et le reste va perdre au niveau du choc de l'énergie qui servira à ioniser le gaz. La coquille va alors devenir dense et mince grâce aux effets d'ionisation. Dans le chapitre III, nous allons traiter de manière analytique les effets des processus d'émission dans la phase radiative du RSN de manière analytique en supposant un refroidissement auto-semblable et homogène à l'intérieur du RSN. Nous allons montrer qu'il existe deux types de solutions à ce problème. Une solution de type Sedov-Taylor qui est régulière jusqu'au centre du reste et une solution de type coquille où celle-ci est bornée par une discontinuité de contact qui la sépare d'une bulle interne chaude et raréfiée. La structure du RSN va être

également modifiée et plus le taux de refroidissement sera grand, plus la coquille sera dense et mince. Pour la première fois, on montrera que la coquille est instable au sens de Rayleigh-Taylor de manière analytique pour un refroidissement suffisamment fort dans la coquille. Enfin l'évolution va suivre une loi en $r_0(t) \propto t^\alpha$ où le paramètre de décélération vérifiera une gamme plus riche du paramètre de décélération α dans l'intervalle $1/4 \leq \alpha \leq 2/5$. Dans le chapitre IV, nous poursuivrons l'étude de la phase radiative du RSN de manière numérique pour des fonctions de refroidissement plus réalistes où l'on montrera la présence de l'instabilité catastrophique de Falle lors de la formation de la coquille fine. Un comportement asymptotique de l'évolution du reste commun à un grand nombre de refroidissements est mis en évidence. Enfin, le chapitre V donne les conclusions, montre quelques éléments de résultats supplémentaires et dresse les perspectives de ces travaux.

Chapitre 2

Effet d'ionisation et densification au front du choc dans un reste de supernova

Sommaire

2.1	L'ionisation dans les équations de Rankine-Hugoniot	28
2.2	Les résultats pour le milieu choqué	33
2.3	La zone transitoire du choc avec ionisation	38
2.4	Etude de l'effet de l'ionisation simplifiée sur le gaz choqué pour un RSN	45
2.5	Conclusion	50

Dans ce chapitre, nous allons étudier analytiquement l'effet de l'ionisation sur la structure d'un choc qui se propage dans le milieu interstellaire (MIS). En effet, nous allons considérer ici que le MIS est neutre et constitué d'atomes d'hydrogène H où la densité massique ρ_1 a la valeur typique $\rho_1 = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ (ce qui correspond à une densité numérique $n_1 \approx 6 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$) et la température est $T_1 = 100 \text{ K}$. Ces valeurs sont représentatives d'une région HI [63]. Une étude récente sur le sujet a été publiée par Robinson & Pasley, néanmoins, elle nous semble très peu fouillée, et, ensuite elle n'est pas menée dans les conditions relatives à un RSN. Dans la suite, nous supposons que le gaz est à l'équilibre thermodynamique local (ETL) ([64], [65]) ce qui implique que les populations des différents états sont déterminés par les interactions particules-particules et particules-photons et obéissent à une distribution de Boltzmann. En utilisant l'équation de Saha [65], la population des atomes, H , celle des protons, H^+ , et celle des électrons, e , dans le milieu choqué satisfont,

$$\frac{n_e n_{H^+}}{n_H} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h_P^3} \exp\left(-\frac{E_{ion}}{kT}\right) \quad (2.1)$$

où n_e , n_{H^+} et n_H sont respectivement la densité numérique des électrons, des protons et des atomes d'hydrogène ($n_e = n_{H^+}$), m_e est la masse des électrons, h_P la constante de Planck, k la constante de Boltzmann, T est la température et E_{ion} l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène ($E_{ion} = 13.6$ eV). Après le passage du choc, le milieu choqué va être partiellement voire totalement ionisé pour un choc suffisamment fort. Une partie de l'énergie transmise par le choc va donc servir à ioniser le gaz plutôt qu'à le chauffer. Or d'après l'équation d'état d'un gaz supposé parfait on a la relation $P \propto \rho T$ où P est la pression. En conséquence, le déficit de température va s'accompagner d'une baisse de pression qui va être compensée par une augmentation de la densité. Cet effet de compression du gaz dû à son ionisation lors du passage du choc peut alors être appliqué à l'évolution d'un RSN en phase tardive où l'on peut s'attendre à voir la coquille du RSN se densifier si l'on ajoute les effets d'ionisation.

2.1 L'ionisation dans les équations de Rankine-Hugoniot

Contrairement à la situation sans ionisation, la détermination des quantités physiques (densité, pression, vitesse et température) dans un milieu choqué partiellement ionisé n'est pas triviale. En effet, pour un gaz qui ne subit pas d'ionisation, le modèle est simple car la densité, la pression, la température et la vitesse dans le milieu choqué sont déterminées grâce aux trois équations de Rankine-Hugoniot [64], une fois que l'équation d'état est spécifiée. Ces trois équations de saut qui rendent compte de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, peuvent être écrites dans le référentiel du choc (les indices "1" et "2" désignent le milieu non choqué et choqué respectivement),

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \quad (2.2)$$

$$\rho_2 u_2^2 + P_2 = \rho_1 u_1^2 + P_1 \quad (2.3)$$

$$h_2 + \frac{1}{2}u_2^2 = h_1 + \frac{1}{2}u_1^2 \quad (2.4)$$

2.1. L'ionisation dans les équations de Rankine-Hugoniot

où ρ , u , P et h représentent respectivement la densité, la vitesse, la pression et l'enthalpie par unité de masse. L'équation d'état (qui n'est pas encore spécifiée à ce stade) donne une relation supplémentaire entre ρ , P et l'énergie interne par unité de masse, ϵ , qui est toujours connectée à h à travers l'équation,

$$h = \epsilon + \frac{P}{\rho}. \quad (2.5)$$

Par conséquent, pour une équation d'état simple et en particulier pour un gaz parfait, ρ_2 , P_2 , T_2 et u_2 peuvent être écrites de manière analytique en fonction des quantités du MIS ρ_1 , P_1 , T_1 et $u_1 = -D$ où D correspond à la vitesse du front du choc dans le référentiel du laboratoire. Pour un gaz qui s'ionise, les équations (2.2)-(2.4) sont toujours valides, cependant la résolution de ce problème est plus complexe que pour un fluide neutre. Premièrement, l'énergie interne ϵ va contenir un terme prenant en compte l'ionisation et il en sera de même pour h d'après (2.5). Deuxièmement, les trois équations de Rankine-Hugoniot doivent être résolues simultanément avec l'équation de Saha et, en conséquence, la solution n'est plus analytique mais elle doit être obtenue numériquement. Ce point est délicat car il faut obtenir n_e , n_{H^+} et n_H dans le milieu choqué de manière consistante avec sa température et sa densité. Par ailleurs, dans notre étude, on néglige l'interaction des particules dans le milieu préchoqué et choqué. On peut alors utiliser l'équation d'état du gaz parfait pour chaque milieu,

$$P_i = \frac{\rho_i k T_i}{m_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

où m_i est la masse moyenne par particule. Dans le MIS, on a $m_1 = m_p$ où m_p est la masse d'un proton, alors que dans le milieu choqué, m_2 est donné par

$$m_2 = \frac{m_p + f_2 m_e}{1 + f_2} \approx \frac{m_p}{1 + f_2} \quad (2.7)$$

où m_e a été négligée par rapport à m_p et où le taux d'ionisation f_2 est défini comme,

$$f_2 = \frac{n_e}{n_H + n_{H^+}} = \frac{n_{H^+}}{n_H + n_{H^+}}. \quad (2.8)$$

Dans cette équation, les densités de particules n_e , n_{H^+} et n_H sont calculées dans le milieu choqué "2" et le taux d'ionisation satisfait $0 \leq f_2 \leq 1$ (pour $f_2 = 0$, il n'y a pas d'ionisation et pour $f_2 = 1$ le plasma est complètement

ionisé). De plus, comme le gaz est composé d'atomes, d'électrons et de protons avec seulement trois degrés de liberté pour chacun d'entre eux (gaz de particules ponctuelles), on obtient :

$$\epsilon_1 = \frac{3P_1}{2\rho_1}, \quad (2.9)$$

et l'équation (2.5) donne,

$$h_1 = \frac{5P_1}{2\rho_1}. \quad (2.10)$$

Cependant, dans le milieu choqué, l'énergie d'ionisation doit être incluse dans l'énergie interne,

$$\epsilon_2 = \frac{3P_2}{2\rho_2} + \epsilon_{ion} \quad (2.11)$$

ce qui donne finalement,

$$h_2 = \frac{5P_2}{2\rho_2} + \epsilon_{ion} \quad (2.12)$$

où l'énergie ϵ_{ion} nécessaire pour ioniser une unité de masse du gaz dans le milieu choqué s'écrit :

$$\epsilon_{ion} = \frac{f_2 E_{ion}}{m_p}. \quad (2.13)$$

Enfin, la dépendance de f_2 par rapport à ρ_2 et T_2 peut être déduite de l'équation de Saha (2.1). En utilisant (2.7), (2.8) et l'équation $\rho_2 = (n_{H^+} + n_e) \times m_2$, on obtient la relation,

$$\frac{f_2^2}{1 - f_2} = \frac{m_p}{\rho_2} \times \frac{(2\pi m_e k T_2)^{3/2}}{h_P^3} \exp\left(-\frac{E_{ion}}{k T_2}\right), \quad (2.14)$$

qui avec les équations (2.2), (2.3) et (2.4) donnent quatre équations pour les quatre quantités u_2 , ρ_2 , T_2 (la quantité P_2 est éliminée via l'équation (2.6)) et f_2 qui dépendent de ρ_1 , T_1 et de la vitesse du choc D . La difficulté majeure de ce système d'équations vient du fait que les équations sont couplées de manière consistante. Si l'on regarde la quantité f_2 , elle est fonction de T_2 et ρ_2 dans (2.14) mais la détermination de T_2 dans (2.4) nécessite de connaître f_2 . Dans notre approche, nous allons simplifier le plus possible le problème afin de réduire le système de quatre équations couplées à une seule équation qui ne dépendra que de la température T_2 . On commence par réduire les trois équations de saut (2.2), (2.3) et (2.4) à deux équations couplées sur les nouvelles inconnues adimensionnées η_2 , θ_2 et M définies par,

$$\eta_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \theta_2 = \frac{T_2}{T_1}, \quad M = \frac{D}{c_1} \quad (2.15)$$

où c_1 est la vitesse du son dans le MIS,

$$c_1 = \sqrt{\frac{5P_1}{3\rho_1}} = \sqrt{\frac{5kT_1}{3m_p}} \quad (2.16)$$

et où M dans (2.15) est le nombre de Mach. Les quantités M , θ_2 et η_2 satisfont les inégalités suivantes $M \geq 1$, $\theta_2 \geq 1$ et $\eta_2 \leq 1$, et un choc fort vérifie la condition $M \gg 1$. En utilisant (2.2), on peut trouver la vitesse u_2 en fonction de η_2 , M et c_1 ,

$$u_2 = -\eta_2 D = -\eta_2 M c_1 \quad (2.17)$$

Une fois cette formule injectée dans (2.3) et (2.4), on obtient les deux équations couplées,

$$(1 + f_2)\theta_2 - \frac{5M^2}{3}(1 - \eta_2)\eta_2 - \eta_2 = 0 \quad (2.18)$$

$$(1 + f_2)\theta_2 - \frac{M^2}{3}(1 - \eta_2^2) + \frac{2}{5}f_2 a_{ion} - 1 = 0 \quad (2.19)$$

où a_{ion} représente l'énergie d'ionisation adimensionnée :

$$a_{ion} = \frac{E_{ion}}{kT_1}. \quad (2.20)$$

Ensuite en utilisant l'équation (2.18) on trouve,

$$f_2 = \frac{3 + 5M^2}{3\theta_2}\eta_2 - \frac{5M^2}{3\theta_2}\eta_2^2 - 1 \quad (2.21)$$

Puis, on reporte (2.21) dans (2.19), ce qui donne l'équation sur η_2 ,

$$10M^2\left(2 + \frac{a_{ion}}{\theta_2}\right)\eta_2^2 - (3 + 5M^2)\left(5 + 2\frac{a_{ion}}{\theta_2}\right)\eta_2 + 6a_{ion} + 5(M^2 + 3) = 0 \quad (2.22)$$

Une seule des deux solutions de ce polynôme du second degré a une valeur physique et s'écrit,

$$\eta_2 \equiv F_1(\theta_2) = \frac{1}{20M^2(a_{ion} + 2\theta_2)} \left\{ (3 + 5M^2)(2a_{ion} + 5\theta_2) - \sqrt{G} \right\} \quad (2.23)$$

où G est donné par

$$G = 15(15M^4 - 2(16a_{ion} + 15)M^2 + 15)\theta_2^2 + 60a_{ion}(5M^4 - 4a_{ion}M^2 + 3)\theta_2 + 4a_{ion}^2(5M^2 + 3)^2 \quad (2.24)$$

Cette solution tend vers $1/4$ lorsque $M \gg 1$, ce qui correspond bien au taux de compression d'un choc fort adiabatique pour un gaz parfait monoatomique, dans la limite où les effets d'ionisation sont négligeables (nous reviendrons sur ce point par la suite). Ensuite afin d'obtenir f_2 comme une fonction de θ_2 , on reporte (2.23) soit dans (2.18), soit dans (2.21) (les deux donnent la même chose) et on obtient l'équation

$$f_2 \equiv F_2(\theta_2) = \frac{1}{120M^2(a_{ion} + 2\theta_2)^2} \left\{ -480M^2\theta_2^2 + 15(5M^4 + (30 - 16a_{ion})M^2 - 3)\theta_2 + 2a_{ion}(25M^4 + 120M^2 - 9) + (5M^2 + 3)\sqrt{G} \right\} \quad (2.25)$$

Enfin, la dernière étape du calcul consiste à utiliser l'équation de Saha (2.14) où la solution s'écrit sous la forme (la solution avec un signe $-$ devant la racine n'est pas physique),

$$f_2 = \frac{-A(\theta_2, \eta_2) + \sqrt{A(\theta_2, \eta_2)^2 + 4A(\theta_2, \eta_2)}}{2} \quad (2.26)$$

où $A(\theta_2, \eta_2)$ est donné par,

$$A(\theta_2, \eta_2) = \kappa \times \eta_2 \times (\theta_2^{3/2}) \times \exp(-a_{ion}/\theta_2) \quad (2.27)$$

avec

$$\kappa = (m_p/\rho_1) \times [(2\pi m_e k T_1)^{1/2}/h_P]^3. \quad (2.28)$$

Dans cette équation, les constantes κ et a_{ion} dépendent uniquement des caractéristiques du milieu "1" (le MIS). Finalement, l'équation qui gouverne la température adimensionnée θ_2 est obtenue avec (2.26) en remplaçant η_2 et f_2 par leur expression $F_1(\theta_2)$ (voir (2.23)) et $F_2(\theta_2)$ (voir (2.25)), respectivement. Finalement l'équation implicite sur θ_2 s'écrit,

$$F(\theta_2) \equiv F_2(\theta_2) - \frac{-A[\theta_2, \eta_2] + \sqrt{A[\theta_2, \eta_2]^2 + 4A[\theta_2, \eta_2]}}{2} = 0 \quad (2.29)$$

Le zéro de cette fonction est trouvé numériquement ce qui permet finalement de connaître la température θ_2 du milieu "2", suivie des autres quantités η_2 et f_2 en fonction du nombre de Mach M .

2.2 Les résultats pour le milieu choqué

Les résultats pour le milieu choqué sont présentés dans les figures 2.1-2.4. La figure 2.1 montre le ratio de température θ_2 en fonction du nombre de Mach M .

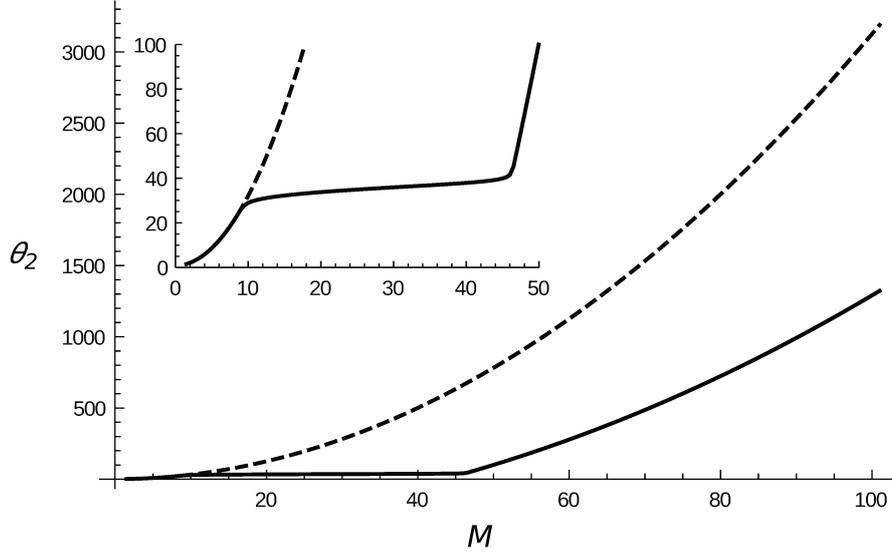


FIGURE 2.1 – La température adimensionnée θ_2 avec ionisation ($E_{ion} = 13.6$ eV, trait plein) et sans ionisation ($E_{ion} = 0$, courbe en tirets) en fonction du nombre de Mach M pour des conditions standard du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m³).

La courbe en tirets correspond à la solution des relations de Rankine-Hugoniot classiques, i.e., un choc adiabatique sans ionisation. En posant $f_2 = 0$ dans les équations (2.18) et (2.19), on obtient,

$$\theta_2 = \frac{(5M^2 - 1)(M^2 + 3)}{16M^2} \quad (2.30)$$

et lorsque $M \rightarrow +\infty$, θ_2 se comporte comme,

$$\theta_2 \approx \frac{5}{16}M^2. \quad (2.31)$$

La courbe en trait plein représente la solution des équations de Rankine-Hugoniot lorsque l'ionisation est incluse ($E_{ion} = 13.6$ eV). Pour $M < 10$ (voir le zoom en médaillon), les deux courbes se superposent ce qui veut dire que la fraction d'atomes ionisés est négligeable et $f_2 \simeq 0$ (voir la figure 2.2). Lorsque M augmente ($M \geq 10$), la température augmente beaucoup moins que pour un choc sans effets d'ionisation. Ceci est dû au fait que l'ionisation consomme une partie de l'énergie délivrée par l'onde de choc qui devrait normalement être utilisée pour chauffer le gaz. Finalement, pour $M \rightarrow +\infty$, on a aussi $\theta_2 \propto M^2$ comme pour un choc adiabatique car l'énergie requise pour ioniser

le milieu "2" est négligeable comparée à son énergie thermique. Cependant, en comparaison avec (2.31), le coefficient de proportionnalité est deux fois plus faible car lorsque le gaz est totalement ionisé, il y a deux fois plus de particules à chauffer (le coefficient $5/32$ au lieu de $5/16$ est déduit facilement des équations (2.18) et (2.19) où l'on pose $f_2 = 1$ et où l'on néglige le terme $2f_2 a_{ion}/5$).

La figure 2.2 présente le taux d'ionisation f_2 en fonction de M . Dans un premier temps, il est clair que le taux d'ionisation augmente lorsque la densité du gaz diminue. Cette propriété vient de l'équation (2.28) où l'on voit que si ρ_1 diminue alors κ augmente et donc f_2 aussi. Pour $\rho_1 = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ (trait plein), le gaz est totalement ionisé pour $M \approx 45$ alors que pour $\rho_1 = 0.1 \text{ kg/m}^3$ (trait pointillé), l'ionisation complète s'effectue pour $M \approx 100$. Enfin, si l'énergie d'ionisation décroît ($E_{ion} = 9 \text{ eV}$, ligne en tirets), l'ionisation complète se produit pour un nombre de Mach M plus faible car il faut moins d'énergie pour ioniser le milieu "2".

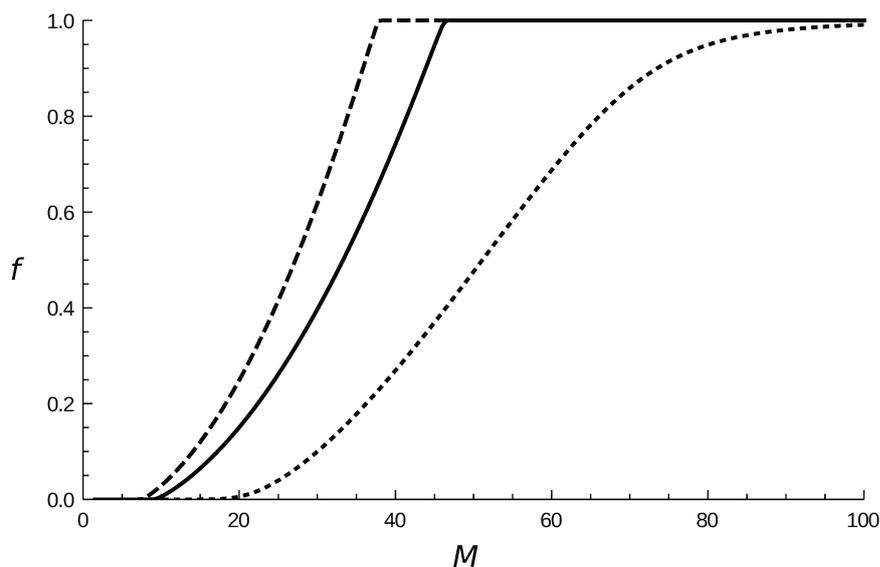


FIGURE 2.2 – Taux d'ionisation f_2 en fonction du nombre de Mach M pour différentes valeurs de l'énergie d'ionisation et de la densité initiale : $E_{ion} = 13.6 \text{ eV}$ et $\rho_1 = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ (trait plein), $E_{ion} = 13.6 \text{ eV}$ et $\rho_1 = 0.1 \text{ kg/m}^3$ (courbe en pointillés) et $E_{ion} = 9 \text{ eV}$ et $\rho_1 = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ (courbe en tirets). Pour les trois cas la température du milieu initial est $T_1 = 100 \text{ K}$.

Le taux de compression C_2 , défini comme $C_2 = 1/\eta_2 = \rho_2/\rho_1$, est tracé sur la figure 2.3 pour trois valeurs différentes de l'énergie d'ionisation plus une courbe sans ionisation donnée par la formule

$$C_2 = \frac{4M^2}{3 + M^2}. \quad (2.32)$$

Cette expression provient directement des équations de Rankine-Hugoniot classiques ($f_2 = 0$). Pour $M \gg 1$, on retrouve $C_2 = 4$ correspondant à la valeur pour un choc adiabatique dans un milieu mono-atomique, ainsi que nous l'avons mentionné un peu plus haut. Les trois courbes avec ionisation montrent un pic élevé au dessus de 40 pour un nombre de Mach dans l'intervalle $25 \leq M \leq 45$. Ce comportement est directement lié à l'ionisation et l'explication physique est similaire à celle que l'on vient de donner pour la température sur la figure 2.1 : une partie de l'énergie du choc est utilisée pour ioniser au lieu de chauffer le gaz et, par conséquent, la compression devient très grande dans le milieu "2". On peut comparer ce taux de compression à la valeur $C_2 = 4$ du choc sans ionisation.

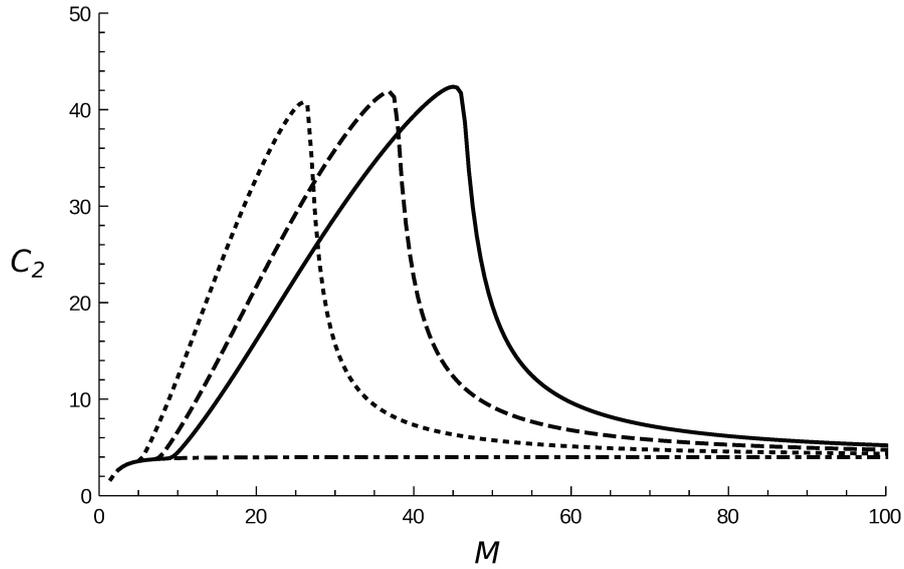


FIGURE 2.3 – Taux de compression C_2 en fonction du nombre de Mach M pour différentes valeurs de l'énergie d'ionisation : $E_{ion} = 13.6$ eV (trait plein), $E_{ion} = 9$ eV (courbe en tirets) and $E_{ion} = 4.5$ eV (courbe en pointillés) avec les conditions standard du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m³). La courbe de compression sans ionisation est aussi tracée en tirets-pointillés.

De plus, on remarque sur la figure 2.3 que la valeur du pic est peu sensible aux variations de l'énergie d'ionisation E_{ion} . A l'inverse, on montre que la valeur du nombre de Mach où se situe le pic de compression C_2 augmente

avec E_{ion} . Pour $E_{ion} = 13.6$ eV, $C_2 \approx 42.5$ à $M \approx 45$ et pour cette même valeur du nombre de Mach, l'ionisation devient complète (voir la figure 2.2). Pour $E_{ion} = 4.5$ eV (respectivement $E_{ion} = 9$ eV) le pic de compression se situe à $M \approx 25$ (respectivement $M \approx 35$). Pour le cas de l'hydrogène ($E_{ion} = 13.6$ eV), bien que le pic émerge pour un nombre de Mach élevé, la vitesse du choc est faible, i.e., $D \approx 52$ km/s (on a utilisé la vitesse du son $c_1 \approx 1160$ m/s en utilisant (2.16)) et on peut conclure que le taux de compression élevé $C_2 \approx 42.5$ va apparaître pour un RSN très âgé (on rappelle que tout de suite après l'explosion de la supernova, le choc peut atteindre une vitesse de l'ordre de 10 000 km/s).

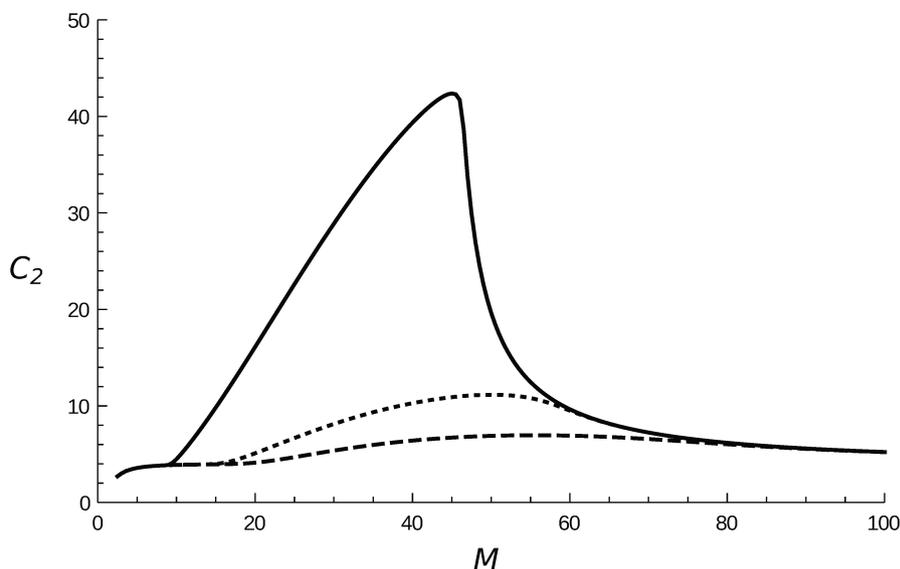


FIGURE 2.4 – Taux de compression C_2 en fonction du nombre de Mach M pour différentes valeurs du milieu initial : $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m³ (trait plein), $\rho_1 = 10^{-4}$ kg/m³ (courbe en pointillés) and $\rho_1 = 0.1$ kg/m³ (courbe en tirets) pour une température initiale $T_1 = 100$ K et une énergie d'ionisation $E_{ion} = 13.6$ eV.

Finalement, lorsque le nombre de Mach devient très grand ($M \simeq 100$), l'énergie utilisée pour ioniser les atomes devient petite comparée à l'énergie thermique et les quatre courbes représentant C_2 convergent toutes vers 4. Bien que f_2 ne satisfasse plus $f_2 = 0$ comme pour un choc adiabatique, ce résultat peut être retrouvé facilement grâce aux équations (2.18) et (2.19) où le produit $(1 + f_2) \theta_2$ est éliminé entre les deux équations et où $2f_2 a_{ion}/5$ est négligé par rapport au terme proportionnel à M^2 . L'effet de la densité du milieu initial sur le taux de compression est présenté sur la figure 2.4. La

valeur du pic décroît lorsque la densité du MIS augmente et C_2 atteint une valeur qui vaut à peine 11 (respectivement 7) pour $\rho_1 = 10^{-4} \text{ kg/m}^3$ (respectivement $\rho_1 = 0.1 \text{ kg/m}^3$). De manière similaire à ce qui se produit sur la figure 2.2, lorsque ρ_1 augmente, f_2 diminue. Par conséquent, la quantité d'énergie utilisée pour ioniser le gaz reste faible comparée à l'énergie thermique et le taux de compression est faible. La très grande valeur du pic de densité $C_2 \approx 42.5$ montrée sur la figure 2.3 est donc due au fait que le gaz du MIS est extrêmement raréfié. Revenons à la valeur de M (cette valeur sera appelée par la suite M_{crit}) pour laquelle C_2 montre un pic. On peut donner une estimation de M_{crit} par des considérations d'ordres de grandeur élémentaires. On introduit le ratio δ entre l'énergie d'ionisation E_{ion} et l'énergie cinétique d'un atome qui est de l'ordre $m_p D^2$. En utilisant $D = M c_1$ et $c_1 \approx (kT_1/m_p)^{1/2}$ - voir (2.16) - on obtient,

$$\delta \approx \frac{E_{ion}}{M^2 kT_1}. \quad (2.33)$$

On voit clairement que l'ionisation complète est atteinte pour $\delta \sim 1$ et on peut conclure que M_{crit} satisfait,

$$M_{crit} = \sqrt{\frac{E_{ion}}{kT_1}}. \quad (2.34)$$

Pour les conditions du MIS ($T_1 = 100 \text{ K}$ et $\rho_1 = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$) avec $E_{ion} = 13.6 \text{ eV}$, on trouve,

$$M_{crit} \approx 40. \quad (2.35)$$

Cette valeur est proche de celle donnée par la courbe en trait plein sur la figure 2.3.

2.3 La zone transitoire du choc avec ionisation

Les équations de saut que nous avons déterminées précédemment font le bilan entre le milieu "2" choqué et le milieu "1" initial en supposant un front du choc discontinu n'ayant pas d'extension spatiale. En réalité, dû à des processus physiques supplémentaires (viscosité, conduction thermique ...), le front du choc n'est pas infiniment mince et les quantités physiques que sont la densité, vitesse, pression varient de manière continues depuis ρ_1 , u_1 , P_1 à

ρ_2, u_2, P_2 dans une région que l'on appelle la zone transitoire du choc et qui est située entre le milieu "1" et le milieu "2". Dans cette section, nous allons étudier la structure de cette zone en prenant en compte la viscosité du fluide. En supposant une viscosité constante, cet ingrédient physique supplémentaire va permettre une description analytique des variations spatiales continues des grandeurs hydrodynamiques. En considérant un choc plan stationnaire qui se propage selon le sens positif de la direction x , le terme d'accélération dans l'équation du mouvement dû à la viscosité s'écrit $-(d\Gamma/dx)/\rho$ où la pression de viscosité Γ est définie comme,

$$\Gamma = \frac{4}{3}\mu \frac{du}{dx} \quad (2.36)$$

où μ est la viscosité dynamique (pour plus de simplicité nous avons choisi une deuxième viscosité, ou viscosité de volume, égale à zéro). Sous ces hypothèses, les équations de Rankine-Hugoniot deviennent [66],

$$\rho(x) \times u(x) = \rho_1 u_1 \quad (2.37)$$

$$\rho(x) \times u^2(x) + P(x) - \Gamma(x) = \rho_1 u_1^2 + P_1 \quad (2.38)$$

$$\rho(x) \times u(x) \times [h(x) + \frac{1}{2}u^2(x)] - u(x) \times \Gamma(x) = \rho_1 u_1 (h_1 + \frac{1}{2}u_1^2) \quad (2.39)$$

où l'indice "2" à été supprimé pour la zone transitoire et où $\rho(x)$, $u(x)$, $P(x)$ et $\Gamma(x)$ représentent respectivement la densité, vitesse, pression thermique et pression de viscosité à la position x dans la zone transitoire. L'équation de la masse (2.37) reste inchangée mais les deux autres équations de conservation contiennent un terme supplémentaire proportionnel à Γ . De plus, dans (2.39), l'enthalpie $h(x)$ est donnée par,

$$h(x) = \frac{5P(x)}{2\rho(x)} + \frac{f(x) \times E_{ion}}{m_p} \quad (2.40)$$

où le taux d'ionisation $f(x)$ est donnée par -voir l'équation (2.14),

$$\frac{[f(x)]^2}{1 - f(x)} = \frac{m_p}{\rho(x)} \times \frac{[2\pi m_e kT(x)]^{3/2}}{h_P^3} \exp\left[-\frac{E_{ion}}{kT(x)}\right] \quad (2.41)$$

Chapitre 2. Effet d'ionisation et densification au front du choc dans un reste de supernova

et où $T(x)$ est la température à la position x . En exprimant la vitesse $u(x)$ en fonction de $\rho(x)$ à partir de (2.37), i.e., $u(x) = u_1 \rho_1 / \rho(x)$, (2.38) devient une équation différentielle pour la densité,

$$\frac{d\eta}{dX} = \frac{1}{M^2\eta} \left[(3 + 5M^2)\eta - 5M^2\eta^2 - 3(1 + f)\theta \right] \quad (2.42)$$

alors que (2.39) est une équation algébrique pour la température,

$$\theta = \frac{15 - 6fa_{ion} + 5M^2(1 - \eta)^2 - 6\eta}{9(1 + f)} \quad (2.43)$$

où de manière similaire à (2.15), nous avons défini les quantités sans dimension η et θ par,

$$\eta = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad \theta = \frac{T}{T_1} \quad (2.44)$$

et où la coordonnée spatiale adimensionnée X est donnée par,

$$X = \frac{x}{L_0}, \quad L_0 = \frac{20\mu}{3\rho_1 M c_1}. \quad (2.45)$$

La longueur caractéristique L_0 est proportionnelle à la viscosité μ et pour $\mu = 0$ on trouve $L_0 = 0$, i.e., le choc redevient une discontinuité. Pour une viscosité non nulle, L_0 doit rester petite comparée à la taille du RSN. Nous allons par la suite faire une estimation de cette longueur. Tout d'abord, l'expression de la viscosité dynamique μ s'écrit [64], [66] :

$$\mu = \frac{1}{3} \rho \ell v_{th} \quad (2.46)$$

où v_{th} est la vitesse thermique des particules en interaction et ℓ le libre parcours moyen collisionnel. En injectant cette expression dans (2.45), on trouve,

$$L_0 = \frac{20}{9} \frac{\rho \ell v_{th}}{\rho_1 M c_1} \quad (2.47)$$

On va par la suite calculer deux valeurs différentes de cette longueur. Dans le premier cas, L_0 est évalué dans une zone proche du milieu "1" et cette

longueur sera noté $L_{0,1}$ (le libre parcours moyen correspondant est aussi noté ℓ_1). Dans le second cas, la longueur $L_{0,2}$ (le libre parcours moyen correspondant est aussi noté ℓ_2) est calculée dans la région proche du milieu "2". On commence par la valeur de $L_{0,1}$. Proche du milieu non choqué, les relations $\rho \approx \rho_1$ et $v_{th} \approx c_1$ sont vérifiées et on obtient,

$$L_{0,1} \approx \frac{20}{9} \frac{\ell_1}{M} \approx \frac{2}{M} \ell_1 < \ell_1. \quad (2.48)$$

Une valeur supérieure de $L_{0,1}$ est alors donnée par ℓ_1 qui est déterminé suivant la formule,

$$\ell_1 = \frac{1}{n_1 \sigma_1} \quad (2.49)$$

où la section efficace collisionnelle de l'atome d'hydrogène, σ_1 , s'écrit,

$$\sigma_1 = \pi a_{Bohr}^2 \quad (2.50)$$

et où $a_{Bohr} = 0.53 \times 10^{-10}$ m est le rayon de Bohr. Pour $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m³, on trouve $n_1 \approx 6 \times 10^6$ m⁻³ et enfin,

$$\ell_1 \approx 2 \times 10^{13} \text{ m}. \quad (2.51)$$

Comme prévu cette valeur est petite comparée à celle du rayon r_0 d'un RSN âgé de quelques milliers d'années où $r_0 \approx 10^{16}$ m.

Maintenant on procède au calcul de $L_{0,2}$. Dans le milieu choqué on a $v_{th} \approx D = M c_1$ and $\rho \approx 50 \rho_1$ (voir la section 2.2), et l'équation (2.47) donne,

$$L_{0,2} \approx 100 \ell_2. \quad (2.52)$$

Le libre parcours moyen ℓ_2 est aussi donné par l'équation (2.49) où n_1 doit être remplacé par la densité n_2 des ions (ou des électrons) et σ_1 par la section efficace des collisions électron-ion σ_2 . Cependant, comme $n_2 > n_1$ à cause du fort taux de compression, la valeur maximale du libre parcours moyen est,

$$\ell_2 = \frac{1}{n_1 \sigma_2}. \quad (2.53)$$

Chapitre 2. Effet d'ionisation et densification au front du choc dans un reste de supernova

La section efficace σ_2 est obtenue par (2.50) où a_{Bohr} est remplacé par la longueur de Landau ℓ_L qui correspond à la longueur conduisant à l'équivalence entre l'énergie coulombienne et l'énergie cinétique microscopique,

$$\ell_L = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 k T_2} \quad (2.54)$$

qui s'écrit aussi,

$$\ell_L(\text{mètres}) \approx 1.5 \times 10^{-5} \frac{1}{T_2(\text{Kelvin})} \quad (2.55)$$

où $q_e = 1.6 \times 10^{-19}$ C est la charge de l'électron et $\epsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12}$ S.I. est la permittivité du vide. En considérant un vieux RSN avec $M \leq 100$, T_2 tombe en dessous de 10^5 K (voir la figure 2.1) et l'équation (2.55) implique $\ell_L = 1.5 \times 10^{-10}$ m $\simeq 3a_{Bohr}$, et $\sigma_2 > 9\sigma_1$. Par conséquent, on trouve que $\ell_2 < \ell_1/9$ et la valeur supérieure de (2.52) est $L_{0,2} \approx 11 \ell_1 \approx 2 \times 10^{14}$ m. Bien que cette valeur soit plus grande que $L_{0,1}$, elle est toujours très faible devant r_0 . Dans un RSN plus réaliste, la zone transitoire contient des atomes, des ions et des électrons mais l'épaisseur du front du choc est dominé par la valeur la plus grande de L_0 . Dans le cas présent, la valeur la plus grande est $L_{0,2} \ll r_0$.

Revenons à la détermination de la zone transitoire du choc. Une première chose que l'on peut remarquer est qu'il n'est pas nécessaire en pratique d'étudier la zone transitoire pour des nombres de Mach bien plus grand que le nombre de Mach M_{crit} (voir (2.34)) car l'énergie transmise par le choc en énergie d'ionisation dans la zone transitoire du choc sera négligeable comparée à l'énergie thermique et cinétique derrière le choc. On peut aussi faire la même déduction pour $M \ll M_{crit}$ car l'énergie requise pour ioniser le milieu sera trop grande comparée à l'énergie thermique et cinétique du milieu choqué. Tout changement dans la zone transitoire comparée à un choc classique adiabatique va donc opérer seulement dans un intervalle autour de $M = M_{crit}$.

Revenons maintenant aux équations de la structure du choc. Dans les équations (2.42) and (2.43), θ est toujours relié par η et f à travers l'équation de Saha (2.41). A ce stade, on doit trouver les trois inconnues η , θ et f pour les trois équations (2.42),(2.43) et (2.41) comme dans la section précédente. Cependant la variable η vérifie maintenant une équation différentielle. La solution de ce système dépend de l'état thermodynamique du milieu "1" et du nombre de Mach. On peut vérifier que le couple $(\eta_1 = 1, \theta_1 = 1)$ (l'état du milieu "1") avec $f = 0$ et (η_2, θ_2) (l'état du milieu "2"), où f vérifie les

relations du milieu "2" décrites dans la section précédente sont des points d'équilibre du système. On présente les résultats pour la température adimensionnée θ (figure 2.5), le taux d'ionisation f (figure 2.6) et le taux de compression $C = \rho/\rho_1$ (figure 2.7) en fonction de la coordonnée X ($X=0$ correspond aux conditions du milieu "2" et lorsque X augmente on progresse vers le milieu "1"). La structure de la température change avec les effets d'ionisation. Lorsque le nombre de Mach vaut $M = 50$, le milieu "2" est totalement ionisé et on peut remarquer que le profil de température sur la figure 2.5 change considérablement par rapport à un choc adiabatique (trait en tirets-pointillés) dû au pompage de l'énergie thermique en énergie d'ionisation. Ceci peut être confirmé par le fait qu'autour de $X \simeq 0.46$, $f \simeq 0.01$ (voir la figure 2.6). Ensuite en $X \simeq 0.06$, le taux d'ionisation vaut $f \simeq 1$ ce qui signifie que le gaz est totalement ionisé. Depuis ce point, le gradient de température augmente considérablement pour que la valeur de la température puisse atteindre celle du milieu choqué. Pour un nombre de Mach valant $M = 30$, le scénario est légèrement différent. Cette fois, le milieu "2" choqué est partiellement ionisé et on peut voir sur la figure 2.5 que le gradient de température se met à décroître en deçà de $X \simeq 0.4$.

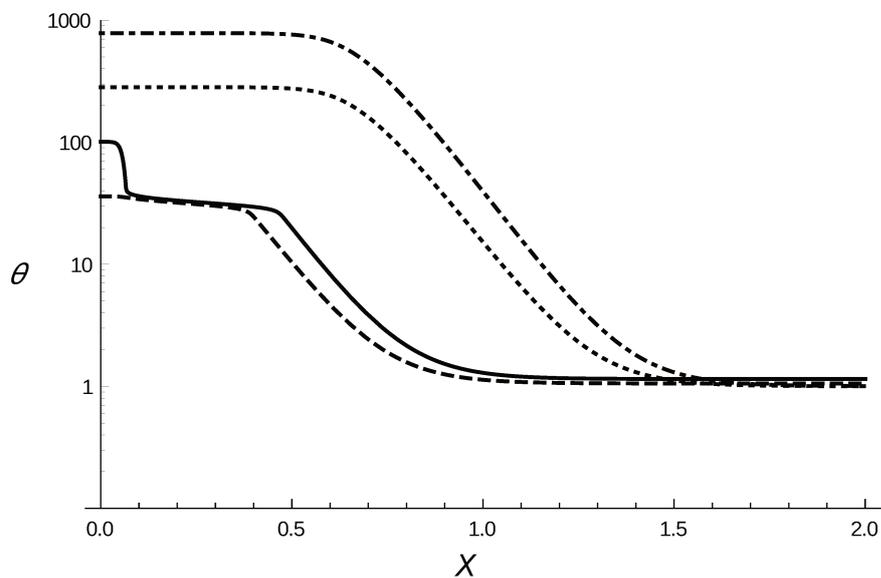


FIGURE 2.5 – Profil de température θ dans le choc en fonction de la coordonnée spatiale X pour différents nombres de Mach $M = 50$ (trait plein) et $M = 30$ (courbe en tirets) avec les conditions du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m⁻³). Les deux courbes sans ionisation sont tracées pour $M = 30$ (courbe en pointillés) et $M = 50$ (courbe en tirets-pointillés).

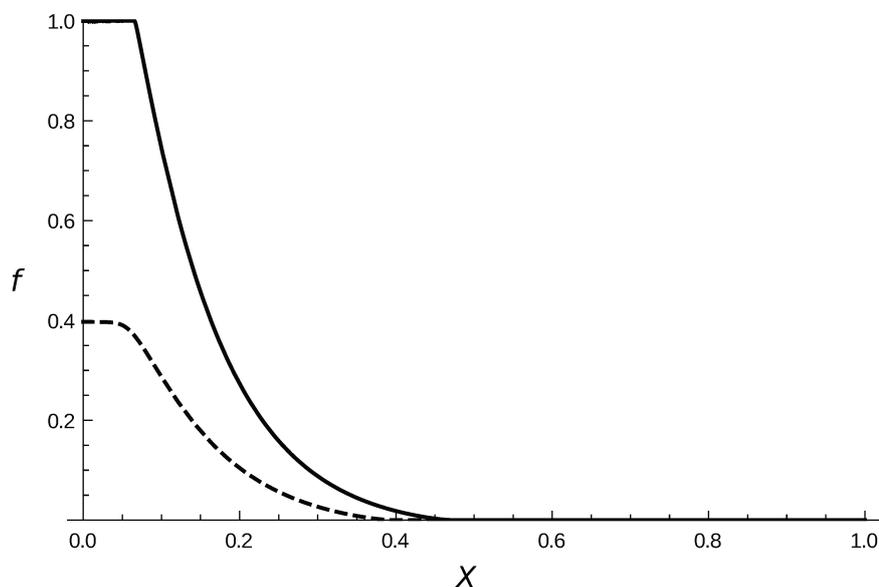


FIGURE 2.6 – Taux d'ionisation f en fonction de X pour différents nombres de Mach $M = 50$ (trait plein) and $M = 30$ (courbe en tirets) avec les conditions du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m⁻³).

Cette valeur correspond à $f \simeq 0.01$. Depuis ce point, la température va lentement atteindre la valeur du milieu choqué (consistant avec le résultat du milieu "2" sur la figure 2.1) avec un taux d'ionisation $f = f_2 = 0.4$ (aussi consistant avec la figure 2.2). On peut comparer cette courbe à celle en pointillés qui correspond à la situation sans effets d'ionisation et où la température atteint des valeurs plus élevées. La figure 2.7 montre le taux de compression $C(X)$ et la structure du profil de densité dans la zone transitoire du choc. En accord avec la la figure 2.4, la densité dans la région choquée ($X = 0$) est plus grande pour $M = 30$ ($\rho \approx 29\rho_1$) que pour $M = 50$ ($\rho \approx 19.5\rho_1$) car les effets de l'ionisation commencent à diminuer lorsque l'énergie du choc devient grande comparée à l'énergie utilisée pour ioniser le milieu choqué et le profil de densité est moins raide à $M = 50$ dans la zone transitoire. Les courbes sans ionisation se superposent complètement et atteignent bien une valeur de 4 pour un choc adiabatique car $M \gg 1$ dans les deux cas.

2.4. Etude de l'effet de l'ionisation simplifiée sur le gaz choqué pour un RSN

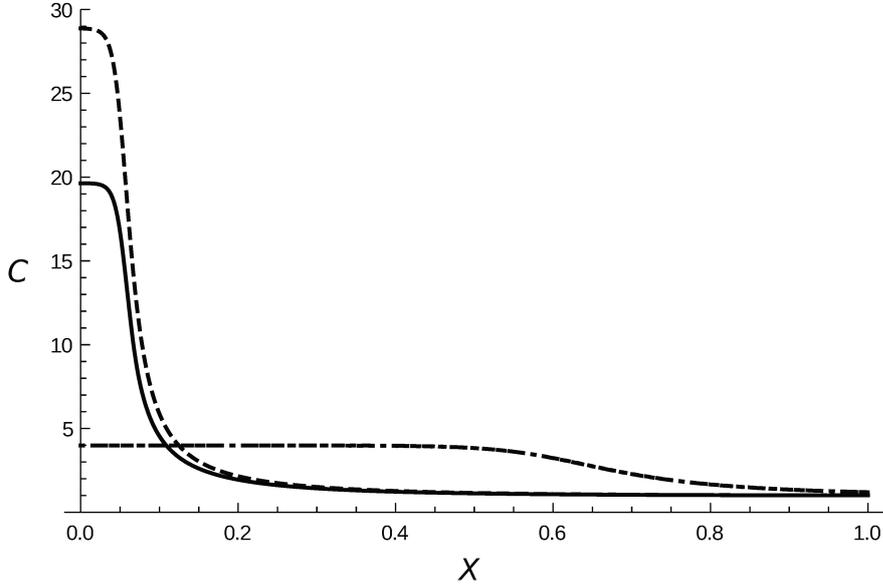


FIGURE 2.7 – Taux de compression C en fonction de X pour différents nombres de Mach $M = 50$ (trait plein) and $M = 30$ (courbe en tirets) avec les conditions du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m⁻³). Les deux courbes sans ionisation sont tracées pour $M = 30$ (courbe pointillés) et $M = 50$ (courbe tirets-pointillés) et se superposent.

2.4 Etude de l'effet de l'ionisation simplifiée sur le gaz choqué pour un RSN

Dans la section précédente, on trouve que la valeur clé du nombre de Mach est autour de $M \approx 45$ où le taux de compression atteint sa valeur maximale ($C \approx 42$ sur la Fig. 2.4) et en conclusion, l'ionisation du MIS au passage du choc peut potentiellement altérer l'évolution du RSN. Dans la phase tardive du RSN, l'âge du rémanent est d'environ 100 000 ans à 200 000 ans [35], [26], [23] où les pertes d'énergie par rayonnement affectent son évolution. Si on ne tient pas compte de ces pertes, l'évolution du rayon est donnée par la loi de Sedov-Taylor,

$$r_0(t) = \beta_{ST} \left(\frac{E_0}{\rho_1} \right)^{1/5} t^{2/5} \quad (2.56)$$

Chapitre 2. Effet d'ionisation et densification au front du choc dans un reste de supernova

où $\beta_{ST} = 1.15$ est un nombre sans dimension (nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 3) et $E_0 = 10^{44}$ J est l'énergie de la supernova. Pour les conditions du MIS froid ($T_1 = 100$ K and $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m⁻³, voir la section 2), on trouve que le nombre de Mach évolue comme,

$$M(t) \approx 3 \times 10^9 t^{-3/5} \quad (2.57)$$

où t est exprimé en secondes. Par conséquent, lorsque M atteint la valeur du nombre de Mach critique $M_{crit} = 40$, l'âge du reste est d'environ $t_{crit} \approx 300\,000$ ans. En réalité, la valeur de t_{crit} est plus faible pour un RSN qui subit un refroidissement. Dans la publication de Minière et ses collègues [28], il est montré que le refroidissement va commencer à opérer autour de $t \approx 20\,000$ ans et le rayon du reste va tendre asymptotiquement vers une loi différente de celle de Sedov-Taylor suivant une loi $R(t) \propto t^{0.3}$ proche de celle trouvée par Cioffi et ses collègues [25]. D'après Minière et al. [28], à $t \approx 53\,000$ ans, la vitesse du choc est $D \approx 90$ km/s au lieu de 140 km/s pour une onde de souffle de Sedov-Taylor. En utilisant la nouvelle loi $D = \dot{R}(t) \propto t^{-0.7}$, on trouve $M = M_{crit}$ à $t \approx 110\,000$ ans. Cette valeur est environ trois fois plus faible que pour une onde de souffle sans pertes par radiations et correspond toujours à une phase très tardive de l'évolution du RSN.

Revenons maintenant au choc avec ionisation dans le RSN. Le calcul de l'état du milieu choqué n'est pas trivial, ainsi que nous l'avons vu, puisqu'il faut prendre en compte la température, le taux d'ionisation et la densité du milieu choqué de manière consistente. Nous allons maintenant proposer une approche simplifiée qui va nous permettre de réduire la complexité du modèle. Ayant supposé que le gaz du MIS est composé d'atomes d'hydrogène, le milieu choqué partiellement ionisé est alors composé d'atomes d'hydrogène, de protons et d'électrons et l'indice adiabatique des milieux "1" et "2" vaut $5/3$ qui est la valeur d'un gaz monoatomique. En effet l'indice adiabatique est relié aux degrés de liberté ℓ des particules qui composent le gaz et dans le cas présent $\ell = 3$ donc $\gamma = (\ell + 2)/\ell = 5/3$. Nous allons maintenant définir un nouvel indice adiabatique effectif γ^* qui rend compte des effets d'ionisation dans le milieu "2" par l'équation,

$$\epsilon_2 = \frac{1}{\gamma^* - 1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{3}{2} \frac{p_2}{\rho_2} + \epsilon_{ion} \quad (2.58)$$

En général, la fonction $\gamma^*(T_2, \rho_2)$ dépend de la température et de la densité du milieu choqué. Cependant, on peut montrer que l'indice adiabatique effectif γ^* est en fait directement fonction du ratio de température θ_2 et du

2.4. Etude de l'effet de l'ionisation simplifiée sur le gaz choqué pour un RSN

taux d'ionisation f_2 . En utilisant la définition de l'énergie d'ionisation (2.13) et (2.58), on trouve finalement la formule analytique,

$$\gamma^* = \frac{5(1 + f_2)\theta_2 + 2a_{ion}f_2}{3(1 + f_2)\theta_2 + 2a_{ion}f_2} \quad (2.59)$$

On peut tout de suite remarquer que lorsque l'on supprime l'effet de l'ionisation ($f_2 = 0$), on retrouve la valeur $\gamma^* = 5/3$ pour un gaz monoatomique. De même lorsque l'énergie thermique du milieu choqué est très grande comparée à l'énergie d'ionisation $\theta_2 \gg a_{ion}$ alors on trouve également $\gamma^* \simeq 5/3$. Nous allons ensuite faire une hypothèse supplémentaire en remarquant que le taux d'ionisation varie très peu en fonction de la densité dans l'intervalle $\rho_1 < \rho < \rho_2$. En effet, la densité ρ_2 ne peut pas dépasser la valeur maximale $\rho_2 = \rho_1 M^2$ qui correspondrait à $\gamma^* = 1$ et la variation de f_2 lors du passage de ρ_1 à ρ_2 est alors faible (voir la figure 2.2 pour la dépendance de f_2 par rapport à la densité). On peut alors poser $f_2(\theta_2, \eta_2) \simeq f_2(\theta_2, 1)$ (voir (2.26)). Finalement, la fonction γ^* ne dépend plus que de la température adimensionnée θ_2 et nous avons tracé la courbe de l'indice adiabatique effectif pour les conditions du MIS sur la figure 2.8 où l'on retrouve bien la valeur $5/3$ pour $\theta_2 \rightarrow 1$ et $\theta_2 \rightarrow +\infty$. On remarque que γ^* atteint une valeur minimale de 1.048, ce qui est proche de la limite $\gamma = 1$ où toute l'énergie du choc est utilisé pour ioniser le gaz au lieu de le chauffer ($\theta_2 \ll a_{ion}$). La variation de γ^* est très forte entre 30 et 40 mais varie peu entre 50 et 200. Ce dernier intervalle de température est pertinent pour un vieux RSN car pour $50 \leq \theta_2 \leq 200$, on a approximativement $45 \leq M \leq 55$ comme on peut le voir sur la figure 2.1. En conséquence de cette faible variation de γ^* , il ne sera pas aberrant de prendre une valeur constante de γ^* pour caractériser un vieux RSN. Ceci sera utilisé un peu plus loin. Maintenant que nous avons défini un indice adiabatique effectif γ^* pour le milieu "2" différent de l'indice adiabatique (que l'on note γ_1 qui vaut $5/3$) du milieu "1", nous allons déduire à nouveau l'état du milieu choqué, mais cette fois-ci nous allons le faire en utilisant les équations de Rankine-Hugoniot classique où l'on considère deux indices adiabatiques différents pour les milieux "1" et "2".

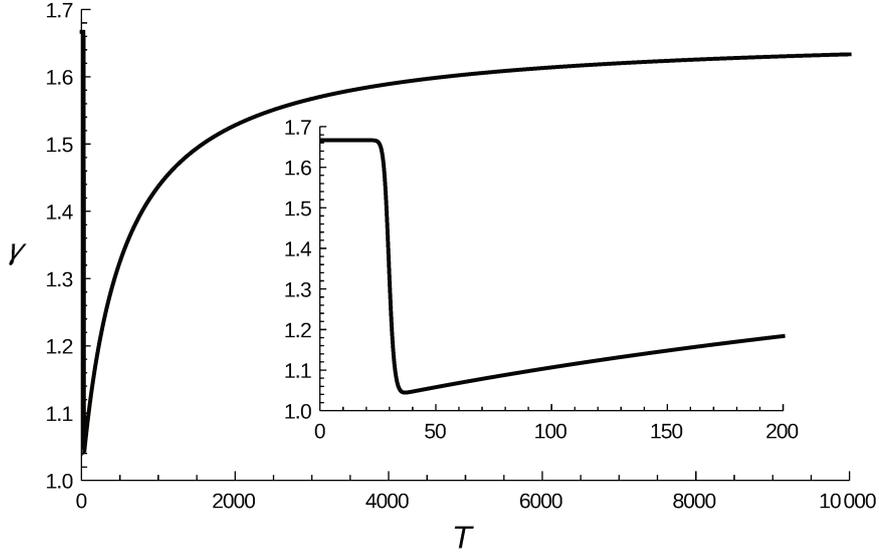


FIGURE 2.8 – L'indice adiabatique effectif γ^* en fonction de la température adimensionnée pour les conditions du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m⁻³).

Dans le cas présent, l'énergie d'ionisation est toujours prise en compte dans l'équation d'énergie (2.4) (dans le terme d'enthalpie h_2) mais apparaît de manière implicite à travers la valeur de γ^* . En effet, en combinant (2.58) et (2.5), l'enthalpie s'écrit,

$$h_2 = \frac{\gamma^*}{\gamma^* - 1} \frac{P_2}{\rho_2}. \quad (2.60)$$

On peut maintenant déterminer l'état du milieu "2" en suivant le calcul de Sedov [67] et de Drake [37] et on trouve le taux de compression,

$$C_2 = \frac{(\gamma_1 - 1)\gamma^*(1 + \gamma_1 M^2) + \sqrt{J}}{\gamma_1(\gamma^* - 1)(2 + (\gamma_1 - 1)M^2)} \quad (2.61)$$

où

$$J = (\gamma_1 - 1)[(\gamma_1 - 1)(\gamma^{*2} + \gamma_1^2 M^4) + 2\gamma_1(\gamma_1 - \gamma^{*2})M^2] \quad (2.62)$$

A ce stade, il faut préciser que l'état choqué n'est pas totalement déterminé. En effet, la fonction $\gamma^*(\theta_2)$ dépend toujours de la température du milieu

2.4. Etude de l'effet de l'ionisation simplifiée sur le gaz choqué pour un RSN

"2" et comme pour la section précédente le système d'équations algébriques est non linéaire et ne peut être complètement résolu que numériquement. Cependant, il est important de remarquer deux choses. Premièrement, si le choc est suffisamment fort ($M \gg 1$), ce qui est le cas pour un RSN, la formule (2.61) se réduit à $C_2 = (\gamma^* + 1)/(\gamma^* - 1)$. Cette expression asymptotique est exactement la même expression que celle déduite pour un choc adiabatique classique qui correspond à $\gamma^* = \gamma_1$. On en déduit que pour un choc fort, le taux de compression ne dépend que l'indice adiabatique du milieu choqué. Si cet indice chute à une valeur proche de 1, on peut s'attendre à ce que le taux de compression devienne grand. De plus on connaît l'expression analytique de γ^* en fonction du ratio de température θ_2 (voir (2.59)). On peut finalement en déduire l'expression analytique du taux de compression avec $\gamma_1 = 5/3$ pour $M \gg 1$ comme,

$$C_2(\theta_2) \simeq \frac{\gamma^*(\theta_2) + 1}{\gamma^*(\theta_2) - 1} = 4 + \frac{2a_{ion}f_2(\theta_2)}{(1 + f_2(\theta_2))\theta_2} \quad (2.63)$$

On retrouve dans l'équation analytique simplifiée toutes les caractéristiques du milieu initial (ici le MIS) qui permettent d'augmenter le taux de compression au front du choc. En effet si l'ionisation se fait à basse température et si la fraction d'énergie d'ionisation est grande comparée à l'énergie thermique du milieu "2", le terme $(2a_{ion}f_2)/((1 + f_2)\theta_2)$ sera grand et le taux de compression sera élevé dans le milieu choqué. Ces conditions sont satisfaites pour un gaz de faible densité. Sur la figure 2.9, on compare le taux de compression calculé de manière numérique et consistantes entre les quantités du milieu choqué et la formule analytique du taux de compression (2.63) pour $M \gg 1$ (pour ces deux courbes, M n'est est une variable muette dont la valeur varie de manière consistante avec celle de θ_2 ainsi qu'il est montré sur la figure 2.1) en prenant les mêmes conditions initiales pour le MIS. On constate la parfaite concordance des deux résultats lorsque le nombre de Mach devient grand ($M > 20$).

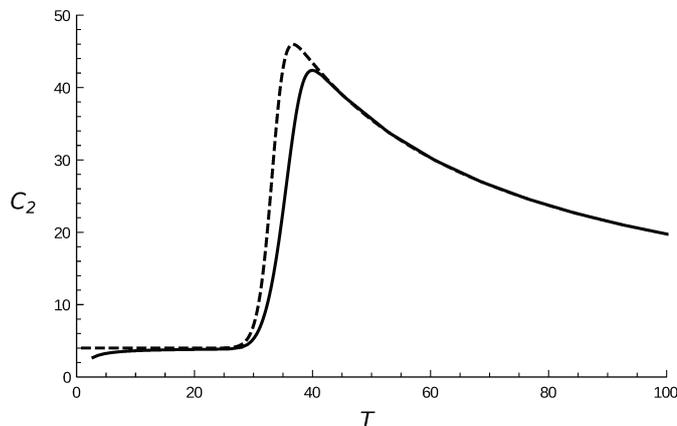


FIGURE 2.9 – Comparaison du taux de compression C_2 calculé numériquement dans la section 2.2 (en trait plein) avec la formule de C_2 pour $M \gg 1$ (2.63) (trait pointillé) en fonction du ratio de température θ_2 .

Enfin, la formule analytique approchée de C_2 nous permet de connaître le taux de compression approché si le choc est suffisamment fort $M \gg 1$. Si l'on prend la valeur minimale de γ^* , soit $\gamma^* \simeq 1.045$ (voir figure 2.8) dans les conditions du MIS, alors on trouve un maximum du taux de compression $C_2 = 45.5$ proche du maximum de compression trouvé numériquement qui vaut 42.5. Enfin, il est possible d'aller encore plus loin dans la simplification du problème en supposant l'indice adiabatique du milieu choqué $\gamma^* = \text{constant} \simeq 1.045$. Cette hypothèse revient à considérer que γ^* ne varie pas sur un certain intervalle de température (ici entre 40 et 200) [64]. Bien que ceci soit une approximation de l'état choqué, nous verrons dans le chapitre suivant que cela va nous permettre de modéliser le RSN en phase tardive en incluant les effets de l'ionisation de manière autosemblable à travers le modèle de Barenblatt [30]. On peut déjà s'attendre à ce que le taux de compression augmente dans la phase tardive du RSN et que ceci entraîne une densification et un amincissement de la coquille.

2.5 Conclusion

Pour conclure, nous avons fait l'étude analytico-numérique d'une onde de choc qui traverse un MIS froid composé d'atomes d'hydrogène. Nous avons trouvé que le taux de compression pour un choc ionisant peut atteindre des valeurs très élevées (le maximum de compression est d'environ 42) autour d'un nombre de Mach critique $M_{crit} \simeq 40$ où le taux d'ionisation devient le

plus important. Ceci est dû au fait que le MIS est extrêmement raréfié comparé à un gaz produit en laboratoire. En effet, comme une certaine portion de l'énergie du choc est utilisée pour ioniser le gaz au lieu de le chauffer et que ceci se produit à de basses températures du fait de la faible densité du MIS, le milieu choqué possède une température bien plus faible que pour un choc adiabatique sans ionisation et le taux de compression augmente. Les conditions d'apparition de telles densifications correspondent à des caractéristiques de vieux RSN âgés d'environ 100 000 ans. Ce refroidissement a un effet semblable au refroidissement par émission de photons qui lui aussi densifie le milieu refroidit, comme nous le verrons en détail dans les prochains chapitres. Ensuite, la structure de la zone transitoire du choc a été déterminée avec les effets de l'ionisation en supposant que le fluide possède une certaine viscosité (qu'il n'est pas nécessaire de préciser pour résoudre le problème physique). De même, l'ionisation modifie la structure de la température dans la zone transitoire en pompant une partie de l'énergie du choc pour ioniser le gaz. En revanche la structure de la densité dans la zone transitoire est peu modifiée. Enfin, nous avons proposé une approche analytique simplifiée pour déterminer l'état du milieu choqué pour un choc ionisant qui nous permet de connaître le taux de compression de manière analytique lorsque le choc est fort ($M \gg 1$) en introduisant un indice adiabatique effectif γ^* pour le milieu choqué. En supposant ce paramètre constant, i.e., on suppose un indice adiabatique moyen dans un intervalle de température du RSN, on peut réduire le problème de l'évolution du RSN en phase tardive. En effet, l'hypothèse $\gamma^* = \text{constant}$ est nécessaire pour pouvoir espérer trouver des solutions autosemblables à un problème hydrodynamique [64]. Nous verrons dans le chapitre suivant que ceci va nous permettre de déterminer l'évolution et la structure interne du RSN en phase tardive lorsque les effets de l'ionisation seront inclus à travers le modèle de Barenblatt [30] et agiront comme un refroidissement. De plus afin de faire une comparaison avec ce que nous venons d'obtenir et avec le modèle de Barenblatt, nous ferons dans le même chapitre une étude détaillée du rôle d'un refroidissement sur la structure du RSN, ce refroidissement n'étant plus uniquement pris au front du choc mais dans le volume entier du RSN.

Chapitre 3

Solutions auto-semblables décrivant le refroidissement d'un reste de supernova

Sommaire

3.1	Analyse dimensionnelle et solutions auto-semblables	56
3.2	Solution auto-semblable de Sedov-Taylor	59
3.2.1	L'analyse dimensionnelle appliquée aux ondes de souffle	59
3.2.2	Les équations décrivant l'onde de souffle	61
3.2.3	Solutions auto-semblables et transformations homothétiques	62
3.2.4	Les équations différentielles ordinaires et la solution auto-semblable	65
3.3	Solution auto-semblable de Barenblatt	68
3.3.1	Le refroidissement de Barenblatt au front du choc	68
3.3.2	Formalisme et solution du problème de Barenblatt	71
3.3.3	Bilan d'énergie pour la solution de Barenblatt	79
3.3.4	Application du modèle de Barenblatt pour les ondes de choc avec ionisation	80
3.4	Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume	81
3.4.1	Equations générales et formalisme auto-semblable	82
3.4.2	Le cas d'un refroidissement homogène : Deux classes de solutions	83
3.4.3	Analyse des équations et des types de solutions	86
3.4.4	Les solutions de type coquille	90
3.4.5	Les solutions de type Sedov-Taylor	96

Chapitre 3. Solutions auto-semblables décrivant le refroidissement d'un reste de supernova

3.4.6	Structure de la bulle chaude interne	103
3.4.7	Analyse pour les grands taux de refroidissement . .	105
3.5	Quelques résultats complémentaires : le refroidissement en loi de puissances	111
3.6	Conclusion	114

Lors de l'évolution d'un reste de supernova (RSN), des processus microscopiques d'émission et d'absorption de photons sont à l'oeuvre dans le plasma que constitue l'intérieur du reste. Dans le RSN, ces processus sont variés. On peut citer quelques processus majeurs comme l'émission par les raies de structure fine (si le milieu n'est pas totalement ionisé) et on peut aussi citer l'émission par processus Bremsstrahlung qui se produit à plus haute température [63]. Il est important de préciser ici que contrairement au chapitre précédent, le milieu possède des ions lourds (pas forcément complètement ionisés) qui jouent un rôle dans la production de photons bien que ces ions soit en quantité négligeable devant les protons. Les photons émis dans le reste peuvent ensuite être réabsorbés dans celui-ci via les différents processus d'absorption qui existent pour le plasma du RSN. Pour chaque processus d'absorption de photons du milieu considéré, nous pouvons calculer le libre parcours moyen de ce photon λ_{lpm} et le comparer à la longueur caractéristique L du système. Si $\lambda_{lpm} \gg L$, on dira que le milieu est optiquement mince. Nous allons faire ce calcul pour le processus de Bremsstrahlung inverse. Le reste de supernova peut être séparé en deux parties. La coquille de densité plus grande que le MIS provenant de sa compression par le choc fort avec une température de l'ordre de $T = 10^6$ K et la bulle chaude interne de faible densité et à haute température (de l'ordre de $T = 10^8$ K jusqu'à 10^{10} K)

En effet dans la bulle interne à haute température, les photons qui sont émis par exemple par le processus Bremsstrahlung que nous avons cité plus haut peuvent être absorbés par les électrons au moment des collisions électrons-ions. Ce processus appelé Bremsstrahlung inverse ou absorption libre-libre est détaillé dans [68] et le libre parcours moyen λ_{BI} en régime non relativiste est donné par (toutes les grandeurs sont en unités MKSA),

$$\lambda_{BI} = 5.8 \cdot 10^{34} T^{7/2} (n_e n_i \bar{g}_R)^{-1} \tag{3.1}$$

avec \bar{g}_R un coefficient sans dimension de l'ordre de l'unité, T est la température en Kelvin, n_e la densité électronique et n_i la densité ionique. Dans la coquille, où les photons sont le plus susceptibles d'être absorbés, on a $T = 10^6$ K, $n_e = n_i = 10^7 \text{ m}^{-3}$ et le libre parcours moyen est d'environ $\lambda_{BI} \approx 10^{41}$ m. Or on sait que le rayon du reste ne dépasse pas 10^{18} m même après 50 000 ans et on peut conclure que le milieu est optiquement mince pour

le processus Bremsstrahlung inverse. Nous allons donc supposer que tous les photons émis à l'intérieur du RSN quittent le système en supposant que tous les autres processus d'absorptions sont aussi négligeables. Nous pouvons alors nous demander si l'énergie rayonnée par le RSN peut devenir comparable à son énergie totale. Lorsque c'est le cas, le RSN rentre dans sa phase radiative. Les pertes d'énergie peuvent alors altérer la dynamique et la morphologie du reste. Nous pouvons dans le cas optiquement mince modéliser ces pertes par ce que l'on appelle une fonction de refroidissement Λ qui se traduit par une perte de chaleur,

$$\delta Q = -\frac{\Lambda(\rho, T)}{\rho} dt \quad (3.2)$$

où δQ est une énergie perdue par unité de masse pendant un temps dt , ρ est la densité massique du plasma, T la température et la fonction de refroidissement s'exprime donc comme une énergie par unité de volume et de temps. Cette fonction de refroidissement peut être approximée par une fonction du type $\Lambda \propto \rho^\alpha T^\beta$ provenant des différents processus d'émission du gaz dans le RSN ([63],[69]). A haute température $T > 10^8$ K, les photons sont créés par le processus Bremsstrahlung et comme ils sortent tous du RSN, la fonction de refroidissement suit une loi en $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$. On retrouve

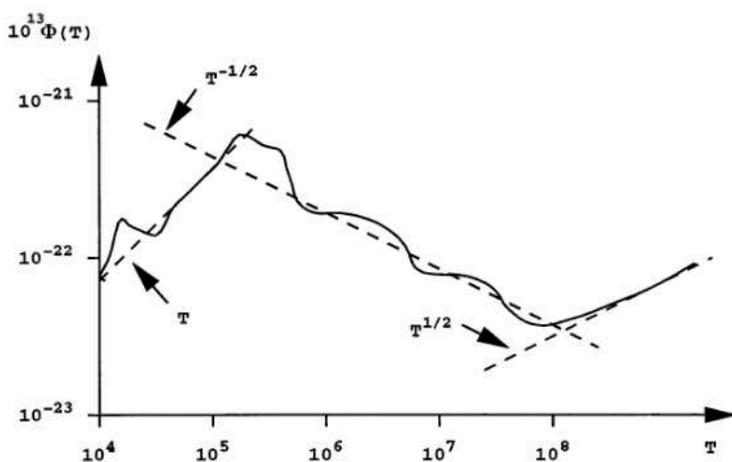


FIGURE 3.1 – Fonction Φ en $\text{J m}^3 \text{s}^{-1}$ en fonction de la température T en K tirée de Falle 1995 [69].

ce régime sur la figure 3.1 où la densité au carré provient du fait que les processus sont des interactions à deux particules. Pour des températures

satisfaisant $10^5 \text{ K} < T < 10^8 \text{ K}$, la fonction de refroidissement est dominée par les raies de structure fine des ions lourds non complètement ionisés et des éventuels atomes et molécules, et $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$. Lorsque les températures sont comprises entre 10^4 K et 10^5 K , le refroidissement est en $\Lambda \propto \rho^2 T$. Ces différents types de refroidissements sont représentés sur la figure 3.1 [69] par la fonction $\Phi(T) = \Lambda m^2 / \rho^2$ avec m la masse moyenne des particules du gaz.

3.1 Analyse dimensionnelle et solutions auto-semblables

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser au problème d'un RSN qui perd son énergie par refroidissement. Nous allons voir que sous certaines conditions sur la fonction de refroidissement, nous pouvons trouver des solutions analytiques ou analytico-numériques aux propriétés spéciales appelées solutions auto-semblables. Ces solutions constitueront un terrain d'étude privilégié pour comprendre le rôle du refroidissement dans la dynamique et la morphologie des RSN en phase radiative.

Les solutions auto-semblables (SAS) sont d'un intérêt particulier en physique. En effet ces solutions rendent compte de certaines propriétés de symétrie du problème physique et dans de nombreux cas la solution va avoir tendance à converger vers la SAS au temps longs [30]. Nous allons voir que dans le cas d'une onde de souffle sans refroidissement, on peut obtenir la SAS à partir de l'analyse dimensionnelle. Aussi nous allons rappeler quelques notions d'analyse dimensionnelle (AD) et nous allons montrer qu'il existe plusieurs types de SAS.

Si l'on prend un problème physique gouverné par la relation fonctionnelle,

$$x = f(x_1, \dots, x_n; y_1, y_2) \quad (3.3)$$

où les x_1, \dots, x_n sont des paramètres de dimensions indépendantes et x, y_1, y_2 trois paramètres qui dépendent de la dimension des x_i . Par exemple, si on définit la dimension temporelle T , celle d'une masse M , celle d'une longueur L , alors la densité ρ de dimension M/L^3 et la vitesse v de dimension L/T sont des paramètres de dimensions indépendantes : ρ et v correspondent aux quantités x_i de la formule (3.3). En revanche, la dimension de la pression p dépend des dimensions des deux paramètres par la relation $[p] = [\rho][v]^2$. La pression joue donc le rôle de y_1, y_2 ou x . Nous supposons dans ce problème que f n'est fonction que de deux paramètres de dimensions dépendantes y_1 et y_2 pour alléger le propos. Le principe de covariance de la physique stipule que

3.1. Analyse dimensionnelle et solutions auto-semblables

les lois qui gouvernent la physique doivent être valides pour tout observateur utilisant différentes unités de base. Ceci implique que les transformations continues qui laissent invariante la dimension des paramètres indépendants s'écrivent sous la forme monômiale,

$$\begin{aligned} [x] &= [x_1]^{\alpha_1} \dots [x_n]^{\alpha_n} \\ [y_1] &= [x_1]^{\alpha_{11}} \dots [x_n]^{\alpha_{1n}} \\ [y_2] &= [x_1]^{\alpha_{21}} \dots [x_n]^{\alpha_{2n}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

où les α_i sont des entiers positifs. La relation physique de l'équation (3.3) peut donc être représentée par l'équation,

$$\Pi = F(\Pi_1, \Pi_2) \quad (3.5)$$

où les nombres sans dimension Π , Π_1 et Π_2 sont données par les équations,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{x}{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}} \\ \Pi_1 &= \frac{y_1}{x_1^{\alpha_{11}} \dots x_n^{\alpha_{1n}}} \\ \Pi_2 &= \frac{y_2}{x_1^{\alpha_{21}} \dots x_n^{\alpha_{2n}}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Cette méthode est plus connue sous le nom de Théorème-II [30], [70], [67], et elle dit que l'on trouve autant de nombres sans dimension du problème physique représenté par f que de paramètres de dimensions dépendantes (trois dans notre cas particulier). Les SAS sont les solutions d'un cas particulier idéal du problème physique où un des paramètres physiques du problème (x_i) va tendre vers l'infini ou vers zéro. Par conséquent, lors du passage depuis la phase transitoire non idéale jusqu'à la configuration idéale du problème, le nombre sans dimension Π_2 par exemple peut alors tendre vers l'infini ou vers zéro. On peut alors classer trois cas de figures. Premièrement, supposons que lorsque Π_2 tend vers l'infini (ou zéro), la fonction F tende vers une limite finie différente de zéro. Dans ce cas on peut tout simplement passer à la limite et on obtient,

$$\Pi = F_0(\Pi_1). \quad (3.7)$$

Un paramètre caractéristique n'est alors plus pris en considération et n'intervient plus dans la résolution du problème physique (on suppose que ce paramètre est x_1 sans perdre de généralité). On peut dans ce cas trouver une relation monomiale directe entre les paramètres $(x, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2)$ qui gouvernent le problème par l'analyse dimensionnelle grâce à l'équation (3.7). On parle dans ce cas de similarité complète ou de similarité du premier type [30] pour le nombre sans dimension Π_2 .

Maintenant, on suppose que lorsque Π_2 tend vers zéro (ou l'infini), il n'existe pas de limite finie différente de zéro pour la fonction F . Cependant cette fonction possède la propriété suivante,

$$F = \Pi_2^\beta F_1\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2^\alpha}\right) \quad (3.8)$$

où α et β sont deux exposants et l'on peut finalement réduire le problème sous la forme,

$$\begin{aligned} \Pi^* &= F_1(\Pi_1^*) \\ \Pi^* &= \frac{F}{\Pi_2^\beta} \\ \Pi_1^* &= \frac{\Pi_1}{\Pi_2^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il est important de remarquer que Π^* et Π_1^* ont alors une limite finie, ce qui implique aussi que Π_1 tend aussi vers zéro (ou l'infini). On peut alors dans ce cas aussi trouver une relation monomiale entre les paramètres $(x, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2)$. Par contre dans ce cas le paramètre caractéristique x_1 du problème non idéal apparaît dans la relation monomiale et doit être pris en considération dans le problème. Deuxièmement, cette relation ne peut pas être obtenue par l'analyse dimensionnelle. La connaissance de l'exposant α du problème ne peut alors être acquise qu'en résolvant un problème aux valeurs propres sous-jacent à la SAS. On dira que dans ce cas le système possède une similarité incomplète ou similarité du second type [30] pour le nombre Π_2 .

Dans le troisième et dernier cas, la fonction ne possède pas de limite finie différente de zéro ni la propriété (3.8) lorsque Π_2 tend vers zéro (ou l'infini). On doit alors tenir compte de tous les paramètres du problème même lorsque ce paramètre tend vers zéro ou l'infini et on ne trouve pas de similarité. Par la suite, pour illustrer les deux premières catégories, nous allons présenter plusieurs problèmes physiques qui possèdent des SAS et qui vont aussi nous aider à mieux comprendre la phase radiative d'un RSN. Dans un premier temps, nous allons présenter le problème de l'explosion forte de Sedov-Taylor [67] qui correspond à une SAS de premier type la plus connue de la littérature. Puis nous présenterons le modèle de l'explosion forte "modifié" de Barenblatt [30]. La solution sera alors du second type et nous devrons résoudre un problème aux valeurs propres non linéaire afin de trouver la SAS. Nous appliquerons ensuite ce modèle à la phase tardive d'un RSN. Enfin nous étudierons le problème d'une explosion forte subissant des pertes radiatives en volume. Nous verrons que l'on peut dans ce cas trouver aussi des SAS du second type. Nous présenterons alors les conclusions que l'on peut faire sur la dynamique du reste en phase radiative.

3.2 Solution auto-semblable de Sedov-Taylor

3.2.1 L'analyse dimensionnelle appliquée aux ondes de souffle

D'une manière générale, les ondes de souffle sont créées à l'issue du dépôt d'une grande quantité d'énergie dans le milieu considéré. Le problème de l'explosion forte peut être appliqué pour modéliser un RSN. La supernova constitue le dépôt d'énergie ponctuel et instantané et le MIS, supposé homogène, représente le milieu dans lequel l'onde se propage. Lorsque la masse balayée par le reste devient de l'ordre de grandeur de la masse initiale des éjectas de l'étoile, on quitte la phase balistique pour rentrer dans la phase de Sedov-Taylor et la solution converge alors vers la solution de Sedov-Taylor lorsque la masse balayée devient très grande devant la masse de ces éjectas. On doit la résolution de ce célèbre problème à trois auteurs qui ont trouvé indépendamment la SAS de l'onde de souffle. Le physicien britannique G.I. Taylor qui soumit un papier en Juin 1941 [71]. Le mathématicien américain J. von Neumann, qui soumit un papier traitant le même problème trois jours plus tard ([72], [73]) et compléta les résultats de Taylor par la découverte d'une équation d'énergie qui lui permit d'intégrer les équations de manière analytique. Plus tard la solution de ce problème fut publiée indépendamment dans un journal soviétique par L.I. Sedov ([74], [67]) qui trouva aussi

Chapitre 3. Solutions auto-semblables décrivant le refroidissement d'un reste de supernova

l'équation d'énergie. Dans ce problème, on dépose une énergie E_0 de manière ponctuelle et instantanée dans un milieu de densité homogène ρ_1 et d'indice adiabatique γ . On supposera aussi que l'énergie déposée est suffisamment grande pour générer une onde de choc de nombre de Mach $M \gg 1$ et que la pression extérieure p_{ext} sera négligeable devant la pression à l'intérieur de l'onde de souffle. Par l'analyse dimensionnelle, on peut en effet déduire une loi entre le rayon de l'onde de souffle $r_0(t)$ et le temps t en prenant en compte E_0 et ρ_1 . On a alors pour ces cinq paramètres physiques ($E_0, \rho_1, \gamma, r_0, t$) trois dimensions indépendantes, la masse M , la longueur L et le temps T . On peut donc construire deux nombres sans dimensions,

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{r_0}{\left(\frac{E_0}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5}} \\ \Pi_1 &= \gamma\end{aligned}\tag{3.10}$$

Le nombre sans dimension Π de l'équation (3.10) mène directement à la loi d'expansion du rayon en fonction du temps sans avoir à résoudre le système d'équations différentielles que nous allons réécrire comme,

$$r_0(t) = \beta_{ST}(\gamma) \left(\frac{E_0}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5}\tag{3.11}$$

où $\beta_{ST}(\gamma)$ (ST pour "Sedov-Taylor") est une constante numérique de l'ordre de l'unité qui dépend du coefficient adiabatique γ . D'ailleurs la valeur de β_{ST} sera donnée plus loin pour $\gamma = 5/3$.

La connaissance de l'évolution du rayon du reste en $r_0(t) \propto t^{2/5}$ découle du fait que ce problème physique possède une similarité complète lorsque le volume du dépôt d'énergie tend vers zéro. Cette similarité va nous permettre de trouver la solution de l'écoulement provoqué par le passage du front de l'onde de souffle sous la forme d'une SAS où l'unique variable indépendante sera donnée par la variable auto-semblable,

$$\xi = \frac{r}{r_0(t)}\tag{3.12}$$

où r est la coordonnée radiale.

3.2.2 Les équations décrivant l'onde de souffle

Dans la suite, nous allons retrouver la SAS du problème de l'explosion forte de Sedov-Taylor. Nous faisons l'hypothèse d'un écoulement à symétrie sphérique justifiée par le dépôt d'énergie ponctuel. Les équations hydrodynamiques écrites à une dimension, en géométrie sphérique sont,

$$\partial_t \rho + \partial_r(\rho v) + \frac{2}{r} \rho v = 0 \quad (3.13)$$

$$\partial_t v + v \partial_r v + \frac{1}{\rho} \partial_r p = 0 \quad (3.14)$$

$$\partial_t(p/\rho^\gamma) + v \partial_r(p/\rho^\gamma) = 0 \quad (3.15)$$

où ρ , v et p représentent respectivement la densité, la vitesse et la pression dans l'écoulement dont le coefficient adiabatique est supposé valoir γ également. Les deux premières équations sont la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. La dernière équation est celle de la conservation de l'entropie. Cette équation est équivalente à l'équation de conservation de l'énergie sous l'hypothèse d'un gaz parfait. Considérons l'équation de conservation de l'énergie totale (énergie cinétique plus énergie interne),

$$\partial_t(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e) + \nabla \cdot (v(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e + p)) = 0 \quad (3.16)$$

avec e l'énergie interne par unité de masse. Pour un gaz parfait, l'énergie interne vérifie l'équation suivante,

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (3.17)$$

On peut alors montrer que (3.16) et (3.17) (en utilisant (3.13) et (3.14)) sont équivalentes à écrire l'équation de conservation de l'entropie qui se réduit en 1D sphérique à l'équation (3.15).

Nous allons étudier l'écoulement provoqué par l'onde de souffle qui sera borné par le front du choc qui constituera les conditions aux limites. Il faut alors utiliser les relations de Rankine-Hugoniot (voir le chapitre 2) écrites

dans le référentiel du laboratoire. L'indice 1 représente le milieu amont et 2 le milieu aval, la vitesse du choc est notée D et en faisant l'hypothèse d'un choc fort (nombre de Mach $M \gg 1$) on trouve les relations,

$$p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 D^2, \quad v_2 = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad \rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1. \quad (3.18)$$

3.2.3 Solutions auto-semblables et transformations homothétiques

Maintenant que le modèle physique est posé, nous allons introduire le formalisme théorique permettant de trouver la SAS du problème. En effet, ces solutions rendent compte de certaines symétries fondamentales du problème physique considéré. Pour illustrer ce propos, on va considérer un problème physique supposé dépendre d'une seule variable spatiale x et du temps t . Si ce problème possède une solution auto-semblable notée f , alors elle peut se décomposer sous la forme [75],

$$f(x, t) = C_1(t) F\left(\frac{x}{C_2(t)}\right) \quad (3.19)$$

où $C_1(t)$ et $C_2(t)$ s'appellent les fonctions d'échelle de la SAS et où la fonction F ne dépend que d'un seul argument ξ défini par $\xi = x/C_2(t)$. La quantité ξ correspond à la variable auto-semblable de la SAS. Ordinairement, les fonctions C_1 et C_2 sont en puissances de t , mais on peut montrer que ce n'est pas systématiquement le cas. D'après (3.19), on peut déduire en fixant ξ que la valeur de la SAS pour le couple (x_2, t_2) est la même que pour le couple (x_1, t_1) à une transformation homothétique près de l'espace et du temps. Mais les SAS ont une origine plus profonde. Elle proviennent de la recherche des invariants homothétiques d'une équation différentielle. Ces méthodes utilisent le formalisme des groupes de Lie [76] afin de trouver les transformations des variables dépendantes et indépendantes qui laissent l'équation différentielle invariante par des transformations particulières [77]. Si une telle transformation existe pour une équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre p , alors on peut la transformer en une EDO d'ordre $p - 1$. En conséquence, on a donc intégré une fois l'EDO. Si ensuite, l'EDO d'ordre $p - 1$ possède aussi une transformation la laissant invariante, on aboutit à une EDO d'ordre $p - 2$ etc ... Ainsi, l'EDO peut être intégrée analytiquement par étapes successives. Pour une équation aux dérivées partielles (EDP) d'ordre p ayant n variables indépendantes on peut réduire le système à une EDP d'ordre p à $n - 1$ variables indépendantes. Si le problème est tel que

$n = 2$ (c'est la cas, par exemple, si on a l'espace x et le temps t comme variables indépendantes), alors on peut réduire l'EDP à une EDO puisqu'il ne va plus rester qu'une variable indépendante qui va mélanger x et t comme dans (3.19). Cet outil peut donc se révéler très puissant pour intégrer des équations. De plus, les SAS sont particulièrement importantes car elles décrivent le comportement "intermediate-asymptotic" [30] des solutions d'une très vaste variété de problèmes physiques lorsque ces solutions ne dépendent plus du détail des conditions initiales ou des conditions aux limites mais que le système se trouve encore loin de son état asymptotique final. Nous pouvons maintenant appliquer la méthode des transformations homothétiques aux variables dépendantes (ρ , v et p) et indépendantes (r et t) afin de trouver les invariants homothétiques des EDP (3.13)-(3.15) et obtenir des EDO. Pour cela on considère les transformations continues,

$$t = a^{\alpha_t} \bar{t}, \quad r = a^{\alpha_r} \bar{r}, \quad \rho = a^{\alpha_\rho} \bar{\rho}, \quad v = a^{\alpha_v} \bar{v}, \quad p = a^{\alpha_p} \bar{p}, \quad (3.20)$$

où les quantité avec une barre sont les variables transformées, $a > 0$ est le paramètre (arbitraire) de la transformation et les exposants α_i sont à déterminer. On insère (3.20) dans le système (3.13), (3.14) et (3.15) en exigeant que ces transformations laissent le système d'EDP invariant, i.e., les équations écrites avec les variables ayant une barre sont strictement identiques aux équations initiales. La contrainte de faire disparaître identiquement le paramètre a donne les relations algébriques pour les exposants,

$$\begin{aligned} \alpha_\rho - \alpha_t &= \alpha_v + \alpha_\rho - \alpha_r \\ \alpha_v - \alpha_t &= 2\alpha_v - \alpha_r = \alpha_p - \alpha_\rho - \alpha_r \\ \alpha_t &= \alpha_r - \alpha_v \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ensuite il nous faut rajouter à ces trois équations celle qui traduit la conservation totale de la masse balayée (on néglige la masse des ejectas) par le RSN qui s'écrit,

$$\int_0^{r_0(t)} \rho 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3} \pi \rho_1 r_0^3 \quad (3.22)$$

En imposant l'invariance de cette équation par les transformations homothétiques (3.20), on trouve une dernière relation algébrique qui donne

Chapitre 3. Solutions auto-semblables décrivant le refroidissement d'un reste de supernova

$\alpha_\rho = 0$, et il vient $\alpha_v = \alpha_r - \alpha_t$ et $\alpha_p = 2(\alpha_r - \alpha_t) = 0$ où les exposants α_r et α_t sont libres. On peut alors introduire le paramètre libre α défini par $\alpha = \alpha_r/\alpha_t$ et les relations entre tous les exposants vont conduire à la construction des invariants I , de la transformation homothétique. Ces invariants, qu'ils soient écrits en fonction des variables avec ou sans barre restent identiques. Comme nous avons quatre exposants indépendants, nous allons avoir aussi quatre invariants, I_i , $i = 1 - 4$. Le premier invariant combine les deux variables indépendantes r et t . D'après la définition de α , (3.20) donne $(t/\bar{t})^{1/\alpha_t} = (r/\bar{r})^{1/\alpha_r}$ soit $r/t^\alpha = \bar{r}/\bar{t}^\alpha$ et le premier invariant est

$$I_1 = r/t^\alpha . \quad (3.23)$$

En procédant de la même manière, on trouve les invariants I_2 , I_3 et I_4 associés à v , ρ et p , respectivement,

$$\begin{aligned} I_2 &= vt/r \\ I_3 &= \rho \\ I_4 &= pt^2/r^2 . \end{aligned} \quad (3.24)$$

C'est maintenant que l'application des invariants homothétiques va prendre tout son sens et va nous permettre de trouver la SAS du problème car, à une constante multiplicative près, ces quatre invariants vont correspondre aux variables dépendantes et indépendantes auto-semblables. La variable auto-semblable ξ s'inspire de I_1 et elle est alors définie par,

$$\xi = \frac{r}{At^\alpha}, \quad (3.25)$$

où A est une constante telle que ξ soit sans dimensions, $\alpha > 0$ (grâce à l'AD, nous avons vu que l'exposant α vaut $2/5$ pour le cas particulier de l'explosion forte de Sedov) et la position du front du choc $r_0(t) = At^\alpha$. Cette loi est une extension immédiate de (3.11) et (3.25) est une généralisation de (3.12). Nous allons voir plus loin que dans le cas de la SAS de Sedov-Taylor, $A = \beta_{ST}(\gamma)(E_0/\rho_1)^{1/5}$ et il est possible de calculer la valeur de β_{ST} en fonction de γ . Ensuite les trois autres invariants seront les nouvelles variables auto-semblables pour la densité, la vitesse et la pression.

3.2.4 Les équations différentielles ordinaires et la solution auto-semblable

Ainsi que nous l'avons expliqué précédemment, l'utilisation des invariants homothétiques permet alors de passer d'un système d'EDP à un système d'EDO. Grâce aux trois invariants (3.24) nous allons poser les nouvelles variables dépendantes normalisées aux valeurs qu'elles prennent au niveau du front du choc,

$$\rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1 R(\xi), \quad v = \frac{2\alpha}{\gamma + 1} \frac{r}{t} V(\xi), \quad p = \rho_1 \frac{2\alpha^2}{\gamma + 1} \frac{r^2}{t^2} P(\xi) \quad (3.26)$$

où R , V et P représentent respectivement la densité, la vitesse et la pression auto-semblable. Avec la normalisation utilisée dans les équations (3.25) et (3.26) la variable ξ varie entre 0 (centre du RSN) et 1 (front de l'onde de souffle) et au front on a $R(1) = V(1) = P(1) = 1$. On peut maintenant remplacer (3.26) dans le système d'EDP (3.13), (3.14) et (3.15), ce qui donne le nouveau système d'EDO,

$$\left[\frac{2V - (\gamma + 1)}{2R} \right] \frac{dR}{d \ln \xi} + \frac{dV}{d \ln \xi} = -3V \quad (3.27)$$

$$\left[\frac{2V - (\gamma + 1)}{V} \right] \frac{dV}{d \ln \xi} + \frac{\gamma - 1}{RV} \frac{dP}{d \ln \xi} = \left(\frac{\gamma + 1}{\alpha} - 2V \right) - 2 \frac{(\gamma - 1)}{RV} P \quad (3.28)$$

$$\left[\frac{2V - (\gamma + 1)}{2P} \right] \frac{dP}{d \ln \xi} - \gamma \left[\frac{2V - (\gamma + 1)}{2R} \right] \frac{dR}{d \ln \xi} = \frac{\gamma + 1}{\alpha} - 2V \quad (3.29)$$

Dans le problème de l'explosion forte de Sedov, soit $\alpha = 2/5$, il existe une relation algébrique entre R , V , et P , qui découle d'un bilan énergétique à la frontière d'une sphère auto-semblable, de rayon arbitraire, dans le RSN. Cette équation supplémentaire permet d'intégrer totalement le système d'EDO de manière analytique. En effet si l'on considère le bilan d'énergie d'une boule de rayon r centrée sur le lieu de l'explosion, on trouve l'équation algébrique [78],

$$\frac{P}{R} = \frac{(\gamma + 1 - 2V)}{(2\gamma V - (\gamma + 1))} V^2 \quad (3.30)$$

Un des résultats nouveaux de ce travail sera de généraliser ce type de relation dans les sections suivantes pour un RSN qui perd de l'énergie par refroidissement. Grâce à cette équation supplémentaire, on peut alors trouver la solution analytique implicite (ξ en fonction de V) de Sedov-Taylor

$$\xi^5 = V^{-2} \left(\frac{2\gamma V - \gamma - 1}{\gamma - 1} \right)^{\frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1}} \left(\frac{5(\gamma+1) - 2(3\gamma-1)V}{7-\gamma} \right)^{-\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(2\gamma+1)(3\gamma-1)}} \quad (3.31)$$

et

$$R = \left(\frac{\gamma+1-2V}{\gamma-1} \right)^{\frac{2}{\gamma-2}} \left(\frac{2\gamma V - \gamma - 1}{\gamma - 1} \right)^{\frac{3}{2\gamma+1}} \times \left(\frac{5(\gamma+1) - 2(3\gamma-1)V}{7-\gamma} \right)^{\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(2\gamma+1)(3\gamma-1)(2-\gamma)}} \quad (3.32)$$

Enfin la pression P s'obtient en utilisant l'équation (3.30). La solution de Sedov-Taylor est tracée sur la figure 3.2 pour $\gamma = 5/3$. On peut constater que la matière balayée forme une coquille derrière le front du choc en $\xi = 1$ et que la densité ρ au centre du RSN est nulle. La vitesse v dans le RSN est presque linéaire lorsque l'on se rapproche de la partie interne chaude du RSN où l'écoulement est très subsonique. En conséquence, la pression p est quasi-homogène dans la partie centrale du RSN. On notera qu'on a $p \propto \xi^2 P$ et, en conséquence, P diverge comme ξ^{-2} près du centre. Par ailleurs, si on fait décroître la valeur de γ , on observe que le pic de densité est de plus en plus étroit. Comme dans tout les cas on conserve $R(1) = 1$, l'équation (3.26) indique que la densité ρ au front du choc augmente proportionnellement au rapport $(\gamma+1)/(\gamma-1)$. C'est la raison pour laquelle la coquille devient de plus en plus fine quand γ diminue et dans la limite $\gamma \rightarrow 1$, on a $\rho/\rho_1 \rightarrow +\infty$.

Nous allons maintenant calculer l'énergie totale comprise dans le reste, ce qui va nous permettre de connaître l'exposant α et la constante β_{ST} dans l'équation (3.11). L'énergie totale comprise dans le RSN est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne,

$$E(t) = \int_0^{r_0(t)} \left(\frac{1}{\gamma-1} p + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) 4\pi r^2 dr \quad (3.33)$$

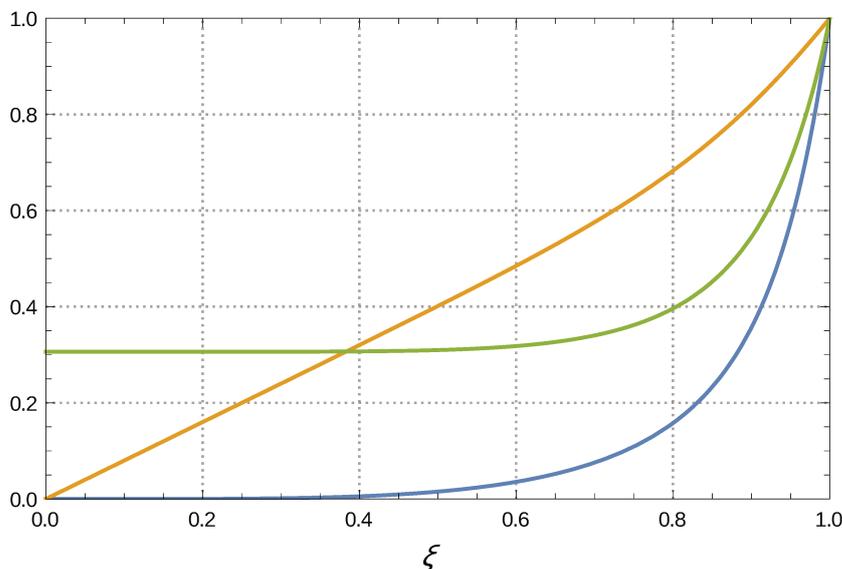


FIGURE 3.2 – Solution de Sedov-Taylor pour $\gamma = 5/3$: profils de densité (en bleu), de vitesse (en orange) et de pression (en vert) renormalisés au front du choc en fonction de la variable auto-semblable ξ .

Si l'on met (3.25) et (3.26) dans (3.33) on trouve en faisant deux changements de variable,

$$E(t) = \frac{8\pi\alpha^2}{(\gamma+1)(\gamma-1)}\rho_1 A^5 t^{5\alpha-2} \int_0^1 (P + RV^2) \xi^4 d\xi \quad (3.34)$$

Or par hypothèse l'énergie contenue dans le RSN se conserve ce qui se traduit par,

$$E(t) = E_0 \quad (3.35)$$

où E_0 est l'énergie déposée initialement. On en déduit deux informations sur le problème de Sedov. D'une part, la conservation de l'énergie se traduit dans (3.34) par le fait que la dépendance temporelle doit disparaître et donc $\alpha = 2/5$ qui n'est autre que la loi d'évolution introduite par Sedov $r_0(t) \propto t^{2/5}$. On peut alors retrouver d'une autre manière la loi d'évolution (3.11) déduite de l'analyse dimensionnelle. D'autre part, nous savons que nous sommes dans un cas de similarité complète. Sachant que $A = \beta_{ST}(E_0/\rho_1)^{1/5}$, on peut déterminer β_{ST} en fonction de γ . En effet, la connaissance de la SAS en fonction de ξ , R , V et P ne suffit pas et l'information de β_{ST} est indispensable si l'on veut exprimer la solution en fonction

des variables physiques r et t . En reprenant les profils analytiques conduisant à $R(\xi)$, $V(\xi)$ et $P(\xi)$, on peut évaluer numériquement l'intégrale dans (3.34) pour chaque valeur de γ et en déduire β_{ST} . Pour $\gamma = 5/3$ (gaz monoatomique), on trouve que la constante vaut $\beta_{ST} = 1,15$ en accord avec la littérature [67], [78] et [64] (la littérature donne aussi la valeur de β_{ST} pour diverses valeurs de γ). Comme nous l'avons dit plus haut cette valeur est proche de l'unité et ceci reste vrai quelque soit la valeur de γ . Le problème de l'explosion forte de Sedov-Taylor illustre bien les propriétés particulières des SAS d'un problème possédant une similarité complète. On peut alors trouver la SAS indépendamment des conditions initiales et trouver la loi d'expansion du RSN.

3.3 Solution auto-semblable de Barenblatt

3.3.1 Le refroidissement de Barenblatt au front du choc

Le modèle que nous allons présenter ici constitue une généralisation du problème de l'explosion forte de Sedov où l'on va autoriser le RSN à se refroidir au niveau du front du choc. Le fait de rajouter un nouveau paramètre physique lié au refroidissement du reste va modifier le problème. On va par la suite trouver une fois de plus une SAS mais cette fois-ci la similarité sera incomplète et la SAS sera du second type. Dans ce modèle proposé par Barenblatt [30], l'énergie totale du RSN n'est plus conservée et du coup, l'expansion est ralentie $r_0(t) \propto t^\alpha$ avec $\alpha < 2/5$. Cette perte d'énergie sera modélisée par un terme de flux d'énergie dans les relations de Rankine-Hugoniot. On rappelle les trois relations de Rankine-Hugoniot dans le repère du choc (voir au chapitre 2) où la vitesse est noté u alors qu'elle était noté v dans le référentiel du laboratoire,

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \quad (3.36)$$

$$\rho_2 u_2^2 + p_2 = \rho_1 u_1^2 + p_1 \quad (3.37)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2 = \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \quad (3.38)$$

où $u_1 = -D$ avec D la vitesse du front du choc et l'indice adiabatique γ a la même valeur dans les milieux "1" et "2". Lorsque l'on ajoute une perte d'énergie, seule l'équation (3.38) est modifiée,

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2 - q = \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \quad (3.39)$$

où q est un terme qui représente les pertes par unité de masse et vérifie $q < 0$ ($q > 0$ représenterait un chauffage). Cette perte d'énergie peut mimer, par exemple, une perte de chaleur par le RSN au niveau du front de l'onde de souffle. Néanmoins la forme de q ne peut pas être choisie arbitrairement si l'on veut obtenir des SAS et q sera choisi de telle manière que l'équation (3.39) se ramène à une équation de type (3.38) mais avec deux valeurs de γ différentes de chaque côté de la discontinuité. Suivant l'approche de Barenblatt, nous allons donc poser,

$$q = C \frac{p_2}{\rho_2} \quad (3.40)$$

où C est une constante négative. Comme nous avons un gaz parfait, cette équation indique que q est proportionnel à la température T_2 au niveau du front du choc. Ce type de loi est représentatif d'une perte thermique. En revanche, elle ne pourrait pas décrire une perte du type rayonnement d'un corps noir car il faudrait la puissance quatrième de T_2 . Plus loin dans ce chapitre, nous prendrons pourtant en compte des pertes d'énergie par rayonnement. Cependant, au lieu de supposer un corps noir, nous ferons l'hypothèse que le RSN est optiquement mince, comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce chapitre, et que les photons s'échappent librement du RSN. Dans la présente section, on va maintenant définir le paramètre γ^* en fonction de la constante C ,

$$\gamma^* = \frac{(\gamma - 1)C - \gamma}{(\gamma - 1)C - 1}. \quad (3.41)$$

Cette définition va trouver sa justification tout de suite après. On peut tout de suite remarquer que comme $C < 0$ et $\gamma \geq 1$ alors $\gamma^* \leq \gamma$. L'équation (3.41) permet aussi d'identifier deux cas limites. Le premier cas correspond à $C = 0$, i.e. on coupe le refroidissement au front du choc et on trouve $\gamma^* = \gamma$. On retrouve donc le problème de Sedov-Taylor dont on connaît déjà la solution. Le second cas correspond à C tendant vers l'infini, i.e. le refroidissement devient infini au front du choc et on trouve que γ^* tend vers 1. On se retrouve dans la limite d'un RSN ayant une coquille infiniment fine et dense (voir plus loin). Enfin, en remplaçant q par (3.40) dans (3.39) et en utilisant (3.41), on obtient la relation de Rankine-Hugoniot,

$$\frac{\gamma^*}{\gamma^* - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2 = \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1}. \quad (3.42)$$

Cette équation a exactement la même structure que la troisième équation de Rankine-Hugoniot ordinaire (voir (3.38) ou le chapitre 2) sauf que maintenant le coefficient adiabatique du milieu choqué est γ^* au lieu de γ . On peut alors appliquer les résultats des équations de Rankine-Hugoniot classiques et c'est cet objectif qui a motivé la forme spécifique de q donnée par (3.40). Par ailleurs, cette relation sur l'énergie correspond exactement à la relation de Drake [37] d'un choc adiabatique avec un indice adiabatique γ_2 (qui dans le cas présent vaut γ^*) pour le milieu choqué différent de l'indice adiabatique γ_1 (qui dans le cas présent vaut γ) du milieu amont. Ensuite on fait l'hypothèse d'un choc fort (le nombre de Mach est tel que $M^2 = D^2/(\gamma p_1/\rho_1) \gg 1$), ce qui revient à dire que la pression du milieu amont est négligée comme l'a fait Sedov dans sa théorie de l'onde de souffle que nous avons présentée dans la section précédente. En revenant à la vitesse $v_2 = u_2 + D$ dans le repère du laboratoire, on en déduit les solutions des nouvelles équations de Rankine-Hugoniot,

$$\rho_2 = \frac{\gamma^* + 1}{\gamma^* - 1} \rho_1, \quad v_2 = \frac{2}{\gamma^* + 1} D, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma^* + 1} \rho_1 D^2. \quad (3.43)$$

Comme attendu, ces équations ont la même structure que celles données dans (3.18). Le problème est donc très similaire à celui de l'explosion forte de Sedov-Taylor à l'exception que l'indice adiabatique γ^* au front du choc est maintenant différent de l'indice adiabatique γ dans le reste. On peut aussi voir que le refroidissement peut augmenter la valeur de la densité au niveau du front du choc. En effet d'après (3.18), on a vu que $\rho_2/\rho_1 = (\gamma+1)/(\gamma-1)$ et que cette valeur vaut $\rho_2/\rho_1 = 4$ pour un gaz parfait monoatomique ($\gamma = 5/3$). Dans le cas présent, on peut comprimer l'écoulement aval au delà de la valeur $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ grâce à la perte de chaleur puisque γ^* satisfait $\gamma^* < \gamma$. De plus, le taux de compression tend vers l'infini lorsque γ^* tend vers 1 ainsi que nous l'avons annoncé peu après l'équation (3.41). Ce résultat met en évidence le rôle du refroidissement au niveau du front du choc. Il permet de densifier la matière sur le front du choc, ce qui naturellement se traduit par une raréfaction de la matière à l'intérieur de la "bulle chaude". Nous retrouverons ce type de comportement plus loin dans le chapitre en prenant en compte un refroidissement en volume puisque le RSN est optiquement mince.

On peut montrer que l'ajout de ce nouveau paramètre sans dimension γ^* va fondamentalement changer le problème de l'explosion forte. En effet, on ne peut plus considérer un dépôt d'énergie ponctuel et fini comme condition initiale. Si on écrit le bilan d'énergie totale du reste on trouve en utilisant les conditions (3.43),

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^{r_0(t)} \left(\frac{1}{\gamma-1} p + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) 4\pi r^2 dr \\ &= -2\pi r_0^2 \rho_2 \left(v_2 - \frac{dr_0}{dt} \right) q \\ &= 8\pi \frac{\gamma^* - \gamma}{(\gamma-1)(\gamma^*+1)^2} \rho_1 r_0^2 \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^3 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dans la formule de la dernière ligne, la perte q n'est plus présente car nous avons utilisé les relations (3.40) et (3.43) et nous avons exprimé C en fonction de γ^* à l'aide de (3.41). Comme, on a $\gamma^* < \gamma$, il ressort que la dérivée de E est toujours négative et le RSN perd donc de l'énergie. De plus, le refroidissement est maximal lorsque le coefficient γ^* est donné par $\gamma^* = 1$ et pour la dérivée de l'énergie, on obtient dans ce cas,

$$\frac{dE}{dt} = -2\pi \rho_1 r_0^2 \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^3 \quad (3.45)$$

Comme nous l'avons fait pour le calcul de l'énergie totale du RSN de la solution de Sedov-Taylor (3.34), on peut montrer que l'énergie totale du reste est,

$$E(t) \propto t^{5\alpha-2} \quad (3.46)$$

Lorsque $\alpha < 2/5$ on constate alors que l'énergie diminue au cours du temps en accord avec le signe de la dérivée (3.44). Cette propriété résulte aussi du fait que les transformations (3.26) de la solution de Sedov-Taylor ne sont plus valides sauf pour le cas où $\gamma^* = \gamma$ où l'on retrouve $\alpha = 2/5$.

3.3.2 Formalisme et solution du problème de Barenblatt

Pour mieux comprendre ce qu'il se passe dans le cas d'une perte d'énergie, nous allons considérer comme condition initiale un dépôt d'énergie E_0 dans

une boule de rayon r_i fini, ce qui nous permet de définir les deux nombres sans dimension,

$$\xi = r \left(\frac{E_0 t^2}{\rho_1} \right)^{-1/5}, \quad \eta = r_i \left(\frac{E_0 t^2}{\rho_1} \right)^{-1/5} \quad (3.47)$$

La quantité ξ correspond à celle qu'on obtient en combinant (3.11) et (3.12) dans l'onde de souffle de Sedov-Taylor tandis que η prend en compte la finitude du volume dans lequel l'énergie est délivrée. Un degré de liberté supplémentaire apparaît donc dans ce problème avec refroidissement au bord. Comme on s'intéresse à la phase asymptotique intermédiaire du problème, lorsque t devient grand, les variables ξ et η tendent toutes les deux vers zéro. Dans le cas présent, la similarité n'est pas complète (voir le cas de la formule (3.8) dans la section 3.1) nous ne pouvons plus utiliser la variable auto-semblable de la SAS de Sedov-Taylor provenant de l'analyse dimensionnelle (3.11) pour résoudre le problème. Nous allons alors chercher une similarité du second type de la forme,

$$\frac{\xi}{\eta^\beta} = \frac{r}{Bt^\alpha} \quad (3.48)$$

où β est un exposant positif qui dépend de γ^* et γ et B est une constante dont la dimension est telle que Bt^α soit homogène à une longueur. Nous allons voir un peu plus loin la façon dont il faut déterminer ces deux quantités. Mais revenons à la formule (3.48). D'après les définitions données par (3.47), on trouve que la constante B et l'exposant α sont respectivement donnés par :

$$B = r_i^\beta (E_0 / \rho_1)^{(1-\beta)/5} \quad (3.49)$$

$$\alpha = 2(1 - \beta)/5 \quad (3.50)$$

L'expression de B est immédiate et la deuxième égalité (3.50) permet de calculer l'exposant β en fonction de l'exposant α et on remarque que pour le cas de Sedov-Taylor, on a $\beta = 0$. Puisque la valeur de B est constante on peut en déduire immédiatement que si on fait tendre le rayon r_i vers zéro dans l'équation (3.49), on constate en utilisant (3.50) qu'il faut que l'énergie E_0 tende vers l'infini pour un RSN qui décélère avec $\alpha < 2/5$. Dans le cas où $\beta = 0$, on retrouve le problème de Sedov-Taylor où l'énergie est finie

3.3. Solution auto-semblable de Barenblatt

et est déposée de manière ponctuelle. Le membre de droite de l'équation (3.48) définit immédiatement la variable auto-semblable à une constante multiplicative près. Celle-ci va être maintenant notée ζ , mais conformément à (3.25), nous l'écrivons,

$$\zeta = \frac{r}{A_B t^\alpha} \quad (3.51)$$

où la constante A_B satisfait $A_B = \beta_B B$ (indice B pour Barenblatt) avec β_B défini de manière analogue à β_{ST} apparaissant dans l'équation (3.11) afin que la variable auto-semblable soit égale à 1 au front du choc. On décompose donc les grandeurs hydrodynamiques sous la nouvelle forme,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\gamma^* + 1}{\gamma^* - 1} \rho_1 R(\zeta, \gamma, \gamma^*) \\ v &= \frac{2\alpha}{(\gamma^* + 1)} \frac{r}{t} V(\zeta, \gamma, \gamma^*) \\ p &= \rho_1 \frac{2\alpha^2}{(\gamma^* + 1)} \frac{r^2}{t^2} P(\zeta, \gamma, \gamma^*) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Cette décomposition est identique à celle donnée par (3.26) sauf que le coefficient γ a été remplacé par γ^* et nous avons $V(1, \gamma, \gamma^*) = R(1, \gamma, \gamma^*) = P(1, \gamma, \gamma^*) = 1$. Pour obtenir les nouvelles équations différentielles de l'écoulement, on introduit (3.52) dans les équations de conservation (3.13), (3.14) et (3.15) et on obtient [30], [79] :

$$\left[\frac{2V - (\gamma^* + 1)}{2R} \right] \frac{dR}{d \ln \zeta} + \frac{dV}{d \ln \zeta} = -3V \quad (3.53)$$

$$\left[\frac{2V - (\gamma^* + 1)}{V} \right] \frac{dV}{d \ln \zeta} + \frac{\gamma^* - 1}{RV} \frac{dP}{d \ln \zeta} = \left(\frac{\gamma^* + 1}{\alpha} - 2V \right) - 2 \frac{\gamma^* - 1}{RV} P \quad (3.54)$$

$$\left[\frac{2V - (\gamma^* + 1)}{2P} \right] \frac{dP}{d \ln \zeta} - \gamma \left[\frac{2V - (\gamma^* + 1)}{2R} \right] \frac{dR}{d \ln \zeta} = \left(\frac{\gamma^* + 1}{\alpha} - 2V \right) \quad (3.55)$$

On remarque que la structure de ce système d'EDO est similaire à celui du cas de Sedov-Taylor (3.27), (3.28) et (3.29) sauf que le coefficient au

front du choc devient γ^* et dans l'équation (3.55) on a simultanément γ et γ^* . Lorsque l'on fait un développement asymptotique des trois EDO, (3.53), (3.54) et (3.55) proche de l'origine (ζ tend vers 0) on trouve,

$$\begin{aligned}
 R &= R_0 \zeta^s + O(\zeta^{2s+2}), & s &= \frac{6(1-\alpha)}{\alpha(2+3\gamma)-2} \\
 V &= V_0 + O(\zeta^{s+2}), & V_0 &= \frac{\gamma^*+1}{2\gamma} + \frac{(2-5\alpha)(\gamma^*+1)}{6\alpha\gamma} \\
 P &= P_0 + O(\zeta^{s+2})
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

On remarque que la connaissance des trois paramètres R_0 , P_0 et α pour γ^* donné détermine totalement la solution depuis le centre jusqu'au front du choc. Si on intègre numériquement les EDO pour un α donné, la solution partant du front du choc ne passera pas a priori par l'origine tel que décrit par le développement asymptotique (3.56). Seulement pour une unique valeur de α , la solution va passer par les 2 points ($\zeta = 0$ et $\zeta = 1$). Bien que les valeurs de R_0 et P_0 ne soient pas déterminées, les expressions de l'exposant et de V_0 sont des contraintes suffisantes pour trouver la solution cherchée. Ce problème sur la recherche de α tel que la solution passe en ces points constitue ce que l'on appellera le problème aux valeurs propres non linéaire. Cette indétermination sur l'exposant α de la variable auto-semblable vient du fait que la SAS provient d'une similarité incomplète, contrairement au cas plus simple de Sedov-Taylor. Ce point a déjà été mentionné dans la section 3.1 juste après l'équation (3.9). On présentera plus loin une autre manière de résoudre ce même problème aux valeurs propres par des considérations énergétiques découlant d'une intégrale d'énergie qui est établie pour la première fois ici. Néanmoins, pour l'instant, nous allons résoudre ce problème numériquement et trouver la solution qui partant de $\zeta = 1$ obéit à (3.56). Le système d'EDO est résolu par une méthode de Runge et Kutta d'ordre 4 [80] pour une valeur initiale du paramètre α proche de $2/5$, les valeurs de γ et γ^* étant fixées par ailleurs. Puis à chaque itération de α on cherche à satisfaire (3.56). Le tableau 3.1 donne les valeurs de l'exposant α en fonction du coefficient γ^* pour un indice adiabatique à l'intérieur du RSN valant $\gamma = 5/3$.

TABLE 3.1 – Valeur de l'exposant α pour différentes valeurs de l'indice adiabatique γ^* au front du choc pour $\gamma = 5/3$.

γ^*	1.01	1.05	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	5/3
α	0.288	0.297	0.309	0.328	0.345	0.361	0.376	2/5

On remarque que la valeur de α tend vers $2/7 \simeq 0.286$ lorsque γ^* tend vers 1. Dans le cas général Barenblatt indique que l'on a en effet $\alpha = 2/(2 + 3\gamma)$ pour un indice adiabatique quelconque ce qui est en effet le cas pour une coquille infiniment fine poussée par une bulle chaude qui ne perd pas d'énergie par radiation (voir la démonstration dans l'introduction à la section 1.2). Si on se réfère au développement asymptotique (3.56), on remarque que l'exposant s tend vers l'infini lorsque α tend vers $2/(2 + 3\gamma)$. Nous avons déjà mis en avant cette valeur de l'exposant dans notre présentation du chapitre 1. On peut aussi noter que la vitesse V_0 tend vers 1 lorsque le coefficient γ^* tend vers 1. Ceci correspond à une vitesse physique $v(r, t) = \alpha r/t$ et la configuration tend vers une coquille infiniment fine et de densité infinie, poussée par une bulle chaude adiabatique. Cette valeur de la vitesse mérite qu'on s'y attarde. Si on considère une particule située à une position $\zeta = \text{constante}$ dans l'espace auto-semblable, alors sa position $r(t)$ dans l'espace physique va obéir à $r(t) \propto t^\alpha$ d'après l'équation (3.51). On déduit donc que sa vitesse $v = dr(t)/dt$ vaut $v = \alpha r/t$, ce qui correspond exactement à la vitesse fluide trouvée juste avant. En conséquence, les particules de matière suivent exactement le mouvement auto-semblable du bord interne et du bord externe de la coquille et le bord interne est une discontinuité de contact (le bord externe qui est le front du choc n'en est pas une car il y a un flux de matière à l'interface). Nous allons avoir l'occasion de retrouver cette propriété plus loin lorsqu'on va prendre en compte le refroidissement en volume. Par ailleurs, la valeur de l'exposant $\alpha = 2/(2 + 3\gamma)$ correspond à la formule de McKee & Ostriker [20] pour l'expansion asymptotique radiative du reste aussi appelée "Pressure-Driven Snowplow". On retrouve aussi cette même loi d'expansion pour le modèle de Petruk & Bandiera [29]. Ce modèle est aussi celui d'une coquille infiniment fine et dense poussée par une bulle chaude adiabatique et il constitue donc un cas limite du problème de Barenblatt.

On peut aller plus loin que ne le fait Barenblatt et analyser le comportement de la solution pour $\gamma^* - 1 \ll 1$ avec $\epsilon \equiv (\gamma^* - 1)/2$. Cette approche va permettre de trouver la formule de l'exposant α pour $\gamma^* \rightarrow 1$. Pour simplifier l'analyse nous allons redéfinir des nouvelles variables auto-semblables de densité n , vitesse u et température z comme : $\rho = \rho_1 n(\zeta)$, $v = (\alpha r/t)\zeta u(\zeta)$ et $p/\rho = kT/m = (\alpha^2 r^2/t^2)\zeta^2 z(\zeta)$ respectivement. Dans cette nouvelle écriture, les EDP (3.13), (3.14) et (3.15) se réduisent au système de deux EDO,

$$\begin{aligned}\frac{du}{d \ln \zeta} &= \frac{(1-u)u(\alpha u - 1) + z(2\alpha + 3\alpha\gamma u - 2)}{\alpha((u-1)^2 - \gamma z)} \\ \frac{dz}{d \ln \zeta} &= \frac{z(1-u)(u(\alpha + \gamma + \alpha\gamma(2u-3) - 3) + 2) + 2z(\alpha + \alpha\gamma(u-1) - 1)}{\alpha(u-1)((u-1)^2 - \gamma z)}\end{aligned}\quad (3.57)$$

et les conditions aux bord (3.43) deviennent,

$$\begin{aligned}u(1) &= \frac{2}{(\gamma^* + 1)} \\ z(1) &= \frac{2(\gamma^* - 1)}{(\gamma^* + 1)^2}.\end{aligned}\quad (3.58)$$

Pour réduire le système de trois EDP aux deux équations (3.57), on peut utiliser les trois EDO écrites avec les nouvelles variables dépendantes $n(\zeta)$, $u(\zeta)$ et $z(\zeta)$ (voir les équations (3.76)-(3.78) dans la section suivante avec le paramètre $\lambda = 0$ et $\zeta \equiv \xi$) en remplaçant le terme $n^{-1}dn/d\xi$ de l'équation (3.76) dans l'équation (3.77). Pour $\epsilon \ll 1$ on trouve pour les conditions aux limites $u(1) \simeq 1 - \epsilon$ et $z(1) \simeq \epsilon$. De plus on sait d'après le développement asymptotique de la solution proche de $\zeta = 0$ (3.56) que $u(0) = 2(1-\alpha)/(3\alpha\gamma)$ et que $z(\zeta) \sim \zeta^{-s}$, $s \propto 1/\epsilon$ devient grand. On définit alors la nouvelle variable x telle que $1 - \zeta = \epsilon x$ (pour $\zeta = 1$, on a $x = 0$ et pour $\zeta = 0$ il faut $x \rightarrow +\infty$) et on fait alors le développement limité $u(x) = 1 - \epsilon u_1(x)$ et $z(x) = \epsilon z_1(x)$. D'après le comportement de la solution proche $\zeta = 0$ (3.56) on définit pour l'exposant α le développement limité $\alpha = 2/(2 + 3\gamma) + \epsilon\alpha_1$. Les deux EDO (3.57) à l'ordre dominant deviennent,

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dx} &\simeq \frac{3u_1}{2z_1} \\ \frac{dz_1}{dx} &\simeq \frac{6z_1 - 3(\gamma - 1)u_1}{2u_1}\end{aligned}\quad (3.59)$$

et en utilisant (3.58) et $u(0) = 2(1 - \alpha)/(3\alpha\gamma)$ on trouve les conditions aux limites,

$$\begin{aligned}
 u_1(x=0) &= 1 \\
 z_1(x=0) &= 1 \\
 u_1(x \rightarrow \infty) &= \frac{\alpha_1(2+3\gamma)^2}{6\gamma}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Le système d'équations (3.59) possède l'intégrale première,

$$z_1 = \frac{\gamma u_1}{2 - (2 - \gamma)u_1^\gamma} \tag{3.61}$$

On en déduit l'équation,

$$u_1(\infty) = 2^{1/\gamma}(2 - \gamma)^{-1/\gamma} = \frac{\alpha_1(2+3\gamma)^2}{6\gamma} \tag{3.62}$$

à partir de laquelle on peut trouver l'expression de α_1 . En reportant cette expression dans le développement limité de l'exposant α , on trouve l'équation asymptotique,

$$\alpha(\gamma^*) \simeq \frac{2}{2+3\gamma} \left(1 + \frac{3(\gamma^* - 1)}{2} \frac{2^{1/\gamma} \gamma (2 - \gamma)^{-1/\gamma}}{2+3\gamma} + \dots \right) \tag{3.63}$$

Cette expression analytique permet de retrouver avec une très bonne précision les valeurs du tableau 3.1 pour $\gamma = 5/3$ lorsque γ^* est proche de 1.

La résolution du problème non linéaire aux valeurs propres nous a permis de trouver la relation entre l'exposant α (appelé aussi paramètre de décélération) de l'onde de souffle et l'indice adiabatique γ^* au front du choc tout en déterminant dans le même temps les profils hydrodynamiques dans le reste. Sur la figure 3.3 où sont tracés les profils hydrodynamiques pour $\gamma = 5/3$ et $\gamma^* = 1.2$, on peut remarquer que le profil de densité est plus ramassé au niveau du front du choc que celui de Sedov-Taylor et la coquille devient plus mince. Ce résultat est attendu pour un solution de RSN avec refroidissement. De plus, le profil de vitesse est similaire à celui de Sedov-Taylor mais la pente de celle-ci augmente lorsque l'on se rapproche du centre du RSN. Enfin le profil de pression diminue comparé à celui de Sedov-Taylor où la pression plateau est plus basse. En conséquence, la coquille est moins

poussée dans le cas avec refroidissement et le reste décélère comme $r_0(t) \propto t^\alpha$ avec $\alpha = 0.328 < 2/5$.

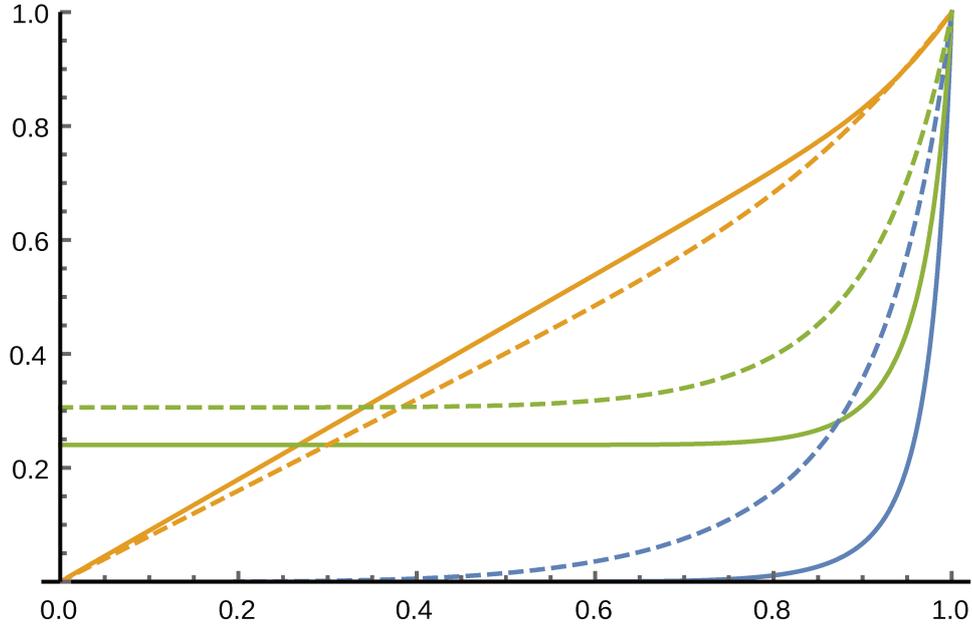


FIGURE 3.3 – Profils renormalisés au front du choc de densité ρ/ρ_2 (en bleu), de vitesse v/v_2 (en orange) et de pression p/p_2 (en vert) en fonction de $\xi = r/r_0$ pour $\gamma = 5/3$ et $\gamma^* = 1.2$. La solution de Sedov-Taylor est tracée de la même manière pour $\gamma = 5/3$ en tirets.

Cependant la similarité incomplète de ce problème implique que la constante A_B dans (3.51) reste indéterminée et dépend des conditions initiales du problème. Pour calculer ce paramètre et résoudre totalement le système, il faudrait intégrer numériquement les équations depuis la phase transitoire non auto-semblable jusqu'à la phase asymptotique intermédiaire où la solution devient auto-semblable. En effet la connaissance de A_B permet de déterminer totalement le rayon du reste et de relier celui-ci à l'énergie initiale déposée E_0 dans un rayon r_i . Dans des simulations conduites par Andrushchenko et ses collègues [81], les auteurs déposent une énergie initiale dans un milieu de densité homogène dont la solution converge vers une solution de Sedov-Taylor, puis, à un instant t_0 , ils enclenchent le refroidissement au front du choc en changeant l'indice adiabatique au niveau du front du choc dans les relations de saut. Après une phase de transition, les auteurs observent que la solution converge vers une forme auto-semblable qui n'est autre que celle résolue en posant le problème aux valeurs propres et on peut alors déduire

numériquement la constante β_B ($A_B = \beta_B B$) qui dépend des conditions initiales de la simulation.

3.3.3 Bilan d'énergie pour la solution de Barenblatt

Comme pour la relation algébrique (3.30) de Sedov-Taylor obtenue par un bilan d'énergie, nous allons maintenant effectuer la même démarche pour la solution de Barenblatt. En effet, on peut calculer le bilan d'énergie d'une boule de rayon r_2 centré sur le lieu de l'explosion. En intégrant l'équation de conservation de l'énergie (3.16) on obtient,

$$\int_0^{r_2} \partial_t e_{tot} r^2 dr + \int_0^{r_2} \frac{1}{r^2} \partial_r (v(e_{tot} + p)) r^2 dr = 0 \quad (3.64)$$

où $e_{tot} = p/(\gamma - 1) + \rho v^2/2$ est l'énergie totale par unité de volume. Or au facteur 4Π près, la dérivée par rapport à t de l'énergie (on utilise la formule (3.44) avec les relations (3.52)) contenue dans cette coquille est donnée par,

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r_2} e_{tot} r^2 dr = \frac{2\alpha^2 \rho_1}{\gamma^* + 1} (2 - 5\alpha) A^5 t^{5\alpha-3} \int_0^{\zeta_2} \left(\frac{P}{\gamma - 1} + \frac{RV^2}{\gamma^* - 1} \right) \zeta^4 d\zeta \quad (3.65)$$

D'autre part, on peut écrire cette même équation de la manière suivante,

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r_2} e_{tot} r^2 dr = \int_0^{r_2} \partial_t e_{tot} r^2 dr + \left[r^2 \frac{dr}{dt} e_{tot} \right]_0^{r_2} \quad (3.66)$$

En injectant l'équation (3.64) dans l'équation (3.66) on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r_2} e_{tot} r^2 dr = \left[r^2 e_{tot} \left(\frac{dr}{dt} - v \right) - r^2 p v \right]_0^{r_2} \quad (3.67)$$

Puis en combinant (3.65), (3.66) et (3.67), on obtient l'équation intégralgébrique qui généralise l'équation d'énergie (3.30) de la solution de Sedov-Taylor, pour un refroidissement au niveau du front du choc,

$$\frac{P}{\gamma - 1} \left[2\gamma V - (\gamma^* + 1) \right] + \frac{RV^2}{\gamma^* - 1} \left[2V - (\gamma^* + 1) \right] = H \quad (3.68)$$

où H est une intégrale donnée par,

$$H(\zeta) = (\gamma^* + 1) \frac{(2 - 5\alpha)}{\alpha \zeta^5} \int_0^\zeta \left(\frac{1}{\gamma - 1} P + \frac{1}{\gamma^* - 1} R V^2 \right) \zeta^4 d\zeta \quad (3.69)$$

et où dans cette formule finale, la position arbitraire auto-semblable a été remplacée par ζ . Ce résultat est nouveau et constitue une généralisation de l'équation (3.30) que l'on peut retrouver en posant $\gamma^* = \gamma$ (et $\alpha = 2/5$) ce qui implique $H = 0$. Dans le cas de l'onde de souffle de Sedov-Taylor, c'est l'existence de (3.68) sous sa version (3.30) qui a permis d'intégrer analytiquement les EDO (3.27)-(3.29). En ce qui concerne l'onde de souffle de Barenblatt, l'existence de (3.68) ne nous a pas permis d'intégrer les EDO (3.53)-(3.55) autrement que numériquement, à ce jour. La question est de savoir si (3.68) pourrait conduire à la solution analytique. La réponse ne nous apparaît pas claire. Néanmoins, nous pensons que ce point mériterait des investigations supplémentaires, mais elles sortent du cadre de cette thèse.

3.3.4 Application du modèle de Barenblatt pour les ondes de choc avec ionisation

Nous avons aussi vu dans le chapitre précédent sur les chocs avec ionisation que le choc peut être approximé par les relations de Rankine-Hugoniot avec deux indices adiabatiques différents pour le milieu choqué et non choqué. On peut alors généraliser le domaine d'application du modèle de Barenblatt à une onde de souffle qui ionise le MIS. On sait que les effets d'ionisation du MIS ont pour rôle de pomper de l'énergie au choc afin d'ioniser le milieu ambiant. Cette perte d'énergie revient donc aussi à baisser l'indice adiabatique γ^* du milieu choqué, ainsi que nous l'avons montré dans le chapitre 2. Pour un RSN en phase tardive, nous avons vu que l'indice adiabatique effectif possède un minimum en $\gamma^* = 1.045$ qui correspond à un taux de compression du choc de 45.5 lorsque le nombre de Mach atteint la valeur critique $M_{crit} = 40$ (voir (2.34)). Dans cette sous-section, nous avons alors injecté cette valeur de γ^* dans les équations de Barenblatt et la résolution du problème aux valeurs propres conduit à $\alpha = 0.297 \simeq 0.3$. Cette valeur est donc environ 25% plus faible que celle obtenue pour l'onde de souffle de Sedov-Taylor. L'expansion du RSN est donc fortement ralentie dans sa phase tardive à cause de la ponction d'énergie utilisée pour ioniser. Nous retrouverons cette valeur de α plus loin dans ce chapitre ainsi que dans le chapitre 4 lorsque les pertes en volume seront prises en compte. L'approche de Barenblatt permet d'aller plus loin et de compléter le modèle d'ionisation du chapitre 2. Puisque γ^* et

3.4. Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume

α sont maintenant connus (on a, par ailleurs, $\gamma = 5/3$), on a en même temps les profils spatiaux auto-semblables dans le RSN. La densité, la vitesse et la pression sont tracées sur la figure 3.4. On remarque que le rapport des pressions p/p_2 tend vers la valeur 0.2 au lieu de 0.3 pour le cas de Sedov-Taylor (voir la figure 3.2). La vitesse est toujours linéaire mais le profil de densité devient beaucoup plus ramassé proche du front du choc. La coquille devient donc fine et dense à cause de l'énergie utilisée pour ioniser.

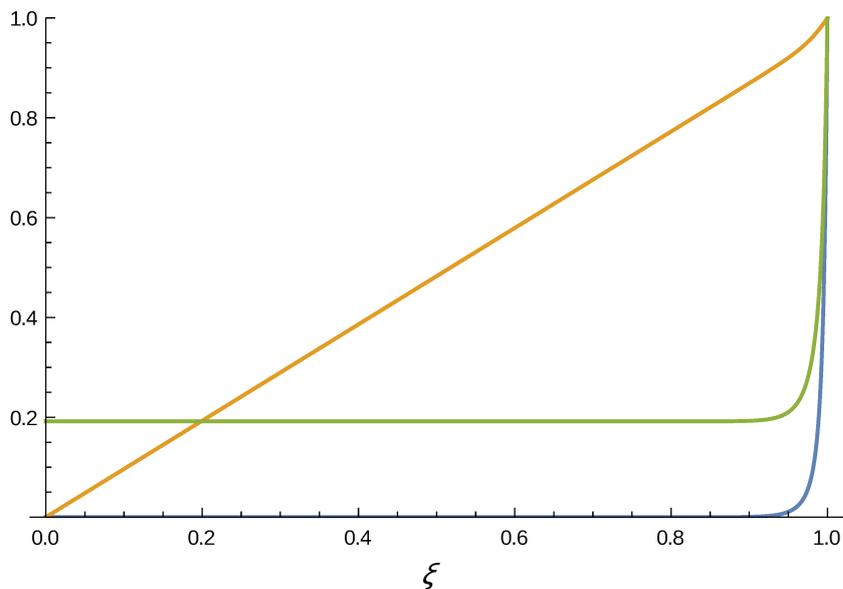


FIGURE 3.4 – Profils renormalisés au front du choc de densité ρ/ρ_2 (en bleu), de vitesse v/v_2 (en orange) et de pression p/p_2 (en vert) en fonction de $\xi = r/r_0$.

3.4 Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume

Nous allons maintenant introduire un nouveau modèle. Comme pour le modèle de Barenblatt du paragraphe précédent, on généralise le problème de l'explosion forte de Sedov-Taylor à une onde de souffle qui perd de l'énergie par refroidissement. Mais cette fois-ci, les pertes d'énergie ne seront plus concentrées dans les conditions aux limites au front du choc mais pourront agir à l'intérieur du reste. Le choc quant à lui sera supposé adiabatique comme pour le cas de Sedov-Taylor. Nous allons voir que cette modification va aussi entraîner un changement dans le comportement de la solution qui,

naturellement, ne va plus suivre une expansion de Sedov-Taylor, mais, de plus, nous avons une gamme de variation de α plus large que celle donnée dans le tableau 3.1.

3.4.1 Equations générales et formalisme auto-semblable

Dans ce modèle, nous allons toujours considérer la propagation d'un choc sphérique fort dans le MIS de densité homogène ρ_1 . Le RSN découle alors de la déposition instantanée d'une grande quantité d'énergie E_0 dans un petit volume dans le MIS. On suppose que le RSN perd de l'énergie par pertes radiatives en volume qui sont modélisées par une fonction de refroidissement Λ définie comme une énergie par unité de volume et de temps. Dans le cas général, ce refroidissement dépend du temps, de la densité et de la température dans le RSN. Les équations de conservations hydrodynamiques à une dimension en coordonnées sphériques pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie sont (voir les équations (3.13)-(3.15)),

$$\partial_t \rho + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho v) = 0, \quad (3.70)$$

$$\partial_t v + v \partial_r v + \frac{1}{\rho} \partial_r p = 0, \quad (3.71)$$

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + e \right) + \frac{1}{r^2} \partial_r \left[r^2 v \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + e + p \right) \right] = -\Lambda, \quad (3.72)$$

où l'énergie interne par unité de volume e est donnée par l'équation d'état du gaz parfait $(\gamma - 1)e = p = \rho kT/m$ avec m la masse moyenne par particule (on gardera à l'esprit que dans la section 3.2.3 - voir équation (3.16) - e représentait l'énergie interne par unité de masse). Contrairement à (3.16), l'équation d'énergie comporte un terme Λ qui correspond à l'énergie perdue par refroidissement. Pour $\Lambda = 0$ et en utilisant l'équation du gaz parfait, (3.72) se réduit à (3.15). Dans ce modèle, contrairement au modèle de Barenblatt, nous allons considérer des conditions aux limites d'un choc adiabatique fort données par les relations de Rankine-Hugoniot (voir (3.18)),

$$\rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1, \quad v_2 = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 D^2. \quad (3.73)$$

Nous allons à présent, comme pour les sections précédentes, chercher des solutions auto-semblables à ce problème. Une fois de plus, le formalisme

auto-semblable va nous permettre de réduire le système d'EDP à un système d'EDO mais cela ne pourra se faire qu'au prix de conditions spéciales sur la dépendance du refroidissement dans le RSN. On notera $r_0(t) = At^\alpha$ le rayon du front du choc ($D = \alpha At^{\alpha-1}$), où α et A sont des constantes positives. Dans le problème de l'explosion forte avec refroidissement en volume, ces deux constantes seront des inconnues du système. En effet, de manière similaire au modèle de Barenblatt, nous allons trouver des SAS du second type [30]. On introduit alors la nouvelle coordonnée auto-semblable ξ et les quantités auto-semblables de densité $n(\xi)$, vitesse $u(\xi)$ et température $z(\xi)$ comme (ces quantités sont sans dimension),

$$r = \xi r_0(t), \quad \rho = \rho_1 n(\xi), \quad v = D\xi u(\xi), \quad kT/m = D^2 \xi^2 z(\xi). \quad (3.74)$$

On introduit aussi la pression auto-semblable $P = \xi^2 n(\xi) z(\xi)$ où $p = \rho_1 D^2 P$ ¹. Enfin on va limiter notre étude au cas d'un refroidissement uniforme spatialement, mais dépendant du temps sous la forme $\Lambda = Ct^{2\alpha-3}$ où C est une constante. L'exposant du temps est imposé par la structure auto-semblable de la solution. En effet d'après (3.72), la fonction de refroidissement est proportionnelle à une pression sur un temps et on trouve $\Lambda \propto D^2/t \propto t^{2\alpha-3}$. L'énergie totale $E(t)$ du RSN est donnée par,

$$E(t) = \int_0^{r_0(t)} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) 4\pi r^2 dr \propto t^{5\alpha-2} \quad (3.75)$$

Cette équation implique que le RSN perd de l'énergie lorsque le paramètre de décélération vérifie $\alpha < 2/5$.

3.4.2 Le cas d'un refroidissement homogène : Deux classes de solutions

Nous allons traiter ici le cas d'un refroidissement homogène, $\Lambda = Ct^{2\alpha-3}$. Ce choix vient de la nécessité d'étudier le rôle du refroidissement sans faire d'hypothèses particulières sur la structure des processus radiatifs dans le reste qui impliqueraient un refroidissement plus fort dans une zone spécifique à l'intérieur du RSN. Ce refroidissement peut être interprété comme la moyenne sur l'espace d'un refroidissement plus réaliste dans le RSN. En introduisant les nouvelles variables auto-semblables (3.74) dans les équations (3.70)-(3.73), on obtient le système d'EDO suivant avec les conditions aux limites,

1. Le P introduit ici n'est pas tout à fait le même que celui utilisé dans (3.26) et (3.52).

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{n}{1-u} \left(\frac{3u}{\xi} + \frac{du}{d\xi} \right), \quad (3.76)$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{u - \alpha(u^2 + 2z)}{\alpha\xi} - \frac{z}{n} \frac{dn}{d\xi} + (1-u) \frac{du}{d\xi}, \quad (3.77)$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{N_s}{\alpha\xi^3 n D_s}, \quad (3.78)$$

$$n(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad u(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \quad z(1) = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}, \quad (3.79)$$

où le numérateur N_s et le dénominateur D_s qui apparaissent dans l'équation (3.78) sont donnés par,

$$N_s = \lambda(\gamma-1) + \xi^2 n [u(u-1)(1-\alpha u) + z(\alpha(2+3\gamma u) - 2)], \quad (3.80)$$

$$D_s = (1-u)^2 - \gamma z, \quad (3.81)$$

$$\lambda = \frac{C}{\alpha^2 A^2 \rho_1}, \quad (3.82)$$

où λ est le nouveau paramètre sans dimensions qui représente le taux de refroidissement dans le RSN. Le système d'équations (3.76)-(3.78) peut être intégré numériquement pour $\xi \leq 1$ en choisissant des valeurs arbitraires α , λ et γ et en utilisant les conditions aux limites (3.79) au front du choc $\xi = 1$. Cependant, contrairement au cas de Sedov-Taylor ($\alpha = 2/5$, $\lambda \equiv 0$), l'intégration du système (3.76)-(3.79) pour des valeurs arbitraires de (α, λ) peut générer des solutions qui ne sont pas physiques. En effet, l'analyse que nous allons présenter va donner des solutions physiquement pertinentes seulement pour des couples (α, λ) dans une région de l'espace des paramètres que nous allons noter par la suite la région Σ (voir la région en gris clair de la figure 3.5) et dans les sections qui suivent, nous allons expliquer la démarche qui conduit à l'établissement de la frontière $\lambda = \lambda^*(\alpha)$.

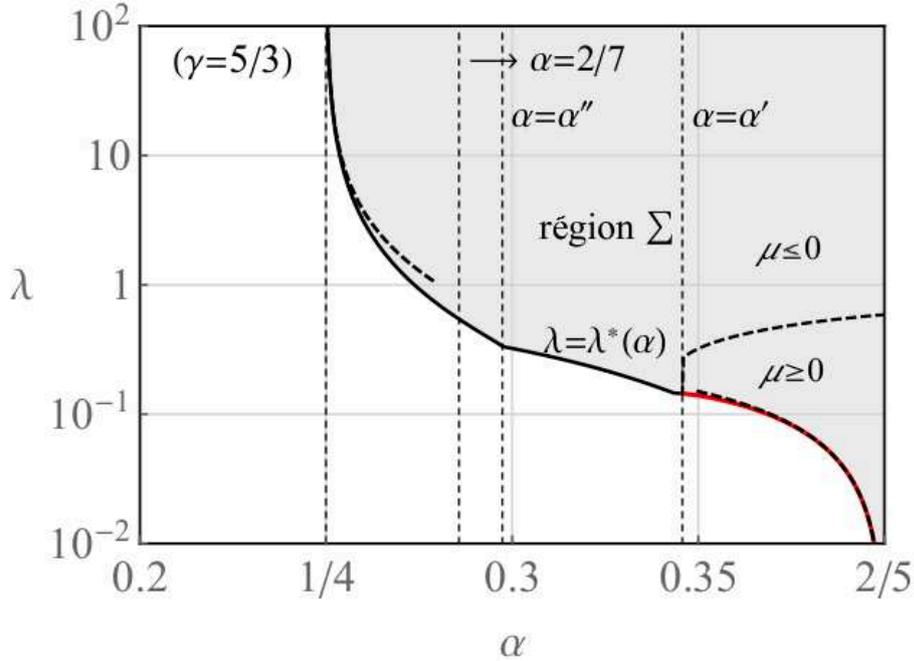


FIGURE 3.5 – Espace des paramètres Σ pour $\gamma = 5/3$ (en gris clair) avec la frontière $\lambda^*(\alpha)$ où $\alpha < \alpha'$ (trait plein noir) et $\alpha \geq \alpha'$ (trait plein rouge). Le comportement de la frontière $\lambda^*(\alpha)$ pour $\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow +\infty$ sont tracés en trait pointillés. La frontière qui sépare la région avec $\mu \geq 0$ et la région $\mu \leq 0$ (μ est défini dans (3.89) et (3.90)) dans Σ est aussi tracée en trait pointillé.

En général, pour une valeur fixée de γ , un couple $(\alpha, \lambda) \in \Sigma$ va conduire à une solution dite de type coquille, i.e., une coquille dense ($0 < \xi_B \leq \xi \leq 1$) bornée par une discontinuité de contact fluide (nous avons déjà parlé de cette notion dans la section 3.3) sur la face interne à $\xi = \xi_B$ où l'indice B est ici pour signifier la notion de bulle. En effet, comme nous le verrons plus tard dans cette section, cette coquille est poussée par la pression $p_B(t)$ d'un gaz qui constitue une bulle très chaude de rayon $R_B(t) = \xi_B r_0(t)$, et l'intérieur de cette bulle $r < R_B(t)$ n'est pas auto-semblable. La frontière de la région Σ que nous noterons $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ est définie depuis $\alpha = 1/4$ jusqu'à la valeur $\alpha = 2/5$. Nous allons voir plus loin que la valeur $1/4$ correspond à un cas limite où la solution est une coquille infiniment mince où la pression dans la bulle est nulle. Dans ce cas, la conservation de la quantité de mouvement pour la coquille donne directement la loi $r_0(t) \propto t^{1/4}$ (voir le chapitre 1). Ce modèle a initialement été introduit par Oort [31], [32] et repris par Ostriker et McKee [33]. De plus, il existe une valeur spécifique de $\alpha = \alpha'$ (qui sera déterminée plus tard) telle que pour $\alpha' < \alpha \leq 2/5$ avec $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ (courbe

rouge sur la figure 3.5), les équations (3.76)-(3.79) déterminent une solution dite de type ST (Sedov-Taylor) entre $0 \leq \xi \leq 1$, i.e., une solution régulière qui s'intègre jusqu'au centre du RSN où la densité et la vitesse auto-semblables satisfont $n(\xi) \rightarrow 0$ et $u(\xi) \rightarrow \text{constante}$ (qui est reliée à la vitesse physique par $v \propto \xi u(\xi)$) et la pression tend vers une constante au centre du RSN. L'existence des deux types de solutions (type coquille et ST) est reliée aux singularités $u - 1 = 0$ et $D_s = 0$ que présentent les équations (3.76)-(3.78). La première condition correspond à

$$v(r, t) = \alpha \frac{r}{t} \quad (3.83)$$

et la seconde à

$$[v(r, t) - \alpha \frac{r}{t}]^2 = \gamma \frac{kT(r, t)}{m} \quad (3.84)$$

L'équation (3.83) correspond à un mouvement obéissant à la loi auto-semblable tandis que (3.84) donne le point sonique : la vitesse du fluide dans le référentiel auto-semblable est égale à la vitesse du son $\sqrt{\gamma kT/m}$.

3.4.3 Analyse des équations et des types de solutions

Une intégration numérique du système (3.76)-(3.79) qui atteint la valeur $\xi = \xi_B$ ($R_B(t) \equiv \xi_B r_0(t)$) telle que $u(\xi_B) - 1 = 0$ est une solution de type coquille avec $\xi_B \leq \xi \leq 1$. En effet, la condition $u(\xi_B) - 1 = 0$ représente une discontinuité de contact fluide (interface fluide) où $v(R_B, t) - dR_B(t)/dt \propto u(\xi_B) - 1 = 0$, c'est à dire que la vitesse des particules est égale à la vitesse de déplacement de l'interface interne de la coquille. De plus, l'équation $D_s = 0$ (le dénominateur dans l'équation (3.78)) représente une ligne sonique, où la vitesse fluide relative à l'interface fluide au point qu'on appelle $\xi = \xi_s$, est égale à la vitesse du son ainsi que nous l'avons dit à la fin de la section précédente. L'intégration des équations (3.76)-(3.79) qui atteint la valeur $\xi = \xi_s$ devient singulière, $(du/d\xi)^{-1} = 0$, et à $\xi = \xi_s$ la solution devient bivaluée car ce point est un extremum de $\xi(u)$ ([64], [78]). Il existe une exception lorsqu'au même point ξ_s , on a aussi $N_s = 0$ (le numérateur et le dénominateur dans l'équation (3.78) sont tous les deux nuls au point $\xi = \xi_s$). Cette double annulation permet d'avoir une pente $du/d\xi$ finie au point sonique et cette situation se produit pour $\alpha < \alpha'$ et pour des valeurs spécifiques de ξ_s , $u_s = u(\xi_s)$, $z_s = z(\xi_s)$, $n_s = n(\xi_s)$ et $\lambda = \lambda_s$. Cette valeur particulière du taux de refroidissement va conduire (voir un peu plus loin dans

3.4. Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume

cette sous-section) à l'existence d'une portion de la frontière $\lambda^*(\alpha) \equiv \lambda_s$ dans l'intervalle $\alpha'' \leq \alpha \leq \alpha'$ tracé sur la figure 3.5.

Tout d'abord, pour une valeur fixée de α on détermine l'ensemble des cinq inconnues $(\xi_s, u_s, z_s, n_s, \lambda_s)$ en résolvant un problème aux valeurs propres : soit $\mathbf{x}(\xi) \equiv (u(\xi), z(\xi), n(\xi))$ la solution du système (3.76)-(3.79) qui vérifie $\mathbf{x}(\xi_s) = (u_s, z_s, n_s)$ et les deux conditions de compatibilité $N_s(\xi_s) = 0$ et $D_s(\xi_s) = 0$. En effet, pour une valeur fixée de $\alpha < \alpha'$, la solution spéciale $\mathbf{x}(\xi)$ peut traverser la ligne sonique pour une valeur bien spécifique du taux de refroidissement $\lambda = \lambda_s$ donnée par l'annulation de l'équation (3.80) (nous allons voir un peu plus loin comment résoudre ce problème de manière numérique). Si on suppose que l'on a trouvé cette solution et qu'elle traverse la ligne sonique au point ξ_s , on peut alors faire un développement limité de cette solution en ξ_s et on trouve,

$$\begin{aligned} u &= u_s + m(\xi - \xi_s) + \dots, \\ n &= n_s + a(\xi - \xi_s) + \dots, \\ z &= z_s + b(\xi - \xi_s) + \dots, \end{aligned} \tag{3.85}$$

où m , a et b sont les pentes en ξ_s de la vitesse, de la densité et de la température auto-semblable respectivement. Les deux conditions $N_s(\xi_s) = D_s(\xi_s) = 0$ donnent les équations algébriques suivantes,

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{(1 - u_s)^2}{\gamma}, \\ n_s &= \frac{\gamma(\gamma - 1)\lambda_s}{\xi_s^2(1 - u_s)[2\gamma\alpha u_s^2 + ((\gamma - 2) - \alpha(3\gamma - 2))u_s + 2(1 - \alpha)]}. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Ensuite, en évaluant les équations (3.76), (3.77) et (3.78) au point sonique (où les dérivées de la vitesse, densité et température sont m , a et b respectivement), on obtient trois équations algébriques supplémentaires qui peuvent être réduites en les combinant avec les équations (3.86) à une équation polynomiale du second degré pour la pente m de la vitesse auto-semblable,

$$m^2 - \frac{3 - (\gamma + 3)u_s + \alpha((4\gamma - 2)u_s^2 + (5 - 3\gamma)u_s - 3)}{\alpha\xi_s(\gamma + 1)(1 - u_s)}m + \frac{u_s(\alpha u_s - 1)(\alpha u_s(3\gamma - 1) - 2)}{\alpha^2\xi_s^2(\gamma + 1)(1 - u_s)} = 0, \quad (3.87)$$

où m est une fonction des deux inconnues u_s et ξ_s . On peut alors injecter les relations (3.85) dans les EDO (3.76) et (3.77) pour obtenir les deux constantes,

$$a(u_s, \xi_s, \lambda_s) = \frac{n_s(3u_s + m\xi_s)}{\xi_s(1 - u_s)} \quad (3.88)$$

$$b(u_s, \xi_s) = \frac{(u_s - 1)u_s + ((u_s - 1)(u_s^2 + m(u_s - 1)\xi_s) + (2 + u_s + m\xi_s)z_s)\alpha}{(u_s - 1)\xi_s\alpha}$$

où $n_s(u_s, \xi_s, \lambda_s)$ et $z_s(u_s)$ sont donnés par les relations (3.86).

L'équation (3.87) met en évidence deux trajectoires différentes de la solution qui dépendent du signe de m ($m^+ > 0$ et $m^- < 0$). On note que la pente $m^- = 0$ pour $u_s = 0$ et cette solution correspond à une solution spéciale $\alpha = \alpha'$ (nous reviendrons sur cette solution plus tard). La première trajectoire de la solution traverse le point sonique avec une pente m^+ pour $\xi > \xi_s$ et une pente m^- pour $\xi < \xi_s$ (voir la figure 3.6). Cette trajectoire spéciale est une solution de type coquille car, d'une part, les deux conditions aux bords $u(\xi_B) = 1$ à la discontinuité de contact et les équations (3.79) au front du choc $\xi = 1$ (voir la courbe noire $\lambda = \lambda_s$ sur la figure 3.6) sont satisfaites et, d'autre part, l'inégalité $\xi_s > \xi_B$ est vérifiée. La deuxième trajectoire de la solution est une solution non physique qui peut être intégrée depuis $\xi \rightarrow 0$ (où la vitesse u diverge vers $-\infty$, c'est la partie en pointillés de la courbe noire obtenue pour $\lambda = \lambda_s$) mais la solution ne vérifie pas la condition au bord au front du choc.

3.4. Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume

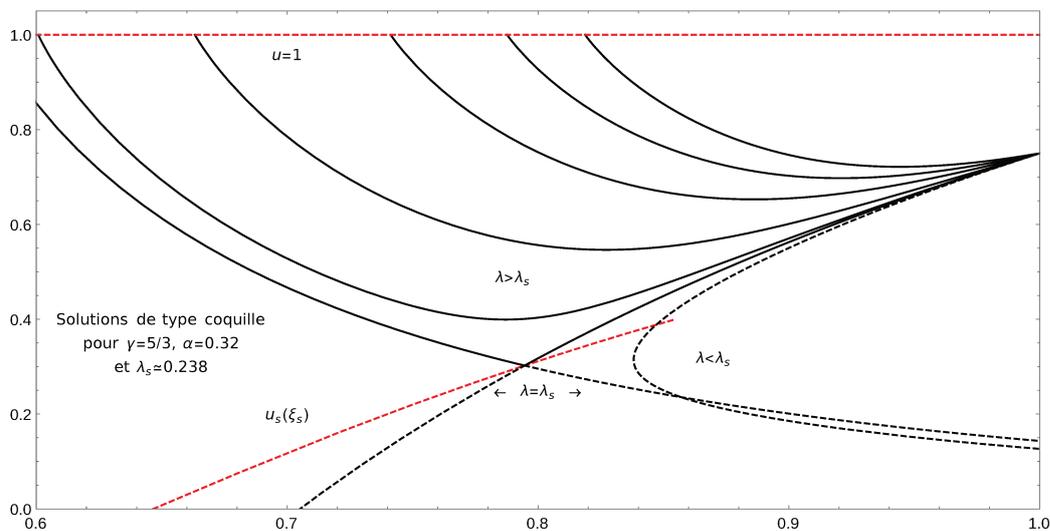


FIGURE 3.6 – La solution $u_s(\xi_s)$ du problème aux valeurs propres pour $\alpha < \alpha'$ ($\alpha' \simeq 0.346$ pour $\gamma = 5/3$) (courbe en pointillés rouges) et plusieurs profils de vitesse auto-semblable $u(\xi)$ (courbes noires) pour différentes valeurs du taux de refroidissement λ avec $\alpha = 0.32$ et $\gamma = 5/3$. La solution non physique est tracée en pointillés noirs. La droite $u = 1$ est aussi tracée en pointillés rouges.

On peut maintenant, grâce aux équations précédentes, décrire la méthode numérique qui permet d'intégrer la solution spéciale de type coquille ($\lambda = \lambda_s$) et résoudre le problème aux valeurs propres. En effet, pour chaque valeur de $\alpha < \alpha'$, on part d'un point $\xi > \xi_s$ proche de ξ_s où la solution de type coquille $\mathbf{x}(\xi)$ est donnée analytiquement suivant le développement (3.85) (en prenant la pente m^+) en fonction des paramètres ξ_s , u_s et λ_s . Si la solution est la trajectoire spéciale, elle vérifiera la condition aux limites (3.79) en $\xi = 1$. Sinon, on choisit un nouveau jeu de paramètres ξ_s , u_s and λ_s , et en utilisant une méthode de tir, on converge vers les bons paramètres (où $\mathbf{x}(1)$ vérifie (3.79)).

Finalement, en faisant varier le paramètre α on trouve $\xi_s(\alpha)$ et $\lambda_s(\alpha)$. Cet ensemble de valeurs du taux de refroidissement constitue la frontière $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ dans l'intervalle $\alpha'' \leq \alpha \leq \alpha'$. Nous verrons plus tard que $\alpha = \alpha''$ indique un changement de régime où la solution ne possède plus de point sonique qu'il faut traverser (pour la solution physique calculée dans la coquille et dans la bulle). Dans la figure 3.6, pour $\gamma = 5/3$, la courbe ($\xi = \xi_s(\alpha)$, $u = u_s(\alpha)$), ou ce qui revient à avoir $u_s(\xi_s)$ en éliminant α , est tracée en pointillés rouges. On trouve numériquement que $u_s(\alpha) = 0$ pour $\alpha = \alpha' \simeq 0.346$ (où

$\xi_s(\alpha') \equiv \xi_s^* \simeq 0.649$, $\lambda_s(\alpha') \equiv \lambda_s^* \simeq 0.145$), et il n'y a pas de solutions à ce problème aux valeurs propres pour $\alpha > \alpha'$. La courbe $u_s(\xi_s)$ croit depuis $\alpha = \alpha'$ où $u_s = 0$ jusqu'à $u_s \simeq 0.39$ (avec $\xi_s = 0.851$) où $\alpha = \alpha'' \simeq 0.297$. Sur la même figure on a tracé pour $\alpha = 0.32$ (qui correspond à $\lambda = \lambda_s \simeq 0.238$), les deux séparatrices partant du point sonique ($D_s = 0$, $N_s = 0$). La partie supersonique de ces trajectoires (courbe noire en pointillés) correspond aux solutions non physiques où l'équation $D_s \propto (v - \alpha r/t)^2 - \gamma kT/m$ devient positive et la vitesse relative devient supérieure à la vitesse du son. Pour différentes valeurs de $\lambda > \lambda_s$, nous avons tracé plusieurs solutions $u(\xi)$ partant du front du choc et arrivant à $\xi = \xi_B$ où $u(\xi) = 1$ (interface fluide). Il est clair que pour $\alpha < \alpha'$, il ne peut exister que des solutions de type coquille si $\lambda > \lambda^*(\alpha)$. D'un autre côté, en choisissant une valeur de $\lambda < \lambda^*(\alpha)$ la solution partant du front du choc devient bivaluée au point ξ car $du/d\xi \rightarrow \infty$ où $D_s = 0$ et il n'y a pas de discontinuité de contact. Ces solutions ne sont, non plus, pas physiques et c'est la raison pour laquelle, la région de la figure 3.5 située en dessous de la courbe $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ est interdite.

3.4.4 Les solutions de type coquille

Dans cette section, nous allons décrire l'écoulement à l'intérieur de la coquille. La physique de la bulle est décrite plus loin dans la section 3.4.6. Pour les solutions de type coquille mentionnées plus haut, il est important de déterminer le comportement de la solution au voisinage de la discontinuité de contact $r = R_B(t) \equiv \xi_B r_0(t)$. On notera que toute la matière accumulée par l'onde de souffle doit être contenue entre le front du choc et la discontinuité de contact. Une expansion asymptotique des équations (3.76)-(3.78) au point $\xi - \xi_B \ll 1$ donne,

$$\begin{aligned} u &= 1 + c(\xi - \xi_B) + \dots, \\ n &= a(\xi - \xi_B)^\mu + \dots, \\ z &= b(\xi - \xi_B)^{-\mu} + \dots, \end{aligned} \tag{3.89}$$

où a , b , c et μ sont des constantes (on notera que les coefficients a , b pris ici n'ont pas la même signification que ceux utilisés dans (3.85)). L'exposant μ et la constante c peuvent s'exprimer en fonction de a et b selon :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{2P_B(1-\alpha) - (\gamma-1)\lambda}{P_B(\alpha(2+3\gamma) - 2) + (\gamma-1)\lambda}, \\ c &= -\frac{P_B(\alpha(2+3\gamma) - 2) + (\gamma-1)\lambda}{\alpha\gamma\xi_B P_B}.\end{aligned}\tag{3.90}$$

où, $P_B \equiv \xi_B^2 ab$ est la pression auto-semblable, déjà définie juste après l'équation (3.74), au point $\xi = \xi_B$. On notera qu'à cause des exposants de signes opposés dans n et z , la dépendance en ξ dans P_B disparaît. Les trois constantes libres de l'expansion asymptotique sont a , b et ξ_B , qui peuvent être déterminées numériquement et qui dépendent de α et λ . Nous avons vu comment l'intégration numérique procure la valeur de ξ_B . Examinons maintenant comment on peut obtenir a et b . L'intégration fournit les valeurs n_B et z_B de la densité et de la température, respectivement, en $\xi = \xi_B$ et, par la relation $P = \xi^2 n(\xi)z(\xi)$, on déduit immédiatement P_B . Cette valeur conduit, d'une part, à une équation sur le produit ab ($ab = P_B/\xi_B^2$), et, d'autre part, à l'exposant μ à partir de (3.90). L'autre contrainte provient de la comparaison du profil numérique de densité (on pourrait aussi choisir z au lieu de n) à la loi analytique (3.89) dans la région proche de $\xi = \xi_B$. En combinant toutes ces informations on obtient, au final, toutes les quantités en fonction des paramètres α et λ . Sur la figure 3.7, nous avons tracé P_B en fonction de α pour différents taux de refroidissement λ mais pour l'instant, nous allons faire quelques remarques à propos de l'exposant μ . Tout d'abord, on remarque qu'au dénominateur le coefficient de P_B est $\alpha(2+3\gamma) - 2$ et sa nullité se produit pour $\alpha = 2/(2+3\gamma)$. On retrouve la valeur déjà obtenue à deux reprises (chapitre 1 et section 3.3 du présent chapitre). Par ailleurs, lorsque le refroidissement λ devient suffisamment intense ($2P_B(1-\alpha) < (\gamma-1)\lambda$), l'exposant μ devient négatif et il atteint sa valeur minimale, $\mu = -1$, pour $\lambda \rightarrow +\infty$. Un développement approché donne $\mu \simeq -1 + 3\gamma\alpha P_B \lambda^{-1}/(\gamma-1) + \dots$. Pour de tels refroidissements, la formule (3.89) indique que la densité va exploser sur la face interne de la coquille. Ce comportement n'est pas surprenant car lorsque λ augmente, l'épaisseur de la coquille diminue (cette propriété est illustrée un peu plus loin) et comme il faut stocker dans cette coquille toute la masse balayée par l'onde de souffle, la densité diverge. Inversement à cette divergence, la température tend vers zéro, sur la face interne. Cette propriété n'est pas surprenante, non plus. En effet, l'augmentation de λ accroît les pertes d'énergie et l'énergie thermique devient de plus en plus petite dans la coquille. Ces caractéristiques décrivant une coquille se densifiant fortement mène à la phase radiative dite PDS ("Pressure-Driven Snowplow")

de l'évolution du RSN [20]. Il existe aussi une petite partie de la région Σ (voir la figure 3.5) où l'exposant μ est positif et la solution de type coquille possède une densité convergente (tend vers zéro) et une température divergente à l'interface fluide $\xi = \xi_B$. Cette région de la figure 3.5 est localisée aux relativement faibles valeurs de λ et, en conséquence, la face interne de la coquille est peu éloignée de $\xi = 0$. Dans ces conditions, on peut se dire que la solution obtenue va avoir des similarités avec la solution de Sedov-Taylor qui présente à l'origine une densité nulle et donc également une température infinie puisque la pression présente un plateau (voir la figure 3.2).

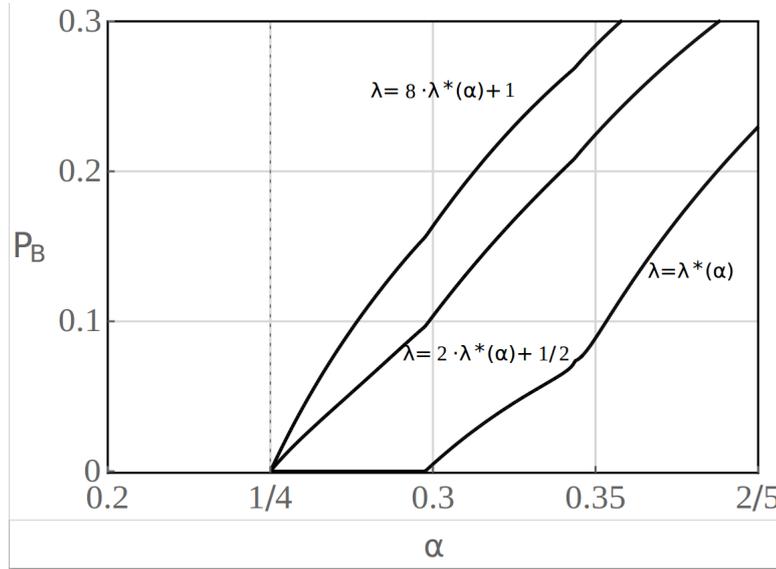


FIGURE 3.7 – La pression auto-semblable P_B en fonction du paramètre de décélération α avec $\gamma = 5/3$ pour différents taux de refroidissement λ .

Revenons à la figure 3.7. La zone à droite de la courbe $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ correspond à la zone interdite (non physique) de la figure 3.5. Tout d'abord, on peut remarquer que la pression croît avec α quelque soit la valeur de λ . De plus, pour α donné, la pression croît aussi avec la valeur du taux de refroidissement. Commentons d'abord ce qui se passe sur la courbe $\lambda = \lambda^*(\alpha)$. Le point $\alpha = \alpha' \simeq 0.346$ se manifeste par une cassure de pente de P_B . La région $\alpha' < \alpha < 2/5$ correspond aux solutions de type ST mentionnées dans la section 3.4.2 et elles vont être étudiées en détail dans la section 3.4.5. On remarque que pour les valeurs $\lambda = 0$ et $\alpha = 2/5$ (la solution de Sedov-Taylor), on trouve $P = 0.23$. En effet, cette valeur de la pression auto-semblable est bien consistante avec la valeur de $p/p_2 = \xi^2 P_{ST}$ de la figure 3.2 où l'on trouve

3.4. Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume

$p/p_2 = (\gamma + 1)P/2 \rightarrow 0.3$ lorsque $\xi \rightarrow 0$. Pour $\alpha < \alpha'$, on a des solutions de type coquille avec une traversée du point sonique, mais comme mentionné dans la section 3.4.3, ce n'est plus le cas dès que le paramètre de décélération devient inférieur à α'' ($\alpha'' \simeq 0.297$ pour $\gamma = 5/3$). Cette particularité se manifeste par une valeur nulle de P_B sur la face interne de la coquille. C'est de cette manière que la frontière $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ est déterminé sur la figure 3.5 pour $1/4 \leq \alpha < \alpha''$. On procède en fixant une valeur de α et en faisant décroître λ qui doit alors vérifier la condition $P_B(\alpha, \lambda \rightarrow \lambda^*) \rightarrow 0^+$. On notera que pour $P_B = 0$, la relation (3.90) qui donne l'exposant μ fait disparaître les paramètres α et λ , et elle donne $\mu = -1$. Cette valeur a déjà été obtenue pour $\lambda \rightarrow +\infty$, ce qui n'est pas surprenant puisque pour des refroidissements très forts on vide toute l'énergie thermique du RSN et on se retrouve avec une bulle sans pression. Dès que le taux de refroidissement satisfait $\lambda > \lambda^*(\alpha)$, la pression décroît en même temps que la valeur de α et on réalise la condition $P_B = 0$ seulement pour $\alpha = 1/4$ (voir les deux courbes $\lambda = 2\lambda^* + 1/2$ et $\lambda = 8\lambda^* + 1$ qui se coupent en ce point). Cette solution correspond à la phase Momentum-Conserving Snowplow (MCS) obtenue par Oort [31], [32], [33] déjà décrite dans le chapitre 1. Dans ce régime aucune force ne vient pousser la coquille puisque dans la bulle, la pression est nulle et, dans ces conditions, c'est la quantité de mouvement de la coquille qui se conserve au cours du temps. Deux points méritent d'être soulignés. Le premier concerne l'existence de solutions pour $P_B = 0$ mais ayant $\alpha \neq 1/4$ dès lors que $\lambda = \lambda^*(\alpha)$. Il s'agit du morceau de droite horizontale compris dans l'intervalle $1/4 \leq \alpha \leq \alpha''$. Puisque la coquille n'est poussée par aucune force, il s'agit d'un régime qu'on peut appeler MCS, mais α diffère de la valeur $1/4$ que l'on attendait, du fait que la coquille n'est plus infiniment mince. Pour le deuxième point nous revenons à la figure 3.5. On observe que la valeur $\alpha = 2/7$ qui caractérise le régime Pressure-Driven Snowplow (PDS) établi au chapitre 1 se trouve dans l'intervalle $[1/4, \alpha'']$. En conséquence, et ainsi que le montre la figure 3.7, la dynamique $r_0(t) \propto t^{2/7}$ peut être obtenue pour n'importe quelle valeur de λ plus grande que λ^* avec une pression P_B non nulle ; néanmoins, dès que $\lambda = \lambda^*(\alpha)$, on retrouve $P_B = 0$. Enfin, toujours sur la figure 3.5, on note que pour $\alpha = 1/4$, la courbe $\lambda^*(\alpha)$ tend vers l'infini. Ce comportement est consistant avec ce que nous avons dit un peu plus haut, à savoir que pour les forts refroidissements, la bulle est vidée de sa pression et on retrouve la loi MCS avec $r_0(t) \propto t^{1/4}$. Cette frontière est décrite analytiquement (courbe en tirets noirs) dans la section 3.4.7.

L'épaisseur adimensionnée de la coquille $h \equiv (r_0 - R_B)/r_0 = 1 - \xi_B$, est tracée sur la figure 3.8. Quelque soit le refroidissement, on remarque que h décroît lorsque α décroît. Cette variation n'est pas surprenante. En effet, plus

α est faible, plus l'expansion du RSN est ralentie et cette forte décélération est la signature d'une perte importante d'énergie, soit un fort refroidissement, qui s'accompagne d'une forte densification de la coquille entraînant une diminution de son épaisseur. D'ailleurs, pour α donné, la figure montre clairement que h diminue lorsque λ augmente. Nous verrons un peu plus loin (dans la section 3.4.7) que lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, l'épaisseur h peut être connue analytiquement. On trouve $h \simeq \alpha/(2\lambda)$ et cette loi est tracée en tirets noirs. De plus, sur chaque courbe, on observe deux changements de régime mis en évidence par des discontinuités de pente de $h(\alpha)$. Le premier a lieu en $\alpha \simeq \alpha''$ ($\simeq 0.297$) et dès qu'on a $\alpha > \alpha''$, la pente est moins raide que dans la région $\alpha < \alpha''$. Un changement similaire se produit au franchissement de la frontière $\alpha = \alpha'$ ($\simeq 0.346$). Par ailleurs, pour $\alpha > \alpha'$, on a $h = 1$ dans le cas $\lambda = \lambda^*(\alpha)$. D'après la définition de h , cela signifie que $R_B = 0$ et, en conséquence, la configuration s'étend depuis l'origine $r = 0$ jusqu'au bord $r_0(t)$. On verra dans la section d'après que cette propriété correspond à des solutions de type Sedov-Taylor (ST) (voir aussi la section 3.4.2). Cependant, dès que la condition $\lambda > \lambda^*(\alpha)$ est remplie, l'inégalité $h < 1$ est toujours vérifiée et la configuration globale correspond à une bulle entourée d'une coquille comme nous l'avons vu jusqu'alors.

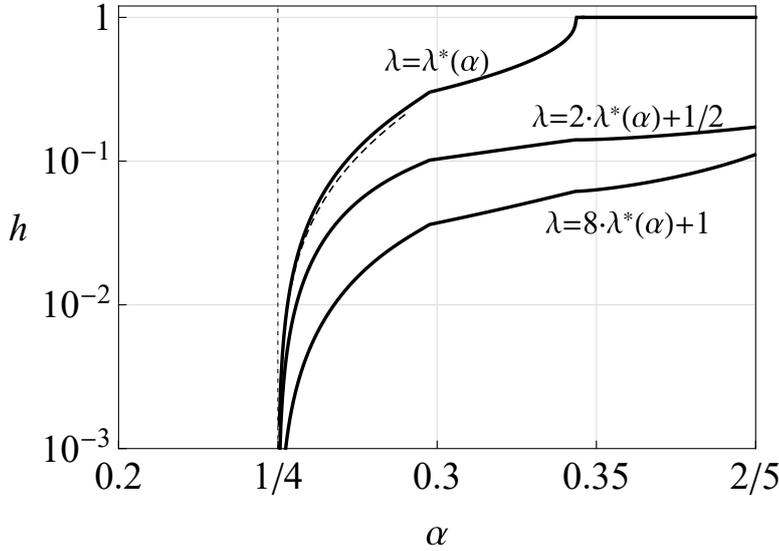


FIGURE 3.8 – L'épaisseur adimensionnée h de la coquille en fonction du paramètre de décélération α avec $\gamma = 5/3$ pour différents taux de refroidissement λ . La courbe en tirets noirs est la courbe analytique de h pour $\lambda^*(\alpha) \rightarrow +\infty$.

Nous voulons terminer cette section en donnant les caractéristiques de l'écoulement à l'intérieur de la coquille en résolvant les équations (3.76)-

(3.79) dans la région $\xi_B \leq \xi \leq 1$. Sur la figure 3.9, la densité auto-semblable n , la vitesse u , la pression P et le flux de masse $f \equiv \xi^2 n(1-u)$ dans la coquille sont tracés pour deux solutions de type coquille différentes. Le premier cas correspond à une valeur de $\alpha = 0.3 > \alpha''$ et $\lambda = 1$ où la pression auto-semblable P tend vers $P_B \simeq 0.1$ à l'interface interne de la coquille. En effet, comme $\lambda = 1$ est supérieur à $\lambda^*(\alpha)$, on s'attend à une valeur non nulle de P_B . Le second cas a été tracé pour un couple $(\alpha = 0.256, \lambda = 5)$ tel que le paramètre λ soit très proche de la frontière de la région Σ ($\lambda = \lambda^*(\alpha)$ où $\alpha < \alpha''$). Par conséquent, bien que la dérivée de la pression devienne très grande près de la face interne de la coquille, on peut montrer que la pression P_B chute à une valeur très proche de zéro. Par ailleurs, bien que la valeur $\alpha = \alpha''$ sur la figure 3.5 indique un changement de régime concernant le point sonique, la vitesse vaut bien $u = 1$ sur la face interne dans les deux cas. Egalement, dans les deux cas, l'exposant μ est négatif et, d'après (3.89), la densité diverge pour $\xi \rightarrow \xi_B$. Elle explose cependant plus vite pour $\alpha = 0.256$ que pour $\alpha = 0.3$ car pour la première valeur de l'exposant, on a $\mu \rightarrow -1$ (c'est la valeur la plus négative possible ainsi qu'il a été signalé précédemment) en vertu de (3.90) où on fait $P_B \rightarrow 0$. De plus, en comparant les deux cas de la figure 3.9, il est clair que l'augmentation du taux de refroidissement tend à changer le signe du gradient de densité jusqu'à ce que la densité devienne décroissante de manière monotone depuis la face interne jusqu'au front du choc. Dans le premier cas, on voit que dans la partie interne de la coquille, la condition $\nabla n \cdot \nabla P < 0$, ou $\nabla \rho \cdot \nabla p < 0$ est satisfaite, alors que cette condition est vérifiée dans toute la coquille dans le second cas. L'existence de cette propriété indique que la coquille du RSN pourrait être instable au sens de Rayleigh-Taylor dans sa phase radiative. Enfin, nous voulons commenter les courbes de f . Lorsque λ augmente, la courbe change de concavité, néanmoins dans les deux cas, on a $f = 1$ au front du choc. Près de la face interne de la coquille, les équations (3.89) donnent $f \sim (\xi - \xi_B)^{\mu+1}$ mais comme μ est toujours plus grand que -1 , on en déduit que $f \rightarrow 0$ pour $\xi \rightarrow \xi_B$. Cette propriété était attendue puisque la coquille est bornée intérieurement par une discontinuité de contact à travers laquelle aucun transfert de masse n'existe par définition.

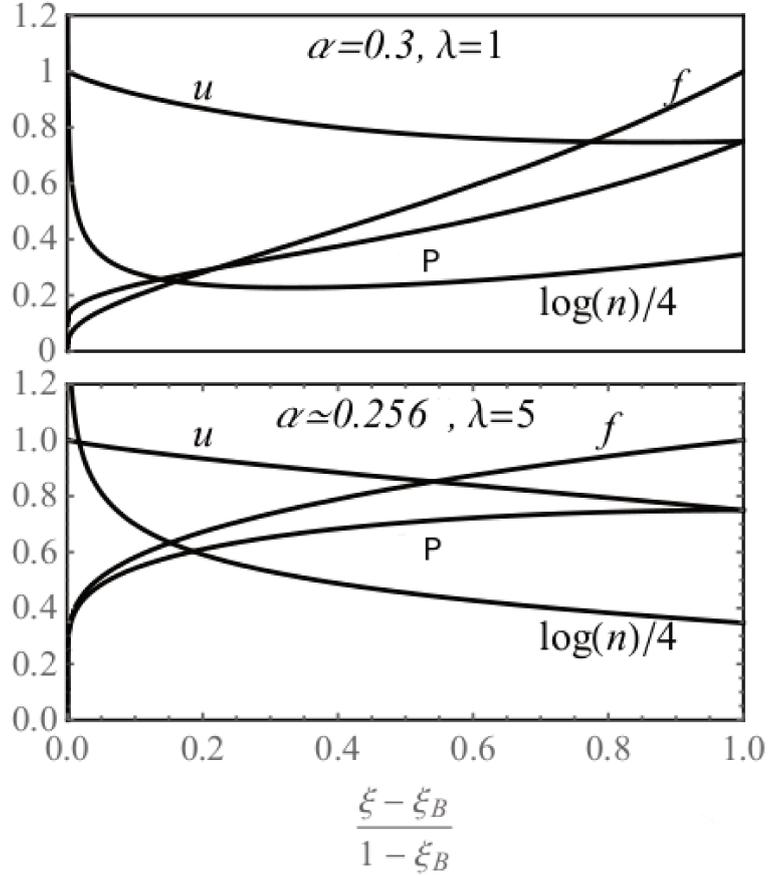


FIGURE 3.9 – Les profils de densité n , de vitesse u , de pression P et de flux de masse f en fonction de la distance depuis la discontinuité de contact $\xi = \xi_B$ jusqu'au front du choc pour différents paramètres (α, λ) dans la région Σ , et $\gamma = 5/3$.

3.4.5 Les solutions de type Sedov-Taylor

Dans cette section nous étudions la deuxième catégorie de solutions, i.e. les solutions de type Sedov-Taylor (ST), et nous allons voir que tout comme pour les SAS de Barenblatt, celles-ci remplissent la configuration depuis $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = 1$ de manière régulière. Il est important de se rappeler (voir la section 3.4.3) qu'à propos des deux trajectoires spéciales qui quittent la ligne sonique pour $\alpha \leq \alpha'$, la pente d'une d'entre elles, m^- , est négative et devient nulle pour $\alpha = \alpha'$ (voir la figure 3.10). Sur cette figure, la courbe croissante en pointillés rouges est strictement identique à celle qui est montrée sur la figure 3.6 et le point sonique $\xi_s^* \simeq 0.649$ (on rappelle également que λ vaut

$\lambda_s^* \simeq 0.145$) est clairement visible à l'endroit où cette courbe coupe l'axe des ξ .

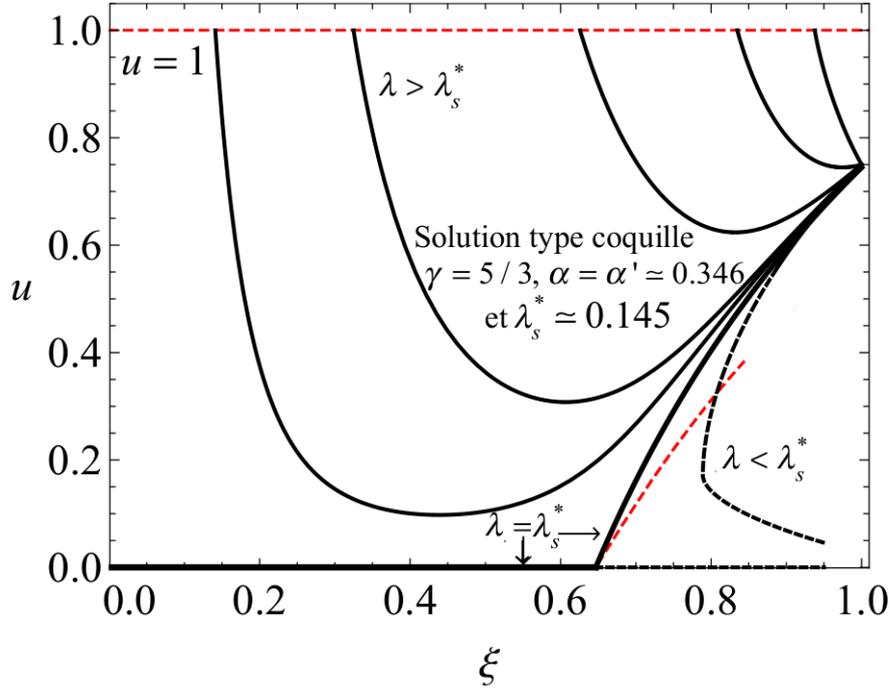


FIGURE 3.10 – La solution $u_s(\xi_s)$ du problème aux valeurs propres où $\alpha \leq \alpha'$ (courbe en pointillés rouges) et plusieurs profils de vitesses auto-semblables $u(\xi)$ (courbes noires) pour différentes valeurs du taux de refroidissement λ avec $\alpha = \alpha' = 0.346$ et $\gamma = 5/3$. La solution non physique est tracée en pointillés noirs. La droite $u = 1$ est aussi tracée en pointillés rouges.

C'est à gauche de ce point que la pente $(du/d\xi)_{\xi_s^*}$ vaut $m^- = 0$ et que $u(\xi = \xi_s^*)$ vaut aussi $u_s = 0$. Grâce aux équations (3.86), on trouve, $n_s = \lambda_s^* \gamma (\gamma - 1) / (2 \xi_s^{*2} (1 - \alpha'))$ et $z_s = \gamma^{-1}$. On peut alors séparer la solution totale en deux parties, l'une dans la région $0 \leq \xi \leq \xi_s^*$, l'autre dans la zone $\xi_s^* \leq \xi \leq 1$. Dans la partie interne $\xi \leq \xi_s^*$ de la configuration, la matière est immobile $u(\xi) = 0$. Contrairement à la section d'avant, ces caractéristiques ne définissent pas une bulle car, ici, sur la face interne de la zone $\xi_s^* < \xi < 1$, on n'a pas de discontinuité de contact ($u(\xi_s^*)$ est nul au lieu de valoir 1). Avec cette hypothèse, les EDO (3.76)-(3.78) permettent de déduire les profils de densité et de température dans la bulle. Ils s'écrivent respectivement :

$$n(\xi) = \frac{\lambda_s^* \gamma (\gamma - 1)}{2 \xi_s^{*2} (1 - \alpha')}, \quad (3.91)$$

$$z(\xi) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\xi_s^*}{\xi} \right)^2,$$

et la pression vaut,

$$P(\xi) = \frac{\lambda_s^* (\gamma - 1)}{2(1 - \alpha')}. \quad (3.92)$$

d'après la définition $P = \xi^2 n(\xi) z(\xi)$

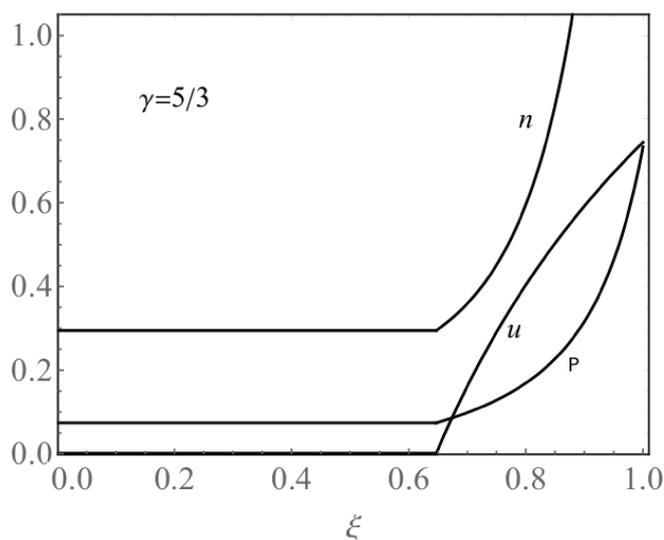


FIGURE 3.11 – La solution spéciale de type ST où $\alpha = \alpha'$, $\lambda = \lambda^*(\alpha')$ et $\gamma = 5/3$ pour la densité auto-semblable n , la vitesse u et la pression P en fonction de la coordonnée auto-semblable ξ .

Dans l'intervalle $\xi_s^* \leq \xi \leq 1$, la solution est la trajectoire $u(\xi)$ (et les variables correspondantes $n(\xi)$ et $z(\xi)$) qui partent du front du choc et arrivent à la ligne sonique avec la pente m^+ . La solution globale pour $0 \leq \xi \leq 1$ est tracée sur la figure 3.11. Bien qu'elle présente une discontinuité des dérivées en $\xi = \xi_s^*$ (ceci est permis pour les systèmes différentiels hyperboliques), elle est continue dans toute la configuration. Ce n'est pas du tout le cas pour les solutions de type coquille car la densité est discontinue en $\xi = \xi_B$ (voir la

3.4. Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume

section 3.4.6 où cela est décrit en détail). En conséquence, la valeur $\alpha = \alpha'$ marque le seuil au delà duquel on aura des solutions régulières depuis le centre jusqu'au bord du RSN et, pour cette raison, elles sont baptisées de "type Sedov-Taylor (ST)". Dès que l'on a $\alpha > \alpha'$, on va voir qu'en plus d'être continue, la solution possède également des dérivées continues dans toute la région $0 \leq \xi \leq 1$, d'où la régularité mentionnée plus haut. Pour aboutir à ces solutions, on utilise une méthode de tir comme dans la section 3.4.3, néanmoins ici les deux points extrême sont naturellement $\xi = 0$ et $\xi = 1$. La solution en $\xi = 1$ est parfaitement connue (voir l'équation (3.79)), mais il faut chercher le comportement analytique de la solution dans la région $\xi = 0$. On obtient,

$$\begin{aligned} n &= n_0 \xi^s + O(\xi^{2+2s}) \\ u &= u_0 + O(\xi^{2+s}) \\ z &= z_0 \xi^{-(2+s)} + O(1), \end{aligned} \tag{3.93}$$

où l'exposant s et la constante u_0 sont donnés par

$$\begin{aligned} s &= \frac{6P_0(1-\alpha) - 3(\gamma-1)\lambda}{P_0(\alpha(2+3\gamma) - 2) + (\gamma-1)\lambda}, \\ u_0 &= \frac{1}{\gamma} - \frac{(\gamma-1)\lambda - (2-5\alpha)P_0}{3\alpha\gamma P_0}, \end{aligned} \tag{3.94}$$

où la pression auto-semblable au centre P_0 s'écrit $P_0 = n_0 z_0$ (la dépendance en ξ disparaît). Numériquement on trouve que $s > 0$ dans l'intervalle $\alpha' < \alpha \leq 2/5$. On peut aussi remarquer que $s = 0$ et $u_0 = 0$ pour $\alpha = \alpha'$ ($P_0 = \lambda_s^*(\gamma-1)/(2(1-\alpha'))$, voir l'équation (3.92)). La méthode de tir permet finalement de déterminer en même temps que la solution de type ST, la portion de la frontière $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ tracée en rouge sur la figure 3.5. Sur la figure 3.12 on trace $u(\xi)$, pour une solution de type ST ($\gamma = 5/3$, $\alpha = 0.38$, $\lambda^*(\alpha) \simeq 0.068$), pour une solution de type coquille qui existe pour $\lambda > \lambda^*(\alpha)$ et pour quelques solutions non physiques ($\lambda < \lambda^*(\alpha)$).

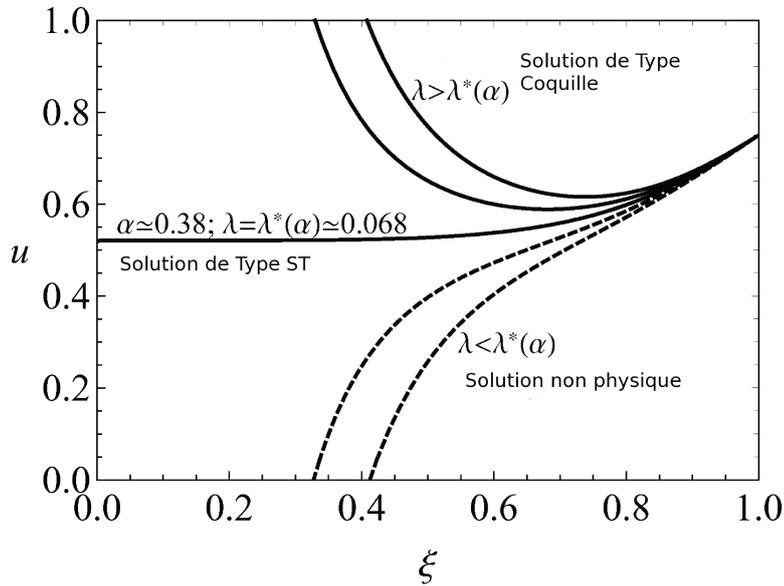


FIGURE 3.12 – Plusieurs solutions $u(\xi)$ où $\alpha = 0.38$ et $\gamma = 5/3$ pour différents taux de refroidissement.

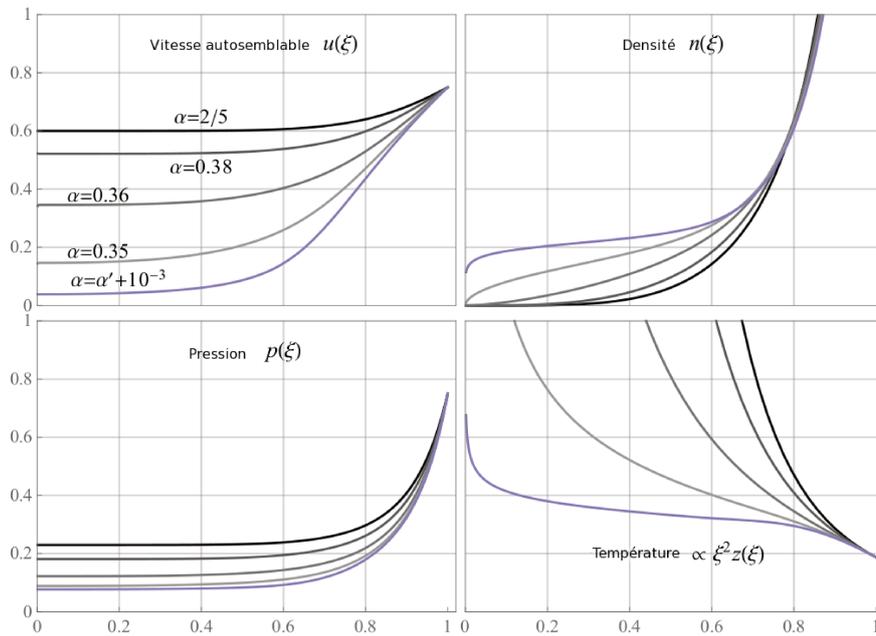


FIGURE 3.13 – Profils de type ST pour la vitesse u , la densité n , la pression P et le ratio de température $T/T_2 \equiv \xi^2 z$ en fonction de la coordonnée auto-semblable ξ pour différentes valeurs du paramètre $\alpha > \alpha'$ avec $\gamma = 5/3$.

3.4. Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume

La figure 3.13 montre les profils de vitesse $u(\xi)$, densité $n(\xi)$, pression $P(\xi)$ et le ratio de températures $T/T_2 = \xi^2 z(\xi)$ (avec T_2 la température au front du choc) pour différentes solutions de type ST. Nous avons également tracés les profils correspondant du cas de ST ($\alpha = 2/5$, $\lambda = 0$). Noter que la densité va à zéro au centre et que la température diverge en zéro mais que les deux profils tendent vers une constante au centre du RSN lorsque $\alpha \rightarrow \alpha'$ (voir la figure 3.11 pour $\alpha = \alpha'$). Par ailleurs, quand on est sur la courbe $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ - voir la figure 3.5 - une diminution de α s'accompagne d'une augmentation de λ^* . La figure 3.13 montre donc que lorsque le taux de refroidissement augmente, la matière se répartit de manière plus homogène dans le RSN et sa température décroît. Ce comportement provient du fait que le refroidissement agit aussi bien dans la zone interne chaude que dans la zone proche du front du choc.

En supposant l'existence de solutions de type ST pour $\alpha' < \alpha \leq 2/5$, l'équation d'énergie totale (3.72) avec le refroidissement en volume, peut être traitée comme nous l'avons fait dans la section 3.3.3 pour l'équation (3.16). Au lieu d'avoir l'équation (3.68) combinée avec (3.69), on obtient :

$$\alpha \xi^3 \left[\frac{P}{\gamma - 1} (\gamma u - 1) + \frac{1}{2} \xi^2 n u^2 (u - 1) \right] = \quad (3.95)$$

$$- \frac{1}{3} \lambda + (2 - 5\alpha) \int_0^\xi s^2 \left(\frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} s^2 n u^2 \right) ds.$$

Dans le cas de ST ($\alpha = 2/5$, $\lambda = 0$), on trouve l'équation d'énergie ([67], [78]) donnée par (3.30), mais elle est ici écrite sous une autre forme :

$$P_{ST} \left(\frac{P_{ST}}{\gamma - 1} (\gamma u_{ST} - 1) + \frac{1}{2} \xi^2 n_{ST} u_{ST}^2 (u_{ST} - 1) \right) = 0, \quad (3.96)$$

où l'indice "ST" fait référence à la solution de ST. Contrairement à (3.30), cette équation contient une dépendance en ξ . Celle-ci provient du fait que les grandeurs n_{ST} , u_{ST} et P_{ST} définies par (3.74) diffèrent des quantités R , V et P données par (3.26) à des puissances de ξ près et à divers coefficients près. L'équation (3.95) conduit à une autre égalité qui nous semble intéressante. En écrivant cette équation au front du choc (on fait $\xi = 1$ dans le membre de gauche de (3.95) ainsi que dans la borne supérieure de l'intégrale), il se trouve que le membre de gauche est identiquement nul et il reste :

$$(2 - 5\alpha) \int_0^1 \left(\frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \xi^2 n u^2 \right) \xi^2 d\xi = \frac{\lambda}{3}. \quad (3.97)$$

Chapitre 3. Solutions auto-semblables décrivant le refroidissement d'un reste de supernova

Cette équation ne traduit rien d'autre que l'équivalent de l'équation (3.44) où pendant dt , la variation dE de l'énergie du RSN est donnée par l'intégrale de Λ sur tout le volume. Mais (3.97) donne une autre information. Si on considère les paramètres $(2/5 - \alpha)$ et λ ayant des valeurs très faibles, alors on a $\lambda = \lambda^*(\alpha) \simeq K_1(2/5 - \alpha) + K_2(2/5 - \alpha)^2 + \dots$ où K_1 et K_2 sont des constantes qui peuvent être déterminées. Pour cela, on fait une expansion de u , n et z autour de la solution de ST, $u(\xi) \simeq u_{ST} + (2/5 - \alpha)u_1(\xi) + \dots$, etc et (3.97) donne

$$\begin{aligned} & 5(2 - 5\alpha) \int_0^1 \left(\frac{P_{ST}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \xi^2 n_{ST} u_{ST}^2 \right) \xi^2 d\xi + \\ & 5(2 - 5\alpha)^2 \int_0^1 \left(\frac{P_1}{\gamma - 1} + \xi^2 n_{ST} u_{ST} u_1 + \frac{1}{2} \xi^2 n_1 u_{ST}^2 \right) \xi^2 d\xi + \dots \\ & = \frac{1}{3} K_1 (2 - 5\alpha) + \frac{1}{3} K_2 (2 - 5\alpha)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.98)$$

Le premier coefficient K_1 de l'expansion de $\lambda^*(\alpha)$ est obtenue via la solution analytique de ST,

$$K_1 = 15 \int_0^1 \left(\frac{P_{ST}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \xi^2 n_{ST} u_{ST}^2 \right) \xi^2 d\xi. \quad (3.99)$$

Cette intégrale peut être calculée numériquement pour $\gamma = 5/3$, ce qui donne $K_1 \simeq 3.68$. On peut vérifier que cette valeur est la solution du problème aux valeurs propres où les perturbations du premier ordre n_1 , u_1 et z_1 convergent à l'origine. Ensuite, il faut déterminer u_1 , n_1 and z_1 . Pour ce faire, on commence par remplacer la solution perturbée et la relation $\lambda = K_1(2/5 - \alpha) + \dots \equiv K_1 \epsilon + \dots$ dans le système d'équations (3.76)-(3.78) et les conditions aux bord (3.79). Le terme d'ordre zéro en ϵ nous donne la solution bien connue de Sedov-Taylor ((3.31) et (3.32)). Le terme du premier ordre donne un système d'équations différentielles linéaires pour n_1 , u_1 et z_1 qui dépend du nouveau paramètre K_1 et des conditions au bord $n_1(1) = u_1(1) = z_1(1) = 0$. Cette solution est utilisée pour calculer l'intégrale,

$$K_2 = 15 \int_0^1 \left(\frac{P_1}{\gamma - 1} + \xi^2 n_{ST} u_{ST} u_1 + \frac{1}{2} \xi^2 n_1 u_{ST}^2 \right) \xi^2 d\xi, \quad (3.100)$$

et on obtient alors la valeur $K_2 \simeq -13.85$ pour $\gamma = 5/3$, etc. Ainsi que nous l'avons expliqué avant, pour des valeurs arbitraires de α telles que

$\alpha' < \alpha \leq 2/5$, la fonction $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ est obtenue numériquement par une méthode de tir. Dans la figure 3.5 l'expansion asymptotique $\lambda \simeq K_1(2/5 - \alpha) + K_2(2/5 - \alpha)^2 + \dots$ est tracée (courbe en pointillés noirs) et comparée à la courbe rouge déduite de la méthode de tir. On notera l'excellent accord entre ces deux courbes.

3.4.6 Structure de la bulle chaude interne

Maintenant que la structure de la solution de type coquille a été complètement déterminée, depuis le front du choc jusqu'à la discontinuité de contact, il faut spécifier la structure de la bulle chaude interne. En effet, il y a beaucoup de possibilités de solutions et elles ne sont pas toutes auto-semblables a priori. Les seules conditions physiques admissibles pour la solution sont la continuité de la pression P et de la vitesse u à l'interface fluide $\xi = \xi_B$ (ou $r = R_B(t)$ dans l'espace physique). Parce que la coquille retient tout la matière balayée par le RSN (avec une densité de l'ordre de ρ_1) alors que la masse M_b de la bulle interne (avec le rayon de la bulle qui croît comme $R_B(t) = \xi_B r_0(t) \propto t^\alpha$) est conservée, il est raisonnable de considérer que la densité ρ_b dans la bulle vérifie $\rho_b \ll \rho_1$. Puis, à cause de la continuité de la pression à l'interface, on déduit que la température de la bulle est très grande devant celle de la coquille et en conséquence la vitesse fluide est très subsonique dans la bulle $v^2 \ll p_B/\rho_b$ où on rappelle que p_B est relié à P_B selon $p_B = \rho_1 D^2 P_B$. L'équation de conservation de la quantité de mouvement permet alors de montrer que la pression est presque uniforme dans la bulle, $p(r, t) \simeq p_B(t)$ ($\nabla p = O(M^2)$ où le nombre de Mach $M \ll 1$). L'équation de conservation de l'énergie (3.72) devient

$$\partial_t \left(\frac{p_B}{\gamma - 1} \right) + \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 v \frac{\gamma p_B}{\gamma - 1} \right) = -\Lambda_b. \quad (3.101)$$

Pour la fonction de refroidissement Λ_b , on suppose que $\Lambda_b = C_b t^{2\alpha-3}$ avec C_b une constante. En principe, on s'attend à ce que la constante soit négative et que la bulle se refroidisse aussi. Cependant, nous verrons plus loin qu'elle peut aussi être positive. Dans un cas comme dans l'autre (refroidissement ou chauffage), nous allons montrer que les variations d'énergie dans la bulle restent plus faibles que dans la coquille et le RSN perd globalement de l'énergie (voir (3.104)). Pour trouver le champ de vitesse $v(r, t)$ dans la bulle, l'équation (3.101) doit être intégrée avec les conditions aux limites $v(r = 0, t) = 0$ et $v(r = R_B, t) = dR_B/dt$. Après la substitution de p_B en fonction de P_B et l'utilisation de l'expression du refroidissement uniforme, l'intégration donne

$$v(r, t) = \frac{[2(1 - \alpha)P_B - (\gamma - 1)\lambda_b]r}{3\gamma P_B t} + \frac{1}{r^2}\psi(t) \quad (3.102)$$

où $\psi(t)$ est une fonction arbitraire de t et où $\lambda_b \equiv C_b/(\alpha^2 A^2 \rho_1)$ est le taux de refroidissement dans la bulle. Ensuite, l'application de la condition limite en $r = 0$ mène à $\psi = 0$, tandis que celle en $r = R_B(t)$ donne une contrainte sur l'expression du taux de refroidissement,

$$\lambda_b = \frac{P_B(2 - \alpha(2 + 3\gamma))}{\gamma - 1} \quad (3.103)$$

On peut tout d'abord remarquer que puisque $P_B = 0$ à la frontière de la région Σ où $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ pour $1/4 \leq \alpha \leq \alpha''$, alors $\lambda_b = 0$. Dans ce cas, la bulle est une cavité vide. Deuxièmement, au dessus de cette frontière, bien que P_B ne soit plus nul, la propriété $\lambda = 0$ subsiste lorsque le paramètre de décélération est égal à la valeur critique $\alpha = 2/(2 + 3\gamma)$ ($\equiv 2/7$ pour $\gamma = 5/3$) que nous avons déjà rencontrée à plusieurs reprises. La bulle évolue alors de manière adiabatique comme dans le modèle de Bandiera & Petruk [29]. Enfin, le taux de refroidissement dans la bulle λ_b est positif dans l'intervalle $\alpha \leq 2/(2 + 3\gamma)$ et la bulle perd de l'énergie en même temps que la coquille. Cependant, dans l'intervalle $2/(2 + 3\gamma) < \alpha \leq 2/5$, le paramètre λ_b est négatif et la bulle gagne de l'énergie bien que le système total Bulle-Coquille perde de l'énergie comme on peut le voir sur l'équation d'énergie (3.16) intégrée spatialement (on néglige l'énergie cinétique dans la bulle) :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &\propto -\frac{1}{3}(\lambda(1 - \xi_B^3) + \lambda_b \xi_B^3) = \\ &- (2 - 5\alpha) \left(\frac{P_B \xi_B^3}{3(\gamma - 1)} + \int_{\xi_B}^1 \left(\frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} n \xi^2 u^2 \right) \xi^2 d\xi \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Finalement, la densité ρ_b de la bulle interne est obtenue en intégrant l'équation de conservation de la masse (3.13) avec la vitesse $v = \alpha r/t$. En effet, on peut montrer en utilisant par exemple les transformations homothétiques (voir (3.20) dans la section 3.2.3) que cette équation différentielle possède une SAS sous la forme $\rho_b \propto 1/r_0(t)^3 \phi(\xi)$. On obtient alors,

$$\rho_b(r, t) = \frac{M_b}{4\pi r_0^3} \frac{\phi(\xi)}{\int_0^{\xi_B} \phi \xi^2 d\xi} \quad (3.105)$$

où $\phi(\xi)$ est une fonction arbitraire qui rend compte de la distribution de la masse dans la bulle. On remarque que la fonction d'échelle de la densité dans la bulle n'est pas la même que celle de la coquille et est en $1/r_0(t)^3$ car la masse totale de la bulle reste constante au cours du temps.

3.4.7 Analyse pour les grands taux de refroidissement

Lorsque le taux de refroidissement λ croit, une fine et dense coquille se forme pour toutes les valeurs de α dans l'intervalle $1/4 < \alpha < 2/5$. C'est ce que l'on appelle la phase PDS (Pressure-Driven Snowplow) de l'évolution du RSN [20]. Il est alors très important d'étudier de manière analytique le comportement des solutions pour de telles coquilles. Dans ce paragraphe, nous allons faire l'analyse asymptotique des équations (3.76)-(3.79) pour des grandes valeurs de λ . Alors que l'épaisseur de la coquille devient très petite (en fait elle est de l'ordre de grandeur de $\lambda^{-1} \equiv \epsilon \ll 1$ - voir la section 3.4.4 et la figure 3.8), il est pratique d'écrire le système (3.76)-(3.79) en utilisant des variables fluides qui seront conservées à travers la coquille, i.e., la quantité de mouvement totale $q(\xi) \equiv \xi^2(nz + nu(u - 1))$, le flux de masse $f(\xi) = \xi^2 n(1 - u)$. Nous allons aussi définir la nouvelle vitesse $v(\xi) \equiv 1 - u$ et la nouvelle coordonnée spéciale x définie par $x \equiv (\xi - 1 + a\epsilon)/(a\epsilon)$ où a satisfait $1 - \xi_B \equiv a\epsilon$ avec $a \sim O(1)$. Noter que $x(1) = 1$ et $x(\xi_B) = 0$. Le système (3.76)-(3.79) devient à l'ordre dominant,

$$f' = \epsilon \frac{\alpha f(v - 3)[(v + (v - 1)\gamma)f - \gamma q]}{(\gamma - 1)v}, \quad (3.106)$$

$$q' = \epsilon \frac{\alpha f(1 + 2\alpha(v - 2))(v - 1)[(v + (v - 1)\gamma)f - \gamma q]}{(\gamma - 1)v}, \quad (3.107)$$

$$v' = \frac{a(\gamma - 1)}{\alpha(\gamma(f + q) - (\gamma + 1)fv)}, \quad (3.108)$$

où le prime signifie d/dx , avec les quatre conditions aux limites (le paramètre " a " est une inconnue)

$$f(1) = 1, \quad q(1) = 0, \quad v(1) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (3.109)$$

en $x = 1$ (soit $\xi = 1$), et en $x = 0$, (soit $\xi = \xi_B$), on a

$$v(0) = 0. \quad (3.110)$$

Seules les équations (3.109) sont nécessaires pour résoudre le système différentiel (3.106)-(3.108), et la condition (3.110) apporte la contrainte nécessaire pour trouver la valeur du paramètre a . Avant d'exprimer les profils en fonction de x , commençons par résoudre le système en faisant $\epsilon \rightarrow 0$. Dans ces conditions, on trouve, $f(x) = 1$, $q(x) = 0$ et

$$v(x) = 1 - u = \frac{\gamma - \sqrt{(1 - \gamma^2)x + \gamma^2}}{\gamma + 1}. \quad (3.111)$$

On déduit également $a = \alpha/2$, et l'épaisseur de la coquille est donc égale à $h = 1 - \xi_B \simeq \alpha/(2\lambda)$. Ce résultat était annoncé dans la section 3.4.4. Par ailleurs, on peut remarquer que $v \simeq (\gamma - 1)x/(2\gamma)$ lorsque $x \rightarrow 0$. A partir de la solution (3.111) et des valeurs $f = 1$ et $q = 0$, on peut obtenir les profils de densité, de température et de pression pour tout x dans la coquille

$$n(x) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - x(\gamma^2 - 1)}}, \quad (3.112)$$

$$z(x) = (\gamma - 1) \frac{\sqrt{(2 + \gamma - \gamma^2)x + \gamma^2 - \gamma}}{(\gamma + 1)^2}, \quad (3.113)$$

$$P(x) = \frac{1 + \sqrt{\gamma^2 - (\gamma^2 - 1)x}}{\gamma + 1}. \quad (3.114)$$

Bien que les profils (3.112)-(3.114) donnent une bonne approximation du comportement de la solution lorsque $\lambda \gg 1$ dans presque toute la coquille, cette solution devient de plus en plus fautive au voisinage de la discontinuité de contact $x = 0$ ($\xi = \xi_B$), où $u \simeq 1$. En effet, la difficulté concerne la valeur de f sur la face interne de la coquille. Puisqu'en $\xi = \xi_B$, on a une discontinuité de contact, on doit avoir $f(\xi_B) = 0$ nécessairement mais cette propriété ne peut pas être réalisée puisqu'en faisant $\epsilon \rightarrow 0$, on aboutit à un flux constant qui vaut partout $f = 1$. Afin de déterminer la solution proche de la discontinuité de contact en même temps que la frontière qui marque le début de la phase MCS de l'évolution du RSN (c'est à dire lorsque α devient inférieur à α''), nous devons définir dans l'analyse une sous couche proche de $x = 0$ (où

3.4. Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume

$v \rightarrow 0$) dans la coquille telle que $v^{1/\lambda} \sim O(1)$. En d'autres termes, dans cette sous couche et pour $\epsilon \ll 1$ fixé, la variable v est suffisamment petite pour que v^ϵ décrive toutes les valeurs entre 0 (correspondant à la discontinuité de contact) et $v^\epsilon \simeq 1$ (correspondant à la frontière externe de cette sous-couche qui se situe dans la coquille). En effet, le comportement de la solution pour des taux de refroidissement très élevés est singulier à la discontinuité de contact. Il faut alors retenir les premiers ordres de perturbation en ϵ dans les équations afin d'obtenir la solution dans la zone proche de la surface interne de la coquille ce qui donne d'après (3.76)-(3.79) le système,

$$\frac{v}{\epsilon} \frac{df}{dv} = \frac{\alpha(v-3)fG}{\gamma-1} - \frac{\alpha(v-3)fGH\epsilon}{(\gamma-1)^2} + \dots, \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{v}{\epsilon} \frac{dq}{dv} &= \frac{(1+2\alpha(v-2))(v-1)fG}{\gamma-1} \\ &- \frac{(1+2\alpha(v-2))(v-1)fGH\epsilon}{(\gamma-1)^2} + \dots, \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\frac{dx}{dv} = -2 \frac{G}{\gamma-1} + \dots \quad (3.117)$$

où la nouvelle variable indépendante est v et les fonctions G et H sont données par,

$$\begin{aligned} G &= (v + (v-1)\gamma)f - \gamma q, \\ H &= (v-1)(3 + \alpha(v-3 + 3(v-1)\gamma))f \\ &+ (-2 + \alpha(2 + 3\gamma - 3v\gamma))q. \end{aligned} \quad (3.118)$$

On remarque que la variable x n'apparaît pas dans (3.115) et (3.116) et on peut alors résoudre f et q en fonction de la variable v uniquement. Si on veut obtenir $f(x)$ et $q(x)$, il faut alors trouver la relation entre x et v à partir de l'équation (3.117). Ensuite, on définit la sous-couche où $v^\epsilon = O(1)$ et $v \ll 1$ (voir le comportement de la solution avec l'équation (3.121)). Pour obtenir la solution dans toute la coquille, on la décompose en deux parties. On calcule d'abord la solution interne dans la sous-couche et on la note avec l'indice supérieur "in", puis la solution externe notée "out" dans le

Chapitre 3. Solutions auto-semblables décrivant le refroidissement d'un reste de supernova

reste de la coquille, et enfin nous allons voir plus loin que l'on peut raccorder ces deux solution près du bord qui sépare ces deux parties de la coquilles. La solution interne notée f^{in} et q^{in} est développée comme $f^{in} = f_0^{in} + f_1^{in}\epsilon + \dots$ et $q^{in} = q_0^{in} + q_1^{in}\epsilon + \dots$ respectivement. Dans ce domaine, les équations (3.115)-(3.116) s'écrivent,

$$\begin{aligned} \frac{v}{\epsilon} \frac{df^{in}}{dv} = & -\frac{3\alpha\gamma f^{in}(f^{in} + q^{in})}{\gamma - 1} \\ & + \frac{3\alpha\gamma f^{in}(f^{in} + q^{in})[3((\gamma + 1)\alpha - 1)f^{in} - (2 - (2 + 3\gamma)\alpha)q^{in}]\epsilon}{(\gamma - 1)^2} + \dots, \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\frac{dq^{in}}{dv} = \frac{1 - 4\alpha}{3\alpha} \frac{df^{in}}{dv}. \quad (3.120)$$

L'ordre zéro de ces équations (en conservant le terme $vdf^{in}/(\epsilon dv) = O(1)$) donne les deux solutions,

$$\begin{aligned} f_0^{in} = & \frac{3\alpha Q_{01} v^\beta}{F_{01} - (1 - \alpha)v^\beta} \dots, \quad \beta \equiv \frac{\gamma(4\alpha - 1)}{\lambda(\gamma - 1)}, \\ q_0^{in} = & \frac{1 - 4\alpha}{3\alpha} \frac{3\alpha Q_{01} v^\beta}{F_{01} - (1 - \alpha)v^\beta} + Q_{01}, \end{aligned} \quad (3.121)$$

où F_{01} et Q_{01} sont deux constantes d'intégration et où on rappelle que par définition on a $\epsilon = 1/\lambda$ donc $\beta \rightarrow 0$. On peut donc remarquer que la solution est équivalente à v^ϵ lorsque $v \ll 1$ et donc le flux de masse f tend bien vers zéro à la discontinuité de contact. Le premier ordre des équations (3.119) et (3.120) dépend de (3.121) et donne les deux solutions,

$$\begin{aligned} f_1^{in} & \equiv \theta_1(v) \\ & = \frac{v^\beta ((F_{02} - (1 - \alpha)\alpha Q_{02} v^\beta)(\gamma - 1)^2 + 3F_{01}\alpha Q_{01} J(v))}{(F_{01} - (1 - \alpha)v^\beta)^2 (\gamma - 1)^2}, \\ J(v) & = -3\alpha\gamma(F_{02}(\gamma - 1) + Q_{01}^2(-2 + 2\alpha + 3\alpha\gamma))\epsilon \log(v) \\ & + Q_{01}(\gamma - 1)(-2 + \alpha(3\gamma - 1)) \log(F_{01} - (1 - \alpha)v^\beta) \\ q_1^{in} & = \frac{1 - 4\alpha}{3\alpha} \theta_1(v) + Q_{02}, \end{aligned} \quad (3.122)$$

3.4. Solutions auto-semblables avec refroidissement en volume

où F_{02} et Q_{02} sont deux constantes d'intégration.

Maintenant, on intègre la solution "out" d'après les équations (3.115) et (3.116) en supposant le développement limité $f^{out} = f_0^{out} + f_1^{out}\epsilon + \dots$ et $q^{out} = q_0^{out} + q_1^{out}\epsilon + \dots$. Ensuite, les termes d'ordre zéro et d'ordre un des équations (3.115) et (3.116) avec les quatre conditions au front du choc (au front du choc, on a $x = 1$ et v s'écrit $v = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ - voir aussi l'équation (3.109)),

$$\begin{aligned} f_0^{out}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) &= 1, & f_1^{out}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) &= 0, \\ q_0^{out}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) &= 0, & q_1^{out}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.123)$$

donnent la solution externe qui vérifie la condition au bord au front du choc. La solution externe développée pour $v \ll 1$ (proche de la frontière avec la solution interne) s'écrit,

$$\begin{aligned} f^{out} &= 1 + \left(\frac{\alpha(7(\gamma - 1) + 6\gamma \log((\gamma + 1)/(\gamma - 1)))}{2(\gamma - 1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\alpha\gamma}{\gamma - 1} \log(v) \right) \epsilon, \\ q^{out} &= \left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha(23 + \gamma(41 + 20\gamma))}{3(\gamma + 1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(4\alpha - 1)\gamma \log((\gamma + 1)/(\gamma - 1))}{\gamma - 1} \right) \epsilon \end{aligned} \quad (3.124)$$

Finalement, la méthode de "matching asymptotic" [82], [83] est utilisée entre la solution interne et externe en faisant le raccordement de la solution interne développée en $\epsilon \ll 1$ avec la solution externe développée en $v \ll 1$ (3.124). Attention, les solutions interne et externe sont bien obtenue pour $\epsilon \ll 1$ mais le fait de développer la solution interne selon $\epsilon \ll 1$ nous permet de connaître le comportement de la solution interne au voisinage de la frontière qui la sépare de la solution externe. Il est est de même lorsque

Chapitre 3. Solutions auto-semblables décrivant le refroidissement d'un reste de supernova

l'on développe la solution externe pour selon $v \ll 1$. On obtient finalement les quatre constantes d'intégration,

$$\begin{aligned}
 F_{01} &= 3\alpha, \\
 Q_{01} &= \frac{4\alpha - 1}{3\alpha}, \\
 F_{02} &= \frac{\alpha[9(\gamma + 1)^2 - 2\alpha(38 + (71 + 35\gamma)) + 2\alpha^2(65 + \gamma(125 + 62\gamma))]}{2(\gamma + 1)^2} \\
 &\quad - \frac{(4\alpha - 1)^2[(-2 + \alpha(3\gamma - 1)) \log(4\alpha - 1) + 3\alpha\gamma \log((\gamma - 1)/(\gamma + 1))]}{\gamma - 1}, \\
 Q_{02} &= \frac{1}{3} - \frac{\alpha(9 + 13\gamma + 6\gamma^2)}{3(\gamma + 1)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

Nous avons vu que le flux de masse dans la couche interne tend bien vers zéro à la discontinuité de contact ($v = 0$) bien que $f \simeq 1$ dans la couche externe. Nous allons maintenant nous intéresser à la quantité de mouvement totale q dans la couche interne afin de déterminer le comportement du taux de refroidissement $\lambda^*(\alpha)$ lorsque celui devient très grand. Ayant trouvé les constantes d'intégration avec la méthode de "matching asymptotic" entre la solution interne et externe, la solution interne q^{in} est alors totalement déterminée par,

$$\begin{aligned}
 q^{in} &= \frac{4\alpha - 1}{3\alpha} \left(1 - \frac{1}{3\alpha} \frac{(4\alpha - 1)v^\beta}{3\alpha - (1 - \alpha)v^\beta} \right) + \\
 &\quad \lambda^{-1} \left(\frac{(1 - 4\alpha)}{3\alpha} \theta_1(v) + \frac{1}{3} - \frac{\alpha(6\gamma^2 + 13\gamma + 9)}{3(\gamma + 1)^2} \right),
 \end{aligned} \tag{3.126}$$

La fonction $\theta_1(v)$ (voir (3.122)) tend vers zéro lorsque v tend vers 0 et v est toujours donnée par (3.111). Comme on a la relation $q = P + (1 - v)f$, la pression à l'interface fluide $P_B \equiv q(v = 0)$ est donnée par,

$$P_B = \frac{4\alpha - 1}{3\alpha} + \lambda^{-1} \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha(6\gamma^2 + 13\gamma + 9)}{3(\gamma + 1)^2} \right) + \dots \tag{3.127}$$

Comme la pression tend vers zéro à la frontière de la région Σ , on peut trouver l'expression analytique de $\lambda = \lambda^*$ en fonction de α lorsque $\lambda^* \gg 1$,

$$\lambda^*(\alpha) = \frac{3\alpha}{4\alpha - 1} \left(\frac{\alpha(6\gamma^2 + 13\gamma + 9)}{3(\gamma + 1)^2} - \frac{1}{3} \right) + \dots \quad (3.128)$$

Cette équation est tracée sur la figure 3.5 (courbe en tirets noirs ayant pour tangente la verticale $\alpha = 1/4$) que l'on peut comparer à la frontière que l'on trouve numériquement. L'accord entre les deux courbes est très bon.

3.5 Quelques résultats complémentaires : le refroidissement en loi de puissances

Nous allons maintenant présenter quelques résultats complémentaires à l'étude du refroidissement auto-semblable. Jusqu'ici, nous avons utilisé un refroidissement auto-semblable homogène afin de conserver un caractère général pour l'étude du refroidissement sans faire d'hypothèses particulières sur la structure spatiale des pertes radiatives. Le refroidissement homogène revient donc à faire la moyenne spatiale du refroidissement Λ dans la coquille (il en est de même pour le refroidissement Λ_b dans la bulle). Nous allons maintenant choisir un refroidissement du type $\Lambda \propto \rho^2 T^\delta \equiv Ct^{2\alpha-3}L(\xi)$ avec $L(\xi) = n(\xi)^2(\xi^2 z(\xi))^\delta$ (densité au carré car les processus d'émission dans un RSN font intervenir deux particules). Pour que la solution reste auto-semblable il faut alors que l'exposant de la température vérifie la relation $\delta = (2\alpha - 3)/[2(\alpha - 1)]$. Pour ce problème, on retrouve les deux types de solutions (type ST et type coquille). Cependant, nous n'allons considérer ici que les solutions régulières jusqu'au centre, i.e de type ST, afin de conserver un refroidissement unique dans le RSN, i.e. sans bulle. En effet, si on inclut les solutions de type coquille il faudrait alors définir deux refroidissements différents, un pour la coquille et un pour la bulle. Comme pour la solution de Barenblatt [30], cette solution peut être déterminée grâce à une relation spéciale entre le taux de refroidissement (dans le cas présent le paramètre $\lambda \equiv C/(\alpha^2 \rho_1 A^2)$ - voir (3.82)) et l'exposant α . Ce problème aux valeurs propres nous permet comme pour le cas homogène de trouver une frontière dans l'espace des paramètres (α, λ) qui sépare les solutions non physiques des solutions de types coquilles mais cette fois ci, la totalité de la frontière sera composé de solution de type ST (comme pour le cas des solutions de Barenblatt). On définit alors de la même manière $\lambda^*(\alpha)$ cette frontière. Pour chaque α , si le taux de refroidissement $\lambda < \lambda^*(\alpha)$ alors la solution n'est pas physique et si $\lambda > \lambda^*(\alpha)$, la solution est de type coquille. On peut montrer que l'exposant α se trouve dans l'intervalle $2/(2 + 3\gamma) \leq \alpha \leq 2/5$ comme

pour la solution de Barenblatt. Ceci est dû au fait que le refroidissement tend vers zéro au centre du RSN (ceci sera expliqué plus loin). Le comportement de la solution est alors le même que celui de la solution de Barenblatt lorsque la coordonnée auto-semblable $\xi \rightarrow 0$. Sur la figure 3.14 sont tracés les profils de densité, de vitesse et de pression normalisés au front du choc en fonction de la coordonnée spatiale auto-semblable $\xi = r/r_0$.

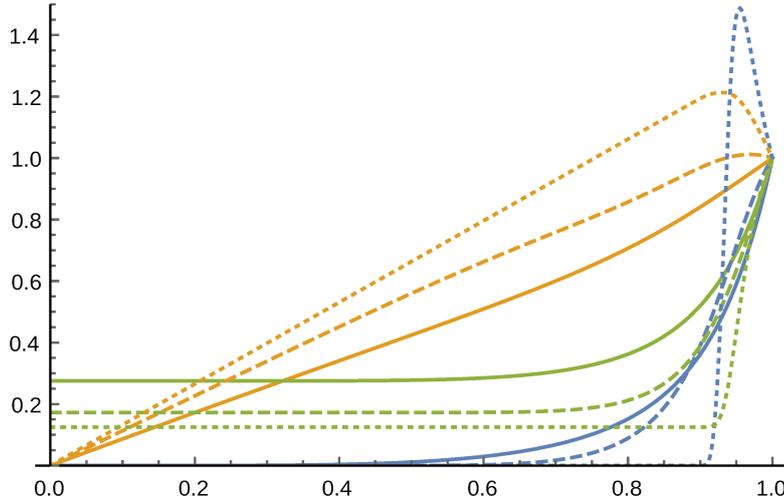


FIGURE 3.14 – Profils de densité (bleu), de vitesse (orange) et de pression (vert) normalisés au front du choc en fonction de la coordonnée spatiale auto-semblable $\xi = r/r_0$ pour $\alpha = 0.38$ et $\lambda^* = 0.436$ (trait plein), $\alpha = 0.32$ et $\lambda^* = 1.905$ (courbes en tirets) et $\alpha = 2/7 + 0.001$ et $\lambda^* = 3.487$ (courbes en pointillés) avec $\gamma = 5/3$.

On remarque que lorsque le taux de refroidissement λ augmente, le paramètre de décélération α diminue et la matière balayée par le MIS se retrouve de plus en plus ramassée proche du front du choc. La pression plateau au centre du RSN quant à elle diminue et la pente de la vitesse augmente au centre du RSN. On observe autour de $\alpha = 0.32$ un changement de signe de la pente de la vitesse qui possède un maximum à $\xi \simeq 0.9$ pour $\alpha = 2/7 + 0.001$ où comme pour le modèle de Barenblatt la vitesse se rapproche du cas limite où $v = \alpha r/t$ pour $\alpha = 2/(3\gamma + 2) = 2/7$ pour $\gamma = 5/3$. Pour le cas $\alpha = 2/7 + 0.001$, comme pour le cas du refroidissement homogène, la pente abrupte de la densité autour de $\xi \simeq 0.9$ (qui se rapproche d'une discontinuité de contact), fait la séparation entre une région identifiée comme étant "la coquille fine et dense" et une bulle interne chaude et raréfiée de pression constante. Le comportement de la solution dans la coquille et dans la bulle se rapproche de celui du refroidissement homogène lorsque le taux de

3.5. Quelques résultats complémentaires : le refroidissement en loi de puissances

refroidissement est suffisamment grand. En effet, pour $\alpha = 2/7 + 0.001$, la pente de la densité change de signe et augmente dans le voisinage du front du choc quand on se dirige depuis celui-ci vers l'intérieur de la configuration. Comme la pression reste décroissante depuis le choc, on se retrouve aussi dans une configuration potentiellement instable au sens de Rayleigh-Taylor dans la coquille où $\nabla\rho \cdot \nabla p < 0$. Ce comportement du RSN pour une loi de refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^\delta$ (tout comme pour le refroidissement homogène), met en évidence la présence de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans la phase radiative du RSN que l'on observe dans les simulations de Badjin et ses collègues [35] pour un refroidissement qui utilise les tables d'opacités du code PLUTO [84]. Sur la figure 3.15 est tracé le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^\delta$ renormalisé au front du choc pour les trois taux de refroidissements $\lambda^* = 0.436$ ($\delta = 1.806$), $\lambda^* = 1.905$ ($\delta = 1.735$) et $\lambda^* = 3.487$ ($\delta = 1.701$). On peut alors remarquer que le refroidissement est bien nul au centre du RSN et on montre que celui-ci se comporte comme

$$L(\xi) \sim \xi^\sigma, \tag{3.129}$$

$$\sigma = \frac{3\alpha(1 - 2\alpha)}{(1 - \alpha)(\alpha(3\gamma + 2) - 2)}.$$

En effet, le refroidissement est nul au centre du reste car l'exposant σ est toujours positif. Lorsque α diminue, l'exposant σ augmente et tend vers l'infini lorsque $\alpha \rightarrow 2/(3\gamma + 2)$ par valeurs supérieures et le refroidissement s'intensifie de plus en plus proche du front du choc.

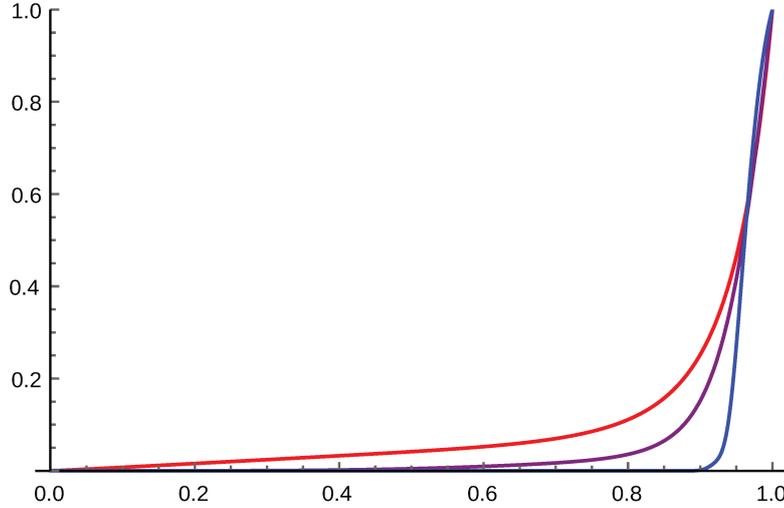


FIGURE 3.15 – Refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^\delta$ normalisés au front du choc en fonction de la coordonnée spatiale auto-semblable $\xi = r/r_0$ pour $\alpha = 0.38$ (rouge), $\alpha = 0.32$ (violet) et $\alpha = 2/7 + 0.001$ (bleu) avec $\gamma = 5/3$.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le comportement d'une onde de souffle qui perd de l'énergie par refroidissement. Pour ce faire, nous avons utilisé l'analyse auto-semblable qui s'avère être un outil très puissant pour trouver des solutions physiques dans la phase "intermédiaire asymptotique" [30] du RSN. Les SAS sont classés en deux catégories [30]. Celles dites du premier type où le problème physique possède une similarité complète. C'est le cas de la solution de Sedov-Taylor où l'énergie totale est conservée et le rayon suit la loi $r_0(t) \propto t^{2/5}$ que l'on peut déterminer simplement par l'analyse dimensionnelle. Les SAS du second type possède une similarité incomplète où la SAS ne peut être totalement déterminée que si l'on suit l'évolution de celle-ci depuis la condition initiale jusqu'à la phase "intermédiaire asymptotique" où la solution devient SAS. C'est le cas de la solution de Barenblatt où le RSN perd de l'énergie au niveau du front du choc et de la solution avec refroidissement auto-semblable en volume. En effet, ces solutions suivent une loi pour le rayon du RSN $r_0(t) = At^\alpha$ et la valeur de l'exposant α peut être déterminée en fonction du taux de refroidissement considéré dans l'analyse auto-semblable. Cependant la constante A ne peut être obtenue que si l'on suit la solution depuis la condition initiale du problème qui mène à l'onde de souffle. La SAS de Barenblatt possède des solutions avec refroidissement au front du choc dans l'intervalle $2/(2 + 3\gamma) \leq \alpha \leq 2/5$. Le refroidissement

est pris en compte via un coefficient adiabatique effectif γ^* au front du choc plus faible que l'indice adiabatique γ dans le MIS et à l'intérieur du RSN. Lorsque $\gamma^* \rightarrow 1$ la solution tend vers la solution de Bandiera & Petruck [29] où la coquille est infiniment dense et mince et le rayon suit la loi de McKee & Ostricker $r_0(t) \propto t^{2/(2+3\gamma)}$ [20]. La solution de Barenblatt est finalement appliquée au cas d'une onde de souffle qui perd de l'énergie par ionisation du MIS où la structure interne du RSN est déterminée avec les effets de l'ionisation et $\gamma^* = 1.045$ d'après l'approximation analytique dans le chapitre 2 sur les chocs avec ionisation. Enfin, l'étude auto-semblable d'une onde de souffle qui perd son énergie par refroidissement homogène a été réalisée et montre une description complète des différentes solutions de RSN avec refroidissement où l'exposant α se trouve dans l'intervalle $1/4 \leq \alpha \leq 2/5$ ce qui est moins restrictif que le cas de Barenblatt. Cette analyse démontre qu'il existe deux types de solutions. La première est une solution de type Sedov-Taylor, ce qui signifie que la solution est régulière jusqu'au centre du RSN et elle ne peut exister que pour $\alpha > \alpha' \simeq 0.346$ (pour $\gamma = 5/3$) où le taux de refroidissement est donné par une relation spéciale $\lambda = \lambda^*(\alpha)$, solution d'un problème aux valeurs propres. La seconde solution est de type coquille, elle est constituée d'une coquille fine et dense bornée par une discontinuité de contact en $\xi = \xi_B$ qui sépare la coquille de la bulle interne peu dense et chaude où la pression est homogène et égale à p_B . Pour toutes les solutions de type coquille, la densité et la température proche de la discontinuité de contact ($\xi - \xi_B \ll 1$) sont données par $n \sim (\xi - \xi_B)^\mu$ et $\xi^2 z \sim (\xi - \xi_B)^{-\mu}$ qui sépare la famille des solutions de type coquille en deux catégories selon le signe de μ . Lorsque le refroidissement est suffisamment fort ($\mu < 0$), la densité diverge et la température converge à la discontinuité de contact. Pour un refroidissement modéré ($\mu > 0$) et $\alpha > \alpha' \simeq 0.346$ (pour $\gamma = 5/3$), la densité converge et la température diverge à la discontinuité de contact. Pour les solutions de type coquille et pour toute valeur de α dans l'intervalle $1/4 \leq \alpha \leq 2/5$, la coquille devient fine et dense quand le taux de refroidissement augmente ou quand le paramètre de décélération α décroît. Aussi, la pression p_B de la bulle chaude augmente lorsque le taux de refroidissement λ augmente et décroît lorsque le paramètre de décélération α diminue. Cette configuration correspond à la phase appelée "Pressure-Driven Snowplow" (PDS) du RSN et est une généralisation des modèles PDS trouvés dans la littérature pour une coquille infiniment fine [20], [29] que l'on retrouve ici lorsque $\alpha = 2/(2 + 3\gamma) = 2/7$ (pour $\gamma = 5/3$) avec $\lambda \rightarrow +\infty$. En effet, dans ce cas précis, la bulle interne est adiabatique ($p_B r_0^{3\gamma} = \text{constant}$) ce qui implique directement que l'évolution du RSN suit la loi $r_0 \propto t^{2/(2+3\gamma)}$. Ce résultat peut aussi être retrouvé en intégrant l'équation (3.101) sans pertes d'énergie dans la bulle ($\Lambda_b = 0$). Des simulations numériques de la transition

vers la phase radiative du RSN montrent une grande variété de coquilles fines et denses pour différents processus radiatifs où l'évolution du RSN converge vers $\alpha > 2/7$ pour des temps longs [25], [26], [35] en fonction du refroidissement et des conditions initiales. Lorsque $\alpha < \alpha'' \simeq 0.297$ (pour $\gamma = 5/3$), il existe une frontière $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ où la pression de la bulle p_B tombe à zéro et la zone interne devient une cavité vide qui indique le commencement de la phase appelée "Momentum-Conserving Snowplow" (MCS) du RSN qui n'existe que pour des refroidissements suffisamment fort. Cette configuration est aussi une généralisation du modèle de Oort [31], [32], [33] qui donne $\alpha = 1/4$, ce qui est retrouvé ici pour $\lambda^*(\alpha) \rightarrow +\infty$. De plus, lorsque $2/(2 + 3\gamma) < \alpha \leq 2/5$, il y a un gain d'énergie dans la bulle chaude avec un taux de refroidissement de la bulle $\lambda_b < 0$ et ce gain croit pour α proche de $2/5$. Lorsque $1/4 \leq \alpha < 2/(2 + 3\gamma)$, il y a une perte d'énergie dans la bulle ($\lambda_b > 0$) et cette perte tend vers zéro pour $\alpha \rightarrow 1/4$. Dans les deux cas, l'énergie totale du RSN diminue lorsque $\alpha < 2/5$. Pour toutes les solutions de type coquille, lorsque le refroidissement est assez fort, la coquille pourrait être instable au sens de Rayleigh-Taylor (RT) car $\nabla p \cdot \nabla \rho < 0$. L'étude de stabilité linéaire n'a pas encore été réalisée mais pour des modes internes élevés $\ell \gg 1$ (où le nombre d'onde de la perturbation est $k = \ell/r_0$), on peut montrer que l'amplitude d'une perturbation transverse quelconque augmente comme t^σ où le taux de croissance de l'instabilité est donné par $\sigma \simeq (t^2 r_0''/r_0 \ell)^{1/2}$ [85] pour les grand taux de refroidissement. L'instabilité de RT a aussi été observée durant la transition en phase radiative et la formation de la coquille fine dans les simulations de Badjin et ses collègues [35].

Lorsque le taux de refroidissement est grand dans la coquille ($\lambda \gg 1$), les profils de densité, de vitesse, de pression et de température ont été déterminés analytiquement dans les équations (3.111)-(3.114) mais il faut faire attention au comportement de la solution proche de la discontinuité de contact qui est singulier. Dans le cas d'un taux de refroidissement très élevé, la vitesse de la coquille dR_B/dt , l'épaisseur adimensionnée h de la coquille et le ratio $p_B/(\rho_0 D^2)$ s'écrivent,

$$\begin{aligned}
 h &\simeq \frac{\alpha}{2\lambda} \\
 \frac{dR_B}{dt} &= (1 - h)D \\
 \frac{p_B}{\rho_0 D^2} &\simeq \frac{4\alpha - 1}{3\alpha} - \frac{2h}{3} \left(\frac{(6\gamma^2 + 13\gamma + 9)}{(\gamma + 1)^2} - \frac{1}{\alpha} \right).
 \end{aligned} \tag{3.130}$$

Les équations (3.130) sont aussi une généralisation du modèle de coquille infiniment fine de Vishniac [57] où la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, pour $r_0 \propto t^\alpha$, donnent le ratio $p_B/(\rho_1 D^2) = (4\alpha - 1)/(3\alpha)$ et la vitesse de la coquille est $dR_B/dt = D$.

On peut finalement remarquer que le modèle de Barenblatt et notre modèle avec refroidissement en volume tendent vers la même solution décrite par Bandiera & Petruck [29]. Pour la solution de Barenblatt il faut que $\gamma^* \rightarrow 1$ et pour la solution avec pertes en volume il faut $\alpha = 2/(3\gamma + 2)$ et $\lambda \rightarrow +\infty$. La coquille est alors infiniment fine et dense et la perte d'énergie est donnée par l'équation (3.45). En effet, lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, on trouve $(r_0 - R_B)\Lambda = 1/2\rho_1 D^3$ et sachant que $dE/dt = -4\pi r_0^2 (r_0 - R_B)\Lambda$ on obtient l'équation (3.45). Cependant même si la solution de Barenblatt et la solution avec pertes en volume tendent vers la même solution, les profils à l'intérieur de la coquille sont très différents lorsque le refroidissement est grand. Pour les pertes en volume, la densité croît et la température diminue depuis le front du choc jusqu'à la discontinuité de contact. A l'inverse, pour les pertes au niveau du front du choc du modèle de Barenblatt, la densité décroît et la température croît depuis le front du choc jusqu'au centre du RSN.

Enfin on met en évidence le caractère générale du cas homogène qui permet un cadre de référence pour un grand nombre de refroidissements. En effet le cas du refroidissement "plus complexe" $\Lambda \propto \rho^2 T^\delta$ en loi de puissance tend vers une structure dans l'onde de souffle identique au cas homogène lorsque le refroidissement augmente pour un paramètre de décélération α donné dans l'intervalle $2/(3\gamma + 2) \leq \alpha \leq 2/5$. De plus, comme nous l'avons mentionné précédemment, le refroidissement homogène permet l'étude du refroidissement en volume dans un intervalle $1/4 \leq \alpha \leq 2/5$ plus large et qui d'une certaine manière généralise le cas du refroidissement en puissances et celui de Barenblatt.

Chapitre 4

Simulation numérique d'un reste de supernova en phase radiative

Sommaire

4.1	Présentation du code de simulation HADES . . .	119
4.1.1	Le modèle physique	119
4.1.2	Le schéma numérique	121
4.2	Méthode de simulation et traitement du refroidissement	126
4.2.1	La condition initiale de Sedov-Taylor	126
4.2.2	Le traitement du refroidissement	130
4.2.3	Test analytique du refroidissement pour le cas d'un gaz statique	132
4.3	Résultats numériques pour plusieurs refroidissements	134
4.3.1	Le cas d'un refroidissement constant	134
4.3.2	Refroidissement catastrophique de Falle	144
4.3.3	Refroidissements avec $b > 3/2$	147
4.3.4	Refroidissements avec $b < 3/2$	151
4.3.5	Formation de la coquille dense et fine	162
4.4	Conclusion	173

4.1 Présentation du code de simulation HADES

4.1.1 Le modèle physique

L'outil de simulation numérique va nous permettre d'étudier le comportement d'un RSN en phase radiative pour une variété de refroidissements

beaucoup plus vaste que pour l'étude analytique où nous avons dû supposer un refroidissement autosemblable. Dans le cas général, l'évolution du RSN ne sera plus, a priori autosemblable. Nous allons donc étudier ses propriétés (structure et dynamique) pour différentes fonctions de refroidissement afin de voir s'il existe un comportement commun à un grand nombre de types de refroidissements. Pour ce faire, nous allons utiliser le code de simulation HADES développé par l'équipe de Claire Michaut [86], adapté pour la modélisation des écoulements astrophysiques radiatifs à grand nombre de Mach. Ce code sera utilisé dans ce chapitre afin de résoudre les équations d'Euler auxquelles on ajoute un terme de refroidissement dans l'équation de conservation de l'énergie. On rappelle les trois équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sous forme conservative,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + P \mathbf{I}) = 0 \quad (4.2)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot (\mathbf{v}(E + P)) = -\Lambda \quad (4.3)$$

où ρ est la densité du fluide, \mathbf{v} est sa vitesse, P la pression, \mathbf{I} la matrice identité et $E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + P/(\gamma - 1)$ est l'énergie totale par unité de volume et Λ le terme de pertes d'énergie par refroidissement (énergie par unité de volume et par unité de temps) que nous définirons plus tard. L'indice t représente la dérivée partielle $\partial/\partial t$. Le code HADES traite des écoulements en deux dimensions selon l'axe x et y et c'est ce que nous allons considérer par la suite. Les équations de conservations (4.1), (4.2) et (4.3) peuvent être réécrites sous forme compacte,

$$\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = S(U) \quad (4.4)$$

Les indices x et y représentent les dérivées partielles $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$, le vecteur $U = (\rho, \rho u, \rho v, E)$ où u est la vitesse selon la direction x et v est la vitesse selon la direction y . Les deux fonctions F et G correspondent respectivement au vecteur flux selon la direction x et au vecteur flux selon la direction y ,

$$F(U) = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho u v, u(E + P)) \quad (4.5)$$

$$G(U) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, v(E + P)) \quad (4.6)$$

et S est le vecteur terme source donné par,

$$S(U) = -(0, 0, 0, \Lambda) \quad (4.7)$$

en géométrie cartésienne. Nous allons ensuite utiliser une propriété du code HADES qui permet de considérer des écoulements en symétrie axiale avec x la longueur du cylindre et y son rayon. Les équations en géométrie axisymétrie cylindrique peuvent ensuite être écrites sous la forme du système conservatif compact (4.4) auquel on ajoute un nouveau terme source,

$$S(U) = -\left(\frac{\rho v}{y}, \frac{\rho v^2}{y}, \frac{\rho uv}{y}, \frac{v(E + P)}{y} + \Lambda\right) \quad (4.8)$$

qui prend en compte à la fois les termes liés à la géométrie axiale que nous avons passé dans le membre de droite des équations de conservation (4.1), (4.2) et (4.3) écrites en géométrie axiale et ceux liés à la perte d'énergie par refroidissement. Tous ces termes seront alors traités comme des termes sources. Cependant, les RSN sont supposés principalement sphériques. Une sphère peut être simulée avec un code 2D dans un quart de cercle avec les bonnes symétries. Il suffit de faire une symétrie par rapport à l'axe y puis une rotation autour de l'axe x afin de récupérer la structure complète d'une sphère (voir la figure 4.1). Pour ce qui est de l'écoulement sans perturbation du RSN, cette hypothèse n'est pas restrictive si l'on considère que le reste est à symétrie sphérique.

4.1.2 Le schéma numérique

Nous allons maintenant présenter le schéma numérique implémenté dans le code HADES pour résoudre le système (4.4) [87], [86]. Ce schéma numérique a été réalisé par une méthode de volumes fini qui est souvent utilisée pour la résolution de lois de conservation. Le temps sera discrétisé suivant l'équation $t^n = n\Delta t$ où n est un entier et Δt le pas d'intégration temporel. Connaissant la solution $U(\cdot, t^n) = U^n$ au temps t^n , le problème consiste alors à trouver la solution numérique U^{n+1} au temps t^{n+1} . Pour traiter l'équation différentielle (4.4) qui comporte un terme source (4.8), nous allons diviser le problème en une EDP et une EDO qui vont nous permettre de calculer la solution numérique U^{n+1} . Le premier système d'EDP est donné par,

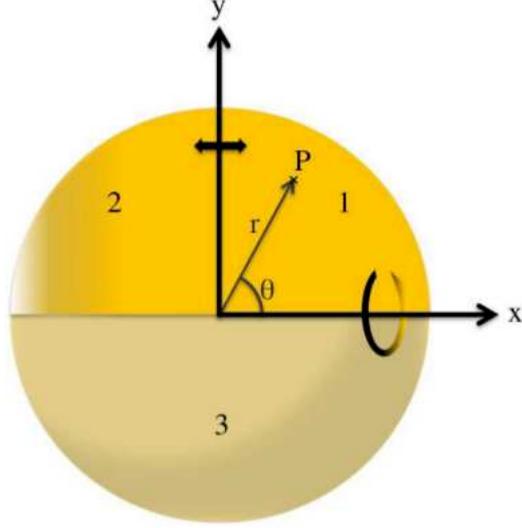


FIGURE 4.1 – Représentation de la géométrie du domaine : le domaine 1 d'intégration numérique est un quart de disque, le domaine 2 est défini par symétrie axiale du domaine 1 selon l'axe y et une rotation selon l'axe x défini le domaine 3 et donne une représentation 3D du RSN. Cette figure est tirée de la publication de Julien Minière dans le journal A&A 2018 [28].

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = 0 \\ U(x, y, t^n) = U^n \end{cases} \quad (4.9)$$

et le second système d'EDO par,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(\cdot, t) = S(U(\cdot, t)) \\ U(\cdot, t^n) = \bar{U}^{n+1} \end{cases} \quad (4.10)$$

A partir de maintenant nous appellerons $\mathcal{Z}^{(\Delta t)}$ l'opérateur solution de (4.9) et $\mathcal{S}^{(\Delta t)}$ l'opérateur solution de (4.10) pour un pas de temps Δt . Le code HADES utilise ensuite le schéma de Splitting de Strang du second ordre,

$$U^{n+1} = \mathcal{S}^{(\frac{1}{2}\Delta t)} \mathcal{Z}^{(\Delta t)} \mathcal{S}^{(\frac{1}{2}\Delta t)} \quad (4.11)$$

Le système d'EDO (4.10) sera résolu par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. Il nous reste maintenant présenter la méthode pour résoudre le

système d'EDP homogène (4.9). La première étape consiste à transposer le problème dans un espace à deux dimensions, en deux problèmes à une dimension que l'on pourra traiter séparément par la méthode de Splitting en espace. On peut alors diviser le problème (4.9) en deux equations selon la direction x et selon la direction y par,

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \\ U(x, \cdot, t^n) = U^n \end{cases} \quad (4.12)$$

On notera $\mathcal{X}^{(\Delta t)}$ l'opérateur solution de (4.12) pour un pas de temps Δt .

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_y G(U) = 0 \\ U(\cdot, y, t^n) = U^n \end{cases} \quad (4.13)$$

On notera $\mathcal{Y}^{(\Delta t)}$ l'opérateur solution de (4.13) pour un pas de temps Δt . Ensuite nous pouvons remonter à la solution numérique de (4.4) par les deux schémas du second ordre de Strang suivants :

$$U^{n+1} = \mathcal{Y}^{(\frac{1}{2}\Delta t)} \mathcal{X}^{(\Delta t)} \mathcal{Y}^{(\frac{1}{2}\Delta t)} \quad (4.14)$$

et

$$U^{n+1} = \mathcal{X}^{(\frac{1}{2}\Delta t)} \mathcal{Y}^{(\Delta t)} \mathcal{X}^{(\frac{1}{2}\Delta t)} \quad (4.15)$$

Grâce à la méthode de Splitting en espace, la méthode des volumes finis peut être utilisée pour chaque équation différentielle en dimension un en espace. Nous allons présenter cette méthode pour la résolution de l'équation (4.12).

On commence par discrétiser l'intervalle spatiale I en sous-intervalles $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ de même longueur Δx qui sera défini comme le pas d'espace. Soit $\tilde{U}(x, t)$ la solution de (4.12) et U_i^n la valeur moyenne de cette solution sur l'intervalle I_i à l'instant t^n . Dans ce cas, on peut écrire,

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{U}(x, t^n) dx \quad (4.16)$$

Ensuite en intégrant spatialement sur l'intervalle I_i puis en intégrant entre le temps t^n et t^{n+1} l'équation (4.12) on obtient l'équation,

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(\tilde{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(\tilde{U}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \quad (4.17)$$

Il nous reste donc à évaluer les deux intégrales qui interviennent dans l'équation (4.17). La méthode introduite dans le code HADES est le schéma MUSCL-Hancock (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) qui est précis au second ordre. La première étape de cette méthode consiste à remplacer chaque état moyen U_i^n par une interpolation linéaire,

$$U_i(x) = U_i^n + \Delta i \frac{x - x_i}{\Delta x} \quad (4.18)$$

où Δi est la pente de la droite sur chaque intervalle et on définit les valeurs de cette fonction respectivement aux extrémités gauche et droite de l'intervalle I comme U_i^L et U_i^R . La pente Δi sera choisie suivant des critères de stabilité et de convergence de la solution [87]. Ensuite, on fait évoluer les valeurs de U_i^L et U_i^R par une itération $\frac{1}{2}\Delta t$ comme,

$$\tilde{U}_i^L = U_i^L + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_i^R) - F(U_i^L)] \quad (4.19)$$

$$\tilde{U}_i^R = U_i^R + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_i^R) - F(U_i^L)] \quad (4.20)$$

Dans l'étape suivante, il faut alors résoudre ce que l'on appelle le problème de Riemann noté $PR(\tilde{U}_i^R, \tilde{U}_{i+1}^L)$ pour les nouveaux états issus de la deuxième étape que l'on écrit,

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \\ U(x, 0) = \begin{cases} U_i^R & \text{si } x < 0 \\ U_{i+1}^L & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4.21)$$

Le problème de Riemann peut ensuite être résolu numériquement par ce que l'on appelle un solveur de Riemann. Le code HADES possède deux solveurs différents de type HLL (Harten-Lax-van Leer) [88]. Ces deux solveurs sont le solveur HLLC et HLLE (le C fait référence à l'onde de Contact en le E à Einfeldt) qui peuvent être vu comme une modification du solveur HLL qui fait intervenir une solution appochée à deux ondes. En plus d'utiliser l'onde la

plus lente et la plus rapide, ces deux solveurs utilisent l'onde correspondant à la valeur propre double ($\lambda = u$) de la matrice Jacobienne des équations d'Euler. Par la suite nous utiliserons uniquement le solveur HLLÉ car il capture mieux les chocs et permet d'éviter une instabilité numérique appelée l'instabilité "carbuncle" [89] dans la région du choc grâce à un effet dissipatif du solveur. La solution du problème de Riemann est notée $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$.

Enfin on calcule la solution numérique à l'instant t^{n+1} selon le schéma de Godunov,

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}] \quad (4.22)$$

où le flux est calculé à chaque interface suivant l'équation $F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_{i+\frac{1}{2}}(0))$ qui dépend du solveur de Riemann utilisé. Lors de la simulation dans un domaine borné, il faut définir des conditions numériques aux bords. Sachant que le flux F évalué à l'interface $i + \frac{1}{2}$ dépend de U_{i-1} , U_i , U_{i+1} et U_{i+2} , on en déduit que la solution numérique au point i et au temps t^n dépend de U_{i-2}^n , U_{i-1}^n , U_i^n , U_{i+1}^n et U_{i+2}^n . Lors du calcul de la solution au bord du domaine d'intégration, il faut alors définir deux mailles supplémentaires se trouvant en dehors du domaine que l'on appellera les mailles fantômes. La valeur de la solution U^n sur ces mailles dépend des conditions aux bords définies lors de la simulation.

Dans le cas présent de simulations sphériques, les conditions aux bords seront des conditions de symétrie pour le bord gauche et bas de la boîte de simulation qui correspondent à la symétrie par rapport à l'axe y et la rotation autour de l'axe x . Pour le bord haut et droit, les conditions aux bords seront transparentes. Il nous reste à préciser le critère de stabilité pour le schéma numérique et celui-ci est donné par la condition Courant-Friedrichs-Lewy (CFL),

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max_i \{|\lambda_i^n|\}} \quad (4.23)$$

où λ_i^n est la valeur maximale de la vitesse de l'onde évaluée au temps t^n et dans la maille i ,

$$\lambda_i^n = |u_i^n| + c_i^n \quad (4.24)$$

où c_i^n est la vitesse du son au temps t^n et dans la maille i . Cette condition impose que le domaine de dépendance numérique doit contenir le domaine de dépendance physique et garantit la stabilité du schéma.

4.2 Méthode de simulation et traitement du refroidissement

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la méthode utilisée pour modéliser la phase radiative du RSN. Nous allons tout d'abord créer un RSN en phase de Sedov-Taylor en déposant l'énergie de la supernova dans un volume fini et en le laissant évoluer sur environ 3000 ans (voir plus loin). Cette solution va ensuite nous servir de condition initiale pour la phase radiative où l'on va alors enclencher le refroidissement. La solution va donc s'éloigner de celle de Sedov-Taylor et le reste va commencer à perdre son énergie totale en fonction du type de refroidissement que l'on aura choisi. Afin de simuler un reste de supernova, il faut d'abord choisir les paramètres que nous allons prendre pour simuler le MIS. Nous allons considérer ici un MIS avec les paramètres typiques d'une région H II de densité $\rho_1 = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ et de pression $P_1 = 10^{-12} \text{ Pa}$ (sans considérer l'ionisation du milieu). En utilisant l'équation d'état pour un gaz parfait,

$$P = \frac{\rho k T}{m} \quad (4.25)$$

où k est la constante de Boltzmann et m la masse du proton, on trouve que la température du MIS est égale à $T_1 \approx 12\,000 \text{ K}$. Le domaine sera discrétisé sur un maillage cartésien de 3600×3600 mailles avec un pas d'espace $dx = dy = 1,6 \times 10^{14} \text{ m}$ (voir plus loin pour l'explication du choix de la résolution). La boîte de simulation est carrée, de longueur $L = 5,76 \times 10^{17} \text{ m}$, ce qui correspond environ à 19 pc.

4.2.1 La condition initiale de Sedov-Taylor

Une fois que nous avons choisi les conditions pour le MIS, il faut déterminer comment nous allons générer l'onde de souffle. En effet, nous allons tout d'abord modéliser l'expansion d'une onde de souffle en phase de Sedov-Taylor qui va nous servir de condition initiale lorsque celle-ci va rentrer dans sa phase radiative. Pour ce faire, nous considérons une zone de surpression au centre de la configuration. Afin de recréer des conditions proches de la réalité physique d'un RSN, on choisit une énergie initiale de l'ordre de 10^{44} J qui correspond à l'ordre de grandeur typique de l'énergie d'une supernova. Nous avons donc choisi une surpression $P_i = 2,5 \times 10^{-4} \text{ Pa}$ dans un volume de rayon $R_i = 4 \times 10^{15} \text{ m}$. Cette zone de surpression est donc un quart de disque de rayon R_i . On suppose que l'énergie E_0 dégagée par la supernova est déposée initialement sous la forme d'une énergie thermique,

$$E_0 = \frac{4 \pi R_i^3 P_i}{3 \gamma - 1} \quad (4.26)$$

où l'indice adiabatique γ sera égal à $5/3$ par la suite. Comme nous modélisons l'évolution du reste sur un quart de disque, le centre correspond au coin en bas, à gauche de la boîte de simulation. Pour ce qui est de la résolution, une étude à déjà été réalisée par Julien Minière [27], [28] pour déterminer le meilleur rapport entre le temps de calcul et la convergence de la solution sur le cas de Sedov-Taylor et un maillage de 3600×3600 a été retenu. Nous avons donc choisi d'utiliser les mêmes paramètres pour générer la condition initiale de Sedov-Taylor et nous conserverons cette résolution dans toute la suite de ce chapitre. La valeur du rayon initial de surpression a été déterminée afin d'éviter le plus possible l'anisotropie sur les profils hydrodynamiques tout en se rapprochant le plus possible de la condition initiale d'un dépôt d'énergie ponctuel. Le choix du rayon résulte alors d'un compromis entre ces deux critères. Plus le rayon est petit, plus nous allons pouvoir tendre pour les grands temps vers la solution analytique de Sedov-Taylor. En effet, le problème de l'explosion forte avec un dépôt d'énergie instantané dans un volume de rayon fini est différent de celui d'un dépôt ponctuel d'énergie [90]. Si le volume est non nul alors la solution du système d'EDP va tendre vers le solution de Sedov-Taylor pour des temps longs (régime asymptotique intermédiaire). Après l'explosion, la surface de contact¹ R_c qui se trouvait à la position $R_c = R_i$ se met en mouvement suivant la loi $R_c \propto t^{2/(5\gamma)}$ aux temps longs. Ceci est dû au fait que cette bulle chaude évolue de manière adiabatique dans sa phase asymptotique intermédiaire ($PR_c^{3\gamma} = cte$) et que l'écoulement au centre est très subsonique, ce qui implique que la pression dans cette zone est presque uniforme et on en déduit par continuité qu'elle décroît comme $P \propto t^{-6/5}$ (loi de Sedov-Taylor - voir le chapitre 3). La solution de Sedov-Taylor est donc valable pour des distances radiales $r \gg R_c$. Il est donc important de minimiser la taille du rayon initial R_i afin de se rapprocher le plus vite possible d'une configuration où le rayon du front du choc est très grand comparé au rayon de la surface de contact avant que le nombre de Mach ne soit devenu trop faible. En revanche, si on diminue trop le rayon initial R_i pour une résolution donnée, alors le nombre de mailles ne sera pas suffisant pour créer un disque régulier et cela va entraîner des anisotropies. Lors de la simulation, on laisse l'onde de souffle se propager jusqu'à un temps final de $t_0 = 3000$ ans, ce qui correspond à un temps caractéristique typique

1. la surface de contact est définie comme une surface qui se déplace à la vitesse fluide $v \propto dr/dt$.

d'un reste en phase de Sedov-Taylor. Dans tout le chapitre, les figures des profils hydrodynamiques seront présentés sur la bissectrice des cartes 2D (voir la figure 4.2). Les anisotropies générées par la condition initiale entraînent notamment une légère déviation du profil de vitesse par rapport à celle de la solution de Sedov-Taylor (voir figure 4.3 autour de $r/r_0(t) = 0,6$).

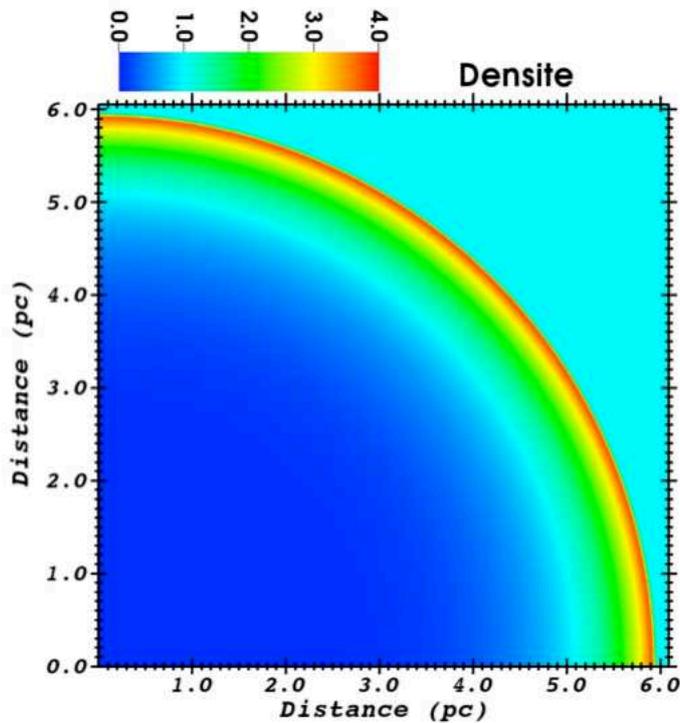


FIGURE 4.2 – Carte de la densité en 10^{-20} kg à 3000 ans.

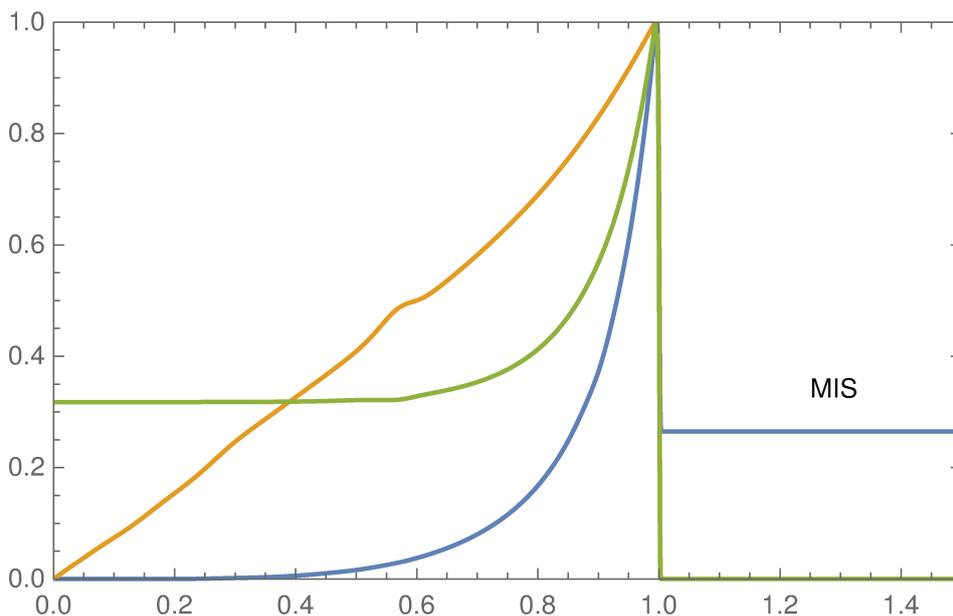


FIGURE 4.3 – Profils numériques renormalisés au front du choc de la densité (en bleu), de la vitesse radiale (en orange) et de la pression (en vert) de la solution de Sedov-Taylor à t_0 en fonction de la distance radiale renormalisée au front du choc $1,83 \times 10^{17}$ m. La densité au front du choc vaut $\rho_{sh} = 3,77 \times 10^{-20}$ kg/m³, la vitesse $v_{sh} = 5,4 \times 10^5$ m/s et la pression $p_{sh} = 3,8 \times 10^{-9}$ Pa. A droite du front du choc, le segment de droite horizontal bleu représente la densité du MIS.

Enfin, au temps final t_0 , l'onde de souffle suit une loi de Sedov-Taylor $r_0(t) \propto t^{2/5}$ et le rapport entre le rayon du choc et celui de la surface de contact interne est $R_c/r_0 \approx 20\%$. Pour ce qui est du taux de compression, il doit être de 4 pour un choc adiabatique avec un indice adiabatique $\gamma = 5/3$. Or dans la simulation, ce taux de compression n'est jamais tout à fait atteint (la compression est de 3.6 environs). Le taux de compression subit donc à $t = t_0$ une erreur relative de 5,75% dû à la résolution du maillage. Le fait d'utiliser un maillage cartésien pour simuler la propagation d'un choc sphérique crée aussi une très légère anisotropie angulaire et le taux de compression est alors maximal sur la bissectrice de la boîte de simulation. Le nombre de Mach $M = 56$ (mesuré à 3000 ans où la vitesse du front du choc est $V_s = 7,26 \times 10^5$ m/s (cette vitesse n'est plus notée D comme dans les chapitre 2 et 3) et la vitesse du son dans le MIS est $c_1 = 12,9 \times 10^3$ m/s) est très grand devant l'unité et l'approximation d'un choc fort est vérifiée. Nous allons donc nous servir de cette solution numérique comme condition initiale pour la modélisation d'un RSN en phase radiative. Dans un deuxième temps, il nous faut décider d'un

temps final de la simulation en phase radiative. Nous choisirons par la suite de poursuivre en phase radiative jusqu'au temps $t_f = 53\,000$ ans (afin de simuler le reste sur une durée de 50 000 ans) et une exception sera faite pour le cas d'un refroidissement constant où l'on poursuivra la simulation jusqu'à 100 000 ans. Nous reviendrons sur ce point par la suite. On peut estimer le rayon du front du choc et le nombre de Mach à $t = t_f$ par les relations autosemblables,

$$\begin{aligned} r_0(t) &= r_0(t_0) \left(\frac{t}{t_0}\right)^\alpha \\ M(t) &= M(t_0) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha-1} \end{aligned} \tag{4.27}$$

où le paramètre de décélération vaut $\alpha = 2/5$ en phase de Sedov-Taylor. Ce calcul ne nous donne en réalité qu'une borne supérieure de la valeur réelle du rayon et du nombre de Mach final de la phase radiative. En effet, lorsque l'on va enclencher le refroidissement à $t = t_0$, le reste va perdre de l'énergie et le paramètre de décélération devient $\alpha < 2/5$. Sachant que le rayon à $t_0 = 3000$ ans est égal à $r_0(t_0) = 1,83 \times 10^{17}$ m et le nombre de Mach est égal à $M(t_0) = 56$ on en déduit que le rayon final ne sera pas plus grand que $r_0(t_f) = 5,8 \times 10^{17}$ m et le nombre de Mach $M(t_f) = 10$. On peut en conclure que la taille de la boîte sera suffisante pour la simulation du reste jusqu'à 53 000 ans et que l'approximation d'un choc fort est toujours valide au temps final.

4.2.2 Le traitement du refroidissement

Il nous faut maintenant choisir le type de refroidissement que nous allons utiliser pour simuler la phase radiative du RSN. Nous savons que les processus de refroidissement dans le RSN peuvent être modélisés par des lois de puissances [63] (voir la figure 3.1 du chapitre 3). Nous allons donc choisir dans les simulations un refroidissement du type,

$$\Lambda = \Lambda_0 \rho^a T^b \tag{4.28}$$

où a et b sont deux exposants et où les dimensions de la constante Λ_0 sont telles que Λ soit une énergie par unité de volume et par unité de temps. Une étude à déjà été réalisée avec le code HADES pour le cas $a = 1$ et $b = 0$ [27], [28]. Ce choix résultait d'une volonté d'étudier le rôle du refroidissement de la

manière la plus simple possible. L'option d'un refroidissement linéaire en densité et qui ne dépend pas de la température avait donc été retenu. Dans cette étude, la première difficulté a été de trouver le paramètre Λ_0 pour lequel le reste va perdre de l'énergie de manière significative sans pour autant se vider de la totalité de son énergie trop rapidement. Le paramètre $\Lambda_0 = 0,1 \text{ W/kg}$ a été choisi et correspond à un ordre de grandeur pour le refroidissement initial égal à $\Lambda \approx \Lambda_0 \rho_1 = 10^{-21} \text{ W/m}^3$ ce qui correspond à l'ordre de grandeur du refroidissement moyen d'un RSN entre $10^4 \text{ K} \leq T \leq 10^6 \text{ K}$. Afin de conserver un ordre de grandeur global pour tous les refroidissements de l'ordre de $\Lambda \approx 10^{-21} \text{ W/m}^3$, on adaptera la valeur constante Λ_0 en fonction des exposants a et b par la formule,

$$\Lambda_0 = \frac{10^{-21}}{\rho_1^a T_0^b} \quad (4.29)$$

avec $\Lambda = \Lambda_0 \rho^a T^b$, $\rho_1 = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ est la densité du MIS et $T_0 \simeq 10^{10} \text{ K}$ est la température initiale de référence du RSN (il est clair que cette valeur n'est pas essentielle puisqu'on peut adapter la valeur de Λ_0 en conséquence si on change la valeur de T_0). Nous ferons attention par la suite à ne pas s'éloigner de plus d'un ordre de grandeur de cette valeur pour chaque constante de refroidissement. Cependant si le refroidissement est trop fort, il peut amener à créer des gradients trop abrupts et la résolution spatiale nécessaire devient trop coûteuse en temps de calcul. Il est alors nécessaire de baisser la constante de refroidissement pour que la solution numérique soit suffisamment convergée pour un maillage donné. Ensuite le refroidissement retire de l'énergie par unité de volume et de temps. Donc sur chaque maille, il faut s'assurer que l'on ne retire pas plus d'énergie dans la maille de volume dV entre t et $t + dt$ que l'énergie contenue dans cette même maille. Il est donc important de spécifier lors de la simulation un critère d'arrêt du refroidissement pour ne pas se retrouver avec une énergie négative dans la maille correspondante. Le critère que nous avons retenu pour cette étude [26], [27], [28] est de considérer que l'on ne retire pas d'énergie par refroidissement dans une maille si cela entraîne que la température de cette maille descende en dessous de la température T_1 du MIS. Si la température descend en dessous de la température du MIS $T < T_1$ alors on refait l'itération du même pas de temps en imposant la température $T = T_1$. Ainsi, en faisant constamment baisser la température, le refroidissement va tendre à rendre le milieu refroidi isotherme à la température $T_1 \approx 12000 \text{ K}$. En effet le MIS est supposé à l'équilibre thermique car par exemple dans une région H II, le chauffage est dominé par l'ionisation de l'étoile et le refroidissement par l'émission de raies interdites et par l'émission libre-libre et on atteint effectivement un équilibre en température de l'ordre

de 10^4 K. Cependant on pourrait aussi supposer que le milieu ambiant s'est refroidi à des températures plus basses typiques d'un milieu atomique HI où la température est cent fois plus basse que la température T_1 . Dans ce cas, le refroidissement pourrait agir dans le RSN jusqu'à des températures plus basses. Les simulations de Badjin et ses collègues [35] ont montrés que le traitement basse température peut avoir une influence non négligeable sur l'évolution du RSN en phase radiative. Si le milieu ambiant est plus froid, le refroidissement peut augmenter l'efficacité de la formation d'une coquille dense et fine.

4.2.3 Test analytique du refroidissement pour le cas d'un gaz statique

Afin de valider le traitement du refroidissement pour les lois en puissances lors de la simulation, nous allons tester le refroidissement sur un modèle simple. Considérons un modèle où nous avons une boîte remplie d'un gaz à l'équilibre ayant une température, une pression et une densité homogène et ayant une vitesse nulle. D'après la conservation de l'entropie nous pouvons écrire l'équation suivante pour la température,

$$\frac{dT}{dt} = -(\gamma - 1) \frac{m\Lambda_0}{k} \rho^{a-1} T^b \quad (4.30)$$

La solution de cette équation est donné par,

$$\tilde{T} = [(b - 1)\tilde{t} + 1]^{1/(1-b)} \quad (4.31)$$

où T_0 est la température à $t = 0$ et où les quantités sans dimensions sont $\tilde{T} = T/T_0$ et $\tilde{t} = t/t_{ref}$ avec $t_{ref} = k/((\gamma - 1)\Lambda_0 m T_0^{(b-1)} \rho^{a-1})$. L'évolution de la température adimensionnée à été tracée sur la figure 4.4 pour six refroidissements différents. On peut noter que l'exposant a n'apparaît pas explicitement car il est absorbé dans l'adimensionnement du temps. On remarque que les refroidissements pour lequel $b \geq 1$ décroissent indéfiniment et la température tend vers zéro en un temps infini. Le comportement change lorsque $b < 1$. Le refroidissement devient plus violent et la température tend vers zero en un temps de refroidissement fini et plus b est faible, plus ce temps est court. Enfin, lorsque $b < 0$, la température décroît de manière concave et le refroidissement est encore plus violent. En effet, le refroidissement fait baisser la température mais dans ce cas, plus la température baisse et plus

le refroidissement est fort. Le cas test pour un refroidissement par raie de structure fine ($\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$) [63] est montré sur la figure 4.5 pour une pression initiale $P_0 = 1 \text{ Pa}$, une densité $\rho = 10^{-6} \text{ kg/m}^3$ et $\Lambda_0 = 9,9 \times 10^{14} \text{ SI}$. On vérifie que la simulation est en parfait accord avec le modèle analytique, ce qui permet de valider le traitement du refroidissement pour la solution analytique statique non triviale la plus simple possible.

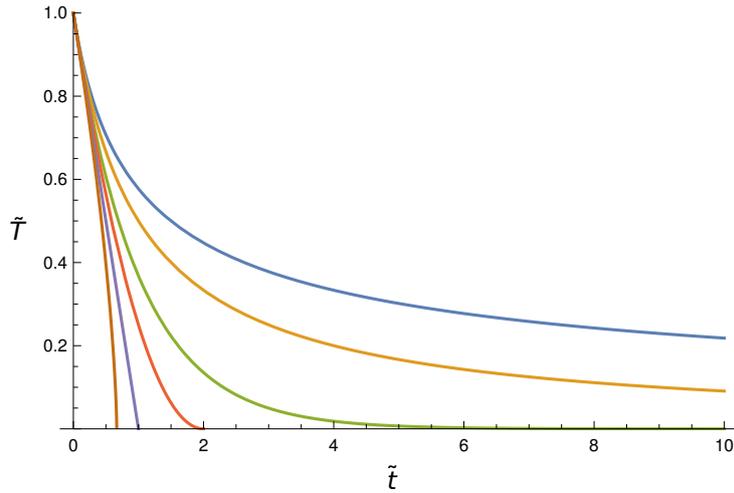


FIGURE 4.4 – Température adimensionnée \tilde{T} en fonction du temps adimensionné \tilde{t} pour $b = 3$ (en bleu), $b = 2$ (en orange), $b = 1$ (en vert), $b = 1/2$ (en rouge), $b = 0$ (en violet) et $b = -1/2$ (en marron).

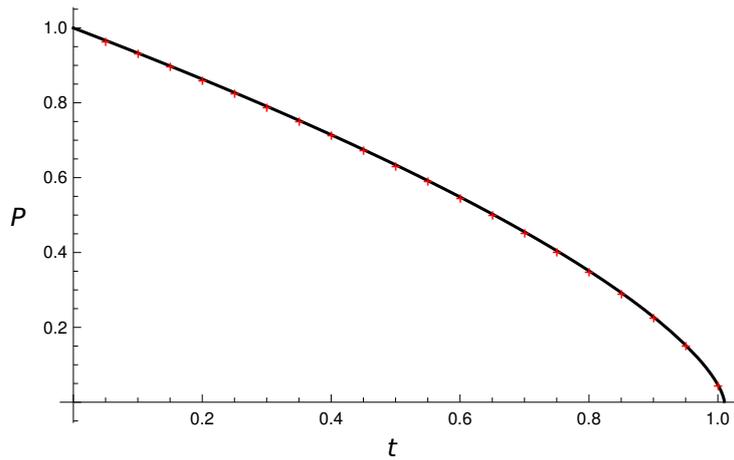


FIGURE 4.5 – Comparaison entre la pression analytique (en Pa) fonction du temps (en secondes) représentée par la courbe noire et les valeurs numériques représentées par des points rouges.

4.3 Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'écoulement de base d'une onde de souffle qui subit un refroidissement auto-semblable homogène. En effet cette étape est importante pour comprendre le rôle du refroidissement dans la dynamique du RSN puisque tout refroidissement peut être moyenné spatialement sur le reste par un refroidissement homogène.

4.3.1 Le cas d'un refroidissement constant

Dans le cas du refroidissement homogène auto-semblable, le refroidissement décroît au cours du temps comme $\Lambda \propto t^{2\alpha-3}$ où le paramètre de décélération satisfait $1/4 \leq \alpha \leq 2/5$. De la même manière, nous allons commencer l'étude numérique, par un refroidissement constant ($a = 0, b = 0$). Cependant le refroidissement constant diffère du cas auto-semblable car il ne diminue pas au cours du temps. Pour cette raison, le refroidissement sera plus fort dans le cas constant que dans le cas d'un refroidissement auto-semblable. D'après la formule (4.29) le taux de refroidissement vaut $\Lambda_0 = 10^{-21} \text{W/m}^3$. Partant de la solution de Sedov-Taylor à 3 000 ans décrite précédemment, nous allons poursuivre la simulation en enclenchant le refroidissement constant jusqu'au temps final $t_f = 100\,000$ ans afin de suivre la structure du RSN à des temps longs. Pour les autres refroidissements nous présenterons les simulations jusqu'au temps $t_f = 53\,000$ ans car, à l'expansion près, la structure du RSN ne sera plus guère modifiée après 53 000 ans. La première chose que l'on peut observer lors de l'évolution du reste est la courbe de l'énergie totale (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie thermique) en fonction du temps. On peut tout de suite remarquer d'après la figure 4.6 que l'énergie totale décroît au cours du temps lors de la phase radiative du RSN et que celui-ci perd environ 95% de son énergie totale à 100 000 ans. La figure 4.6 montre aussi que la plupart de l'énergie convertie en énergie radiative perdue provient de l'énergie thermique et que l'énergie cinétique décroît peu. Enfin, on note que l'essentiel des pertes radiatives se produit avant $t = 33\,000$ ans et qu'ensuite le refroidissement diminue. En effet en se vidant de son énergie thermique, la température dans le RSN chute jusqu'à atteindre la température du MIS et le refroidissement est alors coupé. Le refroidissement ne peut alors se faire que proche du front du choc où la température du MIS subit un saut via les relations de Rankine-Hugoniot.

La structure à l'intérieur du RSN va elle aussi être modifiée par la présence d'un refroidissement. Sur les figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 sont présentés

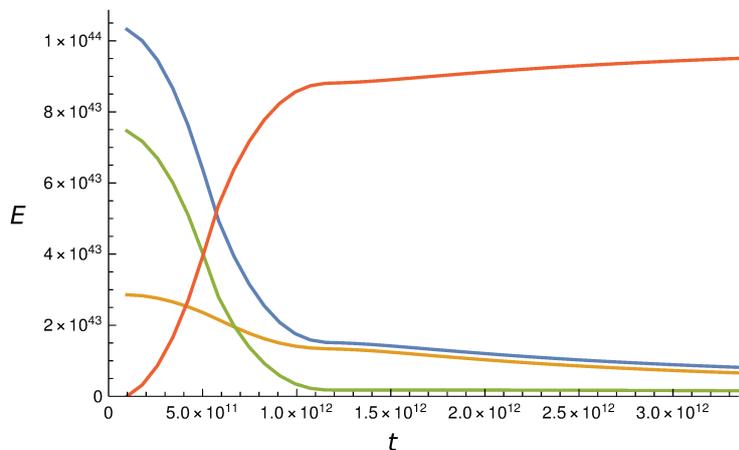


FIGURE 4.6 – Énergie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en Joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement constant.

les profils hydrodynamiques de la densité, la vitesse, la pression et la température à 16 000 ans, 28 000 ans et 100 000 ans. Sur toutes ces figures, on voit bien la position du front du choc indiqué par la discontinuité et aux trois temps le rayon du RSN vaut respectivement environ $3,5 \times 10^{17}$ m (~ 10 pc), $4,2 \times 10^{17}$ m et $5,6 \times 10^{17}$ m. Sur ces mêmes figures, on constate que la solution à 16 000 ans est proche de celle de Sedov-Taylor (on examinera ce point un peu plus loin). On peut remarquer que la température va chuter dans le RSN jusqu'à atteindre la température du MIS vers 33 000 ans. En effet bien que la courbe à 33 000 ans ne soit pas sur la figure 4.10, on devine la tendance de température avec le profil montré à 28 000 ans. Il est important de remarquer qu'au niveau du front du choc un pic de température subsiste car la matière vient d'être fraîchement choquée. Puis lorsque le refroidissement ne pourra plus agir au delà de la température T_{MIS} , la température à l'intérieur du reste va continuer de chuter à cause de l'expansion du RSN qui devient adiabatique. Le profil de pression va aussi chuter à l'intérieur du RSN et la pression plateau va baisser jusqu'à devenir petite devant la pression de MIS. Les particules entraînées par leur inertie ne vont plus être autant ralenties par le gradient de pression et ceci va entraîner un mouvement de matière vers l'extérieur du RSN. Néanmoins, comme pour la température, la pression montre un pic avec un gradient positif fort dans la zone précédant le front du choc. En conséquence, les particules seront brutalement freinées et leur vitesse va décroître. Ce comportement explique la bosse en $r \simeq 5,5 \times 10^{17}$ m que l'on peut voir sur le profil de vitesse à $t = 28 000$ ans ainsi que le gradient négatif

de vitesse dans la zone $3,5 \times 10^{17} \text{ m} \leq r \leq 4 \times 10^{17} \text{ m}$. A $t = 100\,000$ ans, ce gradient négatif très raide, localisé en $r \simeq 5,4 \times 10^{17} \text{ m}$, indique l'arrêt brutal des particules qui vont donc s'accumuler à cet endroit et former un pic de densité où le taux de compression va atteindre 19 au lieu de 4 (comme on peut le voir sur la figure 4.7 à 28 000 ans) pour un choc adiabatique. On se retrouve finalement avec une configuration de RSN froid ayant une coquille fine et dense. On peut maintenant se demander si le rayon du RSN va suivre une loi d'évolution $r_0(t) \propto t^\alpha$ de manière asymptotique. En effet le refroidissement constant n'est pas auto-semblable et on ne peut pas a priori prédire la loi d'évolution du RSN en phase radiative comme nous avons pu le faire dans le chapitre précédent pour un refroidissement ayant une structure auto-semblable. Cependant, comme le montrent les figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 à 100 000 ans, le RSN est dans une configuration bien particulière pour un temps suffisamment long. En effet, le refroidissement ne peut agir qu'au niveau du choc et la bulle interne ne perd plus d'énergie par refroidissement. On se retrouve alors avec une bulle interne froide adiabatique de pression interne négligeable. Pour un refroidissement autosemblable homogène, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il existe des solutions de type coquille ayant une bulle interne adiabatique où la pression à l'intérieur de la bulle est très faible (voir nulle) comparée à la pression au front du choc.

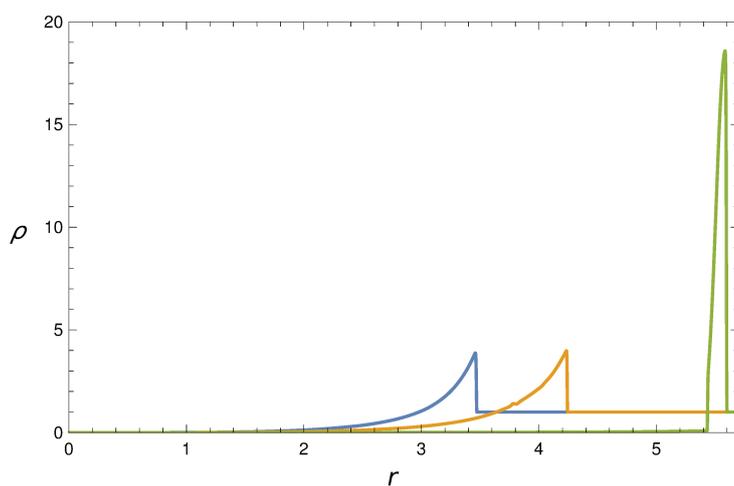


FIGURE 4.7 – Profil de densité en 10^{-20} kg/m^3 pour le refroidissement constant à $t = 16\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 100\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m .

4.3. Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

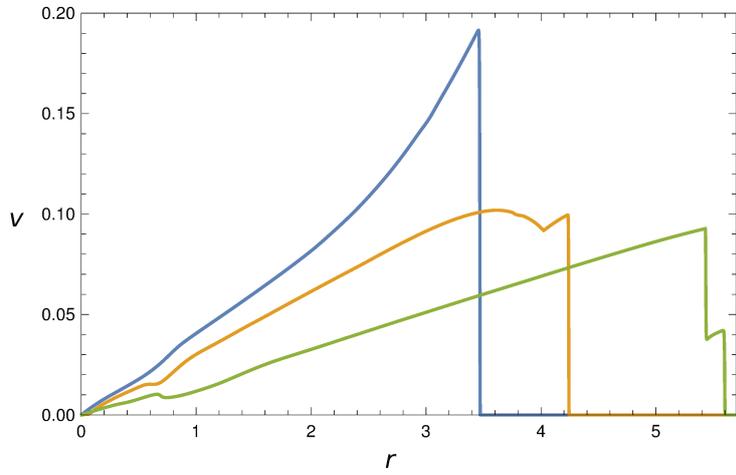


FIGURE 4.8 – Profil de vitesse en 10^6 m/s pour le refroidissement constant à $t = 16\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 100\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

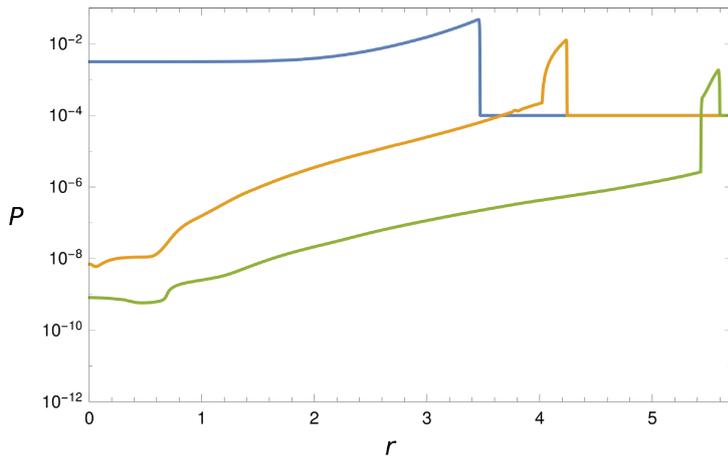


FIGURE 4.9 – Profil de pression en 10^{-8} Pa pour le refroidissement constant à $t = 16\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 100\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

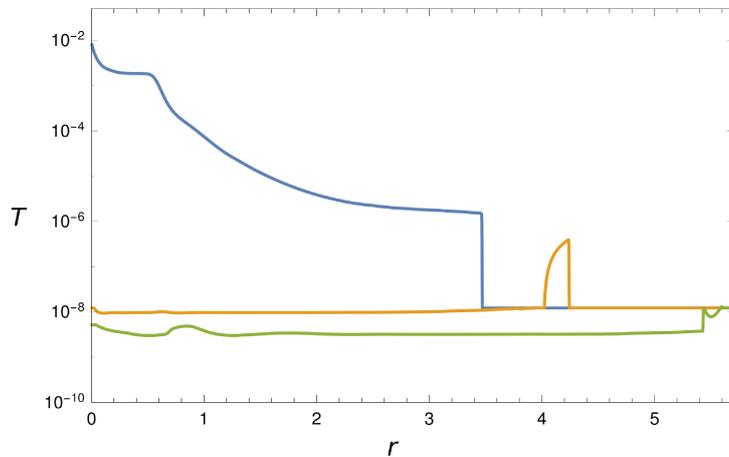


FIGURE 4.10 – Profil de température en 10^{12} K pour le refroidissement constant à $t = 16\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 100\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

La loi d'évolution du RSN est alors en $r_0(t) \propto t^{2/7}$ car l'entropie de la bulle est conservée. Dans le cas d'un refroidissement constant, la solution ne converge pas vers la solution de Oort en $r_0(t) \propto t^{1/4}$ [31] mais bien vers une loi en $r_0(t) \propto t^{2/7}$ car dans le cas présent, le RSN possède aussi une bulle interne adiabatique. Nous avons finalement poursuivi la simulation pour le cas constant jusqu'à $200\,000$ ans afin de suivre la décélération du RSN de manière asymptotique. La figure 4.11 montre l'évolution de la vitesse du front du choc V_s jusqu'à $200\,000$ ans.

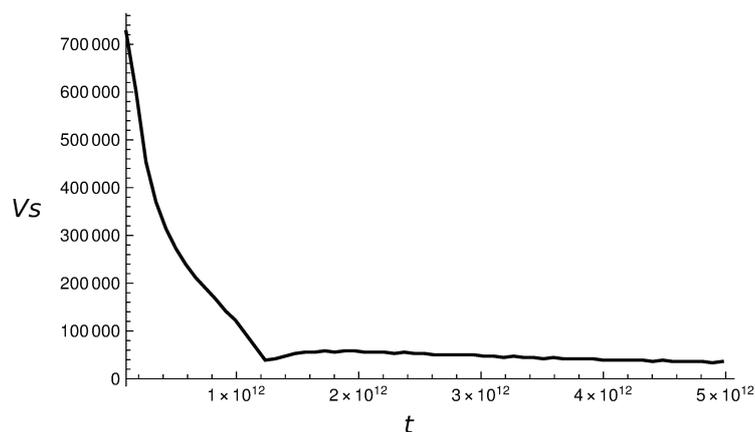


FIGURE 4.11 – Vitesse de front du choc V_s en m/s en fonction du temps en secondes pour le refroidissement constant.

La vitesse du choc décroît fortement lorsque le refroidissement agit le plus (jusqu'à 33 000 ans) puis décroît plus lentement en suivant une loi en $t^{\alpha-1}$. On peut aussi observer une très légère phase d'accélération du front autour de $t = 33\,000$ ans. Nous reviendrons plus tard sur cette phase d'accélération qui découle d'une instabilité thermique à l'origine de la formation de la coquille fine du RSN en phase radiative. La figure 4.12 montre l'évolution du paramètre de décélération $\alpha = V_s t / r_0$ en fonction du temps. La précision de cette courbe est limitée par une erreur résiduelle sur la courbe de la vitesse. En effet la position du front du choc est déterminée numériquement à une erreur près de l'ordre de plusieurs fois le pas de temps Δx . On en déduit un bruit sur la courbe de la vitesse du front du choc de l'ordre de $\Delta x / \Delta t$. Or le paramètre de décélération étant donné par $\alpha = V_s t / r_0$, on en déduit que l'erreur sur α croît comme $t^{1-\alpha}$ (en supposant que α est constant). La résolution de nos simulations limite donc la précision du paramètre α . La valeur du paramètre chute fortement lors du début de la formation de la coquille fine autour de $t = 33\,000$ ans puis converge vers une valeur proche de $2/7$ avec $\alpha < 2/7$. Ce résultat numérique est en accord avec les résultats analytiques de Petruk et Bandiera [29], numériques [20], [26] pour différents types de refroidissements.

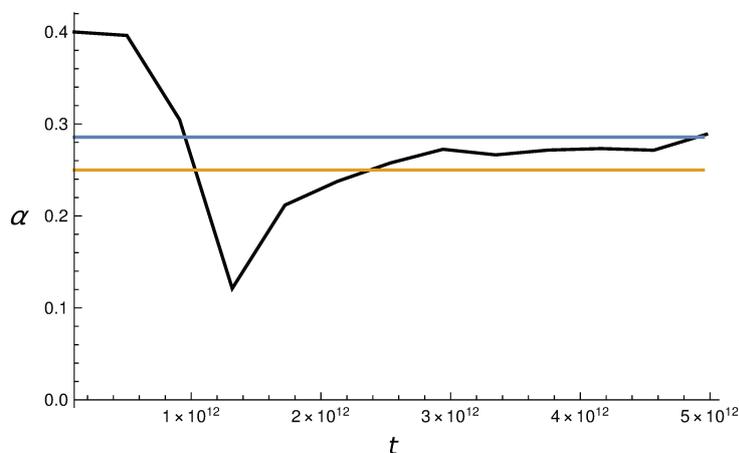


FIGURE 4.12 – Paramètre de décélération $\alpha = V_s t / r_0(t)$ pour le refroidissement constant (en noir) et le paramètre limite $\alpha_s = 1/4$ de Oort [31] en orange et $\alpha_s = 2/7$ de McKee & Ostriker [20] en bleu.

Il faut maintenant préciser plus en détail ce qu'il se passe lors de la formation de la coquille fine et dense. Lorsque le RSN rentre en phase radiative, le refroidissement constant induit une diminution de la température et de la pression aussi bien au centre que proche du front du choc car le refroidisse-

ment est constant. Ainsi que nous l'avons signalé à propos des figures 4.7, 4.8 et 4.9, les profils à 16 000 ans sont proches de ceux de Sedov-Taylor. Cette ressemblance peut être quantifiée en comparant la figure 4.13 à la figure 4.3 ainsi qu'en regardant les zooms de vitesse et de densité de la figure 4.14. Tout d'abord le saut de densité vaut 4 sur la figure 4.13 et ceci est encore vrai à 28 000 ans sur la figure 4.14. Du point de vue de la densification, le refroidissement n'a pas encore joué. De la même façon, si on appliquait la loi de Sedov-Taylor au rayon de l'onde de souffle donné à 3 000 ans sur la figure 4.3, on trouverait $3,7 \times 10^{17}$ m à 16 000 ans. Cette valeur est très proche de celle donnée sur la figure 4.13. A propos de la valeur des vitesses au niveau du front du choc, la différence est minime. La loi de Sedov-Taylor appliquée à nouveau à la figure 4.3 donne $v \simeq 2 \times 10^5$ m/s à 16 000 ans, tandis que sur la figure 4.13 on a $v \simeq 1,9 \times 10^5$ m/s. En revanche, à 28 000 ans, la différence est claire : la loi de Sedov-Taylor conduit à $1,5 \times 10^5$ m/s mais on a 10^5 m/s sur la figure 4.14. Revenons à la figure 4.13 et en particulier au profil de pression. Celui-ci est très semblable au profil de Sedov-Taylor de la figure 4.3 avec en particulier un plateau central. Néanmoins, ce plateau n'est qu'à 6% de la valeur au front du choc sur la figure 4.13, alors que dans le cas de Sedov-Taylor ce ratio est constant et est toujours d'environ 30%.

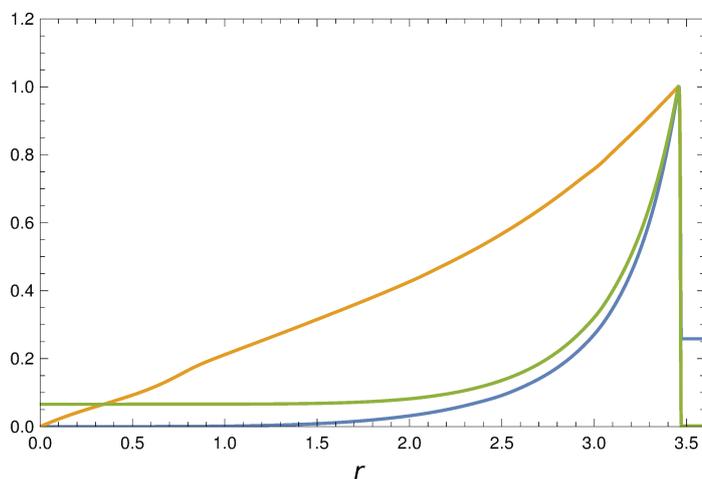


FIGURE 4.13 – Profil de la densité (en bleu), de la vitesse (en orange), de la pression (en vert) à $t = 16\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 3,87 \times 10^{-20}$ kg/m³, $v_{sh} = 1,9 \times 10^5$ m/s, $p_{sh} = 4,8 \times 10^{-10}$ Pa en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

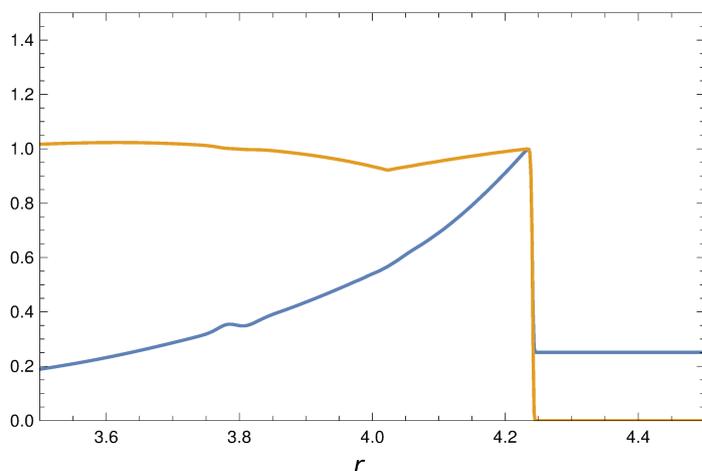


FIGURE 4.14 – Zoom du profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 28\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 3,98 \times 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ et $v_{sh} = 1 \times 10^5 \text{ m/s}$ en fonction de la distance radiale en 10^{17} m .

En conséquence, on peut conclure qu'à $16\,000$ ans, le refroidissement n'a pratiquement pas altéré la dynamique du RSN, mais qu'il a néanmoins refroidi la région centrale en se traduisant par une diminution de la valeur du plateau de pression. A $t = 28\,000$ ans, on a vu que le saut de densité vaut encore 4 (figure 4.14), mais la valeur de la vitesse au front du choc a été approximativement divisée par 2 par rapport à celle obtenue à $16\,000$ ans. De plus le profil est très modifié puisqu'il n'est plus proportionnel à la distance radiale. Par ailleurs, sur la figure 4.15, il ressort que la température a chuté presque partout à la valeur $T = T_{MIS}$ (ce comportement était bien visible aussi sur la figure 4.10), mais que près du front du choc on observe un pic environ 30 fois plus intense car la matière venant de subir le passage de l'onde de choc, elle n'a pas eu le temps de se refroidir. L'épaisseur de ce pic est d'environ 5% du rayon du RSN. La pression présente le même pic, mais dans la partie interne du RSN elle devient inférieure à celle du MIS (ceci apparaît clairement aussi sur la figure 4.9). Enfin, sur les figures 4.16 et 4.17 à $t = 100\,000$ ans, le RSN possède une structure délimitée par trois zones distinctes. La première zone est celle de la région du choc $r = 5,6 \times 10^{17} \text{ m}$ où la vitesse, la densité et la pression subissent une discontinuité et la température montre un petit sursaut. La deuxième région est située dans l'intervalle $5,43 \times 10^{17} \text{ m} \leq r \leq 5,6 \times 10^{17} \text{ m}$ et cette région est quasi isotherme avec une température légèrement inférieure à celle du MIS et où le refroidissement est nul. Dans cette zone, les profils de densité et de pression sont presque confondus. Cette région forme une coquille fine et dense ayant une épaisseur

d'environ 3% du rayon du RSN et un pic de densité qui atteint 19 fois la densité du MIS. Enfin la troisième zone interne ($0 \leq r \leq 5,43 \times 10^{17}$ m) est délimitée par un choc secondaire localisé à $r = 5,43 \times 10^{17}$ m (toute les grandeurs hydrodynamiques subissent un saut à cette position) qui converge vers le centre de l'explosion. Ce choc secondaire comme nous le verrons plus en détail plus loin dans le chapitre est la conséquence de l'instabilité thermique à l'origine de la formation de la coquille fine et dense. La dernière région interne possède une densité, une pression et une température très faible en comparaison à la densité, pression et température du MIS.

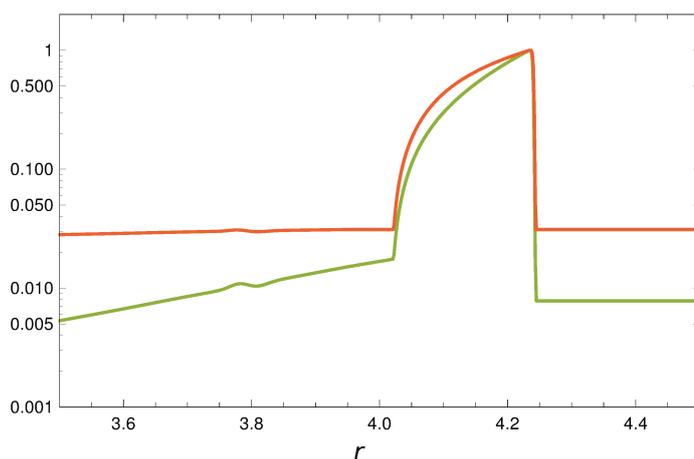


FIGURE 4.15 – Zoom du profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 28\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 1,3 \times 10^{-10}$ Pa et $T_{sh} = 3,9 \times 10^5$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

4.3. Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

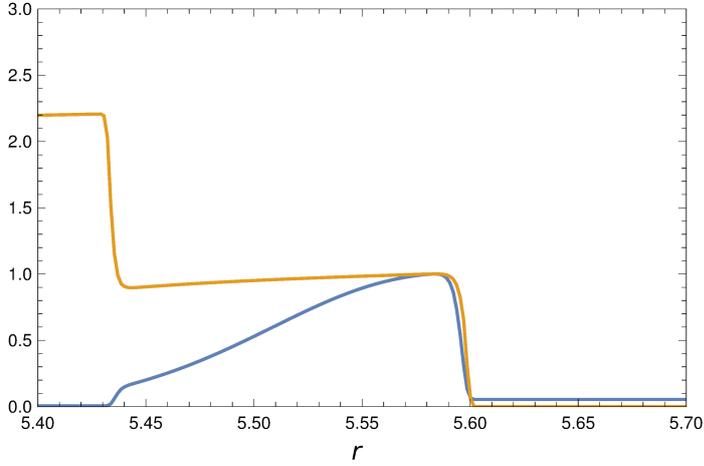


FIGURE 4.16 – Zoom du profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 100\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 18,57 \times 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ et $v_{sh} = 4,2 \times 10^4 \text{ m/s}$ en fonction de la distance radiale en 10^{17} m .

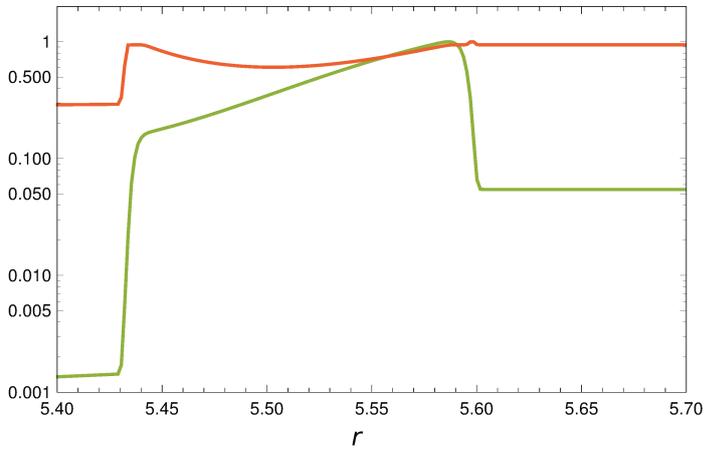


FIGURE 4.17 – Zoom du profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 100\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 1,8 \times 10^{-11} \text{ Pa}$ et $T_{sh} = 1,3 \times 10^4 \text{ K}$ en fonction de la distance radiale en 10^{17} m .

La structure finale du RSN à $t = 100\,000$ ans va rester inchangée jusqu'à $t = 200\,000$ ans. Nous allons maintenant présenter les résultats sur l'écoulement de base d'un RSN en phase radiative qui subit une perte d'énergie par refroidissement en loi de puissances pour des processus à deux particules

$\Lambda \propto \rho^2 T^b$ car ce sont ces processus physiques qui dominent le refroidissement dans un RSN. Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe précédent, le cas d'un refroidissement linéaire en densité ($a = 1, b = 0$) à déjà fait l'objet d'une étude [28]. Mais dans un premier temps nous allons présenter l'instabilité à l'origine de la formation de la coquille fine et dense.

4.3.2 Refroidissement catastrophique de Falle

Lorsque que l'on étudie un gaz qui subit des pertes d'énergie par refroidissement, on peut se demander si ce gaz est dans une configuration stable ou instable. Une discussion générale sur l'instabilité thermique a été proposée par Field [91] pour des milieux dilués. En effet bien que la plupart des objets célestes doivent leur existence à leur propre gravitation, il existe des systèmes comme la couronne solaire, les nuages interstellaires, les nébuleuses planétaires qui possèdent une énergie gravitationnelle bien plus faible que celle due à leur pression interne. On peut alors envisager que ces objets soient le lieu de processus de condensations générés par l'apparition d'instabilités thermiques. Afin de définir un critère d'instabilité, commençons par supposer un gaz au repos d'extension infinie et de densité ρ_0 et température T_0 uniformes et on ignore les effets de la gravité. On en déduit que les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont automatiquement vérifiées. On va maintenant considérer que la fonction de refroidissement généralisée \mathcal{L} définie comme la différence entre les pertes et les gains d'énergie par unité de masse et de temps s'écrit à l'équilibre,

$$\mathcal{L}(\rho_0, T_0) = 0 \quad (4.32)$$

La connaissance de la densité ρ_0 permet de trouver T_0 via cette équation. En couplant cette équation avec l'équation d'état d'un gaz parfait, on peut perturber deux des trois quantités de densité, pression et température en laissant la troisième quantité notée A constante. L'entropie du gaz par unité de masse va varier d'une quantité δS et la fonction de refroidissement par une quantité $\delta \mathcal{L}$ à A constant, et d'après la thermodynamique, nous avons :

$$\delta \mathcal{L} dt = -T d(\delta S) \quad (4.33)$$

et comme nous pouvons aussi écrire l'équation,

$$\delta \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} \right)_A \delta S \quad (4.34)$$

en remplaçant (4.34) dans (4.33), on en déduit l'équation différentielle sur δS ,

$$\frac{d(\delta S)}{dt} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} \right)_A \delta S = 0. \quad (4.35)$$

Ainsi, l'instabilité peut se développer à A constant si,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} \right)_A < 0 \quad (4.36)$$

car cette condition conduit à une perturbation d'entropie qui va croître exponentiellement avec le temps. Si la perturbation est à volume constant (cas isochore) alors $TdS = C_v dT$, où C_v est la chaleur spécifique à volume constant. Si la perturbation est à pression constante (cas isobare) alors $TdS = C_p dT$, où C_p est la chaleur spécifique à pression constante. Les critères d'instabilité correspondants sont,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_\rho < 0, \quad (isochore) \quad (4.37)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_\rho - \frac{\rho_0}{T_0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right)_T < 0, \quad (isobare) \quad (4.38)$$

Le critère d'instabilité isochorique est celui donné par Parker [92] sur la seule base de l'étude de l'équation de la chaleur. Cependant, la variation de pression engendrée par la variation de température isochore va entraîner des mouvements de matière qui risquent de briser l'hypothèse d'une densité constante. Cette instabilité intervient lors de la transition en phase radiative d'un RSN. En effet, nous allons voir par la suite que la formation de la coquille fine et dense dans la phase radiative d'un RSN est liée au critère d'instabilité isochorique.

Nous avons vu dans le cas du refroidissement d'un milieu statique que lorsque le gaz est au repos, le refroidissement vide l'énergie thermique du milieu considéré plus ou moins rapidement en fonction du paramètre b . Plus le paramètre b est faible, plus le refroidissement est efficace. Il est maintenant important de définir un critère d'instabilité appelé refroidissement catastrophique et qui fut introduit par Falle dans son papier de 1981 [24]. Considérons un gaz au repos (la pression, la température et la densité sont

supposées homogène) ayant une zone interne de longueur L qui subit un refroidissement. Pour plus de simplicité, on supposera le problème une dimension d'espace. La température et la pression vont alors baisser à densité constante (refroidissement isochore) pendant une durée caractéristique t_{ref} que l'on appellera le temps de refroidissement,

$$t_{ref} = \frac{P}{(\gamma - 1)\Lambda} \quad (4.39)$$

où P et Λ ont les mêmes significations que dans les pages précédentes. On peut aussi définir le temps que met une onde acoustique (ou sonore), à parcourir cette distance L ,

$$t_s = \frac{L}{c_s} \quad (4.40)$$

On peut alors différentier par la suite deux cas de figure. Dans un premier cas, si $t_s < t_{ref}$, la pression dans la zone L peut se réajuster à chaque instant avec la pression extérieure. On se retrouverait finalement dans un cas de figure où la densité et la température subissent un saut entre une zone interne plus froide et dense et une zone externe chaude et moins dense séparée par une discontinuité de contact. Dans le second cas, si $t_s > t_{ref}$, alors les ondes sonores et l'arrivée de matière n'arrivent plus à combler le déficit de pression et un puits se forme dans la zone de refroidissement [93], [94]. Le déséquilibre de pression va s'amplifier de plus en plus, la pression va se creuser et on aura un très fort gradient de pression entre la zone d'extension L et le milieu extérieur. Ce gradient va provoquer des mouvements de matière qui vont finalement devenir supersoniques. Deux chocs vont alors converger vers le centre de ce puits de pression et deux ondes de raréfaction iront dans le sens opposés. Enfin lorsque les deux chocs vont se rencontrer, deux chocs forts vont être générés dans le sens opposé. Pour que ce mécanisme ait lieu, il faut donc que le rapport $t_{ref}/t_s < 1$. Pour un refroidissement en loi de puissances pour des processus à deux particules ($\Lambda \propto \rho^2 T^b$), on peut déterminer ce rapport [24],

$$\frac{t_{ref}}{t_s} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{k}{m}\right)^{3/2} \frac{T^{3/2-b}}{(\gamma - 1)\Lambda_0 \rho L} \quad (4.41)$$

Si l'on suit une zone dans le RSN, la quantité ρL est conservée. A cause du refroidissement, la température de cette zone va baisser au cours du temps et

le rapport va décroître si le paramètre satisfait $b < 3/2$, auquel cas cette zone deviendra instable, ce qui nous donne le critère d'instabilité recherché. Cette perturbation va donc finalement conduire à la génération de chocs, dits chocs secondaires. Nous allons séparer par la suite deux classes de refroidissements. Les RSN en phase radiative pour un paramètre $b > 3/2$ que nous ne connaissons pas de refroidissement catastrophique et les RSN en phase radiative avec $b < 3/2$ où le refroidissement catastrophique va modifier la structure du reste avec la formation d'une coquille fine et dense.

4.3.3 Refroidissements avec $b > 3/2$

Lorsque b vérifie $b > 3/2$, le rapport (4.41) augmente quand la température décroît. En conséquence, toute baisse de pression provoquée par le refroidissement est instantanément comblée par l'arrivée sonique de matière supplémentaire. Dans un premier temps nous allons regarder le comportement d'une onde de souffle qui perd son énergie par refroidissement avec ($a = 2, b = 2$). Ce processus d'émission est un processus à deux particules. Il a aussi la particularité de ne dépendre que de la pression au carré. Nous allons choisir une constante de refroidissement Λ_0 suffisamment grande pour que le reste ait perdu une fraction conséquente de son énergie totale par refroidissement au temps final de la simulation $t_f = 53\,000$ ans. Cependant il faut aussi que Λ_0 soit suffisamment faible pour que $t_{ref} > t_s$ dès le départ. Nous avons décidé de choisir une constante $\Lambda_0 = 10^{-2} \text{ SI}$, dix fois plus faible que celle de la formule (4.29) afin de s'assurer qu'il n'y ait pas de mécanismes de formation de chocs secondaires au début de l'évolution en phase radiative.

Lorsque le refroidissement est enclenché, comme pour le refroidissement constant, le RSN se met à perdre de l'énergie et la solution de Sedov-Taylor n'est plus valide. On peut voir sur la figure 4.18 que l'énergie à 53 000 ans n'est plus qu'à 40% de l'énergie initiale. Puisque la fonction de refroidissement possède un exposant en température $b > 0$, alors l'énergie décroît de manière convexe (voir la figure 4.4). On peut aussi remarquer que l'énergie cinétique et l'énergie thermique ne sont plus respectivement qu'à 30% et 25% de leur valeur initiale.

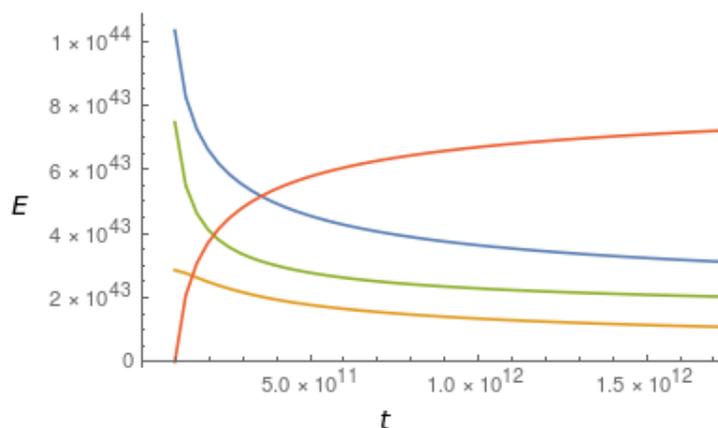


FIGURE 4.18 – Energie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^2$.

Lors de la transition en phase radiative, la température dans le RSN chute et la pression plateau chute aussi. On peut voir sur la figure 4.19 qui représente les profils hydrodynamiques au temps t_f que le profil de pression baisse en comparaison avec celui de Sedov-Taylor. La pression plateau est alors deux fois plus faible que pour la solution de Sedov-Taylor. C'est le même comportement que celui que nous avons décrit sur la figure 4.13 pour le refroidissement constant (on notera que d'après ce qu'on vient d'expliquer, le refroidissement constant fait intervenir le processus catastrophique car $b = 0 < 3/2$, bien qu'ici on n'aie pas le refroidissement catastrophique. On remarque aussi que le profil de densité est légèrement au dessus de celui de Sedov-Taylor très près du front du choc puis passe en dessous de celui-ci pour $r/r_0 = 0.8$. Globalement, la matière a donc tendance à se concentrer vers le front du choc bien que le taux de compression ne dépasse pas 4. On remarque aussi que la perturbation en vitesse de la solution numérique s'est propagée vers le front du choc. Comme prévu par le critère d'instabilité, on constate que dans le cas présent, il n'y a pas de refroidissement catastrophique et la formation de la coquille fine n'a pas lieu. En revanche, cette solution est proche de la solution autosemblable du chapitre précédent de type régulière. En effet la solution autosemblable régulière jusqu'au centre de l'explosion subit les mêmes modifications que cette solution numérique avec une pression plateau qui diminue. Cependant la répartition de la matière est différente car pour le refroidissement homogène on refroidit de la même manière au centre du reste que proche du front du choc contrairement au cas présent. Enfin, le profil de vitesse est trop perturbé pour faire une comparaison avec la solution

avec refroidissement autosemblable.

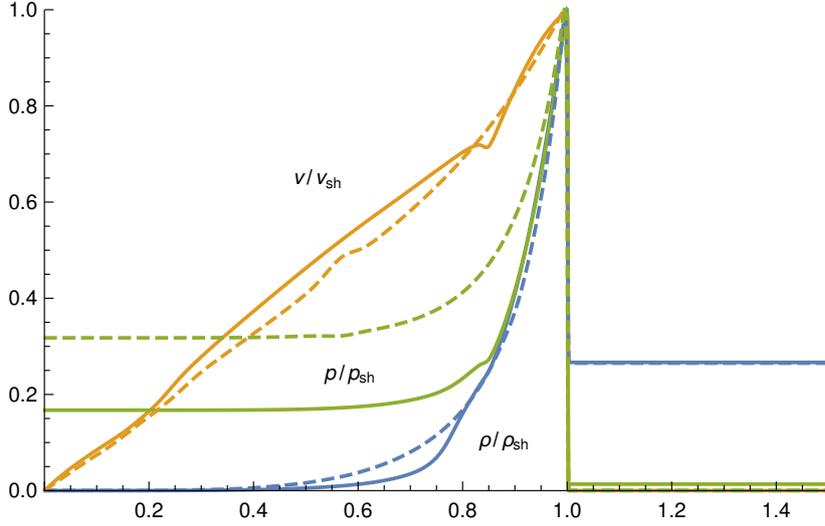


FIGURE 4.19 – Profils normalisés au front du choc de densité (en bleu), de vitesse (en orange) et de pression (en vert) comparés à la solution numérique de Sedov-Taylor à t_0 (en pointillé voir la figure 4.3) en fonction de la distance radiale r/r_0 normalisée au rayon du RSN qui vaut $r_0(t_0) = 4,9 \times 10^{17}$ m. La densité au front du choc vaut $\rho_{sh} = 3,75 \times 10^{-20}$ kg/m³, la vitesse $v_{sh} = 7,4 \times 10^4$ m/s et la pression $p_{sh} = 7,34 \times 10^{-11}$ Pa.

On peut maintenant s'intéresser à l'évolution du rayon du RSN et à la vitesse du front du choc lors de la transition vers la phase radiative. En effet le rayon ne va plus suivre une loi de Sedov-Taylor en $r_0 \propto t^{2/5}$ et on s'attend à voir le paramètre de décélération défini comme $\alpha = V_s t / r_0$ diminuer au cours du temps. Sur la figure 4.20, on peut voir que la vitesse du choc chute par rapport à celle de Sedov-Taylor car la vitesse finale à $t_f = 53\,000$ ans est de $V_s = 130$ km/s pour l'onde de souffle de Sedov-Taylor contre $V_s = 97$ km/s pour la solution avec un refroidissement $b = 2$. Par ailleurs, on note que ce profil de décroissance temporelle est beaucoup plus régulier et progressif que sur la figure 4.11. Ce comportement est dû au fait qu'ici on a pas de refroidissement catastrophique.

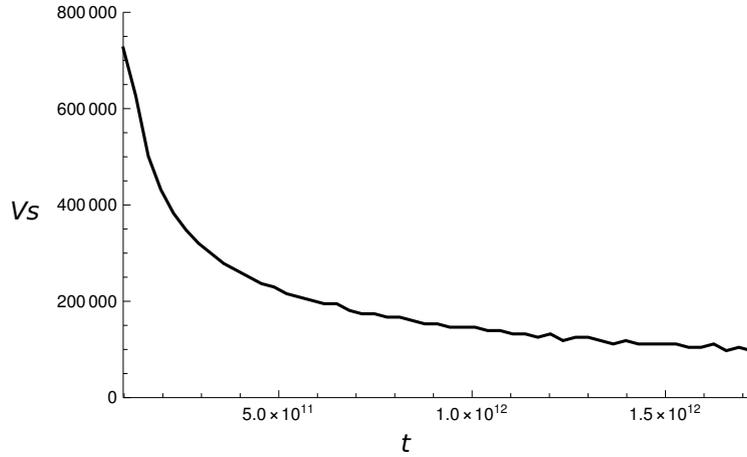


FIGURE 4.20 – Vitesse de front du choc V_s en m/s en fonction du temps en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^2$.

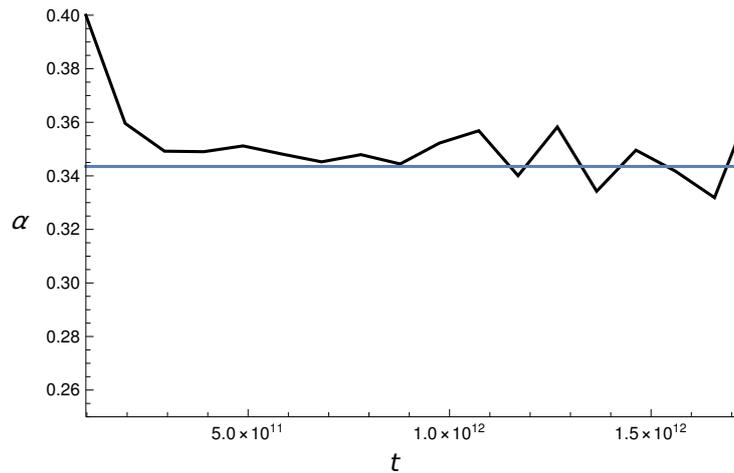


FIGURE 4.21 – Paramètre de décélération $\alpha = V_s t / R$ pour le refroidissement $a = b = 2$ (en noir) et le paramètre limite $\alpha' = 0.346$ de l'analyse autosemblable (en bleu) en fonction du temps en secondes.

La figure 4.21 présente le paramètre de décélération α en fonction du temps. On peut constater que la solution ne tend pas vers la valeur $2/7$ prédite par les modèles de McKee & Ostriker [20] et Petruk & Bandiera [29]. En effet le paramètre semble stagner à une valeur $\alpha \simeq 0.35$ plus proche de la valeur théorique du paramètre limite $\alpha' = 0.346$ pour laquelle un refroidissement autosemblable homogène ne peut plus posséder de solutions régulières jusqu'au centre de l'explosion. Cependant la courbe du paramètre α subit

le même problème de bruit pour des temps longs que pour le refroidissement constant. En conclusion pour $\Lambda = \rho^2 T^2$, l'expansion du RSN est moins ralentie que lorsque le refroidissement est constant.

4.3.4 Refroidissements avec $b < 3/2$

Pour $b < 3/2$, on s'attend à un comportement catastrophique mais ce type de refroidissement est plus proche de la réalité physique d'un RSN en phase radiative. En effet la fonction de refroidissement du RSN est approximée par une loi en puissance de la température où $b < 3/2$ dans toutes les gammes de température. Dans un premier temps le refroidissement est dominé par les processus Bremsstrahlung ($b = 1/2$), puis devient plus fort en dessous de $T = 10^6$ K et est dominé par les raies de structure fine ($b = -1/2$) et enfin en dessous de $T = 10^4$ K, il est dominé par l'excitation de CII et OI où le refroidissement baisse beaucoup ($b = 1$) mais le critère d'arrêt nous interdit de refroidir aussi bas en température. Afin de mieux comprendre le comportement d'une onde de souffle en fonction du refroidissement, nous avons choisi de comparer trois refroidissements différents pour des processus à deux particules $a = 2$. Le premier sera un refroidissement indépendant de la température $\Lambda \propto \rho^2$, le deuxième sera un refroidissement de type Bremsstrahlung $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ et enfin le dernier sera un refroidissement par raies de structure fine $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$. Dans un premier temps il faut déterminer pour chaque refroidissement la constante de refroidissement Λ_0 . Cette constante a été calculée par la formule (4.29) pour les trois refroidissements à l'exception des pertes d'énergie en $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ le plus violent où nous avons divisé par 10 la constante issue de (4.29) afin que la résolution soit suffisante pour capturer la structure du RSN proche du front du choc. Les valeurs de la constante Λ_0 pour les trois refroidissements sont notées sur le tableau 4.1.

TABLE 4.1 – Constante de refroidissement Λ_0 (unités SI) pour les trois refroidissements avec $b < 3/2$.

$\Lambda \propto \rho^2 T^b$	-1/2	0	1/2
Λ_0	10^{23}	10^{19}	10^{14}

Comme pour les cas déjà traités, lors de l'évolution en phase radiative, l'énergie du RSN ne sera plus conservée et on peut constater comme pour le refroidissement $b = 2$ du paragraphe précédent que le reste à perdu une grande fraction de son énergie totale à 53 000 ans pour les trois refroidissements (Figures 4.22 à 4.24). On remarque qu'une plus grande quantité d'énergie totale est perdue par le refroidissement en $b = 1/2$ (figure 4.23) que

celui en $b = 0$ (figure 4.22). En effet, bien que le refroidissement en $b = 0$ soit plus fort que celui en $b = 1/2$ où le refroidissement diminue lorsque la température diminue, le refroidissement $b = 0$ rentre rapidement dans un régime où la température atteint celle du MIS dans la zone de plus fort refroidissement puis le critère d'arrêt coupe le refroidissement dans la zone isotherme. Ce changement de régime est clairement identifié sur la figure 4.22 où le gradient d'énergie totale change et la courbe devient convexe. Ce comportement est assez semblable à celui montré sur la figure 4.6. Ce changement de régime est encore plus prononcé pour le cas $b = -1/2$ (où le refroidissement augmente lorsque la température diminue) que pour le cas $b = 0$. On remarque que le refroidissement $b = -1/2$ (figure 4.24) est celui qui perd globalement le moins d'énergie (figure 4.23) car nous avons baissé le coefficient Λ_0 d'un facteur 10 par rapport à la formule (4.29). La structure du RSN pour les trois refroidissements va évoluer différemment du cas $b > 3/2$ et l'on va assister à la formation d'une coquille fine et dense (voir les figures 4.25, 4.29 et 4.33) comme pour le cas d'un refroidissement homogène. En effet, la température va chuter dans le RSN mais cette chute de température va se concentrer proche du front du choc (figures 4.28, 4.32 et 4.36), où la densité est la plus grande, en comparaison avec le cas d'un refroidissement constant où l'on refroidit de manière homogène (voir la figure 4.10).

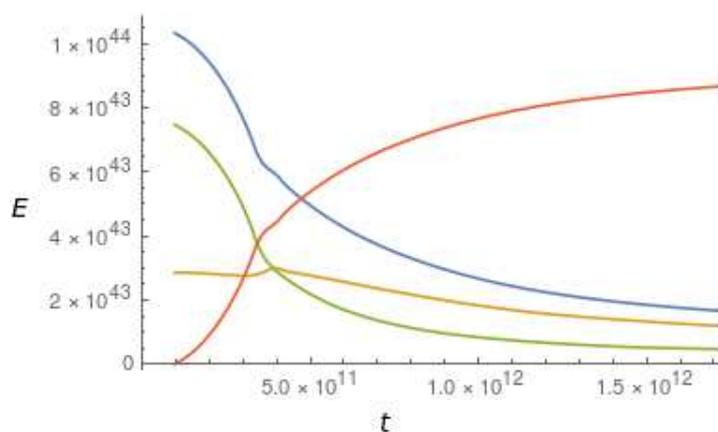


FIGURE 4.22 – Energie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$.

4.3. Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

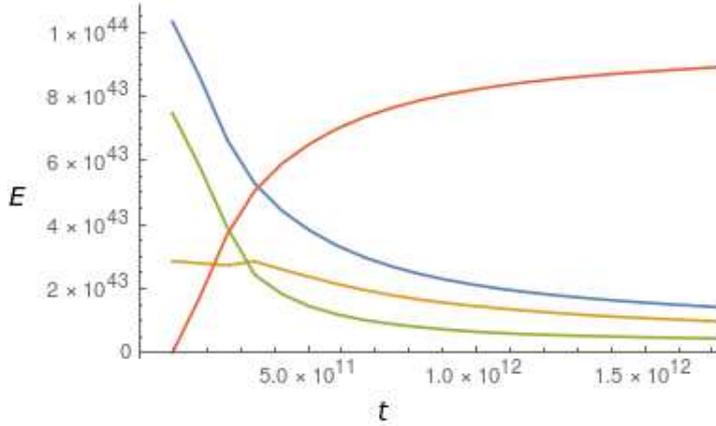


FIGURE 4.23 – Energie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$.

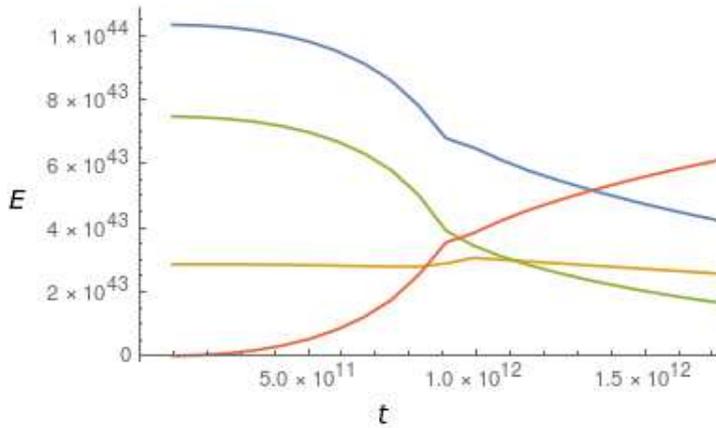


FIGURE 4.24 – Energie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$.

On notera que la série de (figures 4.25 à 4.28) pour $\Lambda \propto \rho^2$ comporte la courbe supplémentaire à $t = 10\,000$ ans en comparaison des cas $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ (figures 4.29 à 4.32) et $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ (figures 4.33 à 4.36). Cette particularité est motivée par le fait que nous allons illustrer la formation de la coquille dense en se basant sur le cas $\Lambda \propto \rho^2$ et il est alors nécessaire d'avoir une vision des profils au temps précoce $t = 10\,000$ ans. De plus le refroidissement sera de

plus en plus concentré au niveau du front du choc lorsque l'exposant b diminue car la température est faible dans la coquille. Cependant, la température reste grande dans la bulle chaude où le refroidissement n'agit que très peu car la densité ρ est très faible. La pression chute derrière le front du choc et un puits de pression de plus en plus profond (ce comportement sera davantage commenté un peu plus loin) se forme au cours du temps dans le RSN pour les trois refroidissements et la pression plateau au centre chute mais reste supérieure à la pression du MIS lors de l'évolution du RSN (figures 4.27, 4.31 et 4.35). Cette chute de pression dans la coquille crée des mouvements violents de matière avec des vitesses qui dépassent la vitesse du front du choc (figures 4.26, 4.30 et 4.34). Nous allons revenir en détail sur ces points dans la section 4.3.5, mais à ce niveau nous voudrions faire quelques commentaires. En effet, le refroidissement catastrophique entraîne des comportements non triviaux qui, à notre connaissance, n'avaient pas été mis en évidence jusqu'à maintenant. Examinons en particulier la figure 4.26 et comparons la à la figure 4.8 du refroidissement constant. D'après le profil de densité de la figure 4.7, la configuration est encore dans un régime relativement proche de celui de Sedov-Taylor à $t = 16\,000$ ans (saut de densité égale à 4). Le profil associé de vitesse est en bleu sur la figure 4.8. Si on fait une comparaison avec la figure 4.26 et en particulier avec le profil de vitesse à $18\,000$ ans (ce temps est proche de la valeur de $16\,000$ ans de la figure 4.8), on trouve que la vitesse du fluide est plus grande que pour le cas de Sedov-Taylor : sur la figure 4.26 à $t = 18\,000$ ans, le maximum de vitesse vaut plus que $0,3 \times 10^6$ m/s alors qu'il ne dépasse pas $0,2 \times 10^6$ m/s à $t = 16\,000$ ans sur la figure 4.8. Une configuration où le refroidissement a eu le temps d'agir provoque donc une vitesse du fluide plus élevée. Ce comportement paradoxal s'explique néanmoins par les profils de pression. En effet, regardons la figure 4.9. Le profil de pression est toujours strictement croissant. Si on regarde le profil de pression à $18\,000$ ans sur la figure 4.27, on voit clairement que la pression est décroissante dans la région $2,6 \times 10^{17}$ m/s $\leq r \leq 3,2 \times 10^{17}$ m/s. Cette tendance reste vraie pour les instants ultérieurs. Le gradient de pression consécutif pousse donc violemment le fluide vers l'extérieur, expliquant ainsi les grandes valeurs de la vitesse montrées sur la figure 4.26. Une partie de la matière du RSN vient alors rattraper le front du choc et la coquille se densifie comme pour le cas du refroidissement constant. On note aussi des profils de vitesse agités au centre du RSN qui résulte de mouvements 2D transverses qui n'ont aucun effet sur la dynamique de la coquille. On peut alors observer sur les figures 4.25, 4.29 et 4.33, une augmentation de la compression de la coquille au cours du temps qui finit par atteindre des taux de compression à $28\,000$ ans de 65 pour le cas d'un refroidissement $b = 0$ et 60 pour le cas d'un refroidissement $b = 1/2$ (le cas $b = -1/2$ est traité quelques lignes plus loin). Comme le refroidissement

est plus fort dans la coquille lorsque l'exposant b diminue, la compression sera plus forte pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ que pour $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$. Ultérieurement le taux de compression baisse car le refroidissement n'agit plus dans la coquille qui est devenue isotherme à la température $T = T_{MIS}$ et la compression à 53 000 ans est de 45 pour la cas $b = 0$ et de 40 pour le cas $b = 1/2$. Pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$, la formation de la coquille fine arrive plus tard et la compression de 55 à 53 000 ans est moins forte que pour les deux autres refroidissements bien que l'exposant b soit le plus faible dans ce cas. Ceci est dû au fait que la constante Λ_0 a été divisée par 10 par rapport à la formule (4.29). Il est important de s'intéresser à l'évolution asymptotique globale du rayon du RSN pour les trois refroidissements. Sur la figure 4.37, l'évolution du rayon converge aux temps long vers un paramètre de décélération proche de $\alpha = 2/7$ pour les trois refroidissements $b < 3/2$. En comparant ces solutions aux solutions autosemblables avec refroidissement homogène du chapitre précédent, on constate que pour un refroidissement suffisamment fort, les solutions sont de type coquille poussée par une bulle interne chaude. Enfin, si la bulle chaude ne perd pas d'énergie par refroidissement, ce qui est le cas pour les solutions numériques (car la densité est bien trop faible dans la bulle et le refroidissement dépend de la densité au carré), alors on trouve aussi $\alpha = 2/7$ pour un gaz monoatomique.

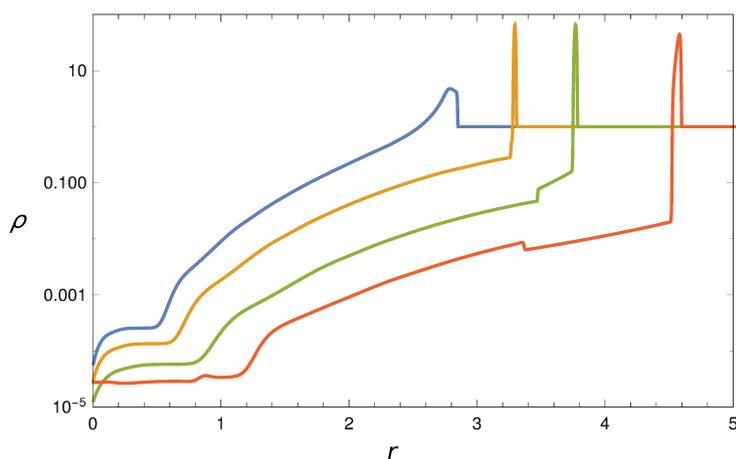


FIGURE 4.25 – Profil de densité en 10^{-20} kg/m³ pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ à $t = 10\,000$ ans (en bleu), $t = 18\,000$ ans (en orange), à $t = 28\,000$ ans (en vert) et à $t = 53\,000$ ans (en rouge) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

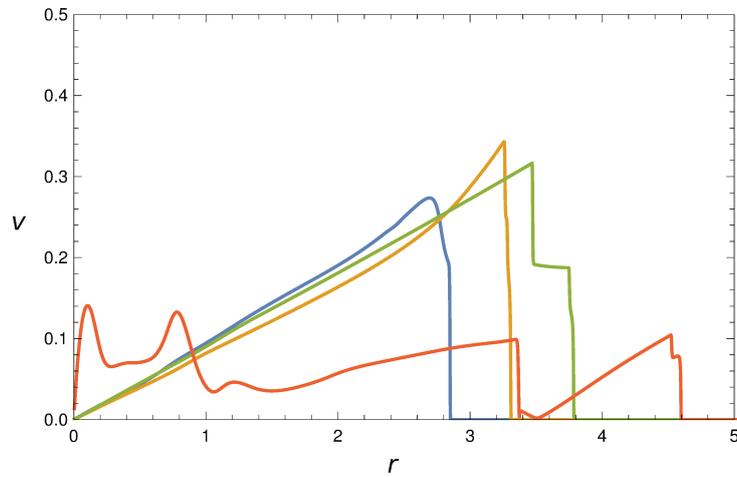


FIGURE 4.26 – Profil de vitesse en 10^6 m/s pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ à $t = 10\,000$ ans (en bleu), $t = 18\,000$ ans (en orange), à $t = 28\,000$ ans (en vert) et à $t = 53\,000$ ans (en rouge) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

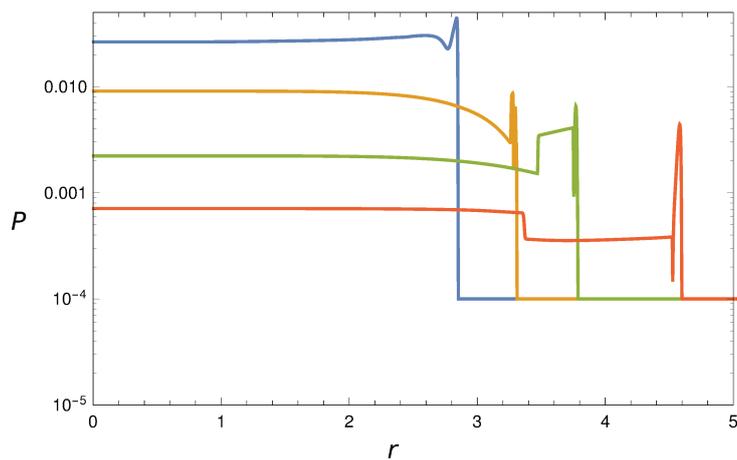


FIGURE 4.27 – Profil de pression en 10^{-8} Pa pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ à $t = 10\,000$ ans (en bleu), $t = 18\,000$ ans (en orange), à $t = 28\,000$ ans (en vert) et à $t = 53\,000$ ans (en rouge) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

4.3. Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

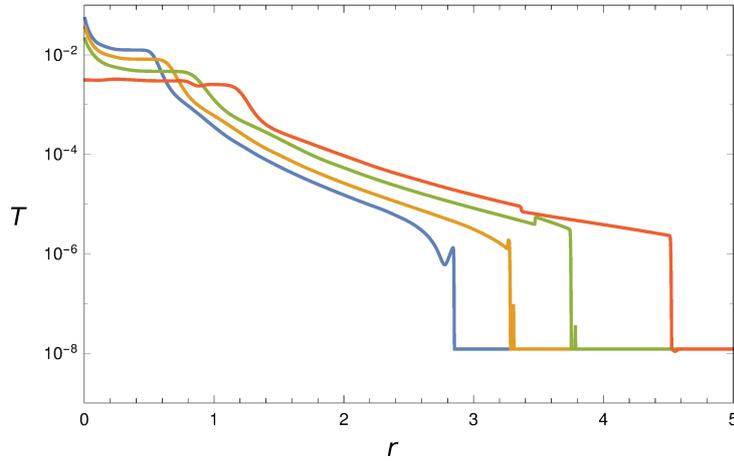


FIGURE 4.28 – Profil de température en 10^{12} K pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ à $t = 10\,000$ ans (en bleu), $t = 18\,000$ ans (en orange), à $t = 28\,000$ ans (en vert) et à $t = 53\,000$ ans (en rouge) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

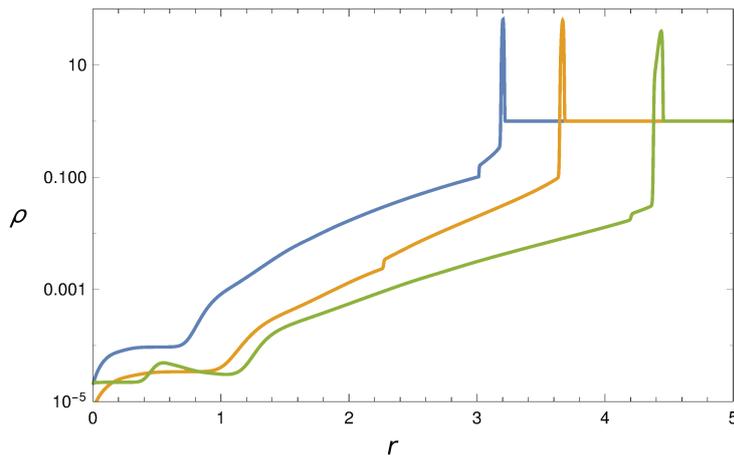


FIGURE 4.29 – Profil de densité en 10^{-20} kg/m³ pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

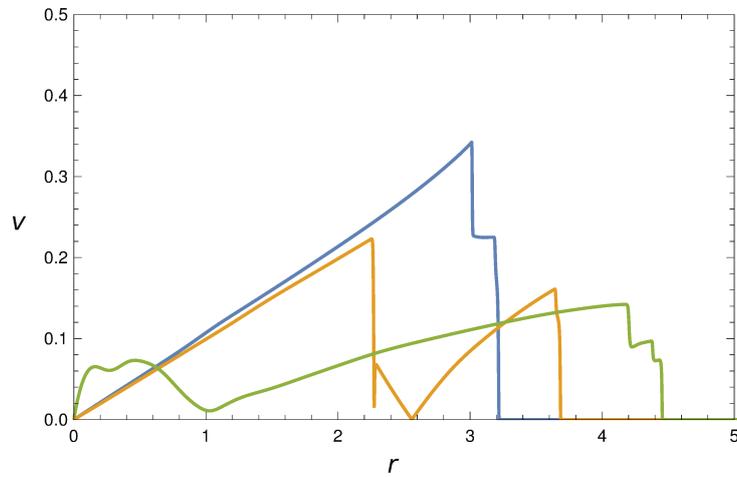


FIGURE 4.30 – Profil de vitesse en 10^6 m/s pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

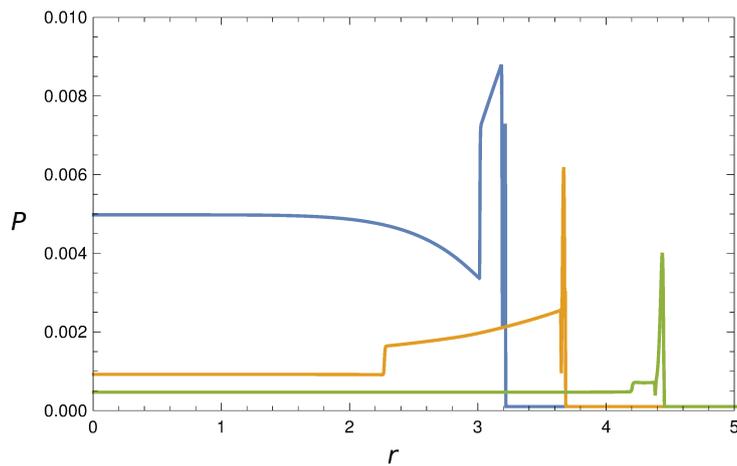


FIGURE 4.31 – Profil de pression en 10^{-8} Pa pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

4.3. Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

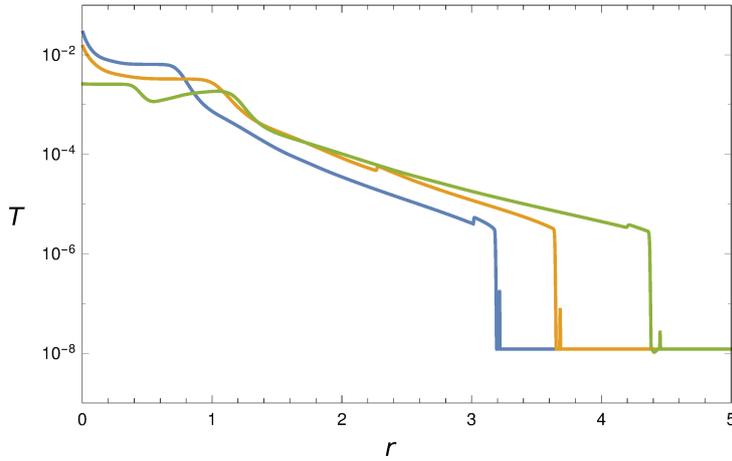


FIGURE 4.32 – Profil de température en 10^{12} K pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

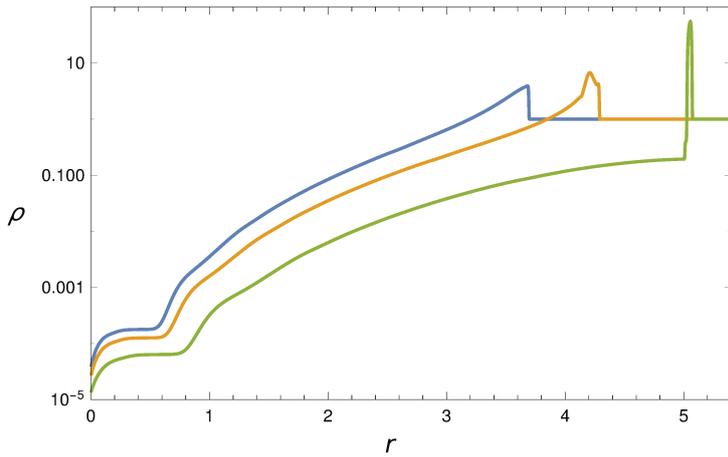


FIGURE 4.33 – Profil de densité en 10^{-20} kg/m³ pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

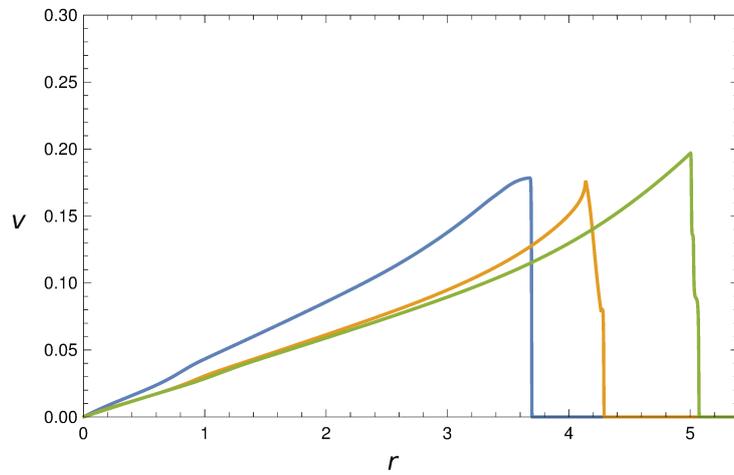


FIGURE 4.34 – Profil de vitesse en 10^6 m/s pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

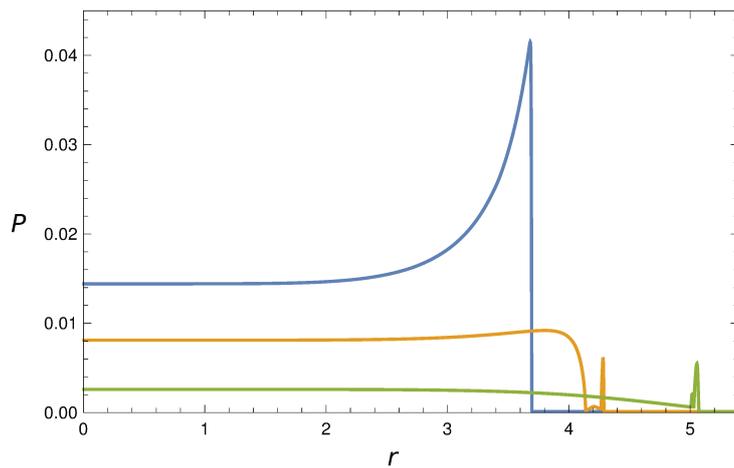


FIGURE 4.35 – Profil de pression en 10^{-8} Pa pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

4.3. Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

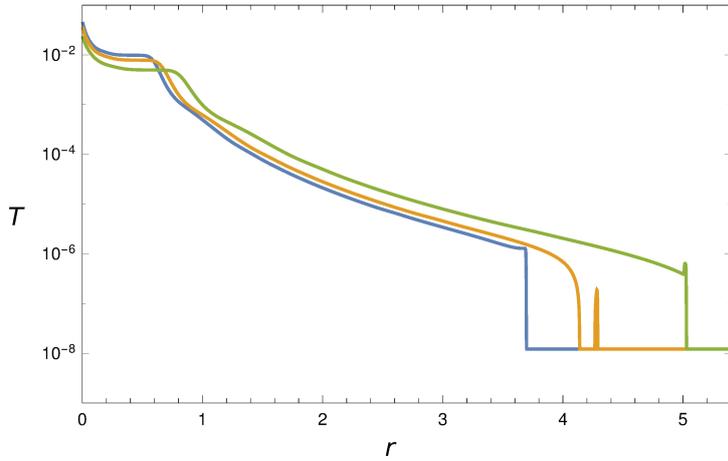


FIGURE 4.36 – Profil de pression en 10^{12} K pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.

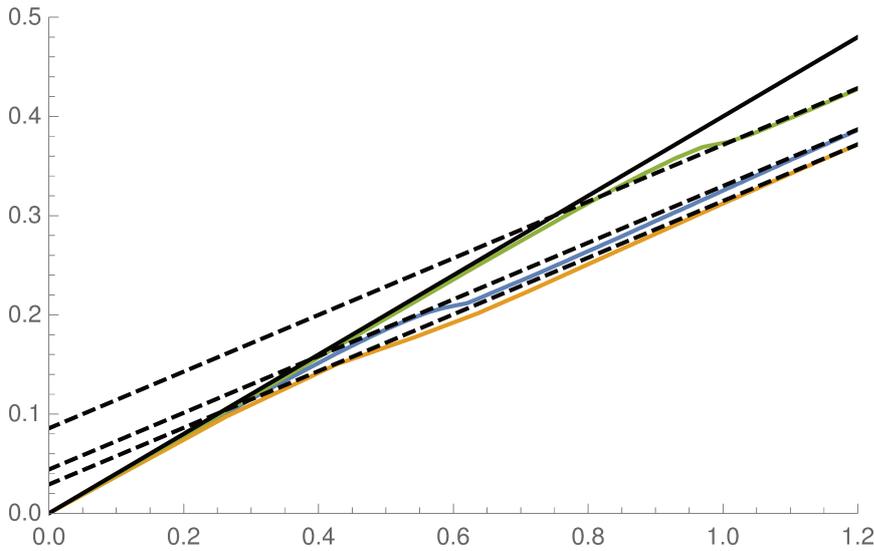


FIGURE 4.37 – Courbe de $\text{Log}(r_0(t)/r_0(t_0))$ en fonction de $\text{Log}(t/t_0)$ pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ (en bleu), $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ (en orange) et $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ (en vert) avec la droite théorique correspondant à la phase de Sedov-Taylor de pente $2/5$ en noir et celle de la phase radiative asymptotique de pente $2/7$ en pointillés noirs. $t_0 = 3\,000$ ans est le temps initial de la phase radiative et $r_0(t_0) = 1,83 \times 10^{17}$ m le rayon initial du RSN correspondant.

Pour la solution autosemblable de Barenblatt avec refroidissement au

front du choc, on peut trouver des solutions régulières jusqu'au centre pour des valeurs $\alpha > 2/7$ mais plus on se rapproche de cette valeur sigulière, plus la densité augmente dans la coquille. Les résultats numériques sont bien en accord avec les résultats analytiques pour un refroidissement autosemblable.

4.3.5 Formation de la coquille dense et fine

Nous allons maintenant passer à la description plus détaillée des profils hydrodynamiques lors de la transition en phase radiative du RSN. Nous allons décrire cette transition catastrophique pour le cas $\Lambda \propto \rho^2$. Le scénario sera qualitativement le même pour les deux autres refroidissements. Lorsque le reste se met à se refroidir, la température commence à chuter derrière le front du choc ainsi que la pression à $t = 10\,000$ ans (Figures 4.38 et 4.39). Jusqu'ici rien ne change comparé à la situation du refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^2$. Cependant le mécanisme du refroidissement catastrophique de Falle est à l'oeuvre car $b < 3/2$ et le temps de refroidissement devient faible en comparaison du temps de parcours d'une onde sonore. Sur la figure 4.38, on remarque que la densité présente un maximum en $r \simeq 2.79 \times 10^{17}$ m. On commence à s'écarter significativement du régime de Sedov-Taylor puisque le taux de compression vaut environ 4.8. De plus, toujours contrairement au cas de Sedov-Taylor où la vitesse est toujours croissante avec r , ici elle est décroissante depuis $r \simeq 2.70 \times 10^{17}$ m jusqu'au front du choc en $r_0 \simeq 2.85 \times 10^{17}$ m. Par ailleurs, comme la densité est faible dans la bulle ($r \leq 2.7 \times 10^{17}$ m, voir aussi la figure 4.25), le refroidissement y est faible et la température baisse peu avec le temps (voir les figures 4.28 et 4.39). Elle baisse peu également au niveau du front du choc, car la matière venant d'être fraîchement choquée, elle n'a pas eu le temps d'être refroidie. Par contre à l'endroit du pic de densité, le refroidissement agit et il entraîne le minimum de température observé sur la figure 4.39. Bien que de manière atténuée à cause de la non-uniformité de la densité, le profil de pression suit la même tendance que celui de la température avec également un minimum. On remarquera que la position des minima de P et de T ne coïncident pas tout à fait et qu'ils diffèrent légèrement de la position du maximum de densité. Ces petits écarts s'expliquent par la dynamique de la matière qui ne réagit pas instantanément au gradient de pression. Le temps $t = 11\,000$ ans (figures 4.40 et 4.41) marque le début de l'emballement du refroidissement catastrophique et celui de la formation de la coquille. Le profil de densité présente un pic en $r \simeq 2.82 \times 10^{17}$ m avec un taux de compression proche de 6. Par ailleurs, on remarque que la décroissance spatiale de la vitesse est plus prononcée sur la figure 4.40 que sur la figure 4.38. Les particules sont donc freinées dans la zone de la coquille située entre le lieu du maximum de densité et le front du choc situé

en $r_0 \simeq 2.89 \times 10^{17}$ m. Ce processus est similaire à celui que nous avons rencontré dans la section 4.3.1 (refroidissement constant). Le front du choc est également clairement visible sur la figure 4.41 et comme le refroidissement est plus intense dans la région du maximum de densité, on voit sur cette figure que la température est descendue à la valeur T_{MIS} (petit plateau situé entre 2.81×10^{17} m et 2.82×10^{17} m). Cette diminution de T jusqu'à sa valeur minimale entraîne une chute de pression accompagnée de gradients très raides pour $r \leq 2.81 \times 10^{17}$ m et pour $r \geq 2.82 \times 10^{17}$ m. Le puits de pression dont nous avons dit quelques mots plus haut à propos des figures 4.27, 4.31 et 4.35 est maintenant formé. Le versant gauche du puit accélère la matière vers l'extérieur comme nous l'avons déjà commenté à propos des figures 4.26 et 4.27, tandis-que le versant droit la freine violemment. C'est la cause de la forte décroissance de la vitesse dans cette zone ainsi qu'il a été noté juste avant pour la figure 4.40. Cette forme particulière du profil de pression implique que dans la région $T = T_{MIS}$, les particules les plus rapides vont entrer en collision avec celles qui sont les plus lentes. A cet endroit $r \simeq 2.81 \times 10^{17}$ m, la vitesse du son vaut celle du MIS ($c_1 = 13 km/s$ - voir la section 4.2.1) mais comme la vitesse du fluide est supersonique (2.5×10^5 m/s, on se retrouve dans la situation décrite dans la section 4.3.2 avec la création de deux chocs secondaires.

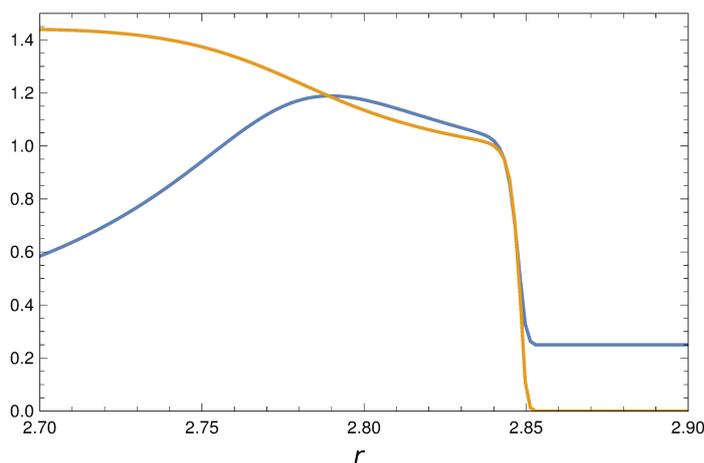


FIGURE 4.38 – Zoom du profil de la densité (en bleu) et de vitesse (en orange) à $t = 10\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 4 \times 10^{-20}$ kg/m³, $v_{sh} = 1,9 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

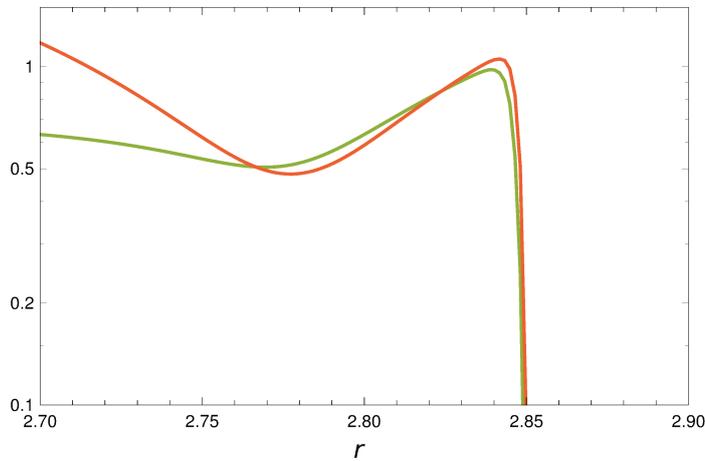


FIGURE 4.39 – Zoom du profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 10\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 4,5 \times 10^{-10}$ Pa et $T_{sh} = 1,25 \times 10^6$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

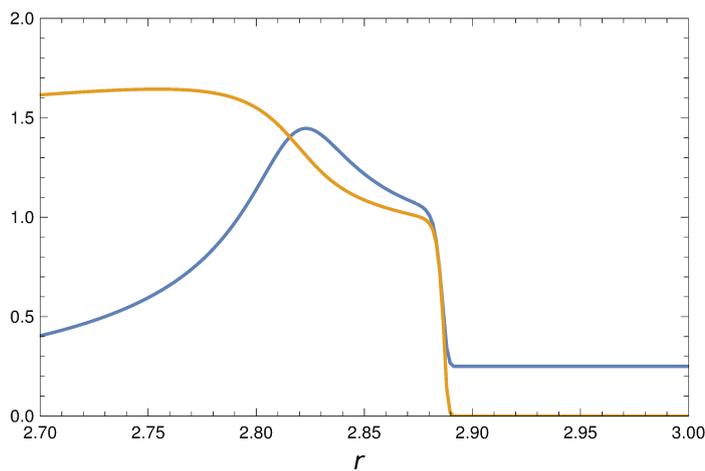


FIGURE 4.40 – Zoom du profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 11\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 4 \times 10^{-20}$ kg/m³ et $v_{sh} = 1,7 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

4.3. Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

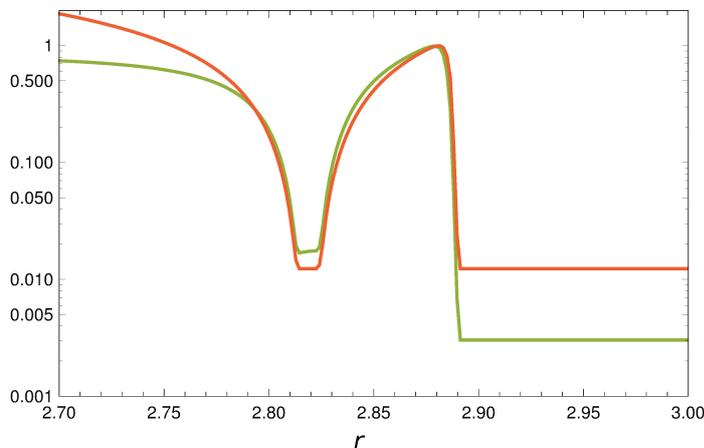


FIGURE 4.41 – Zoom du profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 11\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 3,3 \times 10^{-10}$ Pa et $T_{sh} = 9,8 \times 10^5$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

Cette situation commence à être visible sur les figures 4.42 et 4.43 à $t = 13\,000$ ans. Nous allons commenter cela tout de suite après, mais d'abord nous voulons revenir à la collision entre particules rapides et particules lentes. En comparant les figures 4.38 et 4.42, on se rend compte que le gradient négatif de pression a amplifié la vitesse maximale v_{max} de la matière qui est passé de $v_{max} \simeq 2.6 \times 10^5$ m/s à $t = 10\,000$ ans à $v_{max} \simeq 3.6 \times 10^5$ m/s à $t = 13\,000$ ans. Cette augmentation de vitesse se traduit par un gain d'énergie cinétique comme on peut le voir sur la figure 4.22 à $t = 4 \times 10^{11}$ s. La collision est alors d'autant plus violente, et combinée au refroidissement, un pic très intense de densité se forme en $r \simeq 3 \times 10^{17}$ m. Le taux de compression a maintenant atteint une très grande valeur proche de 65 : c'est environ 10 fois plus que celle obtenue à partir de la figure 4.40. La coquille est donc clairement formée à $t = 13\,000$ ans et elle occupe la région située entre $r \simeq 2.99 \times 10^{17}$ m et $r \simeq 3.01 \times 10^{17}$ m. Dans cette zone, la température est descendue presque partout à sa valeur minimale, $T = T_{MIS}$ (voir la figure 4.43), sauf autour de $r \simeq 3.01 \times 10^{17}$ m car à cet endroit la matière venant du MIS vient d'être fraîchement choquée et elle n'a pas encore eu le temps d'être significativement refroidie. Par ailleurs, avec la surdensité, la collision a aussi créé une surpression localisée au même endroit que le pic de densité. Cette surpression est légèrement supérieure à la pression régnant au niveau du front du choc et, en conséquence, deux ondes de choc vont être générées par ce maximum. La première, baptisée "choc avant" se dirige vers l'extérieur de la configuration et elle va rattraper le front de l'onde de souffle. La deuxième

onde, appelée "choc retour" se déplace en direction du centre du RSN. Nous avons déjà rencontré ce processus sur les figures 4.16 et 4.17 pour un refroidissement constant (section 4.3.1). A $t = 16\,000$ ans (figures 4.44 et 4.45), le pic de densité est situé entre 3.15×10^{17} m et 3.16×10^{17} m. Par ailleurs, après une phase de croissance entre $t = 10\,000$ ans et $t = 13\,000$ ans, le maximum de vitesse débute sa décroissance (il vaut environ 3.4×10^5 m/s) à cause de l'expansion du RSN avec l'accrétion supplémentaire de matière et aussi à cause du gradient négatif de pression qui est beaucoup moins raide qu'avant. Néanmoins sur la figure 4.45, on a toujours un extremum de pression localisé à l'endroit du pic de densité mais il y a deux pics supplémentaires. Le pic de droite situé entre 3.16×10^{17} m et 3.17×10^{17} m correspond au choc avant déjà commenté sur la figure 4.43. Le pic de gauche en $r \simeq 3.14 \times 10^{17}$ m résulte du passage du choc retour qui est maintenant clairement mis en évidence (il était seulement annoncé sur la figure 4.43). Son front est à une position légèrement supérieure à 3.13×10^{17} m et en même temps que l'élévation de pression due à son passage, on note une petite bosse sur le profil de température. Le processus est encore plus visible à $t = 18\,000$ ans sur les figures 4.46 et 4.47. Par rapport aux profils de vitesse présentés sur les figures précédentes, la figure 4.46 montre trois "marches d'escalier". La marche extérieure est centrée sur le pic de densité qui coïncide avec le milieu de la bosse de pression sur la figure 4.47. La zone qui relie la marche centrale et celle externe est située approximativement en $r \simeq 3.28 \times 10^{17}$ m et elle correspond au gradient de pression négatif observé sur la figure 4.47. Enfin, la zone qui relie la marche la plus interne à la marche centrale est localisée entre 3.26×10^{17} m et 3.27×10^{17} m. Cette région correspond à la position du choc retour que l'on voit distinctement sur la figure 4.47. Le passage du choc retour laisse une surpression derrière lui dans l'intervalle 3.26×10^{17} m $\leq r \leq 3.28 \times 10^{17}$ m et elle est accompagnée d'une augmentation de la température, ainsi qu'il se doit. Il faut noter qu'à cause de l'expansion, la pression dans la coquille diminue puisqu'elle passe de 6.5×10^{-11} Pa à 6×10^{-11} Pa quand on passe de 16 000 ans à 18 000 ans. A $t = 53\,000$ ans (figures 4.48 et 4.49), la pression dans la coquille vaut $4,4 \times 10^{-11}$ Pa et celle dans la bulle chaude est dix fois plus faible (figure 4.49). Simultanément, l'amplitude du pic de densité (figure 4.48) correspond à un taux de compression qui ne vaut plus que 44. Cette décroissance s'accompagne d'un épaissement de la coquille. Celui-ci vaut environ 2% du rayon à 53 000 ans alors qu'il n'était que de 0.7% à 18 000 ans. De plus, en dehors de la coquille ($r \leq 4,5 \times 10^{17}$ m), la densité est extrêmement faible puisqu'elle est environ 5000 plus petite que la valeur au front du choc. Par ailleurs, nous voulons signaler que les figures 4.48 et 4.49 sont beaucoup moins zoomées que les précédentes car nous voulons commenter la discontinuité localisée en $r \simeq 3,4 \times 10^{17}$ m. Cette discontinuité se

déplace vers la droite et il s'agit du choc retour commenté sur la figure 4.47 à $t = 18\,000$ ans et qui entre temps a rebondi sur le centre de la configuration. Le choc secondaire qui rebondit au centre de l'explosion est clairement identifié dans le papier de Blondin et ces collègues [26] où le refroidissement est tiré du modèle de refroidissement hors équilibre de Sutherland & Dopita [95]. Le processus de refroidissement du papier de Blondin et ses collègues vérifie également la condition $t_{ref} < t_s$ qui mène au refroidissement catastrophique à l'origine de ce choc retour. Après le passage du choc retour, celui-ci laisse dans la région $r \leq 3,4 \times 10^{17}$ m, une température de l'ordre de 10^7 K (voir la figure 4.48). Cette région se refroidit pratiquement pas car la densité est extrêmement faible ainsi que nous l'avons signalé plus haut. La discontinuité située en $r \leq 4,5 \times 10^{17}$ m et qui est clairement marqué sur le profil de température correspond à la mémoire de la création du choc retour observé sur la figure 4.46. Il laissait derrière lui une température de l'ordre de 2×10^6 K et c'est également ce qu'on observe sur la figure 4.48 où sur la discontinuité, T passe de T_{MIS} à aussi environ 2×10^6 K. Entre $t = 18\,000$ ans et $t = 53\,000$ ans, la température n'a pas baissé car à cause de la très faible valeur de la densité, le refroidissement est négligeable.

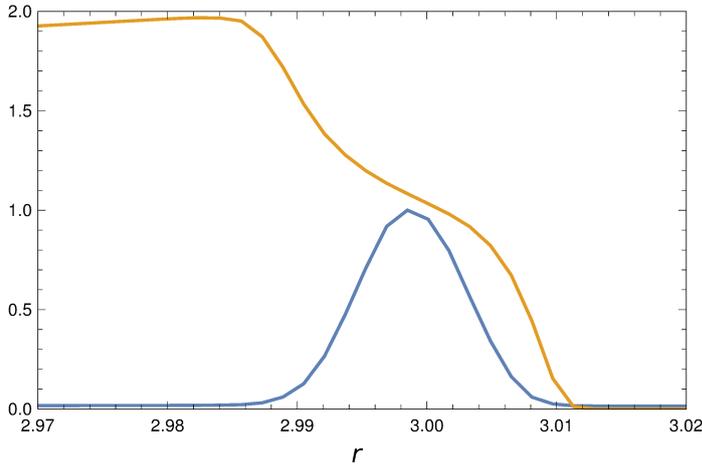


FIGURE 4.42 – Profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 13\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 64,6 \times 10^{-20}$ kg/m³ et $v_{sh} = 1,8 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

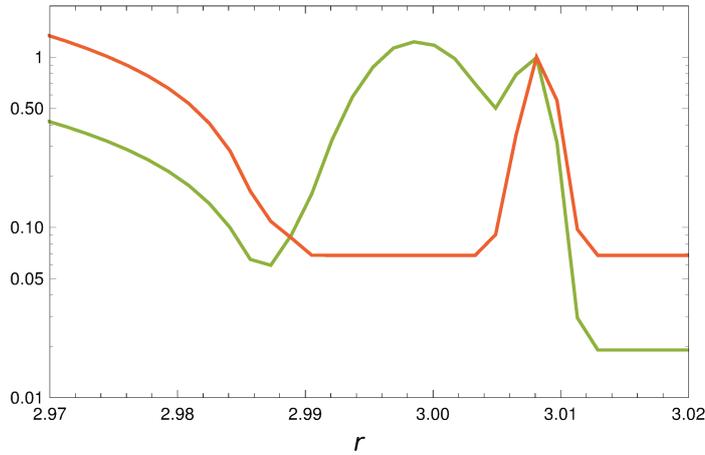


FIGURE 4.43 – Profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 13\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 5,25 \times 10^{-11}$ Pa et $T_{sh} = 1,77 \times 10^5$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

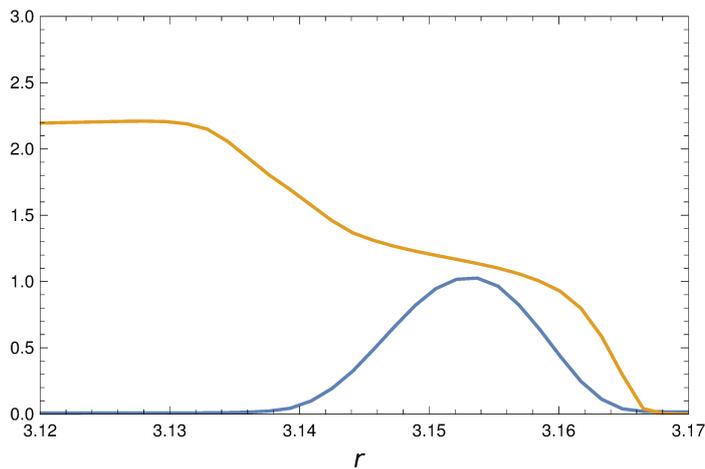


FIGURE 4.44 – Profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 16\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 61,6 \times 10^{-20}$ kg/m³ et $v_{sh} = 1,57 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

4.3. Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

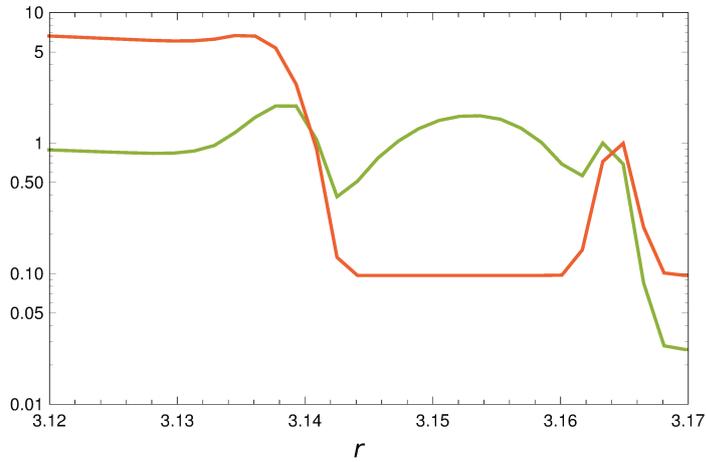


FIGURE 4.45 – Profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 16\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 3,8 \times 10^{-11}$ Pa et $T_{sh} = 1,25 \times 10^5$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

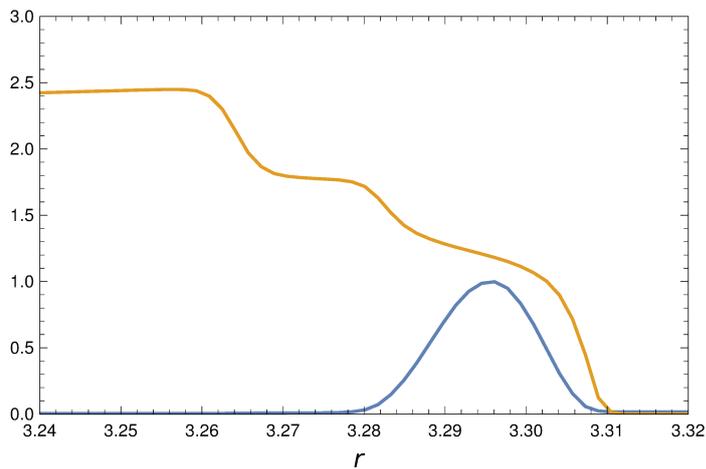


FIGURE 4.46 – Profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 18\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 64,8 \times 10^{-20}$ kg/m³ et $v_{sh} = 1,4 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

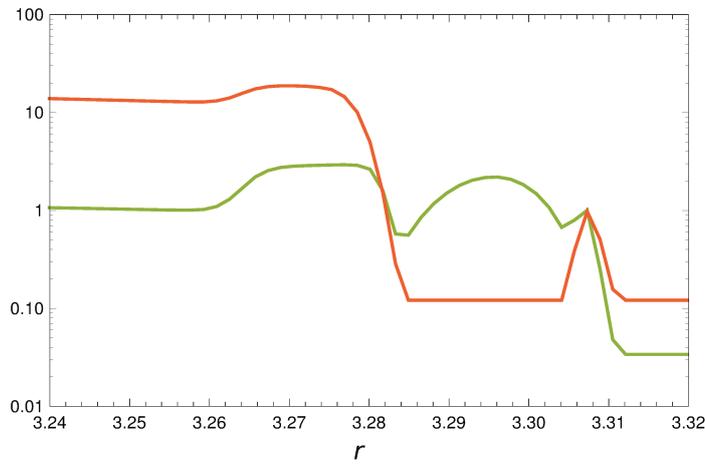


FIGURE 4.47 – Profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 18\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 2,96 \times 10^{-11}$ Pa et $T_{sh} = 1 \times 10^5$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

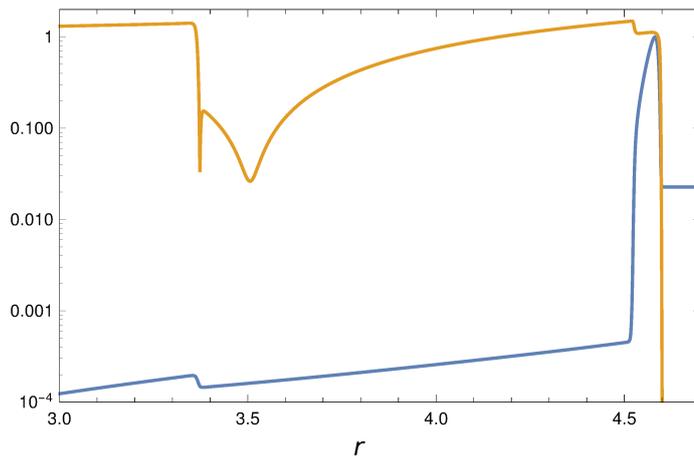


FIGURE 4.48 – Profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 53\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 44 \times 10^{-20}$ kg/m³ et $v_{sh} = 7 \times 10^4$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

4.3. Résultats numériques pour plusieurs refroidissements

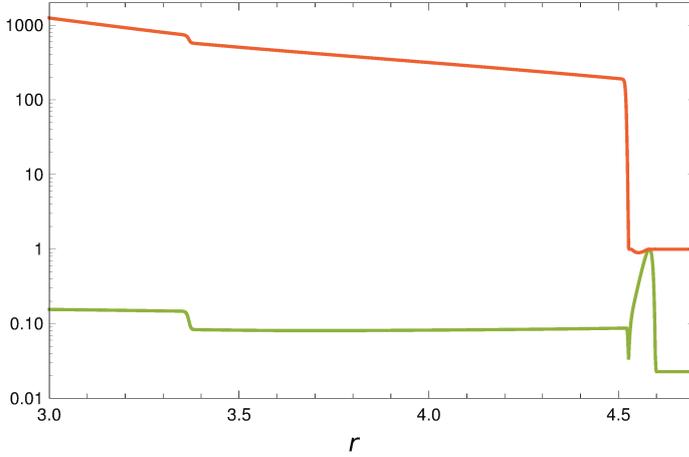


FIGURE 4.49 – Profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 53\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 4,4 \times 10^{-11}$ Pa et $T_{sh} = 1,22 \times 10^4$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.

Au temps longs, le RSN tend à se stabiliser vers une structure composée d'une coquille dense qui se refroidit et d'une bulle chaude interne adiabatique qui ne perd pas d'énergie par rayonnement. On peut voir dans les simulations de Badjin et ses collègues [35], que le RSN à $t = 192\,000$ ans converge vers une solution où le rayon suit une loi $r_0(t) \propto t^\alpha$ avec $\alpha \simeq 2/7$. La structure interne du RSN est alors très proche de la structure décrite par les SAS pour un refroidissement homogène du chapitre 3 (voir (3.112)-(3.114)) lorsque le taux de refroidissement $\lambda \gg 1$. Ceci peut être expliqué par le fait que le taux de refroidissement $\lambda = \Lambda t / (\rho_1 V_s^2)$ estimé pour la simulation (E3T-C19A) de Badjin et ses collègues [35] est grand devant l'unité. En effet, comme le montre la figure 4.50.c, les variations de la vitesse et de la pression dans la coquille sont identiques et croient depuis le front du choc jusqu'au bord interne de la coquille où la pression rechute vers sa valeur homogène dans la bulle. La densité croît depuis le front du choc où le taux de compression vau 4 jusqu'à la face interne où le taux de compression est de l'ordre de 1000. Enfin la température chute depuis le front du choc où la température vaut 10^5 K jusqu'à une valeur très faible (inférieure à 10^2 K) au bord interne de la coquille.

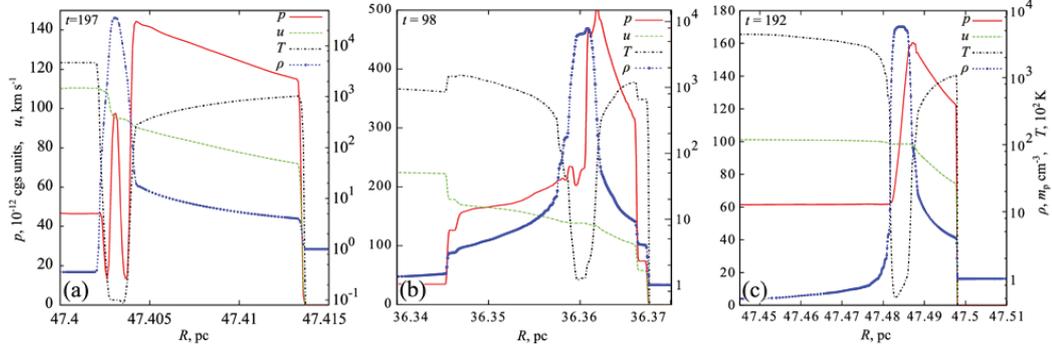


FIGURE 4.50 – Profils de Pression p , de vitesse u , de température T et de densité ρ au voisinage du front du choc, calculés pour différentes fonctions de refroidissement. (a) Simulation E3T-C19A avec le refroidissement Λ_{TC} utilisant les tables d’opacités sans conditions d’arrêt à $t = 197\,000$ ans. (b) Simulation E3T-C19A avec le refroidissement Λ_{TC} utilisant les tables d’opacités avec conditions d’arrêt à $t = 90\,000$ ans. (c) La même simulation à $t = 192\,000$ ans. Tirés de la figure 8 des simulations de Badjin et ses collègues [35].

Pour finir, bien que les refroidissements soit différents, le mécanisme de formation de la coquille fine est qualitativement le même dès lors que le mécanisme de refroidissement catastrophique se met en place et il en va de même pour les trois autres refroidissements $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$, $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ et le refroidissement constant. On assiste à la formation d’une coquille fine et dense entourant une bulle interne adiabatique où le rayon $r_0(t) \propto t^{2/7}$. De plus, comme l’illustre les figures 4.31, 4.35 et 4.9 du profil de pression, on observe la présence d’un choc secondaire qui converge vers l’intérieur du reste. Enfin, il existe un comportement commun aux trois refroidissements lors de la formation de la coquille fine que nous allons mettre en évidence pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$. En effet, comme pour le refroidissement autosemblable homogène du chapitre 3, une zone instable au sens de Rayleigh-Taylor se forme dans la coquille lorsque le refroidissement devient suffisamment fort. On peut remarquer que cette zone commence à apparaître sur les figures 4.38 et 4.39 à $t = 10\,000$ ans où $\nabla \rho \cdot \nabla p < 0$ derrière le front du choc sur une épaisseur d’environ 5×10^{15} m. Sur les figures 4.40 et 4.41, on peut constater que cette zone conserve la même épaisseur à $t = 11\,000$ ans. Cependant, cette zone potentiellement instable devient de plus en plus fine derrière le front du choc car lorsque la température atteint la température du MIS dans la coquille nous avons $p \propto \rho$ (voir les figures 4.42 à 4.47). Par conséquent cette zone se réduit à environ 15% de l’épaisseur de la coquille entre $t = 13\,000$ ans et $t = 18\,000$ ans. Enfin, sur les figures 4.48 et 4.49, on peut voir que cette

zone n'est même plus visible à $t = 53\,000$ ans.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la simulation numérique, grâce au code hydrodynamique HADES [86], nous a permis de faire l'étude du comportement d'une onde de souffle qui perd de l'énergie pour des fonctions de refroidissement en volume qui ne sont plus auto-semblables. Notamment, nous avons pu étudier le refroidissement pour des processus qui agissent dans un RSN plus réaliste comme le refroidissement Bremsstrahlung où $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ et le refroidissement par les raies de structure fine $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$. Pour ce faire, nous sommes partis d'un RSN dans la configuration de Sedov-Taylor à $t = 3\,000$ ans, que nous avons généré en déposant une énergie de l'ordre de 10^{44} J dans un rayon initial de l'ordre de 10^{15} m (sous la forme d'une surpression) dans le MIS à densité constante. Ensuite nous avons utilisé cette solution en phase de Sedov-Taylor à $t = 3\,000$ ans comme condition initiale pour la phase radiative où l'on active le refroidissement $\Lambda = \Lambda_0 \rho^a T^b$ jusqu'à un temps final $t_f = 53\,000$ ans (sauf pour le cas du refroidissement constant où $t_f = 100\,000$ ans) et la constante de refroidissement Λ_0 est choisie de telle manière que l'ordre de grandeur de Λ soit le même pour tout le refroidissement, c'est à dire 10^{-21} W/m³, ce qui est consistant avec le refroidissement moyen dans un RSN. Enfin, il existe un critère d'arrêt du refroidissement lorsque la température atteint la température du MIS $T_{MIS} = 12\,000$ K.

Pour ce qui est du refroidissement constant l'évolution du rayon du RSN a pu être observée jusqu'à $200\,000$ ans et celui-ci converge vers $r_0(t) \propto t^\alpha$ où $\alpha < 2/7$ est de plus en plus proche de $2/7$. En effet, comme pour le refroidissement auto-semblable homogène du chapitre 3, l'énergie se vide partout de la même manière, ce qui signifie que la bulle perd de l'énergie et on peut alors s'attendre à ce que l'exposant α vérifie $\alpha < 2/7$. Cependant à la fin de la simulation la température dans le RSN a déjà atteint T_{MIS} partout sauf au niveau du front du choc et la bulle qui ne perd plus d'énergie radiative est alors adiabatique ce qui explique la convergence vers la valeur $2/7$. Pour ce qui est de la structure du RSN, l'effet du refroidissement tend à comprimer la coquille comme attendu. En effet, la température baisse dans le RSN ce qui fait baisser la pression et les particules entraînées par leur inertie ne sont plus autant ralenties par le gradient de pression et donc la coquille devient dense et fine. En réalité, le processus de formation de la coquille dense et fine est plus complexe et fait intervenir une instabilité thermique appelée refroidissement catastrophique de Falle [24]. Si le temps de refroidissement dans la zone de refroidissement est plus faible que le temps

de traversé d'une onde sonore dans cette même zone alors la configuration est instable et la pression va se mettre à chuter localement, entraînant finalement des mouvements supersoniques de matière qui en même temps que de former la coquille fine vont générer des chocs secondaires dans le RSN. Une condition suffisante pour que l'instabilité se développe si $\Lambda \propto \rho^a T^b$ avec $a = 2$ (processus de refroidissement à deux particules) est $b < 3/2$ et nous mettront en évidence ce mécanisme pour différents refroidissements. On commence par étudier un refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^2$ où $b > 3/2$ en prenant une constante de refroidissement Λ_0 suffisamment faible pour ne pas rentrer dans le cadre du refroidissement catastrophique. En conséquence, on observe une structure du RSN régulière jusqu'à $t_f = 53\,000$ ans. En effet, à $53\,000$ ans, le rayon suit une loi $r_0(t) \propto t^\alpha$ avec $\alpha \simeq 0.35$. Cette valeur est supérieure et proche de la valeur limite $\alpha' \simeq 0.346$ où la solution avec refroidissement homogène du chapitre 3 ne peut plus être régulière jusqu'au centre du RSN. Aussi, comme le refroidissement est concentré à proximité du front du choc, le comportement des profils de densité, vitesse et pression dans le RSN est proche de la solution de Barenblatt. En effet, à $53\,000$ ans, la pression plateau a diminué de moitié, la pente de la vitesse est légèrement plus forte au centre du RSN et le profil de densité est légèrement plus ramassé vers le front du choc. Ces profils ressemblent aussi beaucoup aux profils de la SAS avec un refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^\delta$ où δ vérifie toujours $\delta > 3/2$ (voir le chapitre conclusion). Ensuite, nous avons sélectionnés trois refroidissements pour des processus à deux particules ($a = 2$) avec $b = 0, 1/2, -1/2$ pour étudier la formation de la coquille dense et fine via le refroidissement catastrophique de Falle. On trouve alors que le comportement des trois refroidissements sont très similaires et conduisent à la formation d'une coquille fine où un choc secondaire perdure en se propageant dans la direction du centre du RSN. Celui-ci va ensuite converger au centre pour repartir dans la direction du front du choc de l'onde de souffle. Pour les trois refroidissements, le rayon suit la loi pour les grands temps $r_0(t) \propto t^\alpha$ et vérifie $\alpha > 2/7$ où l'exposant α est de plus en plus proche de $2/7$. En effet la bulle ne perd pas d'énergie de par la dépendance de la fonction de refroidissement à la densité au carré et celle-ci peut donc être considérée comme adiabatique après la formation de la coquille dense et fine. Enfin pendant, cette formation, une zone potentiellement instable au sens de Rayleigh-Taylor se forme dans la coquille où la condition $\nabla \rho \cdot \nabla p < 0$ est vérifiée. Ceci vient confirmer les résultats du chapitre 3 où l'on identifie aussi cette même zone pour le refroidissement auto-semblable. Cependant, cette zone tend à disparaître avec le temps car lorsque la température atteint T_{MIS} la densité devient proportionnelle à la pression. Dans des simulations récentes de Badjin et ses collègues [35], les auteurs observent des instabilités de type RT lors de la formation de la coquille dense et fine. Cette instabilité

pourrait donc jouer un rôle majeur dans la filamentation des RSN en phase radiative.

Chapitre 5

Conclusion

Sommaire

5.1	Résumé des résultats de la thèse	177
5.2	Perspectives	181
	Table des figures	187
	Bibliographie	197
	Publications et conférences	205

5.1 Résumé des résultats de la thèse

Dans ce travail, nous avons étudié deux processus majeurs qui jouent un rôle prédominant dans la phase tardive (radiative) d'un RSN. Ces deux processus sont le refroidissement du reste par les processus d'émissions et le refroidissement par l'ionisation du MIS après le passage du choc. Dans le chapitre 2, on montre que les effets de l'ionisation du choc peuvent altérer de manière significative l'état du milieu choqué lorsque le reste devient très âgé (de l'ordre de 100 000 ans). En effet, si on suppose un MIS froid composé d'atomes d'hydrogène, le choc va transmettre une partie de son énergie pour ioniser les atomes du gaz qui ne pourra plus servir à chauffer le milieu choqué. En conséquence, la température est plus faible dans le milieu choqué en prenant en compte l'ionisation et on montre alors que cela entraîne une très forte augmentation du taux de compression. Si le choc est très fort, l'énergie d'ionisation du milieu reste négligeable comparée à l'énergie thermique de celui-ci et le choc est adiabatique. De même si le choc est très faible, il ne va pas ioniser le gaz et le choc reste également adiabatique. Il existe donc un intervalle particulier du nombre de Mach où les effets de l'ionisation modifient la structure du choc et on montre que dans les conditions choisies pour le MIS (de

densité $\rho_1 = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ et de température $T_1 = 100 \text{ K}$), il se trouve autour d'un nombre de Mach critique $M_{crit} = 40$ où on peut atteindre un taux de compression pouvant être aussi grand qu'environ 42. Ensuite on montre que la zone transitoire (c'est à dire la région située entre le milieu amont et le milieu aval) est aussi affectée par les effets de l'ionisation autour de ce nombre de Mach critique où le profil de température va diminuer à l'intérieur de cette zone dû au pompage de l'énergie du choc en énergie d'ionisation. Dans la dernière section du chapitre, on démontre que cette analyse peut aussi être approximée en considérant un indice adiabatique γ^* pour le milieu choqué inférieur à l'indice adiabatique du MIS et de l'intérieur du RSN $\gamma = 5/3$. Dans le chapitre 3, partant du modèle de l'onde de souffle de Sedov-Taylor qui représente la phase adiabatique du RSN, on utilise ensuite le modèle de Barenblatt [30] où les pertes d'énergie (qui peuvent aussi bien représenter le processus d'ionisation ou le phénomène de refroidissement par pertes radiatives sur le contour du RSN) sont prises en compte dans les conditions au bord au niveau du front du choc uniquement. En effet, l'indice adiabatique effectif γ^* au front du choc est plus faible que celui du MIS $\gamma = 5/3$ et on constate que la coquille du RSN devient fine et dense. L'instabilité de Vishniac [57] est alors susceptible d'opérer avec les effets de l'ionisation puisque dans le chapitre 2 nous avons montré que $\gamma^* \simeq 1,045 \leq 1,2$ qui est la condition pour que l'instabilité se développe. Ensuite on fait l'analyse auto-semblable d'une onde de souffle qui perd son énergie en volume, à l'intérieur du RSN, et on établit l'existence de solutions auto-semblables pour un refroidissement auto-semblable homogène spatialement conduisant à des valeurs de α dans l'intervalle $1/4 \leq \alpha \leq 2/5$ avec $r_0 \propto t^\alpha$ ($r_0(t)$: rayon du RSN). Il existe alors deux types de solutions pour ce problème. Des solutions de type Sedov-Taylor (ST), régulières jusqu'au centre du reste pour $\alpha' \simeq 0.346 \leq \alpha \leq 2/5$, où une relation spéciale existe entre le taux de refroidissement adimensionné $\lambda^*(\alpha)$ (voir la figure 5.1) et α , et des solutions de type coquille où une discontinuité de contact sépare la coquille d'une région interne chaude et raréfiée (bulle). Plus le taux de refroidissement λ est grand, plus la coquille devient fine et dense. On trouve alors toute une classe de solutions pour la phase PDS ("Pressure-Driven Snowplow") du RSN (qui comprend la solution limite de McKee & Ostriker [20] pour $\alpha = 2/7$ et $\lambda \rightarrow +\infty$) et une classe de solutions pour la phase MCS ("Momentum-Conserving Snowplow"), qui inclut aussi la solution limite de Oort [31] pour $\alpha \rightarrow 1/4$ et $\lambda \rightarrow +\infty$. Finalement pour un taux de refroidissement suffisamment élevé, la coquille peut devenir instable au sens de Rayleigh-Taylor (RT), ce que nous expliquerons plus loin. On peut alors conclure que le refroidissement joue un rôle différent sur la dynamique et la structure interne d'une onde de souffle lorsque celui n'est plus considéré comme une perte en surface (cas du modèle de Barenblatt [30]) mais comme

une perte en volume. Par ailleurs, dans le modèle de Barenblatt l'évolution du rayon r_0 du RSN suit la loi $r_0(t) \propto t^\alpha$ où le paramètre de décélération α reste dans l'intervalle $2/(3\gamma + 2) \leq \alpha \leq 2/5$ et pour $\gamma = 5/3$, la borne inférieure vaut $2/7$. La valeur de α ne peut pas descendre en dessous de $2/7$ car la bulle ne peut pas perdre d'énergie. De plus, le gradient de densité, de vitesse, de pression et de température conserve le même signe pour toutes les valeurs du taux de refroidissement au front du choc. Comme pour le cas de Sedov-Taylor, ces coquilles seront alors éventuellement instables au sens de Vishniac [57], [59] où le cas limite d'une coquille infiniment fine a déjà été traité dans son article de 1983 [57]. Pour les pertes d'énergie en volume, la structure interne de l'onde de souffle est grandement altérée. Si le taux de refroidissement est suffisamment fort dans le reste alors le gradient de densité et de température change de signe (le gradient de pression reste le même). La coquille devient alors potentiellement instable au sens de RT qui risque de l'emporter sur l'instabilité de Vishniac. En effet contrairement au cas de l'instabilité de Vishniac où le taux de croissance oscille ("overstability" en anglais), l'amplitude des perturbations ne fait que croître dans le cas de RT. Reprenons la figure 5.1 de l'espace des paramètres pour le cas de référence du refroidissement en volume que constitue le refroidissement homogène.

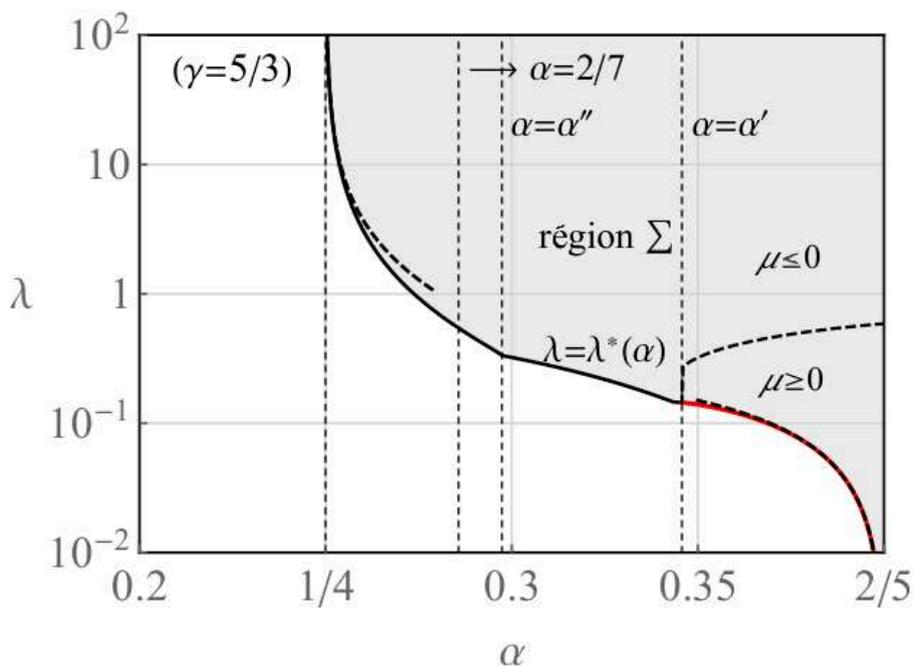


FIGURE 5.1 – Espace des paramètres pour $\gamma = 5/3$ (en gris clair) avec la frontière $\lambda^*(\alpha)$ où $\alpha < \alpha'$ (trait plein noir) et $\alpha \geq \alpha'$ (trait plein rouge). Le comportement analytique de la frontière $\lambda^*(\alpha)$ pour $\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow +\infty$ est tracé en trait pointillés. La frontière qui sépare la région avec $\mu \geq 0$ et la région $\mu \leq 0$ (μ est défini dans (3.89) et (3.90)) est aussi tracée en trait pointillé.

Le refroidissement dans un RSN en phase radiative évolue au cours du temps et donc le taux de refroidissement λ va lui aussi varier au cours du temps. Partant du point $(\alpha = 2/5, \lambda = 0)$ de la solution de Sedov-Taylor, on peut se demander vers quel point de l'espace des paramètres le RSN va converger en phase radiative. En supposant que le RSN ne perde pas d'énergie dans la bulle (la densité étant bien trop faible dans la bulle comparée à celle dans la coquille), et en considérant aussi que cette même bulle ne gagne pas non plus d'énergie en volume alors la seule possibilité est un point qui se trouve sur la droite $\alpha = 2/7$ (la bulle est adiabatique) dans le plan (α, λ) et plus le mécanisme de refroidissement est efficace, plus λ sera grand et plus la coquille sera dense et mince. Enfin, on met en évidence le caractère générale du refroidissement homogène dont le comportement est retrouvé de manière qualitative pour un refroidissement plus complexe en loi de puissance de la forme $\Lambda \propto \rho^2 T^\delta$ avec $\delta = (2\alpha - 3)/(2\alpha - 2)$. Lorsque le taux de refroidissement devient grand alors le comportement de l'onde de souffle en loi de puissance

tend vers celui du refroidissement homogène de manière quantitative.

Dans le dernier chapitre, on utilise la simulation numérique en 2D afin d'étudier le refroidissement pour des processus radiatifs plus réalistes avec des refroidissement en lois en puissances de type $\Lambda \propto \rho^2 T^b$ où le paramètre b peut prendre toute les valeurs réelles. Certaines valeurs de b correspondent à des processus physiques bien connue comme le processus Bremsstrahlung pour $b = 1/2$ ou le processus par émission de raies de structure fine pour $b = -1/2$. On trouve alors que l'évolution du rayon pour des temps longs suit la loi $r_0 \propto t^\alpha$ (où α tend vers $2/7$ si le refroidissement est suffisamment fort) et on compare les différentes solutions aux solutions auto-semblables du chapitre précédent. On met aussi en évidence une instabilité thermique appelée "refroidissement catastrophique de Falle" [24] qui est à l'origine de la formation de la coquille fine dans une configuration à deux dimensions et on montre que ce mécanisme est toujours présent pour tout une classe de refroidissements du RSN. En effet, si le temps de parcours d'un onde sonore dans la zone de refroidissement est plus grande que le temps de refroidissement, la zone est instable et un puits de pression se forme. Ce processus instable conduit à des mouvements supersoniques et à la formation de chocs secondaires dans le RSN en même temps que la formation d'une coquille fine et dense. La solution suit alors une loi d'évolution proche de $r_0 \propto t^{2/7}$ qui correspond au cas où la bulle est adiabatique et ne perd pas d'énergie ce qui était attendu avec notre modèle autosemblable.

5.2 Perspectives

Le modèle de l'onde de souffle avec refroidissement en volume développé dans le chapitre 3, nous a permis de mieux comprendre le rôle du refroidissement sur la structure interne du RSN et les différents stades d'évolution aux temps longs du rayon $r_0(t) \propto t^\alpha$ entre $1/4 \leq \alpha \leq 2/5$. La coquille devient donc de plus en plus fine et dense lorsque le taux de refroidissement augmente dans le RSN que ce soit pour un refroidissement auto-semblable homogène ou pour un refroidissement en loi de puissance du type $\Lambda \propto \rho^2 T^\delta$. Lorsque le refroidissement devient suffisamment fort, la coquille présente une zone potentiellement instable au sens de Rayleigh-Taylor. Ce comportement suggère une possible compétition entre l'instabilité de Vishniac [57],[59] qui intervient dans le cas limite où le refroidissement est infini et où la coquille est infiniment mince et l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour un grand nombre de solutions avec coquille d'épaisseur finie. Par ailleurs, nous avons vu dans le chapitre 4, que le RSN en phase radiative est sujet à des instabilités thermiques. En effet, le refroidissement catastrophique de Falle [24] est présent

pour un grand nombre de refroidissements et pourrait être également présent dans les solutions auto-semblables avec refroidissement en volume. Afin de compléter l'étude du RSN avec refroidissement en volume, il serait alors essentiel de faire l'étude de stabilité en régime linéaire de ces solutions. Cette étude a déjà été initiée par un collaborateur de ce projet [85] et montre que les solutions de type coquille subissent l'instabilité de RT pour une longueur d'onde des perturbations suffisamment petites.

Par ailleurs, on sait que le champ magnétique ambiant du MIS (de l'ordre du microgauss) est susceptible de jouer un rôle important dans la phase radiative du RSN. Si ce champ n'a aucun effet sur la structure du RSN et sur son évolution lors de la phase de Sedov-Taylor, Petruk et ses collègues [36] montrent que celui-ci altère l'évolution en phase radiative. En effet, une pression magnétique vient s'ajouter à la pression thermique et tend à minimiser l'effet des pertes radiative en élargissant la coquille fine et dense et le paramètre de décélération α converge vers des valeurs plus grandes lorsque le champ magnétique ambiant augmente. En effet on peut voir sur la figure 5.2 que le champ magnétique ambiant induit une pression magnétique qui prend le relais de la pression thermique dans la coquille et tend à élargir celle-ci ce qui diminue sa compression. La largeur de la coquille à 70 000 ans est d'environ 0.25 pc sans champ magnétique contre 4.75 pc pour un champ magnétique ambiant de $30 \mu\text{G}$.

Il serait alors intéressant d'inclure le champ magnétique dans l'analyse auto-semblable afin d'étudier ce processus de manière analytique et de pouvoir voir son influence sur la stabilité de la solution en régime linéaire. On peut aussi se demander quelle serait l'influence du champ magnétique ambiant sur les résultats du chapitre 2 lorsque l'on prend en compte l'effet de l'ionisation dans un choc. Si le champ magnétique est perpendiculaire à la direction de propagation du choc et que le nombre de Mach d'Alfvén $M_A \equiv v\sqrt{\mu\rho}/B \gg 1$ (où μ est la perméabilité magnétique du milieu) et le nombre de Mach $M \equiv v\sqrt{\rho/(\gamma p)} \gg 1$ alors le taux de compression vaut $\rho_2/\rho_1 \simeq (\gamma+1)/(\gamma-1)$. Lorsque l'on rajoute les effets d'ionisation on a vu que l'on peut remplacer l'indice adiabatique γ dans le taux de compression par un indice effectif γ^* dans le milieu choqué qui dépend du taux d'ionisation et de la température du milieu choqué. En supposant que l'effet du champ magnétique est négligeable sur l'énergie d'ionisation dans le milieu choqué qui peut toujours s'écrire via l'équation de Saha alors on peut s'attendre à observer de forts taux de compression au passage du choc dans le MIS avec champ magnétique ambiant. Il est alors possible que contrairement au refroidissement par pertes radiatives, la compression par effet d'ionisation soit beaucoup moins affectée par la présence d'un champ magnétique ambiant.

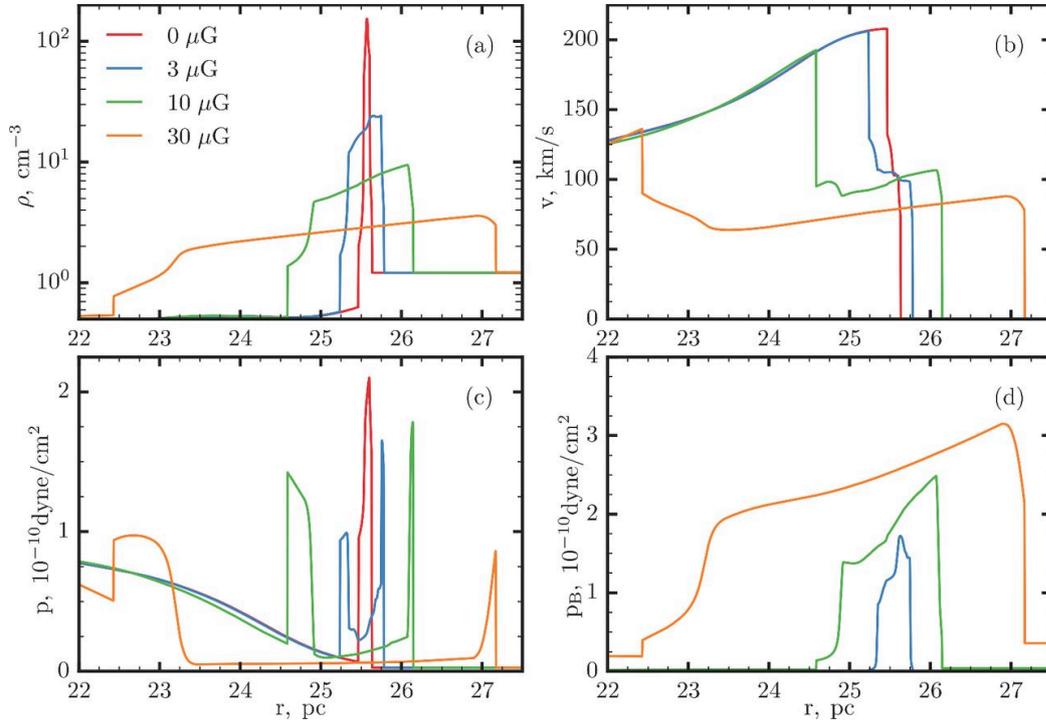


FIGURE 5.2 – Profils de densité, vitesse, pression thermique et pression magnétique à 70 000 ans pour différentes valeurs du champ magnétique ambiant. Tirés du papier de Petruk et ses collègues [36].

Dans le cadre des études expérimentales sur les ondes de souffles radiatives [40], [50], [52], les résultats montrent que l'évolution du front du choc r_0 ne suit plus la loi de Sedov-Taylor où $r_0(t) \propto t^{2/5}$ mais décélère plus fortement ce qui constitue un diagnostic indirect d'une perte d'énergie significative de l'onde de souffle qui rentre alors dans une phase radiative. Ceci est confirmé par la présence d'un précurseur radiatif qui montre que le flux radiatif s'échappe du système pour venir chauffer le gaz en amont du choc. Bien qu'il existe une forte analogie entre le RSN et l'onde de souffle créé en laboratoire, la comparaison avec le MIS est limitée car le milieu n'est pas optiquement très mince et le libre parcours moyen des photons bien qu'étant de l'ordre de la taille caractéristique du système reste inférieur au rayon final de l'onde de souffle. En effet, l'onde de souffle va récupérer de l'énergie lorsque le front du choc va se propager dans le gaz qui aura absorbé le flux radiatif. Il serait alors intéressant de pouvoir faire un diagnostic direct de l'énergie radiative perdue par rayonnement afin de pouvoir comparer ces pertes avec la loi d'évolution du front du choc. On peut aussi constater que les taux

de compression des expériences de laboratoire [40], [43] (entre 2 et 5,5) sont bien inférieur aux taux de compression d'un RSN en phase radiative [26] [28], [35] qui sont de l'ordre de 100. Ceci limite la comparaison avec un RSN en phase radiative où la coquille est beaucoup plus fine et mince. On sait que l'instabilité de Vishniac ne peut se développer que pour des coquille très dense (pour une valeur de l'indice adiabatique $\gamma < 1,2$ ce qui correspond à une compression minimale de 11). De plus cette instabilité reste très peu efficace pour perturber la coquille (que ce soit pour un RSN ou pour une expérience de laboratoire) car l'amplitude des perturbations oscille sous la forme $A(t) \propto t^a \cos(b \ln t)$. Quant à l'instabilité NTSI [60], elle peut déformer de manière plus significative l'onde de souffle mais il faut que le nombre de Mach M soit suffisamment fort pour que celle-ci opère (M doit vérifier $M > 1/(kL)$ où k est le nombre d'onde de la perturbation et L la largeur de la coquille) et que la coquille soit suffisamment fine et déformée, ce qui reste une condition difficile à atteindre en laboratoire. Cependant, on observe en laboratoire des ondes de souffle radiatives très instables qui montrent que ces expériences peuvent apporter des éléments de réponse sur les structures complexes observées pour un RSN en phase radiative (nous reviendrons sur ce point à la fin de ce paragraphe). Dans les expériences de Edens et ses collègues [40], le taux de croissance des perturbations est étudié pour de l'hélium, de l'azote et un mélange de gaz qui représente l'onde de souffle radiative. Sur la figure 5.3, on constate que l'orsque l'onde de souffle est dans le régime de Sedov-Taylor (cas (a) et (b)), le taux de croissance mesuré est conforme à la théorie de Vishniac [58] pour un indice adiabatique d'environ 5/3 pour l'hélium et 1,4 pour de l'azote. Cependant on observe pour le mélange de gaz un taux de croissance qui ne suit pas la théorie de l'instabilité de Vishniac avec un γ unique. Dans le papier de Edens et ses collègues [40], les auteurs mettent en avant le fait que l'indice adiabatique effectif d'une onde de souffle radiative évolue au cours du temps ce qui pourrait expliquer que le taux de croissance mesuré ne suive pas le modèle théorique de Vishniac. Cependant, il est probable que l'instabilité mesurée dans les expériences de laboratoire ne soit pas de type Vishniac mais plutôt de type Rayleigh-Taylor comme le suggère l'étude analytique menée dans cette thèse et les récentes simulations numériques de Badjin et ses collègues [35]. En effet l'instabilité de Rayleigh-Taylor serait beaucoup plus efficace pour perturber la coquille (que se soit pour un RSN ou pour une onde de souffle en laboratoire) car pour cette instabilité, l'amplitude des perturbations n'oscille pas et ne fait que croître. il serait alors intéressant de pouvoir étudier l'influence de cette instabilité sur une onde de souffle radiative en laboratoire.

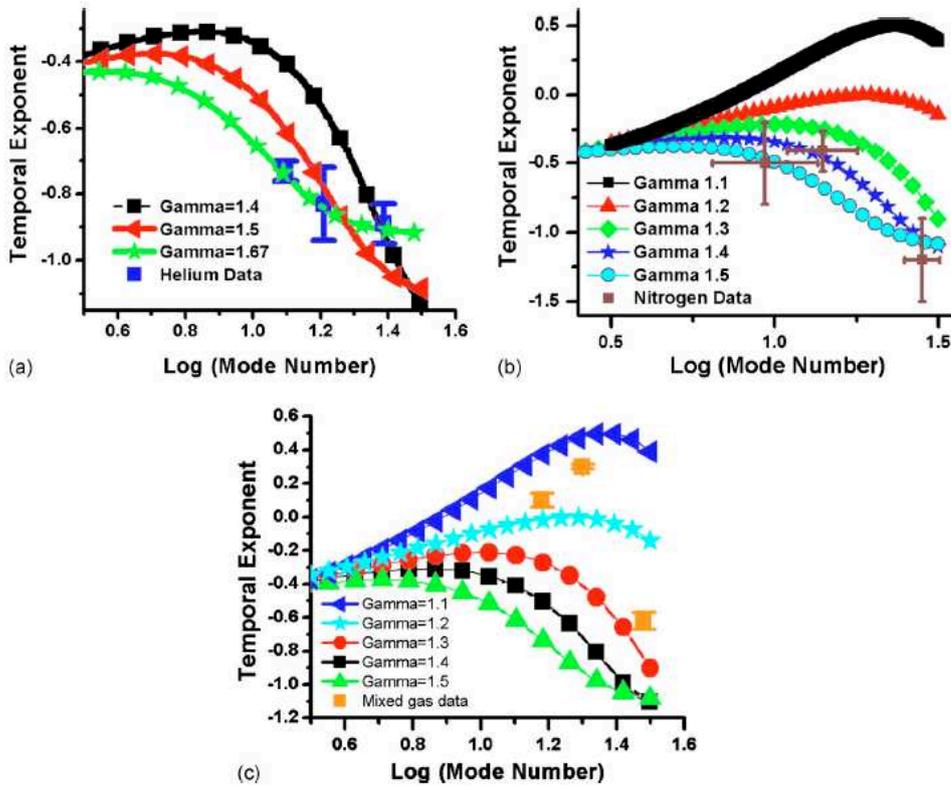


FIGURE 5.3 – taux de croissance mesuré expérimentalement (en bleu pour l’expérience avec de l’hélium (a), en marron avec de l’azote (b) et en orange avec le mélange de gaz (c)) comparé avec le taux de croissance théorique de l’instabilité de Vishniac [57], [58], [59] tracé pour différents indices adiabatiques γ . Tiré de Edens et ses collègues [40].

Table des figures

1.1	Image du RSN Simeis 147 (ou Nébuleuse du Spaghetti) âgé d'environ 40 000 ans, source : Rogelio Bernal Andreo.	9
1.2	Image du RSN IC443 (ou Nébuleuse de la Méduse) âgé d'environ 30 000 ans, source : Georges Chassaigne.	10
1.3	Image zoomée du RSN IC443 (ou Nébuleuse de la Méduse) âgé d'environ 30 000 ans, source : NASA.	11
1.4	Photos à différents instants de l'onde de souffle dans du néon.	15
1.5	Photos à différents instants de l'onde de souffle dans du xénon.	16
1.6	Evolution du rayon de l'onde de souffle (en cm) en fonction du temps (en ns) pour du néon en bleu et pour du xénon en orange. Tiré des expériences de Riley et ses collègues [52].	16
1.7	Epaisseur de la coquille en fonction du rayon de l'onde de souffle pour du xénon à une densité de $1,6 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ (rouge), du xénon à une densité de $2,47 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ (en bleu) et de l'argon à une densité de $1,4 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ (en noir). La ligne en tirets rouges correspond à la transition visible pour la trajectoire de faible densité. Les lignes en trait plein correspondent à des interpolations linéaires des données. Tiré de Edens et ses collègues [40].	17
1.8	La partie réelle du taux de croissance σ en fonction du mode ℓ pour $\alpha = 2/5$ - RSN en phase de Sedov-Taylor (en rouge) et $\alpha = 2/7$ - RSN en phase PDS (en bleu).	20
2.1	La température adimensionnée θ_2 avec ionisation ($E_{ion} = 13.6 \text{ eV}$, trait plein) et sans ionisation ($E_{ion} = 0$, courbe en tirets) en fonction du nombre de Mach M pour des conditions standard du MIS ($T_1 = 100 \text{ K}$ et $\rho_1 = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$).	34

2.2	Taux d'ionisation f_2 en fonction du nombre de Mach M pour différentes valeur de l'énergie d'ionisation et de la densité initiale : $E_{ion} = 13.6$ eV et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m ³ (trait plein), $E_{ion} = 13.6$ eV et $\rho_1 = 0.1$ kg/m ³ (courbe en pointillés) et $E_{ion} = 9$ eV et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m ³ (courbe en tirets). Pour les trois cas la température du milieu initial est $T_1 = 100$ K.	35
2.3	Taux de compression C_2 en fonction du nombre de Mach M pour différentes valeurs de l'énergie d'ionisation : $E_{ion} = 13.6$ eV (trait plein), $E_{ion} = 9$ eV (courbe en tirets) and $E_{ion} = 4.5$ eV (courbe en pointillés) avec les conditions standard du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m ³). La courbe de compression sans ionisation est aussi tracée en tirets-pointillés.	36
2.4	Taux de compression C_2 en fonction du nombre de Mach M pour différentes valeurs du milieu initial : $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m ³ (trait plein), $\rho_1 = 10^{-4}$ kg/m ³ (courbe en pointillés) and $\rho_1 = 0.1$ kg/m ³ (courbe en tirets) pour une température initiale $T_1 = 100$ K et une énergie d'ionisation $E_{ion} = 13.6$ eV.	37
2.5	Profil de température θ dans le choc en fonction de la coordonnée spatiale X pour différents nombres de Mach $M = 50$ (trait plein) et $M = 30$ (courbe en tirets) avec les conditions du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m ⁻³). Les deux courbes sans ionisation sont tracées pour $M = 30$ (courbe en pointillés) et $M = 50$ (courbe en tirets-pointillés).	43
2.6	Taux d'ionisation f en fonction de X pour différents nombres de Mach $M = 50$ (trait plein) and $M = 30$ (courbe en tirets) avec les conditions du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m ⁻³).	44
2.7	Taux de compression C en fonction de X pour différents nombres de Mach $M = 50$ (trait plein) and $M = 30$ (courbe en tirets) avec les conditions du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m ⁻³). Les deux courbes sans ionisation sont tracées pour $M = 30$ (courbe pointillés) et $M = 50$ (courbe tirets-pointillés) et se superposent.	45
2.8	L'indice adiabatique effectif γ^* en fonction de la température adimensionnée pour les conditions du MIS ($T_1 = 100$ K et $\rho_1 = 10^{-20}$ kg/m ⁻³).	48
2.9	Comparaison du taux de compression C_2 calculé numériquement dans la section 2.2 (en trait plein) avec la formule de C_2 pour $M \gg 1$ (2.63) (trait pointillé) en fonction du ratio de température θ_2	50

3.1	Fonction Φ en $\text{J m}^3 \text{s}^{-1}$ en fonction de la température T en K tirée de Falle 1995 [69].	55
3.2	Solution de Sedov-Taylor pour $\gamma = 5/3$: profils de densité (en bleu), de vitesse (en orange) et de pression (en vert) renormalisés au front du choc en fonction de la variable auto-semblable ξ	67
3.3	Profils renormalisés au front du choc de densité ρ/ρ_2 (en bleu), de vitesse v/v_2 (en orange) et de pression p/p_2 (en vert) en fonction de $\xi = r/r_0$ pour $\gamma = 5/3$ et $\gamma^* = 1.2$. La solution de Sedov-Taylor est tracée de la même manière pour $\gamma = 5/3$ en tirets.	78
3.4	Profils renormalisés au front du choc de densité ρ/ρ_2 (en bleu), de vitesse v/v_2 (en orange) et de pression p/p_2 (en vert) en fonction de $\xi = r/r_0$	81
3.5	Espace des paramètres Σ pour $\gamma = 5/3$ (en gris clair) avec la frontière $\lambda^*(\alpha)$ où $\alpha < \alpha'$ (trait plein noir) et $\alpha \geq \alpha'$ (trait plein rouge). Le comportement de la frontière $\lambda^*(\alpha)$ pour $\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow +\infty$ sont tracés en trait pointillés. La frontière qui sépare la région avec $\mu \geq 0$ et la région $\mu \leq 0$ (μ est défini dans (3.89) et (3.90)) dans Σ est aussi tracée en trait pointillé.	85
3.6	La solution $u_s(\xi_s)$ du problème aux valeurs propres pour $\alpha < \alpha'$ ($\alpha' \simeq 0.346$ pour $\gamma = 5/3$) (courbe en pointillés rouges) et plusieurs profils de vitesse auto-semblable $u(\xi)$ (courbes noires) pour différentes valeurs du taux de refroidissement λ avec $\alpha = 0.32$ et $\gamma = 5/3$. La solution non physique est tracée en pointillés noirs. La droite $u = 1$ est aussi tracée en pointillés rouges.	89
3.7	La pression auto-semblable P_B en fonction du paramètre de décélération α avec $\gamma = 5/3$ pour différents taux de refroidissement λ	92
3.8	L'épaisseur adimensionnée h de la coquille en fonction du paramètre de décélération α avec $\gamma = 5/3$ pour différents taux de refroidissement λ . La courbe en tirets noirs est la courbe analytique de h pour $\lambda^*(\alpha) \rightarrow +\infty$	94
3.9	Les profils de densité n , de vitesse u , de pression P et de flux de masse f en fonction de la distance depuis la discontinuité de contact $\xi = \xi_B$ jusqu'au front du choc pour différents paramètres (α, λ) dans la région Σ , et $\gamma = 5/3$	96

3.10	La solution $u_s(\xi_s)$ du problème aux valeurs propres où $\alpha \leq \alpha'$ (courbe en pointillés rouges) et plusieurs profils de vitesses auto-semblables $u(\xi)$ (courbes noires) pour différentes valeurs du taux de refroidissement λ avec $\alpha = \alpha' = 0.346$ et $\gamma = 5/3$. La solution non physique est tracée en pointillés noirs. La droite $u = 1$ est aussi tracée en pointillés rouges.	97
3.11	La solution spéciale de type ST où $\alpha = \alpha'$, $\lambda = \lambda^*(\alpha')$ et $\gamma = 5/3$ pour la densité auto-semblable n , la vitesse u et la pression P en fonction de la coordonnée auto-semblable ξ . . .	98
3.12	Plusieurs solutions $u(\xi)$ où $\alpha = 0.38$ et $\gamma = 5/3$ pour différents taux de refroidissement.	100
3.13	Profils de type ST pour la vitesse u , la densité n , la pression P et le ratio de température $T/T_2 \equiv \xi^2 z$ en fonction de la coordonnée auto-semblable ξ pour différentes valeurs du paramètre $\alpha > \alpha'$ avec $\gamma = 5/3$	100
3.14	Profils de densité (bleu), de vitesse (orange) et de pression (vert) normalisés au front du choc en fonction de la coordonnée spatiale auto-semblable $\xi = r/r_0$ pour $\alpha = 0.38$ et $\lambda^* = 0.436$ (trait plein), $\alpha = 0.32$ et $\lambda^* = 1.905$ (courbes en tirets) et $\alpha = 2/7 + 0.001$ et $\lambda^* = 3.487$ (courbes en pointillés) avec $\gamma = 5/3$	112
3.15	Refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^\delta$ normalisés au front du choc en fonction de la coordonnée spatiale auto-semblable $\xi = r/r_0$ pour $\alpha = 0.38$ (rouge), $\alpha = 0.32$ (violet) et $\alpha = 2/7 + 0.001$ (bleu) avec $\gamma = 5/3$	114
4.1	Représentation de la géométrie du domaine : le domaine 1 d'intégration numérique est un quart de disque, le domaine 2 est défini par symétrie axiale du domaine 1 selon l'axe y et une rotation selon l'axe x définit le domaine 3 et donne une représentation 3D du RSN. Cette figure est tirée de la publication de Julien Minière dans le journal A&A 2018 [28].	122
4.2	Carte de la densité en 10^{-20} kg à 3000 ans.	128
4.3	Profils numériques renormalisés au front du choc de la densité (en bleu), de la vitesse radiale (en orange) et de la pression (en vert) de la solution de Sedov-Taylor à t_0 en fonction de la distance radiale renormalisée au front du choc $1,83 \times 10^{17}$ m. La densité au front du choc vaut $\rho_{sh} = 3,77 \times 10^{-20}$ kg/m ³ , la vitesse $v_{sh} = 5,4 \times 10^5$ m/s et la pression $p_{sh} = 3,8 \times 10^{-9}$ Pa. A droite du front du choc, le segment de droite horizontal bleu représente la densité du MIS.	129

4.4	Température adimensionnée \tilde{T} en fonction du temps adimensionné \tilde{t} pour $b = 3$ (en bleu), $b = 2$ (en orange), $b = 1$ (en vert), $b = 1/2$ (en rouge), $b = 0$ (en violet) et $b = -1/2$ (en marron).	133
4.5	Comparaison entre la pression analytique (en Pa) fonction du temps (en secondes) représentée par la courbe noire et les valeurs numériques représentées par des points rouges.	133
4.6	Energie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en Joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement constant.	135
4.7	Profil de densité en 10^{-20} kg/m ³ pour le refroidissement constant à $t = 16\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 100\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	136
4.8	Profil de vitesse en 10^6 m/s pour le refroidissement constant à $t = 16\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 100\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	137
4.9	Profil de pression en 10^{-8} Pa pour le refroidissement constant à $t = 16\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 100\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	137
4.10	Profil de température en 10^{12} K pour le refroidissement constant à $t = 16\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 100\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	138
4.11	Vitesse de front du choc V_s en m/s en fonction du temps en secondes pour le refroidissement constant.	138
4.12	Paramètre de décélération $\alpha = V_s t / r_0(t)$ pour le refroidissement constant (en noir) et le paramètre limite $\alpha_s = 1/4$ de Oort [31] en orange et $\alpha_s = 2/7$ de McKee & Ostriker [20] en bleu.	139
4.13	Profil de la densité (en bleu), de la vitesse (en orange), de la pression (en vert) à $t = 16\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 3,87 \times 10^{-20}$ kg/m ³ , $v_{sh} = 1,9 \times 10^5$ m/s, $p_{sh} = 4,8 \times 10^{-10}$ Pa en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.	140

4.14	Zoom du profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 28\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 3,98 \times 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ et $v_{sh} = 1 \times 10^5 \text{ m/s}$ en fonction de la distance radiale en 10^{17} m .	141
4.15	Zoom du profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 28\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 1,3 \times 10^{-10} \text{ Pa}$ et $T_{sh} = 3,9 \times 10^5 \text{ K}$ en fonction de la distance radiale en 10^{17} m .	142
4.16	Zoom du profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 100\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 18,57 \times 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ et $v_{sh} = 4,2 \times 10^4 \text{ m/s}$ en fonction de la distance radiale en 10^{17} m .	143
4.17	Zoom du profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 100\,000$ ans pour le refroidissement constant renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 1,8 \times 10^{-11} \text{ Pa}$ et $T_{sh} = 1,3 \times 10^4 \text{ K}$ en fonction de la distance radiale en 10^{17} m .	143
4.18	Energie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^2$.	148
4.19	Profils normalisés au front du choc de densité (en bleu), de vitesse (en orange) et de pression (en vert) comparés à la solution numérique de Sedov-Taylor à t_0 (en pointillé voir la figure 4.3) en fonction de la distance radiale r/r_0 normalisée au rayon du RSN qui vaut $r_0(t_0) = 4,9 \times 10^{17} \text{ m}$. La densité au front du choc vaut $\rho_{sh} = 3,75 \times 10^{-20} \text{ kg/m}^3$, la vitesse $v_{sh} = 7,4 \times 10^4 \text{ m/s}$ et la pression $p_{sh} = 7,34 \times 10^{-11} \text{ Pa}$.	149
4.20	Vitesse de front du choc V_s en m/s en fonction du temps en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^2$.	150
4.21	Paramètre de décélération $\alpha = V_s t / R$ pour le refroidissement $a = b = 2$ (en noir) et le paramètre limite $\alpha' = 0.346$ de l'analyse autosemblable (en bleu) en fonction du temps en secondes.	150
4.22	Energie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$.	152
4.23	Energie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$.	153

4.24	Energie totale du RSN (en bleu), énergie cinétique (en orange), énergie thermique (en vert) et énergie radiative perdue par rayonnement (en rouge) en joules en fonction du temps t en secondes pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$	153
4.25	Profil de densité en 10^{-20} kg/m ³ pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ à $t = 10\,000$ ans (en bleu), $t = 18\,000$ ans (en orange), à $t = 28\,000$ ans (en vert) et à $t = 53\,000$ ans (en rouge) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	155
4.26	Profil de vitesse en 10^6 m/s pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ à $t = 10\,000$ ans (en bleu), $t = 18\,000$ ans (en orange), à $t = 28\,000$ ans (en vert) et à $t = 53\,000$ ans (en rouge) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	156
4.27	Profil de pression en 10^{-8} Pa pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ à $t = 10\,000$ ans (en bleu), $t = 18\,000$ ans (en orange), à $t = 28\,000$ ans (en vert) et à $t = 53\,000$ ans (en rouge) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	156
4.28	Profil de température en 10^{12} K pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ à $t = 10\,000$ ans (en bleu), $t = 18\,000$ ans (en orange), à $t = 28\,000$ ans (en vert) et à $t = 53\,000$ ans (en rouge) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	157
4.29	Profil de densité en 10^{-20} kg/m ³ pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	157
4.30	Profil de vitesse en 10^6 m/s pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	158
4.31	Profil de pression en 10^{-8} Pa pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	158
4.32	Profil de température en 10^{12} K pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	159
4.33	Profil de densité en 10^{-20} kg/m ³ pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	159

4.34	Profil de vitesse en 10^6 m/s pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	160
4.35	Profil de pression en 10^{-8} Pa pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	160
4.36	Profil de pression en 10^{12} K pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ à $t = 18\,000$ ans (en bleu), à $t = 28\,000$ ans (en orange) et à $t = 53\,000$ ans (en vert) en fonction de la distance radiale r en 10^{17} m.	161
4.37	Courbe de $\text{Log}(r_0(t)/r_0(t_0))$ en fonction de $\text{Log}(t/t_0)$ pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ (en bleu), $\Lambda \propto \rho^2 T^{1/2}$ (en orange) et $\Lambda \propto \rho^2 T^{-1/2}$ (en vert) avec la droite théorique correspondant à la phase de Sedov-Taylor de pente $2/5$ en noir et celle de la phase radiative asymptotique de pente $2/7$ en pointillés noirs. $t_0 = 3\,000$ ans est le temps initial de la phase radiative et $r_0(t_0) = 1,83 \times 10^{17}$ m le rayon initial du RSN correspondant.	161
4.38	Zoom du profil de la densité (en bleu) et de vitesse (en orange) à $t = 10\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 4 \times 10^{-20}$ kg/m ³ , $v_{sh} = 1,9 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.	163
4.39	Zoom du profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 10\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 4,5 \times 10^{-10}$ Pa et $T_{sh} = 1,25 \times 10^6$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.	164
4.40	Zoom du profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 11\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 4 \times 10^{-20}$ kg/m ³ et $v_{sh} = 1,7 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.	164
4.41	Zoom du profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 11\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 3,3 \times 10^{-10}$ Pa et $T_{sh} = 9,8 \times 10^5$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.	165
4.42	Profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 13\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 64,6 \times 10^{-20}$ kg/m ³ et $v_{sh} = 1,8 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m.	167

4.43 Profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 13\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 5,25 \times 10^{-11}$ Pa et $T_{sh} = 1,77 \times 10^5$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m. . . . 168

4.44 Profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 16\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 61,6 \times 10^{-20}$ kg/m³ et $v_{sh} = 1,57 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m. 168

4.45 Profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 16\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 3,8 \times 10^{-11}$ Pa et $T_{sh} = 1,25 \times 10^5$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m. . . . 169

4.46 Profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 18\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 64,8 \times 10^{-20}$ kg/m³ et $v_{sh} = 1,4 \times 10^5$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m. 169

4.47 Profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 18\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 2,96 \times 10^{-11}$ Pa et $T_{sh} = 1 \times 10^5$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m. 170

4.48 Profil de la densité (en bleu) et de la vitesse (en orange) à $t = 53\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $\rho_{sh} = 44 \times 10^{-20}$ kg/m³ et $v_{sh} = 7 \times 10^4$ m/s en fonction de la distance radiale en 10^{17} m. 170

4.49 Profil de la pression (en vert) et de la température (en rouge) à $t = 53\,000$ ans pour le refroidissement $\Lambda \propto \rho^2$ renormalisé sur leur valeur au front du choc $p_{sh} = 4,4 \times 10^{-11}$ Pa et $T_{sh} = 1,22 \times 10^4$ K en fonction de la distance radiale en 10^{17} m. . . . 171

4.50 Profils de Pression p , de vitesse u , de température T et de densité ρ au voisinage du front du choc, calculés pour différentes fonctions de refroidissement. (a) Simulation E3T-C19A avec le refroidissement Λ_{TC} utilisant les tables d'opacités sans conditions d'arrêt à $t = 197\,000$ ans. (b) Simulation E3T-C19A avec le refroidissement Λ_{TC} utilisant les tables d'opacités avec conditions d'arrêt à $t = 90\,000$ ans. (c) La même simulation à $t = 192\,000$ ans. Tirés de la figure 8 des simulations de Badjin et ses collègues [35]. 172

Table des figures

5.1	Espace des paramètres pour $\gamma = 5/3$ (en gris clair) avec la frontière $\lambda^*(\alpha)$ où $\alpha < \alpha'$ (trait plein noir) et $\alpha \geq \alpha'$ (trait plein rouge). Le comportement analytique de la frontière $\lambda^*(\alpha)$ pour $\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow +\infty$ est tracé en trait pointillés. La frontière qui sépare la région avec $\mu \geq 0$ et la région $\mu \leq 0$ (μ est défini dans (3.89) et (3.90)) est aussi tracée en trait pointillé. .	180
5.2	Profils de densité, vitesse, pression thermique et pression magnétique à 70 000 ans pour différentes valeurs du champ magnétique ambiant. Tirés du papier de Petruk et ses collègues [36].	183
5.3	taux de croissance mesuré expérimentalement (en bleu pour l'expérience avec de l'hélium (a), en marron avec de l'azote (b) et en orange avec le mélange de gaz (c)) comparé avec le taux de croissance théorique de l'instabilité de Vishniac [57], [58], [59] tracé pour différents indices adiabatiques γ . Tiré de Edens et ses collègues [40].	185

Bibliographie

- [1] H Kull. Theory of the Rayleigh-Taylor instability. *Physics reports*, 206(5) :197–325, 1991.
- [2] SF Gull and MS Longair. A numerical model of the structure and evolution of young supernova remnants. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 161(1) :47–69, 1973.
- [3] RA Chevalier, JM Blondin, and RT Emmering. Hydrodynamic instabilities in supernova remnants-self-similar driven waves. *The Astrophysical Journal*, 392 :118–130, 1992.
- [4] VV Dwarkadas and RA Chevalier. Interaction of type IA supernovae with their surroundings. *The Astrophysical Journal*, 497 :807–823, 1998.
- [5] F Frascetti, R Teyssier, J Ballet, and A Decourchelle. Simulation of the growth of the 3D Rayleigh-Taylor instability in supernova remnants using an expanding reference frame. *Astronomy & Astrophysics*, 515 :A104, 2010.
- [6] RD Blandford and LL Cowie. Radio emission from supernova remnants in a cloudy interstellar medium. *The Astrophysical Journal*, 260 :625–634, 1982.
- [7] JJ Hester and DP Cox. The Cygnus loop-a detailed comparison of x-ray and optical emission. *The Astrophysical Journal*, 300 :675–697, 1986.
- [8] RA Fesen, WP Blair, and RP Kirshner. Spectrophotometry of the Cygnus loop. *The Astrophysical Journal*, 262 :171–188, 1982.
- [9] RCGD Minkowski. Cygnus loop and some related nebulosities. In *Symposium-International Astronomical Union*, volume 8, pages 1048–1052. Cambridge University Press, 1958.
- [10] D Pfenniger. Fundamental aspects of the ISM fractality. In *New Extragalactic Perspectives in the New South Africa*, pages 439–446. Springer, 1996.
- [11] BG Elmegreen. Intercloud structure in a turbulent fractal interstellar medium. *The Astrophysical Journal*, 477(1) :196, 1997.

- [12] HJ De Vega, N Sánchez, and F Combes. Self-gravity as an explanation of the fractal structure of the interstellar medium. *Nature*, 383 :56, 1996.
- [13] F Bournaud, BG Elmegreen, R Teyssier, DL Block, and I Puerari. ISM properties in hydrodynamic galaxy simulations : turbulence cascades, cloud formation, role of gravity and feedback. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 409(3) :1088–1099, 2010.
- [14] JD Slavin, JM Shull, and MC Begelman. Turbulent mixing layers in the interstellar medium of galaxies. *The Astrophysical Journal*, 407 :83–99, 1993.
- [15] AY Poludnenko, A Frank, and EG Blackman. Hydrodynamic interaction of strong shocks with inhomogeneous media. I. adiabatic case. *The Astrophysical Journal*, 576(2) :832, 2002.
- [16] LL Cowie, Ch F McKee, and JP Ostriker. Supernova remnant evolution in an inhomogeneous medium. I-numerical models. *The Astrophysical Journal*, 247 :908–924, 1981.
- [17] RL Shelton, DP Cox, W Maciejewski, RK Smith, T Plewa, A Pawl, and M Różyczka. Modeling W44 as a supernova remnant in a density gradient with a partially formed dense shell and thermal conduction in the hot interior. II. the hydrodynamic models. *The Astrophysical Journal*, 524(1) :192, 1999.
- [18] W Maciejewski and DP Cox. Supernova remnant in a stratified medium : explicit, analytical approximations for adiabatic expansion and radiative cooling. *The Astrophysical Journal*, 511(2) :792, 1999.
- [19] B Hnatyk and O Petruk. Evolution of supernova remnants in the interstellar medium with a large-scale density gradient. I. general properties of the morphological evolution and x-ray emission. *arXiv preprint astro-ph/9901229*, 1999.
- [20] CF McKee and JP Ostriker. A theory of the interstellar medium-three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate. *The Astrophysical Journal*, 218 :148–169, 1977.
- [21] D Martizzi, C-A Faucher-Giguère, and E Quataert. Supernova feedback in an inhomogeneous interstellar medium. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 450(1) :504–522, 2015.
- [22] Donald P Cox and Barham W Smith. Large-scale effects of supernova remnants on the galaxy : generation and maintenance of a hot network of tunnels. *The Astrophysical Journal*, 189 :L105, 1974.
- [23] A Preite-Martinez. Late-stage evolution of a supernova remnant-the structure of the dense shell. *Astronomy and Astrophysics*, 96 :283–292, 1981.

-
- [24] SAEG Falle. Catastrophic cooling in supernova remnants. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 195(4) :1011–1028, 1981.
- [25] DF Cioffi, CF McKee, and E Bertschinger. Dynamics of radiative supernova remnants. *The Astrophysical Journal*, 334 :252–265, 1988.
- [26] JM Blondin, EB Wright, KJ Borkowski, and SP Reynolds. Transition to the radiative phase in supernova remnants. *The Astrophysical Journal*, 500(1) :342, 1998.
- [27] Julien Minière. *Etude de l'instabilité de Vishniac et régime radiatif des restes de supernova*. PhD thesis, Observatoire de Paris, 2014.
- [28] J Minière, SE Bouquet, C Michaut, J Sanz, and M Mancini. Numerical study of the vishniac instability in cooled supernova remnants. *Astronomy & Astrophysics*, 617 :A133, 2018.
- [29] R Bandiera and O Petruk. Analytic solutions for the evolution of radiative supernova remnants. *Astronomy & Astrophysics*, 419(2) :419–423, 2004.
- [30] GI Barenblatt. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics : dimensional analysis and intermediate asymptotics*, volume 14. Cambridge University Press, 1996.
- [31] JH Oort. Some phenomena connected with interstellar matter (george darwin lecture). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, page 106, 1946.
- [32] JH Oort. Interaction of nova and supernova shells with the interstellar medium. In *Problems of Cosmical Aerodynamics*, page 118, 1951.
- [33] JP Ostriker and CF McKee. Astrophysical blastwaves. *Reviews of Modern Physics*, 60(1) :1, 1988.
- [34] WC Straka. Numerical models of the evolution of supernova remnants : the shell-formation stage. *The Astrophysical Journal*, 190 :59–66, 1974.
- [35] DA Badjin, SI Glazyrin, KV Manukovskiy, and SI Blinnikov. On physical and numerical instabilities arising in simulations of non-stationary radiatively cooling shocks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 459(2) :2188–2211, 2016.
- [36] O Petruk, T Kuzyo, S Orlando, M Pohl, M Miceli, F Bocchino, V Beshley, and R Brose. Post-adiabatic supernova remnants in an interstellar magnetic field : oblique shocks and non-uniform environment. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 479(3) :4253–4270, 2018.
- [37] RP Drake. *High-energy-density physics : foundation of inertial fusion and experimental astrophysics*. Springer, 2018.

- [38] Serge Bouquet, Emeric Falize, C Michaut, CD Gregory, B Loupiau, T Vinci, and M Koenig. From lasers to the universe : Scaling laws in laboratory astrophysics. *High Energy Density Physics*, 6(4) :368–380, 2010.
- [39] E Falize, Claire Michaut, and Serge Bouquet. Similarity properties and scaling laws of radiation hydrodynamic flows in laboratory astrophysics. *The Astrophysical Journal*, 730(2) :96, 2011.
- [40] AD Edens, Richard G Adams, P Rambo, Larry Ruggles, Ian C Smith, John L Porter, and Todd Ditmire. Study of high Mach number laser driven blast waves in gases. *Physics of Plasmas*, 17(11) :112104, 2010.
- [41] MJ Edwards, AJ MacKinnon, J Zweiback, K Shigemori, D Ryutov, AM Rubenchik, KA Keilty, E Liang, BA Remington, and Todd Ditmire. Investigation of ultrafast laser-driven radiative blast waves. *Physical Review Letters*, 87(8) :085004, 2001.
- [42] AS Moore, ET Gumbrell, J Lazarus, M Hohenberger, JS Robinson, RA Smith, TJA Plant, DR Symes, and M Dunne. Full-trajectory diagnosis of laser-driven radiative blast waves in search of thermal plasma instabilities. *Physical review letters*, 100(5) :055001, 2008.
- [43] M Hohenberger, DR Symes, J Lazarus, HW Doyle, RE Carley, AS Moore, ET Gumbrell, MM Notley, RJ Clarke, M Dunne, and RA Smith. Observation of a velocity domain cooling instability in a radiative shock. *Physical review letters*, 105(20) :205003, 2010.
- [44] Thomas Clayson, Francisco Suzuki-Vidal, SV Lebedev, GF Swadling, Chantal Stehlé, GC Burdiak, JM Foster, J Skidmore, P Graham, E Gumbrell, et al. Counter-propagating radiative shock experiments on the Orion laser and the formation of radiative precursors. *High Energy Density Physics*, 23 :60–72, 2017.
- [45] S Bouquet, C Stehlé, M Koenig, J-P Chieze, A Benuzzi-Mounaix, D Batani, S Leygnac, X Fleury, H Merdji, Claire Michaut, et al. Observation of laser driven supercritical radiative shock precursors. *Physical Review Letters*, 92(22) :225001, 2004.
- [46] RL Singh, C Stehlé, F Suzuki-Vidal, M Kozlova, J Larour, U Chaulagain, T Clayson, R Rodriguez, JM Gil, J Nejdil, et al. Experimental study of the interaction of two laser-driven radiative shocks at the PALS laser. *High Energy Density Physics*, 23 :20–30, 2017.
- [47] GC Burdiak, SV Lebedev, RP Drake, AJ Harvey-Thompson, GF Swadling, F Suzuki-Vidal, J Skidmore, L Suttle, E Khoory, L Pickworth, et al. The production and evolution of multiple converging radiative

- shock waves in gas-filled cylindrical liner Z-pinch experiments. *High Energy Density Physics*, 9(1) :52–62, 2013.
- [48] GC Burdiak, SV Lebedev, F Suzuki-Vidal, GF Swadling, SN Bland, N Niase, L Suttle, M Bennet, J Hare, M Weinwurm, et al. Cylindrical liner Z-pinch experiments for fusion research and high-energy-density physics. *Journal of Plasma Physics*, 81(3), 2015.
- [49] Thomas Clayson, SV Lebedev, Francisco Suzuki-Vidal, GC Burdiak, JWD Halliday, JD Hare, J Ma, LG Suttle, and ER Tubman. Inverse liner Z-pinch : An experimental pulsed power platform for studying radiative shocks. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 46(11) :3734–3740, 2018.
- [50] J Grun, J Stamper, C Manka, J Resnick, R Burris, J Crawford, and BH Ripin. Instability of Taylor-Sedov blast waves propagating through a uniform gas. *Physical review letters*, 66(21) :2738, 1991.
- [51] D Ryutov, RP Drake, J Kane, E Liang, BA Remington, and WM Wood-Vasey. Similarity criteria for the laboratory simulation of supernova hydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 518(2) :821, 1999.
- [52] NJ Riley, SM Lewis, ML Wisher, MW Kimmel, KW Struve, JL Porter, RD Bengtson, and T Ditmire. Improved experimental resolution of the Vishniac overstability in scaled late-stage supernova remnants. *High Energy Density Physics*, 22 :64–72, 2017.
- [53] J Osterhoff, DR Symes, AD Edens, AS Moore, E Hellewell, and Todd Ditmire. Radiative shell thinning in intense laser-driven blast waves. *New Journal of Physics*, 11(2) :023022, 2009.
- [54] DR Symes, M Hohenberger, J Lazarus, J Osterhoff, AS Moore, RR Fäustlin, AD Edens, HW Doyle, RE Carley, A Marocchino, et al. Investigations of laser-driven radiative blast waves in clustered gases. *High Energy Density Physics*, 6(2) :274–279, 2010.
- [55] J Sanz, S Bouquet, and M Murakami. Self-consistent stability analysis of spherical shocks. *Astrophysics and Space Science*, 336(1) :195–200, 2011.
- [56] RP Drake and FW Doss. Regimes of the Vishniac–Ryu decelerating shock instability. *The Astrophysical Journal*, 868(1) :23, 2018.
- [57] ET Vishniac. The dynamic and gravitational instabilities of spherical shocks. *The Astrophysical Journal*, 274 :152–167, 1983.
- [58] D Ryu and ET Vishniac. The growth of linear perturbations of adiabatic shock waves. *The Astrophysical Journal*, 313 :820–841, 1987.
- [59] J Sanz, SE Bouquet, C Michaut, and J Minière. The spectrum of the Sedov–Taylor point explosion linear stability. *Physics of Plasmas*, 23(6) :062114, 2016.

Bibliographie

- [60] ET Vishniac. Nonlinear instabilities in shock-bounded slabs. *The Astrophysical Journal*, 428 :186–208, 1994.
- [61] John M Blondin and BS Marks. Evolution of cold shock-bounded slabs. *New Astronomy*, 1(3) :235–244, 1996.
- [62] RA Chevalier and JN Imamura. Linear analysis of an oscillatory instability of radiative shock waves. *The Astrophysical Journal*, 261 :543–549, 1982.
- [63] J Lequeux. *Le milieu interstellaire*. EDP sciences, 2012.
- [64] Ya B Zel'Dovich and Yu P Raizer. *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. Courier Corporation, 2012.
- [65] D Clayton. *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*. University of Chicago press, 1983.
- [66] D Mihalas and B Weibel Mihalas. Foundations of radiation hydrodynamics. *Oxford University Press*, 1984.
- [67] LI Sedov. Similarity methods and dimensionality in mechanics, 1972.
- [68] GB Rybicki and AP Lightman. *Radiative processes in astrophysics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [69] S. A. E. G. Falle. Shock Instabilities. *Astrophysics and Space Science*, 233 :239–249, 1995.
- [70] GI Barenblatt. *Scaling*, volume 34. Cambridge University Press, 2003.
- [71] GI Taylor. Report of civil defense research committee of the ministry of home security. *RC-210*, 12, 1941.
- [72] J von Neumann. The point source solution, national defence research committee, div. B Report AM-9, 1941.
- [73] J von Neumann and AH Taub. *John von Neumann Collected Works : Volume V-Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis*. Pergamon Press, 1963.
- [74] LI Sedov. Propagation of strong shock waves. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 10 :241–250, 1946.
- [75] P Blottiau, JP Chièze, and S Bouquet. An asymptotic self-similar solution for the gravitational collapse. *Astronomy and Astrophysics*, 207 :24–36, 1988.
- [76] G Pichon. *Groupes de Lie : représentations linéaires et applications*, volume 7. Hermann, 1973.
- [77] D Zwillinger. *Handbook of differential equations*, volume 1. Gulf Professional Publishing, 1998.

-
- [78] LD Landau and E Lifchitz. *Physique Theorique volume 6 : Mécanique des Fluides*. MIR, 1971.
- [79] KG Guderley. Starke kugelige und zylindrische verdichtungsstosse in der nahe des kugelmittelpunktes bzw. der zylinderachse. *Luftfahrtforschung*, 19 :302, 1942.
- [80] William H, SA Teukolsky, WT Vetterling, and BP Flannery. *Numerical recipes 3rd edition : The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007.
- [81] VA Andrushchenko, GI Barenblatt, and LA Chudov. *Self-similar propagation of strong blast waves in the presence of radiation or energy release at the wave front*. Collection of papers dedicated to the 100th anniversary of B.G. Galerkin, Shapiro, G.S. (ed.), 35-44, (in Russian) Nauka, Moscow, 1975.
- [82] RB Dingle. *Asymptotic expansions : their derivation and interpretation*, volume 48. Academic Press London, 1973.
- [83] J Kevorkian and JD Cole. *Applied mathematical sciences, Vol 114. Multiple scale and singular perturbation methods*. Berlin : Springer, 1996.
- [84] A Mignone, G Bodo, S Massaglia, T Matsakos, O Tesileanu, C Zanni, and A Ferrari. PLUTO : A numerical code for computational astrophysics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(1) :228, 2007.
- [85] J Sanz. communication privée.
- [86] C Michaut, L Di Menza, HC Nguyen, SE Bouquet, and M Mancini. Hades code for numerical simulations of high-mach number astrophysical radiative flows. *High Energy Density Physics*, 22 :77–89, 2017.
- [87] Hung Chinh Nguyen. *Simulation de modèles hydrodynamiques et de transfert radiatif intervenant dans la description d'écoulements astrophysiques*. PhD thesis, Université Paris 11, 2011.
- [88] Ami Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of computational physics*, 49(3) :357–393, 1983.
- [89] J-Ch Robinet, J Gressier, G Casalis, and J-M Moschetta. Shock wave instability and the carbuncle phenomenon : same intrinsic origin ? *Journal of Fluid Mechanics*, 417 :237–263, 2000.
- [90] GI Barenblatt and YB Zel'Dovich. Self-similar solutions as intermediate asymptotics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 4(1) :285–312, 1972.
- [91] GB Field. Thermal instability. *The Astrophysical Journal*, 142 :531, 1965.
- [92] EN Parker. Instability of thermal fields. *The Astrophysical Journal*, 117 :431, 1953.

Bibliographie

- [93] Davina E Innes. *Theoretical Models for Non-steady Radiative Shocks in Supernova Remnants*. PhD thesis, University of London, 1985.
- [94] DE Innes, JR Giddings, and SAEG Falle. Dynamical models of radiative shocks-II. unsteady shocks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 226(1) :67–93, 1987.
- [95] RS Sutherland and MA Dopita. Cooling functions for low-density astrophysical plasmas. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 88 :253–327, 1993.

Publications et conférences

A Gintrand, J Sanz, S Bouquet, J Paradelo. Self-similar dynamics of radiative blast waves, soumis à *Physics of Fluids*, accepté, janvier 2020

A Gintrand, S Bouquet., C Michaut. Analytical study of ionizing shock waves in supernova remnants, en cours de soumission à *A&A*, 2020

Présentation d'un Poster à International Conference on High Energy Density (ICHED), Oxford, UK, 2019 : New self-similar solutions in cooling supernova remnants

Exposé oral à la conférence internationale High Energy Density Laboratory Astrophysics (HEDLA), Kurashiki, Japon, 2018 : New self-similar solutions in cooling supernova remnants

Bibliographie
