



HAL
open science

Rhéologie des suspensions non-browniennes : modèle de contact lubrifié et simulations par éléments discrets

William Chèvremont

► **To cite this version:**

William Chèvremont. Rhéologie des suspensions non-browniennes : modèle de contact lubrifié et simulations par éléments discrets. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2020. Français. NNT : 2020GRALI009 . tel-02888343

HAL Id: tel-02888343

<https://theses.hal.science/tel-02888343v1>

Submitted on 30 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : MEP: Mécanique des fluides, Energétique, Procédés

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

William CHÈVREMONT

Thèse dirigée par **Hugues BODIGUEL**, Professeur,
Université Grenoble Alpes, et
codirigée par **Bruno CHAREYRE**, Maître de conférences,
Université Grenoble Alpes

préparée au sein du **Laboratoire Rhéologie et Procédés**
dans l'**École Doctorale I-MEP2 – Ingénierie – Matériaux,
Mécanique, Environnement, Energétique, Procédés,
Production**

Rhéologie des suspensions non-browniennes : modèle de contact lubrifié et simulations par éléments discrets

Thèse soutenue publiquement le **7 février 2020**
devant le jury composé de :

Madame Elisabeth LEMAIRE

Directrice de recherche, Laboratoire InPhyNi, Université Nice-Sophia
Antipolis, Présidente du jury

Monsieur Jean-Noël ROUX

Ingénieur Général des Ponts, des Eaux et Forêts, Laboratoire Navier,
Université Gustave Eiffel, Rapporteur

Monsieur Bloen METZGER

Chargé de Recherche, Laboratoire IUSTI, Aix-Marseille Université,
Rapporteur

Monsieur Hugues BODIGUEL

Professeur des Universités, Laboratoire Rhéologie et Procédés,
Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse



Remerciements

Une thèse de doctorat est un travail personnel, mais qui ne peut se réaliser sans l'aide d'une multitude de personnes, rencontrées tout au long de celle-ci. Les premiers mots de cette thèse sont tout naturellement pour mes chers directeurs de thèse, Hugues Bodiguel et Bruno Chareyre, qui m'ont confié ce travail de thèse et qui ont acceptés de me guider et de me superviser tout au long de ces trois années (et demi) passées au laboratoire. Je tiens à les remercier pour leur implication, leur disponibilité, leur sympathie, mais aussi et surtout pour la curiosité scientifique dont ils ont fait preuve et qui m'a poussé à toujours me dépasser pour aller au fond des choses. Ce fut un réel plaisir de travailler avec eux.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de leur présence et pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux. J'exprime toute ma gratitude à M. Bloen Metzger et M. Jean-Noël Roux, qui ont acceptés de rapporter ce travail de thèse. Je remercie également sincèrement Mme Elisabeth Lemaire d'avoir accepté de présider mon jury, et pour les nombreuses discussions scientifiques que nous avons eues à chaque rencontre, que ce soit lors de conférences ou aux journées jeunes rhéologues. Je suis également reconnaissant envers M. Romain Mari et M. Guillaume Chambon, qui ont fait partie de mon comité de suivi de thèse, et avec qui les discussions sont toujours riches scientifiquement.

Ce travail de simulation numérique n'aurait pas pu être mené à bien sans la quantité astronomique (du point de vue de la DEM) d'heure-cpu disponible pour ce projet. Je remercie donc l'UMS Gricad et plus particulièrement Pierre-Antoine Bouttier et Rémi Cailletaud pour l'aide précieuse qu'ils m'ont fournie pour la mise en place du système de simulation sur les différentes machines de Gricad.

Je remercie l'équipe administrative et technique du Laboratoire Rhéologie et Procédé : Nadia El Kissi, François Bergerot, Louise Infuso et Sylvie Garofalo pour leur accueil, leur disponibilité, leur bienveillance, et leur bonne humeur permanente. Hélène Gaillard (bonne retraite à toi!), Vincent Verdoot (Fais briller la Belgique encore longtemps au laboratoire!), Fred Huguenel, Didier Blésès, Mohammed Karrouch, Eric Faivre. Tous ces temps de midi et pauses café à discuter technique, cuisine, montagne et secours égayaient les journées.

Je veux également remercier Clément de Loubens, Albert Magnin, Marc Leonetti, Denis Roux, Emeline Talensier, Fred Pignon, Nicolas Hengl, Francois Caton, Guillaume Maîtrejean, chercheurs au laboratoire, pour toutes ces discussions scientifiques, sur l'enseignement ou encore d'autres sujets beaucoup plus légers tel que la neige en montagne ou l'eau dans les canyons. L'ambiance et l'esprit d'équipe du laboratoire ne seraient pas les mêmes sans vous.

L'esprit du laboratoire serait complètement différent sans les doctorants, postDocs et autres CDDs. Je tiens donc à témoigner toute ma reconnaissance à mes chers collègues de bureau : Ayoub, toutes ces pauses café et ces vanes entre Belges et Arabes, Alexis et Candice, deux compères indissociables de la bonne humeur qui régnait dans le bureau, toutes les discussions qui se terminaient plus ou moins loin suivant les jours, les (trop ?) nombreuses sorties dans les bars. J'ai apprécié la moindre minute passée avec vous deux, et cette époque d'insouciance et de légèreté me manque, vous êtes la famille. Nori, trop peu de temps passé ensemble. Khawla, et Adriana, les "Maman" et "Mamassita" du bureau. Les futurs docteurs, Mathilde, Alice, Hanna, Youness, ce fut de bons moments passés avec vous. Gardez toujours courage, car la fin vient un jour, et plus vite qu'on y pense.

J'ai une pensée pour toutes les personnes de l'"équipe" avec lesquelles j'ai travaillé au quotidien : Antoine, Revaz, Mehdi, Martial, Lydia, Kaili. Merci pour votre implication dans tous vos sujets, qui m'ont permis de toucher du doigt de multiples facettes de la recherche. J'ai apprécié tous ces moments de recherche de solution et de résolution de problèmes. Bien sûr, je n'oublie pas tous les autres qui ont contribué à l'ambiance générale du labo : Hugues et Héloïse, que de bons moments passés en montagne ! Diego, Ouattara, Moctar, Clément, David.

Au cours de ces 3.5 années passées à Grenoble, j'ai aussi pu rencontrer de belles personnes au sein du GUCEM. Que ce soit dans l'eau, sur rocher, sous terre ou dans la neige, des plans les plus simples aux projets les plus fous, ce fut un réel plaisir de partager ces moments avec vous. Mathoche, Thomas, Océane, SimOn, Kira, Sébastien, Adrien, Léo, Yannis, Coline, Benoît, Emilie, Geoffrey, Lionel, Solveig, Sylvain, Jean-Phi, Romain et bien sûr notre maître à tous, Manu. Bien sûr, je n'oublie pas mon groupe du WEMA, réputé dans le monde entier pour ses randos/aligot (qui file, si si, on vous promet !), Clémence, Thibaud, Virgile, Lauriane, Antoine.

Un des éléments essentiels de ma construction pour en arriver jusqu'ici me provient du scoutisme. De nombreux animateurs ont jalonné ma jeunesse et ont permis de me faire grandir. Avec le recul, je me rends compte un peu plus chaque jour de ce qu'ils m'ont donné afin de le faire fructifier. Je leur en suis grandement reconnaissant. Recevoir c'est bien, donner c'est mieux. J'ai également donné de mon temps pour l'animation des jeunes, et tout comme la thèse, cela ne se fait pas tout seul. Louis, Nico, Simon, Pilou, Esther, Boris, Kim, Vic, Lucie, Débo, Val, Greg, Antoine, Julien, Manon, Quitter l'unité scout et guide de Herve fut vraiment un déchirement. J'aurais voulu passer encore du temps avec vous. Certains choix sont cruels, et choisir, c'est renoncer.

Ce n'est pas parce qu'ils sont loin des yeux qu'ils ne sont pas dans mon cœur, et c'est toujours avec joie que je les retrouve lorsque je remonte dans le plat pays. Clarice, Clément, Guillaume, Elia, Keke, Ludivine, Maxime, une belle bande de copains, toujours présents pour faire la fête. Vous me manquez les gars/filles !

Alexandrine, tu es l'amie de toujours, celle que je peux appeler à n'importe quelle heure du jour et surtout de la nuit pour partager mes joies, mais aussi mes peines, ou simplement parler de tout et de rien. Croit en toi et en tes capacités, mais surtout, continue à être toi.

Enfin, en dernier mais non des moindres, je veux remercier ma famille, qui même de loin m'ont toujours soutenu, et qui sont toujours là dans les moments importants. Maman, Papa, Esther, Etienne, Mamy, Bonne Maman, Claire, Parrain, Marraine, tous les discours que je pourrais tenir dans ces quelques lignes seront toujours bien en dessous de ce que je ressens pour vous et de la gratitude que je souhaiterai exprimer. Je ne vais donc m'en tenir qu'à un mot. Merci.

Abstract

Flow properties (i.e. rheology) of suspensions depend upon constituent phases and interactions between them. For this kind of materials, stress has multiple origins : contact between particles, fluid flow and fluid-particles interactions. In this work, a new lubricated contact model has been developed and validated on several 2-particles test cases. This model regularizes singularity at contact, and takes care of very small gaps between particles. The numerical scheme developed ensure unconditional stability on time integration. Especially, this model is able to simulate two perfectly smooth particles. This model has been introduced into a DEM formulation and used to simulate simple shear experiments on suspensions. Flow behaviours agrees account quantitatively for available experimental data. The role of contacts between particles and of the friction coefficient have been extensively studied. It leads to a new model for the suspension rheology and for the jamming volume fraction. The model has also been used to study viscous resuspension, which enables the determination of the normal components of the particle stress.

Key words : rheology, suspensions, discrete element method, lubricated contact model, viscous resuspension

Résumé

Les propriétés d'écoulement (i.e. la rhéologie) des suspensions dépendent essentiellement des différentes phases constituantes, ainsi que des interactions entre celles-ci. Dans ces milieux multiphasiques, la contrainte est d'origine multiple : interactions de contact, phase fluide ainsi qu'interaction fluide-particules. Au cours de ce travail de thèse, un modèle original de contact lubrifié a été développé, et a été validé sur différents cas-test à deux particules. Il a pour propriétés de régulariser la singularité présente au contact entre deux particules, et de prendre en compte des interstices extrêmement faibles. Le schéma de résolution numérique développé assure la stabilité numérique au cours de la résolution. En particulier, l'utilisation de ce modèle rend possible la simulation de suspensions de particules parfaitement lisses. Ce modèle a été introduit dans une formulation par éléments discrets (DEM) et utilisé pour la simulation d'expériences de rhéologie tel que le cisaillement simple, où un accord quantitatif avec les expériences est obtenu. Le rôle des contacts et plus particulièrement le rôle du coefficient de friction sur la rhéologie a été étudié. Ceci a permis notamment de proposer un nouveau modèle permettant de décrire la rhéologie des suspensions, à l'aide de la décomposition des contributions de contact et des forces de lubrification à la contrainte de cisaillement. Ensuite, il a été utilisé afin de simuler des expériences de resuspension visqueuse, qui conduisent à une modélisation des contraintes normales particulières.

Mots-clé : rhéologie, suspension, méthode des éléments discrets, modèle de contact lubrifié, resuspension visqueuse

Table des matières

Remerciements	i
Abstract	v
Résumé	v
Table des matières	vii
1 Introduction	1
1.1 Introduction générale	2
1.2 Concepts et définitions	5
1.2.1 Fraction volumique	5
1.2.2 Interactions entre les particules	5
1.2.3 Nombres adimensionnels	6
1.3 Rhéologie	8
2 Matériel et méthodes	11
2.1 Simulation DEM	12
2.1.1 Cycle de calcul de la DEM	12
2.1.2 Conditions aux limites	12
2.1.3 Lois de mouvement	13
2.1.4 Condition de stabilité	13
2.1.5 Calcul de la contrainte	14
2.1.6 Lois d'interactions	14
2.2 Article : Lubricated contact model for numerical simulations of sus- pensions	15
2.3 Conclusion	26
3 Rhéologie des suspensions rugueuses	27
3.1 Positionnement de l'étude	28
3.2 Article : Quantitative study of the rheology of frictional suspensions : Influence of friction coefficient in a large range of viscous numbers . .	29
3.2.1 Résultats complémentaires	43
3.3 Microstructure de la suspension cisailée	46
3.3.1 Distributions des grandeurs de structure	48
3.3.2 Contributions à la contrainte de cisaillement	50

3.3.3	Contributions aux contraintes normales	54
3.4	Conclusion	59
4	Viscosité normale et resuspension visqueuse	61
4.1	Article : Numerical simulation of hard sphere suspensions : normal viscosity and viscous resuspension	62
5	Conclusions et perspectives	85
5.1	Conclusion générale	86
5.2	Perspectives	88
5.2.1	Simulations DEM	88
5.2.2	Simulations des interactions	89
5.2.3	Mesure des interactions	89
5.2.4	Modèle de fluide	90
	Publications et travaux associés	91
	Table des figures	93
	Liste des tableaux	95
	Bibliographie	97

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre introductif présente les généralités à propos des suspensions non Browniennes considérées au cours de cette thèse, ainsi qu'une série de concepts et définitions transversaux à la thèse. Une revue bibliographique plus détaillée est effectuée dans chaque article structurant cette thèse.

Sommaire

1.1	Introduction générale	2
1.2	Concepts et définitions	5
1.2.1	Fraction volumique	5
1.2.2	Interactions entre les particules	5
1.2.3	Nombres adimensionnels	6
1.3	Rhéologie	8

1.1 Introduction générale

Les suspensions, fluides multiphasiques comprenant des phases solides et fluides, sont présentes dans une large variété d'écoulements naturels, industriels ou biologiques, à des échelles aussi variées que le nanomètre pour des suspension colloïdales jusqu'à la dizaine de mètres pour des écoulements de lave torrentielles. Malgré leurs diverses applications, la compréhension de certains phénomènes liés à l'écoulement de suspensions échappent encore aujourd'hui à notre compréhension, et font l'objet de nombreuses recherches. Lors de l'étude des suspensions, il convient de s'intéresser aux phénomènes dans la phase solide, dans la phase fluide et au complexe couplage entre ces deux phases, chacun de ces constituants intervenant de façon non-triviale. L'analyse des différents phénomènes fait intervenir plusieurs échelles de tailles, ce qui rend très difficile une analyse globale.

Une des clés de la compréhension des écoulements de tels fluides et leurs phénomènes associés (migration, bouchage, ségrégation) dans des milieux naturel (tel les coulées de boues, les glissements de terrains, l'érosion, le transport de sédiments), industriels (tel le béton, les cosmétiques, les résines composites) ou biologiques (le sang), est la réponse du fluide au cisaillement. En effet, la réponse du fluide au cisaillement, appelée viscosité, conditionne l'écoulement qui en résulte, ou encore la stabilité du milieu. Le domaine d'étude de ces phénomènes est la rhéologie des suspensions.

La rhéologie des suspensions est étudiée depuis plus d'un siècle. Un des premier travaux dans ce domaine a été réalisé par Einstein [26], où il dérive la viscosité de suspensions infiniment diluées, sur base des équations de Stokes. Ceci donne le terme du premier ordre de la viscosité des suspensions en fonction de la fraction volumique. Ensuite, Frankel and Acrivos [28] proposent une autre dérivation dans la limite cette fois des suspensions denses, donc proche de la fraction volumique maximale. Ils se basent cette fois sur la l'approximation de la lubrification, qui donne les forces fluides sur les particules lorsque celles-ci sont proches du contact. Ces équations sont singulières et divergent au contact.

La rhéologie des suspensions montre des comportements très différents sur des systèmes variés. Les systèmes simples de suspensions non-browniennes montrent généralement une viscosité apparente qui ne varie pas ou peu avec le taux de cisaillement. Le comportement est souvent légèrement rhéofluidifiant. D'autre part, lorsque les interactions entre les particules solides deviennent non négligeable, des effets plus importants peuvent se manifester. Les microgels sont une forme de suspension, avec des interactions attractives entre les particules. Ainsi, même à faible concentration, une contrainte minimum est nécessaire à la mise en mouvement afin de briser ces forces. D'autre part, des interactions répulsives peuvent expliquer les phénomènes de rhéoépaississement. À faible contrainte, les forces répulsives empêchent les contacts entre les particules solides. En augmentant la contrainte, il est possible de forcer les particules au contact, ce qui a pour effet d'augmenter la viscosité apparente [52].

Les expériences de rhéométrie classique consistent à imposer le cisaillement dans un volume constant de fluide, et de mesurer la contrainte nécessaire à l'application de ce cisaillement. La déduction de la viscosité se fait en divisant la contrainte par

le taux de cisaillement. Dans le cas des suspensions, la viscosité apparente (η_{app}) est divisée par la viscosité du fluide (η_f), et les analyses sont réalisées sur la grandeur adimensionnée, appelée viscosité relative (η_r). Les mesures réalisées et publiées dans la littérature sur des suspensions de sphères dures montrent que la viscosité relative diverge pour des fractions solides allant de $\phi = 0.55$ à $\phi = 0.62$. Au delà de la fraction volumique de divergence ϕ_m , les mesures ne sont plus réalisables, car le matériau ne coule plus. La réalisation de telles mesures permet la réalisation de courbes décrivant la viscosité relative en fonction de la fraction volumique $\eta_r(\phi)$. Dans le cas des suspensions, il est possible de réaliser un autre type de mesures rhéométriques, qui sont cette fois ci non plus à volume imposé mais à pression imposée [8]. L'expérience consiste cette fois ci à imposer la pression sur la phase solide uniquement, via une grille, en laissant libre la fraction volumique. Cette méthode de mesure rhéométrique permet entre autre de réaliser des mesures en faisant varier la fraction volumique en jouant sur la pression imposée, et d'approcher plus finement la fraction volumique de divergence. Ce type de mesures permet l'introduction d'un nombre adimensionnel I_v , le nombre visqueux, qui compare l'échelle des contraintes fluides par rapport à la pression de confinement appliquée sur la phase granulaire. La rhéologie sera ensuite décrite sous la forme de fonctions $\mu(I_v)$ et $\phi(I_v)$, qui sont respectivement le rapport de la contrainte de cisaillement à la pression imposée, et la variation de la fraction volumique en fonction de ce nombre visqueux. Ces lois de comportements permettent une description macroscopique du comportement des suspensions en cisaillement, mais ne disent rien du lien tenu qui existe entre ces propriétés macroscopiques et ce qu'il se passe à l'échelle microscopique. La réponse à cette question, d'importance fondamentale, est difficile à formuler expérimentalement. L'utilisation d'outils tels que les simulations numériques permettent aujourd'hui l'étude de ces phénomènes, en introduisant un modèle de contact à l'échelle microscopique, et en simulant la réponse macroscopique sous cisaillement.

La simulation numérique des suspensions peut se faire selon plusieurs approches. Il est possible de faire de la simulation directe (DNS, *Direct Numerical Simulations*), en introduisant l'ensemble des comportements des différentes phases suivant un modèle continu, élasticité linéaire pour la phase solide et équations de Navier-Stokes pour la phase fluide. Ce type d'approche nécessite un maillage très fin et, en pratique, dont la taille de maille tend vers 0, certains phénomènes se trouvant toujours sous l'échelle de la taille du maillage et doivent être corrigés par l'introduction des forces de lubrification, pour décrire l'effet du fluide dans l'interstice entre deux particules. Ce type de simulation est très coûteux en temps de calcul. D'autres approches qui couplent la résolution du fluide par DNS et la résolution du solide où les particules sont discrétisées. Ces approches incluent la *Force Coupling Method* (FCM) [64, 85], la *Fictitious Domain method* (FD) [30] ou encore la méthode *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH) [75, 82]. Ces méthodes sont basées principalement sur la résolution des équations du fluide, et passent la majorité du temps CPU à résoudre la partie fluide. Cependant, plusieurs auteurs ont montrés que, dans la gamme des suspensions denses, c'est la partie solide qui a la plus forte contribution à la contrainte, et que le fluide peut être représenté uniquement par les forces de lubrification [3, 18, 33, 52, 54], laissant le fluide non résolu et ces méthodes permettent une efficacité du temps de

calcul bien supérieur, les équations restantes à résoudre étant plus simples. Ceci mène à une autre classe de simulations, basées sur une représentation discrète, à l'échelle des particules de la cellule de simulation. Historiquement, les premières simulations numériques discrètes des suspensions sont décrites par la *Stokesian Dynamics* [10]. Ces simulations utilisent des matrices de résistances et de mobilité des particules définies par Jeffrey and Onishi [38, 39]. Dans ce type de simulations, l'ensemble des forces fluides, à longue portée et de lubrification sont prises en compte. La résolution du champ de pression dans le cas d'un fluide incompressible est un problème connu pour être raide et complexe, donc nécessitant un temps de calcul non négligeable. Cependant, pour les mêmes raisons que citées précédemment, il est possible de négliger certains termes de la dynamique Stokesienne, en supposant que le fluide suit le mouvement des particules à grande déformations [3, 9, 10, 25], seuls les termes de lubrification sont donc conservés. Ces simplifications mènent à une description encore plus simple du milieu dans les simulations numériques, avec uniquement des forces entre plus proche voisins, que ce soit les forces de contact ou de lubrification. L'approche adoptée peut donc être plus proche de ce qui est fait dans des milieux granulaires, aussi appelée approche solide (ie. la suspension est vue comme des particules avec un fluide qui les entourent plutôt que un fluide avec des particules dedans). La méthode utilisée dans cette thèse est donc la *Discrete Element Method*, méthode des éléments discrets, DEM, historiquement adoptée pour des milieux granulaires secs. Cette méthode permet la prise en compte des mêmes phénomènes que la dynamique Stokesienne, notamment des forces fluides à longue portée via un couplage poromécanique [12, 53]. Cependant, l'introduction des forces de lubrifications dans ce type de simulations n'est pas trivial, car les expressions de celles-ci divergent au contact entre les deux particules. Or, il a été montré expérimentalement que le contact entre les particules existe [22, 55, 64].

Le premier objectif de ce travail de thèse sera donc la détermination d'un modèle de contact lubrifié qui permet de prendre en compte les interactions de lubrification, tout en permettant d'avoir du contact. La stabilité des schéma de résolutions numériques dépendant des raideurs et viscosités, l'introduction de termes dont la viscosité peut tendre vers l'infini devra être gérée. Ensuite, ce modèle de contact sera utilisé afin de simuler des expériences de rhéologie en cisaillement simple et de resuspension visqueuses, afin de permettre une description globale de la rhéologie des suspensions. Ces résultats numériques devront être confrontés à des données expérimentales, afin de valider l'approche retenue. Une fois l'approche validée, les résultats issus des simulations pourront être analysés et interprétés, afin d'améliorer la compréhension fine des phénomènes.

Ce mémoire de thèse est organisé autour de 3 articles structurant chacun des chapitres. Tout d'abord, un chapitre de matériel et méthodes décrivant les généralités sur les simulations élément discrets, qui inclus l'article [17], soumis à la revue *Powder Technology* décrivant le modèle de contact lubrifié ainsi que les résultats obtenus sur les cas-test. Ensuite, un chapitre de résultats sur la rhéologie des suspensions rugueuses, autour d'un article [18] publié dans la revue *Physical Review Fluids*, suivi de résultats complémentaires sur des simulations à bas coefficient de frottement ainsi que sur la structure des suspensions cisillées. Enfin, un article en préparation présentant

les résultats des simulations sur la resuspension visqueuse. Un chapitre de conclusions générales et perspectives vient ensuite clore ce manuscrit.

1.2 Concepts et définitions

Une suspension est un mélange de grains (phase solide) immergés dans un fluide (mono ou multiphasique). Les grains interagissent entre eux via des interactions de contact frottants et via le fluide par des interactions de lubrification. Le fluide présente un écoulement entre les pores formés par les grains. La concentration de phase fluide est décrite par la fraction volumique ϕ .

1.2.1 Fraction volumique

La fraction volumique ϕ , aussi appelée fraction solide est décrite localement par la proportion de phase solide dans le volume. D'un point de vue des milieux continus, il s'agit de la concentration volumique des grains dans un volume élémentaire.

$$\phi = \frac{\text{Volume de la phase solide}}{\text{Volume total}} = \frac{V_s}{V_T} \quad (1.1)$$

La fraction solide est la grandeur principale qui permet de décrire les suspensions. Les suspensions forment un régime dilué, sous une fraction volumique pour laquelle les forces fluides sont prédominantes, et un régime concentré lorsque ce sont les forces solides qui dominent. La fraction volumique varie de 0 à ϕ_m , fraction volumique de divergence de la viscosité, à partir de laquelle il n'est plus possible de faire couler le fluide. Cette fraction volumique n'est pas fixée universellement, et peut dépendre de plusieurs paramètres. Cette grandeur se situe sous la fraction volumique d'empilement maximum pour des sphères, et est un paramètre important dans la majorité des modèles décrivant la viscosité des suspensions [8, 31, 42, 45, 52]. Cette grandeur peut être mesurée expérimentalement ou déduite de simulations et varie entre 0.56 et 0.64.

1.2.2 Interactions entre les particules

Au sein d'une suspensions, 2 types d'interactions sont mises en jeu : les interactions hydrodynamiques et les interactions de contact frictionnels [20].

Les interactions hydrodynamiques sont décrites par les équations de Stokes sur la surface des particules. Elles sont classées selon 3 types : les forces de traînées, forces qui sont appliquées sur la particule par le fluide. Ces forces et couples sont proportionnels à la différence de vitesse entre la particule et le fluide ; les forces d'interactions à longue portée, qui traduisent le fait que deux particules se "voient" à travers le fluide à longue distance. Les forces de lubrifications, qui sont la dérivation asymptotique des équations de Stokes lorsque la distance entre deux particule tend vers 0. Ces forces sont proportionnelles à la vitesse relative des particules et inversement proportionnelles à la distance qui sépare les surfaces. Les forces de lubrifications présentent donc une singularité au contact qui, en théorie, empêche tout contact solide entre deux sphères parfaitement lisses dans un fluide visqueux. Les forces et

couples de lubrifications se décomposent suivant des forces normales et tangentielles, et des couples de roulement et de torsions. Les forces de lubrifications s'opposent toujours au mouvement relatif des particules.

Les interactions de contact frictionnelles sont des interactions qui existent lorsque les particules entrent en contact, et sont dérivées des théories sur l'élasticité des particules. Ces forces répulsives empêchent l'interpénétration d'une particule dans l'autre. Lorsqu'un mouvement relatif tangentiel est présent, des forces de contacts tangentielles s'opposent au déplacement du point de contact. Le modèle le plus simple des forces tangentielles prévoit que celles-ci sont limitées par une fraction des forces de contact normales, appelée coefficient de friction.

1.2.3 Nombres adimensionnels

La dynamique des écoulements de suspensions met en jeu une série de compétitions entre différentes forces sur les particules. Les nombres adimensionnels effectuent des comparaisons qui permettent de définir les régimes d'écoulement des suspensions. Ce sont ces nombres qui permettent également de négliger ou non telle ou telle autre contributions.

Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds, \mathcal{Re} compare les forces d'inerties aux forces visqueuses, et définit le régime d'écoulement laminaire à faible nombre de Reynolds et turbulent à haut nombre de Reynolds. Dans le cadre des suspensions, on définit le nombre de Reynolds particulaire, \mathcal{Re}_p , qui prend la taille des particules comme échelle caractéristique de longueur.

$$\mathcal{Re}_p = \frac{\rho_f \dot{\gamma} a^2}{\eta_f} \quad (1.2)$$

Où ρ_f est la masse volumique du fluide, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement, a le rayon des particules et η_f la viscosité du fluide.

Dans le cadre de l'étude de la rhéologie des suspensions, le nombre de Reynolds est maintenu faible, ce qui permet de négliger les contributions inertielles à la contrainte. Dans ce régime, les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Stokes, depuis lesquelles sont dérivées les forces de lubrifications :

$$\eta_f \nabla \cdot \mathbf{v}_f = \nabla p - \rho_f \mathbf{g} \quad (1.3)$$

avec \mathbf{v}_f la vitesse du fluide, p la pression et \mathbf{g} la gravité.

Nombre de Stokes

Le nombre de Stokes, \mathcal{St} caractérise l'inertie du fluide à l'échelle des particules. Il est le rapport entre l'énergie cinétique de la particule et l'énergie dissipée par frottement visqueux avec le fluide.

$$\mathcal{St} = \frac{a^2 \rho_f \dot{\gamma}}{\eta_f} \quad (1.4)$$

Lorsque $St \ll 1$, le temps de réponse de la particule est faible devant le temps caractéristique de l'écoulement, et donc l'inertie de la particule peut être négligée devant le terme visqueux. Dans les simulations, le nombre de Stokes est de l'ordre de 10^{-10} à 10^{-4} .

Nombre de Péclet

Le nombre de Péclet, $\mathcal{P}e$ est le rapport entre le temps caractéristique du transfert par convection et le temps caractéristique du transfert par diffusion. Il quantifie l'importance du mouvement brownien sur le déplacement des particules.

$$\mathcal{P}e = \frac{6\pi\eta_f a^3 \dot{\gamma}}{k_B T} \quad (1.5)$$

Avec $k_B T$, l'énergie thermique. Le nombre de Péclet est d'une importance primordiale dans la rhéologie des suspensions. En effet, il définit l'importance relative des effets browniens ($\mathcal{P}e \ll 1$), dont la résultante est une marche aléatoire des particules, sur les effets hydrodynamiques, donc où les trajectoires sont déterministes. Dans ce mémoire, on s'intéresse uniquement aux suspensions non-browniennes ($\mathcal{P}e \gg 1$). Les suspensions non-browniennes s'entend généralement pour des tailles de particules supérieures à $10\mu m$, et les suspensions colloïdales pour des tailles inférieures au micron.

Nombre Inertiel

Le nombre Inertiel, I est défini dans les milieux granulaires comme étant l'importance des effets inertiels par rapport au taux de déformation. Il s'exprime comme le rapport entre le temps caractéristique des déformations $1/\dot{\gamma}$ par rapport à un temps de réarrangement microscopique $2a\sqrt{\rho/P_p}$ [67].

$$I = 2a\dot{\gamma}\sqrt{\frac{\rho}{P_p}} \quad (1.6)$$

Avec P_p la pression de confinement appliquée sur la suspension, ρ la masse volumique des particules. Le nombre inertiel définit le régime d'écoulement du milieu granulaire. Lorsque I tend vers 0, l'écoulement est quasi-statique et lorsque $I > 1$, l'écoulement est agité et peut s'apparenter à un gaz. Dans ce mémoire, l'écoulement sera toujours quasi-statique, avec un ordre de grandeur typique de 10^{-3} .

Nombre visqueux

Le nombre visqueux, I_v est défini dans les suspensions comme étant l'importance des effets visqueux par rapport au taux de déformation. Il s'exprime comme étant le rapport de la contrainte caractéristique visqueuse par rapport à la pression de confinement.

$$I_v = \frac{\eta_f \dot{\gamma}}{P_p} \quad (1.7)$$

Ce nombre visqueux est celui qui est utilisé pour décrire les lois rhéologique des suspensions. Celui-ci varie dans les résultats présentés de 10^{-4} à 10.

Nombre capillaire

Le nombre capillaire, $\mathcal{C}a$ est défini dans le domaine des phénomènes interfaciaux comme étant la concurrence des effets visqueux par rapport à l'élasticité de l'interface. Dans le cadre des suspensions de sphères déformables, la déformabilité de la surface est due à des effets de volumes et non à des effets de surface. Ce nombre est donc utilisé par analogie par certains auteurs [34] avec une définition proche, faute d'un autre nombre plus pertinent.

$$\mathcal{C}a = \frac{\eta_f \dot{\gamma}}{E} \quad (1.8)$$

Où E est le module d'élasticité de la sphère. Dans le cadre de ce travail, l'étude cherche à établir la rhéologie de suspensions de sphères indéformable. Le nombre capillaire est donc maintenu faible.

1.3 Rhéologie

La rhéologie est le domaine de la physique qui étudie le comportement mécanique des fluides. Dans une grande partie des cas, l'étude porte sur le comportement du fluide en cisaillement. On cherche dans ce cas à étudier la relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation.

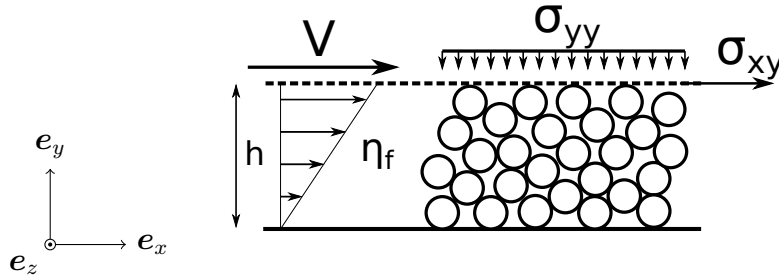


FIGURE 1.1 – Schéma d'une cellule de cisaillement à pression granulaire imposée

La figure 1.1 représente une cellule de cisaillement à pression particulaire imposée σ_{yy} . C'est à dire, que la pression est imposée sur la suspension via une grille, qui laisse passer le fluide mais pas les particules. La fraction volumique reste donc libre. Dans les expériences à volume imposé, la grille est remplacée par une paroi imperméable. h est la hauteur de la cellule, V est la vitesse de déplacement de la paroi supérieures selon e_x . σ_{xy} est la contrainte de cisaillement appliquée. Le champ de vitesse moyen s'écrit $\mathbf{v} = (Vy/h, 0, 0)$. le champ de déformation est défini comme :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{dv_x}{dy} & 0 \\ \frac{dv_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Le taux de déformation $\dot{\gamma}$ est défini par :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{E} : \mathbf{E}} = \frac{dv_x}{dy} \quad (1.10)$$

Et donc dans le cas de la figure 1.1, $\dot{\gamma} = V/h$. Les contraintes sont elles données par le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

La viscosité en cisaillement est définie comme $\eta = \sigma_{xy}/\dot{\gamma}$. La rhéologie cherche donc des lois constitutives du type $\boldsymbol{\sigma}(\dot{\gamma})$. Dans le cadre de la rhéologie des suspensions, on cherche également la dépendance en ϕ , ou de façon équivalente à la pression de confinement suivant que l'expérience se déroule à volume imposé ou à pression granulaire imposée. On cherchera donc des lois constitutives $\eta_r(\phi)$ si l'on s'intéresse uniquement à la viscosité, ou de façon plus générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{yy} \begin{pmatrix} \lambda_1(I_v) & \mu(I_v) & 0 \\ \mu(I_v) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(I_v) \end{pmatrix} \\ \phi(I_v) \end{array} \right. \quad (1.12)$$

avec la définition de I_v , on remarque que $\eta_r(\phi) = \mu/I_v$.

Il est à noter que la rhéologie ne se limite pas aux écoulements de cisaillement. D'autres géométries d'écoulements tels que des écoulements extensionnels ou encore élongationnels permettent de mesurer d'autres viscosités.

Chapitre 2

Matériel et méthodes

Ce chapitre présente le processus de simulation DEM utilisé au cours de cette thèse. Le modèle de contact lubrifié, présenté sous la forme d'un article soumis dans la revue Powder Technology est ensuite détaillé. Celui-ci introduit d'une part le modèle de contact utilisé, et d'autre part, deux cas-test qui vérifient la robustesse et la fidélité de résultats obtenus par le modèle comparés aux résultats théoriques.

Sommaire

2.1	Simulation DEM	12
2.1.1	Cycle de calcul de la DEM	12
2.1.2	Conditions aux limites	12
2.1.3	Lois de mouvement	13
2.1.4	Condition de stabilité	13
2.1.5	Calcul de la contrainte	14
2.1.6	Lois d'interactions	14
2.2	Article : Lubricated contact model for numerical simulations of sus- pensions	15
2.3	Conclusion	26

2.1 Simulation DEM

La méthode des éléments discrets (DEM, discrete element method) figure parmi les méthodes les plus efficaces lorsqu'il s'agit de simuler un grand nombre de particules dans un volume fini. Cette méthode consiste à modéliser le milieu à l'échelle des grains qui le compose. Ceux-ci sont donc représentés par leur forme, leur position (du centre de masse et l'orientation), leur vitesse (en translation et rotation) ainsi que des propriétés matérielles (masse volumique, propriétés d'interaction, ...). La DEM a été introduite par Cundall and Strack [21] afin de résoudre des problèmes de mécanique des roches. Elle est particulièrement adaptée à l'étude des milieux granulaires pour des matériaux indéformables, dont la représentation discrète de chacun des grains suffit pour modéliser la dynamique. Pour l'étude des suspensions, il est nécessaire de prendre en compte la phase fluide. Celle-ci a été introduite dans le modèle par plusieurs moyens : L'écoulement du fluide dans les pores créés par la matrice [12], ainsi que les forces de lubrification entre les particules [53]. Cependant, nous avons montré que les forces de lubrifications sont suffisantes pour décrire l'effet du fluide sur la phase particulaire (Chèvremont et al. [18] à la section 3.2). L'effet du fluide a donc été ajouté uniquement sous la forme de forces de lubrification entre les particules. La loi de contact lubrifié est décrite dans la section 2.2.

2.1.1 Cycle de calcul de la DEM

Le cycle de calcul de la DEM est relativement simple. Il est constitué de deux grandes étapes : les forces sont calculées sur chacune des particules à un instant t (lois d'interactions), celles-ci sont ensuite intégrées sur un intervalle de temps Δt afin de déterminer la vitesse et la position en $t + \Delta t$. Cependant, au cours d'une simulation comprenant plusieurs milliers de particules, considérer l'ensemble des interactions possibles entre chacune des particules est très coûteux et la majorité des interactions sont inutiles, puisque chaque particule n'interagit qu'avec ses plus proches voisins (en tout cas pour les granulaires secs). Il est donc utile d'ajouter une étape de détection de collision qui pré-détermine si les particules interagissent ou non. Différents algorithmes existent, et celui qui est implémenté dans Yade-DEM est basé sur la collision de boîtes englobantes dont les cotés sont alignés sur les axes (Axis Aligned Bounding Box, AABB). [81].

2.1.2 Conditions aux limites

Un problème délicat à traiter dans les simulations est la question des conditions aux limites. Pour le type de simulation qui nous intéresse des conditions aux limites inappropriées peuvent conduire à des comportements non désirables. Par exemple, limiter le domaine par une paroi plane peut mener à une organisation du milieu granulaire au voisinage de cette paroi (voir section 3.2.1), par la création d'une monocouche de grains [31]. Or, on suppose que le volume simulé est suffisamment grand pour être représentatif de la suspension. Il faut donc soit rendre négligeable cette partie du volume simulé, soit éviter cette organisation. Ceci est fait par l'introduction

d'une légère polydispersité du rayon des sphères, avec un écart-type de 5%, et en considérant des conditions aux limites périodiques. Dans la formulation DEM, cela signifie que les particules présentes dans le volume de simulation représentent une infinité de particules par translation d'un nombre entier de période. Ces conditions aux limites permettent donc de simuler un milieu virtuellement infini. Dès lors, il n'est plus possible d'imposer des efforts via des corps extérieurs. Le champ de déformation sera donc imposé par déformation de la cellule périodique. Les résultats présentés à l'article 3.2 sont réalisés dans une cellule bipériodique avec des parois. Les autres résultats sont réalisés dans une cellule tripériodique.

2.1.3 Lois de mouvement

Chacune des particules possède une position \mathbf{x}_i , ainsi qu'une vitesse de rotation angulaire $\boldsymbol{\omega}_i$. Le rôle des lois de mouvement est de mettre à jours ces grandeurs à chaque itération. Pour cela, les équations classiques de la mécanique sont intégrées :

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \quad (2.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{J}_i^{-1} \mathbf{T}_i \quad (2.2)$$

Où \mathbf{F}_i est la somme des forces appliquées sur la particule i au temps t , m_i , est la masse de la particule, \mathbf{T}_i est la somme des couples appliqués sur la particule i au temps t et \mathbf{J}_i , le moment d'inertie de la particule.

Les grandeurs sont ensuite intégrées à l'aide du schéma numérique suivant :

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t + \Delta t/2) = \dot{\mathbf{x}}_i(t - \Delta t/2) + \ddot{\mathbf{x}}_i \Delta t \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \dot{\mathbf{x}}_i(t + \Delta t/2) \Delta t \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i(t + \Delta t/2) = \boldsymbol{\omega}_i(t - \Delta t/2) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i(t) \Delta t \quad (2.5)$$

2.1.4 Condition de stabilité

Le fait de discrétiser le pas de temps afin de faire l'intégration numériquement a des conséquences non négligeable sur la stabilité du système. Il faut en effet que le pas de temps soit petit devant la période naturelle du système. Les simulations considérées ici peuvent être vues comme un ensemble de masses connectées par des ressorts. Dès lors, pour chacun des degrés de libertés (j) de chaque particule (i), il existe une période naturelle (T^N) associée à la raideur (k) dans la direction de ce degré de liberté :

$$T_{i,j}^N = \sqrt{\frac{m_i}{k_{i,j}}} \quad (2.6)$$

Le pas de temps critique est défini comme étant la période naturelle la plus petite :

$$\Delta t_{cr} = \min_{(i,j)} \sqrt{\frac{m_i}{k_{i,j}}} \quad (2.7)$$

Lors des simulations, on veillera donc à garder le pas de temps inférieur à ce pas de temps critique.

D'autre part, un problème auquel on est confronté lors des simulations DEM est l'augmentation graduelle de l'énergie dans la simulation. En effet, pour la simulation des milieux granulaires, la représentation par des couples masse-ressort conserve l'énergie, mais l'introduction d'efforts extérieurs et des variations dûs aux erreurs d'arrondis numérique peut mener à des situations problématiques. Pour cela, Cundall and Strack [21] proposent d'introduire un amortissement numérique afin de stabiliser la simulation. Dans notre cas, il n'est pas nécessaire grâce à la présence de forces visqueuses qui jouent le rôle d'amortisseur, et dissipent l'énergie.

2.1.5 Calcul de la contrainte

Le calcul de la contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ dans un système de particules découle du théorème du viriel :

$$V\boldsymbol{\sigma} = \sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} \otimes \mathbf{l}_{ij} - \sum_i m_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (2.8)$$

où V est le volume de contrôle, F_{ij} est la force d'interaction entre des particules i et j , l_{ij} est le vecteur liant les centres de masse des particules, m_i et \mathbf{v}_i sont respectivement la masse et la vitesse de la particule i relativement au champ de vitesse moyen. Dans le cadre de cette étude, le domaine étudié est restreint aux écoulements non-inertiels, et le second terme sera négligeable (sauf exception).

2.1.6 Lois d'interactions

Dans le modèle DEM, les lois d'interactions sont les modèles des forces entre les particules. Ces forces sont calculées sur base des interactions géométriques, données par l'intégration des lois de mouvements et servent ensuite à calculer la dynamique du système. Ces lois sont donc représentés en toute généralité par fonction des positions (du centre de masse et angulaire) ainsi que des vitesses (linéaires et angulaires)

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{t}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \quad (2.10)$$

Dans le cas des suspensions, cette force doit prendre en compte les interactions de contact et du fluide environnant, dont la représentation est limitée ici aux forces de lubrifications. Or, ces forces de lubrifications divergent au contact. La solution généralement utilisée est donc de prendre en compte une certaine rugosité des particules, donc du contact entre les grains à une distance légèrement plus grande que 0. Cependant, le traitement de la lubrification lorsque le contact est établi reste un problème, car la viscosité locale apparente peut toujours tendre vers l'infini. Une solution est de tronquer et de mettre une viscosité constante, ce qui du coup ajoute une longueur caractéristique au problème. Afin de mieux prendre en compte ces interactions avec des couplages potentiellement complexes, un modèle de contact lubrifié a été développé, et présenté à la section suivante.

Lubricated contact model for numerical simulations of suspensions

William Chèvremont^a, Hugues Bodiguel^{a,*}, Bruno Chareyre^b

^aUniv. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LRP, 38000 Grenoble, France

^bUniv. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble-INP, 3SR, 38000 Grenoble, France

Abstract

Discrete granular models are a natural choice when simulating dense suspensions, when the small distances between the particles lead to dominant contributions by lubrication and contact forces. In such case one can get rid of the costly resolution of Navier-Stokes equations, using closed form expressions for lubrication terms. However, those terms diverge when two hard spheres approach contact, and there are issues when integrating them directly with the finite precision of floating point calculations. In this paper, we introduce a visco-elasto-plastic interaction model for suspended spheres, which combines lubrication and elastic-frictional contact behavior depending on surface roughness. An integration scheme is proposed for that model. Unlike earlier methods, the scheme enables an unconditionally stable time-integration of the interactions. The case of perfectly smooth spheres (null roughness), namely, is integrated correctly. The theoretical results are well reproduced in benchmark tests on two-sphere systems: one sphere sedimenting on one other and two spheres in a shear flow. From these benchmark tests, we propose phase diagrams showing the interplay between viscosity, roughness and stiffness. The second test case highlights the origin of non-reversibility particle trajectories. It is controlled by the particle roughness for rigid particles, and by the particle deformation when the capillary number is higher than the relative roughness.

Keywords: suspension, granular, contact, lubrication, friction

1. Introduction

Suspensions of solid particles dispersed in a viscous fluid are ubiquitous in natural, industrial as well as biological flows. For dense suspensions, the resistance to flow depends on a combination of frictional contacts between the particles and viscous interactions mediated by the interstitial fluid. Those combined effects might result in non-Newtonian behaviour even for simple cases such as suspensions of monodisperse spheres in a Newtonian fluid [1, 2]. Particle-scale simulation with discrete element methods (DEM) is a way to investigate the intricate micro-scale processes at play in such flow. There are a few caveats in the concrete implementation of a lubricated contact model in DEM though, and coverage of this point in the literature is scarce whereas many other types of interaction model have been analysed in details (see, namely, [3, 4] and other papers by the same author). This paper contributes a robust method.

Several simulation frameworks have yet been developed in relation to suspensions. Direct Numerical Simulations (DNS) using some Navier-Stokes solvers are feasible though computationally demanding. They require a high spatial resolution to resolve the flow between close particles. Regardless of spatial resolution, though, some singularities will not be captured. Those singularities are associated to the divergence at the approach of contact of the so-called *lubrication forces*, i.e. the viscous resistance to relative motion between two immersed

particles. The change of distance between two rigid spheres, namely, leads to a resisting normal viscous force which scales like $\dot{u}_n u_n^{-1}$ if u_n is the gap between the solid surfaces. Since getting this resistance from DNS would require to shrink the spatial resolution to virtually 0 when $u_n \rightarrow 0$, the models generally incorporate lubrication corrections to include what's beyond mesh resolution. The approaches coupling DNS with suspended particles include the Force-Coupling Method (FCM)[5, 6], Fictitious Domain method (FD)[7] or Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) [8, 9].

While the aforementioned methods spend most of the CPU time in resolving the fluid, multiple authors found that the steady-state flow of suspensions could be simulated accurately by leaving the fluid unresolved and introducing only the lubrication terms through closed form expressions [10, 11, 12, 13, 14]. It of course leads to much greater computational efficiency. Worth noting, good agreement with experimental data needs to account not only for the repulsion-attraction effects but also for the viscous response to contact shearing [12] and for contact friction [14]. The lubrication effects being pair-wise interactions they fit well in conventional discrete element methods (DEM), which track the motion of interacting particles with an explicit integration scheme [12], and which was adopted for this work.

The aforementioned models share the same closed-form solutions for the lubrication terms overall. However they differ in the way lubrication and solid contact behaviour are combined. It must be noted that in most DEM models a contact is defined when $u_n < 0$. This situation, which corresponds to a small

*hugues.bodiguel@univ-grenoble-alpes.fr

overlap between the geometrical spheres, reflects a deformation near the contact region, following Hertzian models or some linearized form of them. $u_n < 0$ comes in contradiction with the fact that the lubrication forces diverge when $u_n = 0$, which would in principle prevent contacts. A classical argument to resolve the contradiction, supported by empirical facts[15], is that asperities of the solid surfaces can be in contact when there is still a fluid film of finite thickness between the surfaces. Along this line a surface roughness εa (length scale of the asperities, a being the mean sphere radius and ε relative roughness) is introduced in the models such that the normal lubrication force scale like $(u_n + \varepsilon a)^{-1}$ [16, 17, 18, 12], and thus it takes a finite value when a contact is created (i.e. when $u_n = 0$).

Various implementations of this idea have been proposed. Some authors proposed that whenever $u_n \leq 0$ the viscous multiplier be kept constant [16], or that all lubrication terms be dropped [16, 17, 13] and the interaction model replaced by a linear spring-dashpot model (LSD [19], conventional in dry granular models), tuned in order to produce a specific coefficient of restitution. As pointed out by some authors, though, the restitution coefficient as well as the distance at which lubrication is turned off are additional parameters and the results depend on tuning them relatively arbitrarily [13].

Finally, some authors considered that solid contact and lubrication could act simultaneously and be combined in a visco-elasto-plastic (VEP) model. Therein interaction force at a lubricated contact combines an elastic force in response to some surface deflection and a viscous force in response to changes of gap distance. A simple method to define changes of the gap distance is to let it equal the total deflection $(u_n + \varepsilon a)$ even if $u_n < 0$ [18], as if soft asperities would deform at the surface of otherwise rigid spheres. Another method[12, 14], which we follow overall, is to let the total contact deflection be split in two parts. One part is the change of gap, coming with the flattening of asperities and producing lubrication effects. The other part is an elastic length u_e corresponding to change of shape around the contact (Hertzian scale) under the combined action of contact forces through asperities and lubricating pressure in the gap. The gap is then $u_n + \varepsilon a - u_e$. This model recovers others as special cases if spheres and asperities have distinct stiffness: a low sphere to asperity ratio corresponds to the hard sphere limit, a high ratio corresponds to the hard asperity limit (constant gap).

A potential downside of the VEP models is that the smooth limit ($\varepsilon \rightarrow 0^+$) may be difficult to approach. In the hard sphere limit the interaction forces diverge when $(u_n + \varepsilon a) \rightarrow 0^+$ (with $u_n < 0$ at contacts), which sets an implicit lower bound to ε . In addition, viscosity dominated regimes when $(u_n + \varepsilon a)$ is small though strictly positive, may cause instabilities with explicit time integration schemes. This is partly regularized by introducing u_e , but then the stiff problem becomes the time integration of u_e in itself. As a matter of fact $\varepsilon < 10^{-2}$ remained untouched overall with VEP models while other methods were applied successfully to $\varepsilon = 10^{-3}$ [17] or $\varepsilon = 0$ [7].

In this paper a model and a time integration method are proposed to alleviate the limitations of previous VEP approaches; namely

- the physical model is free of arbitrary tricks in combining lubrication and solid contact;
- the limits $\varepsilon \rightarrow 0$ and/or $(u_n + \varepsilon a) \rightarrow 0$ is approached robustly.

The proposed model is based on the assumption that the elastic deformations comes from both the compliance of individual contact asperities and the global compliance of the solid surface. Robustness is obtained using an implicit time integration of the interaction forces in an otherwise explicit time-stepping algorithm.

The governing equations and the time integration scheme are given in the first part of the paper. In the second part two test cases are presented to assess the robustness of the approach and to identify different regimes by parametric analysis. The first test case is a suspended sphere subjected to gravitational load and bouncing on another, fixed, sphere; the other involves the interaction of two spheres in a sheared fluid. In both cases theoretical solutions exist and are recovered by our model.

2. Governing equations and time integration

2.1. Normal components

The interaction between two immersed spheres is defined as the sum of two contributions from, respectively, direct (repulsive) contact between the solid surfaces and lubrication by the suspending fluid. It is assumed that they both contribute to deform the spheres elastically and that the deformation occurs through, either, a flattening of the surface asperities leading to a change of the interstitial gap u , or a more general deflection of the surface associated to a local change of shape, as if the sphere radii were modified locally by a small distance u_e . For simplicity linear elasticity is assumed for both modes of deformation in what follows. It will lead to a visco-elastic model similar to the *standard linear solid* model, yet with variable viscosity. The approach could be extended to non-linear contact models, such as Hertzian ones, without major difficulty.

2.1.1. Solid contact

It is assumed that a finite repulsive contact force arises whenever the interstitial gap is less than the size of asperities. For two particles of mean radius $a = (r_1 + r_2)/2$ the normal component of the contact force is taken proportional to the deflection of the asperities, following

$$\mathbf{F}_n^c = -k_n \max(0, \varepsilon a - u) \mathbf{n} \quad (1)$$

where εa defines the characteristic size of the asperities, and ε is termed *roughness*. k_n is the normal stiffness of the asperities, and u is the distance between the solid surfaces (not counting the size of asperities). \mathbf{n} is the unit normal of the contact (see figure 1).

The tangential component of the contact force is an incrementally linear function of the tangential displacement in the elastic regime. The contact model includes a threshold on the magnitude of the shear force following Coulombian friction, as

in Cundall and Strack [20]. The shear force thus has to satisfy the inequality:

$$\|\mathbf{F}_s^c\| \leq \mu_m \|\mathbf{F}_n^c\|, \quad (2)$$

where μ_m is the coefficient of contact friction.

2.1.2. Lubrication

The lubrication forces and torques are computed using the expressions from Ball and Melrose [10]. They define the viscous resistance to relative motion between particles.

$$\mathbf{F}_n^l = \frac{3}{2} \pi \eta_f a^2 \frac{\dot{u}}{u} \mathbf{n} \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_s^l = \frac{\pi \eta_f}{2} \left[-2a + (2a + u) \ln \left(\frac{2a + u}{u} \right) \right] \dot{\mathbf{v}} \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_r^l = \pi \eta_f a^3 \left(\frac{3}{2} + \frac{63}{500} \frac{u}{a} \right) \ln \left(\frac{a}{u} \right) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \quad (5)$$

$$\mathbf{T}_t^l = \pi \eta_f a^2 u \ln \left(\frac{a}{u} \right) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (6)$$

where \mathbf{v} is the tangential displacement, $\boldsymbol{\omega}$ the spin velocity, and η_f the fluid velocity. Although the above expressions define the lubrication terms for virtually any distance u , they are only valid asymptotically in the limit $u/a \rightarrow 0$. In practice, they are computed only for particle pairs within a distance range. The torques (equations 5-6) are computed as long as $u \leq a$. For $u > a$ the direction of the torques switches to the same direction as the relative rotation and thus physical consistency is lost - which justifies the upper bound unambiguously. There normal and shear forces (equations 3-4) are also cut off beyond a certain distance yet there is no simple argument to fix the maximum distance in that case. The cut-off distance is left as a model parameter for now. It will be further examined on the basis of the second test case.

For writing simplicity, prefactors $v_n, v_t(u)$ are introduced in the expression of forces, such that:

$$v_n = \frac{3}{2} \pi \eta_f \quad (7)$$

$$v_t(u) = \frac{\pi \eta_f}{2} \left[-2a + (2a + u) \ln \left(\frac{2a + u}{u} \right) \right] \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_n^l = v_n a^2 \frac{\dot{u}}{u} \mathbf{n} \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_s^l = v_t(u) \dot{\mathbf{v}} \quad (10)$$

2.1.3. Visco-elastic coupling

Contact and lubrication are combined in a rheological model summarized in figure 1. Three different length appear in the model: the gap between the solid surfaces u , the deflection of surfaces u_e , and finally the change of center-to-center distance with respect to the stress free configuration: $u_n = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - 2a$, with $\mathbf{r}_{1,2}$ the positions vectors and $2a$ the sum of radii. The gap u is always positive, u_n and u_e can be positive or negative ($u_e > 0$ when lubrication produces traction between separating bodies). u_n depends only on the particles positions which, in concrete cases, will result from integrating the equations of

motion for the particles (which is done independently of the present derivation). A change of the center-to-center distance relative to the stress free configuration implies that either the distance between the surfaces is changing, or the surfaces are deforming, or both. In all cases u_n accumulates the other two displacements and the following equality holds:

$$u_n = u + u_e \quad (11)$$

It is assumed that the lubricating pressure and the contact forces through asperities both contribute to deflect the surfaces by a distance u_e in the normal direction, and that the compliance is defined by a single coefficient of stiffness g such that the total normal force $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n^l + \mathbf{F}_n^c$ and u_e are linearly dependent:

$$\mathbf{F}_n = g u_e \mathbf{n} \quad (12)$$

Combining equations 1, 3 and 12 and projecting in the normal direction \mathbf{n} yields the scalar form

$$g u_e = -k_n \max(0, \varepsilon a - u) + v_n a^2 \frac{\dot{u}}{u} \quad (13)$$

Elimination of u_e using equation 11 yields a differential equation governing the visco-elastic coupling, where u is the only unknown (owing to the fact that u_n results from motion integration). Normalization by the length a and the characteristic time $\tau = \eta a / g$ leads to the dimensionless form

$$(1 + \alpha) u^* - u_n^* - \alpha \varepsilon + \frac{\dot{u}^*}{u^*} = 0 \quad (14)$$

$$\alpha(u^*) = \begin{cases} 0 & \text{non-contact} \\ \frac{k_n}{g} & \text{contact} \end{cases} \quad (15)$$

Here and in the following "" is used to denote the dimensionless form of a variable (e.g. $u^* = u/a$).

In this paper, k_n/g is set equal to 1 at contacts; in other words the stiffness of asperities and the stiffness of the surfaces are taken equal. The numerical scheme is compatible with all positive values.

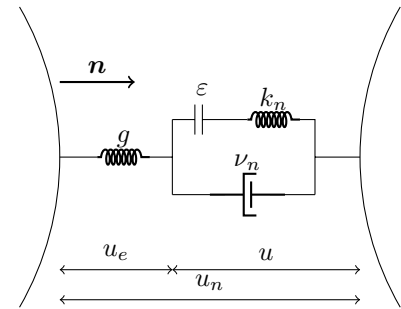


Figure 1: Rheological scheme for normal component.

Tracking the evolution of the interaction with time asks for u integration using equation 14 while continuously updating u_n to reflect particles motion. For this purpose, and in order to insure unconditional stability, an implicit backward Euler method

is used. The time derivative of u^* is approximated by

$$\dot{u}^{**} = \frac{u^{*+} - u^{*-}}{\Delta t^*} + O(\Delta t^*), \quad (16)$$

where Δt^* is the time step normalized by τ , and the exponents “-” and “+” refer to the times at which a quantity is evaluated (the start and the end of the time interval). Using equation 14, we obtain

$$(u^{*+})^2 (1 + \alpha^+) - u^{*+} \left(u_n^* + \alpha^+ \varepsilon - \frac{1}{\Delta t^*} \right) - \frac{u^{*-}}{\Delta t^*} = 0, \quad (17)$$

which is a second order polynomial equation, of positive discriminant. The smallest solution is always negative, hence rejected since the gap u is positive. Finally the updated gap and the associated force are given by

$$u^{*+} = \frac{1}{2(1 + \alpha^+)} \left[\left(u_n^* + \alpha^+ \varepsilon - \frac{1}{\Delta t^*} \right) + \sqrt{\left(u_n^* + \alpha^+ \varepsilon - \frac{1}{\Delta t^*} \right)^2 + 4(1 + \alpha^+) \frac{u^{*-}}{\Delta t^*}} \right] \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_n = ga(u_n^* - u^{*+}). \quad (19)$$

Interestingly, equation 18 remains applicable for every positive value of u and it does not suffer from the singular evolution of lubrication as $u \rightarrow 0^+$. This is a key property of the proposed approach.

The function α that is used to write the general solution introduces discontinuous derivatives at the transition between contact and no-contact solutions, and it has to be handled with care. Setting $u^{*+} = \varepsilon$ in equation 17 gives the time delay after which the transition occurs, i.e.

$$t_c = \frac{\varepsilon - u^{*-}}{\varepsilon(\varepsilon - u_n)}. \quad (20)$$

If t_c is positive and the dimensionless time step $\Delta t^* > t_c$, a contact transition occurs within the time step. In such a case, we integrate on a fraction of the nominal time-step, noted Δt^* , and starting from an intermediate solution which correspond to the transition:

$$\begin{cases} u^{*-} &= \varepsilon \\ \Delta t^* &= \delta t^* - t_c \\ \alpha^+ &= 1 - \alpha^- \end{cases} \quad (21)$$

Implementing equation 18 directly would have detrimental effects in terms of accuracy when both u^* and u_n^* are small. This is because with such settings the terms $1/\Delta t^*$ dominate all other terms in equation 18, which leads to a subtraction of two nearly equal terms, beyond the accuracy of floating point operations. The algorithm would effectively give $u^* \leq 0$ after some time if a contact pair is compressed permanently. The fact that u^* appears often in a logarithm suggests the change of variable $\delta = \log(u^*)$ to circumvent this accuracy issue. The following

equation on δ now has to be solved:

$$(1 + \alpha^+) \exp(\delta^+) - \left(u_n + \alpha^+ \varepsilon - \frac{1}{\Delta t^*} \right) - \dots \frac{\exp(\delta^- - \delta^+)}{\Delta t^*} = 0 \quad (22)$$

This equation can be solved by conventional non-linear solvers, initialized at $\delta^+ = \delta^-$. The bisections method is used in the current implementation.

2.2. Tangential components

The tangential forces are combined in a visco-elastic model as shown in figure 2. Like for the normal part, lubrication and contact act in parallel, and they both contribute to distort (or to shear) the solid surfaces. Unlike the normal behaviour, described by a single scalar equation, the quantities \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_e , and \mathbf{v} , defining the tangential displacements, are vector quantities. They need to be handled as such to reflect changes in the direction of shearing and rotations of the particle pair. \mathbf{v}_n is the geometrical shear displacement, obtained by integrating shear velocity over time. \mathbf{v}_e is the elastic part of \mathbf{v}_n produced by shearing the particles around a sticking contact area. \mathbf{v} is the accumulated plastic slip. The lubrication forces are activated by plastic slip, assuming that viscous stresses in the interstitial fluid are negligible when the contact sticks.

\mathbf{v}_n is always known before computing the tangential interaction. Just like u_n for the normal component it results from motion integration. The gap u can be considered known, to, since it was derived in the previous section independently of the tangential components.

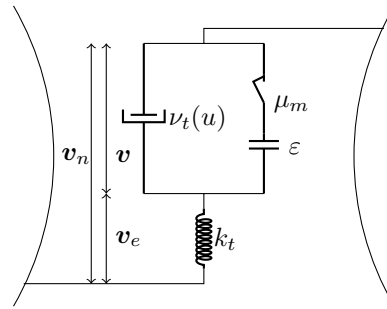


Figure 2: Rheological scheme for the tangential component.

The evolution of the shear components is governed by the system of equations

$$\begin{cases} \mathbf{v}_n &= \mathbf{v}_e + \mathbf{v} \\ \mathbf{F}_s &= -k_t \mathbf{v}_e \\ \mathbf{F}_s &= \min(\|\mathbf{F}_s^c\|, \mu_m \|\mathbf{F}_n^c\|) \frac{\mathbf{F}_s^c}{\|\mathbf{F}_s^c\|} - v_t(u) \dot{\mathbf{v}}. \end{cases} \quad (23)$$

The equations express, respectively, the additivity of elastic and plastic displacement, and the force evaluated alternatively in the spring component then in the visco-plastic component. A Coulombian slider accounts for the frictional solid contact

(components of force \mathbf{F}_s^c and \mathbf{F}_n^c), and a Newtonian dashpot with u -dependent viscosity reflects lubrication by the fluid.

The problem is now solved for the three possible cases: no contact ($u > \varepsilon a$), sticking elastic contact ($\mathbf{v} = 0$), and slipping contact ($\|\mathbf{F}_s^c\| = \mu_m \|\mathbf{F}_n^c\|$). If there is contact, the force is first evaluated by assuming a sticking regime. Then, if the magnitude of the trial force \mathbf{F}_s^{c*} exceeds the frictional threshold, the Coulomb condition is taken into account. Similarly as the normal part, we derive an implicit scheme based on backward Euler approximation for the time derivative, i.e.

$$\dot{\mathbf{v}}_e = \frac{\mathbf{v}_e^+ - \mathbf{v}_e^-}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (24)$$

The three cases are detailed below.

2.2.1. No contact

If the normal contact force is null, the shear contact force is also null as a consequence of Coulomb condition. Equations 23 degenerate to a Maxwell-type visco-elastic equation given by

$$-k_t \mathbf{v}_e = -\nu_t(u)(\dot{\mathbf{v}}_n - \dot{\mathbf{v}}_e). \quad (25)$$

Using equation 24 and rearranging yields to

$$\mathbf{v}_e^+ = \frac{-\nu_t(u)(\dot{\mathbf{v}}_n \Delta t + \mathbf{v}_e^-)}{\nu_t(u) + k_t \Delta t} \quad (26)$$

and to

$$\mathbf{F}_s^+ = \frac{\nu_t(u)(\mathbf{F}_s^- - k_t \dot{\mathbf{v}}_n \Delta t)}{\nu_t(u) + k_t \Delta t}. \quad (27)$$

2.2.2. Sticking contact

If the contact is sticking over a time interval, $\dot{\mathbf{v}}_e = \dot{\mathbf{v}}_n$. The incremental change of \mathbf{v}_e can be obtained by direct integration of $\dot{\mathbf{v}}_n$ and in this purely elastic regime the force changes linearly with respect to this change, i.e.

$$\mathbf{v}_e^+ = \dot{\mathbf{v}}_n \Delta t + \mathbf{v}_e^-, \quad (28)$$

$$\mathbf{F}_s^{e+} = \mathbf{F}_s^- - k_t \dot{\mathbf{v}}_n \Delta t. \quad (29)$$

The force obtained herein by assuming no-slip is a *trial* elastic force, which may or may not satisfy Coulomb condition. If it does, then we set simply $\mathbf{F}_s^+ = \mathbf{F}_s^{e+}$. If it does not then we proceed to the third case (slipping contact) to find a visco-elasto-plastic solution.

2.2.3. Slipping contact

The trial elastic force from Eqs. 29 defines the direction of the contact force and of the plastic slip if it occurs. An equivalent form of equations 23 is then

$$-k_t \mathbf{v}_e = \mu_m \|\mathbf{F}_n^c\| \frac{\mathbf{F}_s^{e+}}{\|\mathbf{F}_s^{e+}\|} - \nu_t(u)(\dot{\mathbf{v}}_n - \dot{\mathbf{v}}_e). \quad (30)$$

Using equation. 24, we obtain

$$\mathbf{v}_e^+ = \frac{\mu_m \|\mathbf{F}_n^c\| \frac{\mathbf{F}_s^{e+}}{\|\mathbf{F}_s^{e+}\|} \Delta t - \nu_t(u)(\dot{\mathbf{v}}_n \Delta t + \mathbf{v}_e^-)}{\nu_t(u) + k_t \Delta t}, \quad (31)$$

and

$$\mathbf{F}_s^+ = \frac{k_t \mu_m \|\mathbf{F}_n^c\| \frac{\mathbf{F}_s^{e+}}{\|\mathbf{F}_s^{e+}\|} \Delta t + \nu_t(u)(\mathbf{F}_s^- - k_t \dot{\mathbf{v}}_n \Delta t)}{\nu_t(u) + k_t \Delta t}. \quad (32)$$

Further substitution and factorization by \mathbf{F}_s^{e+} gives a more compact expression:

$$\mathbf{F}_s^+ = \mathbf{F}_s^{e+} \frac{\nu_t(u) + k_t \Delta t \mu_m \frac{\|\mathbf{F}_n^c\|}{\|\mathbf{F}_s^{e+}\|}}{\nu_t(u) + k_t \Delta t}. \quad (33)$$

2.3. Note on motion integration in DEM

The classical motion integration in DEM requires a single evaluation of the interaction forces at time t to compute positions and velocities at time $t + \Delta t$. This is done classically with a symplectic integrator using a centered, second order accurate, finite difference approximation of the translational and rotational accelerations. The details of this integration is beyond the scope of the paper yet an important feature is that it sets an upper bound to Δt for numerical stability, which has a critical influence on the total computation time (a detailed derivation can be found in [21]).

In brief the computational time-step for rate-independent (non-viscous) interactions depends on the incremental stiffness of each interaction, i.e. the partial derivatives of \mathbf{F} with respect to the particle positions.

For rate-dependent interaction models such as the LSD however, an additional stability condition appears in the viscosity dominated regimes, since the forces depend not only on positions but also on velocities. To avoid this constraint many authors tune the interaction viscosity in order to stick to the under-damped, elasticity dominated, regime. Obviously such a trick is not acceptable in a lubrication model, where fluid viscosity has to be taken for what it is.

A key feature of the visco-elastic interaction defined in previous sections is that it leaves the stability of explicit motion integration independent of viscosity ν , and even of ν/u . Indeed the stiffness g is an upper bound of the incremental stiffness regardless of other parameters (the upper bound being approached when viscosity dominates). In practice, it is thus enough to determine Δt using the same expressions as for rate-independent interactions, using g as the contact stiffness. It does not only make selecting the computational time-step straightforward, but also, and more importantly, it lets limit cases be approached with no impact on the computational cost (e.g. viscosity dominated regimes, perfectly smooth particles, vanishing gap distances...).

3. Test cases

In this section, two 2-spheres simulations are performed using the computational scheme introduced previously and the DEM code Yade-DEM. In this code, motion is integrated by a conventional explicit, 2nd order, central finite difference scheme. A link to the algorithm used to generate these test cases is provided in reference 22.

3.1. Falling sphere

In this first test case two immersed spheres undergo normal motion only. The simulation consists in one fixed sphere and one free sphere subjected to gravitational acceleration. The free sphere is initially static at position $(0, u_0, 0)$. The fixed sphere remains at position $(0, 0, 0)$. This test shows the robustness and numerical stability of the model down to very small gaps. Various regimes are expected depending on input parameters. When the viscosity is high enough, the trajectory is dominated by viscous effects and the gap distance tends to decay exponentially with time. If roughness is finite, the gap closure converges to a final value corresponding to static equilibrium, else it converges to zero. For less viscous situations, the trajectory may appear nearly parabolic in the early stage. However, viscosity will necessarily come into play when the spheres are close enough. Finally, the free sphere may bounce, oscillate around the static position, or approach it in over-damped mode.

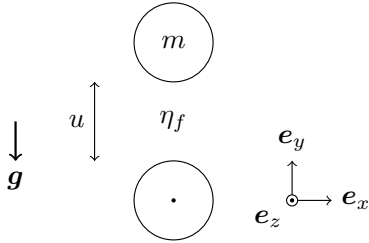


Figure 3: Representation of falling sphere test case

The equation of motion for this system gives

$$\begin{cases} m\ddot{u}_n = -mg - k_n u_e \\ m\dot{u}_n = -mg - k_n \max(0, \varepsilon a - u) - \frac{3}{2}\pi\eta_f a^2 \frac{\dot{u}}{u} \\ u_n = u + u_e \end{cases} \quad (34)$$

This system is non-linear, and as far as we know, it cannot be solved analytically. However, it is still possible to obtain partial solutions with some simplifications. For quasi-static motion controlled by viscous damping and hard spheres ($u_e \rightarrow 0$), this system can be reduced to:

$$0 = -mg - \frac{3}{2}\pi\eta_f a^2 \frac{\dot{u}}{u}, \quad (35)$$

which has the solution

$$u = u_0 \exp\left(\frac{-8}{9} \frac{t}{\tau_c}\right), \quad (36)$$

where $\tau_c = \eta_f / a\rho g$.

At static equilibrium, there must be a persistent contact through asperities (for finite roughness at least), with the normal force balancing weight, and all velocities must be null. The elastic displacement at equilibrium is thus given by

$$u_{eq} = \varepsilon a - \frac{mg}{k_n} \quad (37)$$

Note that this equilibrium does not exist for heavy yet soft particles, when $\varepsilon a < mg/k_n$. In this case, the gap distance still

decreases exponentially but it does so with an apparent weight reduced by the contact force corresponding to $u = 0$: $F_n^c(u = 0) = -k_n \varepsilon a n$.

The problem involves two dimensionless numbers, in addition to the relative roughness ε . Let us define the "contact number" \mathcal{K} , which balances the contact force and the particle weight at equilibrium, i.e.

$$\mathcal{K} = \frac{k_n \varepsilon}{\frac{4}{3}\pi a^2 \rho g} \quad (38)$$

This number can be generalized in the case of suspensions, as $\mathcal{K} = E\varepsilon/P_p$, where E is the particle elastic modulus and P_p the confining pressure applied on the particle phase. For the present test case, if the contact number goes below 1, there is no static equilibrium.

The other relevant number for this test case is the Stokes number, generally defined as $St = a\rho\dot{u}/\eta_f$. Since the characteristic velocity for this problem is the undamped free-fall velocity, $\dot{u}^2 = 2u_0g$, the Stokes number reads

$$St = \frac{a\rho\sqrt{2u_0g}}{\eta_f} \quad (39)$$

When the Stokes number is small enough, the trajectory is driven by viscous effects, as in over-damped oscillators. In contrast, if this number is high, the sphere should collide as in a nearly undamped, or under-damped, oscillator.

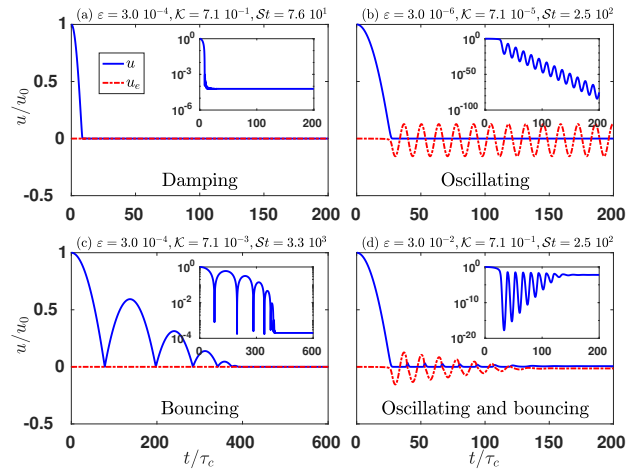


Figure 4: Typical solutions for free-falling spheres. (a) Damped solution with inertial starts, (b) Oscillating solution, (c) Bouncing solution, (d) Mixed bouncing and oscillating solution. Inserts shows the gap u in log scale.

Figure 4 shows several typical solutions of this test case. The initial trajectory is always dominated by gravity since viscous forces are initially null (no initial velocity), which results in a quadratic evolution of position with time just after the start. Then, for rigid particles or smooth particles at low Stokes numbers, the movement is damped (a), and the falling sphere reaches static equilibrium smoothly. With soft particles, the trend is for the free sphere to be entrapped by lubrication (b), as if the surfaces where sticking. The oscillations in u are so small that viscous dissipation becomes negligible, hence the center of mass

keeps oscillating in a nearly undamped mode. For high Stokes number as in (c), the rebound energy is sufficient for the sphere to detach after the collisions and we recover damped bouncing. Note that the restitution coefficient progressively decreases at each bouncing, and the number of bouncing is finite. Situation (a) can be seen as the last rebound of a series starting like (c). Finally, (d) is intermediate between (b) and (c), the stiffness is small enough to enable oscillations but still high enough for bouncing.

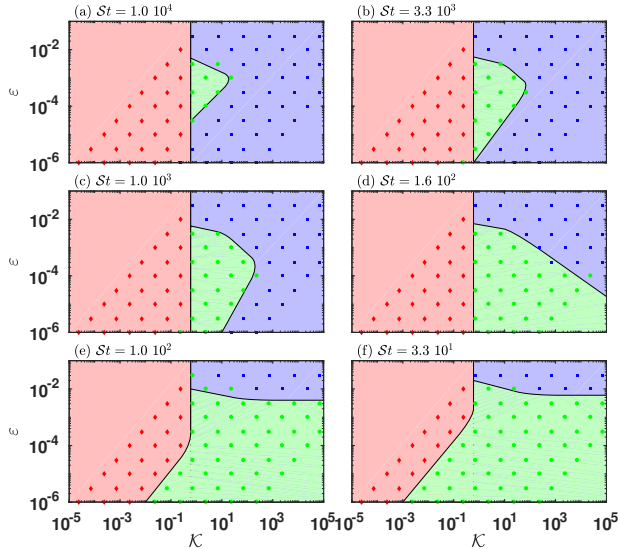


Figure 5: Slices of phase diagram at several values of St . Oscillations are in red (\circ), Bouncing are in blue (\square), Damped are in green (\circ). Points shows simulation data in that plane. Borders are determined from complete set of data (in $3D$), then smoothed and sliced to obtain these figures.

The three dimensionless numbers (ϵ , \mathcal{K} , and St) have been investigated in an extensive set of simulations in order to obtain a complete phase diagram of the type of response (damping, bouncing, oscillating). The complete phase diagram is a volume and some slices for St from 10 to 10^4 are presented in figure 5. As showed in figure 4d, simulations close to the transitions exhibits both behaviors. Then, the transition between areas are smooth rather than sharp. For the highest Stokes simulations (a), the trajectories exhibit mainly either oscillating or bouncing according to the particles stiffness. The softest ones ($\mathcal{K} < 0.7$) are oscillating after first collision whereas the stiffest ones bounces. Even at this Stokes number, there are still some parameters where the ideal exponential damping predicted by equation 36 is recovered. Reducing the Stokes number (from (a) to (d)) let more and more configurations being damped, but only for stiff cases. The oscillating area is being affected for lower Stokes number (e,f).

When the Stokes number is small enough, all trajectories are completely driven by viscous forces, and the solution calculated in (36) is recovered until the two spheres create a contact. Figure 6a shows it is indeed the case down to very small gaps for smooth particles. For rough particles, this solution is also obtained before reaching contact. Rough particles with negative

equilibrium distances u_{eq} exhibit an exponential behaviour with a longer characteristic time associated to the apparent weight discussed above. As shown in Figure 6c an excellent agreement is found between the gap reached at the end of the simulation and the calculated equilibrium one.

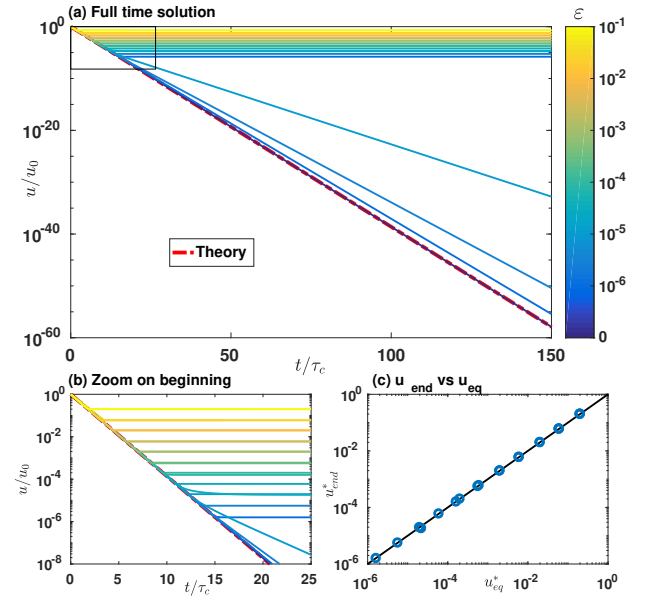


Figure 6: Results of simulations for various parameters. $St \in [10^{-6} - 10^{-2}]$, $\epsilon \in [0; 10^{-6} - 10^{-1}]$. Dashed dotted curve (-) is the smooth solution, given equation 36. (a) Solution for the full time range of simulation. (b) Magnified view of the data shown in (a). (c) Comparison between theoretical and numerical equilibrium distances.

To conclude, this first test case enables to verify the implementation of the method by comparing the numerical solution to the analytical one at low Stokes number for both rough and smooth spheres. It also highlights that for the latter, it is robust down to arbitrary small gaps.

3.2. Two spheres in a shear flow

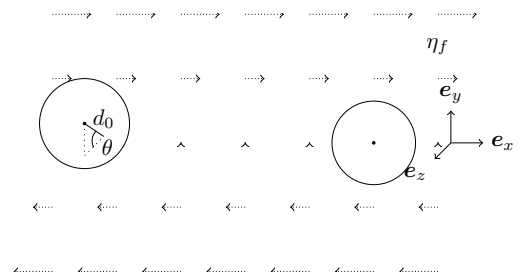


Figure 7: Scheme of the test case: two spheres in a shear flow.

The second test case concerns the motion of two neutrally buoyant spheres suspended in a sheared fluid. This problem has been studied extensively by numerical methods and compared to closed-form solutions in earlier works [24, 6, 7, 25, 26]. The closed-form solutions come from analytical integration of

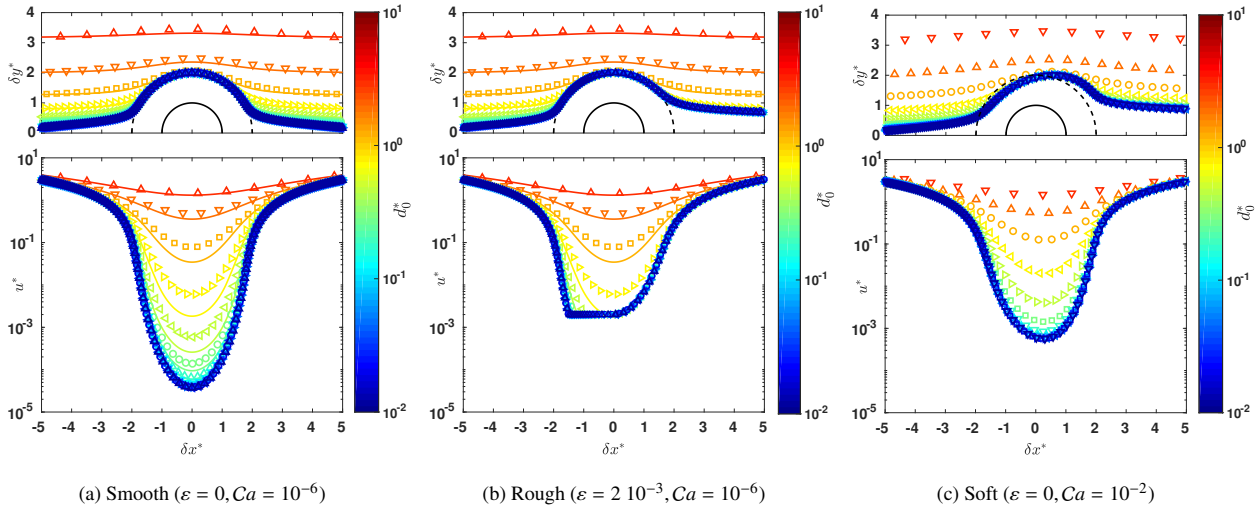


Figure 8: Relative trajectories of spheres, computed by DEM (points) and compared to Da Cunha and Hinch [23] solution (solid lines), in the shear/velocity plane ($\theta = \pi/2$). The black half-circles represents the sphere on which the relative trajectory is computed (solid lines) and the limit trajectory for hard spheres (dashed lines).

Stokes' equations in linear flow fields [27, 28], of which shear flow is a particular case [23, 29].

The spheres are subjected to entrainment by the suspending fluid, and lubrication forces as they approach each other. The entrainment is modeled by Stokes drag, for which force F^d and torque T^d are given by

$$\mathbf{F}^d = -6\pi\eta_f a (\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{w}_f) \quad (40)$$

$$\mathbf{T}^d = -8\pi\eta_f a^3 \left(\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{w}_f \right) \quad (41)$$

where \mathbf{w}_f is the background fluid velocity given by $(\dot{\gamma}y; 0; 0)$, $\dot{\mathbf{r}}$ and $\boldsymbol{\omega}$ are the particle velocity and spin velocity, respectively. The initial particle positions are $(0, 0, 0)$ and $(-10a, d_0 \sin \theta, d_0 \cos \theta)$ when the gap exceeds an arbitrary distance. We have varied this lubrication cut off distance from $2a$ to $7a$. The results are displayed in Fig 9, in terms of the minimal gap reached during the simulation. Clearly, this cut off has a rather strong influence on this minimal gap - although the trajectories remain globally unchanged -. A larger cut-off distance tends to increase the minimal gap, the best match to the analytical solution of Da Cunha and Hinch [23] being obtained at $4a$. Note that the influence of the cut-off distance may be much smaller when simulating dense or, even, semi-dilute suspensions. The dominant lubrication terms are indeed due to the nearest neighbours in general, and the nearest neighbours are generally much closer than $4a$.

Whereas suspended smooth hard spheres follow reversible paths, both roughness (i.e. the possibility of solid contact) and deformability of the particles are known to induce non reversible, the particles being driven to different streamlines as a result of the interaction [23, 31]. Figure 8 illustrates this three typical cases: smooth hard spheres, rough hard spheres, deformable particles.

The case of smooth hard spheres is particularly interesting since it can be directly compared to the analytical solution of Da Cunha and Hinch [23]. As it can be seen on figure 8a, the obtained trajectories follow the analytical solutions from Da Cunha and Hinch [23] for smooth hard spheres with a maximum deviation of 2%. However, looking into details to the gap between the spheres, a discrepancy could be detected between the numerical and the analytical one. Although it has no consequences on the trajectories, it is interesting to discuss its origin. In the numerical model, the fluid is accounted by a combination of Stokes drag and lubrication force and torque. As stated in the model description, the lubrication analytical expressions are only valid for small gaps, and are set to zero in the model. We have varied this lubrication cut off distance from $2a$ to $7a$. The results are displayed in Fig 9, in terms of the minimal gap reached during the simulation. Clearly, this cut off has a rather strong influence on this minimal gap - although the trajectories remain globally unchanged -. A larger cut-off distance tends to increase the minimal gap, the best match to the analytical solution of Da Cunha and Hinch [23] being obtained at $4a$. Note that the influence of the cut-off distance may be much smaller when simulating dense or, even, semi-dilute suspensions. The dominant lubrication terms are indeed due to the nearest neighbours in general, and the nearest neighbours are generally much closer than $4a$.

The very good agreement between with the analytical solution for smooth hard sphere is interesting as it clearly shows that lubrication forces and torques are sufficient to describe the viscous interaction between two spheres. This conclusion differs to the one which is mentioned in Metzger et al. [24], where a significant discrepancy is found between the numerical solution obtained with lubrication interaction and the analytical solution. This has been interpreted as the consequence of neglecting the long-range interaction which are present in the Stokes equation.

In fact, in reference 24, only the normal component of the lubrication force was considered; additionally no drag torque was considered. By turning off tangential forces or sphere rotation, we indeed obtain a similar discrepancy with the analytical solution. This consideration allows us to highlight that tangential lubrication forces are crucial to get quantitative results - they are too often neglected in numerical models.

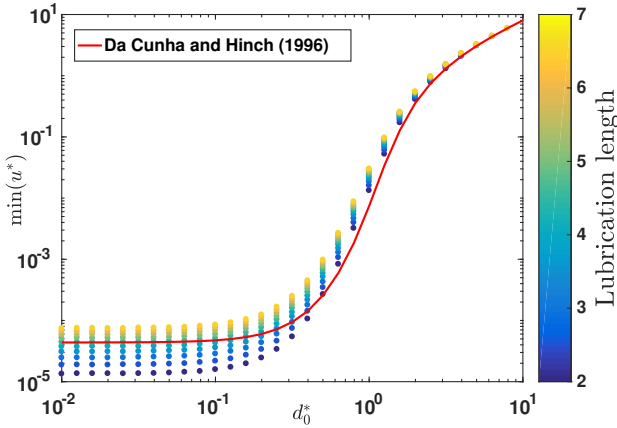


Figure 9: The minimum separation from DEM and Da Cunha and Hinch [23] versus initial separation and cut-off distance of lubrication, particles centers are in the shear/velocity plane ($\theta = \pi/2$)

A set of typical trajectories for rough stiff spheres is presented in figure 8b. As expected, roughness breaks the symmetry as soon as contact occurs. The role of roughness is apparent in the plots of u^* , which look as if the smallest distances were truncated. The sphere then moves to a streamline corresponding to $\min(u') \approx \varepsilon$ irrespective of the initial position of the particle. As seen in figure 9 for smooth spheres ($\varepsilon = 0$), u^* reaches a finite minimum value when $d_0^* \rightarrow 0$, and this distance is about $3 \cdot 10^{-5}$. Consistently, the results are not modified by a finite roughness as long as $\varepsilon < 3 \cdot 10^{-5}$.

Another set of trajectories is presented for soft spheres in figure 8c. Up to our knowledge, there is no analytical solution in that case. However, changes of streamline have been reported in the literature, based on experiments and on simulations [31]. The trajectories with large capillary number are qualitatively similar to those found in the literature. A noticeable effect is that the closure of the gap is smaller as compared to stiff spheres, which implies - for a given value of roughness - a smaller normal contact force and therefore a lower resistance to contact sliding.

We have performed a systematic analysis of the streamline deviation, varying both roughness and capillary numbers. The results are summarized in figure 10, which reports the magnitude of the streamline deviation for almost coaxial initial distances ($d_0^* = 10^{-2}$). For this kind of initial separation distance, the streamline is very close from the closed-loop streamline border for smooth hard spheres. Therefore, if any streamline deviation occurs, the far deflection gives the height of an area that is not reachable anymore after spheres interaction. The red

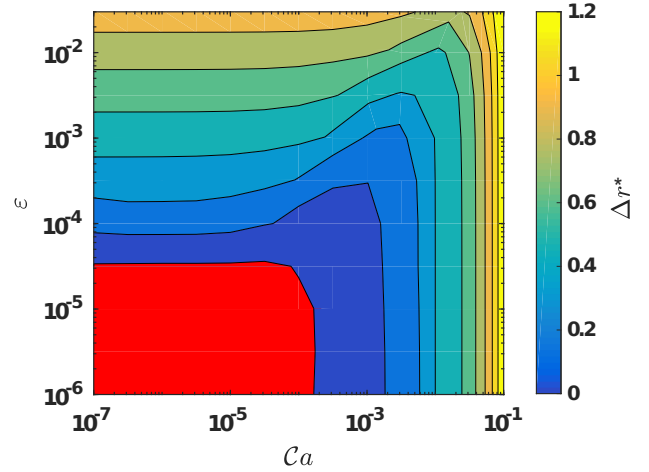


Figure 10: Map of streamline deviation as function of roughness and capillary number. In the red area, the streamline change is strictly 0.

area highlights the cases where this distance is strictly 0. It approximately corresponds to cases where $\varepsilon < 3 \cdot 10^{-5}$ and $Ca < 10^{-4}$. From this figure, we can deduce the main origin of irreversibility above these limits. When $\varepsilon \gg Ca$, the streamline deviation is controlled by the roughness, whereas when $Ca \gg \varepsilon$, it is controlled by the particle deformation. Strikingly, when Ca and ε are of the same order of magnitude, the streamline deviation is smaller than the case of rigid particles of similar roughness or than the case of smooth deformable particles. This non-monotonic effect is probably due to the fact that the particle stiffness also controls the deformation of the roughness. In case of intermediate roughness and capillary numbers, the apparent roughness is smaller than at low Ca .

To conclude, this test case shows that the model reproduces very well analytical results in the case of rigid particles. Extension to slightly deformable particles allow to predict the existence of reversible trajectories at low Ca and for rather smooth particles. It also lead to a phase diagram of the origin of irreversibility.

4. Conclusion

A complete model of lubricated contact and an unconditionally stable integration scheme for the interaction forces have been introduced in section 2. The model can be readily implemented as an interaction model in conventional granular simulations. The scheme handles the case $\varepsilon = 0$ (perfectly smooth spheres) gracefully, and regularization by elasticity removes the singularity of lubrication when $u \rightarrow 0^+$. Furthermore the visco-elastic coupling is such that the stability of explicit integrator for particle dynamics is independent of viscous terms, whereas viscosity dominated regimes were challenging most explicit schemes until now.

This work contributed an implementation in the open source discrete element code Yade-DEM.org [32] (used for running the test cases of last section). The lubricated contact model

presented here is available as part of that code and our results can be reproduced independently.

Two test cases have been investigated. The first one evidenced the robustness of the method. In the viscous regime, the decreasing exponential trajectory has been recovered. In the regime where inertia is not negligible, some behaviors like damped bouncing (close to pure-elastic limit) and vibration after collision (soft limit) have been reproduced by the model. Two dimensionless numbers are shown to control the response in that simple two-sphere system, and a phase diagram is proposed, showing the interplay between stiffness, roughness and viscosity. These dimensionless numbers might bear some relevance to shear flows of granular suspensions.

The second test case, two spheres suspended in a sheared liquid, has been extensively used to compare models and theories. We found a good agreement with theoretical solutions for stiff spheres, and we reproduced qualitatively some features observed previously with soft particles. A phase diagram has been determined concerning the deviation from reversible trajectories in shear flows, which originates either from particle roughness, either from particle deformation.

Acknowledgements

The authors acknowledge Univ. Grenoble Alpes for financial support. 3SR and LRP are members of Labex Tec21, and LRP of Institut Carnot Polynat. Computations presented in this paper were performed using the CIMENT infrastructure (<https://ciment.ujf-grenoble.fr>), which is supported by the Rhône-Alpes region (GRANT CPER07_13 CIRA: <http://www.ci-ra.org>).

Notations

- [1] J. J. Stickel, R. L. Powell, Fluid mechanics and rheology of dense suspensions, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 37 (2005) 129–149.
- [2] J. F. Morris, A review of microstructure in concentrated suspensions and its implications for rheology and bulk flow, *Rheol. acta* 48 (2009) 909–923.
- [3] C. Thornton, Z. Ning, A theoretical model for the stick/bounce behaviour of adhesive, elastic-plastic spheres, *Powder Technology* 99 (1998) 154–162.
- [4] C. Thornton, *Granular dynamics, contact mechanics and particle system simulations*, Springer, 2015.
- [5] F. Peters, G. Ghigliotti, S. Gallier, F. Blanc, E. Lemaire, L. Lobry, Rheology of non-brownian suspensions of rough frictional particles under shear reversal: A numerical study, *J. Rheol.* 60 (2016) 715–732.
- [6] K. Ye, M. R. Maxey, Simulation of concentrated suspensions using the force-coupling method, *J. Comp. Phys.* 229 (2010) 2401–2421.
- [7] S. Gallier, E. Lemaire, L. Lobry, F. Peters, A fictitious domain approach for the simulation of dense suspensions, *J. Comp. Phys.* 256 (2014) 367–387.
- [8] A. Vázquez-Quesada, M. Ellero, Rheology and microstructure of non-colloidal suspensions under shear studied with smoothed particle hydrodynamics, *J. Non-Newton. Fluid* 233 (2016) 37–47.
- [9] H. Tanaka, T. Araki, Simulation method of colloidal suspensions with hydrodynamic interactions: Fluid particle dynamics, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 1338–1341.
- [10] R. Ball, J. R. Melrose, A simulation technique for many spheres in quasi-static motion under frame-invariant pair drag and brownian forces, *Physica A* 247 (1997) 444–472.

a	Mean particles radius
g	Bulk stiffness
k_n	Roughness stiffness
k_t	Tangential stiffness
u	Distance between deformed surfaces
u_n	Distance between undeformed surfaces
u_e	Surface deflection
\mathbf{n}	Normal vector
\mathbf{v}	Integral of tangential displacement
\mathbf{F}	Force
\mathbf{T}	Torque
α	Roughness to bulk stiffness ratio
ε	Roughness (dimensionless)
η_f	Fluid viscosity
θ	Angle
μ_m	Friction coefficient
ν_n	Prefactor for normal lubrication
ν_t	Prefactor for tangential lubrication
Δt	Timestep
ω	Sphere's rotations
\mathbf{w}_f	Flow field
\cdot^c	Contact
\cdot^d	Drag
\cdot^l	Lubrication
\cdot_n	Normal component
\cdot_r	Roll component
\cdot_s	Tangential component
\cdot_t	Twist component
\cdot^*	Dimensionless component
\cdot^+	Variable at current timestep
\cdot^-	Variable at previous timestep

Table 1: Notations used

- [11] R. Mari, R. Seto, J. F. Morris, M. Denn, Shear thickening, frictionless and frictional rheologies in non-brownian suspensions, *J. Rheol.* 58 (2014) 1693.
- [12] D. Marzougui, B. Chareyre, J. Chauchat, Microscopic origin of shear stress in dense fluid-grain mixtures, *Granular Matter* 17 (2015) 297–309.
- [13] S. Gallier, F. Peters, L. Lobry, Simulations of sheared dense noncolloidal suspensions: Evaluation of the role of long-range hydrodynamics, *Phys. Rev. Fluids* 3 (2018) 042301.
- [14] W. Chèvremont, B. Chareyre, H. Bodiguel, Quantitative study of the rheology of frictional suspensions: Influence of friction coefficient in a large range of viscous numbers, *Phys. Rev. Fluids* 4 (2019) 064302.
- [15] Y. Zhao, R. H. Davis, Interaction of two touching spheres in a viscous fluid, *Chemical Engineering Science* 57 (2002) 1997–2006.
- [16] J. Brändle de Motta, W.-P. Breugem, B. Gazanion, J.-L. Estivaleres, S. Vincent, E. Climent, Numerical modelling of finite-size particle collisions in a viscous fluid, *Phys. Fluids* 25 (2013) 083302.
- [17] R. Seto, R. Mari, J. F. Morris, M. M. Denn, Discontinuous Shear Thickening of Frictional Hard-Sphere Suspensions, *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013).
- [18] M. Trulsson, B. Andreotti, P. Claudin, Transition from the viscous to inertial regime in dense suspensions, *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012) 118305.
- [19] O. R. Walton, R. L. Braun, Viscosity, granular-temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks, *J. Rheol.* 30 (1986) 949.
- [20] P. Cundall, O. Strack, Discrete numerical-model for granular assemblies, *Geotechnique* 29 (1979) 47–65.
- [21] R. A. Hosn, L. Sibille, N. Benahmed, B. Chareyre, Discrete numerical modeling of loose soil with spherical particles and interparticle rolling friction, *Granular Matter* 19 (2017) 4.

- [22] W. Chèvrement, Code used to generate test cases, <https://gitlab.com/yade-dev/trunk/tree/master/examples/Lubrication>, 2019.
- [23] F. R. Da Cunha, E. J. Hinch, Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres, *J. Fluid Mech.* 309 (1996) 211–223.
- [24] B. Metzger, P. Pham, J. Butler, Irreversibility and chaos: Role of lubrication interactions in sheared suspensions, *Phys. Rev. E* 87 (2013) 052304.
- [25] J. Kromkamp, D. van den Ende, D. Kandhai, R. van der Sman, R. Boom, Lattice boltzmann simulation of 2d and 3d non-brownian suspensions in couette flow, *Chem. Eng. Sci.* 61 (2006) 858 – 873.
- [26] S. Gallier, E. Lemaire, F. Peters, L. Lobry, Rheology of sheared suspensions of rough frictional particles, *J. Fluid Mech.* 757 (2014) 514–549.
- [27] G. K. Batchelor, J. T. Green, The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field, *J. Fluid Mech.* 56 (1972) 375–400.
- [28] T. van de Ven, S. Mason, The microrheology of colloidal dispersions: Iv. pairs of interacting spheres in shear flow, *J. Colloid Interf. Sci.* 57 (1976) 505 – 516.
- [29] C. J. Lin, K. J. Lee, N. F. Sather, Slow motion of two spheres in a shear field, *J. Fluid Mech.* 43 (1970) 35–47.
- [30] T. Gao, H. H. Hu, Deformation of elastic particles in viscous shear flow, *J. Comp. Phys.* 228 (2009) 2132 – 2151.
- [31] E. Lac, A. Morel, D. Barthès-Biesel, Hydrodynamic interaction between two identical capsules in simple shear flow, *J. Fluid Mech.* 573 (2007) 149–169.
- [32] V. Šmilauer, et al., *Yade Documentation 2nd ed*, The Yade Project, 2015.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, le cadre de travail des simulations DEM a été présenté : le cycle de calcul des simulations DEM, la prise en compte des conditions aux limites, le schéma d'intégration du mouvement des particules ainsi que les conditions de stabilités associées. Ensuite, le modèle de contact lubrifié utilisé a été détaillé. Ce modèle permet de régulariser la singularité au contact. Son schéma de résolution numérique est inconditionnellement stable et son implémentation est robuste même pour des interstices très faibles. Il permet en particulier la simulation de suspensions de sphères parfaitement lisses, et le schéma numérique de résolution proposé permet en outre d'utiliser un schéma d'intégration du mouvement explicite, sans conditions de stabilité liés à la viscosité. Enfin, ce modèle est testé dans deux situations : une sphère qui sédimente sur une autre fixée, et deux sphères libres dans un champ de cisaillement. Dans le premier cas, dans le régime visqueux, la trajectoire de sédimentation exponentielle a bien été retrouvée jusqu'au contact, où l'équilibre s'établit. Dans le régime inertiel, des comportements de type contact sec ont été retrouvés : Proche de la limite purement élastique, un rebond amorti, proche de la limite molle, une collision suivie d'oscillation du centre de masse. Un diagramme de phase des différents comportements a pu être établi. Dans le second cas test, les sphères sont suspendues dans un liquide cisailé de même densité, cas qui est largement utilisé afin de tester les modèles d'interactions visqueuses entre deux sphères, car il possède des solutions analytiques. Ces solutions sont retrouvées dans le cas des sphères dures, lisses et rugueuses. D'autre part, de l'irréversibilité provenant de la déformabilité des sphères a pu être retrouvé qualitativement. Un diagramme de phase sur l'origine de l'irréversibilité fonction de la raideur et de la déformabilité est proposé, et quantifié par le changement de ligne de courant. Les particules peuvent être considérées comme rigide si le nombre capillaire est sous 10^{-4} . Dans ce régime, là une rugosité relative inférieure à $3 \cdot 10^{-5}$ n'introduit pas d'irréversibilité. Pour des plus grands nombres capillaires, la déformabilité de la particule introduit également un changement de ligne de courant. L'effet couplé a pour incidence de réduire ce changement.

- Développement d'un nouveau modèle de contact lubrifié régularisant la singularité au contact lisse
- Diagramme de phase pour le comportement de deux sphères entrant en contact dans la direction normale
- Diagramme de phase qui quantifie le changement de ligne de courant pour deux sphères dans un écoulement de cisaillement simple.

Chapitre 3

Rhéologie des suspensions rugueuses

Dans ce chapitre sont présentés les résultats obtenus pour la rhéologie de cisaillement des suspensions à l'aide des simulations numériques DEM présentées précédemment. Les résultats ont été publiés dans le journal Physical Review Fluids. Des résultats complémentaires obtenus depuis la publication de l'article sont ensuite présentés

Sommaire

3.1	Positionnement de l'étude	28
3.2	Article : Quantitative study of the rheology of frictional suspensions :	
	Influence of friction coefficient in a large range of viscous numbers . .	29
3.2.1	Résultats complémentaires	43
3.3	Microstructure de la suspension cisailée	46
3.3.1	Distributions des grandeurs de structure	48
3.3.2	Contributions à la contrainte de cisaillement	50
3.3.3	Contributions aux contraintes normales	54
3.4	Conclusion	59

3.1 Positionnement de l'étude

L'étude proposée dans l'article 3.2 présente des résultats de simulations DEM sur des suspensions semi-diluées à dense, pour des sphères dures rugueuses. Au cours de ce travail, le coefficient de friction, déjà connu pour influencer la fraction volumique où la divergence de viscosité apparaît, a été varié systématiquement dans une large gamme.

Tout d'abord, une étude de sensibilité du modèle à ses ingrédients est menée, afin de vérifier que les simulations se trouvent bien dans le domaine souhaité, à savoir des simulations de sphères dures et rugueuses. Les résultats présentés montrent l'indépendance des résultats vis à vis de la rugosité et de la raideur de contact. Ensuite, la question de la contribution de la pression de pore, c'est à dire l'échange de fluide entre les pores formés par la matrice solide, à la contrainte et/ou à l'état structurel de la suspension a été étudié. Sur l'état stationnaire, aucune différence n'a été observée pour l'ensemble des configurations testées. Ceci démontre que la présence de fluide dans les suspensions peut être modélisée uniquement par la contribution des forces de lubrification entre les particules. Il s'agit là d'un résultat très important, car jusqu'à récemment, la plupart des études numériques sur la rhéologie des suspensions utilisent une approche maillant le fluide. Or, la résolution numérique des équations de (Navier-)Stokes représentent en général la majeure partie du temps de calcul. Ce résultat valide également l'approche DEM suivie par la suite, où seules les forces de lubrifications sont prises en compte.

La rhéologie des suspensions est décrite dans cet article dans le cadre de la rhéologie $\mu(I_v)$ telle que définie dans Boyer et al. [8], par analogie à la rhéologie $\mu(I)$ pour les milieux granulaires. Dans ce cadre, deux fonctions sont définies : $\mu(I_v)$, rapport de la contrainte de cisaillement à la contrainte de confinement, et $\phi(I_v)$, la fraction volumique. Or, lors de l'étude systématique du coefficient de friction, la fraction volumique de divergence dépend de ce coefficient de friction. La fonction ϕ devrait donc être définie comme $\phi(I_v, \phi_m(\mu_m))$. Il est cependant possible, par la renormalisation de ϕ par ϕ_m d'obtenir une courbe maîtresse qui ne dépend plus de μ_m . Ainsi, une nouvelle formulation est proposée pour la fonction $\phi/\phi_m(I_v)$. D'autre part, pour la fonction $\mu(I_v)$, le premier résultat est que celle-ci (qui peut être vue comme un coefficient de friction macroscopique) est indépendante du coefficient de friction microscopique, sans aucune renormalisation. La plupart des auteurs proposent une décomposition en une partie contact et une partie fluide. Les différentes formulations proposées par les différents auteurs ne sont en général pas compatibles entre elles, notamment au niveau de la pente de la composante fluide à bas I_v . La décomposition des contributions à la contrainte a permis de proposer une nouvelle formulation compatible avec les données de simulation, et qui retrouve asymptotiquement la valeur théorique pour les milieux infiniment dilués [26].

Quantitative study of the rheology of frictional suspensions: influence of friction coefficient in a large range of viscous numbers

William Chèvremont,¹ Bruno Chareyre,^{2,*} and Hugues Bodiguel¹

¹*Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LRP, 38000 Grenoble, France*

²*Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, 3SR, 38000 Grenoble, France*

(Dated: June 19, 2019)

The rheology of dense suspensions is studied by DEM simulation, focusing on the interplay between solid fraction, confining pressure, shear rate and viscosity. Using a minimal model based on lubrication and contact forces, we are able to recover experimental results available in the literature, in a very large range of solid fraction. We show that bulk friction is only weakly dependent on contact friction when a normalized shear rate, the so-called viscous number I_v , is kept constant. In contrast, contact friction has a strong influence on the jamming solid fraction ϕ_m . We provide an empiric proof that all the rheology could be accounted using I_v and ϕ/ϕ_m . By separating the contribution of lubrication and contact forces on the total shear stress it is shown that contacts dominate at solid fraction above 0.77 of jamming solid fraction. Universal expressions of macroscopic friction and solid fraction as functions of the viscous number are finally offered.

I. INTRODUCTION

Suspensions of solid particles dispersed in a liquid are ubiquitous in nature and in industry. Their rheological properties have been the focus of intense research efforts since it is crucial for many applications to control the flows of these two-phase systems. Despite many experimental, theoretical and numerical work, a clear consensus has not yet emerged even in the simplest case of monodisperse non-Brownian hard spheres dispersed in a Newtonian viscous liquid, in particular in concentrated regimes. In this particular case the bulk viscosity is rate-independent, and the main question is its dependency on solid fraction.

Purely hydrodynamic approaches are adequate in the dilute regimes and allow to predict the viscosity increment due to the solid particles [1, 2]. However, when the concentration is increased towards close packing, hydrodynamics might not be sufficient to account for the rheological properties of the suspensions, since the typical distance between particles is extremely small. The liquid film which separate two particles induce lubrication forces which diverge at the approach to contact. This prevents in principle solid contact between ideal and perfectly smooth non-interacting particles. However, at these small scales, even a very small particle roughness can be sufficient to invalidate the previous argument. For example, it has been shown that contact between particles is responsible for irreversibility in sheared suspensions [3, 4] and peculiar behavior in shear reversal experiments [5, 6]. Solid contact is also believed to be important in addition to repulsive forces to account for non-Newtonian features such as the shear-thickening properties of some suspensions [7–9]. Even for the case of rate-independent viscosity the fact that the suspension viscosity apparently diverges at a solid fraction ϕ_m also asks for some non-hydrodynamic forces, since ϕ_m typically varies from 0.50 to 0.63, depending on the system under study. It has been proposed that differences between systems could be due to differences in contact properties, namely differences in contact friction [9, 10].

Near jamming, both experimental and numerical approaches face difficulties associated to the divergence of the viscosity with the increase of solid fractions. Available experimental data are scarce close to jamming and are subject to high uncertainties. A noticeable exception is the work of Boyer *et al.* [11] in which normal pressure was imposed, in contrast with the constant volume conditions used in standard rheometry. In their experiment, the imposed pressure P_p is a pressure exerted on the solid particles only, thanks to a grid through which the liquid phase could flow to adjust the suspension solid fraction ϕ (fraction of the total volume occupied by solid particles). They introduced the so-called viscous number I_v , a dimensionless shear rate defined as the ratio of reference viscous stress over confining pressure: $I_v = \eta_f \dot{\gamma} / P_p$, where η_f is the suspending liquid viscosity and $\dot{\gamma}$ the shear rate. They argue that for non-Brownian particles with only hydrodynamic and contact forces the rheology can be described by I_v alone. This so-called " $\mu(I_v)$ rheology " is thus completely described by two equations of state $\mu(I_v)$ and $\phi(I_v)$, where μ is a " macroscopic friction coefficient " defined as $\mu = \tau / P_p$, and τ is the shear stress. Based on their measurements, Boyer *et al.* [11] proposed phenomenological expressions for these two functions which include contributions from both contact and viscous forces.

* bruno.chareyre@grenoble-inp.fr

The $\mu(I_v)$ rheology been used in the literature to analyze numerical simulations at high solid fraction ($\phi > 0.4$) [12–17]. Results in more dilute regimes are available in [10]. Although numerical simulations offer a great potential to vary independently the contact properties (in our case: friction coefficient, particle roughness, contact stiffness), very few studies focused on how these contact parameters change the whole rheology by varying them systematically [10]. Further, most simulations [12–15] lack validation against experimental data. Some of them [12, 17, 18] are based on two-dimensional models, which leads to unrealistic solid fractions and fails to account some phenomenon that take place in the vorticity direction, as reported by [19]. Recently, Marzougui and coworkers proposed a DEM approach which incorporates lubrication forces and contact forces [20]. Therein the long range hydrodynamic interactions were accounted for by a pore network approach. Herein, we reuse this strategy which enables realistic simulations from medium to high solid fractions.

In this work, our aim is to study the $\mu(I_v)$ rheology of stiff non-Brownian particles, in a wide and extended range of viscous numbers (from semi-dilute to high solid fraction), and a wide range of microscopic friction coefficient. In the first part, we detail the numerical model and we test the effect of particle roughness and stiffness. Then, we present the simulation results, focusing on $\mu(I_v)$ and $\phi(I_v)$. It is shown that a very good agreement is obtained with the experimental results of Boyer *et al.* [11], assuming a microscopic friction coefficient μ_m of about 0.5 in the experiments. Strikingly, the effective macroscopic friction coefficient $\mu(I_v)$ depends very weakly on μ_m in a large range of parameters. The only exception is for low μ_m and low I_v (close to jamming). Conversely, the influence of μ_m on the jamming solid fraction ϕ_m is strong. We then test the idea that all the rheology could be accounted for using I_v and ϕ/ϕ_m . Finally, by separating the contributions to shear stress of lubrication and contact forces respectively, we show that contact forces dominate at solid fraction above 40%, and we propose universal expressions for $\mu(I_v)$ and $\phi/\phi_m(I_v)$.

II. MODELS AND METHODS

A. Equations of motion

The motion of suspended particles is integrated in time using the Discrete element Method (DEM) implemented in Yade-DEM [21]. The method is based on an explicit time-integration of the Newton's equations of motion, for each particle:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m\dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad (1)$$

where \mathbf{r} is the position of the center of mass of the particle and $\dot{\mathbf{r}}$ its time derivative, m is the mass, \mathbf{J} is the moment of inertia tensor, $\boldsymbol{\Omega}$ is the rotational velocity vector, \mathbf{F} denotes forces acting on the body and \mathbf{T} the moments of these forces about \mathbf{r} . The total force on a given particle results from pair interactions corresponding to solid contacts and lubrication forces, and seepage forces induced by the differential motion between the solid particles and the suspending fluid. All three types of forces are commented in the sequels of this section.

B. Contact model

The contact forces between particles follow an elastic-frictional contact model, following Cundall and Strack[22]. When a contact is established two particles of radius a at positions \mathbf{r} and \mathbf{r}' interact by a repulsive force along the contact normal \mathbf{n} ,

$$\mathbf{F}_n^C = k_n u_n \mathbf{n} \text{ if } u_n < 0, \quad (2)$$

$$\text{with } u_n = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| - 2a, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|}. \quad (3)$$

Hereabove, k_n is the normal stiffness and u_n is the normal displacement, i.e. the change of center-to-center distance relative to the equilibrium configuration. If $u_n \geq 0$ there is no contact force.

The shear component of the force is obtained by explicit integration of its time derivative

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{F}}_s^C &= k_s \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\Omega}^C \times \mathbf{F}_s^C, \\ \text{with } \mathbf{v}_s &= \dot{\mathbf{r}}' - \dot{\mathbf{r}} - a(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}') \times \mathbf{n} \\ \text{and } \boldsymbol{\Omega}^C &= \mathbf{n} \times \frac{\dot{\mathbf{r}}' - \dot{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}'}{2} \right) \mathbf{n}.\end{aligned}\quad (4)$$

k_s is the shear stiffness, \mathbf{v}_s is the relative shear velocity, and the spin vector $\boldsymbol{\Omega}^C$ defines the rotation of the contact pair in the reference frame (such that in a rigid rotation the contact forces defined by Eq. 4 co-rotate).

In addition, the shear force remains bounded by Coulomb's friction imposing

$$\|\mathbf{F}_s^C\| \leq \mu_m \|\mathbf{F}_n^C\|. \quad (5)$$

with μ_m the coefficient of contact friction. If at any stage the incrementation based on equation (4) leads to violate Coulomb's inequality then the magnitude of \mathbf{F}_s^C is decreased accordingly.

C. Fluid model

The fluid has two distinct contributions to the forces on the particles: pair-wise lubrication forces opposed to the relative motion of adjacent particles, and seepage forces arising whenever the fluid and the solid phase do not co-move. The first contribution is detailed in this section, the second one is only outlined. The approach follows [20] overall yet it differs quantitatively by the relative magnitude of the two force contributions.

The set of particle pairs for which lubrication force-torques are calculated is the set of nearest neighbors as defined by an underlying Delaunay triangulation of the sphere packing. The triangulation is updated during the deformation process so that at any point in time a branch in the Delaunay graph corresponds to a lubricated interaction. It leads to a maximum distance of interaction of the order of $1.5a$. The lubrication force-torques for one pair are defined by decomposing the relative motion in four elementary modes: normal displacement, shear displacement, rolling and twisting. For two particles, the forces are given by the following expressions; respectively the normal force, the shear force, the rolling torque and the twisting torque [20, 23]:

$$\mathbf{F}_n^L = \frac{3}{2} \pi \eta_f \frac{a^2}{h} \mathbf{v}_n \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_s^L = \frac{\pi \eta_f}{2} \left[-2a + (2a + h) \ln \left(\frac{2a + h}{h} \right) \right] \mathbf{v}_s \quad (7)$$

$$\mathbf{T}_r^L = \pi \eta_f a^3 \left(\frac{3}{2} + \frac{63}{500} \frac{h}{a} \right) \ln \left(\frac{a}{h} \right) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \quad (8)$$

$$\mathbf{T}_t^L = \pi \eta_f a^2 h \ln \frac{a}{h} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (9)$$

Where η_f is the fluid viscosity, h is the gap between particles, $\mathbf{v}_n = \dot{u}_n \mathbf{n}$ is the relative normal velocity, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}' - \boldsymbol{\Omega}$ is the relative rotational velocity.

A certain roughness $\varepsilon = \varepsilon a$ is introduced as a difference between u_n and h . The gap considered for the lubrication is $h = u_n + \varepsilon$, such that solid contact and lubrication effects play concurrently as soon as $h < \varepsilon$.

In this set of equation, the forces are based on Frankel & Acrivos[24, 25] whereas torques are based on Jeffrey & Onishi[26, 27]. The reason of this choice is developed by Marzougui *et al.* [20] The total lubrication forces and torque applied on particle k and k' are:

$$\mathbf{F}_k^L = -\mathbf{F}_{k'}^L = \mathbf{F}_n^L + \mathbf{F}_s^L \quad (10)$$

$$\mathbf{T}_k^L = \left(a_k + \frac{u_n}{2} \right) \mathbf{F}_s^L \times \mathbf{n} + \mathbf{T}_r^L + \mathbf{T}_t^L \quad (11)$$

$$\mathbf{T}_{k'}^L = \left(a_{k'} + \frac{u_n}{2} \right) \mathbf{F}_s^L \times \mathbf{n} - \mathbf{T}_r^L - \mathbf{T}_t^L \quad (12)$$

The above expressions of lubrication forces and torques are frame invariant and, since they satisfy Newton's third law (of action-reaction) their net contribution to the total force on the solid phase is null.

Conversely, the contribution by the seepage forces is the one which reflects the viscous resistance to differential velocity, and net interaction forces between the solid and the fluid phases. Herein this contribution is obtained

by integrating a an upscaled form of the continuity equation, using the pore-scale finite volume scheme defined by Chareyre *et al.* [28] and Catalano *et al.* [29]. The volume elements - so called "pores" - are the tetrahedra of the underlying Delaunay triangulation. The assumptions of the model are that the fluid is strictly incompressible and Newtonian and that the flow is Stokesian. On this basis the pressure field in the fluid is obtained for the entire problem by solving a linear system of equations dependent on particles' positions and velocities. The seepage forces are then deduced from the pore pressure field and integrated through the law of motion (Eq. 1). The pore pressure as well as the resulting forces are updated at every time iteration to capture the strong two way couplings (see [29]).

The contribution of the seepage forces is evident in various processes such as sedimentation, consolidation, or migration of particles within a flow. It might be argued that such forces are irrelevant to sheared suspensions at steady state, on the basis that both phases essentially co-move. While this might be true when averaging the motion of each phase on a sufficiently long time interval it is not necessarily true when considering instantaneous velocities. Instead the velocity fluctuations at the particle scale necessarily lead to converging particle velocities in some places, balanced by diverging velocities in other places. This in turns leads to transfers of fluid between meso-scale domains, and to seepage forces. The results in Marzougui *et al.* [20] suggested that the dissipation by such internal transfers is negligibly small. However, the seepage forces therein were underestimated by orders of magnitude. A re-assessment of the claim with correct orders of magnitude is thus offered in section III A.

D. Numerical details

The suspension is represented by a 3D bi-periodic packing made of $N = 5000$ spheres, of average radius a . The problem is periodic in the shear and vorticity directions, non-periodic in the third (normal) direction. The dimensions of the simulation cell are $30a \times 30a$ in the periodic directions. The initial state for the shear flow is obtained by compressing in the normal direction a very dilute suspension made of the N spheres placed randomly, in a box of size $30a \times 30a \times 120a$. Once the desired solid fraction is reached the shear is started.

In the normal direction the suspension is bounded by additional layers of spheres of the same size which play the role of rough and rigid plates (Figure 2). The shear is imposed by assigning to the plates opposite velocities in the shear direction. In the normal direction two sorts of boundary condition are used during shear. The distance between the plates is controlled in order to impose, either, a constant solid fraction (distance kept constant), or a constant normal granular stress. In the latter case the distance is servo-controlled using PID regulation to keep the stress close to the target value, and the relative velocity is updated to keep the shear rate constant as the distance changes. The evaluation of granular stress is detailed in the last paragraph of this section. For the pore fluid the plates are defined as impervious in the case of constant solid fraction and, conversely, a condition of null pore pressure is imposed in the case of imposed granular stress. In both cases the fluid is assumed to co-move with the plates (no-slip).

The radii of the spheres are set randomly according to a Gaussian distribution with a standard deviation of 5%. This small polydispersity prevents the system to crystallize. We have paid a special attention to this issue. For all the results presented in this work, the autocorrelation function of spheres positions do not exhibit any signature of long range ordering. We also verified that the time averaged strain rate is homogeneous. For $I_v < 10^{-4}$, we however observed layering and strain localization close to the walls. In this paper, we restrict the range of viscous numbers above this limit.

All the monitored quantities exhibit a transient regime before reaching the steady state. Since fluctuations can usually be observed even at steady state we compute time-averages of the relevant quantities; with a sufficiently long period so that the uncertainty on the average is less than a few percent.

The two types of boundary conditions in the normal direction (constant volume and constant normal stress) are not exactly equivalent since, for the constant volume case, the confining pressure is allowed to fluctuate, while for the constant pressure it is the solid fraction which fluctuates. However, for the results reported in this paper, we checked that this difference does not lead to significant changes in the observed behavior. In fact, similarly to the experimental case, it is more convenient to impose pressure at low viscous numbers. Indeed, in this concentrated regime, small changes of solid fraction have important consequences due to the vicinity of the jamming point. Thus, imposing both the global shear rate and the total pressure allows to study suspensions closer to jamming (vanishing viscous number).

The volume-averaged stress in the system is calculated based on the so-called *virial stress* expression for a particulate system: $\sigma = \langle \mathbf{f} \otimes \mathbf{l} \rangle - m \langle \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \rangle$. The first term on the right-hand side is the volume averaged outer product of the interaction force \mathbf{f} between two particles and the branch vector \mathbf{l} connecting their reference points. \mathbf{v} is the velocity fluctuation; i.e. the deviation of individual particle velocity from the macroscopic, average, velocity field. The second term, also called "Inertial stress" is always negligible in our simulations, as we stay in the viscous regime. Replacing the total interaction force by distinct contributions from contact (\mathbf{F}_C) and lubrication (\mathbf{F}_L) yields two stress tensors associated to contacts and lubrication, respectively $\sigma_c = \langle \mathbf{F}_C \otimes \mathbf{l} \rangle$ and $\sigma_L = \langle \mathbf{F}_L \otimes \mathbf{l} \rangle$. The viscosity

can be then calculated, taking the xy component of stress tensor: $\eta = \frac{\sigma_{xy}}{\dot{\gamma}}$. From the stress decomposition given above, it is possible to distinguish the contributions of contact and lubrication forces to the effective viscosity.

E. Parameters and asymptotic regimes

Both the relative viscosity η_r and the macroscopic friction coefficient μ are normalized forms of the shear stress, which is considered here as a response of the system. They are redundant in that sense yet both of them are used hereafter since η is classical in the literature and predicted as a function of ϕ by a number of models, while μ enables better insight into the granular contribution to stresses.

Several dimensionless numbers characterize the flow of Non-Brownian suspensions and controls the shear stress. The viscous number defined as $I_v = \eta_f \dot{\gamma} / P_p$, is the main parameter which has been varied in this work, from 10^{-4} to 10. It is closely related to the solid fraction ϕ , such that imposing one of ϕ or I_v gives the other one as a result. The elastic number $\mathcal{E}l = E/P_p$ measures the magnitude of spheres deformation by forces from solid contacts. E defines normal contact stiffness k_n according to $k_n = a E$. The particulate Stokes number $\mathcal{S}t_p = \rho a^2 \dot{\gamma} / \eta_f$ defines the ratio of inertial to viscous forces. In addition to these dimensionless numbers, the coefficient of contact friction μ_m and the particle roughness ϵ are material parameters of the problem.

Only I_v and μ_m have been varied systematically, but we checked that the others were small enough (Stokes number and roughness) or high enough (elastic number) to reach an asymptotic regime of inertia-less suspensions of rigid and smooth particles. This analysis is detailed in this section.

Unless stated otherwise for sensitivity analysis (see below), all the simulations were done with roughness $\epsilon = 2 \times 10^{-2}$, elastic number $\mathcal{E}l$ ranges from 10^3 to 10^8 , and particle Stokes number from 10^{-5} to 10^{-2} . For high enough elastic numbers and low enough Stokes number, one could expect an asymptotic regime which depends neither on elasticity nor on inertia, and which correspond to the case of rigid spheres in a Stokesian flow. Despite the high and low values of $\mathcal{E}l$ and $\mathcal{S}t$, respectively, it is worth checking this limit. For the elastic limit, we varied the contact stiffness of the spheres. As shown in Figure 1, the relative viscosity seem to be close to an asymptotic value for dimensionless stiffness ($E/(\eta_f \dot{\gamma})$) greater than 10^6 . For approaching the non-inertial limit, we proceeded differently. We computed systematically the contribution of inertia to the global shear stress. It is generally negligible and even for the highest velocities, and it remains below 1%. Therefore, all the results reported in the following can be considered in the viscous and rigid limit.

Finally, it is also interesting to test the sensitivity of the simulation results with respect to the particle roughness. Let us recall that the latter is used in the model defines the solid contact between two spheres; it occurs when the gap is less than roughness. This prevents the lubrication forces to diverge. We varied the roughness between 3×10^{-3} and 2×10^{-1} . The results are shown in Figure 1. As the relative viscosity reaches a plateau for roughness less than 4×10^{-2} , we can conclude that there exists an asymptotic limit. In the following, the roughness is fixed at 2×10^{-2} .

III. RESULTS

A. Role of pore pressure

Let us first focus on the role of pore pressure. As explained in the previous section the model incorporates a feedback from fluid pressure to particles motion. However, since this step is computationally costly, it is practically interesting to know whether pore pressure effects can be neglected at least in steady state shear configurations - it is worth noting that they are very important in transient regimes accompanied by changes in solid fraction.

Figure 2 displays a typical slice of the system, normal to the vorticity direction, at steady state. Rather than the pressure field, we have represented the magnitude of the pressure gradient. The latter is indeed of the order of the local viscous stress acting on a particle by seepage effects. The magnitude of pressure gradient is rather heterogeneous, but it appears in the figure that it remains significantly smaller than the total (bulk) shear stress overall. In Figure 2 it is typically between 10% and 20% of the mean shear stress, exceeding 20% in only a few places. This snapshot is extracted from a movie obtained available as supplementary material.

As it does not seem possible to reach a clear conclusion by comparing the magnitude of local pressure gradients with the global shear stress, we compared the bulk viscosity obtained with and without the coupling with pore pressure (that is, excluding seepage forces from the forces contributing to particles motion). The results are displayed in Figure 3. The viscosity is remarkably similar in both cases. This result holds for the other macroscopic observables (not presented here for the sake of concision), normal pressure or solid fraction.

It leads to the conclusion that the effects of pore pressure on macroscopic quantities is negligibly small at steady state, as suggested in [20] (on a weaker basis). A similar conclusion was also reached recently by Gallier and coworkers

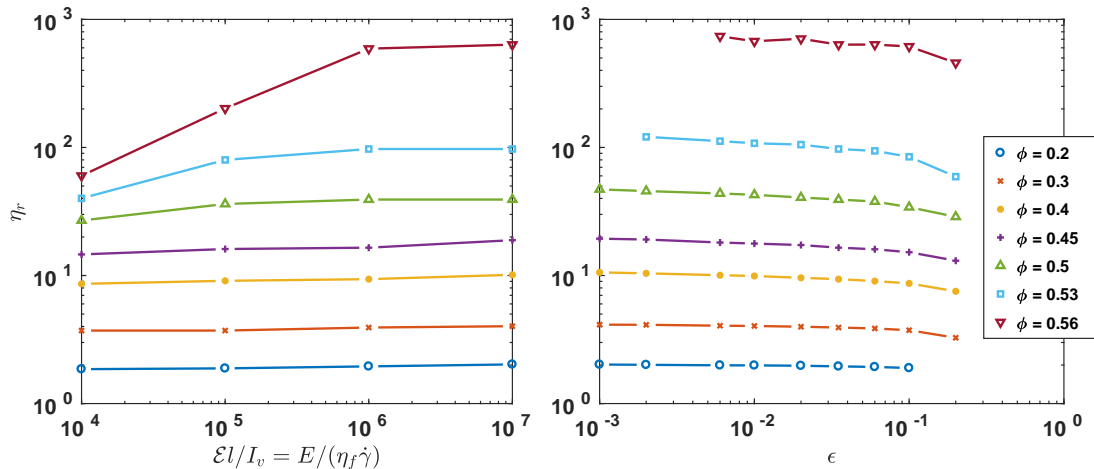


FIG. 1: Sensitivity analysis of the (*left*) contact stiffness and (*right*) roughness on the relative viscosity, for various solid fractions. Simulations at imposed solid fraction, $N = 5000$, $\mu_m = 0.4$, $\epsilon = 0.02$ (for stiffness), $k/(\eta_f \dot{\gamma}) = 10^7$ (for roughness)

[30], who studied the impact of long range hydrodynamic interactions and found no significant effect. Note that pore pressure may have some effects locally, but their study falls out of the scope of the present work. Since the coupling with the pressure field can be neglected, we performed the systematic simulations presented in the following without this coupling, which saves about 80% of computing time.

B. Shear viscosity

Figure 4 compiles various results giving reduced viscosity $\eta_r = \eta/\eta_f$ as a function of solid fraction, after earlier papers as well present study. The results were obtained either by fixing the solid fraction or the normal confining pressure, with viscous number ranging from 10^{-4} to 10, and for various contact friction μ_m . We find, that η_r increases with μ_m , in agreement with previous work [9, 10]. Correlatively, the viscosity seems to diverge at a solid fraction ϕ_m which depends on μ_m .

At this stage, it is worth comparing these data with previous experimental and numerical results. As shown in Figure 4, the experimental results of Boyer *et al.* [11] are in very good agreement with the data obtained for $\mu_m \simeq 0.5$. more precisely, the correlation proposed by in Boyer *et al.* [11] falls in between the data obtained for $\mu_m = 0.36$ and $\mu_m = 0.57$. As the friction coefficient remains to be measured for the systems tested in that work, we can only mention that this order of magnitude is typical of many materials [32]. As most of the experimental data available in the literature are rather similar to those of Boyer *et al.* [11], and as we are not aware of results on simple systems for which the friction coefficient is determined independently, we can only conclude that our results seem to be compatible with experimental data. Concerning simulations results, we compare in Figure 4 our results to two sets of data obtained with similar models, i.e. with models that consider both contact forces and lubrication forces. The approach of Mari *et al.* [9] is very similar to ours and two extreme cases have been considered : a frictionless one, for which $\mu_m = 0$, and a infinite friction coefficient. Although a small discrepancy is observed for the frictionless system, a very good agreement is obtained in the frictional limit. The comparison with the results reported in Gallier *et al.* [10] is also interesting, because they were obtained with a full resolution of the Stokes equation. In the common range of solid fraction $\phi < 0.45$, the comparison is excellent. This strengthens the conclusion of the previous section: down to $\phi \simeq 0.2$, neglecting long range viscous forces is a valid approximation. Lubrication forces seem to be sufficient to account quantitatively for the relative viscosity.

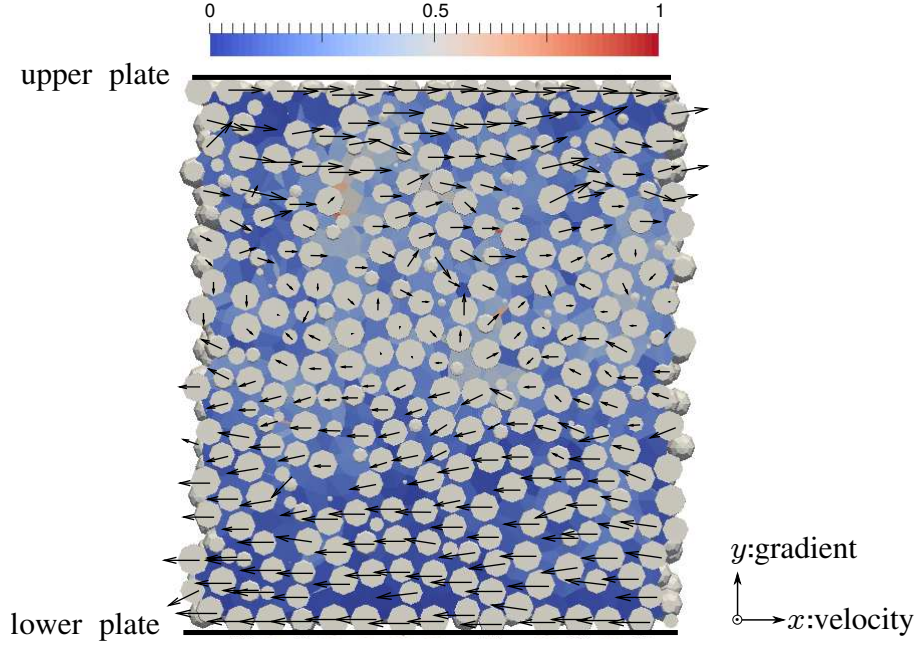


FIG. 2: Snapshot of a slice of the system, normal to the vorticity direction. The arrows indicate the particle velocities, and the colors correspond to the magnitude of the pressure gradient, normalized by the global confining pressure (see colorbar). This example has been obtained at $I_v = 10^{-2}$ for $\mu_m = 0.3$.

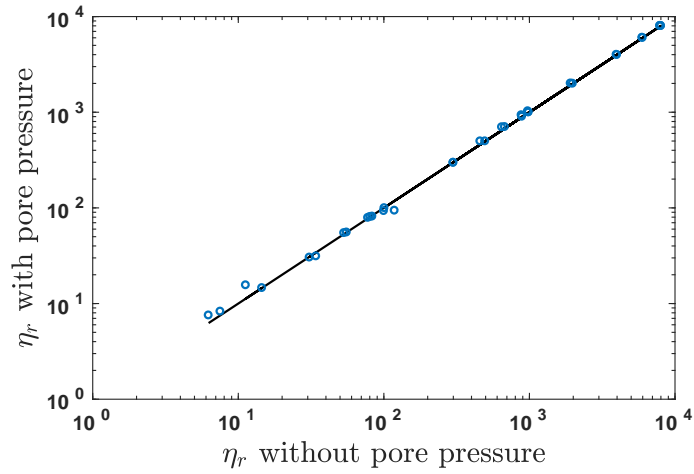


FIG. 3: Comparison of the shear viscosity obtained with and without pore pressure feedback. For this comparison, $\mu_m = 0.3$. The solid line corresponds to equality.

C. Confining pressure and frictional rheology

As explained in the introduction, one needs an additional constitutive relation to fully describe the interplay between shear stress, confining pressure and solid fraction. We follow in this section the approach of Boyer *et al.* [11] who introduced by analogy with granular materials the effective friction coefficient $\mu = \tau/P_p$ and the viscous number $I_v = \eta_f \dot{\gamma}/P_p$. In Figures 5 and 6, we represent the dependencies $\mu = \mu(I_v)$ and $\phi = \phi(I_v)$ respectively, based on the same dataset as in previous section.

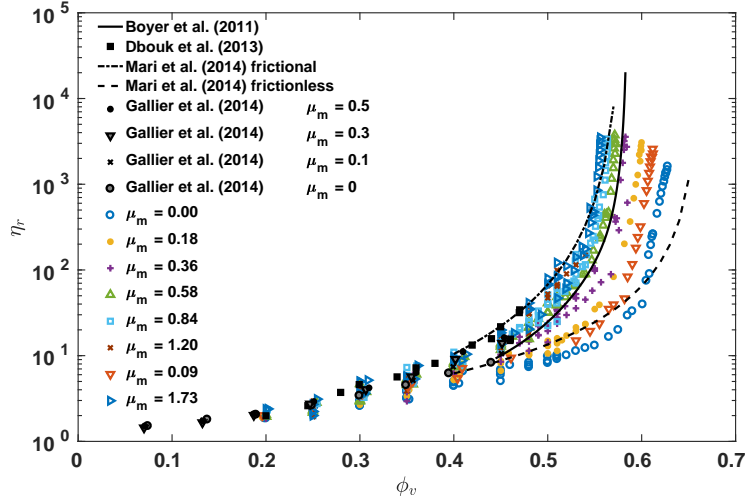


FIG. 4: Relative viscosity as a function of solid fraction, for various microscopic friction coefficient (see legend). Present data (open symbols) are compared to experimental results of Boyer *et al.* [11], Dbouk *et al.* [31], numerical results of Mari *et al.* [9], and of Gallier *et al.* [10].

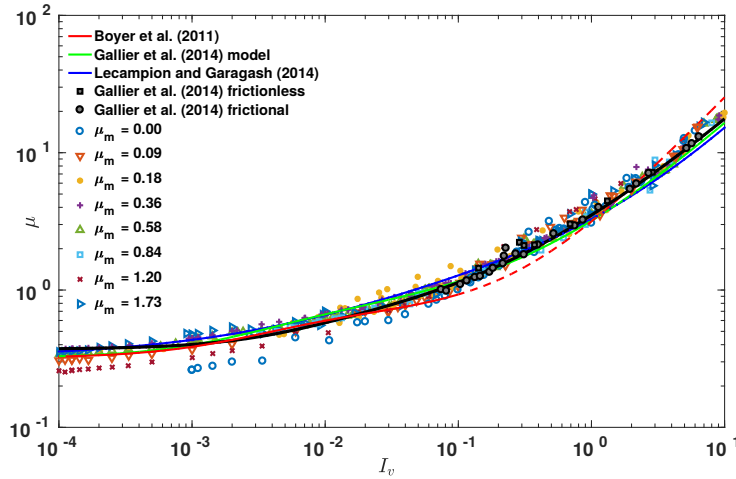


FIG. 5: Effective Friction coefficient $\mu = \tau/P_p$ as a function of I_v , for various microscopic friction coefficients μ_m , as indicated in the legend. Data from references 10 and 11 are superimposed for comparison.

In figure 5 the results are in very good agreement with earlier simulations as well as experiments. Interestingly, the experimental results of Boyer *et al.* [11] have been obtained in the concentrated regime (I_v between 10^{-4} and 10^{-1}) and the numerical results of [10] in a more dilute one (I_v between 10^{-1} and 10). Our results cover the whole range of viscous number, and thus confirm both sets of data.

Strikingly, and in contrast to the shear viscosity, $\mu(I_v)$ is only weakly dependent on contact friction. Exceptions are only found at low I_v ; in that case substantial deviations are obtained for the less frictional systems. The effective friction coefficient is slightly lower in these cases: the asymptotic value at $I_v \rightarrow 0$ is about 0.37 for frictional spheres and seem to be of the order of 0.1 for the frictionless one. This last value is in good agreement with the quasi-static limit of frictionless granular materials [33]. For $I_v \gtrsim 10^{-1}$, all results - even for the frictionless case - collapse on a master curve, in good agreement with the numerical results reported in reference 10. For the shear viscosity, similarly, the experimental data of reference 11 is close to the results with $\mu_m \simeq 0.5$.

In Figure 6 the constitutive laws $\phi(I_v)$ deduced from the simulation results are presented. In contrast with the weak dependency of μ on μ_m discussed above, there is a noticeable decrease of $\phi(I_v)$ at increasing μ_m . This is

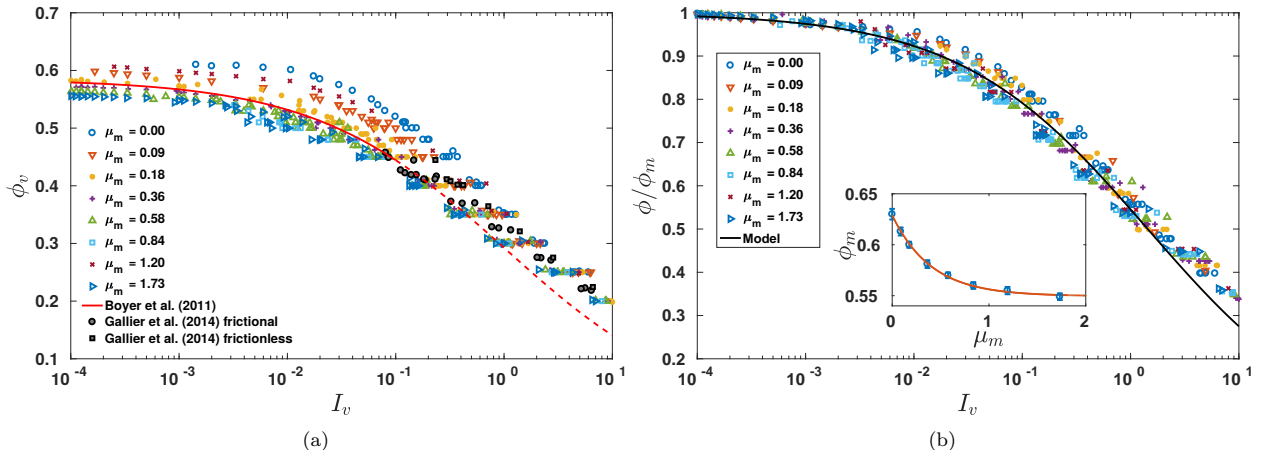


FIG. 6: (a) solid fraction as a function of the viscous number for various value of μ_m , as indicated in the legend. The solid line represents the correlation proposed in Boyer *et al.* [11], $\phi = \phi_m / (1 + I_v^{0.5})$ which accounts well for the experimental data, for $I_v < 0.1$. The dashed line is simply the extrapolation of this correlation at higher viscous numbers, where no experimental data are available. (b) same data, but the solid fraction is normalized by its asymptotic value ϕ_m at low I_v . The solid line represents the correlation $1 / (1 + I_v^{0.5})$. In insert are shown the different values of ϕ_m as a function of the microscopic friction coefficient. The data are fitted by an exponential function, which accounts well for the data, and displayed in equation 13.

consistent with the fact that the maximal solid fraction at which the viscosity diverges (see Figure 4) increases when decreasing μ_m . Comparison with existing data is again excellent on the whole range of I_v tested. In the dilute regime, a quantitative agreement is found with the simulations of reference 10. In the concentrated regime, our results with $\mu_m \simeq 0.45$ match the experimental data. In order to simplify the overall description, we test here the idea that the $\phi(I_v)$ follows a master curve when rescaled by the maximal solid fraction ϕ_m . This is made in Figure 6. From the very good collapse of the data, we can conclude that their seems to be a universal relation $\phi/\phi_m = f(I_v)$, independently on the value of μ_m . ϕ_m decreases with microscopic friction coefficient, from $\phi_m = 0.63$ for frictionless particles down to $\phi_m = 0.55$. This last value seems to be close to the asymptotic one for $\mu_m \rightarrow \infty$. For practical purpose, we propose the following empirical relation between ϕ_m and μ_m :

$$\phi_m = 0.6301 - 0.0794 \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu_m}{0.4032}\right) \right] \quad (13)$$

Let us comment on the values of ϕ_m , as it is not simple to define them unambiguously. We tested several methods: fitting with the empirical relation proposed in reference 11 ($\phi = \phi_m / (1 + I_v^{0.5})$), manual adjustment of the master curve, average value of ϕ at low I_v . Finally, we chose to define ϕ_m as the value leading to a single power law when $1 - \phi/\phi_m$ is plotted as a function of I_v at small I_v . All the methods lead to very similar values. Their variability let us estimate the uncertainty on ϕ_m determination, which is around 0.01 (see the error bars in the insert of Figure 6).

Note that another functional form for $\phi_m = \phi_m(\mu_m)$ was proposed in Singh *et al.* [34]. Its main difference with equation 13 is that $\frac{d\phi_m}{d\mu_m}(\mu_m = 0^+) = 0$ in the former, which is not compatible with our data.

It is worth noting finally that the sensitivity to contact friction, more pronounced for solid fraction than for macroscopic friction, is a common feature of both suspensions and dry granular flow. The later case was reported by Aboul-Hosn *et al.* [35] for instance (fig. 5 therein).

D. Critical scaling near jamming

One of the recurrent questions in the literature concerns the exponents governing the divergence of the viscosity when approaching the maximal solid fraction. Although most authors report that $\eta \sim (\phi - \phi_m)^{-\alpha}$, with $\alpha \simeq 2$, some theoretical arguments are in favor of different a scaling relation between frictional and frictionless particles [18]. Note that as pointed out by several authors (see for example reference 9), the determination of the exponents is non-trivial. In figure 7, we re-plot the viscosity data in log-log axis system, and as a function of $(1 - \phi/\phi_m)$. As explained above,

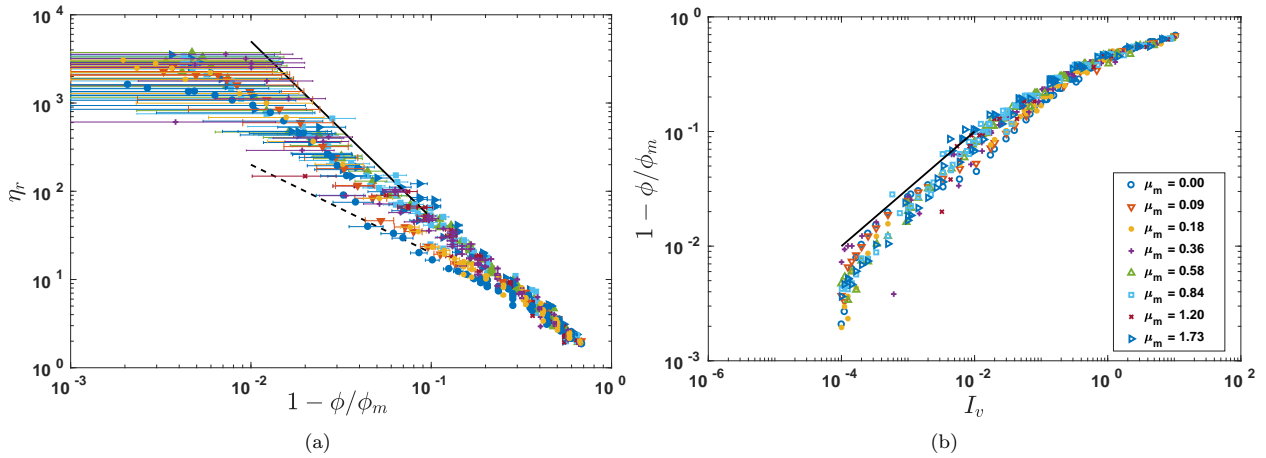


FIG. 7: (a) reduced viscosity (same data as in figure 4), plotted as a function of the distance to jamming, $1 - \phi/\phi_m$. Solid and dashed lines represent power law functions of exponent -2 and -1, respectively. (b) $1 - \phi/\phi_m$, plotted versus the viscous number I_v for the whole range of μ_m tested. The solid line represents $I_v^{1/2}$.

it is difficult to define ϕ_m very accurately. This uncertainty leads to the large error bars displayed in Figure 7 when approaching ϕ_m . It prevents us from reaching precise conclusion on the scaling exponent. For $1 - \phi/\phi_m \gtrsim 0.1$, the α exponent is clearly close to 2. For lower values, it is comprised between 1 and 2. We note that for the frictionless system, the slope seems to be closer to 1 than to 2, and smaller than that of frictional cases, in agreement with previous reports [30].

Alternatively, We can examine the scaling of $1 - \phi/\phi_m$ when decreasing I_v . Since $\eta_r = \mu/I_v$ and assuming that μ tends to a constant value when $I_v \rightarrow 0$, $(1 - \phi/\phi_m)$ should scale as $I_v^{1/\alpha}$. Strikingly, as shown in Figure 7, the data exhibits a nice collapse on a power-law of exponent 0.5. Note that this scaling relation is observed across three orders of magnitude ($10^{-4} < I_v < 10^{-1}$). The fact that the scaling relation is less clear when considering the viscosity can be understood on the basis that μ has not reach the quasi-static value and keeps decreasing when decreasing I_v down to 10^{-4} . Determining the divergence exponent for viscosity from the simulations would thus require to decrease I_v even below 10^{-4} and to define ϕ_m more accurately.

E. Stress decomposition and phenomenological relations

We now take advantage of the simulation results to discuss the role of contact forces. We propose as in references 9–11, 18, 20, and 36 to analyze the contributions to the total shear stress from contact forces and lubrication forces, respectively.

As seen in figure 8 the fraction of μ attributed to contact forces, noted μ_C , is slowly increasing with I_v , but remains in the range 0.1 - 0.7. In contrast, the viscous contribution μ_L is increasing almost linearly. As a consequence, the total shear stress is dominated by lubrication forces at high viscous number, and more precisely for $I_v > 0.1$. This crossover does not depend significantly on the value of μ_m . For lower values of I_v the contact forces are dominant. It is interesting to comment the crossover in terms of solid fraction, as many experiments are conducted at fixed solid fraction. As detailed in the previous sections, when varying the microscopic friction coefficient, the solid fraction $\phi(I_v)$ is modified, and we have shown that a master curve could be obtained when ϕ is normalized by the maximal solid fraction ϕ_m . Therefore, the crossover observed at $I_v \simeq 0.1$ between a contact dominated rheology and a lubrication dominated one corresponds to a value of $\phi/\phi_m \simeq 0.77$. Using the $\phi_m(\mu_m)$ dependency displayed in Figure 6b, we obtain for a frictionless system a crossover solid fraction of $\phi \simeq 0.48$; when the friction coefficient is very high, the crossover is reduced to $\phi \simeq 0.42$. This range is compatible with the range leading to discontinuous shear thickening in [8].

The contribution of normal and tangential lubrication forces follow very similar trends. The tangential forces contribute to approximately one third of the total lubrication stress in all cases. Though smaller than the contribution of normal forces it is not negligible.

The stress decomposition discussed above also allows to test and revisit the phenomenological expressions that

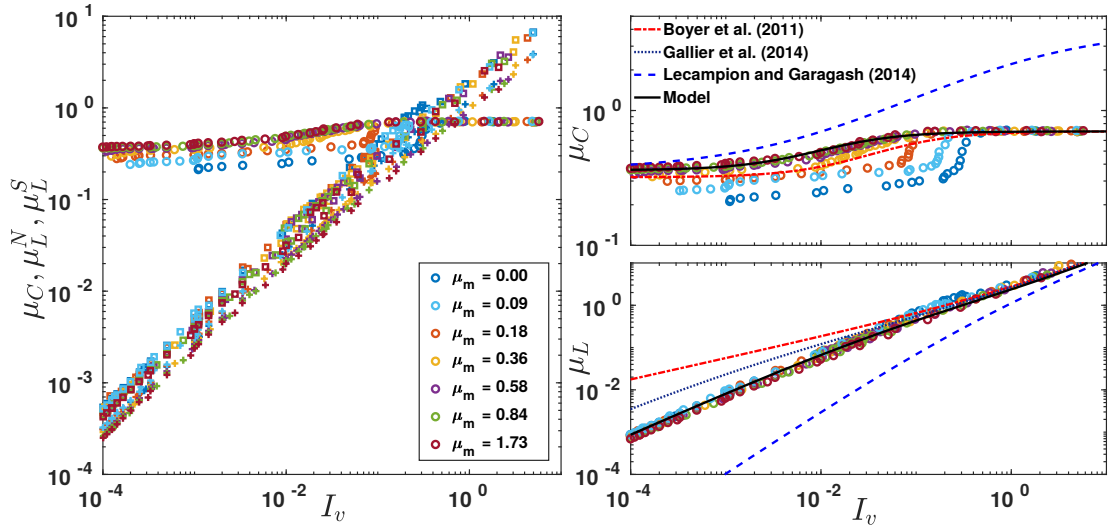


FIG. 8: Contact and lubrication contribution to the effective friction coefficient. (*left*) All the components (circles for contact contribution, squares for symbols normal lubrication contribution and crosses for shear lubrication contribution) are plotted as a function of I_v . (*right*) Magnified plot of (top) the contact contribution (*top*) and of (bottom) the sum of lubrication contribution ($\mu_L = \mu_L^N + \mu_L^S$). Discontinuous lines are models proposed by different authors. Contact contribution for Gallier *et al.* [10] is same as Boyer *et al.* [11]. Solid lines represents the model proposed in equations (14) and (15).

have been proposed in the literature on $\mu(I_v)$ rheology. Up to our knowledge, three different expressions have been proposed. The first one in Boyer *et al.* [11] is based on experimental data - and therefore without any data from the stress decomposition. The second one has been proposed in [10], based on numerical results obtained for $I_v > 0.1$ - and thus restricted to the lubrication dominated regime. Finally, the last one was proposed in Lecampion and Garagash [36], without data support, but with the objective of removing the non-monotonicity of the $d\phi/d\mu$ with respect to ϕ which exists in Boyer's correlation. These three phenomenological models are detailed in the Appendix. We note that although these three correlations lead to rather similar $\mu(I_v)$ relations (see Figure 5), their decompositions in terms of viscous and contact contributions are rather different, and their asymptotic scaling differ. The differences between the hydrodynamic contributions are evident in the concentrated regime where this contribution is negligible, and conversely the differences between contact contributions are more visible in dilute regime. We have plotted in Figure 8 the decompositions of all three models together with the data reported in this article. There is an evident mismatch between the expressions from Lecampion and Garagash [36] and our results. The hydrodynamic contribution proposed in Boyer *et al.* [11] fails to predict the asymptotic scaling at low I_v : it scales as $\mu_h \propto I_v^{1/2}$, whereas we observe $\mu_h \propto I_v$ in the concentrated regime. And finally the expression from Gallier *et al.* [10] is in quantitative agreement for $I_v > 10^{-1}$ but it overestimates μ_L at lower values (a regime unexplored in that work). Nonetheless, it exhibits a correct linear scaling as $I_v \rightarrow 0$. The contact contribution is relatively well captured by the expression of Boyer *et al.* [11], which was kept unchanged in Gallier *et al.* [10].

To sum up, the expressions proposed by Gallier *et al.* [10] are in qualitative agreement with our data. In order to improve the quantitative agreement, however, we suggest a change in the empirical coefficients. The model we propose finally reads

$$\mu = \underbrace{\mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + I_0/I_v}}_{\mu_c} + I_v \underbrace{\left(1 - \phi_m \frac{1}{1 + I_v^{1/2}}\right)^{-[\eta]}}_{\mu_h} \quad (14)$$

$$\frac{\phi}{\phi_m} = \frac{1}{1 + I_v^{1/2}} \quad (15)$$

with $\mu_1 = 0.36$, $\mu_2 = 0.7$, $I_0 = 0.0133$, $[\eta] = 5/2$. As shown in Figure 8, this model is in very good agreement with the data in the whole range of viscous number studied and for both lubrication and contact components of the total shear stress. Complemented by the phenomenological relation relating ϕ_m and μ_m (see equation 13), it allows to predict

accurately the shear viscosity and the solid fraction of a suspension made of rigid spheres of known microscopic friction coefficient.

Eliminating the viscous number in equations 14 and 15 leads to the following expression for the shear viscosity as a function of the solid fraction:

$$\eta_r = \frac{\mu_1}{(\phi_m/\phi - 1)^2} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{(\phi_m/\phi - 1)^2 + I_0} + (1 - \phi)^{-5/2} \quad (16)$$

The first two terms are originated from contact forces and the last one from lubrication. Interestingly, this expression is asymptotically equivalent to Einstein relation [1] at low ϕ , as $\eta_r = 1 + \frac{5}{2}\phi + \mathcal{O}(\phi^2)$. Moreover, it is also asymptotically equivalent to Krieger-Dougherty form when ϕ is approaching ϕ_m , as $\eta_r \sim \mu_1 (1 - \phi/\phi_m)^{-2}$. Note that the -2 exponent is compatible with most of the data available in the literature.

The above model captures quantitatively the data reported in this article as soon as $\mu_m > 0.36$. For lower values of μ_m , we observe that the macroscopic friction coefficient μ (and consequently the shear viscosity) depends on μ_m through the contact contribution. This is evidenced in Figure 8 (bottom-left). Not only the value of μ_1 slightly decreases when μ_m is decreased below 0.36, but also the transition towards the asymptotic value μ_2 at high I_v is sharper and shifted to larger I_v value. Looking into details and in particular at the volume fraction profiles, we noticed that this sharp transition is accompanied by a wall induced layering of the spheres, when decreasing I_v , recalling some of the results of reference 37. In contrast, when the transition is smooth for $\mu_m \geq 0.36$, the whole domain remains disordered in the range of I_v investigated. Because of this layering, it seems meaningless to adapt the correlation proposed equation 14 for the weakly frictional systems. Describing or removing the layering in these ones asks for additional dedicated work, as it is likely that this phenomenon depends on the confinement and on wall details. Let us finally note, that the condition $\mu_m > 0.36$ for the frictional limit is satisfied by a large range of materials.

IV. CONCLUSION

A systematic study of sheared suspensions of frictional and frictionless rigid spheres has been carried out by numerical simulations, in a large range of viscous numbers. The good quantitative agreement between the numerical results and available experimental data suggests that the main two component of the model considered here, i.e. lubrication and contact forces are sufficient to explain the rheology of these systems. A more detailed analysis showed that lubrication forces dominate for $I_v > 10^{-1}$, i.e. for $\phi/\phi_m < 0.77$; while contact forces give the main contribution to shear stress otherwise. Viscosity, solid fraction and viscous number are linked together by two constitutive laws, which only depend on the microscopic friction coefficient. Among the results reported in this article, we should underline that in a large range of parameters viscosity is defined uniquely as a function of I_v , independently of contact friction. Exceptions to this rule are found only for weakly frictional contacts at low I_v . Moreover, normalizing the solid fraction by the upper bound $\phi_m = \phi(I_v = 0)$ defined for a given contact friction leads to a master curve as a function of I_v only. In other words, even when contact forces between the particles dominate the flow, changing the friction between particles only affects the maximal solid fraction at which the viscosity diverges.

A complete set of constitutive relations has been offered, which fits the numerical data accurately across five orders of magnitude of I_v . This constitutive model is close to previous ones in terms of total shear stress yet the decomposition in terms of lubrication and contact forces differs from previous ones and is consistent with presented data. As it asymptotically matches the standard Einstein relation at low ϕ and Krieger-Dougherty law at high ϕ (with a -2 divergence exponent), we believe it could be extrapolated to an even larger range of I_v .

Apart from these main results, let us also highlight that we have validated the fact that the coupling with pore pressure has negligible consequences at steady state, and that long range hydrodynamic interactions are not relevant down to solid fraction of 0.2. Besides, the results are neither very sensitive to the particle roughness (between 10^{-3} and 10^{-1}), nor to the particle stiffness. The transition towards the limit of ultra-smooth particles where contact between particles do not theoretically exists remains to be investigated. Importantly, even frictionless particles fall well in the picture depicted above and are dominated at low I_v by contact forces, although one should adapt slightly the master curves.

V. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank S. Gallier, F. Peters, L. Lobry, O. Pouliquen, E. Lemaire and E. Guazzeli for fruitful discussion. They acknowledge Univ. Grenoble Alpes for financial support. 3SR and LRP are members of Labex Tec21, and LRP of Institut Carnot Polynat. Some of the computations presented in this paper were performed using

the CIMENT infrastructure (<https://ciment.ujf-grenoble.fr>), which is supported by the Rhône-Alpes region (GRANT CPER07_13 CIRA: <http://www.ci-ra.org>).

VI. APPENDIX

We detailed below the three correlations that have been proposed in the literature for the $\mu(I_v)$ rheology, and that are compared to the simulation data in Figures 5 and 8.

In Boyer *et al.* [11], the following correlation was proposed and accounts well for the experimental data:

$$\mu = \underbrace{\mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + I_0/I_v}}_{\mu_c} + I_v \underbrace{\left(1 + \frac{5}{2} \frac{\phi_m}{I_v^{1/2}}\right)}_{\mu_h} \quad (\text{A1})$$

$$\frac{\phi}{\phi_m} = \frac{1}{1 + I_v^{1/2}}, \quad (\text{A2})$$

with $\mu_1 = 0.32$, $\mu_2 = 0.7$, $I_0 = 0.005$, $\phi_m = 0.585$.

In the expression proposed in Gallier *et al.* [10], the hydrodynamic component μ_h is modified and the model reads

$$\mu = \underbrace{\mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + I_0/I_v}}_{\mu_c} + I_v \underbrace{\left(1 + \frac{\phi_m}{\phi'_m} \frac{1}{1 + I_v^n}\right)^{-[\eta]\phi'_m}}_{\mu_h} \quad (\text{A3})$$

$$\frac{\phi}{\phi_m} = \frac{1}{1 + I_v^n}, \quad (\text{A4})$$

with $\mu_1 = 0.32$, $\mu_2 = 0.7$, $I_0 = 0.005$, $\phi_m = 0.64$, $\phi'_m = 0.68$, $[\eta] = 2.4$ and $n = 0.4$. These parameter are in good agreement with the numerical results reported in reference [10], obtained for $\mu_m = 0.5$ for solid fraction between 0.1 and 0.45.

In their 2014 paper, Lecampion and Garagash [36] proposed to significantly modify the form of both contact and lubrication contribution to the macroscopic friction coefficient, without changing significantly the sum of the two. The corresponding expression reads:

$$\mu = \underbrace{\mu_1 + \frac{\phi_m}{\beta} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)}_{\mu_c} + I_v \underbrace{\left[1 + \frac{5\phi_m + 2}{I_v^{1/2}}\right] \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^2}_{\mu_h} \quad (\text{A5})$$

$$\frac{\phi}{\phi_m} = \frac{1}{1 + I_v^{1/2}}, \quad (\text{A6})$$

with $\beta = 0.158$, $\mu_1 = 0.3$ and $\phi_m = 0.585$.

-
- [1] A. Einstein, "Eine neue bestimmung der moleküldimensionen," *Ann. Phys.* **324**, 289 (1906).
 - [2] G. Batchelor and J. Green, "The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 ," *J. Fluid Mech.* **56**, 401 (1972).
 - [3] F. Gadala-Maria and A. Acrivos, "Shear-induced structure in a concentrated suspension of solid spheres," *J. Rheol.* **24**, 799 (1980).
 - [4] B. Metzger, P. Pham, and J. Butler, "Irreversibility and chaos: Role of lubrication interactions in sheared suspensions," *Phys. Rev. E* **87**, 052304 (2013).
 - [5] C. Ness and J. Sun, "Two-scale evolution during shear reversal in dense suspensions," *Phys. Rev. E* **93**, 012604 (2016).
 - [6] F. Peters, G. Ghigliotti, S. Gallier, F. Blanc, E. Lemaire, and L. Lobry, "Rheology of non-brownian suspensions of rough frictional particles under shear reversal: A numerical study," *J. Rheol.* **60**, 715 (2016).
 - [7] M. Wyart and M. E. Cates, "Discontinuous Shear Thickening without Inertia in Dense Non-Brownian Suspensions," *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014).
 - [8] R. Seto, R. Mari, J. F. Morris, and M. M. Denn, "Discontinuous Shear Thickening of Frictional Hard-Sphere Suspensions," *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013).

- [9] R. Mari, R. Seto, J. F. Morris, and M. Denn, “Shear thickening, frictionless and frictional rheologies in non-brownian suspensions,” *J. Rheol.* **58**, 1693 (2014).
- [10] S. Gallier, E. Lemaire, F. Peters, and L. Lobry, “Rheology of sheared suspensions of rough frictional particles,” *J. Fluid Mech.* **757**, 514 (2014).
- [11] F. Boyer, E. Guazzelli, and O. Pouliquen, “Unifying suspension and granular rheology,” *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011).
- [12] L. Amarsid, J. Delenne, M. P., Y. Monerie, F. Perales, and F. Radjai, “Viscoinertial regime of immersed granular flows,” *Phys. Rev. E* **96**, 012901 (2017).
- [13] T. Kawasaki and L. Berthier, “Discontinuous shear thickening in brownian suspensions,” *Phys. Rev. E* **98**, 012609 (2018).
- [14] C. Ness and J. Sun, “Flow regime transitions in dense non-brownian suspensions: Rheology, microstructural characterization, and constitutive modeling,” *Phys. Rev. E* **91**, 012201 (2015).
- [15] A. Boromand, S. Jamali, B. Grove, and J. M. Maia, “A generalized frictional and hydrodynamic model of the dynamics and structure of dense colloidal suspensions,” *J. Rheol.* **62**, 905 (2018).
- [16] O. Cheal and C. Ness, “Rheology of dense granular suspensions under extensional flow,” *J. Rheol.* **62**, 501 (2018).
- [17] M. Trulsson, B. Andreotti, and P. Claudin, “Transition from the viscous to inertial regime in dense suspensions,” *Phys. Rev. Lett.* **109**, 118305 (2012).
- [18] M. Trulsson, E. DeGiuli, and M. Wyart, “Effect of friction on dense suspension flows of hard particles,” *Phys. Rev. E* **95**, 012605 (2017).
- [19] R. N. Chacko, R. Mari, M. E. Cates, and S. M. Fielding, “Dynamic vorticity banding in discontinuously shear thickening suspensions,” *Phys. Rev. Lett.* **121** (2018).
- [20] D. Marzougui, B. Chareyre, and J. Chauchat, “Microscopic origin of shear stress in dense fluid-grain mixtures,” *Granular Matter* **17**, 297 (2015).
- [21] V. Šmilauer and B. Chareyre, in *Yade Documentation 2nd ed* (The Yade Project, 2015) <http://yade-dem.org/doc/>.
- [22] P. Cundall and O. Strack, “Discrete numerical-model for granular assemblies,” *Geotechnique* **29**, 47 (1979).
- [23] R. Ball and J. R. Melrose, “A simulation technique for many spheres in quasi-static motion under frame-invariant pair drag and brownian forces,” *Physica A* **247**, 444 (1997).
- [24] N. Frankel and A. Acrivos, “On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres,” *Chem. Eng. Sci.* **22**, 847 (1967).
- [25] B. Van den Brule and R. Jongshaap, “Modeling of concentrated suspensions,” *J. Stat. Phys.* **62**, 1225 (1991).
- [26] D. Jeffrey and Y. Onishi, “The forces and couples acting on two nearly touching spheres in low-reynolds-number flow,” *Zamm-Z Angew. Math. Me.* **35**, 634 (1984).
- [27] D. Jeffrey and Y. Onishi, “Calculation of the resistance and mobility functions for two unequal rigid spheres in low-reynolds-number flow,” *J. Fluid Mech.* **139**, 261 (1984).
- [28] B. Chareyre, A. Cortis, E. Catalano, and E. Barthélemy, “Pore-scale modeling of viscous flow and induced forces in dense sphere packings,” *Transport Porous Med.* **94**, 595 (2012).
- [29] E. Catalano, B. Chareyre, and E. Barthélemy, “Pore-scale modeling of fluid-particles interaction and emerging poromechanical effects,” *Int. J. Numer. Anal. Met.* **38**, 51 (2014).
- [30] S. Gallier, F. Peters, and L. Lobry, “Simulations of sheared dense noncolloidal suspensions: Evaluation of the role of long-range hydrodynamics,” *Phys. Rev. Fluids* **3**, 042301 (2018).
- [31] T. Dbouk, L. Lobry, and E. Lemaire, “Normal stresses in concentrated non-brownian suspensions,” *J. Fluid Mech.* **715**, 239 (2013).
- [32] Faculty of Industrial Design Engineering of Delft University of Technology, “IDEMAT database,” (2003).
- [33] P.-E. Peyneau and J.-N. Roux, “Frictionless bead packs have macroscopic friction, but no dilatancy,” *Phys. Rev. E* **78**, 011307 (2008).
- [34] A. Singh, R. Mari, M. M. Denn, and J. F. Morris, “A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions,” *Journal of Rheology* **62**, 457 (2018).
- [35] R. A. Hosn, L. Sibille, N. Benahmed, and B. Chareyre, “Discrete numerical modeling of loose soil with spherical particles and interparticle rolling friction,” *Granular Matter* **19**, 4 (2017).
- [36] B. Lecampion and D. Garagash, “Confined flow of suspensions modeled by a frictional rheology,” *J. Fluid Mech.* **759**, 197 (2014).
- [37] S. Gallier, E. Lemaire, L. Lobry, and F. Peters, “Effect of confinement in wall-bounded non-colloidal suspensions,” *J. Fluid Mech.* **799**, 100–127 (2016).

3.2.1 Résultats complémentaires

Les résultats présentés dans l'article de la section 3.2 ont été réalisés dans une cellule de simulation bi-périodique, c'est-à-dire une cellule de simulation avec des conditions aux limites périodiques, et dont la périodicité a été cassée selon l'axe y (vertical) par l'ajout de deux plans rendus rugueux par le collage aléatoire de sphères sur ceux-ci. Ces plans servaient à imposer le champ de cisaillement, l'implémentation initiale ne permettant pas de faire du tripériodique intégral. Ainsi, malgré la légère polydispersité et les parois rugueuses, une certaine organisation en couche se développait au voisinage de ces plans. Dès lors que le coefficient de friction dépassait une certaine valeur, de l'ordre de 0.2, les forces normales tangentielles suffisent à désorganiser cette couche qui se forme, et aucun effet notable n'est visible sur les variables macroscopiques. En revanche, pour les suspensions dont le coefficient de friction est plus faible, la figure 8 de l'article en 3.2 montre un décrochement des courbes $\mu(I_v)$, pour la partie contact, qui est associé à l'apparition de couches au voisinage de la paroi. En effet, l'organisation des particules au voisinage de la paroi entraîne une réduction de la contrainte nécessaire au cisaillement de la suspension, car il est plus facile pour des couches organisées de glisser les unes par rapport aux autres que de cisailer un milieu désordonné. En outre, une telle organisation en couche de la simulation peut mener à d'autres phénomènes tels que la localisation de l'écoulement. Les simulations présentant clairement ce type de comportement ont été exclus du jeu de donnée de l'article.

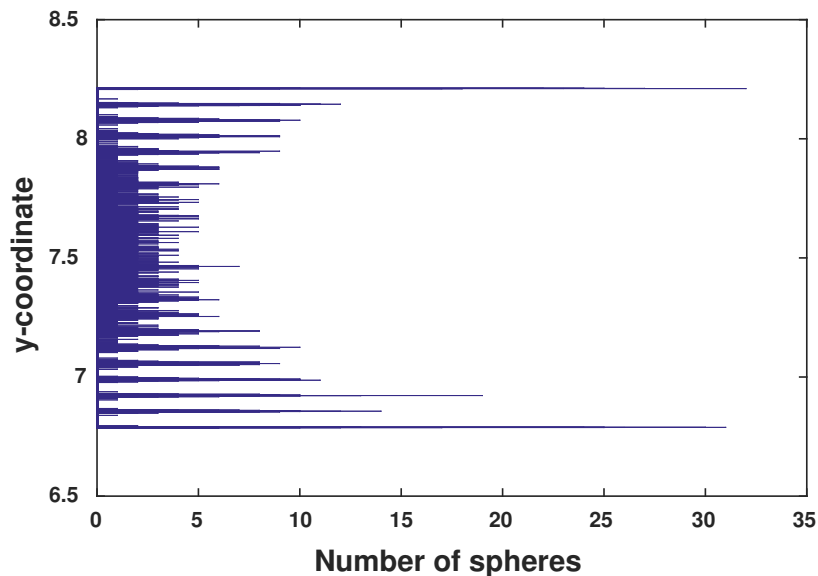


FIGURE 3.1 – Densité de probabilité des centres des sphères en fonction de la coordonnée y dans une simulation présentant une organisation en couche proche de la paroi ($\mu_m = 0.1, I_v = 10^{-3}$)

La figure 3.1 montre un histogramme du nombre de sphères par rapport à la coordonnée y de son centre à un instant donné pour une simulation à faible coefficient

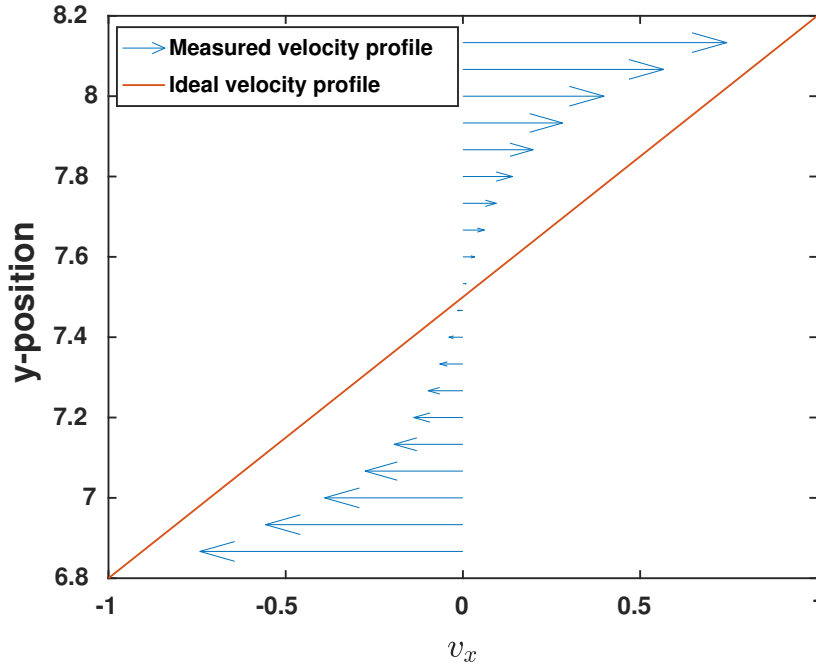


FIGURE 3.2 – Profil de vitesse en fonction de la coordonnée y dans une simulation présentant une organisation en couche proche de la paroi ($\mu_m = 0.1, I_v = 10^{-3}$)

de frottement et à faible nombre visqueux. Dans le cas de cette simulation, des couches de sphères se sont formées au voisinage des parois hautes et basses. Au fur et à mesure que l'on se rapproche du centre de la cellule de simulation, l'organisation devient de moins en moins marquée, jusqu'à disparaître. Dès lors, la cellule de simulation ne peut plus être considérée comme un volume représentatif d'une suspension, du point de vue des milieux continus, car l'ensemble de la cellule n'est plus homogène. En effet, les couches organisées sont plus denses que les couches désorganisées. D'autre part, il est plus facile de faire glisser deux couches les unes par rapport aux autres, plutôt que de cisailer un milieu désorganisé. La figure 3.2, qui montre le profil de vitesse vertical de cette simulation, montre que le gradient de vitesse est plus élevé dans les zones organisées, et plus faible au centre. L'écoulement est donc localisé dans ces zones et le volume de simulation ne peut plus être considéré comme un volume représentatif.

La figure 3.3 reproduit la figure 8 de l'article 3.2, mais cette fois ci avec le code permettant de réaliser des simulations en tripériodique intégral, c'est à dire sans parois et avec des conditions aux limites périodiques dans toutes les directions. Dans ce cas, ce phénomène d'organisation aux voisinage de la paroi disparaît et le milieu reste homogène tout au long de la simulation. Ainsi, la transition abrupte observée sur la courbe $\mu(I_v)$ pour la partie contact disparaît au profit d'une transition douce entre les régimes à bas et haut nombre visqueux. Les conclusions tirées dans l'article sont toujours valables. À bas nombre visqueux, il y a deux valeurs vers lesquelles tendent la contribution du contact à la contrainte : ≈ 0.37 pour les frottants et ≈ 0.15 pour les non-frottants. À haut nombre visqueux, un plateau à une valeur de

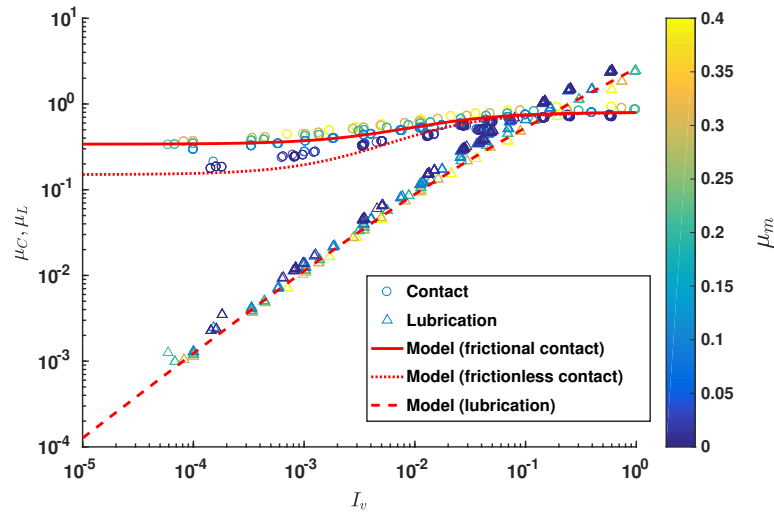


FIGURE 3.3 – Composante de contact et de lubrification de la contrainte pour les simulation réalisées en tripériodique intégral, et comparaison au modèle proposé

0.7 est observé. Le modèle proposé pour les contacts frottants peut donc être étendu pour les contacts non-frottants. La partie visqueuse était indépendante du coefficient de friction et la courbe obtenue est identique.

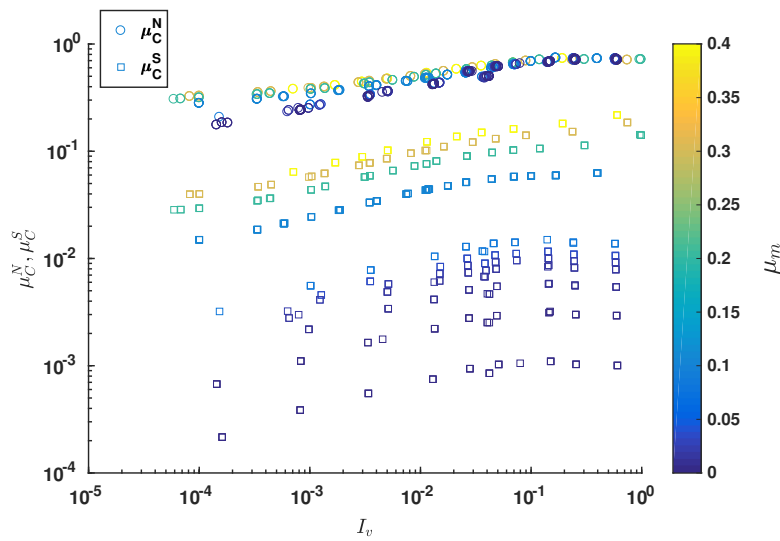


FIGURE 3.4 – Composante normale et tangentielle de contact de la contrainte pour les simulation réalisées en tripériodique intégral

D'autre part, sur la figure 3.4, la contribution de contact a cette fois ci été distribuée entre les contributions des forces normales et tangentielles. Sur cette figure, les points de la contribution du contact normal à la contrainte sont tous superposés, à l'exception notable des faiblement frottants, et ne dépendent pas du coefficient de friction. Même pour des coefficients de friction de l'ordre de 0.4, la contribution du contact tangentiel reste une décade sous la contribution du contact normal. D'autre

part, la contribution du contact tangential est proportionnel à la contribution du contact normal, avec un coefficient qui dépend du coefficient de friction. Ainsi, la contribution du contact n'est pas simplement la superposition des effets de la contribution normale non frottante additionnée de la contribution frottante. Comme cela est montré précédemment, le coefficient de friction a un rôle sur la structuration de la suspension au cours du cisaillement, via son effet sur la fraction volumique de divergence (ϕ_m), mais a finalement une contribution à la contrainte globale relativement faible.

3.3 Microstructure de la suspension cisailée

Les différentes variables présentées jusqu'à présent sont des grandeurs évaluées dans tout le volume de la cellule périodique. Ces grandeurs macroscopiques sont ensuite utilisables afin de décrire la suspension comme un milieu continu. Si l'on se place maintenant à l'échelle d'une particule, il est possible de décrire le comportement moyen de des voisines en étudiant non seulement les variables macroscopiques générées par les interactions de paire, telle la contrainte, mais également leur répartition dans l'espace. Pour cela, les fonctions de distribution des différentes grandeurs en fonction du vecteur normal de l'orientation du doublet sont calculées. Afin de rendre compte de la géométrie des particules, les fonctions de distributions sont calculées sur la sphère de rayon 1 en fonction de l'orientation (θ, φ) . Par construction, les fonctions présentent donc une symétrie centrale par rapport à l'origine. Les coordonnées θ et φ sont donc comprises entre 0 et π .

Soit $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$, la normale entre les sphères 1 et 2, l'orientation (θ, φ) est donnée par l'équation 3.1, et la différentielle de la surface par 3.2. Le système d'axes utilisés est représenté à la figure 3.5.

$$\begin{cases} \theta = \arccos(n_y) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{n_x}{n_z}\right) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$dS = \sin(\theta)d\theta d\varphi \quad (3.2)$$

Le passage réciproque vers le cartésien étant

$$\begin{cases} n_x = \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ n_y = \cos(\theta) \\ n_z = \sin(\theta) \cos(\varphi) \end{cases} \quad (3.3)$$

La fonction de distribution de la probabilité d'interaction entre deux sphères est donnée par

$$P(\theta, \varphi) = \sum_{\mathbf{n}_k \in dS} \frac{\mathcal{F}}{N_T dS} \quad (3.4)$$

où N_T est le nombre total de particules dans la simulation, et \mathcal{F} est une fonction de l'interaction, qui donne une condition si l'interaction doit être comptée ou non.

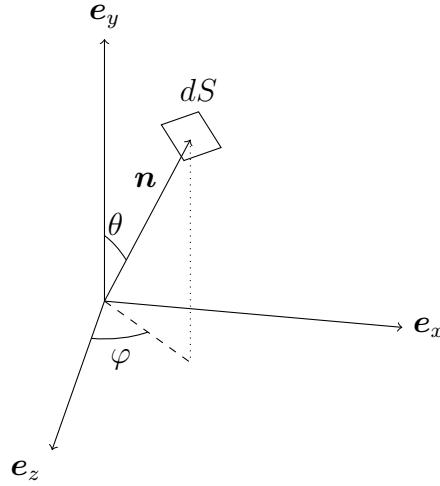


FIGURE 3.5 – Représentation du système d'axes utilisé pour le calcul des fonctions de distributions des grandeurs.

Pour calculer la probabilité d'interaction quelconque, \mathcal{F} vaut uniformément 1. Pour calculer la probabilité d'avoir un contact, \mathcal{F} vaut 1 si les deux sphères sont en contact, 0 sinon.

La fonction de distribution des distances entre sphères est donnée par

$$\bar{h}(\theta, \varphi) = \sum_{\mathbf{n}_k \in dS} \frac{u_k}{N(\theta, \varphi)} \quad (3.5)$$

où $N(\theta, \varphi)$ est le nombre d'interactions sur dS .

La fonction de distribution des vitesses relatives est donnée par

$$\bar{\mathbf{v}}(\theta, \varphi) = \sum_{\mathbf{n}_k \in dS} \frac{\mathbf{v}_k}{N(\theta, \varphi)} \quad (3.6)$$

d'où il est possible de déduire la fonction de distribution des vitesses normales, en prenant le produit scalaire de cette fonction avec la normale : $\bar{v}(\theta, \varphi) = \bar{\mathbf{v}}(\theta, \varphi) \bullet \mathbf{n}$

Les fonctions de distribution des différentes contributions à la contrainte sont données par :

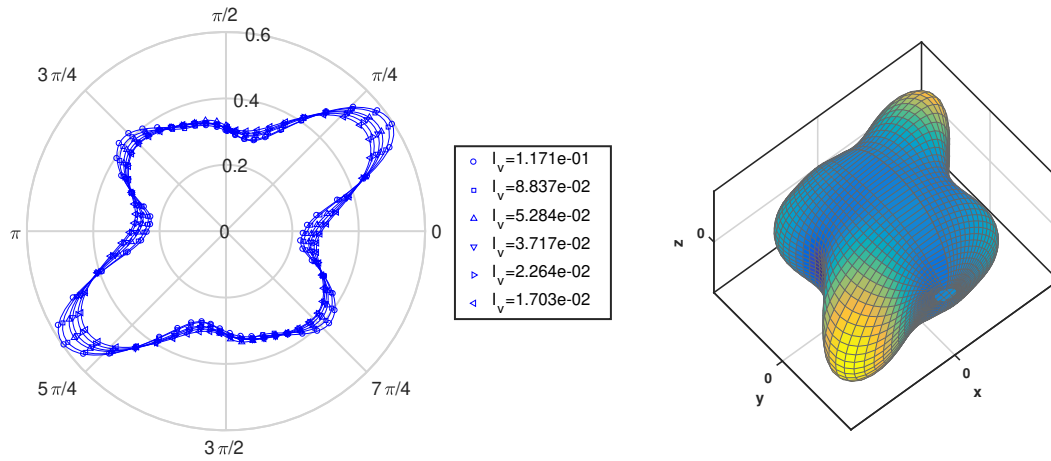
$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\theta, \varphi) = \frac{1}{V dS} \sum_{\mathbf{n}_k \in dS} \mathbf{F}_k \otimes (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (3.7)$$

où V est le volume de la cellule périodique, \mathbf{F} la force correspondante à la contrainte considérée.

Ces fonctions de distribution ont été systématiquement enregistrées sur des simulations de cisaillement simple pour une suspension rugueuse, avec des fractions volumiques ϕ de 0.30 à 0.59 et des coefficients de friction μ_m compris entre 0. et 2.0. La gamme de I_v s'étend donc de 10^{-3} à 10. Pour l'ensemble des résultats obtenus,

la forme de chaque distribution est indépendante de I_v . Les fonctions de distribution sont représentées sous forme d'une surface dans l'espace sphérique, avec (θ, φ) , l'orientation du point et la norme est valeur de la fonction de distribution. D'autre part, une coupe de la fonction normalisée suivant le plan de cisaillement (XY) est représentée sur un graphique polaire, avec en bleu les valeurs positives et en rouge, les valeurs négatives.

3.3.1 Distributions des grandeurs de structure



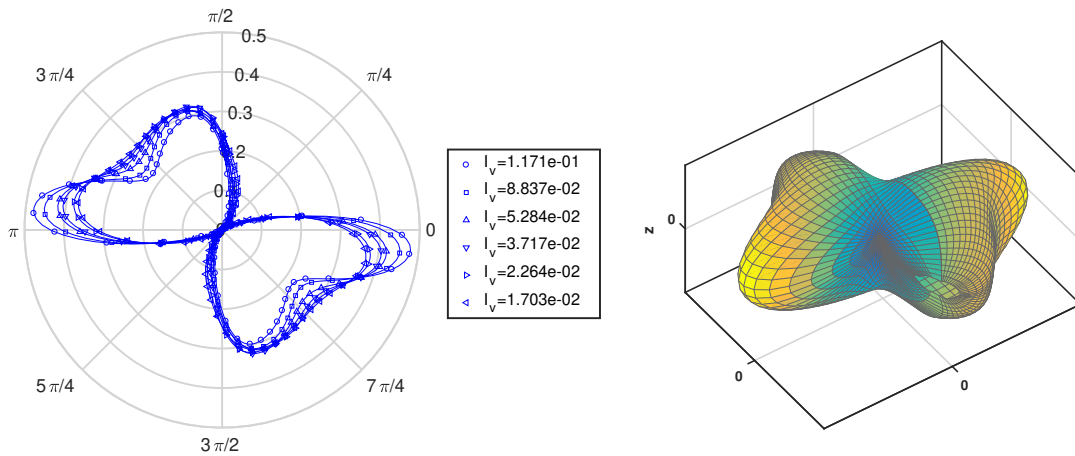
(a) Coupe selon le plan de cisaillement (XY)

(b) Vue 3D de la fonction de distribution

FIGURE 3.6 – Fonction de distribution des distances entre sphères \bar{h}/a , normalisée par de diamètre des sphères, à $\phi = 0.50$

La figure 3.6 montre la fonction de répartition des distances entre les sphères. Cette fonction de répartition montre un minimum dans la direction parallèle à l'écoulement. Ce minimum s'explique par la tendance qu'à l'écoulement à s'organiser en couches dans le champ de cisaillement. Le maximum absolu de la fonction se trouve dans la direction d'extension ($\pi/4$), et un maximum secondaire se trouve dans la direction de la compression ($3\pi/4$). Un minimum secondaire se trouve dans la direction perpendiculaire à l'écoulement, qui s'explique par le fait que la pression de confinement du cisaillement s'applique suivant cette direction. Les coupes suivant les autres plans (voir vue 3d) montrent une répartition plus isotrope de la distance.

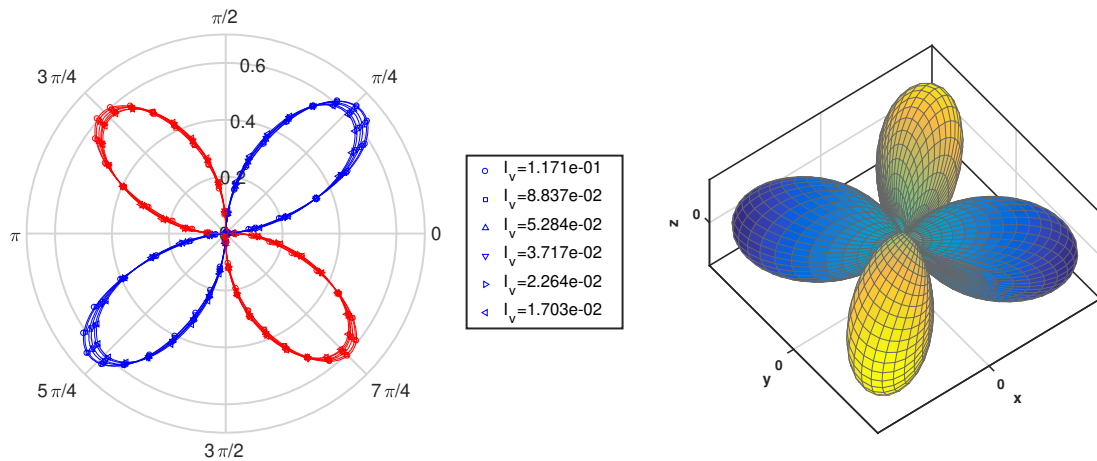
La figure 3.7 montre la densité de probabilité que l'interaction entre deux sphères soit une interaction de contact. Cette fonction montre que la probabilité d'avoir un contact se concentre dans les quadrants de compression, avec une probabilité quasiment nulle dans les quadrants d'extension. La fonction montre 2 maximum : proche du plan parallèle à l'écoulement et un second proche de la direction normale à l'écoulement. Le second maximum s'explique par la présence dans la direction $\pi/2$ de la pression de confinement de l'écoulement. En analysant la figure 9 de l'article 2.2, dans le cas à 2 sphères, l'évitement de 2 sphères presque coaxiales s'effectue via des distances entre les surfaces plus faibles. Les sphères provenant de lignes de



(a) Coupe selon le plan de cisaillement (XY) (b) Vue 3D de la fonction de distribution

FIGURE 3.7 – Fonction de distribution de la probabilité de contact entre sphères, à $\phi = 0.50$

courant proche du plan parallèle à l'écoulement ont donc de plus grandes probabilités de rentrer en contact. La disparition abrupte de la probabilité d'avoir un contact est également semblable à ce qu'il se passe dans le cas à 2 sphères, où le contact disparaît dès lors que la sphère se trouve dans le quadrant d'extension.

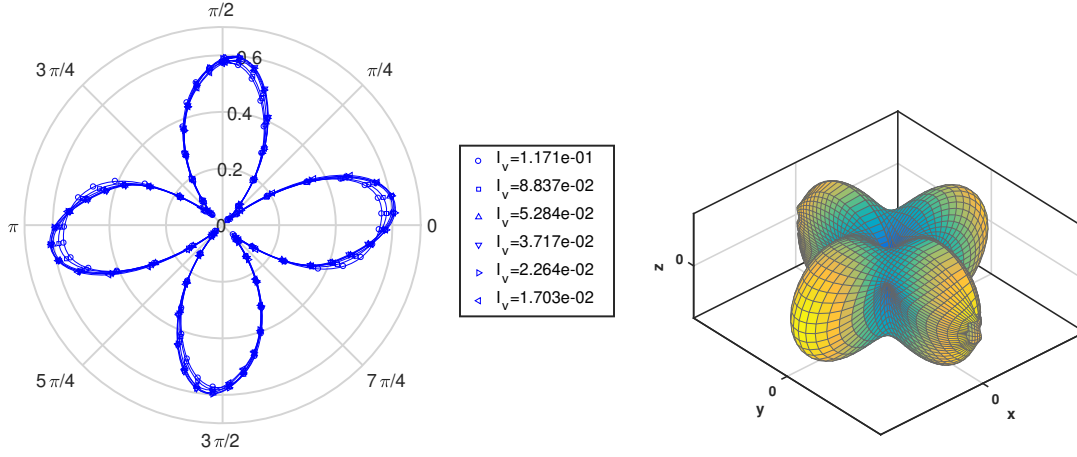


(a) Coupe selon le plan de cisaillement (XY) (b) Vue 3D de la fonction de distribution

FIGURE 3.8 – Fonction de distribution des vitesses normales $\bar{v}_n/(2a\dot{\gamma})$, normalisée par la vitesse caractéristique du cisaillement, à $\phi = 0.50$

La figure 3.8 montre la fonction de distribution des vitesses normales, c'est à dire la tendance à s'approcher ou à s'éloigner suivant la direction lorsque 2 sphères sont proches. Sur cette figure, il est clair que les différents quadrants de compression et d'extensions sont bien définis par les multiples de $\pi/2$. La répartition des vitesses d'approche (négative, en rouge sur la figure 3.8a) est légèrement plus faible que

celle dans la direction d'extension. Il est remarquable que les vitesses normales sont relativement confinées dans le plan du cisaillement, et seulement peu dans la direction de la vortacité.



(a) Coupe selon le plan de cisaillement (XY) (b) Vue 3D de la fonction de distribution

FIGURE 3.9 – Fonction de distribution des vitesses tangentielles $|\bar{\mathbf{v}}_t|/(2a\dot{\gamma})$, normalisée par la vitesse caractéristique du cisaillement, à $\phi = 0.50$

La figure 3.9 montre la fonction de distribution de la norme des vitesses tangentielles. Il est important de noter qu'il s'agit des vitesses relatives des centre de masses et non des vitesses tangentielles entre les surfaces des particules - qui diffère du fait des rotations individuelles de chaque particule et de la rotation de la paire de particules. Néanmoins, cette fonction apporte de l'information sur le déplacement relatif des sphères. Cette fonction de répartition montre que les vitesses tangentielles sont plus développées dans la direction de la vortacité, par rapport à la fonction de la vitesse normale. Les sphères ont tendance à s'éviter principalement selon le plan de d'écoulement ainsi que dans la direction de la pression de confinement.

Les différentes fonctions de distribution 3.6 à 3.9 sont complètement compatibles avec une décomposition classique du comportement d'une suspension dans un champ de cisaillement : Les sphères s'approchent selon la direction $3\pi/4$, entrent en contact, la paire tourne jusqu'à ce qu'elle se trouve orientée selon $\pi/4$ puis s'éloigne.

3.3.2 Contributions à la contrainte de cisaillement

On s'intéresse ici à la composante de cisaillement (xy) du tenseur de contrainte normalisé par la pression de confinement σ_{yy} , soit les fonctions de distribution des composantes de μ .

La figure 3.10 représente la fonction de répartition de la contribution à la contrainte normale de contact. Comme l'on peut s'y attendre à l'aide de la fonction de répartition de la probabilité d'avoir un contact, seul le quadrant de compression présente une contribution à la contrainte de contact normale. La contrainte de contact normal est toujours orientée selon $3\pi/4$, c'est à dire aussi selon la direction principale de la

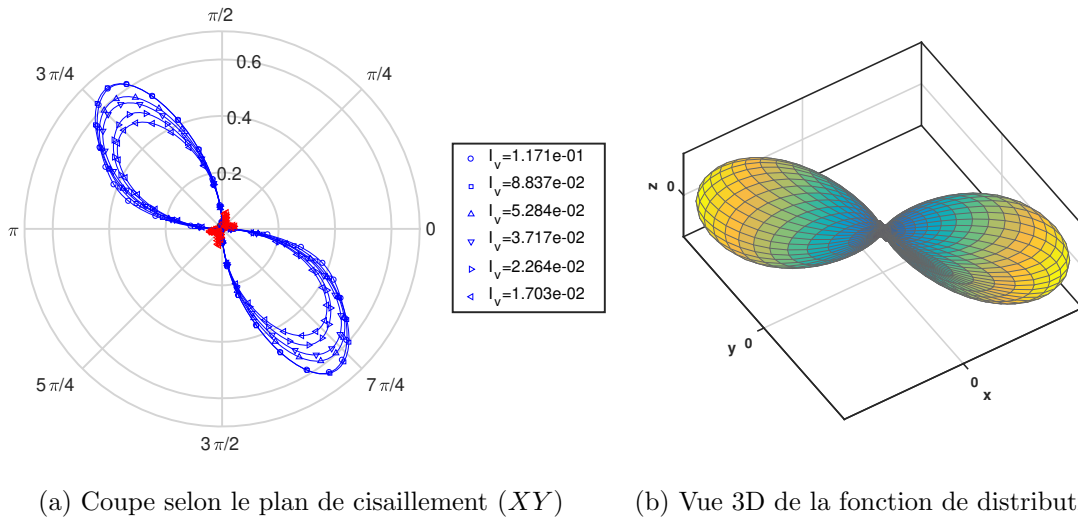


FIGURE 3.10 – Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte normale de contact $\bar{\sigma}_{xy}^{NC}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$

compression. Sur la coupe, figure 3.10a, on peut remarquer que selon les directions parallèles à l'écoulement ainsi que selon la direction de la contrainte de confinement, des petites contributions négatives sont présentes.

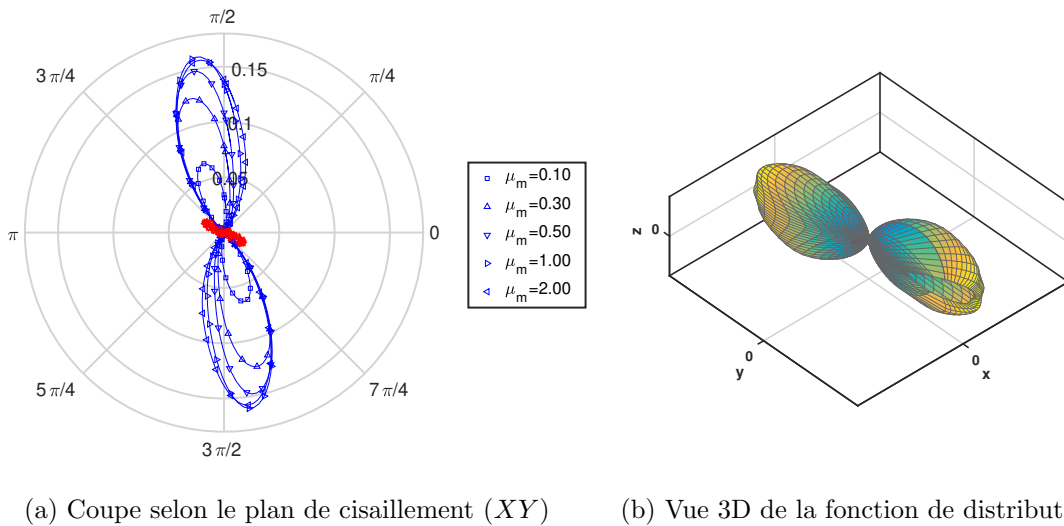


FIGURE 3.11 – Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte tangentielle de contact $\bar{\sigma}_{xy}^{SC}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$

La figure 3.11 représente la fonction de répartition de la contribution à la contrainte tangentielle de contact. La gamme d'orientations selon lesquelles se retrouve confinée cette fonction correspond à l'intersection de la gamme où il existe effectivement des forces de contact normales, et où la vitesse tangentielle existe. Il n'y a donc de

présence de contrainte liée à la force tangentielle de contact que dans une région restreinte juste avant l'entrée dans le quadrant d'extension. De la même façon que pour le contact normal, de petites zones de contribution négative existent. Comme attendu, la valeur de la contrainte due aux forces tangentielles est directement liée à la valeur du coefficient de friction. Contrairement à la partie normale, l'angle selon lequel s'exerce principalement cette contrainte varie en fonction du coefficient de friction. L'orientation suivant laquelle il y a des contraintes tangentielles de contact correspond également à l'endroit où il y a le second maximum sur la probabilité d'avoir deux sphères en contact.

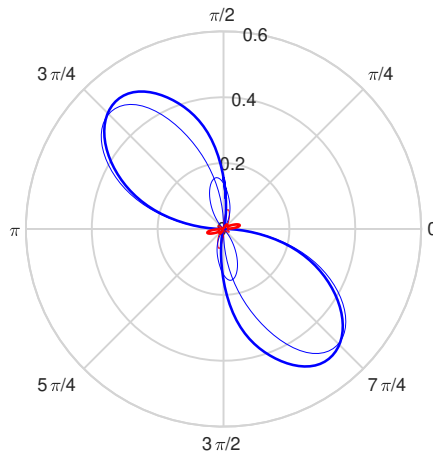


FIGURE 3.12 – Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte de contact $\bar{\sigma}_{xy}^C/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement. Les traits fins représentent les composantes normales et tangentielles, le trait gros représente la somme des deux. $\phi = 0.50$ et $\mu_m = 0.5$

La figure 3.12 représente la fonction de distribution de la contribution totale du contact à la contrainte. Il s'agit de la somme des deux fonctions de distribution précédentes. Comme la partie tangentielle n'a ni orientation ni amplitude fixée, la fonction de distribution totale de la contribution du contact à la contrainte a une direction principale qui varie légèrement avec les coefficients de friction. Celle-ci reste néanmoins largement dominée par la partie normale.

La figure 3.13 représente la fonction de distribution de la contrainte liée aux forces normales de lubrification. De la même façon que le contact suit la distribution de probabilité d'avoir un contact, la distribution des contraintes de cisaillement dues aux forces normales de lubrification suit la distribution des vitesses normales. Dans cette fonction de distribution, il n'y a que des contributions positives. On remarque que les directions sont très bien définies et ne varient pas avec I_v , les différentes distributions étant homothétiques les unes aux autres. Cependant, ces directions ne correspondent pas exactement à $\pi/4$ et $3\pi/4$, qui sont les directions données par les vitesses sur la figure 3.8. La distribution de la contrainte paraît également asymétrique, contrairement à la distribution des vitesses qui est symétrique. Cela s'explique par la différence de l'interstice moyen existant selon ces deux directions.

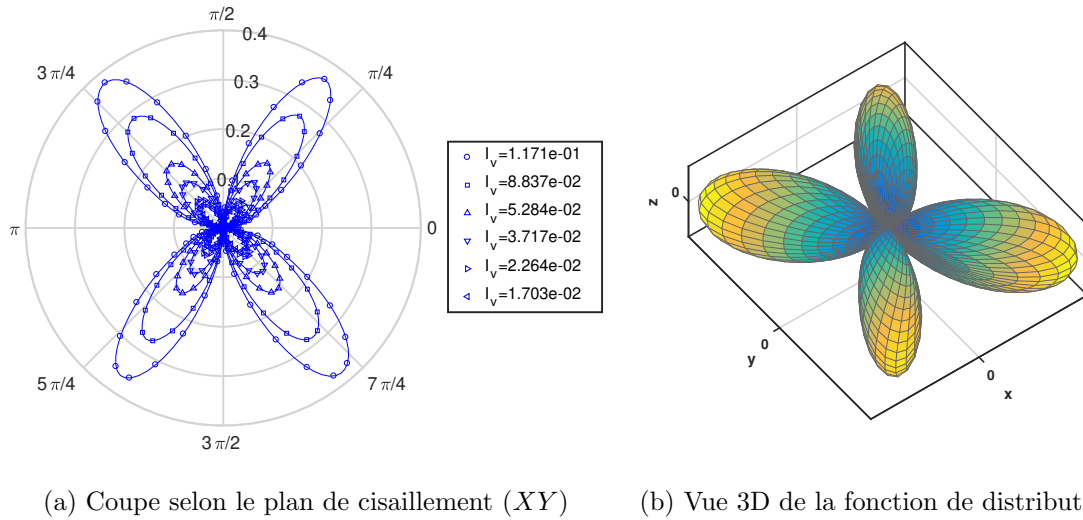


FIGURE 3.13 – Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte normale de lubrification $\bar{\sigma}_{xy}^{NL}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$

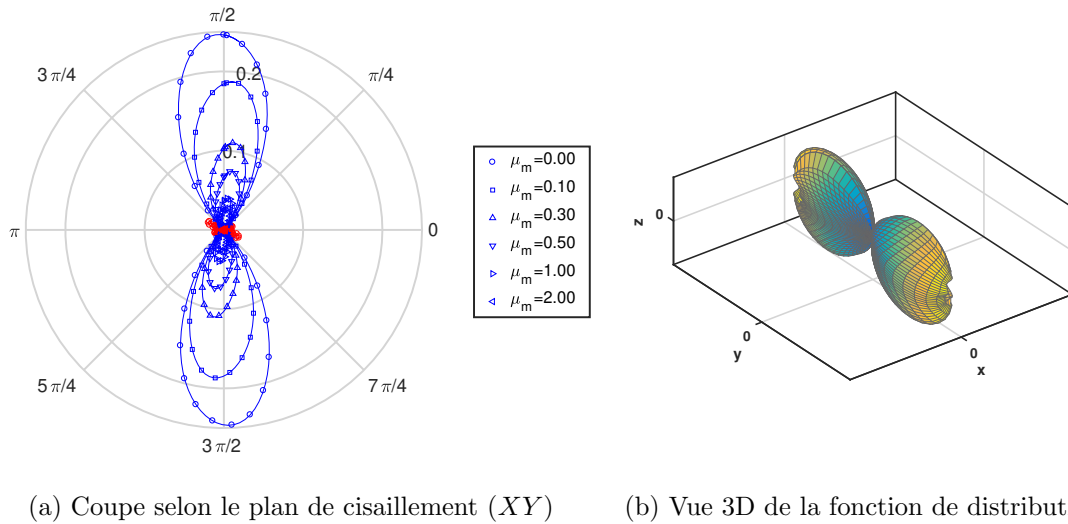


FIGURE 3.14 – Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte tangentielle de lubrification $\bar{\sigma}_{xy}^{SL}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$

La figure 3.14 montre la fonction de distribution de la contrainte liée aux forces tangentielles de lubrification. Ces forces se placent principalement selon un axe proche de $\pi/2$, et varient un peu avec l'angle de frottement, dans le sens contraire de ce qui est rapporté sur la distribution liée à ce qu'il se passe sur les forces tangentielles de contact. La variation de l'angle est liée à μ_m , et la distribution dont la direction principale est $\pi/2$ est retrouvée pour $\mu_m = 0$. Des petites zones de faible amplitude selon lesquelles la contribution à la contrainte de cisaillement est négative existent.

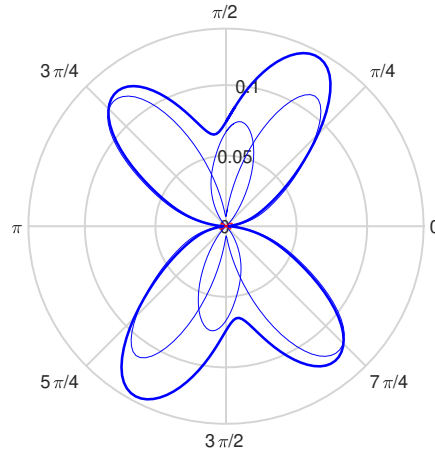


FIGURE 3.15 – Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte de lubrification $\bar{\sigma}_{xy}^L/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement. Les traits fins représentent les composantes normales et tangentielles, le trait gros représente la somme des deux. $\phi = 0.50$ et $\mu_m = 0.5$

La figure 3.15 montre la coupe de la somme des deux composantes, normales et tangentielles, de la contrainte de lubrification. Comme remarqué sur les distributions, les lobes dans les quadrants de compression et d’extension ne sont pas symétriques, et la contribution tangentielle n’est pas orientée selon $\pi/2$. Ceci conduit à une distribution qui est globalement asymétrique, avec un lobe dans la direction d’extension plus gros que celui dans la direction de la compression. Cette distribution totale tend à se symétriser suivant $\pi/2$ lorsque le frottement est ramené à 0.

3.3.3 Contributions aux contraintes normales

Jusqu’à présent, seules les contributions à la contrainte de cisaillement ont été étudiées. Dans un fluide newtonien (sans particules) la contrainte totale inclut une contribution isotrope correspondant à la pression du fluide et donnant les composantes normales. Dans une suspension, ces composantes dépendent de contributions supplémentaires et ne sont plus nécessairement isotropes. Cette anisotropie mène à toute une série de phénomènes, telle que la resuspension visqueuse ou la migration sous écoulement.

La figure 3.16 montre les différentes fonctions de distribution de la contrainte normale de contact. Les fonctions des composantes xx et yy ont une forme semblable à celle de la composante de cisaillement (xy), avec une direction principale différente. On remarque sur la coupe, figure 3.16d, que la combinaison des deux ressemble à la probabilité de contact, figure 3.7, et que la composante xx semble être un peu écrasée. La composante zz a en revanche une forme complètement différente de xx et yy , et ne contient pas de contributions à cette contrainte dans le plan de cisaillement. Le nombre de lobes dans la représentation 3d est doublé. Pour l’ensemble des composantes, les contributions à la contrainte sont négatives. La contrainte de

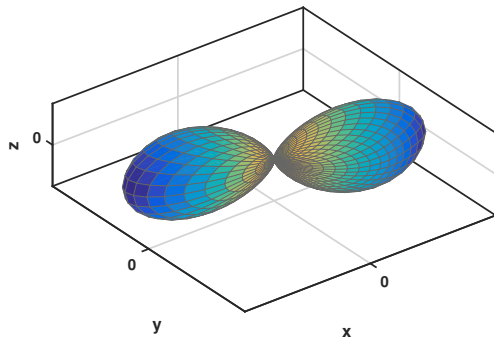
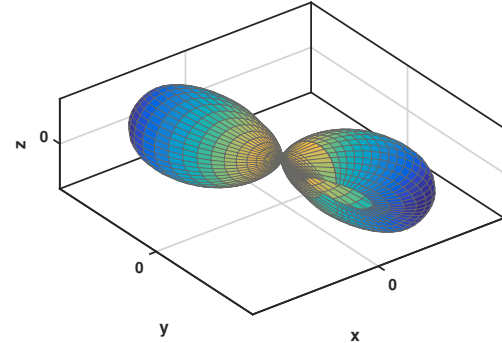
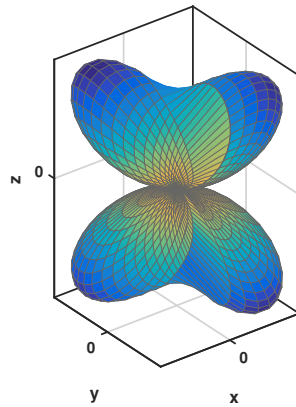
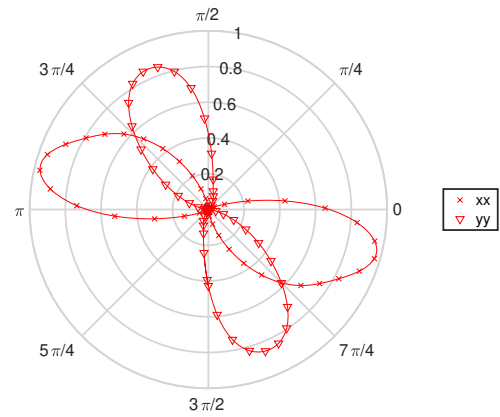
(a) Vue 3d de la composante xx (b) Vue 3d de la composante yy (c) Vue 3d de la composante zz (d) Coupe selon le plan de cisaillement (XY) des composantes xx et yy

FIGURE 3.16 – Fonctions de distribution des composantes diagonales de la contrainte normale de contact $\bar{\sigma}^{NC}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$

contact normale est la contrainte diagonale dominante sur l'ensemble des simulations réalisées.

La figure 3.17 montre les différentes fonctions de distributions de la contrainte tangentielle de contact. Pour cette contrainte, la forme des fonctions est assez différente de celles de la composante de cisaillement. Néanmoins, les fonctions xx et yy ont une forme semblable, si elles sont tournées selon un axe à $3\pi/4$ dans le plan de cisaillement. Ces deux fonctions sont exactement les opposées l'une de l'autre, ce qui résulte du fait que deux vecteurs orthogonaux dans le plan xy donne le produit scalaire $f_x^t l_x + f_y^t l_y = 0$, les composantes tangentielles montreront systématiquement ce type de symétrie. La fonction de la composante zz a elle une forme complètement différente des deux autres et ne contient pas de contribution à la contrainte dans le plan de cisaillement. L'ensemble des fonctions de distribution liées au contact reste confiné dans les quadrants de compression de l'écoulement de cisaillement. Les com-

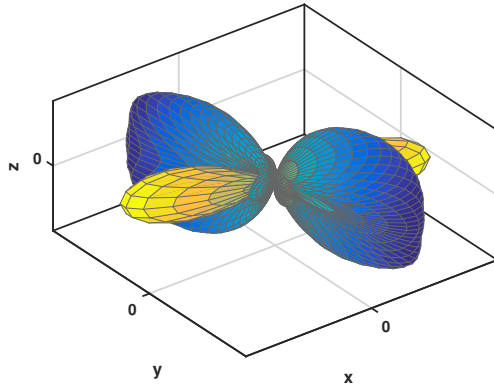
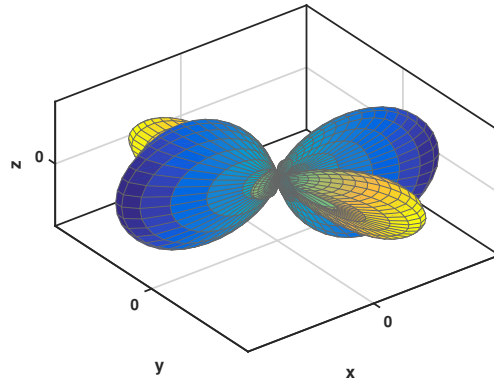
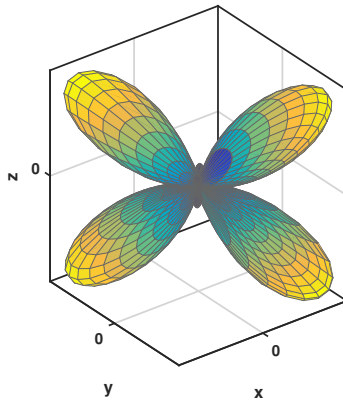
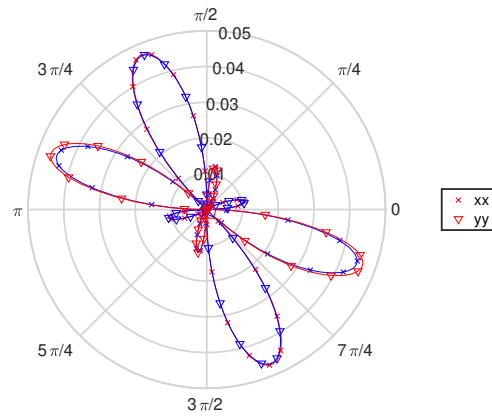
(a) Vue 3d de la composante xx (b) Vue 3d de la composante yy (c) Vue 3d de la composante zz (d) Coupe selon le plan de cisaillement (XY) des composantes xx et yy

FIGURE 3.17 – Fonctions de distribution des composantes diagonales de la contrainte tangentielle de contact $\bar{\sigma}^{SC}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$

posantes xx et yy ont une contribution globale négative tandis que la composante zz a une contribution globale positive.

La figure 3.18 montre les différentes fonctions de distribution de la contrainte normale de lubrifications. L'ensemble des fonctions de distributions montrent des lobes positifs et négatifs de taille similaire. Les composantes xx et yy présentent des formes assez similaires, moyennant une rotation suivant un axe de direction $3\pi/4$ dans le plan de cisaillement. On peut remarquer sur la coupe représentée figure 3.18d que la composante xx est sensiblement plus faible que la composante yy , et que celle-ci présente un léger écrasement au lieu d'un beau lobe. La fonction de la composante zz a une forme différente de celles des composantes xx et yy et présente deux fois plus de lobes. La contribution globale de la composante xx est négative, tandis que la contribution globale des composantes yy et zz est positive.

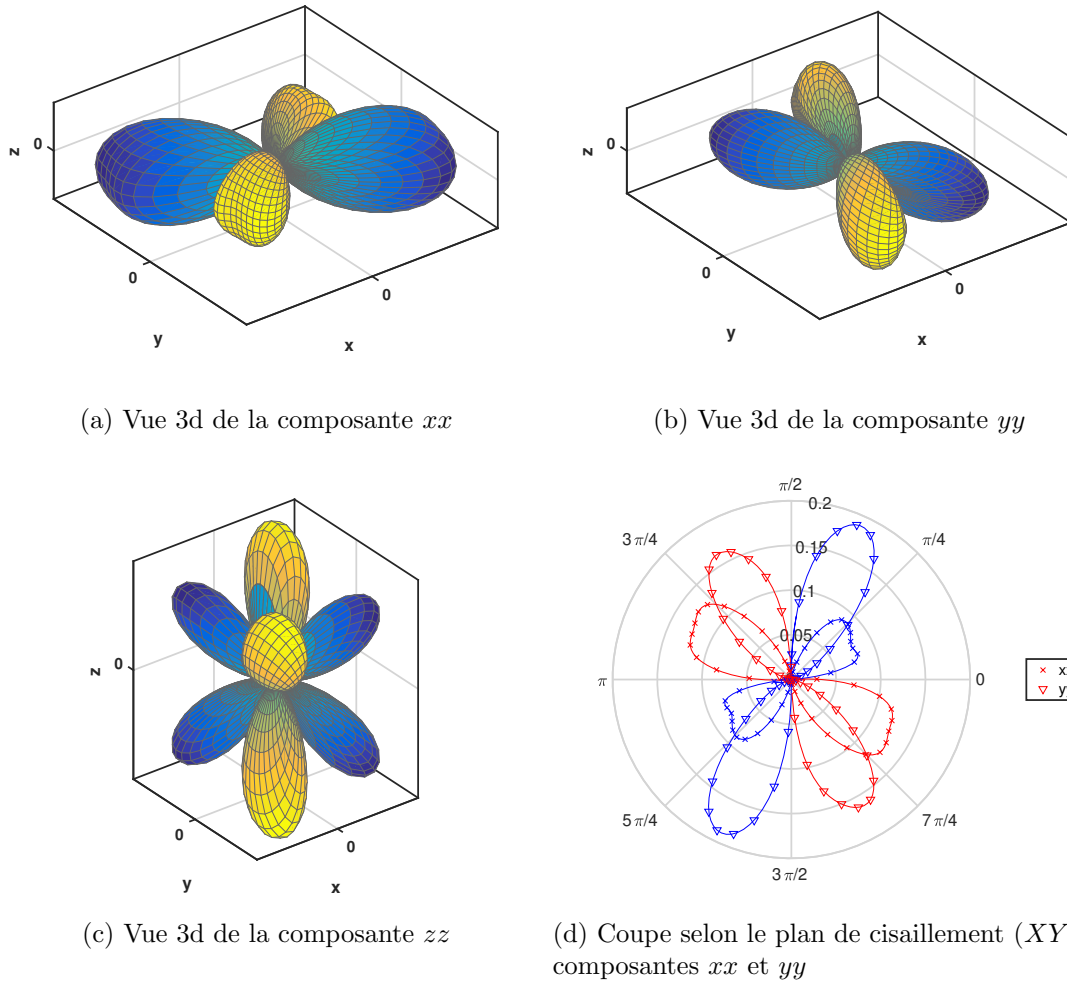


FIGURE 3.18 – Fonctions de distribution des composantes diagonales de la contrainte normale de lubrification $\bar{\sigma}^{NL}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$

La figure 3.19 montre les différentes fonctions de distribution de la contrainte tangentielle de lubrification. L'ensemble des fonctions de distributions montre des lobes positifs et négatifs de taille similaire. Les composantes xx et yy présentent des formes assez similaires, moyennant une rotation suivant un axe de direction $3\pi/4$ dans le plan de cisaillement. La coupe des fonctions de distributions de ces composantes dans le plan de cisaillement (figure 3.19d) montre à nouveau la symétrie par construction pour les forces tangentielles. La composante zz a elle une forme assez différente de xx et yy , et très semblable à la composante zz de la fonction de distribution de la contrainte normale de lubrification.

Le tableau 3.1 résume les signes des différentes contributions aux composantes diagonales du tenseur de contrainte. La contrainte de contact normal domine toujours les autres composantes, ainsi, les termes diagonaux sont tous négatifs.

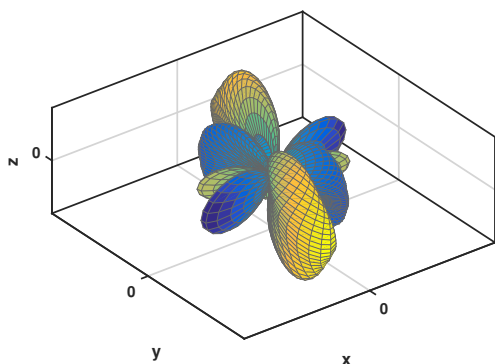
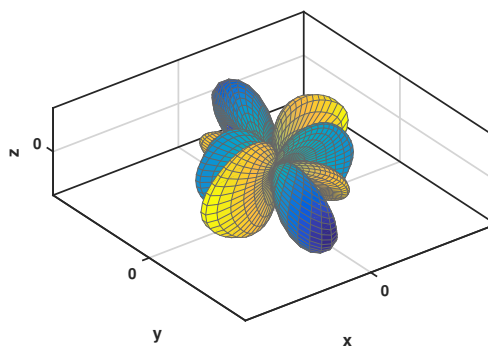
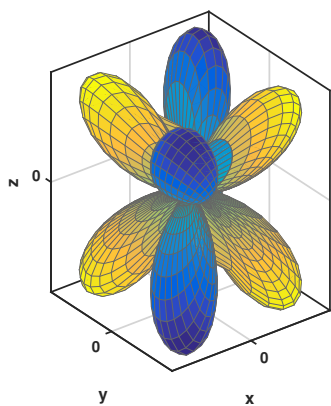
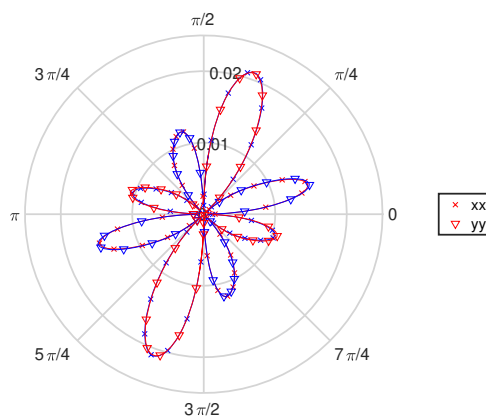
(a) Vue 3d de la composante xx (b) Vue 3d de la composante yy (c) Vue 3d de la composante zz (d) Coupe selon le plan de cisaillement (XY) des composantes xx et yy

FIGURE 3.19 – Fonctions de distribution des composantes diagonales de la contrainte tangentielle de lubrification $\bar{\sigma}^{SL}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$

	Total	Contact		Lubrification	
		N	T	N	T
xx	–	–	–	–	–
yy	–	–	–	+	+
zz	–	–	+	+	+

TABLE 3.1 – Résumé des signes des contributions aux contraintes normales

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la rhéologie des suspensions rugueuses et dures, dans le cadre de la représentation sous la forme de fonctions $\mu(I_v)$ et $\phi/\phi_m(I_v)$ a été étudié. En faisant varier systématiquement I_v dans une large gamme, en combinaison avec le coefficient de frottement μ_m , d'abondantes données de simulation en cisaillement simple ont pu être obtenues. Un accord quantitatif entre les résultats de la simulation et des données expérimentales de la littérature a été obtenu. La décomposition des contributions à la contrainte permet de donner la gamme où le contact domine devant les forces visqueuses ($\phi/\phi_m > 0.77$). L'analyse de la décomposition des contributions à la contrainte a permis de fournir une nouvelle formulation, respectant la divergence en -2 proche du jamming, passant par les points de simulation et donnant la bonne pente dans la gamme infiniment diluée. Ces résultats ont été publiés dans un article de la revue *Physical Review Fluids*. Les résultats complémentaires en fin de chapitre révèlent l'organisation en couche au voisinage des parois et montrent que les conditions tripériodiques permettent d'éviter ce phénomène. Les résultats obtenus dans ces dernières conditions ont conduit à rectifier les données initialement publiée pour les plus bas coefficients de friction.

Enfin, la microstructure de la suspension cisailée a été étudiée au travers des fonctions de distribution des différentes grandeurs. Les fonctions de distribution liées à la structure de l'écoulement (vitesses, probabilité d'avoir un contact, distance entre les sphères) apportent une information globale sur l'organisation de l'écoulement de cisaillement, vu du point de vue des sphères. Ces grandeurs sont principalement orientées suivant des axes ($3\pi/4$ et $\pi/4$), respectivement dans les quadrants de compression et de cisaillement. Ensuite, les orientations des différentes composantes liées à la contrainte de cisaillement montre que la contribution des forces normales d'interaction s'organise autour de ces axes tandis que les contributions des termes tangentiels s'organisent suivant $\pi/2$. Les composantes liées aux éléments diagonaux du tenseur de contrainte montrent que la composante zz a un comportement complètement différent des composantes selon xx et yy . En particulier, aucune orientation dans le plan de cisaillement n'a de contribution à cette composante. Les composantes xx et yy ont toutes des formes assez similaires. Les composantes normales présentent des lobes dans le plan de cisaillement, où xx paraît un peu écrasé. Les fonctions tangentielles ont elle la propriété que leur coupe suivant le plan de cisaillement est l'exact opposé l'une de l'autre.

- Une nouvelle formulation de la rhéologie $\mu(I_v)$ est proposée, basée sur les données de décomposition de la contrainte de cisaillement, dans une large gamme d' I_v , reproduisant quantitativement les résultats expérimentaux disponibles.
- Le passage vers une simulation réellement tripériodique permet d'éviter des effets d'organisation au voisinage des parois
- La microstructure de la suspension présente une forte anisotropie orientée suivant les axes de compression et d'extension dans le plan de cisaillement.
- Les contraintes normales présentent également une forte anisotropie en fonction de l'orientation. Les composantes xx et yy sont semblables tandis que la composante zz présente des différences significatives.
- La contribution des forces de lubrification aux contraintes normales macroscopiques est non-nulle.

Chapitre 4

Viscosité normale et resuspension visqueuse

Ce chapitre présente les résultats obtenus sur les contraintes normales des suspensions en cisaillement simple, ainsi que les résultats des simulations d'expériences de resuspension visqueuse.

Sommaire

4.1 Article : Numerical simulation of hard sphere suspensions : normal viscosity and viscous resuspension	62
---	----

**Numerical simulation of non-Brownian suspensions: Normal
viscosity and Viscous resuspension**

William Chèvremont,¹ Bruno Chareyre,^{2,*} and Hugues Bodiguel¹

¹*Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LRP, 38000 Grenoble, France*

²*Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, 3SR, 38000 Grenoble, France*

(Dated: April 25, 2020)

Abstract

We report a numerical study of normal stress in suspensions of non-brownian solid particles using a discrete element method and a lubricated contact model. The normal stresses are determined both in homogeneous settings and by analyzing resuspension of buoyant particles in the framework of the suspension balance model (SBM). The consistency of both series indicates that the SBM describes the steady state properly. Though in agreement with most available experimental results, none of previous empirical expressions for the normal stress can describe the data in the whole range of volume fraction, and in particular in the semi-dilute regime (25-35%) where the normal stress is less than expected. New expressions are proposed. The results also highlight that the normal stress anisotropy depends on the volume fraction, and that lubrication interactions significantly contribute to the normal stress in the semi-dilute regime.

Keywords: Viscous resuspension, Suspension, shear induced migration, normal stress

I. INTRODUCTION

Suspensions of solid particles dispersed in a liquid are ubiquitous in nature and in technology. Describing their flow properties is therefore an important issue, but despite intense research efforts, the global understanding is not yet achieved, due to the complexity of the problem. For high enough Peclet numbers, Brownian motion has negligible consequences and the rheological properties of the suspensions are dominated by hydrodynamic, contact and colloidal interactions between the particles.

In the simplest situation where only Coulombian contact and hydrodynamic interactions are taken into account, and when inertia is negligible, the stress is linear with respect to the shear rate [1]. However, even in simple shear, the normal components of the stress are non-zero [2] and it can cause a migration of one phase relative to the other. In addition, the normal stresses strongly depend on volume fraction [3]. One of the difficulties encountered in practical situations originates from the strong coupling between the flow field and the field of volume fraction. Indeed, the particles tend to migrate towards low-shear regions of the flow, e.g. the centerline in Poiseuille flow [4, 5] or the outer cylinder in Couette geometry

* bruno.chareyre@grenoble-inp.fr

[6, 7]. Conversely, homogeneous shear tends to disperse particles analogously to diffusion [8]. This phenomenon, referred to as *shear-induced migration* in the literature, plays a great role in viscous resuspension. When a non-brownian suspension of buoyant particles is sheared, migration competes with sedimentation [8, 9].

Shear induced migration has been first modeled using a an apparent diffusion coefficient which is proportional to the shear rate and which strongly depends on the volume fraction ϕ [8]. Refinements of this diffusive approach have taken into account the fact that it is anisotropic [10] and that it has several origins: gradients of shear rate, of volume fraction and of viscosity. Another type of theoretical approach has emerged and is based on a momentum balance in the particle phase [11]. In addition to the fact that the so-called suspension balance model is tensorial and thus account for the anisotropy of the migration, its main interest is coming from the fact that the particle stress tensor, which is responsible for particle migration can be determined independently [6, 12], using measurements of the normal components of the stress. Despite its relative success to account for the experimental data available, it is important to mention that a discrepancy exists in the literature concerning the volume fraction dependency of the particle normal stress components [13]. This disagreement concerns both the dilute regime where the particle normal stress scales either as ϕ^2 [6, 11] either as ϕ^3 [12] and both the divergence exponent when approaching a maximum volume fraction ϕ_m . Direct measurements of particle migration in Poiseuille flow failed to resolve this discrepancy [14], as the fully developed volume fraction profile is only weakly sensitive to the exact form of the function used to model the normal stress. However, two series of experiments aimed at revisiting viscous resuspension [13, 15] have been able to test the models with a good accuracy. They took advantage of the steady state profile of volume fraction when shearing a suspension of buoyant particles in a Couette cell. Unfortunately, the two sets of results lead to different conclusions. In Saint-Michel *et al.* [13], it is found that Boyer's correlation [6] was accounting for the experimental data, whereas in d'Ambrosio *et al.* [15], Zarraga's correlation [12] better matches the measurements. In addition to this disagreement, a non-linear relation between the stress and the shear rate was found in both cases, suggesting that the systems under study does not correspond to the simple case of Coulombian contact. Thus, the exact form of the volume fraction dependency of the particle normal stress responsible for particle migration is still an open question, which represent a strong limitation of the use of the suspension balance model to predict the volume fraction

and flow fields of a sheared suspension.

Yet, all the available descriptions of the particle stress tensor suppose that all the normal components of the particle stress tensor share the same volume fraction dependency and only differ by a numerical prefactor [3, 12], although there has been experimental and numerical indications [2, 16] that reality is not as simple. It might also be the reason why several empirical laws have been proposed. Thus, it is needed to determine accurately the particle stress in all the relevant directions. Due to its high sensitivity and its ability to cover a large range of volume fraction, viscous resuspension appears to be a relevant choice for a reference case addressing this issue. From an experimental point of view, it has been used in both cases where gravity is aligned with the vorticity direction (Couette geometry [9, 13, 15]) and with the shear direction [8]. It has also been tested in pipe flows [17], but the complexity of the flow field in this case hinders accurate determinations of the particle stress tensor.

To finish with the several difficulties associated to the modelization of shear-induced migration, it is worth mentioning that the theoretical validity of the suspension balance model in its original form of Nott and Brady [18] has been revisited about ten years ago [19, 20]. According to these work, the particle stress tensor which controls the migration is not the full one but is limited to the contribution of non-hydrodynamic interactions between the particles, such as contact ones. As argued in Lhuillier [19], hydrodynamics is however likely to play a role on the mean interaction force between the fluid and the particle, which should not be as simple as a drag force in the general case, and in the presence of gradients of shear rates. These considerations makes the picture more complex, but they are not usable in practice since it seems rather difficult to access all quantities in the model. One of the main physical questions arising from the "suspension balance model revisited" is related to the role of hydrodynamic forces as compared to that of contact ones on shear induced migration. As stated in Nott *et al.* [20], at high concentration, when the suspension properties are dominated by contact between particles, both approach are equivalent. In contrast, at lower concentration, there might exist a difference between the particle stress (which incorporate hydrodynamic contributions) and the particle stress involved in the shear induced migration.

In the last decade important progress have been made in numerical simulations, in particular by incorporating models of contacts between the particles [16, 21, 22]. A DEM approach was presented in [22] which combines solid contact and lubrication in a visco-

elastic model of particle interaction. Lubrication refers to the terms which, at small gap, dominates the viscous resistance to relative motion between immersed particle pairs. The model also accounts for surface roughness. Homogeneous shear simulated on this basis [21], while neglecting all hydrodynamic contributions beyond lubrication, were in quantitative agreement with available experimental data down to volume fractions of about 20%.

In this work, we take advantage of this model and of its implementation to simulate viscous resuspension, with the objective of bringing some light on the above detailed discrepancies and open questions related to the suspension balance model. We investigate both the migration in the shear direction and in the vorticity direction. The results are analyzed in the framework of the SBM and lead to new phenomenological expressions for the normal stress. In parallel, we also investigate the normal components of the particle stress tensor in homogeneous shear and volume fraction, in order to compare with the resuspension results.

The paper is organized as follow. We recall briefly in section II the numerical method used and the SBM framework. In section III, we first detail the normal stress results determined in simple shear experiments of homogeneous suspensions of non-buoyant spheres. Second, the resuspension results are presented, analyzed and compared to the homogeneous volume fraction case and to available experiments.

II. MODELS AND METHODS

A. Equations of motion

The motion of suspended particles is integrated in time using the Discrete element Method (DEM) implemented in Yade-DEM [23]. The method is based on an explicit time-integration of the Newton's equations of motion, for each particle:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m\dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad (1)$$

where \mathbf{r} is the position of the center of mass of the particle and $\dot{\mathbf{r}}$ its time derivative, m is the mass, \mathbf{J} is the moment of inertia tensor, $\boldsymbol{\Omega}$ is the rotational velocity vector, \mathbf{F} denotes forces acting on the body and \mathbf{T} the moments of these forces about \mathbf{r} .

The forces resulting from the interaction of two particles are given by the lubricated contact model developed in [22]. This model couples solid contacts and lubrication forces

in a single visco-elasto-plastic model. It includes a dependency on the roughness of particle surfaces. The lubrication cut-off distance is set to $2a$.

B. Simple shear simulations

Homogeneous simple shear simulations are carried out with tri-periodic boundary conditions at imposed volume fractions from $\phi = 0.35$ to $\phi = 0.995\phi_m$ with $N = 10000$ neutrally buoyant spheres, with ϕ_m the volume fraction of divergence. The sphere radii are distributed around a using a Gaussian distribution with a standard deviation of 5%. This small polydispersity prevents the system from crystallizing. The relative roughness is set to $\varepsilon = 10^{-3}$. The periodic cell is represented in figure 1a and is initially nearly cubic. Shear flow is imposed by setting the velocity gradient equal to $\dot{\gamma}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$. The initial state for the shear flow is obtained by compressing a very dilute suspension made of N spheres with random initial positions. The friction coefficient is varied from 0.1 to 0.4, which changes ϕ_m [21].

The volume-averaged stress in the system is calculated based on the so-called virial stress for particulate systems: $\boldsymbol{\sigma} = \langle \mathbf{f} \otimes \mathbf{l} \rangle - m \langle \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \rangle$. The first term on the right-hand side is the volume-averaged outer product of the pairwise interaction forces \mathbf{f} (from both lubrication and direct contact) and the branch vector \mathbf{l} connecting reference points associated to the particles. \mathbf{v} is the velocity fluctuation, i.e. the deviation of individual particle velocity from the macroscopic average velocity field, imposed by cell deformation. The second term is also called the "inertial stress", and is always negligible in our simulations, as we stay in the viscous, non-inertial, regime.

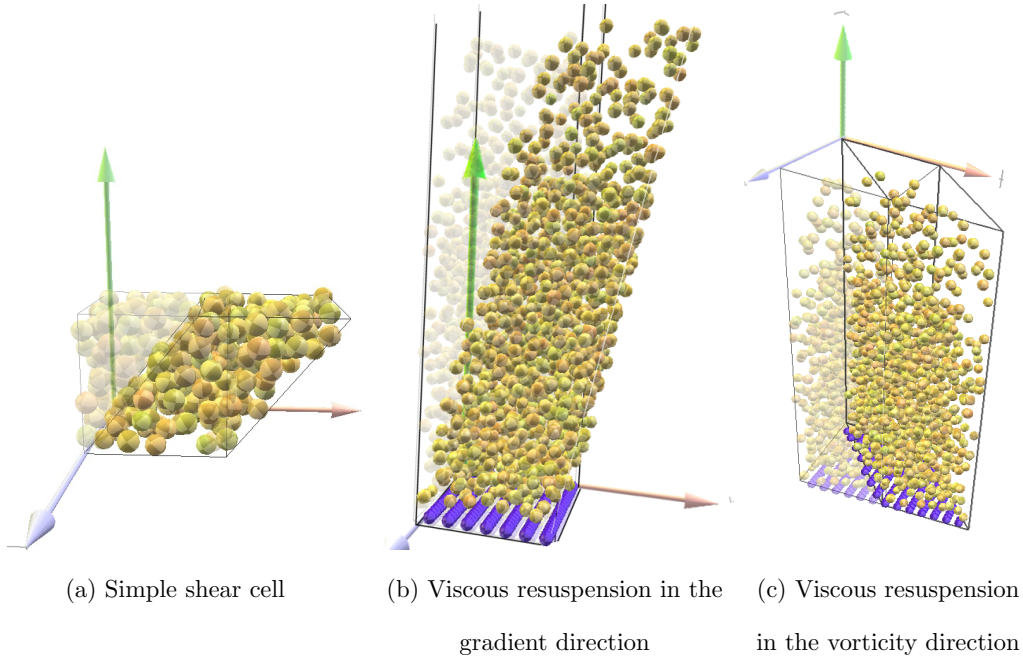


FIG. 1: Snapshots of simulation cell for the three types of simulations. For viscous resuspension cells, gravity is oriented toward bottom.

C. Viscous resuspension simulations

Viscous resuspension is simulated in a biperiodic cell using $N = 10000$ spheres, with the same particle size distribution. The relative roughness is set to $\varepsilon = 10^{-3}$. Friction coefficient is set to $\mu_m = 0.5$, so that $\phi_m = 0.58$. Gravity is oriented toward 2–direction $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$. Figure 1b shows the simulation cell when the resuspension is made in the gradient direction. In order to impose the shear flow an extra drag force is introduced. That drag is opposed to deviations from the homogeneous macroscopic field, and it is computed with a viscosity equal to 1/30 times the viscosity considered for lubrication. Stress generated by this extra drag is negligible compared to others. Such conditions tend to impose a homogeneous shear rate, instead of the shear stress homogeneity frequently found in immersed conditions (bedload, typically). Figure 1c shows the simulation cell when the resuspension occurs in the vorticity direction. In this case, the simulation cell is sheared in the 3–direction and no additional drag is applied.

Because this kind of simulations involve a very dilute region, with few or even no particles

in some upper part, and because the fluid is not resolved in such region, the particles reaching the dilute parts would eventually follow undamped parabolic trajectories. Indeed, if the nearest neighbors are beyond the range of lubrication forces a particle has no viscous interaction of any kind with its environment. This lack of dissipation in the dilute part is clearly an artifact and it would blur the interface by excessive agitation. To circumvent this issue, additional drag forces are applied to the particles having less than three interactions. With the lubrication cut-off distance set to $2a$ the particles located in the bulk have much more than three interactions in average and therefore they are not affected.

The inertia effects in the simulations are negligibly small. They can be quantified by the inertial number $\mathcal{I} = \dot{\gamma} \sqrt{a/g}$. This number stays below $5 \cdot 10^{-2}$ for all simulations - with an exception for some series specifically dedicated to analyzing the role of inertia in section C.

D. Suspension Balance Model

The steady-state concentration profile results from the momentum balance in the particle phase, which reads [11]:

$$\phi \Delta \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (2)$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the particle stress tensor, of diagonal components $\sigma_{ii} = -\eta_0 |\dot{\gamma}| \eta_{ii}(\phi)$, $i = 1, 2, 3$. We investigate two configurations in simple homogenous shear: in the first one, gravity is aligned with the shear direction, and the second one with the vorticity direction. They involve the normal viscosity coefficients η_{22} and η_{33} , respectively. The above momentum balance leads to the simple equations

$$\frac{\phi}{\mathcal{S}h} = -\frac{d\eta_{ii}}{d\phi} \frac{d\phi}{dx_i}, \quad (3)$$

where $i = 2$ or 3 , x_i is the coordinate normalized by the particle size a and where we have introduced the Shields number $\mathcal{S}h$, defined as

$$\mathcal{S}h = \frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\Delta \rho g a}. \quad (4)$$

Several tentative empirical expressions for this quantity –also called correlations in the literature [9, 24]– have been proposed, which generally assume the following form:

$$\eta_{ii}(\phi) = \lambda_{ii} \left(\frac{\phi/\phi_m}{1 - \phi/\phi_m} \right)^n, \quad (5)$$

where ϕ_m is the volume fraction at which both shear and normal viscosities diverge. Zarraga *et al.* [12] choose $n = 3$, $\lambda_{11} = 1.55$, $\lambda_{22} = 1.36$, $\lambda_{33} = 0.62$ and $\phi_m = 0.62$ based on previous experimental results of viscous resuspension in a Taylor-Couette geometry [9]. Morris and Boulay [11] obtain $n = 2$, $\lambda_{33} = 0.38$ and $\phi_m = 0.68$ combining sets of data from large-gap Taylor-Couette and parallel-plate migration experiments. This scaling is very similar to the one proposed by Boyer *et al.* [1, 6] who derived $n = 2$, $\lambda_{33} = 0.6$ and $\phi_m = 0.585$ from pressure-imposed shear and rotating rod experiments.

E. Viscosity from concentration profiles

The volume fraction profile can be used to determine the normal viscosity directly. Equation 3 can be integrated directly from any position y along the resuspended height, which leads to:

$$\eta_{ii} = \frac{1}{Sh} \int_{\hat{z}}^{+\infty} \phi(u) du \quad (6)$$

Integrating to the infinity or to resuspended height is the same, as the volume fraction is 0 above the resuspended height. This expression is more robust, as it doesn't require to determine the resuspended height first.

III. RESULTS

A. Simple shear

Figure 2 shows the normal viscosities in the three directions as a function of ϕ/ϕ_m and for various microscopic friction coefficients μ_m . μ_m has a direct consequence on the maximal volume fraction ϕ_m [21]. Nevertheless, plotting versus ϕ/ϕ_m as in Figure 2 suggests a collapse on a single curve independently of μ_m . This is not the case in terms of ϕ .

For $\phi/\phi_m > 0.5$, the viscosity coefficients are ordered like $\eta_{11} > \eta_{22} > \eta_{33}$ with η_{11} and η_{22} close to each other. All viscosities share the same trend close to maximum volume fraction, and it is well captured by Boyer *et al.* [6]'s expression, with a -2 divergence close to the maximum volume fraction. On the other hand, for more dilute suspensions, Zarraga *et al.* [12]'s expression follow more closely the data of η_{33} . In the more dilute regime, η_{11} still follows the same trend as Boyer *et al.* [6]'s expression, whereas η_{22} and η_{33} drops quickly to

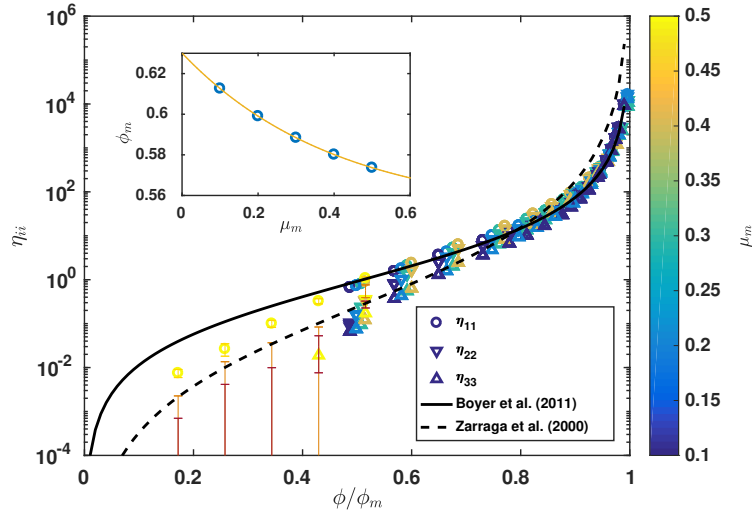


FIG. 2: Normal viscosities from simple shear experiments as a function of ϕ/ϕ_m . Error bars are standard deviation of η_{22} and η_{33} whose average is null. Solid line is expression from Boyer *et al.* [6] and dashed line is expression from Zarraga *et al.* [12]. Insert shows measured ϕ_m as a function of friction coefficient μ_m and solid line is model from [21].

zero. In that case, they are represented by their standard deviation, which is much higher than the mean value. The volume fractions at which η_{22} and η_{33} vanish are not the same, as found by other authors [25].

In the following, all stresses are rescaled by σ_{22} , which is experimentally measurable and controllable. The ratio σ_{11}/σ_{22} from our results in simple shear and from the literature is plotted on figure 3. Note that rescaling ϕ by ϕ_m in that plot does not lead to a single master curve, as shown in the insert. Indeed, this ratio depends on the microscopic friction coefficient. Data from Gallier *et al.* [25] and Yeo and Maxey [26] and relative to two different friction coefficients (0 and 0.5 respectively) is consistent with our data points. The value of λ_{11} proposed in Zarraga *et al.* [12] is also in the range of our data. On the other hand, the points reflecting measurements by Dbouk *et al.* [2] are outliers (all other points are from numerical simulations).

Figure 4 shows λ_{33} , the ratio between σ_{33} and σ_{22} as a function of ϕ , based on literature data, simple shear and resuspensions simulations (presented below). In contrast with $\lambda_{11}(\phi)$, our $\lambda_{33}(\phi)$ results collapses to a single straight line, with no further scaling. It means that λ_{33} is independent on the microscopic friction coefficient, and thus on ϕ_m . The present data

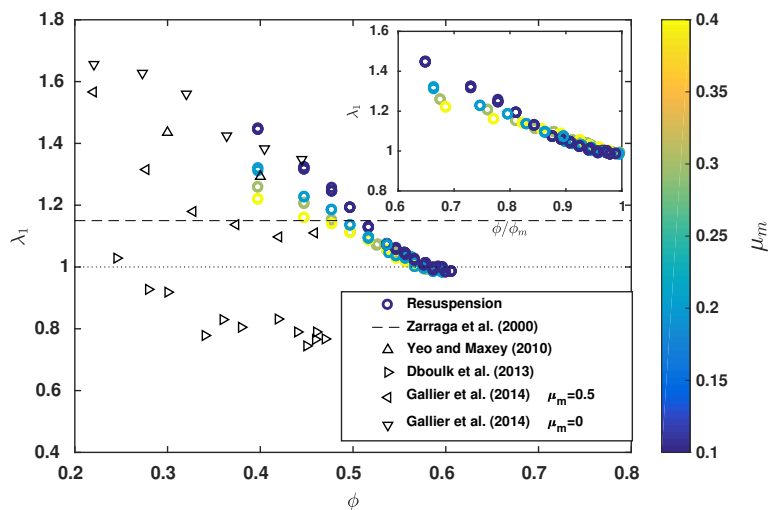


FIG. 3: $\lambda_{11} = \sigma_{11}/\sigma_{22}$ as a function of ϕ and with various friction coefficients, from simple shear simulations and from literature [2, 12, 25, 26]

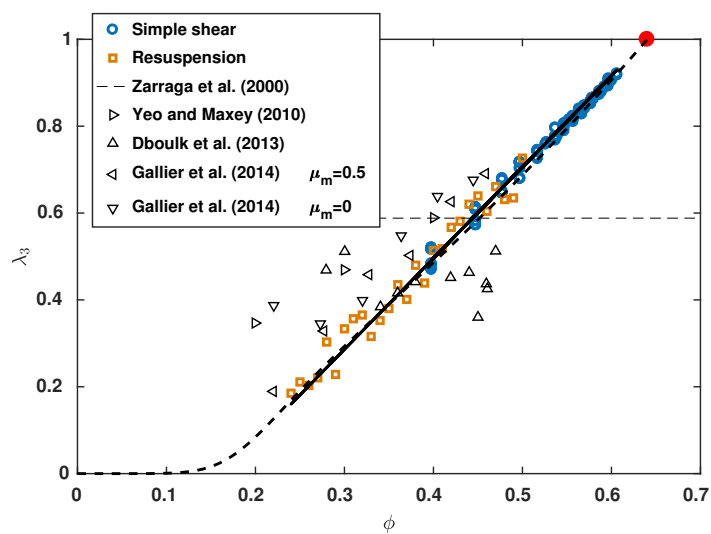


FIG. 4: $\lambda_{33} = \sigma_{33}/\sigma_{22}$ as a function of ϕ , from simple shear, resuspension and from literature [2, 12, 25, 26]. Red point is at coordinate (0.64; 1). Solid line: linear fitting of that points. Dashed line: ratio of the models from resuspension data.

are also close to the data from the literature, but much less scattered. A linear fit leads to

equation 7

$$\lambda_{33}(\phi) = 2.1(\phi - \phi_{rcp}) + 1 \quad (7)$$

$$\lambda_{33} = \frac{\left(\frac{\phi}{\phi_{rcp}}\right)^{7.5}}{10^{-3} + \left(\frac{\phi}{\phi_{rcp}}\right)^6} \quad (8)$$

with $\phi_{rcp} = 0.64$, the random close packing volume fraction. This expression might be problematic as it crosses 0 before $\phi = 0$, and results shows that both η_{22} and η_{33} drops to 0 below a certain volume fraction. If used to describe migration, this will lead to particle migration toward high stress area, which has never been observed. An other function, that goes smoothly to 0 is proposed in equation 8 (dashed line in figure 4). This particular form originates from the functions we propose in the next section to account for η_{22} and η_{33} .

As λ_{33} is a function of ϕ only, and it apparently tends to 1 at ϕ_{rcp} , this suggests that λ_{33} is related to steric effects only and does not involve frictional contacts, and blocking configurations. On the other hand, λ_{11} has a dependency upon μ_m , which indicates that it also depends on frictional effects. This result supports the idea that solid contacts play a key role in setting a fabric at the microscale even though its direct contribution to stress is relatively small.

Figure 5 shows the contacts and the lubrication forces contributions to each normal viscosity components. In this data set, contacts dominate all normal viscosity components. For the contact contribution, λ_{11}^C and λ_{22}^C are of the same order whereas λ_{33}^C is smaller. For the lubrication part, we find opposite signs between λ_{11}^L on the one hand, and λ_{22}^L and λ_{33}^L on the other hand. It increases the deviation from unity of the λ_{ii} . In the tested range of volume fraction the contribution of lubrication forces to the normal stress remains smaller than that of the contact forces but they are of the same order of magnitude on the dilute side of the range. The fact that the normal viscosities η_{22} and η_{33} vanishes at low volume fraction could thus be interpreted as a balance of contact and lubrication forces such that their contribution to stress cancel out.

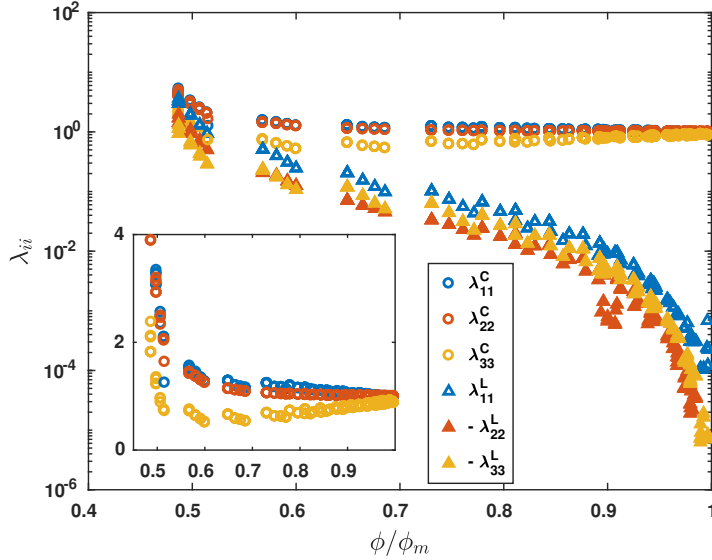


FIG. 5: Ratio $\lambda_{ii}^k = \sigma_{ii}^k / \sigma_{22}$, where k denotes *Lubrication* or *Contact*. Open symbols are positive whereas filled symbols are negative. The insert shows only the contribution from solid contacts

B. Resuspension

Figure 6 shows the steady state concentration profiles in the resuspension simulations and, in inserts, the rescaling by aSh for the part of the profile far from the interface (as discussed below). Clearly, the rescaling results in a unique function.

Figure 7 shows the viscosities computed from all concentration profiles using equation 6. On this figure, we can see that most of the points (lines) rescale very well whereas points close to the interface (dotted lines) did not rescale. It is to be noted that those data points correspond to regions of strong ϕ -gradient, transitioning from $\phi \approx 0.5$ to $\phi = 0$ on a distance of $5a$ or even less. It is unsurprising that a homogenized relationship cannot explain such an abrupt change in a continuous framework. In the following, only the points which rescale are kept.

Figures 8 shows the computed viscosities as a function of ϕ/ϕ_m with data from resuspension and simple shear. The same data is plotted against $1 - \phi/\phi_m$ in the inserts. Identical trends are found regardless of the boundary conditions. For resuspension in gradient direction, the points issued from simple shear data tends to drop to 0 for higher volume fraction

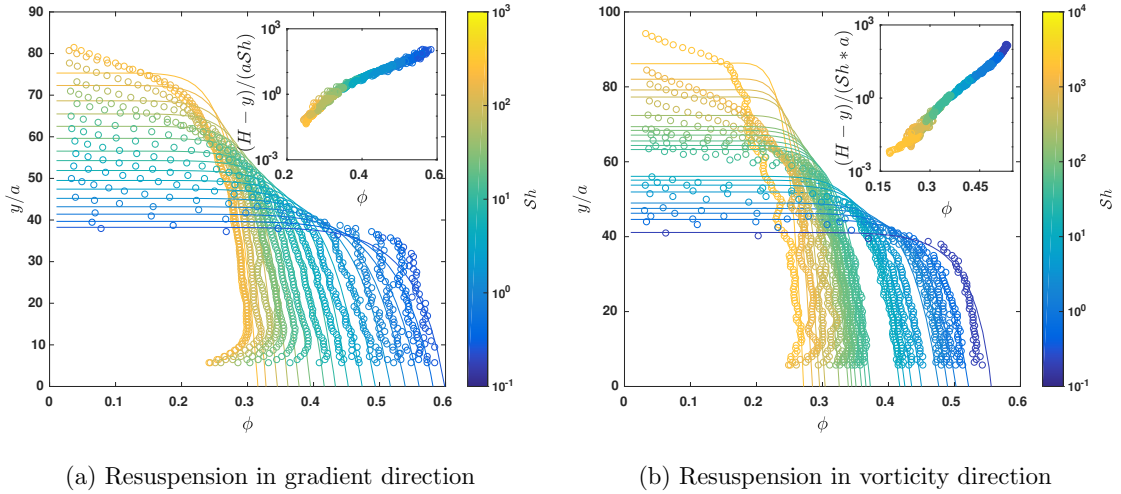


FIG. 6: Raw concentration profiles. Circles are simulation results and solid lines are concentration profiles computed from viscosities empirical expressions. Insert shows the rescaling with Shields number, without the points close to the interface.

than the one from resuspension. They both have a -2 divergence as the volume fraction approaches the maximal volume fraction, which is well captured by Boyer *et al.* [1]’s expression for the normal viscosity. For η_{22} (figure 8a) the expression follows the points rather well down to $\phi/\phi_m \approx 0.5$, but it overestimates the coefficient below that value. The same observation can be made on η_{33} , in that case however Zarraga *et al.* [12]’s expression gives a better (nearly perfect) fit for $0.6 < \phi/\phi_m < 0.8$. η_{33} drops significantly below both empirical expressions as soon as $\phi/\phi_m < 0.5$.

As none of the earlier proposed expressions can account for the rapid decay of η_{22} and η_{33} below $\phi/\phi_m = 0.5$, we propose in the following equations new expressions that fits the data on the entire range of volume fraction. They read

$$\eta_{22}(\phi) = \frac{(\phi/\phi_m)^9}{(1 - \phi/\phi_m)^2} + 150(\phi/\phi_m)^{10} \quad (9)$$

and

$$\eta_{33}(\phi) = \frac{(\phi/\phi_{rcp})}{10^{-3} + (\phi/\phi_{rcp})} \left[\frac{(\phi/\phi_m)^9}{(1 - \phi/\phi_m)^2} + 150(\phi/\phi_m)^{10} \right]. \quad (10)$$

Autre suggestion pour η_{22} (Bruno):

$$\eta_{22}(\phi) = \frac{e^{-2.3(\frac{\phi_m}{\phi} - 1)}}{(1 - \phi/\phi_m)^2} + 30 e^{-6(\frac{\phi_m}{\phi} - 1)} \quad (11)$$

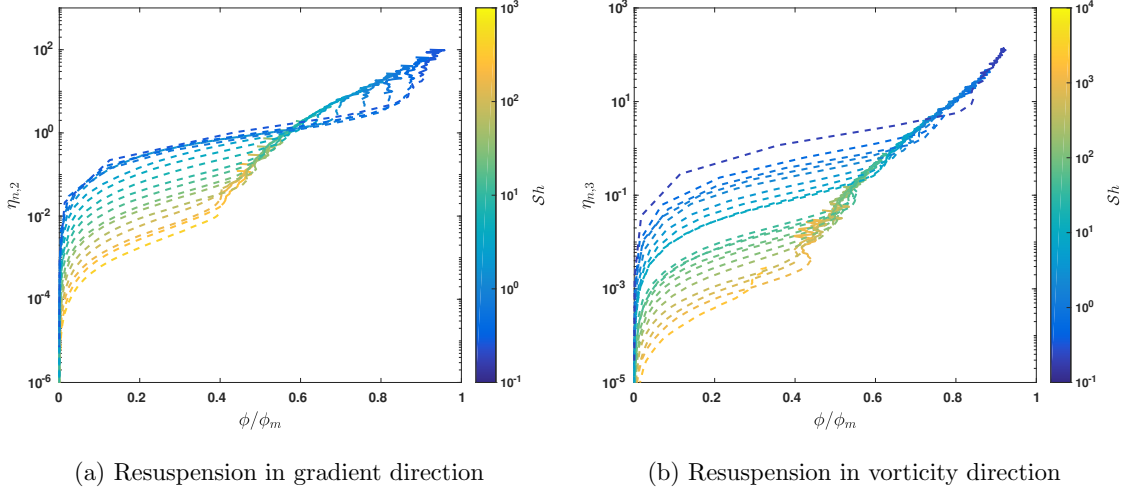


FIG. 7: Raw viscosities as a function of ϕ , computed from concentration profile using equation 6. Lines shows the points of the pseudo-plateau which are kept whereas dashed lines shows the points at the interface which are removed.

The rather complex form of η_{33} is coming from the fact that we aimed fits for η_{22} and λ_{33} (rather than η_{22} and η_{33}) since λ_{33} is very sensitive to the particular expressions chosen (see Fig. 4).

From these expressions, we can check the consistency of the approach by predicting the steady state volume fraction profiles in the two resuspension geometries. For that purpose, we simply integrate equation 3, using the above expressions and imposing the volume of particles to set the integration constant. The resulting volume fraction profiles are superimposed to the numerical data in Fig. 6. The agreement is rather good, except for the highest Shields numbers. This is due to the fact that the volume fraction profiles in viscous resuspension are more sensitive to the particular form of the empiric functions chosen for η_{ii} . Indeed, the normal viscosity coefficients are plotted in Fig. 8 in log scale over 4 orders of magnitude.

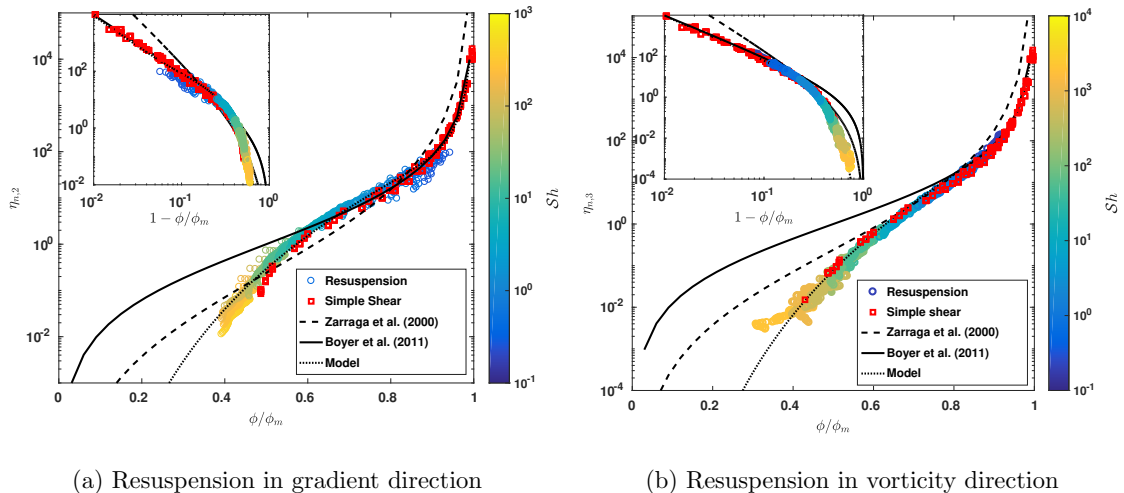


FIG. 8: Viscosity profiles from resuspension and simple shear as a function of ϕ/ϕ_m with models available in the literature. Inserts shows the data in log-log according to $1 - \phi/\phi_m$. Solid line is expression from Boyer et al. [6], dashed line is expression from Zarraga et al. [12].

C. Discussion

1. Comparison with experimental viscous resuspension data

Resuspension in the shear direction with a uniform shear rate is not documented in the literature until now. On the other hand, direct comparisons with three available sets of experiments [9, 13, 15] is possible for resuspension in the vorticity direction, as presented in this section. We first focus on the height increment induced by resuspension.

In Figure 9 the height increment is presented as a function of the Acrivos parameter A , defined by $A = 9/2(\eta_f \dot{\gamma})/(\Delta \rho g h_0)$, for the sake of consistency with earlier authors. A is proportional to the Shields number ($A = 9/2(aSh)/h_0$). The simulation results are in excellent agreement with the available data For $A < 2$ ($Sh < 20$). In contrast, a significant discrepancy is found for higher values of A , when the mean volume fraction of the bed is less than 35% approximately.

There can be two main reasons for this discrepancy. The first one is coming from the interaction model used in the simulations. Indeed, the viscosity of the suspending fluid is

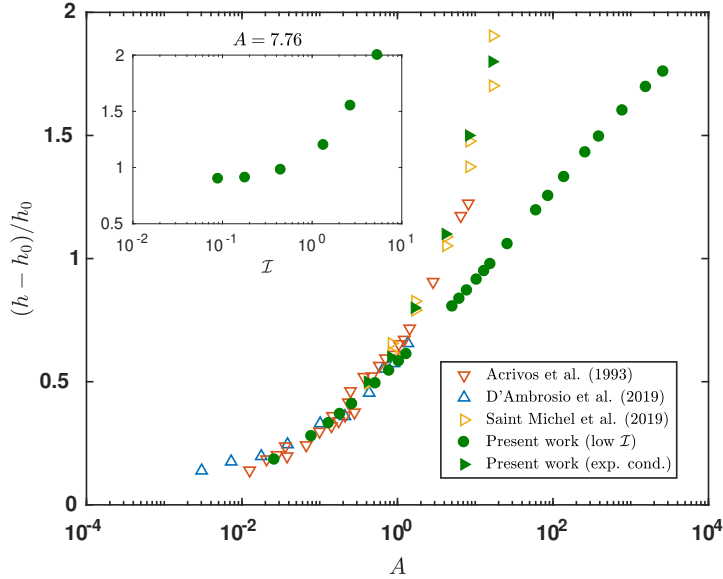


FIG. 9: Comparison of measured height from Couette resuspension experiments (open symbols) and from simulations (filled symbols). The triangular filled symbols are simulations using the same parameters as in Saint-Michel *et al.* [13] experiments. Insert shows simulations results done at fixed Acivos parameter, varying the inertial number.

accounted for in the particle interactions via the lubrication terms exclusively while other, non-diverging, hydrodynamic interactions certainly matter in sufficiently dilute regimes. However, previous results [21] concluded that, in terms of bulk viscosity, the agreement between well resolved Stokes solutions and a simple lubrication model was rather good down to approximately $\phi = 0.2$. It is therefore unlikely that the limits of the models are the main reason for discrepancies which are appear at $\phi = 35\%$.

The second possible reason concerns the experimental parameters used in reference 9 and 13. In the simulations, we paid particular attention to avoid any inertial effects. In particular, the inertial number, $\mathcal{I} = \dot{\gamma}\sqrt{a/g}$ is always below $5 \cdot 10^{-2}$. In the experiments, it is not always the case. In particular, we found that the few experimental points which deviate from the simulation results ($A > 2$) correspond to inertial numbers of the order of, or greater than 1. We performed additional simulations in this regime (inserts of figure 9), and observed that the resuspension was significantly enhanced. Moreover, when using similar parameters as in Saint-Michel *et al.* [13], the simulation data capture very well the reported

suspension height. We can thus conclude that the reason for the apparent discrepancy at high Shields number is due, mainly, to inertial perturbations in the experiments. When both simulation and experiments are in the Stokes limit, on the other hand, they are in good agreement.

In the experimental works reported in Saint-Michel *et al.* [13] and d’Ambrosio *et al.* [15], not only the height increment but also the profiles of volume fraction were determined. The normal viscosity coefficient η_{33} deduced in [13] from these profiles matches Boyer *et al.* [6]’s expression. Conversely, [15] suggest a better agreement with Zarraga *et al.* [12]’s one. The present results highlight that the superior accuracy of one expression entirely depends on the range of ϕ considered. Overall, Boyer’s expression is suitable for $\phi/\phi_m > 0.8$ and Zarraga *et al.* [12]’s one for $\phi/\phi_m \in [0.6, 0.8]$. They both overestimate the viscosity if $\phi/\phi_m < 0.6$. These discrepancies deserve several comments. In both experimental works, the normal stress was found to be shear-thinning, which is not found with the present model. It is thus clear that the experimental systems are physically more complex. As for the previous discussion concerning inertial effects, it is also possible that the transition from a viscous regime (at low \mathcal{I}) to an inertial one (at high \mathcal{I}) depends on the volume fraction. Possibly, the fact that the low values of the normal stress that we report for $\phi < 35\%$ were not observed in experiments may come in part from inertial effects increasing the measured stress.

Another clear difficulty encountered in this work is related to the interpretation of the results in the regions with strong gradients of solid fraction. Gradient effects can be expected in experiments too, and the only way to reproduce them numerically would be to replicate the particles in terms of both size and number - which we did not do for it would end up with extremely large numbers and prohibitive computation times. Nevertheless, the numerical results give an insight into gradient effects: when the gradient of ϕ is greater than a fraction of the inverse of the particle size, it is not possible to collapse the profiles obtained at different Shields numbers.

2. Normal stress anisotropy

The data reported in this paper unambiguously shows that the so-called normal viscosities are not related by constant coefficients, consistently with a few recent results on smaller datasets [2, 16]. In contrast with the assumptions of most SBM models, therefore, both

$\lambda_{11} = \sigma_{11}/\sigma_{22}$ and $\lambda_{33} = \sigma_{33}/\sigma_{22}$ have to be defined as functions of ϕ . The accuracy of the present results, in an extended range of ϕ , leads to unambiguous conclusions on this question. For instance λ_{33} varies from 0.2 at $\phi = 0.25$ to approximately 1 close to $\phi = \phi_m$.

Interestingly, though, and unlike many other things, λ_{33} does not depend on the contact friction coefficient (but, e.g., λ_{22} does).

3. Contribution of hydrodynamic forces

In the revisited version of the SBM [19, 20], it was pointed out that hydrodynamic interactions do not contribute directly to the particle normal stress involved in the momentum balance in the particle phase. Hydrodynamic might however contribute to particle migration through the mean force exerted by the fluid on the particles. The latter can incorporate terms which remains non-zero in steady state, involving volume fraction and shear rate gradients. Here, let us recall that the shear rate is uniform at steady state, so that these extra contributions to the mean interphase force should remain small.

In this work, the normal stresses were determined independently from both homogeneous simple shear and resuspension profiles. Regardless of the direction (vorticity and shear direction), the two approaches lead to very similar estimates. It highlights that the body forces (i.e., at steady state, the weight density) are balanced by the divergence of a stress which combines both the solid contact interactions and the lubrication forces, and none of these contributions can be neglected in general. Interestingly, lubrication and solid contacts contribute with opposite signs to the normal stress: lubrication produces traction and therefore it tends to limit resuspension. For $\phi \sim < 0.35$ a sharp decrease of the normal stress occurs, which can be understood as a situation where the two contributions cancel out.

IV. CONCLUSIONS

We reported in this paper numerical data on viscous resuspension of buoyant particles in both the vorticity and the shear direction, together with direct determination of normal stresses in homogeneous shear flow of non-buoyant particles. The resuspension data is in good agreement with experimental results from the literature, and also with the normal stresses obtained in homogeneous conditions. It leads unambiguously to the conclusion

that, at steady state, weight is balanced by the divergence of a stress to which both contacts and lubrication contributes.

The accuracy of the results and the large range of volume fraction investigated let empirical expressions be proposed for the normal stress components. These expressions differ significantly from the earlier ones, both qualitatively and quantitatively. First, the normal stress ratio are not constant, they greatly depend on the volume fraction. In the semi-dilute regime the normal stress is much larger in the shear direction than in the vorticity direction. Conversely, a spherical tensor is enough to describe the normal stresses in the concentrated regimes ($\sigma_{11} \neq \sigma_{22} \neq \sigma_{33}$). Second, none of the earlier proposed expressions can account for the normal stress components in the full range of volume fraction. In particular we find that σ_{22} and σ_{33} decrease dramatically below $\phi \sim 0.35$, when contacts and lubrication contributions tend to cancel out. These features were evidenced by the numerical simulations and are reflected in the new empirical relations.

It would be interesting to investigate lower volume fractions, using a more adequate model for the fluid. We only tested homogeneous shear rates configurations, and it seems important to extend this approach to non-homogeneous ones as in many situations (e.g. Poiseuille flow), there exists gradient of shear rate which can have consequences on particle migration. Besides, as many recent experimental results report a non-linear dependency of the stress with respect to the shear rate, it seems to be important to incorporate in numerical models additional phenomena such as a variable friction coefficients, or extra interactions between particles (electrostatic repulsions, adhesion ...).

-
- [1] F. Boyer, E. Guazzelli, and O. Pouliquen, “Unifying suspension and granular rheology,” *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011).
 - [2] T. Dbouk, L. Lobry, and E. Lemaire, “Normal stresses in concentrated non-brownian suspensions,” *J. Fluid Mech.* **715**, 239 (2013).
 - [3] E. Guazzelli and O. Pouliquen, “Rheology of dense granular suspensions,” *J. Fluid Mech.* **852**, P1 (2018).
 - [4] A. Karnis, H. Goldsmith, and S. Mason, “The kinetics of flowing dispersions: I. concentrated suspensions of rigid particles,” *J. of Coll. and Interface Sci.* **22**, 531 (1966).

- [5] M. K. Lyon and L. G. Leal, “An experimental study of the motion of concentrated suspensions in two-dimensional channel flow. part 1. monodisperse systems,” *J. Fluid Mech.* **363**, 25–56 (1998).
- [6] F. Boyer, O. Pouliquen, and E. Guazzelli, “Dense suspensions in rotating-rod flows: normal stresses and particle migration,” *J. Fluid Mech.* **686**, 5–25 (2011).
- [7] M. Sarabian, M. Firouznia, B. Metzger, and S. Hormozi, “Fully developed and transient concentration profiles of particulate suspensions sheared in a cylindrical couette cell,” *J. of Fluid Mech.* **862**, 659–671 (2019).
- [8] D. Leighton and A. Acrivos, “Viscous resuspension,” *Chemi. eng. sci.* **41**, 1377 (1986).
- [9] A. Acrivos, R. Mauri, and X. Fan, “Shear-induced resuspension in a couette device,” *Int. j. multip. flow* **19**, 797 (1993).
- [10] R. J. Phillips, R. C. Armstrong, R. A. Brown, A. L. Graham, and J. R. Abbott, “A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration,” *Phys. Fluids A* **4**, 30 (1992).
- [11] J. F. Morris and F. Boulay, “Curvilinear flows of noncolloidal suspensions: The role of normal stresses,” *J. rheol.* **43**, 1213 (1999).
- [12] I. E. Zarraga, D. A. Hill, and D. T. Leighton, “The characterization of the total stress of concentrated suspensions of noncolloidal spheres in newtonian fluids,” *Journal of Rheology* **44**, 185 (2000).
- [13] B. Saint-Michel, S. Manneville, S. Meeker, G. Ovarlez, and H. Bodiguel, “X-ray radiography of viscous resuspension,” *Phys. Fluids* **31**, 103301 (2019).
- [14] B. Snook, J. E. Butler, and E. Guazzelli, “Dynamics of shear-induced migration of spherical particles in oscillatory pipe flow,” *J. of Fluid Mech* **786**, 128–153 (2016).
- [15] E. d’Ambrosio, F. Blanc, and E. Lemaire, “Viscous resuspension of non-brownian particles: determination of the concentration profiles and particle normal stresses.” *J. Fluid Mech.* **in press**.
- [16] S. Gallier, E. Lemaire, L. Lobry, and F. Peters, “Effect of confinement in wall-bounded non-colloidal suspensions,” *J. Fluid Mech.* **799**, 100–127 (2016).
- [17] J. T. Norman, H. V. Nayak, and R. T. Bonnecaze, “Migration of buoyant particles in low-reynolds-number pressure-driven flows,” *J. of Fluid Mech.* **523**, 1–35 (2005).
- [18] P. R. Nott and J. F. Brady, “Pressure-driven flow of suspensions: simulation and theory,” *J.*

- of Fluid Mech **275**, 157 (1994).
- [19] D. Lhuillier, “Migration of rigid particles in non-brownian viscous suspensions,” Phys. Fluids **21**, 023302 (2009).
- [20] P. R. Nott, E. Guazzelli, and O. Pouliquen, “The suspension balance model revisited,” Phys. Fluids **23**, 043304 (2011).
- [21] W. Chèvremont, B. Chareyre, and H. Bodiguel, “Quantitative study of the rheology of frictional suspensions: Influence of friction coefficient in a large range of viscous numbers,” Phys. Rev. Fluids **4**, 064302 (2019).
- [22] W. Chèvremont, H. Bodiguel, and B. Chareyre, “Simulation of hard spheres suspension: a new contact model,” NotYetPublished (2020).
- [23] V. Šmilauer and B. Chareyre, in Yade Documentation 2nd ed (The Yade Project, 2015) <http://yade-dem.org/doc/>.
- [24] É. Guazzelli and O. Pouliquen, “Rheology of dense granular suspensions,” J. Fluid Mech. **852** (2018).
- [25] S. Gallier, E. Lemaire, F. Peters, and L. Lobry, “Rheology of sheared suspensions of rough frictional particles,” J. Fluid Mech. **757**, 514 (2014).
- [26] K. Yeo and M. R. Maxey, “Simulation of concentrated suspensions using the force-coupling method,” J. Comp. Phys. **229**, 2401 (2010).

- Les résultats des viscosités normales obtenus en cisaillement simple et grâce aux profils de concentration dans la resuspension sont en bon accord
- Les coefficients entre les contraintes normales (λ_1, λ_3) présentent une forte dépendance à la fraction volumique

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Sommaire

5.1	Conclusion générale	86
5.2	Perspectives	88
5.2.1	Simulations DEM	88
5.2.2	Simulations des interactions	89
5.2.3	Mesure des interactions	89
5.2.4	Modèle de fluide	90

5.1 Conclusion générale

Au cours de ce travail, trois axes relatifs à la rhéologie des suspensions ont été abordés, sur la base de simulations numériques de type éléments discrets : le développement d'un modèle de contact lubrifié permettant son intégration dans le schéma numérique de simulation, l'utilisation de ce modèle de contact lubrifié pour l'étude de la rhéologie des suspensions en cisaillement, et enfin l'étude de la resuspension visqueuse, qui est liée à la viscosité normale des suspensions.

Dans le chapitre 2 (Matériel et méthodes), le cadre de travail des simulations de type éléments discrets est présenté, suivi d'un article[17] soumis à la revue *Powder Technology* qui détaille le modèle de contact développé, ainsi que sa réponse dans deux cas-tests qui possèdent des solutions analytiques. Le modèle ainsi développé permet de régulariser la singularité de la lubrification au contact, ce qui ouvre en outre la porte à la simulation de suspensions de sphères parfaitement lisses, sans aucune troncature des équations de la lubrification. Le schéma de résolution numérique retenu est inconditionnellement stable, et son implémentation est robuste, jusqu'à des gaps arbitrairement faibles. Les deux cas-tests reproduits par le modèle consistent en une sphère qui sédimente sur une autre, et deux sphères suspendues dans un fluide cisailé. Le premier cas-test permet d'évaluer la robustesse dans le régime visqueux, où la solution en exponentielle décroissante du gap est retrouvée. Dans le régime inertiel, ce cas-test reproduit des comportements de contact sec, tel que du rebond amorti pour les sphères dures, et une collision suivie d'une oscillation du centre de masse pour les sphères molles. Un diagramme de phase des différents comportements dans ce régime a été établi. Le second cas-test est le plus utilisé afin de tester des modèles d'interactions visqueuses entre deux sphères. Tout d'abord, le rôle des termes de rotations et de forces tangentielles est mis en lumière. En effet, ces termes sont trop souvent négligés et présentent pourtant de fortes implications sur la trajectoire relative des sphères. En mettant tout les termes divergeant de la lubrification, les trajectoires calculées par le modèle reproduisent correctement les trajectoires analytiques. Ce cas-test a permis de montrer que même pour des positions initiales sur des lignes de courant très proches, la distance entre les surfaces des sphères possède une borne inférieure, ce qui donne une distance caractéristique des rugosités sous laquelle elles n'ont plus d'impact. Les simulations dans le régime rugueux et mou ont permis de déterminer une carte de l'irréversibilité quantifiée par le changement de ligne de courant après interaction.

Dans le chapitre 3 (Rhéologie des suspensions rugueuses), les résultats provenant des simulations d'expériences de cisaillement simple en conditions aux limites périodiques sont présentés sous forme d'un article[18] publié dans la revue *Physical Review Fluids*, suivi de résultats complémentaires sur l'intérêt d'être en conditions aux limites tripériodiques. Ensuite, la microstructure de l'écoulement des suspensions est analysée à l'aide des fonctions de distributions des grandeurs. Dans l'article, une étude systématique des suspensions cisailées faisant varier le coefficient de frottement, la fraction volumique et la pression de confinement a été menée sur des suspensions de sphères rigides rugueuses. Les résultats obtenus des simulations reproduisent quantitativement les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature,

montrant qu'un modèle ne prenant en compte que des forces de contact et des lubrifications est suffisant pour décrire l'interaction entre sphères dans une suspension cisailée à l'état stationnaire. Une analyse de la décomposition de la contrainte suivant les forces qui en sont à l'origine permet de montrer que les efforts dus aux forces de lubrifications dominent lorsque $I_v > 10^{-1}$ soit $\phi/\phi_m < 0.77$, et les efforts dus aux contacts dominent sous ce seuil. La loi constitutive $\phi(I_v)$ a été trouvée comme étant dépendante du coefficient de friction. En effet, celui-ci joue sur la fraction volumique de divergence (ϕ_m). Un rescaling de cette loi constitutive par cette fraction volumique de divergence a permis d'obtenir une courbe maîtresse. La nouvelle loi constitutive est donc $\phi/\phi_m(I_v)$. Le coefficient de friction entre grains ne joue pas sur la loi constitutive $\mu(I_v)$, alors que celle-ci peut être interprétée comme un coefficient de friction macroscopique. L'analyse détaillée de la décomposition de la contrainte a permis pour cette seconde loi de discriminer parmi les différentes expressions proposée pour celle-ci. Ainsi, une nouvelle expression respectant les résultats de la simulation, la divergence de la viscosité au jamming ainsi que la limite pour les milieux infiniment dilués est proposée. Les résultats complémentaires montrent les effets de parois qui sont importants pour les milieux les moins frottants et s'expriment sous la forme d'une organisation en couche des sphères. Le passage vers des conditions tri-périodiques élimine ce problème. L'étude de la microstructure des suspensions au cours du cisaillement à l'aide des fonctions de distributions des différentes grandeurs permet de décrire l'environnement moyen vu par les sphères. Les grandeurs de structure (interstice entre les particules, probabilité de contact, vitesses) montrent des distributions avec comme axes principaux les axes de compression ($3\pi/4$) et d'extension ($\pi/4$), avec une distribution assez bien décrite par la coupe dans le plan de cisaillement (XY). Les coupes selon les plans de vorticité (XZ, YZ) montrent des distributions plus isotropes, ou nulles. Les fonctions de distributions des contributions à la contrainte de cisaillement montrent des axes principaux identiques. En cohérence avec la fonction de distribution de la probabilité d'avoir un contact, les contraintes provenant des contributions de contact sont confinées dans les cadrants de compression. Les fonctions de distributions des contributions aux composantes diagonales de la contrainte montrent quand à elles des axes principaux plutôt orientés selon $\pi/8, 3\pi/8, 5\pi/8$ et $7\pi/8$ dans le plan de cisaillement. Les fonctions de distributions des composantes xx et yy ont des formes similaires, et qui ont des composantes dans le plan de cisaillement, tandis que les fonctions de la composante zz ne présentent aucune contributions dans le plan de cisaillement. Les fonctions des composantes xx et yy liées aux forces tangentielles ont elles une coupe dans le plan de cisaillement qui est l'exact opposé l'une de l'autre, ce qui s'explique par la méthode de construction de ces fonctions et des propriétés des tenseurs de contrainte.

Dans le chapitre 4 (Viscosité normale et resuspension visqueuse), on s'intéresse cette fois ci aux termes diagonaux du tenseur de contrainte, qui sont appelés par abus de langage viscosités normale. Cette contrainte qui se développe au cours du cisaillement est responsable des phénomènes de resuspension visqueuses, et peut être mesurée expérimentalement de plusieurs façons, avec le profil de la surface libre dans un couette large gap, ou encore en mesurant le profil de concentration d'une suspension qui se développe lorsque la suspension est cisailée. Cette dernière expérience a

été reproduite en simulation, et les résultats font l'objet d'un article en préparation. Dans cet article, la resuspension a été étudiée selon les directions du gradient de vitesse et de la vorticité. Ces résultats ont  t s comparés aux contraintes obtenues sur des expériences de cisaillement simple, avec une très bonne superposition entre les points. Les corrélations existantes dans la littérature fonctionnent relativement bien pour les zones les plus concentrées, et on observe une différence de comportement assez marquée entre la viscosité selon la direction 33 et les autres. Ceci n'est pas sans rappeler la différence observée dans les formes des fonctions de distributions des contraintes pour la contribution à la composante zz . La comparaison des résultats de la simulation aux résultats expérimentaux est rendue complexe par le peu de données disponibles, et dont certains points expérimentaux peuvent être problématiques, ceux-ci se trouvant dans la transition vers le régime inertiel.

Pour conclure ce travail, un développement d'un modèle de simulation des suspensions non-browniennes a été développé et une étude complète de la rhéologie des suspensions en cisaillement a été effectuée. D'abondantes données ont été obtenues, et ont pu être confrontées à des données expérimentales. Des accords quantitatifs avec les résultats expérimentaux ont été retrouvés et des lois phénoménologiques ont été proposées.

5.2 Perspectives

L'objectif initial de cette thèse était d'étudier les suspensions de particules en interactions, par une voie numérique et expérimentale. Au cours de ce travail, plusieurs voies ont été explorées et, même si ces résultats ne sont pas présentés dans ce mémoire de thèse, ils ouvrent la porte vers de futurs travaux.

5.2.1 Simulations DEM

Dans le chapitre 2, où le modèle de contact entre les particules est présenté, le modèle est testé sur deux particules en faisant varier la rugosité vers 0, et la raideur vers des zones où la particule ne peut plus être considérée comme indéformable, ce qui a une conséquence lorsqu'on regarde le cas-test où deux sphères se trouvent dans un cisaillement simple, car cette déformabilité introduit de l'irréversibilité. L'utilisation de ce modèle de contact permet maintenant de prendre en compte ces phénomènes. En particulier, il permet l'étude numérique de suspensions parfaitement lisses, ce qui a un intérêt fondamental, notamment dans le cas des resuspensions visqueuses, où le rôle des forces hydrodynamiques dans la resuspension n'est toujours pas tranchée. Les premiers résultats obtenus montrent une rhéologie assez différente pour ces suspensions.

D'autre part, dans ce travail, seul des géométries de cisaillement simple ont été considérées pour la simulation d'expériences de rhéométrie. Cependant, d'autres types d'expériences existent, tel que des expériences en rhéométrie extensionnelles, élongationnelles ou encore avec des champs de vitesses 3D. Le code développé au cours de ce travail permet de faire ce type de simulations directement.

5.2.2 Simulations des interactions

Dans ce travail de thèse, le développement et l'implémentation du modèle de contact lubrifié a représenté une part non-négligeable du temps passé. Celui-ci a été étendu à des interactions entre particules faisant intervenir du contact, de la lubrification ainsi que des forces dérivant d'un potentiel d'interaction. Dans le schéma rhéologique de la force normale, cela revient à ajouter un ressort en parallèle de l'interaction de contact, sans limite sur la distance. L'implémentation devant déjà faire face à une interaction divergente au contact (la lubrification) l'introduction d'une autre interaction (k_p) divergeant modérément au contact ne pose pas de problèmes particuliers, car celle-ci sera régularisée de la même façon.

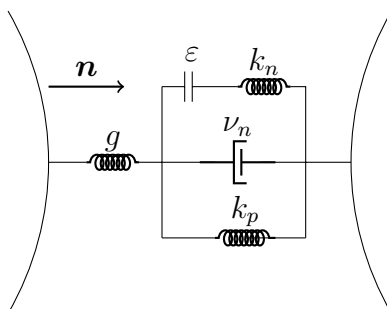


FIGURE 5.1 – Schéma rhéologique des interactions avec potentiel

Ce modèle de contact avec interactions a été testé avec une interaction de type adhésive. Pour ce faire, la force de contact a été rendue hystérétique. Dans ce modèle, le contact commence lorsque les particules sont suffisamment proches pour que les rugosités rentrent en contact. En revanche, le contact est maintenu tant qu'une certaine distance minimale (supérieure à celle des rugosités) n'est pas atteinte. Cela a pour effet d'autoriser le contact à créer de la traction, et est phénoménologiquement un modèle simple d'adhésion. L'utilisation de ce modèle a pour effet de créer un seuil sur les courbes d'écoulement, donc une contrainte minimale pour l'écoulement de la suspension. Ce développement ouvre la voie à l'étude des suspensions ayant des interactions de type colloïdales, en DEM.

5.2.3 Mesure des interactions

Un gros développement expérimental a été réalisé sur un système de pinces optiques. Les pinces optiques sont des dispositifs expérimentaux qui utilisent la lumière afin de créer un piège qui permet d'exercer une force sur les particules. Le piège peut être comparé à un ressort, qui maintient la particule au centre de celui-ci, et caractérisé par deux raideurs, une longitudinale et une radiale, la longitudinale étant plus faible que la radiale. Le dispositif expérimental est construit autour d'un microscope qui focalise un faisceau laser afin de créer le piège optique, l'observation étant effectuée par le même objectif que celui qui focalise le laser. Le principal développement réalisé est un algorithme de traitement d'image, qui permet de

déterminer la position 3D des particules à l'aide des informations présentes sur une image 2D. En effet, Lorsque la particule ne se trouve pas dans le plan focal, le contour de celle-ci est flouté. L'analyse du profil radial de ce flou et à l'aide d'images de calibrations de particules permet de déterminer la distance de la particule au plan focal, et également une meilleure détermination de la position dans le plan. Cet algorithme a été utilisé avec succès dans l'étude de la migration viscoélastique dont les résultats sont présentés dans l'article Naillon et al. [59].

L'idée était d'utiliser cette pince optique pour la mesure de diverses forces d'interactions sur des particules de l'ordre du micromètre, en générant 2 pièges par l'oscillation rapide du laser sur les deux positions d'équilibre, ce qui aurait donné une mesure directe des forces. Deux expériences ont été tentées : une mesure direct des potentiels par une approche frontale, et des mesures de trajectoires relative, où une sphère est piégée au centre et une autre se déplace par rapport à l'autre. Par comparaison entre un système sans interaction et un autre avec, il est possible de mesurer le potentiel. Malheureusement, l'oscillation entre les pièges n'étant pas assez rapide, les particules avaient tendance à passer d'un piège à l'autre lorsqu'elles sont proche, rendant impossible toute mesure. Cependant, il existe une autre technologie qui permet de créer plusieurs pièges simultanément, sans osciller entre les positions, à l'aide d'un *Spatial Light Modulator* (SLM). Il serait intéressant de reproduire les expériences à l'aide de cet équipement sur des systèmes connus pour avoir une rhéologie complexe, afin de valider certains résultats obtenus en simulation numérique, notamment le fait que des interactions répulsives entraînent des comportements de rhéoépaississement [52].

5.2.4 Modèle de fluide

Dans tout le travail présenté ici, le fluide est considéré comme Newtonien, et donc sa viscosité a une valeur fixée. Or, dans les suspensions réelles, la matrice fluide peut être tout type de fluide, et en particulier des fluides non-newtoniens, avec des rhéologies assez complexes. Pour ce type de fluides, il est en général nécessaire de résoudre le fluide dans tout le domaine. D'autre part, ainsi que montré dans le chapitre sur la resuspension visqueuse, les simulations à faible fraction volumique font intervenir des distances telles que la correction des équations de lubrification ne sont plus suffisantes pour représenter l'effet du fluide. Il serait donc intéressant tant pour l'étude de suspensions de à matrice fluides non-newtoniennes que pour l'étude des suspensions dans le régime diluée de disposer d'un solveur fluide, qui permet une résolution efficace de cette phase, tout en gardant l'efficacité des simulations DEM. Pour l'étude de la migration viscoélastique, ce travail a été commencé avec l'implémentation d'un solveur lattice-bolzmans, de façon tel qu'il sera possible de l'intégrer dans le logiciel Yade-DEM .

Publications et travaux associés

R. Caulk, W. Chèvremont, D. Kunhappan, J. Pourroy, F. Kneib, and G. Thomas. Calcul distribué MPI pour la dynamique de systèmes particulaires - Yade-MPI. Technical report, Hackathon GENCI - Vainqueur catégorie optimisation, 2018. URL <http://www.genci.fr/fr/node/967>

A. Naillon, C. de Loubens, W. Chèvremont, S. Rouze, M. Leonetti, and H. Bodiguel. Dynamics of particle migration in confined viscoelastic poiseuille flows. *Phys. Rev. Fluids*, 4:053301, May 2019. doi: 10.1103/PhysRevFluids.4.053301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.4.053301>

W. Chèvremont, B. Chareyre, and H. Bodiguel. Quantitative study of the rheology of frictional suspensions: Influence of friction coefficient in a large range of viscous numbers. *Phys. Rev. Fluids*, 4:064302, Jun 2019. doi: 10.1103/PhysRevFluids.4.064302. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.4.064302>

W. Chèvremont, H. Bodiguel, and B. Chareyre. Lubricated contact model for numerical simulations of suspensions. *Powder Technol.*, submitted

Table des figures

1.1	Schéma d'une cellule de cisaillement à pression granulaire imposée . . .	8
3.1	Densité de probabilité des centre des sphères en fonction de la coordonnée y dans une simulation présentant une organisation en couche proche de la paroi ($\mu_m = 0.1, I_v = 10^{-3}$)	43
3.2	Profil de vitesse en fonction de la coordonnée y dans une simulation présentant une organisation en couche proche de la paroi ($\mu_m = 0.1, I_v = 10^{-3}$)	44
3.3	Composante de contact et de lubrification de la contrainte pour les simulation réalisées en tripériodique intégral, et comparaison au modèle proposé	45
3.4	Composante normale et tangentielle de contact de la contrainte pour les simulation réalisées en tripériodique intégral	45
3.5	Représentation du système d'axes utilisé pour le calcul des fonctions de distributions des grandeurs.	47
3.6	Fonction de distribution des distances entre sphères \bar{h}/a , normalisée par de diamètre des sphères, à $\phi = 0.50$	48
3.7	Fonction de distribution de la probabilité de contact entre sphères, à $\phi = 0.50$	49
3.8	Fonction de distribution des vitesses normales $\bar{v}_n/(2a\dot{\gamma})$, normalisée par la vitesse caractéristique du cisaillement, à $\phi = 0.50$	49
3.9	Fonction de distribution des vitesses tangentielles $ \bar{v}_t /(2a\dot{\gamma})$, normalisée par la vitesse caractéristique du cisaillement, à $\phi = 0.50$	50
3.10	Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte normale de contact $\bar{\sigma}_{xy}^{NC}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$	51
3.11	Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte tangentielle de contact $\bar{\sigma}_{xy}^{SC}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$	51
3.12	Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte de contact $\bar{\sigma}_{xy}^C/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement. Les traits fins représentent les composantes normales et tangentielles, le traits gros représente la somme des deux. $\phi = 0.50$ et $\mu_m = 0.5$	52

3.13	Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte normale de lubrification $\bar{\sigma}_{xy}^{NL}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$	53
3.14	Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte tangentielle de lubrification $\bar{\sigma}_{xy}^{SL}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$	53
3.15	Fonction de distribution de la composante de cisaillement de la contrainte de lubrification $\bar{\sigma}_{xy}^L/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement. Les traits fins représentent les composantes normales et tangentielles, le trait gros représente la somme des deux. $\phi = 0.50$ et $\mu_m = 0.5$. . .	54
3.16	Fonctions de distribution des composantes diagonales de la contrainte normale de contact $\bar{\sigma}^{NC}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$	55
3.17	Fonctions de distribution des composantes diagonales de la contrainte tangentielle de contact $\bar{\sigma}^{SC}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$	56
3.18	Fonctions de distribution des composantes diagonales de la contrainte normale de lubrification $\bar{\sigma}^{NL}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$	57
3.19	Fonctions de distribution des composantes diagonales de la contrainte tangentielle de lubrification $\bar{\sigma}^{SL}/(\sigma_{yy})$, normalisée par la pression de confinement, à $\phi = 0.50$	58
5.1	Schéma rhéologique des interactions avec potentiel	89

Liste des tableaux

3.1	Résumé des signes des contributions aux contraintes normales	58
-----	--	----

Bibliographie

- [1] A. Acrivos, R. Mauri, and X. Fan. Shear-induced resuspension in a couette device. *Int. j. multip. flow*, 19(5) :797–802, 1993.
- [2] L. Amarsid, J. Delenne, M. P., Y. Monerie, F. Perales, and F. Radjai. Viscoinertial regime of immersed granular flows. *Phys. Rev. E*, 96 :012901, 2017.
- [3] R. Ball and J. R. Melrose. A simulation technique for many spheres in quasi-static motion under frame-invariant pair drag and brownian forces. *Physica A*, 247(1-4) :444–472, 1997.
- [4] G. Batchelor and J. Green. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 . *J. Fluid Mech.*, 56 :401–427, 1972.
- [5] G. K. Batchelor and J. T. Green. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. *J. Fluid Mech.*, 56(2) :375–400, 1972. doi: 10.1017/S0022112072002927.
- [6] A. Boromand, S. Jamali, B. Grove, and J. M. Maia. A generalized frictional and hydrodynamic model of the dynamics and structure of dense colloidal suspensions. *J. Rheol.*, 62(4) :905–918, 2018.
- [7] G. Bossis and J. F. Brady. Dynamic simulation of sheared suspensions. i. general method. *J. Chem. Phys.*, 80(10) :5141–5154, 1984.
- [8] F. Boyer, E. Guazzelli, and O. Pouliquen. Unifying suspension and granular rheology. *Phys. Rev. Lett.*, 107(1888301), 2011.
- [9] J. F. Brady and G. Bossis. The rheology of concentrated suspensions of spheres in simple shear flow by numerical simulation. *J. Fluid Mech.*, 155 :105–129, 1985.
- [10] J. F. Brady and G. Bossis. Stokesian dynamics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 20(1) : 111–157, 1988.
- [11] J. Brändle de Motta, W.-P. Breugem, B. Gazanion, J.-L. Estivalezes, S. Vincent, and E. Climent. Numerical modelling of finite-size particle collisions in a viscous fluid. *Phys. Fluids*, 25(8) :083302, 2013.
- [12] E. Catalano. *A pore-scale coupled hydromechanical model for biphasic granular media*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2012.

- [13] E. Catalano, B. Chareyre, and E. Barthélemy. Pore-scale modeling of fluid-particles interaction and emerging poromechanical effects. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 38(1) :51–71, 2014.
- [14] R. Caulk, W. Chèvremont, D. Kunhappan, J. Pourroy, F. Kneib, and G. Thomas. Calcul distribué MPI pour la dynamique de systèmes particuliers - Yade-MPI. Technical report, Hackathon GENCI - Vainqueur catégorie optimisation, 2018. URL <http://www.genci.fr/fr/node/967>.
- [15] B. Chareyre, A. Cortis, E. Catalano, and E. Barthélemy. Pore-scale modeling of viscous flow and induced forces in dense sphere packings. *Transport Porous Med.*, 94(2) :595–615, 2012.
- [16] O. Cheal and C. Ness. Rheology of dense granular suspensions under extensional flow. *J. Rheol.*, 62(2) :501–512, 2018.
- [17] W. Chèvremont, H. Bodiguel, and B. Chareyre. Lubricated contact model for numerical simulations of suspensions. *Powder Technol.*, submitted.
- [18] W. Chèvremont, B. Chareyre, and H. Bodiguel. Quantitative study of the rheology of frictional suspensions : Influence of friction coefficient in a large range of viscous numbers. *Phys. Rev. Fluids*, 4 :064302, Jun 2019. doi: 10.1103/PhysRevFluids.4.064302. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.4.064302>.
- [19] J. Comtet, G. Chatté, A. Niguès, L. Bocquet, A. Siria, and A. Colin. Pairwise frictional profile between particles determines discontinuous shear thickening transition in non-colloidal suspensions. *Nat. Commun.*, 8 :15633, 2017.
- [20] P. Coussot. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP sciences, 2012.
- [21] P. Cundall and O. Strack. Discrete numerical-model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1) :47–65, 1979. ISSN 0016-8505.
- [22] F. R. Da Cunha and E. J. Hinch. Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres. *J. Fluid Mech.*, 309 :211–223, 1996. doi: 10.1017/S0022112096001619.
- [23] E. d’Ambrosio, F. Blanc, and E. Lemaire. Viscous resuspension of non-brownian particles : determination of the concentration profiles and particle normal stresses. *J. Fluid Mech.*, in press, 2020 ?
- [24] T. Dbouk, L. Lobry, and E. Lemaire. Normal stresses in concentrated non-brownian suspensions. *J. Fluid Mech.*, 715 :239–272, 2013.
- [25] L. Durlofsky, J. F. Brady, and G. Bossis. Dynamic simulation of hydrodynamically interacting particles. *J. Fluid Mech.*, 180 :21–49, 1987.
- [26] A. Einstein. Eine neue bestimmung der moleküldimensionen. *Ann. Phys.*, 324 : 289, 1906.

- [27] Faculty of Industrial Design Engineering of Delft University of Technology. IDEMAT database, 2003.
- [28] N. Frankel and A. Acrivos. On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres. *Chem. Eng. Sci.*, 22(6) :847–853, 1967.
- [29] F. Gadala-Maria and A. Acrivos. Shear-induced structure in a concentrated suspension of solid spheres. *J. Rheol.*, 24(6) :799–814, 1980.
- [30] S. Gallier, E. Lemaire, L. Lobry, and F. Peters. A fictitious domain approach for the simulation of dense suspensions. *J. Comp. Phys.*, 256 :367 – 387, 2014. ISSN 0021-9991. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.09.015>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999113006207>.
- [31] S. Gallier, E. Lemaire, F. Peters, and L. Lobry. Rheology of sheared suspensions of rough frictional particles. *J. Fluid Mech.*, 757 :514–549, 2014.
- [32] S. Gallier, E. Lemaire, L. Lobry, and F. Peters. Effect of confinement in wall-bounded non-colloidal suspensions. *J. Fluid Mech.*, 799 :100–127, 2016. doi: 10.1017/jfm.2016.368.
- [33] S. Gallier, F. Peters, and L. Lobry. Simulations of sheared dense noncolloidal suspensions : Evaluation of the role of long-range hydrodynamics. *Phys. Rev. Fluids*, 3 :042301, Apr 2018.
- [34] T. Gao and H. H. Hu. Deformation of elastic particles in viscous shear flow. *J. Comp. Phys.*, 228(6) :2132 – 2151, 2009. ISSN 0021-9991.
- [35] É. Guazzelli and O. Pouliquen. Rheology of dense granular suspensions. *J. Fluid Mech.*, 852, 2018.
- [36] E. Guazzelli and O. Pouliquen. Rheology of dense granular suspensions. *J. Fluid Mech.*, 852 :P1, 2018.
- [37] R. A. Hosn, L. Sibille, N. Benahmed, and B. Chareyre. Discrete numerical modeling of loose soil with spherical particles and interparticle rolling friction. *Granular Matter*, 19(1) :4, 2017.
- [38] D. Jeffrey and Y. Onishi. The forces and couples acting on two nearly touching spheres in low-reynolds-number flow. *Zamm-Z Angew. Math. Me.*, 35(5) :634–641, 1984.
- [39] D. Jeffrey and Y. Onishi. Calculation of the resistance and mobility functions for two unequal rigid spheres in low-reynolds-number flow. *J. Fluid Mech.*, 139 : 261–290, 1984.
- [40] A. Karnis, H. Goldsmith, and S. Mason. The kinetics of flowing dispersions : I. concentrated suspensions of rigid particles. *J. of Coll. and Interface Sci.*, 22(6) :531 – 553, 1966. ISSN 0021-9797. doi: <https://doi.org/10.>

- 1016/0021-9797(66)90048-8. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021979766900488>.
- [41] T. Kawasaki and L. Berthier. Discontinuous shear thickening in brownian suspensions. *Phys. Rev. E*, 98 :012609, 2018.
- [42] I. M. Krieger and T. J. Dougherty. A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Transactions of the Society of Rheology*, 3(1) : 137–152, 1959.
- [43] J. Kromkamp, D. van den Ende, D. Kandhai, R. van der Sman, and R. Boom. Lattice boltzmann simulation of 2d and 3d non-brownian suspensions in couette flow. *Chem. Eng. Sci.*, 61(2) :858 – 873, 2006. ISSN 0009-2509. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2005.08.011>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250905006639>.
- [44] E. Lac, A. Morel, and D. Barthès-Biesel. Hydrodynamic interaction between two identical capsules in simple shear flow. *J. Fluid Mech.*, 573 :149–169, 2007. doi: 10.1017/S0022112006003739.
- [45] B. Lecampion and D. Garagash. Confined flow of suspensions modeled by a frictional rheology. *J. Fluid Mech.*, 759 :197–235, 2014.
- [46] D. Leighton and A. Acrivos. Viscous resuspension. *Chemi. eng. sci.*, 41(6) : 1377–1384, 1986.
- [47] D. Lhuillier. Migration of rigid particles in non-brownian viscous suspensions. *Phys. Fluids*, 21(2) :023302, 2009.
- [48] C. J. Lin, K. J. Lee, and N. F. Sather. Slow motion of two spheres in a shear field. *J. Fluid Mech.*, 43(1) :35–47, 1970. doi: 10.1017/S0022112070002227.
- [49] L. Lobry, E. Lemaire, F. Blanc, S. Gallier, and F. Peters. Shear thinning in non-brownian suspensions explained by variable friction between particles. *J. Fluid Mech.*, 860 :682–710, 2019.
- [50] S. Luding. Cohesive, frictional powders : contact models for tension. *Granul. Matter*, 10(4) :235, Mar 2008.
- [51] M. K. Lyon and L. G. Leal. An experimental study of the motion of concentrated suspensions in two-dimensional channel flow. part 1. monodisperse systems. *J. Fluid Mech.*, 363 :25–56, 1998. doi: 10.1017/S0022112098008817.
- [52] R. Mari, R. Seto, J. F. Morris, and M. Denn. Shear thickening, frictionless and frictional rheologies in non-brownian suspensions. *J. Rheol.*, 58 :1693, 2014.
- [53] D. Marzougui. *Extension de la DEM aux granulaires immergés pour l'étude des suspensions denses*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2014.

- [54] D. Marzougui, B. Chareyre, and J. Chauchat. Microscopic origin of shear stress in dense fluid-grain mixtures. *Granular Matter*, 17(3) :297–309, 2015.
- [55] B. Metzger, P. Pham, and J. Butler. Irreversibility and chaos : Role of lubrication interactions in sheared suspensions. *Phys. Rev. E*, 87 :052304, 2013.
- [56] J. F. Morris. A review of microstructure in concentrated suspensions and its implications for rheology and bulk flow. *Rheol. acta*, 48(8) :909–923, 2009.
- [57] J. F. Morris and F. Boulay. Curvilinear flows of noncolloidal suspensions : The role of normal stresses. *J. rheol.*, 43(5) :1213–1237, 1999.
- [58] R. N. Chacko, R. Mari, M. E. Cates, and S. M. Fielding. Dynamic vorticity banding in discontinuously shear thickening suspensions. *Phys. Rev. Lett.*, 121, 02 2018.
- [59] A. Naillon, C. de Loubens, W. Chèvremont, S. Rouze, M. Leonetti, and H. Bodiguel. Dynamics of particle migration in confined viscoelastic poiseuille flows. *Phys. Rev. Fluids*, 4 :053301, May 2019. doi: 10.1103/PhysRevFluids.4.053301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.4.053301>.
- [60] C. Ness and J. Sun. Flow regime transitions in dense non-brownian suspensions : Rheology, microstructural characterization, and constitutive modeling. *Phys. Rev. E*, 91 :012201, 2015.
- [61] C. Ness and J. Sun. Two-scale evolution during shear reversal in dense suspensions. *Phys. Rev. E*, 93 :012604, 2016.
- [62] J. T. Norman, H. V. Nayak, and R. T. Bonnecaze. Migration of buoyant particles in low-reynolds-number pressure-driven flows. *J. of Fluid Mech.*, 523 :1–35, 2005. doi: 10.1017/S0022112004000886.
- [63] P. R. Nott, E. Guazzelli, and O. Pouliquen. The suspension balance model revisited. *Phys. Fluids*, 23(4) :043304, 2011.
- [64] F. Peters, G. Ghigliotti, S. Gallier, F. Blanc, E. Lemaire, and L. Lobry. Rheology of non-brownian suspensions of rough frictional particles under shear reversal : A numerical study. *J. Rheol.*, 60(4) :715–732, JUL-AUG 2016. ISSN 0148-6055.
- [65] P.-E. Peyneau and J.-N. Roux. Frictionless bead packs have macroscopic friction, but no dilatancy. *Phys. Rev. E*, 78(1) :011307, 2008.
- [66] R. J. Phillips, R. C. Armstrong, R. A. Brown, A. L. Graham, and J. R. Abbott. A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration. *Phys. Fluids A*, 4(1) :30–40, 1992. doi: 10.1063/1.858498.
- [67] O. Pouliquen. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. fluids*, 11(3) :542–548, 1999.

- [68] P. Rognon and C. Gay. Soft dynamics simulation. 2. elastic spheres undergoing a t 1 process in a viscous fluid. *Eur. Phys. J. E*, 30(3) :291, 2009.
- [69] B. Saint-Michel, S. Manneville, S. Meeker, G. Ovarlez, and H. Bodiguel. X-ray radiography of viscous resuspension. *Phys. Fluids*, 31(10) :103301, 2019. doi: 10.1063/1.5103271.
- [70] M. Sarabian, M. Firouznia, B. Metzger, and S. Hormozi. Fully developed and transient concentration profiles of particulate suspensions sheared in a cylindrical couette cell. *J. of Fluid Mech.*, 862 :659–671, 2019. doi: 10.1017/jfm.2018.982.
- [71] R. Seto, R. Mari, J. F. Morris, and M. M. Denn. Discontinuous Shear Thickening of Frictional Hard-Sphere Suspensions. *Phys. Rev. Lett.*, 111(21), NOV 18 2013. ISSN 0031-9007.
- [72] A. Singh, R. Mari, M. M. Denn, and J. F. Morris. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions. *J. Rheol.*, 62(2) :457–468, 2018.
- [73] B. Snook, J. E. Butler, and E. Guazzelli. Dynamics of shear-induced migration of spherical particles in oscillatory pipe flow. *J. of Fluid Mech*, 786 :128–153, 2016. doi: 10.1017/jfm.2015.645.
- [74] J. J. Stickel and R. L. Powell. Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37 :129–149, 2005.
- [75] H. Tanaka and T. Araki. Simulation method of colloidal suspensions with hydrodynamic interactions : Fluid particle dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :1338–1341, Aug 2000.
- [76] M. Trulsson, B. Andreotti, and P. Claudin. Transition from the viscous to inertial regime in dense suspensions. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :118305, 2012.
- [77] M. Trulsson, E. DeGiuli, and M. Wyart. Effect of friction on dense suspension flows of hard particles. *Phys. Rev. E*, 95 :012605, 2017.
- [78] T. van de Ven and S. Mason. The microrheology of colloidal dispersions : Iv. pairs of interacting spheres in shear flow. *J. Colloid Interf. Sci.*, 57(3) :505 – 516, 1976. ISSN 0021-9797. doi: [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(76\)90229-0](https://doi.org/10.1016/0021-9797(76)90229-0).
- [79] B. Van den Brule and R. Jongshaap. Modeling of concentrated suspensions. *J. Stat. Phys.*, 62(5) :1225–1237, 1991.
- [80] V. Šmilauer and B. Chareyre. Dem formulation. In *Yade Documentation 2nd ed.* The Yade Project, 2015. doi: 10.5281/zenodo.34044. <http://yade-dem.org/doc/>.
- [81] V. Šmilauer et al. *Yade Documentation 2nd ed.* The Yade Project, 2015. doi: 10.5281/zenodo.34073.

- [82] A. Vázquez-Quesada and M. Ellero. Rheology and microstructure of non-colloidal suspensions under shear studied with smoothed particle hydrodynamics. *J. Non-Newton. Fluid*, 233 :37 – 47, 2016.
- [83] O. R. Walton and R. L. Braun. Viscosity, granular-temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks. *J. Rheol.*, 30 : 949, 1986.
- [84] M. Wyart and M. E. Cates. Discontinuous Shear Thickening without Inertia in Dense Non-Brownian Suspensions. *Phys. Rev. Lett.*, 112(9), MAR 6 2014. ISSN 0031-9007.
- [85] K. Yeo and M. R. Maxey. Simulation of concentrated suspensions using the force-coupling method. *J. Comp. Phys.*, 229(6) :2401 – 2421, 2010. ISSN 0021-9991. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.11.041>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999109006706>.
- [86] I. E. Zarraga, D. A. Hill, and D. T. Leighton Jr. The characterization of the total stress of concentrated suspensions of noncolloidal spheres in newtonian fluids. *Journal of Rheology*, 44(2) :185–220, 2000.
- [87] Y. Zhao and R. H. Davis. Interaction of two touching spheres in a viscous fluid. *Chemical Engineering Science*, 57(11) :1997 – 2006, 2002. doi: [https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(02\)00104-5](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(02)00104-5).