



Gestion de contrats d'Assurance-vie en Unités de Compte : une approche non-gaussienne

Abdou Kélani

► To cite this version:

Abdou Kélani. Gestion de contrats d'Assurance-vie en Unités de Compte : une approche non-gaussienne. Gestion et management. Université Claude Bernard - Lyon I, 2012. Français. NNT : 2012LYO10264 . tel-02892016

HAL Id: tel-02892016

<https://theses.hal.science/tel-02892016>

Submitted on 7 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Gestion de contrats d'Assurance-vie en Unités de Compte : une approche non-gaussienne.

THÈSE

Numéro d'ordre 264-2012

présentée et soutenue publiquement le 11 décembre 2012

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon I

par

Abdou KÉLANI

Composition du jury

Rapporteurs : Pr. Patrick NAVATTE
Pr. Jean-Luc PRIGENT

Examineurs : M. Areski COUSIN
Pr. Jean-Paul DÉCAMPS
Pr. François QUITTARD-PINON (directeur de thèse)

Remerciements

Je tiens à remercier le Professeur François QUITTARD-PINON pour avoir accepté de diriger ma thèse. Que le soutien et la confiance qu'il m'a accordés tout au long de ce travail trouvent ici l'expression de ma plus sincère gratitude. Les discussions avec lui - tant qu'humainement que scientifiquement - m'ont toujours été précieuses. Il a constamment été à mon écoute, m'a permis de participer à des congrès scientifiques et a activement contribué à ma formation scientifique. Qu'il trouve également le témoignage de mon respect et de ma considération profonds.

Tous mes remerciements s'adressent aux Professeurs Patrick NAVATTE de l'Université de Rennes 1 et Jean-Luc PRIGENT de l'Université de Cergy-Pontoise pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Leurs suggestions et remarques constructives m'ont permis d'améliorer ce travail.

Je suis également honoré que le Professeur Jean-Paul DÉCAMPS, de l'Université de Toulouse 1 et Areski COUSIN, Maître de Conférences à l'ISFA de l'Université Lyon 1 aient accepté de faire partie du jury de soutenance de ma thèse.

Je tiens particulièrement à remercier :

- le Professeur Paul Doukhan pour les nombreux échanges qu'il m'a accordés au séminaire *Multifractal, Non stationnarité, Risques*.

- le Professeur Bertrand Maillet pour son invitation à la *Journée Cluster Risques Financiers*, de même que pour ses orientations. J'exprime également ma gratitude aux Professeurs Patrice Poncet et Christian Gouriéroux pour leurs différentes interventions éclairées lors de ma présentation à cette journée.

- Élodie Laugel, *Head of Financial Engineering*, pour tout ce que son équipe et elle m'ont appris au cours d'un stage au sein du département *Investment Solutions* à AXA-IM. Je veux remercier Jean-Claude Razafindrakoto, Thibaut Ferret et Mohamed Darrazi.

J'exprime ici ma gratitude profonde au :

- Professeur Olivier Le Courtois, pour m'avoir accordé la possibilité d'assister aux multiples séminaires du centre de recherche CEFRA de EMLYON Business School au cours de ma thèse. Qu'il trouve la vive expression de ma gratitude pour sa bienveillance et sa disponibilité.

- Aux Professeurs Yannick Malevergne, Bruno Versaevel et Bernard Laurent pour m'avoir beaucoup rassuré et pour leur confiance jamais démentie.

À tout le personnel (scientifique et administratif) de l'ISFA, mes remerciements n'auront de cesse que je clame la qualité scientifique et la bonne convivialité.

Une mention particulière :

- à Béatrice Rey-Fournier pour m'avoir beaucoup écouté, à Didier Rulhière, lui dire en guise de message crypté que je suis un membre actif du *fan club*. À Areski Cousin, pour la session *supplémentaire* de Hammamet ainsi que pour ses réflexions toujours salutaires.

- au Professeur Christian Robert, Directeur du laboratoire SAF de l'ISFA pour nous avoir simplifié les démarches administratives et pour sa disponibilité.

Une mention spéciale à Michèle Sonnier, à Marie-Christine Brunet et à Marie-Claude Mouchon.

À mes collègues doctorants et - comme le dirait Romain Biard ou l'insinuerait Mathieu Bargès ou encore le philosopherait Christophe Dutang - chacun par sa personnalité, a su amener l'élément indispensable à une excellente ambiance, *décontractée*, qu'il est agréable de retrouver au quotidien.

À Viou, à Gildas et à Zied pour avoir goûté ensemble à la sève amère du caïlcédrat : *é nan ché nou mi*. À Jean-Charles et à Julien pour m'avoir prêté des oreilles attentives. À Rivo Randrianarivony pour ses conseils, sans oublier Nicole Cardoso pour son soutien permanent.

Je ne pourrai finir sans attirer à nouveau mon attention sur deux grandes amies : Manel et Elena, je souhaite de tout cœur longévité à notre amitié. Je leur adresse mes remerciements pour leurs encouragements, conseils, convivialité et tant d'éclats de rire ... qui ont pimenté la dure labeur.

One time à mon gars Samy ou encore Ymas - pour les connaisseurs - *yé lui di merki, quoi! Au dessus c'est la pleine lune!!!*.

Je veux enfin exprimer ma reconnaissance à ma douce douce *El* pour avoir été toujours là pour moi. À mes nièces Séréna, Daphney, Shérone, Lindsay, ma grande Sœur Oluwa Yemissi et à Robert qui m'entourent.

À Simbi, Iliass et aux parents si loin, mais qui par leurs pensées ont toujours été là, me témoignant leur affection sans cesse renouvelée : *mon dou kpê fun yin*.

à *Raïma*,
à *Akambi*,
à *Elmira*.

Table des matières

Introduction générale	1
------------------------------	----------

Partie I Méthodologie générale d'évaluation financière	11
--	-----------

Chapitre 1 Modélisation d'actifs risqués, Évaluation et couverture en marché incomplet	13
---	-----------

1.1 Modèles mixtes de diffusion et sauts	14
1.1.1 La distribution des rentabilités	15
1.1.2 Présentation du modèle de Merton et Évaluation d'option . . .	16
1.1.3 Présentation du modèle de Kou et Évaluation d'option	23
1.2 Modèles à activité infinie	29
1.2.1 Modèle Variance Gamma	31
1.2.2 Modèle KoBoL ou modèle CGMY	35
1.3 Modèles à changement de régimes	36
1.3.1 Dynamique des rendements d'actif	36

1.3.2	Probabilité de séjour dans le régime 1	37
1.3.3	Modèle de Hardy et Évaluation d'option	39
1.3.4	Une première extension : le modèle à changement de régime variance gamma	41
1.3.5	Une deuxième extension : le modèle mixte de diffusion à saut de Kou à changement de régimes	43
1.4	Couverture en marché incomplet	44
1.4.1	Couverture quadratique : moyenne-variance	46
1.4.2	Calcul du ratio de couverture optimal	47
1.4.2.1	Le delta de Merton	47
1.4.2.2	Sensibilité moyenne aux sauts de tailles finies de Merton	48
 Chapitre 2 Approche unifiée pour l'évaluation, la couverture et la me-		
sure de risques		53
2.1	Évaluation	54
2.1.1	Formule d'évaluation	55
2.1.2	Calcul des sensibilités	56
2.1.3	Implémentation Numérique	57
2.1.4	Une première application	58
2.1.4.1	Retour sur le modèle de Merton	58
2.1.4.2	Retour sur le modèle de Kou	59
2.1.4.3	Retour sur le modèle Variance Gamma	60
2.1.4.4	Retour sur le modèle CGMY/KoBoL	60
2.1.5	Une deuxième application	62
2.1.5.1	Retour sur le modèle à changement de régime lognormal	66
2.1.5.2	Retour sur le modèle RSVG	66
2.1.5.3	Retour sur le modèle KRS	67
2.2	Couverture	68
2.2.1	Générateur infinitésimal et Opérateur pseudo-différentiel . . .	71
2.2.2	Couverture quadratique : minimisation locale du risque	72
2.2.2.1	Calcul du ratio de couverture	73
2.2.2.2	Calcul de la composante $\mathcal{A}(t, \Delta t)$	74
2.2.2.3	Calcul de la composante $\mathcal{B}(t, \Delta t)$	74
2.2.3	Illustration : modèle de Black-Scholes	76

2.2.4	Illustration : modèles mixtes de diffusion à sauts	77
2.2.4.1	Modèle de Merton	78
2.2.4.2	Modèle de Kou	78
2.2.5	Illustration sur des modèles à activité finie	79
2.3	Calcul des mesures de risques : VaR et CTE	80
2.3.1	Rappel de la formule générale	81
2.3.2	Formules générales sous des processus de Lévy	82
2.3.2.1	Formule de la VaR	83
2.3.2.2	Formule de la CTE	83
2.3.3	Illustration : modèle gaussien	85
2.3.4	Formules générales pour les processus de Lévy géométriques . .	87
2.3.5	Illustration : modèles de Lévy standards	89
2.3.5.1	Modèle lognormal	89
2.3.5.2	Modèle de Kou	90
2.3.5.3	Modèle de Kobol ou CGMY	91
2.3.5.4	Modèle RSLN	92
2.3.6	Application aux contrats de type Européen	94

Annexe A	99
-----------------	-----------

A.1	Formule de Itô pour les processus de diffusion à sauts	99
A.2	Fonction caractéristique associée au processus variance gamma	100
A.3	Preuve des Lemmes	101
A.4	Approche générale de calcul numérique des fonctions de densité	108
A.5	Transformée de Fourier des fonctions de perte	109
A.6	Formule exacte de la CTE sous le modèle lognormal	111

Partie II Assurance-vie	113
--------------------------------	------------

Chapitre 3 Évaluation et couverture des contrats : Variable Annuities	115
3.1 Évaluation	116
3.1.1 Risque financier et Valeur actuelle des frais d'Assurance	117
3.1.2 Risque actuariel : évolution de l'intensité de mortalité	120
3.1.3 Évaluation des options offertes	120
3.1.4 Juste valeur des options offertes dans les contrats Variable Annuities	121
3.1.5 Application numérique	123
3.1.5.1 Garanties en cas de vie	123
3.1.5.2 Garanties en cas de décès	124
3.1.5.3 Garantie en cas de vie et en cas de décès avec prise en compte d'effet cliquet : GMAB	126
3.2 Évaluation des GMAB en présence de taux stochastiques	135
3.3 Couverture des contrats Variable Annuities	138
3.3.1 Couverture en ratio optimal	138
3.3.2 Couverture discrète et erreur résiduelle	141
3.3.3 Performance de la couverture en ratio optimal par rapport à celle en delta	141
3.3.4 Couverture des garanties mixtes : en cas de décès et en cas de vie	142
3.3.4.1 Erreur de couverture	146
3.3.4.2 Distribution des pertes futures actualisées	146
3.3.5 Application numérique	147
Chapitre 4 Évaluation des contrats Equity-Indexed Annuities	151
4.1 Un contrat EIA avec des garanties mixtes	153
4.2 Évaluation	154
4.2.1 Modèle de Black-Scholes-Merton	156
4.2.2 Modèle de Hardy	156
4.2.3 Modèle à sauts de Kou	157
4.2.3.1 Condition mesure martingale équivalente	158
4.2.3.2 Formule quasi-explicite	159
4.2.3.3 Méthodologie générale d'évaluation	159

4.2.4	Modèle KRS	160
4.2.5	Option de rachat	162
4.2.6	Estimation du prix du contrat	165
4.2.7	Analyse numérique	166
4.3	Évaluation en présence de taux stochastiques	167
4.3.1	Dynamiques des taux d'intérêt et du sous-jacent	167
4.3.2	Fonction d'actualisation	176
4.3.3	Évaluation sous le modèle de Kou	177
4.3.4	Approche générale d'évaluation	179
4.3.5	Évaluation sous le modèle KRS	181
4.3.6	Option de rachat : temps d'exercice optimal	183
4.3.7	Estimation du prix du contrat	185
4.3.8	Analyse numérique	185
4.4	Autres contrats EIA	187
4.4.1	Contrat EIA avec cliquet	193
4.4.2	Contrat EIA avec cliquet Cappé	194
4.4.3	Prise en compte de la mortalité	195
4.4.4	Cadre d'analyse	196
4.4.5	Étude des points morts	197

Annexe B	203
-----------------	------------

B.1	Évaluation du contrat en unités de compte dans une économie du type Black-Scholes-Merton	203
B.2	Évaluation du contrat en unités de compte dans une économie de diffusion à sauts	205

Conclusion Générale	209
----------------------------	------------

Bibliographie	215
----------------------	------------

Introduction générale

Il existe aujourd'hui, une offre très variée de contrats d'assurance-vie pour répondre aux attentes de particuliers désireux d'obtenir une gestion efficace de leur épargne de long-terme. La théorie financière moderne et ses outils en permettent une analyse très fine. C'est le point de vue que nous défendons dans cette thèse.

Dans le domaine de l'assurance-vie, on distingue deux catégories de contrats : les contrats en cas de décès dits de prévoyance par lesquels l'assureur immunise le bénéficiaire contre une baisse de ressources financières, notamment via le versement d'un capital ou d'une rente au décès de l'assuré. De l'autre côté, se trouvent les contrats en cas de vie dits d'épargne ou de placement, garantissant à terme, le versement d'un capital ou d'une rente en cas de survie. Ils fournissent ainsi une sécurité financière via le paiement d'un montant contingent au décès ou à la survie. Pendant longtemps, les techniques actuarielles traditionnelles se sont focalisées sur la gestion des risques actuariels, celui figurant en bonne place étant le risque de mortalité. Le risque financier constituait une préoccupation mineure car le métier traditionnel de l'assureur consiste à garantir les engagements vis-à-vis de l'assuré en utilisant des instruments ayant un risque relativement faible. Cependant, ces trente dernières années ont été le théâtre d'un bouleversement profond en raison d'une demande forte des assurés de plus en plus conscients des opportunités pouvant être tirées des performances des marchés.

Afin de répondre à ce type de demande, plusieurs contrats en unités de compte ont ainsi émergé à la fin des années soixante au Royaume-Uni. Véritables véhicules de performance, ces contrats ont en commun certaines caractéristiques de contrats échangés sur les marchés financiers. Parmi ces derniers, figurent en bonne place ceux dont le portefeuille de référence est indexé à l'évolution d'un fonds risqué sous-jacent. Les souscripteurs peuvent donc profiter des performances des marchés en conjonction des protections traditionnellement offertes. Forts de leurs succès remarquables, ces contrats se sont répandus en Australie et en Afrique du Sud. Pendant la même période, d'autres sont nés sous diverses appellations : *Variable Annuities* et *Equity Indexed Annuity* aux États Unis, *Segregated fund contract* au Canada, *Equity-linked Endowment* en Allemagne et contrats en unités de compte avec garantie en France. Contrairement aux contrats en euros, les contrats en unités de compte sont des contrats à capital variable où le montant des primes et des garanties sont exprimés non pas en euros mais par référence à une unité de compte (contrats dits monosupports) ou à plusieurs (contrats dits multisupports) telles que des actions de SICAV ou des parts de société civile immobilière. Les garanties sous-jacentes sont donc liées aux variations de hausse ou de baisse des marchés. En France, selon une étude réalisée par la Fédération française des sociétés d'assurances (FFSA) et le Groupement des entreprises mutuelles d'assurance (GEMA), la collecte des contrats d'assurance-vie en UC (unités de compte) s'élève à 1.9 milliard d'euros au mois de juillet 2011 soit de 12.6 milliards d'euros cumulés sur les sept premiers mois de la même année. Contrairement aux contrats d'assurance-vie en euros majoritairement investis en obligations donc moins sensibles aux chocs des marchés, les contrats en UC sont eux, en grande partie investis en actions. Après mise en transparence des OPCVM, les supports UC sont

investis à cinquante pour cent en actions et à trente-cinq pour cent en obligations, le reste étant des actifs monétaires et immobiliers. Le lecteur peut se référer au site officiel de la FFSA ou à celui du GEMA pour davantage d'informations.

Les contrats en unités de compte peuvent comporter des garanties plancher en cas de décès et en cas de vie. Elles permettent au bénéficiaire de recevoir avec certitude un montant minimal fixé à la souscription du contrat, i.e., une proportion des cotisations investies ou celle de l'épargne acquise si celle-ci est supérieure et ce, quelle que soit la valeur des unités de compte à la date de survenance de l'événement ouvrant droit au paiement. Ces garanties appartiennent à la classe des contrats de type GMXB (*Guaranteed Minimum X Benefit*), en langue française : garantie plancher en cas de réalisation de l'évènement X ouvrant droit au paiement de celle-ci. Ainsi, les garanties plancher en cas de décès, GMDB (*Guaranteed Minimum Death Benefit*), assurent au bénéficiaire un capital minimum quelle que soit la valeur des unités de compte détenues au moment de décès. Notons que l'évaluation de cette garantie n'est pas immédiate d'autant plus que la date de décès de l'assuré n'est pas une donnée connue à l'avance. Dans l'hypothèse d'une mutualisation parfaite des décès, la connaissance des probabilités de décès des assurés à chaque âge grâce à l'aide des tables de mortalité réglementaires permet d'évaluer cette garantie comme une option européenne pondérée par les probabilités adéquates de survenance de décès. En cas de survie, les garanties de type GMMB, en langue anglaise *Guaranteed Minimum Maturity Benefit*, assurent un capital minimum quelle que soit la valeur des unités de compte détenues à la maturité.

De même, les GMMB et les GDMB peuvent comporter des mécanismes d'encliquetage (*ratchet effect*) permettant à l'assuré de verrouiller les performances des unités de compte. Le plus connu se manifeste dans les garanties de type GMAB (*Guaranteed Minimum Accumulation Benefits*) offertes avec une armature de dates anniversaires. À chacune de ces dates antérieure à la maturité, si la valeur du fonds risqué excède le montant garanti alors celui-ci est rehaussé au fonds puis bloqué pour les périodes suivantes. Dans le cas contraire, l'encours du fonds est supérieur à la garantie et l'assureur renouvelle son engagement vis-à-vis de l'assuré - en apportant la différence - de telle sorte que l'évolution du fonds repart du capital garanti ; ce mécanisme est répété aux dates anniversaires précédant celle de fin du contrat. L'échéance venue, l'assureur apporte de nouveau la différence entre la valeur terminale du fonds et celle de la garantie finale si celle-ci excède l'encours. En d'autres termes, ceci s'interprète à chaque période comme une option européenne pour laquelle le sous-jacent serait l'épargne, autrement dit, l'encours du fonds sous-jacent et dont le prix d'exercice dépend de la trajectoire suivie par ce fonds : on parle d'options *path dependent*. Par ailleurs, les garanties GMWB (*Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit*) offrent la possibilité de retrait d'un pourcentage du fonds à des dates spécifiées à leur souscription, au moment où les GMIB, de la terminologie anglaise *Guaranteed Minimum Income Benefit* aussi connues sous l'appellation de GAO¹ (*Guaranteed Annuity Option*) permettent à l'assuré de bénéficier du droit de conversion des unités de compte dans une

1. Au Royaume-Uni.

rente viagère à un taux préférentiel entre le taux minimum g (garanti à la souscription du contrat) et celui prévalant sur le marché à sa date de fin ². Particulièrement sollicitées entre les années soixante-dix et quatre-vingt pour ses taux minimum (garantis) offerts trop élevés, le provisionnement et la tarification des options d'annuité garantie ont été largement explorés par Wilkie et al. (2003). Citons dans la même année, les travaux de Boyle et Hardy (2003) ainsi que ceux de Pelsser (2003) montrant comment répliquer ce type d'option avec un portefeuille de swaptions de taux. Parce que le risque de taux est au cœur de cette garantie, Ballotta et Haberman (2003) utilisent le modèle de Heath, Jarrow et Morton à un facteur tandis que Kwok et Chu (2007) utilisent un modèle de taux du type G2++. Plus tard, Van Haastrecht et al. (2009) proposent une évaluation dans le cadre du modèle à volatilité et à taux court stochastiques de Schöbel et Zhu (1999).

Les contrats en unités de compte peuvent également contenir des options cachées, comme par exemple une clause de remboursement anticipé. Ce sont des options de rachat, permettant à l'assuré d'exercer un droit de récupération de la valeur de marché du contrat à n'importe quelle date avant l'échéance du contrat. Du côté de l'assureur, l'idée est de pouvoir stimuler les ventes en s'assurant que le souscripteur ne perçoit pas la police d'assurance comme un investissement illiquide. Néanmoins, elles peuvent se révéler dangereuses pour les assureurs, car exercées, celles-ci impliquent une diminution des actifs du portefeuille d'assurés pouvant engendrer des déséquilibres dans l'exposition au risque de mortalité. Notons aussi l'importance du risque de taux d'intérêt et rappelons que la baisse importante des taux dans les années quatre-vingt-dix a été à l'origine de la faillite de la compagnie d'assurance-vie britannique Equitable Life qui avait sous-estimé les provisions en proposant des taux minimum garantis élevés. Ceci étant, l'évaluation de ce type d'option peut devenir très complexe pour deux raisons principales. Premièrement, les contrats d'assurance sont généralement des contrats de long terme voire de très long terme, pouvant donc offrir de nombreuses opportunités dans le remboursement anticipé. De ce fait, l'assureur peut être confronté à de multiples dates d'exercice, en théorie une infinité. Cette clause est assimilable à une option américaine. Deuxièmement, il faut non seulement prendre en compte des décisions financières rationnelles, mais aussi intégrer des facteurs irrationnels ³ ou exogènes de décision de rachat. La prise en compte de ces facteurs est d'autant plus ardue que l'absence de données suffisantes pour la modélisation du comportement de rachat peut créer une grande incertitude autour des paramètres du modèle utilisé. L'évaluation de ces contrats demeure un défi aussi bien pour les praticiens que pour les théoriciens.

Il est aujourd'hui admis qu'il n'y aurait pas une multitude de recherches actives aussi bien sur l'évaluation des contrats *Variable Annuities* - pour lesquels le sous-jacent est constitué par le fonds risqué dédié - que pour celle des contrats *Equity-Indexed Annuity*

2. Généralement, l'âge de départ en retraite.

3. Du point de vue financier.

pour lesquels l'actif sous-jacent est représenté par un indice boursier⁴, sans l'existence des produits dérivés utilisés dans la finance moderne. Ces contrats contiennent en effet de nombreuses options implicites. Depuis la proposition de la Commission actif-passif de la Fédération française des actuaires en mai 2000⁵, les garanties sous-jacentes à ces contrats - se chiffrant à plusieurs dizaines de milliards - peuvent être évaluées comme des options afin d'en obtenir le provisionnement adéquat. Par conséquent, à l'exception de la considération des aléas de mortalité, l'aspect financier sous-jacent participe de notre choix de rester dans une logique purement financière. Nous nous focaliserons ainsi sur la *fair value* de ces contrats en nous référant à la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage en temps continu.

L'objectif de cette thèse est de proposer un cadre uni pour la gestion des contrats d'assurance-vie en unités de compte dans une approche non-gaussienne. Elle comporte deux parties :

- La première suggère une méthodologie générale pour l'analyse d'options à l'aide de processus de Lévy.
- La seconde est dédiée à l'utilisation de cette méthodologie pour une analyse approfondie des contrats d'Assurance-vie en unités de compte.

Dans la première partie, nous proposons une méthodologie pour l'évaluation, la couverture, le contrôle et la mesure de risque en présence de discontinuités des cours financiers. Puisque le fonds risqué de référence des contrats en UC est au cœur de notre analyse, le premier chapitre définit un cadre de modélisation prenant en compte des discontinuités des cours observés dont sont inférés des effets d'asymétrie et de kurtosis. À titre d'illustration, relevons les cours mensuels observés pour l'indice MSCI Europe en devise locale entre les années 1973 et 2008. Les rentabilités correspondant aux dates de grandes turbulences des marchés sont données à la dernière colonne de la table (1), ci-après. On observe durant cette période dix crises avec des chutes de rentabilité de plus de 10% (−26.61% en 1987, −12.09% en 2008) et dont résulte une intensité d'occurrence de crise annuelle de plus de 10%, donc non négligeable. À la lumière de cette observation, il est naturel de remarquer qu'une représentation continue brownienne des rentabilités de cours ne saurait être réaliste puisqu'une modélisation de ce type met en évidence une propriété et une loi : la continuité et les rentabilités gaussiennes. Ces deux conditions supposent que la probabilité d'occurrence d'un saut d'une amplitude telle qu'observée à la fin des années quatre-vingt-sept ou au début de l'année deux mille huit est négligeable. En d'autres termes, la probabilité d'occurrence d'un krach boursier est presque nulle. Ignorer ces discontinuités peut alors engendrer des erreurs d'évaluation et une mauvaise couverture des produits dérivés financiers. Bien plus encore, une modélisation de ce type est incapable de retrouver la condition principale d'un modèle d'évaluation qui est la reproduction du *smile* de volatilité observé dans la pratique et ce, même pour des maturités d'options non nécessairement très courtes. En effet, pour une option de vente

4. Typiquement, le S&P 500.

5. Pages 5-6.

MSCI Europe en devise locale			
Dates de crises (Mois/Années)	Dates de début	Dates de Fin	Rentabilités (Amplitudes)
Crise 12/1973	31/10/73	30/11/73	-11.60%
Crise 09/1974	30/08/74	30/09/74	-10.71%
Crise 11/1987	30/09/87	30/10/87	-26.61%
Crise 10/1990	31/08/90	28/09/90	-12.38%
Crise 09/1998	31/07/98	31/08/98	-14.76%
Crise 03/2000	29/02/00	31/03/00	2.36%
Crise 09/2001	31/08/01	28/09/01	-11.32%
Crise 08/2007	29/06/07	31/07/07	-3.52%
Crise 01/2008	31/12/07	31/01/08	-12.09%

TABLE 1 – Crises Systématiques. Les séries historiques sont récupérées depuis une base de donnée Datastream[®].

européenne très en dehors de la monnaie, remarquons que si les trajectoires du support risqué étaient continues, la probabilité que l'actif risqué sous-jacent descende plus bas que le prix d'exercice de l'option avant sa maturité, serait presque nulle. En raison des variations abruptes (discontinuités) souvent observées, cette probabilité n'est pas négligeable dans la pratique. D'où l'idée de prendre en compte des discontinuités des cours des actifs financiers dans la modélisation du sous-jacent par des processus de Lévy non purement gaussiens. Cette prise en compte dans le domaine de l'assurance a fait l'objet de nombreux travaux. Citons par exemple la thèse de Randrianarivony (2006) et pour une analyse des risques financiers extrêmes, l'ouvrage récent de Le Courtois et Walter (2012b).

Dans un premier temps, nous modélisons l'évolution du cours par des modèles mixtes de diffusion et sauts de fréquence et d'amplitudes aléatoires données par des processus de Poisson composé. Appartenant à la classe des processus de Lévy à activité finie, le modèle de Merton (1976) et celui de Kou (2002) en sont représentatifs. Nous considérons de même les modèles à subordination de brownien, notamment, celui dit variance gamma, introduit par Madan et Seneta (1990), représentant un cas particulier du modèle CGMY de Carr et al. (2002). Notons que ce processus avait été pour la première fois introduit en actuariat par Dufresne et al. (1991) et construit pour la littérature financière par Koponen (1995) puis par Boyarchenko et Levendorskiĭ (2002c), d'où le nom de processus KoBoL, d'après les noms des trois auteurs : Koponen, Boyarchenko et Levendorskiĭ. De même, nous prenons en compte la discontinuité de l'arrivée d'information par des modèles à changement de régime introduits dans la littérature économique par Hamilton (1989). Ces derniers permettent une approche heuristique mais surtout intuitive de modélisation des rentabilités d'actifs. En d'autres termes, plutôt que d'utiliser un modèle à volatilité stochastique comme celui de Heston (1993), ou à sauts via un processus de

Poisson composé ou par subordination de brownien, on suppose que l'actif sous-jacent peut transiter de manière aléatoire entre n différents régimes de volatilités. Le processus régissant la transition entre les états est donné par une chaîne de Markov. Dans ce contexte, en reprenant les travaux de Hamilton, Hardy (2001) propose un modèle à changement de régime lognormal. Nous verrons dans le cadre d'évaluation d'option que, outre la difficulté suscitée par l'incomplétude du marché, il en vient une autre : celle de la détermination de la distribution de séjour dans un état. Cette probabilité est obtenue par une version discrète et récursive de l'équation de Kolmogorov rétrograde qui n'est pas évidente à implémenter. Nous suggérons comme extension, le modèle KRS - de la terminologie anglaise *Kou Regime Switching* - incorporant aussi bien le modèle mixte de diffusion et sauts de Kou que celui à changement d'état de Hamilton. Nous montrons la pertinence de ce modèle à travers la surface de volatilité obtenue, en adéquation avec les observations relevées dans la pratique. Par ailleurs, il vient un autre point important ; la prise en compte des discontinuités de cours financiers apporte de l'incomplétude au marché, de telle sorte qu'il n'existe pas de portefeuille dupliquant éliminant définitivement le risque. Par conséquent, la réplication n'est plus possible. En d'autres termes, l'allocation en delta devient sous-optimale, d'où résulte la nécessité de trouver une allocation qui permette de rendre ce risque minimal. Dans la dernière section de ce premier chapitre, nous présentons l'approche suggérée par Cont et al. (2007) en remarquant - néanmoins - que outre le cas gaussien de Black et Scholes ou celui à sauts gaussiens de Merton, leur formule aboutit à une résolution numérique non triviale.

De notre côté, tout en restant dans une très large classe de processus, nous proposons au deuxième chapitre une approche plus générale coïncidant avec leurs résultats. Bien plus encore, ce chapitre répond aux soucis des praticiens de la banque ou du secteur de l'assurance désireux d'avoir un cadre efficient pour la gestion de risque en présence de discontinuités de cours financiers. Nous suggérons une méthodologie générale privilégiant l'analyse de Fourier généralisée pour l'évaluation, la couverture et le contrôle de risque en marché incomplet. D'autres préoccupations sont également importantes : celles du calcul des budgets de risque. Nous montrons comment unifier la méthodologie précédente au calcul des mesures de risque en présence de ces discontinuités.

Dans la seconde partie de la thèse, nous abordons d'un point de vue pratique la question de l'évaluation et de la gestion de risques financiers dans les contrats d'assurance-vie en unités de compte. Nous montrons la mise en pratique de l'analyse développée dans la première partie pour l'étude des contrats *Variable Annuities* et *Equity-Indexed Annuities*. Le troisième chapitre - premier chapitre de la deuxième partie - construit en présence de ces discontinuités, une méthodologie complète pour l'évaluation et la couverture dynamique des contrats *Variable Annuities*. Nous illustrons notre méthodologie non seulement pour des garanties mixtes GMMB/GMDB mais aussi pour des garanties complexes, notamment les GMAB. Nous déterminons le juste coût de ces contrats en établissant une correspondance implicite entre le taux prélevé pour le financement de la garantie et celui associé à la gestion du fonds dédié. Au dernier chapitre, nous nous intéressons aux

contrats *Equity-Indexed Annuities* en commençant l'analyse par une structure par termes des taux d'intérêts constante. Cette dernière hypothèse, qui peut être acceptable pour des options à court terme, n'est plus pertinente pour des contrats dont les échéances sont éloignées comme c'est le cas pour les produits d'assurance-vie. Ainsi, nous revisitons l'analyse du contrat en supposant l'impact simultané des sauts et des taux d'intérêt stochastiques (cf. également Quittard-Pinon et Randrianarivony (2011)). Nous montrons qu'une extension naturelle de la méthodologie générale développée dans la première partie aboutit à des formules quasi-fermées. Les clauses de rachat sont également explorées ainsi que les garanties cliquet et celles offrant un taux de rentabilité plafonné.

Les travaux décrits dans cette thèse ont fait l'objet de communications aux deux derniers congrès de l'IME, *Insurance Mathematics and Economics* tenus à Hong Kong et à Trieste, respectivement ; aux congrès de l'APRIA, *Asia-Pacific Risk and Insurance Association* à Tokyo ; de l'IFC 6, *6th International Finance Conference* à Hammamet ; de l'AFFI, *French Finance Association* à Montpellier, ainsi qu'aux séminaires organisés par le laboratoire de Cergy - Pontoise : *Multifractal, Non stationnarité, Risques* ; le laboratoire LEO d'Orléans : *Journée Cluster Risques Financiers* et le laboratoire SAF de l'ISFA : *Journées Ast&Risk*.

Première partie

Méthodologie générale d'évaluation financière

Chapitre 1

Modélisation d'actifs risqués, Évaluation et couverture en marché incomplet

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un cadre non-gaussien pour la représentation des prix d'actifs risqués. Nous rappelons dans un premier temps la dynamique des modèles mixtes de diffusion et sauts. Une application du lemme de Itô généralisé pour ces types de processus permet de réécrire cette dynamique comme une exponentielle de processus de Lévy - somme d'un mouvement brownien arithmétique (composante gaussienne) et d'un processus de Poisson composé (composante de sauts). Suivant que la distribution associée à la loi des sauts est une gaussienne ou une exponentielle asymétrique double, nous présentons de façon détaillée le modèle de Merton (1976) et celui de Kou (2002) qui, appartenant à la famille des processus de Lévy à activité finie, en sont représentatifs. Dans un deuxième temps, nous présentons les modèles à activité infinie notamment celui dit variance gamma introduit dans la littérature financière par Madan et Seneta (1990) et sa généralisation au modèle CGMY de Carr et al. (2002). À la section (1.3), nous portons une attention particulière aux modèles avec changement de régimes introduits dans la littérature par Quandt (1958) et améliorés plus tard par Hamilton (1989). Nous décrivons le modèle à changement de régime lognormal de Hardy (2001) avant de suggérer dans cette section de modèles nouveaux en particulier le modèle KRS de la terminologie anglaise *Kou Regime Switching* (cf. Kélani et Quittard-Pinon (2011b)). Nous montrons que ce type de modélisation reflète mieux la réalité observée notamment par la forte convexité du *smile* de volatilité pour des maturités courtes persistant sur des maturités longues comme on le relève dans la pratique. Enfin à la section (1.4), nous notons l'absence de complétude du marché dès la prise en compte de ce cadre de modélisation et montrons que la réplication n'est plus possible. Ce qui nous amène au calcul d'un ratio de couverture optimal utilisé par Cont et al. (2007) qui en minimise le risque.

1.1 Modèles mixtes de diffusion et sauts

On s'intéresse à la dynamique de cours du sous-jacent dans le cadre des modèles diffusifs à sauts. Représentons par S_t , le prix de cet actif à l'instant t . Le processus de prix est donné dans l'univers historique noté P , par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \underbrace{\mu dt + \sigma dW_t}_{\text{partie diffusive}} + \underbrace{d \left(\sum_{i=1}^{N_t} (Y_i - 1) \right)}_{\text{sauts}}, \quad (1.1)$$

où : S_{t-} représente le prix à l'instant t de l'actif sous-jacent avant l'arrivée des sauts ; μ et σ sont respectivement le paramètre de tendance⁶ et le coefficient de diffusion de la composante diffusive que l'on suppose constants. W est un mouvement brownien standard, $W_0 = 0$ et N , un processus de Poisson simple indépendant de W , d'intensité finie λ . Les variables aléatoires (Y_i) sont des variables positives indépendantes et identiquement distribuées représentant la taille aléatoire des sauts. On suppose également que Y est indépendant de N et de W . À cause de la composante de saut fournie par le processus de Poisson composé, le modèle considéré en (1.1) est un processus non purement gaussien représentant un cas particulier de processus de Lévy.

Notons tout d'abord que cette équation différentielle hérite des travaux de Press (1967) et sera utilisé plus tard par Merton (1976) qui représente un saut par une variable Y faisant passer le prix de l'actif de S_{t-} à YS_t . Ainsi, $Y - 1$ est une variable aléatoire représentant le pourcentage de variation de prix lorsqu'un saut Poissonnien se produit. L'amplitude moyenne des sauts notée κ , est donnée par l'espérance mathématique de cette variation : $\kappa = E[Y - 1]$. D'autre part, la composante Poissonnienne fait qu'un nombre fini de sauts ($\lambda < \infty$) ne peut que se produire presque sûrement à chaque instant, ce qui fait que toute dynamique exprimée sous cette forme sera d'activité finie. En appliquant le lemme de Itô⁷ et après intégration, on obtient :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\} \prod_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

En posant $J = \ln(Y)$,

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\}. \quad (1.2)$$

Par construction, les variables aléatoires (J_i) sont des variables réelles indépendantes et identiquement distribuées ; elles représentent la taille aléatoire des sauts pouvant survenir. Posons

$$X_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i. \quad (1.3)$$

6. Encore appelé dérive.

7. Voir l'annexe pour l'application du lemme pour des processus de diffusion à sauts.

X_t est un processus de Lévy et nous représentons de façon synthétique la dynamique du sous-jacent sous la forme de processus de Lévy géométrique :

$$S_t = S_0 \exp(X_t), \quad (1.4)$$

avec S_0 , la valeur de S à l'instant $t = 0$.

On note respectivement $\phi_{X_t}(u) = E[e^{iuX_t}]$ et $\phi_J(u) = E[e^{iuJ}]$, les fonctions caractéristiques des variables aléatoires X_t et J .

De manière générale, la fonction caractéristique de tout processus de Lévy est donnée par la formule dite de Lévy-Khintchine :

$$E[e^{iuX_t}] = \exp \left\{ (iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2)t + t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1 - iux1_{|x|<1}\nu(dx)) \right\},$$

où $\nu(dx)$ représente la mesure⁸ de Lévy de X . Dans le cas des processus de Lévy à activité finie comme en (1.1) et à cause de la présence du processus de Poisson composé $\sum_{i=1}^{N_t} J_i$, on peut montrer que la fonction caractéristique, précédemment définie, devient :

$$E[e^{iuX_t}] = \exp \left\{ (iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2)t + t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1)\nu(dx) \right\},$$

que nous réécrivons en fonction de l'exposant caractéristique ψ de X :

$$\phi_{X_t}(u) = e^{t(iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \lambda(\phi_J(u) - 1))} = e^{-t\psi(u)},$$

avec :

$$\psi(u) = -iu\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \lambda(\phi_J(u) - 1). \quad (1.5)$$

A partir de ce dernier et suivant la loi qu'on donne au saut J , nous distinguons deux modèles de la famille des processus mixtes de diffusions à sauts : le modèle de Merton (1976) et celui de Kou (2002) qui feront l'objet de cette première section.

1.1.1 La distribution des rentabilités

Pour des fréquences d'observation petites telles que journalières ou encore pour des observations à hautes, voire très hautes fréquences, la distribution des rentabilités d'actif des modèles mixtes tels que spécifiés par l'équation (1.2) présente une forme particulière. Plus précisément, considérons un intervalle de temps petit $[t, t + \Delta t]$ et calculons le rendement de l'actif sur cette fenêtre d'observation. Comme nous l'avons remarqué, les

8. ν est une mesure positive sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, cette mesure sera donc à dissocier d'une mesure de probabilité car : $\int_{\mathbb{R}} \nu(dx) = \lambda$. Or, λ peut être différente de 1.

modèles diffusifs à sauts tels que donnés par (1.2) sont des modèles à activité finie. Ainsi, si $\Delta t \rightarrow 0$, alors N_t ne “saute” pas plus d’une fois dans l’intervalle $[t, t + \Delta t]$ avec une probabilité $\lambda \Delta t$, sinon, la probabilité est de l’ordre de Δt : $o(\Delta t)$ et par conséquent négligeable. Il vient donc

$$\sum_{i=N_t}^{N_t+\Delta t} J_i \approx \begin{cases} J_i & \text{avec une probabilité } \lambda \Delta t \\ 0 & \text{avec une probabilité } 1 - \lambda \Delta t. \end{cases}$$

On peut alors obtenir l’approximation suivante :

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} \approx \mu \Delta t + \sigma z \sqrt{\Delta t} + BJ, \quad (1.6)$$

avec B , une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \Delta t$; ainsi, $\Pr(B = 1) = \lambda \Delta t$ et $\Pr(B = 0) = 1 - \lambda \Delta t$. En négligeant le terme BJ , l’approximation précédente est égale en distribution à une variable aléatoire suivant un mouvement brownien arithmétique et ayant par conséquent, une distribution gaussienne. La particularité des modèles diffusifs à sauts est que la distribution $f(x)$ des rendements de l’actif sous-jacent est une combinaison linéaire de deux quantités - la première étant une densité gaussienne - comme le montre la formule suivante :

$$f(x) = (1 - \lambda \Delta t) \times \text{densité gaussienne} + \lambda \Delta t \times \text{densité de } (\mu \Delta t + \sigma z \sqrt{\Delta t} + J). \quad (1.7)$$

Cette densité généralise la densité des rendements sous des processus mixtes de diffusions à sauts pour des fenêtres d’observation Δt petites.

1.1.2 Présentation du modèle de Merton et Évaluation d’option

En s’inspirant des travaux de Press (1967), le modèle proposé par Merton pour représenter le processus de prix du sous-jacent, repose initialement sur (1.2).

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\}.$$

Celui-ci considère en outre que la loi des sauts suit une distribution gaussienne de moyenne m et de variance δ^2 : $J_i \sim \mathcal{N}(m, \delta^2)$, avec J , indépendant de N et de W . Il vient donc que la mesure de Lévy est :

$$\nu(x) = \lambda f_J(x),$$

avec :

$$f_J(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\delta^2} \right\},$$

la densité associée à la distribution des sauts. La fonction caractéristique ϕ_J associée à la loi des sauts peut être obtenue en utilisant la transformée de Laplace de J . Elle est donnée par :

$$\phi_J = E[e^{iuJ}] = e^{imu - \frac{1}{2}\delta^2 u^2}. \quad (1.8)$$

Si la particularité de la mesure de Lévy attachée à un modèle dépend de notre perception du comportement des événements extrêmes pouvant affecter les rendements du sous-jacent, alors, il serait judicieux de comparer la distribution de ces rentabilités à celle en sortie du modèle de Black-Scholes. Pour cela, comme nous l'avons vu, en choisissant $\Delta t \rightarrow 0$, les rendements peuvent être approchés par l'équation (1.6). La loi des rendements est alors donnée sous ce modèle par la fonction de densité suivante :

$$f(x) = (1 - \lambda\Delta t) \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}} n\left(\frac{x - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) \right\} + \lambda\Delta t \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\Delta t + \delta^2}} n\left(\frac{x - (\mu\Delta t + m)}{\sqrt{\sigma^2\Delta t + \delta^2}}\right) \right\},$$

où $n()$ représente la densité d'une distribution normale centrée réduite. Tout se passe comme si la distribution des rendements issue du modèle de Merton est un mélange de distributions normales pondérées par la probabilité d'occurrence de sauts avec des moyennes et volatilités différentes. On note également que l'importance accordée à l'arrivée d'événements extrêmes est sollicitée par le poids alloué au nombre moyen d'occurrence de ces sauts par unité de temps λ . Aussi, lorsque la volatilité des sauts augmente, les queues de distributions s'accroissent et deviennent plus épaisses. Comme conséquence, la distribution des rendements décroît lentement à l'infini. On remarque de même que pour $\lambda = 0$, la composante de sauts s'annule, la distribution des rendements devient une gaussienne et seulement dans ce cas, nous revenons dans le cadre de modélisation de Black et Scholes.

Évaluation d'option

Comme mentionné un peu plus haut, le processus de prix issu du modèle de Merton est un processus non purement gaussien à cause de la composante de sauts fournie par le processus de Poisson composé. Ce processus est un cas particulier de processus de Lévy et comme on le sait, si le processus de Lévy utilisé pour le sous-jacent n'est pas purement gaussien, alors il existe une infinité de mesures martingales équivalentes pour lesquelles la condition de non arbitrage est encore vérifiée. Autrement dit, il existe une infinité de mesures Q équivalentes à $P : Q \sim P$, telles que les prix actualisés sont des martingales : le marché est alors incomplet et le prix des produits dérivés vérifiant l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage ne peut être déterminé de façon unique. Cependant, Merton avance que la source de risque induite par les sauts représente un risque non systématique car non corrélée avec le marché et par conséquent diversifiable. Il propose alors de garder la composante de saut inchangée en la considérant identique dans les univers risque-neutre et historique. Dans le langage financier, aucune prime de risque n'y est associée. A l'instar du modèle de Black et Scholes, il suggère de choisir la dérive ω telle que les processus de prix $S_t e^{-rt}$ sont des martingales sous Q . Plus précisément,

$$\omega = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa, \tag{1.9}$$

avec ⁹ $\kappa = E[e^J - 1] = e^{m + \frac{\delta^2}{2}} - 1$ et la dynamique du sous-jacent s'écrit :

$$S_t = S_0 \exp \left(\omega t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right).$$

Supposons que $g(S_T) = F(S_T, T)$, avec

$$g(S_T) = \varpi(S_T - K)^+, \quad (1.10)$$

le paiement à l'échéance d'une option européenne. Le paramètre ϖ distingue l'option de vente de celle d'achat : ϖ est égal respectivement à -1 et à 1 . Le prix de l'option en date initiale t est alors donné par l'espérance de son payoff actualisé sachant l'information disponible en t :

$$F_M(t) = e^{-r\tau} E_Q[g(S_T) | \mathcal{F}_t],$$

avec $\tau = T - t$, le temps restant avant l'échéance. En utilisant la propriété de Markov de S_t sous Q , l'expression précédente peut être réécrite comme une fonction déterministe de t et de S_t :

$$F_M(t) = F_M(t, S_t) = e^{-r\tau} E_Q[g(S_T) | S_t = S],$$

que nous récrivons

$$F_M(S, \tau) = e^{-r\tau} E_Q \left[g \left(S e^{\omega\tau + \sigma W_\tau + \sum_{i=1}^{N_\tau} J_i} \right) \right].$$

En conditionnant par le nombre de saut $N_\tau = n$ et en utilisant la loi de l'espérance itérée, il vient d'une part :

$$\begin{aligned} F_M(S, \tau) &= e^{-r\tau} E \left[E_Q \left[g \left(S e^{\omega\tau + \sigma W_\tau + \sum_{i=1}^{N_\tau} J_i} \right) \middle| N_\tau = n \right] \right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} Q(N_\tau = n) E_Q \left[g \left(S e^{\omega\tau + \sigma W_\tau + \sum_{i=1}^n J_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\sum_{i=1}^n J_i$ suit une loi normale de moyenne nm et de variance $n\delta^2$, d'où :

$$F_M(S, \tau) = e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} Q(N_\tau = n) E_Q \left[g \left(S e^{\omega\tau + (nm + \frac{1}{2}n\delta^2) + \sigma_n W_\tau} \right) \right],$$

avec :

$$\sigma_n^2 = \frac{n\delta^2}{\tau} + \sigma^2.$$

⁹. Comme transformée de Laplace d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne m et de variance δ^2 .

En prenant $S_n = S e^{nm + \frac{n\delta^2}{2} - \lambda\kappa\tau}$, on a :

$$F_M(S, \tau) = e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} Q(N_\tau = n) E_Q \left[g \left(S_n e^{(r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau + \sigma_n W_\tau} \right) \right].$$

D'autre part, nous savons que le processus de comptage de sauts suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\tau$. Il vient ensuite :

$$F_M(S, \tau) = e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} E_Q \left[g \left(S_n e^{(r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau + \sigma_n W_\tau} \right) \right].$$

Cette série s'interprète comme la somme de prix d'options européennes - sachant que n sauts de Poisson se sont produits - pondérée par la probabilité d'occurrence de ces sauts. Pour la suite nous distinguons l'option d'achat de celle de vente en énonçant le résultat suivant :

Lemme 1.1.1. Soient M , V et K , 3 constantes réelles avec V et K positives telles que $Y \sim \mathcal{N}(M, V^2)$, alors $\forall \omega \in \{-1, 1\}$,

$$E[(\omega(e^Y - K))^+] = \omega e^{M + \frac{V^2}{2}} \mathcal{N} \left(\omega \frac{M - \ln K + V^2}{V} \right) - \omega K \mathcal{N} \left(\omega \frac{M - \ln K}{V} \right).$$

En prenant $Y = \ln S_n + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau + \sigma_n W_\tau$ et en appliquant le lemme (1.1.1), il vient :

$$F_M(S, \tau, \varpi) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} F_{BS}(S_n, \tau, \varpi), \quad (1.11)$$

où $F_{BS}(S_n, \tau, \varpi)$ donne le prix Black-Scholes de l'actif dérivé européen écrit sur un sous-jacent dont le prix initial est S_n avec une volatilité σ_n dans une économie où le taux d'intérêt r est constant. Ce prix est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} F_{BS}(S_n, \tau, \varpi) = & \varpi S_n \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right) \\ & - \varpi K e^{-r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

$\mathcal{N}(\cdot)$ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La série infinie (1.11) donne les prix d'options d'achat et de vente sous le modèle à sauts gaussiens de Merton. Pour la mise en œuvre, celle-ci est tronquée après ses N premiers termes. Comme le montre la figure (1.1), cette série converge très rapidement et nous obtenons déjà des prix invariants au bout de $N = 6$. Mais pour garantir une précision adéquate, nous choisissons pour la suite de prendre $N = 200$.

La table (1.1) fournit les prix issus du modèle de Merton, des options d'achat et de vente européennes arrondies au plus près à la cinquième décimale.

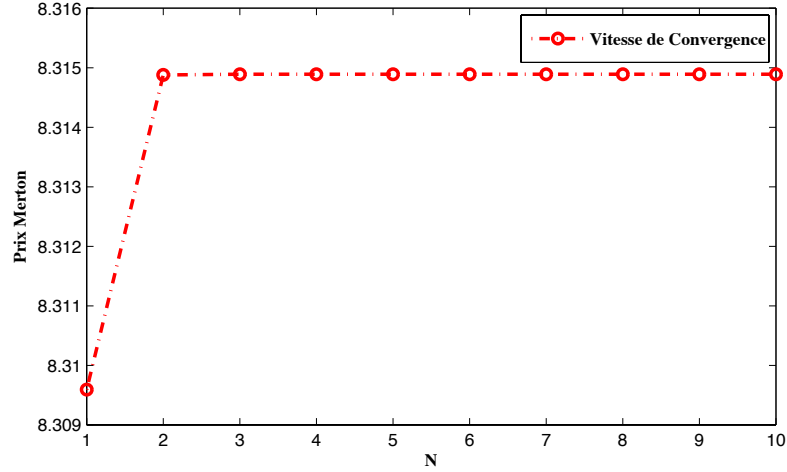


FIGURE 1.1 – Vitesse de convergence de la série de Merton pour une option d'achat. Les paramètres utilisés sont : $S = 100$, $K = 100$, $\tau = 0.5$, $r = 5\%$, $\sigma = 0.16$, $\lambda = 1$, $m = -0.2$ et $\delta = 5\%$.

Modèle à sauts gaussiens de Merton			
$S = 100$, $\tau = 0.5$, $r = 5\%$, $\sigma = 0.16$, $\lambda = 1$, $m = -0.2$, $\delta = 5\%$			
Option d'achat (soit, $\varpi = 1$)		Option de vente (soit, $\varpi = -1$)	
Prix d'exercice	Prix Merton	Prix d'exercice	Prix Merton
80	22.96411	120	18.38050
90	14.87360	100	5.84588
100	8.31489	90	2.65150
120	1.34331	80	0.98890

TABLE 1.1 – Evaluation d'options européennes dans le cadre du modèle de Merton, les prix sont calculés selon la série de la formule (1.11).

Notons que si le processus décrivant l'évolution du sous-jacent était un processus purement continu, alors pour une option d'achat européenne très en dehors de la monnaie, il y aurait une faible probabilité que le prix du support excède le prix d'exercice avant la date d'expiration de l'option. En revanche, les variations abruptes induites par la présence d'une composante de sauts, augmente de façon significative cette probabilité.

Par conséquent, les prix d'options sont plus élevés. De façon similaire, si ces options étaient très dans la monnaie, il y aurait une faible probabilité que le prix de l'actif sous-jacent descende plus bas que le prix d'exercice avant l'échéance ; cette probabilité est alors accrue de façon significative avec l'occurrence de sauts. Notons que ce phénomène est encore plus amplifié pour des options se rapprochant de la maturité : ce qui génère un smile de volatilités constatées sur les marchés. Le modèle de Merton permet d'expliquer ce phénomène. En effet, en assimilant les prix en sortie de ce modèle comme ceux observés sur le marché et en inversant la formule de Black-Scholes, on obtient des volatilités implicites¹⁰ souvent observées sur les marchés, comme l'illustre la figure (1.2).

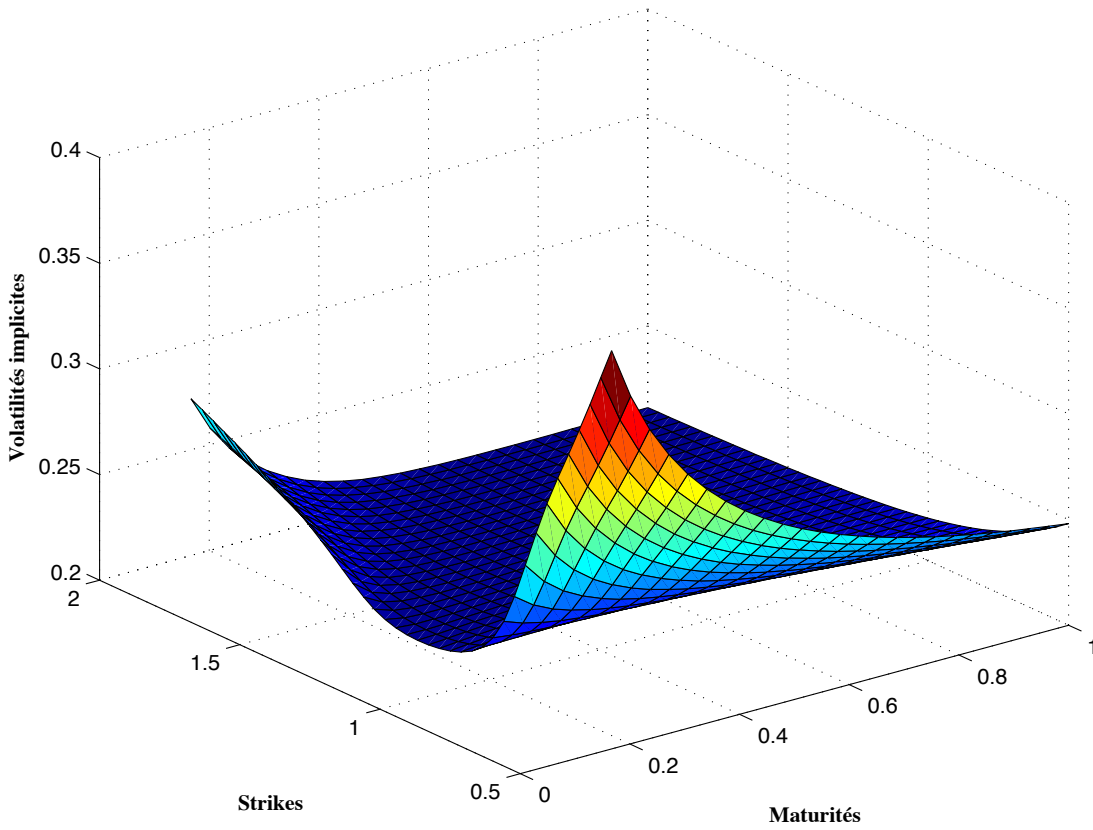


FIGURE 1.2 – Surface de volatilités implicites du modèle à sauts gaussiens de Merton pour une option d'achat. Les paramètres utilisés sont : $S = 1$, $r = 0$, $\sigma = 0.2$, $\lambda = 0.5$, $m = -0.1$ et $\delta = 10\%$.

A maturité fixée, notons l'influence des paramètres de sauts sur la déformation de ce smile comme le montrent les figures (1.3 et 1.4). En effet, augmenter l'intensité des sauts

10. Elles sont ici locales.

revient à en augmenter la fréquence : ceci revient à amplifier l'effet du modèle. Ainsi, en amplifiant l'effet du modèle de $(\lambda = 0.5)$ à $(\lambda = 1)$, on observe mieux l'influence de ces paramètres. Pour mieux fixer les idées, considérons une option d'achat et supposons que $S = 1$, ce qui veut dire que l'option est à parité si le prix d'exercice $K = 1$. Il vient donc que plus les prix d'exercice s'éloignent de cette valeur, plus l'option s'éloigne de la monnaie. Comme on l'avait déjà vu, augmenter la volatilité des sauts revient à amplifier l'effet sur les queues de distributions qui deviennent plus épaisses : la distribution des rendements décroît lentement à l'infini et de grandes variations du sous-jacent ont une probabilité significative de se produire, les prix des options sont donc plus importants. Par conséquent, on s'éloigne des prix en sortie du modèle de Black et Scholes. Ce fait est traduit par un smile beaucoup plus prononcé comme on le voit à la figure (1.3).

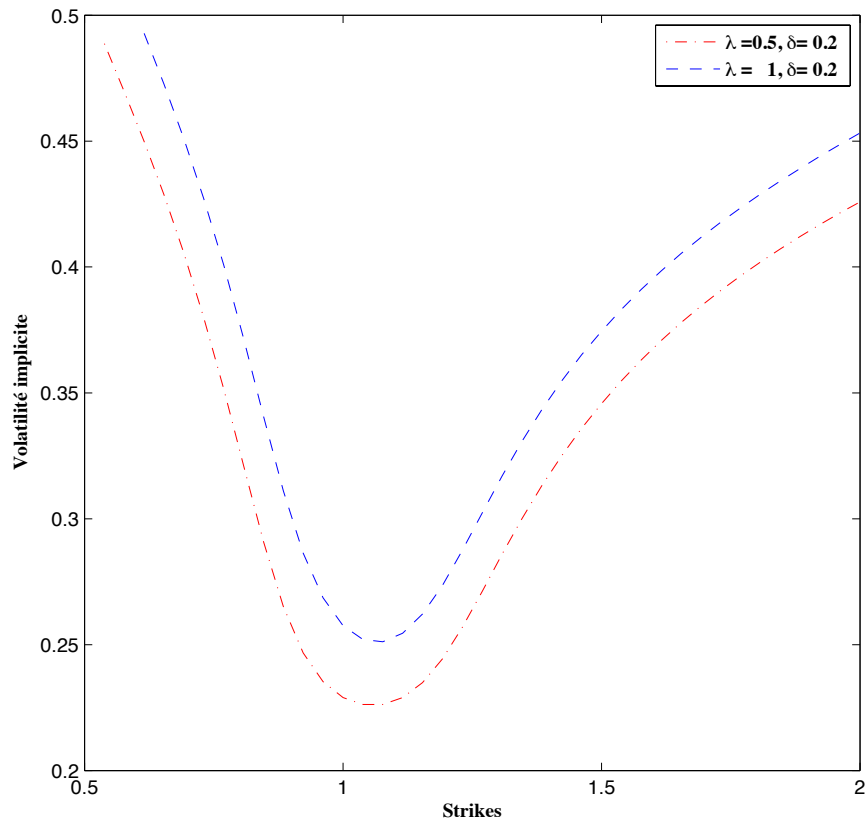


FIGURE 1.3 – Influence des paramètres de sauts : λ et δ sur le prix d'une option d'achat.

D'autre part, lorsque la moyenne de sauts m est négative, on a une forte probabilité pour des baisses de valeurs du sous-jacent ; les prix des instruments financiers d'antici-

tion à la baisse comme les options de vente sont plus élevés en dehors de la monnaie ce qui est inversement le cas pour les instruments d'anticipation à la hausse comme l'illustre la figure (1.4).

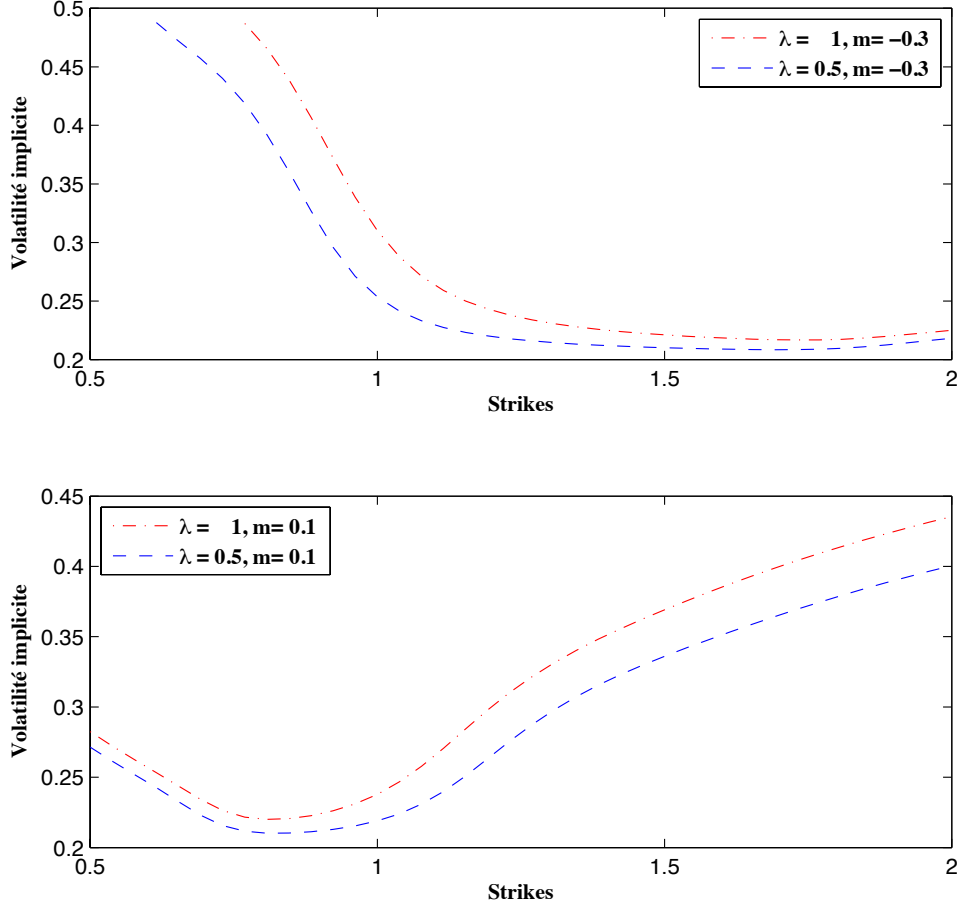


FIGURE 1.4 – Influence des paramètres de sauts : λ et m sur le prix d'une option d'achat.

1.1.3 Présentation du modèle de Kou et Évaluation d'option

Quant à Kou (2002), le modèle proposé pour représenter l'évolution du sous-jacent, repose de même sur (1.1). Comme montré auparavant, nous pouvons déduire de cette équation différentielle stochastique, la dynamique suivante pour le sous-jacent :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\}.$$

Avec, $J = \ln(Y)$. Cependant, le modèle de Kou diffère de celui de Merton (1976) quant au choix de la distribution des sauts J . Celui-ci considère que la variable aléatoire représentant les sauts J suit une loi exponentielle double asymétrique.

Plus précisément J est égale en distribution à :

$$J = \ln(Y) \stackrel{d}{=} \begin{cases} \eta_1, (\text{sauts positifs}) \text{ avec une probabilité } p \\ -\eta_2, (\text{sauts négatifs}) \text{ avec une probabilité } q, \end{cases}$$

avec $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$. η_1 et η_2 , sont des variables aléatoires exponentielles de moyennes respectives $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$, avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, la notation $\stackrel{d}{=}$ signifiant une égalité en distribution. Il vient donc immédiatement que la mesure de Lévy est donnée de la même manière par :

$$\nu(x) = \lambda f_J(x),$$

avec cette fois-ci :

$$f_J(x) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} 1_{\{x > 0\}} + q\lambda_2 e^{\lambda_2 x} 1_{\{x \leq 0\}}.$$

On peut donc calculer la fonction caractéristique associée à la loi des sauts ϕ_J . On obtient aisément :

$$\phi_J = E[e^{iuJ}] = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + iu}. \quad (1.13)$$

L'écriture de cette fonction caractéristique nous impose une contrainte sur la partie imaginaire de u , donnée par la bande de régularité :

$$-\lambda_1 < \Im u < \lambda_2.$$

Puisque $\phi_J = E[e^{iuJ}]$, en prenant $u = -i$, on déduit l'espérance de Y comme suit :

$$E[Y] = E[e^J] = \phi_J(-i) = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + 1}. \quad (1.14)$$

On suppose par la suite que $\lambda_1 > 1$ ce qui nous permet de garantir que l'espérance des sauts est finie : $E[Y] = E[e^J] < \infty$, ainsi, les sauts positifs ne peuvent excéder 100% en moyenne ($1/\lambda_1 < 1$), ce qui est une contrainte très raisonnable pour le modèle.

D'autre part, remarquons que le modèle de Kou rentre bien en adéquation avec les observations empiriques montrant à l'évidence que les distributions des rendements sont leptokurtiques. Afin de clarifier ce point, nous reconsidérons la représentation (1.7) de la distribution des rendements pour les processus mixtes de diffusion à sauts, donnée pour Δt petit. On obtient la fonction de densité :

$$\begin{aligned} f(x) = & (1 - \lambda\Delta t) \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}} n\left(\frac{x - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) \\ & + \lambda\Delta t \left\{ p\lambda_1 e^{\frac{\sigma^2\lambda_1^2\Delta t}{2}} e^{-(x-\mu\Delta t)\lambda_1} \mathcal{N}\left(\frac{x - \mu\Delta t - \sigma^2\lambda_1\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) \right. \\ & \left. + q\lambda_2 e^{\frac{\sigma^2\lambda_2^2\Delta t}{2}} e^{(x-\mu\Delta t)\lambda_2} \mathcal{N}\left(-\frac{x - \mu\Delta t + \sigma^2\lambda_2\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

où $n()$ représente la densité d'une distribution gaussienne. La moyenne et la variance des rendements se calculant aisément, il vient

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\Delta S_t}{S_t}\right) &= \mu\Delta t + \lambda\left(\frac{p}{\lambda_1} - \frac{q}{\lambda_2}\right)\Delta t \\ Var\left(\frac{\Delta S_t}{S_t}\right) &= \sigma^2\Delta t + \left\{pq\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{q}{\lambda_2^2}\right)\right\}\lambda\Delta t \\ &\quad + \left(\frac{p}{\lambda_1} - \frac{q}{\lambda_2}\right)^2\lambda\Delta t(1 - \lambda\Delta t). \end{aligned}$$

Comme illustration, nous reprenons les paramètres utilisés par Kou, on considère donc un pas de temps à fréquence journalière $\Delta t = 1/250$, une volatilité annuelle σ de 20% et une intensité de saut λ de 10 sauts par an. La probabilité de survenance d'un saut vers le haut p est fixée à 0.30 avec des moyennes de sauts positifs et négatifs : $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$, dont les valeurs respectives sont de 2% et de 4%. Dans ce cas, la moyenne des sauts $E(J)$ est de -2.2% alors que la variance de ces sauts $Var(J)$ est de 0.2%. En d'autres termes, nous considérons que nous avons 10 sauts par an avec une moyenne de sauts égale à -2.2% et une volatilité de sauts égale à 4.47% : ce qui semble être un choix de paramètres de sauts raisonnable. Comme le montre la figure (1.5), la distribution des rendements issus du modèle de Kou présente des caractéristiques leptokurtiques. On note que par rapport aux rendements gaussiens de Black-Scholes, elle¹¹ est beaucoup plus pointue et présente une queue beaucoup plus épaisse car décroissant moins vite vers l'infini : en d'autres termes nous avons une probabilité non négligeable d'occurrence d'évènements rares.

Évaluation d'options

En utilisant la théorie des anticipations rationnelles et en choisissant pour l'agent représentatif de l'économie, une fonction d'utilité de type HARA, Kou construit à partir de l'univers historique une probabilité particulière qui est la probabilité risque neutre Q sous laquelle les prix actualisés sont des martingales. Ainsi, à l'instar de Merton, il suggère le choix de la dérive ω telle que Se^{-rt} est une Q -martingale. Plus précisément,

$$\omega = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa, \quad (1.16)$$

avec $\kappa = E[e^J - 1] = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1$.

De la même manière que dans la section précédente, on suppose que $g(S_T) = F(S_T, T)$, avec $g(S_T)$, le paiement à l'échéance d'une option européenne donné en (1.10). Son prix en date initiale t est :

$$F_M(t) = e^{-r\tau} E_Q[g(S_T)|\mathcal{F}_t],$$

avec $\tau = T - t$, le temps restant avant échéance. Pour mieux fixer les idées, nous considérons dans un premier temps une option d'achat de prix d'exercice K , auquel cas, le

11. En utilisant les mêmes moyenne et variance.

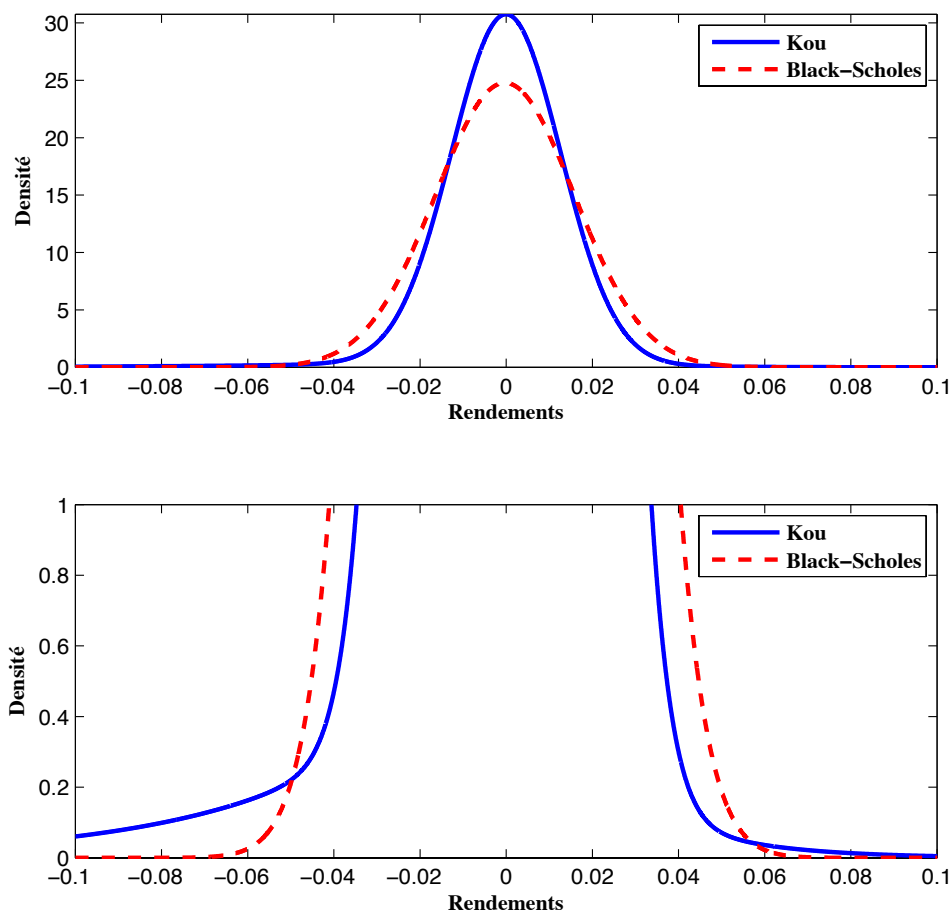


FIGURE 1.5 – Comparaison de la densité des rendements sous le modèle de Kou par rapport à celle sous le modèle de Black-Scholes, avec les mêmes moyenne et variance.

paiement à l'échéance est : $g(S_T) = (S_T - K)^+$. Le prix de l'option est donc donné en date initiale $t = 0$ par :

$$C(S_0, \tau) = E_Q [e^{-r\tau} (S_T - K)^+].$$

Après décomposition, on obtient :

$$C(S_0, \tau) = E_Q [e^{-r\tau} S_T 1_{S_T > K}] - K e^{-r\tau} Q(S_T > K). \quad (1.17)$$

$S_T = S_0 e^{X_T}$, il vient :

$$Q(S_T > K) = Q(X_T > \ln(K/S_0)).$$

Définissons

$$Q(X_t > a) = \Upsilon(\omega, \sigma, \lambda, p, \lambda_1, \lambda_2, a, t),$$

avec Υ , la queue de probabilité évaluée au point a . A cause de la présence des sauts négatifs et positifs, Υ s'écrit à la différence du modèle de Merton comme une série composée d'une double somme infinie dont chaque terme nécessite l'évaluation de fonctions spéciales $Hh_n(x)$ dont la description est fournie à la page 691 de Abramowitz et Stegun (1974). Kou propose une formule semi-explicite très compliquée pour le calcul de cette probabilité Υ ¹² qu'on implémente ici. Ainsi il vient :

$$Q(X_T > \ln(K/S_0)) = \Upsilon(\omega, \sigma, \lambda, p, \lambda_1, \lambda_2, \ln(K/S_0), \tau),$$

où : $\omega = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa$ et $\kappa = E_Q[e^J - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1$.

Considérons dans un deuxième temps, le premier terme de l'équation (1.17), donné par :

$$E_Q [e^{-r\tau} S_T 1_{S_T > K}]. \quad (1.18)$$

Nous utilisons la technique de changement de numéraire ; plus précisément, nous introduisons une nouvelle probabilité Q_S définie par :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dQ_S}{dQ} \right|_{t=T} &= e^{-rT} \frac{S_T}{S_0} = e^{-rT} e^{X_T} \\ &= \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda\kappa \right) T + \sigma W_T + \sum_{i=1}^{N_T} J_i \right\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Remarquons que cette probabilité est bien définie puisque : $E_Q[e^{-rT} S_T/S_0] = 1$, sachant l'information disponible à la date $t = 0$. D'après le théorème de Girsanov, $W_t^S = W_t - \sigma t$ et W^S est un nouveau mouvement brownien sous Q_S . Le processus (1.3) devient :

$$X_t = \left(\omega + \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^S + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

12. A la page 1011 de l'article original.

Kou (2002) montre que ce processus est à nouveau un processus de diffusion dont les sauts suivent encore une fois, une loi exponentielle double asymétrique avec des paramètres donnés cette fois-ci par : λ' , p' , λ'_1 et λ'_2 .

Ainsi, grâce à la dérivée de Radon-Nicodým fournie plus haut, il vient d'abord :

$$\begin{aligned} E_Q [e^{-r\tau} S_T 1_{S_T > K}] &= S_0 E_{Q_S} [1_{S_T > K}] \\ &= S_0 \Upsilon(\omega + \sigma^2, \sigma, \lambda', p', \lambda'_1, \lambda'_2, \ln(K/S_0), \tau). \end{aligned}$$

Il vient finalement que le prix d'une option d'achat est donné sous ce modèle, par la formule suivante :

$$\begin{aligned} C(S_0, \tau) &= S_0 \Upsilon(\omega + \sigma^2, \sigma, \lambda', p', \lambda'_1, \lambda'_2, \ln(K/S_0), \tau) \\ &\quad - K e^{-r\tau} \Upsilon(\omega, \sigma, \lambda, p, \lambda_1, \lambda_2, \ln(K/S_0), \tau), \end{aligned} \quad (1.20)$$

avec : $\omega = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa$, $\kappa = E_Q[e^J - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - 1)} + p_2 \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + 1)} - 1$,

$$\lambda' = \lambda(1 + \kappa), \quad p' = \frac{p}{1 + \kappa} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}, \quad \lambda'_1 = \lambda_1 - 1 \text{ et } \lambda'_2 = \lambda_2 + 1.$$

L'équivalent d'une option de vente peut être déduit en utilisant la relation de parité call-put. Plus précisément, considérons à l'instant $t = 0$ un produit financier qui promet en T le flux :

$$\max(S_T, K) = \begin{cases} K + \max(S_T - K, 0) \\ S_T + \max(K - S_T, 0) \end{cases}$$

Comme on le voit, cet actif est le produit de deux stratégies donnant deux paiements identiques à l'échéance T . En absence d'opportunité d'arbitrage, les prix en t des deux actifs payant les mêmes flux en T doivent être identiques, ainsi :

$$K e^{-r\tau} + E_Q [e^{-r\tau} (S_T - K)^+] = S_0 + E_Q [e^{-r\tau} (K - S_T)^+].$$

On peut déduire de cette relation, le prix d'une option de vente sous le modèle de Kou. Il vient

$$P(S_0, \tau) = C(S_0, \tau) + K e^{-r\tau} - S_0, \quad (1.21)$$

avec $C(S_0, \tau)$, le prix d'une option d'achat donné en (1.20).

Après avoir tronqué la double somme infinie après ses N premiers termes, nous reprenons les paramètres utilisés par Kou et comme on peut le constater, la série converge aussi vite vers la valeur arrondie à la cinquième décimale : 9.14732. On retrouve ainsi les prix obtenus par Kou au bout de $N = 12$, comme l'illustre la figure (1.6).

La table (1.2) fournit les prix d'une option d'achat et de vente, en sortie de ce modèle.

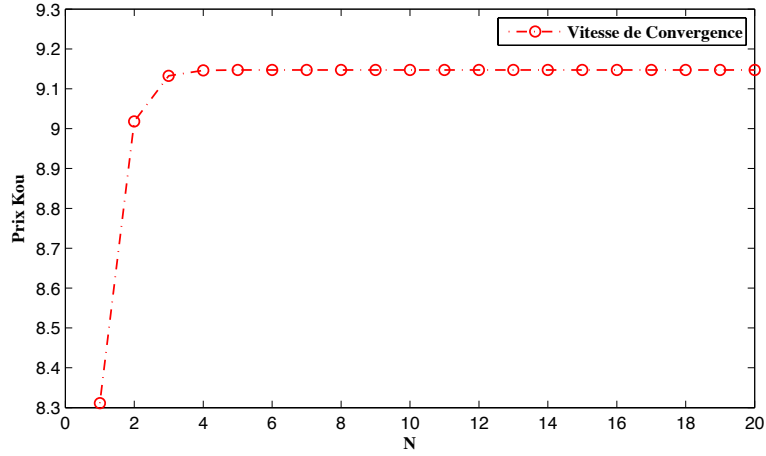


FIGURE 1.6 – Vitesse de convergence de la série de Kou pour une option d’achat. Les paramètres utilisés sont : $S = 100$, $K = 98$, $\tau = 0.5$, $r = 5\%$, $\sigma = 0.16$, $\lambda = 1$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$ et $p = 0.4$.

Modèle à sauts exponentiels doubles asymétriques de Kou $S = 100$, $\tau = 0.5$, $r = 5\%$, $\sigma = 0.16$, $\lambda = 1$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$ et $p = 0.4$			
Option d’achat		Option de vente	
Prix d’exercice	Prix Kou	Prix d’exercice	Prix Kou
80	23.24617	120	18.52905
90	14.81189	100	5.49042
100	7.95942	90	2.58978
120	1.49186	80	1.27097

TABLE 1.2 – Evaluation d’options européennes dans le cadre du modèle de Kou, les prix sont calculés selon la formule (1.20) et avec la relation de parité call-put (1.21).

Notons de même que le modèle à saut exponentiel double asymétrique de Kou permet de retrouver la forte convexité pour des options de maturités courtes, comme l’illustre la surface de volatilité (1.7).

1.2 Modèles à activité infinie

Dans cette section, nous nous intéressons à un modèle représentatif des processus à activité infinie, le modèle *CGMY* qui étend celui de Variance Gamma par la généralisation de sa densité de Lévy. Nous présentons dans un premier temps le modèle Variance

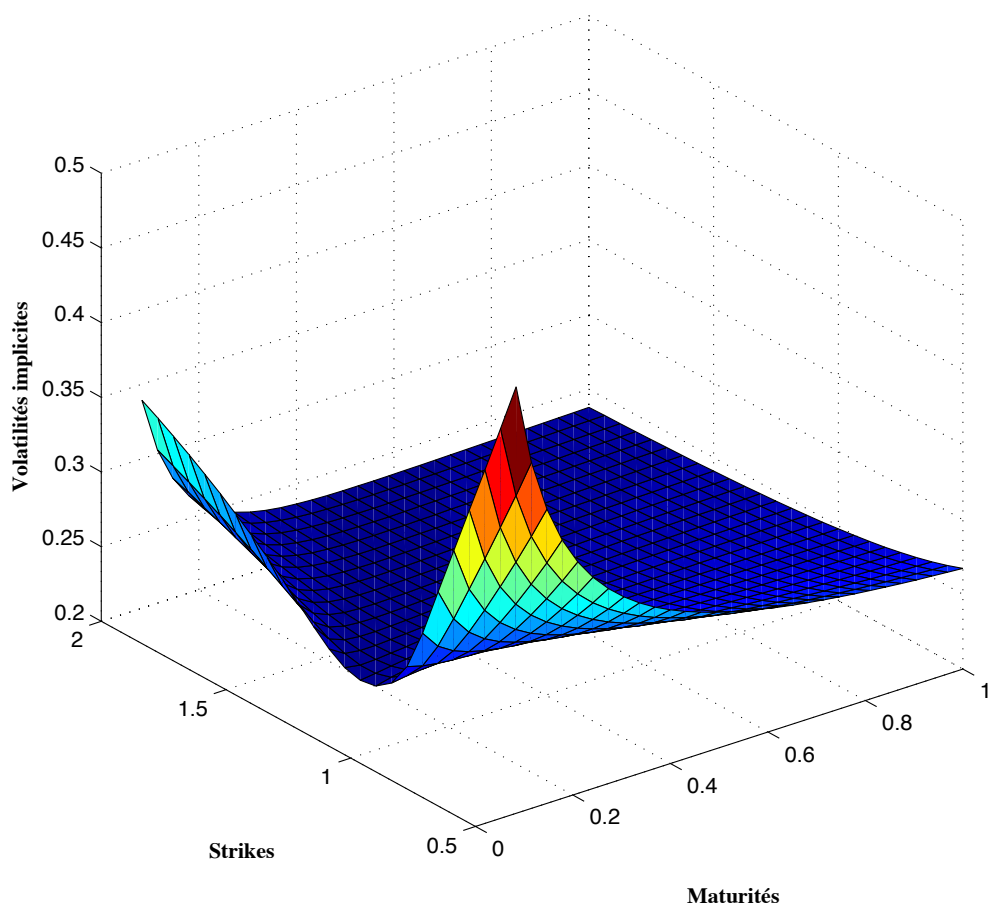


FIGURE 1.7 – Surface de volatilités implicites du modèle à sauts exponentiels doubles asymétriques de Kou, pour une option d'achat. Les paramètres utilisés sont : $S = 1$, $r = 5\%$, $\sigma = 0.2$, $\lambda = 10$, $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 25$ et $p = 0.4$.

Gamma avant d'en examiner l'extension.

1.2.1 Modèle Variance Gamma

Appartenant à la classe des distributions hyperboliques généralisées, les processus variance gamma ont été introduits dans la littérature financière par Madan et Seneta (1990). Ils permettent aussi de retrouver un certain nombre de faits stylisés empiriques où de grands déclin dans la valeur de l'actif sous-jacent sont plus susceptibles que dans le cas de distributions gaussiennes. Ce genre de processus est obtenu en changeant le temps calendaire du mouvement brownien par un processus gamma. L'intuition principale sous-jacente à ce type de modélisation est que le temps des activités du marché est une transformation aléatoire du temps calendaire. Plutôt que d'ajouter une nouvelle source d'incertitude comme des sauts dans la dynamique du sous-jacent, ou de rendre la volatilité stochastique comme pour le modèle de Heston (1993), on transforme le temps par un subordonateur, i.e., un processus aléatoire croissant de valeurs positives à accroissements indépendants et stationnaires : dans notre cas, un processus gamma d'où le nom donné au modèle. Ces processus permettent en outre d'obtenir des queues de densité exponentielles avec un taux de décroissance plus faible que celui des densités gaussiennes, ce qui rend la distribution des rendements leptokurtiques pour ce processus.

Concrètement, considérons la forme générale des processus de Lévy géométriques en (1.4), donnée par : $S_t = S_0 e^{X_t}$, avec :

$$X_t = \mu t + \theta G_t + \sigma W_{G_t}, \quad (\mu, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^{*+}. \quad (1.22)$$

où $(G_t : t \geq 0)$ représente un subordonateur indépendant de W , avec W un mouvement brownien standard. Cette équation diffère de celle d'un mouvement brownien arithmétique à cause de la présence du terme G_t qui représente le temps d'activité des marchés et comme nous l'avons souligné, il s'agit d'un processus gamma, à valeurs positives d'accroissements indépendants et stationnaires. En d'autres termes, si $G_t \sim \Gamma\left(\frac{t}{\varsigma}, \varsigma\right)$ est un processus gamma de paramètre $\varsigma > 0$, alors les accroissements :

$$G_u - G_t \sim \Gamma\left(\frac{u-t}{\varsigma}, \varsigma\right), \quad u \geq t \geq 0,$$

sont encore des processus gamma de moyenne¹³ : $u - t$ et de variance : $\varsigma(u - t)$.

Considérons deux instants : t et $t + \Delta t$. Notons ΔG , les accroissements $G(t + \Delta t) - G(t)$. Conditionnellement au subordonateur G entre ces deux instants, la rentabilité continue de l'actif sous-jacent est donnée sur la période $[t, t + \Delta t]$ par :

$$\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \Big| G \sim \mathcal{N}\left(\mu \Delta t + \theta \Delta G, \sigma^2 \Delta G\right), \quad (1.23)$$

13. Cette hypothèse est importante, car stipulant qu'en moyenne, l'horloge stochastique converge vers l'horloge calendaire

car :

$$E(G_t|G) = \Delta G \quad \text{et} \quad \text{Var}(W(G_{t+\Delta t} - G_t)) | G \sim \sigma^2 \Delta G \epsilon, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

En intégrant sur tout le domaine du subordonateur G , avec la loi gamma ; la densité est alors obtenue comme un mélange infini de densités gaussiennes pondérées par les densités de la loi gamma. Seneta (2004) montre que cette somme infinie converge. Elle est donnée¹⁴ par :

$$f_X(x) = \frac{2 \exp(\theta(x - \mu)/\sigma^2)}{\sigma \sqrt{2\pi\varsigma}^{\frac{\Delta t}{\varsigma}} \Gamma(1/\varsigma)} \left(\frac{|x - \mu|}{\sqrt{2\sigma^2/\varsigma + \theta^2}} \right)^{\Delta t/\varsigma - 1/2} K_{\Delta t/\varsigma - 1/2} \left(\frac{|x - \mu| \sqrt{2\sigma^2/\varsigma + \theta^2}}{\sigma^2} \right), \quad (1.24)$$

où K_η représente une fonction de Bessel modifiée d'ordre 3 d'indice η , définie pour $\omega > 0$ par :

$$K_\eta(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\eta-1} \exp \left\{ -\frac{\omega}{2}(y^{-1} + y) \right\} dy.$$

D'autre part, il est aisé d'obtenir la fonction caractéristique du processus (1.22). Elle est donnée¹⁵ :

$$\phi_{X_t}(u) = E[e^{iuX_t}] = e^{-t\psi(u)} = e^{iu\mu t} \left(1 - iu\theta\varsigma + u^2 \frac{\sigma^2}{2} \varsigma \right)^{-\frac{t}{\varsigma}}, \quad u \in \mathbb{C} \quad (1.25)$$

où :

$$\psi(u) = -iu\mu + \frac{1}{\varsigma} \ln(1 - iu\theta\varsigma + u^2 \frac{\sigma^2}{2} \varsigma), \quad (1.26)$$

représente l'exposant caractéristique associé à X . Celui-ci est défini si et seulement si :

$$(1 - iu\theta\varsigma + u^2 \frac{\sigma^2}{2} \varsigma) = \left(1 - (iu)\theta\varsigma - (iu)^2 \frac{\sigma^2}{2} \varsigma \right) > 0. \quad (1.27)$$

La résolution de cette équation du second degré en iu nous impose une contrainte définie par la bande de régularité :

$$\frac{-\theta - \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\varsigma}}}{\sigma^2} < \Re(u) < \frac{-\theta + \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\varsigma}}}{\sigma^2}.$$

La figure (1.8) illustre quelques trajectoires de prix obtenus sous ce type de processus : on peut reproduire les tendances de ce graphique en prenant $\mu = \theta = 0$, $\varsigma = 6$ et $\sigma = 0.03$. Les figures (1.9a et 1.9b) montrent les densités assorties. On y remarque la déformation de la distribution des rendements en fonction du temps et du paramètre θ .

14. Après rectification d'une erreur sur la densité qu'il y aurait dans leur papier.

15. Voir l'annexe (A.2) pour les calculs détaillés.

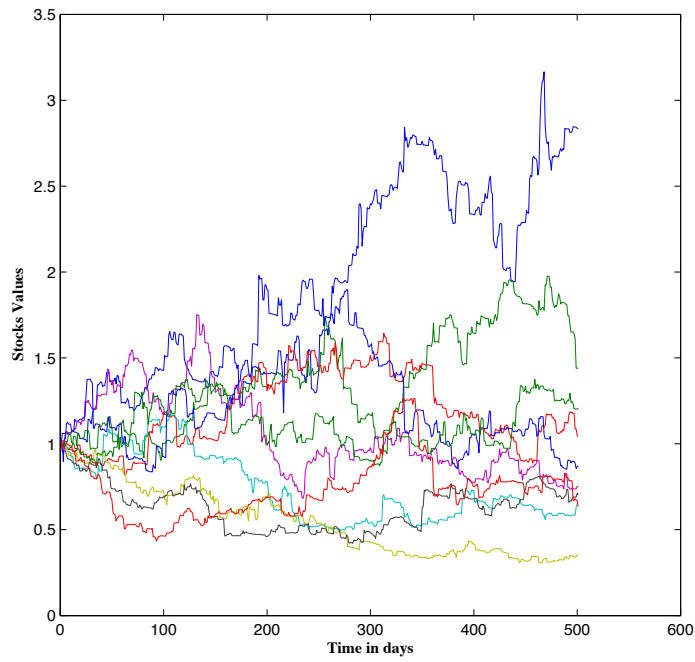
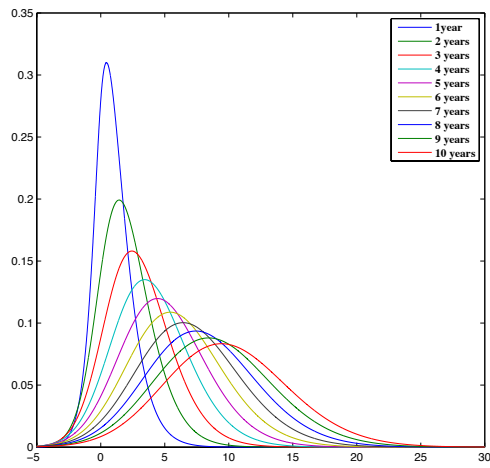
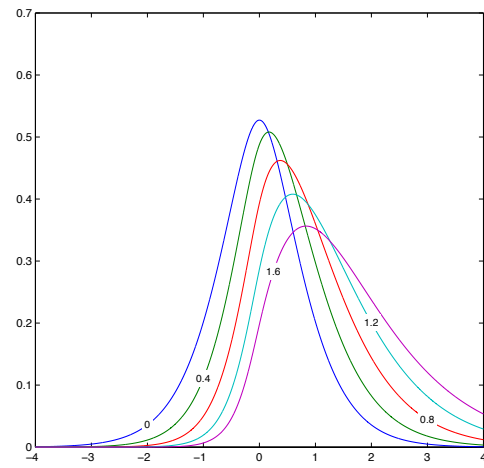


FIGURE 1.8 – Simulation de 10 trajectoires du processus VG. Les paramètres utilisés sont : $S_0 = 1$, $\mu = \theta = 0$, $\varsigma = 6$ et $\sigma = 0.03$.



(a) Représentation du processus VG comme une fonction du temps t . Les paramètres utilisés sont $\theta = 1$, $\varsigma = 0.4$, $\sigma = 1.4$, $\mu = 0$.



(b) Représentation du processus VG comme une fonction de θ . Les paramètres utilisés sont $\varsigma = 0.4$, $\sigma = 0.9$, $\mu = 0$.

Cependant, il vient un autre intérêt porté pour ce type de processus, notamment sa flexibilité à être en adéquation avec la distribution inférée des séries historiques de rendements. Par exemple, considérons sans perte de généralité des séries historiques de rendements mensuels TRI^{16} , de l'indice boursier américain S&P 500 récupérées depuis une base de données Bloomberg[®]. Nous considérons une fenêtre d'observation post-guerre, allant du début de l'année 1957 à la fin de l'année 2008. Les paramètres du modèle, obtenus par la méthode d'estimation de vraisemblance sont fournis à la table (1.3) et on voit sur la figure (1.9), la bonne adéquation de la distribution simulée par rapport à celle des rendements de cet indice boursier.

Indice S&P 500	
MV = 1102.63673	
$\mu = 0.03705$	$\sigma = 0.03966$
$\varsigma = 0.18182$	$\theta = -0.03143$

TABLE 1.3 – Estimation par la méthode de maximum de vraisemblance (MV) des paramètres du processus Variance Gamma donné en (1.22).

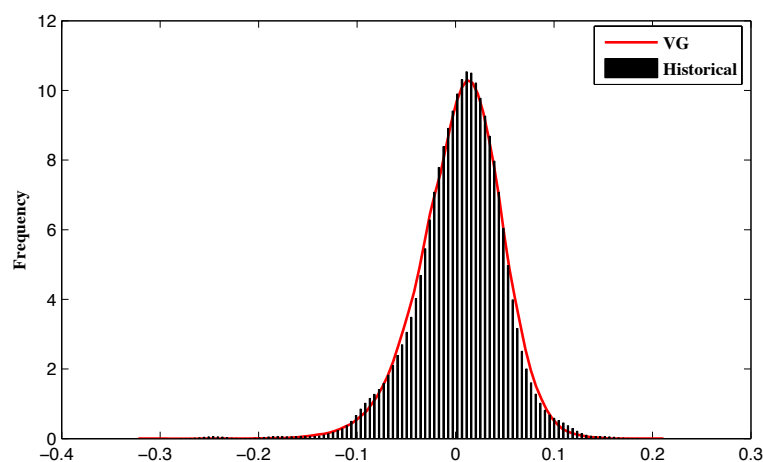


FIGURE 1.9 – Adéquation des distributions des rendements historique et simulée de l'indice boursier américain S&P 500.

Source : Bloomberg[®].

16. De la terminologie anglaise : Total Return Index, i.e., les dividendes détachés sont réinvestis.

1.2.2 Modèle KoBoL ou modèle CGMY

Dans la continuité du modèle variance gamma, un nouveau modèle englobant le précédent, connu sous le nom de modèle CGMY de Carr et al. (2002), d'après les noms des quatre auteurs : Carr, Geman, Madan et Yor, a rapidement émergé dans les années quatre-vingt-dix. Ce type de processus avait été pour la première fois introduit en actuariat par Dufresne et al. (1991) et construit pour la littérature financière par Koponen (1995) puis par Boyarchenko et Levendorskiĭ (2002c), d'où le nom de processus KoBoL, d'après le nom des trois auteurs : Koponen, Boyarchenko et Levendorskiĭ. L'une des caractéristiques des processus CGMY est qu'ils ne partent pas de la particularité d'une distribution de probabilité ni de la subordination de brownien. Ils sont bien au contraire, construits par le choix direct d'une fonction caractéristique, autrement dit, d'une densité de Lévy. Les paramètres C, G, M et Y avec : $C > 0$, $G \geq 0$, $M \geq 0$ et $Y < 2$, jouent un rôle important quant à la prise en compte des propriétés caractérisant le processus sous-jacent. En effet, C décrit l'intensité du processus. Plus précisément, C joue un rôle similaire à celui de la variance dans un mouvement brownien. Les paramètres G et M , contrôlent respectivement, le taux de décroissance des queues de probabilité droite et gauche de la densité de Lévy, donnant ainsi de l'asymétrie pour des valeurs de G et de M non égales. Ainsi le cas $G < M$ est plus en adéquation avec de nombreux faits empiriques où la queue de probabilité gauche est la plus épaisse. Le paramètre Y caractérise la structure fine du processus : $Y > -1$, pour une densité de Lévy complètement monotone ; $Y > 0$, pour un processus à activité infinie, ou à variation infinie ($Y > 1$). Aussi, remarque-t-on que le cas $Y = 0$ permet de retrouver le modèle Variance Gamma avec des paramètres identifiés par les auteurs¹⁷. La densité de Lévy du processus CGMY, X , est donnée par :

$$\nu(x) = C \left[\frac{\exp(-G|x|)}{|x|^{1+Y}} 1_{x<0} + \frac{\exp(-Mx)}{x^{1+Y}} 1_{x>0} \right], \quad (1.28)$$

avec : $C > 0$, $G \geq 0$, $M \geq 0$, et $Y < 2$. De même, la fonction caractéristique associée, s'obtient aisément :

$$\phi_{X_t}(u) = e^{-t\psi(u)}, \quad (1.29)$$

avec :

$$\psi(u) = -C \Gamma(-Y) [(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y]. \quad (1.30)$$

Nous exposerons plus loin, une méthodologie générale d'évaluation d'option qui permet d'obtenir les prix d'options sous ce type de modèle. Aussi, verra-t-on comment la densité attachée aux lois marginales du processus peut être obtenue de manière simple et rapide.

17. À la page 311.

1.3 Modèles à changement de régimes

Les modèles à changement de régime ont été introduits dans la littérature économique par Hamilton (1989). Ces modèles envisagent une approche heuristique mais surtout intuitive de modélisation de rendements d'actifs. Autrement dit, plutôt que d'utiliser un modèle à volatilité stochastique comme celui de Heston (1993) ou à sauts via un processus de Poisson composé ou par subordination de brownien, on suppose que l'actif sous-jacent peut transiter de manière aléatoire entre n différents régimes de volatilités. Le processus régissant la transition entre les volatilités est donné par une chaîne de Markov. Dans ce contexte, en reprenant les travaux de Hamilton, Hardy (2003) propose un modèle avec changement de régime lognormal. Nous verrons que dans le cadre d'évaluation d'option, outre la difficulté suscitée par l'incomplétude du marché, il vient une autre : celle de détermination de la distribution de séjour dans un état. Cette probabilité est obtenue par une version discrète et récursive de l'équation de Kolmogorov rétrograde qui ne semble pas évident à implémenter. Dans un souci de clarté, nous commençons l'analyse en spécifiant la dynamique de rendements d'actifs pour ce type de modélisation.

1.3.1 Dynamique des rendements d'actif

On considère un actif risqué S , qu'on modélise par un processus de type exponentiel : $S = S_0 e^X$, où S_0 est son prix à la date $t = 0$. Notons T , l'horizon de temps d'investissement dans cet actif. On discrétise cette période d'investissement $[0, T]$ en T sous périodes $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, T$, d'égales durées. Sans perte de généralité, supposons qu'elles ne durent pas plus d'un mois. La rentabilité de l'actif, r_i , en fin de sous-période est

$$r_i = \ln \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}.$$

Remarquons que si X est un processus de Lévy, alors les rendements sont à accroissements indépendants et stationnaires. Postulons qu'ils obéissent à un processus modulé à changement de régime à deux états, régi par la chaîne de Markov ζ . Nous supposons par convention qu'au temps t , $\zeta_t = 1$ si le régime est dans l'état 1 et $\zeta_t = 2$ si celui-ci est dans l'état 2. La matrice de transition de Markov décrivant le passage aléatoire entre les deux régimes est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

où :

- $p_{i,j} = \Pr[\zeta_{t+1} = j | \zeta_t = i]$ est la probabilité que le processus $X_{t,i}$ transite de l'état i à l'instant t vers l'état j au temps $t + 1$, $(i, j) \in \{1, 2\}^2$,
- et $\sum_{j=1}^2 p_{i,j} = 1$, pour $i \in \{1, 2\}$.

1.3.2 Probabilité de séjour dans le régime 1

Une variable jouera un rôle important dans notre modélisation, c'est la variable C qui compte le nombre total de mois passés dans l'état 1 pendant la période de temps $[0, T]$. C est donc une variable discrète, prenant pour valeurs c dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, $n \leq T$.

Soit $C_n(t)$, le nombre total de mois que le processus modulé visite le régime 1 dans l'intervalle de temps $[t, n[$. Pour tout $c \in [0, n - t]$:

$$\begin{aligned} \Pr[C_n(t) = c | \zeta_{t-1}] &= [\Pr[C_n(t+1) = c | \zeta_t = 2] \Pr[C_n(t+1) = c-1 | \zeta_t = 1]] \times \begin{bmatrix} p_{\zeta_{t-1}, 2} \\ p_{\zeta_{t-1}, 1} \end{bmatrix}, \\ &= 0, \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (1.32)$$

La justification de cette récursion est la suivante : si en $t-1$, on veut que la variable C ait passé c mois dans le régime 1 durant $[t, n[$, alors si à partir de la date t , C se trouvait dans le régime 2 ($\zeta_t = 2$) avec une probabilité $p_{\zeta_{t-1}, 2}$, alors il lui resterait à partir de l'instant $t+1$ toujours c mois à passer dans le régime 1. Si au contraire à l'instant t , C se trouvait déjà dans le régime 1 ($\zeta_t = 1$) avec une probabilité $p_{\zeta_{t-1}, 1}$, il lui resterait $c-1$ mois à envisager dans le régime 1. Aussi pour $t \in [n-1, n[$, autrement dit en dernière sous-période, on remarque les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \Pr[C_n(n-1) = 1 | \zeta_{t-1} = 1] &= p_{1,1} & \Pr[C_n(n-1) = 0 | \zeta_{t-1} = 1] &= p_{1,2} \\ \Pr[C_n(n-1) = 1 | \zeta_{t-1} = 2] &= p_{2,1} & \Pr[C_n(n-1) = 0 | \zeta_{t-1} = 2] &= p_{2,2} \end{aligned}$$

Partant de ces dernières quantités et en servant de la relation récursive rétrograde (1.32), on obtient la probabilité $\Pr[C_n(0) = c | \zeta_{-1} = 1]$ conditionnellement à l'état 1 et la probabilité $\Pr[C_n(0) = c | \zeta_{-1} = 2]$ conditionnellement à l'état 2. La probabilité inconditionnelle de $C_n(0) = C_n$ peut être enfin déterminée en utilisant la relation suivante :

$$\Pr[C_n(0) = c] = p(c) = \pi_1 \Pr[C_n(0) = c | \zeta_{-1} = 1] + \pi_2 \Pr[C_n(0) = c | \zeta_{-1} = 2]. \quad (1.33)$$

π_1 et π_2 représentent des probabilités stationnaires¹⁸ telles que :

$$\pi_1 = \frac{p_{2,1}}{p_{1,2} + p_{2,1}} \quad \pi_2 = \frac{p_{1,2}}{p_{1,2} + p_{2,1}}.$$

A titre d'illustration, supposons que $n = 20$, la distribution de séjours dans l'état 1 de la variable C est fournie à la table (1.4), en utilisant les paramètres estimés pour les probabilités de transition de l'indice canadien TSE 300 (cf. table 1.6). Les chiffres sont arrondis au plus près à la quatrième décimale.

18. Elles sont solution de l'équation $\pi P = \pi$, où π est un vecteur ligne de taille (2×1) , de probabilités stationnaires π_1 et π_2 .

c	$\Pr[C_{20} = c]$	c	$\Pr[C_{20} = c]$	c	$\Pr[C_{20} = c]$
0	0.0016	7	0.0088	14	0.0440
1	0.0012	8	0.0115	15	0.0526
2	0.0018	9	0.0149	16	0.0622
3	0.0026	10	0.0189	17	0.0726
4	0.0036	11	0.0238	18	0.0835
5	0.0049	12	0.0296	19	0.0945
6	0.0066	13	0.0363	20	0.4247

TABLE 1.4 – Distribution du nombre total de séjour, C_{20} , dans le régime 1 sur une fenêtre de temps de $[0, 20]$ (en mois).

On vérifie que la somme de toutes les probabilités est égale à 1. Aussi, la précision et le temps de calcul de ces probabilités étant très déterminants pour l'utilisation de cette distribution dans la suite des applications, nous relevons à la table (1.5) les performances de calcul constatées sous une machine standard équipée d'un Pentium® 4 à 2 GHz et dotée de 1 Go de mémoire vive.

Probabilités de séjours dans le régime 1	
N	Temps en secondes
120 (soit 10 ans)	0.008312
240 (soit 20 ans)	0.019400
360 (soit 30 ans)	0.035581
600 (soit 50 ans)	0.080428
1200 (soit 100 ans)	0.265872

TABLE 1.5 – Performances de calcul. Temps mesuré sur une machine équipée d'un processeur Pentium® 4 référencé à 2 GHz et dotée de 1 Go de mémoire vive.

D'autre part, remarquons que le taux de rentabilité continu inhérent à la détention

de l'actif jusqu'à la date de fin d'investissement T , est donné par

$$X_T = \ln \frac{S_T}{S_0} = \ln \left(\frac{S_1}{S_0} \frac{S_2}{S_1} \dots \frac{S_T}{S_{T-1}} \right) = \sum_{i=1}^T r_i.$$

La fonction caractéristique associée à X_T peut être calculée en conditionnant par la variable C - donnant le nombre total de séjour dans l'état 1 - dont on sait dorénavant déterminer la distribution.

$$\phi_{X_T}(u) = E[\phi_{X_T}|C] = E[E[e^{iuX_T}|C]],$$

où

$$\begin{aligned} E[e^{iuX_T}|C] &= E[e^{iu \sum_{i=1}^T r_i}|C] = E\left[\left(e^{iu \sum_{i \in I_1}^T r_i}\right) \left(e^{iu \sum_{i \in I_2}^T r_i}\right) | C\right] \\ E[e^{iuX_T}|C] &= E\left[\left(e^{iu \sum_{i \in I_1}^T r_i} | C\right)\right] E\left[\left(e^{iu \sum_{i \in I_2}^T r_i} | C\right)\right] \\ E[e^{iuX_T}|C=c] &= (\phi_{r(1)}(u))^c (\phi_{r(2)}(u))^{T-c}. \end{aligned}$$

Il résulte :

$$\phi_{X_T}(u) = \sum_{c=0}^T \exp \left\{ -C\psi_1(u) - (T-C)\psi_2(u) \right\} \Pr[C=c], \quad (1.34)$$

où ψ_{ζ_t} représente l'exposant caractéristique du processus X_t sachant qu'il est dans l'état ζ_t .

1.3.3 Modèle de Hardy et Évaluation d'option

Hardy considère un modèle à changement de régime lognormal sous lequel, les rendements suivent une distribution normale et dont les deux premiers moments centrés dépendent de ζ . Formellement :

$$r_t = \mu_{\zeta(t)} + \sigma_{\zeta(t)} z(1), \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Ce type de modélisation a pour but de prendre en compte la caractéristique réelle des marchés qui, pour des raisons d'incertitudes politiques ou encore économiques de court terme, voire de moyen terme, passent de temps en temps d'un régime de faible volatilité vers un régime à forte volatilité. La figure (1.10) illustre¹⁹ ce type de phénomène pour l'indice boursier américain S&P 500.

Notons $\theta = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21}\}$, l'ensemble des paramètres du modèle. L'estimation de ces paramètres peut être efficacement obtenue par le filtre récursif de Hamilton et Susmel (1994). Ainsi, en reprenant les séries historiques de rendements mensuels de l'indice américain S&P 500 et celles de l'indice canadien TSE 300 sur la même fenêtre d'observation allant de 29/02/1956 à 30/04/2000, les paramètres inférés de cette série sont fournis à la table (1.6).

19. Ce type de représentation est obtenue en calculant les probabilités conditionnelles d'état suivant l'approche proposée par Hamilton et Susmel (1994).

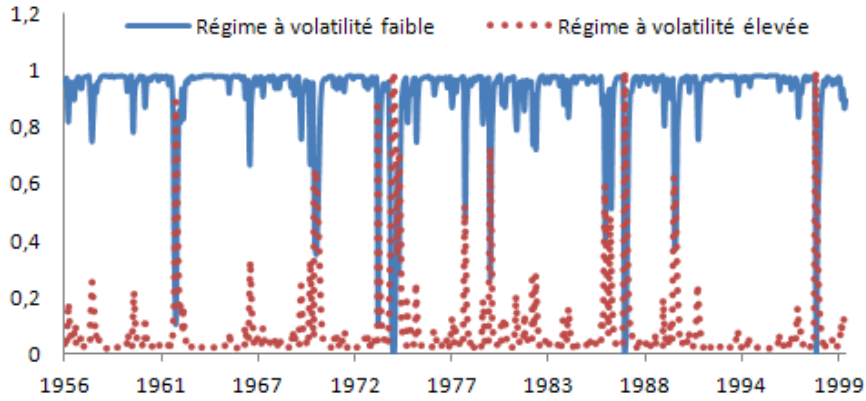


FIGURE 1.10 – Changement de volatilité dans l'indice boursier américain S&P 500.

TSE 300					
MLE = 929.9729					
$\mu_1 =$	0.0125	$\sigma_1 =$	0.0348	$p_{12} =$	0.0361
$\mu_2 =$	-0.0163	$\sigma_2 =$	0.0777	$p_{21} =$	0.2111
S&P 500					
MLE = 957.7927					
$\mu_1 =$	0.0125	$\sigma_1 =$	0.0355	$p_{12} =$	0.0344
$\mu_2 =$	-0.0219	$\sigma_2 =$	0.0772	$p_{21} =$	0.3956

TABLE 1.6 – Estimation des paramètres du modèle à changement de régime lognormal.

Evaluation d'option

Hardy considère à l'instar de Bollen (1998) que le passage de la mesure historique P à l'univers risque-neutre Q laisse les probabilités de transition inchangées dans les deux univers. Autrement dit, ils proposent de changer les paramètres de dérives dans le régime i de μ_i à $r - \frac{\sigma_i^2}{2}$. Cette approche sera celle suivie dans cette section. Ainsi sous Q , il vient au temps t , le prix $F_H(t)$ d'une option européenne dont le paiement à l'échéance est donné en (1.10) :

$$F_H(t) = e^{-r\tau} E_Q[g(S_T)|\mathcal{F}_t],$$

avec $\tau = T - t$, le temps restant avant échéance. En conditionnant par le nombre total de séjour passé dans le régime 1, il vient d'abord

$$F_M(S, \tau) = E_Q \left[e^{-rT} E \left[\varpi (S_T - K)^+ | C \right] \right].$$

Modèle à changement de régime lognormal de Hardy $S = 100, \tau = 1, r = 6\%$, par an			
Option d'achat (soit, $\varpi = 1$)		Option de vente (soit, $\varpi = -1$)	
Prix d'exercice	Prix Hardy	Prix d'exercice	Prix Hardy
80	24.88564	120	14.85921
90	16.22075	100	3.25635
100	9.07990	90	0.97957
120	1.84747	80	0.22687

TABLE 1.7 – Evaluation d'option européenne dans le cadre du modèle à changement de régime lognormal de Hardy, selon la formule (1.35).

En utilisant la distribution de séjour dans le régime 1, calculée en (1.33), il vient ensuite :

$$F_M(S, \tau) = \sum_{c=0}^T [F_{BS}(S, \tau) | C] \Pr[C = c], \quad (1.35)$$

avec :

$$F_{BS}(S, \tau) | C = \varpi S_0 \mathcal{N}(\varpi d) - \varpi K e^{-r\tau} \mathcal{N}(\varpi(d - \Sigma)),$$

$$d = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r\tau + \Sigma^2/2)}{\sqrt{\Sigma^2}} - \Sigma,$$

et :

$$\Sigma^2 = C\sigma_1^2 + (T - C)\sigma_2^2, \quad \Sigma = \sqrt{\Sigma^2}.$$

Ainsi dans le cas du modèle à changement de régime lognormal, nous avons une formule fermée. La table (1.7) montre quelques prix d'option calculés pour différents prix d'exercices, en utilisant les paramètres estimés de l'indice TSE 300 selon la formule (1.35). Les prix sont arrondis au plus près à la cinquième décimale.

1.3.4 Une première extension : le modèle à changement de régime variance gamma

Sous le modèle à changement de régime variance gamma, auquel nous nous référons par le jeu de lettres RSVG, on reconsidère la forme générale du processus de prix $S_t = S_0 e^{X_t}$, comme un processus de Lévy géométrique. On suppose que X_t visite deux régimes gouvernés par une chaîne de Markov ζ , avec $\zeta_t = 1, 2$, où ζ_t est le régime s'appliquant au temps $[t, t + 1[$:

$$\begin{cases} X_{1,t} = \mu_1 t + \theta_1 G_{1,t} + \sigma_1 W_{G_1(t)} \\ X_{2,t} = \mu_2 t + \theta_2 G_{2,t} + \sigma_2 W_{G_2(t)} \end{cases} \quad (1.36)$$

On suppose que sachant l'état dans lequel se trouve X_t , autrement dit, conditionnellement à ζ_t , le processus X_{ζ_t} suit un processus de type variance gamma défini en (1.22). On suppose également que les processus X_1 et X_2 sont conditionnellement indépendants. La fonction caractéristique de X_t est donnée par (1.34), où

$$\psi_{\zeta_t} = -iu\mu_{\zeta_t} + \frac{1}{\zeta_t} \ln(1 - iu\theta_{\zeta_t}\zeta_t + u^2 \frac{\sigma_{\zeta_t}^2}{2} \zeta_t), \quad \zeta_t = 1, 2. \quad (1.37)$$

En reprenant les mêmes séries historiques qu'à la section (1.2.1) et en utilisant la méthodologie d'estimation de paramètres que dans le cas du modèle à changement de régime lognormal, les estimations obtenues sont fournies à la table (1.8).

S&P 500				
MLE = 1123.29637				
$\theta_1 = -0.01554$	$\varsigma_1 = 0.13333$	$\sigma_1 = 0.03219$	$\mu_1 = 0.02566$	$p_{12} = 0.06602$
$\theta_2 = -0.07438$	$\varsigma_2 = 0.07407$	$\sigma_2 = 0.05747$	$\mu_2 = 0.06702$	$p_{21} = 0.13272$

TABLE 1.8 – Estimation des paramètres du modèle à changement de régime variance gamma (RSVG).

Comme on le voit à la figure (1.11), ce modèle rentre bien en adéquation avec les séries historiques de rendements.

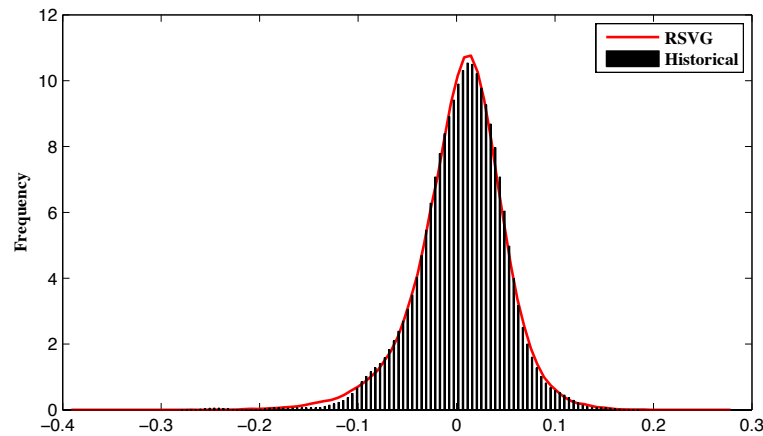


FIGURE 1.11 – Adéquation des distributions des rendements historique et simulée de l'indice boursier américain S&P 500. Les données sur cet indice sont récupérées depuis une base de donnée Bloomberg[®].

1.3.5 Une deuxième extension : le modèle mixte de diffusion à saut de Kou à changement de régimes

Nous proposons une extension du modèle de Kou, le modèle KRS, pour *Kou regime switching model*. Comme précédemment, on considère un sous-jacent représenté par un processus de Lévy X_t , sous la forme exponentielle $S_t = S_0 e^{X_t}$. On suppose de même que X_t transite entre deux régimes suivant une chaîne de Markov ζ dont la matrice de transition est fournie en (4.11), avec $\zeta_t = 1, 2$, où ζ_t est le régime s'appliquant au temps $[t, t + 1[$:

$$\begin{cases} X_{1,t} = \mu_1 t + \sigma_1 W_{1,t} + \sum_{i=1}^{N_t} J_{1,i} \\ X_{2,t} = \mu_2 t + \sigma_2 W_{2,t} + \sum_{i=1}^{N_t} J_{2,i} \end{cases} \quad (1.38)$$

$\mu_\zeta, \sigma_\zeta > 0$, sont respectivement, les paramètres de dérive et de volatilité de la partie diffusive dans les deux régimes. Les processus W_ζ et N et la suite de variables $(J_\zeta,)$ sont supposés indépendants conditionnellement à ζ . On suppose de même que les tailles aléatoires de sauts $(J_{1,i})$ et $(J_{2,i})$ sont (conditionnellement) i.i.d.

La fonction caractéristique de X_t est donnée par (1.34), où

$$\psi_{\zeta_t} = -i\mu_{\zeta_t} u + \frac{\sigma_{\zeta_t}^2}{2} u^2 - \lambda(\phi_{J_{\zeta_t}}(u) - 1), \quad \zeta_t = 1, 2. \quad (1.39)$$

Extension du modèle de Kou

Nous généralisons le modèle de Kou à deux régimes. Conditionnellement à l'état visité par le processus, les sauts suivent toujours une loi exponentielle double asymétrique donnée par :

$$J_{\zeta_t} \stackrel{d}{=} \begin{cases} \eta_{1,\zeta_t}, & \zeta_t \in \{1, 2\}. \\ -\eta_{2,\zeta_t} \end{cases}$$

$p_{1,\zeta} \geq 0, p_{2,\zeta} \geq 0, p_{1,\zeta} + p_{2,\zeta} = 1$ et $\eta_{\zeta,1}, \eta_{\zeta,2}$ sont des variables aléatoires exponentielles de moyennes respectives : $1/\lambda_{1,\zeta_t}$ et $1/\lambda_{2,\zeta_t}$.

La fonction caractéristique conditionnelle associée à la loi des sauts est donnée de la même manière que dans le modèle de Kou :

$$\phi_{J_{\zeta_t}}(u) = E[e^{iuJ} | \zeta_t] = p_{1,\zeta_t} \frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{\lambda_{1,\zeta_t} - iu} + p_{2,\zeta_t} \frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{\lambda_{2,\zeta_t} + iu}.$$

Nous nous assurons de la contrainte sur l'espérance

$$E[e^J | \zeta_t] = \phi_{J_{\zeta_t}}(-i) = p_{1,\zeta_t} \frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{\lambda_{1,\zeta_t} - 1} + p_{2,\zeta_t} \frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{\lambda_{2,\zeta_t} + 1}, \quad (1.40)$$

en vérifiant que $\lambda_{1,\zeta_t} > 1$, $\forall \zeta_t \in \{1, 2\}$, autrement dit, les sauts positifs ne peuvent excéder 100% en moyenne.

Cette fois-ci, une solution semi-explicite est difficilement atteignable. Nous exposerons une approche générale d'évaluation numérique au prochain chapitre. Dans le cadre de cette approche, nous verrons que l'évaluation d'une option sous le modèle KRS se révèle particulièrement simple et performante.

1.4 Couverture en marché incomplet

Dans la théorie traditionnelle d'évaluation d'option de Black-Scholes-Merton, le vendeur d'option peut s'immuniser contre les variations de cours du titre - pouvant engendrer des pertes à l'infini²⁰ - en ajustant en tout instant son portefeuille de telle sorte que sa valeur soit égale à celle de l'option vendue. Le marché est alors dit complet. En d'autres termes, la formule de Black-Scholes nous donne la composition du portefeuille répliquant, composé d'une quantité d'actif sous-jacent et d'actif sans risque qui soient telles que la variation de cours soit contrebalancée par celle en actif sans risque, de telle sorte que celui-ci réplique en tout instant et dans tous les états de la nature l'option. En revanche, les modèles présentés jusqu'ici rejettent l'hypothèse de complétude du marché. En effet, il existe une infinité de mesures Q équivalentes à P : $Q \sim P$, telles que les prix actualisés sont des martingales. Les prix des actifs dérivés vérifiant l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage ne peuvent donc être déterminés de façon unique. Par conséquent le marché est incomplet. Afin de clarifier ce dernier point, reprenons le raisonnement de Merton (1976). Pour cela, supposons qu'un saut de Poisson se produit dans une économie dans laquelle la dynamique réelle de l'actif sous-jacent est modélisée par :

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dZ & \text{s'il n'y a pas de saut} \\ \frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dZ + (Y - 1) & \text{si un saut de Poisson se produit.} \end{cases} \quad (1.41)$$

En effet si le saut Poissonien Y se produisait, le prix du stock passerait de S à SY . Ainsi, l'amplitude moyenne des sauts est donnée par l'espérance mathématique du pourcentage de cette variation : $(SY - S)/S$, encore égale à $Y - 1$. D'autre part, notons que le terme $(-\lambda\kappa)$ compense la perte induite par les sauts.

Considérons une option dont le prix est noté $W = F(S, t)$, écrite sur un tel sous-jacent. Le rendement instantané d'une telle option obéit à une dynamique similaire à celle du sous-jacent en (1.41) :

$$\frac{dW}{W} = (\alpha_W - \lambda\kappa_W)dt + \sigma_W dZ + (Y_W - 1), \quad (1.42)$$

20. Exemple de la vente d'une option d'achat, sans perte de généralité.

où α_W et σ_W^2 représentent respectivement le rendement et la variance instantanés de l'option. $(Y_W - 1)$ représente le pourcentage de variation du prix d'option. En supposant que la fonction $F(S, t)$ est une fonction de classe $C^{2,1}$, l'application du lemme de Itô pour les processus à sauts permet d'écrire :

$$dF = \left[F_t + (\alpha - \lambda\kappa)SF_S + \frac{\sigma^2 S^2}{2}F_{SS} \right] dt + \sigma SF_S dZ + [F(S + S(Y - 1)) - F(S)] dN_t.$$

Les indices de F indiquent les dérivées partielles sur cette fonction. En se référant à (1.42), il vient par identification :

$$\begin{aligned} \alpha_W &= \left[F_t + (\alpha - \lambda\kappa)SF_S + \frac{\sigma^2 S^2}{2}F_{SS} + \lambda E[F(SY) - F(S)] \right] / F(S, t) \\ \sigma_W &= \sigma SF_S / F(S, t). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Composons un portefeuille P constitué des proportions w_1 en actif sous-jacent, w_2 en option et w_3 en actif sans risque, avec $\sum_{i=1}^3 w_i = 1$. Le prix de ce portefeuille évolue selon une dynamique similaire à celle du sous-jacent avec le même paramètre d'arrivée de sauts :

$$\frac{dP}{P} = (\alpha_P - \lambda\kappa_P)dt + \sigma_P dZ + (Y_P - 1). \quad (1.44)$$

En nous référant aux dynamiques (1.41 et 1.42), nous obtenons par identification :

$$\alpha_P = w_1(\alpha - r) + w_2(\alpha_W - r) + r \quad (1.45)$$

$$\sigma_P = w_1\sigma + w_2\sigma_W \quad (1.46)$$

$$Y_P - 1 = w_1(Y - 1) + w_2E[F(SY) - F(S)] / F(S, t) \quad (1.47)$$

Notons que si $\lambda = 0$, alors le rendement du portefeuille peut être rendu sans risque en choisissant $w_1 = w_1^*$ et $w_2 = w_2^*$ tels que $w_1^* + w_2^* = 0$. Ce portefeuille étant sans risque, pour éviter l'absence d'opportunité d'arbitrage, son rendement est égal au taux sans risque. En utilisant, les équations (1.45 et 1.46), on obtient la relation suivante :

$$\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\alpha_W - r}{\sigma_W}, \quad (1.48)$$

En servant de l'équation (1.43, avec $\lambda = 0$) et de (1.48), on obtient aisément l'équation fondamentale de Black et Scholes :

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2}F_{SS} + rSF_S + -rF + F_t = 0.$$

Cependant, remarquons qu'en présence de sauts ($\lambda \neq 0$), le rendement du portefeuille avec les allocations w_1^* et w_2^* n'est plus sans risque. D'ailleurs, l'analyse au plus près de la formule (1.47) montre qu'il n'existe aucun couple (w_1, w_2) qui élimine le risque

de saut ou qui - plus précisément - annule l'équation (1.47) notamment pour $Y_p = 1$. La raison principale est que ce portefeuille est une combinaison linéaire de poids w_i au moment où le prix d'option est une fonction non linéaire de l'actif sous-jacent. Néanmoins Merton propose une stratégie de couverture en delta et la justifie par la détention d'une large quantité d'actifs sous-jacents dont les composantes de diffusion sont corrélées entre elles²¹, au moment où les composantes de sauts sont indépendantes de celles de diffusion et donc diversifiables. En d'autres termes, un large marché de portefeuilles diversifiés comme par exemple les indices boursiers français CAC 40 ou américain S&P 500, ne présenteraient pas de sauts. Une telle approche ne rentre pas en adéquation avec la réalité où l'on observe de grandes variations abruptes résultant - par conséquent - de sauts très corrélés. La réplication n'est pas possible, il faut donc se résoudre à trouver une approximation du flux de paiement final auquel est exposé le vendeur d'option par une stratégie. Ce qui fait l'objet de cette section.

1.4.1 Couverture quadratique : moyenne-variance

Une fois qu'on admet que la réplication comporte un risque, alors surgit le problème de minimisation de risque par le choix d'une mesure de risque appropriée. Bien que le choix de la stratégie de couverture dépend des préférences de l'agent qui met en place cette couverture, notamment de son aversion au risque, l'approche que nous utiliserons ici, s'apparente au choix d'une fonction d'utilité quadratique. D'une manière générale, la couverture quadratique consiste à minimiser la distance L^2 entre le flux de paiement final et la valeur terminale du portefeuille de couverture. Le portefeuille de couverture optimal (s'il existe) est la projection L^2 du payoff sur le sous-espace (linéaire) d'actifs répliquables. En d'autres termes, il s'obtient par la minimisation de l'erreur résiduelle au sens des moindres carrés²². Cependant, le critère de minimisation peut être aussi bien l'erreur de couverture à la maturité T de l'option, qu'à un instant infinitésimal²³ $t + \Delta t$. Ce dernier critère est encore appelé minimisation locale de risque. En utilisant la formule de Itô pour les processus de diffusion à sauts et la relation d'isométrie pour les intégrales stochastiques, Cont et al. (2007) obtiennent le ratio de couverture quadratique suivant pour la part à détenir en actif sous-jacent.

$$\theta_t = \frac{\sigma^2 \frac{\partial F}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(t, S_t e^x) - F(t, S_t)](e^x - 1) \nu(dx)}{\sigma^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1)^2 \nu(dx)}, \quad (1.49)$$

où F représente le prix de l'actif contingent et $\nu(dx)$, la mesure de Lévy associée à X . On peut donc voir que ce ratio est une somme pondérée de deux termes : la sensibilité de l'actif contingent à une variation du cours du titre et la sensibilité moyenne aux sauts de tailles finies. Aussi intuitive que la formule (1.49) peut paraître, il n'en reste pas moins que sous les modèles à sauts, le calcul de ces deux quantités présentent de grandes difficultés. La première est de pouvoir calculer le delta de l'actif, autrement dit, la sensibilité

21. assimilables au risque systémique.

22. d'autant plus que cela revient à minimiser la variance des pertes résiduelles.

23. mesurer donc localement dans le temps.

de l'option à une variation du cours du titre et la deuxième - loin d'être simple - est due à la présence du terme intégral $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t, Se^x) \nu(dx)$. En effet, ce terme est *non local* car celui-ci dépend de toute la solution de $F(t, \cdot)$ et non seulement du comportement local au point S . Sa présence donne lieu à la théorie des équations intégral-différentielles qui se résolvent numériquement avec plus de complexité que celle des équations aux dérivées partielles.

Néanmoins, parce que la mesure de Lévy associée au modèle de Merton est une densité gaussienne pondérée par l'intensité finie de sauts, ce ratio peut être calculé de façon semi-explicite. Nous pourrions alors tirer des conclusions par rapport à la couverture en delta de Merton en marché incomplet. Dans le cadre plus général des processus de Lévy mixtes à sauts, nous suggérons au deuxième chapitre une méthodologie générale, différente de l'approche proposée par Cont et al.

1.4.2 Calcul du ratio de couverture optimal

Considérons un actif contingent de type européen dont le prix est donné sous le modèle de Merton. Le ratio de couverture est alors fourni par la formule suivante :

$$\theta_t = \frac{\sigma^2 \frac{\partial F_M}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{+\infty} [F_M(t, S_t e^x, \varpi) - F_M(t, S_t, \varpi)] (e^x - 1) \nu(dx)}{\sigma^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1)^2 \nu(dx)} \quad (1.50)$$

où F_M est le prix Merton associé à une option européenne qu'on cherche à couvrir et $\nu(dx)$, la mesure de Lévy associée. Elle est donnée par :

$$\nu(dx) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}\right) dx.$$

Comme mentionné plus haut, la formule (1.50) agrège deux principales composantes : le delta de Merton et la deuxième, la sensibilité moyenne aux sauts de tailles finies qu'on explicitera. Le terme au dénominateur s'obtient directement en utilisant la transformée de Laplace et le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dx) = \lambda$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1)^2 \nu_X(dx) = \lambda [e^{2m+2\delta^2} - 2e^{m+\frac{\delta^2}{2}} + 1].$$

1.4.2.1 Le delta de Merton

D'après la formule donnant le prix d'option sous le modèle de Merton,

$$F_M(S, \tau, \varpi) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \left\{ \varpi S_n \mathcal{N}\left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}}\right) - \varpi K e^{-r\tau} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}}\right) \right\},$$

la dérivée par rapport au sous-jacent sous le signe somme, nous permet d'obtenir :

$$\frac{\partial F_M}{\partial S} = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \left\{ \varpi \frac{S_n}{S} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right) \right\}. \quad (1.51)$$

1.4.2.2 Sensibilité moyenne aux sauts de tailles finies de Merton

Considérons d'abord l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, S, \varpi)(e^x - 1) \nu_X(dx) = F_M(t, S, \varpi) \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\delta^2}}}{\sqrt{2\pi\delta^2}} dx.$$

Ainsi, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, S, \varpi)(e^x - 1) \nu_X(dx) = \lambda(e^{m+\frac{\delta^2}{2}} - 1) F_M(t, S, \varpi). \quad (1.52)$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer les composantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, Se^x) \nu_X(dx) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, Se^x)(e^x - 1) \nu_X(dx).$$

Le calcul de ces composantes ne semble pas si immédiat. Il nécessite l'utilité de résultats intermédiaires que nous énonçons. Davantage par clarté que par nécessité, nous différerons en annexe, les preuves détaillées.

Lemme 1.4.1. *Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \delta^2)$ et α et β deux constantes réelles avec $\beta > 0$, alors $\forall \varpi \in \{-1, 1\}$,*

$$E \left[\mathcal{N} \left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta} \right) \right] = \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\alpha + m}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}} \right).$$

Lemme 1.4.2. *Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \delta^2)$ et α et β deux constantes réelles avec $\beta > 0$, alors $\forall \varpi \in \{-1, 1\}$ et $\forall \eta \geq 0$,*

$$E \left[e^{\eta X} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta} \right) \right] = e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\eta \alpha + (\eta m + (\eta \delta)^2)}{\sqrt{(\eta \beta)^2 + (\eta \delta)^2}} \right),$$

ou encore

$$E \left[e^{\eta X} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta} \right) \right] = e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\alpha + m + \eta \delta^2}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}} \right).$$

Ainsi, en vertu des lemmes (1.4.1 et 1.4.2) et en prenant $\eta = 1$, nous avons immédiatement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, Se^x, \varpi) \nu_X(dx) = \lambda F_M(t, Se^{m+\frac{\delta^2}{2}}, \Sigma, \varpi). \quad (1.53)$$

De la même manière pour $\eta = 2$, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, Se^x, \varpi) e^x \nu_X(dx) = \lambda e^{m+\frac{\delta^2}{2}} F_M(t, Se^{m+\frac{3\delta^2}{2}}, \Sigma, \varpi), \quad (1.54)$$

avec : $\Sigma = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$.

La figure (1.12) illustre le ratio de couverture optimale pour une option européenne calculé selon la formule (1.50) en fonction du temps et de la distance à la monnaie. Les paramètres utilisés sont : $K = 1$, $r = 0$, $\sigma = 0.2$, $\lambda = 1$, $m = -0.1$, $\delta = 5\%$ et τ en mois.

D'autre part, pour τ fixé à un an, la figure (1.13) compare ce ratio optimal avec le delta de Merton obtenu selon la formule (1.51). On peut remarquer sans surprise sur ce graphique que dès que $\lambda = 0$ où la composante de sauts disparaît, nous retrouvons donc le delta de Merton. En revanche, plus cette intensité augmente, plus on s'y éloigne, ce qui montre que dans un marché incomplet, l'utilisation de l'allocation en delta est sous-optimale. Dans la table (1.9), nous donnons quelques valeurs numériques comparatives du ratio optimal pour une option européenne d'achat et de vente selon la formule (1.50) par rapport à celle de Merton (1.51). Le prix d'exercice est $K = 98$ et le taux d'intérêt sans risque est fixé à $r = 5\%$. Les paramètres du modèle sont donnés par $\sigma = 0.2$, $\lambda = 1$, $m = -0.1$, $\delta = 5\%$. Les options ont un temps restant avant échéance $\tau = 0.5$.

Conclusion

Le but recherché dans ce chapitre était d'exclure le cadre gaussien dans la modélisation d'actifs risqués. Nous avons donc rappelé quelques processus de Lévy à activité finie et infinie pertinents au regard de la réalité observée et avons noté leur difficulté d'implémentation. Nous avons de même proposé un cadre simple de modélisation d'actifs en présence de modèles avec changement de régime en notant la difficulté liée à la détermination de la distribution du temps de séjour dans un état. Leur performance de calcul nous a permis la suggestion d'un cadre efficace de modélisation ouvrant la voie à notre proposition de deux modèles : un modèle particulier RSVG et le modèle KRS. Nous avons également noté que ce cadre de modélisation était très général et pouvait être utilisé pour de multiples extensions. Le marché étant incomplet, la réplication (couverture) comporte un risque, ce qui donne lieu à un problème de choix de mesure appropriée. Nous avons tout d'abord rappelé le ratio de couverture optimale calculé par Cont et al. (2007) avant de noter la difficulté de mise œuvre lorsqu'on reste dans une large classe de processus de Lévy. De même, si du point de vue des praticiens de la banque ou du secteur de l'assurance, un cadre efficient pour la gestion de risque en présence de discontinuités

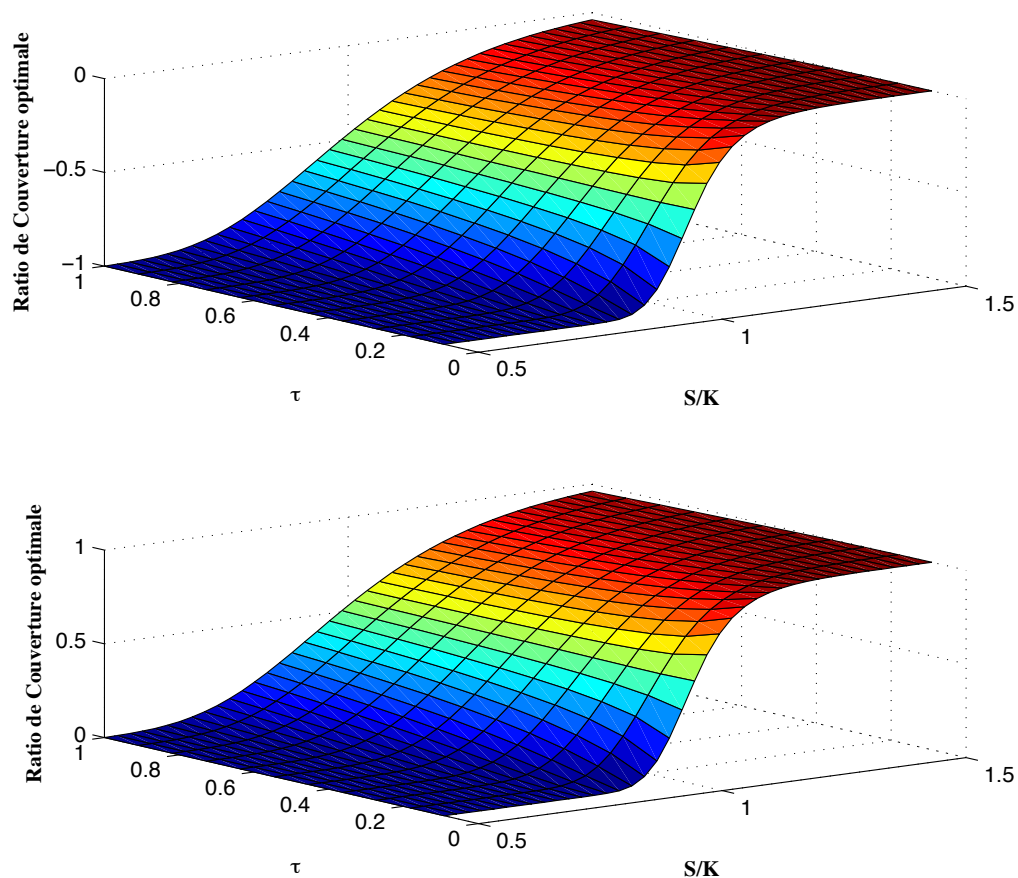


FIGURE 1.12 – Surface du ratio de couverture optimal de Merton pour une option de vente (en haut) et une option d'achat (en bas). Les paramètres utilisés sont : $K = 1$, $r = 0$, $\sigma = 0.2$, $\lambda = 1$, $m = -0.1$, $\delta = 5\%$ et τ en mois.

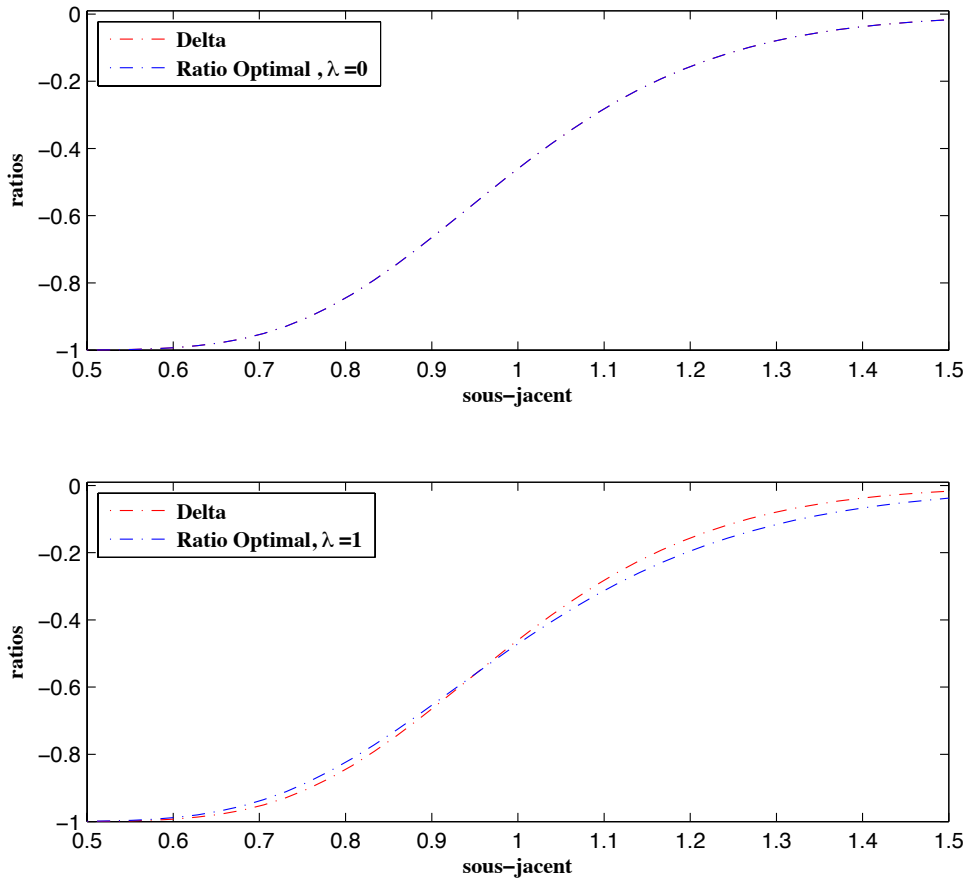


FIGURE 1.13 – Comparaison du ratio de couverture optimal et du delta de Merton pour une option de vente . Les paramètres utilisés sont : $K = 1$, $r = 0$, $\sigma = 0.2$, $m = -0.1$, $\delta = 5\%$ et $\tau = 1$ an .

Option d'achat (soit, $\varpi = 1$)		
Prix du sous-jacent	delta de Merton	ratio optimal
120	0.93071	0.91404
100	0.65346	0.61819
90	0.39178	0.36088
80	0.14725	0.13193

Option de vente (soit, $\varpi = -1$)		
Prix du sous-jacent	delta de Merton	ratio optimal
80	-0.85275	-0.86806
90	-0.60821	-0.63912
100	-0.34653	-0.38181
120	-0.06929	-0.08595

TABLE 1.9 – Comparaison des ratios de couverture optimale calculés selon la formule (1.50) par rapport à ceux obtenus par Merton selon la formule (1.51), sous le modèle à saut gaussien. Les valeurs obtenues sont arrondies au plus près à la cinquième décimale.

de cours financiers relève d'un défi, l'unicité de ce cadre l'est davantage. Nous suggérons au prochain chapitre une méthodologie générale et unie privilégiant l'analyse de Fourier généralisée pour l'évaluation, la couverture, le contrôle et la mesure de risque dans un cadre non-gaussien.

Chapitre 2

Approche unifiée pour l'évaluation, la couverture et la mesure de risques

Introduction

Le but recherché dans ce chapitre est la proposition d'une méthodologie générale pour la gestion de risque en présence de discontinuités de cours financiers. Nous suggérons une approche générale pour l'évaluation, la couverture, le contrôle et la mesure de risque. Celle-ci repose sur l'analyse par transformée de Fourier généralisée dans la droite ligne des travaux de Lewis (2001) et permet d'intégrer le long d'une droite dans un plan complexe parallèle à l'axe réel. Elle aboutit à une formule d'intégration simple, particulièrement adaptée au choix de calcul par transformée de Fourier rapide, rejoignant ainsi de nombreux travaux dont ceux de Stein et Stein (1991), de Bakshi et al. (1997), de Bakshi et Madan (2000) et de Carr et Madan (1998). Nous montrons que cette approche est très performante par rapport aux solutions semi-explicites obtenues auparavant par Merton (1976) et Kou (2002). En outre, parmi les nombreuses approches utilisées dans la littérature pour la couverture et dans un souci d'opérationnalité, notre choix s'est porté sur une minimisation locale de risque utilisée par Boyarchenko et Levendorskiĭ (2002b) et suggérée par Föllmer et Schweizer (1991). Le lecteur peut consulter les travaux pionniers de Föllmer et Sondermann (1986), Schweizer (1991, 1992, 1995), ainsi que ceux de Gouriéroux et al. (1998). Nous montrons que cette approche coïncide avec le ratio de couverture optimale calculé par Cont et al. (2007) avec l'avantage de rester dans une très large classe de processus de Lévy en se ramenant à un temps de calcul très court.

Ce chapitre est constitué de trois sections. La section (2.1) détaille la méthodologie d'évaluation. Nous comparons les résultats obtenus pour les modèles de Lévy à activité finie et infinie ainsi que pour les processus avec changement de régimes présentés au premier chapitre à ceux en sortie de la transformée de Fourier rapide. La puissance de cette approche est également mise en évidence sur les modèles RSVG et KRS. La section (2.2) présente la méthodologie de couverture que nous illustrons sur une large classe de processus. Enfin à la section (2.3), nous montrons que cette même méthodologie peut être étendue au calcul des mesures de risque (cf. Kélani et Quittard-Pinon (2011a)).

2.1 Évaluation

Nous donnons ici, une formule générale d'évaluation d'actifs dérivés européens sous l'hypothèse de processus de Lévy géométrique pour le sous-jacent. D'un point de vue technique, cela veut dire que le processus donnant le prix est modélisé à l'instant t par : $S_t = S_0 e^{X_t}$, avec X un processus de Lévy dont la fonction caractéristique ϕ est :

$$\phi(v) = E[e^{ivX_t}] = e^{-t\psi(v)},$$

où ψ , représente l'exposant caractéristique de X . Supposons que le paiement à la date d'échéance T de l'actif à évaluer est donné par $g(X_T)$ avec g , une fonction positive dont les propriétés seront spécifiées plus tard. En utilisant la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage en temps continu, la valeur au temps t du contrat est donnée par :

$$F(S_t, t) = E_Q[e^{-r\tau} g(X_T) | \mathcal{F}_t] \quad (2.1)$$

avec r , le taux d'intérêt supposé constant dans l'économie et $\tau = T - t$, le temps restant avant échéance. La filtration $\mathcal{F}$ donnant l'information, est générée par X et l'information disponible en t est notée $\mathcal{F}_t$. La condition martingale équivalente spécifie que les prix actualisés sont des martingales sous la mesure Q , il vient donc pour tout $t > 0$:

$$S_0 = E_Q[e^{-rt} S_0 e^{X_t}] = S_0 e^{-rt} e^{-t\psi_Q(-i)},$$

ainsi, nous pouvons déduire la condition mesure martingale suivante pour l'exposant caractéristique ψ_Q :

$$r + \psi_Q(-i) = 0. \quad (2.2)$$

En utilisant l'analyse de Fourier, Boyarchenko et Levendorskiĭ (2002b) donnent une formule d'évaluation que nous présenterons ici. Quittard-Pinon et Randrianarivony (2008) ont mis en lumière que cette approche est plus satisfaisante que celle proposée par Carr et Madan (1998) dans laquelle ils modifient de façon *ad hoc* le prix de l'option en fonction du prix d'exercice pour des raisons de singularité de l'intégrale et donc d'intégrabilité. Commençons d'abord par spécifier la transformée de Fourier $\widehat{g}$ de la fonction de paiement g . Pour cela, supposons qu'il existe un nombre réel δ tel que $e^{\delta x} g(x)$ soit intégrable. Il vient :

$$\widehat{g}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g(x) dx, \quad (2.3)$$

qu'on peut étendre sur la ligne $\Im(u) = \delta$ en sa transformée de Fourier généralisée. Sans perte de généralité, considérons le payoff d'un actif contingent européen donné par la quantité suivante :

$$g(X_T) = [\varpi(S_0 e^{X_T} - K)]^+, \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \varpi &= 1, \text{ pour une option d'achat,} \\ \text{et } \varpi &= -1, \text{ pour une option de vente.} \end{aligned}$$

Dans le cas d'une option d'achat ($\varpi = 1$) de prix d'exercice K , la transformée de Fourier associée à g s'écrit,

$$\widehat{g}(u) = S_0 \left[\frac{e^{x(1-iu)}}{1-iu} \right]_{\ln(K/S_0)}^{+\infty} - K \left[\frac{e^{-iux}}{1-iu} \right]_{\ln(K/S_0)}^{+\infty}.$$

Elle est donc bien définie si et seulement si $\Im(u) = \delta < -1$. Le même raisonnement pour une option de vente ouvre la voie à la généralisation suivante :

$$\widehat{g}(u) = \frac{K e^{-iu \ln(K/S_0)}}{(-iu)(-iu+1)}, \quad (2.5)$$

avec la bande de régularité :

$$\begin{aligned} \delta &< -1, \quad \text{pour } \varpi = 1 \\ \delta &> 0, \quad \text{pour } \varpi = -1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.1 Formule d'évaluation

Les prix actualisés étant des Q -martingales, il vient sous Q :

$$\begin{aligned} F(S_t, t) &= e^{-r\tau} E[g(X_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r\tau} E[g(X_T - X_t + X_t) | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

X étant un processus de Markov,

$$F(S_0 e^x, t) = e^{-r\tau} E[g(X_T - X_t + X_t) | X_t = x].$$

Les accroissements du processus étant indépendants et stationnaires, on a :

$$F(S_0 e^x, t) = e^{-r\tau} E[g(X_\tau + x)].$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse,

$$\begin{aligned} F(S_0 e^x, t) &= e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi} E \left[\int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iu(X_\tau+x)} \widehat{g}(u) du \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} e^{-r\tau} E[e^{iuX_\tau}] \widehat{g}(u) du \\ &= \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} e^{-r\tau} E[e^{iuX_\tau}] \frac{e^{-iu \ln(K/S_0)}}{(-iu)(-iu+1)} du. \end{aligned}$$

En regroupant les termes en x , il vient alors :

$$F(S_0 e^x, t) = \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{-r\tau} E[e^{iuX_\tau}] \frac{e^{iu(x-\ln(K/S_0))}}{(-iu)(-iu+1)} du.$$

Avec $x = \ln(S/S_0)$ et $x' = x - \ln(K/S_0)$, il résulte que $x' = \ln(S/K)$. Ainsi,

$$F(S_0 e^x, t) = \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux'} \frac{e^{-\tau r} E[e^{iuX_\tau}]}{(-iu)(-iu+1)} du,$$

que nous pouvons réécrire :

$$F(S_0 e^x, t) = \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux'} \frac{e^{-\tau r} \phi_{X_\tau}(u)}{(-iu)(-iu+1)} du,$$

ou en terme de son exposant caractéristique :

$$F(S_0 e^x, t) = \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi(u))}}{(-iu)(-iu+1)} du. \quad (2.7)$$

Le changement de variable $u \rightarrow u - i\delta$, nous permet de réécrire la formule (2.7) comme suit :

$$F(S_t, t) = K \frac{1}{2\pi} e^{-\delta x'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi(u+i\delta))}}{(-iu+\delta)(-iu+\delta+1)} du. \quad (2.8)$$

Cette formule donne le prix d'option associé au flux de trésorerie (2.4) pour une option d'achat ou de vente. La seule différence réside dans la contrainte sur le contour d'intégration (2.6). Remarquons que cette parité peut être aussi retrouvée en utilisant le théorème de résidu dont l'application permet d'obtenir la relation classique de parité call-put :

$$P(S_t, t) - C(S_t, t) = K e^{-r\tau} - S_t. \quad (2.9)$$

Notons que le changement de contour d'intégration (2.6) se fait au prorata du facteur $K e^{-r\tau} - S_t$. Comme le souligne Lee (2004), ces alternatives permettent de garantir une précision des algorithmes d'évaluations utilisés.

2.1.2 Calcul des sensibilités

La dérivée partielle $\partial F / \partial S_t$, appelée coefficient delta Δ , permet de mesurer la sensibilité de l'actif contingent à une variation du cours du titre. Elle s'obtient par :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial F}{\partial S_t} \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left\{ K \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi(u))}}{(-iu)(-iu+1)} du \right\}. \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$\Delta = K \frac{1}{2S\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi(u))}}{iu-1} du. \quad (2.10)$$

En utilisant le changement de variable $u \rightarrow u - i\delta$, on réécrit (2.10) :

$$\Delta = K \frac{1}{2S\pi} e^{-\delta x'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi(u+i\delta))}}{iu - \delta - 1} du. \quad (2.11)$$

Ce coefficient est positif pour une option d'achat puisqu'il est d'autant plus intéressant d'acquérir l'action au prix K que le titre sur le marché est élevé. Cette dérivée permet par ailleurs d'ajuster le risque d'un portefeuille P composé d'options C et d'actions S . Considérons pour cela un investisseur ayant dans son portefeuille N_S actions et ayant une position courte sur N_C options. En cas de variation dS de S , celle du portefeuille risqué dP est :

$$dP = N_S dS - N_C \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) dS.$$

Il est donc possible de choisir²⁴ N_C de façon à couvrir le portefeuille (pour $dP = 0$). Si par exemple l'option a un delta égal à 0.5, il suffira de vendre deux options d'achat pour couvrir la détention d'une action. Ceci étant, la notion de dérivée partielle est une notion locale ; pour deux prix S_1 et S_2 , les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial S}(S_1)$ et $\frac{\partial F}{\partial S}(S_2)$ seront différentes et le coefficient delta évoluera avec le cours du titre support. On utilise alors un second paramètre (coefficient gamma Γ), pour mesurer la sensibilité de la valeur du portefeuille à une variation du delta. Ce coefficient est défini comme la dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}$ de l'actif contingent par rapport à S .

$$\Gamma = \frac{\partial F}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S},$$

il vient :

$$\Gamma = K \frac{1}{2\pi S^2} e^{-\delta x'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} e^{-\tau(r+\psi(u+i\delta))} du. \quad (2.12)$$

Une remarque est de mise. Le calcul des dérivés énièmes - sous réserve de leur existence - est indépendant de la structure particulière associée à la fonction caractéristique. Elles sont donc *libres* du modèle considéré et peuvent être aisément obtenues.

2.1.3 Implémentation Numérique

La transformée de Fourier généralisée nous donne des formules d'évaluation pouvant être écrites sous la forme

$$f(x, t) = \varphi_1(x, \delta) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \varphi_2(u, \delta) du. \quad (2.13)$$

Cette formule ouvre la voie au choix de calcul numérique par transformée de Fourier rapide (FFT) de Cooley et Tukey (1965). Elle permet d'obtenir N résultats à partir de N points en un temps $o(N \log_2(N))$. Pour cela, nous calculons l'intégrale en utilisant

24. En supposant que le marché est complet.

la méthode des rectangles avec un pas d'intégration égal à η . Soit N , un entier positif puissance de 2. Posons :

$$u_j = u_{min} + \eta(j-1) \text{ pour } j = 1, \dots, N \text{ avec } u_{min} = -\frac{N\eta}{2}.$$

Ainsi l'intégrale en (2.13) devient :

$$f(x, t) \approx \varphi_1(x, \delta) \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N e^{ixu_j} \varphi_2(u_j, \delta) \eta. \quad (2.14)$$

Nous pouvons aussi découper le domaine des x avec un espacement régulier de taille λ . Il vient donc,

$$x_k = x_{min} + \lambda(k-1) \text{ pour } k = 1, \dots, N,$$

où x_{min} est choisi de manière à ce que tous les contrats à évaluer soient couverts par les x_k . Ainsi, la formule (2.13) s'écrit :

$$f(x, t) \approx \varphi_1(x_k, \delta) e^{iu_{min}\lambda(k-1)} \times \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N e^{i\lambda\eta(j-1)(k-1)} e^{ix_{min}u_j} \varphi_2(u_j, \delta) \eta. \quad (2.15)$$

La transformée de Fourier rapide retourne N valeurs pour $f(x, t)$. La condition de réciprocity des paramètres $\lambda\eta = \frac{2\pi}{N}$ imposée par la FFT, oblige à faire un compromis entre le pas d'intégration η et la variation entre deux contrats successifs λ . Pour la suite, nous prenons $N = 4096$ et $\eta = 0.25$ pour le pas d'intégration.

2.1.4 Une première application

Dans cette section, nous revisitons les modèles mixtes de diffusion à sauts de Merton et de Kou. Nous comparerons la rapidité et la précision des résultats en sortie de la FFT aux formules proposées par ces auteurs. De même, nous étendons le champ d'application aux processus à activité infinie.

2.1.4.1 Retour sur le modèle de Merton

Dans le modèle mixte de diffusion à sauts de Merton, les sauts sont gaussiens et la fonction caractéristique associée aux sauts est :

$$\phi_J = E[e^{iuJ}] = e^{imu - \frac{1}{2}\delta^2 u^2}. \quad (2.16)$$

L'exposant caractéristique est donné par (1.5). Ce qui nous permet d'obtenir la condition Q -martingale :

$$r + \psi_Q(-i) = r - \mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(e^{m+\frac{1}{2}\delta^2} - 1) = 0.$$

Ainsi, on choisit la dérive μ telle que :

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(e^{m+\frac{1}{2}\delta^2} - 1).$$

La table (2.1) donne les prix en sortie de la transformée de Fourier rapide du modèle de Merton. Les dernières colonnes informent sur les erreurs absolues constatées par rapport à la formule semi-explicite (1.11).

Modèle à sauts gaussiens de Merton			
$S = 100, \tau = 0.5, r = 5\%, \sigma = 0.16, \lambda = 1, m = -0.2, \delta = 5\%$			
Option d'achat (soit, $\varpi = 1$)		Option de vente (soit, $\varpi = -1$)	
Prix d'exercice	Erreur	Prix d'exercice	Erreur
80	1.06581e-14	120	3.55271e-15
90	1.06581e-14	100	6.21724e-15
100	7.10542e-15	90	3.10862e-15
120	6.21724e-15	80	2.22044e-16

TABLE 2.1 – Erreurs absolues constatées en évaluant via la transformée de Fourier rapide par rapport à la formule semi-explicite de Merton.

2.1.4.2 Retour sur le modèle de Kou

Quant au modèle de Kou, la loi des sauts est donnée par une exponentielle double asymétrique dont la fonction caractéristique s'écrit :

$$\phi_J = E[e^{iuJ}] = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + iu}. \quad (2.17)$$

De la même manière que dans le cas précédent, la condition martingale se déduit de (1.5 et de 2.2), ce qui nous amène à choisir sous Q , la dérive μ telle que :

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - 1} - \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1 \right).$$

Les résultats en sortie de la FFT associée au modèle de Kou sont renseignés à la table (2.2). Les erreurs sont constatées en utilisant la formule semi-explicite (1.20), la relation de parité (1.21) et en utilisant les mêmes séries de contrats.

Modèle à sauts exponentiels doubles asymétriques de Kou $S = 100, \tau = 0.5, r = 5\%, \sigma = 0.16, \lambda = 1, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5$ et $p = 0.4$			
Option d'achat		Option de vente	
Prix d'exercice	Erreur	Prix d'exercice	Erreur
80	1.77635e-14	120	7.10542e-15
90	5.32907e-15	100	2.04281e-14
100	1.50990e-14	90	2.22044e-15
120	4.44089e-16	80	8.65973e-15

TABLE 2.2 – Erreurs absolues constatées en évaluant via la transformée de Fourier rapide par rapport à la formule semi-explicite de Kou.

2.1.4.3 Retour sur le modèle Variance Gamma

Dans le cas du modèle VG, nous rappelons l'exposant caractéristique associé au processus X :

$$\psi(u) = -iu\mu + \frac{1}{\varsigma} \ln(1 - iu\theta\varsigma + u^2 \frac{\sigma^2}{2}\varsigma).$$

Avec la condition martingale donnée en (2.2), nous choisissons la dérive μ telle que :

$$\mu = r + \frac{1}{\varsigma} \ln(1 - \theta\varsigma - \frac{\sigma^2}{2}\varsigma). \quad (2.18)$$

Les résultats en sortie de la FFT sont fournis à la table (2.3), on y note également les prix obtenus en recourant aux simulations de type Monte Carlo après génération de 15 000 trajectoires. Nous utilisons à des fins numériques, les paramètres fournis à la table (1.3) à l'exception du paramètre de tendance obtenu sous la mesure martingale équivalente ci-dessus. Comme on le voit à la figure (2.1), ce modèle explique aussi le *smile* de volatilité observé sur les marchés.

2.1.4.4 Retour sur le modèle CGMY/KoBoL

Considérons la forme générale des processus de Lévy géométriques en (1.4), avec X_t , un processus Lévy à sauts purs de type *CGMY*. De la même manière, la condition martingale se déduit de l'exposant caractéristique associé à la loi marginale de X_t obtenu en (1.30) et de la condition martingale (2.2). Ainsi, on choisit sous Q , une dérive "correctrice" ω telle que :

$$\omega = r - C \Gamma(-Y) [(M-1)^Y - M^Y + (G+1)^Y - G^Y].$$

Madan et Yor (2006) obtiennent les valeurs suivantes en calibrant ce modèle au marché.

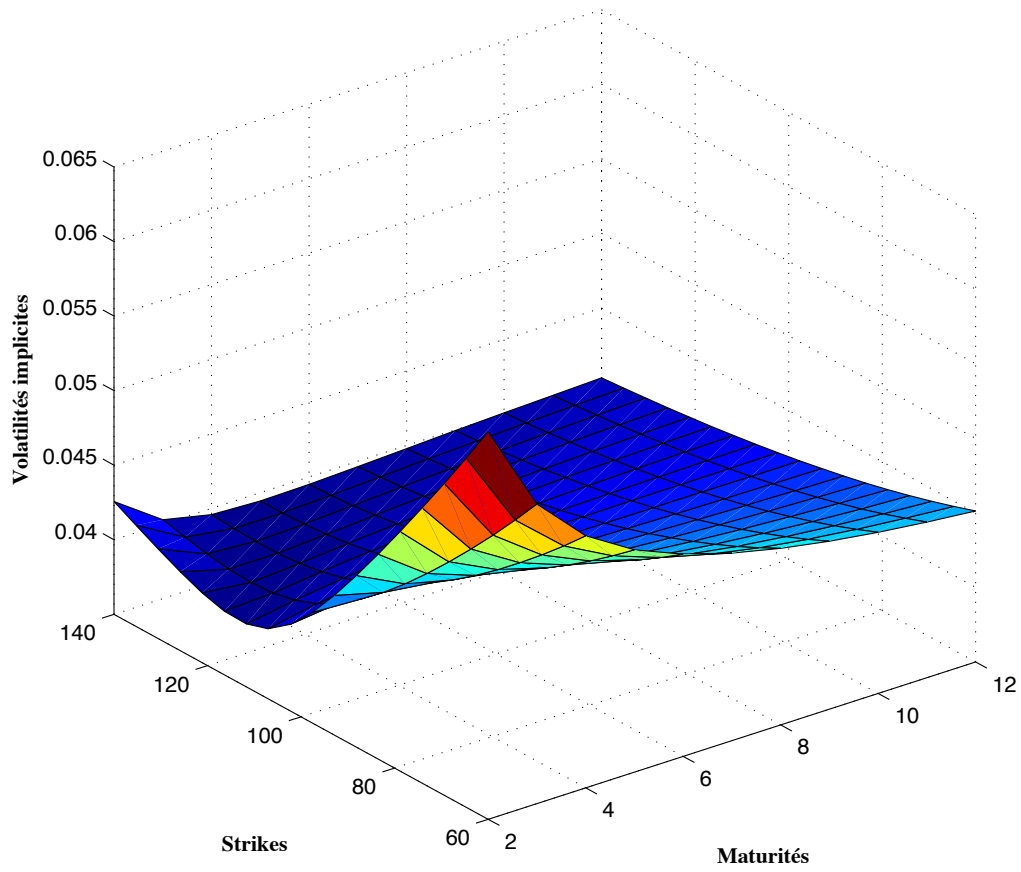


FIGURE 2.1 – Surface de volatilité implicite sous le modèle Variance Gamma pour une option d’achat, les paramètres utilisés sont donnés à la table (1.3).

Modèle Variance Gamma $S = 100, \tau = 0.5, r = 5\%$					
Option d'achat			Option de vente		
Prix d'exercice	FFT	Simulés	Prix d'exercice	FFT	Simulés
80	21.97520	21.97500	120	17.03719	17.04190
90	12.22334	12.21947	100	0.36858	0.36787
100	2.83759	2.83546	90	0.00123	0.00130
120	2.46027e-06	0	80	1.06056e-06	0

TABLE 2.3 – Évaluation obtenue par transformée de Fourier rapide et par simulation de type Monte Carlo. Les paramètres utilisés sont fournis à la table (1.3).

Calibration du modèle <i>CGMY</i>				
S&P 500				
$C =$	1	$G =$	5	$M =$ 10 $Y =$ 0.5

TABLE 2.4 – Paramètres obtenus après calibration par Madan et Yor (2006) du modèle *CGMY* sur des options écrites sur l'indice boursier américain S&P 500.

Par ailleurs, ces auteurs fournissent un algorithme pour la simulation de ce type de processus. Cet algorithme repose sur la subordination brownienne couplée à la méthode de rejet de Rosinski qu'on implémente afin de corroborer les prix d'options en sortie de la transformée de Fourier rapide. Ces résultats sont obtenus à la table (2.5). D'autre part, la surface de volatilité implicite est représentée en (2.2). Celle-ci participe aussi de son adéquation avec les observations relevées sur les marchés.

Aussi, remarquons que les distributions attachées aux marginales du processus peuvent être obtenues par inversion numérique, i.e., par la méthode de transformée de Fourier rapide. Afin de faciliter la lecture du texte, une méthodologie simple est détaillée à l'annexe (A.4), celle-ci se veut générale et peut être utilisée pour tout processus dont la fonction caractéristique est bien définie. Comme on le voit à la figure (2.3), les paramètres G et M quantifient l'asymétrie et comme on l'avait dit, si $G < M$ et $G > M$, la densité est respectivement biaisée à gauche et à droite. Cet aspect est illustré par la figure (2.3). Ceci est dû à l'écrasement par les facteurs exponentiels dans la densité de Lévy (1.28).

2.1.5 Une deuxième application

Nous revisitons ici les modèles à changements de régimes que nous avons laissés en suspens à la section (1.3). On postule que X obéit à un processus modulé à deux états,

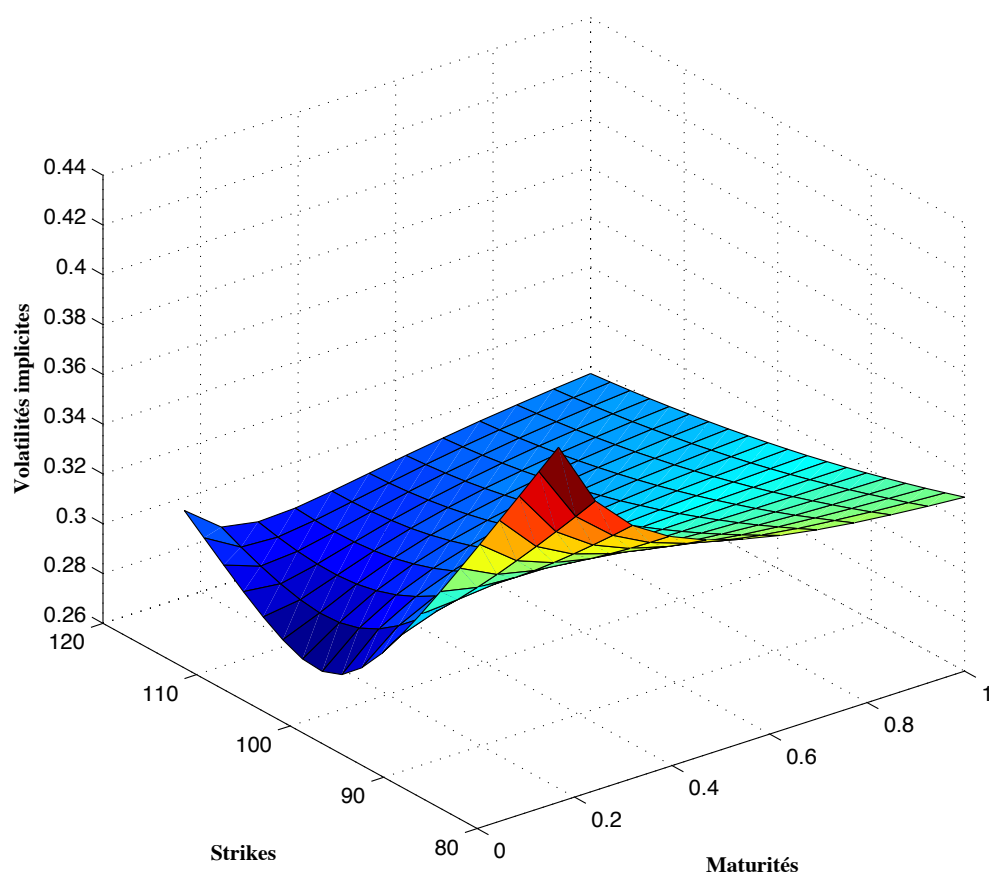


FIGURE 2.2 – Surface de volatilité implicite sous le modèle CGMY pour une option d'achat, les paramètres utilisés sont fournis à la table (2.4).

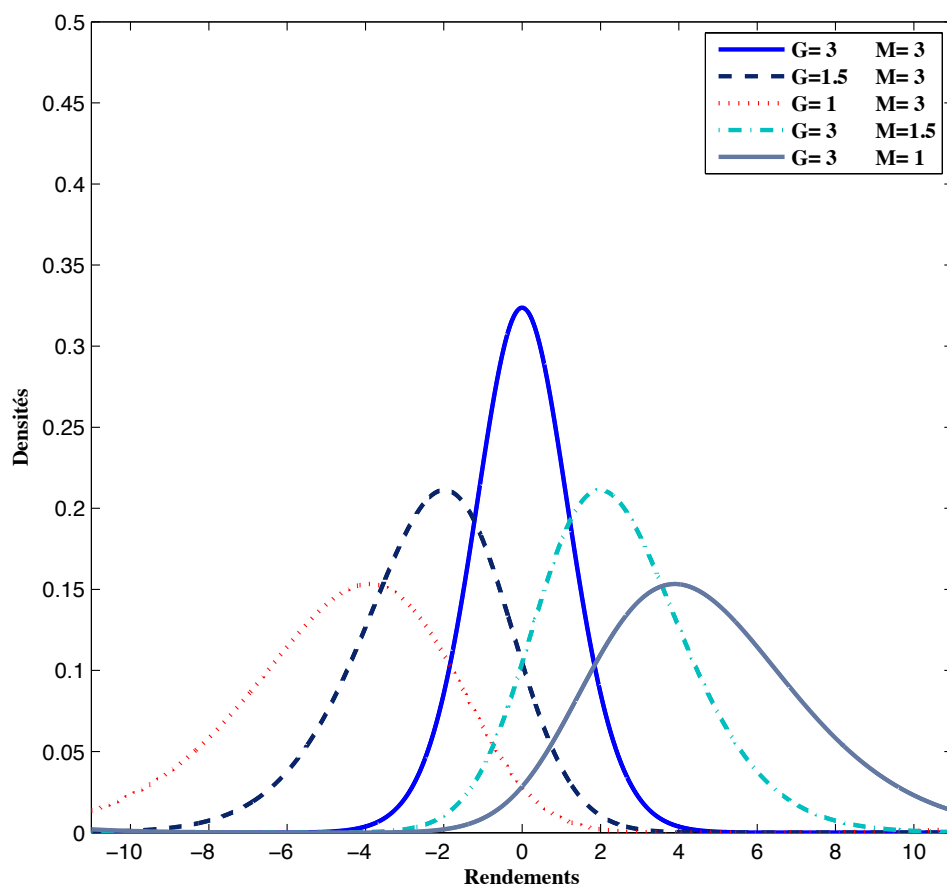


FIGURE 2.3 – Densité obtenue sous le modèle CGMY par transformée de Fourier rapide. Les paramètres utilisés sont $T = 1$, $C = 7$ et $Y = 0.1$.

Modèle <i>CGMY</i>					
$S = 100, \tau = 1, r = 5\%$					
Option d'achat			Option de vente		
Prix d'exercice	FFT	Simulés	Prix d'exercice	FFT	Simulés
80	27.16727	27.15803	120	20.94103	20.94925
90	20.29058	20.28270	100	9.70354	9.71044
100	14.58060	14.57402	90	5.90123	5.90681
120	6.79350	6.78825	80	3.26563	3.26985

TABLE 2.5 – Évaluation obtenue par transformée de Fourier rapide et par simulation de type Monte Carlo après génération de 50 000 trajectoires.

régi par une chaîne de Markov ζ . Nous supposons par convention qu'au temps t , $\zeta_t = 1$ si le régime est dans l'état 1 et $\zeta_t = 2$ dans l'état 2. L'une des difficultés rencontrées pour ces types de modèles est de trouver la condition martingale équivalente telle que les prix actualisés soient des Q -martingales. En effet, on cherche pour tout $t > 0, t \leq T$, les prix tels que :

$$S_0 = E_Q[e^{-rt} S_t] = S_0 E \left[E_Q[e^{-rt} e^{X_t} | C] \right].$$

Ce qui revient à trouver :

$$S_0 = S_0 \sum_{c=0}^t e^{-rt} \exp \left\{ -C\psi_1(-i) - (t-C)\psi_2(-i) \right\} \Pr[C = c],$$

où ψ_{ζ_t} représente l'exposant caractéristique du processus X_t sachant qu'il est dans l'état ζ_t . De l'égalité précédente, on peut déduire la condition suivante :

$$\sum_{c=0}^t e^{-rt} \exp \left\{ -C\psi_1(-i) - (t-C)\psi_2(-i) \right\} \Pr[C = c] = 1, \quad \forall t.$$

Comme on l'avait noté, pour tout $t \leq T$, la quantité : $\sum_{c=0}^t \Pr[C = c]$ est exactement égale à un. On note que la condition martingale équivalente n'est pas unique, un choix raisonnable est alors donné par la contrainte suivante sur l'exposant caractéristique : $\forall C \in \{0, 1, \dots, t\}$,

$$-rt - C\psi_1(-i) - (t-C)\psi_2(-i) = 0. \quad (2.19)$$

2.1.5.1 Retour sur le modèle à changement de régime lognormal

Sous le modèle RSLN de Hardy, la fonction caractéristique de X_t est donnée par (1.34) où ψ_{ζ_t} est :

$$\psi_{\zeta_t} = -i\mu_{\zeta_t}u + \frac{\sigma_{\zeta_t}^2}{2}u^2, \quad \zeta_t = 1, 2. \quad (2.20)$$

Avec la condition martingale donnée en (2.19) et en reprenant les mêmes séries de contrats qu'en (1.7), les prix en sortie de la FFT associés au modèle RSLN sont fournis à la table (2.6).

Modèle à changement de régime lognormal de Hardy $S = 100, \tau = 1, r = 6\%$, par an			
Option d'achat (soit, $\varpi = 1$)		Option de vente (soit, $\varpi = -1$)	
Prix d'exercice	Erreur	Prix d'exercice	Erreur
80	0	120	1.06581e-14
90	7.10542e-15	100	2.66453e-15
100	1.77635e-15	90	1.55431e-15
120	1.99840e-15	80	3.60822e-16

TABLE 2.6 – Erreurs absolues constatées en évaluant via la transformée de Fourier rapide par rapport à la formule (1.35) en utilisant les mêmes séries de contrats.

Comme nous pouvons le remarquer, cette condition martingale équivalente explique les prix obtenus par Hardy (2001). Ce résultat sera celui que nous utiliserons pour l'obtention des prix en l'absence d'opportunité d'arbitrage sous les modèles RSVG et KRS que nous suggérons.

2.1.5.2 Retour sur le modèle RSVG

En choisissant la condition équivalente martingale donnée en (2.19) sur l'exposant caractéristique (1.37), nous obtenons les résultats suivants en sortie de la FFT, nous controlons ces résultats avec des simulations de type Monte Carlo obtenues pour 30 000 trajectoires. Nous utilisons à des fins d'illustrations, les paramètres fournis en (1.8) à l'exception du paramètre de dérive qui est donné sous Q par la mesure martingale équivalente.

Modèle RSVG $S = 100, \tau = 1, r = 5\%$					
Option d'achat			Option de vente		
Prix d'exercice	FFT	Simulés	Prix d'exercice	FFT	Simulés
80	24.89582	24.89680	120	14.86444	14.87576
90	16.28058	16.28658	100	3.34412	3.34416
100	9.16766	9.18652	90	1.03939	1.03921
120	1.85270	1.849991	80	0.2369	0.23678

TABLE 2.7 – Évaluation obtenue par transformée de Fourier rapide et par simulation de type Monte Carlo.

2.1.5.3 Retour sur le modèle KRS

De la même manière, la condition martingale se déduit de (2.19, 1.39 et de 1.40), ce qui nous amène à choisir sous la mesure Q , la dérive $\mathcal{A}$ telle que : $\forall C \in \{0, 1, \dots, t\}$,

$$\mathcal{A}(C) = rt - C \frac{\sigma_1^2}{2} - (t - C) \frac{\sigma_2^2}{2} - \lambda [C (\phi_{J_1}(-i) - 1) + (t - C) (\phi_{J_2}(-i) - 1)],$$

avec :

$$\mathcal{A}(C) = C\mu_1 + (t - C)\mu_2.$$

Les résultats sont donnés en (2.8). Ces résultats sont de même contrôlés par simulation après génération de 15 000 trajectoires du support sous-jacent. Pour l'illustration, nous utilisons les paramètres de volatilités et de probabilités de transitions fournis à la table (1.6), ajoutés aux composantes de sauts suivantes :

Régime 1				Régime 2			
λ	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{2,1}$	$p_{1,1}$	λ	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{2,2}$	$p_{1,2}$
10	50	25	0.4	10	5	10	0.4

Le modèle KRS exhibe certaines caractéristiques souvent observées dans la pratique, en l'occurrence, l'asymétrie de la volatilité implicite. Bien plus encore, on remarque une persistance de la convexité pour de maturités longues, ce qui est dû à l'introduction d'une composante de volatilité stochastique imputable au processus de changement de régime. Cependant, on peut remarquer que ce type d'observation ne peut être faite sur des modèles mixtes de diffusion à sauts qui, comme on l'a vu, se contentent de reproduire une forte convexité pour des options de maturités courtes. La raison principale est que le théorème de la limite centrale montre que pour une option de maturité T , telle que

Modèle KRS					
$S = 100, \tau = 1, r = 5\%$					
Option d'achat			Option de vente		
Prix d'exercice	FFT	Simulés	Prix d'exercice	FFT	Simulés
80	26.82560	26.80944	120	21.33020	21.32662
90	19.76793	19.74159	100	9.21344	9.22214
100	14.09050	13.99772	90	5.37858	5.41183
120	7.182677	7.17012	80	2.92395	2.91527

TABLE 2.8 – Évaluation obtenue par transformée de Fourier rapide et par simulation de type Monte Carlo.

$T \rightarrow \infty$, l'agrégation des rentabilités calculées par exemple sur une fréquence journalière, tend vers une distribution normale et comme conséquence, les prix d'option deviennent proches de ceux en sortie du modèle de Black-Scholes. Ainsi, la volatilité implicite sous-jacente tend à devenir constante comme on le voit pour les processus à saut gaussien ou à saut exponentiel double asymétrique ou encore pour les processus à activité infinie. En revanche, les modèles à changement de régime comme à volatilité stochastique, ralentissent ce type de phénomène. En effet, comme on le note à la figure (2.4), le modèle KRS présente l'avantage d'une forte convexité asymétrique aux maturités $\tau \rightarrow 0$ (due à la composante de saut) et une quantité importante de convexité pour $\tau \rightarrow 12$ mois (due au changement de régime). D'autre part, notons que la densité associée au modèle KRS n'existe pas en formule fermée à notre connaissance. Mais en utilisant sa fonction caractéristique et en recourant aux techniques d'inversion numériques²⁵, on l'obtient aisément. Ainsi, en reprenant les mêmes paramètres pour les composantes de sauts utilisés par Kou²⁶, les caractéristiques leptokurtiques sont aussi évidentes par rapport au modèle à changement de régime lognormal (RSLN) de Hardy (en utilisant les mêmes moyenne et variance). Le pic de la densité est autour de 47 au moment où celui du RSLN avoisine 32. De même, les queues sont plus épaisses et participent d'un ensemble de caractéristiques intrinsèques aux faits empiriques souvent relevés dans la pratique.

2.2 Couverture

L'approche que nous exposons ici repose sur l'utilisation des transformées de Fourier généralisées. Elle est dans la droite ligne de l'approche de Boyarchenko et Levendorskiĭ (2000) dans le cadre plus général de processus de Lévy réguliers de type exponentiel que nous adapterons aux modèles mixtes de diffusion à saut. Conceptuellement, en restant

25. La méthodologie est détaillée en annexe (A.4).

26. Page 1091, plus précisément, on prend : $\Delta t = 1/252$, $\lambda=10$ dans les deux régimes, $1/\lambda_{1,1} = 1/\lambda_{1,2} = 2\%$, $1/\lambda_{2,1} = 1/\lambda_{2,2} = 4\%$, $p_{1,1} = p_{1,2} = 0.3$.

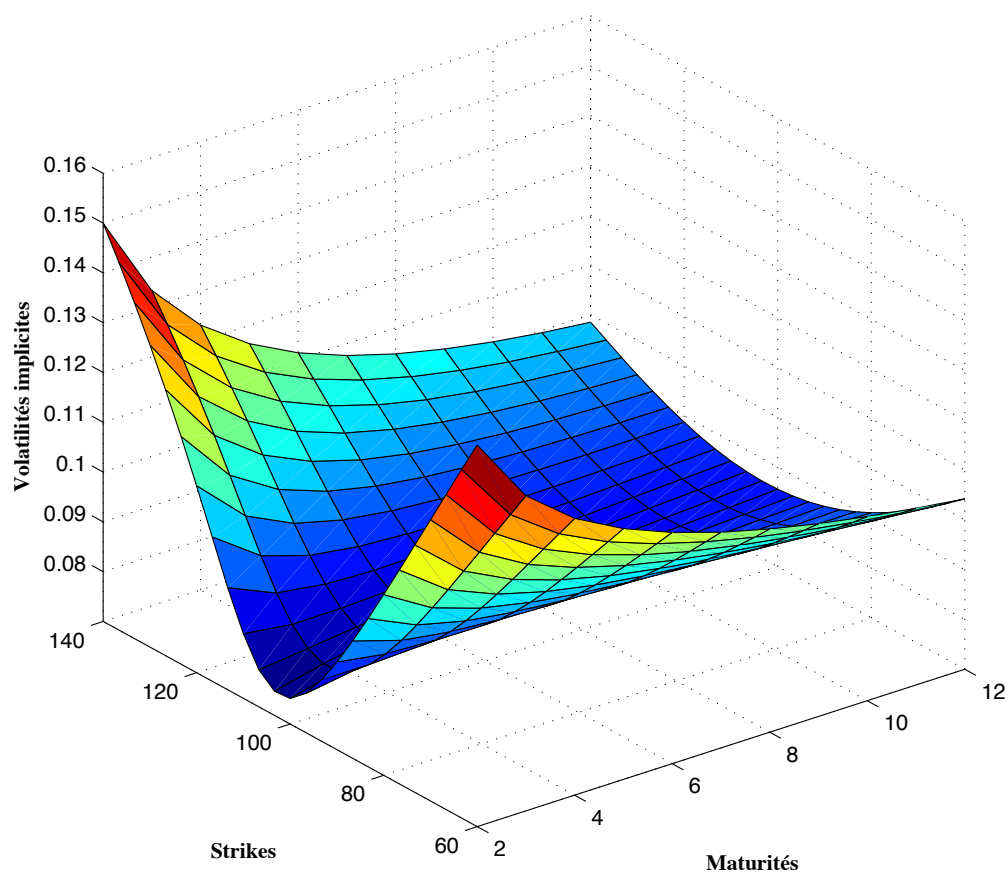


FIGURE 2.4 – Surface de volatilité implicite induite par le modèle KRS.

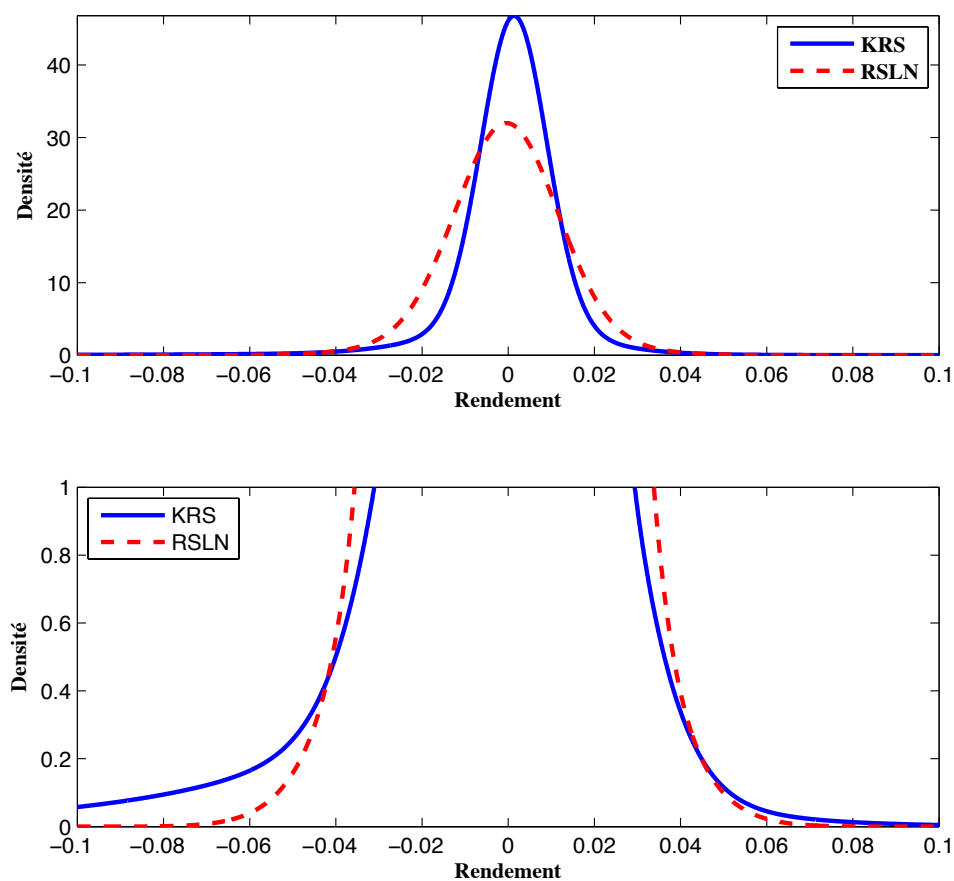


FIGURE 2.5 – Densité obtenue sous le modèle KRS par inversion numérique par rapport à celle associée au modèle RSLN de Hardy, avec les mêmes moyenne et variance.

dans une large classe de processus de Lévy de type exponentiel, l'utilisation des transformées de Fourier généralisées est beaucoup plus satisfaisante que l'approche utilisée par Cont et al. (2007). En effet, leur approche aboutit à une formule générale dont la résolution - outre le cas gaussien de Black-Scholes ou de celui de Merton - fait appel à la théorie des équations intégral-différentielles qui se résolvent avec plus de complexité que celle des équations aux dérivées partielles. En reprenant les travaux de Boyarchenko et Levendorskii (2002b), la méthodologie suggérée ici, repose sur l'utilisation des opérateurs pseudo-différentiels dont une brève présentation ouvrira la voie à la méthodologie générale pour le calcul du ratio de couverture optimale en marché incomplet. La minimisation de l'erreur résiduelle est faite sous la mesure martingale et au sens des moindres carrés. Le critère retenu est tel que la variance du portefeuille risqué à un instant infinitésimal $t + \Delta t$ est la plus minimale : minimisation locale de risque.

2.2.1 Générateur infinitésimal et Opérateur pseudo-différentiel

Considérons une fonction f deux fois continûment dérivable. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une limite continue :

$$(Lf)(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[f(x + X_t)] - f(x)}{t}, \quad (2.21)$$

avec L appelé générateur infinitésimal. On peut montrer que $Lf(x)$ admet une représentation en termes de triplet caractéristique :

$$(Lf)(x) = \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \gamma f'(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x+y) - f(x) - 1_{\{|y| \leq 1\}}(y) f'(x) \right) \nu(dy).$$

Notons que l'exposant caractéristique de X_t a une représentation similaire :

$$\psi(u) = \frac{\sigma^2}{2} u^2 - i\gamma u - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{iux} - 1 - iux 1_{\{|x| \leq 1\}}(x) \right) \nu(dx).$$

On obtient alors par identification :

$$Le^{ixu} = -\psi(u)e^{ixu}. \quad (2.22)$$

D'autre part, nous savons que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction f est donnée par :

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} f(x) dx.$$

L'inversion de cette transformée nous permet de déduire f , il résulte :

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} \hat{f}(u) du. \quad (2.23)$$

En appliquant (2.22) à (2.23), on obtient la formule suivante :

$$Lf(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} (-\psi(u)) \hat{f}(u) du.$$

En utilisant la notation des opérateurs pseudo-différentiels, cette dernière équation se réécrit :

$$Lf(x) = -\psi(D_x),$$

où L est dit opérateur pseudo-différentiel de symbole $-\psi$. De même, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit ν , une fonction deux fois continûment dérivable. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\psi(D_x)e^x\nu(x) = e^x\psi(D_x - i)\nu(x).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \psi(D_x)e^x\nu(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \widehat{e^x\nu(x)}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^x \nu(x) dx \right) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi+i)x} \nu(x) dx \right) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \hat{\nu}(\xi + i) e^{ix\xi} d\xi, \end{aligned}$$

avec le changement de variable : $\zeta = \xi + i$, il vient d'abord

$$\psi(D_x)e^x\nu(x) = \frac{e^x}{2\pi} \int_{-\infty+i}^{+\infty+i} \psi(\zeta - i) \hat{\nu}(\zeta) e^{ix\zeta} d\zeta.$$

Il vient ensuite

$$\psi(D_x)e^x\nu(x) = e^x\psi(D_x - i)\nu(x),$$

ce qui conclut la preuve. □

2.2.2 Couverture quadratique : minimisation locale du risque

Considérons un investisseur disposant d'une richesse suffisante W_t au temps t avec t un instant antérieur à la date d'expiration T de l'actif contingent qu'on cherche à couvrir. Construisons un portefeuille composé d'une courte position d'une unité d'option et d'une longue position de θ_t actifs sous-jacents. Ainsi la richesse résiduelle de l'investisseur à l'instant t^+ est :

$$w_0(t) := W_t + F(S_t, t) - \theta_t S_t.$$

Celle-ci est immédiatement investie dans un compte monétaire rapportant le taux d'intérêt sans risque r . La richesse de l'investisseur à l'instant $t + \Delta t$ devient :

$$W_{t+\Delta t} = -F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) + \theta_t S_{t+\Delta t} + e^{r\Delta t} w_0(t).$$

Le ratio de couverture θ_t optimale étant celui immunisant le plus que possible l'investisseur des variations du cours du titre, celui-ci est obtenu de telle sorte que la variance de la richesse de l'investisseur sous Q sachant l'information disponible à la date t , est minimale. Autrement dit, nous cherchons θ_t tel que :

$$\inf_{\theta} E_Q^t \left[(W_{t+\Delta t} - E_Q^t[W_{t+\Delta t}])^2 \right]. \quad (2.24)$$

2.2.2.1 Calcul du ratio de couverture

Le but de cette section est d'obtenir une expression analytique du ratio de couverture qui minimise la richesse résiduelle de l'investisseur. Comme nous l'avons vu, celui-ci est donné par le problème de projection (2.24). Nous calculons dans un premier temps la variance de la variable aléatoire $W_{t+\Delta t}$ sous Q , conditionnellement à l'information $\mathcal{F}_t$.

$$\begin{aligned} E_Q^t \left[(W_{t+\Delta t} - E_Q^t[W_{t+\Delta t}])^2 \right] &= E_Q^t \left[(F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - E_Q^t[F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)])^2 \right] \\ &\quad - 2\theta_t E_Q^t \left[\underbrace{(F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - E_Q^t[F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)])}_{(F - E[F])} \right] \\ &\quad \times \underbrace{(S_{t+\Delta t} - E_Q^t[S_{t+\Delta t}])}_{(S - E[S])} + \theta_t^2 E_Q^t \left[(S_{t+\Delta t} - E_Q^t[S_{t+\Delta t}])^2 \right]. \end{aligned}$$

Davantage par simplification que par nécessité, nous pouvons réécrire la variance de la richesse sous la forme suivante :

$$E_Q^t \left[(W_{t+\Delta t} - E_Q^t[W_{t+\Delta t}])^2 \right] = E_Q^t [A_{t+\Delta t} \theta_t^2 + B_{t+\Delta t} \theta_t + C_{t+\Delta t}], \quad (2.25)$$

avec :

$$\begin{aligned} \cdot A_{t+\Delta t} &= (S_{t+\Delta t} - E_Q^t[S_{t+\Delta t}])^2 \\ \cdot B_{t+\Delta t} &= -2 \left[(F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - E_Q^t[F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)]) \times (S_{t+\Delta t} - E_Q^t[S_{t+\Delta t}]) \right] \\ \cdot C_{t+\Delta t} &= (F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - E_Q^t[F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)])^2. \end{aligned}$$

L'inspection du terme polynomial se trouvant sous l'espérance conditionnelle du deuxième membre de l'équation (2.25) nous permet de noter que la variance est minimisée en $-B_{t+\Delta t}(2A_{t+\Delta t})^{-1}$. Ainsi, on obtient une allocation θ_t telle que :

$$\theta_t = \frac{\mathcal{B}(t, \Delta t)}{\mathcal{A}(t + \Delta t)},$$

avec :

$$\begin{aligned} \cdot \mathcal{A}(t, \Delta t) &= E_Q^t[S_{t+\Delta t}^2] - E_Q^t[S_{t+\Delta t}]^2, \\ \cdot \text{ et } \mathcal{B}(t, \Delta t) &= E_Q^t[F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)S_{t+\Delta t}] - E_Q^t[F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)]E_Q^t[S_{t+\Delta t}]. \end{aligned}$$

2.2.2.2 Calcul de la composante $\mathcal{A}(t, \Delta t)$

On suppose que sous la mesure martingale Q , X est un processus de Lévy tel que $\mathcal{A}(t, \Delta t) < \infty$ et non nulle. Nous pouvons obtenir une représentation explicite de $\mathcal{A}(t, \Delta t)$ en termes d'exposants caractéristiques. Il vient

$$\mathcal{A}(t, \Delta t) = \left(e^{-\Delta t \psi^Q(-2i)} - e^{-2\Delta t \psi^Q(-i)} \right) S_t^2.$$

Un développement de Taylor au voisinage $\Delta t = 0$ nous permet d'écrire :

$$\mathcal{A}(t, \Delta t) = (-\psi^Q(-2i) + 2\psi^Q(-i)) \Delta t S_t^2 + O(\Delta t).$$

2.2.2.3 Calcul de la composante $\mathcal{B}(t, \Delta t)$

Afin de simplifier les notations, nous notons :

$$F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) := F_{t+\Delta t}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{B}(t, \Delta t) = E_Q^t[F_{t+\Delta t}S_{t+\Delta t}] - E_Q^t[F_{t+\Delta t}]E_Q^t[S_{t+\Delta t}]. \quad (2.26)$$

Nous espérons retrouver une représentation similaire pour $\mathcal{B}(t, \Delta t)$ en fonction des exposants caractéristiques. Pour cela, nous utilisons le résultat suivant :

Proposition 2.2.1.

$$\mathcal{B}(t, \Delta t) = e^x \Delta t [-\psi^Q(D_x - i) + \psi^Q(D_x) + \psi^Q(-i)] F(e^x, t) + o(\Delta t).$$

Preuve : En partant de (2.26), on obtient après décomposition :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t, \Delta t) &= E_Q^t[F_{t+\Delta t}S_{t+\Delta t} - F_t S_t + F_t S_t] - E_Q^t[F_{t+\Delta t} - F_t + F_t]E_Q^t[S_{t+\Delta t} - S_t + S_t] \\ &= E_Q^t[F_{t+\Delta t}S_{t+\Delta t} - F_t S_t] - S_t E_Q^t[F_{t+\Delta t} - F_t] - F_t E_Q^t[S_{t+\Delta t} - S_t] \\ &\quad - E_Q^t[F_{t+\Delta t} - F_t]E_Q^t[S_{t+\Delta t} - S_t]. \end{aligned}$$

Généralisons sous l'opérateur $\hat{L}$, le générateur infinitésimal (2.21) pour le processus à deux dimensions $\{X_t, t\}$. Celui-ci est aisément donné par :

$$\hat{L} = \partial_t + L^Q = \partial_t - \psi^Q(D_x).$$

Cet opérateur sera appliqué à toutes les sous-composantes de $\mathcal{B}(t, \Delta t)$ qui sont :

$$\begin{aligned} E_Q^t [F_{t+\Delta t} S_{t+\Delta t} - F_t S_t] &= E_Q^t [F(e^{x+X_{\Delta t}}, t + \Delta t) e^{x+X_{\Delta t}}] - F(e^x, t) e^x, \\ &:= E_Q^t [f(\underbrace{x + X_{\Delta t}}_{X_{t+\Delta t}}, t + \Delta t) e^{x+X_{\Delta t}}] - f(\underbrace{x}_{X_t}, t) e^x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_Q^t [F_{t+\Delta t} - F_t] &= E_Q^t [F(e^{x+X_{\Delta t}}, t + \Delta t)] - F(e^x, t) \\ &:= E_Q^t [f(\underbrace{x + X_{\Delta t}}_{X_{t+\Delta t}}, t + \Delta t)] - f(\underbrace{x}_{X_t}, t) \end{aligned}$$

et $E_Q^t [S_{t+\Delta t} - S_t]$. Par ailleurs, (cf. Hille et Phillips (1957), Chap.11), l'espérance conditionnelle peut être réécrite sous la forme d'un développement en séries de Taylor :

$$E_Q^t [f(X_{t+\Delta t}, t + \Delta t)] = f(X_t, t) + Lf(X_t, t) \Delta t + o(\Delta t).$$

Il vient d'une part :

$$Lf(X_t, t) = \frac{1}{\Delta t} E_Q^t [f(X_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - f(X_t, t)] + o(\Delta t).$$

En se servant de ce résultat, il vient d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t, \Delta t) &= (\partial_t f(x, t) e^x \Delta t - \psi^Q(D_x) f(x, t) e^x \Delta t) - S_t (\partial_t f(x, t) \Delta t - \psi^Q(D_x) f(x, t) \Delta t) \\ &\quad - F_t (-\Delta t \psi^Q(-i) e^x) - E_Q^t [F_{t+\Delta t} - F_t] E_Q^t [S_{t+\Delta t} - S_t] + o(\Delta t) \\ &= -\psi^Q(D_x) f(x, t) e^x \Delta t + \underbrace{S_t}_{e^x} \psi^Q(D_x) f(x, t) \Delta t + \underbrace{F_t}_{F(e^x, t)} \psi^Q(-i) e^x \Delta t \\ &\quad + \partial_t f(x, t) e^x \Delta t - \underbrace{S_t}_{e^x} \partial_t f(x, t) \Delta t - E_Q^t [F_{t+\Delta t} - F_t] E_Q^t [S_{t+\Delta t} - S_t] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme (2.2.1), on obtient après factorisation :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t, \Delta t) &= e^x \Delta t [-\psi^Q(D_x - i) + \psi^Q(D_x) + \psi^Q(-i)] F(e^x, t) + \partial_t f(x, t) e^x \Delta t \\ &\quad - e^x \partial_t f(x, t) \Delta t - E_Q^t [F_{t+\Delta t} - F_t] E_Q^t [S_{t+\Delta t} - S_t] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

D'autre part, en remarquant que :

$$E_Q^t [F_{t+\Delta t} - F_t] E_Q^t [S_{t+\Delta t} - S_t] = - \underbrace{\left(\partial_t f(x, t) \Delta t - \psi^Q(D_x) f(x, t) \Delta t \right) \Delta t \psi^Q(-i) e^x}_{\text{termes en } \Delta t^2 \text{ à négliger}} + o(\Delta t),$$

il résulte

$$\mathcal{B}(t, \Delta t) = e^x \Delta t [-\psi^Q(D_x - i) + \psi^Q(D_x) + \psi^Q(-i)] F(e^x, t) + o(\Delta t).$$

Ce qui conclut la preuve. $\square$

Le ratio de couverture est donc obtenu par la formule suivante :

$$\theta_t = e^{-x} B^Q(D_x) F(e^x, t) + o(\Delta t),$$

avec :

$$B^Q(u) = \frac{-\psi^Q(u - i) + \psi^Q(u) + \psi^Q(-i)}{-\psi^Q(-2i) + 2\psi^Q(-i)}. \quad (2.27)$$

Après passage à la limite $\Delta t \rightarrow +0$,

$$\theta_t = e^{-x} B^Q(D_x) F(e^x, t).$$

En utilisant la formule générale donnant le prix d'option en (2.7), le ratio de couverture optimal est alors donné par :

$$\theta_t = K \frac{1}{2S\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi(u))} B^Q(u)}{(-iu)(-iu+1)} du. \quad (2.28)$$

Du changement de variable $u \rightarrow u - i\delta$, il résulte :

$$\theta_t = K \frac{1}{2S\pi} e^{-\delta x'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi(u+i\delta))} B^Q(u+i\delta)}{(-iu+\delta)(-iu+\delta+1)} du. \quad (2.29)$$

2.2.3 Illustration : modèle de Black-Scholes

Comme première illustration, nous considérons le modèle de Black et Scholes où l'actif sous-jacent est donné sous la forme d'un processus de Lévy géométrique $S_t = e^{X_t}$ avec X_t , un mouvement brownien arithmétique défini dans l'univers P par :

$$X_t = \mu t + \sigma W_t. \quad (2.30)$$

En utilisant la transformée de Laplace, son exposant caractéristique est :

$$\psi(u) = -i\mu u + \sigma^2 u^2 / 2.$$

Afin de calculer le ratio de couverture sous ce modèle, nous explicitons (2.27). Il résulte que :

$$B^Q(u) = \frac{-\psi^Q(u-i) + \psi^Q(u) + \psi^Q(-i)}{-\psi^Q(-2i) + 2\psi^Q(-i)},$$

avec,

$$\begin{aligned}\psi(-i) &= i^2\mu + \sigma^2 i^2/2 \\ \psi(u) &= -i\mu u + \sigma^2 u^2/2 \\ -\psi(u-i) &= i\mu u - i^2\mu - \sigma^2 u^2/2 + iu\sigma^2 - i^2\sigma^2/2\end{aligned}$$

et μ obtenue par la restriction martingale. La somme des termes précédents donne :

$$\psi(u) - \psi(u-i) + \psi(-i) = iu\sigma^2. \quad (2.31)$$

Il résulte d'un raisonnement similaire pour les termes du dénominateur :

$$-\psi(-2i) + 2\psi(-i) = -\sigma^2 i^2. \quad (2.32)$$

Il vient : $B^Q(u) = iu$ que nous utilisons dans la formule générale (2.28). Nous retrouvons bien le coefficient delta classique obtenu en (2.10). Ainsi, l'absence de saut dans la dynamique du sous-jacent permet de retrouver le cadre de complétude du marché développé par Black-Scholes où s'immuniser contre une variation du cours du titre revient à considérer une position en delta sur l'actif sous-jacent.

2.2.4 Illustration : modèles mixtes de diffusion à sauts

Nous reprenons l'exemple précédent auquel on ajoute à la dynamique du processus X , une composante de saut donnée par un processus de Poisson composé X'_t :

$$X'_t = \sum_{i=1}^{N_t} J_i,$$

dont la fonction caractéristique $\phi_{X'_t}$ est aisément obtenue :

$$\phi_{X'_t} = e^{-t\psi'(u)},$$

avec :

$$\psi'(u) = -\lambda(\phi_J(u) - 1).$$

On explicite à nouveau (2.27). Il vient donc :

$$B^Q(u) = \frac{iu\sigma^2 - \psi'(u-i) + \psi'(u) + \psi'(-i)}{-i^2\sigma^2 - \psi'(-2i) + 2\psi'(-i)}, \quad (2.33)$$

qu'on réécrit :

$$B^Q(u) = \frac{iu\sigma^2 - \lambda[\phi_J(u) - \phi_J(u-i) + \phi_J(-i) - 1]}{-\sigma^2 i^2 + \lambda[\phi_J(-2i) - 2\phi_J(-i) + 1]}. \quad (2.34)$$

Proposition 2.2.2. *L'observation des termes (2.31, 2.32) et de la formule (2.34) présente un intérêt particulier. En effet, ces termes sont neutres par rapport au paramètre de dérive. Ce qui veut dire que si la minimisation de l'erreur quadratique avait été faite dans l'univers historique P , alors celui-ci n'aurait eu aucune influence sur le ratio de couverture optimale. Ceci restera le cas pour toutes les sous familles de modèle mixte de diffusion à sauts représentées par la dynamique (1.1).*

2.2.4.1 Modèle de Merton

Dans le cadre de ce type de modélisation, les sauts sont gaussiens, la fonction caractéristique associée à la loi des sauts est donnée directement par la transformée de Laplace :

$$\phi_J = E[e^{iuJ}] = e^{imu - \frac{1}{2}\delta^2 u^2}.$$

Nous donnons à la table (2.9), les erreurs absolues constatées en utilisant la formule (2.29) via la transformée de Fourier rapide par rapport aux ratios optimaux reportés à la table (1.9) selon la formule (1.50) de Cont et al. (2007). On peut noter la surprenante convergence de ces deux approches.

Option d'achat (soit, $\varpi = 1$)		Option de vente (soit, $\varpi = -1$)	
Prix du sous-jacent	Erreur Absolue	Prix du sous-jacent	Erreur Absolue
120	1.44328e-15	80	1.99840e-15
100	1.22124e-15	90	2.44249e-15
90	1.33226e-15	100	5.55111e-16
80	5.27355e-16	120	2.35922e-16

TABLE 2.9 – Comparaison des ratios de couverture optimale calculés selon la formule (1.50) de Cont et al. (2007) par rapport à ceux obtenus par transformée de Fourier rapide selon la formule (2.29) sous le modèle à saut gaussien de Merton. Les valeurs obtenues sont arrondies au plus près à la cinquième décimale.

2.2.4.2 Modèle de Kou

Suivant le modèle de Kou, la distribution des sauts suit cette fois-ci, une loi exponentielle double asymétrique. On utilise à nouveau (2.34), avec :

$$\phi_J(u) = p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + q \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + iu},$$

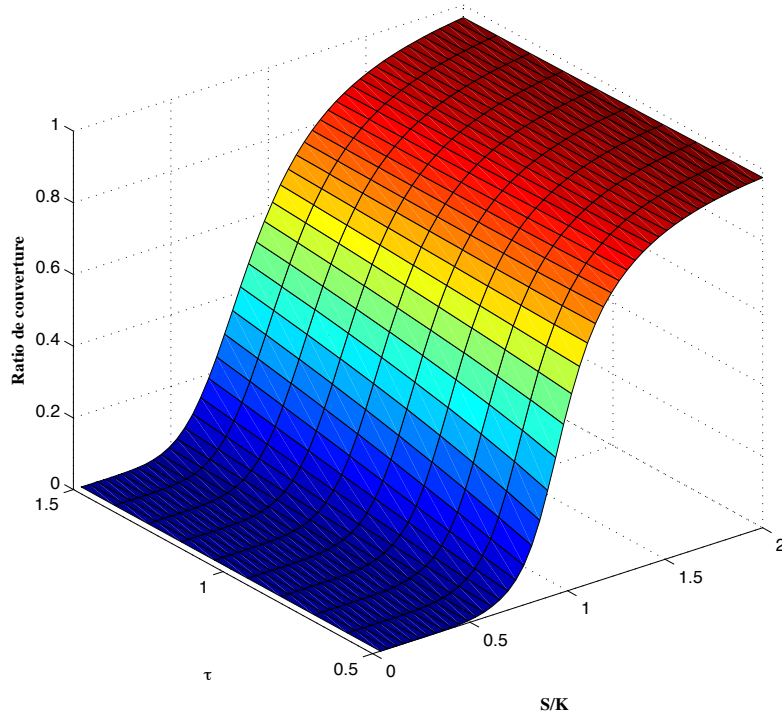


FIGURE 2.6 – Surface du ratio de couverture optimale θ , obtenu sous le modèle à saut exponentiel double asymétrique de Kou selon la formule (2.29), montrant la dépendance entre le temps et la distance à la monnaie. Les paramètres utilisés sont $r = 5\%$, $K = 98$, $\sigma = 0.16$, $\lambda = 1$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$ et $p = 0.4$.

définie dans la bande de régularité :

$$-\lambda_1 < \Im(u) < \lambda_2.$$

Ainsi, d'après la formule générale (2.29) et en utilisant les mêmes paramètres que ceux de Kou, la figure (2.6) illustre le comportement du ratio en fonction du temps et de la distance à la monnaie pour une option d'achat européenne :

2.2.5 Illustration sur des modèles à activité finie

Nous illustrons ce résultat en utilisant des processus de Lévy à activité infinie. Nous considérons un modèle représentatif, notamment celui de Carr et al. (2002) qui généralise le modèle variance gamma. L'exposant caractéristique est donné par :

$$\psi(u) = -C \Gamma(-Y) [(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y].$$

On détermine aisément (2.27). En se servant à nouveau de la formule (2.29), la figure (2.7) compare ce ratio par rapport à la sensibilité de prix d'option aux variations de cours

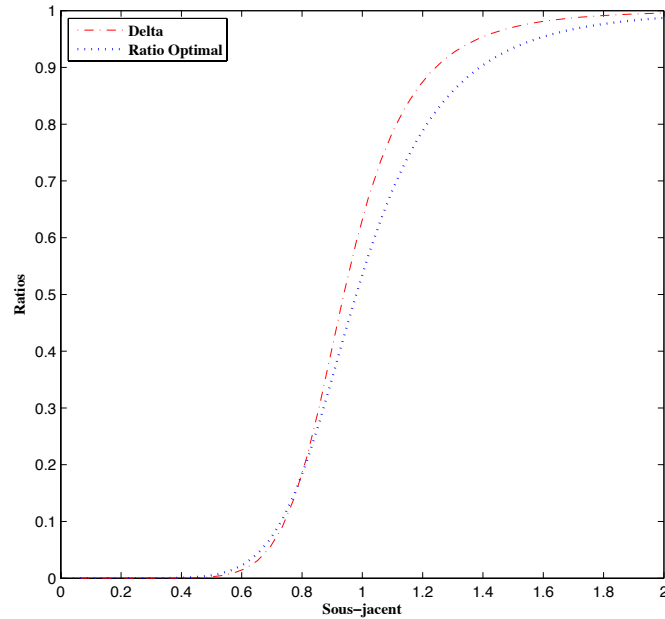


FIGURE 2.7 – Comparaison du ratio de couverture optimal θ obtenu selon la formule (2.29) par rapport au ratio delta obtenu selon la formule (2.11). Ces ratios sont en sortie du modèle CGMY pour une option d'achat européenne. Les paramètres utilisés sont : $r = 5\%$, $K = 1$, $C = 1$, $G = 5$, $M = 10$, $Y = 0.5$ et $\tau = 0.5$.

du sous-jacent au moment où la figure (2.8) en dit davantage sur le comportement de ce ratio en fonction du temps restant à l'échéance τ .

2.3 Calcul des mesures de risques : VaR et CTE

Dans le domaine de l'Assurance ainsi que dans le secteur financier, la tarification au juste prix des contrats constituent un défi difficile à relever. D'autres questions sont également préoccupantes, notamment celle liée à la mesure du risque. Les régulateurs éditent des règles aux banquiers et aux assureurs afin d'améliorer la gestion de ces risques et d'éviter les crises, pas toujours avec succès, comme l'illustrent les récents événements. Parmi les outils promus par le comité de Bâle, se trouve en bonne place la value at risk encore appelée VaR. Elle a été introduite par JP Morgan et a été intensivement utilisée depuis lors dans les secteurs financiers et d'assurance. D'un point de vue théorique, une importante littérature s'est développée et la gestion des risques est devenue un champ de recherche actif. Les critiques d'Artzner et al. (1999) sur la VaR ont conduit à une autre mesure connue sous le nom de conditional tail expectation, communément appelée CTE dont l'utilisation est également recommandée, voir Hardy (2003) par exemple. Depuis des

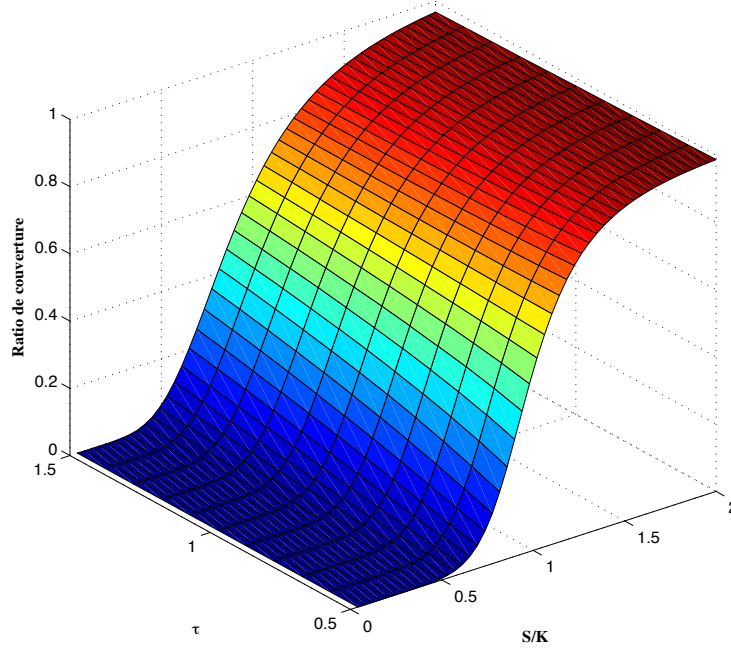


FIGURE 2.8 – Surface du ratio de couverture optimale θ , obtenue sous le modèle *CGMY*, selon la formule (2.29), pour une option d'achat européenne. Cette figure montre la dépendance entre le temps et la distance à la monnaie. Les paramètres utilisés sont $r = 5\%$, $K = 1$, $C = 1$, $G = 5$, $M = 10$ et $Y = 0.5$.

années 2000, beaucoup de recherches se sont consacrées aux mesures de risque et plusieurs généralisations ont été proposées, on peut se référer aux travaux de Wang (1999) et à ceux de Acerbi et Tasche (2002). Néanmoins la VaR et la CTE sont devenues deux standards pour la mesure de risque. Excepté pour le cas gaussien où des formules explicites peuvent être facilement trouvées pour ces mesures, il est généralement plus difficile d'obtenir des solutions fermées pour des modèles plus réalistes étudiés au premier chapitre et pour lesquels des procédures numériques sont nécessaires. Dans la section précédente, nous avons proposé un cadre général d'évaluation et de couverture de contrats de type européen en utilisant l'analyse de Fourier. Nous adapterons la même méthodologie au calcul de la VaR et de la CTE. La particularité de notre approche est qu'une fois la fonction caractéristique de la loi marginale connue, le calcul de ces mesures de risque peut être aisément obtenu en utilisant la transformée de Fourier rapide.

2.3.1 Rappel de la formule générale

Nous rappelons ici la formule donnant le prix en absence d'opportunité d'arbitrage d'un actif dérivé européen sous l'hypothèse de processus de Lévy géométrique pour le

sous-jacent $S : S_t = S_0 e^{X_t}$. On considère que le paiement à l'échéance peut être exprimé comme une fonction positive g de X_T . Supposons que le taux d'intérêt sans risque r est constant. D'après la théorie d'absence d'arbitrage en temps continu, le prix au temps t du contrat est donné par :

$$F(S, t) = E[e^{-r(T-t)} g(X_T) | \mathcal{F}_t]. \quad (2.35)$$

où $\mathcal{F}$, représente la filtration générée par le processus X . L'espérance est calculée sous la mesure risque-neutre Q .

Notons $x = X(t)$. Cette formule s'écrit :

$$F(S, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{ivx - \tau(r+\psi(v))} \hat{g}(v) dv. \quad (2.36)$$

La fonction $\psi(v)$ représente l'exposant caractéristique de X_T . Rappelons également que la fonction caractéristique ϕ de X_t , est donnée par :

$$\phi(v) = E[e^{ivX_t}] = e^{-t\psi(v)}.$$

La transformée de Fourier $\hat{g}$ de g s'écrit :

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv\xi} g(v) dv, \quad (2.37)$$

où v est un nombre complexe. Afin d'assurer l'existence de l'intégrale, on suppose qu'il existe un nombre réel δ tel que $e^{\delta x} g(x)$ appartient à L^1 , la précédente intégrale peut être définie sur la ligne $\Im(v) = \delta$ en sa transformée de Fourier généralisée.

La formule (2.36) peut être facilement adaptée pour le calcul de l'espérance mathématique de $g(X_T)$. Plus précisément, nous avons un résultat important donné par la formule suivante :

$$E[g(X_T) | X(t) = x] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{ivx} \phi(v) \hat{g}(v) dv. \quad (2.38)$$

Remarquons que cette formule est très générale, la mesure de probabilité n'a pas besoin d'être spécifiée d'autant plus qu'elle peut être risque-neutre, forward-neutre ou historique. Ce qui est ici requis pour g est que sa transformée de Fourier (2.37) existe. Nous adapterons cette formule afin de calculer les deux mesures de risques devenues standards, la value at risk et la conditional tail expectation.

2.3.2 Formules générales sous des processus de Lévy

Dans cette section, nous donnons une formule générale et efficiente pour le calcul de la VAR et de la CTE. Ces formules montrent l'exemple du caractère très général de la formule (2.38).

2.3.2.1 Formule de la VaR

Considérons une fonction de perte donnée en T par L et notons F la fonction de répartition associée à sa distribution. La VaR_α est la mesure de risque quantile d'ordre α de L . Elle est donnée pour tout $\alpha \in [0, 1]$ par :

$$VaR_\alpha := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\},$$

autrement dit, c'est le montant minimal à détenir pour qu'en T , la probabilité qu'il suffise à couvrir la perte soit au minimum égale à α . Si F est une fonction continue et strictement croissante alors, elle est inversible et la VaR est l'unique racine solution de l'équation : $F(VaR_\alpha) - \alpha = 0$. En remarquant que : $F(\eta) = \Pr[L \leq \eta] = E[1_{L \leq \eta}]$, ce dont on a besoin ici, est d'exprimer la fonction de répartition de la variable L . Supposons que $L = X_T$. Ceci peut être facilement obtenu en utilisant la formule (2.38) avec un choix particulier pour la fonction g :

$$g(\xi) = 1_{\xi \leq \eta}. \quad (2.39)$$

En supposant $\delta = \Im(u) > 0$ pour assurer la convergence, il vient d'abord $\hat{g}(u) = \frac{ie^{-iu\eta}}{u}$. Il vient ensuite $F(\eta) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iu(x-\eta)} \frac{\phi(u)}{u} du$. Le changement de variable $u = v + i\delta$ et l'introduction de $\zeta := x - \eta$, nous permettent d'obtenir²⁷ :

$$F(\eta) = \frac{e^{-\delta\zeta}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iv\zeta} \frac{\phi(v + i\delta)}{\delta - iv} dv. \quad (2.40)$$

Si nous calculons cette VaR à l'instant $t = 0$ et supposons que $x = 0$, alors on obtient :

$$F(\eta) = \frac{e^{\delta\eta}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iv\eta} \frac{\phi(v + i\delta)}{\delta - iv} dv. \quad (2.41)$$

Notons ici, qu'en utilisant une autre approche, Le Courtois et Walter (2010) obtiennent la même formule.

2.3.2.2 Formule de la CTE

L'un des problèmes soulevé par la VaR_α est qu'elle mesure la moins pire des pertes pouvant être constatées dans la queue de probabilité $1 - \alpha$. Ceci étant, la distribution de perte n'est pas forcément gaussienne. Comme nous l'avons vu, elle peut être leptokurtique. Ce qui implique que des événements extrêmes sont plus fréquents que pour une distribution normale. Comme conséquence, la VaR_α ne nous dit pas ce que sera la perte si les événements de la taille de probabilité $1 - \alpha$ se produisaient réellement. D'autre part, de nombreuses études théoriques prouvent l'incohérence de cette mesure. Le lecteur peut se référer aux travaux de Artzner et al. (1997, 1999) ainsi qu'à ceux de Wirch et Hardy (1999) pour plus de précisions. C'est la raison pour laquelle émerge un nouveau type de mesure, la *conditional tail expectation* (CTE). En d'autres termes, la CTE_α est la perte

27. Ici $x = X_t$.

espérée étant donné que la perte constatée tombe dans la queue de probabilité $1 - \alpha$. Plus précisément, elle donnée pour tout $\alpha \in [0, 1]$ par :

$$CTE_\alpha = E[L | L > VaR_\alpha(X_t)].$$

Si cette variable aléatoire est intégrable et a une fonction de répartition continue²⁸, alors la $CTE_\alpha(X_t)$ associée à L est définie comme suit :

$$CTE_\alpha(X_t) = \frac{E[X_t 1_{X_t > VaR_\alpha(X_t)}]}{\Pr[X_t > VaR_\alpha(X_t)]}. \quad (2.42)$$

Comme on le voit, cette définition agrège deux principaux termes : la queue de probabilité : $\Pr[X_t > VaR_\alpha(X_t)] = 1 - \alpha$ et la moyenne des pertes supérieures au risque quantile :

$$E[X_t 1_{X_t > VaR_\alpha(X_t)}]. \quad (2.43)$$

Nous utilisons encore une fois la formule (2.38). De même, nous spécifions la fonction g associée à la CTE. Pour cela, en ignorant la queue de probabilité donnée au dénominateur en (2.42), elle est donnée par :

$$g(x) = x 1_{x > VaR_\alpha(X_t)}. \quad (2.44)$$

La transformée de Fourier de g est :

$$\begin{aligned} \hat{g}(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} g(x) dx \\ &= \left[x \frac{e^{-iux}}{-iu} \right]_{VaR_\alpha(X_t)}^{+\infty} - \int_{VaR_\alpha(X_t)}^{+\infty} \frac{e^{-iux}}{-iu} dx \quad (\text{Intégration par partie}) \\ &= \left[x \frac{e^{-iux}}{-iu} \right]_{VaR_\alpha(X_t)}^{+\infty} - \left[\frac{e^{-iux}}{(-iu)(-iu)} \right]_{VaR_\alpha(X_t)}^{+\infty}. \end{aligned}$$

Cette intégrale est bien définie si et seulement si $\Im(u) = \delta < 0$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \hat{g}(u) &= \left[x \frac{e^{-iux}}{-iu} \right]_{VaR_\alpha(X_t)}^{+\infty} - \left[\frac{e^{-iux}}{(-iu)(-iu)} \right]_{VaR_\alpha(X_t)}^{+\infty} \\ &= -VaR_\alpha(X_t) \frac{e^{-iuVaR_\alpha(X_t)}}{-iu} + \frac{e^{-iuVaR_\alpha(X_t)}}{(-iu)(-iu)} \\ &= \frac{e^{-iuVaR_\alpha(X_t)}}{-iu} \left(-VaR_\alpha(X_t) + \frac{1}{-iu} \right) \\ &= (1 + iuVaR_\alpha(X_t)) \frac{e^{-iuVaR_\alpha(X_t)}}{(-iu)^2}, \end{aligned}$$

28. Au moins pour la partie de la distribution supérieure à $VaR_\alpha(X_t)$.

ainsi,

$$\hat{g}(u) = (1 + iuVaR_\alpha(X_t)) \frac{e^{-iuVaR_\alpha(X_t)}}{(-iu)^2}, \quad \text{avec } \delta < 0. \quad (2.45)$$

En utilisant (2.38), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)CTE(X_t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} \phi(u) \hat{g}(u) du, \quad x = X_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} (1 + iuVaR_\alpha(X_t)) \frac{e^{-iuVaR_\alpha(X_t)}}{(-iu)^2} \phi(u) du. \end{aligned}$$

Introduisons $\zeta := x - VaR_\alpha(X_t)$, il vient

$$(1 - \alpha)CTE(X_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iuz} (1 + iuVaR_\alpha(X_t)) \frac{\phi(u)}{(-iu)^2} du.$$

Le changement de variable $v = u - i\delta$ nous permet d'obtenir l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)CTE(X_t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(v+i\delta)\zeta} (1 + i(v+i\delta)VaR_\alpha(X_t)) \frac{\phi(v+i\delta)}{-(v+i\delta)^2} dv \\ &= \frac{e^{-\delta\zeta}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iv\zeta} (1 + (-\delta + iv)VaR_\alpha(X_t)) \frac{\phi(v+i\delta)}{(\delta - iv)^2} dv. \end{aligned}$$

Il vient finalement :

$$(1 - \alpha)CTE(X_t) = \frac{e^{-\delta\zeta}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iv\zeta} \frac{(1 + (iv - \delta)VaR_\alpha(X_t))}{(-iv + \delta)^2} \phi(v+i\delta) dv \quad (2.46)$$

2.3.3 Illustration : modèle gaussien

Nous utilisons le modèle gaussien comme repère. Dans ce cas, nous avons des formules fermées. La fonction de perte en T , L_T est définie comme un mouvement brownien arithmétique X_T :

$$L_T := X_T,$$

avec

$$X_T = \mu T + \sigma z_T. \quad (2.47)$$

μT et $\sigma^2 T$ sont respectivement la moyenne et la variance de la variable aléatoire X_T . z est un mouvement brownien standard. Rappelons deux résultats bien connus sous ce type de modèle. Soient respectivement $\mathcal{N}$ et n , la fonction de répartition et la densité de la loi normale centrée réduite. On obtient aisément les formules suivantes. Pour la VaR :

$$VaR_\alpha(L_T) = \mu T + \sigma \sqrt{T} \mathcal{N}^{-1}(\alpha),$$

et pour la CTE :

$$CTE_\alpha(X_T) = \mu T + \frac{\sigma \sqrt{T}}{1 - \alpha} n(\mathcal{N}^{-1}(\alpha)),$$

Preuve : Par définition,

$$CTE_\alpha(X_T) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X_T)}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2} dy.$$

Soit $z = \frac{y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}$ alors,

$$\begin{aligned} CTE_\alpha(X_T) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\frac{VaR_\alpha(X_T)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} \frac{\sigma\sqrt{T}z + \mu T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \int_{\frac{VaR_\alpha(X_T)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} \frac{\sigma\sqrt{T}z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \mu T \int_{\frac{VaR_\alpha(X_T)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} n(z) dz \right\}. \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\mu T \times \left\{ 1 - \Pr \left[\epsilon < \frac{VaR_\alpha(X_T) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} \right] \right\} = \mu T(1-\alpha), \quad \text{avec : } \epsilon \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Quant à la première intégrale, on peut poser $u = z^2/2$, ainsi :

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{2}\left(\frac{VaR_\alpha(X_T)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}^{+\infty} \frac{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2u}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2u}} du \\ &= \sigma\sqrt{T} \int_{\frac{1}{2}\left(\frac{VaR_\alpha(X_T)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2\pi}} du \\ &= \sigma\sqrt{T} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{VaR_\alpha(X_T)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sigma\sqrt{T} \ n\left(\frac{VaR_\alpha(X_T) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Il vient d'abord :

$$\begin{aligned} CTE_\alpha(X_T) &= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \mu T(1-\alpha) + \sigma\sqrt{T} \ n\left(\frac{VaR_\alpha(X_T) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right\} \\ &= \mu T + \frac{\sigma\sqrt{T}}{1-\alpha} \ n\left(\frac{VaR_\alpha(X_T) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Parce que $\Pr[X_T < VaR_\alpha] = \alpha$ ou $\Pr \left[\underbrace{\frac{X_T - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}}_{\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)} < \frac{VaR_\alpha - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} \right] = \alpha$, il vient donc :

$$CTE_\alpha(X_T) = \mu T + \frac{\sigma\sqrt{T}}{1-\alpha} \ n\left(\mathcal{N}^{-1}(\alpha)\right).$$

Ce qui conclut la preuve. □

Application numérique

Considérons le jeu de paramètres suivant : $T = 10$, $\mu = 12\%$, $\sigma = 15\%$. Les résultats suivants montrent les erreurs constatées en calculant les mesures de risque via la transformée de Fourier rapide par rapport à celles obtenues avec les formules fermées :

Mesure de risque quantile			Mesure de risque CTE		
$VaR_\alpha(L)$	Modèle Gaussien		$CTE_\alpha(L)$	Modèle Gaussien	
	Valeur exacte	Erreur Absolue		Valeur exacte	Erreur Absolue
$V_{0.05}(L_T)$	0.41977	2.22044e-16	$CTE_{0.05}(L_T)$	1.25149	0
$V_{0.10}(L_T)$	0.59210	3.33066e-16	$CTE_{0.10}(L_T)$	1.29249	0
$V_{0.90}(L_T)$	1.80789	4.44089e-16	$CTE_{0.90}(L_T)$	2.032461	8.88178e-16
$V_{0.95}(L_T)$	1.98022	2.22044e-16	$CTE_{0.95}(L_T)$	2.178430	5.77311e-15
$V_{0.99}(L_T)$	2.30348	0	$CTE_{0.99}(L_T)$	2.464222	4.44089e-16

TABLE 2.10 – Mesures de risque calculées sous le modèle gaussien pour différentes valeurs de niveau de risque α .

2.3.4 Formules générales pour les processus de Lévy géométriques

Supposons que $S = S_0 e^X$, avec X un processus de Lévy. Pour l'instant, choisissons sans perte de généralité la fonction de perte²⁹ :

$$L = \varpi(S_T - K), \quad \text{avec } \varpi \in \{-1, 1\}. \quad (2.48)$$

Le calcul de la value at risk $VaR_\alpha(L)$ de L est immédiate puisqu'étant liée à celle de X ayant été obtenue en (2.41) et il est facile de montrer les relations suivantes :

$$\begin{cases} VaR_\alpha(L) = S_0 e^{VaR_\alpha(X_T)} - K & \text{pour } \varpi = 1 \\ VaR_\alpha(L) = -S_0 e^{VaR_{1-\alpha}(X_T)} + K & \text{pour } \varpi = -1. \end{cases} \quad (2.49)$$

D'autre part, rappelons que :

$$CTE_\alpha(L) = \frac{E[L 1_{L > VaR_\alpha(L)}]}{\Pr[L > VaR_\alpha(L)]}.$$

Cette définition regroupe cette fois-ci trois termes : la queue de probabilité $\Pr[L > VaR_\alpha(L)]$ égale à $1 - \alpha$ par définition, la mesure de risque quantile $VaR_\alpha(L)$ qui vient juste d'être montrée et la moyenne des pertes supérieures au risque quantile :

29. Naturellement, nous pouvons prendre $K = 0$ comme cas particulier.

$E [L1_{L > VaR_\alpha(L)}]$. Ce dernier terme peut être de nouveau calculé en utilisant (2.38) avec la fonction g définie cette fois-ci par :

$$g(x) = \varpi(S_0 e^x - K) 1_{\varpi(S_0 e^x - K) > VaR_\alpha(L)}.$$

On a :

$$\hat{g}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} g(x) dx,$$

avec la bande de régularité :

$$\begin{aligned} \Im(u) &= \delta < -1, \quad \text{pour } \varpi = 1 \\ \Im(u) &= \delta > 0, \quad \text{pour } \varpi = -1. \end{aligned}$$

On obtient finalement ³⁰ :

$$\hat{g}(u) = (K + iu\varpi VaR_\alpha(L)) \frac{e^{-iu \ln\left(\frac{K+\varpi VaR_\alpha(L)}{S_0}\right)}}{-iu(-iu+1)}, \quad \text{avec } \varpi \in \{-1, 1\}, \quad (2.50)$$

En utilisant la formule générale (2.38) avec cette fois-ci $x = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$, nous obtenons :

$$(1 - \alpha)CTE_\alpha(L) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} (K + iu\varpi VaR_\alpha(L)) e^{-iu \ln\left(\frac{K+\varpi VaR_\alpha(L)}{S_0}\right)} \frac{\phi(u)}{-iu(-iu+1)} du.$$

En prenant $\xi := \ln\left(\frac{S_t}{K+\varpi VaR_\alpha(L)}\right)$, il vient :

$$(1 - \alpha)CTE_\alpha(L) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} (K + iu\varpi VaR_\alpha(L)) \frac{\phi(u)}{-iu(-iu+1)} du.$$

Après avoir spécifié la fonction g et calculé sa transformée de Fourier généralisée $\hat{g}$. Il résulte du changement de variable $u \rightarrow u - i\delta$,

$$(1 - \alpha)CTE_\alpha(L) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (K + i(u + i\delta)\varpi VaR_\alpha(L)) e^{i(u+i\delta)\xi} \frac{\phi(u + i\delta)}{(-iu + \delta)(-iu + \delta + 1)} du.$$

Il vient finalement :

$$(1 - \alpha)CTE_\alpha(L) = \frac{e^{-\delta x}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \frac{(K + i(u + i\delta)\varpi VaR_\alpha(L))}{(-iu + \delta)(-iu + \delta + 1)} \phi(u + i\delta) du. \quad (2.51)$$

Cette formule est très générale. Elle permet de calculer la CTE en forme quasi-fermée. Elle peut être facilement implémentée en utilisant la transformée de Fourier rapide pour tout processus dont la fonction caractéristique associée à la marginale X est connue et bien définie.

30. Voir l'annexe (A.5) pour les calculs détaillés.

2.3.5 Illustration : modèles de Lévy standards

Comme illustration, nous reprenons la fonction de perte L donnée en T par (2.48) avec $\varpi = 1$:

$$L = S_T - K.$$

Nous passerons en revue quelques modèles où l'actif risqué sous-jacent est de la forme : $S = Se^X$.

2.3.5.1 Modèle lognormal

D'avantage par repère pour des processus de Lévy géométriques, nous revenons dans le cadre du modèle de Black-Scholes où le processus de Lévy géométrique n'est rien de moins qu'un mouvement brownien géométrique standard avec X , un mouvement brownien arithmétique, comme donné en (2.47). Notons que des formules fermées existent pour la $VaR_\alpha(L)$ et pour la $CTE_\alpha(L)$. Pour la mesure quantile, il suffit juste de se référer à la formule (2.49) et d'utiliser le résultat bien connu de cette mesure de risque sous des distributions gaussiennes. Pour la CTE, on utilise le résultat suivant ³¹ :

$$E[L1_{L > VaR_\alpha(L)}] = S_0 e^{\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \mathcal{N}(d_1) - K \mathcal{N}(d_1 - \sigma \sqrt{T}),$$

avec : $d_1 = -\frac{\ln\left(\frac{VaR_\alpha(L) + K}{S_0}\right) - \mu T}{\sigma \sqrt{T}} + \sigma \sqrt{T}$. En notant que : $\mathcal{N}(d_1 - \sigma \sqrt{T}) = \Pr[L > VaR_\alpha(L)] = 1 - \alpha$, il vient : $CTE_\alpha(L_T) = \frac{S_0}{1 - \alpha} \left\{ e^{\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \mathcal{N}(d_1) \right\} - K$. De notre côté, l'approche générale par transformée de Fourier rapide peut être aisément implémentée en utilisant : $\phi_{X_t}(u) = e^{iu\mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T}$. Comme illustration utilisons les séries historiques de rendements pour l'indice boursier canadien TSE 300 du 31/02/1956 au 30/04/2000. Les paramètres estimés en sortie du modèle lognormal sont : Les paramètres initiaux de la fonction de

TSE 300	
MLE = 892.98	
$\mu =$	0.00827 $\sigma = 0.04502$

TABLE 2.11 – Paramètres estimés pour le modèle lognormal.

perte sont : $T = 10$, $S_0 = 1$ et $K = 1$. Les résultats ci-après montrent les erreurs constatées en calculant les mesures de risque par la transformée de Fourier rapide par rapport aux formules exactes :

31. Voir l'annexe (A.6) pour des calculs détaillés.

Mesure de risque quantile			Mesure de risque CTE		
$VaR_\alpha(L)$	Modèle lognormal		$CTE_\alpha(L)$	Modèle lognormal	
	Valeur exacte	Erreur Absolue		Valeur exacte	Erreur Absolue
$V_{0.90}(L)$	4.07548	6.21724e-15	$CTE_{0.90}(L)$	5.55727	7.99369e-15
$V_{0.95}(L)$	5.07141	6.21724e-15	$CTE_{0.95}(L)$	6.59963	5.32907e-15
$V_{0.975}(L)$	6.09219	2.84217e-14	$CTE_{0.975}(L)$	7.67870	1.24344e-14
$V_{0.99}(L)$	7.49674	5.32907e-14	$CTE_{0.99}(L)$	9.17180	7.10542e-15

TABLE 2.12 – Mesures de risque sous le modèle lognormal pour différentes valeurs de α .

2.3.5.2 Modèle de Kou

Nous revisitons le modèle de Kou. Rappelons que la fonction caractéristique associée au processus X est donnée en t par $\phi_{X_t}(u) = \exp\{-t\psi(u)\}$, avec

$$\psi(u) = -iu(r + \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa) + \frac{\sigma^2}{2}u^2 - \lambda(\phi_J(u) - 1),$$

son exposant caractéristique. Comme nous l'avions vu, sous le modèle de Kou (2002), la taille aléatoire des sauts suit une distribution exponentielle double asymétrique de paramètres λ_1 et λ_2 :

$$J \stackrel{d}{=} \begin{cases} \eta_1 & \text{avec une probabilité de sauts positifs } p \\ -\eta_2 & \text{avec une probabilité de sauts négatifs } q, \end{cases}$$

avec : $p, q \geq 0$, sous la contrainte : $p + q = 1$. η_1 et η_2 sont des variables aléatoires exponentielles de moyennes $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$ respectivement. Les sauts sont modélisés par des variables aléatoires $J = \ln(Y)$ i.i.d de loi exponentielle double asymétrique dont la fonction de densité s'écrit

$$f_J(y) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} 1_{y>0} + q\lambda_2 e^{\lambda_2 y} 1_{y\leq 0},$$

de telle sorte que la fonction caractéristique associée à J est :

$$\phi_J(u) = p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + q \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + iu},$$

pour : $-\lambda_1 < \Im(u) < \lambda_2$. La VaR et la CTE peuvent être aussi instantanément obtenues par l'approche suggérée. En revanche, nous n'avons pas ici de formule fermée pour ces mesures de risque. Afin de contrôler les résultats en sortie de la transformée de Fourier rapide, nous générons des trajectoires par simulation de type Monte Carlo. D'autre part, la value at risk est une mesure de risque quantile. Le quantile d'ordre α est obtenu par la

$(N\alpha)^{\text{ème}}$ valeur des réalisations de la fonction de perte ordonnées selon un ordre croissant avec N le nombre de simulations. Cette quantité simulée varie à cause de l'aléa imputable à la suite de nombres pseudo-aléatoires tirés au cours de chaque simulation. Néanmoins, les quantiles empiriques constituent une statistique d'ordre de la distribution de perte et en se référant à la théorie des ordres statistiques (cf. David et Nagaraja (2003)), nous pouvons contrôler l'erreur autour de cette quantité estimée. Ainsi, l'intervalle de confiance 100β pour le quantile d'ordre α de la réalisation de perte simulée $Lo(N\alpha)$ est donnée par :

$$[Lo(N\alpha - A); Lo(N\alpha + A)],$$

avec³² :

$$A = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{1 - \beta}{2} \right) \sqrt{N\alpha(1 - \alpha)}, \quad (2.52)$$

habituellement arrondi à l'entier le plus proche. L'estimation de la $CTE_\alpha(L)$ est aussi immédiate. On commence par ranger dans l'ordre croissant les N réalisations de la fonction de perte simulée, alors $\widehat{CTE}_\alpha(L)$ représente la moyenne des $N(1 - \alpha)$ plus grandes réalisations simulées.

Le tableau suivant montre les valeurs quasi-exactes des mesures de risque obtenues selon la transformée de Fourier rapide par rapport à celles simulées. L'intervalle de confiance de niveau 99% ($C.I.99\%$) pour la $VaR_\alpha(L)$ est aussi fourni.

2.3.5.3 Modèle de Kobol ou CGMY

La densité de Lévy associée à X est donnée par :

$$\nu(x) = C \left[\frac{\exp(-G|x|)}{|x|^{1+Y}} 1_{x<0} + \frac{\exp(-Mx)}{x^{1+Y}} 1_{x>0} \right],$$

avec : $C > 0$, $G \geq 0$, $M \geq 0$, et $Y < 2$. La fonction caractéristique s'obtient aisément à partir de cette densité. Ainsi :

$$\phi_{X_t}(u) = \exp \left\{ tC \Gamma(-Y) [(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y] \right\}. \quad (2.53)$$

Nous réutilisons les paramètres obtenus par Madan et Yor (2006) en (2.4) avec : $T = 1$, $K = 1$ et $S_0 = 1$. La table (2.14) illustre les valeurs en sortie de la transformée de Fourier rapide par rapport aux mesures de risque simulées. L'intervalle de confiance de niveau 99% de la $VaR_\alpha(L)$ est aussi fourni.

32. Si M est la variable comptant le nombre de réalisations de perte en dessous du quantile d'ordre α qu'on cherche réellement à obtenir, alors M est une variable discrète suivant une distribution binomiale de paramètres de paramètre (N, α) de moyenne $E[M] = N\alpha$ et de variance $Var[M] = N\alpha(1 - \alpha)$. Un estimateur consistant, candidat pour la variable M est $N\alpha$, qui est inconnu puisque le véritable α -quantile est inconnu. Alors, $(N\alpha - A, N\alpha + A)$ représente le β -intervalle de confiance pour M : $\beta = \Pr[N\alpha - A \leq M \leq N\alpha + A] = F_\beta(N\alpha + A) - F_\beta(N\alpha - A)$, avec F_β , la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètres (N, α) . Pour une taille de N assez grande par exemple autour de 30, la convergence de la loi binomiale vers la distribution normale nous donne (2.52).

Mesure de risque quantile			
$VaR_\alpha(L)$	Modèle de Kou		
	FFT	MC	(C.I.99%)
$V_{0.90}(L)$	5.29574	5.30979	[5.08690 , 5.53214]
$V_{0.95}(L)$	7.43320	7.38201	[7.08740 , 7.71499]
$V_{0.975}(L)$	10.01647	9.96127	[9.26174 , 10.68921]
$V_{0.99}(L)$	14.31227	14.70936	[13.59909 , 16.53221]

Mesure de risque CTE		
$CTE_\alpha(L)$	Modèle de Kou	
	FFT	MC
$CTE_{0.90}(L)$	9.17755	9.14454
$CTE_{0.95}(L)$	12.14543	12.34909
$CTE_{0.975}(L)$	15.75536	15.76129
$CTE_{0.99}(L)$	21.76520	21.07032

TABLE 2.13 – Mesures de risque sous le modèle de Kou pour différentes valeurs de α . Les paramètres du modèle sont donnés à la table (2.11), auxquels on ajoute les paramètres artificiels de sauts : $\lambda = 0.5$, $\eta_1 = 5$, $\eta_2 = 6$. La probabilité de sauts positifs p est prise égale à 0.4.

2.3.5.4 Modèle RSLN

Comme nous l'avons noté pour ce type de modèle, la fonction caractéristique du processus modulé X peut être écrite :

$$\phi(u) = \sum_{c=0}^T \exp \left\{ -C\psi_1(u) - (T-C)\psi_2(u) \right\} \Pr[C = c], \quad (2.54)$$

où ψ_{ζ_t} est l'exposant caractéristique associé à X_t sachant ζ_t . Nous obtenons dans un premier temps des formules fermées que nous comparons avec celles en sortie de l'approche suggérée. En notant que :

$$F_{S_T}(x) = \Pr[S_T \leq x] = \sum_{c=0}^T \Pr[S_T \leq x | C = c] \times \Pr[C = c],$$

on détermine $VaR_\alpha(L)$ de telle sorte que :

$$\Pr[S_T < VaR_\alpha(L) + K] = F_{S_T}(K + VaR_\alpha(L)) = \alpha.$$

Mesure de risque quantile			
$VaR_\alpha(L)$	Modèle CGMY		
	FFT	MC	(C.I.99%)
$V_{0.90}(L)$	0.16303	0.162332	[0.14748 , 0.17719]
$V_{0.95}(L)$	0.28711	0.287141	[0.26756 , 0.30300]
$V_{0.975}(L)$	0.41069	0.405142	[0.38026 , 0.43264]
$V_{0.99}(L)$	0.57863	0.598236	[0.54706 , 0.65849]

Mesure de risque CTE		
$CTE_\alpha(L)$	Modèle CGMY	
	FFT	MC
$CTE_{0.90}(L)$	0.344812	0.344813
$CTE_{0.95}(L)$	0.471422	0.472922
$CTE_{0.975}(L)$	0.601138	0.606909
$CTE_{0.99}(L)$	0.780711	0.790691

TABLE 2.14 – Mesures de risque sous le modèle CGMY pour différentes valeurs de niveau de risque α .

D'autre part, en conditionnant par C , $S_T|C$ suit une distribution lognormale de paramètres dépendant de C . En utilisant la distribution de C , la CTE peut de même être obtenue. Ainsi, il vient d'abord :

$$E[L1_{L > VaR_\alpha(L)}] = E[E[L1_{L > VaR_\alpha(L)}] | C].$$

Il vient ensuite :

$$CTE_\alpha(L_T) = \frac{S_0}{1-\alpha} \sum_{c=0}^T \left[\exp \left\{ \mu_1 C + \mu_2 (T - C) + \frac{1}{2} \Sigma^2 \right\} \mathcal{N}(d_1) \right] \Pr[C = c] - K,$$

avec :

$$d_1 = -\frac{\ln \left(\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right) - (C\mu_1 + (T - C)\mu_2)}{\Sigma} + \Sigma.$$

avec :

$$\Sigma^2 = C\sigma_1^2 + (T - C)\sigma_2^2 \text{ et } \Sigma = \sqrt{\Sigma^2}$$

Du côté de la transformée de Fourier, en utilisant (4.48) avec :

$$\psi_{\zeta_t} = -iu\mu_{\zeta_t} + \frac{\sigma_{\zeta_t}^2}{2}u^2, \quad \zeta_t = 1, 2, \quad (2.55)$$

les erreurs constatées sont données à la table (2.15).

Mesure de risque quantile		Mesure de risque CTE		
$VaR_\alpha(L)$	Modèle RSLN	$CTE_\alpha(L)$	Modèle RSLN	
	FFT		Valeur exacte	Erreur
$V_{0.90}(L)$	4.45664	$CTE_{0.90}(L)$	5.95928	1.42108e-14
$V_{0.95}(L)$	5.48952	$CTE_{0.95}(L)$	7.00374	2.22044e-13
$V_{0.975}(L)$	6.52085	$CTE_{0.975}(L)$	8.06193	7.46069e-14
$V_{0.99}(L)$	7.90441	$CTE_{0.99}(L)$	9.49611	5.54223e-13

TABLE 2.15 – Mesures de risques calculées en utilisant l'approche de transformée de Fourier rapide pour différentes valeurs du niveau de risque α . Les paramètres utilisés sont donnés en (1.6) pour l'indice canadien TSE 300, avec $T = 10$, $K = 1$ et $S_0 = 1$.

2.3.6 Application aux contrats de type Européen

Sans perte de généralité, considérons des contrats dont la fonction de perte est représentée par le flux de trésorerie d'une option de type européen. La singularité de ces fonctions de paiement est qu'elles tombent dans une masse de probabilité lorsque l'option est en dehors de la monnaie. Nous verrons que le calcul des mesures de risques n'est pas immédiat. En revanche, il se révèle particulièrement efficace avec l'approche suggérée.

Le contrat

Considérons un contrat dont la fonction de perte engendrée est donnée par le paiement à la maturité T d'une option de vente :

$$L_T = \max(K - S_T e^{-mT}, 0) \quad (2.56)$$

avec K le prix d'exercice de l'option et $m\%$, un taux continu prélevé mensuellement du fonds sous-jacent. Comme on peut le voir, la fonction de perte L_T définie en (2.56) tombe dans la masse de probabilité zéro quand le fonds sous-jacent est plus grand que le prix d'exercice à la date de fin de contrat T . Ainsi, la première étape consiste à déterminer si la probabilité pour que L_T finisse en dehors de la monnaie est supérieure ou inférieure au seuil de risque requis pour le calcul des mesures de risques. Plus précisément, on cherche ξ tel que :

$$\begin{aligned} \xi &= \Pr[L_T = 0] \\ &= \Pr[S_T e^{-mT} > K]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Pour cela, considérons de nouveau la forme générale du fonds $S_T e^{-mT}$ donnée comme un processus de Lévy géométrique X :

$$S_T e^{-mT} = S_0 \exp(X_T). \quad (2.58)$$

Il vient :

$$\xi = 1 - \Pr \left[X_T < \ln \left(\frac{K}{S_0} \right) \right].$$

Or, la formule (2.40) permet d'obtenir la fonction de répartition de tout processus de Lévy comme une transformée de Fourier d'une fonction caractéristique bien définie. Donc $\Pr \left[X_T < \ln \left(\frac{K}{S_0} \right) \right]$ est aisément déterminée.

Il vient que pour tout α tel que $\alpha > \xi$, on s'intéresse à la distribution donnée pour $L_T > 0$. Ainsi :

$$L_T = K - S_T e^{-mT}. \quad (2.59)$$

Cette précaution nous ramène aux résultats déjà obtenus à la section (2.3.4).

Dans la suite des applications, nous considérons un contrat qui mature dans dix ans. On suppose un prix d'exercice égal à la valeur initiale du fonds $K = S_0 = 100$. De même, pour la gestion du fonds, on admet que le gestionnaire prélève un taux continu mensuel de 0.25%.

Sous le modèle lognormal

L'observation au plus près de la définition (2.58) nous amène à redéfinir X_t par :

$$X_t = (\mu - m)t + \sigma W_t,$$

avec

$$\psi(u) = -iu(\mu - m) + u^2 \frac{\sigma^2}{2}.$$

Le niveau de probabilité ξ est exactement :

$$\xi = 1 - \mathcal{N} \left(\frac{\ln \frac{K}{S_0} - (\mu - m)T}{\sigma \sqrt{T}} \right), \quad (2.60)$$

avec :

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(L_T) &= 0, \quad \forall \alpha \leq \xi \\ \text{et } VaR_\alpha(L_T) &= K - S_0 \exp \left\{ (\mu - m)T - \sigma \sqrt{T} \mathcal{N}^{-1}(\alpha) \right\}, \quad \forall \alpha > \xi, \end{aligned}$$

où $\mathcal{N}^{-1}$ est l'inverse de loi normale centrée réduite. De l'autre côté, la $CTE_\alpha(L)$ est aussi obtenue en notant que :

$$E[L1_{L > VaR}] = -S_0 e^{(\mu - m)T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \mathcal{N}(d_1 - \sigma \sqrt{T}) + K \mathcal{N}(d_1),$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{-VaR_\alpha(L)+K}{S_0}\right) - (\mu - m)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Parce que $\mathcal{N}(d_1) = \Pr[L > VaR_\alpha(L)] = 1 - \alpha$, il vient :

$$CTE_\alpha(L_T) = K - \frac{S_0}{1 - \alpha} \left\{ e^{(\mu-m)T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \mathcal{N}(d_1 - \sigma\sqrt{T}) \right\}. \quad (2.61)$$

En notant que $d_1 = \mathcal{N}^{-1}(1 - \alpha)$, il vient finalement :

$$CTE_\alpha(L_T) = K - \frac{S_0}{1 - \alpha} \left\{ e^{(\mu-m)T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \mathcal{N}(\mathcal{N}^{-1}(1 - \alpha) - \sigma\sqrt{T}) \right\}.$$

On utilise à nouveau les paramètres estimés à la table (2.11).

Les résultats sont donnés à la table (2.16).

Mesure de risque quantile			Mesure de risque CTE		
$VaR_\alpha(L)$	Modèle lognormal		$CTE_\alpha(L)$	Modèle lognormal	
	Valeur exacte	Erreur		Valeur exacte	Erreur
ξ	0.919837	0			
$V_{0.90}(L)$	0	0	$CTE_{0.90}(L)$	14.29966	4.26325e-14
$V_{0.95}(L)$	11.20070	2.84217e-14	$CTE_{0.95}(L)$	26.61601	1.77635e-14
$V_{0.975}(L)$	23.98156	0	$CTE_{0.975}(L)$	36.07553	3.55271e-14
$V_{0.99}(L)$	36.54781	2.13162e-14	$CTE_{0.99}(L)$	45.72527	4.26325e-14

TABLE 2.16 – Mesures de risque calculées sous le modèle lognormal pour un contrat de maturité 10 ans.

Sous le modèle RSLN

Sous le modèle lognormal avec changement de régime, ξ peut être déterminé en conditionnant par la variable comptant le nombre de fois où l'état 1 est visité. Notons cette variable C . Il vient

$$\xi = 1 - \sum_{c=0}^T \mathcal{N}(d(C)) \times \Pr[C = c], \quad (2.62)$$

avec :

$$d(C) = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + mT - (C\mu_1 + (T - C)\mu_2)}{\sqrt{\Sigma^2}} - \sqrt{\Sigma^2},$$

avec :

$$\Sigma^2 = C\sigma_1^2 + (T - C)\sigma_2^2.$$

La VaR s'obtient de telle sorte que :

$$\Pr[S_T < K - VaR_\alpha(L)] = F_{S_T}(K - VaR_\alpha(L)) = 1 - \alpha. \quad (2.63)$$

A la lumière de l'équation (2.61), la CTE est obtenue avec :

$$CTE_\alpha(L_T) = K - S_0 \frac{e^{-mT}}{1 - \alpha} \sum_{c=0}^T \left[\exp \left\{ \mu_1 C + \mu_2 (T - C) + \frac{1}{2} \Sigma^2 \right\} \mathcal{N}(d_2(C)) \right] \Pr[C = c]. \quad (2.64)$$

où :

$$d_2(C) = \frac{\ln \left(\frac{K - VaR}{S_0} \right) + mT - (C\mu_1 + (T - C)\mu_2)}{\sqrt{\Sigma^2}} - \sqrt{\Sigma^2}.$$

De notre côté, nous utilisons (4.48) et l'exposant caractéristique :

$$\psi_{\zeta_t} = -iu(\mu_{\zeta_t} - m) + \frac{\sigma_{\zeta_t}^2}{2} u^2, \quad \zeta_t = 1, 2.$$

En utilisant les paramètres de la table (1.6), on obtient les résultats ci-après. Ainsi, si on

Mesure de risque quantile		Mesure de risque CTE		
$VaR_\alpha(L)$	Modèle RSLN	$CTE_\alpha(L)$	Modèle RSLN	
	FFT		Valeur exacte	Erreur
ξ	0.89537 (0)			
$V_{0.90}(L)$	1.65404	$CTE_{0.90}(L)$	26.08398	1.77635e-14
$V_{0.95}(L)$	22.64955	$CTE_{0.95}(L)$	40.60371	7.10542e-15
$V_{0.975}(L)$	37.78943	$CTE_{0.975}(L)$	51.47582	3.55271e-14
$V_{0.99}(L)$	52.24529	$CTE_{0.99}(L)$	62.16886	3.55271e-14

TABLE 2.17 – Mesures de risque calculées sous le modèle lognormal pour un contrat de maturité 10 ans.

décide de détenir des fonds propres avec un niveau de confiance de 95%, l'hypothèse d'un modèle lognormal pour la dynamique réelle du sous-jacent, nécessite l'immobilisation de 11.20% du fonds au moment où le modèle RSLN recommande un peu plus du double, soit 22.64%. Or, le modèle lognormal reflète moins la réalité que le modèle RSLN. Par conséquent, il semble raisonnable de penser que ce modèle sous-estime l'occurrence du véritable risque notamment au niveau de la queue de probabilité des distributions de pertes.

Conclusion

Ce chapitre a apporté dans un cadre non-gaussien, une méthodologie unifiée qui allie performance et opérationnalité pour l'évaluation, la couverture, le contrôle et la mesure de risque. Il répond aux soucis des praticiens souhaitant avoir une méthodologie unie pour la gestion rigoureuse de risque en présence de discontinuités de cours financiers. De même, en raison de son efficience, celle-ci pourrait être recommandée comme part du système global de gestion de risque non seulement dans le domaine de la Banque mais aussi dans le secteur de l'Assurance.

Annexe A

A.1 Formule de Itô pour les processus de diffusion à sauts

Nous donnons la solution de la dynamique du sous-jacent S représentée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dW_t + d \left(\sum_{i=1}^{N_t} (Y_i - 1) \right). \quad (\text{A.1})$$

Pour cela, introduisons une proposition de Cont et Tankov (2004).

Proposition A.1.1. *Soit X un processus de diffusion à sauts, défini comme la somme d'un terme de dérive, d'une intégrale stochastique brownienne et d'un processus de Poisson composé :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s dS + \int_0^t b_s dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} \Delta X_i,$$

où :

$$E \left[\int_0^t b_t^2 dt < \infty \right].$$

Alors, pour toute fonction $C^{1,2}$ $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le processus $G_t = f(t, X_t)$ peut être représenté comme :

$$\begin{aligned} dG_t = & \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + a_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dt + \frac{b_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(t, X_t)dt + b_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dW_t \\ & + [f(X_{t-} + \Delta X_t) - f(X_{t-})]dN_t. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition (A.1.1) pour une fonction $\ln S_t$ avec S_t définie en (A.1), il vient d'abord :

$$d \ln S_t = \mu S_t \frac{1}{S_t} dt + \frac{\sigma_t^2 S_t^2}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma_t S_t dW_t + [\ln S_t(1 + Y_t - 1) - \ln S_{t-}]dN_t.$$

En utilisant la relation de Chasle entre 0 et t , il vient ensuite :

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln Y_i.$$

En posant $J = \ln(Y)$, il résulte :

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i.$$

Nous retrouvons ainsi la solution :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\}.$$

A.2 Fonction caractéristique associée au processus variance gamma

Considérons la forme générale des processus de Lévy géométriques : $S_t = S_0 e^{X_t}$ où

$$X_t = \mu t + L_t, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

avec :

$$L_t = \theta G_t + \sigma W_{G_t}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^{*+}.$$

($G_t : t \geq 0$) représente un subordonateur (un processus Gamma de paramètre t/ς et ς) indépendant de W . En d'autres termes, $G_t \sim \Gamma\left(\frac{t}{\varsigma}, \varsigma\right) := \Gamma(t/\varsigma)$. La fonction caractéristique associée à X est :

$$\phi_{X_t}(u) = E[e^{iuX_t}] = e^{-t\psi(u)} = e^{iu\mu t} \left(1 - iu\theta\varsigma + u^2 \frac{\sigma^2}{2} \varsigma \right)^{-\frac{t}{\varsigma}}, \quad u \in \mathbb{C}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} E[e^{iuL_t}] &= E \left[E[e^{iu(\theta G_t + \sigma W_{G_t})} | G_t = g] \right] \\ &= \int_0^{+\infty} E[e^{iu(\theta G_t + \sigma W_{G_t})} | G_t = g] \frac{g^{t/\varsigma-1} e^{-\frac{g}{\varsigma}}}{\varsigma^{t/\varsigma} \Gamma(t/\varsigma)} dg \\ &= \int_0^{+\infty} e^{iu\theta g - \frac{\sigma^2 u^2 g}{2}} \times \frac{g^{t/\varsigma-1} e^{-\frac{g}{\varsigma}}}{\varsigma^{t/\varsigma} \Gamma(t/\varsigma)} dg \\ &= \int_0^{+\infty} e^{iu\theta g - \frac{\sigma^2 u^2 g}{2} - \frac{g}{\varsigma}} \times \frac{g^{t/\varsigma-1}}{\varsigma^{t/\varsigma} \Gamma(t/\varsigma)} dg \\ &= \frac{1}{\varsigma^{t/\varsigma} \Gamma(t/\varsigma)} \int_0^{+\infty} e^{-g(-iu\theta + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \frac{1}{\varsigma})} g^{t/\varsigma-1} dg. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable, $g = g(-iu\theta + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \frac{1}{\varsigma})$,

$$\begin{aligned} E[e^{iuLt}] &= \frac{1}{\varsigma^{t/\varsigma} \Gamma(t/\varsigma)} \int_0^{+\infty} e^{-g} g^{t/\varsigma-1} \left(-iu\theta + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \frac{1}{\varsigma}\right)^{-t/\varsigma+1} \left(-iu\theta + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \frac{1}{\varsigma}\right)^{-1} dg \\ &= \frac{\left(-iu\theta + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \frac{1}{\varsigma}\right)^{-\frac{t}{\varsigma}} \varsigma^{-\frac{t}{\varsigma}}}{\Gamma(t/\varsigma)} \int_0^{+\infty} g^{t/\varsigma-1} e^{-g} dg. \end{aligned}$$

Or,

$$\Gamma(t/\varsigma) = \int_0^{+\infty} g^{t/\varsigma-1} e^{-g} dg.$$

Ainsi, il vient :

$$E[e^{iuLt}] = \left(1 - iu\theta\varsigma + u^2 \frac{\sigma^2}{2} \varsigma\right)^{-\frac{t}{\varsigma}},$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

A.3 Preuve des Lemmes

Lemme A.3.1. Soient M , V et K , 3 constantes réelles avec V et K positives telles que $Y \sim \mathcal{N}(M, V^2)$, alors $\forall \varpi \in \{-1, 1\}$,

$$E[(\varpi(e^Y - K))^+] = \varpi e^{M+\frac{V}{2}} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{M - \ln K + V^2}{V}\right) - \varpi K \mathcal{N}\left(\varpi \frac{M - \ln K}{V}\right).$$

Preuve : Soit $\varpi = 1$, on a :

$$\begin{aligned} E[(\varpi(e^Y - K))^+] &= \int_{\ln K}^{+\infty} (e^y - K) dF_Y(y) \\ &= \int_{\ln K}^{+\infty} (e^y - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}V} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-M)^2}{V^2}} dy. \end{aligned}$$

Du changement de variable : $y = \frac{y-M}{V} \Rightarrow y = Vy + M$, il vient :

$$\begin{aligned} E[(\varpi(e^Y - K))^+] &= \int_{\frac{\ln K - M}{V}} e^{yV+M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K \int_{\frac{\ln K - M}{V}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= e^M \int_{\frac{\ln K - M}{V}} e^{yV} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dy - K \int_{\frac{\ln K - M}{V}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (y - V)^2 &= y^2 - 2yV + V^2 \\ -\frac{1}{2}(y - V)^2 &= -\frac{y^2}{2} + yV - \frac{V^2}{2}, \end{aligned}$$

alors,

$$E[(e^Y - K)^+] = e^{M+\frac{V^2}{2}} \int_{\frac{\ln K - M}{V}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-V)^2} dy - K \int_{\frac{\ln K - M}{V}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Posons $y = y - V$,

$$E[(e^Y - K)^+] = e^{M+\frac{V^2}{2}} \int_{\frac{\ln K - M}{V} - V}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K \int_{\frac{\ln K - M}{V}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv.$$

En prenant $y \rightarrow -y$ et $v \rightarrow -v$, on obtient :

$$E[(e^Y - K)^+] = e^{M+\frac{V^2}{2}} \int_{-\infty}^{-\frac{\ln K - M}{V} + V} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K \int_{-\infty}^{-\frac{\ln K - M}{V}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv.$$

Ainsi,

$$E[(e^Y - K)^+] = e^{M+\frac{V^2}{2}} \mathcal{N}\left(-\frac{\ln K - M - V^2}{V}\right) - K \mathcal{N}\left(-\frac{\ln K - M}{V}\right).$$

Du même raisonnement pour $\varpi = -1$, il résulte :

$$E[\varpi(e^Y - K)^+] = -e^{M+\frac{V^2}{2}} \mathcal{N}\left(\frac{\ln K - M - V^2}{V}\right) + K \mathcal{N}\left(\frac{\ln K - M}{V}\right).$$

Ce dernier ouvre la voie à la généralisation suivante : $\forall w \in \{-1, 1\}$,

$$E[(e^Y - K)^+] = \varpi e^{M+\frac{V^2}{2}} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{M - \ln K + V^2}{V}\right) - \varpi K \mathcal{N}\left(\varpi \frac{M - \ln K}{V}\right),$$

ce qui met fin à cette preuve. □

Lemme A.3.2. Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \delta^2)$ et α et β deux constantes réelles avec $\beta > 0$, alors $\forall \varpi \in \{-1, 1\}$,

$$E\left[\phi\left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = \mathcal{N}\left(\varpi \frac{\alpha + m}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right).$$

Preuve : Soit $\varpi = 1$,

$$E\left[\phi\left(\frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = E[1_{\beta Y - X < \alpha}].$$

On sait que $\beta Y - X \stackrel{d}{=} -m + \sqrt{\beta^2 + \delta^2} \epsilon$, avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$, il vient :

$$E\left[\phi\left(\frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = \mathcal{N}\left(\frac{\alpha + m}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right).$$

Pour $\varpi = -1$, on aurait :

$$E\left[\phi\left(\frac{-X - \alpha}{\beta}\right)\right] = E[1_{\beta Y + X < -\alpha}].$$

Remarquons cette fois ci que $\beta Y + X \stackrel{d}{=} m + \sqrt{\beta^2 + \delta^2}\epsilon$, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors il résulte :

$$E\left[\phi\left(\frac{-X - \alpha}{\beta}\right)\right] = \mathcal{N}\left(\frac{-\alpha - m}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right),$$

ce qui nous conduit à la généralisation suivante :

$$E\left[\phi\left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = \mathcal{N}\left(\varpi \frac{\alpha + m}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right).$$

Ceci conclut la preuve. $\square$

Lemme A.3.3. Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \delta^2)$ et α et β deux constantes réelles avec $\beta > 0$, alors $\forall \varpi \in \{-1, 1\}$ et $\forall \eta \geq 0$,

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{\alpha + m + \eta \delta^2}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\eta x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{y < \varpi \frac{x + \alpha}{\beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - m)^2}{\delta^2}}}{\sqrt{2\pi\delta^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\eta x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\eta y < \varpi \frac{\eta x + \eta \alpha}{\beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - m)^2}{\delta^2}}}{\sqrt{2\pi\delta^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\eta y < \varpi \frac{x + \eta \alpha}{\beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \eta m)^2}{(\eta \delta)^2}}}{\sqrt{2\pi(\eta \delta)^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{y < \varpi \frac{x + \eta \alpha}{\eta \beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \eta m)^2}{(\eta \delta)^2}}}{\sqrt{2\pi(\eta \delta)^2}} dx. \end{aligned}$$

Il vient,

$$\begin{aligned} E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] &= e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{y < \varpi \frac{x + \eta \alpha}{\eta \beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - (\eta m + (\eta \delta)^2))^2}{(\eta \delta)^2}}}{\sqrt{2\pi(\eta \delta)^2}} dx \\ &= e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{y < \varpi \frac{x + \eta \alpha}{\eta \beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - (\eta m + (\eta \delta)^2))^2}{(\eta \delta)^2}}}{\sqrt{2\pi(\eta \delta)^2}} dy dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta\delta)^2}{2}} E[1_{Y < \varpi \frac{x + \eta\alpha}{\eta\beta}}], \quad Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\eta m + (\eta\delta)^2, (\eta\delta)^2).$$

Soit $\varpi = 1$, en remarquant que : $\eta\beta Y - X \stackrel{d}{=} -(\eta m + (\eta\delta)^2) + \sqrt{(\eta\beta)^2 + (\eta\delta)^2} \epsilon$, avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$, il vient :

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta\delta)^2}{2}} \mathcal{N}\left(\frac{\eta\alpha + (\eta m + (\eta\delta)^2)}{\sqrt{(\eta\beta)^2 + (\eta\delta)^2}}\right).$$

Soit $\varpi = -1$, notons cette fois-ci que : $\eta\beta Y + X \stackrel{d}{=} (\eta m + (\eta\delta)^2) + \sqrt{(\eta\beta)^2 + (\eta\delta)^2} \epsilon$, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$, il résulte :

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\frac{-X - \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta\delta)^2}{2}} \mathcal{N}\left(\frac{-\eta\alpha - (\eta m + (\eta\delta)^2)}{\sqrt{(\eta\beta)^2 + (\eta\delta)^2}}\right),$$

ce qui nous am ne à la généralisation suivante :

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta\delta)^2}{2}} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{\eta\alpha + (\eta m + (\eta\delta)^2)}{\sqrt{(\eta\beta)^2 + (\eta\delta)^2}}\right) \quad \forall \varpi \in \{-1, 1\}.$$

Après simplification :

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta\delta)^2}{2}} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{\alpha + m + \eta\delta^2}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right) \quad \forall \varpi \in \{-1, 1\}.$$

Ce dernier conclut la preuve. □

Proposition A.3.1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, S e^x, \varpi) e^x \nu_X(dx) = \lambda e^{m + \frac{\delta^2}{2}} F_M(t, S e^{m + \frac{3\delta^2}{2}}, \Sigma, \varpi),$$

avec : $\Sigma = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$.

Preuve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, S_n e^x, \varpi) e^x \nu_X(dx) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} E_Q[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi) e^X].$$

Or,

$$E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi) e^X] = \varpi S_n E_Q\left[e^{2X} \mathcal{N}\left(\varpi \frac{X + \ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}}\right)\right]$$

$$- \varpi K e^{r\tau} E_Q\left[e^X \mathcal{N}\left(\varpi \frac{X + \ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}}\right)\right].$$

En utilisant le lemme (A.3.3), on obtient aisément :

$$\begin{aligned}
& \lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi) e^X] \\
&= \varpi S_n e^{2m+2\delta^2} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{(m+2\delta^2) + \ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{\sigma_n^2 \tau + \delta^2}} \right) \\
&\quad - \varpi e^{m+\frac{\delta^2}{2}} K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{m + \delta^2 + \ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{\sigma_n^2 \tau + \delta^2}} \right) \\
&= \varpi S_n e^{2m+2\delta^2} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{(m+2\delta^2) + \ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right) \\
&\quad - \varpi e^{m+\frac{\delta^2}{2}} K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{m + \delta^2 + \ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right).
\end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant $\frac{\delta^2}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned}
& \lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi) e^X] = \\
& \varpi S_n e^{2m+2\delta^2} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{(m+2\delta^2) + \ln \frac{S_n}{K} - \frac{\delta^2}{2} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2} + \frac{\delta^2}{2\tau})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right) \\
& \quad - \varpi e^{m+\frac{\delta^2}{2}} K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{m + \delta^2 + \ln \frac{S_n}{K} + \frac{\delta^2}{2} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2} - \frac{\delta^2}{2\tau})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right).
\end{aligned}$$

En posant $\Sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$, il vient :

$$\begin{aligned}
& \lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi) e^X] = \\
& \varpi S_n e^{2m+2\delta^2} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n}{K} + m + \frac{3\delta^2}{2} + \left(r + \frac{\Sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right) \\
& \quad - \varpi e^{m+\frac{\delta^2}{2}} K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n}{K} + m + \frac{3\delta^2}{2} + \left(r - \frac{\Sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right).
\end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi) e^X] = \\ \varpi S_n e^{2m+2\delta^2} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n e^{m+\frac{3\delta^2}{2}}}{K} + \left(r + \frac{\Sigma_n^2}{2}\right) \tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right) \\ - \varpi e^{m+\frac{\delta^2}{2}} K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n e^{m+\frac{3\delta^2}{2}}}{K} + \left(r - \frac{\Sigma_n^2}{2}\right) \tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right). \end{aligned}$$

Il résulte :

$$\lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi) e^X] = F_{BS}(S_n e^{m+\frac{3\delta^2}{2}}, \tau, \varpi),$$

où :

$$\begin{aligned} F_{BS}(S, \tau, \varpi) = \varpi S_n \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\Sigma_n^2}{2}\right) \tau}{\Sigma_n \sqrt{\tau}} \right) \\ - \varpi K e^{-r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r - \frac{\Sigma_n^2}{2}\right) \tau}{\Sigma_n \sqrt{\tau}} \right). \end{aligned}$$

Avec $\Sigma = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$, il vient finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, S e^x, \varpi) e^x \nu_X(dx) = \lambda e^{m+\frac{\delta^2}{2}} F_M(t, S e^{m+\frac{3\delta^2}{2}}, \Sigma, \varpi).$$

Ce qui conclut la preuve. □

Proposition A.3.2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, S e^x, \varpi) \nu_X(dx) = \lambda F_M(t, S e^{m+\frac{\delta^2}{2}}, \Sigma, \varpi),$$

avec : $\Sigma = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$.

Preuve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, S_n e^x, \varpi) \nu_X(dx) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} E_Q[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi)].$$

Or,

$$\begin{aligned} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi)] = \varpi S_n E_Q \left[e^X \mathcal{N} \left(\varpi \frac{X + \ln \frac{S_n}{K} + \left(r + \frac{\sigma_n^2}{2}\right) \tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right) \right] \\ - \varpi K e^{r\tau} E_Q \left[e^X \mathcal{N} \left(\varpi \frac{X + \ln \frac{S_n}{K} + \left(r - \frac{\sigma_n^2}{2}\right) \tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right) \right], \end{aligned}$$

De la même manière, en appliquant le lemme (A.3.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi)] \\
&= \varpi S_n e^{m+\frac{\delta^2}{2}} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{m + \delta^2 + \ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{\sigma_n^2 \tau + \delta^2}} \right) \\
&\quad - \varpi K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{m + \ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{\sigma_n^2 \tau + \delta^2}} \right) \\
&= \varpi S_n e^{m+\frac{\delta^2}{2}} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{m + \delta^2 + \ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right) \\
&\quad - \varpi K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{m + \ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right).
\end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant $\frac{\delta^2}{2}$, puis en en posant $\Sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$, il vient :

$$\begin{aligned}
& \lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi)] = \\
& \varpi S_n e^{m+\frac{\delta^2}{2}} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n}{K} + m + \frac{\delta^2}{2} + \left(r + \frac{\Sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right) \\
& \quad - \varpi K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n}{K} + m + \frac{\delta^2}{2} + \left(r - \frac{\Sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right),
\end{aligned}$$

d'où résulte :

$$\begin{aligned}
& \lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi)] = \\
& \varpi S_n e^{m+\frac{\delta^2}{2}} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n e^{m+\frac{\delta^2}{2}}}{K} + \left(r + \frac{\Sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right) \\
& \quad - \varpi K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\varpi \frac{\ln \frac{S_n e^{m+\frac{\delta^2}{2}}}{K} + \left(r - \frac{\Sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \varpi)] = F_{BS}(S_n e^{m+\frac{\delta^2}{2}}, \tau, \varpi).$$

Avec $\Sigma = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$, il vient finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(t, Se^x, \varpi) \nu_X(dx) = \lambda F_M(t, Se^{m+\frac{\delta^2}{2}}, \Sigma, \varpi).$$

Ce qui met fin à cette preuve. □

A.4 Approche générale de calcul numérique des fonctions de densité

On sait que la transformée de Fourier d'une fonction $g(x)$ est donnée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} g(x) dx.$$

La transformée de Fourier d'une fonction de probabilité de densité associée à une variable aléatoire X , représente sa fonction caractéristique. Ce qui veut dire que si cette fonction caractéristique ϕ_X est bien définie, alors on peut retrouver cette fonction de densité par la transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \phi_X(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-iux} \phi_X(u) du. \end{aligned} \tag{A.2}$$

L'intégrale ci-dessus peut être calculée en utilisant un pas de discrétisation³³ η . On obtient donc :

$$f_X(x) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_j e^{-iu_j x} \phi_X(u_j) \Delta u,$$

où : $\delta_j = \frac{1}{2}$ si $j = 0$ ou $\delta_j = 1$ sinon. Avec $\Delta u = \eta$ et $u_j = u_{min} + \eta j$, pour $j = 0, \dots, N-1$, dont $u_{min} = 0$.

Alors, nous réécrivons (A.2) :

$$f_X(x) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_j e^{-i(u_{min} + j\eta)x} \phi_X(u_j) \eta, \quad u_{min} = 0.$$

33. Nous sommes ici satisfaits de la formule des trapèzes définie comme suit :

$$\int_a^b h(u) du = \left(\frac{h(a) + h(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} h(a + ju) \right) \Delta u.$$

Afin de mettre en place la FFT, le domaine des x est aussi découpé avec un espacement régulier de taille ν :

$$x_k = x_{min} + \nu k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

où x_{min} est choisi de manière à contrôler le domaine d'espacement ³⁴ :

$$f_X(x) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_j e^{-i(u_{min}+j\eta)(x_{min}+k\nu)} \phi_X(u_j) \eta, \quad u_{min} = 0.$$

Il vient ensuite :

$$f_X(x) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_j e^{-ix_{min}u_j} e^{-i\nu\eta jk} \phi_X(u_j) \eta.$$

Ce dernier nous amène au choix de l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). Celui-ci impose que les paramètres ν et η soient couplés par : $\nu\eta = \frac{2\pi}{N}$.

Comme illustration, reprenons le cadre du modèle de Black-Scholes dans lequel les rentabilités continues sont normalement distribuées. La figure (A.1) montre l'erreur constatée en prenant $N = 4096$ et un pas d'intégration $\eta = 0.25$ pour une distribution normale de moyenne nulle et de volatilité de 20%.

A.5 Transformée de Fourier des fonctions de perte

Considérons une fonction de perte définie comme suit :

$$\begin{aligned} g(X_T) &= L_T 1_{L_T > VaR_\alpha(L)} \\ &= \varpi(S_T - K) 1_{\varpi(S_T - K) > VaR_\alpha(L)}. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, prenons $\varpi = 1$, la transformée de Fourier de la fonction g est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{g}(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} g(x) dx \\ &= S_0 \left[\frac{e^{x(1-iu)}}{1-iu} \right]_{\ln \left[\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right]}^{+\infty} - K \left[\frac{e^{-iux}}{-iu} \right]_{\ln \left[\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right]}^{+\infty}, \quad \Im(u) = \delta < 1 \\ &= -\frac{S_0}{1-iu} e^{\ln \left[\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right] (1-iu)} - \frac{K}{iu} e^{\ln \left[\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right] (-iu)} \\ &= \left[\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right]^{-iu} \left[-\frac{S_0}{1-iu} \left(\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right) - \frac{K}{iu} \right] \\ &= - \left[\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right]^{-iu} \left[\frac{VaR_\alpha + K}{1-iu} + \frac{K}{iu} \right]. \end{aligned}$$

34. Ce domaine peut être centré autour de zéro en prenant $x_{min} = -N\nu/2$

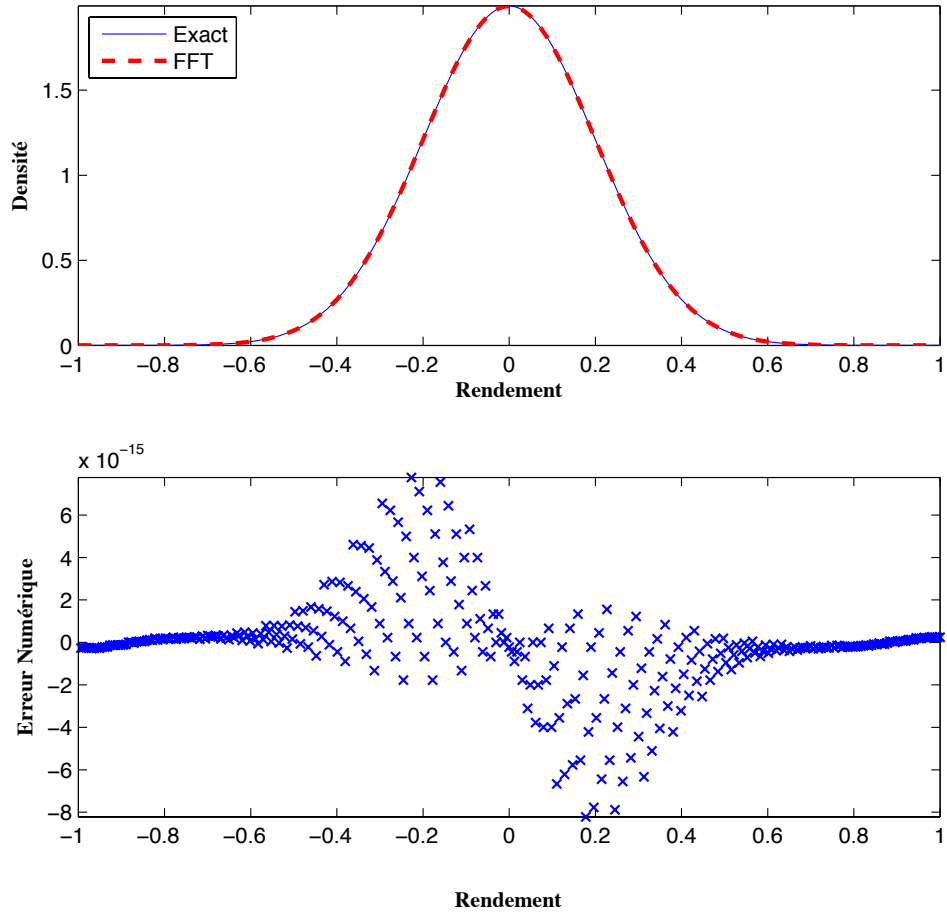


FIGURE A.1 – Distribution gaussienne obtenue par inversion numérique.

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(u) &= - \left[\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right]^{-iu} \left[\frac{i u VaR_\alpha + i u K + K - i u K}{i u (1 - i u)} \right] \\
 &= - \left[\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right]^{-iu} \left[\frac{i u VaR_\alpha + K}{i u (1 - i u)} \right] \\
 &= (i u VaR_\alpha + K) \times \frac{\left(\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right)^{-iu}}{-i u (-i u + 1)} = (i u VaR_\alpha + K) \times \frac{e^{-i u \ln \left[\frac{VaR_\alpha + K}{S_0} \right]}}{-i u (-i u + 1)}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, il vient :

$$\hat{g}(u) = (K + i u VaR_\alpha) \times \frac{e^{-i u \ln \left[\frac{K + VaR_\alpha}{S_0} \right]}}{-i u (-i u + 1)}, \quad \delta < 1.$$

Avec $\varpi = -1$, il vient de même :

$$\hat{g}(u) = (K - iuVaR_\alpha) \times \frac{e^{-iu \ln\left[\frac{K-VaR_\alpha}{S_0}\right]}}{-iu(-iu+1)}, \quad \delta > 0,$$

Ceci ouvre la voie à la généralisation :

$$\hat{g}(u) = (K + iu\varpi VaR_\alpha(L)) \frac{e^{-iu \ln\left(\frac{K+\varpi VaR_\alpha(L)}{S_0}\right)}}{-iu(-iu+1)}, \quad \text{avec } \varpi \in \{-1, 1\}. \quad (\text{A.3})$$

A.6 Formule exacte de la CTE sous le modèle lognormal

La fonction de perte L_T est spécifiée comme suit :

$$\begin{aligned} g(X_T) &= L_T 1_{L_T > VaR_\alpha(L)} \\ &= \varpi(S_T - K) 1_{\varpi(S_T - K) > VaR_\alpha(L)}. \end{aligned}$$

Prenons d'abord $\varpi = 1$, et comme on l'a vu, le calcul de la CTE est inhérente au calcul de l'espérance mathématique de cette fonction :

$$\begin{aligned} E[L 1_{L > VaR_\alpha(L)}] &= \int_{\ln\left(\frac{VaR_\alpha(L)+K}{S_0}\right)}^{+\infty} (S_0 e^x - K) dF_X(x) \\ &= \int_{\ln\left(\frac{VaR_\alpha(L)+K}{S_0}\right)}^{+\infty} (S_0 e^x - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu T)^2}{\sigma^2 T}} dx. \end{aligned}$$

Posons $x = \frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}} \Rightarrow x = x\sigma\sqrt{T} + \mu T$ et prenons $\Lambda = \left(\frac{VaR_\alpha(L)+K}{S_0}\right)$,

$$\begin{aligned} E[L 1_{L > VaR_\alpha(L)}] &= \int_{\frac{\ln(\Lambda)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\frac{\ln(\Lambda)+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}} S_0 e^{x\sigma\sqrt{T}+\mu T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - K \int_{\frac{\ln(\Lambda)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\frac{\ln(\Lambda)+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= S_0 e^{\mu T} \int_{\frac{\ln(\Lambda)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\frac{\ln(\Lambda)+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - K \int_{\frac{\ln(\Lambda)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\frac{\ln(\Lambda)+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

En observant :

$$\begin{aligned} (x - \sigma\sqrt{T})^2 &= x^2 - 2x\sigma\sqrt{T} + \sigma^2 T \\ -\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T})^2 &= -\frac{x^2}{2} + x\sigma\sqrt{T} - \frac{\sigma^2}{2}T, \end{aligned}$$

d'où,

$$E[L 1_{L > VaR_\alpha(L)}] = S_0 e^{\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \int_{\frac{\ln(\Lambda)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2} dx - K \int_{\frac{\ln(\Lambda)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\frac{\ln(\Lambda)+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Avec $x = x - \sigma\sqrt{T}$, il vient

$$E[L1_{L>VaR_\alpha(L)}] = S_0 e^{\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \int_{\frac{\ln(\Lambda) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - K \int_{\frac{\ln(\Lambda) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Avec $x \rightarrow -x$, il résulte d'une part :

$$E[L1_{L>VaR_\alpha(L)}] = S_0 e^{\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \int_{-\infty}^{-\frac{\ln(\Lambda) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - K \int_{-\infty}^{-\frac{\ln(\Lambda) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E[L1_{L>VaR}] &= S_0 e^{\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \phi \left(-\frac{\ln \left(\frac{VaR_\alpha(L)+K}{S_0} \right) - \mu T - \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\ &\quad - K \phi \left(-\frac{\ln \left(\frac{VaR_\alpha(L)+K}{S_0} \right) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} \right). \end{aligned}$$

Le même raisonnement pour $\varpi = -1$ nous donne :

$$\begin{aligned} E[L1_{L>VaR}] &= -S_0 e^{\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \phi \left(\frac{\ln \left(\frac{-VaR_\alpha(L)+K}{S_0} \right) - \mu T - \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\ &\quad + K \phi \left(\frac{\ln \left(\frac{-VaR_\alpha(L)+K}{S_0} \right) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} \right). \end{aligned}$$

Il résulte finalement :

$$\forall \varpi \in \{-1, 1\},$$

$$\begin{aligned} E[L1_{L>VaR}] &= \varpi S_0 e^{\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \phi \left(-\varpi \frac{\ln \left(\frac{\varpi VaR_\alpha(L)+K}{S_0} \right) - \mu T - \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\ &\quad - K \varpi \phi \left(-\varpi \frac{\ln \left(\frac{\varpi VaR_\alpha(L)+K}{S_0} \right) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}} \right). \end{aligned}$$

Deuxième partie

Assurance-vie

Chapitre 3

Évaluation et couverture des contrats : Variable Annuities

Introduction

Comme nous l'avons noté, le risque associé à la garantie plancher est une combinaison du risque de mortalité et du risque de marché. En se plaçant dans la situation de l'assuré, la garantie plancher en cas de décès ne sera exercée que si l'assuré décède à une date où la situation des marchés est défavorable³⁵. Le risque de mortalité est un risque classique pour l'assureur, il peut être pris en compte avec les tables de mortalité et se mutualise. Dans l'hypothèse d'une mutualisation suffisante, c'est-à-dire sur un gros portefeuille, aucune prime de risque n'est donc à associer à ce risque. Quant au risque de marché, il est beaucoup plus délicat à évaluer et à maîtriser, notamment du fait qu'il ne se mutualise pas. Il provient des fluctuations boursières des supports que l'assuré a choisis dans son contrat. Evaluer ce risque implique donc des modélisations de cours boursiers. De même, le prix à payer pour le choix d'un modèle réaliste reflétant le mieux la réalité financière est la prise en compte de l'incomplétude du marché. En d'autres termes, il n'existe aucune allocation qui immunise totalement le vendeur d'une option de telle sorte que son portefeuille de couverture réplique son engagement vis-à-vis de la contrepartie. La réplication comporte un risque et le choix d'une mesure de risque adéquate devient nécessaire. Le portefeuille de couverture est alors ajusté en permanence de telle sorte qu'il réplique en tout instant et dans tous les états de la nature, le flux de paiement de l'option de façon parfaite dans le cas de marchés complets et de façon approchée dans le cas de marchés incomplets. D'autre part, il est clair que nous ne pouvons acheter ou vendre en temps continu, ce qui aurait l'inconvénient d'entraîner des coûts de transactions quasi illimités. Ainsi, dès lors que nous relâchons cette hypothèse, nous introduisons une autre source d'incertitude : le portefeuille à couvrir est exposé entre les intervalles de temps discret où celui-ci n'est pas ajusté. Cette erreur de couverture discrète est connue sous la terminologie anglaise de *hedging error* ou sous celle de *tracking error*. Cependant,

35. Pour son bénéficiaire.

la fréquence d'ajustement du portefeuille de couverture est alors un compromis entre le niveau de couverture exigé et les coûts de transactions. D'autre part, l'approche classique de couverture dynamique consiste à utiliser une couverture en delta, où le delta représente la sensibilité de l'option à une variation du cours du titre. Cependant, cette approche est sous optimale puisqu'elle ne couvre pas les variations abruptes du support sous-jacent observées dans la pratique. Le but de ce chapitre est la mise en pratique de la méthodologie d'évaluation et de couverture d'option en marché incomplet suggérée au deuxième chapitre pour la couverture des garanties offertes dans les contrats Variable Annuities. Cette couverture consiste à l'utilisation d'un ratio de couverture optimale noté θ . Afin d'être au plus près de la pratique des marchés, nous prendrons en compte des coûts de transactions. L'estimation de ses coûts est un problème important pour l'évaluation des performances des stratégies de couverture. Demsetz (1968) fut le premier à décomposer le coût entre ses composantes explicites et implicites en notant que les coûts explicites correspondent aux frais, commissions et taxes supportés lors du passage d'un ordre, alors que les coûts implicites renvoient aux fourchettes de prix ou à l'impact des transactions sur les prix, pour les transactions de grande taille. Le coût apparaît donc comme une somme de composantes hétérogènes qu'il est délicat d'estimer. L'intégration des coûts de transactions dans le cadre du modèle de Black-Scholes a été faite par Leland (1985) qui étudie l'influence de ces derniers dans le cas où la fréquence d'ajustement tend vers zéro. Il montre aussi que le prix de la réplication d'option tend vers l'infini quand l'intervalle d'ajustement tend vers zéro, mais on sait que l'option est strictement dominée par l'action dont le prix est fini. Son approche n'est donc pas efficace pour des fréquences d'ajustement plus grandes. Les travaux de Leland sont généralisés par ceux de Toft (1996) au cas où l'intervalle d'ajustement ne tend pas vers zéro. Les contributions qui ont suivi celles de Leland et de Toft sont légions, citons celles de Deville (2001) qui prouve qu'excepté pour certaines années exceptionnelles, le coût total de transaction sur la place boursière Paris Stock Exchange, varie entre 0.02% et 1.20%. Dans un premier temps, nous décrivons l'évolution du fonds sous-jacent dédié avant de rappeler la formule générale d'évaluation et de couverture optimale que nous adaptons au cas des garanties offertes dans les contrats Variable Annuities par les compagnies d'Assurance.

3.1 Évaluation

Nous avons deux sources de risque, le risque financier et le risque actuariel de décès. Quant à la première source de risque, nous prenons seulement en compte le risque de marché. En revanche, la deuxième source de risque notamment, celui de décès, est un type de risque très complexe à gérer. On suppose que le portefeuille de l'assureur est suffisamment important pour que le risque de décès soit bien mutualisé et qu'il soit considéré indépendant des aléas financiers affectant la valeur du contrat. Supposons qu'au temps $t = 0$, la durée de vie résiduelle d'une tête d'âge x est donnée par la variable aléatoire T_x et notons ${}_t p_x$, la probabilité en cas de survie $\Pr[T_x > t]$. Cette probabilité est liée à la fonction de survie $s(x)$, donnant la probabilité qu'un individu âgé de 0 survive au moins x années. Cette fonction est associée à l'intensité de mortalité v , à travers la

relation bien connue :

$$s(x) = \exp \left\{ - \int_0^x v(s) ds \right\}. \quad (3.1)$$

Ainsi, les probabilités de vie ${}_t p_x$ et de décès ${}_t q_x$, sont obtenues comme suit :

$${}_t p_x = \frac{s(t+x)}{s(x)}, \quad {}_t q_x = 1 - {}_t p_x.$$

3.1.1 Risque financier et Valeur actuelle des frais d'Assurance

Considérons une économie dans laquelle la rémunération du compte monétaire est donnée par le taux d'intérêt instantané r , puis introduisons la fonction d'actualisation suivante :

$$\delta(t) := \exp \left\{ - \int_0^t r(u) du \right\}. \quad (3.2)$$

Notons F_t , l'encours du fonds sous-jacent au temps t antérieur à la date de maturité T du contrat. L'évolution de cet encours est liée à celle du processus sous-jacent dont le prix est noté S_t . On suppose que l'assureur prélève des frais d'assurance au taux annuel continu m . Dans notre analyse, nous distinguons des frais d'assurance, ceux imputables au financement de la garantie, prélevés au taux m_o , et ceux amputés au taux m_a pour la gestion du fonds dédié, de telle sorte que :

$$m = m_o + m_a.$$

L'encours du fonds est donné à la date t par :

$$F_t = F_0 \frac{S_t}{S_0} e^{-mt}. \quad (3.3)$$

où : F_0 représente la valeur du fonds à l'émission du contrat en $t = 0$: on admet sans perte de généralité que : $F_0 = S_0$. Par ailleurs, on s'intéresse ici à la dynamique de cours du support S représenté par un processus de Lévy géométrique. Supposons que son évolution dans le temps est donnée dans l'univers historique P par l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = a dt + \sigma dW_t + (Y - 1) dN_t$$

En posant $J = \ln(Y)$ et en appliquant le lemme de Itô, l'équation précédente donne une évolution de S selon la dynamique :

$$S_t = S_0 e^{X_t} = S_0 \exp \left\{ \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\}, \quad (3.4)$$

où : μ et σ correspondent respectivement à la dérive et au coefficient de diffusion de la partie diffusive de (3.4). W est un mouvement brownien standard, N un processus de

Poisson d'intensité constante λ et J , la taille aléatoire des sauts pouvant survenir : les variables aléatoires W , N et la suite de variables $\{J_i\}$ sont supposées indépendantes. La fonction caractéristique de X s'écrit donc :

$$\phi_{X_t}(u) = E[e^{iuX_t}] = e^{t(iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \lambda(\phi_J(u) - 1))} = e^{-t\psi(u)},$$

avec :

$$\psi(u) = -iu\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \lambda(\phi_J(u) - 1). \quad (3.5)$$

Nous supposons de même que les variables J_i sont indépendantes et identiquement distribuées. En nous référant à Kou (2002), celles-ci suivent une loi exponentielle double asymétrique, dont la fonction de densité est :

$$f_J(y) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} 1_{y>0} + q\lambda_2 e^{\lambda_2 y} 1_{y\leq 0},$$

où $p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1, \lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. On obtient alors la fonction caractéristique associée à la loi des sauts ϕ_J :

$$\phi_J = E[e^{iuJ}] = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + iu}, \quad (3.6)$$

définie dans la bande de régularité :

$$-\lambda_1 < \Im u < \lambda_2.$$

Considérons une économie de Kou dans laquelle les paramètres annuels utilisés sont résumés à la table (3.1). Ainsi, on suppose que les sauts ont une intensité $\lambda = 1$, d'amplitude moyenne³⁶ -2.2% , de volatilité³⁷ 4.47% . En d'autres termes, la probabilité de survie d'un saut vers le haut est $p = 0.3$ tandis que les tailles aléatoires de sauts positifs ou négatifs suivent une loi exponentielle double asymétrique de moyennes respectives 2% ($1/\lambda_1$) et 4% ($1/\lambda_2$).

Paramètres du modèle de Kou					
μ	λ	p	λ_1	λ_2	σ
15%	1	0.3	50	25	16%

TABLE 3.1 – Paramètres du modèle de Kou (2002) : l'amplitude moyenne des sauts est de -2.2% et de volatilité 4.47% .

En utilisant la méthode de simulation par inversion et les paramètres relevés de la table (3.1), la figure (3.1) illustre l'évolution journalière de cent trajectoires de S sur une année d'activité de marché dans l'univers historique P .

36. $E[J] = \frac{p}{\lambda_1} - \frac{q}{\lambda_2}$.

37. $\text{Var}[J] = pq(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2})^2 + (\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{q}{\lambda_2^2})$.

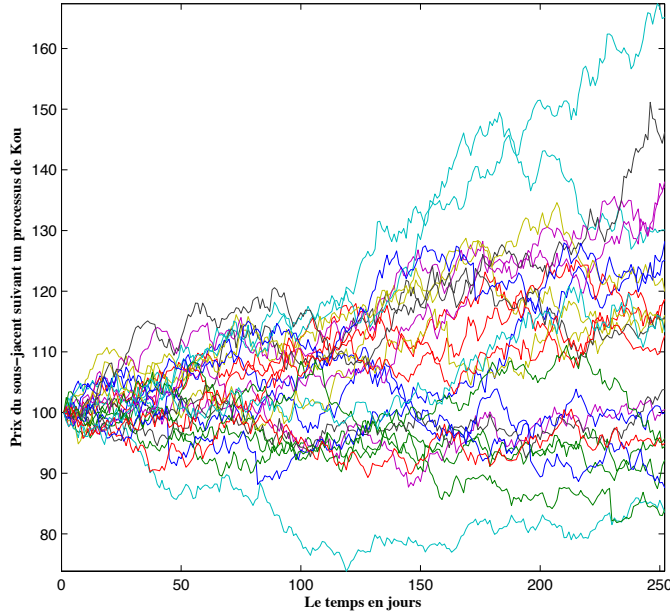


FIGURE 3.1 – Evolution de cent trajectoires du sous-jacent dans une économie de Kou (2002). Les paramètres utilisés sont relevés à la table (3.1).

Le Courtois et Quittard-Pinon (2006) montrent les liens existant entre les paramètres dans les univers historique et risque-neutre dans le cadre des modèles mixtes de diffusion à sauts de Kou en utilisant les transformées d'Esscher. Nous supposons ici que les paramètres sont calibrés aux données de marché et que le processus S obéit sous la mesure équivalente Q à l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (r_t - \lambda\kappa)dt + \sigma dW_t + (Y - 1)dN_t.$$

En utilisant la règle de dérivation de produit sur l'encours du fonds (3.3), il vient :

$$\frac{dF_t}{F_{t-}} = (r_t - m - \lambda\kappa)dt + \sigma dW_t + (Y - 1)dN_t \quad (3.7)$$

avec : $\kappa = E_Q[e^J - 1]$.

Valeur actuelle des frais d'Assurance

Les frais d'assurance dédiés au financement de la garantie étant proportionnels au taux de prélèvement continu m_o , à l'encours du fonds F et au temps, ces frais actualisés évoluent selon l'équation différentielle :

$$dF'_t = \delta_t m_o F_t dt, \quad F' = 0.$$

Par définition, $\delta_t = e^{-\int_0^t r_u du}$ ou sous forme d'équation différentielle : $d\delta_t = -\delta_t r_t dt$. En utilisant la règle de dérivation d'un produit :

$$d(\delta_t F_t) = -r_t \delta_t F_t dt + \delta_t dF_t.$$

En notant M , un processus dont l'équation différentielle est définie en (3.7) par :

$$dM_t = \sigma dW_t + (Y - 1)dN_t - \lambda \kappa dt,$$

il vient :

$$\begin{aligned} d(\delta_t F_t) &= -r_t \delta_t F_t dt + \delta_t (r_t - m) F_t dt + \delta_t F_t - dM_t \\ &= -\delta_t F_t m dt + \delta_t F_t - dM_t \\ &= -\delta_t F_t m_a dt - dF'_t + \delta_t F_t - dM_t, \end{aligned}$$

d'où :

$$dF'_t = \delta_t F_t - dM_t - \delta_t F_t m_a dt - d(\delta_t F_t).$$

En utilisant la règle de Chasle, il vient finalement :

$$F'_t = - \int_0^t d(\delta_s F_s) - \int_0^t \delta_s F_s m_a ds + \int_0^t \delta_s F_s - dM_s,$$

d'où résulte :

$$F'_t = F_0 - \delta_t F_t - \int_0^t \delta_s F_s m_a ds + \int_0^t \delta_s F_s - dM_s. \quad (3.8)$$

3.1.2 Risque actuariel : évolution de l'intensité de mortalité

Considérons une tête d'âge x au temps $t = 0$. On suppose que la force de mortalité représentée par v dans la fonction de survie (3.1), est déterministe et évolue selon le modèle paramétrique de Makeham. Plus précisément :

$$v(x) = A + Bc^x, \text{ avec } B > 0, \quad A \geq -B, \quad c > 1 \text{ et } x \geq 0.$$

Melnikov et Romaniuk (2006) calibrent ce modèle sur des données de mortalité aux États-Unis et obtiennent les estimations suivantes pour les paramètres : A , B et c :

$$A = 9.5666 \times 10^{-4}, B = 5.162 \times 10^{-5}, c = 1.09369.$$

3.1.3 Évaluation des options offertes

Notons T , la date d'échéance du contrat et τ_x , celle de décès de l'assuré. A la date $t \leq T$ de survenance de l'événement ouvrant droit au paiement de la garantie, la compagnie d'assurance assure au bénéficiaire le montant :

$$\Xi_t = \max(F_t, K) = F_t + \max(K - F_t, 0),$$

autrement dit :

$\Xi_t =$ Valeur du compte en t + Paiement en t de l'option de vente,

avec : K , le capital garanti. Formellement, Ξ_t s'interprète au temps initial $t = 0$ comme le résultat d'une position longue sur les actifs détenus dans les unités de compte à laquelle s'ajoute l'achat d'une option de vente dont la date d'expiration t peut être aussi bien la maturité du contrat que celle de décès de l'assuré. Nous utiliserons cette interprétation tout au long de ce chapitre. L'engagement de l'assureur vis-à-vis de l'assuré est donné par la partie optionnelle de Ξ_t , i.e.,

$$G_t = \max(K - F_t, 0). \quad (3.9)$$

Ainsi, tout se passe comme si l'assureur vendait au souscripteur une option de vente dont le prix d'exercice serait le montant garanti et dont la date d'exercice est celle de survenance de l'événement ouvrant droit au paiement de la prestation. Par ailleurs, il serait tout de même important de noter que la nature du flux de paiement (3.9) permet respectivement à l'assureur ainsi qu'au bénéficiaire de limiter leurs pertes et gains qui sont finis. En nous référant à la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage en temps continu pour l'évaluation du contrat à sa date de souscription, il existe une mesure martingale Q sous laquelle les prix relatifs exprimés en compte monétaire sont des martingales. Ainsi, l'engagement de l'assureur vis-à-vis de l'assuré est évalué en $t = 0$ par :

$$\xi_{(S_0, m, t)} := E_Q \left[\delta(t) \left\{ G_T^{\text{vie}} 1_{\tau_x > T, t=T} + G_{\tau_x}^{\text{décès}} 1_{\tau_x \leq T, t=\tau_x} \right\} \right]. \quad (3.10)$$

3.1.4 Juste valeur des options offertes dans les contrats Variable Annuities

La question fondamentale posée est celle de détermination de la juste valeur des garanties. La réponse de Milevsky et Posner (2001) ou encore celle de Quittard-Pinon et Randrianarivony (2011) consiste à dire que le prix d'équilibre (en date $t = 0$) de ces garanties réside en la "localisation" du taux de prélèvement m tel que l'espérance des frais d'assurance actualisés $M\&E$ soit³⁸ égale à la valeur du contrat.

Lemme 3.1.1. *Conditionnellement au temps d'arrêt t donnant la date de survenance de l'évènement ouvrant droit à la garantie, l'inspection au plus près de l'équation (3.8) nous apprend que la valeur actualisée des frais d'assurance dédiés au financement de la garantie prélevés au taux m_o jusqu'en t est donnée par :*

$$F_0 \left(1 - e^{-mt} \right) \left(1 - \frac{m_a}{m} \right), \quad m = m_o + m_a. \quad (3.11)$$

Preuve : Partant de (3.8), on a :

$$F'_t = F_0 - \delta_t F_t - \int_0^t \delta_s F_s m_a ds + \int_0^t \delta_t F_t - dM_t.$$

38. Sous réserve de son existence.

Etant donné ce temps d'arrêt t , notons E' , cette espérance conditionnelle. Ainsi, sous l'univers martingale Q , il vient d'une part :

$$E'[F'_t] = F_0 - E'[\delta_t F_t] - \int_0^t E'[\delta_s F_s] m_a ds + E' \left[\int_0^t \delta_t F_t - dM_t \right].$$

Les processus des fonds actualisés étant des martingales sous Q , il vient d'autre part :

$$E'[F'_t] = F_0 - F_0 e^{-mt} - m_a \int_0^t F_0 e^{-ms} ds + E' \left[\int_0^t \delta_t F_t - dM_t \right].$$

En notant que le terme intégral $\int_0^t \delta_t F_t - dM_t$ est d'espérance nulle, il résulte :

$$E'[F'_t] = \underbrace{F_0}_{S_0} (1 - e^{-mt}) \left(1 - \frac{m_a}{m} \right).$$

Ce qui conclut la preuve. □

Ainsi, il vient finalement :

$$M\&E(m_o) = \underbrace{F_0}_{S_0} \left(1 - \frac{m_a}{m} \right) E \left[\left(1 - e^{-mt} \right) 1_{\tau_x > T, t=T} + \left(1 - e^{-mt} \right) 1_{\tau_x \leq T, t=\tau_x} \right], \quad (3.12)$$

d'où résulte l'identité donnant la juste valeur des garanties :

$$\xi_{(S_0, m, t)} = M\&E(m_o). \quad (3.13)$$

En vertu de l'équation (3.11), la relation d'équilibre (3.13) établit une correspondance endogène entre les taux m_o et m_a dédiés pour le financement de la garantie et pour la gestion du fonds, respectivement. Nous rappelons la formule générale donnant les prix d'options.

Formule générale d'évaluation

Supposons une structure par termes de taux constante. Sans perte de généralité, admettons que $F_0 = S_0$. Ainsi l'encours du fonds est donné par : $F_t = S_t e^{-mt}$. Du point de vue de la théorie d'option, la dynamique de F est la même chose qu'un actif sous-jacent S distribuant un taux de dividende continu q égal à m et dont la dynamique suit un processus de Lévy géométrique modélisé à l'instant t par : $S_0 e^{X_t}$, avec X , un processus de Lévy dont la fonction caractéristique ϕ est définie comme suit :

$$\phi(v) = E[e^{ivX_t}] = e^{-t\psi(v)},$$

où ψ , représente l'exposant de Laplace de X . Considérons le paiement à l'échéance d'une option de vente européenne $g(X_T)$. Il vient :

$$g(X_T) = [K - S_0 e^{X_T}]^+, \quad (3.14)$$

avec K le prix d'exercice de l'option, autrement dit, le montant garanti dans le contrat en unités de compte. En utilisant la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage en temps continu, le prix au temps t de l'option est donné par :

$$P(S_t, K, T) = E_Q[e^{-r\tau} g(X_T) | \mathcal{F}_t], \quad (3.15)$$

avec $\tau = T - t$, le temps restant avant échéance. La filtration $\mathcal{F}$ donnant l'information, est engendrée par X , l'information disponible en t est notée $\mathcal{F}_t$. Il vient alors la formule générale donnant le prix d'option :

$$P(S_t, K, T) = K \frac{1}{2\pi} e^{-\delta x'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi(u+i\delta))}}{(-iu+\delta)(-iu+\delta+1)} du, \quad (3.16)$$

où $\delta > 0$; $x' = \ln(S_t/K)$ et l'exposant caractéristique ψ défini par :

$$\psi(u) = -iua + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \lambda(\phi_J(u) - 1),$$

avec a déduit de la condition mesure martingale équivalente :

$$S_0 = E_Q[e^{-(r-q)t} S_0 e^{X_t}] = S_0 e^{-(r-q)t} e^{-t\psi_Q(-i)},$$

telle que :

$$r - q + \psi_Q(-i) = 0. \quad (3.17)$$

3.1.5 Application numérique

Nous considérons des contrats à annuité variable offrant une garantie plancher égale à 100% d'une prime unique $P = 100$, payée par un assuré dont l'âge à l'émission du contrat, i.e., à la date $t = 0$, est de 40 ans. Cette prime est investie dans un fonds évoluant selon la relation (3.3) dont la valeur initiale est $F_0 = S_0 = 100$. Les paramètres annuels du modèle de Kou sont donnés à la table (3.1). On suppose également dans cette économie que le taux d'intérêt sans risque r est de 6%.

3.1.5.1 Garanties en cas de vie

On suppose τ_x et S indépendants, le prix de la garantie GMMB est obtenu par la relation d'équilibre :

$$\xi_{MB}(S_0, m, T) = {}_T p_x \times P(S_0, K, T) = M\&E(m_o), \quad (3.18)$$

avec $M\&E$ fourni en (3.12), donné en cas de vie par :

$$M\&E(m_o) = E_Q[F'_t 1_{\tau_x > T, t=T}] = S_0 \left(1 - \frac{m_a}{m}\right) {}_T p_x (1 - e^{-mT}).$$

En se servant de la formule (3.18) et de la condition martingale (3.17), avec $q = m$, la table (3.2) donne la juste valeur du contrat GMMB et le juste coût des frais d'assurance prélevés pour le financement de cette garantie.

Temps restant avant échéance (années)	Modèle de Kou	
	m (bp)	GMMB
10	27.7182	2.72298
20	4.9526	0.9755
30	1.3308	0.3914

TABLE 3.2 – Justes valeurs de la garantie plancher en cas de vie GMMB en pourcentage du fonds, évaluée selon la formule (3.18), avec $m_a = 0$.

Comme on peut le noter sur la figure (3.2), le prix de cette garantie est croissant sur un support de maturités courtes. En effet, bien que cela soit une caractéristique intrinsèque aux options de ventes européennes, rappelons que la garantie à l'émission du contrat est à la monnaie, ainsi, a contrario du souscripteur qui se trouve très incité à acquérir la garantie, l'assureur ne l'est pas pour autant pour la vente puisque la probabilité d'exercice de l'option reste significative, ce qui est justifié par des prix élevés. Cette tendance s'inverse rapidement dès lors que le temps restant avant échéance dépasse le seuil des 3 ans.

3.1.5.2 Garanties en cas de décès

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, il vient pour la garantie GMMB :

$$\xi_{DB}(S_0, m, t) = \sum_{t=0}^{T-1} {}_t p_x q_{x+t} \times P(S_0, K, t+1) = M\&E(m_o), \quad (3.19)$$

avec

$$M\&E(m_o) = E_Q[F'_t 1_{\tau_x \leq T, t=\tau_x}] = S_0 \left(1 - \frac{m_a}{m}\right) \sum_{t=0}^{T-1} {}_t p_x q_{x+t} (1 - e^{-m(t+1)}),$$

où : q_{x+t} est la probabilité qu'une tête d'âge $x+t$ décède avant la fin de la sous-période considérée, pour $t = 0, 1, \dots, T-1$ et $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$, avec ${}_t p_x = \prod_{j=0}^{t-1} p_{x+j}$, la probabilité qu'un individu âgé de x survive au moins t années. Nous donnons à la table (3.3), le prix de cette garantie en fonction de la maturité. On relève de même quelques prix de la garantie en cas de décès en fonction de l'âge de souscription, comme l'illustre la table (3.4). En fixant, l'âge contractuel maximal du contrat à 75 ans, nous observons à la figure (3.3), l'évolution de la GMMB en fonction de l'âge à la souscription du contrat, de la maturité et des frais d'assurance : cette évolution nous apprend que les prix de la garantie croissent jusqu'à un certain âge (autour de 60 ans) et redescendent vers zéro au fur et à mesure que l'âge de souscription approche l'âge de terminaison du contrat. En effet, la garantie octroyée par la police d'assurance a de moins en moins de valeur

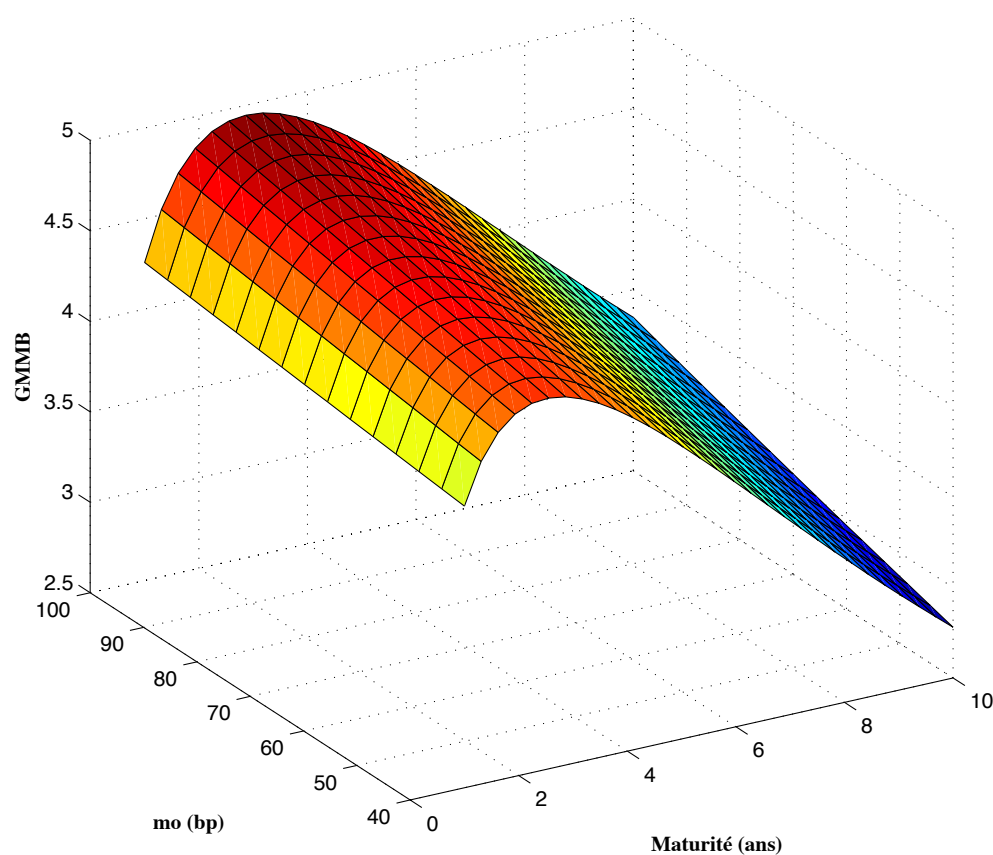


FIGURE 3.2 – Garantie GMDB en fonction du temps restant avant échéance et des frais d'assurance.

Temps restant avant échéance (années)	Modèle de Kou	
	m (bp)	GMDB (en %)
10	74.5863	4.9994
20	22.4050	7.0254
30	8.5325	8.0972

TABLE 3.3 – Justes valeurs de la garantie plancher en cas de décès GMDB en pourcentage du fonds, évaluée selon la formule (3.19), avec $m_a = 0$.

Age de souscription (années)	Modèle de Kou	
	m (bp)	GMDB (en %)
30	76.2581	4.3841
40	74.5863	4.9994
45	73.3915	5.5863

TABLE 3.4 – Justes valeurs de la garantie plancher en cas de décès GMDB de maturité 10 ans : en pourcentage du fonds et en fonction de l'âge de souscription, évaluée selon la formule (3.19), avec $m_a = 0$.

à mesure que l'âge de la souscription approche la date de terminaison du contrat (car le temps à l'échéance est de plus en plus court). En effet, l'investisseur potentiel n'a aucune incitation à acheter le contrat GMDB s'il est quasiment certain qu'il ne pourra vraisemblablement pas en bénéficier dans le court laps de temps avant la fin du contrat et comme le soulignent Quittard-Pinon et Randrianarivony (2011), si l'horizon d'investissement est court, l'incertitude concernant les perspectives économiques est très faible et le souscripteur potentiel pourrait éventuellement mieux tirer profit de la situation en investissant directement dans une obligation d'État.

3.1.5.3 Garantie en cas de vie et en cas de décès avec prise en compte d'effet cliquet : GMAB

Dans cette section, nous considérons un autre type de contrat en unités de compte comportant des options de renouvellement de garantie. Ce type de garantie, encore connu sous le nom de GMAB³⁹, est proche des contrats du type GMDB, sauf que l'élément déclencheur n'est plus la mort de l'assuré mais la survie de celui-ci à des dates contractées à la souscription. Ainsi, le contrat offre plusieurs maturités dont le terme minimum est typiquement de dix ans. A chaque échéance, le bénéficiaire touche la contrevaletur en euros des unités de compte du fond support ou le montant minimum garanti si la valeur du fonds dédié est inférieure. D'autre part, le montant garanti est revalorisé grâce à un effet cliquet. Du point de vue de la théorie des options, l'engagement de l'assureur au titre de cette garantie est de même représenté par une option de vente européenne dont les dates d'exercices sont multiples et définies par les conditions générales du contrat. De plus, au terme d'une période d'attente antérieure à la maturité du contrat, l'épargne du souscripteur, autrement dit, l'encours du fonds sous-jacent F , est comparé au montant garanti G . Si elle s'avérait inférieure à ce montant, l'option est exercée et l'assureur apporte la différence au moment où l'assuré s'engage à prolonger le contrat. Si au contraire

39. De la terminologie anglaise : Guaranteed Minimum Accumulation Benefit.

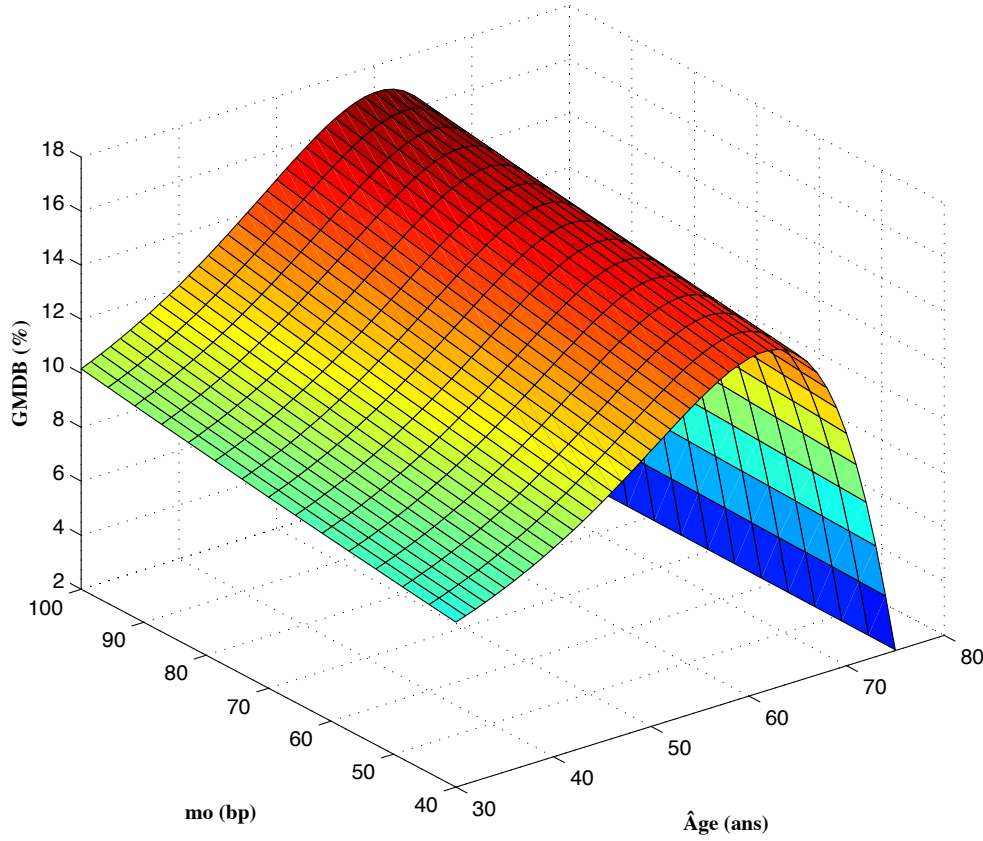


FIGURE 3.3 – Valeur de l’option GMDB en fonction de l’âge à la souscription du contrat et des frais d’assurance.

la valeur du fonds F s’avérerait supérieure, alors le montant garanti est dorénavant réinitialisé à la valeur de ce fonds, de sorte que le minimum entre le montant garanti G et l’épargne F du souscripteur, ne cesse de s’accroître au maximum entre la valeur du fonds F et de celle de la garantie G . Ainsi, tout se passe comme si, à chaque date d’exercice, la GMAB s’interprète comme une option de vente européenne dont le sous-jacent serait l’épargne, autrement dit, l’encours du fonds sous-jacent et dont le prix d’exercice dépend de la trajectoire suivie par ce fonds : on parle alors d’option *path dependent*, ce qui est plus précisément dans notre cas, une option *cliquet*.

Considérons l’armature de temps suivante donnant les dates de renouvellement du contrat (dates *rollover*) définies à l’avance et à l’émission du contrat en t_0 :

$$(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n).$$

Notons F_{t-} et F_{t+} les valeurs du fonds immédiatement avant et après le renouvellement du contrat au temps t . Il vient ainsi que l'encours à la date de renouvellement t_i est donné par :

$$F_{t_i-} = F_{t_{i-1}+} \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} e^{-m(t_i - t_{i-1})}. \quad (3.20)$$

D'autre part, notons une différence importante existant entre les processus F et S . A côté des frais d'assurance prélevés sur le fonds, l'effet cliquet assure que le minimum entre le montant garanti G et l'épargne F du souscripteur ne cesse de s'accroître au montant maximal entre la valeur du fonds et de celle de la garantie. Comme conséquence la dynamique naturelle suivie en (3.20) pourra être modifiée par l'injection de capital représentant le renouvellement de l'engagement de l'assureur vis-à-vis de l'assuré. Notons L_i , ces engagements aux dates *rollover*⁴⁰ t_i . Ainsi, l'armature de temps peut être représentée de façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Dates anniversaires : } & 0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \dots t_n, \\ \text{Garanties : } & 0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \dots G_n, \\ \text{Engagements de l'assuré : } & 0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \dots L_n. \end{aligned}$$

Alors, sous le contrat GMAB, l'effet cliquet implique que les garanties G_i aux dates t_i , sont données par la relation suivante :

$$G_i = \max(G_{i-1}, F_{t_i-}) = F_{t_i-} + L_i,$$

avec :

$$F_{t_i+} = F_{t_i-} + L_{t_i}, \quad (3.21)$$

où $G_0 = F_{t_0+}$.

D'autre part, remarquons que la tarification de l'engagement de l'assureur au titre de cette garantie n'est pas si immédiate⁴¹. Notons $H(S_0, t_n)$, la valeur de cet engagement, avec n , la $n^{\text{ième}}$ date de l'armature de temps correspondant à la date de maturité du contrat. Sans perte de généralité, nous prenons dans la suite des applications $n = 3$. Il vient qu'au temps $t = 0$:

$$\begin{aligned} H(S_0, m, t_3) &= E_Q[L_1 e^{-rt_1}] + E_Q[L_2 e^{-rt_2}] + E_Q[L_3 e^{-rt_3}] \\ &= H_1(S_0, m, t_1) + H_2(S_0, m, t_2) + H_3(S_0, m, t_3) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Considérons d'abord la première garantie :

$$G_1 = \max(G_0, F_{t_1-}), \quad F_{t_0+} = G_0.$$

40. de reconduction.

41. à cause de l'effet cliquet.

avec :

$$F_{t_1^-} = F_{t_0^+} \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}} e^{-mt_1}.$$

On a,

$$G_1 = F_{t_0^+} \max \left(1, \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}} e^{-mt_1} \right).$$

Après décomposition, il résulte :

$$G_1 = F_{t_0^+} \left[\max \left(1 - \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}} e^{-mt_1}, 0 \right) + \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}} e^{-mt_1} \right].$$

Ainsi l'engagement de l'assureur envers l'assuré L_1 , est donné par :

$$F_{t_0^+} \max \left(1 - \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}} e^{-mt_1}, 0 \right).$$

Avec $S_{t_0} := S_0 = F_{t_0^+}$, on obtient :

$$H_1(S_0, m, t_1) = E_Q[L_1 e^{-rt_1}] = P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1), \quad (3.23)$$

où $P(S, G, t)$ représente le prix d'option de vente européenne évaluée selon la formule (3.16), avec $q = 0$.

De la même manière, la deuxième garantie est donnée par :

$$G_2 = \max(G_1, F_{t_2^-}).$$

Remarquons que : $F_{t_1^+} = G_1$, avec $F_{t_2^-} = F_{t_1^+} \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)}$. Il résulte

$$G_2 = F_{t_1^+} \max \left(1, \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)} \right).$$

Après décomposition, on obtient :

$$G_2 = F_{t_1^+} \max \left(1 - \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)}, 0 \right) + F_{t_1^+} \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)}.$$

L'engagement L_2 est dans ce cas :

$$L_2 = F_{t_1^+} \max \left(1 - \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)}, 0 \right).$$

Introduisons le prix H_2 de cet engagement :

$$H_2(S_0, m, t_2) = E_Q[L_2 e^{-rt_2}].$$

En conditionnant par $F_{t_1}^+$, on écrit grâce à la loi des espérances itérées :

$$E_Q[L_2 e^{-rt_2}] = E \left[E_Q[L_2 e^{-rt_2} | F_{t_1}^+] \right].$$

Considérons dans un premier temps, la quantité : $E_Q[L_2 e^{-rt_2} | F_{t_1}^+]$. Elle peut être réécrite :

$$E_Q[L_2 e^{-rt_2} | F_{t_1}^+] = E_Q[L_2 e^{-rt_1} e^{-r(t_2-t_1)} | F_{t_1}^+],$$

avec :

$$\begin{aligned} E_Q[L_2 e^{-rt_1} e^{-r(t_2-t_1)} | F_{t_1}^+] &= E_Q \left[e^{-rt_1} e^{-r(t_2-t_1)} F_{t_1}^+ \max \left(1 - \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)}, 0 \right) \middle| F_{t_1}^+ \right] \\ &= e^{-rt_1} F_{t_1}^+ E_Q \left[e^{-r(t_2-t_1)} \max \left(1 - \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)}, 0 \right) \middle| F_{t_1}^+ \right] \\ &= e^{-rt_1} F_{t_1}^+ E_Q \left[e^{-r(t_2-t_1)} \max \left(1 - e^{X(t_2-t_1)} e^{-m(t_2-t_1)}, 0 \right) \middle| F_{t_1}^+ \right] \\ &= e^{-rt_1} F_{t_1}^+ P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1). \end{aligned}$$

En regroupant les termes, il vient :

$$\begin{aligned} E_Q[L_2 e^{-rt_2}] &= E_Q \left[e^{-rt_1} F_{t_1}^+ P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1) \right] \\ &= E_Q \left[(F_{t_1}^- + L_1) e^{-rt_1} P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1) \right] \\ &= E_Q \left[\left(F_{t_0}^+ \frac{S_1}{S_0} e^{-mt_1} + L_1 \right) e^{-rt_1} P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1) \right] \end{aligned}$$

Les processus $e^{-rt_1} S_1$ étant des martingales sous Q , alors $E_Q[e^{-rt_1} S_{t_1}/S_0] = 1$. Il résulte :

$$\begin{aligned} H_2(S_0, m, t_2) &= E_Q[L_2 e^{-rt_2}] \\ &= (S_0 e^{-mt_1} + P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1)) P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Un raisonnement similaire nous donne le prix H_3 :

$$\begin{aligned} H_3(S_0, m, t_3) &= E_Q[L_3 e^{-rt_3}] \\ &= \left\{ S_0 e^{-mt_2} + e^{-m(t_2-t_1)} P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1) + \right. \\ &\quad \left. (S_0 e^{-mt_1} + P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1)) P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1) \right\} P(e^{-m(t_3-t_2)}, 1, t_3 - t_2). \end{aligned}$$

En ignorant les probabilités de décès, la valeur actuelle de la GMAB est donnée pour tout $t_3 > t_2 > t_1$ par :

$$\begin{aligned} H(S_0, m, t_3) &= E_Q[L_1 e^{-rt_1} + L_2 e^{-rt_2} + L_3 e^{-rt_3}] \\ &= P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1) + (S_0 e^{-mt_1} + P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1)) \\ &\quad \times (1 + P(e^{-m(t_3-t_2)}, 1, t_3 - t_2)) P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1) \\ &\quad + P(e^{-m(t_3-t_2)}, 1, t_3 - t_2) (S_0 e^{-mt_2} + e^{-m(t_2-t_1)} P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

La prise en compte des probabilités de décès nous impose une décomposition de cette garantie suivant les termes séparant chaque date de renouvellement. Ainsi, on a pour tout $t_3 > t_2 > t_1$:

$$\begin{aligned} H_1(S_0, m, t_1) &= P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1) \\ H_2(S_0, m, t_2) &= (S_0 e^{-mt_1} + P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1)) P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1) \\ H_3(S_0, m, t_3) &= \left\{ S_0 e^{-mt_2} + e^{-m(t_2-t_1)} P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1) \right. \\ &\quad \left. + (S_0 e^{-mt_1} + P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1)) P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1) \right\} \times \\ &\quad P(e^{-m(t_3-t_2)}, 1, t_3 - t_2). \end{aligned}$$

Il est alors aisé de prendre en compte les probabilités de décès et de survie de l'assuré aux différentes échéances de l'amortissement de temps :

$$\begin{aligned} H_1(S_0, m, t_1) &= \sum_{t=0}^{t_1-1} {}_t p_x q_{x+t} \times P(S_0 e^{-m(t+1)}, G_0, t+1) + {}_{t_1} p_x \times P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1) \\ H_2(S_0, m, t_2) &= \left(S_0 e^{-mt_1} + P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1) \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{t=t_1}^{t_2-1} {}_t p_x q_{x+t} P(e^{-m(t-t_1+1)}, 1, t - t_1 + 1) + {}_{t_2} p_x P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1) \right) \\ H_3(S_0, m, t_3) &= \left\{ S_0 e^{-mt_2} + e^{-m(t_2-t_1)} P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1) + \right. \\ &\quad \left. (S_0 e^{-mt_1} + P(S_0 e^{-mt_1}, G_0, t_1)) P(e^{-m(t_2-t_1)}, 1, t_2 - t_1) \right\} \times \\ &\quad \left\{ \sum_{t=t_2}^{t_3-1} {}_t p_x q_{x+t} P(e^{-m(t-t_2+1)}, 1, t - t_2 + 1) + {}_{t_3} p_x P(e^{-m(t_3-t_2)}, 1, t_3 - t_2) \right\}. \end{aligned}$$

La juste valeur de la GMAB est finalement obtenue en sommant suivant les trois termes et en déterminant m_o tel que :

$$\xi_{GMAB}(S_0, m, T) = H(S_0, m, t_3) = M\&E(m_o), \quad m = m_o + m_a, \quad (3.26)$$

avec :

$$\begin{aligned} \left(S_0 \left(1 - \frac{m_a}{m} \right) \right)^{-1} M\&E(m_o) &= \sum_{t=0}^{t_1-1} {}_t p_x q_{x+t} (1 - e^{-m(t+1)}) + {}_{t_1} p_x \times (1 - e^{-mt_1}) \\ &\quad + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} {}_t p_x q_{x+t} (1 - e^{-m(t+1)}) + {}_{t_2} p_x \times (1 - e^{-mt_2}) \\ &\quad + \sum_{t=t_2}^{t_3-1} {}_t p_x q_{x+t} (1 - e^{-m(t+1)}) + {}_{t_3} p_x \times (1 - e^{-mt_3}). \end{aligned}$$

GMAB en cas de décès			GMAB en cas de décès et de vie		
Armature de temps ($t_1/t_2/t_3$) (années)	Modèle de Kou		Armature de temps ($t_1/t_2/t_3$) (années)	Modèle de Kou	
	m (bp)	Valeur (en %)		m (bp)	Valeur
(2/12/22)	73.4218	12.4750	(2/12/22)	49.8146	10.5596
(5/15/25)	74.0895	15.0503	(5/15/25)	40.89525	9.8718
(10/20/30)	64.9227	19.4524	(10/20/30)	27.8585	8.0666

(a)

(b)

TABLE 3.5 – Juste valeur de la garantie GMAB en pourcentage du fonds, évaluée selon la formule (3.26), avec $m_a = 0$.

Temps restant à l'échéance (années)	Modèle de Kou	
	m (bp)	GMMB/GMDB
2	326.5171	6.3254
5	95.7588	4.6701
10	27.7182	2.7229

TABLE 3.6 – Juste valeur de la garantie mixte GMMB/GMDB en pourcentage du fonds, sans option de renouvellement.

La table (3.5) relève des prix en fonction de certaines armatures de dates anniversaires. Aussi, en considérant l'armature : 10/20/30 ans, nous représentons à la figure (3.4), l'évolution de cette garantie en fonction du temps et des frais d'assurance dédiés au financement de la garantie. L'effet cliquet y est illustré. En d'autres termes, à chaque date de renouvellement, une nouvelle option est émise à la monnaie de telle sorte qu'on observe une évolution par palier des prix d'option en fonction de leurs différentes maturités. De même au regard de la table (3.6), nous remarquons sans surprise que le juste coût de la GMAB est significativement plus élevé que celui de la garantie mixte en cas de décès et en cas de vie sans option de renouvellement.

D'autre part, les figures (3.5 et 3.6) montrent à l'équilibre, l'évolution des taux m_o , prélevés pour le financement des garanties à mesure que ceux dédiés pour la gestion du fonds m_a augmentent.

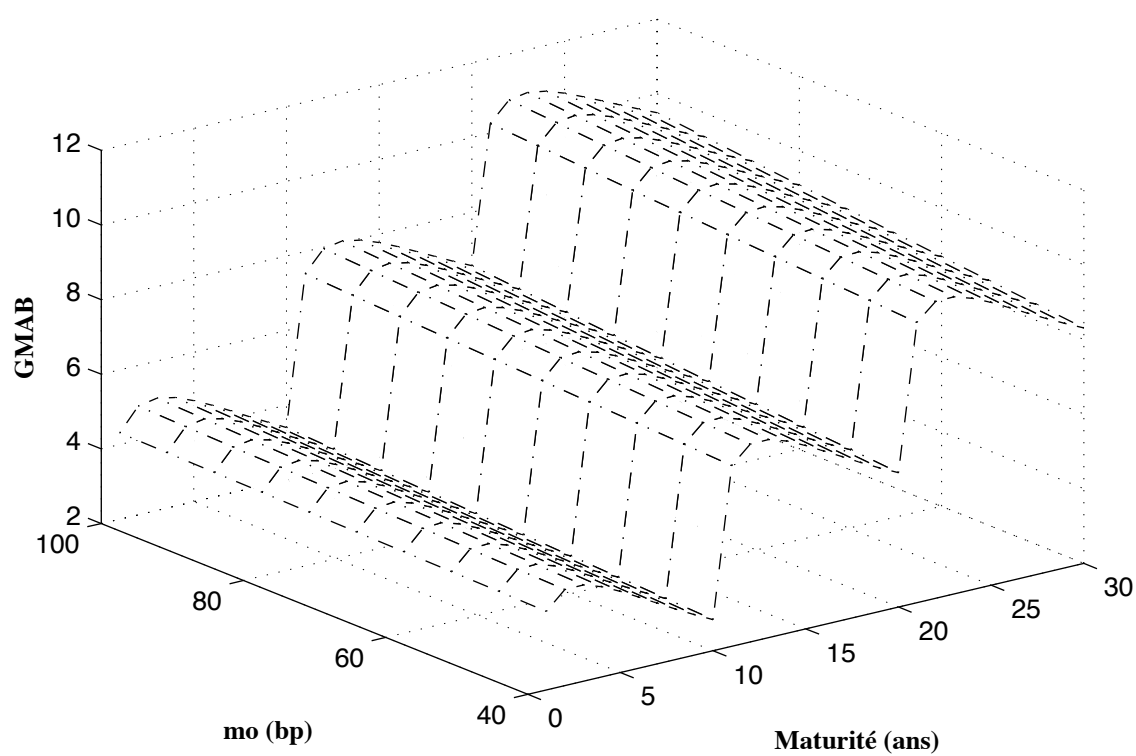


FIGURE 3.4 – Évolution de la garantie GMAB en cas décès et de vie en fonction du temps et des frais d'assurance pour une armature annuelle de temps de 10/20/30.

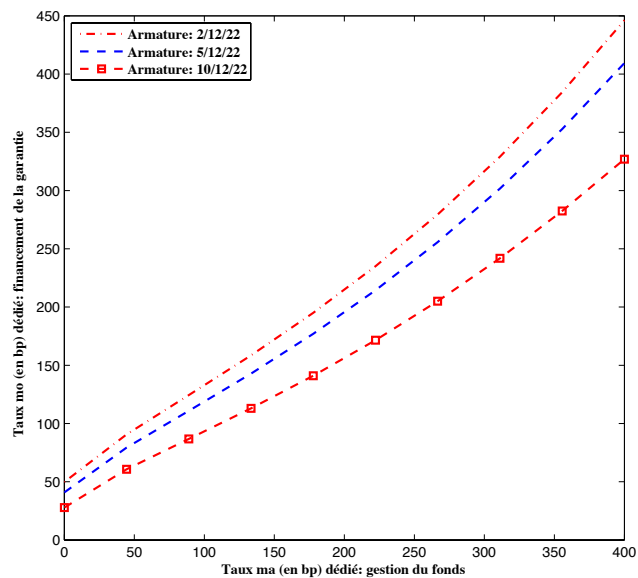


FIGURE 3.5 – Relation d'équilibre entre le taux m_o dédié au financement de la GMAB et le taux m_a prélevé pour la gestion du fonds, selon l'équation (3.26).

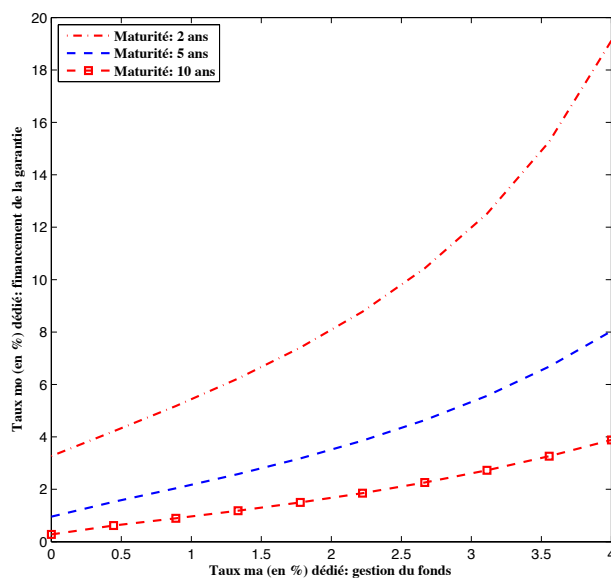


FIGURE 3.6 – Relation d'équilibre entre le taux m_o dédié au financement de la garantie mixte GMMB/GMDB et le taux m_a prélevé pour la gestion du fonds.

3.2 Évaluation des GMAB en présence de taux stochastiques

Considérons de nouveau une évolution boursière géométrique pour l'actif sous-jacent : $S_t = S_0 e^{X_t}$ avec $F_{t_0}^+ = S_0$. En reprenant le mode de fonctionnement de la GMAB décrit à la section (3.1.5.3), il résulte qu'à chaque date de renouvellement t_i , le contrat garantit grâce à l'effet cliquet, la quantité :

$$G_i = \max(G_{i-1}, F_{t_i}^-),$$

qu'on peut réécrire :

$$\begin{aligned} G_i &= F_{t_i}^- + [G_{i-1} - F_{t_i}^-]^+ \\ &= F_{t_i}^- + L_i, \end{aligned}$$

avec $F_{t_i}^-$ défini en (3.20) par : $F_{t_i}^- = F_{t_{i-1}}^+ \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} e^{-m(t_i - t_{i-1})}$ et L_i , l'engagement de l'assureur vis-à-vis du bénéficiaire du contrat. D'autre part, immédiatement après le renouvellement du contrat en t_i , l'encours du fonds sous-jacent est réinitialisé à G_i de sorte que $F_{t_i}^+ = G_i$. Considérons de nouveau $n = 3$ pour l'armature des dates de renouvellement et rappelons $\delta(t)$ la fonction d'actualisation définie par l'Eq.(3.2). La valeur actuelle de l'engagement de l'assureur au titre de la GMAB est donnée au temps $t = 0$ par :

$$\begin{aligned} H(S_0, m, t_3) &= H_1(S_0, m, t_1) + H_2(S_0, m, t_2) + H_3(S_0, m, t_3) \\ &= E_Q[\delta(t_1)L_1] + E_Q[\delta(t_2)L_2] + E_Q[\delta(t_3)L_3]. \end{aligned}$$

Commençons par chercher le prix en $t = 0$ de l'engagement L_1 :

$$H_1(S_0, m, t_1) = E_Q[\delta(t_1)L_1],$$

avec

$$L_1 = F_{t_0}^+ \left[1 - \frac{S_{t_1}}{S_0} e^{-mt_1} \right]^+.$$

En choisissant comme numéraire un zéro-coupon sans risque de défaut dont la maturité coïncide avec celle de l'engagement L_1 , i.e., en t_1 , il résulte :

$$H_1(S_0, m, t_1) = E_Q[\delta(t_1)]E_{Q_{t_1}}[L_1] = P(0, t_1)E_{Q_{t_1}}[L_1]. \quad (3.27)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} E_{Q_{t_1}}[L_1] &= E_{Q_{t_1}} \left[F_{t_0}^+ \left[1 - \frac{S_{t_1}}{S_0} e^{-mt_1} \right]^+ \right] = S_0 E_{Q_{t_1}} \left[1 - \frac{S_{t_1}}{S_0} e^{-mt_1} \right]^+ \\ &= S_0 e^{-mt_1} E_{Q_{t_1}} \left[e^{mt_1} - \frac{S_{t_1}}{S_0} \right]^+ = S_0 e^{-mt_1} E_{Q_{t_1}} [e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+. \end{aligned}$$

En utilisant (3.27), il vient :

$$H_1(S_0, m, t_1) = P(0, t_1) S_0 e^{-mt_1} E_{Q_{t_1}} [e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+. \quad (3.28)$$

Considérons dans un deuxième temps l'engagement L_2 défini par :

$$L_2 = F_{t_1}^+ \left[1 - \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)} \right]^+,$$

dont le prix en $t = 0$ est donné de la même manière par :

$$H_2(S_0, m, t_2) = E_Q[\delta(t_2)L_2] = P(0, t_2)E_{Q_{t_2}}[L_2]. \quad (3.29)$$

Au prorata du facteur $P(0, t_2)$, le dernier terme s'écrit :

$$E_{Q_{t_2}}[L_2] = E_{Q_{t_2}} \left[F_{t_1}^+ \left[1 - \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)} \right]^+ \right].$$

En conditionnant par $F_{t_1}^+$, on a

$$\begin{aligned} E_{Q_{t_2}}^{t_1^+}[L_2] &= F_{t_1}^+ E_{Q_{t_2}}^{t_1^+} \left[1 - \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)} \right]^+ \\ &= F_{t_1}^+ e^{-m(t_2-t_1)} E_{Q_{t_2}} \left[e^{m(t_2-t_1)} - e^{X(t_2)-X(t_1)} \right]^+. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Il ne nous reste plus qu'à obtenir la quantité $E_{Q_{t_2}}[F_{t_1}^+]$. En notant la relation suivante :

$$F_{t_1}^+ = F_{t_1}^- + L_1,$$

il vient d'abord

$$E_{Q_{t_2}}[F_{t_1}^+] = E_{Q_{t_2}}[F_{t_1}^- + L_1] = E_{Q_{t_2}}[F_{t_1}^-] + E_{Q_{t_2}}[L_1],$$

avec :

$$E_{Q_{t_2}}[F_{t_1}^-] = E_{Q_{t_2}} \left[F_{t_0}^+ \frac{S_{t_1}}{S_0} e^{-mt_1} \right] = E_{Q_{t_2}} [S_{t_1} e^{-mt_1}].$$

Remarquons que :

$$E_{Q_{t_2}}[F_{t_1}^-] = e^{-mt_1} S_0 \phi_{X(t_1)}^{t_2}(-i),$$

avec $\phi_{X(t)}^t(u) := E_{Q_t} [e^{iuX(t)}]$, la fonction caractéristique du processus X sous la mesure Q_t -forward. Or,

$$E_{Q_{t_2}}[L_1] = E_{Q_{t_2}} \left[S_0 \left[1 - \frac{S_{t_1}}{S_0} e^{-mt_1} \right]^+ \right] = S_0 e^{-mt_1} E_{Q_{t_2}} [e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+,$$

d'où

$$E_{Q_{t_2}}[F_{t_1}^+] = e^{-mt_1} S_0 \phi_{X(t_1)}^{t_2}(-i) + S_0 e^{-mt_1} E_{Q_{t_2}} [e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+. \quad (3.31)$$

En se servant de (3.30) et (3.31), on a :

$$E_{Q_{t_2}}[L_2] = S_0 e^{-mt_2} \left(\phi_{X(t_1)}^{t_2}(-i) + E_{Q_{t_2}} [e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+ \right) E_{Q_{t_2}} [e^{m(t_2-t_1)} - e^{X(t_2)-X(t_1)}]^+.$$

Il vient finalement d'après (3.29) :

$$H_2(S_0, m, t_2) = P(0, t_2) S_0 e^{-mt_2} \left(\phi_{X(t_1)}^{t_2}(-i) + E_{Q_{t_2}}[e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+ \right) E_{Q_{t_2}}[e^{m(t_2-t_1)} - e^{X(t_2)-X(t_1)}]^+.$$

Considérons l'engagement final L_3 de l'assureur à la maturité du contrat, au temps t_3 :

$$L_3 = F_{t_2^+} \left[1 - \frac{S_{t_3}}{S_{t_2}} e^{-m(t_3-t_2)} \right]^+,$$

et dont le prix à la date initiale est :

$$H_3(S_0, m, t_3) = E_Q[\delta(t_3)] E_{Q_{t_3}}[L_3] = P(0, t_3) E_{Q_{t_3}}[L_3].$$

De la même manière,

$$E_{Q_{t_3}}[L_3] = E_{Q_{t_3}} \left[F_{t_2^+} \left[1 - \frac{S_{t_3}}{S_{t_2}} e^{-m(t_3-t_2)} \right]^+ \right].$$

En conditionnant par $F_{t_2^+}$,

$$\begin{aligned} E_{Q_{t_3}}[L_3] &= E_{Q_{t_3}}[F_{t_2^+}] E_{Q_{t_3}} \left[1 - \frac{S_{t_3}}{S_{t_2}} e^{-m(t_3-t_2)} \right]^+ \\ &= e^{-m(t_3-t_2)} E_{Q_{t_3}}[F_{t_2^-} + L_2] E_{Q_{t_3}} \left[e^{m(t_3-t_2)} - e^{X(t_3)-X(t_2)} \right]^+. \end{aligned} \quad (3.32)$$

D'une part,

$$\begin{aligned} E_{Q_{t_3}}[F_{t_2^-}] &= E_{Q_{t_3}} \left[F_{t_1^+} \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)} \right] \\ &= E_{Q_{t_3}}[F_{t_1^+}] E_{Q_{t_3}} \left[\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)} \right] \\ &= E_{Q_{t_3}}[F_{t_1^-} + L_1] E_{Q_{t_3}} \left[\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m(t_2-t_1)} \right] \\ &= \left(e^{-mt_1} S_0 \phi_{X(t_1)}^{t_3}(-i) + S_0 e^{-mt_1} E_{Q_{t_3}}[e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+ \right) e^{-m(t_2-t_1)} \phi_{X(t_2)-X(t_1)}^{t_3}(-i) \\ &= e^{-mt_2} S_0 \phi_{X(t_2)-X(t_1)}^{t_3}(-i) \left(\phi_{X(t_1)}^{t_3}(-i) + E_{Q_{t_3}}[e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+ \right), \end{aligned}$$

ainsi :

$$E_{Q_{t_3}}[F_{t_2^-}] = S_0 e^{-mt_2} \phi_{X(t_2)-X(t_1)}^{t_3}(-i) \left(\phi_{X(t_1)}^{t_3}(-i) + E_{Q_{t_3}}[e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+ \right). \quad (3.33)$$

D'autre part,

$$E_{Q_{t_3}}[L_2] = S_0 e^{-mt_2} \left(\phi_{X(t_1)}^{t_3}(-i) + E_{Q_{t_3}}[e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+ \right) E_{Q_{t_3}}[e^{m(t_2-t_1)} - e^{X(t_2)-X(t_1)}]^+.$$

En se servant des deux dernières équations on obtient :

$$\begin{aligned}
 H_3(S_0, m, t_3) = & P(0, t_3) S_0 e^{-mt_3} \left\{ \phi_{X(t_2)-X(t_1)}^{t_3}(-i) \left(\phi_{X(t_1)}^{t_3}(-i) + E_{Q_{t_3}}[e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+ \right) + \right. \\
 & \left. \left(\phi_{X(t_1)}^{Q_{t_3}}(-i) + E_{Q_{t_3}}[e^{mt_1} - e^{X_{t_1}}]^+ \right) E_{Q_{t_3}}[e^{m(t_2-t_1)} - e^{X(t_2)-X(t_1)}]^+ \right\} \times \\
 & E_{Q_{t_3}} \left[e^{m(t_3-t_2)} - e^{X(t_3)-X(t_2)} \right]^+. \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

3.3 Couverture des contrats Variable Annuities

3.3.1 Couverture en ratio optimal

Dans un premier temps nous rappelons la formule générale donnant la sensibilité des prix d'options européennes aux variations de cours du sous-jacent. Cette variation est donnée par la dérivée partielle de l'option par rapport au sous-jacent. Ainsi, pour une option de vente européenne, on a :

$$\Delta = \partial P(S_t, T) / \partial S_t.$$

Dans le cadre des processus de Lévy géométriques, elle est donnée par :

$$\Delta(S_t, T) = K \frac{1}{2S\pi} e^{-\delta x'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi^Q(u+i\delta))}}{iu - \delta - 1} du, \quad \text{avec } \delta > 0. \tag{3.35}$$

En revanche, la prise en compte des discontinuités de cours financiers rend le marché incomplet de telle sorte qu'il n'existe pas de portefeuille dupliquant éliminant définitivement le risque. Comme résultante, la réplication n'est plus possible et l'allocation précédente est sous-optimale. Il convient donc de trouver une allocation qui permette de rendre ce risque minimal. En nous référant au deuxième chapitre et en utilisant un critère de minimisation locale de risque dans l'univers historique⁴² P pour la dynamique réelle du sous-jacent, on peut montrer que l'allocation optimale est donnée par la formule suivante :

$$\theta(S_t, T) = K \frac{1}{2S\pi} e^{-\delta x'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi^Q(u+i\delta))} B^P(u+i\delta)}{(-iu + \delta)(-iu + \delta + 1)} du \quad \text{avec } \delta > 0, \tag{3.36}$$

avec $x' = \ln(S/K)$ et $B^P(u)$, une fonction d'exposants caractéristiques donnée sous la mesure P par :

$$B^P(u) = \frac{-\psi^P(u-i) + \psi^P(u) + \psi^P(-i)}{-\psi^P(-2i) + 2\psi^P(-i)}. \tag{3.37}$$

42. En d'autres termes, le portefeuille est (localement) à risque minimal dans l'univers des scénarios réels du support sous-jacent.

Comme on l'avait souligné, la conséquence du cadre d'incomplétude de marché est l'existence d'une infinité de mesures risque-neutres sous lesquelles les processus de prix actualisés sont des martingales. De plus, au regard de la formule (3.36), il apparaît nécessaire d'établir une correspondance entre les univers P et Q . Par construction, le passage de l'univers historique vers l'univers risque-neutre choisi ne modifie pas le coefficient de diffusion des processus mixtes de diffusion à sauts. Pour cette même famille de processus, la proposition (2.2.2) montre à l'évidence l'absence d'influence du paramètre de dérive dans la détermination du ratio de couverture optimale. Par conséquent, il ne nous reste plus qu'à établir des correspondances de paramètres de sauts dans les deux univers.

Rappelons que, dans notre modèle de base, le cours de l'actif support suit l'évolution géométrique (3.4), la fonction aléatoire X_t suit un processus mixte de diffusion à saut de Kou⁴³. Introduisons (cf. Gerber et Shiu (1994)), la mesure de Esscher de paramètre k , équivalente à P . Celle-ci est donnée par la densité de Radon-Nykodim :

$$\frac{dQ_k}{dP} = \frac{e^{kX}}{E_P[e^{kX}]} \quad (3.38)$$

La fonction aléatoire $(e^{kX_t}/E_P[e^{kX_t}])$ est une martingale positive d'espérance un et peut être prise comme densité. Par commodité de calcul, nous notons Q , la mesure de Esscher de paramètre k et ψ , l'exposant de Laplace. De même, nous rappelons que l'exposant de Laplace associé au processus X est donné de telle sorte que : $E[e^{\beta X_t}] = e^{-\psi(\beta)t}$. La restriction martingale nous impose : $S_0 = E_Q[S_0 e^{-rt} e^{X_t}]$. Il résulte :

$$\begin{aligned} S_0 &= S_0 e^{-rt} \int_{\Omega} \frac{e^{(k+1)X_t}}{E_P[e^{kX_t}]} dP \\ &= S_0 \exp \left\{ - (r + \psi_P(k+1) - \psi_P(k))t \right\}. \end{aligned}$$

Nous choisissons la mesure risque-neutre Q , en identifiant le paramètre $\hat{k}$ - sous réserve qu'il existe - tel que :

$$r + \psi_P(k+1) - \psi_P(k) = 0, \quad (3.39)$$

avec

$$\psi(k) = -k\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 - \lambda(\zeta - 1).$$

et avec ζ , l'exposant de Laplace associé aux sauts.

$$\zeta = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - k} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + k}.$$

Il vient que le paramètre risque-neutre d'Esscher $\hat{k}$ est obtenu de telle sorte que :

$$r = \mu + \sigma^2(k+1/2) - \lambda \left[\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - k} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + k} - \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - (k+1)} - \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + (k+1)} \right].$$

43. Sans perte de généralité et en restant dans la large classe de processus de Lévy.

En remarquant qu'un processus de Kou dans l'univers réel P reste un processus de Kou dans l'univers risque-neutre Q , Le Courtois et Quittard-Pinon (2006) identifient les correspondances de paramètres de sauts pour ce processus entre ces deux univers. Ceux-ci obtiennent sous la mesure martingale, les Q -paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{p} = \frac{p\lambda_1}{\zeta(\lambda_1 - k)}, \\ \widehat{q} = 1 - \widehat{p}, \\ \widehat{\lambda}_1 = \lambda_1 - k, \\ \widehat{\lambda}_2 = \lambda_2 + k, \\ \widehat{\lambda} = \lambda\zeta, \\ \zeta = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - k} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + k}. \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Corollaire 3.3.1. *La mesure martingale équivalente nous impose le choix d'une dérive correctrice $\widehat{\mu}$ telle que :*

$$\widehat{\mu} = r - \frac{\sigma^2}{2} - \widehat{\lambda} \left[\frac{\widehat{p}\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 - 1} + \frac{\widehat{q}\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_2 + 1} \right].$$

Preuve : En vertu de la densité (3.38), il vient d'une part

$$\begin{aligned} E_Q[e^{X_t}] &= \int_{\Omega} \frac{e^{(k+1)X_t}}{E_P[e^{kX_t}]} dP \\ &= \exp \left\{ -(\psi_P(k+1) - \psi_P(k))t \right\}. \end{aligned}$$

Il vient d'autre part :

$$\psi_Q(1) = \psi_P(k+1) - \psi_P(k),$$

d'où résulte

$$\widehat{\mu} = -\frac{\sigma^2}{2} - \widehat{\lambda} \left[\frac{\widehat{p}\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 - 1} + \frac{\widehat{q}\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_2 + 1} - 1 \right] - \psi_P(k+1) + \psi_P(k).$$

En se servant de la restriction martingale (3.39), il vient finalement :

$$\widehat{\mu} = r - \frac{\sigma^2}{2} - \widehat{\lambda} \left[\frac{\widehat{p}\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 - 1} + \frac{\widehat{q}\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_2 + 1} - 1 \right].$$

Ce qui met fin à cette preuve. □

3.3.2 Couverture discrète et erreur résiduelle

Soit h , la fréquence d'ajustement choisie et $[0, T]$, l'horizon de temps d'investissement divisé en T/h sous-périodes d'isodurée. On considère des scénarios du monde réel en simulant dans l'univers historique une trajectoire du sous-jacent $S : (S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_{T/h}})$. A chaque instant discret $t \in \{\underbrace{t_0}_0, t_1, \dots, \underbrace{t_{T/h}}_T\}$, nous allouons au portefeuille différentes quantités $(\Pi_{t_0}, \Pi_{t_1}, \dots, \Pi_{T/h})$:

$$\Pi_{t_i} = \theta(S_{t_i}, T), \quad i \in \{0, 1, \dots, T/h\}.$$

On peut alors construire le portefeuille de couverture optimale :

$$H(t_i) = \Pi_{t_i} S_{t_i} + \hat{\Pi}_{t_i} + \epsilon, \quad (3.41)$$

avec ϵ inatteignable ou nul en marché incomplet. Π_t représente la quantité d'actif risqué investie au temps t et $\hat{\Pi}_t$, le montant investi dans l'actif sans risque. Il est obtenu par la relation suivante :

$$\hat{\Pi}_{t_i} = H^{th}(t_i) - \Pi_{t_i} S_{t_i}, \quad i \in \{0, 1, \dots, T/h\}. \quad (3.42)$$

$H^{th}(t)$ représente la valeur théorique du portefeuille au temps t . D'autre part, le caractère discret de l'allocation engendre des erreurs résiduelles que nous modélisons par la variable aléatoire HE,

$$HE(t_i) = H^{th}(t_i) - H(t_i^-), \quad i \in \{0, 1, \dots, T/h\}, \quad (3.43)$$

avec $H(t^-)$, la valeur donnée à l'instant immédiat avant ajustement en t :

$$H(t_i^-) = \Pi_{t_{i-1}} S_{t_i} + \hat{\Pi}_{t_{i-1}} e^{rh}, \quad i \in \{1, 2, \dots, T/h\},$$

et $H(0^-) = 0$. D'autre part, cette erreur de couverture (3.43) peut être aussi bien positive que négative car celle-ci dépend des différents scénarios du marché. Lorsqu'elle est négative, elle est source de profit parce que la valeur du portefeuille avant rebalancement $H(t^-)$ vaut plus qu'elle n'est requise en t pour la couverture de l'option.

3.3.3 Performance de la couverture en ratio optimal par rapport à celle en delta

Nous montrons à travers un simple scénario, les performances de la couverture en ratio optimal (3.36) par rapport à celles en ratio delta (3.35) pour une option de vente européenne à la monnaie de maturité T égale à une année et de prix d'exercice $K = S = 100$, dans une économie telle que donnée par la table (3.1). Le taux d'intérêt sans risque r est de 6%. Nous considérons une fréquence d'ajustement mensuelle $h = 1/12$. Dans un premier temps, nous simulons 5 000 trajectoires du sous-jacent dans l'univers historique P . D'autre part, en utilisant l'exposant caractéristique (3.5) et en se servant de la fonction

caractéristique associée à la loi des sauts (3.6) puis de la condition martingale⁴⁴ donnée par l'Eq.(3.17), nous calculons les prix d'options (3.16) et les ratios de couvertures (3.35 et 3.36). Les graphiques à la table (3.7) représentent l'allure des fonctions de densités relativement à l'intensité des sauts. Le cas $\lambda = 0$ correspond à celui d'un processus purement continu et dans ce cas, nous notons sans surprise que les densités des erreurs résiduelles issues des deux ratios sont confondues. En effet, le marché est complet et dans ce cas, le ratio de couverture optimal est égal à celui en delta. Par ailleurs, on assiste à un éloignement des distributions des erreurs résiduelles à mesure que l'intensité des sauts augmente. En d'autres termes, le marché devenu incomplet, l'allocation en delta est sous-optimale. D'autre part, les graphiques à la table (3.8) nous informent que l'utilisation de l'allocation en delta exige une immobilisation en capital économique beaucoup plus importante que pour l'allocation optimale au fur et à mesure que l'intensité des sauts est prononcée. Le lecteur trouvera des résultats numériques à la table (3.9).

3.3.4 Couverture des garanties mixtes : en cas de décès et en cas de vie

Nous généralisons la méthodologie précédente en prenant en compte les probabilités de survenance de décès de l'assuré à un instant antérieur à la date de fin de contrat T . On suppose que les garanties en cas de vie ou en cas de décès sont versées au bénéficiaire à la fin de la sous-période de survenance de l'événement ouvrant droit au paiement de l'engagement. En nous référant aux notations actuarielles, introduisons ${}_T-t p_{x,t}$, la probabilité que l'assuré âgé de $x + t$ années survive pendant les $T - t$ prochaines années et ${}_{w-t}|_h q_{x,t}$, $w \geq t$, la probabilité que cette tête d'âge $x + t$ survive durant les $w - t$ prochaines années et décède dans la période suivante, i.e., dans $]w - t, w - t + h]$. En d'autres termes, si $s, t \in \mathbb{R}^+$,

$${}_s|_t q_x = {}_s p_x \times {}_t q_{x+s},$$

car

$$\begin{aligned} {}_s|_t q_x &= \Pr[s < T_x < s + t | T_x > 0] \\ &= \Pr[T_x > s] - \Pr[T_x > s + t] \\ &= {}_s p_x - {}_{s+t} p_x = {}_s p_x - {}_s p_x \times {}_t p_{x+s} \\ &= {}_s p_x (1 - {}_t p_{x+s}). \end{aligned}$$

Fixons $t \in [0, T]$ et supposons que ce contrat existe encore à cette date. Soit $P(S_t, w)$, le prix d'une option de vente européenne d'échéance w . La valeur du portefeuille de couverture conditionnellement à la survie de l'assuré en t , $H^c(t)$ est donnée par :

$$H^c(t) = \sum_{w=t}^{T-h} {}_{w-t}|_h q_{x,t} P(S_t, w + h) + {}_{T-t} p_{x,t} P(S_t, T).$$

44. Ici, nous prenons $m = 0$.

TABLE 3.7 – Distributions des erreurs de couverture résiduelles en fonction de l'intensité des sauts obtenues selon le ratio optimal (3.36) par rapport à celui en delta (3.35).

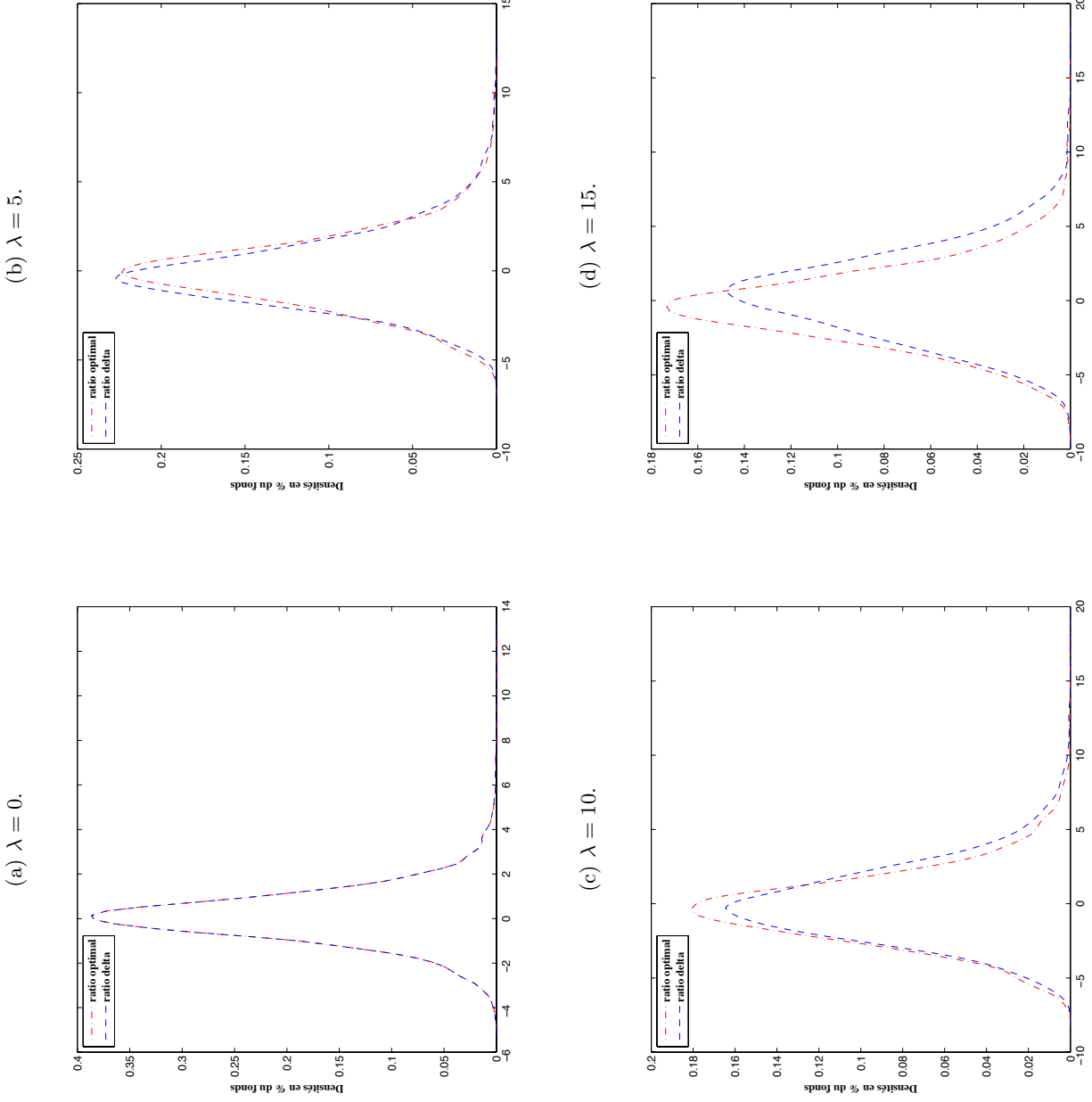
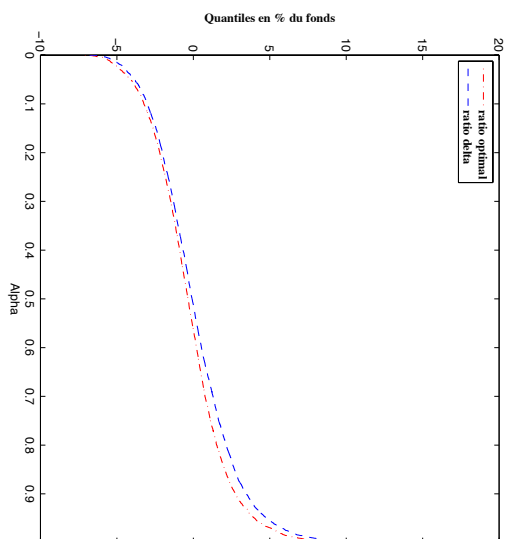
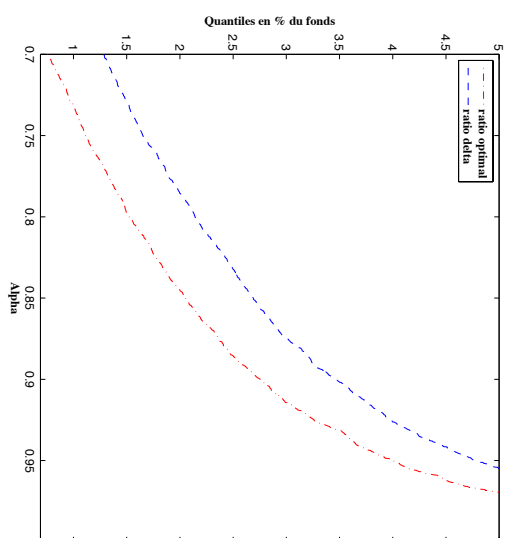


TABLE 3.8 – Mesure de risque Quantiles des erreurs de couverture résiduelles obtenues selon le ratio optimal (3.36) par rapport à celui en delta (3.35).

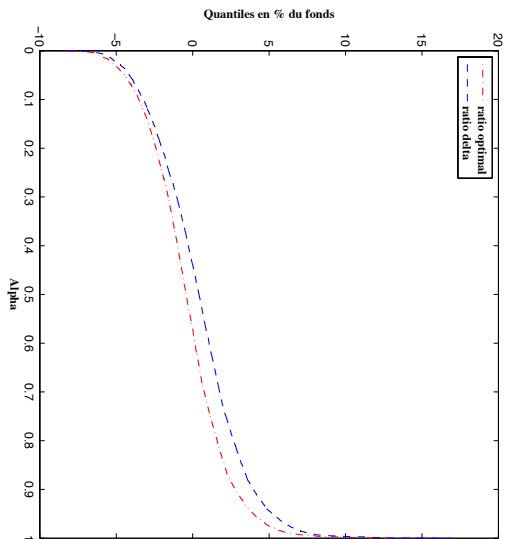
(a) $\lambda = 10$.



(b) Grossissement de la figure (3.8a).



(c) $\lambda = 15$.



(d) Grossissement de la figure (3.8c).

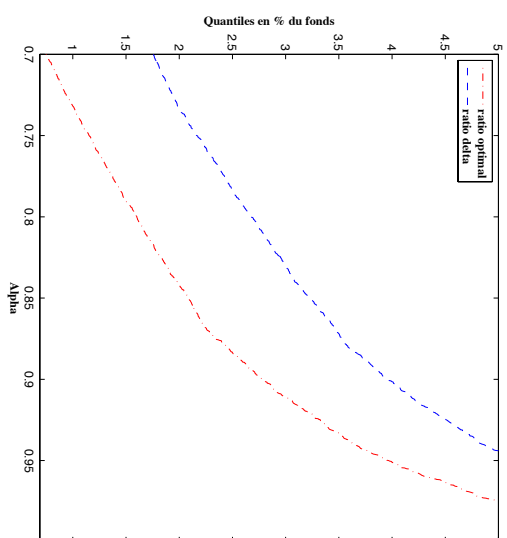


TABLE 3.9 – Mesure de risque Quantiles et CTE des erreurs résiduelles de couverture obtenues selon le ratio optimal (3.36) par rapport à celui en delta (3.35).

Quantiles									
$\lambda = 5$					$\lambda = 10$				
Contrat : 4.9441					Contrat : 5.6280				
α	Couverture en delta (% fonds)	Couverture en ratio optimal (% fonds)	Couverture en delta (% fonds)	Couverture en ratio optimal (% fonds)	Couverture en delta (% fonds)	Couverture en ratio optimal (% fonds)	Couverture en delta (% fonds)	Couverture en ratio optimal (% fonds)	Contrat : 6.1696
50%	-0.1543	-0.0471	-0.1648	-0.2660	-0.0380	-0.4092			
90%	2.6945	2.5839	2.9215	2.5381	3.2674	2.6789			
95%	3.7034	3.5755	3.9682	3.5413	4.4896	3.7909			
97.5%	4.8258	4.5754	5.1147	4.6237	5.5322	4.8736			
99%	6.4526	5.8572	7.1505	6.3300	7.0262	6.3949			

CTE									
$\lambda = 5$					$\lambda = 10$				
Contrat : 4.9441					Contrat : 5.6280				
α	Couverture en delta (% fonds)	Couverture en ratio optimal (% fonds)	Couverture en delta (% fonds)	Couverture en ratio optimal (% fonds)	Couverture en delta (% fonds)	Couverture en ratio optimal (% fonds)	Couverture en delta (% fonds)	Couverture en ratio optimal (% fonds)	Contrat : 6.1696
50%	1.6265	1.6228	1.8097	1.5341	2.0418	1.5382			
90%	4.2465	4.0167	4.5829	4.0458	4.9702	4.2889			
95%	5.3236	5.0242	5.7454	5.1184	6.1141	5.3927			
97.5%	6.4534	6.0112	6.9974	6.2268	7.2844	6.4726			
99%	7.9034	7.3311	8.5825	7.6735	8.8727	7.9872			

Sa valeur inconditionnelle $H(t)$ est alors déterminée en pondérant cette quantité par la probabilité ${}_t p_x$:

$$H(t) = \sum_{w=t}^{T-h} {}_w|_h q_x P(S_t, w+h) + {}_T p_x P(S_t, T). \quad (3.44)$$

Le portefeuille défini en (3.44) peut se décomposer comme la somme de la part investie dans l'actif sous-jacent et de celle investie dans l'actif sans risque comme le montre la relation (3.41), avec comme part investie dans l'actif risqué, Π_t :

$$\Pi_t = \sum_{w=t}^{T-h} {}_w|_h q_x \theta(S_t, w+h) + {}_T p_x \theta(S_t, T), \quad (3.45)$$

et celle investie dans l'actif sans risque, $\hat{\Pi}_t$ donnée en (3.42).

3.3.4.1 Erreur de couverture

L'erreur de couverture HE est déterminée par la réalisation de deux scénarios. D'une part, si l'assuré survit en t , elle est obtenue par la différence classique entre la valeur du portefeuille de couverture requis en t et celle (avant ajustement) donnée par $H(t^-)$. D'autre part, si l'assuré décède en t alors HE s'obtient par la différence entre la garantie en cas décès et le portefeuille avant rajustement $H(t^-)$. Plus précisément, conditionnellement au fait que l'assuré soit en vie en $t-h$, l'erreur de couverture conditionnelle HE^c est déterminée par la relation suivante :

$$HE^c(t) = {}_h p_{x,t-h} [H^c(t) - H^c(t^-)] + {}_h q_{x,t-h} [(K - S_t)^+ - H^c(t^-)].$$

En remarquant que ${}_h p_{x,t-h} + {}_h q_{x,t-h} = 1$, il vient :

$$HE^c(t) = {}_h p_{x,t-h} H^c(t) + {}_h q_{x,t-h} (K - S_t)^+ - H^c(t^-).$$

L'erreur de couverture inconditionnelle est alors obtenue en pondérant cette quantité par ${}_{t-h} p_x$, d'où :

$$HE(t) = H(t) + {}_{t-h} q_x (K - S_t)^+ - H(t^-). \quad (3.46)$$

3.3.4.2 Distribution des pertes futures actualisées

La distribution des pertes futures est déterminée par la différence entre le coût supporté par l'assureur et celui à la charge de l'assuré pour le financement de la garantie. Les pertes futures apparaissent donc comme l'agrégation de trois composantes. La première étant la valeur actuelle des erreurs de couverture résiduelles données en (3.46), ensuite s'ajoutent ceux imputables aux coûts de transaction. La dernière composante est le montant de marge $\mathcal{M}$, prélevé par l'assureur pour le financement de la garantie sous-jacente :

ce montant est aussi connu dans la pratique sous la langue anglaise de *Margin offset*. Il résulte que les pertes futures sont données au temps t par l'équation :

$$C_t = HE_t + TC_t - {}_t p_x \mathcal{M}_t,$$

avec :

$$\mathcal{M}_t = m_o \times F_t,$$

où m_o représente le taux prélevé pour le financement de la garantie. Ici, une nuance est de mise. Notons que le taux m_a prélevé par l'assureur pour la gestion du fonds encore connu sous l'appellation anglaise de *MER* de la terminologie anglaise *Management expense ratio* est à dissocier du taux m_o - *Mortality and expense* - servant à financer la garantie. En effet ce dernier est obtenu par selon la relation (3.13). Par ailleurs, les coûts de transaction supportés par l'assureur sont une proportion $\mathcal{C}$ de la variation absolue de la part allouée à l'actif risqué. Ainsi, il vient en t :

$$TC_t = \mathcal{C} S_t |\Pi_t - \Pi_{t-1}|.$$

3.3.5 Application numérique

Considérons à nouveau le fonds de référence dont la valeur dépend du cours sous-jacent S . Cette valeur est donnée en t par :

$$F_t = F_0 \frac{S_t}{S_0} e^{-mt}, \quad m = m_o + m_a \quad (3.47)$$

On suppose dans la suite que l'assureur prélève pour la gestion du fonds le taux m_a égal à 3% dans une économie mixte de diffusion à sauts de Kou dont les paramètres sont donnés dans le tableau (3.1). Les coûts de transaction supportés par l'assureur sont une proportion $\mathcal{C} = 0.2\%$ de la variation absolue du cours sous-jacent. On considère un assuré âgé est de 40 ans et on suppose que la force de mortalité suit le modèle de Makeham défini à la section (3.1.2). L'assuré paye une prime unique de 100 euros investie dans le fonds (3.47) et dont la valeur initiale est $F_0 = S_0 = 100$.

A titre d'illustration nous considérons deux contrats :

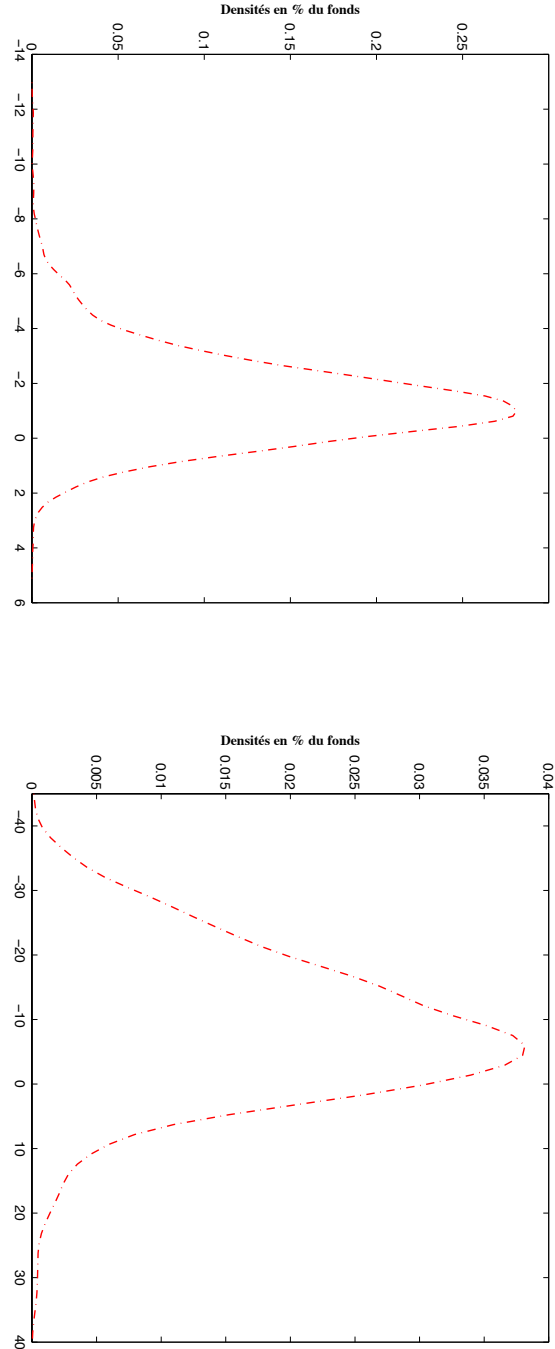
- le premier, un contrat mixte GMMB/GMDB garantissant un montant égal à 100% de la prime ;
- le second offre une garantie mixte GMAB en cas de vie et en cas de décès pour laquelle le capital initial garanti est cette fois-ci de 80% de la prime.

Pour le financement des garanties GMMB/GMDB et GMAB, les taux de prélèvement sont entièrement déterminés de manière endogène grâce à la relation d'équilibre (3.13). Les résultats obtenus sont donnés à la table (3.10).

TABLE 3.10 – Distributions des pertes futures actualisées des contrats Variables Annuities de type : GMMB/GMDB et GMAB. Le nombre de simulations utilisé est de 4000. Les mesures de Capital économique sont également fournies.

GMMB/GMDB			
Maturité : 10 ans			
α	Mesure de risque Quantile (% fonds)	Mesure de risque CTE (% fonds)	
50%	-1.2738	-0.1965	
90%	0.4482	1.0821	
95%	0.9324	1.5084	
97.5%	1.3358	1.8905	
99%	1.8487	2.3249	

GMAB			
Maturités : (2/12/22) ans			
α	Mesure de risque Quantile (% fonds)	Mesure de risque CTE (% fonds)	
50%	-8.2494	-0.2288	
90%	3.1696	10.6136	
95%	7.9524	16.1707	
97.5%	13.1031	22.4490	
99%	19.8211	31.7669	



Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité de l'évaluation et de la couverture des contrats du type *Variable Annuities*. Nous avons considéré des garanties mixtes GMMB/GMDB et des garanties *path dependent* (un peu plus complexes) notamment les GMAB. L'analyse des risques ayant été un point central de nos développements, nous avons souligné comme propos liminaire une différence importante dans la gestion des risques actuariels et financiers. En effet dans le secteur de l'assurance, la gestion de risque repose en grande partie sur la mutualisation tandis que ce n'est pas le cas en finance. D'où avait résulté l'idée de modéliser la dynamique du fonds risqué par un processus de Lévy géométrique. Nous avons également supposé dans notre étude que l'assureur prélève des frais d'assurance non seulement pour le financement des garanties sous-jacentes mais aussi pour la gestion du fonds risqué dédié. En recourant à la méthodologie générale suggérée à la première partie de cette thèse pour l'évaluation ainsi que pour la couverture, nous avons dans un premier temps montré que les justes valeurs de ces garanties pouvaient être obtenues de façon quasi-explicite et imposent une correspondance implicite entre ces deux taux. Dans un second temps, nous avons construit un portefeuille dynamique de couverture en utilisant le ratio optimal θ . Ceci nous a permis de déterminer les pertes futures actualisées.

En utilisant les indicateurs de mesure de risque extrême : VaR et CTE, nous avons mis en évidence que notre approche aboutit à une immobilisation en capital bien inférieure à celle fournie par l'allocation classique en delta très présente dans la littérature. Notre analyse conclut que la couverture de ces types de contrats selon une allocation en delta est à proscrire dans un cadre non gaussien.

Chapitre 4

Évaluation des contrats Equity-Indexed Annuities

Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une méthodologie générale d'évaluation de contrats EIAs offrant des garanties mixtes en cas de décès et de survie de l'assuré. Nous prenons aussi en compte l'option de remboursement anticipé. Parce que la classe d'actifs risqués de référence est au coeur de l'évaluation, nous commençons l'analyse sous le modèle de Black-Scholes-Merton avant d'aller vers un autre un peu plus complexe. En effet, depuis les vingt dernières années, les études empiriques en actuariat et en finance rejettent l'hypothèse gaussienne de rendements d'actifs financiers, comme l'ont fait Aït-Sahalia et Jacod (2009) ou encore Cont (2001), Jondeau et al. (2007). Plusieurs modèles alternatifs ont été proposés. Citons par exemple celui de Merton (1976) qui est l'un des premiers à avoir suggéré l'utilisation des modèles à sauts. Madan et Seneta (1990) introduisent le modèle variance gamma pendant que Carr et al. (2002) suggèrent les modèles CGMY, introduits dans la littérature actuarielle par Dufresne et al. (1991). Hardy (2001) prône quant à elle, l'utilisation du modèle à changement de régime lognormal. De notre côté, nous proposons le modèle KRS - de la terminologie anglaise Kou regime switching - introduit au premier chapitre. Ce modèle combine de façon heuristique un modèle à saut et à volatilité stochastique et permet de bien prendre en compte l'asymétrie des distributions, l'excès de kurtosis ou en encore la forte convexité du *smile* de volatilité pour des maturités courtes. Comme on peut le voir à la figure (2.4) au deuxième chapitre, il capture de même la persistance de cette convexité sur des maturités longues. Bien plus encore, le modèle KRS imbrique comme cas particuliers celui de Black et Scholes (1973), Merton (1973) Black-Scholes-Merton, de Hardy (2001) et de Kou (2002). De l'autre côté, la tarification des options de rachat a été largement analysée et continue d'être un axe de recherches actives. Né des prêts immobiliers, l'option de remboursement anticipé est assimilable à une renégociation de taux : un prêt est donc remboursé par

anticipation à l'aide d'un nouveau prêt contracté mais à un taux différent⁴⁵. Notons que ce type de phénomène a été particulièrement remarquable dans le milieu des années 80 lorsque les taux d'intérêt ont sensiblement baissé (cf. Frachot et Gouriéroux (1993)), les banques ont alors dû faire face à une vague de remboursements anticipés qu'elles avaient pour beaucoup mal anticipés. Dans le contexte financier, l'option de rachat émerge des MBS (*Mortgage based securities*). En effet, Schwartz et Torous (1993) observent que le droit de rembourser par anticipation un prêt immobilier est une option accordée par la banque à l'emprunteur. Ces auteurs sont ainsi les premiers à modéliser les options de remboursement anticipé. Albizzati et Geman (1994) montrent que celles-ci soulèvent de nombreuses similitudes avec des options de rachat en assurance et proposent pour leur part, une évaluation dans une économie de type Black-Scholes. Leurs études ont été suivies de solutions de type numérique utilisant des équations différentielles partielles (cf. Jensen et al. (2001)), ou encore par des arbres (cf. Bacinello (2003, 2005)). Bernard et Lemieux (2008), Bacinello et al. (2009) utilisent l'algorithme de Longstaff et Schwartz (2001), aussi connu sous le nom de méthode LSMC, en langue anglaise *Least squares Monte Carlo*. Cette méthode a été suggérée pour la première fois par Carriere (1996). Plus récemment, Le Courtois et Nakagawa (2011) proposent une nouvelle approche prenant en compte le comportement réel des investisseurs qui ne décident pas toujours du rachat pour des motifs purement financiers. De notre côté, nous utilisons l'algorithme de Longstaff et Schwartz. Cette approche a l'avantage d'être très rapide et facile à implémenter. De plus, l'algorithme de LSMC est le moyen le plus commode d'évaluer les options américaines (ou bermudéennes si l'exercice de l'option ne peut avoir lieu qu'en fin de sous-période). La partie innovante de ce chapitre consiste à introduire un processus général afin de mieux prendre en compte des performances du portefeuille de référence et à utiliser une méthodologie générale reposant sur l'analyse de Fourier généralisée. La rapidité et la précision de cette approche est certainement un avantage, comparé à d'autres approches.

Ce chapitre est composé de trois parties. Nous commençons l'étude des EIAs en supposant une structure par termes des taux d'intérêts constante. Cette dernière hypothèse qui peut être acceptable pour des options à court terme, n'est plus pertinente lorsque les contrats ont des échéances éloignées comme c'est le cas pour les produits d'assurance-vie. Dans la deuxième partie, nous revisitons l'analyse du contrat en supposant l'impact simultané des sauts et des taux d'intérêt stochastiques. Dans la dernière partie, nous explorons d'autres garanties offertes, en particulier, des garanties cliquet ou encore des garanties cliquet avec taux de rentabilité plafonné. Comme le soulignent Lin et Tan (2003), en terme de volume important de vente, ces contrats sont les plus sollicités sur le marché. Une étude intéressante dans cette partie est l'analyse de l'impact des sauts sur les points morts (connus en langue anglaise de *Broken points*).

45. Ce taux peut être supérieur au taux précédent mais il est alors probable que cette renégociation de taux n'est pas voulue par l'emprunteur ; elle peut être la conséquence d'un déménagement, d'un divorce nécessitant la revente de bien immobilier. Mais en général, le taux du nouvel emprunt est inférieur au taux du précédent

4.1 Un contrat EIA avec des garanties mixtes

Dans un premier temps, nous considérons un contrat en unités de compte de maturité T fixée, comportant des garanties plancher en cas de décès (GMDB) et en cas de vie (GMMB). La prime P payée par le souscripteur est investie dans les unités de compte, représentées par l'évolution d'un indice boursier et dont la valeur en t est S_t . Le principe du contrat est simple, si l'assuré décède à un instant antérieur à T , ou s'il survit en T , la contrevalet en euros des unités du support détenu ou à défaut le montant minimal garanti - si celui-ci est supérieur - est renversée au bénéficiaire du contrat. En d'autres termes, quelque soit l'événement déclencheur : la survie ou le décès, l'assuré dispose d'une protection minimale lorsque le marché s'effondre et d'une participation lorsqu'il est haussier.

Notons τ , la date de décès de l'assuré. On suppose qu'un pourcentage α de la prime P est garanti au taux minimum annuel γ . En cas de survie en T , le paiement de la GMMB, F_T^s , est donné par :

$$F_T^s = \alpha P \max \left(e^{\gamma T}, \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^k \right) 1_{\tau > T}. \quad (4.1)$$

Le paramètre k module la rentabilité obtenue des marchés par l'assuré. De la même manière, supposons qu'un pourcentage α de l'investissement initial P est garanti au taux minimum annuel γ_d dans la garantie GMDB. Il vient alors le paiement :

$$F_\tau^d = \alpha P \max \left(e^{\gamma_d \tau}, \left(\frac{S_\tau}{S_0} \right)^{k_d} \right). \quad (4.2)$$

k et $k_d > 0$, représentent les coefficients participatifs. Les indices s et d spécifient la survie et le décès, respectivement.

De même, notons θ la date de rachat. Le bénéficiaire⁴⁶ reçoit à cette date le paiement L_θ définit ultérieurement. Ainsi, le paiement final du contrat est donné au temps t par :

$$G_t(\theta) = F_T^s 1_{\tau > T, T \leq t \wedge \theta} + F_\tau^d 1_{\tau \leq t \wedge T \wedge \theta} + L_\theta 1_{\theta \leq t, \theta < T}.$$

Considérons l'intervalle de temps d'investissement $[0, T]$, subdivisé en T sous-périodes d'égales durées et supposons que la garantie en cas de décès ou le remboursement anticipé sont payés en fin de sous-période.

Dans un premier temps nous évaluons la *fair value* de ce contrat sans l'option de remboursement anticipé. Celle-ci sera prise en compte ultérieurement.

46. Celui-ci pouvant être le souscripteur ou l'assuré ou encore un tiers spécifié dans le contrat.

4.2 Évaluation

Nous avons deux sources de risque, le risque financier et le risque actuariel de décès. Quant à la première source, nous prenons seulement en compte le risque de marché. En revanche, le risque décès est très complexe à gérer par des techniques d'arbitrage. On suppose⁴⁷ que le portefeuille de l'assureur est suffisamment important pour que le risque de décès soit bien mutualisé et qu'il soit considéré indépendant des aléas financiers affectant la valeur du contrat. Notons T_x la durée de vie résiduelle d'une tête d'âge x au temps $t = 0$. On définit ${}_t p_x$, la probabilité $\Pr[T_x > t]$. Cette probabilité est liée à la fonction de survie $s(x)$ - la probabilité qu'un individu âgé de 0 survive au moins x années - par la relation :

$$s(x) = \exp \left\{ - \int_0^x \mu(s) ds \right\}, \quad (4.3)$$

où μ représente le taux de décès. Ainsi, les probabilités de survie ${}_t p_x$ et de décès ${}_t q_x$, peuvent être obtenues comme suit :

$${}_t p_x = \frac{s(t+x)}{s(x)}, \quad {}_t q_x = 1 - {}_t p_x.$$

On suppose que la force de mortalité μ est déterministe et évolue selon le modèle paramétrique de Makeham. Ainsi,

$$\mu(x) = A + Bc^x, \text{ avec } B > 0, \quad A \geq -B, \quad c > 1 \text{ et } x \geq 0.$$

Melnikov et Romaniuk (2006) calibrent ce modèle sur des données de mortalité aux États-Unis et obtiennent les estimations suivantes :

$$A = 9.5666 \times 10^{-4}, B = 5.162 \times 10^{-5}, c = 1.09369.$$

D'autre part, la prime P est investie dans un indice boursier et la rémunération du compte monétaire est donnée par le taux d'intérêt instantané r . Nous pouvons définir la fonction d'actualisation :

$$\delta(t) := \exp \left\{ - \int_0^t r(u) du \right\}. \quad (4.4)$$

Dans un premier temps, on suppose que la structure par terme des taux est constante et on se réfère à la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage en temps continu pour l'évaluation du contrat à sa date de souscription. Par conséquent, il existe une mesure de probabilité Q sous laquelle les prix relatifs exprimés en compte monétaire sont des Q -martingales.

47. On pouvait aussi considérer un processus $N_t = 1_{t \leq \tau}$, qui est égal à zéro aussi longtemps que l'assuré est en vie et saute à 1 au décès. Cette modélisation n'est pas ici prise en compte.

Introduisons le prix suivant :

$$\xi_{(S_0, \gamma, k, t)} := E_Q \left[\delta(t) \alpha P \max \left(e^{\gamma t}, \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^k \right) \right]. \quad (4.5)$$

Parce que

$$\max \left(e^{\gamma t}, \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^k \right) = e^{\gamma t} + \left[\left(\frac{S_t}{S_0} \right)^k - e^{\gamma t} \right]^+,$$

notre problème devient techniquement celui de l'évaluation d'option puissance. Pour plus de convenance, suggérons le processus Y :

$$Y_t := \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^k. \quad (4.6)$$

Ce processus, d'un point de vue technique jouera un rôle très important dans notre analyse. Notons Ξ_t , la quantité suivante :

$$\alpha P \left(e^{\gamma t} + [Y_t - e^{\gamma t}]^+ \right). \quad (4.7)$$

Formellement, Ξ_t peut être interprété au prorata du facteur αP , comme le résultat au temps t d'un investissement d'une unité monétaire fait au temps initial $t = 0$, rémunéré au taux γ et d'une longue position sur une option européenne d'achat écrite sur l'actif Y et dont la date d'expiration est t . L'instant t peut être la maturité du contrat ou celle de décès de l'assuré. Nous utiliserons cette interprétation tout le long de cette analyse et nous nous référons à Y comme un actif fictif. En supposant T_x et S indépendants, le prix de la garantie GMMB est donné par :

$$V_{GMMB} = T p_x \times \xi_{(Y_0, \gamma, k, T)}.$$

En utilisant les mêmes arguments, il vient pour la garantie GMDB :

$$V_{GMDB} = \sum_{t=0}^{T-1} t p_x q_{x+t} \times \xi_{(Y_0, \gamma_d, k_d, t+1)}.$$

La valeur à l'instant $t = 0$ du contrat sans l'option de rachat, $V_{(Y_0, \gamma, \gamma_d, k, k_d, T)}$, est alors obtenue selon la formule :

$$V_{(Y_0, \gamma, \gamma_d, k, k_d, T)} = T p_x \times \xi_{(Y_0, \gamma, k, T)} + \sum_{t=0}^{T-1} t p_x q_{x+t} \times \xi_{(Y_0, \gamma_d, k_d, t+1)}, \quad (4.8)$$

où :

- . l'indice d spécifie le décès,
- . q_{x+t} est la probabilité qu'un assuré âgé de $x+t$ décède avant la fin de la sous-période considérée, $\forall t = 0, 1, \dots, T-1$,
- . et $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$, avec $t p_x = \prod_{j=0}^{t-1} p_{x+j}$.

Remarquons que la formule (4.8) est très générale et ne dépend pas d'un modèle particulier. Dans les sections suivantes, nous évaluons le contrat sous les modèles de Black-Scholes-Merton, de Kou, de Hardy, et sous le notre suggéré, le modèle KRS.

4.2.1 Modèle de Black-Scholes-Merton

Ici, postulons que le sous-jacent S , évolue selon la dynamique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t,$$

avec W un mouvement brownien standard. $Y_T = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^k$, après intégration, il vient

$$Y_T = Y_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 - q)T + k\sigma W_T},$$

où :

$$Y_0 = 1 \quad \text{et} \quad q = (r + \frac{1}{2}\sigma^2 k)(1 - k).$$

On peut alors considérer la dynamique suivante sous Q :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = (r - q)dt + \sigma k dW_t, \quad Y_0 = 1. \quad (4.9)$$

Remarquons que le processus Y évolue de la même manière qu'un actif financier détachant un taux de dividende⁴⁸ continu q . En utilisant l'équation (4.9), nous revenons dans le contexte classique du modèle de Black-scholes-Merton en présence de taux de dividende continu. Après calcul⁴⁹, il vient :

$$\xi_{(Y_0, \gamma, k, T)} = \alpha P \left[e^{-(r-\gamma)T} \mathcal{N}(d_1) + e^{-qT} \mathcal{N}(\sigma k \sqrt{T} - d_1) \right], \quad (4.10)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\gamma - k(r - \sigma^2/2)}{\sigma k} \sqrt{T} \quad \text{et} \quad q = (r + \frac{1}{2}\sigma^2 k)(1 - k),$$

où $\mathcal{N}()$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La formule (4.10) donne ainsi la *fair value* du contrat en formule fermée.

4.2.2 Modèle de Hardy

Dans le modèle lognormal à changement d'état de Hardy (2001), les processus de rendements - conditionnellement à l'état visité par celui-ci - suivent une distribution normale. Les deux premiers moments centrés sont dépendants de la chaîne de Markov ζ . Formellement :

$$r_t = \mu_{\zeta(t)} + \sigma_{\zeta(t)} z(1) \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Hardy considère que ces rendements obéissent à un processus avec changement de régime à deux états. Par convention, au temps t , $\zeta_t = 1$ si le processus est dans l'état 1 et $\zeta_t = 2$ s'il se trouve dans l'état 2.

48. fictif.

49. Les calculs détaillés sont simples et sont néanmoins fournis à l'annexe (B.1).

La matrice de transition de Markov décrivant le passage aléatoire entre les deux régimes est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

- $p_{i,j} = \Pr[\zeta_{t+1} = j | \zeta_t = i]$ est la probabilité que le processus transite de l'état i à l'instant t vers l'état j au temps $t + 1$, $(i, j) \in \{1, 2\}^2$,
- et $\sum_{j=1}^2 p_{i,j} = 1$, pour $i \in \{1, 2\}$.

Comme le remarque Hardy, il n'est pas ici nécessaire de faire des simulations de type Monte Carlo pour l'évaluation du contrat sous ce modèle. En effet, si C est une variable comptant le nombre total⁵⁰ de sous-périodes passées dans l'état 1 durant la période $[0, T]$, alors, en utilisant la distribution de séjours dans cet état, la valeur du contrat est donné sous la mesure martingale Q , par :

$$\xi_{(Y_0, \gamma, k, T)} = E \left[e^{-rT} E_Q \left[\alpha P_{\max}(e^{\gamma T}, Y_T) | C \right] \right],$$

$$\xi_{(Y_0, \gamma, k, T)} = \alpha P \sum_{c=0}^T \left[e^{-(r-\gamma)T} \mathcal{N}(d_1(C)) + e^{-q(C)} \mathcal{N}(k\Sigma - d_1(C)) \right] \Pr[C = c], \quad (4.12)$$

où :

$$d_1(C) = \frac{\gamma T - k(rT - \Sigma^2/2)}{k\sqrt{\Sigma^2}} \quad \text{et} \quad q(C) = r(1-k)T - \frac{1}{2}k(k-1)\Sigma^2,$$

avec :

$$\Sigma^2 = C\sigma_1^2 + (T-C)\sigma_2^2, \quad \Sigma = \sqrt{\Sigma^2}.$$

Ainsi, dans le cas du modèle lognormal avec changement de régime, nous avons aussi une solution fermée pour le contrat.

4.2.3 Modèle à sauts de Kou

On suppose que l'actif risqué suit un processus de Lévy géométrique : $S = S_0 e^Z$ avec S_0 , sa valeur initiale et Z , constitué par la somme d'un mouvement brownien arithmétique et d'un processus de Poisson composé :

$$S_t = S_0 \exp(Z_t) \quad \text{avec :} \quad Z_t = at + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i. \quad (4.13)$$

a et $\sigma > 0$ représentent respectivement le paramètre de dérive et le coefficient de diffusion de la partie diffusive du processus. N , un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. La

⁵⁰. Le lecteur pourra se référer au premier chapitre pour la détermination de la distribution de séjours dans l'état 1.

variable (J_i) modélise les tailles aléatoires des sauts i.i.d pouvant survenir. On suppose également que W , N et J sont indépendants. La fonction caractéristique de Z est :

$$\phi_{Z_t}(u) = e^{-t\left(-iau + \frac{\sigma^2}{2}u^2 - \lambda(\phi_J(u) - 1)\right)},$$

avec ϕ_J , celle associée aux sauts. Kou suppose que la taille aléatoire des sauts suit une loi exponentielle double asymétrique.

4.2.3.1 Condition mesure martingale équivalente

L'actif fictif Y avec son taux de dividende continu q est donné par :

$$Y_t = Y_0 \exp(X_t), \quad \text{avec :} \quad X_t = a^*t + k\sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} kJ_i. \quad (4.14)$$

La fonction caractéristique du processus X est :

$$\phi_{X_t}(u) = e^{-t\psi(u)},$$

où $\psi(u)$ représente l'exposant caractéristique associé à X :

$$\psi(u) = -ia^*u + \frac{\sigma^2 k^2}{2}u^2 - \lambda(\phi_{kJ}(u) - 1). \quad (4.15)$$

La fonction caractéristique associée au saut kJ est - sous le modèle de Kou - donné par :

$$\phi_{kJ}(u) = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - iuk} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + iuk}, \quad k > 0 \quad (4.16)$$

où : $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$. Celle-ci est définie dans la bande de régularité :

$$-\frac{\lambda_1}{k} < \Im(u) < \frac{\lambda_2}{k}, \quad k > 0. \quad (4.17)$$

Parce que : $Y_0 = Y_0 E_Q[e^{-(r-q)t} e^{-t\psi_Q(-i)}]$, il vient que la condition mesure martingale équivalente s'obtient grâce à l'équation suivante :

$$(r - q) + \psi_Q(-i) = 0.$$

On choisit alors la dérive a^* telle que :

$$a^* = r - q - \frac{\sigma^2 k^2}{2} - \lambda\mu', \quad (4.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu &= E_Q[e^J - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1, \\ \mu' &= E_Q[e^{kJ} - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - k} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + k} - 1, \\ \text{et } q &= r(1 - k) - \frac{1}{2}k(k - 1)\sigma^2 - \lambda(\mu' - k\mu). \end{aligned}$$

4.2.3.2 Formule quasi-explicite

Sous la mesure martingale Q , la valeur du contrat à la date initiale $t = 0$ et dont le paiement à l'échéance est donné en (4.7), s'obtient par le résultat suivant :

$$\xi_{(Y_0, \gamma, k, T)} = \alpha P \left[e^{-(r-\gamma)T} + C(Y_0, \gamma, k, T) \right], \quad (4.19)$$

avec :

$$\begin{aligned} C(Y_0, \gamma, k, T) &= Y_0 e^{-qT} \times \Upsilon(a^* + \sigma^2 k^2, \sigma k, \lambda', p', \lambda'_1, \lambda'_2, \ln(K/Y_0), T) \\ &\quad - e^{-rT} K \times \Upsilon(a, \sigma, \lambda, p_1, \lambda_1, \lambda_2, \ln(K/Y_0)/k, T). \end{aligned}$$

$Y_0 = 1$ et $K = e^{\gamma T}$,

$$\begin{aligned} q &= r(1-k) - \frac{1}{2}k(k-1)\sigma^2 - \lambda(\mu' - k\mu), \quad \lambda' = \lambda(1+\mu'), \quad \lambda'_1 = \lambda_1/k - 1, \\ \lambda'_2 &= \lambda_2/k - 1, \quad p' = \frac{p_1}{1+\mu'} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - k}, \quad a = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\mu, \quad a^* = r - q - \frac{\sigma^2 k^2}{2} - \lambda\mu', \\ \mu &= E_Q[e^J - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1, \\ \mu' &= E_Q[e^{kJ} - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - k} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + k} - 1. \end{aligned}$$

Kou propose une expression compliquée pour Υ qu'on implémente ici. Le lecteur pourra se référer à l'annexe (B.2) pour les détails techniques..

4.2.3.3 Méthodologie générale d'évaluation

Comme nous l'avons montré, une alternative à la formule de Kou est l'utilisation de la méthodologie générale suggérée au deuxième chapitre. Cette méthodologie hérite de l'analyse de Fourier décrite par Boyarchenko et Levendorskiĭ (2002b). Cette approche est très précise et est beaucoup plus rapide que la formule semi-explicite de Kou. Ce qui est ici requis, est la fonction caractéristique du processus X . En utilisant les résultats (4.15 et 4.16), puis la condition mesure martingale équivalente donnée en (4.18), l'exposant caractéristique de X peut être réécrit :

$$\psi(u) = -ia^*u + \frac{\sigma^2 k^2}{2}u^2 - \lambda \left(p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - iuk} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + iuk} - 1 \right), \quad (4.20)$$

où : $k > 0$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$. La bande de régularité est donnée en (4.17).

Nous obtenons au tableau suivant, les erreurs constatées en évaluant l'option puissance via la transformée de Fourier rapide par rapport à la formule semi-explicite (4.20). On note aussi qu'en prenant $k = 1$, le taux de dividende fictif devient nul et on retrouve bien les résultats obtenus par Kou (2002).

Modèle à saut exponentiel double asymétrique de Kou		
Option puissance		
$Y_0 = 100, K = 98, r = 0.05, \sigma = 0.16, \tau = 0.5, \lambda = 1, p = 0.4, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5$		
k : facteur puissance	Valeur exacte	Erreur absolue
2	19.08793	$1.06581e - 15$
1	9.14731	$7.10542e - 15$
0.90	8.27710	$8.88178e - 15$
0.50	5.00377	$3.55271e - 15$

TABLE 4.1 – Erreurs constatées en évaluant la formule (4.20) selon la transformée de Fourier rapide par rapport à la formule semi-explicite de Kou. Les paramètres du modèle et de l'option sont ceux utilisés par Kou (2002).

4.2.4 Modèle KRS

Reconsidérons la forme générale de l'actif Y défini en (4.14). On postule que X_t transite entre deux états $\xi_t = 1, 2$, régis par la chaîne de Markov ξ , où ξ_t représente le régime s'appliquant dans l'intervalle $[t, t + 1[$:

$$\begin{cases} X_{1,t} = a_1^* t + (\sigma_1 k) W_{1,t} + \sum_{i=1}^{N_t} k J_{1,i} \\ X_{2,t} = a_2^* t + (\sigma_2 k) W_{2,t} + \sum_{i=1}^{N_t} k J_{2,i} \end{cases} \quad (4.21)$$

a_1^*, a_2^* et $(\sigma_1 k), (\sigma_2 k) > 0$, désignent respectivement les paramètres de dérives et de volatilités des parties diffusives du processus dans les deux régimes. W_1, W_2, N et la suite de variable $(J_{\zeta, \cdot})$ sont supposées conditionnellement indépendants. Les tailles aléatoires des sauts $(J_{1,i})$ et $(J_{2,i})$ sont conditionnellement i.i.d. La transition aléatoire entre les états se fait par la chaîne de Markov ζ , décrite par la matrice de transition :

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix}$$

La fonction caractéristique associée à kJ est :

$$\phi_{kJ_{\zeta_t}} = E[e^{iu(kJ_{\zeta_t})}].$$

Nous rappelons C , le nombre total de sous-périodes passé dans l'état 1, dont on sait calculer la distribution. Il vient que la fonction caractéristique inconditionnelle de la

variable X est donnée au temps t par :

$$\phi_{X_t} = E[\phi_{X_t}|C] = E[E_Q[e^{iuX_t}|C]].$$

On la réécrit :

$$\phi_{X_t} = \sum_{c=0}^T \exp \left\{ -C\psi_1(u) - (T-C)\psi_2(u) \right\} Pr[C=c].$$

ψ_{ζ_t} est l'exposant caractéristique de X_t sachant que ce processus visite le régime ζ_t . Plus précisément,

$$\psi_{\zeta_t} = -ia_{\zeta_t}^* u + \frac{(k\sigma_{\zeta_t})^2}{2} u^2 - \lambda(\phi_{kJ_{\zeta_t}}(u) - 1), \quad \zeta_t \in \{1, 2\}. \quad (4.22)$$

Sous le modèle KRS, les sauts kJ sont de la même manière conditionnellement indépendants et identiquement distribués de loi exponentielle double asymétrique. Il est alors aisé de montrer que la fonction de densité conditionnelle s'écrit :

$$f_{kJ_{\zeta_t}}(y) = p_{1,\zeta_t} \frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{k} e^{-\frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{k}(ky)} 1_{y>0} + p_{2,\zeta_t} \frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{k} e^{\frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{k}(ky)} 1_{y\leq 0}, \quad \zeta_t \in \{1, 2\}$$

avec : $p_{1,\zeta_t} \geq 0$, $p_{2,\zeta_t} \geq 0$, $p_{1,\zeta_t} + p_{2,\zeta_t} = 1$. La fonction caractéristique associée à kJ sachant ζ_t est :

$$\phi_{kJ_{\zeta_t}}(u) = E[e^{iu(kJ)}] = p_{1,\zeta_t} \frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{\lambda_{1,\zeta_t} - iuk} + p_{2,\zeta_t} \frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{\lambda_{2,\zeta_t} + iuk}.$$

Ainsi,

$$E[e^{kJ}|\zeta_t] = \phi_{kJ_{\zeta_t}}(-i) = p_{1,\zeta_t} \frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{\lambda_{1,\zeta_t} - k} + p_{2,\zeta_t} \frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{\lambda_{2,\zeta_t} + k}. \quad (4.23)$$

Pour la suite, nous vérifions que $\lambda_{1,\zeta_t} > k$ pour garantir que l'amplitude moyenne des sauts est finie, $E[e^{kJ}|\zeta_t] < \infty$. En effet, conditionnellement à l'état visité par le processus X , un saut positif ne peut excéder 100% en moyenne ($k/\lambda_{1,\zeta_t} < 1$), $\forall \zeta_t \in \{1, 2\}$: ce qui reste une contrainte raisonnable pour le modèle.

Condition mesure martingale équivalente

Les processus de prix actualisés $e^{-(r-q)t}Y_t$ étant des martingales sou Q , il vient

$$Y_0 = E_Q[e^{-(r-q)t} Y_t], \quad \forall t > 0, \quad Y_0 = 1.$$

Il vient ensuite

$$\begin{aligned} Y_0 &= Y_0 E \left[E_Q[e^{-(r-q)t} e^{X_t} | C] \right], \\ &= Y_0 \sum_{c=0}^t e^{-(r-q)t} \exp \left\{ -C\psi_1(-i) - (t-C)\psi_2(-i) \right\} Pr[C=c]. \end{aligned}$$

De cette dernière expression, nous pouvons déduire la condition suivante sur l'exposant caractéristique de X :

$$\sum_{c=0}^t e^{-(r-q)t} \exp \left\{ -C\psi_1(-i) - (t-C)\psi_2(-i) \right\} Pr[C=c] = 1, \quad \forall t$$

Comme on l'avait remarqué au chapitre 1, cette condition n'est pas unique. En observant pour tout $t \leq T$,

$$\sum_{c=0}^t Pr[C=c] = 1,$$

un choix raisonnable est alors donné par la contrainte

$$-(r-q)t - C\psi_1(-i) - (t-C)\psi_2(-i) = 0, \quad \forall C \in \{0, 1, \dots, t\}. \quad (4.24)$$

De la même manière que dans le cas précédent, la condition martingale se déduit et on choisit la dérive $\mathcal{A}$ telle que : $\forall C \in \{0, 1, \dots, t\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(C) = & rt - q(C) - C \frac{(k\sigma_1)^2}{2} - (t-C) \frac{(k\sigma_2)^2}{2} \\ & - \lambda \left[C(\phi_{kJ_1}(-i) - 1) + (t-C)(\phi_{kJ_2}(-i) - 1) \right], \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(C) = & Ca_1^* + (t-C)a_2^* \\ q(C) = & r(1-k)t - \frac{1}{2}k(k-1)(C\sigma_1^2 + (t-C)\sigma_2^2) - \lambda \left[C\mu_1' + (t-C)\mu_2' \right. \\ & \left. - k(C\mu_1 + (t-C)\mu_2) \right], \end{aligned}$$

et avec $\forall \zeta_t \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \mu_{\zeta_t}' &= E_Q[e^{kJ_{\zeta_t}} - 1] = p_{1,\zeta_t} \frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{\lambda_{1,\zeta_t} - k} + p_{2,\zeta_t} \frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{\lambda_{2,\zeta_t} + k} - 1, \\ \mu_{\zeta_t} &= E_Q[e^{J_{\zeta_t}} - 1] = p_{1,\zeta_t} \frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{\lambda_{1,\zeta_t} - 1} + p_{2,\zeta_t} \frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{\lambda_{2,\zeta_t} + 1} - 1. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors obtenir la *fair value* du contrat.

4.2.5 Option de rachat

Nous prenons en compte dans les évaluations précédentes l'option de rachat. Cette option présente une similitude avec des options bermudéennes. La particularité des options bermudéennes ou américaines réside dans le choix optimal de la date d'exercice. La stratégie optimale consiste à comparer la valeur obtenue de l'exercice immédiat à celle de l'exercice différé, puis à exercer l'option si l'exercice immédiat est plus avantageux. On

suppose que le droit de rachat ne peut être exercé qu'en fin de sous-période, ce qui ramène notre problème à celui de l'évaluation d'options bermudéennes. Comme nous l'avons noté, plusieurs approches concourent pour l'évaluation de ces types d'options. Mais puisque le but est de mieux prendre en compte les facteurs de risques dans le monde réel, nous nous focalisons sur les approches de simulations de type Monte Carlo (cf. Glasserman (2004)). En revanche, ces approches ne sont pas très adaptées à notre problème à cause de la présence de plusieurs variables d'états et de plusieurs sous-périodes pour l'exercice de l'option. Nous utilisons la méthode de *Least square Monte Carlo* de Longstaff et Schwartz (2001). Elle repose à la fois sur le principe de programmation dynamique de Bellman, l'approximation de l'espérance conditionnelle par les méthode de moindres carrés et sur des méthodes de simulations de type Monte Carlo. En effet, Longstaff et Schwartz remarquent que sous des conditions techniques, l'espérance de flux de paiement attendu sachant l'exercice différé, appartient à L^2 . Il existe donc une base orthonormée dense dans cet espace. Ils utilisent ensuite une base finie pour approcher cette espérance conditionnelle. Plus précisément, cet algorithme consiste à générer dans un premier temps des trajectoires des variables d'état sous-jacentes et à calculer les paiements à l'échéance sur chacune des trajectoires. Ensuite on remonte le temps en régressant sur chacune des trajectoires, les paiements futurs actualisés comme des fonctions de base⁵¹ de ces variables d'état. Ces auteurs prouvent que la quantité prédite par ces régresseurs est une estimation efficiente sans biais de l'espérance conditionnelle des paiements futurs. C'est donc cette quantité qui nous permet de déterminer s'il est préférable d'exercer immédiatement ou d'attendre. En identifiant les temps d'exercice optimaux le long de chaque trajectoire, la valeur de l'option est enfin obtenue en actualisant à la date initiale, les flux de paiements obtenus aux dates d'arrêt sur toutes les trajectoires. Cette méthode a été utilisée par Bacinello et al. (2009) dans un contexte général et par Bernard et Lemieux (2008) dans une économie de Black-Scholes.

Le montant garanti en cas de rachat étant souvent indépendant de la rentabilité de l'actif sous-jacent, on suppose que l'assuré reçoit en cas de rachat le montant :

$$L_t = (1 - \beta_t) \alpha P e^{ht}. \quad (4.25)$$

$0 \leq h \leq r_0$, ($h \geq \gamma$), représente le taux garanti contraint par la loi et r_0 la courbe initiale des rendements à l'origine. β_t , la charge de pénalité (cf. Palmer (2006)), en cas d'exercice de l'option au temps t , $t = 1, \dots, T-1$. On introduit aussi un paramètre extra de décision $\nu \geq 1$ qui soit tel que le rachat est exercé si seulement si :

$$L_t = \nu \times V_t, \quad (4.26)$$

où V_t est la valeur du contrat au temps t . Le paramètre ν joue un rôle déterminant. Il est introduit pour des motivations de rachat non purement financières. Parce que motivé par une opportunité de marché, l'assuré rationnel exercera le rachat dès $L_t > V_t$ (rachat dit *conjoncturel*). Le paramètre ν est égal à 1 pour un agent purement rationnel. Il existe

51. Les fonctions de bases suggérées sont des polynômes de : Laguerre, de Hermite, de Legendre ou encore de Chebychev.

aussi d'autres motivations de rachat. Pour des raisons personnelles subordonnées entre autres à l'état de santé de l'assuré donc indépendamment de l'évolution des marchés, celui-ci peut avoir besoin de liquidité avant la maturité du contrat, dans ce cas $\nu < 1$ (rachat dit *structurel*).

Temps d'exercice optimal

Nous suivons l'algorithme d'adaptation de Longstaff et Schwartz par Bernard et Lemieux. La première partie de l'algorithme utilise le principe de Bellman. On part de la maturité T et on remonte de façon rétrograde à l'instant initial $t = 0$. Tout en remontant le temps, on prend des décisions optimales en comparant la valeur de rachat à celle de l'exercice différé. Les valeurs du contrat V_t dues à l'exercice différé ou valeurs de *continuation*, sont des valeurs théoriques obtenues pour $t = T - 1, \dots, 0$, par la formule suivante :

$$C'_t = (1 - {}_1p_{x+t})E_Q^t [V_{t+1}e^{-r}/\text{décès}] + {}_1p_{x+t}E_Q^t [V_{t+1}e^{-r}/\text{survie}], \quad (4.27)$$

qu'on réécrit :

$$C'_t = (1 - {}_1p_{x+t}) \times \xi_{(Y_t^i, \gamma_d, k_d, 1)} + {}_1p_{x+t}C_t.$$

Sachant que l'assuré est en vie, l'approximation de l'espérance conditionnelle due à l'exercice différé de l'option C_t , sera fournie par une base tronquée de L^2 .

Considérons les fonctions de base : $\{\psi_l(\cdot), l = 0, \dots, H\}$, la deuxième partie de l'algorithme repose sur la méthode de Monte Carlo. Elle consiste à générer n trajectoires du sous-jacent Y , défini en (4.6).

Notons Y_t^i , la valeur de l'actif fictif au temps t sur la $i^{\text{ème}}$ trajectoire, la dernière partie de l'algorithme repose sur la méthode des moindres carrés. Plus précisément, on estime C_t par une combinaison linéaire des fonctions de base ψ :

$$\hat{C}_t^i = \sum_{l=0}^H \hat{\beta}_l^t \psi_l(Y_t^i). \quad (4.28)$$

Les coefficients $\hat{\beta}_t$ sont obtenus par la minimisation au sens des moindres carrés. En d'autres termes :

$$\hat{\beta}_t = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T (\{e^{-r} V_{t+1}^i\}_{i=1, \dots, n}).$$

Ici, Ψ est une matrice de taille $n \times (H + 1)$ dont l'élément générique est : $\Psi_{il} = \psi_l(Y_t^i)$. La valeur de *continuation* est alors estimée par :

$$\tilde{C}_t^i = (1 - {}_1p_{x+t})\xi_{(Y_t^i, \gamma_d, k_d, 1)} + {}_1p_{x+t}\hat{C}_t^i, \quad (4.29)$$

avec ${}_1p_{x+t} = \frac{s(x+1)}{s(x)}$, calculée en utilisant (4.3). Maintenant, tous les ingrédients sont réunis pour la détermination des temps d'exercice optimaux de l'option de rachat.

Sur chacune des trajectoires i , on commence par initialiser le temps d'exercice optimal t^* à la date de maturité T , $\widehat{V}_t^i$ est donné par la formule (4.1) et $L_T^i = \widehat{V}_T^i$. Ensuite, pour tout $t = T - 1$ à $t = 1$:

- on estime les coefficients de régression $\widehat{\beta}_t$
- pour chaque i :
 - . l'assuré exerce l'option de rachat si la valeur de rachat (L_t) est significativement supérieure à la valeur *de continuation* estimée : $L_t^i > \nu \times \widetilde{C}_t^i$. On met immédiatement à jour la valeur de marché estimée du contrat : $\widehat{V}_t^i = L_t^i$ et le temps d'exercice optimal : $t_i^* = t$.
 - . Dans le cas échéant, l'assuré diffère l'exercice de l'option. Parce qu'il faudra tenir compte de la probabilité que l'assuré décède à la sous-période suivante, la valeur de marché estimée - du contrat - est mise à jour par la relation suivante :

$$\widehat{V}_t^i = (1 - {}_1p_{x+t}) \times \xi_{(Y_t^i, t, \gamma_d, k_d, 1)} + {}_1p_{x+t} \times e^{-r} \widehat{V}_{t+1}^i$$

4.2.6 Estimation du prix du contrat

Ainsi, on détermine sur chaque trajectoire via la procédure ci-dessus, les dates d'exercice optimales t^* de l'option de rachat. L'estimation à l'instant $t = 0$ du prix du contrat est alors donnée par la formule :

$$\widehat{V}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left({}_{t_i^*}p_x e^{-rt_i^*} L_{t_i^*}^i + \sum_{t=0}^{t_i^*-1} {}_tp_x q_{x+t} e^{-r(t+1)} F_{t+1}^{d,i} \right), \quad (4.30)$$

avec : $F_{t+1}^{d,i} = \alpha P \max \left(e^{\gamma_d(t_i+1)}, Y_t^i \right)$ défini en (4.2).

D'autre part, notons que l'estimateur en (4.30) peut être amélioré par sa variable de contrôle $\widehat{V}_{0,cv}$:

$$\widehat{V}_{0,cv} = \widehat{V}_0 + \widehat{\rho} \left(\xi_{\cdot}^{death} - \widehat{\xi}_{\cdot}^{death} \right).$$

$\widehat{\xi}_{\cdot}^{death}$, un estimateur obtenu par la simulation de $\xi_{\cdot}^{death}$ défini en (4.5). La variance est minimisée⁵² pour $\widehat{\rho}$:

$$\widehat{\rho} = \frac{\text{Cov}(\widehat{V}_0, \widehat{\xi}_{\cdot}^{death})}{\text{Var}(\widehat{\xi}_{\cdot}^{death})}.$$

52. Pour des raisons pratiques, il est plutôt simple de simuler une trajectoire de $\widehat{V}_0$ et de $\widehat{\xi}_{\cdot}^{death}$. Ensuite, une régression linéaire de $\widehat{V}_0$ sur $\widehat{\xi}_{\cdot}^{death}$ fournit une estimation du coefficient $\widehat{\rho}$.

Le prix de l'option de rachat est alors donné par :

$$\widehat{V}_0 - \xi_{(Y_0, \gamma, \gamma_d, k, k_d, T)}^{death}. \quad (4.31)$$

On pourra construire un intervalle de confiance de niveau 95% pour la valeur réelle du contrat V_0 :

$$V_0 = E[\widehat{V}_0].$$

Elle est obtenue par le rayon :

$$1.96 \sqrt{\frac{1}{m(m-1)} \sum_{j=1}^m (\widehat{V}_0^j - \bar{V}_0^j)^2},$$

avec

$$\bar{V}_0^j = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \widehat{V}_0^j.$$

4.2.7 Analyse numérique

Nous conduisons une étude numérique du contrat sous chacun des quatre modèles développés. Les résultats sont donnés dans les tableaux suivants. Nous considérons une tête d'âge $x = 40$ ans, payant une prime unique $P = 100$, dont une proportion $\alpha = 0.85$ est investie dans les unités de compte et dans un marché où le taux d'intérêt est supposé constant $r = 4\%$. La maturité T est fixée à 10 ans. Les taux minimum garantis γ , γ_d et h sont tous pris à 2%. On considère comme paramètre de repère une volatilité constante $\sigma = 20\%$. Les résultats obtenus sous chacun des modèles sont fournis dans les tableaux suivants. Nous simulons 25×8000 trajectoires. En utilisant un Pentium®4 équipé de 1 Go de Ram et dont le processeur est référencé à 2 GHz, le temps de calcul sous chacun des quatre modèles n'excède pas 15 minutes. Les figures (4.1, 4.2, 4.3) montrent le comportement de l'option de rachat - en proportion de la valeur du contrat - en fonction des différents paramètres (le temps restant à la maturité, les taux garantis (h, γ), l'attitude de rachat ν et le coefficient de pénalité (β)). On observe ce qui était intuitivement espéré. La valeur relative de l'option de rachat croît avec le temps restant à la maturité et avec l'intensité des sauts. En revanche, elle décroît avec les taux garantis γ . On peut noter que pour un taux garanti supérieur à 3%, l'impact de l'option de rachat est négligeable. La même tendance est observable pour le coefficient de pénalité : la contribution de ce coefficient est quasi-nulle pour une valeur de β supérieure à 0.10. Aussi, observe-t-on les mêmes tendances sous les quatre modèles.

A des fins numériques,

- pour les modèles à changement de régime (RSLN et KRS), on utilise les probabilités de transition et de volatilités estimées en (1.6) au premier chapitre. En effet, cette estimation met en exergue des volatilités annuelles dans les états à volatilités faible et

élevée de : $\sigma_1 = 12.05\%$ et de $\sigma_2 = 26.93\%$, respectivement.

- pour le modèle de Kou, on choisit : $\lambda = 0.5$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $p_1 = 0.4$, $\sigma = 20\%$.
- pour le modèle KRS, on utilise une intensité de sauts $\lambda = 0.5$ dans les deux régimes. L'idée sous-jacente à ce choix est de dire que les occurrences de sauts sont données avec une même probabilité. Toutefois, dès qu'un saut de Poisson survient, le processus peut être dans l'état à volatilité élevée ou dans celui à volatilité faible. Les paramètres de sauts sont :

Régime 1	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{2,1}$	$p_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{2,2}$	$p_{1,2}$	Régime 2
	10	5	0.4	10	5	0.4	

4.3 Évaluation en présence de taux stochastiques

Dans cette section, nous supposons que les taux d'intérêts évoluent au cours du temps de manière stochastique.

4.3.1 Dynamiques des taux d'intérêt et du sous-jacent

Postulons que la dynamique du prix de l'obligation zéro-coupon sans risque de défaut évolue dans l'univers risque-neutre selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \sigma_P(t, T) dW_t, \quad (4.32)$$

- . $P(t, T)$ représente le prix en t d'un zéro-coupon sans risque de défaut, de maturité T
- . r_t , le taux d'intérêt instantané sans risque du zéro-coupon
- . $\sigma_P(t, T)$, décrit la structure de volatilité
- . et W , un mouvement brownien standard.

En appliquant le lemme de Itô, on obtient les dynamiques suivantes pour le prix du zéro-coupon :

$$P(t, T) = P(0, T) e^{\int_0^t r_u du} e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_P^2(s, T) ds + \int_0^t \sigma_P(s, T) dW_s} \quad (4.33)$$

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{\frac{1}{2} \int_0^t [\sigma_P^2(s, t) - \sigma_P^2(s, T)] ds + \int_0^t [\sigma_P(s, T) - \sigma_P(s, t)] dW_s} \quad (4.34)$$

Modèle de Black-Scholes-Merton

Valeur du contrat <i>avec l'option de rachat</i>	Valeur du contrat <i>sans l'option de rachat</i>	Valeur de l'option de rachat
--	--	-------------------------------------

avec les paramètres de repère

94.3643 (0.0168)	92.1868	2.1775 (0.0168)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.05$

93.1951 (0.0222)	92.1868	1.0083 (0.0222)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.15$

92.1316 (0.0183)	92.1868	-
---------------------	---------	---

avec $\gamma = \gamma_d = h = 0.03$

97.7435 (0.0126)	96.1878	1.5557 (0.0126)
---------------------	---------	--------------------

avec $k = k_d = 0.95$

96.6962 (0.0232)	94.7041	1.9921 (0.0232)
---------------------	---------	--------------------

avec $h = 0.03$

96.7075 (0.0391)	92.1868	4.5207 (0.0391)
---------------------	---------	--------------------

Modèle lognormal avec changement de régime

Valeur du contrat <i>avec l'option de rachat</i>	Valeur du contrat <i>sans l'option de rachat</i>	Valeur de l'option de rachat
--	--	-------------------------------------

avec les paramètres de repère

90.3216 (0.0353)	88.4236	1.898 (0.0353)
---------------------	---------	-------------------

avec $\nu = 1.05$

89.3465 (0.0297)	88.4236	0.9229 (0.0297)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.15$

88.4214 (0.0306)	88.4236	-
---------------------	---------	---

avec $\gamma = \gamma_d = h = 0.03$

93.3601 (0.0243)	91.9310	1.4291 (0.0243)
---------------------	---------	--------------------

avec $k = k_d = 0.95$

92.2413 (0.0302)	90.5260	1.7153 (0.0302)
---------------------	---------	--------------------

avec $h = 0.03$

92.4327 (0.0445)	88.4236	4.0091 (0.0445)
---------------------	---------	--------------------

Modèle de Kou

Valeur du contrat <i>avec l'option de rachat</i>	Valeur du contrat <i>sans l'option de rachat</i>	Valeur de l'option de rachat
--	--	-------------------------------------

avec les paramètres de repère

97.9566 (0.0354)	95.6396	2.3170 (0.0354)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.05$

96.9351 (0.0370)	95.6396	1.2955 (0.0370)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.15$

95.7565 (0.0426)	95.6396	0.1169 (0.0426)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.21$

95.5559 (0.0165)	95.6396	-
---------------------	---------	---

avec $\gamma = \gamma_d = h = 0.03$

101.5068 (0.0245)	99.8966	1.6102 (0.0245)
----------------------	---------	--------------------

avec $k = k_d = 0.95$

100.7929 (0.0332)	98.6172	2.1757 (0.0332)
----------------------	---------	--------------------

avec $h = 0.03$

100.2165 (0.0535)	95.6396	4.5769 (0.0535)
----------------------	---------	--------------------

Modèle de Kou avec changement de régime

Valeur du contrat <i>avec l'option de rachat</i>	Valeur du contrat <i>sans l'option de rachat</i>	Valeur de l'option de rachat
--	--	-------------------------------------

avec les paramètres de repère

95.2627 (0.0324)	93.0611	2.2016 (0.0324)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.05$

94.2994 (0.0313)	93.0611	1.2383 (0.0313)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.15$

93.1249 (0.0560)	93.0611	0.0638 (0.0560)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.21$

93.0055 (0.0323)	93.0611	-
---------------------	---------	---

avec $\gamma = \gamma_d = h = 0.03$

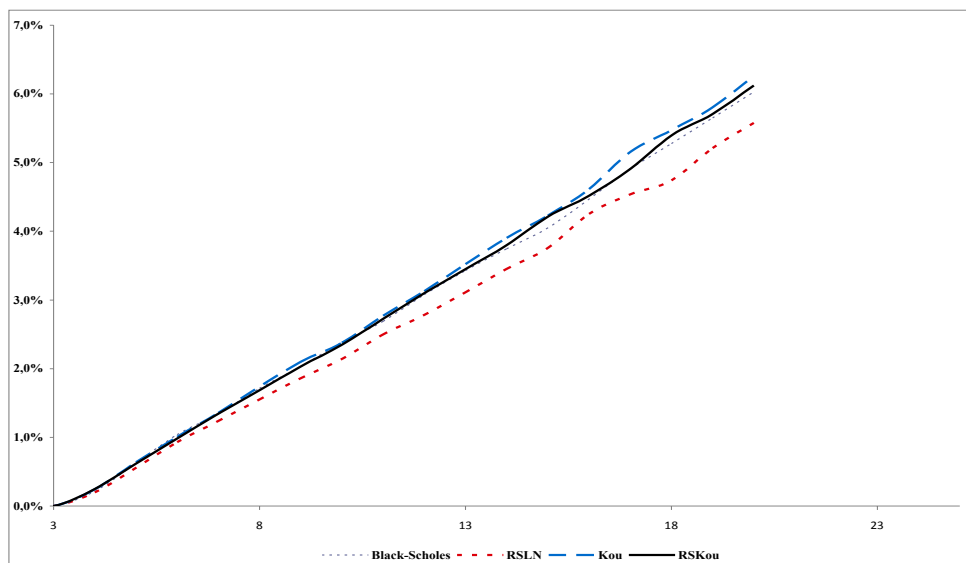
98.5196 (0.0268)	96.9792	1.5404 (0.0268)
---------------------	---------	--------------------

avec $k = k_d = 0.95$

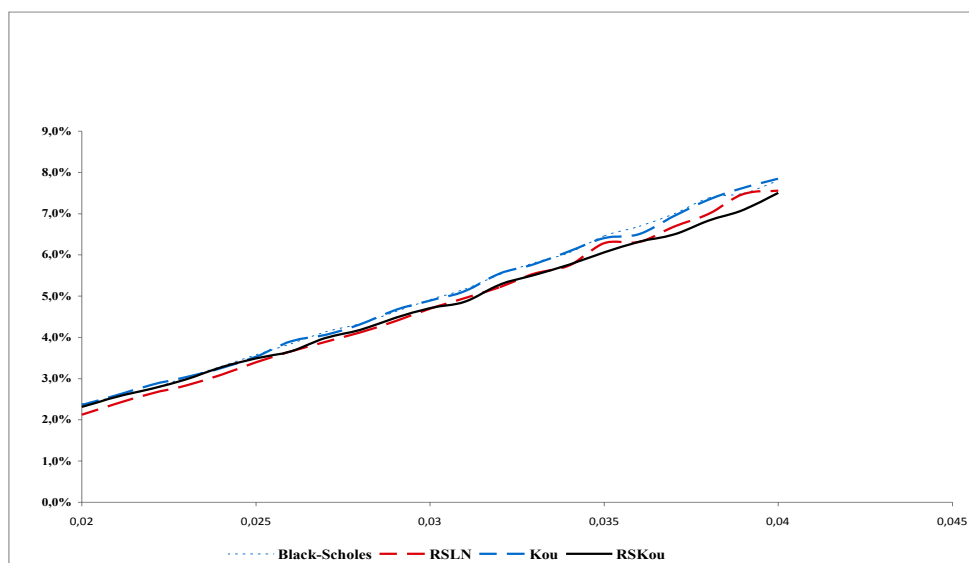
97.6902 (0.0368)	95.6808	2.0094 (0.0368)
---------------------	---------	--------------------

avec $h = 0.03$

97.3742 (0.0572)	93.0611	4.3131 (0.0572)
---------------------	---------	--------------------

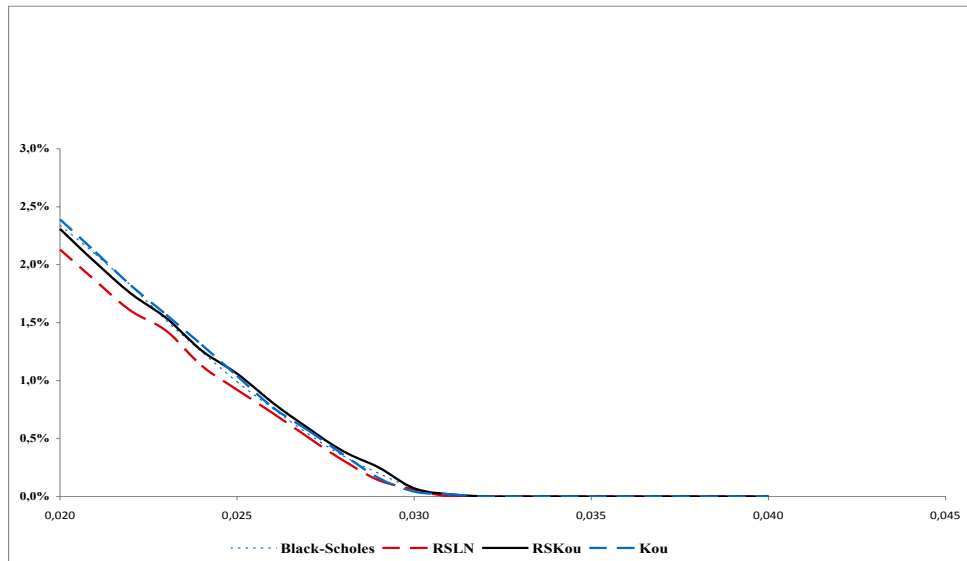


(a) Sensibilité à la maturité T .

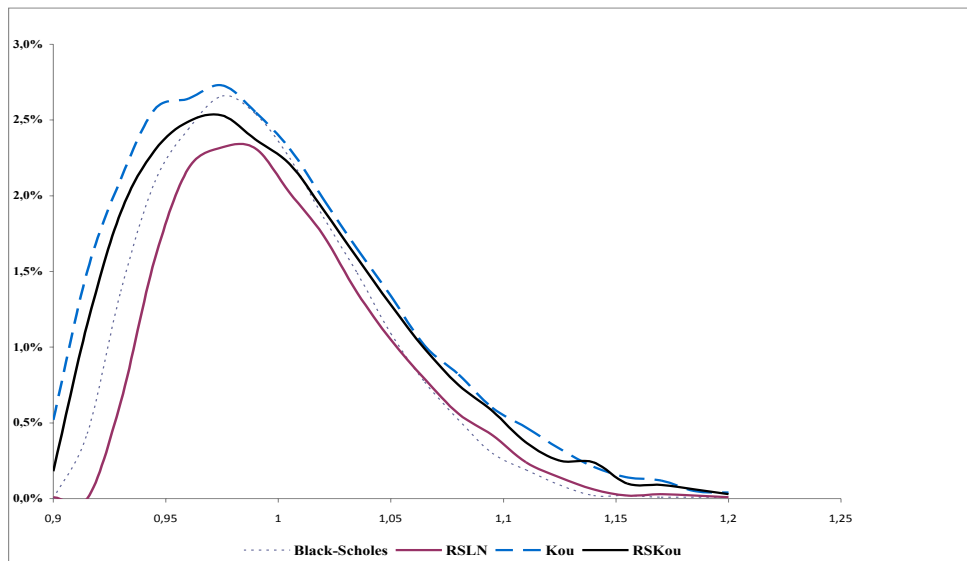


(b) Sensibilité au taux h .

FIGURE 4.1 – Sensibilité de l'option de remboursement anticipé (en pourcentage du contrat) aux paramètres T et h .

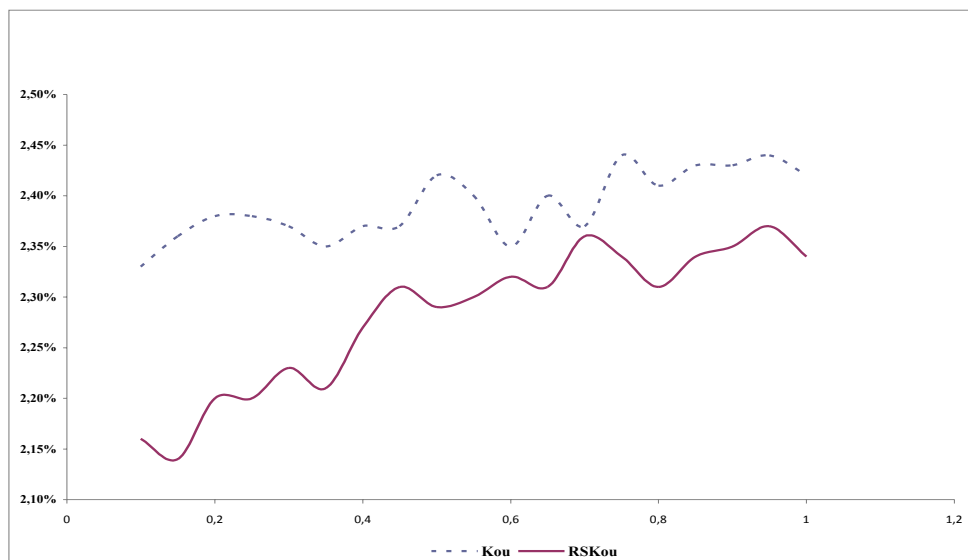


(a) Sensibilité aux taux ($\gamma = \gamma_d$).

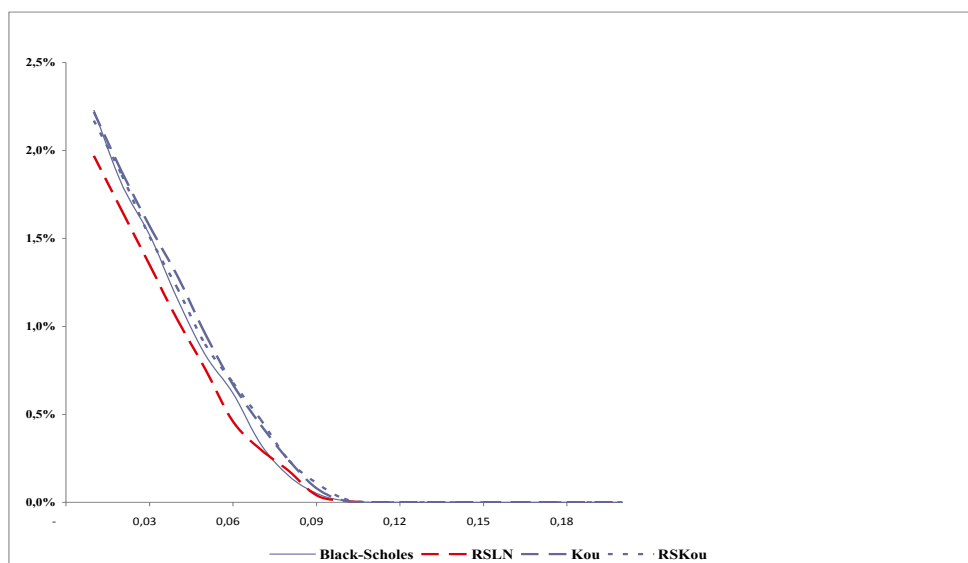


(b) Sensibilité à l'attitude ν .

FIGURE 4.2 – Sensibilité de l'option de remboursement anticipé (en pourcentage du contrat) aux paramètres γ , γ_d et ν .



(a) Sensibilité à l'intensité λ .



(b) Sensibilité au coefficient β .

FIGURE 4.3 – Sensibilité de l'option de remboursement anticipé (en pourcentage du contrat) aux paramètres λ et β .

Nous suggérons l'introduction d'une corrélation entre la partie diffusive du processus de prix et de celle du zéro-coupon afin de prendre en compte la dépendance entre les actifs investis dans les unités de compte et les taux d'intérêt. Après décorrélation, le processus de prix S obéit - sous la mesure d'évaluation équivalente Q - à la dynamique :

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t r_u du - (\frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda\kappa)t + \rho\sigma W_t + \sigma\sqrt{1-\rho^2}Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i}, \quad (4.35)$$

avec : $\kappa = E_Q[e^J - 1]$.

En égalant les équations (4.34 et 4.33), il vient d'abord

$$e^{\int_0^t r_u du} = \frac{1}{P(0,t)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_p^2(s,t) ds - \int_0^t \sigma_p(s,t) dW_s \right\}.$$

En substituant ce résultat dans l'équation (4.35), il vient ensuite

$$S_t = \frac{S_0}{P(0,t)} \exp \left\{ -\left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda\kappa\right)t + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_p^2(s,t) ds + \int_0^t (\rho\sigma - \sigma_p(s,t)) dW_s + \sigma\sqrt{1-\rho^2}Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\}.$$

Introduisons la mesure T - forward Q_T définie par la dérivée de Radon-Nikodym :

$$\frac{dQ_T}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{P(T,T)}{P(0,T)} \frac{B(0)}{B(T)}.$$

Rappelons que le numéraire associé à Q est un compte monétaire dont la valeur à l'instant t , $B(t)$, $t \geq 0$, évolue selon : $dB(t) = r_t B(t) dt$, avec $B(0) = 1$. Comme conséquence, $B(t) = e^{\int_0^t r_u du}$ et la dérivée de Radon-Nikodym peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dQ_T}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= \frac{e^{-\int_0^T r_u du}}{P(0,T)} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_p^2(s,T) ds + \int_0^T \sigma_p(s,T) dW_s} \quad (\text{en se servant de l'Eq.(4.33)}). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Girsanov, $W_t^T = W_t - \int_0^t \sigma_p(s,T) ds$ est un nouveau mouvement brownien sous Q_T . Le prix T -forward de S s'écrit :

$$S_t = \frac{S_0}{P(0,t)} e^{X_t},$$

avec :

$$\begin{aligned} X_t &= -\left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda\kappa\right)t + \int_0^t \left(\sigma_p(s,T)(\rho\sigma - \sigma_p(s,t)) + \frac{1}{2}\sigma_p^2(s,t) \right) ds \\ &\quad + \int_0^t (\rho\sigma - \sigma_p(s,t)) dW_s^T + \sigma\sqrt{1-\rho^2}Z_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i. \end{aligned} \quad (4.36)$$

En utilisant l'isométrie de Itô, on peut montrer que la nature stochastique des taux d'intérêt fait que le processus X défini en (4.36) n'est pas stationnaire, il perd de même la stationnarité de second ordre. Par conséquent, celui-ci n'est plus un processus de Lévy.

4.3.2 Fonction d'actualisation

D'après (4.33) et en substituant T à t , on obtient :

$$P(t, T) = P(0, T) e^{\int_0^t r_u du} e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_p^2(s, T) ds + \int_0^t \sigma_p(s, T) dW_s} \quad (4.37)$$

$$P(T, T) = P(0, T) e^{\int_0^T r_u du} e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_p^2(s, T) ds + \int_0^T \sigma_p(s, T) dW_s} \quad (4.38)$$

Le facteur d'actualisation δ en (4.4) s'obtient entre les instants t et T par :

$$\delta(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right).$$

Nous cherchons d'abord à l'exprimer en fonction des dynamiques du zéro-coupon. Dans un premier temps, on divise l'équation (4.37) par (4.38) :

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T r_u du + \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_p^2(s, T) ds - \int_t^T \sigma_p(s, T) dW_s \right\}.$$

Il vient d'abord

$$\delta(t, T) = P(t, T) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_p^2(s, T) ds + \int_t^T \sigma_p(s, T) dW_s \right\}.$$

En utilisant (4.34), il vient ensuite

$$\delta(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_p^2(s, t) ds - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_p^2(s, T) ds + \int_0^T \sigma_p(s, T) dW_s - \int_0^t \sigma_p(s, t) dW_s \right\}.$$

Sous la mesure Q_T , les processus browniens W_t^T et W_t étant liés - grâce au théorème de Girsanov - par la relation $dW_t^T = dW_t - \sigma_P(t, T) dt$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \sigma_p(s, T) dW_s - \int_0^t \sigma_p(s, t) dW_s &= \left(\int_0^T \sigma_p(s, T) dW_s^T + \int_0^T \sigma_p^2(s, T) ds \right) \\ &\quad - \left(\int_0^t \sigma_p(s, t) dW_s^T + \int_0^t \sigma_p(s, t) \sigma_p(s, T) ds \right). \end{aligned}$$

La fonction d'actualisation est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \delta(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_p^2(s, t) ds + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_p^2(s, T) ds - \int_0^t \sigma_p(s, t) \sigma_p(s, T) ds \right. \\ \left. + \int_0^T \sigma_p(s, T) dW_s^T - \int_0^t \sigma_p(s, t) dW_s^T \right\}. \end{aligned}$$

4.3.3 Évaluation sous le modèle de Kou

A cause de la décomposition (4.7), notre problème revient à chercher le prix en absence d'opportunité d'arbitrage d'une option européenne d'achat sous l'hypothèse simultanée de taux d'intérêt stochastique et de processus de diffusion à saut pour l'actif sous-jacent. Le paiement en T de l'option est :

$$[Y_T - K]^+, \quad \text{avec} \quad Y_T = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^k = e^{kX_T} \quad \text{et} \quad K = e^{\gamma T}.$$

Soit $C(Y_0, K, T)$, le prix de cet actif dérivé au temps $t = 0$. En utilisant comme numéraire, un zéro-coupon dont la maturité T coïncide avec celle de l'option à évaluer et en se référant à nouveau à la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage en temps continu, le prix T -forward de l'option est une martingale par rapport à la mesure Q_T . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{C(Y_0, K, T)}{P(0, T)} &= E_{Q_T}[Y_T - K]^+ \\ &= E_{Q_T} \left[\left(\frac{e^{X_T}}{P(0, T)} \right)^k - K \right]^+. \end{aligned}$$

Il résulte :

$$C(Y_0, K, T) = P(0, T)^{(1-k)} E_{Q_T} \left[Y_0 e^{kX_T} - KP(0, T)^k \right]^+. \quad (4.39)$$

Pour la suite, on considère la fonction de paiement g :

$$g(X_T) = [Y_0 e^{kX_T} - KP(0, T)^k]^+, \quad Y_0 = 1. \quad (4.40)$$

D'un point de vue technique, notre problème revient à celui de l'évaluation d'une option puissance de maturité T , sous la double hypothèse d'un processus mixte de diffusion à saut pour le sous-jacent et de celle d'un modèle de taux d'intérêt stochastique. Nous suggérons l'utilisation de la transformée de Fourier généralisée pour l'évaluation. Pour cela, nous déterminons la fonction caractéristique associée au processus kX_T . Celle-ci dérive du processus X en (4.36) (au facteur k près) :

$$\phi_{kX_T}(u) = E_{Q_T}[e^{iukX_T}] = \phi_{X_T}(uk),$$

où :

$$\begin{aligned} \phi_{X_T}(u) &= \exp \left\{ iu \int_0^T \left(-\frac{\sigma^2}{2} + \rho\sigma\sigma_p(s, T) - \frac{1}{2}\sigma_p^2(s, T) \right) ds \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2}u^2 \int_0^T \left(\sigma^2 - 2\rho\sigma\sigma_p(s, T) + \sigma_p^2(s, T) \right) ds \right\} \\ &\times \exp \left\{ T \left[\lambda(\phi_J(u) - 1) - \lambda\kappa \right] \right\}, \end{aligned}$$

avec : $\kappa = E_{Q_T}[e^J - 1] = \phi_J(-i) - 1$ et ϕ_J , la fonction caractéristique associée à J donnée par : $p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - iu}$, où $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ sont contraintes par la relation : $p_1 + p_2 = 1$. On définit :

$$\Sigma_T^2 = \int_0^T \left(\sigma^2 - 2\rho\sigma\sigma_P(s, T) + \sigma_P^2(s, T) \right) ds. \quad (4.41)$$

Nous pouvons obtenir explicitement la fonction caractéristique associée à X . Elle est donnée par :

$$\phi_{X_T}(u) = e^{\psi_{X_T}},$$

avec ψ_{X_T} , l'exposant caractéristique :

$$\psi_{X_T} = -\frac{iu}{2}\Sigma_T^2 - \frac{u^2}{2}\Sigma_T^2 + \lambda T(\phi_J(u) - \phi_J(-i)). \quad (4.42)$$

Nous supposons une structure de volatilité de type exponentiel⁵³ pour la dynamique des zéro-coupons :

$$\sigma_P(s, T) = \frac{\sigma_P}{a}(1 - e^{-a(T-s)}), \quad \text{avec } a > 0. \quad (4.43)$$

On peut alors calculer explicitement la quantité Σ_T^2 . Il vient :

$$\Sigma_T^2 = \left(\sigma^2 + \frac{\sigma_P^2}{a^2} - \frac{2\rho\sigma\sigma_P}{a} \right) T + \left(\frac{2\rho\sigma\sigma_P}{a^2} - \frac{3}{2} \frac{\sigma_P^2}{a^3} \right) + \left(\frac{2\sigma_P^2}{a^3} - \frac{2\rho\sigma\sigma_P}{a^2} \right) e^{-aT} - \frac{\sigma_P^2}{2a^3} e^{-2aT}. \quad (4.44)$$

On suppose de même que la courbe initiale des rendements évolue selon la relation :

$$y(0, t) = -\frac{1}{t} \ln P(0, t) = r_0 - \vartheta e^{-\varsigma t},$$

avec $r_0, \vartheta, \varsigma$ positifs. En prenant : $r_0 = 0.0595$, $\vartheta = 0.0195$ et $\varsigma = 0.2933$, la structure par terme est illustrée par la figure (4.4). Dans la suite des applications, nous considérons cette structure et les paramètres : $\sigma_P = 0.03333$, $a = 1$, pour la structure de volatilité (4.43).

53. Celle-ci est utilisée par Vasicek (1977).

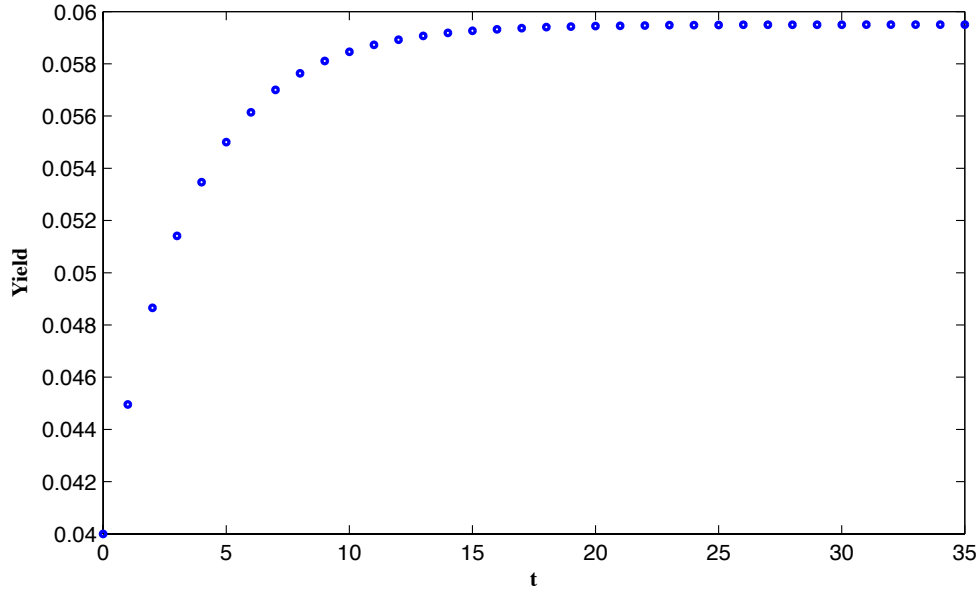


FIGURE 4.4 – Courbe initiale des rendements à l'échéance.

4.3.4 Approche générale d'évaluation

Sans perte de généralité, considérons la fonction de paiement suivante :

$$g(X_T) = [Y_T - KP(0, T)^k]^+, \quad Y_T = Y_0 e^{kX_T}.$$

Supposons que g soit une fonction mesurable et qu'il existe δ tel que $e^{\delta x}g(x)$ soit intégrable. La transformée de Fourier $\hat{g}$ de g est donnée par :

$$\hat{g}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} g(x) dx,$$

qu'on peut étendre et définir sur la ligne $\Im(u) = \delta$ en une transformée de Fourier généralisée (cf. Boyarchenko et Levendorskiĭ (2002b) et Quittard-Pinon et Randrianarivony (2008)). On suppose que

$$\delta = \Im(u) < -k,$$

afin de garantir la convergence de l'intégrale. Il vient :

$$\hat{g}(u) = \left[\frac{e^{x(k-iu)}}{k-iu} \right]_{\ln[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}} P(0, T)]}^{+\infty} - KP(0, T)^k \left[\frac{e^{-iux}}{-iu} \right]_{\ln[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}} P(0, T)]}^{+\infty}.$$

$\hat{g}$ peut s'obtenir de façon explicite :

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(u) &= \frac{e^{(k-iu)\ln[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]}}{iu-k} - KP(0,T)^k \frac{e^{-iu\ln[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]}}{iu} \\
 &= \frac{[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]^{k-iu}}{iu-k} - KP(0,T)^k \frac{[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]^{-iu}}{iu} \\
 &= [(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]^{-iu} \left(\frac{[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]^k}{iu-k} - \frac{KP(0,T)^k}{iu} \right) \\
 &= [(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]^{-iu} \left(\frac{iu[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]^k - (iu-k)KP(0,T)^k}{iu(iu-k)} \right) \\
 &= [(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]^{-iu} \\
 &\quad \times \left(\frac{iu[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]^k - iu[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]^k + kKP(0,T)^k}{iu(iu-k)} \right).
 \end{aligned}$$

Il vient finalement :

$$\hat{g}(u) = kKP(0,T)^k \frac{e^{-iu\ln[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]}}{iu(iu-k)}. \quad (4.45)$$

Remarquons que la transformée de Fourier d'une option de vente donne le même résultat qu'en (4.45). La seule différence réside dans la contrainte définie sur $u \in \mathbb{C}$, pour l'existence de l'intégrale. D'autre part, nous pouvons utiliser la décomposition suivante sous Q_T :

$$\begin{aligned}
 E[g(X_T)] &= E[g(X_T - X_0 + X_0)|X_0 = x] \\
 &= E[g(X_T + x)].
 \end{aligned}$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse, il vient d'abord :

$$\begin{aligned}
 E[g(X_T)] &= \frac{1}{2\pi} E \left[\int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iu(X_T+x)} \hat{g}(u) du \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} E[e^{iuX_T}] \hat{g}(u) du,
 \end{aligned}$$

il vient ensuite :

$$E[g(X_T)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{iux} \phi_{X_T}(u) \hat{g}(u) du. \quad (4.46)$$

En introduisant le résultat obtenu en (4.45), Il résulte :

$$\begin{aligned}
 E[g(X_T)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{iux} kKP(0,T)^k \frac{e^{-iu\ln[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]}}{iu(iu-k)} \phi_{X_T}(u) du \\
 &= kP(0,T)^k \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{iux} \frac{e^{-iu\ln[(K/Y_0)^{\frac{1}{k}}P(0,T)]}}{iu(iu-k)} \phi_{X_T}(u) du.
 \end{aligned}$$

En prenant $x = \ln(Y_0/Y_0)$, avec $\nu = (1/k) \ln \left(\frac{K}{Y_0} \right)$, ajoutés au changement de variable $u \rightarrow u - i\delta$, le résultat suivant donne le prix T -forward de l'option :

$$E \left[Y_0 e^{kX_T} - KP(0, T)^k \right]^+ = kP(0, T)^k \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuv} \frac{\Upsilon_{X_T}(u + i\delta)}{(-iu + \delta)(-iu + \delta + k)} du,$$

où :

$$\Upsilon_{X_T}(u) = \exp \{ -iu \ln(P(0, T)) + \psi_{X_T}(u) \},$$

et ψ_{X_T} est l'exposant caractéristique de X_T donné en (4.42).

Le prix du contrat (4.39) peut être obtenu en utilisant le résultat suivant :

$$C(Y_0, K, T) = kP(0, T) \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuv} \frac{\Upsilon_{X_T}(u + i\delta)}{(-iu + \delta)(-iu + \delta + k)} du.$$

Comme illustration, nous donnons à la table (4.2), les prix en sortie de la méthode de transformée de Fourier rapide par rapport à ceux obtenus par des simulations de type Monte Carlo. Nous générons $20 \times 10\,000$ trajectoires du sous-jacent.

Modèle de Kou		
Option puissance		
$Y_0 = 100, K = 98, \sigma = 0.20, \tau = 1, \lambda = 0.5, p = 0.4, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5, \rho = 0.5$		
k : facteur puissance	Valeurs obtenues par FFT	Prix simulés
1	12.6865	12.7354
0.90	11.3626	11.3699
0.70	8.8405	8.8345
0.50	6.4796	6.4781

TABLE 4.2 – Prix obtenus en évaluant la formule (4.39) via la transformée de Fourier rapide par rapport à ceux obtenus par simulation de type Monte Carlo.

4.3.5 Évaluation sous le modèle KRS

Ici, nous adoptons la modélisation suivante, le prix du fonds de référence est encore donné par le processus S de type exponentiel : $S = S_0 e^X$. L'horizon de temps d'investissement est fourni par le support $[0, T]$, qu'on subdivise en T sous-périodes $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, T$, d'égales longueurs. Le taux de rentabilité continu cumulé sur cette période d'investissement est :

$$X_T = \ln \frac{S_T}{S_0} = \ln \left(\frac{S_1}{S_0} \frac{S_2}{S_1} \dots \frac{S_T}{S_{T-1}} \right) = \sum_{i=1}^T r_i,$$

avec r_i , les taux de rentabilité continus périodiques entre les dates t_{i-1} et t_i .

$$r_i = \ln \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}.$$

On suppose que les r_i obéissent à un processus avec changement de régime. A l'instar de la section (4.2.4), nous considérons un régime à deux états régis par la chaîne de Markov ζ .

Connaissant la distribution du nombre de passages dans l'état 1, nous pouvons déterminer la fonction caractéristique associée à la variable X_T :

$$\begin{aligned} \phi_{X_T}(u) &= E[\phi_{X_T}|C] = E[E[e^{iuX_T}|C]] \\ E[e^{iuX_T}|C] &= E[e^{iu \sum_{i=1}^T r_i}|C] = E\left[\left(e^{iu \sum_{i \in I_1}^T r_i}\right) \left(e^{iu \sum_{i \in I_2}^T r_i}\right) | C\right] \\ E[e^{iuX_T}|C] &= E\left[\left(e^{iu \sum_{i \in I_1}^T r_i} | C\right)\right] E\left[\left(e^{iu \sum_{i \in I_2}^T r_i} | C\right)\right] \\ E[e^{iuX_T}|C=c] &= (\phi_{r(1)}(u))^c (\phi_{r(2)}(u))^{T-c} \end{aligned}$$

D'autre part, la quantité Σ_T^2 écrite en (4.44) doit être ici décomposée dans le temps afin de prendre en compte le passage dans les deux états. On a :

$$\Sigma_T^2 = \left(\sigma^2 + \frac{\sigma_p^2}{a^2} - \frac{2\rho\sigma\sigma_p}{a}\right)T + \left(\frac{2\rho\sigma\sigma_p}{a^2} - \frac{3}{2}\frac{\sigma_p^2}{a^3}\right)\frac{T}{T} + \left(\frac{2\sigma_p^2}{a^3} - \frac{2\rho\sigma\sigma_p}{a^2}\right)\frac{T}{T}e^{-aT} - \frac{\sigma_p^2}{2a^3}\frac{T}{T}e^{-2aT},$$

on introduit une nouvelle quantité Σ^2 telle que :

$$\Sigma_T^2 = T \times \Sigma^2.$$

Ainsi, conditionnellement à l'état ζ_t visité par le processus, Σ^2 est donnée par $\Sigma_{\zeta_t}^2$, avec :

$$\Sigma_{\zeta_t}^2 = \left(\sigma_{\zeta_t}^2 + \frac{\sigma_p^2}{a^2} - \frac{2\rho\sigma_p\sigma_{\zeta_t}}{a}\right) + \left(\frac{2\rho\sigma_p\sigma_{\zeta_t}}{a^2T} - \frac{3}{2}\frac{\sigma_p^2}{a^3T}\right) + \left(\frac{2\sigma_p^2}{a^3T} - \frac{2\rho\sigma_p\sigma_{\zeta_t}}{a^2T}\right)e^{-aT} - \frac{\sigma_p^2}{2a^3T}e^{-2aT}. \quad (4.47)$$

La fonction caractéristique inconditionnelle de X_T est obtenue par :

$$\phi_{X_T}(u) = \sum_{c=0}^T e^{C\psi_1(u) + (T-C)\psi_2(u)} \Pr[C=c], \quad (4.48)$$

avec : ψ_{ζ_t} , l'exposant caractéristique conditionnel de X_T :

$$\psi_{\zeta_t} = -\frac{iu}{2}\Sigma_{\zeta_t}^2 - \frac{u^2}{2}\Sigma_{\zeta_t}^2 + \lambda(\phi_{J_{\zeta_t}}(u) - \phi_{J_{\zeta_t}}(-i)).$$

$\Sigma_{\zeta_t}^2$ est défini en (4.47). Conditionnellement à ζ_t , la distribution des sauts suit une loi exponentielle double asymétrique de fonction caractéristique :

$$\phi_{J_{\zeta_t}}(u) = E[e^{iuJ}] = p_{1,\zeta_t} \frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{\lambda_{1,\zeta_t} - iu} + p_{2,\zeta_t} \frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{\lambda_{2,\zeta_t} + iu},$$

Ainsi :

$$E[e^J|\zeta_t] = \phi_{J_{\zeta_t}}(-i) = p_{1,\zeta_t} \frac{\lambda_{1,\zeta_t}}{\lambda_{1,\zeta_t} - 1} + p_{2,\zeta_t} \frac{\lambda_{2,\zeta_t}}{\lambda_{2,\zeta_t} + 1}. \quad (4.49)$$

Ici, on vérifie que $\lambda_{1,\zeta_t} > 1$, $\forall \zeta_t \in \{1, 2\}$. A titre numérique, utilisons le jeu de paramètre suivant :

- . $\lambda = 0.5$, l'intensité des sauts est prise identique dans les deux états,
- . on choisit les paramètres de sauts suivants :

État 1	$\lambda_{1,1}$ 10	$\lambda_{2,1}$ 5	$p_{1,1}$ 0.4	$\lambda_{1,2}$ 10	$\lambda_{2,2}$ 5	$p_{1,2}$ 0.4	État 2
---------------	-----------------------	----------------------	------------------	-----------------------	----------------------	------------------	---------------

On utilise de même les probabilités de transition et de volatilités estimés en (1.6) au premier chapitre. Le tableau (4.3) donne les prix du contrat (4.39) en sortie du modèle KRS.

Modèle KRS		
Option puissance		
$Y_0 = 100, K = 98, \tau = 1, \rho = 0.5$		
k : facteur puissance	Prix obtenus par FFT	Prix simulés
1	11.0944	11.0796
0.90	9.9917	10.0144
0.70	7.8770	7.8668
0.50	5.8809	5.8707

TABLE 4.3 – Prix obtenus en évaluant la formule (4.39) via la transformée de Fourier rapide par rapport à ceux obtenus par simulation de type Monte Carlo.

4.3.6 Option de rachat : temps d'exercice optimal

Nous adaptons à notre contrat l'algorithme de Longstaff et Schwartz (2001) et de Bernard et Lemieux (2008) présenté dans la section (4.2.5) pour la prise en compte des taux stochastiques. La première partie de l'algorithme consiste à utiliser le principe de Bellman. Les valeurs de *continuation* sont obtenues en tout t , pour $t = T - 1, \dots, 0$:

$$C'_t = (1 - {}_1p_{x+t})E_Q^t \left[V_{t+1}e^{-\int_t^{t+1} r(u)du} / \text{décès} \right] + {}_1p_{x+t}E_Q^t \left[V_{t+1}e^{-\int_t^{t+1} r(u)du} / \text{survie} \right],$$

On la réécrit :

$$C'_t = (1 - {}_1p_{x+t}) \times \xi_{(Y_t^i, \gamma_d, k_d, 1)} + {}_1p_{x+t} C_t,$$

où ξ est ici redéfini :

$$\xi_{(Y_t^i, \gamma_d, k_d, 1)} = P(t, t+1) E_{Q_{t+1}}^t [V_{t+1}/\text{death}],$$

avec $P(t, t+1)$, le prix à la date t , d'une obligation zéro-coupon de maturité $t+1$.

Considérons à nouveau les fonctions de base $\{\psi_l(\cdot), l = 0, \dots, H\}$, la deuxième partie de l'algorithme repose sur la méthode de Monte Carlo. Elle consiste à générer n trajectoires.

Soit Y_t^i , la valeur au t de l'actif fictif sur la $i^{\text{ème}}$ trajectoire, la dernière partie de l'algorithme repose sur la méthode des moindres carrés. Elle consiste à estimer C_t par une combinaison linéaire des fonctions de base ψ :

$$\hat{C}_t^i = \sum_{l=0}^H \hat{\beta}_l^t \psi_l(Y_t^i), \quad (4.50)$$

où les coefficients $\hat{\beta}_t$ sont obtenus par minimisation au sens des moindres carrés :

$$\hat{\beta}_t = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \left(\{\delta(t, t+1) V_{t+1}^i\}_{i=1, \dots, n} \right).$$

Ψ est une matrice de taille $n \times (H+1)$ dont l'élément générique est : $\Psi_{il} = \psi_l(Y_t^i)$. La valeur de *continuation* est alors estimée par :

$$\tilde{C}_t^i = (1 - {}_1p_{x+t}) \xi_{(Y_t^i, \gamma_d, k_d, 1)} + {}_1p_{x+t} \hat{C}_t^i, \quad (4.51)$$

avec ${}_1p_{x+t} = \frac{s(x+1)}{s(x)}$.

Maintenant, nous pouvons détailler l'algorithme donnant les dates d'exercice optimales de l'option de rachat.

Sur chacune des trajectoires i , on commence par initialiser le temps d'exercice optimal t^* à la date de maturité T , $\hat{V}_t^i$ est donné par la formule (4.1) et $L_T^i = \hat{V}_T^i$. Ensuite, pour tout $t = T-1$ à $t = 1$:

- on estime les coefficients de régression $\hat{\beta}_t$
- pour chaque i :
 - . l'assuré exerce l'option de rachat si la valeur de rachat (L_t) est significativement supérieure à la valeur de *continuation* estimée : $L_t^i > \nu \times \tilde{C}_t^i$. On met alors à jour la valeur de marché estimée pour le contrat : $\hat{V}_t^i = L_t^i$ et le temps d'exercice optimal : $t_i^* = t$.

. Sinon, l'assuré diffère le rachat et la valeur de marché estimée du contrat est mise à jour puisqu'il faudra tenir compte de la probabilité que l'assuré décède à la sous-période suivante :

$$\widehat{V}_t^i = (1 - {}_1p_{x+t}) \times \xi_{(Y_t^i, t, \gamma_d, k_d, 1)} + {}_1p_{x+t} \times P(t, t+1) \widehat{V}_{t+1}^i.$$

4.3.7 Estimation du prix du contrat

Ainsi, le long de chaque trajectoire, on détermine les instants d'exercice optimaux t^* de l'option de rachat. L'estimation à l'instant $t = 0$ du prix du contrat est alors donnée par la formule suivante :

$$\widehat{V}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left({}_{t_i^*}p_x P(0, t_i^*) L_{t_i^*}^i + \sum_{t=0}^{t_i^*-1} {}_tp_x q_{x+t} P(0, t_{i+1}) F_{t+1}^{d,i} \right),$$

où : $F_{t+1}^{d,i} = \alpha P \max \left(e^{\gamma_d(t_i+1)}, Y_t^i \right)$, avec Y_t^i .

4.3.8 Analyse numérique

On considère de même une tête d'âge $x = 40$ ans, payant une prime $P = 100$, dont une proportion $\alpha = 0.85$ est investie dans les unités de compte. La maturité du contrat est de même fixée à $T = 10$ ans. Les taux minimum garantis γ , γ_d et h sont tous pris égaux à 2%. Les résultats obtenus sous chacun des modèles sont donnés dans les tableaux (4.4 et 4.5). Pour le calcul de l'option de rachat, nous lançons $25 \times 8\,000$ simulations de type Monte Carlo. En utilisant un Pentium®4 équipé de 1 Go de Ram et dont le processeur est référencé à 2 GHz, le temps de calcul sous tous les deux modèles n'excède pas 15 minutes. Les figures (4.7, 4.8 et 4.9) montrent le comportement de l'option de rachat en proportion de la valeur du contrat en fonction des différents paramètres (le temps restant à la maturité, les taux garantis (h, γ) , l'attitude de rachat ν , le coefficient de pénalité (β)). La valeur relative de l'option de rachat croît avec le temps restant à la maturité, avec l'intensité des sauts. En revanche, elle décroît avec les taux garantis γ . On peut noter que pour un taux garanti supérieur à 4.5%, l'impact de l'option de rachat est négligeable. La même tendance peut être notée pour le coefficient de pénalité quand $\beta > 0.20$.

De l'autre côté, la figure (4.5) montre l'évolution de l'option de rachat en fonction du coefficient de corrélation ρ . Une remarque surprenante est de voir les deux modèles atteindre leur maximum pour une valeur de $\rho = 0.1724$. Aussi, observe-t-on les mêmes tendances aussi bien pour le modèle KRS que pour celui de Kou.

A des fins numériques, nous considérons le jeu de paramètres suivant :

- pour le modèle de Kou, on choisit : $\lambda = 0.5$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $p_1 = 0.4$, $\sigma = 20\%$.

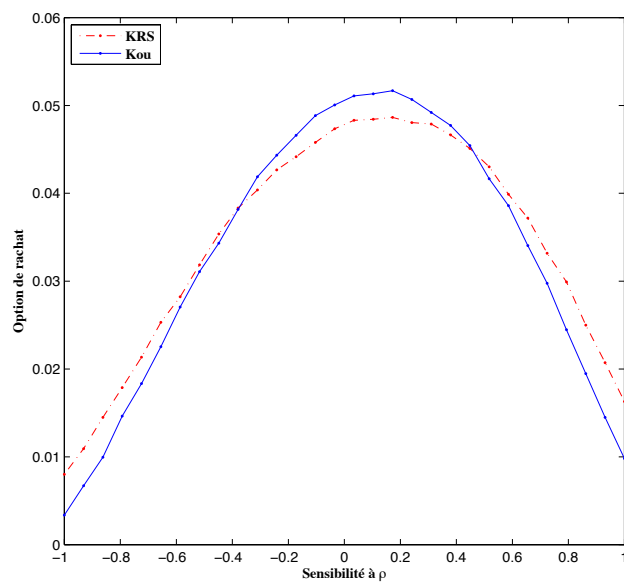


FIGURE 4.5 – Sensibilité de l’option de rachat par rapport au coefficient de corrélation ρ . La valeur maximale est atteinte autour de $\rho = 0.1724$.

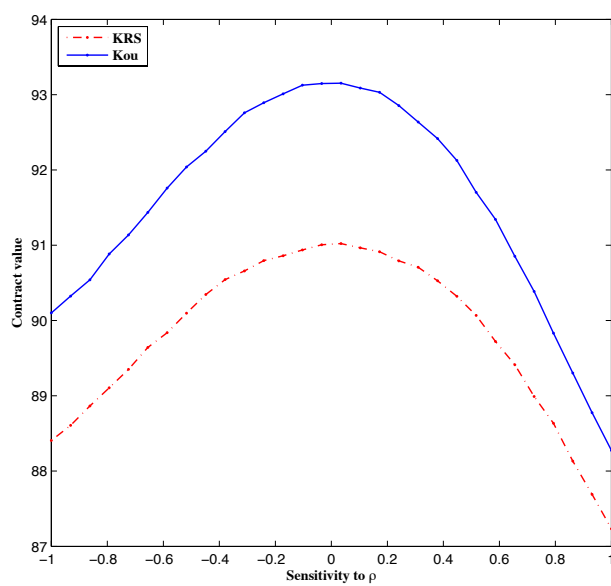


FIGURE 4.6 – Sensibilité du contrat par rapport au coefficient de corrélation ρ . La valeur maximale est atteinte autour d’une valeur de $\rho = 0.0345$.

• pour le modèle KRS, on utilise les probabilités de transition et de volatilités estimées en (1.6) au premier chapitre. De même, on utilise une intensité de sauts identique dans les deux régimes, ($\lambda = 0.5$). Les paramètres de sauts sont :

Régime 1			Régime 2		
$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{2,1}$	$p_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{2,2}$	$p_{1,2}$
10	5	0.4	10	5	0.4

4.4 Autres contrats EIA

En contrepartie d'une prime payée par le souscripteur, les EIA offrent deux avantages : la sécurité d'un capital garanti en sus de la participation aux performances de marché d'un actif sous-jacent typiquement celui d'un indice boursier. Suivant le type de participation retenu, on peut distinguer plusieurs types de contrats. Les contrats du type PTP⁵⁴ déjà étudiés à la section (4.1) permettent au bénéficiaire de percevoir une proportion de la rentabilité réalisée par le sous-jacent à la maturité, si, celle-ci est supérieure. En d'autres termes, le montant perçu s'interprète au prorata de la prime investie, comme le résultat de l'investissement d'une unité monétaire fait au temps initial, rémunéré au taux garanti γ et d'une longue position sur une option d'achat européenne écrite sur la rentabilité de l'indice boursier choisi et dont la date d'expiration est celle de fin du contrat : $\alpha P \left(e^{\gamma t} + [(S_T/S_0)^k - e^{\gamma t}]^+ \right)$. L'option contenue dans cette garantie est alors exercée lorsque la situation du marché est favorable. De l'autre côté, les contrats EIA avec cliquet permettent un exercice annuel ; de plus, les gains obtenus à l'exercice de la garantie sont immobilisés jusqu'à la maturité. D'autre part, ces contrats peuvent de même offrir la possibilité de plafonner la rentabilité du sous-jacent par un taux *cap*, ce qui donne lieu à des contrats du type EIA cappé. Comme le soulignent Lin et Tan (2003), en terme de volume important de vente, ces contrats sont les plus sollicités sur le marché. On peut de même se référer à Streiff et DiBiase (1999), Tiong (2000) ainsi qu'à Hardy (2003) pour d'autres types de participations offertes. Ces auteurs utilisent le mouvement brownien géométrique pour la modélisation de l'évolution de l'indice boursier. Compte tenu de la limitation connue pour ce type de processus notamment dans la capture des faits stylisés de la dynamique réelle du marché comme l'asymétrie ou encore l'excès de kurtosis, Jaimungal (2004) explore l'évaluation des EIA dans une économie Variance Gamma, introduite dans la littérature financière par Madan et Seneta (1990). En revanche, son approche reste utile pour cette classe de processus. Le but de cette section est de montrer qu'en restant dans la très large classe de processus de Lévy, l'évaluation des contrats EIA

54. De l'acronyme anglais Point-To-Point, une variante de ce type d'indexation au marché est connue sous l'appellation anglaise High Water Mark (ou Lookback discret) où le paiement a de même lieu à l'échéance T et est donné cette fois-ci par : $\alpha P \max \left((S^{\max}/S_0)^k, e^{\gamma T} \right)$, avec $S^{\max} = \max(S_0, S_1, \dots, S_T)$.

Modèle de Kou

Valeur du contrat <i>avec l'option de rachat</i>	Valeur du contrat <i>sans l'option de rachat</i>	Valeur de l'option de rachat
--	--	-------------------------------------

avec les paramètres de repère

91.8575 (0.0468)	88.0571	3.8004 (0.0468)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.05$

90.6751 (0.0423)	88.0571	2.6180 (0.0423)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.15$

89.0111 (0.0372)	88.0571	0.9540 (0.0372)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.21$

88.5433 (0.0393)	88.0571	0.4862 (0.0393)
---------------------	---------	--------------------

avec $\gamma = \gamma_d = h = 0.03$

94.3801 (0.0420)	90.9579	3.4222 (0.0420)
---------------------	---------	--------------------

avec $k = k_d = 0.95$

94.8871 (0.0325)	91.5174	3.3697 (0.0325)
---------------------	---------	--------------------

avec $h = 0.04$

95.9770 (0.0501)	88.0571	7.9199 (0.0501)
---------------------	---------	--------------------

TABLE 4.4 – Valeurs de l'option de rachat sous le module de Kou.

Modèle de Kou avec changement de régime

Valeur du contrat <i>avec l'option de rachat</i>	Valeur du contrat <i>sans l'option de rachat</i>	Valeur de l'option de rachat
--	--	-------------------------------------

avec les paramètres de repère

90.0487 (0.0461)	86.2968	3.7519 0.0461
---------------------	---------	------------------

avec $\nu = 1.05$

88.9898 (0.0446)	86.2968	2.6930 (0.0446)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.15$

87.2285 (0.0477)	86.2968	0.9317 (0.0477)
---------------------	---------	--------------------

avec $\nu = 1.21$

86.7930 (0.0484)	86.2968	0.4962 (0.0484)
---------------------	---------	--------------------

avec $\gamma = \gamma_d = h = 0.03$

92.3157 (0.0436)	88.8186	3.4971 (0.0436)
---------------------	---------	--------------------

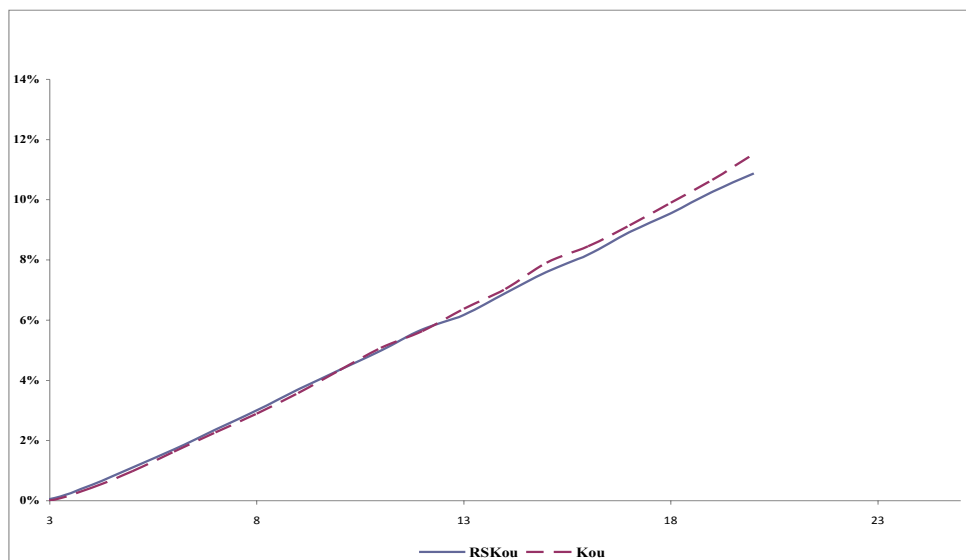
avec $k = k_d = 0.95$

92.8076 (0.0458)	89.4589	3.3487 (0.0458)
---------------------	---------	--------------------

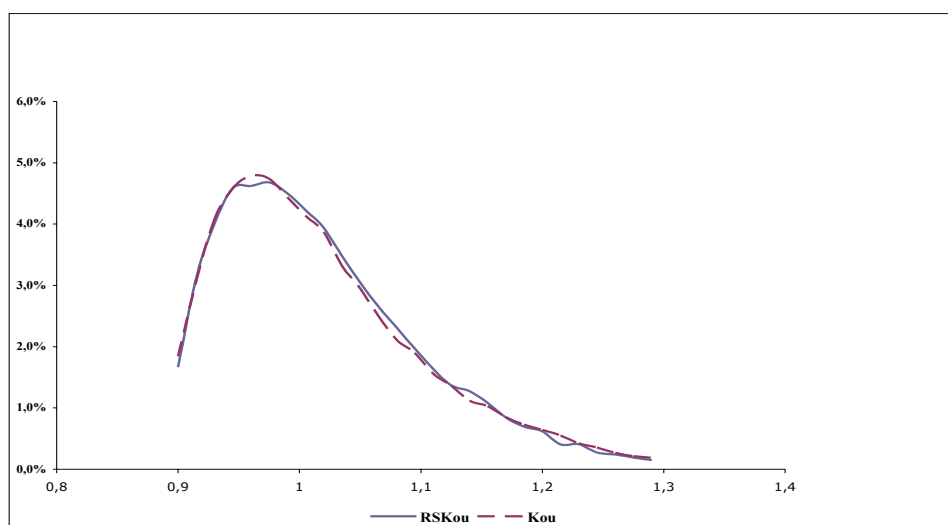
avec $h = 0.04$

93.9983 (0.0501)	86.2968	7.7015 (0.0501)
---------------------	---------	--------------------

TABLE 4.5 – Valeurs de l'option de rachat sous le modèle KRS.

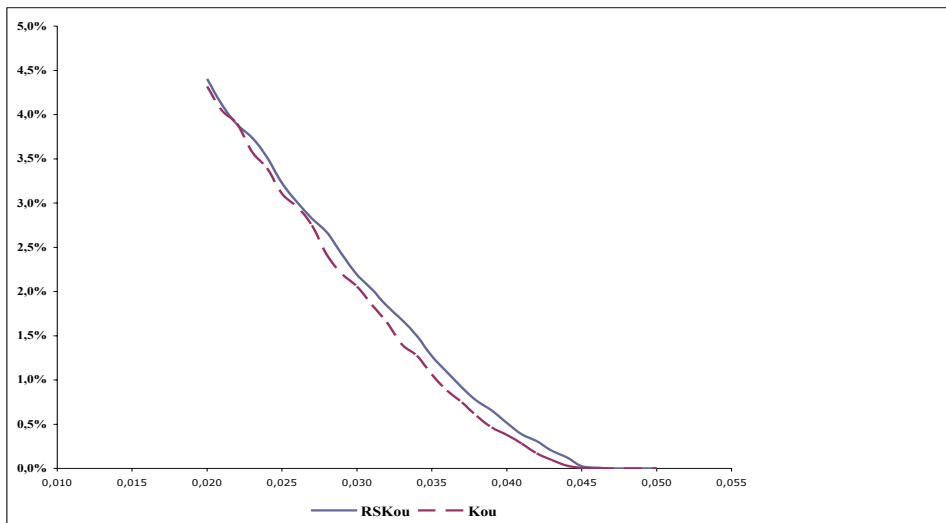


(a) Sensibilité à la maturité T .

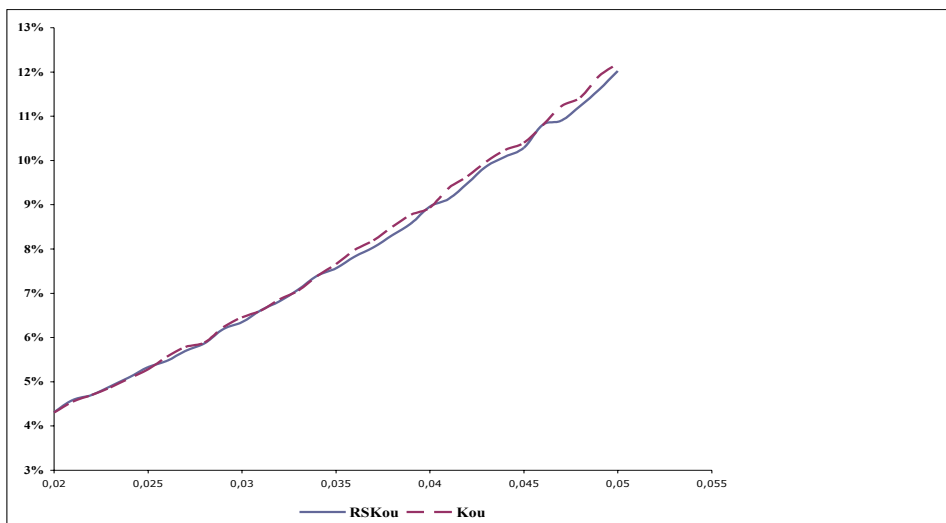


(b) Sensibilité à l'attitude ν .

FIGURE 4.7 – Sensibilité de l'option de rachat (en pourcentage du contrat) en fonction des paramètres T et ν

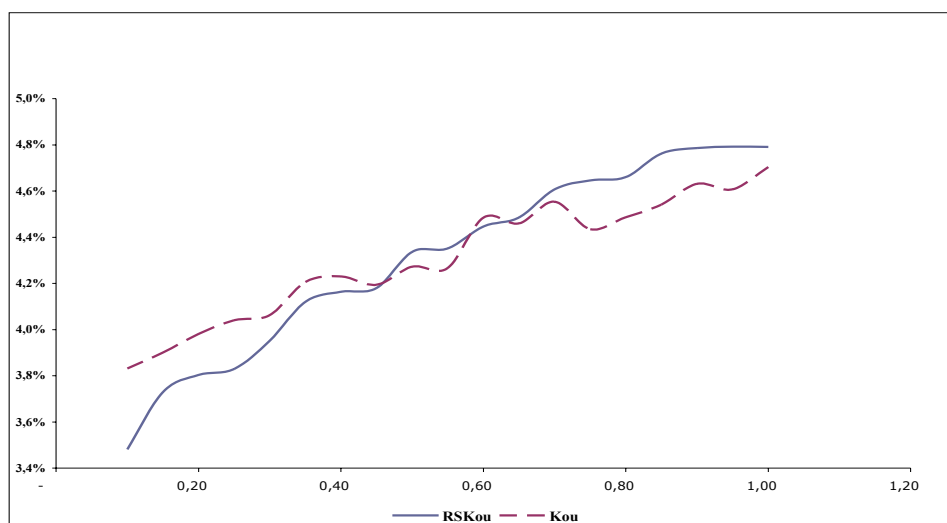


(a) Sensibilité au taux ($\gamma = \gamma_d$).

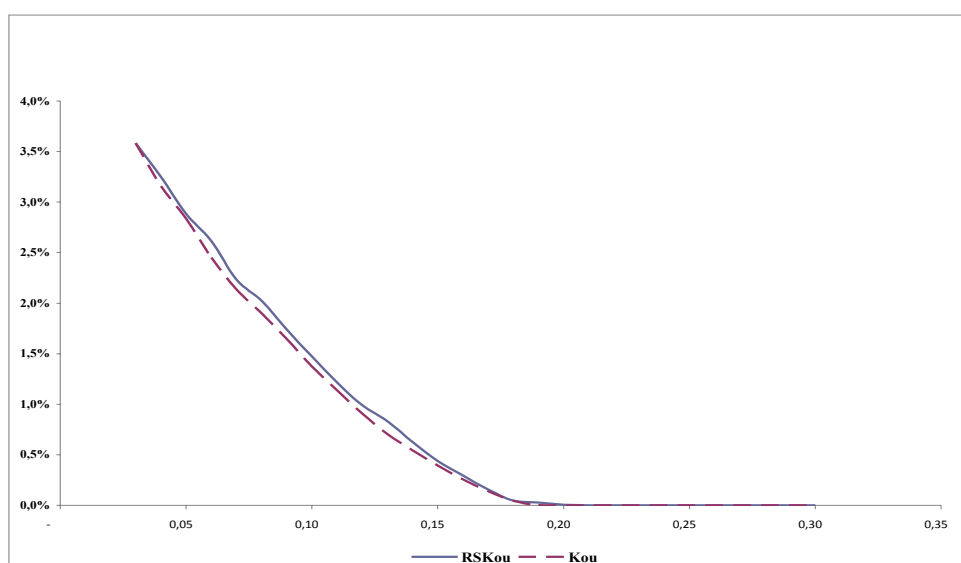


(b) Sensibilité au taux h .

FIGURE 4.8 – Sensibilité de l'option de rachat (en pourcentage du contrat) en fonction des paramètres γ , γ_d et h .



(a) Sensibilité à l'intensité λ .



(b) Sensibilité au coefficient β .

FIGURE 4.9 – Sensibilité de l'option de rachat (en pourcentage du contrat) en fonction des paramètres λ et β .

complexes par l'utilisation de la méthodologie générale utilisée à la section précédente peut s'avérer particulièrement performante.

4.4.1 Contrat EIA avec cliquet

Introduisons cette section en relevant une observation de Lo (1997)⁵⁵ : si en Janvier 1926, on investit 1€ dans le bon du trésor américain de maturité un mois, considéré comme l'un des actifs les plus sécurisés au monde et qu'on réinjecte à chaque mois les gains perçus dans le même actif jusqu'en Décembre 1994, l'euro investi rapporterait 12€. Parallèlement, si le même euro avait été investi (de la même manière) dans l'indice boursier américain Standard and Poor's (S&P) 500 durant la même période, i.e., pendant les 68 années, le retour sur l'investissement serait cette fois-ci de 811€. Supposons maintenant que l'investisseur avait la possibilité de savoir au début de chaque mois, lequel de ces deux investissements donnerait la rentabilité la plus élevée et investit les gains obtenus dans celui-ci ; il vient alors la question suivante : sous cette hypothèse de "prévision parfaite", que serait devenu le retour sur un tel investissement en Décembre 1994 ? La surprenante réponse est : 1.251.684.443€, et oui !, ceci n'est pas une erreur typographique, plus d'un milliard d'euros. Cet exemple montre que : même si très peu d'investisseurs ont une prévision parfaite, il n'en reste pas moins qu'une capacité modeste de prévisions de rendements d'actifs financiers peut être largement récompensée. Les contrats EIA avec cliquet offrent une caractéristique étroitement liée à l'illustration ci-dessus. En effet, tout se passe comme si le bénéficiaire du contrat investit à partir de la date de souscription, une proportion de la prime payée à l'assureur dans l'actif offrant la rentabilité la plus élevée entre celui qui rémunère d'un taux plancher garanti γ et celui offrant une proportion de la rentabilité de l'indice boursier. Les gains perçus sont réinvestis de la même manière à la période suivante jusqu'à maturité. En d'autres termes, les gains obtenus sur chaque période sont immobilisés et ne sont plus affectés quelle que soit la performance du marché boursier et ce, jusqu'à la maturité du contrat.

Supposons une structure à terme plate des taux et considérons une période d'investissement $[0, T]$ divisée en n sous-périodes d'égales durations Δt et sans perte de généralité, Δt est égal à une année. Le paiement à l'échéance d'un tel investissement est :

$$F(S_0, \gamma, k, T) = \alpha P \prod_{i=1}^n \max \left(e^{\gamma \Delta t}, \left(\frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^k \right), \quad (4.52)$$

55. Notons que cette analyse fut de même relevée par Tiong (2000).

dont la valeur à l'instant t est donnée par :

$$\begin{aligned}\xi_{(S_t, \gamma, k, T)} &= \alpha P E_Q \left[e^{-r(T-t)} \prod_{i=1}^n \max \left(e^{\gamma \Delta t}, \left(\frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^k \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \alpha P E_Q \left[e^{-r(n\Delta t - t)} \prod_{i=1}^n \max \left(e^{\gamma \Delta t}, \left(\frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^k \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \alpha P E_Q \left[e^{-r(n\Delta t - t)} \max \left(e^{\gamma \Delta t}, \left(\frac{S_1}{S_0} \right)^k \right) \prod_{i=2}^n \max \left(e^{\gamma \Delta t}, \left(\frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^k \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].\end{aligned}$$

En supposant l'indépendance des accroissements du processus de rendements,

$$\begin{aligned}\xi_{(S_t, \gamma, k, T)} &= \alpha P \left\{ E_Q \left[e^{-r(\Delta t - t)} \max \left(e^{\gamma \Delta t}, \left(\frac{S_1}{S_0} \right)^k \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{i=2}^n E_Q \left[e^{-r\Delta t} \max \left(e^{\gamma \Delta t}, \left(\frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^k \right) \middle| \mathcal{F}_{(i-1)\Delta t} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Rappelons Y , l'actif fictif distribuant un taux de dividende fictif q défini en (4.6) par :

$$Y_t := \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^k, \quad Y_0 = 1,$$

puis introduisons la quantité suivante :

$$P_{(Y_0, \gamma, k, t)} = E_Q \left[e^{-rt} \max (e^{\gamma t}, Y_t) \right]. \quad (4.53)$$

Par stationnarité des accroissements des rendements, la valeur actuelle du contrat EIA avec cliquet est donnée au temps $t = 0$; i.e., à la date d'émission, par :

$$\xi_{(Y_0, \gamma, k, n)} = \alpha P \left\{ P_{(Y_0, \gamma, k, 1)} \right\}^n. \quad (4.54)$$

4.4.2 Contrat EIA avec cliquet Cappé

Les contrats EIA peuvent aussi offrir la possibilité de plafonner les rentabilités du sous-jacent à chaque sous-période avec un taux c appelé *taux cap*. Cette caractéristique réduit ainsi le prix de la garantie et offre cependant des taux de participation α plus élevés. On supposera pour la suite que ce taux plafonné est strictement supérieur au taux plancher. Sous un angle technique, le paiement à l'échéance de ce contrat est donné par la quantité suivante :

$$\widehat{F}(S_0, \gamma, k, T) = \alpha P \prod_{i=1}^n \min \left(e^{c\Delta t}, \max \left(e^{\gamma \Delta t}, \left(\frac{S_{i\Delta t}}{S_{(i-1)\Delta t}} \right)^k \right) \right).$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, son prix (en $t = 0$) est :

$$\widehat{\xi}_{(Y_0, \gamma, k, T)} = \alpha P \left\{ \widehat{P}_{(Y_0, \gamma, k, c, 1)} \right\}^n,$$

avec $\widehat{P}_{(Y_0, \gamma, k, c, \Delta t)}$ la valeur actuelle de la quantité :

$$\min(e^{c\Delta t}, \max(e^{\gamma\Delta t}, Y_{\Delta t})).$$

Considérons les évènements A et B suivants :

$$A = Y_{\Delta t} > e^{\gamma\Delta t} \quad \text{et} \quad B = Y_{\Delta t} > e^{c\Delta t}.$$

Parce-que $c > \gamma$,

$$\begin{aligned} \min(e^{c\Delta t}, \max(e^{\gamma\Delta t}, Y_{\Delta t})) &= \max(e^{\gamma\Delta t}, Y_{\Delta t}) 1_{B^c} + e^{c\Delta t} 1_B \\ &= (e^{\gamma\Delta t} + \max(Y_{\Delta t} - e^{\gamma\Delta t}, 0)) 1_{B^c} + e^{\gamma\Delta t} 1_B \\ &= e^{\gamma\Delta t} 1_{B^c} + [Y_{\Delta t} - e^{\gamma\Delta t}] 1_A 1_{B^c} + e^{c\Delta t} 1_B. \end{aligned}$$

D'autre part, l'évènement B entraîne A, donc $B \subset A$, d'où :

$$1_A 1_{B^c} = 1_{A \cap B^c} = 1_A - 1_B, \quad (4.55)$$

alors :

$$\begin{aligned} \min(e^{c\Delta t}, \max(e^{\gamma\Delta t}, Y_{\Delta t})) &= e^{\gamma\Delta t} 1_{B^c} + [Y_{\Delta t} - e^{\gamma\Delta t}] 1_A 1_{B^c} + e^{c\Delta t} 1_B \\ &= e^{\gamma\Delta t} 1_{B^c} + [Y_{\Delta t} - e^{\gamma\Delta t}] 1_A - [Y_{\Delta t} - e^{\gamma\Delta t}] 1_B + e^{c\Delta t} 1_B \\ &= e^{\gamma\Delta t} + [Y_{\Delta t} - e^{\gamma\Delta t}]^+ - [Y_{\Delta t} - e^{c\Delta t}]^+ \\ &= ([Y_{\Delta t} - e^{\gamma\Delta t}]^+ + e^{\gamma\Delta t}) - ([Y_{\Delta t} - e^{c\Delta t}]^+ + e^{c\Delta t}) + e^{c\Delta t}. \end{aligned}$$

Il vient d'abord,

$$\min(e^{c\Delta t}, \max(e^{\gamma\Delta t}, Y_{\Delta t})) = \max(Y_{\Delta t}, e^{\gamma\Delta t}) - \max(Y_{\Delta t}, e^{c\Delta t}) + e^{c\Delta t}. \quad (4.56)$$

Il vient finalement :

$$\widehat{\xi}_{(S_0, \gamma, k, T)} = \alpha P \left\{ P_{(Y_0, \gamma, k, 1)} - P_{(Y_0, c, k, 1)} + e^{(c-r)\Delta t} \right\}^n, \quad (4.57)$$

avec : $P_{(Y_0, \gamma, k, t)}$ défini en (4.53).

4.4.3 Prise en compte de la mortalité

Si la compagnie d'assurance est bien diversifiée, autrement dit, si le nombre de polices d'assurance offrant ce contrat est vendu à un large pools de souscripteurs, alors, la variable aléatoire donnant la durée de vie résiduelle $T(x)$ de l'assuré âgé de x , peut être supposée

indépendante du processus de prix du sous-jacent. Aussi, supposons que si l'assuré décède durant l'intervalle de temps $[k, k+1]$, alors la garantie est payée au souscripteur à l'année $k+1$. En rappelant $T = n\Delta t$ et en supposant T_x et S indépendants, la valeur au temps $t = 0$ du contrat mixte EIA avec cliquet en cas de vie et en cas de décès est donnée par $V_{(Y_0, \gamma, \gamma_d, k, k_d, T)}$, obtenue selon la formule :

$$V_{(Y_0, \gamma, \gamma_d, k, k_d, T)} = TP_x \times \xi_{(Y_0, \gamma, k, T)} + \sum_{t=0}^{T-1} t p_x q_{x+t} \times \xi_{(Y_0, \gamma_d, k_d, t+1)}, \quad (4.58)$$

où : d est l'un indice spécifiant le décès. En utilisant les mêmes arguments que dans la section précédente, celle du contrat EIA mixte avec cliquet cappé $\widehat{V}_{(Y_0, \gamma, \gamma_d, k, k_d, T)}$, est :

$$\widehat{V}_{(Y_0, \gamma, \gamma_d, k, k_d, T)} = TP_x \times \widehat{\xi}_{(Y_0, \gamma, k, T)} + \sum_{t=0}^{T-1} t p_x q_{x+t} \times \widehat{\xi}_{(Y_0, \gamma_d, k_d, t+1)}, \quad (4.59)$$

4.4.4 Cadre d'analyse

Supposons que $S_t = S_0 e^{Z_t}$, $t \geq 0$, donne le prix de l'actif sous-jacent distribuant des dividendes $\delta S_t dt$ dans l'intervalle de temps t et $t + \delta t$, au taux δ strictement positif, avec Z un processus de Lévy. Sans perte de généralité, supposons que Z est constituée par la somme d'un mouvement brownien arithmétique et d'un processus de Poisson composé :

$$Z_t = at + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i, \quad (4.60)$$

où : a et $\sigma > 0$ représentent le paramètre de dérive et le coefficient de diffusion de la partie diffusive du processus. N , un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$: N_t représente le nombre d'occurrences de sauts dans l'intervalle $[0, t]$. La suite de variable (J_i) modélise les tailles aléatoires des sauts indépendants et identiquement distribués, pouvant survenir. On suppose également que W , N et J sont indépendants. La fonction caractéristique de Z est donnée par :

$$\phi_{Z_t}(u) = e^{-t(-iau + \frac{\sigma^2}{2}u^2 - \lambda(\phi_J(u) - 1))},$$

A l'instar du processus sous-jacent S , on définit l'actif fictif Y avec son taux de dividende continu q comme suit :

$$\begin{aligned} Y_t &= \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^k \\ &= Y_0 \exp(kZ_t), \quad Y_0 = 1 \\ &= Y_0 \exp(X_t), \quad \text{avec} \quad X_t = a^*t + k\sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} kJ_i. \end{aligned}$$

La fonction caractéristique de X_t peut être obtenue de la même manière :

$$\phi_{X_t}(u) = e^{-t\left(-ia^*u + \frac{\sigma^2 k^2}{2}u^2 - \lambda(\phi_{kJ}(u) - 1)\right)} = e^{-t\psi(u)},$$

où $\psi(u)$ représente l'exposant caractéristique de X :

$$\psi(u) = -ia^*u + \frac{\sigma^2 k^2}{2}u^2 - \lambda(\phi_{kJ}(u) - 1),$$

Considérons à nouveau une économie de Kou donnée par un taux d'arrivée des sauts λ , modélisés par la variable aléatoire $J = \ln(G)$ indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle double asymétrique dont la fonction de densité s'écrit :

$$f_J(g) = p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 g} 1_{g>0} + p_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 g} 1_{g\leq 0},$$

avec $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. On peut de même obtenir la fonction caractéristique des sauts kJ :

$$\phi_{kJ}(u) = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - iuk} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + iuk}, \quad k > 0,$$

définie dans la bande de régularité :

$$-\frac{\lambda_1}{k} < \Im(u) < \frac{\lambda_2}{k}, \quad k > 0.$$

Sous Q , la condition mesure martingale équivalente est donnée par :

$$Y_0 = E_Q[Y_0 e^{-(r-q-\delta)t} e^{-t\psi_Q(-i)}] \iff (r - q - \delta) + \psi_Q(-i) = 0,$$

ce qui nous amène à choisir l'ajustement de dérive a^* telle que :

$$a^* = r - q - \delta - \frac{\sigma^2 k^2}{2} - \lambda \mu', \tag{4.61}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu &= E_Q[e^J - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1, \\ \mu' &= E_Q[e^{kJ} - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - k} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + k} - 1 \\ q &= r(1 - k) - \frac{1}{2}k(k - 1)\sigma^2 - \lambda(\mu' - k\mu). \end{aligned}$$

4.4.5 Étude des points morts

A titre d'illustration, la probabilité d'un saut vers le haut, p_1 , est fixée à 0.5, tandis que les paramètres des lois exponentielles doubles asymétriques sont $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 5$. Ces paramètres sont résumés dans le tableau ci-après. Pour un processus de diffusion à

p_1	λ_1	λ_2
0.5	5	5

TABLE 4.6 – Paramètres de sauts de Kou

sauts, le risque n'est pas uniquement représenté par la volatilité de la partie diffusive σ . Un risque spécifique aux sauts s'y ajoute par la composante de sauts. Un processus purement diffusif correspond à $\lambda = 0$, ainsi, dès que $\lambda > 0$, le processus "saute" dans toutes les directions. Afin d'étudier l'impact des sauts λ sur le prix des contrats EIA, on veut garder une variation quadratique du processus constante. On peut montrer que la variation quadratique par unité de temps du processus de rendements sous-jacent peut être obtenue sous le modèle de Kou par :

$$\left\langle \ln \left(\frac{Z_1}{Z_0} \right) \right\rangle = \sigma^2 + 2\lambda \left(\frac{p_1}{\lambda_1^2} + \frac{p_2}{\lambda_2^2} \right). \quad (4.62)$$

En augmentant l'intensité d'arrivée des sauts, on garde une agitation constante en diminuant la valeur de σ . Suivant la relation (4.62) et en nous référant aux paramètres de sauts (4.6), on peut obtenir les correspondances suivantes : ($\lambda = 0, \sigma = 0.20$), ($\lambda = 0.1, \sigma = 0.1789$) ou encore ($\lambda = 0.2, \sigma = 0.1549$), ($\lambda = 0.3, \sigma = 0.1265$). D'autre part, une analyse intéressante du point de vue de l'assureur est la détermination du taux de participation offert dans ces contrats pour lequel aucune contrepartie (assureur ou souscripteur) ne subit aucun gain ni perte. Ceci revient à déterminer les points morts encore connus sous la langue anglaise de *Breakeven points*. Ainsi, on détermine le taux de participation, tel que :

$$\text{La valeur à la date d'émission du contrat} = \alpha P.$$

A variation quadratique totale constante, les tables (4.7, 4.9 et 4.8) montrent l'impact des sauts sur les taux de participation k offerts dans les contrats EIA. On observe un taux de participation k beaucoup plus important à mesure que l'intensité des sauts augmente. On note également que cet effet est nettement plus prononcé pour les contrats EIA avec cliquet cappé qui enregistrent une forte sensibilité par rapport au taux d'arrivée des sauts. D'autre part, comme le montrent les tables (4.9 et 4.8), les EIAs cappés offrent un taux de participation au marché beaucoup plus important que les EIAs sans cap. En effet, lorsque la situation du marché est favorable, la participation aux performances de l'actif sous-jacent est limitée par un taux de rentabilité plafonné : un désavantage compensé des coefficients de participation k plus appréciés.

$\gamma = 2\%, \alpha = 0.9$							
δ	T	$(\lambda = 0, \sigma = 20\%)$			$(\lambda = 0.1, \sigma = 17.89\%)$		
		$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$
2%	3	0.6449	0.7535	0.8340	0.6523	0.7614	0.8418
	5	0.7745	0.8808	0.9528	0.7791	0.8854	0.9570
	10	0.9551	1.0412	1.0893	0.9561	1.0419	1.0897
1%	3	0.5758	0.6843	0.7659	0.5832	0.6921	0.7736
	5	0.6909	0.7985	0.8731	0.6959	0.8034	0.8775
	10	0.8509	0.9416	0.9949	0.8529	0.9432	0.9961

$\gamma = 2\%, \alpha = 0.9$							
δ	T	$(\lambda = 0.2, \sigma = 15.49\%)$			$(\lambda = 0.3, \sigma = 12.65\%)$		
		$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$
2%	3	0.6607	0.7708	0.8511	0.6708	0.7822	0.8624
	5	0.7842	0.8906	0.9618	0.7899	0.8968	0.9675
	10	0.9572	1.0429	1.0904	0.9584	1.044	1.0912
1%	3	0.5918	0.7013	0.78261	0.6022	0.7127	0.7936
	5	0.7015	0.8090	0.8825	0.7080	0.8156	0.8884
	10	0.8551	0.9450	0.9974	0.85747	0.9470	0.9989

TABLE 4.7 – Sensibilité des taux de participation k des EIA PTP au taux d'arrivée des sauts. Les taux sont obtenus au points morts et la variation quadratique totale est gardée constante.

$\gamma = 2\%, \alpha = 0.9$						
δ	$(\lambda = 0, \sigma = 20\%)$			$(\lambda = 0.1, \sigma = 17.89\%)$		
	$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$
2%	0.4106	0.5008	0.57661	0.4225	0.5149	0.5919
1%	0.3673	0.4562	0.53162	0.3785	0.4694	0.5460

$\gamma = 2\%, \alpha = 0.9$						
δ	$(\lambda = 0.2, \sigma = 15.49\%)$			$(\lambda = 0.3, \sigma = 12.65\%)$		
	$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$
2%	0.4372	0.5325	0.6110	0.4566	0.5559	0.6364
1%	0.3924	0.4860	0.5639	0.4110	0.5082	0.5879

TABLE 4.8 – Sensibilité des taux de participation k des EIA avec cliquet au taux d'arrivée des sauts. Les taux sont obtenus au points morts et la variation quadratique totale est gardée constante.

$\gamma = 2\%, \alpha = 0.9$							
δ	c	$(\lambda = 0, \sigma = 20\%)$			$(\lambda = 0.1, \sigma = 17.89\%)$		
		$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$
2%	10%	0.4927	0.8104	1.7887	0.5236	0.8533	1.5962
	12%	0.4473	0.6316	0.9310	0.4744	0.6679	0.9726
	14%	0.4281	0.5666	0.7440	0.4528	0.5993	0.7823
1%	10%	0.4282	0.7082	1.5665	0.4549	0.7456	1.5572
	12%	0.3929	0.5589	0.8269	0.4164	0.5909	0.8637
	14%	0.3786	0.5058	0.6675	0.4001	0.5348	0.7016

$\gamma = 2\%, \alpha = 0.9$							
δ	c	$(\lambda = 0.2, \sigma = 15.49\%)$			$(\lambda = 0.3, \sigma = 12.65\%)$		
		$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$	$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 6\%$
2%	10%	0.5666	0.9117	1.5694	0.6339	0.9996	1.5514
	12%	0.5120	0.7178	1.0280	0.5701	0.7944	1.1090
	14%	0.4866	0.6443	0.83411	0.5381	0.7133	0.9117
1%	10%	0.4920	0.7964	1.5421	0.5499	0.8730	1.5300
	12%	0.4489	0.6347	0.9127	0.4989	0.7018	0.9843
	14%	0.4293	0.5744	0.7477	0.4734	0.6349	0.8166

TABLE 4.9 – Sensibilité des taux de participation k des EIA avec cliquet cappé au taux d'arrivée des sauts. Les taux sont obtenus au points morts et la variation quadratique totale est gardée constante.

Conclusion

Partout dans le monde, la population vieillit, les régimes de retraite s'épuisent, les assureurs proposent des solutions au financement des retraites. Les contrats en unités de compte offrent des garanties et des protections modulables sur des investissements faits dans le cadre de contrats d'assurance-vie et constituent un complément de retraite alliant performance et sécurité. Ils présentent un double avantage pour les investisseurs qui peuvent trouver des compléments de financement pour leurs retraites tout en profitant des avantages fiscaux liés à ces produits. Cependant, dans le contexte économique actuel défavorable entraînant une diminution des taux de participation au marché boursier, les contrats EIA (de la terminologie anglaise *Equity-Indexed Annuities*) restent toujours attractifs car ceux-ci répondent à un besoin réel pour une large partie de la population.

Dans ce chapitre, nous avons fait une analyse détaillée de ces contrats avec la prise en compte des plafonnements de garanties et des clauses cliquet. Dans un premier temps, nous considérons une structure par terme des taux d'intérêts constante avant d'étudier dans un second temps, l'impact simultané des sauts et des taux d'intérêts stochastiques sur ces garanties. Une extension de la méthodologie unie suggérée à la première partie de la thèse nous conduit également à l'obtention des formules quasi-explicites.

Annexe B

B.1 Évaluation du contrat en unités de compte dans une économie du type Black-Scholes-Merton

Le fonds risqué sous-jacent S évolue selon la dynamique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t,$$

avec W un mouvement brownien standard. Notons : $Y_T = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^k$, $k > 0$. Après intégration, on obtient :

$$Y_T = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^k = Y_0 e^{(r - \sigma^2/2)kT + k\sigma W_T}, \quad Y_0 = 1.$$

L'idée ici est d'introduire un dividende fictif q . Plus précisément,

$$Y_T = Y_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2 k^2}{2} - q\right)T + k\sigma W_T},$$

avec : $q = (r + \frac{1}{2}\sigma^2 k)(1 - k)$. Ainsi, on peut considérer la dynamique suivante dans l'univers de probabilité sans risque Q :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = (r - q)dt + \sigma k dW_t, \quad Y_0 = 1.$$

Les flux de paiements (4.1) et (4.2) peuvent être interprétés à la date initiale $t = 0$, comme un portefeuille constitué :

- . d'une quantité αP rénumérée au taux γ ,
- . plus une position longue sur une option d'achat européenne $C(Y_0, \gamma, T)$ écrite sur un sous-jacent Y détachant un taux de dividende continu q dont la valeur à l'instant initial est donnée par Y_0 et dont le paiement à l'échéance est : $(Y_T - e^{\gamma T})^+$.

En utilisant les arguments de Merton, on obtient :

$$\begin{aligned} C(Y_0, \gamma, T) &= e^{-qT} \mathcal{N}(d) - e^{\gamma T} e^{-rT} \mathcal{N}(d') \\ &= e^{-qT} \mathcal{N}(d) - e^{-(r-\gamma)T} \mathcal{N}(d') , \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} d = \frac{\ln\left(\frac{1}{e^{\gamma T}}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2)T}{\sigma k \sqrt{T}} \\ d' = \frac{\ln\left(\frac{1}{e^{\gamma T}}\right) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2)T}{\sigma k \sqrt{T}} \end{cases}$$

En d'autres termes,

$$\begin{cases} d = -\frac{\gamma - rk + \frac{k\sigma^2}{2}}{\sigma k} \sqrt{T} + \sigma k \sqrt{T} \\ d' = -\frac{\gamma - rk + \frac{k\sigma^2}{2}}{\sigma k} \sqrt{T} \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \xi_{(Y_0, \gamma, k, T)} &= \alpha P \left[e^{-(r-\gamma)T} + e^{-qT} \mathcal{N}(d) - e^{-(r-\gamma)T} \mathcal{N}(d') \right] \\ &= \alpha P \left[e^{-qT} \mathcal{N}(d) + e^{-(r-\gamma)T} (1 - \mathcal{N}(d')) \right] \\ &= \alpha P \left[e^{-qT} \mathcal{N}(d) + e^{-(r-\gamma)T} \mathcal{N}(-d') \right] . \end{aligned}$$

Soit $d_1 = -d'$, il vient :

$$\xi_{(Y_0, \gamma, k, T)} = \alpha P \left[e^{-(r-\gamma)T} \mathcal{N}(d_1) + e^{-qT} \mathcal{N}(\sigma k \sqrt{T} - d_1) \right] ,$$

avec :

$$\cdot d_1 = \frac{\gamma - k(r - \sigma^2/2)}{\sigma k} \sqrt{T}$$

$$\cdot q = (r + \frac{1}{2}\sigma^2 k)(1 - k)$$

\cdot et $\mathcal{N}$, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Ceci est donc le prix en l'absence d'opportunité d'arbitrage : le montant initial nécessaire pour couvrir les flux de trésorerie (4.1) et (4.2) à la maturité, en ignorant les décès et les remboursements anticipés.

B.2 Évaluation du contrat en unités de compte dans une économie de diffusion à sauts

Nous considérons ici le modèle de Kou, dans lequel, le processus S suit évolue dans l'univers Q selon :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \lambda\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \right\},$$

où :

$$\mu = E_Q[e^J - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - 1)} + p_2 \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + 1)} - 1.$$

De la même manière, l'actif fictif évolue selon :

$$\begin{aligned} Y_T &= Y_0 \exp \left\{ \left(r - \lambda\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) kT + \sigma k W_T + \sum_{i=1}^{N_T} k J_i \right\}, \\ &= Y_0 \exp \left\{ \left(rk - k\lambda\mu - k \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma k W_T + \sum_{i=1}^{N_T} k J_i \right\}, \quad \text{avec } Y_0 = 1. \end{aligned}$$

D'abord, nous introduisons :

$$\mu' = E_Q[e^{kJ} - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - k)} + p_2 \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + k)} - 1,$$

et on utilise la décomposition suivante :

$$Y_T = Y_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2 k^2}{2} - \lambda\mu' - q \right) T + \sigma k W_T + \sum_{i=1}^{N_T} k J_i \right\},$$

avec :

$$\begin{aligned} -q &= -r + \frac{\sigma^2 k^2}{2} + \lambda\mu' + rk - k\lambda\mu - \frac{\sigma^2 k}{2} \\ q &= r - \frac{\sigma^2 k^2}{2} - \lambda\mu' - rk + k\lambda\mu + \frac{\sigma^2 k}{2}. \end{aligned}$$

Après simplification, il vient pour le taux de dividende continu q :

$$q = r(1 - k) - \frac{1}{2}k(k - 1)\sigma^2 - \lambda(\mu' - k\mu).$$

Le prix d'une option européenne d'achat écrite sur l'actif fictif Y détachant les dividendes q dont le prix initial est Y_0 et dont le prix d'exercice est K , est donné en absence d'opportunité d'arbitrage par :

$$\begin{aligned} C(Y_0, K, T) &= E_Q \left[e^{-rT} (Y_T - K)^+ \right] \\ &= E_Q \left[e^{-rT} Y_T 1_{Y_T > K} \right] - K e^{-rT} P[Y_T > K]. \end{aligned}$$

Considérons le second terme $P[Y_T > K]$. On a :

$$\begin{aligned} P[Y_T > K] &= P[X_T > \ln(K/Y_0)] \\ &= P[kZ_T > \ln(K/Y_0)] \\ &= P[Z_T > \ln(K/Y_0)/k], \quad Y_0 = 1. \end{aligned}$$

Notons que cette queue de probabilité est donnée par :

$$P[Y_T > K] := \Upsilon(a, \sigma, \lambda, p_1, \lambda_1, \lambda_2, \ln(K/Y_0)/k, T), \quad Y_0 = 1.$$

Kou propose une expression compliquée pour Υ ⁵⁶ qu'on implémente ici, où :

$$a = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\mu \quad \text{et} \quad \mu = E_Q[e^J - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - 1)} + p_2 \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + 1)} - 1.$$

Considérons maintenant le premier terme :

$$E_Q[e^{-rT} Y_T 1_{Y_T > K}].$$

Utilisons le changement de numéraire. Plus précisément, introduisons une nouvelle probabilité Q^* définie par la dérivée de Radon Nicodým :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dQ^*}{dQ} \right|_{t=T} &= e^{-(r-q)T} \frac{Y_T}{Y_0} = e^{-(r-q)T} e^{X_T} \\ &= \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 k^2 - \lambda\mu' \right) T + \sigma k W_T + \sum_{i=1}^{N_T} k J_i \right\}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Notons que cette probabilité est bien définie puisque :

$$E^Q[e^{-(r-q)T} Y_T] = Y_0, \quad \text{sachant l'information disponible au temps } t = 0.$$

D'après le théorème de Girsanov pour les processus de diffusion à saut, $W_t^* = W_t - \sigma k t$ est un nouveau mouvement brownien sous Q^* et le processus original devient :

$$\begin{aligned} X_t &= a^* t + \sigma k W_t + \sum_{i=1}^{N_t} k J_i, \quad \text{avec } a^* = \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 - \lambda\mu' \right) \\ &= a^* + \sigma^2 k^2 + \sigma k W_t^* + \sum_{i=1}^{N_t} k J_i, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$X_t = \left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 - \lambda\mu' \right) t + \sigma k W_t^* + \sum_{i=1}^{N_t} k J_i.$$

56. A la page 1011 de Kou (2002).

Remarquons que ce processus est un nouveau processus de diffusion à saut exponentiel double asymétrique. Le processus de Poisson N_t a une nouvelle intensité :

$$\lambda' = \lambda E^{Q^*}[e^{kY}] = \lambda(1 + \mu').$$

Et les tailles aléatoires des sauts kJ sont i.i.d, avec une nouvelle densité :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E^{Q^*}[e^{kY}]} e^{ky} f_{kY}(y) \\ &= \frac{1}{E^{Q^*}[e^{kY}]} e^{ky} p_1 \frac{\lambda_1}{k} e^{-\frac{\lambda_1}{k}(ky)} \mathbf{1}_{y \geq 0} + \frac{1}{E^{Q^*}[e^{kY}]} e^{ky} p_2 \frac{\lambda_2}{k} e^{\frac{\lambda_2}{k}(ky)} \mathbf{1}_{y < 0} \\ &= p_1 \frac{1}{E^{Q^*}[e^{kY}]} \frac{\frac{\lambda_1}{k}}{\frac{\lambda_1}{k} - 1} \left(\frac{\lambda_1}{k} - 1 \right) e^{-(\lambda_1 - k)y} \mathbf{1}_{y \geq 0} \\ &\quad + p_2 \frac{1}{E^{Q^*}[e^{kY}]} \frac{\frac{\lambda_2}{k}}{\frac{\lambda_2}{k} + 1} \left(\frac{\lambda_2}{k} + 1 \right) e^{(\lambda_2 + k)y} \mathbf{1}_{y < 0} \\ &= p_1 \frac{1}{E^{Q^*}[e^{kY}]} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - k} (\lambda_1 - 1) e^{-(\lambda_1 - k)y} \mathbf{1}_{y \geq 0} \\ &\quad + p_2 \frac{1}{E^{Q^*}[e^{kY}]} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + k} (\lambda_2 + 1) e^{(\lambda_2 + k)y} \mathbf{1}_{y < 0}. \end{aligned}$$

Notons que cette densité est encore une densité exponentielle double asymétrique avec :

$$\cdot \lambda'_1 = \lambda_1/k - 1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2/k + 1$$

\cdot et avec :

$$\begin{aligned} p' &= p_1 \left\{ \frac{p_1 \lambda_1}{\lambda_1 - k} + \frac{p_2 \lambda_2}{\lambda_2 + k} \right\}^{-1} \frac{\lambda_1}{\lambda - k} \\ &= \frac{p_1}{1 + \mu'} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - k}, \end{aligned}$$

où $\mu' = E_Q[e^{kJ}] - 1$ est égal à : $p_1 \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - k)} + p_2 \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + k)} - 1$.

A l'aide de la dérivée de Radon-Nicodym donnée en (B.1), il résulte :

$$\begin{aligned} E_Q[e^{-rT} Y_T \mathbf{1}_{Y_T > K}] &= Y_0 e^{-qT} E_{Q^*}[\mathbf{1}_{Y_T > K}] \\ &= Y_0 e^{-qT} \times \Upsilon(a^* + \sigma^2 k^2, \sigma k, \lambda', p', \lambda'_1, \lambda'_2, \ln(K/Y_0), T). \end{aligned}$$

Formule quasi-explicite d'évaluation du contrat

En négligeant les aléas de décès et de remboursement anticipé, le prix du contrat en l'absence d'opportunité d'arbitrage est donné à la date initiale $t = 0$, sous la mesure de probabilité risque-neutre Q , par la formule suivante :

$$\xi_{(Y_0, \gamma, k, T)} = \alpha P \left[e^{-(r-\gamma)T} + C(Y_0, \gamma, k, T) \right], \quad (\text{B.2})$$

où :

$$\begin{aligned} C(Y_0, \gamma, k, T) = & Y_0 e^{-qT} \times \Upsilon(a^* + \sigma^2 k^2, \sigma k, \lambda', p', \lambda'_1, \lambda'_2, \ln(K/Y_0), T) \\ & - K e^{-rT} \times \Upsilon(a, \sigma, \lambda, p_1, \lambda_1, \lambda_2, \ln(K/Y_0)/k, T), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

avec $Y_0 = 1$, $K = e^{\gamma T}$ et :

$$\begin{aligned} q &= r(1 - k) - \frac{1}{2}k(k - 1)\sigma^2 - \lambda(\mu' - k\mu), \quad \lambda' = \lambda(1 + \mu'), \quad \lambda'_1 = \lambda_1/k - 1, \\ \lambda'_2 &= \lambda_2/k - 1, \quad p' = \frac{p_1}{1 + \mu'} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - k}, \quad a = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\mu, \quad a^* = r - q - \frac{\sigma^2 k^2}{2} - \lambda\mu', \\ \mu &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^J - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1} - 1, \\ \mu' &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{kJ} - 1] = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - k} + p_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + k} - 1. \end{aligned}$$

Conclusion Générale

Parmi les soucis majeurs des assureurs, figure en bonne place l'évaluation en *fair value* des contrats en UC. Cette notion, prônée par les nouvelles normes *International Financial Reporting Standard* (IFRS), entraîne un bouleversement important dans l'environnement réglementaire financier, comptable et prudentiel des sociétés d'assurance et des établissements bancaires. Elle impose la réévaluation⁵⁷ des bilans en fonction de l'évolution des prix de marché. L'*International Accounting Standards Board* (IASB) précise dans ce sens que, si les prix des actifs détenus sont observables sur ce marché, alors ceux-ci constituent la meilleure estimation possible de leur juste valeur : c'est ce qu'on appelle le *marked to market*.

L'importance de cette notion sera de nouveau rappelée et mise au centre des débats comptables par la publication en mai 2011 d'une nouvelle norme entièrement dédiée à la *Fair Value Measurement* : la norme IFRS 13. Celle-ci devrait entrer en vigueur à compter du 1^{er} janvier 2013, fournissant ainsi une source unique pour son application. Dans cette perspective, nous avons développé une analyse en *fair value* avec le choix d'une méthode de type *marked to model*. Un autre problème d'importance pour les assureurs que nous avons traité est celui de la détermination du niveau de capitaux à détenir pour le respect des engagements vis-à-vis des assurés.

Les travaux décrits dans cette thèse ont présenté une méthodologie générale pour la gestion de certains types de contrat d'assurance-vie caractérisés par un lien explicite avec les marchés financiers, et qui contiennent de nombreuses clauses optionnelles. Les problèmes posés aux assureurs sont ceux de l'évaluation, de la couverture, du contrôle et de la mesure du risque de ces contrats.

Dans un but de modélisation, la première chose à faire est de s'interroger sur la représentation des cours boursiers. Or, de nombreuses études empiriques montrent que les prix des actifs financiers ne sont pas lognormaux, ce qui exclut une modélisation gaussienne. Ainsi dans la première partie, ont été rappelés quelques modèles traduisant cette réalité des marchés où de grandes ruptures dans l'évolution de l'actif sous-jacent sont plus susceptibles d'y être représentées que dans un cadre gaussien. Des nouveaux modèles ont été ici suggérés.

Au premier chapitre, nous avons rappelé la dynamique générale des processus mixtes de diffusion et sauts. Nous avons distingué le modèle de Merton et celui de Kou. Ces modèles rendent bien compte des observations de discontinuités de cours, assorties d'effets d'asymétrie et de kurtosis relevés dans la pratique. De même, nous avons pu noter que nombre de ces faits pouvaient être retrouvés grâce au modèle à subordination de brownien dit variance gamma, obtenu en transformant le temps calendaire par un subordonateur de type gamma, avant d'accorder une attention particulière à sa généralisation au modèle CGMY encore connu sous le nom de modèle KoBoL. Comme nous l'avons

57. Par opposition à une évaluation au coût historique où la valeur de l'actif inscrit dans les comptes est donnée par son prix d'acquisition, même si sa valeur de marché a entretemps évolué.

constaté, ces modèles permettent également de retrouver le *smile* de volatilité, dont la convexité forte pour des maturités courtes ; excepté le fait qu'elle ne persiste pas à mesure que la maturité croît - ce qu'on observe pourtant dans la pratique.

Une autre idée est d'introduire les modèles à changement d'états de Hamilton (1989). Nous avons dans un premier temps présenté le modèle à changement de régime lognormal de Hardy (2003) et avons noté la difficulté de la détermination de la distribution du temps de séjour dans un état. Nous avons calculé la loi de ce temps en utilisant un algorithme dont les performances de calcul ont ouvert la voie à une modélisation simple et efficace. Ce qui nous a conduit à proposer deux modèles : un modèle particulier à changement de régime variance gamma et le modèle KRS pour *Kou Regime Switching*, exhibant non seulement une convexité forte pour des maturités courtes, mais aussi une persistance sur des maturités longues - comme en rend compte la pratique.

Les représentations étant non gaussiennes, l'évaluation et la couverture sont des problèmes difficiles car :

Selon l'approche d'évaluation par martingale, les prix d'options sont obtenus grâce à l'espérance des flux de paiement actualisés. Ainsi, dès lors que les rentabilités des cours de l'actif sous-jacent ne suivent plus une évolution purement gaussienne, les prix obtenus par arbitrage peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions spéciales cf. Kou (2002) ou par des résolutions compliquées d'équations aux dérivées partielles avec un facteur intégral. Ce qui rend leurs implémentations non évidentes dans la pratique.

Le marché étant incomplet, il y a une infinité de mesures équivalentes telles que les processus de prix actualisés sont des martingales, ceci donne lieu à un problème de choix de mesure appropriée. Nous avons tout d'abord rappelé le ratio de couverture optimale calculé par Cont et al. (2007), dont la mise en œuvre n'est également pas triviale. De même, notons que les approches consacrées à la couverture utilisées dans la littérature sont fréquemment d'ordre théorique et souvent sans utilité pratique. Par ailleurs, d'autres considérations telles que le calcul des budgets de risque et des sensibilités d'options, posent également de redoutables problèmes qui, mal posés et mal résolus, engendrent des difficultés pour les compagnies d'assurance pouvant les conduire à la faillite.

Le deuxième chapitre a apporté un cadre non-gaussien et du point de vue de l'opérationnalité, une réponse unie à tous ces problèmes de gestion de contrats *Variable Annuities* ou *Equity-Indexed Annuities*. Sur un plan technique, notre méthodologie repose sur l'analyse par transformée de Fourier généralisée dans la droite ligne des travaux de Lewis (2001). Celle-ci permet d'obtenir une formule d'intégration simple, particulièrement adaptée au choix de calcul par transformée de Fourier rapide, rejoignant ainsi de nombreux travaux dont ceux de Stein et Stein (1991), de Bakshi et al. (1997). C'est une méthode particulièrement efficace pour évaluer des contrats d'option dans un cadre non gaussien. De même, elle s'avère plus satisfaisante que l'approche utilisée par Carr et Madan (1998). En outre, parmi les nombreuses approches utilisées dans la littérature sur la couverture et dans un souci d'opérationnalité, notre choix s'est porté sur une minimisation locale de risque, suggérée par Boyarchenko et Levendorskiĭ (2002b). Cette

approche a été étendue pour les calculs des budgets de risque, ce qui constitue l'une de nos contributions.

L'apport du deuxième chapitre est d'ordre méthodologique. Il apporte des éléments de réponse robustes à certaines questions de gestion de risque posées aux assureurs, restées jusqu'à présent sans solution satisfaisante. Nous avons proposé une méthodologie unifiée pour l'évaluation, la couverture, le contrôle et la mesure de risque, avec l'avantage d'un coût de calcul presque nul, tout en restant dans une très large classe de processus de Lévy. Nous avons montré que celle-ci permet de retrouver les résultats de Merton (1976), de Kou (2002) et de Cont et al. (2007). Elle permet également d'obtenir des résultats pour des séries de contrats en un temps de calcul très court.

Cette méthodologie a été systématiquement mise en œuvre dans la seconde partie de la thèse où des contrats particuliers offrant des garanties du type : GMMB, GMDB, GMAB, ont été étudiés de façon approfondie.

Au troisième chapitre, nous avons suggéré un cadre rigoureux pour la détermination de la *fair value* des contrats *Variable Annuities*. Dans un premier temps, nous avons déterminé le juste coût des frais d'assurance et afin d'être au plus près de la pratique, nous avons distingué le taux prélevé pour le financement de la garantie : *Mortality and expense*, de celui dédié à la gestion du fonds : *Management expense ratio*. Nous avons noté que la détermination de la juste valeur des garanties sous-jacentes à ces contrats, impose une correspondance implicite entre ces deux taux. Dans un second temps, en admettant des discontinuités de cours pour le fonds dédié, nous avons construit un portefeuille dynamique de couverture optimale résultant de la méthodologie générale suggérée⁵⁸. Les pertes futures actualisées de ces garanties apparaissent comme l'agrégation de deux quantités : la somme de la valeur actuelle des erreurs de couverture résiduelles et du coût lié aux frais de transaction, diminuée du montant de marge, *Margin offset*, prélevé par l'assureur pour le financement des garanties. Ce qui nous a permis de quantifier les budgets de risque associés aux distributions de ces pertes. Notre méthodologie aboutit à une immobilisation en capital bien inférieure à celle fournie par l'allocation classique en delta. Nous avons montré qu'une telle stratégie de couverture était à proscrire.

Au dernier chapitre, nous avons traité les contrats *Equity-Indexed Annuities* qui, distinctement des *Variable Annuities*, sont indexés non pas à un fonds dédié mais à un indice boursier, typiquement le S&P 500. Nous avons commencé l'analyse du contrat en supposant une structure par terme des taux d'intérêts constante. Ce type de modélisation qui peut être pertinent pour des contrats de court terme, n'est plus acceptable pour des contrats ayant des échéances longues comme c'est le cas pour les produits d'assurance-vie. Nous avons révisé notre analyse en incorporant l'impact simultané des sauts et des taux d'intérêt stochastiques. Cette dernière contrainte en ligne avec la réalité des marchés, posait un problème non évident dont aucune solution n'avait été donnée jusqu'ici, à

58. Dans la première partie de la thèse.

notre connaissance, pour des garanties un peu complexes de type *path dependent*, comme les GMAB. Nous avons unifié la méthodologie générale suggérée en supposant que les actifs investis dans l'unité de compte sont corrélés aux taux d'intérêts. Notre méthode aboutit à des formules quasi-fermées en rupture avec de nombreuses approches dans la littérature reposant essentiellement sur des simulations de type Monte Carlo. Ensuite, nous avons considéré les contrats *Equity-Indexed Annuities* offrant des garanties cliquet et des plafonnements de rentabilité. Notons que ces derniers offrent une caractéristique particulièrement séduisante. En effet, tout se passe comme si le bénéficiaire du contrat investit à partir de la date de souscription une proportion de la prime payée à l'assureur dans l'actif offrant la rentabilité la plus élevée entre celui qui rémunère d'un taux plancher garanti et celui offrant une partie de la rentabilité de l'indice boursier sous-jacent. Les gains perçus sont réinvestis de la même manière à la période suivante et immobilisés quelle que soit la performance du marché jusqu'à la date de fin du contrat. De plus, nous avons montré que les justes valeurs de ces contrats étaient données par des formules quasi-explicites. Enfin, nous avons fait une analyse complète avec prise en compte de clauses de rachat.

Les travaux décrits dans cette thèse ouvrent la voie à d'autres perspectives. En effet, les contrats d'assurance-vie en UC considérés dans notre étude nous ont amenés à ne prendre en compte que des processus non-gaussiens unidimensionnels. L'extension de la méthodologie générale au cas multidimensionnel pourrait être envisagé. Au-delà de la convergence entre les méthodes quantitatives de la finance et de l'assurance, cette thèse est un plaidoyer pour l'utilisation des approches non-gaussiennes. Celles-ci sont plus proches de la réalité observée et comme nous l'avons montré tout au long de cette thèse, cette modélisation fournit aux dirigeants des compagnies d'assurance des outils utiles pour le choix de leurs décisions stratégiques.

Bibliographie

- Abramowitz, M., Stegun, I. (Eds.) (1974) Handbook of Mathematical Functions – with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, New York.
- Acerbi, C., Tasche, D. (2002) On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance* 26 (7), 1487–1503.
- Albizzati, M., Geman, H. (1994) Interest rate risk management and valuation of the surrender option in life insurance policies. *Journal of Risk and Insurance* 61 (4), 616–637.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., Heath, D. (1999) Coherent measures of risk. *Mathematical finance* 9 (3), 203–228.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1997) Thinking coherently. *RISK*. 10, 68–71.
- Aït-Sahalia, Y., Jacod, J. (2009) Testing for jumps in a discretely observed process. *Annals of Statistics* 37 (1), 184–222.
- Bacinello, A. (2003) Fair valuation of a guaranteed life insurance participating contract embedding a surrender option. *Journal of Risk and Insurance* 70 (3), 461–487.
- Bacinello, A. (2005) Endogenous model of surrender conditions in equity-linked life insurance. *Insurance : Mathematics and Economics* 37 (2), 270–296.
- Bacinello, A., Biffis, E., Millossovich, P. (2009) Pricing life insurance contracts with early exercise features. *Journal of computational and applied mathematics* 233 (1), 27–35.
- Bacinello, A., Millossovich, P., Olivieri, A., Pitacco, E. (2011) Variable annuities : A unifying valuation approach. *Insurance Mathematics & Economics* 49 (3), 285–297.
- Bakshi, G., Cao, C., Chen, Z. (1997) Empirical performance of alternative option pricing models. *The Journal of Finance* 52 (5), 2003–2049.
- Bakshi, G., Madan, D. (2000) Spanning and derivative-security valuation. *Journal of Financial Economics* 55 (2), 205–238.

- Ballotta, L. (2005) A Lévy process-based framework for the fair valuation of participating life insurance contracts. *Insurance : Mathematics and Economics* 37 (2), 173–196.
- Ballotta, L., Haberman, S. (2003) Valuation of guaranteed annuity conversion options. *Insurance : Mathematics and Economics* 33, 87–108.
- Bernard, C., Le Courtois, O., Quittard-Pinon, F. (2005) Market value of life insurance contracts under stochastic interest rates and default risk. *Insurance : Mathematics and Economics* 36 (3), 499–516.
- Bernard, C., Lemieux, C. (2008) Fast simulation of equity-linked life insurance contracts with a surrender option. Dans : *Simulation Conference, 2008. WSC 2008. Winter. IEEE*, pp. 444–452.
- Bertoin, J. (1996) *Lévy Processes*. Vol. 121 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Björk, T. (2004) *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2e ...dition. Oxford Finance Series. Oxford University Press, USA.
- Black, F., Scholes, M. (May-June 1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637–659.
- Bollen, N. (1998) Valuing options in regime-switching models. *The Journal of Derivatives* 6 (1), 38–49.
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J. (1997) *Actuarial Mathematics*, 2e ...dition. The Society of Actuaries, 753pp.
- Boyarchenko, S., Levendorskiĭ, S. (1999) Generalizations of the Black-Scholes equation for truncated Lévy processes. Working paper .
- Boyarchenko, S., Levendorskiĭ, S. (2000) Option pricing for truncated Lévy processes. *International Journal for Theory and Applications in Finance* 3 (3), 549–552.
- Boyarchenko, S., Levendorskiĭ, S. (2002a) Barrier options and touch-and-out options under regular Lévy processes of exponential type. *Annals of Applied Probability* 12 (4), 1261–1298.
- Boyarchenko, S., Levendorskiĭ, S. (2002b) *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*. Vol. 9 de *Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability*. World Scientific, London.
- Boyarchenko, S., Levendorskiĭ, S. (2002c) Perpetual american options under Lévy processes. *SIAM Journal on Control and Optimization* 40 (6), 1663–1696.
- Boyle, P., Hardy, M. (2003) Guaranteed annuity options. *Astin Bulletin* 33 (2), 125–152.

-
- Brennan, M., Schwartz, E. (1976) The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. *Journal of Financial Economics* 3 (3), 195–213.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., Yor, M. (2002) The fine structure of asset returns : an empirical investigation. *Journal of Business* 75 (2), 305–332.
- Carr, P., Madan, D. B. (1998) Option valuation using the fast fourier transform. *Journal of Computational Finance* 2, 61–73.
- Carriere, J. (1996) Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression. *Insurance : mathematics and Economics* 19 (1), 19–30.
- Cont, R. (2001) Empirical properties of asset returns : Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance* 1, 223–236.
- Cont, R., Tankov, P. (2004) *Financial Modelling with Jump Processes*, 2e ...dition. Chapman & Hall/CRC Press, London.
- Cont, R., Tankov, P., Voltchkova, E. (2007) Hedging with options in models with jumps. *Stochastic analysis and applications* , 197–217.
- Cooley, J., Tukey, J. (1965) An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Comput* 19 (90), 297–301.
- David, H., Nagaraja, H. (2003) *Order Statistics*. Wiley, New York.
- Demsetz, H. (1968) The cost of transacting. *The Quarterly Journal of Economics* 82 (1), 33.
- Derville, L. (2001) Estimation des coûts de transaction sur un marché gouverné par les ordres : le cas des composantes du cac 40. *Laboratoire de recherche en gestion et économie Université Louis Pasteur Pole européen de gestion et d'économie* .
- Dufresne, F., Gerber, H., Shiu, E. (1991) Risk theory with the gamma process. *Astin Bulletin* 21 (2), 177–192.
- Föllmer, H., Leukert, P. (1999) Quantile hedging. *Finance and Stochastics* 3 (3), 251–273.
- Föllmer, H., Leukert, P. (2000) Efficient hedging : Cost versus shortfall risk. *Finance and Stochastics* 4 (2), 117–146.
- Föllmer, H., Schweizer, M. (1991) Hedging of contingent claims under incomplete information. *Applied Stochastic Analysis*, M. H. A. Davis and R. J. Elliott (eds.), *Stochastics Monographs* 5, 389–414.
- Föllmer, H., Sondermann, D. (1986) Hedging of non-redundant contingent claims. *Contributions to Mathematical Economics*, Hildenbrand, W. and Mas-Colell, A. (eds.) , 205–223.

- Frachot, A., Gouriéroux, C. (1993) L'économétrie des données individuelles : l'exemple des remboursements anticipés. *Journal de la Société de statistique de Paris* 134 (1), 65–72.
- Gerber, H. U. (1997) *Life Insurance Mathematics*, 3e ...dition. Springer Verlag, Berlin, 217pp.
- Gerber, H. U., Shiu, E. S. W. (1994) Option Pricing By Esscher Transforms. *Transactions of the Society of Actuaries* 46, 99–191.
- Glasserman, P. (2004) *Monte Carlo methods in financial engineering*. Vol. 53. Springer Verlag.
- Goldfeld, S., Quandt, R. (1973) A markov model for switching regressions. *Journal of econometrics* 1 (1), 3–16.
- Gouriéroux, C., Laurent, J., Pham, H. (1998) Mean-variance hedging and numéraire. *Mathematical Finance* 8 (3), 179–200.
- Hamilton, J., Susmel, R. (1994) Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics* 64 (1-2), 307–333.
- Hamilton, J. D. (1989) A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica : Journal of the Econometric Society* 57 (2), 357–384.
- Hamilton, J. D. (1990) Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of econometrics* 45 (1-2), 39–70.
- Hardy, M. (2001) A regime-switching model of long-term stock returns. *North American Actuarial Journal* 5 (2), 41–53.
- Hardy, M. (2003) *Investment Guarantees : Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, USA.
- Heston, S. (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies* 6 (2), 327.
- Hille, E., Phillips, R. (1957) *Functional analysis and semi-groups*. Vol. 31. American Mathematical Society.
- Jaimungal, S. (2004) Pricing and hedging equity indexed annuities with variance-gamma deviates. Working paper .
- Jensen, B., Jørgensen, P., Grosen, A. (2001) A finite difference approach to the valuation of path dependent life insurance liabilities. *The GENEVA Papers on Risk and Insurance-Theory* 26 (1), 57–84.

-
- Jondeau, E., Poon, S.-H., Rockinger, M. (2007) *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer Finance. Springer Verlag, xviii+542pp.
- Jorion, P. (2007) *Value at Risk - The new benchmark for managing financial risk*, 3e . . .dition. McGraw-Hill, 602pp.
- Kassberger, S., Kiesel, R., Liebmann, T. (February 2008) Fair valuation of insurance contracts under Lévy process specifications. *Insurance : Mathematics and Economics* 42 (1), 419–433.
- Koponen, I. (July 1995) Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the gaussian stochastic process. *Physical Review E* 52, 1197–1199.
- Kou, S. G. (August 2002) A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science* 48, 1086–1101.
- Kwok, Y., Chu, C. (2007) Valuation of guaranteed annuity options in affine term structure models. *International journal of theoretical and applied finance* 10 (2), 363–387.
- Kélani, A., Quittard-Pinon, F. (2011a) A general approach to compute standard risk measures. Dans : *International Conference of the French Finance Association (AFFI)*, May 2011.
- Kélani, A., Quittard-Pinon, F. (2011b) Pricing equity index annuities with surrender options in four models. Dans : *International Congress on Insurance : Mathematics and Economics (IME)*, June 2011.
- Kélani, A., Quittard-Pinon, F. (2012) Pricing equity-indexed annuities in a stochastic interest rates environment. Dans : *International Congress on Insurance : Mathematics and Economics (IME)*, June 2012.
- Laurent, J., Pham, H. (1999) Dynamic programming and mean-variance hedging. *Finance and Stochastics* 3 (1), 83–110.
- Le Courtois, O., Nakagawa, H. (2011) On surrender and default risks. *Mathematical Finance* .
- Le Courtois, O., Quittard-Pinon, F. (2006) Risk-neutral and actual default probabilities with an endogenous bankruptcy jump-diffusion model. *Asia-Pacific Financial Markets* 13 (1), 11–39.
- Le Courtois, O., Quittard-Pinon, F. (2008) Fair valuation of participating life insurance contracts with jump risk. *The Geneva Risk and Insurance Review* 33 (2), 106–136.
- Le Courtois, O., Walter, C. (2010) A study on value at risk and Lévy processes Working paper.
- Le Courtois, O., Walter, C. (March 2012a) *Gestion des portefeuilles et des risques extrêmes*, 1er . . .dition. Economica.

- Le Courtois, O., Walter, C. (2012b) Risques Financiers Extrêmes et Allocation d'Actifs, 1er ...dition. Economica.
- Lee, R. W. (2004) Option pricing by transform methods : Extension, unification, and error control. *Journal of Computational Finance* 7 (3), 51–86.
- Leland, H. (1985) Option pricing and replication with transactions costs. *Journal of Finance* , 1283–1301.
- Lewis, A. (2001) A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential lévy processes .
- Lin, X., Tan, K. (2003) Valuation of equity-indexed annuities under stochastic interest rates. *North American Actuarial Journal* 7 (4), 72–91.
- Lo, A. (1997) A non-random walk down wall street. Dans : *Proceedings of Symposia in pure mathematics*. Vol. 60. American Mathematical Society, pp. 149–184.
- Longstaff, F., Schwartz, E. (2001) Valuing american options by simulation : A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies* 14 (1), 113.
- Madan, D., Yor, M. (2006) CGMY and meixner subordinators are absolutely continuous with respect to one sided stable subordinators. *Arxiv preprint math/0601173* .
- Madan, D. B., Seneta, E. (1990) The variance gamma model for share market returns. *Journal of Business* 63 (4), 511–524.
- McNeil, A., Frey, R., Embrechts, P. (2005) *Quantitative Risk Management*. Princeton Series in Finance.
- Melnikov, A., Romaniuk, Y. (2006) Evaluating the performance of gompertz, makeham and lee-carter mortality models for risk-management with unit-linked contracts. *Insurance : Mathematics and Economics* 39, 310–329.
- Merton, R. C. (Spring 1973) Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141–183.
- Merton, R. C. (1976) Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3, 125–144.
- Milevsky, M. A. (2006) *The Calculus of Retirement Income*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Milevsky, M. A., Posner, S. E. (2001) The titanic option : Valuation of the guaranteed minimum death benefit in variable annuities and mutual funds. *The Journal of Risk and Insurance* 68 (1), 91–126.
- Navatte, P., Quittard-Pinon, F. (1997) Options digitales et titres couloirs sur taux d'intérêt. *Journal de la Société Statistique de Paris* , 41–62.

-
- Palmer, B. (2006) Equity-indexed annuities : Fundamental concepts and issues. Work .
- Patrice Poncet, R. P. (2011) Finance de marché, 3e ...dition. Dalloz.
- Pelsser, A. (2003) Pricing and hedging guaranteed annuity options via static option replication. Insurance : Mathematics and Economics 33 (2), 283–296.
- Press, S. (1967) A compound events model for security prices. Journal of Business , 317–335.
- Prigent, J., Renault, O., Scaillet, O. (1999) Option pricing with discrete rebalancing. Université catholique de Louvain.
- Quandt, R. (1958) The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes. Journal of the American Statistical Association 53 (284), 873–880.
- Quittard-Pinon, F. (2003) Marchés des capitaux et théorie financière, 3e ...dition. Economica.
- Quittard-Pinon, F., Randrianarivony, R. (2011) Impacts of jumps and stochastic interest rates on the fair costs of guaranteed minimum death benefit contracts. The Geneva Risk and Insurance Review 36 (1), 51–73.
- Quittard-Pinon, F., Randrianarivony, R. A. (2008) How to Price Efficiently European Options in Some Geometric Lévy Processes Models? International Journal of Business .
- Quittard-Pinon, F., Rolando, T., Le Grand, F. (2012) La Gestion du Risque de Taux d'intérêt, 2e ...dition. Economica.
- Randrianarivony, R. (2006) Prise en compte des discontinuités de cours financiers en assurance et finance. Thèse, Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I.
- Roger, P. (1996) L' évaluation des actifs financiers : modèles à temps discret. De Boeck Université.
- Sato, K.-I. (1999) Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Vol. 68 de Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Schöbel, R., Zhu, J. (1999) Stochastic volatility with an ornstein-uhlenbeck process : An extension. European Finance Review 3 (1), 23–46.
- Schoutens, W. (2003) Lévy Processes in Finance : Pricing Financial Derivatives. John Wiley & Sons, England.
- Schwartz, E., Torous, W. (1993) Mortgage prepayment and default decisions : a poisson regression approach. Real Estate Economics 21 (4), 431–449.

- Schweizer, M. (1991) Option hedging for semimartingales. *Stochastic processes and their Applications* 37 (2), 339–363.
- Schweizer, M. (1992) Mean-variance hedging for general claims. *The Annals of Applied Probability* 2 (1), 171–179.
- Schweizer, M. (1995) Variance-optimal hedging in discrete time. *Mathematics of Operations Research* 20 (1), 1–32.
- Schweizer, M. (2001) A guided tour through quadratic hedging approaches. *Option pricing, interest rates and risk management* 12, 538–574.
- Seneta, E. (2004) Fitting the variance-gamma model to financial data. *Journal of Applied Probability* 41, 177–187.
- Stein, E., Stein, J. (1991) Stock price distributions with stochastic volatility : an analytic approach. *Review of financial Studies* 4 (4), 727–752.
- Streiff, T., DiBiase, C. (1999) Equity indexed annuities. Dearborn Financial Institute, New York.
- Tiong, S. (2000) Valuing equity-indexed annuities. *North American Actuarial Journal* 4 (4), 149–170.
- Toft, K. (1996) On the mean-variance tradeoff in option replication with transactions costs. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31 (02), 233–263.
- Van Haastrecht, A., Lord, R., Pelsser, A., Schrager, D. (2009) Pricing long-dated insurance contracts with stochastic interest rates and stochastic volatility. *Insurance : Mathematics and Economics* 45 (3), 436–448.
- Vasicek, O. A. (1977) An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5 (2), 177–188.
- Wang, T. (1999) A class of dynamic risk measures. University of British Columbia .
- Wilkie, A., Waters, H., Yang, S. (2003) Reserving, pricing and hedging for policies with guaranteed annuity options. *British Actuarial Journal* 9 (02), 263–391.
- Wirch, J., Hardy, M. (1999) A synthesis of risk measures for capital adequacy. *Insurance : Mathematics and Economics* 25 (3), 337–347.