



**HAL**  
open science

# Dynamique des rotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire - Identification par le filtre de Kalman

Emna Sghaier

## ► To cite this version:

Emna Sghaier. Dynamique des rotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire - Identification par le filtre de Kalman. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPASC013 . tel-02890956v2

**HAL Id: tel-02890956**

**<https://theses.hal.science/tel-02890956v2>**

Submitted on 7 Jul 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Dynamique des rotors à très hautes vitesses en régime non stationnaire – Identification par le filtre de Kalman

## Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n°579 : Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMAG)

Spécialité de doctorat : mécanique des solides

Unité de recherche : Université Paris-Saclay, QUARTZ, SUPMECA, 93400, Saint-Ouen, France  
LaMCoS, Université de Lyon, INSA-Lyon, CNRS, 69100 Villeurbanne, France

Référent : CentraleSupélec

Thèse présentée et soutenue à Saint-Ouen, le 10 mars 2020, par

**Emna SGHAIER**

### Composition du Jury

**Emmanuel FOLTÈTE**

Professeur des Universités, ENSMM – FEMTO-ST

Président

**Jérôme ANTONI**

Professeur des Universités, INSA de Lyon – LVA

Rapporteur & Examineur

**Fabrice THOUVEREZ**

Professeur des Universités, Ecole Centrale de Lyon – LTDS

Rapporteur & Examineur

**François LOUF**

Maître de Conférences, ENS Cachan – L.M.T. Cachan

Examineur

**Jean-Luc Dion**

Professeur des Universités, Supméca Paris – Laboratoire Quartz

Co-directeur de thèse

**Didier Rémond**

Professeur des Universités, INSA de Lyon – LAMCOS

Co-Directeur de thèse

**Nicolas Peyret**

Maître de conférences, Supméca Paris – Laboratoire Quartz

Co-Encadrant & Examineur

**Adeline Bourdon**

Maître de conférences, INSA de Lyon – LAMCOS

Co-Encadrante & Examinatrice



---

---





# Table des matières

Liste des tableaux	ix
Table des figures	xi
Liste des symboles	xx
Remerciements	1
Introduction générale	1
<b>1 Choix et enjeux de modélisation</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction aux machines tournantes	4
1.1.1 Les machines tournantes dans l'industrie	4
1.1.2 Particularités des machines tournantes	5
1.2 Contexte industriel pour la présente étude	7
1.2.1 Motivations	7
1.2.2 Limites des réducteurs de vitesses existants	8
1.2.3 Objectifs du projet RedHV+	8
1.2.4 Objectifs de la thèse	8
1.3 Hypothèses de modélisation et leurs conséquences	9
1.3.1 Hypothèses sur la vitesse instantanée de rotation (VIR)	10
1.3.2 Hypothèses sur la source	12
1.3.3 Hypothèses sur la flexibilité de l'arbre et du disque	14
1.3.4 Hypothèses sur le couplage flexion-torsion	16
1.3.5 Hypothèses sur la prise en compte des effets gyroscopiques	17
1.4 Phénomène de Sommerfeld en machines tournantes	17
1.4.1 Etude paramétrique sur un rotor rigide	18
1.5 Conclusion sur les hypothèses retenues	25
Bibliographie	33
<b>2 Nouveau modèle pour l'étude de la dynamique des rotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction	37
2.2 Hypothèses de modélisation	37
2.3 Transformation des repères et vecteur de rotation	39
2.4 Équations du mouvement : Formulation algébrique	41
2.4.1 Le disque	41
2.4.2 Le balourd	43
2.4.3 L'arbre	46
2.4.4 Équation totale de la dynamique	55
2.5 Équations du mouvement : Écriture utilisée pour le code Matlab	58

2.5.1	Le disque	58
2.5.2	Le balourd	58
2.5.3	L'arbre	58
2.5.4	Écriture sous forme d'équation d'état	60
2.6	Conclusion	61
	Bibliographie	63
<b>3</b>	<b>Comparaison du nouveau modèle avec des modèles classiques et mise en évidence du couplage flexion-torsion</b>	<b>65</b>
3.1	Présentation des modèles utilisés pour la comparaison	67
3.1.1	Modèle UBTB : modèle pour l'étude de la flexion pure d'un rotor	68
3.1.2	Modèle UBTT : modèle pour l'étude de la torsion pure d'un rotor	70
3.2	Simulations numériques pour la comparaison	70
3.2.1	Introduction au cas d'étude	71
3.2.2	Comparaison du modèle CBT avec le modèle UBTB	72
3.2.3	Comparaison du modèle CBT avec le modèle UBTT	76
3.3	Paramètres influant sur le couplage flexion-torsion	79
3.3.1	Influence de l'amortissement des paliers	79
3.3.2	Influence de l'asymétrie des paliers	81
3.4	Conclusion	84
	Bibliographie	85
<b>4</b>	<b>Extension du nouveau modèle à un étage d'engrenage</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction aux modèles d'engrènement	89
4.2	Modèle d'engrenage adopté	90
4.2.1	Définition de la force d'excitation provenant de l'engrenage	91
4.2.2	Définition de la raideur d'engrènement	93
4.3	Modélisation d'un étage d'engrenage : application au banc RedHV+	94
4.3.1	Introduction du banc	95
4.3.2	Description du modèle éléments finis	97
4.3.3	Simulation du comportement dynamique du réducteur de vitesse	104
4.4	Conclusion	110
	Bibliographie	112
<b>5</b>	<b>Vers un nouvel outil d'identification des paramètres incertains en machines tournantes</b>	<b>113</b>
5.1	L'identification dans le domaine des machines tournantes	114
5.1.1	L'identification pour la surveillance conditionnelle sur les rotors	114
5.1.2	L'identification pour remonter aux paramètres d'une machine tournante	115
5.2	Les différents outils pour faire l'identification	115
5.3	Utilisation du filtre de Kalman pour l'identification sur des rotors	116
5.4	Objectifs	117
5.5	Filtre de Kalman linéaire	119
5.5.1	Principe général du filtre pour l'estimation de l'état d'un système	119
5.5.2	Filtre de Kalman pour l'estimation des paramètres du système	122
5.6	Extension du filtre de Kalman pour une étude non-linéaire	123
5.6.1	Transformation non-parfumée (UT) : Principe	124
5.6.2	Algorithmes pour la sélection des sigma-points	125
5.6.3	Filtre de Kalman non-parfumé	128
5.6.4	Application de l'UKF sur le rotor rigide	129
5.7	Conclusion	137
	Bibliographie	140

<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>Annexes</b>	<b>145</b>
A Vecteurs fonction de forme sur un élément poutre . . . . .	145
B Matrices de masse élémentaires . . . . .	145
C Les matrices de raideur élémentaires . . . . .	147
D Matrices relatives à l'effet gyroscopique . . . . .	148



# Liste des tableaux

1.1	Propriétés du rotor pour les différents cas d'études pour la comparaison - 1 <sup>ère</sup> étude paramétrique . . . . .	20
1.2	Propriétés du rotor pour les différents cas d'études pour la comparaison - 2 <sup>ème</sup> étude paramétrique . . . . .	20
1.3	Propriétés du rotor pour les différents cas d'études pour la comparaison - 3 <sup>ème</sup> étude paramétrique . . . . .	22
1.4	Propriétés du rotor étudié pour le bilan énergétique . . . . .	23
3.1	Propriétés du rotor . . . . .	71
3.2	Erreur relative pour l'estimation des vibrations latérales lors du passage par la deuxième vitesse critique $\Omega_{cr_2}$ . . . . .	74
3.3	Raideurs des paliers pour le <i>cas 1</i> et le <i>cas 2</i> . . . . .	79
3.4	Amortissements des paliers pour le <i>cas 1</i> et le <i>cas 2</i> . . . . .	79
3.5	Raideurs des paliers pour le <i>cas 1</i> et le <i>cas 3</i> . . . . .	82
3.6	Amortissements des paliers pour le <i>cas 1</i> et le <i>cas 3</i> . . . . .	82
4.1	Coordonnées géométriques des nœuds du modèle . . . . .	98
4.2	Définition des propriétés des éléments . . . . .	98
4.3	Définition des propriétés des roulements . . . . .	98
4.4	Définition des propriétés des disques . . . . .	99
4.5	Propriétés de raideurs du couple-mètre . . . . .	101
4.6	Caractéristiques de l'engrenage . . . . .	104
5.1	Propriétés du rotor rigide . . . . .	130
5.2	Propriétés des paliers . . . . .	130



# Table des figures

1.1	Composants de base d'une machine tournante . . . . .	4
1.2	Exemples de machines tournantes . . . . .	4
1.3	Source de non-stationnarité . . . . .	6
1.4	Source de non-stationnarité . . . . .	6
1.5	Bilan des hypothèses . . . . .	9
1.6	Sources de non-stationnarités . . . . .	11
1.7	VVI résultant de la présence d'un roulement sain [20] . . . . .	12
1.8	Source idéale d'énergie . . . . .	13
1.9	Source non-idéale d'énergie . . . . .	14
1.10	Comparaison de la déformation de l'arbre en fonction de la rigidité des paliers . . . . .	15
1.11	Cartographie des vitesses critiques [37] . . . . .	15
1.12	Les deux premières déformées modales pour un rotor de Jeffcot . . . . .	17
1.13	Rotor disque étudié . . . . .	18
1.14	Influence de la pente d'évolution du couple moteur sur le passage par les vitesses critiques . . . . .	21
1.15	Influence de l'amortissement des paliers sur le passage par les vitesses critiques . . . . .	21
1.16	Influence du balourd sur le passage par les vitesses critiques . . . . .	22
1.17	Bilan d'énergie . . . . .	23
1.18	Comparaison des résultats de simulations sous chacune des hypothèses sur la source . . . . .	24
1.19	Hypothèses adaptées à la modélisation du réducteur de vitesse du projet RedHV+ . . . . .	27
2.1	Exemple de monorotor . . . . .	37
2.2	Hypothèses retenues pour la modélisation . . . . .	38
2.3	Illustration du rotor . . . . .	39
2.4	Repères de passage . . . . .	40
2.5	Modélisation du balourd sur le rotor au repos . . . . .	44
2.6	Repérage du balourd . . . . .	44
2.7	Arbre discrétisé . . . . .	46
2.8	Les déplacements en flexion dans le plan (XZ) . . . . .	47
2.9	Les déplacements en flexion dans le plan (YZ) . . . . .	47
3.1	Hypothèses utilisées pour le modèle CBT . . . . .	67
3.2	Hypothèses utilisées pour le modèle UBTB . . . . .	68
3.3	Hypothèses utilisées pour le modèle UBTT . . . . .	68
3.4	Bilan des hypothèses des différents modèles utilisés pour la comparaison . . . . .	69
3.5	Rotor étudié . . . . .	71
3.6	Diagramme de Campbell . . . . .	72
3.7	Profil du couple effectif appliqué . . . . .	73
3.8	Comparaison entre le profil de la VIR imposée pour le modèle UBTB et le profil obtenu par le modèle CBT . . . . .	73



3.9	Comparaison des vibrations latérales obtenues par le modèle UBTB et le modèle CBT sur le nœud 4 (centre du disque) et sur le nœud 7 (liaison élastique) . . . . .	74
3.10	Analyse temps-fréquence des vibrations latérales . . . . .	75
3.11	Comparaison des vibrations en torsion obtenues par le modèle CBT et le modèle UBTT sur le 4 <sup>ème</sup> élément (supportant le disque) et le 7 <sup>ème</sup> élément (élément élastique). . . . .	76
3.12	Vibrations dynamiques en torsion du 7 <sup>ème</sup> élément . . . . .	78
3.13	Analyses temps-fréquence des vibrations dynamiques en torsion du 7 <sup>ème</sup> élément . . . . .	78
3.14	Comparaison de la vitesse instantanée de rotation (à gauche) et des vibrations latérales (à droite) sur le nœud 7 obtenues pour le <i>cas 1</i> et le <i>cas 2</i> . . . . .	80
3.15	Vibrations dynamiques en torsion sur le 7 <sup>ème</sup> élément pour le <i>cas 1</i> et le <i>cas 2</i> . . . . .	81
3.16	Analyses temps-fréquence des vibrations en torsion du 7 <sup>ème</sup> élément pour le <i>cas 1</i> (à gauche) et le <i>cas 2</i> (à droite). . . . .	81
3.17	Comparaison de la vitesse instantanée de rotation (à gauche) et des vibrations latérales (à droite) sur le nœud 7 obtenues pour le <i>cas 1</i> et le <i>cas 3</i> . . . . .	83
3.18	Vibrations dynamiques en torsion sur le 7 <sup>ème</sup> élément pour le <i>cas 1</i> et le <i>cas 3</i> . . . . .	83
3.19	Analyses temps-fréquence des vibrations en torsion du 7 <sup>ème</sup> élément pour le <i>cas 1</i> (à gauche) et le <i>cas 3</i> (à droite). . . . .	84
4.1	Schéma d'une modélisation simplifiée de l'engrènement . . . . .	90
4.2	Variation angulaire de la raideur d'engrènement . . . . .	91
4.3	Définition des profils de contact . . . . .	91
4.4	Définition du repère local . . . . .	92
4.5	Nombre de dents en prise . . . . .	93
4.6	Raideur en fonction du nombre des dents en prise . . . . .	94
4.7	Modèle numérique 3D de la transmission . . . . .	95
4.8	Étapes de modélisation . . . . .	96
4.9	Architecture simplifié du banc RedHV+ . . . . .	96
4.10	Modèle allégé du banc RedHV+ . . . . .	97
4.11	Modèle éléments finis du banc RedHV+ . . . . .	97
4.12	(a) Coupe du couplemètre (b) modèle simplifié du couple-mètre . . . . .	100
4.13	(a) Coupe de l'accouplement élastique (b) Modèle simplifié de l'accouplement . . . . .	101
4.14	Diagramme de Campbell de l'arbre d'entrée . . . . .	104
4.15	Évolution de la VIR sur l'arbre d'entrée (rouge) et l'arbre de sortie (bleu) . . . . .	105
4.16	Suivi d'ordre pour le signal de VIR du disque menant au nœud 10 en présence du balourd . . . . .	106
4.17	Suivi d'ordre pour le signal de VIR du disque menant au nœud 10 en l'absence de balourd . . . . .	106
4.18	Vibrations latérales sur les deux nœuds de l'accouplement élastique . . . . .	107
4.19	Déformées opérationnelles au passage par la 2 <sup>ème</sup> vitesse critique (à gauche) et la 3 <sup>ème</sup> vitesse critique (à droite) . . . . .	107
4.20	Suivi d'ordre pour le signal des vibrations latérales au nœud 7 en présence du balourd . . . . .	108
4.21	Suivi d'ordre pour le signal des vibrations latérales au nœud 7 en l'absence du balourd . . . . .	109
4.22	Suivi d'ordre pour le signal des vibrations latérales au nœud 8 . . . . .	110
5.1	Étapes de la détection d'un défaut . . . . .	116
5.2	Prédiction-correction . . . . .	120
5.3	Etapes pour le filtre de Kalman linéaire . . . . .	120
5.4	Filtre de Kalman pour l'estimation des paramètres du système . . . . .	122

5.5	Etape de prédiction dans le cadre du Kalman linéaire en présence des paramètres dans le vecteur d'état . . . . .	123
5.6	Principe de la transformation non parfumée . . . . .	124
5.7	Etape de prédiction dans le cadre de l'application du filtre de Kalman non-parfumé	128
5.8	Rotor disque étudié . . . . .	129
5.9	Réponses temporelles d'un rotor rigide en présence d'un balourd - à gauche : signal de la VIR - à droite : vibrations latérales . . . . .	130
5.10	Etapas d'évolution et de mise à jour pour le filtre de Kalman . . . . .	132
5.11	Estimation des raideurs dans les paliers . . . . .	132
5.12	Estimation des amortissements dans les paliers . . . . .	134
5.13	Estimation des caractéristiques du balourd . . . . .	135
5.14	Estimation des raideurs du palier . . . . .	136
5.15	Estimation des caractéristiques du balourd . . . . .	136







# Liste des symboles

- $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  Repère rattaché au référentiel galiléen
- $[C_s]$  Matrice d'amortissement de l'arbre du rotor
- $[C_{p_i}]$  Matrice d'amortissement du palier indexé  $i$
- $[F]$  Matrice d'évolution pour le filtre de Kalman
- $[G_D]$  Matrice gyroscopique du disque
- $[H]$  Matrice d'observation pour le filtre de Kalman
- $[K_D]$  Matrice relative au disque, lié au régime non-stationnaire
- $[K_s]$  Matrice de raideur de l'arbre
- $[K_{acc}]$  Matrice de raideur de l'accouplement élastique
- $[K_{coup}]$  Matrice de raideur du couplemètre
- $[K_{supp_s}]$  Matrice relative aux éléments poutres, lié au régime non-stationnaire
- $[M_s]$  Matrice de masse de l'élément poutre de l'arbre
- $[M_u]$  Matrice de masse du balourd
- $[M_{D_{cte}}]$  Matrice de masse du disque constante
- $[M_{D_{var}}]$  Matrice de masse du disque variable au cours du temps
- $[P]$  Matrice de covariance de l'état
- $[Q]$  Matrice de covariance du modèle
- $[R]$  Matrice de covariance des mesures
- $\alpha$  Amortissement angulaire du mouvement du corps rigide
- $\chi_i$   $i^{\text{ème}}$  sigma-point
- $\delta_{kl}$  Symbole de Kronecker
- $\{\bar{x}_k\}$  Estimation *a posteriori* du vecteur d'état

---

$\{\bar{x}_k^-\}$	Estimation <i>a priori</i> du vecteur d'état
$\{F_D^{coup}\}$	vecteur des efforts de couplage liés au disque
$\{F_{ext}\}$	vecteur des efforts extérieurs
$\{F_{Nlu}\}$	vecteur des efforts de couplage liés au balourd
$\{F_{se}^{coup}\}$	vecteur des efforts de couplage des éléments poutres
$\{x_k\}$	Vecteur d'état à l'instant $t_k$
$\{z\}$	Vecteur d'état projeté dans l'espace des mesures
$\{\delta_c\}$	Déplacement nodal du centre du disque
$\Omega_{cr}$	Vitesse critique
$C_m$	Couple moteur
$C_r$	Couple résistant
$e$	Excentricité du balourd
$I$	Moment quadratique d'une section de l'arbre suivant l'axe $\vec{z}$
$I_d^D$	Inertie diamétrale du disque
$I_p^D$	Inertie polaire du disque
$I_p$	Moment quadratique d'une section de l'arbre suivant l'axe $\vec{x}$
$m_D$	Masse du disque
$m_u$	Masse du balourd
$U_f^e$	Énergie potentielle élémentaire en flexion
$U_{tc}^e$	Énergie potentielle élémentaire en traction-compression
$U_{to}^e$	Énergie potentielle élémentaire en torsion
$W_i$	$i^{ème}$ pondération du $i^{ème}$ sigma-point
$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Repère local
$[\cdot]$	Matrice
$[A], [B]$	Matrices d'état
$[C_{eng}]$	Matrice d'amortissement d'engrènement
$[Geom]$	Matrice de raideur d'engrènement
$[Id]$	Matrice identité

---

$[K_{eng}]$	Matrice de raideur d'engrènement
$[K_{p_i}]$	Matrice de raideur du palier indexé $i$
$[T]$	Matrice d'extraction algébrique
$\beta$	angle d'hélice
$\{.\}$	Vecteur colonne
$\{.\}^t$	Transposé
$\{\dot{Q}\}$	Dérivée du vecteur d'état
$\{F_{eng}\}$	Matrice de raideur d'engrènement
$\{Q\}$	Vecteur d'état
$\{x^*\}$	Vecteur d'état augmenté
$\{\ddot{\delta}\}$	Vecteur accélération global
$\{\delta\}$	Vecteur déplacement global
$\{\delta^e\}$	Vecteur déplacement élémentaire
$\{\dot{\delta}\}$	Vecteur vitesse global
$\{N_1\}$ , $\{N_2\}$ , $\{N_3\}$	Fonctions de forme élémentaires
$\mathcal{T}_D$	Énergie cinétique du disque
$\mathcal{T}_{gyr}$	Énergie cinétique gyroscopique élémentaire
$\mathcal{T}_{se}$	Énergie cinétique élémentaire
$\mathcal{T}_u$	Énergie cinétique du balourd
$\rho$	Masse volumique
$E$	Module d'Young
$k_{eng}$	Raideur d'engrènement
$L$	Longueur de l'arbre
$R_{b_1}$	Rayon de base du pignon
$R_{b_2}$	Rayon de base de la roue
$VIR$	Vitesse instantanée de rotation
$Z_1$	Nombre des dents du pignon
$Z_2$	Nombre des dents de la roue





# Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS), de l'INSA de Lyon et le Laboratoire Quartz, Supméca Paris. Il a été effectué sous la co-direction des Professeurs Jean-Luc Dion et Didier REMOND.

Je tiens en premier lieu à exprimer ma gratitude envers mes co-directeurs de thèses, pour m'avoir accueilli au sein de leurs équipes et pour la confiance qu'ils m'ont accordée dans ce travail de recherche scientifique. Leurs multiples conseils et encouragements au cours de ces trois années m'ont permis d'aboutir à la réussite de ce projet. Je remercie aussi mes encadrants, Adeline BOURDON, maître de conférences à l'INSA de Lyon et Nicolas PEYRET, maître de conférences à Supméca de Paris pour l'accompagnement et l'encadrement qu'ils m'ont apportés tout au long de cette thèse.

Je tiens ensuite à témoigner toute ma reconnaissance envers les Professeurs Jérôme ANTONI et Fabrice THOUVEREZ pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon mémoire de thèse et de participer au jury de la soutenance. Mes remerciements s'adressent également à Emmanuel FOLTÊTE d'avoir accepté de présider le jury ainsi qu'à François LOUF pour l'honneur qu'il m'a fait de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie également tous les membres du laboratoire LaMCoS, auprès de qui j'ai passé la première partie de ma thèse. Les quinze premiers mois que j'ai passés au sein de l'équipe DCS se sont passés dans la bonne ambiance. J'aimerais remercier mes collègues de bureau : Fabien MAUGAN, Matthias PEREZ et plus particulièrement Sébastien PASSOS. J'aimerais également remercier les autres docteurs et doctorants de l'équipe : Aroua FOURATI, José Luis GOMEZ CHIRINOS, Clément JARROUX, Carlos Alexandre FERREIRA DA SILVA, Clément GRENAT ainsi que Etienne BESNIER pour tous les moments agréables qu'on a passés ensemble au sein du laboratoire ainsi qu'en dehors du cadre de travail. Je remercie tous les membres de l'équipe d'une façon générale pour l'ambiance agréable dans laquelle j'étais accueillie et je remercie plus particulièrement Régis DUFOUR, Georges JAQUET, et Éric CHATELET pour les conseils qu'ils m'ont accordés à chaque fois que j'avais besoin de leurs expertises en machines tournantes.

L'ambiance à l'équipe VAST à Supméca était aussi bonne qu'au sein de l'équipe DCS. A nouveau, j'étais accueillie par une équipe formidable et bienveillante. La deuxième période de ma thèse s'est déroulée dans la bonne humeur grâce à mes collègues d'équipe. Je cite notamment : Reza BABAJANIVALASHEDI, Marco ROSATELLO, Adrien CHASSAIGNE, Adrien GOELLER, René ZUNIGA et Karima KHLIFI. Je les remercie pour leur soutien et la bonne humeur qu'ils ne cessent d'apporter à l'équipe. Je remercie aussi Martin GHIENNE qui était toujours à l'écoute, Franck RENAUD qui se montre toujours disponible quand on a besoin de son expertise numérique, Benoît NENNIG pour les conseils qu'il m'a donnés pour la rédaction de mon premier article scientifique, Stéphane JOB, Jean-Baptiste CASIMIR et Stefania LO FEUDO. J'aimerais remercier les deux équipes pour avoir été une deuxième famille pour moi et pour avoir été toujours présents pour apporter du support et de l'aide.

Enfin, je ne saurais terminer ces quelques mots sans remercier mes proches, famille et amis, qui

ont toujours su m'apporter leur soutien. Je remercie mon père Abdallah qui, depuis mon jeune âge m'a inspiré la persévérance et le défi. J'ai beaucoup appris de lui et je continue à apprendre de son expérience dans la vie, de sa richesse d'esprit et surtout de sa grandeur de cœur. Mon père a toujours été mon idole, et il l'est toujours et le restera. Il était toujours présent pour me conseiller, m'orienter et des fois juste m'écouter quand il ressent que c'est tout ce dont j'avais besoin.

J'aimerais aussi remercier mon héroïne, ma mère Rafika. Elle est un exemple de persévérance et de détermination. Elle m'inspire la patience et la force pour aller jusqu'au bout de mes objectifs et mes rêves. Je suis aussi reconnaissante à mes frères et soeurs, Ahmed, Sarra, Najla et Yassine, pour le support qu'ils m'ont apporté pour que je puisse aller très loin dans mes ambitions. Finalement, j'aimerais remercier mon fiancé, Slim HAMZA. Il était toujours à mes côtés pour me soutenir et encourager pour avancer dans mon parcours professionnel. Je le remercie pour avoir été à l'écoute ainsi que pour toute l'énergie positive qu'il n'a jamais cessé de m'apporter.

Vers la fin de cette thèse, mon grand père m'a quitté. Que mes pensées les plus affectueuses l'accompagnent.

# Introduction générale

La modélisation du comportement dynamique des rotors a fait l'objet de nombreux travaux antérieurs. Le besoin d'une modélisation fiable augmente avec les nouvelles exigences qui ont pour objectif d'alléger la structure ainsi que d'atteindre des vitesses de rotation plus élevées. Plus particulièrement, avec la tendance croissante de la décarbonisation du secteur automobile et l'utilisation des moteurs électriques, des verrous scientifiques par rapport au dimensionnement, à la fois des moteurs et des réducteurs de vitesses, se sont posés. C'est dans ce cadre que s'inscrit le projet RedHV+ : Réducteur hautes vitesses et haut rendement pour véhicule hybride. Ce projet a pour objectif, le développement, à coût automobile, des réducteurs hautes vitesses ayant un rendement supérieur ou égal aux réducteurs de vitesse existants sans toutefois dépasser les coûts de fabrication des technologies du marché.

Dans ce contexte, nous avons mené des travaux de modélisation afin de proposer un modèle dynamique qui soit le plus complet et le plus pertinent possible pour décrire les réducteurs opérant à très hautes vitesses. Comme la toute première étape qui précède le développement d'un modèle analytique/numérique consiste à postuler clairement les hypothèses de base, dans le présent travail, un premier chapitre est dédié à l'étude des différentes hypothèses ainsi que les limites de leurs applications.

Les hypothèses sont classées par catégories et aussi selon l'ordre de complexité dans la modélisation. Après une comparaison des différentes hypothèses de modélisation possibles, celles qui sont les mieux adaptées pour l'étude de la dynamique des rotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire sont retenues. L'originalité dans le choix des hypothèses de modélisation consiste dans l'intégration de la VIR (Vitesse Instantanée de Rotation) dans les inconnues du problème dynamique. La VIR est définie comme étant le signal qui comprend à la fois le mouvement du corps rigide ainsi que les déformations en torsion. Cette hypothèse sur la VIR est différente des hypothèses classiques de modélisation dans lesquelles soit le mouvement du corps rigide est introduit comme étant une donnée du problème dynamique soit la déformation en torsion est introduite dans les degrés de liberté dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, une modélisation avancée de type éléments finis est développée sous les hypothèses de modélisation retenues dans le premier chapitre. Une attention particulière a été accordée à l'expression de l'effet gyroscopique en régime non-stationnaire à très hautes vitesses. Outre les termes classiques qu'on peut retrouver dans la littérature, d'autres termes relatifs à l'effet gyroscopique interviennent dans la modélisation. Dans ce chapitre, il a été démontré analytiquement que l'hypothèse de non-stationnarité associée à l'hypothèse de source non-idéale génère des termes de couplage entre la VIR et les degrés de liberté en flexion. Ce couplage provient essentiellement des termes gyroscopiques ainsi que de la présence du balourd.

Dans le troisième chapitre, des exemples numériques de rotor ont été traités et des comparaisons entre le nouveau modèle et des modèles classiques ont été faites. Tout d'abord, la comparaison a montré la capacité du nouveau modèle à mieux prédire les niveaux vibratoires latéraux, surtout au passage des vitesses critiques, à travers la prise en compte du phénomène de Sommerfeld. Ensuite, la capacité du nouveau modèle à prendre en compte le couplage flexion-torsion a été

démontré à travers l'analyse temps-fréquence des signaux vibratoires simulés. Notamment le couplage introduit par le balourd ainsi que les effets gyroscopiques a été souligné. Les résultats de simulation ont démontré le couplage dans les deux sens : les excitations latérales provoquent les vibrations en torsion et vice-versa.

Ensuite, au chapitre 4, le modèle dynamique pour les monorotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire présenté au chapitre 2 a été étendu pour un étage d'engrenages. Un modèle d'engrenage adapté pour l'étude non-stationnaire a été associé au modèle éléments finis d'un monorotor pour construire le modèle éléments finis du multirotor. Plus particulièrement, on s'intéresse à la modélisation d'un réducteur de vitesses à très haute vitesse et en régime non-stationnaire. L'application industrielle consiste en l'étude du réducteur de vitesse du projet RedHV+. L'objectif est de parvenir à un modèle éléments finis complet du réducteur de vitesse qui prend en considération les phénomènes observés à hautes vitesses. Le modèle comporte non seulement un étage d'engrenage en présence d'arbre flexible, mais aussi des éléments technologiques fréquemment utilisés dans les architectures des multirotors, notamment, les accouplements élastiques. Les résultats de simulation montrent l'importance de la prise en compte des phénomènes de couplage, surtout lors du passage par les vitesses critiques. La prise en compte du couplage permet de mieux estimer le temps passé au voisinage des vitesses critiques et donc de mieux estimer les niveaux vibratoires latéraux. Ceci conduit à un dimensionnement qui permet, d'une part, d'assurer la sûreté du fonctionnement du système mécanique et d'autre part, d'assurer une longue durée de vie du réducteur.

Finalement, au chapitre 5, un outil a été développé afin d'enrichir le modèle dynamique avec des valeurs plus réalistes des paramètres. L'outil est basé sur le filtre de Kalman. Du moment où le modèle dynamique est non-linéaire, le filtre de Kalman linéaire n'est pas suffisant, d'où l'intérêt du filtre de Kalman non-parfumé (UKF<sup>1</sup>). Le principe du filtre est détaillé et son développement est expliqué. L'application de cette identification a montré sa performance sur un rotor rigide à 3 degrés de liberté, en particulier pour des rotors traversant des vitesses critiques. Il a été démontré que les zones de passage par les vitesses critiques sont riches en information et favorisent la convergence du filtre vers les bonnes valeurs des paramètres du rotors à identifier.

---

1. Unscented Kalman Filter

# Chapitre 1

## Choix et enjeux de modélisation

**Résumé** La question qui porte sur les hypothèses de modélisation est fondamentale pour obtenir une analyse fiable du comportement vibratoire de la structure. Pour cela il est essentiel de savoir distinguer les différentes hypothèses de modélisation et surtout connaître les limites de chaque hypothèse et son impact sur la pertinence des résultats obtenus. On peut globalement distinguer deux types d'hypothèses : les hypothèses qui sont liées à la géométrie du rotor et celles qui sont liées à son fonctionnement. Dans la suite, les hypothèses de modélisation sont classées par catégories et sont discutées. Une attention particulière est accordée à l'hypothèse de source non-idéale et aux phénomènes qui lui sont associés.

Les hypothèses retenues sont justifiées suivant deux critères. Le premier critère relève de la pertinence des hypothèses permettant d'avoir une modélisation qui soit la plus réaliste que possible. Le deuxième critère, quant à lui, relève de l'adéquation des hypothèses retenues avec les conditions de fonctionnement du réducteur de vitesse développé dans le cadre du projet RedHV+, projet qui sera présenté dans la suite et dans lequel s'inscrit ce travail.

## 1.1 Introduction aux machines tournantes

Comme on va s'intéresser dans la suite au comportement dynamique des rotors, il convient de commencer par introduire cette classe des machines dont le mouvement rotatif qui les caractérise fait émerger certains phénomènes particuliers.

Comme son nom l'indique, une machine tournante est, d'une façon très générale, composée des parties tournantes autour d'un axe fixe par le biais des paliers. L'ensemble des corps tournant autour d'un même axe constituant un rotor. La fonction de ce dernier nécessite un apport extérieur d'énergie assurée par le moteur. Les parties de la machine sont désignées par la définition générale du stator. La figure suivante (Fig.1.1) illustre les composants de base d'une machine tournante, à savoir : l'arbre, le disque et les roulements.

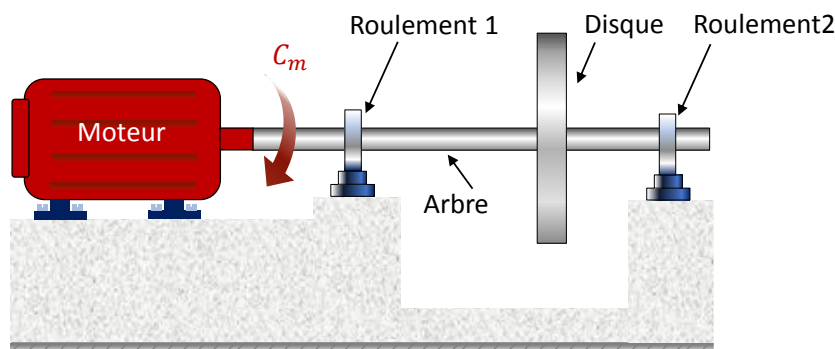


FIGURE 1.1: Composants de base d'une machine tournante

### 1.1.1 Les machines tournantes dans l'industrie

Les machines tournantes sont présentes dans différents secteurs de l'industrie. Elles varient en taille et en complexité. Les machines tournantes basiques peuvent être rencontrées dans des produits et systèmes variés allant des moteurs électriques des réfrigérateurs et des machines à laver jusqu'aux moteurs d'avions [1]. Les exemples sont innombrables tel que les centrifugeuses, les pompes à vides, les turbines à vapeur de toutes tailles, les pompes et compresseurs ainsi que le groupes motopulseurs automobiles ( voir Fig.1.2).

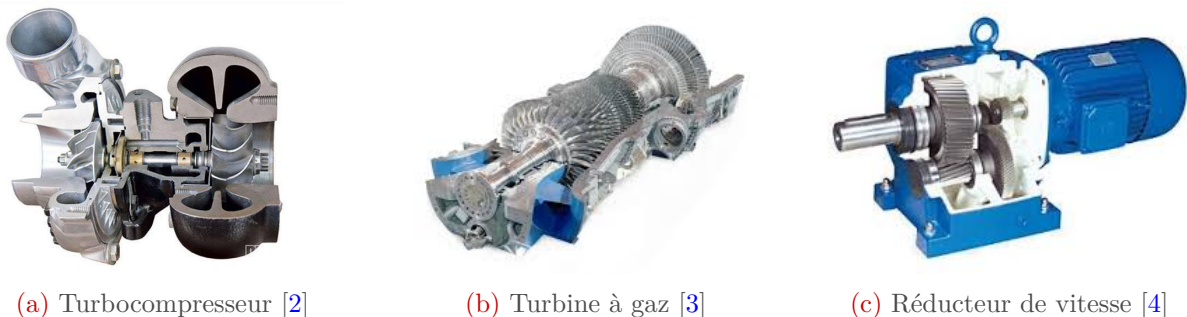


FIGURE 1.2: Exemples de machines tournantes

L'augmentation rapide des vitesses de fonctionnement des machines tournantes au cours des dernières décennies a posé de nouveaux problèmes aux concepteurs. Les arbres tournants sont soumis à des vibrations de plus en plus importantes avec l'augmentation de la vitesse de rotation. Ces vibrations peuvent être dangereuses si elles ne sont pas bien estimées ( surtout si elles sont

sous-estimées), conduisant à un mauvais dimensionnement des pièces dont les conséquences peuvent être catastrophiques à la fois sur la machine ainsi que sur ses utilisateurs.

### 1.1.2 Particularités des machines tournantes

La dynamique des rotors est un cas assez particulier de la dynamique des structures. Même si elle présente des similarités avec celle des structures fixes/ non-tournantes d'une façon générale, les machines tournantes présentent certains phénomènes propres et qui sont directement liés à son mouvement rotatif. La différence fondamentale réside dans le fait que les structures non-tournantes ne représentent pas des forces qui leurs sont intrinsèques, alors que les machines tournantes en disposent. Dans la suite, une liste non-exhaustive des principaux phénomènes ou notions spécifiques aux rotors est présentée.

**Le balourd** On assume que toutes les machines tournantes présentent un balourd. Ce dernier exerce une force d'excitation à une fréquence directement proportionnelle à la vitesse de rotation et à une amplitude proportionnelle au carré de la vitesse de rotation.

L'origine de l'apparition du balourd peut être lié à [5] :

- une répartition non symétrique de la masse du rotor autour de son axe de révolution. Ce qui induit un décalage entre le centre géométrique et le centre de masse ;
- la déflexion de l'arbre à cause du poids propre du rotor, favorisant ainsi le décalage entre le centre géométrique et le centre de rotation de la machine ;
- des paliers non alignés par rapport à l'axe géométrique du rotor.

La force d'excitation générée par la présence du balourd est une **force centrifuge** qui agit sur le comportement vibratoire en flexion du rotor. Comme les efforts centrifuges sont proportionnels au carré de la vitesse de rotation, ils deviennent très importants à très hautes vitesses. D'où l'importance de l'équilibrage des machines tournantes, surtout celles opérant à très haut régime, afin de limiter l'effet de l'excitation générée par le balourd sur les vibrations latérales.

**La vitesse critique** Quand une fréquence propre du rotor, à une vitesse de rotation donnée, coïncide avec la fréquence d'excitation dû au balourd, on parle de vitesse critique. Comme son nom l'indique, ces vitesses particulières correspondent à un régime de fonctionnement pour lequel la machine entre en résonance ce qui peut représenter un risque de défaillance directement lié à l'amplification des vibrations latérales. Ce risque est d'autant plus important qu'un faible amortissement est présent dans la structure.

En l'absence d'amortissement, les machines tournantes sont conçues pour opérer à des régimes situés au-dessous de la première vitesse critique. C'est assez souvent le cas pour les machines tournantes de petite taille, de faible masse et qui sont supportées par des paliers ayant des raideur élevées. Ce sont généralement les machines tournantes de grandes tailles telles que les compresseurs centrifuges, les turbines à gaz ou à vapeur ou bien les générateurs d'électricité de grande taille qui posent plus de risques liés à leur mode de fonctionnement vu que, assez souvent, elles fonctionnent à des régimes qui dépassent, au moins, la première vitesse critique.

**L'effet gyroscopique** Il provoque un couplage des déplacements orthogonaux à l'axe de rotation ce qui a pour conséquence la séparation des fréquences en rotation en deux branches :



un mode en précession directe (FW<sup>1</sup>) et un mode en précession inverse ou indirecte (BW<sup>2</sup>). Cet effet a une influence importante sur les comportements des arbres tournants. Ce couplage gyroscopique inhérent aux structures tournantes induit le mouvement de précession. La précession est dite directe quand le sens de rotation du rotor est le même que le sens du parcours des orbites. Pour la précession indirecte c'est le contraire (voir Fig.1.3).

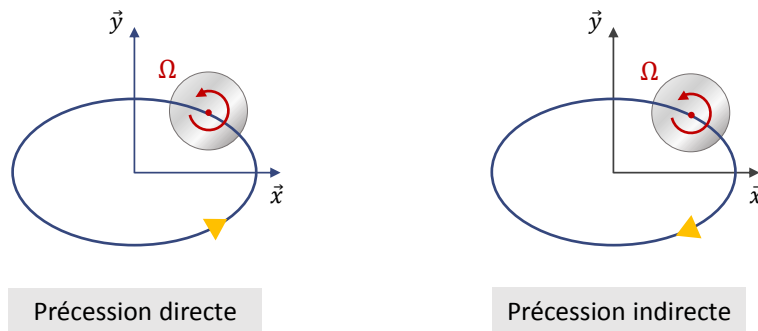


FIGURE 1.3: Source de non-stationnarité

Des outils sont mis en place pour la prise en compte de l'effet gyroscopique dans la représentation des modes propres en précession directe et indirecte ainsi que des vitesses critiques, on parle notamment du diagramme de Campbell.

**Le diagramme de Campbell** Le diagramme de Campbell [6] représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation angulaire (voir Fig.1.4). Du fait que les effets gyroscopiques sont proportionnels à la vitesse de rotation angulaire, la solution générale du modèle dynamique d'un rotor fait généralement intervenir des fréquences/vecteurs propres complexes qui dépendent de la vitesse de rotation. Le diagramme représente des modes en précession directe et indirecte. La divergence entre chaque paire de mode est d'autant plus importante que les effets gyroscopiques sont importants.

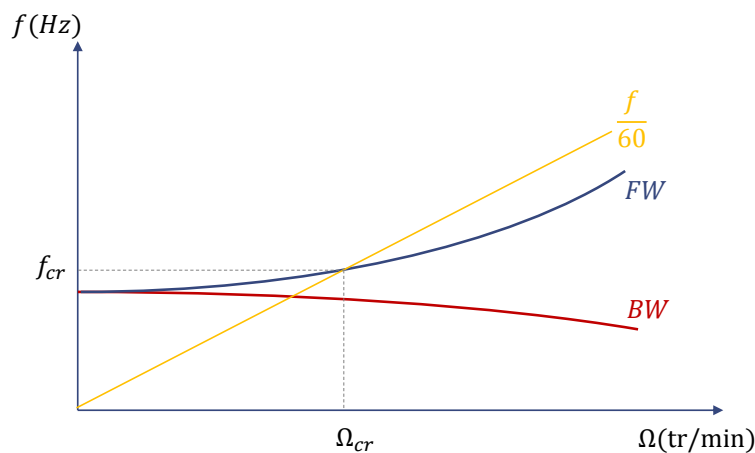


FIGURE 1.4: Source de non-stationnarité

1. Forward whirl en anglais  
2. Backward whirl en anglais

La construction du diagramme de Campbell d'un rotor, nécessite la résolution, pour chaque vitesse de rotation, du problème aux valeurs propres issu du modèle dynamique en flexion.

**Equation de la dynamique** L'équation du mouvement d'un modèle éléments finis du rotor fait intervenir, en plus de matrices classiques et symétriques de masse  $[M]$ , de raideur  $[K]$  et d'amortissement  $[C]$ , une matrice antisymétrique  $[G]$  appelée matrice gyroscopique qui est constituée par des termes d'inertie. Sous l'hypothèse de régime stationnaire et des petits déplacements, l'équation linéarisée écrite sous forme matricielle du comportement dynamique en flexion pure d'un rotor, soumis uniquement à l'excitation du balourd, s'écrit de la façon suivante :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + ([C] + \Omega[G])\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{f_b(t)\} \quad (1.1)$$

La matrice  $[G]$  est directement proportionnelle à la vitesse de rotation constante  $\Omega$ .  $\{f_b(t)\}$  est le vecteur d'excitation de force centrifuge. La linéarisation des équations dynamiques, telle que présentée par l'équation (1.1), conduit à une vision idéalisée des machines tournantes et qui impose des champs d'applications assez limités. Il suffit de considérer une variation de la vitesse instantanée de rotation pour que cette équation ne soit plus valable. La non-stationnarité, ne va pas seulement rendre les matrices de l'équation (1.1) dépendantes du temps, mais les matrices ne seront aussi pas les mêmes vu que d'autres matrices dépendant de l'accélération vont apparaître [7].

L'équation (1.1), bien qu'elle soit très basique et pas assez pertinente dans la plupart des cas d'études, a l'avantage de représenter de la façon la plus claire possible la particularité de l'écriture des équations du mouvement d'une machine tournante.

Maintenant que nous avons introduit brièvement les machines tournantes et leurs particularités ainsi que listé quelques applications industrielles, on va s'intéresser à l'application industrielle qui définit les motivations du présent travail scientifique.

## 1.2 Contexte industriel pour la présente étude

Ce travail s'inscrit dans le contexte du projet RedHV+ qui a pour but de contribuer à la réduction des émissions automobiles polluantes à travers l'utilisation des moteurs électriques. L'acronyme RedHV+ fait référence à : Réducteur haute vitesse et haut rendement pour véhicule hybride.

### 1.2.1 Motivations

Les enjeux environnementaux étant de plus en plus importants, l'industrie des transports routiers individuels ou collectifs s'investit de plus en plus dans des solutions techniques limitant les taux d'émissions des particules polluantes. Le défi pour les industriels est ainsi de trouver des solutions qui ne dégradent pas le niveau de performance des véhicules sans toutefois rajouter un surcoût pour l'utilisateur.

Un axe important d'amélioration est l'utilisation de moteurs électriques haute vitesse, plus petits à puissance égale, dans le but d'augmenter la puissance massique des GMPE<sup>3</sup>. Ceci permet :

- la réduction du poids des véhicules (gain attendu en masse de 30% sur le GMPE complet) ;
- l'augmentation du rendement énergétique ;
- l'économie des ressources naturelles en limitant la quantité de matière utilisée pour le moteur tel que le cuivre.

---

3. Groupes Moto Propulseur Electriques

Sauf que la vitesse en sortie de ce type des moteurs est trop élevée et nécessite par la suite une accommodation avec les éléments de transmissions classiques du véhicule. D'où le besoin de construire des nouveaux réducteurs permettant de satisfaire cet objectif.

Le marché est potentiellement plus large que celui des HEV<sup>4</sup> et ZEV<sup>5</sup> : les technologies développées seront transposables à tous les secteurs des véhicules terrestres (camions, bus, machines agricoles, travaux publics . . .) voire au secteur aéronautique qui recherche actuellement de vraies pistes de réduction des coûts par rapport aux technologies existantes utilisées.

### 1.2.2 Limites des réducteurs de vitesses existants

Aujourd'hui les réducteurs des HEV et des ZEV ont des vitesses d'entrée qui ne dépassent pas 15000 tr/min, sachant que les véhicules largement industrialisés se contentent de moteurs tournants à une vitesse maximale de 7000 tr/min. Outre le fait qu'elles ne soient pas adaptées pour les très hautes vitesses, les technologies classiquement utilisées en automobile ne permettent pas des rendements supérieurs à 50 % à haut régime.

Des réducteurs haut rendement existent pour l'aéronautique, mais utilisent des technologies trop coûteuses et non transposables dans l'automobile (coût, processus industriel . . .).

### 1.2.3 Objectifs du projet RedHV+

L'objectif du projet porte sur la possibilité de développer un réducteur haute vitesse (30 à 40 000 tr/mn, puissance 20 à 40 kW) ayant un rendement supérieur ou égal à celui des boîtes existantes, compatible avec des coûts automobiles, permettant l'utilisation de machines électriques hautes vitesses dans des véhicules automobiles. L'aboutissement du projet nécessite la levée de verrous dans plusieurs domaines d'innovations technologiques et scientifiques : roulements, engrenages, lubrification, étanchéité, usinage, dynamique et acoustique.

### 1.2.4 Objectifs de la thèse

Le présent travail est axé sur le développement d'un modèle avancé de la dynamique des rotors sous des hypothèses de fonctionnement permettant de converger vers une simulation précise du comportement dynamique des réducteurs de vitesse du type de ceux conçus dans le projet RedHV+.

Le modèle dynamique prendra en considération les particularités de ces réducteurs de vitesses dans le cadre du projet et qui ont des vitesses d'entrée trop élevées. Comme le réducteur est associé à un moteur électrique, il est aussi important de considérer la non-stationnarité de la vitesse instantanée de rotation.

La modélisation avancée qui s'intéresse dans un premier temps aux monorotors est ensuite étendue à un étage d'engrenage et est utilisée pour l'étude du comportement vibratoire du banc du réducteur RedHV+. Finalement, un outil d'identification a été développé dans le but d'enrichir les modèles dynamiques des monorotors/multirotors avec des valeurs plus proches de la réalité de certains paramètres tels que les raideurs et les amortissements des paliers.

Il est important de souligner que, même si le présent travail s'inscrit dans le cadre d'un projet portant sur les réducteurs de vitesse automobiles, les modèles dynamiques et les outils d'identification développés auront un champs d'application beaucoup plus large et pourront être utilisés pour l'étude de n'importe quelle machine tournante quel que soit son secteur d'application.

---

4. Hybrid Electric Vehicles

5. Zero Emission Vehicles

### 1.3 Hypothèses de modélisation et leurs conséquences

Dans ce chapitre une étude bibliographique est menée afin de comparer les différentes hypothèses postulées en amont d'une modélisation avancée du comportement dynamique du rotor. La comparaison a principalement pour but de justifier les choix des hypothèses qui seront retenues à la fin ainsi que de montrer leurs pertinences. L'hypothèse de petits déplacements et petites déformations ne sera pas discutée dans la suite. Les hypothèses de modélisations à justifier couvrent principalement :

- la vitesse instantanée de rotation (VIR)<sup>6</sup> ;
- la source d'énergie ;
- le couplage flexion-torsion ;
- l'effet gyroscopique ;
- la flexibilité de l'arbre/du disque.

La figure (1.5) résume, selon chaque critère mentionné, les différentes hypothèses qu'on peut retrouver dans les travaux de modélisation. Sur cette figure, les hypothèses simplificatrices sont celles qui sont situées proche du centre du diagramme en camembert. La simplification des modèles dynamiques s'accompagne par une limitation de leurs champs d'application. Les hypothèses qui sont représentées loin du centre, bien qu'elles rajoutent un degré de complexité non-négligeable à la modélisation, sont plus réalistes et ouvrent aux modèles un champs d'application plus large.

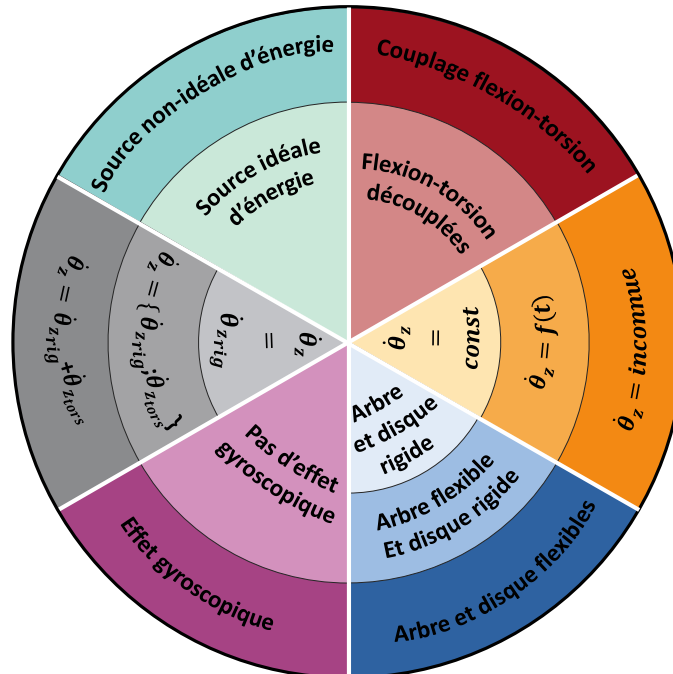


FIGURE 1.5: Bilan des hypothèses

Dans la suite, chaque catégorie d'hypothèses sera détaillée et les motivations derrière l'utilisation de chaque hypothèse ainsi que les limites de son application sont explicitées.

6. IAS : Instantaneous Angular Speed

### 1.3.1 Hypothèses sur la vitesse instantanée de rotation (VIR)

Une revue de la littérature montre que les hypothèses sur la VIR sont généralement faites en fonction du régime de fonctionnement de la machine tournante. Celle-ci est supposée constante en régime stationnaire ou variant en fonction d'une loi linéaire ou exponentielle en régime transitoire [8, 9]. Dans ce qui suit, on aimerait attirer l'attention du lecteur sur le fait que la VIR présente toujours des variations au cours du temps quel que soit le régime de fonctionnement. Les origines qui pourraient être responsables de la variation de la vitesse instantanée (VVI) sont présentées tout au long de cette section.

#### De la stationnarité à la cyclostationnarité

Le régime stationnaire tel qu'il est classiquement présenté dans la plupart des travaux en machines tournantes consiste à définir une VIR constante au cours du temps. En d'autres termes, une vitesse  $\Omega$  est définie et elle est directement introduite avec une valeur constante prédéfinie dans les équations de la dynamique [10, 11, 12, 13].

Sauf que la façon traditionnelle définissant la VIR comme une valeur constante n'est pas assez réaliste et ne reflète pas la vraie physique d'une machine tournante [14]. Dans la vraie vie, les machines tournantes, même sous des conditions de fonctionnement stationnaires, présentent une succession de phénomènes rythmiques par cycle qui sont à l'origine d'une perturbation du signal de la VIR [15]. Ces phénomènes cycliques pourraient être générés, à titre d'exemple, par une raideur d'engrènement, un roulement à billes, la combustion interne d'un moteur thermique ou l'admission et l'échappement d'un fluide dans une pompe [16]. Afin de prendre en compte de ces fluctuations périodiques en régime établi, on parle plutôt de cyclostationnarité. Le régime cyclostationnaire est une extension du régime stationnaire [17]. Dans le premier cas, les variations de la vitesse instantanée (VVI) induites par des phénomènes périodiques inhérents à la machine sont pris en compte dans le signal de la VIR. Par contre, dans le deuxième cas, la VIR ne contient aucune information concernant les mécanismes périodiques dans la machine tournante.

Si l'hypothèse de régime stationnaire est connue par la simplicité qu'elle apporte à la modélisation, l'hypothèse de cyclostationnarité rajoute un degré de complexité dans la modélisation qui est contre balancée par la richesse du signal de la VIR en information comparé au cas stationnaire.

#### Le régime non-stationnaire

On a vu que, aussi paradoxal que cela peut paraître, en régime établi, une machine tournante est toujours opérationnelle à un régime non-stationnaire par sa nature de conception et de fonctionnement. On parle plus particulièrement de cyclostationnarité pour traduire la présence de VVI due à des phénomènes périodiques inhérents à la machine en régime établi.

Un autre cas particulier du régime non-stationnaire est le régime transitoire qui, par définition, précède l'arrivée à un point de fonctionnement nominal. On désigne par le transitoire la variation de la VIR observée lors d'une accélération qui accompagne un démarrage du rotor ou lors d'une décélération qui accompagne un freinage ou un arrêt de la machine.

L'étude du régime transitoire est à ne pas négliger quand le rotor doit passer par au moins une vitesse critique avant d'atteindre le régime permanent. Dans ce cas, il devient important d'observer le comportement vibratoire de la machine à la résonance. Le passage par les vitesses critiques est à l'origine des niveaux vibratoires assez importants qui peuvent se traduire par des dépassements locaux des limites de contraintes admissibles, conduisant à une diminution notable de la durée de vie de l'installation [18]. Dans la littérature, le régime transitoire est

souvent modélisé en utilisant une VIR qui suit une loi linéaire ou exponentielle au cours du temps [9, 19].

Le régime non-stationnaire a un cadre d'application plus large que le régime cyclostationnaire ou transitoire. Une liste non-exhaustive des causes responsables des fluctuations de la VIR est présentée ci-après.

#### Origines des non-stationnarités

Dans le cas d'une machine parfaitement saine, une des sources incontournables conduisant à un régime non-stationnaire est le pilotage du rotor par un couple moteur non-constant, ce qui est généralement le cas. Ça pourrait être aussi des fluctuations périodiques relatives à la présence des vibrations en torsion ou bien provenant des éléments technologiques tel que les engrenages et les roulements. L'observation de la variation de la vitesse instantanée de rotation (VVI) nécessite d'inclure la VIR dans les inconnues du problème dynamique ainsi que d'adopter des modèles qui décrivent d'une façon suffisamment précise le comportement dynamique des éléments ou phénomènes physiques responsables de l'apparition de la non-stationnarité.

Dans le cas d'une machine défectueuse, chaque défaut, selon sa nature, aura son empreinte spécifique sur la VIR. Cette empreinte constitue ainsi une signature vibratoire de ce défaut portée le signal de la VIR.

Quelques éléments qui pourraient être responsables de la variation de la VIR sont listés ci-dessous (voir Fig.1.6).

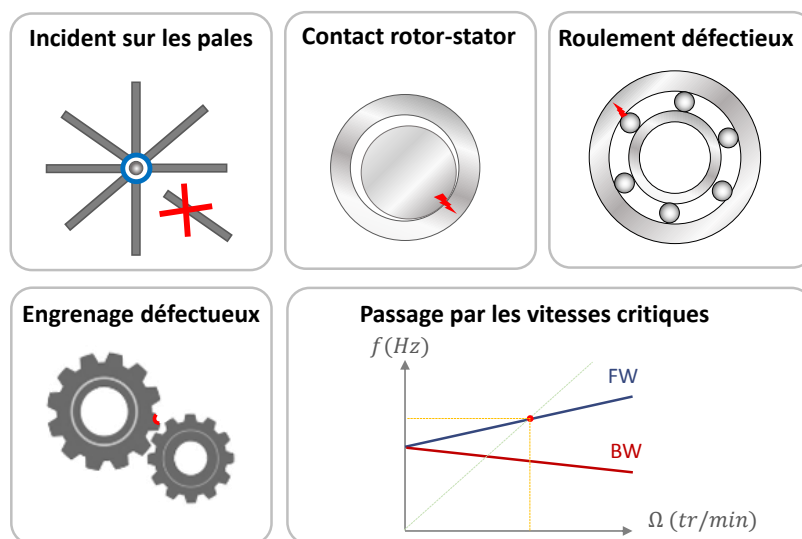


FIGURE 1.6: Sources de non-stationnarités

**Éléments à périodicité géométrique** Gomez et al. [20] ont développé un modèle dynamique des roulements qui prend en compte la fluctuation du nombre des corps roulants sous charge. Ils ont constaté que, à couple constant, des légères variations sont observées autour du point nominal du fonctionnement. L'analyse fréquentielle de ces VVI par une transformée de Fourier en angle a montré la présence des BPFO\*<sup>7</sup> (fréquence de passage des corps roulants sur la bague extérieure) des roulements ainsi que de leurs harmoniques ( voir Fig.1.7).

7. Ball Passing Frequency Outer

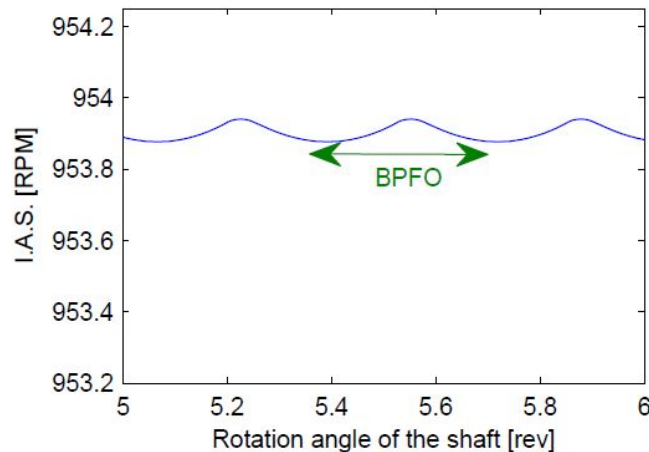


FIGURE 1.7: VVI résultant de la présence d'un roulement sain [20]

**Le passage par les vitesses critiques** Le passage par les vitesses critiques favorise l'échange d'énergie entre la VIR et les vibrations en flexion pour une machine tournante en présence d'un balourd. Ce phénomène est connu sous le nom du phénomène de Sommerfeld (voir la section.1.4). Quand ce phénomène a lieu, l'évolution de la VIR en fonction du temps est perturbée temporairement au voisinage de la vitesse critique. Il est crucial de prendre en compte ce phénomène pour assurer un dimensionnement de la machine qui garantit un passage réussi par la vitesse critique.

**L'apparition brusque d'un balourd** Une autre situation qui justifie l'étude à régime non-stationnaire est l'occurrence d'un incident sur une machine tournante. Un tel incident peut être l'apparition brusque d'un balourd suite à une perte d'une pale. Il a été démontré [21, 22] que le balourd accidentel conduit dans ce cas à des interactions assez fortes entre le rotor et le stator entraînant une décélération importante de la VIR qui risque d'être catastrophique au moment du passage par des vitesses critiques.

On aboutit ainsi à la conclusion suivante : le signal de la VIR est loin d'être un signal qui pourrait être décrit par des lois parfaitement constantes, linéaires ou exponentielles. C'est un signal qui est fortement impacté par les éléments technologiques constituant une machine tournante ainsi que par sa dynamique. Il constitue une source riche en informations reflétant l'état de santé de la machine tournante et dont l'analyse fréquentielle permet de remonter à la nature des éventuels défauts selon leurs signatures vibratoires. D'où l'importance de travailler avec une VIR qui soit intégrée dans les inconnus du problème dynamique et qui soit calculée tout en prenant en compte des phénomènes physiques qui caractérisent le fonctionnement de la machine tournante en question.

### 1.3.2 Hypothèses sur la source

Deux types d'hypothèses pourraient être postulés sur la nature de la source d'énergie. Soit on suppose qu'il existe une source d'énergie infinie, dans ce cas on parle de source d'énergie idéale. Soit, au contraire, on suppose une source d'énergie limitée, hypothèse qui est physiquement plus réaliste, dans ce cas on parle de source d'énergie non-idéale.

### Source idéale d'énergie

Cette hypothèse est la plus utilisée en modélisation des machines tournantes. Elle consiste à travailler à vitesse instantanée de rotation connue  $\Omega$  qui peut être constante ( $\Omega = \text{constante}$ ) ou bien, suivre une fonction prédéfinie en fonction du temps ( $\Omega = f(t)$ ).

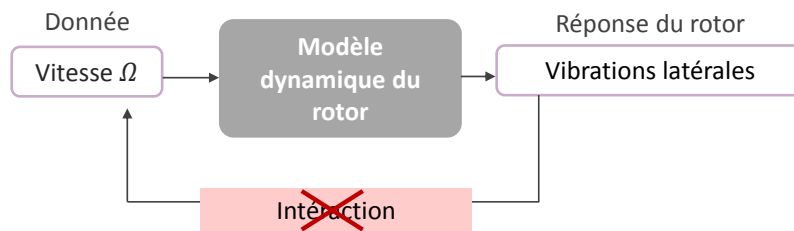


FIGURE 1.8: Source idéale d'énergie

Dire qu'on est en présence d'une source idéale d'énergie est équivalent à dire que la source d'énergie est infinie. En d'autres termes, sous cette hypothèse, on suppose que la vitesse de rotation nominale cible est toujours atteignable indépendamment des limites de la source d'énergie associée au rotor. Cette hypothèse est associée à un pilotage en VIR. La VIR est ainsi imposée et n'est pas influencée par la dynamique du système : elle suit parfaitement la loi qu'on lui a prédéfinie (voir Fig.1.8). Bien qu'elle soit moins réaliste, cette hypothèse garantissant un certain degré de simplification du modèle dynamique du rotor, est la plus utilisée dans des travaux antérieurs et dans des livres de référence notamment [1, 9].

### Source non-idéale d'énergie

Cette hypothèse implique l'introduction de la VIR dans les inconnues du problème dynamique [23, 24]. Ceci se traduit par une équation supplémentaire qui établit le lien entre la VIR et la réponse du système.

Quand la VIR est introduite aux inconnus du problème dynamique, il est possible d'observer des interactions entre cette dernière et les vibrations latérales au moment du passage du rotor par des vitesses critiques (voir Fig.1.9). Ces interactions peuvent conduire à un phénomène appelé 'phénomène de Sommerfeld' qui est caractérisé par un transfert d'énergie de la direction de rotation vers la direction transverse. Ce phénomène est plus détaillé à la section (1.4) de ce chapitre. Dans le cas où la source est supposée non-idéale, on est en présence d'une source d'énergie limitée. La limitation de l'énergie apportée au rotor peut conduire à des difficultés à franchir les vitesses critiques et donc à favoriser l'apparition du phénomène de Sommerfeld [25]. Cette hypothèse est souvent associée à un pilotage en couple.

Une comparaison entre les résultats de simulations numériques concernant le comportement dynamique d'un rotor disque, sous chacune des hypothèses de modélisation concernant la source d'énergie, est présentée dans la section (1.4). On montre, à travers cette comparaison, que l'hypothèse de source non-idéale permet une meilleure estimation des niveaux vibratoires latéraux au voisinage des vitesses critiques que l'hypothèse de source idéale.



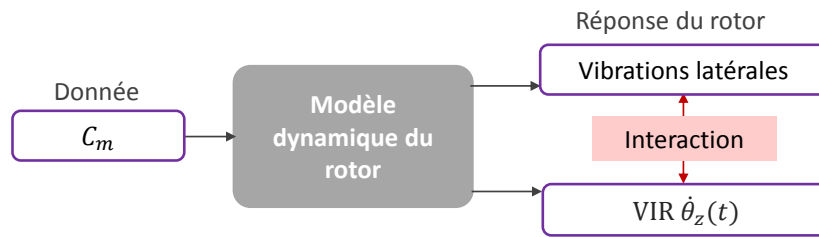


FIGURE 1.9: Source non-idéale d'énergie

### 1.3.3 Hypothèses sur la flexibilité de l'arbre et du disque

Le choix de l'hypothèse portant sur la rigidité ou la flexibilité de l'arbre et du disque est principalement lié à la géométrie du rotor ainsi qu'aux propriétés de ses éléments technologiques.

#### Hypothèses sur la flexibilité du disque

Même si la grande majorité des travaux a été menée sous l'hypothèse de disque rigide, certains ont proposé de prendre en compte la flexibilité du disque. Il a été démontré que la prise en compte de la flexibilité du disque assure une meilleure précision pour le calcul des vitesses critiques [26]. D'autres travaux menés par Heydari et Khorram [27] ont étudié les conditions suivant lesquelles le couplage arbre flexible/disque flexible peut avoir lieu. Ils ont conclu qu'il y a deux critères selon lesquels ce couplage peut être négligé ou bien au contraire, il faut le prendre en considération. Ces deux critères sont :

- la position du disque sur l'arbre ;
- le rapport entre la largeur du disque et son diamètre<sup>8</sup>.

Les auteurs ont aussi montré que si le couplage entre l'arbre et le disque est négligé dans une configuration du rotor qui ne justifie pas de le faire, on risque de surestimer les vitesses critiques.

#### Hypothèses sur la flexibilité de l'arbre

L'arbre peut être supposé rigide ou bien souple en flexion ou/et en torsion. Les tout premiers travaux en machines tournantes se sont basés sur l'étude d'un rotor rigide [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Ces études négligeant la flexibilité du rotor, quoiqu'elles permettent l'étude de certains phénomènes liés au fonctionnement de rotor (instabilité, contact rotor-stator, effet de la non linéarité des paliers...), restent insuffisantes pour assurer un bon dimensionnement du rotor. Un intérêt majeur de la prise en compte la flexibilité du rotor dans la modélisation dynamique, est la capacité de ces modèles à calculer les vitesses critiques du rotor [36]. Dès lors que le calcul des vitesses critiques est crucial pour le dimensionnement du rotor, la prise en compte de la flexibilité du rotor devient essentielle pour la phase de conception.

L'hypothèse d'arbre rigide pourrait être justifiée, cependant, si l'arbre présente une rigidité plus élevée que celle des paliers (voir Fig.1.10). Sauf que cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Il ne suffit pas de comparer les rigidités mais il faut aussi tenir compte de la vitesse angulaire de rotation : on voit bien sur les figures (1.10) et (1.11) que, dans le cas où la raideur

8. Aspect ratio en anglais

### 1.3. Hypothèses de modélisation et leurs conséquences

des paliers est faible comparée à la rigidité de l'arbre, même si l'arbre ne se déforme pas pour les deux premières vitesses critiques, il se déforme à la troisième vitesse critique. Donc l'hypothèse d'arbre rigide n'est pas raisonnable pour des vitesses de rotation relativement élevées (qui dépassent au moins la deuxième vitesse critique) quel que soit le rapport entre la rigidité de l'arbre et la rigidité des paliers.

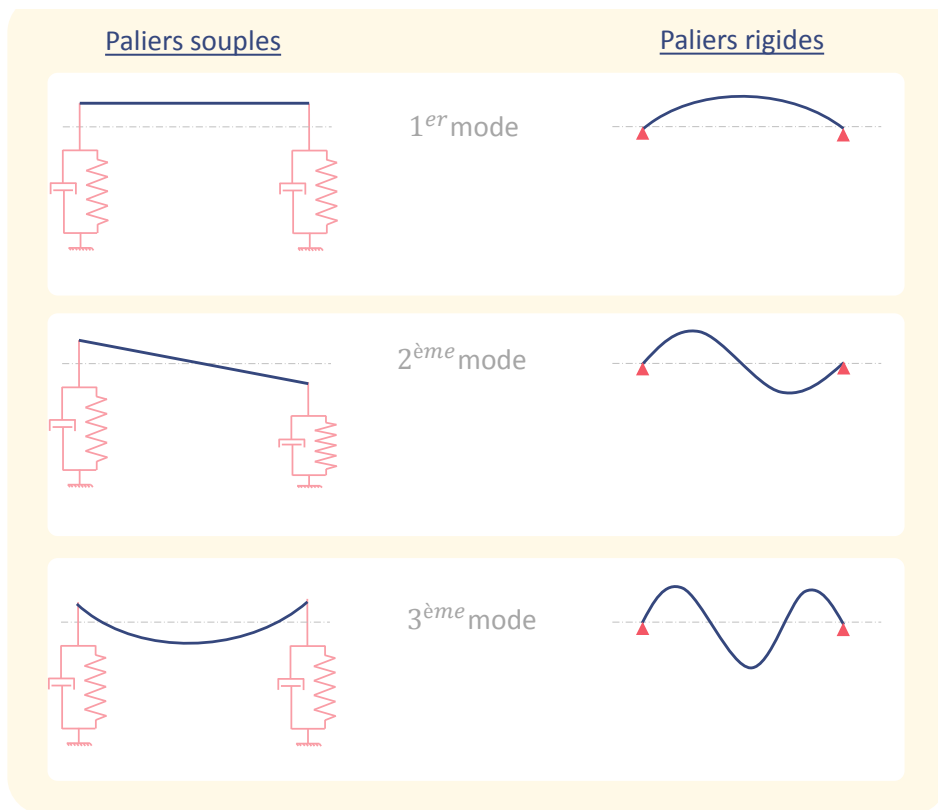


FIGURE 1.10: Comparaison de la déformation de l'arbre en fonction de la rigidité des paliers

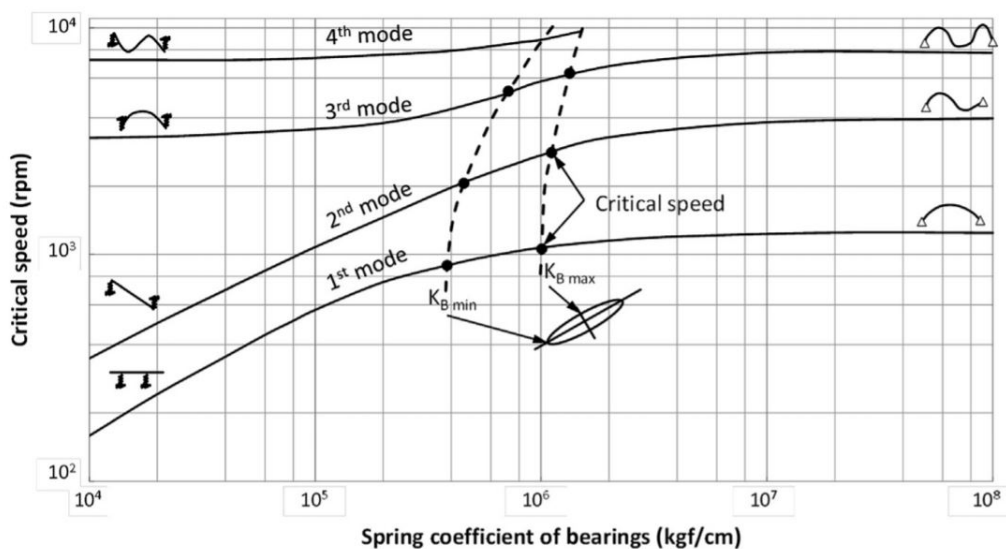


FIGURE 1.11: Cartographie des vitesses critiques [37]

### 1.3.4 Hypothèses sur le couplage flexion-torsion

Une modélisation précise des vibrations latérales est importante, surtout à hautes vitesses où elles risquent de devenir excessives sous l'effet de la force centrifuge, et nécessitent donc d'être contrôlées [1]. La modélisation de la dynamique d'un rotor en torsion est relativement simple comparée à celle en flexion. Contrairement aux vibrations latérales, qui se détectent facilement par leurs effets sur la machine, les vibrations en torsion ne sont généralement détectées que lorsqu'il y a un endommagement de la machine. Pour cela, les vibrations en torsion sont plus dangereuses et sont assez souvent la cause d'une casse de la machine par fatigue vibratoire.

Certaines études s'intéressent à un seul type de vibration : flexion ou torsion. D'autres études s'intéressent au comportement couplé flexion-torsion. Le choix de se situer dans le premier cas pourrait être justifié par le fait que les fréquences propres en torsion sont souvent beaucoup plus élevées que les fréquences propres en flexion. Donc à bas régime, on ne risque pas d'avoir d'interaction entre le comportement vibratoire en flexion et celui en torsion. Par contre, il devient plus pertinent de prendre en considération le couplage quand on monte à haut régime et qu'on s'intéresse à des plages de fréquences qui couvrent au moins la première fréquence de torsion. L'étude du couplage est même incontournable en présence de certains éléments technologiques tel que les engrenages [38, 39].

Les machines tournantes ont tendance à devenir de plus en plus « légères » tout en assurant un fonctionnement à des régimes plus élevés. Dans ce cas, la modélisation des vibrations découplées devient moins pertinente vu que les vibrations en flexion et en torsion sont susceptibles d'interagir entre elles [40]. Les sources conduisant à un couplage flexion-torsion sont en effet multiples. Le couplage peut être induit par la présence des fissures sur l'arbre tournant [41], l'utilisation des engrenages [42, 43, 44], le contact entre le rotor et le stator [45, 46, 47, 48], ou simplement par la présence d'un balourd [49, 50, 51] ou de plusieurs causes combinées [52]. Tondl [53] a été parmi les premiers à poser la théorie de base pour l'étude des vibrations couplées du rotor. La plupart des travaux se sont intéressés aux couplages introduits par les termes du balourd ou les termes relatifs à l'effet gyroscopique dans le modèle dynamique. Mohiuddin et al. [54] ont proposé un modèle dynamique pour l'étude du couplage flexion-torsion induit par les termes inertiels intervenant dans l'expression de l'effet gyroscopique. Al-Bedoor [55, 56] a proposé d'étudier le couplage flexion-torsion généré par la présence d'un balourd sur un rotor de Jeffcot ce qui limite son modèle à des vitesses inférieures à la première vitesse critique. O.Bernasconi [57] a proposé un modèle qui prend en compte l'effet gyroscopique et a étudié le couplage qui en résulte. Ses études ont été cependant limitées à l'influence du comportement vibratoire latéral sur les vibrations en torsion. Il a conclu que, dans le cas du couplage induit par les effets gyroscopiques, les vibrations latérales conduisent à l'apparition de vibrations en torsion qui sont à une fréquence égale au double de la fréquence de rotation. Shen et al. [58] ont étendu cette étude pour explorer, à travers les termes du couplage induit par l'effet gyroscopique, l'influence des vibrations latérales sur les vibrations en torsion et vice versa.

Ainsi, les études sur le comportement couplé en flexion-torsion, de plus en plus nombreuses, prouvent qu'il n'est pas possible de dissocier l'impact des vibrations latérales sur les vibrations en torsion. De la même façon, les vibrations en torsion impactent le comportement dynamique transverse. Le couplage est même inhérent au comportement dynamique du rotor vu qu'il provient naturellement de la présence du balourd ainsi que des effets gyroscopiques.

### 1.3.5 Hypothèses sur la prise en compte des effets gyroscopiques

L'effet gyroscopique est directement proportionnel à la vitesse angulaire de rotation ainsi qu'à l'inertie de section. L'effet gyroscopique est négligé dans certaines études par soucis de simplification. C'est le cas quand on traite un rotor de Jeffcott caractérisé par un disque situé au milieu de l'arbre tournant. Pour que cette simplification soit justifiée, l'étude du comportement dynamique du rotor doit se limiter à des vitesses qui ne dépassent pas la première vitesse critique. Ceci s'explique par le fait que les efforts gyroscopiques ne travaillent pas pour la déformée correspondant au premier mode mais travaillent pour les déformées des modes supérieurs vu que la section du disque n'est plus perpendiculaire à l'axe géométrique du rotor ( voir Fig.1.12).

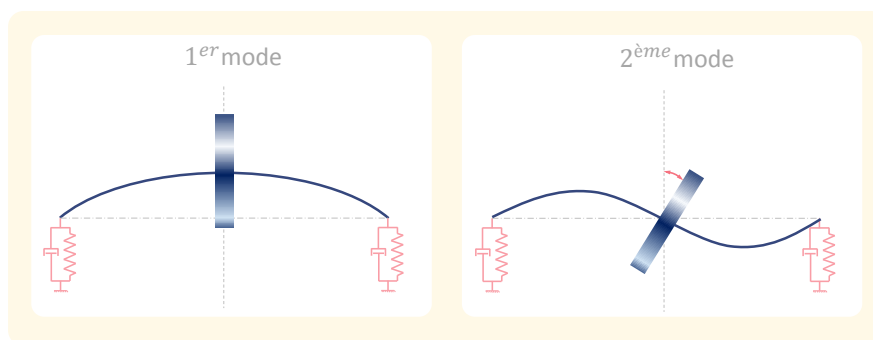


FIGURE 1.12: Les deux premières déformées modales pour un rotor de Jeffcot

Généralement, quand l'effet gyroscopique est négligé dans l'étude dynamique, c'est pour apporter une simplification dans un modèle suffisamment compliqué ou bien pour mettre l'accent sur d'autres phénomènes observés au niveau du rotor étudié. Juang et al [59] se sont par exemple appuyés sur l'étude d'un rotor de Jeffcott pour traiter des problématiques de stabilité liées à la non-linéarité au rotor induite par le contact rotor-stator. Eissa et al. [60] ont utilisé le rotor de Jeffcott avec des paliers non-linéaires pour proposer un nouvel outil de contrôle actif des vibrations latérales. Le rotor de Jeffcott est aussi souvent utilisé pour l'étude du comportement dynamique des rotors en présence de fissure [61, 62, 63, 64, 65].

Il est à noter que cette simplification ne permet pas de prendre en compte les termes de couplage flexion-torsion induit par l'effet gyroscopique. Il faut également souligner que, à très haute vitesse, les termes gyroscopiques, étant proportionnels à la vitesse de rotation, deviennent importants. Il est donc beaucoup plus pertinent de les prendre en considération dans la modélisation.

## 1.4 Phénomène de Sommerfeld en machines tournantes

Le phénomène de Sommerfeld a été évoqué précédemment quand on a parlé de l'hypothèse de source non-idéale d'énergie. Comme son nom l'indique, ce phénomène a été observé pour la première fois par Arnold Sommerfeld en 1902 [66]. Il a été montré que ce phénomène résulte d'une interaction entre le comportement en rotation du rotor et son comportement vibratoire latéral. Il sera plus détaillé dans cette section.

Quand un rotor doit passer par au moins une vitesse critique lors d'une montée en vitesse, le pire scénario qui peut avoir lieu est que le rotor reste bloqué au niveau de cette vitesse sans pouvoir la franchir parce que le moteur n'arrive pas à fournir suffisamment d'énergie. Dans ce cas, on parle du phénomène de Sommerfeld : toute l'énergie fournie au rotor pour le faire accélérer en rotation est transmise aux vibrations latérales. Ainsi, au lieu de faire tourner le rotor,

l'énergie qui lui est fournie va plutôt servir à amplifier les vibrations latérales [67]. En d'autres termes, l'énergie fournie au rotor est absorbée par les vibrations latérales et les amortissements des paliers plutôt que par l'énergie cinétique associée à la rotation propre du rotor [23, 68]. Plus le rotor reste « coincé » au niveau d'une vitesse critique, plus l'énergie sera transférée pour amplifier les amplitudes vibratoires à la résonance [69, 70, 71, 72, 73]. Les vibrations atteintes à la résonance, en présence du phénomène de Sommerfeld pourraient conduire à la défaillance des paliers ou même à la destruction totale de la structure [25, 74, 75]

Les études se sont multipliées pour mieux comprendre le phénomène de Sommerfeld vu que son apparition représente un danger de sécurité non négligeable. Les études se sont principalement intéressées à l'estimation des paramètres permettant d'assurer un passage sécurisé par les vitesses critiques. Il a été démontré que parmi ces paramètres se trouvent l'amortissement des paliers, la quantité du balourd présent dans le rotor ainsi que le taux d'accélération fourni par le moteur lors du passage par la résonance [68, 76, 77, 78]. Karthikeyan et al. [71] ont montré que, si les propriétés du moteur sont connues à l'avance, on peut estimer le maximum de la quantité du balourd admissible pour garantir un passage par les vitesses critiques.

#### 1.4.1 Etude paramétrique sur un rotor rigide

L'objectif de cette étude est de voir l'influence de certains paramètres définissant le rotor sur son comportement au passage par les vitesses critiques. On s'intéresse à l'exemple d'un rotor rigide, piloté en couple, en présence d'un balourd et en l'absence des effets gyroscopiques (voir Fig.5.8). Ceci étant dit, les modes propres du système sont les modes propres relatifs aux paliers et sont constants quel que soit la vitesse de rotation.

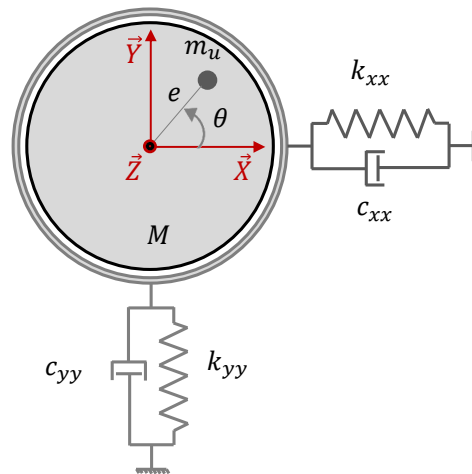


FIGURE 1.13: Rotor disque étudié

#### Équations de la dynamique

On note  $M$  la masse du rotor. Le balourd est caractérisé par sa masse  $m$  et son excentricité  $e$ . Les paliers sont modélisés par les raideurs  $k_{xx}$  et  $k_{yy}$  et par des amortissements  $c_{xx}$  et  $c_{yy}$  sur les deux directions radiales. Un couple moteur  $T_m$  est appliqué sur le rotor et un couple résistant  $T_r$  traduisant toutes les sources de dissipation de l'énergie dans une machine tournante est donné par :

$$T_r = -\alpha \cdot \dot{\theta} \quad (1.2)$$

$T_r$  traduit la résistance induite par le frottement, la trainée aérodynamique et/ ou tout autre facteur s'opposant au mouvement en rotation de la machine tournante. Le paramètre  $\alpha$  est appelé amortissement rigide dans la suite. Il est estimé de façon à ce que, en régime permanent à vitesse nominale constante, le couple résistant équilibre le couple moteur  $T_m = T_r$ . Si on néglige les couplages entre la direction latérale et la direction en rotation, on peut estimer que la valeur de l'amortissement est à peu près égale à :

$$\alpha \simeq \frac{T_m}{\theta} \quad (1.3)$$

Le rotor a trois ddls : deux en translation ( $x$  et  $y$ ) et un en rotation ( $\theta$ ). Son comportement dynamique est dans ce cas décrit par les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + c_{xx}\dot{x} + k_{xx}x = me(\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta} \sin\theta) \\ (M + m)\ddot{y} + c_{yy}\dot{y} + k_{yy}y = me(\dot{\theta}^2 \sin\theta - \ddot{\theta} \cos\theta) \\ (I + me^2)\ddot{\theta} = T_m - \alpha\dot{\theta} + me(\ddot{x} \sin\theta - \ddot{y} \cos\theta) \end{cases} \quad (1.4)$$

Le comportement en rotation du rotor rigide est décrit par la troisième équation du système ci-dessus (1.4). On remarque qu'en plus du couple résistant  $T_r$ , un autre couple est à prendre en considération. On le note  $T_u$  pour la suite tel que :

$$T_u = me(\ddot{x} \sin\theta - \ddot{y} \cos\theta) \quad (1.5)$$

Ce couple traduit le couplage introduit par le balourd entre la direction en rotation et les directions latérales. On définit le vecteur déplacement  $\{\delta\} = \{x; y; \theta\}$  et on écrit le système d'équation sous une forme matricielle plus compacte de la forme :

$$[M_{tot}]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F_{nl}\} + \{F_{ext}\} \quad \text{tel que :} \quad [M_{tot}] = [M] + [M_{var}] \quad (1.6)$$

tel que :

$$[M] = \begin{bmatrix} M + m & 0 & 0 \\ 0 & M + m & 0 \\ 0 & 0 & I + me^2 \end{bmatrix}; \quad [M_{var}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -me \sin\theta \\ 0 & 0 & me \cos\theta \\ -me \sin\theta & me \cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [C] = \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & c_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}; \quad \{F_{nl}\} = \begin{Bmatrix} me \dot{\theta}^2 \cos\theta \\ me \dot{\theta}^2 \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{F_{ext}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_m - T_r \end{Bmatrix}$$

Le calcul des vitesses critiques se calcule tout simplement de la façon suivante :

$$\Omega_{cr1} = \sqrt{\frac{k_{xx}}{M + m}} \cdot \frac{60}{2\pi} \quad (1.7a)$$

$$\Omega_{cr2} = \sqrt{\frac{k_{yy}}{M + m}} \cdot \frac{60}{2\pi} \quad (1.7b)$$

### Exemple pour l'étude paramétrique

Afin d'étudier l'influence de certains paramètres sur le comportement du rotor lors du passage par les vitesses critiques, on va considérer pour la suite un rotor constitué par un arbre de rayon  $R = 0.03 \text{ m}$ , de longueur  $L = 0.4 \text{ m}$  et de masse volumique  $\rho = 7800 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Quant aux raideurs des paliers, elles sont définies par  $k_{xx} = k_{yy} = 5 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

Dans ce qui suit, les valeurs de l'amortissement des paliers, du balourd ainsi que de la pente d'évolution du couple moteur seront précisées en fonction du cas étudié. Afin de faire l'étude paramétrique, on fixera à chaque fois tous les paramètres sauf le paramètre étudié pour voir son influence sur le passage par les vitesses critiques.

Le palier étant considéré symétrique pour les différents cas d'étude, il existe une seule valeur pour la vitesse critique  $\Omega_{cr}$  tel que :

$$\Omega_{cr} \simeq 22\,670 \text{ tr/min}$$

**Influence du taux d'accroissement du couple moteur** Dans un premier temps, on s'intéresse à l'influence du taux d'accroissement du couple moteur sur le passage par les vitesses critiques. Ainsi les valeurs de l'amortissement des paliers ainsi que du balourd présent sur la machine tournante sont fixes. La plus faible valeur de la pente est noté  $p$  et elle est donnée par :  $p = 100 \text{ N.m.s}^{-1}$ .

$c_{xx} = c_{yy}(\text{N.s/m})$	pente(N.m/s)	balourd(m.Kg)
$2 \cdot 10^2$	$p$	0.0035
$2 \cdot 10^2$	$2p$	0.0035
$2 \cdot 10^2$	$3p$	0.0035

**TABLE 1.1:** Propriétés du rotor pour les différents cas d'études pour la comparaison - 1<sup>ère</sup> étude paramétrique

On voit bien sur la figure (1.14) que plus le taux d'accroissement du couple moteur est important, plus le rotor a de l'aisance à passer par la vitesse critique et donc, moins de temps il passe au voisinage de la résonance. Ceci explique le fait que les vibrations latérales sont moins élevées quand la pente est plus importante.

**Influence de l'amortissement** Dans cette partie, on s'intéresse à faire varier l'amortissement tout en fixant les valeurs concernant la pente de la loi d'évolution du couple moteur ainsi que le balourd.

On note  $c$  la plus petite valeur de l'amortissement sur les deux direction  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Elle est donnée par  $c = 100 \text{ N.s.m}^{-1}$ .

$c_{xx} = c_{yy}(\text{N.s/m})$	pente(N.m/s)	balourd(m.Kg)
$c$	130	0.0035
$2c$	130	0.0035
$200c$	130	0.0035

**TABLE 1.2:** Propriétés du rotor pour les différents cas d'études pour la comparaison - 2<sup>ème</sup> étude paramétrique

Les résultats de simulations reportés sur la figure (1.15) montrent que plus l'amortissement des paliers est important, plus le phénomène de Sommerfeld est limité. La présence de l'amortissement sur les paliers favorise le passage réussi du rotor par les vitesses critiques, ce qui est

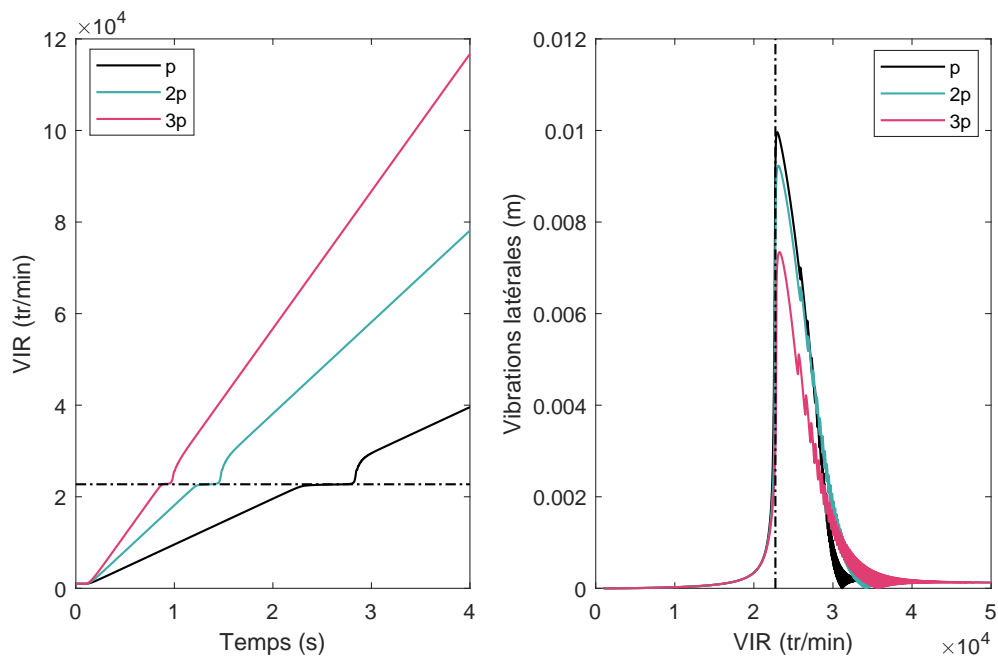


FIGURE 1.14: Influence de la pente d'évolution du couple moteur sur le passage par les vitesses critiques

particulièrement vrai pour le cas pour lequel  $c_{xx} = c_{yy}(N.s/m) = 200.c$ . En d'autres termes, plus les paliers présentent de l'amortissement sur les directions latérales, plus le transfert d'énergie de la direction en rotation vers les directions latérales est limité et par conséquent, moins les niveaux vibratoires transverses sont importants.

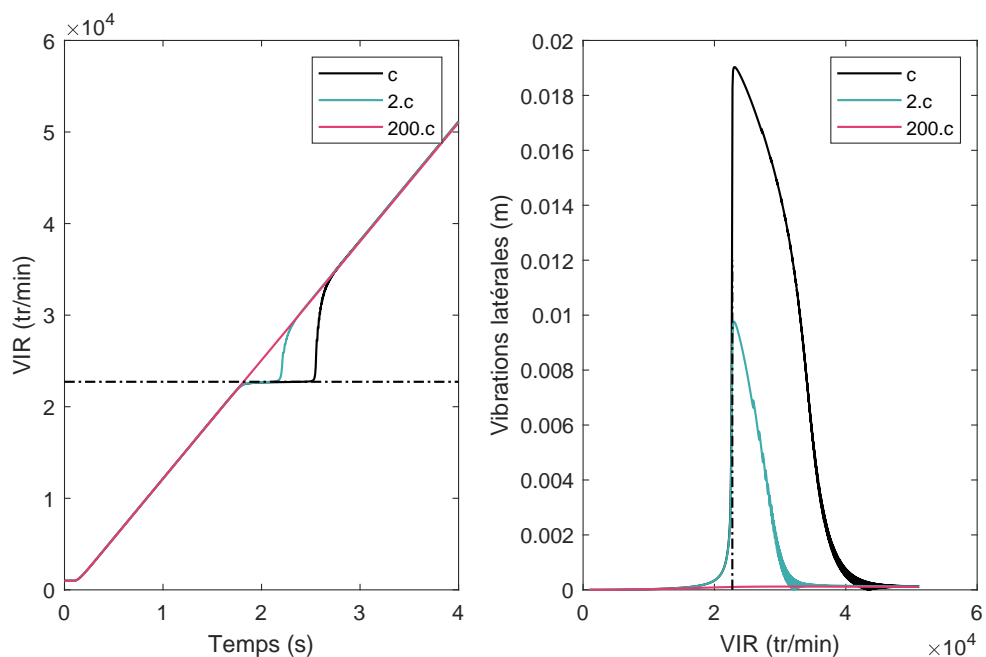


FIGURE 1.15: Influence de l'amortissement des paliers sur le passage par les vitesses critiques

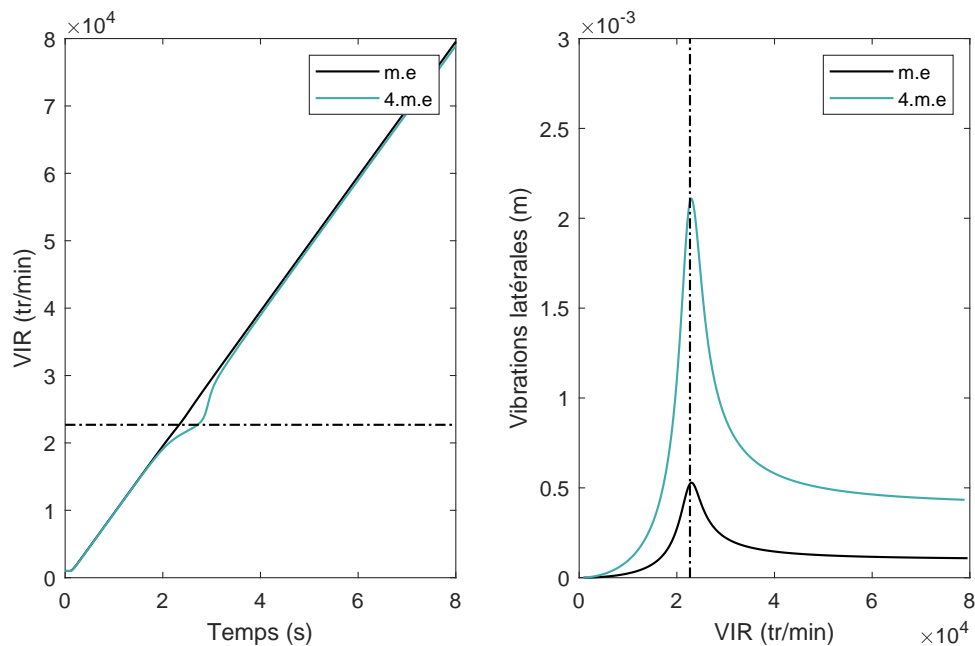


**Influence du balourd** Finalement, on teste l'influence du balourd sur le passage par les vitesses critiques. Comme on peut le voir à travers l'équation (1.5), ce dernier génère un couple  $T_u$  appliqué sur le mouvement en rotation.  $T_u$  est directement proportionnel au produit  $m.e$ . Ainsi, la variation de la valeur de ce produit va directement impacter le mouvement en rotation du rotor. La valeur de  $m.e$  est fixée à  $0.0035 \text{ Kg.m}$  pour le premier cas de simulation. Ensuite, on réalise une autre simulation numérique en multipliant la valeur du balourd par quatre tout en gardant les autres paramètres fixes.

$c_{xx} = c_{yy}(\text{N.s/m})$	penne(N.m/s)	balourd(m.Kg)
$4.10^3$	100	$m.e$
$4.10^3$	100	$4.m.e$

**TABLE 1.3:** Propriétés du rotor pour les différents cas d'études pour la comparaison - 3<sup>ème</sup> étude paramétrique

Le comportement dynamique du rotor disque est reporté dans la figure (1.16). On note bien que plus la quantité du balourd est élevée, plus le rotor aura des difficultés à passer par les vitesses critique. Le couple  $T_u$  est ainsi un couple résistant qui s'oppose au mouvement de rotation de la machine.



**FIGURE 1.16:** Influence du balourd sur le passage par les vitesses critiques

### Phénomène de Sommerfeld : bilan énergétique

On a vu que le phénomène de Sommerfeld se caractérise par le transfert d'énergie, au voisinage de la vitesse critique, de la direction en rotation vers les directions latérales, ce qui en résulte une amplification des niveaux vibratoires.

L'énergie cinétique de rotation ainsi que l'énergie cinétique et potentielle en translation sont

données par :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{rot} = (I + me^2)\dot{\theta}^2 \\ \mathcal{T}_{trans} + \mathcal{U}_{trans} = (M + m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (k_{xx}x^2 + k_{yy}y^2) \end{cases} \quad (1.8)$$

Ensuite, le travail des efforts extérieurs est calculé de la façon suivante :

$$\mathcal{W}_{ext} = \mathcal{W}_{moteur} + \mathcal{W}_{resist} + \mathcal{W}_{amort} \quad (1.9)$$

Tel que :

$$\mathcal{W}_{moteur} = \int_0^{t_f} T_m \dot{\theta} dt \quad (1.10a)$$

$$\mathcal{W}_{resist} = \int_0^{t_f} \alpha \dot{\theta}^2 dt \quad (1.10b)$$

$$\mathcal{W}_{amort} = \int_0^{t_f} (c_{xx}\dot{x}^2 + c_{yy}\dot{y}^2) dt \quad (1.10c)$$

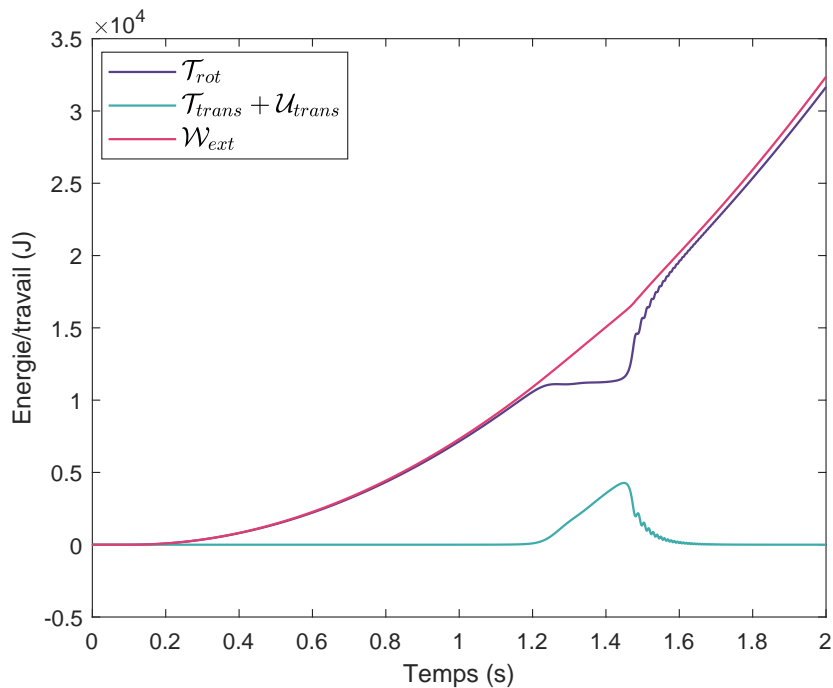


FIGURE 1.17: Bilan d'énergie

Dans la figure (1.17), on représente l'évolution des différentes quantités énergétiques données par les équations (1.8) et (1.9) pour le même rotor disque étudié précédemment avec le choix suivant des paramètres :

$c_{xx} = c_{yy}(N.s/m)$	penne(N.m/s)	balourd(m.Kg)
$2.10^2$	200	0.0035

TABLE 1.4: Propriétés du rotor étudié pour le bilan énergétique

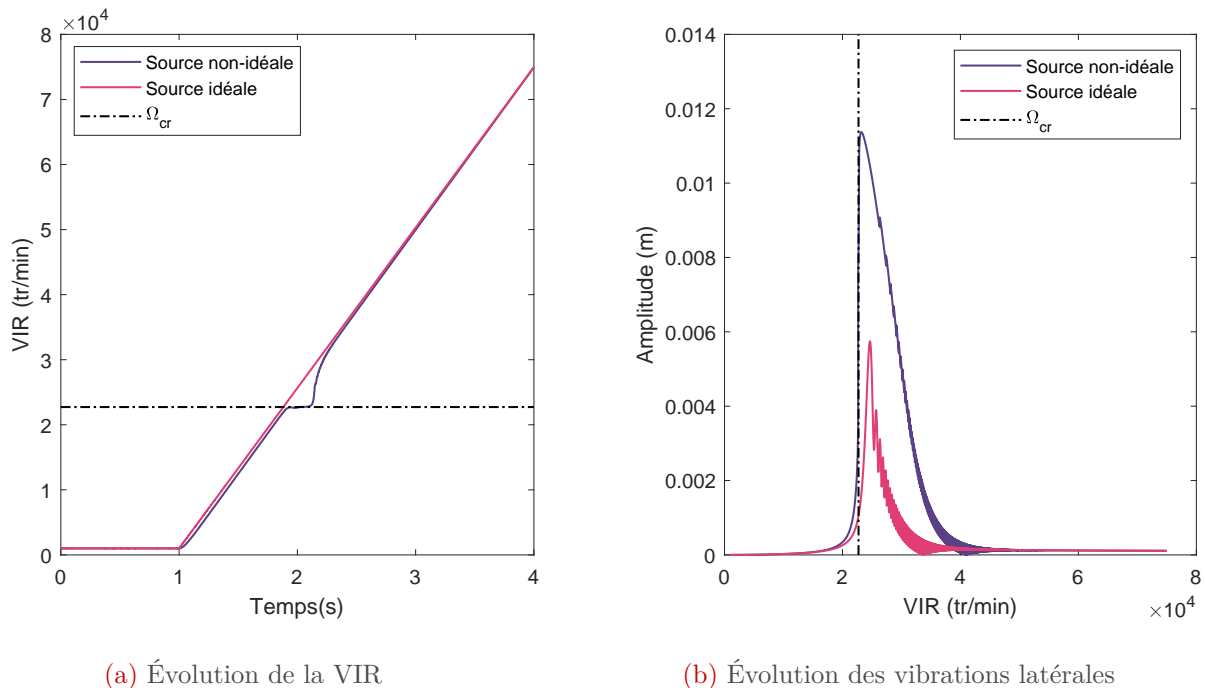
Le phénomène de Sommerfeld est bien mis en évidence, à travers le bilan énergétique, au moment du passage par la vitesse critique.

On voit bien sur la figure (1.17) que pour l'intervalle du temps pour lequel le rotor reste momentanément bloqué au voisinage de la vitesse critique, l'énergie apportée au rotor n'est plus consommée par l'énergie cinétique en rotation. Elle est plutôt utilisée pour amplifier l'énergie cinétique vibratoire sur les directions latérales. Il est également intéressant de remarquer que, au moment où le rotor arrive à franchir la vitesse critique, l'énergie vibratoire en translation est rapidement restituée vers la direction en rotation, ce qui explique l'accélération instantanée du rotor au moment de sa sortie de la zone critique.

### Retour sur la comparaison de l'hypothèse de source idéale et source non-idéale d'énergie

Bien qu'elle soit moins réaliste, l'hypothèse de source idéale est la plus utilisée en modélisation des machines tournantes. Ceci pourrait s'expliquer par le fait qu'on associe, de plus en plus, les rotors à des moteurs fournissant suffisamment d'énergie pour faire tourner le rotor. Cela est surtout le cas dans les secteurs de l'aéronautique ou de l'énergie nucléaire où tout est surdimensionné par mesures de sécurité.

Cependant, la prise en compte des limites de la source d'énergie est très importante dans le cas où le rotor tourne à des régimes qui sont au minimum supérieurs à la première vitesse critique. L'avantage de l'hypothèse de source non-idéale d'énergie est directement lié à la capacité du modèle dynamique, sous cette hypothèse, à bien représenter le phénomène de Sommerfeld qui pourrait éventuellement avoir lieu au voisinage des vitesses critiques.



**FIGURE 1.18:** Comparaison des résultats de simulations sous chacune des hypothèses sur la source

Ainsi, les analyses du comportement vibratoire des rotors sous l'hypothèse de source non-idéale d'énergie sont plus pertinentes dans le cas où le rotor doit franchir au moins une vitesse critique. Une telle étude permet donc d'estimer au préalable la puissance du moteur nécessaire pour faire fonctionner le rotor même dans des conditions de fonctionnement sévères. Cette approche évitera

de fournir un moteur trop puissant par rapport aux besoins de la machine tournante à laquelle il sera associé, et ainsi permettre d'éviter des sur-coûts d'installation.

Une comparaison entre les résultats de simulations données par les deux approches est présentée par la figure (1.18) pour le même exemple du rotor disque étudié précédemment. Les résultats montrent, d'une part, la capacité du modèle sous l'hypothèse de source non-idéale d'énergie, à l'encontre du modèle sous l'hypothèse de source idéale, à bien représenter le phénomène de Sommerfeld. D'autre part, le modèle dynamique sous l'hypothèse de source idéale, par son incapacité à représenter le phénomène de Sommerfeld, conduit à une sous-estimation des niveaux vibratoires aux voisinage de la vitesse critique. Ceci peut conduire à un mauvais dimensionnement du rotor ce qui pourrait être à l'origine de la casse de la machine.

## 1.5 Conclusion sur les hypothèses retenues

Après avoir passé en revue les différentes hypothèses utilisées pour la modélisation du comportement dynamique des rotors, on comprend que, selon les conditions de fonctionnement de la machine tournante et de sa géométrie, un choix des hypothèses de modélisation est fait. Des hypothèses simplificatrices pourraient être adoptées à condition d'être justifiées par rapport au cas du rotor étudié.

Outre l'hypothèse du disque rigide, les hypothèses utilisées dans la suite sont les moins contraignantes et les mieux adaptées pour l'étude du cas du réducteur RedHV+ qui se caractérise par son régime non-stationnaire et son fonctionnement à très hautes vitesses (voir Fig.1.19). Ces deux conditions de fonctionnement impliquent le choix suivant des hypothèses de modélisation :

- la prise en compte de l'effet gyroscopique qui devient important à très hautes vitesses et doit donc être pris en considération. Dans la suite, un effort particulier est accordé à l'expression de l'effet gyroscopique en régime non stationnaire. Les termes gyroscopiques, sont parmi les causes principales de l'introduction du couplage flexion-torsion (voir section (1.3.4));
- la prise en compte de la flexibilité de l'arbre dans toutes les directions. On utilisera la méthode des éléments finis dans la suite pour l'approximation des champs des déplacements et on adoptera six degrés de liberté par nœud ;
- la prise en compte du couplage flexion-torsion. Dans le cas d'un mono-rotor, ce couplage est induit à la fois par le balourd ainsi que par les effets gyroscopiques qui deviennent assez importants à hautes vitesses. Dans le cas des multi-rotors ce couplage est induit par la présence des accouplements élastiques ou bien par les engrenages ;
- l'inclusion de la VIR dans les inconnues du problème dynamique. Ceci sous-entend que l'hypothèse de source non-idéale d'énergie est faite. Cette hypothèse est importante dès lors qu'on risque d'avoir plusieurs passages par les vitesses critiques à haut régime. Il est donc important de prendre en compte les limites de la source d'énergie et de bien prendre en compte le phénomène de Sommerfeld (section (1.4)) et son impact vibratoire au cas où il aura lieu ;
- la VIR ne traduira pas seulement les variation du mouvement du corps rigides mais aussi, les fluctuations résultants des déformations en torsion.

On remarque bien que ces hypothèses sont assez généralistes. Elles permettront de construire un modèle dynamique avancé des rotors qui soit le plus complet possible. Par sa généralité, ce modèle a la capacité d'étudier le comportement dynamique des rotors qui fonctionnent dans

des conditions sévères (hautes vitesses, plusieurs passages par les vitesses critiques, régime non-stationnaire...). Il permet aussi de se situer dans des cas de simulations plus réalistes en prenant en compte la limitation de la source d'énergie et en illustrant proprement les phénomènes assez particuliers tel que le couplages flexion-torsion et le phénomène de Sommerfeld.

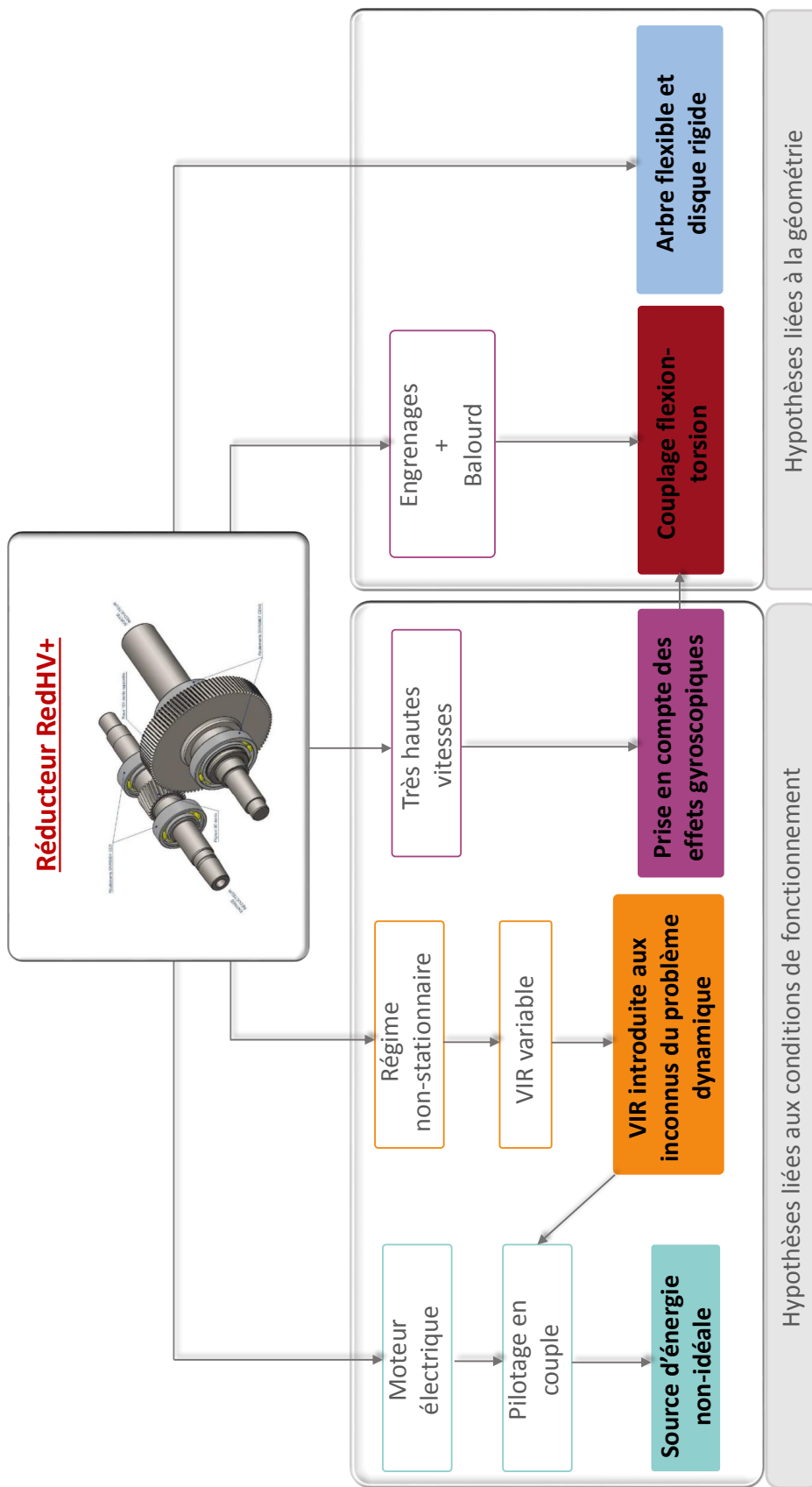


FIGURE 1.19: Hypothèses adaptées à la modélisation du réducteur de vitesse du projet RedHV+



# Bibliographie

- [1] Michael I Friswell, John ET Penny, Seamus D Garvey, and Arthur W Lees. *Dynamics of rotating machines*. Cambridge University Press, 2010. 4, 13, 16
- [2] mechanical engg. Turbocharger cutaway. <https://mechanical-engg.com/gallery/image/2406-turbocharger-cutawayjpg/>, 2016. 4
- [3] GE. Turbocompresseur. <https://www.ge.com/power/services/gas-turbines/upgrades/f-class-enhanced-compressor>, 2019. 4
- [4] GS.maintenance. Réducteur de vitesse. <http://www.gsmaintenance.fr/Produits/Reducteurs/>, 2019. 4
- [5] Meherwan P Boyce. *Gas turbine engineering handbook*. Elsevier, 2011. 5
- [6] Wilfred Campbell. *Protection of steam turbine disk wheels from axial vibration*. General electric Company, 1924. 6
- [7] Giancarlo Genta. *Dynamics of rotating systems*. Springer Science & Business Media, 2007. 7
- [8] G Genta and C Delprete. Acceleration through critical speeds of an anisotropic, non-linear, torsionally stiff rotor with many degrees of freedom. *Journal of Sound and vibration*, 180(3) :369–386, 1995. 10
- [9] Michel Lalanne and Guy Ferraris. *Rotordynamics prediction in engineering*, volume 2. Wiley, 1998. 10, 11, 13
- [10] HD Nelson and JM McVaugh. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. *Journal of Engineering for Industry*, 98(2) :593–600, 1976. 10
- [11] ES Zorzi and HD Nelson. Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. 1977. 10
- [12] HD Nelson. A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory. 1980. 10
- [13] SP Harsha. Nonlinear dynamic analysis of a high-speed rotor supported by rolling element bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 290(1-2) :65–100, 2006. 10
- [14] Hongrui Cao, Dong He, Songtao Xi, and Xuefeng Chen. Vibration signal correction of unbalanced rotor due to angular speed fluctuation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 107 :202–220, 2018. 10
- [15] AC McCormick and AK Nandi. Cyclostationarity in rotating machine vibrations. *Mechanical systems and signal processing*, 12(2) :225–242, 1998. 10
- [16] Jérôme Antoni. Cyclostationarity by examples. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(4) :987–1036, 2009. 10



- 
- [17] Jérôme Antoni. Cyclic spectral analysis in practice. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2) :597–630, 2007. 10
- [18] Henri BLANC. Dynamique des rotors en torsion. introduction. *Techniques de l'ingénieur. Génie mécanique*, (BM5120) :BM5120–1, 2000. 10
- [19] RB Meuser and EE Weibel. Vibration of a nonlinear system during acceleration through resonance. *Journal of Applied Mechanics*, 15 :21–24, 1948. 11
- [20] Jose L Gomez, Adeline Bourdon, Hugo André, and Didier Rémond. Modelling deep groove ball bearing localized defects inducing instantaneous angular speed variations. *Tribology International*, 98 :270–281, 2016. xi, 11, 12
- [21] M Torkhani, L May, and P Voinis. Light, medium and heavy partial rubs during speed transients of rotating machines : numerical simulation and experimental observation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 29 :45–66, 2012. 12
- [22] Sébastien Roques, Mathias Legrand, Patrice Cartraud, Carlo Stoisser, and Christophe Pierre. Modeling of a rotor speed transient response with radial rubbing. *Journal of Sound and Vibration*, 329(5) :527–546, 2010. 12
- [23] José Manoel Balthazar, Dean T Mook, Hans Ingo Weber, Reyolando MLRF Brasil, A Fenili, D Belato, and JLP Felix. An overview on non-ideal vibrations. *Meccanica*, 38(6) :613–621, 2003. 13, 18
- [24] L Cvetičanin. Dynamics of the non-ideal mechanical systems : A review. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 4(2) :75–86, 2010. 13
- [25] MF Dimentberg, L McGovern, RL Norton, J Chapdelaine, and R Harrison. Dynamics of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply. *Nonlinear Dynamics*, 13(2) :171–187, 1997. 13, 18
- [26] HS Jia. On the bending coupled natural frequencies of a spinning, multispan timoshenko shaft carrying elastic disks. *Journal of sound and vibration*, 221(4) :623–649, 1999. 14
- [27] Hassan Heydari and Amir Khorram. Effects of location and aspect ratio of a flexible disk on natural frequencies and critical speeds of a rotating shaft-disk system. *International Journal of Mechanical Sciences*, 152 :596–612, 2019. 14
- [28] Yukio Hori. A theory of oil whip. *Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics*, 26(2) :189–198, 1959. 14
- [29] R Holmes. The vibration of a rigid shaft on short sleeve bearings. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2(4) :337–341, 1960. 14
- [30] MM Reddi and PR Trumpler. Stability of the high-speed journal bearing under steady load : 1—the incompressible film. 1962. 14
- [31] HS Cheng and PR Trumpler. Stability of the high-speed journal bearing under steady load : 2—the compressible film. *Journal of Engineering for Industry*, 85(3) :274–279, 1963. 14
- [32] EJ Gunter. The dynamics of nonsynchronous precessing turborotors—with particular reference to the jeffcott model. *Final Report F-B2307, Franklin Institute Research Laboratories, Phila., Pa*, 1965. 14
- [33] Jorgen W Lund, Elie B Arwas, HS Cheng, CW Ng, and Coda H Pan. Rotor-bearing dynamics design technology. part iii : design handbook for fluid film type bearings. Technical report, MECHANICAL TECHNOLOGY INC LATHAM NY, 1965. 14

- [34] Edgar J Gunter Jr. Dynamic stability of rotor-bearing systems. 1966. 14
- [35] Jorgen Widebaek Lund. Self-excited, stationary whirl orbits of a journal in a sleeve bearing. 1967. 14
- [36] J Widebaek Lund and FK Orcutt. Calculations and experiments on the unbalance response of a flexible rotor. 1967. 14
- [37] Y Kaneko, H Kanki, and R Kawashita. Steam turbine rotor design and rotor dynamics analysis. In *Advances in Steam Turbines for Modern Power Plants*, pages 127–151. Elsevier, 2017. xi, 15
- [38] Ling Xiang and Nan Gao. Coupled torsion–bending dynamic analysis of gear-rotor-bearing system with eccentricity fluctuation. *Applied Mathematical Modelling*, 50 :569–584, 2017. 16
- [39] Ankur Saxena, Manoj Chouksey, and Anand Parey. Measurement of frfs of coupled geared rotor system and the development of an accurate finite element model. *Mechanism and Machine Theory*, 123 :66–75, 2018. 16
- [40] D NELSON Harold. Rotordynamic modeling and analysis procedures : a review. *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, 41(1) :1–12, 1998. 16
- [41] Alireza Ebrahimi, Mahdi Heydari, and Mehdi Behzad. Optimal vibration control of rotors with an open edge crack using an electromagnetic actuator. *Journal of Vibration and Control*, 24(1) :37–59, 2018. 16
- [42] Shihua Zhou, Zhaohui Ren, Guiqiu Song, and Bangchun Wen. Dynamic characteristics analysis of the coupled lateral-torsional vibration with spur gear system. *International Journal of Rotating Machinery*, 2015, 2015. 16
- [43] Sanjib Chowdhury and Rama K Yedavalli. Vibration of high speed helical geared shaft systems mounted on rigid bearings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 142 :176–190, 2018. 16
- [44] Wei Dou, Nan Zhang, and Zhan-Sheng Liu. The coupled bending and torsional vibrations of the high-speed geared rotor-bearing system. *Journal of Vibration Engineering*, 24(4) :385–393, 2011. 16
- [45] He Chengbing and Yang Li. Influence of rotating speed on the coupled bending and torsional vibrations of turbo-generator unit with rub-impact. *International Journal of Online Engineering*, 2013. 16
- [46] Md Asjad Mokhtar, Ashish Kamalakar Darpe, and Kshitij Gupta. Investigations on bending-torsional vibrations of rotor during rotor-stator rub using lagrange multiplier method. *Journal of Sound and Vibration*, 401 :94–113, 2017. 16
- [47] Md Asjad Mokhtar, Ashish K Darpe, and K Gupta. Experimental investigations on torsional vibrations of a rotor during a rotor-stator rub. In *International Conference on Rotor Dynamics*, pages 534–544. Springer, 2018. 16
- [48] Yang Yang, Huajiang Ouyang, Xiaoli Wu, Yulin Jin, Yiren Yang, and Dengqing Cao. Bending-torsional coupled vibration of a rotor-bearing-system due to blade-casing rub in presence of non-uniform initial gap. *Mechanism and Machine Theory*, 140 :170–193, 2019. 16

- 
- [49] Zhenwei Yuan, Fulei Chu, and Yanli Lin. External and internal coupling effects of rotor's bending and torsional vibrations under unbalances. *Journal of Sound and Vibration*, 299(1-2) :339–347, 2007. 16
- [50] Jiu-hong JIA and Xiao-yao SHEN. Study on nonlinear dynamics of coupled torsional-lateral vibration of the unbalanced rotor system with external excitations [j]. *Turbine Technology*, 1, 2010. 16
- [51] Weidong Jiao, Qingping Yuan, and Yongping Chang. Study on the coupled bending-torsional vibration of unbalanced rotor system with external excitations. In *2012 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering (CSAE)*, volume 1, pages 332–336. IEEE, 2012. 16
- [52] Qing He, Huichun Peng, Pengcheng Zhai, and Yaxin Zhen. The effects of unbalance orientation angle on the stability of the lateral torsion coupling vibration of an accelerated rotor with a transverse breathing crack. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 75 :330–344, 2016. 16
- [53] Aleš Tondl. Some problems of rotor dynamics(book on rotor stability self-excited vibration and nonlinear resonances). *LONDON, CHAPMAN AND HALL, LTD., 1965. 434 P. TRANSLATION*, 1965. 16
- [54] MA Mohiuddin and YA Khulief. Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element. *Journal of Sound and Vibration*, 223(2) :297–316, 1999. 16
- [55] B O Al-bedoor. Transient torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors with rotor-to-stator rubbing. *Journal of Sound and vibration*, 229(3) :627–645, 2000. 16
- [56] BO Al-Bedoor. Modeling the coupled torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(45) :5999–6008, 2001. 16
- [57] O Bernasconi. Bisynchronous torsional vibrations in rotating shafts. *Journal of applied mechanics*, 54(4) :893–897, 1987. 16
- [58] XY Shen, JH Jia, M Zhao, and JP Jing. Coupled torsional-lateral vibration of the unbalanced rotor system with external excitations. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 42(6) :423–431, 2007. 16
- [59] Jun Jiang and Heinz Ulbrich. Stability analysis of sliding whirl in a nonlinear jeffcott rotor with cross-coupling stiffness coefficients. *Nonlinear Dynamics*, 24(3) :269–283, 2001. 17
- [60] M Eissa and NA Saeed. Nonlinear vibration control of a horizontally supported jeffcott-rotor system. *Journal of Vibration and Control*, 24(24) :5898–5921, 2018. 17
- [61] AK Darpe, K Gupta, and A Chawla. Transient response and breathing behaviour of a cracked jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 272(1-2) :207–243, 2004. 17
- [62] Julio Gomez-Mancilla, Jean-Jacques Sinou, VR Nosov, Fabrice Thouverez, and A Zambrano. The influence of crack-imbalance orientation and orbital evolution for an extended cracked jeffcott rotor. *Comptes Rendus Mecanique*, 332(12) :955–962, 2004. 17
- [63] Yukio Ishida. Cracked rotors : industrial machine case histories and nonlinear effects shown by simple jeffcott rotor. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(4) :805–817, 2008. 17
- [64] Qinkai Han and Fulei Chu. Parametric instability of a jeffcott rotor with rotationally asymmetric inertia and transverse crack. *Nonlinear Dynamics*, 73(1-2) :827–842, 2013. 17

- [65] Mohammad A AL-Shudeifat. New backward whirl phenomena in intact and cracked rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, 443 :124–138, 2019. 17
- [66] Arnold Sommerfeld. Beiträge zum dynamischen ausbau der festigkeitslehre. *Physikal Zeitschr*, 3 :266–286, 1902. 17
- [67] Livija Cveticanin, Miodrag Zukovic, and Jose Manoel Balthazar. Two degree-of-freedom oscillator coupled to a non-ideal source. In *Dynamics of Mechanical Systems with Non-Ideal Excitation*, pages 121–140. Springer, 2018. 18
- [68] Michael R Gluse. Acceleration of an unbalanced rotor through its critical speeds. *Naval Engineers Journal*, 79(1) :135–144, 1967. 18
- [69] Kaoru Inoue, Shigeru Yamamoto, Toshimitsu Ushio, and Takashi Hikihara. Torque-based control of whirling motion in a rotating electric machine under mechanical resonance. *IEEE transactions on control systems technology*, 11(3) :335–344, 2003. 18
- [70] AK Samantaray, SS Dasgupta, and R Bhattacharyya. Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems. *International Journal of Engineering Science*, 48(1) :21–36, 2010. 18
- [71] M Karthikeyan, Alfa Bisoi, AK Samantaray, and R Bhattacharyya. Sommerfeld effect characterization in rotors with non-ideal drive from ideal drive response and power balance. *Mechanism and Machine Theory*, 91 :269–288, 2015. 18
- [72] Alfa Bisoi, AK Samantaray, and R Bhattacharyya. Sommerfeld effect in a gyroscopic overhung rotor-disk system. *Nonlinear Dynamics*, 88(3) :1565–1585, 2017. 18
- [73] Anand Srinivasan and Trent W Thurston. The limited-torque acceleration through critical speed phenomenon in rotating machinery. In *ASME Turbo Expo 2012 : Turbine Technical Conference and Exposition*, pages 607–613. American Society of Mechanical Engineers, 2012. 18
- [74] D Dane Quinn. Resonant dynamics in a rotordynamic system with nonlinear inertial coupling and shaft anisotropy. *Nonlinear Dynamics*, 57(4) :623–633, 2009. 18
- [75] Iliya I Blekhman. *Vibrational mechanics : nonlinear dynamic effects, general approach, applications*. World Scientific, 2000. 18
- [76] Katsumasa Matsuura. A study on a rotor passing through a resonance. *Bulletin of JSME*, 23(179) :749–758, 1980. 18
- [77] R Gasch, R Markert, and H Pf ützner. Acceleration of unbalanced flexible rotors through the critical speeds. *Journal of Sound and Vibration*, 63(3) :393–409, 1979. 18
- [78] Laihang Li and Rajendra Singh. Analysis of transient amplification for a torsional system passing through resonance. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 229(13) :2341–2354, 2015. 18





## Chapitre 2

# Nouveau modèle pour l'étude de la dynamique des rotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire

**Résumé** Dans ce chapitre, on présente une modélisation originale du comportement dynamique d'un rotor sous des conditions de fonctionnement **non-stationnaires**. Le modèle prend en considération tout les couplages flexion-torsion possibles introduits à la fois par les effets gyroscopiques intrinsèques à une structure tournante ainsi que par la présence d'un balourd inhérent à la structure. Une attention particulière est apportée à l'écriture de l'expression des effets gyroscopiques sur laquelle on n'apporte aucune simplification ce qui résulte en une expression différente des écritures classiques. Une hypothèse majeure conduisant à cette écriture originale des termes gyroscopiques consiste à introduire la VIR (vitesse instantanée de rotation) comme un ddl du problème dynamique. Comme on l'a souligné au chapitre précédent, la VIR est une quantité qui reflète pas seulement la variation du mouvement du corps rigide au cours du temps, mais aussi toutes les fluctuations provenant des éventuels éléments technologiques constituant le rotor ainsi que de ses vibrations en torsion.

### Sommaire

---

<b>1.1 Introduction aux machines tournantes</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1.1 Les machines tournantes dans l'industrie . . . . .	4
1.1.2 Particularités des machines tournantes . . . . .	5
<b>1.2 Contexte industriel pour la présente étude</b> . . . . .	<b>7</b>
1.2.1 Motivations . . . . .	7
1.2.2 Limites des réducteurs de vitesses existants . . . . .	8
1.2.3 Objectifs du projet RedHV+ . . . . .	8
1.2.4 Objectifs de la thèse . . . . .	8
<b>1.3 Hypothèses de modélisation et leurs conséquences</b> . . . . .	<b>9</b>
1.3.1 Hypothèses sur la vitesse instantanée de rotation (VIR) . . . . .	10
1.3.2 Hypothèses sur la source . . . . .	12
1.3.3 Hypothèses sur la flexibilité de l'arbre et du disque . . . . .	14
1.3.4 Hypothèses sur le couplage flexion-torsion . . . . .	16
1.3.5 Hypothèses sur la prise en compte des effets gyroscopiques . . . . .	17
<b>1.4 Phénomène de Sommerfeld en machines tournantes</b> . . . . .	<b>17</b>
1.4.1 Etude paramétrique sur un rotor rigide . . . . .	18
<b>1.5 Conclusion sur les hypothèses retenues</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>33</b>

## 2.1 Introduction

Plusieurs travaux antérieurs se sont penchés sur la modélisation de la dynamique des rotors sous différentes conditions de fonctionnement. L'objectif de ce chapitre est de construire un nouveau modèle avancé qui permet de prendre en considération le couplage flexion-torsion en conditions de fonctionnement non-stationnaires. On présentera un modèle de la dynamique pour les monorotors qui pourra être facilement étendu à des multirotors. La particularités du modèle dynamique réside dans la façon d'introduire la VIR de rotation dans les inconnues du problème dynamique, permettant ainsi la modélisation du régime non-stationnaire tout en prenant en compte les phénomènes de couplage.

Comme nous pouvons le voir sur la figure (2.1), un monorotor est typiquement composé d'un arbre et d'un ou plusieurs disques qui reposent sur des paliers flexibles. Un autre élément constituant le rotor est le balourd. Ce dernier peut être un défaut de fabrication, de montage ou d'usure. Il peut aussi devoir son apparition suite à une combinaison de toutes ces sources. D'une manière ou d'une autre, la présence d'un défaut de symétrie sur une machine tournante est inévitable, ce qui fait de lui un composant inhérent au rotor.

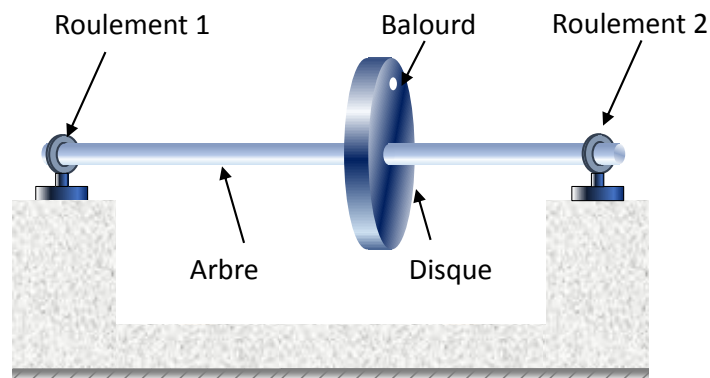


FIGURE 2.1: Exemple de monorotor

## 2.2 Hypothèses de modélisation

Une étape essentielle avant de se lancer dans le développement analytique d'un modèle traduisant le comportement dynamique d'une structure consiste à bien préciser les hypothèses de modélisation. Poser les hypothèses d'une façon claire permet aux futurs utilisateurs un bon usage du modèle ainsi qu'une bonne compréhension de ses limites d'application afin d'avoir des résultats de simulations qui soient représentatifs de la réalité.

Par rapport aux hypothèses étudiées au chapitre précédent, l'étude sera faite sous les hypothèses de modélisation suivantes :

- l'arbre est flexible, il est fait d'un matériau homogène et isotrope ;
- le disque est rigide, lui aussi est fait d'un matériau homogène et isotrope ;
- les paliers sont flexibles et linéaires, ils peuvent être symétriques ou asymétriques ;

**Remarque** : L'utilisation des modèles non-linéaires de palier est compatible avec l'approche mais ne sera pas étudiée dans la suite.



- l'hypothèse des petites déformations en présence des grands déplacements (en rotation) est faite ;
- la source d'énergie est supposée non-idéale, ce qui se traduira, dans les équations de mouvement, par un pilotage en couple ;
- une hypothèse étroitement liée à l'hypothèse de source non-idéale est l'introduction de la VIR dans les inconnues du problème dynamique. De ce fait, aucune loi n'est établie au préalable sur la VIR ( on sait au moins que, par définition, la VIR est non-constante) ;
- la VIR est introduite dans le vecteur ddl à travers la variable  $\theta_z$ . Il est important de rappeler que les fluctuations observées sur ce ddl sont à la fois les perturbations qui touchent le mouvement du corps rigide ainsi que celles qui sont dues à la déformation en torsion.  
Du fait que les vibrations en torsion ne sont pas les mêmes d'un nœud à un autre, il faudra définir pour chaque nœud  $i$  une VIR qui soit propre à lui  $\hat{\theta}_{z_i}$ .
- Les effets gyroscopiques sont pris en compte.

Une représentation graphique des hypothèses de modélisation est donnée par la figure (2.2).

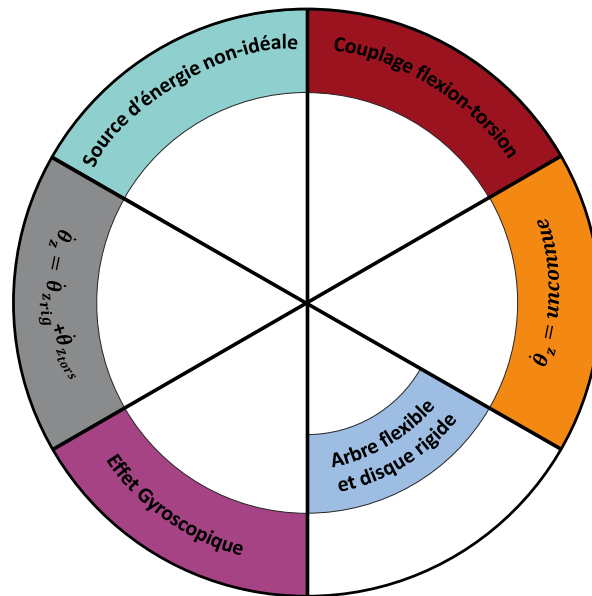


FIGURE 2.2: Hypothèses retenues pour la modélisation

Dans la suite une approche énergétique sera adoptée pour établir les équations du mouvement du rotor. Cette approche consiste à faire un bilan d'énergie sur chacun des éléments constitutifs du rotor. L'arbre, le disque et le balourd participent avec leurs énergies cinétiques de translation et de rotation. L'arbre étant déformable, contribue aussi au bilan d'énergie avec son énergie potentielle de déformation. Quant aux paliers, leur contribution sera prise en compte à travers le principe des travaux virtuels.

La méthode des éléments finis est associée à l'approche énergétique. L'arbre déformable est ainsi discrétisé en des sous-domaines tel que six ddl sont considérés sur chaque nœud de la discrétisation. Une première approximation des champs déplacements est faite sur un élément poutre, elle est ensuite généralisée sur l'arbre par une intégrale spatiale sur toute la longueur. Cela aboutit à une approximation des énergies cinétique et potentielle du rotor qu'on notera

respectivement  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{U}$ . Les équations de mouvement sont finalement obtenues par l'application des équations de Lagrange tel que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = 0 \quad (2.1)$$

avec  $\{\delta\}$  est le vecteur des déplacements généralisés et  $\mathcal{L}$  le scalaire donné par :

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (2.2)$$

Les équations de la dynamique sont présentées de deux manières différentes. Une première représentation analytique est tout d'abord introduite, elle est bien adaptée à la compréhension du lien entre les différentes hypothèses de modélisation et les termes qui apparaissent dans les équations de la dynamique. Ensuite, une deuxième représentation est donnée, elle est mieux adaptée pour le développement numériques des codes de calcul.

## 2.3 Transformation des repères et vecteur de rotation

On définit le repère global  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , repère rattaché au référentiel galiléen. Le repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est le repère local rattaché à la section droite de l'arbre à tout instant, après sa déformation. Au repos, le rotor est tel que sa ligne moyenne coïncide avec l'axe  $\vec{Z}$  (voir figure 2.3).

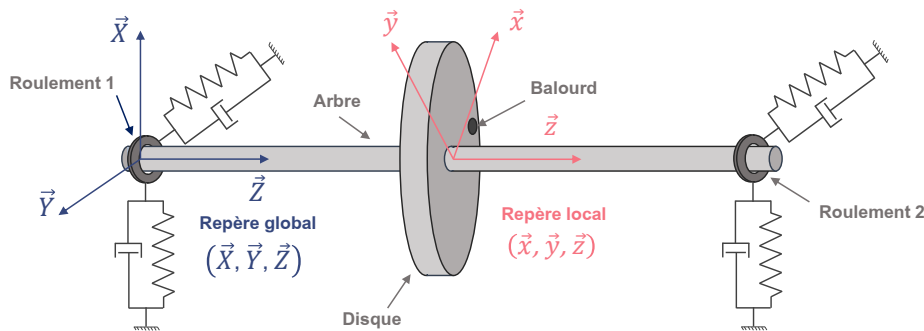


FIGURE 2.3: Illustration du rotor

Soit un point M quelconque de la ligne moyenne de l'arbre du rotor. Le mouvement de l'arbre est décrit par une succession de rotations, appelés angles d'Euler (voir figure 2.4) :

- Une première rotation (précession) d'un angle  $\theta_x$  autour de l'axe  $\vec{X}$  fait passer du repère absolu  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  du référentiel galiléen à un repère intermédiaire  $(\vec{x}_{i_1}, \vec{y}_{i_1}, \vec{z}_{i_1})$ .
- Une rotation (nutations) autour de l'axe  $\vec{y}_{i_1}$  d'un angle  $\theta_y$  transforme le premier repère intermédiaire en un deuxième  $(\vec{x}_{i_2}, \vec{y}_{i_2}, \vec{z}_{i_2})$ .
- Finalement une rotation (rotation propre) d'un angle  $\theta_z$  autour de  $\vec{z}_{i_2}$  permet de passer vers le repère tournant  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  qui est lié à une section de l'arbre déformé ou du disque, définissant ainsi leurs axes principaux.

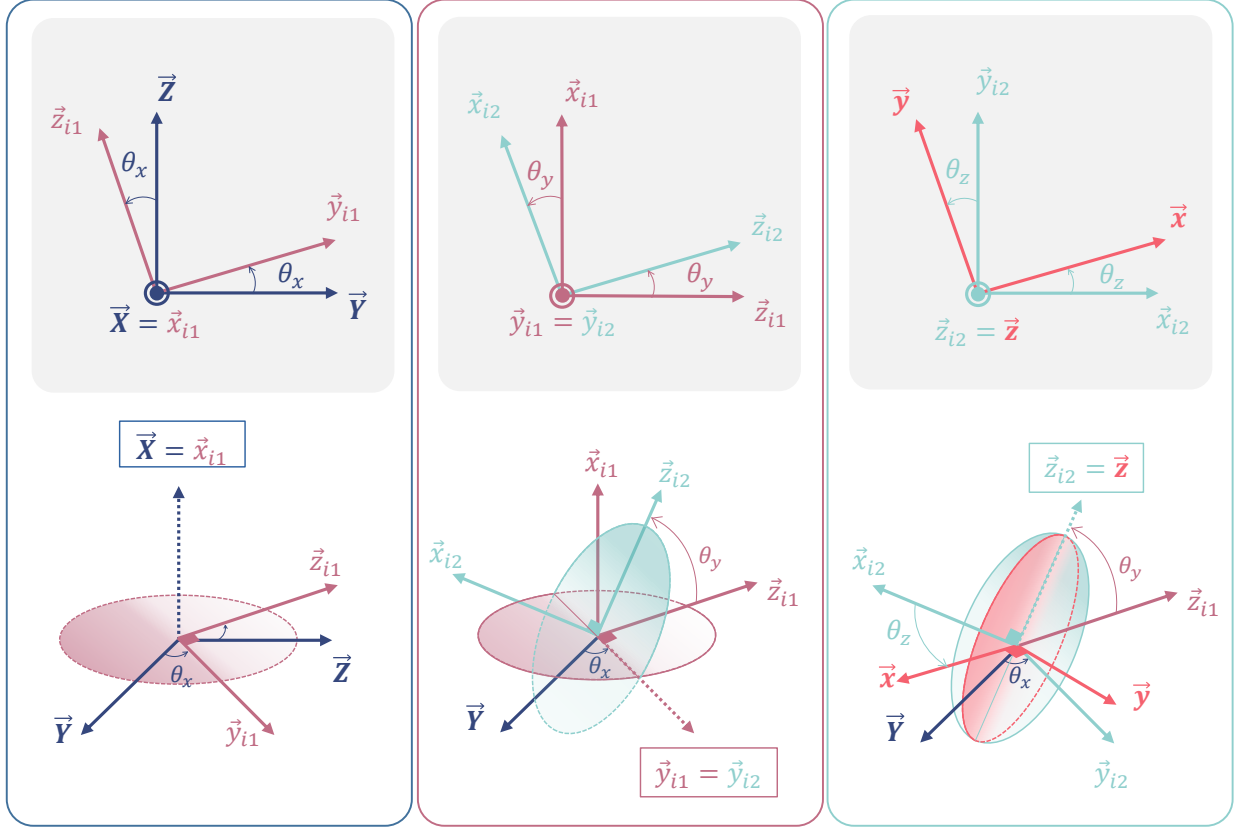


FIGURE 2.4: Repères de passage

La matrice de passage du repère tournant  $R$  au repère absolu  $R_0$  permet d'établir une relation entre ces deux repères permettant de travailler librement dans l'un ou l'autre selon le besoin, elle s'écrit de la manière suivante :

$$[P_R^{R_0}] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y)\cos(\theta_z) & -\cos(\theta_y)\sin(\theta_z) & \sin(\theta_y) \\ \cos(\theta_z)\sin(\theta_x)\sin(\theta_y) + \cos(\theta_x)\sin(\theta_z) & \sin(\theta_z)\sin(\theta_x)\sin(\theta_y) - \cos(\theta_x)\cos(\theta_z) & -\cos(\theta_y)\sin(\theta_x) \\ -\cos(\theta_z)\cos(\theta_x)\sin(\theta_y) + \sin(\theta_x)\sin(\theta_z) & \sin(\theta_z)\cos(\theta_x)\sin(\theta_y) + \sin(\theta_x)\cos(\theta_z) & \cos(\theta_y)\cos(\theta_x) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

De la même façon, la matrice de passage du repère absolu  $R_0$  au repère tournant  $R$  s'écrit comme suit :

$$[P_{R_0}^R] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y)\cos(\theta_z) & \cos(\theta_y)\sin(\theta_z) & -\sin(\theta_y) \\ \cos(\theta_z)\sin(\theta_x)\sin(\theta_y) - \cos(\theta_x)\sin(\theta_z) & \sin(\theta_z)\sin(\theta_x)\sin(\theta_y) + \cos(\theta_x)\cos(\theta_z) & \cos(\theta_y)\sin(\theta_x) \\ \cos(\theta_z)\cos(\theta_x)\sin(\theta_y) + \sin(\theta_x)\sin(\theta_z) & \sin(\theta_z)\cos(\theta_x)\sin(\theta_y) - \sin(\theta_x)\cos(\theta_z) & \cos(\theta_y)\cos(\theta_x) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Le vitesse angulaire totale est une combinaison des trois rotations tel que :

$$\vec{\omega}(R/R_0) = \dot{\theta}_x \vec{X} + \dot{\theta}_y \vec{y}_{i2} + \dot{\theta}_z \vec{z}_{i2} \quad (2.5)$$

La matrice de passage permet d'exprimer le vecteur vitesse de rotation dans le repère tournant,

$\vec{\omega}(R/R_0)_{/R}$ , de la façon suivante :

$$\begin{cases} \omega_{x/R} &= \dot{\theta}_x \cos(\theta_y) \cos(\theta_z) + \dot{\theta}_y \sin(\theta_z) \\ \omega_{y/R} &= -\dot{\theta}_x \cos(\theta_y) \sin(\theta_z) + \dot{\theta}_y \cos(\theta_z) \\ \omega_{z/R} &= \dot{\theta}_x \sin(\theta_y) + \dot{\theta}_z \end{cases} \quad (2.6)$$

**Remarque** La notation utilisée pour désigner les angles d'Euler a été directement confondues avec la notation utilisée pour les ddls en rotation pour la méthode éléments finis. En effet, il a été démontré dans des études précédentes [1, 2] qu'on peut approximer les angles d'Euler avec les ddls en rotation utilisés pour la méthode des éléments finis.

## 2.4 Équations du mouvement : Formulation algébrique

Dans cette section, un modèle pour le comportement dynamique des rotors est développé. Les énergies cinétiques et potentielles sont tout d'abord calculées pour les différents éléments constituant le rotor. Les équations du mouvement sont finalement obtenues à partir de l'application des équations de Lagrange.

### 2.4.1 Le disque

Le disque est supposé être rigide. Dans le but d'écrire ses équations de mouvement, il suffit de calculer son énergie cinétique  $\mathcal{T}_D$  constituée par l'énergie cinétique associée au déplacement de son centre de masse C ainsi que de sa rotation propre en utilisant les angles d'Euler.

La vitesse de déplacement du centre de gravité  $C(u_c, v_c, w_c)$  est donnée par :

$$\vec{V}(C)_{/R_0} = \frac{d\vec{OC}_{/R_0}}{dt} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{u}_c \\ \dot{v}_c \\ \dot{w}_c \end{array} \right\}_{R_0} \quad (2.7)$$

Ce qui permet, connaissant la masse  $m_D$  du disque, de calculer la partie de l'énergie cinétique liée à son mouvement de translation tel que :

$$\mathcal{T}_{Dtrans} = \frac{1}{2} m_D \|\vec{V}(C)_{/R_0}\|^2 \quad (2.8)$$

L'énergie cinétique de rotation est obtenue à partir de la vitesse de rotation du disque  $\vec{\omega}_{/R}$  et de son tenseur d'inertie  $[\bar{I}_C]$  exprimé dans le repère local  $R$ , respectivement donnés par :

$$[\bar{I}_C] = \begin{bmatrix} I_{D_u} & 0 & 0 \\ 0 & I_{D_v} & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_w} \end{bmatrix}_R ; \quad \vec{\omega}_{/R} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{u/R} \\ \omega_{v/R} \\ \omega_{w/R} \end{array} \right\}_R \quad (2.9)$$

**Remarque** Il est important de vérifier que le vecteur vitesse de rotation ainsi que le tenseur d'inertie soient tout les deux exprimés dans le même repère pour le calcul de l'énergie cinétique de rotation. Le choix du repère local est souvent privilégié vu que cela garantit une écriture du tenseur d'inertie sous forme d'une matrice diagonale pour des raisons de symétrie géométrique

du disque et d'isotropie du matériau. La forme particulière prise par le tenseur d'inertie dans le repère local simplifie énormément l'expression analytique de l'énergie cinétique en rotation.

L'énergie cinétique en rotation est ainsi calculée par l'expression suivante :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{/R}^t [\bar{I}_C] \vec{\omega}_{/R} \quad (2.10)$$

L'énergie cinétique totale étant la somme des deux contributions liées au mouvement en translation du disque ainsi qu'à son mouvement de rotation propre, elle est obtenue par superposition des deux contributions tel que :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}} = \mathcal{T}_{\mathcal{D}trans} + \mathcal{T}_{\mathcal{D}rot} \quad (2.11)$$

Ceci permet d'écrire l'expression finale de l'énergie cinétique totale en utilisant les équations (2.7 - 2.10) tel que :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} m_D (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2) + \frac{1}{2} (I_{D_u} \omega_{u/R}^2 + I_{D_v} \omega_{v/R}^2 + I_{D_w} \omega_{w/R}^2) \quad (2.12)$$

Le disque étant symétrique, les moments d'inerties par rapport aux axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont égaux, à savoir :  $I_{D_u} = I_{D_v} = I_d^D$ . Le moment d'inertie polaire sera noté par la suite  $I_{D_w} = I_p^D$ . L'hypothèse des petits déplacements permet de négliger les termes du second ordre en  $\theta_x$  et  $\theta_y$  ce qui permet d'aboutir à l'écriture finale de l'expression de l'énergie cinétique sous la forme suivante :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} [m_D (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2) + I_p^D \dot{\theta}_{z_c}^2 + 2I_p^D \dot{\theta}_{z_c} \dot{\theta}_{x_c} \theta_{y_c} + I_d^D (\dot{\theta}_{x_c}^2 + \dot{\theta}_{y_c}^2)] \quad (2.13)$$

**Remarque :** Le terme  $I_p^D \dot{\theta}_{z_c}^2$  ne serait pas intervenu dans les équations de mouvement si on était dans une approche qui repose sur l'hypothèse du régime permanent qui consiste à dire que  $\dot{\theta}_{z_c} = \Omega = \text{constante}$ .

On définit le vecteur déplacement nodal du centre du disque  $\{\delta_c\}$ , caractérisé par ses six degrés de liberté tel que :

$$\{\delta_c\} = \{u_c; v_c; w_c; \theta_{x_c}; \theta_{y_c}; \theta_{z_c}\}_{R_0} \quad (2.14)$$

L'application des équations de Lagrange à l'équation précédente (2.13), calculées par rapport à chacune des variables d'état du vecteur déplacement, donne les équations suivantes :

$$u_c : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \dot{u}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial u_c} = m_D \ddot{u}_c \quad (2.15a)$$

$$v_c : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \dot{v}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial v_c} = m_D \ddot{v}_c \quad (2.15b)$$

$$w_c : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \dot{w}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial w_c} = m_D \ddot{w}_c \quad (2.15c)$$

$$\theta_{x_c} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \dot{\theta}_{x_c}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \theta_{x_c}} = I_d^D \ddot{\theta}_{x_c} + I_p^D \ddot{\theta}_{z_c} \theta_{y_c} + I_p^D \dot{\theta}_{z_c} \dot{\theta}_{y_c} \quad (2.15d)$$

$$\theta_{y_c} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \dot{\theta}_{y_c}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \theta_{y_c}} = I_d^D \ddot{\theta}_{y_c} - I_p^D \dot{\theta}_{z_c} \dot{\theta}_{x_c} \quad (2.15e)$$

$$\theta_{z_c} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \dot{\theta}_{z_c}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \theta_{z_c}} = I_p^D \ddot{\theta}_{z_c} + I_p^D \ddot{\theta}_{x_c} \theta_{y_c} + I_p^D \dot{\theta}_{x_c} \dot{\theta}_{y_c} \quad (2.15f)$$

Ce qui résulte en le système matriciel suivant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \dot{\delta}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \delta_c} = [M_D] \{\ddot{\delta}_c\} + [G_D] \{\dot{\delta}_c\} + [K_D] \{\delta_c\} + \{F_D^{coup}\} \quad (2.16)$$

Tel que :

$$[M_D] = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_d^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p^D \end{bmatrix} \quad [G_D] = \dot{\theta}_{z_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_p^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$[K_D] = \ddot{\theta}_{z_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{F_D^{coup}\} = I_p^D \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_{x_c} \theta_{y_c} + \dot{\theta}_{x_c} \dot{\theta}_{y_c} \end{array} \right\}$$

$[M_D]$ ,  $[G_D]$ ,  $[K_D]$  sont respectivement la matrice de masse classique, la matrice des effets gyroscopiques et la matrice de « raideur supplémentaire » liée à l'hypothèse du régime non-stationnaire. Le vecteur des efforts  $\{F_D^{coup}\}$  dépend à la fois des angles de flexion ainsi que les vitesses et accélérations qui leurs sont associés. Il a seulement une composante non-nulle correspondant à un moment suivant l'axe de rotation qui interviendra dans l'équation de la dynamique du mouvement en rotation angulaire (eq.2.15f). Ce moment interne introduit un couplage entre le comportement vibratoire latérale et la VIR. Il découle ainsi directement de l'hypothèse de source non-idéale.

### 2.4.2 Le balourd

Un balourd peut être modélisé par une masse concentrée située au niveau d'un point B d'une section de l'arbre. On suppose que le centre géométrique du balourd est le point C. A l'arrêt, donc avant la déformation de l'arbre (point C sur l'axe  $\vec{Z}$ ), il est représenté par la figure (2.5). Il est caractérisé par sa masse  $m_u$  ainsi que par sa position définie par :

- sa position  $w_c$  sur l'axe  $\vec{Z}$  ;
- Son excentricité  $e$  définie comme étant sa distance par rapport au centre géométrique  $C(u_c, v_c)$  (voir Fig.2.6) ;
- l'angle du vecteur  $\vec{CB}$  par rapport au vecteur tournant  $\vec{x}$ . On suppose dans ce qui suit que la position du balourd coïncide avec l'axe  $\vec{x}$ .

La position du balourd, dans le repère  $R_0$ , est ainsi donnée par la relation vectorielle suivante :

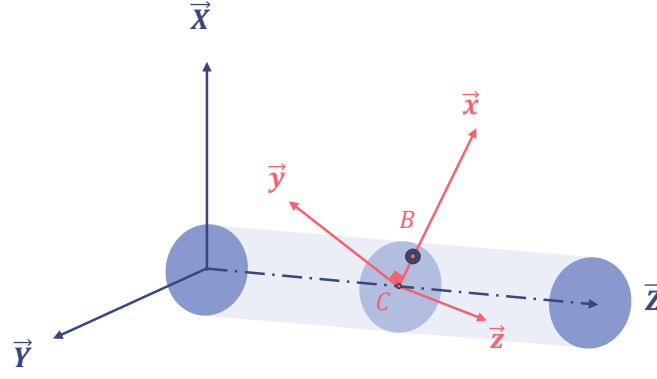


FIGURE 2.5: Modélisation du balourd sur le rotor au repos

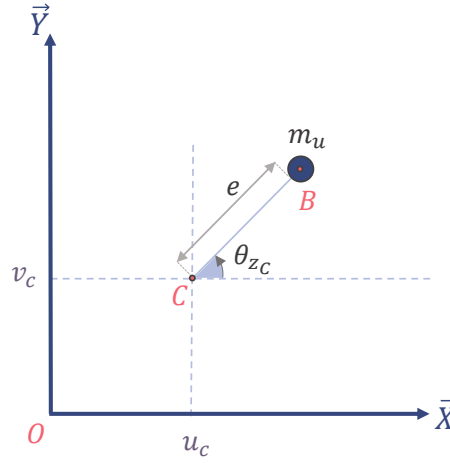


FIGURE 2.6: Repérage du balourd

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB}_{/R_0} &= \overrightarrow{OC}_{/R_0} + \overrightarrow{CB}_{/R_0} \\ &= \begin{Bmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{Bmatrix}_{R_0} + e \begin{Bmatrix} \cos(\theta_{z_c}) \\ \sin(\theta_{z_c}) \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le vecteur position étant exprimé dans le repère  $R_0$ , la vitesse se calcule directement par une dérivée temporelle :

$$\vec{V}(B)_{/R_0} = \frac{d\overrightarrow{OB}_{/R_0}}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{v}_c \\ \dot{w}_c \end{Bmatrix}_{R_0} + e \dot{\theta}_{z_c} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta_{z_c}) \\ \cos(\theta_{z_c}) \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \quad (2.19)$$

L'énergie cinétique relative au mouvement du balourd s'écrit ainsi :

$$\mathcal{T}_u = \frac{1}{2} m_u (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2) + \frac{1}{2} m_u \dot{\theta}_{z_c}^2 e^2 + e m_u \dot{\theta}_{z_c} (\dot{v}_c \cos(\theta_{z_c}) - \dot{u}_c \sin(\theta_{z_c})) \quad (2.20)$$

Si on considère que la masse  $m_u$  est déjà comprise dans la masse du disque, la quantité  $\left[\frac{1}{2} m_u (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2)\right]$  serait déjà comprise dans l'énergie cinétique calculée précédemment pour le disque (Eq. 2.12). L'énergie cinétique du balourd sera donc simplifiée sous la forme suivante :

$$\mathcal{T}_u = \frac{1}{2} m_u \dot{\theta}_{z_c}^2 e^2 + e m_u \dot{\theta}_{z_c} (\dot{v}_c \cos(\theta_{z_c}) - \dot{u}_c \sin(\theta_{z_c})) \quad (2.21)$$

L'application des équations de Lagrange, calculées suivant les différentes variables d'état du vecteur déplacement  $\{\delta_c\}$ , donne les équations suivantes :

$$u_c : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_u}{\partial \dot{u}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_u}{\partial u_c} = -e m_u \sin(\theta_{z_c}) \ddot{\theta}_{z_c} - e m_u \dot{\theta}_{z_c}^2 \cos(\theta_{z_c}) \quad (2.22a)$$

$$v_c : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_u}{\partial \dot{v}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_u}{\partial v_c} = e m_u \cos(\theta_{z_c}) \ddot{\theta}_{z_c} - e m_u \dot{\theta}_{z_c}^2 \sin(\theta_{z_c}) \quad (2.22b)$$

$$\theta_{z_c} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_u}{\partial \dot{\theta}_{z_c}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_u}{\partial \theta_{z_c}} = m_u e^2 \ddot{\theta}_{z_c} + e m_u \cos(\theta_{z_c}) \ddot{v} - e m_u \sin(\theta_{z_c}) \ddot{u} \quad (2.22c)$$

Les trois équations précédentes sont équivalentes à l'équation matricielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_u}{\partial \dot{\delta}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_u}{\partial \delta_c} = [M_u(\theta_{z_c})] \{\ddot{\delta}_c\} + \{F_{NL_u}(\theta_{z_c})\} \quad (2.23)$$

Tel que :

$$[M_u(\theta_{z_c})] = ([M_{u_1}(\theta_{z_c})] + [M_{u_2}(\theta_{z_c})]) \quad (2.24)$$

Les matrices  $[M_{u_1}]$ ,  $[M_{u_2}]$  ainsi que le vecteur  $\{F_{NL_u}\}$  sont donnés par :

$$[M_{u_1}(\theta_{z_c})] = e m_u \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_{z_c}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_{z_c}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [M_{u_2}(\theta_{z_c})] = e m_u \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_{z_c}) & \cos(\theta_{z_c}) & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

$$\{F_{NL_u}(\theta_{z_c})\} = -e m_u \dot{\theta}_{z_c}^2 \begin{Bmatrix} \cos(\theta_{z_c}) \\ \sin(\theta_{z_c}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Le balourd est classiquement pris en considération dans les équations du mouvement à travers l'effort centrifuge  $\{F_{NL_u}\}$ . Cependant, sous les hypothèses de modélisation choisies, notamment les hypothèses de non-stationnarité et de source non-idéale d'énergie, deux matrices supplémentaires sont aussi prises en considération dans la modélisation.

La première matrice,  $[M_{u_1}(\theta_{z_c})]$ , contient des termes non nuls seulement sur la dernière colonne. Ces termes multipliés par l'accélération angulaire n'auraient aucune contribution si l'hypothèse de VIR parfaitement constante était faite. Les termes non-nuls de la matrice  $[M_{u_1}(\theta_{z_c})]$  introduisent un couplage entre les vibrations latérales et la VIR.



La matrice  $[M_{u2}(\theta_{z_c})]$ , quant à elle, contient des termes non nuls seulement sur la sixième ligne correspondant au ddl de rotation angulaire. Cette matrice introduit à nouveau le couplage entre les vibrations latérales et la VIR. Cette matrice est donc liée à l'hypothèse de source non-idéale d'énergie.

Ainsi, à travers les deux matrices  $[M_{u1}(\theta_{z_c})]$  et  $[M_{u2}(\theta_{z_c})]$  (Eq.2.25), le balourd, sous les hypothèses de modélisation choisies, introduit un couplage flexion-torsion.

### 2.4.3 L'arbre

L'arbre est considéré comme déformable en traction-compression, flexion et torsion. Il est à section pleine et constante. L'approche énergétique étant utilisée, on rappelle que l'obtention des équations de la dynamique passe par le calcul de l'énergie cinétique du déplacement et l'énergie potentielle de déformation.

Afin de passer d'une écriture aux dérivées partielles des équations du mouvement à une écriture algébrique, la méthode des éléments finis sera utilisée dans la suite.

#### Approximation par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis donne une discrétisation et une description complète du système à étudier grâce à un grand nombre de degrés de liberté. Elle est utilisée afin de prévoir le comportement dynamique des rotors complexes et industriels dont les déplacements sont exprimés par des variables spatiales et temporelles séparées comme pour la méthode de RAYLEIGH-RITZ. Les formules matricielles sont ensuite créées en intégrant les fonctions de forme des éléments déformables sur toute la structure.

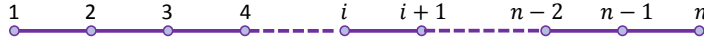


FIGURE 2.7: Arbre discrétisé

L'arbre est ainsi discrétisé en utilisant la méthode des éléments finis (Fig. 2.7). Six degrés de liberté sont définis sur chaque nœud  $i$  et le vecteur déplacement nodal  $\{\delta^i\}$  est défini de la façon suivante :

$$\{\delta^i\} = \{u_i; v_i; w_i; \theta_{x_i}; \theta_{y_i}; \theta_{z_i}\} \quad (2.26)$$

**Rappel :** Si la composante macroscopique de la VIR (relative au mouvement du corps rigide) est la même pour tous les nœuds, les fluctuations provenant d'une déformation en torsion ne sont pas les mêmes. D'où l'intérêt de définir pour chaque nœud  $i$  un ddl  $\theta_{z_i}$ .

Le vecteur déplacement sur un élément est défini à partir des déplacements nodaux (Eq.2.26) donnés par :

$$\{\delta^e\} = \{u_1; v_1; w_1; \theta_{x_1}; \theta_{y_1}; \theta_{z_1}; u_2; v_2; w_2; \theta_{x_2}; \theta_{y_2}; \theta_{z_2}\} \quad (2.27)$$

Ce vecteur peut être décomposé, en fonction de la nature de la déformation de la poutre, en les vecteurs suivants :

- Le vecteur déplacements élémentaires dans le plan (XZ) (voir Fig 2.8) :

$$\{\delta_u^e\}^t = (u_1; \theta_{y1}; u_2; \theta_{y2}) \quad (2.28)$$

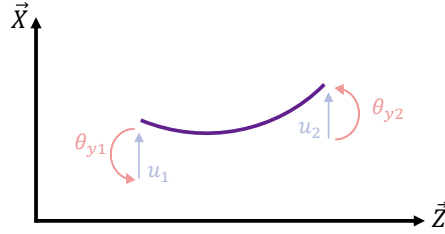


FIGURE 2.8: Les déplacements en flexion dans le plan (XZ)

- Le vecteur déplacements élémentaires dans le plan (YZ) (voir Fig 2.9) :

$$\{\delta_v^e\}^t = (v_1; \theta_{x1}; v_2; \theta_{x2}) \quad (2.29)$$

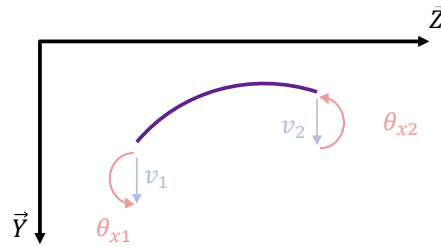


FIGURE 2.9: Les déplacements en flexion dans le plan (YZ)

- Finalement, les vecteurs déplacements élémentaires en translation suivant l'axe  $\vec{Z}$  et en rotation autour du même axe sont donnés par :

$$\{\delta_w^e\}^t = (w_1; w_2) \quad ; \quad \{\delta_{\theta_z}^e\}^t = (\theta_{z1}; \theta_{z2}) \quad (2.30)$$

Les champs déplacements en traction-compression, flexion et torsion sont ainsi approximés sur chaque élément de longueur  $l$  en utilisant des fonctions de forme ainsi que les vecteurs déplacements élémentaires ( 2.28 - 2.30) de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(z, t) = \{N_1(z)\}^t \{\delta_u^e(t)\} \quad ; \quad \theta_x(z, t) = -\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -\left\{ \frac{\partial N_2(z)}{\partial z} \right\}^t \{\delta_u^e(t)\} \\ v(z, t) = \{N_2(z)\}^t \{\delta_v^e(t)\} \quad ; \quad \theta_y(z, t) = \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial N_1(z)}{\partial z} \right\}^t \{\delta_u^e(t)\} \\ w(z, t) = \{N_3(z)\}^t \{\delta_w^e(t)\} \quad ; \quad \theta_z(z, t) = \{N_3(z)\}^t \{\delta_{\theta_z}^e(t)\} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

tel que  $\{N_1\}$  et  $\{N_2\}$  sont des vecteurs avec des fonctions de forme polynomiales cubiques tandis que  $\{N_3\}$  est un vecteur avec des fonctions de forme linéaires. Ces fonctions de formes

sont définies par [3] :

$$\begin{aligned} \{N_1(z)\}^t &= \left( 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3} ; z - \frac{2z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} ; \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3} ; -\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \right) \\ \{N_2(z)\}^t &= \left( 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3} ; -z + \frac{2z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} ; \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3} ; \frac{z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} \right) \\ \{N_3(z)\}^t &= \left( 1 - \frac{z}{l} ; \frac{z}{l} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

La discrétisation spatiale des champs déplacements d'un élément poutre, définis par le vecteur  $\{\delta^e\}$  (Eq.2.27) permettra par la suite d'aboutir à une expression algébrique du bilan énergétique tout au long de l'arbre.

### Energie cinétique

L'énergie cinétique sur un élément de longueur  $l$  est obtenue par extension de l'expression de l'énergie cinétique du disque (Eq. 2.13) ce qui donne :

$$\mathcal{T}_{se} = \underbrace{\frac{\rho S}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dz}_{1^{er} \text{ terme}} + \underbrace{\rho I_p \int_0^l \dot{\theta}_z^2 dz}_{2^{ème} \text{ terme}} + \underbrace{\frac{\rho I}{2} \int_0^l (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) dz}_{3^{ème} \text{ terme}} + \underbrace{2\rho I_p \int_0^l \dot{\theta}_z \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y dz}_{4^{ème} \text{ terme}} \quad (2.33)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $I_p$  est le moment d'inertie polaire par rapport à l'axe  $\vec{Z}$  et  $I$  est le moment d'inertie diamétral par rapport à l'axe  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  (vue la symétrie de l'arbre le moment quadratique diamétral est le même suivant les deux axes latéraux).

Le premier terme qui apparaît dans l'expression de l'énergie cinétique est relatif aux déplacements en translation, le second terme est relatif à l'énergie cinétique en rotation liée au mouvement du corps rigide et le troisième terme est relatif à l'effet secondaire dû à l'inertie de section. Finalement, le quatrième terme représente l'énergie résultant de l'effet gyroscopique.

Le ddl  $\theta_z$  se présente sous forme d'une fonction qui dépend à la fois du temps et de l'espace  $\theta_z(z, t)$  tel que :

- La dépendance en temps provient essentiellement du fait que, par définition, la VIR est non-constante et donc elle évolue au cours du temps.
- La dépendance en espace provient du fait que le degré de liberté en rotation angulaire  $\theta_z$  superpose au mouvement du corps rigide (uniforme sur tous les nœuds du système) la déformation en torsion qui n'est pas la même tout au long de l'arbre.

L'application de la méthode des éléments finis décrite précédemment permet de remplacer les champs déplacements sur chaque élément poutre par leurs expressions décrites par l'équation (2.31). Les carrés des champs de vitesse dans l'expression de l'énergie cinétique (Eq.2.33) feront ainsi apparaître les matrices suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_1^e]_{(4 \times 4)} = \rho S \int_0^l \{N_1(z)\} \{N_1(z)\}^t dz \quad ; \quad [M_{3r}^e]_{(2 \times 2)} = \rho I_p \int_0^l \{N_3(z)\} \{N_3(z)\}^t dz \\ [M_2^e]_{(4 \times 4)} = \rho S \int_0^l \{N_2(z)\} \{N_2(z)\}^t dz \quad ; \quad [M_4^e]_{(4 \times 4)} = \rho I \int_0^l \left\{ \frac{\partial N_1(z)}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_1(z)}{\partial z} \right\}^t dz \\ [M_{3t}^e]_{(2 \times 2)} = \rho S \int_0^l \{N_3(z)\} \{N_3(z)\}^t dz \quad ; \quad [M_5^e]_{(4 \times 4)} = \rho I \int_0^l \left\{ \frac{\partial N_2(z)}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_2(z)}{\partial z} \right\}^t dz \end{array} \right. \quad (2.34)$$

On aboutit ainsi à l'écriture suivante pour l'expression de l'énergie cinétique élémentaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{se} = & \frac{1}{2} (\{\dot{\delta}_u^e\}^t [M_1^e] \{\delta_u^e\} + \{\dot{\delta}_v^e\}^t [M_2^e] \{\delta_v^e\} + \{\dot{\delta}_w^e\}^t [M_{3t}^e] \{\delta_w^e\}) \\ & + \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_{\theta_z}\}^t [M_{3r}^e] \{\delta_{\theta_z}\} \\ & + \frac{1}{2} (\{\dot{\delta}_u^e\}^t [M_4^e] \{\delta_u^e\} + \{\dot{\delta}_v^e\}^t [M_5^e] \{\delta_v^e\}) \\ & - 2\rho I_p \int_0^l \{N_3\}^t \{\dot{\delta}_{\theta_z}\} \{\dot{\delta}_v^e\}^t \left\{ \frac{\partial N_2}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\}^t \{\delta_u^e\} dz \end{aligned} \quad (2.35)$$

La matrice de masse classique, notée  $[M_{cl}]_e$  se déduit des matrices  $[M_1^e]$ ,  $[M_2^e]$ ,  $[M_{3t}^e]$  et  $[M_{3r}^e]$ . La matrice de masse relative aux effets secondaires des inerties tournantes, notée  $[M_{sec}]_e$ , se déduit des matrices  $[M_4^e]$  et  $[M_5^e]$ . Les détails de calcul de ces matrices sont reportés en Annexe 5.7.

La matrice de masse totale se déduit alors des deux matrices  $[M_{cl}^e]$  et  $[M_{sec}^e]$  de la façon suivante :

$$[M_s^e]_{(12 \times 12)} = [M_{cl}^e]_{(12 \times 12)} + [M_{sec}^e]_{(12 \times 12)} \quad (2.36)$$

Ce qui nous ramène à réécrire l'équation (2.35), en utilisant le vecteur déplacement élémentaire  $\{\delta^e\}$ , sous la forme suivante :

$$\mathcal{T}_{se} = \{\dot{\delta}^e\}^t [M_s^e] \{\delta^e\} + \mathcal{T}_{gyr}^e \quad (2.37)$$

avec :

$$\mathcal{T}_{gyr}^e = -2\rho I_p \int_0^l \{N_3\}^t \{\dot{\delta}_{\theta_z}\} \{\dot{\delta}_v^e\}^t \left\{ \frac{\partial N_2}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\}^t \{\delta_u^e\} dz \quad (2.38)$$

### Expression algébrique du terme gyroscopique élémentaire $\mathcal{T}_{gyr}^e$

Dans la suite, une attention particulière sera portée à l'écriture du couplage flexion-torsion introduit par l'effet gyroscopique intrinsèque à l'arbre en rotation sous les hypothèses de modélisation qui ont été fixées au début du chapitre. Le calcul analytique de l'énergie cinétique due aux effets gyroscopiques est dans notre cas plus compliqué que le calcul que l'on peut trouver dans des travaux de modélisation classiques du fait de l'introduction de la VIR dans les inconnus du problème dynamique.

On voit bien dans l'équation (2.38) que l'on est en présence d'une intégrale sous laquelle apparaît un produit de trois vecteurs de fonctions de formes. Afin d'aboutir à une expression algébrique pour le terme d'énergie  $\mathcal{T}_{gyr}^e$ , on procède à une intégration par parties.

On pose :

$$\begin{cases} f(z, t) = \{N_3\}^t \{\dot{\delta}_{\theta_z}\} \\ \frac{\partial g}{\partial z}(z, t) = \{\delta_v^e\}^t \left\{ \frac{\partial N_2}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\}^t \{\delta_u^e\} \end{cases} \quad (2.39)$$

L'intégration par parties donne :

$$\int_0^l f \frac{\partial g}{\partial z} dz = [f \cdot g]_0^l - \int_0^l \frac{\partial f}{\partial z} g dz \quad (2.40)$$

La fonction de forme  $\{N_3\}$  étant d'ordre 1 (voir Eq.2.32), sa dérivée par rapport à  $z$ , et par conséquent la dérivée de  $f(z, t)$ , est une constante. Cela permet d'écrire :

$$\int_0^l f \frac{\partial g}{\partial z} dz = [f \cdot g]_0^l - \frac{\partial f}{\partial z} \int_0^l g dz \quad (2.41)$$

Cette intégration par partie permet d'écrire (2.38) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{gyr}^e = & -2\rho I_p \left[ \{N_3\}^t \{\dot{\delta}_{\theta_z}^e\} \{\delta_v^e\}^t \left( \int_0^l \left\{ \frac{\partial N_2}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\}^t dz \right) \{\delta_u^e\} \right]_0^l \\ & + 2\rho I_p \left\{ \frac{\partial N_3}{\partial z} \right\}^t \{\delta_{\theta_z}^e\} \{\delta_v^e\}^t \left( \int_0^l \int_0^z \left\{ \frac{\partial N_2}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\} dz dz \right) \{\delta_u^e\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

On note :

$$[A_1(z)] = -2\rho I_p \int_0^z \left\{ \frac{\partial N_2}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\}^t dz \quad ; \quad [A_2] = -2\rho I_p \int_0^l \int_0^z \left\{ \frac{\partial N_2}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\}^t dz dz \quad (2.43)$$

**Remarque :** Les matrices  $[A_1]$  et  $[A_2]$  n'ont aucune propriété de symétrie ou d'anti-symétrie.

L'expression de l'énergie cinétique relative à l'effet gyroscopique s'écrit ainsi :

$$\mathcal{T}_{gyr}^e = \left[ \{N_3(z)\}^t \{\dot{\delta}_{\theta_z}\} \{\delta_v^e\}^t [A_1] \{\delta_u^e\} \right]_0^l - \left\{ \frac{\partial N_3}{\partial z} \right\}^t \{\dot{\delta}_{\theta_z}\} \{\delta_v^e\}^t [A_2] \{\delta_u^e\} \quad (2.44)$$

Il est à noter que  $[A_1(0)] = 0$ . Ceci nous ramène à la simplification du terme de l'énergie cinétique de l'effet gyroscopique de la manière suivante :

$$\mathcal{T}_{gyr}^e = \left( \{N_3(l)\}^t \{\dot{\delta}_{\theta_z}\} \right) \left( \{\delta_v^e\}^t [A_1(l)] \{\delta_u^e\} \right) - \left( \left\{ \frac{\partial N_3}{\partial z} \right\}^t \{\dot{\delta}_{\theta_z}\} \right) \left( \{\delta_v^e\}^t [A_2] \{\delta_u^e\} \right) \quad (2.45)$$

Dans la suite, on utilisera la notation suivante :  $\{.^g\}$  ou  $[.^g]$  pour désigner les vecteurs et les matrices réorganisés sur tout l'élément ayant sur chaque nœud six degrés de libertés. Particulièrement, la réécriture du vecteur  $\{N_3(z)\}^t$  (Eq. 2.32) avec la nouvelle notation donnera :

$$\{N_3^g(z)\}^t = \left( 0; 0; 0; 0; 0; 1 - \frac{z}{l}; 0; 0; 0; 0; 0; \frac{z}{l} \right) \quad (2.46)$$

Le vecteur dérivé des fonctions de forme  $\left\{ \frac{\partial N_3}{\partial z} \right\}^t$  donnera, quant à lui, avec la nouvelle notation :

$$\left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t = \left( 0; 0; 0; 0; 0; 0; -\frac{1}{l}; 0; 0; 0; 0; 0; \frac{1}{l} \right) \quad (2.47)$$

Cette notation nous conduit à la réécriture de l'équation précédente (Eq. 2.45) sous la forme suivante :

$$\mathcal{T}_{gyr}^e = \{N_3^g(l)\}^t \{\dot{\delta}^e\} \left( \{\dot{\delta}^e\}^t [A_1^g] \{\delta^e\} \right) - \left\{ \frac{\partial N_3}{\partial z} \right\}^t \{\dot{\delta}^e\} \left( \{\dot{\delta}^e\}^t [A_2^g] \{\delta^e\} \right) \quad (2.48)$$

Les matrices  $[A_1^g]$  et  $[A_2^g]$  sont détaillées en Annexe.

Passons maintenant à l'application des équations de Lagrange sur l'expression de l'énergie cinétique relative à l'effet gyroscopique de l'arbre (Eq. 2.48). Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_{gyr}^e}{\partial \dot{\delta}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_{gyr}^e}{\partial \delta_e} &= \{N_3^g(l)\} \left( \{\ddot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\delta_e\} + \{\dot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\dot{\delta}_e\} \right) + \left( \{N_3^g(l)\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right) ([A_1^g] \{\delta_e\}) \\ &+ \left( \{N_3^g(l)\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) \left( [A_1^g] - [A_1^g]^t \right) \{\dot{\delta}_e\} \\ &- \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\} \left( \{\ddot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\delta_e\} + \{\dot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\dot{\delta}_e\} \right) - \left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right) ([A_2^g] \{\delta_e\}) \\ &- \left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) \left( [A_2^g] - [A_2^g]^t \right) \{\dot{\delta}_e\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

On introduit la notation suivante :

$$[Gyr^g] = [A_1^g] - [A_1^g]^t \quad (2.50a)$$

$$[\int Gyr^g] = [A_2^g] - [A_2^g]^t \quad (2.50b)$$

**Remarque :** Il est à noter que les matrices  $[Gyr^g]$  et  $[\int Gyr^g]$  sont deux matrices antisymétriques. Ces deux matrices sont détaillées en annexe 5.7.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_{gyre}}{\partial \dot{\delta}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_{gyre}}{\partial \delta_e} &= \{N_3^g(l)\} \underbrace{\left( \{\ddot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\delta_e\} + \{\dot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\dot{\delta}_e\} \right)}_{(e)} + \underbrace{\left( \{N_3^g(l)\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right)}_{(a)} \underbrace{([A_1^g] \{\delta_e\})}_{(a)} \\
&+ \underbrace{\left( \{N_3^g(l)\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right)}_{(b)} [Gyr^g] \{\dot{\delta}_e\} \\
&- \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\} \underbrace{\left( \{\ddot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\delta_e\} + \{\dot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\dot{\delta}_e\} \right)}_{(e)} - \underbrace{\left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right)}_{(c)} \underbrace{([A_2^g] \{\delta_e\})}_{(e)} \\
&- \underbrace{\left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right)}_{(d)} \left[ \int Gyr^g \right] \{\dot{\delta}_e\}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Afin de mieux comprendre la signification des différents termes dans l'équation précédente (Eq.2.51), ils sont réécrits autrement :

- Le terme noté (a) :  $\left( \{N_3^g(l)\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right) ([A_1^g] \{\delta_e\}) = \frac{\ddot{\theta}_{z_2}}{l} [A_1^g] \{\delta_e\}$   
Ce terme est proportionnel à l'accélération angulaire. Comme la VIR ne peut en aucun cas être parfaitement constante, ce terme ne s'annule pas.
- Le terme noté (b) :  $\left( \{N_3^g(l)\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) [Gyr^g] \{\dot{\delta}_e\} = \frac{\dot{\theta}_{z_2}}{l} [Gyr^g] \{\dot{\delta}_e\}$   
Ce terme est proportionnel à la VIR  $\dot{\theta}_{z_2}$ . C'est le terme représentant les effets gyroscopiques pour les machines tournantes. La matrice  $\frac{1}{l} [Gyr^g]$  représente la matrice gyroscopique élémentaire classique.
- Le terme noté (c) :  $\left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right) ([A_2^g] \{\delta_e\}) = \frac{1}{l} (\ddot{\theta}_{z_2} - \ddot{\theta}_{z_1}) [A_2^g] \{\delta_e\}$   
Ce terme découle directement de la prise en compte de la torsion. Comme aucune hypothèse n'est faite sur la variation de la vitesse de déformation en torsion, ce terme n'est pas simplifié ( $\ddot{\theta}_{z_1} \neq \ddot{\theta}_{z_2}$ ).
- Le terme noté (d) :  $\left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) \left[ \int Gyr^g \right] \{\dot{\delta}_e\} = \frac{1}{l} (\dot{\theta}_{z_2} - \dot{\theta}_{z_1}) \left[ \int Gyr^g \right] \{\dot{\delta}_e\}$   
Ce terme découle aussi de la prise en compte de la torsion. Comme, par définition, la VIR compte pour les fluctuations en torsion en plus du mouvement du corps rigide, la VIR n'est pas la même d'un nœud au suivant et donc  $\dot{\theta}_{z_1} \neq \dot{\theta}_{z_2}$ .
- Finalement, les termes notés (e) sont introduits dans le même vecteur de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \{F_{s_e}^{coup}\} &= \{N_3^g(l)\} \left( \{\ddot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\delta_e\} + \{\dot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\dot{\delta}_e\} \right) \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\} \left( \{\ddot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\delta_e\} + \{\dot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\dot{\delta}_e\} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

L'effort  $\{F_{s_e}^{coup}\}$  contient des termes non nuls seulement sur la sixième ligne et la douzième ligne. Cet effort doit sa présence à l'hypothèse de source non-idéale qui consiste à introduire la VIR dans les inconnues du problème dynamique. En effet, l'hypothèse de source non-idéale nous rajoute une équation supplémentaire sur chaque nœud pour traduire la relation entre la source et la réponse de la structure.

Cette réécriture des différents termes de l'équation de Lagrange (Eq.2.51) qui découle de l'énergie cinétique sur un élément arbre donne par la suite :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_{gyr_e}}{\partial \dot{\delta}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_{gyr_e}}{\partial \delta_e} &= \{F_{s_e}^{coup}\} + \frac{1}{l} \ddot{\theta}_{z_2} [A_1^g] \{\delta_e\} + \frac{1}{l} \dot{\theta}_{z_2} [Gyr^g] \{\dot{\delta}_e\} \\ &\quad - \frac{1}{l} (\ddot{\theta}_{z_2} - \ddot{\theta}_{z_1}) [A_2^g] \{\delta_e\} - \frac{1}{l} (\dot{\theta}_{z_2} - \dot{\theta}_{z_1}) \left[ \int Gyr^g \right] \{\dot{\delta}_e\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Passons maintenant à l'application des équations de Lagrange sur l'expression de l'énergie cinétique totale (Eq.2.37), comprenant la contribution de l'effet gyroscopique de l'arbre, elle s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_{s_e}}{\partial \dot{\delta}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_{s_e}}{\partial \delta_e} = [M_s^e] \{\ddot{\delta}_e\} + [G_s^e] \{\dot{\delta}_e\} + [K_{supp_s}^e] \{\delta\} + \{F_{s_e}^{coup}\} \quad (2.54)$$

avec :

$$\begin{cases} [G_s^e] &= \frac{1}{l} \dot{\theta}_{z_2} [Gyr^g] \{\dot{\delta}_e\} - \frac{1}{l} (\dot{\theta}_{z_2} - \dot{\theta}_{z_1}) \left[ \int Gyr^g \right] \{\dot{\delta}_e\} \\ [K_{supp_s}^e] &= \frac{1}{l} \ddot{\theta}_{z_2} [A_1^g] \{\delta_e\} - \frac{1}{l} (\ddot{\theta}_{z_2} - \ddot{\theta}_{z_1}) [A_2^g] \{\delta_e\} \end{cases} \quad (2.55)$$

### Énergie potentielle

L'énergie de déformation requiert les champs de contraintes et de déformations en tout point  $P$  de la poutre. On considère alors un élément de poutre de longueur infinitésimale  $dz$  de section droite ( $S$ ) d'abscisse  $z$ , de centre géométrique  $G$ , portant un point  $P$  de coordonnées  $(u, v)$ . L'énergie potentielle de déformation s'obtient par intégration de l'énergie d'une section de poutre sur la longueur  $l$  :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_S \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dS dz \quad (2.56)$$

où :

- $\varepsilon$  : vecteur des déformations au point  $P$
- $\sigma$  : vecteur des contraintes au point  $P$
- $S$  : Surface d'une section de poutre.



Dans la suite l'énergie potentielle sera calculée pour une poutre non soumise à un effort axial. L'énergie de déformation en flexion d'un élément poutre de longueur  $l$  s'écrit :

$$U_f^e = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz \quad (2.57)$$

où  $E$  est le module d'Young.

L'énergie potentielle de déformation en traction-compression est donnée par :

$$U_{tc}^e = \frac{ES}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \quad (2.58)$$

L'énergie potentielle en torsion quant à elle, s'écrit :

$$U_{to}^e = \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \right)^2 dz \quad (2.59)$$

où  $G$  est le module de cisaillement.

Finalement, l'énergie potentielle totale en l'absence d'un effort extérieur s'écrit :

$$U_{tot}^e = U_f^e + U_{tc}^e + U_{to}^e \quad (2.60)$$

L'utilisation de la discrétisation éléments finis introduite précédemment par l'équation (2.31) nous conduit à l'expression algébrique suivante :

$$U_{tot}^e = \frac{1}{2} \{\delta_u^e\}^t [K_1^e] \{\delta_u^e\} + \frac{1}{2} \{\delta_v^e\}^t [K_2^e] \{\delta_v^e\} + \frac{1}{2} \{\delta_w^e\}^t [K_3^e] \{\delta_w^e\} + \frac{1}{2} \{\delta_{\theta_z}^e\}^t [K_4^e] \{\delta_{\theta_z}^e\} \quad (2.61)$$

tel que les matrices  $[K_1^e]$  et  $[K_2^e]$  sont relatives à la déformation en flexion tandis que la matrice  $[K_3^e]$  est la matrice de déformation en traction-compression et la matrice  $[K_4^e]$  est la matrice de déformation en torsion. Ces matrices sont définies à l'aide des vecteurs de fonctions de forme de la façon suivante :

$$[K_1^e] = EI \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 N_1(z)}{\partial^2 z} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 N_1(z)}{\partial^2 z} \right\}^t dz$$

$$[K_2^e] = EI \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 N_2(z)}{\partial^2 z} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 N_2(z)}{\partial^2 z} \right\}^t dz$$

$$[K_3^e] = ES \int_0^l \left\{ \frac{\partial N_3(z)}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_3(z)}{\partial z} \right\}^t dz$$

$$[K_4^e] = G I_p \int_0^l \left\{ \frac{\partial N_3(z)}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_3(z)}{\partial z} \right\}^t dz$$

La prise en compte de l'effet de cisaillement est directement introduite dans les matrices de flexion à travers le module du cisaillement (voir Annexe).

En passant par le vecteur de degré de liberté global  $\{\delta_e\}$ , cette énergie s'écrit :

$$U_{tot}^e = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^t [K_s^e] \{\delta_e\} \quad (2.62)$$

La matrice  $[K_s^e]$  est obtenue à partir des matrice de raideurs élémentaires  $[K_i^e]_{\{i \in [1,4]\}}$ , elle est détaillée en annexe 5.7.

#### 2.4.4 Équation totale de la dynamique

Étant donnée l'étude précédente, on peut établir, dans un premier temps, l'équation de la dynamique sur un élément poutre en rotation avec les hypothèses de modélisation du départ. Notamment, les équations (2.54) et (2.62) nous conduisent à l'écriture suivante :

$$[M_s^e] \{\ddot{\delta}_e\} + [G_s^e] \{\dot{\delta}_e\} + \left( [K_s^e] + [K_{supp_s}^e] \right) \{\delta_e\} = \{F_{ext}^e\} + \{F_{se}^{coup}\} + \{p^e\} \quad (2.63)$$

$[M_s^e]$  et  $[K_s^e]$  sont respectivement les matrices de masse et de raideur élémentaires. Les matrices  $[G_s^e]$  et  $[K_{supp_s}^e]$  ainsi que le vecteur  $\{F_{se}^{coup}\}$  ont été définis dans une section précédente (voir les équations (2.52) et (2.55)).  $\{F_{ext}^e\}$  est l'effort extérieur appliqué sur un élément poutre et  $\{p^e\}$  est l'effort interne appliqué par les éléments adjacents à l'élément en question.

L'assemblage des matrices élémentaires de l'arbre discrétisé en  $N$  nœuds nous donne l'équation dynamique tout au long de l'arbre tournant. Notamment, les matrices de masse et de raideur globales assemblées tout au long de l'arbre sont définies de la façon suivante :

$$[M_s] = \sum_e [M_s^e] \quad ; \quad [K_s] = \sum_e [K_s^e] \quad (2.64)$$

#### Modélisation de l'amortissement de l'arbre

A partir des matrices  $[M_D]$ ,  $[M_s]$  et  $[K_s]$ , une approche modale est utilisée pour construire la matrice d'amortissement structural de l'arbre.

Sauf que cette façon classique de définir la matrice d'amortissement n'est pas suffisante vu qu'elle ne prend pas en considération la particularité de la présente modélisation introduisant la VIR dans les inconnues du problème dynamique. Il est nécessaire d'introduire un amortissement sur le mouvement du corps rigide afin que le régime permanent puisse être atteint à couple moteur constant [4].

#### Amortissement structural de l'arbre

La matrice d'amortissement structural est construite en utilisant des coefficients modaux  $\xi_i$ . Un coefficient  $\xi_i$  est associé à chaque mode  $i$ . Dans notre démarche on suppose que l'on a un coefficient modal uniforme  $\xi$  pour tous les modes. On note  $[D]$  la matrice des valeurs propres du problème dynamique défini par :

$$([M_s] + [M_D]) \{\ddot{\delta}_e\} + [K_s] \{\delta_e\} = 0 \quad (2.65)$$



### Modélisation des roulements

Le bâti est supposé infiniment rigide, seulement la souplesse des roulements est considérée. Des modèles assez élaborés des roulements pourraient être introduits dans notre approche. Dans cette étude, le choix de représenter les roulements par une modélisation linéaire est fait. On suppose qu'on a un roulement au nœud  $i$  et un autre au nœud  $j$  et que les raideurs ainsi que les amortissements des roulements sont connus. Les termes de couplage qui sont les termes hors diagonaux de la matrice de raideur et de l'amortissement sont supposés nuls. Le principe des travaux virtuels nous donne :

$$\delta W_b = F_{u_i} \delta u_i + F_{v_i} \delta v_i + F_{u_j} \delta u_j + F_{v_j} \delta v_j \quad (2.71)$$

Les efforts qui sont appliqués par les roulements sur l'arbre sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} F_{u_i} \\ F_{v_i} \\ F_{u_j} \\ F_{v_j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{zz_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{xx_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{zz_j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{zz_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{xx_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{zz_j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

La présence des roulements est directement prise en compte dans les matrices de raideur  $[K_s]$  (Eq.2.64) et d'amortissement  $[C_s]$  (Eq.2.70) en rajoutant les termes de raideur et d'amortissement du roulement aux coefficients des matrices relatifs aux degrés de liberté en question.

### Équation totale de la dynamique de la machine tournante

On superpose à ces matrices relatives à la dynamique de l'arbre, les matrices relatives à la dynamique du disque ainsi que du balourd données respectivement par les équations eq.(2.74) et eq.(2.23).

Cela nous conduit à l'équation totale de la dynamique du rotor s'écrivant de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & ([M_s] + [M_D] + [M_u]) \{\ddot{\delta}\} + \left( [C_s] + \sum_e [G_s^e] + [G_D] \right) \{\dot{\delta}\} + \\ & \left( [K_s] + \sum_e [K_{supp_s}^e] + [K_D] \right) \{\delta\} = \{F_{ext}\} - \sum_e \{F_{se}^{coup}\} - \{F_D^{coup}\} - \{F_{Nlu}\} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Un code couleur est utilisé à fin de distinguer les matrices de chaque élément constituant le rotor : le noir pour désigner les matrices relatives à l'arbre, le rouge pour désigner les matrices du disque et le bleu pour désigner celles qui sont liées à la présence du balourd. La prise en compte des roulements a été directement introduite dans les matrices de raideur et d'amortissement de l'arbre.

## 2.5 Équations du mouvement : Écriture utilisée pour le code Matlab

L'écriture matricielle présentée dans la section précédente n'est pas la même que celle utilisée pour le calcul numérique étant donné qu'on utilise un schéma d'intégration numérique explicite de type *ode* sous *matlab*. Utilisant ce type de résolution numérique, la donnée sur le déplacement et la vitesse à un instant  $t_i$  permet de calculer ces informations à l'instant  $t_{i+1}$ . On réécrit ainsi l'équation matricielle de façon à permettre l'expression des matrices et vecteurs seulement en fonction de  $\{\dot{\delta}_c\}$  et  $\{\delta_c\}$ .

### 2.5.1 Le disque

L'équation de la dynamique du disque est réécrite à partir des équations de Lagrange (Eq.2.15a-2.15f) de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \dot{\delta}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_D}{\partial \delta_c} = ([M_{Dcte}] + [M_{Dvar}]) \{\ddot{\delta}_c\} + [G_D] \{\dot{\delta}_c\} + \{F_D^{coup}\} \quad (2.74)$$

Tel que :

$$[M_{Dcte}] = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_d^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p^D \end{bmatrix} \quad [M_{Dvar}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p^D \theta_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p^D \theta_y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[G_D] = \dot{\theta}_{z_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_p^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{F_D^{coup}\} = I_p^D \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{x_c} \dot{\theta}_{y_c} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### 2.5.2 Le balourd

L'écriture matricielle pour le balourd quant à elle ne change pas. On utilise l'équation matricielle donnée par l'équation (2.23).

### 2.5.3 L'arbre

L'application des équations de Lagrange sur l'énergie cinétique relative à l'effet gyroscopique de l'arbre donnée par l'équation (2.53) est adéquate pour comprendre la relation entre les différents termes de l'équation de la dynamique et les hypothèses de la modélisation. Par contre, cette écriture ne permet pas, dans la suite, de résoudre le problème dynamique avec un schéma d'intégration numérique explicite. D'où l'intérêt de réécrire l'équation (2.54) autrement.

On reprend juste-après l'équation (2.51) afin de la réexprimer autrement :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_{gyr_e}}{\partial \dot{\delta}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_{gyr_e}}{\partial \delta_e} &= \{N_3^g(l)\} \left( \underbrace{\{\ddot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\delta_e\} + \{\dot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\dot{\delta}_e\}}_{(a)} \right) + \underbrace{\left( \{N_3^g(l)\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right) ([A_1^g] \{\delta_e\})}_{(b)} \\
 &+ \left( \{N_3^g(l)\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) [Gyr^g] \{\dot{\delta}_e\} \\
 &- \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\} \left( \underbrace{\{\ddot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\delta_e\} + \{\dot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\dot{\delta}_e\}}_{(a)} \right) - \underbrace{\left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right) ([A_2^g] \{\delta_e\})}_{(b)} \\
 &- \left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) \left[ \int Gyr^g \right] \{\dot{\delta}_e\}
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Quelques opérations mathématiques en calcul matriciel permettent d'écrire plus clairement l'expression précédente (Eq.2.75). On utilise principalement les deux règles suivantes :

(a) La transposé d'un scalaire est un scalaire. Ceci nous donne :

- $\{\ddot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\delta_e\} = \{\delta_e\}^t [A_1^g]^t \{\ddot{\delta}_e\}$
- $\{\ddot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\delta_e\} = \{\delta_e\}^t [A_2^g]^t \{\ddot{\delta}_e\}$

(b) La commutativité entre scalaires et vecteurs.

- $\underbrace{\left( \{N_3^g(l)\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right)}_{\text{scalaire}} \underbrace{([A_1^g] \{\delta_e\})}_{\text{vecteur}} = \left( [A_1^g] \{\delta_e\} \{N_3^g(l)\}^t \right) \{\ddot{\delta}_e\}$
- $\underbrace{\left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\ddot{\delta}_e\} \right)}_{\text{scalaire}} \underbrace{([A_2^g] \{\delta_e\})}_{\text{vecteur}} = \left( [A_2^g] \{\delta_e\} \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \right) \{\ddot{\delta}_e\}$

Ces opérations matricielles permettent de passer à l'écriture suivante des équations de Lagrange appliquées sur le terme gyroscopique dans l'énergie cinétique de l'arbre :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_{gyr_e}}{\partial \dot{\delta}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_{gyr_e}}{\partial \delta_e} &= \{N_3^g(l)\} \{\delta_e\}^t [A_1^g] \{\ddot{\delta}_e\} + \left( [A_1^g] \{\delta_e\} \{N_3^g(l)\}^t \right) \{\ddot{\delta}_e\} \\
 &- \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\} \{\delta_e\}^t [A_2^g] \{\dot{\delta}_e\} - \left( [A_2^g] \{\delta_e\} \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \right) \{\dot{\delta}_e\} \\
 &+ \{N_3^g(l)\} \{\dot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\dot{\delta}_e\} + \left( \{N_3^g(l)\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) [Gyr^g] \{\dot{\delta}_e\} \\
 &- \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\} \{\dot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\dot{\delta}_e\} - \left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) \left[ \int Gyr^g \right] \{\dot{\delta}_e\}
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

On aboutit ainsi à une équation matricielle de la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}_s^e}{\partial \dot{\delta}_e} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_s^e}{\partial \delta_e} = [M_s^e] \{\ddot{\delta}_e\} + [S_{gyr}^e] (\{\delta_e\}) \{\dot{\delta}_e\} + \{Fnl_{gyr}^e\} (\{\dot{\delta}_e\}) \tag{2.77}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 [S_{gyr}^e(\{\delta_e\})] &= \{N_3^g(l)\} \{\delta_e\}^t [A_1^g]^t + \left( [A_1^g] \{\delta_e\} \{N_3^g(l)\}^t \right) \\
 &\quad - \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\} \{\delta_e\}^t [A_2^g]^t - \left( [A_2^g] \{\delta_e\} \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \right)
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}
 \{Fnl_{gyr_e}(\{\dot{\delta}_e\})\} &= \{N_3^g(l)\} \{\dot{\delta}_e\}^t [A_1^g] \{\dot{\delta}_e\} + \left( \{N_3^g(l)\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) [Gyr^g] \{\dot{\delta}_e\} \\
 &\quad - \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\} \{\dot{\delta}_e\}^t [A_2^g] \{\dot{\delta}_e\} - \left( \left\{ \frac{\partial N_3^g}{\partial z} \right\}^t \{\dot{\delta}_e\} \right) \left[ \int Gyr^g \right] \{\dot{\delta}_e\}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

**Remarque** On note bien que la matrice  $[S_{gyr}^e]$  ainsi que le vecteur  $\{Fnl_{gyr_e}\}$  sont exprimés uniquement en fonction du vecteur déplacement  $\{\delta_e\}$  et du vecteur vitesse  $\{\dot{\delta}_e\}$ .

#### 2.5.4 Écriture sous forme d'équation d'état

Un schéma explicite pour l'intégration numérique est utilisé, donc à un instant  $t_{i+1}$ , on suppose connus les vecteurs déplacement  $\{\delta\}$  et vitesse  $\{\dot{\delta}\}$  à l'instant  $t_i$  et on cherche à connaître le vecteurs  $\{\ddot{\delta}\}$  à l'instant  $t_{i+1}$ . Ceci permet une évaluation numérique de la matrice  $[S_{gyr}(\{\delta_e\})_i]$ . Étant homogène à une matrice de masse, une fois ses coefficients calculés, la matrice  $[S_{gyr}\{\delta\}]$  peut être assemblée sur toute la structure de la même façon qu'on assemble les matrices de masse ou de raideur classiques.

On arrive finalement à formuler, à chaque pas du temps  $t_i$ , le problème dynamique sur toute la structure de l'arbre en rotation, en présence des efforts extérieurs, de la façon suivante :

$$[M_s]\{\ddot{\delta}\} + [C_s]\{\dot{\delta}\} + [K_s]\{\delta\} = -[S_{gyr}\{\delta\}]\{\ddot{\delta}\} - \{Fnl_{gyr}(\{\dot{\delta}\})\} + \{F_{ext}\} \tag{2.80}$$

Si en plus, on considère la présence du disque et du balourd, l'équation (2.80) devient :

$$\begin{aligned}
 ([M_s] + [M_{Dcte}])\{\ddot{\delta}\} + [C_s]\{\dot{\delta}\} + [K_s]\{\delta\} &= \\
 &\quad - ([S_{gyr}(\{\delta\})] + [M_{Dvar}(\{\delta\})] + [M_u(\theta_{zc})]) \{\ddot{\delta}\} \\
 &\quad - [G_D(\dot{\theta}_{zc})] \{\dot{\delta}\} \\
 &\quad - (\{Fnl_{gyr}(\{\dot{\delta}\})\} + \{F_{NLU}(\theta_{zc})\} + \{F_D^{coup}(\{\dot{\delta}\}, \{\ddot{\delta}\})\}) \\
 &\quad + \{F_{ext}\}
 \end{aligned}$$

(2.81)

Les matrices constantes sont rassemblées au membre gauche de l'équation (2.81) alors que les matrices et les vecteurs qui varient en fonction du temps sont rassemblées au membre droite. En posant :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\dot{\delta}\} \end{Bmatrix} \tag{2.82}$$

l'écriture sous forme d'équation d'état nous donne :

$$\begin{aligned}
 \{\dot{Q}\} &= [A] \{Q\} - [B] ([S_{gyr}(\{Q\})] + [M_{D_{var}}(\{Q\})] + [M_u(\theta_{zc})]) [T] \{\dot{Q}\} \\
 &\quad - [B] [G_D(\dot{\theta}_{zc})] [T] \{Q\} \\
 &\quad + [B] (\{F_{ext}\} - \{F_{nlgyr}(\{\dot{Q}\})\} - \{F_{NLu}(\theta_{zc})\} - \{F_D^{coup}\})
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

Telle que la matrice  $[T]$  est une matrice qui représente l'opération algébrique d'extraction suivante :

$$[T] \{Q\} = \{\delta\} \quad \text{et} \quad [T] \{\dot{Q}\} = \{\ddot{\delta}\} \tag{2.84}$$

Les matrices  $[A]$  et  $[B]$  sont des matrices d'état calculées de la façon suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & [Id] \\ -([M_s] + [M_{D_{cte}}])^{-1}[K_s] & -([M_s] + [M_{D_{cte}}])^{-1}[C_s] \end{bmatrix} ; \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ ([M_s] + [M_{D_{cte}}])^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

Après factorisation, l'équation d'état peut être représentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 ([Id] + [B] ([S_{gyr}(\{Q\})] + [M_{D_{var}}(\{Q\})] + [M_u(\theta_{zc})]) [T]) \{\dot{Q}\} = \\
 ([A] - [B] [G_D(\dot{\theta}_{zc})] [T]) \{Q\} + [B] (\{F_{ext}\} - \{F_{nlgyr}(\{\dot{Q}\})\} - \{F_{NLu}(\theta_{zc})\} - \{F_D^{coup}\})
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

On note pour la suite :

$$[SS] = ([Id] + [B] ([S_{gyr}(\{Q\})] + [M_{D_{var}}(\{Q\})] + [M_u(\theta_{zc})]) [T]) \tag{2.87}$$

Ce qui donne la forme finale de l'équation d'état donnée par :

$$\boxed{\{\dot{Q}\} = [SS^{-1}] ([A] - [B] [G_D(\dot{\theta}_{zc})] [T]) \{Q\} + [B] (\{F_{ext}\} - \{F_{nlgyr}(\{\dot{Q}\})\} - \{F_{NLu}(\theta_{zc})\} - \{F_D^{coup}\})} \tag{2.88}$$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'approche énergétique, associée à la méthode des éléments finis a été utilisée afin d'aboutir aux équations du mouvement d'un rotor à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire. Une des particularité de la modélisation avancée présentée dans ce chapitre est l'introduction de la VIR dans les inconnues du problème dynamique. La VIR a été introduite au premier chapitre et elle était présentée comme étant le signal de vitesse instantanée de rotation dont les fluctuations résultent à la fois des fluctuations du mouvement rigide ainsi que des vibrations en torsion. L'introduction de la VIR dans les inconnus du problème dynamique découle



directement de l'hypothèse de source non-idéale. Cette hypothèse permettra, comme nous allons le voir au chapitre suivant, d'observer les interactions entre le comportement vibratoire sur la direction en rotation et les vibrations latérales. Elle permet aussi de prendre en considération les limites de la source d'énergie à hautes vitesses. Le modèle avancé qui a été présenté, du fait qu'il soit basé sur les hypothèses les moins restrictives, est un modèle complet. Il a été développé pour un monorotor, mais pourra facilement être étendu à des multirotors. Une telle extension fera l'objet du chapitre 4.

# Bibliographie

- [1] Guillaume Mogenier. *Identification et prévision du comportement dynamique des rotors feuilletés en flexion*. PhD thesis, 2011. 41
- [2] Zaki Dakel. *Stabilité et dynamique non linéaire de rotors embarqués*. PhD thesis, 2014. 41
- [3] Michel Lalanne and Guy Ferraris. *Rotordynamics prediction in engineering*, volume 2. Wiley, 1998. 48
- [4] José Luis Gomez Chirinos. *Angle modeling of a rotating machine. Application to wind turbine surveillance*. PhD thesis, Lyon, 2017. 55, 56



## Chapitre 3

# Comparaison du nouveau modèle avec des modèles classiques et mise en évidence du couplage flexion-torsion

**Résumé** Dans ce chapitre on va s'intéresser à des applications numériques s'appuyant sur le nouveau modèle de la dynamique des rotors présenté au chapitre précédent. Nous avons vu que le nouveau modèle a la particularité de prédire le comportement dynamique des machines tournantes en régime non-stationnaire et à très hautes vitesses. Le nouveau modèle éléments finis, tel qu'il a été construit, est un modèle complet qui prend en compte les effets gyroscopiques ainsi que tous les mouvements possibles de la structure à travers la considération des six ddls sur chaque nœud.

Il est montré dans ce chapitre, à partir des cas d'application numériques, non seulement la capacité du modèle à prendre en compte le couplage flexion-torsion mais aussi l'importance de la prise en compte de ce couplage pour une meilleure estimation des vibrations : en flexion et en torsion.

Une première comparaison du nouveau modèle avec un modèle de la dynamique en flexion pure montre que le nouveau modèle permet de mieux estimer les vibrations latérales grâce à sa capacité de représenter le phénomène de Sommerfeld. Nous montrons aussi, en utilisant le nouveau modèle, qu'une excitation en torsion à une fréquence  $f_t$  provoque une modulation en amplitude du signal des vibrations latérales à la fréquence  $f_u$  du balourd.

Une deuxième étude montre la capacité du modèle à prendre en compte le couplage inverse : une excitation latérale engendre des vibrations en torsion qui prennent lieu principalement au passage par les vitesses critiques. Ces vibrations en torsion sont composées uniquement par des fréquences latérales, à savoir la fréquence d'excitation due à la présence d'un balourd,  $f_u$ , ainsi que la première fréquence propre en flexion,  $f_1^b$ .

Finalement, une étude paramétrique est réalisée afin d'évaluer l'impact de certains paramètres sur le couplage flexion-torsion au passage du rotor par des vitesses critiques.

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>37</b>
<b>2.2</b>	<b>Hypothèses de modélisation</b>	<b>37</b>
<b>2.3</b>	<b>Transformation des repères et vecteur de rotation</b>	<b>39</b>
<b>2.4</b>	<b>Équations du mouvement : Formulation algébrique</b>	<b>41</b>
2.4.1	Le disque	41
2.4.2	Le balourd	43
2.4.3	L'arbre	46
2.4.4	Équation totale de la dynamique	55
<b>2.5</b>	<b>Équations du mouvement : Écriture utilisée pour le code Matlab</b>	<b>58</b>
2.5.1	Le disque	58
2.5.2	Le balourd	58
2.5.3	L'arbre	58
2.5.4	Écriture sous forme d'équation d'état	60
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>61</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>

---

### 3.1 Présentation des modèles utilisés pour la comparaison

Dans un premier temps, définissons les notations qui serviront pour désigner les différents modèles utilisés dans la suite :

- **Modèle CBT<sup>1</sup>** : désigne le nouveau modèle qui a été introduit au chapitre précédent (voir Fig.3.1). Ce modèle de la dynamique des rotors prend en considération le couplage flexion-torsion provenant à la fois de l'effet gyroscopique ainsi que du balourd sous les hypothèses de régime non-stationnaire et de source non-idéale.

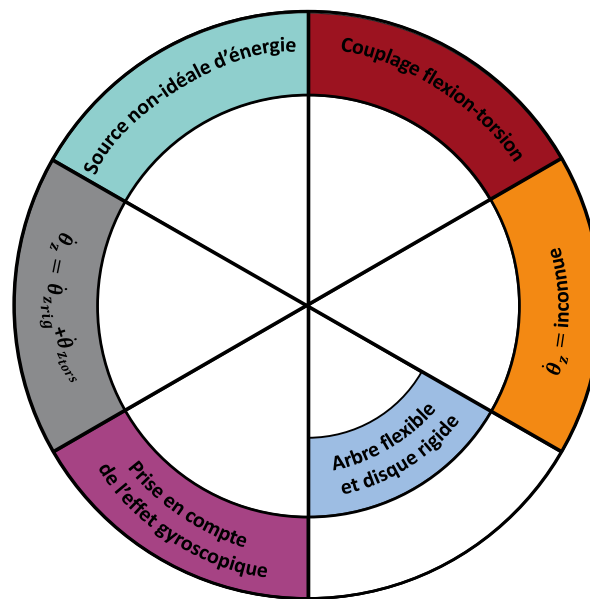


FIGURE 3.1: Hypothèses utilisées pour le modèle CBT

- **Modèle UBTB<sup>2</sup>** : désigne le modèle de la dynamique pour l'étude de la flexion pure. Ce modèle est celui introduit par Lalanne et Ferraris [1]. Il permet d'étudier les principaux phénomènes liés à la dynamique des rotors : étude des modes propres, traçage des diagrammes de Campbell et prédiction de la précession directe ou indirecte du rotor. Pour ce type d'étude, la VIR est introduite comme une entrée du problème dynamique. Seulement les vibrations latérales sont déduites à partir de ce modèle. Dans ce cas, les hypothèses de modélisation sont reportées dans la figure suivante ( Fig.3.2 ) :
- **Modèle UBTT<sup>3</sup>** : Ce modèle permet d'étudier uniquement la réponse d'un rotor en torsion pure. Ce type d'études est particulièrement intéressant en présence d'engrenages. Contrairement au modèle UBTB, ce modèle utilise comme une entrée le couple moteur ainsi que le couple résistant et retourne la réponse vibratoire en torsion. Dans ce cas, les hypothèses de modélisation sont reportées dans la figure suivante ( Fig.3.3 ) :

Les hypothèses utilisées pour la construction des trois modèles sont résumées dans la figure (3.4). On rappelle que, plus on se rapproche du centre du « camembert », moins les hypothèses sont généralistes et donc plus les modèles dynamiques sont contraignants à des cas d'études assez

1. en anglais : Coupled Bending-torsion model

2. en anglais : Uncoupled Bending-Torsion model for the study of Bending

3. en anglais : Uncoupled Bending-Torsion model for the study of Torsion

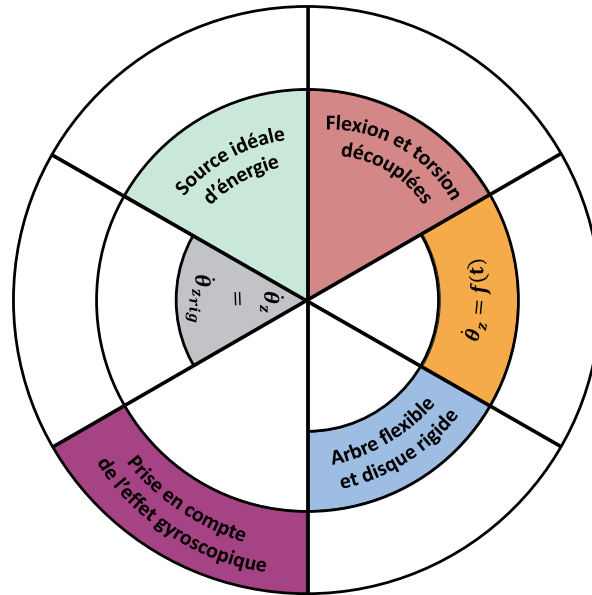


FIGURE 3.2: Hypothèses utilisées pour le modèle UBTB

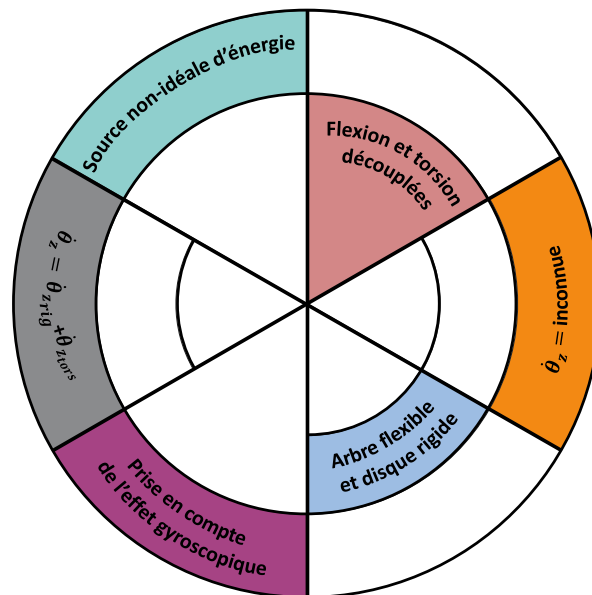


FIGURE 3.3: Hypothèses utilisées pour le modèle UBTT

spécifiques. Les modèles UBTB et UBTT sont obtenus à partir du modèle CBT en relâchant certaines hypothèses.

### 3.1.1 Modèle UBTB : modèle pour l'étude de la flexion pure d'un rotor

Ce modèle permet d'étudier uniquement le comportement dynamique des rotors en flexion. Le modèle UBTB peut être obtenu à partir du modèle CBT en passant aux hypothèses suivantes :

- Non considération de la traction-compression, ni de la torsion dans l'étude.

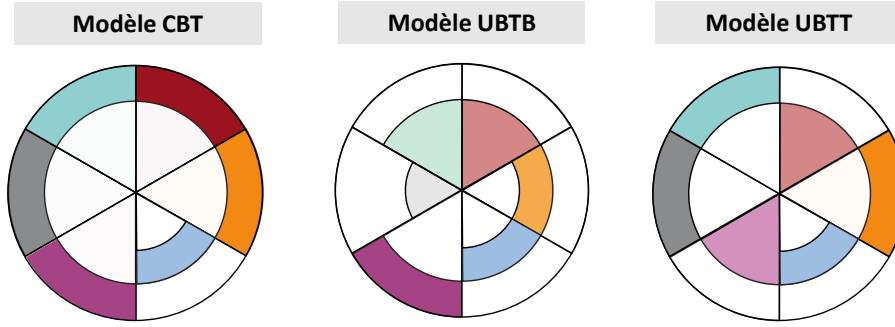


FIGURE 3.4: Bilan des hypothèses des différents modèles utilisés pour la comparaison

- Source idéale d'énergie

**Non considération de la torsion dans l'étude** Un résultat direct de la non inclusion de la traction-compression et de la torsion dans l'étude de la réponse vibratoire du rotor est la réduction de la taille du vecteur des degrés de liberté sur chaque nœud ; la taille du vecteur déplacement nodal passe ainsi de six à quatre tel que :

$$\{\delta^e\} = (v; w; \theta_x; \theta_y) \quad (3.1)$$

Le ddl  $\theta_z$ , directement lié à la VIR, introduit précédemment comme une combinaison du mouvement de corps rigide et de la déformation en torsion, se réduit dans le cas du modèle UBTB à la composante macroscopique, à savoir, le mouvement du corps rigide tel que :

$$\theta_z = \phi \quad (3.2)$$

**Source idéale d'énergie** Cette hypothèse se traduit par le fait que le mouvement du corps rigide  $\phi$  est une donnée du problème dynamique. La vitesse de rotation angulaire est ainsi définie en fonction d'une loi connue au cours du temps :

$$f(t) = \dot{\phi} = \Omega \quad (3.3)$$

Suite à ces deux hypothèses, l'équation de la dynamique du rotor global présentée au chapitre 2 est simplifiée tel que les lignes et les colonnes correspondant aux ddls en torsion sont supprimées ainsi que celles qui correspondent aux ddls de translation axiale.

L'équation de la dynamique devient alors :

$$\left( \sum_e [M_s^e] + [M_D] \right) \{\ddot{\delta}\} + \left( \sum_e [C_s^e] + [G_D] \right) \{\dot{\delta}\} + \left( \sum_e [K_s^e] + [K_D] \right) \{\delta\} = \{F_{ext}\} + \sum_e [S_s^e] + \{F_{NL_u}\} \quad (3.4)$$

avec :



- $\{F_{NL_u}\}$  le vecteur qui représente l'effet du balourd en régime non-stationnaire, il s'écrit :

$$\{F_{NL_u}\} = \begin{Bmatrix} -e m_u \ddot{\phi} \cos(\phi) + e m_u \dot{\phi}^2 \sin(\phi) \\ e m_u \dot{\phi} \sin(\phi) + e m_u \dot{\phi}^2 \cos(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ -e^2 m_u \ddot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

- $[G_D]$  et  $[K_D]$  respectivement la matrice classique des effets gyroscopiques du disque et la matrice de raideur supplémentaire qui résulte de l'hypothèse du régime non-stationnaire. Cette matrice et ce vecteur, sous l'hypothèse de source idéale d'énergie ainsi que l'hypothèse de la non prise en compte de la torsion, prennent la forme suivante :

$$[G_D] = \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p^D \\ 0 & 0 & 0 & -I_p^D & 0 \end{bmatrix} \quad [K_{Dst}] = \ddot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p^D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

- Finalement, la matrice  $[S_s^e]$  directement liée aux effets gyroscopiques de l'arbre prend la forme suivante :

$$[S_s^e] = -\dot{\phi} [Gyr] \{\delta^e\} - \ddot{\phi} [A_1] \{\delta^e\} \quad (3.7)$$

On rappelle que  $[Gyr]$  et  $[A_1]$  sont les mêmes matrices utilisées pour le modèle CBT avec suppression des lignes et des colonnes correspondant aux ddls du mouvement en translation et en torsion.  $[Gyr]$  est la matrice antisymétrique relative aux effets gyroscopiques de l'arbre du rotor et  $[A_1]$  est la matrice de « raideur supplémentaire » qui doit sa présence au régime non-stationnaire.

### 3.1.2 Modèle UBTT : modèle pour l'étude de la torsion pure d'un rotor

Contrairement au modèle UBTB, ce modèle prend uniquement en considération la déformation en torsion. Le vecteur déplacement élémentaire est ainsi réduit à l'écriture suivante :

$$\{\delta^e\} = (\theta_{z_1}; \theta_{z_2}) \quad (3.8)$$

Il est intéressant de noter que le modèle de torsion pure ne montre aucune dépendance à la vitesse de rotation. Les modes propres en torsion sont donc constants quelque soit la vitesse de rotation du rotor.

$$\sum_e ([M_s^e] + [M_D]) \{\ddot{\delta}\} + \sum_e [C_s^e] \{\dot{\delta}\} + \sum_e [K_s^e] \{\delta\} = \{F_{ext}\} \quad (3.9)$$

Les matrices  $[M_s^e]$ ,  $[M_D]$ ,  $[C_s^e]$  et  $[K_s^e]$  sont obtenues simplement en gardant les lignes et les colonnes correspondant aux seuls ddls de torsion.

## 3.2 Simulations numériques pour la comparaison

Dans cette section, une étude comparative est effectuée afin d'évaluer les performances du nouveau modèle dynamique. Une première comparaison est réalisée entre le modèle CBT et le modèle UBTB. Ensuite, la deuxième comparaison est effectuée entre le modèle CBT et le modèle UBTT.

## 3.2.1 Introduction au cas d'étude

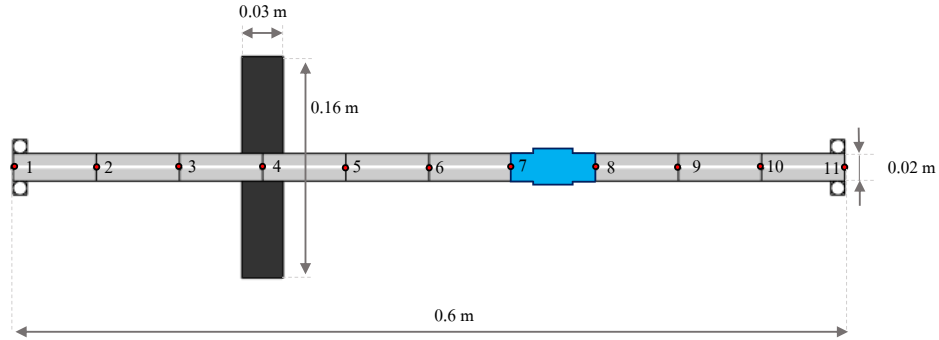


FIGURE 3.5: Rotor étudié

Le rotor est défini par la figure (3.5). Il est constitué d'un arbre flexible, d'un disque rigide, et des paliers symétriques situés au niveau des nœuds 1 et 11. Un balourd ayant une masse  $m_u = 1\% m_D$  est rattaché au rotor au nœud 4. Son excentricité est donnée par  $e = 0.1m$ . Les paliers sont définis par leurs raideurs et amortissements linéaires donnés par :  $c_{xx} = c_{yy} = 1 N.m^{-1}.s$  et  $k_{xx} = k_{yy} = 10^8 N.m^{-1}$ . Le rotor est discrétisé en 10 éléments finis de poutre. Un élément en caoutchouc est introduit entre les nœuds 7 et 8. Cet élément souple pourrait être représentatif d'un accouplement élastique utilisé pour relier les rotors entre eux (voir Fig.3.5).

Les propriétés géométriques ainsi que les propriétés du matériau sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Symbol	Quantité	Valeur	
$L$	longueur de l'arbre	0.6	m
$L_D$	position du disque	0.18	m
$r_o$	rayon extérieur de l'arbre	0.01	m
$r_i$	rayon intérieur de l'arbre	0	m
$R_o$	rayon extérieur du disque	0.08	m
$R_i$	rayon intérieur du disque	0.01	m
$h$	épaisseur du disque	0.03	m
$\rho$	masse volumique de l'acier	7800	$kg.m^{-3}$
$E$	module d'élasticité de l'acier	$2.10^{11}$	$N.m^{-2}$
$E_{rub}$	module d'élasticité du caoutchouc	$2.10^9$	$N.m^{-2}$

TABLE 3.1: Propriétés du rotor

Le diagramme de Campbell pour ce rotor a été reporté sur la figure (3.6). Le diagramme montre que le rotor a trois vitesses critiques dans la plage de vitesse entre  $[0, 45000] tr/min$ . La première vitesse critique est  $\Omega_{cr_1} = 904 rpm$ , la deuxième vitesse critique est  $\Omega_{cr_2} = 10376 rpm$  et finalement, la troisième vitesse critique est donnée par  $\Omega_{cr_3} = 33854 rpm$ . Les déformées modales ont aussi été représentées sur le diagramme de Campbell pour chaque vitesse critique. La première fréquence critique en torsion donnée par  $f_{tors_1} = 492 Hz$  a été aussi représentée sur le diagramme de Campbell.

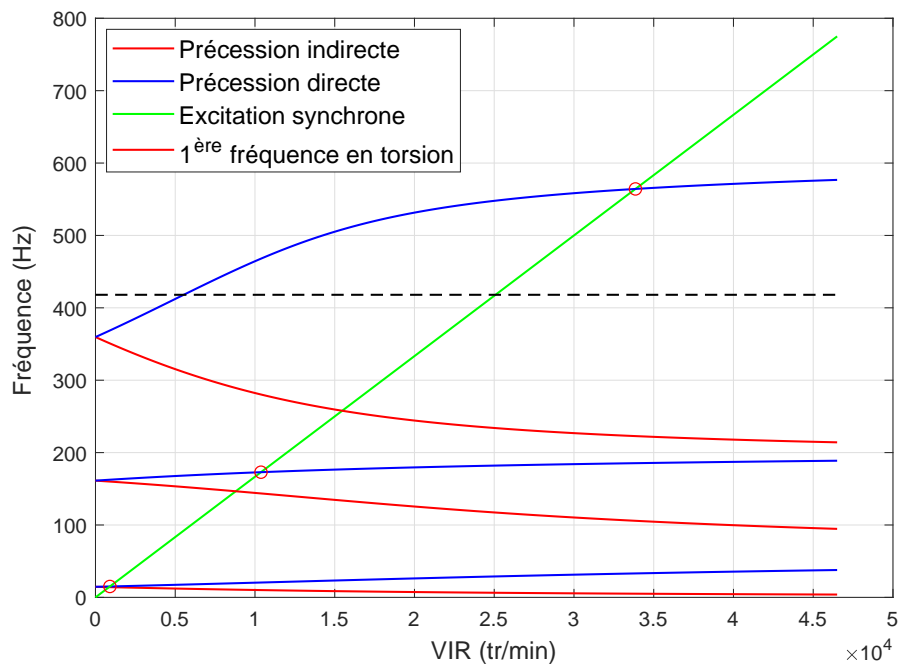


FIGURE 3.6: Diagramme de Campbell

### 3.2.2 Comparaison du modèle CBT avec le modèle UBTB

Cette comparaison permet de montrer l'importance de l'hypothèse de source non-idéale pour une estimation plus précise des vibrations latérales. Elle permet aussi de souligner l'importance de prendre en considération le couplage flexion-torsion, responsable de l'apparition d'une modulation en amplitude des vibrations latérales en présence d'une excitation en torsion.

#### Importance de l'hypothèse de source non-idéale pour une meilleure estimation des vibrations latérales

Une différence majeure entre le modèle UBTB et le modèle CBT réside dans les données d'entrées nécessaires pour résoudre le problème dynamique. Pour le premier modèle, nous introduisons comme donnée d'entrée la vitesse instantanée de rotation  $\Omega$  alors que pour le deuxième modèle nous introduisons comme donnée d'entrée le couple moteur  $C_m$ . Ceci découle de l'hypothèse de source idéale d'énergie pour le premier modèle et de source non-idéale pour le deuxième.

Dans la suite, le choix du couple moteur  $C_m$  (voir fig.3.7) est fait de façon à rapprocher au mieux le signal de la VIR obtenue par le modèle CBT, noté  $\dot{\theta}_z$ , du profil de vitesse pour le modèle UBTB, à savoir  $\Omega$  (voir Fig.3.8).

Les résultats de simulation de la VIR (voir Fig.3.8) montrent que la pente d'évolution est la même pour les deux modèles, sauf aux voisinage de la deuxième et troisième vitesses critiques : la pente d'évolution s'annule momentanément au voisinage de la deuxième vitesse critique  $\Omega_{cr2}$  et elle est plus faible au voisinage de la troisième vitesse critique  $\Omega_{cr3}$ . En d'autres termes, le rotor n'arrive plus à accélérer pendant un certain temps quand il approche la deuxième vitesse critique même si on continue à lui fournir de l'énergie. Quand il approche la troisième vitesse critique, l'accélération ne s'annule pas complètement mais décroît instantanément. Ce comportement du rotor au voisinage des vitesses critiques est connu sous le nom du phénomène de **Sommerfeld**. Ce phénomène est observable par simulation numérique seulement quand l'hypothèse de source

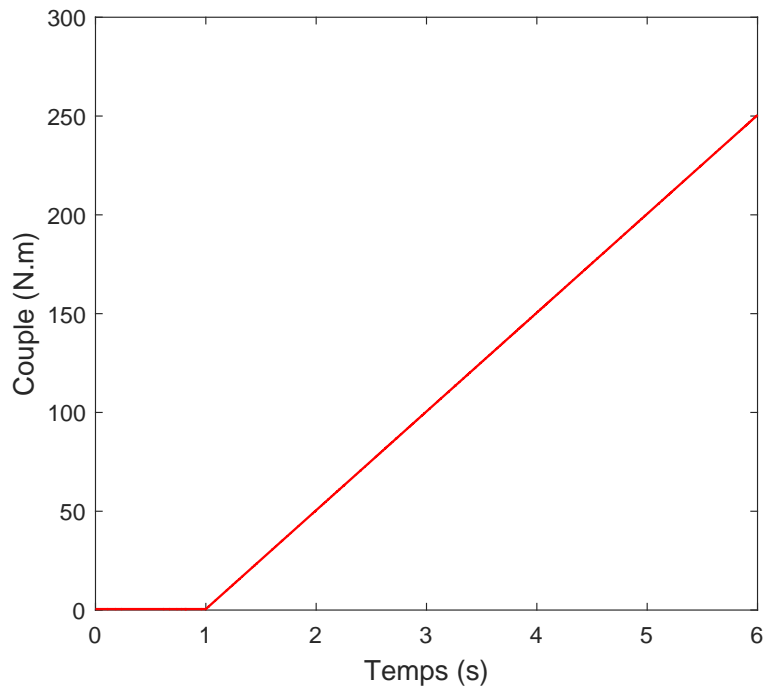


FIGURE 3.7: Profil du couple effectif appliqué

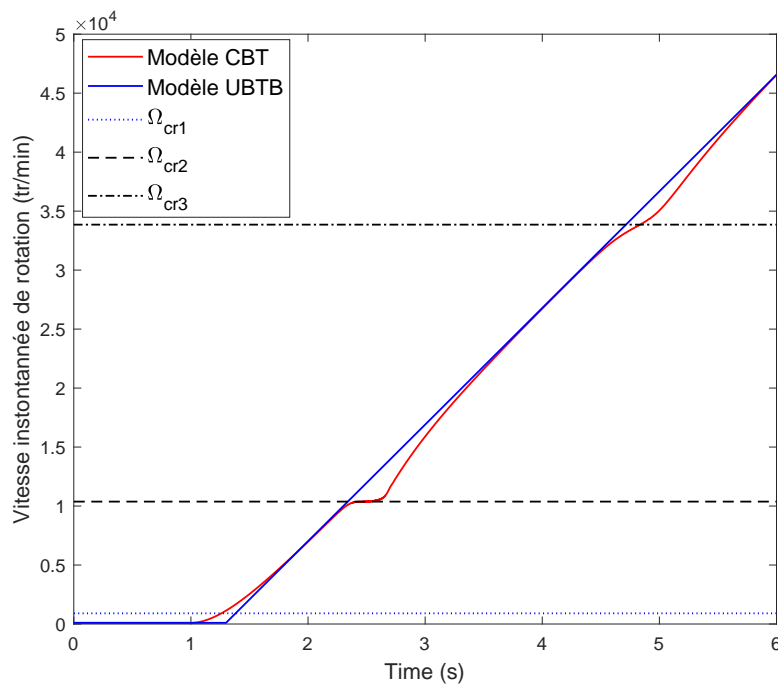
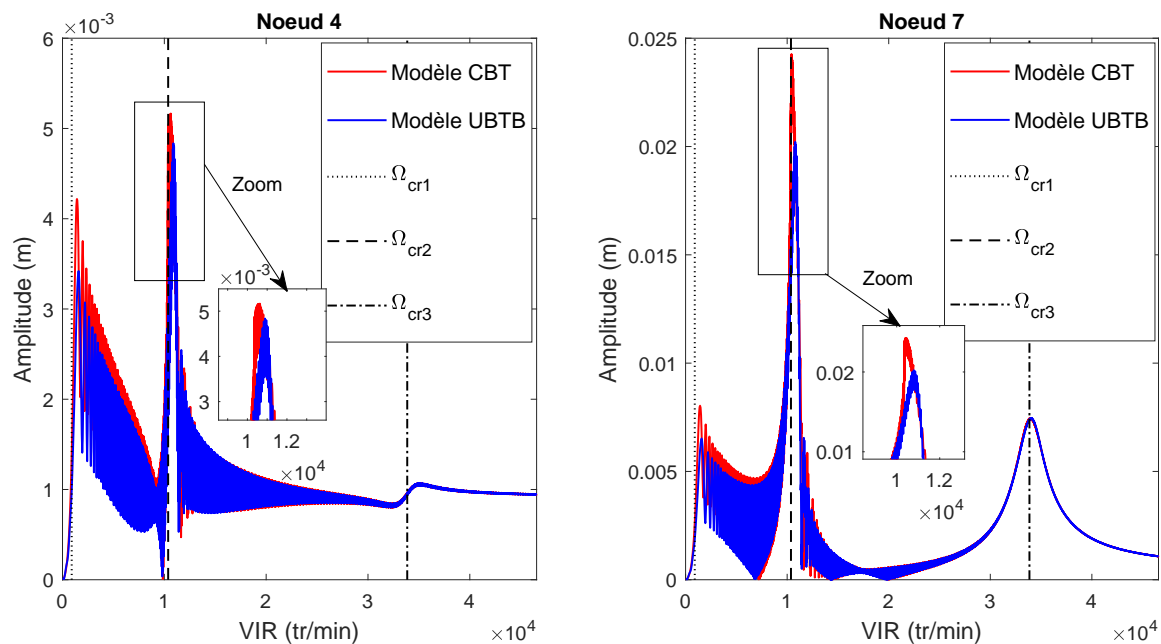


FIGURE 3.8: Comparaison entre le profil de la VIR imposée pour le modèle UBTB et le profil obtenu par le modèle CBT

d'énergie non-idéale est faite. Dans ce cas, quand le phénomène prend lieu, même si on continue à fournir l'énergie au rotor, cette énergie n'est pas utilisée pour faire accélérer le rotor mais plutôt pour amplifier le niveau des vibrations latérales à la résonance.



**FIGURE 3.9:** Comparaison des vibrations latérales obtenues par le modèle UBTB et le modèle CBT sur le nœud 4 (centre du disque) et sur le nœud 7 (liaison élastique)

Les vibrations latérales induites par la présence d'un balourd sont calculées par les deux modèles : CBT et UBTB. La comparaison des résultats de simulation obtenus par les deux modèles montre que le modèle UBTB sous-estime les vibrations latérales (voir Fig.3.9). Ceci s'explique par le fait que le modèle UBTB ne prend pas en considération les échanges d'énergie entre la direction latérale et la direction de la rotation. Comme nous pouvons le constater sur la figure (3.8), le phénomène de Sommerfeld prend lieu à la deuxième et la troisième vitesses critiques. Le rotor passe plus de temps au voisinage de la deuxième vitesse critique qu'au voisinage de la troisième ce qui donne lieu à plus du temps pour l'échange d'énergie entre la direction latérale et celle en rotation. Par conséquent, une amplification des vibrations latérales plus importante est observée au niveau de la deuxième vitesse critique.

L'erreur relative est calculée entre les niveaux vibratoires à la résonance obtenus par les deux modèles. Le calcul est effectué au niveau des deux nœuds particuliers du modèle éléments finis du rotor :

- *nœud 4* : sur lequel le disque est attaché ;
- *nœud 7* : au niveau duquel l'élément souple est placé.

Le calcul de l'erreur relative au niveau de ces deux nœuds, lors du passage par la deuxième vitesse critique, est reporté dans le tableau 3.2.

	nœud 1	nœud 2
Erreur relative (%)	8,3	20

**TABLE 3.2:** Erreur relative pour l'estimation des vibrations latérales lors du passage par la deuxième vitesse critique  $\Omega_{cr2}$

L'erreur relative est non négligeable, surtout au niveau de l'accouplement élastique. Ceci souligne l'importance de l'hypothèse de source non-idéale d'énergie pour une meilleure estimation des vibrations latérales.

Il est important d'estimer avec précision les vibrations latérales afin de garantir une conception assurant un fonctionnement sûr des machines tournantes surtout dans des conditions de fonctionnement sévères.

#### Capacité du modèle CBT à prendre en compte le couplage : mise en évidence à travers l'analyse des vibrations latérales

Afin de souligner la capacité du modèle CBT à prendre en compte le couplage flexion-torsion, nous appliquons, comme proposé dans [2], un couple sinusoïdal externe, noté  $T_{ext}$  au niveau du disque ( donc sur le nœud 4). Ce couple est appliqué sur le rotor en plus du couple moteur. Il s'écrit de la façon suivante :

$$T_{ext} = T_{ext_0} \sin(2\pi \cdot f_T \cdot t) \quad (3.10)$$

Une analyse temps-fréquence est effectuée sur le signal de vibrations latérales sous ce type d'excitation. L'analyse du contenu fréquentiel montre qu'en plus de la fréquence d'excitation par le balourd  $f_u$ , deux autres composantes vibratoires données par  $f_u \pm f_T$  sont aussi contenues dans le signal (Fig.3.10). Ceci se traduit par une modulation d'amplitude de la réponse suite à une excitation par un balourd. Ce résultat reflète le couplage entre le comportement vibratoire en flexion et le comportement vibratoire en torsion : une fréquence d'excitation en torsion implique l'apparition d'une composante vibratoire en  $f_u \pm f_T$  dans le signal de la réponse en flexion.

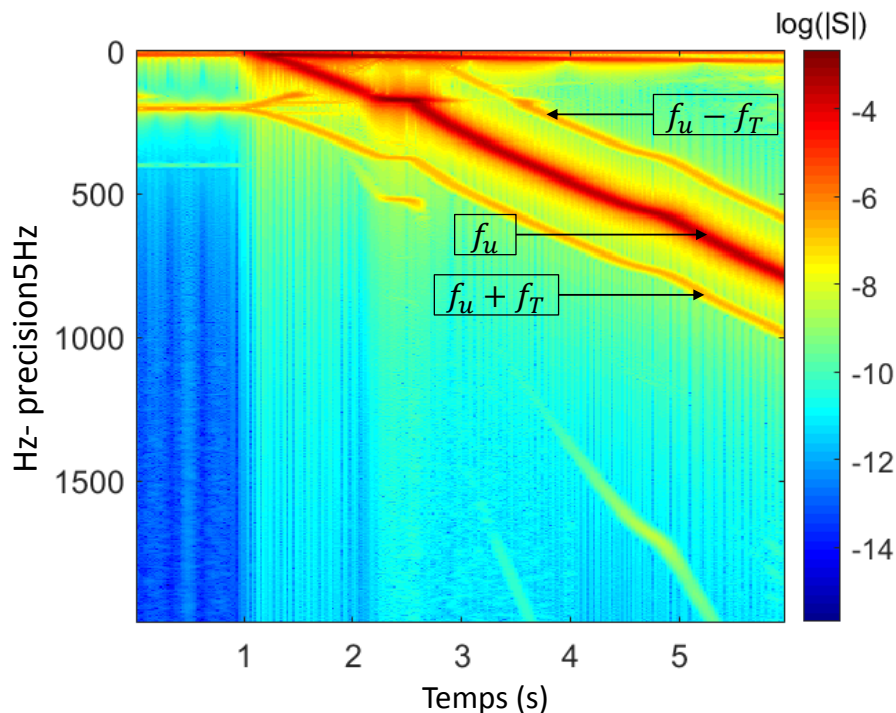


FIGURE 3.10: Analyse temps-fréquence des vibrations latérales

### 3.2.3 Comparaison du modèle CBT avec le modèle UBTT

Dans la section précédente, nous avons montré qu'une excitation en torsion est capable d'influencer la réponse dynamique du rotor en flexion. Dans cette section, la comparaison a pour objectif de démontrer le couplage flexion-torsion dans l'autre sens : une excitation dans la direction latérale est responsable de l'apparition des vibrations en torsion dans la réponse d'une machine tournante même si celle-ci n'est pas directement excitée en torsion.

#### Importance de l'hypothèse sur le couplage flexion-torsion pour une meilleure prise en compte des vibrations en torsion

Un point commun entre le modèle UBTT et le modèle CBT est que les deux modèles sont construits avec l'hypothèse de source non-idéale d'énergie. Cependant, à l'encontre du modèle CBT qui prend en compte toute les déformations possibles, le modèle UBTT est un modèle qui se limite à l'étude du comportement vibratoire en torsion pure. Le même couple moteur ayant le profil reporté à la figure (3.7) est appliqué sur les deux modèles. Le couple  $T_{ext}$  utilisé dans la section précédente est remis à 0 pour cette étude.

Nous rappelons que le ddl en rotation  $\theta_z$  contient à la fois le mouvement de corps rigide et les déformations en torsion pour les deux modèles UBTT et CBT. La déformation élémentaire en torsion est ainsi obtenue par une différence entre les ddl  $\theta_z$  des deux nœuds successifs constituant l'élément.

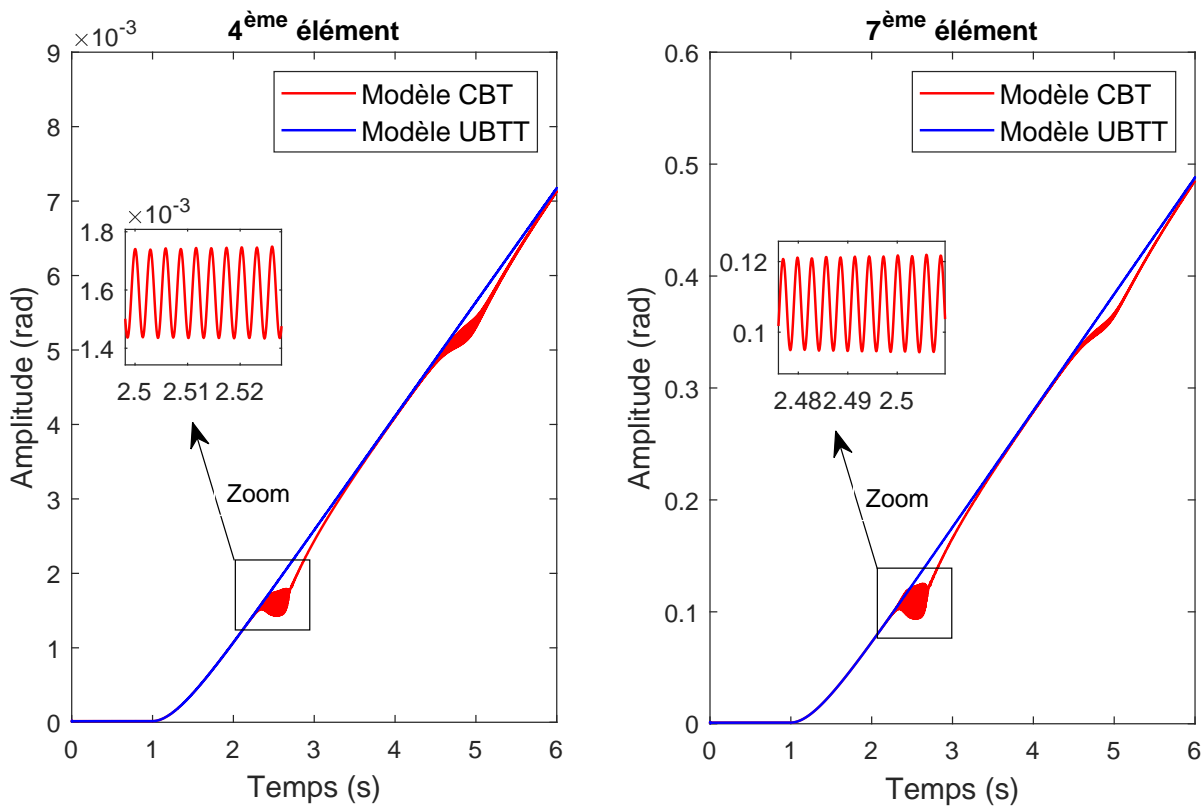


FIGURE 3.11: Comparaison des vibrations en torsion obtenues par le modèle CBT et le modèle UBTT sur le 4<sup>ème</sup> élément (supportant le disque) et le 7<sup>ème</sup> élément (élément élastique).

La figure (3.11) représente les vibrations en torsion au niveau des deux éléments suivants :

- le 4<sup>ème</sup> élément : auquel le disque est rattaché ;
- le 7<sup>ème</sup> élément : représentatif de l'accouplement élastique.

Les résultats de simulation montrent que les niveaux vibratoires en torsion sont plus importants sur l'élément souple constituant le rotor que sur l'élément auquel le disque est rattaché.

Afin de mieux analyser le comportement vibratoire en torsion, on introduit les notations suivantes pour la suite :

- $\delta_t^{CBT}$  : pour désigner les vibrations en torsion obtenues par le modèle CBT ;
- $\delta_t^{UBTT}$  : pour désigner les vibrations en torsion obtenues par le modèle UBTT.

La comparaison des résultats reportés sur la figure (3.11) montre que le signal  $\delta_t^{UBTT}$  (bleu) est constitué uniquement par une composante linéaire croissante en fonction de la vitesse de rotation. Cependant, le signal  $\delta_t^{CBT}$  (rouge) est constitué, en plus de cette même composante vibratoire linéaire, d'une composante vibratoire sinusoïdale qui se manifeste dans le signal de la réponse particulièrement au moment du passage par les vitesses critiques.

**Remarque** Le terme « vibrations dynamiques » sera utilisé pour désigner la composante vibratoire qui apparaît dans la réponse en torsion calculée à partir du modèle CBT, particulièrement visible au niveau des vitesses critiques.

Dans le but d'explorer le contenu fréquentiel des vibrations dynamiques obtenues par le modèle CBT, on l'extrait dans une variable séparée. Cette quantité est notée  $\gamma_t^{dyn}$  dans la suite et elle est calculée à partir d'une soustraction des deux signaux vibratoires  $\delta_t^{CBT}$  et  $\delta_t^{UBTT}$  tel que :

$$\gamma_t^{dyn} = \delta_t^{CBT} - \delta_t^{UBTT} \quad (3.11)$$

La figure (3.12) montre l'évolution des vibrations dynamiques  $\gamma_t^{dyn}$  en fonction du temps au niveau du nœud 7. Il est important de noter que, de la même façon que les vibrations latérales atteignent leurs maximums d'amplitude au passage par les vitesses critiques  $\Omega_{cr2}$  et  $\Omega_{cr3}$ , les vibrations en torsion induites par le couplage flexion-torsion atteignent aussi leurs maximums d'amplitude au niveau de ces deux vitesses critiques.

Une analyse temps-fréquence (Fig.3.13) montre que le signal des vibrations dynamiques  $\gamma_t^{dyn}$  est constitué par les fréquences suivantes :

- le double de la fréquence d'excitation par le balourd :  $2f_u$  ;
- les fréquences  $f_u \pm f_1^b$ , tel que  $f_1^b$  est la première fréquence propre en flexion ;
- une fréquence donnée par  $4f_u$  et qui apparaît aussi dans le signal vibratoire au moment du passage par la deuxième vitesse critique.

Ces résultats soulignent l'effet du couplage flexion-torsion pris en compte par le modèle CBT dans l'estimation des vibrations en torsion. Ce couplage devient plus fort lors du passage par les vitesses critiques élevées.

Ces analyses temps-fréquence montrent aussi que, même si les vibrations en torsion ne sont pas directement sollicitées, le couplage interne induit par les effets gyroscopiques et le balourd implique des vibrations en torsion non négligeables au passage par les vitesses critiques.

La fatigue vibratoire causée par des vibrations en torsions est plus dangereuse que celle induite par des vibrations en flexion car elle passe souvent inaperçue [3]. La première manifestation de la



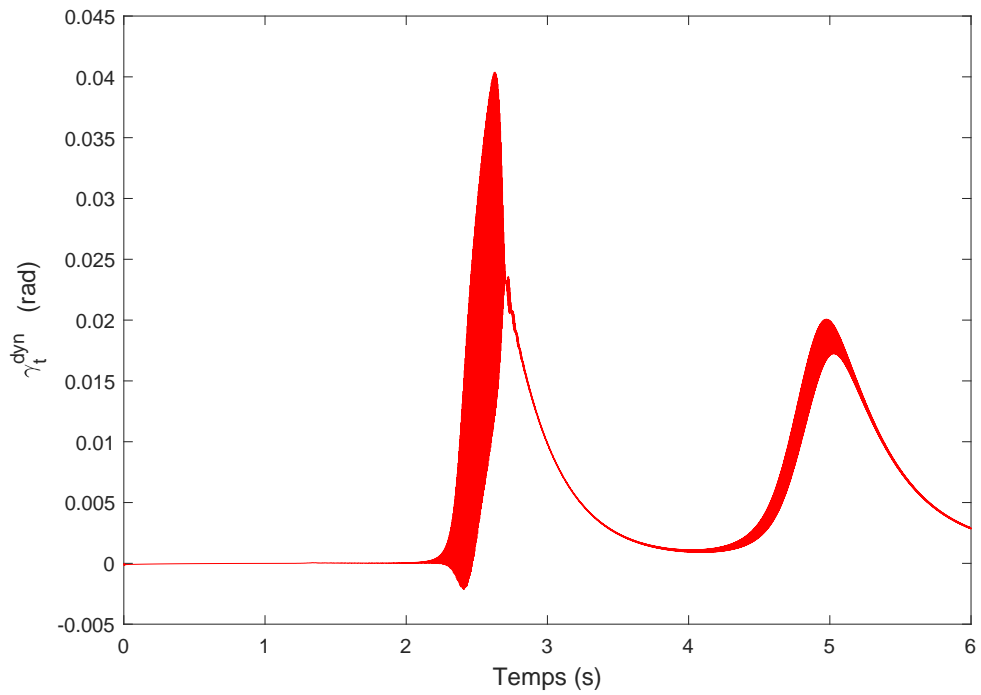


FIGURE 3.12: Vibrations dynamiques en torsion du 7<sup>ème</sup> élément

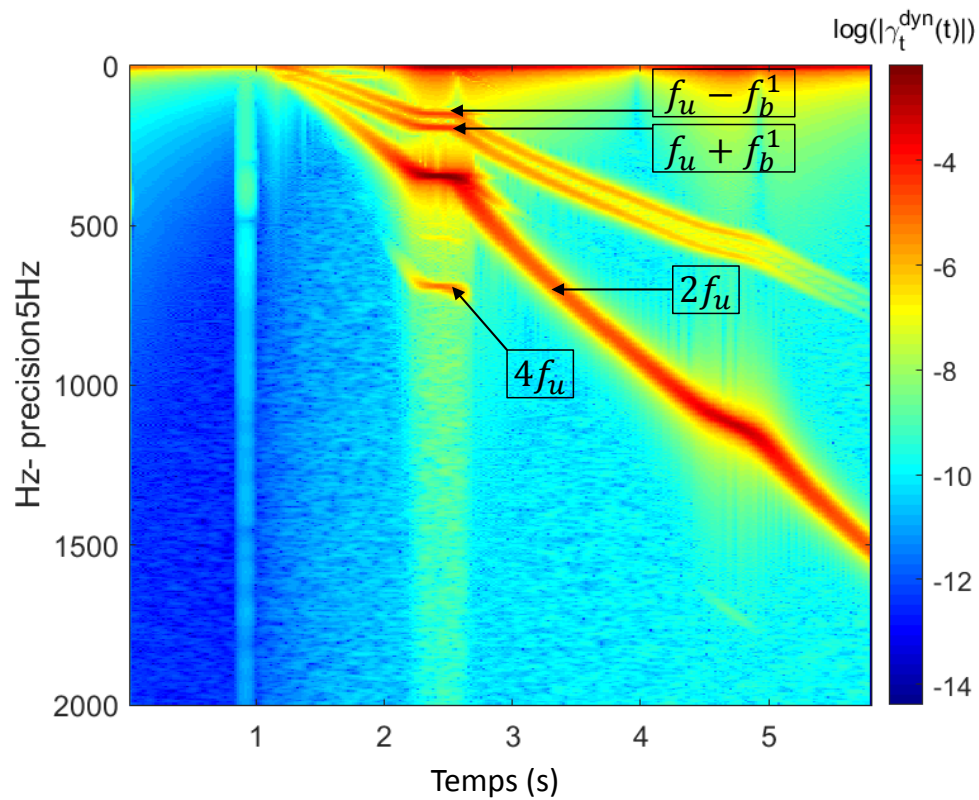


FIGURE 3.13: Analyses temps-fréquence des vibrations dynamiques en torsion du 7<sup>ème</sup> élément

fatigue vibratoire en torsion est souvent l'usure des engrenages, endommagement de la denture des engrenages ou la destruction de l'arbre du rotor dans le pire des cas [4, 5].

### 3.3 Paramètres influant sur le couplage flexion-torsion

Maintenant que la capacité du modèle CBT à prendre en compte le couplage flexion-torsion a été démontrée, Nous passons dans la suite à l'exploration de l'influence de certains paramètres du rotor sur le couplage induit par les effets gyroscopiques et le balourd.

Le même exemple numérique du rotor traité précédemment (voir Fig.3.5) sera utilisé pour cette étude. Seules les propriétés des paliers vont changer dans la suite, à savoir, les raideurs et les amortissements.

Avant d'étudier l'influence des propriétés des paliers sur le couplage flexion-torsion, il est intéressant de revenir sur le choix de modélisation des paliers qui a été fait. Le modèle des paliers adopté dans cette étude, et qui a été introduit au chapitre 2, est un modèle très courant mais assez simpliste par rapport à la réalité.

Une modélisation plus précise des roulements prendra en compte les effets de non-linéarité. Cette non-linéarité proviendrait, dans le cas des paliers à roulements par exemple, de la nature hertzienne du contact [6, 7, 8] ou du jeu radial. Dans le cas des paliers hydrodynamiques, la non-linéarité proviendrait du film d'huile qui a des propriétés de raideur et d'amortissement qui varient selon la vitesse de rotation [9, 10, 11]. D'une façon générale, la prise en compte de la non-linéarité des paliers traduira mieux leur comportement dynamique.

Sauf que la résolution simultanée des équations du mouvement du rotor et du comportement dynamique de chaque palier peut s'avérer complexe et coûteuse en temps de calcul. D'où le choix d'opter pour une modélisation assez avancée pour les parties tournantes et pour une modélisation simplifiée pour les paliers.

#### 3.3.1 Influence de l'amortissement des paliers

Il a été noté, lors des simulations numériques, que l'influence de l'amortissement des paliers sur le couplage flexion-torsion est plus visible quand les raideurs des paliers sont plus faibles. Les valeurs des raideurs utilisées sont du même ordre de grandeur que les valeurs utilisées par Lalanne [1] et Friswell [12]. les propriétés des paliers dans les deux exemples qui seront étudiés sont définies dans les tableaux (voir tableau 3.3 et 3.4). On désigne par :

- *cas 1* : le rotor dont les paliers ont l'amortissement le plus faible ;
- *cas 2* : le rotor qui a l'amortissement le plus élevé au niveau de ses paliers.

	$k_{xx_1}(N.m^{-1})$	$k_{yy_1}(N.m^{-1})$	$k_{xx_2}(N.m^{-1})$	$k_{yy_2}(N.m^{-1})$
cas 1 and 2	3e7	3e7	3e7	3e7

TABLE 3.3: Raideurs des paliers pour le *cas 1* et le *cas 2*

	$c_{xx_1}(N.s.m^{-1})$	$c_{yy_1}(N.s.m^{-1})$	$c_{xx_2}(N.s.m^{-1})$	$c_{yy_2}(N.s.m^{-1})$
cas 1	5e2	5e2	5e2	5e2
cas 2	5e4	5e4	5e4	5e4

TABLE 3.4: Amortissements des paliers pour le *cas 1* et le *cas 2*

Les trois premières vitesses critiques sont données par :  $\Omega_{cr1} = 904 \text{ rpm}$ ,  $\Omega_{cr2} = 10338 \text{ rpm}$  et  $\Omega_{cr3} = 33715 \text{ rpm}$ .

La première conséquence de l'augmentation de l'amortissement des paliers est la réduction des vibrations latérales lors du passage par les vitesses critiques (Fig.3.14). Ceci s'explique par la réduction du temps pour lequel le rotor reste bloqué au niveau d'un régime critique : on voit bien sur la figure (3.14) que le rotor passe un peu moins de temps au voisinage de la deuxième vitesse critique  $\Omega_{cr2}$  pour le *cas 2* que pour le *cas 1*. Un amortissement plus élevé au niveau des paliers favorise un passage plus sûr par les vitesses critiques.

La valeur de l'amortissement sur les directions latérales des paliers a un impact non seulement sur la réponse en flexion, mais aussi sur la réponse en torsion vu le couplage du comportement dynamique du rotor sur les deux directions . On voit bien sur la figure (3.15) que les vibrations en torsion au niveau des vitesses critiques sont plus faibles pour le *cas 2* pour lequel l'amortissement latéral sur la palier est plus important. On en déduit que l'amortissement réduit l'échange d'énergie entre la direction latérale et la direction en rotation/torsion. L'analyse temps-fréquence des vibrations dynamiques obtenues par le modèle CBT pour les deux cas 1 et 2 montre que le contenu fréquentiel pour les deux cas est le même que ce qu'on a vu précédemment. Il confirme, à nouveau, à travers la présence des fréquences latérales sur les signaux de vibrations dynamiques en torsion, que le couplage flexion-torsion existe. Il y a seulement l'amplitude qui change en fonction de l'amortissement.

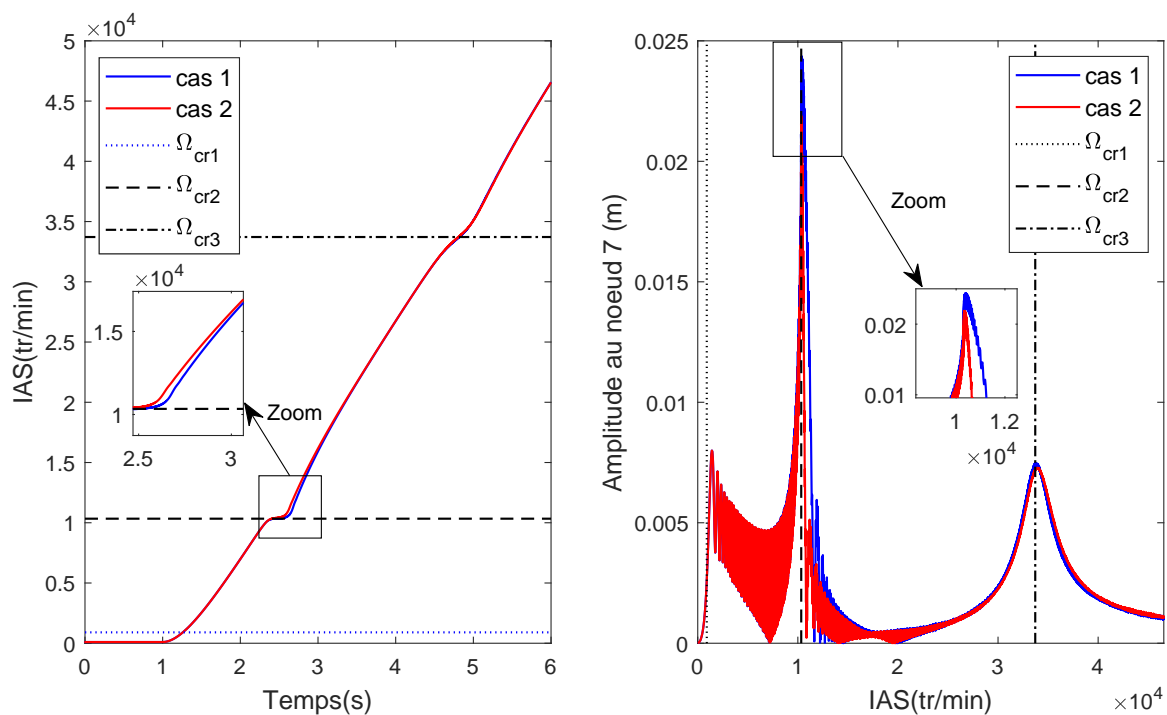


FIGURE 3.14: Comparaison de la vitesse instantanée de rotation (à gauche) et des vibrations latérales (à droite) sur le noeud 7 obtenues pour le *cas 1* et le *cas 2*

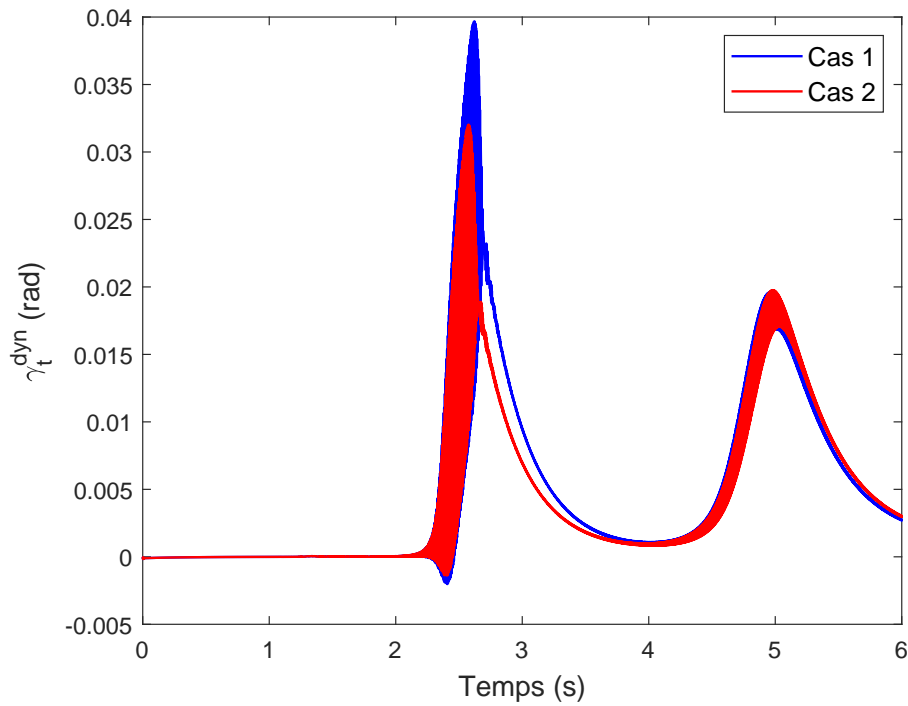


FIGURE 3.15: Vibrations dynamiques en torsion sur le 7<sup>ème</sup> élément pour le *cas 1* et le *cas 2*

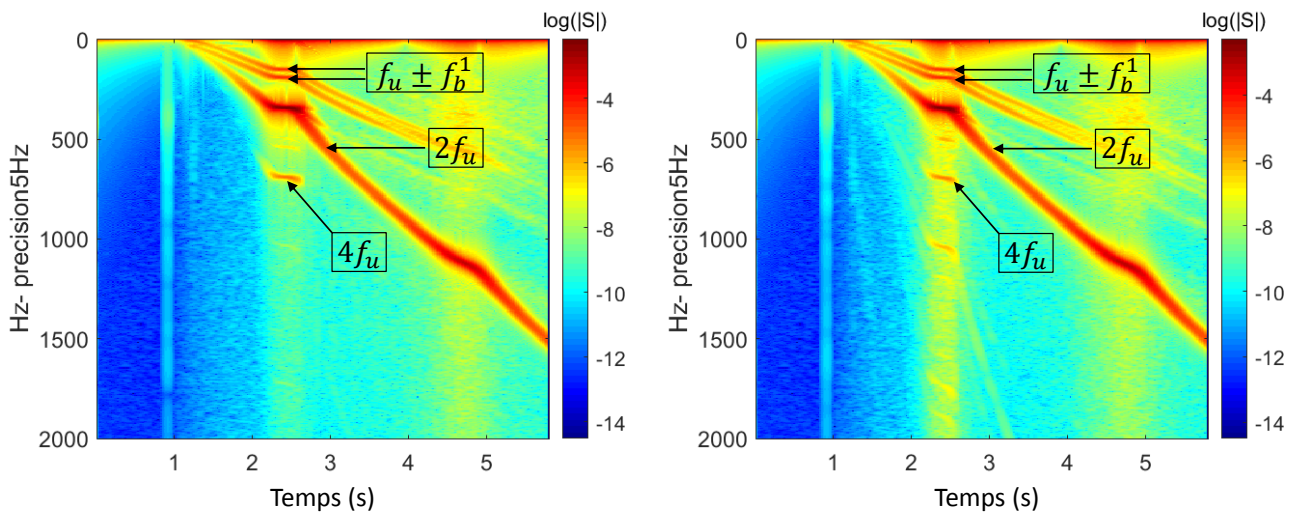


FIGURE 3.16: Analyses temps-fréquence des vibrations en torsion du 7<sup>ème</sup> élément pour le *cas 1* (à gauche) et le *cas 2* (à droite).

### 3.3.2 Influence de l'asymétrie des paliers

Si les rotors sont souvent symétriques, il n'en est pas de même pour les stators : la présence d'éléments juxtaposés aux carters par exemple peut créer des dissymétries de raideur sur les paliers [7].

Nous proposons de comparer deux cas :

- *cas 1* : rotor pour lequel les paliers sont symétriques ;
- *cas 3* : rotor pour lequel les paliers sont asymétriques.

Les raideurs et les amortissements des paliers pour les deux cas sont successivement reportés dans les tableaux (3.5) et (3.6).

	$k_{xx_1}(N.m^{-1})$	$k_{yy_1}(N.m^{-1})$	$k_{xx_2}(N.m^{-1})$	$k_{yy_2}(N.m^{-1})$
cas 1	3e7	3e7	3e7	3e7
cas 3	3e7	2e6	3e7	2e6

**TABLE 3.5:** Raideurs des paliers pour le *cas 1* et le *cas 3*

	$c_{xx_1}(N.s.m^{-1})$	$c_{yy_1}(N.s.m^{-1})$	$c_{xx_2}(N.s.m^{-1})$	$c_{yy_2}(N.s.m^{-1})$
cas 1	5e2	5e2	5e2	5e2
cas 3	5e2	7e2	5e2	7e2

**TABLE 3.6:** Amortissements des paliers pour le *cas 1* et le *cas 3*

Les vitesses critiques pour le *cas 3* sont données par :  $\Omega_{cr_1} = 901 \text{ rpm}$ ,  $\Omega_{cr_2} = 10104 \text{ rpm}$  and  $\Omega_{cr_3} = 33672 \text{ rpm}$ .

Pour le *cas 3*, les paliers ont les mêmes raideurs et amortissements sur l'axe des  $\vec{X}$  que pour le *cas 1* mais des raideurs moins importantes et des amortissements plus importants suivant l'axe des  $\vec{Y}$ . Ce choix des paramètres pour le *cas 3* résulte en un passage plus rapide du rotor au voisinage de la deuxième et troisième vitesse critique  $\Omega_{cr_2}$  et  $\Omega_{cr_3}$ . Ceci s'accompagne d'une réduction des vibrations latérales au voisinage des vitesses critiques (voir Fig.3.17).

Les vibrations dynamiques en torsion induites par le couplage flexion-torsion s'atténuent aussi pour le *cas 3* (voir Fig.3.18). On en déduit que l'asymétrie des paliers favorise moins l'apparition du couplage. suite à l'atténuation du phénomène de Sommerfeld . Le couplage entre la flexion et la torsion qui prend lieu au passage par les vitesses critiques s'atténue aussi pour le *cas 3* suite à l'atténuation du phénomène de Sommerfeld (voir Fig.3.18).

Le contenu fréquentiel du signal de vibration en torsion induit par le couplage flexion-torsion, pour les deux cas, est le même que dans l'exemple précédent (voir Fig.3.19) avec seulement un changement des amplitudes. L'analyse temps-fréquence des signaux des vibrations dynamiques en torsion témoigne à nouveau de la présence des fréquences latérales à savoir le double de la fréquence due à l'excitation par un balourd  $2f_u$  ainsi que la première fréquence propre en flexion combinée à la fréquence d'excitation du balourd  $f_u \pm f_b^1$ .

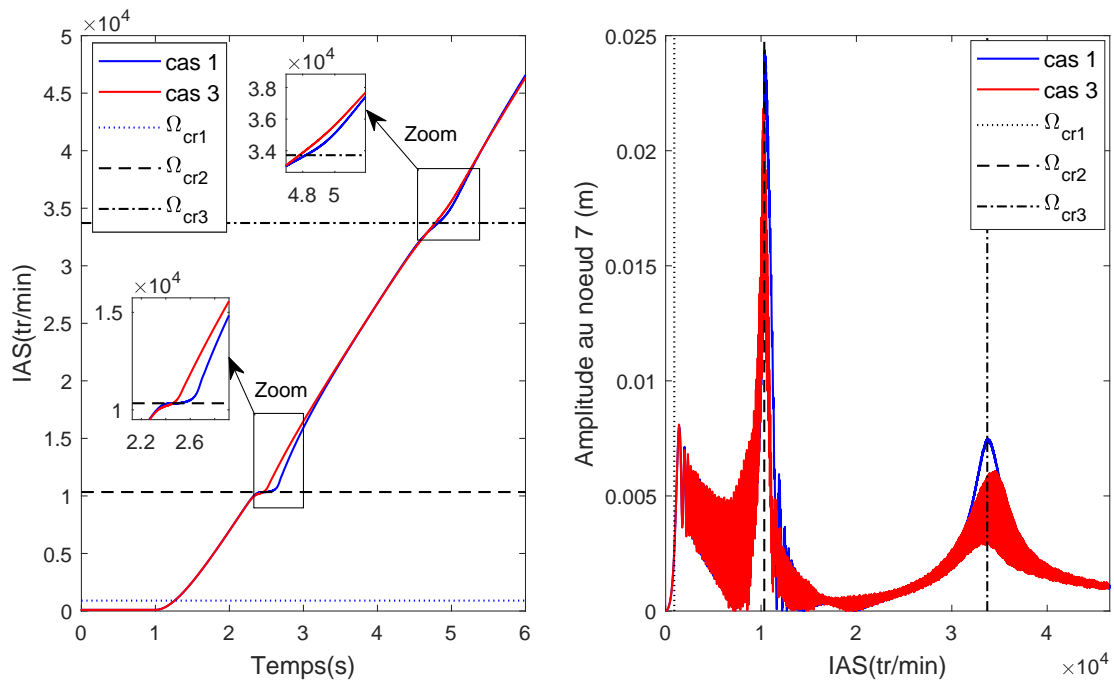


FIGURE 3.17: Comparaison de la vitesse instantanée de rotation (à gauche) et des vibrations latérales (à droite) sur le noeud 7 obtenues pour le cas 1 et le cas 3

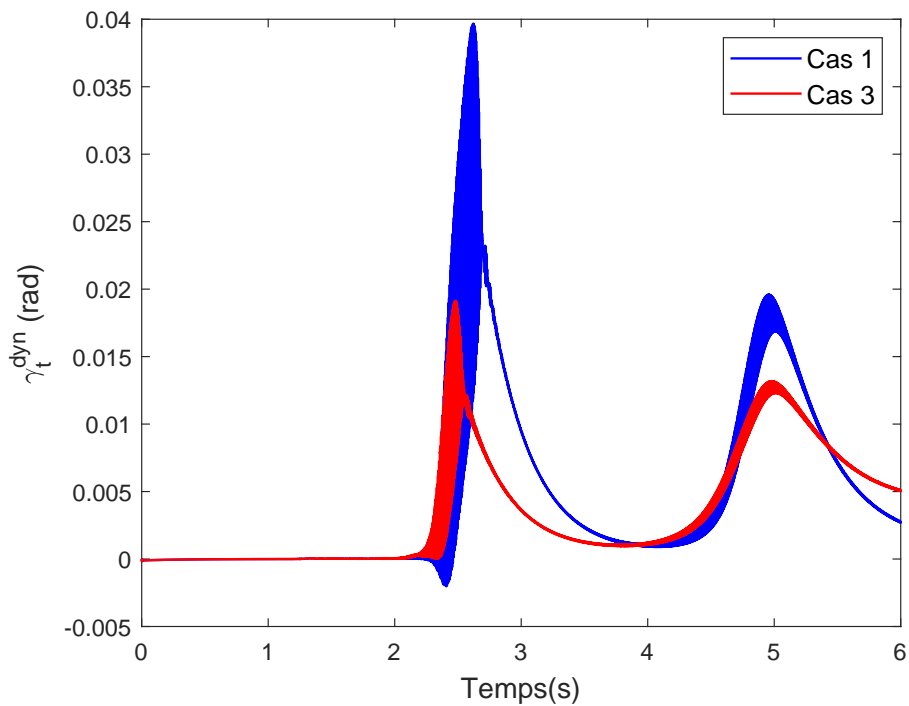


FIGURE 3.18: Vibrations dynamiques en torsion sur le 7<sup>ème</sup> élément pour le cas 1 et le cas 3

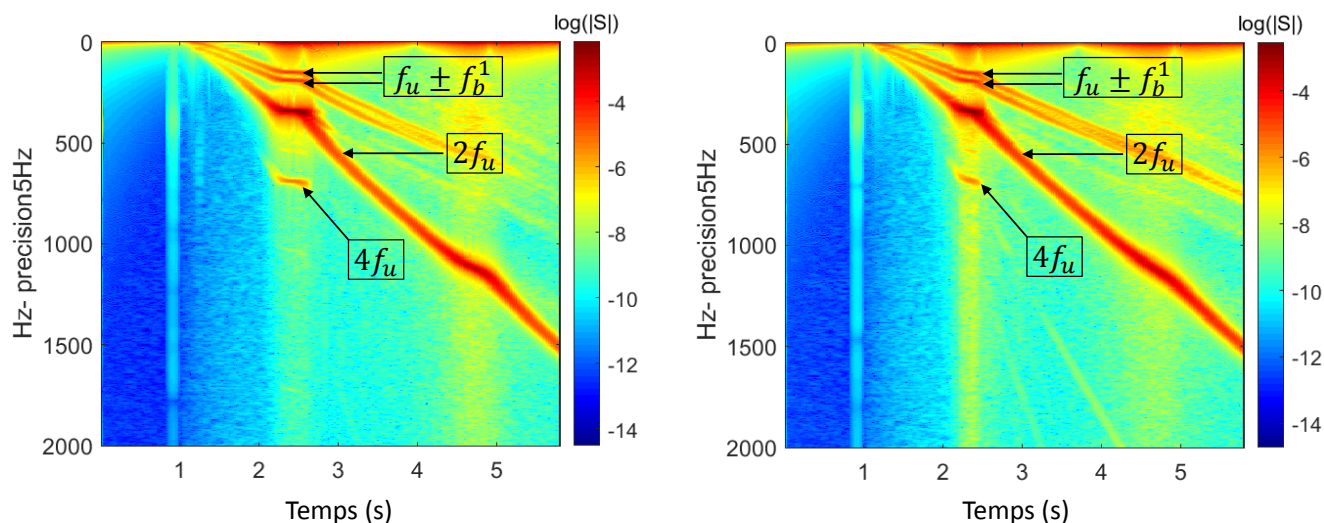


FIGURE 3.19: Analyses temps-fréquence des vibrations en torsion du 7<sup>ème</sup> élément pour le cas 1 (à gauche) et le cas 3 (à droite).

### 3.4 Conclusion

On montre dans ce chapitre, à travers des comparaisons numériques du nouveau modèle avec des modèles classiques de la dynamique des rotors, la capacité du nouveau modèle à estimer avec une meilleure précision la réponse vibratoire en flexion et en torsion du rotor. Ceci est grâce aux hypothèses postulées au début de la construction du nouveau modèle dynamique.

Il a été démontré au chapitre 2 que ce couplage se manifeste à travers l'expression analytique des équations de la dynamique du rotor proposées par le nouveau modèle. Nous avons souligné que la source principale du couplage provient des termes associés au balourd ainsi que des termes relatifs aux effets gyroscopiques sous l'hypothèse de source non-idéale et de régime non-stationnaire. Dans ce chapitre, Nous avons montré, à travers des applications numériques, les manifestations du couplage flexion-torsion à partir de l'étude de la réponse vibratoire du rotor. Les résultats de simulations numériques montrent qu'une excitation du rotor dans la direction en torsion avec un effort sinusoïdale à une fréquence  $f_T$  engendre une modulation de la réponse vibratoire latérale par un signal à une fréquence  $f_u \pm f_T$ , avec  $f_u$  est la fréquence de l'excitation du balourd.

De la même façon, on montre qu'une excitation latérale par un balourd engendre des vibrations en torsion à des fréquences en  $2f_u$  et  $f_u \pm f_1^b$ , tel que  $f_1^b$  est la première fréquence propre en flexion.

Le nouveau modèle offre ainsi un outil intéressant pour une meilleure estimation du comportement vibratoire du rotor. Une prédiction précise des niveaux vibratoires est très importante surtout dans la phase du dimensionnement du rotor.

Finalement, une étude paramétrique montre l'influence de certains paramètres sur le couplage flexion-torsion. Plus particulièrement, on montre que l'asymétrie des paliers ainsi qu'une valeur importante des amortissements des paliers symétriques limitent les vibrations en torsion induites par une excitation latérale.



# Bibliographie

- [1] Michel Lalanne and Guy Ferraris. *Rotordynamics prediction in engineering*, volume 2. Wiley, 1998. 67, 79
- [2] XY Shen, JH Jia, M Zhao, and JP Jing. Coupled torsional-lateral vibration of the unbalanced rotor system with external excitations. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 42(6) :423–431, 2007. 75
- [3] Jianmei Feng, Ying Zhao, Xiaohan Jia, and Xueyuan Peng. Solution for the torsional vibration of the compressor shaft system with flexible coupling based on a sensitivity study. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E : Journal of Process Mechanical Engineering*, 233(4) :803–812, 2019. 77
- [4] JC Wachel, Fred R Szenasi, et al. Analysis of torsional vibrations in rotating machinery. In *Proceedings of the 22nd Turbomachinery Symposium*. Texas A&M University. Turbomachinery Laboratories, 1993. 79
- [5] Mark A Corbo, Clifford P Cook, et al. Torsional vibration analysis of synchronous motor-driven turbomachinery. In *Proceedings of the 29th Turbomachinery Symposium*. Texas A&M University. Turbomachinery Laboratories, 2000. 79
- [6] Fredric F EHRLICH. *Handbook of rotordynamics*. Number BOOK. Krieger, 1999. 79
- [7] David Demailly. *Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel—Application à la dynamique rotor*. PhD thesis, 2003. 79, 81
- [8] David Noel. *Modélisation et Identification du Comportement Dynamique des Broches UGV à Montages de Roulements Préchargés*. PhD thesis, 2013. 79
- [9] A Derouiche, Nacer Hamzaoui, A Miloudi, and Belaïd Bouzouane. Comportement vibroacoustique des rotors : paramètres dépendant de la rotation. 2005. 79
- [10] Jawaid I Inayat-Hussain. Bifurcations of a flexible rotor response in squeeze-film dampers without centering springs. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(2) :583–596, 2005. 79
- [11] CS Zhu, DA Robb, and DJ Ewins. Analysis of the multiple-solution response of a flexible rotor supported on non-linear squeeze film dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3) :389–408, 2002. 79
- [12] Michael I Friswell, John ET Penny, Arthur W Lees, and Seamus D Garvey. *Dynamics of rotating machines*. Cambridge university press, 2010. 79







## Chapitre 4

# Extension du nouveau modèle à un étage d'engrenage

### Résumé

L'objectif de ce chapitre est de faire une étude du comportement vibratoire d'un étage d'engrenage d'un réducteur haute vitesse et en régime non-stationnaire. Un réducteur est un ensemble d'organes mécaniques comprenant un moteur, des accouplements, des engrenages, des mécanismes entraînés (notamment les arbres tournants et les accouplements) et des éléments réalisant le guidage (les paliers). Un couple résistant est souvent associé à l'arbre mené par l'engrenage. Chacun des composants aura son influence sur le comportement vibratoire du réducteur.

On se basera pour définir les propriétés du cas d'étude sur l'architecture du banc d'essai RedHV+. Le projet RedHV+ est un projet FUI rassemblant plusieurs industriels et universitaires dans l'objectif de concevoir un réducteur haute vitesse adapté à l'électrification des véhicules dans le domaine automobile. Le défi scientifique dans la modélisation des nouveaux réducteurs consiste donc à combiner des modèles de rotors haute vitesse et des modèles d'engrenement tout en prenant en compte les effets de flexion, torsion et traction-compression.

Le nouveau modèle dynamique pour une ligne d'arbre introduit au chapitre 2 sera ainsi utilisé et étendu pour l'étude d'un étage d'engrenage. Dans un premier temps, une étude bibliographique concise permet d'avoir un aperçu sur les modèles d'engrenage les plus utilisés avec une attention particulière accordée au modèle d'engrenage qui sera utilisé par la suite. A partir de l'architecture du banc d'essai réel, on propose un modèle éléments finis simplifié de la ligne de transmission hautes vitesses. L'étude portera sur le comportement vibratoire de l'étage d'engrenage, essentiellement au passage par les vitesses critiques.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation des modèles utilisés pour la comparaison</b>	<b>67</b>
3.1.1	Modèle UBTB : modèle pour l'étude de la flexion pure d'un rotor	68
3.1.2	Modèle UBTT : modèle pour l'étude de la torsion pure d'un rotor	70
<b>3.2</b>	<b>Simulations numériques pour la comparaison</b>	<b>70</b>
3.2.1	Introduction au cas d'étude	71
3.2.2	Comparaison du modèle CBT avec le modèle UBTB	72
3.2.3	Comparaison du modèle CBT avec le modèle UBTT	76
<b>3.3</b>	<b>Paramètres influant sur le couplage flexion-torsion</b>	<b>79</b>
3.3.1	Influence de l'amortissement des paliers	79
3.3.2	Influence de l'asymétrie des paliers	81
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>

---

## 4.1 Introduction aux modèles d'engrènement

L'engrènement apparaît comme la source principale d'excitation dans les transmissions de puissance par engrenages. La modélisation de son comportement dynamique est donc essentielle, dès la conception, si l'on désire concilier une puissance spécifique élevée et des niveaux vibratoires et acoustiques acceptables [1]. Les modèles présentés dans la littérature peuvent être regroupés suivant deux thématiques principales : l'étude des phénomènes localisés au niveau des contacts entre dentures d'une part [2, 3, 4] et l'étude basée sur des approches plus globales à l'échelle du système mécanique, qui traitent des couplages induits par les engrènements d'autre part [5, 6, 7, 8].

Les modèles d'engrènement peuvent aussi être classés en modèles linéaires et modèles non-linéaires. Les modèles linéaires correspondent à des modèles pour lesquels la non-linéarité hertzienne au niveau des contacts peut être négligée. Ce sont des modèles pour lesquels la raideur d'engrènement est connue a priori et ne dépend pas de la vitesse de rotation ni de la position angulaire. Nous pouvons distinguer des modèles linéaires à raideur d'engrènement constante ou variable. Dans le premier cas, les modèles supposent que les variations temporelles de la raideur d'engrènement sont négligeables. Ce type de modélisation est particulièrement approprié pour les engrenages à fort rapport de conduite, ce qui n'est pas le cas pour les engrenages à dentures droites. Pour ce type d'engrenage, il convient mieux d'opter pour la modélisation à raideur d'engrènement variable. Henriot [9], à titre d'exemple, a modélisé la raideur d'engrènement par une forme en créneaux décomposable en série de Fourier et a donné une formule empirique pour le calcul de la rigidité moyenne d'une paire de dents droites en contact. Ces modèles conduisent généralement à des équations de mouvement à coefficients périodiques. La périodicité permet de tenir compte du changement du nombre de paires de dents en contact au cours du temps. Cette excitation paramétrique cause éventuellement l'instabilité du modèle [10]. Quant aux modèles non-linéaires, ce sont notamment les modèles qui prennent en considération les phénomènes de type vibro-impact suite à des variations importantes des efforts transmis ou des défauts de surfaces et d'entraxe [11, 12, 13, 14]. En d'autres termes, ce sont des modèles conditionnés par des variations de raideur en fonction de la charge.

Une notion incontournable en dynamique des transmissions est la notion d'Erreur de Transmission. Elle a été introduite pour la première fois par Harris [15]. Par définition, l'Erreur de Transmission désigne l'écart de la position de la roue menée, pour une position donnée du pignon, par rapport à la position qu'elle devrait occuper si les roues dentées étaient parfaites et indéformables. L'Erreur de Transmission rend compte des déformations instantanées de dentures chargées et de l'influence d'écarts de forme et de montage [16]. Une grande partie des travaux de modélisation des engrenages repose sur la notion d'Erreur de Transmission. Certains la définissent comme une source d'excitation dans les systèmes d'engrenage [6, 17, 18, 19]. Associée à la raideur d'engrènement, l'Erreur de Transmission permet de définir l'excitation au niveau de la ligne d'action [20, 21].

Même si les tous premiers modèles développés en dynamique des engrenages étaient des modèles purement torsionnels, Mitchell [22] a démontré à travers une étude expérimentale, que les équations découplées en torsion et en flexion ne donnent pas des résultats pertinents. D'où des approches intégrant les couplages entre flexion, torsion et traction-compression sont de plus en plus développés [23, 24, 25, 26].

La plus large majorité des travaux des modélisations d'engrenage considère un régime de fonctionnement établi à vitesse imposée constante. Cependant, dans la réalité, et dans les domaines de transport plus particulièrement, la vitesse de rotation est modulée par le régime de fonctionnement des moteurs. Ceci explique, dans la suite, le recours à un modèle d'engrènement qui soit bien adapté à des régimes de fonctionnement non-stationnaires et qui soit donc compatible avec

le modèle dynamique des rotors flexibles développé au chapitre 2.

## 4.2 Modèle d'engrenage adopté

On suppose que le pignon et la roue sont assimilables à des corps rigides, sauf ponctuellement suivant la normale au contact. Les deux disques rigides sont connectés entre eux par une raideur  $k_{eng}$  et un amortissement  $c_{eng}$  situés suivant la normale au contact (voir fig.4.1).

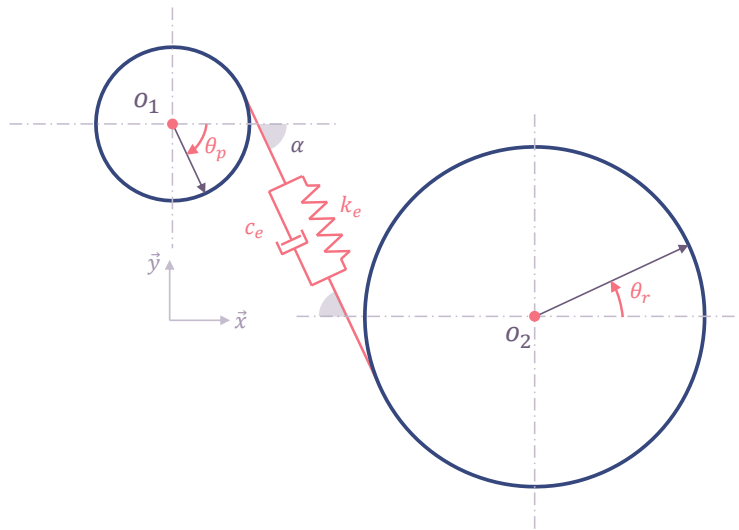


FIGURE 4.1: Schéma d'une modélisation simplifiée de l'engrènement

L'approche présentée dans la suite pour la modélisation de l'engrenage est une approche classique qui a été présentée dans les travaux de Bourdon [6]. Cependant, l'approche de Bourdon, basée sur les travaux de Vexé [4] et Bard [1] a été développée sous l'hypothèse des petits déplacements autour de l'axe de rotation. Cette approche a été étendue, à travers les travaux de Gomez [8], par une autre approche basée sur l'erreur de transmission statique, permettant d'un point de vue conceptuel, la prise en compte du mouvement de corps rigide. Cette extension est importante vu que, dans notre cas, la VIR, directement introduite dans les inconnues du problème dynamique, superpose les perturbations infinitésimales au mouvement des corps rigides en rotation.

Les éléments nécessaires à la mise en place de cette approche sont (voir Fig.4.2) :

- le type de configuration : en fonction du couple moteur appliqué, deux configurations sont possibles. La configuration est dite « tirage » quand le couple est positif, sinon elle est dite « retro ». Chacune des configurations correspond à un profil de contact de la denture comme nous pouvons le voir sur la figure (4.3). Pour chaque configuration, la ligne d'action n'est pas dans la même direction. D'où le besoin de définir un repère local (voir Fig.4.4) spécifique à chaque cas. Pour la suite, les nœuds de l'arbre d'entrée et de sortie, respectivement notés  $N_1$  et  $N_2$ , sont confondus avec les centres géométriques du pignon et de la roue,  $O_p$  et  $O_r$  ( $d_1 = d_2 = 0$ );
- les rayons de base  $R_{b1}$  et  $R_{b2}$ ;
- l'angle de pression apparent de fonctionnement  $\alpha$ ;

## 4.2. Modèle d'engrenage adopté

- l'angle d'hélice de base  $\beta$  ;
- la rigidité d'engrènement  $k_{eng}$ .

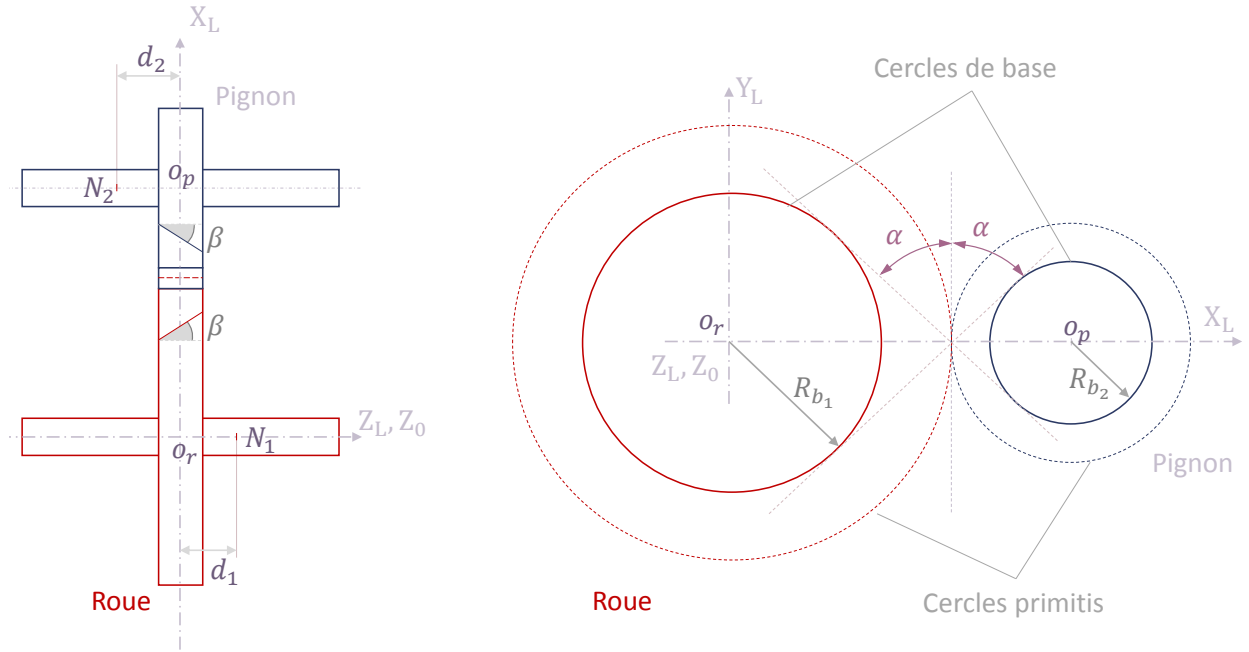


FIGURE 4.2: Variation angulaire de la raideur d'engrènement



FIGURE 4.3: Définition des profils de contact

### 4.2.1 Définition de la force d'excitation provenant de l'engrenage

La force d'excitation provenant de l'engrenage est responsable de coupler le comportement dynamique d'un nœud de l'arbre d'entrée  $N_1$  à un nœud de l'arbre de sortie  $N_2$  à travers une matrice de raideur  $[K_{eng}]$  ainsi que le vecteur des déplacements généralisés relatifs aux deux nœuds connectés  $\{\Sigma\}$ .

$$\{F_{eng}\} = [K_{eng}] \cdot \{\Sigma\} \quad (4.1)$$

tel que  $\{\Sigma\}$  est le vecteur des déplacements généralisés donné par :

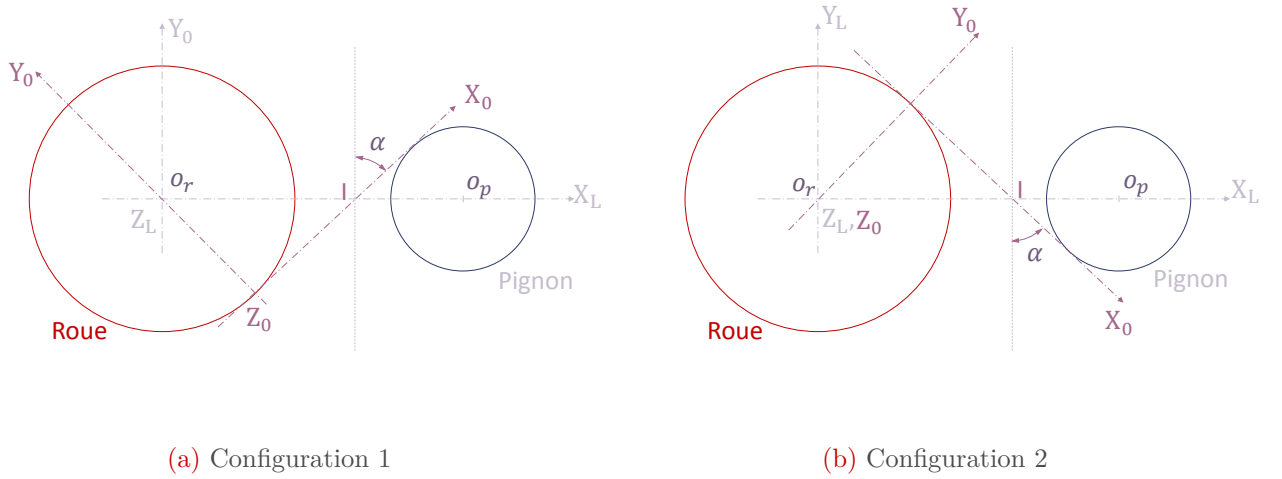


FIGURE 4.4: Définition du repère local

$$\{\Sigma\} = \{u_1; v_1; w_1; \theta_{x_1}; \theta_{y_1}; \theta_{z_1}; u_2; v_2; w_2; \theta_{x_2}; \theta_{y_2}; \theta_{z_2}\} \quad (4.2)$$

La matrice d'engrènement est calculée de la façon suivante :

$$[K_{eng}] = k_{eng}(\theta_z) \cdot \{\sigma\}^t \cdot \{\sigma\} \quad (4.3)$$

tel que :

$$\begin{cases} \{\sigma\} &= \{c; s; 0; -\lambda_1 s; \mu_1 s + d_1 c; \lambda_1 c; -c; 0; -s; \lambda_2 s; -d_2 c - \mu_2 s; -\lambda_2 c\}; \\ c &= \cos(\beta); \\ s &= \sin(\beta) \end{cases} \quad (4.4)$$

L'expression des composantes du vecteur  $\{\sigma\}$  dépend des propriétés géométriques de l'engrenement et de la configuration considérée. Le vecteur  $\{\sigma\}$  est calculé, en fonction de la configuration considérée, à partir des constantes suivantes :

$$\text{Configuration 1} \quad \begin{cases} \mu_1 = -R_{b_1} \tan(\alpha) \\ \mu_2 = R_{b_2} \tan(\alpha) \\ \lambda_1 = R_{b_1} \\ \lambda_2 = -R_{b_2} \end{cases} \quad \text{Configuration 2} \quad \begin{cases} \mu_1 = -R_{b_1} \tan(\alpha) \\ \mu_2 = R_{b_2} \tan(\alpha) \\ \lambda_1 = -R_{b_1} \\ \lambda_2 = R_{b_2} \end{cases} \quad (4.5)$$

Ainsi, à partir de la connaissance des propriétés géométriques de l'engrènement, on peut construire la matrice géométrique, fixe à tout instant, définie par :

$$[Geom] = \{\sigma\}^t \cdot \{\sigma\} \quad (4.6)$$

Il suffit ensuite de définir la raideur d'engrènement  $k_{eng}(\theta_z)$  pour définir la matrice de raideur  $[K_{eng}(\theta_z)]$  permettant de coupler le mouvement du pignon et de la roue.

### 4.2.2 Définition de la raideur d'engrènement

Avant de proposer une loi de variation de la raideur d'engrènement, il est important de comprendre l'évolution de l'excitation générée par l'engrenage au niveau de la ligne d'action au cours du temps. Pour la figure proposée (Fig.4.5), la dent du pignon menant, entre en contact en A avec le sommet de la dent de la roue (début de l'engrènement) et quitte celle-ci en B (fin de l'engrènement). La longueur AB mesurée sur la ligne d'action est appelée « longueur de conduite ».

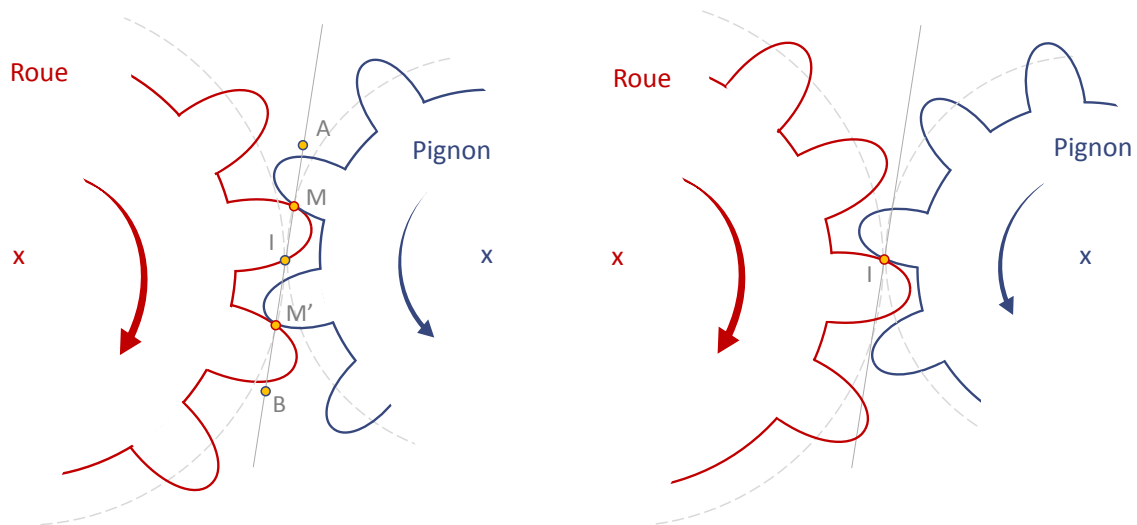


FIGURE 4.5: Nombre de dents en prise

La raideur d'engrènement est largement contrôlée par le rapport de conduite de l'engrenage  $\epsilon$ . Le rapport de conduite est pris, dans cette étude, entre 1 et 2. Cela donne lieu, au niveau de la ligne de pression à la succession d'événements suivants :

- une dent du pignon entre en contact avec une dent de la roue en face au point A ;
- le point de contact M se déplace de A à I sur la ligne de pression (période d'approche) ;
- le point M se déplace de I à B (période de retrait), entre temps, le couple suivant entre en contact en A. Deux couples de dents sont ainsi en prise pendant un court moment.
- au moment où le point M arrive au point B, c'est la fin d'engrènement pour le premier couple de dents. Nous avons à nouveau un seul couple de dent en prise.

Nous constatons ainsi la périodicité des événements au niveau de la ligne d'action. La raideur d'engrènement est ainsi une fonction périodique dont la période correspond à l'apparition des couples de dents qui défilent à l'intérieur de la ligne d'action. On définit ainsi une période  $A_p$ . Cette période est définie dans le domaine angulaire afin de s'affranchir de la notion du temps en non-stationnaire. Si on considère le pignon menant comme référence, le scénario décrit précédemment se répètera autant de fois que de nombre de dents du pignon. Ce qui conduit à la définition de la période angulaire de la façon suivante :

$$A_p = \frac{2\pi}{Z_1} \quad (4.7)$$



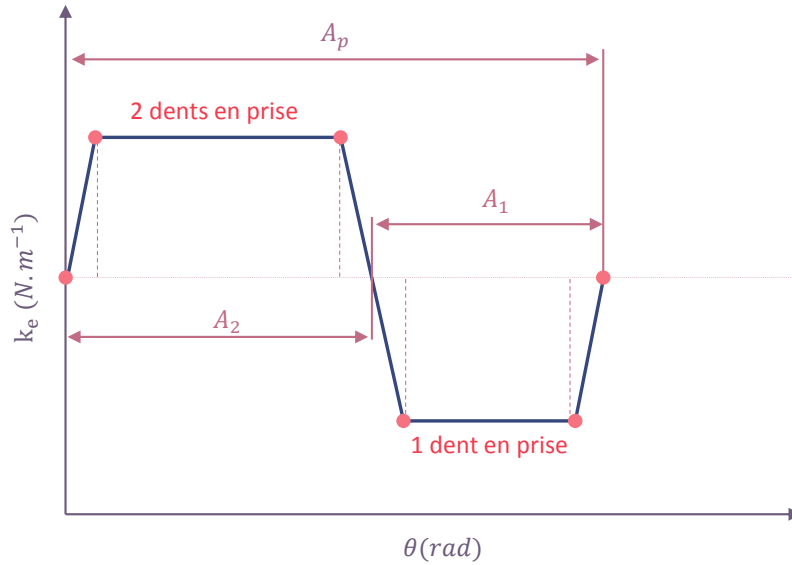


FIGURE 4.6: Raideur en fonction du nombre des dents en prise

Les efforts introduits par l'engrenage sont ainsi générés par une rigidité variable en fonction du nombre de couples de dents en prise. La variation de la raideur d'engrènement peut être définie par une fonction en trapèze (Fig. 4.6).

Deux plages angulaires définissent une période complète tel que :

- $A_2$  : plage pour laquelle il y a deux couples de dents en prise.
- $A_1$  : plage pour laquelle il y a seulement un couple de dents en prise.

$A_1$  et  $A_2$  sont calculées de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_2 &= A_p(\epsilon - 1) \\ A_1 &= A_p - A_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Ainsi, de cette manière, on définit la loi de variation périodique de la raideur d'engrènement en fonction de l'angle de rotation du pignon. Même pour des géométries parfaites, un engrenage est générateur des vibrations puisque la rigidité d'engrènement varie en fonction de l'angle de rotation et génère, par conséquence, des excitations paramétriques.

### 4.3 Modélisation d'un étage d'engrenage : application au banc RedHV+

Nous disposons maintenant :

- d'un modèle dynamique d'un monorotor en régime non-stationnaire (présenté au chapitre 2) ;
- d'un modèle dynamique pour les engrenages à vitesse non-stationnaire à travers la matrice d'engrènement paramétrique  $[K_{eng}(\theta_z)]$ .

Les deux modèles ne font aucune hypothèse sur la VIR. Ils sont totalement compatibles pour une modélisation d'un étage d'engrenage en régime non-stationnaire et à très hautes vitesses.

Dans la suite nous allons nous intéresser à un étage d'engrenage qui découle d'une application industrielle en cours de développement, à savoir le réducteur du projet RedHV+.

Le démonstrateur technologique du projet RedHV+ est un réducteur de vitesse identifié comme étant le 1<sup>er</sup> étage de réduction d'un réducteur à engrenages destiné à s'insérer dans la chaîne cinématique d'un groupe Moto Propulseur électrique. Le rapport du premier étage a été défini à 3.15, permettant ainsi de réduire la vitesse du moteur d'entraînement de 45000 tr/min à 14000 tr/min.

Le démonstrateur fonctionnera sur un banc d'essai composé d'une machine électrique d'entraînement délivrant un couple moteur  $C_m$ , d'une transmission et d'une machine électrique de freinage exerçant un couple résistant  $C_r$  (voir Fig. 4.7).

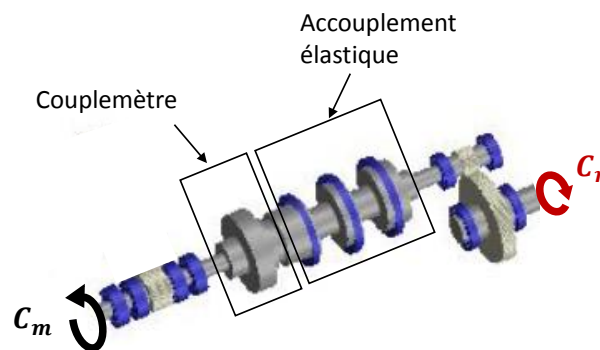


FIGURE 4.7: Modèle numérique 3D de la transmission

#### 4.3.1 Introduction du banc

Afin de simplifier l'étude, l'étage d'engrenage est supposé être composé d'un arbre flexible engrené sur un arbre rigide (voir figure (4.9)).

La dynamique de l'arbre flexible est décrite par le modèle éléments finis introduit dans le chapitre 2. Toutefois, l'arbre d'entrée du réducteur présente des éléments technologiques qui nécessitent une attention particulière, notamment, l'accouplement élastique et le couple-mètre. L'arbre de sortie du réducteur, supposé rigide, est décrit par un rotor disque ayant seulement 3 ddls. Avant de passer à une modélisation éléments finis du réducteur de vitesse, on lui propose une architecture « simplifiée/allégée » (voir Fig.4.10). Ce modèle « allégé » est directement inspiré du modèle « réel » par simplification des changements de section minimales. Les étapes de modélisation sont décrites par la figure (4.8).

Dans la suite, nous commençons par proposer un modèle dynamique de chaque élément constituant la transmission, à savoir :

- l'accouplement élastique ;
- le couplemètre ;
- l'engrenage ;
- les disques ;
- les paliers ;
- les éléments poutres.

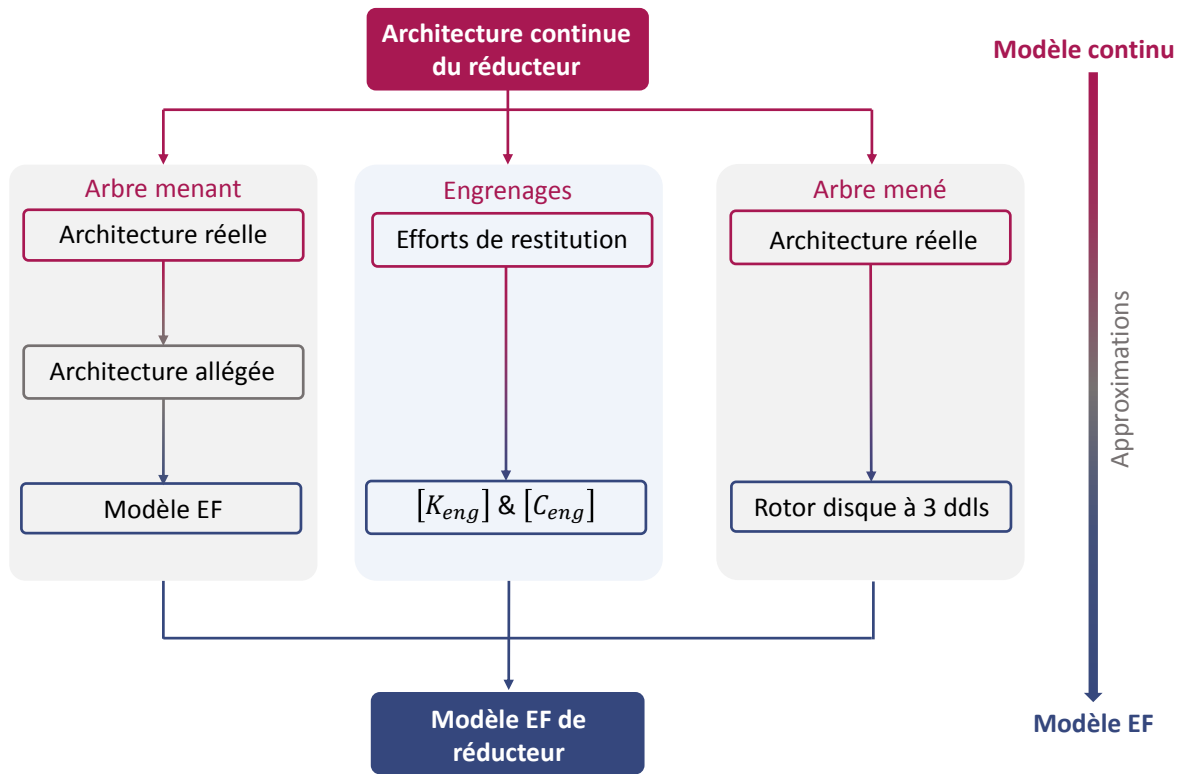


FIGURE 4.8: Étapes de modélisation

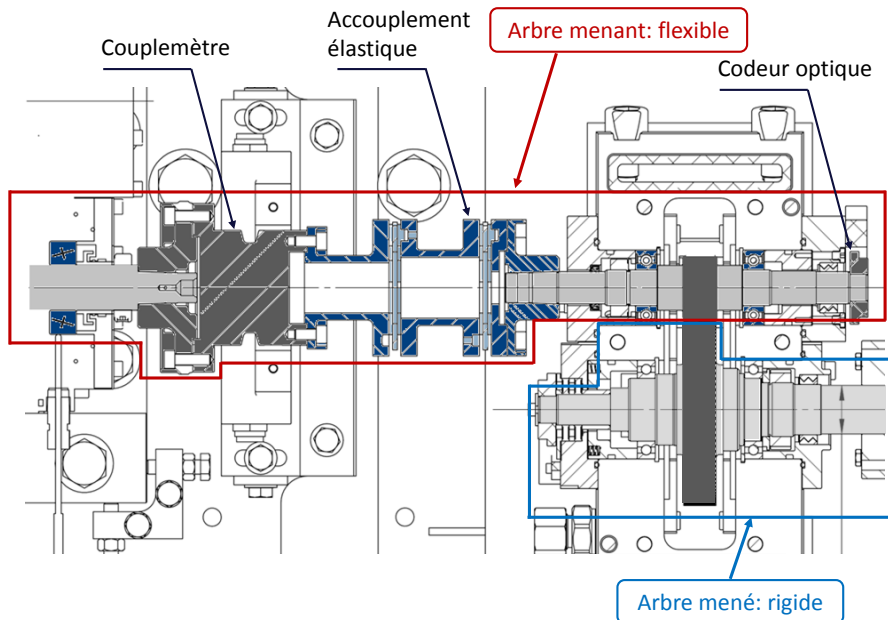


FIGURE 4.9: Architecture simplifié du banc RedHV+

Les équations du mouvement du système complet seront obtenues par assemblage des différentes matrices de masse, raideur et/ou amortissement issues des différents éléments.

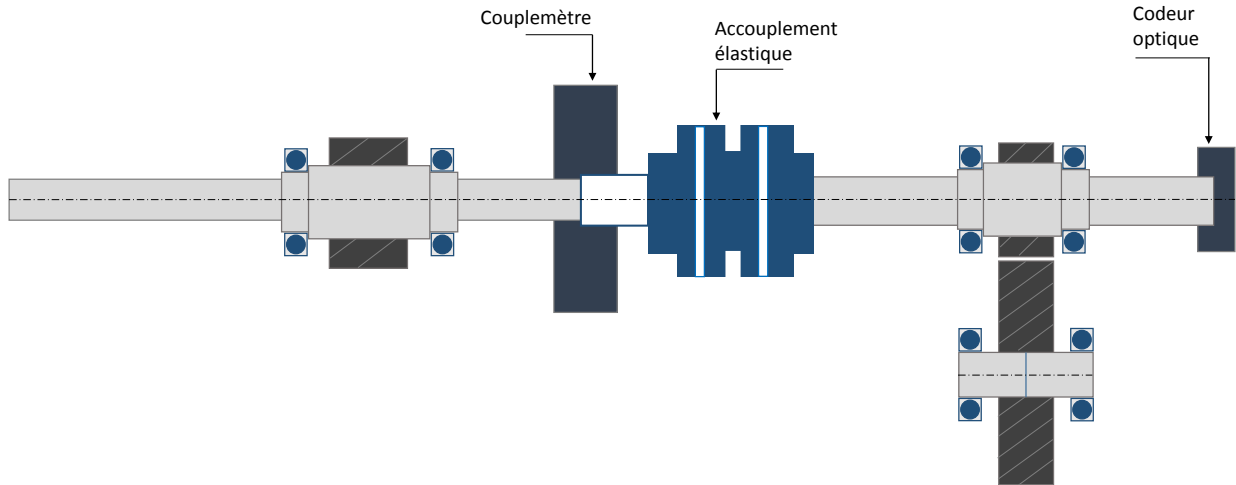


FIGURE 4.10: Modèle allégé du banc RedHV+

### 4.3.2 Description du modèle éléments finis

Le modèle éléments finis est obtenu à partir du modèle « allégé », il est représenté par la figure (4.11). Dans le modèle du réducteur, seulement l'arbre d'entrée est discrétisé par la méthode des éléments finis. Sur cet arbre, 12 nœuds sont utilisés pour la discrétisation, soit 72 ddls pour l'arbre d'entrée. L'arbre de sortie du réducteur est modélisé par un rotor disque reposant sur des paliers flexibles et placé au niveau du nœud 13. Le rotor disque a deux mouvements de translation possibles en plus du ddl de la rotation angulaire, soit 3ddl en tout. Le modèle du réducteur complet dispose alors de 75 ddls au total.

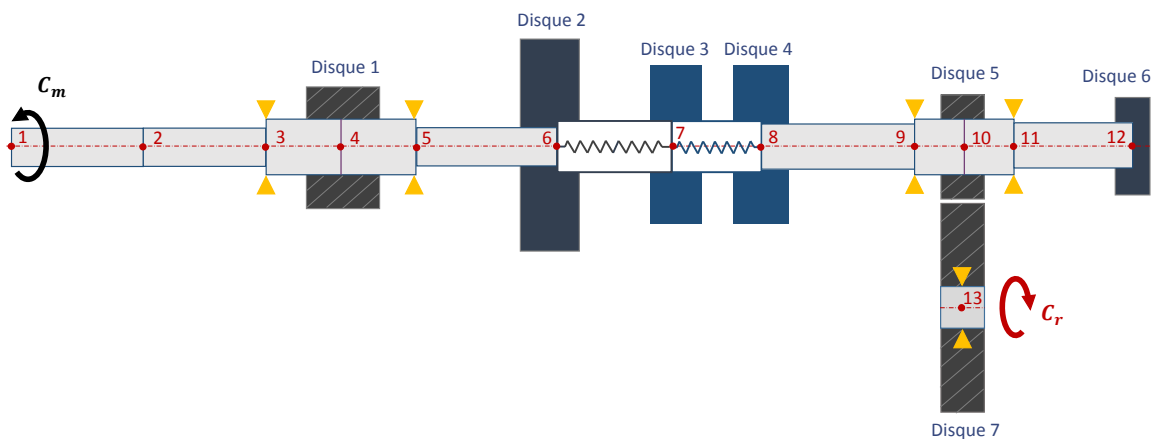


FIGURE 4.11: Modèle éléments finis du banc RedHV+

Les nœuds du modèle éléments finis sont reportés dans le tableau suivant (tableau 4.1).

Les éléments qui constituent le modèle éléments finis sont reportés dans le tableau (4.2). Les éléments numérotés 6 et 7 sont respectivement liés au couple-mètre et à l'accouplement élastique. Ce sont des éléments sans masses et qui sont définis uniquement à travers leurs matrices de raideurs. Les autres éléments sont les éléments poutres classiques (présentés au chapitre 2).

Index nœud	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	0	0	0
2	0	0	0,12
3	0	0	0,24
4	0	0	0,33
5	0	0	0,42
6	0	0	0,5125
7	0	0	0,5945
8	0	0	0,6765
9	0	0	0,7585
10	0	0	0,7885
11	0	0	0,8185
12	0	0	0,8855

TABLE 4.1: Coordonnées géométriques des nœuds du modèle

Index élément	X(m)	Y(m)	Z(m)	$D_{ext}(m)$	$D_{int}(m)$	nœud 1	nœud 2
1	0	0	0,12	0,016	0	1	2
2	0	0	0,12	0,016	0	2	3
3	0	0	0,09	0,024	0	3	4
4	0	0	0,09	0,024	0	4	5
5	0	0	0,0925	0,016	0	5	6
6	0	0	0,082	0,015	0	6	7
7	0	0	0,082	0,015	0	7	8
8	0	0	0,082	0,018	0	8	9
9	0	0	0,03	0,025	0	9	10
10	0	0	0,03	0,025	0	10	11
11	0	0	0,067	0,018	0	11	12

TABLE 4.2: Définition des propriétés des éléments

### Conditions aux limites

Le tableau (4.3) expose les nœuds associés aux roulements du système ainsi que les raideurs et amortissements qui les définissent. Les roulements sont supposés linéaires et symétriques.

Index roulement	nœud	$k_{xx} = k_{yy} N.m^{-1}$	$c_{xx} = c_{yy} N.s.m^{-1}$
1	3	$5.10^7$	$2.10^2$
2	5	$5.10^7$	$2.10^2$
3	9	$1.10^8$	$2.10^2$
4	11	$1.10^8$	$2.10^2$
5	13	$1.10^8$	$1.10^4$

TABLE 4.3: Définition des propriétés des roulements

Ces données conduisent à la définition, pour chaque palier indexé  $i$ , des matrices de raideur et d'amortissement de taille 6x6, notées respectivement  $[K_{p_i}]$  et  $[C_{p_i}]$ .

## Disques

Les disques sont modélisés par des masses/inerties concentrées sur les nœuds auxquels ils sont rattachés. Les propriétés des disques sont présentées dans le tableau (4.4).

Index disque	nœud	masse (Kg)	Inertie polaire (Kg.m <sup>2</sup> )	Inertie diamétrale (Kg.m <sup>2</sup> )
1	4	0,08	2,55.10 <sup>-5</sup>	1,52.10 <sup>-5</sup>
2	6	1	5,6.10 <sup>-4</sup>	3,4.10 <sup>-4</sup>
3	7	1,05	8,7.10 <sup>-4</sup>	7,1.10 <sup>-4</sup>
4	8	1,05	8,7.10 <sup>-4</sup>	7,1.10 <sup>-4</sup>
5	10	0,054	1,15.10 <sup>-5</sup>	7,4.10 <sup>-4</sup>
6	12	0,031	5,34.10 <sup>-6</sup>	2,8.10 <sup>-6</sup>
7	13	1,26	17.10 <sup>-4</sup>	8,9.10 <sup>-4</sup>

TABLE 4.4: Définition des propriétés des disques

Le centre de masse du disque indexé  $i$  est noté  $C_i$ . Le vecteur déplacement général du centre  $C_i$  est noté  $\{\delta_{c_i}\}$  tel que :

$$\{\delta_{c_i}\} = \left\{ u_{c_i}; v_{c_i}; w_{c_i}; \theta_{x_{c_i}}; \theta_{y_{c_i}}; \theta_{z_{c_i}} \right\}_{R_0} \quad (4.9)$$

Comme on l'a déjà vu au chapitre 2, sous les hypothèses de modélisation choisies, notamment l'hypothèse de non-stationnarité et de source non-idéale d'énergie, les disques interviennent dans l'équation de la dynamique à travers les différentes matrices/ vecteurs suivants :

$$\begin{aligned}
 [M_{D_{cte_i}}] &= \begin{bmatrix} m_{D_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{D_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{D_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{d_i}^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{d_i}^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_i}^D \end{bmatrix} ; & [M_{D_{var_i}}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_i}^D \theta_{y_{c_i}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{p_i}^D \theta_{y_{c_i}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [G_{D_i}] &= \dot{\theta}_{z_{c_i}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_i}^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{p_i}^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; & \{F_{D_i}^{coup}\} &= I_{p_i}^D \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{x_{c_i}} \dot{\theta}_{y_{c_i}} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

tel que  $m_{D_i}$ ,  $I_{d_i}^D$  et  $I_{p_i}^D$  sont respectivement la masse, le moment d'inertie diamétral et le moment d'inertie polaire du disque d'index  $i$ .

Un balourd a été placé au niveau du disque indexé 1. Il est caractérisé par la quantité  $m.e = 8,15.10^{-4} Kg.m$ .

## Engrenages

Le pignon et la roue de l'engrenage sont représentées par les disques indexés 5 et 7. Les matrices/ vecteurs qui découlent de leurs mouvements inertiels ont été donnés par l'équation (4.10). Le système d'engrenages est aussi caractérisé, d'un point de vue dynamique, par ses matrices de raideur d'engrènement  $[K_{eng}(\theta_z)]$  ainsi que la matrice d'amortissement  $[C_{eng}(\theta_z)]$  donnée par :

$$[C_{eng}] = c_{eng}(\theta_z) [Geom] \quad (4.11)$$

telle que la construction de la matrice  $[Geom]$  est donnée par l'équation (4.6) et  $c_{eng}(\theta_z)$  est l'amortissement d'engrènement, qui varie, de la même façon que la raideur d'engrènement en fonction du nombre de couples de dents en prise suivant une fonction en trapèze exprimé dans le domaine angulaire.

La construction de la matrice de raideur a été expliquée dans la section précédente à travers l'équation (4.3).

### Couple-mètre

Le couple-mètre est modélisé par une masse/inertie concentrée sur le nœud 6 et un élément flexible sans masse entre les nœuds 6 et 7 ayant les raideurs en traction-compression, flexion et torsion.

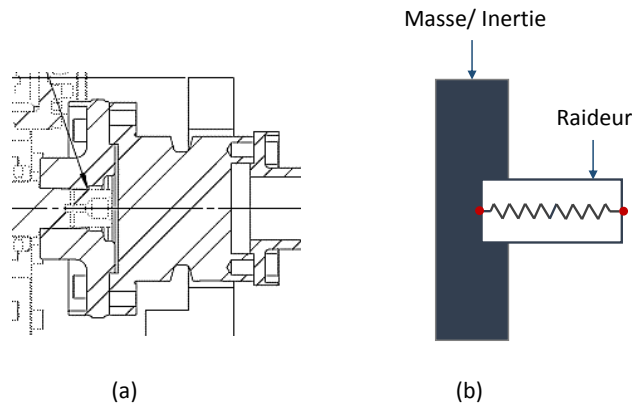


FIGURE 4.12: (a) Coupe du couplemètre (b) modèle simplifié du couple-mètre

La matrice de raideur est de taille 12x12, elle est donnée par :

$$[K_{coup}] = \begin{bmatrix} k_{a_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{a_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{r_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{r_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{r_{acc}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{f_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{f_{acc}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{f_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{f_{acc}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{t_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{t_{acc}} \\ -k_{a_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{a_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{r_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{r_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{r_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{r_{acc}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{f_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{f_{acc}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{f_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{f_{acc}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{t_{acc}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{t_{acc}} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

telle que les raideurs sont données par le tableau suivant :

$k_{a_{acc}} (N/m)$	$k_{r_{acc}} (N/m)$	$k_{f_{acc}} (N.m/rad)$	$k_{t_{acc}} (N.m/rad)$
$4,78.10^8$	$1,48.10^8$	$1,6.10^5$	$1,68.10^5$

TABLE 4.5: Propriétés de raideurs du couple-mètre

### Accouplement élastique

L'accouplement élastique permet la liaison entre les parties motrices et réceptrices constituées par le système d'engrenages. Une coupe de l'accouplement ainsi qu'un modèle simplifié de l'accouplement sont donnés par la figure (4.13).

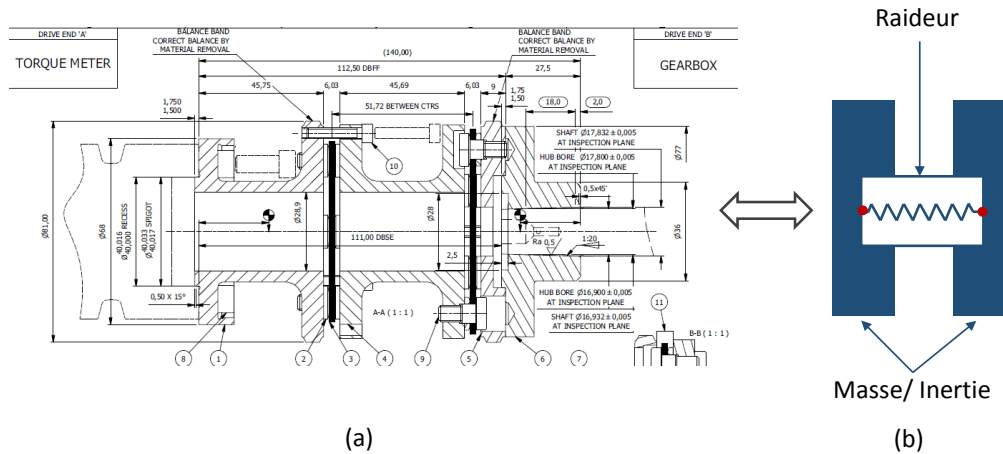


FIGURE 4.13: (a) Coupe de l'accouplement élastique (b) Modèle simplifié de l'accouplement

Le modèle simplifié consiste à représenter l'accouplement élastique par deux masses concentrées sur les deux nœuds représentant les extrémités de l'accouplement, à savoir les nœuds 7 et 8, ainsi que par un élément flexible sans masse qui lie les deux nœuds.

Par souci de simplification, les deux masses/inerties représentant l'accouplement élastique sont supposées identiques. Elles sont représentées par les disques 3 et 4 dont les propriétés sont explicitées dans le tableau (4.4)

Les raideurs de l'accouplement sont définies par les quantités suivantes :

- la raideur en flexion est donnée par :  $k_{f_{elas}} = 4183 N.m/rad$  ;
- la raideur en torsion est donnée par :  $k_{t_{elas}} = 37000 N.m/rad$

La matrice de raideur, de taille 12x12, est ainsi construite de la façon suivante :



$$[K_{acc}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{f_{els}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{f_{els}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{f_{els}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{f_{els}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{t_{els}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{t_{els}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{f_{els}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{f_{els}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{f_{els}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{f_{els}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{t_{els}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{t_{els}} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

### Équations du mouvement du réducteur complet

Les équations du mouvement du réducteur de vitesses sont obtenues par assemblage des matrices de masse et/ou raideurs des éléments suivants :

- les éléments poutres ;
- les disques ;
- l'accouplement élastique ;
- le couple-mètre ;
- les paliers.

Quand à l'engrenage, il est pris en considération à travers une force de restitution obtenue de la façon suivante :

$$\{F_{eng}(\theta)\} = [K_{eng}(\theta)]\{\delta\} + [C_{eng}(\theta)]\{\dot{\delta}\} \quad (4.14)$$

L'équation de la dynamique totale est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} & ([M_s] + \sum_{i=1}^7 [M_{D_{cte_i}}])\{\ddot{\delta}\} + \left( [C_s] + \sum_{i=1}^5 [C_{p_i}] \right) \{\dot{\delta}\} + \left( [K_s] + [K_{acc}] + [K_{coup}] + \sum_{i=1}^5 [K_{p_i}] \right) \{\delta\} = \\ & - \left( [S_{gyr}(\{\delta\})] + \sum_{i=1}^7 [M_{D_{var_i}}(\{\delta\})] + [M_u(\theta_{z_{c_1}})] \right) \{\ddot{\delta}\} - \sum_{i=1}^7 [G_{D_i}(\dot{\theta}_{z_{c_i}})] \{\dot{\delta}\} \\ & - \left( \{F_{nlgyr}(\{\dot{\delta}\})\} + \{F_{NLu}(\theta_{z_{c_i}})\} + \sum_{i=1}^7 \{F_{D_i}^{coup}\} + \{F_{eng}(\theta)\} \right) + \{F_{ext}\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

La construction des matrices  $[M_s]$ ,  $[C_s]$ ,  $[K_s]$ ,  $[S_{gyr}(\{\delta\})]$  et  $\{F_{nlgyr}(\{\dot{\delta}\})\}$  a été détaillée au chapitre 2. Dans la suite, les matrices suivantes sont utilisées afin de simplifier l'écriture de l'équation (4.15) :

$$[M_{tot}] = [M_s] + \sum_{i=1}^7 [M_{D_{cte_i}}] \quad (4.16a)$$

$$[C_{tot}] = [C_s] + \sum_{i=1}^5 [C_{p_i}] \quad (4.16b)$$

$$[K_{tot}] = [K_s] + [K_{acc}] + [K_{coup}] + \sum_{i=1}^5 [K_{p_i}]; \quad (4.16c)$$

Cela nous ramène ainsi à l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} [M_{tot}]\{\ddot{\delta}\} + [C_{tot}]\{\dot{\delta}\} + [K_{tot}]\{\delta\} = \\ - \left( [S_{gyr}(\{\delta\})] + \sum_{i=1}^7 [M_{D_{var_i}}(\{\delta\})] + [M_u(\theta_{z_{c_1}})] \right) \{\ddot{\delta}\} - \sum_{i=1}^7 [G_{D_i}(\dot{\theta}_{z_{c_i}})] \{\dot{\delta}\} \\ - \left( \{F_{nlgyr}(\{\delta\})\} + \{F_{NLu}(\theta_{z_{c_i}})\} + \sum_{i=1}^7 \{F_{D_i}^{coup}\} \right) - \{F_{eng}(\theta)\} + \{F_{ext}\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ensuite, l'écriture sous forme d'équation d'état est effectuée de la même façon qu'au chapitre 2 pour le cas des monorotors. L'écriture sous cette forme nécessite la définition des matrices d'état  $[A]$  et  $[B]$  calculées de la façon suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & [Id] \\ -[M_{tot}]^{-1}[K_{tot}] & -[M_{tot}]^{-1}[C_{tot}] \end{bmatrix} ; \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ [M_{tot}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Finalement, l'équation d'état est obtenue et elle est écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \{\dot{Q}\} = [SS^{-1}] \left( [A] - [B] \sum_{i=1}^7 [C_{D_i}(\dot{\theta}_{z_c})] [T] \right) \{Q\} \\ + [B] \left( \{F_{ext}\} - \{F_{nlgyr}(\{\dot{Q}\})\} - \{F_{NLu}(\theta_{z_{c_1}})\} - \sum_{i=1}^7 \{F_{D_i}^{coup}\} - \{F_{eng}(\theta)\} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Telle que :

$$[SS] = \left( [Id] + [B] \left( [S_{gyr}(\{Q\})] + \sum_{i=1}^7 [M_{D_{var_i}}(\{Q\})] + [M_u(\theta_{z_{c_1}})] \right) [T] \right) \quad (4.20)$$

Nous rappelons que la matrice  $[T]$ , définie au chapitre 2, est la matrice qui permet les opérations d'extraction suivantes :

$$[T] \{Q\} = \{\dot{\delta}\} \quad \text{et} \quad [T] \{\dot{Q}\} = \{\ddot{\delta}\} \quad (4.21)$$

### 4.3.3 Simulation du comportement dynamique du réducteur de vitesse

Une fois le modèle dynamique développé pour le réducteur de vitesse, on commence par identifier les fréquences critiques du rotor à travers le Diagramme de Campbell. Le rotor flexible menant a trois vitesses critiques dans la plage de vitesse étudiée, ces vitesses sont données par :  $\Omega_{cr1} = 10616rpm$ ,  $\Omega_{cr2} = 14777rpm$  et  $\Omega_{cr3} = 18853rpm$ .

Le pignon et la roue sont supposés à denture droite. Le nombre de dents du pignon et de la roue (voir tableau (4.6)) conduit à un rapport de réduction de 3,15.

	Pignon	Roue
Nœud d'attache	10	13
Nombre de dents	$Z_1 = 13$	$Z_2 = 41$
Rayon primitif (mm)	16,5	52
$\beta$ angle d'hélice	0	0

TABLE 4.6: Caractéristiques de l'engrenage

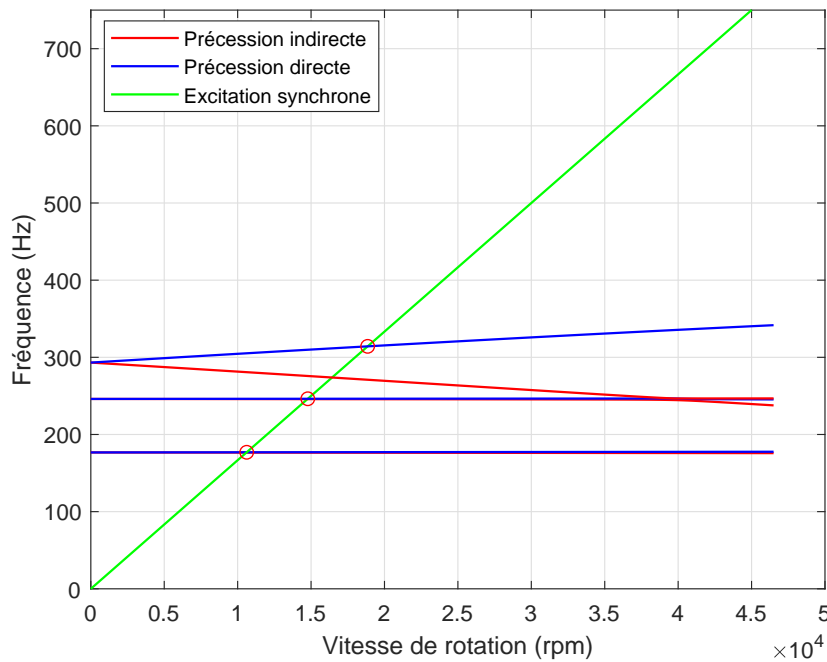


FIGURE 4.14: Diagramme de Campbell de l'arbre d'entrée

Les résultats de simulation pour l'évolution de la VIR au niveau du pignon et de la roue, dans le domaine angulaire, sont présentés sur la figure (4.15). On vérifie bien que le rapport entre la vitesse d'entrée et celle de sortie est de 3.15, ce qui correspond bien au rapport  $\frac{Z_2}{Z_1}$ .

Pour faire une analyse fréquentielle des différents signaux vibratoires, on adopte la méthode de représentation par suivi d'ordre tel que l'ordre 1 correspond à un évènement par tour.

L'ordre correspond d'une façon plus générale à un nombre d'évènement par tour. Ainsi sur le pignon d'entrée ayant un nombre de dents  $Z_1$ , il y aura  $Z_1$  évènements. Le nombre de dents  $Z_1$  sera donc représentatif de la fréquence d'engrènement pour tout les signaux vibratoires observés sur l'arbre d'entrée. De la même façon, un ordre égal à  $Z_2$  sur la roue de sortie sera représentatif de la fréquence d'engrènement. Les diagrammes de suivi d'ordre utilisés dans la suite

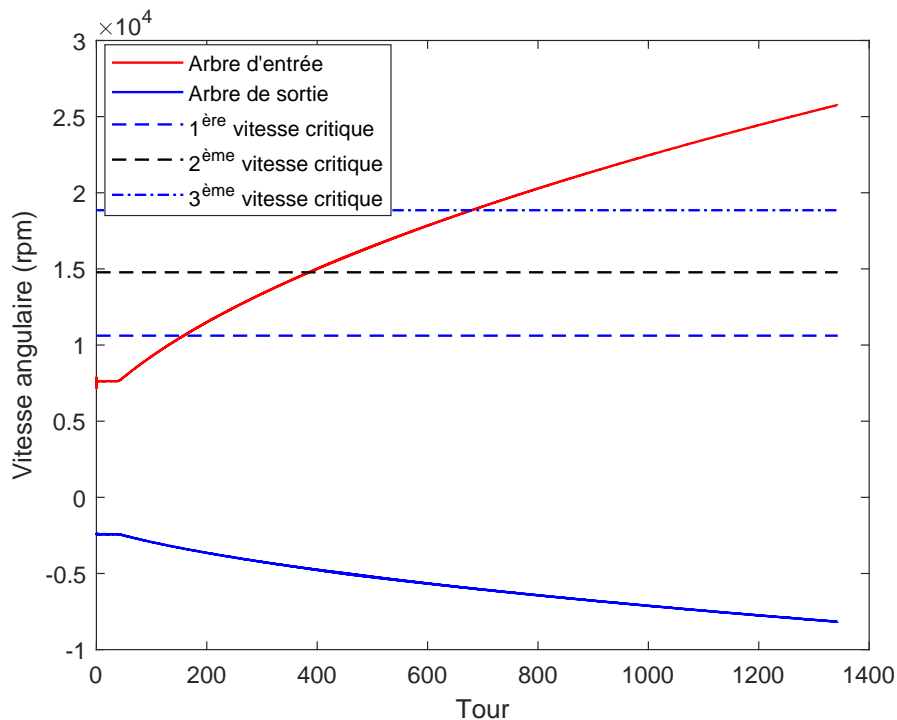


FIGURE 4.15: Évolution de la VIR sur l'arbre d'entrée (rouge) et l'arbre de sortie (bleu)

sont construits de la façon suivante : l'axe des abscisses représente le nombre de tour effectué par le rotor, l'axe des ordonnées représente l'ordre (nombre d'évènement par tour) et la charte de couleurs nous renseigne sur l'amplitude du signal. L'analyse fréquentielle par suivi d'ordre est intéressante pour l'étude des rotors connectés par des engrenages car la nature du signal d'engrènement est de type large bande [27] et donc la famille de raies est étalée sur une grande partie du spectre. En outre, ce type d'analyse offre une lisibilité assez claire et une interprétation plus directe du contenu fréquentiel du signal observé surtout en régime non-stationnaire.

L'analyse fréquentielle par suivi d'ordre est appliquée au signal de la VIR sur le pignon d'entrée au nœud 10. Elle est présentée par la figure (4.16). Le spectre est composé par une famille de raies de fréquences due à la fondamentale et aux harmoniques du signal d'engrènement représenté par un ordre égal à  $Z_1$  et ses multiples. Nous constatons aussi la présence d'une modulation d'amplitude se traduisant par la présence de bandes latérales autour de l'ordre d'engrènement à  $\pm 2$ . Une modulation d'amplitude autour de l'ordre d'engrènement à  $\pm 1$  apparaît principalement lors du passage par la deuxième vitesse critique (autour de 400 *tr* (voir Fig.4.15)). Cette modulation d'amplitude à  $\pm 1$  n'aurait pas lieu s'il y avait pas un balourd placé sur le pignon (voir Fig.4.17).

Nous nous intéressons ensuite à l'étude des niveaux vibratoires latéraux sur les nœuds 7 et 8 définissant l'accouplement élastique (voir Fig.4.18). Pour ce faire, les amplitudes vibratoires au niveau de ces deux nœuds ont été représentées (voir Fig.4.18). Afin de mieux interpréter le comportement dynamique de la ligne d'entrée du réducteur de vitesse, les déformées opérationnelles au moment du passage par la 2<sup>ème</sup> et la 3<sup>ème</sup> vitesse critique ont été reportées sur la figure (4.19).

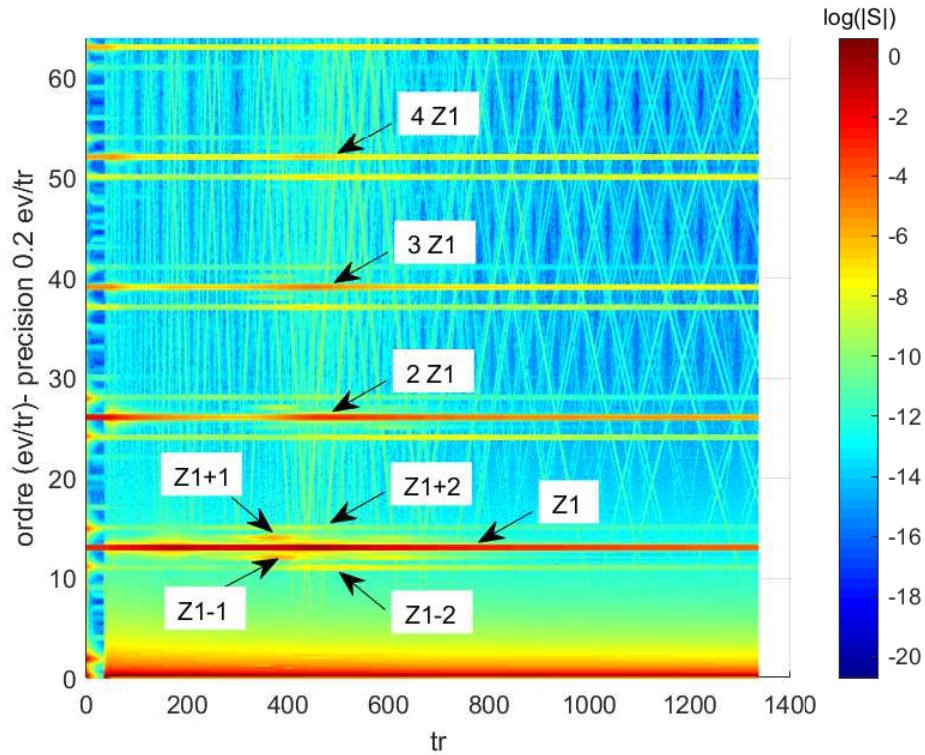


FIGURE 4.16: Suivi d'ordre pour le signal de VIR du disque menant au nœud 10 en présence du balourd

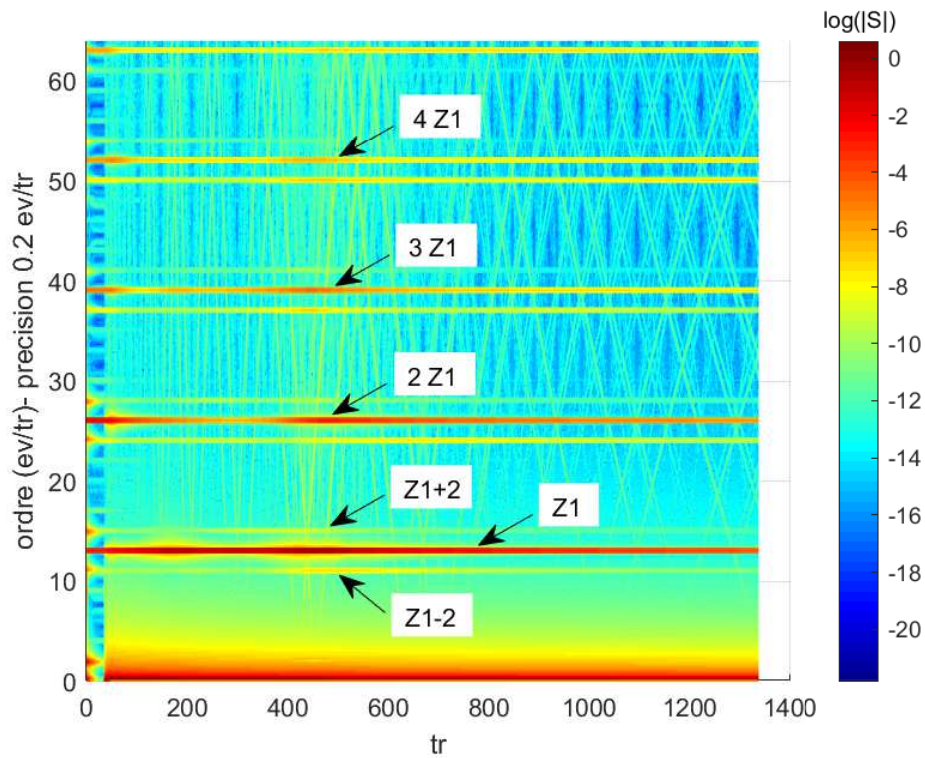


FIGURE 4.17: Suivi d'ordre pour le signal de VIR du disque menant au nœud 10 en l'absence de balourd

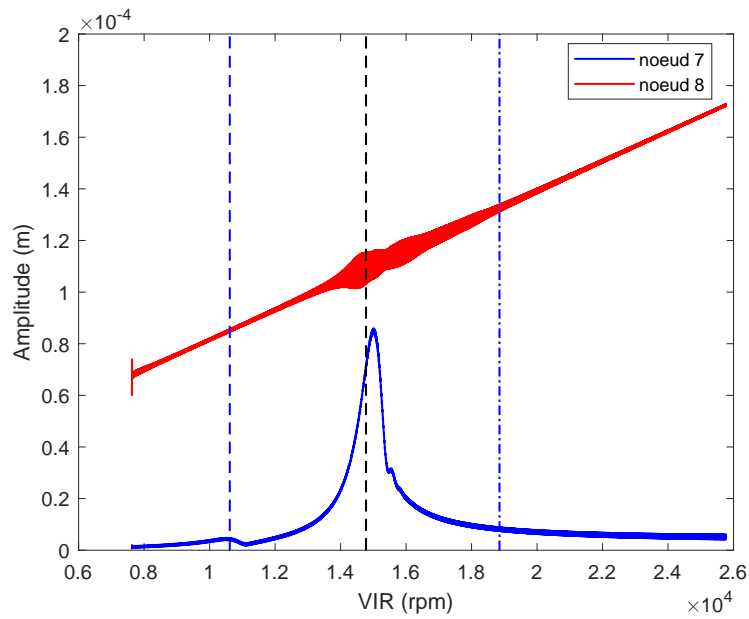


FIGURE 4.18: Vibrations latérales sur les deux nœuds de l'accouplement élastique

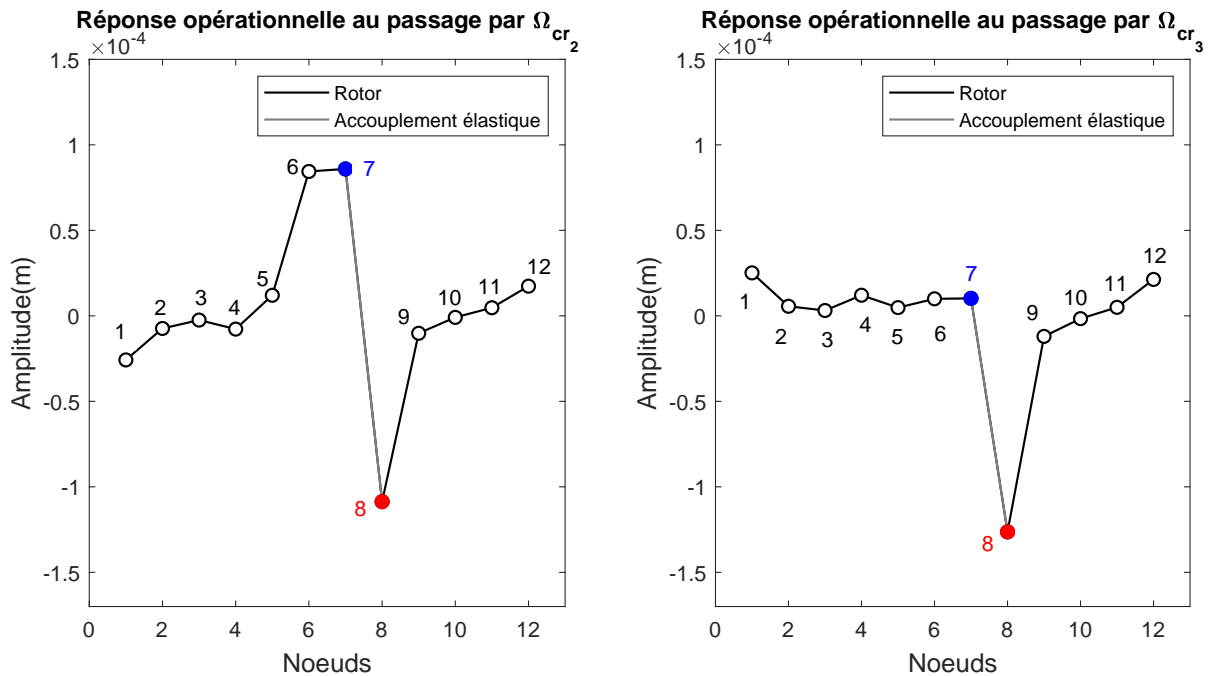
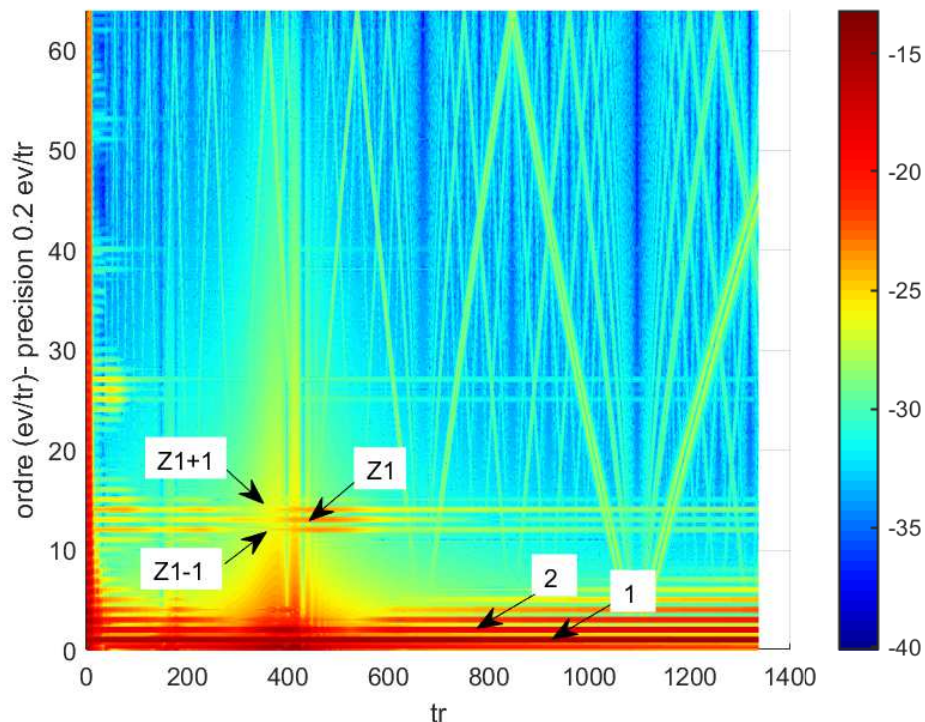


FIGURE 4.19: Déformées opérationnelles au passage par la 2ème vitesse critique (à gauche) et la 3ème vitesse critique (à droite)

Les amplitudes de déplacement des noeuds 7 et 8 de part et d'autres de l'accouplement élastique laisse présager un risque fort de ruine de l'accouplement. Selon ces résultats l'accouplement

élastique, initialement prévu pour travailler en torsion est principalement sollicité en flexion et cisaillement transverse dans des amplitudes qui croissent rapidement avec la vitesse de rotation. Ces observations obtenues sur la base d'un modèle simplifié de la géométrie du banc REDHV+ restent toutefois à consolider en vérifiant les hypothèses de modélisation (caractéristiques géométriques et caractéristiques matériaux). Le modèle pourrait toutefois servir de base à une démarche d'optimisation de la conception.

Une analyse fréquentielle par suivi d'ordre des vibrations latérales sur les nœuds 7 et 8 définissant les extrémités de l'accouplement a été effectuée (voir Fig.4.20 et Fig.4.22). Sur le nœud 7, l'ordre 1 et ses harmoniques sont présents avec les amplitudes les plus importantes. L'ordre Z1, modulé par l'ordre 1 relatif au balourd, est aussi présent mais avec des amplitudes moins faibles.



**FIGURE 4.20:** Suivi d'ordre pour le signal des vibrations latérales au nœud 7 en présence du balourd

**Remarque :** Les figures 4.16, 4.17 et 4.20 à 4.22 sont obtenues par des analyses en suivi l'ordre jusqu'à l'ordre 64. Les traces obliques qui "rebondissent" entre 0 et 64 correspondent au repliement spectral jusqu'à des ordres élevés de composantes ayant une fréquence quasi fixe. Ces composantes sont issues des modes propres de la structure.

Ce qui est intéressant de voir, c'est qu'au passage par la deuxième vitesse critique, le signal des vibrations latérales au nœud 7 devient très riche avec plusieurs composantes fréquentielles (voir Fig.4.20). En l'absence de balourd, le signal des vibrations latérales au nœud 7 aurait été présenté par la figure (4.21) sur laquelle il y aurait seulement la fréquence d'engrènement et ses harmoniques. L'analyse par suivi d'ordre des vibrations latérales sur le nœud 8 (voir Fig.4.22) présente des résultats similaires à l'analyse du signal de VIR. Sauf que, cette fois-ci, nous observons la présence de l'ordre 1 ainsi que de la fréquence d'engrènement modulée par la fréquence d'excitation du balourd.



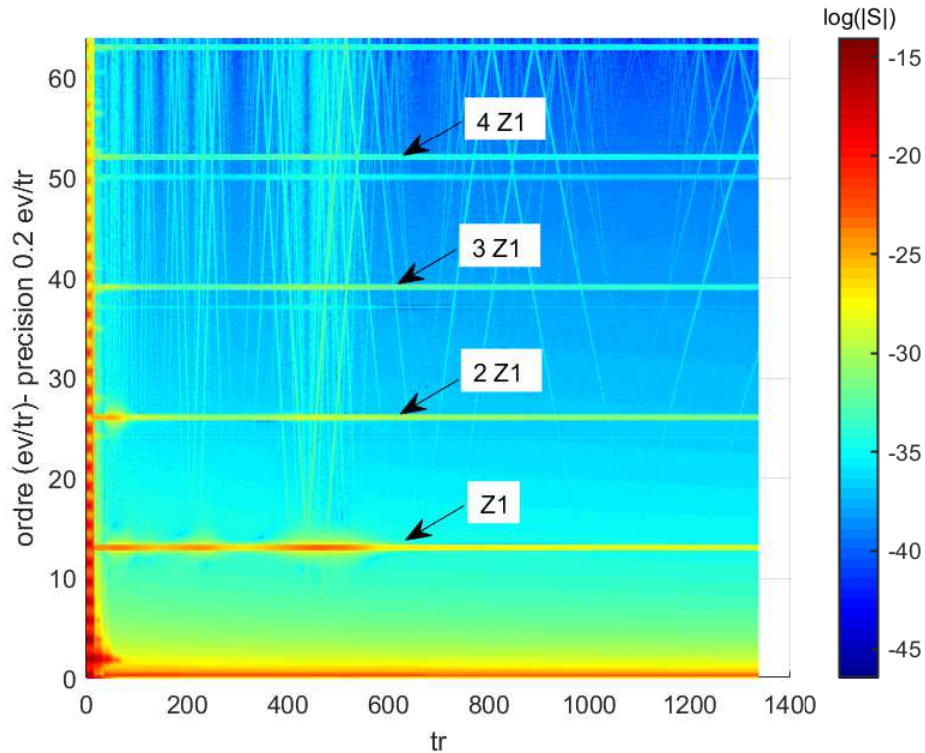


FIGURE 4.21: Suivi d'ordre pour le signal des vibrations latérales au nœud 7 en l'absence du balourd

Le comportement vibratoire au niveau de l'accouplement élastique présente des niveaux d'amplitude traduisant un risque important de fatigue vibratoire à grand nombre de cycles. D'où l'importance de bien choisir l'accouplement élastique afin d'éviter les risques de défaillance précoce.

Les incidents de tenue mécanique des systèmes mécaniques complets présentant un ou plusieurs engrenements sont loin d'être négligeables et justifient, entre autre, le travail de modélisation présenté dans ce chapitre. Les résultats de simulation montrent qu'un risque de défaillance pourrait se présenter lors du fonctionnement du banc d'essai et qu'un choix plus judicieux de l'accouplement élastique pourrait être fait afin de limiter ce risque.



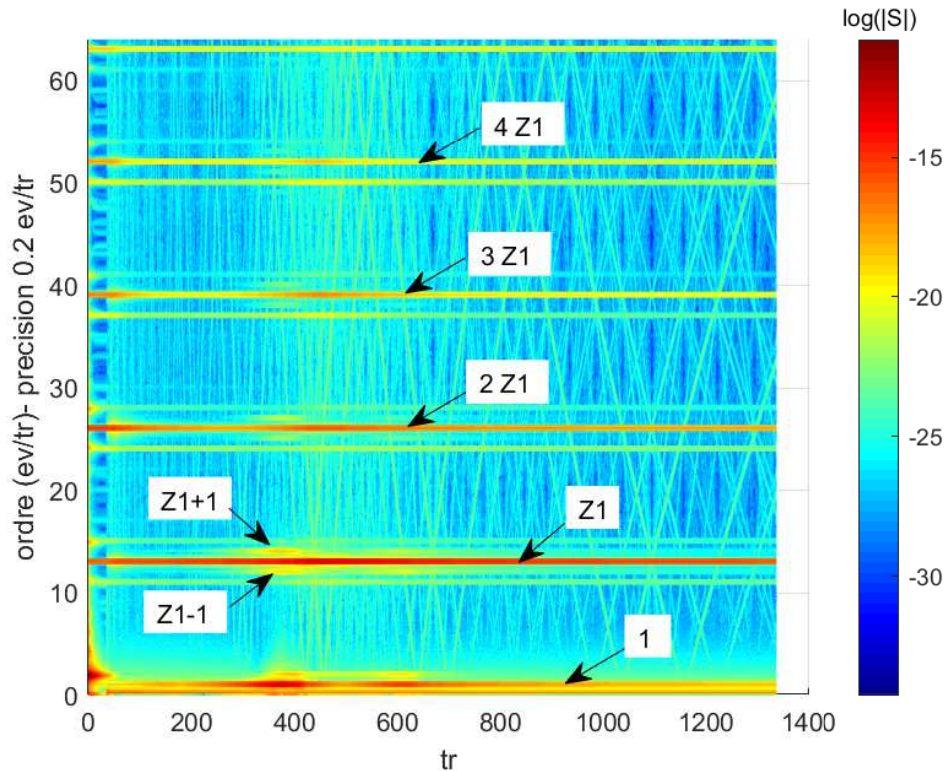


FIGURE 4.22: Suivi d'ordre pour le signal des vibrations latérales au nœud 8

#### 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle dynamique des monorotors à très haute vitesse et en régime non-stationnaire a été étendu pour les multirotors. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés à la modélisation du réducteur de vitesse du banc RedHV+. Un modèle éléments finis a été développé à partir d'une architecture simplifiée du banc. Une modélisation des différents éléments technologiques, à savoir, l'accouplement élastique, le couple-mètre et l'engrenage a été proposée. Une attention particulière a été accordée à la construction du modèle d'engrenage. L'approche de liaison par engrenage est une approche qui permet la considération du mouvement du corps rigide autour de l'axe de rotation.

Les résultats de simulation montrent d'une part, l'impact de la présence d'engrenage sur la VIR. Les analyses temps fréquence montrent la présence d'une excitation à la fréquence d'engrènement à la fois sur le signal de la VIR ainsi que sur les signaux de vibrations latérales. Il est également intéressant de voir que la présence d'un balourd conduit à un signal vibratoire plus riche en composantes fréquentielle lors du passage par les vitesses critiques.

D'autre part, les résultats de simulation montrent qu'au niveau de l'accouplement élastique, il y a un gradient de déformation important. Les niveaux vibratoires de part et d'autre de l'accouplement élastique étant à des fréquences assez élevées, il y a un grand risque de fatigue vibratoire à haut cycle. D'où l'importance de bien dimensionner l'accouplement élastique afin qu'il puisse résister à ces sollicitations cycliques.

# Bibliographie

- [1] CJ Bard. Modelisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages. 1997. [89](#), [90](#)
- [2] HK Kohler, A Pratt, and AM Thompson. Dynamics and noise of parallel axis gearing. imeche gearing conference, 1970. [89](#)
- [3] Kiyohiko UMEZAWA. The meshing test on helical gears under load transmission : 1st report, the approximate formula for deflections of gear tooth. *Bulletin of JSME*, 15(90) :1632–1639, 1972. [89](#)
- [4] Philippe Velex. *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles*. PhD thesis, Lyon, INSA, 1988. [89](#), [90](#)
- [5] Ahmet Kahraman, H Nevzat Ozguven, Donald R Houser, and James J Zakrajsek. Dynamic analysis of geared rotors by finite elements. 1992. [89](#)
- [6] Adeline Bourdon. *Modélisation dynamique globale des boîtes de vitesses automobile*. PhD thesis, Lyon, INSA, 1997. [89](#), [90](#)
- [7] Guillaume Sika. *Dynamique des transmissions en régime transitoire*. PhD thesis, Lyon, INSA, 2008. [89](#)
- [8] José Luis Gomez Chirinos. *Angle modeling of a rotating machine. Application to wind turbine surveillance*. PhD thesis, Lyon, 2017. [89](#), [90](#)
- [9] Georges Henriot. *Traité théorique et pratique des engrenages*. 1975. [89](#)
- [10] Jian Lin and Robert G Parker. Mesh stiffness variation instabilities in two-stage gear systems. *J. Vib. Acoust.*, 124(1) :68–76, 2001. [89](#)
- [11] Ahmet Kahraman and Rajendra Singh. Non-linear dynamics of a spur gear pair. *Journal of sound and vibration*, 142(1) :49–75, 1990. [89](#)
- [12] H Nevzat Özgüven and DR Houser. Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error. *Journal of sound and vibration*, 125(1) :71–83, 1988. [89](#)
- [13] HN Özgüven. A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gears including shaft and bearing dynamics. *Journal of sound and vibration*, 145(2) :239–260, 1991. [89](#)
- [14] Jean-Luc Dion, Sylvie Le Moyne, Gaël Chevallier, and Hamidou Sebbah. Gear impacts and idle gear noise : Experimental study and non-linear dynamic model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(8) :2608–2628, 2009. [89](#)
- [15] Stephen L Harris. Dynamic loads on the teeth of spur gears. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 172(1) :87–112, 1958. [89](#)

- 
- [16] Ahmed Guerine. *Contribution à l'étude du comportement dynamique d'un système d'engrenage en présence d'incertitudes*. PhD thesis, 2016. 89
- [17] Pascal Vernay and Guy Ferraris. Comportement dynamique en torsion et en régime transitoire d'un démarreur de moteur d'avion. *Mécanique & industries*, 7(2) :147–153, 2006. 89
- [18] Yasser Diab. *Analyse des pertes de puissance dans les transmissions par engrenages à grande vitesse : applications aux réducteurs industriels et aux machines textiles*. PhD thesis, Lyon, INSA, 2005. 89
- [19] Fakher Chaari, Tahar Fakhfakh, Riadh Hbaieb, Jamel Louati, and Mohamed Haddar. Influence of manufacturing errors on the dynamic behavior of planetary gears. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 27(7-8) :738–746, 2006. 89
- [20] M Merzoug, A Miloudi, and K Brahimi. Comportement dynamique d'une transmission par engrenages—analyse de la stabilité. In *XV e Congrès Français de Mécanique, Nancy*, pages 3–7, 2001. 89
- [21] Mohamed Nizar Bettaieb. *Modélisation du comportement mécanique d'engrenages : couplages entre engrènements et éléments de structures flexibles*. PhD thesis, Lyon, INSA, 2006. 89
- [22] LD Mitchell. Torsional-lateral coupling in a geared, high speed rotor system. *ASME Paper 75-DET-75*, 1975. 89
- [23] Takuzo IWATSUBO, Shirou ARII, and Ryoji KAWAI. Coupled lateral-torsional vibration of rotor system trained by gears : Part 1. analysis by transfer matrix method. *Bulletin of JSME*, 27(224) :271–277, 1984. 89
- [24] Siu-Tong Choi and Sheng-Yang Mau. Dynamic analysis of geared rotor-bearing systems by the transfer matrix method. *J. Mech. Des.*, 123(4) :562–568, 1999. 89
- [25] SV Neriya, RB Bhat, and TS Sankar. Effect of coupled torsional-flexural vibration of a geared shaft system on the dynamic tooth load. *Shock and Vibration Information Center The Shock and Vibration Bull.* 54, Pt. 3 p 67-76(SEE N 85-18406 09-39), 1984. 89
- [26] RB Neriya. Coupled torsional flexural vibration of a geared shaft system using finite element method. *The Shock and Vibration Bulletin*, 3 :13–25, 1985. 89
- [27] Mohamed El Badaoui. *Contribution au diagnostic vibratoire des reducteurs complexes a engrenages par l'analyse cepstrale*. PhD thesis, Université Jean Monnet-Saint-Etienne, 1999. 105

# Chapitre 5

## Vers un nouvel outil d'identification des paramètres incertains en machines tournantes

**Résumé** Dans ce chapitre, on s'intéresse à identifier les paramètres incertains des machines tournantes au moyen d'une approche stochastique basée sur le filtrage de Kalman. L'objectif est de proposer un nouvel algorithme innovant se basant sur des outils qui, à notre connaissance, n'ont pas encore fait l'objet d'une application sur des rotors.

Tout d'abord, les champs d'application de l'identification dans le contexte particulier des machines tournantes sont introduits ainsi que les différentes techniques qui sont classiquement utilisées. Ensuite, l'outil qui va nous intéresser le plus dans ce chapitre, à savoir le filtre de Kalman est introduit. Dans les sections 5.1 et 5.2, le filtre de Kalman sera défini plus précisément avec ses différentes variantes linéaires et non-linéaires. Les étapes principales de l'algorithme sont décrites et sont appliquées sur quelques exemples de rotors.

L'identification est faite sur un rotor disque opérant à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire. Le modèle du comportement dynamique du rotor étant non-linéaire, le recours au filtre de Kalman non-parfumé a été fait. Une attention particulière est accordée au comportement du filtre, en terme de convergence, lors du passage par les vitesses critiques. Les résultats obtenus quant à la performance du filtre sont encourageants et permettront d'envisager son utilisation sur des modèles dynamiques plus complets et plus réalistes comme le modèle dynamique présenté au chapitre 2.

### Sommaire

---

<b>4.1 Introduction aux modèles d'engrènement</b>	<b>89</b>
<b>4.2 Modèle d'engrenage adopté</b>	<b>90</b>
4.2.1 Définition de la force d'excitation provenant de l'engrenage	91
4.2.2 Définition de la raideur d'engrènement	93
<b>4.3 Modélisation d'un étage d'engrenage : application au banc RedHV+</b>	<b>94</b>
4.3.1 Introduction du banc	95
4.3.2 Description du modèle éléments finis	97
4.3.3 Simulation du comportement dynamique du réducteur de vitesse	104
<b>4.4 Conclusion</b>	<b>110</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>112</b>

---

## 5.1 L'identification dans le domaine des machines tournantes

Dans le cadre des machines tournantes, on parle très souvent de l'identification comme étant un outil de maintenance prédictive ou de surveillance conditionnelle. Sauf que l'identification a un champ d'application beaucoup plus large que ça : en effet, on procède à de l'identification non seulement pour faire du diagnostic de l'état de la machine mais aussi pour remonter à des paramètres physiques qui sont non accessibles à l'aide de capteurs de mesure. La quantification de ces paramètres non directement mesurables sur un banc d'essai et figurant dans le modèle dynamique, à travers l'identification, permet d'enrichir le modèle ainsi que d'améliorer son degré de précision.

### 5.1.1 L'identification pour la surveillance conditionnelle sur les rotors

La surveillance/ maintenance conditionnelle joue un rôle très important dans l'industrie puisqu'elle permet d'éviter des défaillances indésirables qui pourraient être dans certains cas à l'origine de la destruction de la machine. Cette démarche permet d'allonger la durée de vie des machines ainsi que de garantir plus de sécurité opérationnelle. Les pratiques de maintenance et de fiabilisation ont considérablement évolué au cours des dix dernières années. Alors que le terme maintenance était jadis synonyme de tâches basiques et d'entretien, il est aujourd'hui devenu quasi systématiquement synonyme de fiabilité. Les objectifs d'une démarche de maintenance conditionnelle sont [1] :

- réduire le nombre d'arrêts sur casse ;
- fiabiliser les machines ;
- augmenter leurs taux de disponibilité.

Plusieurs types d'avaries peuvent exister sur un rotor. On distingue les avaries localisées et celles qui sont réparties comme l'avait détaillé Tandon dans sa revue [2]. D'une manière non exhaustive, les défauts les plus récurrents sur une machine tournante concernent : l'apparition d'un balourd, les défauts de roulements ou de denture d'engrenages ainsi que l'apparition de fissurations. L'identification des défauts sur les roulements a toujours attiré une attention particulière auprès de la communauté de la surveillance. Les roulements constituent la partie la plus cruciale d'une machine tournante : c'est au niveau de ces éléments que le mouvement relatif entre les parties rotatives et les parties statiques de la machine a lieu. Le roulement constitue aussi l'un des composants technologiques les plus critiques pour les machines tournantes vu que leurs propriétés dynamiques impactent directement le comportement vibratoire de la structure.

Parmi les études les plus récentes qui ont été menées dans cette perspective, on cite les études qui ont été construites autour de l'approche angulaire comme alternative à l'approche temporelle [3]. Cette approche a démontré tout son intérêt dans le cas de la détection des défauts en régime non-stationnaire. Bourdon et al [4] ont démontré qu'en associant le signal de la vitesse instantanée de rotation (VIR) à des analyses angulaires on obtient une source riche d'information quant à l'état de santé de la machine tournante. Gomez et al [5] ont étendu les études précédentes en vu de décrire les perturbations observées sur le signal de la VIR en fonction de la présence du défaut sur la bague interne ou externe d'un roulement défectueux.

La présence d'un balourd sur un rotor constitue aussi une des sources majeures qui pourraient conduire à sa défaillance. Même un petit balourd peut entraîner des niveaux vibratoires assez importants dans le cas où la machine tourne à des très hautes vitesses [6]. C'est la détection de ce défaut d'équilibrage qui va, en particulier, nous intéresser dans ce chapitre.

### 5.1.2 L'identification pour remonter aux paramètres d'une machine tournante

Comme les exigences vis à vis de la précision du comportement dynamique des machines tournantes sont de plus en plus strictes, des modèles plus fiables et plus robustes sont de plus en plus demandés. L'estimation non précise des caractéristiques des roulements tel que la raideur et l'amortissement, par exemple, a toujours été une des sources principales conduisant à une mauvaise prédiction du comportement dynamique de la machine. D'où le besoin d'une identification plus précise des paramètres définissant les roulements. Les caractéristiques des roulements jouent un rôle important sur le comportement vibratoire des rotors, surtout sur la détermination des vitesses critiques ainsi que celles des amplitudes de vibrations. On peut même profiter des caractéristiques dynamiques des roulements pour réduire les réponses vibratoires induites par la présence d'un balourd à la résonance. D'où l'intérêt toujours croissant et les recherches toujours actives dans le but de la caractérisation dynamique des roulements.

Les raideurs et les amortissements d'un roulement ont une forte dépendance en plusieurs paramètres physiques tels que la température du lubrifiant, le chargement, la vitesse et le non-alignement des rotors. Toutes ces informations sont difficiles à obtenir dans des vraies conditions de fonctionnement. Cette incertitude par rapport à la connaissance de ces paramètres conduit souvent à des résultats biaisés. Pour cette raison, il s'avère utile d'identifier les paramètres d'un roulement en se basant à la fois sur des mesures expérimentales effectuées dans des vraies conditions de fonctionnement ainsi que sur un modèle décrivant le comportement dynamique de la machine.

Stone [7] a fait un état de l'art des méthodes expérimentales qui ont existé jusqu'aux années quatre-vingt dans le but de déterminer les caractéristiques dynamiques d'un roulement. Il a souligné la difficulté de l'identification expérimentale vu la forte dépendance des coefficients mesurés avec d'autres paramètres des roulements tel que la précontrainte axiale, la vitesse de rotation et le lubrifiant. L'étude de ces paramètres influant a été faite par la suite par Kraus et al [8] à travers une série d'expériences et des conclusions qualitatives ont été tirées par rapport au sens d'évolution des raideurs et des amortissements en fonction des variations des valeurs des différents paramètres. Glienicke [9] a mené une large série d'essais pour déterminer les raideurs et les amortissements des différents types de roulements. Par la suite, des améliorations des approches utilisées ont été faites dans le but de réduire le nombre de campagnes d'essais. Edwards et al [10] ainsi que Jalan et al [11] ont expliqué que ceci est possible à condition d'avoir à disposition un bon modèle décrivant la dynamique du rotor.

En fait, la grande partie des travaux qui ont été menés pour caractériser les roulements expérimentalement sont fait sur des roulements isolés tout en négligeant la flexibilité du rotor. Ce n'est que plus tard que les travaux se sont plutôt orientés vers l'association des expériences à des modèles dynamiques décrivant le comportement du rotor dans sa globalité. Cette méthode permet de réduire considérablement le nombre des expériences à mener pour tirer des conclusions sur les propriétés dynamiques des roulements. Tiwari et al. [12, 13, 14] ont développé un algorithme d'identification des coefficients dynamiques des roulements pour des rotors flexibles et en présence des effets gyroscopiques. Leur algorithme permet une identification simultanée de ces coefficients ainsi que les caractéristiques d'un balourd.

## 5.2 Les différents outils pour faire l'identification

D'une façon très générale, on peut classer les techniques d'identification en deux catégories :

- l'identification qui se base sur les mesures expérimentales ;
- l'identification qui se base à la fois sur un modèle dynamique ainsi que sur les mesures.



Dans le premier cas, l'identification est plutôt faite d'une façon qualitative que quantitative. C'est généralement une identification qui concerne la détection de la présence des défaillances sur une machine tournante. Elle est principalement basée sur du traitement du signal ou des analyses vibratoires ou acoustiques. Ces analyses permettent d'avoir une image de l'état de santé mécanique des machines tournantes et de détecter ainsi d'éventuels dysfonctionnements afin de prévoir des actions correctives.

Une manière très simple de savoir rapidement si on est en présence d'un défaut ou pas est d'utiliser l'approche par comparaison. Ceci permet de détecter la signature vibratoire ou sonore d'un élément sans défaut. De cette façon, on arrive généralement à qualifier la nature du défaut sans forcément le quantifier.

Plusieurs difficultés sont rencontrées quand il s'agit de faire de la surveillance en se basant sur des mesures comparatives. Si on prend l'exemple d'un roulement défectueux, certaines difficultés à contourner représentent [15] : (1) l'extraction du signal du roulement défectueux du signal total bruité, (2) l'extraction du signal du défaut parmi le signal du roulement lui-même, (3) la séparation du signal de l'élément en question des autres sources provenant des autres éléments tel que les engrenages [16, 17].

La quantification des défauts vient généralement à l'étape de diagnostic, qui, dans la plupart des cas suit l'étape de la surveillance (voir Fig.5.1).

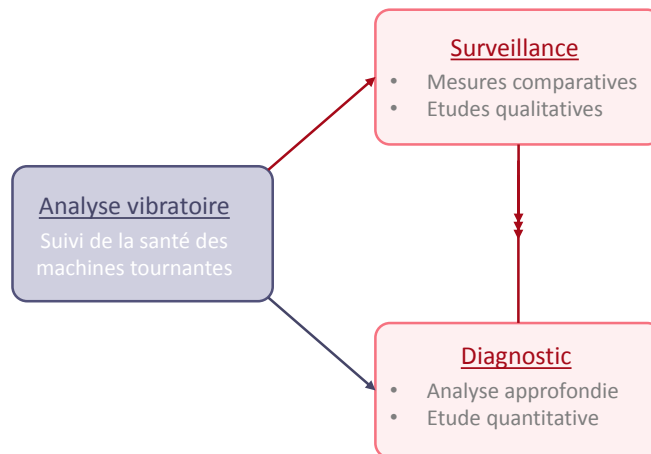


FIGURE 5.1: Étapes de la détection d'un défaut

Cette étape nécessite souvent une autre source d'informations liant les paramètres à quantifier à la réponse vibratoire du système. Cette source d'information est un modèle représentatif de la dynamique du rotor. D'où la deuxième catégorie de techniques d'identification qui allie les mesures expérimentales au modèle analytique qui est généralement un modèle éléments finis de la machine. Les méthodes les plus utilisées consistent à faire du recalage des paramètres du modèle en se basant sur des données expérimentales. Ceci revient à déterminer le jeu des paramètres réduisant la différence entre les grandeurs calculées et les grandeurs mesurées. Ceci revient ainsi généralement à un problème de minimisation d'une fonction coût qui dépend des paramètres à identifier.

### 5.3 Utilisation du filtre de Kalman pour l'identification sur des rotors

Un des axes de recherche les plus actifs dans le domaine de l'identification sur des machines tournantes consiste à développer des techniques réduisant le nombre de tests nécessitant un démarrage ou un arrêt de la machine, opérations qui s'avèrent assez coûteuses surtout pour les

turbines de grandes tailles. C'est dans cette perspective que s'inscrit l'application du filtre de Kalman dans ce chapitre. Ce filtre est un outil d'assimilation séquentielle de données qui corrige d'une façon récursive, d'un pas de temps au suivant, l'estimation des états ou des paramètres de la machine en corrigeant, en temps réel, la prédiction par les mesures recueillies au fur et à mesure.

Une des études les plus récentes s'intéressant à l'application du filtre de Kalman sur des rotors a été faite par Michalski et al. [18]. Le cadre de l'étude étant l'exploration d'une nouvelle technique pour la surveillance conditionnelle, les auteurs se sont particulièrement intéressés à l'identification du balourd sur deux types de rotor : un rotor de Jeffcott dans un premier temps et un turbocompresseur dans un second temps. La position du balourd a été supposée connue et ce dernier a été identifié uniquement par son amplitude (en kg.m). D'autres hypothèses ont été faites afin de faire l'identification. Principalement, le modèle éléments finis utilisé est un modèle classique en flexion pure (4 ddl sur chaque nœud) et le rotor est piloté en vitesse (hypothèse de source idéale). Le modèle est parfaitement linéaire ce qui conduit à une application directe du filtre de Kalman linéaire. Les résultats obtenus pour l'identification sur les deux exemples étudiés étaient plutôt satisfaisants.

Dans une autre étude récente [19], les auteurs se sont basés encore une fois sur le modèle éléments finis linéaire d'un rotor en flexion pure et piloté en vitesse. Mais cette fois-ci, ils proposent un outil pour caractériser en temps réel la présence d'un balourd sur une machine tournante. Le balourd a été identifié via trois paramètres : son amplitude, sa position sur l'arbre et sa position angulaire. Une étape supplémentaire pour la réduction du modèle a été faite dans l'objectif d'une identification en ligne qui soit synchronisée avec le fonctionnement de la machine en temps réel. Cependant, les études qui portent sur l'application du filtre de Kalman sur des machines tournantes ne sont pas nombreuses et se limitent toujours à des modèles linéaires décrivant le comportement dynamique des rotors. D'où l'intérêt de cette étude qui a pour objectif l'extension de l'application du filtre de Kalman sur un modèle non-linéaire de la dynamique des rotors à très hautes vitesses, en régime non-stationnaire et sous l'hypothèse de source non-idéale d'énergie.

## 5.4 Objectifs

Dans ce chapitre, le filtre de Kalman sera utilisé dans le but de faire l'identification sur un rotor opérant à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire. L'identification aura pour objectif de :

- remonter aux propriétés dynamiques des paliers, à savoir les amortissements et les raideurs ;
- faire la surveillance conditionnelle en quantifiant les paramètres d'un balourd sur un rotor.

Les hypothèses de modélisation choisies dans le premier chapitre, notamment l'hypothèse de source non-idéale et de régime non-stationnaire, conduisent à un modèle dynamique non-linéaire. Ceci nous amène à utiliser une extension du filtre de Kalman appelée l'UKF<sup>1</sup> ou filtre de Kalman non-parfumé, mieux adaptée pour l'identification sur des modèles d'état non-linéaires.

Le filtre de Kalman d'une façon générale a besoin de deux sources d'information pour fonctionner : le modèle dynamique d'un côté et les mesures expérimentales bruitées d'un autre côté. Ce filtre dispose de plusieurs avantages. Il permet non seulement de décrire avec précision les incertitudes du modèle ainsi que des mesures, mais il permet aussi de propager ces informations statistiques au cours du temps. L'idée est d'incorporer à l'état les covariances d'erreurs de manière à les propager dans le modèle de la même façon que les variables d'état sont propagées [20].

Un autre avantage de ce filtre c'est qu'il permet une identification en temps réel. Le modèle et

---

1. Unscented Kalman Filter



les expériences cohabitent ensemble dans le filtre : la prédiction donnée par le filtre à chaque pas de temps est une estimation donnée par le modèle et mise à jour par les données expérimentales. La confiance du modèle est représentée par la matrice de covariance  $Q$  et celle des mesures est représentée par la matrice  $R$ . Dans le cadre du projet RedHV+, il n'a pas été possible de récupérer les données sur les mesures expérimentales réalisées sur le banc. L'identification se basera ainsi sur des « mesures virtuelles » construites de la façon suivante : une simulation des réponses vibratoires en utilisant le modèle dynamique de la machine tournante est effectuée et ensuite un bruit gaussien de covariance  $R$  lui est rajouté. Ces « mesures virtuelles » sont ensuite utilisées pour alimenter le filtre et identifier les paramètres supposés incertains.

## 5.5 Filtre de Kalman linéaire

Le filtre de Kalman repose sur l'hypothèse qui suppose que les variables d'état sont des variables aléatoires gaussiennes. Il permet la propagation des moyennes et des covariances du vecteur d'état en fonction du temps. Comme son nom l'indique, le filtre de Kalman linéaire s'applique sur des systèmes d'état qui évoluent linéairement en fonction du temps. Cette propriété de linéarité garantit que, d'un pas de temps au suivant, le vecteur d'état propagé est toujours décrit par une loi normale.

### 5.5.1 Principe général du filtre pour l'estimation de l'état d'un système

Pour estimer les variables d'état du système, le filtre de Kalman a besoin d'un modèle d'état du système étudié d'un côté et d'une séquence de mesures d'un autre côté. Le modèle d'état servira à donner une estimation *a priori* de l'état qui sera corrigée en utilisant l'autre source d'information, à savoir les mesures. On part du principe que la prise en compte des mesures permet une meilleure estimation que celle se basant uniquement sur le modèle. Si la version continue du filtre de Kalman est connue sous le nom de filtre de Kalman-Bucy [21], le filtre de Kalman tout court désigne la version discrète du filtre.

On désigne par  $x_k$  l'état du système à un instant  $k$ . Le vecteur d'état suit une loi normale :

$$x_k = \mathcal{N}(\bar{x}_k, P_k) \quad (5.1)$$

L'équation du système physique discret linéaire pour l'évolution s'écrit :

$$x_k = Fx_{k-1} + w_{k-1} \quad (5.2)$$

où  $F$  est la matrice de la fonction linéaire  $f$  qui est la fonction d'évolution du système permettant de prévoir son comportement et  $w_k$  est le bruit de modélisation qui est un bruit blanc gaussien, de moyenne nulle et non-corrélé vérifiant :

$$w_k = \mathcal{N}(0, Q_k) \quad \text{tel que :} \quad E[w_k] = 0 \quad \text{et} \quad E[w_k \cdot w_l^T] = Q_k \cdot \delta_{kl} \quad (5.3)$$

$\delta_{kl}$  est le symbole de Kronecker. Afin de comparer la prédiction donnée par le modèle avec les mesures, on définit une fonction d'observation  $h$ , qui permet de projeter la prédiction donnée par la fonction  $f$  dans l'espace d'observation. La matrice  $H$  liée à la fonction  $h$  se présente de la façon suivante :

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (5.4)$$

$z_k$  est le vecteur d'état projeté dans l'espace des mesures et  $v_k$  est le bruit qui lui est associé et qui est aussi un bruit blanc gaussien centré en zéro et non-corrélé :

$$v_k = \mathcal{N}(0, R_k) \quad \text{tel que :} \quad E[v_k] = 0 \quad \text{et} \quad E[v_k \cdot v_l^T] = R_k \cdot \delta_{kl}; \quad (5.5)$$

Dans la suite on distinguera l'estimation *a priori*,  $\bar{x}_k^-$ , et sa covariance  $P_k^-$ , obtenues à partir du modèle d'état et des mesures jusqu'à l'instant  $t_{k-1}$ , de l'estimation *a posteriori*,  $\bar{x}_k^+$ , ainsi que sa covariance,  $P_k^+$ , qui cette fois-ci tiennent en compte des mesures à l'instant  $t_k$  (voir fig.5.2).

Dans la suite, les deux notations sont équivalentes :

$$\begin{cases} \bar{x}_k^- &= \bar{x}_{k|k-1} \\ \bar{x}_k^+ &= \bar{x}_{k|k} \end{cases} \quad (5.6)$$

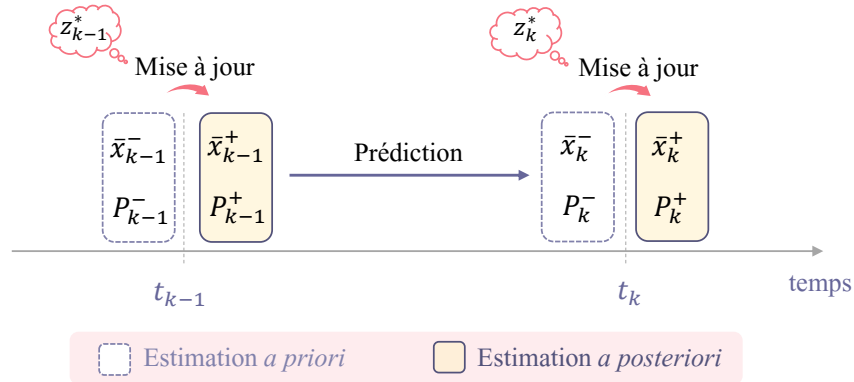


FIGURE 5.2: Prédiction-correction

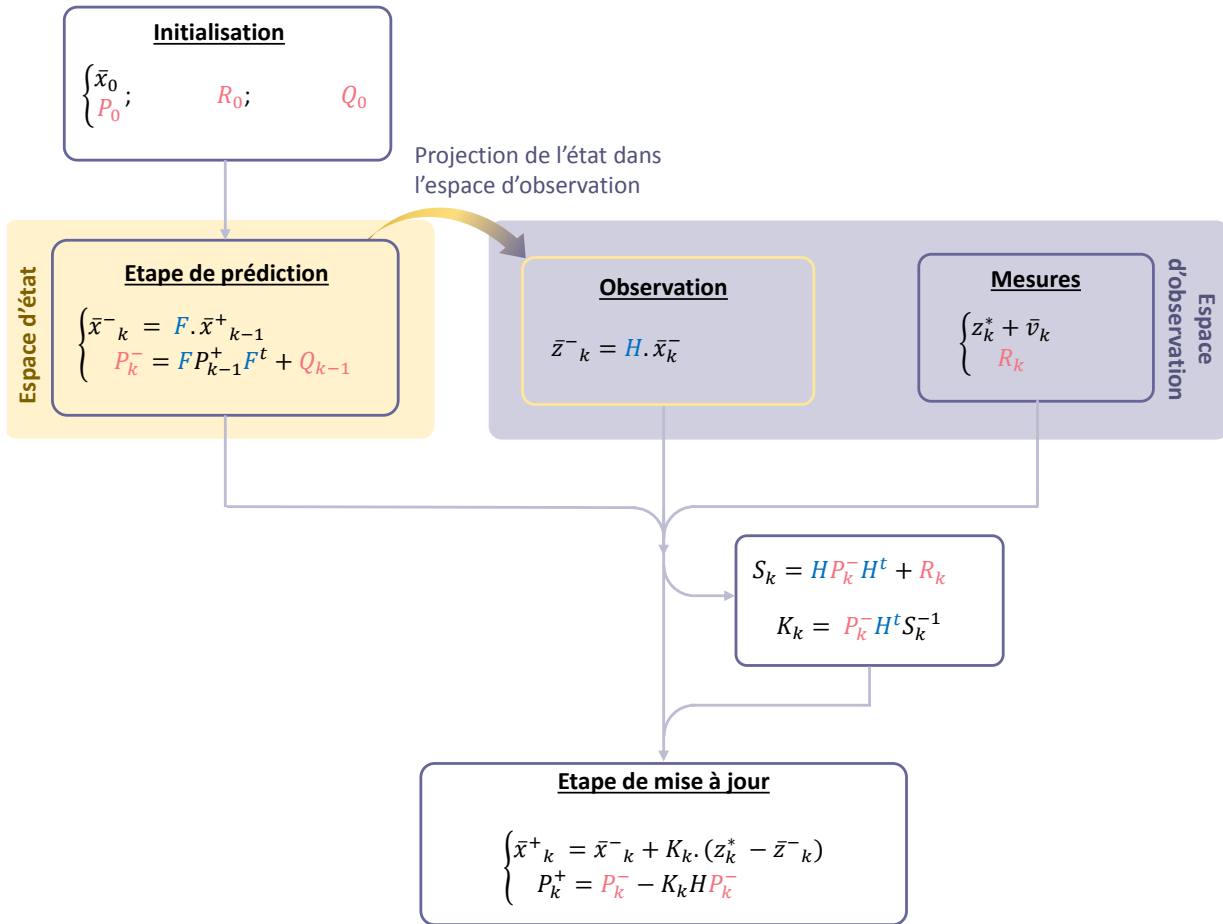


FIGURE 5.3: Etapes pour le filtre de Kalman linéaire

Les différentes étapes pour le filtre de Kalman linéaire sont expliquées dans la figure (5.3). D'une façon générale, pour mettre en place le filtre de Kalman, on aura besoin de :

1. Etablir un modèle mathématique décrivant la dynamique du système étudié ;
2. A partir du modèle dynamique, établir les équations permettant de propager les moyennes et les covariances des variables d'état qu'on aimerait estimer en fonction du temps. Ces

équations constituent la base du filtre étant donné que :

- La moyenne de la variable d'état constitue l'espérance du vecteur d'état,
  - La covariance du vecteur d'état est calculée à partir de la covariance de la prédiction de la variable d'état propagée par le filtre ;
3. A chaque pas de temps, d'une façon récursive, on met à jour la moyenne et la covariance en utilisant les mesures fournies au pas de temps en question.

Maintenant que le principe du filtre de Kalman pour l'estimation de l'état est expliqué, nous passerons dans la suite à une autre utilisation du filtre qui consiste à identifier certains paramètres du système étudié.

### 5.5.2 Filtre de Kalman pour l'estimation des paramètres du système

Il est important de commencer par expliquer l'utilisation du filtre de Kalman pour remonter à des paramètres de la machine qui sont non accessibles par les moyens de mesure. Le principe général de l'application du filtre de Kalman est expliqué en figure (5.4). Tout d'abord, on commence par définir le vecteur augmenté  $\{x^*\}$  dans lequel, en plus des variables d'état du système notées  $\{x\}$ , se rajoutent les paramètres à identifier,  $\{x_p\}$ , tel que :

$$\{x^*\} = \begin{Bmatrix} x \\ x_p \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

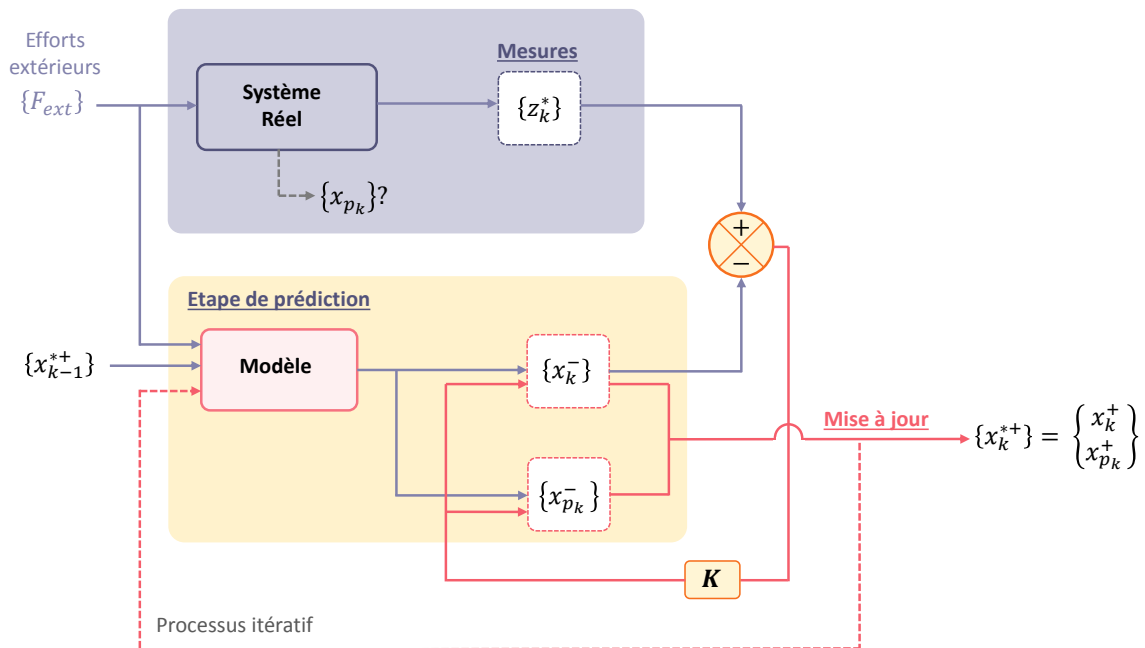


FIGURE 5.4: Filtre de Kalman pour l'estimation des paramètres du système

Le principe général du fonctionnement du filtre est le même que celui expliqué précédemment par la figure (5.3). C'est seulement au niveau de l'étape de prédiction que l'on a une équation supplémentaire qui vient se rajouter à l'équation d'évolution définie par le système d'état. Cette équation traduit l'évolution des paramètres au cours du temps. Ces derniers étant supposés être constants, leur fonction d'évolution est l'identité (voir fig.5.5).

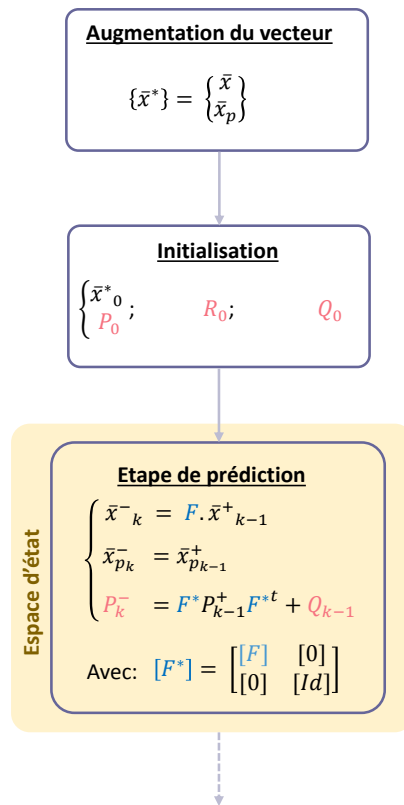


FIGURE 5.5: Etape de prédiction dans le cadre du Kalman linéaire en présence des paramètres dans le vecteur d'état

## 5.6 Extension du filtre de Kalman pour une étude non-linéaire

Comme le filtre exige de se placer dans le cas particulier des variables aléatoires gaussiennes, la linéarité assure que l'évolution d'une loi normale d'un pas de temps  $t_{k-1}$  au suivant,  $t_k$ , soit aussi une loi normale.

D'autres variantes du filtre ont existé pour l'étendre à des équations d'état non-linéaires. On parle principalement du filtre de Kalman étendu (EKF)<sup>2</sup> et du filtre de Kalman non-parfumé (UKF)<sup>3</sup>. L'EKF contient une étape de linéarisation supplémentaire par rapport au filtre de Kalman classique. Il fonctionne seulement sous certaines conditions : quand la fonction est différentiable en tout point, assurant ainsi que le calcul de la Jacobienne soit possible et quand la transformation des moyennes et des covariances par la fonction linéarisée est approximativement égale à la vraie transformation non-linéaire. Ces conditions ne sont pas toujours vérifiées, surtout dans le cas où la transformation est fortement non-linéaire. D'où l'intérêt de l'UKF qui procède autrement pour contourner la non-linéarité de l'équation d'état.

L'UKF nécessite un travail supplémentaire non pas sur l'équation d'évolution non-linéaire du système mais plutôt sur l'état lui-même [20, 22, 23]. L'idée de ce filtre consiste à rajouter une opération supplémentaire appelée la transformation non-parfumée (UT) qui permet de passer d'une variable d'état aléatoire à un ensemble de points déterministes qui vérifient certaines propriétés et qu'on appelle les sigma-points. Ensuite, au lieu de propager toute une loi de densité de probabilité, on fait propager les sigma-points d'un pas de temps au suivant et on approxime

2. Extended Kalman Filter

3. Unscented Kalman Filter

leur moyenne et leurs covariances. Cette opération supplémentaire sera plus détaillée dans cette section.

### 5.6.1 Transformation non-parfumée (UT) : Principe

Quand le problème étudié est non-linéaire, il est compliqué de calculer la densité de probabilité en utilisant directement la fonction d'évolution du système qui est non-linéaire.

La transformation non parfumée se base sur deux principes fondamentaux :

- D'une part, il est plus simple d'appliquer une transformation non-linéaire sur un ensemble de points déterministes situés sur la loi de densité de probabilité que sur la fonction entière.
- D'autre part, il n'est pas compliqué de trouver un ensemble de points déterministes dans l'espace d'état dont la moyenne et la covariance approximent la moyenne et la covariance de la vraie fonction de densité de probabilité du vecteur d'état.

Prenons ces deux principes en considération. Nous supposons la connaissance de la moyenne  $\bar{x}$  et de la covariance  $P$  d'un vecteur d'état  $x$ . Nous allons ensuite chercher des points particuliers que nous appelons des sigma-points qui sont des vecteurs déterministes ayant une moyenne et une covariance égales à  $\bar{x}$  et  $P$  (voir fig.5.6).

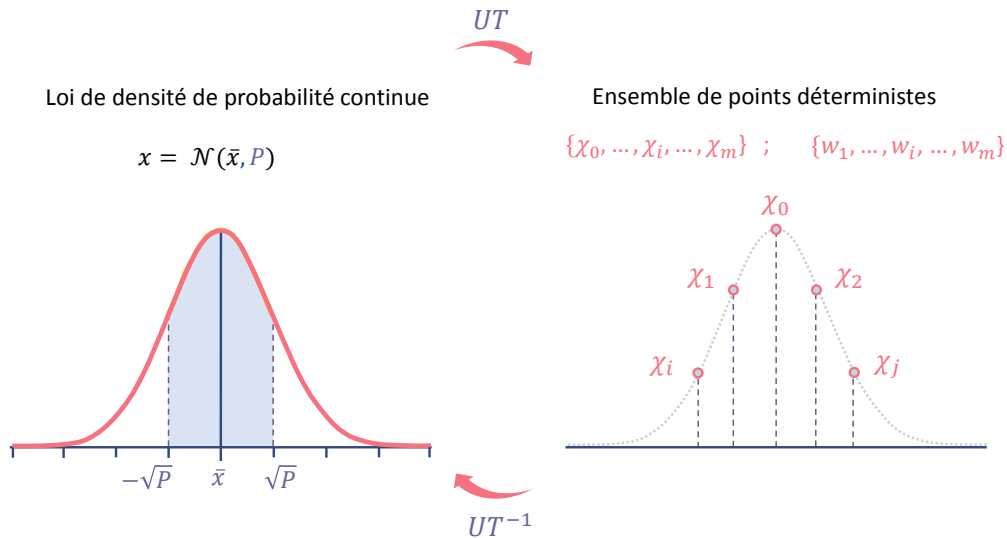


FIGURE 5.6: Principe de la transformation non parfumée

On applique ensuite la fonction non-linéaire  $h$  à chaque sigma-point pour obtenir  $\vartheta_i = h(\chi_i)$  pour tout  $i = 1 \dots, m$ . La moyenne et la covariance des vecteurs transformés,  $\vartheta$ , donnera une bonne approximation de la vraie moyenne et la vraie covariance du vecteur d'état  $y = f(x)$ . C'est toute l'idée sur laquelle repose la transformée non-parfumée.

On présente ci-dessous les différentes étapes essentielles pour la transformée non-parfumée.

**Transformée non-parfumée : Étapes principales**

1. On dispose du vecteur d'état  $x$  dont on connaît la moyenne  $\bar{x}$  et la covariance  $P$ . Étant donnée la transformation non-linéaire  $h$ , on aimerait estimer la moyenne  $\bar{y}$  et la covariance  $P_y$  de la transformé  $y = h(x)$ .
2. On forme les  $m$  sigma-points  $\chi_i$  ainsi que leurs pondérations  $W_i$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \bar{x} &= \sum_i^m W_i \chi_i \\ P &= \sum_i^m W_i (\chi_i - \bar{x})(\chi_i - \bar{x})^T \end{cases} \quad (5.8)$$

Il existe plusieurs algorithmes pour la sélection des sigma-points  $\chi_i$  ainsi que leurs pondérations  $W_i$ . Ils seront détaillés dans la suite.

3. On applique la fonction non-linéaire  $h$  sur les sigma-points tel que :

$$\vartheta_i = h(\chi_i) \quad i = 1, \dots, m \quad (5.9)$$

4. Finalement, la moyenne et la covariance de  $y$  sont obtenues de la façon suivante :

$$\begin{cases} \bar{y} &= \sum_i^m W_i \vartheta_i \\ P_y &= \sum_i^m W_i (\vartheta_i - \bar{y})(\vartheta_i - \bar{y})^T \end{cases} \quad (5.10)$$

Dans la suite on va distinguer les algorithmes qui permettent la sélection des sigma-points utilisés à la deuxième étape de la transformation non-parfumée .

**5.6.2 Algorithmes pour la sélection des sigma-points**

Il existe plusieurs algorithmes pour la sélection des sigma-points. On note  $m$  le nombre des sigma-points. Il a été démontré [24] que, si le vecteur d'état  $x$  est de taille  $n$ , alors  $m \geq n + 1$ . Dans la suite, on note  $\chi$  la matrice dont les colonnes sont les sigma-points  $\chi_i$ , i.e :

$$\chi = [\chi_0 \quad \dots \quad \chi_{m-1}]_{(n \times m)} \quad (5.11)$$

**Algorithme général à 2n+1 sigma-points**

La construction des sigma-points par cet algorithme se fait de la façon suivante :

1. Calculer les sigma-points comme suit :

$$\begin{cases} \chi_0 &= \bar{x} \\ \chi_i &= \bar{x} + \tilde{\chi}_i \quad i = 1, \dots, 2n \end{cases} \quad (5.12)$$

tel que :

$$\begin{cases} \tilde{\chi}_i &= \left( \sqrt{(n + \kappa)P} \right)_i^T \quad i = 1 \dots, n \\ \tilde{\chi}_{n+i} &= - \left( \sqrt{(n + \kappa)P} \right)_i^T \quad i = 1 \dots, n \end{cases} \quad (5.13)$$

$\kappa$  est un facteur d'échelle donnée par  $\kappa = \alpha^2(n + \lambda) - n$ .  $\alpha$  reflète la dispersion des sigma-points et prend assez souvent une valeur positive faible (de l'ordre de  $10^{-3}$  par exemple).  $\lambda$  est un deuxième facteur d'échelle qui est assez souvent fixé à 0.



2. Les pondérations des sigma-points sont données par :

$$\begin{cases} W_0 &= \frac{\kappa}{\kappa + n} \\ W_i &= \frac{1}{2(\kappa + n)} \end{cases} \quad (5.14)$$

### Algorithme de simplex n+2 sigma-points

Cet algorithme permet de réduire considérablement le nombre des sigma-points. Ses étapes constitutives sont les suivantes :

1. Choisir le poids  $W_0 \in [0, 1)$ . Le choix de  $W_0$  impacte seulement les moments ayant un ordre supérieur ou égal à quatre de la variable d'état aléatoire. Les poids des autres sigma-points sont choisis de la façon suivante :

$$W_i = \begin{cases} 2^{-n}(1 - W_0) & i = 1, 2 \\ 2^{i-2}W_1 & i = 3, \dots, n + 1 \end{cases} \quad (5.15)$$

2. Initialiser la première composante des trois premiers sigma-points :

$$\tilde{\chi}_0^1 = 0 \quad \tilde{\chi}_1^1 = \frac{-1}{\sqrt{2W_1}} \quad \tilde{\chi}_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2W_1}} \quad (5.16)$$

3. Construire d'une façon récursive la matrice  $\tilde{\chi} = [\tilde{\chi}_0 \dots \tilde{\chi}_{n+1}]$  contenant les vecteurs  $\tilde{\chi}_i$  qui serviront par la suite pour le calcul des sigma-points en suivant la démarche suivante : pour tout  $j = 2, \dots, n$  :

$$\tilde{\chi}_i^j = \begin{cases} \begin{cases} \tilde{\chi}_0^{(j-1)} \\ 0 \end{cases} & i = 0 \\ \begin{cases} \tilde{\chi}_i^{(j-1)} \\ -1 \\ \sqrt{2W_{(j+1)}} \end{cases} & i = 1, \dots, j \\ \begin{cases} \{0\}_{1 \times (j-1)} \\ j \\ \sqrt{2W_{(j+1)}} \end{cases} & i = j + 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

4. Une fois la matrice  $\tilde{\chi}$  construite en utilisant la procédure récursive, on peut passer à la dernière étape qui consiste à calculer les sigma-points  $\chi$  tel que :

$$\chi_i = \bar{x} + \sqrt{P} \tilde{\chi}_i \quad i = 0, \dots, n + 1 \quad (5.18)$$

A partir de cet algorithme on peut construire un ensemble de sigma-points qui soit très réduit. Cependant, l'algorithme simplex risque de poser des problèmes numériques si la taille du vecteur d'état est grande. En effet, le rapport entre la plus petite pondération et la plus grande est de  $2^{n-1}$ , cette dispersion peut donner lieu à des matrices singulières et peut entraîner des problèmes de stabilité quand  $n$  augmente. Or, le passage à un nombre réduit de sigma-points est plus intéressant quand le nombre des variables d'état devient plus élevé. D'où la limitation de

l'algorithme simplex. Dans notre cas, cet algorithme pourrait parfaitement s'appliquer sur un rotor rigide mais sera déconseillé à utiliser sur un modèle éléments finis du rotor. D'où l'intérêt de passer à l'algorithme sphérique qui offre une meilleure stabilité.

### Algorithme sphérique à $n+1$ sigma-points

Les étapes de construction des sigma-points avec l'algorithme sphérique sont les mêmes que pour l'algorithme simplex, seulement le choix des pondérations ainsi que les composantes des vecteurs sigma-points ne sont pas fait de la même manière.

L'algorithme se présente ainsi :

1. Choisir les poids  $W_0 \in [0, 1)$ . Le choix de  $W_0$  impacte seulement les moments ayant un ordre supérieur ou égal à quatre.

Cette fois-ci, les pondérations des sigma-points sont calculées comme suit :

$$W^i = \frac{1 - W_0}{n + 1} \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (5.19)$$

Comme on peut le remarquer ici, à l'exception de  $W_0$ , toutes les pondérations sont identiques. Pour se ramener à  $n + 1$  points on prend  $W_0 = 0$ , ce qui nous ramène à des pondérations qui sont toutes égales à :

$$W^i = \frac{1}{n + 1} \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (5.20)$$

2. Initialiser la première composante des trois premiers sigma-points :

$$\tilde{\chi}_0^1 = 0 \quad \tilde{\chi}_1^1 = \frac{-1}{\sqrt{2W^1}} \quad \tilde{\chi}_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2W^1}} \quad (5.21)$$

Cette étape est identique à l'algorithme simplex (voir eq.5.16).

3. Construire d'une façon récursive la matrice  $\tilde{\chi} = [\tilde{\chi}_0 \dots \tilde{\chi}_{n+1}]$  contenant les vecteurs  $\tilde{\chi}_i$  qui serviront par la suite pour le calcul des sigma-points en suivant la démarche suivante : pour tout  $j = 2, \dots, n$  :

$$\tilde{\chi}_i^j = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\chi}_0^{(j-1)} \\ 0 \end{array} \right\} & i = 0 \\ \left[ \begin{array}{l} \tilde{\chi}_i^{(j-1)} \\ -1 \\ \sqrt{j(j+1)W^1} \end{array} \right] & i = 1, \dots, j \\ \left\{ \begin{array}{l} \{0\}_{1 \times (j-1)} \\ j \\ \sqrt{j(j+1)W^1} \end{array} \right\} & i = j + 1 \end{cases} \quad (5.22)$$

Construit de cette façon, le rapport entre la plus petite composante de la matrice  $\tilde{\chi}$  et la plus grande composante est  $n$ . Cet écart, assez faible comparé à celui trouvé pour l'algorithme simplexe, favorise la stabilité numérique et assure la possibilité de réduire le nombre des sigma-points pour les systèmes avec un large nombre de variables d'état, d'où l'intérêt d'utiliser l'algorithme sphérique.

4. Une fois que la matrice  $\tilde{\chi}$  est construite en utilisant la procédure récursive, on peut passer à la dernière étape qui consiste à calculer les sigma-points  $\chi$  tel que :

$$\chi_i = \bar{x} + \sqrt{P} \tilde{\chi}_i \quad i = 0, \dots, n + 1 \quad (5.23)$$

### 5.6.3 Filtre de Kalman non-parfumé

Maintenant qu'on a détaillé les outils qui sont mis en place pour contourner la non-linéarité de l'équation d'état du système étudié, on peut résumer l'algorithme traduisant la mise en place du filtre Kalman non-parfumé pour prédire le vecteur d'état d'un système dans la figure suivante ( Fig.5.7) :

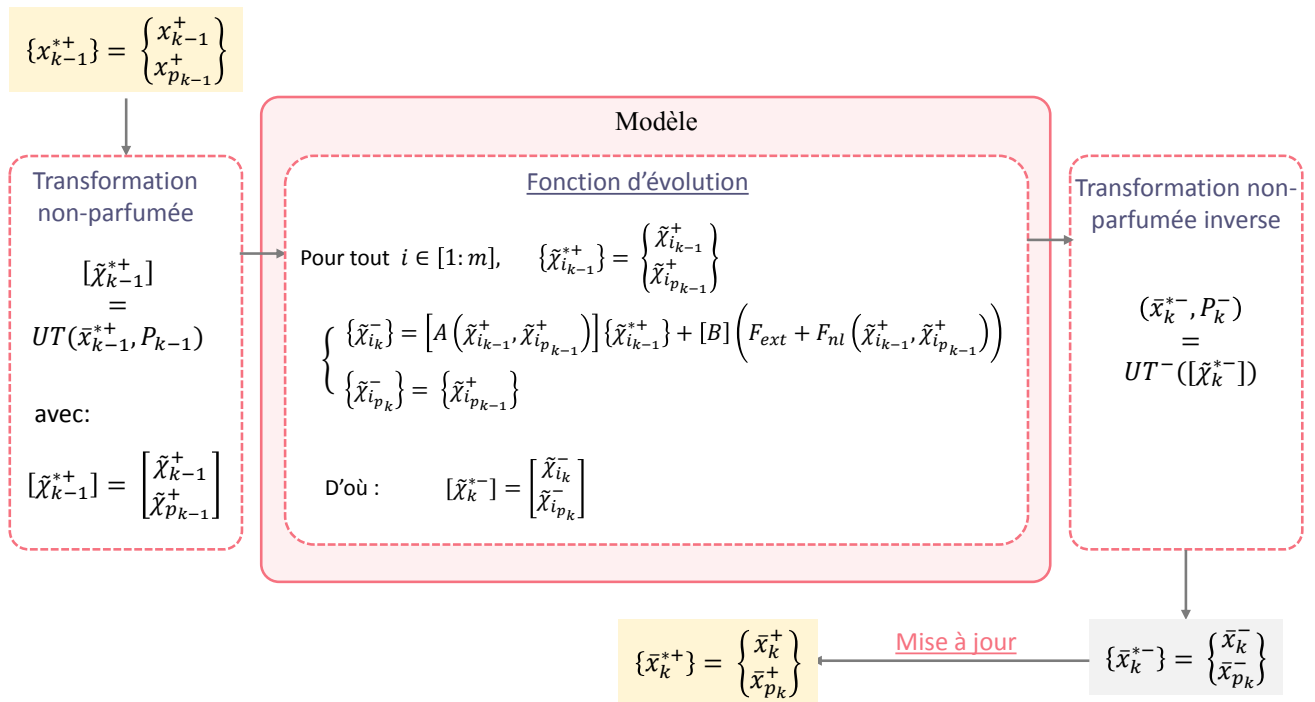


FIGURE 5.7: Etape de prédiction dans le cadre de l'application du filtre de Kalman non-parfumé

### 5.6.4 Application de l'UKF sur le rotor rigide

Le modèle d'état d'un rotor rigide sous l'hypothèse de source non-idéale a été présenté au premier chapitre (voir Fig.5.8).

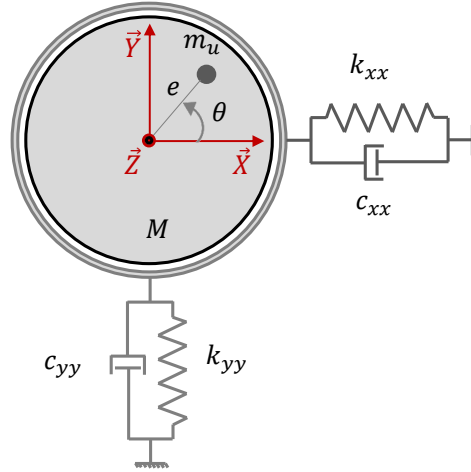


FIGURE 5.8: Rotor disque étudié

L'écriture de ce modèle est rappelée ci-dessous en fonction du vecteur déplacement généralisés  $\{\delta\} = \{u; v; \theta\}$ . Tout d'abord, l'équation de la dynamique est donnée par :

$$[M_{tot}]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F_{nl}\} + \{F_{ext}\} \quad \text{tel que : } [M_{tot}] = [M] + [M_{var}] \quad (5.24)$$

tel que :

$$[M] = \begin{bmatrix} M + m & 0 & 0 \\ 0 & M + m & 0 \\ 0 & 0 & I + me^2 \end{bmatrix}; \quad [M_{var}(\theta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mesin(\theta) \\ 0 & 0 & mecoss(\theta) \\ -mesin(\theta) & mecoss(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [C] = \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & c_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}; \quad \{F_{nl}(\theta)\} = \begin{Bmatrix} me\dot{\theta}^2 cos(\theta) \\ me\dot{\theta}^2 sin(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{F_{ext}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_m - C_r \end{Bmatrix}$$

L'écriture sous la forme d'une équation d'état est ensuite donnée par :

$$\{\dot{x}\} = [A(\theta)]\{x\} + [B](\{F_{ext}\} + \{F_{nl}(\theta)\}) \quad (5.25)$$

avec :

$$[A(\theta)] = \begin{bmatrix} [0] & [Id] \\ -[M_{tot}(\theta)]^{-1}[K] & -[M_{tot}(\theta)]^{-1}[C] \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} [0] \\ [Id] \end{bmatrix}; \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix}$$

Dans un premier temps, on suppose connaître tout les paramètres du rotor. Plus particulièrement, on connaît les informations suivantes :

M (Kg)	I ( $Kg.m^2$ )	$\alpha$	m (Kg)	e (m)
8,8	$4.10^{-3}$	$9,6.10^{-2}$	$8,8.e^{-3}$	0.1

TABLE 5.1: Propriétés du rotor rigide

$k_{xx}$ ( $N.m^{-1}$ )	$k_{yy}$ ( $N.m^{-1}$ )	$c_{xx}$ ( $N.s.m^{-1}$ )	$c_{yy}$ ( $N.s.m^{-1}$ )
$4.10^7$	$5.10^7$	300	300

TABLE 5.2: Propriétés des paliers

Le rotor a deux vitesses critiques données par :  $\Omega_{cr1} = 20324 rpm$  suivant l'axe des  $\vec{x}$  et  $\Omega_{cr2} = 22723 rpm$  suivant l'axe des  $\vec{y}$ .

Il est soumis à un couple effectif  $C_{ext}$  ( $C_{ext} = C_m - C_r$ ) donné par :

$$C_{ext} = \begin{cases} 180 & si \ 0 \leq t \leq 0.5 \ s \\ 180 + 100(t - t_0) & si \ 0.5 \ s \leq t \leq 2 \ s \end{cases} \quad (5.26)$$

La réponse du rotor soumis à ce profil de couple extérieur ainsi qu'à l'excitation du balourd est donnée sur la figure suivante (Fig.5.9) :

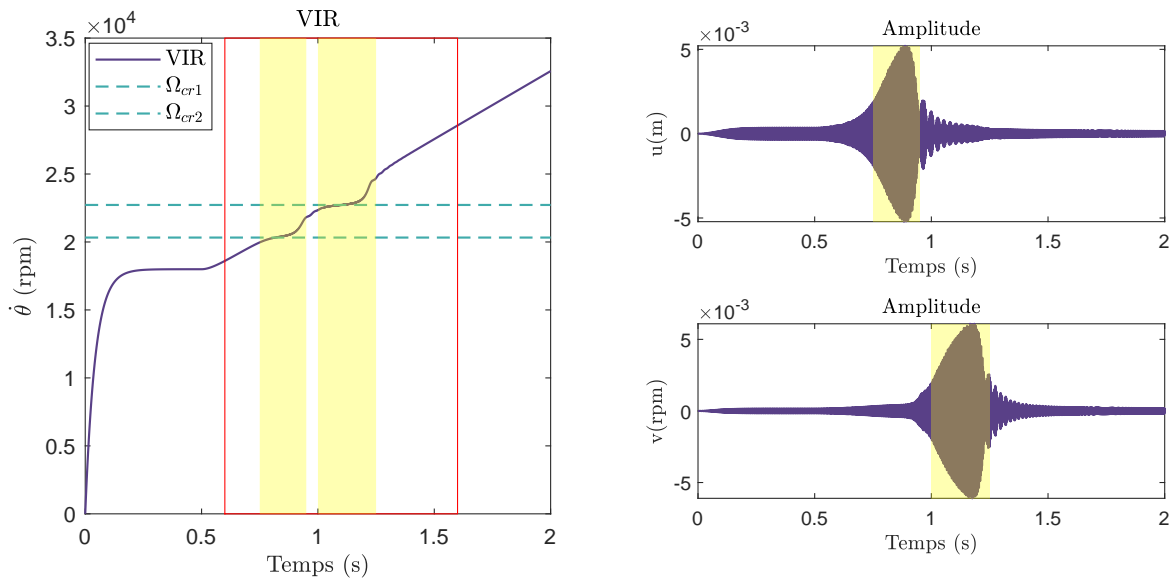


FIGURE 5.9: Réponses temporelles d'un rotor rigide en présence d'un balourd - à gauche : signal de la VIR - à droite : vibrations latérales

Le phénomène de Sommerfeld est observé sur les deux vitesses critiques comme on peut le voir sur le signal de la vitesse instantanée de rotation (VIR). Sur la figure (Fig.5.9), les intervalles correspondants aux durées de temps passées au voisinage des vitesses critiques ont été distingués par des patches jaunes. Ces intervalles seront exploités par la suite pour l'interprétation du comportement du filtre UKF au passage par les vitesses critiques.

Pour la construction des signaux de test virtuels, on superpose aux signaux obtenus à partir du modèle analytique (Fig. 5.9) du bruit blanc gaussien, de moyenne nulle. De cette façon on

construit nos mesures virtuelles sur l'intervalle de temps  $[0, 2s]$ . L'incertitude sur les mesures, stockée dans la matrice diagonale  $R$  est directement déduite à partir de l'énergie du bruit gaussien rajouté.

Le filtre de Kalman non-parfumé ne sera pas appliqué sur tout l'intervalle de temps  $[0, 2s]$ . Il sera appliqué seulement sur un intervalle de temps qui contient les deux vitesses critiques vu qu'on estime que ces zones sont assez riches en information concernant le comportement dynamique des paliers. L'intervalle d'étude est ainsi limité à  $[0.6s, 1.6s]$  (c'est la zone délimitée par le cadre rouge sur la figure.(5.9)).

### Estimation des raideurs sur les paliers

On cherche à identifier simultanément les deux raideurs sur les deux directions latérales du palier, à l'occurrence,  $k_{xx}$  et  $k_{yy}$ . On définit le vecteur d'état augmenté  $\{x^*\}$  ainsi que le vecteur  $\{\dot{x}^*\}$  de la façon suivante :

$$\{x^*\} = \begin{Bmatrix} x \\ x_p \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\dot{x}^*\} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_p \end{Bmatrix} \quad \text{avec :} \quad \{x_p\} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

L'implémentation du filtre de Kalman nécessite, d'un côté, la mise sous forme d'équation d'état de la façon suivante :

$$\{\dot{x}^*\} = [A^*(\theta, x_p)] \{x^*\} + [B^*] (\{F_{ext}\} + \{F_{nl}(\theta)\}) \quad (5.28)$$

avec :

$$[A^*(\theta, x_p)] = \begin{bmatrix} [0] & [Id] & [0] \\ -[M_{tot}(\theta)]^{-1} [K(x_p)] & -[M_{tot}(\theta)]^{-1} [C] & [0] \\ [0] & [0] & [Id] \end{bmatrix} \quad ; \quad [B^*] = \begin{bmatrix} [0] \\ [Id] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

La matrice de raideur s'exprime en fonction du vecteur des paramètres à identifier de la façon suivante :

$$[K(x_p)] = \begin{bmatrix} x_p(1) & 0 & 0 \\ 0 & x_p(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

De l'autre côté, le filtre a besoin des mesures expérimentales. Dans cet exemple on suppose mesurés les signaux des déplacements latéraux ainsi que la position angulaire. On note, à tout instant  $t_k$ , le vecteur des mesures  $z_k^*$  défini comme suit :

$$\{z_k^*\} = \begin{Bmatrix} u_{z_k}^* \\ v_{z_k}^* \\ \theta_{z_k}^* \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

Comme nous pouvons le constater, la fonction d'évolution  $[A^*(\theta, x_p)]$  est non-linéaire en  $\theta$ . Ceci justifie le choix d'utiliser le filtre de Kalman non-parfumé (UKF) pour conduire le processus d'assimilation stochastique.

Dans les matrices d'état (Eq.5.29), on suppose que d'un pas de temps au suivant la raideur est constante. Sauf que, quand on va initialiser la raideur, on va partir d'une valeur qui est initialement fausse. Donc, en supposant une raideur constante, le modèle tout seul retournera une valeur fausse. D'où l'intérêt du filtre de Kalman qui permet de corriger l'estimation en se basant à la fois sur le modèle et les mesures. Le principe de l'estimation des raideurs est

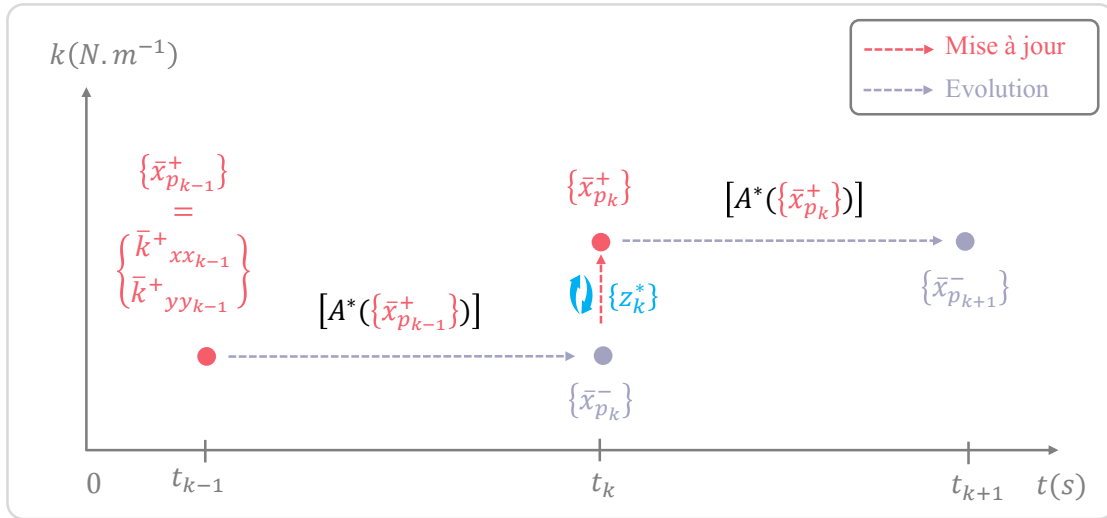


FIGURE 5.10: Etapes d'évolution et de mise à jour pour le filtre de Kalman

expliqué dans la figure (Fig.5.10). A l'instant  $t_k$ , les paramètres contenus dans le vecteur  $\bar{x}_{p_k}^-$  sont tout d'abord estimés avec le modèle (Eq.5.28) en se basant sur l'estimation calculée à l'instant précédent  $t_{k-1}$ . La fonction d'évolution pour les paramètres étant l'identité, on obtient  $\bar{x}_{p_k}^- = \bar{x}_{p_{k-1}}^+$ . Cette première ébauche donnée par la fonction d'évolution est ensuite corrigée et mise à jour en exploitant les mesures  $z_k^*$  ce qui donnera lieu à une meilleure estimation de  $\bar{x}_{p_k}^+$  qui sera actualisée dans la matrice de raideur  $[K(\bar{x}_{p_k}^+)]$ , qui, à son tour, sera utilisée pour donner une première ébauche de l'état à l'instant suivant  $\bar{x}_{p_{k+1}}^+$  et ainsi de suite.

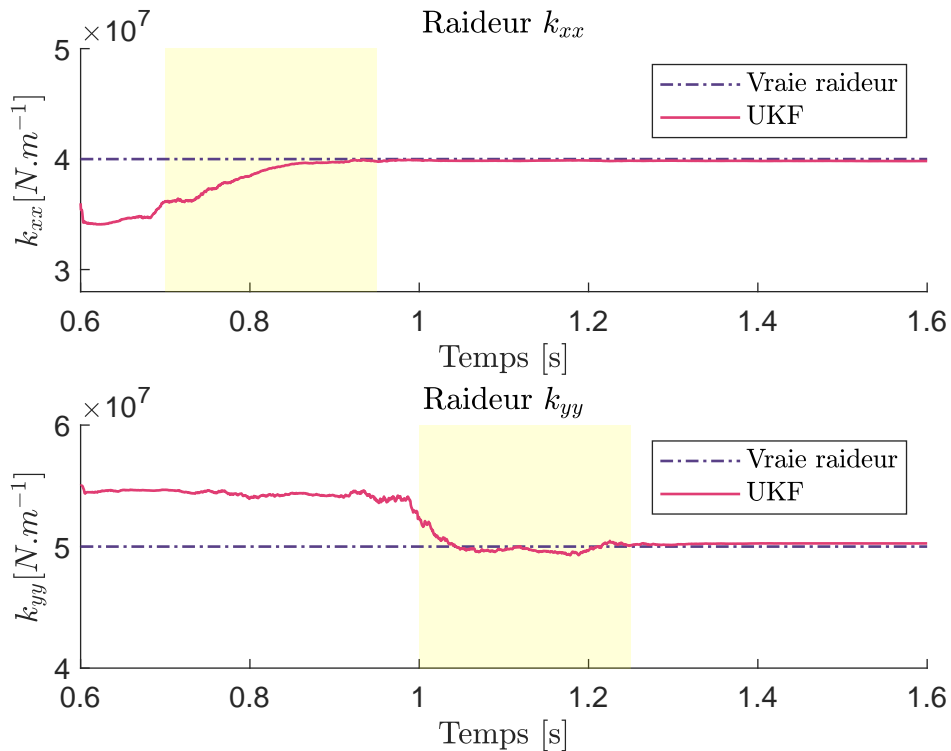


FIGURE 5.11: Estimation des raideurs dans les paliers

Les résultats obtenus sont représentés par la figure (Fig.5.11). Le filtre de Kalman non-parfumé retourne des résultats assez satisfaisants et converge bien vers les vraies valeurs de raideur sur les deux directions latérales. L'erreur sur l'estimation de  $k_{xx}$  est de 1.55 % et celle par rapport à l'estimation de  $k_{yy}$  est de 0.12 %. On rappelle que les zones colorées en jaune représentent les intervalles de temps pour lesquels le rotor reste au voisinage de la première vitesse critique  $\Omega_{cr1}$  et ensuite de la deuxième critique  $\Omega_{cr2}$ .

Ce qui est intéressant à voir, c'est qu'au passage par la vitesse critique sur la direction des  $\vec{x}$ ,  $\Omega_{cr1}$ , l'identification de  $k_{xx}$  converge vers la bonne valeur. De la même façon, au passage par  $\Omega_{cr2}$ , vitesse critique sur la direction des  $\vec{y}$ , l'identification de  $k_{yy}$  converge vers la bonne valeur. Ceci confirme que les zones du passage par des vitesses critiques sont assez riches en information pour faire converger rapidement le filtre quand il s'agit d'identifier des paramètres liés aux paliers, et donc, des paramètres assez déterminants dans le comportement vibratoire latéral à la résonance. L'identification se fait ainsi en conditions d'excitations, généralement croisées lors des régimes non-stationnaires.

### Estimation de l'amortissement des paliers

De la même façon qu'on a identifié les raideurs dans les deux directions, nous cherchons maintenant à identifier les amortissements des paliers.

Le vecteur des paramètres s'écrit cette fois-ci de la façon suivante :

$$\{x_p\} = \begin{Bmatrix} c_{xx} \\ c_{yy} \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

L'équation d'état s'écrit de la même façon que l'équation (Eq.5.28) sauf que la matrice d'état dépend cette fois-ci des amortissements des paliers. La matrice qui introduit cette dépendance est la matrice d'amortissement  $[C(\theta, x_p)]$  :

$$[A^*(\theta, x_p)] = \begin{bmatrix} [0] & [Id] & [0] \\ -[M_{tot}(\theta)]^{-1} [K] & -[M_{tot}(\theta)]^{-1} [C(x_p)] & [0] \\ [0] & [0] & [Id] \end{bmatrix} ; \quad (5.33)$$

avec :

$$[C(x_p)] = \begin{bmatrix} x_p(1) & 0 & 0 \\ 0 & x_p(2) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Quant au vecteur des mesures, il est le même que celui utilisé précédemment,  $z_k^*$ .

Les résultats obtenus sont représentés dans la figure (Fig.5.12). Le filtre de Kalman non-parfumé retourne des bons résultats quant à la prédiction de l'amortissement avec une erreur de 5.2 % pour l'identification de  $c_{xx}$  et une erreur de 8.27 % pour l'identification de  $c_{yy}$ . A nouveau, la zone colorée en jaune représente le temps passé au voisinage des vitesses critiques. On voit bien que le passage par la première vitesse critique correspondant à la résonance suivant l'axe des  $x$  favorise la convergence du filtre vers la bonne valeur  $c_{xx}$  ainsi qu'un passage par la deuxième vitesse critique suivant l'axe des  $y$  favorise la convergence du filtre pour l'identification de  $c_{yy}$ .

A nouveau, on remarque que le passage par les vitesses critiques favorise la convergence du filtre pour l'identification des paramètres liés aux paliers. Ceci s'explique par le fait que les paliers sont fortement sollicités en résonance et donc, que la contribution de ces paramètres dynamiques dans la réponse vibratoire du rotor devient importante. Le passage par les zones critiques constitue ainsi une source d'information assez riche pour l'identification des raideurs et des amortissements des paliers.



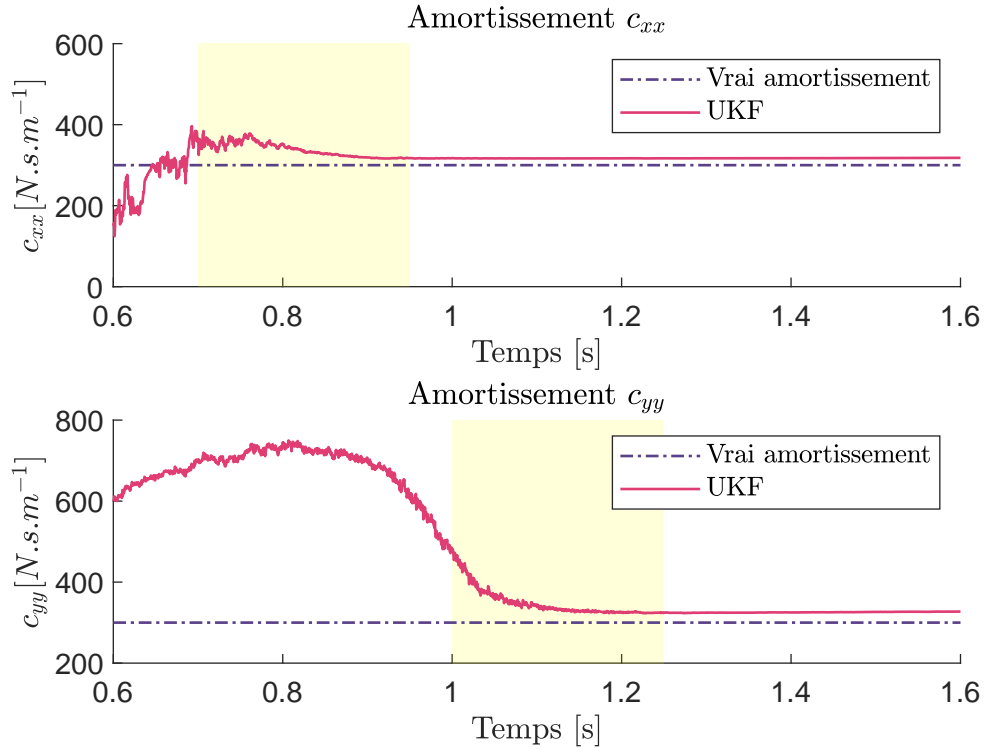


FIGURE 5.12: Estimation des amortissements dans les paliers

### Estimation du balourd

On passe maintenant à l'estimation des paramètres du balourd par l'UKF. Le vecteur  $x_p$  se réduit ainsi au scalaire  $me$  ( $g.m$ ) qui est le produit de la masse par l'excentricité du balourd. Comme on a procédé précédemment, on repère tout d'abord les matrices qui présentent une dépendance aux paramètres à identifier et qui nécessitent donc d'être actualisées d'un pas de temps au suivant avec la nouvelle estimation.

En l'occurrence, les matrices ou vecteurs qui dépendent du produit  $me$  sont la matrice  $[M_{var}(x_p)]$  ainsi que le vecteur  $\{F_{nl}(x_p)\}$ , tel que :

$$[M_{var}(\theta, x_p)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_p \sin(\theta) \\ 0 & 0 & x_p \cos(\theta) \\ -x_p \sin(\theta) & x_p \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} ; \quad \{F_{nl}(\theta, x_p)\} = \begin{Bmatrix} x_p \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \\ x_p \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

Sauf que la matrice  $[M]$  montre aussi une dépendance en  $m$  et en  $me^2$  qui sont des coefficients directement liés aux caractéristiques du balourd. Le paramètre à identifier étant le produit  $me$ , ceci ne suppose aucune connaissance de la masse  $m$  ni de l'excentricité  $e$ . On sera ainsi ramené à faire une simplification du modèle en exprimant autrement la matrice de masse, pour faire ressortir explicitement le paramètre  $x_p$  tel que :

$$[M(x_p)] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I + x_p \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

La simplification apporté à l'écriture de la matrice  $[M]$  fait que le modèle dynamique utilisé manque de précision. Cette imprécision doit être prise en considération dans l'expression de

la matrice  $\mathbf{Q}$  qui précise le degré de confiance au modèle. Ce dernier s'exprime sous la forme donnée par l'équation (Eq.5.28) avec une prise en compte des matrices et vecteurs explicités en équations (Eq.5.35 et Eq.5.36) ce qui donne lieu à cette écriture :

$$\{\dot{x}^*\} = [A^*(\theta, x_p)] \{x^*\} + [B^*] (\{F_{ext}\} + \{F_{nl}(\theta, x_p)\}) \quad (5.37)$$

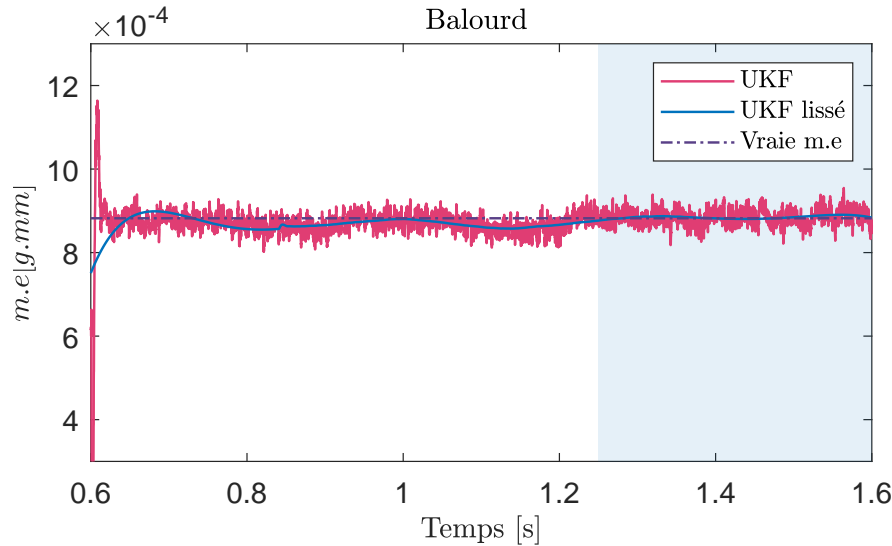


FIGURE 5.13: Estimation des caractéristiques du balourd

Dans le modèle basé sur l'hypothèse de source non-idéale et celle du régime non-stationnaire, le balourd intervient principalement dans les termes introduisant un couplage ou bien dans les termes non-linéaires. Son estimation est moins directe que l'estimation des caractéristiques des paliers dont la contribution dans les équations de la dynamique est plutôt linéaire.

Comme nous pouvons le constater sur la figure (Fig.5.13), l'identification est moins bonne quand le rotor passe par les zones critiques et s'améliore nettement quand ces zones sont franchies. La zone qui suit le passage par la deuxième vitesse critique est distinguée par la couleur du patch bleu. L'estimation donnée par l'UKF est calculée et ensuite lissée en appliquant un autre type de filtrage polynomial de type « Savitzky-Golay » [25]. On voit mieux sur la courbe lissée que l'estimation du balourd est parfaite au-delà des vitesses critiques et coïncide bien avec la valeur du balourd présent sur le rotor. Cette application du filtre de Kalman s'inscrit dans le cadre de la maintenance préventive : on arrive à estimer avec une précision très satisfaisante la valeur d'un balourd sur une machine tournante en conditions opérationnelles.

### Estimation multi-paramétrique

Le filtre de Kalman réussit bien à faire de l'identification des paramètres séparément. On va tester les limites de l'UKF en essayant d'estimer à la fois le balourd et les deux raideurs latérales.

Le vecteur des paramètres s'écrit de la façon suivante :

$$\{x_p\} = \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ me \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

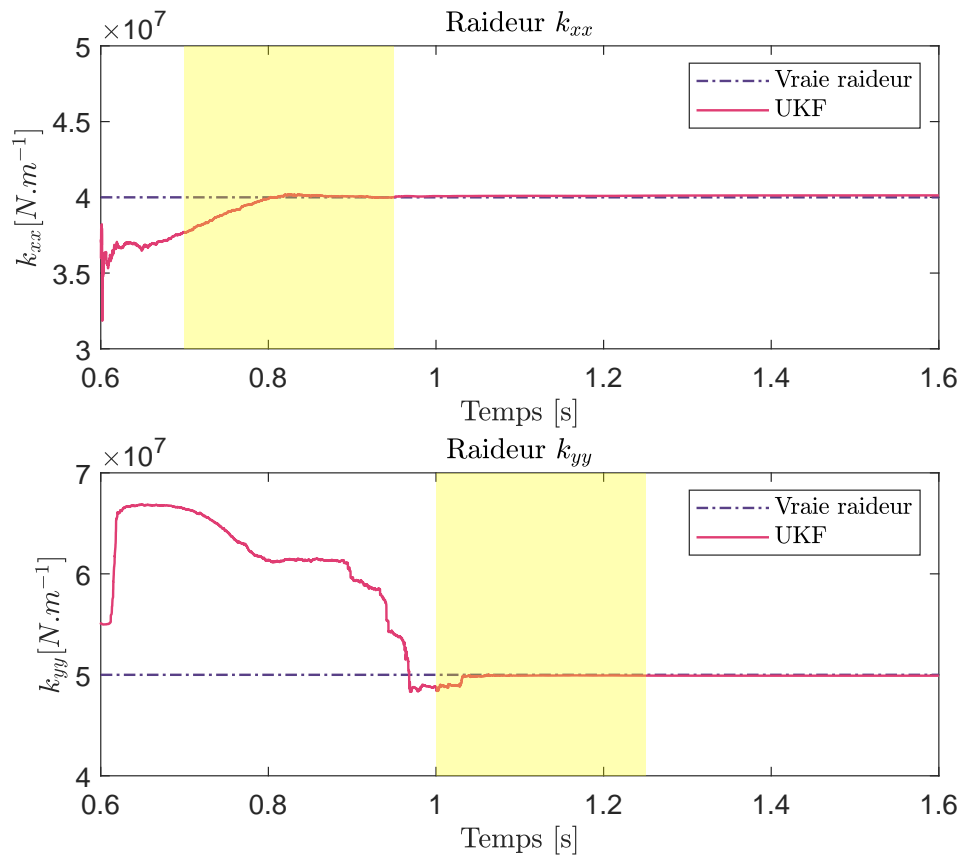


FIGURE 5.14: Estimation des raideurs du palier

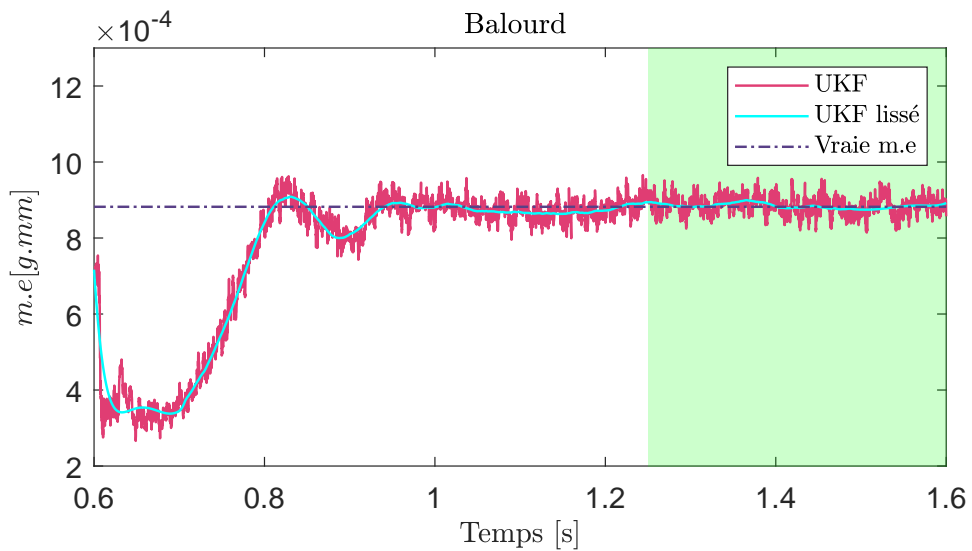


FIGURE 5.15: Estimation des caractéristiques du balourd

Dans ce cas de l'identification multi-paramétrique, nous avons à la fois les matrices  $[K(x_p)]$  et  $[M_{var}(\theta, x_p)]$  ainsi que le vecteur  $\{F_{nl}(\theta, x_p)\}$  qui montrent une dépendance au vecteur des paramètres  $\{x_p\}$  et qui nécessitent alors une mise à jour à chaque pas de temps. Cela donne lieu à une équation d'état se représentant sous la même forme que l'équation (5.37).

Les résultats d'identification par l'UKF sont donnés par les figures (5.15) et (5.14). Le comportement du filtre en terme de convergence pour l'identification multi-paramétrique est le même que pour les identifications effectuées séparément précédemment. Notamment, on retrouve que le filtre converge vers les bonnes valeurs des raideurs au passage par les vitesses critiques alors qu'il converge vers la bonne valeur du balourd juste après cette zone de vitesses spécifiques. Quand l'identification est faite en temps réel, à fur et à mesure que les essais sont réalisés, il est plus intéressant d'effectuer une identification multi-paramétrique ce qui permettra, à partir d'une seule campagne d'essai, d'identifier plusieurs paramètres.

## 5.7 Conclusion

Le filtre de Kalman constitue un outil d'identification performant pour la dynamique des rotors en régime transitoire. Dans ce chapitre, un outil d'identification basé sur ce filtre a été développé pour les rotors rigides opérant à des très hautes vitesses et en régime non-stationnaire. Les équations de la dynamique étant non-linéaires, l'extension du filtre de Kalman non-linéaire a été mise en œuvre. Le filtre a prouvé sa performance à identifier les paramètres des paliers, tel que les raideurs et les amortissements. Il a aussi montré sa performance à identifier le balourd. Ce qui est remarquable, c'est que le passage par les vitesses critiques favorise sa convergence quand il s'agit d'identifier les paramètres caractéristiques des paliers. Ceci s'explique par le fait que les paliers sont fortement sollicités au passage par les vitesses critiques et donc, ces zones de vitesses sont riches en information par rapport à leurs comportements dynamiques en régime quasi stationnaire. Les régimes transitoires sont alors plus riches et plus favorables au processus d'identification que les régimes stationnaires.

L'identification est proposée dans un premier temps sur les différents paramètres séparés. Ensuite, une identification multi-paramétrique est effectuée et les résultats obtenus sont aussi satisfaisants que pour les identifications menées séparément. Cependant, l'identification simultanée est plus avantageuse dans le sens où elle permet, à partir d'une seule campagne d'essai d'identifier plusieurs paramètres à la fois. Ceci coûtera, bien évidemment moins cher, que de mener une campagne de mesure par paramètre à identifier.

Sur un rotor à trois ddls l'utilisation de l'UKF a été effectuée. Il est connu qu'une des limites de l'application de ce filtre est l'augmentation du nombre des variables. Si par exemple le système dispose de  $N$  ddls, le filtre utilisera au moins  $2N+1$  variables. Cette augmentation de nombre de variables s'accompagne bien évidemment d'une amplification des temps de calcul. Pour le rotor rigide à 3ddl, cette limitation ne pose pas de problème. Sauf que pour un rotor flexible à plusieurs ddls, l'augmentation du temps de calcul risque de devenir plus problématique. Il serait donc intéressant de ne pas se limiter à l'extension de l'UKF tout court, mais de lui associer des algorithmes qui permettront de réduire le nombre de variables, ou le nombre de sigma-points pour être plus précis.



# Bibliographie

- [1] David AUGÉIX. *Analyse vibratoire des machines tournantes*. Ed. Techniques Ingénieur, 2001. 114
- [2] N. Tandon and A. Choudhury. Review of vibration and acoustic measurement methods for the detection of defects in rolling element bearings. *Tribology International*, 32(8) :469–480, 1999. 114
- [3] Adeline Bourdon, Hugo André, and Didier Rémond. A new way of writing motion equation in rotating machines by translation into the angular domain. In *8th IFToMM International Conference on Rotordynamics, KIST*, page CDROM, 2010. 114
- [4] Adeline Bourdon, Hugo André, and Didier Rémond. Introducing angularly periodic disturbances in dynamic models of rotating systems under non-stationary conditions. *Mechanical systems and signal processing*, 44(1-2) :60–71, 2014. 114
- [5] Jose L Gomez, Adeline Bourdon, Hugo André, and Didier Rémond. Modelling deep groove ball bearing localized defects inducing instantaneous angular speed variations. *Tribology International*, 98 :270–281, 2016. 114
- [6] JS Rao. *Rotor dynamics*. New Age International, 1996. 114
- [7] B. J. Stone. The State of the Art in the Measurement of the Stiffness and Damping of Rolling Element Bearings. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 31(2) :529–538, 1982. 115
- [8] J. Kraus, J. J. Blech, and S. G. Braun. In Situ Determination of Rolling Bearing Stiffness and Damping by Modal Analysis. *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*, 109(3) :235, 2011. 115
- [9] J. Glienicke. Paper 13 : Experimental Investigation of the Stiffness and Damping Coefficients of Turbine Bearings and Their Application to Instability Prediction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*, 181(2) :116–129, 2010. 115
- [10] S. Edwards, A. W. Lees, and M. I. Friswell. Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system from a single run-down. *Journal of Sound and Vibration*, 232(5) :963–992, 2000. 115
- [11] A. K. Jalan and A. R. Mohanty. Model based fault diagnosis in rotating machinery. *International Journal of Performability Engineering*, 7(6) :515–523, 2011. 115
- [12] R Tiwari, AW Lees, and MI Friswell. Identification of speed-dependent bearing parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 254(5) :967–986, 2002. 115
- [13] Rajiv Tiwari. Conditioning of regression matrices for simultaneous estimation of the residual unbalance and bearing dynamic parameters. *Mechanical systems and signal processing*, 19(5) :1082–1095, 2005. 115

- 
- [14] R Tiwari and V Chakravarthy. Simultaneous identification of residual unbalances and bearing dynamic parameters from impulse responses of rotor–bearing systems. *Mechanical systems and signal processing*, 20(7) :1590–1614, 2006. 115
- [15] Akhand Rai and SH Upadhyay. A review on signal processing techniques utilized in the fault diagnosis of rolling element bearings. *Tribology International*, 96 :289–306, 2016. 116
- [16] CC Osuagwu and DW Thomas. Effect of inter-modulation and quasi-periodic instability in the diagnosis of rolling element incipient defect. *Journal of Mechanical Design*, 104(2) :296–302, 1982. 116
- [17] AB Johnson and AF Stronach. Bearing fault detection in hostile environment. In *I Proceedings of International Conference on Condition Monitoring, Brighton, UK*, pages 21–23, 1986. 116
- [18] Miguel A C Michalski and Gilberto F M De Souza. Applying Kalman Filtering to Unbalance Estimation in Rotating Machinery Applying Kalman Filtering to Unbalance Estimation in Rotating Machinery. (April), 2018. 117
- [19] Christoph Ludwig, Oliver Junge, and Utz Wever. Online parameter identification methods for oscillatory systems : Estimation of changes in stiffness properties. *Journal of Vibration and Control*, (September) :107754631881026, nov 2018. 117
- [20] Adrien Goeller. *Contribution à la perception augmentée de scènes dynamiques : schémas temps réels d’assimilation de données pour la mécanique du solide et des structures*. PhD thesis, Paris Saclay, 2018. 117, 123
- [21] Rudolph E Kalman and Richard S Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of basic engineering*, 83(1) :95–108, 1961. 119
- [22] Nicolas Peyret, Jean-Luc Dion, and Gael Chevallier. A framework for backbone experimental tracking : Piezoelectric actuators, stop-sine signal and kalman filtering. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 78 :28–42, 2016. 123
- [23] Marco Rosatello. *Contribution to the study of damping in bolted structures*. PhD thesis, Paris Saclay, 2019. 123
- [24] Dan Simon. *Optimal state estimation : Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006. 125
- [25] Hannibal H Madden. Comments on the savitzky-golay convolution method for least-squares-fit smoothing and differentiation of digital data. *Analytical chemistry*, 50(9) :1383–1386, 1978. 135

# Conclusion et perspectives

Dans ce travail, un effort particulier a été consacré à l'étude des différentes hypothèses de modélisation afin de parvenir au choix le mieux adapté pour l'étude des rotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire. Les différentes hypothèses ont été représentées par un Diagramme qui classe les hypothèses, à la fois, par catégorie ainsi que par ordre de complexité. Principalement, les hypothèses ont été classées suivant les critères suivants : la flexibilité de l'arbre, la source d'énergie, la prise en compte de la torsion, le couplage flexion-torsion, la prise en compte de l'effet gyroscopique et finalement, des hypothèses sur la Vitesse Instantanée de Rotation (VIR). Cette introduction est fondamentale dans la modélisation vu qu'elle fait toute la différence avec les modélisations classiques. La VIR est définie comme étant le signal qui traduit à la fois les quantités macroscopiques liées au mouvement du corps rigide ainsi que les petites perturbations liées à la déformation en torsion. Elle est introduite dans les inconnues du problème dynamique et elle est complètement déduite à partir de la dynamique du système et de sa géométrie. Cette hypothèse sur la VIR découle directement de l'hypothèse de source non-idéale et permet une représentation plus pertinente du régime non-stationnaire.

L'hypothèse sur la source permet de modéliser certains phénomènes particuliers au passage par les vitesses critiques, notamment le phénomène de Sommerfeld qui est la manifestation d'un couplage entre la VIR et les degrés de libertés en flexion. Une modélisation sous l'hypothèse de source d'énergie non-idéale permet de vérifier que le moteur fournit suffisamment d'énergie pour faire passer le rotor à travers les différentes vitesses critiques pour les rotors fonctionnant à très hauts régimes. Il est crucial de bien dimensionner le rotor ainsi que le moteur qui lui est associé de façon à éviter, au mieux, l'occurrence du phénomène de Sommerfeld dont les conséquences peuvent être catastrophiques.

Pour modéliser d'une façon suffisamment réaliste les très hautes vitesses, il est important de bien prendre en compte les effets gyroscopiques. Ces effets étant à la fois proportionnels à la VIR et à l'inertie de section, deviennent prépondérants à très hautes vitesses. Une attention particulière a donc été accordée à l'expression des efforts et moments gyroscopiques d'une façon qui soit la plus précise possible. Il a été démontré, analytiquement, que les effets gyroscopiques, de la même façon que la présence d'un balourd, introduisent des couplages entre la flexion et la torsion.

Ainsi, c'est à la lumière de toutes ces hypothèses que la modélisation avancée pour le comportement dynamique des rotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire a été proposée. La démarche suivie pour l'obtention des équations du mouvement se base sur la méthode des éléments finis associée à l'approche énergétique de Lagrange. Le modèle éléments finis utilise six degrés de liberté sur chaque nœud. C'est un modèle complet qui prend en considération tous les mouvements possibles en traction-compression, flexion et torsion. Le modèle a aussi démontré sa capacité à prendre en compte certains éventuels phénomènes lors du passage par les vitesses critiques. L'originalité de la modélisation est basée sur l'inclusion de la VIR comme un ddl du problème dynamique. Souvent dans les modélisations classiques, la vitesse de rotation angulaire est imposée, elle est soit constante, soit variable en fonction du temps suivant une loi prédéfi-



nie. Certaines approches introduisent la VIR comme une inconnue du problème dynamique qui reflète uniquement le mouvement du corps rigide à travers une seule équation supplémentaire traduisant la relation entre la source d'énergie et la réponse du système. Dans notre cas, la VIR combine à la fois le mouvement du corps rigide ainsi que la déformation en torsion, ce qui justifie qu'un ddl de rotation angulaire soit défini pour chaque nœud.

Le nouveau modèle est basé sur des hypothèses plus réalistes mais qui, en contre partie, rajoutent un degré de complexité dans l'écriture des équations de la dynamique. Nous avons donc proposé deux écritures pour les mêmes équations dynamiques : une écriture analytique qui favorise la compréhension des liens entre les différents termes des équations de la dynamique et les hypothèses de modélisation et une écriture mieux adaptée pour le développement numérique pour une résolution à l'aide des schémas d'intégration numériques.

Le nouveau modèle a été comparé avec des modèles dynamiques classiques. Les résultats de simulation d'un exemple de rotor passant par les vitesses critiques ont montré la capacité du nouveau modèle, à l'encontre des modèles classiques, à visualiser le phénomène de Sommerfeld et par conséquent, à mieux estimer les vibrations latérales. En outre, les analyses temps-fréquence ont montré la capacité du modèle à représenter les couplages flexion-torsion. Le couplage opère dans les deux sens : l'excitation en flexion génère des vibrations en torsion et inversement. Une étude paramétrique a porté sur l'influence de certains paramètres sur l'accentuation ou bien au contraire, l'atténuation du couplage. Notamment, l'asymétrie du rotor et l'effet de l'amortissement des paliers ont été explorés.

Le modèle dynamique a été conçu dans un premier temps pour l'étude dynamique des monorotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire et il a été ensuite étendu pour l'étude des multirotors, et plus particulièrement les réducteurs de vitesse. Cette étude s'inscrit dans le cadre du projet RedHV+ qui a pour but de développer des rotors à très hautes vitesses pour des applications automobiles. Ce projet rentre dans le cadre des activités de recherche qui visent l'électrification du secteur du transport terrestre. L'utilisation des moteurs électriques délivrant une densité de puissance de moteur élevée résulte en une vitesse de rotation assez élevée nécessitant d'être adaptée à travers l'utilisation des réducteurs hautes vitesses. L'objectif du projet est donc de parvenir à une conception de réducteurs de vitesses adaptés aux vitesses de sortie de ces moteurs puissants

Une approche classique de liaison par engrenages a été couplée au nouveau modèle dynamique du rotor. La liaison par engrenages a été intégrée aussi comme un torseur d'efforts qui permet la considération des raideurs de denture non linéaires. La raideur d'engrènement a été définie dans l'espace angulaire de façon à considérer les fluctuations de la VIR en régime non-stationnaire. La présence de l'engrenage favorise le couplage entre la VIR et les ddls en flexion. Afin de modéliser le réducteur de vitesse du banc redHV+, une architecture simplifiée a été proposée à partir de la vraie architecture. Des modèles dynamiques des différents éléments technologiques constituant le multirotor, à savoir le couple-mètre et l'accouplement élastique, ont été proposés. Le modèle éléments finis complet a été ainsi proposé pour simuler le comportement vibratoire du banc d'essai. Il a été remarqué qu'au niveau de l'accouplement élastique, le gradient des déplacements latéraux est assez important. Cela pourrait présenter des risques de défaillance par fatigue vibratoire, surtout que les fréquences de vibrations qui ont été observées sont assez élevées. En d'autres termes, le risque d'une fatigue vibratoire à nombre élevé de cycles est à prendre en considération. Un bon choix de l'accouplement élastique est ainsi primordial. Les analyses temps fréquences, en régime non-stationnaire, ont souligné les perturbations observées sur le signal de la VIR suite de la présence de l'engrenage. Cela confirme, une autre fois, l'intérêt d'inclure la VIR dans les inconnues du problème dynamique. Grâce à cette hypothèse, le signal de la VIR est impacté par la périodicité cyclique des éléments technologiques du rotor, ce qui est plus réaliste.

---

Finalement, une fois que les modèles dynamiques ont été définis et testés sur des applications numériques/industrielles, des travaux d'identification basés sur le filtre de Kalman ont été menés vers la fin de cette étude. L'idée est d'enrichir les modèles dynamiques avec des informations plus réalistes sur certains paramètres qui y figurent. L'outil d'identification a été développé et testé sur les monorotors rigides. Du moment où les équations du mouvement sont non-linéaires, il était nécessaire de choisir le filtre de Kalman non-parfumé. Les paramètres concernés par l'identification dans cette étude étaient les amortissements et raideurs des paliers ainsi que le balourd. L'identification a été faite sur les différents paramètres séparément dans un premier temps et sur les différents paramètres simultanément dans un second temps. L'outil d'identification a montré son efficacité, particulièrement pour un rotor fonctionnant en régime non-stationnaire. Il a été aussi démontré que le passage par les vitesses critiques favorise la convergence du filtre.

Les travaux menés dans cette thèse de doctorat ouvrent les perspectives suivantes.

Le modèle de la dynamique proposé a été résolu numériquement avec les schémas d'intégration numériques de type *ode* sous *Matlab*. D'autres méthodes de résolutions numériques pourraient être testées et comparées à la méthode utilisée afin de retenir la méthode qui permet le meilleur temps de calcul.

D'autre part, le couple moteur qui a été utilisé pour les modélisations en non-stationnaire est un couple moteur linéaire. D'autres profils non-linéaires de couple pourraient être utilisés pour simuler des régimes de fonctionnement plus réalistes. En outre, le modèle dynamique des paliers qui a été adopté est très simpliste. Une modélisation plus avancée pourrait contenir des modèles dynamiques non-linéaires des roulements prenant en compte la vitesse de rotation qui est à l'origine de l'évolution de l'effort centrifuge au cours du temps. Une étude plus poussée de la dynamique des machines tournantes comprendra à la fois une modélisation précise de la partie tournante ainsi que des organes de support, à savoir les paliers.

Ensuite, pour le modèle dynamique du réducteur de vitesse, nous avons considéré d'un côté de l'engrenage un arbre flexible, et de l'autre côté un arbre rigide. Cette étude pourrait être étendue à un étage d'engrenage comportement de part et d'autre des arbres flexibles.

En ce qui concerne l'outil d'identification basé sur le filtre de Kalman, il a été développé sur un rotor rigide en régime non-stationnaire et s'est montré performant pour ce type d'application. Il serait intéressant d'étendre l'étude à des rotors flexibles tout en se basant sur le modèle dynamique proposé au chapitre 2. Cela pourrait ouvrir la porte vers de l'identification en ligne des paramètres des rotors « élancés » sur lesquels l'hypothèse de rotor rigide n'est pas applicable. L'identification sur des rotors flexibles nécessitera d'explorer des pistes pour la réduction du temps de calcul effectué par le filtre de Kalman non-parfumé.

Une des étapes ralentissant les temps de calcul est la transformée non-parfumée qui, à partir d'une distribution gaussienne décrivant la variable d'état, génère un échantillon de points : les sigma-points. Ces sigma-points sont ensuite propagés d'un pas du temps au suivant à travers l'application de la fonction d'évolution. A titre d'exemple, pour un rotor flexible à  $n$  degrés de liberté, il va falloir évaluer  $2n + 1$  fois la fonction d'évolution pour estimer les  $2n + 1$  sigma-points d'un pas de temps au suivant. La fonction d'évolution étant une fonction d'intégration numérique, elle représente, dans le processus d'identification, l'étape la plus coûteuse en terme de temps de calcul. Il est donc intéressant de réduire le nombre de fois pour lequel elle est appliquée en passant par la réduction du nombre des sigma-points. L'algorithme sphérique pourrait ainsi se montrer d'une grande utilité puisqu'il permet de réduire le nombre des sigma-points, et donc le nombre des évaluations de la fonction de prédiction à  $n + 1$  entre deux pas de temps successifs.

Finalement, l'outil d'identification qui a été développé dans le cadre de ces travaux de thèse pourrait être utilisé comme un outil de surveillance des machines tournantes. Basé sur des modèles de comportement plus réalistes lors des fonctionnements non stationnaires, l'outil d'identifica-

tion basé sur le filtre de Kalman a montré sa performance à décrire la présence d'un balourd sur une machine tournante et à le quantifier. L'étude pourrait être étendue afin d'extraire de l'information sur la surveillance des composants d'une machine tournante, notamment lors des passages des vitesses critiques.

# Annexes

## A Vecteurs fonction de forme sur un élément poutre

Les vecteurs fonction de forme sur un élément poutre de longueur  $l$  ayant 12 ddls sont construits de la façon suivante :

$$\{N_1^g(z)\} = \left( 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3}; 0; 0; 0; z - \frac{2z^2}{l} + \frac{z^3}{lp^2}; 0; \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3}; 0; 0; 0; -\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2}; 0 \right)$$

$$\{N_2^g(z)\} = \left( 0; 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3}; 0; -z + \frac{2z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2}; 0; 0; 0; \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3}; 0; \frac{z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2}; 0; 0 \right)$$

$$\{N_3^g(z)\} = \left( 0; 0; 0; 0; 0; 1 - \frac{z}{l}; 0; 0; 0; 0; 0; \frac{z}{l} \right)$$

## B Matrices de masse élémentaires

La matrice de masse totale est construite à partir des matrices suivantes :

$$[M_1^e] = \frac{\rho S}{2} \int_0^l \{N_1\}^t \{N_1\} dz = \frac{\rho Sl}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_2^e] = \frac{\rho S}{2} \int_0^l \{N_2\}^t \{N_2\} dz = \frac{\rho Sl}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_{3t}^e] = \frac{\rho S}{2} \int_0^l \{N_3\}^t \{N_3\} dz = \frac{\rho Sl}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[M_{3r}^e] = \rho I_p \int_0^l \{N_3\}^t \{N_3\} dz = \frac{\rho I_p l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[M_4^e] = \frac{\rho I}{2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\}^t \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\} dz = \frac{\rho I}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_5^e] = \frac{\rho I}{2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial N_2}{\partial z} \right\}^t \left\{ \frac{\partial N_2}{\partial z} \right\} dz = \frac{\rho I}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

D'une part, la matrice de masse classique est obtenue à partir d'une réorganisation des matrices  $[M_i]_{i \in \{1,2,3r,3t\}}$  de la façon suivante :

$$[M_c^e] = \rho S l \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & 0 \\ \frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{35l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{6Sl} \\ \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 & 0 \\ -\frac{13l}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{6Sl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{3Sl} \end{bmatrix} \quad (12,12)$$

D'autre part, la matrice des effets secondaires d'inertie est calculée à partir des matrices  $[M_4]$  et  $[M_5]$  tel que :

$$[M_{sec}^e] = \frac{\rho I}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 \\ 0 & 36 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & -3l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3l & 0 & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 & -l^2 & 0 & 0 \\ 3l & 0 & 0 & 0 & 4l^2 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 & -l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 3l & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 3l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3l & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 & 4l^2 & 0 & 0 \\ 3l & 0 & 0 & 0 & -l^2 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12,12)$$

La matrice de masse totale est finalement obtenue à partir des deux matrices précédentes tel que :

$$[M_s^e] = [M_c^e] + [M_{sec}^e]$$

## C Les matrices de raideur élémentaires

Les matrices de raideurs élémentaires  $[K_i^e]_{i \in \{1,2,3,4\}}$  sont données par :

$$[K_1^e] = EI \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 N_1(z)}{\partial^2 z} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 N_1(z)}{\partial^2 z} \right\}^t dz = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_2^e] = EI \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2 N_2(z)}{\partial^2 z} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 N_2(z)}{\partial^2 z} \right\}^t dz = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_3^e] = ES \int_0^l \left\{ \frac{\partial N_3(z)}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_3(z)}{\partial z} \right\}^t dz = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_4^e] = G I_p \int_0^l \left\{ \frac{\partial N_3(z)}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N_3(z)}{\partial z} \right\}^t dz = \frac{G I_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de raideur classique est obtenue par réorganisation des matrices  $[K_i]_{i \in \{1,2,3,4\}}$ . L'effet de cisaillement est directement pris en considération à travers le module de cisaillement  $b$  donnée par :

$$b = \frac{EI}{l^3(1 + \Phi)}$$

tel que :

- $\Phi = \frac{12EI}{G S_r k l^2}$  ;
- $S_r$  est l'aire réduite de section droite ;
- $k$  est le coefficient correctif de cisaillement.

La matrice de raideur totale est ainsi donnée par :

$$[K_s^e] = \begin{bmatrix} 12b & 0 & 0 & 0 & 6bl & 0 & -12b & 0 & 0 & 0 & 6bl & 0 \\ 0 & 12b & 0 & -6bl & 0 & 0 & 0 & -12b & 0 & -6bl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6bl & 0 & (4 + \Phi)bl^2 & 0 & 0 & 0 & 6bl & 0 & (2 - \Phi)bl^2 & 0 & 0 \\ 6bl & 0 & 0 & 0 & (4 + \Phi)bl^2 & 0 & -6bl & 0 & 0 & 0 & (2 - \Phi)bl^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G I_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G I_p}{l} \\ -12b & 0 & 0 & 0 & -6bl & 0 & 12b & 0 & 0 & 0 & -6bl & 0 \\ 0 & -12b & 0 & 6bl & 0 & 0 & 0 & 12b & 0 & 6bl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6bl & 0 & (2 - \Phi)bl^2 & 0 & 0 & 0 & 6bl & 0 & (4 + \Phi)bl^2 & 0 & 0 \\ 6bl & 0 & 0 & 0 & (2 - \Phi)bl^2 & 0 & -6bl & 0 & 0 & 0 & (4 + \Phi)bl^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G I_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G I_p}{l} \end{bmatrix} \quad (39)$$

## D Matrices relatives à l'effet gyroscopique

Les matrices  $[A_1^g]$ ,  $[A_2^g]$ ,  $[Gyr^g]$  et  $[\int Gyr^g]$  qui interviennent dans l'expression du terme relatif aux effets gyroscopiques sont présentées ici :

$$[A_1^g] = -\frac{\rho I_p}{15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 0 & -4l^2 & 0 & 3l & 0 & 0 & 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 0 & l^2 & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & -4l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_2^g] = -\frac{\rho I_p}{15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18l & 0 & 0 & 0 & 3l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l^3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18l & 0 & 0 & 0 & -3l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l^2 & 0 & 0 & 0 & l^3/2 & 0 & 3l^2 & 0 & 0 & 0 & -l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Gyr^g] = -\frac{\rho I_p}{15} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 0 & 3l & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 3l & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 0 & -4l^2 & 0 & 3l & 0 & 0 & 0 & l^2 & 0 \\ 0 & -3l & 0 & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 & -l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & -3l & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 0 & l^2 & 0 & 3l & 0 & 0 & 0 & -4l^2 & 0 \\ 0 & -3l & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\int Gy^{g}] = -\frac{\rho I_p}{15l} \begin{bmatrix} 0 & -18l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18l & 0 & 3l^2 & 0 & 0 \\ 18l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18l & 0 & 0 & 0 & 3l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l^3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l^3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18l & 0 & -3l^2 & 0 & 0 \\ -18l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18l & 0 & 0 & 0 & -3l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l^2 & 0 & 0 & 0 & l^3/2 & 0 & 3l^2 & 0 & 0 & 0 & -l^3 & 0 \\ 0 & -3l^2 & 0 & -l^3/2 & 0 & 0 & 0 & 3l^2 & 0 & l^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$









**Titre :** Dynamique des rotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire, identification par le filtre de Kalman

**Mots clés :** dynamique des rotors, non-stationnarité, haut régime, couplage flexion-torsion, identification

**Résumé :** Avec les mesures de plus en plus exigeantes visant à réduire l'impact environnemental des transports routiers, des nouvelles technologies de motorisations électriques sont explorées. Notamment, le projet RedHV+ porte sur la possibilité de construire, à coût automobile, des réducteurs haute vitesse et haut rendement pour les véhicules hybrides. Dans le cadre de ce projet, une modélisation originale du comportement dynamique des réducteurs très hautes vitesses et en régime non-stationnaire est proposée.

Dans un premiers temps, les hypothèses traduisant au mieux les conditions de fonctionnement des réducteurs de vitesse du projet RedHV+ sont choisies. Le travail de modélisation qui est fait dans une première étape s'intéresse aux monorotors flexibles en flexion et en torsion, fonctionnant à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire. Ceci donne lieu, conjointement à l'hypothèse de source non-idéale d'énergie, à une formulation originale de l'équation de la dynamique du rotor.

Le nouveau modèle dynamique du monorotor est ensuite étendu à un système comportant deux arbres et un étage simple d'engrenages. L'architecture du réducteur utilisée sur le banc RedHV+ est simplifiée pour faire l'étude de son comportement dynamique. Quoique la modélisation du banc reste idéalisée par rapport à la vraie architecture, elle permet de tirer des conclusions pertinentes par rapport à des éventuels risques lié à un fonctionnement voisinant les vitesses critiques.

Finalement, un outil d'identification est développé afin d'enrichir les modèles dynamiques avec des valeurs plus réalistes des paramètres incertains d'une machine tournante en régime non-stationnaire. L'outil associant le modèle dynamique à des observations est mis en œuvre sur un exemple de rotor rigide et montre sa performance à estimer les paramètres incertains, surtout lors du passage par des vitesses critiques.

**Title:** Rotordynamics at very high speed and non-stationary operating conditions- Identification using Kalman filter

**Keywords :** Rotordynamics, non-stationary operating conditions, high speeds, coupling, identification

**Abstract:** In the frame of the growing trend of promoting the carbon-free mobility, RedHV+ project is carried out in order to investigate whether or not it is possible to manufacture a high-speed and high performance gearbox compatible with car costs. As part of this project, a new dynamic model for very high speed rotors working at non-stationary operating conditions is proposed.

First, the different assumptions used for rotordynamics modeling are separated into different categories and classified based on the order of complexity they add to the model. Then, according to the operating conditions of the RedHV+ test bed, a choice of the most realistic modeling assumptions is done. The dynamic model leads to a novel expression of the gyroscopic effect terms. It shows its capacity to accurately introduce the coupling between the flexural and torsional degrees of freedom. The results are presented at a first step, for a simple rotor. Another degree of complexity is introduced later, by considering a geared parallel-rotor system. The aim is to improve the accuracy of simulations for the rotor dynamics in non-stationary

conditions especially when getting through critical speeds.

The study of geared systems mainly focuses on the dynamic modeling of a simplified architecture of the RedHV+ test bed. The results obtained using the new dynamic model show interesting conclusions regarding the vibration behavior of the rotor when crossing the critical speeds. The reached vibration levels, in the presence of elastic coupling, highlight the importance of a correct dimensioning of a rotating machinery going through critical speeds.

Finally, an identification tool based on the Unscented Kalman Filter is developed in order to enrich the dynamic models of the rotating machineries with more realistic values of its uncertain parameters. The identification tool showed interesting results and it is shown that its performance increases when the rotor goes through critical speeds.