



HAL
open science

Optique quantique multimode pour le traitement de l'information quantique

Élie Gouzien

► **To cite this version:**

Élie Gouzien. Optique quantique multimode pour le traitement de l'information quantique. Optique [physics.optics]. COMUE Université Côte d'Azur (2015 - 2019), 2019. Français. NNT: 2019AZUR4110 . tel-02885960

HAL Id: tel-02885960

<https://theses.hal.science/tel-02885960>

Submitted on 1 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

THÈSE DE DOCTORAT

Optique quantique multimode pour le traitement de l'information quantique

Élie Gouzien

Institut de Physique de Nice (INPHYNI), CNRS, UMR 7010

Présentée en vue de l'obtention
du grade de : docteur en physique
de l'Université Côte d'Azur

Dirigée par : Sébastien Tanzilli,
Virginia D'Auria

Soutenue le : 17 décembre 2019

Devant le jury, composé de :

Antonio Acín	Professeur, Institut de Ciències Fotòniques
Nicolas Cerf	Professeur, Université Libre de Bruxelles
Nicolas Sangouard	Professeur, Universität Basel
Sébastien Tanzilli	Directeur de recherche, CNRS, INPHYNI, Université Côte d'Azur
Virginia D'Auria	Maître de conférences, INPHYNI, Université Côte d'Azur
Giuseppe Patera	Maître de conférences, Université de Lille

Optique quantique multimode pour le traitement de l'information quantique

Composition du jury :

Antonio Acín	Professeur, Institut de Ciències Fotòniques	Président du jury
Nicolas Cerf	Professeur, Université Libre de Bruxelles	Rapporteur
Nicolas Sangouard	Professeur, Universität Basel	Rapporteur
Sébastien Tanzilli	Directeur de recherche, CNRS, INPHYNI, Université Côte d'Azur	Directeur de thèse
Virginia D'Auria	Maître de conférences, INPHYNI, Université Côte d'Azur	Directrice de thèse
Giuseppe Patera	Maître de conférences, Université de Lille	Invité

RÉSUMÉ COURT

Cette thèse étudie l'optique quantique multimode, aussi bien du point de vue de la génération que celui de la détection. Elle s'articule autour de trois volets.

Nous étudions la génération de lumière comprimée multimode dans une cavité. Pour cela nous considérons la forme la plus générale de hamiltonien quadratique, permettant entre autres de décrire l'utilisation de plusieurs pompes dans un matériau effectuant du mélange à quatre ondes.

Un autre problème examiné est celui de prendre en compte l'information temporelle obtenue lors du clic d'un détecteur de photon unique. Pour cela nous utilisons un formalisme multimodal temporel afin d'explicitier les opérateurs décrivant la mesure.

En troisième partie nous présentons un schéma de génération d'intrication hybride entre variables continues et discrètes, pour laquelle la partie discrète est encodée temporellement. Ce schéma est analysé en détail vis-à-vis de sa résistance aux imperfections expérimentales.

SHORT ABSTRACT

This thesis studies multimode quantum optics, from generation to detection of light. It focuses on three main parts.

Multimode squeezed states generation within cavity is studied. More specifically we take into account general quadratic Hamiltonian, which allows describing experiments involving arbitrary number of modes and pumps within a medium performing four-wave mixing.

Single photons detectors are described taking into account temporal degrees of freedom. We give positive-valued measurement operators describing such detectors including realistic imperfections such as timing-jitter, finite efficiency and dark counts.

In the third part we propose a protocol for generating a hybrid state entangling continuous and discrete variables parts, for which the discrete part is time-bin encoded. This scheme is analysed in detail with respect to its resilience to experimental imperfections.

RÉSUMÉ

Cette thèse étudie l'optique quantique multimode, aussi bien du point de vue de la génération que celui de la détection. Elle s'articule autour de trois volets.

Nous étudions la génération de lumière comprimée multimode dans une cavité. Pour cela nous considérons la forme la plus générale de hamiltonien quadratique, permettant entre autres de décrire l'utilisation de plusieurs pompes dans un matériau effectuant du mélange à quatre ondes. Une approche combinant fonctions de Green et décompositions de matrices symplectiques est décrite. Cette théorie générique est appliquée à des cas particuliers. Dans un premier temps, des exemples en basse dimension sont donnés. Ensuite, une configuration d'oscillateur paramétrique optique pompé de manière synchrone (SPOPO) est décrite et étudiée; les résultats obtenus montrent que ce système a un comportement très différent de celui du SPOPO utilisant une non-linéarité d'ordre 2. Ces travaux ouvrent la voie à la réalisation de peignes de fréquences quantiques avec des micro-résonateurs en anneau gravés sur silicium.

Un autre problème examiné est celui de prendre en compte l'information temporelle obtenue lors du clic d'un détecteur de photon unique. Pour cela nous utilisons un formalisme multimodal temporel afin d'explicitier les opérateurs décrivant la mesure. Les principaux défauts des détecteurs réels, dont la gigue temporelle, l'efficacité finie et les coups d'obscurité sont pris en compte. L'utilisation des opérateurs est illustrée par la description d'expériences usuelles de l'optique quantique. Enfin, on montre que la lecture du temps de clic du détecteur permet d'améliorer la qualité de l'état généré par une source de photons annoncés.

En troisième partie nous présentons un schéma de génération d'intrication hybride entre variables continues et discrètes, pour laquelle la partie discrète est encodée temporellement. Ce schéma est analysé en détail vis-à-vis de sa résistance aux imperfections expérimentales.

Mots clefs optique quantique, multimode, détecteur de photons uniques ON/OFF, gigue temporelle, source de photons annoncés, lumière comprimée, hamiltonien quadratique, cavité, mélange à quatre ondes, $\chi^{(3)}$, SPOPO, hybride, encodage temporel

ABSTRACT

This thesis studies multimode quantum optics, from generation to detection of light. It focuses on three main parts.

Multimode squeezed states generation within cavity is studied. More specifically, we take into account general quadratic Hamiltonian, which allows describing experiments involving arbitrary number of modes and pumps within a medium performing four-wave mixing. We describe a generic approach combining Green functions and symplectic matrix decomposition. This general theory is illustrated on specific cases. First, low-dimensional examples are given. Then, a synchronously pumped optical parametric oscillator (SPOPO) is described and studied; it shows a very distinct behavior from that of the SPOPO using second order non-linearity. This work opens way to the realization of quantum frequency combs with ring micro-resonators engraved on silicon.

Single-photon detectors are described taking into account temporal degrees of freedom. We give positive-valued measurement operators describing such detectors including realistic imperfections such as timing-jitter, finite efficiency and dark counts. Use of those operators is illustrated on common quantum optics experiments. Finally, we show how time-resolved measurement allows improving the quality of state generated by single-photon heralded source.

In the third part we propose a protocol for generating a hybrid state entangling continuous and discrete variables parts, for which the discrete part is time-bin encoded. This scheme is analysed in detail with respect to its resilience to experimental imperfections.

Keywords quantum optics, multimode, ON/OFF single-photon detector, timing-jitter, heralded single-photon source, squeezed light, quadratic Hamiltonian, cavity, four-wave mixing, $\chi^{(3)}$, SPOPO, hybrid, time-bin

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES NOTATIONS	xiii
ACRONYMES	xx
I INTRODUCTION	
1 QUANTIFICATION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE	7
1.1 Décomposition des champs classiques en modes	7
1.1.1 Équations de Maxwell	7
1.1.2 Décomposition harmonique	8
1.1.3 Décomposition spatiale	8
1.1.4 Changement de base	9
1.1.5 Potentiel vecteur	9
1.1.6 Hamiltonien	10
1.2 Quantification	10
1.2.1 Quantification	10
1.2.2 Opérateurs de champs	11
1.2.3 Changements de base	12
1.3 Quantification d'un champ progressif	12
1.3.1 Champ quantifié dans l'espace entier	12
1.3.2 Champ dans un plan	13
1.3.3 Opérateurs temporels	14
1.3.4 Modes fréquentiels	16
1.4 Opérateurs et états particuliers	17
1.4.1 États discrets	17
1.4.2 États continus	17
2 MESURE GÉNÉRALISÉE	21
2.1 Opérateur densité	21
2.1.1 Définition pour un état pur et propriétés	21
2.1.2 Généralisation; mélange statistique	22
2.1.3 Trace partielle	23
2.2 Opérateurs de mesure	24
2.2.1 Mesure générale	24
2.2.2 Opérateurs positifs et sélection	24
II DESCRIPTION TEMPORELLE D'UN DÉTECTEUR DE PHOTONS UNIQUES	
3 PRÉSENTATION ET ÉTABLISSEMENT DU MODÈLE	31
3.1 Description des états	33
3.1.1 Quantification	33
3.1.2 État à un photon	33
3.1.3 État général	34
3.1.4 Lien avec la seconde quantification	35
3.1.5 Résumé	38

3.2	Notations	38
3.3	Densité temporelle d'opérateurs	39
3.3.1	Définition	39
3.3.2	Absence de clic	40
3.3.3	Normalisation	41
3.3.4	Fonction et opérateur de répartition	41
3.4	Mesure pour un photon impulsional	42
3.5	Photons simultanés	43
3.5.1	Expression générique de la densité de POVM	43
3.5.2	Principe du modèle	44
3.5.3	Expression de la probabilité	44
3.5.4	Expression de la densité de POVM	45
3.5.5	Cas limite : détecteur sans délai	46
3.6	Cas général	47
3.6.1	Expression générique du POVM	47
3.6.2	Calcul de probabilités	48
3.6.3	Expression de l'opérateur	49
3.7	Résumé	51
4	ILLUSTRATIONS POUR SITUATIONS EXPÉRIMENTALES	53
4.1	Mesure directe	53
4.1.1	Stratégie pour des photons indépendants	53
4.1.2	Cas à 1 photon	54
4.1.3	État à k photons séparables	55
4.2	Mesure de délai	56
4.2.1	Paire de photons	56
4.2.2	Mesure des temps de clics	56
4.2.3	Délai et coïncidence	57
4.2.4	Cas particuliers	59
4.2.5	POVM du délai pour un état quelconque	62
4.3	Mesure de corrélation temporelle	64
4.3.1	Effet de la lame séparatrice	65
4.3.2	Densité d'opérateur à double temps	67
4.3.3	Densité d'opérateur pour le délai	70
4.3.4	Exemples d'utilisation	70
5	SOURCE DE PHOTONS ANNONCÉS	75
5.1	État annoncé pour une paire de photons simultanés	75
5.1.1	Calcul de l'état annoncé	75
5.1.2	Caractéristiques de l'état	77
5.2	État annoncé dans un cas général	79
5.2.1	Forme de l'état avant annonce	80
5.2.2	Matrice densité de l'état annoncé	80
5.2.3	Cas typique	81
5.2.4	Fidélité par rapport à l'état attendu	84
5.3	Sélection temporelle de l'état annoncé	85
5.3.1	État annoncé avec sélection dans une fenêtre de temps	85
5.3.2	Débit de la source annoncée avec sélection tardive	87

5.3.3	Conclusion	91
III GÉNÉRATION DE LUMIÈRE COMPRIMÉE MULTIMODE ; HAMILTONIEN QUADRATIQUE		
6	PRÉSENTATION DU PROBLÈME	95
6.1	Hamiltonien étudié	96
7	ÉVOLUTION HAMILTONIENNE	99
7.1	Équation d'évolution	99
7.1.1	Évolution d'un mode	99
7.1.2	Évolution de l'ensemble des modes	101
7.2	Contraintes sur l'opérateur d'évolution et sur la matrice de couplage	101
7.2.1	Transformation linéaire des opérateurs	102
7.2.2	Préservation et équation d'évolution	106
7.3	Quadratures	109
7.3.1	Définitions	109
7.3.2	Contraintes sur les transformations	110
7.3.3	Évolution avec un hamiltonien quadratique	113
7.4	Résumé du chapitre	114
8	MATRICES SYMPLECTIQUES ET HAMILTONIENNES	117
8.1	Définitions et généralités	117
8.1.1	Matrices symplectiques	118
8.1.2	Matrices hamiltoniennes	120
8.2	Expressions par blocs	121
8.2.1	Matrices symplectiques	121
8.2.2	Matrice hamiltonienne	121
8.3	Orthogonalisation symplectique	122
8.4	Propriétés spectrales	125
8.4.1	Matrices symplectiques	125
8.4.2	Matrices hamiltoniennes	126
8.5	Décompositions	126
8.5.1	Décomposition polaire	126
8.5.2	Diagonalisation	127
8.5.3	Décomposition en valeurs singulières	132
8.5.4	Décomposition de Williamson	133
8.6	Algorithmes	134
8.6.1	Matrices symplectiques unitaires	135
8.6.2	Décomposition de Bloch–Messiah	136
8.7	Matrices sesquisymplectiques	136
8.7.1	Matrices sesquisymplectiques hermitiennes	137
8.7.2	Décomposition de Bloch–Messiah	141
9	ÉVOLUTION EN CAVITÉ	143
9.1	Dissipation et équation d'évolution	143
9.1.1	Évolution des opérateurs bosoniques	143
9.1.2	Notation vectorielle	144
9.1.3	Passage en quadratures	145
9.1.4	Champ en sortie	146

9.2	Résolution du problème hamiltonien	147
9.2.1	Matrices réelles symplectiques orthogonales	147
9.2.2	Les différentes approches	149
9.2.3	Diagonalisation symplectique de la matrice d'évolution	150
9.2.4	Diagonalisation par blocs de la matrice d'évolution	153
9.2.5	Décomposition de la matrice d'évolution	155
9.2.6	Conclusion de la section	156
9.3	Fonctions de Green	156
9.3.1	Définitions	157
9.3.2	Préservation de l'hermiticité et des commutateurs	157
9.4	Matrice de covariance	161
9.4.1	Définition et propriétés	161
9.4.2	Champ d'entrée	162
9.4.3	Champ de sortie	164
9.4.4	Décomposition	165
9.4.5	Mesure d'une quadrature fixe	168
9.4.6	Mesure d'une quadrature arbitraire	170
9.5	Résolution de l'équation de Langevin	170
9.5.1	Résolution générique et hypothèse stationnaire.	171
9.5.2	Fonction de Green pour le champ intracavité	172
9.5.3	Fonction de Green pour le champ extérieur	175
9.6	Résumé du chapitre	178
9.6.1	Résolution du problème hamiltonien	178
9.6.2	Équation de Langevin	179
9.6.3	Fonctions de Green	179
9.6.4	Matrices de covariance	180
9.6.5	Hypothèses effectuées	181
10	ILLUSTRATIONS EN BASSE DIMENSION	183
10.1	Un mode	183
10.2	Quatre modes	184
10.2.1	Configuration	185
10.2.2	Hamiltonien	186
10.2.3	Diagonalisation par blocs dans un cas équilibré	188
10.2.4	Méthode générique	189
10.2.5	Récupération des deux sorties	191
11	OSCILLATEUR POMPÉ DE MANIÈRE SYNCHRONE	193
11.1	Stratégie pour le mélange à quatre ondes	193
11.2	Énergie électromagnétique classique	194
11.3	Hamiltonien d'interaction	195
11.4	Analyse des solutions	201
11.4.1	Méthode employée	201
11.4.2	Résultats principaux	202
11.4.3	Résultats complémentaires	204
11.5	Conclusion	205

IV GÉNÉRATION D'INTRICATION HYBRIDE VARIABLES CONTINUES — DISCRÈTES

12	INTRODUCTION AU PROBLÈME	209
12.1	Notations	210
12.2	Approche par soustraction de photon	211
12.2.1	Modèle de l'interféromètre	212
12.2.2	Exemple d'état d'entrée	213
12.2.3	Modèle de l'état	215
12.2.4	État après l'annonce	215
12.2.5	État final souhaité	216
12.2.6	Résolution	216
12.2.7	Conclusion	220
13	SCHÉMA PROPOSÉ	223
13.1	Présentation du schéma	223
13.1.1	État au niveau des détecteurs	223
13.1.2	Choix de l'annonce	228
13.1.3	État annoncé dans le cas idéal	229
13.2	Source réaliste de paires de photons	230
13.2.1	Source de paire de photons	230
13.2.2	État au niveau des détecteurs	232
13.3	Détecteurs réalistes	233
13.3.1	Modèle des détecteurs	233
13.3.2	Choix de l'annonce	233
13.4	État annoncé en mesurant tous les modes	235
13.4.1	Généralités	236
13.4.2	Gestion des multiples paires	237
13.4.3	Calcul de la partie principale de l'état annoncé	238
13.4.4	Expression de l'état généré	239
13.5	État annoncé sans mesurer tous les modes	243
13.5.1	Résumé des généralités	243
13.5.2	Calcul de la partie principale de l'état annoncé	244
13.5.3	Expression de l'état généré	245
13.5.4	Probabilité de clics avec double paire	246
13.6	Entrée générique pour la partie continue	248
13.6.1	Stratégie	248
13.6.2	États de Fock et lame séparatrice	250
13.6.3	État au niveau des détecteurs	256
13.6.4	Probabilité d'annonce	261
13.6.5	Développement de la probabilité	266
13.7	Conclusion	274
13.7.1	Résumé	274
13.7.2	Comparaison entre les deux annonces	275
13.7.3	Choix des paramètres	276

Conclusion

Appendices

A	CORRÉLATION TEMPORELLE	283
A.1	Rappel de probabilité et notations	283
A.1.1	Espérance, variance et écart type	283
A.1.2	Indépendance	284
A.1.3	Probabilité conditionnelle	284
A.1.4	Covariance et corrélation	284
A.2	Lumière classique	284
A.3	Lumière quantique intense	285
A.3.1	Moyenne temporelle de $g^{(2)}(\tau)$	286
A.4	Avec des détecteurs de photons uniques	286
A.4.1	Interprétation en termes de probabilité conditionnelle	287
A.4.2	Processus stationnaire	287
B	CHAT DE SCHRÖDINGER OPTIQUE	289
B.1	Définition	289
B.2	Séparation d'un chat	289
B.2.1	État après la séparatrice	290
B.2.2	Approximation du photon extrait	291
B.3	Dissipation du chat	291
C	CALCULS DE TRACES	295
C.1	Premier calcul	295
C.1.1	Formulaire	295
C.1.2	Calcul du coefficient de $ +\alpha\rangle\langle+\alpha _B e\rangle\langle e _A$	296
C.1.3	Calcul du coefficient de $ -\alpha\rangle\langle-\alpha _B l\rangle\langle l _A$	297
C.1.4	Calcul du coefficient de $ +\alpha\rangle\langle-\alpha _B e\rangle\langle l _A$	297
C.1.5	Calcul du coefficient de $ -\alpha\rangle\langle+\alpha _B l\rangle\langle e _A$	297
C.1.6	Résumé du calcul	298
C.2	Second calcul	298
C.2.1	Calcul du coefficient de $ +\alpha\rangle\langle+\alpha _B e\rangle\langle e _A$	298
C.2.2	Calcul du coefficient de $ -\alpha\rangle\langle-\alpha _B l\rangle\langle l _A$	299
C.2.3	Calcul du coefficient de $ +\alpha\rangle\langle-\alpha _B e\rangle\langle l _A$	299
C.2.4	Calcul du coefficient de $ -\alpha\rangle\langle+\alpha _B l\rangle\langle e _A$	299
C.2.5	Résumé du calcul	300
C.3	Troisième calcul	300
C.3.1	Calculs préalables	300
C.3.2	Premier terme	303
C.3.3	Second terme	304
C.3.4	Troisième terme	304
C.3.5	Calcul de la probabilité	309
	BIBLIOGRAPHIE	311
	PUBLICATIONS	324
	REMERCIEMENTS	326

LISTE DES NOTATIONS

Notations communes

$[\hat{A}, \hat{B}]$	Commutateur de \hat{A} et \hat{B} : $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$	10
$\delta(t)$	Distribution de Dirac. Éventuellement multidimensionnelle selon son argument.	13
$\delta_{l,l'}$	Symbole de Kronecker (1 si $l = l'$, 0 sinon)	9
\hat{a}_l	Opérateur de destruction dans le mode l	11
\hat{a}_l^\dagger	Opérateur de création dans le mode l	11
${}_2F_1(a, b, c, z)$	Fonction hypergéométrique	250
$\mathbb{1}$	Matrice ou opérateur identité; la dimension est à reconsidérer à chaque utilisation	9
$ \alpha\rangle$	Avec α un nombre complexe ou une variable décrivant les nombres complexes (ou uniquement les réels) : état cohérent	18
$ \text{cat}\rangle$	Chat de Schrödinger optique pair : $ \text{cat}\rangle = \frac{ \alpha\rangle + -\alpha\rangle}{\mathcal{N}}$, avec $\mathcal{N} = \sqrt{2}\sqrt{1 + e^{-2 \alpha ^2}}$	289
$ \text{cat}\rangle$	Chat de Schrödinger optique impair : $ \text{cat}\rangle = \frac{ \alpha\rangle - -\alpha\rangle}{\mathcal{N}}$, avec $\mathcal{N} = \sqrt{2}\sqrt{1 - e^{-2 \alpha ^2}}$	289
$ n\rangle$	Avec n un entier ou un indice décrivant un entier : état de Fock à n photons	17
\mathcal{E}_l	Quantité de champ électrique « par photon », $\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}$	11
\mathcal{F}	Fidélité; l'état de référence dépend du contexte.	78
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	7
\mathbb{N}_N	Ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à N	96
ρ	Opérateur (ou matrice) densité, $ \psi\rangle\langle\psi $ quand il correspond à l'état pur $ \psi\rangle$	21
Tr_B	Trace partielle sur le sous-espace \mathcal{H}_B	23
ε_0	Permittivité électrique du vide	7
A^\dagger	Conjugué hermitien de A	9
A^T	Transposée de A	96
$D(\alpha)$	Opérateur de déplacement. $D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$	18

$i \bmod j$	i modulo j	104
$M_{N,N}(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices réelles de dimension $N \times N$	112
$P(Y X)$	Probabilité conditionnelle d'observer Y sachant X : $P(Y X) = \frac{P(X,Y)}{P(X)}$	284
z^*	Complexe conjugué de z	8

Partie I

$\hat{\Pi}_k$	Opérateur positif de mesure associé au résultat possible k	24
$\hat{B}(\vec{r})$	Opérateur de champ magnétique	11
$\hat{E}(\vec{r})$	Opérateur de champ électrique	11
\hat{H}	Hamiltonien	11
\hat{H}_l	Hamiltonien pour un mode l	11
\hat{N}	Opérateur nombre de photons ; $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$	17
\hat{p}_l	Quadrature « impulsion » pour le mode l	11
\hat{x}_l	Quadrature « position » pour le mode l	11
A_l	Amplitude de la composante sur le mode l de la partie positive du potentiel vecteur.	9
$\mathcal{E}_l(t)$	Amplitude de la composante sur le mode l de la partie positive du champ électrique.	9
ω	Pulsation	8
\vec{A}	Potentiel vecteur	9
\vec{B}	Champ magnétique (réel)	7
\vec{E}	Champ électrique (réel)	7
\vec{E}^+	Partie aux pulsations positives du champ électrique	8
\vec{E}^-	Partie aux pulsations négative du champ électrique	8
\vec{f}_l	Fonction solution de l'équation de Helmholtz ; membre d'une base de fonctions	8
\vec{k}_\parallel	Composante du vecteur d'onde \vec{k} dans la direction de propagation.	13
\vec{k}_\perp	Composante dans les directions du plan d'étude du vecteur d'onde \vec{k} . .	13
\vec{r}	Position	8
\vec{r}_\perp	Composante dans le plan d'étude du vecteur position \vec{r}	13
c	Vitesse de la lumière dans le vide	7
S	Surface dans le plan transverse du domaine dans lequel le champ est non nul.	13

t	Temps	8
V	Volume du domaine dans lequel on effectue la quantification du champ électromagnétique.....	8
Partie II		
η	Efficacité du détecteur	43
$\hat{\Pi}^{\text{ON}}(T)$	Opérateur de répartition; il décrit le résultat de mesure « le détecteur clique avant le temps T ».....	42
$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$	Densité temporelle d'opérateur positif de mesure décrivant le temps de clic du détecteur	39
$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T_A, T_B)$	Densité de d'opérateurs de mesure pour les temps de clics conjoints des deux détecteurs.....	56
$\hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T)$	Partie de la densité d'opérateurs $\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$ travaillant sur le sous-espace à k photons.....	48
$\hat{\pi}_{B-A}(\tau)$	Densité d'opérateurs décrivant la mesure du délai entre les clics des deux détecteurs	59
$\hat{\pi}_{G^{(2)}}(\tau)$	Densité d'opérateurs décrivant la mesure de corrélation temporelle complète	65
$\hat{\pi}_{G^{(2)}}(T_A, T_B)$	Densité d'opérateurs décrivant la mesure conjointe des temps de clic après une lame séparatrice.....	67
$\hat{\Theta}(T)$	Opérateur de répartition de clic pour un photon et une efficacité unitaire; $\hat{\Theta}(T) = \int \Theta(T-t) t\rangle\langle t dt$	50
$\hat{\vartheta}(T)$	Densité d'opérateur décrivant pour un photon le clic d'un détecteur d'efficacité unitaire; $\hat{\vartheta}(T) = \int \vartheta(T-t) t\rangle\langle t dt$	50
\hat{P}_σ	Opérateur de permutation pour σ	35
\hat{S}	Opérateur de symétrisation	35
$\hat{S}^{-1}(t_1, \dots, t_n\rangle)$	Ensemble des éléments de la base canonique de première quantification se symétrisant en $ t_1, \dots, t_n\rangle$	36
$\text{Ker}[]$	Noyau d'une application linéaire	36
$ t_1, \dots, t_n\rangle$	Élément de la base de première quantification. Le photon n° 1 est au temps t_1 , etc.....	34
$ t_1, \dots, t_n\rangle$	État symétrisé contenant un photon à chacun des temps t_1, \dots, t_n	36
\mathcal{S}_n	Ensemble des permutations de \mathbb{N}_n	35
\mathcal{I}	Variable représentant un intervalle de temps	39
$\psi(t_1, \dots, t_n)$	Fonction d'onde décrivant en première quantification l'état $ \psi\rangle$	35

τ	Délai de détection; $\tau = T - t$ 39
$\Theta(\tau)$	Fonction de répartition du délai de déclenchement du capteur; $\Theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \vartheta(\tau') d\tau'$ 42
$\vartheta(\tau)$	Densité de probabilité du délai de déclenchement du capteur 42
$C_{k,k'}$	Coefficient pondérant la composante à k et k' photons de la matrice densité de l'état avant sélection 80
$D(k, T_1, T_2)$	Probabilité conditionnelle de clic du détecteur d'annonce dans la fenêtre $[T_1, T_2]$ pour la composante de l'état contenant k photons 86
D_{tot}	Probabilité d'annonce de la source dans la fenêtre de temps choisie 89
$F(T)$	Fonction donnant la probabilité de clic avant T pour un photon, et dans le cas $\eta = 1$ 87
$G(T)$	$1 - F(T)$ 87
$P^{\text{ON}}(T, \rho)$	Fonction de répartition du temps de clic : probabilité que le détecteur clique avant le temps T pour la mesure de l'état ρ 42
$p^{\text{ON}}(T_A, T_B)$	Densité de probabilité jointe pour les temps de clic des deux détecteurs 56
$P_k^{\text{ON}}(T)$	Fonction de répartition du temps de clic pour k photons 44
$p_k^{\text{ON}}(T)$	Densité de probabilité du temps de clic pour k photons 43
$p^{\text{on}}(T, \rho)$	Densité de probabilité du temps de clic du détecteur au temps T pour la mesure de l'état ρ 39
P_k	Probabilité de mesurer k photons 80
$p_{B-A}(\tau)$	Densité de probabilité du délai entre les clics des deux détecteurs 57
T	Temps de clic du détecteur; $T = +\infty$ quand le détecteur ne se déclenche pas 38
t	Temps utilisé comme variable décrivant un photon. 38

Partie III

Δ	Désaccord de fréquence : $\Delta = \omega - \omega_{\text{ref}}$ 183
γ	Matrice permettant de passer d'un vecteur d'opérateurs bosoniques à un vecteur de quadratures. En notation par blocs, $\gamma = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & i\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\gamma^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{pmatrix}$ 109
$\hat{a}_{\text{in},k}$	Opérateur destruction du vide en entrée du mode k de la cavité 144
\hat{H}	Hamiltonien d'interaction quadratique 96
κ_k	Taux de dissipation du mode k de la cavité 144

\mathcal{K}	Matrice regroupant les coefficients de couplage entre les modes de la cavité et l'extérieur 145
\mathcal{L}	Matrice de couplage de l'évolution, telle que $\frac{d\hat{A}}{dt} = \mathcal{L}\hat{A}$ 101
\mathcal{L}_{xp}	Matrice d'évolution en termes des quadratures; $\mathcal{L}_{xp} = \gamma^{-1}\mathcal{L}\gamma$ 110
\mathcal{Q}	Matrice définie par blocs : $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ 105
\hat{A}_{in}	Vecteur regroupant les opérateurs d'échelle des entrées de la cavité (peuplées de vide) : $\hat{A}_{in} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{in,1} \\ \vdots \\ \hat{a}_{in,1}^\dagger \\ \vdots \end{pmatrix}$ 144
\hat{A}_{out}	Vecteur regroupant les opérateurs bosoniques des sorties de la cavité . 146
\hat{A}	Vecteur regroupant les opérateurs d'échelle : $\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_1^\dagger \\ \vdots \end{pmatrix}$ 101
\hat{X}_{in}	Vecteur regroupant les opérateurs de quadrature des entrées de la cavité (peuplées de vide) 145
\hat{X}_{out}	Vecteur regroupant les opérateurs de quadrature des sorties de la cavité 146
\hat{X}	Vecteur regroupant les quadratures : $\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{p}_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ 109
Ω	Matrice antisymétrique canonique. Par blocs, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ 117
σ_0	Matrice constante entrant dans la valeur de la matrice de covariance d'entrée; pour le vide et avec nos conventions $\sigma_0 = \frac{1}{4}\mathbb{1}$ 163
$\sigma_{in}(\tau)$	Matrice de covariance du champ d'entrée de la cavité 161
$\sigma_{out}(\tau)$	Matrice de covariance du champ de sortie de la cavité 161
$(,)$	Forme antisymétrique canonique (non dégénérée) 118
$\theta(t)$	Fonction de Heaviside : $\theta : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \end{cases}$ 172
$\tilde{\sigma}_{in}(\omega)$	Transformée de Fourier de la matrice de covariance $\sigma_{in}(\tau)$ 161

$\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega)$	Transformée de Fourier de la matrice de covariance $\sigma_{\text{out}}(\tau)$	161
$\tilde{S}(\omega)$	Transformée de Fourier de la fonction de Green $S(\tau)$	157
$\tilde{S}_{\text{out}}(\omega)$	Transformée de Fourier de la fonction de Green $S_{\text{out}}(\tau)$	157
$\vec{\Pi}$	Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$	194
\vec{D}	Vecteur d'induction électrique défini par $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	194
\vec{P}	Polarisation du milieu, linéaire et non linéaire.	194
C	Constante provenant de l'intégration spatiale de la structure transverse des modes du micro-résonateur en anneau.	200
F	Matrice décrivant la partie du hamiltonien correspondant aux créations de paires dans le hamiltonien quadratique	96
G	Matrice décrivant la partie du hamiltonien correspondant aux conjugaisons de phase dans le hamiltonien quadratique	96
g	Coefficient de couplage non-linéaire	183
N	Nombre de modes	96
S	Matrice encodant une transformation entre des opérateurs d'échelle : $\hat{B} = S\hat{A}$	102
$S(\tau)$	Fonction de Green liant les opérateurs de quadrature d'entrée X_{in} à ceux dans la cavité X	157
$S_{\text{out}}(\tau)$	Fonction de Green liant les opérateurs de quadrature d'entrée X_{in} à ceux de sortie X_{out}	157
S_{xp}	Matrice encodant une transformation entre vecteurs de quadratures ; $S_{xp} = \gamma^{-1}S\gamma$	110

Partie IV

α	Amplitude du chat pour l'entrée 3 (variables continues)	223
β	Amplitude de l'état cohérent pour l'entrée 4 ; le plus souvent $\beta = r\alpha$	267
$\hat{\Pi}$	Opérateur d'annonce réaliste en mesurant tous les modes : $\hat{\Pi} = \mathbb{1}_{A,B} \otimes \hat{\Pi}_{C,e}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{C,l}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{D,e}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{D,l}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{E,e}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,l}^{\text{OFF}} \dots$	234
$\hat{\Pi}'$	Opérateur d'annonce réaliste en ne mesurant que deux modes : $\hat{\Pi}' = \mathbb{1}_{A,B} \otimes \mathbb{1}_{C,e} \otimes \mathbb{1}_{C,l} \otimes \mathbb{1}_{D,e} \otimes \mathbb{1}_{D,l} \otimes \mathbb{1}_{E,e} \otimes \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \otimes \mathbb{1}_{F,l} \dots$	234
$\hat{\Pi}^{\text{OFF}}$	Opérateur positif de mesure pour un mode décrivant l'absence de clic du détecteur	233
$\hat{\Pi}^{\text{ON}}$	Opérateur positif de mesure pour un mode décrivant le clic du détecteur	233

$\hat{\Pi}^{\text{id}}$	Opérateur de mesure pour l'annonce idéale : $\hat{\Pi}^{\text{id}} = \mathbb{1}_{A,B} \otimes 0\rangle\langle 0 _{C,e} \otimes 0\rangle\langle 0 _{C,l} \otimes 0\rangle\langle 0 _{D,e} \otimes 0\rangle\langle 0 _{D,l} \otimes 0\rangle\langle 0 _{E,e} \otimes 1\rangle\langle 1 _{E,l} \otimes 1\rangle\langle 1 _{F,e} \otimes 0\rangle\langle 0 _{F,l}$. 228
$ \psi_0\rangle$	Composante (normée) de $ \psi\rangle$ en l'absence de paire de photons provenant de la partie discrète 232
$ \psi_1\rangle$	Composante (normée) de $ \psi\rangle$ avec une paire de photons provenant de la partie discrète 232
$ \psi_\varepsilon\rangle$	Composante (normée) de $ \psi\rangle$ avec plusieurs paires de photons provenant de la partie discrète 232
$ \psi\rangle$	État avant annonce au niveau des détecteurs. Peut se décomposer selon le nombre de paires sur l'entrée discrète en $ \psi\rangle = \sqrt{p_0} \psi_0\rangle + \sqrt{p_1} \psi_1\rangle + \sqrt{p_\varepsilon} \psi_\varepsilon\rangle$ 232
$ \varphi\rangle$	État hybride cible : $ \varphi\rangle = \frac{ e\rangle_A +\alpha_f\rangle_B - l\rangle_A -\alpha_f\rangle_B}{\sqrt{2}}$ 210
$ e\rangle_A$	Photon dans la case temporelle e : $ e\rangle_A = 1\rangle_{A,e} \otimes 0\rangle_{A,l}$ 210
$ l\rangle_A$	Photon dans la case temporelle l : $ l\rangle_A = 0\rangle_{A,e} \otimes 1\rangle_{A,l}$ 210
$\rho_{AB;1,\varepsilon}$	Opérateur hermitien de trace nulle regroupant les cohérences entre $\rho_{AB;1}$ et $\rho_{AB;\varepsilon}$ 240
$\rho_{AB;1}$	Composante normée de ρ_{AB} contenant un photon sur la partie discrète 240
$\rho_{AB;\varepsilon}$	Composante normée de ρ_{AB} contenant plusieurs photons sur la partie discrète 240
ρ_{AB}	État annoncé ; se décompose à l'aide de $\rho_{AB;1}$, $\rho_{AB;1,\varepsilon}$ et $\rho_{AB;\varepsilon}$. <i>Idem</i> pour ρ'_{AB} 240
$\tilde{\alpha}$	Amplitude de la partie continue au niveau des détecteurs : $\tilde{\alpha} = \frac{r\alpha}{\sqrt{2}}$... 227
ζ	Taux de compression du vide comprimé utilisé à la place du chat. 267
$C_{k,l,x}$	Coefficient décrivant l'état résultant de l'interférence sur une lame séparatrice équilibrée des états de Fock $ k\rangle$ et $ l\rangle$ 255
c_{k_3}	Coefficients sur la base de Fock de l'entrée du mode 3 pour le calcul avec une entrée générique 256
d_{k_4}	Coefficients sur la base de Fock de l'entrée du mode 4 pour le calcul avec une entrée générique 256
P	Probabilité d'annonce lors de l'utilisation de $\hat{\Pi}$. Se décompose en $P = p_0 P_0 + p_1 P_1 + p_\varepsilon P_\varepsilon$. Aussi utilisée pour la probabilité d'annonce avec des entrées sur la partie continues quelconques et la mesure $\hat{\Pi}'$ 236
P'	Probabilité d'annonce lors de l'utilisation de $\hat{\Pi}'$. Se décompose en $P' = p_0 P'_0 + p_1 P'_1 + p_\varepsilon P'_\varepsilon$ 244
p^{id}	Probabilité d'annonce pour la mesure idéale 229
P_0 ou P'_0	Probabilité d'annonce sans paire de photons provenant de la partie discrète 236

P_1 ou P'_1	Probabilité d'annonce avec une paire de photons provenant de la partie discrète 236
P_ε ou P'_ε	Probabilité d'annonce avec plus d'une paire de photons provenant de la partie discrète 236
p_k	Probabilité de mesurer k paires pour l'entrée du côté des variables discrètes 231
r	Coefficient de réflexion en amplitude de la lame séparatrice BS ₁ ; par hypothèse réel 224
t	Coefficient de transmission en amplitude de la lame séparatrice BS ₁ ; par hypothèse réel 224

ACRONYMES

POVM	Positive-Operator Valued Measure
SPOPO	Synchronously Pumped Optical Parametric Oscillator
FWM	Four-wave Mixing
CPM	Cross Phase Modulation
PC	Phase Conjugaison

Première partie

INTRODUCTION

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'information classique s'encode dans des bits, qui valent par convention 0 ou 1. La transposition directe en termes d'information quantique consiste à utiliser des qubits, qui prennent comme valeurs des superpositions arbitraires de $|0\rangle$ et de $|1\rangle$. La lumière est particulièrement adaptée au transport de l'information : elle se propage rapidement et peut être guidée dans des fibres optiques. Mais la lumière quantique se décrit en termes d'oscillateurs harmoniques et non d'espaces de Hilbert à deux dimensions. Deux possibilités s'offrent alors [126].

La première consiste à essayer de se limiter à des qubits, ou au moins se restreindre à des mesures ayant un nombre fini ou discret de résultats possibles. Cette approche est celle des variables discrètes ; on utilise typiquement zéro, un, ou un faible nombre de photons. L'outil de mesure adapté est alors le détecteur de photon unique. Le plus souvent il est de type ON/OFF, c'est-à-dire que l'information obtenue est binaire : soit il a détecté un photon ou plusieurs, soit il n'en a pas détecté [44].

Une deuxième solution est d'utiliser plus largement la dimension infinie de l'espace de Hilbert et de mesurer des intensités, des phases ou des quadratures. On parle alors de variables continues. Si cette approche semble plus générale, les limitations techniques de la génération et de la détection font qu'elle s'avère en pratique surtout différente. L'état peut facilement être macroscopique, mais les propriétés quantiques résident le plus souvent dans les fluctuations des champs, qui en pratique restent relativement faibles et sensibles aux pertes [16].

Cette discussion ne concerne pour l'instant qu'un seul mode du champ électromagnétique. Or il serait absurde d'utiliser une voie de communication s'interrompant après l'envoi d'un seul bit. Pour augmenter considérablement la quantité d'information manipulable, il nous faut prendre en compte l'aspect multimode de la lumière quantique. Il est alors possible de travailler avec un nombre fini ou infini de modes. Les différents modes peuvent être utilisés indépendamment, mais il est plus général et donc plus intéressant de s'y intéresser comme un tout, en prenant en compte la possibilité d'intriquer l'ensemble des modes disponibles [87].

Afin de différencier les modes, on peut utiliser des degrés de liberté spatiaux [63], par exemple avec des guides d'ondes parallèles ou les modes transverses d'une cavité [17]. Ils peuvent aussi se distinguer par leur fréquence ou leur temps d'émission [9]. En utilisant ce dernier encodage, on bénéficie d'un énorme avantage : un même cristal non linéaire ou un même détecteur peut être utilisé pour différents modes [96]. Il est ainsi possible de créer des états intriquant des dizaines de milliers de modes sans avoir besoin d'un nombre similaire de composants optiques [123, 138]. De tels états trouvent des applications aussi bien pour le calcul [53, 86, 87], la métrologie [105] que la communication [37] quantique.

Cette thèse aborde différents aspects de l'optique quantique multimode, toujours d'un point de vue théorique mais avec comme objectif d'arriver à des conclusions présentant un intérêt pour les expérimentateurs.

La [partie I](#) introduit les outils usuels de l'optique quantique. En particulier, nous commençons par rappeler la procédure de quantification du champ électromagnétique ([chapitre 1](#)), à l'intérieur d'une cavité ainsi que pour un faisceau qui se propage. Nous en profitons pour rappeler les définitions et propriétés des états les plus couramment utilisés. Ensuite nous donnons au [chapitre 2](#) les principaux éléments de la description générale d'une mesure quantique, en insistant sur les processus d'annonce pour lesquels la partie mesurée est détruite.

La [partie II](#) décrit les détecteurs de photons uniques de type ON/OFF en considérant le temps de clic comme résultat de mesure. Pour cela, nous prenons en compte les modes temporels du champ incident. La plupart des défauts de ces détecteurs, et en particulier l'imprécision du temps de clic, sont décrits. Nous commençons par fixer le formalisme utilisé avant d'établir les opérateurs décrivant de tels détecteurs ([chapitre 3](#)). Des exemples simples d'applications sont ensuite détaillés au [chapitre 4](#), avant de finir en consacrant le [chapitre 5](#) à la description d'une source de photons annoncés, et en particulier nous étudions les différents avantages que donne la résolution du temps sur le détecteur d'annonce.

La [partie III](#) étudie la génération de lumière comprimée multimode en cavité *via* un hamiltonien quadratique quelconque. La théorie que nous présentons est en particulier nécessaire à la description des micro-résonateurs gravés dans des matériaux permettant du mélange à quatre ondes [18, 92]. Pour cela, nous adoptons un formalisme utilisable avec un nombre quelconque de modes. Nous introduisons le problème au [chapitre 7](#) en décrivant un passage unique à travers un milieu non linéaire, en présence de pompes et sans pertes, ou autrement une évolution purement hamiltonienne. Ensuite, au [chapitre 8](#) nous démontrons les résultats mathématiques de décomposition des matrices symplectiques, utiles à la résolution du problème. Cela nous permet de revenir au problème initial : la description de la lumière comprimée lors du passage à travers une cavité sous le seuil ([chapitre 9](#)). Nous illustrons alors la théorie par des exemples impliquant peu de modes au [chapitre 10](#) avant de développer, en application de la théorie générale, la description d'un oscillateur paramétrique optique pompé de manière synchrone en présence de mélange à quatre ondes ([chapitre 11](#)).

La [partie IV](#) décrit une expérience conçue pour générer de l'intrication entre des états appartenant au monde des variables discrètes et continues. En particulier nous souhaitons encoder la partie discrète dans des cases temporelles. Nous commençons par démontrer qu'une approche couramment utilisée pour générer des états proches n'est pas applicable pour le type d'état que nous souhaitons obtenir ([chapitre 12](#)). Ensuite au [chapitre 13](#) nous présentons le schéma proposé et procédons à son analyse détaillée vis-à-vis de sa résistance aux imperfections expérimentales.

NOTICE DE LECTURE

Dans les chapitres pour lesquels les résultats sont plus importants que leurs démonstrations, la rédaction alterne entre les énoncés des propositions et de leurs démonstrations. Au contraire, quand le résultat est l'aboutissement de la méthode, il sera formulé *a posteriori* et sans être formalisé sous forme de théorème.

Le nombre de lettres dans les alphabets latins et grecs étant limité, les notations sont susceptibles d'évoluer au cours de la thèse, en particulier aux changements de parties. Les principales notations utilisées sont rassemblées dans la [liste des notations](#); les variables locales n'y figurent pas. Elles sont triées par ordre alphabétique et groupées par partie, mais les notations concernant l'ensemble de la thèse sont mises à part.

Attention au fait que la transformation de Fourier n'est pas définie de la même manière dans le chapitre présentant la quantification du champ électromagnétique ([chapitre 1](#)) et dans le reste de la thèse. La raison en est que nous souhaitons obtenir les formulations usuelles de la mécanique quantique¹, tandis que pour le reste nous privilégions l'image d'une décomposition sur la base des exponentielles complexes tournant dans le sens direct pour des pulsations positives. La convention utilisée sera systématiquement précisée en début de chapitre.

Les calculs sont en principe détaillés de manière à ce que le lecteur puisse les vérifier de tête; il y a cependant quelques exceptions (surtout pour le calcul matriciel).

1. À cause du i dans le membre de gauche de l'équation de Schrödinger, les états cohérents évoluent « à l'envers » : en $e^{-i\omega t}$. Nous utilisons donc des transformées de Fourier également « à l'envers » pour obtenir la formulation standard de l'oscillateur harmonique quantique.

QUANTIFICATION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Ce chapitre rappelle brièvement les principales étapes de la quantification du champ électromagnétique et fixe les conventions retenues pour l'ensemble de cette thèse. Pour plus de détails (avec quelques variations), le lecteur est invité à lire un des cours [38, 106] qui utilisent la même approche. Les livres et cours [21, 23, 26, 52, 76] sont également de bonnes références.

Pour procéder à la quantification du champ électromagnétique, nous nous plaçons sur un domaine spatial fini, typiquement une cavité optique. Dans un premier temps, le champ classique est décomposé en un ensemble de modes et l'énergie explicitée. On pourra alors procéder à la quantification. Par souci de simplification, nous travaillons dans le vide. Sous certaines approximations, une approche similaire peut être appliquée pour un matériau diélectrique linéaire isotrope non homogène [45, 62, 81].

Afin de pouvoir décrire les faisceaux entrant et sortant des cavités ou arrivant aux détecteurs, nous donnerons les résultats de la quantification d'ondes progressives [63, 120]. Nous les adapterons ensuite à la restriction dans un plan orthogonal à la direction de propagation, dans le cadre de l'approximation paraxiale.

Le chapitre se termine par un résumé des opérateurs et états utiles à l'optique quantique.

1.1 DÉCOMPOSITION DES CHAMPS CLASSIQUES EN MODES

1.1.1 Équations de Maxwell

Soient $\vec{E}(\vec{r}, t)$ le champ électrique et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ le champ magnétique. Ils sont régis par les équations de Maxwell, présentées ici sans charges ni courants :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

avec ε_0 la permittivité électrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

En prenant le rotationnel du rotationnel de \vec{E} et en utilisant que $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$, on en déduit l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ la vitesse de la lumière dans le vide.

1.1.2 Décomposition harmonique

Pour poursuivre la résolution, on va passer dans le domaine fréquentiel. On définit la transformée de Fourier ¹ du champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ par :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ \vec{E}(\vec{r}, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt\end{aligned}$$

On procède de même pour le champ magnétique, ainsi que pour les potentiels vecteurs et scalaires (que nous allons bientôt introduire). L'équivalent de l'équation (1.1) dans l'espace des fréquences est :

$$\vec{\Delta} \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0 \quad (1.2)$$

qui est une équation de Helmholtz.

Définissons la partie du champ aux pulsations positives :

$$\vec{E}^+(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

et celle aux pulsations négatives :

$$\vec{E}^-(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

On peut alors décomposer le champ électrique : $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}^+(\vec{r}, t) + \vec{E}^-(\vec{r}, t)$. Remarquons que comme \vec{E} est réel, $\vec{E}(\vec{r}, -\omega) = \vec{E}^*(\vec{r}, \omega)$. On en déduit $\vec{E}^-(\vec{r}, t) = \left(\vec{E}^+(\vec{r}, t)\right)^*$. Il en va de même pour les autres champs et on en conclut que la partie aux pulsations positive suffit à décrire l'ensemble du champ correspondant.

1.1.3 Décomposition spatiale

Pour résoudre l'équation (1.2) (ω non fixée), on va se limiter au cas d'un domaine borné, avec des conditions aux limites bien définies. Il est ici inutile de préciser ces domaine et conditions, car on ne va pas chercher à expliciter la solution mais simplement donner sa forme. Avec l'hypothèse de travailler sur un domaine borné de volume V , on peut prouver qu'il existe une base hilbertienne $\left(\vec{f}_l(\vec{r})\right)_{l \in \mathbb{N}}$ des fonctions spatiales dont les éléments sont solutions de (1.2) [109, 132]; les pulsations correspondantes $(\omega_l)_{l \in \mathbb{N}}$ sont réelles, peuvent être choisies strictement positives ² et tendent vers l'infini. On choisit la normalisation suivante :

$$\frac{1}{V} \int \vec{f}_l^* \vec{f}_{l'} d^3\vec{r} = \delta_{ll'}$$

1. On fait la supposition physiquement raisonnable que c'est faisable, au moins au sens des distributions tempérées (il suffira alors d'adapter les définitions). La convention utilisée dans ce chapitre est inversée pour le signe de ω par rapport à ce qui se fait en mathématique. Cela est fait pour obtenir la description standard de l'oscillateur harmonique quantique. On ne garde cette convention que pour ce chapitre.

2. Plus exactement, pour chaque mode l , $\pm\omega_l$ conviennent toutes les deux. Seule $+\omega_l$ est conservée pour la décomposition de \vec{E}^+ .

où $\delta_{l,l'}$ est le symbole de Kronecker. Notez qu'on a écrit $l \in \mathbb{N}$ pour insister sur le fait que les modes sont dénombrables. En pratique on prend pour l un multi-indice décrivant la forme de \vec{f}_l , ainsi que sa polarisation.

On peut alors décomposer \vec{E}^+ sur les modes obtenus :

$$\vec{E}^+(\vec{r}, t) = \sum_l \mathcal{E}_l(t) \vec{f}_l(\vec{r})$$

où $\mathcal{E}_l(t) = \mathcal{E}_l(0)e^{-i\omega_l t}$.

1.1.4 Changement de base

La base $(\vec{f}_l(\vec{r}))_{l \in \mathbb{N}}$ n'est pas déterminée de manière unique. Il est possible d'effectuer un changement de base, où l'on exprime les éléments de l'ancienne base à partir de la nouvelle base $(\vec{g}_l(\vec{r}))_{l \in \mathbb{N}}$ sous la forme

$$\vec{f}_l(\vec{r}) = \sum_p U_{l,p} \vec{g}_p(\vec{r}) \quad (1.3)$$

Afin d'avoir une nouvelle base également orthonormale, il est nécessaire que U soit unitaire : $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$, où † représente la conjugaison hermitienne et $\mathbb{1}$ l'identité. Il faut également prendre garde à ne pas mélanger des modes ne partageant pas la même fréquence, sans quoi on perdrait la propriété que chacun des modes vérifie l'équation de Helmholtz (1.2).

1.1.5 Potentiel vecteur

Afin de ne conserver qu'une seule variable, nous allons travailler avec le potentiel vecteur \vec{A} . Pour cela on se place dans le cadre de la jauge de Coulomb $\text{div } \vec{A} = 0$, ce qui implique que le potentiel électrique est nul. On a donc

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

\vec{A} vérifie également l'équation (1.1) et peut donc aussi se décomposer sous la forme

$$\vec{A}^+(\vec{r}, t) = \sum_l \mathcal{A}_l(t) \vec{f}_l(\vec{r})$$

Les champs s'écrivent alors

$$\vec{E}^+(\vec{r}, t) = \sum_l i\omega_l \mathcal{A}_l(t) \vec{f}_l(\vec{r}) \quad (1.4a)$$

$$\vec{B}^+(\vec{r}, t) = \sum_l \mathcal{A}_l(t) \vec{h}_l(\vec{r}) \quad (1.4b)$$

où $\vec{h}_l(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{rot}}[\vec{f}_l(\vec{r})]$.

1.1.6 Hamiltonien

L'énergie totale H du champ électrique s'écrit :

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \|\vec{E}\|^2 d^3\vec{r} + \frac{1}{2\mu_0} \int \|\vec{B}\|^2 d^3\vec{r}$$

En injectant les décompositions (1.4), les carrés se réécrivent sous la forme d'une double sommation sur l'indice l . En inversant somme et intégrale puis en utilisant l'orthogonalité des différents modes, on peut réécrire le hamiltonien comme une somme de hamiltoniens correspondant chacun à exactement un mode. Afin de n'utiliser que des grandeurs réelles, introduisons les parties réelles et imaginaires des composantes du potentiel vecteur :

$$\mathcal{A}_l(t) = x_l(t) + ip_l(t)$$

Après quelques calculs dont nous passons ici les détails, on montre que le hamiltonien se réécrit

$$H = \sum_l H_l = \sum_l 2\omega_l^2 \varepsilon_0 V [x_l^2 + p_l^2] \quad (1.5)$$

Cela correspond à une assemblée d'oscillateurs harmoniques indépendants.

1.2 QUANTIFICATION

1.2.1 Quantification

Maintenant qu'on a prouvé l'indépendance des différents modes, on va se concentrer sur un seul de ces modes, qu'on indexe par l .

L'expression du hamiltonien (1.5) n'est pas encore tout à fait satisfaisante, car les variables x_l , p_l ne vérifient pas les équations de Hamilton. Introduisons les variables canoniques

$$x_l^{(c)} = 2\sqrt{\varepsilon_0\omega V}x_l \quad p_l^{(c)} = 2\sqrt{\varepsilon_0\omega V}p_l$$

On a alors

$$H_l = \frac{\omega_l}{2} \left([x_l^{(c)}]^2 + [p_l^{(c)}]^2 \right)$$

Et les équations de Hamilton sont maintenant vérifiées :

$$\frac{dx_l^{(c)}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_l^{(c)}} \quad \frac{dp_l^{(c)}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_l^{(c)}}$$

On peut maintenant procéder à la quantification proprement dite. Pour cela on remplace les variables $x_l^{(c)}$ et $p_l^{(c)}$ par des opérateurs $\hat{x}_l^{(c)}$ et $\hat{p}_l^{(c)}$ (« position » et « impulsion ») vérifiant la relation de commutation $[\hat{x}_l^{(c)}, \hat{p}_l^{(c)}] = i\hbar$. Les oscillateurs harmoniques étant indépendants, on choisit que les opérateurs de différents modes commutent.

Afin de retrouver des variables plus fréquemment utilisées en optique quantique, introduisons les quadratures :

$$\hat{x}_l = \frac{\hat{x}_l^{(c)}}{\sqrt{2\hbar}} \quad \hat{p}_l = \frac{\hat{p}_l^{(c)}}{\sqrt{2\hbar}}$$

Leur relation de commutation s'écrit $[\hat{x}_l, \hat{p}_l] = \frac{i}{2}$.

On peut ensuite introduire les opérateurs d'échelle (aussi appelés bosoniques) : l'opérateur d'annihilation \hat{a}_l et celui de création (\hat{a}_l^\dagger) :

$$\hat{a}_l = \hat{x}_l + i\hat{p}_l, \quad \hat{a}_l^\dagger = \hat{x}_l - i\hat{p}_l \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x}_l = \frac{\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger}{2}, \quad \hat{p}_l = \frac{\hat{a}_l - \hat{a}_l^\dagger}{2i} \quad (1.6)$$

On peut réécrire le hamiltonien à partir de ces opérateurs :

$$\hat{H}_l = \hbar\omega_l (\hat{x}_l^2 + \hat{p}_l^2) = \hbar\omega_l \left(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right)$$

Les relations de commutation entre les opérateurs bosoniques s'écrivent :

$$[\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}^\dagger] = \delta_{l,l'} \quad [\hat{a}_l, \hat{a}_{l'}] = 0 \quad [\hat{a}_l^\dagger, \hat{a}_{l'}^\dagger] = 0 \quad (1.7)$$

1.2.2 Opérateurs de champs

En reprenant l'expression des champs en fonction des composantes du potentiel vecteur (1.4), on peut expliciter l'expression des opérateurs des champs à partir de ceux d'échelle :

$$\hat{A}(\vec{r}) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_l V}} \left(\hat{a}_l \vec{f}_l(\vec{r}) + \hat{a}_l^\dagger \vec{f}_l^*(\vec{r}) \right) \quad (1.8a)$$

$$\hat{E}(\vec{r}) = i \sum_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}} \left(\hat{a}_l \vec{f}_l(\vec{r}) - \hat{a}_l^\dagger \vec{f}_l^*(\vec{r}) \right) \quad (1.8b)$$

$$\hat{B}(\vec{r}) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_l V}} \left(\hat{a}_l \vec{h}_l(\vec{r}) + \hat{a}_l^\dagger \vec{h}_l^*(\vec{r}) \right) \quad (1.8c)$$

Pour la suite, on notera $\mathcal{E}_l = \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}$ la quantité de champ électrique « par photon ».

La dépendance en temps est encodée par l'état du système et n'apparaît pas explicitement dans l'expression des opérateurs de champs. Si l'on souhaite expliciter cette dépendance, il est possible de passer en représentation de Heisenberg. Effectuons-le pour l'opérateur de destruction, et notons $\hat{a}_l(t)$ l'opérateur correspondant. Son évolution est régie par l'équation

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_l(t)}{dt} = [\hat{a}_l(t), \hat{H}] = \hbar\omega_l \hat{a}_l(t)$$

dont la solution est

$$\hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0)e^{-i\omega_l t}$$

En présence d'une perturbation, par exemple due à un couplage (linéaire ou non) avec d'autres modes, il sera pratique de travailler en représentation d'interaction. L'évolution harmonique liée au hamiltonien du champ libre est alors explicitée, et l'opérateur restant décrit l'amplitude lentement variable du champ ; seul le hamiltonien d'interaction est alors à prendre en compte pour l'évolution de l'état.

1.2.3 Changements de base

Pour conclure, voyons maintenant comment se traduit en termes d'opérateurs le changement de base présenté en [sous-section 1.1.4](#). Injectons (1.3) dans l'expression de l'opérateur \hat{E}^+ :

$$\begin{aligned}\hat{E}^+ &= i \sum_l \mathcal{E}_l \vec{f}_l(\vec{r}) \hat{a}_l \\ &= i \sum_{l,p} \mathcal{E}_l U_{l,p} \vec{g}_p(\vec{r}) \hat{a}_l \\ &= i \sum_p \mathcal{E}_p \vec{g}_p(\vec{r}) \hat{b}_p\end{aligned}$$

en ayant posé $\hat{b}_p = \sum_l U_{l,p} \hat{a}_l$, et en ayant utilisé le fait que $U_{l,p} = 0$ dès que $\omega_l \neq \omega_p$. Les $(\hat{b}_l)_l$ sont les opérateurs d'annihilation pour les nouveaux modes. On verra par la suite qu'ils respectent bien les mêmes relations de commutation que les $(\hat{a}_l)_l$.

1.3 QUANTIFICATION D'UN CHAMP PROGRESSIF

Jusqu'à présent nous avons exposé la quantification du champ électromagnétique dans un domaine spatialement borné. Cela est parfaitement adapté pour décrire le champ à l'intérieur d'une cavité. Cependant nous avons également besoin de décrire les champs rentrant et sortant de la cavité, ou arrivant sur les détecteurs.

Pour cela, il est nécessaire d'effectuer la quantification du champ électromagnétique dans un espace non borné. Par souci de simplicité, nous ne détaillerons pas la quantification dans l'espace entier, mais nous contenterons de présenter les résultats qui nous seront utiles. Le lecteur curieux est invité à lire les références [63, 120].

1.3.1 Champ quantifié dans l'espace entier

La quantification du champ libre s'effectue avec un continuum de modes, chacun étant décrit par un vecteur d'onde \vec{k} et ayant une fréquence³ $\omega(k)$. Nous admettons [63, 120] que le champ électrique (partie des fréquences positives) en représentation de Heisenberg s'écrit :

$$\hat{E}^+(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \sqrt{\omega(k)} \hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t)} d^3\vec{k}$$

3. On travaille dans le vide, et donc $\omega^2 = \|\vec{k}\|^2 c^2$. Comme on ne garde que la partie des fréquences positives, $\omega = \|\vec{k}\|c$. On remarque qu'elle ne dépend que de la norme du vecteur d'onde.

où les opérateurs $\hat{a}(k)$ sont également en représentation d'Heisenberg (la dépendance en temps apparaît ici explicitement) et leurs relations de commutation sont données par :

$$\left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad \left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}') \right] = 0 = \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}') \right]$$

avec $\delta(\vec{k} - \vec{k}')$ la distribution de Dirac dans l'espace réciproque.

1.3.2 Champ dans un plan

1.3.2.1 Hypothèses et approximations

Nous considérons un champ se propageant principalement dans une direction donnée. Nous allons décrire le champ électromagnétique uniquement dans un plan orthogonal à la direction de propagation ; typiquement celui d'un miroir d'entrée d'une cavité, ou d'un détecteur.

Nous allons nous restreindre au plan orthogonal à la direction de propagation et passant par l'origine. Un point de ce plan est désormais décrit par \vec{r}_\perp , la composante dans le plan de la position \vec{r} . Nous décomposons un vecteur d'onde quelconque selon l'axe de propagation et son plan orthogonal sous la forme $\vec{k} = \vec{k}_\perp + \vec{k}_\parallel$.

On se place dans le cadre de l'approximation paraxiale, c'est-à-dire qu'on néglige la contribution à la fréquence liée à \vec{k}_\perp ; autrement dit on considère $\omega(k) \approx \omega(k_\parallel)$. Notez qu'on conserve les \vec{k}_\perp dans les exponentielles. Remarquez également qu'à ce stade l'intégrale sur k_\parallel (grandeur algébrique de \vec{k}_\parallel) parcourt tous les réels. Ainsi la lumière peut se propager dans les deux sens de la direction de propagation.

1.3.2.2 Modes transverses

Faisons l'hypothèse que le champ dans le plan est non nul uniquement sur un domaine borné de surface S . On peut alors trouver une base hilbertienne de l'ensemble des fonctions continues de ce domaine. Notons $u_l(\vec{r}_\perp)$ les fonctions de la base. On choisit la normalisation :

$$\frac{1}{S} \int u_l^*(\vec{r}_\perp) u_{l'}(\vec{r}_\perp) d^2\vec{r}_\perp = \delta_{l,l'}$$

où $\delta_{l,l'}$ est le symbole de Kronecker. La base permettant de reconstituer toute fonction, on a la propriété :

$$\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp) = \frac{1}{S} \sum_l u_l(\vec{r}_\perp) u_l^*(\vec{r}'_\perp)$$

Nous pouvons également définir les transformées de Fourier $u_l(\vec{k}_\perp)$ de ces fonctions :

$$u_l(\vec{k}_\perp) = \frac{1}{\sqrt{S}} \int u_l(\vec{r}_\perp) e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} d^2\vec{r}_\perp$$

$$u_l(\vec{r}_\perp) = \frac{\sqrt{S}}{(2\pi)^2} \int u_l(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} d^2\vec{k}_\perp$$

Compte tenu des conventions choisies, l'égalité de Parseval nous donne la normalisation dans l'espace réciproque :

$$\int u_l^*(\vec{k}_\perp) u_{l'}(\vec{k}_\perp) d^2\vec{k}_\perp = \delta_{l,l'}$$

1.3.2.3 Expression du champ

Définissons de nouveaux opérateurs adaptés au travail dans le plan, et à la décomposition en modes :

$$\hat{a}_l(\omega) = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \hat{a}(\vec{k}_\perp + \vec{k}_\parallel(\omega)) u_l^*(\vec{k}_\perp) d^2\vec{k}_\perp$$

Remarquez qu'on a décidé d'utiliser une pulsation ω comme variable à la place de \vec{k}_\parallel . Cela est adapté au point de vue du plan, qui est fixe dans l'espace et voit osciller le champ dans le temps ; c'est aussi pourquoi la vitesse de la lumière c a été introduite dans la définition. Notez que ω peut ici être négative car on la définit comme $\omega = ck_\parallel$ et ça n'est pas la pulsation ; dans l'expression du champ électrique il faudra utiliser $\omega(k) = |\omega|$ pour la véritable pulsation, qui est positive.

Un calcul direct nous donne les relations de commutation⁴ :

$$[\hat{a}_l(\omega), \hat{a}_{l'}^\dagger(\omega')] = 2\pi\delta(\omega - \omega')\delta_{l,l'}$$

Le champ électrique s'exprime à l'aide des opérateurs $\hat{a}_l(\omega)$ sous la forme :

$$\hat{E}^+(\vec{r}_\perp, t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 Sc}} \sum_l u_l(\vec{r}_\perp) \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{|\omega|} \hat{a}_l(\omega) e^{-i|\omega|t} d\omega \quad (1.9)$$

Les opérateurs $\hat{a}_l(\omega)$ sont suffisants pour décrire le champ dans le plan ; nous n'avons plus besoin des $\hat{a}(\vec{k})$.

Remarque. Nous avons ici utilisé l'approximation paraxiale et décomposé sur une base quelconque de modes transverses. Il aurait également été possible d'effectuer une décomposition sur une base de modes propres de l'équation de propagation et ne pas faire l'approximation. Cette approche est détaillée dans les références [63, 120]. \diamond

1.3.3 Opérateurs temporels

Nous allons essayer de donner un sens à l'idée d'un photon localisé dans l'espace (dimension transverse) et le temps (qui équivaut à l'espace dans la direction de propagation). Pour cela nous allons décomposer le champ en un produit d'une oscillation rapide, souvent appelée porteuse, et d'une amplitude lentement variable, ou enveloppe. Cette dernière sera décrite par un opérateur.

1.3.3.1 Définition

Nous privilégions un vecteur d'onde \vec{k}_0 pointant dans la direction de propagation, ainsi que sa pulsation ω_0 dite « centrale ». En pratique nous n'introduisons pas d'hypothèse sur les fréquences à ce stade ; ω_0 nous permet simplement de les adimensionner.

L'opérateur de champ électrique peut alors de mettre sous la forme :

$$\hat{E}^+(\vec{r}_\perp, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 Sc}} e^{-i\omega_0 t} \sum_l u_l(\vec{r}_\perp) \hat{a}_l(t)$$

4. Naturellement $[\hat{a}_l(\omega), \hat{a}_{l'}(\omega')] = 0 = [\hat{a}_l^\dagger(\omega), \hat{a}_{l'}^\dagger(\omega')]$. Dans la suite nous ne précisons plus cela pour les prochains opérateurs.

en ayant posé :

$$\hat{a}_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\frac{|\omega|}{\omega_0}} \hat{a}_l(\omega) e^{-i(|\omega| - \omega_0)t} d\omega$$

$\hat{a}_l(t)$ est l'opérateur d'amplitude lentement variable, ou d'enveloppe, du mode spatial (transverse) l .

Le dimensionnement des $\hat{a}_l(t)$ est tel que $\hat{a}_l^\dagger(t)\hat{a}_l(t)$ est homogène à un nombre de photons par unité de temps. $\hat{a}_l(t)$ est l'amplitude d'une densité temporelle de photons.

On peut calculer les relations de commutation entre les $\hat{a}_l(t)$. On obtient :

$$[\hat{a}_l(t), \hat{a}_{l'}^\dagger(t')] = \delta_{l,l'} \frac{1}{2\pi} \int \frac{|\omega|}{\omega_0} e^{-i(|\omega| - \omega_0)(t-t')} d\omega$$

Ça n'est pas un résultat simple. Nous allons voir dans quelles conditions on peut approximer la fonction qui apparaît par une distribution de Dirac.

1.3.3.2 Approximation quasi-monochromatique

Nous considérons que les impulsions utilisées sont composées uniquement de fréquences autour de ω_0 et sur une largeur $\Delta\omega \ll \omega_0$; c'est l'approximation quasi-monochromatique. Remarquons que cela permet aussi d'exclure la propagation dans le sens de $-\vec{k}_0$ car l'intégrale ne porte plus que sur des ω positifs.

Avec ces choix, $\frac{1}{2\pi} \int \frac{|\omega|}{\omega_0} e^{-i(|\omega| - \omega_0)(t-t')} d\omega$ est approximativement un sinus cardinal, de largeur temporelle $\frac{1}{\Delta\omega}$. Si l'on ne s'intéresse qu'à des échelles de temps supérieures à $\frac{1}{\Delta\omega}$, il va se comporter comme une distribution de Dirac.

Remarquez que $\Delta\omega$ ne dépend pas de l'état de la lumière tant que les fréquences peuplées restent dans les bornes fixées par $\Delta\omega$. Il ne faut pas oublier que le lien entre une largeur spectrale et une largeur temporelle est une inégalité, pas une égalité; on peut toujours considérer une plus grande largeur spectrale que le minimum requis. Le fait que les modes de fréquence soient ou non peuplés ne change pas les commutateurs; le tout est qu'aucun ne soit peuplé au-delà de la limite. Ainsi, ça n'est pas parce qu'une impulsion est longue qu'on va perdre en précision temporelle. Plus formellement, en notant T la résolution temporelle souhaitée, on doit avoir $\frac{1}{\omega_0} \ll \frac{1}{\Delta\omega} \ll T$. En réalité $\Delta\omega$ est ici un paramètre libre et on conclut donc qu'il est possible de travailler avec des distributions de Dirac dans les relations de commutation tant que :

- on ne s'intéresse pas à des échelles de temps de l'ordre de $\frac{1}{\omega_0}$ ou inférieures ;
- les impulsions envoyées ne contiennent pas de fréquences trop lointaines de ω_0 ;
 $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$.

Concrètement, cela signifie que l'approximation va être valable tant qu'on travaillera avec des détecteurs lents ainsi que des impulsions longues comparativement à la période optique. C'est le cas avec les détecteurs actuellement disponibles, tant qu'on n'utilise pas d'impulsions femtosecondes.

Quand ces hypothèses sont vérifiées, on a approximativement

$$[\hat{a}_l(t), \hat{a}_{l'}^\dagger(t')] = \delta_{l,l'} \delta(t - t') \quad (1.10)$$

De plus, on pourra écrire :

$$\hat{a}_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{a}_l(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega$$

en gardant à l'esprit que l'intégrale porte uniquement « autour » de ω_0 .

1.3.4 Modes fréquentiels

Voyons une autre transformation de l'équation (1.9). Plutôt que de privilégier une unique fréquence, nous allons utiliser plusieurs fréquences, qu'on appelle ω_i .

Une telle décomposition va être pratique pour décrire le couplage entre un mode qui se propage et une cavité résonnante uniquement pour des fréquences discrètes. Elle est également adaptée pour décrire un peigne de fréquences.

Dans un premier temps, nous n'effectuons pas l'approximation quasi-monochromatique. Elle sera discutée après avoir donné les définitions.

1.3.4.1 Décomposition

On prend une partition de l'ensemble des fréquences en intervalles D_i , chacun « centré » autour de ω_i ($\omega_i \in D_i$ est suffisant). De même que pour ω_0 , les ω_i ne jouent avant tout qu'un rôle arbitraire.

On peut alors définir :

$$\hat{a}_{l,i}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in D_i} \sqrt{\frac{|\omega|}{\omega_i}} \hat{a}_l(\omega) e^{-i(|\omega| - \omega_i)t} d\omega$$

ce qui permet d'exprimer le champ électrique :

$$\hat{E}^+(\vec{r}_\perp, t) = i \sum_i \sqrt{\frac{\hbar \omega_i}{2\varepsilon_0 S c}} e^{-i\omega_i t} \sum_l u_l(\vec{r}_\perp) \hat{a}_{l,i}(t)$$

On a obtenu une somme de champs évoluant chacun avec une porteuse oscillant à la pulsation ω_i et avec une enveloppe lentement variable décrite par $\hat{a}_{l,i}(t)$.

Les relations de commutation des $\hat{a}_{l,i}(t)$ sont données par :

$$\left[\hat{a}_{l,i}(t), \hat{a}_{l',j}^\dagger(t') \right] = \delta_{l,l'} \delta_{i,j} \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in D_i} \frac{|\omega|}{\omega_i} e^{-i(|\omega| - \omega_i)(t-t')} d\omega$$

On constate tout de suite que les opérateurs de différents modes fréquentiels commutent. Afin de simplifier la partie temporelle du commutateur, voyons maintenant les spécificités de l'approximation quasi-monochromatique.

1.3.4.2 Approximation quasi-monochromatique

L'approximation doit cette fois être effectuée pour chaque mode fréquentiel. On suppose que pour chacun, seules les fréquences proches de la fréquence centrale sont peuplées. Notez qu'ici les bornes d'intégration sont étroites car $\Delta\omega$ ne peut pas être plus important que la distance entre les fréquences ω_i .

Pour pouvoir approximer le commutateur par une distribution de Dirac, il ne faut pas chercher à effectuer une mesure sur une dent avec une résolution temporelle inférieure au taux de répétition. En se plaçant dans ces hypothèses, on a approximativement

$$\left[\hat{a}_{l,i}(t), \hat{a}_{l',j}^\dagger(t') \right] = \delta_{l,l'} \delta_{i,j} \delta(t - t') \quad (1.11)$$

1.4 OPÉRATEURS ET ÉTATS PARTICULIERS

Maintenant que nous avons présenté la quantification du champ électromagnétique, nous allons rappeler la définition de certains opérateurs et états usuels. Pour l'ensemble de cette thèse, nous utilisons les notations de Dirac. On a ici une assemblée d'oscillateurs harmoniques indépendants; on va se concentrer sur un seul mode, et omettre l'indice l .

Nous séparons les différentes familles d'états selon l'ensemble qui les indexe. Nous les appellerons « discrets » quand la famille est indexée par les entiers naturels, et « continus » quand elle l'est par un indice réel ou complexe.

1.4.1 États discrets

La diagonalisation du hamiltonien harmonique $\hat{H} = \hbar\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}]$ est un problème bien connu que nous ne détaillerons pas. Retenons simplement qu'on commence par définir l'opérateur « nombre de photons » $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$; on a alors $\hat{H} = \hbar\omega [\hat{N} + \frac{1}{2}]$. Ensuite on montre que les états propres de \hat{N} forment une base dénombrable de l'espace de Hilbert [22]. Ils sont nommés états de Fock, notés $|n\rangle$ où $n \in \mathbb{N}$. $|n\rangle$ est appelé « état de Fock à n photons »; il correspond à la valeur propre n . Le cas particulier $|0\rangle$ est particulièrement important et est dénommé « vide ». Ils vérifient :

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

dont on déduit leur expression à partir de $|0\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

La valeur moyenne des quadratures \hat{x} et \hat{p} pour ces états est nulle. Les variances valent $\langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \frac{2n+1}{4} = \langle n|\hat{p}^2|n\rangle$.

Remarque. Les états de Fock peuvent également s'écrire en termes d'amplitude de probabilité sous la forme des fonctions de Hermite-Gauss. Nous ne détaillons pas cette formulation que nous n'allons pas utiliser. \diamond

Remarque. Lorsque le nombre de photons est fixé à un ou quelques-uns partagés entre différents modes, il est souvent pratique de décrire le champ électromagnétique avec les conventions de la première quantification. Cela est tout à fait légitime, et il faudra simplement veiller à ce que les observables soient symétriques par rapport aux indices marquant les photons. \diamond

1.4.2 États continus

1.4.2.1 États cohérents

Définissons l'opérateur de déplacement :

$$D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} \qquad (1.12)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$. Il vérifie les propriétés

$$D(0) = \mathbb{1} \quad D(-\alpha) = D^\dagger(\alpha) \quad D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = \mathbb{1} = D^\dagger(\alpha)D(\alpha)$$

Son effet sur l'espace des phases est une translation dans le plan complexe de α . À partir de cet opérateur on définit les états cohérents :

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle$$

qui, à l'aide de la formule de Glauber, peuvent s'exprimer sur la base de Fock :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (1.13)$$

Leurs propriétés sont les suivantes :

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.14a)$$

$$\langle \alpha | x | \alpha \rangle = \text{Re}\{\alpha\} \quad \langle \alpha | p | \alpha \rangle = \text{Im}\{\alpha\} \quad (1.14b)$$

$$\langle \alpha | x^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | x | \alpha \rangle^2 = \frac{1}{4} = \langle \alpha | p^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | p | \alpha \rangle^2 \quad (1.14c)$$

$$D(\alpha) |\beta\rangle = e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} |\alpha + \beta\rangle \quad (1.14d)$$

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \alpha^*\beta} = e^{-\frac{|\alpha - \beta|^2}{2} - i\frac{\alpha^*\beta - \beta^*\alpha}{2i}} \implies |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2} \quad (1.14e)$$

Si l'on prépare un état cohérent $|\alpha\rangle$ au temps $t = 0$ et qu'on le laisse évoluer, l'état au temps t est $e^{-i\frac{\omega t}{2}} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$. Ce comportement d'oscillation est très proche du cas classique ; c'est pourquoi les états cohérents sont souvent considérés comme classiques.

Le nombre moyen de photons d'un état cohérent est $\langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$.

1.4.2.2 États comprimés

Voyons maintenant un dernier type d'états, toujours indexés par des paramètres continus, mais non classiques. Commençons par définir l'opérateur de compression mono-mode :

$$S(\zeta) = e^{\frac{1}{2}[\zeta^* \hat{a}^2 - \zeta (\hat{a}^\dagger)^2]} \quad (1.15)$$

L'action d'un de ces opérateurs sur le vide $|0\rangle$ donne un état de vide comprimé. On peut également expliciter ces états sur la base de Fock :

$$S(\zeta) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh |\zeta|}} \sum_n \left(-\frac{1}{2} e^{i \arg \zeta} \tanh |\zeta| \right)^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} |2n\rangle \quad (1.16)$$

L'espérance de l'opérateur nombre est : $\langle \hat{N} \rangle = \sinh^2 |\zeta|$ et n'est donc pas nulle.

On peut calculer la variance des opérateurs de quadrature (qui ont une moyenne nulle) [76] :

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{1}{4} \left[e^{2|\zeta|} \sin^2 \left(\frac{\arg \zeta}{2} \right) + e^{-2|\zeta|} \cos^2 \left(\frac{\arg \zeta}{2} \right) \right] \quad (1.17a)$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{1}{4} \left[e^{2|\zeta|} \cos^2 \left(\frac{\arg \zeta}{2} \right) + e^{-2|\zeta|} \sin^2 \left(\frac{\arg \zeta}{2} \right) \right] \quad (1.17b)$$

Pour $\arg \zeta = 0$ la variance est réduite pour la quadrature \hat{x} alors qu'elle est amplifiée pour \hat{p} . L'inverse est observé pour $\arg \zeta = \pi$.

Remarque. Les états de vide comprimés appartiennent en fait à une classe plus large d'états dit gaussiens. Nous reviendrons sur cette notion dans les parties suivantes. \diamond

MESURE GÉNÉRALISÉE

Comme souligné par Einstein, Podolsky et Rosen dans leur célèbre article de 1935 [34], la mécanique quantique dans laquelle l'état est décrit par un vecteur d'un espace de Hilbert n'est pas suffisante pour étudier un système ouvert. Nous allons rappeler ici le formalisme nécessaire pour traiter un tel système. L'essentiel de ce qui est présenté ici l'est avec beaucoup plus de détails et pédagogie dans les manuels [22, 26].

2.1 OPÉRATEUR DENSITÉ

2.1.1 Définition pour un état pur et propriétés

On commence par faire le lien avec le formalisme standard de la mécanique quantique, pour lequel un état est décrit par un vecteur. Pour cela nous allons donner des définitions et en déduire des propriétés. Elles seront reconsidérées à la section suivante en tant que principes, et le formalisme vectoriel deviendra un cas particulier.

2.1.1.1 Définition

Définition. Soit $|\psi\rangle$ un état. On appelle opérateur (ou matrice) densité : $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

On appellera désormais « état pur » les états définis à partir d'un ket, ou dont l'opérateur densité est un projecteur¹ (seule forme possible pour l'instant).

Propriété 2.1. L'opérateur densité a les propriétés suivantes :

- ρ est hermitien;
- ρ est positif;
- $\text{Tr}\{\rho\} = 1$.

2.1.1.2 Évolution temporelle

L'évolution d'un état pur $|\psi(t)\rangle$ dans un système régi par un hamiltonien \hat{H} est donnée par l'équation de Schrödinger [22] :

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d|\psi\rangle\langle\psi|}{dt} &= i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} \langle\psi| + i\hbar |\psi\rangle \frac{d\langle\psi|}{dt} \\ &= \hat{H}|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi| \hat{H} \\ &= [\hat{H}, |\psi\rangle\langle\psi|] \end{aligned}$$

1. L'opérateur P est un projecteur si et seulement si $P^2 = P$.

Propriété 2.2. L'évolution temporelle de l'opérateur densité $\rho(t)$ est donnée par l'équation :

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [\hat{H}, \rho]$$

2.1.1.3 Mesure

Rappelons brièvement les principes de la mesure dite de von Neumann, aussi appelée projective [22]. La mesure est décrite par un opérateur, notons-le \hat{A} . Prenons le système dans l'état décrit par le vecteur $|\psi\rangle$. Les résultats de la mesure sont aléatoires mais suivent les règles :

- Les différents résultats possibles de la mesure sont les valeurs propres de l'opérateur, qu'on note $(\lambda_k)_k$;
- la probabilité d'obtenir le résultat λ_k est $\|\hat{P}_k|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle$, où \hat{P}_k est le projecteur sur l'espace propre de \hat{A} correspondant à la valeur propre λ_k ;
- l'état du système après la mesure de la valeur λ_k est $\frac{\hat{P}_k|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle}}$.

En termes d'opérateur densité, en notant toujours $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, on peut ré-exprimer la probabilité d'obtenir le résultat λ_k :

$$\langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle = \text{Tr}[\langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle] = \text{Tr}[\hat{P}_k|\psi\rangle\langle\psi|] = \text{Tr}[\hat{P}_k\rho]$$

L'opérateur densité après la mesure de λ_k s'écrit :

$$\frac{\hat{P}_k|\psi\rangle\langle\psi|\hat{P}_k}{\langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle} = \frac{\hat{P}_k|\psi\rangle\langle\psi|\hat{P}_k}{\langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle} = \frac{\hat{P}_k\rho\hat{P}_k}{\text{Tr}[\hat{P}_k\rho]}$$

D'où la formulation équivalente de la mesure projective :

Propriété 2.3. La mesure est décrite par les résultats possibles notés λ_k , ainsi qu'un ensemble de projecteurs orthogonaux \hat{P}_k tels que $\sum_k \hat{P}_k = \mathbb{1}$. Considérant un système dans un état décrit par l'opérateur densité ρ ,

- La probabilité d'obtenir λ_k est donnée par $\text{Tr}[\hat{P}_k\rho]$;
- après avoir mesuré λ_k l'opérateur densité devient $\frac{\hat{P}_k\rho\hat{P}_k}{\text{Tr}[\hat{P}_k\rho]}$.

La mesure est appelée projective car les \hat{P}_k sont des projecteurs.

2.1.2 Généralisation ; mélange statistique

Afin d'avoir une approche de la mécanique quantique compatible avec un système ouvert, on modifie les postulats. On décide que l'état d'un système quantique est décrit par la donnée d'un opérateur ρ dit « densité » ; celui-ci doit respecter les conditions suivantes :

- ρ est hermitien et positif;
- $\text{Tr}[\rho] = 1$.

Le processus de mesure s'effectue de la manière décrite à la sous-section précédente.

Quand l'opérateur densité est un projecteur (nécessairement sur un espace de dimension 1), on dit que l'état est pur. La nouvelle formulation de la mécanique quantique est alors équivalente à l'ancienne avec comme état un vecteur normé de l'image du projecteur. Mais cela n'est pas toujours le cas. Par exemple un état thermique à température finie n'est pas pur, tout comme un état intriqué dont on aurait perdu une des parties.

La diagonalisation de ρ donne des valeurs et vecteurs propres notés respectivement λ_k et $|\psi_k\rangle$. On peut alors effectuer la décomposition $\rho = \sum_k \lambda_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$. Considérons une mesure dont le résultat l est décrit par le projecteur \hat{P}_l . La probabilité d'obtenir ce résultat s'écrit

$$\mathrm{Tr} \left[\hat{P}_l \sum_k \lambda_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \right] = \sum_k \lambda_k \mathrm{Tr} [\hat{P}_l |\psi_k\rangle\langle\psi_k|] = \sum_k \lambda_k \langle\psi_k | \hat{P}_l | \psi_k\rangle$$

Tout se passe comme si l'on tirait aléatoirement un des états $|\psi_k\rangle$ selon la loi donnée par les λ_k puis qu'on effectuait une mesure quantique « basique » dessus. C'est pour cela qu'on qualifie tout état non pur de mélange statistique.

Définition. $\mathrm{Tr}[\rho^2]$ est appelé « pureté » de l'état ρ .

La pureté mesure « à quel point l'état est proche d'un état pur ».

2.1.3 Trace partielle

Voyons maintenant comment décrire un système quantique dont on ne garde qu'une partie.

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un espace de Hilbert produit. Soient $(|a_i\rangle)_i$ et $(|b_j\rangle)_j$ des bases de \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B respectivement. Considérons une mesure n'impliquant que \mathcal{H}_A . Un certain résultat de cette mesure est décrit par un projecteur qui s'écrit sous la forme $\hat{P}_A \otimes \mathbb{1}_B$. La probabilité d'obtenir ce résultat est

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[(\hat{P}_A \otimes \mathbb{1}_B) \rho] &= \sum_{i,j} \langle a_i | \langle b_j | (\hat{P}_A \otimes \mathbb{1}_B) \rho | a_i \rangle | b_j \rangle \\ &= \sum_i \langle a_i | \hat{P}_A \sum_j [\langle b_j | \rho | b_j \rangle] | a_i \rangle \end{aligned}$$

Définition. Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un espace de Hilbert produit. Soit $(|b_i\rangle)_i$ une base de \mathcal{H}_B . Définissons l'opérateur trace partiel sur B :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_B : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}_A \\ \rho &\mapsto \sum_i \langle b_i | \rho | b_i \rangle \end{aligned}$$

On peut maintenant reformuler la probabilité d'obtenir le résultat de la mesure : $\mathrm{Tr}[(\hat{P}_A \otimes \mathbb{1}_B) \rho] = \mathrm{Tr}[\hat{P}_A \mathrm{Tr}_B[\rho]]$.

Propriété 2.4. Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ un espace de Hilbert produit. Soit ρ l'état du système. Si l'on décide de ne plus s'intéresser à la partie sur \mathcal{H}_B , l'opérateur $\rho_A = \mathrm{Tr}_B[\rho]$ suffit à décrire toute mesure effectuées sur la partie A .

Remarque. L'évolution d'un système quantique couplé à un environnement peut s'obtenir en considérant une succession d'évolutions infinitésimales du système avec son environnement, celui-ci étant pris sans mémoire. Cela mène à une équation d'évolution pour l'opérateur densité connue sous le nom d'équation pilote, le plus souvent écrite sous la forme de Lindblad. Le lecteur désirent creuser cet aspect est invité à lire les cours [26, 106]. \diamond

2.2 OPÉRATEURS DE MESURE

En sous-sous-section 2.1.1.3 nous avons détaillé comment s'adapte la mesure projective au formalisme de l'opérateur densité. Voyons maintenant une version plus générale des mesures quantiques.

2.2.1 Mesure générale

On pose en remplacement du postulat de mesure que celle-ci s'effectue selon les règles suivantes :

Définition. Une mesure est spécifiée par les résultats possibles, notés λ_k , et des opérateurs \hat{M}_k vérifiant $\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = \mathbb{1}$. Pour un système décrit par l'opérateur densité ρ elle a comme propriétés :

- la probabilité d'obtenir le résultat λ_k est $\text{Tr}[\hat{M}_k \rho \hat{M}_k^\dagger]$;
- l'état du système après la mesure ayant donnée λ_k est décrit par l'opérateur densité
$$\frac{\hat{M}_k \rho \hat{M}_k^\dagger}{\text{Tr}[\hat{M}_k \rho \hat{M}_k^\dagger]}.$$

La mesure projective est un cas particulier de celle qu'on vient de décrire. Il faut également noter qu'on peut toujours voir la mesure généralisée comme l'intrication avec un système auxiliaire suivie d'une mesure projective sur ce système annexe.

Si l'on ne s'intéresse qu'à la probabilité d'annonce, on remarque que $\text{Tr}[\hat{M}_k \rho \hat{M}_k^\dagger] = \text{Tr}[\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \rho]$. On peut alors se contenter de la donnée des opérateurs $\hat{\Pi}_k = \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k$. Ils sont appelés « opérateurs positifs de mesure », souvent abrégé par POVM (positive-operator valued measure, désignant aussi bien la mesure que les opérateurs). Ils doivent être hermitiens positifs, tels que $\sum_k \hat{\Pi}_k = \mathbb{1}$.

2.2.2 Opérateurs positifs et sélection

Nous allons étudier ici une situation assez commune mais peu souvent traitée en détail. Soit un système bipartite dont on décompose l'espace de Hilbert sous la forme $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$; on effectue une mesure destructive sur la partie \mathcal{H}_B . La question qui se pose est : étant donné le résultat de la mesure, dans quel état est projetée la partie restante de mon système ? Pour répondre à cette question on considère que la mesure se fait en deux temps, d'abord la mesure est effectuée, modifiant l'état global, et seulement ensuite la partie sur \mathcal{H}_B est détruite. En général les POVM ne permettent pas de décrire l'état après la mesure. Nous allons voir qu'ici ils sont suffisants.

2.2.2.1 État sélectionné

Soit ρ la matrice densité d'un état quelconque (intrication possible entre les composantes appartenant à \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B). On s'intéresse à ρ_A , la matrice densité décrivant la partie du système appartenant à \mathcal{H}_A à la fin du processus. Soit \hat{M}_B l'opérateur de mesure généralisée sur l'espace \mathcal{H}_B et $\hat{\Pi}_B = \hat{M}_B^\dagger \hat{M}_B$ le POVM associé.

La mesure en elle-même a pour effet de transformer l'opérateur densité selon :

$$\rho \mapsto \frac{(\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B) \rho (\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B)^\dagger}{\text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B) \rho (\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B)^\dagger]}$$

Puis on se restreint à la partie sur \mathcal{H}_A , ce qui s'effectue en prenant la trace partielle sur B :

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B \left[\frac{(\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B) \rho (\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B)^\dagger}{\text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B) \rho (\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B)^\dagger]} \right] \\ &= \frac{\text{Tr}_B [(\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B) \rho (\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B)^\dagger]}{\text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) \rho]} \end{aligned}$$

On aimerait bien faire apparaître au numérateur le POVM $\hat{\Pi}_B$ afin de pouvoir se passer de l'opérateur \hat{M}_B . Pour cela, il suffit de pouvoir commuter $\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B$ et $\rho (\mathbb{1} \otimes \hat{M}_B)^\dagger$ dans la trace partielle. La deuxième matrice est quelconque, mais la première n'agit que sur le sous-espace \mathcal{H}_B .

Lemme 2.1. Soit un espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Soient \hat{X} et \hat{Y} deux opérateurs, \hat{X} n'agissant pas sur \mathcal{H}_A ($\hat{X} = \mathbb{1}_A \otimes \hat{X}_B$). On a alors la propriété

$$\boxed{\text{Tr}_B [\hat{X}\hat{Y}] = \text{Tr}_B [\hat{Y}\hat{X}], \quad \text{avec } \hat{X} = \mathbb{1}_A \otimes \hat{X}_B}$$

Nous retardons la démonstration du lemme. En l'utilisant on peut alors conclure :

$$\boxed{\rho_A = \frac{\text{Tr}_B [(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) \rho]}{\text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) \rho]}} \quad (2.1)$$

Cette expression ne fait pas intervenir \hat{M}_B directement ; le POVM $\hat{\Pi}_B$ est suffisant. Il est possible d'aller plus loin pour simplifier le dénominateur. Tout d'abord remarquons que par définition,

$$\text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) \rho] = \text{Tr}_A [\text{Tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) \rho]] = \text{Tr}_B [\text{Tr}_A[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) \rho]]$$

La première forme permet de calculer le dénominateur à partir du numérateur : le dénominateur est simplement là pour normaliser le numérateur. La seconde forme a également son intérêt puisque le POVM n'agit que sur B et peut sortir de la trace sur A . On a alors :

$$\text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) \rho] = \text{Tr}_B [\hat{\Pi}_B \text{Tr}_A[\rho]]$$

Cette nouvelle expression du dénominateur ne fait intervenir que des opérateurs locaux à B . La mesure sur B peut être considérée pour ce calcul de dénominateur comme isolée. On peut donner une seconde forme à la conclusion :

$$\rho_A = \frac{\text{Tr}_B [(\mathbb{1} \otimes \hat{\Gamma}_B) \rho]}{\text{Tr}_B [\hat{\Gamma}_B \text{Tr}_A [\rho]]} \quad (2.2)$$

Ainsi le dénominateur n'implique que l'état « vu » par B sans prendre en compte l'intrication avec A , ce qui est attendu puisque la probabilité d'obtenir le résultat intéressant sur B ne dépend que de ce que l'appareil de mesure peut voir.

Démonstration du lemme 2.1. Commençons par prendre simplement \hat{X} et \hat{Y} deux opérateurs de \mathcal{H} (on ajoutera la propriété de \hat{X} ultérieurement). On choisit une base pour chacun des espaces \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B , respectivement notées $(|a_i\rangle)_i$ et $(|b_j\rangle)_j$. Cela définit une base de \mathcal{H} . On peut alors décomposer les opérateurs sur cette base. On note les coefficients obtenus sur cette base de la manière suivante :

$$\hat{X}_{i,j} = \{\langle a_i | \otimes \langle b_k | \} \hat{X} \{ |a_j\rangle \otimes |b_l\rangle \} \quad \text{et} \quad \hat{Y}_{i,j} = \{\langle a_i | \otimes \langle b_k | \} \hat{Y} \{ |a_j\rangle \otimes |b_l\rangle \}$$

i, j sont donc les indices des éléments de la base de \mathcal{H}_A et k, l ceux de la base de \mathcal{H}_B . On rappelle que par définition,

$$(\text{Tr}_B [\hat{X}])_{i,j} = \sum_q \hat{X}_{i,j} \quad \text{et} \quad (\hat{X}\hat{Y})_{i,j} = \sum_{m,n} \hat{X}_{i,m} \hat{Y}_{m,j}$$

Ainsi,

$$(\text{Tr}_B [\hat{X}\hat{Y}])_{i,j} = \sum_{q,m,n} \hat{X}_{i,m} \hat{Y}_{m,j}$$

En général, on ne peut pas intervertir \hat{X} et \hat{Y} car les indices du haut ne s'y plient pas. Revenons au cas qui nous intéresse. On considère que \hat{X} n'agit pas sur \mathcal{H}_A . On a vu que cela s'exprime par $\hat{X} = \mathbb{1}_A \otimes \hat{X}_B$, ce qui en termes de coefficients se traduit par

$$\hat{X}_{i,j} = \delta_{i,j} (\hat{X}_B)_{k,l}$$

avec $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker et bien sûr $(\hat{X}_B)_{k,l}$ les coefficients de \hat{X}_B sur la base de \mathcal{H}_B .

En utilisant cette dernière expression et en intervertissant les noms n et q au bon moment,

$$\begin{aligned} (\text{Tr}_B [\hat{X}\hat{Y}])_{i,j} &= \sum_{q,m,n} \hat{X}_{i,m} \hat{Y}_{m,j} \\ &= \sum_{q,m,n} \delta_{i,m} (\hat{X}_B)_{q,n} \hat{Y}_{m,j} \\ &= \sum_{q,n} (\hat{X}_B)_{q,n} \hat{Y}_{i,j} \\ &= \sum_{q,n} \hat{Y}_{i,j} (\hat{X}_B)_{n,q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q,m,n} \hat{Y}_{i,m} \delta_{m,j} (\hat{X}_B)_{n,q} \\
&= \sum_{q,m,n} \hat{Y}_{i,m} \hat{X}_{m,j} \\
&= (\text{Tr}_B [\hat{Y}\hat{X}])_{i,j}
\end{aligned}$$

□

Démonstration alternative du lemme 2.1. On peut également démontrer le lemme graphiquement. Pour cela nous utilisons l'écriture matricielle du produit tensoriel : le produit de Kronecker. Avec les conventions usuelles, \hat{X} s'écrit sous forme des blocs \hat{X}_B sur la diagonale et 0 ailleurs, tandis que \hat{Y} s'écrit de manière générique par blocs :

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{X}_B & 0 & \cdots \\ 0 & \hat{X}_B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_{1,1} & \hat{Y}_{1,2} & \cdots \\ \hat{Y}_{2,1} & \hat{Y}_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_B [\hat{X}\hat{Y}] &= \begin{pmatrix} \text{Tr}[\hat{X}_B \hat{Y}_{1,1}] & \text{Tr}[\hat{X}_B \hat{Y}_{1,2}] & \cdots \\ \text{Tr}[\hat{X}_B \hat{Y}_{2,1}] & \text{Tr}[\hat{X}_B \hat{Y}_{2,2}] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{Tr}[\hat{Y}_{1,1} \hat{X}_B] & \text{Tr}[\hat{Y}_{1,2} \hat{X}_B] & \cdots \\ \text{Tr}[\hat{Y}_{2,1} \hat{X}_B] & \text{Tr}[\hat{Y}_{2,2} \hat{X}_B] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \text{Tr}_B [\hat{Y}\hat{X}]
\end{aligned}$$

□

Remarque. Dans le cas d'une mesure partiellement lue, on regroupe un certain nombre de résultats en considérant que la mesure est un succès si n'importe lequel de ces résultats est obtenu ; appelons Ω cet ensemble. Ainsi le POVM de la mesure peut s'écrire sous la forme $\hat{\Pi}_B = \sum_{i \in \Omega} \hat{\Pi}_i$.

En lisant complètement le résultat de la mesure, on obtient pour chaque i une matrice densité donnée par (2.1) :

$$\rho_i = \frac{\text{Tr}_B [\hat{\Pi}_i \rho]}{\text{Tr} [\hat{\Pi}_i \rho]} = \frac{\text{Tr}_B [\hat{\Pi}_i \rho]}{P_i}$$

avec $P_i = \text{Tr} [\hat{\Pi}_i \rho]$ la probabilité d'obtenir i .

Si la mesure n'est pas lue au sein de Ω , la matrice densité obtenue est la moyenne pondérée des ρ_i :

$$\rho_\Omega = \sum_{i \in \Omega} P_{(i|\Omega)} \rho_i = \sum_{i \in \Omega} \frac{P_i}{\sum_{j \in \Omega} P_j} \frac{\text{Tr}_B [\hat{\Pi}_i \rho]}{P_i} = \frac{\text{Tr}_B \left[\sum_{i \in \Omega} [\hat{\Pi}_i] \rho \right]}{\sum_{j \in \Omega} P_j} = \frac{\text{Tr}_B [\hat{\Pi}_B \rho]}{\sum_{j \in \Omega} P_j}$$

On retrouve donc bien l'équation (2.1), mais maintenant pour l'opérateur $\hat{\Pi}_B$. Le formalisme est bien cohérent. Il est donc équivalent de considérer une mesure complète dont on ne récupère qu'une partie de l'information ou directement une mesure qui donne peu d'information. \diamond

2.2.2.2 Simplification d'un état pur partiellement invisible

Voyons formellement que lors du calcul de l'état annoncé, partant d'un état pur il est inutile de prendre en compte les composantes ayant une probabilité nulle de déclencher l'annonce. On travaille toujours sur l'espace de Hilbert produit : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Nous partons cette fois d'un état pur $|\psi\rangle$ (opérateur densité $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$).

L'opérateur de mesure $\hat{\Pi}_B$ n'est *a priori* pas injectif (et s'il l'est ça ne change rien au résultat, si ce n'est qu'il ne donne aucune simplification pratique). On peut alors écrire $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{B,0} \oplus \mathcal{H}_{B,1}$ avec $\mathcal{H}_{B,0}$ le noyau de $\hat{\Pi}_B$ et $\mathcal{H}_{B,1}$ un supplémentaire (en général on utilisera son orthogonal, qui est supplémentaire dès que le noyau est fermé). On en déduit la décomposition $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{B,0}) \oplus (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{B,1})$, qu'on peut appliquer à $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle \quad \text{avec} \quad (\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) |\psi_0\rangle = 0 = \langle\psi_0| (\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B)$$

Remarque. $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$ ne sont pas individuellement normalisés. \diamond

Cette décomposition se traduit pour la matrice densité sous la forme :

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| + |\psi_0\rangle\langle\psi_1| + |\psi_1\rangle\langle\psi_0| + |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$$

Ainsi en utilisant le lemme 2.1 ;

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B)\rho] &= \text{Tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) |\psi_0\rangle\langle\psi_0|] + \text{Tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) |\psi_0\rangle\langle\psi_1|] \\ &\quad + \text{Tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) |\psi_1\rangle\langle\psi_0|] + \text{Tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] \\ &= \text{Tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] \end{aligned}$$

Pour le dénominateur, en utilisant que $\text{Tr}[\] = \text{Tr}_A[\text{Tr}_B[\]]$, on obtient directement que :

$$\text{Tr}[\rho(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B)] = \text{Tr}[|\psi_1\rangle\langle\psi_1| (\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B)]$$

Conclusion :

$$\rho_A = \frac{\text{Tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B)\rho]}{\text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B)\rho]} = \frac{\text{Tr}_B[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]}{\text{Tr}[(\mathbb{1} \otimes \hat{\Pi}_B) |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]} \quad (2.3)$$

Autrement dit, pour calculer l'état annoncé, on peut dès le début du calcul se débarrasser des termes appartenant au noyau de l'opérateur d'annonce.

Deuxième partie

DESCRIPTION TEMPORELLE D'UN DÉTECTEUR DE
PHOTONS UNIQUES

PRÉSENTATION ET ÉTABLISSEMENT DU MODÈLE

Les détecteurs optiques sensibles aux photons uniques sont au cœur des protocoles d'information quantique exploitant des variables discrètes. Les plus répandus sont¹ du type ON/OFF (parfois aussi appelés Geiger) : ils émettent un signal électrique (« clic ») quand ils détectent de la lumière, mais sans qu'aucune information ne puisse être obtenue de l'amplitude ou la forme du signal ; en particulier aucune information sur le nombre de photons n'est récupérée. Ces détecteurs sont usuellement modélisés comme effectuant une mesure quantique avec deux issues possibles : soit le détecteur clique (ON), soit il ne clique pas (OFF) ; cette description a été abondamment étudiée, y compris en prenant en compte des imperfections [24, 41, 49]. Cela permet de décrire beaucoup d'expériences ; même lorsqu'on utilise plusieurs modes du champ électromagnétique il est en général possible de les séparer spatialement pour envoyer chaque mode sur un détecteur différent.

Quand l'information est portée par un photon délocalisé dans des cases temporelles, il est inutile d'effectuer la séparation spatiale² car un seul détecteur suffit et le temps du clic permet de déterminer la case dans laquelle était le photon. De manière similaire, une expérience ayant une faible probabilité de succès est répétée jusqu'à ce qu'elle réussisse ; les temps des clics des différents détecteurs permettent de s'assurer que les résultats des mesures concernent bien la même réalisation de l'expérience. Avec les technologies disponibles de nos jours, il est possible de travailler avec des lasers ayant des taux de répétition de l'ordre du gigahertz [59, 77, 95, 115]. Atteindre de telles fréquences soulève un problème car le temps entre deux impulsions devient similaire à celui caractéristique d'un défaut des détecteurs réels : le temps auquel ils cliquent est affecté d'aléa. En imaginant qu'il soit possible d'envoyer un photon localisé en un temps t sur le détecteur, celui-ci clique à un temps T aléatoire. On appelle ce phénomène gigue temporelle, ce qui est également utilisé pour désigner l'écart type de T (voir la [figure 3.1](#)). Quand la séparation entre deux cases temporelles est du même ordre de grandeur que la gigue, apparaissent des questions comme de déterminer la probabilité qu'une détection soit attribuée à la mauvaise case temporelle. Il est donc nécessaire de décrire théoriquement ce phénomène.

Si la mesure expérimentale de la gigue d'un détecteur ON/OFF est relativement courante [12, 49, 79, 119], l'aspect temporel a très peu été abordé théoriquement, et principalement dans le cadre de l'analyse de la sécurité de protocoles de distribution de clef [10, 93, 94] ou de l'interférométrie multi-photons [116]. Dans ces cas, la description est limitée à un état contenant exactement un photon, avec des hypothèses fortes sur la gigue (absente, discrète ou gaussienne) et en ne prenant pas en compte les autres

1. Il s'agit là d'un modèle ; les détecteurs réels peuvent être un peu différents.

2. Ce qui est compliqué expérimentalement car les commutateurs optiques rapides induisent beaucoup de pertes.

Le travail présenté dans cette partie a été réalisé dans le cadre d'une collaboration avec Alessandro Zavatta (LENS et Département de Physique, Università di Firenze, 50019 Sesto Fiorentino, Firenze, Italia ; Istituto Nazionale di Ottica (INO-CNR) Largo Enrico Fermi 6, 50125 Firenze, Italia).

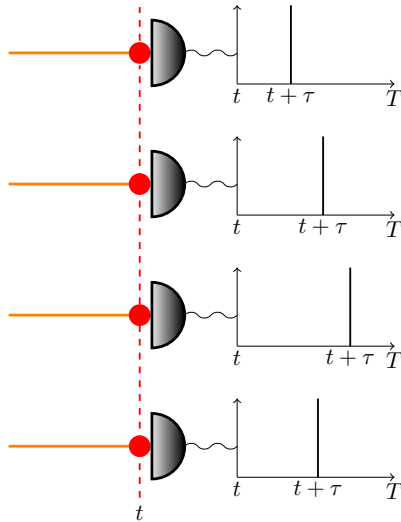


FIGURE 3.1 – Illustration de la gigue temporelle avec comme entrée un photon parfaitement localisé dans le temps. T est aléatoire et le mot « gigue » est également utilisé pour décrire son écart type.

défauts des détecteurs. Par ailleurs, d'autres travaux montrent comment la description d'un détecteur permettrait d'en déduire celle d'une mesure où des éléments optiques tels que des filtres auraient été placés avant la détection, ou comment retrouver les grandeurs habituellement utilisées pour caractériser les détecteurs [35, 36].

Pour donner une description des détecteurs de type ON/OFF utilisable quel que soit l'état quantique mesuré et en prenant en compte l'aspect temporel, nous allons expliciter les opérateurs positifs de mesure (POVM, voir [section 2.2](#)) associés. Nous y intégrerons la gigue temporelle et une efficacité quelconque. Par ailleurs, une fois qu'un détecteur ON/OFF a cliqué, il devient inactif durant une certaine durée appelée « temps mort ». Pour prendre en compte ce défaut³ nous considérons simplement qu'une fois que le détecteur a cliqué la mesure est terminée et au moment où il redevient disponible, une nouvelle mesure commence. Un autre défaut des détecteurs réels est qu'ils peuvent cliquer même en l'absence de lumière ; on parle alors de « coups d'obscurité » ou « sombres ». Nous montrerons comment prendre en compte ce défaut.

Dans ce chapitre nous allons présenter le formalisme utilisé et la dérivation des opérateurs de mesure, d'abord dans un cas particulier puis dans le cas général. Dans les chapitres suivants nous donnerons des exemples d'utilisation des opérateurs de mesure pour la description d'expériences, et en particulier pour un source de photons annoncés où nous montrerons que l'information temporelle peut être utilisée afin d'améliorer la qualité de l'état annoncé.

3. C'est en fait une caractéristique intrinsèque aux détecteurs ON/OFF. Un détecteur ne ratant aucun photon, même après avoir cliqué, serait capable de compter le nombre de photons en comptant le nombre de clics.

3.1 DESCRIPTION DES ÉTATS

Commençons par préciser le formalisme que nous allons utiliser pour décrire les états du champ électromagnétique.

3.1.1 Quantification

La quantification adaptée au problème est celle d'un champ progressif, pour lequel on ne s'intéresse qu'au plan du détecteur. Plus particulièrement, nous allons utiliser l'opérateur temporel de création d'enveloppe tel que présenté dans la [sous-section 1.3.3](#). Nous nous intéressons à un seul mode transverse : celui défini par la forme de l'élément sensible du détecteur⁴ (on peut le choisir et compléter arbitrairement avec d'autres modes pour former une base) ; on notera $\hat{a}(t)$ l'opérateur d'annihilation en un temps t . De plus, nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation quasi-monochromatique, ce qui permet d'obtenir les relations de commutation (1.10) :

$$\left[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t') \right] = \delta(t - t') \quad (3.1)$$

où nous rappelons que le $\delta()$ est en fait un sinus cardinal d'une largeur caractéristique grande devant l'inverse de la fréquence centrale de l'onde.

Chose peu usuelle en optique quantique, nous allons utiliser un formalisme de la première quantification. Notez que celui-ci est différent de théories existantes utilisant également des fonctions d'ondes temporelles, mais en seconde quantification [108]. Voyons maintenant brièvement comment passer de la seconde à la première quantification.

3.1.2 État à un photon

Un état générique contenant exactement un photon s'écrit sous la forme :

$$|\psi\rangle = \int \psi(t) \hat{a}^\dagger(t) |0\rangle dt, \quad \text{avec} \quad \int \psi^*(t) \psi(t) dt = 1$$

À l'aide de la relation de commutation (3.1), on vérifie que l'état ainsi défini est bien normé et qu'il est vecteur propre de l'opérateur « nombre de photons » pour la valeur propre 1 :

$$\begin{aligned} \int \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) dt |\psi\rangle &= \int \psi(t') \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \hat{a}^\dagger(t') |0\rangle dt dt' \\ &= \int \psi(t') \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger(t') \overbrace{\hat{a}(t) |0\rangle}^{=0} dt dt' \\ &\quad + \int \psi(t') \delta(t - t') \hat{a}^\dagger(t) |0\rangle dt dt' \\ &= |\psi\rangle \end{aligned}$$

4. En général un carré. Notez que la sensibilité peut aussi dépendre continûment de la position.

Nous sommes ainsi amenés à définir les éléments de notre base en première quantification par :

$$|t\rangle = \hat{a}^\dagger(t) |0\rangle \quad (3.2a)$$

Ces vecteurs respectent la condition de normalisation⁵ :

$$\langle t|t'\rangle = \delta(t - t') \quad (3.2b)$$

Et un état quelconque contenant exactement un photon s'écrit :

$$|\psi\rangle = \int \psi(t) |t\rangle dt \quad (3.3)$$

$\psi(t)$ est appelée « fonction d'amplitude de probabilité », ou « fonction d'onde », et doit toujours vérifier la normalisation $\int \psi^*(t)\psi(t) dt = 1$.

Remarque. L'état $|t\rangle$ a pour fonction d'amplitude de probabilité une distribution de Dirac centrée en t . Commençons par rappeler que cette fonction représente l'enveloppe; il faut la moduler par la porteuse pour obtenir le champ complet. $|t\rangle$ se comprend comme décrivant un photon parfaitement localisé au temps t . Cette localisation parfaite peut sembler contradictoire avec l'hypothèse quasi-monochromatique. Nous travaillons ici avec une séparation d'échelles : la période de la porteuse est petite devant la largeur de l'impulsion qui est elle-même petite devant le temps caractéristique du détecteur. Comme discuté en [sous-sous-section 1.3.3.2](#), la largeur de ce qui est considéré comme distribution de Dirac est un choix; pour qu'il soit possible il faut que la période de la porteuse et le temps caractéristique du détecteur soient suffisamment différents pour qu'on puisse introduire un temps mésoscopique simultanément très grand devant le premier et très petit comparativement au second. \diamond

Notez que du fait de la restriction aux états contenant exactement un photon, les première et seconde quantifications sont équivalentes. Passons maintenant au cas général.

3.1.3 État général

Voyons maintenant comment construire l'espace complet en première quantification. On comparera avec la seconde.

3.1.3.1 Nombre fixe de photons

Commençons par définir l'espace des états contenant exactement n photons. Nous construisons la base de première quantification des états à n photons par la définition :

$$|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle = |t_1\rangle \otimes |t_2\rangle \otimes \dots \otimes |t_n\rangle \quad (3.4a)$$

Compte tenu de la normalisation des états à un photon (3.2b),

$$\langle t_1, t_2, \dots, t_n | t'_1, t'_2, \dots, t'_n \rangle = \delta(t_1 - t'_1) \delta(t_2 - t'_2) \dots \delta(t_n - t'_n) \quad (3.4b)$$

5. Exactement comme pour la position d'une particule, les $|t\rangle$ ne forment pas une véritable base à cause de cette mauvaise normalisation. On pourrait définir une vraie base à partir d'une base de fonctions de carré intégrable, par exemple les fonctions d'Hermite-Gauss [9].

Un état générique de cet espace est également décrit par son amplitude de probabilité :

$$|\psi\rangle = \int \psi(t_1, t_2, \dots, t_n) |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle dt_1 dt_2 \dots dt_n \quad (3.5a)$$

avec la normalisation

$$\int \psi^*(t_1, t_2, \dots, t_n) \psi(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1 \quad (3.5b)$$

3.1.3.2 État quelconque

On définit l'espace de Hilbert total comme la somme directe des espaces à n photons, $n \in \mathbb{N}$. Les états qui nous servent de base s'écrivent donc les $|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$ mais où cette fois n est variable et décrit les entiers. Ils vérifient la normalisation :

$$\langle t_1, t_2, \dots, t_n | t'_1, t'_2, \dots, t'_{n'} \rangle = \begin{cases} \delta(t_1 - t'_1) \delta(t_2 - t'_2) \dots \delta(t_n - t'_n) & \text{si } n = n' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

Notez bien que deux états de la base n'ayant pas le même nombre de photons sont orthogonaux.

Un état quelconque s'écrit ainsi :

$$|\psi\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n |\psi_n\rangle, \quad \text{avec } \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 = 1 \quad (3.7)$$

où chaque $|\psi_n\rangle$ est la projection renormalisée sur l'espace à n photons et est tel que décrit par (3.5).

3.1.4 Lien avec la seconde quantification

Établissons le lien entre première et seconde quantification ; en particulier il est nécessaire de pouvoir traduire les opérateurs de mesure de la seconde vers la première quantification, et d'établir à quelle condition l'inverse est possible. Dans les deux cas l'espace total s'écrit comme somme directe des espaces à n photons ; pour la suite de cette sous-section nous travaillons uniquement sur l'espace des états à n photons, avec n fixe.

3.1.4.1 Base de la seconde quantification

Nous avons vu que pour le sous-espace des états à 1 photon, première et seconde quantifications sont identiques ; ça n'est bien sûr pas le cas quand $n > 1$. Effet, l'espace de Hilbert que nous avons obtenu est beaucoup plus grand que celui de la seconde quantification car nous n'imposons pas d'invariance par permutation.

Introduisons l'opérateur \hat{P}_σ associé à une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, défini par son action sur la base, ainsi que l'opérateur de symétrisation \hat{S} :

$$\hat{P}_\sigma |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle = |t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}\rangle \quad \hat{S} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \hat{P}_\sigma$$

Leurs propriétés sont bien connues [14]; entre autres \hat{P}_σ est unitaire tandis que \hat{S} est un projecteur orthogonal.

Nous appelons « état symétrique » tout état $|\psi\rangle$ tel que $\forall\sigma, \hat{P}_\sigma|\psi\rangle = |\psi\rangle$. L'ensemble des états symétrique est également le sous-espace sur lequel projette \hat{S} . Ce sont les états utilisés par la seconde quantification.

En multipliant la condition $\hat{P}_\sigma|\psi\rangle = |\psi\rangle$ par chaque bra de la base et en effectuant la permutation sur celui-ci, on montre que cela se traduit sur la fonction d'onde par :

$$\forall\sigma \in \mathcal{S}_N, \forall t_1, t_2, \dots, t_n, \quad \psi(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}) = \psi(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Ainsi, les états décrits par une amplitude de probabilité invariante par toute permutation de ses arguments sont symétriques. Insistons sur le fait qu'en première quantification nous gardons le sous-espace orthogonal à celui des états symétriques.

La base canonique des vecteurs symétriques est celle de la seconde quantification; elle est composée des vecteurs définis par :

$$||t_1, t_2, \dots, t_n\rangle = \frac{\hat{S}|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle}{|\hat{S}|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle|} \quad (3.8)$$

Pour chaque vecteur de la base de première quantification, sa projection sur le sous-espace de vecteurs symétriques est à normalisation près un vecteur de la base de seconde quantification. Soit $||t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$ un vecteur cette dernière. On notera par convention⁶ :

$$\hat{S}^{-1}(|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle) = \{x \in \text{Base de 1}^{\text{re}} \text{ quantification}, \hat{S}x \propto ||t_1, t_2, \dots, t_n\rangle\}$$

Remarquez que l'espace généré par cette famille n'est pas $\{x, \hat{S}x \propto ||t_1, t_2, \dots, t_n\rangle\}$. Ce dernier est plus grand et contient tous les vecteurs du noyau de \hat{S} (l'orthogonal aux vecteurs symétriques).

Par ailleurs, en prenant un élément de la base $|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$ on montre, par l'absurde pour une inclusion et de manière directe pour l'autre, que :

$$\hat{S}^{-1}(|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle) = \{\hat{P}_\sigma |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle, \sigma \in \mathcal{S}_n\}$$

Remarque. L'orthogonal de l'ensemble des états symétriques se détermine facilement. En effet nous avons défini ce dernier comme étant :

$$\bigcap_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{Ker}[\hat{P}_\sigma - \mathbb{1}]$$

Ainsi son orthogonal est⁷ :

$$\left(\bigcap_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{Ker}[\hat{P}_\sigma - \mathbb{1}] \right)^\perp = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{Ker}[\hat{P}_\sigma - \mathbb{1}]^\perp$$

Or les \hat{P}_σ sont unitaires donc diagonalisables *via* une matrice de passage unitaire; de plus on peut montrer que ses seules valeurs propres sont 1 et -1 [14]. Ainsi $\text{Ker}[\hat{P}_\sigma - \mathbb{1}]^\perp = \text{Ker}[\hat{P}_\sigma + \mathbb{1}]$. Et donc l'orthogonal des vecteurs symétriques est généré par les x tels qu'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ avec $\hat{P}_\sigma x = -x$. \diamond

6. \hat{S} n'est pas inversible et la notation utilisée ici n'est pas non plus celle de l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel.

7. Ce qui est présenté ici est valable en dimension finie. Pour l'étendre au cas général il faudrait vérifier que les opérateurs de permutation sont continus; et il n'y a en principe qu'une inclusion dans le sens \supset , et en prenant l'adhérence du membre de droite.

3.1.4.2 Opérateurs

Voyons maintenant comment effectuer la correspondance entre les opérateurs de seconde et de première quantification.

Soit \hat{A}_{II} un opérateur de mesure de la seconde quantification. Nous nous limitons à ce qui sera utile pour la suite : on suppose que les éléments de la base canonique des états symétriques sont les vecteurs propres de l'opérateur. Cela signifie en particulier que \hat{A}_{II} garde stable l'espace des états à n photons et qu'il est local en temps. Ainsi \hat{A}_{II} est tel que :

$$\hat{A}_{\text{II}} |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle = a(t_1, t_2, \dots, t_n) |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$$

où la valeur propre $a(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle t_1, t_2, \dots, t_n | \hat{A}_{\text{II}} |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$ est une fonction symétrique par toute permutation de ses arguments, et est connue.

La question qui se pose est de définir \hat{A}_{I} , un opérateur de première quantification tel que celui-ci décrive la même physique. Le choix que nous effectuons est de définir \hat{A}_{I} sur notre base de travail de la manière suivante :

$$\boxed{\hat{A}_{\text{I}} |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle = a(t_1, t_2, \dots, t_n) |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle} \quad (3.9)$$

Remarquez que grâce à la symétrie de $a(\dots)$ par toute permutation de ses arguments cette définition implique qu'avec $|e_i\rangle$ et $|e_j\rangle$ deux vecteurs de la famille $\hat{S}^{-1}(|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle)$,

$$\langle e_i | \hat{A}_{\text{I}} |e_j\rangle = a(t_1, t_2, \dots, t_n) \delta_{i,j}$$

Ainsi pour tout vecteur x normé de l'espace généré par $\hat{S}^{-1}(|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle)$,

$$x^\dagger \hat{A}_{\text{I}} x = a(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Cela permet donc d'utiliser n'importe quel vecteur de cet espace, symétrisé ou non, et d'obtenir les mêmes prévisions que celles de la seconde quantification. Ainsi avec un opérateur de première quantification de la forme donnée par l'équation (3.9), il est inutile de travailler avec des états symétrisés. Cela est valable même quand l'opérateur n'a pas été obtenu à partir de son équivalent en seconde quantification.

Remarquez par ailleurs que de par la définition (3.9),

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \hat{A}_{\text{I}} \hat{P}_\sigma |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle = a(t_1, t_2, \dots, t_n) \hat{P}_\sigma |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$$

et donc :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \hat{P}_\sigma^\dagger \hat{A}_{\text{I}} \hat{P}_\sigma |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle = a(t_1, t_2, \dots, t_n) |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle = \hat{A}_{\text{I}} |t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$$

ce qui permet de conclure que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \hat{P}_\sigma^\dagger \hat{A}_{\text{I}} \hat{P}_\sigma = \hat{A}_{\text{I}} \quad (3.10)$$

Remarque. Étant donné un opérateur en première quantification, la condition (3.10) est nécessaire mais pas suffisante pour avoir l'opérateur de la forme (3.9). En effet, elle ne garantit pas que les vecteurs de la base soient propres, mais uniquement que la valeur propre est invariante par permutation lorsqu'ils le sont. Explicitons un contre-exemple.

On se place dans le cas de deux qbits à deux emplacements. On considère un opérateur \hat{A} tel que :

$$\langle 01|\hat{A}|01\rangle = \langle 01|\hat{A}|10\rangle = \langle 10|\hat{A}|01\rangle = \langle 10|\hat{A}|10\rangle = 1$$

On vérifie qu'il respecte bien (3.10). Mais alors :

$$\left\langle \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \middle| \hat{A} \middle| \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \right\rangle = 2$$

et donc le vecteur symétrisé donne des prédictions physiques différentes de celles de la base. \diamond

Remarque. Une alternative à ce que nous venons de présenter serait de choisir d'inclure l'orthogonal des états symétriques dans l'espace propre pour la valeur propre 0. Cela donne bien les mêmes résultats de mesure pour les états symétriques, mais rend plus compliquée l'interprétation car un vecteur de la base et son symétrisé ne donnent pas le même résultat de mesure. \diamond

3.1.5 Résumé

Nous avons vu comment passer de la seconde quantification à la première. Pour le sous-espace des états à n photons, notre base (qui n'en est pas vraiment une) de travail est constituée par les états $|t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$, qui sont normalisés selon :

$$\langle t_1, t_2, \dots, t_n | t'_1, t'_2, \dots, t'_n \rangle = \delta(t_1 - t'_1) \delta(t_2 - t'_2) \dots \delta(t_n - t'_n)$$

On peut écrire un état générique de ce sous-espace avec une fonction d'onde bien normalisée.

Compte tenu des choix effectués, tant que les opérateurs de mesure sont de la forme (3.9), nous n'avons pas besoin d'utiliser des états symétrisés pour avoir les mêmes prédictions que la théorie habituelle utilisant la seconde quantification. On vérifie qu'un opérateur est bien de la forme (3.9) en contrôlant qu'il est diagonal dans la base canonique avec des valeurs propres invariantes par toute permutation des différents temps.

3.2 NOTATIONS

Fixons quelques notations qui seront utilisées dans toute la partie. Un P majuscule est utilisé pour une probabilité ; les densités (temporelles) de probabilités sont notées p minuscule. D'autres lettres peuvent être utilisées mais ça sera toujours en majuscule pour une probabilité et minuscule pour une densité de probabilité.

Pour ne pas confondre les différents types de temps, qui jouent des rôles différents, on adopte les conventions suivantes :

- t en minuscule (avec éventuellement des indices) est utilisé pour le temps décrivant l'état de la lumière. Par exemple on notera $\int \psi(t) |t\rangle dt$.
- T en majuscule désigne le temps au déclenchement du capteur. C'est donc une variable aléatoire, qui servira également de variable aux fonctions de densités de probabilité, et opérateurs associés.

— $\tau = T - t$ désigne un délai de détection. C'est donc également une variable aléatoire.

Ces notations seront rappelées dans la [figure 3.2](#).

Par ailleurs, maintenant que nous utilisons la première quantification nous avons tout à fait le droit d'indexer des photons. Nous allons discuter de temps de détection. La convention utilisée est de parler de « premier, second ... » quand il s'agit d'un ordre chronologique et « numéro 1, 2 ... » pour désigner l'étiquette du photon.

3.3 DENSITÉ TEMPORELLE D'OPÉRATEURS

Nous souhaitons décrire un détecteur ON/OFF en prenant en considération le temps auquel celui-ci clique. Ainsi, les différents résultats possibles de la mesure sont les temps de clic, ou bien l'absence de clic. La mesure a donc un continuum de résultats possibles. Nous ne pouvons donc pas utiliser tel quel le formalisme des opérateurs positifs de mesure POVM vus en [section 2.2](#) car ceux-ci sont adaptés à des résultats discrets.

3.3.1 Définition

Autour de chaque instant T les résultats possibles de la mesure sont⁸ « le capteur s'est déclenché » ou « le capteur ne s'est pas déclenché ». La probabilité de déclenchement est proportionnelle à la taille de l'intervalle de temps infinitésimal sur lequel on travaille. On utilise donc une densité de probabilité. Celle-ci doit pouvoir se calculer directement à partir de l'état quantique, représenté par une matrice densité. On va donc définir une densité d'opérateurs de mesure.

Durant tout intervalle de temps \mathcal{T} , le capteur peut se déclencher ou ne pas le faire. C'est donc une mesure binaire, descriptible par des POVM, qu'on appelle respectivement $\hat{\Pi}^{\text{ON}}(T \in \mathcal{T})$ et $\hat{\Pi}^{\text{OFF}}(T \in \mathcal{T})$. Par définition du POVM, la probabilité que la photo-diode se déclenche durant l'intervalle \mathcal{T} pour un état ρ est :

$$P^{\text{ON}}(T \in \mathcal{T}, \rho) = \text{Tr} [\hat{\Pi}^{\text{ON}}(T \in \mathcal{T})\rho]$$

Pour un état ρ donné, la densité de probabilité $T \mapsto p^{\text{ON}}(T, \rho)$, quand elle existe, vérifie par définition :

$$\forall \mathcal{T} \subset \mathbb{R}, \quad P^{\text{ON}}(T \in \mathcal{T}, \rho) = \int_{T \in \mathcal{T}} p^{\text{ON}}(T, \rho) dT$$

De manière similaire on définit, quand c'est possible, la densité de POVM $T \mapsto \hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$ selon la propriété suivante :

$$\boxed{\forall \mathcal{T} \subset \mathbb{R}, \quad \hat{\Pi}^{\text{ON}}(T \in \mathcal{T}) = \int_{T \in \mathcal{T}} \hat{\pi}^{\text{ON}}(T) dT} \quad (3.11)$$

8. On rappelle que le temps mort est pris en compte en considérant que la mesure est finie après chaque clic. Ainsi au plus un clic est possible.

La trace et l'intégrale commutent,

$$P^{\text{ON}}(T \in \mathcal{T}, \rho) = \int_{T \in \mathcal{T}} \text{Tr} [\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)\rho] dT$$

Ainsi :

$$\forall \mathcal{T} \subset \mathbb{R}, \int_{T \in \mathcal{T}} p^{\text{ON}}(T, \rho) dT = \int_{T \in \mathcal{T}} \text{Tr} [\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)\rho] dT$$

Et donc presque partout :

$$\boxed{p^{\text{ON}}(T, \rho) = \text{Tr} [\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)\rho]} \quad (3.12)$$

Cette propriété fondamentale nous indique comment obtenir directement la densité de probabilité à partir de la densité de POVM. Cette dernière est donc suffisante pour décrire la mesure continue.

Par ailleurs comme $p^{\text{ON}}(T, \rho)$ doit être réelle et positive, pour tout T l'opérateur $\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$ est hermitien positif.

Remarque. Dans la suite nous ferons parfois l'abus de langage consistant à parler de « POVM » au lieu de « densité temporelle de POVM ». \diamond

3.3.2 Absence de clic

On ne peut pas définir de densité de probabilité ni de POVM associés au résultat de mesure « le capteur ne se déclenche pas ». La raison en est que l'absence de déclenchement à un moment donné n'est pas spécifique d'un événement, mais commun à plusieurs. Sur un intervalle infinitésimal, $\hat{\Pi}^{\text{OFF}}(T \in \mathcal{T})$ est proche de l'opérateur identité donc loin d'être proportionnel à la taille de cet intervalle. Sommer les $\hat{\Pi}^{\text{OFF}}$ n'aurait aucun sens. Définir une densité de probabilité ou d'opérateurs de mesure non plus.

Pour illustrer cela, passons à un modèle discret. On découpe le temps en N cases. Pour chaque case indexée par k on a une certaine probabilité P_k^{ON} de déclencher le capteur, et une probabilité P_k^{OFF} de ne pas le déclencher. La normalisation impose

$$\forall k, P_k^{\text{ON}} + P_k^{\text{OFF}} = 1$$

Regardons maintenant le cas où l'on s'intéresse au déclenchement du détecteur pendant les cases de temps k ou l . On serait tenté d'affirmer que pour obtenir les probabilités il suffit de sommer les probabilités de k à celles de l . Mais c'est faux; la normalisation ne serait d'ailleurs plus vérifiée (la somme vaut alors 2). Pour la probabilité de déclencher le capteur, on a bien :

$$P_{k \text{ ou } l}^{\text{ON}} = P_k^{\text{ON}} + P_l^{\text{ON}}$$

C'est la version discrète de la définition de la densité de probabilité. On ne peut par contre pas utiliser la même chose pour la probabilité de ne pas déclencher le capteur. Pour le comprendre, on commence par rappeler que pour une variable aléatoire X et des événements A et B ,

$$P(X \in A \cup B) = P(X \in A) + P(X \in B) - P(X \in A \cap B)$$

Cela nous rappelle que sommer directement les probabilités ne fonctionne que pour des ensembles d'événements disjoints, car sinon on compte deux fois le même événement. Or ici $A \cap B$ regroupe tous les événements pour lesquels la détection ne se fait ni dans la case k ni dans la l , par exemple lorsque le détecteur se déclenche durant n'importe quelle autre case m (le détecteur ne se déclenche qu'une fois en tout). On ne peut donc pas sommer les probabilités de ne pas déclencher le capteur. Dans le cas continu, on ne peut pas non plus définir de densité de probabilité de ne pas déclencher le capteur. Cela va de même pour les densités de POVM.

3.3.3 Normalisation

La normalisation des POVM s'exprime en prenant en compte tous les résultats possibles. Ici la mesure s'effectue continuellement et il faut spécifier un intervalle de temps pour définir une mesure en termes habituels. Sur un intervalle de temps \mathcal{T} , la mesure effectuée par le détecteur peut mener à deux résultats : ou bien il clique ou bien il ne clique pas. Le premier cas est décrit par l'opérateur positif $\hat{\Pi}^{\text{ON}}(T \in \mathcal{T})$ et le second par $\hat{\Pi}^{\text{OFF}}(T \in \mathcal{T})$. La normalisation impose :

$$\hat{\Pi}^{\text{ON}}(T \in \mathcal{T}) + \hat{\Pi}^{\text{OFF}}(T \in \mathcal{T}) = \mathbb{1}$$

La normalisation d'une densité de POVM est similaire à celle d'une densité de probabilité, à ceci près qu'on travaille avec des opérateurs positifs et non des nombres. On rappelle que pour tout T , $\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$ est hermitien positif. Sa normalisation se traduit par le fait que :

$$\hat{\Pi}^{\text{OFF}}(T \in \mathbb{R}) = \mathbb{1} - \int_{T \in \mathbb{R}} \hat{\pi}^{\text{ON}}(T) dT$$

doit être positif.

3.3.4 Fonction et opérateur de répartition

Soit une variable aléatoire X admettant une densité de probabilité $x \mapsto p(x)$. La fonction $x \mapsto P(X < x)$ est la fonction de répartition de X . Nous la noterons $P(x)$. Par définition de la densité de probabilité,

$$p(x) = \frac{d}{dx} P(x)$$

Cette fonction est très utile et nous souhaitons avoir son équivalent pour les opérateurs. Définissons l'opérateur de répartition par :

$$\hat{\Pi}^{\text{ON}}(T) = \int_{-\infty}^T \hat{\pi}^{\text{ON}}(T') dT' \quad (3.13)$$

Il est immédiat de vérifier que :

$$\frac{d}{dT} \hat{\Pi}^{\text{ON}}(T) = \hat{\pi}^{\text{ON}}(T) \quad (3.14)$$

et que

$$P^{\text{ON}}(T, \rho) = \text{Tr} [\hat{\Gamma}^{\text{ON}}(T)\rho] \quad (3.15)$$

$\hat{\Gamma}^{\text{ON}}(T)$ est donc le POVM correspondant au résultat de mesure « le détecteur clique avant le temps T ». C'est un POVM usuel, et non une densité.

3.4 MESURE POUR UN PHOTON IMPULSIONNEL

Commençons par décrire la mesure quand exactement un photon arrive sur le capteur à un temps t bien précis ; l'état du champ est donc $|t\rangle$ et la matrice densité correspondant $\rho = |t\rangle\langle t|$. Ce cas simpliste va surtout nous permettre de décrire les hypothèses.

On appelle T le temps auquel le capteur se déclenche et $\tau = T - t$ le délai (aléatoire) au bout duquel il est détecté. On suppose que cette variable aléatoire admet une densité $\tau \mapsto \vartheta(\tau)$ propre au détecteur considéré. Ainsi la probabilité qu'un tel photon soit détecté au temps $T = t + \tau$ durant une durée infinitésimale dT près est $\vartheta(\tau) d\tau = \vartheta(T - t) dT$. La densité de probabilité de clic au temps T s'exprime :

$$p^{\text{ON}}(T, |t\rangle\langle t|) = \vartheta(T - t) \quad (3.16)$$

Pour respecter la causalité, $\forall \tau < 0$, $\vartheta(\tau) = 0$: le détecteur ne peut pas se déclencher avant l'arrivée du photon. De plus $\vartheta(\tau)$ est normalisée :

$$\int \vartheta(\tau) d\tau = 1 \quad (3.17)$$

Nous illustrons les notations ainsi qu'une forme typique de $\vartheta(\tau)$ dans la [figure 3.2](#).

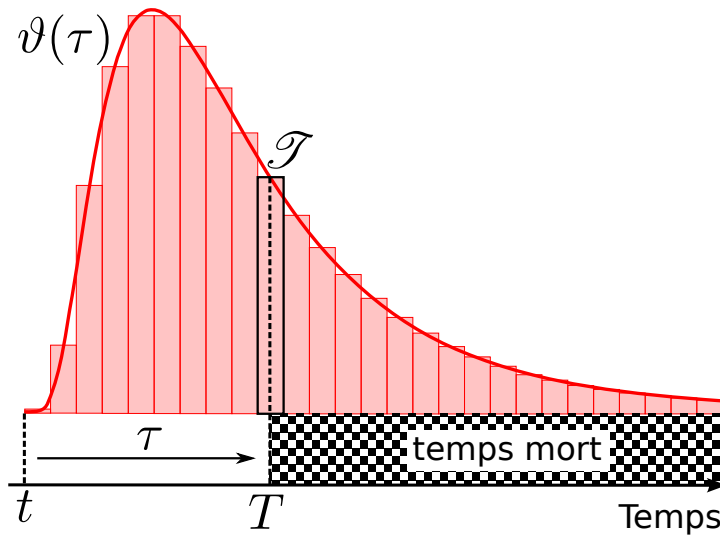


FIGURE 3.2 – Notations utilisées et forme typique de la fonction de réponse $\vartheta(\tau)$.

Introduisons la fonction de répartition $\Theta(\tau)$ (voir [sous-section 3.3.4](#)) de la loi des délais τ :

$$\Theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \vartheta(\tau') d\tau' \quad (3.18)$$

La normalisation de $\vartheta(\tau)$ se traduit par :

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Theta(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Theta(\tau) = 1$$

Enfin, ajoutons la possibilité pour le capteur de « rater » des photons. Pour conserver la fonction $\vartheta(\tau)$ bien normalisée, nous introduisons l'efficacité de détection η . La densité de probabilité de détecter le photon est :

$$p^{\text{ON}}(T, |t\rangle\langle t|) = \eta \vartheta(T - t) \quad (3.19)$$

On déduit de cette expression et des normalisations la limite de la fonction de répartition $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} P^{\text{ON}}(\tau) = \eta$. Ainsi l'efficacité telle que définie correspond bien à la probabilité d'avoir détecté le photon quand on ne s'intéresse pas au temps auquel il a été détecté.

Remarque. Les résultats possibles de la mesure sont tous les $T \in \mathbb{R}$ ainsi que l'absence de clic. Vu que $P^{\text{ON}}(T, |t\rangle\langle t|) = \eta \int_{-\infty}^T \vartheta(T' - t) dT'$, on pourrait remplacer l'absence de détection par un clic à un temps virtuel $T = +\infty$ et tout reformuler sans séparer les cas ON et OFF. \diamond

Pour la suite, la fonction $\vartheta(T - t)$ est considérée comme une donnée décrivant le détecteur. Nous allons voir comment construire les opérateurs de mesure à partir de cette fonction.

3.5 PHOTONS SIMULTANÉS

Commençons par exprimer l'opérateur de mesure dans un cas simple : quand tous les photons sont simultanés. Remarquez que dans ce cas les première et seconde quantification sont équivalentes. Comme on travaille avec un seul temps t , pour cette section on utilise la notation $|k\rangle = |t, t, \dots, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{k!}} \hat{a}^\dagger(t) |0\rangle$. On utilisera par contre la possibilité offerte par la première quantification d'étiqueter les photons.

3.5.1 Expression générique de la densité de POVM

On cherche à établir la densité de POVM $T \mapsto \hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$. Nous supposons le détecteur indépendant de la phase du champ électromagnétique ; pour traduire cela dans l'expression de l'opérateur de mesure nous effectuons l'hypothèse que $\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$ est diagonal dans la base de Fock. Ainsi on peut l'écrire sous la forme :

$$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \sum_k c_k(T) |k\rangle\langle k|$$

Il nous faut exprimer les coefficients $c_k(T)$. Pour cela travaillons dans la base de Fock. Soit un état $|k\rangle$, dont la matrice densité est $\rho = |k\rangle\langle k|$. Afin de simplifier les notations, $p_k^{\text{ON}}(T)$ est la densité de probabilité de déclencher le capteur pour cet état. On le définit formellement comme étant $p_k^{\text{ON}}(T) = p^{\text{ON}}(T, |k\rangle\langle k|)$. On a alors

$$p_k^{\text{ON}}(T) = \text{Tr}[\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) |k\rangle\langle k|] = \langle k | \hat{\pi}^{\text{ON}}(T) |k\rangle = c_k(T)$$

On peut donc écrire :

$$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \sum_k p_k^{\text{ON}}(T) |k\rangle\langle k| \quad (3.20)$$

Ainsi pour déterminer entièrement la densité de POVM, il suffit de calculer la densité de probabilité de déclenchement du capteur pour les états de Fock.

3.5.2 Principe du modèle

Pour un détecteur ON/OFF, une fois un premier photon détecté le capteur devient aveugle. Ainsi nous devons calculer la loi de probabilité du premier photon détecté, en s'assurant qu'il est bien le premier. Nous décomposons virtuellement le fonctionnement du détecteur en deux étapes :

1. chaque photon est détecté à un temps aléatoire, indépendant de celui des autres photons ;
2. pour établir la statistique du temps de déclenchement on prend en compte uniquement le plus petit des temps de détection des photons.

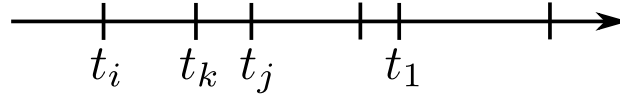


FIGURE 3.3 – Illustration de la première étape : répartition des délais de mesure des photons.

Quand on envoie beaucoup de photons, en général les temps de détection virtuels de ceux-ci s'étalent et explorent aussi les extrêmes. Ainsi, en envoyant beaucoup de photons simultanément on s'attend à un temps de clic du détecteur statistiquement plus précoce qu'avec un seul photon.

On rappelle qu'une fois que le détecteur s'est déclenché, la mesure est considérée comme achevée. Quand la photo-diode est de nouveau disponible après son temps mort, on considère qu'il s'agit d'une nouvelle mesure.

3.5.3 Expression de la probabilité

Calculons maintenant la densité de probabilité $p_k^{\text{ON}}(T)$. Pour cela nous allons commencer par exprimer sa fonction de répartition $P_k^{\text{ON}}(T)$, qui décrit la probabilité que le détecteur ait cliqué avant l'instant T .

Plus formellement, nous attribuons à chaque photon i un délai de détection τ_i , qui est aléatoire et dont la loi est donnée par la densité $\eta\vartheta(\tau)$ et la probabilité $1 - \eta$ que le photon ne soit pas du tout détecté. Le temps auquel clique le détecteur est la variable aléatoire $\min_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (t + \tau_i)$, en ayant décrit⁹ l'absence de détection par $\tau_i = +\infty$. Ainsi,

$$P_k^{\text{ON}}(T) = P\left(\min_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (t + \tau_i) \leq T\right) = 1 - P\left(\min_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (t + \tau_i) > T\right)$$

9. Cette convention permet de ne pas avoir à distinguer le cas où le photon n'est pas détecté lors des comparaisons.

Or on a toujours un nombre fini de photon (aussi grand puisse-t-il être) et donc le minimum est bien défini. On peut alors remarquer que :

$$\min_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (t + \tau_i) > T \Leftrightarrow \forall i, t + \tau_i > T \Leftrightarrow \forall i, \tau_i > T - t$$

Ainsi on peut écrire :

$$P_k^{\text{ON}}(T) = 1 - P(\forall i, \tau_i > T - t)$$

Par ailleurs, en utilisant la définition (3.18) de $\Theta(\tau)$ on montre que,

$$P(\tau_j > T - t) = 1 - \eta\Theta(T - t)$$

Les photons étant virtuellement indépendamment détectés,

$$P(\forall i, \tau_i > T - t) = \prod_{i=1}^k P(\tau_i > T - t) = [1 - \eta\Theta(T - t)]^k$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{P_k^{\text{ON}}(T) = 1 - [1 - \eta\Theta(T - t)]^k} \quad (3.21)$$

En dérivant par rapport à T on obtient la densité de probabilité du temps de clic :

$$\boxed{p_k^{\text{ON}}(T) = k\eta\vartheta(T - t) [1 - \eta\Theta(T - t)]^{k-1}} \quad (3.22)$$

Cette expression peut s'interpréter de la manière suivante : pour que le photon i soit détecté en premier, il faut qu'il déclenche effectivement le détecteur au temps T ; la probabilité correspondante est $\eta\vartheta(T - t)$. Mais il faut aussi qu'aucun des $k - 1$ autres photons n'ait déclenché le détecteur avant T . Pour un photon j quelconque, $\eta\Theta(T - t)$ est la probabilité qu'il ait été détecté avant T ; et donc $1 - \eta\Theta(T - t)$ est celle qu'il ne l'ait pas été.

Les détections virtuelles des photons ayant été supposées indépendants, il suffit de multiplier tous ces termes entre eux. Enfin le facteur k provient du fait que chacun des photons peut être celui qui déclenche le détecteur.

L'expression de la densité de probabilité de temps de clic (3.22) est illustrée par la figure 3.4. On remarque que plus le nombre de photons envoyés sur le détecteur est important, plus celui-ci cliquera tôt, comme annoncé en sous-section 3.5.2.

3.5.4 Expression de la densité de POVM

On a vu que la densité de POVM s'exprime :

$$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \sum_k p_k^{\text{ON}}(T) |k\rangle\langle k| \quad (3.20)$$

Ainsi on obtient :

$$\boxed{\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \eta\vartheta(T - t) \sum_k k [1 - \eta\Theta(T - t)]^{k-1} |k\rangle\langle k|} \quad (3.23)$$

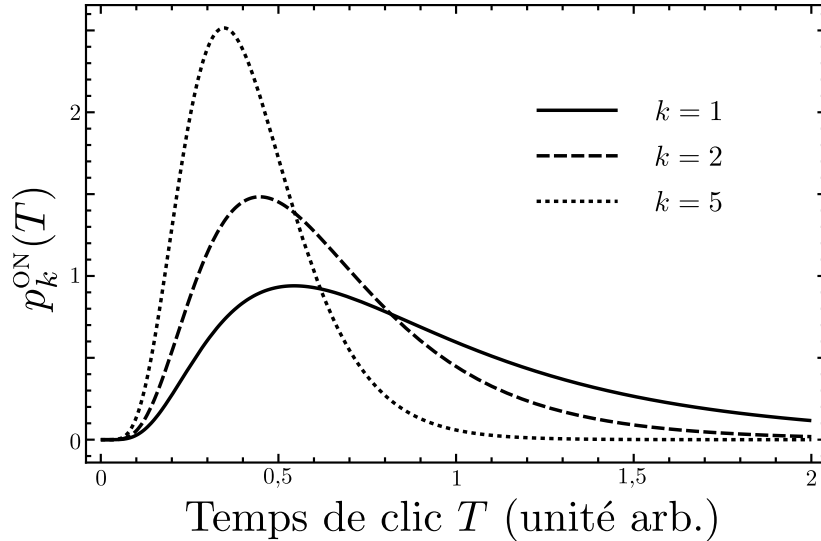


FIGURE 3.4 – Illustration de l'équation (3.22). Densité de probabilité du temps de clic du détecteur pour $k = 1, 2, 5$ photons simultanés. Le temps est adimensionné par la gigue moyenne, et la référence de temps est l'arrivée des photons sur le détecteur. La gigue pour un photon suit une loi log-normale d'écart type $\frac{1}{2}$. Afin d'isoler les effets temporels on a choisi un détecteur sans perte : $\eta = 1$.

3.5.5 Cas limite : détecteur sans délai

Pour retrouver le cas où le détecteur n'a aucun délai, on donne à la fonction de réponse du détecteur la forme d'une distribution de Dirac : $\vartheta(\tau) = \delta(\tau)$. Puis on va calculer

$$P_k^{\text{ON}} = \int_{t-\Delta\tau}^{t+\Delta\tau} p_k^{\text{ON}}(T') dT'$$

Avec $\Delta\tau > 0$ et arbitrairement petit. Le but est de ne garder que la probabilité de déclenchement du capteur à $T = t$.

Puisque l'intégrande est nulle pour les temps T' inférieurs à t , on peut étendre la borne inférieure jusqu'à $-\infty$. Alors en utilisant l'équation (3.21),

$$P_k^{\text{ON}} = \int_{-\infty}^{t+\Delta\tau} p_k^{\text{ON}}(T') dT' = P_k^{\text{ON}}(t + \Delta\tau) = 1 - [1 - \eta\Theta(\Delta\tau)]^k$$

Or de par les définitions,

$$\Theta(\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{\Delta\tau} \vartheta(\tau) d\tau = 1$$

On peut donc conclure :

$$P_k^{\text{ON}} = 1 - (1 - \eta)^k \quad (3.24)$$

On obtient le résultat habituel : la probabilité que le détecteur ne clique pas est donnée par une loi géométrique [41].

Remarque. On aurait eu le même résultat en gardant un détecteur quelconque mais en s'intéressant à la probabilité qu'il clique sans se préoccuper de savoir à quel temps. Formellement cette probabilité est $\lim_{T \rightarrow \infty} P_k^{\text{ON}}(T)$. \diamond

3.6 CAS GÉNÉRAL

Établissons maintenant l'expression de la densité d'opérateurs de mesure dans cas de photons pas nécessairement simultanés. Nous travaillons maintenant pleinement avec les usages de la première quantification, comme détaillé en [sous-section 3.1.3](#).

3.6.1 Expression générique du POVM

En développant sur la pseudo-base présentée dans l'équation (3.4), l'expression la plus générale d'un opérateur est :

$$\sum_{n,n'} \iint c_{n,n'}(t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_{n'}) |t_1, \dots, t_n\rangle\langle t'_1, \dots, t'_{n'}| dt_1 \dots dt_n dt'_1 \dots dt'_{n'}$$

On s'intéresse ici à la densité de POVM $\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$. Considérant que le détecteur ON/OFF est sensible uniquement à la puissance optique instantanée et donc insensible à la phase et aux cohérences entre des temps différents, on fait l'hypothèse que les POVM s'écrivent sous la forme diagonale suivante :

$$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int c_k(T; t_1, \dots, t_k) |t_1, \dots, t_k\rangle\langle t_1, \dots, t_k| dt_1 \dots dt_k$$

où T est le temps de déclenchement du capteur.

Pour déterminer l'expression des $c_k(T; t_1, \dots, t_k)$ nous allons procéder comme précédemment en les identifiant à une densité de probabilité calculée classiquement.

Pour un état caractérisé par une matrice densité ρ , la densité de probabilité de déclenchement du détecteur au temps T est

$$p^{\text{ON}}(T, \rho) = \text{Tr}[\rho \hat{\pi}^{\text{ON}}(T)]$$

En particulier, dans le cas où k photons arrivent sur le capteur aux temps $(t_i)_{i \in [1,k]}$, la matrice densité s'écrit $\rho(t_1, \dots, t_k) = |t_1, \dots, t_k\rangle\langle t_1, \dots, t_k|$. On a alors

$$p^{\text{ON}}(T, \rho(t_1, \dots, t_k)) = \text{Tr}[\rho(t_1, \dots, t_k) \hat{\pi}^{\text{ON}}(T)] = c_k(T; t_1, \dots, t_k)$$

Et donc

$$\boxed{\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int p^{\text{ON}}(T, \rho(t_1, \dots, t_k)) |t_1, \dots, t_k\rangle\langle t_1, \dots, t_k| dt_1 \dots dt_k} \quad (3.25)$$

Ainsi connaître la densité de probabilité $p^{\text{ON}}(T, \rho(t_1, \dots, t_k))$ est équivalent à établir les opérateurs de mesure.

Remarquons que $\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$ ne mélange pas les espaces ayant des nombres de photons différents. Afin de pouvoir par la suite simplifier les notations, définissons les opérateurs $\hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T)$ tels que :

$$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \sum_k \hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T) \quad (3.26a)$$

Ils s'expriment à partir des densités de probabilités :

$$\hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T) = \int p^{\text{ON}}(T, \rho(t_1, \dots, t_k)) |t_1, \dots, t_k\rangle\langle t_1, \dots, t_k| dt_1 \dots dt_k \quad (3.26b)$$

3.6.2 Calcul de probabilités

Comme précédemment, on attribue à chaque photon un temps de détection fictif calculé selon une probabilité individuelle puis on s'intéresse à la loi du temps de première détection. Pour le photon i , son temps de détection (quand il ne se perd pas) est la somme de son temps d'arrivée sur le détecteur t_i et d'un délai aléatoire τ_i qui suit une loi de densité $\vartheta(\tau)$. La variable aléatoire qui nous intéresse est $T = \min_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (t_i + \tau_i)$.

On commence de nouveau par établir sa fonction de répartition :

$$\begin{aligned} P_k^{\text{ON}}(T) &= P\left(\min_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (t_i + \tau_i) \leq T\right) \\ &= 1 - P\left(\min_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (t_i + \tau_i) > T\right) \\ &= 1 - P(\forall i, t_i + \tau_i > T) \\ &= 1 - P(\forall i, \tau_i > T - t_i) \end{aligned}$$

Or pour un photon i ,

$$P(\tau_i > T - t_i) = 1 - \eta\Theta(T - t_i)$$

Ainsi on arrive à l'expression :

$$\boxed{P_k^{\text{ON}}(T) = 1 - \prod_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} [1 - \eta\Theta(T - t_i)]} \quad (3.27)$$

En dérivant, on obtient la densité de probabilité :

$$\boxed{p^{\text{ON}}(T, \rho(t_1, \dots, t_k)) = \sum_{i=1}^k \left(\eta\vartheta(T - t_i) \prod_{j \neq i} [1 - \eta\Theta(T - t_j)] \right)} \quad (3.28)$$

Cette expression est similaire à celle obtenue en ayant considéré des photons simultanés (3.22), à la différence près que chacun a un temps d'arrivée sur le détecteur qui lui est propre.

Notez que la probabilité est invariante par permutation des différents temps. L'expression de la densité de POVM donnée par (3.25) étant celle d'un opérateur diagonal dans la base canonique, on a bien obtenu un opérateur de mesure de la forme (3.9), donc compatible avec les exigences de la seconde quantification.

L'expression (3.28) permet de mener au résultat précédent dans le cas où les photons sont simultanés. Son comportement est aussi tout à fait correct pour des photons envoyés régulièrement à un intervalle grand devant le temps caractéristique de $\tau \mapsto \vartheta(\tau)$: pour un temps T autour de celui d'arrivée du premier photon seul le terme correspondant à celui-ci a un $\vartheta(T - t_i)$ non nul, et le produit sur j est égal à 1 ; on retrouve donc la densité de probabilité qu'on aurait s'il était tout seul ; pour les suivants c'est la même chose mais le produit vaut $(1 - \eta)^l$ où l est le nombre de photons arrivés avant le photon considéré, ce qui correspond à la probabilité qu'aucun des photons précédent n'ait déclenché le détecteur.

3.6.3 Expression de l'opérateur

L'équation (3.25) nous donne l'expression du POVM à partir de la densité de probabilité obtenue à l'équation (3.28). Nous allons simplifier l'expression. Concentrons-nous sur le sous-espace contenant k photons, et travaillons avec $\hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T)$ tel que défini par l'équation (3.26a). En injectant la densité de probabilité sans l'expression générique, on calcule que :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T) &= \int \left[\sum_{i=1}^k \left[\eta \vartheta(T - t_i) \prod_{j \neq i} (1 - \eta \Theta(T - t_j)) \right] \right] |t_1, \dots, t_k\rangle \langle t_1, \dots, t_k| dt_1 \dots dt_k \\ &= \sum_{i=1}^k \eta \int \vartheta(T - t_j) \prod_{j \neq i} (1 - \eta \Theta(T - t_j)) |t_1, \dots, t_k\rangle \langle t_1, \dots, t_k| dt_1 \dots dt_k \end{aligned}$$

Chacun des termes de la somme s'exprime avec un produit de fonctions dépendant chacune du paramètre d'un seul photon. Ainsi ils sont factorisables :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T) &= \sum_{i=1}^k \left[\eta \int \vartheta(T - t_i) |t_i\rangle \langle t_i| dt_i \right] \bigotimes_{j \neq i} \left[\int (1 - \eta \Theta(T - t_j)) |t_j\rangle \langle t_j| dt_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \left[\eta \int \vartheta(T - t_i) |t_i\rangle \langle t_i| dt_i \right] \bigotimes_{j \neq i} \left[\mathbb{1} - \eta \int \Theta(T - t_j) |t_j\rangle \langle t_j| dt_j \right] \end{aligned}$$

où $\mathbb{1} = \int |t'\rangle \langle t'| dt'$ représente l'opérateur identité de l'espace à 1 photon réparti dans le temps de manière quelconque.

Remarque. La notation du produit tensoriel peut être trompeuse. En effet c'est ici l'étiquette i ou j qui permet de savoir à quelle composante appartient chaque terme. Par exemple la notation

$$\sum_{i \in \{1,2,3\}} \hat{A}_i \bigotimes_{j \neq i} \hat{B}_j$$

signifie avec les conventions usuelles :

$$\hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2 \otimes \hat{B}_3 + \hat{B}_1 \otimes \hat{A}_2 \otimes \hat{B}_3 + \hat{B}_1 \otimes \hat{B}_2 \otimes \hat{A}_3$$

◇

Définissons ensuite l'opérateur diagonal :

$$\hat{\Theta}(T) = \int \Theta(T - t) |t\rangle \langle t| dt \quad (3.29)$$

Cet opérateur agit sur les états contenant exactement un photon distribué dans le temps. C'est le POVM décrivant le résultat de mesure « le photon est détecté avant le temps T », lorsqu'on utilise un détecteur d'efficacité $\eta = 1$. Son expression est celle d'une convolution entre la fonction de répartition du délai de détection et les projecteurs sur les états de temps certain.

Sur le même espace on peut définir l'opérateur densité de POVM associé à la densité de probabilité de déclenchement du détecteur lorsque $\eta = 1$:

$$\hat{\vartheta}(T) = \int \vartheta(T-t) |t\rangle\langle t| dt \quad (3.30)$$

Rappelons que la définition de la fonction $\Theta(\tau)$ est :

$$\Theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \vartheta(\tau') d\tau' \quad (3.18)$$

En l'injectant dans l'équation (3.29), on obtient après changement de variable et échange des intégrales :

$$\hat{\Theta}(T) = \int_{-\infty}^T \hat{\vartheta}(T') dT' \quad (3.31)$$

La relation entre les opérateurs est similaire à celle qui existe entre les fonctions. On retrouve les propriétés qui ont été présentées en sous-section 3.3.4. En dérivant cette dernière équation il vient :

$$\frac{d\hat{\Theta}}{dT} = \hat{\vartheta}(T) \quad (3.32)$$

Ces deux opérateurs agissent sur les espaces à un photon réparti dans le temps de manière quelconque.

Revenons à l'étude des opérateurs de mesure agissant sur les états à k photons. Afin de bien différencier les espaces correspondant à chaque photon on garde l'indice de l'étiquette du photon sur l'opérateur, même s'ils sont *a priori* tous identiques. Ainsi la densité de POVM peut se mettre sous la forme suivante :

$$\hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T) = \sum_{i=1}^k \eta \hat{\vartheta}_i(T) \bigotimes_{j \neq i} [\mathbb{1} - \eta \hat{\Theta}_j(T)] \quad (3.33)$$

L'opérateur du POVM correspondant à la fonction de répartition peut s'écrire :

$$\hat{\Gamma}_k^{\text{ON}}(T) = \bigotimes_{i=1}^k \mathbb{1} - \bigotimes_{i=1}^k [\mathbb{1} - \eta \hat{\Theta}_i(T)] \quad (3.34)$$

Et on vérifie aisément en le dérivant l'équation (3.14) :

$$\frac{d}{dT} \hat{\Gamma}_k^{\text{ON}}(T) = \hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T)$$

$\hat{\Gamma}_k^{\text{ON}}(T)$ est donc bien le POVM correspondant au résultat de mesure « le détecteur clique avant le temps T ».

Remarque. En présence de coups d'obscurité, il faut un peu modifier la densité d'opérateurs. Comme ces coups sont par définition indépendants de l'état du champ, on ajoute un terme proportionnel à l'identité. La constante de proportionnalité est le taux de coups sombres.

Pour prendre en compte les phénomènes de contre-impulsion (after-pulse), il faut se souvenir de la manière dont nous avons géré le temps mort : l'expérience est considérée comme finie après le clic et quand on rallume le détecteur une nouvelle commence. Ainsi ces phénomènes seront pris en compte de la même manière que le bruit d'obscurité, en autorisant le taux de bruit à dépendre du temps T . \diamond

3.7 RÉSUMÉ

Nous avons effectué les hypothèses suivantes sur le détecteur ON/OFF :

- détecteur lent comparativement à la période de la porteuse ;
- efficacité η est une constante ;
- pour un photon localisé en temps le délai est décrit par une densité $\vartheta(\tau)$;
- détections virtuelles indépendantes ;
- détecteur insensible à la phase et la cohérence temporelle.

Avec $\Theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \vartheta(\tau') d\tau'$ (équation (3.18)), nous avons défini en (3.29) et (3.30) les opérateurs agissant sur l'espace des états à un photon :

$$\hat{\Theta}(T) = \int \Theta(T-t) |t\rangle\langle t| dt \quad \hat{\vartheta}(T) = \int \vartheta(T-t) |t\rangle\langle t| dt$$

Ils sont liés par :

$$\hat{\Theta}(T) = \int_{-\infty}^T \hat{\vartheta}(T') dT' \quad \hat{\vartheta}(T) = \frac{d\hat{\Theta}}{dT}$$

La densité d'opérateurs de mesure décrivant le détecteur ON/OFF s'exprime (équations (3.26a) et (3.33)) :

$$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \sum_k \hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T), \quad \text{avec} \quad \hat{\pi}_k^{\text{ON}}(T) = \sum_{i=1}^k \eta \hat{\vartheta}_i(T) \bigotimes_{j \neq i} [\mathbb{1} - \eta \hat{\Theta}_j(T)]$$

Pour l'état pur de base $|t_1, \dots, t_k\rangle$, la densité de probabilité du temps de clic s'écrit :

$$p^{\text{ON}}(T, \rho(t_1, \dots, t_k)) = \sum_{i=1}^k \left(\eta \vartheta(T-t_i) \prod_{j \neq i} [1 - \eta \Theta(T-t_j)] \right) \quad (3.28)$$

ILLUSTRATIONS POUR SITUATIONS EXPÉRIMENTALES

Dans ce chapitre nous présentons quelques exemples d'application de l'expression de la densité d'opérateurs de mesure obtenue au chapitre précédent. Pour cela nous allons considérer des situations courantes dans les expériences. Pour chacune nous regarderons des cas avec peu de photons et le cas général.

Nous commencerons par des cas particuliers de mesure directe, avant de nous intéresser au délai entre les clics de deux détecteurs et enfin nous appliquerons cela au cas d'une mesure de corrélation temporelle. L'exemple de la source de photons annoncés étant particulièrement important, nous lui dédierons le prochain chapitre, il n'est donc pas traité ici.

4.1 MESURE DIRECTE

Commençons par nous intéresser à une mesure directe de la lumière incidente. Bien évidemment le cas général est celui traité au chapitre précédent. Nous allons ici nous intéresser à des cas particuliers d'états incidents.

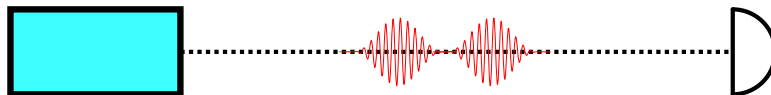


FIGURE 4.1 – Le détecteur mesure directement la lumière provenant de la source.

4.1.1 Stratégie pour des photons indépendants

Rappelons d'abord une petite propriété qui va nous être utile :

Lemme 4.1. Soient deux espaces de Hilbert \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B ; on prend respectivement \hat{A} et \hat{B} des opérateurs agissant chacun sur un de ces espaces. $\hat{A} \otimes \hat{B}$ est un opérateur sur $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Alors,

$$\text{Tr} [\hat{A} \otimes \hat{B}] = \text{Tr}_A [\hat{A}] \text{Tr}_B [\hat{B}]$$

Les opérateurs $\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$ et $\hat{\Gamma}^{\text{ON}}(T)$ ont été exprimés (équations (3.33) et (3.34)) à partir d'opérateurs agissant sur les états à 1 photon. Ainsi dès qu'on s'intéresse à des états dont la matrice densité est séparable sous forme de produit d'états à 1 photon, les traces se factorisent. Pour résumer :

$$\hat{\pi} = \bigotimes_i \hat{\pi}_i, \quad \rho = \bigotimes_i \rho_i \implies \text{Tr} [\hat{\pi}\rho] = \prod_i \text{Tr} [\hat{\pi}_i \rho_i]$$

Il suffit alors de calculer les traces sur des espaces à 1 photon, ce qui va être notre premier cas particulier.

4.1.2 Cas à 1 photon

On étudie le cas où 1 unique photon, réparti entre les différents modes temporels, est envoyé sur la photo-diode.

4.1.2.1 État pur

On décrit un état pur générique par une fonction d'onde :

$$|\psi\rangle = \int \psi(t) |t\rangle dt$$

On cherche à calculer

$$p^{\text{ON}}(T, |\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr} [\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) |\psi\rangle\langle\psi|] = \langle\psi|\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)|\psi\rangle$$

La densité de POVM a été exprimée en (3.33). Ici il n'y a qu'un photon et donc elle s'écrit simplement :

$$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \eta \hat{\vartheta}(T) = \eta \int \vartheta(T-t) |t\rangle\langle t| dt \quad (4.1)$$

En mettant ensemble les différentes expressions, il vient :

$$\langle\psi|\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)|\psi\rangle = \eta \int \vartheta(T-t) \psi^*(t') \psi(t'') \langle t'|t\rangle \langle t|t''\rangle dt dt' dt''$$

D'où :

$$\boxed{p^{\text{ON}}(T, |\psi\rangle\langle\psi|) = \eta \int \vartheta(T-t) |\psi(t)|^2 dt} \quad (4.2)$$

Le résultat est que la densité de probabilité de détection du photon est la convolution entre la fonction de réponse (à 1 photon) du détecteur et la densité de probabilité d'arrivée du photon sur le détecteur.

4.1.2.2 État mélangé

On étudie maintenant un état mélangé générique :

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \int \rho(t', t'') |t'\rangle\langle t''| dt' dt''$$

où la fonction ρ vérifie les conditions nécessaires à ce que ρ soit une matrice densité (hermitienne, définie positive et de trace unitaire).

En utilisant l'expression de $\hat{\pi}^{\text{ON}}(T)$ donnée par l'équation (4.1), on peut calculer le produit :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^{\text{ON}}(T)\rho &= \eta \int \vartheta(T-t) \rho(t', t'') |t\rangle \langle t|t'\rangle \langle t''| dt dt' dt'' \\ &= \eta \int \vartheta(T-t) \rho(t, t'') |t\rangle\langle t''| dt dt'' \end{aligned}$$

L'opérateur est exprimé dans la base de travail. Prendre sa trace est direct :

$$\boxed{p^{\text{ON}}(T, \rho) = \eta \int \vartheta(T-t) \rho(t, t) dt} \quad (4.3)$$

Ainsi la convolution porte désormais sur la diagonale de la matrice densité.

4.1.3 État à k photons séparables

Les états à k photons pour lesquels on va préciser la mesure sont ceux dont la matrice densité s'écrit sous forme factorisée : $\rho = \bigotimes_{i=1}^k \rho_i$

Mettre en œuvre la stratégie présentée en sous-section 4.1.1 est ici direct. En utilisant l'expression de la densité de POVM donnée par (3.33), la probabilité de déclenchement du détecteur se met sous la forme :

$$p^{\text{ON}}(T, \bigotimes_{i=1}^k \rho_i) = \sum_{i=1}^k \eta \text{Tr} [\hat{\vartheta}_i(T) \rho_i] \prod_{j \neq i} (1 - \eta \text{Tr} [\hat{\Theta}_j(T) \rho_j]) \quad (4.4)$$

Le calcul de la trace sur les états à 1 photon $\text{Tr} [\hat{\vartheta}_i(T) \rho_i]$ vient d'être effectué (4.3). $\hat{\Theta}(T)$ est comme $\hat{\vartheta}(T)$ une convolution entre une fonction réelle et les opérateurs de projections sur les éléments de la base (voir équation (3.29)); leurs traces avec une matrice densité quelconque prennent une forme similaire.

On retrouve dans cette somme que le i^{e} terme correspond au cas où le photon numéro i est détecté et les autres perdus. Ainsi avec un nombre quelconque de photons séparables la densité de probabilité de clic se calcule simplement.

4.1.3.1 Illustration pour deux photons séparables

Prenons l'exemple où l'on envoie deux photons non intriqués sur la photo-diode, chacun dans un état pur quelconque :

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \int \psi_1(t) |t\rangle dt \\ |\psi_2\rangle &= \int \psi_2(t) |t\rangle dt \end{aligned}$$

On peut appliquer directement la formule générique (4.4) :

$$\begin{aligned} p^{\text{ON}}(T, |\psi_1, \psi_2\rangle \langle \psi_1, \psi_2|) &= \eta \int \vartheta(T - t_1) |\psi_1(t_1)|^2 dt_1 \left[1 - \eta \int \Theta(T - t_2) |\psi_2(t_2)|^2 dt_2 \right] \\ &\quad + \left[1 - \eta \int \Theta(T - t_1) |\psi_1(t_1)|^2 dt_1 \right] \eta \int \vartheta(T - t_2) |\psi_2(t_2)|^2 dt_2 \quad (4.5) \end{aligned}$$

Dans cette expression le premier terme correspond au cas où le photon n° 1 est détecté en premier et le second terme à celui où le photon n° 2 est détecté en premier. On a illustré l'équation (4.4) : pour des photons séparables on obtient la densité de probabilité de déclenchement du capteur à partir de l'expression du POVM (3.33) en remplaçant les opérateurs $\hat{\vartheta}(T)$ et $\hat{\Theta}(T)$ par la convolution de la fonction sous-jacente avec l'amplitude de probabilité du photon considéré.

Remarque. Nous n'en avons pas eu besoin, mais précisons que la densité de POVM s'écrit pour $k = 2$:

$$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T) = \eta \hat{\vartheta}(T) \otimes [\mathbf{1} - \eta \hat{\Theta}(T)] + [\mathbf{1} - \eta \hat{\Theta}(T)] \otimes \eta \hat{\vartheta}(T)$$

où l'ordre est cette fois ce qui permet d'identifier les espaces dans le produit tensoriel. \diamond

4.2 MESURE DE DÉLAI

Passons à l'étude d'une expérience où une paire de photons est générée puis les photons séparés dans des voies A et B , chacune mesurée par un détecteur de type ON/OFF. On s'intéressera à une mesure de délai entre le déclenchement des deux détecteurs.

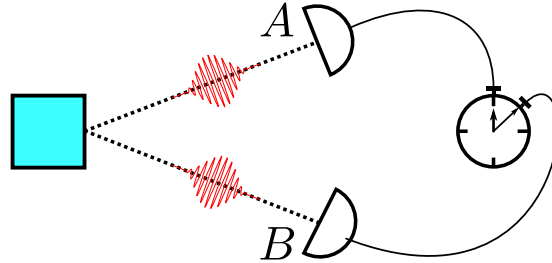


FIGURE 4.2 – Mesure de délai pour une paire de photons.

Nous commencerons par le cas où une seule paire est générée. Après la description générique nous spécifierons les résultats pour des types d'états particuliers. Ensuite nous expliciterons la densité d'opérateur décrivant une mesure de délai, sans hypothèse sur l'état incident.

4.2.1 Paire de photons

Précisons quel type d'état nous appelons « paire de photons ». Nous choisissons de décrire des états pur contenant exactement un photon dans chacune des voies A et B . L'espace de Hilbert à utiliser est donc le produit tensoriel de ceux décrivant les états à 1 photon sur A et sur B . Ainsi les états que nous allons utiliser sont de la forme :

$$|\psi\rangle = \int \psi(t_A, t_B) |t_A\rangle_A \otimes |t_B\rangle_B dt_A dt_B \quad (4.6)$$

Afin d'alléger les notations, nous n'utiliserons plus les indices A et B au niveau des kets. L'ordre du produit tensoriel est désormais ce qui distingue la partie selon A de l'état (en première position) de celle selon B . Par ailleurs les probabilités des différents résultats de mesures seront notées sans y indiquer explicitement l'état concerné.

4.2.2 Mesure des temps de clics

4.2.2.1 Définitions

Commençons par décrire la mesure jointe des temps de clics des deux détecteurs. Les résultats possibles sont les couples (T_A, T_B) , et potentiellement l'absence de détection d'un côté ou de l'autre ; nous allons donc décrire la statistique de cette variable aléatoire par une densité de probabilité $p^{\text{ON}}(T_A, T_B)$, et la mesure associée avec une densité de POVM $\hat{\pi}^{\text{ON}}(T_A, T_B)$, qui sont liées par :

$$p^{\text{ON}}(T_A, T_B) = \langle \psi | \hat{\pi}^{\text{ON}}(T_A, T_B) | \psi \rangle$$

Et bien sûr, les deux détecteurs opérant chacun sur son espace, l'opérateur joint s'écrit :

$$\hat{\pi}^{\text{ON}}(T_A, T_B) = \hat{\pi}_A(T_A) \otimes \hat{\pi}_B(T_B)$$

4.2.2.2 Expressions des densités d'opérateurs et probabilités

On considère des états contenant exactement un photon sur chaque voie. Ainsi,

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_A^{\text{ON}}(T_A) &= \eta \hat{\vartheta}_A(T_A) = \int \eta \vartheta_A(T_A - t_A) |t_A\rangle\langle t_A| dt_A \\ \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T_B) &= \eta \hat{\vartheta}_B(T_B) = \int \eta \vartheta_B(T_B - t_B) |t_B\rangle\langle t_B| dt_B\end{aligned}$$

Le POVM décrivant la densité de probabilité de clics aux temps T_A pour la voie A et T_B pour la voie B s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\hat{\pi}^{\text{ON}}(T_A, T_B) &= \eta \hat{\vartheta}_A(T_A) \otimes \eta \hat{\vartheta}_B(T_B) \\ &= \eta^2 \int \vartheta_A(T_A - t_A) \vartheta_B(T_B - t_B) |t_A\rangle\langle t_A| \otimes |t_B\rangle\langle t_B| dt_A dt_B\end{aligned}$$

En utilisant cette dernière expression avec la description de l'état (4.6) et la définition de l'opérateur, on obtient :

$$p^{\text{ON}}(T_A, T_B) = \eta^2 \int \vartheta_A(T_A - t_A) \vartheta_B(T_B - t_B) |\psi(t_A, t_B)|^2 dt_A dt_B \quad (4.7)$$

La densité de probabilité de déclenchement du capteur à deux temps est donc simplement une convolution double entre les fonctions de réponse des détecteurs et l'amplitude de probabilité jointe des temps d'arrivée des photons.

4.2.3 Délai et coïncidence

Dans de nombreuses situations expérimentales, ce qui est réellement mesuré est la densité de probabilité du délai entre les clics de chaque voie.

4.2.3.1 Densité de probabilité du délai

La variable aléatoire étudiée est $T_B - T_A$. Sa densité de probabilité s'exprime donc :

$$p_{B-A}(\tau) = \int p^{\text{ON}}(T, T + \tau) dT \quad (4.8)$$

Remarque. Attention à ne pas confondre $p_{B-A}(\tau)$, qui décrit la loi de $T_B - T_A$, avec la densité de probabilité conditionnelle $p(T_A + \tau | T_A)$. Cette dernière dépend *a priori* de T_A ; en sa moyenne sur T_A vaut par contre $p_{B-A}(\tau)$. \diamond

Ainsi

$$p_{B-A}(\tau) = \eta^2 \int \vartheta_A(T - t_A) \vartheta_B(T + \tau - t_B) |\psi(t_A, t_B)|^2 dT dt_A dt_B$$

Pour aller plus loin dans ce calcul, effectuons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \Delta = T - t_A \\ t = t_A \\ \delta = t_B - t_A \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} T = t + \Delta \\ t_A = t \\ t_B = t + \delta \end{cases} \quad (4.9)$$

La matrice jacobienne de ce changement de variable est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, qui est de déterminant 1. Ainsi,

$$p_{B-A}(\tau) = \eta^2 \int \vartheta_A(\Delta) \vartheta_B(\Delta + \tau - \delta) |\psi(t, t + \delta)|^2 d\Delta dt d\delta$$

On peut alors grouper différemment les intégrales :

$$p_{B-A}(\tau) = \eta^2 \int \left[\int \vartheta_A(\Delta) \vartheta_B(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right] \left[\int |\psi(t, t + \delta)|^2 dt \right] d\delta \quad (4.10)$$

On a en partie séparé les caractéristiques des capteurs et celles de l'état. Le premier groupe entre crochets est la fonction de corrélation croisée des fonctions de réponse des capteurs, évaluée en $\tau - \delta$. Le second groupe entre crochet est une sorte de fonction de corrélation croisée qui est la densité de probabilité de mesurer avec appareil parfait un délai donné entre la détection des deux photons ; elle est évaluée en δ . Le tout est donc une convolution entre la fonction caractérisant le système de détection et celle caractérisant l'état avec lequel on travaille.

4.2.3.2 Coïncidence

Une mesure de coïncidence s'effectue en branchant les sorties de chaque voie sur les entrées d'une porte ET. L'électronique ayant une vitesse finie, le signal de sortie de la porte prend la valeur haute même lorsqu'il y a un léger décalage entre les deux voies. En notant τ_0 une valeur typique de cette tolérance, la probabilité de relever une coïncidence est donc :

$$P_{\text{coïnc.}} = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} p_{B-A}(\tau) d\tau$$

En pratique la coupure n'est pas nécessairement nette et se modélise avec une fonction de fenêtrage.

Remarque. Un autre usage de l'utilisation de coïncidences est lors d'une expérience répétée de s'abstraire de la dépendance temporelle ($\tau_0 \rightarrow +\infty$), sans pour autant mélanger des clics ne provenant pas d'une même impulsion de pompe. Pour cet usage il convient de choisir τ_0 le plus grand possible mais plus petit que le temps entre deux impulsions de pompes. De plus, si l'on prenait en compte les coups d'obscurité on verrait qu'il est intéressant de ne pas choisir τ_0 trop grand. \diamond

4.2.3.3 POVM de la mesure de délai

On a vu avec l'équation (4.10) que la densité de probabilité pour la mesure d'un délai prenait une forme qui est une convolution entre une fonction ne dépendant que des capteurs et une fonction ne dépendant que de l'état; chacune de ces deux fonctions étant une corrélation croisée entre les deux voies. Essayons de formuler directement la densité de POVM associée à cette mesure.

On a fait l'hypothèse d'avoir exactement un photon dans chacun des canaux A et B . On a respectivement $\hat{\pi}_A(T_A)$ et $\hat{\pi}_B(T_B)$ les densités de POVM pour le déclenchement de chacun des détecteurs. On procède exactement comme précédemment, mais ici directement pour les opérateurs.

Les mesures sur A et B étant toujours indépendantes, le POVM associé à la mesure double mesure est :

$$\hat{\pi}_{A,B}^{\text{ON}}(T_A, T_B) = \hat{\pi}_A^{\text{ON}}(T_A) \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T_B)$$

On définit le POVM associé à la mesure du délai par :

$$\hat{\pi}_{B-A}(\tau) = \int \hat{\pi}_{A,B}^{\text{ON}}(T, T + \tau) dT = \int \hat{\pi}_A^{\text{ON}}(T) \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T + \tau) dT \quad (4.11)$$

Ainsi,

$$\hat{\pi}_{B-A}(\tau) = \eta^2 \int \vartheta_A(T - t_A) \vartheta_B(T + \tau - t_B) |t_A\rangle\langle t_A| \otimes |t_B\rangle\langle t_B| dT dt_A dt_B$$

En utilisant le même changement de variable que précédemment (équation (4.9)), on obtient :

$$\hat{\pi}_{B-A}(\tau) = \eta^2 \int \vartheta_A(\Delta) \vartheta_B(\Delta + \tau - \delta) |t\rangle\langle t| \otimes |t + \delta\rangle\langle t + \delta| d\Delta dt d\delta$$

qui se réécrit :

$$\boxed{\hat{\pi}_{B-A}(\tau) = \eta^2 \int \left[\int \vartheta_A(\Delta) \vartheta_B(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right] \left[\int |t\rangle\langle t| \otimes |t + \delta\rangle\langle t + \delta| dt \right] d\delta} \quad (4.12)$$

Le résultat est de nouveau sous la forme d'une convolution entre une corrélation décrivant les détecteurs et une autre pour l'état. La différence avec (4.10) est que la partie concernant les états est un opérateur.

4.2.4 Cas particuliers

Voyons maintenant comment s'exprime la densité de probabilité de délai en spécifiant davantage la forme des états que nous envoyons. Nous allons considérer plusieurs possibilités.

4.2.4.1 Photons indépendants

Notons que dans le cas de deux photons indépendants,

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad \text{et} \quad \psi(t_A, t_B) = \psi_A(t_A) \psi_B(t_B)$$

En combinant (4.2), (4.7) et (4.8), il vient :

$$p_{B-A}(\tau) = \int p^{\text{ON}}(T, |\psi_A\rangle\langle\psi_A|) p^{\text{ON}}(T + \tau, |\psi_B\rangle\langle\psi_B|) dT \quad (4.13)$$

La loi de probabilité du délai est la combinaison de mesures sur A et B complètement indépendantes, ce qui était attendu.

Remarque. L'indépendance des temps d'arrivées des photons ne signifie pas que les deux voies sont complètement indépendantes. Les temps sont indépendants mais le nombre de photons (ou l'existence) est intriqué. Comme nous allons le voir dans le [chapitre 5](#), l'absence d'intrication temporelle est même essentielle pour qu'une source de photons annoncés génère des états purs. \diamond

4.2.4.2 Photons quasi-simultanés

Considérons maintenant des photons quasiment simultanés, dont la fonction d'onde est de la forme

$$\psi(t_A, t_B) = \psi_1(t_A)\chi(t_B - t_A)$$

Où chacune des fonctions est normée (par choix),

$$\int |\psi_1(t)|^2 dt = 1 \quad \text{et} \quad \int |\chi(\delta)|^2 d\delta = 1$$

Typiquement on choisit χ avec une largeur bien plus faible que celle de ψ_1 , comme illustré dans la [figure 4.3](#).

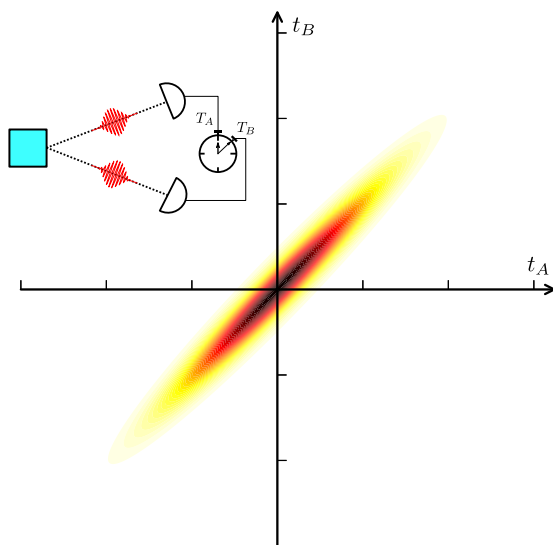


FIGURE 4.3 – Exemple de $|\psi(t_A, t_B)|^2$ pour une paire de photons quasi-simultanés. Elle correspond à la densité de probabilité pour le couple (T_A, T_B) qu'on observerait par une mesure de temps joints avec des détecteurs parfaits.

En utilisant la formule générique (4.10),

$$\begin{aligned} p_{B-A}(\tau) &= \eta^2 \int \left[\int \vartheta_A(\Delta) \vartheta_B(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right] \left[\int |\psi_1(t)|^2 |\chi(\delta)|^2 dt \right] d\delta \\ &= \eta^2 \int \left[\int \vartheta_A(\Delta) \vartheta_B(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right] |\chi(\delta)|^2 d\delta \end{aligned}$$

La distribution de temps auquel est émise la paire a complètement disparu, seul sert l'information du délai entre l'émission des photons. La formule gagne un peu en lisibilité en renversant le sens de la convolution :

$$p_{B-A}(\tau) = \eta^2 \int \left[\int \vartheta_A(\Delta) \vartheta_B(\Delta + \delta) d\Delta \right] |\chi(\tau - \delta)|^2 d\delta \quad (4.14)$$

Si l'on veut décrire une paire dont les photons sont exactement simultanés, on choisit $|\chi(\delta)|^2 = \delta(\delta)$ ($\delta()$ est la distribution de Dirac, δ la variable locale représentant la différence de temps $t_A - t_B$). La densité de probabilité du délai s'exprime alors :

$$p_{B-A}(\tau) = \eta^2 \int \vartheta_A(\Delta) \vartheta_B(\Delta + \tau) d\Delta \quad (4.15)$$

Le délai entre les déclenchements des détecteurs ne dépend plus que de ceux-ci. Le temps d'arrivée de la paire n'a aucun effet.

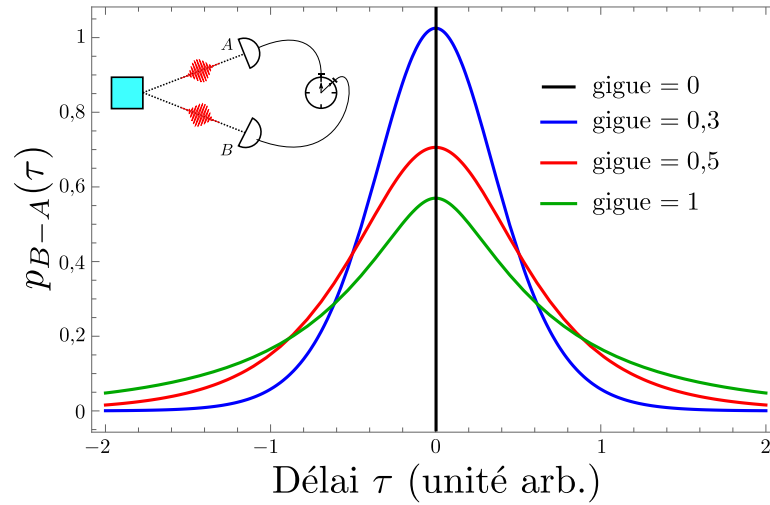


FIGURE 4.4 – Densité de probabilité du délai entre la détection des photons d'une paire idéale pour différents écarts types $\vartheta(\tau)$ (les deux détecteurs sont choisis identiques), nommé « gigue » dans la légende. $\vartheta(\tau)$ est choisie suivant une loi log-normale.

Nous traçons dans la figure 4.4 des densités de probabilité de délai $p_{B-A}(\tau)$ typiques obtenues pour différentes variances de $\vartheta(\tau)$ (en ayant choisi les détecteurs identiques). On observe un phénomène tout à fait attendu : plus la gigue est importante, plus la distribution de délai s'étale, ce qui est le comportement observé dans les expériences [64].

Remarque. Pour décrire des photons simultanés, poser $\psi(t_A, t_B) = \psi_1(t_A)\delta(t_B - t_A)$ n'aurait pas été correct car la normalisation de $\psi(t_A, t_B)$ se fait par son carré. Ceci est

similaire à l'impossibilité d'évaluer $\langle x|x \rangle$ lorsqu'on utilise les états de position d'une particule.

Afin d'exprimer directement la notion de paire de photons simultanés sans avoir à introduire une fonction annexe $\chi(t)$, définissons la notation $\sqrt{\delta}(t)$ la « racine de distribution de Dirac » telle que $\sqrt{\delta}(t) \times \sqrt{\delta}(t) = \delta(t)$, qui servira donc de fonction $\chi(t)$ canonique. Avec cette notation, la fonction d'onde jointe d'une paire de photons simultanés s'écrit $\psi(t_A, t_B) = \psi_1(t_A) \sqrt{\delta}(t_B - t_A)$. En effectuant un changement de variables, on peut alors écrire l'état comme :

$$|\psi\rangle = \int \psi(t) \sqrt{\delta}(\epsilon) |t\rangle_A \otimes |t + \epsilon\rangle_B dt d\epsilon, \quad \text{avec} \quad \int |\psi(t)|^2 dt = 1 \quad (4.16)$$

◇

Remarque. Pour décrire des cas réels on peut être amené à utiliser d'autres formes pour la fonction d'onde jointe $\psi(t_A, t_B)$. Cependant la simplification effectuée pour les paires de photons quasi-simultanés est très spécifique à la forme choisie. Il faudra donc quasi systématiquement se contenter de l'expression générique (4.10) dès qu'on étudie une forme différente. ◇

4.2.5 POVM du délai pour un état quelconque

Nous avons vu avec l'équation (4.12) qu'il est possible d'exprimer directement la densité d'opérateurs décrivant la mesure du délai entre les clics des détecteurs A et B , et qu'elle se simplifie. Nous allons ici généraliser cela en retirant l'hypothèse de n'avoir qu'une seule paire.

4.2.5.1 Expression générique pour les opérateurs convolutions

Ce qui a permis d'aboutir à l'équation (4.12) est que les opérateurs utilisés s'écrivent sous la forme d'une convolution entre une fonction réelle et des projecteurs. Nous allons voir ici qu'une simplification similaire apparaît quand on part d'opérateurs s'écrivant comme produits de telles convolutions. Ainsi on considère des opérateurs de la forme :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_A(T_A) &= \bigotimes_i \int f_i(T_A - t_i) |t_i\rangle\langle t_i|_A dt_i \\ &= \int \left[\prod_i f_i(T_A - t_i) \right] \left[\bigotimes_i |t_i\rangle\langle t_i|_A \right] \left[\prod_i dt_i \right] \\ \hat{\omega}_B(T_B) &= \bigotimes_j \int g_j(T_B - t'_j) |t'_j\rangle\langle t'_j|_B dt'_j \\ &= \int \left[\prod_j g_j(T_B - t'_j) \right] \left[\bigotimes_j |t'_j\rangle\langle t'_j|_B \right] \left[\prod_j dt'_j \right] \end{aligned}$$

On calcule alors :

$$\hat{\omega}_{B-A}(\tau) = \int \prod_i f_i(T - t_i) \prod_j g_j(T + \tau - t'_j) \bigotimes_i |t_i\rangle\langle t_i|_A \bigotimes_j |t'_j\rangle\langle t'_j|_B \prod_i dt_i \prod_j dt'_j dT$$

Procédons au changement de variable généralisant celui effectué quand nous avons un seul photon de chaque côté :

$$\begin{cases} \Delta = T - t_1 \\ t = t_1 \\ (\delta_i = t_i - t_1)_{i \neq 1} \\ (\delta'_j = t'_j - t_1)_j \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} T = t + \Delta \\ t_1 = t \\ (t_i = t + \delta_i)_{i \neq 1} \\ (t'_j = t + \delta'_j)_j \end{cases}$$

On a privilégié t_1 , mais c'est purement arbitraire et n'importe lequel des temps aurait

pu jouer son rôle. La matrice jacobienne s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ qui est de}$$

déterminant 1 (développement selon la colonne de 1).

Après le changement de variable, l'opérateur s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{B-A}(\tau) = & \int f_1(\Delta) \prod_{i \neq 1} f_i(\Delta - \delta_i) \prod_j g_j(\Delta + \tau - \delta'_j) \\ & |t\rangle\langle t|_A \otimes_{i \neq 1} |t + \delta_i\rangle\langle t + \delta_i|_A \otimes_j |t + \delta'_j\rangle\langle t + \delta'_j|_B \, d\Delta \, dt \prod_{i \neq 1} d\delta_i \prod_j d\delta'_j \end{aligned}$$

On peut alors former des groupes dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{B-A}(\tau) = & \int \left[\int f_1(\Delta) \prod_{i \neq 1} f_i(\Delta - \delta_i) \prod_j g_j(\Delta + \tau - \delta'_j) \, d\Delta \right] \\ & \left[\int |t\rangle\langle t|_A \otimes_{i \neq 1} |t + \delta_i\rangle\langle t + \delta_i|_A \otimes_j |t + \delta'_j\rangle\langle t + \delta'_j|_B \, dt \right] \prod_{i \neq 1} d\delta_i \prod_j d\delta'_j \end{aligned}$$

Comme précédemment, on arrive à une forme qui est une convolution, mais elle est ici à $N - 1$ dimensions (tout comme les fonctions de corrélation croisées).

4.2.5.2 Application à la densité de POVM des détecteurs

On va appliquer les résultats du paragraphe précédent à la forme de la densité de POVM exprimée par l'équation (3.33). Pour faciliter les calculs, remarquons que les opérateurs de mesure se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_A^{\text{ON}}(T) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \hat{\pi}_{A,k,i}^{\text{ON}}(T) & \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T) &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^l \hat{\pi}_{B,l,m}^{\text{ON}}(T) \\ \hat{\pi}_{A,k,i}^{\text{ON}}(T) &= \eta \hat{\vartheta}_i(T) \otimes_{j \neq i} [\mathbb{1} - \eta \hat{\vartheta}_j(T)] & \hat{\pi}_{B,l,m}^{\text{ON}}(T) &= \eta \hat{\vartheta}_m(T) \otimes_{n \neq m} [\mathbb{1} - \eta \hat{\vartheta}_n(T)] \end{aligned}$$

L'opérateur $\hat{\pi}_{A,k,i}^{\text{ON}}(T)$ décrit la probabilité que le capteur A soit déclenché par le photon i en présence de $k - 1$ autres photons. La probabilité de déclencher A est la somme des probabilités que chacun des photons le déclenche. Il en va de même pour $\hat{\pi}_{B,l,m}^{\text{ON}}(T)$. Ces deux opérateurs jouent le rôle de ceux du paragraphe précédents : ils se forment comme produits tensoriels de convolution entre un opérateur et une fonction.

Avec ces notations on peut écrire :

$$\hat{\pi}_{A,B}^{\text{ON}}(T_A, T_B) = \hat{\pi}_A^{\text{ON}}(T_A) \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T_B) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^l \hat{\pi}_{A,k,i}^{\text{ON}}(T_A) \otimes \hat{\pi}_{B,l,m}^{\text{ON}}(T_B) \quad (4.17)$$

et donc :

$$\hat{\pi}_{B-A}(\tau) = \int \hat{\pi}_{A,B}^{\text{ON}}(T, T + \tau) dT = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^l \int \hat{\pi}_{A,k,i}^{\text{ON}}(T) \otimes \hat{\pi}_{B,l,m}^{\text{ON}}(T + \tau) dT$$

Chaque terme de la somme a été calculé en 4.2.5.1, à la différence près qu'il est plus adapté de choisir comme référence de temps d'arrivée celui du photon i et non celui du photon n° 1. Notons t_j les variables d'intégration apparaissant dans $\hat{\pi}_{A,k,i}^{\text{ON}}(T)$ et t'_n celles dans $\hat{\pi}_{B,l,m}^{\text{ON}}(T)$. Le changement de variable effectué s'écrit : $T = t + \Delta$, $t_i = t$, $t_j = t + \delta_j$, $t'_n = t + \delta'_n$. Cela permet de conclure :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{B-A}(\tau) = & \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^l \int \left\{ \int \eta \vartheta_i(\Delta) \prod_{j \neq i} [1 - \eta \Theta_j(\Delta - \delta_j)] \eta \vartheta_m(\Delta + \tau - \delta'_m) \prod_{n \neq m} [1 - \eta \Theta_n(\Delta + \tau - \delta'_n)] d\Delta \right\} \\ & \left\{ \int |t\rangle\langle t|_A \otimes |t + \delta_j\rangle\langle t + \delta_j|_A \otimes |t + \delta'_m\rangle\langle t + \delta'_m|_B \otimes |t + \delta'_n\rangle\langle t + \delta'_n|_B dt \right\} \\ & \prod_{j \neq i} d\delta_j \prod_n d\delta'_n \quad (4.18) \end{aligned}$$

On a donc une expression explicite de la densité d'opérateurs décrivant une mesure de délai. Chaque terme est une convolution multidimensionnelle entre une fonction décrivant les détecteurs et un opérateur de projection. Notez que la définition (4.11) de l'opérateur peut être plus simple à manipuler quand l'état utilisé n'a aucune propriété particulière. En revanche l'expression (4.18) peut permettre d'utiliser directement des symétries de l'état.

Remarque. Comme pour l'équation (3.33), il faut faire attention à la signification des produits tensoriels car ça n'est pas l'ordre qui définit sur quel sous-espace agit chaque facteur. Il serait tentant de remplacer la somme sur m par une multiplication par l ; cela serait faux car le photon m privilégié est pour chaque terme différent. \diamond

4.3 MESURE DE CORRÉLATION TEMPORELLE

On s'intéresse à une mesure du type Hanbury Brown et Twiss [51, 61]. Ce type de mesure est introduit dans l'annexe A, et en particulier les fonctions de corrélation

normée ou pas, respectivement $g^{(2)}$ et $G^{(2)}$ sont définies dans le cadre des détecteurs de photons uniques par les équations (A.8) et (A.9). La mesure étudiée, illustrée par la figure 4.5, consiste à envoyer la lumière sur une lame séparatrice et à placer des détecteurs de type ON/OFF sur les deux sorties. Ensuite on effectue une mesure de délai entre les deux détecteurs.

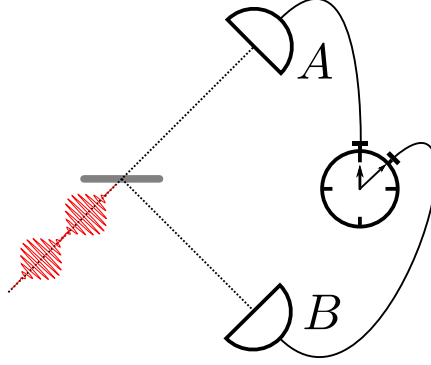


FIGURE 4.5 – Illustration de la configuration expérimentale pour la mesure de corrélation temporelle d'intensité.

On cherche à établir les opérateurs qui décrivent cette mesure. On peut la décomposer en deux étapes :

1. la lumière est envoyée sur la séparatrice, elle en ressort sous forme d'un état *a priori* intriqué, délocalisé sur les voies A et B ;
2. une mesure de délai est effectuée sur l'état obtenu à l'étape précédente.

Notons U l'opérateur qui décrit l'effet de la lame séparatrice. Partant d'un état $|\psi\rangle$, on obtient donc $U|\psi\rangle$ après celle-ci. La deuxième étape est un cas particulier de ce qui a été traité dans la section 4.2 ; la densité de POVM associée est $\hat{\pi}_{B-A}$ telle que donnée par l'équation (4.18). Ainsi la densité de probabilité du délai mesuré est $\langle\psi|U^\dagger\hat{\pi}_{B-A}U|\psi\rangle$. On en déduit que la densité de POVM décrivant la mesure complète s'exprime :

$$\hat{\pi}_{G^{(2)}}(\tau) = U^\dagger\hat{\pi}_{B-A}(\tau)U \quad (4.19)$$

Nous commencerons par exprimer U , avant de nous intéresser à l'opérateur pour la mesure complète. On illustrera ensuite la formule obtenue avec des exemples contenant peu de photons.

4.3.1 Effet de la lame séparatrice

Appelons $\hat{a}_{\text{in}}^\dagger(t)$ et $\hat{b}_{\text{in}}^\dagger(t)$ les opérateurs de créations dans les modes d'entrée. Le premier correspond à celui dans lequel la lumière est envoyée tandis que le second est l'entrée non utilisée de la séparatrice. De même, notons $\hat{a}^\dagger(t)$ et $\hat{b}^\dagger(t)$ les opérateurs de création après la séparatrice, tels qu'ils décrivent respectivement les voies A et B.

L'effet de la lame séparatrice sur les opérateurs est décrit par une matrice unitaire [106] :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(t) \\ \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ i\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger(t) \\ \hat{b}^\dagger(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Pour les kets, nous n'utilisons pas d'indice quand on décrit la lumière incidente et un indice A ou B pour les voies de sortie. Avec ces notations, nous pouvons écrire comment se transforme un photon incident arrivant à un temps bien défini :

$$|t\rangle = \hat{a}_{\text{in}}^\dagger(t) |0\rangle = (\alpha \hat{a}^\dagger(t) + i\beta \hat{b}^\dagger(t)) |0\rangle = \alpha |t\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \beta |0\rangle_A \otimes |t\rangle_B$$

Remarque. En première quantification il n'y a pas de « collision de photons » ; chacun choisit aléatoirement son chemin. De plus on envoie du vide sur l'autre entrée ; dans cette situation la seconde quantification décrit également chaque photon comme choisissant son chemin. \diamond

Nous allons exprimer U sur la base donnée par l'équation (3.4). Pour cela on s'intéresse au devenir de l'état à k photons $|t_1, \dots, t_k\rangle = \bigotimes_{i=1}^k |t_i\rangle$. Chaque photon obéit à la transformation qu'on vient d'expliciter. Ainsi on obtient l'état après la séparatrice :

$$U \bigotimes_{i=1}^k |t_i\rangle = \bigotimes_{i=1}^k [\alpha |t_i\rangle_A + i\beta |t_i\rangle_B]$$

On peut développer le produit tensoriel¹. L'état après la séparatrice s'écrit alors :

$$U \bigotimes_{i=1}^k |t_i\rangle = \sum_{p=0}^k \alpha^p (i\beta)^{k-p} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)} \left[\bigotimes_{a \in \sigma} |t_a\rangle_A \bigotimes_{b \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} |t_b\rangle_B \right]$$

où $\mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)$ est l'ensemble des p -combinaisons de $\llbracket 1, k \rrbracket$, ou autrement dit l'ensemble de ses sous-ensembles contenant p éléments. $\mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)$ est de cardinal $\binom{k}{p}$; c'est aussi le nombre de termes dans la somme sur σ . Chaque σ est une de ces combinaisons, et donc un ensemble de p indices. a parcourt σ dans un ordre arbitraire mais fixé : l'ordre croissant. Cela est nécessaire afin que deux entrées différentes donnent bien deux sorties différentes.

Exemple. Illustrons l'expression précédente avec comme entrée $|t_1, t_2, t_3\rangle$.

$$\begin{aligned} & U |t_1, t_2, t_3\rangle \\ &= [\alpha |t_1\rangle_A + i\beta |t_1\rangle_B] [\alpha |t_2\rangle_A + i\beta |t_2\rangle_B] [\alpha |t_3\rangle_A + i\beta |t_3\rangle_B] \\ &= \alpha^3 |t_1, t_2, t_3\rangle_A + \alpha^2 (i\beta) [|t_1, t_2\rangle_A |t_3\rangle_B + |t_1, t_3\rangle_A |t_2\rangle_B + |t_2, t_3\rangle_A |t_1\rangle_B] \\ &\quad + \alpha (i\beta)^2 [|t_1\rangle_A |t_2, t_3\rangle_B + |t_2\rangle_A |t_1, t_3\rangle_B + |t_3\rangle_A |t_2, t_3\rangle_B] + (i\beta)^3 |t_1, t_2, t_3\rangle_B \end{aligned}$$

Cet état est bien normé. Échanger deux temps non égaux donne un état orthogonal à celui présenté. \diamond

1. Bien évidemment le binôme de Newton est inutilisable puisqu'il est hors de question de faire commuter les différents photons.

On peut maintenant exprimer l'opérateur U en le développant sur la base des états d'entrée :

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int \left[U \bigotimes_{i=1}^k |t_i\rangle \right]_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} \bigotimes_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} \langle t_\gamma | \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} dt_\gamma \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int \left[\sum_{p=0}^k \alpha^p (i\beta)^{k-p} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)} \left[\bigotimes_{a \in \sigma} |t_a\rangle_A \bigotimes_{b \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} |t_b\rangle_B \right] \right]_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} \bigotimes_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} \langle t_\gamma | \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} dt_\gamma \end{aligned}$$

En sortant de l'intégrale ce qui peut l'être, on obtient l'expression :

$$U = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^k \alpha^p (i\beta)^{k-p} \int \left[\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)} \left[\bigotimes_{a \in \sigma} |t_a\rangle_A \bigotimes_{b \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} |t_b\rangle_B \right] \right]_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} \bigotimes_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} \langle t_\gamma | \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} dt_\gamma \quad (4.20)$$

4.3.2 Densité d'opérateur à double temps

Avant de donner l'opérateur décrivant le délai, nous commençons par exprimer celui donnant la densité de probabilités des paires de temps. Nous gardons la notation $\hat{\pi}_{A,B}^{\text{ON}}(T_A, T_B)$ pour désigner l'opérateur à double temps au niveau des détecteurs. En prenant en compte la lame séparatrice, l'opérateur recherché s'écrit :

$$\hat{\pi}_{G(2)}(T_A, T_B) = U^\dagger \hat{\pi}_{A,B}^{\text{ON}}(T_A, T_B) U$$

En utilisant la décomposition de $\hat{\pi}_{A,B}^{\text{ON}}(T_A, T_B)$ donnée en (4.17) ainsi que l'expression d'origine des opérateurs (3.33), on peut mettre l'opérateur pour les couples de temps sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{A,B}^{\text{ON}}(T_A, T_B) &= \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^l \int \\ &\eta \vartheta_i(T_A - t_{A,i}) \prod_{j \neq i} [1 - \eta \Theta_j(T_A - t_{A,j})] \eta \vartheta_m(T_B - t_{B,m}) \prod_{n \neq m} [1 - \eta \Theta_n(T_B - t_{B,n})] \\ &\quad \bigotimes_{a'=1}^k |t_{A,a'}\rangle \langle t_{A,a'}|_A \bigotimes_{b'=1}^l |t_{B,b'}\rangle \langle t_{B,b'}|_B \prod_{a'=1}^k dt_{A,a'} \prod_{b'=1}^l dt_{B,b'} \end{aligned}$$

En utilisant les expressions des différents opérateurs, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{G(2)}(T_A, T_B) &= U^\dagger \left\{ \sum_{k' \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^{k'} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k' \rrbracket)} \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^l \int \alpha^p (i\beta)^{k'-p} \right. \\ &\eta \vartheta_i(T_A - t_{A,i}) \prod_{j \neq i} [1 - \eta \Theta_j(T_A - t_{A,j})] \eta \vartheta_m(T_B - t_{B,m}) \prod_{n \neq m} [1 - \eta \Theta_n(T_B - t_{B,n})] \\ &\quad \left[\bigotimes_{a'=1}^k |t_{A,a'}\rangle \langle t_{A,a'}|_A \bigotimes_{b'=1}^l |t_{B,b'}\rangle \langle t_{B,b'}|_B \right] \left[\bigotimes_{a \in \sigma} |t_a\rangle_A \bigotimes_{b \in \llbracket 1, k' \rrbracket \setminus \sigma} |t_b\rangle_B \right] \\ &\quad \left. \bigotimes_{\gamma \in \llbracket 1, k' \rrbracket} \langle t_\gamma | \prod_{a'=1}^k dt_{A,a'} \prod_{b'=1}^l dt_{B,b'} \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k' \rrbracket} dt_\gamma \right\} \end{aligned}$$

La contraction de la 3^e ligne ne peut donner un résultat non nul que lorsque le nombre de photons coïncide, c'est-à-dire pour $k = p$ et $l = k' - p$. La contraction des brackets donne des distributions de Dirac qui sont immédiatement intégrées; on peut donc directement faire disparaître les $dt_{A,a'}$ et $dt_{B,b'}$. Il faut prendre garde qu'alors les $t_{A,i}$ et $t_{B,m}$ disparaissent chacun au profit d'un des t_γ avec γ dans respectivement σ et $\llbracket 1, k' \rrbracket \setminus \sigma$. Comme i et m parcourent toutes les valeurs possibles, toutes les valeurs de σ et $\llbracket 1, k' \rrbracket \setminus \sigma$ seront également parcourues intégralement par i et m . On peut donc écrire l'opérateur sous la forme :

$$\hat{\pi}_{G^{(2)}}(T_A, T_B) = U^\dagger \left\{ \sum_{k' \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^{k'} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k' \rrbracket)} \sum_{i \in \sigma} \sum_{m \in \llbracket 1, k' \rrbracket \setminus \sigma} \int \alpha^p (i\beta)^{k'-p} \right. \\ \left. \eta \vartheta_i(T_A - t_i) \prod_{\substack{j \in \sigma \\ j \neq i}} [1 - \eta \Theta_j(T_A - t_j)] \eta \vartheta_m(T_B - t_m) \prod_{\substack{n \in \llbracket 1, k' \rrbracket \setminus \sigma \\ n \neq m}} [1 - \eta \Theta_n(T_B - t_n)] \right. \\ \left. \left[\bigotimes_{a \in \sigma} |t_a\rangle_A \bigotimes_{b \in \llbracket 1, k' \rrbracket \setminus \sigma} |t_b\rangle_B \right]_{\gamma \in \llbracket 1, k' \rrbracket} \langle t_\gamma | \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k' \rrbracket} dt_\gamma \right\}$$

Vu qu'il n'y a plus de k on peut renommer k' en k . Comme il n'y a plus de k , nous en profitons pour renommer k' en k . Explicitons maintenant le U^\dagger (et on réintroduit un k' dans son expression) :

$$\hat{\pi}_{G^{(2)}}(T_A, T_B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{k' \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^k \sum_{p'=0}^{k'} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)} \sum_{\sigma' \in \mathcal{P}_{p'}(\llbracket 1, k' \rrbracket)} \sum_{i \in \sigma} \sum_{m \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} \int \\ (\alpha^*)^{p'} (-i\beta^*)^{k'-p'} \alpha^p (i\beta)^{k-p} \\ \eta \vartheta_i(T_A - t_i) \prod_{\substack{j \in \sigma \\ j \neq i}} [1 - \eta \Theta_j(T_A - t_j)] \eta \vartheta_m(T_B - t_m) \prod_{\substack{n \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma \\ n \neq m}} [1 - \eta \Theta_n(T_B - t_n)] \\ \bigotimes_{\gamma \in \llbracket 1, k' \rrbracket} |t'_\gamma\rangle \left[\bigotimes_{a' \in \sigma'} \langle t'_{a'} |_A \bigotimes_{b' \in \llbracket 1, k' \rrbracket \setminus \sigma'} \langle t'_{b'} |_B \right] \left[\bigotimes_{a \in \sigma} |t_a\rangle_A \bigotimes_{b \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} |t_b\rangle_B \right]_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} \langle t_\gamma | \\ \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k' \rrbracket} dt'_\gamma \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} dt_\gamma$$

Tout d'abord on remarque qu'une condition nécessaire pour que le produit scalaire soit non nul est qu'il y ait pour A et B le même nombre de photons de chaque côté du

produit scalaire, c'est-à-dire que $p = p'$ et $k - p = k' - p'$, donc $k = k'$. Cela donne la simplification suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{G^{(2)}}(T_A, T_B) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^k \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)} \sum_{\sigma' \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)} \sum_{i \in \sigma} \sum_{m \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} \int [|\alpha|^2]^p [|\beta|^2]^{k-p} \\ &\quad \eta \vartheta_i(T_A - t_i) \prod_{\substack{j \in \sigma \\ j \neq i}} [1 - \eta \Theta_j(T_A - t_j)] \eta \vartheta_m(T_B - t_m) \prod_{\substack{n \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma \\ n \neq m}} [1 - \eta \Theta_n(T_B - t_n)] \\ &\quad \bigotimes_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} |t'_\gamma\rangle \left[\bigotimes_{a' \in \sigma'} \langle t'_{a'} |_A \bigotimes_{b' \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma'} \langle t'_{b'} |_B \right] \left[\bigotimes_{a \in \sigma} |t_a\rangle_A \bigotimes_{b \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} |t_b\rangle_B \right] \bigotimes_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} \langle t_\gamma | \\ &\quad \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} dt'_\gamma \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} dt_\gamma \end{aligned}$$

On remarque que seuls les modules des coefficients de réflexion et transmission de la séparatrice interviennent. Cela est rassurant car nous avons utilisé l'hypothèse que les détecteurs sont insensibles à la phase.

Compte tenu du fait que nous travaillons en première quantification, les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels quand un photon est présent dans le bra, le même est dans le ket (deux photons différents au même temps ça ne compte pas). Cela impose donc que $\sigma' = \sigma$. En appliquant les simplifications qui en résultent, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{G^{(2)}}(T_A, T_B) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^k \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)} \sum_{i \in \sigma} \sum_{m \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} \int [|\alpha|^2]^p [|\beta|^2]^{k-p} \\ &\quad \eta \vartheta_i(T_A - t_i) \prod_{\substack{j \in \sigma \\ j \neq i}} [1 - \eta \Theta_j(T_A - t_j)] \eta \vartheta_m(T_B - t_m) \prod_{\substack{n \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma \\ n \neq m}} [1 - \eta \Theta_n(T_B - t_n)] \\ &\quad \bigotimes_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} |t_\gamma\rangle \langle t_\gamma| \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket} dt_\gamma \quad (4.21) \end{aligned}$$

Nous avons donc l'expression de la densité d'opérateurs pour la mesure à deux temps.

Remarque. Ici ni σ ni $\llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma$ ne peuvent être vides car sinon il est impossible de choisir les i et m . Ainsi p est en fait compris entre 1 et $k - 1$. \diamond

4.3.3 Densité d'opérateur pour le délai

L'expression (4.21) de $\hat{\pi}_{G^{(2)}}(T_A, T_B)$ est sous la forme d'une somme de convolutions entre fonctions et projecteurs. On peut donc utiliser les résultats présentés en sous-section 4.2.5.1. Ainsi l'opérateur $G^{(2)}(\tau)$ s'exprime :

$$\hat{\pi}_{G^{(2)}}(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^k \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, k \rrbracket)} \sum_{i \in \sigma} \sum_{m \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} \int [|\alpha|^2]^p [|\beta|^2]^{k-p} \left\{ \int \eta \vartheta_i(\Delta) \prod_{\substack{j \in \sigma \\ j \neq i}} [1 - \eta \Theta_j(\Delta - \delta_j)] \eta \vartheta_m(\Delta + \tau - \delta_m) \prod_{\substack{n \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma \\ n \neq m}} [1 - \eta \Theta_n(\Delta + \tau - \delta_n)] d\Delta \right\} \left\{ \int |t\rangle\langle t| \bigotimes_{\substack{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket \\ \gamma \neq i}} |t + \delta_\gamma\rangle\langle t + \delta_\gamma| dt \right\} \prod_{\substack{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket \\ \gamma \neq i}} d\delta_\gamma \quad (4.22)$$

Nous avons donc exprimé l'opérateur de mesure décrivant directement la densité de probabilité de délai entre les clics.

4.3.4 Exemples d'utilisation

Voyons des cas particuliers d'utilisation de l'expression (4.22) avec peu de photons.

Pour un unique photon il n'est pas possible de partitionner $\llbracket 1, 1 \rrbracket = \{1\}$ en deux sous-ensembles non vides. Le POVM est donc l'opérateur nul. Cela est attendu puisqu'au plus un des deux détecteurs peu cliquer. Voyons maintenant ce qu'il en est en envoyant exactement deux photons.

4.3.4.1 Opérateurs de mesure pour deux photons

Commençons par expliciter l'expression de l'opérateur de mesure en adaptant (4.22) à la dimension. Pour 2 photons, il y a deux manières d'en choisir un dans chaque bras : le numéro 1 va vers la branche A et le 2 vers la B ou bien l'inverse. On a donc $k = 2$, $p = 1$ et pas de choix pour i et m une fois σ choisi.

Ainsi la densité de POVM s'exprime ici :

$$\hat{\pi}_{G^{(2)}}(\tau) = \sum_{\substack{\sigma = \{1\} \\ \text{ou } \sigma = \{2\}}} \sum_{i \in \sigma} \sum_{m \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \sigma} \int [|\alpha|^2] [|\beta|^2] \left\{ \int \eta \vartheta_i(\Delta) \eta \vartheta_m(\Delta + \tau - \delta_m) d\Delta \right\} \left\{ \int |t\rangle\langle t|_i \otimes |t + \delta_m\rangle\langle t + \delta_m|_m dt \right\} d\delta_m$$

En explicitant les sommes, en repassant à une notation du produit tensoriel où l'ordre d'écriture définit sur quel espace on travaille, en prenant en compte que les capteurs

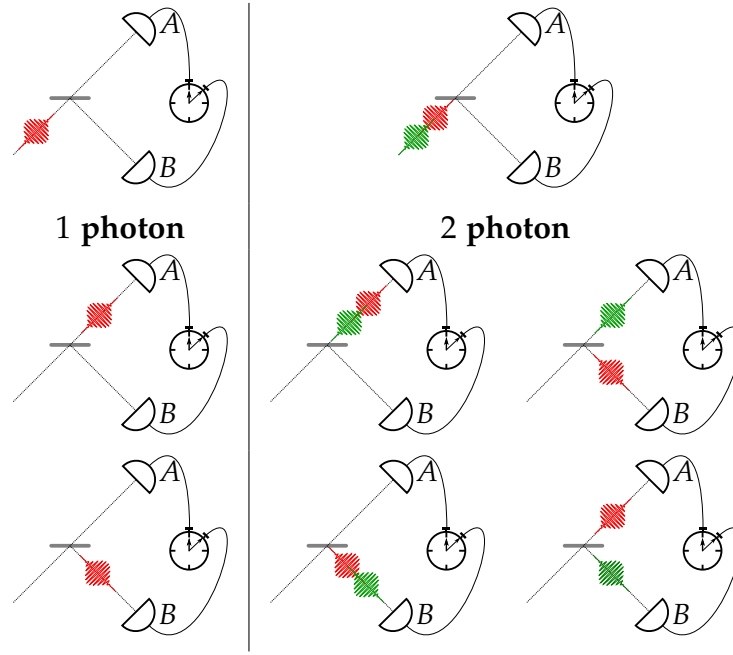


FIGURE 4.6 – États possibles après la lame séparatrice pour des entrées à 1 ou 2 photons.

sont identiques et ont la même réponse pour tous les photons, et en s'intéressant au cas particulier où la lame séparatrice est équilibrée : $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$, on obtient l'expression :

$$\hat{\pi}_{G^{(2)}}(\tau) = \frac{\eta^2}{4} \left(\int \left\{ \int \vartheta(\Delta) \vartheta(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right\} \left\{ \int |t\rangle\langle t| \otimes |t + \delta\rangle\langle t + \delta| dt \right\} d\delta \right. \\ \left. + \int \left\{ \int \vartheta(\Delta) \vartheta(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right\} \left\{ \int |t + \delta\rangle\langle t + \delta| \otimes |t\rangle\langle t| dt \right\} d\delta \right) \quad (4.23)$$

4.3.4.2 Probabilité pour deux photons séparés

Regardons l'expression de la probabilité de délai pour des photons dans un état séparé. Leurs matrices densités s'écrivent :

$$\rho_1 = \int \rho_1(t'_1, t''_1) |t'_1\rangle\langle t''_1| dt'_1 dt''_1 \\ \rho_2 = \int \rho_2(t'_2, t''_2) |t'_2\rangle\langle t''_2| dt'_2 dt''_2$$

On peut alors calculer :

$$\text{Tr} \left[\left(\int |t\rangle\langle t| \otimes |t + \delta\rangle\langle t + \delta| dt \right) \rho_1 \otimes \rho_2 \right] \\ = \int \left[\int \rho_1(t'_1, t''_1) \delta(t'_1 - t) dt'_1 \right] \left[\int \rho_2(t'_2, t''_2) \delta(t'_2 - (t + \delta)) dt'_2 \right] dt \\ = \int \rho_1(t, t) \rho_2(t + \delta, t + \delta) dt$$

En utilisant ce résultat dans l'expression de l'opérateur (4.23), on conclut :

$$p(\tau) = \frac{\eta^2}{4} \left(\int \left\{ \int \vartheta(\Delta) \vartheta(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right\} \left\{ \int \rho_1(t, t) \rho_2(t + \delta, t + \delta) dt \right\} d\delta \right. \\ \left. + \int \left\{ \int \vartheta(\Delta) \vartheta(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right\} \left\{ \int \rho_1(t + \delta, t + \delta) \rho_2(t, t) dt \right\} d\delta \right) \quad (4.24)$$

Cette expression n'est pas spécialement simple. Cela n'est pas surprenant car en envoyant les photons plus ou moins proches dans le temps, il est possible de changer la forme de $p(\tau)$.

4.3.4.3 Probabilité pour deux photons à temps définis

Voyons maintenant le cas où l'état utilisé est composé de deux photons arrivant à des temps bien définis t_1 et t_2 . C'est un cas particulier de l'expression (4.24) avec $\rho_1(t, t) = \delta(t - t_1)$ et $\rho_2(t, t) = \delta(t - t_2)$. Ainsi on obtient :

$$p(\tau) = \frac{\eta^2}{4} \left(\left\{ \int \vartheta(\Delta) \vartheta(\Delta + \tau - (t_2 - t_1)) d\Delta \right\} + \left\{ \int \vartheta(\Delta) \vartheta(\Delta + \tau + (t_2 - t_1)) d\Delta \right\} \right)$$

Le facteur $\frac{1}{4}$ est là parce qu'il y a 4 possibilités différentes, comme présenté en figure 4.6, les deux donnant un résultat pour la mesure du $G^{(2)}$ sont présents ici. η^2 représente bien le fait que les deux photons doivent être simultanément détectés. On remarque que la partie principale de l'expression est la somme de l'auto-corrélation de la fonction de réponse du détecteur évaluée en $\tau - (t_2 - t_1)$ et en $\tau + (t_2 - t_1)$. C'est un résultat tout à fait attendu.

Si maintenant on se place dans le cas où il n'y a pas de gigue : $\vartheta(\tau) = \delta(\tau)$, alors

$$p(\tau) = \frac{\eta^2}{4} [\delta(\tau - (t_2 - t_1)) + \delta(\tau + (t_2 - t_1))]$$

En d'autres termes, avec une efficacité $\eta = 1$ il y a $\frac{1}{4}$ de chance d'avoir une double détection avec un délai $t_2 - t_1$, $\frac{1}{4}$ de chance d'avoir une double détection avec un délai $t_1 - t_2$ et une probabilité $\frac{1}{2}$ qu'un seul des deux détecteurs clique.

4.3.4.4 Probabilité pour deux photons intriqués (cas général)

Voyons maintenant ce qu'il en est pour des photons intriqués. On prend une matrice densité de la forme :

$$\rho = \int \rho(t'_1, t''_1, t'_2, t''_2) |t'_1\rangle\langle t''_1| \otimes |t'_2\rangle\langle t''_2| dt'_1 dt''_1 dt'_2 dt''_2$$

Alors :

$$\text{Tr} \left[\left(\int |t\rangle\langle t| \otimes |t + \delta\rangle\langle t + \delta| dt \right) \rho \right] = \int \rho(t_1, t_1, t_2, t_2) \delta(t_1 - t) \delta(t_2 - (t + \delta)) dt_1 dt_2 dt \\ = \int \rho(t, t, t + \delta, t + \delta) dt$$

On en déduit :

$$p(\tau) = \frac{\eta^2}{4} \left(\int \left\{ \int \vartheta(\Delta) \vartheta(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right\} \left\{ \int \rho(t, t, t + \delta, t + \delta) dt \right\} d\delta \right. \\ \left. + \int \left\{ \int \vartheta(\Delta) \vartheta(\Delta + \tau - \delta) d\Delta \right\} \left\{ \int \rho(t + \delta, t + \delta, t, t) dt \right\} d\delta \right) \quad (4.25)$$

Cette formule est proche de la précédente, mais plus générale.

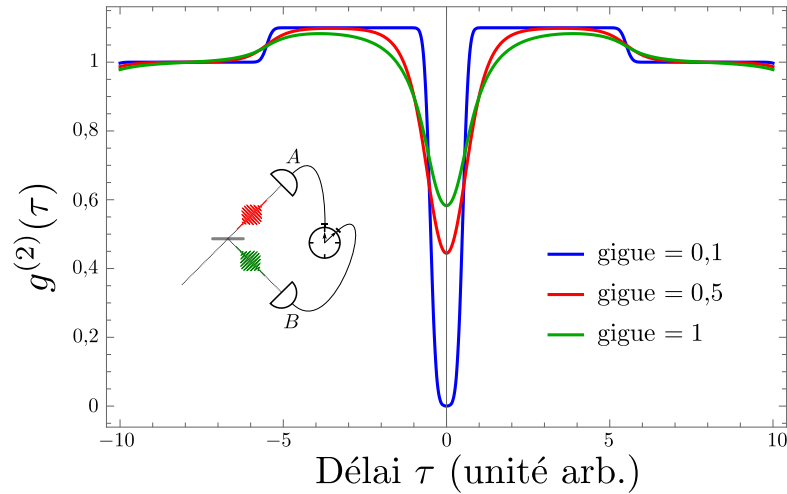


FIGURE 4.7 – Fonction de corrélation du second ordre normalisée pour des photons non-simultanés telle qu’observée pour des détecteurs ayant différents écarts types de gigue. L’état des photons a été choisi de manière à imiter les sources à émetteur unique. Le temps est adimensionné par la largeur du délai d’exclusion entre l’émission de deux photons. La gigue pour un photon suit une loi log-normale.

En normalisant $p(\tau)$, on obtient la fonction de corrélation $g^{(2)}$. Nous la représentons dans la [figure 4.7](#) pour un état typique, et avec plusieurs giges pour les détecteurs. On observe que la gigue des détecteurs affecte beaucoup la valeur en 0, souvent utilisée comme critère de qualité des sources de photons uniques.

SOURCE DE PHOTONS ANNONCÉS

Dans ce chapitre nous allons utiliser l'expression des opérateurs décrivant la mesure effectuée par un détecteur ON/OFF à une situation dans laquelle il joue un rôle clef : une source de photons annoncés.

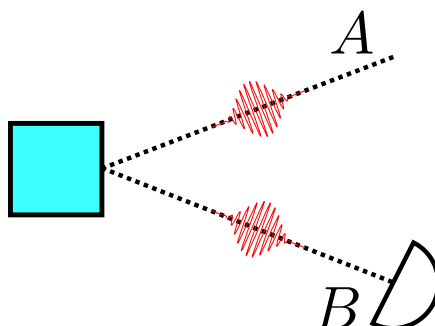


FIGURE 5.1 – Source de photons annoncés.

La configuration qu'on va décrire est celle présentée en [figure 5.1](#) : de la lumière *a priori* intriquée est générée dans deux voies A et B . On effectue une mesure avec un détecteur de type ON/OFF sur la voie B et l'objectif est de décrire l'état sur A annoncé par un clic du détecteur B au temps T .

Nous commençons par le cas le plus simple : une paire contenant un photon sur A et un sur B , les deux étant simultanés (dans le sens présenté en [sous-sous-section 4.2.4.2](#)). Ensuite nous traiterons du cas général, ce qui permettra entre autre d'étudier l'influence de multiples paires sur la qualité de l'état annoncé. Enfin nous montrerons que l'information sur le temps de clic T peut permettre d'améliorer la qualité de l'état annoncé.

5.1 ÉTAT ANNONCÉ POUR UNE PAIRE DE PHOTONS SIMULTANÉS

L'état considéré avant la détection contient exactement une paire de photons tels que ceux-ci soient simultanés. En revanche la paire est *a priori* délocalisée dans le temps; pour cette section nous considérons une superposition cohérente, c'est-à-dire un état pur.

5.1.1 Calcul de l'état annoncé

Comme exposé en [sous-sous-section 4.2.4.2](#), il faut être prudent avec les normalisations quand on exprime l'état d'une paire de photons simultanés. Partons donc de

l'expression (4.16) qu'on rappelle (en ayant privilégié le photon sur B comme référence de temps) :

$$|\psi\rangle = \int \psi(t) \sqrt{\delta}(\epsilon) |t + \epsilon\rangle_A \otimes |t\rangle_B dt d\epsilon, \quad \text{avec} \quad \int |\psi(t)|^2 dt = 1$$

La matrice densité correspondante s'écrit :

$$\rho = \int \psi(t) \psi^*(t') \sqrt{\delta}(\epsilon) \sqrt{\delta}(\epsilon') |t + \epsilon\rangle\langle t' + \epsilon'|_A \otimes |t\rangle\langle t'|_B dt dt' d\epsilon d\epsilon' \quad (5.1)$$

L'étude générique des situations pour lesquelles on effectue une mesure destructive d'un côté d'un état intriqué et cherche à calculer l'état sur la partie restante a été détaillée en sous-section 2.2.2. Nous avons abouti à l'équation (2.2), qui se généralise sans souci aux densités d'opérateurs. Ainsi en partant d'un état joint s'exprimant sous la forme d'une matrice densité ρ , après un clic au temps T l'état ρ_A obtenu sur A s'exprime par l'équation :

$$\rho_A(T) = \frac{\text{Tr}_B ([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho)}{\text{Tr} ([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho)}$$

Commençons par calculer $[\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho$. On rappelle que pour le cas d'un seul photon $\hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)$ est donné par l'expression (4.1); qu'on rappelle :

$$\mathbb{1}_A \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T) = \mathbb{1}_A \otimes \eta \int \vartheta(T-t) |t\rangle\langle t|_B dt$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & [\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho \\ &= \eta \int \vartheta(T-t) \psi(t) \psi^*(t') \sqrt{\delta}(\epsilon) \sqrt{\delta}(\epsilon') |t + \epsilon\rangle\langle t' + \epsilon'|_A \otimes |t\rangle\langle t'|_B dt dt' d\epsilon d\epsilon' \end{aligned}$$

On peut alors calculer le trace partielle :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B ([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho) &= \int \langle t_B | [\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho | t_B \rangle dt_B \\ &= \eta \int \vartheta(T-t) |\psi(t)|^2 \sqrt{\delta}(\epsilon) \sqrt{\delta}(\epsilon') |t + \epsilon\rangle\langle t + \epsilon'|_A dt d\epsilon d\epsilon' \end{aligned}$$

et de là la trace complète :

$$\text{Tr} ([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho) = \text{Tr} [\text{Tr}_B ([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho)] = \eta \int \vartheta(T-t) |\psi(t)|^2 dt$$

On conclut alors :

$$\boxed{\rho_A(T) = \frac{\int \vartheta(T-t) |\psi(t)|^2 \sqrt{\delta}(\epsilon) \sqrt{\delta}(\epsilon') |t + \epsilon\rangle\langle t + \epsilon'|_A dt d\epsilon d\epsilon'}{\int \vartheta(T-t) |\psi(t)|^2 dt}} \quad (5.2)$$

On remarque que l'efficacité η se simplifie : *a posteriori*, une fois qu'on a détecté un photon, peu importe la probabilité *a priori* de le détecter. Plus important, la matrice densité est piquée autour de la diagonale. En effet, les $\sqrt{\delta}$ sont ici des artifices de normalisation mais, leur signification physique est que seule la diagonale concentre les termes non nuls. Ainsi l'expression se comprend comme une somme incohérente (intégrale sur t). L'étalement en temps du photon est purement statistique. Si ψ ou ϑ est une distribution de Dirac alors l'état est pur. Dans le cas contraire, l'état est d'autant plus mélangé que ces deux fonctions sont étalées.

5.1.2 Caractéristiques de l'état

Caractérisons l'état obtenu. Pour cela nous allons en observer plusieurs propriétés.

5.1.2.1 Mesure par un détecteur parfait

Nous venons de voir (équation (5.2)) que $\rho_A(T)$ est un mélange statistique de photons arrivant à différents temps. Pour le caractériser, nous pouvons imaginer l'envoyer sur un détecteur ON/OFF idéal, c'est-à-dire sans gigue et une efficacité de 1. L'opérateur de mesure correspondant est le projecteur $\hat{\pi}^{\text{ON}} = |T_A\rangle\langle T_A|$. Ainsi la probabilité de clic à un temps T_A est :

$$p_T(T_A) = \text{Tr}[|T_A\rangle\langle T_A|\rho_A(T)] = \langle T_A|\rho_A(T)|T_A\rangle = \frac{\vartheta(T - T_A)|\psi(T_A)|^2}{\int \vartheta(T - t)|\psi(t)|^2 dt} \quad (5.3)$$

On retrouve la diagonale de la matrice densité $\rho_A(T)$ sans les facteurs de normalisation transverses, ce qui nous confirme leur interprétation. La fonction $t \mapsto p_T(t)$ décrit la répartition temporelle du photon annoncé. Notez que $\int p_T(t) dt = 1$ et donc on retrouve qu'une fois annoncé, le photon est présent à coup sûr quelle que soit l'efficacité du détecteur d'annonce.

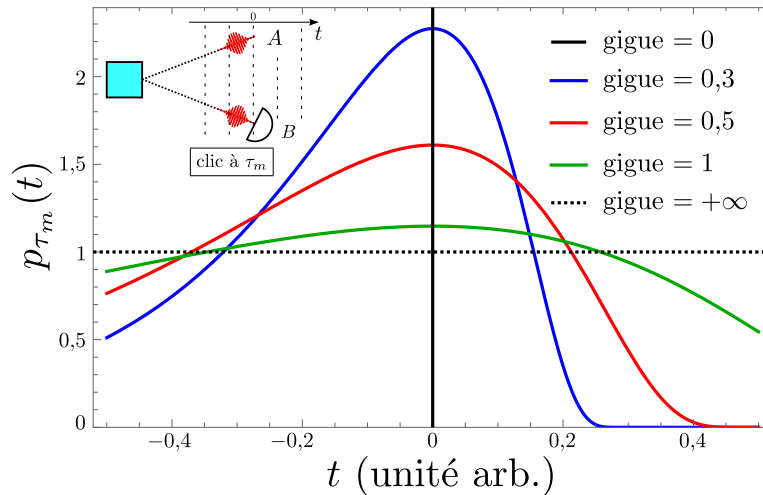


FIGURE 5.2 – Répartition temporelle de l'état annoncé. La source émet une paire de photons parfaitement simultanés avec $\psi(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$ (fenêtre rectangulaire centrée en 0 de largeur 1). On se place dans le cas où le photon annonciateur est détecté au temps $T = \tau_m$ avec τ_m le mode de la gigue (ϑ est maximale en τ_m). Chaque couleur correspond à un écart type de gigue différent.

Des formes typiques de $p_T(t)$ sont représentées par la figure 5.2. Comme attendu, sans gigue l'état annoncé est un photon parfaitement localisé en $t = 0$ ($|0\rangle$) tandis qu'avec une gigue infinie aucune information n'est obtenue du temps de clic du photon annonciateur et la distribution de temps d'émission du photon annoncé est uniforme.

Remarque. On aurait aussi pu calculer directement $p_T(t)$, sans passer par l'expression de ρ_A , et en utilisant les méthodes présentées en section 4.2. En effet il suffit de l'exprimer

comme probabilité que le détecteur A clique au temps t sachant que le détecteur B a cliqué au temps T . \diamond

5.1.2.2 Pureté

Remarquez que du fait que la fonction décrivant $\rho_A(T)$ est piquée autour de sa diagonale, son carré ne peut pas être bien normalisé. Pour effectuer un calcul de pureté, il faudrait passer sur une véritable base hilbertienne, par exemple en utilisant les fonctions d'Hermite-Gauss. Nous ne le ferons pas, mais proposons une alternative : comme $\rho_A(T)$ est diagonale, nous allons utiliser uniquement la fonction décrivant cette diagonale, $t \mapsto p_T(t)$ telle que donnée par l'équation (5.3). Nous définissons la pseudo-pureté comme :

$$\int p_T^2(t) dt = \frac{\int \vartheta(T-t)^2 |\psi(t)|^4 dt}{\left[\int \vartheta(T-t) |\psi(t)|^2 dt \right]^2}$$

Remarque. De par les définitions, $\int p_T(t) dt = 1$; cela n'impose pas que la pseudo-pureté soit plus petite que 1. Elle est même très grande quand la distribution est piquée. \diamond

5.1.2.3 Entropie

Une alternative est de s'intéresser à l'entropie. Comme pour la pureté, avoir une distribution piquée autour de la diagonale pose problème pour la normalisation. Pour remédier à cela, nous introduisons une pseudo-entropie décrivant uniquement la diagonale de la matrice densité :

$$S = - \int p_T(t) \ln p_T(t) dt = - \int \frac{\vartheta(T-t) |\psi(t)|^2}{\int \vartheta(T-t') |\psi(t')|^2 dt'} \ln \left(\frac{\vartheta(T-t) |\psi(t)|^2}{\int \vartheta(T-t') |\psi(t')|^2 dt'} \right) dt$$

Remarque. Les pseudo-pureté et pseudo-entropie présentées caractérisent la distribution statistique du photon dans le temps. Elles ne décrivent pas les propriétés de cohérence quantique de l'état, qui n'en a d'ailleurs pas. \diamond

5.1.2.4 Fidélité

Le dernier critère que nous allons étudier est la fidélité par rapport à l'état attendu si le capteur était parfait [7, 133]. Lorsqu'on attend l'état pur $|\psi_0\rangle$, la fidélité s'exprime :

$$\mathcal{F} = \langle \psi_0 | \rho_A | \psi_0 \rangle = \text{Tr} [|\psi_0\rangle \langle \psi_0 | \rho_A]$$

Ici l'état idéal après le déclenchement du capteur B au temps T est $|\psi_0\rangle = |T\rangle$. En utilisant l'expression (5.2) on obtient :

$$\mathcal{F}(T) = \langle T | \rho_A(T) | T \rangle = \frac{\vartheta(0) |\psi(T)|^2}{\int \vartheta(T-t) |\psi(t)|^2 dt} = p_T(T)$$

Il y a cependant un souci : en général $\vartheta(0) = 0$ car le capteur a un temps de réaction toujours non nul. Ainsi l'annonce est en retard sur le photon annoncé, d'où la fidélité

nulle. Pour pallier ce défaut on peut considérer que quand la voie B clique au temps T , l'état parfait attendu est $|T - \tau_m\rangle$, avec τ_m le délai le plus probable¹ (le mode de la distribution de délais). Cela permet de prendre en compte un délai systématique.

$$\mathcal{F}(T) = \langle T - \tau_m | \rho_A(T) | T - \tau_m \rangle = \frac{\vartheta(\tau_m) |\psi(T - \tau_m)|^2}{\int \vartheta(T - t) |\psi(t)|^2 dt} = p_T(T - \tau_m)$$

Remarquez qu'ainsi définie la fidélité est la valeur en un point d'une densité de probabilité. Ainsi c'est un nombre positif mais non limité par 1. Cela provient du fait que l'état de référence n'est pas un état bien normé.

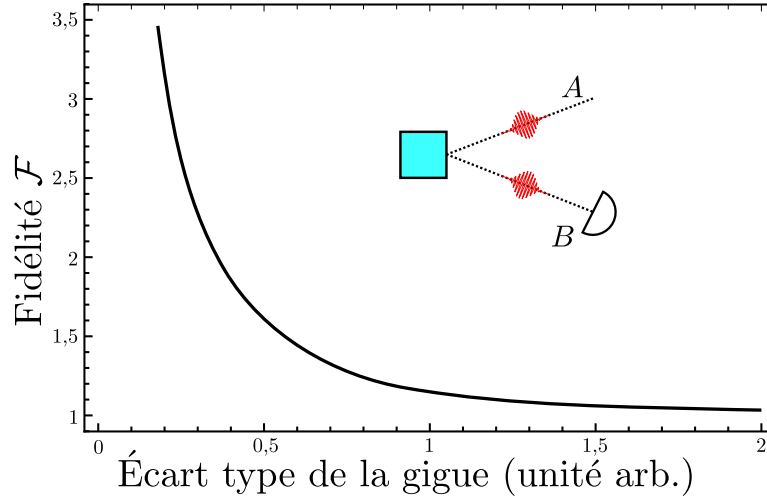


FIGURE 5.3 – Fidélité de l'état annoncé par un clic au temps T par rapport à l'état attendu $|T - \tau_m\rangle$ avec τ_m maximisant $\vartheta(\tau)$, en fonction de l'écart type de la gigue. L'état avant annonce est une paire de photons simultanés. Correspond à la valeur en $t = 0$ des courbes de la figure 5.2.

Nous représentons \mathcal{F} en fonction de l'écart type de $\vartheta(\tau)$ dans la figure 5.3. Comme attendu plus la gigue est importante, moins l'état est proche de celui attendu ($|T - \tau_m\rangle$).

Remarque. La fidélité telle qu'utilisée est un produit scalaire. Elle peut se réinterpréter comme une distance [133]. Il pourrait être judicieux de ne pas regarder uniquement la distance par rapport à un état, mais par rapport à un sous-espace. Cela permettrait de comparer l'état obtenu avec un ensemble d'états partageant une propriété. \diamond

Concluons la section en rappelant que partir d'une paire de photons parfaitement simultanés mène après annonce à un état complètement mélangé. Voyons donc maintenant ce qu'il advient en partant d'un état quelconque.

5.2 ÉTAT ANNONCÉ DANS UN CAS GÉNÉRAL

Étudions maintenant l'état annoncé en retirant les restrictions sur le nombre de photons ou la forme temporelle.

1. Nous ne choisissons pas la moyenne car nous voulons maximiser la fidélité qui en résultera. Nous cherchons à faire « le plus souvent » plutôt « qu'en moyenne » le bon choix.

5.2.1 Forme de l'état avant annonce

Nous allons prendre en compte des états contenant exclusivement des paires. Formellement nous considérons que l'espace de Hilbert est généré par les états du type $|t_{A,1}, \dots, t_{A,k}\rangle_A \otimes |t_{B,1}, \dots, t_{B,k}\rangle_B$, où nous insistons sur le fait que ces états contiennent le même nombre de photons sur A que sur B . Ainsi une matrice densité générique ρ peut se mettre sous la forme :

$$\rho = \sum_{k,k' \in \mathbb{N}} C_{k,k'} \rho_{k,k'}$$

où $C_{k,k'}$ est un coefficient complexe mais réel positif lorsque $k = k'$, tel que $\sum_k C_{k,k} = 1$; et on a également la propriété que les $\rho_{k,k}$ ($k' = k$) respectent individuellement les prescriptions d'une matrice densité. Les k et k' désignent ici un nombre de paires.

5.2.2 Matrice densité de l'état annoncé

Nous allons de nouveau utiliser l'équation (2.2) :

$$\rho_A(T) = \frac{\text{Tr}_B([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho)}{\text{Tr}([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho)} = \frac{\text{Tr}_B([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho)}{\text{Tr}_B(\hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T) \text{Tr}_A[\rho])}$$

L'opérateur $\hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)$ est diagonal en termes de nombre total de photons (diagonal par blocs). Ainsi la trace partielle sur B va faire disparaître tous les $\hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T) \rho_{i,j}$ pour lesquels $i \neq j$. Ainsi on peut écrire :

$$\text{Tr}_B([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k,k} \text{Tr}_B([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho_{k,k})$$

Il en va de même pour la trace totale. Par ailleurs $\hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)$ ne contient pas de terme à 0 photons, et les sommes peuvent donc commencer à $k = 1$. Ainsi, la matrice densité de l'état annoncé peut s'écrire :

$$\rho_A(T) = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} C_{k,k} \text{Tr}_B([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho_{k,k})}{\sum_{k=1}^{+\infty} C_{k,k} \text{Tr}_B(\hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T) \text{Tr}_A[\rho_{k,k}])} \quad (5.4)$$

On a donc une matrice densité qui n'a pas de cohérence entre des parties n'ayant pas le même nombre de photons. Une manière de caractériser l'état obtenu est de décrire sa statistique de nombre photons². Une mesure du nombre de photons ne doit pas prendre en compte la forme temporelle de ceux-ci, et donc l'opérateur correspondant est le projecteur sur le sous-espace des états à k photons : $\hat{\Pi}_{A,N=k} = \mathbb{1}_{A,k}$. Ainsi on peut définir et calculer la probabilité d'avoir k photons :

$$P_k = \text{Tr}_A[\mathbb{1}_{A,k} \rho_A] = \frac{C_{k,k} \text{Tr}_B(\hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T) \text{Tr}_A[\rho_{k,k}])}{\sum_{k=1}^{+\infty} C_{k,k} \text{Tr}_B(\hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T) \text{Tr}_A[\rho_{k,k}])} \quad (5.5)$$

2. Ici les variations du nombre de photons sont statistiques et ne proviennent pas d'une superposition cohérente.

Remarque. Si l'on ne regarde pas le temps de détection, cela revient à utiliser comme POVM $\hat{\pi}_B^{\text{ON}} = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - (1 - \eta)^k) \mathbb{1}_k$ où $\mathbb{1}_k$ est l'identité pour les états à k photons. Chaque trace du dénominateur est alors immédiate à calculer, on a donc :

$$P_1 = \frac{\eta C_{1,1}}{\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - (1 - \eta)^k) C_{k,k}} \stackrel{\eta=1}{=} \frac{C_{1,1}}{\sum_{k=1}^{+\infty} C_{k,k}} \quad (5.6)$$

On retrouve une expression connue : c'est l'équation (8) de l'article [20] (en faisant attention à ce que dans ce dernier, c_k désigne les coefficients du POVM). \diamond

5.2.3 Cas typique

Afin de simplifier davantage les expressions, spécifions maintenant un type d'état particulier. On choisit un état composé de plusieurs paires identiques et indépendantes. De plus chaque paire est prise dans un état pur, décrit par une fonction ψ :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_1 &= \int \psi(t_A, t_B) |t_A\rangle_A \otimes |t_B\rangle_B dt_A dt_B \\ \rho_{1,1} &= \int \psi(t_A, t_B) \psi^*(t'_A, t'_B) |t_A\rangle\langle t'_A| \otimes |t_B\rangle\langle t'_B| dt_A dt'_A dt_B dt'_B \end{aligned}$$

L'état généré est donné par l'équation (5.4). Nous allons maintenant nous concentrer sur la composante contenant exactement un photon. Cela signifie que nous ne conservons que le terme $k = 1$ de la somme au numérateur. Séparons le calcul des numérateurs et dénominateurs.

5.2.3.1 Numérateur

On rappelle que l'opérateur de mesure pour un photon s'écrit selon (4.1) :

$$\mathbb{1}_{A,1} \otimes \hat{\pi}_{B,1}^{\text{ON}}(T) = \eta \int \vartheta(T - t) \mathbb{1}_{A,1} \otimes |t\rangle\langle t|_B dt$$

Ainsi on peut calculer :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B([\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho_{1,1}) &= \int \langle t|_B [\mathbb{1} \otimes \hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T)] \rho_{1,1} |t\rangle_B dt \\ &= \eta \int \vartheta(T - t) \psi(t_A, t) \psi^*(t'_A, t) |t_A\rangle\langle t'_A| dt_A dt'_A dt \\ &= \eta \int \left[\int \vartheta(T - t) \psi(t_A, t) \psi^*(t'_A, t) dt \right] |t_A\rangle\langle t'_A| dt_A dt'_A \end{aligned}$$

5.2.3.2 Dénominateur

Passons au dénominateur. On fait l'hypothèse que quand il y a plusieurs paires elles sont indépendantes, et toutes identiques. Cela se traduit dans notre cas par :

$$\rho_{k,k} = \rho_{1,1}^{\otimes k}$$

D'où l'on déduit :

$$\text{Tr}_A [\rho_{k,k}] = (\text{Tr}_A [\rho_{1,1}])^{\otimes k}$$

Cette forme va nous permettre d'utiliser la stratégie exposée dans 4.1.1, et en particulier l'équation (4.4). Nous avons uniquement besoin de calculer $\text{Tr}_A [\rho_{1,1}]$, ce qui est direct :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A [\rho_{1,1}] &= \int \langle t|_A \rho_{1,1} |t\rangle_A dt \\ &= \int \psi(t, t_B) \psi^*(t, t'_B) |t_B\rangle\langle t'_B| dt_B dt'_B dt \\ &= \int \left[\int \psi(t, t_B) \psi^*(t, t'_B) dt \right] |t_B\rangle\langle t'_B| dt_B dt'_B \end{aligned}$$

La trace du produit entre un opérateur « convolution » et une matrice densité a déjà été calculée et le résultat se trouve dans l'équation (4.3). Ainsi l'équation (4.4), permet de conclure :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B (\hat{\pi}_B^{\text{ON}}(T) \text{Tr}_A [\rho_{k,k}]) \\ = k\eta \left[\int \vartheta(T-t) |\psi(t', t)|^2 dt' dt \right] \left[1 - \eta \int \Theta(T-t) |\psi(t', t)|^2 dt' dt \right]^{k-1} \end{aligned}$$

5.2.3.3 Conclusion

Nous pouvons maintenant expliciter la composante à un photon de l'état annoncé. C'est une matrice densité non normée qu'on peut écrire sous la forme $P_1 \rho_{A,1}$ avec P_1 défini par (5.5) et $\rho_{A,1}$ une matrice normée. Compte tenu de l'expression des numérateur et dénominateur,

$$P_1 = \frac{C_{1,1}}{\sum_{k=1}^{+\infty} k C_{k,k} \left[1 - \eta \int \Theta(T-t) |\psi(t', t)|^2 dt' dt \right]^{k-1}} \quad (5.7a)$$

et

$$\rho_{A,1} = \frac{\int \left[\int \vartheta(T-t) \psi(t_A, t) \psi^*(t'_A, t) dt \right] |t_A\rangle\langle t'_A| dt_A dt'_A}{\int \vartheta(T-t) |\psi(t', t)|^2 dt' dt} \quad (5.7b)$$

En choisissant un état initial séparé, c'est-à-dire $\psi(t_A, t_B) = \psi_A(t_A) \psi_B(t_B)$, on obtient

$$\rho_{A,1} = \int \psi_A(t_A) \psi_A^*(t'_A) |t_A\rangle\langle t'_A| dt_A dt'_A = |\psi_A\rangle\langle\psi_A|$$

Ainsi dans ce cas l'état généré $\rho_{A,1}$ est pur. Or générer des états purs est essentiel pour pouvoir les utiliser dans des protocoles d'information quantique. C'est pourquoi de nombreux efforts ont été réalisés afin d'ajuster les caractéristiques des matériaux non linéaires, les forme des impulsions de pompes et les étapes de filtrage pour obtenir un état séparé avant la détection [20, 91].

Notez que nous avons ici étendu les expressions connues (5.4) au cas où le temps de détection est lu. Nous avons donc accès à l'effet de la gigue des détecteurs sur la qualité de l'état annoncé. En prenant un détecteur sans gigue ($\vartheta(\tau) = \delta(\tau)$), alors même que

l'état initial était intriqué, on obtient l'expression d'un état pur qu'on nomme $|\psi_A(t)\rangle$, et défini par :

$$|\psi_A(t)\rangle = \int \psi(t_A, t) |t_A\rangle dt_A \quad (5.8)$$

Dans le cas générique, en regroupant différemment les intégrales de l'équation (5.7b), on remarque :

$$\rho_{A,1} \propto \int \vartheta(T-t) |\psi_A(t)\rangle \langle \psi_A(t)| dt \quad (5.9)$$

avec $|\psi_A(t)\rangle \langle \psi_A(t)|$ tel que défini par l'équation (5.8). On peut alors interpréter $\rho_{A,1}$ comme une superposition incohérente des états purs qu'on obtiendrait avec un détecteur sans gigue qui cliquerait à l'intérieur d'une fenêtre temporelle définie par la gigue³; cela est illustré par la figure 5.4. Plus la gigue du détecteur est importante, plus les $|\psi_A(t)\rangle \langle \psi_A(t)|$ sont orthogonaux, et donc plus l'état annoncé sera mélangé.

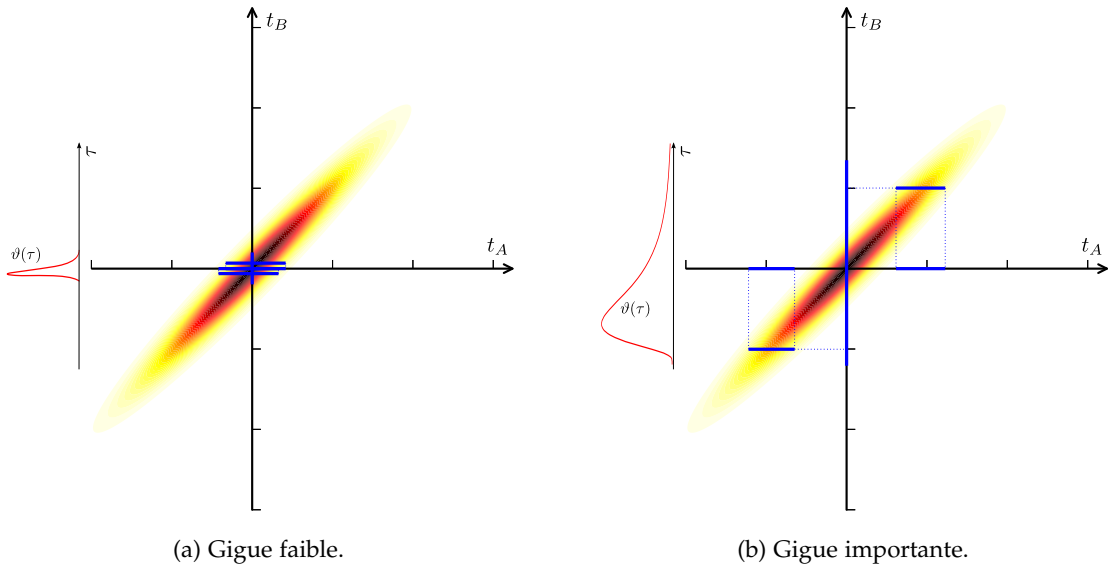


FIGURE 5.4 – Illustration de l'interprétation donnée par l'équation (5.9). Les termes sommés par l'intégrale sont quasiment identiques quand la gigue est faible, comme pour (a), donnant un état presque pur, mais quasiment orthogonaux quand elle est importante, comme pour (b), donnant un état très mélangé.

Un autre point de vue consiste à remarquer que $\rho_{A,1}$ est décrite par la fonction

$$(t_A, t'_A) \mapsto \int \vartheta(T-t) \psi(t_A, t) \psi^*(t'_A, t) dt$$

qui est une convolution $\tau \mapsto \vartheta(\tau)$ et $t \mapsto \psi(t_A, t) \psi^*(t'_A, t)$. On remarque de nouveau que mesurer précisément le temps d'annonce permet d'obtenir un état pur est qu'une mesure infiniment précise en temps (sans gigue) efface complètement l'information en fréquence sur B , projetant (avant destruction) l'état joint sur un état séparé⁴.

3. Autrement dit, c'est ce qu'on obtiendrait en effectuant la mesure parfaite, mais en lisant le résultat avec une erreur aléatoire.

4. Cette interprétation a des points communs avec un autre phénomène observé par [71] : une mesure précise en temps peut permettre d'observer des interférences entre photons n'ayant pas la même fréquence (battements qui se moyennent à 0 si l'on ne mesure pas le temps).

Ainsi, en plus d'optimiser les milieux non-linéaires et formes d'impulsions, ou bien d'utiliser des filtres en fréquence pour récupérer des états séparés, utiliser des détecteurs rapides et l'information temporelle permet d'obtenir un état annoncé pur alors même que les photons n'étaient pas temporellement séparables.

Remarquez par ailleurs que le coefficient $c_{A,1}$ dépend aussi du temps et de la gigue. Cela est discuté en [section 5.3](#).

5.2.4 Fidélité par rapport à l'état attendu

L'état attendu est toujours un état contenant exactement 1 photon. Notons $|\psi_0\rangle$ un tel état (il sera précisé plus tard). Avec la même définition de la fidélité que précédemment, seule la composante à un photon de ρ_A y contribue :

$$\mathcal{F}(T) = \langle \psi_0 | \rho_A(T) | \psi_0 \rangle = P_1(T) \langle \psi_0 | \rho_{A,1}(T) | \psi_0 \rangle$$

Ainsi la fidélité se met sous la forme $\mathcal{F} = P_1 \mathcal{F}_1$ où $\mathcal{F}_1 = \langle \psi_0 | \rho_{A,1}(T) | \psi_0 \rangle$ représente la fidélité de la composante à un photon par rapport $|\psi_0\rangle$.

De nouveau plusieurs choix de $|\psi_0\rangle$ sont possibles. Ils donnent respectivement comme résultat :

- Avec pour état de référence $|T\rangle$: comme précédemment c'est la chose « naïve » à faire.

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\int \vartheta(T-t) |\psi(T,t)|^2 dt}{\int \vartheta(T-t) |\psi(t',t)|^2 dt' dt} \quad (5.10a)$$

- Avec pour état de référence $|T-m\rangle$: c'est de nouveau un meilleur choix.

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\int \vartheta(T-m-t) |\psi(T-m,t)|^2 dt}{\int \vartheta(T-t) |\psi(t',t)|^2 dt' dt} \quad (5.10b)$$

- Avec pour état de référence $\text{Tr}_B [\rho_{1,1}]$: c'est l'état à un photon qu'on obtiendrait si le détecteur B pouvait compter le nombre de photons mais qu'on ne lisait pas le temps d'arrivée. Ceci a un intérêt surtout quand $|\psi\rangle_1$ est factorisable car alors $\text{Tr}_B [\rho_{1,1}]$ est un état pur. Comme nous ne souhaitons pas définir comme critère de qualité de ressembler à un état mélangé, parallèlement à ce choix nous imposons $\psi(t_A, t_B) = \psi_A(t_A) \psi_B(t_B)$, avec chacune de ces fonctions individuellement normalisée. On a alors $|\psi_0\rangle = \int \psi_A(t) |t\rangle dt$, et on obtient le résultat :

$$\mathcal{F}_1 = 1 \quad (5.10c)$$

Ainsi on a pu écrire la fidélité comme produit de deux facteurs. P_1 décrit la norme de la composante à un photon tandis que \mathcal{F}_1 caractérise la ressemblance de $\rho_{A,1}$ avec l'état attendu.

5.3 SÉLECTION TEMPORELLE DE L'ÉTAT ANNONCÉ

L'expression de P_1 vu en (5.7a) dépend des caractéristiques du détecteur $\vartheta(\tau)$, η et du temps auquel le clic du détecteur B a eu lieu. Rappelons-la :

$$P_1 = \frac{C_{1,1}}{\sum_{k=1}^{+\infty} k C_{k,k} \left[1 - \eta \int \Theta(T-t) |\psi(t',t)|^2 dt' dt \right]^{k-1}} \quad (5.7a)$$

On souhaite en général annoncer un état contenant un photon et pas plus, il faut donc chercher à maximiser P_1 . Avec T comme paramètre libre, cela se fait en maximisant $\int \Theta(T-t) |\psi(t',t)|^2 dt' dt$. On rappelle que $\Theta(\tau)$ est la fonction de répartition du délai de détection; ainsi elle est croissante et comprise entre 0 et 1. Ainsi P_1 sera maximisée pour $T \rightarrow +\infty$. Cela s'interprète comme l'inversion de ce qui a été mis en évidence par les équation (3.22) et figure 3.4 : plus on envoie de photons, plus le détecteur clique tôt; ici quand il clique tardivement le nombre moyen de photons de l'état obtenu est plus faible.

En pratique, il n'est pas envisageable de ne sélectionner qu'un seul temps T car la probabilité de l'obtenir est nulle. Nous allons donc étudier l'état obtenu quand on sélectionne les clics dans une fenêtre.

5.3.1 État annoncé avec sélection dans une fenêtre de temps

Considérons un état avant la détection composé de paires de photons indépendantes et identiques, mais désormais dans un état potentiellement mélangé :

$$\rho = \sum_{k \in \mathbb{N}} C_{k,k} \rho_{1,1}^{\otimes k} \quad \text{avec} \quad \rho_{1,1} = \int \psi_\rho(t_A, t_B; t'_A, t'_B) |t_A\rangle\langle t'_A| \otimes |t_B\rangle\langle t'_B| dt_A dt'_A dt_B dt'_B$$

avec ψ_ρ une fonction telle que $\rho_{1,1}$ est une matrice densité (normée, hermitienne, positive).

L'état annoncé par un clic situé dans une fenêtre de temps $[T_1, T_2]$ s'obtient par une formule similaire à l'équation (5.4), mais en utilisant l'opérateur de mesure correspondant au fait d'avoir un clic dans cette fenêtre (voir remarque de la sous-section 2.2.2). Celui-ci s'obtient par la définition (3.11) de la densité de POVM, et peut se réexprimer à partir de l'opérateur de répartition tel que défini par (3.13) :

$$\hat{\Pi}_B = \int_{T_1}^{T_2} \hat{\pi}^{\text{ON}}(T) dT = \hat{\Pi}^{\text{ON}}(T_2) - \hat{\Pi}^{\text{ON}}(T_1)$$

Avoir choisi l'état initial sous forme de paires de photons identiques indépendantes nous permet d'utiliser la stratégie présentée en sous-section 4.1.1. Avec l'expression de l'opérateur de répartition (3.34) et la forme de l'équation (4.3), on obtient une expression du même type que (5.5) :

$$P_k(T \in [T_1, T_2]) = \frac{C_{k,k} D(k, T_1, T_2)}{\sum_{k'=1}^{+\infty} C_{k',k'} D(k', T_1, T_2)} \quad (5.11a)$$

Avec

$$D(k, T_1, T_2) = \left[1 - \eta \int \Theta(T_1 - t) \psi_\rho(t', t; t', t) dt' dt \right]^k - \left[1 - \eta \int \Theta(T_2 - t) \psi_\rho(t', t; t', t) dt' dt \right]^k \quad (5.11b)$$

Pour $T_1 = -\infty$ et $T_2 = +\infty$, on retrouve l'expression (5.6). Dans le cas où la paire est pure de la forme $|\psi\rangle = \int \psi(t_A, t_B) |t_A\rangle_A \otimes |t_B\rangle_B dt_A dt_B$, on a alors $\psi_\rho(t_A, t_B; t'_A, t'_B) = \psi(t_A, t_B) \psi^*(t'_A, t'_B)$.

Remarque. Chacun des deux termes de D est la probabilité qu'aucun des photons d'annonce ne soit détecté avant le temps correspondant.

Pour calculer le dénominateur on pourra reconnaître pour chacun de ces termes la fonction génératrice des moments de la statistique du nombre de paires de l'état avant annonce. Attention à ne pas oublier d'y retirer le terme correspondant à $k = 0$. \diamond

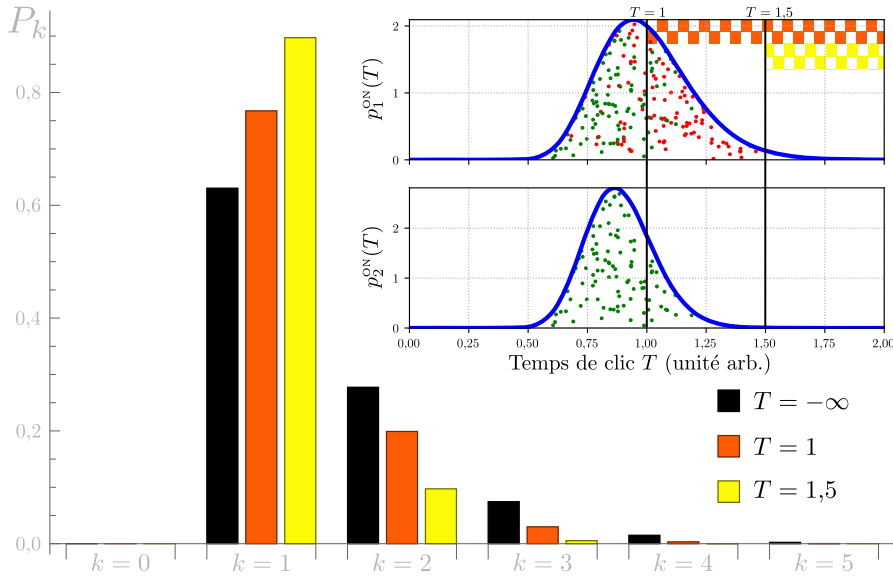


FIGURE 5.5 – Statistique de photons selon le temps de début de post-sélection $T_1 = T$ avec $T_2 = +\infty$. On a choisi le cas où les photons de chaque paire sont parfaitement simultanés et la génération équiprobable entre $t = -\frac{1}{2}$ et $t = \frac{1}{2}$: $\psi_\rho(t', t; t', t) = \delta(t' - t) * \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$. Le nombre de paires générées suit une loi de Poisson : $C_{k,k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. L'expression de P_k est donnée par l'équation (5.13). $\vartheta(\tau)$ est une log-normale.

L'expression de P_k est illustrée par la figure 5.5. On y compare les statistiques de photons dans un cas sans sélection temporelle (en noir), avec une sélection modérée sur les clics tardifs (orange) et une sélection plus importante (en jaune). On observe bien le comportement attendu : ne garder que les annonces tardives permet d'augmenter la probabilité d'avoir un seul photon dans l'état annoncé.

5.3.2 Débit de la source annoncée avec sélection tardive

Maintenant que nous avons exprimé la statistique de l'état annoncé tardivement, intéressons-nous au débit d'une telle source. Pour cela nous allons imposer un critère de qualité pour l'état obtenu, puis comparer le débit des différents moyens de l'atteindre. On se demandera ainsi quel choix de paramètres donne un débit optimal à qualité fixée. Le critère sera ici P_1 , la probabilité d'avoir généré un seul photon dans l'état annoncé.

5.3.2.1 Choix de la statistique initiale

Nous choisissons une statistique poissonnienne de paramètre λ pour l'état avant l'annonce.

$$C_{k,k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Remarque. Le choix d'une loi de Poisson est ici arbitraire, mais il n'est pas totalement le fruit du hasard. L'état généré par un cristal non linéaire est typiquement donné par une loi géométrique. Cependant quand la génération a lieu simultanément dans plusieurs modes (temporels) et dans la limite de faible pompage, on obtient une loi de Poisson⁵ [80, Annexe B]. \diamond

Afin de simplifier les expressions, on pose⁶ :

$$F(T) = \int \Theta(T-t) \psi_\rho(t', t; t', t) dt' dt \quad \text{et} \quad G(T) = 1 - F(T)$$

F représente donc la probabilité pour un photon d'être détecté avant T , si le capteur était parfait ($\eta = 1$); G est celle de l'être après T dans ce même cas (on rappelle qu'on a considéré des paires toutes indépendantes).

Commençons par simplifier le dénominateur de P_1 . Tout d'abord, en reconnaissant le développement en série entière de l'exponentielle (ou en connaissant la fonction génératrice des moments de la loi de Poisson), pour toute constante A :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k,k} A^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} A^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda A)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda A} = e^{\lambda(A-1)}$$

On se place désormais dans le cas où l'on ne sélectionne que les clics tardifs, c'est-à-dire qu'on prend $T_1 = T$ quelconque mais plutôt grand et $T_2 = +\infty$. Avec ces choix,

$$D(k, T) = [1 - \eta F(T)]^k - [1 - \eta]^k$$

Insistons sur le fait que $F(T)$ est indépendant de k . On peut alors en déduire l'expression du dénominateur (les termes $k = 0$ s'annulent) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} C_{k,k} D(k, T) = e^{-\lambda \eta F(T)} - e^{-\lambda \eta} = e^{-\lambda \eta} \left(e^{\lambda \eta G(T)} - 1 \right) \quad (5.12)$$

On a donc :

$$P_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda} [1 - \eta F(T)]^k - [1 - \eta]^k}{e^{-\lambda \eta} (e^{\lambda \eta G(T)} - 1)} \quad (5.13)$$

5. Sans cette limite mais avec des lois géométriques identiques on a alors une loi binomiale négative.

6. F n'est pas la fidélité mais simplement une fonction réelle!

La probabilité d'obtenir un photon s'écrit :

$$P_1 = \lambda e^{-\lambda} \frac{[1 - \eta F(T)] - [1 - \eta]}{e^{-\lambda\eta} (e^{\lambda\eta G(T)} - 1)} = e^{-\lambda(1-\eta)} \frac{\lambda\eta G(T)}{e^{\lambda\eta G(T)} - 1}$$

On rappelle que G est une probabilité et donc $0 \leq G \leq 1$, les cas limites correspondant respectivement à une sélection drastique ($T \rightarrow +\infty$) et à l'absence de sélection sur le temps ($T \rightarrow -\infty$). La fonction $G \mapsto P_1$ est décroissante ; et donc $T \mapsto P_1$ croissante. On retrouve bien que la sélection tardive améliore la qualité de l'état annoncé. Les valeurs limites de P_1 sont :

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} P_1(T) = e^{-\lambda(1-\eta)} \frac{\lambda\eta}{e^{\lambda\eta} - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} P_1(T) = e^{-\lambda(1-\eta)}$$

Notez que la post-sélection temporelle ne permet pas d'atteindre $P_1 = 1$.

5.3.2.2 Débit de la source

Nous allons fixer P_1 et en déduire selon λ la valeur de G à choisir. Cela permet d'en déduire le débit (probabilité d'annonce) en fonction de λ . On pourra donc trouver la valeur de λ qui optimise le débit, et le débit correspondant. On aura donc exprimé le débit maximum en fonction de la pureté espérée.

Remarque. Nous allons effectuer des approximations ; il serait probablement possible de résoudre le problème de manière exacte en introduisant un multiplicateur de Lagrange. \diamond

Exprimons maintenant $G(T)$ en fonction de λ pour un P_1 donné. L'équation en $G(T)$ est de la forme

$$\frac{x}{e^{c_1 x} - 1} = c_2$$

Cette équation n'a pas de solution en termes de fonctions usuelles ; il faudrait utiliser la fonction W de Lambert. Nous allons plutôt effectuer des approximations. On fait l'hypothèse que $\lambda\eta G \ll 1$. Cela est raisonnable car en général, quand on cherche à éviter d'avoir plus d'un photon après annonce, on choisit λ petit, ce qui se traduit expérimentalement par une faible puissance de pompe du matériau non linéaire. Une autre bonne raison pour effectuer cette approximation est qu'on se place dans le cadre d'un déclenchement tardif ; or pour $T \rightarrow +\infty$, $F(T) \rightarrow 1$ et $G(T) \rightarrow 0$.

À l'ordre le plus bas $e^{\lambda\eta G(T)} \sim 1 + \lambda\eta G(T)$, ce qui donne $P_1 = e^{-\lambda(1-\eta)} + o(1)$. On retrouve l'expression de $\lim_{T \rightarrow +\infty} P_1(T)$, qui est une constante.

Pour obtenir une équation liant G et λ , il faut développer à l'ordre suivant :

$$P_1 = e^{-\lambda(1-\eta)} \frac{\lambda\eta G(T)}{\lambda\eta G(T) + \frac{\lambda^2\eta^2 G^2}{2} + o(\lambda^2\eta^2 G^2)} = e^{-\lambda(1-\eta)} \left(1 - \frac{\lambda\eta G}{2} \right) + o(\lambda\eta G)$$

Et donc à cet ordre :

$$G = \frac{2}{\lambda\eta} \left(1 - P_1 e^{+\lambda(1-\eta)} \right) \quad (5.14)$$

Calculons maintenant le débit D_{tot} , qui est défini comme la probabilité d'avoir un clic dans la fenêtre de sélection⁷. C'est donc égal au dénominateur de l'expression (5.11), qu'on a déjà calculé (voir équation (5.12)) :

$$D_{\text{tot}} = e^{-\lambda\eta} \left(e^{\lambda\eta G(T)} - 1 \right) \quad (5.15)$$

Afin de rester cohérent nous utilisons de nouveau $\lambda\eta G \ll 1$ au premier ordre :

$$D_{\text{tot}} = e^{-\lambda\eta} \lambda\eta G(T) + o(\lambda\eta G)$$

En y injectant l'expression de G en fonction de P_1 et λ , on obtient :

$$D_{\text{tot}} = 2e^{-\lambda\eta} \left(1 - P_1 e^{+\lambda(1-\eta)} \right) = 2e^{-\lambda\eta} - 2P_1 e^{+\lambda(1-2\eta)}$$

5.3.2.3 Maximisation du débit

Intéressons-nous maintenant au débit maximum atteignable pour une qualité donnée. Cherchons donc quel est le meilleur choix de λ étant donné P_1 , et un débit D_{tot} donné. Pour cela, dérivons D_{tot} par rapport à λ :

$$\frac{\partial D_{\text{tot}}}{\partial \lambda} = -2\eta e^{-\lambda\eta} - 2P_1(1-2\eta)e^{\lambda(1-2\eta)} = -2e^{-\lambda\eta} \left(\eta + P_1(1-2\eta)e^{\lambda(1-\eta)} \right)$$

Intéressons-nous au signe de $\eta + P_1(1-2\eta)e^{\lambda(1-\eta)}$. On distingue deux cas :

$\eta \leq \frac{1}{2}$: Le terme est trivialement positif.

$\eta > \frac{1}{2}$: Rappelons que $P_1 \leq e^{-\lambda(1-\eta)}$. Comme $1-2\eta < 0$, on peut conclure que

$$\eta + P_1(1-2\eta)e^{\lambda(1-\eta)} \geq 1 - \eta \geq 0$$

Ainsi dans le domaine autorisé, $\frac{\partial D_{\text{tot}}}{\partial \lambda} \leq 0$. Le débit est décroissant avec λ (ou autrement dit croissant avec G à P_1 fixé). Le maximum de débit est atteint pour λ tel que $G = 1$, ce qui correspond à $T \rightarrow -\infty$, c'est-à-dire quand on n'effectue pas de sélection temporelle.

On peut donc conclure que la technique de sélection temporelle n'a en général pas vraiment d'intérêt pratique car il est préférable d'ajuster la qualité de l'état annoncé en réglant la puissance de pompe. On pourrait par contre imaginer l'utiliser pour retraiter des données déjà acquises, et améliorer la qualité de l'état annoncé.

Exprimons D_{tot} en fonction de P_1 dans la configuration optimale ($T = -\infty, G = 1$). Nous n'allons cette fois pas effectuer d'approximation. Nous avons vu (équation (5.15)) :

$$D_{\text{tot}} = e^{-\lambda\eta} \left(e^{\lambda\eta G(T)} - 1 \right) = 1 - e^{-\lambda\eta}$$

On peut en déduire que :

$$\lambda = -\frac{1}{\eta} \ln[1 - D_{\text{tot}}] \quad (5.16)$$

Et par conséquence que :

$$P_1 = e^{-\lambda(1-\eta)} \frac{\lambda\eta}{1 - e^{-\lambda\eta}} e^{-\lambda\eta} = e^{-\lambda} \frac{\lambda\eta}{D_{\text{tot}}} = -[1 - D_{\text{tot}}]^{\frac{1}{\eta}} \frac{\ln[1 - D_{\text{tot}}]}{D_{\text{tot}}} \quad (5.17)$$

7. Peu importe le « nombre de photons en étant à l'origine », ce qui n'a d'ailleurs pas de sens.

5.3.2.4 Illustration

Illustrons ce travail sur le débit de la source tardivement annoncée. Nous allons pour cela utiliser comme critère de la qualité de l'état généré la valeur de $\frac{P_2}{P_1^2}$, souhaitée la plus petite possible. L'idée de la figure que nous cherchons à établir est de représenter la qualité en fonction du débit. Nous allons le faire pour des courbes où λ est fixé et où G (qui est la variable décrivant la largeur de la fenêtre de sélection) est variable. Nous tracerons également la courbe pour laquelle $G = 1$ et λ varie. Pour cela, il nous faut les expressions que nous souhaitons représenter.

On a déjà établi en partant de l'équation (5.13) que

$$P_1 = e^{-\lambda(1-\eta)} \frac{\lambda\eta G(T)}{e^{\lambda\eta G(T)} - 1} = \lambda e^{-\lambda} \frac{\eta G}{e^{-\lambda\eta} (e^{\lambda\eta G} - 1)}$$

En partant également de (5.13), on peut calculer :

$$P_2 = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda} \eta^2 G^2 + 2\eta G (1 - \eta)}{2 e^{-\lambda\eta} (e^{\lambda\eta G} - 1)}$$

Cela nous permet d'écrire :

$$\frac{P_2}{P_1^2} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda} \eta^2 G^2 + 2\eta G (1 - \eta)}{2\lambda^2 e^{-2\lambda} \eta^2 G^2} \frac{e^{-2\lambda\eta} (e^{\lambda\eta G} - 1)^2}{e^{-\lambda\eta} (e^{\lambda\eta G} - 1)} = \frac{e^\lambda}{2} \left[1 + 2 \frac{1 - \eta}{\eta G} \right] \underbrace{e^{-\lambda\eta} (e^{\lambda\eta G} - 1)}_{D_{\text{tot}}}$$

L'expression du débit (5.15) nous permet d'exprimer :

$$G = \frac{1}{\lambda\eta} \ln(D_{\text{tot}} e^{\lambda\eta} + 1)$$

On en conclut l'expression liant directement $\frac{P_2}{P_1^2}$ à D_{tot} :

$$\frac{P_2}{P_1^2} = \frac{e^\lambda}{2} \left[1 + 2\lambda \frac{1 - \eta}{\ln(D_{\text{tot}} e^{\lambda\eta} + 1)} \right] D_{\text{tot}} \quad (5.18)$$

Attention toutefois au fait que G est une probabilité, et vérifie par construction $0 \leq G \leq 1$. Cela impose $0 \leq D_{\text{tot}} \leq 1 - e^{-\lambda\eta}$. Il faudra donc prendre garde de ne pas dépasser cette valeur.

On a ici établi l'équation pour tracer $\frac{P_2}{P_1^2}$ en fonction de D_{tot} . La principale variable sous-entendue derrière la variation de D_{tot} est le temps de post-sélection. Il ne faut pas oublier que D_{tot} varie aussi avec λ . Pour obtenir la courbe de référence correspondant à une source sans post-sélection temporelle mais en faisant varier λ , on considère le cas $T \rightarrow -\infty \Leftrightarrow G = 1$. La valeur de λ permettant d'atteindre un débit donné est exprimée par l'équation (5.16). En l'utilisant dans l'expression de $\frac{P_2}{P_1^2}$, on obtient :

$$\frac{P_2}{P_1^2}(T = -\infty) = \frac{1}{2(1 - D_{\text{tot}})^{\frac{1}{\eta}}} \left[1 + 2 \frac{1 - \eta}{\eta} \right] D_{\text{tot}} \quad (5.19)$$

Nous avons maintenant toutes les expressions pour représenter la qualité de la source en fonction de la probabilité d'annonce, ce que nous faisons en figure 5.6. Nous y observons ce qui a été décrit précédemment : l'annonce avec sélection temporelle a à qualité égale un débit plus faible que l'annonce sans sélection. Cela est d'autant plus prononcé que la sélection est plus importante.

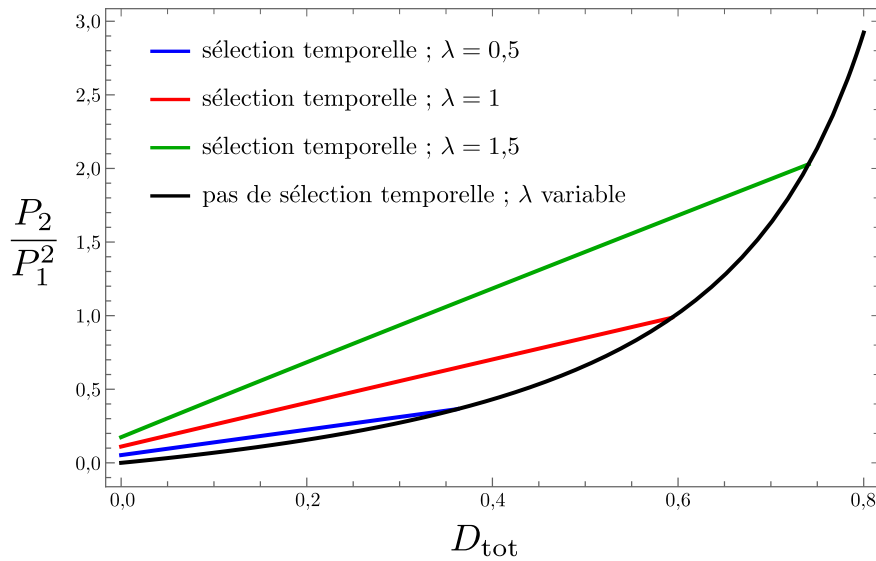


FIGURE 5.6 – Qualité de l'état généré par une source de photons annoncés en fonction de la probabilité d'annonce. Courbe noire : pas de post-sélection ; courbes de couleur : post-sélection sur les temps de détection du photon d'annonce.

5.3.3 Conclusion

Nous avons vu que pour une source de photons annoncés, ne sélectionner que les clics tardifs permet d'améliorer la statistique du nombre de photons. Pour l'étudier, nous avons supposé que l'état avant annonce était composé de paires de photons indépendantes. Il n'a pas été utile de spécifier la forme temporelle de cette paire, ni la gigue du détecteur ($G(T)$ englobe tout et varie toujours entre 0 et 1) ; nous avons par contre effectué un choix de statistique du nombre de photons.

Il faut par contre remarquer que pour générer un état d'une qualité donnée, la stratégie maximisant le débit consiste à ne pas effectuer de sélection temporelle. De plus, pour une utilisation pratique il faudra aussi prendre en compte l'effet de l'annonce tardive sur la forme temporelle de l'état annoncé.

Troisième partie

GÉNÉRATION DE LUMIÈRE COMPRIMÉE MULTIMODE ;
HAMILTONIEN QUADRATIQUE

PRÉSENTATION DU PROBLÈME

En introduction nous avons rappelé la définition et les propriétés fondamentales d'un état comprimé monomode (voir [sous-sous-section 1.4.2.2](#)). Une application possible d'un tel état est d'exploiter la réduction des fluctuations de quadratures (compression, « squeezing » en anglais ; voir [l'équation \(1.17\)](#)) comparativement à celles d'un état cohérent pour améliorer la précision d'une mesure [43]. Cela a notamment été mis en œuvre dans les détecteurs d'ondes gravitationnelles afin d'améliorer leurs sensibilités [110, 118].

La définition de l'opérateur de compression (1.15) peut être modifiée afin de mélanger deux modes ; on obtient alors l'opérateur de compression bi-mode $S_{i,j}(\zeta) = e^{\frac{1}{2}[\zeta^* \hat{a}_i \hat{a}_j - \zeta \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger]}$. Cela se généralise à un nombre de modes arbitraire en plaçant dans l'exponentielle un polynôme du second degré en leurs opérateurs de création et annihilation. On parle alors d'un état comprimé multimode, ou plus généralement d'états gaussiens ; les deux articles de revues [1, 41, 129] sont d'excellentes introductions au domaine, et le livre [16] traite de la plupart des aspects de l'optique quantique en variables continues. Ces états trouvent de nombreuses applications en métrologie [43, 105], communications [60, 127] et calcul [8, 87, 129] quantiques, et en particulier les états dits « cluster » ou « graphe » [27, 53, 86, 102, 138, 139].

La génération de lumière comprimée se fait *via* un matériau non linéaire. Deux configurations sont possibles : soit la lumière n'effectue qu'un seul passage dans la zone non linéaire [54, 60, 89, 128], soit celle-ci est placée dans une cavité [25, 40, 112]. Un cas particulièrement utile est de pomper la cavité à l'aide d'un peigne de fréquences dont le taux de répétition correspond au temps d'aller-retour de la cavité [112, 123]. L'expression anglo-saxonne pour désigner cette technique est « Synchronously Pumped Optical Parametric Oscillator (SPOPO) » ; on utilisera cet acronyme. Cela est en général effectué avec un matériau ayant une non-linéarité d'ordre 2 ($\chi^{(2)}$).

Récemment, la fabrication de cavités en anneau sur des puces de silicium (ou autre matériau) a permis de simplifier l'exploitation de non-linéarité d'ordre 3 pour la génération de lumière quantique [18, 65, 82, 107]. De premières démonstrations expérimentales de génération de lumière comprimée en cavité ont été menées [32, 122]. La théorie développée pour décrire ces expériences s'appuie alors sur le faible nombre de modes impliqués pour décrire explicitement le problème spécifique traité [124].

Nous allons présenter ici un formalisme permettant de traiter le cas le plus général de génération de lumière comprimée en présence de pertes et d'un matériau non-linéaire tel qu'une fois les pompes considérées comme classiques, le hamiltonien d'interaction soit quadratique. En particulier nous allons prendre en compte la présence potentielle d'effets de type conjugaison de phase qui ne sont pas directement présents avec une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$. L'esprit du formalisme présenté est de pouvoir s'appliquer facilement y compris lorsqu'un grand nombre de modes est impliqué. Nous commencerons par présenter les principes généraux dans le cas d'une évolution purement

Le travail présenté dans cette partie a été effectué en grande partie à l'occasion d'une collaboration avec Giuseppe Patera (Université de Lille, CNRS, UMR 8523 - PhLAM - Physique des Lasers Atomes et Molécules, F-59000 Lille, France).

hamiltonienne, comme obtenu en simple passage sans pertes ([chapitre 7](#)). Ensuite nous donnerons un aperçu des outils mathématiques à notre disposition ([chapitre 8](#)). Enfin nous détaillerons le traitement d'une cavité sous le seuil ([chapitre 9](#)), et nous illustrerons la méthode générale par des exemples en basse dimension ([chapitre 10](#)). Enfin nous introduirons et détaillerons la description du SPOPO en présence de non-linéarité de type $\chi^{(3)}$ ([chapitre 11](#)).

6.1 HAMILTONIEN ÉTUDIÉ

Un résonateur optique est un système ouvert dont l'évolution n'est pas hamiltonienne. Cependant les processus non-linéaires peuvent se décrire par un hamiltonien d'interaction qui est en général obtenu en prenant en compte la non-linéarité du milieu jusqu'à un certain ordre et en considérant la ou les pompes comme classiques et non affectées par la propagation. De plus, travailler sous le seuil de la cavité permet de s'affranchir de la détermination des valeurs moyennes des modes étudiés. La dépendance en temps de l'amplitude de pompe peut le plus souvent s'éliminer en travaillant dans des conditions d'amplitude lentement variable (représentation d'interaction) [18]. La dérivation du hamiltonien n'est pas le sujet de cette étude qui traite principalement de la résolution des équations, et non de leur établissement. Une bonne introduction à l'optique non-linéaire classique pourra être trouvée dans la thèse [46] ainsi que dans le cours [48]. Nous verrons un exemple simplifié d'obtention du hamiltonien d'interaction le cas particulier du SPOPO.

Considérons un ensemble de N modes propres de la cavité. Notons \hat{a}_k et \hat{a}_k^\dagger les opérateurs annihilation et création associés au mode k , où $k \in \mathbb{N}_N$ décrit¹ aussi bien la forme spatiale (longitudinale et transversale) du mode que sa polarisation. Nous étudions les hamiltoniens quadratiques qui s'écrivent sous la forme :

$$\hat{H} = \sum_{i,j} F_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger + F_{i,j}^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j + G_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \quad (6.1)$$

où F et G sont des matrices de nombres complexes (pas des opérateurs). Nous les supposons indépendantes du temps. Pour s'assurer que \hat{H} soit un opérateur hermitien, G doit être hermitienne : $G^\dagger = G$. On peut également sans perte de généralité prendre F symétrique : $F^T = F$ où T désigne la transposition.

Remarque. Par simplicité, parce qu'un changement de variable judicieux peut permettre de les éliminer et parce que peu de situations physiques les font apparaître, nous avons décidé de ne pas inclure de termes d'ordre 1 en les \hat{a}_i et \hat{a}_i^\dagger . \diamond

Dans l'expression (6.1) la matrice F encode les phénomènes de création et destruction de paires de photons. La matrice G regroupe les effets dits de modulation de phase. Dans les configurations usuelles de doublage de fréquence dans un milieu ayant une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$, la matrice G est uniquement diagonale et bien souvent nulle ou proportionnelle à l'identité. Cela amène d'importantes simplifications, dans le cadre desquelles le problème a déjà été extensivement traité [27, 101, 103]. Nous ne ferons pas cette hypothèse et garderons le cas général.

1. \mathbb{N}_N est l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à N . Il peut être plus pratique dans les cas concrets de centrer les indices autour de 0.

Remarque. Un interféromètre passif peut également être décrit par un hamiltonien de la forme (6.1). Nous précisons plus tard la notion d'interféromètre passif, mais nous pouvons donner dès à présent l'exemple de la lame séparatrice qui est typiquement décrite par [106] :

$$\hat{H} \propto \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2$$

où l'interaction n'a lieu que durant un temps fini afin d'obtenir le couplage souhaité. \diamond

Le problème du hamiltonien quadratique a également été beaucoup étudié par la communauté des atomes froids. Cependant les cas traités en détail sont ceux pour lesquels le hamiltonien peut se réécrire sous la forme d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques [14, 135], cas dans lequel il ne peut pas y avoir d'amplification. Ainsi leurs méthodes ne sont pas directement applicables².

2. Inversement, même la lumière comprimée monomode ne respecte pas les hypothèses des méthodes basiques du domaine des atomes froids.

ÉVOLUTION HAMILTONIENNE

Afin de présenter les spécificités d'un hamiltonien quadratique tel que donné par l'équation (6.1), dans ce chapitre nous ne prenons en compte ni les effets de cavité, ni la dissipation. Cela décrit un passage unique et sans perte à travers le milieu non-linéaire. Nous adoptons le point de vue de Heisenberg [22] et allons décrire l'évolution des opérateurs de création et d'annihilation soumis au hamiltonien quadratique (6.1). Pour cela nous allons commencer par donner quelques définitions qui permettent de simplifier les notations. Nous présenterons ensuite en détail différentes propriétés du problème. La résolution elle-même ne sera effectuée que dans les chapitres suivants.

7.1 ÉQUATION D'ÉVOLUTION

7.1.1 Évolution d'un mode

Les variables du problème sont les opérateurs \hat{a}_k et \hat{a}_k^\dagger . Les équations de Heisenberg qui les régissent s'écrivent :

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_k}{dt} = [\hat{a}_k, \hat{H}] \quad (7.1a)$$

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{H}] \quad (7.1b)$$

avec \hat{H} donné par (6.1), quadratique en les opérateurs de création et annihilation. Les relations de commutation des opérateurs bosonique en représentation de Heisenberg sont également donnés par l'équation (1.7) (car l'identité est constante dans le temps). Les commutateurs étant soit nuls, soit l'identité, ils commutent eux-mêmes avec les opérateurs d'échelle. Remarquons alors la propriété suivante :

Propriété 7.1. Soient A , B et C des opérateurs.

$$\begin{aligned} [A, BC] &= [A, [B, C]] + [A, C]B + C[A, B] \\ [A, BC] &= [A, B]C + B[A, C] \end{aligned}$$

Si de plus $[A, [B, C]] = 0$,

$$\boxed{[A, BC] = [A, C]B + C[A, B]} \quad (7.2)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
[A, BC] &= ABC - BCA \\
&= ABC - ACB + ACB - BCA - CAB + CAB \\
&= A[B, C] + [A, C]B + CAB - BCA - CBA + CBA \\
&= A[B, C] + [A, C]B + C[A, B] + [C, B]A \\
[A, BC] &= [A, [B, C]] + [A, C]B + C[A, B]
\end{aligned}$$

On remarque également que :

$$ABC - BCA = ABC - BAC + BAC - BCA = [A, B]C + B[A, C]$$

donc :

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

□

On utilise alors la [propriété 7.1](#) pour exprimer les commutateurs entre un opérateur d'échelle et un produit de deux opérateurs. Quand ils sont du même type (création ou annihilation), le commutateur est nul. Les formules utiles sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
[\hat{a}_k, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger] &= [\hat{a}_k, \hat{a}_j^\dagger] \hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_j^\dagger [\hat{a}_k, \hat{a}_i^\dagger] & [\hat{a}_k, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j] &= \overbrace{[\hat{a}_k, \hat{a}_j]}^0 \hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_j [\hat{a}_k, \hat{a}_i^\dagger] \\
&= \delta_{k,j} \hat{a}_i^\dagger + \delta_{k,i} \hat{a}_j^\dagger & &= \delta_{k,i} \hat{a}_j \\
[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_i \hat{a}_j] &= [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_j] \hat{a}_i + \hat{a}_j [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_i] & [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j] &= [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_j] \hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_j \overbrace{[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_i^\dagger]}^0 \\
&= -\delta_{j,k} \hat{a}_i - \delta_{k,i} \hat{a}_j & &= -\delta_{k,j} \hat{a}_i^\dagger
\end{aligned}$$

Ainsi en injectant l'expression de \hat{H} donnée par (6.1),

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d\hat{a}_k}{dt} &= [\hat{a}_k, \hat{H}] \\
&= \sum_{i,j} F_{i,j} [\hat{a}_k, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger] + F_{i,j}^\dagger [\hat{a}_k, \hat{a}_i \hat{a}_j] + G_{i,j} [\hat{a}_k, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j] \\
&= \sum_{i,j} F_{i,j} \delta_{k,j} \hat{a}_i^\dagger + \sum_{i,j} F_{i,j}^\dagger \delta_{k,i} \hat{a}_j^\dagger + \sum_{i,j} G_{i,j} \delta_{k,i} \hat{a}_j \\
&= \sum_i F_{i,k} \hat{a}_i^\dagger + \sum_j F_{k,j} \hat{a}_j^\dagger + \sum_j G_{k,j} \hat{a}_j
\end{aligned}$$

D'où :

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_k}{dt} = \sum_i [(F_{i,k} + F_{k,i}) \hat{a}_i^\dagger + G_{k,i} \hat{a}_i]$$

Par un calcul similaire on obtient :

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{H}] = \sum_i [-(F_{i,k}^\dagger + F_{k,i}^\dagger) \hat{a}_i - G_{i,k} \hat{a}_i^\dagger]$$

7.1.2 Évolution de l'ensemble des modes

Nous allons regrouper les opérateurs bosoniques des différents modes sous une forme de vecteur colonne. Ceci va permettre d'exprimer l'ensemble des équations d'évolution

en une seule équation matricielle. On définit comme variable $\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \\ \vdots \end{pmatrix}$. Notez que les

opérateurs d'annihilation et de création sont regroupés ensemble.

On peut facilement réécrire les équations d'évolution sous forme de produit matriciel impliquant les transposées de F , F^\dagger et G :

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G & F^\dagger + F \\ \hline -(F^\dagger)^\dagger - F^\dagger & -G^\dagger \end{array} \right) \hat{A}$$

On rappelle (voir [équation \(6.1\)](#)) que $G^\dagger = G$ et qu'on peut choisir F symétrique : $F = F^\dagger$. On peut donc écrire l'équation d'évolution sous la forme :

$$\boxed{\frac{d\hat{A}}{dt} = \mathcal{L}\hat{A}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G & 2F \\ \hline -2F^\dagger & -G^\dagger \end{array} \right)} \quad (7.3)$$

L'équation obtenue est linéaire. Toutes les spécificités du système sont encodées dans la matrice de couplage \mathcal{L} . À ce stade, l'équation peut être formellement résolue en diagonalisant \mathcal{L} . Cette approche a un inconvénient majeur. Les matrices de passage diagonalisant \mathcal{L} définissent des opérateurs ayant une évolution indépendante, chacun étant une combinaison linéaire à coefficients complexes des \hat{a}_k et \hat{a}_k^\dagger . Dans le cas général, ces opérateurs ne vont pas être des observables ni des opérateurs d'échelle. Ils ne seront donc pas mesurables et difficiles à interpréter.

Dans la prochaine section nous allons détailler les propriétés attendues d'un changement de modes physiquement interprétable. La résolution elle-même sera présentée dans les chapitres suivants.

7.2 CONTRAINTES SUR L'OPÉRATEUR D'ÉVOLUTION ET SUR LA MATRICE DE COUPLAGE

L'objectif de cette section est d'explicitier les différentes propriétés des matrices et opérateurs impliqués dans le problème. On se concentre tout d'abord sur les propriétés génériques des transformations linéaires d'opérateurs bosoniques, avant de regarder si l'évolution régie par un hamiltonien quadratique les respectent. En particulier nous formulerons des contraintes sur la matrice \mathcal{L} avant de démontrer que son expression en termes de F et G prouve qu'elles sont respectées.

7.2.1 Transformation linéaire des opérateurs

On garde la notation consistant à regrouper les opérateurs de création et d'annihilation des différents modes dans un « vecteur » \hat{A} .

Considérons une transformation nous donnant un nouveau « vecteur » $\hat{B} = S\hat{A}$ avec S la matrice (de nombres complexes) encodant la transformation. Elle est différente de celle vue en sous-section 1.2.3 pour deux raisons.

Premièrement, chaque nouvel opérateur mélange *a priori* les opérateurs de création et d'annihilation ; l'examen de la pertinence de le faire est le sujet de cette section.

Deuxièmement, en introduction nous avons vu que seuls les opérateurs sur des modes à la même fréquence pouvaient être mélangés. La raison est que le champ par photon $\mathcal{E}_l = \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0 V}}$ dépend du mode l . Nous faisons l'hypothèse que tous les modes pris en compte ont une fréquence proche comparée à celle du mode central (approximation quasi-monochromatique). Ainsi tous les \mathcal{E}_l sont quasiment égaux et on peut effectuer des combinaisons linéaires d'opérateurs ayant des fréquences pourtant légèrement différentes.

Exemple. Illustrons ce qui vient d'être présenté avec l'exemple concret d'une lame séparatrice. Notons \hat{a}_1 et \hat{a}_2 les opérateurs d'annihilation avant la lame et \hat{b}_1, \hat{b}_2 ceux après. On peut écrire la transformation sous la forme [106] :

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{b}_1^\dagger \\ \hat{b}_2^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix}$$

Cela peut se résumer avec notre formalisme par :

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_1^\dagger \\ \hat{b}_2^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & & (0) \\ i & 1 & & \\ \hline (0) & & 1 & -i \\ & & -i & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix}$$

On remarque que cet exemple ne mélange pas les opérateurs de création et d'annihilation. C'est une caractéristique des interféromètres passifs. \diamond

Dans la suite de la section on va s'intéresser aux propriétés que doit avoir la matrice S . On les déduira de celles qu'on souhaite imposer aux opérateurs de \hat{B} .

7.2.1.1 Préservation des commutateurs

Une première propriété souhaitée pour les opérateurs rassemblés dans \hat{B} est d'avoir les relations de commutation attendues pour des opérateurs d'échelle de modes indépendants.

Les relations de commutation pour les éléments de \hat{A} sont :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_N, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}$$

On peut les résumer pour le « vecteur » de la manière suivante :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_{2N}, \quad [\hat{A}_i, \hat{A}_j] = \Omega_{i,j}, \quad \text{avec} \quad \Omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right)$$

où $\mathbb{1}$ est toujours l'identité¹.

On a alors

$$\begin{aligned} [\hat{B}_i, \hat{B}_j] &= \hat{B}_i \hat{B}_j - \hat{B}_j \hat{B}_i \\ &= \sum_{k,m} S_{i,k} \hat{A}_k S_{j,m} \hat{A}_m - S_{j,m} \hat{A}_m S_{i,k} \hat{A}_k \\ &= \sum_{k,m} S_{i,k} S_{j,m} [\hat{A}_k, \hat{A}_m] \\ &= \sum_{k,m} S_{i,k} S_{j,m} \Omega_{k,m} \\ &= \sum_{k,m} S_{i,k} \Omega_{k,m} (S^T)_{m,j} \\ &= (S \Omega S^T)_{i,j} \end{aligned}$$

Or la préservation des relations de commutation qu'on veut imposer s'exprime :

$$[\hat{B}_i, \hat{B}_j] = \Omega_{i,j}$$

On en déduit que la transformation S préserve les relations de commutation si et seulement si :

$$\boxed{S \Omega S^T = \Omega} \tag{7.4}$$

Remarque. C'est ici une transposition, même quand la matrice S est complexe (ce qui est le cas général). \diamond

Expression par blocs

On va exprimer la condition (7.4) en termes de matrices par blocs de dimension $N \times N$. Écrivons S de manière générique avec A, B, C et D des blocs complexes :

$$S = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} S \Omega S^T = \Omega &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} AB^T - BA^T & AD^T - BC^T \\ \hline CB^T - DA^T & CD^T - DC^T \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

1. Ici la dimension est N . Dans la suite on ne la précisera pas car elle est à chaque fois évidente.

En utilisant le fait que les deux équations anti-diagonales sont équivalentes (transposition et multiplication par -1), on arrive à la conclusion :

$$S\Omega S^T = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} AB^T = BA^T \\ CD^T = DC^T \\ AD^T - BC^T = \mathbb{1} \end{cases} \quad (7.5)$$

Remarque. L'équation (7.4) est en fait la définition des matrices symplectiques complexes. Leur expression par blocs est bien connue. Nous étudions ces matrices en détail au chapitre suivant. \diamond

7.2.1.2 Préservation de l'hermiticité

Une seconde propriété qu'on souhaite voir préservée par la transformation S est que $\hat{A}_{i+N \bmod 2N} = \hat{A}_i^\dagger$, avec N le nombre de modes, $i \bmod j$ signifiant i modulo j et avec une indexation commençant à 0 (et non à 1).

Notez que cette condition n'est en général pas explicitée [1]; la plupart du temps elle est utilisée implicitement en prenant *a priori* une forme pour S la respectant. Explicitons une condition sur S correspondant au fait que \hat{B} vérifie la même propriété :

$$\begin{aligned} \forall i, \hat{B}_{i+N \bmod 2N} &= \hat{B}_i^\dagger \\ \Leftrightarrow \sum_k S_{i+N \bmod 2N, k} \hat{A}_k &= \left(\sum_m S_{i, m} \hat{A}_m \right)^\dagger \\ \Leftrightarrow \sum_k S_{i+N \bmod 2N, k} \hat{A}_k &= \sum_m S_{i, m}^* \hat{A}_m^\dagger \\ \Leftrightarrow \sum_k S_{i+N \bmod 2N, k} \hat{A}_k &= \sum_m S_{i, m}^* \hat{A}_{m+N \bmod 2N} \end{aligned}$$

Par identification, cela revient à ce que :

$$S_{i+N \bmod 2N, m+N \bmod 2N} = S_{i, m}^*, \quad \text{avec } 0 \leq i, m < 2N \quad (7.6)$$

Expression par blocs

On décompose la matrice S par blocs de la même manière que précédemment. La condition (7.6) s'exprime alors :

$$A = D^*; B = C^*; C = B^* \text{ et } D = A^*$$

Ce qui se simplifie en :

$$A = D^* \text{ et } B = C^*$$

Et la matrice S peut s'écrire sous la forme :

$$S = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^* & A^* \end{array} \right) \quad (7.7)$$

Expression sous forme d'équation matricielle

Pour la suite, une expression en termes de coefficients ou de blocs n'est pas très pratique. Exprimons la même condition sous forme d'équation matricielle. Commençons par remarquer que $S^* = \left(\begin{array}{c|c} A^* & B^* \\ \hline B & A \end{array} \right)$. On en déduit alors que :

$$\boxed{QS^*Q = S} \tag{7.8}$$

En ayant posé $Q = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array} \right)$.

Il reste à prouver que toute matrice respectant l'égalité (7.8) est de la forme requise. Considérons une matrice générique S respectant la relation (7.8).

$$\begin{aligned} S = QS^*Q &\implies \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A^* & B^* \\ \hline C^* & D^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \\ &\implies \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} D^* & C^* \\ \hline B^* & A^* \end{array} \right) \end{aligned}$$

On a donc prouvé que l'équation matricielle (7.8) était équivalente à la forme donnée par (7.7). Physiquement cela correspond à imposer que la transformation préserve le fait que l'opérateur de création est le conjugué de celui d'annihilation du même mode. On appellera cette propriété « préservation de l'hermiticité ». On remarque également que cela garantit que toute observable (hermitienne) s'exprimant comme fonction des opérateurs d'échelle reste une observable après la transformation.

Remarque. $Q^2 = \mathbb{1}$ et donc Q est sa propre inverse (symétrie). On va grandement utiliser cette propriété dans la suite. ◇

7.2.1.3 Expression par blocs de la matrice de transformation

En mettant ensemble les expressions (7.5) et (7.7), qui expriment respectivement la préservation des commutateurs et de l'hermiticité, et en remarquant que deux des équations de (7.5) deviennent équivalentes, on peut écrire que la matrice S doit vérifier

$$S = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^* & A^* \end{array} \right) \quad \begin{cases} AB^T = BA^T \\ AA^\dagger - BB^\dagger = \mathbb{1} \end{cases}$$

Ce type de matrice est appelée transformation de Bogoliubov-Valatin dans le domaine des atomes froids [14, 21].

Remarque. Du fait que la préservation de l'hermiticité ne soit en général pas explicitée, la condition de préservation des relations de commutation peut prendre des formes apparemment non équivalentes. Explicitons un exemple : Gerardo Adesso *et al.* [1, p. 18] donnent dans leur équation (51) une expression différente de la condition de conservation des relations de commutation. On va ici prouver qu'avec l'hypothèse que

l'hermiticité est préservée (c'est-à-dire en supposant l'équation (7.8)) elle est équivalente à (7.4). Tout d'abord, observons que

$$\begin{aligned} S = QS^*Q &\Leftrightarrow S^T = Q(S^*)^TQ \\ &\Leftrightarrow S^T = QS^\dagger Q \end{aligned}$$

Ensuite, partant de (7.4),

$$\begin{aligned} S\Omega S^T = \Omega &\Leftrightarrow S\Omega QS^\dagger Q = \Omega \\ &\Leftrightarrow S\Omega QS^\dagger = \Omega Q \\ &\Leftrightarrow S \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1} \end{array} \right) S^\dagger = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

En ayant noté que :

$$\Omega Q = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1} \end{array} \right)$$

On a donc prouvé l'équivalence, mais en ayant besoin de recourir à (7.8). \diamond

7.2.2 Préservation et équation d'évolution

Considérons une évolution du type de celle donnée par l'équation (7.3) :

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \mathcal{L}\hat{A}$$

La question est de savoir si pour tout t , $\hat{A}(t)$ vérifie les relations de commutation et la condition d'hermiticité attendues pour un vecteur regroupant des opérateurs d'échelle. Nous allons déterminer les conditions sur \mathcal{L} pour que l'opérateur d'évolution correspondant respecte les conditions (7.4) et (7.8). Ensuite nous contrôlerons que le \mathcal{L} pour une évolution par un hamiltonien quadratique (équation (7.3)) les vérifie.

7.2.2.1 Préservation des relations de commutation

Propriété 7.2. La condition sur \mathcal{L} pour que l'évolution préserve les relations de commutation s'exprime :

$$\boxed{\mathcal{L}\Omega + \Omega\mathcal{L}^T = 0} \quad (7.9)$$

Preuve. Posons $S(t)$ la matrice d'évolution telle que :

$$\hat{A}(t) = S(t)\hat{A}(0)$$

Remarquons tout d'abord que l'équation d'évolution sur S s'exprime :

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}S \Leftrightarrow \frac{dS^T}{dt} = S^T\mathcal{L}^T$$

en ayant remarqué que la dérivation et la transposition commutent (la dérivation pour une matrice pouvant s'écrire coefficient à coefficient).

On peut alors calculer que :

$$\begin{aligned}\frac{d(S\Omega S^T - \Omega)}{dt} &= \frac{dS}{dt}\Omega S^T + S\Omega \frac{dS^T}{dt} \\ &= \mathcal{L}S\Omega S^T + S\Omega S^T \mathcal{L}^T \\ \frac{d(S\Omega S^T - \Omega)}{dt} &= \mathcal{L}\Omega + \Omega \mathcal{L}^T + \mathcal{L}(S\Omega S^T - \Omega) + (S\Omega S^T - \Omega)\mathcal{L}^T\end{aligned}$$

et prouver l'équivalence entre (7.4) et (7.9) (étant donné (7.3)) :

\implies Partant de l'hypothèse $\forall t, S\Omega S^T - \Omega = 0$, la conclusion $\mathcal{L}\Omega + \Omega \mathcal{L}^T$ en découle trivialement.

\impliedby Supposons $\mathcal{L}\Omega + \Omega \mathcal{L}^T$. Les coefficients de $S\Omega S^T - \Omega$ obéissent à une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants. Comme la condition initiale est nulle, la solution est identiquement nulle, et donc $\forall t, S\Omega S^T = \Omega$. □

7.2.2.2 Préservation de l'hermiticité

Propriété 7.3. La condition sur \mathcal{L} pour que l'hermiticité soit préservée par l'évolution s'exprime :

$$\boxed{\mathcal{L} - Q\mathcal{L}^*Q = 0} \quad (7.10)$$

Preuve. De même que précédemment, on travaille avec $S(t)$ la matrice d'évolution telle que :

$$\hat{A}(t) = S(t)\hat{A}(0)$$

Et son équation d'évolution est :

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}S \Leftrightarrow \frac{dS^*}{dt} = \mathcal{L}^*S^*$$

en ayant remarqué que dérivation et conjugaison commutent.

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}\frac{d(QS^*Q - S)}{dt} &= Q\frac{dS^*}{dt}Q - \frac{dS}{dt} \\ &= Q\mathcal{L}^*S^*Q - \mathcal{L}S \\ &= Q\mathcal{L}^*QS^*Q - Q\mathcal{L}^*QS + Q\mathcal{L}^*QS - \mathcal{L}S \\ \frac{d(QS^*Q - S)}{dt} &= Q\mathcal{L}^*Q(QS^*Q - S) - (\mathcal{L} - Q\mathcal{L}^*Q)S\end{aligned}$$

On peut alors prouver l'équivalence entre (7.8) et (7.10) :

\implies Supposons que $\forall t, QS^*Q - S = 0$. Comme S est nécessairement inversible, on en déduit trivialement que $\mathcal{L} - Q\mathcal{L}^*Q = 0$.

\Leftarrow Supposons $Q\mathcal{L}^*Q - \mathcal{L}$. Alors $QS^*Q - S$ obéit à une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants. Comme $S(0) = \mathbb{1}$, la condition initiale est que $QS^*Q - S = 0$ et donc $\forall t, QS^*Q = S$.

□

7.2.2.3 Dynamique pour un hamiltonien quadratique

Prouvons que la forme spécifique de \mathcal{L} pour un hamiltonien quadratique, telle que décrite par (7.3) vérifie les deux conditions (7.9) et (7.10) qu'on vient de voir.

Conservation des commutateurs

On rappelle que par définition $\mathcal{L} = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G & 2F \\ \hline -2F^\dagger & -G^\dagger \end{array} \right)$ avec les propriétés $G^\dagger = G$ et $F = F^\dagger$. Ainsi :

$$\mathcal{L}^\dagger = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G^\dagger & -2F^* \\ \hline 2F^\dagger & -G \end{array} \right) = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G^\dagger & -2F^\dagger \\ \hline 2F & -G \end{array} \right)$$

En utilisant cette dernière expression et en effectuant les produits matriciels on vérifie que :

$$\mathcal{L}\Omega + \Omega\mathcal{L}^\dagger = 0$$

On a bien obtenu (7.9). Une évolution régie par un hamiltonien quadratique garantit que pour tout temps les opérateurs (en représentation de Heisenberg) ont les relations de commutation des opérateurs bosoniques.

Conservation de l'hermiticité

Avec la même expression de \mathcal{L} et toujours $G^\dagger = G$ et $F = F^\dagger$,

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{-i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G^* & 2F^* \\ \hline -2F^\dagger & -G^\dagger \end{array} \right) = \frac{-1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G^\dagger & 2F^\dagger \\ \hline -2F & -G \end{array} \right)$$

En utilisant ce résultat et en effectuant les produits matriciels, on obtient que :

$$\mathcal{L} - Q\mathcal{L}^*Q = 0$$

On a bien (7.10). Une évolution régie par un hamiltonien quadratique garantit que des opérateurs initialement conjugués le restent pour tout temps (en représentation de Heisenberg).

Remarque. Cette propriété est en fait plus générale. Soit \hat{O} un opérateur (quelconque) et $U(t)$ l'opérateur d'évolution. On a en représentation d'Heisenberg $\hat{O}(t) = U^\dagger\hat{O}(0)U$ et $\hat{O}^\dagger(t) = U^\dagger\hat{O}^\dagger(0)U$; on a donc toujours $(\hat{O}(t))^\dagger = (\hat{O}^\dagger(t))$. \diamond

7.3 QUADRATURES

Dans cette section nous allons ré-exprimer ce qui a été vu dans ce chapitre en termes de quadratures plutôt que d'opérateurs bosoniques. Comme nous le verrons, cela permet de réinterpréter les conditions obtenues. En particulier nous montrerons que l'équivalente de S doit être une matrice symplectique réelle tandis celle de \mathcal{L} doit être réelle et hamiltonienne.

7.3.1 Définitions

7.3.1.1 Quadratures

On rappelle que les quadratures \hat{x}_j et \hat{p}_j sont définies par :

$$\begin{aligned}\hat{x}_j &= \frac{\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger}{2} \\ \hat{p}_j &= \frac{\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger}{2i}\end{aligned}$$

et que les relations de commutation sont :

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = \frac{i}{2} \delta_{j,k}$$

Posons $\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{p}_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$. La conversion entre \hat{X} et \hat{A} se fait de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \gamma^{-1} \hat{A} & \gamma^{-1} &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline -i\mathbf{1} & i\mathbf{1} \end{array} \right) \\ \hat{A} &= \gamma \hat{X} & \gamma &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & i\mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & -i\mathbf{1} \end{array} \right)\end{aligned}$$

Remarquons qu'à la normalisation près, γ est unitaire ; elle effectue essentiellement une rotation (complexe).

7.3.1.2 Équation d'évolution

Voyons comment s'exprime (7.3) en termes de quadratures.

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{A}}{dt} = \mathcal{L}\hat{A} &\Leftrightarrow \frac{d\gamma\hat{X}}{dt} = \mathcal{L}\gamma\hat{X} \\ &\Leftrightarrow \frac{d\hat{X}}{dt} = \gamma^{-1}\mathcal{L}\gamma\hat{X}\end{aligned}$$

On a donc obtenu l'équation d'évolution pour les quadratures :

$$\boxed{\frac{d\hat{X}}{dt} = \mathcal{L}_{xp}\hat{X}, \quad \mathcal{L}_{xp} = \gamma^{-1}\mathcal{L}\gamma} \quad (7.11)$$

La définition de \mathcal{L}_{xp} se retourne en : $\mathcal{L} = \gamma\mathcal{L}_{xp}\gamma^{-1}$.

7.3.1.3 Transformation

On considère toujours une transformation $\hat{B} = S\hat{A}$. Regardons comment elle se traduit pour les quadratures. Commençons par définir \hat{Y} les quadratures correspondant aux opérateurs bosoniques \hat{B} . On passe d'un vecteur à l'autre de la même manière qu'entre \hat{A} et \hat{X} : $\hat{Y} = \gamma^{-1}\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = \gamma\hat{Y}$. Ré-exprimons alors la transformation directement pour les quadratures :

$$\begin{aligned} \hat{B} = S\hat{A} &\Leftrightarrow \gamma\hat{Y} = S\gamma\hat{X} \\ &\Leftrightarrow \hat{Y} = \gamma^{-1}S\gamma\hat{X} \\ &\Leftrightarrow \hat{Y} = S_{xp}\hat{X}, \quad S_{xp} = \gamma^{-1}S\gamma \end{aligned}$$

La définition de S_{xp} se retourne en : $S = \gamma S_{xp}\gamma^{-1}$.

7.3.2 Contraintes sur les transformations

Voyons ce que deviennent les propriétés exposées en [section 7.2](#) pour les quadratures en termes de contraintes sur S_{xp} et \mathcal{L}_{xp} . Nous allons à chaque fois avoir deux approches : les déduire de considérations physiques et transformer les propriétés déjà établies.

7.3.2.1 Préservation des commutateurs

Arguments physiques

Les relations de commutation pour les quadratures sont les mêmes que pour les opérateurs bosoniques à $\frac{i}{2}$ près (voir la [sous-sous-section 7.3.1.1](#)). Ainsi la préservation des relations de commutation s'exprime de manière similaire :

$$\boxed{S_{xp}\Omega S_{xp}^T = \Omega} \quad (7.12)$$

Nous allons voir à la sous-section suivante que S_{xp} et \mathcal{L}_{xp} sont en fait réelles. Ainsi S_{xp} appartient au groupe des matrices réelles symplectiques, et \mathcal{L}_{xp} à son algèbre de Lie (autrement nommé l'ensemble des matrices hamiltoniennes). Nous détaillerons les définitions et propriétés de telles matrices au chapitre suivant. Elles nous permettront de directement en conclure [88] que :

$$\boxed{\Omega\mathcal{L}_{xp} + \mathcal{L}_{xp}^T\Omega = 0} \quad (7.13)$$

Preuve pour la matrice de transformation

Montrons qu'on obtient bien (7.12) à partir de (7.4), son équivalent pour les opérateurs bosoniques.

Démonstration On part de (7.4) :

$$\begin{aligned}
 S\Omega S^T = \Omega &\Leftrightarrow \gamma S_{xp} \gamma^{-1} \Omega (\gamma S_{xp} \gamma^{-1})^T = \Omega \\
 &\Leftrightarrow S_{xp} \gamma^{-1} \Omega (\gamma^{-1})^T S_{xp}^T = \gamma^{-1} \Omega (\gamma^{-1})^T \\
 &\Leftrightarrow \frac{i}{2} S_{xp} \Omega S_{xp}^T = \frac{i}{2} \Omega \\
 &\Leftrightarrow S_{xp} \Omega S_{xp}^T = \Omega
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que :

$$\begin{aligned}
 \gamma^{-1} \Omega (\gamma^{-1})^T &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \hline -i\mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 2i\mathbb{1} \\ \hline -2i\mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \\
 &= \frac{i}{2} \Omega
 \end{aligned}$$

□

Preuve pour la matrice d'évolution

Retrouvons la condition la matrice d'évolution (7.13) à partir de (7.9), l'équivalente pour les opérateurs d'échelle.

Démonstration

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\Omega + \Omega\mathcal{L}^T = 0 &\Leftrightarrow \gamma \mathcal{L}_{xp} \gamma^{-1} \Omega + \Omega (\gamma \mathcal{L}_{xp} \gamma^{-1})^T = 0 \\
 &\Leftrightarrow \mathcal{L}_{xp} \gamma^{-1} \Omega (\gamma^{-1})^T + \gamma^{-1} \Omega (\gamma^{-1})^T \mathcal{L}_{xp}^T = 0 \\
 &\Leftrightarrow \mathcal{L}_{xp} \frac{i}{2} \Omega + \frac{i}{2} \Omega \mathcal{L}_{xp}^T = 0 \\
 &\Leftrightarrow \mathcal{L}_{xp} \Omega + \Omega \mathcal{L}_{xp}^T = 0 \\
 &\Leftrightarrow \Omega \mathcal{L}_{xp} + \mathcal{L}_{xp}^T \Omega = 0
 \end{aligned}$$

En ayant utilisé la même formule que dans la preuve précédente, ainsi que $\Omega^2 = -\mathbb{1}$. □

7.3.2.2 Préservation de l'hermiticité

Arguments physiques

Pour les opérateurs bosoniques, la condition était : $\hat{A}_{i+N \bmod 2N} = \hat{A}_i^\dagger$. En termes de quadratures, on souhaite qu'après la transformation on ait toujours des observables. Cela se traduit par $\forall i, \hat{X}_i = \hat{X}_i^\dagger$. On veut que cette propriété soit conservée par la transformation S_{xp} .

$$\begin{aligned} \forall i, \hat{Y}_i = \hat{Y}_i^\dagger &\Leftrightarrow \forall i, \sum_k (S_{xp})_{i,k} \hat{X}_k = \left[\sum_k (S_{xp})_{i,k} \hat{X}_k \right]^\dagger \\ &\Leftrightarrow \forall i, \sum_k (S_{xp})_{i,k} \hat{X}_k = \sum_k (S_{xp})_{i,k}^* \hat{X}_k^\dagger \\ &\Leftrightarrow \forall i, \sum_k (S_{xp})_{i,k} \hat{X}_k = \sum_k (S_{xp})_{i,k}^* \hat{X}_k \end{aligned}$$

Par identification, cela est équivalent à ce que :

$$\forall i, k, \quad (S_{xp})_{i,k} = (S_{xp})_{i,k}^*$$

Autrement dit, c'est équivalent à ce que la matrice S_{xp} soit réelle :

$$\boxed{S_{xp} \in M_{2N,2N}(\mathbb{R})} \quad (7.14)$$

où $M_{2N,2N}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de taille $2N \times 2N$.

Pour garantir (7.14) dans le cadre de l'équation d'évolution (7.11), il est clair que la condition est :

$$\boxed{\mathcal{L}_{xp} \in M_{2N,2N}(\mathbb{R})} \quad (7.15)$$

Preuve pour la matrice de transformation

Montrons qu'on obtient bien (7.14) à partir de (7.8), son équivalent pour les opérateurs bosoniques.

Démonstration

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}S^*\mathcal{Q} = S &\Leftrightarrow \mathcal{Q}(\gamma S_{xp} \gamma^{-1})^* \mathcal{Q} = \gamma S_{xp} \gamma^{-1} \\ &\Leftrightarrow S_{xp} = \gamma^{-1} \mathcal{Q} \gamma^* S_{xp}^* (\gamma^{-1})^* \mathcal{Q} \gamma \\ &\Leftrightarrow S_{xp} = S_{xp}^* \\ &\Leftrightarrow S_{xp} \in M_{2N,2N}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Où l'on a utilisé que :

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \mathcal{Q} \gamma^* &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \hline -i\mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} 2\mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & 2\mathbb{1} \end{array} \right) \\ \gamma^{-1} \mathcal{Q} \gamma^* &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

et en ayant remarqué qu'inversion et conjugaison complexe commutent. \square

Preuve pour la matrice d'évolution

Retrouvons la condition sur la matrice d'évolution (7.15) à partir de (7.10), la condition équivalente pour les opérateurs d'échelle.

Démonstration Partons de (7.10) et de la définition $\mathcal{L}_{xp} = \gamma^{-1}\mathcal{L}\gamma \Leftrightarrow \mathcal{L} = \gamma\mathcal{L}_{xp}\gamma^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} - \mathcal{Q}\mathcal{L}^*\mathcal{Q} = 0 &\Leftrightarrow \gamma\mathcal{L}_{xp}\gamma^{-1} - \mathcal{Q}\left(\gamma\mathcal{L}_{xp}\gamma^{-1}\right)^*\mathcal{Q} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}_{xp} = \gamma^{-1}\mathcal{Q}\gamma^*\mathcal{L}_{xp}^*\left(\gamma^{-1}\right)^*\mathcal{Q}\gamma \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}_{xp} = \mathcal{L}_{xp}^* \\ \mathcal{L} - \mathcal{Q}\mathcal{L}^*\mathcal{Q} = 0 &\Leftrightarrow \mathcal{L}_{xp} \in M_{2N,2N}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

En utilisant le même résultat intermédiaire que précédemment. \square

Notons que la simplicité de (7.15) encourage grandement à travailler en quadratures. C'est également sa simplicité qui explique qu'elle est le plus souvent imposée *ab initio*.

7.3.3 Évolution avec un hamiltonien quadratique

Dans cette sous-section nous allons expliciter les propriétés de \mathcal{L}_{xp} quand le système évolue avec un hamiltonien quadratique. On vérifiera ensuite que la forme obtenue vérifie bien les contraintes (7.13) et (7.15).

7.3.3.1 Expression par bloc

Partons de (7.3) et (7.11) pour obtenir la forme de la matrice d'évolution en quadrature dans le cas d'une évolution régie par un hamiltonien quadratique. À titre préalable, on remarque que puisque $G = G^\dagger$ et $F = F^\dagger$, on a $G^\top = G^*$ et $F^\top = F^*$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{xp} &= \gamma^{-1}\mathcal{L}\gamma \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \hline -i\mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{array} \right) \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G & 2F \\ \hline -2F^\dagger & -G^\top \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & i\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} 2(F - F^*) + G - G^* & -2i(F + F^*) + i(G + G^*) \\ \hline -2i(F + F^*) - i(G + G^*) & -2(F - F^*) + G - G^* \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\hbar} \left(\begin{array}{c|c} \frac{G-G^*}{2i} + 2\frac{F-F^*}{2i} & \frac{G+G^*}{2} - 2\frac{F+F^*}{2} \\ \hline -\frac{G+G^*}{2} - 2\frac{F+F^*}{2} & \frac{G-G^*}{2i} - 2\frac{F-F^*}{2i} \end{array} \right) \\ \mathcal{L}_{xp} &= \frac{1}{\hbar} \left(\begin{array}{c|c} \text{Im}[G] + 2\text{Im}[F] & \text{Re}[G] - 2\text{Re}[F] \\ \hline -\text{Re}[G] - 2\text{Re}[F] & \text{Im}[G] - 2\text{Im}[F] \end{array} \right) \end{aligned}$$

On peut donc conclure que quand \mathcal{L}_{xp} est donné par une évolution régie par un hamiltonien quadratique,

$$\mathcal{L}_{xp} = \frac{1}{\hbar} \left(\begin{array}{c|c} \text{Im}[G] + 2\text{Im}[F] & \text{Re}[G] - 2\text{Re}[F] \\ \hline -\text{Re}[G] - 2\text{Re}[F] & \text{Im}[G] - 2\text{Im}[F] \end{array} \right) \quad (7.16)$$

Remarquons qu'on peut également traduire les contraintes sur F et G en termes de leurs parties réelle et imaginaire :

$$G = G^\dagger \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}[G] = \text{Re}[G]^\text{T} \\ \text{Im}[G] = -\text{Im}[G]^\text{T} \end{cases}$$

$$F = F^\text{T} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}[F] = \text{Re}[F]^\text{T} \\ \text{Im}[F] = \text{Im}[F]^\text{T} \end{cases}$$

7.3.3.2 Vérification des propriétés

Même si cela est superflu puisqu'il y a équivalence avec les propriétés que nous avons contrôlées en [sous-sous-section 7.2.2.3](#), assurons-nous que (7.13) et (7.15) sont vérifiées par \mathcal{L}_{xp} .

Préservation des commutateurs

En injectant (7.16) dans le membre de gauche de (7.13) et en effectuant le calcul par bloc on montre qu'on a bien $\Omega\mathcal{L}_{xp} + \mathcal{L}_{xp}^\text{T}\Omega = 0$.

Préservation de l'hermiticité

L'expression (7.16) est clairement celle d'une matrice réelle, comme exigé par (7.15).

7.4 RÉSUMÉ DU CHAPITRE

Passage en quadratures

Pour passer de la représentation par des opérateurs bosoniques à celle utilisant les quadratures, on utilise :

$$\hat{X} = \gamma^{-1}\hat{A} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} = \gamma\hat{X}$$

avec :

$$\gamma = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & i\mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & -i\mathbf{1} \end{array} \right), \quad \gamma^{-1} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \hline -i\mathbf{1} & i\mathbf{1} \end{array} \right)$$

Les opérateurs de couplage et d'évolution se transforme selon :

$$\mathcal{L}_{xp} = \gamma^{-1}\mathcal{L}\gamma \Leftrightarrow \mathcal{L} = \gamma\mathcal{L}_{xp}\gamma^{-1}$$

$$\mathcal{S}_{xp} = \gamma^{-1}\mathcal{S}\gamma \Leftrightarrow \mathcal{S} = \gamma\mathcal{S}_{xp}\gamma^{-1}$$

Évolution par un hamiltonien quadratique

En considérant un hamiltonien tel que décrit par l'équation (6.1), paramétré par des matrices F et G vérifiant $G^\dagger = G$ et $F = F^\dagger$,

— l'évolution du point de vue d'Heisenberg des opérateurs d'échelle est décrite par une équation différentielle du premier ordre linéaire :

$$\boxed{\frac{d\hat{A}}{dt} = \mathcal{L}\hat{A}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G & 2F \\ \hline -2F^\dagger & -G^\dagger \end{array} \right)} \quad (7.3)$$

— il en va de même pour les quadratures (voir (7.11) et (7.16)) :

$$\boxed{\frac{d\hat{X}}{dt} = \mathcal{L}_{xp}\hat{X}, \quad \mathcal{L}_{xp} = \frac{1}{\hbar} \left(\begin{array}{c|c} \text{Im}[G] + 2\text{Im}[F] & \text{Re}[G] - 2\text{Re}[F] \\ \hline -\text{Re}[G] - 2\text{Re}[F] & \text{Im}[G] - 2\text{Im}[F] \end{array} \right)}$$

$$\text{où } G = G^\dagger \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}[G] = \text{Re}[G]^\dagger \\ \text{Im}[G] = -\text{Im}[G]^\dagger \end{cases} \quad \text{et } F = F^\dagger \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}[F] = \text{Re}[F]^\dagger \\ \text{Im}[F] = \text{Im}[F]^\dagger \end{cases} .$$

Conditions de préservations

Avec $\Omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right)$ et $\mathcal{Q} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array} \right)$ les différentes conditions sur les matrices de couplage et d'évolution pour garantir les préservations des commutateurs et de l'hermiticité se résument par :

	Commutateurs	Hermiticité
S	$S\Omega S^\dagger = \Omega$	$QS^*Q = S$
\mathcal{L}	$\mathcal{L}\Omega + \Omega\mathcal{L}^\dagger = 0$	$\mathcal{L} - \mathcal{Q}\mathcal{L}^*\mathcal{Q} = 0$
S_{xp}	$S_{xp}\Omega S_{xp}^\dagger = \Omega$	$S_{xp} \in M_{2N,2N}(\mathbb{R})$
\mathcal{L}_{xp}	$\Omega\mathcal{L}_{xp} + \mathcal{L}_{xp}^\dagger\Omega = 0$	$\mathcal{L}_{xp} \in M_{2N,2N}(\mathbb{R})$

En particulier, on remarque que

- \mathcal{L}_{xp} est une matrice hamiltonienne réelle.
- \mathcal{S}_{xp} est une matrice symplectique réelle.
- S est une transformation de Bogoliubov.
- L'ensemble des matrices représentant les transformations de Bogoliubov est isomorphe à celui des matrices symplectiques réelles.

Toutes les conditions sont vérifiées dans le cadre d'une évolution par un hamiltonien quadratique tel que donné par l'équation (6.1).

MATRICES SYMPLECTIQUES ET HAMILTONIENNES

Nous avons évoqué au chapitre précédent les matrices symplectiques et hamiltoniennes¹ ainsi que leurs expressions par blocs. Nous allons les présenter un peu plus formellement ici. Nous aborderons ensuite les propriétés spectrales de ces matrices et les décompositions associées. Enfin nous détaillerons le fonctionnement des algorithmes écrits et utilisés pour cette thèse. Les démonstrations sont volontairement très constructives comparativement à celles qui se trouvent dans la littérature ; cela est un choix visant à faciliter la mise en œuvre algorithmique des différents théorèmes. Seul le nécessaire à la compréhension de cette thèse est présenté ; le lecteur voulant approfondir est invité à lire les références [3, 47, 88].

Durant tout le chapitre on travaille sur l'ensemble des matrices de dimension $2N \times 2N$, ainsi que sur les vecteurs-colonnes correspondant. Bien évidemment on peut les voir comme représentations d'opérateurs linéaires et de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension $2N$ muni d'une base bien choisie (ce que nous allons démontrer).

Nous allons travailler avec des matrices symplectiques complexes, ce qui n'est pas l'approche la plus courante, mais nous semble nécessaire afin de pouvoir discuter de diagonalisation dans le corps adapté. S'il y a un consensus sur la définition des matrices symplectiques réelles, ça c'est pas le cas pour les matrices complexes, car on peut ou non remplacer la transposition par une conjugaison hermitienne. Nous effectuons un choix mais l'autre possibilité, dont nous aurons également besoin par la suite, est traitée dans la [section 8.7](#).

8.1 DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

Commençons par définir une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur l'ensemble des vecteurs colonnes. On rappelle qu'on a posé au chapitre précédent $\Omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right)$.

On l'appellera « matrice antisymétrique canonique ». On remarque qu'en plus d'être antisymétrique ($\Omega^T = -\Omega$) elle est orthogonale ($\Omega\Omega^T = \mathbb{1} = \Omega^T\Omega$) et vérifie donc les propriétés suivantes : $\Omega^2 = -\mathbb{1}$ et $\Omega^{-1} = \Omega^T = -\Omega$. De plus elle est diagonalisable *via* une matrice unitaire V telle que :

$$\Omega = V \left(\begin{array}{c|c} i\mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & -i\mathbb{1} \end{array} \right) V^\dagger, \quad \text{avec } V = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & i\mathbb{1} \\ \hline i\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{array} \right) \quad (8.1)$$

1. À ne pas confondre avec une matrice décrivant le hamiltonien. Le terme provient de la mécanique classique car ces matrices interviennent dans l'évolution d'un système décrit par un hamiltonien.

Définition. Soient x et y deux vecteurs-colonnes (éventuellement complexes). On définit la forme bilinéaire $(,)$ par :

$$(x, y) = x^T \Omega y$$

Il est clair que :

Propriété 8.1. $(,)$ est :

ANTISYMMÉTRIQUE $(x, y) = -(y, x)$.

ALTERNÉE $(x, x) = 0$.

NON DÉGÉNÉRÉE $[\forall x, (x, y) = 0] \implies y = 0$.

Remarquons que nous avons utilisé la transposition dans la définition de $(,)$ et non la conjugaison hermitienne, même dans le cas complexe. Cela est nécessaire pour conserver la propriété d'être alternée.

Propriété 8.2. *Tout espace vectoriel de dimension finie sur lequel existe une forme bilinéaire alternée (antisymétrique) non dégénérée est de dimension paire.*

Démonstration Notons E l'espace vectoriel. En fixant une base de E , la forme bilinéaire s'exprime en notations matricielles *via* une matrice antisymétrique. Notons cette matrice M .

$$\det(M) = \det(-M^T) = (-1)^{\dim E} \det(M^T) = (-1)^{\dim E} \det(M)$$

Ainsi en dimension impaire $\det(M) = 0$; cela est en contradiction avec le fait que la forme est non dégénérée. \square

Cette propriété nous servira essentiellement pour les sous-espaces. Maintenant que nous avons défini cette forme bilinéaire, nous pouvons passer aux matrices.

8.1.1 Matrices symplectiques

Définition. Soit $S \in M_{2N, 2N}(\mathbb{C})$. S est symplectique si et seulement si :

$$\forall x, y, \quad (Sx, Sy) = (x, y)$$

On peut ré-exprimer cette définition sous la forme d'une équation matricielle :

$$\begin{aligned} S \text{ symplectique} &\Leftrightarrow \forall x, y, \quad (Sx, Sy) = (x, y) \\ &\Leftrightarrow \forall x, y, \quad x^T S^T \Omega S y = x^T \Omega y \end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{S \text{ symplectique} \Leftrightarrow S^T \Omega S = \Omega} \tag{8.2}$$

On remarque immédiatement que cette définition n'est pas directement celle qui apparaît dans l'équation (7.12). En effet, dans un cas la transposition est à gauche alors que dans l'autre elle est à droite. Mais heureusement nous avons la propriété suivante :

Propriété 8.3. Soit $S \in M_{2N, 2N}(\mathbb{C})$,

$$S^T \Omega S = \Omega \Leftrightarrow S \Omega S^T = \Omega$$

Démonstration Remarquons tout d'abord que comme $\det(\Omega) = 1$, chacune des deux équations permet de montrer que S est inversible. On peut alors effectuer le calcul :

$$\begin{aligned} S^T \Omega S = \Omega &\Leftrightarrow S^T \Omega = \Omega S^{-1} \\ &\Leftrightarrow \Omega S^T \Omega^2 = \Omega^2 S^{-1} \Omega \\ &\Leftrightarrow -\Omega S^T = -S^{-1} \Omega \\ &\Leftrightarrow S \Omega S^T = \Omega \end{aligned}$$

□

Ainsi, peu importe de quel côté intervient la transposition, ce qui montre qu'on peut utiliser aussi bien la définition qu'on vient de voir que celle utilisée pour la préservation des relations de commutation. Remarquons que dans la démonstration de la [propriété 8.3](#) nous avons aussi démontré que S est inversible. Plus précisément, il est direct de montrer que :

Propriété 8.4. Soit S une matrice symplectique. S est inversible et

$$S^{-1} = -\Omega S^T \Omega \quad (8.3)$$

Propriété 8.5. S symplectique $\Leftrightarrow S^T$ symplectique $\Leftrightarrow S^{-1}$ symplectique $\Leftrightarrow S^*$ symplectique.

Démonstration En utilisant la [propriété 8.3](#),

$$\begin{aligned} S \text{ symplectique} &\Leftrightarrow S^T \Omega S = \Omega \\ &\Leftrightarrow (S^T)^T \Omega S^T = \Omega \\ &\Leftrightarrow S^T \text{ symplectique} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \text{ symplectique} &\Leftrightarrow S^T \Omega S = \Omega \\ &\Leftrightarrow S^{-1} \Omega^{-1} (S^T)^{-1} = \Omega^{-1} \\ &\Leftrightarrow -S^{-1} \Omega (S^{-1})^T = -\Omega \\ &\Leftrightarrow (S^{-1})^T \Omega S^{-1} = \Omega \\ &\Leftrightarrow S^{-1} \text{ symplectique} \end{aligned}$$

La dernière équivalence se déduit directement de Ω réelle. □

Enfin, à partir de la définition on obtient facilement la propriété suivante :

Propriété 8.6. Le produit de deux matrices symplectiques est symplectique.

Les matrices symplectiques forment donc un groupe.

Remarque. L'équation (8.2) se réinterprète comme une relation entre les colonnes de S . Notons x_i la i^e colonne de S . Le coefficient d'indice i, j de la relation revient à $x_i^T \Omega x_j = \Omega_{i,j}$, ou reformulé à l'aide de la forme bilinéaire, $(x_i, x_j) = \Omega_{i,j}$.

Si maintenant nous limitons les indices à $1 \leq i, j \leq N$, la propriété s'écrit :

$$S \text{ symplectique} \Leftrightarrow \forall i, j \text{ tels que } 1 \leq i, j \leq N, \begin{cases} (x_i, x_j) = 0 \\ (x_i, x_{j+N}) = \delta_{i,j} \\ (x_{i+N}, x_j) = -\delta_{i,j} \\ (x_{i+N}, x_{j+N}) = 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

On peut ainsi interpréter la symplecticité d'une matrice comme le fait que ses colonnes vérifient une sorte d'orthogonalité pour la forme $(,)$; cette notion sera précisée plus tard. Cette remarque peut servir à caractériser une matrice symplectique. \diamond

8.1.2 Matrices hamiltoniennes

Nous allons maintenant présenter les générateurs infinitésimaux des matrices symplectiques : les matrices hamiltoniennes. L'essentiel des démonstrations ayant déjà été effectuées dans le chapitre précédent, nous allons nous contenter de rassembler et d'exposer les résultats.

Considérons une matrice symplectique S proche de $\mathbb{1}$. On peut l'écrire $S = \mathbb{1} + s$. En développant $S^T \Omega S = \Omega$ et en gardant uniquement le premier ordre, on obtient que $s^T \Omega + \Omega s = 0$. On a déterminé l'algèbre de Lie des matrices symplectiques, qu'on appelle matrices hamiltoniennes.

Définition. Soit M une matrice. Elle est dite hamiltonienne quand

$$M^T \Omega + \Omega M = 0$$

Une autre interprétation de cette définition est donnée par la propriété qui émerge d'un calcul élémentaire :

Propriété 8.7. Soit M une matrice.

$$M \text{ est hamiltonienne} \Leftrightarrow \forall x, y, \quad (x, My) = -(Mx, y)$$

Détaillons maintenant diverses propriétés.

Propriété 8.8. M est hamiltonienne $\Leftrightarrow M^T$ est hamiltonienne.

Démonstration

$$M^T \Omega + \Omega M = 0 \Leftrightarrow \Omega M^T \Omega^2 + \Omega^2 M \Omega = 0 \Leftrightarrow (M^T)^T \Omega + \Omega M^T = 0$$

\square

Propriété 8.9. M est hamiltonienne $\Leftrightarrow \Omega M$ est symétrique.

Démonstration On utilise que $\Omega^T = -\Omega$:

$$M^T \Omega + \Omega M = 0 \Leftrightarrow (\Omega M)^T = \Omega M$$

□

8.2 EXPRESSIONS PAR BLOCS

Nous allons traduire les conditions pour être symplectique ou hamiltonienne en termes d'expression par blocs.

8.2.1 Matrices symplectiques

On a déjà effectué ce travail, en aboutissant aux contraintes (7.5). Rappelons simplement le résultat. En posant $S = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$, on obtient :

$$S \Omega S^T = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} AB^T = BA^T \\ CD^T = DC^T \\ AD^T - BC^T = \mathbb{1} \end{cases} \quad (7.5)$$

Remarquons qu'on a choisi la définition avec la transposée à droite, qui a pour avantage d'être plus proche de la physique. En prenant la transposée à gauche on obtient d'autres expressions, qui sont équivalentes.

8.2.2 Matrice hamiltonienne

Posons $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$

On a alors :

$$\begin{aligned} M^T \Omega + \Omega M = 0 &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \\ &\quad + \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} -C^T & A^T \\ \hline -D^T & B^T \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline -A & -B \end{array} \right) = 0 \\ M^T \Omega + \Omega M = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} C = C^T \\ B = B^T \\ A^T + D = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque que la dernière équation nous prouve :

Propriété 8.10. Soit M une matrice hamiltonienne ; alors $\text{Tr}[M] = 0$.

8.3 ORTHOGONALISATION SYMPLECTIQUE

Nous allons voir dans cette section un outil essentiel : comment transformer une base quelconque en une base compatible avec la forme $(,)$.

Définition. Deux vecteurs-colonnes x et y sont dit symplectiquement orthogonaux quand $(x, y) = 0$. De même, deux sous-espaces sont dit symplectiquement orthogonaux quand chaque vecteur de l'un est orthogonal à tous les vecteurs de l'autre.

Remarque. Un vecteur est toujours symplectiquement orthogonal à lui-même. Un sous-espace peut être symplectiquement orthogonal à lui-même. \diamond

Définition. Soient $(e_i)_{i \in \mathbb{N}_{2N}}$ une famille de vecteurs-colonnes. On l'appelle « base symplectique » quand elle vérifie :

$$\forall i, j \text{ tels que } 1 \leq i, j \leq N, \begin{cases} (e_i, e_j) = 0 \\ (e_i, e_{j+N}) = \delta_{i,j} \\ (e_{i+N}, e_j) = -\delta_{i,j} \\ (e_{i+N}, e_{j+N}) = 0 \end{cases}$$

Propriété 8.11. Une base symplectique est une base de l'espace de travail. Nous pouvons écrire la décomposition d'un vecteur x quelconque sur cette base de la manière suivante :

$$x = \sum_{i=1}^N [(e_i, x) e_{i+N} - (e_{i+N}, x) e_i]$$

Démonstration Le nombre de vecteurs de la famille est égal à la dimension de l'espace. Nous allons donc pouvoir nous contenter de vérifier que la famille est libre. Par l'absurde, supposons que ça n'est pas le cas et qu'il existe i_0 tel que $e_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} c_i e_i$ avec c_i des

coefficients complexes quelconques. Posons $j_0 = \begin{cases} i_0 + N & \text{si } 1 \leq i_0 \leq N \\ i_0 - N & \text{si } N + 1 \leq i_0 \leq 2N \end{cases}$. Alors,

$$(e_{j_0}, e_{i_0}) = \left(e_{j_0}, \sum_{i \neq i_0} c_i e_i \right) = \sum_{i \neq i_0} c_i (e_{j_0}, e_i)$$

En utilisant la définition de la base symplectique, $\forall i \neq i_0, (e_{j_0}, e_i) = 0$; on en conclut que $(e_{j_0}, e_{i_0}) = 0$. Cela rentre en contradiction avec cette même définition qui impose $(e_{j_0}, e_{i_0}) = \pm 1$.

Maintenant que nous avons prouvé que nous avons bien une base, montrons la forme de la décomposition d'un vecteur x quelconque. De manière générique,

$$x = \sum_{j=0}^{2N} c_j e_j$$

avec c_j des coefficients complexes. Alors $\forall i$ tel que $1 \leq i \leq N$, $(e_i, x) = c_{i+N}$ et $(e_{i+N}, x) = -c_i$. \square

Remarque. Nous pouvons reformuler une remarque déjà effectuée :

S symplectique \Leftrightarrow ses colonnes forment une base symplectique

\diamond

Théorème 8.1. *Il existe une base symplectique.*

La démonstration est analogue à celle utilisée avec une forme symétrique : on va donner une forme adaptée de l'algorithme de Gram-Schmidt, qui permettra de conclure en partant d'une base quelconque.

Démonstration Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de l'espace (de deux en deux).

Commençons par prouver que la propriété est vraie en dimension 2. Soit une base, on note ses deux vecteurs e et f . $(e, f) \neq 0$ car $(,)$ est non dégénérée. Si l'on remplace f par $\frac{f}{(e, f)}$ on obtient bien une base symplectique de l'espace.

Prouvons maintenant la récurrence, on prend un espace de dimension $2N$. Détaillons les différentes étapes :

1. on prend une base de l'espace, notée $(e)_{i \in \mathbb{N}_{2N}}$;
2. on choisit un vecteur de cette base, e_i (par exemple e_1) ;
3. comme $(,)$ est non dégénérée, $\exists j \neq i, (e_i, e_j) \neq 0$;
4. on définit alors deux vecteurs de la nouvelle base :

$$e'_i = e_i \quad e'_j = \frac{e_j}{(e_i, e_j)}$$

avec ces définitions, $(e'_i, e'_i) = (e'_j, e'_j) = 0$ et $(e'_i, e'_j) = 1 = - (e'_j, e'_i)$;

5. on définit les autres vecteurs de la nouvelle base :

$$\forall k \neq i, j, \quad e'_k = e_k - e'_j (e'_i, e_k) + e'_i (e'_j, e_k)$$

On peut alors vérifier que

$$\begin{aligned} \forall k \neq i, j, \quad (e'_i, e'_k) &= (e'_i, e_k) - (e'_i, e'_j) (e'_j, e_k) + (e'_i, e'_i) (e'_j, e_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \forall k \neq i, j, \quad (e'_j, e'_k) &= (e'_j, e_k) - (e'_j, e'_j) (e'_j, e_k) + (e'_j, e'_i) (e'_i, e_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, $(e)_i$ étant une base, la nouvelle famille en est également une (chaque e'_k ne contient que e_k, e_i et e_j ; le changement de base est facilement inversible). En particulier $(e'_k)_{k \neq i, j}$ est une famille libre, base du sous-espace qu'elle génère. On a aussi la propriété que pour tout x vecteur de ce sous-espace, $(e'_i, x) = (e'_j, x) = 0$.

6. On remarque alors que la restriction de $(,)$ à l'espace généré par les $(e'_k)_{k \neq i,j}$ est alternée et non dégénérée. En effet, en supposant par l'absurde qu'elle le soit et utilisant la proposition : $\forall k \neq i,j, (e'_i, e'_k) = (e'_j, e'_k) = 0$, on conclurait que $(,)$ est dégénérée sur tout l'espace, ce qui est contradictoire.

On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence sur l'espace engendré par les $(e'_k)_{k \neq i,j}$. Il existe donc une base symplectique de ce sous-espace.

7. En complétant cette base par e'_i et e'_j et en la réordonnant, on obtient une base symplectique comme recherché. □

Remarque. La propriété est en fait triviale compte tenu de nos définitions. En effet la base canonique des vecteurs-colonnes est directement symplectique. L'algorithme présenté dans la démonstration est par contre important car il donne une manière de construire une base symplectique à partir d'une autre base. Notez également qu'on a uniquement utilisé le fait que $(,)$ est alternée et non dégénérée. Ainsi la propriété est valable pour tout espace linéaire muni d'une forme alternée non dégénérée ; le passage en notation matricielle avec la base obtenue permet de se ramener aux définitions prises dans ce chapitre. On a donc démontré ce qui était annoncé au début du chapitre : tout espace linéaire muni d'une forme alternée non dégénérée est isomorphe à $M_{2N,1}$ muni de $(,)$. En pratique on l'utilisera surtout pour les sous-espaces. ◇

Remarque. En dimension 1, il est évident que toute forme alternée est dégénérée. Supposons qu'il existe un espace vectoriel de dimension impaire muni d'une forme alternée non dégénérée. La récurrence de la démonstration nous mène à ce qu'il existe une forme alternée non dégénérée en dimension 1. Par l'absurde on retrouve la [propriété 8.2](#). ◇

Notez que l'algorithme permet également de compléter une base symplectique d'un sous-espace en une base symplectique de l'espace entier.

Propriété 8.12. Soient E, F et G des sous-espaces vectoriels en somme directe et vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} E \oplus F \oplus G &= \text{l'espace entier} \\ \dim E &= \dim F \\ \forall x_1, x_2 \in E, & \quad (x_1, x_2) = 0 \\ \forall y_1, y_2 \in F, & \quad (y_1, y_2) = 0 \\ \forall x \in E \oplus F; \forall z \in G, & \quad (x, z) = 0 \end{aligned}$$

Il existe alors une base symplectique de $E \oplus F$. De plus on peut imposer que la « première moitié » des vecteurs de la base forment une base de E et la « seconde moitié » une base de F .

Remarque. La base obtenue peut se compléter avec une base de G en une base symplectique de l'espace entier. ◇

Esquisse de démonstration. Nous n'allons pas détailler la preuve, mais résumer l'essentiel des étapes. Comme la précédente démonstration, elle repose sur une procédure d'orthogonalisation. On procède également par récurrence sur la dimension des sous-espaces ; l'hérédité s'obtient de la manière suivante :

1. On choisit une base de E et une de F ;
2. on prend un vecteur x de la base de E ;
3. en utilisant que $(,)$ est non dégénérée et les hypothèses, on montre qu'il existe un vecteur y de la base de F tel que $(x, y) \neq 0$.
4. On renormalise ce vecteur y et élimine les contributions de x et y dans les autres vecteurs de chacune des bases en utilisant la même formule que précédemment (un des deux termes est nul, on ne mélange pas les vecteurs de E et F).
5. On utilise l'hypothèse de récurrence.

□

Remarque. La dernière condition de la propriété précédente peut être remplacée par $\forall x \in E, \exists y \in F, (x, y) \neq 0$. En effet cela trivialisait l'étape 3. Attention par contre au fait que si l'on garde la possibilité de compléter la base obtenue en une base symplectique de l'espace entier, les vecteurs à ajouter ne sont *a priori* pas dans G . ◇

8.4 PROPRIÉTÉS SPECTRALES

En vue de la diagonalisation des matrices symplectiques et hamiltoniennes, détaillons certaines propriétés de leurs valeurs et vecteurs propres.

Ce qui est présenté l'est pour des matrices complexes. Il ne faut pas oublier que dans le cas (courant) où l'on s'intéresse à une matrice réelle, quand λ est valeur propre, λ^* l'est également, avec la même multiplicité, et on passe d'un espace propre à l'autre par conjugaison (pour M réelle, $Mx = \lambda x \Leftrightarrow Mx^* = \lambda^* x^*$).

8.4.1 Matrices symplectiques

Propriété 8.13. *Soit une matrice S symplectique complexe. Soit λ une valeur propre de S . λ^{-1} est également valeur propre, et de même multiplicité.*

Démonstration Soit x un vecteur propre associé à λ . Par définition $Sx = \lambda x$. Par ailleurs souvenons-nous que S est inversible, et donc $\lambda \neq 0$. S étant symplectique, $S^T \Omega S = \Omega$. Ainsi,

$$S^T \Omega Sx = \Omega x \Leftrightarrow \lambda S^T \Omega x = \Omega x \Leftrightarrow S^T \Omega x = \frac{1}{\lambda} \Omega x$$

On peut donc conclure que λ^{-1} est valeur propre de S^T , avec Ωx comme vecteur propre (Ω est inversible), et donc les multiplicités sont identiques. S et S^T étant semblables, λ^{-1} est également valeur propre de S , et de même multiplicité que λ . □

Propriété 8.14. *Soit une matrice S symplectique complexe. Soient x_1, x_2 des vecteurs propres et λ_1, λ_2 leurs valeurs propres respectivement associées.*

$$\lambda_1 \lambda_2 \neq 1 \implies (x_1, x_2) = 0$$

Autrement dit, dès que $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$, les espaces propres correspondants sont symplectiquement orthogonaux.

Démonstration Par définition, $Sx_1 = \lambda_1 x_1$ et $Sx_2 = \lambda_2 x_2$. Par ailleurs, S étant symplectique $S^T \Omega S = \Omega$. Ainsi $\lambda_1 \lambda_2 (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. On arrive donc à la relation $(x_1, x_2) (\lambda_1 \lambda_2 - 1) = 0$ qui prouve la propriété. \square

8.4.2 Matrices hamiltoniennes

Propriété 8.15. *Soit une matrice M hamiltonienne (complexe). Soit λ une valeur propre de M . $-\lambda$ est également valeur propre de M , et de même multiplicité.*

Démonstration Soient x un vecteur propre associé à λ . Par définition $Mx = \lambda x$. M étant hamiltonienne, $M^T \Omega + \Omega M = 0 \Leftrightarrow M^T \Omega = -\Omega M$. Ainsi,

$$M^T \Omega x = -\lambda \Omega x$$

On peut donc conclure que $-\lambda$ est valeur propre de M^T , avec Ωx comme vecteur propre (Ω est inversible). Cela implique également que les multiplicités sont identiques. M et M^T étant semblables, $-\lambda$ est également valeur propre de M , et de même multiplicité que λ . \square

Propriété 8.16. *Soit une matrice M hamiltonienne complexe. Soient x_1, x_2 des vecteurs propres et λ_1, λ_2 leurs valeurs propres respectivement associées.*

$$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0 \implies (x_1, x_2) = 0$$

Autrement dit, dès que $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, les espaces propres correspondants sont symplectiquement orthogonaux.

Démonstration Par définition, $Mx_1 = \lambda_1 x_1$ et $Mx_2 = \lambda_2 x_2$. Par ailleurs, M étant symplectique $M^T \Omega + \Omega M = 0$. Ainsi $\lambda_1 (x_1, x_2) + \lambda_2 (x_1, x_2) = 0$. On arrive donc à la relation $(x_1, x_2) (\lambda_1 + \lambda_2) = 0$ qui prouve la propriété. \square

8.5 DÉCOMPOSITIONS

Nous arrivons maintenant au cœur de ce chapitre. Nous allons voir des décompositions utilisables sur les matrices symplectiques et hamiltoniennes, ainsi qu'une décomposition les utilisant. Ce qui est présenté ici n'est qu'un mince échantillon des décompositions impliquant des matrices symplectiques. Une fois de plus, le lecteur souhaitant approfondir la question est invité à lire les références [3, 47, 88].

8.5.1 Décomposition polaire

Rappelons que la décomposition polaire permet d'écrire de manière unique toute matrice inversible sous la forme du produit d'une matrice hermitienne définie positive et d'une matrice unitaire.

Propriété 8.17. Soit S une matrice symplectique. Écrivons sa décomposition polaire $S = HU$ où H est hermitienne définie positive et U unitaire. H et U sont également symplectiques.

Démonstration La décomposition polaire s'écrit $S = HU$. Comme S est symplectique,

$$\begin{aligned} S^{-1} = -\Omega S^T \Omega &\Leftrightarrow U^{-1}H^{-1} = -\Omega U^T H^T \Omega \\ &\Leftrightarrow U^{-1}H^{-1} = \left(\Omega^T U^T \Omega\right) \left(\Omega^T H^T \Omega\right) \end{aligned}$$

Or U^{-1} est unitaire, de même H^{-1} est hermitienne, et même définie positive (les valeurs propres sont toutes strictement positives).

Par ailleurs, comme U est unitaire $UU^\dagger = \mathbf{1}$, donc $U^T(U^T)^\dagger = \mathbf{1}$. Ainsi

$$\Omega^T U^T \Omega \Omega^T (U^T)^\dagger \Omega = \mathbf{1}$$

et donc $(\Omega^T U^T \Omega) (\Omega^T U^T \Omega)^\dagger = \mathbf{1}$. En procédant de même en partant de $U^\dagger U = \mathbf{1}$, on prouve que $\Omega^T U^T \Omega$ est bien unitaire.

De manière similaire, H étant hermitienne $H = H^\dagger$. Ainsi $H^T = (H^\dagger)^\dagger$, et donc $\Omega^T H^T \Omega = \Omega^T (H^\dagger)^\dagger \Omega$. On arrive donc à $\Omega^T H^T \Omega = (\Omega^T H^T \Omega)^\dagger$, ce qui prouve que $\Omega^T H^T \Omega$ est bien hermitienne. Vérifions qu'elle est également définie positive. Soit x un vecteur-colonne, regardons le signe de $x^\dagger \Omega^T H^T \Omega x$ (qui est réel). Étant un nombre on peut le transposer sans le changer, ce qui donne $x^{*\dagger} \Omega^T H \Omega x^*$. Or Ωx^* est un vecteur et H est définie positive. On conclut que $x^\dagger \Omega^T H^T \Omega x$ est strictement positif et donc que H^T est définie positive.

On a maintenant tous les éléments pour achever la preuve. Dans l'équation $U^{-1}H^{-1} = (\Omega^T U^T \Omega) (\Omega^T H^T \Omega)$ le membre de gauche est le produit de deux matrices, une unitaire et l'autre définie positive. Il en va de même pour le membre de droite. La décomposition polaire étant unique pour les matrices inversibles, $U^{-1} = -\Omega U^T \Omega$ et $H^{-1} = -\Omega H^T \Omega$. On en conclut que U et H sont chacune symplectique. \square

Remarque. Une autre forme de la décomposition polaire est d'écrire $S = UH$. Dans ce cas également U et H sont symplectiques, la preuve est similaire. \diamond

8.5.2 Diagonalisation

Pour obtenir des résultats sur la diagonalisation nous allons combiner les propriétés spectrales et la procédure d'orthogonalisation symplectique que nous venons de voir. L'objectif ici va être de diagonaliser *via* des matrices de passage symplectiques.

8.5.2.1 Matrices symplectiques

Cas général

On s'intéresse à la diagonalisation des matrices symplectiques. Commençons par remarquer qu'elles ne sont pas toutes diagonalisables. L'exemple le plus simple est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui, en plus d'être connue pour être non diagonalisable (même dans

C), est symplectique. Il est donc vain d'essayer d'obtenir une diagonalisation *via* des matrices de passage symplectique dans le cas général. Voilà pourquoi nous allons dans un premier temps nous restreindre aux matrices symplectiques diagonalisables. Ensuite nous verrons le cas particulier des matrices à la fois symplectiques et hermitiennes.

Théorème 8.2. *Soit S une matrice symplectique (complexe). Si S est diagonalisable, alors elle l'est via des matrices de passage symplectiques.*

Démonstration Compte tenu de la caractérisation des matrices symplectiques (équation (8.4)), nous allons simplement montrer qu'il existe une base symplectique de vecteurs propres.

Commençons par traiter le cas des valeurs propres différentes de ± 1 . Soit λ une valeur propre, appelons E l'espace propre associé. λ^{-1} est également valeur propre; notons F l'espace propre associé. La propriété 8.13 nous garantit que $\dim E = \dim F$. Ensuite la propriété 8.14 nous assure que E est symplectiquement orthogonal à tous les espaces propres hormis F (mais inclus E lui-même), et de même F est symplectiquement orthogonal à tous les espaces propres hormis E . On a donc toutes les hypothèses de la propriété 8.12. Ainsi il existe une base symplectique de $E \oplus F$, dont tous les vecteurs sont des vecteurs propres de S et sont symplectiquement orthogonaux à tous les autres espaces propres.

Pour traiter les cas potentiels $\lambda = \pm 1$, remarquons que la restriction de $(,)$ au sous-espace propre correspondant est nécessairement non dégénérée (cet espace est symplectiquement orthogonal à tous les autres espaces propres, $(,)$ est non dégénérée). Notons que la dimension d'un tel sous-espace est bien paire, comme nous l'affirme la propriété 8.2. Ainsi on peut utiliser le théorème 8.1, et générer une base symplectique de ce sous-espace.

On peut maintenant conclure la preuve. Pour chaque couple de valeurs propres (y compris 1 et -1 , chacune formant un couple avec elle-même) on a trouvé une base symplectique de vecteurs propres, chacune étant symplectiquement orthogonale avec les autres. En regroupant toutes ces bases en une seule, en prenant soin d'ordonner convenablement les vecteurs, on obtient une base symplectique de l'espace entier, composée exclusivement de vecteurs propres de S . On peut donc conclure qu'il existe une matrice de passage symplectique; son inverse l'est également. \square

Remarque. En pratique il est fréquent de trier les valeurs propres, et par exemple mettre toutes celles telles que $|\lambda| > 1$ d'un côté et celles pour lesquelles $|\lambda| < 1$ de l'autre. \diamond

Matrices symplectiques hermitiennes

Voyons maintenant un cas particulier important : les matrices symplectiques hermitiennes. Souvenons-nous de la propriété 8.13. Nous allons voir que nous pouvons ici être plus précis.

Lemme 8.1. *Soit S une matrice (complexe) symplectique et hermitienne. Soit x un vecteur propre pour la valeur propre λ . Alors Ωx^* est vecteur propre pour la valeur propre λ^{-1} .*

Démonstration Tout d'abord remarquons que comme S est hermitienne, elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles.

Prenons x vecteur propre pour la valeur propre λ . S étant symplectique, $S^T \Omega S = \Omega$, et donc en utilisant que $S = S^\dagger$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$S^T \Omega S x = \Omega x \Leftrightarrow \lambda S^T \Omega x = \Omega x \Leftrightarrow S^\dagger \Omega x^* = \frac{1}{\lambda} \Omega x^* \Leftrightarrow S \Omega x^* = \frac{1}{\lambda} \Omega x^*$$

□

On peut alors en déduire la propriété principale :

Théorème 8.3. *Soit S une matrice (complexe) symplectique et hermitienne. Il existe U unitaire symplectique et D réelle diagonale telles que :*

$$S = U \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D^{-1} \end{array} \right) U^\dagger$$

De plus si S est réelle, la même diagonalisation existe avec U également réelle.

Démonstration Nous avons toujours la [propriété 8.14](#), et additionnellement puisque S est hermitienne, ses différents sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux (pour le produit scalaire usuel), et les valeurs propres réelles. Comme pour les précédentes preuves, nous allons séparer le cas potentiel des valeurs propres ± 1 des autres.

Soit une valeur propre $\lambda \neq \pm 1$. Notons E et F les espaces propres associés respectivement à λ et λ^{-1} . Prenons une base orthonormée E , dont on écrit les vecteurs e_i . Par définition $e_i^\dagger e_i = \delta_{i,j}$. Considérons les vecteurs $f_i = -\Omega e_i^*$. D'après le [lemme 8.1](#), tous ces vecteurs sont dans F . On peut vérifier :

$$\begin{aligned} f_i^\dagger f_j &= (e_i^*)^\dagger \Omega^\dagger \Omega e_j^* = (e_i^\dagger e_j)^* = \delta_{i,j} \\ (e_i, f_j) &= e_i^\dagger \Omega f_j = -e_i^\dagger \Omega \Omega e_j^* = e_i^\dagger e_j^* = (e_i^\dagger e_j)^* = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Pour des raisons de dimension ([propriété 8.13](#)) les f_i forment bien une base de F . Ainsi les e_i et f_i forment une base symplectique et orthonormée de $E \oplus F$ composée uniquement de vecteurs propres de S . Tous les vecteurs de cette base sont orthogonaux et symplectiquement orthogonaux à tous les autres espaces propres.

Pour le cas $\lambda = \pm 1$, on commence par prendre une base symplectique de l'espace propre, ce qui est possible grâce au [théorème 8.1](#) (en ayant remarqué que le sous-espace étant symplectiquement orthogonal à tous les autres sous-espaces propres la restriction de (\cdot, \cdot) y est non dégénérée). Ensuite on pose E l'espace engendré par la première moitié des vecteurs de la base et F celui engendré par la seconde moitié. On remarque que E est symplectiquement orthogonal à lui-même, et de même pour F . On peut alors suivre les mêmes étapes que pour $\lambda \neq \pm 1$.

De nouveau on conclut en rassemblant les bases obtenues en une seule, en prêtant attention à l'ordre dans lequel on range les vecteurs. □

Remarque. Il n'est pas nécessaire que la matrice soit définie positive. ◇

8.5.2.2 Matrices hamiltoniennes

Cas général

De même que dans le cas symplectique, toutes les matrices hamiltoniennes ne sont diagonalisables. Prenons l'exemple de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est nilpotente (mais pas nulle) et donc non diagonalisable tout en étant hamiltonienne. Concentrons-nous donc dans un premier temps sur les matrices diagonalisables.

Théorème 8.4. Soit M une matrice hamiltonienne (complexe). Si M est diagonalisable alors elle l'est via des matrices de passage symplectiques.

Esquisse de démonstration. La preuve est exactement la même que pour la matrice symplectique, en remplaçant simplement λ^{-1} par $-\lambda$ et ± 1 par 0 . \square

Matrices hamiltoniennes hermitiennes

Voyons maintenant le cas des matrices hamiltoniennes et hermitiennes.

Lemme 8.2. Soit M une matrice (complexe) hamiltonienne et hermitienne. Soit x un vecteur propre pour la valeur propre λ . Alors Ωx^* est vecteur propre pour la valeur propre $-\lambda$.

Esquisse de démonstration. On procède exactement comme pour la preuve du [lemme 8.1](#). \square

Cela permet de prouver :

Théorème 8.5. Soit M une matrice hamiltonienne (complexe) et hermitienne. Il existe U unitaire symplectique et D réelle diagonale positive telles que

$$S = U \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & -D \end{array} \right) U^{\dagger}$$

De plus si M est réelle, la même diagonalisation existe avec U également réelle.

Esquisse de démonstration. La preuve est exactement la même que pour la matrice symplectique hermitienne en remplaçant simplement λ^{-1} par $-\lambda$ et ± 1 par 0 et le [lemme 8.1](#) par le [8.2](#). D peut se prendre positive par un choix de l'ordre des vecteurs propres (à condition de les normaliser convenablement). \square

Voyons maintenant un autre théorème valable seulement dans un cas particulier. Ici on s'intéresse aux matrices hamiltoniennes M réelles telles que ΩM (qui est symétrique) soit définie positive. On peut voir là une forme « symplectique » du théorème spectral, même si les conditions restreignent son utilisation.

Théorème 8.6. Soit M une matrice hamiltonienne réelle, telle que ΩM (qui est symétrique réelle donc hermitienne) soit définie positive. Il existe S symplectique et D réelle diagonale strictement positive telles que

$$M = S \left(\begin{array}{c|c} iD & 0 \\ \hline 0 & -iD \end{array} \right) S^{-1}, \quad \text{et } S \text{ de la forme } S = \left(\begin{array}{c|c} A & -iA^* \\ \hline B & -iB^* \end{array} \right)$$

avec A et B des matrices complexes.

Démonstration Nous allons de nouveau procéder par récurrence. Nous ne détaillons pas l'initialisation et nous concentrons sur la récurrence. Pour cela nous avons quelques étapes à suivre.

1. Commençons par une remarque. Soit x un vecteur-colonne quelconque. Écrivons-le

par blocs : $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. On a $x^\dagger \Omega x = u^\dagger v - v^\dagger u = 2i \operatorname{Im}\{u^\dagger v\}$. Ainsi $\forall x, x^\dagger \Omega x \in i\mathbb{R}$, éventuellement nul à ce stade.

2. Soient λ une valeur propre de M (il en existe toujours sur \mathbb{C} ; prendre par exemple une racine du polynôme caractéristique), et x un vecteur propre associé. Par définition, $Mx = \lambda x$. Par ailleurs ΩM est symétrique définie positive. On a alors :

$$\underbrace{x^\dagger \Omega M x}_{\in \mathbb{R}, > 0} = \lambda \underbrace{x^\dagger \Omega x}_{\in i\mathbb{R}}$$

Par ailleurs on remarque que $x^\dagger \Omega x = (x^*, x)$. On en déduit que $\lambda \neq 0$, $(x^*, x) \neq 0$ et $\lambda \in i\mathbb{R}$.

3. Utilisons maintenant le fait que M est réelle. Par définition $Mx = \lambda x$. Ainsi en utilisant que $\lambda \in i\mathbb{R}$, $Mx^* = \lambda^* x^* = -\lambda x^*$. On a donc trouvé que x^* est vecteur propre pour la valeur propre $-\lambda$. Comme $\lambda \neq 0$, on a bien un second vecteur propre distinct et non proportionnel. Le sous-espace engendré par x et x^* est de dimension 2; notons-le E .
4. Prouvons maintenant que nous pouvons restreindre l'application linéaire représentée par M à un espace de dimension $2N - 2$. Considérons « l'orthogonal symplectique » à l'espace engendré par x et x^* : soit $G = \{y, (x, y) = 0 = (x^*, y)\}$. En tant qu'intersection entre les noyaux de deux applications linéaires, G est bien un espace vectoriel. De plus on peut vérifier qu'il est supplémentaire de l'espace engendré par x et x^* (compléter x et x^* en une base symplectique, G est l'espace engendré par les autres vecteurs).

Nous devons maintenant vérifier que G est stable par l'application représentée par M . Soit $y \in G$. Par définition $(x, y) = 0$ et $(x^*, y) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} (x, My) &= -(Mx, y) = -\lambda (x, y) = 0 \\ (x^*, My) &= -(Mx^*, y) = \lambda (x^*, y) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $y \in G \implies My \in G$.

5. On applique l'hypothèse de récurrence à la restriction de l'application représentée par M sur G . Cela nous donne une base de valeurs propres ayant la forme requise. Il nous reste à modifier x et x^* pour les mettre sous la bonne forme et pouvoir compléter la base en une base symplectique sur l'espace entier.

Sans perte de généralité, on prend $\lambda = i\tilde{\lambda}$ avec $\tilde{\lambda} > 0$ (si besoin on inverse le rôle de λ et $-\lambda$ en inversant x et x^*). Comme $i\tilde{\lambda}(x^*, x) > 0$, on peut écrire $(x, x^*) = ir$ avec r un réel strictement positif. En posant $x_1 = \frac{x}{\sqrt{r}}$ et $x_2 = \frac{x^*}{i\sqrt{r}}$, on a $x_2 = -ix_1^*$ et $(x_1, x_2) = 1$. En plaçant ces deux vecteurs-colonnes au bon endroit, on obtient les matrices de passage souhaitées.

□

Remarque. Il arrive qu'on puisse appliquer ce théorème à la matrice d'évolution \mathcal{L}_{xp} vue au chapitre précédent. Ses valeurs propres sont alors toutes imaginaires pures. Cela signifie que tous les modes propres de l'équation d'évolution oscillent, sans amplification. Cela est typique du comportement d'oscillateurs harmoniques. De plus les vecteurs propres vont en fait être des opérateurs bosoniques. Ce cas particulier est apprécié dans le domaine des atomes froids, où il est en général démontré sans recourir aux matrices symplectiques [14].

Cela ne correspond par contre pas à ce qu'on attend pour la lumière comprimée, pour laquelle les quadratures sont amplifiées ou désamplifiées (le plus souvent en partant du vide). On peut d'ailleurs vérifier que dans les cas simples de lumière comprimée (un ou deux modes) la matrice symétrique n'est pas définie positive, et la diagonalisation s'effectue *via* des matrices réelles, avec des valeurs propres réelles. ◇

8.5.3 Décomposition en valeurs singulières

Voyons maintenant une propriété de décomposition en valeurs singulières des matrices symplectiques.

Théorème 8.7 (Décomposition de Bloch–Messiah). *Soit S une matrice symplectique. Alors il existe U_1, U_2 unitaires et symplectiques, et D diagonale telles que :*

$$S = U_1 \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D^{-1} \end{array} \right) U_2$$

De plus si S est réelle la même décomposition existe avec U_1, U_2 et D réelles.

Ce théorème est l'un de ceux qui seront les plus utiles pour la suite, car il va permettre de réinterpréter l'évolution induite par un hamiltonien quadratique. Cela sera détaillé au chapitre suivant.

Démonstration Effectuons la décomposition polaire de S : $S = HU_0$ avec H hermitienne définie positive et U_0 unitaire. Comme vu avec la [propriété 8.17](#), H et U_0 sont également symplectiques. On peut appliquer le [théorème 8.3](#), et écrire $H = U_1\tilde{D}U_1^\dagger$, avec U_1 symplectique et unitaire, et \tilde{D} une matrice diagonale de la forme requise. On a alors

$$S = U_1\tilde{D}U_1^\dagger U_0$$

U_1^\dagger et U_0 étant chacune symplectique et unitaire on obtient le résultat souhaité avec $U_2 = U_1^\dagger U_0$. \square

Remarque. Il y a unicité des valeurs singulières ; D est donc unique à l'ordre près. \diamond

8.5.4 Décomposition de Williamson

Contrairement aux décompositions précédentes, ce n'est maintenant pas une matrice symplectique qui est transformée. Elle est principalement utile pour traiter des états gaussiens mélangés [129].

Théorème 8.8 (Décomposition de Williamson). *Soit M une matrice réelle définie positive. Alors il existe une matrice réelle symplectique S et une matrice diagonale D réelle et strictement positive telles que :*

$$M = S \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) S^T$$

Démonstration M est réelle définie positive. Donc $\Omega^T M$ vérifie les hypothèses du [théorème 8.6](#). Ainsi il existe D diagonale réelle strictement positive et V symplectique telles que

$$\Omega^T M = V \left(\begin{array}{c|c} iD & 0 \\ \hline 0 & -iD \end{array} \right) V^{-1}, \quad \text{et} \quad V = \left(\begin{array}{c|c} A & -iA^* \\ \hline B & -iB^* \end{array} \right)$$

avec A et B des matrices complexes.

Posons $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|c} i\mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \end{array} \right)$. Il est immédiat de vérifier que U est unitaire ($UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$), et symplectique ($U^T \Omega U = \Omega$). Remarquons alors qu'un calcul élémentaire montre que :

$$U \left(\begin{array}{c|c} 0 & -D \\ \hline D & 0 \end{array} \right) U^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} iD & 0 \\ \hline 0 & -iD \end{array} \right)$$

Rappelons la [propriété 8.4](#) : pour une matrice symplectique S quelconque, $S^{-1} = -\Omega S^T \Omega = -\Omega S \Omega^T$. Avec toutes ces propriétés, on peut effectuer le calcul suivant (chaque ligne est équivalente à la précédente) :

$$\begin{aligned} \Omega^T M &= V \left(\begin{array}{c|c} iD & 0 \\ \hline 0 & -iD \end{array} \right) V^{-1} \\ \Omega^T M &= VU \left(\begin{array}{c|c} 0 & -D \\ \hline D & 0 \end{array} \right) (VU)^{-1} \\ M &= -\Omega VU \left(\begin{array}{c|c} 0 & -D \\ \hline D & 0 \end{array} \right) (\Omega VU \Omega)^T \end{aligned}$$

$$M = \Omega V U \Omega \Omega \left(\begin{array}{c|c} 0 & -D \\ \hline D & 0 \end{array} \right) (\Omega V U \Omega)^T$$

$$M = (\Omega V U \Omega) \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) (\Omega V U \Omega)^T$$

en ayant remarqué que $\Omega \left(\begin{array}{c|c} 0 & -D \\ \hline D & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$.

Posons $S = \Omega V U \Omega$. V et U sont symplectiques, et on en déduit que S l'est également. Il reste à vérifier que S est bien une matrice réelle. Pour ça calculons par blocs :

$$VU = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|c} A & -iA^* \\ \hline B & -iB^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} i\mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|c} i(A - A^*) & -(A + A^*) \\ \hline i(B - B^*) & -(B + B^*) \end{array} \right)$$

et donc S est réelle. □

Remarque. Les hypothèses que la matrice soit réelle et définie positive sont toutes deux nécessaires; à ceci près qu'on obtient un résultat similaire pour les matrices définies négatives. Il existe également des variantes pour lesquelles la matrice n'a besoin que d'être positive (ou négative) [55]. ◇

8.6 ALGORITHMES

Nous allons seulement présenter les algorithmes utilisés dans la suite de la thèse. Notez que les démonstrations précédentes ont été données de manière constructive. Les algorithmes sont de simples transcriptions des démonstrations de chacune des décompositions.

Le code est écrit en Python, avec les bibliothèques Numpy et Scipy [125]. La version présentée ici est simplifiée pour ne garder que l'essentiel; tous les tests de cohérence ont été retirés par souci de clarté. Par ailleurs le contenu exact des fonctions annexes n'est pas non plus donné; il est remplacé par une version plus simple qui ne gère pas les cas pathologiques.

Pour tester les algorithmes écrits, il est nécessaire d'être capable de générer différents types de matrices symplectiques. Une approche naïve mais néanmoins fonctionnelle consiste à générer une matrice symétrique (complexe). On en déduit alors une matrice hamiltonienne en la multipliant par Ω . En prenant son exponentielle on obtient une matrice symplectique. En multipliant celle-ci par son conjugué hermitien on obtient une matrice symplectique définie positive. Pour des dimensions importantes, la méthode précédente peut s'avérer lente, et sensible aux erreurs numériques. Une alternative consiste à utiliser une paramétrisation de l'ensemble des matrices symplectiques (ainsi que de ses sous-groupes). Cela est possible et détaillé dans l'article [30]. Attention toutefois que les conventions choisies n'y sont pas les mêmes qu'ici.

8.6.1 Matrices symplectiques unitaires

Commençons par reformuler de manière matricielle les propriétés vues pour les vecteurs-colonnes. Nous allons exprimer la forme générique d'une matrice symplectique et unitaire.

Propriété 8.18. *Soit S une matrice. S est symplectique et unitaire si et seulement si elle peut se mettre sous la forme :*

$$S = \left(\begin{array}{c|c} A & -B^* \\ \hline B & A^* \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} AA^\dagger + B^*B^\top = \mathbb{1} \\ A^\dagger A + B^\top B = \mathbb{1} \\ AB^\dagger = B^*A^\top \\ A^\top B = B^\top A \end{cases}$$

Démonstration S est symplectique, donc $S^\top \Omega S = \Omega$. Or S est également unitaire donc $SS^\dagger = \mathbb{1}$ et alors $S^*S^\top = \mathbb{1}$. Ainsi $\Omega S = S^*\Omega$. En remplaçant Ω par son expression par blocs et S par une forme générique par blocs, la forme proposée s'en déduit directement. Les conditions sont obtenues en imposant sur cette forme que $SS^\dagger = S^\dagger S = \mathbb{1}$.

La vérification que la forme donnée est bien symplectique et unitaire se fait par calcul direct, ou en vérifiant que c'est un cas particulier des expressions par bloc des matrices symplectiques et des matrices unitaires. \square

Remarque.

$$\begin{pmatrix} -B^* \\ A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^* = -\Omega \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^*$$

Ainsi on retrouve bien dans cette la forme des matrices symplectiques unitaires celle des vecteurs propres donnés par le [lemme 8.1](#). \diamond

Décrivons maintenant l'algorithme. Par souci de simplicité, nous ne l'écrivons que pour les matrices définies positives, bien que cette hypothèse ne fasse pas partie de celles de la décomposition. L'algorithme commence par effectuer une diagonalisation standard, donnant une base orthonormale de vecteurs propres. On trie ensuite les valeurs propres pour n'avoir que celles inférieures à 1 dans la première moitié. Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres supérieures à 1 sont reconstruits à partir de la première moitié des vecteurs propres. Notez que la valeur propre 1 est traitée à part, mais nous ne donnons pas le détail ici. La démonstration du [théorème 8.3](#) nous garantit que les matrices obtenues ont bien les propriétés souhaitées. Un code illustratif est présenté dans l'[extrait de code 8.1](#).

Remarquez que le code présenté a le défaut de ne pas reconstituer parfaitement la matrice initiale quand la dimension devient importante. Cela est dû aux erreurs numériques et lié au fait qu'on privilégie que la matrice de passage soit précisément symplectique. Un problème voisin est analysé en détail dans l'article [55]. Une approche plus algorithmique de la diagonalisation pourrait permettre de résoudre ce problème. Notez toutefois qu'en l'état les valeurs propres gardent la précision de la diagonalisation initiale.

Extrait de code 8.1 – Diagonalisation de matrice symplectique hermitienne.

```

from scipy.linalg import eigh

def _ord(vals, vects, dim):
    """Ordonne les valeurs et vecteurs propres."""
    # Pour l'exemple le cas de la valeur propre 1 n'est pas traite.
    ordre = list(np.argsort(vals))
    ordre = ordre[:dim] + ordre[:-dim-1:-1]
    return vals[ordre], vects[:, ordre]

def hermitian_symp_diag(mat):
    """Diagonalisation des matrices symplectiques et hermitiennes."""
    dim = mat.shape[0] // 2
    vals, vects = eigh(mat)
    vals, vects = _ord(vals, vects, dim)
    vects[:dim, dim:] = -vects[dim:, :dim].conjugate()
    vects[dim:, dim:] = vects[:dim, :dim].conjugate()
    return vals, vects

```

8.6.2 Décomposition de Bloch–Messiah

On s’appuie entièrement sur la décomposition polaire ([propriété 8.17](#)) ainsi que sur l’algorithme précédent. Le code présenté est également simplifié afin de ne garder que l’essentiel.

Extrait de code 8.2 – Décomposition de Bloch–Messiah.

```

from scipy.linalg import polar

def bloch_messiah(mat):
    """Decomposition de Bloch-Messiah."""
    u, h = polar(mat, side='left')
    d, o = hermitian_symp_diag(h)
    return o, np.diag(d), o.T.conjugate()@u

```

8.7 MATRICES SESQUISYMPLECTIQUES

Nous avons défini les matrices symplectiques comme étant celles qui préservent la forme bilinéaire antisymétrique $(,)$. Il existe une autre convention dont nous allons avoir besoin par la suite : travailler avec une forme sesquilinéaire antihérmittienne, en pratique $x, y \mapsto x^\dagger \Omega y$.

Définition. Nous appelons matrice sesquisymplectique toute matrice conservant la forme sesquilinéaire $x, y \mapsto x^\dagger \Omega y$.

De manière similaire à l’expression (8.2) cela se traduit sous la forme :

Propriété 8.19. S est sesquisymplectique $\Leftrightarrow S^\dagger \Omega S = \Omega$.

Bien évidemment les définitions de symplectiques et sesquisymplectiques coïncident pour les matrices réelles.

Nous n'allons pas détailler l'ensemble des propriétés de ces matrices, mais uniquement celles qui seront utiles dans les chapitres suivants. Travailler avec les matrices sesquisymplectiques est bien moins agréable qu'avec celles symplectiques ; la principale raison est qu'en général $x^\dagger \Omega x \neq 0$. Ainsi quand on invoque la propriété que la forme est non dégénérée pour récupérer un y tel que $x^\dagger \Omega y \neq 0$, on risque d'avoir $y \propto x$.

Remarque. Soit x tel que $x^\dagger \Omega x \neq 0$. Il serait tentant d'essayer de régler le problème en multipliant par un complexe. Soit $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$; $(zx)^\dagger \Omega (zx) = |z|^2 x^\dagger \Omega x \neq 0$. Remplacer x par zx ne permet pas de contourner le problème. \diamond

Avec une démonstration similaire à celle de la [propriété 8.3](#) on obtient également que la définition des matrices sesquisymplectiques ne dépend pas du côté qui est conjugué.

Propriété 8.20. Soit $S \in M_{2N,2N}(\mathbb{C})$,

$$S^\dagger \Omega S = \Omega \Leftrightarrow S \Omega S^\dagger = \Omega$$

De même, les propriétés de base s'appuyant sur celles de Ω se retrouvent facilement pour les matrices sesquisymplectiques.

Pour ce qui est des propriétés spectrales, en procédant de même que pour la [propriété 8.13](#) on obtient :

Propriété 8.21. Soit une matrice S sesquisymplectique complexe. Soit λ une valeur propre de S . $(\lambda^*)^{-1}$ est également valeur propre, et de même multiplicité.

Cette propriété est beaucoup moins forte que la [8.13](#) car elle ne donne aucune information pour toutes les valeurs propres situées sur le cercle unité, et non plus uniquement en ± 1 . Plus globalement les théorèmes de diagonalisation ne se retrouvent pas tels quels. Étudions en détail la possibilité d'adapter la diagonalisation des matrices symplectiques unitaires ([théorème 8.3](#)).

8.7.1 Matrices sesquisymplectiques hermitiennes

Essayons de diagonaliser les matrices sesquisymplectiques hermitiennes *via* des matrices de passages unitaires et sesquisymplectiques. Tout d'abord, observons que la démonstration du [lemme 8.1](#) s'adapte directement ici :

Lemme 8.3. Soit S une matrice (complexe) sesquisymplectique et hermitienne. Soit x un vecteur propre pour la valeur propre λ . Alors Ωx est vecteur propre pour la valeur propre λ^{-1} .

Grâce à ce lemme et au fait que deux vecteurs propres sont sesquisymplectiquement orthogonaux quand leurs valeurs propres ne sont pas inverses l'une de l'autre (adaptation de la [propriété 8.14](#)), le début de la démonstration du [théorème 8.3](#) s'adapte au cas sesquisymplectique. Par contre le traitement des espaces propres associés à ± 1 diffère.

Plus précisément, une transcription directe du [théorème 8.3](#) serait fautive. Un contre-exemple est la matrice $i\Omega$. Il est immédiat de vérifier qu'elle est hermitienne et sesquisymplectique (mais elle n'est pas symplectique). Elle a deux valeurs propres $+1$ et -1 ;

les deux sous-espaces propres coïncident avec ceux de Ω pour les valeurs propres $-i$ et i respectivement (équation (8.1)). Soit x un vecteur propre normé ($x^\dagger x = 1$) pour la valeur propre 1. $x^\dagger \Omega x = -ix^\dagger x = -i \neq 0$; il est donc impossible de choisir un vecteur de ce sous-espace pour constituer une base sesquisymplectique.

Effectuons un bilan des leçons à tirer de ce contre-exemple, en particulier de sa version en dimension $N = 1$.

- Contrairement au cas symplectique, on peut avoir un sous-espace de dimension impaire (en l'occurrence 1) sur lequel la forme sesquisymplectique est non dégénérée. Cela est le cas alors même qu'il existe un supplémentaire (l'autre espace propre) sesquisymplectiquement orthogonal.
- On a mis en évidence un sous-espace sur lequel seul le vecteur nul est sesquisymplectiquement orthogonal à lui-même. Cela nous montre qu'il est vain de chercher une procédure d'orthogonalisation. De plus il est impossible d'y construire une base sesquisymplectique alors même que la forme sesquisymplectique y est non dégénérée et qu'il a un supplémentaire sesquisymplectique.
- Il n'est pas impossible que $\Omega x \propto x$.

Une solution pour contourner l'absence de théorème générique est d'ajouter une hypothèse. Ajoutons que la matrice à diagonaliser doit être aussi définie positive.

Théorème 8.9. *Soit S une matrice (complexe) sesquisymplectique hermitienne et définie positive. Il existe U unitaire sesquisymplectique et D réelle diagonale telles que :*

$$S = U \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D^{-1} \end{array} \right) U^\dagger$$

De plus si S est réelle, la même diagonalisation existe avec U également réelle.

Remarque. Comme nous allons le voir dans la démonstration, l'hypothèse que S soit « définie positive » est plus forte que nécessaire. On peut la remplacer par « telle que 1 et -1 ne soient pas simultanément valeurs propres de S ». \diamond

Démonstration Tout d'abord, remarquons qu'il est inutile de traiter le cas S réelle car on peut directement utiliser le [théorème 8.3](#). Voyons maintenant le cas complexe.

S étant hermitienne, elle se diagonalise avec des vecteurs propres formant une base orthonormée. Commençons par remarquer que S définie positive implique que seule la valeur propre 1 peut poser problème. Les autres espaces propres venant par couples, on en déduit que l'espace propre associé à 1 est de dimension paire. On garde pour l'instant de côté les vecteurs propres de ce sous-espace. Commençons par trier les vecteurs et valeurs propres de manière à ce que ces dernières soient placées dans de un ordre compatible avec la forme de la matrice diagonale attendue. Pour chaque $\lambda \neq 1$ valeur propre de la « première moitié », et x vecteur propre correspondant, on remplace dans notre base le vecteur correspondant à λ^{-1} par $y = -\Omega x$. On vérifie que la nouvelle base est toujours orthonormée (il suffit de vérifier pour chaque espace propre). Pour chaque x et y se correspondant, $x^\dagger \Omega x = 0$, $x^\dagger \Omega y = 1$ et $y^\dagger \Omega y = 0$. On observe également l'orthogonalité sesquisymplectique dès que les vecteurs ne font pas partie d'un même couple.

À partir de maintenant la démonstration emprunte un chemin très différent de celui de la preuve du [théorème 8.3](#). On réinsère dans la base les vecteurs propres associés à 1, une moitié au début de la base, l'autre au milieu. Remarquons que ces vecteurs propres sont sesquisymplectiquement orthogonaux à ceux appartenant aux autres espaces propres. Appelons V la matrice formée par les vecteurs de la base disposés en colonne. V est unitaire et diagonalise S . Elle n'est par contre pas sesquisymplectique. Nous pouvons rassembler toutes les relations de sesquisymplecticité déjà observées sous forme matricielle, où l'espace propre associé à 1 est décrit par les blocs A, B, C et D :

$$V^{\dagger}\Omega V = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A & (0) & B & (0) \\ \hline (0) & (0) & (0) & \mathbf{1} \\ \hline C & (0) & D & (0) \\ \hline (0) & -\mathbf{1} & (0) & (0) \end{array} \right)$$

On décide d'appeler Ω' la matrice de droite. On observe que

- Ω et Ω' se ressemblent beaucoup ; hormis A, B, C et D , tous leurs blocs sont identiques.
- V étant unitaire, Ω et Ω' sont semblables.
- Ω' est antihermitienne : $(\Omega')^{\dagger} = V^{\dagger}\Omega^{\dagger}V = -\Omega'$; c'est un cas particulier de matrice normale.

L'idée de l'étape suivante est de montrer que la matrice $\tilde{\Omega} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ est semblable

à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{1} & 0 \end{array} \right)$ *via* des matrices de passage unitaires.

On a vu que $(\Omega')^{\dagger} = -\Omega'$. En l'exprimant par blocs, on obtient que $\tilde{\Omega}$ est également antihermitienne. Elle est donc diagonalisable *via* des matrices de passages unitaires.

Par ailleurs, on peut écrire le polynôme caractéristique de Ω' comme le produit de ceux de $\tilde{\Omega}$ et de la matrice antisymétrique canonique (de la bonne dimension). Étant aussi égal à celui de Ω , on en déduit que $\tilde{\Omega}$ a pour valeurs propres i et $-i$, avec la même multiplicité.

Ainsi $\tilde{\Omega}$ se diagonalise *via* des matrices unitaires, et avec la même matrice diagonale que celle de la matrice antisymétrique canonique, pour laquelle on peut également prendre des matrices de passage unitaires ([équation \(8.1\)](#)). On en conclut qu'il existe \tilde{W} unitaire telle que

$$\tilde{\Omega} = \tilde{W} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{1} & 0 \end{array} \right) \tilde{W}^{\dagger}$$

Découpons \tilde{W} en blocs tous de mêmes dimensions :

$$\tilde{W} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{W}_{1,1} & \tilde{W}_{1,2} \\ \hline \tilde{W}_{2,1} & \tilde{W}_{2,2} \end{array} \right)$$

Posons maintenant :

$$W = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{W}_{1,1} & (0) & \tilde{W}_{1,2} & (0) \\ \hline (0) & \mathbb{1} & (0) & (0) \\ \hline \tilde{W}_{2,1} & (0) & \tilde{W}_{2,2} & (0) \\ \hline (0) & (0) & (0) & \mathbb{1} \end{array} \right)$$

En effectuant le calcul par blocs, et en comparant à la définition de \tilde{W} , on obtient que $W\Omega W^\dagger = \Omega'$. Cela nous permet de conclure :

$$V^\dagger \Omega V = \Omega' = W\Omega W^\dagger \Leftrightarrow W^\dagger V^\dagger \Omega V W = \Omega$$

De plus, W est l'identité partout sauf à l'intérieur de l'espace propres de S associé à la valeur propre 1. W préserve donc l'ensemble des espaces propres de S . Ainsi WV est bien une matrice unitaire constituée uniquement de vecteurs propres de S , et sesquisymplectique. En posant $U = WV$ on conclut la preuve du théorème. \square

Remarque. S'il y avait plusieurs sous espaces problématiques, W risquerait de les mélanger ; la preuve présentée ici ne s'adapte pas au cas général des matrices hermitiennes sesquisymplectiques sans une hypothèse pour ne pas avoir la valeur propre -1 . \diamond

8.7.1.1 Matrices sesquisymplectiques unitaires

Le [théorème 8.9](#) fait intervenir une matrice sesquisymplectique unitaire. De manière similaire à ce qui a été effectué pour les matrice symplectiques en [sous-section 8.6.1](#), on peut établir son écriture par blocs :

Propriété 8.22. Soit S une matrice. S est sesquisymplectique et unitaire si et seulement si elle peut se mettre sous la forme

$$S = \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} AA^\dagger + BB^\dagger = \mathbb{1} \\ A^\dagger A + B^\dagger B = \mathbb{1} \\ AB^\dagger = BA^\dagger \\ A^\dagger B = B^\dagger A \end{cases}$$

8.7.2 Décomposition de Bloch–Messiah

De manière similaire au [théorème 8.7](#), les matrices sesquisymplectiques ont également une décomposition de type Bloch–Messiah.

Théorème 8.10 (Décomposition de Bloch–Messiah). *Soit S une matrice sesquisymplectique. Il existe U_1, U_2 unitaires sesquisymplectiques, et D diagonale telles que :*

$$S = U_1 \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D^{-1} \end{array} \right) U_2$$

De plus si S est réelle la même décomposition existe avec U_1, U_2 et D réelles.

Esquisse de démonstration. De manière similaire à la [propriété 8.17](#), la décomposition polaire de matrice sesquisymplectique donne des matrices sesquisymplectiques. La matrice hermitienne étant aussi définie positive, on peut bien utiliser le [théorème 8.9](#). Ainsi la démonstration du [théorème 8.7](#) s'adapte sans problème. \square

ÉVOLUTION EN CAVITÉ

Nous avons maintenant tous les outils mathématiques nécessaires pour revenir au problème physique. Le système non-linéaire étudié est toujours décrit par le hamiltonien quadratique (6.1), mais nous considérons désormais qu'il est placé dans une cavité couplée avec des champs progressifs.

Dans un premier temps nous allons présenter les équations d'évolution des opérateurs en prenant en compte le couplage avec l'extérieur. Ensuite nous présenterons les différentes méthodes de résolution, ainsi que leurs limites; afin de simplifier la discussion nous le ferons d'abord pour le cas d'une configuration en simple passage. Enfin la résolution de l'équation d'évolution sera effectuée dans un cas général, ainsi que l'étude des propriétés statistiques du champ émergent de la cavité.

9.1 DISSIPATION ET ÉQUATION D'ÉVOLUTION

Dans le cas purement hamiltonien, l'évolution de chaque mode est décrite par l'équation d'Heisenberg (7.1). Nous allons ajouter le couplage avec l'extérieur. Celui-ci peut avoir plusieurs provenances, les principales étant l'entrée dans la cavité (par conservation de l'énergie il y a nécessairement des pertes associées), la sortie ainsi que la dissipation interne. Indexons ces différentes sources de pertes par s . Appelons $\kappa_{s,k}$ les coefficients correspondants¹ (on considère pour l'instant que l'intensité des pertes est différente pour chaque mode).

9.1.1 Évolution des opérateurs bosoniques

Chaque type de perte s peut être modélisé par un couplage entre le mode de la cavité et un mode extérieur peuplé de vide [18, 42, 117]. Ces derniers sont des modes qui se propagent; on les décrit de la manière présentée en sous-section 1.3.4 avec un découpage en fréquences et dans le plan transverse choisi de manière à correspondre aux modes de la cavité. On peut alors écrire les équations d'évolution :

$$\frac{d\hat{a}_k}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_k, \hat{H}] + \sum_s \left(-\kappa_{s,k} \hat{a}_k + \sqrt{2\kappa_{s,k}} \hat{a}_{in,s,k} \right) \quad (9.1a)$$

$$\frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_k^\dagger, \hat{H}] + \sum_s \left(-\kappa_{s,k} \hat{a}_k^\dagger + \sqrt{2\kappa_{s,k}} \hat{a}_{in,s,k}^\dagger \right) \quad (9.1b)$$

avec $\hat{a}_{in,s,k}$ l'opérateur de destruction sur le mode extérieur de la source de dissipation s pour le mode de la cavité k . On a déjà effectué l'approximation quasi-monochromatique

1. Pour un miroir d'une cavité, le $\kappa_{s,k}$ est typiquement exprimé à partir du coefficient de transmission et du temps d'un aller-retour dans la cavité [40].

pour les modes de la cavité. Nous allons également l'appliquer pour les modes extérieurs. En supposant que les temps caractéristiques des appareils de mesure et le temps de vie dans la cavité sont grands devant l'écart entre les fréquences propres de la cavité, les commutateurs des modes extérieurs sont donnés par :

$$\left[\hat{a}_{\text{in},s,k}(t), \hat{a}_{\text{in},s',k'}^\dagger(t') \right] = \delta_{s,s'} \delta_{k,k'} \delta(t - t')$$

De plus on se souviendra au moment de prendre en compte leurs fluctuations que ces modes sont peuplés de vide (aux fréquences optiques, la température ambiante est négligeable).

Voyons maintenant qu'il est possible de se débarrasser de l'indice s en regroupant ensemble toutes les sources de dissipation. Posons $\kappa_k = \sum_s \kappa_{s,k}$ et définissons l'opérateur d'annihilation $\hat{a}_{\text{in},k}$ par

$$\hat{a}_{\text{in},k} = \frac{\sum_s (\sqrt{2\kappa_{s,k}} \hat{a}_{\text{in},s,k})}{\sqrt{2 \sum_s \kappa_{s,k}}} = \sum_s \left(\sqrt{\frac{\kappa_{s,k}}{\kappa_k}} \hat{a}_{\text{in},s,k} \right)$$

En utilisant cette expression on vérifie alors que :

$$\left[\hat{a}_{\text{in},k}(t), \hat{a}_{\text{in},k'}^\dagger(t') \right] = \delta_{k,k'} \delta(t - t') \quad (9.2)$$

Les équations d'évolution se mettent sous la forme :

$$\frac{d\hat{a}_k}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_k, \hat{H}] - \kappa_k \hat{a}_k + \sqrt{2\kappa_k} \hat{a}_{\text{in},k} \quad (9.3a)$$

$$\frac{d\hat{a}_k^\dagger}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_k^\dagger, \hat{H}] - \kappa_k \hat{a}_k^\dagger + \sqrt{2\kappa_k} \hat{a}_{\text{in},k}^\dagger \quad (9.3b)$$

Elles sont communément appelées « équations de Langevin quantiques ».

9.1.2 Notation vectorielle

Nous allons reformuler ces équations sous forme vectorielle. Regroupons les opéra-

teurs $\hat{a}_{\text{in},s,k}$ et $\hat{a}_{\text{in},s,k}^\dagger$ dans un vecteur $\hat{A}_{\text{in},s} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{\text{in},s,1} \\ \hat{a}_{\text{in},s,2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{\text{in},s,1}^\dagger \\ \hat{a}_{\text{in},s,2}^\dagger \\ \vdots \end{pmatrix}$. Les opérateurs $\hat{a}_{\text{in},k}$ et $\hat{a}_{\text{in},k}^\dagger$ sont

regroupés dans \hat{A}_{in} .

On peut alors écrire l'équation d'évolution sous la forme :

$$\boxed{\frac{d\hat{A}}{dt} = \mathcal{L}\hat{A} - \mathcal{K}\hat{A} + \sqrt{2\mathcal{K}}\hat{A}_{\text{in}}} \quad (9.4)$$

avec toujours $\mathcal{L} = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} G & 2F \\ \hline -2F^\dagger & -G^\top \end{array} \right)$, et en ayant posé :

$$\mathcal{K} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \kappa_1 & & & & & \\ & \kappa_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & \kappa_1 & \\ & & & & & \kappa_2 \\ & & & & & & \ddots \end{array} \right)$$

la matrice diagonale contenant dans chaque bloc diagonal les κ_k dans l'ordre. Pour la suite, on définit également la matrice \mathcal{K}_s regroupant de manière similaire les coefficients $\kappa_{s,k}$.

9.1.3 Passage en quadratures

Détaillons ce que devient l'équation (9.4) lors du passage en quadratures. Le processus est similaire à celui effectué en sous-sous-section 7.3.1.2. Reprenons les mêmes définitions de la matrice de passage γ et du vecteur rassemblant les opérateurs de quadrature $\hat{\mathcal{X}}$, et posons $\hat{\mathcal{X}}_{\text{in}} = \gamma^{-1}\hat{\mathcal{A}}_{\text{in}}$, qui sont les quadratures des modes d'entrée de la cavité. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathcal{A}}}{dt} &= \mathcal{L}\hat{\mathcal{A}} - \mathcal{K}\hat{\mathcal{A}} + \sqrt{2\mathcal{K}}\hat{\mathcal{A}}_{\text{in}} \\ \Leftrightarrow \frac{d\gamma\hat{\mathcal{X}}}{dt} &= \mathcal{L}\gamma\hat{\mathcal{X}} - \mathcal{K}\gamma\hat{\mathcal{X}} + \sqrt{2\mathcal{K}}\gamma\hat{\mathcal{X}}_{\text{in}} \\ \Leftrightarrow \frac{d\hat{\mathcal{X}}}{dt} &= \gamma^{-1}\mathcal{L}\gamma\hat{\mathcal{X}} - \gamma^{-1}\mathcal{K}\gamma\hat{\mathcal{X}} + \gamma^{-1}\sqrt{2\mathcal{K}}\gamma\hat{\mathcal{X}}_{\text{in}} \\ \Leftrightarrow \frac{d\hat{\mathcal{X}}}{dt} &= \mathcal{L}_{xp}\hat{\mathcal{X}} - \mathcal{K}\hat{\mathcal{X}} + \sqrt{2\mathcal{K}}\hat{\mathcal{X}}_{\text{in}} \end{aligned}$$

en ayant remarqué que la structure doublement diagonale de \mathcal{K} implique que $\gamma^{-1}\mathcal{K}\gamma = \mathcal{K}$ et que le couple γ^{-1} et γ peut rentrer dans la racine.

En résumé, l'équation de Langevin quantique s'écrit en quadratures sous la forme

$$\boxed{\frac{d\hat{\mathcal{X}}}{dt} = \mathcal{L}_{xp}\hat{\mathcal{X}} - \mathcal{K}\hat{\mathcal{X}} + \sqrt{2\mathcal{K}}\hat{\mathcal{X}}_{\text{in}}} \quad (9.5)$$

avec toujours $\mathcal{L}_{xp} = \gamma^{-1}\mathcal{L}\gamma$, et $\hat{\mathcal{X}}_{\text{in}}$ un vecteur regroupant les quadratures des modes d'entrée de la cavité, qui sont peuplé de vide.

Remarque. Il serait tentant de regrouper \mathcal{L}_{xp} et \mathcal{K} . Malheureusement, dès que les pertes sont non nulles, $\text{Tr}(\mathcal{L}_{xp} - \mathcal{K}) \neq 0$ et donc cette matrice ne peut pas être hamiltonienne. Par contre ajouter l'hypothèse que tous les modes subissent les mêmes pertes donne $\mathcal{K} \propto \mathbb{1}$, ce qui fait qu'elle est toujours co-diagonalisable avec \mathcal{L}_{xp} (quand cette dernière est diagonalisable). \diamond

9.1.4 Champ en sortie

Le champ électrique à l'intérieur de la cavité n'est pas directement accessible. En pratique, on mesure les champs qui en sortent. Comme pour les entrées, ils sont quantifiés selon la manière adaptée aux champs se propageant (voir [sous-section 1.3.4](#)).

9.1.4.1 Expression

Il faut considérer autant de champs de sortie que d'entrée, à chaque entrée correspondant une sortie. On utilise donc également l'indice s pour décrire la source de dissipation, et k le mode de la cavité. On peut montrer que les champs de sortie s'expriment [18, 40, 42] :

$$\hat{a}_{\text{out},s,k} = \sqrt{2\kappa_{s,k}}\hat{a}_k - \hat{a}_{\text{in},s,k}$$

Pour chaque s on les regroupe en un vecteur, qu'on notera $\hat{A}_{\text{out},s}$. On a donc en notation vectorielle :

$$\hat{A}_{\text{out},s} = \sqrt{2\mathcal{K}_s}\hat{A} - \hat{A}_{\text{in},s}$$

De même que précédemment, on peut définir $\hat{X}_{\text{out},s} = \gamma^{-1}\hat{A}_{\text{out},s}$. On établit alors une relation directe avec les opérateurs de quadrature d'entrée et de la cavité :

$$\hat{X}_{\text{out},s} = \sqrt{2\mathcal{K}_s}\hat{X} - \hat{X}_{\text{in},s} \quad (9.6)$$

9.1.4.2 Regroupement des sorties

D'un point de vue théorique, avoir plusieurs sorties présente l'inconvénient que l'état de sortie peut *a priori* les intriquer. Pour obtenir de bonnes propriétés il faudrait les regarder toutes simultanément. Pour résoudre le problème, nous allons combiner les champs de sortie. Définissons

$$\hat{a}_{\text{out},k} = \frac{\sum_s (\sqrt{2\kappa_{s,k}}\hat{a}_{\text{out},s,k})}{\sqrt{2\sum_s \kappa_{s,k}}} = \sum_s \left(\sqrt{\frac{\kappa_{s,k}}{\kappa_k}}\hat{a}_{\text{out},s,k} \right) \quad (9.7)$$

On a alors

$$\hat{a}_{\text{out},k} = \sqrt{2\kappa_k}\hat{a}_k - \hat{a}_{\text{in},k}$$

De même que précédemment on les regroupe dans un vecteur \hat{A}_{out} . On peut également passer en quadratures en posant $\hat{X}_{\text{out}} = \gamma^{-1}\hat{A}_{\text{out}}$. Naturellement, on obtient la relation :

$$\boxed{\hat{X}_{\text{out}} = \sqrt{2\mathcal{K}}\hat{X} - \hat{X}_{\text{in}}} \quad (9.8)$$

Ainsi avec les définitions de \hat{X}_{out} et \hat{X}_{in} retenues, les équations sont les mêmes que s'il n'y avait qu'un seul couplage avec l'extérieur. Cela revient à une cavité sans perte dont un seul des miroirs n'est pas intégralement réfléchissant.

Un tel regroupement n'est bien évidemment pas envisageable dans une expérience. S'il est possible de recombinaison différentes sorties, les pertes internes à la cavité ne sont pas récupérables. En combinant (9.6) et (9.8) on obtient que

$$\begin{aligned}\hat{X}_{\text{out},s} &= \sqrt{\frac{\mathcal{K}_s}{\mathcal{K}}} \hat{X}_{\text{out}} + \sqrt{\frac{\mathcal{K}_s}{\mathcal{K}}} \hat{X}_{\text{in}} - \hat{X}_{\text{in},s} \\ &= \sqrt{\frac{\mathcal{K}_s}{\mathcal{K}}} \hat{X}_{\text{out}} + \sqrt{\frac{\mathcal{K}_s}{\mathcal{K}}} \sum_{s' \neq s} \sqrt{\frac{\mathcal{K}_{s'}}{\mathcal{K}}} \hat{X}_{\text{in},s'} - \left(1 - \frac{\mathcal{K}_s}{\mathcal{K}}\right) \hat{X}_{\text{in},s}\end{aligned}$$

Cette combinaison linéaire est bien normalisée. On en conclut que virtuellement on peut reconstituer $\hat{X}_{\text{out},s}$ à partir \hat{X}_{out} en envoyant ce dernier sur une lame séparatrice dont l'autre entrée est constituée de vide. Voilà pourquoi dans la suite nous nous contenterons de donner les propriétés de \hat{X}_{out} . Les pertes internes peuvent être considérées comme pertes *a posteriori*, en prenant tout de même garde au fait que \hat{X}_{out} et les $\hat{X}_{\text{in},s}$ ne sont *a priori* des modes indépendants.

9.2 RÉSOLUTION DU PROBLÈME HAMILTONIEN

Nous souhaitons résoudre l'équation de Langevin quantique. Afin de pouvoir utiliser les résultats du chapitre précédent, nous travaillons sur l'équation d'évolution pour les quadratures (9.5). Différentes méthodes de résolution sont possibles, et il faut en choisir une. La subtilité du problème provenant essentiellement de \mathcal{L}_{xp} , nous allons présenter les différentes méthodes pour l'équation d'évolution sans dissipation (équation (7.11) : $\frac{d\hat{X}}{dt} = \mathcal{L}_{xp}\hat{X}$); les effets de cavités seront étudiés à la prochaine section. Nous allons présenter puis détailler les différentes méthodes, ainsi que leurs avantages, inconvénients et limites. En particulier nous analyserons la méthode communément utilisée en présence d'une non-linéarité d'ordre deux [4, 54, 84, 103].

Les transformations d'opérateurs décrites par les matrices symplectiques réelles unitaires jouent un rôle clef. Commençons par rappeler leurs propriétés et les interprétations physiques de celles-ci.

9.2.1 Matrices réelles symplectiques orthogonales

Les matrices réelles symplectiques orthogonales interviennent dans la diagonalisation des matrices réelles symétriques également symplectiques ou hamiltoniennes (théorèmes 8.3 et 8.5) ainsi que dans la décomposition de Bloch–Messiah (théorème 8.7). Nous allons aussi voir que les transformations d'opérateurs associées s'interprètent très bien physiquement.

Avec la propriété 8.18 nous avons exprimé la forme par blocs de ces matrices. Voyons celle qu'elles prennent en tant que transformation des opérateurs bosoniques.

Soit S_{xp} une matrice symplectique unitaire réelle (orthogonale). Elle s'exprime avec A et B réelles sous la forme :

$$S_{xp} = \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A^T A + B^T B = \mathbb{1} \\ AA^T + BB^T = \mathbb{1} \\ A^T B = B^T A \\ AB^T = BA^T \end{cases}$$

La conversion vers les notations adaptées aux opérateurs bosoniques a été détaillée en [section 7.3](#) ; on note S la matrice associée à la transformation pour les opérateurs bosoniques. On a alors $S = \gamma S_{xp} \gamma^{-1}$ avec toujours :

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \hline -i\mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \gamma = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & i\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \end{array} \right)$$

En effectuant le calcul par blocs on obtient :

$$S = \left(\begin{array}{c|c} A + iB & 0 \\ \hline 0 & A - iB \end{array} \right) \quad (9.9)$$

Il faut également prendre en compte les contraintes sur A et B . Posons $U = A + iB$. On remarque que :

$$\begin{aligned} \begin{cases} UU^\dagger = \mathbb{1} \\ U^\dagger U = \mathbb{1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (A + iB)(A^T - iB^T) = \mathbb{1} \\ (A^T - iB^T)(A + iB) = \mathbb{1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} AA^T + BB^T + i(BA^T - AB^T) = \mathbb{1} \\ A^T A + B^T B + i(A^T B - B^T A) = \mathbb{1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A^T A + B^T B = \mathbb{1} \\ AA^T + BB^T = \mathbb{1} \\ A^T B = B^T A \\ AB^T = BA^T \end{cases} \end{aligned}$$

On retrouve exactement les conditions imposées à A et B . Ainsi en notations d'opérateurs d'échelle, l'équivalent des matrices réelles symplectiques orthogonales sont celles prenant la forme :

$$S = \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & U^* \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (9.10)$$

ou autrement dit U unitaire.

Cette forme est exactement celle des changements de base vus en [sous-section 1.2.3](#). Elle correspond aux interféromètres passifs : les \hat{a}_i et \hat{a}_j^\dagger ne sont pas mélangés, comme

pour la lame séparatrice. De plus deux des blocs sont nuls, ce qui la rend plus agréable pour effectuer des calculs, qui donnent souvent des résultats plus directement interprétables.

Si maintenant on considère une matrice réelle symplectique quelconque, l'application du théorème de Bloch–Messiah (théorème 8.7) permet de l'écrire comme le produit d'une matrice symplectique orthogonale, d'une matrice réelle diagonale divisée en deux blocs inverses l'un de l'autre et d'une seconde matrice symplectique orthogonale. La transformation associée sur les opérateurs quadratiques s'interprète donc comme la succession d'un interféromètre passif, de compressions monomodes puis d'un autre interféromètre passif ; cela est bien connu [6]. Par ailleurs on peut montrer qu'une matrice symplectique est unitaire si et seulement si la matrice diagonale de la décomposition de Bloch–Messiah est l'identité². On retiendra donc que les matrices symplectiques non unitaires, bien que définissant des modes dont les opérateurs respectent les relations de commutation et d'hermiticité, comportent de la compression monomode.

9.2.2 Les différentes approches

Voyons maintenant les différentes méthodes envisageables pour résoudre l'équation d'évolution $\frac{d\hat{X}}{dt} = \mathcal{L}_{xp}\hat{X}$ (7.11). Plus précisément, on y adjoint un état initial connu et un temps d'interaction³ (éventuellement défini par une fonction à support compact). Cela modélise typiquement un passage unique de la lumière à travers un cristal non linéaire. Les méthodes envisageables sont :

1. diagonaliser \mathcal{L}_{xp} sans prêter attention aux propriétés des opérateurs ;
2. diagonaliser \mathcal{L}_{xp} *via* des matrices de passage symplectiques ;
3. décomposer \mathcal{L}_{xp} en blocs diagonaux ;
4. résoudre l'équation différentielle puis utiliser la décomposition de Bloch–Messiah (théorème 8.7) sur la matrice d'évolution obtenue.

La méthode 1 résout formellement le problème, mais *via* des modes propres ayant *a priori* des relations de commutation quelconques. Par ailleurs, si \mathcal{L}_{xp} est diagonalisable on peut utiliser le théorème 8.4 et obtenir des matrices de passage symplectiques, telles que les modes propres respectent les relations de commutation. Ainsi quand la méthode 1 est possible, la méthode 2 l'est également tout en donnant davantage de propriétés.

Avant de détailler les méthodes, insistons sur le fait que seule la diagonalisation de la matrice \mathcal{L}_{xp} permet de résoudre directement l'équation. En effet, qu'il faille calculer une fonction de cette matrice (par exemple une exponentielle) ou découpler des équations différentielles, seule une diagonalisation permet de résoudre le problème ; une décomposition en valeurs singulières (comme donnée par Bloch–Messiah) n'apporte rien.

2. Dans la démonstration de la décomposition de Bloch–Messiah, la décomposition polaire qui est unique devient triviale.

3. Souvent le temps est remplacé par une distance longitudinale ; cela ne change pas les équations et donc pas leurs résolutions.

9.2.3 Diagonalisation symplectique de la matrice d'évolution

Analysons la seconde méthode. Tout d'abord on rappelle qu'elle n'est *a priori* pas toujours applicable car une matrice hamiltonienne peut ne pas être diagonalisable. Quand elle est possible, on a $\mathcal{L}_{xp} = S_{xp} \tilde{D} S_{xp}^{-1}$ avec \tilde{D} diagonale composée de deux blocs opposés et S_{xp} symplectique. Rappelons que \mathcal{L}_{xp} a été supposée indépendante du temps ; il en va ainsi de même pour \tilde{D} et S_{xp} . L'équation (7.11) se réécrit alors :

$$\frac{dS_{xp}^{-1} \hat{X}}{dt} = \tilde{D} S_{xp}^{-1} \hat{X}$$

Ainsi, en prenant $S_{xp}^{-1} \hat{X}$ comme nouvelle variable, l'équation est diagonale et se résout facilement. On exprime alors les opérateurs de quadrature à un temps quelconque sous la forme

$$\hat{X}(t) = S_{xp} \exp(\tilde{D}t) S_{xp}^{-1} \hat{X}(0)$$

Le principal avantage de cette méthode est que les modes $S_{xp}^{-1} \hat{X}$ sont indépendants du temps d'intégration.

Remarquons que \tilde{D} et S_{xp} n'ont *a priori* aucune raison d'être réelles. Cela ne pose pas de problème pour \tilde{D} , mais rend l'interprétation de S_{xp} difficile. De plus S_{xp} n'est pas non plus unitaire en général. Ainsi S_{xp} contient en général elle-même de la compression, ce qui rend difficile son interprétation. Un cas dans lequel l'interprétation physique est claire est quand S_{xp} est réelle orthogonale et symplectique : des modes du champ électromagnétique sont comprimés ; seul les taux de compression dépendent du temps d'interaction. Nous dirons alors que \mathcal{L}_{xp} est « physiquement diagonalisable ».

9.2.3.1 Caractérisation des matrices physiquement diagonalisables

Déterminons l'ensemble des matrices physiquement diagonalisables. Nous procédons par analyse.

En écrivant $\tilde{D} = \text{Re}\{\tilde{D}\} + i \text{Im}\{\tilde{D}\}$ on obtient que :

$$\mathcal{L}_{xp} = S_{xp} \text{Re}\{\tilde{D}\} S_{xp}^{-1} + i S_{xp} \text{Im}\{\tilde{D}\} S_{xp}^{-1}$$

Les matrices étant toutes réelles et S_{xp} inversible, on conclut que $\text{Im}\{\tilde{D}\} = 0$. Ainsi on a prouvé que \tilde{D} est également réelle.

Vu que $S_{xp}^{-1} = S_{xp}^T$, $\mathcal{L}_{xp}^T = S_{xp} \tilde{D}^T S_{xp}^T = \mathcal{L}_{xp}$. On a prouvé que si \mathcal{L}_{xp} est physiquement diagonalisable ; elle est donc symétrique.

La réciproque nous est donnée par le [théorème 8.5](#) : toute matrice hamiltonienne réelle symétrique est diagonalisable *via* une matrice de passage symplectique réelle orthogonale, avec des valeurs propres réelles.

On peut donc conclure que \mathcal{L}_{xp} est physiquement diagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

9.2.3.2 Matrices réelles hamiltoniennes symétriques

Expression par blocs

Déterminons l'expression par blocs d'une matrice \mathcal{L}_{xp} réelle hamiltonienne symétrique. La forme des matrices hamiltoniennes a été vu en [sous-section 8.2.2](#). On peut ainsi écrire :

$$\mathcal{L}_{xp} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -A^T \end{array} \right), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = C^T \\ B = B^T \end{cases}$$

En ajoutant qu'elle est réelle et symétrique, on obtient l'expression par blocs :

$$\boxed{\mathcal{L}_{xp} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^T & -A^T \end{array} \right), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A, B \text{ réelles} \\ A = A^T \\ B = B^T \end{cases}} \quad (9.11)$$

Expression pour le couplage des opérateurs bosoniques

Donnons maintenant l'expression par blocs de la matrice \mathcal{L} correspondant à une matrice \mathcal{L}_{xp} réelle hamiltonienne symétrique, dont la forme est donnée par (9.11). En injectant cette expression dans la définition $\mathcal{L} = \gamma \mathcal{L}_{xp} \gamma^{-1}$, on obtient :

$$\mathcal{L} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A + iB \\ \hline A - iB & 0 \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A, B \text{ réelles} \\ A = A^T \\ B = B^T \end{cases}$$

Pour pouvoir comparer à l'expression générique des matrices de couplage (7.3), on multiplie et divise par $i\hbar$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \hbar(iA - B) \\ \hline \hbar(iA + B) & 0 \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A, B \text{ réelles} \\ A = A^T \\ B = B^T \end{cases}$$

En posant $F = \hbar(iA - B)$, on arrive à :

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} 0 & F \\ \hline -F^+ & 0 \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad F = F^T} \quad (9.12)$$

On retrouve exactement la forme générique de \mathcal{L} (équation (7.3)) avec $G = 0$.

Remarquez qu'on a travaillé par équivalences ; on en conclut que toute matrice de la forme obtenue est représentée en quadratures par une matrice \mathcal{L}_{xp} hamiltonienne réelle symétrique.

9.2.3.3 Diagonalisation en pratique

La décomposition des matrices réelles hamiltoniennes symétriques est détaillée dans la preuve du [théorème 8.5](#). Cherchons à quoi correspond cette diagonalisation pour la matrice adaptée aux opérateurs bosoniques, \mathcal{L} .

Soit \mathcal{L}_{xp} une matrice réelle hamiltonienne symétrique. Elle se diagonalise *via* des matrices de passage unitaires réelles symplectiques, notées S_{xp} et $S_{xp}^{-1} = S_{xp}^{\dagger} = S_{xp}^{\text{T}}$. La matrice diagonale est réelle et les deux blocs diagonaux sont opposés l'un de l'autre ; on nomme D le premier de ces blocs. On peut donc écrire :

$$\mathcal{L}_{xp} = S_{xp} \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & -D \end{array} \right) S_{xp}^{\text{T}}$$

En passant aux notations adaptées aux opérateurs bosoniques,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \gamma \mathcal{L}_{xp} \gamma^{-1} \\ &= \gamma S_{xp} \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & -D \end{array} \right) S_{xp}^{\text{T}} \gamma^{-1} \\ &= \gamma S_{xp} \gamma^{-1} \gamma \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & -D \end{array} \right) \gamma^{-1} \gamma S_{xp}^{\dagger} \gamma^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & U^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline D & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} U^{\dagger} & 0 \\ \hline 0 & U^{\text{T}} \end{array} \right) \\ \mathcal{L} &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & UDU^{\text{T}} \\ \hline U^*DU^{\dagger} & 0 \end{array} \right) \end{aligned} \tag{9.13}$$

où l'on a utilisé le résultat de l'équation (9.10) avec U une matrice unitaire de dimensions $N \times N$, et en ayant remarqué que :

$$\gamma \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & -D \end{array} \right) \gamma^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline D & 0 \end{array} \right)$$

En comparant les expressions (9.12) et (9.13), on obtient que :

$$\frac{1}{i\hbar} F = UDU^{\text{T}}$$

On rappelle que U est unitaire, et D diagonale réelle, tandis que F est complexe symétrique. Remarquez que l'existence de cette décomposition est ici prouvée. Le i pouvant être absorbé dans U et \hbar dans D , on a donc la propriété :

Propriété 9.1. Soit M une matrice complexe. Si M est symétrique ($M = M^{\text{T}}$) alors il existe U unitaire (complexe) et D diagonale réelle telles que

$$M = UDU^{\text{T}}$$

C'est un cas particulier de décomposition en valeurs singulières ; elle respecte la symétrie de M .

Cette décomposition, prouvée ici de manière détournée, est déjà connue sous le nom de décomposition de Takagi, et des algorithmes ont été développés afin de l'effectuer [11]. L'utilisation d'un algorithme spécifique est certainement plus efficace que de passer par la matrice \mathcal{L}_{xp} qui est de dimensions $2N \times 2N$ et a donc 4 fois plus de termes que F .

9.2.3.4 Résumé et applicabilité de la méthode

Nous avons vu que la diagonalisation de \mathcal{L}_{xp} n'est véritablement interprétable que quand on peut l'effectuer avec une matrice de passage réelle symplectique et orthogonale. Cela est possible si et seulement si $G = 0$ dans le hamiltonien donné par (6.1). Dans ce cas la matrice de passage définit des modes du champ électromagnétique ; ils sont indépendants du temps d'intégration. De plus la matrice diagonale est réelle ; on a donc véritablement des modes comprimés et non des oscillations.

Les coefficients de G pondèrent les termes en $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j$. En l'absence de termes de modulations de phases croisées et de désaccord de fréquence de la pompe (« detuning » en anglais), ces coefficients sont nuls. Un cas typique dans lequel ça arrive est quand la non-linéarité est d'ordre deux (décrite par le tenseur $\chi^{(2)}$), et qu'il n'y a pas de désaccord. Ce cas particulier est celui dans lequel la majorité des études de compressions multimodes se situent, et elles exploitent ses particularités [101, 103, 104].

Insistons sur le fait que la décomposition $\frac{1}{i\hbar}F = UDU^T$ n'est pas une diagonalisation mais une décomposition en valeur singulière ; en effet la matrice de droite est transposée alors qu'il faudrait une conjugaison hermitienne pour une diagonalisation. Toutes les matrices complexes symétriques ne sont pas diagonalisables. Comme contre-exemple on peut considérer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. Évidemment, dans le cas particulier où $\frac{1}{i\hbar}F$ est réelle, la décomposition est aussi une diagonalisation.

Pour la résolution de l'équation de Langevin (9.5), nous supposons tous les coefficients de dissipation égaux et donc \mathcal{K} est proportionnelle à l'identité. Ainsi une matrice S_{xp} diagonalisant \mathcal{L}_{xp} diagonalise aussi \mathcal{K} . De plus les modes d'entrée étant peuplés de vide, effectuer une transformation passive ne change pas leurs propriétés. On se ramène ainsi à un ensemble d'équations de Langevin quantiques monomodes. La résolution de chacune de ces équations est connu [117], et très proche de celle qui sera présentée à la fin de ce chapitre. Notez toutefois qu'une telle résolution ne s'interprète physiquement clairement uniquement quand $G = 0$.

9.2.4 Diagonalisation par blocs de la matrice d'évolution

Nous avons étudié en détail la méthode consistant à diagonaliser \mathcal{L}_{xp} . Elle n'est pas toujours possible, et ne s'interprète physiquement que dans un cas très particulier mais néanmoins courant puisque qu'on l'obtient avec des non-linéarités de type $\chi^{(2)}$. Une autre possibilité, plus générale, est d'essayer de mettre la matrice d'évolution sous la forme de blocs diagonaux. Une telle stratégie ne permet pas de résoudre directement

l'équation d'évolution ni celle de Langevin⁴, mais elle a le mérite de ramener le problème à celui de la compression monomode en présence de désaccord de fréquence, qui est une situation connue [13, 39]. Afin d'avoir un résultat physiquement interprétable, on impose que la matrice de passage soit réelle, symplectique et unitaire. Afin de bénéficier des avantages de l'expression (9.10), nous travaillons avec les notations adaptées aux opérateurs d'échelle, c'est-à-dire qu'on étudie la décomposition de \mathcal{L} .

Procédons par analyse; supposons qu'une telle décomposition est possible et déduisons-en des conditions nécessaires. Supposons donc que \mathcal{L} se décompose en une matrice diagonale par blocs \tilde{D} via une matrice de passage représentant un interféromètre linéaire. Formellement cela s'exprime et se transforme en (on rappelle que dans l'expression de \mathcal{L} , $G = G^\dagger$ et $F = F^T$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & U^* \end{array} \right) \tilde{D} \left(\begin{array}{c|c} U^\dagger & 0 \\ \hline 0 & U^T \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow \tilde{D} &= \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} U^\dagger & 0 \\ \hline 0 & U^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} G & 2F \\ \hline -2F^\dagger & -G^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & U^* \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow \tilde{D} &= \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} U^\dagger G U & 2U^\dagger F U^* \\ \hline -2U^T F^\dagger U & -U^T G^T U^* \end{array} \right)\end{aligned}$$

Les expressions diagonales sont conjuguées l'une de l'autre. Il en va de même pour les anti-diagonales. Ainsi, si la diagonalisation par blocs est possible, il existe D_1 et D_2 diagonales, et U unitaire telles que :

$$\begin{cases} G = U D_1 U^\dagger \\ F = U D_2 U^T \end{cases}$$

Remarquez que la décomposition de G est une diagonalisation, tandis que celle de F est de la forme d'une décomposition (symétrique) en valeurs singulières, au détail près qu'il n'y a pas d'autres contraintes sur D_2 que d'être diagonale, en particulier D_2 peut comporter des coefficients complexes. Au contraire, comme la décomposition sur G est une diagonalisation et que G est hermitienne, nécessairement D_1 est une matrice réelle : $D_1^* = D_1$. La matrice diagonale par blocs prend alors la forme :

$$\tilde{D} = \frac{1}{i\hbar} \left(\begin{array}{c|c} D_1 & 2D_2 \\ \hline -2D_2^* & -D_1 \end{array} \right) \quad (9.14)$$

On peut vérifier que les matrices de cette forme vérifient bien (7.9) et (7.10). L'équivalent d'une telle matrice en notations adaptées aux quadratures est également une matrice constituée de blocs diagonaux, mais ils sont réels; les deux blocs sur la diagonale sont également l'opposé l'un de l'autre.

On a maintenant fini l'analyse, et il est direct de vérifier que quand les décompositions de F et G simultanées sont possibles, \mathcal{L} est diagonalisable par blocs via une matrice de passage correspondant à un interféromètre passif.

4. La forme n'est pas diagonale; il y a besoin d'une étape supplémentaire pour la résolution.

Notez que chacune de ces décompositions est toujours individuellement possible. Il n'est par contre pas évident qu'elles le soient simultanément. Une condition nécessaire est que G et FF^\dagger soient co-diagonalisables (ou de manière équivalente qu'elles commutent). Il pourrait être bon de trouver une caractérisation complète.

L'interprétation physique d'une telle décomposition est qu'on se ramène à un ensemble de modes indépendants, récupérables *via* un interféromètre passif, chacun régi par les équations de compression en présence d'un décalage de fréquence. Elle est possible dans un cas particulier incluant celui pour lequel la méthode 2 est adaptée. En pratique elle sera surtout utile dans le cadre d'une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$, en particulier quand on a un décalage de fréquence identique sur tous les modes. En effet, avec $G \propto \mathbb{1}$ on effectue la décomposition symétrique en valeurs singulières sur F (D_2 est alors réelle); celle sur G est alors automatiquement réalisée.

9.2.5 Décomposition de la matrice d'évolution

La dernière méthode que nous proposons consiste à effectuer la décomposition non pas sur \mathcal{L}_{xp} mais sur la matrice d'évolution, que nous notons S_{xp} . Cette méthode a déjà été utilisée dans la cadre d'une configuration en simple passage et d'une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$ [128].

On rappelle que S_{xp} vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dS_{xp}}{dt} = \mathcal{L}_{xp}S_{xp}$$

et que sa condition initiale est $S_{xp}(0) = \mathbb{1}$. Concrètement $S_{xp}(t) = e^{\mathcal{L}_{xp}t}$; elle se calcule en pratique *via* une diagonalisation⁵ pour laquelle on n'attache pas de sens physique aux matrices de passage. On a déterminé en sous-section 7.3.2 que S_{xp} est réelle et symplectique. On peut donc utiliser la décomposition de Bloch–Messiah (théorème 8.7) et écrire :

$$S_{xp} = U_1 \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D^{-1} \end{array} \right) U_2$$

avec U_1 et U_2 des matrices réelles symplectiques orthogonales. Notez qu'ici U_2 , U_1 et D dépendent *a priori* du temps d'intégration. L'interprétation physique est claire [6] : la lumière passée à travers le cristal a subi l'équivalent d'un passage dans un interféromètre passif, une compression monomode et un deuxième interféromètre passif. Notez que quand on envoie du vide, le premier interféromètre n'a aucun effet.

Remarque. Cette méthode s'applique également quand G et F dépendent du temps, à condition d'être capable au préalable de résoudre l'équation différentielle sur S_{xp} . Attention, dans ce cas S_{xp} dépend de deux temps : ceux de début et de fin d'intégration. \diamond

L'application de cette méthode à l'équation de Langevin est l'objet de la prochaine section.

⁵ \mathcal{L}_{xp} n'étant pas toujours diagonalisable; il peut être nécessaire d'avoir recours à la décomposition de Dunford [131].

9.2.6 Conclusion de la section

Résumons les avantages et inconvénients des différentes méthodes.

DIAGONALISATION DE \mathcal{L}_{xp}

- Pas toujours possible.
- La matrice de passage (donc les modes propres) est indépendante du temps d'intégration.
- En général la matrice de passage ne correspond pas à un interféromètre passif ; elle « contient » une part de compression.
- La diagonalisation est possible *via* une matrice de passage correspondant à un interféromètre passif si et seulement si dans le hamiltonien $G = 0$; concrètement cela arrive avec une non-linéarité $\chi^{(2)}$ et sans désaccord de fréquence.

DIAGONALISATION PAR BLOCS DE \mathcal{L}_{xp}

- Ne permet pas vraiment de résoudre l'équation d'évolution.
- Ramène le problème à un ensemble de compressions monomode avec désaccord de fréquence.
- Est possible *via* une matrice de passage correspondant pas à un interféromètre passif si et seulement si il existe une co-décomposition des matrices F et G du hamiltonien ; cela arrive en particulier dans le cas d'une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$ avec un désaccord de fréquence identique pour tous les modes.

DÉCOMPOSITION DE BLOCH-MESSIAH DE \mathcal{S}_{xp}

- Méthode générale.
- Interprétation physique en termes d'une succession d'un interféromètre passif, d'une compression monomode et d'un second interféromètre passif.
- La matrice de passage (donc les modes comprimés) dépend *a priori* du temps d'intégration.
- Possible de l'étendre au cas d'un hamiltonien non constant dans le temps.

Pour la suite, nous allons retenir la méthode la plus générale, la dernière, et voir comment elle s'adapte à l'équation de Langevin (9.5).

9.3 FONCTIONS DE GREEN

Intéressons-nous maintenant à l'équation de Langevin complète (9.5). C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, sa résolution pour le régime stationnaire va s'exprimer à l'aide d'une fonction de Green. La résolution elle-même sera détaillée en [section 9.5](#). Nous allons dans cette section donner les définitions de telles fonctions, de leurs transformées de Fourier, ainsi qu'étudier les conditions sur ces fonctions pour obtenir de bonnes relations de commutation. Nous allons voir deux types de noyaux intégraux : ceux donnant les opérateurs décrivant le champ à l'intérieur de la cavité à partir de ceux d'entrée, et ceux donnant les opérateurs du faisceau émergent de la cavité.

9.3.1 Définitions

Nous travaillons uniquement avec les opérateurs de quadrature. Dans tout ce chapitre, la convention utilisée pour la transformée de Fourier est la suivante :

$$\tilde{f}(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (9.15a)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (9.15b)$$

9.3.1.1 Champ intracavité

Définition. Nous appelons « fonction de Green vers la cavité » toute matrice fonction d'un temps $S : \tau \mapsto S(\tau)$ telle que les opérateurs de quadrature à l'intérieur de la cavité soient donnés par :

$$\hat{X}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t-t')\hat{X}_{\text{in}}(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau)\hat{X}_{\text{in}}(t-\tau) d\tau \quad (9.16)$$

La causalité nécessite que $\forall \tau < 0, S(\tau) = 0$.

Remarque. La définition est ici donnée dans le cadre d'un régime stationnaire, possible car les coefficients de l'équation de Langevin sont constants, on ne s'intéresse pas au régime transitoire (l'état initial de la cavité n'importe pas) et car on travaille au-dessous du seuil de la cavité. Sans cette hypothèse on aurait dû définir $S(t, t')$ avec deux temps distincts. \diamond

Nous définissons la transformée de Fourier de $S(\tau)$ selon les conventions (9.15); on la note $\tilde{S}(\omega)$.

9.3.1.2 Champ émergent

De même que pour le champ intracavité, nous pouvons définir une fonction de Green donnant les opérateurs du champ de sortie⁶ $\hat{X}_{\text{out}}(t)$ à partir de ceux du champ incident.

Définition. Nous appelons « fonction de Green vers la sortie » toute matrice fonction d'un temps $S_{\text{out}} : \tau \mapsto S_{\text{out}}(\tau)$ telle que les opérateurs de quadrature du champ de sortie soient donnés par :

$$\hat{X}_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{out}}(t-t')\hat{X}_{\text{in}}(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{out}}(\tau)\hat{X}_{\text{in}}(t-\tau) d\tau \quad (9.17)$$

La causalité nécessite de nouveau que $\forall \tau < 0, S_{\text{out}}(\tau) = 0$. De même que précédemment, on peut définir sa transformée de Fourier, qu'on note $\tilde{S}_{\text{out}}(\omega)$.

9.3.2 Préservation de l'hermiticité et des commutateurs

Comme dans le [chapitre 7](#), nous voulons nous assurer que les opérateurs respectent bien les relations de commutation et d'hermiticité attendues.

6. Défini en [sous-sous-section 9.1.4.2](#).

9.3.2.1 Hermiticité

Nous travaillons en quadratures ; les relations d'hermiticité seront vérifiées pour tout temps si et seulement si les fonctions de Green temporelles sont réelles. Cela correspond à ce que leurs transformées de Fourier vérifient :

$$\tilde{S}(-\omega) = \tilde{S}(\omega)^* \quad \tilde{S}_{\text{out}}(-\omega) = \tilde{S}_{\text{out}}(\omega)^*$$

Pour la suite, nous faisons toujours l'hypothèse que cette condition est vérifiée. Nous verrons en [section 9.5](#) que c'est en fait imposé par la physique.

9.3.2.2 Relations de commutation attendues

Nous voulons établir les conditions sur les fonctions de Green pour qu'elles préservent les relations de commutation attendues. Commençons donc par préciser nos attentes.

Rappelons que le champ à l'intérieur de la cavité est quantifié de la manière adaptée à un domaine borné, présentée en [section 1.2](#). Les opérateurs sont ici en représentation d'Heisenberg ; leurs commutateurs sont les mêmes que ceux donnés par (1.7), à condition de ne regarder que deux opérateurs pris au même temps :

$$\left[\left(\hat{X}(t) \right)_i, \left(\hat{X}(t) \right)_j \right] = \frac{i}{2} \Omega_{i,j}$$

Les champs d'entrée et de sortie sont des ondes progressives ; ils sont donc quantifiés de la manière correspondante, qui est présentée en [sous-section 1.3.4](#). Les relations de commutation des opérateurs du champ d'entrée ont été précisées par l'équation (9.2). Avec la notation vectorielle et en passant en quadratures, elles s'écrivent sous la forme :

$$\left[\left(\hat{X}_{\text{in}}(t) \right)_i, \left(\hat{X}_{\text{in}}(t') \right)_j \right] = \frac{i}{2} \Omega_{i,j} \delta(t - t')$$

Les modes de sortie étant du même type que ceux d'entrée, on attend des relations de commutation similaires :

$$\left[\left(\hat{X}_{\text{out}}(t) \right)_i, \left(\hat{X}_{\text{out}}(t') \right)_j \right] = \frac{i}{2} \Omega_{i,j} \delta(t - t')$$

Nous pouvons maintenant exprimer les conditions sur les fonctions de Green pour que les relations de commutation des champs interne et émergeant de la cavité soient les bonnes dès que celles des champs incident le sont.

9.3.2.3 Champ intracavité

Condition en temps

Nous allons expliciter la condition sur la fonction de Green S pour qu'elle assure les bonnes relations de commutation aux opérateurs de quadrature intracavités. La définition (9.16) se réécrit pour chacun des opérateurs sous la forme :

$$\hat{X}_i(t) = \int \sum_j S_{i,j}(\tau) \left(\hat{X}_{\text{in}}(t - \tau) \right)_j d\tau$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\left[\hat{X}_i(t), \hat{X}_j(t) \right] &= \frac{i}{2} \Omega_{i,j} \\
\Leftrightarrow \int \sum_{k,l} S_{i,k}(\tau) \left[\left(\hat{X}_{\text{in}}(t-\tau) \right)_k, \left(\hat{X}_{\text{in}}(t-\tau') \right)_l \right] S_{j,l}(\tau') d\tau d\tau' &= \frac{i}{2} \Omega_{i,j} \\
\Leftrightarrow \int \sum_{k,l} S_{i,k}(\tau) \frac{i}{2} \Omega_{k,l} \delta((t-\tau) - (t-\tau')) S_{j,l}(\tau') d\tau d\tau' &= \frac{i}{2} \Omega_{i,j} \\
\Leftrightarrow \int \sum_{k,l} S_{i,k}(\tau) \Omega_{k,l} S_{j,l}(\tau) d\tau &= \Omega_{i,j} \\
\Leftrightarrow \int \left(S(\tau) \Omega S^T(\tau) \right)_{i,j} d\tau &= \Omega_{i,j}
\end{aligned}$$

On conclut donc que la fonction de Green garantit d'obtenir les bonnes relations de commutation des opérateurs dans la cavité si et seulement si :

$$\boxed{\int S(\tau) \Omega S^T(\tau) d\tau = \Omega} \quad (9.18)$$

Condition en fréquence

On rappelle que par définition de la transformée de Fourier (9.15) :

$$S(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad \Leftrightarrow \quad S^T(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}^T(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

En injectant ces expressions dans l'équation (9.18), et en se souvenant que $\tilde{S}(-\omega) = \tilde{S}^*(\omega)$:

$$\begin{aligned}
\int S(\tau) \Omega S^T(\tau) d\tau &= \Omega \\
\Leftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{S}(\omega) \Omega \tilde{S}^T(\omega') e^{i(\omega+\omega')\tau} d\tau d\omega d\omega' &= \Omega \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}(\omega) \Omega \tilde{S}^T(\omega') \delta(\omega + \omega') d\omega d\omega' &= \Omega \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}(\omega) \Omega \tilde{S}^T(-\omega) d\omega &= \Omega \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}(\omega) \Omega \tilde{S}^\dagger(\omega) d\omega &= \Omega
\end{aligned}$$

Ainsi la condition sur la transformée de Fourier de la fonction de Green pour que celle-ci préserve les relations de commutation s'exprime :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}(\omega) \Omega \tilde{S}^\dagger(\omega) d\omega = \Omega} \quad (9.19)$$

9.3.2.4 Champ émergent

Condition en temps

On procède de manière similaire au cas intracavité. La définition (9.17) de la fonction de Green s'écrit pour chaque opérateur :

$$\left(\hat{X}_{\text{out}}(t)\right)_i = \int \sum_j (S_{\text{out}}(\tau))_{i,j} \left(\hat{X}_{\text{in}}(t - \tau)\right)_j d\tau$$

On peut alors effectuer le calcul :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\hat{X}_{\text{out}}(t)\right)_i, \left(\hat{X}_{\text{out}}(t')\right)_i \right] = \frac{i}{2} \Omega_{i,j} \delta(t - t') \\ & \Leftrightarrow \int \sum_{k,l} (S_{\text{out}}(\tau))_{i,k} \left[\left(\hat{X}_{\text{in}}(t - \tau)\right)_k, \left(\hat{X}_{\text{in}}(t' - \tau')\right)_l \right] = \frac{i}{2} \Omega_{i,j} \delta(t - t') \\ & \Leftrightarrow \int \sum_{k,l} (S_{\text{out}}(\tau))_{i,k} \Omega_{k,l} \delta(t - \tau - t' + \tau') (S_{\text{out}}(\tau'))_{j,l} d\tau d\tau' = \Omega_{i,j} \delta(t - t') \\ & \Leftrightarrow \int \sum_{k,l} (S_{\text{out}}(\tau))_{i,k} \Omega_{k,l} (S_{\text{out}}(\tau - (t - t'))_{j,l} d\tau = \Omega_{i,j} \delta(t - t') \\ & \Leftrightarrow \int \left[S_{\text{out}}(\tau) \Omega S_{\text{out}}^T(\tau - (t - t')) \right]_{i,j} d\tau = \Omega_{i,j} \delta(t - t') \end{aligned}$$

en ayant utilisé $\tau' = \tau - (t - t')$ lors de l'intégration de la distribution de Dirac.

Cette condition devant être vraie $\forall i, j$ et $\forall t, t'$, on en déduit que la condition sur S_{out} pour préserver les relations de commutation est :

$$\boxed{\forall t, \int S_{\text{out}}(\tau) \Omega S_{\text{out}}^T(\tau - t) d\tau = \Omega \delta(t)} \quad (9.20)$$

Condition en fréquence

Obtenons la condition sur \tilde{S}_{out} à partir de son équivalent temporel (9.20) :

$$\begin{aligned} & \forall t, \int S_{\text{out}}(\tau) \Omega S_{\text{out}}^T(\tau - t) d\tau = \Omega \delta(t) \\ & \Leftrightarrow \forall \omega, \int S_{\text{out}}(\tau) \Omega S_{\text{out}}^T(\tau - t) e^{-i\omega t} d\tau dt = \int \Omega \delta(t) e^{-i\omega t} dt \\ & \Leftrightarrow \forall \omega, \int S_{\text{out}}(\tau) e^{-i\omega \tau} \Omega S_{\text{out}}^T(\tau - t) e^{i\omega(\tau - t)} d\tau dt = \Omega \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $\begin{cases} \tau \\ t \end{cases} \mapsto \begin{cases} \tau = \tau \\ \tau' = \tau - t \end{cases}$, dont le jacobien est 1.

Ainsi l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \forall \omega, \left[\int S_{\text{out}}(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \right] \Omega \left[S_{\text{out}}^T(\tau') e^{-i(-\omega)\tau'} d\tau' \right] = \Omega \\ & \Leftrightarrow \forall \omega, \tilde{S}_{\text{out}}(\omega) \Omega \tilde{S}_{\text{out}}^T(-\omega) = \Omega \\ & \Leftrightarrow \forall \omega, \tilde{S}_{\text{out}}(\omega) \Omega \tilde{S}_{\text{out}}^\dagger(\omega) = \Omega \end{aligned}$$

La condition sur la transformée de Fourier de l'équation de Green vers les champs de sortie pour que celle-ci préserve les relations de commutation s'écrit :

$$\boxed{\forall \omega, \tilde{\mathcal{S}}_{\text{out}}(\omega) \Omega \tilde{\mathcal{S}}_{\text{out}}^\dagger(\omega) = \Omega} \quad (9.21)$$

On reconnaît la définition d'une matrice sesquisymplectique, telle que présentée en [section 8.7](#).

9.4 MATRICE DE COVARIANCE

Une propriété importante de la lumière comprimée est que les fluctuations de ses quadratures peuvent être inférieures à celles du vide. Afin de décrire simultanément les propriétés statistiques de toutes les quadratures du champ, étudions la matrice de covariance. Nous la définissons pour les opérateurs d'entrée \hat{X}_{in} et ceux de sortie \hat{X}_{out} ; le champ intérieur à la cavité n'étant pas directement accessible, nous n'étudions pas la matrice de covariance associée. Notez que les opérateurs sont définis pour chaque temps; il faut donc inclure une dépendance en temps dans la matrice de covariance.

Dans cette section nous allons donner sa définition, ses propriétés et son expression à partir des fonctions de Green ainsi que son utilisation.

9.4.1 Définition et propriétés

9.4.1.1 Définition

Définition. On définit la matrice de covariance par ses coefficients⁷ :

$$(\sigma_{\bullet}(t, t'))_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left\langle \left(\hat{X}_{\bullet}(t) \right)_i \left(\hat{X}_{\bullet}(t') \right)_j \right\rangle + \left\langle \left(\hat{X}_{\bullet}(t') \right)_j \left(\hat{X}_{\bullet}(t) \right)_i \right\rangle \right] \quad (9.22)$$

où \bullet est un indice neutre décrivant le champ pris en compte; il prend la place de « in » ou « out ».

Dans le cas stationnaire, $\sigma_{\bullet}(t, t')$ ne dépend que de $t - t'$. On s'autorise alors à écrire plus simplement $\sigma_{\bullet}(t - t')$. Nous faisons cette hypothèse pour la suite. Ainsi une seule variable temporelle, le délai, est suffisante.

La matrice de covariance est en général rapidement décroissante avec le délai. Ainsi on peut sans problème définir sa transformée de Fourier à une dimension. On l'écrit $\tilde{\sigma}_{\bullet}(\omega)$.

Outre le fait que travailler en pulsations peut simplifier certains calculs, le théorème de Wiener-Khintchine lie la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation d'une variable aléatoire à son spectre de bruit (densité spectrale de puissance). La transformée de Fourier de la matrice de covariance est donc un outil essentiel pour l'analyse spectrale des fluctuations du champ électrique.

⁷. Cette définition est adaptée quand les valeurs moyennes des opérateurs de quadrature sont nulles; sans cette hypothèse il faudrait les centrer.

9.4.1.2 Propriétés

Voyons les propriétés élémentaires de la matrice de covariance.

Réelle

Tant que les opérateurs de quadrature sont bien des observables, de par la définition il est évident que la matrice de covariance est réelle :

$$\boxed{\forall t, t', \sigma_{\bullet}(t, t') \in M_{N,N}(\mathbb{R})} \quad (9.23)$$

La propriété équivalente en fréquence est :

$$\boxed{\forall \omega, \tilde{\sigma}_{\bullet}(-\omega) = \tilde{\sigma}_{\bullet}(\omega)^*} \quad (9.24)$$

Pseudo-parité

En partant de la définition, on remarque la symétrie de la matrice de covariance par inversion simultanée $i \leftrightarrow j$ et $t \leftrightarrow t'$: $(\sigma_{\bullet}(t, t'))_{i,j} = (\sigma_{\bullet}(t', t))_{j,i}$. L'hypothèse de stationnarité s'exprime $\sigma_{\bullet}(t, t') = \sigma_{\bullet}(t - t')$. Ainsi $(\sigma_{\bullet}(t - t'))_{i,j} = (\sigma_{\bullet}(t' - t))_{j,i} = (\sigma_{\bullet}^T(-(t - t'))))_{i,j}$. On peut donc conclure que grâce à la stationnarité,

$$\boxed{\forall t, \sigma_{\bullet}(t) = \sigma_{\bullet}^T(-t)} \quad (9.25)$$

En utilisant que la transposition commute avec la transformation de Fourier, et que la transformer de Fourier de $t \mapsto f(-t)$ est $\omega \mapsto \tilde{f}(-\omega)$, on obtient l'équivalent en fréquences :

$$\boxed{\forall \omega, \tilde{\sigma}_{\bullet}(-\omega) = \tilde{\sigma}_{\bullet}^T(\omega)} \quad (9.26)$$

Bilan

En combinant l'expression des deux propriétés en fréquences, on obtient :

$$\boxed{\forall \omega, \tilde{\sigma}_{\bullet}(\omega) = \tilde{\sigma}_{\bullet}(\omega)^{\dagger}} \quad (9.27)$$

Dans la suite nous supposons que les hypothèses de ces propriétés sont vérifiées.

9.4.2 Champ d'entrée

9.4.2.1 En temporel

Exprimons la matrice de covariance pour le champ d'entrée $\sigma_{\text{in}}(t, t')$. Celui-ci est constitué uniquement de vide. Le calcul des covariances pour un mode s'effectue en utilisant la définition des opérateurs de quadrature (1.6), les relations de commutation

des opérateurs bosoniques (1.11) et en faisant apparaître l'opérateur « nombre de photons » dont la valeur moyenne est nulle. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}_{\text{in},i}(t)\hat{x}_{\text{in},j}(t') \rangle &= \frac{1}{4}\delta_{ij}\delta(t-t') \\ \langle \hat{x}_{\text{in},i}(t)\hat{p}_{\text{in},j}(t') \rangle &= \frac{i}{4}\delta_{ij}\delta(t-t') \\ \langle \hat{p}_{\text{in},i}(t)\hat{x}_{\text{in},j}(t') \rangle &= \frac{-i}{4}\delta_{ij}\delta(t-t') \\ \langle \hat{p}_{\text{in},i}(t)\hat{p}_{\text{in},j}(t') \rangle &= \frac{1}{4}\delta_{ij}\delta(t-t')\end{aligned}$$

On peut alors les rassembler dans la matrice de covariance qui s'exprime :

$$\boxed{\sigma_{\text{in}}(t, t') = \frac{1}{4}\delta(t-t')\mathbb{1}} \quad (9.28)$$

Remarquez que $\sigma_{\text{in}}(t, t')$ ne dépend que de $t - t'$. On a donc bien une matrice de covariance stationnaire, ce qui était attendu (c'est celle du vide).

Afin d'être un peu plus général pour la suite⁸, nous considérerons une matrice de covariance d'entrée sans corrélations temporelles. Ainsi on utilisera :

$$\sigma_{\text{in}}(t, t') = \delta(t-t')\sigma_0 \quad (9.29)$$

avec σ_0 une matrice constante réelle et symétrique définie positive. En particulier pour le vide $\sigma_0 = \frac{1}{4}\mathbb{1}$. Cette forme sera privilégiée par la suite.

9.4.2.2 En fréquences

Partant de l'équation (9.29), on calcule :

$$\tilde{\sigma}_{\text{in}}(\omega) = \int \delta(t)\sigma_0 e^{-i\omega t} dt = \sigma_0 \quad (9.30)$$

La transformée de Fourier de la matrice de covariance du champ d'entrée est une constante. Elle est même proportionnelle à l'identité : $\tilde{\sigma}_{\text{in}}(\omega) = \sigma_0 = \frac{1}{4}\mathbb{1}$. Le bruit du vide est normalisé à $\frac{1}{4}$ compte tenu de nos choix de conventions.

8. Cela permet surtout de pouvoir aisément changer de convention pour le bruit du vide.

9.4.3 Champ de sortie

9.4.3.1 En temporel

Exprimons $\sigma_{\text{out}}(t, t')$ en fonction de $\sigma_{\text{in}}(t, t')$ et des fonctions de Green. On part de la définition (9.22) et on procède de manière similaire au calcul des commutateurs :

$$\begin{aligned}
& (\sigma_{\text{out}}(t, t'))_{ij} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left\langle \left(\hat{X}_{\text{out}}(t) \right)_i \left(\hat{X}_{\text{out}}(t') \right)_j \right\rangle + \left\langle \left(\hat{X}_{\text{out}}(t') \right)_j \left(\hat{X}_{\text{out}}(t) \right)_i \right\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\int \sum_{k,l} (S_{\text{out}}(\tau))_{i,k} \left\langle \left(\hat{X}_{\text{in}}(t - \tau) \right)_k \left(\hat{X}_{\text{in}}(t' - \tau') \right)_l \right\rangle (S_{\text{out}}(\tau'))_{j,l} d\tau d\tau' \right. \\
&\quad \left. + \int \sum_{k,l} (S_{\text{out}}(\tau))_{i,k} \left\langle \left(\hat{X}_{\text{in}}(t' - \tau') \right)_l \left(\hat{X}_{\text{in}}(t - \tau) \right)_k \right\rangle (S_{\text{out}}(\tau'))_{j,l} d\tau d\tau' \right] \\
&= \int \sum_{k,l} (S_{\text{out}}(\tau))_{i,k} \frac{1}{2} \left[\left\langle \left(\hat{X}_{\text{in}}(t - \tau) \right)_k \left(\hat{X}_{\text{in}}(t' - \tau') \right)_l \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \left(\hat{X}_{\text{in}}(t' - \tau') \right)_l \left(\hat{X}_{\text{in}}(t - \tau) \right)_k \right\rangle \right] (S_{\text{out}}(\tau'))_{j,l} d\tau d\tau' \\
&= \int \sum_{k,l} (S_{\text{out}}(\tau))_{i,k} (\sigma_{\text{in}}(t - \tau, t' - \tau'))_{k,l} (S_{\text{out}}(\tau'))_{j,l} d\tau d\tau' \\
&= \int \left(S_{\text{out}}(\tau) \sigma_{\text{in}}(t - \tau, t' - \tau') S_{\text{out}}^T(\tau') \right)_{ij} d\tau d\tau'
\end{aligned}$$

On conclut donc que dès que les opérateurs de sortie sont liés à ceux d'entrée *via* un noyau intégral,

$$\boxed{\sigma_{\text{out}}(t, t') = \int S_{\text{out}}(\tau) \sigma_{\text{in}}(t - \tau, t' - \tau') S_{\text{out}}^T(\tau') d\tau d\tau'} \quad (9.31)$$

Quand σ_{in} et les fonctions de Green sont stationnaires, il en va de même pour σ_{out} . En particulier, quand la matrice de covariance d'entrée prend la forme $\sigma_{\text{in}}(\tau) = \delta(\tau) \sigma_0$, on peut simplifier l'expression :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{out}}(t, t') &= \int S_{\text{out}}(\tau) \delta(t - \tau - t' + \tau') \sigma_0 S_{\text{out}}^T(\tau') d\tau d\tau' \\
&= \int S_{\text{out}}(\tau) \sigma_0 S_{\text{out}}^T(\tau - (t - t')) d\tau
\end{aligned}$$

On a obtenu l'expression d'une matrice de covariance stationnaire. On a donc pour les entrées sans corrélations temporelles :

$$\sigma_{\text{out}}(t) = \int S_{\text{out}}(\tau) \sigma_0 S_{\text{out}}^T(\tau - t) d\tau \quad (9.32)$$

Si de plus l'état du faisceau d'entrée est le vide, on utilise que $\sigma_0 = \frac{1}{4} \mathbb{1}$ et on obtient :

$$\boxed{\sigma_{\text{out}}(t) = \frac{1}{4} \int S_{\text{out}}(\tau) S_{\text{out}}^T(\tau - t) d\tau} \quad (9.33)$$

9.4.3.2 En fréquence

Nous partons de l'expression en temps (9.32), qui est celle d'une corrélation. En utilisant la même technique que pour obtenir l'équation (9.21) (même changement de variables), on montre que

$$\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) = \tilde{S}_{\text{out}}(\omega)\sigma_0\tilde{S}_{\text{out}}^\dagger(\omega) \quad (9.34)$$

Comme σ_0 est réelle et symétrique, on en déduit que $\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega)$ est hermitienne.

En particulier, avec du vide comme entrée,

$$\boxed{\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) = \frac{1}{4}\tilde{S}_{\text{out}}(\omega)\tilde{S}_{\text{out}}^\dagger(\omega)} \quad (9.35)$$

$\tilde{S}_{\text{out}}(\omega)$ étant une matrice sesquisymplectique (équation (9.21)), on en déduit que $4\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega)$ est hermitienne et sesquisymplectique :

$$\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) = \tilde{\sigma}_{\text{out}}^\dagger(\omega) \quad \text{et} \quad 4\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega)\Omega 4\tilde{\sigma}_{\text{out}}^\dagger(\omega) = \Omega \quad (9.36)$$

9.4.4 Décomposition

9.4.4.1 En fréquences

Comme on vient de le voir, $4\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega)$ est hermitienne et sesquisymplectique. D'après le théorème 8.9, il existe des matrices $\tilde{U}(\omega)$ unitaires et sesquisymplectiques, ainsi que $\tilde{D}(\omega)$ diagonale réelle positive et sesquisymplectique telles que :

$$\boxed{\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) = \frac{1}{4}\tilde{U}(\omega)\tilde{D}(\omega)\tilde{U}^\dagger(\omega)} \quad (9.37a)$$

$$\boxed{\tilde{U}^\dagger(\omega)\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega)\tilde{U}(\omega) = \frac{1}{4}\tilde{D}(\omega)} \quad (9.37b)$$

En général U et D dépendent de ω . C'est là une différence fondamentale avec les méthodes usuellement utilisées pour les milieux ayant une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$ pour lesquels les vecteurs propres sont indépendants de la fréquence [4, 101].

Remarque. On aurait pu de manière équivalente utiliser la décomposition de Bloch-Messiah (théorème 8.10) sur $\tilde{S}_{\text{out}}(\omega)$. \diamond

Ajoutons une propriété pour $\tilde{U}(\omega)$ et $\tilde{D}(\omega)$. Nous partons de l'équation (9.26) : $\tilde{\sigma}_{\text{out}}(-\omega) = \tilde{\sigma}_{\text{out}}^\dagger(\omega)$. En y remplaçant $\tilde{\sigma}$ par sa décomposition, on obtient :

$$\tilde{U}(-\omega)\tilde{D}(-\omega)\tilde{U}^\dagger(-\omega) = \tilde{U}^*(\omega)\tilde{D}(\omega)\tilde{U}^\dagger(\omega)$$

On rappelle que la diagonalisation utilisée est unique, au choix de l'ordre des valeurs propres, et à des rotations internes aux espaces propres près. Il est ici tout à fait possible de faire le choix :

$$\begin{cases} \tilde{U}(-\omega) = \tilde{U}^*(\omega) \\ \tilde{D}(-\omega) = \tilde{D}(\omega) \end{cases} \quad (9.38)$$

9.4.4.2 Équivalent en temps

On peut traduire la décomposition dans le domaine temporel. Tout d'abord, remarquons que $\tilde{U}(-\omega) = \tilde{U}^*(\omega)$ implique que $U(t)$ est réelle. Comme $\tilde{D}(\omega)$ est réelle et $\tilde{D}(-\omega) = \tilde{D}(\omega)$, on obtient que $D(t)$ est réelle et paire : $D(-t) = D(t)$.

On effectue ensuite la transformation de Fourier inverse de (9.37a), dans laquelle on injecte les définitions des transformées de Fourier.

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) &= \frac{1}{4} \tilde{U}(\omega) \tilde{D}(\omega) \tilde{U}^\dagger(\omega) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int \tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi} \int \tilde{U}(\omega) \tilde{D}(\omega) \tilde{U}^\dagger(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \Leftrightarrow \sigma_{\text{out}}(t) &= \frac{1}{4} \frac{1}{2\pi} \int U(t_1) D(t_2) U^\dagger(t_3) e^{i\omega(t+t_3-t_2-t_1)} d\omega dt_1 dt_2 dt_3 \\ \Leftrightarrow \sigma_{\text{out}}(t) &= \frac{1}{4} \int U(t_1) D(t_2) U^\dagger(t_3) \delta(t+t_3-t_2-t_1) dt_1 dt_2 dt_3\end{aligned}$$

C'est l'expression d'une convolution/corrélation à deux paramètres libres. La distribution de Dirac s'élimine en posant au choix $t_1 = t + t_3 - t_2$ ou $t_2 = t + t_3 - t_1$ ou $t_3 = t_1 + t_2 - t$. Cela donne trois expressions différentes de la même décomposition :

$$\sigma_{\text{out}}(t) = \frac{1}{4} \int U(t+t_3-t_2) D(t_2) U^\dagger(t_3) dt_2 dt_3 \quad (9.39a)$$

$$\sigma_{\text{out}}(t) = \frac{1}{4} \int U(t_1) D(t-t_1+t_3) U^\dagger(t_3) dt_1 dt_3 \quad (9.39b)$$

$$\sigma_{\text{out}}(t) = \frac{1}{4} \int U(t_1) D(t_2) U^\dagger(t_1+t_2-t) dt_1 dt_2 \quad (9.39c)$$

C'est là l'équivalent temporel de la diagonalisation *via* des matrices sesquisymplectiques et unitaires.

En partant de l'équation (9.37b), on aboutit après un calcul similaire à :

$$\int U^\dagger(t_1) \sigma_{\text{out}}(t-t_1+t_3) U(t_3) dt_1 dt_3 = \frac{1}{4} D(t) \quad (9.39d)$$

9.4.4.3 Propriétés de la matrice de passage

Concentrons-nous maintenant sur les propriétés de la matrice de passage \tilde{U} .

Propriétés élémentaires

Nous avons déjà vu que $U(t)$ est réelle.

$\tilde{U}(\omega)$ est sesquisymplectique. Cela se traduit en temps selon l'équation (9.20) :

$$\int U(\tau) \Omega U^\dagger(\tau-t) d\tau = \Omega \delta(t) \quad (9.40)$$

\tilde{U} est également unitaire. On part de la définition : $\tilde{U}(\omega) \tilde{U}^\dagger(\omega) = \mathbb{1} = \tilde{U}^\dagger(\omega) \tilde{U}(\omega)$. En appliquant exactement la même technique que pour obtenir la version temporelle de la décomposition, et en utilisant que $U(t)$ est réelle on obtient :

$$\tilde{U}(\omega) \text{ est unitaire} \Leftrightarrow \int U(t_1) U^\dagger(t_1+t) dt_1 = \mathbb{1} \delta(t) = \int U^\dagger(t_1) U(t_1+t) dt_1 \quad (9.41)$$

Expression par blocs

$\tilde{U}(\omega)$ est unitaire sesquisymplectique. La [propriété 8.22](#) nous donne son écriture par blocs. On pose $\tilde{A}(\omega)$ et $\tilde{B}(\omega)$ les matrices complexes telles que

$$\tilde{U} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & -\tilde{B} \\ \hline \tilde{B} & \tilde{A} \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{A}\tilde{A}^\dagger + \tilde{B}\tilde{B}^\dagger = \mathbb{1} \\ \tilde{A}^\dagger\tilde{A} + \tilde{B}^\dagger\tilde{B} = \mathbb{1} \\ \tilde{A}\tilde{B}^\dagger = \tilde{B}\tilde{A}^\dagger \\ \tilde{A}^\dagger\tilde{B} = \tilde{B}^\dagger\tilde{A} \end{cases} \quad (9.42)$$

On déduit de la propriété $\tilde{U}(-\omega) = \tilde{U}^*(\omega)$ que :

$$\tilde{A}(-\omega) = \tilde{A}^*(\omega) \quad \text{et} \quad \tilde{B}(-\omega) = \tilde{B}^*(\omega)$$

Ainsi leurs transformées de Fourier inverses, $A(t)$ et $B(t)$ sont réelles.

Expression pour les opérateurs bosoniques

De manière similaire à ce qui a été vu pour les matrices symplectiques orthogonales en [sous-section 9.2.1](#), nous allons repasser à la notation adaptée aux opérateurs bosoniques. Soit $\tilde{U}'(\omega) = \gamma\tilde{U}(\omega)\gamma^{-1}$, avec toujours la même définition de γ . Le calcul par bloc permet de montrer que :

$$\tilde{U}'(\omega) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}(\omega) + i\tilde{B}(\omega) & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A}(\omega) - i\tilde{B}(\omega) \end{array} \right) \quad (9.43)$$

Il y a par contre une différence importante par rapport au [9.2.1](#) : \tilde{A} et \tilde{B} sont complexes. Nommons $\tilde{U}'_{1,1}(\omega) = \tilde{A}(\omega) + i\tilde{B}(\omega)$ le premier bloc. Les propriétés de \tilde{A} et \tilde{B} permettent de montrer que $\tilde{U}'_{1,1}$ est unitaire.

Passage en temps

On peut utiliser la transformation de Fourier inverse sur \tilde{U}' . On obtient l'expression par blocs de $U'(t)$:

$$U'(t) = \left(\begin{array}{c|c} A(t) + iB(t) & 0 \\ \hline 0 & A(t) - iB(t) \end{array} \right) \quad (9.44)$$

avec maintenant $A(t)$ et $B(t)$ réelles et $U'_{1,1}(t) = A(t) + iB(t)$ le premier bloc. \tilde{U}' et $\tilde{U}'_{1,1}$ sont chacune unitaire. Ainsi leurs transformées de Fourier inverses, $U'(t)$ et $U'_{1,1}$ vérifient chacune l'[équation \(9.41\)](#).

Conclusion des propriétés de $U(t)$

Pour conclure, en regardant en notations adaptées aux opérateurs d'échelle et dans le temps, on a pu mettre la matrice de passage sous la forme :

$$U'(t) = \left(\begin{array}{c|c} U'_{1,1}(t) & 0 \\ \hline 0 & U'^*_{1,1}(t) \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \int U'_{1,1}(t_1)U'^T_{1,1}(t_1+t) dt_1 = \mathbb{1}\delta(t) \\ \int U'^T_{1,1}(t_1)U'_{1,1}(t_1+t) dt_1 = \mathbb{1}\delta(t) \end{cases} \quad (9.45)$$

Réciproquement, toute transformation de la forme donnée se traduit en fréquence et en quadratures par une matrice unitaire sesquisymplectique (et vérifiant $\tilde{U}(-\omega) = \tilde{U}(\omega)$).

On appellera les systèmes ayant une telle fonction de Green des « interféromètres linéaires passifs à mémoire ». L'attribut « passif » s'explique par le fait que les opérateurs de destruction ne sont pas mélangés à ceux de création. Notez par contre que nous n'imposons pas *a priori* que $\forall t < 0, U'(t) = 0$. Ainsi ces interféromètres sont potentiellement non causaux.

9.4.5 Mesure d'une quadrature fixe

En pratique, pour analyser la lumière comprimée multimode et observer une réduction du bruit, soit on utilise un interféromètre passif, soit on met en forme l'oscillateur local de la détection homodyne pour qu'il corresponde à la quadrature qu'on souhaite observer [27]. Dans les deux cas on mesure une quadrature qui est fixe dans le temps. Voyons maintenant comment lier les fluctuations de la mesure de cette quadrature à la matrice de covariance.

Définition. Soit z un vecteur-colonne indépendant du temps de dimension $2N$. On appelle « quadrature fixe » définie par z l'opérateur

$$\hat{z}(t) = \sum_i z_i \left(\hat{X}_{\text{out}}(t) \right)_i$$

On remarque qu'un tel $\hat{z}(t)$ est hermitien si et seulement si z est réel. On ajoute cette contrainte à la définition.

Remarque. Le nom « quadrature » peut sembler étrange dans la mesure où on ne regarde qu'une seule observable. Il faut simplement le comprendre comme « opérateur hermitien s'exprimant comme combinaison linéaire des opérateurs d'échelle ». Attention, tous les opérateurs hermitiens ne sont pas des quadratures ; l'opérateur « nombre de photons » est un contre-exemple. \diamond

Précisons les relations de commutation entre $\hat{z}(t)$ et $\hat{z}(t + \tau)$. Intuitivement ces deux observables devraient commuter car quand les temps sont différents tous les opérateurs de quadrature commutent et quand c'est le même temps, c'est le même opérateur. Vérifions-le formellement :

$$\begin{aligned} [\hat{z}(t), \hat{z}(t + \tau)] &= \sum_{i,j} z_i z_j \left[\left(\hat{X}_{\text{out}}(t) \right)_i, \left(\hat{X}_{\text{out}}(t + \tau) \right)_j \right] \\ &= \sum_{i,j} z_i z_j \Omega_{i,j} \delta(\tau) \\ &= \underbrace{z^T \Omega z}_{=0} \times \delta(\tau) \end{aligned}$$

On retiendra donc :

$$\forall t, \tau, [\hat{z}(t), \hat{z}(t + \tau)] = 0 \quad (9.46)$$

9.4.5.1 Auto-corrélation

En temps

Exprimons la fonction d'auto-corrélation de \hat{z} à l'aide de la matrice de covariance. En utilisant la relation de commutation précédente, la fonction d'auto-corrélation est égale à la même fonction symétrisée, et on peut effectuer le calcul :

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{z}(t)\hat{z}(t+\tau) \rangle \\
&= \frac{1}{2} [\langle \hat{z}(t)\hat{z}(t+\tau) \rangle + \langle \hat{z}(t+\tau)\hat{z}(t) \rangle] \\
&= \sum_{i,j} z_i z_j \frac{1}{2} \left[\left\langle \left(\hat{X}_{\text{out}}(t) \right)_i \left(\hat{X}_{\text{out}}(t+\tau) \right)_j \right\rangle + \left\langle \left(\hat{X}_{\text{out}}(t+\tau) \right)_j \left(\hat{X}_{\text{out}}(t) \right)_i \right\rangle \right] \\
&= \sum_{i,j} z_i z_j (\sigma_{\text{out}}(\tau))_{i,j} \\
&= z^T \sigma_{\text{out}}(\tau) z
\end{aligned}$$

On retiendra donc que pour une quadrature quelconque définie par un vecteur-colonne z constant dans le temps,

$$\boxed{\langle \hat{z}(t)\hat{z}(t+\tau) \rangle = z^T \sigma_{\text{out}}(\tau) z} \quad (9.47)$$

En fréquence

z étant constant, effectuer la transformée de Fourier est direct. On a donc

$$\int \langle \hat{z}(t)\hat{z}(t+\tau) \rangle e^{-i\omega t} dt = z^T \tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) z \quad (9.48)$$

En effectuant la diagonalisation sesquisymplectique (9.37) de la matrice de covariance $\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) = \frac{1}{4} \tilde{U}(\omega) \tilde{D}(\omega) \tilde{U}^\dagger(\omega)$, on obtient :

$$\int \langle \hat{z}(t)\hat{z}(t+\tau) \rangle e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{4} z^T \tilde{U}(\omega) \tilde{D}(\omega) \tilde{U}^\dagger(\omega) z \quad (9.49)$$

Ainsi dès lors que z coïncide avec un vecteur propre de $\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega)$, c'est-à-dire une colonne de $\tilde{U}(\omega)$, sa densité spectrale de puissance sera le produit du bruit du vide et de la valeur propre correspondante (lue dans $\tilde{D}(\omega)$), et donc la compression sera optimale pour cette fréquence si l'on choisit la plus petite valeur propre. Notez bien que pour une quadrature \hat{z} donnée, comme \tilde{U} dépend *a priori* de ω l'optimalité n'est atteinte que pour une seule fréquence d'analyse. Cela sera illustré lors du [chapitre 10](#), en particulier par la [figure 10.2](#). De plus, comme $\tilde{U}(\omega)$ est *a priori* complexe il n'existe pas toujours de z permettant d'atteindre la compression optimale.

Notez toutefois que la matrice de covariance repliée $\frac{1}{2} [\tilde{\sigma}(\omega) + \tilde{\sigma}(-\omega)]$ est réelle symétrique et ses optima peuvent être atteints par une quadrature fixe.

9.4.6 Mesure d'une quadrature arbitraire

Nous allons voir maintenant comment exprimer les propriétés de covariance de quadratures arbitraires. Soit un interféromètre linéaire d'analyse « à mémoire », dont on note la fonction de Green S_{an} . Les quadratures après l'interféromètre sont :

$$\hat{X}_{\text{an}}(t) = \int S_{\text{an}}(\tau) \hat{X}_{\text{out}}(t - \tau) d\tau$$

En procédant de même qu'entre σ_{in} et σ_{out} , on peut exprimer la matrice de covariance pour les quadratures \hat{X}_{an} à partir de σ_{out} :

$$\sigma_{\text{an}}(t) = \int S_{\text{an}}(\tau) \sigma_{\text{out}}(t - \tau + \tau') S_{\text{an}}^T(\tau') d\tau d\tau' \quad (9.50)$$

En comparant à l'équation (9.39d), on voit que le choix $S_{\text{an}}(t) = U^T(t)$ permet d'obtenir une matrice $\sigma_{\text{an}}(t)$ diagonale. On rappelle que $U(t)$ représente un interféromètre linéaire « à mémoire » passif. On a ainsi montré comment analyser la lumière émergeant de la cavité *via* un interféromètre passif en termes de quadratures comprimées et anti-comprimées indépendantes.

Notez que dans le cas général l'interféromètre à mémoire n'a pas de raison de respecter la causalité, et n'est alors pas réalisable en pratique. Ceci-dit, en autorisant une translation en temps de la fonction de Green, il sera certainement envisageable de l'approximer avec un interféromètre physique. L'étude de comment réaliser expérimentalement une fonction de Green donnée est une extension possible des travaux présentés dans cette thèse.

Dans le cas d'une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$ sans désaccord ($G = 0$ dans le hamiltonien), $\tilde{\sigma}_{\text{out}}$ se diagonalise *via* une matrice \tilde{U} constante (qui diagonalise également \mathcal{L}_{xp}). On en déduit que la dépendance en temps de U est une distribution de Dirac ; un interféromètre standard (sans mémoire) permet de récupérer les quadratures indépendantes.

Remarquez enfin que parfois seule une quadrature importe. On pourra alors réfléchir à une mise en forme de l'oscillateur local, éventuellement *via* un passage dans une cavité passive.

9.5 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE LANGEVIN

Rappelons l'équation de Langevin quantique telle qu'obtenue en section 9.1 :

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \mathcal{L}_{xp}\hat{X} - \kappa\hat{X} + \sqrt{2\kappa}\hat{X}_{\text{in}} \quad (9.5)$$

Nous allons dans cette section la résoudre, donner les fonctions de Green correspondantes ainsi que leurs transformées de Fourier et vérifier qu'elles préservent les commutateurs des opérateurs. Bien que cela ne soit pas strictement nécessaire, nous effectuerons ces vérifications indépendamment en temps et en fréquences.

On fait l'hypothèse que tous les modes de la cavité ont le même couplage κ avec le mode extérieur correspondant. Pour les oscillateurs optiques, compte tenu de l'approximation quasi-monochromatique il n'est pas aberrant de supposer que les pertes

sont aussi indépendantes de la longueur d'onde et du mode spatial. On écrira alors $\mathcal{K} = \kappa \mathbb{1} = \kappa$ (identité implicite).

9.5.1 Résolution générique et hypothèse stationnaire.

L'équation de Langevin (9.5) est différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. L'équation homogène associée est :

$$\frac{d\hat{X}_0}{dt} = (\mathcal{L}_{xp} - \kappa) \hat{X}_0$$

En remarquant que $\mathcal{L}_{xp} - \kappa$ est constante dans le temps, et donc commute avec son exponentielle, elle se résout avec la condition initiale $\hat{X}_0(t_0)$ sous la forme :

$$\hat{X}_0(t) = e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)(t-t_0)} \hat{X}_0(t_0)$$

On effectue une variation de la constante. La solution à l'équation de Langevin est recherchée sous la forme $\hat{X}(t) = e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)(t-t_0)} \hat{X}_c(t)$. En injectant cette forme dans l'équation différentielle,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}}{dt} &= (\mathcal{L}_{xp} - \kappa) \hat{X} + \sqrt{2\kappa} \hat{X}_{in} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)(t-t_0)} \hat{X}_c(t)] &= (\mathcal{L}_{xp} - \kappa) e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)(t-t_0)} \hat{X}_c(t) + \sqrt{2\kappa} \hat{X}_{in}(t) \\ \Leftrightarrow e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)(t-t_0)} \frac{d\hat{X}_c}{dt}(t) &= \sqrt{2\kappa} \hat{X}_{in}(t) \\ \Leftrightarrow \frac{d\hat{X}_c}{dt}(t) &= e^{-(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)(t-t_0)} \sqrt{2\kappa} \hat{X}_{in}(t) \end{aligned}$$

Ainsi on obtient que :

$$\hat{X}_c(t) = \hat{X}_c(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)(t'-t_0)} \sqrt{2\kappa} \hat{X}_{in}(t') dt'$$

On remarque que $\hat{X}_c(t_0) = \hat{X}(t_0)$. En réinjectant l'expression obtenue dans la forme utilisée, on obtient la solution générique de l'équation de Langevin :

$$\boxed{\hat{X}(t) = e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)(t-t_0)} \hat{X}(t_0) + \sqrt{2\kappa} \int_{t_0}^t e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)(t-t')} \hat{X}_{in}(t') dt'} \quad (9.51)$$

Plusieurs cas sont possibles : $\hat{X}(t_0)$ peut être amplifié ou amorti. Pour s'assurer que pour tout $\hat{X}(t_0)$ la condition initiale est amortie, il suffit de vérifier que pour chaque valeur propre λ de \mathcal{L}_{xp} , $\text{Re}\{\lambda\} \leq \kappa$. On retrouve l'existence du seuil de la cavité.

Souvenons-nous que si les équations sont linéaires, c'est bien souvent parce qu'elles ont été linéarisées. Ainsi il faut s'assurer que les valeurs moyennes des quadratures restent faibles. Pour la suite, nous effectuons l'hypothèse d'être strictement en dessous du seuil.

Ainsi le premier terme est strictement décroissant et tend vers 0. On va maintenant éliminer le régime transitoire en prenant $t_0 \rightarrow -\infty$. On obtient le régime stationnaire, où le champ dans la cavité s'exprime en fonction de celui d'entrée par :

$$\hat{X}(t) = \sqrt{2\kappa} \int_{-\infty}^t e^{(\mathcal{L}_{xp}-\kappa)(t-t')} \hat{X}_{\text{in}}(t') dt' \quad (9.52)$$

9.5.2 Fonction de Green pour le champ intracavité

9.5.2.1 En temps

Expression de la fonction de Green

Extrayons de l'équation (9.52) la fonction de Green donnant le champ en cavité. Soit $\theta(t)$ la fonction de Heaviside définie telle que $\theta : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \end{cases}$. On peut alors repousser à $+\infty$ la borne d'intégration supérieure :

$$\hat{X}(t) = \sqrt{2\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-t') e^{(\mathcal{L}_{xp}-\kappa)(t-t')} \hat{X}_{\text{in}}(t') dt'$$

Ainsi \hat{X} est bien lié à \hat{X}_{in} par une fonction de Green qui s'exprime :

$$S(\tau) = \sqrt{2\kappa} \theta(\tau) e^{(\mathcal{L}_{xp}-\kappa)\tau} \quad (9.53)$$

Cette expression est bien celle d'une fonction de Green réelle et causale. Vérifions qu'elle respecte également les relations de commutation.

Préservation des relations de commutation

On va vérifier que l'équation (9.18) est bien respectée.

$$\begin{aligned} \int S(\tau) \Omega S^T(\tau) d\tau &= 2\kappa \int_0^{+\infty} e^{(\mathcal{L}_{xp}-\kappa)\tau} \Omega \left[e^{(\mathcal{L}_{xp}-\kappa)\tau} \right]^T d\tau \\ &= 2\kappa \int_0^{+\infty} e^{-2\kappa\tau} e^{\mathcal{L}_{xp}\tau} \Omega \left[e^{\mathcal{L}_{xp}\tau} \right]^T d\tau \end{aligned}$$

Or \mathcal{L}_{xp} est hamiltonienne, et donc $e^{\mathcal{L}_{xp}\tau}$ est symplectique. Ainsi,

$$\int S(\tau) \Omega S^T(\tau) d\tau = 2\kappa \Omega \int_0^{+\infty} e^{-2\kappa\tau} d\tau = \Omega$$

On a montré que $S(\tau)$ respecte bien l'équation (9.18), ce qui signifie qu'elle garantit que \hat{X} a les relations de commutation attendues.

9.5.2.2 En Fréquence

Transformation de Fourier

Effectuons la transformation de Fourier de $S(\tau)$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(\omega) &= \int S(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
 &= \int \sqrt{2\kappa} \theta(\tau) e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa)\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \\
 &= \sqrt{2\kappa} \int_0^{+\infty} e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa - i\omega)\tau} d\tau \\
 &= \sqrt{2\kappa} \frac{1}{\mathcal{L}_{xp} - \kappa - i\omega} \left[e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa - i\omega)\tau} \right]_0^{+\infty}
 \end{aligned}$$

Or on a fait l'hypothèse d'être en dessous du seuil. Le terme $i\omega$ ne changeant pas la partie réelle de l'exposant, on conclut que $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} e^{(\mathcal{L}_{xp} - \kappa - i\omega)\tau} = 0$. Ainsi on conclut :

$$\boxed{\tilde{S}(\omega) = \frac{\sqrt{2\kappa}}{i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}}} \quad (9.54)$$

Remarque. On s'autorise à noter les matrices inverses avec des barres de fraction tant que numérateurs et dénominateurs commutent.

Par ailleurs la matrice $i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}$ est toujours inversible car on a supposé d'être strictement en dessous du seuil, et donc 0 ne peut pas être une de ses valeurs propres. \diamond

Obtention directe

Voyons qu'il est possible d'obtenir l'expression de la transformée de Fourier de la fonction de Green (9.54) directement à partir de l'équation de Langevin, sans passer par la version temporelle. Si cette conclusion est évidemment redondante avec le paragraphe précédent, nous allons voir les détails de la méthode. Ceci peut être utile afin de comparer avec d'autres travaux (par exemple [25]).

On part de nouveau de l'équation de Langevin (9.5) :

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \mathcal{L}_{xp}\hat{X} - \mathcal{K}\hat{X} + \sqrt{2\kappa}\hat{X}_{in} \quad (9.5)$$

Pour rechercher la solution stationnaire, on injecte dedans la définition de la fonction de Green, donnée par l'équation (9.16) :

$$\hat{X}(t) = \int S(t-t')\hat{X}_{in}(t') dt' \quad (9.16)$$

Cela donne :

$$\int \frac{dS}{dt}(t-t')\hat{X}_{in}(t') dt' = (\mathcal{L}_{xp} - \kappa) \left[\int S(t-t')\hat{X}_{in}(t') dt' \right] + \sqrt{2\kappa}\hat{X}_{in}(t)$$

Qu'on peut mettre sous la forme :

$$\int \frac{dS}{dt}(t-t')\hat{X}_{in}(t') dt' = \int \left[(\mathcal{L}_{xp} - \kappa) S(t-t') + \sqrt{2\kappa}\delta(t-t') \right] \hat{X}_{in}(t') dt'$$

La fonction de Green devant être la même quelque soit $\hat{X}_{\text{in}}(t')$, $S(t-t') = S(\tau)$ vérifie :

$$\frac{dS}{d\tau}(\tau) = (\mathcal{L}_{xp} - \kappa) S(\tau) + \sqrt{2\kappa}\delta(\tau) \quad (9.55)$$

En effectuant la transformation de Fourier de cette dernière équation, on obtient :

$$i\omega\tilde{S} = (\mathcal{L}_{xp} - \kappa)\tilde{S} + \sqrt{2\kappa}$$

Ce qui permet de retrouver :

$$\tilde{S} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}} \quad (9.54)$$

Préservation de relations de commutation

Même si cela est superflu, vérifions de manière directe que \tilde{S} vérifie bien la relation (9.19). Utilisant l'expression (9.54),

$$\frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}(\omega)\Omega\tilde{S}^{\text{T}}(-\omega) d\omega = \frac{2\kappa}{2\pi} \int (i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1}\Omega[(-i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1}]^{\text{T}} d\omega$$

Commençons par simplifier l'intégrale; on peut calculer :

$$[(-i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1}]^{\text{T}} = [(-i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{\text{T}}]^{-1} = [-i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}^{\text{T}}]^{-1}$$

Or \mathcal{L}_{xp} est hamiltonienne. Ainsi $\mathcal{L}_{xp}^{\text{T}} = \Omega\mathcal{L}_{xp}\Omega$. Par ailleurs on rappelle que $\Omega\Omega = -\mathbb{1}$ et $\Omega^{-1} = -\Omega$. Ainsi

$$[(-i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1}]^{\text{T}} = \Omega[i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}]^{-1}\Omega \quad (9.56)$$

En réinjectant ce résultat dans le calcul,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}(\omega)\Omega\tilde{S}^{\text{T}}(-\omega) d\omega &= \frac{\kappa}{\pi} \int (i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1}\Omega\Omega(i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1}\Omega d\omega \\ &= \left[\frac{-\kappa}{\pi} \int \{(i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})(i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp})\}^{-1} d\omega \right] \Omega \end{aligned}$$

Effectuons le calcul de l'intégrale. Tout d'abord on remarque que comme $\kappa\mathbb{1}$ commute avec $i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}$,

$$(i\omega - \mathcal{L}_{xp} + \kappa)(i\omega - \mathcal{L}_{xp} - \kappa) = (i\omega - \mathcal{L}_{xp})^2 - \kappa^2$$

Ainsi l'intérieur des crochets vaut :

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\pi} \int [\kappa^2 - (i\omega - \mathcal{L}_{xp})^2]^{-1} d\omega &= \frac{\kappa}{\pi}\kappa^{-2} \int \left[\mathbb{1} - \left(\frac{i\omega - \mathcal{L}_{xp}}{\kappa} \right)^2 \right]^{-1} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi\kappa} \int \left[\mathbb{1} + \left(\frac{\omega + i\mathcal{L}_{xp}}{\kappa} \right)^2 \right]^{-1} d\omega \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $\omega' = \frac{\omega}{\kappa}$; cela permet de simplifier l'expression précédente en :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbb{1} + \left(\omega' + i \frac{\mathcal{L}_{xp}}{\kappa} \right)^2 \right]^{-1} d\omega'$$

Remarquons tout d'abord que nous avons imposé de travailler strictement en dessous du seuil. Donc pour toute valeur propre λ de \mathcal{L}_{xp} , $\operatorname{Re}\left\{\frac{\lambda}{\kappa}\right\} < 1$. Or comme \mathcal{L}_{xp} est hamiltonienne, $-\lambda$ est également une valeur propre et vérifie donc $\operatorname{Re}\left\{\frac{-\lambda}{\kappa}\right\} < 1$. Ainsi on en déduit que $\operatorname{Re}\left\{\frac{\lambda}{\kappa}\right\} > -1$. On en conclut l'encadrement $-1 < \operatorname{Re}\left\{\frac{\lambda}{\kappa}\right\} < 1$. Cela permet de montrer que $\mathbb{1} + \left(\omega' + i \frac{\mathcal{L}_{xp}}{\kappa} \right)^2$ est toujours inversible.

On reconnaît dans l'intégrale la dérivée de arctan. On rappelle que pour un nombre complexe z quelconque,

$$\arctan(z) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

Tant que $|\operatorname{Im}\{z\}| < 1$, l'argument du logarithme est de partie réelle positive, et on peut donc utiliser la valeur principale de arctan. L'encadrement obtenu garantit que $\omega' + i \frac{\mathcal{L}_{xp}}{\kappa}$ ne quitte pas ce domaine quand ω' décrit les nombres réels.

Ainsi en utilisant uniquement la valeur principale de arctan :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbb{1} + \left(\omega' + i \frac{\mathcal{L}_{xp}}{\kappa} \right)^2 \right]^{-1} d\omega' \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\omega' \rightarrow \infty} \left[\arctan\left(\omega' + i \frac{\mathcal{L}_{xp}}{\kappa}\right) - \arctan\left(-\omega' + i \frac{\mathcal{L}_{xp}}{\kappa}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\omega' \rightarrow \infty} \left[\arctan\left(\omega' + i \frac{\mathcal{L}_{xp}}{\kappa}\right) + \arctan\left(\omega' - i \frac{\mathcal{L}_{xp}}{\kappa}\right) \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

On peut donc conclure qu'on obtient bien l'équation (9.19) :

$$\frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}(\omega) \Omega \tilde{S}^T(-\omega) d\omega = \Omega$$

9.5.3 Fonction de Green pour le champ extérieur

Étudions maintenant la fonction de Green S_{out} , définie par l'équation (9.17), donnant les opérateurs du champ émergent de la cavité à partir de ceux du champ incident. Rappelons que la définition du champ de sortie a été discutée en sous-section 9.1.4; en particulier son lien avec les champs internes à la cavité et incidents est donné par l'équation (9.8) :

$$\hat{\chi}_{\text{out}} = \sqrt{2\kappa} \hat{\chi} - \hat{\chi}_{\text{in}}$$

9.5.3.1 En temps

Expression

Nous utilisons dans l'équation précédente la définition de la fonction de Green pour le champ intra-cavité (9.16). On obtient alors :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{\text{out}}(t) &= \sqrt{2\kappa} \left[\int S(\tau) \hat{X}_{\text{in}}(t-\tau) d\tau \right] - \hat{X}_{\text{in}}(t) \\ &= \int \left[\sqrt{2\kappa} S(\tau) - \delta(\tau) \right] \hat{X}_{\text{in}}(t-\tau) d\tau\end{aligned}$$

On en déduit donc le lien entre S et S_{out} :

$$S_{\text{out}}(\tau) = \sqrt{2\kappa} S(\tau) - \delta(\tau) \quad (9.57)$$

En injectant l'expression de S obtenue en équation (9.53), on conclut :

$$\boxed{S_{\text{out}}(\tau) = 2\kappa\theta(\tau)e^{(\mathcal{L}_{xp}-\kappa)\tau} - \delta(\tau)} \quad (9.58)$$

On vérifie immédiatement qu'elle est causale et réelle. Il reste à vérifier qu'elle préserve les relations de commutation.

Préservation des relations de commutation

Contrôlons que S_{xp} vérifie bien l'équation (9.20). Pour cela nous allons calculer :

$$\int S_{\text{out}}(\tau) \Omega S_{\text{out}}^T(\tau-t) d\tau$$

Commençons par remarquer que comme $e^{\mathcal{L}_{xp}(\tau-t)}$ est symplectique,

$$\left(e^{\mathcal{L}_{xp}(\tau-t)} \right)^T = -\Omega e^{-\mathcal{L}_{xp}(\tau-t)} \Omega = \Omega^{-1} e^{-\mathcal{L}_{xp}(\tau-t)} \Omega$$

S_{xp} est la somme de deux termes ; ainsi l'intégrale peut se développer en une somme de quatre termes :

$$\begin{aligned}& \int S_{\text{out}}(\tau) \Omega S_{\text{out}}^T(\tau-t) d\tau \\ &= 4\kappa^2 \int \theta(\tau)\theta(\tau-t)e^{-\kappa(2\tau-t)} e^{\mathcal{L}_{xp}\tau} \Omega \left(e^{\mathcal{L}_{xp}(\tau-t)} \right)^T d\tau \\ &\quad - 2\kappa \int \theta(\tau)\delta(\tau-t)e^{-\kappa\tau} e^{\mathcal{L}_{xp}\tau} \Omega d\tau \\ &\quad - 2\kappa \int \theta(\tau-t)\delta(\tau)e^{-\kappa(\tau-t)} \Omega \left(e^{\mathcal{L}_{xp}(\tau-t)} \right)^T d\tau \\ &\quad + \Omega \int \delta(\tau)\delta(\tau-t) d\tau \\ &= 4\kappa^2 \int \theta(\tau)\theta(\tau-t)e^{-\kappa(2\tau-t)} e^{\mathcal{L}_{xp}\tau} e^{-\mathcal{L}_{xp}(\tau-t)} \Omega d\tau \\ &\quad - 2\kappa \int \theta(\tau)\delta(\tau-t)e^{-\kappa\tau} e^{\mathcal{L}_{xp}\tau} \Omega d\tau \\ &\quad - 2\kappa \int \theta(\tau-t)\delta(\tau)e^{-\kappa(\tau-t)} e^{-\mathcal{L}_{xp}(\tau-t)} \Omega d\tau \\ &\quad + \Omega \int \delta(\tau)\delta(\tau-t) d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\kappa^2 e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega \int \theta(\tau)\theta(\tau-t)e^{-\kappa(2\tau-t)} d\tau \\
&\quad - 2\kappa\theta(t)e^{-\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega - 2\kappa\theta(-t)e^{\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega + \Omega\delta(-t) \\
&= 4\kappa^2 e^{\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega \int_{\tau=\max(0,t)}^{+\infty} e^{-2\kappa\tau} d\tau - 2\kappa\theta(t)e^{-\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega - 2\kappa\theta(-t)e^{\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega + \Omega\delta(-t) \\
&= 2\kappa e^{\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega e^{-2\kappa \max(0,t)} - 2\kappa\theta(t)e^{-\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega - 2\kappa\theta(-t)e^{\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega + \Omega\delta(t)
\end{aligned}$$

Pour finir le calcul, on sépare deux cas :

CAS $t \leq 0$

$$\begin{aligned}
&= 2\kappa e^{\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega - 2\kappa e^{\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega + \Omega\delta(t) \\
&= \Omega\delta(t)
\end{aligned}$$

CAS $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
&= 2\kappa e^{\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega e^{-2\kappa t} - 2\kappa e^{-\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega + \Omega\delta(t) \\
&= 2\kappa e^{-\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega - 2\kappa e^{-\kappa t} e^{\mathcal{L}_{xp}t} \Omega + \Omega\delta(t) \\
&= \Omega\delta(t)
\end{aligned}$$

Ainsi on a montré qu'on a toujours :

$$\int S_{\text{out}}(\tau) \Omega S_{\text{out}}^T(\tau-t) d\tau = \Omega\delta(t)$$

La fonction de Green vérifie bien l'équation (9.20) ; elle garantit donc les bonnes relations de commutation pour \hat{X}_{out} .

9.5.3.2 En Fréquence

Expression

Partons du lien entre S et S_{out} (équation (9.57)) :

$$S_{\text{out}}(\tau) = \sqrt{2\kappa} S(\tau) - \delta(\tau)$$

Par transformation de Fourier, on obtient

$$\tilde{S}_{\text{out}}(\omega) = \sqrt{2\kappa} \tilde{S}(\omega) - \mathbf{1}$$

En injectant l'expression de $\tilde{S}(\omega)$ (équation (9.54)) on conclut :

$$\boxed{\tilde{S}_{\text{out}}(\omega) = \frac{2\kappa}{i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}} - \mathbf{1} = -\frac{i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}}{i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}}} \quad (9.59)$$

Remarque. Numérateur et dénominateur commutent. En effet, \mathcal{L}_{xp} commute avec elle-même ainsi qu'avec l'identité. La notation sous forme de fraction est donc bien utilisable.

◇

Vérification de la préservation des relations de commutation

Cette vérification n'est pas nécessaire, nous allons voir qu'elle est un peu plus simple que son équivalent en temps. Nous souhaitons vérifier que pour toute fréquence, $\tilde{S}_{\text{out}}(\omega)$ est sesquisymplectique (équation (9.21)).

Rappelons que comme \mathcal{L}_{xp} est hamiltonienne, $\mathcal{L}_{xp}^T = \Omega \mathcal{L}_{xp} \Omega$. Cela nous a permis de montrer l'équation (9.56), qui peut se réécrire :

$$\left[(i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1} \right]^\dagger = \Omega [i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}]^{-1} \Omega$$

de manière similaire, on peut conclure que :

$$[i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}]^\dagger = \Omega [i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}] \Omega$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{\text{out}}(\omega) \Omega \tilde{S}_{\text{out}}^\dagger(\omega) \\ &= \frac{i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}}{i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}} \Omega \left(\frac{i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}}{i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}} \right)^\dagger \\ &= (i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}) (i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1} \Omega (i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp})^\dagger \left([i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}]^{-1} \right)^\dagger \\ &= (i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}) (i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1} \Omega \Omega (i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}) \Omega \Omega (i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1} \Omega \\ &= (i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}) (i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1} (i\omega + \kappa - \mathcal{L}_{xp}) (i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1} \Omega \\ &= (i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp}) (i\omega - \kappa - \mathcal{L}_{xp})^{-1} \Omega \\ &= \Omega \end{aligned}$$

On conclut donc que $\tilde{S}_{\text{out}}(\omega)$ est bien sesquisymplectique.

9.6 RÉSUMÉ DU CHAPITRE

9.6.1 Résolution du problème hamiltonien

Le résumé des différentes méthodes de résolution a déjà été détaillé à l'occasion de la sous-section 9.2.6. Retenons simplement que les méthodes consistant à décomposer la matrice d'évolution \mathcal{L}_{xp} ne sont pas générales.

Dans tous les cas, les matrices réelles symplectiques orthogonales sont très utiles car elles représentent les interféromètres linaires. En repassant aux notations adaptées aux opérateurs bosoniques, leurs équivalentes s'écrivent sous la forme :

$$S = \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & U^* \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1} \quad (9.10)$$

9.6.2 Équation de Langevin

Les opérateurs de quadrature des modes internes à la cavité \hat{X} sont couplés aux modes arrivant dans la cavité, décrits par les opérateurs \hat{X}_{in} . Nous avons vu que l'évolution se décrit par une équation de Langevin quantique :

$$\boxed{\frac{d\hat{X}}{dt} = \mathcal{L}_{xp}\hat{X} - \kappa\hat{X} + \sqrt{2\kappa}\hat{X}_{\text{in}}} \quad (9.5)$$

Les quadratures des modes de sortie s'obtiennent par :

$$\boxed{\hat{X}_{\text{out}} = \sqrt{2\kappa}\hat{X} - \hat{X}_{\text{in}}} \quad (9.8)$$

Les relations de commutation des différents types d'opérateurs s'expriment :

$$\begin{aligned} [\hat{X}_i(t), \hat{X}_j(t)] &= \frac{i}{2}\Omega_{i,j} \\ \left[\left(\hat{X}_{\text{in}}(t) \right)_i, \left(\hat{X}_{\text{in}}(t') \right)_j \right] &= \frac{i}{2}\Omega_{i,j}\delta(t-t') \\ \left[\left(\hat{X}_{\text{out}}(t) \right)_i, \left(\hat{X}_{\text{out}}(t') \right)_j \right] &= \frac{i}{2}\Omega_{i,j}\delta(t-t') \end{aligned}$$

9.6.3 Fonctions de Green

En régime stationnaire, l'équation de Langevin se résout à l'aide de fonctions de Green, dont on résume les propriétés dans le tableau suivant :

	Dans la cavité	Faisceau émergent
Définition	$\hat{X}(t) = \int S(\tau)\hat{X}_{\text{in}}(t-\tau) d\tau$	$\hat{X}_{\text{out}}(t) = \int S_{\text{out}}(\tau)\hat{X}_{\text{in}}(t-\tau) d\tau$
Causalité	$\forall \tau < 0, S(\tau) = 0$	$\forall \tau < 0, S_{\text{out}}(\tau) = 0$
Préserve hermiticité	$S(\tau) \in M_{2N,2N}(\mathbb{R})$ $\tilde{S}(-\omega) = \tilde{S}(\omega)^*$	$S_{\text{out}}(\tau) \in M_{2N,2N}(\mathbb{R})$ $\tilde{S}_{\text{out}}(-\omega) = \tilde{S}_{\text{out}}(\omega)^*$
Préserve commut.	$\int S(\tau)\Omega S^T(\tau) d\tau = \Omega$ $\frac{1}{2\pi} \int \tilde{S}(\omega)\Omega\tilde{S}^\dagger(\omega) d\omega = \Omega$	$\int S_{\text{out}}(\tau)\Omega S_{\text{out}}^T(\tau) d\tau = \Omega\delta(t)$ $\tilde{S}_{\text{out}}(\omega)\Omega\tilde{S}_{\text{out}}^\dagger(\omega) = \Omega$
Solution Langevin	$S(\tau) = \sqrt{2\kappa}\theta(\tau)e^{(\mathcal{L}_{xp}-\kappa)\tau}$ $\tilde{S}(\omega) = \frac{\sqrt{2\kappa}}{i\omega+\kappa-\mathcal{L}_{xp}}$	$S_{\text{out}}(\tau) = 2\kappa\theta(\tau)e^{(\mathcal{L}_{xp}-\kappa)\tau} - \delta(\tau)$ $\tilde{S}_{\text{out}}(\omega) = -\frac{i\omega-\kappa-\mathcal{L}_{xp}}{i\omega+\kappa-\mathcal{L}_{xp}}$

Par ailleurs, on a aussi vérifié que les solutions de l'équation de Langevin vérifient bien les conditions de préservations. Le calcul étant plus simple en temps pour S et en fréquence pour S_{out} .

9.6.4 Matrices de covariance

Nous avons défini les matrices de covariance pour les champs d'entrée et sortie de la cavité par :

$$(\sigma_{\bullet}(t, t'))_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\left\langle \left(\hat{X}_{\bullet}(t) \right)_i \left(\hat{X}_{\bullet}(t') \right)_j \right\rangle + \left\langle \left(\hat{X}_{\bullet}(t') \right)_j \left(\hat{X}_{\bullet}(t) \right)_i \right\rangle \right] \quad (9.22)$$

où \bullet remplace « in » ou « out ». De plus, avec l'hypothèse de stationnarité, on peut écrire $\sigma_{\bullet}(t, t') = \sigma_{\bullet}(t - t')$.

Leurs propriétés élémentaires se résument par :

	En temps	En fréquence
\hat{X}_{\bullet} observables	$\sigma_{\bullet}(t) \in M_{N,N}(\mathbb{R})$	$\tilde{\sigma}_{\bullet}(-\omega) = \tilde{\sigma}_{\bullet}(\omega)^*$
Pseudo parité	$\sigma_{\bullet}(t) = \sigma_{\bullet}^T(-t)$	$\tilde{\sigma}_{\bullet}(-\omega) = \tilde{\sigma}_{\bullet}^T(\omega)$
Combinaison des deux		$\tilde{\sigma}_{\bullet}(\omega) = \tilde{\sigma}_{\bullet}(\omega)^{\dagger}$

Quand il y a du vide comme entrée et une fonction de Green pour lier l'entrée à la sortie, avec $\sigma_0 = \frac{1}{4}\mathbb{1}$ on a les expressions :

	En temps	En fréquence
Entrée	$\sigma_{\text{in}}(t) = \delta(t)\sigma_0 = \frac{1}{4}\delta(t)\mathbb{1}$	$\tilde{\sigma}_{\text{in}}(\omega) = \sigma_0 = \frac{1}{4}\mathbb{1}$
Sortie	$\sigma_{\text{out}}(t) = \int S_{\text{out}}(\tau)\sigma_0 S_{\text{out}}^T(\tau - t) d\tau$ $= \frac{1}{4} \int S_{\text{out}}(\tau) S_{\text{out}}^T(\tau - t) d\tau$	$\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) = \tilde{S}_{\text{out}}(\omega)\sigma_0 \tilde{S}_{\text{out}}^{\dagger}(\omega)$ $= \frac{1}{4} \tilde{S}_{\text{out}}(\omega) \tilde{S}_{\text{out}}^{\dagger}(\omega)$

$\tilde{\sigma}$ étant sesquisymplectique hermitienne, elle se décompose sous la forme :

$$\tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) = \frac{1}{4} \tilde{U}(\omega) \tilde{D}(\omega) \tilde{U}^{\dagger}(\omega) \quad (9.37a)$$

$$\tilde{U}^{\dagger}(\omega) \tilde{\sigma}_{\text{out}}(\omega) \tilde{U}(\omega) = \frac{1}{4} \tilde{D}(\omega) \quad (9.37b)$$

avec $\tilde{U}(\omega)$ unitaire sesquisymplectique et $\tilde{D}(\omega)$ diagonale réelle positive et (sesqui)symplectique, ces deux matrices dépendant de ω .

La version temporelle de cette décomposition est :

$$\sigma_{\text{out}}(t) = \frac{1}{4} \int U(t_1) D(t - t_1 + t_3) U^T(t_3) dt_1 dt_3 \quad (9.39)$$

$$\int U^T(t_1) \sigma_{\text{out}}(t - t_1 + t_3) U(t_3) dt_1 dt_3 = \frac{1}{4} D(t) \quad (9.39d)$$

Les propriétés de $U(t)$ sont :

$$\int U(\tau) \Omega U^T(\tau - t) d\tau = \Omega \delta(t) \quad (9.40)$$

$$\int U(t_1) U^T(t_1 + t) dt_1 = \mathbb{1} \delta(t) = \int U^T(t_1) U(t_1 + t) dt_1 \quad (9.41)$$

L'équivalent adapté aux opérateurs d'échelle de $U(t)$ est $U'(t)$ s'exprimant :

$$U'(t) = \left(\begin{array}{c|c} U'_{1,1}(t) & 0 \\ \hline 0 & U'^*_{1,1}(t) \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \int U'_{1,1}(t_1)U'^T_{1,1}(t_1+t) dt_1 = \mathbb{1}\delta(t) \\ \int U'^T_{1,1}(t_1)U'_{1,1}(t_1+t) dt_1 = \mathbb{1}\delta(t) \end{cases} \quad (9.45)$$

Sous cette forme, son interprétation d'interféromètre linéaire passif à mémoire est claire.

Pour une quadrature définie par un vecteur-colonne z via $\hat{z}(t) = \sum_i z_i (\hat{X}_{\text{out}}(t))_i$, sa fonction d'auto-corrélation est donnée par :

$$\langle \hat{z}(t)\hat{z}(t+\tau) \rangle = z^T \sigma_{\text{out}}(\tau) z \quad (9.47)$$

Pour des quadratures d'analyse obtenues après passage dans un interféromètre à mémoire décrit par une fonction de Green $S_{\text{an}}(\tau)$, la matrice de covariance des quadratures d'analyse est donnée par :

$$\sigma_{\text{an}}(t) = \int S_{\text{an}}(\tau) \sigma_{\text{out}}(t-\tau+\tau') S_{\text{an}}^T(\tau') d\tau d\tau' \quad (9.50)$$

Et un bon choix de $S_{\text{an}}(\tau)$ peut permettre d'obtenir $\sigma_{\text{an}}(t)$ diagonale

9.6.5 Hypothèses effectuées

Résumons enfin les hypothèses qui ont été effectuées. Ne pas les faire permettrait d'approfondir l'étude présentée dans ce chapitre.

$\hat{X}_{\text{OUT},s} \rightarrow \hat{X}_{\text{OUT}}$ Nous avons étudié pour sortie \hat{X}_{out} et non $\hat{X}_{\text{out},s}$. Les raisons pour faire cela ont été présentées en [sous-section 9.1.4](#). Notez également que pour une cavité sans pertes internes et à une seule sortie, $\hat{X}_{\text{out},s} = \hat{X}_{\text{out}}$. Si l'on ne souhaite pas faire cette approximation, la fonction de Green pour le champ intracavité $S(\tau)$ reste inchangée, mais pour la sortie il faut séparer les fonctions de Green selon l'indice s indexant le type de dissipation.

$\mathcal{K} = \kappa \mathbb{1}$ Dans le cas général $\mathcal{L}_{xp} \mathcal{K} \neq \mathcal{K} \mathcal{L}_{xp}$. Il faut alors être plus prudent dans tous les calculs effectués. Ceci dit, la méthode présentée est utilisable et permet d'exprimer les opérateurs des champs de sortie à partir de ceux d'entrée. Il faudra par contre vérifier que les fonctions de Green ont bien les propriétés attendues pour s'assurer qu'on peut effectuer la même décomposition de la matrice de covariance.

\mathcal{L}_{xp} ET \mathcal{K} INDÉPENDANTES DU TEMPS Cette hypothèse a été utilisée durant tout le chapitre. Remarquez que si la dépendance en temps est harmonique, un changement de variable peut permettre de se ramener au cas étudié. Dans le cas général, cela complique le problème. Il faudrait renoncer à l'hypothèse de stationnarité et à l'utilisation des transformées de Fourier. Une expression explicite de la fonction de Green existe mais n'est pas évidente à manipuler [130]; elle est souvent mise sous la forme d'une exponentielle précédée d'un opérateur d'ordonnancement temporel.

Dans ce chapitre, nous donnons deux exemples d'utilisation de la méthode présentée au chapitre précédent. Nous traiterons d'abord un cas connu qui a déjà été étudié en posant toutes les équations sans formalisme matriciel : celui d'un seul mode [13, 39]. Ensuite nous présenterons une configuration à quatre modes étudiée dans le cadre d'une collaboration avec un groupe expérimental.

Afin de se concentrer sur la méthode de résolution de l'équation de Langevin, peu de détail sont donnés sur l'obtention des hamiltoniens ; le chapitre suivant sera plus précis pour cet aspect.

10.1 UN MODE

Commençons par nous intéresser au cas monomode. Soit un milieu ayant une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$ placé dans une cavité. Nous considérons un cas dégénéré : seules deux des modes de la cavité sont pris en compte, un pour la pompe et un pour le champ étudié. Nous faisons dès à présent l'approximation dite « paramétrique » d'avoir une pompe classique harmonique d'intensité constante (sans perte) ; elle ne sera pas étudiée. Ainsi le système va être décrit par deux opérateurs bosoniques : \hat{a} et \hat{a}^\dagger , ou de manière équivalente deux quadratures \hat{x} et \hat{p} . Pour obtenir la forme du hamiltonien (6.1), nous utilisons la représentation d'interaction par rapport à l'oscillation à la fréquence moitié de celle de la pompe. Le hamiltonien de compression avec désaccord de fréquence s'écrit alors [39] :

$$\hat{H} = \hbar\Delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\hbar\frac{g}{2}\left[\left(\hat{a}^\dagger\right)^2 - \hat{a}^2\right] \quad (10.1)$$

où Δ est la différence entre la fréquence du mode de la cavité et la moitié de celle de la pompe, et g décrit la non-linéarité ; il dépend de l'amplitude de la pompe, des caractéristiques du matériau et de facteurs géométriques.

En utilisant l'équation (7.16), on obtient la matrice de couplage des quadratures :

$$\mathcal{L}_{xp} = \begin{pmatrix} g & \Delta \\ -\Delta & -g \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

On peut alors s'intéresser à la transformée de Fourier de la matrice de covariance, donnée par l'équation (9.35), où la fonction de Green est elle-même la solution de l'équation de Langevin, donnée par l'équation (9.59).

Remarquez qu'on peut repérer une quadrature normée \hat{z} quelconque par un unique angle θ tel que $\hat{z} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{p}$.

L'objectif du chapitre étant d'illustrer les méthodes génériques, nous ne donnons pas les expressions analytiques des matrices impliquées dans un souci de simplicité, même si cela serait tout à fait possible. Pour les tracés nous adimensionnons les fréquences

par le taux de dissipation κ . Les graphiques seront donnés dans le cas particulier où $g/\kappa = 1$ et $\Delta/\kappa = 1$.

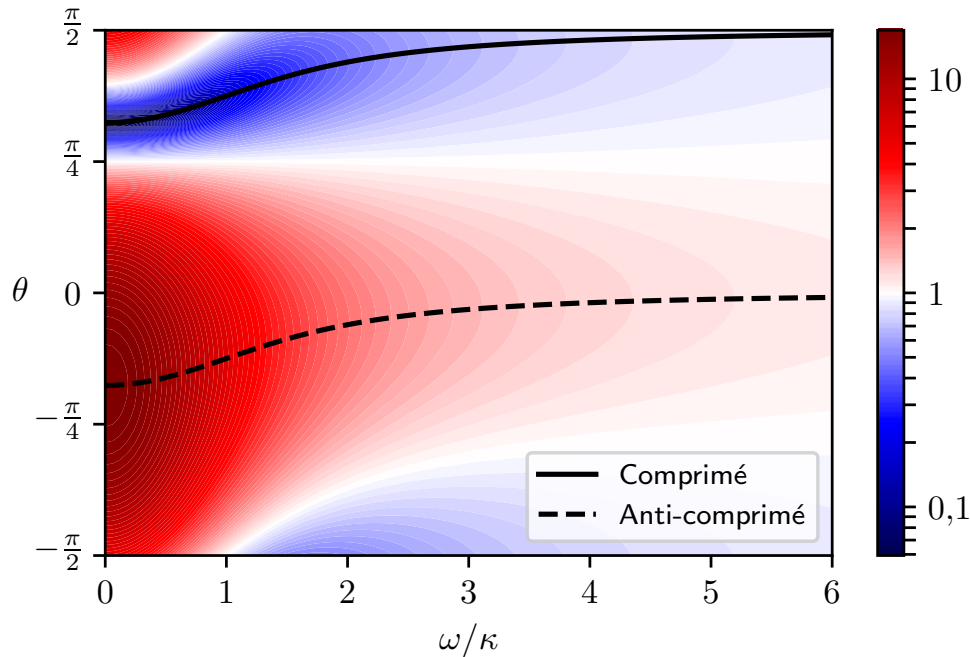


FIGURE 10.1 – Densité spectrale de bruit en fonction de la pulsation ω et de l'angle θ de la quadrature. Les deux courbes représentent chacune l'angle d'un vecteur propre de $\tilde{\sigma}$. Le bruit du vide est normalisé à 1 et l'échelle de couleurs est logarithmique.

Pour chaque quadrature fixe, paramétrée par θ , le spectre de bruit s'exprime grâce à l'équation (9.48). On représente sur la figure 10.1 le spectre de bruit en fonction de la quadrature considérée et de la fréquence. L'expression du spectre de bruit de \hat{z} à partir de la décomposition de $\tilde{\sigma}$ (équation (9.49)) montre que pour chaque ω la densité de bruit varie entre les deux valeurs propres de $\tilde{\sigma}(\omega)$; elles sont chacune atteinte par la quadrature correspondant au vecteur propre associé. Cela est mis en évidence par les deux courbes montrant l'angle des vecteurs propres en fonction de la fréquence. On observe bien qu'elles suivent la vallée et la ligne de crêtes.

Afin d'illustrer le spectre de bruit des quadratures fixes, traçons un ensemble de coupes horizontales de la figure précédente dans la figure 10.2, ainsi que les deux valeurs propres de $\tilde{\sigma}$ en fonction de ω . Cette figure illustre bien le fait que la compression optimale est atteinte à chaque fréquence par une quadrature différente.

10.2 QUATRE MODES

Voyons maintenant une configuration impliquant quatre modes. Celle-ci a été étudiée dans le cadre d'une collaboration avec le groupe de photonique non linéaire de l'Institut National de la Recherche Scientifique québécois, dirigé par Roberto Morandotti¹, et

1. <https://www.nonlinearphotonics.com/>, INRS Énergie, Matériaux et Télécommunications, 1650 Blvd Lionel Boulet, J3X 1S2, Varennes, Québec, Canada.

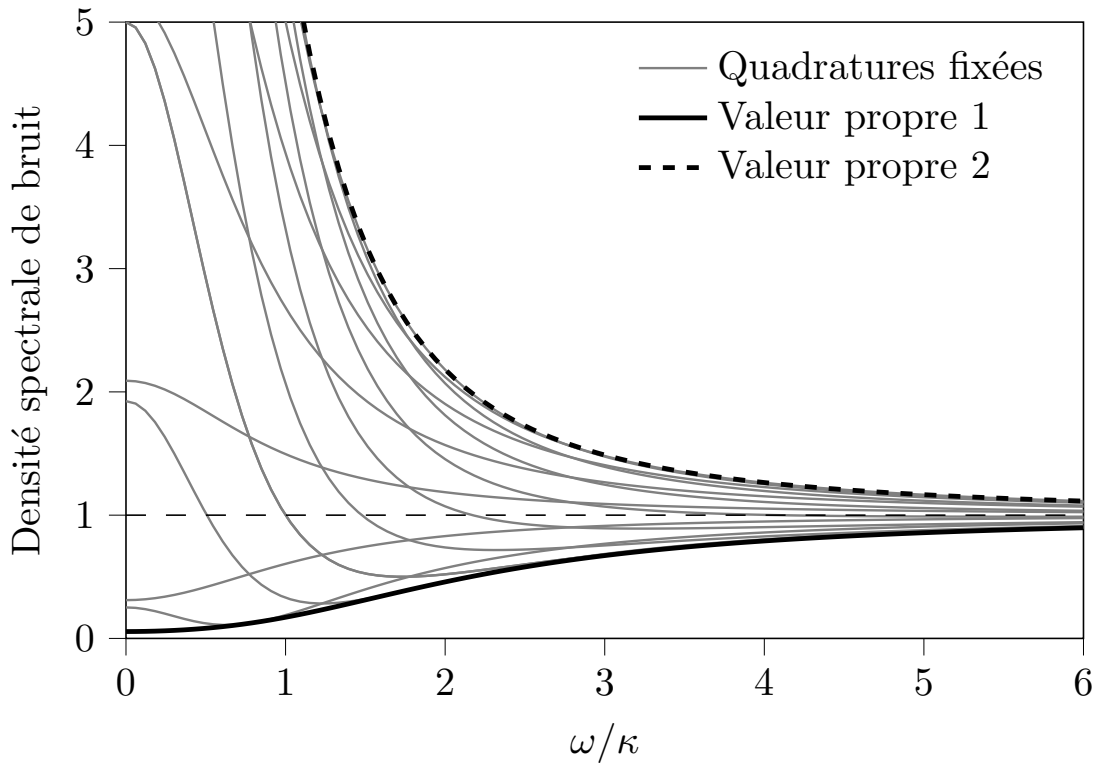


FIGURE 10.2 – Spectre de bruit pour 15 quadratures fixes réparties entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Les valeurs propres de $\tilde{\sigma}(\omega)$ sont également tracées. Le bruit du vide est ici normalisé à 1.

avec Alessandro Zavatta². L'objectif principal du travail présenté est de guider les expérimentateurs pour leur permettre de développer des sources de lumière comprimée, ainsi que de caractériser les états générés en utilisant le moins de détections homodynes possibles.

10.2.1 Configuration

Un micro-résonateur en anneau est fabriqué à partir d'un guide d'onde réalisé dans un verre nommé « Hydex » présentant une non-linéarité de type $\chi^{(3)}$ et dont la composition est maintenue secrète [92]. Le dispositif a déjà été utilisé avec succès pour générer de l'intrication en régime de paires de photons [65, 107]; nous allons étudier la génération de lumière comprimée multimode. Plus précisément l'objectif est de guider le travail expérimental en décrivant comment mesurer une réduction des fluctuations comparativement au vide.

Deux polarisations orthogonales notées \leftrightarrow et \updownarrow sont guidées dans l'anneau. L'indice optique effectif des deux polarisations est légèrement différent de sorte que les résonances sont décalées, mais faiblement comparativement à l'intervalle spectral libre moyen des deux polarisations. Pour chaque polarisation nous utilisons trois résonances

2. http://research.ino.it/Groups/extreme_light/, LENS et Département de Physique, Università di Firenze, 50019 Sesto Fiorentino, Firenze, Italia; Istituto Nazionale di Ottica (INO-CNR) Largo Enrico Fermi 6, 50125 Firenze, Italia.

successives, indexées par $l \in \{-1, 0, 1\}$; les deux extrêmes ($l = \pm 1$) sont les modes dont nous cherchons à déterminer les propriétés de fluctuation tandis que dans chacune des polarisations de $l = 0$, une pompe est injectée. Le tenseur de non-linéarité $\chi^{(3)}$ permet le couplage entre ondes ayant la même polarisation et également entre polarisations orthogonales. Le mélange à quatre ondes dans lequel toutes les ondes ont la même polarisation est dénommé type 0 tandis que celui pour lequel deux ondes ont une polarisation et les deux autres la polarisation orthogonale est appelé type II [107]. Les paramètres du résonateur sont choisis de manière à ce que tous les accords de phases soient simultanément réalisés. La configuration est résumée par la [figure 10.3](#).

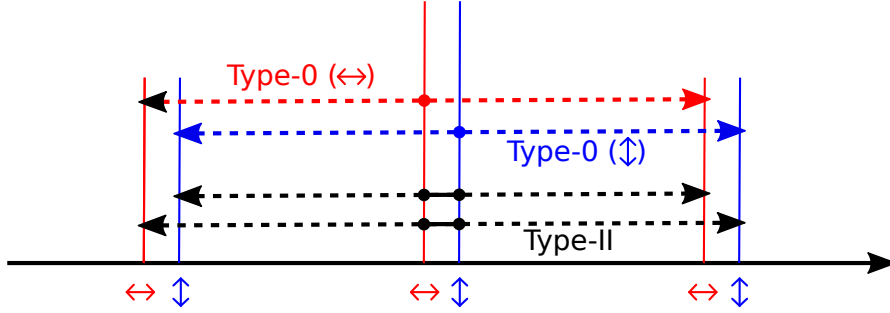


FIGURE 10.3 – Configuration des pompes et accords de phase.

Par ailleurs, l'anneau est couplé à deux guides d'ondes. Nous verrons que cela a de l'importance pour la collection de la lumière générée.

10.2.2 Hamiltonien

10.2.2.1 Établissement du hamiltonien

Nous travaillons en représentation d'interaction. De nouveau nous passons les détails de l'établissement du hamiltonien; le lecteur désirant plus de détails est invité à consulter l'article [18]. Précisons que nous considérons les pompes comme classiques (approximation semi-classique) et n'étudions pas leur évolution. Tout désaccord de fréquence entre les pompes et les modes de la cavité est également négligé. Ajoutons qu'on suppose les accords de phase exacts. Ainsi, en représentation d'interaction les coefficients du hamiltonien ont soit une rotation rapide, et sont éliminés par l'approximation de l'onde tournante, soit sont supposés exactement constants. Enfin l'étude va être réalisée en dessous du seuil de la cavité.

Le hamiltonien d'interaction lié au mélange à quatre ondes est proportionnel à la puissance 4 du champ électrique³. Dans la configuration choisie pour laquelle les fréquences des pompes et des modes étudiées sont proches, seuls les termes pour lesquels deux opérateurs de création et deux d'annihilation sont impliqués ne sont pas en rotation rapide. Ainsi on peut de manière générique écrire le hamiltonien d'interaction sous la forme :

$$\hat{H}_{\text{FWM}} = -\frac{1}{2}\hbar \sum_{i,j,m,n} g_{i,j,m,n} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n \quad (10.3)$$

3. Plus de détails sur cet aspect seront donnés au [chapitre 11](#).

où les indices i, j, m et n désignent les modes et peuvent s'écrire (l, P) avec $l \in \{-1, 0, 1\}$ et $P \in \{\leftrightarrow, \updownarrow\}$. Les coefficients de couplage non linéaire $g_{i,j,m,n}$ prennent comme valeurs 0 quand l'interaction n'est pas permise par la configuration, g_{\leftrightarrow} et g_{\updownarrow} pour les deux interactions de type 0, g_{II} pour les interactions de type II⁴. Ces coefficients s'expriment à partir de composantes du tenseur de polarisabilité non linéaire $\chi^{(3)}$ et de facteurs géométriques.

Afin d'être plus explicite, nous allons séparer cette somme en plusieurs termes, chacun décrivant un type d'interaction correspondant à une catégorie de l'optique non-linéaire [18]. Nous en profitons également pour mettre en œuvre les approximations effectuées. Conformément à l'approximation semi-classique, on remplace les opérateurs $\hat{a}_{0,P}$ par les amplitudes classiques \mathcal{A}_P ($P \in \{\leftrightarrow, \updownarrow\}$). L'amplitude des modes $l = \pm 1$ est considérée négligeable par rapport à celle des pompes, ce qui est le cas tant qu'on travaille en dessous du seuil de la cavité. On néglige donc les termes n'impliquant pas au moins deux pompes. Par ailleurs, tous les termes en rotation rapide sont également négligés.

Une première catégorie d'interaction est la modulation de phase croisée, appelée en anglais Cross Phase Modulation (CPM). Seuls les termes impliquant une pompe et un mode sont intéressants et non négligeables. On subdivise ces termes en trois catégories, une par composante du tenseur $\chi^{(3)}$:

$$\hat{H}_{\text{CPM},\leftrightarrow} = -2\hbar g_{\leftrightarrow} |\mathcal{A}_{\leftrightarrow}|^2 \sum_{l=\pm 1} \hat{a}_{l,\leftrightarrow}^\dagger \hat{a}_{l,\leftrightarrow} \quad (10.4a)$$

$$\hat{H}_{\text{CPM},\updownarrow} = -2\hbar g_{\updownarrow} |\mathcal{A}_{\updownarrow}|^2 \sum_{l=\pm 1} \hat{a}_{l,\updownarrow}^\dagger \hat{a}_{l,\updownarrow} \quad (10.4b)$$

$$\hat{H}_{\text{CPM,II}} = -2\hbar g_{\text{II}} \sum_{P \in \{\leftrightarrow, \updownarrow\}} |\mathcal{A}_{P^\perp}|^2 \sum_{l=\pm 1} \hat{a}_{l,P}^\dagger \hat{a}_{l,P} \quad (10.4c)$$

Notez que le pré-facteur vient du fait que chacun de ces termes apparaît quatre fois dans l'équation (10.3).

Ensuite nous regroupons les termes décrivant des créations de paires de photons, qu'on désignera par l'expression anglaise « Four-wave Mixing (FWM) ». Nous séparons de nouveau les trois types d'interaction.

$$\hat{H}_{\text{FWM},\leftrightarrow} = -\hbar g_{\leftrightarrow} \left[(\mathcal{A}_{\leftrightarrow}^*)^2 \hat{a}_{-1,\leftrightarrow} \hat{a}_{1,\leftrightarrow} + (\mathcal{A}_{\leftrightarrow})^2 \hat{a}_{-1,\leftrightarrow}^\dagger \hat{a}_{1,\leftrightarrow}^\dagger \right] \quad (10.4d)$$

$$\hat{H}_{\text{FWM},\updownarrow} = -\hbar g_{\updownarrow} \left[(\mathcal{A}_{\updownarrow}^*)^2 \hat{a}_{-1,\updownarrow} \hat{a}_{1,\updownarrow} + (\mathcal{A}_{\updownarrow})^2 \hat{a}_{-1,\updownarrow}^\dagger \hat{a}_{1,\updownarrow}^\dagger \right] \quad (10.4e)$$

$$\hat{H}_{\text{FWM,II}} = -2\hbar g_{\text{II}} \sum_{P \in \{\leftrightarrow, \updownarrow\}} \left[(\mathcal{A}_P^* \mathcal{A}_{P^\perp}) \hat{a}_{-1,P} \hat{a}_{1,P^\perp} + (\mathcal{A}_P \mathcal{A}_{P^\perp}) \hat{a}_{-1,P}^\dagger \hat{a}_{1,P^\perp}^\dagger \right] \quad (10.4f)$$

Enfin, nous avons un terme dit de « conjugaison de phase » mélangeant les deux polarisations et dénommé pour les indices « Phase Conjugaison (PC) » :

$$\hat{H}_{\text{PC,II}} = -2\hbar g_{\text{II}} \sum_{P \in \{\leftrightarrow, \updownarrow\}} \mathcal{A}_{P^\perp}^* \mathcal{A}_P \sum_{l=\pm 1} \hat{a}_{l,P}^\dagger \hat{a}_{l,P^\perp} \quad (10.4g)$$

4. Le tenseur $\chi^{(3)}$ étant supposé indépendants de la fréquence pour tous les modes considérés, ses symétries intrinsèques nous assurent que les coefficients des non-linéarités de type II sont tous égaux.

Le nombre de termes différents est assez conséquent. Afin d'être certain de ne pas en avoir oublié, nous avons utilisé un programme écrit en Python énumérant les 1 296 termes de l'équation (10.3) et en extrayant les 72 présentés dans les équations (10.4), permettant également de vérifier les pré-facteurs.

Remarque. Nous avons ici supposé les accords de phase réalisés *a priori*. En fait les accords de phases pour les termes $\hat{H}_{\text{FWM,II}}$ et $\hat{H}_{\text{PC,II}}$ sont équivalents. Ainsi il est impossible de se débarrasser de $\hat{H}_{\text{PC,II}}$ uniquement par une ingénierie des matériaux ou des guides d'ondes. \diamond

10.2.2.2 Ré-expression du hamiltonien

Mettons le hamiltonien sous la forme de l'équation (6.1). Plus précisément nous allons expliciter les matrices F et G . Pour cela nous utilisons l'ordre suivant pour indexer les modes par un unique entier : $(-1, \leftrightarrow)$, $(-1, \updownarrow)$, $(1, \leftrightarrow)$, $(1, \updownarrow)$. De nouveau le placement des différents termes a été contrôlé par ordinateur par énumération. On obtient les matrices F et G :

$$F = \left(\begin{array}{c|c} 0 & F_{1,2} \\ \hline F_{1,2} & 0 \end{array} \right) \quad G = \left(\begin{array}{c|c} G_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & G_{1,1} \end{array} \right)$$

$$\text{avec } F_{1,2} = -\frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} g_{\leftrightarrow} \mathcal{A}_{\leftrightarrow}^2 & 2g_{\text{II}} \mathcal{A}_{\leftrightarrow} \mathcal{A}_{\updownarrow} \\ 2g_{\text{II}} \mathcal{A}_{\leftrightarrow} \mathcal{A}_{\updownarrow} & g_{\updownarrow} \mathcal{A}_{\updownarrow}^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } G_{1,1} = -2\hbar \begin{pmatrix} |\mathcal{A}_{\leftrightarrow}|^2 g_{\leftrightarrow} + |\mathcal{A}_{\updownarrow}|^2 g_{\text{II}} & \mathcal{A}_{\updownarrow}^* \mathcal{A}_{\leftrightarrow} g_{\text{II}} \\ \mathcal{A}_{\leftrightarrow}^* \mathcal{A}_{\updownarrow} g_{\text{II}} & |\mathcal{A}_{\updownarrow}|^2 g_{\updownarrow} + |\mathcal{A}_{\leftrightarrow}|^2 g_{\text{II}} \end{pmatrix}$$

On remarque que les blocs diagonaux de F et antidiagonaux de G sont nécessairement nuls pour respecter la conservation de l'énergie. Pour F ils correspondent à la création (ou l'annihilation pour F^\dagger) de deux photons d'énergie proche, ce qui est impossible. Pour G en revanche, les photons créés et détruits ne peuvent pas avoir une différence d'énergie plus importante que celle entre les pompes.

Les éléments diagonaux de $F_{1,2}$ correspondent aux créations par non-linéarité de type 0 tandis que ceux antidiagonaux correspondent au type II.

Pour $G_{1,1}$, la diagonale correspond aux modulations de phases croisées entre un mode et les pompes (lui-même somme d'un terme pour le type 0 et un pour le type II). L'antidiagonale correspond à la conjugaison de phase, destruction d'un photon de pompe et d'un mode et création d'un photon dans l'autre pompe et d'un dans le mode de même l , mais de polarisation orthogonale. Schématiquement on pourrait écrire : $\hat{a}_{l,p} + \mathcal{A}_{p\perp} \rightarrow \hat{a}_{l,p}^\dagger + \mathcal{A}_{p\perp}^*$.

10.2.3 Diagonalisation par blocs dans un cas équilibré

En se plaçant dans le cas où les deux pompes ont la même amplitude réelle (pompes en phase) et les deux processus de type 0 le même coefficient de non-linéarité, F et G commutent. Comme F est réelle, la décomposition de Takagi coïncide avec une

diagonalisation. On est donc dans un cas où l'on peut co-décomposer F et G et donc utiliser la méthode exposée en [sous-section 9.2.4](#).

On peut même être plus général et ne pas faire l'hypothèse que les amplitudes soient réelles. Soit \mathcal{A} un nombre réel; on se place dans le cas où $\mathcal{A}_\uparrow = e^{i\varphi_\leftrightarrow} \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\leftrightarrow = e^{i\varphi_\uparrow} \mathcal{A}$ et $g_\leftrightarrow = g_\uparrow$ qu'on notera g_0 . La matrice unitaire U effectuant simultanément la diagonalisation de G et la décomposition de Takagi de F peut être choisie telle que :

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_\leftrightarrow} & ie^{i\varphi_\leftrightarrow} & e^{i\varphi_\leftrightarrow} & ie^{i\varphi_\leftrightarrow} \\ e^{i\varphi_\uparrow} & ie^{i\varphi_\uparrow} & -e^{i\varphi_\uparrow} & -ie^{i\varphi_\uparrow} \\ -e^{i\varphi_\leftrightarrow} & ie^{i\varphi_\leftrightarrow} & -e^{i\varphi_\leftrightarrow} & ie^{i\varphi_\leftrightarrow} \\ -e^{i\varphi_\uparrow} & ie^{i\varphi_\uparrow} & e^{i\varphi_\uparrow} & -ie^{i\varphi_\uparrow} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$F = U \left[\frac{1}{2} \hbar A^2 \begin{pmatrix} g_0 + 2g_{\text{II}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_0 + 2g_{\text{II}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 - 2g_{\text{II}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_0 - 2g_{\text{II}} \end{pmatrix} \right] U^T$$

$$G = U \left[-2\hbar A^2 \begin{pmatrix} g_0 + 2g_{\text{II}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_0 + 2g_{\text{II}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix} \right] U^+$$

On remarque immédiatement que U est indépendante des paramètres de non-linéarité et de l'intensité des pompes; les symétries de la configuration choisie suffisent à déterminer U . Remarquons aussi que F et G sont dégénérées.

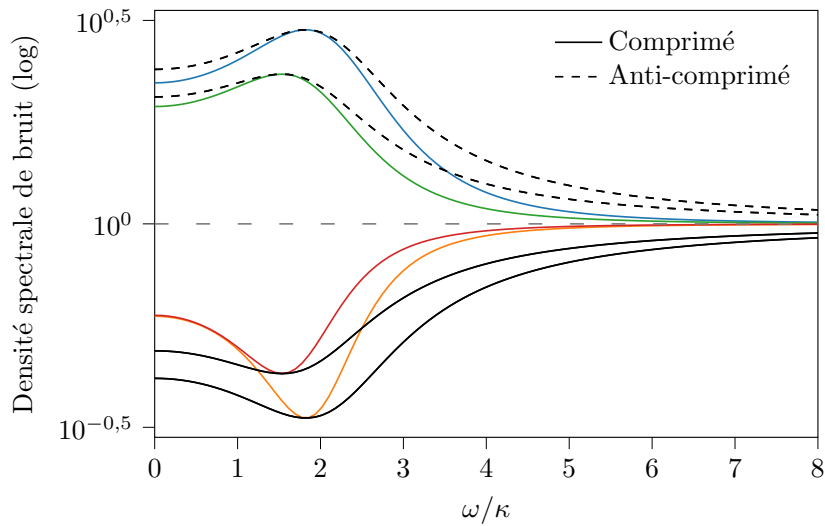
Remarque. La condition d'équilibre présentée n'est pas forcément la plus générale pour effectuer la décomposition simultanée de F et G , mais n'en est pas loin. En effet, une condition nécessaire pour que les deux décompositions soient réalisables simultanément est que $|\mathcal{A}_\leftrightarrow|^2 g_\leftrightarrow = |\mathcal{A}_\uparrow|^2 g_\uparrow$ ou $|\mathcal{A}_\leftrightarrow|^2 (g_\leftrightarrow - 2g_{\text{II}}) = |\mathcal{A}_\uparrow|^2 (g_\uparrow - 2g_{\text{II}})$. \diamond

Voyons maintenant la comparaison entre ces résultats et la méthode générique.

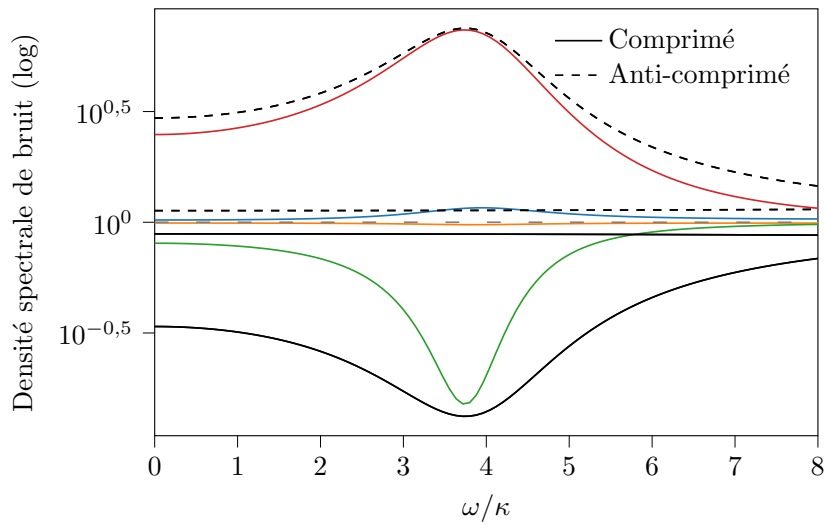
10.2.4 Méthode générique

La [sous-section 9.2.1](#) nous donne à partir de U la forme de la matrice de passage pour la diagonalisation par blocs de \mathcal{L}_{xp} . Ses colonnes définissent des quadratures qui subissent indépendamment une compression avec désaccord de fréquence. La densité spectrale de puissance de ces quadratures fixes est comparée aux valeurs singulières de la matrice de covariance $\tilde{\sigma}$ dans la [sous-figure 10.4a](#). On constate que ces quadratures permettent d'atteindre ponctuellement les optima.

En revanche, lorsqu'on modifie l'équilibre d'intensité des deux pompes, les quadratures fixes présentées à la sous-section précédente n'atteignent plus les optima, comme illustré par la [sous-figure 10.4b](#).



(a) Cas équilibré.



(b) Cas déséquilibré.

FIGURE 10.4 – Spectre de compression dans un cas équilibré entre les deux polarisations pour (a) et dans un cas déséquilibré pour (b). Les valeurs propres de $\tilde{\sigma}(\omega)$ sont représentées en noir ; les densités spectrales de bruit des quadratures présentées en [sous-section 10.2.3](#) sont en couleurs. L'échelle de compression est logarithmique.

En conclusion, en équilibrant les deux pompes l'expérimentateur pourra régler ses interféromètres d'analyse afin d'observer les quadratures fixes présentées à la section précédente et il observera la compression optimale. Ce réglage n'est pas sensible aux paramètres de la cavité, mais il faut s'assurer que la symétrie entre les deux polarisations est rigoureusement respectée, et que leur phase relative est bien celle correspondant à l'interféromètre d'analyse.

10.2.5 Récupération des deux sorties

Comme évoqué dans la présentation du système, le micro-résonateur en anneau envisagé pour les expériences est conçu couplé avec deux guides d'ondes différents, comme illustré par la [figure 10.5](#).

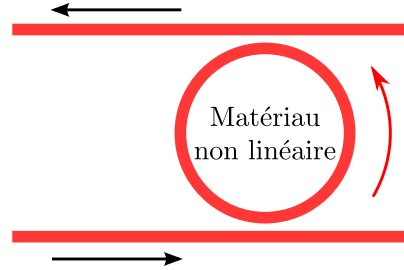


FIGURE 10.5 – Configuration de l'anneau couplé à deux guides d'onde.

Si cela constitue un avantage technique, cela induit également un problème majeur : la lumière comprimée sortira dans les deux guides d'ondes. Nous allons voir une manière de le régler mettant en pratique ce qui a été vu dans la [sous-section 9.1.4](#). Pour la suite nous supposons par simplicité qu'il n'y a pas de pertes internes. Nous faisons aussi l'hypothèse que pour chaque guide le coefficient de couplage avec la cavité est indépendant du mode. Indexons par 1 et 2 les deux guides d'ondes. L'[équation \(9.6\)](#) donnant les champs en sortie de la cavité à partir des champs internes et incidents se traduit ici par :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{\text{out},1} &= \sqrt{2\kappa_1}\hat{X} - \hat{X}_{\text{in},1} \\ \hat{X}_{\text{out},2} &= \sqrt{2\kappa_2}\hat{X} - \hat{X}_{\text{in},2}\end{aligned}$$

Nous souhaitons effectuer physiquement la recombinaison présentée en [équation \(9.7\)](#) et récupérer

$$\hat{X}_{\text{out}} = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa}}\hat{X}_{\text{out},1} + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa}}\hat{X}_{\text{out},2}$$

avec $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$. Pour cela nous allons combiner la lumière des deux guides sur une lame séparatrice. Après analyse, on obtient que le bon choix de séparatrice est celui dont la matrice de transformation d'opérateurs bosoniques est donnée par :

$$U = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa_1} & \sqrt{\kappa_2} \\ -\sqrt{\kappa_2} & \sqrt{\kappa_1} \end{pmatrix}$$

Notons $\hat{X}_{\text{an},1}$ et $\hat{X}_{\text{an},2}$ les opérateurs de quadrature après la séparatrice. Comme les coefficients sont tous réels, les opérateurs de quadrature se transforment de la même manière que les opérateurs bosoniques. Ainsi :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{\text{an},1} &= \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa}}\hat{X}_{\text{out},1} + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa}}\hat{X}_{\text{out},2} \\ \hat{X}_{\text{an},2} &= -\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa}}\hat{X}_{\text{out},1} + \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa}}\hat{X}_{\text{out},2}\end{aligned}$$

On a donc $\hat{X}_{\text{an},1} = \hat{X}_{\text{out}}$; il est possible de récupérer les opérateurs décrits théoriquement. Par ailleurs, $\hat{X}_{\text{an},2} = \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa}} \hat{X}_{\text{in},1} - \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa}} \hat{X}_{\text{in},2}$; la deuxième sortie de la séparatrice d'analyse est peuplée uniquement de vide. De plus on peut vérifier que les opérateurs de cette sortie commutent avec ceux de $\hat{X}_{\text{in}} = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa}} \hat{X}_{\text{in},1} + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa}} \hat{X}_{\text{in},2}$.

Pour conclure, nous venons de voir qu'il est possible de régler le problème lié au fait d'avoir deux sorties différents en les faisant interférer sur une lame séparatrice bien choisie. On récupère alors d'un côté toute la lumière comprimée et de l'autre du vide.

OSCILLATEUR POMPÉ DE MANIÈRE SYNCHRONE

Pour générer un état gaussien de grande dimension, une méthode consiste à utiliser une cavité contenant un milieu non-linéaire et à s'intéresser à ses différents modes propres, chacun ayant sa fréquence de résonance (on suppose qu'un seul mode spatial transverse est utilisé). Par ailleurs, pour que l'état généré ne soit pas factorisable sur des espaces de basse dimension, on pompe le milieu non-linéaire à un grand nombre de fréquences différentes, par exemple à l'aide de lasers pulsés. Il faut pour cela que les pompes soient également résonnantes dans la cavité, ce qui est possible en utilisant un peigne de fréquences dont l'écartement des dents (donné par le taux de répétition des impulsions) correspond précisément à l'intervalle spectral libre de la cavité. On parle alors d'oscillateur paramétrique optique pompé en mode synchrone ; le terme utilisé en anglais est : Synchronously Pumped Optical Parametric Oscillator (SPOPO). Nous nous intéressons en particulier à la dynamique de système sous le seuil.

Pour une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$ ce dispositif a déjà été beaucoup étudié théoriquement [19, 101] et expérimentalement [31, 33, 58, 85, 112]. Avec l'émergence des micro-résonateurs en anneau réalisés sur des puces de silicium, il devient envisageable de miniaturiser ces systèmes et de bénéficier des avantages de l'optique intégrée [18, 82, 107, 122, 137]. En particulier, les micro-résonateurs se montrent particulièrement stables et nécessitent peu de procédures d'alignement complexes. Il faut par contre remarquer une différence notable : la non-linéarité de ces systèmes est de type $\chi^{(3)}$ et ainsi les modèles théoriques existants ne sont pas adaptés à leur description. Ce chapitre a pour ambition de proposer une configuration de SPOPO dont la non-linéarité est de type $\chi^{(3)}$, d'établir le hamiltonien d'interaction et d'étudier les solutions de l'équation de Langevin associée.

11.1 STRATÉGIE POUR LE MÉLANGE À QUATRE ONDES

Avec une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$, la génération de lumière comprimée autour d'une pulsation ω s'effectue typiquement avec une pompe de pulsation 2ω . Par conséquent il y a une séparation importante entre les fréquences de pompes et des modes étudiés.

Une différence notable des systèmes exploitant une non-linéarité de type $\chi^{(3)}$ est que les pompes et modes étudiés ont typiquement des fréquences proches. Il faut donc introduire un moyen de séparer pompes et modes étudiés. Pour cela nous avons plusieurs options ; on peut utiliser la polarisation, les modes spatiaux transverses ou bien la fréquence (*i.e.* les modes longitudinaux du résonateur).

Nous proposons ici une configuration pour laquelle les pompes et modes étudiés se distinguent par leurs fréquences. Plus précisément la solution retenue consiste à alterner à chaque intervalle spectral libre entre une pompe et un mode étudié. Elle est

illustrée par la [figure 11.1](#) où les pompes sont en noir et les modes étudiés en rouge ; la signification des notations qui apparaissent sur la figure sera précisée dans les sections suivantes. Par ailleurs, nous effectuons le choix d'utiliser une seule polarisation rectiligne commune pour tous les modes étudiés et les pompes.

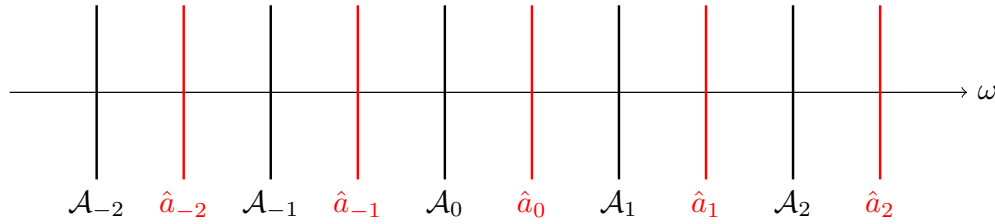


FIGURE 11.1 – Configuration des modes étudiés (en rouge) et pompes (en noir), ainsi que la numérotation associée.

Pour réaliser expérimentalement une telle configuration, il faut être capable de générer le peigne de fréquences pour la pompe ainsi que de le séparer des modes étudiés après le passage dans la cavité. Pour cela on pourra par exemple utiliser deux anneaux du même type que celui de la cavité effectuant la compression, mais ayant un rayon moitié (intervalle spectral double) et les utiliser au-dessus du seuil pour la génération et passivement pour le filtrage.

11.2 ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE CLASSIQUE

Afin d'établir le hamiltonien d'interaction décrivant les effets non linéaires, nous allons commencer par donner l'expression classique de l'énergie électromagnétique. Une introduction complète à l'optique non-linéaire serait trop longue pour être présentée ici mais le lecteur est encouragé à consulter la thèse [46] qui donne une introduction rigoureuse au sujet. Par ailleurs le cours [48] détaille l'utilisation des différentes approximations nécessaires à l'obtention des équations de propagation dans les cas pratiques.

Soit un milieu polarisable électriquement mais non magnétique. On pose \vec{P} le vecteur de polarisation du milieu. On rappelle qu'en l'absence de charges et courants libres la densité de charges est donnée par $\rho = -\text{div } \vec{P}$ et celle de courant par $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= 0 & \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

en ayant défini $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

On pose $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ le vecteur de Poynting. En utilisant que $\text{div } \vec{E} \wedge \vec{B} = \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}$ et les équations de Maxwell, on obtient l'équation de conservation locale de l'énergie :

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \text{div } \vec{\Pi} = 0 \quad (11.1)$$

Ainsi les deux termes de gauche sont la dérivée temporelle de la densité d'énergie. Nous allons l'exprimer en ajoutant des hypothèses permettant d'explicitier une relation de structure (qui lie \vec{P} à \vec{E}).

Premièrement, nous considérons que la polarisation non linéaire du milieu est donnée exclusivement par le terme d'ordre 3. Cela revient à considérer que $\chi^{(2)} = 0$ et qu'on néglige les ordres supérieurs à 3. Comme nous l'avons vu, nous effectuons l'hypothèse qu'une seule polarisation est utilisée pour tous les modes. Ainsi seule une composante de chacun des tenseurs $\chi^{(1)}$ et $\chi^{(3)}$ sera utilisée et on peut donc les considérer comme des scalaires. De plus nous effectuons l'hypothèse qu'ils sont indépendants de la fréquence, au moins sur la plage étudiée; cela peut se reformuler en disant que le milieu est considéré comme ayant une réponse instantanée. Enfin nous supposons que la non-linéarité du matériau est homogène spatialement, c'est-à-dire que $\chi^{(3)}$ est indépendant de la position. Cette hypothèse n'est pas utile immédiatement mais le sera dans la suite. Ainsi en notant E et P le champ électrique et la polarisation du milieu scalaires¹, la relation de structure s'écrit :

$$P(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3(\vec{r}, t)$$

La densité d'énergie électromagnétique h apparaissant dans l'équation (11.1) vérifie alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial t} B + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} E + \varepsilon_0 \chi^{(1)} \frac{\partial E}{\partial t} E + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{\partial E^3}{\partial t} E \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial t} B + \varepsilon_0 \left(1 + \chi^{(1)}\right) \frac{\partial E}{\partial t} E + 3\varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{\partial E}{\partial t} E^3 \end{aligned}$$

qui s'intègre en :

$$h = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(1 + \chi^{(1)}\right) E^2 + \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^4$$

Les deux premiers termes sont ceux de la composante linéaire de la densité d'énergie tandis que le dernier provient du terme non linéaire. L'énergie totale est donnée par l'intégrale sur tout l'espace de h .

11.3 HAMILTONIEN D'INTERACTION

11.3.0.1 Quantification

En considérant le terme non-linéaire comme perturbatif, nous ne le prenons pas en compte pour la définition des opérateurs lors de la quantification. Nous remplacerons simplement dans son expression le champ électrique classique par l'opérateur de champ électrique. Ainsi le hamiltonien d'interaction qui s'exprime :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi^{(3)} \int \hat{E}^4(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (11.2)$$

La quantification est effectuée un peu différemment de ce qui est présenté au [chapitre 1](#) car l'indice optique peut ici dépendre de la position [45]. Une décomposition en modes

1. Projection sur la direction commune des vecteurs.

discrets indexés par l est également effectuée et l'expression du champ électrique est identique à (1.8b). Nous travaillons maintenant en représentation d'interaction² :

$$\hat{E}(\vec{r}) = i \sum_l \mathcal{E}_l \left(\hat{a}_l f_l(\vec{r}) e^{-i\omega_l t} - \hat{a}_l^\dagger f_l^*(\vec{r}) e^{i\omega_l t} \right) \quad \text{avec } \mathcal{E}_l = \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V}} \quad (11.3)$$

et les fonctions f_l (scalaires ici) vérifient une équation de Helmholtz impliquant l'indice optique et sont normalisées de manière à ce qu'avec V le volume de quantification :

$$\frac{1}{V} \int \left(1 + \chi^{(1)}(\vec{r}) \right) f_l^* f_{l'} d^3\vec{r} = \delta_{l,l'}$$

Du fait du choix de la représentation d'interaction, la partie linéaire du hamiltonien n'a plus besoin d'être prise en compte et \hat{H}_{int} suffit à décrire l'ensemble de la partie hamiltonienne de l'évolution.

11.3.0.2 Numérotation des modes

Souvenons-nous que nous travaillons dans un micro-résonateur en anneau. Nous numérotions les différents modes par leur nombre azimutal, comme indiqué sur la [figure 11.1](#), et supposons qu'ils partagent le même mode transverse. Par ailleurs nous rappelons que nous avons effectué l'hypothèse qu'il n'y a pas de dispersion, c'est-à-dire que l'indice optique ($\sqrt{1 + \chi^{(1)}}$) ne dépend pas de la fréquence. En notant ω_0 une pulsation dite centrale et $\Delta\omega$ l'intervalle spectral libre de la cavité, les pulsations des différents modes indexés par l sont données par $\omega_{p,l}$ pour les pompes et $\omega_{s,l}$ pour les modes de signal (modes étudiés) et on les exprime :

$$\begin{cases} \omega_{p,l} = \omega_0 + 2l\Delta\omega & l \in \mathbb{Z} \\ \omega_{s,l} = \omega_0 + (2l + 1)\Delta\omega \end{cases} \quad (11.4)$$

11.3.0.3 Approximation semi-classique

Dans l'expression (11.3) nous séparons les modes de pompe des modes étudiées. Les pompes sont considérées suffisamment intenses pour être décrites classiquement. De plus nous supposons leur absence de déplétion et leur stationnarité, de sorte que pour la pompe indexée par l nous remplaçons l'opérateur de destruction par la grandeur classique \mathcal{A}_l et celui de création par \mathcal{A}_l^* ; nous utiliserons l'hypothèse $|\mathcal{A}_l| \gg 1$. Nous ne cherchons pas à décrire la dynamique de ces grandeurs qui sont considérées constantes. Pour les opérateurs des modes étudiés nous gardons la notation \hat{a}_l et \hat{a}_l^\dagger sans préciser l'indice s . Les symboles introduits sont résumés dans la [figure 11.1](#).

Ainsi avec les nouvelles notations et approximations on peut réécrire le champ électrique en séparant le champ de pompe de celui de signal :

$$\hat{E}(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) + \hat{E}_s(\vec{r})$$

2. L'état quantique portera donc l'évolution lente, mais nous utiliserons de nouveau la représentation de Heisenberg plutôt que de l'expliciter.

avec

$$E_p(\vec{r}) = i \sum_l \mathcal{E}_{p,l} \left(\mathcal{A}_l f_{p,l}(\vec{r}) e^{-i\omega_{p,l}t} - \mathcal{A}_l^* f_{p,l}^*(\vec{r}) e^{i\omega_{p,l}t} \right)$$

$$\hat{E}_s(\vec{r}) = i \sum_l \mathcal{E}_{s,l} \left(\hat{a}_l f_{s,l}(\vec{r}) e^{-i\omega_{s,l}t} - \hat{a}_l^\dagger f_{s,l}^*(\vec{r}) e^{i\omega_{s,l}t} \right)$$

11.3.0.4 Développement

Afin d'en expliciter l'expression, nous allons développer le hamiltonien d'interaction, tout en appliquant des simplifications. En particulier nous effectuons l'approximation de l'onde tournante, qui consiste à négliger les termes du hamiltonien en rotation rapide.

Le champ de pompe étant classique, il commute avec le champ de signal. On peut ainsi effectuer le développement binomial :

$$E^4 = (E_p + \hat{E}_s)^4 = E_p^4 + 4E_p \hat{E}_s^3 + 6E_p^2 \hat{E}_s^2 + 4E_p \hat{E}_s^3 + \hat{E}_s^4$$

Parmi tous ces termes, remarquons que

- \hat{E}_p^4 est indépendant de l'état quantique, c'est une constante que nous n'avons pas besoin de prendre en compte.
- \hat{E}_s^4 est négligeable car il n'implique aucune pompe et $|\langle \hat{a}_l \rangle| \ll |\mathcal{A}_l|$ car nous travaillons sous le seuil de la cavité.

Les termes $4E_p \hat{E}_s^3$ et $4E_p \hat{E}_s^3$ peuvent également être négligés car ils sont en rotation rapide. Pour l'expliquer, considérons le premier. En développant la somme sur les modes, on obtient pour chaque terme (impliquant des indices notés m, n, l et q) une rotation à la pulsation $\pm\omega_{p,m} \pm \omega_{s,n} \pm \omega_{s,l} \pm \omega_{s,q}$, où les \pm sont là car on peut choisir à chaque fois la rotation dans un sens ou l'autre. En injectant la définition des différentes pulsations (équation (11.4)), on obtient que :

$$\pm \omega_{p,m} \pm \omega_{s,n} \pm \omega_{s,l} \pm \omega_{s,q}$$

$$= \omega_0 \underbrace{(\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1)}_{\in \{-4, -2, 0, 2, 4\}} + \Delta\omega \overbrace{\left(2[\pm m \pm n \pm l \pm q] + \underbrace{[\pm 1 \pm 1 \pm 1]}_{\in \{-3, -1, 1, 3\}} \right)}^{\text{impair} \neq 0}$$

Le facteur numérique de $\Delta\omega$ est un nombre impair qui ne peut donc pas être nul. On en conclut que tous les termes de $4E_p \hat{E}_s^3$ sont en rotation rapide. Il en va de même pour $4E_p^3 \hat{E}_s$.

Remarque. Si le terme $4E_p^3 \hat{E}_s$ n'avait pas pu être éliminé par l'approximation de l'onde tournante, il dominerait la somme car il comporte une amplitude de pompe au cube alors que le terme conservé est proportionnel à une amplitude de pompe au carré. C'est le choix de la configuration qui permet de le rendre négligeable. \diamond

Ainsi dans le cadre de ces approximations,

$$E^4 \approx 6E_p^2 \hat{E}_s^2$$

Nous développons maintenant E_p et \hat{E}_s suivant leurs modes :

$$E^4 \approx 6 \sum_{m,n,l,q} \mathcal{E}_{p,m} \mathcal{E}_{p,n} \mathcal{E}_{s,l} \mathcal{E}_{p,q} \left[\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_m f_{p,m}(\vec{r}) e^{-i\omega_{p,m}t} - \mathcal{A}_m^* f_{p,m}^*(\vec{r}) e^{i\omega_{p,m}t} \right) \left(\mathcal{A}_n f_{p,n}(\vec{r}) e^{-i\omega_{p,n}t} - \mathcal{A}_n^* f_{p,n}^*(\vec{r}) e^{i\omega_{p,n}t} \right) \\ & \left(\hat{a}_l f_{s,l}(\vec{r}) e^{-i\omega_{s,l}t} - \hat{a}_l^\dagger f_{s,l}^*(\vec{r}) e^{i\omega_{s,l}t} \right) \left(\hat{a}_q f_{s,q}(\vec{r}) e^{-i\omega_{s,q}t} - \hat{a}_q^\dagger f_{s,q}^*(\vec{r}) e^{i\omega_{s,q}t} \right) \end{aligned} \right]$$

Parmi tous les termes obtenus en développant chaque produit, seule une partie ne va pas être éliminée par l'approximation de l'onde tournante. En particulier, le facteur de ω_0 ne peut être nul que lorsque deux rotations sont dans un sens et les deux autres dans le sens opposé. Autrement dit, les processus considérés doivent détruire deux photons et en créer deux. Décrivons de manière symbolique (en désignant chaque terme uniquement par l'opérateur ou l'amplitude) dans le tableau suivant la possibilité ou non d'annuler le facteur de ω_0 pour chacun des 16 termes du développement :

\mathcal{A}_m	\mathcal{A}_n	\hat{a}_l	\hat{a}_q	×	\mathcal{A}_m^*	\mathcal{A}_n	\hat{a}_l	\hat{a}_q	×
\mathcal{A}_m	\mathcal{A}_n	\hat{a}_l	\hat{a}_q^\dagger	×	\mathcal{A}_m^*	\mathcal{A}_n	\hat{a}_l	\hat{a}_q^\dagger	✓
\mathcal{A}_m	\mathcal{A}_n	\hat{a}_l^\dagger	\hat{a}_q	×	\mathcal{A}_m^*	\mathcal{A}_n	\hat{a}_l^\dagger	\hat{a}_q	✓
\mathcal{A}_m	\mathcal{A}_n	\hat{a}_l^\dagger	\hat{a}_q^\dagger	✓	\mathcal{A}_m^*	\mathcal{A}_n	\hat{a}_l^\dagger	\hat{a}_q^\dagger	×
\mathcal{A}_m	\mathcal{A}_n^*	\hat{a}_l	\hat{a}_q	×	\mathcal{A}_m^*	\mathcal{A}_n^*	\hat{a}_l	\hat{a}_q	✓
\mathcal{A}_m	\mathcal{A}_n^*	\hat{a}_l	\hat{a}_q^\dagger	✓	\mathcal{A}_m^*	\mathcal{A}_n^*	\hat{a}_l	\hat{a}_q^\dagger	×
\mathcal{A}_m	\mathcal{A}_n^*	\hat{a}_l^\dagger	\hat{a}_q	✓	\mathcal{A}_m^*	\mathcal{A}_n^*	\hat{a}_l^\dagger	\hat{a}_q	×
\mathcal{A}_m	\mathcal{A}_n^*	\hat{a}_l^\dagger	\hat{a}_q^\dagger	×	\mathcal{A}_m^*	\mathcal{A}_n^*	\hat{a}_l^\dagger	\hat{a}_q^\dagger	×

Ainsi, seuls six termes du développement sont à conserver. On peut donc écrire (avec les approximations utilisées) :

$$E^4 \approx 6 \sum_{m,n,l,q} \mathcal{E}_{p,m} \mathcal{E}_{p,n} \mathcal{E}_{s,l} \mathcal{E}_{p,q} \left[\begin{aligned} & e^{i(-\omega_{p,m} - \omega_{p,n} + \omega_{s,l} + \omega_{s,q})t} f_{p,m}(\vec{r}) f_{p,n}(\vec{r}) f_{s,l}^*(\vec{r}) f_{s,q}^*(\vec{r}) \mathcal{A}_m \mathcal{A}_n \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_q^\dagger \\ & + e^{i(-\omega_{p,m} + \omega_{p,n} - \omega_{s,l} + \omega_{s,q})t} f_{p,m}(\vec{r}) f_{p,n}^*(\vec{r}) f_{s,l}(\vec{r}) f_{s,q}^*(\vec{r}) \mathcal{A}_m \mathcal{A}_n^* \hat{a}_l \hat{a}_q^\dagger \\ & + e^{i(-\omega_{p,m} + \omega_{p,n} + \omega_{s,l} - \omega_{s,q})t} f_{p,m}(\vec{r}) f_{p,n}^*(\vec{r}) f_{s,l}^*(\vec{r}) f_{s,q}(\vec{r}) \mathcal{A}_m \mathcal{A}_n^* \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_q \\ & + e^{i(+\omega_{p,m} - \omega_{p,n} - \omega_{s,l} + \omega_{s,q})t} f_{p,m}^*(\vec{r}) f_{p,n}(\vec{r}) f_{s,l}(\vec{r}) f_{s,q}^*(\vec{r}) \mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_n \hat{a}_l \hat{a}_q^\dagger \\ & + e^{i(+\omega_{p,m} - \omega_{p,n} + \omega_{s,l} - \omega_{s,q})t} f_{p,m}^*(\vec{r}) f_{p,n}(\vec{r}) f_{s,l}^*(\vec{r}) f_{s,q}(\vec{r}) \mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_n \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_q \\ & + e^{i(+\omega_{p,m} + \omega_{p,n} - \omega_{s,l} - \omega_{s,q})t} f_{p,m}^*(\vec{r}) f_{p,n}^*(\vec{r}) f_{s,l}(\vec{r}) f_{s,q}(\vec{r}) \mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_n^* \hat{a}_l \hat{a}_q \end{aligned} \right]$$

Chacun de ces termes ne contribue pas nécessairement car il reste à y imposer l'absence de rotation rapide. Pour cela constatons que les 1 intervenant dans les définitions des pulsations de signal se simplifient :

$$\pm\omega_{p,m} \pm \omega_{p,n} \pm \omega_{s,l} \pm \omega_{s,q} = 2 [\pm m \pm n \pm l \pm q] \Delta\omega$$

Ainsi on va remplacer dans l'expression de E^4 les exponentielles par des symboles de Kronecker (on utilise un seul indice et la comparaison est toujours effectuée par rapport à 0) :

$$E^4 \approx 6 \sum_{m,n,l,q} \mathcal{E}_{p,m} \mathcal{E}_{p,n} \mathcal{E}_{s,l} \mathcal{E}_{p,q} \left[\begin{aligned} & \delta_{[-m-n+l+q]} f_{p,m}(\vec{r}) f_{p,n}(\vec{r}) f_{s,l}^*(\vec{r}) f_{s,q}^*(\vec{r}) \mathcal{A}_m \mathcal{A}_n \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_q^\dagger \\ & + \delta_{[-m+n-l+q]} f_{p,m}(\vec{r}) f_{p,n}^*(\vec{r}) f_{s,l}(\vec{r}) f_{s,q}^*(\vec{r}) \mathcal{A}_m \mathcal{A}_n^* \hat{a}_l \hat{a}_q^\dagger \\ & + \delta_{[-m+n+l-q]} f_{p,m}(\vec{r}) f_{p,n}^*(\vec{r}) f_{s,l}^*(\vec{r}) f_{s,q}(\vec{r}) \mathcal{A}_m \mathcal{A}_n^* \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_q \\ & + \delta_{[+m-n-l+q]} f_{p,m}^*(\vec{r}) f_{p,n}(\vec{r}) f_{s,l}(\vec{r}) f_{s,q}^*(\vec{r}) \mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_n \hat{a}_l \hat{a}_q^\dagger \\ & + \delta_{[+m-n+l-q]} f_{p,m}^*(\vec{r}) f_{p,n}(\vec{r}) f_{s,l}^*(\vec{r}) f_{s,q}(\vec{r}) \mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_n \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_q \\ & + \delta_{[+m+n-l-q]} f_{p,m}^*(\vec{r}) f_{p,n}^*(\vec{r}) f_{s,l}(\vec{r}) f_{s,q}(\vec{r}) \mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_n^* \hat{a}_l \hat{a}_q \end{aligned} \right]$$

Bien évidemment il serait possible de simplifier la somme sur q et les symboles de Kronecker. Nous préférons ne pas le faire afin de garder une expression similaire pour les différents termes ; il ne faudra pas oublier de l'effectuer au moment d'encoder informatiquement le hamiltonien.

11.3.0.5 Intégration spatiale

Pour obtenir une formulation du hamiltonien d'interaction, il reste à effectuer l'intégration spatiale de E^4 . Pour cela nous allons supposer une forme pour les $f_{p,m}(\vec{r})$ et $f_{s,l}(\vec{r})$. Le micro-résonateur en anneau utilisé pour la génération de lumière comprimée

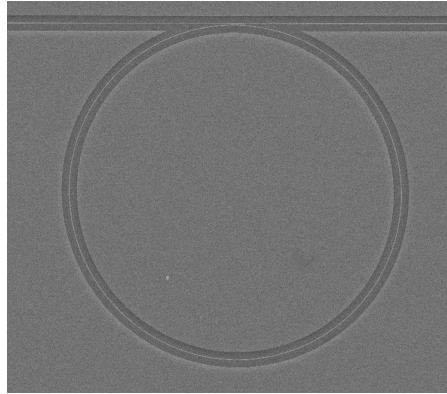


FIGURE 11.2 – Photographie d'un micro-résonateur en anneau sur silicium, tel qu'utilisé pour [83].

est typiquement formé par un guide d'onde de faible largeur comparativement au rayon de l'anneau (voir figure 11.2), comme on peut par exemple le constater sur l'image 11.2. Une autre configuration consiste à utiliser les modes de galerie d'un disque. Dans les

deux cas le mode se propage avec une faible extension transversalement à la direction locale de propagation. On ajoute qu'on suppose le système invariant par rotation autour du centre de l'anneau ou du disque. Ainsi il est raisonnable de choisir la forme :

$$f_{p,m} = g(\vec{r}_\perp) e^{i\frac{R}{v}\omega_{p,m}\theta} \quad f_{s,l} = g(\vec{r}_\perp) e^{i\frac{R}{v}\omega_{s,l}\theta}$$

où θ et \vec{r}_\perp repèrent les positions longitudinales et transverses³, R le rayon de l'anneau, v la vitesse de phase effective du mode. v dépend de l'indice optique qu'on a supposé indépendant de la fréquence; elle est donc également indépendante du mode longitudinal. Notez que nous n'avons pas précisé d'indices pour g car nous ajoutons l'hypothèse que tous les modes transverses sont identiques, ce qui est cohérent avec l'approximation quasi-monochromatique. Par ailleurs, de par les choix précédemment effectués, $\frac{R}{v}\omega_0$ est un multiple de 2π et $\frac{R}{v}\Delta\omega = 2\pi$.

L'intégrale spatiale peut alors grandement se simplifier. Effectuons à titre d'exemple le calcul pour l'une des intégrales :

$$\begin{aligned} & \int f_{p,m}(\vec{r}) f_{p,n}(\vec{r}) f_{s,l}^*(\vec{r}) f_{s,q}^*(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ &= 2\pi \int g^*(\vec{r}_\perp) g^*(\vec{r}_\perp) g(\vec{r}_\perp) g(\vec{r}_\perp) R d^2\vec{r}_\perp \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} e^{i\frac{R}{v}(\omega_{p,m} + \omega_{p,n} - \omega_{s,l} - \omega_{s,q})\theta} d\theta \end{aligned}$$

On remarque que la première intégrale est indépendante des modes considérés. C'est donc une constante que nous appellerons désormais C . Elle est homogène à un volume et en utilisant le rayon R nous pourrions introduire une surface effective de l'interaction non linéaire. En remplaçant les pulsations par leurs expressions (11.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \int f_{p,m}(\vec{r}) f_{p,n}(\vec{r}) f_{s,l}^*(\vec{r}) f_{s,q}^*(\vec{r}) d^3\vec{r} &= C \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} e^{i\frac{R}{v}2\Delta\Omega(m+n-l-q)\theta} d\theta \\ &= C \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} e^{i4\pi(m+n-l-q)\theta} d\theta \\ &= C \delta_{[+m+n-l-q]} \end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale spatiale donne le même symbole de Kronecker que celui provenant de l'approximation de l'onde tournante.

11.3.0.6 Hamiltonien d'interaction

Nous avons maintenant tous les outils pour donner une expression du hamiltonien d'interaction. Afin d'être cohérent avec l'approximation quasi-monochromatique qui a été effectuée dans toute la partie, nous supposons que $\mathcal{E}_{p,m}$ et $\mathcal{E}_{s,l}$ sont indépendants

3. Typiquement, en coordonnées cylindriques on la décrit avec rayon et hauteur.

du mode ; on les écrira donc sans indice : \mathcal{E} . En utilisant les résultats précédents dans l'équation (11.2), on conclut :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{9}{2} \varepsilon_0 \chi^{(3)} \mathcal{E}^4 C \sum_{m,n,l,q} \begin{bmatrix} \delta_{[-m-n+l+q]} \mathcal{A}_m \mathcal{A}_n \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_q^\dagger \\ + \delta_{[-m+n-l+q]} \mathcal{A}_m \mathcal{A}_n^* \hat{a}_l \hat{a}_q^\dagger \\ + \delta_{[-m+n+l-q]} \mathcal{A}_m \mathcal{A}_n^* \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_q \\ + \delta_{[+m-n-l+q]} \mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_n \hat{a}_l \hat{a}_q^\dagger \\ + \delta_{[+m-n+l-q]} \mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_n \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_q \\ + \delta_{[+m+n-l-q]} \mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_n^* \hat{a}_l \hat{a}_q \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

On obtient bien un hamiltonien quadratique, qui peut se mettre sous la forme (6.1).

Remarque. Nous n'avons pas parlé explicitement de condition de conservation d'énergie ou d'impulsion. La conservation de l'énergie a été imposée en rejetant les termes oscillants du hamiltonien d'interaction ; elle a fait apparaître des symboles de Kronecker. La condition de conservation de l'impulsion intervient *via* le facteur obtenu lors de l'intégration spatiale. Il se trouve qu'ici la conservation de l'impulsion est équivalente à celle de l'énergie, ce qui est tout à fait attendu puisqu'on a décidé de ne pas prendre en compte la dispersion.

Si nous n'avions pas fait cette hypothèse, compte tenu que les modes sont définis par leur nombre d'onde longitudinal, l'accord de phase se serait exprimé de manière identique. En revanche la conservation de l'énergie n'aurait été qu'approximative⁴, limitant la largeur spectrale sur laquelle ont lieu les effets non linéaires.

La raison de l'inversion entre les rôles de l'accord de phase et de la conservation de l'énergie comparativement à ce qui est habituellement rencontré est que l'ensemble de la cavité est constituée du matériau non linéaire et non pas une infime portion. Le type de non-linéarité n'intervient pas pour cette remarque. \diamond

11.4 ANALYSE DES SOLUTIONS

Le hamiltonien d'interaction déterminé en (11.5) dépend des amplitudes (complexes) des pompes qu'il faut donc choisir. Beaucoup d'options sont possibles ; nous avons décidé d'étudier numériquement le SPOPO afin de pouvoir facilement tester différents paramètres.

11.4.1 Méthode employée

Nous appliquons au SPOPO la méthode générale présentée au chapitre 9. Les matrices F et G telles que définies dans l'équation (6.1) sont construites numériquement à partir de l'expression (11.5). Pour chaque fréquence la matrice de covariance $\tilde{\sigma}$ est calculée en utilisant (9.35) et (9.59). Sa décomposition (théorème 8.9) s'effectue avec un algorithme

4. Une manière de visualiser cela est de dire que la modification de l'indice optique modifie les positions des résonances qui ne sont alors plus régulièrement espacées.

Cette section retranscrit mon analyse de l'étude numérique du SPOPO. C'est donc une interprétation personnelle et subjective des données observées. Les « règles » et explications qui sont exposées gagneraient à être comparés à des résultats analytiques.

proche de celui présenté par l'extrait de code 8.1. L'adaptation au cas sesquisymplectique s'effectue à l'aide de l'expression par blocs des matrices sesquisymplectiques unitaires (9.42).

Afin d'obtenir des résultats facilement interprétables, nous avons ajouté à la décomposition la possibilité pour les matrices diagonales et de passage d'être continues par rapport à la pulsation. Cela est en général possible, sauf éventuellement pour certains points pathologiques qui peuvent potentiellement apparaître en cas de dégénérescence⁵ [28, 134]. Algorithmiquement, nous avons utilisé une méthode simpliste⁶ : à chaque fréquence la diagonalisation est effectuée indépendamment de ce qui a été fait avant, puis la base de chaque espace propre est tournée *via* une procédure d'orthogonalisation pour s'approcher de celle obtenue à la fréquence précédente.

11.4.2 Résultats principaux

Pour le choix du profil de pompes, nous avons essayé avec une fenêtre, une lorentzienne et une gaussienne, en faisant varier la largeur de la fonction dans les trois cas⁷. Les résultats sont modifiés par le type de profil utilisé, mais les conclusions qualitatives ne changent pas. Nous présentons dans la figure 11.3 deux exemples typiques de ce qui a été observé.

Le seul paramètre changeant entre (a) et (b) est l'intensité de la pompe, qui est plus importante pour (b). On constate que quelle que soit cette intensité, l'oscillateur reste en dessous du seuil. Plus précisément la matrice régissant l'évolution des quadratures \mathcal{L}_{xp} (voir équation (7.11)) a uniquement des valeurs propres imaginaires pures ; augmenter l'intensité de pompe augmente la partie imaginaire des valeurs propres, mais la partie réelle reste toujours nulle. Nous allons lier cela à une autre observation.

Les courbes (a) et (b) présentent une différence qualitative : dans le premier cas les valeurs propres sont décroissantes alors que dans le second cas certaines valeurs propres de $\tilde{\sigma}$ passent par un extremum. Nous attribuons ces différences au passage de ce que nous dénommons une « valeur critique » : dans le premier cas, la plus grande partie imaginaire de valeur propre de⁸ \mathcal{L}_{xp} est inférieure à 1. Pour (b), le nombre de valeurs propres de la matrice de covariance $\tilde{\sigma}$ ayant un maximum coïncide avec celui de valeurs propres de \mathcal{L}_{xp} ayant une partie imaginaire plus grande que 1. L'existence de cette valeur critique a une interprétation physique relativement claire : une oscillation devient visible dès que sa période est inférieure au temps caractéristique de la dissipation.

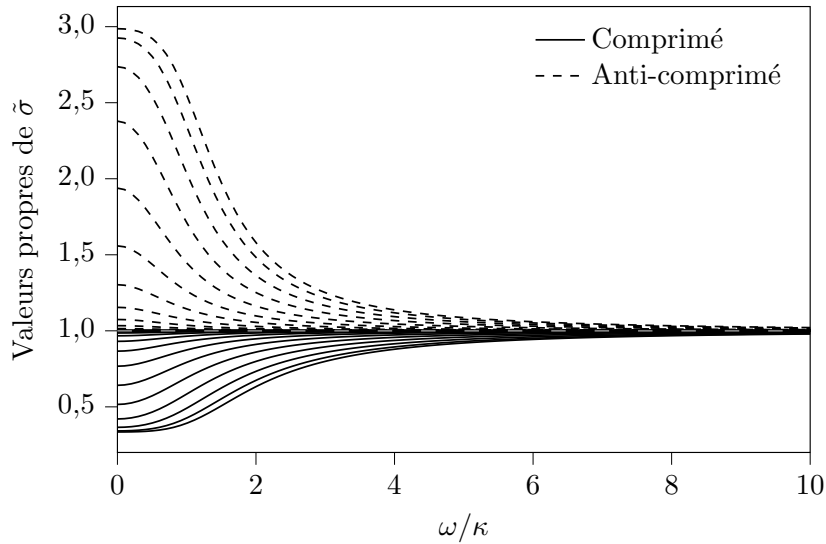
Par ailleurs, nous attribuons la compression aux matrices de passage diagonalisant \mathcal{L}_{xp} . Ceci est cohérent avec une autre observation que nous avons effectuée : dès lors qu'on est au-dessus de la valeur critique, la valeur maximale de compression est indépendante

5. L'expression (9.54) est celle d'une fonction analytique de ω tant qu'on travaille sous le seuil. Il ne serait pas surprenant qu'il n'existe en fait pas de tels points.

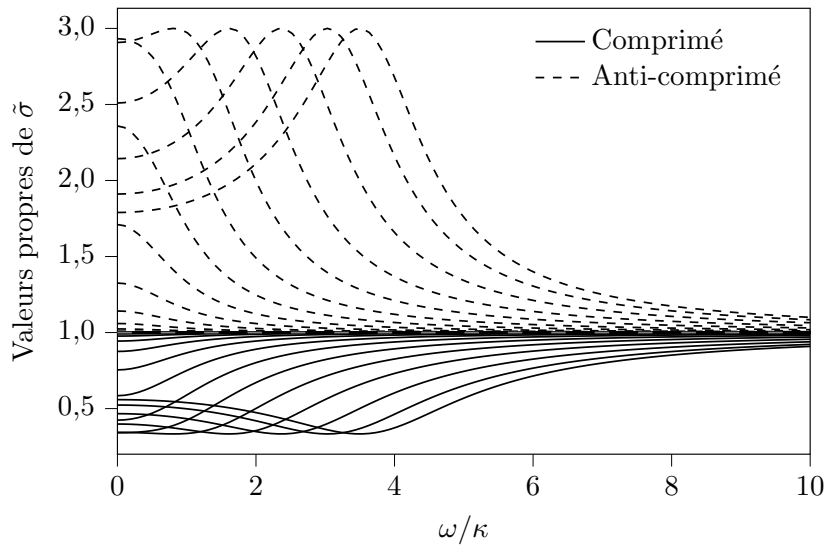
6. Mais catastrophique pour ce qui est du temps d'exécution. Il serait par exemple plus efficace d'intégrer une équation différentielle régissant la matrice de passage puis de corriger localement les erreurs de discrétisation de l'intégration.

7. Dans tous ces cas les amplitudes sont réelles ; ceci pourrait avoir de l'importance. Des tests élémentaires avec des amplitudes complexes n'ont pas donné des résultats très différents, mais il serait utile de pousser l'étude.

8. On parle en fait de la matrice adimensionnée : \mathcal{L}_{xp}/κ . Ce raccourci est effectué dans toute la section.



(a) SPOPO faiblement pompé.



(b) SPOPO fortement pompé.

FIGURE 11.3 – Valeurs propres de $\tilde{\sigma}$ pour le SPOPO avec une puissance de pompe relativement faible (a) et une autre plus élevée (b). 50 modes ont été utilisés; la pompe est une gaussienne centrée sur le mode central et d'un écart type de 14 intervalles spectraux libres. Les valeurs propres de \mathcal{L}_{xp} sont toutes imaginaires pures. Pour (a) la plus grande partie imaginaire des valeurs propres est inférieure à 1; pour (b) cinq valeurs propres ont une partie imaginaire supérieure à 1.

de l'amplitude de pompe⁹. Notre interprétation est que lors de la diagonalisation de \mathcal{L}_{xp} , les symétries qui la constituent se transcrivent dans la matrice de passage et sa norme dans la matrice diagonale. Or cette dernière ne fait qu'effectuer des rotations;

9. Elle ne dépend pas non plus du nombre de modes, de la largeur de la fonction de pompe ou de son type (parmi ceux précédemment évoqués).

toute la compression est contenue dans la matrice de passage et ne dépend donc pas l'intensité de la pompe.

Résumé de l'interprétation

La matrice \mathcal{L}_{xp} porte une « compression intrinsèque » liée à la géométrie du système et non à l'intensité de pompe ; lors d'une diagonalisation, celle-ci se retrouve uniquement dans la matrice de passage. Les valeurs propres de \mathcal{L}_{xp} sont imaginaires pures et la dynamique associée est celle d'oscillations. Pour observer la compression, il faut que ces oscillations soient plus rapides que la dissipation. Une interprétation possible est que la matrice de passage définit une compression que son inverse annule ; mais si l'état a le temps de « tourner » avant de sortir de la cavité, la matrice de passage inverse peut au contraire amplifier la compression. En dessous de la valeur critique, l'amortissement prend le dessus, la compression observée est réduite. Au-dessus de la valeur critique autant de modes atteignent la « compression intrinsèque » que \mathcal{L}_{xp} a de valeurs propres dont la partie imaginaire dépasse 1. Ainsi, augmenter la puissance de pompe n'augmente pas la maximum de compression mais permet de l'atteindre sur une plus grande plage de fréquences, et par plus de vecteurs propres différents.

Notez toutefois que dans le régime au-dessus de la valeur critique, si les valeurs propres de $\tilde{\sigma}$ forment un plateau, il faut bien noter que chaque quadrature correspondant à un vecteur propre n'y passe que ponctuellement. Il paraît donc difficile de tirer parti de ce plateau dans une configuration d'observation de réduction de bruit. Il pourrait par contre être intéressant de caractériser l'état quantique généré par le SPOPO dans ce régime, notamment en termes d'état graphe [129].

11.4.3 Résultats complémentaires

Afin de contrôler la cohérence des résultats numériques, nous illustrons l'évolution d'un des vecteurs propres de $\tilde{\sigma}$ par la [figure 11.4](#). Les coefficients du vecteur étant *a priori* complexes, nous avons représenté sous forme cumulative le carré de leurs modules. Le principal enseignement que nous tirons de cette figure est que le vecteur propre n'est pas constant par rapport à la pulsation ω . Par ailleurs l'endroit où il varie le plus est autour de $\frac{\omega}{\kappa} = 2$, ce qui coïncide avec le maximum de la valeur propre associée (celle commençant à 2,5 en $\omega = 0$).

Un autre essai que nous avons effectué consiste à « casser » la cohérence entre les différentes fréquences de pompe. Pour cela nous avons multiplié chaque amplitude de pompe par un nombre complexe normé de phase aléatoire. Le résultat sur les valeurs propres de la matrice de covariance $\tilde{\sigma}$ est présenté dans la [figure 11.5](#), pour laquelle tous les paramètres ont été choisis identiques à ceux de la [sous-figure 11.3b](#).

Dans cette situation, les valeurs propres de \mathcal{L}_{xp} sont soit réelles pures soit imaginaires pures. Par ailleurs on retrouve un système pour lequel le niveau de compression dépend de l'amplitude de pompe et est maximal proche du seuil, qui peut de nouveau être atteint. Ainsi on retrouve un comportement plus proche de celui du SPOPO utilisant une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$ [103].

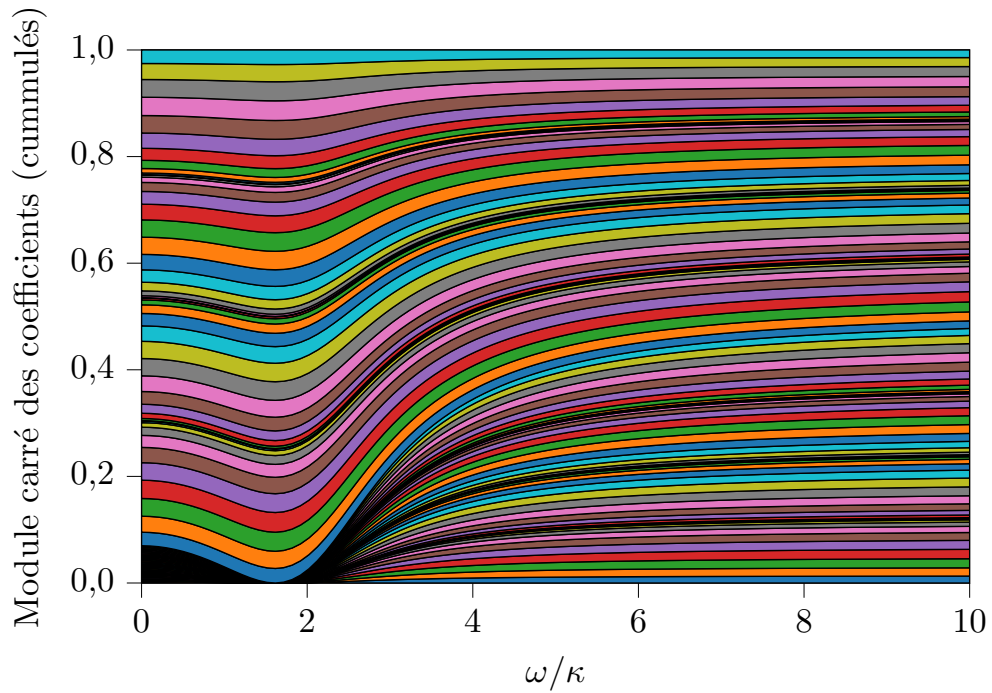


FIGURE 11.4 – Profil du 3^e vecteur propre (triés par valeurs propres croissantes à $\omega = 0$) en fonction de la fréquence d'analyse. Les modules carrés des coefficients sont chacun représenté par une hauteur; elles sont cumulées. Les paramètres sont les mêmes que pour la [sous-figure 11.3b](#).

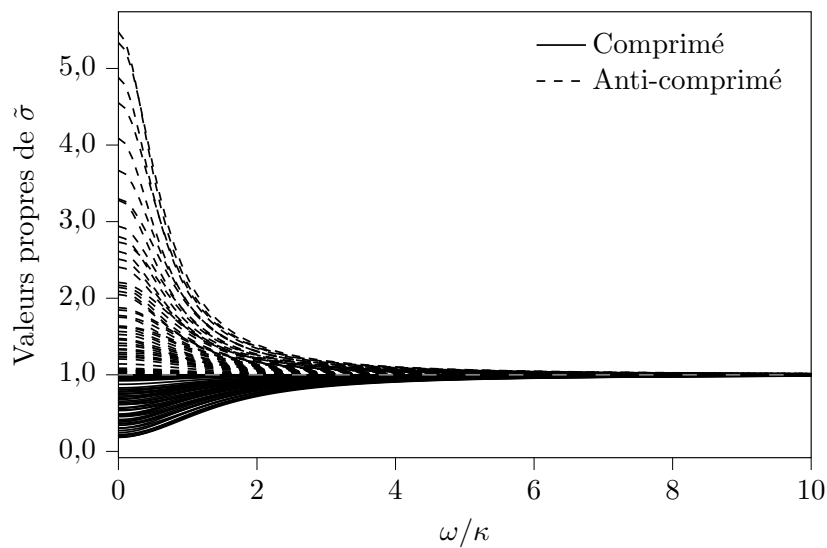


FIGURE 11.5 – Spectre de bruit obtenu pour le SPOPO avec les mêmes paramètres que pour la [sous-figure 11.3b](#) mais en ayant cassé la cohérence des pompes en leur appliquant une phase aléatoire.

11.5 CONCLUSION

Nous avons établi le hamiltonien d'interaction du SPOPO impliquant une non-linéarité de type $\chi^{(3)}$. L'étude numérique de la résolution de l'équation de Langevin associée

a montré un comportement singulièrement différent de son homologue utilisant une non-linéarité de type $\chi^{(2)}$. En particulier, augmenter la puissance de pompe n'augmente pas les fluctuations, mais la plage de fréquences sur laquelle elles sont observables. Cette étude peut encore être complétée; des pistes possibles pour cela sont :

- Nous n'avons pas pris en compte les limitations imposées par la dispersion dans un matériau réel. Sans celles-ci, des interactions entre modes aux fréquences éloignées sont possibles alors que dans un matériau réel la conservation de l'énergie impose une certaine de localité en fréquence.
- La configuration de SPOPO proposée et étudiée n'est que l'une des nombreuses possibilités. D'autres schémas pourraient être imaginés, par exemple en séparant pompes et signaux en polarisation, modes spatiaux ou même en fréquence avec une autre répartition. Il sera intéressant de déterminer si les comportements observés sont communs à tous les SPOPO avec non-linéarité de type $\chi^{(3)}$ ou bien s'il en existe plusieurs classes bien distinctes.
- Nous avons constaté que le régime au-dessus d'une « valeur critique » permet d'atteindre une valeur maximale de compression. Il est clair que ce maximum ne dépend pas de l'intensité de pompe. Il serait intéressant de déterminer précisément ce qui le détermine.
- L'étude effectuée était principalement numérique. Maintenant que des phénomènes intéressants ont été identifiés, une étude analytique semble appropriée.

Dans ce chapitre nous avons recroisé des questions déjà identifiées et qui mériteraient d'être approfondies dans un cadre plus large que le SPOPO :

- La matrice de couplage \mathcal{L}_{xp} , qui est hamiltonienne, a souvent des valeurs propres réelles ou imaginaires pures. Cela pourrait être simplement la conséquence des symétries que nous avons imposées. Des tests préliminaires ne semblent pas aller dans le sens de cette hypothèse. Il pourrait être utile de classifier les différents cas possibles puis de déterminer les configurations de pompes menant à chaque classe.
- Nous n'avons pas investigué analytiquement les liens entre \mathcal{L}_{xp} et la diagonalisation sesquisymplectique de $\tilde{\sigma}$. Pour cela on pourrait partir de la diagonalisation symplectique de \mathcal{L}_{xp} ou bien de sa décomposition de Schur¹⁰ [99]. Le faire serait indispensable pour formaliser la discussion effectuée concernant l'interprétation de la valeur critique.
- Dans le [chapitre 9](#) nous avons présenté l'analyse de la lumière comprimée par une cavité passive (éventuellement non causale). Il a aussi été évoqué l'idée de mettre en forme finement un oscillateur local avec cette même technique. Ces deux idées mériteraient d'être développées car nous n'avons pour l'instant aucune recette permettant de mettre en évidence expérimentalement les propriétés présentées, hormis l'utilisation d'une quadrature fixe bien choisie.

10. Qui donne une expression de $\tilde{\sigma}$ sous une forme de Cholesky encadrée par des matrices de passage unitaires réelles symplectiques.

Quatrième partie

GÉNÉRATION D'INTRICATION HYBRIDE VARIABLES
CONTINUES — DISCRÈTES

Deux méthodes sont principalement exploitées pour encoder de l'information quantique dans la lumière : utiliser des observables à spectres discrets ou continus [2].

Dans le premier cas, en général, on s'arrange pour pouvoir se restreindre à un espace de Hilbert de dimension finie. On emploie typiquement des superpositions d'états de Fock contenant peu de photons, souvent un seul, délocalisés sur plusieurs modes. Ce qui différencie les modes peut être leurs structures spatiales (transverses), le temps, la fréquence, la polarisation ou bien n'importe quelle combinaison de ceux-ci. On parle alors de « variables discrètes ». Ces états sont peu sensibles aux pertes car celles-ci ne modifient pas le sous-espace d'encodage, mais éloignent l'état qui les subit de celui-ci. Quand une mesure est effectuée, en cas de succès l'état mesuré est ramené au sous-espace d'encodage par projection. Ces états ont par contre l'inconvénient que la majorité des opérations sont probabilistes.

Dans le deuxième cas l'espace de Hilbert est de dimension infinie. Typiquement l'information est encodée sur l'amplitude, la phase ou une quadrature d'un mode du champ électromagnétique, dont on peut aussi utiliser les quadratures. On parle alors de « variables continues ». Ces états sont en général manipulables de manière déterministe, mais sont affectés par les pertes [129].

Une approche hybride consiste à intriquer deux sous-systèmes utilisant d'une part des variables discrètes et de l'autre des variables continues, et essayer de tirer le meilleur parti de chacun [2]. Pour cela, de nombreux protocoles de communication ou calcul utilisant de tels états ont été mis au point, permettant en outre de téléporter de l'information quantique d'un encodage vers un autre [5, 70, 74, 75, 100]. Tous nécessitent un ou plusieurs états intriqués hybrides entre variables continues et discrètes. Expérimentalement, la génération de tels états a été récemment réalisée [57, 90, 121] ainsi que la démonstration de faisabilité de protocoles d'information quantique qui les utilisent [15, 69, 114, 121]. Ces différentes expériences utilisent un encodage sur la phase d'états cohérents ou la parité de chats de Schrödinger optiques¹, tandis que la partie discrète utilise soit l'absence ou la présence de photon dans un mode, soit la polarisation d'un photon. Par ailleurs, d'autres méthodes de génération ont été imaginées et analysées afin d'utiliser en encodage en polarisation, tout en résolvant certaines limitations des techniques précédemment utilisées [66, 72].

Dans la perspective d'utilisation de la partie discrète dans des fibres optiques, un encodage de celle-ci dans des cases temporelles est souhaitable. En effet la propagation dans les fibres, pour peu que la dispersion soit compensée, n'altère que peu la qualité d'un signal utilisant cet encodage [44]. Pour générer de tels états il serait tentant de transposer directement les schémas conçus pour un encodage en polarisation. Un

1. La définition des chats de Schrödinger optiques, leurs principales propriétés, et le détail de l'approximation consistant à considérer qu'une lame séparatrice en extrait un photon sont détaillés dans l'annexe B.

problème majeur est que ceux-ci utilisent des séparatrices de polarisation ou des lames quart d'onde. Or nous n'avons pas d'équivalent passif de tels objets pour l'encodage temporel. Seuls des routeurs actifs permettraient de jouer un rôle similaire à celui d'une séparatrice de polarisation, mais soit ils sont trop lents comparativement aux taux de répétition envisagés, soit ils induisent beaucoup de pertes [50].

Au [chapitre 13](#) nous proposons un schéma permettant de générer un état hybride dont la partie discrète est encodée dans des cases temporelles. Appelons A et B les deux modes de sortie correspondant respectivement aux parties discrète et continue ; pour le mode A on note e et l les deux cases temporelles (pour « early » et « late »). Nous souhaitons générer un état de la forme :

$$|\varphi\rangle = \frac{|e\rangle_A |+\alpha_f\rangle_B - |l\rangle_A |-\alpha_f\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (12.1)$$

où nous avons utilisé les notations $|e\rangle_A = |1\rangle_{A,e} \otimes |0\rangle_{A,l}$ et $|l\rangle_A = |0\rangle_{A,e} \otimes |1\rangle_{A,l}$; et où $|\pm\alpha_f\rangle_B$ est un état cohérent d'amplitude $\pm\alpha_f$.

Le schéma que nous allons présenter doit pouvoir être réalisé expérimentalement. C'est pourquoi nous fixons comme contrainte que celui-ci permette de générer l'état donné par (12.1) y compris en présence d'imperfections expérimentales et sans avoir besoin d'effectuer de post-sélection. En particulier nous prendrons en compte des détecteurs et états d'entrées réalistes.

12.1 NOTATIONS

Nous traitons dans cette partie d'intrication entre des états du domaine des variables discrètes et continues. Ainsi nous sommes amenés à utiliser des états de Fock et des états cohérents. Dans les deux cas nous utiliserons les notations de Dirac (bra-ket) ; le type du contenu déterminant s'il s'agit d'un état de Fock ou d'un état cohérent.

Quand le contenu du ket est un entier, cela signifie qu'il s'agit d'un état de Fock, par exemple $|1\rangle$, $|10\rangle$... Attention, ça sera également le cas pour une variable symbolique représentant un entier, par exemple $|k\rangle$.

Au contraire, quand le contenu du ket est un nombre complexe ou un réel non entier, il s'agit d'un état cohérent. Par exemple $|0.1\rangle$ ou $|\alpha\rangle$.

Les états « chats de Schrödinger » seront particulièrement utiles. Une partie de leurs propriétés sont détaillées dans l'[annexe B](#). Pour désigner les chats pairs et impairs nous utiliserons les notions :

$$|\text{cat}^+\rangle = \frac{|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle}{\mathcal{N}_{\alpha,0}} \quad |\text{cat}^-\rangle = \frac{|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle}{\mathcal{N}_{\alpha,\pi}}$$

avec $\mathcal{N}_{\alpha,0} = \sqrt{2}\sqrt{1 + e^{-2|\alpha|^2}}$ et $\mathcal{N}_{\alpha,\pi} = \sqrt{2}\sqrt{1 - e^{-2|\alpha|^2}}$. Pour alléger les notations, $\mathcal{N}_{\alpha,0}$ sera noté \mathcal{N} . Par ailleurs, pour le côté de variables discrètes nous utiliserons les notations $|e\rangle_A = |1\rangle_{A,e} \otimes |0\rangle_{A,l}$ et $|l\rangle_A = |0\rangle_{A,e} \otimes |1\rangle_{A,l}$.

Notez enfin que par abus de langage, l'adjectif « continu » sera utilisé pour désigner toute chose ayant trait à la partie encodée sur des variables continues de l'état visé ; *idem* pour « discret ».

12.2 APPROCHE PAR SOUSTRACTION DE PHOTON

La principale approche utilisée [90, 121] pour générer des états hybrides consiste à envoyer un chat de Schrödinger² par $|\xi\rangle$ sur une lame séparatrice de faible réflectivité et de considérer que de temps en temps un photon en est extrait, ce qui change la parité. Par ailleurs une paire de photons est probabilistiquement générée par une source utilisant des processus non-linéaires. La probabilité de ces deux événements est choisie identique et faible, de sorte qu'il n'y ait statistiquement jamais simultanément un photon extrait du chat et une paire générée. Enfin le photon provenant d'un côté ou de l'autre est envoyé sur une lame séparatrice afin d'effacer l'information de sa provenance; à sa sortie on place un détecteur de photon unique de type ON/OFF. Quand celui-ci clique, cela annonce soit la présence du second photon de la paire soit que le chat a été changé de parité. En fait c'est une superposition quantique. Ce type de schéma est représenté en figure 12.1.

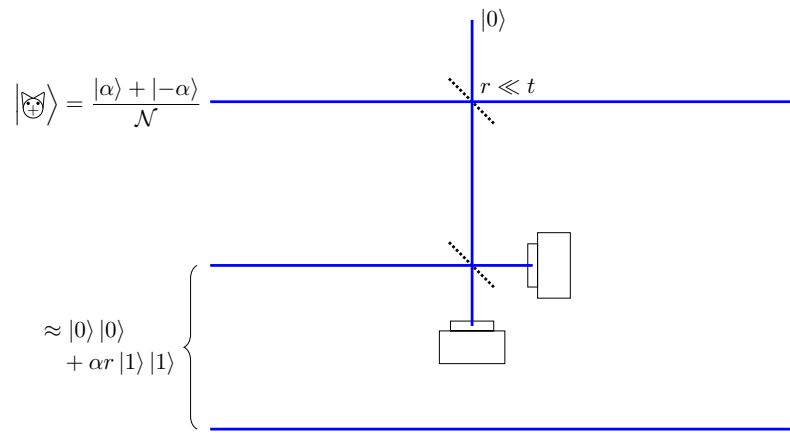


FIGURE 12.1 – Expérience typique de génération d'état hybride avec encodage de la partie discrète en présence ou absence de photon [90, 121].

L'état généré a pour encodage sur la partie discrète la présence ou l'absence de photon. Une version modifiée permet de générer un état hybride pour lequel l'encodage est en polarisation mais avec une importante composante de vide [114].

Nous allons montrer que cette approche est inadéquate pour la génération de l'état $|\varphi\rangle$ (défini par l'équation (12.1)), contenant exactement un photon sur la partie discrète, dès lors que la paire de photons provient directement d'une source utilisant un effet non linéaire (source probabiliste).

Tout d'abord, remarquons que nous souhaitons avoir à coup sûr un photon dans la partie discrète. La source probabiliste envoyant principalement du vide, il faut que l'annonce ne puisse s'effectuer qu'en présence d'un photon $|e\rangle$ ou $|l\rangle$. Il est alors clair que si l'on souhaitait se contenter du clic d'un seul détecteur, la partie de variables continues n'interviendrait pas dans l'annonce et l'état généré serait séparé. Ainsi il nous faut considérer comme conditionnement au moins les clics simultanés de deux

2. Voir annexe B.

détecteurs, avec l'idée qu'il faut simultanément garantir la présence d'un photon sur la partie discrète et effectuer l'intrication.

Ensuite remarquons que ne souhaitant pas avoir plusieurs photons dans l'état annoncé, les cas que nous devons sélectionner ont au plus un photon provenant de la partie discrète. Pour que deux détecteurs cliquent simultanément, il faut qu'un photon provienne de la partie continue. Cela interdit une simple « extraction » d'un photon du chat car alors celui-ci serait dans l'état $|\uparrow\rangle$ à coup sûr et donc l'état séparable. Ainsi l'état initial du côté des variables continues devra être plus compliqué qu'un chat. Ainsi nous prendrons en compte deux modes distincts dans lesquels peut être le photon provenant de la partie continue.

Ce que nous venons de présenter n'est pas nouveau et a déjà été réalisé expérimentalement avec un encodage en polarisation en utilisant un chat et un état cohérent dans la polarisation orthogonale [114]. Mais comme le remarque l'article lui-même l'état généré est grandement pollué par une composante de vide et la présence de plusieurs photons sur la partie discrète. Selon l'usage le vide peut éventuellement être éliminé par une post-sélection. Il faudrait par contre des détecteurs résolvant le nombre de photons et d'efficacité unitaire pour exclure *via* une post-sélection la présence simultanée de plusieurs photons sur la partie discrète.

Nous allons ici montrer que le problème est insoluble avec une approche reposant sur :

1. l'extraction probabiliste d'un photon du chat ;
2. le mélange *via* un interféromètre passif de celui-ci³ avec celui provenant de la paire de la partie discrète.

Nous utiliserons pour cela un formalisme relativement générique.

12.2.1 Modèle de l'interféromètre

Nous allons considérer un photon provenant de la partie continue qui est *a priori* délocalisé entre deux modes, et un photon provenant de la partie discrète lui aussi sur deux modes.

Nous considérons donc un interféromètre passif générique comportant quatre entrées : A et B liées à ce qui sera la partie de variables continues de l'état préparé, et C et D liées à celle discrète. Remarquez qu'avec un tel interféromètre nous autorisons le mélange des différents modes temporels, ce qui n'est pas forcément facilement réalisable expérimentalement.

Les conventions de notations sont celles de la figure 12.2 : les modes sont indexés par des lettres, \hat{a}_i sont les opérateurs de destruction avant l'interféromètre, \hat{b}_j après. Attention à ne pas confondre les lettres minuscules (indices locaux) et les lettres majuscules (indices globaux). La transformation opérée par l'interféromètre se traduit par une matrice U unitaire telle que :

$$\forall i, \hat{a}_i = \sum_j U_{i,j} \hat{b}_j$$

3. Ce ne sont en fait pas les photons qui sont mélangés, mais les modes.

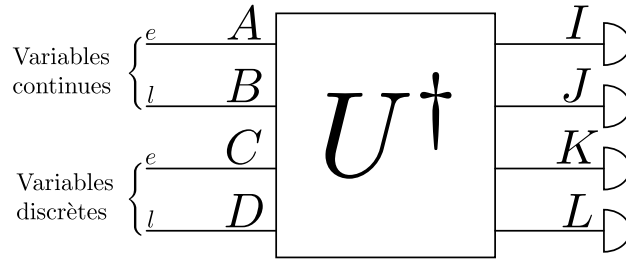


FIGURE 12.2 – Interféromètre générique.

En notation matricielle la transformation des opérateurs bosonique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_A \\ \hat{a}_B \\ \hat{a}_C \\ \hat{a}_D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_I \\ \hat{a}_J \\ \hat{a}_K \\ \hat{a}_L \end{pmatrix}$$

où * représente un coefficient quelconque.

12.2.2 Exemple d'état d'entrée

Considérons qu'on crée la partie continue en envoyant sur une lame séparatrice très déséquilibrée un chat au temps « tôt » e et un état cohérent au temps « tard » l .

On utilise le développement sur la base de Fock à l'ordre deux, tel que décrit par l'équation (B.7) et le développement sur la base de Fock de l'état cohérent tel que donné par l'équation (1.13). Les probabilités d'extraire un photon du chat ou de l'état cohérent doivent être comparables, sans quoi nous retrouverions les problèmes discutés dans l'introduction de la section. Ainsi nous considérons que l'état à l'ordre deux est de la forme⁴ :

$$\begin{aligned} & \left(x |0\rangle_A \left| \begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \end{array} \right\rangle_{A'} + y |1\rangle_A \left| \begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \end{array} \right\rangle_{A'} + y^2 |2\rangle_A \left| \begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\rangle_{A'} \right) \\ & \otimes \left(x |0\rangle_B |\alpha\rangle_{B'} + y |1\rangle_B |\alpha\rangle_{B'} + y^2 |2\rangle_B |\alpha\rangle_{B'} \right) \end{aligned}$$

où x et y sont des nombres ($x \approx 1$ et $y \ll 1$), A et B les modes d'entrée de l'interféromètre et A' , B' les modes extérieurs correspondant.

En développant et en ne gardant que les termes au plus en y^2 , on obtient :

$$\begin{aligned} & x^2 |0\rangle_A |0\rangle_B \left| \begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} + xy \left(|0\rangle_A |1\rangle_B \left| \begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} + |1\rangle_A |0\rangle_B \left| \begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} \right) \\ & + xy^2 \left(|0\rangle_A |2\rangle_B \left| \begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} + |2\rangle_A |0\rangle_B \left| \begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} \right) + y^2 |1\rangle_A |1\rangle_B \left| \begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} \end{aligned}$$

Considérons ensuite sur la partie « variables discrètes » qu'on dispose de deux sources de paires de photons, une pour le temps « tôt » et l'autre pour le temps « tard ». De même que pour la partie continue nous ajoutons l'hypothèse que les deux sources ont

4. Il manque des $\sqrt{2}$ comparativement à (B.7) et (1.13), mais seul l'ordre de grandeur importe.

la même probabilité d'émettre une paire, que nous notons y' . De plus ces sources sont probabilistes, avec une probabilité d'émettre deux paires de l'ordre de y'^2 . L'état qu'elles génèrent s'écrit donc :

$$(x' |0\rangle_C |0\rangle_{C'} + y' |1\rangle_C |1\rangle_{C'} + y'^2 |2\rangle_C |2\rangle_{C'}) \otimes (x' |0\rangle_D |0\rangle_{D'} + y' |1\rangle_D |1\rangle_{D'} + y'^2 |2\rangle_D |2\rangle_{D'})$$

avec x' et y' des nombres ($x' \approx 1$ et $y' \ll 1$), C' et D' les modes extérieurs correspondants à C et D . En développant et en ne gardant les contributions au plus à l'ordre 2, l'état s'écrit :

$$x'^2 |0\rangle_C |0\rangle_D |0\rangle_{C'} |0\rangle_{D'} + x'y' (|0\rangle_C |1\rangle_D |0\rangle_{C'} |1\rangle_{D'} + |1\rangle_C + |0\rangle_D |1\rangle_{C'} |0\rangle_{D'}) \\ + x'y'^2 (|0\rangle_C |2\rangle_D |0\rangle_{C'} |2\rangle_{D'} + |2\rangle_C |0\rangle_D |2\rangle_{C'} |0\rangle_{D'}) + y'^2 |1\rangle_C |1\rangle_D |1\rangle_{C'} |1\rangle_{D'}$$

Nous pouvons ensuite écrire l'état complet développé à l'ordre 2 en y ou y' , ce qui correspond également au nombre de photons envoyés vers l'interféromètre. Les termes d'ordre 0 n'ont pas de photons sur la partie discrète de la sortie, et sont donc indésirables. Les termes d'ordre 1 ne nous intéressent pas non plus car un unique photon ne peut pas déclencher deux détecteurs. Ainsi l'ordre le plus bas contribuant à l'annonce est celui en $y^2 \sim y'^2 \sim yy'$. Pour simplifier, nous remplaçons par 1 les x et x' ; même si ceux-ci contiennent des termes qui peuvent être à l'ordre étudié, ces derniers n'ont pas assez de photons pour déclencher l'annonce. Ainsi l'état s'écrit à cet ordre :

$$yy' \left(\begin{aligned} & |1\rangle_A |0\rangle_B |1\rangle_C |0\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |1\rangle_{C'} |0\rangle_{D'} \\ & + |1\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C |1\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |0\rangle_{C'} |1\rangle_{D'} \\ & + |0\rangle_A |1\rangle_B |1\rangle_C |0\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |1\rangle_{C'} |0\rangle_{D'} \\ & + |0\rangle_A |1\rangle_B |0\rangle_C |1\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |0\rangle_{C'} |1\rangle_{D'} \end{aligned} \right) \\ + y^2 \left(\begin{aligned} & |1\rangle_A |1\rangle_B |0\rangle_C |0\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |0\rangle_{C'} |0\rangle_{D'} \\ & + |2\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C |0\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |0\rangle_{C'} |0\rangle_{D'} \\ & + |0\rangle_A |2\rangle_B |0\rangle_C |0\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |0\rangle_{C'} |0\rangle_{D'} \end{aligned} \right) \\ + y'^2 \left(\begin{aligned} & |0\rangle_A |0\rangle_B |1\rangle_C |1\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |1\rangle_{C'} |1\rangle_{D'} \\ & + |0\rangle_A |0\rangle_B |2\rangle_C |0\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |2\rangle_{C'} |0\rangle_{D'} \\ & + |0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C |2\rangle_D \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |\alpha\rangle_{B'} |0\rangle_{C'} |2\rangle_{D'} \end{aligned} \right) \quad (12.2)$$

Dans tous les cas l'état dans le mode B' est $|\alpha\rangle_{B'}$; on pourra donc se passer d'écrire l'état dans ce mode. Après l'annonce, on cherche à obtenir à la normalisation près :

$$\left(\left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} + \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} \right) |1\rangle_{C'} |0\rangle_{D'} + \left(\left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} - \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} \right) |0\rangle_{C'} |1\rangle_{D'}$$

ou bien, selon nos désirs :

$$\left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |1\rangle_{C'} |0\rangle_{D'} + \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle_{A'} |0\rangle_{C'} |1\rangle_{D'}$$

Les termes ayant pour facteur y^2 et y'^2 sont indésirables. Quels que soient les choix effectués, il est impossible de rendre simultanément ces deux termes négligeables par rapport à celui en yy' . Ainsi il revient au conditionnement d'essayer d'effectuer cette sélection.

12.2.3 Modèle de l'état

Revenons au cas général. Conformément au type de source utilisé, nous effectuons l'hypothèse que les états envoyés vers l'interféromètre contiennent au plus deux photons (ordres supérieurs négligeables). Comme la sélection s'effectue par deux clics, seuls les états contenant exactement deux photons sont à conserver.

Nous considérons donc un état générique contenant deux photons à l'entrée de l'interféromètre, intriqué avec l'extérieur :

$$\sum_{u,v} \lambda_{u,v} \hat{a}_u^\dagger \hat{a}_v^\dagger |0\rangle \otimes |\varphi_{u,v}\rangle \quad (12.3)$$

où les $|\varphi_{u,v}\rangle$ sont les états extérieurs.

Remarque. Le fait d'avoir des photons uniques sur A et B n'empêche aucunement les $|\varphi_{u,v}\rangle$ correspondants d'être des états utilisant des variables continues. \diamond

Dans la forme (12.3) nous n'avons pas encore imposé que les parties continues et discrètes sont avant l'annonce dans un état séparé. Nous le ferons au cours de la résolution, quand la forme sera plus simple à expliciter.

Remarquons qu'un échange $u \leftrightarrow v$ laisse la partie de l'état entrant dans l'interféromètre invariante ($\hat{a}_u^\dagger \hat{a}_v^\dagger = \hat{a}_v^\dagger \hat{a}_u^\dagger$). Ainsi nous sommes libre de choisir pour tout u et v que $|\varphi_{u,v}\rangle = |\varphi_{v,u}\rangle$ et $\lambda_{u,v} = \lambda_{v,u}$.

Ajoutons l'hypothèse qu'à part le cas $u \leftrightarrow v$, tous les $|\varphi_{u,v}\rangle$ sont différents (et même non proportionnels; on impose qu'ils ne puissent pas être égaux à une phase près).

Nous supposons également que $\forall u, v, \lambda_{u,v} \neq 0$. Dans l'exemple (12.2), cela correspondrait à faire le choix que y et y' sont du même ordre. Nous commenterons l'opportunité de relâcher cette hypothèse.

12.2.4 État après l'annonce

L'état après l'interféromètre s'écrit :

$$\sum_{u,v,i,j} \lambda_{u,v} U_{u,i} U_{v,j} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger |0\rangle \otimes |\varphi_{u,v}\rangle$$

L'annonce s'effectue avec le clic simultané de deux détecteurs. Nous pouvons sans perte de généralité choisir I et J (une matrice unitaire le reste par permutation de lignes ou colonnes).

Après un double clic (I, J) , considéré ici comme une mesure projective (détecteurs ON/OFF parfaits), l'état devient :

$$\frac{1}{\mathcal{N}_1} \sum_{u,v} \lambda_{u,v} U_{u,I} U_{v,J} \hat{b}_I^\dagger \hat{b}_J^\dagger |0\rangle \otimes |\varphi_{u,v}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_1} \hat{b}_I^\dagger \hat{b}_J^\dagger |0\rangle \otimes \sum_{u,v} \lambda_{u,v} U_{u,I} U_{v,J} |\varphi_{u,v}\rangle$$

avec $\tilde{\mathcal{N}}_1$ un facteur de normalisation.

L'état étant séparé, on peut simplement enlever la partie mesurée pour obtenir l'état après la mesure :

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{N}}} \sum_{u,v} \lambda_{u,v} U_{u,I} U_{v,J} |\varphi_{u,v}\rangle \quad (12.4)$$

avec $\tilde{\mathcal{N}}$ un facteur de normalisation.

12.2.5 État final souhaité

L'état qu'on souhaite obtenir est typiquement $|\varphi_{A,C}\rangle + |\varphi_{B,D}\rangle$, à la normalisation près. L'inclusion de $|\varphi_{A,D}\rangle$ et $|\varphi_{B,C}\rangle$ dans l'état désiré est envisageable, mais il faut alors être prudent car, selon les phases entre les différents termes, il est possible que l'état total soit séparable entre les parties « discrète » et « continue ».

Quoi qu'il en soit, on ne veut pas que deux photons proviennent exclusivement d'une des parties « continue » (A et B) ou « discrète » (C et D). En effet cela donnerait un état annoncé comprenant sur la partie discrète respectivement 0 et 2 photons. Ces termes indésirables sont donc :

- Ceux qui contiennent deux photons dans un seul mode :
 $|\varphi_{A,A}\rangle, |\varphi_{B,B}\rangle, |\varphi_{C,C}\rangle$ et $|\varphi_{D,D}\rangle$
- Ceux dont les deux photons proviennent « du même côté » mais pas dans le même mode :
 $|\varphi_{A,B}\rangle$ et $|\varphi_{C,D}\rangle$

12.2.6 Résolution

Maintenant que le problème est posé, passons à sa résolution.

12.2.6.1 Formalisation des contraintes

L'état après annonce est donné par l'équation (12.4). Les différents $|\varphi_{u,v}\rangle = |\varphi_{v,u}\rangle$ étant par hypothèse non-colinéaires, la seule manière pour que l'état final soit conforme à nos attentes est que seuls les $\lambda_{u,v} U_{u,I} U_{v,J} + \lambda_{v,u} U_{v,I} U_{u,J}$ correspondant aux $|\varphi_{u,v}\rangle$ désirés soient non nuls. Par ailleurs nous avons effectué l'hypothèse que les $\lambda_{u,v} = \lambda_{v,u}$ sont non nuls. Ainsi pour avoir après annonce un état correspondant à nos attentes, il est nécessaire que pour tous les u, v tels que $|\varphi_{u,v}\rangle$ est indésirable,

$$U_{u,I} U_{v,J} + U_{v,I} U_{u,J}$$

Remarque. En relâchant l'hypothèse de non-colinéarité, la condition s'exprimerait sous la forme qu'une somme doit être nulle. Pour obtenir un exemple, on peut considérer l'égalité $|\varphi_{u,v}\rangle = |\varphi_{v,u}\rangle$. \diamond

Résumons les contraintes :

$$|\varphi_{A,A}\rangle : U_{A,I} U_{A,J} = 0$$

$$|\varphi_{B,B}\rangle : U_{B,I} U_{B,J} = 0$$

$$|\varphi_{C,C}\rangle : U_{C,I} U_{C,J} = 0$$

$$|\varphi_{D,D}\rangle : U_{D,I}U_{D,J} = 0$$

$$|\varphi_{A,B}\rangle = |\varphi_{B,A}\rangle : U_{A,I}U_{B,J} + U_{B,I}U_{A,J} = 0$$

$$|\varphi_{C,D}\rangle = |\varphi_{D,C}\rangle : U_{C,I}U_{D,J} + U_{D,I}U_{C,J} = 0$$

où les couleurs désignent les différents types de contraintes.

Remarque. Nous n'avons pas imposé la contrainte d'éliminer $|\varphi_{A,D}\rangle$ et $|\varphi_{B,C}\rangle$, qui sont pourtant relativement non désirés. Nous n'aurons pas besoin de telles contraintes. Notez également que formellement il faut imposer $U_{A,I}U_{C,J} + U_{C,I}U_{A,J} \neq 0$ et $U_{B,I}U_{D,J} + U_{D,I}U_{B,J} \neq 0$. Nous n'utiliserons pas non plus ces conditions. \diamond

12.2.6.2 Nombre de paramètres libres

Commençons par étudier le nombre de paramètres libres et le nombre d'équations. Tout d'abord, U est une matrice unitaire de dimension 4×4 . On a donc *a priori* 16 paramètres réels libres⁵.

On veut éliminer au moins 6 composantes de l'état. Cela nous donne autant de contraintes sous forme d'équations complexes. On a donc 12 équations réelles. *A priori* il reste donc 4 paramètres réels libres. Nous allons voir dans la suite qu'il ne faut pas se fier à cela pour conclure quant à la possibilité d'utiliser un tel interféromètre.

12.2.6.3 Illustration des contraintes

On peut résumer graphiquement les contraintes sur la matrice U de la manière suivante, où les couleurs correspondent à celles présentées en [sous-sous-section 12.2.6.1](#) :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_A \\ \hat{a}_B \\ \hat{a}_C \\ \hat{a}_D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_I \\ \hat{a}_J \\ \hat{a}_K \\ \hat{a}_L \end{pmatrix}$$

Avec les conditions :

$$\begin{aligned} * \times * &= 0 \\ * \times * + * \times * &= 0 \end{aligned}$$

Remarque. On remarque que les contraintes se concentrent sur les deux premières colonnes. En termes de nombre d'inconnues, cela nous ramène à 8 inconnues complexes, soit 16 réelles. La normalisation compte pour deux équations réelles tandis que l'orthogonalité compte pour une complexe, équivalente à deux réelles. Ainsi cela nous donne 12 variables réelles pour ces deux colonnes. Or la physique nous impose 12 équations réelles. On constate donc qu'il n'y a en fait pas de liberté pour les éventuelles solutions au problème. \diamond

⁵ 16 paramètres complexes c'est-à-dire 32 réels, 4 contraintes de normalisation qui sont 4 équations réelles, 6 contraintes d'orthogonalité qui sont des équations complexes équivalentes à 12 équations réelles.

12.2.6.4 Résolution graphique

Dans un premier temps, concentrons-nous sur un bloc $\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

Les conditions $* \times * = 0$ imposent qu'au moins un des deux nombres de chaque ligne soit nul. Les configurations possibles sont donc :

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Si l'on rajoute la condition $* \times * + * \times * = 0$, dans les premier et dernier cas elle est automatiquement vérifiée. Dans les deux cas du milieu, elle force l'une des deux étoiles à être nulle, ce qui nous ramène à un cas particulier des premier et dernier cas.

On peut donc conclure pour ce bloc que les seules solutions aux contraintes sont les formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Si l'on regarde l'ensemble de la matrice, à ce stade les solutions possibles sont :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

Ici les première et dernière matrices ont deux colonnes nulles, ce qui est en contradiction avec le fait que U est unitaire. On peut donc maintenant conclure que les seules matrices qui respectent les contraintes sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_A \\ \hat{a}_B \\ \hat{a}_C \\ \hat{a}_D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_I \\ \hat{a}_J \\ \hat{a}_K \\ \hat{a}_L \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_A \\ \hat{a}_B \\ \hat{a}_C \\ \hat{a}_D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_I \\ \hat{a}_J \\ \hat{a}_K \\ \hat{a}_L \end{pmatrix}$$

12.2.6.5 Sens physique

Étudions le cas $\begin{pmatrix} \hat{a}_A \\ \hat{a}_B \\ \hat{a}_C \\ \hat{a}_D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_I \\ \hat{a}_J \\ \hat{a}_K \\ \hat{a}_L \end{pmatrix}$, l'autre se comportant exactement pareil, et s'en déduisant par inversion $I \leftrightarrow J$.

On lit sur la matrice (ou plus facilement sur son inverse U^\dagger) que seuls les modes A et B permettent de faire cliquer le détecteur I tandis que seuls les modes C et D permettent de faire cliquer J . Le type d'interféromètre que cela représente est représenté en [figure 12.3](#).

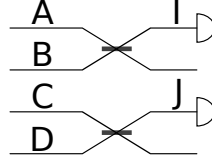


FIGURE 12.3 – Interféromètre de la forme retenue. Les modes de sortie non précisés ne sont pas mesurés.

Il est clair que cela ne permet pas d'intriquer les parties « discrète » et « continue ». Formalisons cela.

Commençons par nous souvenir qu'on part d'un état où les composantes « continue » (modes A et B , intriqués avec A' et B') et « discrète » (modes C et D , intriqués avec C' et D') sont séparées. De plus on est assuré que l'annonce ne peut avoir lieu que dans le cas où l'on a exactement un photon provenant de la partie « continue » et un de la partie « discrète ». On peut donc écrire la partie de l'état initial sous la forme :

$$\left(c_A |\chi_A\rangle_{A',B'} |1\rangle_A |0\rangle_B + c_B |\chi_B\rangle_{A',B'} |0\rangle_A |1\rangle_B \right) \otimes \left(c_C |\chi_C\rangle_{C',D'} |1\rangle_C |0\rangle_D + c_D |\chi_D\rangle_{C',D'} |0\rangle_C |1\rangle_D \right)$$

où les c_u sont des coefficients complexes, et les $|\chi_A\rangle_{A',B'}$, $|\chi_B\rangle_{A',B'}$, $|\chi_C\rangle_{C',D'}$ et $|\chi_D\rangle_{C',D'}$ des états sur les modes indiqués.

En développant, on peut récupérer les coefficients de l'état générique précédemment considéré :

$$\begin{aligned} \lambda_{A,C} &= \frac{c_A c_C}{2} = \lambda_{C,A} & |\varphi_{A,C}\rangle &= |\chi_A\rangle_{A',B'} \otimes |\chi_C\rangle_{C',D'} = |\varphi_{C,A}\rangle \\ \lambda_{A,D} &= \frac{c_A c_D}{2} = \lambda_{D,A} & |\varphi_{A,D}\rangle &= |\chi_A\rangle_{A',B'} \otimes |\chi_D\rangle_{C',D'} = |\varphi_{D,A}\rangle \\ \lambda_{B,C} &= \frac{c_B c_C}{2} = \lambda_{C,B} & |\varphi_{B,C}\rangle &= |\chi_B\rangle_{A',B'} \otimes |\chi_C\rangle_{C',D'} = |\varphi_{C,A}\rangle \\ \lambda_{B,D} &= \frac{c_B c_D}{2} = \lambda_{D,B} & |\varphi_{B,D}\rangle &= |\chi_B\rangle_{A',B'} \otimes |\chi_D\rangle_{C',D'} = |\varphi_{D,B}\rangle \end{aligned}$$

Nous avons explicité l'état obtenu après l'annonce par l'équation (12.4). Il est proportionnel à :

$$\sum_{u,v} \lambda_{u,v} U_{u,I} U_{v,J} |\varphi_{u,v}\rangle$$

Ici beaucoup de termes sont nuls. On peut expliciter la somme :

$$\lambda_{A,C} U_{A,I} U_{C,J} |\varphi_{A,C}\rangle + \lambda_{A,D} U_{A,I} U_{D,J} |\varphi_{A,D}\rangle + \lambda_{B,C} U_{B,I} U_{C,J} |\varphi_{B,C}\rangle + \lambda_{B,D} U_{B,I} U_{D,J} |\varphi_{B,D}\rangle$$

On remplace ensuite par les expressions plus détaillées (à la normalisation $\frac{1}{2}$ près) :

$$c_A c_C U_{A,I} U_{C,J} |\chi_A\rangle_{A',B'} \otimes |\chi_C\rangle_{C',D'} + c_A c_D U_{A,I} U_{D,J} |\chi_A\rangle_{A',B'} \otimes |\chi_D\rangle_{C',D'} \\ + c_B c_C U_{B,I} U_{C,J} |\chi_B\rangle_{A',B'} \otimes |\chi_C\rangle_{C',D'} + c_B c_D U_{B,I} U_{D,J} |\chi_B\rangle_{A',B'} \otimes |\chi_D\rangle_{C',D'}$$

Mais il se trouve que cet état est factorisable et s'écrit :

$$\left(c_A U_{A,I} |\chi_A\rangle_{A',B'} + c_B U_{B,I} |\chi_B\rangle_{A',B'} \right) \otimes \left(c_C U_{C,J} |\chi_C\rangle_{C',D'} + c_D U_{D,J} |\chi_D\rangle_{C',D'} \right)$$

Nous pouvons donc conclure qu'il est impossible de générer l'état visé dans le cadre des hypothèses effectuées. En effet l'état annoncé est séparable quel que soit le choix de U excluant le vide et les multiples photons sur la partie discrète.

Remarque. Nous avons utilisé dans cette démonstration que $\forall u, v \lambda_{u,v} \neq 0$. Or dans l'exemple de la [sous-section 12.2.2](#), en choisissant $y' \ll y$ il est possible de rendre négligeable certains des $\lambda_{u,v}$.

Cependant, s'assurer que l'annonce exclut les termes ayant comme facteur y^2 revient à utiliser l'argument graphique sur le bloc 2×2 supérieur gauche de U . En prenant aussi en compte les $\lambda_{u,v}$ nuls, la forme explicite de la somme (12.4) ne change pas. Ainsi la conclusion reste la même. \diamond

Exemples de solutions, et état associés

Illustrons la solution obtenue en l'appliquant au cas de l'exemple vu en [sous-section 12.2.2](#). Afin de compacter les notations, on considère que le mode C' est dans la case temporelle « tôt » (e) et le mode D dans la « tard » (l). On omet le mode B' dont l'état ne varie pas, et on n'explique aucun indice. On peut alors écrire :

$$|\chi_A\rangle = \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle \quad |\chi_B\rangle = \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☺} \end{array} \right\rangle \quad |\chi_C\rangle = |e\rangle \quad |\chi_D\rangle = |l\rangle$$

Si l'on considère maintenant la matrice
$$\begin{pmatrix} \hat{a}_A \\ \hat{a}_B \\ \hat{a}_C \\ \hat{a}_D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_I \\ \hat{a}_J \\ \hat{a}_K \\ \hat{a}_L \end{pmatrix}$$
 l'état obtenu

est proportionnel à :

$$\left(\left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☹} \end{array} \right\rangle + \left| \begin{array}{c} \text{☹} \\ \text{☺} \end{array} \right\rangle \right) \otimes (|e\rangle + |l\rangle) \propto |\alpha\rangle \otimes (|e\rangle + |l\rangle)$$

L'état est séparé et il en irait de même si l'on utilisait d'autres coefficients dans la matrice U tout en conservant une forme compatible avec la résolution.

12.2.7 Conclusion

On a prouvé que partant d'un état produit entre les canaux « discret » et « continu » tel que toutes les configurations à deux photons au niveau de l'interféromètre ont des probabilités du même ordre de grandeur⁶, aucun interféromètre passif suivi d'une annonce par deux détecteurs de photons uniques de type ON/OFF ne peut éliminer de l'état généré les termes pour lesquels deux photons proviennent d'un même canal (« continu » ou « discret ») sans rendre l'état de sortie séparable.

Cela s'interprète simplement : pour ne pas produire un état séparé, un photon provenant d'une entrée (discrète ou continue) doit pouvoir atteindre chacun des deux détecteurs d'annonce. Mais alors deux photons venant de la même entrée peuvent faire cliquer simultanément ce deux détecteurs.

6. Typiquement le cas quand la génération repose de chaque côté sur des phénomènes probabilistes indépendants pour les deux cases temporelles. Cette condition n'est en fait pas utile pour obtenir le résultat.

Remarquez que pour traiter ce problème il est nécessaire d'effectuer les développements limités sur le nombre de photons à l'ordre deux, sans quoi on risque de négliger des termes non négligeables. En particulier l'image du « photon extrait » d'un chat n'est pas suffisante.

Attention à ne pas tirer de conclusion hâtive de ce qui a été montré dans ce chapitre. Quand les hypothèses utilisées ne sont pas vérifiées la génération de l'état (12.1) devient possible. Par exemple disposer d'une source déterministe de paires de photons serait suffisant. Un autre contre-exemple est le schéma que nous présentons au [chapitre 13](#).

SCHÉMA PROPOSÉ

Dans ce chapitre nous présentons et analysons un schéma pour générer l'état

$$|\varphi\rangle = \frac{|e\rangle_A |+\alpha_f\rangle_B - |l\rangle_A |-\alpha_f\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (12.1)$$

Nous commencerons par présenter la configuration expérimentale retenue, et expliquer son fonctionnement en montrant le calcul de l'état annoncé dans un cas idéal, qui est bien $|\varphi\rangle$. Les limitations expérimentales seront alors prises en compte et nous montrerons que l'état annoncé dans des cas réalistes, pourtant éloignés du cas idéal, reste proche de $|\varphi\rangle$.

13.1 PRÉSENTATION DU SCHÉMA

Le schéma que nous allons étudier est donné par la [figure 13.1](#). Celui-ci effectue une interférence entre un chat de Schrödinger optique, tel que défini dans l'[annexe B](#), injecté sur la voie 3 dans un mode temporel qu'on dénomme¹ m et une paire de photons injectée sur les modes 1 et 2. Un état cohérent $|r\alpha\rangle$ est utilisé dans l'entrée 4 afin de contourner l'impossibilité présentée en [section 12.2](#).

13.1.1 État au niveau des détecteurs

Détaillons le fonctionnement de ce schéma en commençant par décrire un cas idéal. En particulier la source de paires de photons est dans cette section considérée comme déterministe. On va calculer l'état obtenu au niveau des détecteurs.

13.1.1.1 *Partie continue**État de départ*

La partie de variables continues est temporellement dans le mode m . Les états injectés dans les voies 3 et 4 sont respectivement un chat un état cohérent :

$$\frac{|\alpha\rangle_{3,m} + |-\alpha\rangle_{3,m}}{\mathcal{N}} \otimes |r\alpha\rangle_{4,m}, \quad \mathcal{N} = \sqrt{2}\sqrt{1 + e^{-2|\alpha|^2}} \quad (13.1)$$

Cela se réécrit en termes d'opérateurs :

$$\left\{ \frac{D_{3,m}(\alpha) + D_{3,m}(-\alpha)}{\mathcal{N}} \otimes D_{4,m}(r\alpha) \right\} |0\rangle_{3,4} \quad (13.2)$$

1. m pour « moyen » ; on peut se le représenter comme intermédiaire entre les modes « tôt » (e) et « tard » (l), bien que cela soit purement arbitraire.

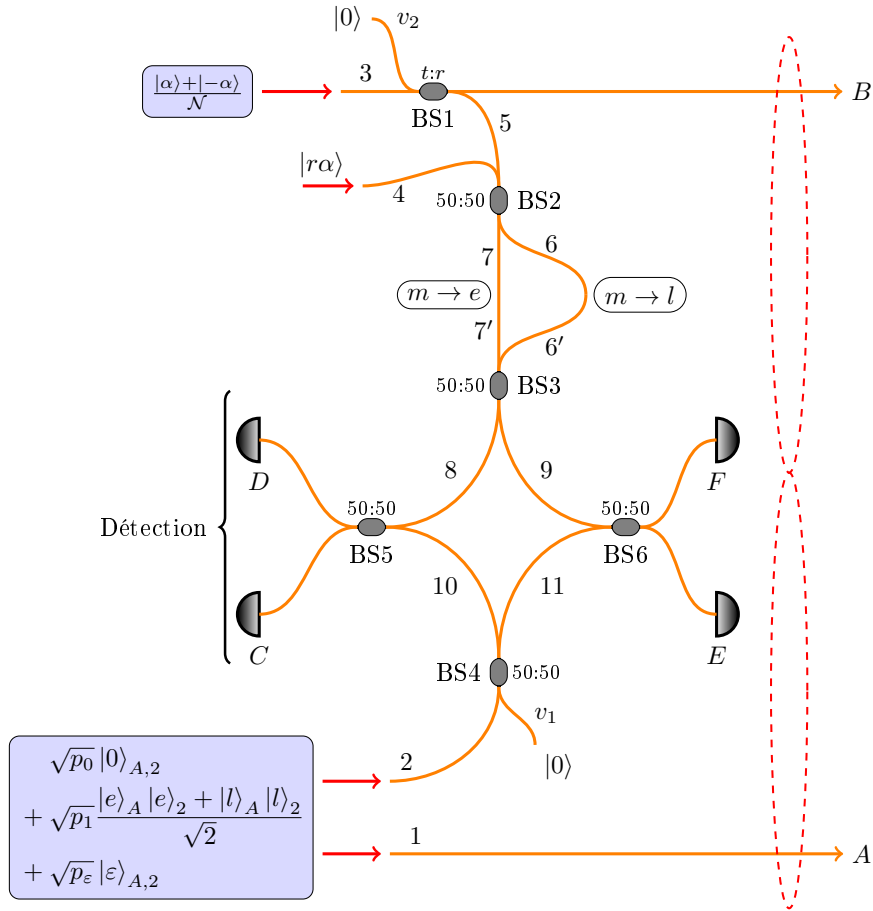


FIGURE 13.1 – Proposition de schéma d'expérience

Première séparatrice : BS1

On adopte la convention suivante pour la séparatrice BS1 :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{B,m} \\ \hat{a}_{5,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{3,m} \\ \hat{a}_{v_2,m} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{3,m} \\ \hat{a}_{v_2,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & r \\ -r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{B,m} \\ \hat{a}_{5,m} \end{pmatrix}$$

avec $|r|^2 + |t|^2 = 1$.

La situation dans laquelle un chat est séparé sur une lame séparatrice a déjà été traitée en sous-section B.2.1. En adaptant l'équation (B.3) aux notations utilisées ici, on obtient :

$$D_{3,m}(\alpha)D_{v_2,m}(0) = D_{B,m}(t\alpha)D_{5,m}(r\alpha)$$

L'état après la première séparatrice est donc :

$$\left\{ \frac{D_{B,m}(t\alpha)D_{5,m}(r\alpha) + D_{B,m}(-t\alpha)D_{5,m}(-r\alpha)}{\mathcal{N}} \otimes D_{4,m}(r\alpha) \right\} |0\rangle_{5,4,B} \quad (13.3)$$

Deuxième séparatrice : BS2

On adopte la convention :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{6,m} \\ \hat{a}_{7,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{4,m} \\ \hat{a}_{5,m} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{4,m} \\ \hat{a}_{5,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{6,m} \\ \hat{a}_{7,m} \end{pmatrix}$$

La transformation des opérateurs de déplacement s'écrit alors :

$$D_{5,m}(\gamma)D_{4,m}(\epsilon) = D_{6,m}\left(\frac{\gamma+\epsilon}{\sqrt{2}}\right)D_{7,m}\left(\frac{\gamma-\epsilon}{\sqrt{2}}\right)$$

L'état après la seconde séparatrice est donc :

$$\frac{D_{B,m}(t\alpha)D_{6,m}(\sqrt{2}r\alpha) + D_{B,m}(-t\alpha)D_{7,m}(-\sqrt{2}r\alpha)}{\mathcal{N}} |0\rangle_{6,7,B} \quad (13.4)$$

Remarquez que c'est ici qu'est contournée l'impossibilité démontrée en [section 12.2](#). En effet l'interférence qui s'effectue sur la séparatrice BS2 peut être vue comme la superposition de deux interférences classiques : quand on envoie deux ondes harmoniques en phase sur une séparatrice, toute la lumière sort dans une des voies, tandis que si elles sont en opposition de phase la lumière sort dans l'autre voie. Ici le chat est une superposition de deux états cohérents en opposition de phase ; chacune de ses composantes est entièrement routée dans un des modes $(6, m)$ ou $(7, m)$. L'encodage en phase a été converti en un encodage spatial.

Ajout des délais

Nous convertissons maintenant l'encodage spatial en un encodage temporel. Sur la branche 6 le mode temporel m est « retardé » pour coïncider au mode l de la partie discrète : $m \rightarrow l$. Sur la branche 7 on effectue l'inverse et m est « avancé » pour coïncider avec le mode e : $m \mapsto e$.

Par ailleurs on considère que les modes temporels autour de m sont vides pour les entrées, de telle sorte que $(6', e)$ et $(7', l)$ sont peuplés de vide. L'état se réécrit alors :

$$\frac{D_{B,m}(t\alpha)D_{6',l}(\sqrt{2}r\alpha) + D_{B,m}(-t\alpha)D_{7',e}(-\sqrt{2}r\alpha)}{\mathcal{N}} |0\rangle_{6',7',B}$$

Troisième séparatrice : BS3

Nous mélangeons les modes $7'$ et $6'$ sur une lame séparatrice. On adopte la convention :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{8,\lambda} \\ \hat{a}_{9,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{6',\lambda} \\ \hat{a}_{7',\lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{6',\lambda} \\ \hat{a}_{7',\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{8,\lambda} \\ \hat{a}_{9,\lambda} \end{pmatrix}$$

La transformation des opérateurs de déplacement s'écrit en adaptant l'équation (B.3) aux conventions. Les interférences s'effectuent de manière indépendante pour chacun des modes temporels. En notant $\lambda \in \{e, l\}$ un mode temporel, les opérateurs se transforment selon :

$$D_{7',\lambda}(\gamma)D_{6',\lambda}(\epsilon) = D_{8,\lambda}\left(\frac{\gamma+\epsilon}{\sqrt{2}}\right)D_{9,\lambda}\left(\frac{\gamma-\epsilon}{\sqrt{2}}\right)$$

Pour chacune des cases temporelles e et l , la lumière ne provient que d'une direction, et l'interférence s'effectue avec du vide. L'état après cette séparatrice est donc :

$$\frac{D_{B,m}(t\alpha)D_{8,l}(r\alpha)D_{9,l}(-r\alpha) + D_{B,m}(-t\alpha)D_{8,e}(-r\alpha)D_{9,e}(-r\alpha)}{\mathcal{N}} |0\rangle_{8,9,B} \quad (13.5)$$

L'effet de la partie continue de l'interféromètre est donc de construire un état intriqué. Il s'écrit comme la somme de deux états séparés, un pour lequel la partie dans le mode B est $|+t\alpha\rangle_B$ et la lumière dans 8 et 9 est présente uniquement au temps l , et un second état formé de $|-t\alpha\rangle_B$ et ayant de la lumière uniquement au temps e dans les modes 8 et 9.

Cet état présente l'avantage de ne pouvoir à lui seul faire cliquer simultanément des détecteurs aux temps e et l . Ainsi une annonce sur e et l simultanément nous prémunira du vide sur la partie discrète.

13.1.1.2 Partie discrète

Nous traitons pour l'instant uniquement du cas idéal. On considère donc aux entrées 1 et 2 une paire de photons intriqués en temps :

$$\frac{|e\rangle_A |e\rangle_2 + |l\rangle_A |l\rangle_2}{\sqrt{2}} \quad (13.6)$$

Avec une notation mixte, on peut l'écrire :

$$\frac{|e\rangle_A \hat{a}_{2,e}^\dagger + |l\rangle_A \hat{a}_{2,l}^\dagger}{\sqrt{2}} |0\rangle_{2,v_1}$$

Effet de la séparatrice : BS_4

On prend comme convention :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{10,\lambda} \\ \hat{a}_{11,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{2,\lambda} \\ \hat{a}_{v_1,\lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{2,\lambda} \\ \hat{a}_{v_1,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{10,\lambda} \\ \hat{a}_{11,\lambda} \end{pmatrix}$$

Après la séparatrice, on a donc l'état :

$$\frac{|e\rangle_A [\hat{a}_{10,e}^\dagger + \hat{a}_{11,e}^\dagger] + |l\rangle_A [\hat{a}_{10,l}^\dagger + \hat{a}_{11,l}^\dagger]}{2} |0\rangle_{10,11} \quad (13.7)$$

13.1.1.3 Mélange des parties continue et discrète

Effectuons le mélange final. On retient comme convention pour les séparatrices :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{C,\lambda} \\ \hat{a}_{D,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{8,\lambda} \\ \hat{a}_{10,\lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{8,\lambda} \\ \hat{a}_{10,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{C,\lambda} \\ \hat{a}_{D,\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{E,\lambda} \\ \hat{a}_{F,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{9,\lambda} \\ \hat{a}_{11,\lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{9,\lambda} \\ \hat{a}_{11,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{E,\lambda} \\ \hat{a}_{F,\lambda} \end{pmatrix}$$

Les opérateurs de déplacement se transforment alors suivant :

$$\begin{aligned} D_{10,\lambda}(\gamma)D_{8,\lambda}(\epsilon) &= D_{C,\lambda}\left(\frac{\gamma+\epsilon}{\sqrt{2}}\right)D_{D,\lambda}\left(\frac{\gamma-\epsilon}{\sqrt{2}}\right) \\ D_{11,\lambda}(\gamma)D_{9,\lambda}(\epsilon) &= D_{E,\lambda}\left(\frac{\gamma+\epsilon}{\sqrt{2}}\right)D_{F,\lambda}\left(\frac{\gamma-\epsilon}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Et en particulier pour $\gamma = 0$,

$$\begin{aligned} D_{8,\lambda}(\epsilon) &= D_{C,\lambda}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)D_{D,\lambda}\left(\frac{-\epsilon}{\sqrt{2}}\right) \\ D_{9,\lambda}(\epsilon) &= D_{E,\lambda}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)D_{F,\lambda}\left(\frac{-\epsilon}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur décrivant l'état en provenance de la partie continu, exprimé avant ces séparatrices par l'équation (13.5), devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{N}} \left[D_{B,m}(t\alpha)D_{C,l}\left(\frac{r\alpha}{\sqrt{2}}\right)D_{D,l}\left(\frac{-r\alpha}{\sqrt{2}}\right)D_{E,l}\left(\frac{-r\alpha}{\sqrt{2}}\right)D_{F,l}\left(\frac{r\alpha}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ \left. + D_{B,m}(-t\alpha)D_{C,e}\left(\frac{-r\alpha}{\sqrt{2}}\right)D_{D,e}\left(\frac{r\alpha}{\sqrt{2}}\right)D_{E,e}\left(\frac{-r\alpha}{\sqrt{2}}\right)D_{F,e}\left(\frac{r\alpha}{\sqrt{2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (13.8)$$

Les opérateurs de la partie discrète se transforment selon :

$$\hat{a}_{2,e}^\dagger = \frac{\hat{a}_{C,e}^\dagger + \hat{a}_{D,e}^\dagger + \hat{a}_{E,e}^\dagger + \hat{a}_{F,e}^\dagger}{2} \quad \hat{a}_{2,l}^\dagger = \frac{\hat{a}_{C,l}^\dagger + \hat{a}_{D,l}^\dagger + \hat{a}_{E,l}^\dagger + \hat{a}_{F,l}^\dagger}{2} \quad (13.9)$$

Et donc l'état (13.7) devient après les dernières séparatrices :

$$\left[|e\rangle_A \frac{\hat{a}_{C,e}^\dagger + \hat{a}_{D,e}^\dagger + \hat{a}_{E,e}^\dagger + \hat{a}_{F,e}^\dagger}{2\sqrt{2}} + |l\rangle_A \frac{\hat{a}_{C,l}^\dagger + \hat{a}_{D,l}^\dagger + \hat{a}_{E,l}^\dagger + \hat{a}_{F,l}^\dagger}{2\sqrt{2}} \right] |0\rangle_{B,C,D,E,F} \quad (13.10)$$

L'état complet mélangeant les parties continues et discrètes s'obtient en appliquant l'opérateur donné par (13.8) à (13.10). En développant, en changeant de notation pour B et en posant $\tilde{\alpha} = \frac{r\alpha}{\sqrt{2}}$ on obtient l'état au niveau des détecteurs, qu'on appellera par la suite $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}\mathcal{N}} \left[\right. \\ &\quad |+\alpha\rangle_B |e\rangle_A D_{C,l}(+\tilde{\alpha})D_{D,l}(-\tilde{\alpha})D_{E,l}(-\tilde{\alpha})D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,e}^\dagger + \hat{a}_{D,e}^\dagger + \hat{a}_{E,e}^\dagger + \hat{a}_{F,e}^\dagger \right] \\ &\quad + |-\alpha\rangle_B |e\rangle_A D_{C,e}(-\tilde{\alpha})D_{D,e}(+\tilde{\alpha})D_{E,e}(-\tilde{\alpha})D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,e}^\dagger + \hat{a}_{D,e}^\dagger + \hat{a}_{E,e}^\dagger + \hat{a}_{F,e}^\dagger \right] \\ &\quad + |+\alpha\rangle_B |l\rangle_A D_{C,l}(+\tilde{\alpha})D_{D,l}(-\tilde{\alpha})D_{E,l}(-\tilde{\alpha})D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,l}^\dagger + \hat{a}_{D,l}^\dagger + \hat{a}_{E,l}^\dagger + \hat{a}_{F,l}^\dagger \right] \\ &\quad + |-\alpha\rangle_B |l\rangle_A D_{C,e}(-\tilde{\alpha})D_{D,e}(+\tilde{\alpha})D_{E,e}(-\tilde{\alpha})D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,l}^\dagger + \hat{a}_{D,l}^\dagger + \hat{a}_{E,l}^\dagger + \hat{a}_{F,l}^\dagger \right] \\ &\quad \left. \right] |0\rangle_{C,D,E,F} \end{aligned} \quad (13.11)$$

13.1.2 Choix de l'annonce

Nous cherchons à définir une stratégie d'annonce qui permette de ne conserver que les termes de l'état $|\psi_1\rangle$ (voir l'équation (13.11)) contenant une partie selon A et B figurant dans l'état souhaité, qu'on rappelle :

$$|\varphi\rangle = \frac{|e\rangle_A |+\alpha_f\rangle_B - |l\rangle_A |-\alpha_f\rangle_B}{\sqrt{2}}, \quad (12.1)$$

Ainsi nous souhaitons sélectionner uniquement les premier et dernier termes de l'équation (13.11). On remarque que pour chacun des deux termes du milieu, la lumière n'est présente que dans une seule case temporelle. Ainsi on impose comme conditionnement que deux détecteurs cliquent : un au temps e et un au temps l . Tous les détecteurs peuvent jouer ces rôles. On choisit (arbitrairement) que l'annonce est un succès quand les détecteurs (E, l) et (F, e) cliquent. Pour illustrer ce choix, recopions l'équation (13.11) en mettant en couleur les termes qui interviendront dans l'état après l'annonce² :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\mathcal{N}} \left[\begin{aligned} & |+\alpha\rangle_B |e\rangle_A \underline{D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha})} \left[\hat{a}_{C,e}^\dagger + \hat{a}_{D,e}^\dagger + \hat{a}_{E,e}^\dagger + \hat{a}_{F,e}^\dagger \right] \\ & + |-\alpha\rangle_B |e\rangle_A D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,e}^\dagger + \hat{a}_{D,e}^\dagger + \hat{a}_{E,e}^\dagger + \hat{a}_{F,e}^\dagger \right] \\ & + |+\alpha\rangle_B |l\rangle_A D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,l}^\dagger + \hat{a}_{D,l}^\dagger + \hat{a}_{E,l}^\dagger + \hat{a}_{F,l}^\dagger \right] \\ & + |-\alpha\rangle_B |l\rangle_A \underline{D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha})} \left[\hat{a}_{C,l}^\dagger + \hat{a}_{D,l}^\dagger + \hat{a}_{E,l}^\dagger + \hat{a}_{F,l}^\dagger \right] \end{aligned} \right] |0\rangle_{C,D,E,F}$$

Par ailleurs les deux termes que nous souhaitons conserver diffèrent sur les modes (C, e) , (C, l) , (D, e) , (D, l) , (E, e) et (F, l) . Afin que cela ne mène pas à un état mélangé, nous effaçons cette différence en plaçant des détecteurs sur tous ces modes, et imposons pour l'annonce qu'ils ne cliquent pas.

Enfin, les deux termes à garder diffèrent aussi sur les modes (E, l) et (F, e) . Pour effacer cette différence, nous allons utiliser des détecteurs non pas de type ON/OFF, mais résolvant le nombre de photons et on considérera pour l'annonce la mesure d'exactly un photon. De plus on considère ces détecteurs comme parfaits, sans pertes. Les opérateurs de mesure de chacun des détecteurs seront donc $|0\rangle\langle 0|$ et $|1\rangle\langle 1|$. Nous pouvons écrire l'opérateur de la mesure d'annonce dans le cas idéal :

$$\hat{\Pi}^{\text{id}} = \mathbb{1}_{A,B} \otimes |0\rangle\langle 0|_{C,e} \otimes |0\rangle\langle 0|_{C,l} \otimes |0\rangle\langle 0|_{D,e} \otimes |0\rangle\langle 0|_{D,l} \\ \otimes |0\rangle\langle 0|_{E,e} \otimes |1\rangle\langle 1|_{E,l} \otimes |1\rangle\langle 1|_{F,e} \otimes |0\rangle\langle 0|_{F,l} \quad (13.12)$$

$\hat{\Pi}^{\text{id}}$ est un projecteur. Par commodité, on notera $|\Pi^{\text{id}}\rangle$ le vecteur :

$$|\Pi^{\text{id}}\rangle = |0\rangle_{C,e} \otimes |0\rangle_{C,l} \otimes |0\rangle_{D,e} \otimes |0\rangle_{D,l} \otimes |0\rangle_{E,e} \otimes |1\rangle_{E,l} \otimes |1\rangle_{F,e} \otimes |0\rangle_{F,l}$$

et donc $\hat{\Pi}_{\text{id}} = \mathbb{1}_{A,B} \otimes |\Pi^{\text{id}}\rangle\langle \Pi^{\text{id}}|$.

2. Comme vu avec l'équation (2.3), les termes ayant une probabilité nulle d'annonce n'ont pas besoin d'être pris en compte.

Remarque. Pour augmenter le taux d'annonce, on pourrait utiliser comme annonce la détection d'un photon par n'importe lequel des détecteurs au temps e , d'un deuxième au temps l éventuellement sur un autre détecteur et par la détection d'aucun photon dans tous les autres modes. Cela permettrait de multiplier par 16 la probabilité d'annonce, ou par 12 si l'on refuse de détecter les deux photons avec le même détecteur (pour prendre en compte le temps mort par exemple). \diamond

13.1.3 État annoncé dans le cas idéal

Maintenant que nous avons l'état $|\psi_1\rangle$ au niveau des détecteurs (équation (13.11)) et l'opérateur de mesure (équation (13.12)), nous pouvons calculer l'état annoncé. Pour cela nous utilisons la formule (2.3). Appelons $|\tilde{\psi}_1\rangle$ la partie de $|\psi_1\rangle$ qui a une probabilité non nulle de déclencher l'annonce :

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}\mathcal{N}} \left[\begin{array}{l} |+\alpha\rangle_B |e\rangle_A D_{C,l} (+\tilde{\alpha}) D_{D,l} (-\tilde{\alpha}) D_{E,l} (-\tilde{\alpha}) D_{F,l} (+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \\ + |-\alpha\rangle_B |l\rangle_A D_{C,e} (-\tilde{\alpha}) D_{D,e} (+\tilde{\alpha}) D_{E,e} (-\tilde{\alpha}) D_{F,e} (+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l}^\dagger \end{array} \right] |0\rangle_{C,D,E,F}$$

ou en appliquant les opérateurs au vide :

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}\mathcal{N}} \left[\begin{array}{l} |+\alpha\rangle_B |e\rangle_A |+\tilde{\alpha}\rangle_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle_{F,l} |1\rangle_{F,e} |0\rangle_{C,D,E,e} \\ + |-\alpha\rangle_B |l\rangle_A |-\tilde{\alpha}\rangle_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle_{F,e} |1\rangle_{E,l} |0\rangle_{C,D,F,l} \end{array} \right] \quad (13.13)$$

L'état non normalisé (numérateur de (2.3)) obtenu après l'annonce est donné par :

$$\text{Tr}_{CDEF} \left[\hat{\Pi}^{\text{id}} |\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1| \right] = \langle \Pi^{\text{id}} | \tilde{\psi}_1 \rangle \langle \tilde{\psi}_1 | \Pi^{\text{id}} \rangle$$

L'état annoncé est donc pur, et s'écrit à la normalisation près $\langle \Pi^{\text{id}} | \tilde{\psi}_1 \rangle$. En se souvenant (voir équation (1.13)) que $\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$ et $\langle 1|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\alpha$, on calcule :

$$\langle \Pi^{\text{id}} | \tilde{\psi}_1 \rangle = \frac{-\tilde{\alpha}e^{-2|\tilde{\alpha}|^2}}{2\sqrt{2}\mathcal{N}} \left[|+\alpha\rangle_B |e\rangle_A - |-\alpha\rangle_B |l\rangle_A \right]$$

Sa norme, qui est aussi la probabilité d'annonce³, vaut :

$$p^{\text{id}} = \frac{|\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}}{4\mathcal{N}^2}$$

En la réexprimant à partir des paramètres initiaux, on obtient :

$$p^{\text{id}} = \frac{|r\alpha|^2 e^{-2|r\alpha|^2}}{16 \left(1 + e^{-2|\alpha|^2} \right)} \quad (13.14)$$

Par ailleurs l'état normalisé obtenu est bien $|\varphi\rangle$.

On peut donc conclure que le schéma présenté permet bien, dans des conditions idéales, de générer l'état visé. Nous allons maintenant analyser ce qu'il advient quand on considère des sources et détecteurs réalistes.

3. Pour tout ce chapitre nous noterons les probabilités d'annonce par un P majuscule alors que les probabilités des différents termes des états d'entrée seront notés avec un p minuscule.

13.2 SOURCE RÉALISTE DE PAIRES DE PHOTONS

Considérons que les paires de photons sont générées probabilistiquement, par exemple par un cristal non linéaire faiblement pompé dans les deux modes temporels e et l . Nous allons décrire l'état généré puis calculer l'état au niveau du détecteur.

13.2.1 Source de paire de photons

Comme nous l'avons vu en [section 12.2](#), il faut effectuer le développement limité à l'ordre deux par rapport à la probabilité d'obtenir une paire.

La source de paires intriquées en encodage temporel est construite en ayant deux sources de paires identiques et indépendantes, une pour chacun des modes e et l . Expérimentalement on utilise le même cristal pompé à deux temps différents. Notons p_k^m la probabilité d'obtenir k paires pour une des deux sources (un des modes temporels). Pour une source réaliste ils sont tels que p_k^m est de l'ordre de p_1^m à la puissance k . Nous effectuons l'hypothèse que tous les coefficients sont réels ; ainsi l'état généré par la source complète est :

$$\begin{aligned}
& \left[\sqrt{p_0^m} |0\rangle_{1,e} |0\rangle_{2,e} + \sqrt{p_1^m} |1\rangle_{1,e} |1\rangle_{2,e} + \sqrt{p_2^m} |2\rangle_{1,e} |2\rangle_{2,e} + o(\sqrt{p_2^m}) \right] \\
& \otimes \left[\sqrt{p_0^m} |0\rangle_{1,l} |0\rangle_{2,l} + \sqrt{p_1^m} |1\rangle_{1,l} |1\rangle_{2,l} + \sqrt{p_2^m} |2\rangle_{1,l} |2\rangle_{2,l} + o(\sqrt{p_2^m}) \right] \\
& = p_0^m |0\rangle_{1,e} |0\rangle_{2,e} |0\rangle_{1,l} |0\rangle_{2,l} + \sqrt{2p_0^m p_1^m} \frac{|1\rangle_{1,e} |1\rangle_{2,e} |0\rangle_{1,l} |0\rangle_{2,l} + |0\rangle_{1,e} |0\rangle_{2,e} |1\rangle_{1,l} |1\rangle_{2,l}}{\sqrt{2}} \\
& \quad + \sqrt{2p_0^m p_2^m} \frac{|2\rangle_{1,e} |2\rangle_{2,e} |0\rangle_{1,l} |0\rangle_{2,l} + |0\rangle_{1,e} |0\rangle_{2,e} |2\rangle_{1,l} |2\rangle_{2,l}}{\sqrt{2}} \\
& \quad \quad \quad + p_1^m |1\rangle_{1,e} |1\rangle_{2,e} |1\rangle_{1,l} |1\rangle_{2,l} + o(p_1^m) \\
& = p_0^m |0\rangle + \sqrt{2p_0^m p_1^m} \frac{|e\rangle_1 |e\rangle_2 + |l\rangle_1 |l\rangle_2}{\sqrt{2}} \\
& \quad + \sqrt{2p_0^m p_2^m} \frac{|ee\rangle_1 |ee\rangle_2 + |ll\rangle_1 |ll\rangle_2}{\sqrt{2}} + p_1^m |el\rangle_1 |el\rangle_2 + o(p_1^m)
\end{aligned}$$

en ayant noté $|ee\rangle = |2\rangle_e |0\rangle_l$, $|ll\rangle = |0\rangle_e |2\rangle_l$ et $|el\rangle = |1\rangle_e |1\rangle_l$, et en rappelant que $|2\rangle$ et $|1\rangle$ désignent des états de Fock.

On remarque que le terme à l'ordre 1 en $\sqrt{p_1^m}$ est celui que nous avons pris en compte pour la source idéale dans l'[équation \(13.6\)](#) ; il s'agit bien d'une paire de photons intriqués en temps. Posons :

$$\begin{cases} p_0 = (p_0^m)^2 \\ p_1 = 2p_0^m p_1^m \\ p_2 = 2p_0^m p_2^m + (p_1^m)^2 \end{cases}$$

On peut alors écrire l'état généré par la source sous la forme :

$$\begin{aligned} & \sqrt{p_0} |0\rangle_{A,2} + \sqrt{p_1} \frac{|e\rangle_A |e\rangle_2 + |l\rangle_A |l\rangle_2}{\sqrt{2}} \\ & + \sqrt{p_2} \left[\sqrt{\frac{2p_0^m p_2^m}{2p_0^m p_2^m + (p_1^m)^2}} \frac{|ee\rangle_1 |ee\rangle_2 + |ll\rangle_1 |ll\rangle_2}{\sqrt{2}} + \frac{p_1^m}{\sqrt{2p_0^m p_2^m + (p_1^m)^2}} |el\rangle_1 |el\rangle_2 \right] \\ & + o\left(\sqrt{p_1^m}\right) \quad (13.15) \end{aligned}$$

13.2.1.1 Poids relatif des sous-composants

Nous avons pour l'instant décrit une source générique de paires de photons intriqués en temps. Dans l'optique d'effectuer des calculs concrets, il nous faut fixer des valeurs pour les coefficients p_k^m .

Prenons par exemple une source créant des paires de photons avec une statistique géométrique, comme le fait une source non dégénérée exploitant un processus non-linéaire d'ordre 2. L'état généré est $\sqrt{1 - \lambda^2} \sum_k \lambda^k |k\rangle |k\rangle$, et donc $p_k^m = (1 - \lambda^2) (\lambda^2)^k$; on peut exprimer en fonction de λ les coefficients vus au paragraphe précédent, ainsi que le terme d'ordre 2 :

$$\begin{cases} p_0 = (1 - \lambda^2)^2 \\ p_1 = 2(1 - \lambda^2)^2 \lambda^2 \\ p_2 = 3(1 - \lambda^2)^2 \lambda^4 \end{cases} \quad (13.16)$$

La composante à deux paires s'écrit :

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|ee\rangle_1 |ee\rangle_2 + |ll\rangle_1 |ll\rangle_2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} |el\rangle_1 |el\rangle_2 = \frac{|ee\rangle_1 |ee\rangle_2 + |ll\rangle_1 |ll\rangle_2 + |el\rangle_1 |el\rangle_2}{\sqrt{3}} \quad (13.17)$$

Remarque. Nous aurons besoin plus tard de savoir que $\frac{p_1}{p_0} = 2\lambda^2$ et $\frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{2}\lambda^2$. \diamond

13.2.1.2 Bilan

Afin de prendre en compte une source réaliste, ayant une importante composante de vide et pouvant générer plusieurs paires simultanément, nous écrirons l'état d'entrée de la partie discrète sous la forme :

$$\boxed{\sqrt{p_0} |0\rangle_{A,2} + \sqrt{p_1} \frac{|e\rangle_A |e\rangle_2 + |l\rangle_A |l\rangle_2}{\sqrt{2}} + \sqrt{p_\varepsilon} |\varepsilon\rangle_{A,2}} \quad (13.18)$$

avec l'idée que $p_0 \gg p_1 \gg p_\varepsilon$, et $|\varepsilon\rangle_{A,2}$ un état normé, contenant plusieurs paires.

Quand nous aurons besoin d'effectuer des calculs précis sur $|\varepsilon\rangle_{A,2}$, nous utiliserons le fait qu'il est dominé par la composante à deux paires qu'on écrira de manière générique sous la forme :

$$\frac{\sqrt{p_{ee}}}{\sqrt{2}} |ee\rangle_A |ee\rangle_2 + \frac{\sqrt{p_{ll}}}{\sqrt{2}} |ll\rangle_A |ll\rangle_2 + \sqrt{p_{el}} |el\rangle_A |el\rangle_2 \quad (13.19)$$

avec $p_{ee} + p_{ll} + p_{el} = 1$, et en général $p_{ee} = p_{ll}$ (voir [équation \(13.15\)](#)).

13.2.2 État au niveau des détecteurs

Calculons maintenant l'état au niveau des détecteurs lorsqu'on utilise un état tel que décrit par l'équation (13.18) pour la partie de variables discrètes, avec toujours un chat et un état cohérent pour la partie de variables continues.

13.2.2.1 État générique au niveau des détecteurs

Les entrées de la partie continue n'ayant pas été modifiées comparativement à ce qui a été vu en section 13.1, il est inutile de refaire le calcul et nous pouvons utiliser l'expression de l'opérateur donné par l'équation (13.8).

Pour gérer la partie discrète, il suffit de se souvenir du calcul effectué pour obtenir l'équation (13.11) : nous avons écrit les états sous forme d'opérateurs agissant sur vide. L'effet de l'interféromètre sur la partie discrète est donné par l'équation (13.9).

On peut donc écrire l'état générique au niveau des détecteurs, en ayant toujours posé $\tilde{\alpha} = \frac{r\alpha}{\sqrt{2}}$:

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0} |\psi_0\rangle + \sqrt{p_1} |\psi_1\rangle + \sqrt{p_\epsilon} |\psi_\epsilon\rangle \quad (13.20a)$$

avec

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \left[|t\alpha\rangle_B |0\rangle_A D_{C,l}(\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(\tilde{\alpha}) \right. \\ \left. + |-t\alpha\rangle_B |0\rangle_A D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(\tilde{\alpha}) \right] |0\rangle_{C,D,E,F} \quad (13.20b)$$

et

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}\mathcal{N}} \left[\begin{aligned} & |t\alpha\rangle_B |e\rangle_A D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,e}^\dagger + \hat{a}_{D,e}^\dagger + \hat{a}_{E,e}^\dagger + \hat{a}_{F,e}^\dagger \right] \\ & + |-t\alpha\rangle_B |e\rangle_A D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,e}^\dagger + \hat{a}_{D,e}^\dagger + \hat{a}_{E,e}^\dagger + \hat{a}_{F,e}^\dagger \right] \\ & + |t\alpha\rangle_B |l\rangle_A D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,l}^\dagger + \hat{a}_{D,l}^\dagger + \hat{a}_{E,l}^\dagger + \hat{a}_{F,l}^\dagger \right] \\ & + |-t\alpha\rangle_B |l\rangle_A D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \left[\hat{a}_{C,l}^\dagger + \hat{a}_{D,l}^\dagger + \hat{a}_{E,l}^\dagger + \hat{a}_{F,l}^\dagger \right] \end{aligned} \right] \\ |0\rangle_{C,D,E,F} \quad (13.20c)$$

où $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_\epsilon\rangle$ sont des états bien normés, ayant sur la sortie A respectivement 0, 1 et plus de photons. Notez que, de ce fait, ces trois états sont orthogonaux. $|\psi_1\rangle$ est identique à celui exprimé dans l'équation (13.11). $|\psi_\epsilon\rangle$ est un état contenant plusieurs photons sur la sortie A ; il est indésirable. On se souviendra que la probabilité qu'il déclenche deux détecteurs simultanément est de l'ordre 1 car même sans lumière provenant de la partie continue, la partie discrète est capable de fournir deux photons⁴. Pour calculer cette probabilité plus précisément on utilisera le terme à deux photons, que nous allons maintenant expliciter.

4. Il y aura tout de même un facteur de combinatoire traduisant la probabilité que chacun des photons soit détecté par le bon détecteur.

13.2.2.2 Composante à deux photons

Calculons au niveau des détecteurs la partie de $|\psi_\varepsilon\rangle$ comportant deux photons et qu'on nomme $|\psi_2\rangle$. L'état d'entrée de la partie discrète que nous prenons en compte est donné par l'équation (13.19); nous le réécrivons avec des notations mixtes :

$$\left[\sqrt{p_{ee}} |ee\rangle_A \frac{(\hat{a}_{2,e}^\dagger)^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{p_{ll}} |ll\rangle_A \frac{(\hat{a}_{2,l}^\dagger)^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{p_{el}} |el\rangle_A \hat{a}_{2,e}^\dagger \hat{a}_{2,l}^\dagger \right] |0\rangle_2$$

avec toujours $p_{ee} + p_{ll} + p_{el} = 1$, et en général $p_{ee} = p_{ll}$.

L'effet des différentes séparatrices sur les opérateurs bosoniques d'entrée de la partie discrète se décrit toujours par l'équation (13.9). En utilisant de nouveau l'équation (13.8) pour décrire la partie continue, nous aboutissons à l'expression de $|\psi_2\rangle$ suivante :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\sqrt{p_{ee}}}{4\sqrt{2}\mathcal{N}} |ee\rangle_A \left[\begin{array}{l} |t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \\ + |-t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \end{array} \right] \sum_{x,y \in \{C,D,E,F\}} \left(\hat{a}_{x,e}^\dagger \hat{a}_{y,e}^\dagger \right) \right. \\ & + \frac{\sqrt{p_{ll}}}{4\sqrt{2}\mathcal{N}} |ll\rangle_A \left[\begin{array}{l} |t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \\ + |-t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \end{array} \right] \sum_{x,y \in \{C,D,E,F\}} \left(\hat{a}_{x,l}^\dagger \hat{a}_{y,l}^\dagger \right) \\ & \left. + \frac{\sqrt{p_{el}}}{4\mathcal{N}} |el\rangle_A \left[\begin{array}{l} |t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \\ + |-t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \end{array} \right] \sum_{x,y \in \{C,D,E,F\}} \left(\hat{a}_{x,e}^\dagger \hat{a}_{y,l}^\dagger \right) \right] \\ & |0\rangle_{CDEF} \end{aligned} \quad (13.21)$$

Remarque. Nous ne cherchons pas à développer davantage cet état pour l'instant. Seule sa probabilité d'annonce nous servira dans la suite; lors de son calcul seuls certains termes seront utiles. \diamond

13.3 DÉTECTEURS RÉALISTES

Prenons maintenant en compte des détecteurs réalistes.

13.3.1 Modèle des détecteurs

Nous considérons que les détecteurs à disposition sont de type ON/OFF, et d'efficacité η . Ainsi leurs opérateurs positifs de mesure s'écrivent :

$$\hat{\Pi}^{\text{OFF}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-\eta)^k |k\rangle\langle k| \quad \hat{\Pi}^{\text{ON}} = \mathbb{1} - \hat{\Pi}^{\text{OFF}} = \sum_{k=0}^{+\infty} [1 - (1-\eta)^k] |k\rangle\langle k| \quad (13.22)$$

13.3.2 Choix de l'annonce

Le choix de la stratégie d'annonce a été discuté pour le cas idéal en sous-section 13.1.2. Nous allons discuter ici de son adaptation aux détecteurs réalistes.

13.3.2.1 Adaptation directe

L'adaptation directe de l'opérateur de mesure $\hat{\Pi}^{\text{id}}$ donné par (13.12) consiste à utiliser :

$$\hat{\Pi} = \mathbb{1}_{A,B} \otimes \hat{\Pi}_{C,e}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{C,l}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{D,e}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{D,l}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{E,e}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,l}^{\text{OFF}} \quad (13.23)$$

La probabilité de clic d'un détecteur en l'absence de photon est présumée nulle. Ainsi $|\psi_0\rangle$ et la moitié des termes de $|\psi_1\rangle$ (voir 13.1.2) ont une probabilité nulle de déclencher l'annonce. Pour cet aspect on retrouve les mêmes conclusions que le cas idéal.

$\hat{\Pi}$ n'étant pas un projecteur, l'état annoncé risque maintenant de ne pas être pur. Le calcul de l'état, ainsi que de la probabilité d'annonce sera effectué en section 13.4.

Remarque. Avant d'effectuer une expérience, il faudra s'assurer que les taux de coups d'obscurité des détecteurs sont suffisamment faibles pour que la probabilité d'annonce ne soit pas modifiée. \diamond

13.3.2.2 Ressources réduites

La raison pour laquelle en sous-section 13.1.2 nous avons décidé de mesurer l'absence de lumière sur tous les autres modes que (E, l) et (F, e) est que cela permettait d'obtenir un état pur. Ici l'état sera dans tous les cas mélangé; ainsi on peut se demander s'il est vraiment utile de placer des détecteurs pour s'assurer qu'ils ne cliquent pas. Par exemple il est évident que dans le cas de détecteurs peu efficaces ($\eta \rightarrow 0$), $\hat{\Pi}^{\text{OFF}} \rightarrow \mathbb{1}$ et donc le détecteur est inutile. Ainsi nous proposons un schéma alternatif représenté par la figure 13.2, plus économe en détecteurs.

L'opérateur de mesure utilisé sera :

$$\hat{\Pi}' = \mathbb{1}_{A,B} \otimes \mathbb{1}_{C,e} \otimes \mathbb{1}_{C,l} \otimes \mathbb{1}_{D,e} \otimes \mathbb{1}_{D,l} \otimes \mathbb{1}_{E,e} \otimes \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \otimes \mathbb{1}_{F,l} \quad (13.24)$$

Comme $\hat{\Pi}$, cet opérateur utilise les clics simultanés des détecteurs sur (E, l) et (F, e) . Ainsi il exclut également $|\psi_0\rangle$ et la moitié des termes de $|\psi_1\rangle$ de l'état annoncé.

Remarquez que les modes 8 et 10 sont perdus. Pour la voie 10 ça n'est pas un problème car l'état de ce côté est encodé avec des photons uniques et l'annonce élimine la possibilité de la sortie du photon⁵; le principal effet sera de réduire la probabilité d'annonce. Pour la sortie par la voie 8, la situation est assez proche de celle de la séparation d'un chat dont un côté est abandonné, ce que nous avons étudié en section B.3. Ainsi il paraît raisonnable que cela n'ait qu'un impact limité tant que $r\alpha \ll 1$.

Le schéma de la figure 13.2 a l'avantage de ne nécessiter que deux détecteurs. Nous n'avons pas non plus besoin de mesurer l'absence de clic sur les modes (E, e) et (F, l) . Ainsi il n'est plus nécessaire que la séparation temporelle entre les temps e et l soit supérieure au temps mort des détecteurs. Ces deux temps peuvent donc être très proche car seule la gigue des détecteurs limite leur rapprochement. Ainsi l'expérience pourra être réalisée avec un taux de répétition plus important que si elle est effectuée avec l'opérateur $\hat{\Pi}$.

5. Pour cette explication, on occulte la possible présence de plusieurs paires. Les prendre en compte n'apporte pas de changement qualitatif.

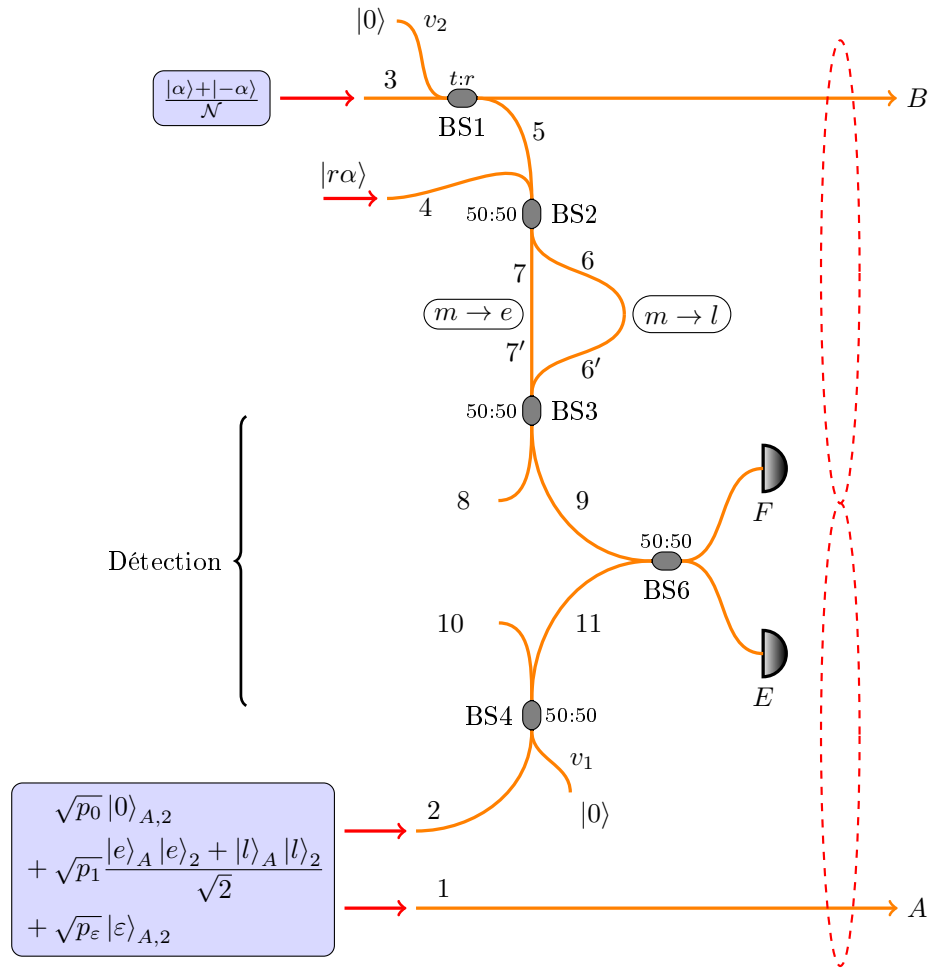


FIGURE 13.2 – Proposition alternative de schéma d’expérience, économe en détecteurs.

Remarque. Dans la [figure 13.2](#), nous aurions pu profiter de la suppression des détecteurs C et D pour retirer la séparatrice BS4 et envoyer toute la lumière provenant de la partie discrète vers les détecteurs E et F, augmentant ainsi la probabilité de succès. Cela sera utilisé pour réaliser une l’expérience mais nous avons ici préféré garder un schéma le plus proche possible de celui de la [figure 13.1](#) afin de pouvoir comparer les deux procédures d’annonce. \diamond

L’analyse de l’état annoncé par $\hat{\Pi}'$ et de la probabilité d’annonce est effectuée en [section 13.5](#).

13.4 ÉTAT ANNONCÉ EN MESURANT TOUS LES MODES

L’équation (13.20) décrit l’état avant l’annonce, au niveau des détecteurs. Dans cette section nous allons calculer l’état annoncé par la mesure décrite par $\hat{\Pi}$ (défini par équation (13.23)), ainsi que la probabilité d’annonce. Ceux-ci nous sont donnés par

l'équation (2.1). On s'intéressera dans un premier temps au numérateur de cette expression :

$$\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi\rangle\langle\psi|]$$

Sa norme est la probabilité d'annonce tandis qu'une fois normé il nous donnera la matrice densité de l'état obtenu.

Nous avons effectué un développement limité sur la probabilité p_1 d'émission d'une paire par la source. Nous allons en effectuer un pour $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$. Dans tous les cas l'efficacité des détecteurs η est considérée comme étant une constante.

13.4.1 Généralités

Commençons par simplifier l'expression de $\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi\rangle\langle\psi|]$. Pour cela prenons en compte les conclusions de l'équation (2.3) qui nous indiquent que dans le développement de $|\psi\rangle$ sur le nombre de photons dans A (équation (13.20)), seuls les termes ayant une probabilité non nulle de déclencher l'annonce ont besoin d'être pris en compte. Comme on peut calculer pour chacun des modes (E, l) et (F, e) que $\text{Tr}[\hat{\Pi}^{\text{ON}} |0\rangle\langle 0|] = 0$, $|\psi_0\rangle$ peut être exclu immédiatement. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi\rangle\langle\psi|] &= p_1 \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] + \sqrt{p_1}\sqrt{p_\varepsilon} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon|] \\ &\quad + \sqrt{p_1}\sqrt{p_\varepsilon} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_1|] + p_\varepsilon \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|] \end{aligned} \quad (13.25)$$

Les parties sur A de $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_\varepsilon\rangle$ sont orthogonales, et donc :

$$\text{Tr}[\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon|] = 0 = \text{Tr}[\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_1|]$$

Cela permet d'écrire la probabilité totale d'annonce P sous la forme :

$$\boxed{P = \text{Tr}[\hat{\Pi} |\psi\rangle\langle\psi|] = p_1 P_1 + p_\varepsilon P_\varepsilon} \quad (13.26a)$$

en ayant défini :

$$P_1 = \text{Tr}[\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] \quad \text{et} \quad P_\varepsilon = \text{Tr}[\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|] \quad (13.26b)$$

P_1 et P_ε correspondent respectivement aux probabilités d'annonce associées à $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_\varepsilon\rangle$. C'est-à-dire que P_1 est celle qu'on obtiendrait si l'on envoyait exactement une paire de photons sur l'entrée discrète de l'interféromètre ; P_ε est celle qu'on aurait en envoyant vers l'interféromètre la partie contenant deux photons et plus de l'état généré par la source de paires.

Évaluons maintenant chacun des termes de $\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi\rangle\langle\psi|]$. Le premier va être calculé exactement. Nous allons borner les autres afin de s'assurer qu'ils restent négligeables dans l'état annoncé (après normalisation de l'état). Une estimation plus précise de P_2 sera donnée en sous-section 13.5.4, uniquement dans le cadre de l'autre annonce ($\hat{\Pi}'$).

13.4.2 Gestion des multiples paires

13.4.2.1 Estimation de $\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon|] + \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_1|]$

Ces termes sont les cohérences non normées entre la partie de l'état après annonce comportant un photon unique sur A et celle en ayant plusieurs. Ils ont comme préfacteur $\sqrt{p_1}\sqrt{p_\varepsilon}$ qui est petit, mais il faut avoir à l'esprit que la renormalisation risque de les amplifier; c'est pourquoi nous allons les borner.

Commençons par remarquer que :

$$\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_1|] = (\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon|])^\dagger$$

Nous pouvons donc nous contenter de travailler sur $\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon|]$. Le principal objectif est de borner son comportement pour $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$. Remarquez que la trace n'est pas un bon critère car elle est nulle ($|\psi_1\rangle$ et $|\psi_\varepsilon\rangle$ sont orthogonaux sur le mode A). Nous allons borner chaque élément de $\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon|]$.

Soient $|x_1\rangle_{AB}$ et $|x_2\rangle_{AB}$ deux kets normés arbitraires de l'espace décrivant les modes A et B . On étudie l'élément de matrice $\langle x_1|_{AB} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon|] |x_2\rangle_{AB}$, ou plutôt son module. $\hat{\Pi}$ n'agissant pas sur les modes A et B donc le module s'exprime :

$$|\langle x_1|_{AB} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon|] |x_2\rangle_{AB}| = |\text{Tr} [\hat{\Pi} \langle x_1|_{AB} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon| |x_2\rangle_{AB}]|$$

Notons $|\psi'_1\rangle = \langle x_1|_{AB} |\psi_1\rangle$ et $|\psi'_\varepsilon\rangle = \langle x_2|_{AB} |\psi_\varepsilon\rangle$; ils sont sous-normés. La grandeur qu'on cherche à évaluer s'écrit donc $|\text{Tr} [\hat{\Pi} |\psi'_1\rangle\langle\psi'_\varepsilon|]|$.

Remarquons que $\hat{\Pi}$ étant un opérateur hermitien positif, sa racine $\sqrt{\hat{\Pi}}$ est bien définie. On calcule alors en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} |\text{Tr} [\hat{\Pi} |\psi'_1\rangle\langle\psi'_\varepsilon|]| &= |\langle \psi'_\varepsilon | \sqrt{\hat{\Pi}} \sqrt{\hat{\Pi}} | \psi'_1 \rangle| \\ &\leq \sqrt{\langle \psi'_\varepsilon | \hat{\Pi} | \psi'_\varepsilon \rangle} \sqrt{\langle \psi'_1 | \hat{\Pi} | \psi'_1 \rangle} = \sqrt{\text{Tr} [\hat{\Pi} |\psi'_\varepsilon\rangle\langle\psi'_\varepsilon|]} \sqrt{\text{Tr} [\hat{\Pi} |\psi'_1\rangle\langle\psi'_1|]} \end{aligned}$$

En remarquant que $|x_1\rangle_{AB}$ peut être complété en une base de l'espace décrivant les modes A et B , et que $\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ est hermitien positif, on peut effectuer la majoration (on reconnaît le premier terme d'une somme de nombres positifs) :

$$\text{Tr} [\hat{\Pi} |\psi'_1\rangle\langle\psi'_1|] = \langle x_1|_{AB} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] |x_1\rangle_{AB} \leq \text{Tr} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] = P_1$$

De même,

$$\text{Tr} [\hat{\Pi} |\psi'_\varepsilon\rangle\langle\psi'_\varepsilon|] \leq P_\varepsilon$$

On a ainsi prouvé que pour tous $|x_1\rangle_{AB}$ et $|x_2\rangle_{AB}$,

$$|\langle x_1|_{AB} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon|] |x_2\rangle_{AB}| \leq \sqrt{P_1 P_\varepsilon} \quad (13.27a)$$

et de même,

$$|\langle x_1|_{AB} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_1|] |x_2\rangle_{AB}| \leq \sqrt{P_1 P_\varepsilon} \quad (13.27b)$$

Ainsi nous pourrions écrire :

$$\text{Tr}_{CDEF} [|\psi_1\rangle\langle\psi_\varepsilon| \hat{\Pi}] + \text{Tr}_{CDEF} [|\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_1| \hat{\Pi}] = \sqrt{P_1 P_\varepsilon} \rho_{AB;1,\varepsilon} \quad (13.28)$$

où $\rho_{AB;1,\varepsilon}$ est un opérateur hermitien de trace nulle et dont les coefficients sont de module au plus égal à 1.

Remarque. Pour $\tilde{\alpha} = 0$ (pas de lumière du côté continu), $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_\varepsilon\rangle$ sont des états de Fock orthogonaux, même en ne regardant que leurs parties sur C, D, E, F . Comme nous allons travailler avec $\tilde{\alpha} \ll 1$, il est attendu que le terme traité ici soit nettement plus faible que ce qu'indique la domination de l'équation (13.28). \diamond

Remarque. La majoration (13.27) est en fait nécessaire à ce que la matrice densité de l'état après l'annonce soit positive. \diamond

13.4.2.2 Estimation de $\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|]$

On rappelle que par définition, P_ε est la trace de $\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|]$. Ainsi en posant :

$$\rho_{AB;\varepsilon} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|]}{P_\varepsilon} \quad (13.29)$$

la matrice densité $\rho_{AB;\varepsilon}$ est bien normée. On a alors

$$\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|] = P_\varepsilon \rho_{AB;\varepsilon} \quad (13.30)$$

Notez que comme $|\psi_\varepsilon\rangle$ a plusieurs photons provenant de la partie des variables discrètes, P_ε restera de l'ordre de 1 même pour $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$; dans cette limite et pour des détecteurs parfaits P_ε est égale à la probabilité que les photons « choisissent » la bonne route.

P_ε sera estimé plus précisément à partir de sa partie contenant deux paires dans le cadre de l'autre annonce en sous-section 13.5.4.

13.4.2.3 Conclusion

De manière similaire à ce qui a été effectué pour $\rho_{AB;\varepsilon}$, on définit :

$$\rho_{AB;1} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]}{P_1} \quad (13.31)$$

On peut alors résumer l'estimation des termes impliquant plusieurs photons sur A par :

$$\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi\rangle\langle\psi|] = p_1 P_1 \rho_{AB;1} + \sqrt{p_1 p_\varepsilon} \sqrt{P_1 P_\varepsilon} \rho_{AB;1,\varepsilon} + p_\varepsilon P_\varepsilon \rho_{AB;\varepsilon} \quad (13.32)$$

avec $\rho_{AB;1,\varepsilon}$ une matrice dont les modules des coefficients valent au plus 1. $\rho_{AB;1}$ est la matrice densité bien normée qu'on obtiendrait si $|\psi_1\rangle$ était l'état au niveau des détecteurs (une seule paire envoyée par la source du côté discret). De même $\rho_{AB;\varepsilon}$ est la matrice densité bien normée correspondant à l'état qu'on obtiendrait avec seulement $|\psi_\varepsilon\rangle$. De plus on retiendra que P_ε reste de l'ordre de 1 quand $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$.

13.4.3 Calcul de la partie principale de l'état annoncé

Nous allons maintenant calculer la partie la plus importante de l'état annoncé. Sa version non normée est $\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]$.

De nouveau nous utilisons la propriété (2.3) pour ne garder que les termes susceptibles de déclencher l'annonce. Cela a déjà été effectué dans le cas idéal. Comme

$\text{Tr}[\hat{\Gamma}^{\text{ON}} |0\rangle\langle 0|] = 0$, les termes qui ne déclenchent pas la détection idéale décrite par $\hat{\Gamma}^{\text{id}}$ ne déclenchent pas non plus celle décrite par $\hat{\Gamma}$. Ainsi on peut de nouveau se contenter de travailler avec $|\tilde{\psi}_1\rangle$ tel que défini dans l'équation (13.13) :

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}\mathcal{N}} \left[\begin{array}{l} |+\alpha\rangle_B |e\rangle_A |+\tilde{\alpha}\rangle_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle_{F,l} |1\rangle_{F,e} |0\rangle_{C,D,E,e} \\ + |-\alpha\rangle_B |l\rangle_A |-\tilde{\alpha}\rangle_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle_{F,e} |1\rangle_{E,l} |0\rangle_{C,D,F,l} \end{array} \right] \quad (13.13)$$

On a donc, en abusant légèrement de la notion $\hat{\Gamma}$ car on en sort $\mathbb{1}_{A,B}$,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] &= \frac{1}{8\mathcal{N}^2} \left(\right. \\ & \quad |+\alpha\rangle\langle+\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \text{Tr} \left[\hat{\Gamma} |1\rangle\langle 1|_{F,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle+\tilde{\alpha}|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle-\tilde{\alpha}|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle-\tilde{\alpha}|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle+\tilde{\alpha}|_{F,l} \right] \\ & \quad + |+\alpha\rangle\langle-\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \text{Tr} \left[\hat{\Gamma} |0\rangle\langle-\tilde{\alpha}|_{C,e} |0\rangle\langle+\tilde{\alpha}|_{D,e} |0\rangle\langle-\tilde{\alpha}|_{E,e} |1\rangle\langle+\tilde{\alpha}|_{F,e} \right. \\ & \quad \quad \left. |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l} \right] \\ & \quad + |-\alpha\rangle\langle+\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \text{Tr} \left[\hat{\Gamma} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{F,e} \right. \\ & \quad \quad \left. |0\rangle\langle+\tilde{\alpha}|_{C,l} |0\rangle\langle-\tilde{\alpha}|_{D,l} |1\rangle\langle-\tilde{\alpha}|_{E,l} |0\rangle\langle+\tilde{\alpha}|_{F,l} \right] \\ & \quad \left. + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \text{Tr} \left[\hat{\Gamma} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle-\tilde{\alpha}|_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle+\tilde{\alpha}|_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle-\tilde{\alpha}|_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle+\tilde{\alpha}|_{F,e} |1\rangle\langle 1|_{E,l} \right] \right) \end{aligned} \quad (13.33)$$

Le calcul de cette trace partielle est effectué en section C.1. Le résultat est le suivant :

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\hat{\Gamma} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] &= \frac{1}{8\mathcal{N}^2} \left[\begin{array}{l} \eta e^{-3\eta|\tilde{\alpha}|^2} \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right) |+\alpha\rangle\langle+\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \\ - \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} |+\alpha\rangle\langle-\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \\ - \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} |-\alpha\rangle\langle+\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \\ + \eta e^{-3\eta|\tilde{\alpha}|^2} \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right) |-\alpha\rangle\langle-\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \end{array} \right] \end{aligned} \quad (C.6)$$

13.4.4 Expression de l'état généré

13.4.4.1 Généralités

La normalisation de l'état s'effectue avec la probabilité d'annonce exprimée par l'équation (13.26) :

$$P = p_1 P_1 + p_\varepsilon P_\varepsilon$$

avec :

$$P_1 = \text{Tr} [\hat{\Gamma} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] \quad \text{et} \quad P_\varepsilon = \text{Tr} [\hat{\Gamma} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|]$$

Ici nous allons calculer P_1 en utilisant que $P_1 = \text{Tr} [\hat{\Gamma} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] = \text{Tr} \{ \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] \}$.

L'état non normé a été exprimé par l'équation (13.32) :

$$\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma} |\psi\rangle\langle\psi|] = p_1 P_1 \rho_{AB;1} + \sqrt{p_1 p_\varepsilon} \sqrt{P_1 P_\varepsilon} \rho_{AB;1,\varepsilon} + p_\varepsilon P_\varepsilon \rho_{AB;\varepsilon} \quad (13.32)$$

avec :

$$\rho_{AB;1} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]}{P_1} \quad \text{et} \quad \rho_{AB;\varepsilon} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|]}{P_\varepsilon} \quad ((13.31) \text{ et } (13.29))$$

et avec $\rho_{AB;1,\varepsilon}$ un opérateur unitaire dont les coefficients sont au plus de l'ordre de 1.

Ainsi on peut exprimer de manière générique l'état généré sous la forme :

$$\rho_{AB} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi\rangle\langle\psi|]}{P} = \frac{p_1 P_1 \rho_{AB;1} + \sqrt{p_1 p_\varepsilon} \sqrt{P_1 P_\varepsilon} \rho_{AB;1,\varepsilon} + p_\varepsilon P_\varepsilon \rho_{AB;\varepsilon}}{p_1 P_1 + p_\varepsilon P_\varepsilon}$$

Et donc :

$$\rho_{AB} = \frac{1}{1 + \frac{p_\varepsilon P_\varepsilon}{p_1 P_1}} \left[\rho_{AB;1} + \sqrt{\frac{p_\varepsilon P_\varepsilon}{p_1 P_1}} \rho_{AB;1,\varepsilon} + \frac{p_\varepsilon P_\varepsilon}{p_1 P_1} \rho_{AB;\varepsilon} \right] \quad (13.34)$$

Ainsi le critère pour s'assurer que l'état généré est conforme à nos attentes est que $\rho_{AB;1}$ le soit, et également que $\sqrt{\frac{p_\varepsilon P_\varepsilon}{p_1 P_1}} \ll 1$.

13.4.4.2 Expression de la probabilité d'annonce

La seule probabilité que nous pouvons davantage préciser est P_1 . Elle est définie par l'équation (13.26); et se calcule directement grâce à l'expression (C.6) :

$$P_1 = \text{Tr} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] = \frac{1}{4\sqrt{2}} \eta e^{-3\eta|\tilde{\alpha}|^2} \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right) \quad (13.35)$$

13.4.4.3 État préparé

Le seul terme de l'expression (13.32) que nous pouvons exprimer, mais aussi le plus important, est $\rho_{AB;1}$, qui s'exprime après normalisation par :

$$\rho_{AB;1} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]}{P_1} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &|+t\alpha\rangle\langle+t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \\ &- \frac{\eta|\tilde{\alpha}|^2 e^{-|\tilde{\alpha}|^2}}{1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}} |+t\alpha\rangle\langle-t\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \\ &- \frac{\eta|\tilde{\alpha}|^2 e^{-|\tilde{\alpha}|^2}}{1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}} |-t\alpha\rangle\langle+t\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \\ &+ |-t\alpha\rangle\langle-t\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \end{aligned} \right] \quad (13.36)$$

$\rho_{AB;1}$ est certes un état mélangé, mais il est intégralement inclus dans le même sous-espace que l'état cible $|\varphi\rangle$, celui engendré par $|+t\alpha\rangle_B |e\rangle_A$ et $|-t\alpha\rangle_B |l\rangle_A$. Notez que ceux-ci sont orthogonaux, et donc l'expression (13.36) est celle d'un qubit mélangé.

13.4.4.4 Approximation

Exprimons la probabilité et l'état quand $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$.

$$P_1 = \frac{1}{4\mathcal{N}^2} \eta e^{-3\eta|\tilde{\alpha}|^2} \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}\right) \underset{\tilde{\alpha} \rightarrow 0}{\sim} \frac{\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2}{4\mathcal{N}^2} = O(|\tilde{\alpha}|^2) \quad (13.37)$$

On constate par ailleurs que les cohérences de $\rho_{AB;1}$ tendent vers -1 dans cette même limite, et donc :

$$\rho_{AB;1} \xrightarrow{\tilde{\alpha} \rightarrow 0} |\varphi\rangle\langle\varphi| \quad (13.38)$$

Dans cette limite on retrouve bien l'état qu'on souhaitait générer, au moins pour $\rho_{AB;1}$.

En prenant en compte la limite donnée par (13.37), et que P_ε est de l'ordre de 1, la condition pour que l'état ne soit pas pollué par la possibilité d'avoir plusieurs photons sur la voie A s'écrit dans cette limite :

$$\frac{p_\varepsilon}{p_1} \ll |\tilde{\alpha}|^2 \quad (13.39)$$

Cela signifie que la puissance de pompe de la source de paires de photons doit être réglée de manière à ce que la probabilité que la partie discrète fasse cliquer un détecteur soit très faible devant celle que la partie continue le fasse. Notez que cette dernière ne peut par contre pas faire cliquer seule les deux détecteurs (E, l) et (F, e) , contrairement à la partie discrète.

13.4.4.5 Pureté

Notez que l'état $\rho_{AB;1}$ (équation (13.36)) ne dépend que de $\tilde{\alpha} = \frac{r\alpha}{\sqrt{2}}$, qui représente l'amplitude de la partie de l'état continu au niveau des détecteurs. Nous traçons dans la figure 13.3 la pureté de l'état $\rho_{AB;1}$ en fonction de $\tilde{\alpha}$ pour plusieurs efficacités η des détecteurs.

On remarque que la pureté ne dépend que peu de l'efficacité des détecteurs; on retrouve là le fait que celle-ci se simplifie en grande partie lors de la renormalisation de l'état annoncé. Par ailleurs, l'état n'est pas pur même pour un détecteur parfaitement efficace ($\eta = 1$) contrairement à l'annonce idéale (sous-section 13.1.2). Cela provient de la différence qu'il y a entre un détecteur ON/OFF et le projecteur $|1\rangle\langle 1|$. En particulier, $\hat{\Pi}^{\text{ON}}|\tilde{\alpha}\rangle \neq |1\rangle$. Ainsi, si l'on sépare la projection effectuée par la mesure d'annonce et la destruction, après projection les termes donnant $|+t\alpha\rangle_B |e\rangle_A$ et $|-t\alpha\rangle_B |e\rangle_A$ sont différents et donc partiellement discernables. Après la destruction de la partie mesurée, on obtient un état non pur.

13.4.4.6 Fidélité

Fidélité de $\rho_{AB;1}$

Calculons la fidélité entre l'état $\rho_{AB;1}$ et l'état cible $|\varphi\rangle = \frac{|e\rangle_A | +t\alpha\rangle_B - |l\rangle_A | -t\alpha\rangle_B}{\sqrt{2}}$. En utilisant le fait que l'équation (13.36) est celle d'un qubit, nous effectuons le calcul en

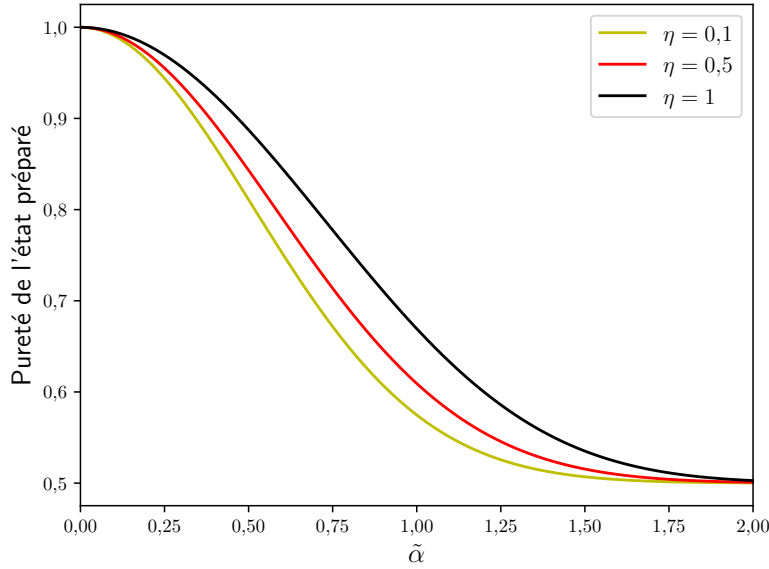


FIGURE 13.3 – Pureté de la partie principale $\rho_{AB;1}$ de l'état annoncé en fonction de $\tilde{\alpha}$, pour différentes efficacités η des détecteurs.

notation matricielle avec pour base $|e\rangle_A |t\alpha\rangle_B$ et $|l\rangle_A |-t\alpha\rangle_B$. Comme $|\varphi\rangle$ est pur, on peut utiliser la définition suivante de la fidélité :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \langle \varphi | \rho_{AB;1} | \varphi \rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\eta|\tilde{\alpha}|^2 e^{-|\tilde{\alpha}|^2}}{1-e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}} \\ -\frac{\eta|\tilde{\alpha}|^2 e^{-|\tilde{\alpha}|^2}}{1-e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\eta|\tilde{\alpha}|^2 e^{-|\tilde{\alpha}|^2}}{1-e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}} \right] \end{aligned}$$

Nous traçons la fidélité de l'état annoncé par rapport à $|\varphi\rangle$ dans la [figure 13.4](#). La probabilité d'annonce est également représentée.

On retrouve les mêmes comportements pour la fidélité que pour la pureté. Notez que s'il y a un maximum de probabilité c'est parce qu'au-delà d'une certaine valeur de $\tilde{\alpha}$, la probabilité que clique l'un des détecteurs qui ne le devrait pas devient importante.

En termes de valeurs numériques, en prenant $\eta = 0,95$ [79, 136], en imposant $\mathcal{F}_1 = 0,99$ on obtient qu'il faut $\tilde{\alpha} = 0,2$. Cela peut par exemple être réalisé en choisissant $\alpha = 2$ et un coefficient de réflexion pour la séparatrice BS₁ $r = 0,14$. La probabilité d'annonce est alors $P_1 = 3,8 \times 10^{-3}$.

Fidélité de l'état complet

Pour calculer la fidélité de l'état complet, il suffit de remarquer que $|\varphi\rangle$ contient exactement un photon dans la voie A et est donc orthogonal à l'espace dans lequel est $\rho_{AB;\varepsilon}$. Ainsi en partant de l'équation (13.34), on obtient que la fidélité \mathcal{F} de l'état complet s'exprime :

$$\mathcal{F} = \langle \varphi | \rho_{AB} | \varphi \rangle = \frac{\mathcal{F}_1}{1 + \frac{p_\varepsilon P_\varepsilon}{p_1 P_1}} \quad (13.40)$$

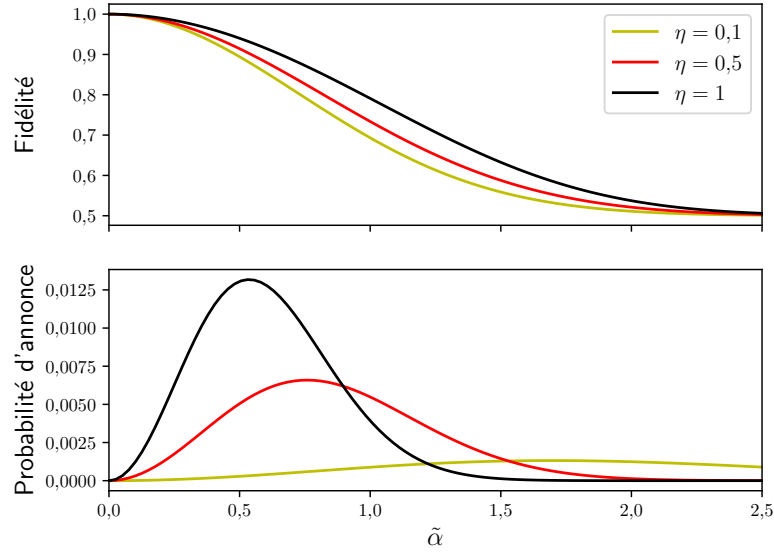


FIGURE 13.4 – Fidélité de la partie principale $\rho_{AB;1}$ de l'état annoncé et probabilité d'annonce P_1 en fonction de $\tilde{\alpha}$, pour différentes efficacités η des détecteurs. Pour le tracé de la probabilité P_1 , la valeur fixe $\alpha = 2$ est utilisée et $\tilde{\alpha} = \frac{r\alpha}{\sqrt{2}}$ est variée en changeant r .

Elle est donc donnée par \mathcal{F}_1 pondérée par la proportion de l'état final provenant de la partie à une paire d'état incident du côté discret.

13.5 ÉTAT ANNONCÉ SANS MESURER TOUS LES MODES

Étudions maintenant une situation plus proche de ce qui pourra être réalisé expérimentalement : annoncer l'état par les clics simultanés des détecteurs (E, l) et (F, e) sans se soucier des autres modes.

Cette mesure est décrite par l'opérateur $\hat{\Gamma}'$ donné par l'équation (13.24). L'état avant annonce exprimé au niveau des détecteurs est toujours $|\psi\rangle$, tel que décrit par l'équation (13.20).

Les généralités et le traitement des multiples photons dans la voie A sont identiques à ce qui a été effectué pour l'autre annonce en section 13.4.

13.5.1 Résumé des généralités

Nous utilisons toujours le résultat présenté en équation (2.1) : on étudie

$$\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma}' |\psi\rangle\langle\psi|]$$

dont la norme est la probabilité d'annonce, tandis qu'une fois normé il nous donnera la matrice densité de l'état obtenu.

En définissant :

$$P'_1 = \text{Tr}[\hat{\Gamma}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] \quad \text{et} \quad P'_\varepsilon = \text{Tr}[\hat{\Gamma}' |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|] \quad (13.41a)$$

la probabilité totale d'annonce s'écrit :

$$P' = \text{Tr}[\hat{\Gamma}' |\psi\rangle\langle\psi|] = p_1 P'_1 + p_\varepsilon P'_\varepsilon \quad (13.41b)$$

P'_1 et P'_ε correspondent respectivement aux probabilités d'annonce associées à $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_\varepsilon\rangle$.

On définit ensuite :

$$\rho'_{AB;1} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]}{P'_1} \quad \text{et} \quad \rho'_{AB;\varepsilon} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma}' |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|]}{P'_\varepsilon} \quad (13.42)$$

qui correspondent aux matrices densité qu'on obtiendrait en utilisant respectivement $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_\varepsilon\rangle$.

En notant $\rho'_{AB;1,\varepsilon}$ une matrice dont les modules des coefficients valent au plus 1, On peut écrire l'état après annonce non normé sous la forme :

$$\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma}' |\psi\rangle\langle\psi|] = p_1 P'_1 \rho'_{AB;1} + \sqrt{p_1 p_\varepsilon} \sqrt{P'_1 P'_\varepsilon} \rho'_{AB;1,\varepsilon} + p_\varepsilon P'_\varepsilon \rho'_{AB;\varepsilon} \quad (13.43)$$

De plus on retiendra que P'_ε reste de l'ordre de 1 quand $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$.

13.5.2 Calcul de la partie principale de l'état annoncé

Nous allons maintenant calculer la partie la plus importante de l'état annoncé. Sa version non normée est $\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]$.

La simplification préalable au calcul est identique à celle effectuée dans la [sous-section 13.4.3](#). Le résultat est donné par l'équation (13.33), qui s'adapte ici sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] = & \frac{1}{8\mathcal{N}^2} \left(\right. \\ & | +t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}' |1\rangle\langle 1|_{F,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \right] \\ & + | +t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}' |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |1\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} \right] \\ & \quad | +\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l} \\ & + | -t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}' | -\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,e} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{E,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{F,e} \right] \\ & \quad |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |1\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \\ & \left. + | -t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}' | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} |1\rangle\langle 1|_{E,l} \right] \right) \end{aligned} \quad (13.44)$$

Le calcul est effectué en [section C.2](#). Le résultat est :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] = & \frac{1}{8\mathcal{N}^2} \left[\eta \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right) | +t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \right. \\ & - \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} | +t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \\ & - \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} | -t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \\ & \left. + \eta \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right) | -t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \right] \end{aligned} \quad (C.11)$$

13.5.3 Expression de l'état généré

Nous ne reviendrons pas sur les généralités exposées dans la sous-section 13.4.4. Ce sont les valeurs de P'_1 et $\rho'_{AB;1}$ qui changent comparativement à l'autre annonce. On les calcule à partir de l'équation (C.11); elles valent ici :

$$P'_1 = \text{Tr}[\hat{\Gamma}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] = \frac{1}{4\mathcal{N}^2} \eta \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}\right) \quad (13.45)$$

et

$$\rho'_{AB;1} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Gamma}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]}{P'_1} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &|+t\alpha\rangle\langle+t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \\ &- \frac{\eta|\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}}{1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}} |+t\alpha\rangle\langle-t\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \\ &- \frac{\eta|\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}}{1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}} |-t\alpha\rangle\langle+t\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \\ &+ |-t\alpha\rangle\langle-t\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \end{aligned} \right] \quad (13.46)$$

Les probabilité d'annonce et cohérences de l'état obtenues ici diffèrent de celles obtenues pour l'autre annonce d'un facteur $e^{-3|\tilde{\alpha}|^2}$ qui intervient (pour l'annonce $\hat{\Pi}$) dans la probabilité de clic des détecteurs dont on exige qu'ils ne se déclenchent pas.

13.5.3.1 Approximation

Quand $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$, on obtient :

$$P'_1 = \frac{1}{4\mathcal{N}^2} \eta \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}\right) \underset{\tilde{\alpha} \rightarrow 0}{\sim} \frac{\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2}{4\mathcal{N}^2} = O(|\tilde{\alpha}|^2) \quad (13.47)$$

On constate par ailleurs que les cohérences de $\rho'_{AB;1}$ tendent également vers -1 dans cette même limite, et donc de nouveau :

$$\rho'_{AB;1} \underset{\tilde{\alpha} \rightarrow 0}{\longrightarrow} |\varphi\rangle\langle\varphi| \quad (13.48)$$

Remarque. Dans la limite $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$, les annonces décrites par $\hat{\Pi}$ et par $\hat{\Gamma}'$ sont équivalentes. \diamond

De même que pour l'autre annonce étudiée, la condition pour que l'état ne soit pas pollué par la possibilité d'avoir plusieurs photons sur la voie A s'écrit dans cette limite :

$$\sqrt{\frac{p_\varepsilon}{p_1}} \ll |\tilde{\alpha}| \quad (13.49)$$

En termes de valeurs numériques, en prenant $\eta = 0.95$, en imposant de nouveau $\mathcal{F}'_1 = 0.99$ on obtient qu'il faut $\tilde{\alpha} = 0.075$. Cela peut par exemple être réalisé en choisissant $\alpha = 2$ et un coefficient de réflexion pour la séparatrice BS1 $r = 0.05$. La probabilité d'annonce est alors $P'_1 = 6.4 \times 10^{-4}$.

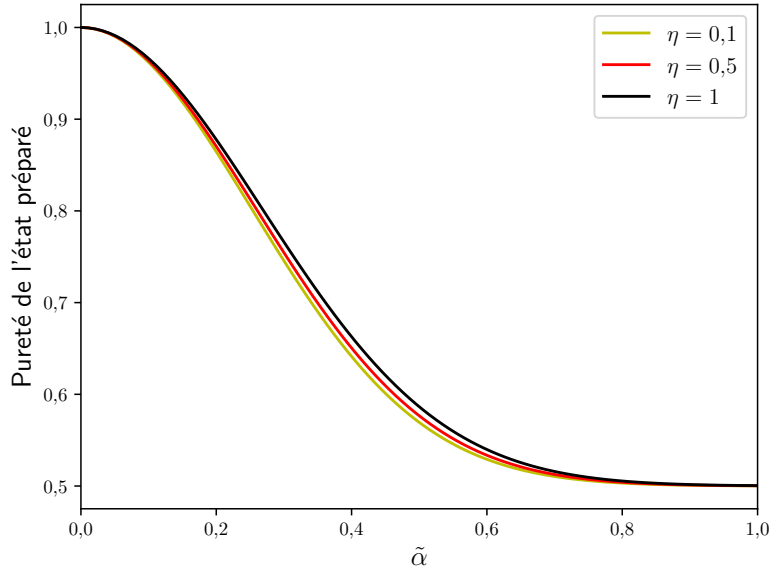


FIGURE 13.5 – Pureté de la partie principale $\rho'_{AB;1}$ de l'état annoncé en fonction de $\tilde{\alpha}$, pour différentes efficacités η des détecteurs.

13.5.3.2 Illustrations

On peut aussi de nouveau utiliser la pureté pour caractériser l'état. Elle est représentée dans la [figure 13.5](#). Son comportement est similaire, au détail près qu'elle dépend encore moins de l'efficacité des détecteurs.

La fidélité se calcule comme en [sous-section 13.4.4](#) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_1 &= \langle \varphi | \rho'_{AB;1} | \varphi \rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\eta |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}}{1 - e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2}} \\ -\frac{\eta |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}}{1 - e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\eta |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}}{1 - e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2}} \right] \end{aligned}$$

De nouveau seul un facteur $e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}$ la différencie de celle obtenue pour l'autre annonce. Nous la traçons, ainsi que la probabilité P'_1 dans la [figure 13.6](#). Il y a de nouveau peu de différence par rapport à l'autre annonce, excepté que le taux d'annonce est désormais uniquement croissant. Cela ne change que peu de choses pour des expériences car travailler dans le régime pour lequel la différence est significative donne aussi un état de mauvaise qualité.

Les deux annonces seront comparées plus en détail dans la conclusion.

13.5.4 Probabilité de clics avec double paire

Afin d'estimer plus précisément la qualité de l'état annoncé complet, tel que donné par l'[équation \(13.34\)](#), il est utile d'estimer la probabilité d'annonce dans le cas où plusieurs

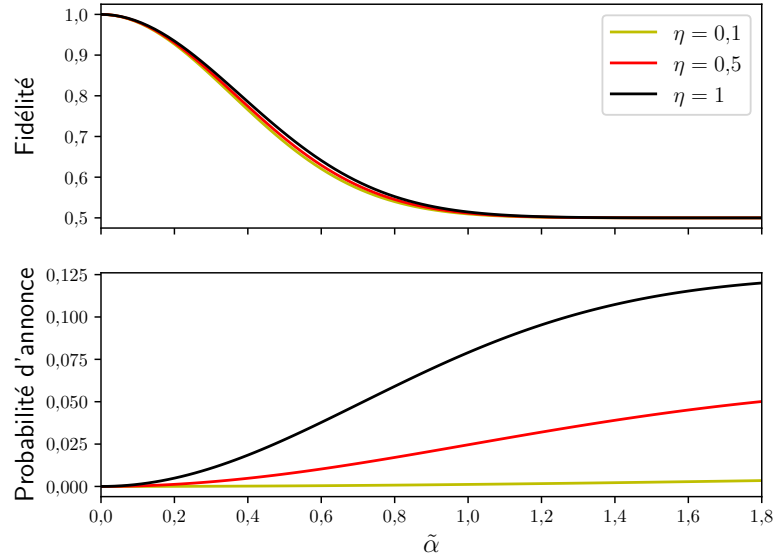


FIGURE 13.6 – Fidélité de la partie principale $\rho'_{AB;1}$ de l'état annoncé et probabilité d'annonce P'_1 en fonction de $\tilde{\alpha}$, pour différentes efficacités η des détecteurs. Pour le tracé de la probabilité P'_1 , la valeur fixe $\alpha = 2$ est utilisée et $\tilde{\alpha} = \frac{r\alpha}{\sqrt{2}}$ est variée en changeant r .

paires seraient générées par la source : P'_ε . Nous allons donc calculer cette grandeur qui, a été définie dans l'équation (13.41) comme :

$$P'_\varepsilon = \text{Tr}[\hat{\Gamma}' |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|] = \langle\psi_\varepsilon|\hat{\Gamma}'|\psi_\varepsilon\rangle$$

Pour effectuer cela nous l'approximons par la partie que la domine : la probabilité P'_2 de déclenchement de l'annonce dans le cas où deux paires sont simultanément présentes sur les entrées 1 et 2 de l'interféromètre. On part de l'état $|\psi_2\rangle$, exprimé par (13.21), et l'opérateur d'annonce est toujours $\hat{\Gamma}' = \mathbb{1}_{A,B} \otimes \hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} \otimes \mathbb{1}_{C,D,(E,e),(F,l)}$. Nous allons donc calculer :

$$P_2 = \langle\psi_2|\hat{\Gamma}'|\psi_2\rangle$$

Le calcul est effectué en section C.3. Le résultat est :

$$P'_2 = (p_{ee} + p_{ll}) \frac{7}{16} \frac{1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}}{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})} \eta \frac{8 - \eta}{7} + \frac{p_{el}}{16} \eta \frac{4 - (4 - \eta + \eta^2|\tilde{\alpha}|^2) e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} + \eta e^{-2|\alpha|^2}}{1 + e^{-2|\alpha|^2}}$$

(C.15)

13.5.4.1 Cas limites

Regardons en premier lieu ce qui se passe quand on réduit l'amplitude de la partie continue. On prend la limite $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$, tout en gardant α constant (ce qui revient à prendre la limite $r \rightarrow 0$). On a alors :

$$\lim_{\tilde{\alpha} \rightarrow 0} P'_2 = \eta^2 \frac{p_{el}}{16}$$

Même sans partie continue l'annonce peut avoir lieu avec une probabilité de l'ordre de 1 (plus précisément, $\frac{\eta^2}{16}$). Le cas $\eta = 0$ donne bien $P'_2 = 0$. Pour le cas $\eta = 1$, il faut se souvenir que chaque photon de la partie discrète peut prendre quatre chemins différents. La seule manière pour la partie continue de déclencher l'annonce avec deux paires est que celles-ci soient émises dans chacune des cases e et l , que chacun des photons arrive au bon détecteur, et enfin il faut qu'ils soient détectés. On a donc bien $P'_2 = \eta^2 p_{el} \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$.

13.5.4.2 Source particulière

En considérant une source composée de deux sources indépendantes faiblement pompées générant chacune une statistique de paires de type $\sqrt{1-\lambda^2} \sum_k \lambda^k |k\rangle |k\rangle$, on peut simplifier l'expression de P'_2 . D'après (13.17), $p_{ee} = p_{ll} = p_{el} = \frac{1}{3}$, et donc

$$P'_2 = \frac{\eta}{16} \frac{1}{1 + e^{-2|\alpha|^2}} \frac{1}{3} \left[\left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}\right) (8 - \eta) + 4 - \left(4 - \eta + \eta^2|\tilde{\alpha}|^2\right) e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} + \eta e^{-2|\alpha|^2} \right]$$

$$P'_2 = \frac{\eta}{16 \times 3} \frac{12 - \eta - \left(12 - 2\eta + \eta^2|\tilde{\alpha}|^2\right) e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} + \eta e^{-2|\alpha|^2}}{1 + e^{-2|\alpha|^2}}$$

13.6 ENTRÉE GÉNÉRIQUE POUR LA PARTIE CONTINUE

Les chats de Schrödinger optiques ne sont pas des états faciles à générer expérimentalement. De plus cela se fait en général de manière annoncée, ce qui réduit d'autant plus la probabilité de génération de l'état hybride. Nous allons ici étudier le comportement du schéma étudié quand on utilise une entrée quelconque (mais pure) pour la partie continue. En pratique un état de vide comprimé sera utilisé pour l'entrée 3 et un état cohérent pour la 4 (voir [figure 13.1](#)).

Nous commencerons par préciser la stratégie utilisée pour cette étude. Ensuite nous détaillerons l'interférence sur une lame séparatrice entre deux états de Fock quelconques ; ce calcul est essentiel ici mais pourrait servir dans d'autres contextes. Nous calculerons alors l'état au niveau des détecteurs avant d'obtenir la probabilité d'annonce sans photon venant de la partie discrète.

13.6.1 Stratégie

Comme ce qui a été effectué en [sous-section 13.2.2](#), l'entrée discrète peut être écrite comme somme de trois composantes : une ne contenant aucun photon, une autre comprenant une paire et la dernière contenant davantage de paires.

Pour calculer l'état au niveau des détecteurs, nous avons écrit la partie continue sous la forme d'un opérateur agissant sur le vide. Celui-ci était réécrit en termes d'opérateurs au niveau des détecteurs et nous le faisons agir sur l'état provenant de la partie discrète.

Les opérateurs des entrées discrètes et continues commutant, nous allons effectuer l'inverse : nous calculerons dans un premier temps $|\psi_0\rangle$ correspondant à l'état au niveau des détecteurs sans entrée sur la partie discrète, ensuite les autres termes s'en déduiront

en appliquant les opérateurs de la partie discrète transformés pour agir au niveau des détecteurs. Ainsi, de manière similaire à l'équation (13.20), nous écrivons

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0} |\psi_0\rangle + \sqrt{p_1} |\psi_1\rangle + \sqrt{p_\varepsilon} |\psi_\varepsilon\rangle \quad (13.50a)$$

avec $|\psi_0\rangle$ qu'il reste à calculer,

$$|\psi_1\rangle = \frac{\hat{a}_{A,e}^\dagger [\hat{a}_{C,e}^\dagger + \hat{a}_{D,e}^\dagger + \hat{a}_{E,e}^\dagger + \hat{a}_{F,e}^\dagger] + \hat{a}_{A,l}^\dagger [\hat{a}_{C,l}^\dagger + \hat{a}_{D,l}^\dagger + \hat{a}_{E,l}^\dagger + \hat{a}_{F,l}^\dagger]}{2\sqrt{2}} |\psi_0\rangle \quad (13.50b)$$

et $|\psi_\varepsilon\rangle$ qui s'exprime de manière similaire à $|\psi_1\rangle$ mais avec un opérateur le décrivant plus compliqué.

Nous savons maintenant comment procéder au calcul de l'état au niveau des détecteurs. Pour le calcul de l'état annoncé et la probabilité d'annonce, la principale différence par rapport à ce que nous avons vu précédemment est que $|\psi_0\rangle$ a désormais *a priori* une probabilité non nulle de déclencher l'annonce.

Nous allons effectuer les calculs pour l'opérateur de mesure $\hat{\Pi}'$. De manière similaire à l'équation (13.26), la probabilité d'annonce s'exprime⁶ :

$$P = \text{Tr}[\hat{\Pi}' |\psi\rangle\langle\psi|] = p_0 P_0 + p_1 P_1 + p_\varepsilon P_\varepsilon \quad (13.51a)$$

en ayant défini :

$$P_0 = \text{Tr}[\hat{\Pi}' |\psi_0\rangle\langle\psi_0|] \quad \text{et} \quad P_1 = \text{Tr}[\hat{\Pi}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] \quad \text{et} \quad P_\varepsilon = \text{Tr}[\hat{\Pi}' |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|] \quad (13.51b)$$

et l'état après annonce s'écrit de manière similaire à l'équation (13.34) :

$$\rho_{AB} = \frac{1}{1 + \frac{p_0 P_0}{p_1 P_1} + \frac{p_\varepsilon P_\varepsilon}{p_1 P_1}} \left[\rho_{AB;1} + \frac{p_0 P_0}{p_1 P_1} \rho_{AB;\varepsilon} + \frac{p_\varepsilon P_\varepsilon}{p_1 P_1} \rho_{AB;\varepsilon} + \rho_{AB;\text{croisés}} \right] \quad (13.52a)$$

avec :

$$\rho_{AB;0} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi}' |\psi_0\rangle\langle\psi_0|]}{P_0} \quad (13.52b)$$

$$\rho_{AB;1} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]}{P_1} \quad (13.52c)$$

$$\rho_{AB;\varepsilon} = \frac{\text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi}' |\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|]}{P_\varepsilon} \quad (13.52d)$$

et $\rho_{AB;\text{croisés}}$ un opérateur hermitien de trace nulle qui prend en compte toutes les cohérences entre différents nombres de photons sur A . Ce dernier sera négligeable dès que $\frac{p_0 P_0}{p_1 P_1} \ll 1$ et $\frac{p_\varepsilon P_\varepsilon}{p_1 P_1} \ll 1$.

En utilisant l'expression (13.52), on peut calculer que la fidélité par rapport à l'état visé $|\varphi\rangle$ s'exprime :

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{F}_1}{1 + \frac{p_0 P_0}{p_1 P_1} + \frac{p_\varepsilon P_\varepsilon}{p_1 P_1}} \quad (13.53)$$

6. Pour simplifier les notations, et parce que de toute façon il s'agit de grandeurs différentes de celles de la section 13.5, dans cette section nous ne plaçons pas de prime (') sur les probabilités ou matrice densité.

avec toujours $\mathcal{F}_1 = \langle \varphi | \rho_{AB;1} | \varphi \rangle$.

Il y aura donc deux effets sur la fidélité du fait de ne pas utiliser exactement un chat : la valeur de \mathcal{F}_1 sera modifiée ; et P_0 étant non nul, il réduit également la fidélité. Remarquez que pour la source de paire de photons typique décrite en [sous-sous-section 13.2.1.1](#), nous avons obtenu que

$$\frac{p_1}{p_0} = 2\lambda^2 \quad \text{et} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{2}\lambda^2$$

Ainsi en utilisant cette forme la fidélité s'écrit :

$$\mathcal{F} \approx \frac{\mathcal{F}_1}{1 + \frac{P_0}{P_1} \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{3}{2} \frac{P_2}{P_1} \lambda^2} \quad (13.54)$$

Se placer dans la limite $\lambda \rightarrow 0$ n'est plus possible, contrairement à ce qui avait été observé avec l'équation (13.39). Ainsi il est raisonnable d'estimer qu'avec un état d'entrée sur la voie 3 proche d'un chat mais pas identique (comme peut l'être le vide comprimé pour un chat de faible amplitude), l'effet principal sur la fidélité se traduira *via* la valeur de P_0 , tandis que la modification de \mathcal{F}_1 sera moins importante. Voilà pourquoi nous nous concentrerons sur l'estimation de P_0 .

Remarque. Pour le calcul de $|\psi_0\rangle$, si nous faisons dès maintenant l'hypothèse qu'aux entrées 3 et 4 sont envoyé du vide comprimé et un état cohérent, nous pourrions utiliser le formalisme adapté aux états gaussiens et donc travailler avec la matrice de covariance [1]. Cependant nous ne ferons cette hypothèse que plus tard. \diamond

13.6.2 États de Fock et lame séparatrice

Commençons par un calcul qui sera utile par la suite, et a aussi son intérêt propre : calculer la lumière émergente de l'interférence sur une lame séparatrice équilibrée de deux états de Fock. Cela a déjà été étudié [56, 67]; nous reformulons ici le résultat à l'aide de la fonction hypergéométrique.

13.6.2.1 Fonction hypergéométrique

Nous rappelons ici la définition ainsi que quelques propriétés de base de la fonction hypergéométrique. Beaucoup plus d'informations sont disponibles sur le site internet [29].

Définition. La fonction hypergéométrique ${}_2F_1(\cdot)$ est définie par :

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

avec $(a)_n$ la factorielle croissante ou symbole de Pochhammer, définie par :

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1) \cdots (a+n-1) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Pour la suite, on va s'intéresser aux cas où $a < 0$ et $b < 0$. Commençons par effectuer des simplifications dans le cas où $a = -|a|$. Mais d'abord explicitons la valeur de $(a)_n$. Par définition, dès que $n > 0$,

$$\begin{aligned}(a)_n &= (a) \times (a+1) \dots (a+n-1) \\ &= (-|a|) \times (-|a|+1) \dots (-|a|+n-1) \\ &= (-1)^n |a| \times (|a|-1) \dots (|a|+1-n)\end{aligned}$$

On voit tout de suite qu'avec $|a| \in \mathbb{N}$, qui est supposé pour la suite et qui nous intéresse pour les lames séparatrices, $\forall n > |a|$, $(a_n) = 0$. Et sinon, ($n \leq |a|$) on peut écrire (a_n) à l'aide du factoriel usuel. En résumé, et en remarquant que le cas $n = 0$ peut être inclus dans le cas principal :

$$(-|a|)_n = \begin{cases} (-1)^n \frac{|a|!}{(|a|-n)!} & \text{si } 0 \neq n \leq |a| \\ 0 & \text{si } |a| < n \end{cases}$$

Cela permet donc de couper la somme infinie de la définition de la fonction hypergéométrique à un nombre fini de termes :

$$\begin{aligned}{}_2F_1(-|a|, b, c, z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-|a|)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} \\ &= \sum_{n=0}^{|a|} (-1)^n \frac{|a|!}{(|a|-n)!} \frac{(b)_n z^n}{(c)_n n!} \\ &= \sum_{n=0}^{|a|} (-1)^n \binom{|a|}{n} \frac{(b)_n}{(c)_n} z^n\end{aligned}$$

Maintenant ajoutons que $b < 0$, sous la forme $b = -|b|$:

$$\begin{aligned}{}_2F_1(-|a|, -|b|, c, z) &= \sum_{n=0}^{|a|} (-1)^n \binom{|a|}{n} \frac{(-|b|)_n z^n}{(c)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\min(|a|, |b|)} (-1)^n \binom{|a|}{n} (-1)^n \frac{|b|!}{(|b|-n)!} \frac{1}{(c)_n} z^n\end{aligned}$$

On pourra donc retenir l'expression simplifiée de la fonction hypergéométrique dans le cas où a et b sont des entiers négatifs :

$${}_2F_1(-|a|, -|b|, c, z) = \sum_{n=0}^{\min(|a|, |b|)} \frac{|a|! |b|!}{n! (|a|-n)! (|b|-n)! (c)_n} z^n \quad (13.55)$$

13.6.2.2 Conventions et notations

Nous allons travailler avec des modes appelés 1 et 2 avant la lame séparatrice, 3 et 4 après. Ces numéros de modes n'ont pas de rapport avec ceux de la [figure 13.1](#).

Nous adoptons comme convention pour la lame séparatrice la transformation suivante des opérateurs bosoniques :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix}$$

13.6.2.3 Transformation des états de Fock

Calculons l'effet de la séparatrice lorsqu'il y a en entrée deux états de Fock : $|k\rangle_1$ d'un côté et $|l\rangle_2$ de l'autre.

$$\begin{aligned}
|k\rangle_1 |l\rangle_2 &= \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^k}{\sqrt{k!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^l}{\sqrt{l!}} |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{l!}} (\hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_4^\dagger)^k (\hat{a}_3^\dagger + \hat{a}_4^\dagger)^l |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{l!}} \left[\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^p (\hat{a}_3^\dagger)^{k-p} (\hat{a}_4^\dagger)^p \right] \left[\sum_{q=0}^l \binom{l}{q} (\hat{a}_3^\dagger)^{l-q} (\hat{a}_4^\dagger)^q \right] |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{l!}} \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \binom{k}{p} \binom{l}{q} (-1)^p (\hat{a}_3^\dagger)^{k+l-p-q} (\hat{a}_4^\dagger)^{p+q} |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \frac{1}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{l!}} \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \binom{k}{p} \binom{l}{q} (-1)^p \sqrt{(k+l-p-q)!} \sqrt{(p+q)!} \\
&\hspace{15em} |k+l-p-q\rangle_3 |p+q\rangle_4 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \frac{\sqrt{k!l!(k+l-p-q)!(p+q)!}}{p!(k-p)!q!(l-q)!} (-1)^p |k+l-p-q\rangle_3 |p+q\rangle_4 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \sqrt{\binom{k}{p} \binom{l}{q}} \sqrt{\frac{(k+l-p-q)!(p+q)!}{p!(k-p)!q!(l-q)!}} (-1)^p \\
&\hspace{15em} |k+l-p-q\rangle_3 |p+q\rangle_4 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \sqrt{\binom{k}{p} \binom{l}{q}} \sqrt{\binom{p+q}{p} \binom{k+l-p-q}{l-q}} (-1)^p \\
&\hspace{15em} |k+l-p-q\rangle_3 |p+q\rangle_4
\end{aligned}$$

13.6.2.4 Élimination d'une variable

Tous les termes de la somme précédente partagent le même nombre de photons ; la variable véritablement utile est $p+q$. On va donc ré-indexer les sommations selon la transformation :

$$\begin{cases} x = p + q \\ y = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = y \\ q = x - y \end{cases}$$

Les conditions de bornes se transforment alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq k \\ 0 \leq q \leq l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq k \\ 0 \leq x - y \leq l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq k + l \\ 0 \leq y \leq k \\ x - l \leq y \leq x \end{cases}$$

On remarque que sans les trois inéquations l'équivalence ne serait pas vraie. Cela nous donne donc dans le cas général que le changement s'effectue ainsi :

$$\sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l C_{p,q} = \sum_{x=0}^{k+l} \sum_{y=\max(0,x-l)}^{\min(x,k)} C_{y,x-y}$$

Les bornes de ce changement de variables sont illustrées par le tableau suivant, donnant les valeurs de x selon celles de p (horizontal) et de q (verticales), où ici on a pris $k = 5$ et $l = 3$.

3	3	4	5	6	7	8
2	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5
	0	1	2	3	4	5

Nous permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} |k\rangle_1 |l\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \sqrt{\binom{k}{p} \binom{l}{q}} \sqrt{\binom{p+q}{p} \binom{k+l-p-q}{l-q}} (-1)^p \\ &\quad |k+l-p-q\rangle_3 |p+q\rangle_4 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \sum_{x=0}^{k+l} \sum_{y=\max(0,x-l)}^{\min(x,k)} \sqrt{\binom{k}{y} \binom{l}{x-y}} \sqrt{\binom{x}{y} \binom{k+l-x}{l-x+y}} (-1)^y \\ &\quad |k+l-x\rangle_3 |x\rangle_4 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{k+l}}} \sum_{x=0}^{k+l} |k+l-x\rangle_3 |x\rangle_4 \\ &\quad \left[\sum_{y=\max(0,x-l)}^{\min(x,k)} \sqrt{\binom{k}{y} \binom{l}{x-y}} \sqrt{\binom{x}{y} \binom{k+l-x}{k-y}} (-1)^y \right] \end{aligned}$$

On va s'intéresser particulièrement à la somme sur y , qui est un coefficient qu'on appelle $C_{k,l,x}$. Il vaut :

$$\begin{aligned} C_{k,l,x} &= \sum_{y=\max(0,x-l)}^{\min(x,k)} \sqrt{\binom{k}{y} \binom{l}{x-y}} \sqrt{\binom{x}{y} \binom{k+l-x}{k-y}} (-1)^y \\ &= \sum_{y=\max(0,x-l)}^{\min(x,k)} \sqrt{\frac{k!}{y!(k-y)!} \frac{l!}{(x-y)!(l-x+y)!} \frac{x!}{y!(x-y)!} \frac{(k+l-x)!}{(k-y)!(l-x+y)!}} (-1)^y \\ C_{k,l,x} &= \sqrt{k!l!x!(k+l-x)!} \sum_{y=\max(0,x-l)}^{\min(x,k)} \frac{1}{y!(k-y)!(x-y)!(l-x+y)!} (-1)^y \quad (13.56) \end{aligned}$$

Nous ne pouvons pas directement reconnaître une fonction hypergéométrique de la forme (13.55) car la somme ne commence pas à $y = 0$. Pour régler ce problème nous allons procéder par disjonction.

Commençons par le cas $0 \geq x - l \Leftrightarrow l \geq x$. Cela nous garantit que $\max(0, x - l) = 0$, et donc :

$$\begin{aligned} C_{k,l,x} &= \sqrt{k!l!x!(k+l-x)!} \sum_{y=0}^{\min(x,k)} \frac{1}{y!(k-y)!(x-y)!(l-x+y)!} (-1)^y \\ &= \frac{\sqrt{k!l!x!(k+l-x)!}}{x!k!(l-x)!} \sum_{y=0}^{\min(x,k)} \frac{k!x!}{y!(k-y)!(x-y)!} \frac{(l-x+1-1)!}{(l-x+y+1-1)!} (-1)^y \\ &= \sqrt{\frac{(k+l-x)!}{k!(l-x)!} \frac{l!}{x!(l-x)!}} {}_2F_1(-k, -x, l-x+1, -1) \\ &= \sqrt{\binom{k+l-x}{k} \binom{l}{x}} {}_2F_1(-k, -x, l-x+1, -1) \end{aligned}$$

Traitons maintenant le cas $x \geq l \Leftrightarrow x - l \geq 0 \Leftrightarrow \max(0, x - l) = x - l$:

$$C_{k,l,x} = \sqrt{k!l!x!(k+l-x)!} \sum_{y=x-l}^{\min(x,k)} \frac{1}{y!(k-y)!(x-y)!(l-x+y)!} (-1)^y$$

Commençons par effectuer le changement de variable $y' = y - (x - l) \Leftrightarrow y = y' + x - l$. Les bornes se transforment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x - l \leq y \leq \min(x, k) &\Leftrightarrow x - l \leq y' + x - l \leq \min(x, k) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq y' \leq \min(x - (x - l), k - (x - l)) \Leftrightarrow 0 \leq y' \leq \min(l, k + l - x) \end{aligned}$$

On peut donc réécrire le coefficient :

$$\begin{aligned} C_{k,l,x} &= \sqrt{k!l!x!(k+l-x)!} \sum_{y'=0}^{\min(l, k+l-x)} \left[\frac{1}{(x-l+y')!(k-(x-l+y'))!} \frac{1}{(x-(x-l+y'))!(l-x+(x-l+y'))!} (-1)^{x-l+y'} \right] \\ &= \sqrt{k!l!x!(k+l-x)!} (-1)^{x-l} \sum_{y'=0}^{\min(l, k+l-x)} \frac{1}{(x-l+y')!(k+l-x-y')!} \frac{1}{(l-y')!y'!} (-1)^{y'} \\ &= (-1)^{x-l} \frac{\sqrt{k!l!x!(k+l-x)!}}{l!(k+l-x)!(x-l)!} \sum_{y'=0}^{\min(l, k+l-x)} \left[\frac{l!(k+l-x)!}{y'!(l-y')!(k+l-x-y')!} \frac{(x-l+1-1)!}{(x-l+1+y'-1)!} (-1)^{y'} \right] \\ &= (-1)^{x-l} \frac{\sqrt{k!x!}}{\sqrt{l!(k+l-x)!(x-l)!}} {}_2F_1(-l, -(k+l-x), x-l+1, -1) \\ &= (-1)^{x-l} \sqrt{\frac{x!}{l!(x-l)!} \frac{k!}{(k+l-x)!(x-l)!}} {}_2F_1(-l, -(k+l-x), x-l+1, -1) \end{aligned}$$

On peut donc conclure que dans ce cas,

$$C_{k,l,x} = (-1)^{x-l} \sqrt{\binom{x}{l} \binom{k}{x-l}} {}_2F_1(-l, -(k+l-x), x-l+1, -1)$$

Nous concluons pour le cas général que :

$$|k\rangle_1 |l\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}^{k+l}} \sum_{x=0}^{k+l} C_{k,l,x} |k+l-x\rangle_3 |x\rangle_4 \quad (13.57a)$$

avec

$$C_{k,l,x} = \begin{cases} \sqrt{\binom{k+l-x}{k} \binom{l}{x}} {}_2F_1(-k, -x, l-x+1, -1) & \text{si } 0 \leq x \leq l \\ (-1)^{x-l} \sqrt{\binom{x}{l} \binom{k}{x-l}} {}_2F_1(-l, -(k+l-x), x-l+1, -1) & \text{si } l \leq x \leq k+l \end{cases} \quad (13.57b)$$

L'utilisation de cette simplification permet de ne pas avoir de somme excédentaire, et donc de pouvoir à terme simplifier trivialement les symboles de Kronecker qui apparaissent dans le calcul des produits scalaires.

Remarque. La transformation pour faire passer les coefficients d'une des expressions à l'autre est la suivante :

$$\begin{cases} a \mapsto b - c + 1 \\ b \mapsto a - c + 1 \\ c \mapsto 2 - c \end{cases}$$

Cela correspond à la transformation qui permet de passer d'une solution de l'équation différentielle hypergéométrique à une autre, distincte, provenant de la singularité de l'équation en 0 [29]. Les deux fonctions sont vraiment différentes, et ne coïncident qu'en $x = l$. \diamond

Remarque. La normalisation impose que :

$$\frac{1}{2^{k+l}} \sum_{x=0}^{k+l} C_{k,l,x}^2 = 1$$

Cette égalité est loin d'être évidente à obtenir directement à partir de l'expression du coefficient. Il est donc bon de s'en souvenir. \diamond

La formule obtenue a l'avantage d'être explicite, sans plus de sommations que nécessaire. Un autre intérêt est que la fonction hypergéométrique a été très étudiée, il pourrait être intéressant d'en utiliser certaines propriétés [29].

Pour ce qui est du calcul numérique, il existe des algorithmes rapides pour évaluer la fonction hypergéométrique. En revanche des problèmes de précision des résultats se posent car $C_{k,l,x}$ est exprimé comme le produit d'un nombre très grand par un nombre très petit. Pour les résultats numériques présentés dans la suite de cette thèse, nous avons utilisé un module de calcul fractionnel pour obtenir les valeurs exactes des carrés des coefficients à partir de l'équation (13.56). Une autre méthode certainement beaucoup plus efficace serait de les construire en utilisant la relation de récurrence prouvée dans l'article [56] (qui ne donne par contre que le module).

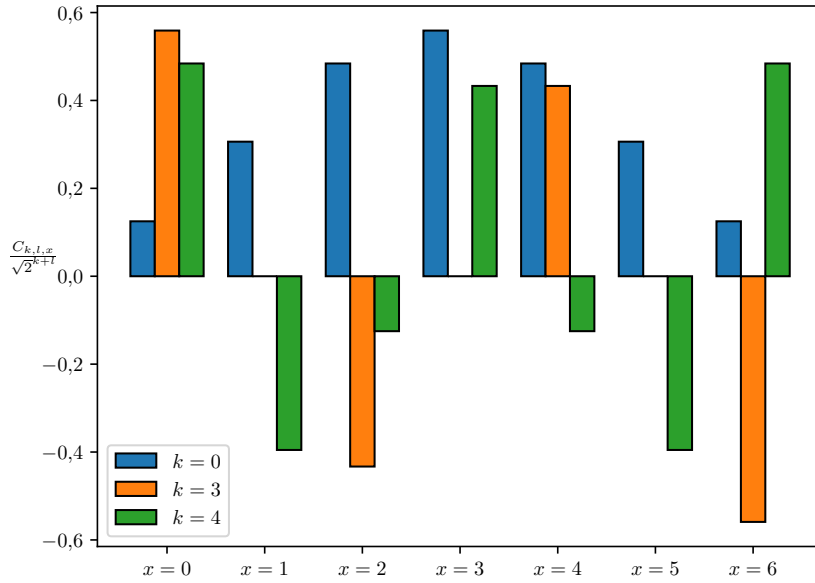


FIGURE 13.7 – $\frac{C_{k,l,x}}{\sqrt{2^{k+l}}}$ en fonction de x pour $k+l=6$ et différentes valeurs de k . Remarquez que pour $k=3$ ($l=3$) les photons émergent de la séparatrice sont groupés par paires [67].

13.6.3 État au niveau des détecteurs

Calculons maintenant $|\psi_0\rangle$.

13.6.3.1 État de départ

On rappelle qu'une entrée quelconque est considérée pour chacune des voies 3 et 4. Notons c_k et d_k les coefficients respectifs de ces entrées sur la base de Fock. Ainsi l'état d'entrée s'écrit :

$$\left[\sum_{k_3=0}^{+\infty} c_{k_3} |k_3\rangle_{3,m} \right] \otimes |0\rangle_{v2} \otimes \left[\sum_{k_4=0}^{+\infty} d_{k_4} |k_4\rangle_{4,m} \right]$$

13.6.3.2 Première séparatrice : BS1

On garde les mêmes conventions qu'en [section 13.1](#) :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{B,m} \\ \hat{a}_{5,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{3,m} \\ \hat{a}_{v_2,m} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{3,m} \\ \hat{a}_{v_2,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & r \\ -r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{B,m} \\ \hat{a}_{5,m} \end{pmatrix}$$

avec $|r|^2 + |t|^2 = 1$.

Calculons la transformation de $|n\rangle_{3,m}$:

$$\begin{aligned}
|n\rangle_{3,m} &= \frac{(\hat{a}_{3,m}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(t\hat{a}_{B,m}^\dagger + r\hat{a}_{5,m}^\dagger \right)^n |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} (\hat{a}_{B,m}^\dagger)^{n-k} r^k (\hat{a}_{5,m}^\dagger)^k |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} r^k \sqrt{(n-k)! \sqrt{k!}} |n-k\rangle_{B,m} \otimes |k\rangle_{5,m} \\
&= \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} t^{n-k} r^k |n-k\rangle_{B,m} \otimes |k\rangle_{5,m}
\end{aligned}$$

En n'ayant pas oublié que $[\hat{a}_{B,m}^\dagger, \hat{a}_{5,m}^\dagger] = 0$.

En adaptant le nom des indices,

$$|k_3\rangle_{3,m} = \sum_{p=0}^{k_3} \sqrt{\binom{k_3}{p}} r^p t^{k_3-p} |k_3-p\rangle_{B,m} \otimes |p\rangle_{5,m}$$

On peut alors écrire l'état après la séparatrice :

$$\left[\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} c_{k_3} \sqrt{\binom{k_3}{p}} r^p t^{k_3-p} |k_3-p\rangle_{B,m} \otimes |p\rangle_{5,m} \right] \otimes \left[\sum_{k_4=0}^{+\infty} d_{k_4} |k_4\rangle_{4,m} \right]$$

13.6.3.3 Deuxième séparatrice : BS2

On garde pour convention :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{6,m} \\ \hat{a}_{7,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{4,m} \\ \hat{a}_{5,m} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{4,m} \\ \hat{a}_{5,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{6,m} \\ \hat{a}_{7,m} \end{pmatrix}$$

En regroupant les sommes, l'état avant la séparatrice peut se réécrire :

$$\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} c_{k_3} d_{k_4} \sqrt{\binom{k_3}{p}} r^p t^{k_3-p} |k_3-p\rangle_{B,m} \otimes |p\rangle_{5,m} \otimes |k_4\rangle_{4,m}$$

Nous sommes dans un cas où nous devons considérer l'interférence d'états de Fock arbitraires sur la lame séparatrice. Pour obtenir l'expression de l'état après celle-ci, nous utilisons l'équation (13.57). En adaptant les indices à la situation ($k \mapsto k_4$, $l \mapsto p$, $x \mapsto x$) :

$$|k_4\rangle_{4,m} |p\rangle_{5,m} = \frac{1}{\sqrt{2}^{k_4+p}} \sum_{x=0}^{k_4+p} C_{k_4,p,x} |k_4+p-x\rangle_{6,m} |x\rangle_{7,m}$$

On peut donc écrire l'état après la séparatrice :

$$\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{x=0}^{k_4+p} \frac{c_{k_3} d_{k_4}}{\sqrt{2}^{k_4+p}} \sqrt{\binom{k_3}{p}} r^p t^{k_3-p} C_{k_4,p,x} |k_3-p\rangle_{B,m} |k_4+p-x\rangle_{6,m} |x\rangle_{7,m}$$

13.6.3.4 Ajout de délais

L'ajout des délais se fait par simple changement de nom des modes 6 et 7 :

$$\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{x=0}^{k_4+p} \frac{c_{k_3} d_{k_4}}{\sqrt{2}^{k_4+p}} \sqrt{\binom{k_3}{p}} r^p t^{k_3-p} C_{k_4,p,x} |k_3 - p\rangle_{B,m} |k_4 + p - x\rangle_{6',l} |x\rangle_{7',e}$$

13.6.3.5 Troisième séparatrice : BS3

On garde la convention :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{8,\lambda} \\ \hat{a}_{9,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{6',\lambda} \\ \hat{a}_{7',\lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{6',\lambda} \\ \hat{a}_{7',\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{8,\lambda} \\ \hat{a}_{9,\lambda} \end{pmatrix}$$

Commençons par établir le devenir de $|k\rangle_{6',l}$ et de $|k\rangle_{7',e}$. Remarquons tout particulièrement que chacun interfère avec du vide.

$$\begin{aligned} |k\rangle_{6',l} &= \frac{(\hat{a}_{6',l}^\dagger)^k}{\sqrt{k!}} |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^k \sqrt{k!}} (\hat{a}_{8,l}^\dagger - \hat{a}_{9,l}^\dagger)^k |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^k \sqrt{k!}} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^p (\hat{a}_{8,l}^\dagger)^{k-p} (\hat{a}_{9,l}^\dagger)^p |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{p=0}^k \sqrt{\binom{k}{p}} (-1)^p |k-p\rangle_{8,l} |p\rangle_{9,l} \end{aligned}$$

En l'appliquant avec les indices de la situation ($k \mapsto k_4 + p - x$, $p \mapsto u$) :

$$|k_4 + p - x\rangle_{6',l} = \frac{1}{\sqrt{2}^{k_4+p-x}} \sum_{u=0}^{k_4+p-x} \sqrt{\binom{k_4+p-x}{u}} (-1)^u |k_4 + p - x - u\rangle_{8,l} |u\rangle_{9,l}$$

Pour l'autre ket, de la même manière, on arrive au résultat :

$$|k\rangle_{7',e} = \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{p=0}^k \sqrt{\binom{k}{p}} |k-p\rangle_{8,e} |p\rangle_{9,e}$$

En l'appliquant avec les indices de la situation ($k \mapsto x$, $p \mapsto v$) :

$$|x\rangle_{7',e} = \frac{1}{\sqrt{2}^x} \sum_{v=0}^x \sqrt{\binom{x}{v}} |x-v\rangle_{8,e} |v\rangle_{9,e}$$

On peut maintenant écrire l'état après la séparatrice :

$$\left[\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{x=0}^{k_4+p} \sum_{u=0}^{k_4+p-x} \sum_{v=0}^x \frac{c_{k_3} d_{k_4}}{2^{k_4+p}} \sqrt{\binom{k_3}{p}} \binom{k_4+p-x}{u} \binom{x}{v} r^p t^{k_3-p} (-1)^u C_{k_4,p,x} |k_3 - p\rangle_{B,m} |k_4 + p - x - u\rangle_{8,l} |u\rangle_{9,l} |x - v\rangle_{8,e} |v\rangle_{9,e} \right]$$

Afin de libérer la variable x pour la suite, on la renomme ici q :

$$\left[\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{q=0}^{k_4+p} \sum_{u=0}^{k_4+p-q} \sum_{v=0}^q \frac{c_{k_3} d_{k_4}}{2^{k_4+p}} \sqrt{\binom{k_3}{p} \binom{k_4+p-q}{u} \binom{q}{v}} r^p t^{k_3-p} (-1)^u C_{k_4,p,q} \right] \\ |k_3-p\rangle_{B,m} |k_4+p-q-u\rangle_{8,l} |u\rangle_{9,l} |q-v\rangle_{8,e} |v\rangle_{9,e}$$

13.6.3.6 Séparatrices BS5 et BS6

On conserve les conventions :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{C,\lambda} \\ \hat{a}_{D,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{8,\lambda} \\ \hat{a}_{10,\lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{8,\lambda} \\ \hat{a}_{10,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{C,\lambda} \\ \hat{a}_{D,\lambda} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{a}_{E,\lambda} \\ \hat{a}_{F,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{9,\lambda} \\ \hat{a}_{11,\lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{9,\lambda} \\ \hat{a}_{11,\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{E,\lambda} \\ \hat{a}_{F,\lambda} \end{pmatrix}$$

On a deux séparatrices, travaillant chacune sur deux modes temporels. Cela fait donc virtuellement 4 séparatrices à traiter. Comme les calculs sont identiques pour les deux modes temporels, on utilise dans un premier temps λ pour désigner e ou l . Travaillant à établir $|\psi_0\rangle$, nous prenons en compte du vide provenant des modes 10 et 11. On a alors :

$$\begin{aligned} |k\rangle_{8,\lambda} |0\rangle_{10,\lambda} &= \frac{(\hat{a}_{8,\lambda}^\dagger)^k}{\sqrt{k!}} |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^k \sqrt{k!}} (\hat{a}_{C,\lambda}^\dagger - \hat{a}_{D,\lambda}^\dagger)^k |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^k \sqrt{k!}} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^p (\hat{a}_{C,\lambda}^\dagger)^{k-p} (\hat{a}_{D,\lambda}^\dagger)^p |0\rangle \\ |k\rangle_{8,\lambda} |0\rangle_{10,\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{p=0}^k \sqrt{\binom{k}{p}} (-1)^p |k-p\rangle_{C,\lambda} |p\rangle_{D,\lambda} \end{aligned}$$

et de même,

$$|k\rangle_{9,\lambda} |0\rangle_{11,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{p=0}^k \sqrt{\binom{k}{p}} (-1)^p |k-p\rangle_{E,\lambda} |p\rangle_{F,\lambda}$$

Remplaçons maintenant les indices par ceux que nous allons utiliser. Pour le premier terme on effectue ($\lambda \mapsto l, k \mapsto k_4 + p - q - u, p \mapsto w$) :

$$|k_4 + p - q - u\rangle_{8,l} |0\rangle_{10,l} = \frac{1}{\sqrt{2}^{k_4+p-q-u}} \sum_{w=0}^{k_4+p-q-u} \sqrt{\binom{k_4+p-q-u}{w}} (-1)^w |k_4+p-q-u-w\rangle_{C,l} |w\rangle_{D,l}$$

Puis on utilise ($\lambda \mapsto e, k \mapsto q - v, p \mapsto x$) :

$$|q-v\rangle_{8,e} |0\rangle_{10,e} = \frac{1}{\sqrt{2}^{q-v}} \sum_{x=0}^{q-v} \sqrt{\binom{q-v}{x}} (-1)^x |q-v-x\rangle_{C,e} |x\rangle_{D,e}$$

De même, avec $(\lambda \mapsto l, k \mapsto u, p \mapsto y)$:

$$|u\rangle_{9,l} |0\rangle_{11,l} = \frac{1}{\sqrt{2^u}} \sum_{y=0}^u \sqrt{\binom{u}{y}} (-1)^y |u-y\rangle_{E,l} |y\rangle_{F,l}$$

Et, avec $(\lambda \mapsto e, k \mapsto v, p \mapsto z)$:

$$|v\rangle_{9,e} |0\rangle_{11,e} = \frac{1}{\sqrt{2^v}} \sum_{z=0}^v \sqrt{\binom{v}{z}} (-1)^z |v-z\rangle_{E,e} |z\rangle_{F,e}$$

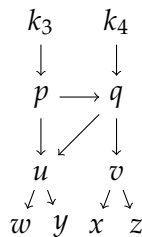
L'état après les séparatrices est donc :

$$\left[\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{q=0}^{k_4+p} \sum_{u=0}^{k_4+p-q} \sum_{v=0}^q \frac{c_{k_3} d_{k_4}}{2^{k_4+p}} \sqrt{\binom{k_3}{p} \binom{k_4+p-q}{u} \binom{q}{v}} r^p t^{k_3-p} (-1)^u C_{k_4,p,q} \right. \\ \left. |0\rangle_A |k_3-p\rangle_{B,m} \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{2^{k_4+p-q-u}}} \frac{1}{\sqrt{2^u}} \frac{1}{\sqrt{2^{q-v}}} \frac{1}{\sqrt{2^v}} \right. \\ \left. \sum_{w=0}^{k_4+p-q-u} \sum_{y=0}^u \sum_{x=0}^{q-v} \sum_{z=0}^v (-1)^y (-1)^w (-1)^x (-1)^z \right. \\ \left. \sqrt{\binom{k_4+p-q-u}{w}} \sqrt{\binom{u}{y}} \sqrt{\binom{q-v}{x}} \sqrt{\binom{v}{z}} \right. \\ \left. |k_4+p-q-u-w\rangle_{C,l} |w\rangle_{D,l} |u-y\rangle_{E,l} |y\rangle_{F,l} \right. \\ \left. |q-v-x\rangle_{C,e} |x\rangle_{D,e} |v-z\rangle_{E,e} |z\rangle_{F,e} \right]$$

En simplifiant et en regroupant ce qui peut l'être avec les termes déjà existants, on obtient l'expression de l'état au niveau des détecteurs :

$$|\psi_0\rangle = \left[\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{q=0}^{k_4+p} \sum_{u=0}^{k_4+p-q} \sum_{v=0}^q \sum_{w=0}^{k_4+p-q-u} \sum_{y=0}^u \sum_{x=0}^{q-v} \sum_{z=0}^v \right. \\ \left. \frac{c_{k_3} d_{k_4}}{2^{\frac{3}{2}(k_4+p)}} \sqrt{\binom{k_3}{p} \binom{k_4+p-q}{u} \binom{q}{v}} r^p t^{k_3-p} (-1)^u C_{k_4,p,q} \right. \\ \left. \sqrt{\binom{k_4+p-q-u}{w} \binom{u}{y} \binom{q-v}{x} \binom{v}{z}} (-1)^{w+x+y+z} \right. \\ \left. |0\rangle_A |k_3-p\rangle_{B,m} |k_4+p-q-u-w\rangle_{C,l} |w\rangle_{D,l} |u-y\rangle_{E,l} |y\rangle_{F,l} \right. \\ \left. |q-v-x\rangle_{C,e} |x\rangle_{D,e} |v-z\rangle_{E,e} |z\rangle_{F,e} \right] \tag{13.58}$$

Remarque. L'ordre dans lequel s'imbriquent ces sommes (dépendance des bornes) est donné par :



Où seules les dépendances à « l'étage » précédent sont explicitées. \diamond

13.6.4 Probabilité d'annonce

Calculons maintenant la probabilité d'annonce P_0 en l'absence de photons provenant de la partie des variables discrètes. Notre opérateur d'annonce est toujours $\hat{\Pi}'$, dont on rappelle la définition :

$$\hat{\Pi}' = \mathbb{1}_{A,B} \otimes \mathbb{1}_{C,e} \otimes \mathbb{1}_{C,l} \otimes \mathbb{1}_{D,e} \otimes \mathbb{1}_{D,l} \otimes \mathbb{1}_{E,e} \otimes \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \otimes \mathbb{1}_{F,l} \quad (13.24)$$

Nous n'allons bien évidemment pas calculer la matrice densité de $|\psi_0\rangle$ à partir de (13.58) :

$$\begin{aligned} P_0 &= \langle \psi_0 | \hat{\Pi} | \psi_0 \rangle \\ &= \langle \psi_0 | \sum_{y'=0}^{+\infty} \left[1 - (1 - \eta)^{y'} \right] |y'\rangle \langle y'|_{E,l} \sum_{z'=0}^{+\infty} \left[1 - (1 - \eta)^{z'} \right] |z'\rangle \langle z'|_{F,e} \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{q=0}^{k_4+p} \sum_{u=0}^{k_4+p-q} \sum_{v=0}^q \sum_{w=0}^{k_4+p-q-u} \sum_{y=0}^u \sum_{x=0}^{q-v} \sum_{z=0}^v \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{c_{k_3} d_{k_4}}{2^{\frac{3}{2}(k_4+p)}} \sqrt{\binom{k_3}{p} \binom{k_4+p-q}{u} \binom{q}{v}} r^p t^{k_3-p} (-1)^u C_{k_4,p,q} \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\binom{k_4+p-q-u}{w} \binom{u}{y} \binom{q-v}{x} \binom{v}{z}} (-1)^{w+x+y+z} \right. \\ &\quad \left. |0\rangle_A |k_3-p\rangle_{B,m} |k_4+p-q-u-w\rangle_{C,l} |w\rangle_{D,l} |u-y\rangle_{E,l} |y\rangle_{F,l} \right. \\ &\quad \left. |q-v-x\rangle_{C,e} |x\rangle_{D,e} |v-z\rangle_{E,e} |z\rangle_{F,e} \right] \end{aligned}$$

Les sommes associées aux POVM se réduisent immédiatement car

$$\sum_{z'=0}^{+\infty} \left[1 - (1 - \eta)^{z'} \right] |z'\rangle_{F,e} \langle z'|z\rangle_{F,e} = \sum_{z'=0}^{+\infty} \left[1 - (1 - \eta)^{z'} \right] |z'\rangle_{F,e} \delta_{z,z'} = \left[1 - (1 - \eta)^z \right] |z\rangle_{F,e}$$

Ainsi,

$$P_0 = \langle \psi_0 | \left[\sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{q=0}^{k_4+p} \sum_{u=0}^{k_4+p-q} \sum_{v=0}^q \sum_{w=0}^{k_4+p-q-u} \sum_{y=0}^u \sum_{x=0}^{q-v} \sum_{z=0}^v \right. \right. \\ \left. \frac{c_{k_3} d_{k_4}}{2^{\frac{3}{2}(k_4+p)}} \left[1 - (1 - \eta)^z \right] \left[1 - (1 - \eta)^{u-y} \right] \right. \\ \left. \sqrt{\binom{k_3}{p} \binom{k_4+p-q}{u} \binom{q}{v}} r^p t^{k_3-p} (-1)^u C_{k_4,p,q} \right. \\ \left. \sqrt{\binom{k_4+p-q-u}{w} \binom{u}{y} \binom{q-v}{x} \binom{v}{z}} (-1)^{w+x+y+z} \right. \\ \left. |0\rangle_A |k_3-p\rangle_{B,m} |k_4+p-q-u-w\rangle_{C,l} |w\rangle_{D,l} |u-y\rangle_{E,l} |y\rangle_{F,l} \right. \\ \left. |q-v-x\rangle_{C,e} |x\rangle_{D,e} |v-z\rangle_{E,e} |z\rangle_{F,e} \right]$$

On peut alors donner la formule explicite de $\langle \psi_0 |$, en utilisant des indices différents que ceux utilisés pour $|\psi_0\rangle$ (les mêmes mais primés) :

$$\langle \psi_0 | = \left[\begin{array}{l} \sum_{k'_3=0}^{+\infty} \sum_{k'_4=0}^{+\infty} \sum_{p'=0}^{k'_3} \sum_{q'=0}^{k'_4+p'} \sum_{u'=0}^{k'_4+p'-q'} \sum_{v'=0}^{q'} \sum_{w'=0}^{k'_4+p'-q'-u'} \sum_{y'=0}^{u'} \sum_{x'=0}^{q'-v'} \sum_{z'=0}^{v'} \\ \frac{c_{k'_3}^* d_{k'_4}^*}{2^{\frac{3}{2}(k'_4+p')}} \sqrt{\binom{k'_3}{p'} \binom{k'_4+p'-q'}{u'} \binom{q'}{v'}} r^{p'} t^{k'_3-p'} (-1)^{u'} C_{k'_4,p',q'} \\ \sqrt{\binom{k'_4+p'-q'-u'}{w'} \binom{u'}{y'} \binom{q'-v'}{x'} \binom{v'}{z'}} (-1)^{w'+x'+y'+z'} \\ \langle 0 |_A \langle k'_3 - p' |_{B,m} \langle k'_4 + p' - q' - u' - w' |_{C,l} \langle w' |_{D,l} \langle u' - y' |_{E,l} \langle y' |_{F,l} \\ \langle q' - v' - x' |_{C,e} \langle x' |_{D,e} \langle v' - z' |_{E,e} \langle z' |_{F,e} \end{array} \right]$$

Écrivons le produit, mais sans l'effectuer :

$P_0 =$

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{k'_3=0}^{+\infty} \sum_{k'_4=0}^{+\infty} \sum_{p'=0}^{k'_3} \sum_{q'=0}^{k'_4+p'} \sum_{u'=0}^{k'_4+p'-q'} \sum_{v'=0}^{q'} \sum_{w'=0}^{k'_4+p'-q'-u'} \sum_{y'=0}^{u'} \sum_{x'=0}^{q'-v'} \sum_{z'=0}^{v'} \\ \frac{c_{k'_3}^* d_{k'_4}^*}{2^{\frac{3}{2}(k'_4+p')}} \sqrt{\binom{k'_3}{p'} \binom{k'_4+p'-q'}{u'} \binom{q'}{v'}} r^{p'} t^{k'_3-p'} (-1)^{u'} C_{k'_4,p',q'} \\ \sqrt{\binom{k'_4+p'-q'-u'}{w'} \binom{u'}{y'} \binom{q'-v'}{x'} \binom{v'}{z'}} (-1)^{w'+x'+y'+z'} \\ \langle 0 |_A \langle k'_3 - p' |_{B,m} \langle k'_4 + p' - q' - u' - w' |_{C,l} \langle w' |_{D,l} \langle u' - y' |_{E,l} \langle y' |_{F,l} \\ \langle q' - v' - x' |_{C,e} \langle x' |_{D,e} \langle v' - z' |_{E,e} \langle z' |_{F,e} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{q=0}^{k_4+p} \sum_{u=0}^{k_4+p-q} \sum_{v=0}^{q} \sum_{w=0}^{k_4+p-q-u} \sum_{y=0}^{u} \sum_{x=0}^{q-v} \sum_{z=0}^{v} \\ \frac{c_{k_3} d_{k_4}}{2^{\frac{3}{2}(k_4+p)}} [1 - (1 - \eta)^z] [1 - (1 - \eta)^{u-y}] \\ \sqrt{\binom{k_3}{p} \binom{k_4+p-q}{u} \binom{q}{v}} r^p t^{k_3-p} (-1)^u C_{k_4,p,q} \\ \sqrt{\binom{k_4+p-q-u}{w} \binom{u}{y} \binom{q-v}{x} \binom{v}{z}} (-1)^{w+x+y+z} \\ |0\rangle_A |k_3 - p\rangle_{B,m} |k_4 + p - q - u - w\rangle_{C,l} |w\rangle_{D,l} |u - y\rangle_{E,l} |y\rangle_{F,l} \\ |q - v - x\rangle_{C,e} |x\rangle_{D,e} |v - z\rangle_{E,e} |z\rangle_{F,e} \end{array} \right]$$

En développant, on va grouper toutes les sommes. Cela fait apparaître des brackets, qui se transforment en symboles de Kronecker. Pour qu'ils soient tous simultanément non nuls, il faut que les équations suivantes soient vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ k'_3 - p' = k_3 - p \\ k'_4 + p' - q' - u' - w' = k_4 + p - q - u - w \\ w' = w \\ u' - y' = u - y \\ y' = y \\ q' - v' - x' = q - v - x \\ x' = x \\ v' - z' = v - z \\ z' = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k'_3 - p' = k_3 - p \\ k'_4 + p' = k_4 + p \\ q' = q \\ u' = u \\ v' = v \\ w' = w \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right.$$

On rappelle que $\forall k, k', f(k')\delta_{k,k'} = f(k)\delta_{k,k'}$. Comme les sommes sont en partie imbriquées, cela permet, en mettant le symbole de Kronecker juste avant la somme correspondante, de s'assurer que les sommes sur q', u', v', w', x', y' et z' partagent bien les mêmes bornes que leurs homologues sans prime, et donc que le symbole de Kronecker vaut bien 1 exactement une fois par valeur de la version sans prime. De plus en appliquant cette même remarque aux coefficients binomiaux, on peut directement faire disparaître les primes.

Exemple. Illustrons cela dans un cas simple, avec k, l, k' et l' quelconques, en n'utilisant qu'une seule fois la propriété par changement de ligne :

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{k+l} \sum_{x'=0}^{k'+l'} \sqrt{\binom{k+l}{x}} \sqrt{\binom{k'+l'}{x'}} \delta_{x,x'} \delta_{k+l,k'+l'} &= \sum_{x=0}^{k+l} \sum_{x'=0}^{k'+l'} \sqrt{\binom{k+l}{x}} \binom{k'+l'}{x'} \delta_{x,x'} \delta_{k+l,k'+l'} \\ &= \sum_{x=0}^{k+l} \sqrt{\binom{k+l}{x} \binom{k'+l'}{x}} \delta_{k+l,k'+l'} \\ &= \sum_{x=0}^{k+l} \binom{k+l}{x} \delta_{k+l,k'+l'} \\ &= 2^{k+l} \delta_{k+l,k'+l'} \end{aligned}$$

◇

En utilisant abondamment cette technique, on arrive à :

$$P_0 = \left[\begin{array}{c} \sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{k'_3=0}^{+\infty} \sum_{k'_4=0}^{+\infty} \sum_{p'=0}^{k'_3} \sum_{q=0}^{k_4+p} \sum_{u=0}^{k_4+p-q} \sum_{v=0}^q \sum_{w=0}^{k_4+p-q-u} \sum_{y=0}^u \sum_{x=0}^{q-v} \sum_{z=0}^v \\ r^{p+p'} (t^2)^{k_3-p} c_{k_3} c_{k'_3}^* d_{k_4} d_{k'_4}^* \\ \frac{1}{2^{3(k_4+p)}} \sqrt{\binom{k_3}{p} \binom{k'_3}{p'}} C_{k_4,p,q} C_{k'_4,p',q} \delta_{k_3-p,k'_3-p'} \delta_{k_4+p,k'_4+p'} \\ [1 - (1 - \eta)^z] [1 - (1 - \eta)^{u-y}] \\ \binom{k_4+p-q}{u} \binom{q}{v} \binom{k_4+p-q-u}{w} \binom{q-v}{x} \binom{u}{y} \binom{v}{z} \end{array} \right]$$

Remarquons que les sommes sur w , x , y et z sont indépendantes entre elles. On peut donc les calculer séparément. Les deux premières sont triviales :

$$\sum_{w=0}^{k_4+p-q-u} \binom{k_4+p-q-u}{w} = (1+1)^{k_4+p-q-u} = 2^{k_4+p-q-u}$$

$$\sum_{x=0}^{q-v} \binom{q-v}{x} = 2^{q-v}$$

Les deux suivantes demandent un soupçon de travail en plus :

$$\begin{aligned} \sum_{z=0}^v \binom{v}{z} [1 - (1 - \eta)^z] &= \left[\sum_{z=0}^v \binom{v}{z} \right] - \sum_{z=0}^v \binom{v}{z} (1 - \eta)^z \\ &= 2^v - \sum_{z=0}^v \binom{v}{z} (1 - \eta)^z 1^{v-z} \\ &= 2^v - (1 + 1 - \eta)^v \\ &= 2^v - (2 - \eta)^v \\ &= 2^v \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{2} \right)^v \right] \end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^u \binom{u}{y} [1 - (1 - \eta)^{u-y}] &= \left[\sum_{y=0}^u \binom{u}{y} \right] - \sum_{y=0}^u \binom{u}{y} (1 - \eta)^{u-y} 1^y \\ &= 2^u \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{2} \right)^u \right] \end{aligned}$$

On arrive ainsi à l'expression suivante (en simplifiant directement les 2^{k_4+p}) :

$$P_0 = \left[\begin{array}{c} \sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{k'_3=0}^{+\infty} \sum_{k'_4=0}^{+\infty} \sum_{p'=0}^{k'_3} \sum_{q=0}^{k_4+p} \sum_{u=0}^{k_4+p-q} \sum_{v=0}^q \\ r^{p+p'} (t^2)^{k_3-p} c_{k_3} c_{k'_3}^* d_{k_4} d_{k'_4}^* \\ \frac{1}{2^{2(k_4+p)}} \sqrt{\binom{k_3}{p} \binom{k'_3}{p'}} C_{k_4,p,q} C_{k'_4,p',q} \delta_{k_3-p,k'_3-p'} \delta_{k_4+p,k'_4+p'} \\ \binom{k_4+p-q}{u} \binom{q}{v} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{2} \right)^v \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{2} \right)^u \right] \end{array} \right]$$

On peut alors effectuer les calculs des sommes sur u et v :

$$\sum_{v=0}^q \binom{q}{v} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{2} \right)^v \right] = 2^q - \left(2 - \frac{\eta}{2} \right)^q = 2^q \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right)^q \right]$$

et

$$\sum_{u=0}^{k_4+p-q} \binom{k_4+p-q}{u} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{2} \right)^u \right] = 2^{k_4+p-q} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right)^{k_4+p-q} \right]$$

La probabilité d'annonce s'écrit alors :

$$P_0 = \left[\begin{array}{l} \sum_{k_3=0}^{+\infty} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k_3} \sum_{k'_3=0}^{+\infty} \sum_{k'_4=0}^{+\infty} \sum_{p'=0}^{k'_3} \sum_{q=0}^{k_4+p} r^{p+p'} (t^2)^{k_3-p} c_{k_3} c_{k'_3}^* d_{k_4} d_{k'_4}^* \\ \frac{1}{2^{k_4+p}} \sqrt{\binom{k_3}{p} \binom{k'_3}{p'}} C_{k_4,p,q} C_{k'_4,p',q} \delta_{k_3-p,k'_3-p'} \delta_{k_4+p,k'_4+p'} \\ \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right)^{k_4+p-q} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right)^q \right] \end{array} \right] \quad (13.59)$$

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} y = k_3 + k_4 \\ k_4 = k_4 \\ z = k_4 + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_3 = y - k_4 \\ k_4 = k_4 \\ p = z - k_4 \end{cases}$$

Avec les bornes données par :

$$\begin{cases} 0 \leq k_3 < +\infty \\ 0 \leq k_4 < +\infty \\ 0 \leq p \leq k_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y < +\infty \\ 0 \leq z \leq y \\ 0 \leq k_4 \leq z \end{cases}$$

En l'utilisant à fois pour les variables primés et celle qui ne le sont pas, la probabilité se réécrit :

$$P_0 = \left[\begin{array}{l} \sum_{y=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^y \sum_{k_4=0}^z \sum_{y'=0}^{+\infty} \sum_{z'=0}^{y'} \sum_{k'_4=0}^{z'} \sum_{q=0}^z r^{z-k_4} r^{z'-k'_4} (t^2)^{y-z} c_{y-k_4} c_{y'-k'_4}^* d_{k_4} d_{k'_4}^* \\ \frac{1}{2^z} \sqrt{\binom{y-k_4}{z-k_4} \binom{y'-k'_4}{z'-k'_4}} C_{k_4,z-k_4,q} C_{k'_4,z'-k'_4,q} \delta_{y-z,y'-z'} \delta_{z,z'} \\ \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right)^{z-q} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right)^q \right] \end{array} \right]$$

En utilisant les propriétés des symboles de Kronecker, et en déplaçant certaines sommes on obtient :

$$P_0 = \left[\begin{array}{c} \sum_{y=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^y \sum_{k_4=0}^z \sum_{k'_4=0}^z \sum_{q=0}^z r^{z-k_4} r^{z-k'_4} (t^2)^{y-z} c_{y-k_4} c_{y-k'_4}^* d_{k_4} d_{k'_4}^* \\ \frac{1}{2^z} \sqrt{\binom{y-k_4}{z-k_4} \binom{y-k'_4}{z-k'_4}} C_{k_4, z-k_4, q} C_{k'_4, z-k'_4, q} \\ \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^{z-q} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^q \right] \left[\sum_{y'=0}^{+\infty} \delta_{y, y'} \right] \left[\sum_{z'=0}^y \delta_{z, z'} \right] \end{array} \right]$$

Chacune des sommes sur les symboles de Kronecker vaut 1 quels que soient les paramètres. La somme sur q peut se placer avant celles sur k_4 et k'_4 , qui sont en fait indépendantes :

$$P_0 = \left[\begin{array}{c} \sum_{y=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^y \sum_{q=0}^z \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^{z-q} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^q \right] \\ \left[\sum_{k_4=0}^z t^{y-z} r^{z-k_4} \sqrt{\binom{y-k_4}{z-k_4}} c_{y-k_4} d_{k_4} \frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2^z}} \right] \\ \left[\sum_{k'_4=0}^z t^{y-z} r^{z-k'_4} \sqrt{\binom{y-k'_4}{z-k'_4}} c_{y-k'_4}^* d_{k'_4}^* \frac{C_{k'_4, z-k'_4, q}}{\sqrt{2^z}} \right]^* \end{array} \right]$$

On peut donc conclure :

$$P_0 = \left[\begin{array}{c} \sum_{y=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^y \sum_{q=0}^z \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^{z-q} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^q \right] \\ \left| \sum_{k_4=0}^z t^{y-z} r^{z-k_4} \sqrt{\binom{y-k_4}{z-k_4}} c_{y-k_4} d_{k_4} \frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2^z}} \right|^2 \end{array} \right] \quad (13.60)$$

Cette somme est notre expression finale de la probabilité P_0 . La somme sur k_4 est une sorte de convolution entre $t^{y-z} r^{z-k_4} \sqrt{\binom{y-k_4}{z-k_4}}$, c_{y-k_4} , d_{k_4} et $\frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2^z}}$. Commençons par remarquer que $t^{y-z} r^{z-k_4} \sqrt{\binom{y-k_4}{z-k_4}}$ ne dépend pas de q tandis que $\frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2^z}}$ est indépendant de y ; par ailleurs les deux autres facteurs ne dépendent chacun que d'une variable. Ainsi pré-calculer ces facteurs rendra le calcul de la probabilité plus rapide. De plus on peut montrer qu'ils sont chacun compris entre 0 et 1. Le calcul final ne posera ainsi pas de problèmes de stabilité numérique.

13.6.5 Développement de la probabilité

Nous allons maintenant travailler dans un cas particulier : l'état envoyé sur l'entrée 3 est un état de vide comprimé et celui sur l'entrée 4 un état cohérent. Nous allons étudier le comportement asymptotique de P_0 quand l'amplitude de ces états est faible. Le choix des états provient du fait que les états de vide comprimé tous comme les chats

$|\hat{\text{cat}}\rangle$ ont une statistique de photons uniquement paire, et donc se ressemblent pour des amplitudes faibles et bien choisies⁷.

13.6.5.1 Probabilité avec état comprimé

Remarque. On ne sait pas *a priori* quelle amplitude il faudra choisir pour l'état cohérent. On pourrait prendre la même amplitude que celle du chat ressemblant le plus à l'état comprimé utilisé (fidélité maximale), mais ça serait préjuger du résultat car il n'y a aucune raison pour que ça soit le meilleur choix⁸. On prend donc une amplitude de l'état cohérent de β . \diamond

On rappelle qu'un état comprimé s'exprime (voir [équation \(1.16\)](#)) :

$$S(\zeta) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(|\zeta|)}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!} \left[-e^{i \arg(\zeta)} \tanh |\zeta| \right]^k |2k\rangle$$

On se limitera ici à $\zeta \in \mathbb{R}$ (potentiellement négatif). L'état cohérent est lui donné par l'[équation \(1.13\)](#) :

$$e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{k_4=0}^{+\infty} \frac{\beta^{k_4}}{\sqrt{k_4!}} |k_4\rangle_{4,m}$$

L'état initial est donc décrit par les coefficients :

$$c_{k_3} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\cosh(\zeta)}} \sqrt{\binom{k_3}{\frac{k_3}{2}}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right]^{\frac{k_3}{2}} & \text{si } k_3 \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k_3 \text{ est impair} \end{cases}$$

$$d_{k_4} = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \frac{\beta^{k_4}}{\sqrt{k_4!}}$$

Ainsi la probabilité d'annonce avec du vide du côté discret s'écrit dans ce cas particulier :

$$P_0 = \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[\sum_{y=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^y \sum_{q=0}^z \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right)^{z-q} \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right)^q \right] \left| \sum_{\substack{0 \leq k_4 \leq z \\ k_4 \equiv y[2]}} t^{y-z} r^{z-k_4} \sqrt{\binom{y-k_4}{z-k_4}} \frac{\beta^{k_4}}{\sqrt{k_4!}} \sqrt{\binom{y-k_4}{\frac{y-k_4}{2}}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right]^{\frac{y-k_4}{2}} \frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2^z}} \right|^2 \right] \quad (13.61)$$

en ayant remarqué que la somme sur k_4 ne conserve que des arguments de c_{y-k_4} paires.

7. En choisissant les bonnes amplitudes, la fidélité de l'un par rapport à l'autre tend vers 1 plus rapidement que les amplitudes ne tendent vers 0.

8. On a observé numériquement que ça n'est effectivement pas le cas.

13.6.5.2 Développement

Regardons comment se comporte la probabilité P_0 dans le cas $|\beta|^2 \rightarrow 0$, $r^2 |\tanh \zeta| \rightarrow 0$, $r^2 \tanh \zeta \sim -\beta^2$. Dans l'expression (13.61), les facteurs par rapport auxquels nous allons développer apparaissent sous la forme $(|\beta|^2)^{\frac{k_4}{2}} |\tanh \zeta|^{\frac{y-k_4}{2}}$. Ainsi l'ordre du développement en termes de $|\beta|$ correspond directement à la valeur de la variable y .

Pour effectuer le calcul, on part de l'expression (13.61), et on parcourt l'arbre décrit par les variables locales. Sa partie utile est représenté en figure 13.8, où l'on a élagué tous les termes manifestement nuls. Détaillons maintenant le calcul, y par y :

Cas $y = 0$:

$y = 0 \implies z = 0 \implies q = 0$ et donc le terme est nul à cause des pré-facteurs.

Cas $y = 1$:

$y = 1 \implies z = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$; le cas $z = 0$ a déjà été traité ; le cas $z = 1$ implique que parmi

q et $z - q$ au moins l'un est nul, et donc le terme ne contribue pas.

Cas $y = 2$:

Dans le cas $y = 2$, $z = 0, 1$ a déjà été traité, et ne donne pas de contribution ; dans le cas $z = 2$, seul $q = 1$ donne un terme non nul. Les valeurs acceptables de k_4 sont 0 et 2.

On garde donc $y = 2, z = 2, q = 1, k_4 = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$. On peut alors écrire l'approximation :

$$\begin{aligned}
 P_0 &\underset{|\beta|^2 \rightarrow 0}{=} \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[\begin{array}{c} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right) \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right) \right] \\ \left| r^2 \sqrt{\binom{2}{1}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] \frac{C_{0,2,1}}{\sqrt{2^2}} + \frac{\beta^2}{\sqrt{2!}} \frac{C_{2,0,1}}{\sqrt{2^2}} \right|^2 \end{array} \right] \\
 &\underset{|\beta|^2 \rightarrow 0}{=} \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right) \right]^2 \left| r^2 \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] - \frac{\beta^2}{2} \right|^2 \\
 P_0 &\underset{|\beta|^2 \rightarrow 0}{=} \frac{e^{-|\beta|^2}}{4 \cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right) \right]^2 \left| -r^2 \tanh(\zeta) - \beta^2 \right|^2
 \end{aligned}$$

Ainsi dans le cas particulier de $\beta^2 = -r^2 \tanh \zeta$, la probabilité reste nulle à cet ordre, et il faut aller chercher l'ordre suivant.

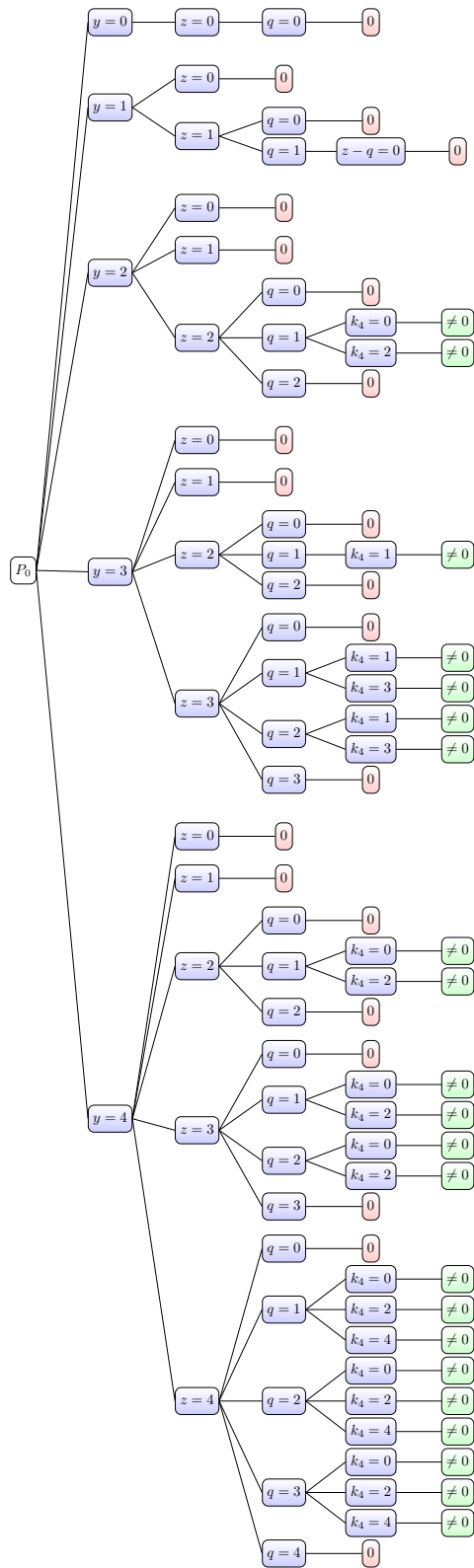


FIGURE 13.8 – Calcul de l'approximation. Beaucoup de termes sont nuls.

Cas $y = 3$:

En regardant la figure 13.8, on voit qu'on a cinq contributions : $y = 3$; $z = 2$; $q = 1$; $k_4 = 1$ et $y = 3$; $z = 3$; $q = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$; $k_4 = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$. On a donc à cet ordre :

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[\left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right]^2 \left| \text{tr} \sqrt{\binom{2}{1}} \beta \sqrt{\binom{2}{1}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] \frac{C_{1,1,1}}{\sqrt{2^2}} \right|^2 \right. \\
 &+ \left. \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^1 \right] \left| r^2 \beta \sqrt{\binom{2}{1}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] \frac{C_{1,2,1}}{\sqrt{2^3}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\beta^3}{\sqrt{3!}} \frac{C_{3,0,1}}{\sqrt{2^3}} \right|^2 \right. \\
 &+ \left. \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^1 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right] \left| r^2 \beta \sqrt{\binom{2}{1}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] \frac{C_{1,2,2}}{\sqrt{2^3}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\beta^3}{\sqrt{3!}} \frac{C_{3,0,2}}{\sqrt{2^3}} \right|^2 \right. \\
 &+ \left. \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^1 \right] \left| r^2 \beta \sqrt{2} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] \frac{1}{2\sqrt{2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\beta^3}{\sqrt{3!}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right|^2 \right. \\
 &+ \left. \left| -r^2 \beta \sqrt{2} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] \frac{1}{2\sqrt{2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\beta^3}{\sqrt{3!}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right|^2 \right] \\
 &= \frac{|\beta|^2 e^{-|\beta|^2}}{8 \cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^1 \right] \left| -r^2 \tanh \zeta - \beta^2 \right|^2
 \end{aligned}$$

Le premier terme a disparu car $\frac{C_{1,1,1}}{\sqrt{2}} = 0$, bien connu sous le nom d'effet Hong-Ou-Mandel. Encore une fois, la probabilité reste nulle à ce terme.

Cas $y = 4$:

Séparons le calcul selon les valeurs de z . Les cas $z = 0$ et $z = 1$ ne contribuent pas, comme d'habitude.

CAS $z = 2$: Commençons par résumer les valeurs des coefficients $\frac{C_{k_4, z - k_4, q}}{\sqrt{2^z}}$ en fonction de k_4 et q , pour ce z . Le terme vaut donc :

	q	1
k_4		
0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$

TABLE 13.1 – Valeurs du coefficient $\frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2}^z}$ pour $z = 2$.

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[\left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right) \right]^2 \left| t^2 r^2 \sqrt{\binom{4}{2}} \sqrt{\binom{4}{2}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right]^2 \frac{C_{0,2-0,1}}{2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + t^2 \sqrt{\binom{2}{0}} \frac{\beta^2}{\sqrt{2}!} \sqrt{\binom{2}{1}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] \frac{C_{2,0,1}}{2} \right| \right]^2 \\
&= \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right) \right]^2 \left| t^2 r^2 6 \frac{\tanh^2 \zeta}{4\sqrt{2}} + t^2 \frac{\beta^2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \frac{\tanh \zeta}{2\sqrt{2}} \right|^2 \\
&= \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right) \right]^2 \left| t^2 r^2 \frac{3}{2\sqrt{2}} \tanh^2 \zeta + t^2 \beta^2 \frac{\tanh \zeta}{2\sqrt{2}} \right|^2 \\
&= \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} t^4 \frac{1}{8} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} \right) \right]^2 \tanh^2(\zeta) |3r^2 \tanh \zeta + \beta^2|^2 \\
&= \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \frac{1}{8} \left[\frac{\eta}{4} \right]^2 t^4 \underbrace{\tanh^2(\zeta)}_{\sim \frac{|\beta|^2}{r^4}} \underbrace{|3r^2 \tanh \zeta + \beta^2|^2}_{\sim |2\beta^2|^2}
\end{aligned}$$

On a donc un premier terme non nul, de l'ordre de $\left(\frac{|\beta|^2}{r} \right)^4$. Tous les termes étant positifs, les autres z ne peuvent qu'augmenter la valeur qui vient d'être obtenue.

CAS $z = 3$: Encore une fois on récapitule les valeurs de $\frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2}^z}$. Dans l'expres-

	q	1	2
k_4			
0		$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
2		$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

TABLE 13.2 – Valeurs du coefficient $\frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2}^z}$ pour $z = 3$.

sion (13.61), q n'apparaît que dans le pré-facteur de la valeur absolue et dans le

coefficient $C_{k_4, z-k_4, q}$. Vu le tableau des coefficients, et la symétrie entre les valeurs pour 1 et 2 du pré-facteur, les deux termes pour $q = 1$ et $q = 2$ sont égaux. On factorise donc directement.

$$\begin{aligned}
 & \frac{2e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[\left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right) \right] t^2 \right. \\
 & \left. \left| r^3 \sqrt{\binom{4}{3}} \sqrt{\binom{4}{2}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right]^2 \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right. \right. \\
 & \left. \left. + r \sqrt{\binom{2}{1}} \frac{\beta^2}{\sqrt{2!}} \sqrt{\binom{2}{1}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] \frac{-1}{2\sqrt{2}} \right| \right]^2 \\
 &= \frac{2e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[\left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right) \right] t^2 \right. \\
 & \left. \left| r^3 \sqrt{4} \sqrt{3} \times 2 \frac{\tanh^2 \zeta}{4} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + r \sqrt{2} \frac{\beta^2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \left[\frac{\tanh \zeta}{2} \right] \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| \right]^2 \\
 &= \frac{e^{-|\beta|^2}}{8 \cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right) \right] t^2 r^2 \left| 3r^2 \tanh^2 \zeta + \beta^2 \tanh \zeta \right|^2 \\
 &= \frac{e^{-|\beta|^2}}{8 \cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right] \frac{\eta}{4} t^2 r^2 \tanh^2(\zeta) \left| 3r^2 \tanh \zeta + \beta^2 \right|^2
 \end{aligned}$$

Ce terme est de l'ordre de $\boxed{\frac{(|\beta|^2)^4}{r^2}}$.

CAS $z = 4$: Encore une fois on récapitule les valeurs de $\frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2}^z}$. Vue la symétrie

$k_4 \backslash q$	1	2	3
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{-1}{2}$	0
4	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{2}$

TABLE 13.3 – Valeurs du coefficient $\frac{C_{k_4, z-k_4, q}}{\sqrt{2}^z}$ pour $z = 4$.

du tableau, nous allons comme précédemment regrouper selon les q ; d'une part $q = 1, q = 3$ et d'autre part $q = 2$.

SOUS-CAS $q = 1, q = 3$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^3 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right) \right] \left| r^4 \sqrt{\binom{4}{2}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right]^2 \frac{1}{2} + \frac{\beta^4}{\sqrt{4!}} \frac{-1}{2} \right|^2 \\
 &= \frac{2e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^3 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right) \right] \left| \frac{\sqrt{6}}{4 \times 2} r^4 \tanh^2 \zeta - \frac{1}{4\sqrt{6}} \beta^4 \right|^2 \\
 &= \frac{e^{-|\beta|^2}}{8 \times 6 \cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^3 \right] \frac{\eta}{4} \underbrace{\left| 3r^4 \tanh^2 \zeta - \beta^4 \right|^2}_{\sim |2\beta^4|^2}
 \end{aligned}$$

SOUS-CAS $q = 2$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right]^2 \left| r^4 \sqrt{\binom{4}{2}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right]^2 \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right. \\
 & \quad \left. + r^2 \sqrt{\binom{2}{2}} \frac{\beta^2}{\sqrt{2!}} \sqrt{\binom{2}{1}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right] \frac{-1}{2} \right. \\
 & \quad \quad \left. + \frac{\beta^4}{\sqrt{4!}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right|^2 \\
 &= \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right]^2 \left| r^4 \sqrt{6} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left[\frac{-\tanh \zeta}{2} \right]^2 + r^2 \frac{\beta^2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \left[\frac{\tanh \zeta}{2} \right] \frac{1}{2} \right. \\
 & \quad \quad \left. + \frac{\beta^4}{\sqrt{4!}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right|^2 \\
 &= \frac{e^{-|\beta|^2}}{\cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right]^2 \left| \frac{3}{8} r^4 \tanh^2 \zeta + \frac{1}{4} r^2 \beta^2 \tanh \zeta + \frac{1}{8} \beta^4 \right|^2 \\
 &= \frac{e^{-|\beta|^2}}{64 \cosh(\zeta)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{4}\right)^2 \right]^2 \underbrace{\left| 3r^4 \tanh^2 \zeta + 2r^2 \beta^2 \tanh \zeta + \beta^4 \right|^2}_{\sim |2\beta^4|^2}
 \end{aligned}$$

Le terme pour $z = 4$ est de l'ordre de $\boxed{(|\beta|^2)^4}$.

13.6.5.3 Conclusion

On peut conclure que, dans notre limite, il y a une contribution en $\frac{(|\beta|^2)^4}{r^4}$. En se souvenant de l'équation (13.53), on peut ré-exprimer la condition pour ne pas souffrir des annonces avec du vide sur la partie discrète :

$$p_0 P_0 \ll p_1 P_1 \quad (13.62)$$

$$\frac{(|r\alpha|^2)^4}{r^4} \ll p_1 |r\alpha|^2 \quad (13.63)$$

$$\frac{(|r\alpha|^2)^3}{r^4} \ll p_1 \quad (13.64)$$

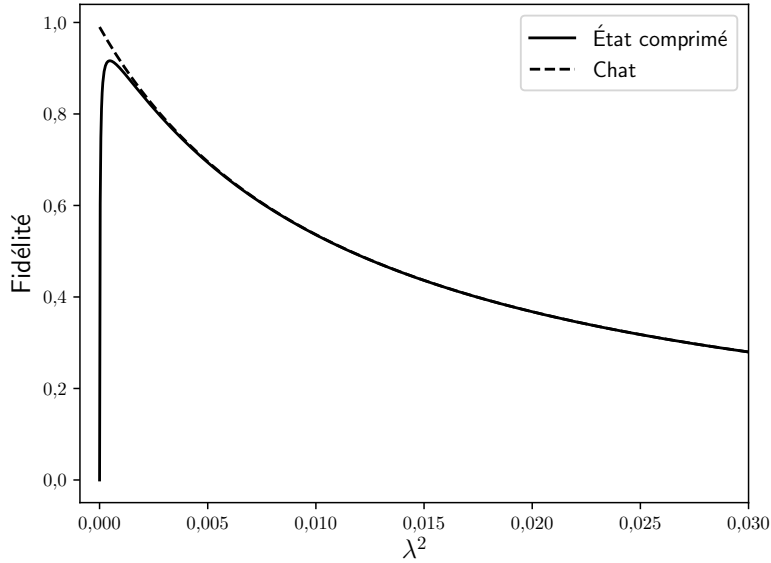


FIGURE 13.9 – Fidélité par rapport à $|\varphi\rangle$ en fonction de la puissance de pompe de la source de paires de photons. Un état comprimé et un chat comme entrée sur la partie continue sont comparés. L’efficacité des détecteurs est fixée à $\eta = 1$. Le tracé est effectué pour $\tilde{\alpha} = 0,075$ et $\alpha = 0,25$.

Nous illustrons cela en traçant dans la [figure 13.9](#) la fidélité telle que donnée par l’équation (13.53) en fonction de la puissance de pompe. Nous constatons comme attendu que la fidélité s’effondre pour une puissance de pompe nulle dans le cas de l’utilisation d’un état comprimé, alors quelle croit pour un chat. La différence entre les deux courbes devient vite négligeable.

En termes de valeurs numériques, nous utilisons de nouveau $\eta = 0,95$ et $\tilde{\alpha} = 0,075$. En revanche nous fixons désormais $\alpha = 0,25$, afin que l’état comprimé puisse ressembler à un chat [90]. Cela fixe l’amplitude de l’état cohérent β . Le paramètre de compression ζ est obtenu en prenant celui qui minimise P_0 . Le résultat est $P_0 = 1,3 \times 10^{-8}$ et $\zeta = -0,061$. Cela donne une fidélité $\mathcal{F} = 0,92$ maximale pour une puissance de pompe de la source de paires de $\lambda^2 = 9,4 \times 10^{-4}$. Le taux d’annonce est alors $P \approx 3 \times 10^{-7}$. En répétant l’expérience à une fréquence de 1 GHz [95], le taux d’annonce serait de 300 Hz, ce qui permet éventuellement d’effectuer une tomographie de l’état généré. Évidemment le compromis entre taux d’annonce et fidélité peut être choisi différemment de ce qui a été effectué ici, selon les besoins.

13.7 CONCLUSION

13.7.1 Résumé

Nous avons décrit un schéma permettant de générer de l’intrication hybride entre variables continues et discrètes. L’encodage de la variable discrète est en temps, et nous n’avons pas eu recours à l’équivalent d’un polariseur ni d’une lame demi ou quart d’onde.

Par ailleurs nous avons vu que le schéma fonctionne toujours, même dans des cas réalistes : avec un état comprimé pour l'entrée continue, une source de paires de photons probabiliste dominée par le vide, et des détecteurs ON/OFF d'efficacité quelconque. De plus l'état est véritablement annoncé et il n'y a nul besoin de post-sélection lors de son usage.

Remarque enfin que l'impossibilité montrée en [section 12.2](#) a été contournée en effectuant une interférence avec un état cohérent.

13.7.2 Comparaison entre les deux annonces

Comparons les résultats présentés en [section 13.4](#) et [section 13.5](#) pour les annonces décrites respectivement par les opérateurs $\hat{\Pi}$ et $\hat{\Pi}'$.

Nous avons vu que les seules différences sont la probabilité de clic en cas d'utilisation d'exactly une paire de photons pour l'entrée du côté discret P_1 (P'_1) et la valeur des cohérences de $\rho_{AB;1}$ ($\rho'_{AB;1}$). Nous illustrons ces deux grandeurs (en traçant la fidélité avec $|\varphi\rangle$ pour caractériser l'état et non la valeur de la cohérence) dans la [figure 13.10](#).

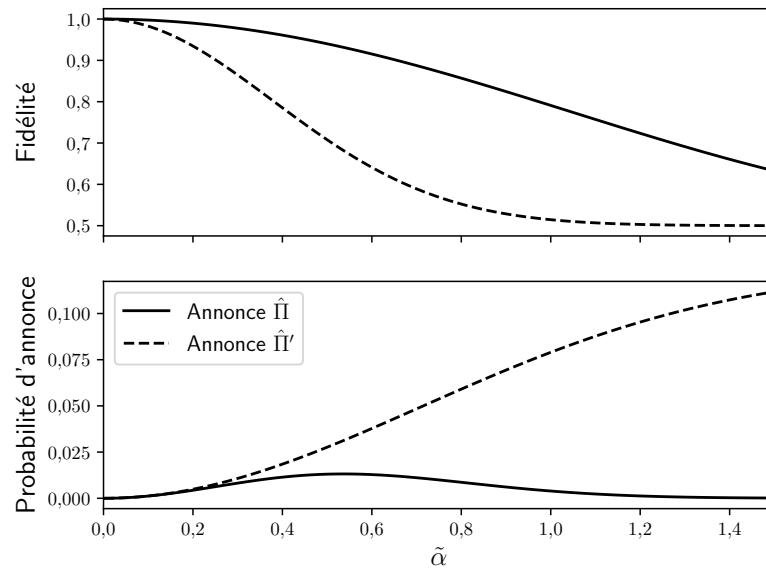


FIGURE 13.10 – Fidélité et taux d'annonce en fonction de $\tilde{\alpha}$ pour les deux procédures d'annonce. Pour le tracé de la probabilité d'annonce, la valeur fixe $\alpha = 2$ est utilisée et $\tilde{\alpha} = \frac{r\alpha}{\sqrt{2}}$ est variée en changeant r .

L'annonce décrite par $\hat{\Pi}$ donne un état ayant une meilleure fidélité, mais avec une probabilité plus faible. Pour mieux comparer les deux configurations, nous traçons dans la [figure 13.11](#) directement le taux d'annonce en fonction de la fidélité de l'état annoncé requise. Notez que compte tenu des formes de $\rho_{AB;1}$ et $\rho'_{AB;1}$ ([équation \(13.46\)](#) et [équation \(13.36\)](#)), l'état est entièrement caractérisé par sa fidélité, indépendamment du type d'annonce.

On constate que pour les régimes intéressants (fidélité proche de 1), l'annonce décrite par $\hat{\Pi}$ donne un meilleur taux d'annonce. Il faut par contre se souvenir qu'elle nécessite deux détecteurs de plus.

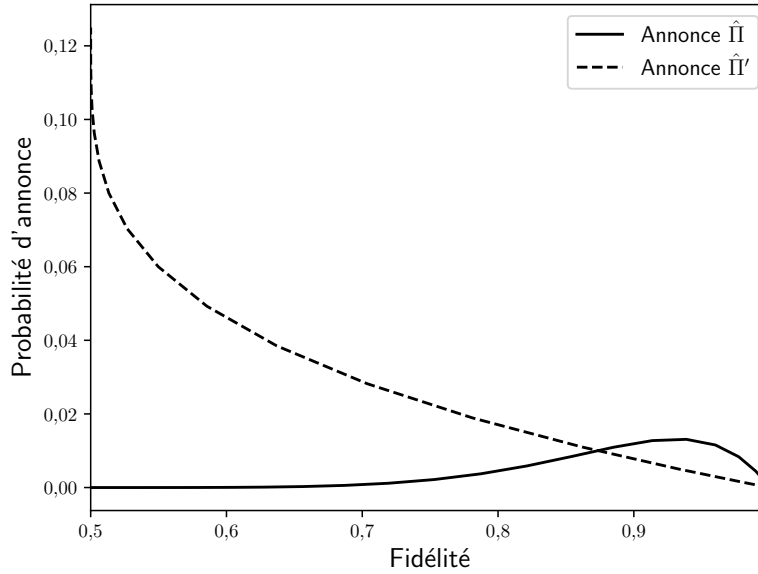


FIGURE 13.11 – Comparaison de la fidélité et du taux d’annonce pour les deux procédures. Pour le tracé de la probabilité d’annonce, la valeur fixe $\alpha = 2$ est utilisée et $\tilde{\alpha} = \frac{r\alpha}{\sqrt{2}}$ est variée en changeant r .

13.7.3 Choix des paramètres

Finissons par résumer quel choix des paramètres doit être effectué pour obtenir un état de bonne qualité. Les principes généraux ne dépendent pas du choix de l’annonce ($\hat{\Pi}$ ou $\hat{\Pi}'$) car dans la limite $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$ elles sont équivalentes.

Nous regardons ici le cas le plus proche de ce qui est réalisable expérimentalement : avec une source de paires probabiliste et un état comprimé à la place du chat. En combinant avec les conditions d’utilisation du schéma pour ne pas annoncer de vide (13.62) ni plusieurs paires (13.39) sur la partie discrète de l’état annoncé, on obtient la plage d’utilisation du schéma :

$$\frac{(|r\alpha|^2)^3}{r^4} \ll p_1 \ll |r\alpha|^2$$

ou autrement écrit :

$$(|\alpha|^2)^3 \ll \frac{p_1}{r^2} \ll |\alpha|^2$$

Avec cette dernière expression on voit qu’il existe un $\frac{p_1}{r^2}$ optimal pour α fixé. On voit aussi qu’on a besoin de $\alpha \ll 1$, ce qui est logique puisque hors de ce cas les états comprimés ne ressemblent plus aux chats.

CONCLUSION

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons abordé dans cette thèse différents aspects de l'optique quantique multi-mode, dans des perspectives d'applications en communication quantique. Résumons brièvement ce qui a été développé après la partie introductive ([partie I](#)), en insistant sur le travail qu'il reste à effectuer.

Dans la [partie II](#), nous avons travaillé sur un continuum de modes et donné l'expression de la densité temporelle de POVM décrivant un détecteur de photon unique de type ON/OFF, en prenant en compte ses principaux défauts. Cette expression permet de décrire la plupart des expériences, ce qui a été illustré. Nous avons montré que la connaissance du temps de clic permet d'obtenir de l'information sur le nombre de photons, ce qui à l'inverse ouvre la possibilité d'une nouvelle méthode pour augmenter la qualité de l'état émis par une source de photons annoncés : sélectionner sur le temps de clic du détecteur.

La [partie III](#) traite d'un cas ayant un nombre fini mais arbitraire de modes. Nous avons combiné l'utilisation de fonctions de Green et de décompositions de matrices symplectiques pour avancer une méthode d'analyse des états générés par une cavité dans laquelle la lumière est soumise à un hamiltonien quadratique, incluant tous les effets non-linéaires possibles (ou du moins, ceux compatibles avec les approximations effectuées), tant qu'on travaille en dessous du seuil. Quelques exemples ont été développés, notamment celui du SPOPO exploitant un mélange à quatre ondes, et qui ouvre la voie à la miniaturisation des expériences de variables continues multimodes. Une suite qui pourrait être donnée au travail effectué est de pousser l'analyse de la dépendance en la fréquence de la diagonalisation symplectique de la matrice de covariance $\tilde{\sigma}$. En effet la dépendance de celle-ci en ω est somme toute relativement simple et il ne serait pas surprenant qu'il soit possible d'exprimer analytiquement la diagonalisation de celle-ci à partir d'une décomposition de la matrice d'évolution. De plus, cela permettrait de mieux réinterpréter le comportement du SPOPO.

Pour la [partie IV](#) trois modes suffisent à décrire l'état généré par le schéma présenté ; mais douze sont nécessaires à la description de l'état avant l'annonce. La résistance du schéma de génération d'intrication hybride aux imperfections expérimentales a été établie. Ainsi il est compatible avec une réalisation expérimentale et pourra donc fournir l'état nécessaire aux protocoles utilisant l'intrication hybride [5, 70, 73-75, 100], y compris pour un usage dans une fibre optique. Le nombre de modes impliqué est trop important pour effectuer une simulation naïve en base de Fock du schéma. Mais il faut remarquer que lors de la création d'état hybrides seules des superpositions d'états gaussiens et de Fock contenant peu de photons sont utilisées. Ainsi il paraît tout à fait envisageable de simuler le type de schéma présenté, et pourquoi pas d'essayer de les générer automatiquement.

APPENDICES

CORRÉLATION TEMPORELLE

Dans cette annexe nous rappelons les définitions usuelles de la fonction de corrélation temporelle d'intensité. Pour cela nous partons de la définition classique avant de voir comment elle s'adapte à l'optique quantique, et enfin comment sa mesure s'approche avec des détecteurs de photons uniques.

Historiquement cette mesure a été utilisée par Hanbury, Brown et Twiss pour mesurer le diamètre angulaire d'une étoile à partir des corrélations temporelles de l'intensité du signal lumineux en deux points séparés spatialement [51]. Elle a servi par la suite à étudier les propriétés d'une source de lumière [61], et c'est plutôt dans cet esprit que nous présentons cette annexe.

Ce qui est présenté ici est relativement bref. De bonnes références pour le lecteur souhaitant plus de détails, en particulier pour l'aspect historique, sont les cours [38, 106].

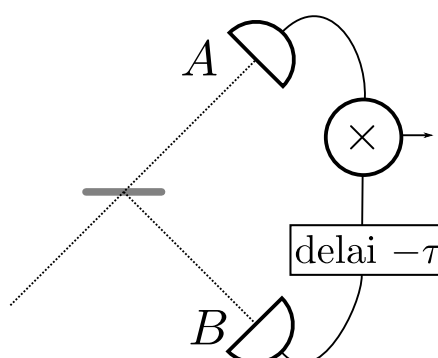


FIGURE A.1 – Mesure de corrélation temporelle d'intensité. Les détecteurs sont des photodiodes standards. Un délai est ajouté sur la voie B et les deux signaux sont multipliés.

A.1 RAPPEL DE PROBABILITÉ ET NOTATIONS

Commençons par rappeler quelques définitions de probabilité, et ainsi fixer les notations. Soient X et Y deux variables aléatoires.

A.1.1 Espérance, variance et écart type

On note $\langle X \rangle$ l'espérance de X . Sa variance est $\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$, et son écart type $\sigma_X = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$. De même, les valeur moyenne et écart type de Y sont notés $\langle Y \rangle$ et σ_Y .

A.1.2 Indépendance

Si X et Y sont indépendantes alors

$$\forall F, G, \quad P(X \in F, Y \in G) = P(X \in F)P(Y \in G) \quad (\text{A.1a})$$

Une véritable définition est donnée par [68, p. 109].

A.1.3 Probabilité conditionnelle

La probabilité conditionnelle d'observer Y sachant X est donnée par :

$$P(Y|X) = \frac{P(X, Y)}{P(X)} \quad (\text{A.1b})$$

On a donc :

$$\frac{P(Y|X)}{P(Y)} = \frac{P(X, Y)}{P(Y)P(X)} \quad (\text{A.1c})$$

A.1.4 Covariance et corrélation

La covariance de X et Y est donnée par :

$$\text{Cov}(X, Y) = \langle (X - \langle X \rangle) (Y - \langle Y \rangle) \rangle \quad (\text{A.1d})$$

La corrélation correspondante est définie comme étant :

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (\text{A.1e})$$

A.2 LUMIÈRE CLASSIQUE

On s'intéresse à une expérience telle que décrite par la [figure A.1](#) : la lumière est envoyée vers une lame séparatrice équilibrée et une photodiode standard est placée à chacune des deux sorties, notées A et B . Un délai est ajouté sur la voie B et les deux signaux sont multipliés.

On définit la fonction de corrélation temporelle d'intensité $G^{(2)}$ ainsi que sa version normée $g^{(2)}$ par :

$$G^{(2)}(t, \tau) = \langle I_A(t) I_B(t + \tau) \rangle \quad g^{(2)}(t, \tau) = \frac{\langle I_A(t) I_B(t + \tau) \rangle}{\langle I_A(t) \rangle \langle I_B(t + \tau) \rangle} \quad (\text{A.2})$$

avec $I_A(t)$ l'intensité lumineuse au temps t pour la photodiode A , et $I_B(t + \tau)$ l'intensité lumineuse au temps $t + \tau$ sur la photodiode B , qui sont considérées comme des processus aléatoires. La moyenne $\langle \rangle$ est une moyenne statistique.

Remarque. La normalisation ne correspond pas à celle d'une corrélation statistique. Les variables ne sont pas centrées et la normalisation se fait avec la moyenne et non l'écart type. \diamond

Il est fréquent de faire l'approximation que le processus étudié est stationnaire. On peut alors simplifier l'expression :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I_A(t)I_B(t+\tau) \rangle}{\langle I_A(t) \rangle \langle I_B(t) \rangle} = \frac{\langle I_A(0)I_B(0+\tau) \rangle}{\langle I_A(0) \rangle \langle I_B(0) \rangle} = \frac{\langle I_A(0)I_B(0+\tau) \rangle}{\langle I_A \rangle \langle I_B \rangle} \quad (\text{A.3})$$

Dans ce cas, l'hypothèse ergodique est souvent utilisée pour évaluer les moyennes expérimentalement.

De plus, pour un champ classique la lame séparatrice équilibrée donne à sa sortie deux faisceaux identiques. Les intensités mesurées par les deux photodiodes sont alors identiques et on obtient le même résultat que si la mesure était effectuée avec une seule photodiode et calculée *a posteriori* :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle I(0)I(\tau) \rangle}{\langle I \rangle^2} \quad (\text{A.4})$$

En utilisant que $\langle I(t)I(t) \rangle - \langle I(t) \rangle^2 = \langle [I(t) - \langle I(t) \rangle]^2 \rangle \geq 0$, on montre que $1 \leq g^{(2)}(0)$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet de montrer que $\forall \tau, g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$. Dans le cas où les intensités mesurées par les photodiodes *A* et *B* sont indépendantes, $g^{(2)}$ vaut 1. Physiquement c'est le cas quand $\tau \rightarrow +\infty$, et on a donc $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} g^{(2)}(\tau) = 1$.

Remarque. Une corrélation statistique est comprise entre -1 et 1 ; elle vaut 0 pour des variables aléatoires indépendantes. \diamond

A.3 LUMIÈRE QUANTIQUE INTENSE

La quantification adaptée à la situation est celle présentée en [section 1.3](#). Avec l'approximation quasi-monochromatique et en se concentrant uniquement sur le mode spatial mesuré par chacune des photodiodes, les intensités sont proportionnelles à chacun des opérateurs « nombre de photons »¹. On note $\hat{a}_A(t)$ et $\hat{a}_A^\dagger(t)$ les opérateurs bosoniques du mode *A* et $\hat{N}_A(t) = \hat{a}_A^\dagger(t)\hat{a}_A(t)$ l'opérateur « nombre de photons ». On utilise des notations similaires pour *B*. La fonction de corrélation temporelle d'intensité normée se définit alors par :

$$g^{(2)}(t, t+\tau) = \frac{\langle \hat{N}_A(t)\hat{N}_B(t+\tau) \rangle}{\langle \hat{N}_A(t) \rangle \langle \hat{N}_B(t+\tau) \rangle} = \frac{\langle \hat{a}_A^\dagger(t)\hat{a}_A(t)\hat{a}_B^\dagger(t+\tau)\hat{a}_B(t+\tau) \rangle}{\langle \hat{a}_A^\dagger(t)\hat{a}_A(t) \rangle \langle \hat{a}_B^\dagger(t+\tau)\hat{a}_B(t+\tau) \rangle} \quad (\text{A.5})$$

De même que précédemment la formule se simplifie dans le cas stationnaire :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{N}_A(0)\hat{N}_B(\tau) \rangle}{\langle \hat{N}_A \rangle \langle \hat{N}_B \rangle} = \frac{\langle \hat{a}_A^\dagger(0)\hat{a}_A(0)\hat{a}_B^\dagger(\tau)\hat{a}_B(\tau) \rangle}{\langle \hat{a}_A^\dagger\hat{a}_A \rangle \langle \hat{a}_B^\dagger\hat{a}_B \rangle} \quad (\text{A.6})$$

où nous avons omis d'indiquer les temps au dénominateur, car la moyenne n'en dépend pas.

1. Qui devraient plutôt être appelés « intensité de photons » car ils sont homogènes à un nombre de photons par unité de temps.

Remarque. Certains auteurs parlent de « fonction d'auto-corrélation ». Cette formulation est très trompeuse et donne lieu à des erreurs d'interprétation, notamment en prétendant que l'inégalité $1 \leq g^{(2)}(0)$ peut être violée par la physique quantique. En optique classique, l'utilisation d'une lame séparatrice équilibrée permet d'obtenir deux faisceaux ayant un champ électrique identique à un déphasage près, proportionnel au champ avant celle-ci. On obtient alors l'expression (A.4) et l'appellation est justifiée car l'expérience décrite par la figure A.1 est équivalente à une mesure directe d'intensité suivie d'un calcul de la fonction d'auto-corrélation.

Avec une lumière incidente non classique cela n'est plus vrai et il est nécessaire de prendre en compte que les deux détecteurs sont spatialement séparés ; on ne peut plus parler « d'auto-corrélation », et les inégalités liées au fait que $\forall t, I_A(t) = I_B(t)$ ne s'appliquent pas. \diamond

A.3.1 Moyenne temporelle de $g^{(2)}(\tau)$

Dans le cas stationnaire, $g^{(2)}(\tau)$ est donnée par l'équation (A.6). Calculons sa moyenne temporelle sur un intervalle de largeur T destiné à être pris arbitrairement grand :

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^{(2)}(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\langle \hat{N}_A(0) \hat{N}_B(\tau) \rangle}{\langle \hat{N}_A \rangle \langle \hat{N}_B \rangle} d\tau = \frac{\left\langle \hat{N}_A(0) \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{N}_B(\tau) d\tau \right\rangle}{\langle \hat{N}_A \rangle \langle \hat{N}_B \rangle}$$

En utilisant l'hypothèse ergodique,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{N}_B(\tau) d\tau = \langle \hat{N}_B \rangle$$

Et donc :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^{(2)}(\tau) d\tau = \frac{\langle \hat{N}_A(0) \langle \hat{N}_B \rangle \rangle}{\langle \hat{N}_A \rangle \langle \hat{N}_B \rangle} = \frac{\langle \hat{N}_A \rangle \langle \hat{N}_B \rangle}{\langle \hat{N}_A \rangle \langle \hat{N}_B \rangle} = 1 \quad (\text{A.7})$$

Ainsi la moyenne temporelle de $g^{(2)}(\tau)$ vaut 1.

Remarque. On a effectué le calcul avec la définition pour le cas quantique. Avec $g^{(2)}(\tau)$ classique tel que défini par l'équation (A.4) le résultat est le même : avec l'hypothèse ergodique sa moyenne temporelle vaut 1. Comme $g^{(2)}(0) \geq 1$ et $g^{(2)}(+\infty) = 1$ cela montre que dès que $g^{(2)}(0) > 1$ il existe τ tel que $g^{(2)}(\tau) < 1$. \diamond

A.4 AVEC DES DÉTECTEURS DE PHOTONS UNIQUES

Nous partons de la définition de $g^{(2)}$ dans le cas quantique, donnée par l'équation (A.5). Si l'on utilise des détecteurs de photons uniques à la place des photodiodes, il est en général impossible de remonter à une intensité. Deux solutions s'offrent à nous : soit

on connaît la statistique du nombre de photons, à un paramètre près que l'on peut alors reconstituer, soit on fait l'hypothèse que le nombre de photons est faible et les observables « nombre de photons » \hat{N}_A et \hat{N}_B ont une intégrale de l'ordre de 1, et donc au plus un photon est présent dans chaque mode sur la durée de l'expérience. Nous étudions maintenant le second cas.

Il faut se souvenir que les opérateurs \hat{N}_A et \hat{N}_B décrivent un nombre de photons par unité de temps. Ainsi leurs moyennes statistiques correspondent à une densité de probabilité de clic de chacun des détecteurs. $\langle \hat{N}_A(t) \hat{N}_B(t + \tau) \rangle$ correspond à la densité de probabilités de clics simultanés des détecteurs A et B . Ainsi on en déduit la forme approximative suivante :

$$g^{(2)}(t, t + \tau) \simeq \frac{p_{A,B}(t, t + \tau)}{p_A(t)p_B(t + \tau)} \quad (\text{A.8})$$

où $p_{A,B}$ est la densité de probabilités de double clics, et p_A et p_B les densités de probabilités de clic pour chacun des détecteurs.

La fonction de corrélation non normée s'approxime par :

$$G^{(2)} \approx p_{A,B}(t, t + \tau) \quad (\text{A.9})$$

Remarque. Attention à ne pas confondre l'intensité et la probabilité de clic. Ces deux notions coïncident quand il y a peu de photons, mais ça n'est pas le cas en général. Les confondre peut mener à des erreurs d'interprétation lors des comparaisons entre $g^{(2)}$ classique et celui en termes de densité de probabilités de clic. \diamond

A.4.1 Interprétation en termes de probabilité conditionnelle

En remarquant que la probabilité conditionnelle de clic du détecteur B au temps $t + \tau$ sachant que le détecteur A a cliqué au temps t s'exprime :

$$p_{B|A}(t + \tau|t) = \frac{p_{A,B}(t, t + \tau)}{p_A(t)}$$

l'auto-corrélation se réexprime :

$$g^{(2)}(t, t + \tau) = \frac{p_{B|A}(t + \tau|t)}{p_B(t + \tau)} \quad (\text{A.10})$$

qui est donc une densité de probabilité conditionnelle de clic normée par une densité de probabilité simple.

A.4.2 Processus stationnaire

Si le processus est stationnaire, ni le numérateur ni le dénominateur ne dépendent de t et donc

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{p_{A,B}(0, \tau)}{p_A p_B} = \frac{p_{B|A}(\tau)}{p_B}$$

Remarque. En moyennant temporellement sur τ , on montre que $g^{(2)}(\tau)$ a pour moyenne temporelle 1, comme dans le cas intense. \diamond

Par ailleurs, remarquez que l'hypothèse de stationnarité est contradictoire avec le fait que le détecteur ne peut cliquer qu'une seule fois. Cette contradiction est atténuée dans le cas où $p_{A,B}(0, \tau)$ varie sur un temps caractéristique bien plus faible que celui de $p_A(t)$ (ou $p_B(t)$).

CHAT DE SCHRÖDINGER OPTIQUE

Les chats de Schrödinger sont une ressource importante des variables continues non gaussiennes [16]. Ils servent souvent de point de départ à la réalisation d'états hybrides [66, 72, 90, 121]. Nous allons en donner la définition et quelques caractéristiques.

B.1 DÉFINITION

Définition. Nous appelons chat de Schrödinger optique d'amplitude α (nombre complexe) et de phase φ l'état :

$$|\text{chat}(\varphi)\rangle = \frac{|\alpha\rangle + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle}{\mathcal{N}_{\alpha,\varphi}}, \quad \text{avec } \mathcal{N}_{\alpha,\varphi} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\varphi) e^{-2|\alpha|^2}} \quad (\text{B.1})$$

Remarque. Le facteur de normalisation s'obtient facilement à partir de l'équation (1.14e). \diamond

Les chats ont été appelés ainsi par analogie avec le chat de Schrödinger [111], car pour $|\alpha| \gg 1$ ils sont une superposition de deux états macroscopiques différents. Notez qu'en revanche l'idée d'intrication avec un système microscopique n'apparaît pas dans cet état.

Ces états peuvent être expérimentalement approchés pour des amplitudes modestes [97, 98, 113]. Deux de ces états vont particulièrement nous intéresser : ceux obtenus pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, qui s'écrivent donc :

$$|\text{chat}(0)\rangle = \frac{|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle}{\mathcal{N}_{\alpha,0}} \quad |\text{chat}(\pi)\rangle = \frac{|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle}{\mathcal{N}_{\alpha,\pi}}$$

Ils sont communément appelés respectivement chat pair et impair [97], et parfois mâle et femelle [78]. Pour la suite nous utiliserons principalement $|\text{chat}(0)\rangle$ et pour simplifier les notations on pose $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\alpha,0}$.

B.2 SÉPARATION D'UN CHAT

Étudions ce que devient un chat après avoir été envoyé sur une lame séparatrice où du vide est envoyée sur l'autre entrée

L'état initial qu'on considère est donc :

$$|\text{chat}(0)\rangle_i \otimes |0\rangle_v = \frac{|\alpha\rangle_i + |-\alpha\rangle_i}{\mathcal{N}} \otimes |0\rangle_v \quad (\text{B.2})$$

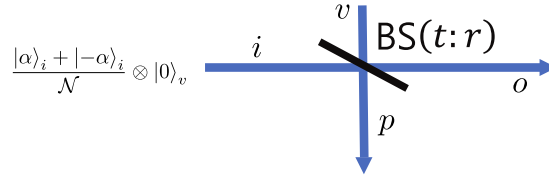


FIGURE B.1 – Séparation d’un chat.

B.2.1 État après la séparatrice

On choisit comme convention pour la séparatrice que les opérateurs bosoniques avant et après sont liés de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_o \\ \hat{a}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{a}_v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{a}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & r \\ -r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_o \\ \hat{a}_p \end{pmatrix}$$

avec $|r|^2 + |t|^2 = 1$ et t et r pris réels. Ces définitions se réécrivent :

$$\hat{a}_i = t\hat{a}_o + r\hat{a}_p \quad \hat{a}_v = -r\hat{a}_o + t\hat{a}_p$$

En se souvenant que la définition (1.12) d’un opérateur de déplacement est : $D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$, on peut calculer l’effet de la séparatrice sur les opérateurs de déplacements :

$$\begin{aligned} D_v(\beta)D_i(\alpha) &= e^{\beta\hat{a}_v^\dagger - \beta^*\hat{a}_v} e^{\alpha\hat{a}_i^\dagger - \alpha^*\hat{a}_i} \\ &= e^{-r\beta\hat{a}_o^\dagger + r\beta^*\hat{a}_o} e^{t\beta\hat{a}_p^\dagger - t\beta^*\hat{a}_p} e^{t\alpha\hat{a}_o^\dagger - t\alpha^*\hat{a}_o} e^{r\alpha\hat{a}_p^\dagger - r\alpha^*\hat{a}_p} \\ &= D_o(-r\beta)D_o(t\alpha)D_p(t\beta)D_p(r\alpha) \end{aligned}$$

en ayant utilisé que les opérateurs entre i et v commutent, de même qu’entre o et p . En remarquant que $[\gamma\hat{a}^\dagger - \gamma^*\hat{a}, \epsilon\hat{a}^\dagger - \epsilon^*\hat{a}] = \gamma\epsilon^*\mathbb{1} - \gamma^*\epsilon\mathbb{1}$, et en utilisant la formule de Baker–Hausdorff, on obtient le résultat intermédiaire :

$$D(\gamma)D(\epsilon) = e^{\gamma\hat{a}^\dagger - \gamma^*\hat{a}} e^{\epsilon\hat{a}^\dagger - \epsilon^*\hat{a}} = e^{\gamma\epsilon^* - \gamma^*\epsilon} D(\gamma + \epsilon)$$

En l’utilisant on aboutit à :

$$\begin{aligned} D_v(\beta)D_i(\alpha) &= e^{-r\beta t\alpha^* + r\beta^* t\alpha} D_o(-r\beta + t\alpha) e^{t\beta r\alpha^* - t\beta^* r\alpha} D_p(t\beta + r\alpha) \\ &= D_o(t\alpha - r\beta) D_p(r\alpha + t\beta) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En prenant $|0\rangle$ l’état sur lequel agissent les opérateurs, on obtient en particulier :

$$|\alpha\rangle_i |\beta\rangle_v = |t\alpha - r\beta\rangle_o |r\alpha + t\beta\rangle_p \quad (\text{B.4})$$

L’état envoyé sur le mode v est du vide ; ainsi $\beta = 0$ et on obtient que

$$|\alpha\rangle_i |\beta\rangle_v = |t\alpha\rangle_o |r\alpha\rangle_p$$

Le chat rencontrant le vide sur la lame séparatrice devient donc après celle-ci :

$$\frac{|t\alpha\rangle_o |r\alpha\rangle_p + |-t\alpha\rangle_o |-r\alpha\rangle_p}{\mathcal{N}} \quad (\text{B.5})$$

On obtient un résultat tout à fait attendu : le chat est une superposition d'états cohérents. Ces états se comportent classiquement sur une lame séparatrice en étant simplement « coupés en deux ». Partant d'un chat, on obtient une superposition du comportement classique pour deux états cohérents en opposition de phase.

B.2.2 Approximation du photon extrait

Récrivons l'état après la première séparatrice en développant sur le nombre de photons dans la voie p . Pour cela on injecte dans l'équation (B.5) le développement sur la base de Fock d'un état cohérent, tel que donné par l'équation (1.13) :

$$\begin{aligned} \frac{|t\alpha\rangle_o |r\alpha\rangle_p + |-t\alpha\rangle_o |-r\alpha\rangle_p}{\mathcal{N}} &= \frac{e^{-\frac{|r\alpha|^2}{2}}}{\mathcal{N}} \left[|t\alpha\rangle_o \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r\alpha)^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle_p + |-t\alpha\rangle_o \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-r\alpha)^{k'}}{\sqrt{k'!}} |k'\rangle_p \right] \\ &= \frac{e^{-\frac{|r\alpha|^2}{2}}}{\mathcal{N}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r\alpha)^k}{\sqrt{k!}} \left(|t\alpha\rangle_o + (-1)^k |-t\alpha\rangle_o \right) |k\rangle_p \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Ainsi le point de vue consistant à dire que la lame séparatrice soustrait un ou des photons, laissant un chat alternativement pair ou impair selon le nombre de photons soustrait est exact. Par exemple, à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \left[\left(1 - \frac{|r\alpha|^2}{2} \right) \left(|t\alpha\rangle_o + |-t\alpha\rangle_o \right) |0\rangle_p + r\alpha \left(|t\alpha\rangle_o - |-t\alpha\rangle_o \right) |1\rangle_p + \frac{(r\alpha)^2}{\sqrt{2}} \left(|t\alpha\rangle_o + |-t\alpha\rangle_o \right) |2\rangle_p + o\left((r\alpha)^2\right) \right] \quad (\text{B.7})$$

Il ne faut par contre pas oublier que la somme effectuée est une superposition cohérente, et il n'est pas anodin que les coefficients du développement soient les mêmes que ceux de l'état cohérent. Notez que le coefficient devant le terme contenant deux photons est de l'ordre du carré de celui devant le terme pour un photon.

B.3 DISSIPATION DU CHAT

Étudions maintenant ce que devient le chat quand il subit des pertes. Cela se modélise par une lame séparatrice où il est mélangé avec du vide, et l'une des sorties n'est pas regardée.

Nous avons déjà traité l'effet de la lame séparatrice. La matrice densité de l'état après celle-ci est celle de l'état pur (B.5) :

$$\begin{aligned} \rho_{op} &= \frac{1}{\mathcal{N}^2} \left[|t\alpha\rangle\langle t\alpha|_o |r\alpha\rangle\langle r\alpha|_p + |t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_o |r\alpha\rangle\langle -r\alpha|_p \right. \\ &\quad \left. + |-t\alpha\rangle\langle t\alpha|_o |-r\alpha\rangle\langle r\alpha|_p + |-t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_o |-r\alpha\rangle\langle -r\alpha|_p \right] \end{aligned}$$

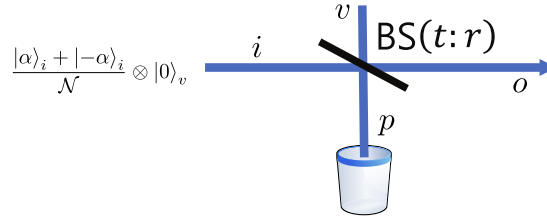


FIGURE B.2 – Dissipation d'un chat.

L'expression d'un état cohérent sur la base de Fock [équation \(1.13\)](#) peut se réécrire sous la forme : $\langle k|\beta\rangle = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \frac{\beta^k}{\sqrt{k!}}$. Ainsi nous pouvons prendre la trace partielle sur p de ρ_{op} , ce que nous faisons selon la base de Fock :

$$\begin{aligned}
 \rho_o &= \sum_k \langle k|_p \rho_{op} |k\rangle_p \\
 &= \frac{1}{\mathcal{N}^2} \sum_k \left[\left| \langle k|r\alpha\rangle_p \right|^2 |t\alpha\rangle\langle t\alpha|_o + \langle k|r\alpha\rangle_p \langle -r\alpha|k\rangle_p |t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_o \right. \\
 &\quad \left. + \langle k|-r\alpha\rangle_p \langle r\alpha|k\rangle_p | -t\alpha\rangle\langle t\alpha|_o + \left| \langle k|-r\alpha\rangle_p \right|^2 | -t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_o \right] \\
 &= \frac{e^{-|r\alpha|^2}}{\mathcal{N}^2} \sum_k \frac{1}{k!} \left[\left(|r\alpha|^2 \right)^k |t\alpha\rangle\langle t\alpha|_o + \left(-|r\alpha|^2 \right)^k |t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_o \right. \\
 &\quad \left. + \left(-|r\alpha|^2 \right)^k | -t\alpha\rangle\langle t\alpha|_o + \left(|r\alpha|^2 \right)^k | -t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_o \right] \\
 &= \frac{1}{\mathcal{N}^2} \left[|t\alpha\rangle\langle t\alpha|_o + e^{-2|r\alpha|^2} |t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_o + e^{-2|r\alpha|^2} | -t\alpha\rangle\langle t\alpha|_o + | -t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_o \right]
 \end{aligned}$$

La décroissance des cohérences par rapport à l'intensité perdue est exponentielle. Les chats sont très sensibles aux pertes, ce qui est attendu pour une superposition d'états « macroscopiques ». Le seul cas dans lequel le chat est moins sensible est quand α est petit. Les pureté et négativité de la fonction de Wigner de ρ_0 sont tracées dans la [figure B.3](#).

La pureté est d'autant plus réduite que le chat est intense. La remontée de pureté pour $r \rightarrow 1$ s'explique simplement par le fait que dans cette limite l'état tend vers le vide qui est un état pur, quoique peu intéressant pour l'information quantique. La pureté n'étant pas un très bon critère, nous avons également tracé la négativité de la fonction de Wigner. Celle-ci montre bien que les chats d'amplitude élevée sont particulièrement sensibles aux pertes, et qu'il n'y a que peu d'intérêt à travailler avec $r \rightarrow 1$.

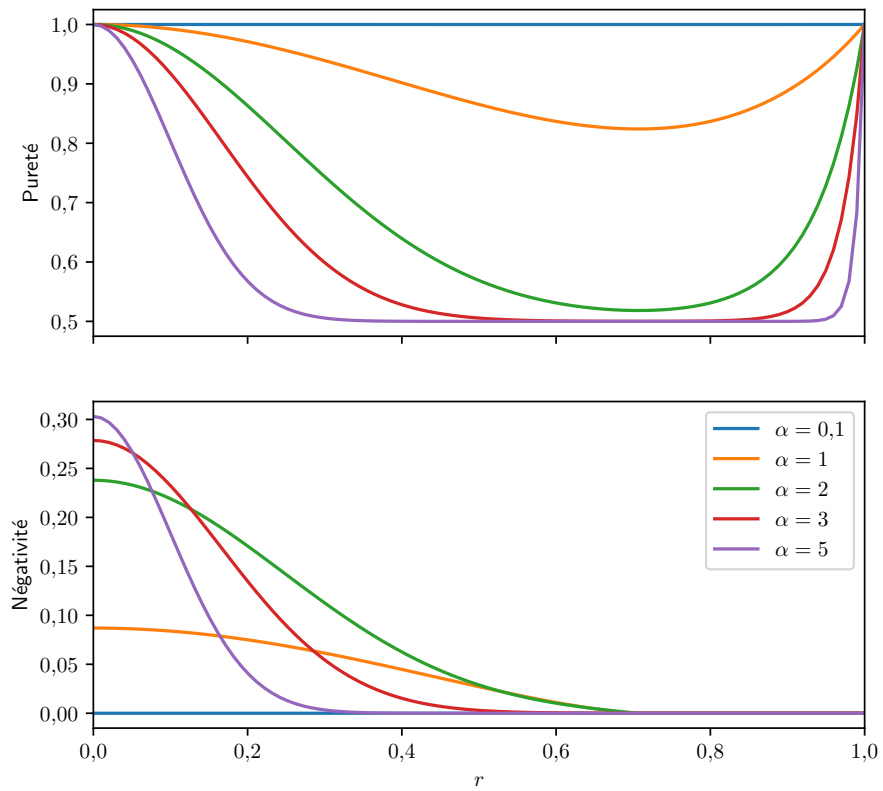


FIGURE B.3 – Pureté et négativité de la fonction de Wigner du chat après qu’il eut subi des pertes, en fonction de la réflectivité de la lame, et pour différentes amplitudes du chat initial.

CALCULS DE TRACES

Dans cette annexe, nous détaillons le calcul de traces partielles et totales. Chaque section correspond à un calcul différent et indépendant des autres.

C.1 PREMIER CALCUL

Étant donné l'opérateur de mesure $\hat{\Pi}$ défini par :

$$\hat{\Pi} = \mathbb{1}_{A,B} \otimes \hat{\Pi}_{C,e}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{C,l}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{D,e}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{D,l}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{E,e}^{\text{OFF}} \otimes \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,l}^{\text{OFF}} \quad (13.23)$$

Nous allons calculer la trace partielle suivante :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi} |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] = \frac{1}{8\mathcal{N}^2} \left(\right. \\ & + |t\alpha\rangle\langle t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \text{Tr} \left[\hat{\Pi} |1\rangle\langle 1|_{F,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \right] \\ & + |t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \text{Tr} \left[\begin{array}{l} \hat{\Pi} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |1\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} \\ |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l} \end{array} \right] \\ & + |-t\alpha\rangle\langle t\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \text{Tr} \left[\begin{array}{l} \hat{\Pi} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{F,e} \\ |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |1\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \end{array} \right] \\ & \left. + |-t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \text{Tr} \left[\hat{\Pi} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} |1\rangle\langle 1|_{E,l} \right] \right) \quad (13.33) \end{aligned}$$

Pour cela, chacun de ces 4 termes va être calculé séparément, d'abord les éléments diagonaux puis les cohérences. Remarquons que pour chaque terme les opérateurs s'écrivent sous forme séparée. La trace complète sera donc le produit des traces. Commençons par établir un formulaire rassemblant des calculs effectués pour un mode.

C.1.1 Formulaire

Rappelons les définitions des opérateurs de mesure :

$$\hat{\Pi}^{\text{OFF}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-\eta)^k |k\rangle\langle k| \quad \hat{\Pi}^{\text{ON}} = \mathbb{1} - \hat{\Pi}^{\text{OFF}} = \sum_{k=0}^{+\infty} [1 - (1-\eta)^k] |k\rangle\langle k| \quad (13.22)$$

et l'écriture des états cohérents sur la base de Fock :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.13)$$

En utilisant directement les définitions, on obtient :

$$\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}} |0\rangle\langle 0|] = \langle 0|\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}}|0\rangle = 1 \quad \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}} |0\rangle\langle 0|] = \langle 0|\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}}|0\rangle = 0 \quad (\text{C.1a})$$

$$\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}} |1\rangle\langle 1|] = \langle 1|\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}}|1\rangle = 1 - \eta \quad \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}} |1\rangle\langle 1|] = \langle 1|\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}}|1\rangle = \eta \quad (\text{C.1b})$$

Un calcul direct montre également que :

$$\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}} |\alpha\rangle\langle 0|] = \langle 0|\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}}|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}} |\alpha\rangle\langle 0|] = \langle 0|\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}}|\alpha\rangle = 0 \quad (\text{C.1c})$$

$$\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}} |\alpha\rangle\langle 1|] = \langle 1|\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}}|\alpha\rangle = (1 - \eta)\alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}} |\alpha\rangle\langle 1|] = \langle 1|\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}}|\alpha\rangle = \eta\alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad (\text{C.1d})$$

Ensuite, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}} |\alpha\rangle\langle \alpha|] &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - \eta)^k \langle k|\alpha\rangle \langle \alpha|k\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - \eta)^k \frac{(|\alpha|^2)^k}{k!} \\ &= e^{-|\alpha|^2} e^{(1-\eta)|\alpha|^2} \\ &= e^{-\eta|\alpha|^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{OFF}} |\alpha\rangle\langle \alpha|] = e^{-\eta|\alpha|^2} \quad \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}} |\alpha\rangle\langle \alpha|] = 1 - e^{-\eta|\alpha|^2} \quad (\text{C.1e})$$

Remarque. $\mathrm{Tr}[\hat{\Pi}^{\mathrm{ON}} |\alpha\rangle\langle \alpha|]$ est la probabilité de clic d'un détecteur ON/OFF sur lequel on envoie un état cohérent. C'est exactement la même que la probabilité de clic d'un état cohérent d'intensité $\eta|\alpha|^2$ sur un détecteur parfait de POVM $\mathbb{1} - |0\rangle\langle 0|$. De plus on retrouve bien que ce résultat est insensible à la phase de l'état cohérent. \diamond

C.1.2 Calcul du coefficient de $|+t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A$

Calculons

$$\mathrm{Tr}[\hat{\Pi} |1\rangle\langle 1|_{F,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{E,l}]$$

L'opérateur tracé étant séparé, on peut factoriser les traces. On obtient alors que le coefficient vaut :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_{F,e}^{\mathrm{ON}} |1\rangle\langle 1|_{F,e}] \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_{C,l}^{\mathrm{OFF}} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l}] \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_{D,l}^{\mathrm{OFF}} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l}] \\ \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_{E,l}^{\mathrm{ON}} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l}] \mathrm{Tr}[\hat{\Pi}_{E,l}^{\mathrm{OFF}} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{E,l}] \end{aligned}$$

En utilisant le formulaire (C.1), on obtient :

$$\mathrm{Tr}[\hat{\Pi} |1\rangle\langle 1|_{F,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{E,l}] = \eta e^{-3\eta|\tilde{\alpha}|^2} (1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}) \quad (\text{C.2})$$

C.1.3 Calcul du coefficient de $|-t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A$

En procédant exactement de la même manière, on obtient :

$$\text{Tr}\left[\hat{\Pi} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} |1\rangle\langle 1|_{E,l}\right] = \eta e^{-3\eta|\tilde{\alpha}|^2} \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}\right) \quad (\text{C.3})$$

C.1.4 Calcul du coefficient de $|+t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A$

Calculons

$$\text{Tr}\left[\hat{\Pi} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |1\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l}\right]$$

De nouveau c'est la trace est d'un état factorisé ; la trace sur les modes contenant du vide autres que (F, e) et (E, l) est toujours de 1. Le coefficient peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{C,e}^{\text{OFF}} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{D,e}^{\text{OFF}} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{E,e}^{\text{OFF}} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} |1\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e}\right] \\ & \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{C,l}^{\text{OFF}} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{D,l}^{\text{OFF}} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{F,l}^{\text{OFF}} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l}\right] \end{aligned}$$

En utilisant le formulaire (C.1), on obtient que la valeur du coefficient est :

$$e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \eta e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \tilde{\alpha}^* e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \eta e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} (-\tilde{\alpha}) e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} = -\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}$$

On peut donc conclure :

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\left[\hat{\Pi} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |1\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} \right. \\ & \left. |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l}\right] = -\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

C.1.5 Calcul du coefficient de $|-t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A$

Calculons

$$\text{Tr}\left[|-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{F,e} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |1\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \hat{\Pi}\right]$$

Encore une fois on peut écrire cette trace comme le produit de traces monomodes :

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{C,e}^{\text{OFF}} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,e}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{D,e}^{\text{OFF}} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,e}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{E,e}^{\text{OFF}} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{E,e}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{F,e}\right] \\ & \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{C,l}^{\text{OFF}} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{D,l}^{\text{OFF}} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} |1\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l}\right] \text{Tr}\left[\hat{\Gamma}_{F,l}^{\text{OFF}} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l}\right] \end{aligned}$$

Chaque facteur a déjà été calculé dans le formulaire (C.1), et on obtient comme valeur du coefficient :

$$e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \eta e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \tilde{\alpha} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \eta e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} (-\tilde{\alpha})^* e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} = -\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}$$

On peut alors conclure :

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\left[\hat{\Pi} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{F,e} \right. \\ & \left. |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |1\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l}\right] = -\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

C.1.6 Résumé du calcul

$$\boxed{\text{Tr}[\hat{\Pi}|\psi_1\rangle\langle\psi_1|] = \frac{1}{8\mathcal{N}^2} \left[\begin{aligned} &\eta e^{-3\eta|\tilde{\alpha}|^2} \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}\right) | +t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \\ &- \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} | +t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \\ &- \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} | -t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \\ &+ \eta e^{-3\eta|\tilde{\alpha}|^2} \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}\right) | -t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \end{aligned} \right]} \quad (\text{C.6})$$

C.2 SECOND CALCUL

Étant donné l'opérateur de mesure $\hat{\Pi}'$ défini par :

$$\hat{\Pi}' = \mathbb{1}_{A,B} \otimes \mathbb{1}_{C,e} \otimes \mathbb{1}_{C,l} \otimes \mathbb{1}_{D,e} \otimes \mathbb{1}_{D,l} \otimes \mathbb{1}_{E,e} \otimes \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \otimes \mathbb{1}_{F,l} \quad (\text{13.24})$$

Nous allons calculer la trace partielle suivante :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{CDEF} [\hat{\Pi}'|\psi_1\rangle\langle\psi_1|] &= \frac{1}{8\mathcal{N}^2} \left(\begin{aligned} &| +t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \text{Tr} \left[\hat{\Pi}' |1\rangle\langle 1|_{F,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \right] \\ &+ | +t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \text{Tr} \left[\begin{aligned} &\hat{\Pi}' |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |1\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} \\ &| +\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l} \end{aligned} \right] \\ &+ | -t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \text{Tr} \left[\begin{aligned} &\hat{\Pi}' | -\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,e} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{E,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{F,e} \\ &|0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |1\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \end{aligned} \right] \\ &+ | -t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \text{Tr} \left[\hat{\Pi}' | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} |1\rangle\langle 1|_{E,l} \right] \end{aligned} \right) \quad (\text{13.44}) \end{aligned}$$

De nouveau nous calculons séparément les 4 termes. Nous réutiliserons tous les résultats du formulaire (C.1). Les calculs s'effectuent exactement comme dans la section 13.4.

C.2.1 Calcul du coefficient de $| +t\alpha\rangle\langle +t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A$

Calculons

$$\text{Tr} \left[\hat{\Pi}' |1\rangle\langle 1|_{F,e} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} | +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \right]$$

L'opérateur tracé étant séparé, on factorise les traces pour obtenir l'expression :

$$\text{Tr} \left[\hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} |1\rangle\langle 1|_{F,e} \right] \text{Tr} \left[| +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} \right] \text{Tr} \left[| -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} \right] \text{Tr} \left[\hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} | -\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} \right] \text{Tr} \left[| +\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \right]$$

Les traces sur les modes sur lesquels n'agissent pas $\hat{\Gamma}'$ valent 1 car les états tracés sont bien normés. Les deux autres sont données par le formulaire (C.1). Ainsi le coefficient vaut :

$$\text{Tr} \left[\hat{\Gamma}' |1\rangle\langle 1|_{F,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \right] = \eta \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right) \quad (\text{C.7})$$

C.2.2 Calcul du coefficient de $|-\alpha\rangle\langle -\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A$

De manière similaire, nous obtenons la même valeur du coefficient :

$$\text{Tr} \left[\hat{\Gamma}' |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} |1\rangle\langle 1|_{E,l} \right] = \eta \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right) \quad (\text{C.8})$$

C.2.3 Calcul du coefficient de $|+\alpha\rangle\langle -\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A$

Calculons

$$\text{Tr} \left[\hat{\Gamma}' |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |1\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l} \right]$$

Comme précédemment, l'état est factorisé, on peut donc écrire cette trace sous la forme d'un produit de trace ; on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[|0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} \right] \text{Tr} \left[|0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} \right] \text{Tr} \left[|0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} \right] \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} |1\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} \right] \\ & \text{Tr} \left[|+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l} \right] \text{Tr} \left[|-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l} \right] \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l} \right] \text{Tr} \left[|+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l} \right] \end{aligned}$$

En utilisant le formulaire (C.1), on obtient la valeur du coefficient :

$$e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \eta e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \tilde{\alpha}^* e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \eta e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} (-\tilde{\alpha}) e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} = -\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}$$

On peut donc conclure :

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}' |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{C,e} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{D,e} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,e} |1\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,e} \right. \\ & \left. |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,l} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{E,l} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{F,l} \right] = -\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

C.2.4 Calcul du coefficient de $|-\alpha\rangle\langle +\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A$

En effectuant le même calcul que précédemment,

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\hat{\Gamma}' |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{C,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{D,e} |-\tilde{\alpha}\rangle\langle 0|_{E,e} |+\tilde{\alpha}\rangle\langle 1|_{F,e} \right. \\ & \left. |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{C,l} |0\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{D,l} |1\rangle\langle -\tilde{\alpha}|_{E,l} |0\rangle\langle +\tilde{\alpha}|_{F,l} \right] = -\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

C.2.5 Résumé du calcul

$$\boxed{\text{Tr}_{CDEF}[\hat{\Pi}' |\psi_1\rangle\langle\psi_1|] = \frac{1}{8\mathcal{N}^2} \left[\begin{aligned} &\eta \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}\right) |t\alpha\rangle\langle t\alpha|_B |e\rangle\langle e|_A \\ &- \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} |t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |e\rangle\langle l|_A \\ &- \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} |-t\alpha\rangle\langle t\alpha|_B |l\rangle\langle e|_A \\ &+ \eta \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}\right) |-t\alpha\rangle\langle -t\alpha|_B |l\rangle\langle l|_A \end{aligned} \right]} \quad (\text{C.11})$$

C.3 TROISIÈME CALCUL

Nous allons donc calculer

$$P_2 = \langle\psi_2|\hat{\Pi}'|\psi_2\rangle$$

avec

$$\hat{\Pi}' = \mathbb{1}_{A,B} \otimes \mathbb{1}_{C,e} \otimes \mathbb{1}_{C,l} \otimes \mathbb{1}_{D,e} \otimes \mathbb{1}_{D,l} \otimes \mathbb{1}_{E,e} \otimes \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \otimes \mathbb{1}_{F,l} \quad (\text{13.24})$$

et

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\sqrt{p_{ee}}}{4\sqrt{2}\mathcal{N}} |ee\rangle_A \left[\begin{aligned} &|t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \\ &+ |-t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \end{aligned} \right] \sum_{x,y \in \{C,D,E,F\}} \left(\hat{a}_{x,e}^\dagger \hat{a}_{y,e}^\dagger \right) \right. \\ &+ \frac{\sqrt{p_{ll}}}{4\sqrt{2}\mathcal{N}} |ll\rangle_A \left[\begin{aligned} &|t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \\ &+ |-t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \end{aligned} \right] \sum_{x,y \in \{C,D,E,F\}} \left(\hat{a}_{x,l}^\dagger \hat{a}_{y,l}^\dagger \right) \\ &+ \frac{\sqrt{p_{el}}}{4\mathcal{N}} |el\rangle_A \left[\begin{aligned} &|t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \\ &+ |-t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \end{aligned} \right] \sum_{x,y \in \{C,D,E,F\}} \left(\hat{a}_{x,e}^\dagger \hat{a}_{y,l}^\dagger \right) \left. \right] \\ &|0\rangle_{CDEF} \end{aligned} \quad (\text{13.21})$$

On remarque que les trois termes de l'expression (13.21) ont des parties sur A deux à deux orthogonales. Ainsi il n'y aura pas de contribution croisée entre ces termes.

C.3.1 Calculs préalables

Commençons par effectuer quelques calculs préalables, complémentaires à ceux effectués dans le formulaire (C.1), où le lecteur pourra retrouver également les différentes définitions.

Tout d'abord, un calcul direct montre que :

$$\text{Tr}[\hat{\Pi}^{\text{OFF}} |2\rangle\langle 2|] = \langle 2|\hat{\Pi}^{\text{OFF}}|2\rangle = (1 - \eta)^2 \quad \text{Tr}[\hat{\Pi}^{\text{ON}} |2\rangle\langle 2|] = \langle 2|\hat{\Pi}^{\text{ON}}|2\rangle = \eta(2 - \eta)$$

(C.12a)

On a également besoin de calculer :

$$\langle 1|D(-\alpha)\hat{\Gamma}^{\text{ON}}D(\alpha)|1\rangle$$

Pour cela on va utiliser la formule de Glauber pour exprimer le photon déplacé dans la base de Fock :

$$\begin{aligned} D(\alpha)|1\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} |1\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^*)^k (\hat{a})^k}{k!} |1\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} [|1\rangle - \alpha^* |0\rangle] \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k (\hat{a}^\dagger)^k}{k!} [|1\rangle - \alpha^* |0\rangle] \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k \hat{a}^\dagger |k\rangle}{\sqrt{k!}} - \alpha^* e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k |k\rangle}{\sqrt{k!}} \\ D(\alpha)|1\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k \sqrt{k+1} |k+1\rangle}{\sqrt{k!}} - \alpha^* e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k |k\rangle}{\sqrt{k!}} \end{aligned}$$

On peut alors écrire son conjugué :

$$\langle 1|D(-\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^k \sqrt{k+1} \langle k+1|}{\sqrt{k!}} - \alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^k \langle k|}{\sqrt{k!}}$$

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}
\langle 1|D(-\alpha)\hat{\Pi}^{\text{OFF}}D(\alpha)|1\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \langle 1|D(-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (1-\eta)^{k+1} \alpha^k \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k!}} |k+1\rangle \\
&\quad - \alpha^* e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \langle 1|D(-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (1-\eta)^k \frac{\alpha^k |k\rangle}{\sqrt{k!}} \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^k (k+1)}{k!} (1-\eta)^{k+1} \\
&\quad - |\alpha|^2 (1-\eta) e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^k}{k!} (1-\eta)^k \\
&\quad - |\alpha|^2 (1-\eta) e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^k}{k!} (1-\eta)^k \\
&\quad + |\alpha|^2 e^{-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^k}{k!} (1-\eta)^k \\
&= (1-\eta) e^{-|\alpha|^2} \left[1 + |\alpha|^2 (1-\eta) \right] e^{(1-\eta)|\alpha|^2} \\
&\quad - |\alpha|^2 (1-\eta) e^{-|\alpha|^2} e^{(1-\eta)|\alpha|^2} \\
&\quad - |\alpha|^2 (1-\eta) e^{-|\alpha|^2} e^{(1-\eta)|\alpha|^2} \\
&\quad + |\alpha|^2 e^{-|\alpha|^2} e^{(1-\eta)|\alpha|^2} \\
&= \left((1-\eta) + |\alpha|^2 \left[(1-\eta)^2 - 2(1-\eta) + 1 \right] \right) e^{-\eta|\alpha|^2} \\
\langle 1|D(-\alpha)\hat{\Pi}^{\text{OFF}}D(\alpha)|1\rangle &= \left(1 - \eta + \eta^2 |\alpha|^2 \right) e^{-\eta|\alpha|^2}
\end{aligned}$$

en ayant remarqué que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{k!} = (x+1)e^x$ (il suffit de constater l'égalité des primitives des deux membres).

En utilisant que $\hat{\Pi}^{\text{ON}} = \mathbb{1} - \hat{\Pi}^{\text{OFF}}$, on peut conclure :

$$\langle 1|D(-\alpha)\hat{\Pi}^{\text{ON}}D(\alpha)|1\rangle = \left(1 - \eta + \eta^2 |\alpha|^2 \right) e^{-\eta|\alpha|^2} \quad (\text{C.12b})$$

$$\langle 1|D(-\alpha)\hat{\Pi}^{\text{ON}}D(\alpha)|1\rangle = 1 - \left(1 - \eta + \eta^2 |\alpha|^2 \right) e^{-\eta|\alpha|^2} \quad (\text{C.12c})$$

Une autre valeur dont nous allons avoir besoin est $\langle 1|\hat{\Pi}^{\text{ON}}D(\alpha)|1\rangle$. On a déjà l'expression sur la base de Fock de la partie ket. On peut donc facilement calculer :

$$\begin{aligned}
\langle 1|\hat{\Pi}^{\text{ON}}D(\alpha)|1\rangle &= \langle 1| \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \left[1 - (1-\eta)^k \right] |k\rangle\langle k| \right] D(\alpha) |1\rangle \\
&= \eta \langle 1|D(\alpha)|1\rangle \\
&= \eta \left[1 - |\alpha|^2 \right] e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi on retiendra :

$$\langle 1|\hat{\Pi}^{\text{ON}}D(\alpha)|1\rangle = \eta \left[1 - |\alpha|^2 \right] e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} = \langle 1|D(-\alpha)\hat{\Pi}^{\text{ON}}|1\rangle \quad (\text{C.12d})$$

C.3.2 Premier terme

Commençons par étudier la contribution de

$$\frac{\sqrt{p_{ee}}}{4\sqrt{2}\mathcal{N}} |ee\rangle_A \left[|t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \right. \\ \left. + | -t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \right] \sum_{x,y \in \{C,D,E,F\}} \left(\hat{a}_{x,e}^\dagger \hat{a}_{y,e}^\dagger \right)$$

Pour que le produit avec $\hat{\Pi}'$ ne donne pas 0, il est nécessaire d'avoir de la lumière sur (E, l) et (F, e) . Ainsi on peut se restreindre à :

$$\frac{\sqrt{p_{ee}}}{4\sqrt{2}\mathcal{N}} |ee\rangle_A |t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \sum_{\substack{x,y \in \{C,D,E,F\} \\ F \in \{x,y\}}} \left(\hat{a}_{x,e}^\dagger \hat{a}_{y,e}^\dagger \right) |0\rangle_{C,D,E,F}$$

En séparant le cas où les deux photons e sont dans le mode (F, e) , et les autres (sans oublier de bien compter les doublons), on ré-exprime la composante qui ne donnera pas une contribution nulle :

$$\frac{\sqrt{p_{ee}}}{4\mathcal{N}} |ee\rangle_A |t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \frac{(\hat{a}_{F,e}^\dagger)^2}{\sqrt{2}} |0\rangle_{C,D,E,F} \\ + \frac{\sqrt{p_{ee}}}{2\sqrt{2}\mathcal{N}} |ee\rangle_A |t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \sum_{x \in \{C,D,E\}} \hat{a}_{x,e}^\dagger |0\rangle_{C,D,E,F}$$

$\hat{\Pi}'$ étant diagonal dans la base de Fock, il ne crée pas de photons, et donc ces deux termes n'auront pas de contributions croisées.

La probabilité d'annonce associée au premier est (on simplifie directement ce qui vaut de toute évidence 1) :

$$\frac{p_{ee}}{16\mathcal{N}^2} \langle -\tilde{\alpha} | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} | -\tilde{\alpha} \rangle \langle 2 | \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | 2 \rangle = \frac{p_{ee}}{16\mathcal{N}^2} \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right) \eta (2 - \eta)$$

Celle associée au second terme est :

$$\frac{3p_{ee}}{8\mathcal{N}^2} \langle -\tilde{\alpha} | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} | -\tilde{\alpha} \rangle \langle 1 | \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | 1 \rangle = \frac{3p_{ee}}{8\mathcal{N}^2} \eta \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right)$$

Ainsi on peut conclure que le premier terme de l'expression (13.21) a une probabilité de déclencher l'annonce :

$$\frac{p_{ee}}{16\mathcal{N}^2} \left(1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2} \right) \eta (8 - \eta) \quad (\text{C.13a})$$

En rappelant que $\mathcal{N} = \sqrt{2} \sqrt{1 + e^{-2|\alpha|^2}}$, on peut réécrire la probabilité d'annonce associée au terme :

$$p_{ee} \frac{7}{16} \frac{1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}}{2 \left(1 + e^{-2|\alpha|^2} \right)} \eta \frac{8 - \eta}{7} \quad (\text{C.13b})$$

Remarque. On reconnaît dans cette expression le produit de

- La probabilité (conditionnelle) d'avoir ce terme ;
- la probabilité qu'au moins un des deux photons atteigne le bon détecteur F ;
- la probabilité que la partie continue fasse cliquer le détecteur E ;
- un facteur entre 0 et 1 traduisant l'efficacité « moyenne » du détecteur, compte tenu qu'il peut « recevoir » un ou deux photons, avec une distribution connue.

◇

C.3.3 Second terme

Pour le calcul de la probabilité associée au terme dont l'opérateur est

$$\frac{\sqrt{p_{ll}}}{4\sqrt{2}\mathcal{N}} |ll\rangle_A \left[\begin{array}{l} |t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \\ + | -t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \end{array} \right] \sum_{x,y \in \{C,D,E,F\}} \left(\hat{a}_{x,l}^\dagger \hat{a}_{y,l}^\dagger \right)$$

tout est exactement identique à ce qu'on avait pour le terme précédent, à un échange $e \leftrightarrow l$ près ainsi qu'aux signes dans les déplacements, qui ne changent *in fine* rien vu qu'il y a dans les expressions un module carré. On peut donc directement conclure que la probabilité d'annonce associée à ce terme est :

$$p_{ll} \frac{7}{16} \frac{1 - e^{-\eta|\tilde{\alpha}|^2}}{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})} \eta \frac{8 - \eta}{7} \quad (\text{C.14})$$

C.3.4 Troisième terme

On va maintenant s'intéresser à la probabilité d'annonce associée à :

$$\frac{\sqrt{p_{el}}}{4\mathcal{N}} |el\rangle_A \left[\begin{array}{l} |t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \\ + | -t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \end{array} \right] \sum_{x,y \in \{C,D,E,F\}} \left(\hat{a}_{x,e}^\dagger \hat{a}_{y,l}^\dagger \right) |0\rangle$$

Encore une fois, seuls nous intéressent les termes qui multipliés au POVM $\hat{\Pi}'$ sont non nuls. On peut donc se restreindre à :

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{p_{el}}}{4\mathcal{N}} |el\rangle_A |t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \sum_{x \in \{C,D,E,F\}} \hat{a}_{x,l}^\dagger \\ & + \frac{\sqrt{p_{el}}}{4\mathcal{N}} |el\rangle_A | -t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l}^\dagger \sum_{x \in \{C,D,E,F\}} \hat{a}_{x,e}^\dagger \end{aligned}$$

Remarque. $D(\alpha) |0\rangle$ et $D(\alpha) |1\rangle$ sont orthogonaux. Cela va nous permettre de bien simplifier le produit scalaire à calculer. \diamond

Les termes croisés vont cette fois contribuer. Posons :

$$|\chi_1\rangle = \frac{\sqrt{p_{el}}}{4\mathcal{N}} |el\rangle_A | +t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \sum_{x \in \{C,D,E,F\}} \hat{a}_{x,l}^\dagger |0\rangle$$

$$|\chi_2\rangle = \frac{\sqrt{p_{el}}}{4\mathcal{N}} |el\rangle_A | -t\alpha\rangle_{B,m} D_{C,e}(-\tilde{\alpha}) D_{D,e}(+\tilde{\alpha}) D_{E,e}(-\tilde{\alpha}) D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l}^\dagger \sum_{x \in \{C,D,E,F\}} \hat{a}_{x,e}^\dagger |0\rangle$$

On a donc 4 termes à calculer :

$$\langle \chi_1 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_1 \rangle, \langle \chi_2 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_1 \rangle, \langle \chi_1 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_2 \rangle \text{ et } \langle \chi_2 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_2 \rangle.$$

C.3.4.1 1^{er} sous-terme

Calculons $\langle \chi_1 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_1 \rangle$. Commençons par nommer x et x' les indices des sommes qui apparaissent à droite et à gauche. D'après la remarque, les seuls termes donnant une contribution non nulle sont ceux pour lesquels $x = x'$. On doit ensuite séparer deux cas : $x = E$ et $x \neq E$. Quand $x \neq E$, on remarque simplement que le photon déplacé est un état normé. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \langle \chi_1 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_1 \rangle &= \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \left[\langle 1 | \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | 1 \rangle \langle 1 |_{E,l} D_{E,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) | 1 \rangle_{E,l} \right. \\ &\quad \left. + 3 \langle 1 | \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | 1 \rangle \langle -\tilde{\alpha} | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} | -\tilde{\alpha} \rangle \right] \\ &= \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \left\{ \eta \left[1 - \left(1 - \eta + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} \right] + 3\eta \left[1 - e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} \right] \right\} \\ &= \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \eta \left\{ 4 - \left(4 - \eta + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} \right\} \\ &= \frac{p_{el}}{4\mathcal{N}^2} \eta \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} + \frac{\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2}{4} \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} \right\} \end{aligned}$$

C.3.4.2 2^e sous-terme

Calculons désormais $\langle \chi_2 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_2 \rangle$. Pour les mêmes raisons que pour le terme précédent, les sommes à gauche et à droite se synchronisent. On a donc :

$$\begin{aligned} \langle \chi_2 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_2 \rangle &= \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \left[\langle 1 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} | 1 \rangle \langle 1 |_{F,e} D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} D_{F,e}(+\tilde{\alpha}) | 1 \rangle_{F,e} \right. \\ &\quad \left. + 3 \langle 1 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} | 1 \rangle \langle +\tilde{\alpha} | \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | +\tilde{\alpha} \rangle \right] \\ &= \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \left\{ \eta \left[1 - \left(1 - \eta + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} \right] + 3\eta \left[1 - e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} \right] \right\} \\ &= \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \eta \left\{ 4 - \left(4 - \eta + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} \right\} \\ &= \frac{p_{el}}{4\mathcal{N}^2} \eta \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\eta}{4} + \frac{\eta^2 |\tilde{\alpha}|^2}{4} \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} \right\} \end{aligned}$$

C.3.4.3 3^e sous-terme

Calculons $\langle \chi_2 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_1 \rangle$. Cette fois tous les termes croisés contribuent. Commençons par écrire :

$$\langle \chi_2 | = \frac{\sqrt{p_{el}}}{4\mathcal{N}} \langle el |_A \langle -t\alpha |_{B,m} \langle 0 | \left[\sum_{x \in \{C,D,E,F\}} \hat{a}_{x,e} \right] D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l}$$

On peut alors réécrire le sous-terme :

$$\begin{aligned} \langle \chi_2 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_1 \rangle &= \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \langle sl | sl \rangle \langle -t\alpha | + t\alpha \rangle \\ &\quad \langle 0 | \left[\sum_{x \in \{C,D,E,F\}} \hat{a}_{x,e} \right] D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l} \left] \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \right. \\ &\quad \left. \left[D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \sum_{x \in \{C,D,E,F\}} \hat{a}_{x,l}^\dagger \right] | 0 \rangle \right. \end{aligned}$$

On va ensuite développer en séparant des autre termes $x = F$ dans le bra et $x = E$ dans le ket :

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} e^{-2t^2|\alpha|^2} \langle 0 | \left[\right. \\
&\quad \hat{a}_{F,e} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l} \hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} \\
&\quad \quad \quad D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \hat{a}_{E,l}^\dagger \\
&+ \left\{ \sum_{x \in \{C,D,E\}} \hat{a}_{x,e} \right\} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l} \hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} \\
&\quad \quad \quad D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \hat{a}_{E,l}^\dagger \\
&+ \hat{a}_{F,e} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l} \hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} \\
&\quad \quad \quad D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \sum_{x \in \{C,D,F\}} \hat{a}_{x,l}^\dagger \\
&+ \left\{ \sum_{x \in \{C,D,E\}} \hat{a}_{x,e} \right\} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l} \hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} \\
&\quad \quad \quad D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \sum_{x \in \{C,D,F\}} \hat{a}_{x,l}^\dagger \\
&\quad \quad \quad \left. \right] |0\rangle
\end{aligned}$$

Calculons séparément la valeur de chacun de ces groupements.

$$\begin{aligned}
&\langle 0 | \hat{a}_{F,e} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l} \hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} \\
&\quad \quad \quad D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^\dagger \hat{a}_{E,l}^\dagger |0\rangle \\
&= \langle 1 |_{F,e} D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{\Gamma}_{F,e}^{\text{ON}} |1\rangle_{F,e} \langle 1 |_{E,l} \hat{\Gamma}_{E,l}^{\text{ON}} D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) |1\rangle_{E,l} \\
&\quad \quad \quad \langle -\tilde{\alpha} |0\rangle_{C,e} \langle +\tilde{\alpha} |0\rangle_{D,e} \langle -\tilde{\alpha} |0\rangle_{E,e} \langle 0 | +\tilde{\alpha} \rangle_{C,l} \langle 0 | -\tilde{\alpha} \rangle_{D,l} \langle 0 | +\tilde{\alpha} \rangle_{F,l} \\
&= \eta^2 \left[1 - |\tilde{\alpha}|^2 \right]^2 e^{-|\tilde{\alpha}|^2} e^{-3|\tilde{\alpha}|^2} \\
&= \eta^2 \left[1 - |\tilde{\alpha}|^2 \right]^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}
\end{aligned}$$

On a donc la valeur du premier groupement.

Passons au second, en rappelant que $\langle 1 | D(\alpha) | 0 \rangle = \langle 1 | \alpha \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha$.

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \left\{ \sum_{x \in \{C,D,E\}} \hat{a}_{x,e} \right\} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l} \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \\
& \quad D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^{\dagger} \hat{a}_{E,l}^{\dagger} | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \left\{ \sum_{x \in \{C,D,E\}} \hat{a}_{x,e} \right\} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) | 0 \rangle \\
& \quad \langle +\tilde{\alpha} |_{F,e} \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | 1 \rangle_{F,e} \langle 1 |_{E,l} \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) | 1 \rangle_{E,l} \langle 0 | +\tilde{\alpha} \rangle_{C,l} \langle 0 | -\tilde{\alpha} \rangle_{D,l} \langle 0 | +\tilde{\alpha} \rangle_{F,l} \\
&= \langle 0 | \left\{ \sum_{x \in \{C,D,E\}} \hat{a}_{x,e} \right\} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) | 0 \rangle \eta^2 \tilde{\alpha}^* \left[1 - |\tilde{\alpha}|^2 \right] e^{-\frac{5|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \\
&= \{ \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \} \eta^2 \tilde{\alpha}^* \left[1 - |\tilde{\alpha}|^2 \right] e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \\
&= \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \left[1 - |\tilde{\alpha}|^2 \right] e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}
\end{aligned}$$

Le calcul du troisième groupement est similaire au précédent :

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \hat{a}_{F,e} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l} \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \\
& \quad D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^{\dagger} \sum_{x \in \{C,D,F\}} \hat{a}_{x,l}^{\dagger} | 0 \rangle \\
&= \langle 1 |_{F,e} D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | 1 \rangle_{F,e} \langle 1 |_{E,l} \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} | -\tilde{\alpha} \rangle_{E,l} \langle -\tilde{\alpha} | 0 \rangle_{C,e} \langle +\tilde{\alpha} | 0 \rangle_{D,e} \langle -\tilde{\alpha} | 0 \rangle_{E,e} \\
& \quad \langle 0 | D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \sum_{x \in \{C,D,F\}} \hat{a}_{x,l}^{\dagger} | 0 \rangle \\
&= \eta^2 (-\tilde{\alpha}) \left[1 - |\tilde{\alpha}|^2 \right] e^{-\frac{5|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \langle 0 | D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \sum_{x \in \{C,D,F\}} \hat{a}_{x,l}^{\dagger} | 0 \rangle \\
&= \eta^2 (-\tilde{\alpha}) \left[1 - |\tilde{\alpha}|^2 \right] e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \{ -\tilde{\alpha}^* + \tilde{\alpha}^* - \tilde{\alpha}^* \} \\
&= \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \left[1 - |\tilde{\alpha}|^2 \right] e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}
\end{aligned}$$

Il nous reste le dernier regroupement à calculer :

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \left\{ \sum_{x \in \{C,D,E\}} \hat{a}_{x,e} \right\} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) D_{F,e}(-\tilde{\alpha}) \hat{a}_{E,l} \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} \\
& \quad D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{E,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \hat{a}_{F,e}^{\dagger} \sum_{x \in \{C,D,F\}} \hat{a}_{x,l}^{\dagger} |0\rangle \\
& = \langle +\tilde{\alpha} |_{F,e} \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} |1\rangle_{F,e} \langle 1 |_{E,l} \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} |-\tilde{\alpha}\rangle_{E,l} \\
& \quad \langle 0 | \left\{ \sum_{x \in \{C,D,E\}} \hat{a}_{x,e} \right\} D_{C,e}(+\tilde{\alpha}) D_{D,e}(-\tilde{\alpha}) D_{E,e}(+\tilde{\alpha}) |0\rangle \\
& \quad \langle 0 | D_{C,l}(+\tilde{\alpha}) D_{D,l}(-\tilde{\alpha}) D_{F,l}(+\tilde{\alpha}) \sum_{x \in \{C,D,F\}} \hat{a}_{x,l}^{\dagger} |0\rangle \\
& = \eta e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \tilde{\alpha}^* \eta e^{-\frac{|\tilde{\alpha}|^2}{2}} (-\tilde{\alpha}) \\
& \quad e^{-\frac{3|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \{\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}\} \\
& \quad e^{-\frac{3|\tilde{\alpha}|^2}{2}} \{-\tilde{\alpha}^* + \tilde{\alpha}^* - \tilde{\alpha}^*\} \\
& = \eta^2 |\tilde{\alpha}|^4 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}
\end{aligned}$$

On peut donc exprimer le sous-terme :

$$\begin{aligned}
\langle \chi_2 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_1 \rangle & = \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} e^{-2t^2|\alpha|^2} \begin{bmatrix} \eta^2 [1 - |\tilde{\alpha}|^2]^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \\ + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 [1 - |\tilde{\alpha}|^2] e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \\ + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 [1 - |\tilde{\alpha}|^2] e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \\ + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^4 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \end{bmatrix} \\
& = \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} e^{-2t^2|\alpha|^2} \eta^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} \begin{bmatrix} [1 - |\tilde{\alpha}|^2]^2 + |\tilde{\alpha}|^2 [1 - |\tilde{\alpha}|^2] \\ + |\tilde{\alpha}|^2 [1 - |\tilde{\alpha}|^2] + |\tilde{\alpha}|^4 \end{bmatrix} \\
& = \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} e^{-2t^2|\alpha|^2} \eta^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2} [1 - 2|\tilde{\alpha}|^2 + |\tilde{\alpha}|^4 + 2|\tilde{\alpha}|^2 - 2|\tilde{\alpha}|^4 + |\tilde{\alpha}|^4] \\
& = \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} e^{-2t^2|\alpha|^2} \eta^2 e^{-4|\tilde{\alpha}|^2}
\end{aligned}$$

On rappelle que par définition, $\tilde{\alpha} = \frac{r\alpha}{\sqrt{2}}$, et aussi $r^2 + t^2 = 1$. Ainsi, on peut reformuler le sous-terme :

$$\begin{aligned}
\langle \chi_2 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_1 \rangle & = \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \eta^2 e^{-2t^2|\alpha|^2} e^{-2r^2|\alpha|^2} \\
& = \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \eta^2 e^{-2|\alpha|^2}
\end{aligned}$$

C.3.4.4 4^e sous-terme

Calculons $\langle \chi_1 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_2 \rangle$, ou plutôt ne le calculons pas :

$$\begin{aligned}
\langle \chi_1 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_2 \rangle & = [\langle \chi_2 | \hat{\Pi}_{E,l}^{\text{ON}} \otimes \hat{\Pi}_{F,e}^{\text{ON}} | \chi_1 \rangle]^* \\
& = \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \eta^2 e^{-2|\alpha|^2}
\end{aligned}$$

C.3.4.5 Valeur du troisième terme

Maintenant qu'on a tous les sous-termes, on peut calculer le troisième terme. Vu qu'ils sont deux à deux identiques, on les groupe directement. Il vaut :

$$\begin{aligned}
 &= 2 \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \eta \left\{ 4 - \left(4 - \eta + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} \right\} + 2 \frac{p_{el}}{16\mathcal{N}^2} \eta^2 e^{-2|\alpha|^2} \\
 &= \frac{p_{el}}{8\mathcal{N}^2} \eta \left[4 - \left(4 - \eta + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} + \eta e^{-2|\alpha|^2} \right] \\
 &= \frac{p_{el}}{16} \eta \frac{4 - \left(4 - \eta + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} + \eta e^{-2|\alpha|^2}}{1 + e^{-2|\alpha|^2}}
 \end{aligned}$$

C.3.5 Calcul de la probabilité

Maintenant qu'on a calculé chaque petit bout, on peut finalement exprimer la probabilité conditionnelle de double clics :

$$P'_2 = (p_{ee} + p_{ll}) \frac{7}{16} \frac{1 - e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2}}{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})} \eta \frac{8 - \eta}{7} + \frac{p_{el}}{16} \eta \frac{4 - \left(4 - \eta + \eta^2 |\tilde{\alpha}|^2 \right) e^{-\eta |\tilde{\alpha}|^2} + \eta e^{-2|\alpha|^2}}{1 + e^{-2|\alpha|^2}}$$

(C.15)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gerardo ADESSO, Sammy RAGY et Antony R. LEE. « Continuous Variable Quantum Information : Gaussian States and Beyond ». *Open Systems & Information Dynamics* 21.1 (juin 2014), p. 1440001. ISSN : 1230-1612, 1793-7191. DOI : [10.1142/S1230161214400010](https://doi.org/10.1142/S1230161214400010). arXiv : [1401.4679](https://arxiv.org/abs/1401.4679) [quant-ph].
- [2] Ulrik L. ANDERSEN, Jonas S. NEERGAARD-NIELSEN, Peter van LOOCK et Akira FURUSAWA. « Hybrid discrete- and continuous-variable quantum information ». *Nature Physics* 11.9 (sept. 2015), p. 713-719. ISSN : 1745-2473, 1745-2481. DOI : [10.1038/nphys3410](https://doi.org/10.1038/nphys3410). arXiv : [1409.3719](https://arxiv.org/abs/1409.3719) [quant-ph].
- [3] ARVIND, Biswadeb DUTTA, N. MUKUNDA et R. SIMON. « The real symplectic groups in quantum mechanics and optics ». *Pramana* 45.6 (1^{er} déc. 1995), p. 471-497. ISSN : 0973-7111. DOI : [10.1007/BF02848172](https://doi.org/10.1007/BF02848172). arXiv : [quant-ph/9509002](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9509002) [quant-ph].
- [4] Francesco ARZANI, Claude FABRE et Nicolas TREPS. « Versatile engineering of multimode squeezed states by optimizing the pump spectral profile in spontaneous parametric down-conversion ». *Physical Review A* 97.3 (8 mar. 2018), p. 033808. ISSN : 2469-9926, 2469-9934. DOI : [10.1103/PhysRevA.97.033808](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.033808). arXiv : [1709.10055](https://arxiv.org/abs/1709.10055) [quant-ph]. URL : <https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-01826173/> (visité le 26/11/2019).
- [5] Jonatan B. BRASK, Ioannes RIGAS, Eugene S. POLZIK, Ulrik L. ANDERSEN et Anders S. SØRENSEN. « Hybrid Long-Distance Entanglement Distribution Protocol ». *Physical Review Letters* 105.16 (11 oct. 2010), p. 160501. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.105.160501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.160501). arXiv : [1004.0083](https://arxiv.org/abs/1004.0083) [quant-ph].
- [6] Samuel L. BRAUNSTEIN. « Squeezing as an irreducible resource ». *Physical Review A* 71 (5 mai 2005), p. 055801. DOI : [10.1103/PhysRevA.71.055801](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.055801). arXiv : [quant-ph/9904002](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9904002) [quant-ph].
- [7] Samuel L. BRAUNSTEIN, Christopher A. FUCHS et H. Jeff KIMBLE. « Criteria for continuous-variable quantum teleportation ». *Journal of Modern Optics* 47.2 (fév. 2000), p. 267-278. ISSN : 0950-0340, 1362-3044. DOI : [10.1080/09500340008244041](https://doi.org/10.1080/09500340008244041). arXiv : [quant-ph/9910030](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9910030) [quant-ph].
- [8] Samuel L. BRAUNSTEIN et Peter van LOOCK. « Quantum information with continuous variables ». *Reviews of Modern Physics* 77.2 (29 juin 2005), p. 513-577. ISSN : 0034-6861, 1539-0756. DOI : [10.1103/RevModPhys.77.513](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.513). arXiv : [quant-ph/0410100](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0410100) [quant-ph].
- [9] Benjamin BRECHT, Dileep V. REDDY, Christine SILBERHORN et Michael G. RAYMER. « Photon Temporal Modes : A Complete Framework for Quantum Information Science ». *Physical Review X* 5.4 (30 oct. 2015), p. 041017. ISSN : 2160-3308. DOI : [10.1103/PhysRevX.5.041017](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.041017). arXiv : [1504.06251](https://arxiv.org/abs/1504.06251) [quant-ph].

- [10] Thomas BROUGHAM, Stephen M. BARNETT, Kevin T. McCUSKER, Paul G. KWIAT et Daniel J. GAUTHIER. « Security of high-dimensional quantum key distribution protocols using Franson interferometers ». *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* 46.10 (28 mai 2013), p. 104010. ISSN : 0953-4075, 1361-6455. DOI : [10.1088/0953-4075/46/10/104010](https://doi.org/10.1088/0953-4075/46/10/104010). arXiv : [1305.4541](https://arxiv.org/abs/1305.4541) [quant-ph]. URL : <http://eprints.gla.ac.uk/89028/1/89028.pdf> (visité le 30/10/2019).
- [11] Angelika BUNSE-GERSTNER et William B. GRAGG. « Singular value decompositions of complex symmetric matrices ». *Journal of Computational and Applied Mathematics* 21.1 (jan. 1988), p. 41-54. ISSN : 03770427. DOI : [10.1016/0377-0427\(88\)90386-X](https://doi.org/10.1016/0377-0427(88)90386-X).
- [12] Niccolò CALANDRI, Qing-Yuan ZHAO, Di ZHU, Andrew DANE et Karl K. BERGGREN. « Superconducting nanowire detector jitter limited by detector geometry ». *Applied Physics Letters* 109.15 (2016), p. 152601. DOI : [10.1063/1.4963158](https://doi.org/10.1063/1.4963158). arXiv : [1607.06713](https://arxiv.org/abs/1607.06713) [cond-mat.supr-con].
- [13] Howard J. CARMICHAEL, Gerard J. MILBURN et Daniel Frank WALLS. « Squeezing in a detuned parametric amplifier ». *Journal of Physics A : Mathematical and General* 17.2 (1^{er} fév. 1984), p. 469-480. ISSN : 0305-4470, 1361-6447. DOI : [10.1088/0305-4470/17/2/031](https://doi.org/10.1088/0305-4470/17/2/031).
- [14] Yvan CASTIN. *Mécanique quantique : seconde quantification et résolvoante. Cours Master 2 iCFP — Physique Quantique*. français. Yvan Castin, 2011. 121 p. URL : <http://www.phys.ens.fr/~castin/cours.pdf> (visité le 25/04/2018).
- [15] Adrien CAVAILLÈS, Hanna LE JEANNIC, Jeremy RASKOP, Giovanni GUCCIONE, Damian MARKHAM, Eleni DIAMANTI, Matthew D. SHAW, Varun B. VERMA, Sae Woo NAM et Julien LAURAT. « Demonstration of Einstein-Podolsky-Rosen Steering Using Hybrid Continuous- and Discrete-Variable Entanglement of Light ». *Physical Review Letters* 121.17 (26 oct. 2018), p. 170403. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.121.170403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.170403). arXiv : [1811.00036](https://arxiv.org/abs/1811.00036) [quant-ph].
- [16] Nicolas J. CERF, Gerd LEUCHS et Eugene S. POLZIK. *Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light*. PUBLISHED BY IMPERIAL COLLEGE PRESS et DISTRIBUTED BY WORLD SCIENTIFIC PUBLISHING CO., fév. 2007. ISBN : 978-1-86094-760-5. DOI : [10.1142/p489](https://doi.org/10.1142/p489).
- [17] Benoît CHALOPIN, Francesco SCAZZA, Claude FABRE et Nicolas TREPS. « Direct generation of a multi-transverse mode non-classical state of light ». *Optics Express* 19.5 (28 fév. 2011), p. 4405. ISSN : 1094-4087. DOI : [10.1364/OE.19.004405](https://doi.org/10.1364/OE.19.004405). arXiv : [1101.4498](https://arxiv.org/abs/1101.4498) [quant-ph].
- [18] Yanne K. CHEMBO. « Quantum dynamics of Kerr optical frequency combs below and above threshold : Spontaneous four-wave mixing, entanglement, and squeezed states of light ». *Physical Review A* 93 (3 mar. 2016), p. 033820. DOI : [10.1103/PhysRevA.93.033820](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.033820). arXiv : [1412.5700](https://arxiv.org/abs/1412.5700) [quant-ph].
- [19] Eric C. CHEUNG et Jianli M. LIU. « Theory of a synchronously pumped optical parametric oscillator in steady-state operation ». *Journal of the Optical Society of America B* 7.8 (1^{er} août 1990), p. 1385. ISSN : 0740-3224, 1520-8540. DOI : [10.1364/JOSAB.7.001385](https://doi.org/10.1364/JOSAB.7.001385).

- [20] Andreas CHRIST et Christine SILBERHORN. « Limits on the deterministic creation of pure single-photon states using parametric down-conversion ». *Physical Review A* 85 (2 fév. 2012), p. 023829. DOI : [10.1103/PhysRevA.85.023829](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.023829). arXiv : [1111.4095](https://arxiv.org/abs/1111.4095) [quant-ph].
- [21] Claude COHEN-TANNOUJJI, Bernard DIU et Franck LALOË. *Mécanique quantique. Tome III*. OCLC : 1004775578. 2017. ISBN : 978-2-271-11808-0.
- [22] Claude COHEN-TANNOUJJI, Bernard DIU et Franck LALOË. *Mécanique quantique. Tome I*. OCLC : 1088623700. 2018. ISBN : 978-2-7598-2285-0.
- [23] Claude COHEN-TANNOUJJI, Jacques DUPONT-ROC et Gilbert GRYNBERG. *Photons et atomes : introduction à l'électrodynamique quantique*. OCLC : 48459911. Paris : EDP Sciences : CNRS Ed., 1987. ISBN : 2-222-03966-5.
- [24] Hendrik B. COLDENSTRODT-RONGE, Jeff S. LUNDEEN, Kenny L. PREGNELL, Alvaro Felipe FEITO BOIRAC, Brian J. SMITH, Wolfgang MAUERER, Christine SILBERHORN, Jens EISERT, Martin B. PLENIO et Ian Alexander WALMSLEY. « A proposed testbed for detector tomography ». *Journal of Modern Optics* 56.2-3 (25 fév. 2009), p. 432-441. DOI : [10.1080/09500340802304929](https://doi.org/10.1080/09500340802304929). arXiv : [0902.4384](https://arxiv.org/abs/0902.4384) [quant-ph].
- [25] Matthew J. COLLETT et Crispin W. GARDINER. « Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification ». *Physical Review A* 30.3 (1^{er} sept. 1984), p. 1386-1391. ISSN : 0556-2791. DOI : [10.1103/PhysRevA.30.1386](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.30.1386).
- [26] Jean DALIBARD. *Cohérence quantique et dissipation*. Sept. 2006. URL : http://www.phys.ens.fr/~dalibard/Notes_de_cours/magistere_coherence.pdf (visité le 16/08/2019).
- [27] Renné Medeiros DE ARAÚJO, Jonathan ROSLUND, Yin CAI, Giulia FERRINI, Claude FABRE et Nicolas TREPS. « Full characterization of a highly multimode entangled state embedded in an optical frequency comb using pulse shaping ». *Physical Review A* 89 (5 mai 2014), p. 053828. DOI : [10.1103/PhysRevA.89.053828](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.053828). arXiv : [1401.4867](https://arxiv.org/abs/1401.4867) [quant-ph]. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01057662> (visité le 26/11/2019).
- [28] Luca DIECI et Luciano LOPEZ. « Smooth singular value decomposition on the symplectic group and Lyapunov exponents approximation* ». *Calcolo* 43.1 (mar. 2006), p. 1-15. ISSN : 0008-0624, 1126-5434. DOI : [10.1007/s10092-006-0111-y](https://doi.org/10.1007/s10092-006-0111-y).
- [29] F. W. J. OLVER, A. B. OLDE DAALHUIS, D. W. LOZIER, B. I. SCHNEIDER, R. F. BOISVERT, C. W. CLARK, B. R. MILLER, B. V. SAUNDERS et al. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. URL : <http://dlmf.nist.gov/>.
- [30] Froilán M. DOPICO et Charles R. JOHNSON. « Parametrization of the Matrix Symplectic Group and Applications ». *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 31.2 (jan. 2009), p. 650-673. ISSN : 0895-4798, 1095-7162. DOI : [10.1137/060678221](https://doi.org/10.1137/060678221). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/cf6e/2511c8f649dd17282da0d65d169cbc728f45.pdf> (visité le 26/09/2019).
- [31] Henry M. van DRIEL. « Synchronously pumped optical parametric oscillators ». *Applied Physics B* 60.5 (mai 1995), p. 411-420. ISSN : 0946-2171, 1432-0649. DOI : [10.1007/BF01081320](https://doi.org/10.1007/BF01081320).

- [32] Avik DUTT, Kevin LUKE, Sasikanth MANIPATRUNI, Alexander L. GAETA, Paulo NUSSENZVEIG et Michal LIPSON. « On-Chip Optical Squeezing ». *Physical Review Applied* 3.4 (13 avr. 2015), p. 044005. ISSN : 2331-7019. DOI : [10.1103/PhysRevApplied.3.044005](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.3.044005). arXiv : [1309.6371](https://arxiv.org/abs/1309.6371) [physics.optics].
- [33] Daniel C. EDELSTEIN, Elliot S. WACHMAN et Chung-Liang TANG. « Broadly tunable high repetition rate femtosecond optical parametric oscillator ». *Applied Physics Letters* 54.18 (mai 1989), p. 1728-1730. ISSN : 0003-6951, 1077-3118. DOI : [10.1063/1.101272](https://doi.org/10.1063/1.101272).
- [34] Albert EINSTEIN, Boris PODOLSKY et Nathan ROSEN. « Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? » *Physical Review* 47.10 (15 mai 1935), p. 777-780. ISSN : 0031-899X. DOI : [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777).
- [35] Steven J. van ENK. « Photodetector figures of merit in terms of POVMs ». *Journal of Physics Communications* 1.4 (8 nov. 2017), p. 045001. ISSN : 2399-6528. DOI : [10.1088/2399-6528/aa90ce](https://doi.org/10.1088/2399-6528/aa90ce). arXiv : [1705.09640](https://arxiv.org/abs/1705.09640) [quant-ph].
- [36] Steven J. van ENK. « The time-dependent spectrum of a single photon and its POVM ». *Physical Review A* 96 (3 19 sept. 2017), p. 033834. DOI : [10.1103/PhysRevA.96.033834](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.033834). arXiv : [1705.09033](https://arxiv.org/abs/1705.09033) [quant-ph].
- [37] Michael EPPING, Hermann KAMPERMANN, Chiara MACCHIAVELLO et Dagmar BRUSS. « Multi-partite entanglement can speed up quantum key distribution in networks ». *New Journal of Physics* 19.9 (14 sept. 2017), p. 093012. ISSN : 1367-2630. DOI : [10.1088/1367-2630/aa8487](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa8487). arXiv : [1612.05585](https://arxiv.org/abs/1612.05585) [quant-ph].
- [38] Claude FABRE. *Atomes et lumière, interaction matière rayonnement*. 2006. URL : <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/Fabre/polyM2PhQuant2006.pdf> (visité le 11/09/2019).
- [39] Claude FABRE, Élisabeth GIACOBINO, Antoine HEIDMANN, Luigi LUGIATO, Serge REYNAUD, Mario VADACCHINO et Wang KAIGE. « Squeezing in detuned degenerate optical parametric oscillators ». *Quantum Optics : Journal of the European Optical Society Part B* 2.2 (avr. 1990), p. 159-187. ISSN : 0954-8998. DOI : [10.1088/0954-8998/2/2/006](https://doi.org/10.1088/0954-8998/2/2/006).
- [40] Claude FABRE, Élisabeth GIACOBINO, Antoine HEIDMANN et Serge REYNAUD. « Noise characteristics of a non-degenerate Optical Parametric Oscillator - Application to quantum noise reduction ». *Journal de Physique* 50.10 (15 mai 1989), p. 1209-1225. DOI : [10.1051/jphys:0198900500100120900](https://doi.org/10.1051/jphys:0198900500100120900). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00210990> (visité le 26/11/2019).
- [41] Alessandro FERRARO, Stefano OLIVARES et Matteo G. A. PARIS. « Quantum measurements on continuous variable systems ». *Gaussian states in continuous variable quantum information*. Bibliopolis, Napoli. Lecture notes. 31 mar. 2005. Chap. 5, p. 44. ISBN : 88-7088-483-X. arXiv : [quant-ph/0503237](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0503237) [quant-ph].
- [42] Crispin W. GARDINER et Matthew J. COLLETT. « Input and output in damped quantum systems : Quantum stochastic differential equations and the master equation ». *Physical Review A* 31.6 (1^{er} juin 1985), p. 3761-3774. ISSN : 0556-2791. DOI : [10.1103/PhysRevA.31.3761](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.3761).

- [43] Vittorio GIOVANNETTI, Seth LLOYD et Lorenzo MACCONE. « Advances in quantum metrology ». *Nature Photonics* 5.4 (avr. 2011), p. 222-229. ISSN : 1749-4885, 1749-4893. DOI : [10.1038/nphoton.2011.35](https://doi.org/10.1038/nphoton.2011.35). arXiv : [1102.2318](https://arxiv.org/abs/1102.2318) [quant-ph].
- [44] Nicolas GISIN, Grégoire RIBORDY, Wolfgang TITTEL et Hugo ZBINDEN. « Quantum cryptography ». *Reviews of Modern Physics* 74 (1 8 mar. 2002), p. 145-195. ISSN : 0034-6861, 1539-0756. DOI : [10.1103/RevModPhys.74.145](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.145). arXiv : [quant-ph/0101098](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0101098) [quant-ph].
- [45] Roy Jay GLAUBER et Maciej LEWENSTEIN. « Quantum optics of dielectric media ». *Physical Review A* 43.1 (1^{er} jan. 1991), p. 467-491. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.43.467](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.467).
- [46] Pierre GODARD. « Optique électromagnétique non-linéaire polyharmonique : théorie et modélisation numérique ». fr. Theses. Université de Provence - Aix-Marseille I, sept. 2009. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00439833>.
- [47] Maurice de GOSSON. *Symplectic geometry and quantum mechanics*. Operator theory, advances and applications; Advances in partial differential equations v. 166. OCLC : ocm69332435. Basel; Boston : Birkhäuser Verlag, 2006. 367 p. ISBN : 978-3-7643-7574-4.
- [48] François HACHE. *Optique non linéaire*. Sous la dir. d'EDP SCIENCES. OCLC : 956637404. 1^{er} juil. 2016. 180 p. ISBN : 978-2-7598-1840-2.
- [49] Robert H. HADFIELD. « Single-photon detectors for optical quantum information applications ». *Nature Photonics* 3.12 (déc. 2009), p. 696-705. ISSN : 1749-4885. DOI : [10.1038/nphoton.2009.230](https://doi.org/10.1038/nphoton.2009.230).
- [50] Matthew A HALL, Joseph B ALTEPETER et Prem KUMAR. « All-optical switching of photonic entanglement ». *New Journal of Physics* 13.10 (17 oct. 2011), p. 105004. ISSN : 1367-2630. DOI : [10.1088/1367-2630/13/10/105004](https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/10/105004). arXiv : [1106.5738](https://arxiv.org/abs/1106.5738) [quant-ph].
- [51] Robert HANBURY BROWN et Richard Q. TWISS. « A Test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius ». *Nature* 178.4541 (nov. 1956), p. 1046-1048. ISSN : 0028-0836, 1476-4687. DOI : [10.1038/1781046a0](https://doi.org/10.1038/1781046a0).
- [52] Serge HAROCHE et Jean-Michel RAIMOND. *Exploring the quantum : atoms, cavities and photons*. Reprinted. Oxford graduate texts. OCLC : 740927694. Oxford : Univ. Press, 2010. 605 p. ISBN : 978-0-19-850914-1.
- [53] Marc HEIN, Jens EISERT et Hans J. BRIEGEL. « Multiparty entanglement in graph states ». *Physical Review A* 69 (6 juin 2004), p. 062311. DOI : [10.1103/PhysRevA.69.062311](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.062311). arXiv : [quant-ph/0307130](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0307130) [quant-ph].
- [54] Dmitri B. HOROSHKO, Luca LA VOLPE, Francesco ARZANI, Nicolas TREPS, Claude FABRE et Mikhail I. KOLOBOV. « Bloch-Messiah reduction for twin beams of light ». *Physical Review A* 100.1 (18 juil. 2019), p. 013837. ISSN : 2469-9926, 2469-9934. DOI : [10.1103/PhysRevA.100.013837](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.013837). arXiv : [1903.06578](https://arxiv.org/abs/1903.06578).
- [55] Martin IDEL, Sebastian Soto GAONA et Michael M. WOLF. « Perturbation Bounds for Williamson's Symplectic Normal Form » (5 sept. 2016). arXiv : [1609.01338](https://arxiv.org/abs/1609.01338) [math.SP].

- [56] Michael G. JABBOUR et Nicolas J. CERF. « Multiphoton interference effects in passive and active Gaussian transformations » (28 mar. 2018). arXiv : [1803.10734 \[quant-ph\]](#).
- [57] Hyunseok JEONG, Alessandro ZAVATTA, Minsu KANG, Seung-Woo LEE, Luca S. COSTANZO, Samuele GRANDI, Timothy C. RALPH et Marco BELLINI. « Generation of hybrid entanglement of light ». *Nature Photonics* 8.7 (juil. 2014), p. 564-569. ISSN : 1749-4885, 1749-4893. DOI : [10.1038/nphoton.2014.136](#). arXiv : [1309.6192 \[quant-ph\]](#).
- [58] Shifeng JIANG, Nicolas TREPS et Claude FABRE. « A time/frequency quantum analysis of the light generated by synchronously pumped optical parametric oscillators ». *New Journal of Physics* 14.4 (10 avr. 2012), p. 043006. ISSN : 1367-2630. DOI : [10.1088/1367-2630/14/4/043006](#). arXiv : [1204.2354](#).
- [59] Rui-Bo JIN, Masahiro TAKEOKA, Utako TAKAGI, Ryosuke SHIMIZU et Masahide SASAKI. « Highly efficient entanglement swapping and teleportation at telecom wavelength ». *Scientific Reports* 5 (20 mar. 2015), p. 9333. DOI : [10.1038/srep09333](#).
- [60] Florian KAISER, Bruno FEDRICI, Alessandro ZAVATTA, Virginia D'AURIA et Sébastien TANZILLI. « A fully guided-wave squeezing experiment for fiber quantum networks ». *Optica* 3.4 (20 avr. 2016), p. 362. ISSN : 2334-2536. DOI : [10.1364/OPTICA.3.000362](#). arXiv : [1601.07203 \[quant-ph\]](#).
- [61] H. Jeff KIMBLE, Mario DAGENAIS et Leonard MANDEL. « Photon Antibunching in Resonance Fluorescence ». *Physical Review Letters* 39.11 (12 sept. 1977), p. 691-695. ISSN : 0031-9007. DOI : [10.1103/PhysRevLett.39.691](#). URL : <https://authors.library.caltech.edu/6051/1/KIMprl77.pdf> (visité le 03/11/2019).
- [62] David Nikolaevič KLYŠKO. *Photons and nonlinear optics*. Rev. and enl. ed. OCLC : 17619718. New York, NY : Gordon et Breach, 1988. 415 p. ISBN : 978-2-88124-669-2.
- [63] Mikhail I. KOLOBOV. « The spatial behavior of nonclassical light ». *Reviews of Modern Physics* 71.5 (1^{er} oct. 1999), p. 1539-1589. ISSN : 0034-6861, 1539-0756. DOI : [10.1103/RevModPhys.71.1539](#).
- [64] Alexander KORNEEV et al. « Single-Photon Detection System for Quantum Optics Applications ». *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* 13.4 (juin 2007), p. 944-951. ISSN : 1077-260X. DOI : [10.1109/JSTQE.2007.903856](#).
- [65] Michael KUES et al. « On-chip generation of high-dimensional entangled quantum states and their coherent control ». *Nature* 546.7660 (28 juin 2017), p. 622-626. ISSN : 0028-0836, 1476-4687. DOI : [10.1038/nature22986](#).
- [66] Hyukjoon KWON et Hyunseok JEONG. « Generation of hybrid entanglement between a single-photon polarization qubit and a coherent state ». *Physical Review A* 91.1 (29 jan. 2015), p. 012340. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.91.012340](#). arXiv : [1410.6823 \[quant-ph\]](#).
- [67] Franck LALOË et William J. MULLIN. « Quantum Properties of a Single Beam Splitter ». *Foundations of Physics* 42.1 (jan. 2012), p. 53-67. ISSN : 0015-9018, 1572-9516. DOI : [10.1007/s10701-010-9501-8](#). arXiv : [1004.1731 \[quant-ph\]](#).

- [68] Jean-François LE GALL. *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires*. École normale supérieure, 29 sept. 2006. 248 p. URL : <https://www.math.u-psud.fr/~jflgall/IPPA2.pdf> (visité le 06/03/2017).
- [69] Hanna LE JEANNIC, Adrien CAVAILLÈS, Jeremy RASKOP, Kun HUANG et Julien LAURAT. « Remote preparation of continuous-variable qubits using loss-tolerant hybrid entanglement of light ». *Optica* 5.8 (20 août 2018), p. 1012. ISSN : 2334-2536. DOI : [10.1364/OPTICA.5.001012](https://doi.org/10.1364/OPTICA.5.001012). arXiv : [1809.10700](https://arxiv.org/abs/1809.10700) [quant-ph].
- [70] Seung-Woo LEE et Hyunseok JEONG. « Near-deterministic quantum teleportation and resource-efficient quantum computation using linear optics and hybrid qubits ». *Physical Review A* 87.2 (19 fév. 2013), p. 022326. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.87.022326](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.022326). arXiv : [1112.0825](https://arxiv.org/abs/1112.0825) [quant-ph].
- [71] Thomas LEGERO, Tatjana WILK, Axel KUHN et Gerhard REMPE. « Time-resolved two-photon quantum interference ». *Applied Physics B* 77.8 (déc. 2003), p. 797-802. ISSN : 0946-2171, 1432-0649. DOI : [10.1007/s00340-003-1337-x](https://doi.org/10.1007/s00340-003-1337-x). arXiv : [quant-ph/0308024](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0308024) [quant-ph].
- [72] Shujing LI, Hongmei YAN, Yaya HE et Hai WANG. « Experimentally feasible generation protocol for polarized hybrid entanglement ». *Physical Review A* 98.2 (31 août 2018), p. 022334. ISSN : 2469-9926, 2469-9934. DOI : [10.1103/PhysRevA.98.022334](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.022334).
- [73] Seok Hyung LIE et Hyunseok JEONG. « Limitations of teleporting a qubit via a two-mode squeezed state ». *Photonics Research* 7.5 (1^{er} mai 2019), A7-A13. ISSN : 2327-9125. DOI : [10.1364/PRJ.7.0000A7](https://doi.org/10.1364/PRJ.7.0000A7).
- [74] Youngrong LIM, Jaewoo JOO, Timothy P. SPILLER et Hyunseok JEONG. « Loss-resilient photonic entanglement swapping using optical hybrid states ». *Physical Review A* 94.6 (27 déc. 2016), p. 062337. ISSN : 2469-9926, 2469-9934. DOI : [10.1103/PhysRevA.94.062337](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.062337). arXiv : [1608.04882](https://arxiv.org/abs/1608.04882) [quant-ph].
- [75] Peter van LOOCK, William J. MUNRO, Kae NEMOTO, Timothy P. SPILLER, Thaddeus D. LADD, Samuel L. BRAUNSTEIN et Gerard J. MILBURN. « Hybrid quantum computation in quantum optics ». *Physical Review A* 78.2 (1^{er} août 2008), p. 022303. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.78.022303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022303). arXiv : [quant-ph/0701057](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0701057) [quant-ph].
- [76] Rodney LOUDON. *The quantum theory of light*. 3^e éd. Oxford science publications. OCLC : 729944063. Oxford : Oxford Univ. Press, 2010. 438 p. ISBN : 978-0-19-850176-3.
- [77] Chao-Yang LU, Tao YANG et Jian-Wei PAN. « Experimental Multiparticle Entanglement Swapping for Quantum Networking ». *Physical Review Letters* 103 (2 juil. 2009), p. 020501. DOI : [10.1103/PhysRevLett.103.020501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.020501).
- [78] Vladimir I. MAN'KO. « Introduction to quantum optics ». *AIP Conference Proceedings* 365. T. 365. AIP, 29 sept. 1995, p. 337-371. DOI : [10.1063/1.50228](https://doi.org/10.1063/1.50228). arXiv : [quant-ph/9509018](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9509018) [quant-ph].
- [79] Francesco MARSILI et al. « Detecting single infrared photons with 93% system efficiency ». *Nature Photonics* 7.3 (mar. 2013), p. 210-214. ISSN : 1749-4885. DOI : [10.1038/nphoton.2013.13](https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.13). arXiv : [1209.5774](https://arxiv.org/abs/1209.5774) [physics.optics].

- [80] Anthony MARTIN. « Puces photoniques pour la communication quantique longue distance. » Theses. Université Nice Sophia Antipolis, déc. 2011. 293 p. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00683569>.
- [81] Reza MATLOOB. « Canonical theory of electromagnetic field quantization in dielectrics ». *Optics Communications* 192.3 (juin 2001), p. 287-297. ISSN : 00304018. DOI : [10.1016/S0030-4018\(01\)01094-X](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(01)01094-X).
- [82] Florent MAZEAS et al. « High-quality photonic entanglement for wavelength-multiplexed quantum communication based on a silicon chip ». *Optics Express* 24.25 (12 déc. 2016), p. 28731-28738. ISSN : 1094-4087. DOI : [10.1364/OE.24.028731](https://doi.org/10.1364/OE.24.028731).
- [83] Florent MAZEAS et al. « High-quality photonic entanglement for wavelength-multiplexed quantum communication based on a silicon chip ». *Optics Express* 24.25 (12 déc. 2016), p. 28731. ISSN : 1094-4087. DOI : [10.1364/OE.24.028731](https://doi.org/10.1364/OE.24.028731). arXiv : [1609.00521](https://arxiv.org/abs/1609.00521) [quant-ph].
- [84] Will McCUTCHEON. « Structure in Multimode Squeezing : A Generalised Bloch-Messiah Reduction » (7 sept. 2018). arXiv : [1809.02544](https://arxiv.org/abs/1809.02544).
- [85] Renné MEDEIROS DE ARAUJO. « Génération et manipulation de peignes de fréquences quantiques multimodes ». Theses. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, nov. 2012. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00771444>.
- [86] Nicolas C. MENICUCCI, Steven T. FLAMMIA et Peter van LOOCK. « Graphical calculus for Gaussian pure states ». *Physical Review A* 83.4 (28 avr. 2011), p. 042335. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.83.042335](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.042335). arXiv : [1007.0725](https://arxiv.org/abs/1007.0725).
- [87] Nicolas C. MENICUCCI, Steven T. FLAMMIA et Olivier PFISTER. « One-Way Quantum Computing in the Optical Frequency Comb ». *Physical Review Letters* 101.13 (22 sept. 2008), p. 130501. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.101.130501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.130501). arXiv : [0804.4468](https://arxiv.org/abs/0804.4468) [quant-ph].
- [88] Kenneth R. MEYER, Glen R. HALL et Daniel C. OFFIN. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. T. 90. Applied Mathematical Sciences. Cham : Springer International Publishing, 2017. ISBN : 978-3-319-53690-3. DOI : [10.1007/978-3-319-53691-0](https://doi.org/10.1007/978-3-319-53691-0). URL : <https://www.gbv.de/dms/ilmenau/toc/025392417.PDF>.
- [89] François MONDAIN, Tomasso LUNGI, Alessandro ZAVATTA, Élie GOUZIEN, Florent DOUTRE, Marc DE MICHELI, Sébastien TANZILLI et Virginia D'AURIA. « Chip-based squeezing at a telecom wavelength ». *Photonics Research* 7.7 (1^{er} juil. 2019), A36-A39. ISSN : 2327-9125. DOI : [10.1364/PRJ.7.000A36](https://doi.org/10.1364/PRJ.7.000A36). arXiv : [1811.02097](https://arxiv.org/abs/1811.02097) [quant-ph].
- [90] Olivier MORIN, Kun HUANG, Jianli LIU, Hanna LE JEANNIC, Claude FABRE et Julien LAURAT. « Remote creation of hybrid entanglement between particle-like and wave-like optical qubits ». *Nature Photonics* 8.7 (juil. 2014), p. 570-574. ISSN : 1749-4885, 1749-4893. DOI : [10.1038/nphoton.2014.137](https://doi.org/10.1038/nphoton.2014.137). arXiv : [1309.6191](https://arxiv.org/abs/1309.6191) [quant-ph].

- [91] Peter J. MOSLEY, Jeff S. LUNDEEN, Brian J. SMITH et Ian Alexander WALMSLEY. « Conditional preparation of single photons using parametric downconversion : A recipe for purity ». *New Journal of Physics* 10.9 (9 juil. 2008), p. 093011. DOI : [10.1088/1367-2630/10/9/093011](https://doi.org/10.1088/1367-2630/10/9/093011). arXiv : [0807.1409](https://arxiv.org/abs/0807.1409) [quant-ph].
- [92] David J. MOSS, Roberto MORANDOTTI, Alexander L. GAETA et Michal LIPSON. « New CMOS-compatible platforms based on silicon nitride and Hydex for nonlinear optics ». *Nature Photonics* 7.8 (août 2013), p. 597-607. ISSN : 1749-4885, 1749-4893. DOI : [10.1038/nphoton.2013.183](https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.183). arXiv : [1404.3775](https://arxiv.org/abs/1404.3775) [physics.optics].
- [93] Jacob MOWER, Franco N. C. WONG, Jeff H. SHAPIRO et Dirk ENGLUND. « Dense Wavelength Division Multiplexed Quantum Key Distribution Using Entangled Photons » (21 oct. 2011). arXiv : [1110.4867](https://arxiv.org/abs/1110.4867) [quant-ph].
- [94] Jacob MOWER, Zheshen ZHANG, Pierre DESJARDINS, Catherine LEE, Jeffrey H. SHAPIRO et Dirk ENGLUND. « High-dimensional quantum key distribution using dispersive optics ». *Physical Review A* 87.6 (20 juin 2013), p. 062322. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.87.062322](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.062322). arXiv : [1210.4501](https://arxiv.org/abs/1210.4501) [quant-ph].
- [95] Lutfi Arif NGAH, Olivier ALIBART, Laurent LABONTÉ, Virginia D'AURIA et Sébastien TANZILLI. « Ultra-fast heralded single photon source based on telecom technology ». *Laser & Photonics Reviews* 9.2 (2015), p. L1-L5. ISSN : 1863-8899. DOI : [10.1002/lpor.201400404](https://doi.org/10.1002/lpor.201400404). arXiv : [1412.5427](https://arxiv.org/abs/1412.5427) [quant-ph].
- [96] Thomas NITSCHKE, Fabian ELSTER, Jaroslav NOVOTNÝ, Aurél GÁBRIS, Igor JEX, Sonja BARKHOFEN et Christine SILBERHORN. « Quantum walks with dynamical control : graph engineering, initial state preparation and state transfer ». *New Journal of Physics* 18.6 (13 juin 2016), p. 063017. ISSN : 1367-2630. DOI : [10.1088/1367-2630/18/6/063017](https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/6/063017). arXiv : [1601.08204](https://arxiv.org/abs/1601.08204) [quant-ph].
- [97] Alexei OURJOUNTSEV, Hyunseok JEONG, Rosa TUALLE-BROURI et Philippe GRANGIER. « Generation of optical 'Schrödinger cats' from photon number states ». *Nature* 448.7155 (août 2007), p. 784-786. ISSN : 0028-0836, 1476-4687. DOI : [10.1038/nature06054](https://doi.org/10.1038/nature06054).
- [98] Alexei OURJOUNTSEV, Rosa TUALLE-BROURI, Julien LAURAT et Philippe GRANGIER. « Generating Optical Schrödinger Kittens for Quantum Information Processing ». *Science* 312.5770 (7 avr. 2006), p. 83-86. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. DOI : [10.1126/science.1122858](https://doi.org/10.1126/science.1122858).
- [99] Chris PAIGE et Charles VAN LOAN. « A Schur decomposition for Hamiltonian matrices ». *Linear Algebra and its Applications* 41 (déc. 1981), p. 11-32. ISSN : 00243795. DOI : [10.1016/0024-3795\(81\)90086-0](https://doi.org/10.1016/0024-3795(81)90086-0).
- [100] Ryan C. PARKER, Jaewoo JOO, Mohsen RAZAVI et Timothy P. SPILLER. « Hybrid photonic loss resilient entanglement swapping ». *Journal of Optics* 19.10 (1^{er} oct. 2017), p. 104004. ISSN : 2040-8978, 2040-8986. DOI : [10.1088/2040-8986/aa858a](https://doi.org/10.1088/2040-8986/aa858a). arXiv : [1706.08492](https://arxiv.org/abs/1706.08492) [quant-ph].

- [101] Giuseppe PATERA. « Quantum properties of ultra-short pulses generated by SPOPOs : multi-mode squeezing and entanglement ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 5 nov. 2008. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00404162>.
- [102] Giuseppe PATERA, Carlos NAVARRETE-BENLLOCH, Germán J. de VALCÁRCEL et Claude FABRE. « Quantum coherent control of highly multipartite continuous-variable entangled states by tailoring parametric interactions ». *The European Physical Journal D* 66.9 (sept. 2012), p. 241. ISSN : 1434-6060, 1434-6079. DOI : [10.1140/epjd/e2012-30036-2](https://doi.org/10.1140/epjd/e2012-30036-2). arXiv : [1201.3105](https://arxiv.org/abs/1201.3105) [quant-ph].
- [103] Giuseppe PATERA, Nicolas TREPS, Claude FABRE et German J. DE VALCARCEL. « Quantum theory of Synchronously Pumped type I Optical Parametric Oscillators : characterization of the squeezed supermodes ». *The European Physical Journal D* 56.1 (1^{er} déc. 2009), p. 123. ISSN : 1434-6079. DOI : [10.1140/epjd/e2009-00299-9](https://doi.org/10.1140/epjd/e2009-00299-9). arXiv : [0907.4550](https://arxiv.org/abs/0907.4550) [quant-ph]. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00407257> (visité le 26/11/2019).
- [104] Olivier PFISTER, Sheng FENG, Gregory JENNINGS, Raphael POOSER et Daruo XIE. « Multipartite continuous-variable entanglement from concurrent nonlinearities ». *Physical Review A* 70.2 (20 août 2004), p. 020302. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.70.020302](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.020302). arXiv : [quant-ph/0404049](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0404049) [quant-ph].
- [105] Olivier PINEL, Julien FADE, Daniel BRAUN, Pu JIAN, Nicolas TREPS et Claude FABRE. « Ultimate sensitivity of precision measurements with intense Gaussian quantum light : A multimodal approach ». *Physical Review A* 85.1 (6 jan. 2012), p. 010101. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.85.010101](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.010101). arXiv : [1105.2644](https://arxiv.org/abs/1105.2644) [quant-ph].
- [106] Jean-Michel RAIMOND. *Atoms and Photons*. 6 sept. 2016. URL : <http://www.lkb.upmc.fr/cqed/wp-content/uploads/sites/14/2016/09/m2icfpatomsphotons.pdf> (visité le 16/08/2019).
- [107] Christian REIMER et al. « Cross-polarized photon-pair generation and bi-chromatically pumped optical parametric oscillation on a chip ». *Nature Communications* 6 (14 sept. 2015), p. 8236. DOI : [doi:10.1038/ncomms9236](https://doi.org/10.1038/ncomms9236).
- [108] Peter P. ROHDE, Wolfgang MAUERER et Christine SILBERHORN. « Spectral structure and decompositions of optical states, and their applications ». *New Journal of Physics* 9.4 (2007), p. 91. DOI : [10.1088/1367-2630/9/4/091](https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/4/091). arXiv : [quant-ph/0609004](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0609004) [quant-ph].
- [109] Laure SAINT-RAYMOND. *Analyse fonctionnelle*. 11 mar. 2013. URL : http://www2.fimfa.ens.fr/telecharger_fichier.php?fichier=932 (visité le 05/09/2019).
- [110] Roman SCHNABEL. « Squeezed states of light and their applications in laser interferometers ». *Physics Reports* 684 (avr. 2017), p. 1-51. ISSN : 03701573. DOI : [10.1016/j.physrep.2017.04.001](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.04.001). arXiv : [1611.03986](https://arxiv.org/abs/1611.03986) [quant-ph].
- [111] Erwin SCHRÖDINGER. « Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik ». *Die Naturwissenschaften* 23.48 (nov. 1935), p. 807-812. ISSN : 0028-1042, 1432-1904. DOI : [10.1007/BF01491891](https://doi.org/10.1007/BF01491891).

- [112] Robert M. SHELBY et Michael ROSENBLUH. « Generation of pulsed squeezed light in a mode-locked optical parametric oscillator ». *Applied Physics B Photophysics and Laser Chemistry* 55.3 (sept. 1992), p. 226-232. ISSN : 0721-7269, 1432-0649. DOI : [10.1007/BF00325010](https://doi.org/10.1007/BF00325010).
- [113] Demid V. SYCHEV, Alexander E. ULANOV, Anastasia A. PUSHKINA, Matthew W. RICHARDS, Ilya A. FEDOROV et Alexander I. LVOVSKY. « Enlargement of optical Schrödinger's cat states ». *Nature Photonics* 11.6 (1^{er} mai 2017), p. 379-382. ISSN : 1749-4885, 1749-4893. DOI : [10.1038/nphoton.2017.57](https://doi.org/10.1038/nphoton.2017.57). arXiv : [1609.08425](https://arxiv.org/abs/1609.08425) [quant-ph].
- [114] Demid V. SYCHEV, Alexander E. ULANOV, Egor TIUNOV, Anastasia A. PUSHKINA, A. KUZHAMURATOV, Valery NOVIKOV et Alexander I. LVOVSKY. « Entanglement and teleportation between polarization and wave-like encodings of an optical qubit ». *Nature Communications* 9.1 (10 sept. 2018), p. 3672. ISSN : 2041-1723. DOI : [10.1038/s41467-018-06055-x](https://doi.org/10.1038/s41467-018-06055-x). arXiv : [1712.10206](https://arxiv.org/abs/1712.10206) [quant-ph].
- [115] Hiroki TAKESUE, Sae Woo NAM, Qiang ZHANG, Robert H. HADFIELD, Toshimori HONJO, Kiyoshi TAMAKI et Yoshihisa YAMAMOTO. « Quantum key distribution over a 40-dB channel loss using superconducting single-photon detectors ». *Nature Photonics* 1.6 (4 juin 2007), p. 343-348. ISSN : 1749-4885. DOI : [10.1038/nphoton.2007.75](https://doi.org/10.1038/nphoton.2007.75). arXiv : [0706.0397](https://arxiv.org/abs/0706.0397) [quant-ph].
- [116] Vincenzo TAMMA et Simon LAIBACHER. « Multiboson Correlation Interferometry with Arbitrary Single-Photon Pure States ». *Physical Review Letters* 114.24 (15 juin 2015), p. 243601. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.114.243601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.243601). arXiv : [1410.8121](https://arxiv.org/abs/1410.8121) [quant-ph].
- [117] Texier TEXIER. *Physique statistique des systèmes (faiblement) hors équilibre : formalisme de la réponse linéaire. Dissipation quantique. Transport électronique*. 31 oct. 2013. URL : http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/enseignements/enseignements-en-master/physique-statistique-hors-equilibre/ (visité le 01/10/2019).
- [118] THE LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION. « A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit ». *Nature Physics* 7.12 (déc. 2011), p. 962-965. ISSN : 1745-2473, 1745-2481. DOI : [10.1038/nphys2083](https://doi.org/10.1038/nphys2083). arXiv : [1109.2295](https://arxiv.org/abs/1109.2295) [quant-ph].
- [119] Alberto TOSI, Niccolò CALANDRI, Mirko SANZARO et Fabio ACERBI. « Low-Noise, Low-Jitter, High Detection Efficiency InGaAs/InP Single-Photon Avalanche Diode ». *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* 20.6 (nov. 2014), p. 192-197. ISSN : 1077-260X. DOI : [10.1109/JSTQE.2014.2328440](https://doi.org/10.1109/JSTQE.2014.2328440).
- [120] Nicolas TREPS. « Effets quantiques dans les images optiques ». Theses. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, juil. 2000. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00000400>.
- [121] Alexander E. ULANOV, Demid SYCHEV, Anastasia A. PUSHKINA, Ilya A. FEDOROV et Alexander I. LVOVSKY. « Quantum Teleportation Between Discrete and Continuous Encodings of an Optical Qubit ». *Physical Review Letters* 118.16 (17 avr. 2017), p. 160501. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.118.160501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.160501). arXiv : [1605.08649](https://arxiv.org/abs/1605.08649) [quant-ph].

- [122] Varun D. VAIDYA et al. « Broadband quadrature-squeezed vacuum and nonclassical photon number correlations from a nanophotonic device » (16 avr. 2019). arXiv : [1904.07833](https://arxiv.org/abs/1904.07833) [quant-ph].
- [123] Germán J. de VALCÁRCEL, Giuseppe PATERA, Nicolas TREPS et Claude FABRE. « Multimode squeezing of frequency combs ». *Physical Review A* 74 (6 déc. 2006), p. 061801. DOI : [10.1103/PhysRevA.74.061801](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.061801).
- [124] Zachary VERNON et John E. SIPE. « Spontaneous four-wave mixing in lossy microring resonators ». *Physical Review A* 91.5 (5 mai 2015), p. 053802. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.91.053802](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.053802). arXiv : [1502.05900](https://arxiv.org/abs/1502.05900) [quant-ph].
- [125] Pauli VIRTANEN et al. « SciPy 1.0—Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python ». *arXiv* (juil. 2019). arXiv : [1907.10121](https://arxiv.org/abs/1907.10121) [cs.MS]. URL : <https://scipy.org/> (visité le 26/11/2019).
- [126] Daniel Frank WALLS et Gerard J. MILBURN, éd. *Quantum Optics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN : 978-3-540-28573-1. DOI : [10.1007/978-3-540-28574-8](https://doi.org/10.1007/978-3-540-28574-8).
- [127] Meng WANG, Yu XIANG, Qiongyi HE et Qihuang GONG. « Asymmetric quantum network based on multipartite Einstein–Podolsky–Rosen steering ». *Journal of the Optical Society of America B* 32.4 (1^{er} avr. 2015), A20-A26. ISSN : 0740-3224, 1520-8540. DOI : [10.1364/JOSAB.32.000A20](https://doi.org/10.1364/JOSAB.32.000A20).
- [128] Wojciech WASILEWSKI, Alexander I. LVOVSKY, Konrad BANASZEK et Czesław RADZEWICZ. « Pulsed squeezed light : Simultaneous squeezing of multiple modes ». *Physical Review A* 73.6 (20 juin 2006), p. 063819. ISSN : 1050-2947, 1094-1622. DOI : [10.1103/PhysRevA.73.063819](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.063819). arXiv : [quant-ph/0512215](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0512215) [quant-ph].
- [129] Christian WEEDBROOK, Stefano PIRANDOLA, Raúl GARCÍA-PATRÓN, Nicolas J. CERE, Timothy C. RALPH, Jeffrey H. SHAPIRO et Seth LLOYD. « Gaussian quantum information ». *Reviews of Modern Physics* 84.2 (1^{er} mai 2012), p. 621-669. ISSN : 0034-6861, 1539-0756. DOI : [10.1103/RevModPhys.84.621](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.621). arXiv : [1110.3234](https://arxiv.org/abs/1110.3234) [quant-ph].
- [130] Contributeurs de WIKIPEDIA. *Équation différentielle linéaire. Cas général : résolvente*. Sous la dir. de l'encyclopédie libre WIKIPEDIA. 11 juin 2018. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_diff%C3%A9rentielle_lin%C3%A9aire#Cas_g%C3%A9n%C3%A9ral:_r%C3%A9solvente.
- [131] Contributeurs de WIKIPEDIA. *Décomposition de Dunford*. Sous la dir. de l'encyclopédie libre WIKIPEDIA. 16 juin 2019. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9composition_de_Dunford (visité le 21/10/2019).
- [132] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Spectral theory of compact operators*. Sous la dir. de The Free Encyclopedia WIKIPEDIA. 17 déc. 2018. URL : https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Spectral_theory_of_compact_operators&oldid=874224987 (visité le 05/09/2019).
- [133] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *Fidelity of quantum states*. Sous la dir. de The Free Encyclopedia WIKIPEDIA. 13 août 2019. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Fidelity_of_quantum_states (visité le 04/11/2019).

- [134] Ken WRIGHT. « Differential equations for the analytic singular value decomposition of a matrix ». *Numerische Mathematik* 63.1 (déc. 1992), p. 283-295. ISSN : 0029-599X, 0945-3245. DOI : [10.1007/BF01385862](https://doi.org/10.1007/BF01385862).
- [135] Ming-wen XIAO. « Theory of transformation for the diagonalization of quadratic Hamiltonians ». *arXiv* (6 août 2009). arXiv : [0908.0787](https://arxiv.org/abs/0908.0787) [math-ph].
- [136] Taro YAMASHITA, Shigehito MIKI, Hirotaka TERAJ et Zhen WANG. « Low-filling-factor superconducting single photon detector with high system detection efficiency ». *Optics Express* 21.22 (4 nov. 2013), p. 27177. ISSN : 1094-4087. DOI : [10.1364/OE.21.027177](https://doi.org/10.1364/OE.21.027177). arXiv : [1305.2672](https://arxiv.org/abs/1305.2672) [cond-mat.supr-con].
- [137] Amnon YARIV. « Critical coupling and its control in optical waveguide-ring resonator systems ». *IEEE Photonics Technology Letters* 14.4 (avr. 2002), p. 483-485. ISSN : 1041-1135. DOI : [10.1109/68.992585](https://doi.org/10.1109/68.992585). URL : <http://authors.library.caltech.edu/2011/1/YARieeep102.pdf> (visité le 06/11/2019).
- [138] Shota YOKOYAMA, Ryuji UKAI, Seiji C. ARMSTRONG, Chanond SORNPHIPHATPHONG, Toshiyuki KAJI, Shigenari SUZUKI, Jun-ichi YOSHIKAWA, Hidehiro YONEZAWA, Nicolas C. MENICUCCI et Akira FURUSAWA. « Ultra-large-scale continuous-variable cluster states multiplexed in the time domain ». *Nature Photonics* 7.12 (déc. 2013), p. 982-986. ISSN : 1749-4885, 1749-4893. DOI : [10.1038/nphoton.2013.287](https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.287). arXiv : [1306.3366](https://arxiv.org/abs/1306.3366) [quant-ph].
- [139] Hussain ZAIDI, Nicolas C. MENICUCCI, Steven T. FLAMMIA, Russell BLOOMER, Matthew PYSHER et Olivier PFISTER. « Entangling the optical frequency comb : simultaneous generation of multiple 2×2 and 2×3 continuous-variable cluster states in a single optical parametric oscillator ». *Laser Physics* 18.5 (23 mai 2008), p. 659. ISSN : 1555-6611. DOI : [10.1134/S1054660X08050186](https://doi.org/10.1134/S1054660X08050186). arXiv : [0710.4980](https://arxiv.org/abs/0710.4980) [quant-ph].

PUBLICATIONS

Une partie des travaux présentés dans cette thèse ont été publiés dans des journaux à comité de lecture. En particulier l'article [2] présente les résultats essentiels de la [partie II](#), et principalement ceux des [chapitres 3](#) et [4](#). Le [chapitre 5](#) fera l'objet de la publication [5]. Les résultats de la [partie III](#) seront présentés dans l'article [3] en préparation, et en particulier ceux du [chapitre 9](#), tandis que le [chapitre 11](#) sera repris dans [4]. La proposition d'expérience présentée en [partie IV](#) est reprise dans l'article [1], qui est en cours de revue au moment de l'édition de cette thèse. Par ailleurs, d'autres projets non présentés dans ce mémoire ont également donné lieu à des publications [6-9].

- [1] Élie GOUZIEN, Floriane BRUNEL, Sébastien TANZILLI et Virginia D'AURIA. « Hybrid entanglement between time-bin and wave-like encoding ». *En préparation* (2020). arXiv : [2002.04450 \[quant-ph\]](#). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02474883> (visité le 13/03/2020).
- [2] Élie GOUZIEN, Bruno FEDRICI, Alessandro ZAVATTA, Sébastien TANZILLI et Virginia D'AURIA. « Quantum description of timing jitter for single-photon ON-OFF detectors ». *Physical Review A* 98.1 (18 juil. 2018). ISSN : 2469-9926, 2469-9934. DOI : [10.1103/PhysRevA.98.013833](#). arXiv : [1807.00722 \[quant-ph\]](#). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01868169> (visité le 13/03/2020).
- [3] Élie GOUZIEN, Sébastien TANZILLI, Virginia D'AURIA et Giuseppe PATERA. « A generalized symplectic approach for multimode quantum optics ». *En préparation* (2020). arXiv : [2002.02407 \[physics.optics\]](#). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02467011/> (visité le 13/03/2020).
- [4] Élie GOUZIEN, Sébastien TANZILLI, Virginia D'AURIA et Giuseppe PATERA. « Synchronously pumped optical parametric oscillator with four wave mixing ». *Prévu* (2020).
- [5] Élie GOUZIEN, Alessandro ZAVATTA, Sébastien TANZILLI et Virginia D'AURIA. « Improving heralded single-photon source by resolving click time ». *Prévu* (2020).
- [6] François MONDAIN, Floriane BRUNEL, Xin HUA, Elie GOUZIEN, Alessandro ZAVATTA, Tommaso LUNGI, Florent DOUTRES, Virginia D'AURIA, Sébastien TANZILLI et Marc DE MICHELI. « Photorefractive effect in LiNbO₃-based integrated-optical circuits for squeezing experiment ». *En préparation* (2020).
- [7] François MONDAIN, Tommaso LUNGI, Alessandro ZAVATTA, Élie GOUZIEN, Florent DOUTRE, Marc DE MICHELI, Sébastien TANZILLI et Virginia D'AURIA. « Chip-based squeezing at a telecom wavelength ». *Photonics Research* 7.7 (1^{er} juil. 2019), A36. ISSN : 2327-9125. DOI : [10.1364/PRJ.7.000A36](#). arXiv : [1811.02097 \[quant-ph\]](#).
- [8] Panagiotis VERGYRIS, Florian KAISER, Élie GOUZIEN, Grégory SAUDER, Tommaso LUNGI et Sébastien TANZILLI. « Fully guided-wave photon pair source for quantum applications ». *Quantum Science and Technology* 2.2 (1^{er} juin 2017), p. 024007. ISSN : 2058-9565. DOI : [10.1088/2058-9565/aa6ed2](#). arXiv : [1704.00639 \[quant-ph\]](#).

- [9] Panagiotis VERGYRIS, Florent MAZEAS, Élie GOUZIEN, Laurent LABONTÉ, Olivier ALIBART, Sébastien TANZILLI et Florian KAISER. « Fibre based hyperentanglement generation for dense wavelength division multiplexing ». *Quantum Science and Technology* 4.4 (24 sept. 2019), p. 045007. ISSN : 2058-9565. DOI : [10.1088/2058-9565/ab3f59](https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab3f59). arXiv : [1807.04498](https://arxiv.org/abs/1807.04498) [quant-ph].

REMERCIEMENTS

Je tiens tout particulièrement à également remercier Sébastien Tanzilli et Virginia D’Auria qui m’ont accueilli au sein de l’équipe et encadré durant ces trois années de thèse, guidant mon travail et m’apprenant de nombreuses de choses. Je fais part à Virginia de ma gratitude pour le thé (et les gâteaux) qui ont accompagné nos journées de travail dans son bureau.

Au-delà de mes seuls directeurs de thèse, je remercie l’ensemble des membres de l’équipe *Photonique & information quantiques* pour leur accueil, leur aide et les différentes discussions enrichissantes que nous avons pu avoir. En particulier, Olivier Alibart qui avec ses questions « innocentes » débusque la moindre faille dans un raisonnement, Laurent Labonté avec qui j’ai travaillé sur le contenu du [chapitre 10](#), Éric Picholle qui a eu la gentillesse d’effectuer une relecture attentive de l’ensemble de cette thèse, Bruno Fedrici pour son aide précieuse en vue de la publication des travaux de la [partie II](#), et Floriane Brunel qui reprend le flambeau pour réaliser expérimentalement ce qui est présenté en [partie IV](#).

Je remercie aussi Alessandro Zavatta avec qui j’ai collaboré pour une grande partie des travaux présentés dans cette thèse (parties [II](#) et [III](#)), ainsi que pour d’autres ouvrages qui n’y sont pas mentionnés. Je témoigne ma reconnaissance envers Giuseppe Patera, qui m’a accueilli plusieurs semaines à l’université de Lille et avec qui nous avons mis au point les résultats présentés en [partie III](#). Je ne saurais non plus oublier les participants au projet HyLight, avec qui j’ai eu des discussions régulières concernant le contenu de la [partie IV](#).

Un grand merci à Giuseppe, Antonio Acín, Nicolas Cerf et Nicolas Sangouard pour avoir su se rendre disponible pour la lecture et l’évaluation de cette thèse, ainsi que pour leur participation à la soutenance (physique et virtuelle), malgré les grèves.

Cette thèse a été préparée à l’Institut de Physique de Nice (ex LPMC) entre 2016 et 2019; je tiens à en remercier tous ses membres, et en particulier les deux directeurs successifs du laboratoire qui m’a accueilli : Fabrice Mortesagne et Guillaume Huet. Merci également à Nathalie Koulechhoff qui est toujours d’une grande aide pour démêler la complexité administrative du CNRS ainsi que Bernard Gay-Para pour l’assistance et la veille informatique. Je salue également spécifiquement ceux avec qui j’ai partagé mon bureau.

Mon apprentissage scientifique n’a bien sûr pas commencé en arrivant à Nice. Je remercie mes professeurs de classe préparatoire pour m’avoir transmis en 2 ans les « bases » de la physique et des mathématiques, élaborées pendant environ 2 000 ans par l’humanité. Mes remerciements vont également aux professeurs de l’École normale, qui ont complété mes connaissances en mathématiques et surtout en physique, notamment par la physique quantique. En particulier, je tiens à saluer Claude Fabre et Nicolas Treps, avec qui j’ai réalisé mon stage de master, et qui m’ont recommandé l’équipe dans laquelle j’ai effectué ma thèse. Je remercie également l’École pour m’avoir attribué la bourse qui m’a permis de vivre durant l’élaboration de cette thèse.