



**HAL**  
open science

# Apports des techniques de filtrage non linéaire pour la navigation avec les systèmes de navigation inertielle et le GPS

Audrey Giremus

► **To cite this version:**

Audrey Giremus. Apports des techniques de filtrage non linéaire pour la navigation avec les systèmes de navigation inertielle et le GPS. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. ENSAE, 2005. Français. NNT: . tel-02888313

**HAL Id: tel-02888313**

**<https://theses.hal.science/tel-02888313>**

Submitted on 2 Jul 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée  
pour obtenir le titre de*

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE  
L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

Spécialité : Signal, Image, Acoustique

par

**Audrey Giremus**

**Apports des techniques de filtrage non linéaire**

~

**pour la navigation**

~

**avec les systèmes de navigation inertielle et le GPS**

Soutenue le 08 Décembre 2005 devant le jury composé de

Mr Éric	MOULINES	Rapporteurs
Mr Jean-Pierre	LE CADRE	
Mr Jean-Yves	TOURNERET	Examineurs
Mr Michel	BOUSQUET	
Mr Vincent	CALMETTES	
Mme Anne-Christine	ESCHER	

Préparée à l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (SUPAÉRO)

10 avenue Édouard Belin - 31055 Toulouse Cedex 4

Laboratoire d'accueil : Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées (ENSEEIHT)

2 rue Charles Camichel - BP 7122 - 31071 Toulouse Cedex 7



---

# Remerciements

---

Ce manuscrit n'échappe pas à la règle et s'ouvre sur l'exercice à la fois attendu et périlleux des remerciements. Attendu, car il est la conclusion de trois studieuses années, et périlleux, car il s'agit de n'oublier personne.

Mes premiers remerciements s'adressent à mes rapporteurs, Jean-Pierre Le Cadre et Éric Moulins, pour le soin qu'ils ont apporté à la lecture de ce manuscrit de thèse et leurs remarques pertinentes. Je souhaite également remercier Michel Bousquet qui, après m'avoir encouragé à me diriger vers la recherche, a accepté de présider mon jury de thèse.

Parmi les personnes présentes dans le jury, mes remerciements les plus chaleureux s'adressent à mes encadrants. Tout d'abord, Jean-Yves Tourneret, dont la qualité de directeur de thèse n'a d'égal que le niveau sonore de son rire ou la cadence parfaite de ses pas de danse, je lui dois beaucoup à la fois pour ma thèse et pour le soutien qu'il m'a accordé pour le poste d'enseignant-chercheur que j'occupe actuellement. Un grand merci aussi à Anne-Christine Escher et Vincent Calmettes, mes co-encadrants, qui ont toujours répondu présents pour m'apporter des conseils techniques et m'encourager. Je n'oublie pas non plus Christophe Sarrou, ingénieur DGA, et Marc Chenus, ingénieur Thalès, qui ont su donner une coloration industrielle à ce travail. Merci également à Arnaud Doucet, professeur invité au laboratoire, qui m'a aidé à avancer par ses remarques constructives et ses propositions, et André Monin, pour ses conseils.

Non moins importantes sont les personnes qui ont rendu ses trois années plus agréables au quotidien. Parmi elles je distinguerais les mamans : Coco, Marie, Nathalie, qui ont toujours su être à l'écoute. Puis, en procédant méthodiquement, les papas : Martial (il faut quand même que je parle de tes délicieux macarons au chocolat), Manu, Jean-Luc entre autres. Viennent ensuite les doctorants avec qui j'ai partagé de "grandes" discussions, des fous rires, quelques anecdotes en conférence et de très bonnes soirées au Petit London : merci Will, Mathieu, petit et grand Vincent, Farid, Florent, Nicolas, J-P, Olivier et les autres. Je ne peux conclure sans faire une dédicace particulière aux quatre comparses en matière de blagounettes et ragots : Sylvie, notre maman à tous, André-Luc, membre j'en suis sûr de la DGSE, Jerome, inoubliable amateur tout type de musiques, et enfin Patounet, dont la vie ressemble à un film de Mr Bean.

Je remercie aussi vivement l'équipe qui m'a accueilli en post-doc et a été un vrai soutien pour m'aider à mener la fin de ma thèse à bien : Emilie, Mathieu, Anaïs, Christophe M. et O., Hanah, Damien, Benjamin et Olivier.

L'exercice des remerciements touche à sa fin mais il me reste encore à dire quelques mots aux trois petites fées avec qui j'ai tant partagé, même mes tentatives d'activités sportives : Virginie, Garmy et Anne-Laure. Je vous adresse non seulement un grand merci mais aussi toute mon amitié.

Vient ensuite le tour de mes amis Toulousains et non Toulousains pour tous les bons moments qu'on a passés ensemble : Marie, Béatrice, Rozenn, Bubu, Nathalie, Xavier et les autres.

Je vais clore ce chapitre en remerciant de tout coeur ma famille et Ludi, sans qui je n'aurais pas accompli tout ça. Ils n'ont jamais été avares ni d'affection, ni de réconfort et d'encouragements.

Merci enfin à mon futur mari qui, s'il ne me comprend pas toujours, n'en a pas moins la capacité de me rassurer au quotidien.

Mes dernières pensées vont à mon grand-père qui était si fier que sa petite fille fasse un doctorat.

---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction à la navigation</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Petit historique de la navigation . . . . .	10
1.3 Le GPS, un système de radionavigation par satellites . . . . .	10
1.3.1 Principe . . . . .	11
1.3.2 Infrastructures du système GPS . . . . .	12
1.3.3 Formation de la mesure GPS . . . . .	13
1.4 Les systèmes de navigation inertielle . . . . .	16
1.4.1 Introduction à la navigation inertielle . . . . .	16
1.4.2 Les plate-formes de capteurs . . . . .	17
1.4.3 Le calculateur . . . . .	18
1.4.4 Avantages et limitations . . . . .	19
1.5 Résolution du problème de navigation . . . . .	19
1.5.1 Approche Bayésienne et modélisation du problème . . . . .	20
1.5.2 Solution conceptuelle au problème d'estimation . . . . .	20
1.5.3 Systèmes linéaires Gaussiens . . . . .	21
1.5.4 Systèmes non linéaires . . . . .	22
1.6 Conclusion . . . . .	26
<b>2 Modèle de filtrage pour l'hybridation serrée GPS/INS</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	31
2.2 Intérêt de l'hybridation GPS/INS . . . . .	31
2.3 Architectures d'hybridation . . . . .	32
2.4 Modèle d'état . . . . .	33
2.4.1 Choix du vecteur état . . . . .	33
2.4.2 Modèle de propagation des erreurs inertielles . . . . .	34
2.4.3 Modèle de mesure . . . . .	38
2.5 Conclusion . . . . .	39
<b>3 Stratégies de filtrage particulière pour l'hybridation serrée GPS/INS</b>	<b>41</b>
3.1 Introduction . . . . .	41
3.2 Analyse du modèle de filtrage . . . . .	41
3.3 Solutions algorithmiques issues de la littérature . . . . .	43
3.3.1 Bootstrap filter . . . . .	43

3.3.2	Loi de proposition optimale . . . . .	44
3.3.3	Le filtre particulaire régularisé . . . . .	47
3.3.4	Le filtre particulaire Rao-Blackwellisé . . . . .	48
3.4	Variante algorithmique proposée . . . . .	52
3.4.1	Critère de régularisation . . . . .	52
3.4.2	Contrôle de la régularisation . . . . .	54
3.5	Étude des performances des algorithmes . . . . .	57
3.5.1	Simulation des données . . . . .	58
3.5.2	Scénarios de test . . . . .	58
3.5.3	Critère de performance . . . . .	58
3.5.4	Analyse des résultats . . . . .	60
3.6	Conclusion . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Detection/estimation conjointe des erreurs induites par les multitrajets</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	73
4.2	Caractérisation des erreurs de multitrajets . . . . .	74
4.2.1	Les multitrajets en radionavigation . . . . .	74
4.2.2	Modèle de multitrajets . . . . .	75
4.2.3	Impact des multitrajets sur les mesures GPS . . . . .	76
4.3	Formulation du problème de détection/estimation des biais de multitrajets . . . . .	79
4.3.1	Modèles d'état . . . . .	80
4.3.2	Modèle de mesure . . . . .	81
4.4	Solutions algorithmiques . . . . .	82
4.4.1	Les algorithmes à modèles multiples . . . . .	82
4.4.2	Le Rapport de vraisemblance généralisé (RVG) . . . . .	84
4.5	Solution particulaire proposée . . . . .	85
4.5.1	Rao-Blackwellisation . . . . .	85
4.5.2	Loi de proposition . . . . .	86
4.5.3	Contrôle du rééchantillonnage par un test d'hypothèses . . . . .	89
4.6	Etude des performances de l'algorithme DECFP . . . . .	93
4.6.1	Simulation des données . . . . .	93
4.6.2	Critères de performance . . . . .	95
4.6.3	Résultats de simulation . . . . .	96
4.7	Conclusion . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Detection/estimation conjointe des erreurs de brouillage</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Le problème des interférences en navigation GPS . . . . .	104
5.2.1	Origine des interférences . . . . .	104
5.2.2	Effets des interférences . . . . .	104
5.2.3	Techniques d'atténuation . . . . .	106

5.3	Formulation du problème . . . . .	107
5.3.1	Modèle <i>a priori</i> des paramètres de variance . . . . .	108
5.3.2	Modèle <i>a priori</i> pour le vecteur indicateur . . . . .	110
5.4	Un filtre particulaire pour la navigation en présence d'interférences . . . . .	111
5.4.1	Principe de l'algorithme . . . . .	112
5.4.2	Objectifs d'estimation . . . . .	112
5.4.3	Stratégie d'exploration de l'espace-état . . . . .	113
5.4.4	Sélection des particules . . . . .	116
5.4.5	Contrainte de durée minimale . . . . .	117
5.5	Résultats de simulation . . . . .	119
5.5.1	Scénario de navigation . . . . .	119
5.5.2	Réglage du filtre particulaire . . . . .	119
5.5.3	Étude des performances de l'algorithme développé . . . . .	119
5.6	Conclusion . . . . .	123
<b>6</b>	<b>Hybridation très serrée INS/GPS</b>	<b>127</b>
6.1	Introduction . . . . .	127
6.2	Récepteur multi-corrélateurs . . . . .	128
6.2.1	Architecture générique d'un récepteur GPS . . . . .	128
6.2.2	Limitations des architectures classiques . . . . .	130
6.2.3	Architecture multi-corrélateurs . . . . .	130
6.3	Filtre particulaire vs filtre de Kalman étendu . . . . .	131
6.3.1	Modèle de filtrage . . . . .	132
6.3.2	Stratégie de filtrage particulaire . . . . .	134
6.3.3	Résultats de simulation . . . . .	134
6.4	Hybridation très serrée . . . . .	138
6.4.1	Architecture d'hybridation . . . . .	139
6.4.2	Modèle de filtrage . . . . .	140
6.4.3	Stratégie de filtrage particulaire . . . . .	143
6.4.4	Résultats de simulation . . . . .	144
6.4.5	Filtre particulaire vs filtre de Kalman étendu . . . . .	145
6.5	Conclusion . . . . .	147
	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
	<b>Annexes</b>	<b>155</b>
	<b>A Equations de navigation inertielle</b>	<b>157</b>
	<b>B Matrices de régression de l'algorithme RVG</b>	<b>161</b>



<b>C</b> Borne de Cramer Rao <i>a posteriori</i>	<b>163</b>
<b>D</b> Loi de proposition du vecteur de navigation (chapitre 5)	<b>165</b>
<b>E</b> Récepteur GPS : calcul des sorties des corrélateurs.	<b>167</b>
<b>F</b> Autocorrélation des codes pseudo-aléatoires GPS	<b>169</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>

---

# Table des figures

---

1.1	Calcul de la position par triangulation. . . . .	11
1.2	Principaux repères utilisés en navigation inertielle. . . . .	16
1.3	Définition des angles d'Euler. . . . .	17
1.4	Définition des coordonnées ellipsoïdales. . . . .	18
2.1	Architecture d'hybridation retenue. . . . .	33
2.2	Erreurs de projection. . . . .	34
2.3	Phénomène de Schüler . . . . .	35
3.1	Non recouvrement des supports de la vraisemblance et de la densité de probabilité prédite. . . . .	44
3.2	Rééchantillonnage classique (figure gauche) et rééchantillonnage régularisé (figure droite). . . . .	47
3.3	Dégénérescence due à un faible bruit d'état. . . . .	53
3.4	FPR avec contrôle de la régularisation. . . . .	54
3.5	Simulation des données. . . . .	59
3.6	Temps d'exécution des différents algorithmes. . . . .	61
3.7	Comportement de l'algorithme MHRPF. . . . .	62
3.8	Erreur d'estimation en position . . . . .	62
3.9	Erreur d'estimation en vitesse . . . . .	63
3.10	Erreur d'estimation des angles d'attitude . . . . .	63
3.11	Erreur d'estimation des biais capteurs . . . . .	64
3.12	Erreur relative de linéarisation de l'équation de mesure en mètres. . . . .	64
3.13	Nombres de mesures GPS au cours de la simulation. . . . .	65
3.14	Erreur d'estimation en position . . . . .	65
3.15	Erreur d'estimation en vitesse . . . . .	65
3.16	Erreur d'estimation des angles d'attitude . . . . .	66
3.17	Erreur d'estimation des biais capteurs . . . . .	66
3.18	Système de particules, erreur inertielle en latitude vs erreur inertielle en longitude. . . . .	67
4.1	Exemples de multitrajets . . . . .	74
4.2	Discriminant en l'absence de multitrajets (en négligeant le bruit). . . . .	77
4.3	Discriminant en présence de multitrajets (en négligeant le bruit). . . . .	78
4.4	Biais d'estimation en fonction du retard du signal direct par rapport au signal réfléchi. . . . .	78
4.5	Validité de l'approximation des lois de mélange . . . . .	91
4.6	Influence du pas de lissage . . . . .	97
4.7	Probabilités de changement estimées . . . . .	97
4.8	Résultat du test d'hypothèses pour la présélection des particules. . . . .	98
4.9	Erreur d'estimation des biais de multitrajets. . . . .	98
4.10	Estimation des biais de multitrajets. . . . .	99

4.11	Estimation des biais induits par les multitrajets avec un rééchantillonnage classique . . . . .	100
4.12	Erreur d'estimation de la position du véhicule. . . . .	101
5.1	Densité de probabilité des composantes de variance pour $\lambda_{t,i} = 1$ . . . . .	110
5.2	Densité de probabilité des composantes de variance pour $\lambda_{t,i} = 2$ . . . . .	110
5.3	Lien entre les processus $\{\varepsilon_t\}_{t>0}$ et $\{\lambda_t\}_{t>0}$ . . . . .	111
5.4	Filtre particulaire pour la navigation en présence de brouillage. . . . .	118
5.5	Probabilités moyennes de changement. . . . .	120
5.6	Estimation de la variance des mesures GPS. . . . .	121
5.7	Erreurs d'estimation de la position en présence de brouillage. . . . .	122
5.8	Erreur de positionnement (trait plein) et intervalle de confiance à 95% (tirets). . . . .	123
6.1	Architecture générique d'un récepteur GPS. . . . .	129
6.2	Canal de réception d'un récepteur à corrélateurs multiples. . . . .	130
6.3	Mouvement relatif véhicule/satellite. . . . .	133
6.4	Organisation des simulations. . . . .	135
6.5	Erreurs moyennes d'estimation de $\rho$ et $v_\rho$ . . . . .	136
6.6	Erreurs moyennes d'estimation de $A$ et $\phi$ . . . . .	137
6.7	Erreurs moyennes d'estimation de $\rho$ . . . . .	137
6.8	Erreurs moyennes d'estimation de $v_\rho$ . . . . .	138
6.9	Erreurs moyennes d'estimation de $A$ et $\phi$ . . . . .	138
6.10	Erreurs moyennes d'estimation de $\rho$ et $v_\rho$ , rsb = -10 dB. . . . .	139
6.11	Erreurs moyennes d'estimation de $A$ et $\phi$ , rsb = -10 dB. . . . .	139
6.12	Architecture d'hybridation. . . . .	140
6.13	Mouvement relatif satellite/véhicule. . . . .	141
6.14	Bornes de Cramer Rao pour l'estimation de la pseudo-distance et de la pseudo-vitesse. o : boucle de poursuite classique, et * : hybridation très serrée. . . . .	145
6.15	Bornes de Cramer Rao pour l'estimation de la pseudo-distance et de la pseudo-vitesse. Hybridation très serrée. . . . .	146
6.16	Estimation de $\rho$ et $v_\rho$ , hybridation très serrée. . . . .	146
6.17	Estimation de $A$ et $\phi$ , hybridation très serrée. . . . .	146

---

# Liste des tableaux

---

1.1	Paramètres orbitaux des satellites GPS. . . . .	12
1.2	Caractéristiques du signal GPS. . . . .	14
1.3	Bilan d'erreur pour la mesure de pseudo-distance calculée à partir du code $C_A$ . . . . .	15
1.4	Rééchantillonnage stratifié . . . . .	25
2.1	Comparaison du GPS et des systèmes de navigation inertielle . . . . .	32
2.2	valeurs des paramètres d'horloge. . . . .	38
3.1	Algorithme "Bootstrap" . . . . .	45
3.2	Algorithme : filtre particulaire Rao-Blackwellisé. . . . .	51
3.3	Algorithme Cusum bilatéral. . . . .	54
3.4	Algorithme MHRPF : filtre particulaire régularisé avec un contrôle de Métropolis Hastings. . . . .	57
3.5	Paramètres de simulation. . . . .	60
3.6	Paramètres de filtrage. . . . .	60
4.1	Algorithme particulaire de détection/estimation conjointe des biais de multi-trajets et de la trajectoire du véhicule. . . . .	94
4.2	Paramètres de simulation . . . . .	95
5.1	Tableau des différents types d'interférences . . . . .	104
5.2	Paramètres de simulation . . . . .	119
5.3	Statistiques des instants de changement estimés. . . . .	120
6.1	Paramètres de simulation pour l'hybridation GPS/INS. . . . .	144
A.1	Paramètres géodésiques et géophysiques de l'ellipsoïde terrestre (norme WGS84). . . . .	159



---

# Acronymes

---

CI	Centrale inertielle
FKE	Filtre de Kalman étendu
FPR	Filtre particulaire régularisé
GPS	Global Positioning System
INS	Inertial Navigation System
IRS	Inertial Reference system
IMM	Modèles multiples interactifs
MCMC	Monte Carlo par chaînes de Markov
MH	Métropolis-Hastings
MHRPF	Filtre particulaire régularisé contrôlé par une étape de Métropolis-Hastings
RPF	Filtre particulaire régularisé
PCRB	Borne de Cramer Rao <i>a posteriori</i>
RAIM	Receiver Autonomous Integrity Monitoring
RSB	Rapport signal sur bruit
RVG	Rapport de vraisemblance généralisé
RB	Rao-Blackwellisation



---

# Notations

---

## Repères de navigation

$i$	repère inertiel
$e$	repère géocentrique
$n$	repère de navigation
$m$	repère mobile

## Description du mouvement du véhicule

$\mathbf{a}_a^b$	accélération par rapport au référentiel $a$ et projetée dans le repère $b$
$\Omega_{ab}$	vecteur instantané de rotation du repère $a$ au repère $b$
$R_{a2b}$	matrice de passage du repère $a$ au repère $b$
$\mathbf{v}_a^b$	vitesse par rapport au référentiel $a$ et projetée dans le repère $b$
$(\lambda, \Phi, h)$	latitude, longitude, altitude
$(\varphi, \theta, \psi)$	angles d'Euler
$\wedge$	produit vectoriel
$\left(\frac{d(\cdot)}{dt}\right)_a$	dérivée par rapport au référentiel $a$

## Systèmes de navigation inertielle

$\mathbf{f}_a$	force spécifique
$\Omega_g$	mesure des gyromètres
$\widehat{(\cdot)}$	grandeur estimée par la CI
$\tilde{(\cdot)}$	grandeur mesurée par la CI

## Algorithmes d'estimation

$\mathbf{X}_t$	$t$ -ième échantillon du processus $(X_k)_{k \geq 0}$
----------------	---



$\mathbf{X}_{k,t}$	$k$ -ième composante du vecteur $\mathbf{X}_t$
$\mathbf{X}_{k:l}$	$(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k+1}, \dots, \mathbf{X}_{l-1}, \mathbf{X}_l)$
$\mathbf{X}_t^{(i)}$	$i$ -ième particule à l'instant $t$
$w_t^{(i)}$	poids de la particule $\mathbf{X}_t^{(i)}$
$\Delta T = t_k - t_{k+1}$	pas d'échantillonnage

## Distributions de probabilité

$\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$	loi Gaussienne d'espérance $\mathbf{m}$ et de matrice de covariance $\Sigma$
$\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \Sigma)$	densité de probabilité de la distribution Gaussienne d'espérance $\mathbf{m}$ et de matrice de covariance $\Sigma$ , évaluée au point $\mathbf{x}$
$\mathcal{IG}(\alpha, \beta)$	loi Inverse-Gamma de paramètres $\alpha$ et $\beta$
$\mathcal{IG}(x; \alpha, \beta)$	densité de probabilité de la distribution Inverse-Gamma de paramètres $\alpha$ et $\beta$ , évaluée au point $x$
$\mathcal{T}(\alpha)$	loi de Student de paramètre $\alpha$
$\mathcal{T}(x; \alpha)$	densité de probabilité de la distribution de Student de paramètre $\alpha$ , évaluée au point $x$ .

# *Introduction*



---

# Introduction

---

## Contexte et problématique de la thèse

La navigation désigne l'art de se repérer dans l'espace. Elle est pratiquée au quotidien par chacun d'entre nous, qu'il s'agisse de se rendre simplement à son lieu de travail ou de s'orienter dans une ville inconnue. Inconsciemment, nous reproduisons la même démarche que les systèmes de positionnement les plus élaborés. Nous interprétons les informations fournies par nos sens (la vue) à l'aide de notre connaissance *a priori* de l'environnement où nous nous déplaçons (carte, repères visuels) pour en déduire notre position. Les deux étapes clés de la résolution d'un problème de navigation sont présentes dans cette démarche. La première phase est réalisée par un ensemble de capteurs embarqués qui effectuent une série de mesures indirectement liées aux paramètres à estimer et entachées de bruit. Puis, l'estimation de ces paramètres est réalisée sur la base des mesures collectées et, dans un contexte Bayésien, d'un modèle *a priori* d'évolution. Cette deuxième phase est appelée filtrage.

Le développement de systèmes de navigation plus fiables et moins coûteux répond à une demande croissante. Outre des applications militaires ou industrielles critiques exigeant une grande précision et robustesse, la navigation s'ouvre au grand public. On peut citer par exemple les dernières technologies de téléphones mobiles équipés de modules de positionnement. Selon le contexte, il est crucial que l'estimation de la dynamique du mobile soit réalisée en temps réel (par exemple pour un avion en phase d'atterrissage) et requière une mémoire limitée. Des techniques récursives de filtrage ont été développées à cet effet. Le filtre de Kalman est introduit en 1961 et s'impose rapidement comme un des algorithmes les plus populaires pour estimer l'état d'un système dynamique. Il fournit la solution analytique du problème de filtrage dans le cas de systèmes décrits à l'aide de modèles linéaires Gaussiens. Sous ces hypothèses, la distribution *a posteriori* de l'état du système sachant l'ensemble des mesures reçues est une loi Gaussienne. L'espérance de cette loi fournit alors le meilleur estimé au sens de l'erreur quadratique moyenne.

Cependant, la majorité des applications fait intervenir des équations non linéaires ou des bruits non Gaussiens. Classiquement, on remédie au problème de la non linéarité en linéarisant le modèle de filtrage autour d'une solution approchée. Cette extension est connue sous le nom de filtre de Kalman étendu, mais elle diverge en cas de fortes non linéarités. En outre, le filtre de Kalman suppose que la seule incertitude sur le modèle de filtrage réside dans les réalisations du bruit de mesure et d'état. Cependant, les paramètres et l'ordre du modèle ne sont en pratique pas connus avec précision et peuvent varier dans le temps. Les filtres particuliers forment une alternative intéressante au filtre de Kalman car ils n'imposent aucune contrainte *a priori* sur le modèle de filtrage. En particulier, ils permettent de s'affranchir des contraintes de linéarité et Gaussianité et de résoudre des problèmes difficiles de filtrage décrits par des modèles hiérarchiques.

Dans cette thèse, nous évaluons l'intérêt des techniques de filtrage particulière pour l'hybridation du GPS (Global Positioning System) et des systèmes de navigation inertielle. Une solution pour répondre aux exigences de performance consiste en effet à coupler plusieurs systèmes de navigation afin de tirer parti de leur complémentarité. Le GPS permet ainsi de stabiliser les estimés de la centrale inertielle qui offre par contre une précision et continuité de

service inaccessibles à un système de radionavigation par satellites. Le couplage est réalisé par un filtre d'hybridation qui combine les mesures en provenance des deux systèmes de positionnement pour en déduire l'estimé des paramètres d'intérêt. Deux architectures d'hybridation sont envisagées :

- l'hybridation serrée qui met à profit les mesures GPS pour recalibrer les estimés de la centrale inertielle,
- l'hybridation très serrée où les estimés inertielles sont utilisées par le récepteur GPS pour aider à la formation des mesures.

Les équations de mesure pour les deux niveaux d'hybridation considérés sont non linéaires, ce qui motive le recours à des stratégies de filtrage particulière. Le filtre de Kalman étendu fournit généralement une solution satisfaisante aux problèmes d'hybridation serrée et très serrée. Nous nous intéressons donc à des scénarios de navigation difficiles correspondant à un véhicule présentant une forte dynamique ou évoluant dans un environnement perturbé. Nous montrons ainsi que les méthodes séquentielles de Monte Carlo proposent une solution élégante au problème des changements abrupts pouvant affecter les mesures GPS tels que les phénomènes de brouillage ou multitrajets. Ce résultat est prometteur car ces perturbations sont connues pour dégrader de façon importante la solution de navigation. À l'issue du manuscrit et au vu des conclusions de chaque chapitre, nous proposons une architecture d'hybridation combinant hybridation serrée et très serrée. L'intégration très serrée peut être réalisée à l'aide d'un filtre de Kalman étendu ou d'un filtre particulière. Le gain en précision et robustesse permis par l'approche particulière est étudié avec soin.

## Organisation du manuscrit

Le document est organisé en 5 parties.

Le chapitre 1 présente le contexte de la thèse. Nous mettons l'accent sur les deux aspects complémentaires de cette étude. Tout d'abord, le GPS et les systèmes de navigation inertielle sont présentés. Enfin, les deux types d'algorithmes utilisés pour résoudre le problème de navigation sont détaillés : le filtre de Kalman étendu et le filtre particulière.

La seconde partie de la thèse est consacrée à l'hybridation serrée du GPS et des systèmes de navigation inertielle et est découpée en deux chapitres (les chapitres 2 et 3 de la thèse). Dans le chapitre 2, nous décrivons le modèle de filtrage pour l'hybridation serrée puis nous insistons sur ses spécificités. Cette étude aboutit à une stratégie de filtrage particulière efficace pour résoudre le problème d'estimation ainsi défini. Elle est développée dans le troisième chapitre. L'algorithme, qui est fondé sur une technique de Rao-Blackwellisation, se présente comme une extension du filtre particulière régularisé proposé par Nadia Oudjane.

La troisième partie de la thèse, formée des chapitres 4 et 5, étudie des solutions pour atténuer l'effet des perturbations dégradant les mesures GPS. Une formulation de type modèles multiples est adoptée où les paramètres du modèle de filtrage dépendent d'un processus latent indiquant l'occurrence des perturbations. Le chapitre 4 est dédié aux phénomènes de multitrajets qui peuvent être modélisés comme des biais apparaissant sur les mesures GPS. Le chapitre 5 traite du problème du brouillage qui entraîne un saut de variance du bruit de mesure GPS. Deux algorithmes particuliers sont proposés, incluant une stratégie de lissage facilitant la détection des changements de modèle et une étape de rééchantillonnage contrôlée par un test d'hypothèses.

Le chapitre 6 a pour objet l'hybridation très serrée du GPS et des systèmes de navigation inertielle. Nous préconisons une architecture où couplages serré et très serré coopèrent pour accroître la robustesse et la précision du système hybride. Le couplage très serré intervient

au sein du récepteur GPS où un problème de synchronisation doit être résolu. Le modèle de filtrage associé est non linéaire et l'opportunité d'utiliser un filtre particulière en lieu et place du classique filtre de Kalman étendu est étudiée.

## Contributions

Les principales contributions de cette thèse sont listées ci-dessous.

**Chapitres 2 et 3** : le modèle de couplage serré est classique. La nouveauté réside plutôt dans la stratégie de filtrage particulière développée pour réaliser l'hybridation. Elle se présente comme une extension du filtre régularisé proposé par N.Oudjane.

**Chapitre 4** : l'originalité tient à la formulation du problème des multitrajets en navigation GPS que nous proposons. Nous avons développé un algorithme de navigation particulière capable de s'adapter à l'environnement de navigation via une technique de détection/estimation des erreurs de mesures dues aux multitrajets. Il comprend deux extensions dont une loi de proposition de lissage et une étape de rééchantillonnage aidé par un test d'hypothèses.

**Chapitre 5** : l'approche proposée pour les multitrajets est réappliquée au problème du brouillage. La principale différence provient des erreurs de mesure qui se manifestent non plus par des sauts de moyenne mais par des sauts de variance. La particularité du filtre particulière développé se situe dans le choix d'une loi de proposition efficace pour le paramètre de variance inconnu.

**Chapitre 6** : l'architecture d'hybridation présentée dans ce chapitre combine des couplages serrés et très serrés. L'analyse des performances du filtre particulière pour réaliser l'intégration très serrée est la contribution essentielle de ce chapitre.

## Conseils de lecture

Cette thèse s'adresse autant au lecteur intéressé par les techniques de positionnement qu'à celui curieux des algorithmes de filtrage particulière. Quelques indications permettent à chacun de parcourir le manuscrit selon son bon vouloir.

### Partie II : hybridation serrée du GPS et des systèmes de navigation inertielle

- P.31-39 Présentation de l'hybridation serrée,
- P.38-39 Énoncé du modèle d'hybridation,
- P.41-67 Solutions algorithmiques.

### Partie III : étude des perturbations affectant le signal GPS

- P.73-76 Présentation du phénomène de multitrajets,
- P.79-82 Énoncé du modèle de navigation,
- P.82-100 Solutions algorithmiques et résultats de simulation.
- P.103-106 Présentation du phénomène de brouillage,
- P.107-111 Énoncé du modèle de navigation,
- P.111-123 Solutions algorithmiques et résultats de simulation.

### Partie IV : hybridation très serrée du GPS et des systèmes de navigation inertielle

- P.127-131 Présentation de l'architecture du récepteur GPS,
- P.132 Énoncé du modèle de filtrage,
- P.134-138 Solution algorithmique et résultats de simulation.
- P.138-143 Description de l'hybridation très serrée,

P.143 Énoncé du modèle d'hybridation très serrée,

P.143-147 Solution algorithmique et résultats de simulation.

*Partie I*  
*Introduction à la navigation*





---

# Introduction à la navigation

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Petit historique de la navigation</b>	<b>10</b>
<b>1.3</b>	<b>Le GPS, un système de radionavigation par satellites</b>	<b>10</b>
1.3.1	Principe	11
1.3.2	Infrastructures du système GPS	12
1.3.3	Formation de la mesure GPS	13
<b>1.4</b>	<b>Les systèmes de navigation inertielle</b>	<b>16</b>
1.4.1	Introduction à la navigation inertielle	16
1.4.2	Les plate-formes de capteurs	17
1.4.3	Le calculateur	18
1.4.4	Avantages et limitations	19
<b>1.5</b>	<b>Résolution du problème de navigation</b>	<b>19</b>
1.5.1	Approche Bayésienne et modélisation du problème	20
1.5.2	Solution conceptuelle au problème d'estimation	20
1.5.3	Systèmes linéaires Gaussiens	21
1.5.4	Systèmes non linéaires	22
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>26</b>

---

## 1.1 Introduction

L'objet de ce premier chapitre est de préciser le contexte de cette thèse, qui est dédiée au développement d'algorithmes de navigation pour le GPS et les systèmes de navigation inertiels. La navigation désigne l'ensemble des techniques mises en œuvre pour recouvrer le mouvement d'un véhicule (plus particulièrement sa trajectoire). Elle comporte deux aspects complémentaires qui sont présentés successivement dans ce chapitre :

- collecter des informations relatives à la dynamique du véhicule via les mesures d'un ensemble de capteurs,
- estimer cette dynamique à partir des mesures effectuées,

Nous proposons tout d'abord un aperçu des différentes techniques de positionnement qui ont été ou sont actuellement utilisées. Un soin particulier est apporté à la description des deux systèmes de navigation sur lesquels porte notre étude : le GPS et les systèmes de navigation inertiels. La deuxième partie du chapitre est consacrée aux algorithmes appliqués pour résoudre le problème de navigation. Le filtre de Kalman est le plus populaire, à la fois du fait de sa robustesse et de sa mise en œuvre aisée. Les filtres particuliers, développés plus récemment, s'avèrent une alternative prometteuse pour des scénarios difficiles de navigation (véhicule subissant de fortes accélérations, mesures défaillantes).

## 1.2 Petit historique de la navigation

Les premiers calculs de localisation ont été menés à partir d'observations visuelles fondées sur des points de repère dont la position était connue. Les corps célestes, qui de par leur éloignement présentent l'intérêt de sembler fixes à un observateur terrestre, ont ainsi été très tôt utilisés comme "balises" de positionnement. Ces approches empiriques ont posé les jalons de la navigation. Parmi les systèmes de positionnement actuellement utilisés, nous nous intéressons principalement aux deux catégories suivantes : les systèmes de radionavigation et les systèmes de navigation à l'estime.

### Les systèmes de radionavigation

Ces systèmes sont les héritiers directs des systèmes de navigation céleste dont la fiabilité était grandement limitée par des problèmes de visibilité (pluie, couverture nuageuse, brouillard). Cette difficulté est résolue en radionavigation où le positionnement est réalisé à partir d'ondes radioélectriques émises par des balises. Connaissant l'angle et/ou le temps d'arrivée de ces signaux, la position du véhicule est déduite par triangulation. Le développement des techniques radar, au lendemain de la seconde guerre mondiale, a permis de grandes avancées dans ce domaine. Le premier vrai système de radionavigation, le système LORAN (LONg RANge Navigation), est dédié à des applications maritimes. Les systèmes de positionnement par satellites font leur apparition dans les années 60. Les émetteurs n'étant plus au sol, il devient possible de déterminer la position en 3 dimensions. Le système Transit est le premier à être opérationnel en Janvier 1964. Il ne fournit cependant encore que des informations de position en deux dimensions et pâtit d'un temps de mesure très long. Viendront ensuite le GPS (Global Positioning system) et son équivalent Russe le GLONASS. Le système européen GALILEO est actuellement à l'étude. Une présentation détaillée des systèmes de radionavigation est proposée par exemple dans [HWLC93].

### Les systèmes de navigation à l'estime

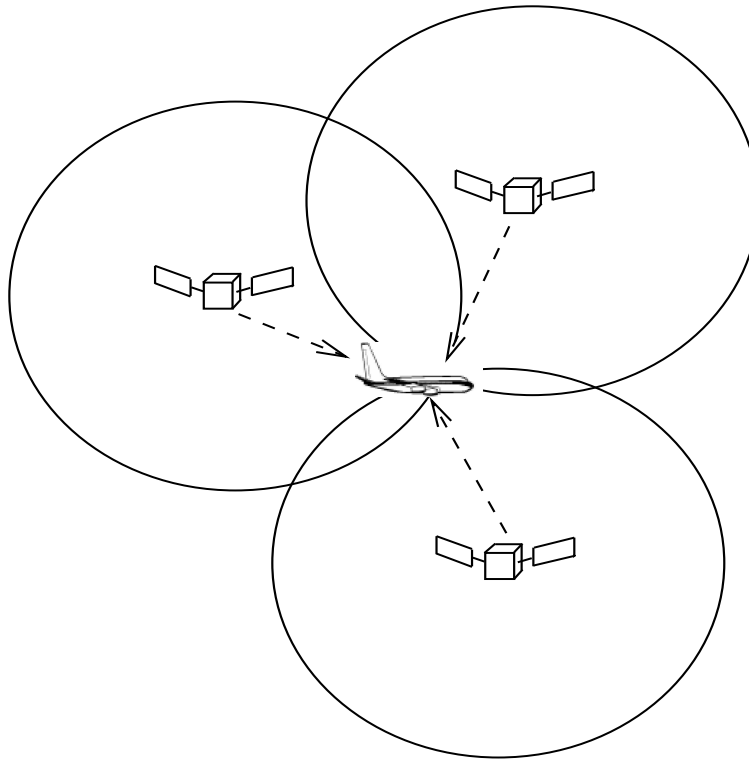
Ils sont fondés sur des mesures directes du mouvement du véhicule. Connaissant la position initiale du véhicule et sa vitesse (direction et amplitude), la position est calculée par intégrations successives. Les systèmes de navigation inertielle sont une extension directe des systèmes de navigation à l'estime. Ils sont fondés non plus sur une mesure de vitesse mais sur une mesure d'accélération qui est intégrée à deux reprises pour obtenir la vitesse puis la position. Les conditions initiales requises sont alors la position et la vitesse du véhicule.

Les deux parties suivantes de ce chapitre sont consacrées aux systèmes de navigation qui font l'objet de cette étude : le GPS et les systèmes de navigation inertielle. Ils reposent sur des principes de positionnement très différents et offrent donc un bon aperçu des problématiques de la navigation.

## 1.3 Le GPS, un système de radionavigation par satellites

Le développement du GPS, dans les années 60/70, a été motivé par les limitations des principaux systèmes de positionnement existants. Parmi les exigences non satisfaites, on peut citer :

- une couverture accrue,



**FIG. 1.1** - Calcul de la position par triangulation.

- des temps de mesure réduits,
- des informations de position en 3 dimensions,
- une précision de localisation indépendante de la position.

Le fonctionnement du GPS a été pensé pour pallier ces défauts. La présentation proposée est relativement sommaire pour fournir au lecteur les éléments essentiels à la compréhension des enjeux de la thèse. Elle est fondée essentiellement sur deux ouvrages de référence publiés sur le sujet par Parkinson et Spilker [PSa96] et Kaplan [Kap96].

### 1.3.1 Principe

Le système GPS délivre à tout utilisateur muni d'un récepteur adéquat des informations précises de position, vitesse et temps. Le calcul de la position est réalisé par triangulation à partir de la mesure des distances séparant l'utilisateur des satellites de la constellation GPS. Pour ce faire, le récepteur embarqué évalue le temps d'arrivée de signaux radioélectriques émis par les satellites. Il a ainsi accès au temps de propagation de ces signaux et, connaissant leur vitesse de propagation, à la distance le séparant du satellite émetteur.

Trois mesures sont nécessaires à un positionnement en trois dimensions. L'utilisateur est alors localisé à l'intersection de trois sphères de centre la position des satellites GPS et de rayons les mesures effectuées (cf figure 1.1). L'intersection de trois sphères est en fait formée de deux points, mais l'un est aberrant du point de vue de la solution recherchée.

Cependant, la non synchronisation des horloges récepteur et satellites vient perturber l'estimation du temps de propagation. Les mesures GPS ne coïncident pas exactement avec la distance récepteur/satellite du fait de ce décalage et sont donc appelées pseudo-distances. L'erreur d'horloge se répercute sur le positionnement, l'intersection des trois sphères n'étant

plus un point mais un domaine. Une quatrième mesure s'avère donc nécessaire pour lever cette incertitude. En pratique, il existe des modèles d'erreur pour évaluer la dérive de l'horloge satellite par rapport au temps de référence GPS. Le nombre de paramètres inconnus à estimer s'élève donc à 4 : le décalage de l'horloge récepteur par rapport au temps GPS et les 3 coordonnées de position.

Enfin, le calcul de la vitesse est réalisé à partir du décalage Doppler induit par le déplacement relatif du satellite et du récepteur.

### 1.3.2 Infrastructures du système GPS

Le système GPS comprend trois segments dédiés chacun à des fonctions spécifiques :

#### -le segment de contrôle

Le segment de contrôle assure la surveillance de la constellation GPS. Les signaux émis par les satellites sont recueillis par 4 stations de réception réparties sur le globe. Les données collectées sont ensuite centralisées au niveau d'une station de contrôle principale, située dans le Colorado, qui calcule par triangulation la position, la vitesse et la dérive d'horloge de chaque satellite. Elle en déduit des corrections d'horloge et de paramètres d'orbite qui sont téléchargées aux satellites une fois par jour.

#### -le segment spatial

La constellation nominale GPS est formée de 24 satellites opérationnels et prévoit des satellites de remplacement. Leurs orbites ont été calculées de façon à assurer une grande disponibilité du service de navigation GPS. Les caractéristiques de ces orbites sont regroupées dans le tableau (1.1). Ainsi, en n'importe quel point de la surface terrestre et à n'importe quelle heure de la journée, au moins 4 satellites avec des angles d'élévation supérieur à  $5^\circ$  sont visibles. Notons que pour un angle d'élévation inférieur à  $5^\circ$ , les dégradations subies par le signal GPS lors de la traversée de l'atmosphère ne permettent plus de garantir la précision de positionnement.

Ces satellites échangent des signaux à la fois avec les récepteurs GPS et le segment de contrôle qui contiennent toutes les informations utiles à la résolution du problème de navigation.

Rayon orbital moyen	26600 km
Durée de révolution	11h58
Inclinaison	$55^\circ$
Nombre de plans orbitaux	6

**TAB. 1.1** - Paramètres orbitaux des satellites GPS.

#### -le segment utilisateurs

Ce segment regroupe l'ensemble des récepteurs GPS qui réalisent le calcul de positionnement en temps réel. Le GPS propose deux types de services différents :

- le SPS, ou standard positioning system, est accessible à tout utilisateur et offre actuellement une précision moyenne de positionnement de 30 m.
- le PPS, ou precise positioning system, est réservé à des utilisateurs habilités par le ministère de la défense américain.

### 1.3.3 Formation de la mesure GPS

#### 1.3.3.1 Les caractéristiques du signal GPS

La structure du signal GPS a été étudiée pour répondre aux objectifs de performance et de qualité de service du GPS. Ce signal doit véhiculer les informations utiles à la résolution du problème de navigation (date d'émission, position du satellite émetteur et corrections d'horloge) tout en étant robuste aux perturbations extérieures. Il est émis sur deux porteuses en bandes  $L$ , dénotées  $L_1$  et  $L_2$ , modulées par un message de données et étalées par un code pseudo-aléatoire :

$$s_{L1}(t) = \sqrt{2A}d(t)C_A(t) \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + \sqrt{A}d(t)P(t) \sin(2\pi f_1 t + \theta_1), \quad (1.1)$$

$$s_{L2}(t) = \sqrt{\frac{A}{2}}d(t)P(t) \sin(2\pi f_2 t + \theta_2), \quad (1.2)$$

où :

- $A$  est la puissance moyenne du signal émis.
- $C_A$  et  $P$  sont des codes pseudo-aléatoires dont les propriétés sont détaillées ci-après.
- $d$  est un message de données appelé message de navigation. Il fournit entre autres aux récepteurs les paramètres de correction du retard d'horloge satellite et les paramètres orbitaux des différents satellites de la constellation GPS (données dites d'éphémérides).
- $f_1 = 1575.42\text{MHz}$  et  $f_2 = 1227.6\text{MHz}$  sont les fréquences des porteuses. La transmission bi-fréquence en bande L permet de limiter les retards de propagation induits par la traversée de la ionosphère et les pertes en espace libre.

Les codes pseudo-aléatoires remplissent plusieurs fonctions :

- réaliser l'étalement de spectre et ainsi augmenter la résistance aux interférences.
- permettre l'émission simultanée de tous les satellites,
- permettre d'évaluer le temps de propagation du signal GPS.
- différencier les deux niveaux de service offerts : PPS et SPS.

Les codes  $P$  et  $C_A$  sont issus de codes de Gold matérialisés par des signaux NRZ et doivent présenter un fort caractère aléatoire. Bien-que périodiques, ils ont des propriétés voisines d'un bruit blanc. Ainsi, leur autocorrélation est très petite excepté au voisinage de 0. Cette propriété est mise à profit au sein du récepteur GPS pour estimer le retard de propagation du signal GPS qui est obtenu en corrélant le signal reçu et une réplique locale du code d'étalement.

La modulation du signal utile GPS par ces codes qui occupent une large bande spectrale permet de réaliser un étalement de spectre. Le spectre utile se trouve ainsi répliqué plusieurs milliers de fois. Cette technique garantit à la fois une meilleure résistance aux interférences et une faible probabilité d'interception. En effet, seul un récepteur utilisant une réplique exacte de la séquence d'étalement peut réaliser la démodulation.

Chaque satellite utilise des codes pseudo-aléatoires spécifiques qui présentent la particularité d'être orthogonaux. L'intercorrélacion des différents codes pseudo-aléatoires étant très faible, tous les satellites GPS peuvent émettre simultanément sans interférences. Cette technique de transmission permettant l'accès multiple est dite CDMA (code division multiple access).

Les codes  $P$  et  $C_A$  diffèrent par leur période et longueur de chip, offrant ainsi des précisions de positionnement différentes. La période correspond en effet au plus petit temps de propagation estimable sans ambiguïté. Leurs caractéristiques sont rappelées dans le tableau (1.2). Le code  $P$  ( $P$  pour precise) est encrypté et son usage est réservé aux utilisateurs habilités alors que le code  $C_A$  (coarse acquisition) est accessible à tous.

Bandes GPS	$L_1$		$L_2$
Fréquences porteuses	1575.42 MHz = 154 × 10.23 MHz		1227.60 MHz = 120 × 10.23 MHz
Codes	C/A	P	P
Puissance	-160 dBW	-163 dBW	-166 dBW
Débits	1.023 Mchips/s	10.23 Mchips/s	10.23 Mchips/s

**TAB. 1.2** - Caractéristiques du signal GPS.

### 1.3.3.2 Du signal GPS aux pseudo-distances

Le récepteur GPS traite les signaux GPS en provenance des satellites pour en extraire les données nécessaires au calcul de positionnement. Il procède en 3 étapes :

- 1) conditionnement du signal reçu (descente en fréquence, numérisation),
- 2) identification et poursuite des satellites en vue,
- 3) résolution du problème de navigation.

Ces différentes étapes seront approfondies dans le dernier chapitre de la thèse où la technique de navigation présentée requiert une bonne connaissance de l'architecture d'un récepteur GPS. Les mesures de pseudo-distances GPS sont formées lors de la deuxième étape. Les récepteurs GPS présentent plusieurs canaux de réception ou chaînes de traitement du signal, chacun étant dédié à un des satellites visibles à un instant donné. Chaque canal s'apparente à une boucle de poursuite visant à aligner le signal GPS reçu et une réplique générée localement. En pratique, deux boucles étroitement imbriquées permettent de réaliser à la fois la démodulation du code et de la porteuse. Le temps de propagation du signal émis par le satellite est évalué par maximisation de l'intercorrélacion entre le code reçu et sa réplique locale. Cependant, les codes formés sont cadencés respectivement par l'horloge satellite et l'horloge récepteur qui ne sont pas synchronisées. L'estimation du temps de propagation et donc de la distance satellite/récepteur s'en trouve biaisée. Si le temps GPS est choisi comme temps de référence, la pseudo-distance entre le  $i$ -ième satellite et le récepteur vérifie :

$$\rho^i = c(t_R^r - t_{S^i}^e), \quad (1.3)$$

$$\rho^i = c(t_{GPS}^r - t_{GPS}^e) + c(\Delta\tau_R - \Delta\tau_{S^i}), \quad (1.4)$$

où :

- $c$  est la vitesse de la lumière,
- $t_R^r$  est l'instant de réception vu par l'horloge récepteur,
- $t_{S^i}^e$  est l'instant d'émission vu par l'horloge satellite,
- $t_{GPS}^r$  est l'instant de réception dans le temps GPS,
- $t_{GPS}^e$  est l'instant d'émission dans le temps GPS,
- $\Delta\tau_R = t_R^r - t_{GPS}^r$ ,
- $\Delta\tau_{S^i} = t_{S^i}^e - t_{GPS}^e$ .

La pseudo-distance GPS peut donc être modélisée de la façon suivante :

$$\rho^i = R^i + c(\Delta\tau_R - \Delta\tau_{S^i}) + w^i, \quad (1.5)$$

$$R^i = \sqrt{(X - X^i)^2 + (Y - Y^i)^2 + (Z - Z^i)^2}. \quad (1.6)$$

Dans cette expression,  $R^i$  désigne la distance géométrique entre le récepteur et le satellite  $S^i$  et  $w^i$  l'erreur de mesure dont les différentes contributions sont étudiées ci-après. Les positions

du satellite  $(X^i, Y^i, Z^i)$  et du récepteur  $(X, Y, Z)$  doivent être projetées dans un même repère de référence. Classiquement le système géocentrique défini par la référence WGS-84 (World Geodetic System) est utilisé.

### 1.3.3.3 Les erreurs de mesure

Différentes erreurs affectent les mesures GPS. Il convient de distinguer les erreurs systématiques et les perturbations liées à une défaillance du système de navigation.

Les erreurs systématiques sont inhérentes au fonctionnement du GPS et sont généralement répertoriées en fonction de leur source.

**Segment spatial :** connaissance imparfaite des données satellites,

- dérive d'horloge satellite,
- erreur d'orbites,

**Liaison satellite-récepteur :** retards introduits lors de la traversée des couches atmosphériques,

- réfraction ionosphérique,
- réfraction troposphérique,

**Récepteur GPS :**

- erreurs d'horloge,
- bruit thermique.

Les effets de ces erreurs ont été modélisés et peuvent être partiellement corrigés. On appelle UERE (User Equivalent Range Error) l'incertitude induite sur la mesure de pseudo-distance GPS. Le bruit de mesure GPS vérifie donc :  $w^i \sim \mathcal{N}(0, \text{UERE}^2)$ . Les contributions de chaque phénomène à l'erreur globale sont récapitulées dans le tableau (1.3).

Segment	Source d'erreur	Erreur (m)
Espace	Stabilité de l'horloge satellite	3.0
	Incertitude sur l'accélération du satellite	1.0
	Autres	0.5
Contrôle	Éphémérides	4.2
	Autres	0.9
Utilisateur	Compensation du retard de propagation ionosphérique	10
	Compensation du retard de propagation troposphérique	2.0
	Bruit et résolution du récepteur	4.8
	Autres (interférences inter-canaux)	0.5
UERE		11.3

**TAB. 1.3** - Bilan d'erreur pour la mesure de pseudo-distance calculée à partir du code  $C_A$ .

Les défaillances sont toutes les erreurs non prédictibles qui ne sont pas prises en compte dans le modèle classique de navigation GPS donné par l'équation (1.5). Elles peuvent résulter soit d'un problème matériel survenant au niveau d'un des satellites ou du récepteur, soit



d'une perturbation de l'environnement de propagation des signaux GPS. Dans cette dernière catégorie, on rencontre les phénomènes d'interférences et de multitrajets qui font l'objet des quatrième et cinquième chapitres de ce manuscrit. Ces défaillances s'avèrent très pénalisantes et peuvent entraîner des erreurs de position inacceptables selon l'application considérée (aviation civile). Des algorithmes de contrôle d'intégrité ont été développés pour détecter ces anomalies et exclure les mesures erronées. Les approches de type RAIM (Receiver Autonomous Integrity Monitoring)[Bro98] sont fondées sur la redondance des pseudo-distances GPS mais ne s'appliquent que dans le cas où une seule des mesures est incorrecte à un instant donné. Dans ce manuscrit, nous montrons que les techniques de filtrage particulière apparaissent prometteuses pour résoudre ce type de problème.

## 1.4 Les systèmes de navigation inertielle

La principale limitation du GPS est sa sensibilité aux variations de l'environnement de propagation. Les systèmes de navigation inertielle, qui fonctionnent de façon autonome, forment une alternative intéressante. La navigation inertielle a été développée pour la seconde guerre mondiale et a été appliquée dès les années 50 pour le guidage de fusées. Elle est aujourd'hui utilisée aussi bien en aviation militaire que civile et équipe la quasi-totalité des fusées balistiques.

### 1.4.1 Introduction à la navigation inertielle

Les capteurs inertiels mesurent le mouvement du véhicule à bord duquel ils sont embarqués, par rapport au référentiel inertielle. Connaissant la vitesse et la position initiales du véhicule, cette information permet de reconstituer point par point sa trajectoire. La principale difficulté réside dans les changements de repère et de référentiel nécessaires pour rendre les données exploitables par l'utilisateur. Avant de détailler les processus de mesure et de calcul de la position, nous nous intéressons aux différents repères/référentiels intervenant classiquement en navigation inertielle. Ils sont représentés sur la figure 1.2 et se déduisent les uns des autres par des rotations successives.

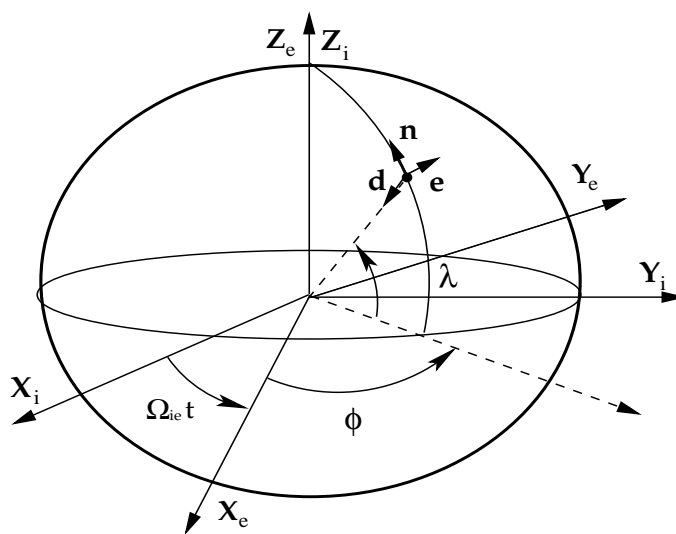


FIG. 1.2 - Principaux repères utilisés en navigation inertielle.

- Le repère inertiel  $i = (\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i)$ , d'origine le centre de la Terre et d'axes pointant vers des étoiles suffisamment lointaines pour sembler fixes à un observateur terrestre. L'axe  $\mathbf{X}_i$  coïncide avec l'équinoxe vernal, l'axe  $\mathbf{Z}_i$  est l'axe de rotation de la Terre et l'axe  $\mathbf{Y}_i$  les complète pour former un trièdre direct.
- Le repère géocentrique  $e = (\mathbf{X}_e, \mathbf{Y}_e, \mathbf{Z}_e)$ , fixe par rapport à la Terre. Il est obtenu à partir du repère terrestre par une rotation d'axe  $\mathbf{Z}_i$  et de vitesse angulaire la vitesse de rotation de la Terre  $\Omega_{ie}$ . L'axe  $\mathbf{X}_e$  est donné par l'intersection du plan équatorial et du plan contenant le méridien de Greenwich.
- Le repère de navigation  $n = (\mathbf{n}, \mathbf{e}, \mathbf{d})$  a pour origine le centre de masse du véhicule. Ces axes pointent respectivement vers le Nord, l'Est et la verticale locale. Il se déduit du repère géocentrique par deux rotations successives d'angles respectifs la longitude et la latitude du véhicule.

Il est utile d'introduire un dernier repère, qui est solidaire du véhicule et est donc dénommé repère mobile  $m = (\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m, \mathbf{Z}_m)$ . Son orientation par rapport au repère de navigation est décrite par les angles d'Euler :  $(\varphi, \theta, \psi)$ , représentant respectivement le roulis, le tangage et le lacet. La succession des rotations qui mènent du repère de navigation au repère mobile sont représentées sur la figure 1.3.

Les systèmes de navigation inertielle, aussi appelés centrales inertielles CI, comportent deux parties distinctes :

- une plate-forme de capteurs,
- un calculateur qui traite les sorties capteurs pour en extraire les données de navigation.

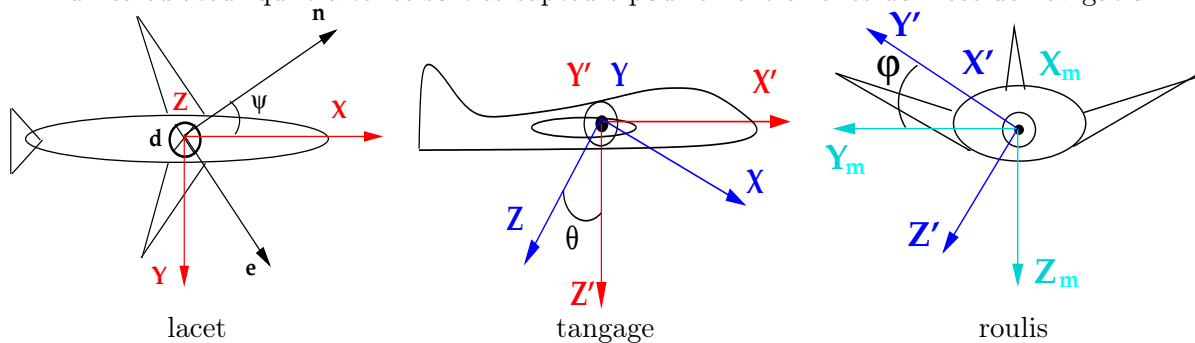


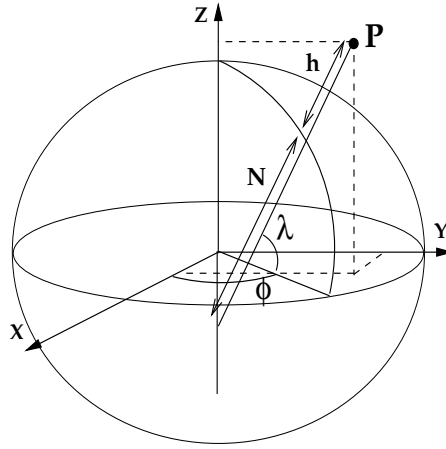
FIG. 1.3 - Définition des angles d'Euler.

### 1.4.2 Les plate-formes de capteurs

Il existe deux principaux types de centrales inertielles déterminés par la façon dont la plate-forme de capteurs est fixée au véhicule : les systèmes à composants liés et les systèmes à plate-forme stabilisée. Dans les deux cas, la plate-forme comporte :

- 3 accéléromètres qui mesurent l'accélération non gravitationnelle du véhicule par rapport au repère inertiel dans la direction de leurs axes principaux. Le vecteur correspondant est appelé force spécifique  $\mathbf{f}_a$ .
- 3 gyromètres qui déterminent le vecteur rotation instantané de la plate-forme par rapport au repère inertiel  $\Omega_g$  et par intégration les angles d'Euler.

Il existe une très grande variété de technologies pour ces capteurs, allant des systèmes mécaniques aux gyromètres à laser ou fibre optique [Rad80]. Les **accéléromètres** fournissent des informations sur la **dynamique** du véhicule alors que les **gyromètres** permettent de définir le **repère de mesure**. Pour les systèmes dits à plate-forme stabilisée, les sorties des gyromètres permettent à un système de servo-commandes d'asservir la plate-forme de capteurs à l'hor-



**FIG. 1.4** - Définition des coordonnées ellipsoïdales.

zontale et donc de l'isoler des rotations du véhicule. À l'inverse, les systèmes à composants liés sont caractérisés par une plate-forme solidaire de la structure de l'appareil. Les mesures obtenues sont donc exprimées dans le repère mobile, mais les sorties de gyromètres permettent de les projeter dans le repère de navigation.

Les capteurs inertiels mesurent des forces et des moments, soit conformément aux principes fondamentaux de la dynamique, des vitesses angulaires et des accélérations. À partir de ces sorties capteurs, le calculateur procède aux intégrations et changements de repères et de référentiels nécessaires pour effectuer le calcul de positionnement. Dans la suite du manuscrit, nous considérons des centrales inertielles à composants liés. Elles sont appelées IRS (Inertial Reference System) et sont de plus en plus utilisées car moins coûteuses et plus robustes.

### 1.4.3 Le calculateur

La calculateur effectue les intégrations et les changements de repère adéquats pour transformer les mesures de mouvement en données de navigation directement exploitables par l'utilisateur :

- la position en coordonnées ellipsoïdales : latitude  $\lambda$ , longitude  $\Phi$  et altitude  $h$ . Le lien entre les coordonnées ellipsoïdales  $(\lambda, \Phi, h)$  et cartésiennes  $(X, Y, Z)$  est explicité sur la figure 1.4 :

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \lambda \cos \Phi, \\ Y &= (N + h) \cos \lambda \sin \Phi, \\ Z &= (N + h(1 - e^2)) \sin \lambda, \end{aligned}$$

où  $N = a\sqrt{1 - e^2}/(1 - e^2 \sin^2 \lambda)$ ,  $a$  et  $e$  étant respectivement le demi-grand axe et l'excentricité de l'ellipsoïde terrestre. Si la terre est supposée sphérique, le paramètre  $N$  est approximativement son rayon.

- la vitesse par rapport au repère géocentrique, exprimée dans le repère de navigation  $\mathbf{v}_e^n = (v_n, v_e, v_d)$ .
- l'orientation du véhicule, définie par les angles d'Euler  $(\varphi, \theta, \psi)$ .

Les équations différentielles résolues numériquement par le calculateur inertiels sont rappelées ci-dessous. Les calculs menant à ces équations sont détaillés en annexe A. Les notations suivantes sont utilisées :

- $\mathbf{x}^a$  : projection du vecteur  $\mathbf{x}$  dans le repère  $a$ ,
- $\mathbf{\Omega}_{ab}$  : vecteur rotation instantané du repère  $a$  au repère  $b$ ,
- $\mathbf{v}_a$  : vitesse du véhicule par rapport au repère  $a$ ,
- $R_{a2b}$  : matrice de passage du repère  $a$  au repère  $b$ .

**Equation de vitesse :**

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_e^n = R_{m2n}\mathbf{f}_a + \mathbf{g}(\mathbf{r}^n) - \mathbf{a}_c - \mathbf{a}_e, \quad (1.7)$$

où :

$\mathbf{r}^n = -h\mathbf{d}$ , est la position du véhicule dans le repère de navigation,

$\mathbf{a}_c = (\mathbf{\Omega}_{en}^n + 2\mathbf{\Omega}_{ie}^n) \wedge \mathbf{v}_e^n$ , est l'accélération de Coriolis,

$\mathbf{a}_e = -\mathbf{\Omega}_{ei}^n \wedge \mathbf{\Omega}_{ei}^n \wedge \mathbf{r}^n$ , est l'accélération d'entraînement,

$\mathbf{g}(\mathbf{r}^n)$  est l'accélération gravitationnelle au point  $\mathbf{r}^n$ .

**Equation de position :**

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \lambda \\ \Phi \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+h)\cos(\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_e^n. \quad (1.8)$$

**Equation d'attitude :**

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \mathbf{\Omega}_{nm}^m, \quad (1.9)$$

avec :

$$\mathbf{\Omega}_{nm}^m = \mathbf{\Omega}_{im}^m - R_{n2m}\mathbf{\Omega}_{in}^n.$$

Le vecteur rotation instantané  $\mathbf{\Omega}_{im}^m = \mathbf{\Omega}_g$  est fourni par les sorties des gyromètres et l'expression du vecteur  $\mathbf{\Omega}_{in}^n$  est proposée en annexe.

#### 1.4.4 Avantages et limitations

En résumé, les systèmes de navigation inertiels sont fondés sur les mesures de capteurs embarqués et sont donc insensibles aux perturbations de l'environnement de navigation. Néanmoins, du fait des intégrations successives, les erreurs d'initialisation ou de calibration des capteurs entraînent une dérive de l'erreur d'estimation au cours du temps.

## 1.5 Résolution du problème de navigation

La navigation fait appel à des techniques d'estimation en temps réel pour retrouver la dynamique du véhicule à partir des mesures capteurs bruitées. Une approche Bayésienne a été retenue dans cette étude, pour laquelle des informations *a priori* sur les paramètres inconnus sont disponibles. Les techniques de type moindres carrés récursifs ne sont donc pas traitées dans ce manuscrit. Le formalisme lié à l'estimation en temps réel est tout d'abord introduit. Les deux algorithmes dont les performances sont comparées dans cette étude, le filtre de Kalman et le filtre particulaire, sont ensuite détaillés.

### 1.5.1 Approche Bayésienne et modélisation du problème

Dans un contexte Bayésien, deux modèles sont requis : un modèle d'état décrivant la dynamique *a priori* des paramètres inconnus et un modèle de mesure. Une formulation espace-état est généralement adoptée :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t &= \mathbf{f}_t(\mathbf{X}_{t-1}) + \mathbf{v}_t, \\ \mathbf{Y}_t &= \mathbf{h}_t(\mathbf{X}_t) + \mathbf{w}_t, \end{cases} \quad (1.10)$$

où

- $\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^{n_x}$  est appelé vecteur état. Il est formé des grandeurs à estimer, soit en navigation les paramètres permettant de caractériser le mouvement du véhicule,
- le vecteur de mesure (aussi dénommé vecteur d'observation) est noté  $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$ . Il est formé dans cette étude des sorties capteur,
- $\mathbf{v}_t \in \mathbb{R}^{n_x}$  est un bruit blanc, ce qui permet d'assurer le caractère Markovien du processus d'état,
- $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$  est un bruit blanc, hypothèse garantissant l'indépendance conditionnelle des mesures,
- $\mathbf{f}_t : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  et  $\mathbf{h}_t : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  sont des fonctions éventuellement non linéaires.

Le comportement du système (1.10) est régi par la suite des aléas de dynamique  $(\mathbf{v}_t)_{t>0}$  et des bruits de mesures  $(\mathbf{w}_t)_{t>0}$  dont les propriétés statistiques sont décrites par les distributions de probabilité  $P(\mathbf{v}_t \in d\mathbf{v}_t)$  et  $P(\mathbf{w}_t \in d\mathbf{w}_t)$ . Notons que nous avons considéré des bruits additifs, ce qui est le cas pour toutes les applications étudiées dans cette thèse.

### 1.5.2 Solution conceptuelle au problème d'estimation

La distribution conditionnelle du vecteur de paramètres sachant toutes les mesures collectées  $P(\mathbf{X}_t \in d\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t})$  contient toute l'information disponible à un instant donné sur l'état du système. Elle est aussi appelée distribution *a posteriori* du vecteur état. Résoudre le problème d'estimation en temps réel revient donc à calculer récursivement cette loi pour en déduire les estimateurs usuels de l'état  $\mathbf{X}_t$  :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathbf{X}}_t\right)_{\text{MMSE}} &= \text{E}(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t}), \\ \left(\widehat{\mathbf{X}}_t\right)_{\text{MAP}} &= \underset{\mathbf{X}_t}{\text{argmax}} P(\mathbf{X}_t \in d\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t}). \end{aligned}$$

L'estimateur  $\left(\widehat{\mathbf{X}}_t\right)_{\text{MMSE}}$  (minimum mean square error) minimise l'erreur quadratique moyenne d'estimation alors que l'estimateur  $\left(\widehat{\mathbf{X}}_t\right)_{\text{MAP}}$  (maximum *a posteriori*) réalise le maximum de la distribution *a posteriori* du vecteur état. Si la distribution initiale  $P(d\mathbf{X}_0)$  est supposée connue, deux étapes sont appliquées successivement pour estimer la distribution d'intérêt à chaque instant.

#### La prédiction

La nouvelle mesure n'est pas encore arrivée et le modèle d'état permet de calculer la distribution prédite selon l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$P(\mathbf{X}_t \in d\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) = \int_{\mathbf{X}_{t-1}} P(\mathbf{X}_t \in d\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}) P(\mathbf{X}_{t-1} \in d\mathbf{X}_{t-1} | \mathbf{Y}_{1:t-1}). \quad (1.11)$$

## La correction

Conformément à la loi de Bayes, l'estimé de la distribution d'intérêt est mise à jour avec l'arrivée de la nouvelle mesure :

$$P(\mathbf{X}_t \in d\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) = \frac{P(\mathbf{Y}_t \in d\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_t) P(\mathbf{X}_t \in d\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1})}{P(\mathbf{Y}_t \in d\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1})}, \quad (1.12)$$

où la constante de normalisation  $P(\mathbf{Y}_t \in d\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1})$  est calculée de la façon suivante :

$$P(\mathbf{Y}_t \in d\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) = \int_{\mathbf{X}_t} P(\mathbf{Y}_t \in d\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_t) P(\mathbf{X}_t \in d\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}). \quad (1.13)$$

Cependant, cette solution ne peut généralement pas être calculée analytiquement. En effet, les équations (1.11) et (1.13) font intervenir des intégrales multiples qu'il est difficile d'évaluer. Il est néanmoins possible de calculer la solution optimale pour certains modèles espace-état, notamment pour les systèmes linéaires Gaussiens.

Les mesures de probabilité considérées sont dites à densité :  $P(d\mathbf{X}) = p(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$ . Par la suite, nous travaillerons indifféremment avec la mesure de probabilité  $P$  ou la densité de probabilité  $p$ , représentées respectivement en lettres majuscules et minuscules.

### 1.5.3 Systèmes linéaires Gaussiens

Les systèmes linéaires Gaussiens sont caractérisés par des modèles espace-état de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t = F_t \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \\ \mathbf{Y}_t = H_t \mathbf{X}_t + \mathbf{w}_t, \end{cases}$$

où les bruits  $\mathbf{v}_t$  et  $\mathbf{w}_t$  obéissent à des lois Gaussiennes  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, Q_t)$  et  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, R_t)$ . En supposant que la distribution initiale du vecteur état est aussi Gaussienne, il est démontré que les distributions *a posteriori* du vecteur état sachant les mesures sont des lois Gaussiennes. Elles sont donc complètement décrites par leurs moments du premier et du second ordre, qui peuvent être calculés itérativement en appliquant les formules (1.11) et (1.12). Le problème de dimension infinie se trouve ainsi transformé en un problème de dimension finie qui admet une solution analytique. Introduisons les notations suivantes :

$$p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}, P_{t|t-1}), \quad (1.14)$$

$$p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}, S_t), \quad (1.15)$$

$$p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{X}}_{t|t}, P_{t|t}). \quad (1.16)$$

Les équations permettant de mettre à jour les moments des distributions (1.14), (1.15), (1.16) prennent la forme :

## Prédiction

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} &= F_t \widehat{\mathbf{X}}_{t-1|t-1}, \\ P_{t|t-1} &= F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t, \\ \widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1} &= H_t \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}, \\ S_t &= H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t. \end{aligned}$$

## Correction

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} &= \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + K_t \left( \mathbf{Y}_t - \widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1} \right), \\ P_{t|t} &= (\mathbf{I} - K_t H_t) P_{t|t-1}.\end{aligned}$$

La matrice  $K_t = P_{t|t-1} H_t^T S_t^{-1}$  est appelée gain de Kalman. Elle permet d'ajuster la confiance relative accordée à la mesure nouvellement arrivée et au modèle *a priori*. Si la prédiction est très incertaine, la matrice de covariance de la loi de prédiction  $P_{t|t-1}$  est grande, de même que le gain  $K_t$ . L'estimation est alors essentiellement fondée sur l'information apportée par la mesure. Inversement, une mesure très perturbée correspondra à un faible gain et la prédiction sera prépondérante. Le terme  $\mathbf{Y}_t - \widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}$ , qui quantifie l'erreur de prédiction relativement à la mesure, est classiquement nommé innovation.

Il est à noter que si les bruits de mesure ne sont plus Gaussiens, le filtre de Kalman fournit néanmoins le meilleur estimateur linéaire en termes d'erreur quadratique. Cet algorithme très populaire a été initialement proposé dans [Kal60] et [KB61]. Il a été ensuite étudié dans de nombreux livres comme [AM79].

### 1.5.4 Systèmes non linéaires

En pratique, la majorité des systèmes mettent en jeu des non linéarités et/ou sont régis par des bruits non Gaussiens. L'absence de solution analytique au problème d'estimation implique alors de recourir à des méthodes sous-optimales. On peut les classer en deux grandes catégories selon le type d'approximation pratiquée :

- linéarisation locale du modèle espace-état pour pouvoir appliquer les équations du filtre de Kalman,
- approximation directe de la distribution *a posteriori*  $p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t})$ .

#### Le filtre de Kalman étendu

L'algorithme du filtre de Kalman étendu, détaillé dans [AM79] et [Jaz70], appartient à la première classe de méthodes. Il consiste à remplacer les équations non linéaires du modèle espace-état (1.10) par leur développement de Taylor au premier ordre autour de l'estimé le plus récent de l'état du système. Ainsi, les distributions *a posteriori* sont approchées par des lois Gaussiennes dont les paramètres sont calculés récursivement d'après les équations classiques du filtre de Kalman. A l'instant  $t$ , les équations d'état et de mesure deviennent :

$$\mathbf{X}_t \simeq F_t \left( \mathbf{X}_{t-1} - \widehat{\mathbf{X}}_{t-1|t-1} \right) + \mathbf{f}_t \left( \widehat{\mathbf{X}}_{t-1|t-1} \right) + \mathbf{v}_t,$$

où

$$F_t = \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{X}_{t-1}} \Big|_{\widehat{\mathbf{X}}_{t-1|t-1}},$$

et :

$$\mathbf{Y}_t \simeq H_t \left( \mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} \right) + \mathbf{h}_t \left( \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} \right) + \mathbf{w}_t,$$

avec

$$F_t = \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial \mathbf{X}_t} \Big|_{\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}}.$$

Les équations du filtre de Kalman étendu s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} &= \mathbf{f}_t \left( \widehat{\mathbf{X}}_{t-1|t-1} \right), \\
P_{t|t-1} &= F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + Q_t, \\
\widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1} &= \mathbf{h}_t \left( \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} \right), \\
S_{t|t-1} &= H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t, \\
K_t &= P_{t|t-1} H_t^T S_{t|t-1}^{-1}, \\
\widehat{\mathbf{X}}_{t|t} &= \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + K_t \left( \mathbf{Y}_t - \widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1} \right), \\
P_{t|t} &= (\mathbf{I} - K_t H_t) P_{t|t-1}.
\end{aligned}$$

### Les filtres particuliers

Dans la deuxième catégorie de méthodes, on rencontre des algorithmes tels que le filtre de Kalman unscented ou les filtres particuliers qui sont l'objet de cette thèse. Une version générique de ces algorithmes est présentée, applicable à tout système pouvant être défini par un modèle stochastique de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t \sim p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}), \\ \mathbf{Y}_t \sim p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{Y}_{0:t-1}). \end{cases} \quad (1.17)$$

Les variantes et extensions développées dans la littérature sont plutôt introduites dans les chapitres suivants.

Les filtres particuliers, aussi appelés méthodes séquentielles de Monte-Carlo, proposent une approximation de Monte-Carlo récursive des lois conditionnelles  $P(d\mathbf{X}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t})_{t \geq 0}$ . Notons que la loi complète est ici considérée et non plus seulement la loi marginale  $P(d\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t})$ . Ces distributions de probabilité sont approchées par des mesures aléatoires correspondant à des peignes de mesures de Dirac pondérées :

$$P(d\mathbf{X}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) \simeq \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \delta \left( \mathbf{X}_{0:t} - \mathbf{X}_{0:t}^{(i)} \right). \quad (1.18)$$

Les points support  $\mathbf{X}_{0:t}^{(i)}$  sont obtenus par simulation et dénommés particules. Chaque particule est assortie d'un poids  $w_t^{(i)}$  traduisant la probabilité qu'elle soit le vecteur état recherché sachant toutes les mesures accumulées. Cette technique est appelée échantillonnage pondéré. Elle équivaut à estimer en temps réel une distribution à support continu par une distribution à support discret mais tiré aléatoirement. Son application à l'étude en ligne des systèmes dynamiques date des années 70 [Han70], mais a été rapidement abandonnée du fait d'un coût calculatoire trop élevé. Le principe a été repris et amélioré dans les années 90, notamment par l'ajout d'une étape de sélection des particules. Plusieurs algorithmes ont été développés indépendamment dans la littérature sous les noms de "bootstrap filter" [GSS93], filtre particulier avec interaction [CDML99] ou "condensation algorithm" [MB99]. Un algorithme de filtrage particulier classique procède en deux étapes :

- l'**échantillonnage pondéré** séquentiel qui propage récursivement les particules dans l'espace-état,
- le **rééchantillonnage** qui sélectionne les particules les plus pertinentes pour l'estimation.



Dernièrement, un état de l'art très complet des techniques de filtrage particulaire et de leurs applications a été édité par Doucet, de Freitas et Gordon [DdFG01].

### • Echantillonnage pondéré

Dans le cas où les particules  $\mathbf{X}_{0:t}^{(i)}$  peuvent être générées directement selon la loi cible  $P(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})$ , celle-ci est classiquement approchée par la distribution empirique suivante :

$$\widehat{P}(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta(\mathbf{X}_{0:t} - \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}).$$

Alors, pour toute fonction  $g_t$ ,  $P(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})$ -intégrable, les estimateurs de la forme :

$$I(g_t) = \int_{\mathbf{X}_{0:t}} g_t(\mathbf{X}_{0:t}) P(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}) \quad (1.19)$$

sont estimés par des moyennes arithmétiques. En effet, d'après la loi des grands nombres, on obtient :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_t(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} I(g_t),$$

où *p.s.* dénote la convergence presque sûre.

Néanmoins, il est généralement difficile de simuler la loi cible, multivariée et connue à une constante de normalisation près. Une méthode plus élaborée d'échantillonnage doit être utilisée. L'**échantillonnage pondéré** consiste à générer les particules selon une loi de proposition appelée distribution d'importance  $\Pi(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})$ , dont le support inclut le support de la loi cible  $P(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})$ . Les poids  $w_t^{(i)}$  attribués aux particules permettent alors de corriger l'écart entre les distributions  $P$  et  $\Pi$  :

$$w_t^{(i)} \propto \frac{p(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{Y}_{1:t})}{\pi(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{Y}_{1:t})},$$

où  $\Pi(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}) = \pi(\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}) d\mathbf{X}_{0:t}$  et  $P(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}) = p(\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}) d\mathbf{X}_{0:t}$ . Ces poids sont normalisés de sorte que  $\sum_{i=1}^N w_t^{(i)} = 1$  et que l'estimation décrite par l'équation (1.18) soit bien une distribution de probabilité. Il est démontré que la loi discrète  $\widehat{P}$  ainsi obtenue converge en loi vers la distribution  $P(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})$ .

*Démonstration.* En effet, comme  $[P(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}) > 0] \Rightarrow [\Pi(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}) > 0]$ , l'intégrale (1.19) peut être écrite alternativement :

$$I(g_t) = \int_{\mathbf{X}_{0:t}} g_t(\mathbf{X}_{0:t}) \frac{P(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})}{\Pi(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})} \Pi(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}).$$

D'après la loi forte des grands nombres, si les particules  $\mathbf{X}_{0:t}^{(i)}$  sont des échantillons générés selon la loi conditionnelle  $\Pi$ , on a :

$$\sum_{i=1}^N \omega_t^{(i)} g_t(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} I(g_t).$$

En appliquant cette formule avec  $g_t = \mathbb{I}([\cdot] - \infty; \mathbf{X}_0] \times \dots \times [\cdot] - \infty; \mathbf{X}_t])$  (où  $\mathbb{I}$  est la fonction indicatrice), on obtient le résultat souhaité.  $\square$

L'intérêt de cette approche réside en sa souplesse, notamment pour le choix de la distribution d'importance. La loi de simulation utilisée s'avère cependant cruciale, l'efficacité des algorithmes particulière dépendant grandement de leur capacité à explorer des régions intéressantes de l'espace-état. Ce problème est examiné dans la seconde partie de la thèse.

La formulation de l'algorithme proposée ci-dessus n'est pas récursive et suppose de rééchantillonner à chaque instant  $t$  les états passés  $\mathbf{X}_{0:t-1}$ . Pour laisser les particules précédentes inchangées, il suffit d'adopter une loi de proposition  $\Pi(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})$  qui admette la loi de proposition à l'instant précédent  $\Pi(d\mathbf{X}_{0:t-1}|\mathbf{Y}_{1:t-1})$  comme loi marginale :

$$\Pi(d\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t}) = \Pi(d\mathbf{X}_{0:t-1}|\mathbf{Y}_{1:t-1}) \Pi(d\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{0:t-1}, \mathbf{Y}_{1:t}).$$

A chaque instant, chaque particule  $\mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}$  est alors simplement propagée en simulant  $\Pi(d\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t})$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t^{(i)} &\sim \Pi(d\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t}), \\ \mathbf{X}_{0:t}^{(i)} &= (\mathbf{X}_t^{(i)}, \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}). \end{aligned}$$

Il en résulte une expression récursive des poids d'importance :

$$\omega_t^i \propto \omega_{t-1}^i \frac{p(\mathbf{Y}_t|\mathbf{X}_{0:t-1}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) p(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{0:t-1})}{\pi(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{0:t-1}, \mathbf{Y}_{1:t})}.$$

### • Rééchantillonnage

Une limitation classique des méthodes particulières est la dégénérescence des poids d'importance dont une grande majorité tend très rapidement vers zero. Cette divergence peut être limitée en introduisant une étape de rééchantillonnage des particules selon la loi discrète estimée. Le nouveau système de particules ainsi obtenu  $(\mathbf{X}_t^{(i)*})_{i=1:N}$  est distribué selon la loi cible et donc équipondéré. Il comporte plusieurs échantillons identiques entre eux de par la nature discrète de la loi de simulation. Plusieurs techniques de redistribution ont été proposées dans la littérature. Dans [LC95], le nombre de répliques de chaque particule est obtenu par tirage selon la loi multinomiale de paramètres  $N$  et  $(w_t^{(i)})_{i=1,\dots,N}$ . Kitagawa, dans [Kit96], préconise une procédure simplifiée et néanmoins efficace de rééchantillonnage qui est décrite en table (1.4). Cette méthode garantit une faible variance du nombre de descendants par particules.

- 
- Tirage aléatoire :  $u_1 \sim U[0, N^{-1}]$ .
  - Pour  $i = 2, \dots, N$  :  $u_i = u_1 + N^{-1}(i-1)$ ,
    - ▶ tant que  $u_i > \sum_{k=1}^j \omega_t^{(k)}$ ,  
 $j = j + 1$ .
    - ▶  $\mathbf{X}_t^{i*} = \mathbf{X}_t^j$ .
- 

**TAB. 1.4** - Rééchantillonnage stratifié

Le rééchantillonnage augmente significativement le nombre de particules contribuant efficacement à l'estimation : les particules de fort poids se trouvent dupliquées alors que les échantillons les moins pertinents sont éliminés. Cependant, il est conseillé de ne pas l'appliquer de façon systématique au risque de trop appauvrir le système de particules. Il peut s'ensuivre une divergence du filtre si le bruit de dynamique est trop faible. Aussi est-t-il préférable de ne procéder à la redistribution que si la variance des poids devient trop grande. La

taille efficace du système de particules, introduite par Liu dans [LC95] est le critère le plus couramment utilisé. Il est inversement proportionnel à la variance des poids :

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{1 + \text{var}_{\Pi(\mathbf{Y}_{1:t})}(w^*(\mathbf{X}_{0:t}))},$$

où  $w^*(\mathbf{X}_{0:t}) = \frac{p(\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})}{\pi(\mathbf{X}_{0:t}|\mathbf{Y}_{1:t})}$ . La taille efficace peut être estimée simplement de la façon suivante :

$$N_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_t^{(i)})^2}.$$

Les valeurs possibles de  $N_{\text{eff}}$  sont majorées par le nombre total de particules  $N$ . Pour décider de l'opportunité d'un rééchantillonnage,  $N_{\text{eff}}$  est comparé à un seuil. Dans le cas idéal où les particules sont générées directement selon la distribution *a posteriori* du vecteur état, les poids sont tous égaux et valent  $\frac{1}{N}$ . La taille efficace du système de particules est alors  $N$ . Par contre, si le système de particules a dégénéré, tous les poids sont nuls à l'exception de l'un d'entre eux qui vaut 1. Ce cas défavorable correspond à  $N_{\text{eff}} = \frac{1}{N}$ .

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre a permis au lecteur de se familiariser avec les problématiques de la navigation. Le positionnement s'effectue généralement en deux phases : une phase de mesure assurée par un ensemble de capteurs et une phase d'estimation où les mesures réalisées sont utilisées pour calculer les paramètres cinématiques utiles (position, vitesse, accélération). La navigation impose donc de résoudre en temps réel un problème d'estimation. Ce mémoire est consacré aux approches Bayésiennes pour lesquelles la dynamique *a priori* du véhicule est supposée connue. Deux algorithmes de navigation ont été présentés : le filtre de Kalman classiquement utilisé et le filtre particulaire qui apparaît comme une alternative prometteuse. Le filtre de Kalman, popularisé par [AM79], n'est optimal que pour les systèmes linéaires Gaussiens (au sens où il minimise l'erreur quadratique moyenne d'estimation). Ces dernières années ont vu l'émergence des méthodes de filtrage particulaire. Bien-que calculatoirement plus coûteuses, elles s'avèrent intéressantes car elles sont applicables à tout type de modèle de filtrage. En particulier, elles sont robustes à de fortes non-linéarités. Les deux chapitres suivants étudient les performances des deux techniques pour la navigation avec un système hybride GPS/INS.

*Partie II*  
*Hybridation serrée du GPS et des*  
*systèmes de navigation inertielle*



---

# Introduction

---

Les exigences accrues en termes de précision et robustesse, aussi bien pour les applications militaires que commerciales, motivent les dernières avancées en matière de navigation. Le projet GALILEO, conduit par l'Union Européenne, est un exemple significatif du dynamisme de la recherche dans ce domaine. Depuis une vingtaine d'année, l'intérêt manifesté pour les techniques de couplage ou fusion de données ne cesse de se renforcer. Le principe de l'hybridation est de mettre à profit la complémentarité de plusieurs systèmes de capteurs pour former à moindre coût un système intégré plus performant. L'avènement de nouveaux systèmes de positionnement tels GALILEO n'invalide pas cette approche mais ouvre au contraire de nouvelles perspectives d'intégration. L'objet de cette thèse est le couplage du GPS et des systèmes de navigation inertielle. Différentes architectures d'hybridation sont envisageables. Nous nous intéressons dans cette partie, formée de deux chapitres, à l'hybridation dite serrée des deux systèmes. Le chapitre 2 présente le modèle d'hybridation et le chapitre 3 étudie l'intérêt d'un algorithme d'hybridation de type filtre particulière.



# Modèle de filtrage pour l'hybridation serrée GPS/INS

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Intérêt de l'hybridation GPS/INS</b>	<b>31</b>
<b>2.3</b>	<b>Architectures d'hybridation</b>	<b>32</b>
<b>2.4</b>	<b>Modèle d'état</b>	<b>33</b>
2.4.1	Choix du vecteur état	33
2.4.2	Modèle de propagation des erreurs inertielles	34
2.4.3	Modèle de mesure	38
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

---

## 2.1 Introduction

L'intégration de deux systèmes de navigation est généralement réalisée via un filtre d'hybridation qui calcule la solution de navigation à partir des données fournies par les deux systèmes de capteurs. Dans ce chapitre, nous discutons dans un premier temps l'opportunité d'un couplage GPS/INS et nous détaillons ensuite le modèle du filtre d'hybridation. Une architecture classique de couplage consiste à utiliser les mesures GPS pour évaluer les erreurs d'estimation commises par la centrale inertielle. Le modèle d'état se déduit donc des équations de navigation inertielle alors que le modèle d'observation découle de l'expression des pseudo-distances GPS.

## 2.2 Intérêt de l'hybridation GPS/INS

Le GPS et les systèmes de navigation inertielle reposent sur des techniques de positionnement très différentes qui n'induisent pas les mêmes limitations. Cette complémentarité justifie leur intégration, le couplage GPS/INS s'avérant fructueux dans la mesure où les défauts de chacun des deux systèmes se mutuellement.

D'une part, les mesures de pseudo-distances **GPS** définissent à chaque instant un système d'équations dont est directement solution la position inconnue. L'erreur de localisation est donc **bornée dans le temps**. A l'inverse, les **centrales inertielles** estiment les coordonnées cinématiques d'un mobile en résolvant récursivement un système d'équations différentielles. Les erreurs d'estimation tendent en conséquence à se cumuler au fil des intégrations successives et à **augmenter au cours du temps**. Ainsi, les systèmes de navigation inertielle sont précis à court terme mais dérivent au cours du temps alors que les estimés GPS sont plus bruités mais présentent une erreur bornée dans le temps. En outre, le GPS est sensible aux perturbations extérieures et n'est donc pas toujours en mesure de calculer une solution de navigation fiable, contrairement aux systèmes inertiels qui sont autonomes.



Une comparaison complète du GPS et des systèmes de navigation inertielle fondée sur différents critères est proposée dans le tableau (2.1).

	GPS	Systèmes de navigation inertielle
Robustesse	- sensibilité aux interférences - continuité de service non assurée	- autonomie, - fiabilité
Précision	- peu précis à court terme - erreur bornée dans le temps	- précis à court terme - dérive au cours du temps
Fréquence des mesures	basse fréquence	haute fréquence ( $> 20$ Hz)
Type de données	- position et ses dérivées - recalage temporel	- position et ses dérivées - attitude

**TAB. 2.1** - Comparaison du GPS et des systèmes de navigation inertielle

Dans le cadre d'une hybridation, le GPS permet de corriger la dérive inertielle et les erreurs capteurs, alors que la centrale inertielle recalée assure la continuité du service de navigation en cas de perte du signal GPS. De plus, la solution hybride de navigation est plus précise que l'estimation calculée par un GPS autonome. Enfin, la haute cadence des mesures inertielles assure une bonne robustesse à des trajectoires très dynamiques.

## 2.3 Architectures d'hybridation

Il existe plusieurs types d'hybridation selon la nature des informations capteurs mises en jeu et la façon dont elles sont combinées. L'approche la plus intuitive pour l'hybridation GPS/INS consiste à estimer directement les paramètres cinématiques du véhicule à partir à la fois des données GPS et inertielles. Elle est détaillée par exemple dans [AS01]. Cependant, la dynamique du véhicule peut être très grande selon l'application considérée (militaire...). Les estimés doivent donc être mis à jour à une grande fréquence, ce qui suppose un temps de réponse très bref du filtre de navigation. Il est possible de s'affranchir de cette contrainte en travaillant plutôt avec les erreurs de navigation inertielles qui évoluent plus lentement. Cette faible dynamique s'explique du fait des intégrations successives pratiquées par le calculateur inertiel qui joue le rôle d'un filtre passe-bas.

L'architecture d'hybridation retenue exploite donc les données GPS pour estimer les erreurs de navigation inertielles, comme proposé dans [CDMMG97], [Nor01] ou bien [FB98]. Le dernier point à préciser est le type de données GPS utilisées pour recalibrer la centrale inertielle. L'**hybridation lâche** met en jeu les estimés cinématiques issus du filtre de navigation GPS. Cette solution se caractérise par sa facilité d'implantation aux dépens parfois d'une perte de performance. Elle requiert de connaître avec précision la façon dont le calcul de navigation GPS a été effectué afin de modéliser correctement l'erreur de mesure dans les équations du filtre d'hybridation. Par ailleurs, si le nombre de mesures GPS est insuffisant ( $< 4$ ) pour résoudre le problème de navigation, la centrale inertielle n'est pas recalée. Nous nous sommes donc plutôt orientés vers une **hybridation serrée** où les mesures GPS brutes forment les entrées du filtre d'hybridation. Cette solution est souvent préférable car plus fiable, mais n'est

pas toujours accessible selon la technologie dont dispose l'utilisateur. Par ailleurs, elle présente l'inconvénient de mettre en jeu des équations de mesure non linéaires.

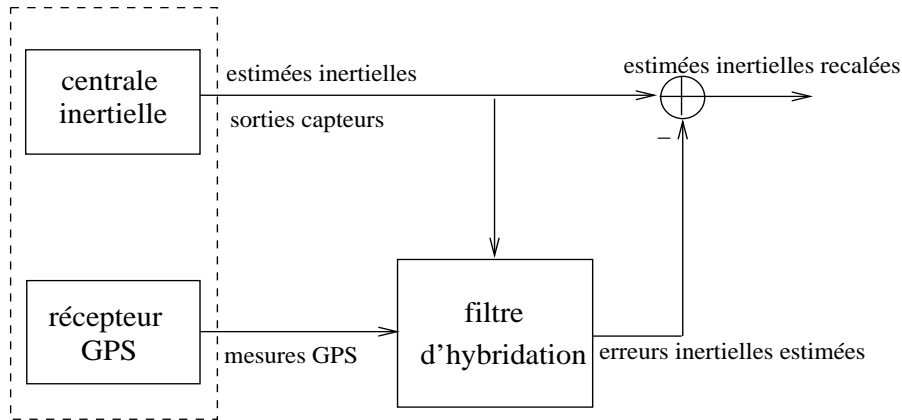


FIG. 2.1 - Architecture d'hybridation retenue.

## 2.4 Modèle d'état

Dans cette partie sont définis les paramètres à estimer pour réaliser le recalage de la centrale inertielle à l'aide des mesures GPS. Pour chacun d'eux, un modèle d'évolution *a priori* est formulé.

### 2.4.1 Choix du vecteur état

L'architecture d'hybridation adoptée détermine le modèle de filtrage. Le vecteur état est ainsi formé à la fois des erreurs d'estimation inertielles et des paramètres de navigation GPS inconnus. La dérive inertielle provient essentiellement d'erreurs survenues lors de la calibration des accéléromètres et gyromètres, et qui se propagent du fait des intégrations successives pratiquées par le calculateur inertiel. Ces erreurs de mesure doivent être estimées conjointement aux erreurs de navigation et viennent compléter le vecteur état qui est finalement défini de la manière suivante :

$$\mathbf{X}_t = (\delta \mathbf{x}_t^T, \delta \mathbf{u}_t^T, \delta \mathbf{x}_{\text{gps},t}^T)^T,$$

où :

- le vecteur  $\delta \mathbf{x}_t$  ( $\delta \mathbf{x}_t = (\delta \mathbf{p}_t, \delta \mathbf{v}_{e,t}^n, \boldsymbol{\rho}_t)$ ) représente les erreurs de navigation inertielle en position  $\delta \mathbf{p}_t = (\delta \lambda_t, \delta \Phi_t, \delta h_t)$ , vitesse  $\delta \mathbf{v}_{e,t}^n = (\delta v_{n,t}, \delta v_{e,t}, \delta v_{d,t})$  et attitude  $\boldsymbol{\rho}_t = (\delta \varphi_t, \delta \theta_t, \delta \psi_t)$ . Elles sont exprimées comme la différence entre les paramètres réels  $\mathbf{x}_t$  et les estimés calculés par la centrale inertielle  $\widehat{\mathbf{x}}_t^{\text{ins}}$  :  $\delta \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t - \widehat{\mathbf{x}}_t^{\text{ins}}$ .

**Remarque :** par la suite, on note  $\widehat{(\cdot)}^{\text{ins}}$  une grandeur estimée par la centrale inertielle et  $\widetilde{(\cdot)}^{\text{ins}}$  une grandeur mesurée par les capteurs inertiels.

- le vecteur  $\delta \mathbf{u}_t = (\mathbf{b}_{a,t}, \mathbf{b}_{g,t})$  regroupe les erreurs de mesure affectant respectivement les sorties des accéléromètres  $\mathbf{f}_{a,t}$  et des gyromètres  $\boldsymbol{\Omega}_{g,t}$ . Ces vecteurs comportent tous trois composantes correspondant aux axes principaux des trois gyromètres et des trois accéléromètres. Dans cette étude, nous nous sommes limités à des erreurs de calibration

de type biais :

$$\mathbf{b}_{a,t} = \tilde{\mathbf{f}}_{a,t}^{\text{ins}} - \mathbf{f}_{a,t} + \boldsymbol{\epsilon}_{a,t}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{b}_{g,t} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{g,t}^{\text{ins}} - \boldsymbol{\Omega}_{g,t} + \boldsymbol{\epsilon}_{g,t}, \quad (2.2)$$

où les vecteurs  $\boldsymbol{\epsilon}_{a,t} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_a^2 \mathbf{I}_3)$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_{g,t} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_g^2 \mathbf{I}_3)$  désignent des bruits de mesure.

- le vecteur  $\delta \mathbf{x}_{\text{gps},t}$  est formé des paramètres GPS inconnus : le biais  $b_t$  et la dérive d'horloge du récepteur GPS  $\dot{b}_t$ .

## 2.4.2 Modèle de propagation des erreurs inertielles

Nous proposons tout d'abord une analyse rapide des principales sources d'erreur en navigation inertielle et de leur impact sur les estimés de position, vitesse et attitude calculés. Puis, les équations de dynamique des erreurs inertielles sont démontrées plus rigoureusement.

### 2.4.2.1 Sources d'erreurs

Les centrales inertielles intègrent les mesures des accéléromètres par rapport à un repère de référence dont l'orientation est définie par les mesures des gyromètres. Il en résulte principalement deux types d'erreurs :

- **les erreurs d'intégrations**

A court terme, un biais accélérométrique entraîne une divergence linéaire en vitesse et quadratique en position.

- **les erreurs de projection**

Les imprécisions sur les mesures gyrométriques conduisent à une évaluation erronée

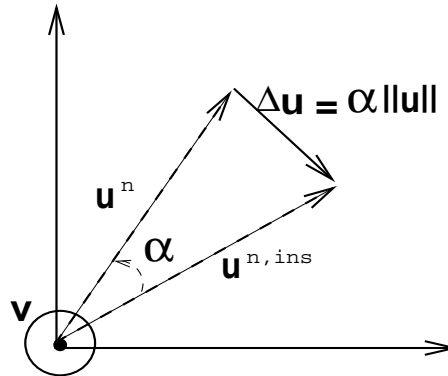


FIG. 2.2 - Erreurs de projection.

de la matrice de passage du repère de mesure au repère de navigation et donc à des erreurs de projection. Le repère de navigation réel et celui calculé par la CI ne sont pas confondus et il existe une rotation de vecteur  $\mathbf{v}$  et d'angle  $\alpha$  les liant. Soient  $\mathbf{u}^n$  et  $\mathbf{u}^{n,ins}$  les projections respectives d'un vecteur  $\mathbf{u}$  dans le repère réel et le repère estimé, la relation suivante est vérifiée :

$$\mathbf{u}^{n,ins} = (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\alpha}\wedge])\mathbf{u}^n. \quad (2.3)$$

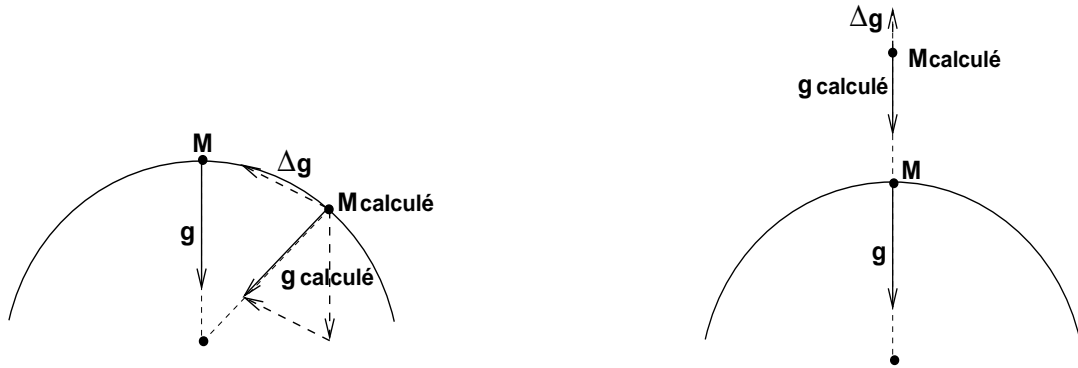
Dans cette expression,  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{v}$  et la notation  $[\boldsymbol{\alpha}\wedge]$  désigne la matrice antisymétrique associée au produit vectoriel de la façon suivante :  $[\boldsymbol{\alpha}\wedge] \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{u}$ . La formule (2.3)

signifie qu'une erreur de vitesse angulaire dans une direction donnée entraîne une erreur de projection dans le plan perpendiculaire, de module proportionnel au module du vecteur projeté et à l'erreur angulaire. Cette remarque est illustrée sur la figure (2.2). Du point de vue des matrices de passage, la relation (2.3) se traduit de la façon suivante :

$$\hat{R}_{m2n}^{\text{ins}} = (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\alpha}\wedge])R_{m2n} \Rightarrow \delta R_{m2n} = [\boldsymbol{\alpha}\wedge] \hat{R}_{m2n}^{\text{ins}}. \quad (2.4)$$

Cette relation sera utile au calcul des équations d'erreurs inertielles.

Du fait des couplages entre les différents paramètres cinématiques, les erreurs d'estimation se propagent rapidement. Ainsi, l'erreur de positionnement induit une compensation inexacte de la force de gravité et se répercute sur le calcul suivant de la position et de la vitesse. Ce phénomène caractéristique, représenté sur la figure (2.3), est appelé phénomène de **Schüler**. Il provoque un comportement oscillatoire pour les erreurs de position horizontales et divergeant pour les erreurs verticales. Ce résultat peut être démontré rigoureusement à partir des



L'erreur horizontale équivaut à une force de rappel. L'erreur verticale équivaut à une force répulsive.

**FIG. 2.3** - Phénomène de Schüler

équations du mouvement.

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{r}$  la position du véhicule. En ne considérant que les erreurs dues à la compensation de la gravité, on peut écrire :

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_i = \mathbf{f}_a + \mathbf{g}(\mathbf{r}) \Rightarrow \delta\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_i = \underbrace{\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{r}}}_{d\mathbf{g}(\mathbf{r})}\delta\mathbf{r}.$$

Or  $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ , où  $k$  est proportionnelle à la constante de gravitation. D'où :

$$d\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^2}d\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + 2\frac{k}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Après projection dans le repère de navigation :

$$\delta\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_i = \frac{g}{r} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \delta\mathbf{r}^n,$$

avec  $g = -\frac{k}{r^2}$ . Cette équation fait apparaître une composante négative de rappel dans le plan horizontal  $-\frac{g}{r}$  et une composante positive  $2\frac{g}{r}$  caractéristique d'un comportement instable selon l'axe vertical.  $\square$

### 2.4.2.2 Équations d'erreurs inertielles

Les équations de dynamique des erreurs de navigation inertielle traduisent les interactions entre les différentes sources d'erreur présentées. Elles sont obtenues en différenciant au premier ordre les équations différentielles de navigation inertielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_t \\ \dot{\mathbf{u}}_t \end{pmatrix} = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t),$$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\mathbf{x}}_t \\ \delta \dot{\mathbf{u}}_t \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_t} \delta \mathbf{x}_t + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_t} \delta \mathbf{u}_t.$$

Cette méthode est connue sous le nom de méthode des petites perturbations.

### Équation d'erreur d'attitude

Elle est obtenue à partir de l'équation différentielle décrivant la cinématique des matrices de changement de repère :

$$\dot{R}_{m2n} = R_{m2n} [\mathbf{\Omega}_{nm}^m \wedge].$$

Un développement de Taylor au premier ordre de cette expression autour des estimés inertielles conduit à :

$$\delta \dot{R}_{m2n} = \delta R_{m2n} [\hat{\mathbf{\Omega}}_{nm}^{m, \text{ins}} \wedge] + \hat{R}_{m2n}^{\text{ins}} [\delta \mathbf{\Omega}_{nm}^m \wedge]. \quad (2.5)$$

Une fois dérivée, la formule (2.4) fournit une expression différente de  $\delta \dot{R}_{m2n}$  :

$$\delta R_{m2n} = [\boldsymbol{\rho} \wedge] \hat{R}_{m2n}^{\text{ins}} \Rightarrow \delta \dot{R}_{m2n} = [\dot{\boldsymbol{\rho}} \wedge] \hat{R}_{m2n}^{\text{ins}} + [\boldsymbol{\rho} \wedge] \dot{R}_{m2n}^{\text{ins}}, \quad (2.6)$$

où on rappelle que  $\boldsymbol{\rho}$  est le vecteur formé des erreurs sur les angles d'attitude. En identifiant les expressions (2.5) et (2.6), on peut en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $\boldsymbol{\rho}$  :

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \hat{R}_{m2n}^{\text{ins}} \delta \mathbf{\Omega}_{nm}^{m, \text{ins}}.$$

Le vecteur  $\delta \mathbf{\Omega}_{nm}^{m, \text{ins}}$  peut être scindé pour faire apparaître le biais de mesure des gyromètres :  $\delta \mathbf{\Omega}_{nm}^{m, \text{ins}} = \delta \mathbf{\Omega}_{im}^{m, \text{ins}} - \delta \mathbf{\Omega}_{in}^{m, \text{ins}} = \mathbf{b}_g - \delta \mathbf{\Omega}_{in}^{m, \text{ins}}$ . Finalement :

$$\delta \mathbf{\Omega}_{in}^{m, \text{ins}} = \hat{R}_{n2m}^{\text{ins}} \left( \delta \mathbf{\Omega}_{in}^{n, \text{ins}} - \boldsymbol{\rho} \wedge \hat{\mathbf{\Omega}}_{in}^{n, \text{ins}} \right).$$

L'équation de dynamique pour les angles d'attitude s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} + [\hat{\mathbf{\Omega}}_{in}^{n, \text{ins}} \wedge] \boldsymbol{\rho} = \hat{R}_{m2n}^{\text{ins}} \mathbf{b}_g - \delta \mathbf{\Omega}_{in}^{n, \text{ins}}.$$

Il est à noter que  $\delta \mathbf{\Omega}_{in}^{n, \text{ins}}$  dépend linéairement de  $\delta \mathbf{p}$  et  $\delta \mathbf{v}$ .

### Équation d'erreur de position

Elle se déduit simplement en différenciant l'équation de position inertielle :

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\lambda} \\ \delta \dot{\phi} \\ \delta \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-\hat{v}_n^{\text{ins}}}{(N+\hat{h}^{\text{ins}})^2} \\ \frac{\hat{v}_e^{\text{ins}} \sin(\hat{\lambda}^{\text{ins}})}{(N+\hat{h}^{\text{ins}})^2 \cos(\hat{\lambda}^{\text{ins}})^2} & 0 & \frac{-\hat{v}_e^{\text{ins}}}{(N+\hat{h}^{\text{ins}})^2 \cos(\hat{\lambda}^{\text{ins}})} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \lambda \\ \delta \phi \\ \delta h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{N+\hat{h}^{\text{ins}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+\hat{h}^{\text{ins}})^2 \cos(\hat{\lambda}^{\text{ins}})} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_n \\ \delta v_e \\ \delta v_d \end{pmatrix}.$$

Notons que les erreurs de rayon de courbure  $N$  ont été négligées.

### Équation d'erreur de vitesse

A partir de l'équation de vitesse inertielle, on démontre de la même façon que les erreurs de vitesse obéissent à l'équation différentielle :

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_e^n = \delta R_{m2n} \tilde{\mathbf{f}}_a^{\text{ins}} + \hat{R}_{m2n}^{\text{ins}} \mathbf{b}_a + \delta \mathbf{g} - (\delta \boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\delta \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \wedge \hat{\mathbf{v}}_e^{n,\text{ins}} - (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^{n,\text{ins}} + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^{n,\text{ins}}) \wedge \delta \mathbf{v}_e^n.$$

Explicitons les différents termes :

- L'erreur d'attitude se répercute sur les matrices de passage de la façon suivante :  
 $\delta R_{m2n} = [\boldsymbol{\rho} \wedge] R_{m2n}^{\text{ins}} \mathbf{f}_a.$
- Dans le repère de navigation, l'erreur de pesanteur n'affecte que la composante verticale  $\delta \mathbf{g} = \delta g \mathbf{d}$ . Dans cette étude, le modèle de Somigliana est utilisé pour le champ gravitationnel :

$$g(\lambda, h) = g(\lambda, 0) \left( \frac{R}{R+h} \right)^2,$$

où  $R$  est le rayon terrestre. D'où, en négligeant l'influence de la latitude ( $g$  est environ 200 fois moins sensible à une erreur de latitude que d'altitude) :

$$\delta g \sim -2 \frac{g}{R+h} \delta h.$$

Il suffit enfin de remplacer les produits vectoriels par leurs écritures matricielles équivalentes pour aboutir à l'équation suivante :

$$\boxed{\delta \dot{\mathbf{v}}_e^n + [\hat{\mathbf{v}}_e^{n,\text{ins}} \wedge] (\delta \boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\delta \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) + [(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^{n,\text{ins}} + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^{n,\text{ins}}) \wedge] \delta \mathbf{v}_e^n = - [\tilde{\mathbf{f}}_a^{n,\text{ins}} \wedge] \boldsymbol{\rho} + \hat{R}_{m2n}^{\text{ins}} \mathbf{b}_a + \delta g.}$$

#### 2.4.2.3 Équations d'erreurs d'horloge GPS

La dérive du temps récepteur par rapport au temps de référence GPS provient des instabilités de fréquence de l'horloge récepteur GPS. Un modèle du 2-ième ordre apparaît donc approprié pour décrire le comportement des erreurs d'horloges récepteur :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_t \\ \dot{b}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_t \\ \dot{b}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_t^b \\ v_t^d \end{pmatrix},$$

où  $v_t^b \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$  et  $v_t^d \sim \mathcal{N}(0, \sigma_d^2)$  sont des bruits blancs Gaussiens. Il reste à spécifier les variances des erreurs d'horloges. Leurs dérivées ont fait l'objet d'études empiriques, dont les résultats sont rappelés par exemple dans [FB98] et [BH94]. En première approximation,

$$\begin{aligned} \sigma_b^2 &\simeq h_0/2, \\ \sigma_d^2 &\simeq 2\pi^2 h_{-2}, \end{aligned}$$

où les paramètres  $h_0/2$  et  $h_{-2}$  dépendent du type d'horloge atomique. Leurs valeurs sont répertoriées dans la table (2.2). Ainsi les horloges récepteur, de type crystal, sont beaucoup moins stables que les horloges satellite embarquées de type rubidium. Ce modèle tend cependant à sous-estimer la variance des erreurs d'horloges.

Type d'horloge	$h_0$	$h_{-2}$
compensated crystal	$2 \times 10^{-19}$	$2 \times 10^{-20}$
ovenized crystal	$8 \times 10^{-20}$	$4 \times 10^{-23}$
rubidium	$2 \times 10^{-20}$	$4 \times 10^{-29}$

**TAB. 2.2** - valeurs des paramètres d'horloge.

#### 2.4.2.4 Modèle de biais capteurs

Les biais des capteurs gyrométriques et accélérométriques sont classiquement représentés par des processus de Markov du 1er ordre :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a &= \frac{-1}{\tau_a} \mathbf{b}_a + \mathbf{v}_a, & \mathbf{v}_a &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{b_a}^2 \mathbf{I}_3), \\ \mathbf{b}_g &= \frac{-1}{\tau_g} \mathbf{b}_g + \mathbf{v}_g, & \mathbf{v}_g &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{b_g}^2 \mathbf{I}_3), \end{aligned}$$

avec  $\tau_a$  et  $\tau_g$  qui correspondent aux temps de corrélation de ces processus.

**Remarque** : pour des durées de simulation courtes,  $\mathbf{b}_a$  et  $\mathbf{b}_g$  peuvent être simplement assimilés à des marches aléatoires :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a &= \mathbf{v}_a, \\ \mathbf{b}_g &= \mathbf{v}_g. \end{aligned}$$

#### 2.4.2.5 Modèle d'état complet

Le modèle dynamique complet se déduit en regroupant les équations différentielles établies pour chacune des composantes du vecteur état :

$$\dot{\mathbf{X}}_t = A_t \mathbf{X}_t + B_t \mathbf{v}_t, \text{ avec } \mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{17}),$$

où  $B_t B_t^T = (\mathbf{0}_{1 \times 3}, \sigma_a^2 R_{m2n}, \mathbf{0}_{1 \times 3}, \sigma_g^2 R_{m2n}, \sigma_{b_a}^2 \mathbf{I}_3, \sigma_{b_g}^2 \mathbf{I}_3, \sigma_b^2, \sigma_d^2)$  et où la matrice  $A_t$  est détaillée dans [FB98]. Les données parvenant et étant traitées séquentiellement, la version discrétisée de ce modèle à temps continu est utilisée :

$$\mathbf{X}_t = \tilde{A}_t \mathbf{X}_{t-1} + \tilde{B}_t \mathbf{v}_t.$$

D'après [Nor01], les matrices du modèle à temps discret sont calculées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_t &= \mathbf{I}_{17} + A_t \Delta T, \\ \tilde{B}_t &= \Delta T \left( \mathbf{I}_{17} + \frac{\Delta T}{2} A_t \right) B_t, \end{aligned}$$

où  $\Delta T$  est le pas d'échantillonnage. Par la suite, on note  $n_x$  la dimension du vecteur état.

#### 2.4.3 Modèle de mesure

Le filtre d'hybridation proposé met à profit les mesures GPS pour corriger les sorties inertielles. Le vecteur d'observation  $\mathbf{Y}_t$  est donc composé à chaque instant des pseudo-distances GPS associées aux  $n_y$  satellites en ligne de vue du récepteur :

$$\mathbf{Y}_t = (\rho_1, \dots, \rho_{n_y}),$$

où  $\rho_i$  désigne la pseudo-distance associée au  $i$ -ième satellite. L'équation de mesure s'obtient donc simplement en faisant intervenir explicitement les composantes du vecteur état, à savoir l'erreur de position en coordonnées ellipsoïdales  $(\delta\lambda_t, \delta\phi_t, \delta h_t)$  et le biais d'horloge GPS  $b_t$ , dans l'expression des pseudo-distances proposée dans le premier chapitre de la thèse. Elle s'écrit donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= \mathbf{h}_t(\delta\lambda_t, \delta\phi_t, \delta h_t) + b_t + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R_t), \\ \mathbf{h}_t(\delta\lambda_t, \delta\phi_t, \delta h_t) &= \mathbf{f}_t \circ \mathbf{g}_t(\delta\lambda_t, \delta\phi_t, \delta h_t), \end{aligned}$$

où :

- $\mathbf{f}_t$  est l'expression mathématique des distances satellites/récepteur,

$$\mathbf{f}_t(x_t, y_t, z_t) = \begin{cases} \sqrt{(x_t - x_t^1)^2 + (y_t - y_t^1)^2 + (z_t - z_t^1)^2}, \\ \vdots \\ \sqrt{(x_t - x_t^i)^2 + (y_t - y_t^i)^2 + (z_t - z_t^i)^2}, \\ \vdots \\ \sqrt{(x_t - x_t^{n_y})^2 + (y_t - y_t^{n_y})^2 + (z_t - z_t^{n_y})^2}. \end{cases}$$

Dans cette équation, les triplets  $(x_t, y_t, z_t)$  et  $(x_t^i, y_t^i, z_t^i)$  représentent respectivement la position du véhicule et du  $i$ -ième satellite dans le repère géocentrique.

- $\mathbf{g}_t$  réalise la transformation des coordonnées cartésiennes aux coordonnées ellipsoïdales.

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \mathbf{g}_t(\delta\lambda_t, \delta\phi_t, \delta h_t),$$

avec :

$$\mathbf{g}_t(\delta\lambda_t, \delta\phi_t, \delta h_t) = \begin{cases} (N + \hat{h}_t^{\text{ins}}) \cos(\hat{\lambda}_t^{\text{ins}} + \delta\lambda_t) \cos(\hat{\phi}_t^{\text{ins}} + \delta\phi_t), \\ (N + \hat{h}_t^{\text{ins}}) \cos(\hat{\lambda}_t^{\text{ins}} + \delta\lambda_t) \sin(\hat{\phi}_t^{\text{ins}} + \delta\phi_t), \\ (N + \hat{h}_t^{\text{ins}}) \sin(\hat{\lambda}_t^{\text{ins}} + \delta\lambda_t). \end{cases}$$

Notons que la matrice de covariance du bruit de mesure s'exprime en fonction de l'UERE défini au premier chapitre :  $R_t = \text{UERE}^2 \mathbf{I}_{n_y}$ .

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle de filtrage a été développé en accord avec l'architecture d'hybridation retenue :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t = \tilde{A}_t \mathbf{X}_{t-1} + \tilde{B}_t \mathbf{v}_t, \\ \mathbf{Y}_t = \mathbf{h}_t(\delta\lambda_t, \delta\phi_t, \delta h_t) + b_t + \mathbf{w}_t \end{cases}$$

Le modèle d'état a été obtenu par linéarisation des équations de navigation inertielle. Le modèle de mesure est par contre non linéaire. Il est donc intéressant d'étudier les performances d'un filtre d'hybridation de type particulière. Le chapitre suivant est consacré au développement d'un filtre particulière adapté aux caractéristiques de ce modèle de filtrage.





# Stratégies de filtrage particulaire pour l'hybridation serrée GPS/INS

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>Analyse du modèle de filtrage</b>	<b>41</b>
<b>3.3</b>	<b>Solutions algorithmiques issues de la littérature</b>	<b>43</b>
3.3.1	Bootstrap filter	43
3.3.2	Loi de proposition optimale	44
3.3.3	Le filtre particulaire régularisé	47
3.3.4	Le filtre particulaire Rao-Blackwellisé	48
<b>3.4</b>	<b>Variante algorithmique proposée</b>	<b>52</b>
3.4.1	Critère de régularisation	52
3.4.2	Contrôle de la régularisation	54
<b>3.5</b>	<b>Étude des performances des algorithmes</b>	<b>57</b>
3.5.1	Simulation des données	58
3.5.2	Scénarios de test	58
3.5.3	Critère de performance	58
3.5.4	Analyse des résultats	60
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>67</b>

---

## 3.1 Introduction

A l'issue du chapitre précédent, un modèle d'hybridation serrée GPS/INS a été proposé. Il est classiquement utilisé par un filtre de Kalman étendu pour calculer récursivement la solution de navigation hybride. La non linéarité du modèle de mesure permet d'espérer un gain en précision et robustesse en remplaçant le filtre de Kalman étendu par un filtre non linéaire. Cependant, les caractéristiques de ce modèle de filtrage rendent inopérantes les stratégies classiques de filtrage particulaire. Ce chapitre débute donc par une brève étude du modèle de filtrage qui permet de mettre en évidence ses contraintes et les difficultés algorithmiques qui s'ensuivent. Il se poursuit par une sélection de solutions algorithmiques proposées dans la littérature dont le filtre particulaire régularisé (RPF). Enfin, notre contribution est un algorithme de filtrage particulaire original dédié à l'hybridation GPS/INS, qui se présente comme une extension du RPF.

## 3.2 Analyse du modèle de filtrage

### Un système instable

Les différentes interactions entre les composantes du vecteur état rendent difficile à appréhender le comportement de chacun des paramètres. Pour mettre en évidence les particularités du modèle de filtrage, nous proposons ici un modèle d'état simplifié négligeant les effets de

rotation de la terre et supposant découplées les directions Nord, Sud et Est définies par les axes du repère de navigation. On obtient :

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \\ \epsilon \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_s} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -g \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta v \\ \epsilon \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b_a \\ b_g \end{pmatrix}}_B,$$

où :

- $\delta x$  désigne indifféremment l'erreur de position Nord  $\delta x_n = N\delta\lambda$ , Est  $\delta x_e = N \cos(\hat{\lambda}^{\text{ins}})\delta\phi$  ou verticale  $\delta x_h = \delta h$ ,
- $\delta v$  est l'erreur de vitesse,
- $\epsilon$  est l'erreur de projection dans le plan perpendiculaire,
- $b_a$  et  $b_g$  sont les composantes des biais accélérométriques et gyrométriques sur l'axe de projection considéré.

La solution de ce système d'équations est de la forme :

$$\mathbf{X}_s(t) = \exp(F(t - t_0))\mathbf{X}_s(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(F(t - u))Bdu,$$

c'est-à-dire pour des conditions initiales nulles :

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq \frac{\Delta T^2}{2}b_a - gb_g \frac{\Delta T^3}{3}, \\ v(t) &\simeq b_a\Delta T - gb_g \frac{\Delta T^2}{2}, \\ \epsilon(t) &\simeq b_g\Delta T + b_a \frac{\Delta T^2}{2R}, \end{aligned}$$

où  $\Delta T = t - t_0$ . On constate que l'erreur de vitesse angulaire  $b_g$  entraîne une dérive quadratique de la vitesse et cubique de la position, alors que le biais accélérométrique se traduit par une dérive linéaire de la position et quadratique de la position. Pour des simulations de courtes durées, les erreurs de navigation inertielles apparaissent donc **exponentiellement divergentes**.

### Un faible bruit d'état

Le bruit d'état affectant les erreurs de position et de vitesse est faible car il provient essentiellement de l'intégration du bruit de mesure perturbant les accéléromètres. Cette caractéristique est un facteur connu de dégénérescence des filtres particulières.

### Dimension du vecteur état

Le vecteur état à estimer pour réaliser l'hybridation GPS/INS est de grande dimension (17 composantes). En pratique, il faudra donc utiliser beaucoup de particules pour obtenir une bonne précision des estimés. Une alternative consiste à essayer de réduire la dimension de l'espace état en mettant à profit certaines propriétés du système étudié. Une partition appropriée du vecteur état permet de scinder le modèle de filtrage en une partie linéaire et une partie non linéaire. Soit  $\mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_t^1, \mathbf{X}_t^2, \mathbf{X}_t^3)$ , avec

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t^1 &= (\mathbf{v}_{n,t}^e, \boldsymbol{\rho}_t, \mathbf{b}_{a,t}, \mathbf{b}_{g,t}), \\ \mathbf{X}_t^2 &= (\lambda_t, \Phi_t, h_t), \\ \mathbf{X}_t^3 &= (b_t, \dot{b}_t). \end{aligned}$$

La décomposition par blocs du modèle de filtrage fait apparaître une structure conditionnellement linéaire Gaussienne :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_t^1 \\ \mathbf{X}_t^2 \\ \mathbf{X}_t^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,t} & C_{2,t} & [0] \\ C_{1,t} & A_{2,t} & [0] \\ [0] & [0] & A_{3,t} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_t} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{t-1}^1 \\ \mathbf{X}_{t-1}^2 \\ \mathbf{X}_{t-1}^3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B_{1,t} & [0] & [0] \\ [0] & B_{2,t} & [0] \\ [0] & [0] & B_{3,t} \end{pmatrix}}_{\tilde{B}_t} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_t^1 \\ \mathbf{v}_t^2 \\ \mathbf{v}_t^3 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{X}_t^2) + D_{3,t}\mathbf{X}_t^3 + \mathbf{w}_t, \quad (3.2)$$

où  $D_{3,t} = [\mathbf{1}_{n_y \times 1}, \mathbf{0}_{n_y \times 1}]$ . Il est alors possible d'avoir recours à des stratégies de filtrage particulières dites Rao-Blackwellisées pour lesquelles la partie linéaire du modèle est résolue analytiquement par filtrage de Kalman.

### Un modèle d'état approché

Le modèle d'état décrivant la dynamique des erreurs inertielles résulte de la linéarisation des équations de navigation inertielles et reproduit donc imparfaitement la dynamique des paramètres à estimer. Ce modèle *a priori* n'est donc pas un choix judicieux pour faire évoluer les particules, au risque de les générer dans des régions peu intéressantes de l'espace état.

Une bonne compréhension du système étudié va permettre de mettre au point des stratégies de filtrage particulière efficaces. Dans un premier temps sont présentés des algorithmes issus de la littérature, puis des extensions sont développées pour pallier leurs limitations.

## 3.3 Solutions algorithmiques issues de la littérature

Le faible bruit d'état et le comportement dynamique instable des paramètres d'état concourent à faire diverger un algorithme particulière de type "bootstrap filter". Des variantes algorithmiques plus appropriées sont tout d'abord proposées dans cette partie. Elles sont fondées sur des stratégies efficaces de simulation et rééchantillonnage des particules. Enfin, le filtre particulière Rao-Blackwellisé permettant de traiter les modèles conditionnellement linéaires Gaussiens est détaillé.

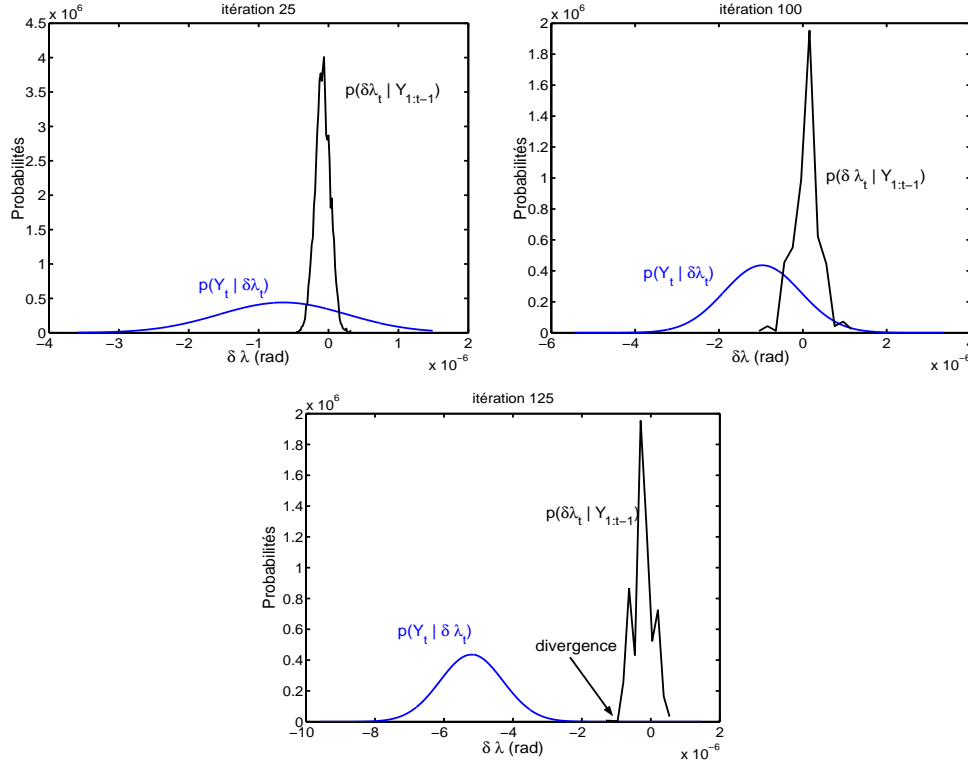
### 3.3.1 Bootstrap filter

Une étape clé dans le développement d'un algorithme de filtrage particulière est le choix de la distribution de proposition. La loi *a priori* des paramètres inconnus apparaît à la fois comme le choix le plus simple et le plus immédiat. Sa mise en œuvre aisée a incité bon nombres d'auteurs à l'adopter, tels [HM69], [Han98] ou [Tan98]. En particulier, elle conduit à une expression simple des poids d'importance :

$$w_t^{(i)} \propto p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{1:t}, \mathbf{Y}_{1:t-1}).$$

Cette approche est à l'origine de l'algorithme dit "Bootstrap filter" présenté dans [GSS93]. Il consiste à simuler plusieurs vecteurs état candidats selon le modèle d'état, puis à les sélectionner au vu de leur vraisemblance par rapport à la mesure reçue. La contrepartie de cette simplicité est une perte de performance, l'espace d'état étant exploré aveuglément sans prendre en compte l'information apportée par la nouvelle mesure. Pour notre application, le "Bootstrap filter" conduit à une dégénérescence des poids. Le modèle d'état est en effet approché et exponentiellement instable. Les particules générées selon la loi *a priori* tendent donc

à s'écarter les unes des autres et sont progressivement toutes localisées dans des régions de faible vraisemblance. Ce phénomène est accentué par le faible bruit d'état qui ne contribue pas à renouveler le nuage de particules qui est de moins en moins représentatif de la loi cible. Cette divergence est illustrée sur la figure 3.1 où est représentée en bleu la vraisemblance en fonction de l'erreur de latitude et en noir la densité de probabilité prédite (c'est-à-dire l'histogramme normalisé des particules simulées) pour un scénario classique de navigation INS/GPS. Il apparaît que peu à peu les régions de forte vraisemblance sont dépourvues de particules et



**FIG. 3.1** - Non recouvrement des supports de la vraisemblance et de la densité de probabilité prédite.

le filtre particulaire fournit une estimation insatisfaisante de la loi cible.

### 3.3.2 Loi de proposition optimale

Une solution pour pallier le problème de divergence consiste à prendre en compte la mesure nouvellement reçue pour simuler les particules. Ainsi, celles-ci sont guidées vers les zones de forte vraisemblance de l'espace état. Dans [Dou98], la loi de proposition :

$$\pi \left( \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t} \right) = p \left( \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t} \right), \text{ pour } i = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

(où  $N$  est le nombre de particules) est préconisée. Cette distribution minimise la variance des poids non normalisés conditionnellement à l'état précédent et à la mesure, c'est-à-dire qu'elle prévient une trop grande dispersion du nuage de particules. Néanmoins, elle est généralement non standard et connue à une constante de normalisation près. En effet, d'après la loi de Bayes :

$$p \left( \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t} \right) = \frac{1}{C} p \left( \mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1} \right) p \left( \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)} \right), \quad (3.4)$$

**Initialisation :**

- Pour  $i = 1, \dots, N$  :  $\mathbf{X}_0^{(i)} \sim p(\mathbf{X}_0)$ .

**Itération  $t$  :**

- Propagation :  
pour  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\mathbf{X}_t^{(i)} \sim p\left(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}\right), \text{ et } \mathbf{X}_{0:t}^{(i)} = \left(\mathbf{X}_t^{(i)}, \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}\right).$$

- Pondération :  
pour  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{Y}_{1:t}), \text{ et } w_t^{(i)} = \tilde{w}_t^{(i)} / \left(\sum_{k=1}^N \tilde{w}_t^{(k)}\right).$$

$$p(\mathbf{X}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) = \sum_{k=1}^N w_t^{(k)} \delta\left(\mathbf{X}_{0:t} - \mathbf{X}_{0:t}^{(k)}\right)$$

- Sélection : rééchantillonnage des particules selon la loi discrète estimée.

**TAB. 3.1** - Algorithme "Bootstrap"

avec  $C > 0$ . Enfin, cette loi conduit à des poids d'importance de la forme :

$$w_t^{(i)} \propto \omega_{t-1}^{(i)} p\left(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}\right), \quad (3.5)$$

$$p\left(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}\right) = \int p\left(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}\right) p\left(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}\right) d\mathbf{X}_t, \quad (3.6)$$

qui sont généralement difficiles à évaluer du fait de l'intégrale multidimensionnelle (3.6).

Plusieurs méthodes sous-optimales ont été présentées dans la littérature pour proposer des particules plus pertinentes en accord avec l'information apportée par la mesure.

**Filtre particulaire avec linéarisation locale**

Cette approche s'applique à des modèles de filtrage non linéaires présentant des bruits d'état et d'observation à la fois additifs et Gaussiens. Elle découle des remarques suivantes :

- si la non linéarité provient seulement de l'équation d'état, la loi de proposition optimale est aussi une loi Gaussienne. L'équation (3.4) permet alors d'en calculer les moments du 1er et 2nd ordre.
- Si l'équation de mesure est non linéaire, une linéarisation locale autour de la particule courante suffit à obtenir une approximation Gaussienne de la loi de proposition optimale (3.3).

Considérons le cas de l'hybridation GPS/INS. Soit  $\mathbf{X}_{t|t-1}^{(i)} = \tilde{A}_t \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}$  les particules prédites. Après linéarisation, le modèle de filtrage prend la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \tilde{A}_t \mathbf{X}_{t-1} + \tilde{B}_t \mathbf{v}_t, \\ \mathbf{Y}_t &= H_t^{(i)} \left(\mathbf{X}_{2,t} - \mathbf{X}_{2,t|t-1}^{(i)}\right) + \mathbf{h}_t \left(\mathbf{X}_{2,t|t-1}^{(i)}\right) + D_{3,t} \mathbf{X}_{3,t|t-1}^{(i)} + \mathbf{w}_t, \end{aligned}$$

où  $H_t^{(i)} = \nabla \mathbf{h}_t \mathbf{X}_{2,t|t-1}^{(i)}$  et on rappelle que  $\mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_{1,t}, \mathbf{X}_{2,t}, \mathbf{X}_{3,t})$  et  $E(\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^T) = R_t$ .

Alors  $p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t}) \simeq \mathcal{N}(\mathbf{m}_t, \Sigma_t)$ , avec :

$$\begin{aligned} \Sigma_t^{-1} &= \left( \tilde{B}_t \tilde{B}_t^T \right)^{-1} + \left( \tilde{H}_t^{(i)} \right)^T R_t^{-1} \tilde{H}_t^{(i)}, \\ \mathbf{m}_t &= \Sigma_t \left( \left( \tilde{H}_t^{(i)} \right)^T R_t^{-1} \left( \mathbf{Y}_t - \mathbf{h}_t \left( \mathbf{X}_{2,t|t-1}^{(i)} \right) + H_t^{(i)} \mathbf{X}_{2,t|t-1}^{(i)} \right) + \left( \tilde{B}_t \tilde{B}_t^T \right)^{-1} \tilde{A}_t \mathbf{X}_{t-1}^{(i)} \right), \end{aligned}$$

et  $\tilde{H}_t^{(i)} = \left[ 0_{n_y \times 12}, H_t^{(i)}, D_{3,t} \right]$ .

### Filtre particulaire avec méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC)

La méthode précédente suppose que la loi de proposition optimale peut être correctement approchée par une loi Gaussienne. Une alternative consiste à utiliser des méthodes de MCMC telles que l'algorithme d'acceptation-rejet ou l'échantillonnage pondéré pour simuler directement les particules selon cette loi.

### Filtre à particules auxiliaires

Une variante algorithmique a été proposée dans [PS99] pour prendre en compte les mesures lors de l'étape de simulation des particules sans avoir recours à la distribution de proposition optimale. L'idée est de ne propager que les particules de descendants les plus vraisemblables. Dans le "Bootstrap filter", la succession des étapes de rééchantillonnage et propagation équivaut à simuler les nouvelles particules selon la loi de mélange suivante :

$$\hat{p}(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^N \pi_t^{(i)} p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}),$$

avec  $\pi_t^{(i)} = w_{t-1}^{(i)}$ . L'article fondateur [PS99] propose de modifier les probabilités de mélange  $\pi_t^{(i)}$  en fonction de l'information apportée par les mesures :

$$\pi_t^{(i)} = w_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}),$$

où  $p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1})$  est la vraisemblance prédite. Comme il est généralement impossible de calculer ce terme analytiquement, une approximation de la forme  $p(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\mu}_t^{(i)})$  est généralement utilisée, où  $\boldsymbol{\mu}_t^{(i)}$  est un paramètre caractérisant la loi *a priori*  $p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1})$  (par exemple sa moyenne ou son mode). Cet algorithme est dit "filtre à particule auxiliaire" car le tirage des particules s'effectue dans un espace de plus grande dimension que l'espace-état. Ce sont en effet des couples  $(\mathbf{X}_t^{(i)}, j^i)_{i=1, \dots, N}$  qui sont simulés, où  $j^i$  représente les composantes de la loi de mélange ou de façon équivalente l'indice des particules propagées.

$$\begin{aligned} j^i &\sim \sum_{k=1}^N \pi_{t-1}^{(k)} \delta(k - j^i), \\ \mathbf{X}_t^{(i)} &\sim p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}^{(j^i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}), \end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, N$ . Les poids sont alors mis à jour selon la formule :

$$w_t^{(i)} \propto \frac{p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_t^{(j^i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1})}{p(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\mu}_t^{(j^i)})}.$$

La principale limitation de cette stratégie provient de l'approximation  $p(\mathbf{Y}_t|\boldsymbol{\mu}_t^{(i)})$  de la vraisemblance prédite. En effet, pour des problèmes relativement complexes,  $\boldsymbol{\mu}_t^{(i)}$  s'avère souvent insuffisant pour décrire la loi *a priori*. Une alternative consiste à combiner le filtre à particule auxiliaire avec la méthode de linéarisation locale. Les probabilités de mélange sont alors choisies égales à :

$$\pi_t^{(i)} = w_{t-1}^{(i)} \widehat{p}(\mathbf{Y}_t|\mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}),$$

où  $\widehat{p}(\mathbf{Y}_t|\mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1})$  désigne une approximation de la vraisemblance prédite obtenue par linéarisation.

Les techniques de simulation présentées ci-dessus sont des outils efficaces pour proposer des particules pertinentes en dépit de l'imprécision du modèle d'état. Elles ne permettent cependant pas de s'affranchir des problèmes liés au faible bruit d'état. Les filtres particuliers régularisés (RPF) sont une solution facile à mettre en œuvre à ce problème.

### 3.3.3 Le filtre particulaire régularisé

Le rééchantillonnage, quoique introduit pour prévenir la dégénérescence des filtres particuliers, est lui-même un facteur de divergence dans le cas de systèmes présentant un faible bruit de dynamique. Ce problème est lié à la nature discrète de l'approximation empirique. A l'issue de la redistribution, les échantillons de fort poids sont dupliqués, ce qui entraîne un appauvrissement du nuage de particules. Le faible bruit d'état ne permet pas de corriger cette perte de diversité lors de la phase de propagation. A terme, les particules n'occupent plus les régions de forte vraisemblance de l'espace-état et l'algorithme particulaire échoue à poursuivre le vecteur état. Le filtre particulaire régularisé (RPF), proposé par Musso et Oudjane [Oud00], permet de pallier ce problème en modifiant la phase de rééchantillonnage. Le principe est de remplacer l'approximation particulaire discrète par une approximation continue conformément à la théorie de l'approximation non-paramétrique par noyau de densité [Sil86]. Comme illustré sur la figure (3.2), cette approche augmente significativement la capacité exploratoire de l'algorithme. Ainsi, le RPF lisse l'approximation de la loi conditionnelle de l'état sachant les

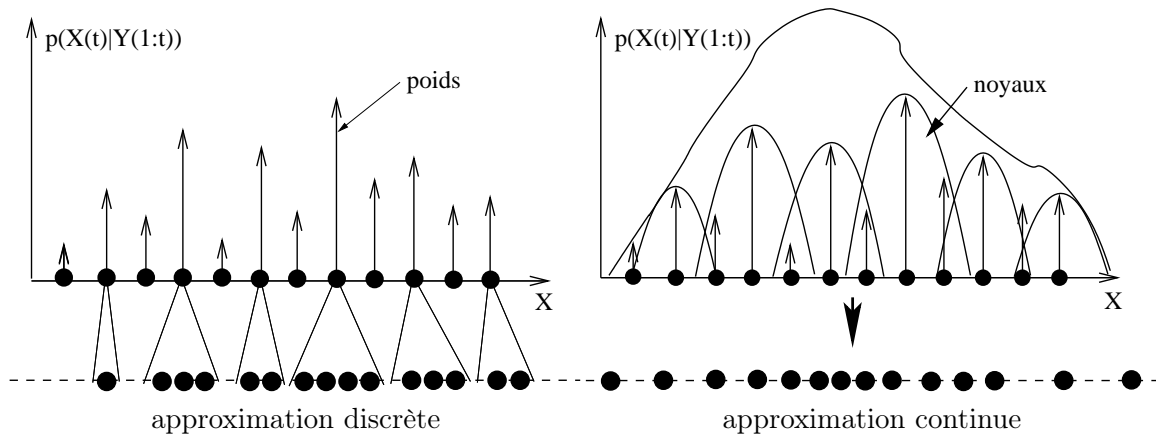


FIG. 3.2 - Rééchantillonnage classique (figure gauche) et rééchantillonnage régularisé (figure droite).

mesures en la convoluant avec un noyau  $K$  qui présente les propriétés suivantes :

$$K \geq 0, \quad \int K(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = 1, \quad \int \mathbf{X} K(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = 0, \quad \int \|\mathbf{X}\|^2 K(\mathbf{X}) d\mathbf{X} < \infty.$$



Soit  $\hat{p}_r$  l'approximation régularisée :

$$\begin{aligned}\hat{p}_r(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_{1:t}) &= K_h(\mathbf{X}_t) * \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^{(i)}), \\ \hat{p}_r(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_{1:t}) &= \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} K_h(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^{(i)}).\end{aligned}$$

Le paramètre  $h$  fixe la taille du noyau de régularisation :  $K_h = (A_t^{-1} \mathbf{X}/h)/h^{n_x}$ , où  $n_x$  est la dimension du vecteur état et  $A_t$  la racine au sens de Cholesky de la matrice de covariance empirique du nuage de particules. Ainsi, aucune direction de régularisation n'est privilégiée. L'efficacité de l'algorithme est conditionnée par le choix du noyau de régularisation et du facteur de dilatation. Ils sont calculés de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre la distribution cible et la distribution lissée (MISE) :

$$MISE(h, K) = \mathbb{E} \left[ \int (\hat{p}_r(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_{1:t}) - p(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_{1:t}))^2 d\mathbf{X}_t \right].$$

Le noyau minimisant la MISE dans le cas où la distribution cible est Gaussienne et de matrice de covariance identité est le noyau d'Epanechnikov défini par :

$$K_{\text{opt}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{n_x+2}{2c_{n_x}} (1 - \|\mathbf{X}\|^2) & \text{si } \|\mathbf{X}\| < 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le facteur  $h$  optimal correspondant vaut :

$$h_{\text{opt}} = A(K_{\text{opt}}) N^{-\frac{1}{n_x+4}}, \quad \text{avec} \quad A(K_{\text{opt}}) = [8c_{n_x}^{-1}(n_x+4)(2\sqrt{\pi})^{n_x}]^{\frac{1}{n_x+4}},$$

où  $c_{n_x}$  est le volume de la sphère unité de  $\mathbb{R}^{n_x}$ . Un choix sous-optimal mais généralement adopté par souci de simplicité est le noyau de régularisation Gaussien. Le paramètre  $h$  est alors ajusté de la façon suivante :

$$h_{\text{opt}} = A(K_{\text{opt}}) N^{-\frac{1}{n_x+4}}, \quad \text{avec} \quad A(K_{\text{opt}}) = (4/(n_x+2))^{\frac{1}{n_x+4}}.$$

Le RPF s'avère efficace pour stabiliser l'algorithme de filtrage particulière aux dépens cependant d'une variance accrue des estimés. En effet, la régularisation revient à ajouter un bruit sur chaque particule. L'idée a déjà été proposée auparavant dans la littérature de façon moins formelle dans [GSS93] et a été reprise par [LW01]. Ainsi, dans [GSS93], les particules simulées sont perturbées par un bruit Gaussien dont l'écart-type est ajusté selon la formule ci-dessous.

$$\text{Pour } j = 1 : n_x, \quad \sigma_j = K |\max_l(\mathbf{X}_{t,j}^{(l)}) - \min_k(\mathbf{X}_{t,j}^{(k)})| N^{-1/n_x}.$$

L'inconvénient majeur du RPF est donc que les particules ne sont plus distribuées selon la densité de probabilité *a posteriori* de l'état sachant les mesures mais selon une approximation de celle-ci.

### 3.3.4 Le filtre particulière Rao-Blackwellisé

Nous avons vu que le modèle d'hybridation GPS/INS présentait des propriétés intéressantes pour développer des algorithmes efficaces de filtrage particulière. Le "filtre particulière Rao-Blackwellisé", présenté indépendamment par Chen et Liu [CL00] et Doucet et Andrieu [DA02], permet de réduire significativement la variance des estimés dans le cas de modèles

conditionnellement linéaires Gaussiens. Cet algorithme consiste à traiter analytiquement la partie linéaire du modèle de filtrage, réduisant ainsi la dimension du vecteur estimé par filtrage particulière.

Rappelons le modèle espace-état étudié :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{1,t} &= A_{1,t}\mathbf{X}_{1,t-1} + C_{2,t}\mathbf{X}_{2,t-1} + B_{1,t}\mathbf{v}_{1,t}, \\ \mathbf{X}_{2,t} &= C_{1,t}\mathbf{X}_{1,t-1} + A_{2,t}\mathbf{X}_{2,t-1} + B_{2,t}\mathbf{v}_{2,t}, \\ \mathbf{X}_{3,t} &= A_{3,t}\mathbf{X}_{3,t-1} + B_{3,t}\mathbf{v}_{3,t}, \\ \mathbf{Y}_t &= \mathbf{h}_t(\mathbf{X}_{2,t}) + D_{3,t}\mathbf{X}_{3,t} + \mathbf{w}_t,\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R_t)$ . Il apparaît avec la partition proposée que :

- $\mathbf{Y}_t$  dépend linéairement de  $\mathbf{X}_{3,t}$  et non linéairement de  $\mathbf{X}_{2,t}$ ,
- $\mathbf{Y}_t$  ne dépend pas de  $\mathbf{X}_{1,t}$ ,
- $\mathbf{X}_{1,t}$  dépend uniquement de  $\mathbf{X}_{2,1:t}$ .

La règle de Bayes conduit à la décomposition suivante de la loi *a posteriori* conjointe :

$$p(\mathbf{X}_{1,t}, \mathbf{X}_{3,t}, \mathbf{X}_{2,0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) = p(\mathbf{X}_{1,t} | \mathbf{X}_{2,0:t}) p(\mathbf{X}_{3,t} | \mathbf{X}_{2,0:t}, \mathbf{Y}_{1:t}) p(\mathbf{X}_{2,0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}).$$

Conditionnellement aux vecteurs  $\mathbf{X}_{0:t,2}$ , les pdfs des vecteurs  $\mathbf{X}_{t,1}$  et  $\mathbf{X}_{t,3}$  sont des lois Gaussiennes dont les moments du 1er et du 2nd ordre peuvent être simplement calculés en appliquant l'algorithme du filtre de Kalman aux sous-modèles suivants :

$$\begin{aligned}(1) \quad &\begin{cases} \mathbf{X}_{1,t} = A_{1,t}\mathbf{X}_{1,t-1} + C_{2,t}\mathbf{X}_{2,t-1} + B_{1,t}\mathbf{v}_{1,t}, \\ \mathbf{X}_{2,t} = C_{1,t}\mathbf{X}_{1,t-1} + A_{2,t}\mathbf{X}_{2,t-1} + B_{2,t}\mathbf{v}_{2,t}, \end{cases} \\ (2) \quad &\begin{cases} \mathbf{X}_{3,t} = A_{3,t}\mathbf{X}_{3,t-1} + B_{3,t}\mathbf{v}_{3,t}, \\ \mathbf{Y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{X}_{2,t}) + D_{3,t}\mathbf{X}_{2,t} + \mathbf{w}_t. \end{cases}\end{aligned}$$

Seuls les vecteurs  $(\mathbf{X}_{2,t})_{t \geq 0}$  sont estimés par filtrage particulière, conduisant à l'approximation suivante :

$$p(\mathbf{X}_{2,0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \delta(\mathbf{X}_{2,0:t} - \mathbf{X}_{2,0:t}^{(i)}).$$

Chacune des particules est alors associée à deux filtres de Kalman traitant analytiquement la partie conditionnellement linéaire du modèle de filtrage. Les lois marginales de  $\mathbf{X}_{t,1}$  et  $\mathbf{X}_{t,3}$  sont approchées par des mélanges de lois Gaussiennes. Pour  $k = 1, 2$ , on obtient :

$$\begin{aligned}p(\mathbf{X}_{k,t} | \mathbf{Y}_{1:t}) &= \int p(\mathbf{X}_{k,t} | \mathbf{X}_{2,0:t}, \mathbf{Y}_{1:t}) p(\mathbf{X}_{2,0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) d\mathbf{X}_{2,0:t}, \\ \hat{p}(\mathbf{X}_{k,t} | \mathbf{Y}_{1:t}) &= \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} p(\mathbf{X}_{k,t} | \mathbf{X}_{2,0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t}).\end{aligned}$$

### Filtre de Kalman (1)

le modèle présente la particularité que la mesure à l'instant  $t$  s'exprime en fonction de l'état à l'instant  $t - 1$ .

Avec les notations :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{2,t} | \mathbf{X}_{2,0:t-1}^{(i)} &\sim \mathcal{N}\left(\widehat{\mathbf{X}}_{2,t|t-1}^{(i)}; P_{2,t|t-1}^{(i)}\right), \\ \mathbf{X}_{1,t-1} | \mathbf{X}_{2,0:t}^{(i)} &\sim \mathcal{N}\left(\widehat{\mathbf{X}}_{1,t-1|t}^{(i)}; P_{1,t-1|t}^{(i)}\right), \\ \mathbf{X}_{1,t} | \mathbf{X}_{2,0:t}^{(i)} &\sim \mathcal{N}\left(\widehat{\mathbf{X}}_{1,t|t}^{(i)}; P_{1,t|t}^{(i)}\right),\end{aligned}$$

les équations du filtre de Kalman mettent à jour les estimés conditionnels de la façon suivante :

1) Prédiction

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_{2,t|t-1}^{(i)} &= C_{1,t}\widehat{\mathbf{X}}_{1,t-1|t-1}^{(i)} + A_{2,t}\mathbf{X}_{2,t-1}^{(i)}, \\ P_{2,t|t-1}^{(i)} &= C_{1,t}P_{1,t-1|t-1}C_{1,t}^T + B_{2,t}B_{2,t}^T,\end{aligned}$$

où  $\mathbf{X}_{2,t-1}^{(i)}$  est la  $i$ -ème particule à l'instant  $t-1$ . 2) Lissage

$$\begin{aligned}K_{1,t}^{(i)} &= \left(P_{1,t-1|t-1}C_{1,t}^T\right)/P_{2,t|t-1}^{(i)}, \\ \widehat{\mathbf{X}}_{1,t-1|t}^{(i)} &= \widehat{\mathbf{X}}_{1,t-1|t-1}^{(i)} + K_{1,t}^{(i)}\left(\mathbf{X}_{2,t}^{(i)} - \widehat{\mathbf{X}}_{2,t|t-1}^{(i)}\right), \\ P_{1,t-1|t}^{(i)} &= \left(\mathbf{I} - K_{1,t}^{(i)}C_{1,t}\right)P_{1,t-1|t-1}^{(i)}.\end{aligned}$$

3) Filtrage

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_{1,t|t}^{(i)} &= A_{1,t}\widehat{\mathbf{X}}_{1,t-1|t}^{(i)} + C_{2,t}\mathbf{X}_{2,t}^{(i)}, \\ P_{1,t|t}^{(i)} &= A_{1,t}P_{1,t-1|t}^{(i)}A_{1,t}^T + B_{1,t}B_{1,t}^T.\end{aligned}$$

### Filtre de Kalman (2)

Comme précédemment, avec les notations :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{3,t}|\mathbf{X}_{2,0:t-1}, \mathbf{Y}_{1:t-1} &\sim \mathcal{N}\left(\widehat{\mathbf{X}}_{3,t|t-1}^{(i)}; P_{3,t|t-1}^{(i)}\right), \\ \mathbf{Y}_t|\mathbf{X}_{2,0:t-1}, \mathbf{Y}_{1:t-1} &\sim \mathcal{N}\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}^{(i)}; S_{t|t-1}^{(i)}\right), \\ \mathbf{X}_{3,t}|\mathbf{X}_{2,0:t}, \mathbf{Y}_{1:t} &\sim \mathcal{N}\left(\widehat{\mathbf{X}}_{3,t|t}^{(i)}; P_{3,t|t}^{(i)}\right),\end{aligned}$$

on obtient l'algorithme suivant :

1) Prédiction

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_{3,t|t-1}^{(i)} &= A_{3,t}\widehat{\mathbf{X}}_{3,t-1|t-1}^{(i)}, \\ P_{3,t|t-1}^{(i)} &= A_{3,t}P_{3,t-1|t-1}^{(i)}A_{3,t}^T + B_{3,t}B_{3,t}^T.\end{aligned}$$

2) Loi de l'innovation

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}^{(i)} &= \mathbf{h}_t\left(\mathbf{X}_{2,t}^{(i)}\right) + D_{3,t}\widehat{\mathbf{X}}_{3,t|t-1}^{(i)}, \\ S_{t|t-1}^{(i)} &= D_{3,t}P_{3,t|t-1}^{(i)}D_{3,t}^T + R_t.\end{aligned}$$

3) Correction

$$\begin{aligned}K_{3,t}^{(i)} &= P_{3,t|t-1}^{(i)}D_{3,t}^T/S_{t|t-1}^{(i)}, \\ \widehat{\mathbf{X}}_{3,t|t}^{(i)} &= \widehat{\mathbf{X}}_{3,t|t-1}^{(i)} + K_{3,t}^{(i)}\left(\mathbf{Y}_t - \widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}^{(i)}\right), \\ P_{3,t|t}^{(i)} &= \left(\mathbf{I} - K_{3,t}^{(i)}D_{3,t}\right)P_{3,t|t-1}^{(i)}.\end{aligned}$$

**Initialisation :** pour  $i = 1, \dots, N$ ,

- $\mathbf{X}_{2,0}^{(i)} \sim p(\mathbf{X}_{2,0})$  et  $w_0^{(i)} = 1/N$ ,
- $\left(\widehat{\mathbf{X}}_{1,0|0}^{(i)}, P_{1,0|0}^{(i)}\right)$  et  $\left(\widehat{\mathbf{X}}_{3,0|0}^{(i)}, P_{3,0|0}^{(i)}\right)$  sont initialisés conformément aux conditions initiales.

**Itération  $t$  :**

- Propagation,
  - pour  $i = 1, \dots, N$  ,
  - Filtre de Kalman (1) : calcul de  $\left(\widehat{\mathbf{X}}_{2,t|t-1}^{(i)}, P_{2,t|t-1}^{(i)}\right)$ ,
  - $\mathbf{X}_{2,t}^{(i)} \sim \mathcal{N}\left(\widehat{\mathbf{X}}_{2,t|t-1}^{(i)}, P_{2,t|t-1}^{(i)}\right)$ .
- Pondération : pour  $i = 1, \dots, N$ ,
  - Filtre de Kalman (2) : calcul de  $\tilde{w}_t^{(i)} \propto w_{t-1}^{(i)} p\left(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{2,0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}\right)$ ,
  - Normalisation des poids :  $w_t^{(i)} = \tilde{w}_t^{(i)} / \left(\sum_{j=1}^N \tilde{w}_t^{(j)}\right)$ .
- Calcul des estimés :
  - $\widehat{\mathbf{X}}_{2,t} = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \mathbf{X}_{2,t}^{(i)}$   
 Pour  $i = 1, \dots, N$ ,
    - Filtre de kalman (1)  $\Rightarrow$  calcul de  $\left(\widehat{\mathbf{X}}_{1,t|t}^{(i)}, P_{1,t|t}^{(i)}\right)$ .
    - Filtre de kalman (2)  $\Rightarrow$  calcul de  $\left(\widehat{\mathbf{X}}_{3,t|t}^{(i)}, P_{3,t|t}^{(i)}\right)$ .
  - $\widehat{\mathbf{X}}_{1,t} = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \widehat{\mathbf{X}}_{1,t|t}^{(i)}$
  - $\widehat{\mathbf{X}}_{3,t} = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \widehat{\mathbf{X}}_{3,t|t}^{(i)}$
- Sélection : rééchantillonnage des particules selon la loi discrète estimée.

**TAB. 3.2** - Algorithme : filtre particulaire Rao-Blackwellisé.

De ces équations se déduit l'algorithme de filtrage particulaire Rao-Blackwellisé résumé dans la table (3.2). Il est présenté dans le cas où la partie non linéaire est résolue à l'aide d'un filtre "bootstrap" mais peut être facilement généralisé à toute autre stratégie de filtrage particulaire.

Si cet algorithme permet de réduire le nombre de particules nécessaires pour un niveau de précision donné, il est tout de même plus coûteux calculatoirement qu'un filtre particulaire classique car il met en jeu un banc de filtres de Kalman. Son intérêt réside essentiellement en une diminution de la variance des estimés.

Pour réaliser l'hybridation, nous proposons d'utiliser un algorithme Rao-Blackwellisé dont la partie filtrage particulaire combine :

- prise en compte de l'information de mesure lors de la simulation des particules,
- régularisation du rééchantillonnage.

### 3.4 Variante algorithmique proposée

L'algorithme développé est une extension du filtre particulaire régularisé. Les améliorations apportées visent à limiter la perte de précision due au lissage. Pour ce faire sont introduits :

- un critère de dégénérescence conditionnant le recours à la régularisation,
- une étape de Métropolis-Hastings (MH) pour accepter/rejeter les particules issues de la régularisation.

Par souci de clarté, nous nous affranchissons du formalisme de la Rao-Blackwellisation pour présenter la méthode. L'algorithme général s'obtient en modifiant la partie filtrage particulaire du filtre Rao-Blackwellisé.

#### 3.4.1 Critère de régularisation

L'idée est de ne pas recourir systématiquement à la procédure de régularisation qui tend à dégrader les estimés en termes de variance. Nous proposons donc de ne l'appliquer qu'en cas de dégénérescence du filtre.

##### Indicateur de dégénérescence

L'indicateur généralement utilisé pour contrôler la dégénérescence des algorithmes de filtrage particulaire est la taille efficace de l'échantillon  $N_{\text{eff}}$ , qui permet de décider de l'opportunité d'un rééchantillonnage en fonction de la variance du nuage de particules. Ce critère s'avère cependant souvent inapproprié pour détecter les instabilités causées par un faible bruit d'état. Nous avons vu que dans ce cas les divergences proviennent d'un faible recouvrement des supports de la fonction de vraisemblance et de la densité de probabilité prédite. Ainsi, les particules se retrouvent progressivement toutes localisées dans des zones de faible vraisemblance. L'étape de normalisation des poids rend cependant cette perte de représentativité transparente du point de vue de  $N_{\text{eff}}$ . Intuitivement, la valeur moyenne des poids non normalisés fournirait un meilleur indicateur de divergence. Ce résultat peut être retrouvé de façon plus rigoureuse. L'idée est d'étudier la vraisemblance prédite  $L_t = \hat{p}(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1})$  qui est définie ainsi :

$$L_t = \int p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_{1:t-1}) \hat{p}(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) d\mathbf{X}_t,$$

où  $\hat{p}(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^N w_{t|t-1}^{(i)} \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^{(i)})$  est l'estimé de la loi de prédiction calculé par le filtre particulaire.  $L_t$  traduit la cohérence entre la mesure reçue et son estimation par le filtre particulaire. Selon la distribution de proposition utilisée, l'expression des poids  $w_{t|t-1}^{(i)}$  varie conformément à la règle de l'échantillonnage pondéré. De façon générique, pour  $i = 1, \dots, N$ , la mise à jour des poids se fait de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{t|t-1}^{(i)} &= w_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) / q(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t}), \\ w_{t|t-1}^{(i)} &= \tilde{w}_{t|t-1}^{(i)} / \sum_{k=1}^N \tilde{w}_{t|t-1}^{(k)}. \end{aligned}$$

Si la loi *a priori* de l'état est choisie comme loi d'évolution des particules, on obtient :

$$\tilde{w}_{t|t-1}^{(i)} = w_{t-1}^{(i)}.$$

Par contre, si la loi de proposition optimale est utilisée, on a :

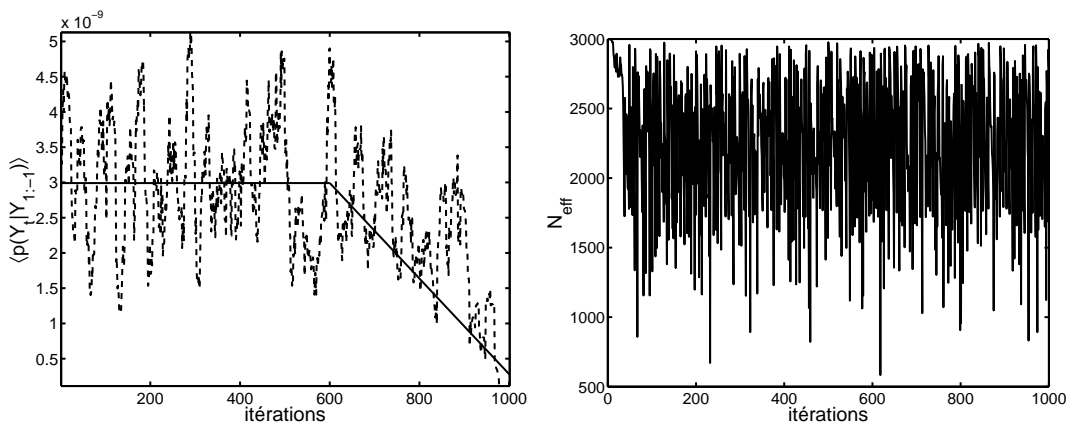
$$\tilde{w}_{t|t-1}^{(i)} = w_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) / p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t}).$$

Dans tous les cas, la vraisemblance estimée prend la forme :

$$L_t = \sum_{i=1}^N p\left(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}\right) w_{t|t-1}^{(i)}.$$

On reconnaît, à une constante près, la somme des poids non normalisés.

En première approximation, on peut supposer que la divergence du filtre se traduit par un changement de moyenne du processus  $L_t$ . Ce comportement se vérifie aisément par simulation. Les courbes de la figure 3.3 ont été obtenues pour un filtre d'hybridation GPS/INS de type "Bootstrap". La dégénérescence de l'algorithme, à partir de l'instant 600, s'accompagne effectivement d'une dérive progressive de la vraisemblance prédite. A l'inverse, elle n'a pas d'impact significatif sur la taille efficace de l'échantillon. Nous proposons de contrôler les valeurs du processus  $L_t$  pour n'appliquer la régularisation que si nécessaire.



**FIG. 3.3** - Dégénérescence due à un faible bruit d'état.  
 Courbe gauche : moyenne glissante de la vraisemblance estimée,  
 Courbe droite : taille effective de l'échantillon.

### Règle de décision

Un des algorithmes les plus utilisés en surveillance de processus est l'algorithme des sommes cumulées, connu sous le nom de CUSUM. Il est particulièrement indiqué dans ce cas car adapté aussi bien à des ruptures abruptes qu'à des ruptures plus douces. Les changements de moyenne sont détectés en ligne à partir d'une statistique de test égale au cumul des écarts entre le processus et sa valeur moyenne estimée. Ce terme croît rapidement en présence d'une anomalie et évolue sinon comme une marche aléatoire. Pour gérer à la fois les augmentations et diminutions de moyenne, un algorithme cusum bilatéral pratiquant deux tests en parallèle (statistiques  $T_t^1$  et  $T_t^2$ ) est préconisé. Il est décrit dans le tableau (3.3).

Le paramètre  $\nu$  est destiné à corriger la dérive due à la marche aléatoire. Les valeurs de  $\nu$  et  $h$  permettent de régler le compromis entre les fausses alarmes et le retard de détection. Pour cette application, il est crucial de détecter au plus tôt une dégénérescence alors qu'il n'est pas trop pénalisant de régulariser plus que nécessaire. Les paramètres  $\nu$  et  $h$  seront donc choisis relativement petits. Les figures 3.4 illustrent le comportement de l'algorithme appliqué à l'hybridation GPS/INS. La courbe de gauche met en évidence de brusques décroissances dans la moyenne du processus  $L_t$ , aussitôt corrigées par la régularisation. La courbe de droite reproduit l'évolution de la statistique de test  $T_t^2$  qui est réinitialisée à 0 chaque fois que le seuil de décision est atteint.

**Initialisation :**  $t_0, T_0^1, T_0^2 = 0$ .

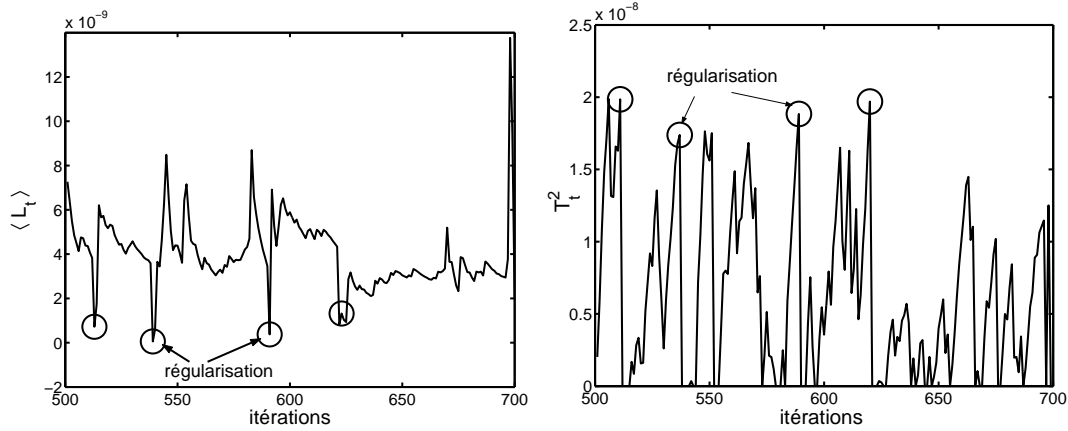
**Itération  $t$  :**

$$\begin{aligned}\langle L_t \rangle &= \frac{1}{t - t_0} \sum_{k=t_0+1}^t L_k, \\ r_t &= L_t - \langle L_t \rangle, \\ T_t^1 &= \max(T_{t-1}^1 + r_t - \nu, 0), \\ T_t^2 &= \max(T_{t-1}^2 - r_t - \nu, 0),\end{aligned}$$

Si  $(T_t^1 > h)$  ou  $(T_t^2 > h)$ ,

- alarme : détection d'un changement de moyenne,
- $T_t^1 = 0$  et  $T_t^2 = 0$ ,
- $t_0 = t$ .

**TAB. 3.3** - Algorithme Cusum bilatéral.



**FIG. 3.4** - FPR avec contrôle de la régularisation.

$h = 2 \times 10^{-8}, \nu = 5 \times 10^{-10}$ . Figure gauche : moyenne glissante de  $L_t$ , estimée par l'algorithme cusum. Figure droite : statistique de test  $T_t^2$ .

### 3.4.2 Contrôle de la régularisation

Une fois appliqué le noyau de lissage, les particules ne sont plus distribuées selon la loi cible. Nous proposons de remédier à ce problème en introduisant une étape de Métropolis-Hastings (MH) pour accepter/rejeter les particules issues de l'étape de régularisation. Ainsi, les propriétés asymptotiques de convergence de l'approximation particulaire sont conservées et la variance des estimés est diminuée en comparaison d'un filtre particulaire régularisé classique.

#### Ajout d'une étape de Metropolis-Hastings

Le RPF procède en deux étapes pour redistribuer les particules :

- 1) rééchantillonnage multinomial classique : le N-échantillon obtenu comprend plusieurs particules identiques entre elles,
- 2) évolution de chaque particule conformément au noyau de régularisation

$$\tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)} \sim K_h(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^{(i)}), \text{ pour } i = 1, \dots, N.$$

Notre extension consiste à considérer ce noyau comme la loi instrumentale (aussi appelée

candidate) d'un algorithme de Métropolis-Hastings (MH) de densité de probabilité cible la distribution *a posteriori* de l'état sachant les observations  $p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t})$ . Ainsi, parmi les échantillons issus de la régularisation, ne sont conservés que les plus représentatifs de la distribution à estimer :

$$\mathbf{X}_t^{(i)} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)} & \text{avec la probabilité } \alpha(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}), \\ \text{est inchangé} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La probabilité d'acceptation est définie classiquement par :

$$\alpha(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}) = \min\left(1, r(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)})\right),$$

avec :

$$r(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}) = \frac{p(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{Y}_{1:t}) q(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)} | \tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)})}{p(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{Y}_{1:t}) q(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)})}.$$

Dans cette formule,  $q$  désigne la loi instrumentale :

$$q(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}) = K_h(\tilde{\mathbf{X}}_t - \mathbf{X}_t^{(i)}) \delta(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t-1} - \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}).$$

Attendu que  $\tilde{\mathbf{X}}_{0:t-1}^{(i)} = \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}$  et que la loi  $q$  est symétrique, le rapport de MH admet une expression simple :

$$r(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}) = \frac{p(\mathbf{Y}_t | \tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) p(\tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1})}{p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) p(\mathbf{X}_t^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1})}.$$

Il est à noter que, les particules étant déjà distribuées selon la loi cible, les hypothèses d'apériodicité et d'irréductibilité du noyau ne sont pas requises et une seule itération de MH est suffisante. En pratique, plusieurs itérations peuvent être appliquées pour favoriser le renouvellement des particules (la procédure peut par exemple être répétée tant qu'une fraction donnée de particules n'est pas modifiée).

La méthode proposée équivaut à ajouter des étapes de Monte Carlo au filtre particulière pour limiter l'appauvrissement du nuage de particules. Ce type d'approche, récemment développée dans [GB01], consiste à déplacer les particules selon un noyau de transition de distribution invariante la loi cible  $p(\mathbf{X}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t})$ . Dans ce cas, la méthode de Monte Carlo utilisée est l'algorithme de Metropolis-Hastings et le noyau de régularisation sert de loi de proposition.

### Rééchantillonnage local

La principale limitation de l'extension proposée est qu'en présence d'un très faible bruit de dynamique, le taux de rejet de l'étape de Métropolis-Hastings est trop élevé pour assurer le renouvellement des particules. Dans ce cas, la probabilité que  $\tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)}$  soit un descendant de  $\mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}$  est faible et il en est de même pour la probabilité d'acceptation  $\alpha(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)})$ . Plus la taille de la fenêtre de régularisation (déterminée par le paramètre  $h$ ) est grande, plus la particule  $\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)}$  est susceptible d'être rejetée. Une solution intuitive consisterait à ajuster le paramètre  $h$  pour régler le compromis entre le taux d'acceptation et le niveau de régularisation. Une telle approche n'est pas viable en pratique car elle conduit à une sous-régularisation du nuage de particules. Nous proposons plutôt d'utiliser un noyau de transition modifiant non seulement les particules à l'instant courant mais aussi leurs états passés afin de proposer des



trajectoires  $\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)}$  plus cohérentes. Ainsi, les particules candidates pour le test de MH prennent la forme :

$$\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} = \left( \tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}_{t-L:t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{X}}_{0:t-L-1}^{(i)} \right), \text{ avec } L > 0,$$

où :

- 1)  $\tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)}$  provient de l'étape de régularisation,
- 2)  $\tilde{\mathbf{X}}_{t-L:t-1}^{(i)} \sim p\left(\mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)} | \tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}, \mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)}\right)$  est obtenue en rééchantillonnant localement la trajectoire de la  $i$ ème particule,
- 3)  $\tilde{\mathbf{X}}_{0:t-L-1}^{(i)} = \mathbf{X}_{0:t-L-1}^{(i)}$  est laissée inchangée.

Le rapport de Métropolis-Hastings dépend alors du bloc de  $L$  particules modifié. Par définition :

$$r(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}) = \frac{p\left(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{Y}_{1:t}\right) q\left(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)} | \tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)}\right)}{p\left(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{Y}_{1:t}\right) q\left(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}\right)}.$$

Les trajectoires  $\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)}$  et  $\mathbf{X}_{0:t}^{(i)}$  coïncidant jusqu'au temps  $t - L - 1$ , le rapport des lois cibles devient :

$$\frac{p\left(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{Y}_{1:t}\right)}{p\left(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{Y}_{1:t}\right)} = \frac{\prod_{k=t-L}^t p\left(\mathbf{Y}_k | \tilde{\mathbf{X}}_{0:k}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) p\left(\tilde{\mathbf{X}}_k^{(i)} | \tilde{\mathbf{X}}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right)}{\prod_{k=t-L}^t p\left(\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_{0:k}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right) p\left(\mathbf{X}_k^{(i)} | \mathbf{X}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:k-1}\right)}.$$

Enfin, les propriétés de symétrie du noyau de régularisation permettent d'exprimer simplement le rapport des lois instrumentales :

$$\frac{q\left(\mathbf{X}_{0:t}^{(i)} | \tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)}\right)}{q\left(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}\right)} = \frac{p\left(\mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)} | \mathbf{X}_t^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}, \mathbf{X}_{0:t-L-1}^{(i)}\right)}{p\left(\tilde{\mathbf{X}}_{t-L:t-1}^{(i)} | \tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}, \mathbf{X}_{0:t-L-1}^{(i)}\right)}.$$

La difficulté tient à la nécessité de simuler et d'évaluer la distribution utilisée pour le rééchantillonnage local,  $p\left(\tilde{\mathbf{X}}_{t-L:t-1}^{(i)} | \tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}, \mathbf{X}_{0:t-L-1}^{(i)}\right)$ , qui est généralement non standard. Dans le cadre de l'hybridation GPS/INS, elle peut néanmoins être aisément remplacée par une approximation Gaussienne en linéarisant l'équation de mesure autour de la trajectoire initiale des particules  $\mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)}$ . D'après la loi de Bayes :

$$p\left(\mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)} | \mathbf{X}_t^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}, \mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)}\right) \propto p\left(\mathbf{X}_t^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}\right) p\left(\mathbf{Y}_{t-L:t-1} | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-L-1}\right) p\left(\mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t-L-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-L-1}\right),$$

où :

- la densité de probabilité  $p\left(\mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t-L-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-L-1}\right)$  est par définition Gaussienne,
- vues comme des fonctions de  $\mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)}$ , la vraisemblance linéarisée  $p\left(\mathbf{Y}_{t-L:t-1} | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-L-1}\right)$  et la densité de probabilité  $p\left(\mathbf{X}_t^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}\right)$  prennent la forme de lois Gaussiennes.

La loi résultante pour  $\mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)}$  est alors aussi Gaussienne.

La redistribution locale s'avère efficace pour augmenter le taux d'acceptation de l'algorithme de Métropolis-Hastings mais est calculatoirement plus coûteuse.

La variante algorithmique proposée, incluant le critère de divergence et le contrôle de la régularisation, est résumée en table (3.4). Nous l'appelons par la suite MHRPF (Métropolis-Hastings Regularized Particle Filter).

**Initialisation :**

- Pour  $i = 1, \dots, N$  :  $\mathbf{X}_0^{(i)} \sim p(\mathbf{X}_0)$ .
- Paramètres du cusum :  $T_0^1, T_0^2, t_0 = 0$ .

**Itération  $t$  :**

- Propagation : pour  $i = 1, \dots, N$ ,  $\mathbf{X}_t^{(i)} \sim q(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t})$ .
- Pondération : pour  $i = 1, \dots, N$ ,
 
$$\tilde{w}_{t|t-1}^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) / q(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t}),$$

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t|t-1}^{(i)} p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}).$$

- Estimation :  $p(\mathbf{X}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) = \sum_{k=1}^N \omega_t^{(i)} \delta(\mathbf{X}_{0:t} - \mathbf{X}_{0:t}^{(i)})$ .

- Contrôle de la divergence :

- ▶ calcul de la taille efficace de l'échantillon  $N_{eff}$ ,
- ▶ algorithme cusum,

$$L_t = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) w_{t|t-1}^{(i)},$$

$$r_t = L_t - \left( \sum_{k=t_0+1}^t L_k \right) / (t - t_0),$$

$$T_t^1 = \max(T_{t-1}^1 + r_t - \nu, 0),$$

$$T_t^2 = \max(T_{t-1}^2 - r_t - \nu, 0).$$

- ▶ Si  $(T_t^1 > h)$  ou  $(T_t^2 > h) \Rightarrow$  alarme,

$$T_t^1 = 0 \text{ et } T_t^2 = 0,$$

$$t_0 = t.$$

- Rééchantillonnage :

- ▶ Si  $N_{eff} > \text{Seuil}$  ou alarme, rééchantillonnage multinomial.
- ▶ Si alarme, pour  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\rightarrow \tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)} \sim K_h(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^{(i)}),$$

$$\rightarrow \tilde{\mathbf{X}}_{t-L:t-1}^{(i)} \sim p(\mathbf{X}_{t-L:t-1} | \tilde{\mathbf{X}}_t^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}, \mathbf{X}_{t-L:t-1}^{(i)}),$$

$$\rightarrow \text{calcul de } \alpha(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}),$$

$$\rightarrow u \sim \mathcal{U}([0, 1]),$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{si } u < \alpha(\tilde{\mathbf{X}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t}^{(i)}), & \mathbf{X}_{t-L:t}^{(i)} = \tilde{\mathbf{X}}_{t-L:t}^{(i)}, \\ \text{sinon } \mathbf{X}_{t-L:t}^{(i)} \text{ reste inchangé.} \end{cases}$$

**TAB. 3.4** - Algorithme MHRPF : filtre particulaire régularisé avec un contrôle de Métropolis Hastings.

### 3.5 Étude des performances des algorithmes

Dans cette partie, l'apport des techniques de filtrage particulaire pour l'hybridation serrée du GPS et des systèmes de navigation inertiels est étudiée à partir de données simulées. Les

performances du MHRPF sont discutées au travers de comparaisons :

- avec les stratégies de filtrage particulaire les plus adaptées au problème considéré,
- avec le filtre de Kalman étendu classiquement utilisé en navigation.

Différents scénarios correspondant aux problématiques les plus souvent rencontrées en navigation sont considérés.

### 3.5.1 Simulation des données

Les données ont été simulées de manière à reproduire de façon simplifiée le fonctionnement d'un récepteur GPS et d'une centrale inertielle. Les simulations sont conduites en trois grandes étapes comme présenté dans le schéma bloc (3.5).

#### Simulation de la trajectoire du véhicule

Dans tous les scénarios considérés, le véhicule évolue à accélération constante dans le repère local de navigation. Son accélération, sa vitesse et sa position en coordonnées ellipsoïdales sont générées en simulant un modèle triple intégrateur.

#### Calcul des sorties inertielles

Dans un premier temps, les sorties capteurs idéales correspondant aux coordonnées cinématiques du véhicule sont calculées. Des erreurs sont ensuite introduites conformément au modèle de mesure décrit dans le chapitre précédent pour former les sorties capteurs biaisées. Enfin, les équations de navigation inertielle permettent d'en déduire la dynamique du véhicule estimée par la centrale inertielle.

#### Calcul des mesures GPS :

Les pseudo-distances GPS s'expriment comme des distances entre le véhicule et les satellites GPS, biaisées à la fois par le décalage d'horloge récepteur et un bruit additif. Pour les calculer, les positions des satellites ont été obtenues à partir de fichiers almanach contenant les données orbitales de l'ensemble de la constellation GPS. Les satellites en ligne de vue du véhicule et donc donnant effectivement lieu à une mesure de pseudo-distance sont sélectionnés en fonction de leur angle d'élévation. Enfin, le biais d'horloge est simulé à partir du modèle d'état.

### 3.5.2 Scénarios de test

L'efficacité de l'algorithme proposé est examinée pour différentes conditions de navigation qui rendent le problème d'estimation plus ou moins complexe à résoudre :

**Scénario nominal :** le modèle de mesure reproduit fidèlement les conditions de navigation, i.e la variance du bruit de mesure est supposée connue avec une bonne précision et aucune perturbation n'affecte les pseudo-distances. De plus, l'observabilité statique est assurée, c'est-à-dire que le nombre de satellites en vue et donc de mesures GPS est suffisant pour résoudre le problème de navigation à chaque instant. On parle d'observabilité statique par opposition à l'observabilité dynamique, qui prend en compte la cohérence temporelle des paramètres à estimer.

**Scénario plus difficile :** l'observabilité statique n'est plus assurée.

### 3.5.3 Critère de performance

Les performances des algorithmes sont évaluées via leurs erreurs quadratiques moyennes d'estimation qui reflètent à la fois le biais et la variance des estimés. Ces erreurs sont estimées

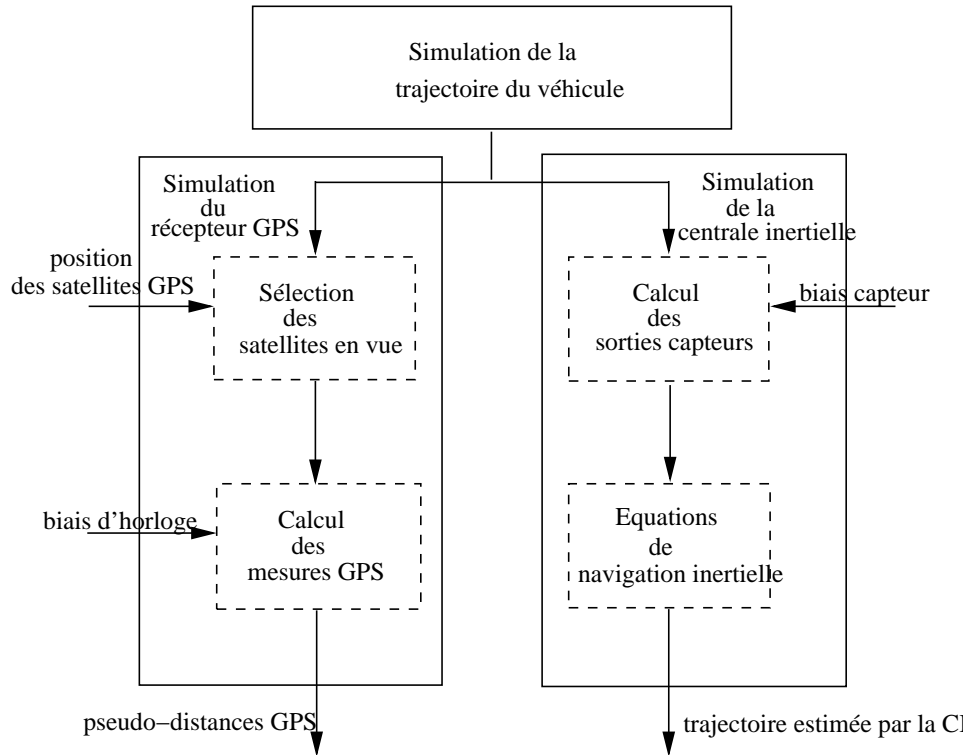


FIG. 3.5 - Simulation des données.

à partir de tirages de Monte Carlo. Pour chaque composante  $j$  ( $j = 1, \dots, n_x$ ) du vecteur état et à chaque instant  $t$  :

$$E \left( \left( \mathbf{X}_t[j] - \widehat{\mathbf{X}}_t[j] \right)^2 \right) \simeq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left( \mathbf{X}_t[j] - \widehat{\mathbf{X}}_t^k[j] \right)^2,$$

où  $\mathbf{X}_t[j]$  est la  $j$ -ième composante du vecteur état et  $\widehat{\mathbf{X}}_t^k$  l'estimé correspondant au  $k$ -ième tirage de Monte Carlo.

Les filtres utilisés calculent des solutions approchées et donc sous-optimales au problème de navigation. Pour juger la qualité de l'estimation et quantifier les inexactitudes introduites par ces approximations, il est intéressant de comparer les erreurs quadratiques calculées à une borne inférieure. Classiquement la borne de Cramer Rao est utilisée dans le cadre paramétrique. Elle est directement liée à l'information apportée par les mesures et s'écrit comme l'inverse de la matrice d'information de Fischer. Elle a été généralisée au cadre Bayésien dans [VT68] sous le nom de borne de Cramer-Rao *a posteriori* (PCRB). Plus récemment, dans [TMN98] et [Ber99], des extensions applicables à des systèmes non linéaires à temps discret ont été proposées. La PCRB peut être interprétée comme l'erreur quadratique d'un filtre optimal qui résoudrait analytiquement le problème d'estimation. Elle coïncide donc avec la matrice de covariance du filtre de Kalman dans le cas linéaire Gaussien. Il est à noter que contrairement à la version paramétrique de la borne de Cramer Rao, la PCRB s'applique à des estimateurs biaisés sous de faibles conditions sur la distribution *a priori* des paramètres inconnus. Une formulation récursive adaptée à l'estimation séquentielle est développée en annexe B. Pour  $t > 0$ , la borne de Cramer Rao *a posteriori* vérifie :

$$E \left( \left( \mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t \right) \left( \mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_t \right)^T \right) \geq P_t,$$

où  $P_t$  est la PCRB et l'espérance est calculée par rapport à la loi conjointe du vecteur état  $\mathbf{X}_t$  et des mesures  $(\mathbf{Y}_k)_{k=1:t}$ . La notation  $A \geq B$ , où A et B sont des matrices, signifie que la matrice  $A - B$  est définie positive.

### 3.5.4 Analyse des résultats

#### 3.5.4.1 Scénario 1

Dans un premier temps, un modèle de capteurs inertiels de qualité moyenne est considéré dans un environnement de navigation favorable. Ainsi le nombre de satellites GPS en vue est suffisant à chaque instant pour résoudre le problème d'estimation. Les caractéristiques des capteurs sont issues de [BSRLK01] et elles sont résumées en table (3.5). Les mesures GPS et inertielles parviennent au filtre d'hybridation avec un pas de temps  $\Delta T = 0.5s$ . L'incertitude initiale sur les coordonnées du véhicule est de 500m dans le repère de navigation, soit en coordonnées ellipsoïdales :

$$\begin{aligned}\delta\lambda &= \delta x_n/R, \\ \delta\phi &= \delta x_e/(R \cos \lambda), \\ \delta h &= -\delta x_d,\end{aligned}$$

où on rappelle que le triplet  $(x_n, x_e, x_d)$  fait référence aux coordonnées du mobile dans le repère de navigation  $(N, E, D)$  alors que le triplet  $(\lambda, \phi, h)$  correspond aux coordonnées ellipsoïdales de latitude, longitude et altitude. La paramètre  $R$  représente la rayon de la Terre.

Dans ce même repère, la vitesse initiale est supposée connue à 1m/s près.

Biais initial accéléromètre	$\mathbf{b}_a = 500\mu g$
Biais initial gyromètre	$\mathbf{b}_g = 1\text{deg/h}$
Bruit de mesure accéléromètre	$\sigma_a = 100\mu g$
Bruit de mesure gyromètre	$\sigma_g = 5 \times 10^{-5}\text{deg/s}$
Bruit de dynamique accéléromètre	$\sigma_{b_a} = 100\mu g$
Bruit de dynamique gyromètre	$\sigma_{b_g} = 5 \times 10^{-5}\text{deg/s}$
Bruit de mesure GPS	$\sigma_b = 10\text{m}$

**TAB. 3.5** - Paramètres de simulation.

Nombre de particules	$N = 2000$
Seuil de rééchantillonnage	$N_t = 0.6N$
Seuil de régularisation	$h = 10^{-10}$
Pas pour le rééchantillonnage local (MHRPF)	$L = 6$

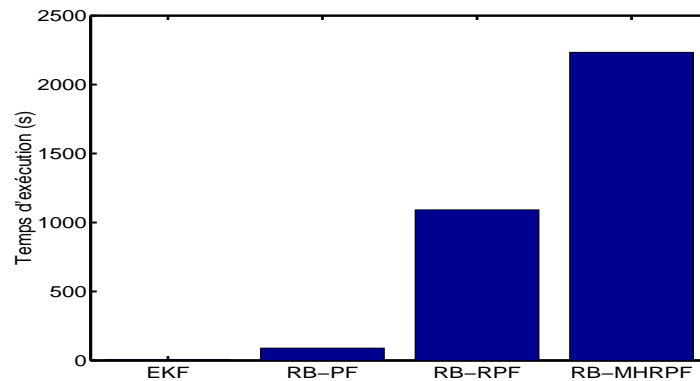
**TAB. 3.6** - Paramètres de filtrage.

Avant d'analyser de façon plus approfondie le comportement des différents algorithmes, quelques points méritent d'être soulignés :

- Les algorithmes de filtrage particulière ont été testés à nombre de particules égal. Nous proposons cependant une comparaison des temps d'exécution correspondants.

- Tous les filtres particuliers comparés utilisent une approximation Gaussienne de la distribution de proposition optimale et mettent à profit la structure du modèle de filtrage via une Rao-Blackwellisation. Les courbes portant la mention RB-FP correspondent donc à un algorithme de filtrage particulaire Rao-Blackwellisé avec une étape de linéarisation locale autour de la trajectoire estimée par la CI pour propager les particules.
- Les erreurs quadratiques moyennes ont été calculées pour 100 tirages de Monte Carlo.

La figure 3.7 permet d’appréhender le comportement de l’algorithme MHRPF pour les paramètres de simulation choisis. Il apparaît que la régularisation a été appliquée en moyenne 30 fois par tirage de Monte Carlo, c’est-à-dire en moyenne toutes les 25 itérations. En moyenne 350 particules ont été modifiées à chaque fois, soit un taux de renouvellement légèrement inférieur à 20% du nuage de particules.



**FIG. 3.6** - Temps d’exécution des différents algorithmes.

Les figures 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 comparent les racines carrées des erreurs quadratiques moyennes d’estimation des différents algorithmes pour les différentes composantes du vecteur état. La borne de Cramer Rao *a posteriori* est également tracée sur ces courbes à titre de référence. On observe que la stratégie de filtrage particulaire développée s’avère plus performante que les solutions issues de la littérature. Pour l’ensemble des paramètres du vecteur état, le MHRPF présente une erreur d’estimation inférieure à celle d’un filtre particulaire régularisé et non régularisé et ceci pour deux raisons différentes. Le filtre particulaire non régularisé diverge souvent, ce qui induit une augmentation de son erreur quadratique moyenne. Cependant, bien que ça n’apparaisse pas sur les courbes proposées, il présente une très bonne précision dans les cas où il poursuit correctement les paramètres à estimer. Au cours des différentes simulations, le RPF n’a jamais divergé, mais ses estimés présentent une variance élevée qui se répercute sur l’erreur moyenne d’estimation. Le MHRPF offre un bon compromis. De coût calculatoire plus élevé qu’un filtre particulaire classique (cf figure 3.6), il est plus stable et ne diverge que rarement. En outre, la variance de ses estimés est significativement décrie par rapport à celle du RPF. Le MHRPF coïncide quasiment avec la borne de Cramer Rao *a posteriori*. Les courbes présentées appellent quelques remarques supplémentaires. Il est intéressant de constater que certains paramètres sont inobservables. Ce problème se traduit par une borne de Cramer Rao divergente. En effet, selon la trajectoire du véhicule, certains coefficients de la matrice d’état sont nuls et de ce fait certains composantes ne peuvent être estimés correctement. C’est le cas ici des angles d’attitude.

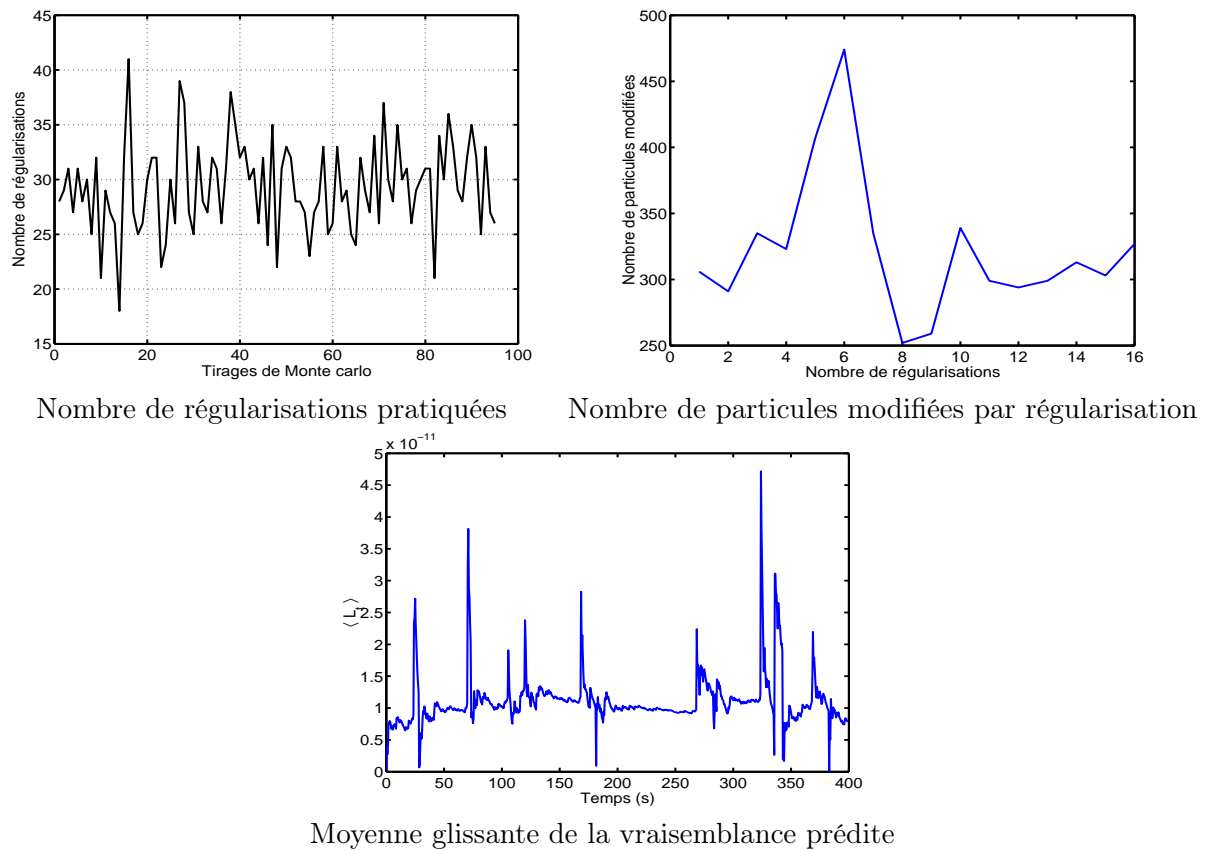


FIG. 3.7 - Comportement de l'algorithme MHRPF.

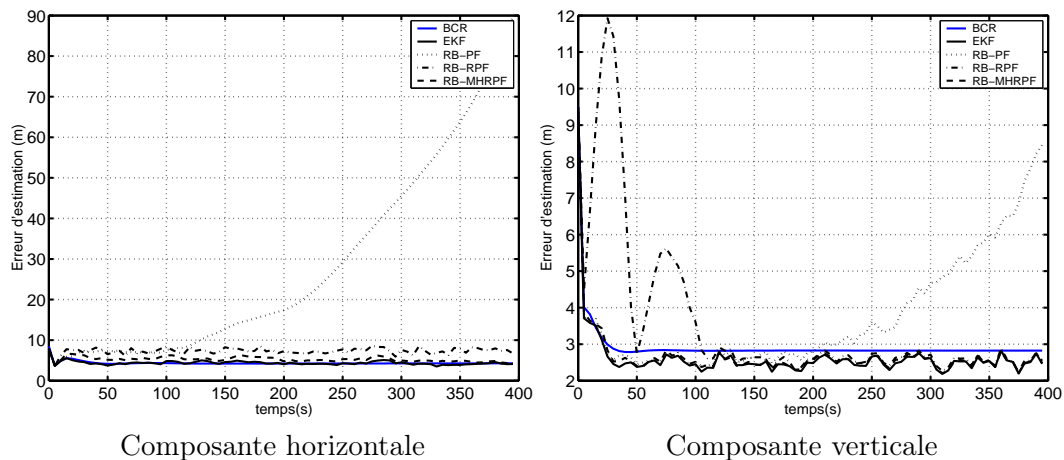


FIG. 3.8 - Erreur d'estimation en position

Cependant, dans les conditions de navigation simulées, il apparaît peu opportun d'avoir recours à une approche particulaire. Le filtre de Kalman étendu présente en effet de très bonnes performances, son erreur quadratique étant presque toujours superposée à la borne de Cramer Rao. Ainsi, les non linéarités de l'équation de mesure ne justifient pas d'utiliser une stratégie de filtrage particulaire calculatoirement plus coûteuse. Ceci s'explique aisément de par l'architecture d'hybridation adoptée. En effet, ce n'est pas la dynamique du véhicule qui est calculée mais les erreurs d'estimation de la CI. Il s'ensuit que les non linéarités sont faibles et qu'il est donc légitime d'approcher la sphère satellite-récepteur par un plan localement tangent

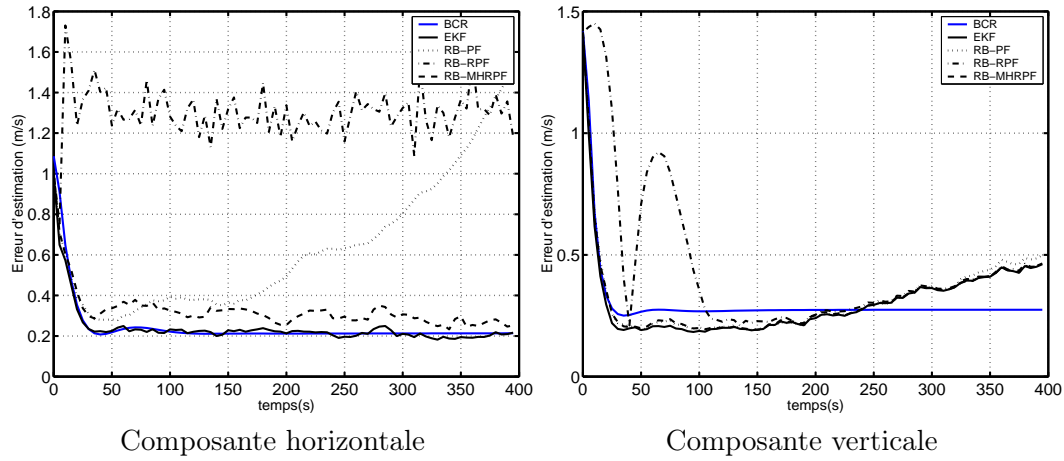


FIG. 3.9 - Erreur d'estimation en vitesse

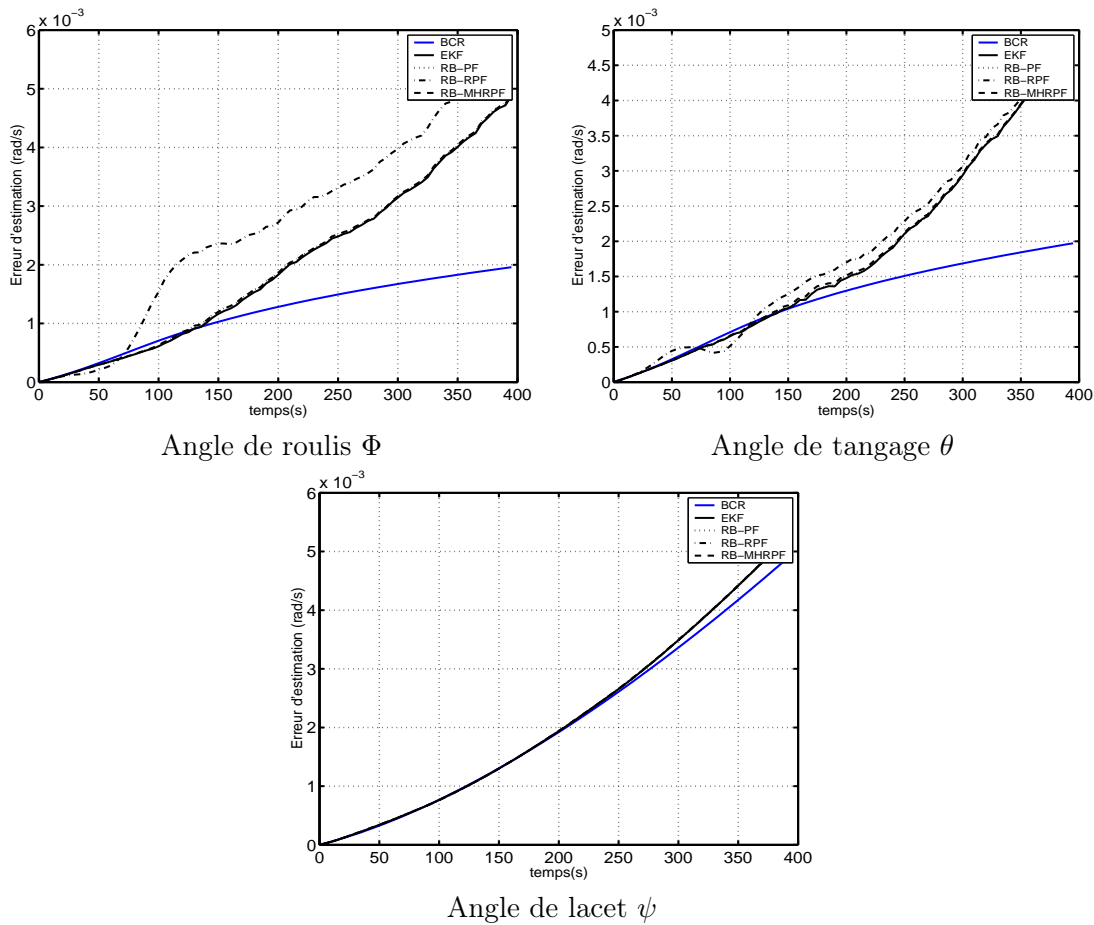


FIG. 3.10 - Erreur d'estimation des angles d'attitude

(les non linéarités étant négligeables comparées au rayon de la sphère). Cette remarque est bien illustrée par la figure 3.12 qui représente, au cours de la simulation, l'erreur relative de linéarisation sur les mesures de pseudo-distances.

Au vu de ces premières conclusions, il est intéressant d'étudier le comportement des filtres pour des scénarios de simulation plus complexes où le filtre de Kalman étendu pourrait être



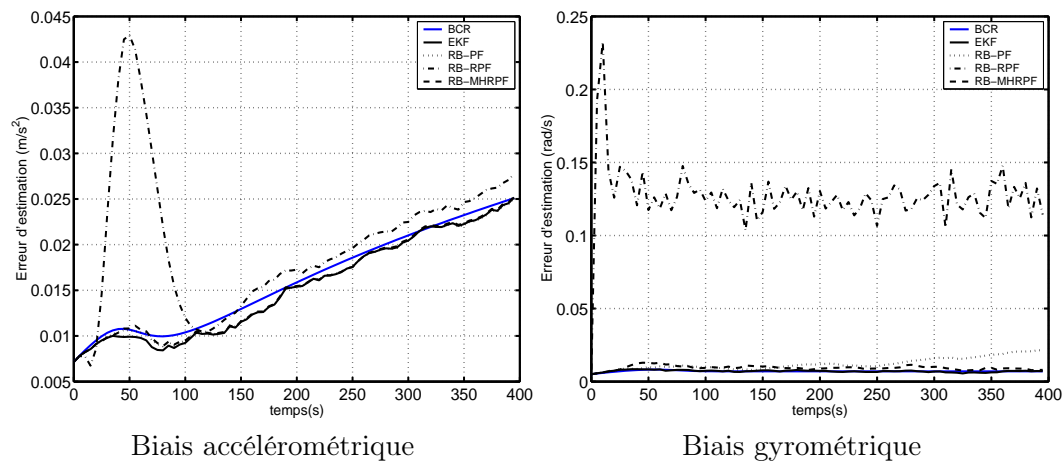


FIG. 3.11 - Erreur d'estimation des biais capteurs

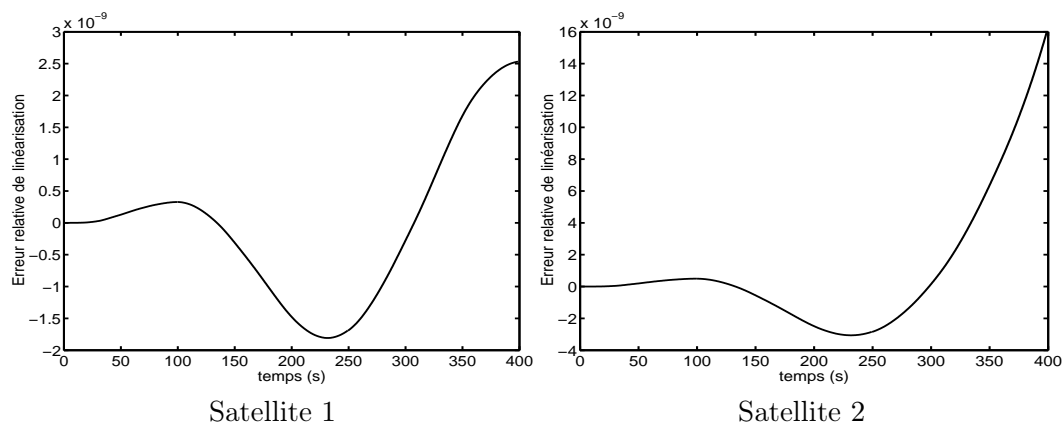


FIG. 3.12 - Erreur relative de linéarisation de l'équation de mesure en mètres.

mis en défaut.

### 3.5.4.2 Scénario 2

Pour cette série de simulations, la même classe de capteurs inertiels est considérée que pour le premier scénario et les paramètres de simulation sont identiques. La difficulté provient de l'observabilité statique qui n'est plus garantie, c'est-à-dire que le nombre de mesures GPS n'est pas suffisant pour résoudre le problème de navigation à chaque instant. Cette situation peut se produire dans le cas où un obstacle masque certains satellites ou par exemple en présence de brouilleurs de forte puissance qui empêchent la formation des mesures GPS. Le nombre de mesures disponibles au cours de la simulation est représenté sur la figure 3.13. En accord avec les résultats obtenus pour le premier scénario, nous comparons seulement les erreurs d'estimation du filtre de Kalman étendu et de l'algorithme de filtrage particulière qui s'est avéré le plus efficace : le MHRPF. Les figures 3.14, 3.15, 3.16 et 3.17 représentent respectivement l'erreur d'estimation de la position, de la vitesse, des angles d'attitude et des biais capteurs, de même que les bornes de Cramer Rao correspondantes. À partir de  $t = 50s$ , seuls 3 satellites sont disponibles. Le filtre particulier et le filtre de Kalman ne parviennent plus à poursuivre les composantes du vecteur état et leurs erreurs d'estimation augmentent progressivement.

Ce résultat était prévisible au vu de la borne de Cramer Rao. Elle commence à diverger

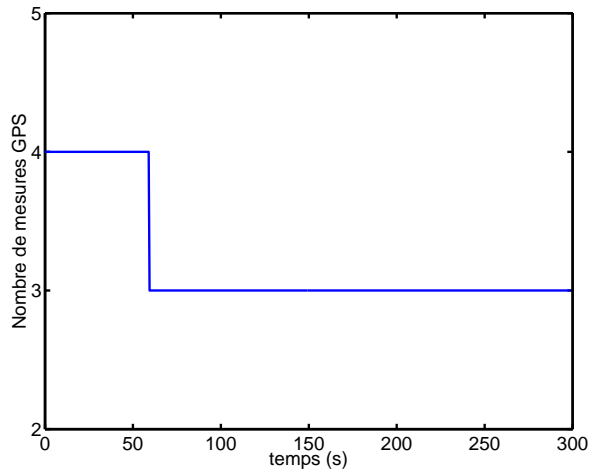


FIG. 3.13 - Nombres de mesures GPS au cours de la simulation.

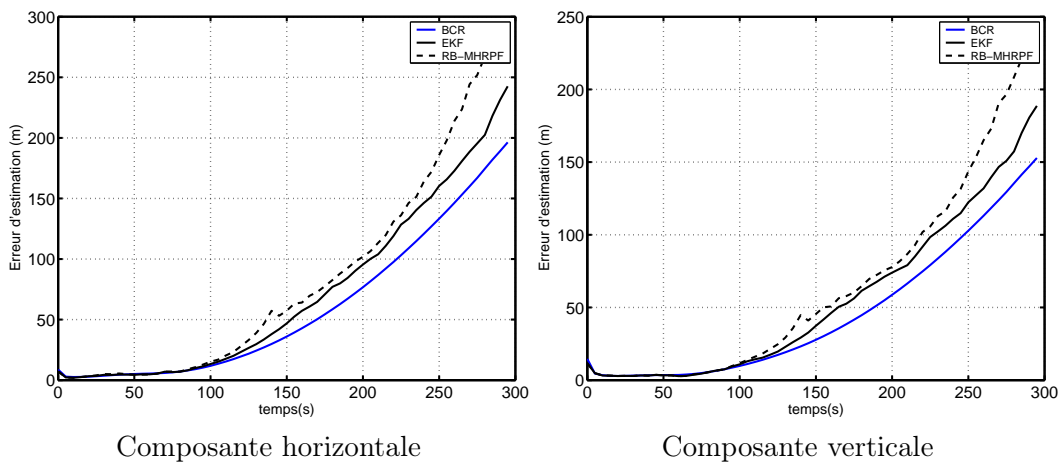


FIG. 3.14 - Erreur d'estimation en position

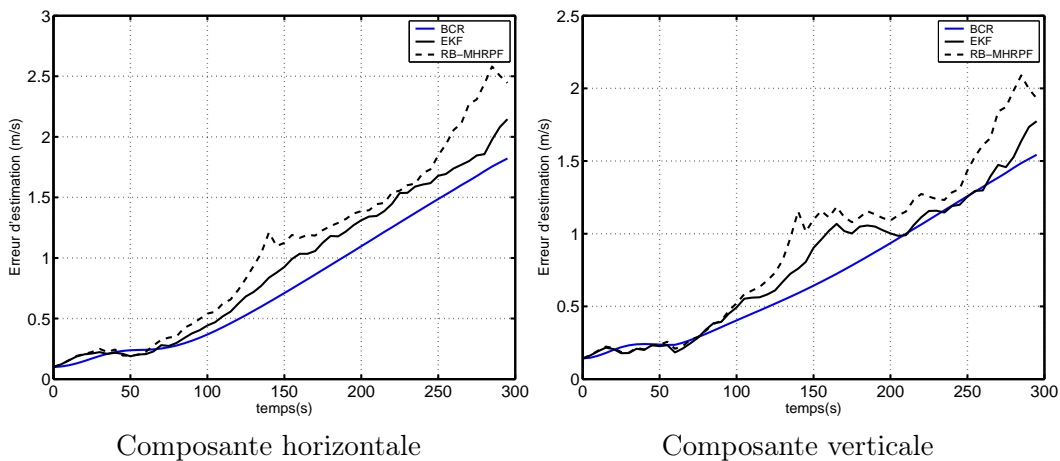


FIG. 3.15 - Erreur d'estimation en vitesse

dès que le nombre de mesures satellites devient inférieur à 4, indiquant que les informations disponibles ne permettent plus de résoudre le problème d'estimation. Si le filtrage particulière n'apporte pas de solution au problème de perte observabilité, il permet de mieux l'appréhender.

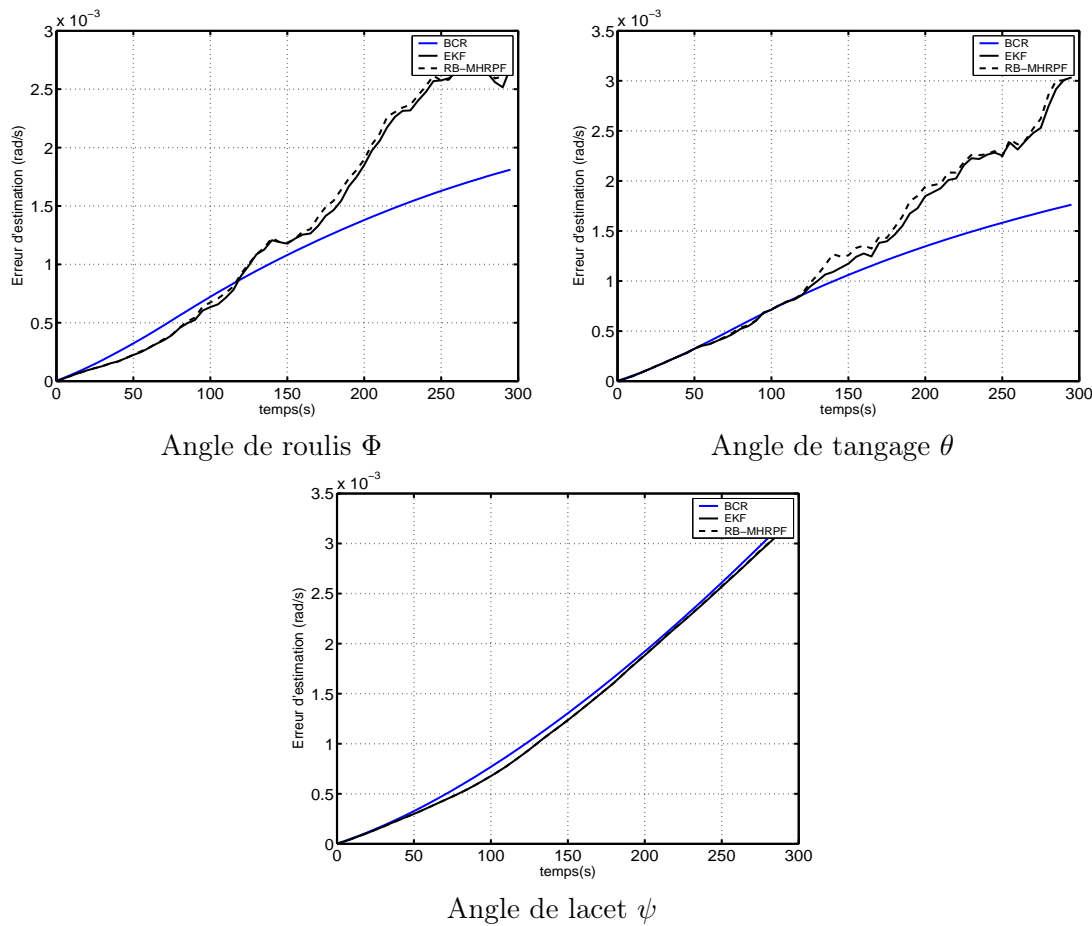


FIG. 3.16 - Erreur d'estimation des angles d'attitude

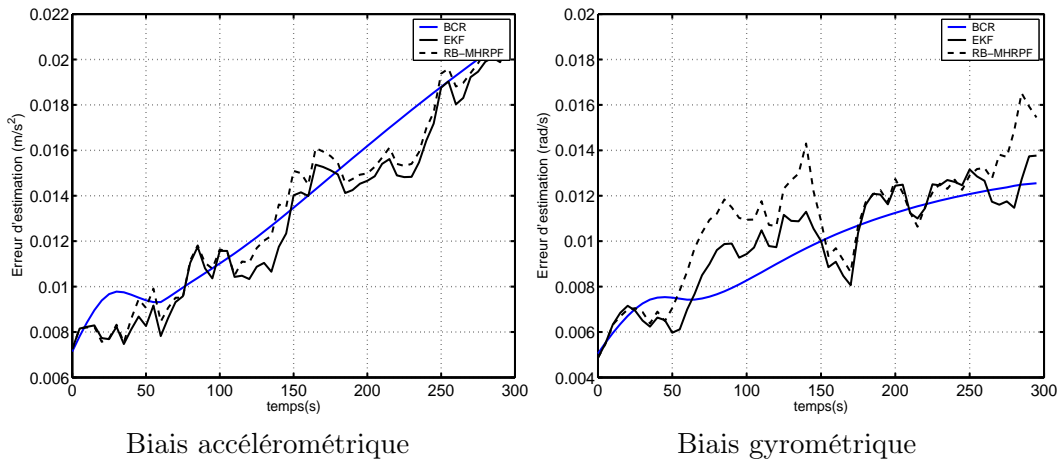


FIG. 3.17 - Erreur d'estimation des biais capteurs

La figure 3.18 représente le nuage de particules (pour les composantes d'erreur de position inertielle horizontale) en présence de 4 satellites (figure de gauche) et avec un satellite en moins (figure de droite). Il apparaît que la perte d'observabilité s'accompagne d'une dispersion du support de la distribution de probabilité cible  $p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t})$  qui devient singulier. Ainsi, la perte d'une mesure rend le calcul de position indéterminé. Il n'existe plus une solution unique au problème de navigation mais tout un domaine.

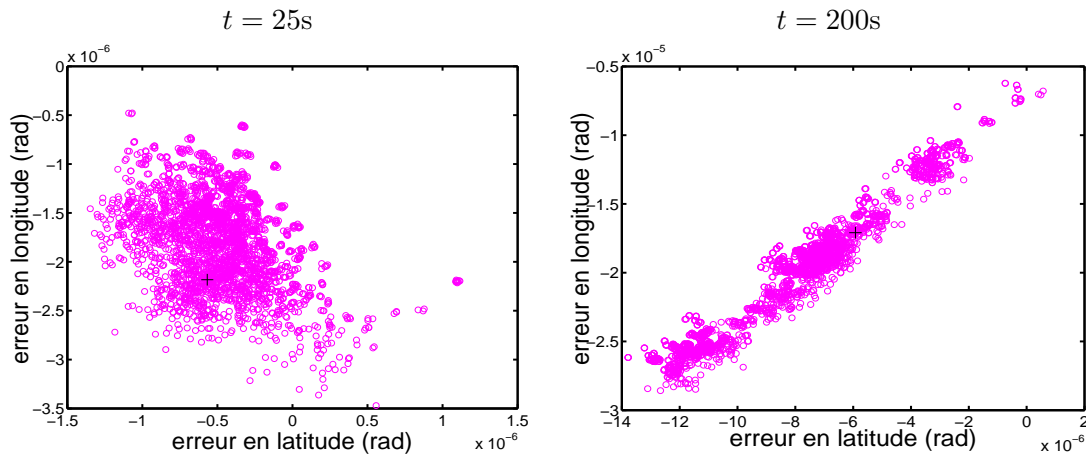


FIG. 3.18 - Système de particules, erreur inertielle en latitude vs erreur inertielle en longitude.

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre est consacré à l'étude d'algorithmes de filtrage particulaire fiables pour réaliser l'hybridation serrée du GPS et des systèmes de navigation inertielle. Le modèle d'hybridation réunit plusieurs caractéristiques qui tendent à faire diverger un filtre particulaire classique. D'une part, les paramètres à estimer sont les erreurs d'estimation commises par la centrale inertielle et non la dynamique du véhicule. Nous avons montré que ces erreurs étaient exponentiellement instables et présentaient un faible bruit d'état. Si la distribution *a priori* est utilisée comme loi de proposition, les particules vont donc tendre à s'écartier les unes des autres et à s'éloigner de la trajectoire réelle des paramètres à estimer. Les rééchantillonnages successifs conduisent à un appauvrissement des échantillons, d'autant plus marqué que l'étape de simulation ne contribue pas à renouveler le nuage de particules. Parmi les solutions proposées dans la littérature pour pallier cette dégénérescence, nous avons retenu le filtre particulaire régularisé. Il consiste à réintroduire de la diversité lors du rééchantillonnage, qui n'est plus réalisé selon une approximation discrète de la loi cible mais selon une approximation continue. L'inconvénient de cette approche est que les estimés obtenus sont plus bruités qu'avec un filtre particulaire de type "bootstrap". Pour concilier la stabilité du filtre particulaire régularisé avec la précision du "bootstrap filter", nous avons présenté une variante algorithmique. Elle consiste à contrôler l'étape de régularisation en introduisant un pas de l'algorithme de Métropolis-Hastings. Ainsi, contrairement au RPF, les particules générées sont bien distribuées selon la loi cible. De plus, nous avons proposé une mesure de dégénérescence pour limiter le recours à la régularisation. Cette extension est combinée à une technique de Rao-Blackwellisation mettant à profit la structure conditionnellement linéaire Gaussienne du modèle d'hybridation pour former un algorithme d'estimation robuste et précis.

Plusieurs simulations ont été menées pour évaluer les performances de l'algorithme d'hybridation développé. La méthode proposée s'est avérée plus performante que les algorithmes de filtrage particuliers auxquels nous l'avons comparé. Malheureusement, les scénarios étudiés n'ont permis de mettre en évidence aucun gain par rapport au filtre de Kalman étendu. Ce résultat s'explique de par l'architecture d'hybridation adoptée. Ce sont les erreurs inertielles qui sont estimés et non directement les paramètres cinématiques du véhicule. Or, elles présentent une dynamique beaucoup plus faible qui ne met pas en défaut la linéarisation du filtre de Kalman étendu.

Si la non linéarité de l'équation de mesure ne justifie pas d'utiliser un filtre d'hybridation

particulaire, ce type d'approche peut néanmoins s'avérer avantageuse pour des scénarios difficiles de navigation. Dans les chapitres suivants, nous nous intéressons aux cas où les mesures GPS sont défailtantes du fait d'une perturbation de l'environnement de propagation des signaux satellite GPS. Nous verrons que le filtre particulaire offre alors une solution simple pour conjointement détecter et corriger les erreurs de mesure.

*Partie III*  
*Étude des perturbations affectant les*  
*mesures GPS*



---

# Introduction

---

Les mesures GPS peuvent être dégradées sévèrement du fait de défaillances matérielles ou de perturbations de l'environnement de propagation des signaux satellite. Si le GPS fonctionne de façon autonome, la précision de la solution de navigation n'est alors plus assurée. S'il est couplé avec une centrale inertielle, les erreurs de mesure GPS conduisent à une mauvaise calibration de celle-ci. Il est donc crucial pour la qualité du service de positionnement de détecter et identifier ces erreurs. Des algorithmes dits de contrôle d'intégrité ont été développés à cet effet, qui exploitent la cohérence temporelle des mesures ou leur redondance. Leur principale limitation est qu'ils sont généralement fondés sur l'hypothèse d'une seule mesure incorrecte (c'est-à-dire ne correspondant pas au modèle de mesure GPS classique) à chaque instant. Les algorithmes de filtrage particulière forment une alternative intéressante car ils peuvent détecter des défaillances multiples. Ils permettent en outre d'estimer l'erreur de mesure induite et donc d'exploiter l'information apportée par la mesure dégradée au lieu de simplement l'exclure. Les deux chapitres suivants étudient respectivement le problème des multitrajets et des interférences.





# Detection/estimation conjointe des erreurs induites par les multitrajets

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>73</b>
<b>4.2</b>	<b>Caractérisation des erreurs de multitrajets</b>	<b>74</b>
4.2.1	Les multitrajets en radionavigation	74
4.2.2	Modèle de multitrajets	75
4.2.3	Impact des multitrajets sur les mesures GPS	76
<b>4.3</b>	<b>Formulation du problème de détection/estimation des biais de multitrajets</b>	<b>79</b>
4.3.1	Modèles d'état	80
4.3.2	Modèle de mesure	81
<b>4.4</b>	<b>Solutions algorithmiques</b>	<b>82</b>
4.4.1	Les algorithmes à modèles multiples	82
4.4.2	Le Rapport de vraisemblance généralisé (RVG)	84
<b>4.5</b>	<b>Solution particulière proposée</b>	<b>85</b>
4.5.1	Rao-Blackwellisation	85
4.5.2	Loi de proposition	86
4.5.3	Contrôle du rééchantillonnage par un test d'hypothèses	89
<b>4.6</b>	<b>Etude des performances de l'algorithme DECFP</b>	<b>93</b>
4.6.1	Simulation des données	93
4.6.2	Critères de performance	95
4.6.3	Résultats de simulation	96
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>100</b>

---

## 4.1 Introduction

Nous avons pu vérifier dans le chapitre précédent l'efficacité du filtre de Kalman étendu pour résoudre le problème de navigation avec un système hybride GPS/INS. La non linéarité de l'équation de mesure ne justifiait alors pas le recours à une solution particulière calculatoirement plus coûteuse. Cependant, l'avantage des méthodes séquentielles de Monte Carlo réside en leur applicabilité à tout type de modèle de filtrage. Cette flexibilité en fait un outil puissant, proposant une solution simple à des problèmes difficiles tels le filtrage multi-objets [Hue03] ou les systèmes à modèles multiples [Oud00]. Dans cette partie, nous nous attachons à un des phénomènes pouvant perturber de façon imprévue les mesures GPS et donc dégrader la solution de navigation GPS : les multitrajets. Nous insistons sur l'intérêt de l'approche particulière qui offre un cadre général pour conjointement détecter les perturbations, estimer leur amplitude, et retrouver la trajectoire du véhicule. Dans un premier temps, le problème des multitrajets en navigation GPS est étudié. Une formulation à base de modèles multiples est proposée. Dans un second temps sont exposées brièvement les techniques classiquement

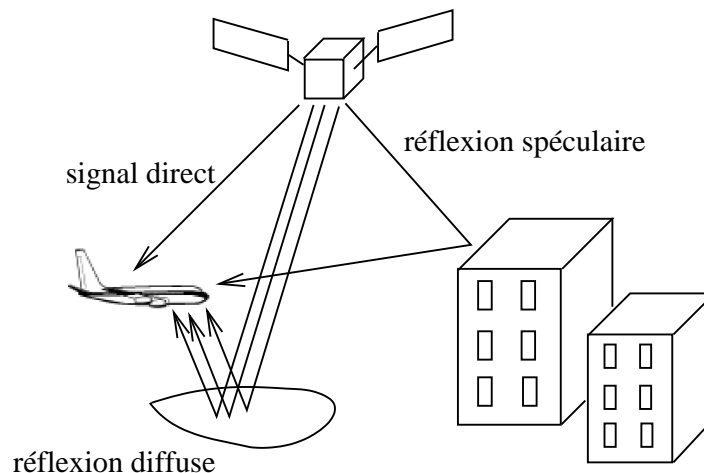
utilisées pour résoudre ce type de problème. Enfin, nous proposons une méthode de filtrage particulière originale et comparons ses performances aux algorithmes décrits au préalable. Il est à noter que la méthode a été développée pour un GPS autonome par souci de simplicité. Elle peut cependant être facilement généralisée à un système hybride GPS/INS en modifiant le modèle de filtrage de façon ad-hoc.

## 4.2 Caractérisation des erreurs de multitrajets

### 4.2.1 Les multitrajets en radionavigation

Les performances de la navigation par GPS sont grandement dégradées par les perturbations subies par le signal satellite lors de la liaison satellite-récepteur. Parmi les différentes sources d'erreur, il convient de distinguer celles qui peuvent être modélisées de façon fiable et donc éliminées, tels les décalages d'horloge satellite, et celles dont les effets sont plus difficilement prédictibles. Les multitrajets appartiennent à la deuxième catégorie de perturbations. Ils se produisent lorsque le signal satellite incident parvient au récepteur par des chemins multiples du fait des réflexions et diffractions pouvant survenir lors de sa transmission. Différents cas de figure peuvent se présenter selon la nature du réflecteur ou le type de réflexion (spéculaire ou diffuse). Ils sont représentés sur la figure 4.1. Cette variabilité rend ce phénomène difficile à analyser. Ainsi, dans les applications aériennes, le signal GPS est réfléchi sur la surface terrestre et rencontre donc différentes surfaces telles le sol, les forêts ou la mer. Par contre, dans le cas d'un véhicule situé au sol, les réflexions se produisent essentiellement sur les bâtiments environnants.

Si la présence de signaux réfléchis peut s'avérer utile en téléphonie mobile du fait de la redon-



**FIG. 4.1** - Exemples de multitrajets

dance d'information qui s'ensuit, elle est particulièrement pénalisante en radionavigation GPS où l'information utile est la durée de propagation du signal. De ce fait, les multitrajets font l'objet de nombreuses études qui portent soit sur la caractérisation des erreurs induites, soit sur la recherche de solutions algorithmiques ou matérielles pour atténuer leurs effets. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'effet des multitrajets sur les mesures de pseudo-distances GPS utilisées pour le positionnement. Nous nous appuyons sur différents travaux publiés récemment dans la littérature pour justifier le modèle de multitrajets adopté pour notre étude.

## 4.2.2 Modèle de multitrajets

En l'absence de multitrajets, on rappelle que le signal GPS reçu par le récepteur prend la forme suivante :

$$s(t) = Ad(t - \tau)c(t - \tau) \sin(2\pi ft + \phi) + b(t), \quad (4.1)$$

où :

- $A$  est l'amplitude que nous considérons constante en première approximation,
- $c(t)$  est le code pseudo-aléatoire C/A (civil) ou P (militaire),
- $d(t)$  est le message de navigation,
- $\tau$  est le délai de propagation,
- $f = f_0 + f_d$  est la somme de la fréquence porteuse et du décalage Doppler,
- $b(t)$  est un bruit blanc Gaussien.

En présence de multitrajets, le signal traité par le récepteur GPS s'écrit comme la somme du signal direct contenant l'information de positionnement et de une ou plusieurs composantes réfléchies selon l'environnement de propagation et la nature des surfaces réfléchissantes.

### Réflexion spéculaire

Pour des surfaces relativement lisses telles la paroi d'un immeuble, un seul signal réfléchi est généré. Il apparaît comme une réplique retardée, atténuée et déphasée du signal direct. Dans [Sou99], la modélisation suivante est proposée :

$$s(t) = Ad(t - \tau)c(t - \tau) \cos(2\pi ft + \phi) + \alpha Ad(t - \theta)c(t - \theta) \cos(2\pi f_r t + \phi_r) b(t), \quad (4.2)$$

où les paramètres du signal réfléchi dépendent à la fois de la nature de la surface réfléchissante et de la géométrie satellite-récepteur-réflexeur :

- $\alpha$  est le coefficient d'atténuation lié à la fois au gain d'antenne dans la direction du signal réfléchi et la perte de puissance du signal secondaire induite par la réflexion. Il est donc inférieur à 1.
- $\theta$  est le retard de propagation du signal réfléchi. Le signal réfléchi suit un trajet plus long que le signal direct, donc  $\theta > \tau$ .
- la fréquence du signal réfléchi est voisine de celle du signal direct :  $|f_r - f| < 1 \text{ kHz}$ .
- $\phi_r$  est le déphasage entre le signal direct et sa réplique retardée.

Les retards  $\tau$  et  $\theta$  peuvent être considérés constants sur plusieurs périodes de codes. L'excursion de fréquence Doppler entre le signal direct et le signal réfléchi  $|f_r - f|$  est appelée largeur de bande évanescence. La réflexion n'agissant pas sur la fréquence du signal, elle est entièrement déterminée par la géométrie réflecteur-satellite-véhicule et la vitesse du véhicule. Elle est limitée en partie du fait des filtrages opérés par le récepteur GPS. Ainsi les composantes réfléchies présentant un décalage Doppler trop important sont éliminées et donc non pénalisantes.

### Réflexion diffuse

Si la surface est rugueuse, la réflexion donne lieu à un continuum de signaux réfléchis. Elle peut être modélisée de façon plus simple comme la somme discrète et finie de plusieurs réflexions spéculaires dont les phases et amplitudes dépendent de la nature des irrégularités de la surface réfléchissante. Dans [Sou99], le modèle discret suivant est adopté :

$$s(t) = Ad(t - \tau)c(t - \tau) \cos(2\pi ft + \phi) + \sum_{k=1}^N \alpha_k Ad(t - \theta_k)c(t - \theta_k) \cos(2\pi f_k t + \phi_k) + b(t). \quad (4.3)$$

En toute rigueur, les coefficients d'atténuation  $\alpha_k$  et déphasages  $\phi_k$  sont corrélés car les signaux réfléchis sont issus du même élément de surface. Les fréquences et retards des signaux réfléchis présentent les mêmes caractéristiques que dans le cas d'une réflexion spéculaire.

Les récepteurs GPS standards sont fondés sur le modèle de signal (4.1). En présence de multitrajets, les composantes réfléchies induisent donc une erreur d'estimation du retard de propagation du signal direct  $\tau$ . Pour mieux examiner l'influence des multitrajets, la procédure classique d'estimation de  $\tau$  est d'abord succinctement présentée. Nous montrons ensuite de quelle façon elle se trouve perturbée si le signal reçu est de la forme (4.2).

### 4.2.3 Impact des multitrajets sur les mesures GPS

#### Fonctionnement du récepteur en l'absence de multitrajets

Un récepteur GPS est dédié principalement à deux fonctions : démoduler le signal reçu et estimer son retard de propagation. Pour cela, il met en œuvre deux boucles de poursuite imbriquées (l'une asservie sur le code et la seconde sur la phase), assurant le recalage d'un signal généré localement sur le signal reçu. Nous nous intéressons uniquement à l'effet des multitrajets sur les pseudo-distances et donc à l'estimation du délai de transmission  $\tau$  via la boucle de code. La démodulation est donc supposée correctement réalisée et l'influence du message de navigation  $d(t)$  est négligée. Sous ces hypothèses, le signal en entrée de la boucle de code s'écrit simplement :

$$s(t) = Ac(t - \tau) + b(t).$$

L'objectif de cette partie étant simplement d'appréhender l'impact des multitrajets sur la formation des mesures GPS, un modèle générique très simplifié de récepteur est utilisé. L'estimation de  $\tau$  est basée sur les bonnes propriétés de la fonction d'autocorrélation du code pseudo-aléatoire  $c(t)$ . La boucle de code aligne une réplique locale du code sur le signal reçu en poursuivant itérativement le maximum de leur fonction d'intercorrélation. Celle-ci est calculée comme suit :

$$S_{sc}(\hat{\tau}) = AS_c(\tau - \hat{\tau}) + b_c(\hat{\tau}),$$

où  $\hat{\tau}$  est la plus récente estimation du retard de propagation du signal GPS calculée par le récepteur, et où :

$$\begin{aligned} S_c(\tau - \hat{\tau}) &= \frac{1}{T} \int_T c(t - \tau)c(t - \hat{\tau})dt, \\ S_{sc}(\hat{\tau}) &= \frac{1}{T} \int_T s(t)c(t - \hat{\tau})dt, \\ b_c(\hat{\tau}) &= \frac{1}{T} \int_T b(t)c(t - \hat{\tau})dt. \end{aligned}$$

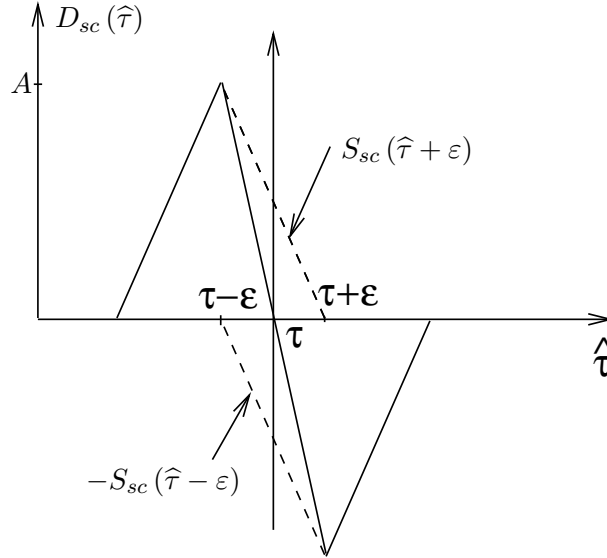
La fonction d'autocorrélation du code se rapproche de celle d'un bruit blanc. Plus précisément, elle peut être approchée comme suit :

$$S_c(\tau) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{\tau}{T_c} \right| & \text{si } |\tau| \leq T_c, \\ 0 & \text{si } |\tau| > T_c. \end{cases}$$

Le paramètre  $T_c$  est la période du code pseudo-aléatoire et le temps d'intégration  $T$  est un multiple de  $T_c$ . Comme il est difficile de repérer le maximum de la fonction d'intercorrélation  $S_{sc}$  dont la valeur dépend de l'amplitude  $A$ , la boucle de code procède plutôt en annulant une approximation de sa dérivée :

$$D_{sc}(\hat{\tau}) = S_{sc}(\hat{\tau} + \varepsilon) - S_{sc}(\hat{\tau} - \varepsilon), \quad (4.4)$$

où  $\varepsilon \leq \frac{T_c}{2}$ . La fonction  $D_{sc}$  est appelée discriminant. En l'absence de multitrajets et en négligeant le bruit, sa courbe représentative est dite courbe en S en référence à sa forme caractéristique représentée sur la figure 4.2 pour  $\varepsilon = \frac{T_c}{2}$ . Elle s'annule en  $\hat{\tau} = \tau$ . Notons qu'en pratique les discriminants utilisés dans les récepteurs GPS sont généralement plus complexes que l'expression (4.4) mais sont fondés sur le même principe.



**FIG. 4.2** - Discriminant en l'absence de multitrajets (en négligeant le bruit).

### En présence de multitrajets

Nous nous limitons au cas d'une seule composante réfléchiée par souci de simplicité. Après démodulation, le signal GPS devient :

$$s(t) = Ac(t - \tau) + \alpha Ac(t - \theta) \cos(\Delta ft + \Delta \phi) + b(t),$$

où :

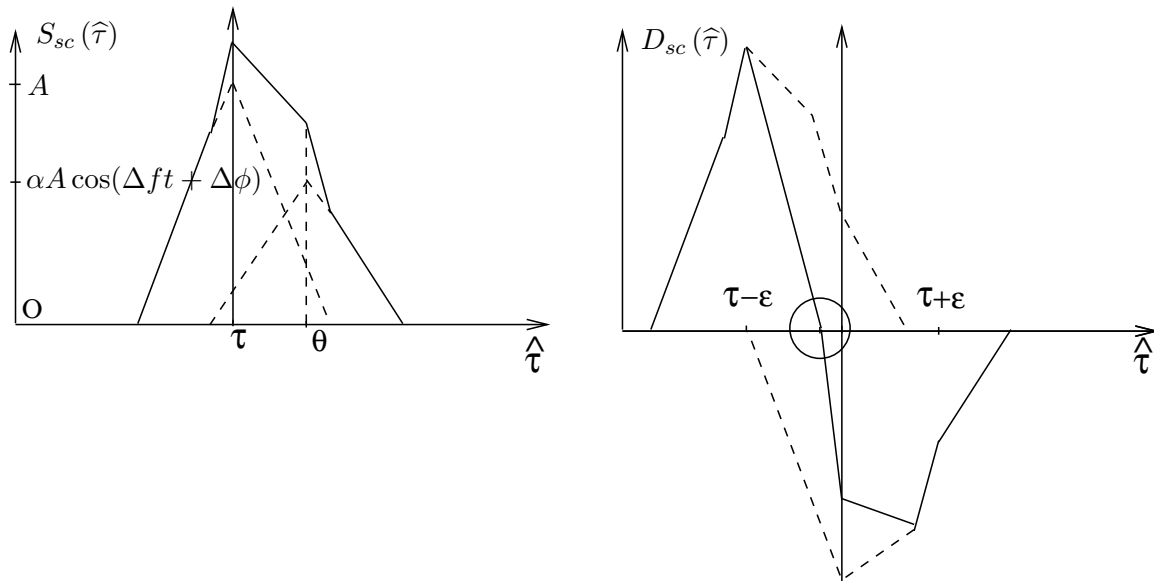
- $\Delta f = f_r - \hat{f}$  est la différence entre la fréquence Doppler réfléchiée et celle estimée par la boucle de phase,
- $\Delta \phi = \phi_r - \phi$  est la différence de phase.

En supposant suffisamment petite l'excursion de fréquence  $\Delta f$ , on peut écrire l'intercorrélacion de ce signal avec la réplique locale et décalée du code sous la forme :

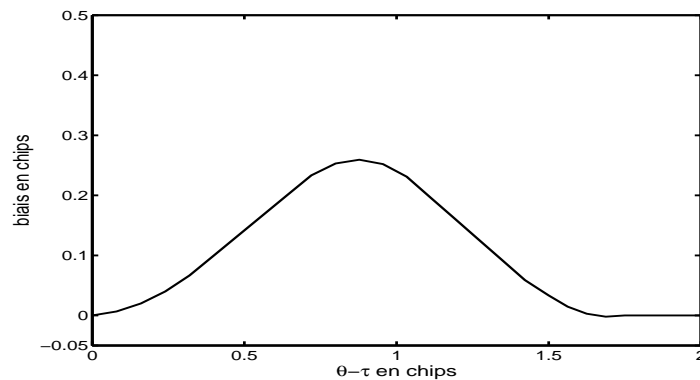
$$S_{sc}(\hat{\tau}) = AS_c(\tau - \hat{\tau}) + \alpha A \cos(\Delta ft + \Delta \phi) S_c(\theta - \hat{\tau}) + b_c(\hat{\tau}),$$

Le pic de corrélation est déformé de par la contribution de la composante réfléchiée et il perd sa symétrie. De ce fait, le point d'annulation de la courbe en S ne correspond plus à la valeur du délai de propagation  $\tau$  comme représenté sur la figure 4.3.

Il en résulte une erreur de poursuite et donc d'estimation des mesures de pseudo-distances. Plusieurs études ont été menées dans la littérature pour évaluer l'erreur d'estimation du paramètre  $\tau$  induite par la présence d'un signal réfléchi. Sur la figure 4.10 est reproduit le résultat de simulation obtenu dans [Sou99], P.53. La courbe représente le biais d'estimation dans le cas où le signal réfléchi est d'amplitude plus faible, présente le même Doppler, et est supposé en phase avec le signal direct. Cette courbe appelle plusieurs remarques. D'une part, les signaux retardés de plus de 1.5 chips de codes n'ont aucune incidence sur les performances de



**FIG. 4.3** - Discriminant en présence de multitrajets (en négligeant le bruit).  
 Figure gauche : pic de corrélation en présence d'un trajet réfléchi.  
 Figure droite : courbe en S.



**FIG. 4.4** - Biais d'estimation en fonction du retard du signal direct par rapport au signal réfléchi.

l'estimateur GPS. D'autre part, l'erreur d'estimation peut atteindre jusqu'à 0.3 chips de code, soit une erreur d'environ 100 m sur la pseudo-distance. Enfin, l'erreur induite dépend non linéairement de la différence de retard de propagation entre le trajet direct et réfléchi. Les études menées pour caractériser les erreurs de multitrajets ont conduit à plusieurs types de solutions visant soit à s'affranchir des multitrajets soit à atténuer leurs effets :

### Solutions matérielles

Les multitrajets affectent généralement les satellites dont l'angle d'élévation est faible. Une antenne dont le diagramme de rayonnement présente de faibles gains dans cette direction assure donc une bonne réjection des multitrajets. De plus, les réflexions modifient la polarisation des signaux. Une autre précaution consiste à utiliser des antennes étudiées pour recevoir des signaux à polarisation circulaire droite (comme les signaux satellites GPS). Parmi les travaux consacrés au rôle de l'antenne, on peut citer [Bra94]. Par ailleurs, on a vu que l'erreur d'estimation dépendait directement de la largeur du pic de corrélation. De nombreuses méthodes

sont donc basées sur l'utilisation soit de fonctions d'autocorrélation plus étroites, soit de nouvelles fonctions discriminantes. Le lecteur intéressé peut consulter [FFF<sup>+</sup>91], [GVDR96], ou encore [Mat96].

### Méthodes de traitement du signal

De nombreuses méthodes, parmi lesquelles [JKLP02], [Sou99] et [Ilt99] reposent sur l'hypothèse d'un canal perturbé par les multitrajets. Elles consistent à estimer conjointement les paramètres du signal direct et des signaux réfléchis à l'aide d'algorithmes tels le filtre de Kalman étendu ou les moindres carrés récursifs. Le signal direct est ensuite extrait en soustrayant les composantes réfléchies estimées. Le développement d'architectures multi-corrélateurs a ouvert de nouvelles perspectives pour ces approches [CMC02]. Leur efficacité est limitée par la validité du modèle de canal et entre autres la nécessité de connaître le nombre de signaux réfléchis.

Les techniques citées visent à améliorer la formation des mesures GPS en présence de multitrajets. Elles nécessitent donc de modifier l'architecture du récepteur GPS. D'autres axes de recherche laissent la configuration du récepteur inchangé mais s'orientent plutôt vers l'estimation de la position en présence de mesures dégradées :

- **exclusion des mesures de pseudo-distances trop biaisées.** Pour ce faire, des techniques de contrôle d'intégrité de type RAIM analysent la cohérence des mesures GPS pour détecter les anomalies.
- **estimation conjointe du biais de multitrajets affectant les mesures et de la solution de navigation** [NV03] et [NHVC04].

L'algorithme que nous présentons s'inscrit dans la continuité de ces approches. La principale limitation de la méthode de [NV03] et [NHVC04] est que les biais de multitrajet sont estimés même en l'absence de perturbation. Les multitrajets sont en effet des phénomènes localisés dans le temps, déterminés par les variations de l'environnement de propagation au cours de la trajectoire du véhicule. La qualité de l'estimation est déterminée par le choix de la dynamique des biais. Il est cependant impossible de concilier précision dans les périodes où l'environnement de propagation est stable et réactivité lorsqu'un événement perturbateur survient. Nous proposons de pallier cette difficulté au moyen d'un algorithme assurant à la fois la détection et l'estimation des erreurs dues aux multitrajets le cas échéant.

## 4.3 Formulation du problème de détection/estimation des biais de multitrajets

Au vu des résultats énoncés dans la partie précédente, il est raisonnable de modéliser les erreurs induites par les multitrajets comme des biais affectant les mesures GPS pendant des intervalles de durées variables. Si ces biais ne sont pas pris en compte dans l'algorithme de navigation, ils affectent la précision des estimés. Nous proposons donc un algorithme qui détecte ces anomalies tout en estimant la dynamique du véhicule. Il s'adapte donc automatiquement à l'environnement de propagation du véhicule. La nouveauté est que les mesures défaillantes ne sont pas exclues mais corrigées grâce à une procédure d'estimation conjointe des paramètres d'intérêt et des paramètres de nuisances que sont les erreurs de multitrajets. Ainsi, l'information apportée par ces mesures peut tout de même être mise à profit.

Par la suite, on appelle événement la disparition ou l'apparition d'un biais de multitrajets sur une des mesures GPS. La détection/estimation conjointe est assurée en ajoutant des para-



mètres de nuisances au vecteur état. Le modèle de filtrage prend alors la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{m}_t \end{pmatrix} = F_t \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t-1} \\ \mathbf{m}_{t-1} \end{pmatrix} + \mathbf{v}_t, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + C(\boldsymbol{\lambda}_{0:t})\mathbf{m}_t + \mathbf{w}_t, \quad (4.6)$$

où :

- les vecteurs  $\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q_t)$  et  $\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R_t)$  sont des bruits blancs Gaussiens et indépendants,
- le vecteur  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{n_x}$  regroupe les paramètres de navigation : la position et le biais d'horloge GPS, ainsi que leurs dérivées selon l'ordre du modèle de dynamique,
- $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur de mesure, composé des pseudo-distances des satellites vus par le récepteur à l'instant  $t$ . La dimension  $n_y$  peut donc varier au cours du temps en fonction de la géométrie véhicule-satellites,
- le vecteur  $\mathbf{m}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$  représente les biais de multitrajets associés à chacune des mesures GPS. Si une mesure n'est pas biaisée, la composante correspondante de  $\mathbf{m}_t$  est nulle.
- Le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$  indique les sauts de moyenne affectant les mesures GPS. Chaque composante représente une des mesures GPS. Pour  $i = 1, \dots, n_y$  :

$$\lambda_{t,i} = \begin{cases} 1 & \text{si un biais apparaît sur la } i\text{-ème mesure GPS,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\boldsymbol{\lambda}_t$  peut donc prendre un nombre fini de valeurs égal à  $2^{n_y} = n_\Lambda$ . On note  $\Lambda = \{0, 1\}^{n_y}$  l'ensemble de ces valeurs et  $\boldsymbol{\lambda}^j$  ( $j = 1, \dots, n_\Lambda$ ) les éléments de cet ensemble.

Le modèle de filtrage est explicité ci-dessous. La notation suivante est employée pour distinguer les états discrets des états continus :  $\mathbf{X}_t = (\mathbf{x}_t^T, \mathbf{m}_t^T)^T$ .

### 4.3.1 Modèles d'état

Si l'évolution des états continus est représentée par une équation d'état classique en navigation, celle du vecteur  $\boldsymbol{\lambda}_t$  est décrite par une loi de probabilité discrète utilisée habituellement pour les problèmes de segmentation [Lav98] et [TDL03].

#### Etats continus

En navigation, la dimension du vecteur état est déterminée par la dynamique du véhicule. Le modèle présenté convient pour un véhicule évoluant à vitesse quasiment constante et dont le mouvement est donc complètement décrit par sa vitesse et position. Le lecteur peut se référer à [FB98] pour d'autres modèles. Le vecteur état prend dans ce cas la forme :

$$\mathbf{X}_t = \underbrace{(x_t, y_t, z_t, \dot{x}_t, \dot{y}_t, \dot{z}_t)}_{\text{paramètres cinématiques}} \underbrace{(b_t, \dot{b}_t)}_{\text{paramètres d'horloge}} \underbrace{(\mathbf{m}_t^T, \dot{\mathbf{m}}_t^T)^T}_{\text{biais de multitrajets}},$$

où :

- $(x_t, y_t, z_t)$  est la position du véhicule en coordonnées cartésiennes dans le repère terrestre (ECEF),
- $(\dot{x}_t, \dot{y}_t, \dot{z}_t)$  regroupe les composantes du vecteur vitesse dans ce même repère,
- $(b_t, \dot{b}_t)$  est formé du décalage d'horloge récepteur GPS et de sa dérivée.

Les matrices d'état présentent des structures bloc-diagonales traduisant l'indépendance des paramètres cinématiques, des paramètres GPS et des biais dus aux multitrajets :

$$\begin{aligned} F_t &= \text{diag}(A_t, B_t, C_t), \\ Q_t &= \text{diag}(\Sigma_t^A, \Sigma_t^B, \Sigma_t^C). \end{aligned}$$

Plus précisément :

- la dynamique des paramètres cinématiques est bien décrite par un modèle double-intégrateur :

$$A_t = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \Delta t \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_t^A = \sigma_a^2 \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^3}{3} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \Delta t \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

où la variance  $\sigma_a^2$  règle les fluctuations du mobile autour de sa trajectoire rectiligne.

- Le modèle de biais d'horloge GPS a été formulé dans le second chapitre :

$$C_t = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma_t^C = \begin{pmatrix} \sigma_b^2 \Delta t + \sigma_d^2 \frac{\Delta t^3}{3} & \sigma_d^2 \frac{\Delta t^2}{2} \\ \sigma_d^2 \frac{\Delta t^2}{2} & \sigma_d^2 \Delta t \end{pmatrix}.$$

- Les biais de multitrajets sont représentés à l'aide de marches aléatoires :

$$C_t = \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad \text{et} \quad \Sigma_t^C = \sigma_m^2 \mathbf{I}_{2 \times 2}.$$

### Vecteur indicateur

Un modèle simple consiste à supposer que les événements de multitrajets sont indépendants dans le temps et pour les différents satellites GPS. Chaque composante du vecteur indicateur est alors une variable de Bernoulli.

$$\lambda_{t,i} = \begin{cases} 1 & \text{avec la probabilité } \gamma, \\ 0 & \text{avec la probabilité } 1 - \gamma, \end{cases}$$

avec  $i = 1, \dots, n_y$ . Le paramètre  $\gamma$  est ajusté en fonction de l'environnement de propagation et de la densité d'obstacles au voisinage du véhicule, par exemple sa valeur est faible en zone rural et plus élevée en zone urbaine.

### 4.3.2 Modèle de mesure

L'équation de mesure se déduit de l'expression des pseudo-distances GPS proposée dans le premier chapitre, modifiée pour prendre en compte un éventuel biais de multitrajets. À cet effet, il est utile d'associer à chaque vecteur de mesure  $\mathbf{Y}_t$  un vecteur  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  indiquant les composantes perturbées par le phénomène de multitrajet à un instant donné. Le modèle de mesure correspondant s'écrit, pour  $i = 1, \dots, n_y$  :

$$\mathbf{Y}_{t,i} = \sqrt{(x_t - x_t^i)^2 + (y_t - y_t^i)^2 + (z_t - z_t^i)^2} + b_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{t,i} \mathbf{m}_{t,i} + \mathbf{w}_{t,i},$$

où l'exposant  $i$  fait référence à la position du  $i$ -ième satellite et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t,i} = 1$  en présence d'un biais de multitrajets sur la mesure et 0 sinon. Le vecteur  $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\boldsymbol{\varepsilon}_{t,1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{t,n_y})^T$  dépend de la séquence des vecteurs indicateurs ( $\boldsymbol{\lambda}_t$ ) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{t,i} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1,i} & \text{si } \lambda_{t,i} &= 1, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t,i} &= 1 - \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1,i} & \text{si } \lambda_{t,i} &= 0. \end{aligned}$$

En supposant qu'il n'y a pas de biais de multitrajets à l'instant initial,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t,i} = \bigoplus_{k=1}^t \boldsymbol{\lambda}_{k,i}$  (où  $\bigoplus$  est l'opérateur ou exclusif). Avec les notations introduites, la matrice  $C(\boldsymbol{\lambda}_{0:t})$  intervenant dans le modèle général (5.3) est égale à  $\text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$ . Il convient de bien insister sur la différence entre les processus  $(\boldsymbol{\lambda}_t)_{t \geq 0}$  et  $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)_{t \geq 0}$ . Le premier représente les variations de l'environnement de propagation des signaux GPS (l'apparition ou la disparition de multitrajets), alors que le second traduit les effets de ces événements, c'est-à-dire la présence ou non d'une anomalie sur les mesures de pseudo-distances.

Formulé tel quel, le problème des multitrajets en navigation GPS s'apparente à un problème de détection et compensation des perturbations affectant un système dynamique. Cette question a fait l'objet de nombreuses études et les méthodes les plus couramment utilisées sont rappelées dans la partie suivante.

## 4.4 Solutions algorithmiques

### 4.4.1 Les algorithmes à modèles multiples

Le modèle de mesure pour la navigation GPS en présence de multitrajets varie en fonction des valeurs du vecteur  $\boldsymbol{\lambda}_t$ . Différents algorithmes ont été développés pour résoudre ce type de problèmes d'estimation dont le plus populaire est l'algorithme à modèles multiples interactifs (IMM) de Bar Shalom [BSF88]. Ces approches mettent en œuvre plusieurs filtres en parallèle, chacun correspondant à un des modèles de filtrage potentiels et donc à une réalisation du vecteur indicateur  $\boldsymbol{\lambda}_t$ . La solution s'écrit alors comme la combinaison linéaire des estimés des filtres en fonction de la probabilité *a priori* de chaque modèle et de sa vraisemblance par rapport à la mesure reçue. Ces algorithmes sont des approximations du filtre Bayésien optimal (FBO) présenté dans [SSH74]. Il est fondé sur la décomposition de la loi *a posteriori* des états continus selon le théorème des probabilités totales :

$$p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{n_\Lambda^{t+1}} \alpha_t^{(i)} p(\mathbf{X}_t | \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t}), \quad (4.7)$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha_t^{(i)} &= P[\boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{Y}_{1:t}], \\ \alpha_t^{(i)} &\propto \left( \prod_{k=1}^t p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}, \boldsymbol{\lambda}_{1:k}) \right) P[\boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)}]. \end{aligned}$$

Dans les expressions ci-dessus, les distributions  $p(\mathbf{X}_t | \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t})_{t \geq 0}$  et  $p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{Y}_{1:k-1}, \boldsymbol{\lambda}_{1:k})_{k=1, \dots, t}$  peuvent être approchées par des lois Gaussiennes en linéarisant localement le modèle de mesure (5.3). Leurs moyennes et matrices de covariance peuvent alors être estimées au moyen de filtres de Kalman étendus. Le filtre Bayésien optimal procède donc à l'estimation de la loi *a posteriori* du vecteur état  $\mathbf{X}_t$  en utilisant un nombre croissant de filtres de Kalman en parallèle conformément à la formule (4.7). La principale limitation de cette approche provient de la croissance exponentielle du nombre de réalisations possibles du vecteur indicateur  $\boldsymbol{\lambda}_{0:t}$  et donc du coût calculatoire. La solution la plus immédiate consiste à ne conserver que les hypothèses les plus probables à chaque instant, c'est-à-dire les termes de la somme correspondant aux poids  $\alpha_t^{(i)}$  les plus grands. L'algorithme IMM, au contraire, est basé sur une stratégie de fusion. Il ne tient pas compte des réalisations passées du vecteur indicateur et propose une

décomposition de la distribution cible sur les réalisations courantes du vecteur  $\lambda_t$  :

$$p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) = \sum_{j=1}^{n_\lambda} \alpha_t^{(j)} p(\mathbf{X}_t | \lambda_t^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t}),$$

où  $\alpha_t^{(j)} \simeq P[\lambda_t^{(j)} | \mathbf{Y}_{1:t}]$ . L'approximation fondamentale de l'algorithme consiste à remplacer la distribution  $p(\mathbf{X}_t | \lambda_t^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t})$  par une loi Gaussienne  $\mathcal{N}(\widehat{\mathbf{X}}_t^{(j)}, P_t^{(j)})$  alors qu'il s'agit en fait d'un mélange de lois Gaussiennes. Cette fusion intervient à l'étape de prédiction de l'algorithme. La loi de prédiction de l'algorithme IMM prend la forme :

$$p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sum_{j=1}^{n_\lambda} \alpha_{t|t-1}^{(i,j)} \widehat{p}(\mathbf{X}_t | \lambda_t^{(j)}, \lambda_{t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}),$$

où les notations suivantes ont été utilisées :

$$\begin{aligned} \alpha_{t|t-1}^{(i,j)} &= \alpha_{t-1}^{(i)} p[\lambda_t^{(j)} | \mathbf{Y}_{1:t-1}], \\ \widehat{p}(\mathbf{X}_t | \lambda_t^{(j)}, \lambda_{t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) &= \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(i,j)}, P_{t|t-1}^{(i,j)}). \end{aligned}$$

Les paramètres des lois Gaussiennes sont calculés en appliquant l'étape de prédiction des filtres de Kalman étendus associés aux hypothèses  $\lambda_{t-1}^{(i)}$  et  $\lambda_t^{(j)}$ . Pour limiter la charge calculatoire, l'algorithme IMM combine toutes les lois Gaussiennes correspondant à une même réalisation du vecteur indicateur à l'instant courant,  $\lambda_t$ , pour former l'approximation suivante :

$$p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}) \simeq \sum_{j=1}^{n_\lambda} \alpha_{t|t-1}^{(j)} \widehat{p}(\mathbf{X}_t | \lambda_t^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}), \quad (4.8)$$

où,

$$\begin{aligned} \alpha_{t|t-1}^{(j)} &= \sum_{i=1}^{n_\lambda} \alpha_{t|t-1}^{(i,j)}, \\ \widehat{p}(\mathbf{X}_t | \lambda_t^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) &= \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(j)}, P_{t|t-1}^{(j)}), \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(j)} &= \left( \sum_{i=1}^{n_\lambda} \alpha_{t|t-1}^{(i,j)} \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(i,j)} \right) / \alpha_{t|t-1}^{(j)}, \\ P_{t|t-1}^{(j)} &= \left( \sum_{i=1}^{n_\lambda} \alpha_{t|t-1}^{(i,j)} \left( P_{t|t-1}^{(j)} + \left( \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(i,j)} - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(j)} \right) \left( \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(i,j)} - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(j)} \right)^T \right) \right) / \alpha_{t|t-1}^{(j)}. \end{aligned}$$

Ensuite, la nouvelle mesure est prise en compte pour aboutir à la formule (4.8) et calculer les poids :

$$\alpha_t^{(j)} \propto \alpha_{t|t-1}^{(j)} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_t^{(j)}) \left(S_t^{(j)}\right)^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_t^{(j)})^T\right),$$

les notations  $\boldsymbol{\varepsilon}_t^{(j)}$  et  $S_t^{(j)}$  désignant respectivement l'innovation associée au  $j$ -ième filtre de Kalman et sa matrice de covariance. Elles sont mises à jour, conjointement aux estimés conditionnels de l'état  $\widehat{\mathbf{X}}_t^{(j)}$  et aux matrices de covariance  $P_t^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n_\lambda$ ), en appliquant les formules de correction du filtre de Kalman.

### 4.4.2 Le Rapport de vraisemblance généralisé (RVG)

Un algorithme classiquement utilisé pour détecter les sauts de moyenne perturbant l'état d'un système dynamique est le rapport de vraisemblance généralisé proposé en 1976 par Willsky et Jones [WJ76]. Initialement développé pour les systèmes linéaires, il est facilement applicable dans tous les cas où l'état est estimé par un filtre de Kalman ou un filtre de Kalman étendu. Il est nécessaire de reformuler notre modèle de filtrage pour se placer dans le cas de figure de l'algorithme RVG :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_t &= F_t \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{v}_t + \delta(t - \theta) [0_{n_y \times n_x}, 1_{n_y \times n_y}]^T \boldsymbol{\nu}, \\ \mathbf{Y}_t &= \mathbf{h}_t(\mathbf{X}_t) + [0_{n_y \times n_x}, 1_{n_y \times n_y}] \mathbf{X}_t + \mathbf{w}_t,\end{aligned}$$

où  $\delta(t - \theta) [0_{n_y \times n_x}, 1_{n_y \times n_y}]^T \boldsymbol{\nu}$  représente un saut de moyenne d'amplitude  $\boldsymbol{\nu}$  affectant uniquement les composantes de biais du vecteur état à l'instant  $\theta$ . L'algorithme RVG opère en deux temps :

#### Détection

La détection est basée à chaque instant  $t$  sur un test d'hypothèses multiples examinant toutes les possibilités de sauts de moyenne depuis l'instant initial. Pour  $k = 1, \dots, t$  :

$$\begin{aligned}H_0 &: \text{pas de saut de moyenne sur l'intervalle de temps } [0, t], \\ H_1(k, \boldsymbol{\nu}) &: \text{saut de moyenne à l'instant } k.\end{aligned}$$

La statistique de test est le rapport de vraisemblance, défini par :

$$l_t(k, \boldsymbol{\nu}) = \frac{p(\mathbf{Y}_{1:t} | H_1(k, \boldsymbol{\nu}))}{p(\mathbf{Y}_{1:t} | H_0)}.$$

Le meilleur instant candidat pour un saut est sélectionné ainsi :

$$\hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmax}} \quad l_t(k, \boldsymbol{\nu}).$$

Cependant, puisque la valeur de l'amplitude du saut  $\boldsymbol{\nu}$  est inconnue, elle est remplacée par son estimé au sens du maximum de vraisemblance calculé sous l'hypothèse  $H_1(k, \boldsymbol{\nu})$  et noté  $\hat{\boldsymbol{\nu}}_{\text{MV}}(k)$ . La décision est finalement prise par seuillage du rapport de vraisemblance suivant :

$$l_t(\hat{k}, \hat{\boldsymbol{\nu}}_{\text{MV}}(\hat{k})) \underset{H_0}{\overset{H_1(k, \boldsymbol{\nu})}{\geq}} h,$$

où  $h$  est le seuil de décision.

#### Compensation

Si un saut de moyenne est détecté, les estimés du filtre de Kalman sont corrigés pour prendre en compte l'erreur induite.

Cette approche requiert en théorie de mettre en œuvre plusieurs filtres de Kalman en cascade (chacun étudiant la possibilité d'un saut à un instant  $k \leq t$ ). Dans [WJ76], une solution plus simple est proposée. Il est démontré que l'effet du saut de moyenne sur les estimés  $\hat{\mathbf{X}}_t$  et innovations  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  calculés par le filtre de Kalman peut être rendu explicite :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_t[k] &= \boldsymbol{\epsilon}_t + \boldsymbol{\Phi}^T[k] \boldsymbol{\nu}, \\ \hat{\mathbf{X}}_t[k] &= \hat{\mathbf{X}}_t + \boldsymbol{\mu}[k] \boldsymbol{\nu},\end{aligned}$$

où la notation  $\mathbf{v}[k]$  correspond la valeur du vecteur  $\mathbf{v}$  si une anomalie s'est produite à l'instant  $k$ . Il suffit donc de calculer récursivement les matrices de régression  $\Phi^T[k]$  et  $\mu[k]$  pour évaluer à la fois la statistique de test et le cas échéant les corrections à appliquer aux estimés du filtre de Kalman pour prendre en compte le saut de moyenne. Les formules récursives pour évaluer les matrices de régression sont énoncées et démontrées en annexe C.

Les principales limitations de cet algorithme sont son coût calculatoire qui augmente au cours du temps et la nécessité de choisir un seuil de décision  $h$ . La première difficulté peut être contournée en imposant une fenêtre d'étude de durée finie.

Cette section a permis d'appréhender la structure d'un algorithme déterministe de détection de changement de modèle. Les méthodes classiquement utilisées sont basées sur un banc de filtres représentant chacun un des modèles possibles. L'algorithme opère ensuite une sélection ou une fusion des sorties de ces filtres au vu de la mesure reçue. Le filtrage particulier offre une autre solution à ce type de problème. En particulier, un algorithme Rao-Blackwellisé apparaît comme une extension directe des algorithmes à modèles multiples, à la différence que les hypothèses concurrentes sont explorées et sélectionnées aléatoirement.

## 4.5 Solution particulière proposée

Le vecteur état pour la navigation GPS dans un contexte de multitrajets est composé à la fois de grandeurs continues et discrètes. Les techniques de filtrage particulier, applicables à tout type de modèle, apparaissent donc particulièrement indiquées pour résoudre ce problème d'estimation. En outre, le modèle de filtrage présente une structure hiérarchique : conditionnellement au vecteur à valeurs discrètes, les paramètres continus sont décrits par un modèle "quasiment" linéaire Gaussien. La dénomination "quasiment" signifie qu'il suffit de linéariser récursivement l'équation de mesure pour former un modèle linéaire Gaussien approché. Ce type de structure peut être mis à profit en appliquant un algorithme Rao-Blackwellisé pour lequel les hypothèses concurrentes sont explorées aléatoirement alors que les estimés des états continus sont calculés par des filtres de Kalman étendus conditionnels. L'efficacité de l'algorithme dépend de son aptitude à sélectionner les modèles les plus pertinents du point de vue des informations disponibles. Les deux étapes déterminantes sont donc le choix de la loi de proposition et la technique de rééchantillonnage. Nous proposons ainsi de :

- simuler les particules selon une distribution de lissage où les mesures futures aident à la détection/estimation des biais à l'instant courant. En accord avec les hypothèses de modèle, une approximation de cette distribution est calculée afin de limiter le coût calculatoire de l'algorithme.
- présélectionner les particules avant le rééchantillonnage conformément au résultat d'un test d'hypothèses.

La présentation s'articule autour de ces deux points. La pertinence des solutions algorithmiques développées est ensuite analysée à l'aide de simulations.

### 4.5.1 Rao-Blackwellisation

L'objectif de l'algorithme de détection/estimation est de calculer récursivement la distribution *a posteriori* conjointe  $p(\lambda_{0:t}, \mathbf{X}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t})$ . Classiquement, la loi de Bayes conduit à la factorisation suivante :

$$p(\lambda_{0:t}, \mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t}) = p(\mathbf{X}_t | \lambda_{0:t}, \mathbf{Y}_{1:t}) p(\lambda_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}).$$

Un chemin  $\lambda_{0:t}$  définit un modèle de navigation possible pour le vecteur état  $\mathbf{X}_t$ . Le problème de filtrage correspondant peut alors être résolu à l'aide d'un filtre de Kalman étendu calculant une approximation Gaussienne de la distribution *a posteriori* conditionnelle  $p(\mathbf{X}_t | \lambda_{0:t}, \mathbf{Y}_{1:t})$ . Seul le vecteur indicateur  $\lambda_t$  doit donc être estimé par filtrage particulaire :

$$\widehat{P}[\lambda_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}] = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \delta(\lambda_{0:t} - \lambda_{0:t}^{(i)}).$$

Les notations suivantes sont utilisées par la suite pour les estimés des filtres de Kalman étendus :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{X}_t | \lambda_{0:t}, \mathbf{Y}_{1:t}) &\simeq \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{X}}_t^{(i)}, P_t^{(i)}), \\ p(\mathbf{X}_t | \lambda_{0:t}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) &\simeq \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(i)}, P_{t|t-1}^{(i)}), \\ p(\mathbf{Y}_t | \lambda_{0:t}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) &\simeq \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}^{(i)}, S_t^{(i)}). \end{aligned}$$

Avec cette approche, chaque particule  $(\lambda_t^{(i)}, \widehat{\mathbf{X}}_t^{(i)})^T$  représente :

- un contexte de navigation (présence d'une erreur de multitrajets sur une ou plusieurs mesures GPS) via le vecteur  $\lambda_t^{(i)}$ ,
- la solution au problème de navigation correspondant  $\widehat{\mathbf{X}}_t^{(i)}$ .

La détection des multitrajets est fondée sur la loi marginale *a posteriori*  $\widehat{P}[\lambda_t | \mathbf{Y}_{1:t}]$ . Les instants où se produisent les changements de modèle sont caractérisés par de brusques augmentations de la probabilité  $P_t^c = (P_{t,1}^c, \dots, P_{t,n_y}^c)$  où :

$$P_{t,i}^c = \widehat{P}[\lambda_{t,i} = 1 | \mathbf{Y}_{1:t}], \text{ pour } i = 1, \dots, n_y.$$

Les estimés des biais de multitrajets éventuels et des coordonnées cinématiques du véhicule sont calculés à partir de la distribution marginale :

$$\widehat{p}[\mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t}] = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} p(\mathbf{X}_t | \lambda_{0:t}^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:t}),$$

qui est approchée par un mélange de lois Gaussiennes. Plus précisément, nous utilisons l'estimateur MMSE (qui minimise l'erreur quadratique moyenne entre  $\mathbf{X}_t$  et  $\widehat{\mathbf{X}}_t$ ) :

$$\widehat{\mathbf{X}}_t = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \widehat{\mathbf{X}}_t^{(i)}.$$

## 4.5.2 Loi de proposition

Nous avons déjà souligné l'importance du choix de la distribution de proposition dans le développement d'un algorithme de filtrage particulaire. Ce point est particulièrement critique dans un contexte de détection. Les événements de multitrajets sont des événements rares et leur probabilité d'occurrence  $\gamma = P[\lambda_{t,l} = 1]$  ( $l = 1, \dots, n_y$ ) peut en conséquence être très faible. Il est alors crucial de ne pas retenir la loi *a priori* comme distribution d'échantillonnage au risque de n'obtenir que très peu de particules indiquant un changement de modèle à chaque

instant. Nous préconisons de prendre en compte l'information apportée par la mesure courante et si possible les mesures futures. En effet, les effets des multitrajets se manifestent tant que la configuration satellite-récepteur-réfecteur est défavorable. Plusieurs mesures GPS consécutives sont donc affectées par une perturbation. La détection des multitrajets est significativement améliorée en simulant les particules selon la distribution de lissage  $P[\boldsymbol{\lambda}_t | \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}, \mathbf{Y}_{1:t+L}]$  (pour  $L \geq 0$ ) et ceci pour deux raisons :

- selon son amplitude le biais de multitrajets peut être difficile à détecter à partir d'une seule mesure car noyé dans le bruit,
- le lissage permet d'éliminer les fausses alarmes.

Cette approche a déjà été appliquée avec succès par Wang et Chen dans [WCG02] pour la détection et le décodage de canaux à évanouissement lent.

Dans le cas où  $L$  est égal à 0, la loi de proposition optimale se calcule aisément. Pour  $i = 1, \dots, N$ , on obtient :

$$P[\boldsymbol{\lambda}_t | \mathbf{Y}_{1:t}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}] = \frac{p(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\lambda}_t, \mathbf{Y}_{1:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}) P[\boldsymbol{\lambda}_t]}{\sum_{\boldsymbol{\lambda}_t} p(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\lambda}_t, \mathbf{Y}_{1:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}) P[\boldsymbol{\lambda}_t]},$$

où  $\sum_{\boldsymbol{\lambda}_t}$  désigne la somme sur l'ensemble des réalisations possibles du vecteur  $\boldsymbol{\lambda}_t$  et la distribution  $p(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\lambda}_t, \mathbf{Y}_{1:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)})$  est la loi de l'innovation du filtre de Kalman associé au chemin  $(\boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_t)$ .

Dans le cas où  $L > 0$ , toutes les trajectoires possibles du vecteur indicateur  $\boldsymbol{\lambda}_t$  doivent être explorées pour calculer la distribution de lissage :

$$P[\boldsymbol{\lambda}_t | \mathbf{Y}_{1:t}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}] = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L}} P[\boldsymbol{\lambda}_t, \boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L} | \mathbf{Y}_{1:t}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}].$$

Cette technique a l'inconvénient d'être calculatoirement trop coûteuse. Supposons par exemple que 4 satellites GPS (soit le nombre minimal requis pour résoudre le problème de navigation) soient en vue et que le pas  $L$  soit égal à 5, alors le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}_t$  peut prendre  $2^4 = 16$  valeurs à chaque instant et le nombre de descendants à examiner pour la particule  $\boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}$  s'élève à  $2^{4 \times 5}$  soit plus de  $10^6$  possibilités. Dans [WCG02], une alternative consiste à utiliser la technique de l'échantillonnage pondéré pour calculer une approximation de Monte Carlo de la loi de lissage en parcourant aléatoirement les trajectoires possibles du vecteur indicateur. Nous proposons de tirer parti des propriétés de notre modèle pour développer une technique plus simple d'échantillonnage. On ajoute donc une contrainte sur le délai entre deux événements de multitrajets, sachant qu'ils sont peu fréquents. Si on étudie un éventuel changement de modèle à l'instant  $t$ , il est raisonnable de supposer qu'aucun autre événement ne se produit pendant la durée de la fenêtre de lissage  $[t+1, t+L]$ . Cette approche revient à n'explorer que les hypothèses *a priori* les plus probables. La distribution de proposition prend alors la forme :

$$P[\boldsymbol{\lambda}_t | \mathbf{Y}_{1:t}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}] \simeq P[\boldsymbol{\lambda}_t, \boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L} = \mathbf{0} | \mathbf{Y}_{1:t}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}].$$

Le vecteur indicateur prend un nombre fini de valeurs  $(\boldsymbol{\lambda}^j)_{j=1, \dots, n_\Lambda}$ . Il obéit donc à une loi discrète de la forme :

$$P[\boldsymbol{\lambda}_t | \mathbf{Y}_{1:t}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)}] \simeq \sum_{j=1}^{n_\Lambda} \gamma^{(i,j)} \delta(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\lambda}^j).$$



On introduit la notation suivante pour détailler le calcul des probabilités élémentaires  $\gamma^{(i,j)}$  :

$$\left(\Lambda_{t-l}^{t+k}\right)^{(i,j)} = \left\{ \boldsymbol{\lambda}_{t-l:t-1} = \boldsymbol{\lambda}_{t-l:t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}^j, \boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+k} = \mathbf{0} \right\}.$$

Par définition,  $\gamma^{(i,j)} \simeq P \left[ \boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}^j, \boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+k} = \mathbf{0} \mid \mathbf{Y}_{1:t+L}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)} \right]$ , d'où en appliquant la règle de Bayes :

$$\begin{aligned} \gamma^{(i,j)} &\propto p \left( \mathbf{Y}_{t:t+L}, \left(\Lambda_t^{t+k}\right)^{(i,j)} \mid \mathbf{Y}_{1:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{1:t-1}^{(i)} \right), \\ &\propto P \left[ \left(\Lambda_t^{t+k}\right)^{(i,j)} \right] \prod_{k=0}^L p \left( \mathbf{Y}_{t+k} \mid \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, \left(\Lambda_0^{t+k}\right)^{(i,j)} \right). \end{aligned}$$

Soit :

$$\gamma^{(i,j)} = \frac{P[\boldsymbol{\lambda}^j] \prod_{k=0}^L p \left( \mathbf{Y}_{t+k} \mid \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, \left(\Lambda_0^{t+k}\right)^{(i,j)} \right)}{\sum_{l=1}^{n_\Lambda} P[\boldsymbol{\lambda}^l] \prod_{k=0}^L p \left( \mathbf{Y}_{t+k} \mid \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, \left(\Lambda_0^{t+k}\right)^{(i,l)} \right)}, \quad (4.9)$$

où la distribution  $p \left( \mathbf{Y}_{t+k} \mid \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, \left(\Lambda_0^{t+k}\right)^{(i,j)} \right)$  est la loi de l'innovation du filtre de Kalman paramétré par le vecteur  $\left(\Lambda_0^{t+k}\right)^{(i,j)}$ . Au vu de cette expression, il apparaît que les particules à l'instant  $t$  sont sélectionnées en fonction de leur probabilité *a priori* et de leur vraisemblance par rapport aux  $L$  mesures à venir.

La loi de proposition de lissage permet de calculer deux jeux de poids : des poids de filtrage  $w_t^{(i)}$  et des poids de lissage  $\tilde{w}_t^{(i)}$  qui permettent d'estimer la distribution *a posteriori* suivante :

$$\widehat{P}[\boldsymbol{\lambda}_{0:t} \mid \mathbf{Y}_{1:t+L}] \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta \left( \boldsymbol{\lambda}_{0:t} - \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)} \right).$$

À l'issue de la simulation, notons  $\boldsymbol{\lambda}^{j^i}$  la valeur prise par la particule  $\boldsymbol{\lambda}_t^{(i)}$ . Les poids de filtrage se calculent classiquement selon :

$$w_t^{(i)} \propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p \left( \mathbf{Y}_t \mid \mathbf{Y}_{0:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)} \right) P \left[ \boldsymbol{\lambda}^{j^i} \right]}{\gamma^{(i,j^i)}}.$$

Par définition, les poids de lissage s'écrivent :

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p \left( \mathbf{Y}_{t:t+L} \mid \mathbf{Y}_{0:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)} \right) P \left[ \boldsymbol{\lambda}^{j^i} \right]}{\gamma^{(i,j^i)}}.$$

À nouveau, le calcul de  $p \left( \mathbf{Y}_{t:t+L} \mid \mathbf{Y}_{0:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)} \right)$  fait intervenir une somme sur toutes les trajectoires futures possibles de la particule  $\boldsymbol{\lambda}_t^{(i)}$  :

$$p \left( \mathbf{Y}_{t:t+L} \mid \mathbf{Y}_{0:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)} \right) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L}} p \left( \mathbf{Y}_{t:t+L} \mid \mathbf{Y}_{0:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L} \right) P \left[ \boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L} \right].$$

En émettant la même hypothèse que pour le calcul de la loi de proposition :

$$p \left( \mathbf{Y}_{t:t+L} \mid \mathbf{Y}_{0:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)} \right) \simeq p \left( \mathbf{Y}_{t:t+L} \mid \mathbf{Y}_{0:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L} = \mathbf{0} \right),$$

on obtient finalement en remplaçant  $\gamma^{(i,j^i)}$  par son expression (4.9) :

$$\tilde{w}_t^{(i)} = \sum_{l=1}^{n_\Lambda} P[\boldsymbol{\lambda}^l] \prod_{k=0}^L p \left( \mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, \left( \boldsymbol{\Lambda}_0^{t+k} \right)^{(i,l)} \right).$$

Les poids de lissage vont permettre de prendre en compte l'information apportée par les futures mesures pour améliorer la détection des multitrajets. La probabilité que la  $k$ -ième mesure soit biaisée s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{t,l}^c &= P[\boldsymbol{\lambda}_{t,l} = \mathbf{1} | \mathbf{Y}_{1:t+L}], \\ &\simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta \left( \boldsymbol{\lambda}_{t,l}^{(i)} - \mathbf{1} \right), \end{aligned}$$

pour  $l = 1, \dots, n_y$ . Les estimés correspondants des états continus s'écrivent :

$$\widehat{\mathbf{X}}_t = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \widehat{\mathbf{X}}_t^{(i)}.$$

### 4.5.3 Contrôle du rééchantillonnage par un test d'hypothèses

L'objectif de l'étape de rééchantillonnage est d'éliminer les particules les moins représentatives de la distribution cible pour améliorer la qualité de l'estimation et limiter les risques de divergence. La sélection s'effectue généralement au vu des poids d'importance mais pour certaines applications, des procédures plus efficaces peuvent être mises en œuvre. En navigation indoor par exemple, certaines trajectoires sont proscrites de par la configuration du bâtiment. Les particules aberrantes sont alors directement éliminées avant de procéder à l'étape de redistribution du filtre particulaire. Une démarche similaire peut être reproduite dans un contexte de détection. L'idée est d'introduire un test d'hypothèses pour décider de l'occurrence d'un évènement de multitrajets et de ne conserver que les particules en accord avec le résultat de ce test.

#### 4.5.3.1 Formulation du test d'hypothèses

Les deux hypothèses concurrentes sont les suivantes :

- $H_{1,t}$  : un évènement de multitrajets se produit à l'instant  $t$ ,
- $H_{0,t}$  : aucun évènement ne vient perturber la navigation.

En accord avec le lemme de Neyman-Pearson énoncé par exemple dans [VT68], on utilise le rapport de vraisemblances comme test statistique. De même que l'information apportée par les observations futures aide à propager efficacement les particules, elle permet d'améliorer significativement la prise de décision. Le test d'hypothèses suivant est donc appliqué :

$$T_t = \frac{p(\mathbf{Y}_{t:t+L} | \mathbf{Y}_{1:t-1}, H_{1,t}, \boldsymbol{\nu}_t)}{p(\mathbf{Y}_{t:t+L} | \mathbf{Y}_{1:t-1}, H_{0,t})} \underset{H_{0,t}}{\overset{H_{1,t}}{\leq}} h_t,$$

où  $\boldsymbol{\nu}_t$  est l'amplitude du saut de moyenne affectant les biais de multitrajets. Cette amplitude est inconnue mais peut être estimée par le filtre particulaire :  $\hat{\boldsymbol{\nu}}_t = \widehat{\boldsymbol{m}}_t - \widehat{\boldsymbol{m}}_{t|t-1}$ , où  $\widehat{\boldsymbol{m}}_{t|t-1} = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \widehat{\boldsymbol{m}}_{t|t-1}^{(i)}$ . Si  $T_t > h_t$ , un évènement de multitrajets est détecté et les poids de toutes les particules contredisant cette hypothèse sont mis à zéro. La seule difficulté réside alors dans le choix du seuil de décision  $h_t$ .

### 4.5.3.2 Calcul du seuil de décision

La démarche classique consiste à fixer la probabilité de fausse alarme  $\alpha = P[\text{décider } H_{1,t}|H_{0,t}]$  et à calculer le seuil de décision correspondant en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned}\alpha &= P[T_t > h_t | H_{0,t}], \\ \alpha &= \int_{h_t}^{\infty} p_{T_t|H_{0,t}}(T_t) dT_t.\end{aligned}$$

Il apparaît donc nécessaire pour obtenir une expression analytique du seuil,  $h_t = f(\alpha)$ , de savoir calculer et intégrer la densité de probabilité de la statistique de test sous l'hypothèse  $H_{0,t}$ . À cet effet, nous proposons d'utiliser une statistique de test approchée mais de distribution connue. Tout d'abord, l'hypothèse de lissage permet de réécrire  $H_{0,t}$  et  $H_{1,t}$  comme suit :

$$\begin{aligned}H_{1,t} &= \{\boldsymbol{\lambda}_t \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L} = \mathbf{0}\}, \\ H_{0,t} &= \{\boldsymbol{\lambda}_t = \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L} = \mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

Puis, en appliquant la loi de Bayes,  $T_t$  peut être décomposée de la façon suivante :

$$T_t \simeq \frac{\prod_{k=0}^L p(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, H_{1,t}, \hat{\boldsymbol{\nu}}_t)}{\prod_{k=0}^L p(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, H_{0,t})}. \quad (4.10)$$

Le filtre particulière Rao-Blackwellisé fournit une approximation de chacune des distributions apparaissant dans ce rapport sous forme de mélange de lois Gaussiennes. Pour  $k = 0, \dots, L$  et sous l'hypothèse  $H_{0,t}$ , on a :

$$p(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, H_{0,t}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}} p(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}, H_{0,t}) p(\boldsymbol{\lambda}_{0:t-1} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, H_{0,t}).$$

Or :

$$p(\boldsymbol{\lambda}_{0:t-1} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, H_{0,t}) \simeq \sum_{i=1}^N \beta_{t+k}^{(i)} \delta(\boldsymbol{\lambda}_{0:t-1} - \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}^{(i)}).$$

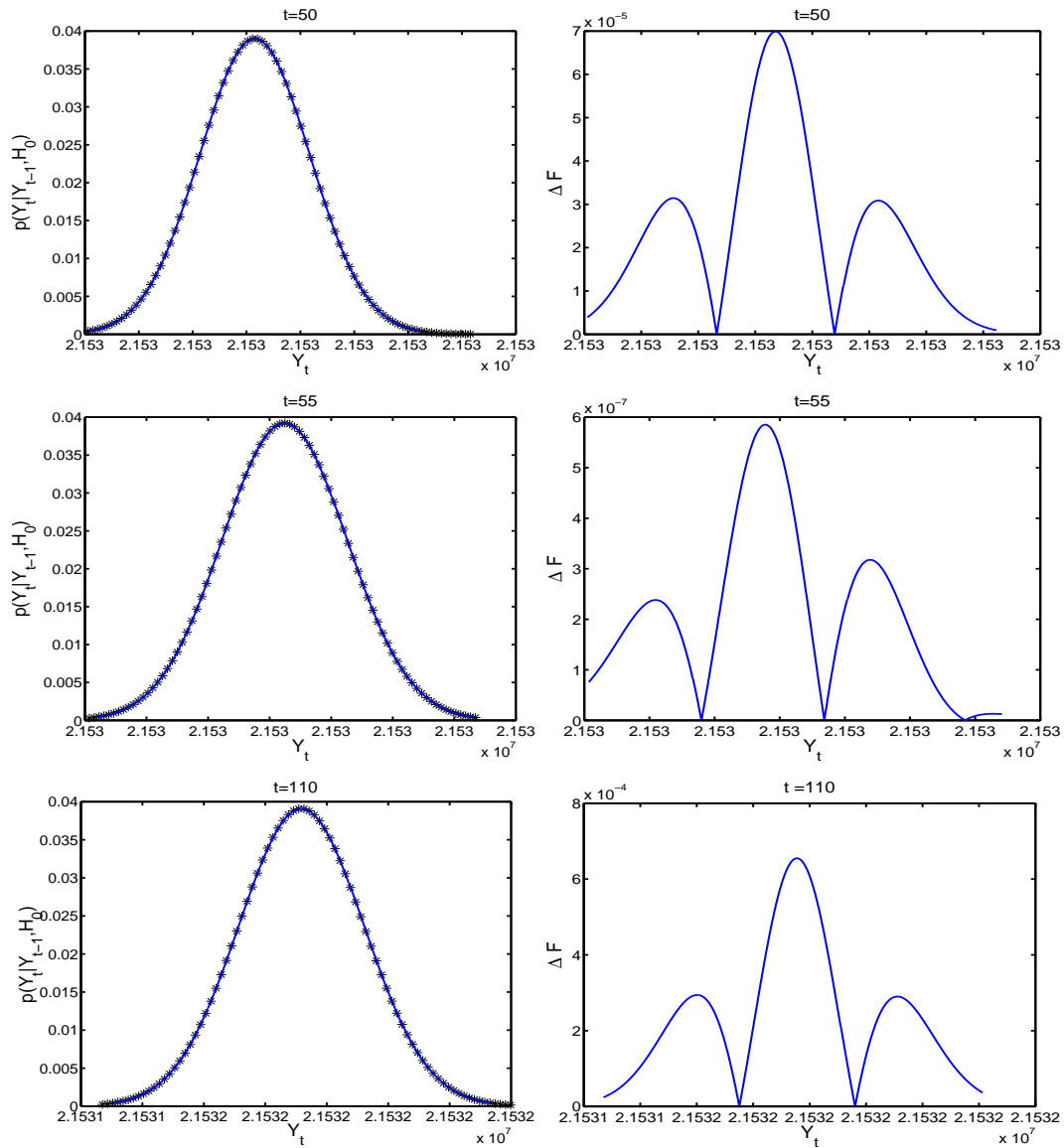
avec :

$$\begin{cases} \beta_{t+k}^{(i)} & \propto w_{t-1}^{(i)} \prod_{l=1}^k p(\mathbf{Y}_{t+l-1} | \mathbf{Y}_{1:t+l-2}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}^{(i)}, H_{0,t}) \text{ si } k > 0, \\ \beta_t^{(i)} & \propto w_{t-1}^{(i)} \text{ si } k = 0. \end{cases}$$

On en déduit :

$$p(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, H_{0,t}) \simeq \sum_{i=1}^N \beta_{t+k}^{(i)} p(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}^{(i)}, H_{0,t}).$$

Dans les expressions ci-dessus, les paramètres de la distribution  $p(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}^{(i)}, H_{0,t})$  sont calculés récursivement par le filtre de Kalman étendu associé à la réalisation  $\boldsymbol{\lambda}_{0:t+L} = (\boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L} = \mathbf{0})$  du vecteur indicateur. Nous commençons une approximation qui permet d'exprimer simplement la statistique de test. En remplaçant chaque mélange de lois Gaussiennes par une loi Gaussienne équivalente, une relation simple peut être établie entre les vraisemblances sous les hypothèses  $H_{0,t}$  et  $H_{1,t}$ . Cette approximation se justifie du fait de la procédure de sélection des particules qui permet de ne conserver qu'une hypothèse de modèle à chaque itération et donc uniquement le mode dominant du mélange de lois Gaussiennes. Sa validité peut aussi se vérifier par simulation. Les courbes de la figure (4.5) sont obtenues en appliquant l'algorithme développé à un scénario classique de navigation en présence de multitrajets. Sur les graphes sont représentées pour différents instants (correspondant ou non à la présence d'une perturbation) :



**FIG. 4.5** - Validité de l'approximation des lois de mélange  
La mesure  $\mathbf{Y}_t$  est exprimée en mètres.

- sur les courbes de gauche, les mélanges de lois Gaussiennes et leurs approximations Gaussiennes,
- sur les courbes de droite, la valeur absolue de la différence entre la fonction de répartition du mélange de lois  $F_m$  et celle de son approximation Gaussienne  $F_g$  :  $\Delta F(x) = |F_m(x) - F_g(x)|$ .

Les figures de gauche montrent que les mélanges de lois Gaussiennes sont superposés avec leurs approximations Gaussiennes. Ce résultat est confirmé par les courbes de droite où il apparaît que l'écart maximal entre les fonctions de répartition des deux distributions est inférieur à  $10^{-3}$ .

En appliquant les formules de fusion de lois Gaussiennes, on obtient :

$$p(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{Y}_{1:t+k-1}, H_{0,t}) \simeq \mathcal{N}(\hat{\mathbf{Y}}_{t+k|1:t+k-1}, \hat{\mathbf{S}}_{t+k}),$$

avec :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{Y}}_{t+k|1:t+k-1} &= \sum_{i=1}^N \beta_{t+k}^{(i)} \widehat{\mathbf{Y}}_{t+k|1:t+k-1}^{(i)}, \\ \widehat{S}_{t+k} &= \sum_{i=1}^N \beta_{t+k}^{(i)} \left( \widehat{S}_{t+k}^{(i)} + \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{t+k|1:t+k-1}^{(i)} - \widehat{\mathbf{Y}}_{t+k|1:t+k-1} \right) \left( \widehat{\mathbf{Y}}_{t+k|1:t+k-1}^{(i)} - \widehat{\mathbf{Y}}_{t+k|1:t+k-1} \right)^T \right).\end{aligned}$$

Réécrivons la statistique de test de façon à faire apparaître les innovations :

$$T_t \simeq \frac{\prod_{k=0}^L p(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} | H_{1,t}, \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t)}{\prod_{k=0}^L p(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} | H_{0,t})},$$

avec :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} &= \mathbf{Y}_{t+k} - \widehat{\mathbf{Y}}_{t+k|1:t+k-1}, \\ &= \sum_{i=1}^N \beta_{t+k}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}^{(i)},\end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}^{(i)} = \mathbf{Y}_{t+k} - \widehat{\mathbf{Y}}_{t+k|1:t+k-1}^{(i)}$ . L'algorithme RVG statue que pour les modèles linéaires Gaussiens, un saut de moyenne affectant les composantes du vecteur état se traduit simplement par un saut de moyenne sur les innovations. Les innovations conditionnelles de chacun des filtres de Kalman associés aux N réalisations possibles du vecteur indicateur  $(\boldsymbol{\lambda}_{0:t-1})_{i=1,\dots,N}$  vérifient donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}^{(i)}[t] = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}^{(i)} + (\boldsymbol{\varphi}_{t+k}^T)^{(i)} \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t, \quad (4.11)$$

où les matrices de régression linéaire sont calculées conformément aux formules de l'algorithme RVG rappelées en annexe B. En vertu de la relation (4.11), on obtient pour l'innovation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}[t] = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} + \boldsymbol{\varphi}_{t+k}^T \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t, \quad (4.12)$$

où :

$$\boldsymbol{\varphi}_{t+k}^T = \sum_{i=1}^N \beta_{t+k}^{(i)} (\boldsymbol{\varphi}_{t+k}^T)^{(i)}.$$

Ainsi les lois de l'innovation sous les hypothèses  $H_{1,t}$  et  $H_{0,t}$  diffèrent seulement par leur moyenne :

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} | H_{0,t}) &\simeq \mathcal{N}(\mathbf{0}; S_{t+k}), \\ p(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} | H_{1,t}, \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t) &\simeq \mathcal{N}(\boldsymbol{\varphi}_{t+k}^T \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t; S_{t+k}).\end{aligned}$$

La statistique de test peut alors être approchée par :

$$T_t = \exp \left( \sum_{k=0}^L \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}^T S_{t+k}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} - \boldsymbol{\varphi}_{t+k}^T \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t)^T S_{t+k}^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k} - \boldsymbol{\varphi}_{t+k}^T \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t) \right).$$

Nous proposons donc d'utiliser la statistique de test suivante équivalente à  $T_t$  (à une fonction croissante près) :

$$T'_t = \left( \sum_{k=0}^L \boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}^T S_{t+k}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{t+k}^T \right) \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t.$$

Elle est différente de celle obtenue dans le cas du RVG car le problème de l'amplitude du saut de moyenne a été traité différemment. Ici, le vecteur  $\boldsymbol{\nu}_t$  est remplacé par son estimé au sens du *maximum a posteriori* au lieu du *maximum de vraisemblance* pour l'algorithme RVG. La statistique  $T'_t$  suit une loi Gaussienne de variance  $\sigma_T^2 = \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t^T \left( \sum_{k=0}^L \varphi_{t+k} S_{t+k}^{-1} \varphi_{t+k}^T \right) \widehat{\boldsymbol{\nu}}_t$ , ce qui nous conduit à l'expression suivante du seuil de décision :

$$h_t = \sigma_T \phi^{-1}(1 - \alpha), \quad (4.13)$$

où  $\phi$  est la fonction de répartition d'une loi Gaussienne réduite (de moyenne nulle et variance identité).

#### 4.5.3.3 Sélection des particules

Les particules en contradiction avec le test d'hypothèses sont éliminées. Les particules restantes sont redistribuées en fonction de leurs poids respectifs. Cependant, la loi de proposition lissée conduit à deux types de poids : les poids de filtrage et les poids de lissage. En théorie, le rééchantillonnage est réalisé à partir des poids de filtrage pour obtenir une approximation de Monte Carlo de la distribution *a posteriori*  $P[\boldsymbol{\lambda}_t | \mathbf{Y}_{1:t}]$  et initier l'itération suivante de l'algorithme particulaire. Cependant, les poids de lissage sont plus révélateurs de la pertinence des particules. Dans [WCG02], le dilemme est résolu au moyen d'un échantillonnage pondéré. Ainsi, les particules sont sélectionnées selon leurs poids de lissage mais ne sont plus équilibrées à l'issue de la redistribution. Leurs poids sont réajustés de manière à obtenir une approximation de la distribution de filtrage. Si  $\boldsymbol{\lambda}_t^{(k^i)}$  est la valeur prise par la particule  $\boldsymbol{\lambda}_t^{(i)}$  à l'issue du rééchantillonnage, alors :

$$w_t^{(i)} \propto w_t^{(k^i)} / \bar{w}_t^{(k^i)}.$$

L'algorithme d'estimation en présence de multitrajets est résumé en figure 4.1.

## 4.6 Etude des performances de l'algorithme DECFP

Dans cette partie, nous appliquons l'algorithme développé à des données simulées pour évaluer ses performances. Il est comparé à deux algorithmes classiquement utilisés pour détecter les anomalies affectant un système dynamique : l'algorithme RVG et un algorithme de type modèles multiples.

### 4.6.1 Simulation des données

Un scénario classique de navigation GPS est d'abord simulé, puis les perturbations de multitrajets sont introduites.

#### Trajectoire du véhicule

Le véhicule se déplace à une vitesse quasi constante de 50 km/h pendant les 200s de la simulation.

#### Pseudo-distances GPS

A partir d'almanachs GPS, les positions occupées par chacun des 24 satellites de la constellation au cours de la simulation sont calculées. En chaque point de la trajectoire des satellites peuvent alors être évalués :

**Initialisation**

- Choix de la probabilité de fausse alarme  $\alpha$  et du pas de lissage  $L$ .
- Pour  $i = 1, \dots, N$ ,
  - $\boldsymbol{\lambda}_0^{(i)} = \mathbf{0}$ ,
  - $\widehat{\mathbf{X}}_0^{(i)} = \mathbf{X}_0^{\text{init}}$  et  $P_0^{(i)} = P_0$  si  $(\mathbf{X}_0 | \boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{0}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{X}_0^{\text{init}}; P_0)$ .

**Itération  $t$** 

- **Simulation des particules**, pour  $i = 1, \dots, N$ ,
  - ▶ pour  $j = 1, \dots, n_\Lambda$  (exploration des hypothèses de modèle).
    - $L$  itérations du FKE associé à l'hypothèse  $(\boldsymbol{\Lambda}_0^{t+L})^{(i,j)}$  :
      - ⇒ calcul de  $\gamma^{(i,j)}, \widehat{\mathbf{X}}_t^{(i,j)}, P_t^{(i,j)}, \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(i,j)}$ .
    - Si  $\boldsymbol{\lambda}^j = \mathbf{0}$  (hypothèse  $H_{0,t}$ ),
      - ⇒ calcul des paramètres intervenant dans le test d'hypothèses : l'innovation  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}^{(i)}$ , sa matrice de covariance  $S_{t+k}^{(i)}$ , la matrice de régression linéaire  $\boldsymbol{\varphi}_{t+k}^{(i)}$  et les poids  $\boldsymbol{\beta}_{t+k}^{(i)}$ , pour  $k = 0, \dots, L$ .
  - ▶ Normalisation des poids  $(\gamma^{(i,j)})_{j=1, \dots, n_\Lambda}$ .
  - ▶ Tirage de  $\boldsymbol{\lambda}_t^{(i)} \sim \sum_{j=1}^{n_\Lambda} \gamma^{(i,j)} \delta(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\lambda}^j)$ .  
Notons  $\boldsymbol{\lambda}^{j^i}$  la valeur simulée pour la  $i$ -ème particule, les estimés conditionnels et matrices de covariance associées sont conservés :  $\widehat{\mathbf{X}}_t^{(i)} = \widehat{\mathbf{X}}_t^{(i,j^i)}$ ,  $\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(i)} = \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(i,j^i)}$  et  $P_t^{(i)} = P_t^{(i,j^i)}$ .
  - ▶ Calcul des poids de filtrage et lissage  $w_t^{(i)}$  et  $\tilde{w}_t^{(i)}$ .

• **Estimation (lissage)**

- ▶ normalisation des poids  $(w_t^{(i)})_{i=1, \dots, N}$  et  $(\tilde{w}_t^{(i)})_{i=1, \dots, N}$ .
- ▶ Calcul des estimés :
  - $\widehat{\mathbf{X}}_t = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \widehat{\mathbf{X}}_t^{(i)}$ ,  $\widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}^{(i)}$ ,
  - $P_{t,k}^c = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta(\boldsymbol{\lambda}_{t,k}^{(i)} = 1)$ , pour  $k = 1, \dots, n_y$ .
  - Amplitude du saut de moyenne :  $\widehat{\boldsymbol{\nu}}_t = \widehat{\mathbf{X}}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1}$ .

• **Redistribution**

- ▶ Présélection (test d'hypothèse)
  - calcul de la statistique de test  $T'_t$  en fonction de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+k}^{(i)}$ ,  $S_{t+k}^{(i)}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_{t+k}^{(i)}$  et  $\boldsymbol{\beta}_{t+k}^{(i)}$ , pour  $k = 0, \dots, L$  et  $i = 1, \dots, N$ ,
  - calcul du seuil  $h_t$  (formules données en partie 4.5.3).
  - Si  $T'_t > h_t$ ,
    - un saut de moyenne est détecté,
    - élimination des particules n'indiquant pas le saut :  $\{\tilde{w}_t^{(i)} = 0 \mid i \text{ tels que } \boldsymbol{\lambda}_t^{(i)} = \mathbf{0}\}$ ,
    - normalisation des poids  $(\tilde{w}_t^{(i)})_{i=1, \dots, N}$ .
- ▶ Rééchantillonnage pondéré
  - Pour  $i = 1, \dots, N$ ,
    - tirage de  $\boldsymbol{\lambda}_t^{(i)} \sim \sum_{k=1}^N \tilde{w}_t^{(k)} \delta(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\lambda}_t^{(k)})$ ,
    - $\boldsymbol{\lambda}_t^{(i)} = \boldsymbol{\lambda}_t^{(k^i)} \Rightarrow w_t^{(i)} \propto w_t^{(k^i)} / \tilde{w}_t^{(k^i)}$ .
  - Normalisation des poids de filtrage  $(w_t^{(i)})_{i=1, \dots, N}$ .

**TAB. 4.1** - Algorithme particulière de détection/estimation conjointe des biais de multitrajets et de la trajectoire du véhicule.

- la distance au véhicule,
- l'angle d'élévation.

L'angle d'élévation permet de sélectionner les  $n_y$  satellites en ligne de vue du récepteur GPS. Pour ces satellites, les mesures de pseudo-distance sont formées en ajoutant à la distance au véhicule le biais d'horloge GPS obtenu par simulation du modèle d'état (4.5) et un bruit additif de variance  $\sigma$ .

### Effets des multitrajets

Les erreurs de multitrajets sont représentées par un processus  $(\mathbf{m}_t)_{t \geq 0}$  quasi constant par morceaux, de valeur nulle en l'absence de perturbation. Il est construit à partir des vecteurs aléatoires  $(\boldsymbol{\lambda}_t)_{t \geq 0}$ , dont chaque composante obéit à une loi de Bernoulli. Les valeurs non nulles de  $\boldsymbol{\lambda}_t$  indiquent les instants où se produisent les sauts de moyenne. Ainsi, chaque composante du vecteur  $\mathbf{m}_t$  est simulée selon le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{t,i} &= \mathbf{m}_{t-1,i} + \mathbf{u}_t \text{ avec } \mathbf{u}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}; \sigma_m^2), \text{ si } \boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 0, \\ &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}; \sigma_\nu^2), \text{ si } \boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 1 \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}_{t,i} = 1, \\ &= 0, \text{ si } \boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 1 \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}_{t,i} = 0, \end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, n_y$ . On rappelle que le processus  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  indique la présence des biais induits par les multitrajets et vérifie  $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \bigoplus_{k=0}^t \boldsymbol{\lambda}_k$ . L'écart-type  $\sigma_\nu$  est choisi égal à l'amplitude moyenne des sauts de moyenne pouvant perturber les mesures GPS. Afin de garantir l'observabilité du système, c'est-à-dire de disposer d'un nombre de mesures suffisant pour résoudre le problème d'estimation, on s'assure que le nombre de pseudo-distances simultanément biaisées soit inférieur à  $n_y - 4$  (4 étant le nombre de paramètres cinématiques intervenant directement dans l'équation de mesure). Cette approximation est raisonnable sachant que seules les mesures issues de satellites avec un faible angle d'élévation sont susceptibles d'être perturbées par les multitrajets. La durée de simulation est suffisamment courte pour que l'algorithme n'ait pas à gérer des changements de constellation, auquel cas il faudrait réinitialiser les canaux de mesure concernés. Par souci de simplicité, seules deux des composantes du vecteur de mesure (correspondant aux satellites les plus éloignés du zénith) sont perturbées par les multitrajets dans nos simulations. L'ensemble des paramètres de simulation est résumé dans le tableau (4.2).

Bruit de dynamique (vitesse)	$\sigma_a = 1 \text{ m/s}^{-2}$
Bruit de dynamique (biais)	$\sigma_m = 0.1 \text{ m}$
Amplitude moyenne du biais de multitrajets	$\sigma_\nu = 20 \text{ m}$
Bruit de mesure GPS	$URE = 10 \text{ m}$
$P[\boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 1]$	$\gamma = 1e^{-2}$

TAB. 4.2 - Paramètres de simulation

#### 4.6.2 Critères de performance

Les 3 algorithmes considérés sont comparés à l'aide de 3 critères : la capacité de détection, la précision pour l'estimation des biais de multitrajets et pour la résolution du problème de navigation proprement dit. Pour ce faire,  $M$  tirages de Monte-Carlo ont été réalisés pour évaluer :



- la probabilité moyenne de changement :

$$\langle \widehat{P}_{t,i}^c \rangle = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \widehat{P}_{t,i}^c [j],$$

où  $\widehat{P}_{t,i}^c [j]$  est la probabilité d'occurrence d'un saut de moyenne sur la  $i$ -ème mesure GPS, à l'instant  $t$ , estimée au  $j$ -ième tirage de Monte Carlo.

- l'erreur quadratique d'estimation des biais de multitrajets :

$$E((\mathbf{m}_{t,i} - \widehat{\mathbf{m}}_{t,i})^2) \simeq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\mathbf{m}_{t,i} - \widehat{\mathbf{m}}_{t,i} [j])^2, \text{ pour } i = 1, \dots, n_y,$$

où  $\widehat{\mathbf{m}}_t [j]$  est l'estimé du biais induit par les multitrajets calculé au  $j$ -ième tirage de Monte-Carlo.

- l'erreur quadratique d'estimation des coordonnées cinématiques du véhicule :

$$E((\mathbf{x}_{t,i} - \widehat{\mathbf{x}}_{t,i})^2) \simeq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\mathbf{x}_{t,i} - \widehat{\mathbf{x}}_{t,i} [j])^2, \text{ pour } i = 1, \dots, n_x,$$

où  $\widehat{\mathbf{x}}_t [j]$  est l'estimé du vecteur de navigation calculé au  $j$ -ième tirage de Monte-Carlo.

### 4.6.3 Résultats de simulation

Les paramètres des différents algorithmes sont ajustés pour permettre une comparaison équitable des 3 approches. L'inconvénient de la fusion intervenant dans l'algorithme IMM est la perte de toute information concernant l'état passé des particules. Pour opérer le lissage, nous utilisons donc plutôt un algorithme MM basé sur une stratégie de sélection. Elle consiste à ne conserver à chaque pas de temps que les branches plus fort poids, c'est-à-dire les hypothèses de modèle les plus probables. Le nombre de particules doit être une puissance du nombre d'états possibles du vecteur indicateur. Nous en avons utilisé  $N = n_\Lambda^5 = 1024$ . Le même pas de lissage  $L = 5$  est appliqué pour l'algorithme DECFP et l'algorithme MM. Il est aussi choisi comme taille de la fenêtre d'étude du RVG. Enfin, la probabilité de fausse alarme  $\alpha$  qui intervient à la fois dans le calcul du seuil de détection pour l'algorithme RVG et l'algorithme DECFP est fixée à 0.01.

#### Détection des évènements de multitrajets

Les premières courbes proposées en figure 4.6 mettent en évidence l'intérêt du lissage. Les probabilités de changement estimées par le filtre particulaire pour deux valeurs différentes du pas de lissage  $y$  sont tracées. Pour un pas  $L = 5$ , il apparaît que les pics de la probabilité de changement coïncident bien avec les instants où les biais de mesure ont été introduits. Par contre, en l'absence de lissage, les biais de faibles amplitudes deviennent difficiles à détecter. La deuxième série de courbes 4.7 permet de comparer les performances respectives des algorithmes DECFP et MM pour détecter les perturbations. Si les deux approches situent correctement les instants de changement, les pics de la probabilité de changement estimée sont nettement plus marqués pour le filtre particulaire. En effet, les étapes de sélection intervenant dans l'algorithme MM entre l'occurrence du saut de moyenne (instant  $t$ ) et sa détection (instant  $t + L$ ) tendent à limiter le nombre de particules indiquant la bonne hypothèse. Enfin, la figure 4.8 examine les performances du test d'hypothèses préalable au rééchantillonnage. Elle représente un exemple d'écart entre la statistique de test et le seuil de décision. Aucune fausse

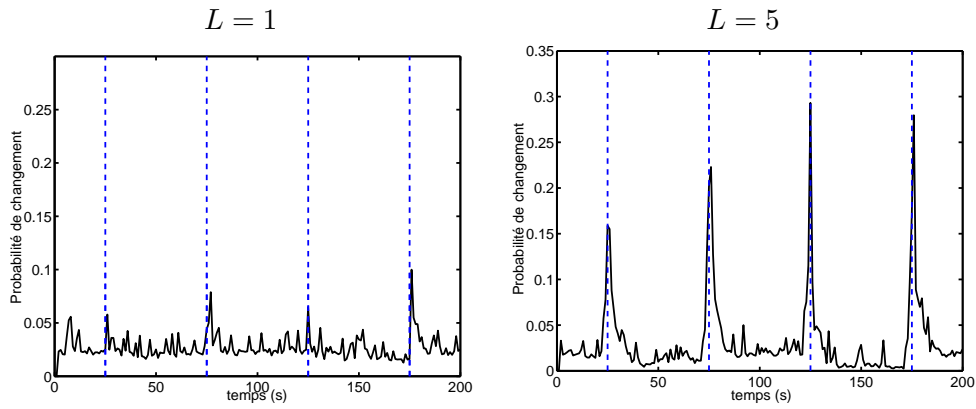


FIG. 4.6 - Influence du pas de lissage

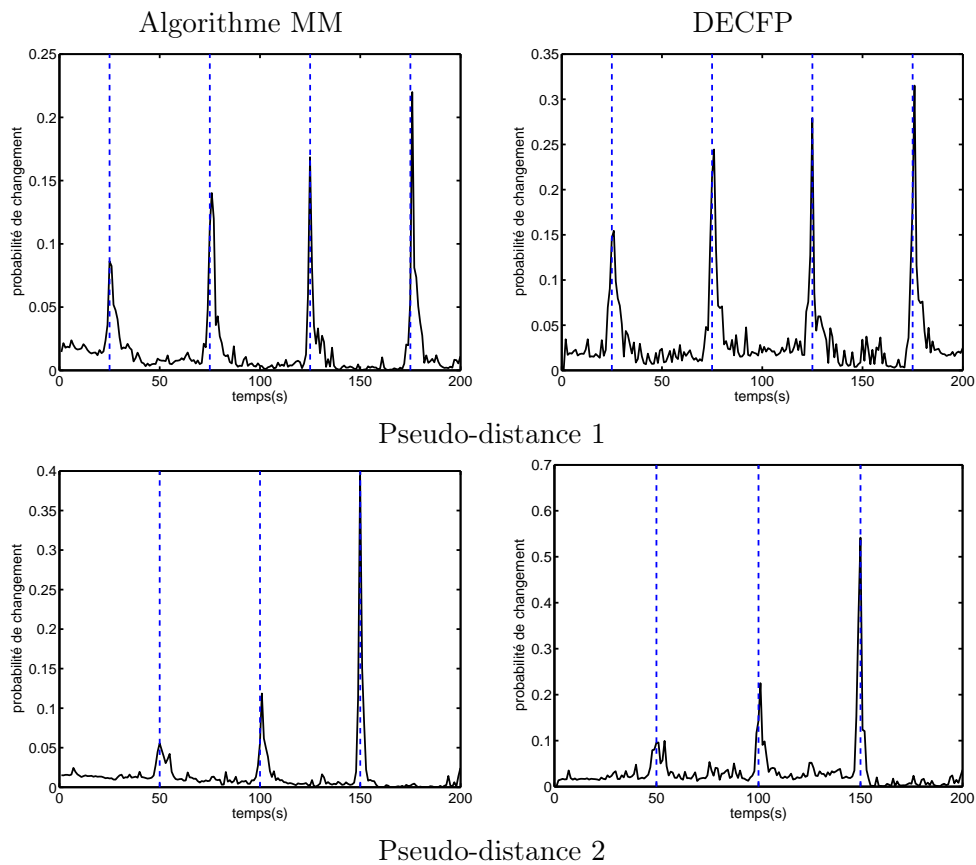


FIG. 4.7 - Probabilités de changement estimées  
Les lignes verticales en pointillés signalent les évènements de multitrajets.

détection n'est observée, la statistique de test ne devenant supérieure au seuil qu'aux instants où se produisent effectivement les évènements de multitrajets. La contrepartie est la présence d'une détection manquée. La faible probabilité de fausse alarme choisie assure en effet un faible taux de fausses détections aux dépens de la puissance de détection du test. Cette précaution est cependant nécessaire car une mauvaise sélection des particules peut s'avérer très pénalisante pour l'algorithme de navigation.

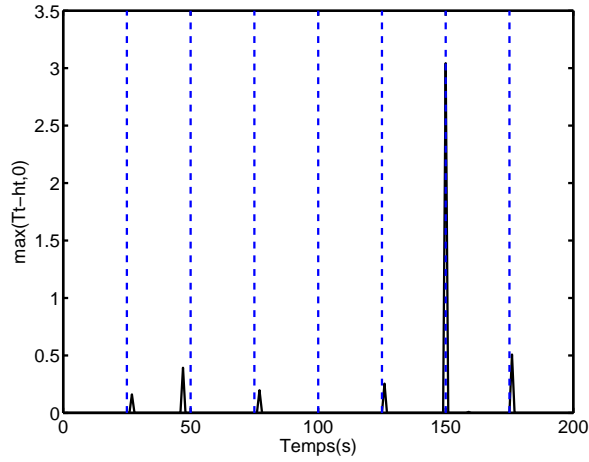


FIG. 4.8 - Résultat du test d'hypothèses pour la présélection des particules.

### Estimation des biais induits par les multitrajets

Les figures suivantes 4.10 et 4.9 permettent d'examiner le comportement des différents algorithmes pour l'estimation des biais dus aux multitrajets. La figure 4.10 représente les estimés des sauts de moyenne perturbant deux des pseudo-distances GPS et la figure 4.9 est dédiée aux erreurs d'estimation correspondantes. Les algorithmes MM et DECFP présentent des performances comparables alors que l'algorithme RVG poursuit plus difficilement les biais. Ce résultat peut s'expliquer par la stratégie d'estimation de l'algorithme RVG. Contrairement aux deux autres méthodes, l'estimation n'est aidée par aucune information *a priori* sur l'amplitude des sauts de moyenne. Par ailleurs, une procédure plus efficace de sélection des particules confère à l'approche particulière un avantage sur l'algorithme MM lorsqu'un évènement de multitrajet se produit. Il retrouve alors plus rapidement la valeur du biais.

La figure 4.11 illustre l'intérêt de la stratégie adoptée pour sélectionner les particules dans

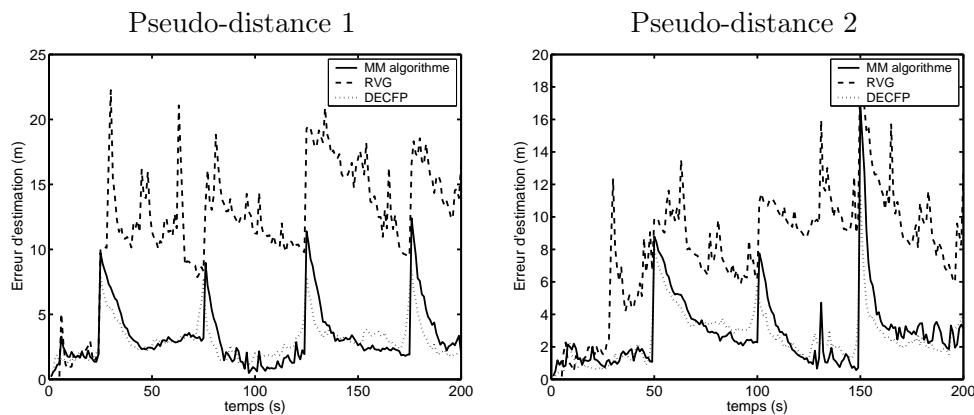


FIG. 4.9 - Erreur d'estimation des biais de multitrajets.

l'algorithme DECFP. La plus-value apportée pour l'estimation des biais est manifeste dans le cas où le saut de moyenne est de faible amplitude. Localement le gain en précision peut ainsi atteindre 1 mètre.

### Estimation de la trajectoire du véhicule

Le dernier point à étudier est l'impact de l'estimation des biais sur le calcul de la solution

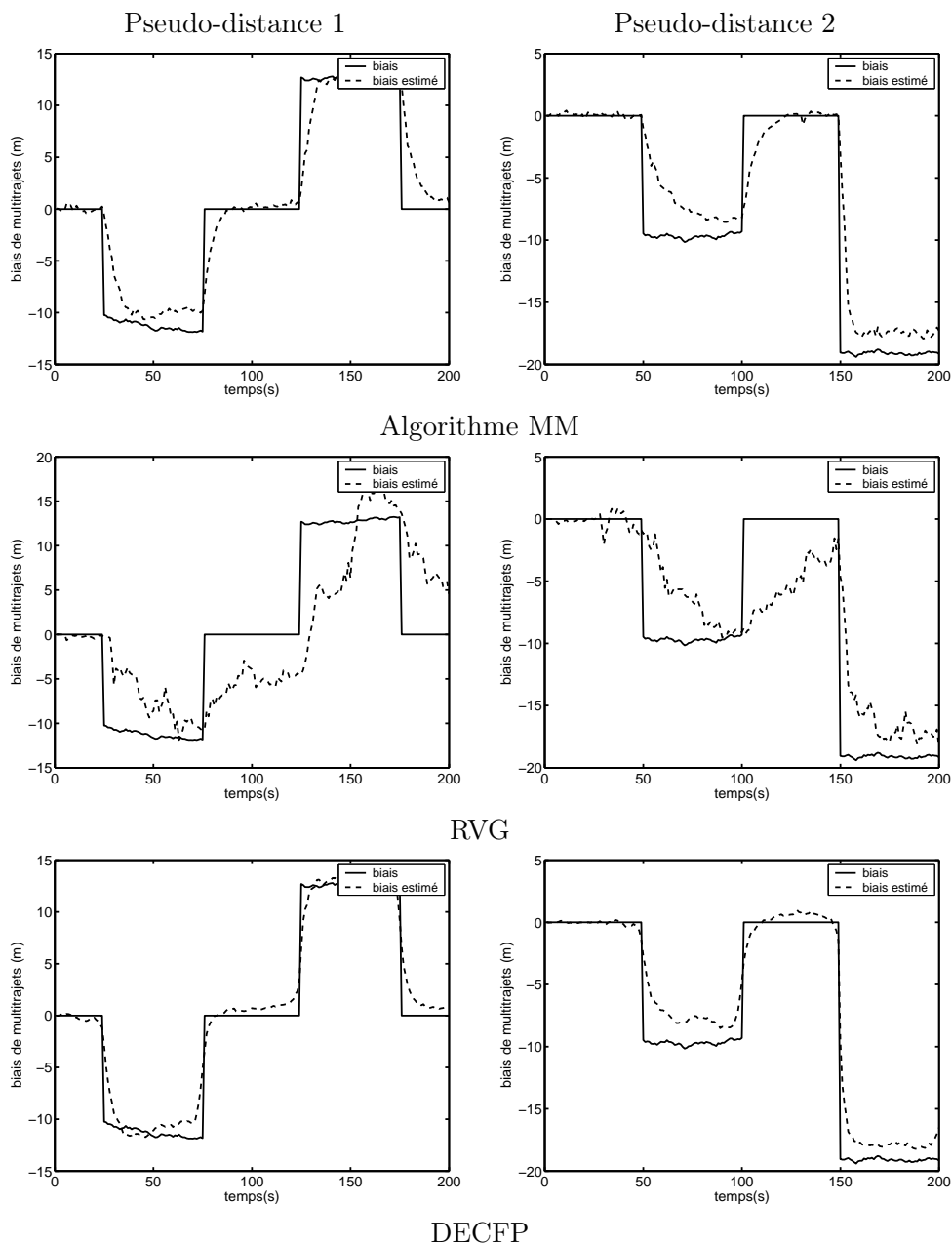
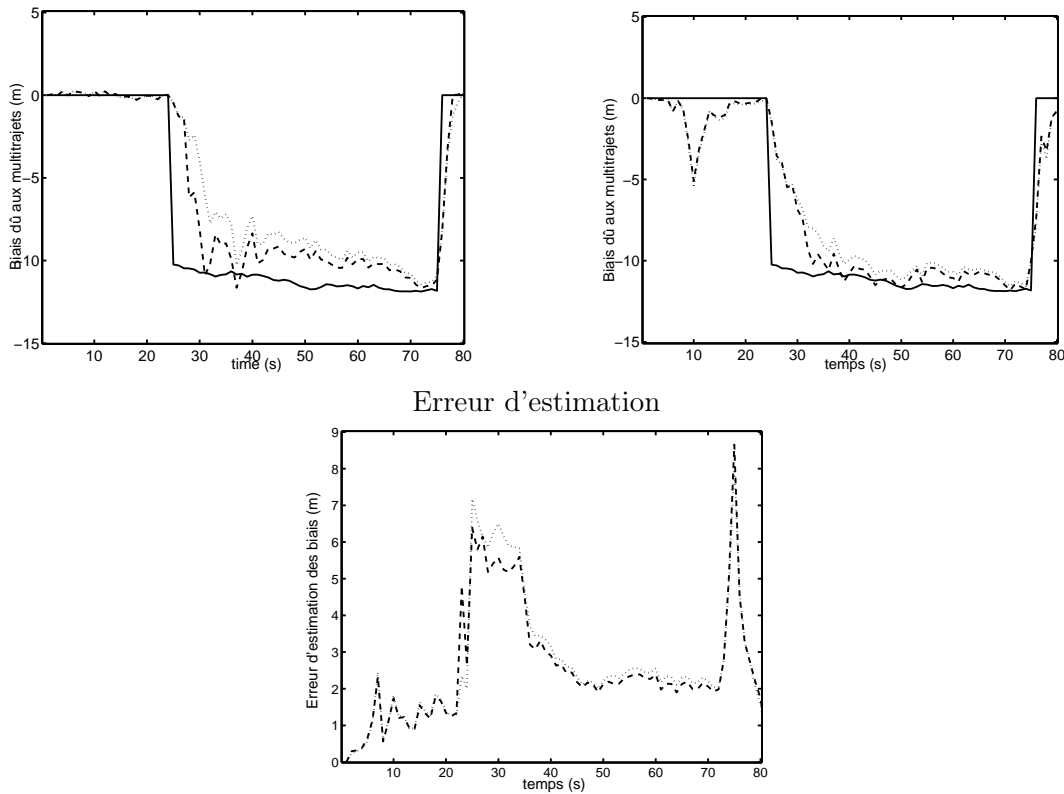


FIG. 4.10 - Estimation des biais de multitrajets.

de navigation. A cet effet, les courbes 4.12 représentent l'erreur d'estimation pour les 3 coordonnées de position du véhicule. On remarque que l'estimation peu précise des biais conduit à une erreur d'estimation importante de la position pour l'algorithme RVG. Par contre, la supériorité du DECFP par rapport à l'algorithme MM pour détecter/estimer les sauts de moyenne n'est pas assez significative pour améliorer l'estimation de la dynamique du véhicule. Les courbes d'erreur des deux algorithmes apparaissent ainsi quasiment confondues. Notons néanmoins que l'aspect important de l'approche proposée est la détection qui permet d'exclure les mesures GPS biaisées dans le cas où le nombre de mesures non défailtantes est suffisant pour résoudre le problème de navigation.

Exemple d'estimation d'un saut de moyenne    Exemple d'estimation d'un saut de moyenne



**FIG. 4.11** - Estimation des biais induits par les multitrajets avec un rééchantillonnage classique ou un rééchantillonnage aidé par un test d'hypothèses. Courbes en pointillés : rééchantillonnage classique. Courbes en tirets : rééchantillonnage aidé par un test d'hypothèses.

## 4.7 Conclusion

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés aux perturbations dues au phénomène de multitrajets en navigation GPS. La démarche proposée se distingue des approches classiques en ceci qu'elle ne vise pas à atténuer les erreurs de mesure induites par les multitrajets. L'idée est au contraire de les estimer conjointement à la trajectoire du véhicule via l'algorithme de navigation. Ainsi l'estimation de la trajectoire est améliorée indépendamment de la technologie du récepteur GPS. L'algorithme proposé s'adapte au contexte de navigation au moyen d'une technique de détection/estimation conjointe des erreurs de multitrajets. Le problème du choix d'une loi *a priori* pertinente pour les biais induits par les multitrajets est ainsi résolu. La détection est facilitée par l'introduction d'informations *a priori* sur la fréquence et l'amplitude des erreurs de multitrajets. Les anomalies perturbant un système dynamique sont classiquement traitées à l'aide d'algorithmes à modèles multiples, pour lesquels les différentes hypothèses de modèle sont explorées et sélectionnées de façon déterministe et les paramètres continus estimés par un banc de filtres de Kalman conditionnels. Nous avons proposé dans ce chapitre une alternative fondée sur un filtre particulière Rao-Blackwellisé, de structure voisine, mais offrant une plus grande souplesse pour l'exploration et la sélection des hypothèses. Une loi de simulation efficace permet en effet de cibler directement les modèles les plus pertinents. De plus, le rééchantillonnage contribue à les favoriser en multipliant les particules les représentant.

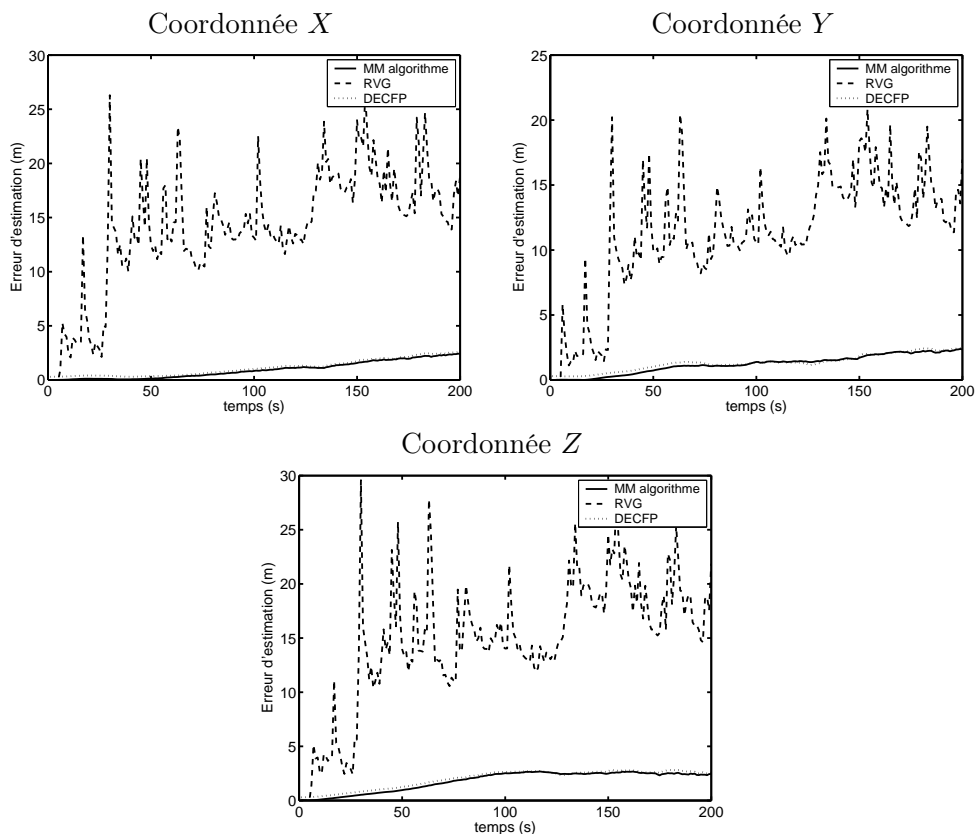


FIG. 4.12 - Erreur d'estimation de la position du véhicule.

La détection peut être significativement améliorée en utilisant une loi de proposition de lissage. Le calcul de la loi exacte implique d'explorer un arbre croissant d'hypothèses, mais une bonne approximation peut être obtenue en ne considérant que les branches *a priori* les plus probables. Par ailleurs, le contexte de détection permet de mettre en œuvre une stratégie efficace de rééchantillonnage pour laquelle les particules pertinentes sont présélectionnées au moyen d'un test d'hypothèses. L'algorithme ainsi développé s'avère plus efficace que l'algorithme de modèles multiples auquel il est comparé et que l'algorithme RVG, classiquement utilisé pour détecter et estimer des sauts de moyenne. Il fournit une meilleure estimation des biais et ceci avec un temps de réponse plus petit.

Cette approche semble prometteuse et elle peut être facilement généralisée à des problèmes plus complexes. Dans le chapitre suivant, la méthode est adaptée pour l'estimation de sauts de variances sur les mesures GPS.



# Detection/estimation conjointe des erreurs de brouillage

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>103</b>
<b>5.2</b>	<b>Le problème des interférences en navigation GPS</b>	<b>104</b>
5.2.1	Origine des interférences	104
5.2.2	Effets des interférences	104
5.2.3	Techniques d'atténuation	106
<b>5.3</b>	<b>Formulation du problème</b>	<b>107</b>
5.3.1	Modèle <i>a priori</i> des paramètres de variance	108
5.3.2	Modèle <i>a priori</i> pour le vecteur indicateur	110
<b>5.4</b>	<b>Un filtre particulaire pour la navigation en présence d'interférences</b>	<b>111</b>
5.4.1	Principe de l'algorithme	112
5.4.2	Objectifs d'estimation	112
5.4.3	Stratégie d'exploration de l'espace-état	113
5.4.4	Sélection des particules	116
5.4.5	Contrainte de durée minimale	117
<b>5.5</b>	<b>Résultats de simulation</b>	<b>119</b>
5.5.1	Scénario de navigation	119
5.5.2	Réglage du filtre particulaire	119
5.5.3	Étude des performances de l'algorithme développé	119
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>123</b>

---

## 5.1 Introduction

Au cours de la liaison satellite-récepteur, les signaux GPS sont soumis à diverses perturbations. Dans le chapitre précédent, nous avons ainsi étudié de façon plus approfondie le problème des multitrajets et leur impact sur les mesures GPS de pseudo-distances. Un algorithme de filtrage particulaire a été proposé, capable de s'adapter en temps réel à l'environnement de navigation pour améliorer l'estimation de la dynamique du véhicule en présence de multitrajets. À cet effet, un vecteur auxiliaire représentant les événements de multitrajets est estimé conjointement aux erreurs induites sur les mesures GPS et aux paramètres cinématiques. Cette approche est généralisable à toute perturbation affectant les mesures GPS. Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement au problème des interférences (ou brouillage) et nous proposons un filtre particulaire assurant simultanément la détection et correction des erreurs occasionnées et la résolution du problème de navigation. Cet algorithme, bien-qu'il reprenne les principes de l'algorithme de multitrajets, s'en distingue dans son traitement des erreurs de mesure. En effet, les multitrajets entraînent des sauts de moyenne sur les pseudo-distances GPS. Si la présence de multitrajets est détectée, l'estimation des biais induits sur les mesures peut donc être assurée par filtrage de Kalman. Au contraire, les interférences se



traduisent par des sauts de variance du bruit de mesure qui ne peuvent être estimés qu'au moyen d'une technique de filtrage non linéaire. Le chapitre est organisé en 4 grandes parties. Tout d'abord, une petite introduction au problème des interférences en navigation GPS permet de justifier le modèle de filtrage adopté et d'inscrire notre étude dans la continuité des travaux réalisés sur ce sujet. Puis, le modèle espace-état décrivant le problème de navigation en présence de brouillage est développé. L'algorithme de détection/estimation conjointe est ensuite présenté, l'accent étant mis sur ce qui différencie cette approche de celle proposée pour les multitrajets au chapitre précédent. Enfin, des résultats de simulation confirment l'intérêt de la méthode.

## 5.2 Le problème des interférences en navigation GPS

Le positionnement GPS est réalisé à partir de signaux radio-diffusés et peut donc être faussé par les interférences radio-fréquences. Elles sont parmi les sources d'erreurs les plus pénalisantes car elles peuvent affecter simultanément plusieurs mesures GPS. Cette caractéristique les rend difficiles à traiter. Ainsi, les algorithmes classiques de contrôle d'intégrité, généralement fondés sur l'hypothèse d'une seule mesure défaillante, peuvent éventuellement détecter les interférences mais ne permettent pas d'identifier les mesures affectées. Un des enjeux majeurs en radionavigation est donc de développer des techniques de détection et caractérisation des erreurs de brouillage.

### 5.2.1 Origine des interférences

Le terme interférence couvre un très grand nombre de phénomènes. Plus précisément, le signal reçu par le récepteur est dit brouillé s'il est la somme du signal utile et de plusieurs signaux parasites. Si des interférences intentionnelles sont à craindre pour les applications militaires, les récepteurs civils peuvent être perturbés incidemment par des émetteurs présents dans l'environnement de propagation. Les harmoniques secondaires d'un émetteur de télévision sont un exemple classique de source non intentionnelle de brouillage pour un véhicule au sol. Une classification sommaire des différents types d'interférences est proposée dans le tableau 5.1 d'après [Kap96].

Type d'interférences	Source
Gaussienne/bande large	Bruit intentionnel dans la bande utile du signal
Modulation de phase ou fréquence/bande large	Émetteurs TV et émetteurs hyper-fréquence
Spectres étalés/bande large	Brouilleurs intentionnels ou pseudolites
Impulsions/bande large	Émetteurs radar
Modulation de phase ou fréquence/bande étroite	Émetteur radio (FM)
Modulation d'amplitude/bande étroite	Émetteur radio (AM)
Signal continu/bande étroite	Brouilleurs CW

**TAB. 5.1** - Tableau des différents types d'interférences

### 5.2.2 Effets des interférences

Les interférences viennent s'ajouter aux sources de bruit perturbant classiquement les signaux GPS (bruit thermique, erreurs résiduelles d'horloge ou de retards ionosphériques) pour faire décroître le rapport signal à bruit. Il s'ensuit une variance accrue de l'erreur de mesure

affectant les pseudo-distances GPS et donc une dégradation de la solution de navigation. Afin de mieux appréhender le problème des interférences, il convient de rappeler brièvement le fonctionnement d'un récepteur GPS. Cet équipement a pour objectif d'aligner une réplique locale du signal GPS (porteuse et code) avec le signal satellite reçu pour déterminer à la fois sa fréquence et son retard de propagation. La synchronisation est tout d'abord réalisée grossièrement lors de l'étape dite d'**acquisition**. Puis, l'estimation des paramètres du signal est affinée au moyen de deux boucles d'asservissement imbriquées : la boucle de phase (pour la mesure de fréquence et donc de vitesse) et la boucle de code (pour la mesure de temps de propagation et donc de pseudo-distance). Cette étape est appelée **poursuite**. Elle est maintenue tant que l'erreur d'estimation n'excède pas un certain seuil, auquel cas une procédure de réacquisition est nécessaire. Ainsi, l'effet d'un brouilleur de trop grande puissance est d'entraîner une perte de verrouillage des boucles de poursuite, et donc d'empêcher temporairement la formation des mesures GPS.

### 5.2.2.1 Rapport signal sur bruit en l'absence d'interférence

Le rapport signal sur bruit du signal GPS en bande de base  $C/N_0$  dépend à la fois de la puissance de l'onde émise par le satellite poursuivi et de l'architecture du récepteur GPS conformément à la formule [Kap96] :

$$C/N_0 = S_r + G_a - 10 \log(kT_0) - N_f - L(\text{dB-Hz}), \quad (5.1)$$

où les différents termes intervenant dans cette expression sont définis comme suit :

- $S_r$  : puissance du signal GPS reçu en dBW.
- $G_a$  : gain d'antenne dans la direction du satellite poursuivi (dBic).
- $10 \log(kT_0)$  : bruit thermique (dBW-Hz).  $k$  est la constante de Boltzmann et  $T_0$  la température de référence pour le bruit thermique (K).
- $N_f$  : pertes dues au bruit dans le récepteur GPS (dB), antenne comprise.
- $L$  : pertes dans la partie traitement du signal du récepteur (dB).

### 5.2.2.2 Effets des interférences sur le $C/N_0$

En présence d'interférences, un rapport signal sur bruit équivalent peut être calculé [Kap96] :

$$[C/N_0]_{\text{eq}} = C/N_0 - 10 \log \left( \frac{10^{\frac{J/S}{10}}}{QR_c} \right) (\text{dB-Hz}), \quad (5.2)$$

où :

- $C/N_0$  (dB-Hz) est le rapport signal sur bruit en l'absence de brouillage (5.1).
- $J/S$  (dB) est le rapport interférences sur signal.
- $R_c$  est la vitesse d'horloge du code pseudo-aléatoire (bits/s).
- $Q$  est un facteur d'ajustement pour prendre en compte le type de brouilleur :

$$\begin{cases} Q = 1 & \text{pour des brouilleurs bande étroite,} \\ Q = 1.5 & \text{pour des brouilleurs à étalement de spectre,} \\ Q = 2 & \text{pour des brouilleurs Gaussiens large bande.} \end{cases}$$

La formule (5.2) permet de quantifier l'impact des interférences sur le niveau de bruit dans le récepteur. Selon la diminution du  $C/N_0$  observée, les conséquences du brouillage sont différentes :

- si  $[C/N_0]_{\text{eq}} > [C/N_0]_{\text{seuil}}$ , le fonctionnement des boucles de poursuite est garanti. Le brouillage se traduit simplement par une augmentation du bruit de mesure affectant les pseudo-distances et donc une estimation moins précise de la dynamique du véhicule.
- Si  $[C/N_0]_{\text{eq}} < [C/N_0]_{\text{seuil}}$ , les boucles peuvent perdre le verrouillage sur le signal et il est nécessaire de réinitialiser son acquisition.

Le seuil  $[C/N_0]_{\text{seuil}}$  est classiquement fixé de sorte que l'écart-type des erreurs de mesure n'excède pas un certain seuil. Dans cette étude, nous nous intéressons uniquement à la mesure de pseudo-distance calculée récursivement par la boucle de code. On obtient :

$$\hat{\rho} = \rho + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\rho),$$

où  $\hat{\rho}$  est la pseudo-distance estimée et  $\rho$  la pseudo-distance effective. L'erreur  $\varepsilon$  est la contribution du bruit et de l'erreur de dynamique qui dépend des caractéristiques de la boucle d'asservissement. Le critère ad-hoc retenu pour assurer une bonne précision de la boucle de code est le suivant :

$$\sigma_\rho \leq e/3,$$

où  $e$  est l'espacement maximal entre les répliques en avance, retard et phase du code pseudo-aléatoire satellite. Le comportement de la boucle de code, en particulier au voisinage du seuil de poursuite, est non linéaire. Il est donc nécessaire de mener des simulations de Monte Carlo pour relier ce seuil  $e$  à un rapport signal à bruit  $[C/N_0]_{\text{seuil}}$ . Des abaques sont à cet effet disponibles.

En résumé, il apparaît que l'effet des interférences est de diminuer le rapport signal à bruit dans le récepteur GPS et donc d'augmenter l'erreur de mesure sur les pseudo-distances. Si la puissance du brouilleur est trop grande, les boucles de poursuite peuvent décrocher.

### 5.2.3 Techniques d'atténuation

Les brouillages représentent un problème critique en navigation GPS et font donc l'objet de nombreuses études axées soit sur leur prévention, soit sur leur détection et atténuation. Nous présentons rapidement les techniques les plus efficaces ou les plus prometteuses afin de mieux situer notre approche par rapport aux travaux existants.

#### Détection

La détection intervient en amont des boucles de code ou de phase et met en jeu un dispositif de contrôle de la puissance du signal reçu. A ce niveau du récepteur, le signal utile est noyé dans le bruit, la puissance mesurée est donc essentiellement attribuable au bruit thermique et un pic de puissance traduit la présence de brouilleurs.

#### Prévention

La première solution est matérielle. Elle consiste à utiliser des antennes à gain adaptatif dont le gain s'annule dans la direction supposée de brouillage.

Une alternative consiste à filtrer les signaux parasites dans la mesure où ils occupent une bande spectrale différente de celle du signal utile GPS. Selon la largeur de bande des signaux parasites, deux approches sont envisageables. Dans le cas où ils occupent une bande étroite, des traitements temps-fréquence permettent de s'affranchir efficacement de leur effets. Sinon, l'idée est d'utiliser des filtres à bandes plus étroites au sein du récepteur GPS. En pré-traitement et donc à hautes fréquences, le problème est qu'il est difficile de synthétiser des filtres très

sélectifs. L'élimination des interférences s'accompagne alors nécessairement d'une atténuation du signal utile. Il est aussi possible de modifier la bande passante des filtres de boucle. La difficulté provient alors de la nécessité de concilier atténuation du bruit et réactivité à de grandes dynamiques. Pour résoudre ce dilemme, les boucles du récepteur GPS peuvent être aidées par d'autres systèmes de navigation afin d'abaisser le seuil de poursuite. Les systèmes de navigation inertielle sont classiquement utilisés à cet effet. L'idée est de réduire la dynamique des grandeurs à estimer afin de pouvoir utiliser des filtres de boucle à bande plus étroite. Cette approche fait l'objet du cinquième chapitre de la thèse.

Toutes les techniques présentées visent à concevoir des récepteurs plus robustes aux effets des interférences. Notre approche diffère en ce qu'elle se situe en aval du récepteur. Notre objectif dans ce chapitre est d'améliorer le calcul de la solution de navigation en présence de mesures GPS dégradées par les interférences, et ce indépendamment de l'architecture du récepteur. Nous ne traitons donc pas les cas de brouillage les plus défavorables nécessitant une réacquisition du signal GPS, mais seulement ceux entraînant une diminution pas trop pénalisante du rapport signal à bruit (cas où  $[C/N_0]_{\text{eq}} > [C/N_0]_{\text{seuil}}$ ). Sous cette hypothèse, le brouillage se traduit par une forte augmentation de la variance du bruit de mesure affectant les pseudo-distances GPS. Le but de notre étude est de développer un algorithme de navigation capable de détecter en temps réel ce saut de variance et de l'estimer.

### 5.3 Formulation du problème

L'enjeu est d'estimer en temps réel l'état d'un système dynamique décrit par un modèle espace-état dont les paramètres ne sont pas connus avec précision. Dans ce cas, le système est un véhicule en mouvement dont la trajectoire et la vitesse sont à estimer à partir de mesures GPS. L'incertitude provient de la variance du bruit de mesure GPS qui peut changer de valeur du fait des phénomènes d'interférences. L'approche la plus immédiate consiste à estimer à la fois les paramètres d'état et les paramètres du modèle. Le problème à résoudre est donc double :

- 1) identifier les instants où se produisent les changements de variance,
- 2) estimer la variance du bruit de mesure et la dynamique du véhicule sachant ces instants de transition.

La méthode proposée est fondée sur un processus caché indiquant les sauts de variance. La détection des phénomènes de brouillage est réalisée en estimant ce processus conjointement à la dynamique du véhicule et à la variance du bruit de mesure à partir des mesures GPS. Le modèle statistique prend donc la forme suivante :

$$\mathbf{x}_t = F_t \mathbf{x}_{t-1} + B_t \mathbf{v}_t, \quad (5.3)$$

$$\phi_t \sim f_\phi(\phi_t | \phi_{t-1}, \boldsymbol{\lambda}_t), \quad (5.4)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t \sim f_\lambda(\boldsymbol{\lambda}_t | \boldsymbol{\lambda}_{t-1}), \quad (5.5)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + C(\phi_t) \mathbf{w}_t, \quad (5.6)$$

où :

- le vecteur d'état  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{n_x}$  regroupe les paramètres de navigation à estimer : la position et le biais d'horloge GPS, ainsi que leurs dérivées successives (l'ordre du modèle augmente avec la dynamique du véhicule).
- $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur de mesure. Il est formé des pseudo-distances GPS associées aux satellites en ligne de vue du récepteur,

- $\mathbf{v}_t \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$  sont des bruits blancs Gaussiens tels que  $\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  et  $\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ .
- $\boldsymbol{\phi}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur des variances des bruits de mesure. La matrice  $C(\boldsymbol{\phi}_t)$  est définie par :  $C(\boldsymbol{\phi}_t) = \text{diag}(\boldsymbol{\phi}_t)$ . Ce modèle est valide en supposant les bruits de mesure non corrélés entre eux.
- $\boldsymbol{\lambda}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur indiquant les sauts de variance mais aussi la nature de ceux-ci le cas échéant. Différents cas de figures sont en effet envisageables qui correspondent à des loi *a priori* différentes pour le vecteur de variances :
  - 1) la variance ne varie pas ou peu (pas d'interférences ou pas de changement de puissance des sources d'interférences) : l'environnement de propagation des signaux GPS est inchangé.
  - 2) La variance subit un saut et prend une valeur supérieure à sa valeur nominale<sup>1</sup>. Le changement coïncide soit avec l'apparition d'interférences, soit avec un changement de puissance du brouilleur.
  - 3) La variance retrouve sa valeur nominale : toute source d'interférences a alors disparu. Chacune des composantes du vecteur  $\boldsymbol{\lambda}_t$  représente une des mesures GPS reçues à un instant donné et peut donc prendre 3 valeurs :

$$\boldsymbol{\lambda}_{t,i} = \begin{cases} 0 & \text{en l'absence de saut de variance,} \\ 1 & \text{en cas d'apparition ou changement de puissance des interférences,} \\ 2 & \text{en cas de disparition des interférences,} \end{cases}$$

pour  $i = 1, \dots, n_y$ . Par la suite on note  $\Lambda = \{0, 1, 2\}^{n_y}$  l'espace-état du vecteur indicateur  $\boldsymbol{\lambda}_t$  et  $n_\lambda = 3^{n_y}$  le cardinal de cet ensemble. Enfin, la notation  $\lambda^j$ , pour  $j = 1, \dots, n_\lambda$ , est utilisée pour représenter ses éléments.

Dans le modèle ci-dessus, nous avons distingué deux types de sauts de variance. Cette approche nous permet d'utiliser des distributions *a priori* plus informatives pour le vecteur de variance et d'améliorer ainsi son estimation dans un contexte temps réel. En particulier, nous prenons ainsi en compte le fait qu'en l'absence d'interférence la valeur de la variance du bruit de mesure GPS est connue avec précision.

Le modèle de mesure pour la navigation GPS (5.6) a déjà été explicité dans le quatrième chapitre, de même que les matrices  $B_t$  et  $F_t$  intervenant dans le modèle d'état (5.3). Il reste à spécifier les distributions *a priori* des vecteurs dédiés à la détection et à l'estimation des sauts de variance  $\boldsymbol{\lambda}_t$  et  $\boldsymbol{\phi}_t$ .

### 5.3.1 Modèle *a priori* des paramètres de variance

Dans un contexte Bayésien, il est classique de choisir une loi Inverse-Gamma comme distribution *a priori* pour des paramètres de variance inconnus. Outre le fait que cette loi est bien définie uniquement pour des paramètres positifs, elle présente l'intérêt d'être la loi *a priori* conjuguée de la variance d'une loi Gaussienne. En d'autres termes, considérons un processus observé Gaussien  $Y$ , dont on veut estimer la variance  $\phi$ . Vue comme une fonction de  $\phi$ , la vraisemblance  $p(Y|\phi)$  a la forme d'une loi Inverse-Gamma  $\mathcal{IG}$ . Il en résulte que si une distribution *a priori* Inverse-Gamma est choisie pour la variance, alors la loi *a posteriori*  $p(\phi|Y)$  est elle-même une loi Inverse-Gamma et le problème d'estimation Bayésienne peut être résolu analytiquement.

<sup>1</sup>La valeur nominale correspond à l'UERE défini dans le premier chapitre. Il s'agit de l'incertitude sur la mesure de pseudo-distance en l'absence de perturbations extérieures.

*Démonstration.* Soit  $Y \sim \mathcal{N}(0, \phi)$  et  $\phi \sim \mathcal{IG}(\alpha, \beta)$ , alors :

$$\begin{aligned} p(Y/\phi) &\propto \frac{1}{\sqrt{\phi}} \exp\left(-\frac{Y^2}{2\phi}\right), \\ p(\phi) &\propto \phi^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta}{\phi}\right). \end{aligned}$$

En appliquant la loi de Bayes, il s'ensuit :

$$\begin{aligned} p(\phi|Y) &\propto p(Y/\phi)p(\phi), \\ p(\phi|Y) &\propto \phi^{-\alpha-3/2} \exp\left(-\frac{Y^2/2 + \beta}{\phi}\right). \end{aligned}$$

La loi *a posteriori* du paramètre  $\phi$  est bien une loi Inverse-Gamma de paramètres  $\alpha' = \alpha + 1/2$  et  $\beta' = \beta + Y^2/2$ . L'estimé de  $\phi$  au sens MMSE s'écrit alors simplement :

$$\phi_{\text{MMSE}} = \frac{\alpha'}{(\beta' - 1)}.$$

□

Pour notre application, la distribution *a priori* des paramètres de variance dépend de l'occurrence ou non d'un saut de variance, et donc de la valeur du vecteur indicateur  $\boldsymbol{\lambda}_t$ . Les composantes du vecteur  $\boldsymbol{\phi}_t$ , dénotées  $\phi_{t,i}$  pour  $i = 1, \dots, n_y$ , sont supposées indépendantes les unes des autres. Les scénarios suivants sont considérés :

- **Absence de saut de variance** ( $\boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 0$ )

Si l'environnement de propagation des signaux GPS n'est pas perturbé, la variance du bruit de mesure peut être considérée constante (égale à sa valeur nominale en l'absence d'interférences ou plus élevée sinon). Nous préconisons donc d'utiliser la distribution *a priori* suivante :

$$(\phi_{t,i} | \phi_{t-1,i}, \boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 0) \sim \mathcal{IG}(\alpha_{t,i}^0, \beta_{t,i}^0), \quad (5.7)$$

où les paramètres  $\alpha_{t,i}^0$  et  $\beta_{t,i}^0$  sont calculés de sorte que la variance de la loi (5.7) soit très faible et son espérance soit égale à  $\phi_{t-1,i}$ .

- **Présence d'un saut de variance** ( $\boldsymbol{\lambda}_{t,i} \neq 0$ )

- ▶ Apparition ou changement de puissance des interférences ( $\boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 1$ )

$$(\phi_{t,i} | \phi_{t-1,i}, \boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 1) \sim \mathcal{IG}(\alpha_i^1, \beta_i^1). \quad (5.8)$$

L'incertitude sur l'amplitude du saut de variance conduit à une distribution (5.8) à queue lourde favorisant des valeurs élevées de la variance. Les paramètres  $\alpha_i^1$  et  $\beta_i^1$  ne dépendent pas du temps et sont fixés en fonction de la valeur maximale de la variance du bruit de mesure avant décrochage des boucles de poursuite du récepteur GPS. La figure 5.1 représente l'allure de la distribution *a priori* correspondante.

- ▶ Disparition des interférences ( $\boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 2$ )

$$(\phi_{t,i} | \phi_{t-1,i}, \boldsymbol{\lambda}_{t,i} = 2) \sim \mathcal{IG}(\alpha_i^2, \beta_i^2). \quad (5.9)$$

La distribution (5.9) est très informative. Les paramètres  $\alpha_i^2$  et  $\beta_i^2$  correspondent à une loi Inverse-Gamma très piquée autour de la valeur nominale de la variance du bruit de mesure GPS comme représenté sur la figure (5.2).

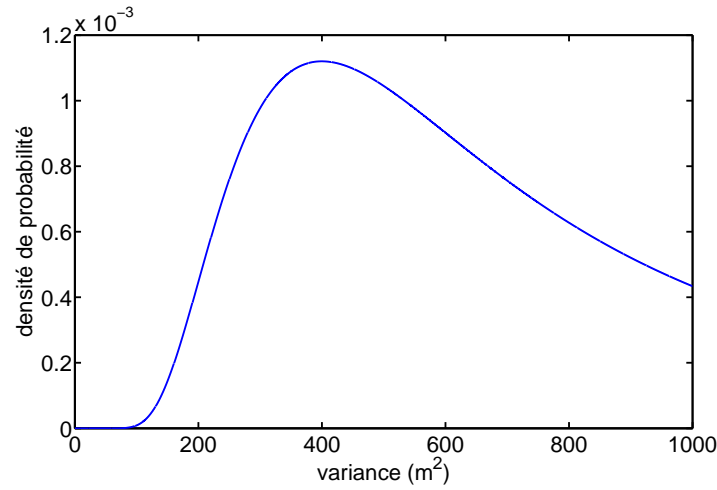


FIG. 5.1 - Densité de probabilité des composantes de variance pour  $\lambda_{t,i} = 1$ .

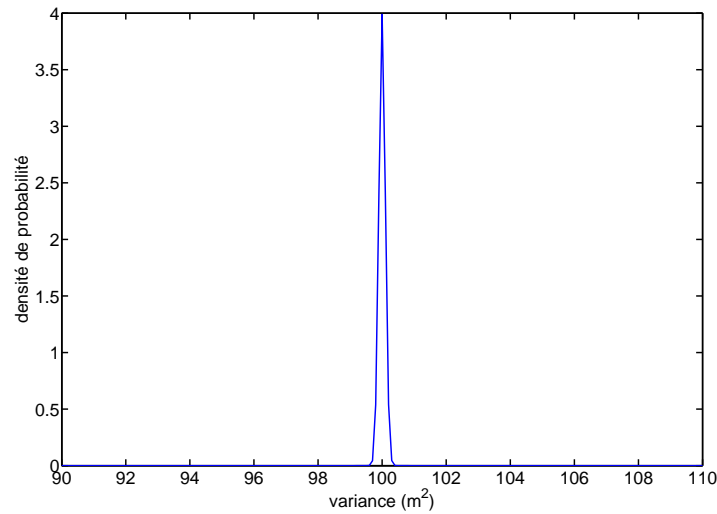


FIG. 5.2 - Densité de probabilité des composantes de variance pour  $\lambda_{t,i} = 2$ .

### 5.3.2 Modèle *a priori* pour le vecteur indicateur

Les composantes du vecteur  $\lambda_t$  sont supposées indépendantes entre elles. Nous proposons le modèle *a priori* suivant :

$$\begin{aligned} P[\lambda_{t,i} = 0] &= \gamma, \\ P[\lambda_{t,i} = 1] &= (1 - \gamma)p_{t,i}, \\ P[\lambda_{t,i} = 2] &= (1 - \gamma)(1 - p_{t,i}), \end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, n_y$ . La probabilité  $p_{t,i}$  est définie comme la probabilité que la  $i$ -ème mesure GPS soit perturbée par des interférences sachant qu'un saut de variance s'est produit. En toute rigueur, elle varie en fonction du contexte de brouillage. En l'absence d'interférences, le seul changement pouvant survenir est en effet une augmentation de la variance. À l'inverse, en présence de brouillage, les interférences peuvent soit disparaître soit changer de puissance (cumul de plusieurs sources d'interférences par exemple). Nous introduisons un processus auxiliaire  $\{\varepsilon_t\}_{t>0}$  indiquant la présence ou non d'interférences afin de formaliser le choix de

$p_{t,i}$ . Ce processus binaire est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{t,i} &= 1 \text{ si la } i\text{ème mesure GPS est perturbée par des interférences,} \\ \varepsilon_{t,i} &= 0 \text{ sinon,}\end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, n_y$ . Les valeurs du processus  $\{\varepsilon_t\}_{t>0}$  sont directement déterminées par celles du processus  $\{\lambda_t\}_{t>0}$ . Cette dépendance est illustrée sur la figure (5.3) :

$$\varepsilon_{t,i} = \begin{cases} \varepsilon_{t-1,i} & \text{si } \lambda_{t,i} = 0, \\ 1 & \text{si } \lambda_{t,i} = 1, \\ 0 & \text{si } \lambda_{t,i} = 2. \end{cases}$$

Nous pouvons à présent préciser le choix de  $p_{t,i}$  :

$$\begin{aligned}p_{t,i} &= 1, \text{ si } \varepsilon_{t-1,i} = 0, \\ p_{t,i} &< 1/2, \text{ si } \varepsilon_{t-1,i} = 1.\end{aligned}$$

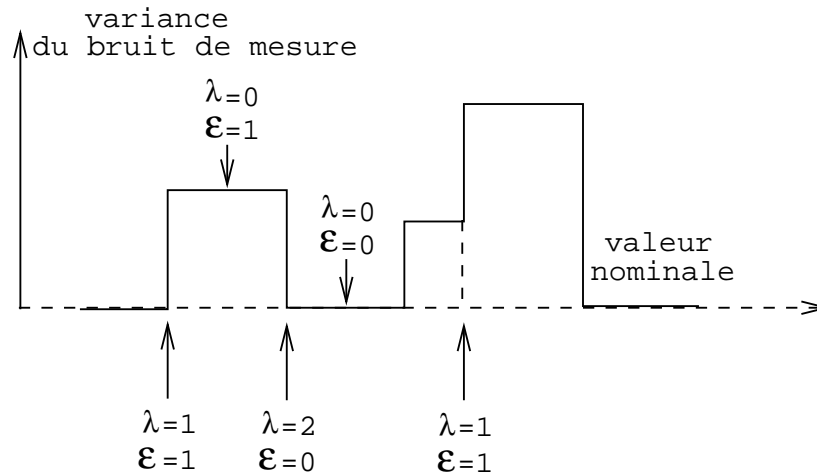


FIG. 5.3 - Lien entre les processus  $\{\varepsilon_t\}_{t>0}$  et  $\{\lambda_t\}_{t>0}$ .

## 5.4 Un filtre particulière pour la navigation en présence d'interférences

Le problème de navigation GPS dans un contexte de brouillage est décrit par un modèle espace-état non standard dont les paramètres (plus précisément les variances) ne sont pas connus avec exactitude et peuvent changer abruptement. Le réglage des paramètres de modèle est une question qui a suscité beaucoup d'intérêt dans la littérature car elle détermine en grande partie la qualité de l'estimation. Différentes solutions ont été développées qui sont fondées sur des hypothèses plus ou moins restrictives. L'idée générale est d'estimer les paramètres de nuisance conjointement aux paramètres inconnus. Deux approches sont alors envisageables :

- Les **méthodes d'optimisation** procèdent en estimant les paramètres de modèle par maximum de vraisemblance alors que l'état du système dynamique est estimé au sens MMSE. Dans [KG96], cette estimation conjointe est menée au moyen d'un algorithme EM



(Expectation-Maximisation). Dans [MH79], une méthode est développée pour les modèles linéaires Gaussiens. Elle est fondée sur un algorithme de descente de gradient de type Newton-Raphson calculant itérativement la valeur des paramètres de modèle qui minimise l'erreur de prédiction du filtre de Kalman associé à l'état du système. Il est à noter que ces techniques s'appliquent à des paramètres constants au cours du temps.

- Pour les **méthodes Bayésiennes**, les paramètres de nuisance complètent directement le vecteur état. Un choix judicieux de leur distribution *a priori* peut conduire à une résolution analytique du problème d'estimation conjoint. C'est le cas dans [WH97] par exemple, où une loi Inverse-Gamma conjuguée est utilisée pour caractériser les paramètres de variance inconnus d'un modèle linéaire Gaussien univarié. Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement prometteuses dans ce contexte car elles offrent une plus grande liberté dans le choix des modèles *a priori*. Leurs versions séquentielles permettent en outre une résolution en temps réel. Dans [CK94], un échantillonneur de Gibbs est appliqué à un système dont le bruit d'état subit des sauts de variance. Le cas d'un mélange de sinusoides noyées dans un bruit de variance inconnue a été étudié dans [DDMD03].

Notre contribution s'inscrit dans la deuxième catégorie de méthodes. Nous proposons un algorithme de filtrage particulière pour la détection/estimation conjointe des sauts de variance et de la dynamique du véhicule, fondé sur le modèle d'état hiérarchique décrit ci-dessus. Le principe général de l'algorithme est tout d'abord décrit puis différentes extensions contribuant à améliorer ses performances sont proposées. La principale contribution de ce chapitre est l'estimation en ligne de sauts de variance par une technique de filtrage particulière efficace. Un soin tout particulier est donc apporté à la description de la loi de proposition des paramètres de variance.

### 5.4.1 Principe de l'algorithme

L'algorithme proposé pour résoudre le problème de navigation en présence de brouillage s'apparente dans sa démarche à l'algorithme présenté dans le troisième chapitre pour la détection/estimation conjointe des erreurs de multitrajets. Il calcule ainsi une approximation de la distribution de lissage des paramètres inconnus pour faciliter à la fois la détection des phénomènes d'interférences et l'estimation de l'amplitude des sauts de variance. Il comporte en outre une étape de sélection des particules, préalable au rééchantillonnage et fondée sur un test d'hypothèses. Cette présentation est plutôt axée sur les particularités de l'algorithme développé dans ce chapitre pour atténuer l'effet du brouillage :

- une exploration déterministe de l'espace-état du vecteur indicateur.
- une distribution de lissage approchée pour simuler le vecteur de variance et le vecteur de navigation. On note par la suite  $\mathbf{X}_t = (\mathbf{x}_t, \phi_t)$ .
- une extension visant à limiter les fausses détections.

### 5.4.2 Objectifs d'estimation

Il est difficile de détecter un saut de variance à partir d'une seule réalisation du processus perturbé. Une solution pour favoriser la détection des phénomènes de brouillage consiste à retarder l'estimation pour prendre en compte plusieurs mesures GPS consécutives affectées par le saut de variance. Le délai  $L$  ne doit pas être choisi trop grand pour respecter la contrainte temps réel de la navigation. La détection/estimation conjointe est donc réalisée à partir de la distribution de lissage  $p(\mathbf{X}_{0:t+L}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t+L} | \mathbf{Y}_{1:t+L})$ . Les estimés des états continus sont calculés

à partir de leurs lois marginales comme suit :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{x}}_t^{\text{MMSE}} &= \mathbb{E}(\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_{1:t+L}), \\ \widehat{\boldsymbol{\phi}}_t^{\text{MMSE}} &= \mathbb{E}(\boldsymbol{\phi}_t | \mathbf{Y}_{1:t+L}).\end{aligned}$$

La détection des phénomènes de brouillage est fondée sur la probabilité de changement, définie ainsi :

$$P_{t,i}^c = P[\boldsymbol{\lambda}_{t,i} \neq 0 | \mathbf{Y}_{1:t+L}], \quad (5.10)$$

qui augmente fortement aux instants où se produisent les sauts de variance.

### 5.4.3 Stratégie d'exploration de l'espace-état

#### Vecteur indicateur $\boldsymbol{\lambda}_t$

Le vecteur état comprend à la fois des composantes à valeurs continues et des composantes à valeurs discrètes. L'espace-état s'écrit donc comme l'union de plusieurs sous-espaces dont l'un est de cardinal fini :  $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \Lambda$ . Dans sa thèse [Pun03], E. Punsakaya a développé une stratégie efficace pour propager les particules dans un espace-état de cette forme. Elle consiste à explorer exhaustivement toutes les valeurs possibles du paramètre discret alors que les états continus sont obtenus par simulation. Cette approche est préférée à l'échantillonnage pondéré dans ce cas de par la difficulté à marginaliser les états continus pour calculer la loi de proposition optimale du paramètre discret  $\boldsymbol{\lambda}_t$ . Si l'approximation particulaire de la loi jointe *a posteriori* à l'instant  $t - 1$  s'écrit :

$$\hat{p}(\mathbf{X}_{0:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1} | \mathbf{Y}_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^N w_{t-1}^{(i)} \delta\left(\{\mathbf{X}_{0:t-1}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}\} - \{\mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}^{(i)}\}\right),$$

alors la stratégie d'exploration retenue conduit à l'estimation suivante de la loi de lissage :

$$\begin{aligned}\widehat{p}(\mathbf{X}_{0:t+L}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t+L} | \mathbf{Y}_{1:t+L}) &= \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j_0=1}^{n_\lambda} \dots \sum_{j_L=1}^{n_\lambda} w_{t+L}^{(i,J)} \delta\left(\{\mathbf{X}_{0:t+L}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t+L}\} - \{\mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{X}_{t:t+L}^{(i,J)}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}^J\}\right),\end{aligned} \quad (5.11)$$

où  $n_\lambda = 3^{n_y}$  est l'ensemble des valeurs possibles du vecteur indicateur et :

$$\begin{aligned}J &= (j_0, j_1, \dots, j_L), \\ \boldsymbol{\lambda}^J &= (\boldsymbol{\lambda}^{j_0}, \boldsymbol{\lambda}^{j_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}^{j_L}).\end{aligned}$$

Dans cette expression,  $(\boldsymbol{\lambda}^{j_k})_{0 \leq k \leq L}$  représente une valeur prise par  $\boldsymbol{\lambda}_{t+k}$ . Les composantes continues des particules  $\mathbf{X}_{t:t+L}^{(i,J)}$  sont générées selon une loi de proposition notée  $\pi$  :

$$\mathbf{X}_{t:t+L}^{(i,J)} \sim \pi\left(\mathbf{X}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L} = \boldsymbol{\lambda}^J, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right),$$

dont l'expression sera précisée ci-après. D'après [Pun03], les poids sont mis à jour de la façon suivante en l'absence de lissage ( $L = 0$ ) :

$$w_t^{(i,j)} \propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_t^{(i,j)}) p(\boldsymbol{\phi}_t^{(i,j)} | \boldsymbol{\phi}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}^j) p(\mathbf{x}_t^{(i,j)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{X}_t^{(i,j)} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}^j, \mathbf{Y}_{1:t})} P[\boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}^j].$$

Cette formule se généralise sans difficulté au calcul des poids de lissage :

$$w_{t+L}^{(i,J)} \propto w_{t-1}^{(i)} \frac{\prod_{k=0}^L p\left(\mathbf{Y}_{t+k} | \mathbf{X}_{t+k}^{(i,J)}\right) p\left(\phi_{t+k}^{(i,J)} | \phi_{t+k-1}^{(i,J)}, \boldsymbol{\lambda}_{t+k} = \boldsymbol{\lambda}^{j_k}\right) p\left(\mathbf{x}_{t+k}^{(i,J)} | \mathbf{x}_{t+k-1}^{(i,J)}\right)}{\pi\left(\mathbf{X}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L} = \boldsymbol{\lambda}^J, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right)} P\left[\boldsymbol{\lambda}_{t:t+L} = \boldsymbol{\lambda}^J\right].$$

A partir de (5.11), on obtient simplement la distribution d'intérêt  $\hat{p}(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\lambda}_t | \mathbf{Y}_{1:t+L})$  par marginalisation. Le principal inconvénient de cette approche est sa complexité calculatoire. En effet, le nombre de termes intervenant dans la somme (5.11) croît exponentiellement avec le pas de lissage. Afin de s'affranchir de cette limitation, la même approximation que pour l'algorithme de détection/estimation conjointe de phénomènes de multitrajets peut être commise. L'apparition ou la disparition d'une source d'interférences est un évènement rare. Si on étudie la possibilité d'un saut de variance à l'instant  $t$ , il est donc raisonnable de supposer qu'aucun évènement n'intervient dans l'intervalle  $[t+1, t+L]$ . Le nombre de possibilités à explorer se trouve par conséquent significativement réduit dans la mesure où seuls les chemins de la forme  $\boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)} = (\boldsymbol{\lambda}^j, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$  sont explorés. L'approximation particulière correspondante prend la forme :

$$\begin{aligned} \hat{p}(\mathbf{X}_{0:t+L}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t+L} | \mathbf{Y}_{1:t+L}) = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_\lambda} w_{t+L}^{(i,j)} \delta\left(\{\mathbf{X}_{0:t+L}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t+L}\} - \{\mathbf{X}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{X}_{t:t+L}^{(i,j)}, \boldsymbol{\lambda}_{0:t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}\}\right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

### Paramètres continus $\phi_t$ et $\mathbf{x}_t$

Il reste à préciser la loi de proposition  $\pi$ . En cas d'apparition de brouillages, l'incertitude sur la nouvelle valeur de la variance se traduit par une distribution *a priori* peu informative. Il est donc nécessaire de prendre en compte les mesures à l'étape de simulation des particules pour limiter la dispersion des échantillons. On obtient pour  $i = 1, \dots, N$  et  $j = 1, \dots, n_\lambda$  :

$$\mathbf{X}_{t:t+L}^{(i,j)} \sim p\left(\mathbf{X}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right). \quad (5.13)$$

Conformément à la loi de Bayes, cette distribution de proposition peut se décomposer de la façon suivante :

$$p\left(\mathbf{X}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right) \propto p\left(\mathbf{Y}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t:t+L}\right) p\left(\phi_{t:t+L} | \phi_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_t^{(j)}\right) p\left(\mathbf{x}_{t:t+L} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}\right). \quad (5.14)$$

Classiquement, cette loi n'est pas standard du fait de la non linéarité intervenant dans l'équation de mesure et de la dépendance conjointe de la mesure en les paramètres d'état et de variance. Nous proposons de générer les particules selon une approximation de cette loi optimale. Tout d'abord, attendu que  $\boldsymbol{\lambda}_{t+1:t+L}^{(j)} = \mathbf{0}$ , on peut supposer pour simplifier la simulation que  $\phi_{t+L} = \dots = \phi_{t+1} = \phi_t$ . La simulation du vecteur joint  $\mathbf{X}_{t:t+L} = (\mathbf{x}_{t:t+L}, \phi_{t:t+L})$  est alors réalisée en trois temps :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t:t+L}^{(i,j)} &\sim p\left(\mathbf{x}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right), \\ \phi_t^{(i,j)} | \mathbf{x}_{t:t+L} &\sim p\left(\phi_t | \mathbf{x}_{t:t+L}^{(i,j)}, \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right), \\ \phi_{t+k}^{(i,j)} &= \phi_t^{(i,j)}, \text{ pour } k = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

#### • Simulation des paramètres de variance

D'après (5.14), la loi conditionnelle du vecteur  $\phi_t$  vérifie :

$$p\left(\phi_t | \mathbf{x}_{t:t+L}^{(i,j)}, \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right) \propto p\left(\mathbf{Y}_{t:t+L} | \mathbf{x}_{t:t+L}, \phi_t\right) p\left(\phi_t | \phi_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}^j\right).$$

La vraisemblance intervenant dans cette expression peut se décomposer de la façon suivante en mettant à profit l'indépendance conditionnelle des mesures sachant le processus d'état :

$$p(\mathbf{Y}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t:t+L}) = \prod_{l=0}^L p(\mathbf{Y}_{t+l} | \mathbf{X}_{t+l}).$$

La matrice de covariance du bruit de mesure étant supposée diagonale, on obtient en outre :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}_{t+l} | \mathbf{X}_{t+l}) &\propto \det(C(\boldsymbol{\phi}_t))^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\mathbf{Y}_{t+l} - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)})\right)^T C(\boldsymbol{\phi}_t)^{-1} \left(\mathbf{Y}_{t+l} - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)})\right)\right), \\ &\propto \prod_{k=1}^{n_y} \phi_{t,k}^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\mathbf{Y}_{t+l,k} - \mathbf{h}_{t+l,k}(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)})\right)^2 / \phi_{t,k}\right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

où  $\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) = (\mathbf{h}_{t,1}(\mathbf{x}_t), \dots, \mathbf{h}_{t,n_y}(\mathbf{x}_t))^T$ . Vue comme une fonction du vecteur de variance  $\boldsymbol{\phi}_t$ , la vraisemblance prend donc la forme d'un produit de lois  $\mathcal{IG}$ . Or, chaque composante du vecteur de variances obéit à une loi  $\mathcal{IG}$  dont les paramètres, notés  $\alpha_{t,k}^{(i,j)}$  et  $\beta_{t,k}^{(i,j)}$ , dépendent du vecteur indicateur  $\boldsymbol{\lambda}_t^{(j)}$  et le cas échéant de la valeur précédente de la variance  $\phi_{t-1}^{(i)}$  comme spécifié dans la section (5.3.1). La loi *a priori* jointe du vecteur de variance s'écrit :

$$p(\boldsymbol{\phi}_t | \phi_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}^j) = \prod_{k=1}^{n_y} \mathcal{IG}(\phi_{t,k}; \alpha_{t,k}^{(i,j)}, \beta_{t,k}^{(i,j)}). \quad (5.16)$$

En combinant (5.15) et (5.16), on en déduit que la loi conditionnelle du vecteur  $\boldsymbol{\phi}_t$  est aussi un produit de lois  $\mathcal{IG}$  :

$$p(\boldsymbol{\phi}_t | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda}^j, \mathbf{Y}_{t:t+L}) = \prod_{k=1}^{n_y} \mathcal{IG}(\phi_{t,k}; \tilde{\alpha}_{t,k}^{(i,j)}, \tilde{\beta}_{t,k}^{(i,j)}),$$

dont les paramètres sont calculés conformément aux formules :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{t,k}^{(i,j)} &= \alpha_{t,k}^{(i,j)} + (L+1)/2, \\ \tilde{\beta}_{t,k}^{(i,j)} &= \beta_{t,k}^{(i,j)} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^L \left(\mathbf{Y}_{t+l,k} - \mathbf{h}_{t+l,k}(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)})\right)^2. \end{aligned}$$

#### • Simulation des vecteurs de navigation

La loi de proposition des vecteurs de navigation s'obtient en marginalisant les paramètres de variance :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}) &= \int_{\boldsymbol{\phi}_t} p(\mathbf{x}_{t:t+L}, \boldsymbol{\phi}_t | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}) d\boldsymbol{\phi}_t, \\ &\propto p(\mathbf{x}_{t:t+L} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) \prod_{k=1}^{n_y} \left(\tilde{\beta}_{t,k}^{(i,j)}\right)^{-\tilde{\alpha}_{t,k}^{(i,j)}}, \end{aligned}$$

avec :

$$\left(\tilde{\beta}_{t,k}^{(i,j)}\right)^{-\tilde{\alpha}_{t,k}^{(i,j)}} = \prod_{k=1}^{n_y} \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^L \left(\mathbf{Y}_{t+l,k} - \mathbf{h}_{t+l,k}(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)})\right)^2 / \beta_{t,k}^{(i,j)}\right)^{-\frac{(2\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L + 1)}{2}}.$$

Cette loi est non standard mais nous montrons que la distribution suivante en fournit une bonne approximation :

$$p\left(\mathbf{x}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right) \simeq \prod_{l=0}^L \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_{t+l}; \mathbf{m}_{t+l}^{(i,j)}, \Sigma_{t+l}^{(i,j)}\right). \quad (5.17)$$

La démonstration est proposée en annexe D. Pour préciser les paramètres  $\mathbf{m}_{t+l}^{(i,j)}$  et  $\Sigma_{t+l}^{(i,j)}$ , introduisons quelques notations. On rappelle que :

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) = \mathcal{N}(F_t \mathbf{x}_{t-1}, B_t B_t^T).$$

Le calcul de la loi (5.17) est fondé en partie sur la linéarisation locale des équations de mesure autour des particules courantes :

$$\mathbf{Y}_{t+l} \simeq \mathbf{h}_{t+l} \left(F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}\right) + H_{t+l}^{(i,j)} \left(\mathbf{x}_t - F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}\right) + \mathbf{w}_t,$$

avec  $H_{t+l}^{(i,j)} = (\nabla \mathbf{h}_{t+l})_{\mathbf{x}_{t+l} = F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}}$ . On note  $\Delta \mathbf{Y}_{t+l}^{(i,j)} = \mathbf{Y}_{t+l} - \mathbf{h}_{t+l} \left(F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}\right) + H_{t+l}^{(i,j)} F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}$ .

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \left(\Sigma_{t+l}^{(i,j)}\right)^{-1} &= \left(H_{t+l}^{(i,j)}\right)^T \text{diag}\left(\mathbf{V}_t^{(i,j)}\right)^{-1} H_{t+l}^{(i,j)} + B_{t+l} B_{t+l}^T, \\ \mathbf{m}_{t+l}^{(i,j)} &= \Sigma_{t+l}^{(i,j)} \left( (B_{t+l} B_{t+l}^T)^{-1} F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i)} + \text{diag}\left(\mathbf{V}_t^{(i,j)}\right)^{-1} \left(H_{t+l}^{(i,j)}\right)^T \Delta \mathbf{Y}_{t+l}^{(i,j)} \right), \end{aligned}$$

où le vecteur  $\mathbf{V}_t^{(i,j)}$  satisfait la relation :  $\mathbf{V}_{t,k}^{(i,j)} = \frac{\beta_{t,k}^{(i,j)}}{\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L/2}$ , pour  $k = 1, \dots, n_y$ .

#### 5.4.4 Sélection des particules

Comme au chapitre précédent, le contexte de détection peut être mis à profit pour améliorer l'étape de rééchantillonnage. L'algorithme de navigation en présence de brouillage explore à chaque pas de temps et pour chaque mesure GPS deux hypothèses concurrentes :

- $H_{t,k}^1$  : la  $k$ -ième mesure GPS subit un saut de variance à l'instant  $t$ ,
- $H_{t,k}^0$  : la variance de la  $k$ -ième mesure reste inchangée.

La décision entre les deux hypothèses s'effectue à partir de la probabilité de changement  $P_{t,k}^c = \left[H_{t,k}^1 | \mathbf{Y}_{1:t+L}\right]$ , évaluée conformément à la formule (5.10). Une idée simple pour rendre le rééchantillonnage plus efficace consiste à présélectionner les particules en accord avec l'hypothèse décidée par le filtre. Nous préconisons de procéder de la façon suivante :

$$\tilde{w}_t^{i,j} = 0 \text{ si } \begin{cases} \text{si } P_{t,k}^c > P_{\text{seuil}}^1 \text{ et } \boldsymbol{\lambda}_t^{(i,j)} = 0, \\ \text{si } P_{t,k}^c < P_{\text{seuil}}^0 \text{ et } \boldsymbol{\lambda}_t^{(i,j)} = 1, \end{cases}$$

pour  $i = 1, \dots, N$  et  $j = 1, \dots, n_\lambda$ . Le fait de choisir deux seuils différents pour les deux hypothèses revient à introduire un intervalle de confiance. Pour certaines valeurs de  $P_{t,k}^c$ , il existe une ambiguïté entre les deux hypothèses et aucune décision n'est prise.

Une fois éliminées les particules non pertinentes, la redistribution du nuage de particules est réalisée. Elle doit être adaptée à la stratégie de lissage. Chaque particule générée  $\mathbf{X}_t^{(i,j)}$  est associée à deux poids : un poids de filtrage  $w_t^{(i,j)}$  et un poids de lissage  $\tilde{w}_t^{(i,j)} = w_{t+L}^{(i,j)}$ . Pour

prendre en compte l'information apportée par les poids de lissage tout en obtenant une approximation de la distribution de filtrage, le rééchantillonnage pondéré préconisé dans [WCG02] est appliqué. Le principe en a été rappelé dans le quatrième chapitre.

Notons enfin que la redistribution contribue aussi à ne pas augmenter la charge calculatoire de l'algorithme à chaque itération. En effet, la stratégie de propagation des particules adoptée, combinant exploration systématique des états discrets et aléatoire des états continus, conduit à  $n_\Lambda$  descendants  $\mathbf{X}_t^{(i,j)}$  par particule  $\mathbf{X}_{t-1}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) au lieu d'un seul dans le cas d'un filtre particulaire classique. A l'issue du rééchantillonnage, seules  $N$  particules parmi les  $N \times n_\Lambda$  particules ainsi générées sont conservées à chaque pas de temps.

### 5.4.5 Contrainte de durée minimale

Dans cette dernière partie, nous décrivons une extension de l'algorithme permettant de limiter les fausses détections qui dégradent fortement l'estimation des paramètres continus. Elle intervient en amont de l'étape d'exploration déterministe des états discrets.

L'indépendance supposée entre chaque réalisation du processus  $\lambda_t$  peut conduire à la détection de sauts de variance très rapprochés. Cette limitation a déjà été mise en évidence dans [DC01] où le problème est résolu en ajoutant des contraintes sur le modèle statistique. Pour notre application, les effets d'une source d'interférences se manifestent pendant une durée qui dépend en partie de la dynamique du véhicule poursuivi et de la puissance du signal perturbateur. Il est donc raisonnable d'imposer un intervalle de temps minimal entre deux sauts de variance, choisi en fonction de la connaissance *a priori* du mouvement du véhicule et de l'environnement de navigation (milieu rural ou urbain). Dans [DC01], ce type de contrainte est introduit pour une segmentation hors ligne. Transposée à un algorithme de Monte Carlo séquentiel, cette approche présente l'intérêt de réduire le champ des hypothèses de modèle à explorer. Ainsi, toutes les particules  $\lambda_t$  indiquant un changement de variance trop prématuré ne sont pas considérées, ce qui contribue à réduire le coût calculatoire de l'algorithme. La sélection des hypothèses à étudier pour chaque particule ( $i = 1, \dots, N$ ) s'opère en 3 étapes :

- 1) Calcul du vecteur des délais de transition  $\tau_t^{(i)}$  :  
chaque composante  $\tau_{t,k}^{(i)}$  représente l'intervalle de temps écoulé depuis le dernier saut de variance détecté pour la  $k$ -ième mesure GPS. Elle est calculée comme suit :

$$\tau_{t,k}^{(i)} = t - \max \left\{ u < t \mid \lambda_{u,k}^{(i)} \neq 0 \right\}, \text{ pour } k = 1, \dots, n_y.$$

- 2) Repérage des transitions interdites :  
il s'agit de déterminer les mesures pour lesquelles la contrainte de délai minimum interdit un saut de variance.

$$I_t = \left\{ k = 1, \dots, n_y \mid \tau_{t,k}^{(i)} < \tau_{\text{seuil}} \right\}.$$

- 3) Ensemble des descendants possibles :  
l'espace-état des descendants possibles de la  $i$ -ème particule est restreint à un ensemble  $\Lambda_t^{(i)} \subset \tilde{\Lambda}$  en éliminant les particules en contradiction avec l'hypothèse de délai minimal. On obtient :

$$\Lambda_t^{(i)} = \Lambda - \left\{ \lambda^j \mid \lambda_k^j \neq 0, k \in I_t \right\}.$$

Outre l'amélioration du temps de calcul, cette sélection déterministe des particules concourt à diminuer la variance des estimés. La figure (5.4) résume l'enchaînement des différentes étapes de l'algorithme de filtrage particulaire développé pour la navigation en présence de brouillage.

- 
- Initialisation :  $\begin{cases} \mathbf{x}_0^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_0), \\ \phi_0^{(i)} = \text{UERE}^2, \end{cases}$  pour  $i = 1, \dots, N$ .
  - Itération  $t$  :
    - o Exploration de l'espace-état, pour  $i = 1, \dots, N$  :
      - Définition de l'espace-état du vecteur discret (contrainte de durée minimale entre 2 sauts de variance) :
        - Vecteur des délais de transition :
 
$$\tau_{t,l}^{(i)} = t - \max \left\{ u < t \mid \lambda_{u,l}^{(i)} \neq 0 \right\}, \text{ pour } l = 1, \dots, n_y.$$
        - Indices des transitions interdites :
 
$$I_t^{(i)} = \left\{ k = 1, \dots, n_y \mid \tau_{t,k}^{(i)} < \tau_{\text{seuil}} \right\}.$$
        - Sous-ensemble des descendants possibles :
 
$$\Lambda_t^{(i)} = \Lambda - \left\{ \lambda^j \mid \lambda_k^j \neq 0, k \in I_t^{(i)} \right\}.$$
        - Chemins explorés :
 
$$\lambda_{t:t+k}^{(i,j)} = (\lambda^j, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}), \text{ avec } \lambda^j \in \Lambda_t^{(i)} \text{ (} j = 1, \dots, n_\lambda^{(i)} = \text{card}(\Lambda_t^{(i)}) \text{)}.$$
      - Simulation des états continus (loi de proposition de lissage).
        - Pour  $j = 1, \dots, n_\lambda^{(i)}$  :
          - calcul de  $\mathbf{V}_t^{(i,j)}$
          - pour  $k = 1, \dots, L$  :
            - calcul de  $\mathbf{m}_{t+k}^{(i,j)}$  et  $\Sigma_{t+k}^{(i,j)}$ ,
            - $\mathbf{x}_{t+k}^{(i,j)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+k}; \mathbf{m}_{t+k}^{(i,j)}, \Sigma_{t+k}^{(i,j)})$ .
          - $\phi_t^{(i,j)} \sim \prod_{l=1}^{n_y} \mathcal{IG}(\phi_{t,l}; \tilde{\alpha}_{t,l}^{(i,j)}, \tilde{\beta}_{t,l}^{(i,j)})$ .
        - Calcul des poids de lissage et de filtrage  $w_t^{(i,j)}$  et  $\tilde{w}_t^{(i,j)}$  (formules données en partie (5.4.3)).
      - o Estimation :
        - Probabilité de changement :
 
$$P_{t,l}^c = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_\lambda^{(i)}} \tilde{w}_t^{(i,j)} \delta(\lambda_t - \lambda_t^{(i,j)}), \text{ pour } l = 1, \dots, n_y.$$
        - États continus :  $\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_t = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_\lambda^{(i)}} \tilde{w}_t^{(i,j)} \mathbf{x}_t^{(i,j)}, \\ \hat{\phi}_t = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_\lambda^{(i)}} \tilde{w}_t^{(i,j)} \phi_t^{(i,j)}. \end{cases}$
      - o Redistribution
        - Présélection des particules :
          - Si  $P_{t,l}^c > P_{\text{seuil}}$ ,
          - un saut de variance est détecté,
          - $\left\{ \tilde{w}_t^{(i,j)} = 0 \mid (i,j) \text{ tel que } \tilde{\lambda}_t^{(i,j)} = 0 \right\}$ .
        - Rééchantillonnage pondéré :
 
$$\begin{cases} (i_k, j_k) \sim \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_\lambda^{(i)}} \tilde{w}_t^{(i,j)} \delta((i_k, j_k) - (i, j)), \\ \mathbf{x}_t^{(k)} = \mathbf{x}_t^{(i_k, j_k)}, \phi_t^{(k)} = \phi_t^{(i_k, j_k)}, \\ w_t^{(k)} \propto w_t^{(i_k, j_k)} / \tilde{w}_t^{(i_k, j_k)}. \end{cases} \quad k = 1, \dots, N.$$

---

**FIG. 5.4** - Filtre particulaire pour la navigation en présence de brouillage.

## 5.5 Résultats de simulation

Différentes simulations ont été menées pour mettre en évidence l'intérêt de l'approche proposée. Le mode opératoire des simulations est tout d'abord présenté, puis les résultats obtenus sont commentés.

### 5.5.1 Scénario de navigation

La génération des données GPS ayant déjà fait l'objet d'une description détaillée dans le chapitre précédent, nous ne nous attardons pas sur ce point. Les simulations effectuées correspondent à un véhicule évoluant à la vitesse quasiment constante de 50 km/h. La nouveauté intervient au niveau de la variance du bruit de mesure. Contrairement au chapitre précédent où elle était supposée connue et constante au cours des simulations, elle est sujette à des variations imprévues. Nous la générons comme un processus constant par morceaux. Ce modèle correspond à des changements très abrupts, qui sont les plus pénalisants pour les algorithmes de navigation. En pratique, ils peuvent se produire de façon plus progressive. Le problème est de régler l'amplitude des sauts de variance pour assurer des conditions de simulations réalistes. On a vu dans la partie (5.2.2) que la valeur maximale de la variance du bruit de mesure correspondait au seuil de décrochage des boucles de poursuite GPS. Des sources d'interférences de puissance plus grande empêchent en effet la formation de la mesure GPS. Le critère suivant a été proposé :

$$\sigma_{\text{seuil}} = \frac{e}{3}, \quad (5.18)$$

où  $\sigma_{\text{seuil}}$  est la borne sur les valeurs de l'écart-type du bruit de mesure et  $e$  est l'espacement maximal entre les corrélateurs du récepteur GPS. Pour une architecture GPS classique et la précision de positionnement standard proposée aux utilisateurs civils, la valeur limite est  $\sigma_{\text{seuil}} = 48\text{m}$ . En outre, une des caractéristiques du brouillage est que plusieurs mesures GPS peuvent être dégradées simultanément, comme précisé dans [MJC01]. Nous avons pris en compte ce facteur dans nos simulations. Par souci de simplicité, nous n'avons perturbé que deux des mesures GPS.

### 5.5.2 Réglage du filtre particulaire

L'efficacité de l'algorithme est conditionnée par le choix des paramètres des lois Inverse-Gamma *a priori*. Ils sont précisés dans le tableau (5.2) ainsi que les autres paramètres de simulation. L'influence du pas de lissage a déjà été étudiée pour l'algorithme de navigation en présence de multitrajets. Nous le choisissons égal à 5, valeur qui offre un bon compromis entre le retard d'estimation autorisé par le contexte temps réel et la qualité d'estimation.

Nombre de particules	$N = 3000$
Pas de lissage	$L = 5$
Présence d'interférences	$\alpha_i^1 = 15$ et $\beta_i^1 = 10000$
Disparition d'interférences	$\alpha_i^2 = 10^6$ et $\beta_i^2 = 10^8$

**TAB. 5.2** - Paramètres de simulation

### 5.5.3 Étude des performances de l'algorithme développé

Nous examinons les performances de l'algorithme dédié à la navigation en présence de brouillage pour :



- la détection des sauts de variance,
- l'estimation de la variance du bruit de mesure GPS,
- l'estimation de la trajectoire du véhicule.

Tous les résultats proposés sont obtenus en moyennant  $M = 20$  tirages de Monte Carlo.

### Détection des sauts de variance

La détection des sauts de variance est réalisée en comparant les probabilités de changement estimées par le filtre particulaire ( $P_{t,k}^c$ , pour  $k = 1, 2$ ) au seuil  $P_{\text{seuil}}$ , qui a été fixé à 0.2. Sur la figure (5.10) sont tracées les probabilités moyennes de changement pour les deux mesures perturbées par les interférences. Il apparaît que les instants  $t = 67$ ,  $t = 100$  et  $t = 167$  où se produisent les sauts de variance (repérés sur les courbes par une ligne verticale en pointillés) sont marqués par une forte augmentation de cette probabilité. Pour mieux évaluer les performances de l'algorithme pour la détection, nous avons étudié les statistiques des instants de changements estimés. Elles sont résumées dans le tableau (5.3). On remarque que le retard moyen de détection est faible (en moyenne inférieur à 2) et que l'instant  $t = 100$ s est le plus difficile à détecter. Cet instant correspond en effet au saut de variance de plus faible amplitude (cf figure 5.6), ce qui se traduit par un plus fort écart-type des instants de changement estimés.

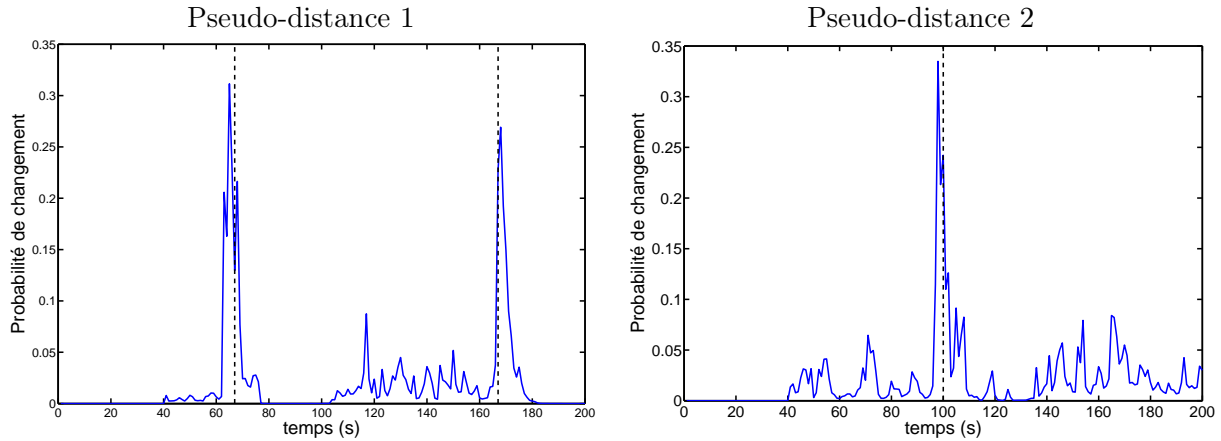


FIG. 5.5 - Probabilités moyennes de changement.

Instant de changement	Moyenne des instants de changement estimés	Écart-type des instants de changement estimés
$t = 67$	67	3.07
$t = 167$	168	3.06
$t = 100$	102	7

TAB. 5.3 - Statistiques des instants de changement estimés.

### Estimation de la variance du bruit de mesure

Dans un second temps, nous nous intéressons à l'estimation de la variance du bruit de mesure GPS. La figure (5.6) représente l'écart-type réel du bruit de mesure GPS  $\sqrt{\phi_t}$  et sa valeur estimée  $\sqrt{\hat{\phi}_t}$  pour les deux mesures GPS perturbées par des interférences. Pour mettre en évidence l'intérêt de la détection, nous avons comparé les résultats de notre approche (courbes de gauche) avec ceux obtenus pour un filtre particulaire estimant simultanément la variance du bruit de mesure et la dynamique du véhicule sans prendre en compte les sauts de variances

(courbes de droite). La distribution *a priori* utilisée dans cet algorithme pour le vecteur de variance est une loi Inverse-Gamma :

$$p(\phi_{t,i}|\phi_{t-1,i}) = \mathcal{IG}(\alpha, \beta) \quad (5.19)$$

dont les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ont été choisis de sorte que :

- $E(\phi_{t,i}|\phi_{t-1,i}) = \phi_{t-1,i}$ ,
- la variance de la distribution soit assez grande pour autoriser des changements de variance.

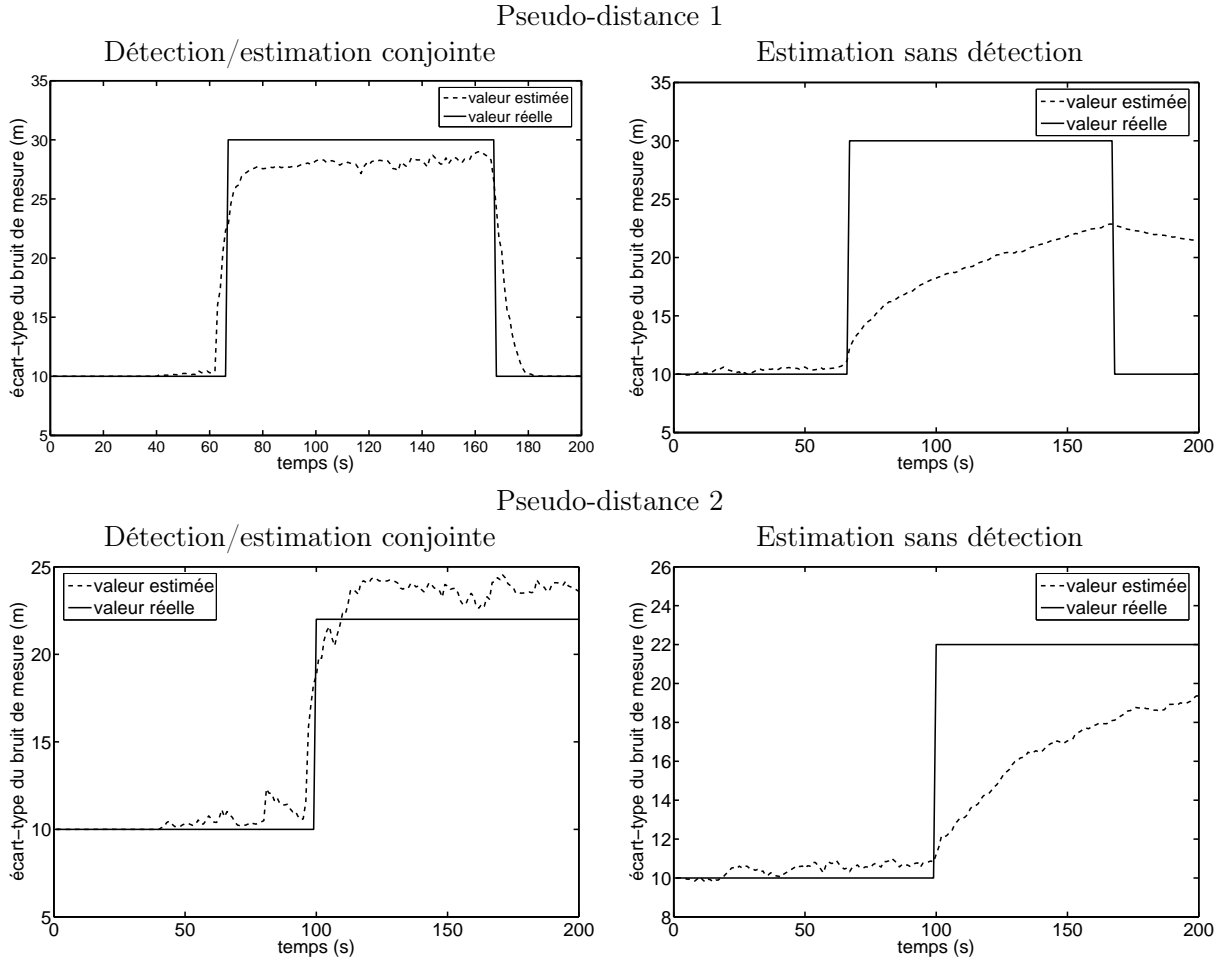


FIG. 5.6 - Estimation de la variance des mesures GPS.

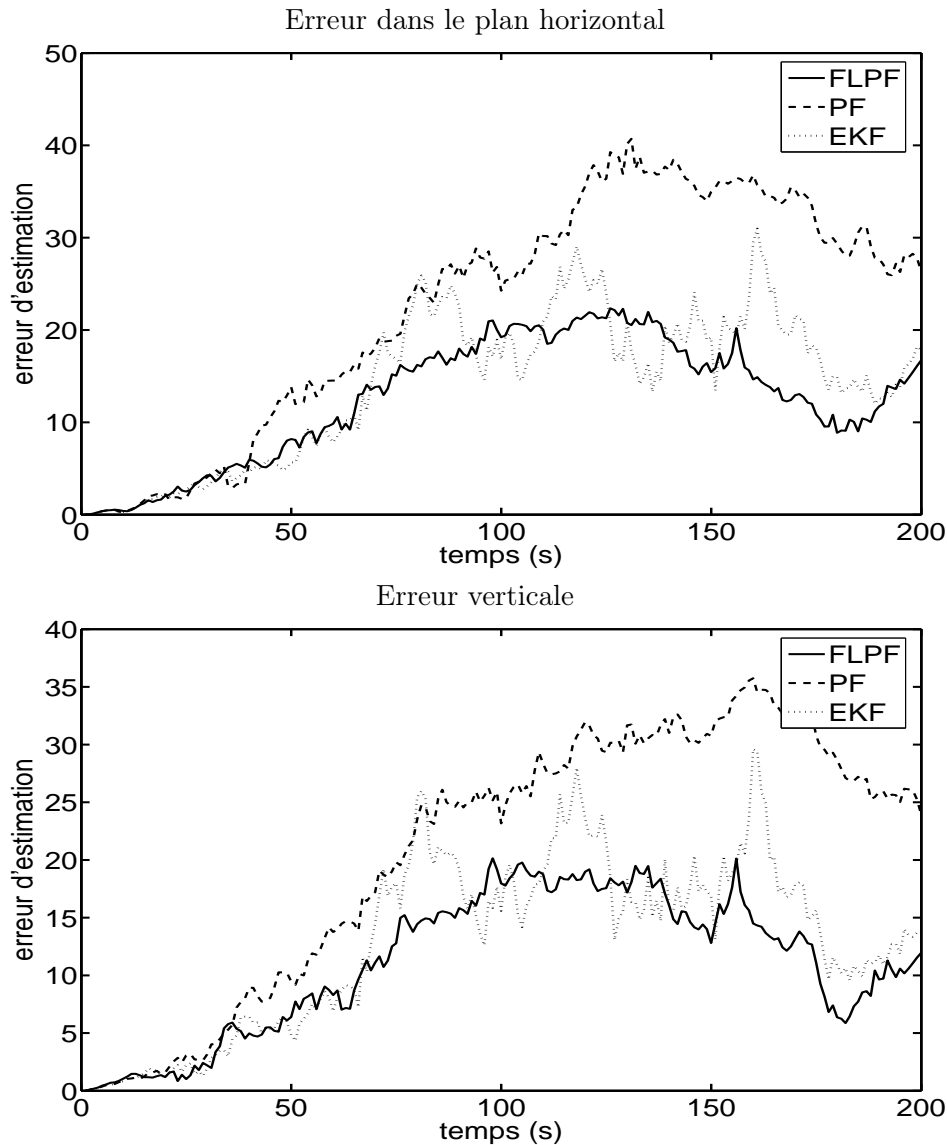
Sans surprise, il apparaît qu'en l'absence de détection le temps de réponse du filtre particulaire à l'issue d'un saut de variance est trop grand. Ce temps de réponse pourrait être réduit en ajustant les paramètres de la distribution *a priori* (5.19) de façon à augmenter sa variance. Un tel modèle permettrait de mieux gérer les changements abrupts au détriment de la précision des estimés sur les intervalles de temps où la variance évolue peu. A l'inverse, l'algorithme de détection/estimation poursuit correctement les paramètres de variance. En sélectionnant à chaque instant le modèle d'évolution le plus approprié, il est à la fois précis sur les intervalles où la variance est quasiment constante et réactif si elle varie brusquement.

### Résolution du problème de navigation

Nous vérifions enfin dans quelle mesure l'estimation correcte de la variance du bruit de mesure

contribue à améliorer l'estimation des paramètres de navigation. La figure (5.7) compare l'erreur moyenne d'estimation commise par l'algorithme de détection/estimation (appelé FLPF (fixed-lag particle filter) sur la légende) à celle :

- du filtre particulaire (PF) qui ne comporte pas d'étape de détection,
- d'un filtre de Kalman étendu (EKF) supposant la variance du bruit de mesure égale à sa valeur nominale pour une application GPS.



**FIG. 5.7** - Erreurs d'estimation de la position en présence de brouillage.

Le filtre particulaire développé s'avère plus précis que les deux algorithmes auxquels il est comparé. Par contre, le filtre particulaire fondé sur un modèle unique d'évolution de la variance présente de moins bons résultats que le filtre de Kalman étendu. Ce comportement est attribuable à une forte dispersion du nuage de particules liée à l'incertitude sur la valeur des composantes de variance du vecteur état. Il s'ensuit une plus grande variance des estimés de position. Ce problème ne se pose pas pour l'algorithme de détection/estimation conjointe qui fait coexister plusieurs modèles *a priori* pour la variance, dont deux très informatifs. Au vu des courbes proposées, les estimés du filtre de Kalman n'apparaissent pas trop pénalisés

par la valeur erronée de la variance dans la mesure où les pseudo-distances sont dégradées par les interférences pendant un intervalle de temps assez bref. Cependant, contrairement au filtre particulaire proposé, le filtre de Kalman étendu commet une erreur d'estimation supérieure à celle qu'il prédit via la covariance estimée de la loi *a posteriori*  $p(\mathbf{X}_t|\mathbf{Y}_{1:t})$ . Ce point peut s'avérer critique pour certaines applications où il importe de connaître avec une précision l'ordre de grandeur de l'erreur de positionnement. Ce comportement est illustré sur figure (5.8) où sont représentés un exemple d'erreur d'estimation de la position en bleu et en tirets rouges l'intervalle de confiance à 95% (égal à deux fois l'écart-type de la loi *a posteriori* estimée) pour les deux algorithmes. Enfin, l'amélioration apportée par le filtre particulaire devrait être plus marquée dans le cas où le nombre de mesures affectées simultanément par le brouillage est plus élevé.

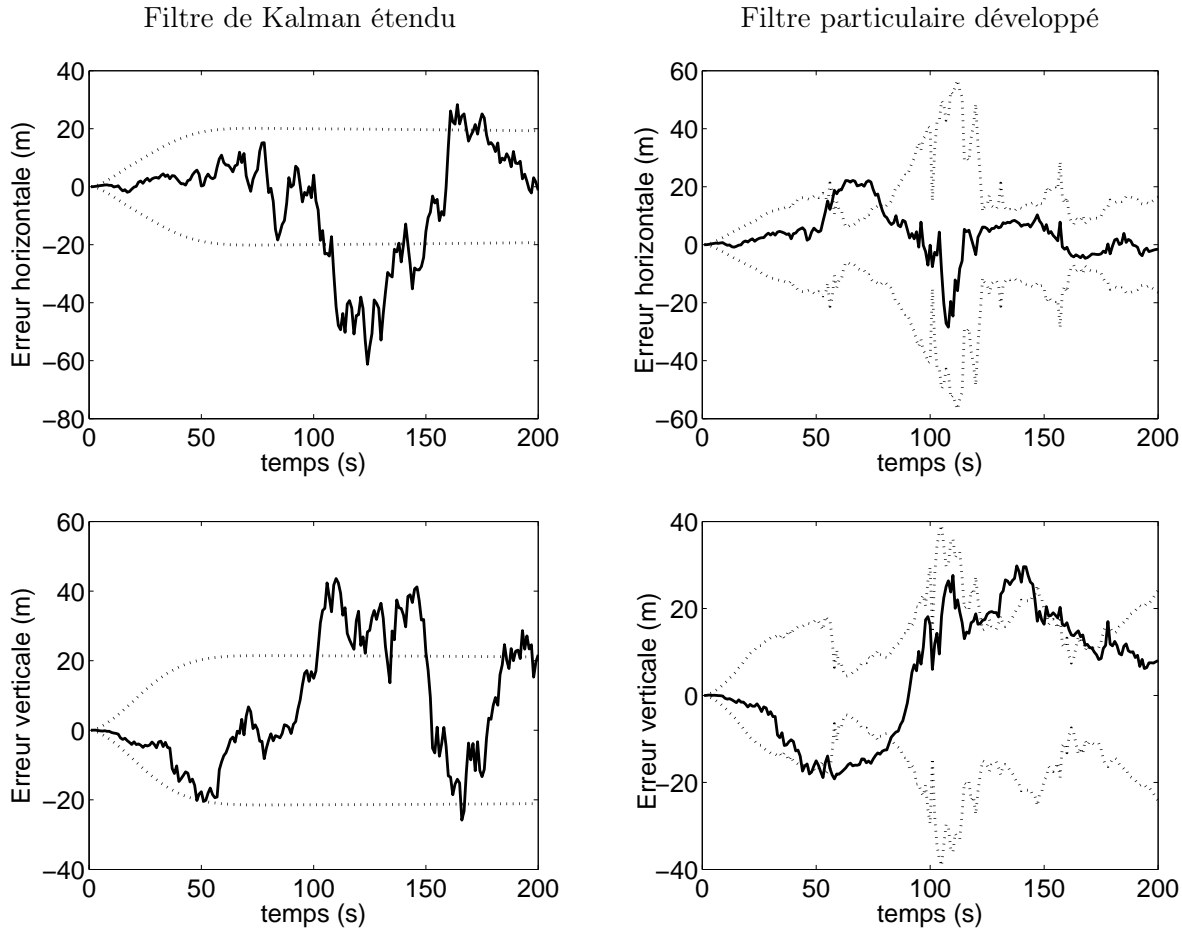


FIG. 5.8 - Erreur de positionnement (trait plein) et intervalle de confiance à 95% (tirets).

## 5.6 Conclusion

Ce chapitre porte sur l'effet des interférences sur les mesures de pseudo-distances GPS et donc sur l'estimation de la dynamique du véhicule. L'apparition de brouillages se traduit par une augmentation de la variance du bruit de mesure. Si ces perturbations ne sont pas détectées, l'erreur de position du filtre de navigation augmente au-delà de l'intervalle de confiance calculé par l'algorithme. Pour pallier ce problème, nous proposons une méthode assurant conjointement l'estimation des paramètres de navigation et la détection/estimation conjointe

des sauts de variance. Les méthodes séquentielles de Monte Carlo offrent une solution simple à ce problème en estimant à la fois les paramètres de modèle et de dynamique, et un vecteur discret formalisant la présence ou non d'un saut de variance sur les mesures. L'efficacité de la détection est augmentée en utilisant une loi de proposition de lissage approchée. Enfin, la détection des sauts de variance permet d'éliminer directement les particules non pertinentes pour augmenter l'efficacité du rééchantillonnage. Les simulations ont mis en évidence l'intérêt de la méthode développée qui détecte et estime correctement les changements abrupts de la variance du bruit de mesure, diminuant ainsi l'erreur d'estimation de la position. Notre approche ne rend cependant pas le système de navigation totalement robuste aux brouillages. En particulier, on a vu que des brouilleurs de trop grande puissance empêchaient la formation des mesures GPS. Le chapitre suivant étudie des solutions plus robustes pour estimer les mesures GPS à partir des signaux satellites reçus. Notamment, une solution à base de filtrage particulière est proposée.

*Partie IV*  
*Hybridation très serrée du GPS et des*  
*systèmes de navigation inertielle.*



# Hybridation très serrée INS/GPS

## Sommaire

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>127</b>
<b>6.2</b>	<b>Récepteur multi-corrélateurs</b>	<b>128</b>
6.2.1	Architecture générique d'un récepteur GPS	128
6.2.2	Limitations des architectures classiques	130
6.2.3	Architecture multi-corrélateurs	130
<b>6.3</b>	<b>Filtre particulaire vs filtre de Kalman étendu</b>	<b>131</b>
6.3.1	Modèle de filtrage	132
6.3.2	Stratégie de filtrage particulaire	134
6.3.3	Résultats de simulation	134
<b>6.4</b>	<b>Hybridation très serrée</b>	<b>138</b>
6.4.1	Architecture d'hybridation	139
6.4.2	Modèle de filtrage	140
6.4.3	Stratégie de filtrage particulaire	143
6.4.4	Résultats de simulation	144
6.4.5	Filtre particulaire vs filtre de Kalman étendu	145
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>147</b>

## 6.1 Introduction

Au cours des chapitres précédents, nous avons développé un système robuste de navigation fondé sur le couplage serré du GPS et d'une centrale inertielle. Le deuxième chapitre a tout d'abord permis de mettre en place l'architecture d'hybridation et de décrire le filtre de navigation correspondant. Il est ressorti des études menées que le filtre de Kalman étendu présentait des performances équivalentes au filtre particulaire et ce pour un temps de calcul réduit. L'intérêt d'une approche particulaire est néanmoins apparu dans les quatrième et cinquième chapitres. Des scénarios difficiles de navigation y ont été considérés pour lesquels les mesures GPS sont sujettes à des perturbations de type multitrajets ou brouillage. Par souci de simplicité, les algorithmes développés ont été présentés dans le cas d'un système GPS indépendant. Ils sont cependant généralisables au système hybride GPS/INS en modifiant simplement l'équation d'état du modèle de filtrage. En dépit de ces améliorations, le système de navigation hybride demeure vulnérable à la perte des mesures GPS qui se produit en cas de brouilleurs de trop grande puissance ou d'une trop grande dynamique du véhicule. La centrale inertielle est alors contrainte à fonctionner de façon autonome tant que le service GPS n'est pas restauré. L'objectif de ce chapitre est donc d'étudier des méthodes plus robustes pour estimer le **retard de propagation** du signal GPS et donc les **pseudo-distances** GPS. Deux pistes sont à cet effet explorées :

- utiliser des techniques de filtrage particulaire,
- mettre en œuvre de techniques d'hybridation très serrée.



La seconde approche consiste à améliorer le calcul des mesures GPS en intégrant des informations en provenance d'un système de navigation auxiliaire. Dans le contexte de cette thèse, l'aide est fournie par la centrale inertielle. Cette idée aboutit à un système hybride GPS/INS combinant couplage serré et très serré. Il convient ici de bien situer la démarche adoptée dans ce chapitre. La finalité des algorithmes de filtrage développés n'est pas de résoudre le problème de navigation mais d'estimer les pseudo-distances et pseudo-vitesses GPS qui sont ultérieurement utilisées à cet effet. Les solutions présentées interviennent donc au sein du récepteur GPS pour lequel une architecture à corrélateurs multiples est considérée. Elle est décrite en partie I. Dans la partie II, l'opportunité d'utiliser un filtre particulière est discutée. Enfin, la partie III est consacrée à l'hybridation très serrée.

## 6.2 Récepteur multi-corrélateurs

Dans cette partie, nous présentons l'architecture générique d'un récepteur GPS avant de préciser les caractéristiques des récepteurs à corrélateurs multiples sur lesquels porte notre étude.

### 6.2.1 Architecture générique d'un récepteur GPS

Contrairement aux récepteurs classiquement utilisés en télécommunication, la finalité des récepteurs GPS n'est pas de restituer fidèlement le contenu du signal transmis mais d'extraire les paramètres utiles au positionnement. Cette particularité détermine leur architecture. Outre les modules de démodulation et décodage, ils comportent en effet des modules spécifiques dédiés à l'estimation du temps de propagation des signaux GPS et au calcul de la solution de navigation par triangulation. Un récepteur GPS est organisé en 3 étages représentés sur la figure 6.1 :

- 1) un étage haute fréquence (HF) qui conditionne le signal reçu de façon à le numériser. Il assure la descente en fréquence et l'amplification du signal utile avec contrôle automatique de gain pour permettre son échantillonnage et sa quantification.
- 2) un étage dédié à la formation des mesures GPS. Il est formé de plusieurs canaux en parallèle, chacun poursuivant un des satellites en vue. C'est dans cette partie du récepteur qu'est opérée la démodulation de la porteuse et du code pseudo-aléatoire.
- 3) un étage traitement du signal où l'algorithme de navigation implanté sur DSP calcule la solution de navigation à partir des mesures GPS.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la formation des mesures GPS qui est réalisée dans le deuxième étage du récepteur GPS. En sortie de l'étage de conditionnement, on rappelle que le signal satellite prend la forme :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n_s} s^i(t) + n(t), \quad (6.1)$$

$$s^i(t) = A^i d^i(t - \tau^i) \sin(2\pi f^i t + \phi^i) c^i(t - \tau^i), \quad (6.2)$$

où les notations suivantes ont été introduites :

- $n_s$  désigne le nombre de satellites en ligne de vue du récepteur,
- $f^i = f_{i_f} + f_d^i$ , avec  $f_{i_f}$  qui représente la fréquence de la porteuse à l'issue de la descente en fréquence et  $f_d^i = -2\pi f_0 \frac{d\tau^i}{dt}$  ( $f_0$  étant la fréquence porteuse initiale) le décalage Doppler induit par le mouvement relatif récepteur/ $i$ -ème satellite.

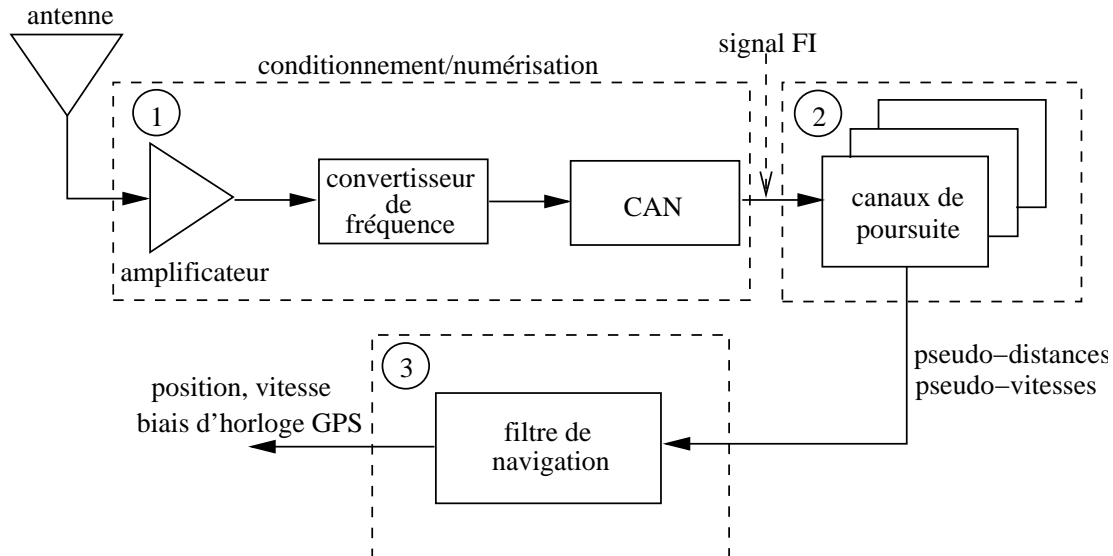


FIG. 6.1 - Architecture générique d'un récepteur GPS.

- $n(t)$  est un bruit blanc Gaussien modélisant le bruit thermique et les erreurs de quantification,
- $s^i(t)$  est le signal transmis par le  $i$ -ème satellite,
- $c^i(t)$  est le code pseudo-aléatoire associé au  $i$ -ème satellite,
- $A^i$  est l'amplitude du  $i$ -ème signal satellite,
- $d^i(t)$  est le message de navigation du  $i$ -ème signal satellite,
- $\tau^i$  est le retard de propagation du  $i$ -ème signal satellite,
- $\phi^i$  est la phase de la  $i$ -ième porteuse.

L'objectif des canaux de poursuite est d'estimer les paramètres du signal (6.1) et d'en déduire les mesures GPS utilisées par le filtre de navigation. Elles sont calculées comme suit ( $c$  désignant la vitesse de la lumière) :

- $\rho^i = c\tau^i$  est la pseudo-distance GPS, c'est-à-dire la distance satellite/véhicule biaisée par le décalage de l'horloge récepteur et les retards de propagation,
- $v_\rho^i = -cf_d^i$  est la dérivée de la pseudo-distance, appelée pseudo-vitesse. Elle est la contribution de la vitesse relative satellite/véhicule et de la dérive d'horloge récepteur.

Chaque canal de réception est dédié à un des satellites en vue et estime un couple  $(f_d^i, \tau^i)$  en mettant à profit les bonnes propriétés de l'autocorrélation des codes pseudo-aléatoires satellites. L'intercorrélacion entre deux codes issus de différents satellites étant négligeable, chaque canal traite le signal en provenance d'un satellite indépendamment des autres signaux satellites. Nous appelons donc abusivement par la suite signal GPS une seule des composantes  $s^i(t)$  et omettons l'indice  $i$ . Le canal de réception procède en alignant le signal reçu avec une réplique générée localement. La synchronisation est réalisée lorsque l'intercorrélacion entre les deux signaux est maximale, les paramètres de retard et de fréquence du signal local fournissant alors les estimés de pseudo-distance et pseudo-vitesse. Dans un premier temps, une estimation grossière est opérée en calculant l'intercorrélacion en chaque point d'une grille temps/fréquence. Cette étape préliminaire est appelée l'**acquisition**. Dans un second temps, l'alignement est maintenu à l'aide de deux boucles de **poursuite** imbriquées, la boucle de code et la boucle de phase.

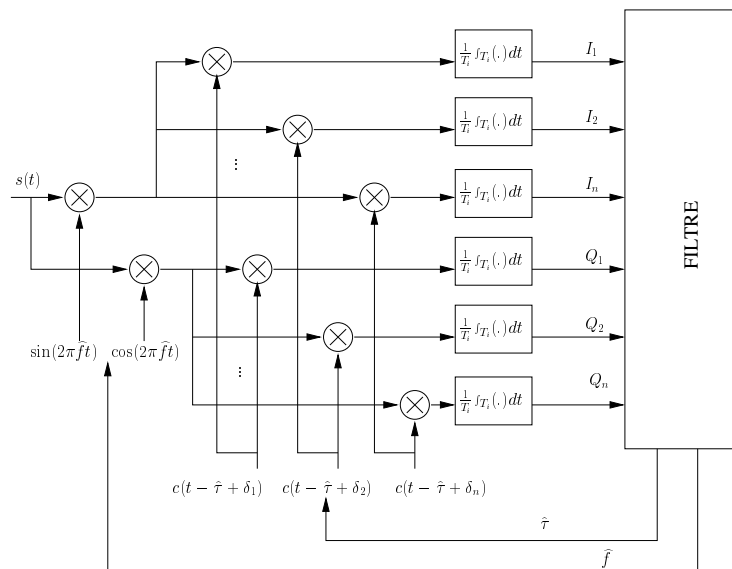
### 6.2.2 Limitations des architectures classiques

Dans les récepteurs classiques, la boucle de code est pilotée par deux corrélateurs (l'un en avance et l'autre en retard de phase) dont les sorties sont combinées pour évaluer l'erreur de poursuite  $\tau - \hat{\tau}$ , où  $\hat{\tau}$  est le plus récent estimé du délai de propagation. Cette architecture est optimale dans des conditions idéales de réception mais peut être mise en défaut en présence de perturbations. Les boucles de poursuite sont susceptibles de décrocher dans les cas suivants :

- un trop fort niveau de bruit (en cas de brouillage par exemple).
- une erreur de poursuite supérieure à l'espacement intercorrélateur et donc sous-estimée.
- une trop grande dynamique du véhicule.
- en présence de multitrajets qui déforment la fonction d'autocorrélation.

L'émergence des architectures à corrélateurs multiples offre une réponse partielle à ces problèmes. L'idée est d'estimer l'erreur de poursuite à partir de l'ensemble de la fonction d'autocorrélation et non plus seulement à partir de deux échantillons.

### 6.2.3 Architecture multi-corrélateurs



**FIG. 6.2** - Canal de réception d'un récepteur à corrélateurs multiples.

Dans ce schéma,  $T_i$  désigne le temps d'intégration pour le calcul de la corrélation,  $\hat{f}$  et  $\hat{\tau}$  sont les estimés les plus récents du retard de code et de la fréquence Doppler, et  $\delta_i$  est le décalage du  $i$ -ème corrélateur. Les sorties des corrélateurs pour les voies en phase et quadrature sont respectivement notées I et Q.

La figure 6.2 illustre le principe des récepteurs à corrélateurs multiples. Le signal GPS est d'abord multiplié par une réplique en phase et une réplique en quadrature de la porteuse pour former respectivement les voies I et Q du canal de poursuite. Il est ensuite corrélé à des répliques décalées entre elles du code, assurant ainsi un échantillonnage régulier de l'ensemble de la fonction d'autocorrélation. Les sorties des différents corrélateurs sont appliquées en entrée d'un filtre estimant directement le retard de propagation et la fréquence Doppler du signal GPS. L'expression mathématique de la sortie des voies I et Q associées au  $j$ -ème corrélateur

est :

$$I_{\delta_j} = \frac{A}{2} R(\Delta\tau + \delta_j) \operatorname{sinc}(\pi\Delta f T_i) \cos(2\pi\Delta f t - \pi\Delta f T_i + \Delta\phi) + n_{t,I}^j, \quad (6.3)$$

$$Q_{\delta_j} = \frac{A}{2} R(\Delta\tau + \delta_j) \operatorname{sinc}(\pi\Delta f T_i) \sin(2\pi\Delta f t - \pi\Delta f T_i + \Delta\phi) + n_{t,Q}^j, \quad (6.4)$$

où  $\Delta\tau = \tau - \hat{\tau}$ ,  $\Delta f = f - \hat{f}$  et  $\Delta\phi = \phi - \hat{\phi}$  sont les écarts entre la valeur effective des paramètres et la prédiction calculée par le filtre. Dans cette expression démontrée en annexe E, la fonction d'autocorrélation du code pseudo-aléatoire satellite est notée  $R$ . L'approximation suivante peut être retenue pour  $R$  si la période du code est suffisamment longue :

$$R(\tau) = R_0(\tau) * \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - jT_R),$$

avec :

$$R_0(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c} & \text{si } |\tau| < T_c \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $T_c$  et  $T_R$  désignent respectivement la durée d'un bit de code et la période du code. Le lecteur trouvera en annexe F l'expression exacte de cette autocorrélation. Les bruits de mesure vérifient  $n_{t,Q}^j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{IQ}^2)$  et  $n_{t,I}^j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{IQ}^2)$ .

On note par la suite :

$$h_{gps,t}(\tau, f, \phi) = \begin{cases} R(\Delta\tau + \delta_1) \operatorname{sinc}(\pi\Delta f T_i) \cos(2\pi\Delta f t - \pi\Delta f T_i + \Delta\phi), \\ \vdots \\ R(\Delta\tau + \delta_n) \operatorname{sinc}(\pi\Delta f T_i) \cos(2\pi\Delta f t - \pi\Delta f T_i + \Delta\phi), \\ R(\Delta\tau + \delta_1) \operatorname{sinc}(\pi\Delta f T_i) \sin(2\pi\Delta f t - \pi\Delta f T_i + \Delta\phi), \\ \vdots \\ R(\Delta\tau + \delta_n) \operatorname{sinc}(\pi\Delta f T_i) \sin(2\pi\Delta f t - \pi\Delta f T_i + \Delta\phi), \end{cases}$$

$n$  étant le nombre de corrélateurs utilisés. Cette approche se prête bien à l'intégration d'une aide externe (une aide inertielle par exemple). Il suffit en effet d'ajouter de nouvelles mesures au filtre d'estimation qui est généralement un algorithme de type moindres carrés récursifs ou filtre de Kalman étendu. Dans [CMC02] et [FB99], une architecture multi-corrélateurs s'avère avantageuse pour estimer conjointement les paramètres du signal direct et d'un signal réfléchi en présence de multitrajets. On peut aussi citer les travaux de F. Bastide et al., dans [CBM00] ou [BCM01], qui ont utilisé des corrélateurs multiples pour détecter et estimer des brouillages de type CW.

La finalité de ce chapitre est de proposer une architecture multi-corrélateurs plus robuste à de grandes dynamiques et à de forts niveaux de bruit. Nous étudions tout d'abord l'opportunité d'utiliser un filtre particulière pour estimer les pseudo-distances et pseudo-vitesses. Enfin, le gain en stabilité et précision apporté par les techniques d'hybridation très serrée est évalué.

## 6.3 Filtre particulière vs filtre de Kalman étendu

La synchronisation de deux signaux est un problème récurrent en communications numériques, intervenant entre autres lors de la phase de démodulation en réception. Dans les années 60, les ingénieurs ont mis au point la boucle de phase permettant de recalibrer deux sinusoïdes. Une des premières références sur ce sujet est [Gar68]. Il a été prouvé depuis que ce dispositif

était équivalent à un filtre de Kalman étendu. Dans [ABM02], la classique boucle de phase est remplacée par un filtre particulière. Il est prouvé qu'asymptotiquement les performances des deux approches sont comparables en termes d'erreurs quadratiques moyennes. Le filtre particulière présente néanmoins un temps d'acquisition réduit. Dans ce chapitre, nous proposons d'utiliser un filtre particulière pour démoduler le signal GPS. La nouveauté est que le problème d'estimation est double du fait de l'étalement des données par un code pseudo-aléatoire. Deux paramètres doivent donc être estimés simultanément : la phase de la porteuse (ou de façon équivalente son décalage Doppler) et le retard de propagation du code.

### 6.3.1 Modèle de filtrage

L'objectif est d'estimer le retard de propagation et le décalage Doppler du signal GPS à partir des sorties des corrélateurs (ou de façon équivalente la pseudo-distance et la pseudo-vitesse). Les paramètres inconnus intervenant dans l'expression des mesures viennent compléter le vecteur état qui s'écrit :

$$\mathbf{X}_t = (\rho_t, v_{\rho,t}, A_t, \phi_t),$$

où  $\rho_t$  est la pseudo-distance,  $v_{\rho,t}$  la pseudo-vitesse,  $A_t$  l'amplitude et  $\phi_t$  la phase.

#### 6.3.1.1 Modèle de mesure

Le vecteur de mesure est formé des sorties des corrélateurs :

$$\mathbf{Y}_t = (I_{\delta_1}, \dots, I_{\delta_n}, Q_{\delta_1}, \dots, Q_{\delta_n}).$$

Ce vecteur dépend non linéairement des paramètres à estimer conformément à l'équation :

$$\mathbf{Y}_{\text{gps},t} = A_t h_{\text{gps},t} \left( \tau_t = \frac{\rho_t}{c}; f_t^d = -\frac{f_0}{c} v_{\rho,t}; \phi_t \right) + \mathbf{n}_t^{\text{gps}},$$

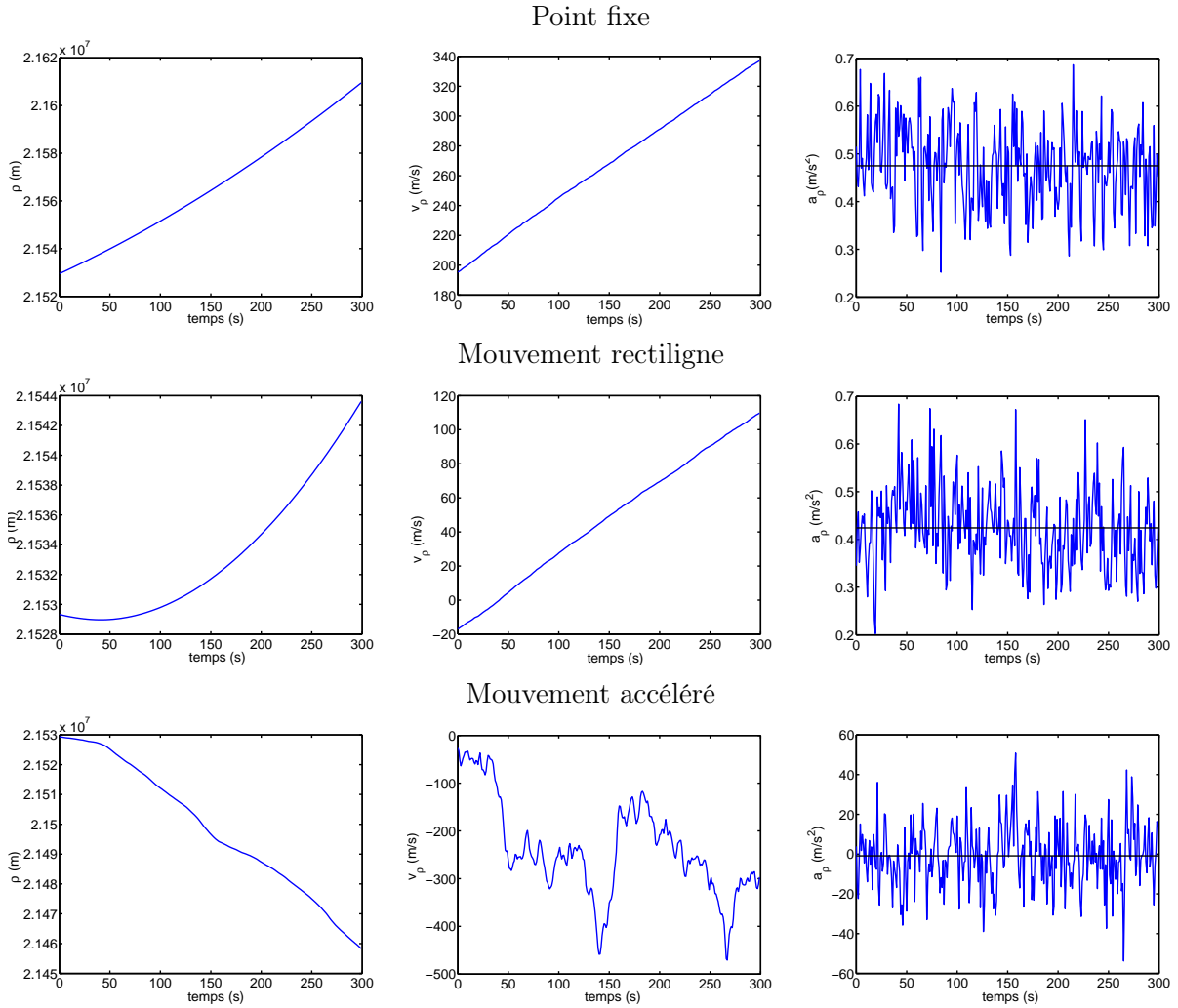
avec  $\mathbf{n}_t^{\text{gps}} = (n_{t,I}^1, \dots, n_{t,I}^n, n_{t,Q}^1, \dots, n_{t,Q}^n)^T$ .

#### 6.3.1.2 Modèle d'état

L'objet de cette partie est de proposer un modèle d'état réaliste pour décrire l'évolution des paramètres du signal GPS. Nous distinguons les grandeurs liées au mouvement relatif véhicule/satellite ( $\rho$  et  $v_\rho$ ) de celles liées aux conditions de propagation du signal satellite qui sont découplées (l'amplitude  $A$  et la phase  $\phi$ ).

### Paramètres de mouvement

Afin de définir un modèle de dynamique approprié pour  $\rho$  et  $v_\rho$ , nous avons étudié leur comportement pour plusieurs types de trajectoires possibles du véhicule. Nous avons ainsi simulé différentes dynamiques, puis calculé pour chacune les pseudo-distances idéales  $\rho$  et leurs dérivées :  $v_\rho$  et  $a_\rho = \frac{dv_\rho}{dt}$ . Nous nous sommes limités à des modèles d'ordre 2 pour le véhicule, ce qui signifie qu'il n'accélère pas continûment. La figure 6.3 présente des trajectoires représentatives de  $\rho$ ,  $v_\rho$  et  $a_\rho$  pour 3 scénarios différents : point fixe, véhicule en mouvement rectiligne, véhicule subissant de brusques accélérations. Quand le véhicule est immobile, l'évolution de chaque paramètre est uniquement attribuable au mouvement relatif du satellite par rapport au repère terrestre. Par contre, si le véhicule est soumis à de fortes accélérations, leur influence devient prépondérante sur le terme  $a_\rho$ . Dans tous les cas, il apparaît que l'accélération



**FIG. 6.3** - Mouvement relatif véhicule/satellite.

relative fluctue aléatoirement autour d'une valeur moyenne voisine de  $0.5 \text{ m/s}^2$ . Un modèle triple-intégrateur, supposant que la dérivée de  $a_\rho$  est un bruit blanc, est donc approprié pour caractériser la dynamique du triplet  $(\rho, v_\rho, a_\rho)$ . Nous proposons le modèle à temps discret suivant :

$$\begin{pmatrix} \rho_t \\ v_{\rho,t} \\ a_{\rho,t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & dT & \frac{dT^2}{2} \\ 0 & 1 & dT \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F_t^\rho} \begin{pmatrix} \rho_{t-1} \\ v_{\rho,t-1} \\ a_{\rho,t-1} \end{pmatrix} + \mathbf{w}_t^\rho,$$

avec :

$$\mathbb{E} \left( \mathbf{w}_t^\rho \mathbf{w}_t^{\rho T} \right) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{dT^5}{20} & \frac{dT^4}{8} & \frac{dT^3}{6} \\ \frac{dT^4}{8} & \frac{dT^3}{3} & \frac{dT^2}{2} \\ \frac{dT^3}{6} & \frac{dT^2}{2} & dT \end{pmatrix},$$

où  $dT$  est la période d'échantillonnage. Le paramètre  $\sigma$  représente l'écart-type de la dérivée de  $a_{\rho,t}$ , sa valeur doit être ajustée en fonction de la dynamique du véhicule.

### Paramètres de propagation

Les composantes  $A$  et  $\phi$  du vecteur état présentent des temps caractéristiques d'évolution beaucoup plus grands que les paramètres de mouvement. En première approximation, nous les modélisons donc comme des marches aléatoires :

$$\begin{pmatrix} \phi_t \\ A_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F_t^{A,\phi}} \begin{pmatrix} \phi_{t-1} \\ A_{t-1} \end{pmatrix} + \mathbf{w}_t^{A,\phi}, \text{ avec } \mathbb{E} \left( \mathbf{w}_t^{A,\phi} \mathbf{w}_t^{A,\phi T} \right) = \begin{pmatrix} \sigma_\phi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Le modèle complet de filtrage peut finalement être mis sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \rho_t \\ v_{\rho,t} \\ a_{\rho,t} \\ \phi_t \\ A_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_t^\rho & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & F_t^{A,\phi} \end{pmatrix}}_{F_t} \begin{pmatrix} \rho_{t-1} \\ v_{\rho,t-1} \\ a_{\rho,t-1} \\ \phi_{t-1} \\ A_{t-1} \end{pmatrix} + \mathbf{w}_t, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{Y}_{\text{gps},t} = A_t h_{\text{gps}} \left( \tau_t = \frac{\rho_t}{c}; f_t^d = -\frac{f_0}{c} v_{\rho,t}; \phi_t \right) + \mathbf{n}_t^{\text{gps}}, \quad (6.7)$$

avec  $\mathbf{w}_t = \left( \mathbf{w}_t^\rho, \mathbf{w}_t^{A,\phi} \right)^T$ .

### 6.3.2 Stratégie de filtrage particulière

On remarque que conditionnellement aux autres composantes du vecteur état, l'amplitude du signal GPS intervient linéairement dans le modèle de filtrage défini par les équations (6.6) et (6.7). Pour diminuer la variance des estimés, il est préconisé d'utiliser la technique de filtrage particulière Rao-Blackwellisée qui a déjà été présentée dans les troisième et quatrième chapitres de ce manuscrit. Nous considérons la partition suivante du vecteur état :

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{x}_t, A_t), \text{ avec } \mathbf{x}_t = (\rho_t, v_{\rho,t}, a_{\rho,t}, \phi_t).$$

Le vecteur  $\mathbf{x}_t$  est estimé récursivement par filtrage particulière :

$$p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{Y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \omega_t^{(i)} \delta \left( \mathbf{x}_{0:t} - \mathbf{x}_{0:t}^{(i)} \right),$$

alors que les estimés conditionnels du paramètres  $A_t$  sont mis à jour par  $N$  filtres de Kalman :

$$p \left( A_t | \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}, \mathbf{x}_{0:t}^{(i)} \right) = \mathcal{N} \left( A_t; \widehat{A}_t^{(i)}, P_{A,t}^{(i)} \right).$$

La densité de probabilité marginale du paramètre d'amplitude s'écrit alors simplement comme un mélange de lois Gaussiennes conformément à la loi de Bayes :

$$p(A_t | \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}) = \sum_{i=1}^N \omega_t^{(i)} \mathcal{N} \left( A_t; \widehat{A}_t^{(i)}, P_{A,t}^{(i)} \right).$$

### 6.3.3 Résultats de simulation

#### 6.3.3.1 Simulations des données

Les données ont été générées dans un souci de réalisme. Pour calculer les pseudo-distances et les pseudo-vitesses, nous avons reproduit un véritable scénario de navigation GPS comme

dans les chapitres précédents. Nous avons tout d'abord simulé la trajectoire du véhicule et la dérive de l'horloge récepteur dont un modèle d'évolution a été décrit au second chapitre. À partir de ces données et connaissant les paramètres d'orbite des satellites GPS, nous avons ensuite évalué les mesures de pseudo-distances associées à un des satellites en ligne de vue du récepteur tout au long de la simulation. Par différenciation, on en a finalement déduit les pseudo-vitesses correspondantes. Les paramètres d'amplitude et de phase ont par contre été générés directement en simulant l'équation (6.5). Un dernier point reste à préciser. Pour calculer les sorties des voies I et Q, l'expression exacte de l'autocorrélation du code pseudo-aléatoire a été utilisée, alors que les équations du filtre d'estimation sont fondées sur l'expression approchée de cette autocorrélation. Les différentes étapes de la simulation des données sont représentées sur le schéma 6.4.

L'objet de cette partie est de mettre en évidence l'intérêt d'une approche particulière pour

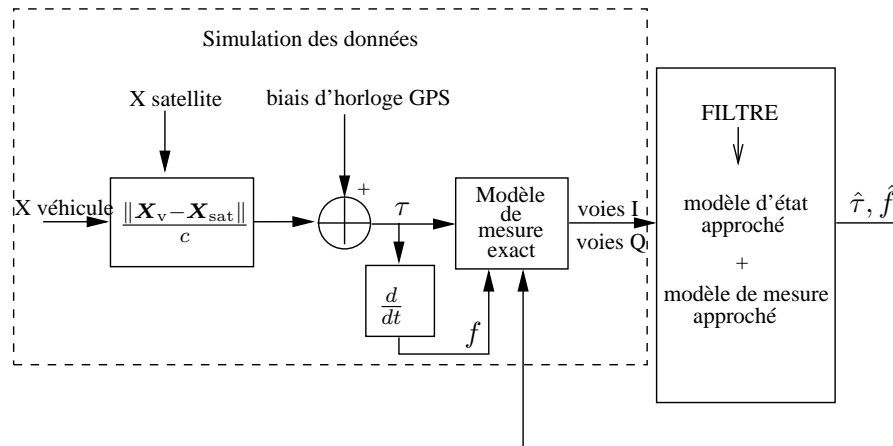


FIG. 6.4 - Organisation des simulations.

estimer les mesures de pseudo-distances et de pseudo-vitesses GPS. Nous avons donc considéré des scénarios critiques de navigation pour lesquels le filtre de Kalman étendu serait mis en défaut. La première piste explorée est celle d'un véhicule évoluant à grande dynamique et sujet à de fortes accélérations. Ainsi, l'erreur de prédiction Doppler  $\Delta f$  peut s'avérer trop importante pour que la linéarisation pratiquée par le filtre de Kalman étendu soit toujours légitime. Dans ce cas, le canal de réception piloté par cet algorithme décroche et une approche particulière devrait permettre de s'affranchir de cette limitation. Nous nous sommes ensuite intéressés au problème d'un fort bruit de mesure et avons comparé dans ces conditions les performances des deux algorithmes.

L'efficacité des algorithmes est évaluée en fonction de leurs erreurs quadratiques moyennes d'estimation, obtenues à partir de 100 tirages de Monte Carlo. Les courbes proposées permettent d'étudier le temps de convergence et le comportement asymptotique des algorithmes. La borne de Cramer Rao est utilisée comme référence. Les paramètres de simulation et résultats correspondants sont commentés dans les deux parties suivantes. Tous les scénarios étudiés s'inscrivent dans le cadre du service standard de positionnement fourni par le GPS (ouvert à tout utilisateur). Le code pseudo-aléatoire correspondant est donc le code C/A dont les caractéristiques ont été énoncées dans le premier chapitre. Le temps d'intégration utilisé pour le calcul de la corrélation est une période de code, soit environ 1 ms. L'erreur initiale sur la pseudo-distance et la pseudo-vitesse est donnée par la dimension d'une cellule temps-fréquence de la grille d'acquisition, soit une incertitude de 33 Hz sur la fréquence Doppler et  $T_c/2$  m (avec  $T_c$  la durée d'un bit de code) pour le retard de propagation (soit 150 m pour le code



C/A).

### 6.3.3.2 Robustesse à de grandes dynamiques

#### Scénario 1

Pour ce premier scénario, un véhicule évoluant à une vitesse moyenne de 500 km/h est considéré. Au cours de la simulation qui dure 200 secondes, il est soumis à des poussées d'accélération de  $30 \text{ m/s}^2$ . La période d'échantillonnage est de 1s.

Sur les figures proposées sont représentées les racines carrées des erreurs quadratiques moyennes d'estimation des différentes composantes du vecteur état pour le filtre particulaire (FP) et le filtre de Kalman étendu (EKF). Sur chaque courbe, la borne de Cramer Rao (BCR) correspondante a aussi été tracée.

La figure 6.5 est consacrée aux estimés de pseudo-distance et pseudo-vitesse. On observe que le filtre particulaire est plus précis pour poursuivre la pseudo-vitesse. La gain en précision d'estimation de la pseudo-distance est néanmoins faible. Comme mis en évidence dans [ABM02], le filtre particulaire présente par contre un temps de convergence plus petit : 2 s au lieu de 10 s pour le filtre de kalman étendu.

La figure 6.6 illustre les performances des deux algorithmes pour l'estimation des paramètres

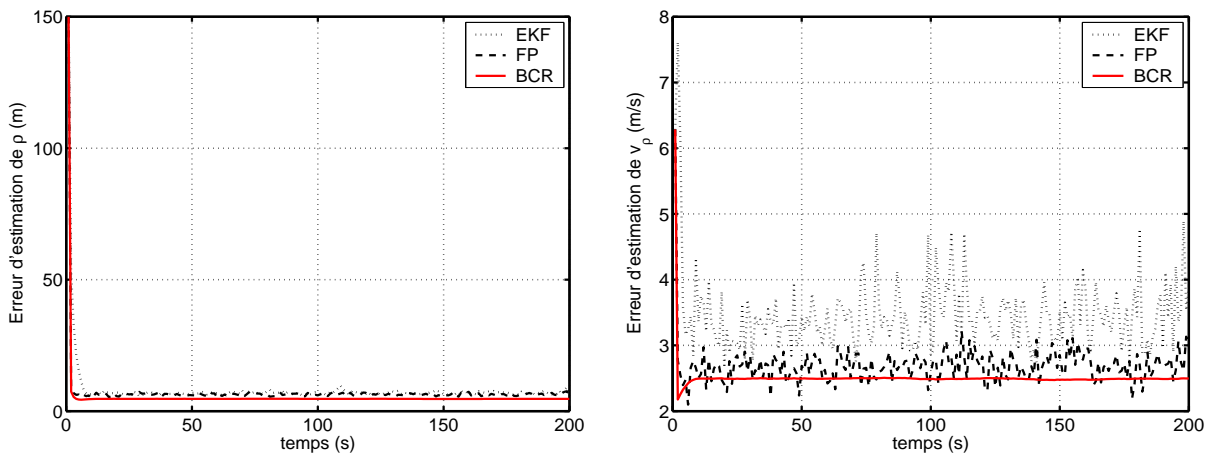


FIG. 6.5 - Erreurs moyennes d'estimation de  $\rho$  et  $v_\rho$ .

de phase et amplitude. L'erreur asymptotique d'estimation de la phase commise par le filtre de Kalman étendu est environ 5 fois plus grande que celle du filtre particulaire. Par contre, la précision des deux approches pour l'estimation de l'amplitude est similaire.

Le scénario simulé a permis de souligner la moins bonne robustesse du filtre de Kalman étendu à de grandes dynamiques en particulier pour la poursuite de la phase de la porteuse (en fréquence et phase). Il est intéressant de tester des dynamiques plus grandes pour déterminer un seuil de décrochage du filtre de Kalman étendu.

#### Scénario 2

Ce scénario est identique au précédent si ce n'est que les pics d'accélération atteignent  $40 \text{ m/s}^2$ .

Sur la figure 6.7 sont étudiées les performances du filtre particulaire (courbe de gauche) et du filtre de Kalman (courbe de droite) pour l'estimation de la pseudo-distance. La supériorité du filtre particulaire apparaît clairement. Son erreur moyenne d'estimation est quasiment confondue avec la borne de Cramer Rao alors que le filtre de Kalman étendu échoue à poursuivre le

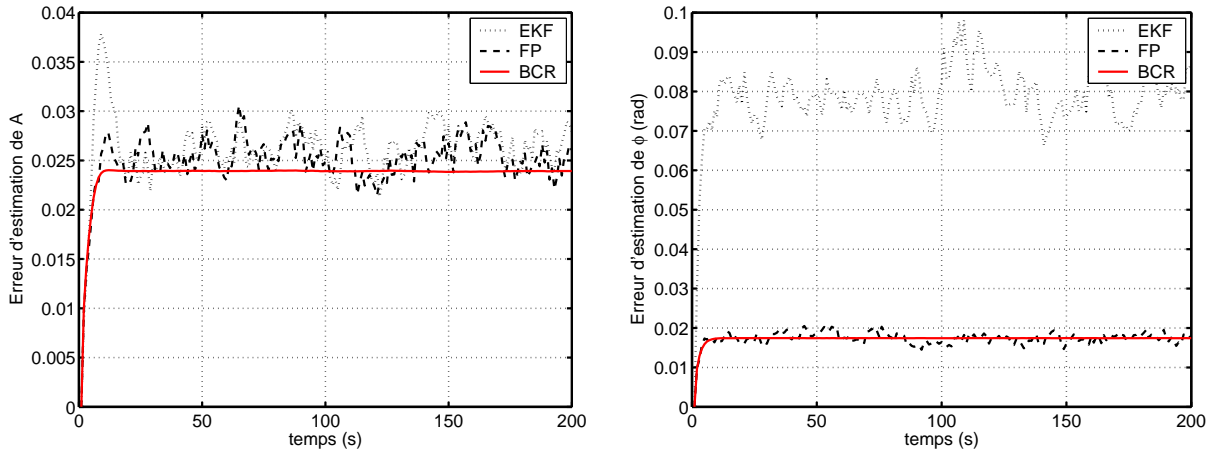


FIG. 6.6 - Erreurs moyennes d'estimation de  $A$  et  $\phi$ .

paramètre inconnu.

La figure 6.8 confirme les résultats obtenus pour l'estimation de la pseudo-distance. Le même

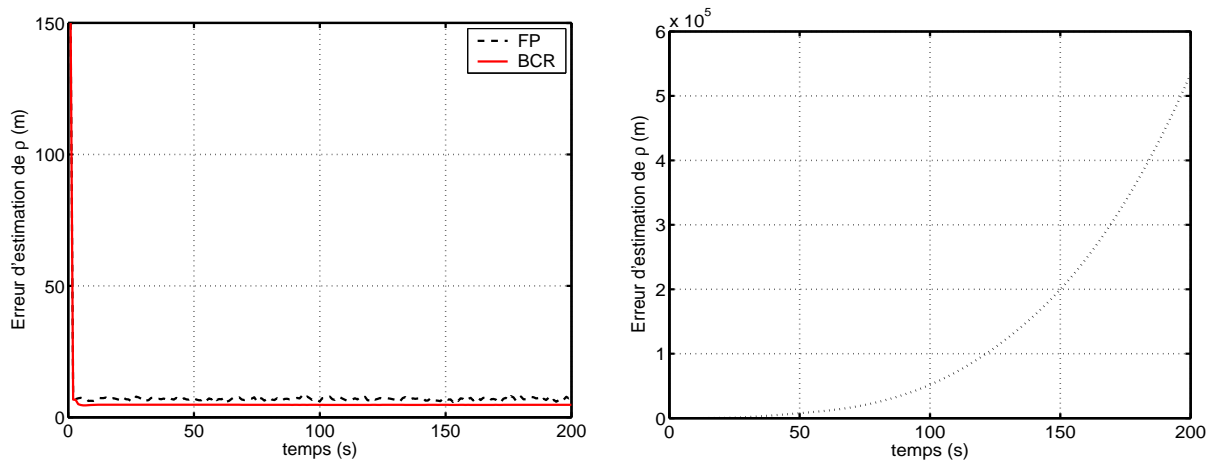


FIG. 6.7 - Erreurs moyennes d'estimation de  $\rho$ .

comportement est observable pour l'estimation de la pseudo-vitesse si ce n'est que le décrochage survient plus rapidement (à  $t = 20$  s au lieu de  $t = 30$  s). En effet, l'estimation de la fréquence de la porteuse est le point critique des boucles de poursuite GPS. La fonction d'autocorrélation étant quasiment linéaire par morceaux, l'erreur de linéarisation commise par le filtre de Kalman étendu provient essentiellement des fonctions trigonométriques intervenant dans l'équation de mesure.

Enfin, la figure 6.9 reproduit les erreurs d'estimation des paramètres de phase et d'amplitude. À nouveau, le filtre Kalman étendu diverge alors que le filtre particulaire fournit une estimation satisfaisante de ces composantes.

En conclusion, les boucles de poursuite à base de filtre particulaire sont plus robustes à de grandes dynamiques. La précision atteinte par cet algorithme avoisine la précision maximale fournie par le calcul de la borne de Cramer Rao.

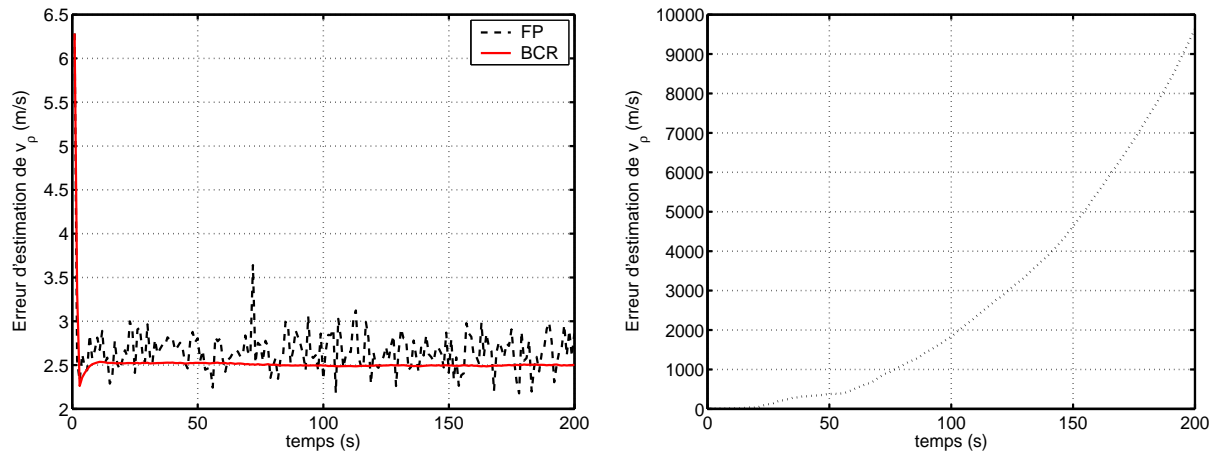


FIG. 6.8 - Erreurs moyennes d'estimation de  $v_\rho$ .

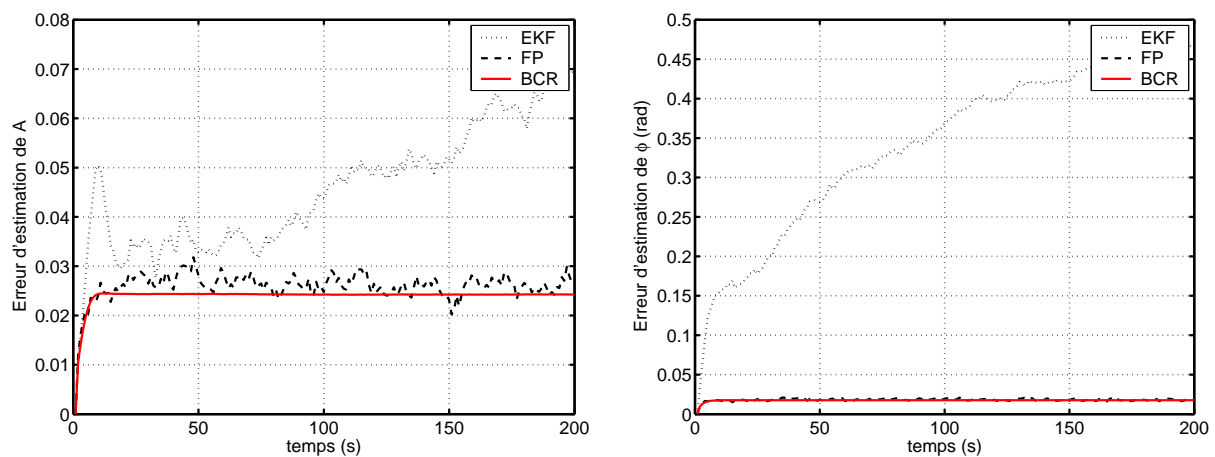


FIG. 6.9 - Erreurs moyennes d'estimation de  $A$  et  $\phi$ .

### 6.3.3.3 Robustesse à de faibles rapports signal sur bruit

La finalité de cette partie est de déterminer si le filtre particulaire permet une plus grande précision pour l'estimation des paramètres GPS en présence d'un fort bruit de mesure. Le véhicule est dans cette simulation animé d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse de 500 km/h. Le rapport signal sur bruit (RSB) considéré est de  $-10$  dB. À nouveau sont représentées les racines des erreurs quadratiques moyennes pour les différentes composantes du vecteur état et les bornes de Cramer Rao associées, et ce sur la figure 6.10. Il apparaît que le filtre particulaire ne présente pas de meilleures performances que le filtre de Kalman étendu quand le rapport signal sur bruit se dégrade. D'autres solutions d'ordre non algorithmique doivent être envisagées pour pallier ce problème.

## 6.4 Hybridation très serrée

Au vu des conclusions de la partie précédente, les canaux de réception fondés sur un filtre particulaire présentent une plus grande robustesse à de fortes dynamiques mais n'améliorent pas l'estimation en présence d'un rapport signal sur bruit défavorable. Les techniques d'hybridation offrent une solution pour stabiliser les boucles de poursuite en cas de fort niveau

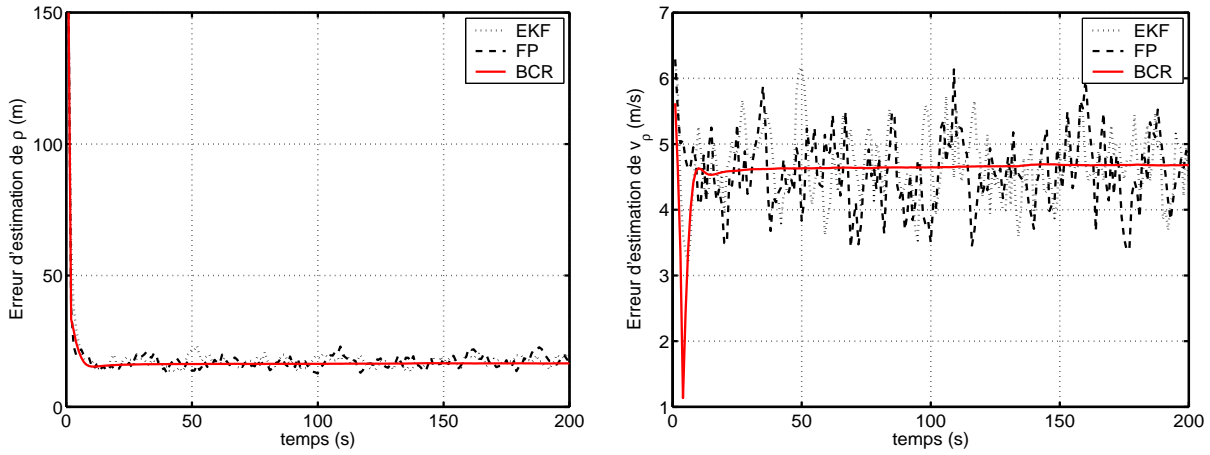


FIG. 6.10 - Erreurs moyennes d'estimation de  $\rho$  et  $v_\rho$ , rsb =  $-10$  dB.

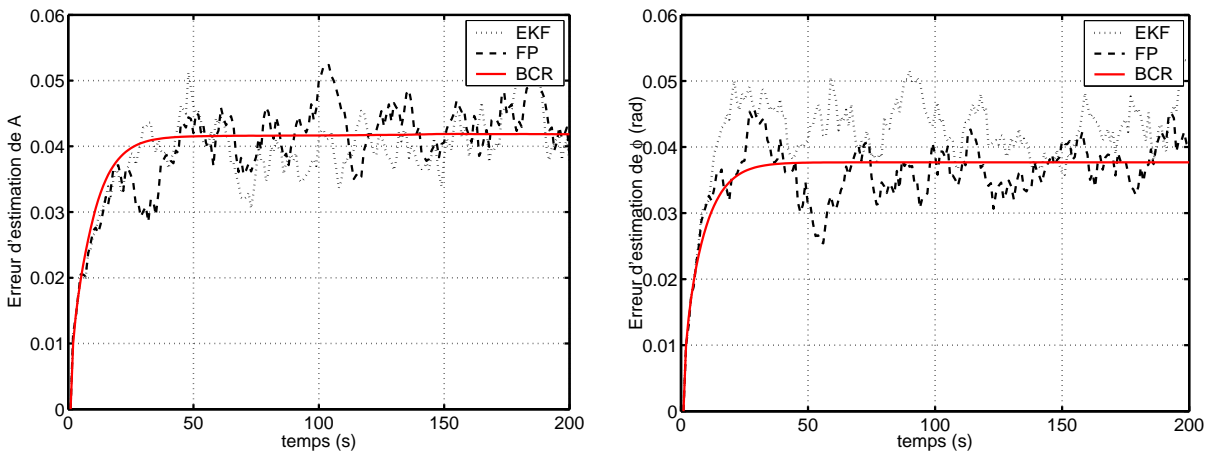


FIG. 6.11 - Erreurs moyennes d'estimation de  $A$  et  $\phi$ , rsb =  $-10$  dB.

de bruit. L'idée est d'intégrer des informations en provenance d'un autre système de positionnement pour améliorer l'estimation des pseudo-distances et pseudo-vitesses. Les systèmes de navigation inertielle sont classiquement utilisés pour aider à la poursuite du signal GPS. L'enjeu de cette partie est de développer une architecture d'hybridation performante et d'étudier le gain en précision sur les estimés des paramètres du signal GPS.

### 6.4.1 Architecture d'hybridation

L'hybridation très serrée GPS/INS consiste à adjoindre des estimés de pseudo-distances et pseudo-vitesses calculés par la centrale inertielle aux sorties des corrélateurs en entrée du filtre assurant la poursuite du signal GPS. La principale difficulté provient de la dérive progressive des estimés inertiels au cours du temps. Différentes architectures d'hybridation sont envisageables selon la solution retenue pour corriger cette divergence. Une première approche consiste à estimer conjointement les paramètres du signal GPS et les erreurs d'estimation inertielles au niveau du canal de poursuite GPS. Cette méthode n'a pas été retenue dans cette thèse car elle suppose d'estimer un vecteur état de très grande dimension. Nous préconisons plutôt de combiner hybridation serrée et très serrée. Ainsi, la centrale inertielle utilisée comme aide à la poursuite du signal GPS est recalée en sortie du récepteur par un filtre d'hybridation serrée. Les sorties de cette centrale recalibrée permettent alors d'estimer avec précision le

mouvement relatif véhicule/satellite à l'instant suivant. Cette architecture est reproduite sur le schéma-bloc 6.12.

Il est intéressant de remarquer que l'hybridation serrée (présentée dans la seconde partie de la

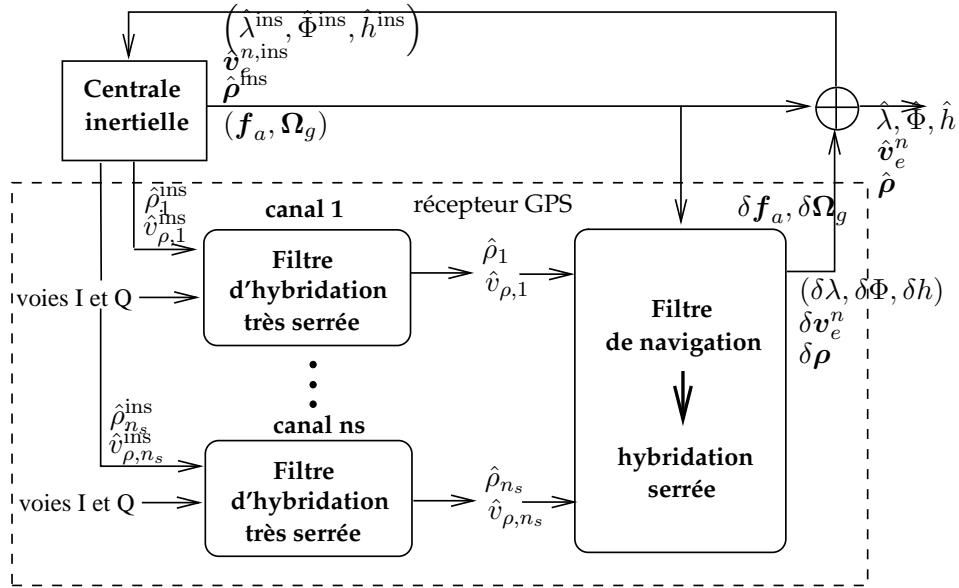


FIG. 6.12 - Architecture d'hybridation.

thèse) et l'hybridation très serrée peuvent s'interpréter comme deux démarches symétriques. L'hybridation serrée utilise les pseudo-distances GPS pour recalibrer la centrale inertielle. À l'inverse, pour l'hybridation très serrée, les estimés de position et vitesse calculés par la centrale inertielle servent à estimer la pseudo-distance GPS.

## 6.4.2 Modèle de filtrage

Le modèle de filtrage associé à l'hybridation très serrée GPS/INS diffère du modèle de poursuite autonome du signal GPS (équations (6.6) et (6.6)) par la présence de deux mesures supplémentaires qui correspondent aux estimés de la pseudo-distance et de la pseudo-vitesse calculés par la centrale inertielle recalée.

### 6.4.2.1 Equations de mesures inertielles

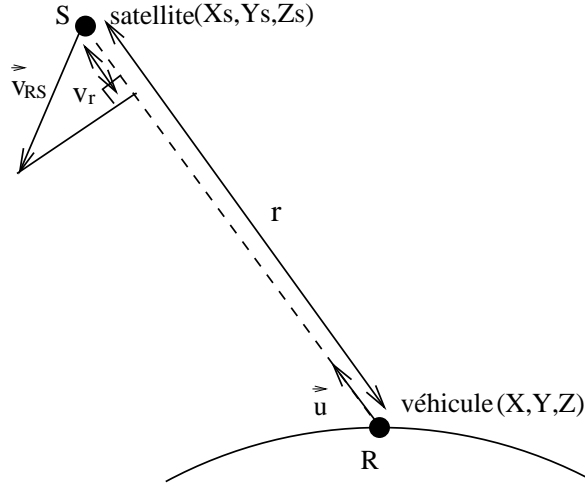
Le problème est d'exprimer les mesures GPS et donc le mouvement relatif satellite/véhicule en fonction des sorties de la centrale inertielle, c'est-à-dire la position en coordonnées ellipsoïdales  $(\lambda, \Phi, h)$  et la vitesse par rapport au repère géocentrique projetée dans le repère de navigation  $\mathbf{v}_e^n$ . Le schéma 6.13 introduit les notations utilisées par la suite.

#### Pseudo-distance

On rappelle que la pseudo-distance GPS vérifie :

$$\rho = r + b + n_r^a,$$

où  $r$  est la distance satellite/récepteur,  $b$  le biais d'horloge récepteur, et  $n_r^a$  regroupe les perturbations liées à la traversée de l'atmosphère. La distance  $r$  s'exprime simplement en



**FIG. 6.13** - Mouvement relatif satellite/véhicule.

Les triplets  $(X, Y, Z)$  et  $(X_s, Y_s, Z_s)$  sont les positions respectives du récepteur et du satellite en coordonnées cartésiennes. Le vecteur  $\vec{v}_{RS}$  représente la vitesse relative du satellite par rapport au récepteur,  $v_r$  est sa projection sur l'axe satellite/récepteur de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

fonction des coordonnées de position du véhicule :

$$r = \|\vec{RS}\|, \quad (6.8)$$

$$= \sqrt{(X - X_s)^2 + (Y - Y_s)^2 + (Z - Z_s)^2}. \quad (6.9)$$

Dans cette expression, le triplet de coordonnées cartésiennes  $(X, Y, Z)$  dépend des coordonnées ellipsoïdales  $(\lambda, \Phi, h)$  conformément aux formules de changement de coordonnées énoncées dans le premier chapitre. On note  $r = h_r(\lambda, \Phi, h)$ .

L'estimé de la pseudo-distance calculé par la CI s'écrit :

$$\hat{\rho}^{\text{ins}} = \hat{r}^{\text{ins}} + \hat{b},$$

avec,

$$- \hat{r}^{\text{ins}} = h_r(\hat{\lambda}^{\text{ins}}, \hat{\Phi}^{\text{ins}}, \hat{h}^{\text{ins}}),$$

-  $\hat{b}$  est la précédente estimation du biais d'horloge calculée par le filtre d'hybridation serrée en sortie du récepteur.

La centrale inertielle étant recalée, l'erreur d'estimation de la position est petite et peut être assimilée à un bruit blanc Gaussien :  $\delta\lambda \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\lambda^2)$ ,  $\delta\Phi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\Phi^2)$  et  $\delta h \sim \mathcal{N}(0, \sigma_h^2)$ .

En appliquant un développement de Taylor au 1er ordre, on peut alors obtenir une relation entre la véritable distance satellite/récepteur et celle évaluée par la centrale inertielle :

$$\hat{r}^{\text{ins}} \simeq r + \underbrace{\nabla h_r^T}_{\delta r} \begin{pmatrix} \delta\lambda \\ \delta\Phi \\ \delta h \end{pmatrix}.$$

L'équation de pseudo-distance inertielle prend donc la forme :

$$\hat{\rho}^{\text{ins}} = \rho + n^\rho.$$

Le terme de bruit  $n^\rho$  comprend les erreurs d'estimations inertielles, l'erreur de biais d'horloge et les aléas de propagation atmosphérique :  $n^\rho = n_r^a + \delta r + b - \hat{b}$ . On en déduit :

$$n^\rho \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\rho^2),$$

avec

$$\sigma_\rho^2 = \underbrace{\nabla h_r^T \text{diag}(\sigma_\lambda^2, \sigma_\Phi^2, \sigma_h^2)}_{E(\delta r^2)} \nabla h_r + \underbrace{\sigma_b^2 dT + \sigma_d^2 \frac{dT^2}{2}}_{E((b-\hat{b})^2)} + \underbrace{\sigma_{a,\rho}^2}_{E((n_v^a)^2)}.$$

### Pseudo-vitesse

La pseudo-vitesse GPS s'exprime comme la dérivée de la pseudo-distance :

$$v_\rho = v_r + d + n_v^a.$$

On a noté  $d$  la dérive d'horloge GPS ( $d = \frac{db}{dt}$ ) et  $n_v^a$  le bruit. Enfin,  $v_r = \frac{dr}{dt}$  correspond à la vitesse relative du satellite par rapport au récepteur GPS, projetée sur l'axe satellite/récepteur. En accord avec cette définition,  $v_r$  peut être calculé de la façon suivante :

$$v_r = v_{RS} \cdot \vec{u}, \quad (6.10)$$

$$= \frac{(V_x - V_{x,s})(X - X_s) + (V_y - V_{y,s})(Y - Y_s) + (V_z - V_{z,s})(Z - Z_s)}{r}, \quad (6.11)$$

où les triplets  $(V_x, V_y, V_z) = \frac{d}{dt}(X, Y, Z)$  et  $(V_{x,s}, V_{y,s}, V_{z,s}) = \frac{d}{dt}(X_s, Y_s, Z_s)$  correspondent respectivement à la vitesse du véhicule et du satellite dans le repère géocentrique, exprimées en coordonnées cartésiennes. Un changement de repère suffit à utiliser le même système de coordonnées que la centrale inertielle :

$$(V_x, V_y, V_z) = R_{n2e}(\lambda, \varphi, h) \mathbf{v}_e^n,$$

où  $R_{n2e}$  est la matrice de passage du repère géocentrique au repère de navigation qui dépend uniquement de la position du véhicule. On note finalement :

$$v_r = h_v(\lambda, \Phi, h, \mathbf{v}_e^n).$$

La précision de la centrale inertielle recalée permet à nouveau d'appliquer un développement de Taylor au premier ordre pour relier la vitesse relative à son estimé inertiel :

$$\hat{v}_r^{\text{ins}} = v_r + \nabla h_v^T \underbrace{\begin{pmatrix} \delta\lambda \\ \delta\Phi \\ \delta h \\ \delta \mathbf{v}_e^n \end{pmatrix}}_{\delta v_r},$$

avec  $\delta \mathbf{v}_e^n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_v^2 \mathbf{I}_3)$ .

L'estimé inertiel de pseudo-vitesse vérifie finalement :

$$\hat{v}_\rho = v_\rho^{\text{ins}} + n^{v\rho}, \quad (6.12)$$

$$n^{v\rho} = n_v^a + \delta v_r + d - \hat{d}, \quad (6.13)$$

$\hat{d}$  étant l'estimé de la dérive d'horloge calculé par le filtre d'hybridation serrée.

$$n^{v\rho} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{v\rho}^2),$$

avec

$$\sigma_{v\rho}^2 = \underbrace{\nabla h_v^T \text{diag}(\sigma_\lambda^2, \sigma_\Phi^2, \sigma_h^2, \sigma_v^2 \mathbf{I}_3)}_{E(\delta v_r^2)} \nabla h_v + \underbrace{\sigma_d^2 dT}_{E((d-\hat{d})^2)} + \underbrace{\sigma_{a,v}^2}_{E((n_v^a)^2)}.$$

Les valeurs des variances du modèle de biais d'horloge  $\sigma_b^2$  et  $\sigma_d^2$  ont été précisées dans le second chapitre.

### 6.4.2.2 Modèle de filtrage pour l'hybridation GPS/INS

Nous proposons donc le modèle de filtrage suivant pour l'hybridation très serrée GPS/INS :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ A_t \end{pmatrix} = F_t \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t-1} \\ A_{t-1} \end{pmatrix} + \mathbf{w}_t, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{Y}_{\text{gps},t} = A_t h_{\text{gps},t}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{n}_t^{\text{gps}}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{Y}_{\text{ins},t} = H_{\text{ins},t} \mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t^{\text{ins}}, \quad (6.16)$$

avec  $\mathbf{x}_t = (\rho_t, v_{\rho,t}, \phi_t)$ . Le vecteur de bruit de mesure  $\mathbf{n}_t^{\text{ins}}$  vérifie, avec les notations introduites,  $\mathbf{n}_t^{\text{ins}} = (n^\rho, n^{v\rho})^T$ . Enfin la matrice  $H_{\text{ins},t}$  s'écrit :

$$H_{\text{ins},t} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0_{2 \times 3} \end{pmatrix}.$$

### 6.4.3 Stratégie de filtrage particulière

Le modèle de filtrage pour l'hybridation GPS/INS appelle quelques remarques :

- le modèle d'état est linéaire,
- conditionnellement aux autres composantes du vecteur état, l'amplitude intervient linéairement dans l'équation de mesure.
- les mesures inertielles dépendent linéairement du vecteur d'état.

Cette structure peut être mise à profit pour développer une stratégie performante de filtrage particulière. Elle est fondée sur la combinaison d'une technique de Rao-Blackwellisation et d'une loi de proposition efficace.

#### Rao-Blackwellisation

La distribution *a posteriori* du vecteur état sachant les mesures peut être décomposée de la façon suivante :

$$p(A_t, \mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}, \mathbf{Y}_{\text{ins},1:t}) = p(A_t | \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}, \mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{Y}_{\text{ins},1:t}),$$

où  $p(A_t | \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}, \mathbf{x}_{0:t})$  est une loi Gaussienne. Comme dans la partie précédente, seules les composantes  $\mathbf{x}_{0:t}$  sont estimées par filtrage particulière :

$$p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}, \mathbf{Y}_{\text{ins},1:t}) \simeq \sum_{i=1}^N \omega_t^{(i)} \delta(\mathbf{x}_{0:t} - \mathbf{x}_{0:t}^{(i)}).$$

La distribution *a posteriori* de l'amplitude est estimée comme un mélange de lois Gaussiennes :

$$p(A_t | \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_t^{(i)} p(A_t | \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}, \mathbf{x}_{0:t}^{(i)}), \quad (6.17)$$

$$p(A_t | \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}, \mathbf{x}_{0:t}^{(i)}) = \mathcal{N}(A_t; \hat{A}_t^{(i)}, P_{A,t}^{(i)}). \quad (6.18)$$

#### Loi de proposition

L'influence de la loi de proposition sur les performances de l'algorithme particulière a été examinée dans [Dou98]. Il est montré que la loi de proposition  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{Y}_{\text{gps},1:t}, \mathbf{Y}_{\text{ins},1:t})$  minimise la variance des poids d'importance. Cette loi ne peut cependant pas être calculée analytiquement du fait des non linéarités intervenant dans le modèle de mesure. Classiquement, une approximation Gaussienne est utilisée. Dans le cas de l'hybridation GPS/INS, une approche sous-optimale mais ne nécessitant aucune approximation peut être avantageusement



appliquée. Elle consiste à tirer parti du fait qu'une partie des composantes du vecteur de mesure s'exprime comme une fonction linéaire des paramètres inconnus. Nous proposons donc de simuler les particules en prenant uniquement en compte les mesures dépendant linéairement du vecteur état, c'est-à-dire les estimés de pseudo-distance et pseudo-vitesse calculés par la centrale inertielle. Les particules sont ainsi propagées de la façon suivante :

$$\mathbf{x}_t^{(i)} \sim p\left(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{\text{ins},1:t}\right),$$

pour  $i = 1, \dots, N$ . La distribution  $p\left(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_{\text{ins},1:t}\right)$  est Gaussienne  $\mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t; \mathbf{m}_t^{(i)}, \Sigma_t^{(i)}\right)$ , et ses paramètres vérifient :

$$\Sigma_t^{(i)-1} = H_{\text{ins},t}^T \mathbf{E}\left(\mathbf{n}_t^{\text{ins}} \mathbf{n}_t^{\text{ins}T}\right)^{-1} H_{\text{ins},t} + \mathbf{E}\left(\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^T\right)^{-1}, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{m}_t^{(i)} = \Sigma_t^{(i)} \left( H_{\text{ins},t}^T \mathbf{E}\left(\mathbf{n}_t^{\text{ins}} \mathbf{n}_t^{\text{ins}T}\right)^{-1} \mathbf{Y}_{\text{ins},t} + \mathbf{E}\left(\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^T\right)^{-1} F_t \mathbf{x}_{t-1}^{(i)} \right). \quad (6.20)$$

Les poids d'importance associés à cette loi de simulation sont calculés récursivement selon la formule :

$$\omega_t^{(i)} \propto \omega_{t-1}^{(i)} p\left(\mathbf{Y}_{\text{gps},t} | \mathbf{x}_t^{(i)}\right) p\left(\mathbf{Y}_{\text{ins},t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}\right).$$

L'aide inertielle permet donc de proposer des particules pertinentes qui sont ensuite sélectionnées au vu de leur vraisemblance par rapport au vecteur mesure dans son ensemble.

#### 6.4.4 Résultats de simulation

Deux points doivent être examinés dans les simulations menées. Il s'agit tout d'abord de quantifier l'impact des techniques d'hybridation très serrée sur l'erreur d'estimation des pseudo-distances et pseudo-vitesses GPS. Enfin, il convient de s'assurer que le recours à une technique de filtrage particulière calculatoirement coûteuse est justifié pour réaliser l'hybridation très serrée.

Les résultats proposés ont été obtenus pour un véhicule se déplaçant à une vitesse moyenne de 500 km/h de moyenne et équipé d'une centrale inertielle bas coût. Nous nous sommes intéressés uniquement à la partie hybridation très serrée de la chaîne de traitement représentée en figure 6.12. Ni la centrale inertielle, ni le filtre d'hybridation serrée n'ont donc été simulés. Cependant, les résultats obtenus au second chapitre nous ont fourni l'ordre de grandeur des erreurs d'estimation pour une centrale inertielle recalée par hybridation serrée. Les paramètres de simulation utilisés sont regroupés dans le tableau (6.1).

Ecart-type de l'erreur inertielle de latitude	$\sigma_\lambda = 10^{-6}$
Ecart-type de l'erreur inertielle de longitude	$\sigma_\phi = 10^{-6}$
Ecart-type de l'erreur inertielle d'altitude	3 m
Ecart-type de l'erreur inertielle de vitesse	0.5 m/s
Variance de la dérive d'horloge GPS	$\sigma_d = 4 \times 10^{-19}$
Variance du biais d'horloge GPS	$\sigma_b = 10^{-19}$
Ecart-type de l'erreur de propagation	$\sigma_{a,\rho} = 8$ m.

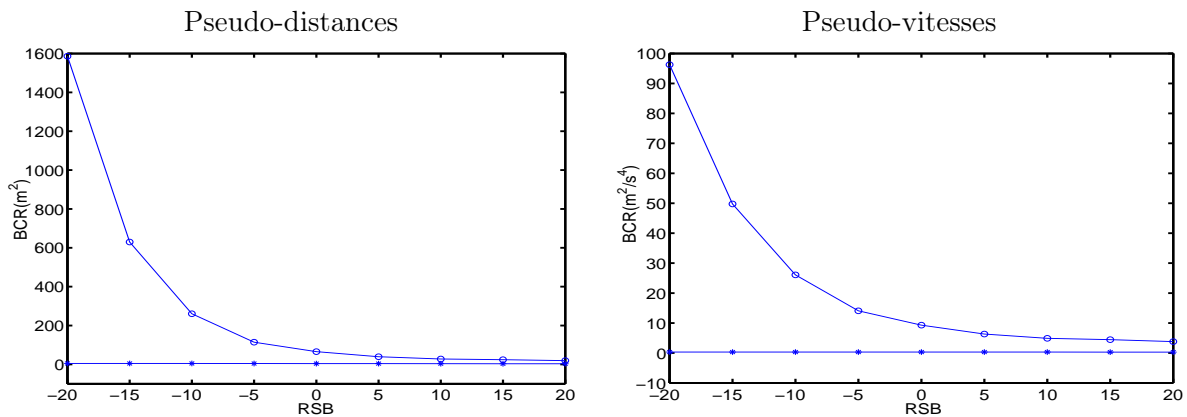
**TAB. 6.1** - Paramètres de simulation pour l'hybridation GPS/INS.

### 6.4.4.1 Apport de l'hybridation très serrée

Pour mettre en évidence l'intérêt des stratégies d'hybridation très serrée, nous avons calculé la borne de Cramer Rao associée à un canal de réception GPS autonome et celle associée à un canal de réception aidé par une centrale inertielle. L'écart entre les deux valeurs permet de quantifier le gain en précision apporté par le couplage GPS/INS. La borne de Cramer Rao est en effet un outil puissant pour évaluer l'erreur quadratique minimale d'estimation au vu de la quantité et de la qualité de l'information disponible sur les paramètres inconnus.

Sur la figure 6.14 sont tracées les valeurs asymptotiques (pour  $t \rightarrow +\infty$ ) des bornes de Cramer Rao pour une architecture récepteur avec ou sans hybridation très serrée, et ce pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit (RSB). Il apparaît que les performances d'une boucle de poursuite classique se dégradent nettement quand le RSB décroît fortement. A l'inverse, l'erreur d'estimation pour une boucle aidée par une centrale inertielle reste stable.

Ces courbes peuvent laisser à penser que même pour de faibles RSB, l'estimation des pseudo-



**FIG. 6.14** - Bornes de Cramer Rao pour l'estimation de la pseudo-distance et de la pseudo-vitesse. o : boucle de poursuite classique, et \* : hybridation très serrée.

distances et pseudo-vitesse est essentiellement fondée sur les mesures inertielles. La figure 6.15, qui représente uniquement la borne de Cramer Rao obtenue pour l'architecture d'hybridation très serrée, permet de lever cette ambiguïté. On observe qu'à mesure que le rapport signal sur bruit se détériore, les valeurs de la BCR convergent vers une limite supérieure. A mesure que le bruit de mesure augmente, la confiance accordée aux mesures de corrélation  $I$  et  $Q$  décroît au profit des mesures inertielles. La valeur limite correspond ainsi à l'erreur d'estimation commise par un système qui n'utiliserait que les mesures inertielles pour estimer la pseudo-distance et la pseudo-vitesse GPS.

### 6.4.5 Filtre particulaire vs filtre de Kalman étendu

L'objet de cette partie est de déterminer si l'aide inertielle ne suffit pas à elle seule à prévenir les décrochages d'un filtre de poursuite de type Kalman étendu et donc si l'utilisation d'un filtre particulaire pour réaliser l'hybridation très serrée s'avère fructueuse. Pour un rapport signal sur bruit fixé, nous comparons les erreurs quadratiques moyennes d'estimation des deux algorithmes entre elles et à la borne de Cramer Rao. Nous appliquons de fortes accélérations de  $40 \text{ m/s}^2$  au véhicule, scénario de simulation qui est apparu critique pour le filtre de Kalman étendu dans la partie précédente.

Sur la figure 6.16 sont représentées l'erreur quadratique moyenne du filtre de Kalman étendu et du filtre particulaire pour la pseudo-distance et la pseudo-vitesse, ainsi que la borne de Cramer

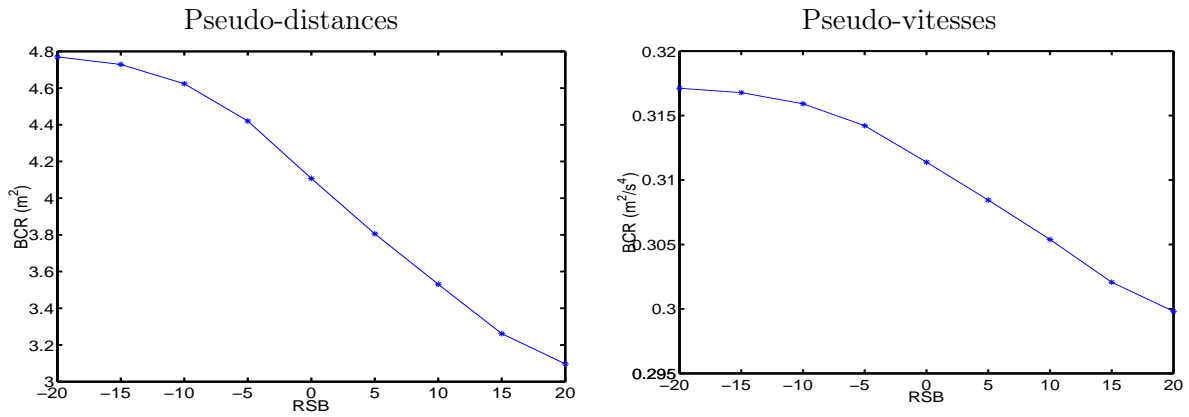


FIG. 6.15 - Bornes de Cramer Rao pour l'estimation de la pseudo-distance et de la pseudo-vitesse. Hybridation très serrée.

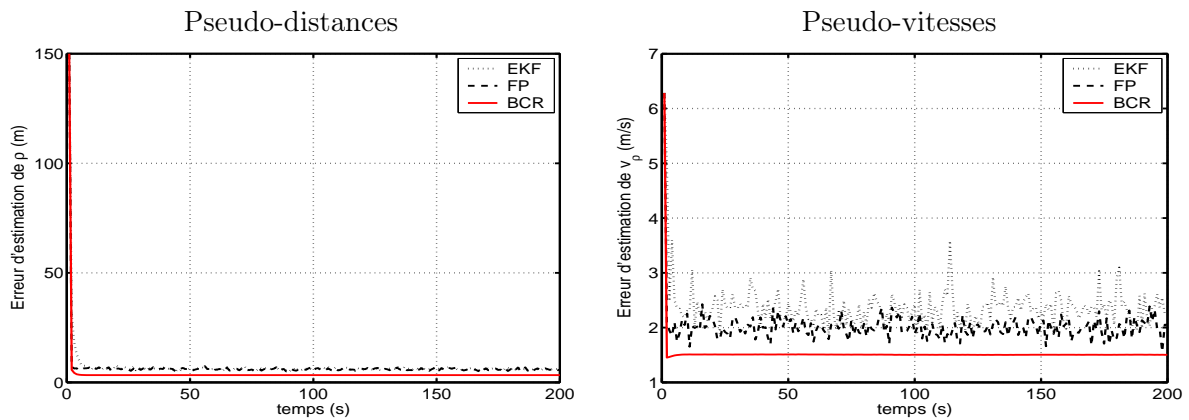


FIG. 6.16 - Estimation de  $\rho$  et  $v_\rho$ , hybridation très serrée.

Rao correspondante. On remarque que l'aide inertielle permet au filtre de Kalman étendu de ne pas décrocher contrairement au comportement observé dans la partie 2 pour une architecture multi-corrélateurs classique. Les deux approches présentent des performances similaires pour l'estimation de la pseudo-distance, notons néanmoins un temps d'acquisition plus court pour le filtre particulaire. Celui-ci fournit par contre une estimation plus précise de la pseudo-vitesse. La supériorité du filtre particulaire sur le filtre de Kalman étendu apparaît plus nettement

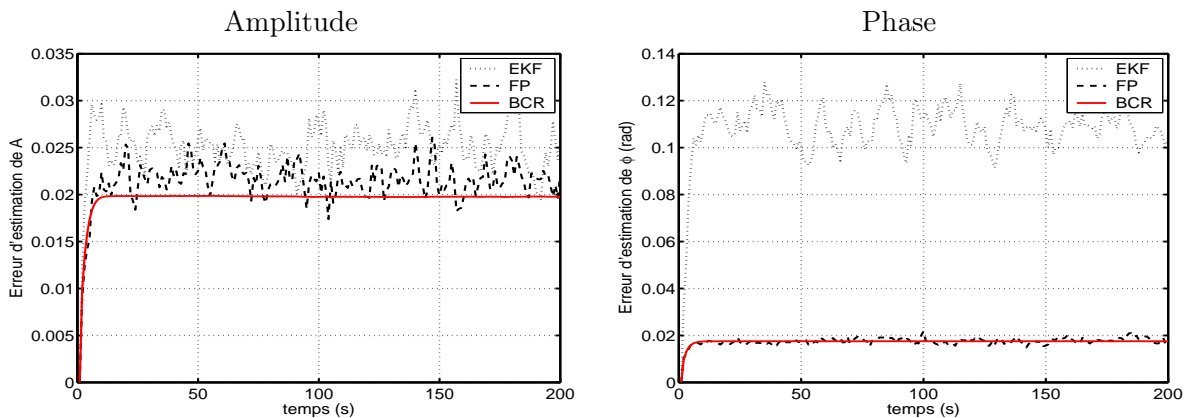


FIG. 6.17 - Estimation de  $A$  et  $\phi$ , hybridation très serrée.

pour l'estimation de la phase et de l'amplitude. Les racines carrées des erreurs quadratiques d'estimation sont tracées en figure 6.17.

En conclusion, l'hybridation très serrée suffit à remédier au problème de décrochage des boucles de poursuite GPS. Néanmoins, un filtre d'hybridation particulière permet un gain en précision qui s'accroît pour de grandes dynamiques du véhicule.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié des solutions pour améliorer la poursuite du signal GPS. La première piste explorée est la mise en œuvre d'un filtre particulière au sein d'une architecture multi-corrélateurs. Cette approche s'avère plus robuste à de fortes dynamiques que le filtre de Kalman étendu classiquement utilisé. En particulier, quand le canal de réception piloté par un filtre de Kalman étendu décroche, celui mettant en œuvre un filtre particulière continue à poursuivre les paramètres d'intérêt. Cependant, les méthodes de Monte Carlo ne permettent pas d'augmenter la robustesse des boucles à de forts niveaux de bruit. Cette difficulté survient notamment en présence de brouilleurs de forte puissance à proximité du récepteur. Nous nous sommes donc intéressés aux techniques d'hybridation très serrées pour lesquelles l'ajout d'une aide externe, une centrale inertielle dans notre étude, permet d'améliorer la formation des mesures GPS de pseudo-distances et pseudo-vitesses. Dans l'architecture présentée, l'hybridation très serrée est suivie en sortie du récepteur d'une hybridation serrée afin de assurer la précision de l'aide inertielle. Nous avons vérifié que la sensibilité de l'erreur d'estimation au rapport signal à bruit est ainsi fortement diminuée. En particulier, quand l'information apportée par les sorties des corrélateurs n'est plus fiable car noyée dans du bruit, les mesures inertielles prennent le relais. Ainsi, l'hybridation très serrée garantit la précision des estimés et les seuils de décrochage des boucles GPS peuvent être abaissés. L'inconvénient de cette approche est que pour des durées de brouillage trop longues et des rapports signal sur bruit trop défavorables, la centrale inertielle fonctionne sans recalage et dérive progressivement. Pour cette architecture, nous avons comparé un filtre d'hybridation de type Kalman étendu ou particulière. Ce dernier apparaît avantageux uniquement pour des applications critiques où le véhicule subit de fortes accélérations.

Une des perspectives de cette étude est d'examiner l'apport des techniques de filtrage particulière pour atténuer l'effet des phénomènes de multitrajets au sein du récepteur. Dans [JKLP02], les paramètres du trajet direct et des trajets réfléchis sont estimés conjointement par un filtre de Kalman étendu. La principale limitation de cette méthode tient à la nécessité de connaître le nombre de trajets réfléchis. Ce problème peut cependant être résolu avantageusement par une technique de filtrage particulière où le nombre de signaux réfléchis et leurs paramètres seraient estimés simultanément. Dans [DDI05], les méthodes séquentielles de Monte Carlo ont en effet été appliquées pour poursuivre les fréquences d'une somme de signaux sinusoïdaux dont le nombre varie au cours du temps. Une approche MCMC hors-ligne a également été développée pour ce type de problèmes dans [PADF02].



## *Conclusion Générale*



---

# Conclusions et Perspectives

---

Cette thèse a pour objet l'apport des méthodes séquentielles de Monte Carlo pour la navigation avec les systèmes de navigation inertielle et le GPS. Développer des techniques d'estimation performantes pour retrouver la trajectoire d'un véhicule à partir de mesures capteur bruitées est un enjeu important en navigation. L'un des premiers algorithmes répondant aux exigences de mémoire et de temps réel des applications de positionnement est le filtre de Kalman. Il est encore largement utilisé de nos jours de par sa simplicité de mise en œuvre et sa robustesse. En théorie, ce filtre s'applique uniquement à des modèles linéaires Gaussiens. Peu de problèmes de positionnement peuvent en pratique être décrits par ce type de modèle, la restriction la plus couramment rencontrée provenant de la non-linéarité de l'équation de mesure. Elle peut être résolue par linéarisation du modèle autour d'une solution approchée, mais l'algorithme résultant (le filtre de Kalman étendu) peut être mis en défaut en cas de fortes non linéarités. Une autre limitation usuelle est l'incertitude sur les paramètres de modèle, soit qu'ils ne soient pas connus avec exactitude, soit qu'ils soient sujets à de brusques changements. Des algorithmes spécifiquement dédiés à ces questions ont été développés tels le rapport de vraisemblance généralisé (RVG) ou les approches dites à modèles multiples. Les filtres particuliers, initialement introduits dans les années 70 mais essentiellement développés dans les années 90, sont une alternative prometteuse. Ils n'imposent aucune contrainte sur le modèle de filtrage et apportent une solution unique à tous les problèmes de filtrage évoqués. Leur principale limitation est leur coût calculatoire. Il convient donc de bien évaluer l'opportunité d'utiliser un filtre particulier selon l'application considérée.

Cette thèse étudie les perspectives offertes par le filtrage particulier pour l'hybridation du GPS et des systèmes de navigation inertielle. L'étude se décline en plusieurs points. Tout d'abord, nous nous sommes intéressés au problème de l'hybridation dite serrée pour laquelle les mesures GPS sont utilisées pour corriger les sorties de la centrale inertielle qui tendent à dériver au cours du temps. Les grandeurs à estimer sont alors les erreurs d'estimation inertielle. L'analyse du modèle de filtrage correspondant met en évidence deux difficultés. D'une part, les paramètres à estimer sont exponentiellement instables et d'autre part, le bruit d'état est très faible. Ces caractéristiques rendent le problème d'estimation difficile à résoudre par une technique filtrage particulier. Une stratégie efficace est néanmoins proposée, fondée sur une extension du filtre particulier régularisé de N.Oudjane. La régularisation rend en effet le filtre particulier plus robuste à un faible bruit d'état mais au prix d'une variance accrue des estimés. Deux étapes ont été ajoutées pour limiter les risques de divergence sans augmenter le bruit sur les estimés :

- un critère de dégénérescence basé sur la vraisemblance prédite qui permet de ne pas systématiser la régularisation,
- une étape de Métropolis-Hastings pour accepter ou rejeter les particules issues de la régularisation, de sorte que le système de particules soit bien distribué selon la loi cible.

Cette approche s'avère plus performante que les solutions de filtrage particuliers proposées dans la littérature. Malheureusement, elle n'apporte aucun gain en précision par rapport au filtre de Kalman étendu, la dynamique des erreurs inertielles étant trop faible pour justifier le recours à une technique de filtrage particulier.

Cependant, la flexibilité des méthodes séquentielles de Monte Carlo en fait un outil privilégié



pour traiter des problèmes difficiles. L'intérêt d'un algorithme de navigation à base de filtre particulière devient manifeste dans le cas où le modèle de filtrage peut varier au cours du temps. La solution consiste alors à introduire une variable indiquant l'occurrence des changements et qui est estimée conjointement aux paramètres d'intérêt. Nous nous sommes donc intéressés aux perturbations pouvant dégrader les mesures GPS. Deux des problèmes à la fois les plus fréquents et les plus pénalisants ont été considérés : les multitrajets et les brouillages. Le premier est responsable d'un biais entâchant la mesure de pseudo-distance GPS alors que le second se traduit par une brusque augmentation de la variance du bruit de mesure. Nous avons développé deux algorithmes particuliers dédiés à chacun des problèmes. Bien-que de structure voisine, ils se distinguent dans leur traitement des erreurs de mesures. Contrairement aux sauts de variances, les biais de multitrajets peuvent en effet être estimés par des filtres de Kalman conditionnels à la variable indicatrice de changement. L'efficacité des deux algorithmes est conditionnée par leur habileté à sélectionner les hypothèses de modèle les plus pertinentes via une loi de proposition et une étape de rééchantillonnage adaptées aux contraintes du modèle. Pour aider à la détection des perturbations, nous avons utilisé une loi de lissage approchée prenant en compte plusieurs mesures GPS consécutives. Par ailleurs, l'efficacité du rééchantillonnage est améliorée en présélectionnant les particules à l'aide d'un test d'hypothèses décidant de l'occurrence ou non d'une dégradation. Les algorithmes proposés s'avèrent plus performants que les méthodes classiquement utilisées pour résoudre ce type de problème.

Enfin, le dernier point abordé est l'hybridation très serrée du GPS et des systèmes de navigation inertielle. Cette architecture de couplage permet entre autres de diminuer la sensibilité du récepteur GPS à de forts niveaux de bruit. En présence d'un trop faible rapport signal sur bruit, les récepteurs classiques ne peuvent en effet plus former les mesures GPS et réinitient la procédure d'acquisition du signal GPS. L'idée est d'aider les boucles de poursuite GPS avec les estimés cinématiques d'une centrale inertielle pour empêcher leur décrochage. Dans ce cadre, les mesures de pseudo-distance et la pseudo-vitesse sont calculées à la fois à partir des sorties des corrélateurs GPS et des estimés de position et de vitesse calculés par la centrale inertielle. L'autocorrélation étant une fonction non linéaire, il est intéressant d'étudier l'opportunité d'un filtre d'hybridation de type particulière. Cette solution est apparue plus robuste à de fortes dynamiques et mérite d'être approfondie.

À l'issue de cette thèse, nous avons proposé un système de navigation robuste fondé sur l'hybridation serrée du GPS et des systèmes de navigation inertiels via des méthodes de filtrage particulière. Deux niveaux de couplage sont considérés. Au sein du récepteur, la centrale inertielle vient aider les boucles de poursuite estimant les mesures de pseudo-distance et pseudo-vitesse. Puis, en sortie du récepteur, les mesures GPS permettent de recalibrer la centrale inertielle.

Différentes perspectives se dégagent de ces travaux. Tout d'abord, dans la seconde partie de la thèse consacrée à l'hybridation serrée, la perte d'observabilité est apparue problématique à la fois pour le filtre de Kalman étendu et le filtre particulière. Si le nombre de mesures est insuffisant, le problème de navigation n'admet plus une solution unique mais tout un domaine de solutions possibles. Cette indétermination peut être levée en ajoutant de l'information. Il est à ce titre judicieux d'étudier l'intérêt d'une approche de type lissage où l'estimation de l'état courant est améliorée par la prise en compte de mesures futures.

Dans la troisième partie de la thèse, nous nous sommes limités à des perturbations de type biais affectant soit directement les mesures, soit la variance du bruit de mesure. Une perspective naturelle serait d'étudier le comportement des algorithmes pour des erreurs plus progressives et donc plus difficiles à détecter (de type rampe par exemple). Par ailleurs, les paramètres des

distributions *a priori* des perturbations ont été déterminés empiriquement. Une approche hiérarchique, où ces paramètres seraient estimés conjointement aux perturbations et à la solution de navigation, est une alternative intéressante à la stratégie proposée. Ce type de méthode a déjà été appliqué par exemple dans [DDMD03]. Enfin, le seuil du test d'hypothèses appliqué pour aider le rééchantillonnage dans l'algorithme dédié au brouillage est fixé de façon ad-hoc. Une extension de l'algorithme serait de formaliser le choix du seuil en le reliant à une probabilité de fausse alarme.

Enfin, dans la dernière partie de la thèse, une architecture multi-corrélateurs est utilisée pour estimer les mesures GPS de pseudo-distance et pseudo-vitesse. Ce type d'architecture a déjà été mis à profit dans [CMC02] et [JKLP02] pour la navigation en présence de multitrajets. Les approches proposées consistent à estimer conjointement les paramètres du signal GPS direct et de sa version réfléchi à l'aide dans le premier cas d'un filtre de Kalman étendu et dans le second d'un algorithme de type moindres carrés. Elles reposent sur deux hypothèses fortes :

- la présence de multitrajets est connu,
- un seul signal réfléchi s'ajoute au signal direct.

Une stratégie de filtrage particulière pourrait s'avérer intéressante pour s'affranchir de ces contraintes. L'idée serait d'estimer le nombre de trajets réfléchis et le cas échéant leurs paramètres, conjointement à ceux du signal direct.



# Annexes



# Equations de navigation inertielle

Cette annexe est consacrée aux équations de navigation inertielle qui relient les mesures des accéléromètres et des gyromètres aux paramètres de mouvement du véhicule :

- la position en coordonnées ellipsoïdales  $(\lambda, \Phi, h)$ ,
- la vitesse dans le repère géocentrique, projetée dans le repère de navigation  $\mathbf{v}_e^n$ ,
- les angles d'Euler  $(\varphi, \theta, \psi)$  qui décrivent l'orientation du véhicule par rapport au repère mobile.

## Équation de vitesse

Cette équation s'obtient à partir de l'équation de mesure des accéléromètres en appliquant la formule de dérivation dans un référentiel tournant qui statue que les dérivées d'un vecteur  $\mathbf{x}$  par rapport à deux référentiels différents notés  $a$  et  $b$  sont reliées de la façon suivante :

$$\left[ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right]_a = \left[ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right]_b + \boldsymbol{\Omega}_{ab} \wedge \mathbf{x}.$$

La force spécifique  $\mathbf{f}_s$  mesurée par les accéléromètres s'exprime comme l'accélération inertielle non gravitationnelle :

$$\mathbf{f}_a = \left[ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_i - \mathbf{g}(\mathbf{r}),$$

où  $\mathbf{r}$  est la position du véhicule et  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  le champ de gravitation au point  $\mathbf{r}$ .

D'après la loi de composition des vitesses, on obtient :

$$\mathbf{v}_e = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_e = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_i + \boldsymbol{\Omega}_{ei} \wedge \mathbf{r}.$$

On en déduit l'expression de la dérivée de  $\mathbf{v}^e$  par rapport au repère de navigation :

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_n = \frac{d}{dt} \left[ \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_i + \boldsymbol{\Omega}_{ei} \wedge \mathbf{r} \right]_n. \quad (\text{A.1})$$

Or :

$$\frac{d}{dt} \left[ \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_i \right]_n = \left[ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_i + \boldsymbol{\Omega}_{ni} \wedge \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_i, \quad (\text{A.2})$$

$$= \left[ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_i + \boldsymbol{\Omega}_{ni} \wedge (\mathbf{v}_e - \boldsymbol{\Omega}_{ei} \wedge \mathbf{r}). \quad (\text{A.3})$$

En outre :

$$\left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_n = \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\Omega}_{ne} \mathbf{r} \wedge. \quad (\text{A.4})$$

En substituant (A.3) et (A.4) dans (A.1), on obtient finalement :

$$\left[ \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right]_n = \left[ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_i - (\boldsymbol{\Omega}_{en} + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}) \wedge \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\Omega}_{ei} \wedge \boldsymbol{\Omega}_{ei} \wedge \mathbf{r}.$$

L'équation de vitesse énoncée au premier chapitre résulte de la projection de cette relation dans le repère de navigation :

$$\frac{d\mathbf{v}_e^n}{dt} = R_{m2n}\mathbf{f}_a + \mathbf{g}(\mathbf{r})^n - \mathbf{a}_c - \mathbf{a}_e,$$

où :

- $\mathbf{a}_c = (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \wedge \mathbf{v}_e^n$ , est l'accélération de Coriolis,
- $\mathbf{a}_e = -\boldsymbol{\Omega}_{ei}^n \wedge \boldsymbol{\Omega}_{ei}^n \wedge \mathbf{r}^n$ , est l'accélération d'entraînement,
- l'accélération gravitationnelle  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  est donnée par le modèle de Somigliana dans [FB98],
- la matrice de passage du repère mobile au repère de navigation dépend uniquement des angles d'Euler  $(\varphi, \theta, \psi)$  de la façon suivante :

$$R_{m2n} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \theta \sin \varphi & \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

## Équation de position

Cette équation relie la dérivée de la position en coordonnées ellipsoïdales à la vitesse  $\mathbf{v}_e^n$ . Pour simplifier les calculs, nous supposons la terre sphérique et de rayon le paramètre  $N$  introduit dans le premier chapitre. Alors, la vitesse  $\mathbf{v}_e^n$  est calculée comme suit :

$$\mathbf{v}_e^n = \left[ \frac{d\mathbf{r}^n}{dt} \right]_e,$$

avec  $\mathbf{r}^n = -(N+h)\mathbf{d}$ . D'où :

$$\mathbf{v}_e^n = -\frac{dh}{dt}\mathbf{d} + (N+h) \left[ \frac{d\mathbf{d}}{dt} \right]_e. \quad (\text{A.6})$$

D'après les formules de passage du repère géocentrique au repère de navigation :

$$\left[ \frac{d\mathbf{d}}{dt} \right]_e = \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{n} + \frac{d\Phi}{dt} \cos \lambda \mathbf{e}. \quad (\text{A.7})$$

En remplaçant (A.7) dans (A.6), on en déduit :

$$\mathbf{v}_e^n = -\frac{dh}{dt}\mathbf{d} + (N+h)\frac{d\lambda}{dt}\mathbf{n} + (N+h)\frac{d\Phi}{dt} \cos \lambda \mathbf{e},$$

soit :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \lambda \\ \Phi \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+h)\cos(\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_e^n.$$

## Équation d'attitude

Les angles d'attitude sont calculés à partir des sorties des gyromètres  $\boldsymbol{\Omega}_g = \boldsymbol{\Omega}_{im}^m$  selon l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{nm}^m, \quad (\text{A.8})$$

où :

$$\mathbf{\Omega}_{nm}^m = \mathbf{\Omega}_{im}^m - R_{n2m} \mathbf{\Omega}_{in}^n.$$

la matrice de passage  $R_{m2n}$  est définie par l'équation (A.5). Il reste à préciser l'expression du vecteur instantané de rotation  $\mathbf{\Omega}_{in}^n$ . Ce vecteur se décompose simplement sous la forme :

$$\mathbf{\Omega}_{in}^n = \mathbf{\Omega}_{ie}^n + \mathbf{\Omega}_{en}^n.$$

Par une simple changement de repère, on obtient :

$$\mathbf{\Omega}_{ie}^n = R_{e2n} \mathbf{\Omega}_{ie}^e.$$

Or, le vecteur instantané de rotation  $\mathbf{\Omega}_{ie}^e$  s'exprime simplement dans le repère géocentrique sous la forme  $\mathbf{\Omega}_{ie}^e = (0, 0, \omega_{ie})^T$ , où  $\omega_{ie}$  est la vitesse de rotation propre du globe terrestre. La matrice de passage du repère géocentrique au repère de navigation est défini en fonction des coordonnées de latitude et longitude du véhicule :

$$R_{e2n} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \Phi & -\sin \lambda \sin \Phi & \cos \lambda \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ -\cos \lambda \cos \phi & -\cos \lambda \sin \Phi & -\sin \lambda \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit :

$$\mathbf{\Omega}_{ie}^n = (\omega_{ie} \cos \lambda, 0, -\omega_{ie} \sin \lambda)^T.$$

En outre, il est démontré dans [FB98] que :

$$\mathbf{\Omega}_{en}^n = \left( \frac{d\Phi}{dt} \cos \lambda, -\frac{d\lambda}{dt}, -\frac{d\Phi}{dt} \sin \lambda \right).$$

Finalement, on a :

$$\mathbf{\Omega}_{in}^n = \left( \left( \omega_{ie} + \frac{d\Phi}{dt} \right) \cos \lambda, -\frac{d\lambda}{dt}, -\left( \omega_{ie} + \frac{d\Phi}{dt} \right) \sin \lambda \right)^T.$$

Pour compléter ces démonstrations, le tableau (A.1) contient les valeurs des différents paramètres définissant l'ellipsoïde terrestre tels qu'ils sont définis dans [Sio91].

Demi-grand axe	$a = 6378137\text{m}$
Demi-petit axe	$b = 6356752\text{m}$
Excentricité	$e = 000669437999013$
vitesse de rotation propre de la terre	$\omega_{ie} = 7.292115 \times 10^{-5} \text{rad/s}$

**TAB. A.1** - Paramètres géodésiques et géophysiques de l'ellipsoïde terrestre (norme WGS84).





# Matrices de régression de l'algorithme RVG

## Position du problème

Dans le troisième chapitre, le vecteur de navigation est augmenté pour inclure les biais affectant les pseudo-distances GPS. Ces composantes de biais sont généralement nulles sauf en présence de multitrajets. Le modèle de filtrage correspondant s'écrit :

$$\mathbf{X}_t = F_t \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{v}_t + \delta(t - \theta) G^T \boldsymbol{\nu}, \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{X}_t) + [0_{n_y \times n_x}, 1_{n_y \times n_y}] \mathbf{X}_t + \mathbf{w}_t, \quad (\text{B.2})$$

où

- $\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^{n_x + n_y}$  est le vecteur état comportant  $n_x$  composantes de navigation et  $n_y$  composantes de biais,
- $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur de mesure,
- $\mathbf{v}_t$  et  $\mathbf{w}_t$  sont des bruits blancs Gaussiens,
- $G = [0_{n_y \times n_x}, 1_{n_y \times n_y}]$ ,
- $\delta(t - \theta) G^T \boldsymbol{\nu}$  représente un saut de moyenne d'amplitude  $\boldsymbol{\nu}$  affectant uniquement les composantes de biais du vecteur état à l'instant  $\theta$ .

## Notations

L'algorithme RVG se présente comme une extension du filtre de Kalman (ou du filtre de Kalman étendu) permettant de détecter les sauts de moyenne du vecteur état et de les compenser en ligne. Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t} &\sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{X}}_{t|t}, P_{t|t}), \\ \mathbf{X}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1} &\sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1}, P_{t|t-1}), \\ \mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{1:t-1} &\sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}, S_t). \end{aligned}$$

On appelle innovation  $\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_{t|t-1}$ . Soit en outre  $K_t$  le gain de Kalman et  $H_t = \nabla \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1})$  la matrice obtenue par linéarisation de l'équation de mesure autour du plus récent estimé.

## Lemme du RVG

Dans [WJ76], il est démontré que l'effet du saut de moyenne formulé par (B.1) se traduit de la façon suivante sur les innovations du filtre de Kalman :

$$\boldsymbol{\epsilon}_t[\theta] = \phi_t^T[\theta] G^T \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\epsilon}_t,$$

où la notation  $[\theta]$  désigne la valeur du paramètre si le saut a eu lieu à l'instant  $\theta$ .

Les matrices de régression  $\phi_t^T[\theta]$  sont calculées récursivement de la façon suivante :

$$\phi_t^T[\theta] = H_t \left( \prod_{i=\theta}^t F_i - F_t \mu_{t-1}[\theta] \right), \quad (\text{B.3})$$

$$\mu_t[\theta] = F_t \mu_{t-1}[\theta] + K_t \phi_t^T, \quad (\text{B.4})$$

pour  $t \geq \theta$ , avec  $\hat{\mathbf{X}}_{t|t}[\theta] = \hat{\mathbf{X}}_{t|t} + \mu_t[\theta] G^T \boldsymbol{\nu}$ .

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence.

Supposons les relations (B.3) et (B.4) valables à l'instant  $t$ . A l'instant  $t+1$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{t+1}[\theta] - \boldsymbol{\epsilon}_{t+1} &= H_{t+1} (\mathbf{X}_{t+1}[\theta] - \mathbf{X}_{t+1}) - H_{t+1} F_{t+1} (\hat{\mathbf{X}}_{t|t}[\theta] - \hat{\mathbf{X}}_{t|t}), \\ &= H_{t+1} \left( \prod_{i=\theta}^{t+1} F_i - F_{t+1} \mu_t[\theta] \right) G^T \boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_{t+1|t+1}[\theta] - \hat{\mathbf{X}}_{t+1|t+1} &= F_{t+1} (\hat{\mathbf{X}}_{t|t}[\theta] - \hat{\mathbf{X}}_{t|t}) + K_{t+1} (\boldsymbol{\epsilon}_{t+1}[\theta] - \boldsymbol{\epsilon}_{t+1}), \\ &= F_{t+1} \mu_t[\theta] G^T \boldsymbol{\nu} + K_{t+1} \phi_{t+1}^T[\theta] G^T \boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

La preuve est complétée en notant que  $\mu_{\theta-1}[\theta] = 0_{n_x \times n_x}$ . □

## Borne de Cramer Rao *a posteriori*

Cette annexe présente les formules permettant de calculer récursivement la borne de Cramer Rao *a posteriori* et en propose une démonstration d'après [Ber01] et [BDG01].

Soit le modèle espace-état suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \mathbf{f}_t(\mathbf{X}_{t-1}) + \mathbf{v}_t, \text{ avec } \mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, B_t B_t^T) \\ \mathbf{Y}_t &= \mathbf{h}_t(\mathbf{X}_t) + \mathbf{w}_t, \text{ avec } \mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, D_t D_t^T), \end{aligned}$$

pour  $t \geq 0$ .

Pour tout estimateur  $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}_{1:t})$ , la borne de Cramer Rao *a posteriori*(PCRB)  $P_{t|t}$  vérifie :

$$\mathbb{E} \left( \left( \hat{\mathbf{X}}_t(\mathbf{Y}_{1:t}) - \mathbf{X}_t \right) \right) \geq P_{t|t},$$

où  $P_{t|t}$  est définie par :

$$P_{t|t}^{-1} = \mathbb{E}_{p(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_{1:t})} \left( - \nabla_{\mathbf{X}_t}^{\mathbf{X}_t} \log p(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_{1:t}) \right),$$

$\Delta$  désignant l'opérateur Laplacien. La PCRB est calculée comme suit :

$$P_{t|t} = F_t \Gamma_t F_t^T + (F_t \Gamma_t S_t - B_t) \Delta_t^{-1} (F_t \Gamma_t S_t - B_t)^T, \quad (\text{C.1})$$

avec,

$$\begin{aligned} \Gamma_t &= \left( P_{t-1|t-1}^{-1} + R_t^{-1} \right)^{-1}, \\ \Delta_t &= Q_t^{-1} - S_t^T \Gamma_t S_t, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} F_t^T &= \mathbb{E} \left( \nabla_{\mathbf{X}_t} \mathbf{f}_t^T(\mathbf{X}_{t-1}) \right), \\ R_t^{-1} &= \mathbb{E} \left( \Delta_{\mathbf{X}_{t-1}}^{\mathbf{X}_{t-1}} \log p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \right), \\ Q_t^{-1} &= \mathbb{E} \left( \Delta_{\mathbf{v}_t}^{\mathbf{v}_t} \log p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \right) + \mathbf{I}, \\ S_t^T &= \mathbb{E} \left( \Delta_{\mathbf{v}_t}^{\mathbf{X}_{t-1}} \log p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \right). \end{aligned}$$

Cette borne est valable sous de faibles conditions de convergence de la distribution *a priori* du vecteur  $\mathbf{X}_t$ .

*Démonstration.* La démonstration est réalisée par récurrence. A  $t = 0$ ,  $P_{0|0}^{-1} = \mathbb{E}_{p(\mathbf{X}_0)} \left( - \nabla_{\mathbf{X}_0}^{\mathbf{X}_0} \log p(\mathbf{X}_0) \right)$ . On suppose connue la borne de Cramer Rao à l'instant  $t - 1$  :

$$\mathbb{E} \left( \left( \hat{\mathbf{X}}_{t-1}(\mathbf{Y}_{1:t-1}) - \mathbf{X}_{t-1} \right) \right) \geq P_{t-1|t-1}.$$

Considérons le vecteur aléatoire suivant :

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{t-1}(\mathbf{Y}_{1:t}) - \mathbf{X}_{t-1} \\ \hat{\mathbf{X}}_t(\mathbf{Y}_{1:t}) - \mathbf{X}_t \\ \nabla_{\mathbf{X}_{t-1}} \log p(\mathbf{v}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t}), \\ \nabla_{\mathbf{v}_t} \log p(\mathbf{v}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t}) \end{pmatrix},$$

Par construction, sa matrice de corrélation est semi-définie positive. On note :

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t^T) = \begin{pmatrix} C_t & M_t \\ M_t^T & K_t \end{pmatrix} \geq 0,$$

où :

$$C_t = \mathbb{E} \left( \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{t-1}(\mathbf{Y}_{1:t}) - \mathbf{X}_{t-1} \\ \hat{\mathbf{X}}_t(\mathbf{Y}_{1:t}) - \mathbf{X}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{t-1}(\mathbf{Y}_{1:t}) - \mathbf{X}_{t-1} \\ \hat{\mathbf{X}}_t(\mathbf{Y}_{1:t}) - \mathbf{X}_t \end{pmatrix}^T \right) = \begin{pmatrix} C_{11,t} & C_{12,t} \\ C_{21,t} & C_{22,t} \end{pmatrix},$$

$$M_t = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ F_t & B_t \end{pmatrix}, K_t = \mathbb{E} \begin{pmatrix} -\Delta_{\mathbf{X}_{t-1}}^{\mathbf{X}_{t-1}} \log p(\mathbf{v}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t}) & -\Delta_{\mathbf{X}_{t-1}}^{\mathbf{v}_t} \log p(\mathbf{v}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t}) \\ -\Delta_{\mathbf{v}_t}^{\mathbf{X}_{t-1}} \log p(\mathbf{v}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t}) & -\Delta_{\mathbf{v}_t}^{\mathbf{v}_t} \log p(\mathbf{v}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t}) \end{pmatrix},$$

Or la distribution de probabilité conjointe admet la décomposition suivante :

$$p(\mathbf{v}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t}) = p(\mathbf{v}_t) p(\mathbf{Y}_t | \mathbf{v}_t, \mathbf{X}_{t-1}) p(\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t-1}).$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbb{E} \left( -\Delta_{\mathbf{X}_{t-1}}^{\mathbf{X}_{t-1}} \log p(\mathbf{v}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t}) \right) = J_{t-1} + R_t^{-1},$$

avec

$$J_{t-1} = \mathbb{E} \left( -\Delta_{\mathbf{X}_{t-1}}^{\mathbf{X}_{t-1}} \log p(\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Y}_{1:t-1}) \right).$$

D'où :

$$K_t = \begin{pmatrix} J_{t-1} + R_t^{-1} & S_t \\ S_t^T & Q_t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Par définition de la PCRB, on a :  $P_{t-1|t-1}^{-1} = J_{t-1}$ . On en déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} C_{11,t} & C_{12,t} & \mathbf{I} & 0 \\ C_{21,t} & C_{22,t} & F_t & B_t \\ \mathbf{I} & F_t^T & P_{t-1|t-1}^{-1} + R_t^{-1} & S_t \\ 0 & B_t^T & S_t^T & Q_t^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \geq 00,$$

soit,

$$\begin{pmatrix} C_{11,t} & C_{12,t} \\ C_{21,t} & C_{22,t} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ F_t & B_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{t-1|t-1}^{-1} + R_t^{-1} & S_t \\ S_t^T & Q_t^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ F_t & B_t \end{pmatrix}^T.$$

Comme  $C_{22,t} = \mathbb{E} \left( \left( \hat{\mathbf{X}}_t(\mathbf{Y}_{1:t}) - \mathbf{X}_t \right) \right)$ , le bloc matricielle en bas à gauche fournit la formule (C.1).

□

# Loi de proposition du vecteur de navigation (chapitre 5)

L'objet de cette annexe est d'apporter quelques compléments à la description de l'algorithme particulière développé pour la navigation en présence d'interférences (cinquième chapitre). Elle permet de justifier l'approximation de la loi de proposition optimale utilisée pour simuler les vecteurs de navigation. On rappelle que la loi de proposition des vecteurs de navigation s'obtient en marginalisant les paramètres de variance. Pour  $i = 1, \dots, N$  et  $j = 1, \dots, n_\lambda$ , on obtient :

$$p(\mathbf{x}_{t:t+L} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}) = \int_{\phi_t} p(\mathbf{x}_{t:t+L}, \phi_t | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}) d\phi_t, \quad (\text{D.1})$$

$$\propto p(\mathbf{x}_{t:t+L} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) \prod_{k=1}^{n_y} (\tilde{\beta}_{t,k}^{(i,j)})^{-\tilde{\alpha}_{t,k}^{(i,j)}}, \quad (\text{D.2})$$

avec :  $(\tilde{\beta}_{t,k}^{(i,j)})^{-\tilde{\alpha}_{t,k}^{(i,j)}} = \prod_{k=1}^{n_y} \left( 1 + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^L (\mathbf{Y}_{t+l,k} - \mathbf{h}_{t+l,k}(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)}))^2 / \beta_{t,k}^{(i,j)} \right)^{-\frac{(2\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L + 1)}{2}}$ . Cette distribution est non standard mais peut être approchée avec une bonne précision par une distribution Gaussienne. Les différentes étapes du raisonnement conduisant à cette approximation sont expliquées ci-dessous. Tout d'abord, notons :

$$T_{t,k}^{(i,j)} = \left( 1 + \frac{(u_{t,k}^{(i,j)})^2}{2\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L} \right)^{-\frac{(2\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L + 1)}{2}},$$

$$u_{t,k}^{(i,j)} = \sqrt{\frac{2\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L}{2} \sum_{l=0}^L (\mathbf{Y}_{t+l,k} - \mathbf{h}_{t+l,k}(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)}))^2 / \beta_{t,k}^{(i,j)}}.$$

On remarque que, à une constante de proportionnalité près,  $T_{t,k}^{(i,j)}$  est l'expression de la densité de probabilité d'une loi de Student de paramètre  $2\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L$  calculée au point  $u_{t,k}^{(i,j)}$ . Or, la forme limite d'une loi de Student est une loi Gaussienne réduite. En pratique, une loi de Student peut être approchée correctement par une distribution Gaussienne dès que son paramètre est supérieur à 30. Ce critère étant satisfait pour notre modèle, on peut donc poser :

$$T_{t,k}^{(i,j)} \simeq \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L/2}{\beta_{t,k}^{(i,j)}} \sum_{l=0}^L (\mathbf{Y}_{t+l,k} - \mathbf{h}_{t+l,k}(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)}))^2\right),$$

$$\simeq \prod_{l=0}^L \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L/2}{\beta_{t,k}^{(i,j)}} (\mathbf{Y}_{t+l,k} - \mathbf{h}_{t+l,k}(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)}))^2\right).$$

Au vu de cette décomposition, il est possible de simuler récursivement les vecteurs de navigation  $(\mathbf{x}_{t+l})_{0 \leq l \leq L}$  :

$$\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)} \sim p\left(\mathbf{x}_{t+l} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t:t+l-1}^{(i,j)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right), \quad (\text{D.3})$$

pour  $l = 0, \dots, L$ . D'après (D.2), on obtient :

$$p(\mathbf{x}_{t+l} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t:t+l-1}^{(i,j)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}) \propto p(\mathbf{x}_{t+l} | \mathbf{x}_{t:t+l-1}^{(i,j)}) \prod_{k=1}^{n_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L/2}{\beta_{t,k}^{(i,j)}} \left(\mathbf{Y}_{t+l,k} - \mathbf{h}_{t+l,k}(\mathbf{x}_{t+l}^{(i,j)})\right)^2\right). \quad (\text{D.4})$$

La loi *a priori* du vecteur de navigation vérifie :

$$p\left(\mathbf{x}_{t+l} | \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}\right) = \mathcal{N}\left(F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}, B_{t+l} B_{t+l}^T\right).$$

L'approximation Gaussienne désirée est finalement calculée en opérant une linéarisation locale de l'équation de mesure autour de la particule courante  $\mathbf{x}_{t+l} = F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}$  :

$$\mathbf{Y}_{t+l} = \mathbf{h}_{t+l}\left(F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}\right) + H_{t+l}^{(i,j)}\left(\mathbf{x}_{t+l} - F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}\right) + \mathbf{w}_t.$$

avec  $H_{t+l}^{(i,j)} = (\nabla \mathbf{h}_t)_{\mathbf{x}_t = F_t \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}}$ . On note :

$$\Delta \mathbf{Y}_{t+l}^{(i,j)} = \mathbf{Y}_{t+l} - \mathbf{h}_{t+l}\left(F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i)}\right) + H_{t+l}^{(i,j)} F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}.$$

En introduisant cette linéarisation dans l'expression (D.4) on en déduit :

$$p(\mathbf{x}_{t+l} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t:t+l-1}^{(i,j)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}) \propto \mathcal{N}\left(F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i,j)}, B_{t+l} B_{t+l}^T\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\Delta \mathbf{Y}_{t+l}^{(i,j)} - H_{t+l}^{(i,j)} \mathbf{x}_{t+l}\right)^T \text{diag}\left(\mathbf{V}_t^{(i,j)}\right)^{-1} \left(\Delta \mathbf{Y}_{t+l}^{(i,j)} - H_{t+l}^{(i,j)} \mathbf{x}_{t+l}\right)\right),$$

où les composantes du vecteur  $\mathbf{V}_t^{(i,j)}$  sont définies de la façon suivante :

$$\mathbf{V}_{t,k}^{(i,j)} = \frac{\beta_{t,k}^{(i,j)}}{\alpha_{t,k}^{(i,j)} + L/2}, \text{ pour } k = 1, \dots, n_y.$$

Finalement, on obtient :

$$p\left(\mathbf{x}_{t+l} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t:t+l-1}^{(i,j)}, \boldsymbol{\lambda}_{t:t+L}^{(j)}, \mathbf{Y}_{1:t+L}\right) \simeq \mathcal{N}\left(\mathbf{m}_{t+l}^{(i,j)}, \Sigma_{t+l}^{(i,j)}\right),$$

avec :

$$\begin{aligned} \left(\Sigma_{t+l}^{(i,j)}\right)^{-1} &= \left(H_{t+l}^{(i,j)}\right)^T \text{diag}\left(\mathbf{V}_t^{(i,j)}\right)^{-1} H_{t+l}^{(i,j)} + B_{t+l} B_{t+l}^T, \\ \mathbf{m}_{t+l}^{(i,j)} &= \Sigma_{t+l}^{(i,j)} \left( (B_{t+l} B_{t+l}^T)^{-1} F_{t+l} \mathbf{x}_{t+l-1}^{(i)} + \text{diag}\left(\mathbf{V}_t^{(i,j)}\right)^{-1} \left(H_{t+l}^{(i,j)}\right)^T \Delta \mathbf{Y}_{t+l}^{(i)} \right). \end{aligned}$$

# Récepteur GPS : calcul des sorties des corrélateurs.

Chaque canal de réception du récepteur GPS est dédié à un satellite en ligne de vue du véhicule et réalise l'autocorrélation du signal émis par ce satellite avec une réplique générée localement. On rappelle que le signal satellite prend la forme :

$$s(t) = A \sin(2\pi ft + \phi) c(t - \tau),$$

où :

- $A$  est l'amplitude du signal,
- $f = f_0 + f_d$  est la contribution de la fréquence de la porteuse  $f_0$  et  $f_d$  la fréquence Doppler,
- $c(t - \tau)$  est le code pseudo-aléatoire retardé du délai de propagation  $\tau$ .

Nous allons détailler les différents traitements appliqués au signal satellite au sein du récepteur GPS.

Tout d'abord, le signal est multiplié à une réplique locale de la porteuse. Le signal obtenu s'écrit :

$$s_m(t) = Ac(t - \tau) \sin(2\pi ft + \phi) \sin(2\pi \hat{f}t + \hat{\phi}).$$

Or, en appliquant les formules trigonométriques :

$$\sin(2\pi ft + \phi) \sin(2\pi \hat{f}t + \hat{\phi}) = \frac{1}{2} \left( \cos(2\pi \Delta ft + \Delta \phi) - \cos(2\pi (\hat{f} + f)t + \phi + \hat{\phi}) \right),$$

La composante fréquentielle  $f + \hat{f}$  étant éliminée par filtrage passe-bas, le signal prend la forme :

$$s_m(t) = \frac{A}{2} c(t - \tau) \cos(2\pi \Delta ft + \Delta \phi).$$

Il est ensuite corrélé avec une réplique décalée du code  $c$  pour produire la sortie de la voie en phase :

$$I_{\delta_j} = \frac{1}{T_i} \int_{t-T_i}^t s_m(u) c(u - \hat{\tau} + \delta_j) du,$$

pour le  $j$ -ème corrélateur. D'après [Win00], le résultat de cette opération est :

$$I_{\delta_j} = \frac{A}{2T_i} R(\Delta\tau + \delta_j) \int_{t-T_i}^t \cos(2\pi \Delta fu + \Delta\phi) du, \quad (\text{E.1})$$

où  $R(\tau)$  désigne la fonction d'autocorrélation du code pseudo-aléatoire  $c$ . La démonstration de cette formule est proposée en annexe. Enfin :

$$\int_{t-T_i}^t \cos(2\pi \Delta fu + \Delta\phi) du = \frac{\sin(2\pi \Delta ft + \Delta\phi) - \sin(2\pi \Delta f(t - T_i) + \Delta\phi)}{2\pi \Delta f}.$$

Les formules trigonométriques permettent de transformer cette somme en produit de fonctions sinusoïdales :

$$\sin(2\pi \Delta ft + \Delta\phi) - \sin(2\pi \Delta f(t - T_i) + \Delta\phi) = 2 \cos(2\pi \Delta ft - \pi \Delta f T_i + \Delta\phi) \sin(\pi \Delta f T_i).$$



En intégrant cette expression à l'équation E.1, on obtient finalement :

$$I_{\delta_j} = \frac{A}{2} R (\Delta\tau + \delta_j) \operatorname{sinc}(\pi\Delta f T_i) \cos(2\pi\Delta f t - \pi\Delta f T_i + \Delta\phi).$$

# Autocorrélation des codes pseudo-aléatoires GPS

Les propriétés des codes pseudo-aléatoires utilisés en GPS sont étudiées en détails dans [PSa96]. Pour mieux comprendre l'expression de leur autocorrélation, il suffit au lecteur de savoir qu'il s'agit de signaux crêteau présentant de fortes propriétés aléatoires. Ils sont générés en convoluant une fonction porte par des séquences numériques  $\{+1; -1\}$  issues de registres à décalage. Les signaux ainsi obtenus sont périodiques. Plus leur période est grande, plus leur autocorrélation est voisine de celle d'un bruit blanc. Elle est définie par la formule :

$$R(\tau) = R_0(\tau) * \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - jT_R),$$

avec :

$$R_0(\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} R_0[k] \text{tri}\left(\frac{\tau - kT_c}{T_c}\right).$$

Les notations suivantes ont été utilisées :

- $T_c$  est la durée d'un bit de code,
- $T_R = NT_c$  est la période du code,
- $\text{tri}(t)$  est la fonction triangle définie sur  $[-1; 1]$  :  $\begin{cases} \text{tri}(t) = 1 - |t| & \text{si } |t| < 1, \\ \text{tri}(t) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La séquence  $\{R_0[k]\}_{k=0, \dots, N-1}$  ne peut prendre que 4 valeurs. Ces valeurs dépendent du nombre de registres  $m$  du générateur de code de la façon suivante :

$$R_0[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ -\frac{1}{N}, -\frac{1}{N}t(m) \text{ ou } -\frac{1}{N}(t(m) - 2) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$t(m) = \begin{cases} 1 + 2^{\frac{m+1}{2}} & \text{si } m \text{ est impair,} \\ 1 + 2^{\frac{m+2}{2}} & \text{si } m \text{ est pair et non divisible par 4.} \end{cases}$$

En appliquant cette formule au code C/A qui est généré à partir de 10 registres, on obtient :

$$R_0[k] = \begin{cases} -\frac{1}{1023}, \\ \text{ou} \\ -\frac{1}{1023}(1 + 2^6) = -\frac{65}{1023}, \\ \text{ou} \\ -\frac{1}{1023}(1 + 2^6 - 2) = \frac{63}{1023}, \end{cases}$$

pour  $k \neq 0$ . Ces valeurs sont négligeables pour des séquences présentant une longue période ( $N$  grand). L'approximation suivante peut donc être retenue pour la fonction  $R_0(\tau)$  :

$$R_0(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c} & \text{si } |\tau| < T_c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



---

# Liste des publications

---

## Revue

- A. Giremus, J. Y. Tourneret et V. Calmettes.-**A particle filtering approach for joint detection/estimation of multipath effects on GPS measurements.**- soumis à *IEEE Transactions on Signal Processing*.

## Congrès internationaux

- A. Giremus et J. Y. Tourneret.-**An Improved regularized Particle Filter for GPS/INS Navigation.**- Proc. of *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC 2005)*, New-York, USA, Juin 5-8, 2005 (article invité).
- A. Giremus et J. Y. Tourneret.-**Joint Detection-Estimation of Multipath effects for the Global Positioning System.**-Proc. of *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Sig. Proc. (ICASSP'05)*, vol. IV, pp.17-20, Philadelphia, USA, Mars 18-23, 2005.
- A. Giremus, A. Doucet et J. Y. Tourneret.-**A Particle Filter to Mitigate Jamming for GPS Navigation.**- Proc. of *IEEE Workshop on Stat. Sig. Proc. (SSP'05)*, Bordeaux, France, Juillet 17-20, 2005.
- A. Giremus, A. Doucet, V. Calmettes et J. Y. Tourneret.-**A Rao-Blackwellized Particle Filter for GPS/INS Integration.**-Proc. of *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Sig. Proc. (ICASSP'04)*, vol. III, pp. 964-967, Montréal, Canada, Mai 17-21 (article invité).
- A. Giremus, A. Doucet, A. C. Escher et J.Y. Tourneret.- **Nonlinear Filtering Approaches for INS/GPS Integration.**, Proc. of *12th Conf. on Sig. Proc. (EUSIPCO'04)*, pp. 873-876, Vienna, sept. 6-10, 2004.



---

# Bibliographie

---

- [ABM02] P.O. Amblard, J.M. Brossier, and E. Moisan. Phase tracking : what do we gain from optimality ? particle filtering versus phase-locked loops. *Signal Processing*, 46 :151–167, 2002.
- [AM79] B.D.O Anderson and J.B. Moore. *Optimal filtering*. Prentice Hall, 1979.
- [AS01] B. Azimi-Sadjadi. *Approximate Nonlinear Filtering with Applications to Navigation*. PhD thesis, University of Maryland, Maryland, 2001.
- [BCM01] F. Bastide, E. Chatre, and C. Macabiau. Gps interference detection and identification using multicorrelator receivers. *Proc. of ION NTM, Salt Lake city*, 2001.
- [BDG01] N. Bergman, A. Doucet, and N. Gordon. Optimal estimation and cramer-rao bounds for partial non-gaussian state space models. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 53(1) :97–112, 2001.
- [Ber99] N. Bergman. *Recursive Bayesian Estimation, Navigation and Tracking Application*. PhD thesis, Linköping University, Linköping, Sweden, 1999.
- [Ber01] N. Bergman. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, chapter Posterior Cramer-Rao bounds for sequential estimation. Springer, 2001.
- [BH94] R.G. Brown and P.Y.C Hawng. *Introduction to Kalman signals and applied Kalman filtering*. Wiley, 3<sup>rd</sup> edition, 1994.
- [Bra94] M.S. Braasch. Optimum antenna design for dgps ground reference stations. *Proc. of ION GPS-94, Seventh international Meeting of the satellite division of the Institute of Navigation*, pages 1291–1297, Sept. 20-23, 1994.
- [Bro98] R.G. Brown. *A baseline GPS RAIM scheme and a note on the equivalence of the three RAIM methods*. Global Positioning System, Red Book volume V, 1998.
- [BSF88] Y. Bar-Shalom and T.E. Fortmann. *Tracking and data association*. Academic Press, 1988.
- [BSRLK01] Y. Bar-Shalom, X. Rong Li, and T. Kirubarajan. *Estimation with applications to tracking and navigation*. Wiley Interscience, 2001.
- [CBM00] E. Chatre, F. Bastide, and C. Macabiau. Use of multicorrelator techniques for interference detection. *Proc. of ION NTM, Long Beach*, 2000.
- [CDML99] D. Crisan, P. Del Moral, and T.J. Lyons. Non-linear filtering using branching and intercatng particle systems. *Markov Processes Related Fields*, 5(3) :293–319, 1999.

- [CDMMG97] H. Carvalho, P. Del Moral, A. Monin, and Salut G. Optimal nonlinear filtering in GPS/INS integration. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33 :835–850, 1997.
- [CK94] C.K. Carter and R. Kohn. On Gibbs sampling for state space models. *Biometrika*, 81(3) :541–553, 1994.
- [CL00] R. Chen and S.J. Liu. Mixture kalman filters. *Journal of the Royal Statistical Society*, 62(3) :493–508, 2000.
- [CMC02] R. Chaggara, C. Macabiau, and E. Chatre. Use of multicorrelator receiver for multipath parameters estimation. *Proc. of ION GPS 2002, Portland, Oregon*, 2002.
- [DA02] A. Doucet and C. Andrieu. Particle filtering for partially observed gaussian state space models. *Journal of the Royal Statistical Society*, 64(4) :827–836, 2002.
- [DC01] O. De Cambry. Segmentation de signaux sous contrainte de longueur minimale. *Proc. of GRETSI 2001*, 10-13 Sept 2001.
- [DdFG01] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon. *Sequential Monte carlo methods in practice*. Springer, 2001.
- [DDI05] C. Dubois, M. Davy, and J. Idier. Tracking of time-frequency components using Particle Filter. *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 05)*, Mars. 18-23, 2005.
- [DDMD03] M. Davy, P. Del Moral, and A. Doucet. Méthodes monte carlo séquentielles pour l’analyse spectrale Bayésienne. *Proc. of GRETSI*, 2003.
- [Dou98] A. Doucet. On sequential simulation-based methods for bayesian filtering. Technical Report CUED/F-Infeng/TR 310, Signal Processing Group, Departement of Engineering, University of Cambridge, 1998.
- [FB98] J.A. Farrell and M. Barth. *The Global Positioning System and Inertial Navigation*. Mac Graw Hill, 1998.
- [FB99] E. Fishler and B. Bobrovsky. Anti multipath cellular radio location for ds/cdma systems using a novel ekf subchip tracking loop. *Proc. of IEEE international conference on military communications (MILCOM 99)*, 2 :1328–1332, 1999.
- [FFF<sup>+</sup>91] P. Fenton, B. Falkenberg, T. Ford, K. Ng, and A.J. Van Dierendonck. Novatel’s gps receiver - the high performance oem sensor of the future. *Proc. of ION GPS-91, Albuquerque*, Sept. 9-13, 1991.
- [Gar68] F. Gardner. *Phase lock techniques*. Wiley, 1968.
- [GB01] R. W. Gilks and C. Berzuini. Following a moving target-monte carlo inference for dynamic bayesian models. *Journal of the Royal Statistical Society*, 63(4) :127–143, 2001.

- [GSS93] N.J. Gordon, D.J. Salmond, and A.F.M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEE Proceedings on Radar and Signal Processing*, 140 :107–113, 1993.
- [GVDR96] L. Garin, F. Van Diggelen, and J.M. Rousseau. Strobe and edge correlator multipath rejection for code and carrier. *Proc. of ION GPS-96, Kansas City*, Sept. 17-20, 1996.
- [Han70] J.E. Handschin. Monte carlo techniques for prediction and filtering of nonlinear stochastic processes. *Automatica*, 6 :555–563, 1970.
- [Han98] J.E. Handschin. Monte carlo techniques for prediction and filtering of non-linear stochastic processes. *Automatica*, 6 :555–563, 1998.
- [HM69] J.E. Handschin and D.Q. Mayne. Monte carlo techniques to estimate the conditional expectation in multi-stage non-linear filtering. *International Journal of Control*, 9 :547–559, 1969.
- [Hue03] C. Hue. *Méthodes séquentielles de Monte Carlo pour le filtrage non linéaire multi-objets dans un environnement bruité. Application au pistage multi-cibles et à la trajectographie d'entités dans des séquences d'images 2D*. PhD thesis, Université de Rennes 1, France, Janv 2003.
- [HWLC93] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and J. Collins. *GPS, Theory and Practice*. Springer Verlag, New-York, 1993.
- [Ilt99] R. A. Iltis. Joint estimation of pn code delay and multipath using the extended kalman filter. *IEEE Transactions on Communications*, 38(10) :1677–1685, 1999.
- [Jaz70] A. Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory*. Academic Press, 1970.
- [JKLP02] G.I. Jee, H.S. Kim, Y.J. Lee, and C.G. Park. A GPS C/A code tracking loop based on extended kalman filter with multipath mitigation. *Proc. of ION GPS-02, Portland*, pages 446–451, Sept. 24-27, 2002.
- [Kal60] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, pages 35–45, 1960.
- [Kap96] E.D. Kaplan. *Understanding GPS, Principles and applications*. Artech House Publishers, Boston-London, 1996.
- [KB61] R.E. Kalman and R. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 83(D) :95–108, 1961.
- [KG96] G. Kitagawa and W. Gersch. *Smoothness Priors Analysis of Time Series*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Kit96] G. Kitagawa. Monte carlo filter and smoother for non-gaussian non-linear state space models. *J. Comput. Graph. Statist.*, 5(1) :1–25, 1996.
- [Lav98] M. Lavielle. Optimal segmentation of random processes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(5) :1365–1373, 1998.



- [LC95] J.S. Liu and R. Chen. Blind deconvolution via sequential imputation. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 90(430) :567–576, 1995.
- [LW01] J. Liu and M. West. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, chapter Combined parameter and state estimation in simulation-based filtering. Springer, 2001.
- [Mat96] P. Mattos. Multipath elimination for the low-cost consumer gps. *Proc. of ION GPS-96, Kansas City*, Sept. 17-20, 1996.
- [MB99] J. MacCormick and A. Blake. A probabilistic exclusion principle for tracking multiple objects. *Proc. Int. conf. Comput. Vision*, pages 572–578, 1999.
- [MH79] J.B. Moore and W. Haim. Recursive prediction error methods for adaptive estimation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 9(4) :197–205, 1979.
- [MJC01] C. Macabiau, O. Julien, and E. Chatre. Use of multicorrelator techniques for interference detection. *Proc. of ION NTM*, 2001.
- [NHVC04] M. Najar, J.M. Huerta, J. Vidal, and A.J. Castro. Mobile location with bias tracking in non-line-of-sight. *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 04)*, 3 :956–961, Mai. 17-21, 2004.
- [Nor01] P. Nordlund. *Sequential Monte Carlo Filters and Integrated Navigation*. PhD thesis, Linköping University, Linköping, Sweden, 2001.
- [NV03] M. Najar and J. Vidal. Kalman tracking for mobile location in nlos situations. *Proc. of the 14<sup>th</sup> IEEE 2003 International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, 3 :2203–2207, Sept. 7-10, 2003.
- [Oud00] N. Oudjane. *Stabilité et Approximations Particulières en Filtrage non linéaire - Application au pistage*. PhD thesis, Université de Rennes 1, France, Dec 2000.
- [PADF02] E. Punskeya, C. Andrieu, A. Doucet, and W.J. Fitzgerald. Bayesian curve fitting with application to signal segmentation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(3) :747–758, 2002.
- [PS99] M.K Pitt and N. Shepard. Filtering via simulation : auxiliary particle filters. *Journal of the American Statistical Association*, 94 :590–599, 1999.
- [PSa96] B.W. Parkinson, J.J Spilker, and al. *Global Positioning System : Theory and Applications, Vol. 1 and 2*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, D.C., 1996.
- [Pun03] E. Punskeya. *Sequential Monte Carlo Methods for digital communications*. PhD thesis, University of Cambridge, United Kingdom, July, 2003.
- [Rad80] J.C. Radix. *Systèmes inertiels à composants liés (strap-down)*. Cépadués édition, Toulouse(France), 1980.
- [Sil86] B.W. Silverman. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall, 1986.

- [Sio91] G.M. Siouris. *Aerospace avionics systems, A modern synthesis*. Academic press, 1991.
- [Sou99] J. Soubielle. *Estimation de retards de signaux GPS en présence de multitrajets*. PhD thesis, Université de Cergy-Pontoise, France, Oct 1999.
- [SSH74] R.A. Singer, R.G. Sea, and K. Housewright. Derivation and evaluation of improved tracking filters for use in dense multitarget environments. *IEEE Transactions on Information Theory*, 20(4) :423–432, 1974.
- [Tan98] H. Tanizaki. Nonlinear and non-gaussian state-space modeling with monte carlo simulations. *Journal of econometrics*, 83 :263–290, 1998.
- [TDL03] J.Y. Tourneret, M. Doisy, and M. Lavielle. Bayesian off-line detection of multiple change-points corrupted by multiplicative noise. *Signal Processing*, 83(9) :1871–1887, 2003.
- [TMN98] P. Tichavsky, C. Muravchik, and A. Nehorai. Posterior cramer-rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46 :1386–1396, 1998.
- [VT68] H.L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*. Wiley and Sons, New-York, 1968.
- [WCG02] X. Wang, R. Chen, and D. Guo. Delayed-pilot sampling for mixture kalman filter with application in fading channels. *IEEE Trans. on signal processing*, 50(2) :241–254, 2002.
- [WH97] M. West and P.J. Harrison. *Bayesian forecasting and dynamic models, 2nd edition*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [Win00] J.O. Winkel. *Modeling and simulating GNSS signal structures and receivers*. PhD thesis, Universitat der Bundeswehr, Munchen, Germany, 2000.
- [WJ76] A.S. Willsky and H.L. Jones. A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 21 :108–112, 1976.



---

# Résumé

---

Longtemps l'apanage du domaine militaire, la navigation s'ouvre aujourd'hui au grand public et se décline en de nombreuses applications. Le développement de systèmes de positionnement fiables et robustes revêt un aspect stratégique notamment pour les applications critiques du point de vue sécurité (aviation civile). Cette thèse porte sur le GPS et les systèmes de navigation inertielle (INS) et explore deux axes de recherche conjoints pour améliorer les performances de navigation :

- les techniques de couplage, qui mettent à profit la complémentarité de différents systèmes de positionnement.
- le développement d'algorithmes plus robustes pour retrouver la trajectoire d'un mobile à partir d'un jeu de mesures capteurs.

Les filtres particulaires forment une alternative intéressante au classique filtre de Kalman car ils n'imposent aucune contrainte a priori sur le modèle de filtrage. Il s'agit de méthodes séquentielles de Monte Carlo qui font évoluer un ensemble de particules, chacune représentant un état possible du système à un instant donné. Nous avons pour ce travail étudié l'opportunité de les appliquer aux problèmes non linéaires de l'hybridation serrée et très serrée du GPS/INS. Une extension du filtre particulaire régularisé alliant robustesse et précision a été proposée à cet effet. Enfin, une seconde contribution de la thèse est le développement d'algorithmes de filtrage particulaires originaux, capables de détecter et estimer les perturbations (multitrajets, interférences) affectant les mesures GPS tout en poursuivant la trajectoire du véhicule.



---

# Abstract

---

Navigation science has long been the prerogative of the army but mass-market location-based services are now part of everyday life. The design of reliable and robust positioning systems is of the utmost importance especially for safety critical applications (for instance civil aviation). This thesis focuses on GPS and Inertial Navigation Systems (INS) and investigates two strands of research to enhance navigation performance. On the one hand, we have studied hybridization techniques, which take advantage of the complementarity of different navigation systems. On the other hand, this work is also dedicated to developing robust estimation algorithms to recover a mobile trajectory from a set of sensor measurements. Particle filters are an interesting alternative to the well-known Kalman filter since they can be applied to non linear and possibly non Gaussian state space models. They consist in sequentially propagating samples that represent a possible value of the state vector at each time instant. In this work, we have considered using Particle Filters to solve the non linear problems of GPS/INS tight and very tight couplings. Thus, we have proposed an extension to the well-known Regularised Particle filter, which exhibits good performance both in terms of robustness and accuracy. Finally, a second contribution of this work is the development of Particle Filtering algorithms to track a mobile trajectory while jointly detecting/estimating potential degradations on the GPS measurements.