



**HAL**  
open science

# Contrôle actif des vibrations de structures élancées FGPM

Jonas Maruani

► **To cite this version:**

Jonas Maruani. Contrôle actif des vibrations de structures élancées FGPM. Mécanique [physics]. Université de Nanterre - Paris X, 2019. Français. NNT : 2019PA100062 . tel-02895201

**HAL Id: tel-02895201**

**<https://theses.hal.science/tel-02895201>**

Submitted on 9 Jul 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Membre de l'université Paris Lumières

## Jonas Maruani

# Contrôle actif des vibrations de structures élancées FGPM

Thèse présentée et soutenue publiquement le 26/09/2019  
en vue de l'obtention du doctorat de **Génie mécanique, mécanique, génie civil**  
de l'Université Paris Nanterre  
sous la direction de Mr Laurent Gallimard (Université Paris Nanterre)  
et de Mme Isabelle Bruant (co-encadrante) et de Mr Frédéric Pablo (co-encadrant)

### Jury :

Rapporteur :	Mr Farid Abed-Meraim	Professeur des Universités, Arts et Métiers ParisTech
Rapporteur :	Mr Gaël Chevallier	Professeur des Universités, Université de Bourgogne Franche- Comté
Président du jury :	Mr Jean-François Deü	Professeur des Universités, CNAM Paris
Examinatrice :	Mme Angela Vincenti	Maître de Conférences, Sorbonne Université

---

# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Mme Isabelle Bruant, qui est pour moi l'encadrante que tout doctorant souhaite avoir. Patience, rigueur, humanité et "débogage" sont ses maîtres mots. À Mr Frédéric Pablo, le phare breton du sens physique, merci de m'avoir guidé à bon port dans la tempête piézoélectrique. Cette équipe encadrante ne serait pas complète sans mon directeur Mr Laurent Gallimard et son sens de la simplicité à ramener tout problème à un problème "poutre", merci pour ta vision en hauteur du projet. Je tiens également à vous remercier tous les trois pour m'avoir fait confiance et m'avoir laissé orienter ce projet, spécialement dans le flou.

Mr Abed-Meraim et Mr Chevallier un grand merci d'avoir pris le temps de relire attentivement ce manuscrit, d'en avoir pointé les points forts, les quelques manquements et les améliorations futures. Vos avis sur ce travail m'ont permis de le réévaluer à sa juste valeur. Des sincères remerciements vont également à Mr Jean-François Deü qui m'a fait l'honneur de présider le jury et de m'avoir questionner et orienter vers des pistes prometteuses. Enfin, à Mme Angela Vincenti, examinatrice de ce travail, un immense merci pour m'avoir fait découvrir la recherche lors de mon premier stage, une sincère amitié en a découlé et qui j'en suis sûr durera longtemps.

Je tiens également à remercier toute l'équipe du LEME, pour leur accueil chaleureux, en particulier Mr Michele d'Ottavio pour sa disponibilité à m'aider sur la fameuse plaque piézoélectrique et Max pour les nombreuses discussions sans fin, sa vision éclairée du monde et sa compassion.

Je suis également reconnaissant d'avoir pu participer à deux conférences internationales et à trois séminaires dans le cadre du Collège doctoral Franco-Allemand, qui m'ont permis de découvrir d'autres horizons et de faire des rencontres scientifiquement et humainement enrichissantes.

Pour finir dans le cadre professionnel, les longues journées au labo n'auraient jamais été les mêmes sans mes collègues de galère, les doctorants du LEME : Patrick, Romain, Yvain, Astrid, Jozsé, Laithe, Thi, Boubakar, Marie, Mirjana, Zhi, Tchao, Walid, Fadel, Salim, Girolamo, Giuseppe. Merci pour l'entraide, les repas partagés, les pauses café et bonne chance à ceux qui ont encore la tête dans le guidon.

Maintenant j'aimerais remercier mes parents qui m'ont plutôt bien "formé" en général, en particulier pour résister et réussir ces quatre années de thèse. Il serait dur de lister toutes les qualités de l'éducation que vous m'avez transmise : ouverture d'esprit, amour, patience, abnégation, voir plus loin que le bout de son nez, prendre les choses de la vie comme elles viennent, le goût des bonnes choses, le goût des belles choses, la réflexion sur n'importe quel sujet, apprendre à jouer, avoir du cœur, ... La fierté dans vos yeux le jour de cette soutenance était le meilleur des cadeaux.

Benjamin, le grand frère, je pense te devoir ma logique, aiguisée au fil de la multitude de jeux qu'on a explorés et découverts ensemble. J'adore toujours autant les moments passés ensemble et avec maintenant ta femme Élise et la petite Lila, dont je suis l'heureux parrain et j'espère être l'oncle complètement gâteux et gâteaux.

Marine, la petite sœur, je pense avoir développé à tes côtés, grâce à une relation très proche, un sens aigu d'égalité, dont je tire mon féminisme actuel. J'adore ta façon de prendre soin de moi et j'apprécie tout le bien que Jérémie, le beau-frère plus que sympathique, t'apporte.

Merci Benjamin et Marine de ne pas avoir cillés et de m'avoir soutenu quelque soit la situation.

À tous mes amis, je sais que vous m'aimez pour ma cuisine et ma langue bien pendue, un immense merci d'avoir été là :

- 
- Moubine, un pilier, le premier à m'avoir fait sentir bien dans mes basquettes,
  - Aurélien, le parleur et grand débateur devant le cosmos,
  - Lola, la chaleureuse et grande fan de Céline, j'en connais trop maintenant,
  - Delphine, la force tranquille et le cœur sur la main,
  - Benjamin, l'accueil parfait, je ne peux même pas compter le nombre de bonnes soirées passées ensemble,
  - Anne-Sophie, l'amitié sans filtre, une fraîcheur incomparable, le Bouddha sera toujours là pour toi,
  - Sharon, l'amitié couscous du vendredi soir, une connexion instantanée et un même entraînement au levé de coude,
  - David et Rachel, le couple idéal et un retour aux sources toujours le bienvenu entre belote et merguez,
  - Clémentine, la cinquième coloc et une amitié plus que parfaite, mon guide dans les remous,
  - Julie, mon doppelgänger, tout est tellement facile et naturel avec toi,
  - Yvain, l'élément perturbateur, tellement opposé qu'on ne pouvait que se lier d'amitié, et Manon la câlineuse un vrai trésor à garder,
  - Audrey, une amitié qui change de couleurs au fil des années, je tairais les premières années plus mouvementées ("Mais où est passé mon verre", Oups),
  - Grégoire, copain toujours là dans les bons coups et danseur hors pair, merci pour le cours particulier,
  - Marco, le deuxième grand frère, merci pour l'écoute et les bons moments passés ensemble,
  - Sung-Ah et Johan, est-ce qu'on peut faire plus friendly? Une vraie question,
  - Céline, curieux mélange entre Bretagne et Brésil dit aussi la papoteuse, ou comment se faire coincer une heure dans un couloir,
  - Samantha, ou comment éclairer la plus sombre des journées avec un sourire,
  - Thomas, Louis, Baptiste, Vitto, Hélène, Benjamin, William, Julien, Sam, Simon, Luisa, Mathis, Hugo, le groupe Jussieu n'aurait pas été le même sans vous tous,
  - Richard, Gatien, Coline, Quentin, Aurélie, Camille, Martin, Sakina, Valentine, Oriana, Jean-Loup, Pamela, Isma, Roby, ... MERCI!

Enfin, oui il faut que je cesse d'écrire, une dernière dédicace pour ma grand-mère : je suis extrêmement fier d'être ton petit fils et ton premier petit fils docteur, je sais ce que pour toi les études représentaient et je suis persuadé que tu veilles sur nous.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 La piézoélectricité . . . . .	6
1.2 Contrôle actif des structures . . . . .	10
1.3 Les matériaux piézoélectriques à gradient de propriétés (FGPM) . . . . .	14
1.4 Références . . . . .	21
<b>2 Modélisation du FGPM</b>	<b>31</b>
2.1 Description du FGPM : PZT4/Al/PZT4 . . . . .	32
2.2 Modèle de poutre FGPM . . . . .	39
2.3 FEniCS et le modèle de référence 3D FGPM . . . . .	42
2.4 Modèle de plaque FGPM . . . . .	46
2.5 Équations discrétisées des modèles . . . . .	59
2.6 Conclusion . . . . .	60
2.7 Références . . . . .	61
<b>3 Automatisation et Contrôle Actif des vibrations</b>	<b>65</b>
3.1 Représentation d'état du système FGPM . . . . .	67
3.2 Systèmes linéaires commandés-observés . . . . .	70
3.3 Les régulateurs linéaires et la synthèse quadratique . . . . .	73
3.4 La logique floue . . . . .	76
3.5 Le régulateur flou pour la plaque FGPM . . . . .	84
3.6 Optimisation des réseaux d'actionneurs et de capteurs en contrôle actif . . . . .	89
3.7 Conclusion . . . . .	92
3.8 Références . . . . .	93
<b>4 Simulations de Poutres FGPM</b>	<b>95</b>
4.1 Validation et convergence de l'élément fini de poutre . . . . .	96
4.2 Études statiques . . . . .	99
4.3 Contrôle Actif d'une poutre FGPM avec un régulateur LQR . . . . .	101
4.4 Conclusion . . . . .	110
4.5 Références . . . . .	111
<b>5 Simulations de Plaques FGPM</b>	<b>113</b>
5.1 Validation de l'élément fini de plaque FGPM . . . . .	114
5.2 Contrôle Actif d'une plaque FGPM avec contrôleur flou décentralisé . . . . .	124
5.3 Comparaison des différentes distributions pour le contrôleur flou décentralisé . . . . .	131

5.4 Intérêt du régulateur flou vis à vis de la commande LQR . . . . .	138
5.5 Conclusion . . . . .	145
5.6 Références . . . . .	145
<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>147</b>
<b>Publications</b>	<b>151</b>
<b>A Annexes</b>	<b>I</b>
A.1 Le verrouillage numérique d'une poutre en flexion simple . . . . .	I
A.2 Références . . . . .	II

# Liste des figures

1.1	Conception d'un système de contrôle actif . . . . .	10
1.2	Principe de la commande prédictive . . . . .	11
1.3	Principe de la commande prédictive adaptative . . . . .	11
1.4	Principe d'un dispositif de contrôle actif par feedback . . . . .	12
1.5	Micro-structure d'un FGPM, variant du matériau A au matériau B RUBIO et collab. [2009] . . . . .	15
1.6	Concept FGM appliqué au bimorphe actionneur : (a) actionneur classique et (b) actionneur à propriétés graduelles RUBIO et collab. [2009] . . . . .	17
2.1	FGPM PZT4/Alu/PZT4 pour différentes valeurs de $k$ . . . . .	33
2.2	Coupe du FGPM . . . . .	37
2.3	Propriétés matériaux adimensionnelles pour $k = 2$ et $V_T = 0.3$ . . . . .	38
2.4	Degrés de liberté dans une couche p . . . . .	40
2.5	Élément poutre : degrés de liberté . . . . .	42
2.6	Éléments tétraédriques de Lagrange : linéaire, quadratique et cubique . . . . .	43
2.7	Cinématique de Love-Kirchhoff . . . . .	47
2.8	Cinématique de Reissner-Mindlin . . . . .	48
2.9	Élément de plaque : degrés de liberté . . . . .	54
3.1	Conduite d'un véhicule . . . . .	66
3.2	Représentation d'un système asservi . . . . .	67
3.3	Fonction d'appartenance triangulaire . . . . .	78
3.4	Fonction d'appartenance trapézoïdale . . . . .	79
3.5	Fonction d'appartenance gaussienne . . . . .	79
3.6	Fonctions d'appartenance pour la température . . . . .	80
3.7	Structure d'un système d'inférence flou . . . . .	81
3.8	Représentation floue des variables pour un véhicule s'approchant d'un feu rouge . . . . .	82
3.9	Méthode d'inférence de deux règles floues . . . . .	83
3.10	Inférence à deux règles : sortie agrégée . . . . .	83
3.11	Fonctions d'appartenance de $\bar{\alpha}_i$ , $\hat{\alpha}_i$ et $\phi_i^{fuz}$ . . . . .	86
3.12	Surface de réponse du sous-régulateur flou . . . . .	87
3.13	Sous-Régulateur pour le mode i . . . . .	87
3.14	Système plaque contrôlé-observé par un régulateur flou décentralisé . . . . .	89
4.1	Étude du capteur FGPM : Sortie potentiel capteur . . . . .	100
4.2	Étude du capteur FGPM : flèche maximale . . . . .	100
4.3	Étude de l'actionneur FGPM : flèche maximale . . . . .	101
4.4	Diagrammes de Bode pour $k = 0.4$ , $k = 1$ et $k = 5$ , et $V_T = 0.3$ . . . . .	104
4.5	Influence de $k$ : Potentiel capté pour $V_T = 0.3$ . . . . .	105
4.6	Influence de $k$ : Potentiel actionneur injecté pour $V_T = 0.3$ . . . . .	105
4.7	Influence de $k$ : Flèche maximale pour $V_T = 0.3$ . . . . .	106
4.8	Influence de $V_T$ : Potentiel capté pour for $k = 0.7$ . . . . .	106
4.9	Influence de $V_T$ : Flèche maximale pour $k = 0.7$ . . . . .	107



4.10	Influence de $V_T$ : Potentiel actionneur injecté pour $k = 0.7$ . . . . .	107
4.11	Poutre FGPM simplement supportée : Position des électrodes . . . . .	107
4.12	Poutre FGPM simplement supportée, chargement $F_1$ : Énergie mécanique . . . . .	109
4.13	Poutre FGPM simplement supportée, chargement $F_1$ : Énergie électrique . . . . .	109
4.14	Poutre FGPM simplement supportée, chargement $F_2$ : Énergie mécanique . . . . .	109
4.15	Poutre FGPM simplement supportée, chargement $F_2$ : Énergie électrique . . . . .	110
5.1	Mono-couche FGPM : configurations capteur et actionneur (BRISCHETTO et CAR- RERA [2009]) . . . . .	115
5.2	Plaque FGPM équipée de 16 électrodes . . . . .	124
5.3	Modes propres de la plaque FGPM . . . . .	125
5.4	Critères d'optimisation pour la plaque encastrée libre . . . . .	126
5.5	Critères d'optimisation pour la plaque simplement appuyée . . . . .	126
5.6	Étude du spillover plaque simplement appuyée : Déplacements modaux $\alpha_i$ . . . . .	128
5.7	Étude du spillover plaque simplement appuyée : Potentiel actionneur et capteur . . . . .	129
5.8	Étude du spillover plaque simplement appuyée : Flèche . . . . .	130
5.9	Comparaison des distributions plaque simplement appuyée : Déplacements mo- daux $\alpha_i$ . . . . .	132
5.10	Comparaison des distributions plaque simplement appuyée : Potentiel actionneur et capteur . . . . .	133
5.11	Comparaison des distributions plaque simplement appuyée : Flèche . . . . .	134
5.12	Comparaison des distributions plaque encastrée-libre : Déplacements modaux $\alpha_i$ . . . . .	135
5.13	Comparaison des distributions plaque encastrée-libre : Potentiel actionneur et cap- teur . . . . .	136
5.14	Comparaison des distributions plaque encastrée-libre : Flèche . . . . .	137
5.15	Comparaison LQR plaque simplement appuyée : Déplacements modaux $\alpha_i$ . . . . .	139
5.16	Comparaison LQR plaque simplement appuyée : Potentiel actionneur et capteur . . . . .	140
5.17	Comparaison LQR plaque simplement appuyée : Flèche . . . . .	141
5.18	Comparaison LQR plaque encastrée-libre : Déplacements modaux $\alpha_i$ . . . . .	142
5.19	Comparaison LQR plaque encastrée-libre : Potentiel actionneur et capteur . . . . .	143
5.20	Comparaison LQR plaque encastrée-libre : Flèche . . . . .	144

# Liste des tableaux

1.1	Changement d'indice : Notation de Voigt . . . . .	9
3.1	Moteur d'inférence pour la commande $\phi_i^{fuz}$ (ZORIĆ et collab. [2013]) . . . . .	86
4.1	Propriétés matériaux et géométriques . . . . .	96
4.2	Étude de convergence : Flèche maximale ( $mm$ ) d'une poutre encastree-libre ( $V_T = 0.3$ ) . . . . .	97
4.3	Étude de convergence : Fréquences propres (Hz) d'une poutre encastree-libre avec $k = 1$ et $V_T = 0.3$ . . . . .	97
4.4	Étude du capteur FGPM : Convergence du potentiel capté (V) . . . . .	98
4.5	Étude de l'actionneur FGPM : Convergence de la flèche maximale ( $\mu m$ ) . . . . .	98
4.6	Validation élément fini de poutre FGPM . . . . .	98
4.7	Validation fréquences propres pour une poutre FGPM encastree-libre . . . . .	99
4.8	Fréquences propres (Hz) pour la poutre encastree-libre . . . . .	104
4.9	Fréquences propres (Hz) pour la poutre simplement appuyée . . . . .	104
5.1	Propriétés matériaux du PZT4 . . . . .	115
5.2	Configuration capteur valeurs prises à $x = y = 0.25m$ : déplacements plan $u_1$ , déplacement transverse $u_3$ , potentiel électrique $\phi$ , déplacement électrique $D_3$ , contraintes planes $\sigma_{11}$ et $\sigma_{12}$ et contrainte transverse normale $\sigma_{33}$ . . . . .	117
5.3	Configuration capteur valeurs prises à $x = y = 0.25m$ : déplacements plan $u_1$ , déplacement transverse $u_3$ , potentiel électrique $\phi$ , déplacement électrique $D_3$ , contraintes planes $\sigma_{11}$ et $\sigma_{12}$ et contrainte transverse normale $\sigma_{33}$ . . . . .	118
5.4	Configuration actionneur valeurs prises à $x = y = 0.25m$ : déplacements plan $u_1$ , déplacement transverse $u_3$ , potentiel électrique $\phi$ , déplacement électrique $D_3$ , contraintes planes $\sigma_{11}$ et $\sigma_{12}$ et contrainte transverse normale $\sigma_{33}$ . . . . .	119
5.5	Configuration actionneur valeurs prises à $x = y = 0.25m$ : déplacements plan $u_1$ , déplacement transverse $u_3$ , potentiel électrique $\phi$ , déplacement électrique $D_3$ , contraintes planes $\sigma_{11}$ et $\sigma_{12}$ et contrainte transverse normale $\sigma_{33}$ . . . . .	120
5.6	Première fréquence propre adimensionnée par ZHONG et YU [2006] . . . . .	121
5.7	Propriétés matériaux et géométriques . . . . .	121
5.8	Plaque FGPM encastree-libre ( $V_T = 0.3$ ), configuration actionneur . . . . .	122
5.9	Plaque FGPM simplement appuyée ( $V_T = 0.3$ ), configuration actionneur . . . . .	122
5.10	Plaque FGPM encastree-libre ( $V_T = 0.3$ ), configuration capteur : flèche maximale ( $\mu m$ ) . . . . .	122
5.11	Plaque FGPM encastree-libre ( $V_T = 0.3$ ), configuration capteur : potentiel moyen (V) . . . . .	123
5.12	Plaque FGPM simplement appuyée ( $V_T = 0.3$ ), configuration capteur : flèche maximale ( $\mu m$ ) . . . . .	123
5.13	Plaque FGPM simplement appuyée ( $V_T = 0.3$ ), configuration capteur : potentiel moyen (V) . . . . .	123
5.14	Fréquences propres de la plaque encastree-libre, $k = 0.5$ , $V_T = 0.3$ . . . . .	123
5.15	Fréquences propres de la plaque simplement appuyée, $k = 0.5$ , $V_T = 0.3$ . . . . .	123
5.16	Étude du spillover plaque simplement appuyée : choix des actionneurs et capteurs . . . . .	127
5.17	Choix des actionneurs et capteurs pour la plaque simplement appuyée . . . . .	127

5.18 Choix des actionneurs et capteurs pour la plaque encastrée libre . . . . . 128

# Introduction

La présence de vibrations dans de nombreuses applications industrielles est un problème important, pouvant entraîner des dommages ou même les rendre inefficaces à cause de la fatigue des matériaux. Traditionnellement, des techniques d'atténuation passives sont utilisées pour résoudre ce problème. L'exemple le plus classique est l'ajout de masses et d'amortisseurs afin de réduire les vibrations de la structure (MEAD [1999]). Cependant la difficulté de l'atténuation passive réside dans son application dans la bande basses fréquences de la structure (FULLER et collab. [1990]). De plus, le besoin de réduire le poids des structures mécaniques, en particulier dans le domaine spatial est un frein à l'utilisation des méthodes passives (BRENNAN et collab. [1992], REZA et collab. [2003]).

Dans ce contexte les méthodes de contrôle actif apparaissent a priori plus adaptées, afin d'atténuer le niveau des vibrations et de préserver l'intégrité de la structure. Le développement des techniques de contrôle actif des vibrations va de pair avec l'apparition des matériaux dits intelligents. Ceux-ci doivent leur nom à leur capacité de modifier spontanément leur propriétés physiques (forme, conductivité, couleur, ...) en réponse à des sollicitations naturelles ou provoquées. On peut citer les matériaux piézoélectriques, électrostrictifs, magnétostrictifs, à mémoire de forme, etc. Parmi ces matériaux, les matériaux piézoélectriques sont largement utilisés car ils sont faciles à intégrer à la structure hôte à réguler et efficaces sur une large bande de fréquences, et modifient peu le comportement de la structure.

De nombreux travaux (SONG et collab. [2006]) montrent la faisabilité et l'efficacité du contrôle actif de structures à l'aide matériaux piézoélectriques. En général, la structure à contrôler est équipée de pastilles piézoélectriques qui sont utilisées comme capteurs et actionneurs. Le système de commande associé à la structure est informé de l'état de celle-ci par l'intermédiaire des capteurs et peut réagir en retour grâce aux actionneurs. L'ensemble formé de la structure à contrôler et les pastilles est appelé structure intelligente. Mais celle-ci souffre de quelques inconvénients :

- Le changement brutal de matériau entre la structure hôte et les pastilles piézoélectriques entraîne des concentrations de contraintes aux interfaces (HAUKE et collab. [2000], TAKAGI et collab. [2002]).
- Les pastilles piézoélectriques placées sur la structure peuvent se détacher, dû aux conditions externes (température, fatigue) (QIU et collab. [2003]).

Le travail effectué ici, s'inscrit dans ce contexte et propose, grâce à l'utilisation d'un matériau piézoélectrique à gradient de propriétés ("Functionally Graded Piezoelectric Material" : FGPM), de supprimer ces inconvénients. Ces matériaux à gradient de propriétés permettent une transition d'un matériau A à un matériau B de façon graduelle, sans changement brutal de propriétés. Le but est de remplacer les structures intelligentes classiques, par une structure formée d'un seul bloc, fabriquée à partir d'un FGPM intégrant directement les propriétés piézoélectriques et de montrer la faisabilité du contrôle actif des vibrations avec cette nouvelle structure. Les propriétés piézoélectriques de ces matériaux sont activées via des électrodes (fin dépôt métallique) déposées sur les surfaces extérieures. L'un des intérêts des FGPM réside dans le fait de pouvoir dessiner de multiples électrodes à la surface de la structure. Celles-ci peuvent alors être utilisées à la fois pour des capteurs ou pour des actionneurs.

Cette étude porte donc sur la modélisation des matériaux à gradient de propriétés et le contrôle actif des vibrations de structures FGPM élancées (poutre et plaque), à l'aide des propriétés piézo-

électriques internes du matériau.

Les objectifs de ce travail de thèse sont :

- de modéliser les lois de comportement graduelles du FGPM,
- de développer une modélisation élément fini de structures élancées composées de matériau FGPM,
- de développer des outils de contrôle actif des vibrations adaptés à ce type de structures.

D'une façon plus précise, ce document est structuré en cinq chapitres :

Le **chapitre 1** présente l'état de l'art sur le contrôle actif des vibrations de structures FGPM. On rappelle dans un premier temps les lois de comportement piézoélectriques à partir de la théorie classique de l'électromagnétisme et de la mécanique. Ces lois reflètent la double fonctionnalité des matériaux piézoélectriques pouvant être utilisés comme capteurs et comme actionneurs. Puis de façon générale, les différentes étapes de la mise en place du contrôle actif classique des structures sont présentées. Après une introduction des matériaux à gradient de fonction (FGM et FGPM), on détaille le contrôle actif des structures FGPM.

Le **chapitre 2** est consacré à la modélisation du FGPM et des structures FGPM élancées (poutre et plaque). On présente tout d'abord les lois d'homogénéisation du FGPM utilisé dans ce travail, mélangeant une céramique piézoélectrique (du PZT4) et un métal (de l'aluminium). La prise en compte de ces lois est le principal problème lors de la modélisation de structures FGPM par la méthode des éléments finis. Les logiciels éléments finis du commerce ne permettent qu'une modélisation multi-couches de ce type de matériau. C'est à dire, comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes collées entre elles, chaque couche ayant des propriétés matériaux différentes et homogènes, correspondantes à l'intégration de la loi graduelle dans la couche. C'est pourquoi nous avons développé deux éléments finis dans ce travail de thèse :

- un élément de poutre, basé sur la cinématique de Timoshenko et avec une approximation par couches numériques pour le potentiel électrique, a été développé dans le logiciel Matlab,
- un élément de plaque, basé sur une cinématique adaptative (modèle de Reissner-Mindlin ou modèle d'ordre supérieur) et avec une approximation par couches numériques pour le potentiel électrique, a été développé dans le logiciel FEniCS.

Ces deux modèles éléments finis permettent d'obtenir les équations discrétisées du problème et la base modale de la structure, qui seront utilisées pour créer la représentation d'état du système, nécessaire à la mise en place du contrôle actif.

L'objet du **chapitre 3** est de rappeler les notions fondamentales de l'automatique utilisées dans la suite de ce travail. Le contrôle actif des vibrations nécessite la mise en œuvre d'une loi de commande (ou régulateur) gérant les tensions électriques à appliquer aux actionneurs en tenant compte des informations mesurées par les capteurs. Ces dernières sont en pratique insuffisantes pour connaître l'état complet de la structure, on doit également construire un dispositif appelé observateur qui fournira une estimation de l'état de la structure. On propose donc de construire un système observateur-régulateur formé d'un observateur de Luenberger et :

- dans la cas de la poutre, d'un régulateur linéaire quadratique (LQR) basé sur la méthode de la synthèse quadratique, consistant à rechercher une commande optimale minimisant un critère quadratique de l'état de la commande. Ce problème de minimisation nécessite la résolution d'une équation algébrique de Riccati,
- dans le cas de la plaque, d'un régulateur flou décentralisé, basé sur la logique floue introduite par le Pr Zadeh (1968) et sur les connaissances humaines du système à contrôler. Il a été développé spécifiquement pour la gestion d'un grand nombre d'actionneurs et permet un contrôle adaptatif et efficace.

Le **chapitre 4** présente les résultats des simulations effectuées sur la poutre FGPM, modélisée grâce à l'élément fini présenté dans le chapitre 2. Après une étape de validation de cet élément, des études statiques paramétriques sont menées sur l'efficacité de l'actionneur et sur la sensibilité du capteur.

Le contrôle actif de cette poutre FGPM est mis en œuvre grâce à un régulateur LQR et un observateur de Luenberger, présentés dans le chapitre 3. Des études paramétriques sont également menées pour deux configurations (encastree-libre et simplement appuyée), sur le contrôle actif de la poutre FGPM. Cette première étude de faisabilité montre l'efficacité des structures FGPM en contrôle actif.

Le **chapitre 5** présente les résultats numériques de la plaque FGPM. Celle-ci est modélisée grâce à l'élément fini présenté dans le chapitre 2. L'élément fini est validé par comparaison avec une solution analytique pour un matériau FGPM composé d'un seul composant et variant avec une loi exponentielle. À notre connaissance il n'existe pas dans la littérature de résultats analytiques pour le FGPM présenté dans cette thèse (PZT4/Alu/PZT4). Un élément 3D développé sous FEniCS est donc utilisé comme référence.

Le contrôle actif de cette plaque est ensuite mis en œuvre grâce à un régulateur flou décentralisé et un observateur de Luenberger. Plusieurs simulations sont effectuées pour comparer les différentes distributions du potentiel maximal pour ce régulateur et également pour le comparer à un régulateur LQR. Les simulations montrent l'efficacité de ce régulateur et sa capacité à s'adapter facilement aux changements brutaux de perturbations extérieures.



# Chapitre 1

## État de l'art

*« The thing about quotes on the internet is that you can not confirm their validity »*

---

Abraham Lincoln

### Sommaire

---

<b>1.1 La piézoélectricité</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1.1 Équations générales d'un problème piézoélectrique . . . . .	7
1.1.2 Formulation variationnelle 3D . . . . .	9
<b>1.2 Contrôle actif des structures</b> . . . . .	<b>10</b>
1.2.1 Modélisation de la structure . . . . .	10
1.2.2 Architecture de la commande . . . . .	11
1.2.3 Les régulateurs à retour d'état . . . . .	13
<b>1.3 Les matériaux piézoélectriques à gradient de propriétés (FGPM)</b> . . . . .	<b>14</b>
1.3.1 Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) . . . . .	15
1.3.2 Les matériaux piézoélectrique à gradient de propriétés (FGPM) . . . . .	16
1.3.3 La modélisation des FGPM . . . . .	17
1.3.4 Le contrôle actif et les FGPM . . . . .	19
<b>1.4 Références</b> . . . . .	<b>21</b>

---



Les techniques de contrôle actif ont été développées afin d'atténuer le niveau des vibrations et de préserver l'intégrité d'une structure. Contrairement au contrôle passif, les techniques actives sont basées sur l'apport d'une énergie extérieure au système. L'utilisation de matériaux intelligents est au cœur de ces techniques. Ce sont des matériaux sensibles, adaptatifs et évolutifs. Ils possèdent des fonctions leur permettant de se comporter comme capteurs (détecter des signaux), comme actionneurs (effectuer une action sur l'environnement) ou parfois comme processeurs (traiter, comparer, stocker des informations). Ces matériaux sont capables de modifier spontanément leurs propriétés physiques, par exemple leur forme, connectivité, viscoélasticité ou couleur, en réponse à des excitations naturelles ou provoquées venant de l'extérieur ou de l'intérieur du matériau. Ceux-ci utilisés comme actionneurs et capteurs permettent de réduire les vibrations de la structures et de nombreuses études ont montré leur efficacité (MUHAMMAD et collab. [2006], SONG et collab. [2006], MOON et collab. [2007], ABDULLAH et collab. [2015]).

Une structure intelligente est ainsi constituée généralement d'une structure hôte et d'une partie active distribuée, formée de matériaux intelligents travaillant comme capteurs et actionneurs. Le haut degré d'intégration de la partie active à l'intérieur de la structure implique une modélisation couplée de la structure. Les mesures effectuées par les capteurs sont envoyées à un régulateur commandant les actionneurs afin d'obtenir la réponse structurelle désirée. Il existe beaucoup d'applications de contrôle actif dans différents domaines tels que : les voitures OLSSON [2005], les télescopes PREUMONT [2011], la marine DALEY et collab. [2004], FARD [2002], les hélicoptères PETITJEAN et collab. [2002], le secteur militaire CHOMETTE et collab. [2010], la musique JOSSIC [2017] ...

Les matériaux intelligents pouvant être utilisés comme partie active sont des matériaux où les déformations peuvent être induites par différents mécanismes tels que la variation de température, un champ électrique ou magnétique, ..., introduisant automatiquement un couplage dans leur équations constitutives. On peut citer les matériaux à mémoire de forme, les matériaux magnétostrictifs, les fluides magnéto-rhéologiques et les matériaux piézoélectriques.

Ces derniers sont le choix de nombreux chercheurs en contrôle actif de vibrations, à la fois comme capteurs et actionneurs, grâce à l'effet piézoélectrique direct (production d'un champ électrique lorsqu'ils sont déformés) et l'effet inverse (déformation sous l'effet d'un champ électrique). Un des principaux avantages de ces matériaux réside dans leur faculté d'intégration au sein de la structure à réguler. En effet, collés ou inclus dans la structure en faible épaisseur, ils ne modifient pas de manière significative la masse et le comportement mécanique de la structure. De plus, même s'ils ne sont pas très puissants en général (ne pouvant s'allonger que de quelques  $\mu m$ ), ils répondent en quelques  $\mu s$  avec une grande précision et ce sur une large bande de fréquences. Enfin, ils sont peu sensibles aux variations de température (pour des températures inférieures à leur température de Curie). L'intérêt porté aux matériaux piézoélectriques depuis de nombreuses années a permis d'en faire un matériau peu coûteux (HALIM et MOHEIMANI [2001]) et a ainsi facilité le développement de structures intelligentes piézoélectriques (FULLER et collab. [1990], MOHEIMANI et collab. [1998], HALIM et MOHEIMANI [2001], GOSAVI et KELKAR [2001], PETERSEN et POTA [2003], ARIDOGAN et BASDOGAN [2015], CHOI et HAN [2016], LIN et JHENG [2017]).

Avant de traiter plus précisément de contrôle actif des vibrations avec des matériaux piézoélectriques, il apparaît nécessaire de préciser les relations caractéristiques du phénomène piézoélectrique et ses équations générales.

## 1.1 La piézoélectricité

L'effet piézoélectrique a été découvert en 1880 par les physiciens Pierre et Jacques Curie (MASSON [1980]), qui remarquèrent que certains cristaux présentaient un phénomène d'électrification lorsqu'ils étaient comprimés. Ce phénomène fut appelé piézoélectricité, le préfixe "piézo" provenant du mot grec signifiant "pression". L'effet inverse fut pressenti par Gabriel Lippmann et vérifié par les frères Curie : quand un champ électrique est appliqué à un matériau piézoélectrique sa taille et sa forme sont modifiées.

La piézoélectricité peut donc être définie comme l'interdépendance entre les propriétés mécaniques et électriques que possèdent certaines classes de matériau. Elle se traduit par deux effets complémentaires. Le premier est l'effet direct qui correspond à l'apparition d'une tension électrique lorsqu'on applique un effort mécanique au matériau. Le second est l'effet inverse : il correspond à une dilatation ou à une contraction du matériau lorsqu'on lui applique une différence de potentiel. Ces deux effets offrent la possibilité d'utiliser les matériaux piézoélectriques comme capteurs ou actionneurs. En effet, la charge électrique générée en déformant le matériau collé à une structure peut être mesurée à l'aide d'électrodes. Le milieu piézoélectrique informe alors sur la déformation subie par la structure ; il est dans ce cas utilisé comme capteur. A l'inverse, en appliquant un champ électrique à un milieu piézoélectrique couplé à une structure, le matériau et la structure peuvent s'étirer ou fléchir. Le milieu piézoélectrique joue dans ce cas le rôle d'actionneur. Il existe dans la nature différentes classes de matériaux ayant de façon plus ou moins marquée des propriétés piézoélectriques. Parmi ceux-ci, citons : des cristaux solides, comme le quartz, le sel de Rochelle et le cristal de tourmaline, des matériaux non cristallins, comme le caoutchouc, le verre, le bois, les os et la laine.

Actuellement ce sont les céramiques polycristallines comme le titanozirconate de plomb PZT et les polymères piézoélectriques (PVDF) qui sont utilisés car ils ont de fortes propriétés piézoélectriques. Ces matériaux apportent un grand nombre d'avantages : ils sont durs, denses, et peuvent être fabriqués sous diverses tailles ou forme, mais surtout, leurs propriétés électriques peuvent être choisies avec précision par rapport à leur géométrie. Ces matériaux sont rendus piézoélectriques après polarisation. La polarisation est un traitement qui consiste à appliquer un très fort champ électrique puis à l'annuler, créant ainsi une polarisation rémanente dans le matériau. L'application du champ électrique induit l'alignement des dipôles présents dans le matériau suivant un axe privilégié (axe de polarisation). Ces matériaux peuvent se dépolariser sous l'effet de conditions extrêmes : sous un effort extrêmement important, lorsqu'ils sont soumis à une température au dessus d'une température limite, appelée température de Curie et sous l'application d'un trop fort champ électrique.

### 1.1.1 Équations générales d'un problème piézoélectrique

Le problème de piézoélectricité peut être considéré comme une généralisation du problème élastique. Pour prendre en compte les effets capteurs et actionneur, on introduit avec les lois de comportement élastique, celle de couplages élasto-magnéto-électriques et celles régissant le comportement électromagnétique. On considère dans la suite un milieu  $\Omega$ , délimité par une frontière  $\Gamma$  de normale  $\mathbf{n}$ .

#### 1.1.1.a Considérations mécaniques

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{T} \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{T}$  sont respectivement le déplacement, le tenseur des contraintes de Cauchy, les efforts volumiques, la masse volumique et la densité d'effort surfacique sur  $\Gamma$ .

On fait également l'hypothèse des petites déformations, où le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est donné par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{u} + \mathbf{grad}^t \mathbf{u}) \quad (1.3)$$

### 1.1.1.b Considérations électriques

La théorie classique de l'électromagnétisme se traduit par les équations de Maxwell (FEYNMAN [1969]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathit{div} \mathbf{D} = \rho_e \\ \mathit{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{E}$  est le vecteur champ électrique,  $\mathbf{H}$  le vecteur champ magnétique,  $\mathbf{D}$  le vecteur déplacement électrique ou induction,  $\mathbf{B}$  le vecteur induction magnétique,  $\mathbf{J}$  le vecteur densité de courant électrique et  $\rho_e$  la densité volumique de charges électriques libres.

Comme mentionné précédemment, dans un milieu piézoélectrique  $\Omega$  il y a un couplage entre la déformation élastique et le champ électrique. Le problème de propagation de ces champs devrait être traité en résolvant simultanément les équations de la dynamique et les équations de Maxwell, qui régissent l'électromagnétisme. Cependant, en raison des vitesses des ondes élastiques (liées à un déplacement de la matière) qui sont  $10^{-4}$  à  $10^{-5}$  fois plus petites que les vitesses des ondes électromagnétiques, nous pouvons négliger le champ magnétique associé aux vibrations mécaniques (AULD [1973], ROYER et DIEULESAINT [1996]). On considère donc que les champs électromagnétiques sont établis à chaque instant de déformation considéré. Par conséquent, seul le champ électrique associé aux vibrations mécaniques est pris en compte. On peut donc utiliser l'hypothèse quasi statique des phénomènes électriques permettant de découpler les ondes élastiques des ondes électromagnétiques. L'équation (1.4)<sub>2</sub> se réduit dans ce cas à  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$ , impliquant alors que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire  $\phi$  :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi \quad \text{dans } \Omega \quad (1.5)$$

où  $\phi$  est le potentiel électrique.

Les milieux piézoélectriques sont des milieux isolants, contenant autant de charges positives et négatives, ils sont donc neutres électriquement et ne conduisent pas le courant électrique. Par conséquent,  $\mathit{div} \mathbf{D} = \rho_e = 0$ . D'autre part, les phénomènes magnétiques dans les milieux piézoélectriques sont négligés, seules les équations électrostatiques sont alors prises en compte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi \quad \text{dans } \Omega \\ \mathit{div} \mathbf{D} = 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

### 1.1.1.c Lois de comportement

Les matériaux piézoélectriques étant peu influencés par les variations de température inférieures à la température de Curie, leur comportement peut être modélisé en première approximation par les lois suivantes (on néglige également l'hystérésis) (ROYER et DIEULESAINT [1996]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{e}\mathbf{E} \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{D} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{C}$ ,  $\boldsymbol{e}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$  sont respectivement le tenseur de raideur élastique à champ électrique constant, le tenseur de couplage électro-mécanique à déformations constantes et le tenseur des constantes diélectriques à déformations constantes ou tenseur des permittivités. Ces tenseurs vérifient les relations de symétrie suivantes (conséquence de l'existence de l'énergie interne de déformations) :

$$\begin{aligned}
 C_{ijkl} &= C_{ijlk} = C_{jikl} = C_{klij} \\
 e_{ijk} &= e_{ikj} \\
 \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ji} \\
 &\text{avec } i, j, k, l = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

### 1.1.1.d Notation de Voigt

Afin d'alléger la notation de ces lois de comportement, nous pouvons utiliser la notation de Voigt, dont le changement d'indice est précisé dans la Table 1.1.

(ij)	(11)	(22)	(33)	(23),(32)	(13),(31)	(12),(21)
p/q	1	2	3	4	5	6

Table 1.1 – Changement d'indice : Notation de Voigt

La loi de comportement piézoélectrique s'écrit alors, en considérant la convention d'Einstein :

$$\sigma_p = C_{pq} \epsilon_q - e_{kp} E_k \quad p, q = 1, \dots, 6 \tag{1.9}$$

$$D_i = e_{iq} \epsilon_q + \epsilon_{ik} E_k \quad i, k = 1, 2, 3 \tag{1.10}$$

Pour un matériau piézoélectrique orthotrope, comme les céramiques PZT (utilisées dans ce travail) et les polymères PVDF, les tenseurs de raideur élastique, de constantes piézoélectriques et diélectriques s'expriment comme (IKEDA [1990]) :

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}
 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$$e = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\
 e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix}
 \epsilon_{11} & 0 & 0 \\
 0 & \epsilon_{22} & 0 \\
 0 & 0 & \epsilon_{33}
 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

### 1.1.2 Formulation variationnelle 3D

En injectant la loi de comportement dans les équations d'équilibre puis en les intégrant sur le domaine  $\Omega$  et en multipliant par les fonctions tests  $u^*$  et  $\phi^*$  on obtient la formulation variationnelle suivante (TIERSTEN [2013]), qui sera le point de départ de la méthode des éléments finis :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot u^* d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}(u^*) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\phi^*) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega \tag{1.14}$$

$$\forall u^*, \phi^* \text{ admissibles}$$

Ayant rappelé les équations gouvernant la piézoélectricité, on s'intéresse dans la section suivante au contrôle actif des vibrations principalement à l'aide de matériaux piézoélectriques.

## 1.2 Contrôle actif des structures

Les matériaux piézoélectriques, comme les céramique PZT et les polymères PVDF sont largement utilisés en contrôle actif de structures élancées (poutres, plaques et coques), grâce à leur capacité d'actionnement et de mesure. Tout système de contrôle actif, utilisant n'importe quel matériau intelligent en tant qu'actionneur et capteur, comporte les mêmes étapes de mise en place (Figure 1.1). Un scénario typique est le suivant :

1. Analyse du système à contrôler en vibration, i.e machine ou structure.
2. Obtention d'un modèle mathématique idéalisé du système, via une analyse numérique (éléments finis) ou une analyse modale expérimentale, et réduction du modèle si nécessaire.
3. Analyse du modèle obtenu : détermination de ses propriétés, des caractéristiques dynamiques, des types de perturbations et des réponses du système.
4. Détermination du nombre de capteurs et actionneurs nécessaire, de leur type et de leur placement.
5. Analyse de l'influence des capteurs et des actionneurs sur les caractéristiques dynamiques du système.
6. Conception du régulateur/de la commande : choix du type d'algorithme de contrôle et conception du contrôleur répondant aux spécifications.
7. Implémentation numérique de la commande.
8. Simulations numériques du système à contrôler ou expérimentations
9. Si le régulateur ne répond pas aux spécifications : correction des spécifications ou modification de la commande. On réitère les deux dernières étapes.

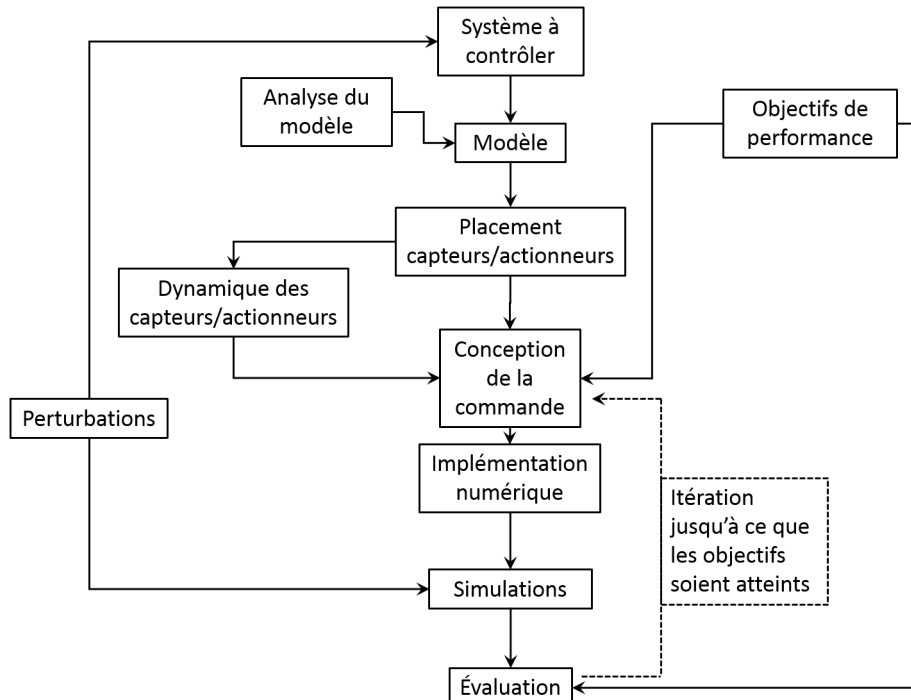


FIGURE 1.1 – Conception d'un système de contrôle actif

### 1.2.1 Modélisation de la structure

La première étape dans la conception d'un système de contrôle actif est la caractérisation dynamique de la structure intelligente : structure hôte équipée de capteurs et d'actionneurs (fait

de matériaux intelligents). Celle-ci est menée grâce à des outils numériques et/ou de façon expérimentale (REYNDERS [2012], GIBERT [2001]), et détermine les caractéristiques vibratoires de la structure. Les systèmes étant souvent assez complexes, on utilise généralement au niveau numérique, des techniques de discrétisation comme la méthode des éléments finis, permettant d'approximer et de résoudre les équations aux dérivées partielles régissant le système. L'étape suivante est la réduction du modèle afin d'avoir une implémentation de la commande rapide et efficace. Cette réduction doit prendre en compte la gouvernabilité et l'observabilité du système. La dernière étape est la conception de la commande, où le but est de paramétrer les algorithmes de contrôle pour satisfaire les objectifs de performances fixés et de robustesse.

## 1.2.2 Architecture de la commande

Il existe deux types d'architecture de la commande pour le contrôle actif des vibrations : la commande à retour d'état (feedback control) ou la commande prédictive (feedforward control). Sommairement, les algorithmes par retour d'état sont basés sur la mesure de la réponse du système ; alors que les algorithmes prédictifs sont basés sur la mesure des perturbations.

### 1.2.2.a Commande prédictive ou feedforward control

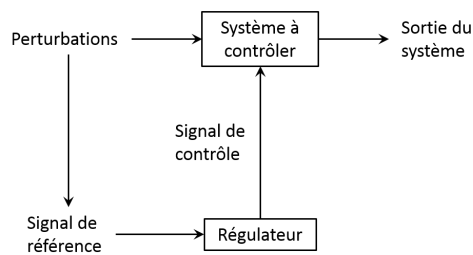


FIGURE 1.2 – Principe de la commande prédictive

La Figure 1.2 illustre le principe de base du contrôle actif de type feedforward. Il repose sur la connaissance d'un signal de référence corrélé à la perturbation. Des systèmes existent où la perturbation est prévisible. Cela est notamment courant dans deux types de systèmes :

- quand le contrôle concerne le bruit ou les vibrations d'une machine tournante, la perturbation tend alors à être harmonique.
- quand la perturbation se propage de telle sorte qu'elle est en tout point du système fonction de sa valeur en amont.

Les dispositifs de contrôle prédictifs sont le plus souvent adaptatifs, et sont représentés par la Figure 1.3.

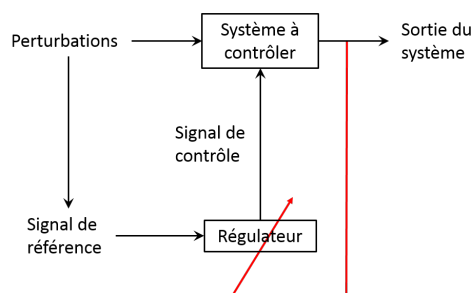


FIGURE 1.3 – Principe de la commande prédictive adaptative

Le régulateur exploite alors en plus du signal de référence, les informations fournies par la mesure de la réponse du système pour construire le signal de contrôle. Les vibrations engendrées par

les actionneurs se superposent alors aux perturbations afin de les atténuer. Le mouvement résiduel est ensuite mesuré par des capteurs d'erreur placés en aval des actionneurs, et utilisé pour ajuster les coefficients du régulateur au cours du temps. Ce type de commande est dit adaptatif parce qu'il tient compte des éventuelles variations des perturbations.

Les coefficients du régulateur sont typiquement optimisés à partir du principe de descente de gradient, visant à minimiser une fonction quadratique des échantillons d'erreur mesurés. La forme la plus courante d'algorithme de commande adaptative est celle utilisant un algorithme basé sur les moindres carrés (LMS, Least Mean Square) (ELLIOTT et collab. [1987], KUO et MORGAN [1995]). Des exemples typiques de contrôle actif avec une commande prédictive sont données par les auteurs suivants : ELLIOTT et BILLET [1993], ALKHATIB et GOLNARAGHI [2003], DE OLIVEIRA et collab. [2009], ELLIOTT et SUTTON [1996], LEE et HALIM [2004], OKUMURA et collab. [2008]. Cette approche prédictive ne sera pas considérée dans ce travail, car les perturbations extérieures sont considérées comme des entrées et on n'a pas accès à un signal de référence corrélé aux perturbations.

### 1.2.2.b Commande par retour d'état ou feedback control

L'approche feedback (Figure 1.4), contrairement aux méthodes feedforward, permet d'agir sur le comportement vibratoire des structures seulement avec la mesure de sortie du système et même si aucune information n'est disponible à propos des perturbations. La démarche pour amortir les vibrations est donc d'engendrer à chaque instant  $t$  un signal de correction en observant l'évolution temporelle du système, à savoir son état ou bien sa sortie. Plusieurs techniques ont été développées pour déterminer le régulateur dans ces conditions.

Dans ce travail, on s'intéresse particulièrement aux régulateurs optimaux et aux régulateurs intelligents. Ceux-ci sont capables d'agir sur l'état d'un système afin que son évolution temporelle tende vers une trajectoire désirée. Dans le cas du contrôle actif de structure, cette méthode est généralement utilisée pour que la mesure des vibrations de la structure s'approche d'un signal de référence appelé consigne. Typiquement on recherche un régulateur minimisant le plus rapidement possible :

- l'erreur entre la sortie et la consigne,
- l'amplitude de la commande.

Le régulateur prend généralement comme entrée l'état du système, estimé si nécessaire à partir de la mesure des entrées et des sorties.

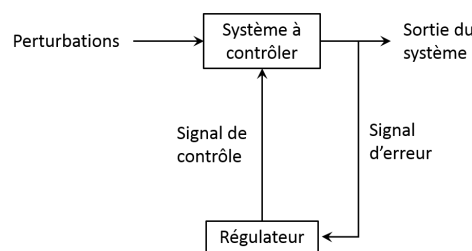


FIGURE 1.4 – Principe d'un dispositif de contrôle actif par feedback

On définit la représentation d'état d'un système dynamique en boucle fermée. Elle s'écrit de la façon suivante (D'ANDRÉA NOVEL et DE LARA [2000]) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{F}_e \quad (1.15)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{x}$  est la variable d'état,  $\mathbf{y}$  la sortie mesurée (i.e le déplacement, la vitesse, l'accélération, la déformation),  $\mathbf{u}$  la commande envoyée au régulateur et  $\mathbf{F}_e$  la perturbation extérieure (i.e forces ou moments mécaniques extérieures).  $\mathbf{A}$  représente la matrice d'état,  $\mathbf{B}$  la matrice de commande,  $\mathbf{C}$  la matrice d'observation et  $\mathbf{D}$  la matrice d'action directe.

### 1.2.3 Les régulateurs à retour d'état

Les régulateurs par retour d'état nécessitent une modélisation et identification de la structure intelligente (partie passive et partie active intégrée), car les paramètres du régulateur sont déterminés à partir de ce modèle (ARIDOGAN et BASDOGAN [2015]).

#### 1.2.3.a Le régulateur "negative velocity feedback"

Un des régulateurs par retour d'état couramment utilisé et facile à mettre en place est le régulateur basé sur la mesure de la vitesse (negative velocity feedback). Dans celui-ci, on considère que la commande  $u$  suit la loi suivante :

$$u = -G\dot{y} \quad (1.17)$$

où  $G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_n)$  est la matrice de gain par retour d'état. Les coefficients constants  $G_i$  sont les gains individuels du  $i^{\text{ème}}$  actionneur et sont déterminés par l'utilisateur par essais successifs jusqu'à obtention de la dynamique voulue par rapport à une sollicitation externe connue. Il existe également des régulateurs suivants la même construction basés sur la mesure du déplacement (negative displacement feedback) et sur la mesure du déplacement et de la vitesse en même temps (negative displacement and velocity feedback).

Dans ce travail, on s'intéresse à des régulateurs par retour d'état moins empiriques que sont les régulateurs optimaux et les régulateurs intelligents.

#### 1.2.3.b Les régulateurs optimaux

Les régulateurs optimaux doivent être construits en garantissant à la fois des performances optimales et une robustesse aux variations des paramètres et aux incertitudes. Cependant, il y a toujours des compromis à faire entre performances et robustesse, c'est un des principaux challenges du processus de création de ce type de régulateur (BOULET et DUAN [2007]). En effet, performances et robustesse sont inversement proportionnelles : si le régulateur est très robuste les performances sont faibles et inversement. Ainsi, le but principal dans la construction d'un régulateur optimal est de développer un régulateur ayant des performances optimales en présence d'incertitudes et du cahier des charges (performances minimales exigées). Dans la littérature sur le contrôle en ingénierie, des groupes de recherche se sont penchés sur l'analyse des performances et de robustesse des régulateurs : BALAS et DOYLE [1990], BOULET et DUAN [2007], SANA et RAO [2001].

LIONS [1968] est le premier à avoir présenté une étude complète sur la conception d'un régulateur robuste et optimal, en appliquant la théorie des espaces de Hardy. Cette méthode est devenue une norme dans la conception de ce type de régulateurs. Cette méthode de conception de régulateur robuste est appliquée depuis la parution de l'article, et ce dans de nombreux cas, comme par exemple dans : BALAS [1990], BALAS et DOYLE [1990], HU et NG [2005], SANA et RAO [2001], ZHANG et collab. [2001], ZHANG et collab. [2004]. On peut citer parmi ces régulateurs robustes : le régulateur  $H^\infty$  et le régulateur  $H^2$ .

Deux autres régulateurs optimaux très souvent utilisés, le régulateur quadratique linéaire (LQR) et le régulateur quadratique gaussien (LQG) sont basés sur la minimisation de la fonction coût quadratique suivante :

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^t \mathbf{R} \mathbf{u} dt \quad (1.18)$$

où  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont des matrices définies positives de pondération des variables d'état et de la commande respectivement. Le régulateur LQR permet d'aboutir à une commande faisant le compromis entre l'énergie de vibration (premier terme de la fonction coût) et de l'énergie délivrée aux actionneurs. Le régulateur LQG est une extension du régulateur LQR, prenant en compte le caractère stochastique des bruits de mesure. Le critère d'optimalité est alors porté sur l'espérance mathématique du critère quadratique. De nombreux auteurs utilisent ces deux régulateurs, on peut citer : KONDOH et collab. [1990], LIEW et collab. [2003], KUSCULUOGLU et ROYSTON [2005],



VASQUES et RODRIGUES [2006], CHOMETTE et collab. [2008], PREUMONT [2011].

Dans ce travail, un régulateur LQR sera utilisé pour le contrôle d'une poutre FGPM équipée d'un actionneur et d'un capteur, en raison de sa facilité d'implémentation et d'utilisation, sa robustesse et sa stabilité.

### 1.2.3.c Les régulateurs intelligents

Les régulateurs intelligents visent à émuler l'intelligence humaine (adaptation et apprentissage), grâce à l'utilisation de la logique floue, les réseaux neuronaux, ou les algorithmes génétiques (FU [1971], FENG [2006], LINKENS et NYONGESA [1996]). Un régulateur intelligent idéal a les capacités suivantes :

- reconnaître l'état dynamique de la structure,
- identifier les perturbations internes et externes,
- détecter les changements de propriétés structurelles et des perturbations,
- prendre des décisions "intelligentes" en ce qui concerne les perturbations et les forces d'actionnement adaptées,
- identifier des défaillances potentielles et leurs causes,
- réparer les défaillances et/ou informer sur celles-ci,
- apprendre des performances antérieures en vue d'améliorer les futures actions.

Les réseaux de neurones artificiels ont été développés dans l'idée de reproduire le fonctionnement biologique du cerveau humain, fabriquant ainsi des systèmes apprenant par expérience. La logique floue a été développée dans l'idée de traiter des informations linguistiques vagues et imprécises.

Les régulateurs intelligents dans le contrôle actif des vibrations sont de plus en plus utilisés, on peut citer :

- Avec un régulateur basé sur la logique floue : CAO et collab. [1999], ALDAWOD et collab. [2001], LIN [2005], SHARMA et collab. [2005], BECERIKLI et CELIK [2007], LI et collab. [2011], ZORIĆ et collab. [2013], THENOZHI et YU [2015], SUSHEEL et collab. [2016],
- Avec un régulateur basé sur les réseaux neuronaux : AHN et collab. [1996], MA et SINHA [1996], LEE [1996], CHEONG et CHO [1997], NORGAARD et collab. [2000], AL-NASSAR et collab. [2000], MURADOVA et collab. [2017],
- Avec un régulateur couplant la logique floue et les réseaux de neurones : JANG [1993] DARUS et TOKHI [2005], les algorithmes génétiques : POURZEYNALI et collab. [2007].

Dans ce travail, un régulateur flou sera utilisé pour le contrôle d'une plaque FGPM équipée d'une multitude d'actionneurs et de capteurs, en raison de sa facilité à utiliser un grand nombre d'actionneurs et sa capacité à s'adapter.

## 1.3 Les matériaux piézoélectriques à gradient de propriétés (FGPM)

Les matériaux peuvent être classés en quatre grandes catégories : les métaux, les céramiques, les polymères et les composites. Contrairement aux propriétés matériaux des métaux, des céramiques et des polymères, les matériaux composites possèdent des propriétés résultants de la combinaisons de leurs constituants. On peut les classer en trois catégories : les composites à matrice métallique, céramique ou organique. Les propriétés des matériaux composites, comme par exemple : la résistance et la raideur, bouclier thermique, etc, peuvent être adaptées en incorporant des particules de céramiques ou des fibres de renforcement.

Les FGMs font partie d'une nouvelle classe de matériaux composites, où la composition du matériau et/ou la microstructure varient localement afin de réguler les propriétés mécaniques et physiques dans le matériau à un endroit spécifique (VIEIRA et collab. [2009] RAJAN et collab. [2008] NAI et collab. [2004]).

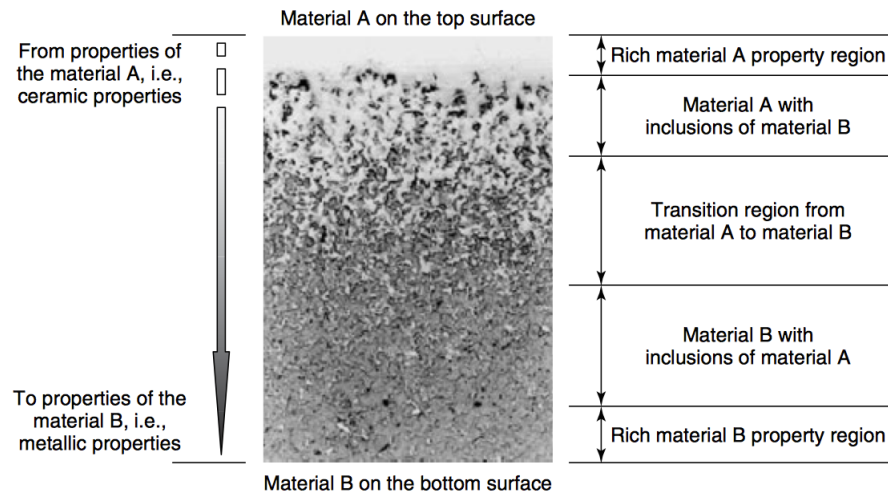


FIGURE 1.5 – Micro-structure d'un FGPM, variant du matériau A au matériau B RUBIO et collab. [2009]

### 1.3.1 Les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

Les structures graduelles sont prévalentes dans la nature : bambou, dent, os, bois sont des FGM naturels. La dent est un excellent exemple de FGM naturel. En effet, elle requière une grande résistance à la friction et aux impacts sur la partie extérieure et une structure interne flexible pour des raisons de fatigue et de dureté.

Dans l'ingénierie, le concept de FGM est apparu en 1984-1985, lorsque les chercheurs japonais dans l'aérospatiale ont eu besoin d'un matériau pouvant supporter le gradient de température généré lors du retour d'une navette sur Terre. Dans ce cas le gradient de température est d'environ 1000°C entre l'extérieur et l'intérieur de la navette. Ils ont donc créé une structure en FGM ayant des propriétés d'une céramique (grande résistance au gradient de température) sur la surface extérieure, exposée à de hautes températures, et avec des propriétés d'un matériau métallique sur la surface intérieure afin d'assurer la tenue structurelle de la navette.

Les FGM (Functionally Graded Material) sont ainsi des matériaux composites dont les propriétés varient graduellement et de façon continue selon une direction spécifique au sein du matériau (MORTENSEN et SURESH [1995]). La variation des propriétés est généralement obtenue grâce au changement continu de la micro-structure du matériau. En d'autres termes, les FGMs sont caractérisés par une variation spatiale des micro-structures, fabriquée par une distribution non uniforme des constituants des phases. Cette variation peut être créée en utilisant des renforts ayant des propriétés, des formes ou des tailles différentes, ainsi qu'en inter-changeant le rôle de la matrice et des renforts et ce de manière continue. Dans le dernier cas, la fraction volumique des phases du matériau varie continuellement de 0% à 100% entre deux points de la structure. Par exemple, le matériau A de la Figure 1.5 est graduellement remplacé par le matériau B, avec une variation douce dans la zone de transition. Ces variations se font donc sans interface, conduisant à une réduction des contraintes internes par rapport aux composites classiques de type stratifiés.

Les FGMs font donc désormais partie de plusieurs champs de recherche industriels (aérospatiale, industrie automobile, défense, etc) (RAJAN et collab. [2008] KAWASAKI et WATANABE [1997]), tant au niveau de leur fabrication que de leur modélisation et expérimentation.

Notons que la fabrication des FGMs est très exigeante et soulève de nombreuses difficultés technologiques. Il existe de nombreuses techniques de fabrication tel que : la déposition de vapeur chimique, la déposition de vapeur physique, la technique sol-gel, la pulvérisation plasma, l'infiltration de métal fondu, l'auto-propagation, le moulage par centrifugation, etc. Parmi celles-ci le moulage par centrifugation est la méthode la plus simple et ayant le meilleur rapport coût/production pour produire de grandes pièces.

### 1.3.2 Les matériaux piézoélectrique à gradient de propriétés (FGPM)

Les matériaux piézoélectriques ont la propriété de convertir l'énergie électrique en énergie mécanique et inversement. Ils sont principalement utilisés comme capteurs et actionneurs électromécaniques, comme résonateurs dans les équipements électroniques, comme transmetteurs ultrasons, hydrophones navals et sonars. Récemment, une nouvelle approche est de créer des transducteurs piézoélectriques basés sur le concept de FGM (QIU et collab. [2003], ALMAJID et collab. [2001], SHI et collab. [2004], TAYA et collab. [2003], ZHU et MENG [1995]). Dans ce cas, le matériau piézoélectrique conventionnel est remplacé par un matériau piézoélectrique à gradient de propriété, avec une ou plusieurs de ces propriétés variant selon une direction spécifique. Cette variation peut être décrite par des lois ou fonctions de 'gradation'. Ce type de matériau est nommé FGPM (Functionally graded piezoelectric material).

#### 1.3.2.a Les transducteurs FGPM

Plusieurs auteurs ont mis en évidence les avantages du concept des FGM appliqué aux structures piézoélectriques (YAMADA et collab. [1998], SAMADHIYA et MUKHERJEE [2006], CHAKRABORTY et AL [2005], GUO et collab. [2005], ICHINOSE et collab. [2004], RUBIO et collab. [2009]). Pour les applications statiques ou dynamiques (ALMAJID et collab. [2001], WANG et NODA [2001]), les principaux avantages sont la réduction des concentrations de contraintes mécaniques, l'augmentation de la redistribution des contraintes, la maximisation du déplacement et l'augmentation de la durée de vie en fatigue.

Une bonne illustration des FGPM, est le cas d'un actionneur bimorphe (Figure.1.6). Ce type d'actionneur est traditionnellement composé de deux matériaux piézoélectriques avec des directions de polarisation contraires et les deux sont mécaniquement couplés. L'actionneur fléchit car les deux matériaux piézoélectriques vont se déformer dans des sens opposés : élongation de la couche supérieure et contraction de la couche inférieure. Lors d'applications dynamiques, l'interface entre les matériaux, spécifiquement celle entre l'électrode et le matériau piézoélectrique engendre une distribution des contraintes non uniforme dans l'actionneur. Cette distribution rend l'actionneur sensible à la fatigue. Cette interface entraîne également des concentrations de contraintes, réduisant la durée de vie en fatigue.

Cependant, en appliquant le principe des FGM au bimorphe, on peut créer un matériau ayant les propriétés de l'électrode au centre variant doucement vers des propriétés piézoélectriques vers l'extérieur. L'interface entre les matériaux peut donc être réduite ou voir complètement éliminée. QIU et collab. [2003] étudient la durabilité d'un FGPM actionneur soumis à des basses fréquences (quasi-staticité) et la durabilité à la résonance. Ils ont démontré que l'actionneur en FGPM est plus de deux fois plus performant à basse fréquence (le bimorphe classique casse au bout de 138h de test et le FGPM après plus de 300h) et dix fois plus performant à la résonance (24 min pour l'actionneur classique et 240 min pour le FGPM).

Dans d'autres applications, le concept FGM permet de réduire la réflexion des ondes au sein des transmetteurs piézoélectriques ultrasoniques (SAMADHIYA et MUKHERJEE [2006]) et d'obtenir des réponses acoustiques ayant des bandes de fréquences plus larges que les transmetteurs non graduels (YAMADA et collab. [1998], GUO et collab. [2005], ICHINOSE et collab. [2004], RUBIO et collab. [2009]). Ces avantages permettent d'améliorer la résolution axiale en imagerie médicale et dans les applications de détection non destructive.

#### 1.3.2.b La fabrication des FGPM

Dans le cas des FGPM, la recherche sur la fabrication du matériau et la recherche sur la modélisation avancent en même temps. Il est encore difficile de trouver des essais expérimentaux sur les FGPM. On peut distinguer plusieurs techniques pour la fabrication des FGPM comme la métallurgie des poudres (frittage de poudre par amalgames) (LI et collab. [2001], ZHANG et collab. [2006]) et la cataphorèse (dépôt par électrophorèse) (LI et collab. [2005]).

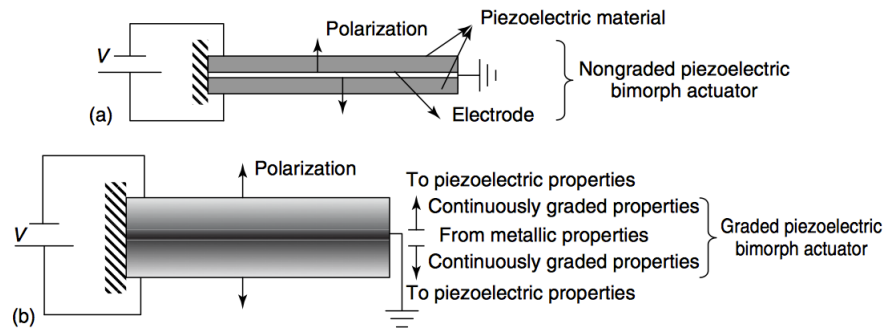


FIGURE 1.6 – Concept FGM appliqué au bimorphe actionneur : (a) actionneur classique et (b) actionneur à propriétés graduelles RUBIO et collab. [2009]

Dans la littérature on trouve deux grands types de FGPM : ceux mixant deux céramiques piézo-électriques et ceux mixant une céramique piézoélectrique et un métal.

Les FGPM de type céramique/céramique montrent une réduction des concentrations de contraintes (WU et collab. [1996]) mais se caractérisent par des propriétés mécaniques inférieures, comme une diminution de la résistance à la rupture en comparaison à des céramiques non-piézoélectriques ou une diminution de la dureté comparé aux métaux. Ainsi, pour résoudre ces problèmes on a créé les FGPM de type céramique/métal, où une grande variété de métaux sont utilisés. Parmi ceux-ci on peut citer : le platine (Pt) (LI et collab. [2001] TAKAGI et collab. [2002] TAKAGI et collab. [2003]), le zinc (Zn) (JIN et collab. [2003]), le cuivre (Cu) (FANG et collab. [2003]), le nickel (Ni) RUBIO et collab. [2012] et l'argent (Ag) (HWANG et collab. [1999] ZHANG et collab. [2006]).

Plus précisément sur les FGPM de type céramique/métal, qui est le type de FGPM utilisé dans ce travail, trois articles sont particulièrement notables :

- RUBIO et collab. [2012] ont étudié le comportement dynamique d'un FGPM PZT/Ni, constitué de six couches ayant respectivement 0,10,20,30 et 40 % de Nickel inclus dans la matrice piézoélectrique. Ils montrent la présence du phénomène de percolation : le mélange devient entièrement conducteur quand il y a assez de particules conductrices (ici le Ni) dans le mélange. Le seuil de percolation est atteint pour la couche contenant 40% de Nickel et le matériau devient conducteur et perd donc ses propriétés piézoélectriques.
- ZHANG et collab. [2006], ZHANG et collab. [2008] ont fabriqué un FGPM mêlant du PZT et de l'argent. Ils étudient l'influence de la dispersion des particules d'Argent sur les propriétés électriques et mécanique du mélange : la permittivité, la résistance à la rupture et la ténacité du milieu augmentent avec l'ajout de particules d'argent dans la céramique. Le seuil de percolation n'est pas atteint dans leur article.

### 1.3.3 La modélisation des FGPM

La modélisation des structures FGPM est étudiée depuis quelques années. On trouve généralement des FGPM dont les propriétés varient seulement dans l'épaisseur du matériau et suivant deux types de loi de comportement :

- soit selon une loi puissance :  $P(z) \propto z^k$ ,
- soit selon une loi exponentielle :  $P(z) \propto e^{kz}$

où  $P$  est une propriété matériau et  $k$  dirige la gradation du matériau et où  $\propto$  est le symbole de proportionnalité

Les recherches sont principalement axées sur les structures élancées (poutres, plaques et coques) et la difficulté majeure dans la modélisation réside dans l'intégration de la loi graduelle du matériau. On retrouve une grande variété de méthodes de modélisation des structures FGPM élancées : à partir principalement de méthodes analytiques et de la méthode des éléments finis.

### 1.3.3.a Méthodes analytiques

Dans le cas de certaines structures simples, des solutions analytiques peuvent être obtenues. Le cas de la plaque rectangulaire simplement supportée fait référence, car ses conditions aux limites sont vérifiées par les solutions utilisant des expansions en séries de Fourier.

Plusieurs auteurs en donnent une solution tri-dimensionnelle exacte, où la gradation du matériau suit une loi exponentielle :

- **LU et collab. [2006]** avec un formalisme similaire à celui de Stroh (formulation Hamiltonienne du problème de propagation d'ondes),
- **KULIKOV et PLOTNIKOVA [2013]** en utilisant une "sampling surface method" (méthode de surface d'échantillonnage),
- **ZHONG et SHANG [2003]** avec l'approche de la représentation d'état.

Des solutions exactes de modèles plaques de ce problème sont également données par **ZHONG et YU [2006]** (pour un FGPM variant avec une loi exponentielle avec une approche de la représentation d'état) et **LI et PAN [2015]** (pour un FGPM variant avec une loi puissance avec la "modified coupled-stress theory").

On peut noter aussi la résolution du cas d'une plaque encastree-libre par :

- **ALMAJID et collab. [2001]** en résolvant par intégration les équations de la théorie classique des plaques, pour une plaque FGPM dont la gradation est linéaire,
- **LIM et HE [2001]**, **TAYA et collab. [2003]** grâce à une méthode hiérarchique à deux niveaux pour un FGPM variant avec une loi exponentielle et une loi puissance respectivement : la prédiction des propriétés élasto-électriques de chaque couche grâce au modèle d'Eshelby et la modélisation de la plaque grâce à la théorie classique des plaques laminées,
- **BARATI et ZENKOUR [2018]** donnent la solution d'une plaque FGPM avec porosité variant selon une loi puissance, basée sur les fondements élastiques de Winkler-Pasternak.

Le cas de la poutre encastree-libre est également considéré. Plusieurs auteurs en donnent une solution analytique :

- en résolvant le problème grâce à une méthode basée sur la fonction d'Airy pour une poutre FGPM variant avec : une loi exponentielle **ZHONG et YU [2008]**, une loi puissance **XIANG et SHI [2009]** et une loi où seule une propriété matériau varie quadratiquement **HUANG et collab. [2008]**,
- **EMAMI et collab. [2010]** en utilisant une méthode basée sur des fonctions "stress-induction potential" pour résoudre le cas d'une poutre variant avec une loi exponentielle.

En dehors de ces structures simples, une méthode numérique conduisant à une solution approchée est nécessaire.

### 1.3.3.b La méthode des éléments finis

La modélisation par éléments finis de structures FGPM est largement utilisée. On trouve principalement des modèles de poutres et de plaques, ainsi que quelques modèles de coques.

Concernant la modélisation de poutres FGPM on trouve :

- **DOROUSHI et collab. [2011]**, **KOMEILI et collab. [2011]** avec une cinématique du troisième degré dans l'épaisseur et où différentes hypothèses sont considérées pour la variation du potentiel électrique dans l'épaisseur (linéaire, quadratique, cubique, sinusoïdale),
- **LEZGY-NAZARGAH et collab. [2013]** utilisent une modélisation multi-couche avec une cinématique enrichie, introduisant une fonction inconnue reliée à la discrétisation par couche et avec un potentiel électrique cubique dans l'épaisseur,
- **LEE [2005]** propose un modèle également par couches, avec une approximation linéaire par couche pour le déplacement longitudinal et constante pour le déplacement transverse et où le potentiel électrique est considéré linéaire dans l'épaisseur,

- enfin **PANDEY et PARASHAR [2016]** proposent un modèle basé sur la cinématique d'Euler-Bernoulli avec le logiciel COMSOL.

On peut citer, **BEHJAT et collab. [2011]**, **NOURMOHAMMADI et BEHJAT [2016]** pour un modèle de plaque FGPM, ayant la cinématique de Reissner-Mindlin, utilisant un élément de plaque à quatre nœuds ou à huit nœuds.

On trouve également des modèles éléments finis moins classiques :

- **BHANGALE et GANESAN [2006]** analysent une plaque simplement appuyée à l'aide d'une méthode éléments finis semi-analytique permettant de garder le caractère tri-dimensionnel de la solution : une solution en double série de Fourier pour le déplacement et le potentiel électrique est utilisée dans le plan de la plaque et une méthode éléments finis dans la direction de l'épaisseur,
- **BRISCHETTO et CARRERA [2009]** utilisant la CUF (Carrera Unified Formulation), proposent un élément fini de plaque où l'ordre de l'expansion de Taylor pour le déplacement et le potentiel électrique est réglable, permettant facilement d'avoir des modèles de plus en plus raffinés.

### 1.3.3.c Autres méthodes numériques

En dehors de la méthode des éléments finis, d'autres méthodes numériques sont développées dans la littérature :

- **YANG et XIANG [2007]** et **PARASHAR et SHARMA [2016]** analysent une poutre FGPM avec une méthode de quadrature différentielle, se basant sur l'approximation d'une fonction inconnue et de sa dérivée à chaque point discret comme une somme linéaire pondérée de ses valeurs en tous les autres points du domaine,
- **LI et collab. [2014]** développent un modèle de poutre en utilisant une théorie à gradient de déformation, permettant de capturer les effets d'échelle,
- **CHUAQUI et ROQUE [2017]** étudient également une poutre et l'analysent grâce à une méthode sans maillage basée sur une méthode multi-quadratique à fonctions de base radiales, se reposant uniquement sur la distance Euclidienne entre les nœuds et un paramètre de forme défini par l'utilisateur.

### 1.3.4 Le contrôle actif et les FGPM

En premier lieu la recherche sur le contrôle actif de structure avec des matériaux à gradient de propriétés, s'est portée sur le contrôle actif de structures FGM (métal/céramique ou métal/métal), équipées d'actionneurs et de capteurs piézoélectriques sur les deux surfaces externes.

La plupart des auteurs utilisent alors des régulateurs à retour d'état, avec une commande de contre-réaction basée sur la mesure de la vitesse ou du déplacement et de la vitesse simultanément ("negative velocity feedback" ou "displacement and velocity feedback"). Ce contrôle est appliqué à différents types de structures :

- pour les poutres **FU et collab. [2011]**,
- pour les plaques **YIQI et YIMING [2010]**, **HE et collab. [2001]**, **LIEW et collab. [2001]**, **KARGARNOVIN et collab. [2007]**,
- pour les coques **SHENG et WANG [2009]**, **ZHENG et collab. [2009]**, **KIANI et collab. [2013]**.

D'autres auteurs utilisent des régulateurs robustes comme le régulateur linéaire quadratique (LQR) (**BRUANT et PROSLIER [2015]**, **NARAYANAN S [2010]**) ou un régulateur  $H^2$  (**FAKHARI et OHADI [2011]**).

En ce qui concerne le contrôle actif de structure FGPM, ce sujet étant relativement nouveau, peu d'articles sont encore disponibles dans la littérature. Plusieurs auteurs montrent la faisabilité du contrôle actif de différentes structures FGPM. Comme dans le cas du contrôle des structures

FGM, la commande par rétro-action ("velocity feedback") est la plus utilisée et est mise en place dans les quatre articles suivants :

- **PIETRZAKOWSKI [2006], PIETRZAKOWSKI [2015]** étudie une plaque stratifiée symétrique constituée de couches "classiques" (i.e graphite-epoxy) et de couches piézoélectriques, l'ensemble ayant un comportement global orthotrope. Les couches piézoélectriques sont de deux types, les couches capteurs en PVDF et les couches actionneurs en FGPM. Un actionneur est lui-même un multi-couches constitué d'une matrice avec inclusion de fibres PZT. En jouant sur la densité et la répartition des fibres de PZT dans les différentes couches de l'actionneur l'auteur crée un matériau graduel.
- **SHARMA et collab. [2016]** étudient une structure complètement FGPM (PZT/Pt) constituée de sept couches contenant (0%|10%|20%|30%|20%|10%|0%) de platine. Le seuil de percolation étant atteint, la couche centrale contenant 30% de platine est considérée comme conductrice, il y a donc deux couches isolantes l'une utilisée comme capteur et l'autre en tant qu'actionneur.
- **Li et collab. [2019]** étudient une plaque FGPM (AT quartz crystal/PZT-5H), graduée de manière symétrique par rapport à la ligne moyenne, passant du matériau piézoélectrique (PZT-5H) sur les surfaces externes, au quartz sur la surface moyenne.

Enfin, **SUSHEEL et collab. [2016]** étudient une structure FGPM composée d'une couche central FGM (aluminium/ dioxyde de zirconium) et deux couches extérieures FGPM (PZT/Pt), l'une étant utilisée comme capteur l'autre comme qu'actionneur. Un régulateur intelligent, basé sur la logique floue est utilisé pour le contrôle : les entrées sont le déplacement et la vitesse obtenues par le capteur et la sortie est le potentiel à envoyer à l'actionneur. Entrées et sortie sont décrites par sept fonctions d'appartenance.

## 1.4 Références

- ABDULLAH, E. J., D. L. MAJID, F. I. ROMLI, P. S. GAIKWAD, L. G. YUAN et N. F. HARUN. 2015, «Active control of strain in a composite plate using shape memory alloy actuators», *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 11, n° 1, p. 25–39. [6](#)
- AHN, K., H. PAHK, M. JUNG et D. CHO. 1996, «A hybrid-type active vibration isolation system using neural networks», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 192, n° 4, p. 793–805. [14](#)
- AL-NASSAR, Y. N., M. SIDDIQUI et A. Z. AL-GARNI. 2000, «Artificial neural networks in vibration control of rotor-bearing systems», *Simulation Practice and Theory*, vol. 7, n° 8, p. 729–740. [14](#)
- ALDAWOD, M., B. SAMALI, F. NAGHDY et K. C. KWOK. 2001, «Active control of along wind response of tall building using a fuzzy controller», *Engineering Structures*, vol. 23, n° 11, p. 1512–1522. [14](#)
- ALKHATIB, R. et M. GOLNARAGHI. 2003, «Active structural vibration control : a review», *Shock and Vibration Digest*, vol. 35, n° 5, p. 367. [12](#)
- ALMAJID, A., M. TAYA et S. HUDNUT. 2001, «Analysis of out-of-plane displacement and stress field in a piezocomposite plate with functionally graded microstructure», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, n° 19, p. 3377–3391. [16](#), [18](#)
- ARIDOGAN, U. et I. BASDOGAN. 2015, «A review of active vibration and noise suppression of plate-like structures with piezoelectric transducers», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 26, n° 12, p. 1455–1476. [6](#), [13](#)
- AULD, B. A. 1973, *Acoustic fields and waves in solids*, Wiley. [8](#)
- BALAS, G. J. 1990, *Robust control of flexible structures : Theory and experiments*, thèse de doctorat, California Institute of Technology. [13](#)
- BALAS, G. J. et J. C. DOYLE. 1990, «Robustness and performance tradeoffs in control design for flexible structures», dans *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*, IEEE, p. 2999–3010. [13](#)
- BARATI, M. R. et A. M. ZENKOUR. 2018, «Electro-thermoelastic vibration of plates made of porous functionally graded piezoelectric materials under various boundary conditions», *Journal of Vibration and Control*, vol. 24, n° 10, p. 1910–1926. [18](#)
- BECERIKLI, Y. et B. K. CELIK. 2007, «Fuzzy control of inverted pendulum and concept of stability using java application», *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 46, n° 1-2, p. 24–37. [14](#)
- BEHJAT, B., M. SALEHI, A. ARMIN, M. SADIGHI et M. ABBASI. 2011, «Static and dynamic analysis of functionally graded piezoelectric plates under mechanical and electrical loading», *Scientia Iranica*, vol. 18, n° 4, p. 986–994. [19](#)
- BHANGALE, R. K. et N. GANESAN. 2006, «Static analysis of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, n° 10, p. 3230–3253. [19](#)
- BOULET, B. et Y. DUAN. 2007, «The fundamental tradeoff between performance and robustness—a new perspective on loop shaping—classic control revisited part ii», *IEEE control systems*, vol. 27, n° 3, p. 30–44. [13](#)
- BRENNAN, M., S. ELLIOTT et R. PINNINGTON. 1992, «Active control of vibrations transmitted through struts», dans *International Conf. on Motion and Vibration Control, Yokohama*. [1](#)



- BRISCHETTO, S. et E. CARRERA. 2009, «Refined 2d models for the analysis of functionally graded piezoelectric plates», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 20, n° 15, p. 1783–1797. [19](#)
- BRUANT, I. et L. PROSLIER. 2015, «Improved active control of a functionally graded material beam with piezoelectric patches», *Journal of Vibration and Control*, vol. 21, n° 10, p. 2059–2080. [19](#)
- CAO, S.-G., N. W. REES et G. FENG. 1999, «Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy-state space models», *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 7, n° 2, p. 192–200. [14](#)
- CHAKRABORTY, A. et AL. 2005, «Wave propagation analysis in inhomogeneous piezo-composite layer by the thin layer method», *International Journal for Numerical Method in Engineering*, vol. 64, p. 567–598. [16](#)
- CHEONG, M.-S. et D.-W. CHO. 1997, «A new vibration isolation of a hydraulic system using a heterosynaptic neural network», *Mechanical systems and signal processing*, vol. 11, n° 6, p. 887–901. [14](#)
- CHOI, S.-B. et Y.-M. HAN. 2016, *Piezoelectric actuators : control applications of smart materials*, CRC Press. [6](#)
- CHOMETTE, B., S. CHESNE, D. RÉMOND et L. GAUDILLER. 2010, «Damage reduction of on-board structures using piezoelectric components and active modal control—application to a printed circuit board», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 24, n° 2, p. 352–364. [6](#)
- CHOMETTE, B., D. REMOND, S. CHESNE et L. GAUDILLER. 2008, «Semi-adaptive modal control of on-board electronic boards using an identification method», *Smart Materials and Structures*, vol. 17, n° 6, p. 065 019. [14](#)
- CHUAQUI, T. et C. ROQUE. 2017, «Analysis of functionally graded piezoelectric timoshenko smart beams using a multiquadric radial basis function method», *Composite Structures*, vol. 176, p. 640–653. [19](#)
- DALEY, S., F. JOHNSON, J. PEARSON et R. DIXON. 2004, «Active vibration control for marine applications», *Control Engineering Practice*, vol. 12, n° 4, p. 465–474. [6](#)
- DARUS, I. M. et M. TOKHI. 2005, «Soft computing-based active vibration control of a flexible structure», *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 18, n° 1, p. 93–114. [14](#)
- DOROUSHI, A., M. ESLAMI et A. KOMEILI. 2011, «Vibration analysis and transient response of an fgpm beam under thermo-electro-mechanical loads using higher-order shear deformation theory», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 22, n° 3, p. 231–243. [18](#)
- ELLIOTT, S. et L. BILLET. 1993, «Adaptive control of flexural waves propagating in a beam», *Journal of sound and vibration*, vol. 163, n° 2, p. 295–310. [12](#)
- ELLIOTT, S., I. STOTHERS et P. NELSON. 1987, «A multiple error lms algorithm and its application to the active control of sound and vibration», *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 35, n° 10, p. 1423–1434. [12](#)
- ELLIOTT, S. J. et T. J. SUTTON. 1996, «Performance of feedforward and feedback systems for active control», *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 4, n° 3, p. 214–223. [12](#)
- EMAMI, A., R. HASHEMI, M. KARGARNOVIN et R. NAGHDABADI. 2010, «Exact electroelastic field of a functionally graded piezoelectric cantilever beam subjected to pure body force loading», dans *ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, American Society of Mechanical Engineers, p. 45–52. [18](#)

- FAKHARI, V. et A. OHADI. 2011, «Nonlinear vibration control of functionally graded plate with piezoelectric layers in thermal environment», *Journal of Vibration and Control*, vol. 17, n° 3, p. 449–469. [19](#)
- FANG, M. H., P. WEI, R. G. WANG, Z. Z. CAO, C. JIAN et H. LIKUN. 2003, «Fabrication of cu/pzt functionally graded actuators by spark plasma sintering», dans *Materials Science Forum*, vol. 423, Trans Tech Publications Ltd., Zurich-Uetikon, Switzerland, p. 423–426. [17](#)
- FARD, M. P. 2002, «Passivity analysis of nonlinear euler-bernoulli beams», *Identification and Control*, vol. 23, p. 139–258. [6](#)
- FENG, G. 2006, «A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems», *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, vol. 14, n° 5, p. 676–697. [14](#)
- FEYNMAN, R. 1969, *Le Cours de physique de Feynman, Electromagnétisme-1*, Interéditions. [8](#)
- FU, K. 1971, «Learning control systems and intelligent control systems : An intersection of artificial intelligence and automatic control», *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, n° 1, p. 70–72. [14](#)
- FU, Y., J. WANG et Y. MAO. 2011, «Nonlinear vibration and active control of functionally graded beams with piezoelectric sensors and actuators», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 22, n° 18, p. 2093–2102. [19](#)
- FULLER, C., G. GIBBS et R. SILCOX. 1990, «Simultaneous active control of flexural and extensional waves in beams», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 1, n° 2, p. 235–247. [1, 6](#)
- GIBERT, C. 2001, *Analyse modale non-linéaire expérimentale*, thèse de doctorat, École Centrale Lyon. [11](#)
- GOSAVI, S. V. et A. KELKAR. 2001, «Passivity-based robust control of piezo-actuated flexible beam», dans *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, vol. 3, IEEE, p. 2492–2497. [6](#)
- GUO, H., J. M. CANNATA, Q. ZHOU et K. K. SHUNG. 2005, «Design and fabrication of broadband graded ultrasonic transducers with rectangular kerfs», *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 52, n° 11, p. 2096–2102. [16](#)
- HALIM, D. et S. R. MOHEIMANI. 2001, «Spatial resonant control of flexible structures-application to a piezoelectric laminate beam», *IEEE transactions on control systems technology*, vol. 9, n° 1, p. 37–53. [6](#)
- HAUKE, T., A. KOUVATOV, R. STEINHAUSEN, W. SEIFERT, H. BEIGE, H. THEO, LANGHAMMER et H.-P. ABICHT. 2000, «Bending behavior of functionally gradient materials», *Ferroelectrics*, vol. 238, n° 1, p. 195–202. [1](#)
- HE, X., T. NG, S. SIVASHANKER et K. LIEW. 2001, «Active control of fgm plates with integrated piezoelectric sensors and actuators», *International journal of Solids and Structures*, vol. 38, n° 9, p. 1641–1655. [19](#)
- HU, Y.-R. et A. NG. 2005, «Active robust vibration control of flexible structures», *Journal of sound and vibration*, vol. 288, n° 1-2, p. 43–56. [13](#)
- HUANG, D., H.-J. DING et W.-Q. CHEN. 2008, «Analysis of functionally graded and laminated piezoelectric cantilever actuators subjected to constant voltage», *Smart Materials and Structures*, vol. 17, n° 6, p. 065 002. [18](#)

- HWANG, H. J., M. YASUOKA, M. SANDO, M. TORIYAMA et K. NIIHARA. 1999, «Fabrication, sinterability, and mechanical properties of lead zirconate titanate/silver composites», *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 82, n° 9, p. 2417–2422. [17](#)
- ICHINOSE, N., N. MIYAMOTO et S. TAKAHASHI. 2004, «Ultrasonic transducers with functionally graded piezoelectric ceramics», *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 24, n° 6, p. 1681–1685. [16](#)
- IKEDA, T. 1990, *Fundamentals of piezoelectricity*, Oxford University. [9](#)
- JANG, J.-S. 1993, «Anfis : adaptive-network-based fuzzy inference system», *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 23, n° 3, p. 665–685. [14](#)
- JIN, D., Z. MENG et F. ZHOU. 2003, «Mechanism of resistivity gradient in monolithic pzt ceramics», *Materials Science and Engineering : B*, vol. 99, n° 1-3, p. 83–87. [17](#)
- JOSSIC, M. 2017, *Contrôle actif et non-linéarités géométriques : le cas du gong xiaoluo*, thèse de doctorat, Paris 6. [6](#)
- KARGARNOVIN, M., M. NAJAFIZADEH et N. VILIANI. 2007, «Vibration control of a functionally graded material plate patched with piezoelectric actuators and sensors under a constant electric charge», *Smart Materials and Structures*, vol. 16, n° 4, p. 1252–1259. [19](#)
- KAWASAKI, A. et R. WATANABE. 1997, «Concept and p/m fabrication of functionally gradient materials», *Ceramics international*, vol. 23, n° 1, p. 73–83. [15](#)
- KIANI, Y., M. SADIGHI et M. ESLAMI. 2013, «Dynamic analysis and active control of smart doubly curved fgm panels», *Composite Structures*, vol. 102, p. 205–216. [19](#)
- KOMEILI, A., A. H. AKBARZADEH, A. DOROUSHI et M. R. ESLAMI. 2011, «Static analysis of functionally graded piezoelectric beams under thermo-electro-mechanical loads», *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 3, p. 153–173. [18](#)
- KONDOH, S., C. YATOMI et K. INOUE. 1990, «The positioning of sensors and actuators in the vibration control of flexible systems», *JSME international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry*, vol. 33, n° 2, p. 145–152. [13](#)
- KULIKOV, G. et S. PLOTNIKOVA. 2013, «A new approach to three-dimensional exact solutions for functionally graded piezoelectric laminated plates», *Composite Structures*, vol. 106, p. 33–46. [18](#)
- KUO, S. M. et D. MORGAN. 1995, *Active noise control systems : algorithms and DSP implementations*, John Wiley & Sons, Inc. [12](#)
- KUSCULUOGLU, Z. K. et T. J. ROYSTON. 2005, «Finite element formulation for composite plates with piezoceramic layers for optimal vibration control applications», *Smart Materials and Structures*, vol. 14, n° 6, p. 1139. [13](#)
- LEE, G.-S. 1996, «System identification and control of smart structures using neural networks», *Acta astronautica*, vol. 38, n° 4-8, p. 269–276. [14](#)
- LEE, H.-J. 2005, «Layerwise laminate analysis of functionally graded piezoelectric bimorph beams», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 16, n° 4, p. 365–371. [18](#)
- LEE, Y. K. et D. HALIM. 2004, «Vibration control experiments on a piezoelectric laminate plate using spatial feedforward control approach», dans *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, vol. 3, IEEE, p. 2403–2408. [12](#)

- LEZGY-NAZARGAH, M., P. VIDAL et O. POLIT. 2013, «An efficient finite element model for static and dynamic analyses of functionally graded piezoelectric beams», *Composite Structures*, vol. 104, p. 71–84. [18](#)
- LI, J., Y. XUE, F. LI et Y. NARITA. 2019, «Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plate», *Composite Structures*, vol. 207, p. 509–518. [20](#)
- LI, J.-F., K. TAKAGI, N. TERAKUBO et R. WATANABE. 2001, «Electrical and mechanical properties of piezoelectric ceramic/metal composites in the Pb(Zr, Ti)O<sub>3</sub>/Pt system», *Applied Physics Letters*, vol. 79, n° 15, p. 2441–2443. [16](#), [17](#)
- LI, L., G. SONG et J. OU. 2011, «Adaptive fuzzy sliding mode based active vibration control of a smart beam with mass uncertainty», *Structural control and health monitoring*, vol. 18, n° 1, p. 40–52. [14](#)
- LI, T., Y. CHEN et J. MA. 2005, «Characterization of fgm monomorph actuators fabricated using epd», *Journal of materials science*, vol. 40, n° 14, p. 3601–3605. [16](#)
- LI, Y., W. FENG et Z. CAI. 2014, «Bending and free vibration of functionally graded piezoelectric beam based on modified strain gradient theory», *Composite Structures*, vol. 115, p. 41–50. [19](#)
- LI, Y. et E. S. PAN. 2015, «Static bending and free vibration of a functionally graded piezoelectric microplate based on the modified couple-stress theory», *International Journal of Engineering Science*, vol. 97, p. 40–59. [18](#)
- LIEW, K., X. HE, T. NG et S. SIVASHANKER. 2001, «Active control of FGM plates subjected to a temperature gradient : modelling via finite element method based on FSDT», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, n° 11, p. 1253–1271. [19](#)
- LIEW, K., S. SIVASHANKER, X. HE et T. NG. 2003, «The modelling and design of smart structures using functionally graded materials and piezoelectrical sensor/actuator patches», *Smart Materials and Structures*, vol. 12, n° 4, p. 647–655. [13](#)
- LIM, C. et L. HE. 2001, «Exact solution of a compositionally graded piezoelectric layer under uniform stretch, bending and twisting», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 43, n° 11, p. 2479–2492. [18](#)
- LIN, C.-Y. et H.-W. JHENG. 2017, «Active vibration suppression of a motor-driven piezoelectric smart structure using adaptive fuzzy sliding mode control and repetitive control», *Applied Sciences*, vol. 7, n° 3, p. 240. [6](#)
- LIN, J. 2005, «An active vibration absorber of smart panel by using a decomposed parallel fuzzy control structure», *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 18, n° 8, p. 985–998. [14](#)
- LINKENS, D. A. et H. O. NYONGESA. 1996, «Learning systems in intelligent control : an appraisal of fuzzy, neural and genetic algorithm control applications», *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 143, n° 4, p. 367–386. [14](#)
- LIONS, J. L. 1968, *Contrôle optimal de systemes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod. [13](#)
- LU, P., H. LEE et C. LU. 2006, «Exact solutions for simply supported functionally graded piezoelectric laminates by stroh-like formalism», *Composite Structures*, vol. 72, n° 3, p. 352–363. [18](#)
- MA, R. et A. SINHA. 1996, «Neural network based active vibration absorber with state feedback control», *Journal of Sound and vibration*, vol. 190, n° 1, p. 121–128. [14](#)
- MASON, W. P. 1980, «Piezoelectricity, its history and applications», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 68, n° S1, p. S39–S39. [6](#)

- MEAD, D. J. 1999, *Passive vibration control*, John Wiley & Sons Inc. 1
- MOHEIMANI, S. R., H. R. POTA et I. R. PETERSEN. 1998, «Spatial control for active vibration control of piezoelectric laminates», dans *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, vol. 4, IEEE, p. 4308–4313. 6
- MOON, S.-J., C.-W. LIM, B.-H. KIM et Y. PARK. 2007, «Structural vibration control using linear magnetostrictive actuators», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, n° 4-5, p. 875–891. 6
- MORTENSEN, A. et S. SURESH. 1995, «Functionally graded metals and metal-ceramic composites : Part I processing», *International Materials Reviews*, vol. 40, n° 6, p. 239–265. 15
- MUHAMMAD, A., X.-L. YAO et Z.-C. DENG. 2006, «Review of magnetorheological (mr) fluids and its applications in vibration control», *Journal of Marine Science and Application*, vol. 5, n° 3, p. 17–29. 6
- MURADOVA, A. D., G. K. TAIRIDIS et G. STAVROULAKIS. 2017, «Adaptive neuro-fuzzy vibration control of a smart plate», *Numerical Algebra, Control and Optimization*, vol. 7, p. 251–271. 14
- NAI, S., M. GUPTA et C. LIM. 2004, «Synthesis and wear of al based, free standing functionally gradient materials : effects of different reinforcements», *Materials science and technology*, vol. 20, n° 1, p. 57–67. 14
- NARAYANAN S, B. V. 2010, *Functionally Graded Shells with Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators for Active Vibration Control*, chap. 1, Springer, p. 3–13. 19
- NORGAARD, M., O. RAVN, N. POULSEN et L. HANSEN. 2000, *Neural networks for modelling and control of dynamic systems : a practitioner's handbook. Advanced textbooks in control and signal processing*, Springer, Berlin. 14
- NOURMOHAMMADI, H. et B. BEHJAT. 2016, «Design criteria for functionally graded piezoelectric plates under thermo-electro-mechanical loadings», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 27, n° 16, p. 2249–2260. 19
- D'ANDRÉA NOVEL, B. et M. C. DE LARA. 2000, *Commande linéaire des systèmes dynamiques*, Presses des MINES. 12
- OKUMURA, H., R. EMI et A. SANO. 2008, «Adaptive two degree-of-freedom vibration control for flexible plate with piezoelectric patches», dans *SICE Annual Conference, 2008*, IEEE, p. 218–221. 12
- DE OLIVEIRA, L. P., K. JANSSENS, P. GAJDATSY, H. VAN DER AUWERAER, P. S. VAROTO, P. SAS et W. DESMET. 2009, «Active sound quality control of engine induced cavity noise», *Mechanical systems and signal processing*, vol. 23, n° 2, p. 476–488. 12
- OLSSON, C. 2005, *Active vibration control of multibody systems : application to automotive design*, thèse de doctorat, Institutionen för informationsteknologi. 6
- PANDEY, V. B. et S. K. PARASHAR. 2016, «Static bending and dynamic analysis of functionally graded piezoelectric beam subjected to electromechanical loads», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 230, n° 19, p. 3457–3469. 19
- PARASHAR, S. K. et P. SHARMA. 2016, «Modal analysis of shear-induced flexural vibration of fgpm beam using generalized differential quadrature method», *Composite Structures*, vol. 139, p. 222–232. 19
- PETERSEN, I. R. et H. R. POTA. 2003, «Minimax lqg optimal control of a flexible beam», *Control Engineering Practice*, vol. 11, n° 11, p. 1273–1287. 6

- PETITJEAN, B., I. LEGRAIN, F. SIMON et S. PAUZIN. 2002, «Active control experiments for acoustic radiation reduction of a sandwich panel : Feedback and feedforward investigations», *Journal of sound and vibration*, vol. 252, n° 1, p. 19–36. [6](#)
- PIETRZAKOWSKI, M. 2006, «Active control of plates using functionally graded piezocomposite layers», *Mechanics and Mechanical Engineering*, vol. 10, n° 1, p. 117–125. [20](#)
- PIETRZAKOWSKI, M. 2015, «An active functionally graded piezocomposite plate subjected to a stochastic pressure», *Archives of Acoustics*, vol. 40, n° 1, p. 101–108. [20](#)
- POURZEYNALI, S., H. LAVASANI et A. MODARAYI. 2007, «Active control of high rise building structures using fuzzy logic and genetic algorithms», *Engineering Structures*, vol. 29, n° 3, p. 346–357. [14](#)
- PREUMONT, A. 2011, *Vibration control of active structures : an introduction*, vol. 179, Springer Science & Business Media. [6](#), [14](#)
- QIU, J., J. TANI, T. UENO, T. MORITA, H. TAKAHASHI et H. DU. 2003, «Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators», *Smart Materials and Structures*, vol. 12, n° 1, p. 115. [1](#), [16](#)
- RAJAN, T., R. PILLAI et B. PAI. 2008, «Functionally graded al–al<sub>3</sub>ni in situ intermetallic composites : fabrication and microstructural characterization», *Journal of Alloys and Compounds*, vol. 453, n° 1-2, p. L4–L7. [14](#), [15](#)
- REYNDERS, E. 2012, «System identification methods for (operational) modal analysis : review and comparison», *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 19, n° 1, p. 51–124. [11](#)
- REZA, M. S., H. DUNANT et collab.. 2003, *Spatial Control of Vibration : Theory and Experiments*, vol. 10, World Scientific. [1](#)
- ROYER, D. et E. DIEULESAINT. 1996, *Ondes élastiques dans les solides : propagation libre et guidée*, Masson. [8](#)
- RUBIO, W. M., F. BUIOCHI, J. C. ADAMOWSKI et E. C. N. SILVA. 2009, «Modeling of functionally graded piezoelectric ultrasonic transducers», *Ultrasonics*, vol. 49, n° 4-5, p. 484–494. [vii](#), [15](#), [16](#), [17](#)
- RUBIO, W. M., E. C. SILVA et F. BUIOCHI. 2012, «Manufacturing of pzt-nickel functionally graded piezoelectric ceramics», dans *AIP Conference Proceedings*, vol. 1433, AIP, p. 667–670. [17](#)
- SAMADHIYA, R. et A. MUKHERJEE. 2006, «Functionally graded piezoceramic ultrasonic transducers», *Smart materials and structures*, vol. 15, n° 6, p. 1627. [16](#)
- SANA, S. et V. S. RAO. 2001, «Robust control of input limited smart structural systems», *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 9, n° 1, p. 60–68. [13](#)
- SHARMA, A., A. KUMAR, R. KUMAR, R. VAISH et V. S. CHAUHAN. 2016, «Finite element analysis on active vibration control using lead zirconate titanate–pt–based functionally graded piezoelectric material», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 27, n° 4, p. 490–499. [20](#)
- SHARMA, M., S. SINGH et B. SACHDEVA. 2005, «Fuzzy logic based modal space control of a cantilevered beam instrumented with piezoelectric patches», *Smart materials and structures*, vol. 14, n° 5, p. 1017. [14](#)
- SHENG, G. et X. WANG. 2009, «Active control of functionally graded laminated cylindrical shells», *Composite Structures*, vol. 90, n° 4, p. 448–457. [19](#)

- SHI, Z., et Y. CHEN. 2004, «Functionally graded piezoelectric cantilever beam under load», *Archive of Applied Mechanics*, vol. 74, n° 3-4, p. 237–247. 16
- SONG, G., V. SETHI et H.-N. LI. 2006, «Vibration control of civil structures using piezoceramic smart materials : A review», *Engineering Structures*, vol. 28, n° 11, p. 1513–1524. 1, 6
- SUSHEEL, C., R. KUMAR et V. S. CHAUHAN. 2016, «Active shape and vibration control of functionally graded thin plate using functionally graded piezoelectric material», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 14, 20
- TAKAGI, K., J.-F. LI, S. YOKOYAMA et R. WATANABE. 2003, «Fabrication and evaluation of pzt/pt piezoelectric composites and functionally graded actuators», *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 23, n° 10, p. 1577–1583. 17
- TAKAGI, K., J.-F. LI, S. YOKOYAMA, R. WATANABE, A. ALMAJID et M. TAYA. 2002, «Design and fabrication of functionally graded pzt/pt piezoelectric bimorph actuator», *Science and Technology of Advanced Materials*, vol. 3, n° 2, p. 217–224. 1, 17
- TAYA, M., A. A. ALMAJID, M. DUNN et H. TAKAHASHI. 2003, «Design of bimorph piezo-composite actuators with functionally graded microstructure», *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 107, n° 3, p. 248–260. 16, 18
- THENOZHI, S. et W. YU. 2015, «Active vibration control of building structures using fuzzy proportional-derivative/proportional-integral-derivative control», *Journal of Vibration and Control*, vol. 21, n° 12, p. 2340–2359. 14
- TIERSTEN, H. F. 2013, *Linear Piezoelectric Plate Vibrations : Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations Piezoelectric Plates*, Springer. 9
- VASQUES, C. et J. D. RODRIGUES. 2006, «Active vibration control of smart piezoelectric beams : comparison of classical and optimal feedback control strategies», *Computers & structures*, vol. 84, n° 22, p. 1402–1414. 14
- VIEIRA, A., P. SEQUEIRA, J. GOMES et L. ROCHA. 2009, «Dry sliding wear of al alloy/sicp functionally graded composites : Influence of processing conditions», *Wear*, vol. 267, n° 1-4, p. 585–592. 14
- WANG, B. et N. NODA. 2001, «Design of a smart functionally graded thermopiezoelectric composite structure», *Smart Materials and Structures*, vol. 10, n° 2, p. 189. 16
- WU, C. C., M. KAHN et W. MOY. 1996, «Piezoelectric ceramics with functional gradients : a new application in material design», *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 79, n° 3, p. 809–812. 17
- XIANG, H. et Z. SHI. 2009, «Static analysis for functionally graded piezoelectric actuators or sensors under a combined electro-thermal load», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 28, n° 2, p. 338–346. 18
- YAMADA, K., J.-I. SAKAMURA et K. NAKAMURA. 1998, «Broadband ultrasound transducers using effectively graded piezoelectric materials», dans *Ultrasonics Symposium, 1998. Proceedings., 1998 IEEE*, vol. 2, IEEE, p. 1085–1089. 16
- YANG, J. et H. XIANG. 2007, «Thermo-electro-mechanical characteristics of functionally graded piezoelectric actuators», *Smart Materials and Structures*, vol. 16, n° 3, p. 784–797. 19
- YIQI, M. et F. YIMING. 2010, «Nonlinear dynamic response and active vibration control for piezoelectric functionally graded plate», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 11, p. 2015–2028. 19

- ZHANG, H., J.-F. LI et B.-P. ZHANG. 2006, «Fabrication and evaluation of pzt/ag composites and functionally graded piezoelectric actuators», *Journal of Electroceramics*, vol. 16, n° 4, p. 413–417. [16](#), [17](#)
- ZHANG, H., J.-F. LI, B.-P. ZHANG et W. JIANG. 2008, «Enhanced mechanical properties in ag-particle-dispersed pzt piezoelectric composites for actuator applications», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 498, n° 1-2, p. 272–277. [17](#)
- ZHANG, W., J. QIU et J. TANI. 2004, «Robust vibration control of a plate using self-sensing actuators of piezoelectric patches», *Journal of intelligent material systems and structures*, vol. 15, n° 12, p. 923–931. [13](#)
- ZHANG, X., C. SHAO, S. LI, D. XU et A. ERDMAN. 2001, «Robust hinf vibration control for flexible linkage mechanism systems with piezoelectric sensors and actuators», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 243, n° 1, p. 145–155. [13](#)
- ZHENG, S., F. DAI et Z. SONG. 2009, «Active control of piezothermoelastic fgm shells using integrated piezoelectric sensor/actuator layers», *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 30, n° 1, 2, p. 107–124. [19](#)
- ZHONG, Z. et E. SHANG. 2003, «Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, n° 20, p. 5335–5352. [18](#)
- ZHONG, Z. et T. YU. 2006, «Vibration of a simply supported functionally graded piezoelectric rectangular plate», *Smart materials and structures*, vol. 15, n° 5, p. 1404. [18](#)
- ZHONG, Z. et T. YU. 2008, «Electroelastic analysis of functionally graded piezoelectric material beams», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 19, n° 6, p. 707–713. [18](#)
- ZHU, X. et Z. MENG. 1995, «Operational principle, fabrication and displacement characteristics of a functionally gradient piezoelectric ceramic actuator», *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 48, n° 3, p. 169–176. [16](#)
- ZORIĆ, N., A. SIMONOVIĆ, Z. MITROVIĆ et S. STUPAR. 2013, «Active vibration control of smart composite beams using pso-optimized self-tuning fuzzy logic controller», *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 51, n° 2, p. 275–286. [14](#)





# Chapitre 2

## Modélisation du FGPM

*« Et c'est là que jadis, à quinze ans  
révolus  
A l'âge où s'amuser tout seul ne  
suffit plus  
Je connus la prime amourette  
Auprès d'une sirène, une  
femme-poisson  
Je reçus de l'amour la première  
leçon  
Avalai la première arête »*

---

Georges Brassens

### Sommaire

---

<b>2.1 Description du FGPM : PZT4/Al/PZT4</b>	<b>32</b>
2.1.1 Lois d'homogénéisation	32
2.1.2 Diélectricité d'un mélange isolant conducteur	33
2.1.3 Percolation	36
2.1.4 Lois d'homogénéisation avec percolation	37
<b>2.2 Modèle de poutre FGPM</b>	<b>39</b>
2.2.1 Le modèle de poutre 1D FGPM	39
2.2.2 Choix du potentiel électrique	39
2.2.3 Écriture variationnelle	40
2.2.4 L'élément fini de poutre FGPM	41
<b>2.3 FEniCS et le modèle de référence 3D FGPM</b>	<b>42</b>
2.3.1 Le Projet FEniCS	42
2.3.2 Le modèle élément fini 3D de référence	43
<b>2.4 Modèle de plaque FGPM</b>	<b>46</b>
2.4.1 Les modèles de plaques	46
2.4.2 Modèle de plaque FGPM	49
2.4.3 Choix du potentiel électrique	50
2.4.4 Écriture variationnelle	50
2.4.5 L'élément plaque FGPM	54
<b>2.5 Équations discrétisées des modèles</b>	<b>59</b>
<b>2.6 Conclusion</b>	<b>60</b>
<b>2.7 Références</b>	<b>61</b>

---

Ce chapitre porte sur la modélisation du matériau piézoélectrique à gradient de propriétés utilisé dans ce travail. Celui-ci est pensé pour remplacer les structures classiques utilisées en contrôle actif, c'est à dire une structure hôte (généralement une plaque de métal) équipée de pastilles piézoélectriques. L'idée est donc de considérer un FGPM composé de métal (de l'aluminium) au cœur ( $z = 0$ ) et de céramique piézoélectrique (PZT4) aux deux surfaces extérieures ( $z = \pm h/2$ ), afin de créer une structure "mono-couche" remplaçant les structures classiques, et ainsi, de supprimer les contraintes aux interfaces (structure hôte/pastilles) et les risques de décollement des pastilles.

La première partie de ce chapitre, porte sur la description des propriétés graduelles de ce FGPM. C'est un matériau composite mélangeant un matériau conducteur (l'aluminium) et un matériau isolant (le PZT4), il est soumis au phénomène de percolation. Ainsi, on établira les lois de comportement et d'homogénéisation du FGPM en tenant compte de ce phénomène.

Dans la deuxième partie du chapitre, on s'intéresse à la modélisation de structures FGPM élançées (poutre et plaque). Cette modélisation est basée sur la méthode des éléments finis et trois éléments sont présentés :

- Un élément fini de poutre à deux nœuds développé sous Matlab, basé sur la cinématique de Timoshenko.
- Un élément fini 3D tétraédrique à dix nœuds développé sous FEniCS, servant à valider les modélisations poutre et plaque.
- Un élément fini de plaque triangulaire à six nœuds développé sous FEniCS, basé sur une cinématique d'ordre supérieure.

## 2.1 Description du FGPM : PZT4/Al/PZT4

Les structures étudiées dans le cas du contrôle actif des vibrations sont souvent des structures "tri-couches" : une structure hôte à contrôler équipée sur ses deux faces de pastilles piézoélectriques servant de capteurs ou d'actionneurs. Celles-ci sont soumises à des concentrations de contraintes aux interfaces, et sont sujettes au décollement des pastilles.

Dans le but de remplacer ces structures par une structure formée d'une seule couche, on utilise un FGPM dont la fibre moyenne est constituée de métal (remplaçant ainsi la structure hôte), et les parties externes sont constituées de matériau piézoélectrique (reproduisant les pastilles). On a choisit comme matériau l'aluminium et le PZT4. Le matériau varie graduellement dans l'épaisseur, il varie du PZT4 sur les deux surfaces extérieures ( $z = \pm \frac{h}{2}$ ) à de l'aluminium à la fibre moyenne ( $z = 0$ ). Cette variation est supposée symétrique par rapport à la fibre moyenne. Le choix des ces deux matériaux constituant le FGPM n'est en rien restrictif et les deux matériaux peuvent être changés.

La Figure 2.1 présente des coupes du FGPM pour différentes valeur de  $k$ , indice gérant la gradation du FGPM.

### 2.1.1 Lois d'homogénéisation

Comme la caractérisation expérimentale des propriétés matériaux des FGPM est difficile, on suppose qu'elles suivent une loi de premier ordre d'homogénéisation, appelée loi des mélanges. Soit  $P$  une propriété matériau mécanique ou électrique et  $p$ ,  $m$  deux exposants référant au métal et à la céramique piézoélectrique respectivement, on a :

$$P(z) = P_m V_m(z) + P_p V_p(z) \quad \text{avec} \quad V_m(z) + V_p(z) = 1 \quad (2.1)$$

$$P(z) = (P_m - P_p)V_m(z) + P_p \quad (2.2)$$

où  $V_m$  et  $V_p$  sont les fractions volumiques du métal et de la céramique, respectivement.

On considère que la fraction volumique varie comme une loi puissance dans l'épaisseur :

$$V_m(z) = \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right)^k, \quad z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \quad (2.3)$$

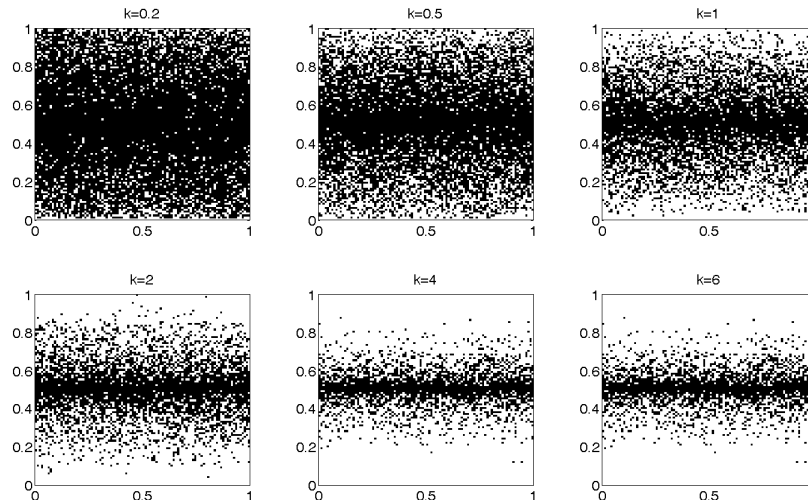


FIGURE 2.1 – FGPM PZT4/Alu/PZT4 pour différentes valeurs de  $k$   
Le PZT4 est représenté en blanc et l'aluminium en noir

assurant des extrémités purement piézoélectrique en  $z = \pm \frac{h}{2}$  et un cœur purement métallique en  $z = 0$ .

L'indice de la fraction volumique,  $k$ , régit le profil de distribution des deux composants dans l'épaisseur.

On a par exemple les cas suivants :

- $k = 1$  : distribution linéaire dans l'épaisseur.
- $k > 10$  : presque l'entièreté du FGPM est constitué de PZT4 sauf la surface moyenne.
- $k \rightarrow 0$  : l'entièreté du FGPM est constitué d'aluminium sauf les deux surfaces externes  $z = \pm h/2$ .

## 2.1.2 Diélectricité d'un mélange isolant conducteur

### 2.1.2.a Généralités sur les milieux diélectriques

Un milieu est dit diélectrique s'il ne contient pas de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique. Le milieu ne peut donc pas conduire le courant électrique et est par définition un isolant électrique [BAILLON et DORLOT \[2000\]](#).

Les diélectriques ne sont cependant pas inertes électriquement. En effet, les constituants du matériau peuvent présenter à l'échelle atomique des dipôles électrostatiques, qui interagiront avec un champ électrique externe appliqué. Cette interaction se traduit par la création d'une polarisation  $\mathbf{P}$  reliée au niveau microscopique à ce champ électrique par la polarisabilité, et au niveau macroscopique, par la susceptibilité électrique  $\chi$ .

Les électrons présents dans un milieu diélectrique ne peuvent pas, par définition, se déplacer sur des grandes distances. Ils peuvent par contre présenter des mouvements d'amplitude très petite à notre échelle, mais qui peuvent être à l'origine de nombreux phénomènes. Ces mouvements sont souvent des mouvements d'oscillation autour du noyau : le nuage électronique peut être déformé et ainsi créer un dipôle électrostatique. Les atomes peuvent également osciller autour de leur position d'équilibre et créer des dipôles.

De tels dipôles peuvent donc être créés en soumettant le matériau à un champ électrique. S'ils existaient déjà, cela peut avoir comme effet de tous les aligner dans le sens du champ électrique. Ainsi la polarisation est la somme de tous les dipôles du matériau, provenant de différents effets physiques :

- la polarisation électronique, toujours présente, est due au déplacement et à la déformation de chaque nuage électronique,
- la polarisation atomique est due aux déplacements des atomes,
- la polarisation d'orientation existe lorsque des dipôles déjà présents sont tous alignés entre eux.

Dans le cas linéaire, la polarisation  $\mathbf{P}$  est proportionnelle au champ électrique  $\mathbf{E}$  qui est le champ électrique total après que la matière a été polarisée :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (2.4)$$

avec  $\epsilon_0$  la permittivité du vide et  $\chi$  la susceptibilité électrique du matériau, qui est un nombre complexe.

La loi constitutive dans un matériau diélectrique reliant le déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  est la suivante :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.5)$$

La permittivité  $\epsilon$  d'un matériau définit la possibilité d'être traversé par un courant électrique, sous l'action du champ électrique, résultant des diverses polarisations. Elle est ainsi définie comme :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.6)$$

On définit également la permittivité relative adimensionnelle  $\epsilon_r$  comme :

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \text{avec} \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (2.7)$$

La permittivité d'un matériau est une grandeur tensorielle (la réponse du matériau peut dépendre de l'orientation des axes cristallographiques du matériau), qui se réduit à un scalaire dans les milieux isotropes. Elle est souvent complexe, la partie imaginaire étant liée au phénomène d'absorption ou d'émission du champ électromagnétique par le matériau.

Dans un milieu diélectrique réel, il existe toujours à basses fréquences une faible conductivité liée à différents mécanismes microscopiques (défauts, diffusion, absorption). On parle alors de pertes diélectriques. On peut tenir compte de ces pertes en définissant une permittivité complexe :

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'' \quad (2.8)$$

où  $\epsilon'$  et  $\epsilon''$  sont respectivement la partie réelle et la partie complexe de la permittivité électrique complexe  $\epsilon$  du milieu.

### 2.1.2.b Théorie moléculaire des milieux hétérogènes

La permittivité électrique des milieux hétérogènes est étudiée depuis le début du XIX<sup>ème</sup> siècle. Elle dépend principalement des permittivités des matériaux constituant le mélange, de leurs fractions volumiques et de la forme des inclusions (mais non de leur structure interne). Si le mélange a une structure périodique, la permittivité effective peut être évaluée analytiquement sous certaines conditions par des lois dites de mélanges. Si le milieu est désordonné, il n'existe pas de solutions analytiques et l'utilisation de méthodes numériques s'avère indispensable.

Le premier modèle diélectrique d'un mélange hétérogène à deux phases a été proposé par Mossotti et Clausius. En 1848, l'astronome Mossotti ([MOSSOTTI \[1846\]](#)) a constaté que le comportement de la poussière constituée de particules identiques peut être décrit par la quantité  $N_k \alpha_k / 3\epsilon_0$ , qui est elle-même proportionnelle à la densité de la poussière ( $N_k$  est le nombre de particules par unité de volume et  $\alpha_k$  est la polarisabilité de chaque particule). En 1879, Clausius ([CLAUSIUS \[1879\]](#)) montre que le rapport  $(\epsilon - \epsilon_0) / (\epsilon + 2\epsilon_0)$  est proportionnel à la densité, où  $\epsilon$  est la permittivité macroscopique. Les deux approches, microscopique (Mossotti) et macroscopique (Clausius) sont réunies en une seule, la relation de Clausius-Mossotti ([PRINKEY et collab. \[1994\]](#)) :

$$\frac{\sum_k N_k \alpha_k}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \quad (2.9)$$

Cette équation est établie en supposant que le champ local  $\mathbf{E}_l$  est identique au champ externe, et en admettant le modèle du champ local de Lorentz avec la polarisation  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} = \sum_k N_k \alpha_k (\mathbf{E}_l)_k \quad (2.10)$$

A partir de cette relation, on peut retrouver les théories classiques de la permittivité effective dans un milieu hétérogène, il suffit de définir le milieu dans lequel baignent les inclusions.

Les lois de mélanges permettant de caractériser la permittivité d'un mélange hétérogène sont celles décrites par le modèle du milieu effectif où plus connu sous le nom de théorie de Maxwell-Garnett, et par le modèle de l'approximation du milieu effectif ou théorie de Bruggeman.

La théorie de Maxwell-Garnett est dérivée de la relation de Clausius-Mossotti. Elle est basée sur la polarisation induite par un champ uniforme externe sur des inclusions sphériques placées dans le matériau hôte. La formule de Maxwell-Garnett établie en 1904 est la suivante (GARNETT [1904]) :

$$\frac{\epsilon - \epsilon_m}{\epsilon + 2\epsilon_m} = f \frac{\epsilon_i - \epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \quad (2.11)$$

où  $\epsilon$  est la permittivité effective du milieu constitué d'une matrice continue, ayant une permittivité  $\epsilon_m$ , dans laquelle sont émergées les inclusions ayant une permittivité  $\epsilon_i$ , et où  $f$  est la fraction volumique des inclusions.

Le domaine d'application de cette formule est défini par les hypothèses suivantes : l'ensemble des inclusions est équivalent à un dipôle unique, isolé dans la matrice, dont la polarisabilité est la somme des polarisabilités individuelles. Les inclusions sont supposées sans interaction entre elles, la théorie est donc valide pour un faible volume d'inclusions et de grandes distances interparticules (le modèle est incertain pour des concentrations d'inclusions supérieures à 50%) (CALAME et collab. [1996], MICHEL et LAKHTAKIA [1996], BOYD et collab. [1996]).

Le modèle de Bruggeman est basé sur le calcul de permittivité du composite en imaginant sa construction, à partir de la matrice hôte, par des ajouts infinitésimaux successifs d'inclusions. Ainsi la permittivité est déterminée à partir de la relation :

$$(1 - f) \frac{\epsilon_m - \epsilon}{\epsilon_m + 2\epsilon} + f \frac{\epsilon_i - \epsilon}{\epsilon_i + 2\epsilon} = 0 \quad (2.12)$$

Le modèle de Bruggeman assure la validité pour des fractions volumiques plus élevées, puisqu'il traite les deux constituants de manière symétrique (CALAME et collab. [1996], MICHEL et LAKHTAKIA [1996], BOYD et collab. [1996]).

D'autres modèles ont été créés au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, prenant en compte la taille des inclusions (modèle de Fricke), ou pour des concentrations d'inclusions très élevés (modèle de Böttcher MEJDOUBI [2007]).

### 2.1.2.c Matériaux composites diélectriques avec une phase conductrice

Le FGPM considéré dans ce travail est un matériau composite diélectrique, dans lequel les inclusions (aluminium) constituent une phase conductrice, dispersées dans la matrice hôte diélectrique. La prédiction de la permittivité effective et/ou la conductivité effective de ces milieux composites n'est pas évidente. Néanmoins, depuis les premiers travaux de Maxwell et Garnett, de nombreux travaux sur l'évaluation des caractéristiques diélectriques de ces matériaux ont été menées.

Pour modéliser des mélanges conducteur-isolant, on peut retenir deux types d'approches :

- la première implique le traitement du comportement diélectrique des mélanges entièrement indépendant des effets de la conduction des inclusions,
- la deuxième où la phase conductrice est considérée comme un matériau diélectrique avec de fortes pertes.

Dans ce deuxième cas, les théories de mélanges concernant les composites diélectrique - diélectrique ont été étendues aux matériaux à fortes pertes, pour tenir compte des inclusions conductrices. La permittivité complexe du mélange est calculée en supposant que la permittivité des inclusions conductrices est infinie.

L'ajout de particules conductrices dans une matrice diélectrique augmente de façon significative la permittivité globale du composite. Celle-ci peut être estimée grâce aux théories du milieu effectif, comme la théorie de Maxwell-Garnett ou celle de Bruggeman. On considère que les particules conductrices sont dispersées dans une matrice continue de céramique. La permittivité effective  $\epsilon$ , est alors estimée par la loi de Maxwell-Garnett (CHÛLEK et SRIVASTAVA [1983]) :

$$\epsilon(V_m) = \epsilon_p \left( \frac{1 + 2V_m \frac{\epsilon_m - \epsilon_p}{\epsilon_m + 2\epsilon_p}}{1 - V_m \frac{\epsilon_m - \epsilon_p}{\epsilon_m + 2\epsilon_p}} \right) \quad (2.13)$$

où  $V_m$  est la fraction volumique de métal et les indices  $p, m$  font références respectivement à la céramique piézoélectrique et au métal.

On suppose que les particules métalliques peuvent être assimilées à un matériau avec des grandes pertes diélectriques (i.e avec une permittivité dont la partie imaginaire est dominante), et que la matrice céramique peut être assimilée à un matériau diélectrique parfait (sans pertes diélectriques). De plus à basses fréquences, les pertes diélectriques des particules métalliques tendent vers l'infini. La permittivité effective du composite devient alors (LI et collab. [2001]; ORLOWSKA [2003]) :

$$\epsilon(V_m) \simeq \epsilon_p \frac{1 + 2V_m}{1 - V_m} \quad , \quad \epsilon_m \gg \epsilon_p \quad (2.14)$$

### 2.1.3 Percolation

La percolation désigne, à l'origine, le passage d'un fluide à travers un solide perméable. Pour analyser un tel processus, les scientifiques ont conçu des modèles simples afin de répondre à des questions élémentaires : par exemple, lors du coloriage d'un réseau avec deux couleurs (jaune et bleu), on peut se demander quand est ce qu'une ligne bleue ira d'un bord à l'autre ?

L'étude scientifique des modèles de percolation a débuté avec les travaux de l'ingénieur Simon Broadbent et du mathématicien John Hammersly en Angleterre (BROADBENT et HAMMERSLEY [1957]). Ils ont introduit en 1957 un tel modèle afin de comprendre comment les poussières pouvaient obstruer les masques à gaz. Depuis, la percolation n'a cessé de susciter l'intérêt des scientifiques, notamment parce qu'on la rencontre sous une forme ou une autre dans de nombreux phénomènes : écoulement d'un fluide dans un matériau poreux, gélification d'un liquide, propagation d'incendie ou d'une épidémie, passage d'un courant dans un mélange de matériaux conducteurs et isolant, transition de phase, etc.

Le FGPM considéré dans ce travail est un mélange entre un conducteur et un isolant, donc de fait soumis au phénomène de percolation. Celui-ci a lieu lorsque qu'il y a assez de particules conductrices pour former un chemin conducteur à travers le mélange. Quand la concentration de particules conductrices atteint le seuil de percolation, le FGPM entreprend une transition conductrice/isolante. En notant la concentration au seuil de percolation  $V_T$ , on a deux cas :

- lorsque  $V_m(z) < V_T$  : le FGPM a un comportement isolant,
- lorsque  $V_m(z) > V_T$  : le FGPM a un comportement conducteur.

Le seuil de percolation dépend principalement de la micro-structure du mélange (tailles et formes des différentes particules (PECHARROMÁN et MOYA [2000])), il est usuellement déterminé grâce à des mesures expérimentales. En se basant sur des modèles théoriques de la percolation (CHÛLEK et SRIVASTAVA [1983]) et des études expérimentales (LI et collab. [2001], TAKAGI et collab. [2002])

on considère que  $V_T$  peut varier entre les valeurs 0.1 et 0.3, correspondant à 10% et 30% de particules conductrices.

On peut noter aussi qu'à l'approche du seuil de percolation les propriétés électriques du composite ont un comportement particulier. En effet, elles sont proportionnelles à la concentration de particules conductrices, et la théorie de la percolation permet de prédire l'évolution de la permittivité et de la conductivité effectives :

$$\sigma = \sigma_m (V_m - V_T)^t \quad V_m > V_T \quad (2.15)$$

$$\sigma = \sigma_p (V_T - V_m)^{-q} \quad V_m < V_T \quad (2.16)$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{|V_T - V_m|^q} \quad (2.17)$$

où  $\sigma_m$  et  $\sigma_p$  sont les conductivités du métal et de la céramique respectivement. Les exposants régissant ces lois  $t$  et  $q$  sont déterminées grâce à la théorie de la percolation et dépendent principalement du type de réseau représentant le matériau et de sa dimension. Ce comportement critique à l'approche du seuil de percolation n'a pas été pris en compte dans ce travail, et devra faire l'objet d'une étude complémentaire.

La prise en compte du phénomène de percolation dans la littérature sur les FGPM est assez rare : soit car le FGPM considéré n'est pas un mélange isolant-conducteur, soit par "oubli" (CHUAQUI et ROQUE [2017]).

### 2.1.4 Lois d'homogénéisation avec percolation

La prise en compte du phénomène de percolation nécessite de distinguer trois parties dans le FGPM (Figure 2.2) :

- une partie conductrice, la "région" centrale riche en aluminium, où la percolation a eu lieu  $V_m(z) > V_T$ ,
- deux parties isolantes, proches des faces extérieures, où la concentration de particules conductrices est en dessous du seuil de percolation  $V_m(z) < V_T$

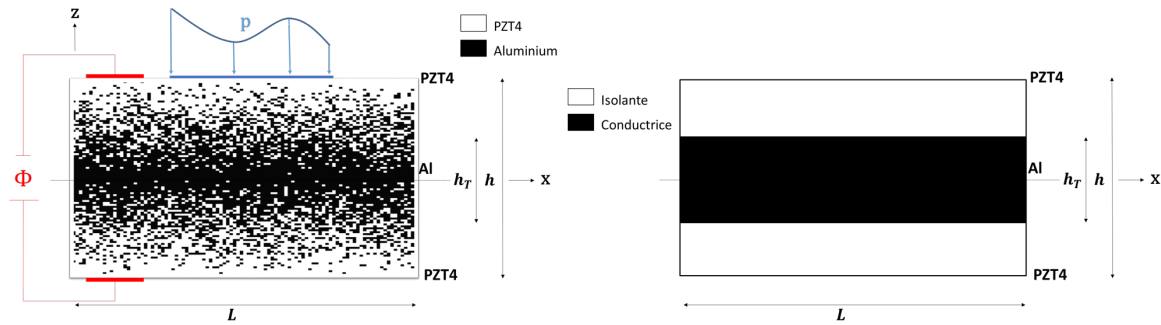


FIGURE 2.2 – Coupe du FGPM

L'épaisseur de la partie conductrice,  $h_T$ , dépend à la fois du seuil de percolation  $V_T$  et de l'indice de fraction volumique  $k$ . En résolvant l'équation  $V_m(z = \frac{h_T}{2}) = V_T$ , on obtient en utilisant l'équation (2.3) :

$$h_T = h \left( 1 - V_T^{\frac{1}{k}} \right) \quad (2.18)$$

Les propriétés mécaniques  $C_{ij}$  (coefficients de rigidité) et la masse volumique  $\rho$  effectives sont données par la loi des mélanges :

$$C_{ij}(z) = \left( C_{ij}^{(m)} - C_{ij}^{(p)} \right) \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right)^k + C_{ij}^{(p)} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.19)$$



$$\rho(z) = (\rho^{(m)} - \rho^{(p)}) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right)^k + \rho^{(p)} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.20)$$

Les propriétés effectives électriques, les coefficients piézoélectriques  $e_{ij}$  et les constantes diélectriques  $\epsilon_{ij}$  sont nulles dans la partie conductrice du FGPM.

On a ainsi pour les coefficients piézoélectriques la loi de mélange suivante :

$$e_{ij}(z) = \begin{cases} (e_{ij}^{(m)} - e_{ij}^{(p)}) \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k + e_{ij}^{(p)} & \frac{h_T}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ 0 & -\frac{h_T}{2} < z < \frac{h_T}{2} \\ (e_{ij}^{(m)} - e_{ij}^{(p)}) \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k + e_{ij}^{(p)} & -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{h_T}{2} \end{cases} \quad (2.21)$$

La permittivité effective d'un mélange isolant-conducteur présente des propriétés particulières (Section 2.1.2.c) : elle augmente avec l'ajout de particules conductrices jusqu'au seuil de percolation.

La permittivité effective suit la loi de Maxwell-Garnett (Eq 2.14), et en tenant compte de la percolation, on obtient :

$$\epsilon_{ij}(z) = \begin{cases} \epsilon_{ij}^{(p)} \frac{1 + 2 \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k} & \frac{h_T}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ 0 & -\frac{h_T}{2} < z < \frac{h_T}{2} \\ \epsilon_{ij}^{(p)} \frac{1 + 2 \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k}{1 - \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k} & -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{h_T}{2} \end{cases} \quad (2.22)$$

La Figure 2.3 montre l'évolution des propriétés  $C_{ij}$ ,  $e_{ij}$  et  $\epsilon_{ij}$  en fonction de l'épaisseur, pour  $k = 2$  et  $V_T = 0.3$ .

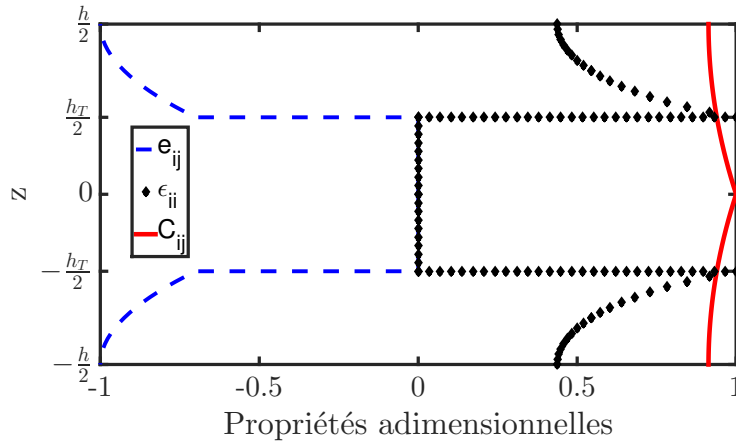


FIGURE 2.3 – Propriétés matériaux adimensionnelles pour  $k = 2$  et  $V_T = 0.3$

Dans le cas particulier du modèle poutre, les propriétés mécanique de l'aluminium et du PZT4 sont isotropes et exprimées par le module de Young  $Y$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et le coefficient de cisaillement  $G$ , de plus, le coefficient de Poisson est considéré constant. Le module de Young et de cisaillement varie donc comme :

$$Y(z) = (Y^{(m)} - Y^{(p)}) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right)^k + Y^{(p)} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.23)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{2(1 + \nu)} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.24)$$

## 2.2 Modèle de poutre FGPM

Le principal problème rencontré lors de la modélisation des FGPM est la prise en compte des variations graduelles des propriétés du matériau. Les logiciels du commerce de type Abaqus, Ansys, Comsol, ne permettent qu'une modélisation multi-couches des matériaux à gradient. C'est à dire, comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes collées entre elles, chaque couche ayant des propriétés matériaux différentes et homogènes, correspondant à l'intégration de la loi graduelle dans la couche.

Les éléments finis utilisés dans ce travail ont été développés avec Matlab et FEniCS, pour éviter ce genre de modélisation. Les propriétés graduelles sont directement intégrées numériquement dans l'épaisseur et le phénomène de percolation est pris en compte. On présente l'élément de poutre développé sous Matlab pour valider en première approximation la faisabilité du contrôle actif avec ce FGPM.

### 2.2.1 Le modèle de poutre 1D FGPM

On considère une poutre droite d'axe  $(O, x)$  élaborée à partir du FGPM décrit précédemment, ayant pour dimension  $L$ ,  $b$  et  $h$ , la longueur, la largeur et la hauteur, respectivement. Le modèle développé est basé sur la cinématique de Timoshenko, permettant de traiter des poutres relativement épaisses et de prendre en compte l'effet de cisaillement. Selon la théorie de Timoshenko, le déplacement dans le plan  $(O, x, z)$  d'un point  $M$  de la poutre s'exprime comme :

$$u_1(x, z, t) = u^0(x, t) + z\theta^0(x, t) \quad (2.25)$$

$$u_3(x, z, t) = w^0(x, t) \quad (2.26)$$

où  $u^0$  et  $w^0$  sont les composantes du déplacement de la fibre moyenne selon les axes  $(O, x)$  et  $(O, z)$  respectivement, et  $\theta^0$  est la rotation de la section autour de l'axe  $(O, y)$ . Les deux termes non-nuls des déformations  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_5$  sont donnés par :

$$\varepsilon_1(x, z, t) = \frac{\partial u^0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta^0}{\partial x} \quad 2\varepsilon_5(x, z, t) = \theta^0 + \frac{\partial w^0}{\partial x} \quad (2.27)$$

### 2.2.2 Choix du potentiel électrique

Afin de construire un modèle de poutre piézoélectrique, il faut également choisir une approximation du potentiel électrique  $\phi(x, y, z, t)$ . Le choix d'une loi de distribution du potentiel dans l'épaisseur approchant convenablement la réalité s'impose. D'après **POLIT et BRUANT [2006]**, le potentiel électrique doit être au moins quadratique dans la direction  $z$  (épaisseur de la structure).

Une approximation par couches numériques dans l'épaisseur est utilisée pour le potentiel électrique. En effet, elle à l'avantage de modéliser correctement les phénomènes dans l'épaisseur tout en permettant une discrétisation indépendante de celle du déplacement.

Chaque élément est discrétisé en  $2n_l$  couches,  $n_l$  couches dans la partie isolante inférieure ( $z \leq -\frac{h_l}{2}$ ) et  $n_l$  couches dans la partie isolante supérieure ( $z \geq \frac{h_l}{2}$ ). La partie conductrice du FGPM ne possède que deux degrés de liberté électriques aux interfaces avec les parties isolantes, où le potentiel est nul.

On a un total de  $(N_\phi = 2(2n_l + 1))$  degrés de liberté électrique par élément de poutre.

Ainsi dans une couche numérique  $p$  le potentiel électrique est approximé par une interpolation quadratique de Lagrange. Chaque couche possède donc trois degrés de liberté électrique : le potentiel supérieur  $\phi_{sup}^p$ , le potentiel inférieur  $\phi_{inf}^p$  et le potentiel médian  $\phi_{mid}^p$  (Figure 2.4). Le potentiel électrique s'exprime au sein d'une couche  $p$  comme :

$$\phi^p(x, z(\xi)) = h(\xi)\phi_{inf}^p(x) + g(\xi)\phi_{mid}^p(x) + f(\xi)\phi_{sup}^p(x) \quad (2.28)$$

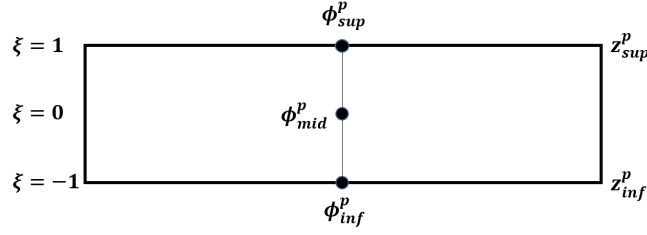


FIGURE 2.4 – Degrés de liberté dans une couche p

Avec :

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad g(\xi) = (1 - \xi^2) \quad h(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (2.29)$$

Où  $\xi$  est le changement de variable dans une couche  $p$  :

$$\xi \in [-1, 1] \quad \text{et} \quad z^e \in [z_{inf}^p, z_{sup}^p]$$

$$\xi(z) = \frac{2z^p - (z_{sup}^p + z_{inf}^p)}{z_{sup}^p - z_{inf}^p} \quad \text{et} \quad z(\xi) = \frac{1}{2} \left( z_{sup}^p(1 + \xi) + z_{inf}^p(1 - \xi) \right) \quad (2.30)$$

### 2.2.3 Écriture variationnelle

Le FGPM sera recouvert d'électrodes (fines couches conductrices) afin d'activer ses propriétés piézoélectriques, elles sont déposées sur les surfaces extérieures  $z = \pm \frac{z}{2}$ . Chaque électrode forme une surface équipotentielle (BERLINCOURT et collab. [1964]), c'est à dire que le potentiel est constant sur l'électrode. Le potentiel électrique est donc indépendant dans une électrode de  $x$  et de  $y$  et le champ électrique se restreint à  $\mathbf{E} = E_3 \mathbf{z}$ . On considère donc dans ce modèle que seule la composante  $E_3 = -\frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z}$  du champ électrique est non nulle. La loi de comportement piézoélectrique présentée à la section 1.1 se réduit alors aux trois équations suivantes :

$$\sigma_1(x, z, t) = Y(z)\varepsilon_1(x, z, t) + e_{31}(z)E_3(x, z, t) \quad (2.31)$$

$$\sigma_5(x, z, t) = G(z)\varepsilon_5(x, z, t) \quad (2.32)$$

$$D_3(x, z, t) = e_{31}(z)\varepsilon_1(x, z, t) + \epsilon_{33}(z)E_3(x, z, t) \quad (2.33)$$

Comme l'élément fini de poutre sera implémenté sous Matlab, il est nécessaire d'écrire la formulation variationnelle 1D du problème. Il faut donc intégrer sur la section de la poutre la formulation variationnelle 3D du problème piézoélectrique (Eq (1.14)). La formulation variationnelle 1D s'écrit comme :

$$\int_x (\Pi_m^{1D} + \Pi_e^{1D} + \Pi_a^{1D}) dS = \int_x \Pi_f^{1D} dS \quad (2.34)$$

où  $\Pi_m^{1D}, \Pi_e^{1D}, \Pi_a^{1D}$  et  $\Pi_f^{1D}$  sont les puissances virtuelles mécanique, électrique, inertielle et des efforts extérieurs respectivement.

On introduit les vecteurs suivants contenant les composantes des déformations et du potentiel électrique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \{u_{,1}^0 \quad \theta_{,1}^0 \quad \theta^0 + w_{,1}^0\}^t \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \{\phi^{(0)} \quad \phi^{(1)} \dots \phi^{(n_\phi)}\}^t \quad (2.36)$$

### 2.2.3.a La puissance mécanique virtuelle

La puissance mécanique virtuelle  $\Pi_m^{1D}$  a pour expression :

$$\Pi_m^{1D} = \int_x \boldsymbol{\varepsilon}^{\nu* t} \mathbf{I} \boldsymbol{\varepsilon}^\nu + \boldsymbol{\varepsilon}^{\nu* t} \mathbf{J} \boldsymbol{\Phi} dx \quad (2.37)$$

avec

$$\mathbf{I} = \int_S \begin{bmatrix} E(z) & zE(z) & 0 \\ zE(z) & z^2E(z) & 0 \\ 0 & 0 & G(z) \end{bmatrix} dS \quad (2.38)$$

et la matrice  $\mathbf{J}$  est l'assemblage sur le nombre de couches discrètes utilisées des matrices  $\mathbf{J}^p$ , définies dans une couche comme :

$$\mathbf{J}^p = \int_y \int_{-1}^1 z^i(\xi) \begin{bmatrix} e_{31}(\xi) f'(\xi) & e_{31}(\xi) g'(\xi) & e_{31}(\xi) h'(\xi) \\ e_{31}(\xi) f'(\xi) & e_{31}(\xi) g'(\xi) & e_{31}(\xi) h'(\xi) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi dy \quad (2.39)$$

### 2.2.3.b La puissance électrique virtuelle

La puissance électrique virtuelle  $\Pi_e^{1D}$  a pour expression :

$$\Pi_e^{1D} = \int_x \boldsymbol{\Phi}^{* t} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^{* t} \mathbf{J}^t \boldsymbol{\varepsilon}^\nu dx \quad (2.40)$$

où la matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est l'assemblage sur le nombre de couches discrètes utilisées des matrices  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , définies dans une couche comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \int_{-1}^1 \varepsilon_{33} \begin{bmatrix} (f'(\xi))^2 & f'(\xi)g'(\xi) & f'(\xi)h'(\xi) \\ f'(\xi)g'(\xi) & (g'(\xi))^2 & g'(\xi)h'(\xi) \\ f'(\xi)h'(\xi) & g'(\xi)h'(\xi) & (h'(\xi))^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.41)$$

### 2.2.3.c La puissance inertielle virtuelle

La puissance inertielle virtuelle  $\Pi_a^{1D}$  s'exprime comme :

$$\Pi_a^{1D} = \int_x \mathbf{u}^{* t} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} dx \quad (2.42)$$

où

$$\mathbf{u} = \{u^0 \ w^0 \ \theta^0\}^t \quad (2.43)$$

et

$$\mathbf{M} = \int_S \rho(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & z^2 \end{bmatrix} dS \quad (2.44)$$

## 2.2.4 L'élément fini de poutre FGPM

L'élément fini développé sous Matlab est un élément de poutre à deux nœuds et est schématisé sur la Figure 2.5.

On choisit d'utiliser l'interpolation consistante pour éviter le verrouillage numérique (A.1), avec  $w_0$  quadratique et  $\theta_0$  linéaire, et  $u_0$  linéaire également. Les déplacements généralisés du modèle de poutre Timoshenko  $u_0^e, w_0^e, \theta_0^e$  sont approximés par :

$$\begin{aligned} u_0^e(x, t) &= \sum_{j=1}^2 u_j(t) N_j^l(x) \\ w_0^e(x, t) &= \sum_{j=1}^3 w_j(t) N_j^q(x) \\ \theta_0^e(x, t) &= \sum_{j=1}^2 \theta_j(t) N_j^l(x) \end{aligned} \quad (2.45)$$

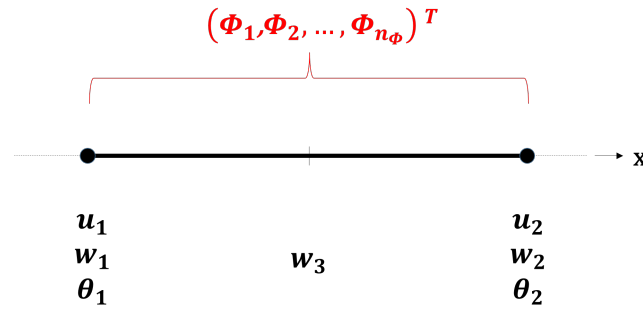


FIGURE 2.5 – Élément poutre : degrés de liberté

où  $N_{j=1,2}^l$  et  $N_{j=1,2,3}^q$  sont les interpolations linéaire et quadratique de Lagrange et  $u_j, w_j, \theta_j$  sont les valeurs nodale de  $u_0^e, w_0^e, \theta_0^e$  respectivement.

Les degrés de liberté de l'élément de poutre sont donc :

- trois degrés de liberté en déplacement ( $u_0, w_0$  et  $\theta_0$ ) à chaque nœud,
- un degré de liberté supplémentaire pour le déplacement transverse sur un nœud central,
- $2(2n_l + 1)$  degrés de liberté électrique par élément, où  $n_l$  est le nombre de couches numériques utilisées pour l'approximation du potentiel électrique.

Cet élément de poutre a été développé sous le logiciel Matlab, dans l'objectif de montrer la faisabilité du contrôle actif des vibration du FGPM. Celui-ci permet de remplacer les structures classiques tri-couches, et de placer facilement des électrodes, afin d'utiliser certaines parties du FGPM comme actionneurs et capteurs. Celles-ci peuvent être de n'importe quelle forme et placer à n'importe quel emplacement sur les surfaces extérieures du matériau. Cependant, le modèle poutre en réduisant la section à la ligne moyenne, réduit également les possibilités d'utilisation du FGPM.

Afin de mettre en évidence l'intérêt du FGPM et de s'approcher de structures plus courantes dans l'industrie, on a développé un modèle de plaque. Le choix du langage de programmation pour développer cet élément s'est porté sur le Projet FEniCS, qui est une collection de logiciels open-source permettant la résolution automatique d'équations différentielles. On présente dans la section suivante FEniCS et l'implémentation d'une structure FGPM élançée avec un élément 3D, puis 2D.

## 2.3 FEniCS et le modèle de référence 3D FGPM

### 2.3.1 Le Projet FEniCS

Il y a de nombreux outils disponibles pour implémenter la méthode des éléments finis, chacun avec ses avantages et inconvénients. Le choix de l'outil dépend beaucoup du problème à résoudre et des ressources disponibles. Dans cette thèse, le projet FEniCS est utilisé. Le projet FEniCS est un regroupement moderne de logiciels open source pour la résolution d'équations aux dérivées partielles (PDEs) par la méthode des éléments finis (LOGG et collab. [2012]).

L'environnement FEniCS possède les éléments clefs suivant :

- Une interface utilisateur de haut niveau (écrite en Python) permettant d'imiter la formulation mathématique de la méthode des éléments finis (écriture très proche de la formulation faible du problème).
- Des techniques sophistiquées permettant la discrétisation du problème considéré avec une large palette d'éléments finis, succinctement définis, tout en assurant un code hautement efficace.

Une caractéristique importante de FEniCS est sa flexibilité pour modifier facilement les relations constitutives et les équations auxiliaires. FEniCS permet également l'automatisation des

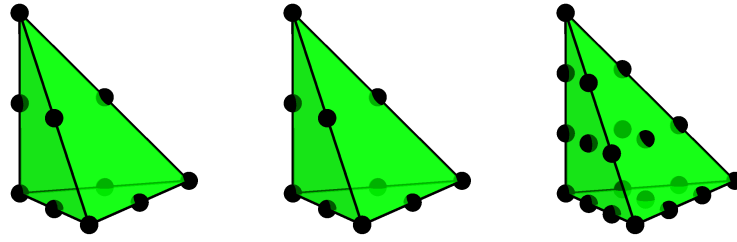


FIGURE 2.6 – Éléments tétraédriques de Lagrange : linéaire, quadratique et cubique

tâches fastidieuses et sujettes aux erreurs comme peuvent être l'assemblage des matrices et vecteurs éléments finis, encourageant ainsi un développement rapide.

De façon générale, l'utilisateur spécifie les équations du problème et les méthodes de discrétisation et FEniCS effectue l'implémentation des éléments finis. Pour l'instant, FEniCS ne propose que des éléments tétraédriques (3D) ou triangulaires (2D), mais l'implémentation d'autres formes d'élément est possible.

Des calculs éléments finis de plus en plus avancés avec FEniCS apparaissent, comme par exemple :

- **ABERT et collab. [2013]** pour la simulation de système micro-magnétique,
- **HOFFMAN et collab. [2013]** pour la simulation de flux turbulent et d'interaction fluide structure,
- **VYNNYTSKA et collab. [2013]** pour simuler la convection au sein du manteau terrestre.

Le projet FEniCS est construit comme un projet "boîte à outils", les éléments essentiels sont :

- UFL (Unified Form Language), 'a domain-specific language' implémenté en Python pour la discrétisation par éléments finis des équations différentielles exprimées grâce aux formes variationnelles,
- FIAT (Finite element Automatic Tabulator), un module Python pour la génération automatique d'un ordre arbitraire des fonctions de bases des éléments finis,
- FFC (FEniCS Form Compiler), un compilateur pour les formes variationnelles éléments finis, prenant en entrée un code UFL et générant un code UFC en sortie,
- UFC (Unified Form-assembly Code), une interface C++ consistant en des fonctions de bas-niveau pour l'évaluation et l'assemblage des formes variationnelles éléments finis,
- Instant, un module Python effectuant l'extension inline du C et C++ en Python,
- DOLFIN utilise le FEniCS Form Compiler (ffc), permet depuis la formulation faible de générer du code C++ permettant l'assemblage de la formulation discrète sur les éléments.

### 2.3.2 Le modèle élément fini 3D de référence

Le premier travail effectué a été de modéliser une structure FGPM à l'aide d'éléments finis 3D. Le modèle 3D n'ayant aucune hypothèse sur la cinématique est plus simple à implémenter. Il servira également de référence pour le modèle plaque. L'élément utilisé est un élément tétraédrique à dix nœuds de Lagrange quadratique (Figure 2.6) pour le déplacement et le potentiel électrique. Chaque nœud possède donc quatre degrés de liberté : les trois déplacements  $(u_1, u_2, u_3)$  et le potentiel électrique  $\phi$ .

On peut noter qu'avec FEniCS les choix des éléments utilisés (Lagrange, Hermite, Lagrange discontinu,...) et du degré d'interpolation de l'élément (linéaire, quadratique, cubique, ...) sont facilement modifiables. Afin d'aider à la compréhension de FEniCS et illustrer une partie du travail effectué, on présente dans la section suivante les principaux points de l'implémentation d'une structure FGPM avec cet élément 3D.

### 2.3.2.a Implémentation

Les principaux points de l'implémentation sous FEniCS avec des éléments 3D d'une structure élastique de type plaque sont présentés et expliqués ci-après.

- On définit la géométrie du problème et les données du matériau :

```
# # Geometry, fraction index and percolation threshold # #
k = 1; # fraction index
Vc = 0.3 # percolation threshold
L = 50e-3; b = 25e-3; h = 2.5e-3

# # Material properties # #
# PZT4
E = 63e9;
mu = 0.3;
rho_1 = 7600
#Piezoelectricity parameters
e31 = -2.1; e33 = 9.5; e15 = 9.2
#Dielectric parameters
psi11 = 15.3e-9; psi33 = 15e-9

Ce_1,Cp_1,Ceps_1 = material_iso(E,mu,e31,e33,e15,psi11,psi33)
# Ce: mechanical rigidity matrix, Cp: piezoelectric coupling matrix,
# Ceps: dielectric matrix

#Aluminum
E = 69e9;
mu = 0.3;
rho_2 = 3960
#Piezoelectricity parameters
e31 = 0; e33 = 0; e15 = 0;
#Dielectric parameters
psi11 = 0; psi33 = 3*8.85e-12

Ce_2,Cp_2,Cepsi_2 = material_iso(E,mu,e31,e33,e15,psi11,psi33)
```

• On maille le domaine dans le plan et on choisit le maillage dans l'épaisseur ( $z$ ). La discrétisation en  $z$  prend deux arguments,  $nz$  est le nombre d'éléments dans chacune des deux parties isolantes du matériaux et  $na$  le nombre d'éléments dans la partie conductrice. Cette dernière nécessite moins d'éléments car elle n'est pas le siège d'effets électriques.

```
# # Number of element in each direction, for z need nz mod 2 = 0 # #
nx = 20; ny = 15; nz = 6; na = 2

# # Create Mesh # #
z = intervalle_z_full(h,hc,nz,na) # Discretization in z direction
mesh = box(x=[0.0,L], y=[0.0, b], z=z, nx=nx, ny=ny)
P_mesh = File("mesh.pvd")
P_mesh << mesh
```

• Le problème piézoélectrique est un problème couplé à deux champs, en déplacement et en potentiel électrique. FEniCS permet ce type d'implémentation : on déclare deux éléments finis, un pour le champ des déplacements et un pour le potentiel électrique. Le degré d'interpolation et le type des deux éléments sont choisis par l'utilisateur. Enfin un espace fonctionnel est créé en associant le maillage à l'élément fini "mixte", regroupant les deux éléments précédents.

```
# # Element type and interpolation # #
n_inter_u = 2 ; ele_type_u = "Lagrange" # EF for displacement
n_inter_p = 2 ; ele_type_p = "Lagrange" # EF for potential

# # Create Mixed element space : displacement and electrical potential # #
Ele_u = VectorElement(ele_type_u, tetrahedron , n_inter_u)
Ele_p = FiniteElement(ele_type_p, tetrahedron , n_inter_p)
Ele_up = MixedElement(Ele_u, Ele_p)
```

```
V = FunctionSpace(mesh, Ele_up)
```

• De cet espace fonctionnel on extrait alors le couple de variables cherchées : le déplacement  $u$  et le potentiel électrique  $\phi$ , et le couple de variables tests  $v$  et  $p$ . À partir de celles-ci on crée les champs de déformations cherchés et tests, de même pour le champ électrique. Ceux-ci sont directement exprimés en notation de Voigt.

```
## Create test and trial functions : TestFunction will always be the first
## argument in a form and
## TrialFunction be the second argument in a form, order of declaration
## does not matter ##
u, phi = TrialFunctions(V)
v, p = TestFunctions(V)

## Computation of strains in Voigt notation ##
eps_u = strain_to_voigt(sym(grad(u))) # Strains
eps_v = strain_to_voigt(sym(grad(v))) # Strains test

## Computation of electric field in Voigt notation ##
Ef_phi = EF_to_voigt(-grad(phi)) # Electric field
Ef_p = EF_to_voigt(-grad(p)) # Electric field test
```

• On implémente la loi de comportement graduelle en  $z$ .

```
## FGPM behaviour law ##
xx = SpatialCoordinate(mesh) # Coordinate of each nodes
Vf = pow(-2*abs(xx[2])/h+1, k) # Fraction volume of aluminium

Ce = Vf*(Ce_2-Ce_1) + Ce_1 # Rigidity matrix, mixture law
Cpsi = (1+2*Vf)/(1-Vf)*Cpsi_1 # Dielectric matrix, Maxwell-Garnett law
Cp = (Vf*(Cp_2-Cp_1)+Cp_1) # Piezoelectric matrix, mixture law
```

• On assemble les contraintes et le déplacement électrique déduit de la loi de comportement piézoélectrique. En raison de la percolation, contraintes et déplacement électrique doivent être découpés selon les régions isolantes et conductrices.

```
## Computation of stresses and electric displacement in Voigt notation ##
sigma_1 = Ce*eps_u + Cp*Ef_phi # Stresses in bottom isolant part
sigma_2 = Ce*eps_u - Cp*Ef_phi # Stresses in top isolant part
sigma_3 = Ce*eps_u # Stresses in mid conductive part

D_1 = -Cp.T*eps_u + Cpsi*Ef_phi # Electrical displacement in bottom
# isolant part
D_2 = Cp.T*eps_u + Cpsi*Ef_phi # Electrical displacement in top
# isolant part
```

• On peut maintenant retranscrire directement la formulation faible du problème.  $dx(i)$  correspond à l'intégration volumique et les indices  $i$  aux différents domaines : 1 et 2 aux deux parties isolantes et 3 à la partie conductrice, et  $ds(j)$  correspond à l'intégration surfacique.

```
## Governing equations ##
# Linear part of variational form
L1 = dot(f, v)*dx - dot(Constant((gx, gy, gz)), v)*ds(s_app)
# Bilinear part of variational form
a = inner(sigma_0, eps_v)*dx(1) + inner(sigma_1, eps_v)*dx(2)
+ dot(D_0, Ef_p)*dx(1) + dot(D_1, Ef_p)*dx(2) + inner(sigma_2, eps_v)*dx(3)
```

• On présente ici le cas d'une plaque épaisse encastrée libre soumise à une différence de potentiel appliquée sur les surfaces supérieure et inférieure. On impose également un potentiel nul dans toute la partie conductrice de la structure.



```

# # Dirichlet boundaries condition # #
# Fix end
bc_f = DirichletBC(V.sub(0),(0.0,0.0,0.0), left_b)
bc_f = [bc_f]
# Imposed electric potential on bot and top surfaces
bc_V1 = DirichletBC(V.sub(1),V0,top_elec)
bc_V2 = DirichletBC(V.sub(1),-V0,bot_elec)
bc_V = [bc_V1,bc_V2]
# Zero potential on conductive part
bc_mid = DirichletBC(V.sub(1),(0.0),int_b,method='pointwise')
bc_vect2 = bc_mid.get_boundary_values()
bc_mid = [bc_mid]

bcs = bc_f + bc_V + bc_mid

```

• Ayant les expressions de la formulation variationnelle et les conditions aux limites, il faut assembler le système puis le résoudre.

```

# # Solve # #
sol = Function(V) # Initialisation of solution function over the domain V
A = assemble(a,keep_diagonal=True) # Assembling bilinear form
B = assemble(Ll,keep_diagonal=True) # Assembling linear form
[bc.apply(A,B) for bc in bcs] # Apply all bc to A and BC

t1 = ti.time() # Counting solving time
solve(A,sol.vector(),B,"mumps") # Solving Au = B, with mumps algorithm
(u_sol, phi_sol) = sol.split(deepcopy=True)
t2 = ti.time()
print "Solve Finish, time= %14.12f" %(t2-t1)

```

Ce modèle 3D a permis d'une part la prise en main de FEniCS et d'autre part servira de référence pour le développement de l'élément de plaque FGPM. Celui-ci est présenté dans la section suivante, et est basé sur une cinématique généralisée.

## 2.4 Modèle de plaque FGPM

### 2.4.1 Les modèles de plaques

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan  $(O,x,y)$ ) et par une épaisseur notée  $h$ , petite par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur  $L$  et la largeur  $b$ . Suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $h$  par rapport aux autres dimensions, on introduit parfois l'adjectif mince ou épais. Cette qualification n'implique pas seulement une caractéristique géométrique mais sous-entend également un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal. La géométrie d'une structure mince favorise donc le choix d'une cinématique particulière par rapport à la cinématique générale d'un solide.

Classiquement, les cinématiques de plaques sont basées sur la supposition explicite de la forme des champs inconnus dans l'épaisseur de la structure, par exemple avec des polynômes en  $z$ . En général, les champs approchés sont les déplacements et on utilise le principe de déplacement virtuel (PVD) pour formuler les modèles approchés. Mais il existe des formulations mixtes telles que Hellinger-Reissner (REISSNER [1984]) ou RMVT (Reissner Mixed Variational Theorem) (REISSNER [1950], CARRERA [2001]) qui proposent des hypothèses pour le déplacement et le champ de contrainte de cisaillement transverse.

Les déplacements et/ou les champs de contraintes sont calculés suivant l'épaisseur dans la direction  $z$  :

$$f(x, y, z) = f_1(x, y)F_1(z) + \dots f_i(x, y)F_i(z) \dots + f_N(x, y)F_N(z) \quad (2.46)$$

Les modèles les plus utilisés sont les suivants :

- Les modèles mono-couches équivalentes.

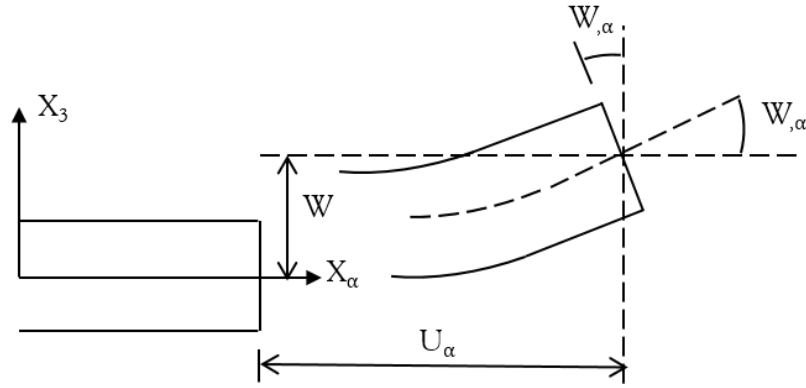


FIGURE 2.7 – Cinématique de Love-Kirchhoff

- Modèles Layer-wise (ROBBINS JR et REDDY [1993], REDDY [1987]).

Dans ce travail, on a choisi d'utiliser un modèle mono-couche équivalentes pour la partie mécanique de la plaque et un modèle par couches numériques pour la partie électrique (similaire à celui de la poutre). On présente les différents modèles mono-couche équivalentes.

#### 2.4.1.a Les modèles mono-couches équivalentes

Dans cette famille on peut citer trois modèles différents :

- Le modèle classique de Love-Kirchhoff
- Le modèle de Reissner-Mindlin
- Les modèles d'ordre supérieur

##### 1. Le modèle classique Love-Kirchhoff (CLT, classical lamination theory) :

Le modèle de Kirchhoff-Love est parfois appelé dans la littérature le modèle "classique" de plaque. Ce modèle se base sur l'hypothèse que la section transverse reste plane et perpendiculaire à la section moyenne après avoir été déformée (Figure 2.7). Donc la déformation de cisaillement transverse est supposée nulle (KRAUS [1967]) et les effets dus à l'effort tranchant sont négligés. Ce modèle est valide pour des plaques minces.

Le champ de déplacement d'une plaque Love-Kirchhoff s'écrit :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, y, z) &= u_\alpha^0(x, y) - z w_{,\alpha}^0(x, y) \quad \alpha = 1, 2 \\ u_3(x, y, z) &= w^0(x, y) \end{aligned} \quad (2.47)$$

avec  $u_\alpha$  le déplacement membranaire de la direction  $\alpha$ ,  $u_3$  le déplacement transverse,  $w^0$  la flèche de la plaque et  $w_{,\alpha}$  la rotation due à la flexion (sans cisaillement). Le  $_{,\alpha}$  désigne respectivement la dérivée spatiale selon les axes  $x$  et  $y$ .

##### 2. Le modèle de Reissner-Mindlin :

Pour introduire les effets dus au cisaillement transverse, on fait l'hypothèse cinématique (MINDLIN [1951]) que la section reste plane mais n'est plus normale à la section moyenne dans la configuration déformée (Figure 2.8). Le champ de déplacement d'une plaque Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, y, z) &= u_\alpha^0(x, y) - z \theta_\alpha(x, y) \quad \alpha = 1, 2 \\ u_3(x, y, z) &= w^0(x, y) \end{aligned} \quad (2.48)$$

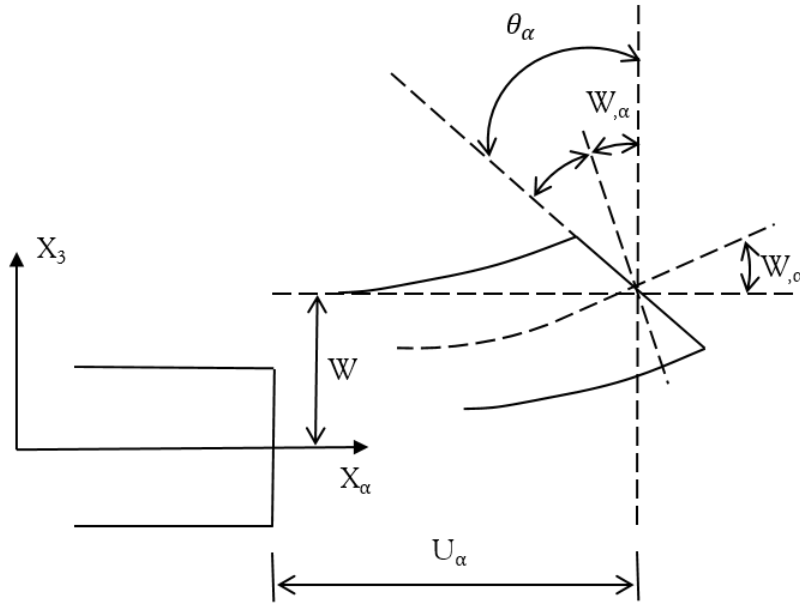


FIGURE 2.8 – Cinématique de Reissner-Mindlin

avec  $u_\alpha$  le déplacement membranaire de la direction  $\alpha$ ,  $w^0$  la flèche de la plaque et  $\theta_\alpha$  la rotation autour des axes  $x$  ou  $y$ .

Par conséquent, la déformation de cisaillement transverse n'est pas nulle.  $u_3$  est constant en  $z$  donc les déformations  $\epsilon_{13}$  et  $\epsilon_{23}$  sont également constantes en  $z$  et  $\epsilon_{33} = 0$ . Ainsi, les contraintes  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  sont constantes, ce qui en fait une assez mauvaise approximation.

De plus,  $\epsilon_{33} = 0$  est incompatible avec l'hypothèse classique de plaque généralement faite, à savoir l'hypothèse des contraintes planes ( $\sigma_{33} = 0$ ). Tout ceci fait que le modèle prédit mal le comportement en cisaillement transverse, dès que le rapport  $h/L$  augmente ou que des gradients de propriétés matériaux importants existent (comme la plaque sandwich).

Ainsi on introduit la notion de coefficient correcteur pour mieux prendre en compte ces effets de cisaillements transverses (WHITNEY [1973]). On peut déduire ces coefficients en comparant l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier ordre et celle déduite des équations d'équilibres (CHO et KIM [2000]).

3. **Les modèles d'ordre supérieur** : Les modèles d'ordre supérieur permettent de se passer des coefficients de correction en cisaillement. La plupart d'entre eux utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements pour approcher la théorie tridimensionnelle. Le déplacement est supposé sous la forme suivante :

$$u_i(x, y, z) = u_i^{(0)}(x, y) + zu_i^{(1)}(x, y) + z^2 u_i^{(2)}(x, y) + z^3 u_i^{(3)}(x, y) + \dots \quad (2.49)$$

avec  $i = 1, 2, 3$ .

HILDEBRAND et collab. [1949] sont les premiers à avoir introduit cette sophistication dans la théorie classique des plaques.

Cependant, pour augmenter la précision de la théorie, on doit utiliser des modèles d'ordre toujours supérieur, augmentant le nombre de degrés de liberté. Pour réduire le nombre de degrés de liberté, plusieurs simplifications sont proposées. Une de ces simplification consiste à tronquer les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une "fonction de cisaillement". La forme du déplacement est alors la suivante :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, y, z) &= u_\alpha^0(x, y) - zw_{,\alpha}^0(x, y) + f(z)\phi_\alpha(x, y) \quad \alpha = 1, 2 \\ u_3(x, y, z) &= w^0(x, y) \end{aligned} \quad (2.50)$$

On trouve selon les auteurs des expressions de  $f(z)$  :

- Ambartsumyan (AMBARTSUMYAN [1969])

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (2.51)$$

- Reissner et Panc (PANC [1975])

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.52)$$

- Levinson, Murthy et Reddy (LEVINSON [1980], MURTHY [1981], REDDY [1984])

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.53)$$

avec  $h$  l'épaisseur de la plaque.

### 2.4.2 Modèle de plaque FGPM

Dans ce travail, la cinématique de plaque FGPM est basée sur un modèle d'ordre supérieur. Les composantes du champs de déplacements peuvent être exprimées de façon générale, en fonction du choix de l'expansion en  $z$  pour les déplacements dans le plan et le déplacement transverse.

$$u_\alpha(x, y, z, t) = u_\alpha^{(0)}(x, y, t) + z u_\alpha^{(1)}(x, y, t) + \dots + z^n u_\alpha^{(n)}(x, y, t) \quad (2.54)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w^{(0)}(x, y, t) + z w^{(1)}(x, y, t) + \dots + z^m w^{(m)}(x, y, t) \quad (2.55)$$

avec  $\alpha = 1, 2$  et  $n, m$  les ordres des expansions en  $z$  du déplacement dans le plan et transverse respectivement. On en déduit les expressions des déformations :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \left( u_{\alpha,\beta}^{(i)} + u_{\beta,\alpha}^{(i)} \right) z^i \quad (2.56)$$

$$\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n i z^{i-1} u_\alpha^{(i)} + \sum_{i=0}^m z^i w_{,\alpha}^{(i)} \right) \quad (2.57)$$

$$\epsilon_{33} = \sum_{i=1}^m i z^{i-1} w^{(i)} \quad (2.58)$$

Cette cinématique permet à la fois d'avoir un modèle d'ordre supérieur ou le modèle de Reissner-Mindlin (pour  $n = 1$  et  $m = 0$ ), selon les degrés d'expansion choisis.

**Remarque :** Le modèle de Reissner-Mindlin entraîne une modification de la loi de comportement. En effet, en utilisant l'hypothèse des contraintes planes  $\sigma_{33} = 0$ , on peut exprimer  $\epsilon_{33}$  tel que :

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{C_{33}} (e_{13} E_1 + e_{33} E_3 - C_{13} \epsilon_{11} - C_{23} \epsilon_{22}) \quad (2.59)$$

On définit de nouveaux coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_{pq} = C_{pq} - \frac{C_{p3} C_{3q}}{C_{33}} \\ \overline{e}_{kp} = e_{kp} - \frac{e_{k3} C_{q3}}{C_{33}} \\ \overline{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{C_{i3} C_{j3}}{C_{33}} \end{array} \right.$$

La nouvelle loi de comportement bidimensionnelle s'exprime comme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C_{11}} & \overline{C_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{C_{12}} & \overline{C_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{C_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{C_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{C_{66}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \overline{e_{31}} \\ 0 & 0 & \overline{e_{32}} \\ 0 & \overline{e_{24}} & 0 \\ \overline{e_{15}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

et

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \overline{e_{15}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{e_{24}} & 0 & 0 \\ \overline{e_{31}} & \overline{e_{32}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\varepsilon_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\varepsilon_{33}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

### 2.4.3 Choix du potentiel électrique

A contrario du modèle poutre, on ne fait aucune hypothèse sur le potentiel, et on a la relation :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z) \quad (2.62)$$

Comme dans la cas de la poutre, on choisit une approximation quadratique par couches discrètes du potentiel électrique. Dans le cas de la plaque, cette approximation est faite en chaque nœud et non plus par élément. La plaque est discrétisée dans l'épaisseur en  $2n_l$  couches numériques :  $n_l$  dans chacune des parties isolantes (supérieure et inférieure), conduisant ainsi à un total de  $n_\phi = 2(2n_l + 1)$  degrés de liberté électriques par nœud. Chaque couche possède trois degrés de liberté électriques : le potentiel supérieur  $\phi_{sup}^p$ , le potentiel inférieur  $\phi_{inf}^p$  et le potentiel médian  $\phi_{mid}^p$  (Figure 2.4). Le potentiel électrique s'exprime au sein d'une couche  $p$  comme :

$$\phi^p(x, y, z(\xi)) = h(\xi)\phi_{inf}^p(x, y) + g(\xi)\phi_{mid}^p(x, y) + f(\xi)\phi_{sup}^p(x, y) \quad (2.63)$$

Avec :

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad g(\xi) = (1 - \xi^2) \quad h(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (2.64)$$

Où  $\xi$  est le changement de variable dans une couche  $p$  :

$$\xi \in [-1, 1] \quad \text{et} \quad z^\varepsilon [z_{inf}^p, z_{sup}^p]$$

$$\xi(z) = \frac{2z^p - (z_{sup}^p + z_{inf}^p)}{z_{sup}^p - z_{inf}^p} \quad \text{et} \quad z(\xi) = \frac{1}{2} \left( z_{sup}^p(1 + \xi) + z_{inf}^p(1 - \xi) \right) \quad (2.65)$$

Le potentiel électrique s'écrit donc en tout point comme :

$$\Phi(x, y) = \{\phi^{(0)} \phi^{(1)} \dots \phi^{(n_\phi)}\}(x, y) \quad (2.66)$$

### 2.4.4 Écriture variationnelle

Comme l'élément fini de plaque sera implémenté sous FEniCS, il est nécessaire d'écrire la formulation variationnelle 2D du problème. Il faut donc intégrer dans la direction  $z$  la formulation variationnelle 3D (Eq 1.14). La formulation variationnelle 2D peut s'écrire comme :

$$\int_S (\Pi_m + \Pi_e + \Pi_a) dS = \int_S \Pi_f dS \quad (2.67)$$

où  $\Pi_m, \Pi_e, \Pi_a$  et  $\Pi_f$  sont les puissances virtuelles mécanique, électrique, inertielle et des efforts extérieurs respectivement.

#### 2.4.4.a La puissance mécanique virtuelle

La puissance mécanique virtuelle  $\Pi_m$ , en injectant la loi de comportement (1.1.1.d), a pour expression en utilisant la notation de Voigt :

$$\begin{aligned}
 \Pi_m &= \int_z \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) dz & (2.68) \\
 &= \int_z [ \boldsymbol{\varepsilon}_1^{*t} (C_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + C_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + C_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_3 - e_{31}\mathbf{E}_3) \\
 &\quad + \boldsymbol{\varepsilon}_2^{*t} (C_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + C_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + C_{23}\boldsymbol{\varepsilon}_3 - e_{32}\mathbf{E}_3) \\
 &\quad + \boldsymbol{\varepsilon}_3^{*t} (C_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + C_{23}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + C_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3 - e_{33}\mathbf{E}_3) \\
 &\quad + \boldsymbol{\varepsilon}_4^{*t} (C_{44}\boldsymbol{\varepsilon}_4 - e_{24}\mathbf{E}_2) \\
 &\quad + \boldsymbol{\varepsilon}_5^{*t} (C_{55}\boldsymbol{\varepsilon}_5 - e_{15}\mathbf{E}_1) \\
 &\quad + \boldsymbol{\varepsilon}_6^{*t} (C_{66}\boldsymbol{\varepsilon}_6) ] dz
 \end{aligned}$$

En décomposant les contraintes selon les contraintes planes  $\boldsymbol{\sigma}_p$ , les contraintes de cisaillement  $\boldsymbol{\sigma}_s$  et les contraintes transverses  $\boldsymbol{\sigma}_t$ , la puissance mécanique virtuelle devient :

$$\Pi_m = \int_z \left( \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_p^* + \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s^* + \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t^* \right) dz \quad (2.69)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6\}^t \quad (2.70)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \{\sigma_4, \sigma_5\}^t \quad (2.71)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \{\sigma_3\} \quad (2.72)$$

et les composantes des déformations correspondantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6\}^t \quad (2.73)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \{\varepsilon_4, \varepsilon_5\}^t \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \{\varepsilon_3\} \quad (2.75)$$

On introduit les vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p^v = \{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \dots \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}\}^t \quad (2.76)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \left\{ u_{1,1}^{(i)} \quad u_{2,2}^{(i)} \quad \frac{1}{2} \left( u_{1,2}^{(i)} + u_{2,1}^{(i)} \right) \right\} \quad (2.77)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^v = \{\boldsymbol{\gamma}_1 \boldsymbol{\gamma}_2\}^t \quad (2.78)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\gamma}_\alpha = \{u_\alpha^{(1)} \quad 2u_\alpha^{(2)} \dots nu_\alpha^{(n)} \quad w_{,\alpha}^{(0)} \quad w_{,\alpha}^{(1)} \dots w_{,\alpha}^{(m)}\} \quad (2.79)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t^v = \{w^{(1)} \quad 2w^{(2)} \dots mw^{(m)}\}^t \quad (2.80)$$

Et les composantes du potentiel électrique :

$$\boldsymbol{\Phi} = \{\phi^{(0)} \phi^{(1)} \dots \phi^{(n_\phi)}\}^t \quad (2.81)$$

On explicite les trois termes de la puissance mécanique virtuelles :

$$\begin{aligned}
 \int_z \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_p^* dz &= \boldsymbol{\varepsilon}_p^{v*t} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_p^v \\
 &\quad + \boldsymbol{\varepsilon}_p^{v*t} \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_s^v \\
 &\quad + \boldsymbol{\varepsilon}_p^{v*t} \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}
 \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned}
 \int_z \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s^* dz &= \boldsymbol{\Upsilon}_1^{v* t} \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\Upsilon}_1^v \\
 &+ \boldsymbol{\Upsilon}_1^{v* t} \mathbf{E}_1 \boldsymbol{\Phi}_{,1} \\
 &+ \boldsymbol{\Upsilon}_2^{v* t} \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\Upsilon}_2^v \\
 &+ \boldsymbol{\Upsilon}_2^{v* t} \mathbf{E}_2 \boldsymbol{\Phi}_{,2}
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}
 \int_z \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3^* dz &= \boldsymbol{\epsilon}_3^{v* t} \mathbf{F} \boldsymbol{\epsilon}_3^v \\
 &+ \boldsymbol{\epsilon}_3^{v* t} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\epsilon}_p^v \\
 &+ \boldsymbol{\epsilon}_3^{v* t} \mathbf{G} \boldsymbol{\Phi}
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Les différentes matrices de rigidité mécanique s'expriment comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^0 & A^1 & \dots & A^n \\ & A^2 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{Sym} & & & A^{2n} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{A}^i = \int_z z^i \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} dz \tag{2.85}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B^0 \\ B^1 \\ \vdots \\ B^n \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{B}^i = \int_z z^i \begin{bmatrix} C_{13} & zC_{13} & \dots & z^m C_{13} \\ C_{23} & zC_{23} & \dots & z^m C_{23} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} dz \tag{2.86}$$

$$(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2) = \int_z (C_{55}, C_{44}) \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^{n-1} & 1 & z & \dots & z^m \\ z & \ddots & & z^n & z & \ddots & & z^{m+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ z^{n-1} & \dots & \dots & z^{2n-2} & z^{n-1} & \dots & \dots & z^{m+n-1} \\ 1 & \dots & \dots & z^{n-1} & 1 & z & \dots & z^m \\ z & \ddots & & z^n & z & \ddots & & z^{m+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ z^m & \dots & \dots & z^{m+n+1} & z^m & \dots & \dots & z^{2m} \end{bmatrix} dz \tag{2.87}$$

$$\mathbf{F} = \int_z C_{33} \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^{m-1} \\ z & z^2 & \dots & z^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{m-1} & z^m & \dots & z^{2m-2} \end{bmatrix} dz \tag{2.88}$$

Les matrices piézoélectriques nécessitent une étape d'assemblage supplémentaire sur le nombre de couches discrètes utilisées, en effet les couches partagent des degrés de liberté : le potentiel inférieur d'une couche  $p$  est également le potentiel supérieur de la couche  $p - 1$ . Les différentes matrices piézoélectriques dans une couche  $p$  sont définies par :

$$\mathbf{C}^p = \begin{bmatrix} C^0 \\ C^1 \\ \vdots \\ C^n \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{C}^i = \int_{-1}^1 z^i(\xi) \begin{bmatrix} e_{31}(\xi) f'(\xi) & e_{31}(\xi) g'(\xi) & e_{31}(\xi) h'(\xi) \\ e_{32}(\xi) f'(\xi) & e_{32}(\xi) g'(\xi) & e_{32}(\xi) h'(\xi) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi \tag{2.89}$$

$$(\mathbf{E}_1^p, \mathbf{E}_2^p) = \int_{-1}^1 (e_{15}, e_{24}) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{n-1} \\ 1 \\ z \\ \vdots \\ z^m \end{bmatrix} [f(\xi) \quad g(\xi) \quad h(\xi)] d\xi \quad (2.90)$$

$$\mathbf{G}^p = \int_{-1}^1 e_{33} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{m-1} \end{bmatrix} [f'(\xi) \quad g'(\xi) \quad h'(\xi)] d\xi \quad (2.91)$$

#### 2.4.4.b La puissance électrique virtuelle

La puissance électrique virtuelle  $\Pi_e$  s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \Pi_e = \int_z \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^* dz = & \Phi_{,1}^{*t} \boldsymbol{\epsilon}_1 \Phi_{,1}^* \\ & + \Phi_{,2}^{*t} \boldsymbol{\epsilon}_2 \Phi_{,2}^* \\ & + \Phi^{*t} \boldsymbol{\epsilon}_3 \Phi^* \\ & - \Phi_{,1}^{*t} \mathbf{E}_1^t \mathbf{Y}_1^v \\ & - \Phi_{,2}^{*t} \mathbf{E}_2^t \mathbf{Y}_2^v \\ & - \Phi^{*t} \mathbf{C}^t \boldsymbol{\epsilon}_p^v \\ & - \Phi^{*t} \mathbf{G}^t \boldsymbol{\epsilon}_3^v \end{aligned} \quad (2.92)$$

Les matrices diélectriques nécessitent une étape d'assemblage supplémentaire sur le nombre de couches discrètes utilisées. En effet les couches partagent des degrés de liberté : le potentiel inférieur d'une couche  $p$  est également le potentiel supérieur de la couche  $p - 1$ . Les différentes matrices diélectriques dans une couche  $p$  sont définies par :

$$(\boldsymbol{\epsilon}_1^p, \boldsymbol{\epsilon}_2^p) = \int_{-1}^1 (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}) \begin{bmatrix} f^2(\xi) & f(\xi)g(\xi) & f(\xi)h(\xi) \\ f(\xi)g(\xi) & g^2(\xi) & g(\xi)h(\xi) \\ f(\xi)h(\xi) & g(\xi)h(\xi) & h^2(\xi) \end{bmatrix} d\xi \quad (2.93)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_3^p = \int_{-1}^1 \epsilon_{33} \begin{bmatrix} (f'(\xi))^2 & f'(\xi)g'(\xi) & f'(\xi)h'(\xi) \\ f'(\xi)g'(\xi) & (g'(\xi))^2 & g'(\xi)h'(\xi) \\ f'(\xi)h'(\xi) & g'(\xi)h'(\xi) & (h'(\xi))^2 \end{bmatrix} d\xi \quad (2.94)$$

#### 2.4.4.c La puissance inertielle virtuelle

La puissance inertielle virtuelle  $\Pi_a$  s'exprime comme :

$$\Pi_a = \int_z \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^* dz = \mathbf{q}_u^{*t} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_u \quad (2.95)$$

où  $\mathbf{q}_u$  est le vecteur contenant tous les degrés de liberté mécaniques. La matrice de masse est donnée par :



$$\mathbf{M} = \int_z \rho \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^n & 1 & z & \dots & z^m \\ z & \ddots & & z^{n+1} & z & \ddots & & z^{m+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ z^n & \dots & \dots & z^{2n} & z^n & \dots & \dots & z^{m+n} \\ 1 & \dots & \dots & z^n & 1 & z & \dots & z^m \\ z & \ddots & & z^n & z & \ddots & & z^{m+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ z^m & \dots & \dots & z^{m+n} & z^m & \dots & \dots & z^{2m} \end{bmatrix} dz \quad (2.96)$$

### 2.4.5 L'élément plaque FGPM

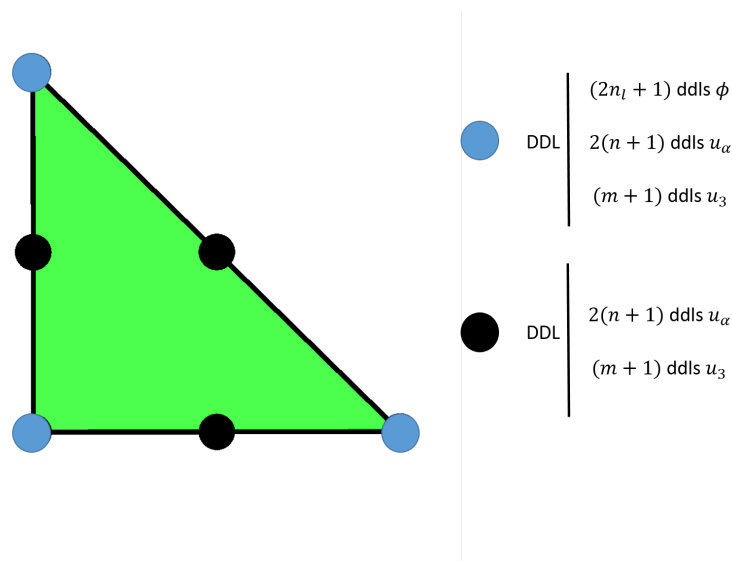


FIGURE 2.9 – Élément de plaque : degrés de liberté

L'élément fini de plaque développé est un élément triangulaire à six nœuds et est schématisé sur la Figure 2.9.

Les composantes du déplacement sont interpolées avec des polynômes de Lagrange d'ordre deux dans le plan  $(x, y)$ . Chaque nœud possède donc  $2(n + 1)$  degrés de liberté pour le déplacement dans le plan ( $u_1$  et  $u_2$ ) et  $(m + 1)$  degrés de liberté pour le déplacement transverse  $u_3$ . Le nombre de degré de liberté dépend donc de l'expansion choisie pour la cinématique généralisée.

Le potentiel électrique est interpolé avec des polynômes de Lagrange linéaire dans le plan  $(O, x, y)$ , et est approximé par une approche par couches numérique dans la direction  $z$ , avec  $2n_l$  couches, conduisant ainsi à un total de  $2(2n_l + 1)$  degré de liberté électriques à chacun des trois nœuds formant les sommets de l'élément.

Il faut noter que le choix de l'interpolation dans le plan (quadratique pour le déplacement et linéaire pour le potentiel) peut être facilement modifié dans FEniCS lors de la déclaration des éléments utilisés.

#### 2.4.5.a Implémentation numérique

Le modèle de plaque FGPM est implémenté sous FEniCS en deux étapes principales. La première consiste à effectuer en amont le calcul des différentes matrices de rigidité, de masse, de piézoélectricité et de diélectricité. La seconde est d'effectuer le calcul éléments finis grâce à FEniCS.

Un programme Python a été développé afin d'effectuer les intégrations en  $z$  de façon préliminaire. Ce programme fonctionne avec les données d'entrée du système (géométrie, matériau (loi de comportement : monocouche, bimorphe, FGPM), discrétisation en  $z$  (nombre de couches numériques)) et enregistre dans un dictionnaire les matrices intégrées. L'intégration numérique en  $z$  est effectuée avec une méthode de Gauss-Legendre.

**Implémentation FEniCS** • L'utilisateur choisit les paramètres de la simulation : géométrie, maillage, loi de comportement, degré d'expansion pour les déplacements dans le plan et transverse, le nombre d'électrodes pouvant servir à la fois d'actionneur et de capteur.

```

## Parameters ##

# Plate's dimensions
h = 0.01; L0 = 1; b0 = 0.8

# Material behaviour law
law_Carrera = False ; beta = 0 ; N_lay = 2 # Set true for Carrera law :
beta (gradient index), N_lay (number of
numerical layer in half thickness)
law_FGPM = True ; k = 0.6 ; fc = 0.3; dec = [1,4] # Set true for FGPM
Alu/PZT4 : k (fraction index), fc (
percolation threshold), dec[0] (number
of numerical layers in conductive part
), dec[1] (number of numerical layers
in insulative part)

# Choice of degree of expansion for displacement
n = 1; # In plane displacement u = U_0 + z*u_1 + z^2*U_2 + ... + z^n*U_n
m = 0 # Transverse displacement w = W_0 + z*W_1 + z^2*W_2 + ... + z^m*W_n

## Mesh ##

P1 = Point(0.,0.); P2 = Point(L0,b0)
domain = Rectangle(P1,P2)

n_el_x = 4; n_el_y = 4; # Number of electrodes in x and y directions
Sx = 2*10e # Rectangular electrode with a size = Sx * Sy
Sy = 2*6e-2
    
```

- On définit trois éléments finis triangulaire de Lagrange dans le plan  $(x, y)$  :
- $ele_1$  élément fini quadratique de Lagrange servant de support pour l'approximation du déplacement transverse.
- $ele_2$  vecteur d'éléments finis (deux composantes) quadratique de Lagrange servant de support pour l'approximation du déplacement dans le plan.
- $ele_3$  élément fini linéaire de Lagrange servant de support pour l'approximation du potentiel électrique.

Puis on assemble les éléments finis globaux pour  $u_\alpha$ ,  $u_3$  et  $\phi$  en fonction des expansions ( $n$  et  $m$ ) choisies pour la cinématique et le nombre de couches  $2n_l$  pour le potentiel.

Enfin ces trois éléments sont "sommés" pour créer l'élément global (appelé élément mixte sous FEniCS), présenté en début de section.

L'espace fonctionnel est déclaré avec le maillage de la plaque et l'élément mixte.

```

# Finite Element
ele_1 = FiniteElement("CG",triangle,2) # Element for transverse
displacement
ele_2 = VectorElement("CG",triangle,2) # Element for in plane displacement
ele_3 = FiniteElement("CG",triangle,1) # Element for electrical potential

ele_W = []
    
```

```

for i in range(m+1):           # We build the total transverse disp element,
                               # in adding
ele_W.append(ele_1)           # m+1 times the element ele_1

ele_U = []
for i in range(n+1):         # We build the total in plane disp element,
                               # in adding
ele_U.append(ele_2)           # n+1 times the vector element ele_2

ele_el = []                   # We build the total electric element, in adding
                               # N_dofz_el
for i in range(N_dofz_el):   # (number of electric dof in z) times the
                               # element ele_3
ele_el.append(ele_3)

ele_tot = MixedElement([ele_U,ele_W,ele_el]) # The mixed element
UWP     = FunctionSpace(mesh,ele_tot)

```

- On déclare les fonctions solutions et les fonctions tests du problème :

```

# # Create test and trial functions : TestFunction will always be the first
# # argument in a form and
# # TrialFunction be the second argument in a form, order of declaration
# # does not matter # #

uu = TrialFunction(UWP)
vv = TestFunction(UWP)

```

- On définit les composantes des déformations et du champ électrique, pour créer les puissances mécanique et électriques (Sections 2.4.4.a, 2.4.4.b).

```

# # Kinematics and virtual work # #

#kinematics
[eps,eps_,g_u1,g_u1_,g_u2,g_u2_,g_w1,g_w1_,g_w2,g_w2_,eps_33,eps_33_,phi,phi_,
 phi_d0,phi_d0_,phi_d1,phi_d1_,u_,w_]
 = kinematics_auto(uu,vv,n,m)

#Virtual work: elastic part and electrical part
[Pi_elastic,Pi_elec] = virt_w_auto(Mat,n,m,eps,eps_,g_u1,g_u1_,g_u2,g_u2_,
 g_w1,g_w1_,g_w2,g_w2_,eps_33,eps_33_,
 phi,phi_,phi_d0,phi_d0_,phi_d1,phi_d1_,
 w_)

```

- La création de la cinématique de la plaque et du champ électrique est assez simple et lisible.

```

def kinematics_auto(uu,vv,n,m):
r""" Defining Reissner-Mindlin kinematics

Args:
uu,vv, trial and test functions of Function Space, with a 2D mesh and a Mixed
finite element (u in plane
displacement, w transverse
displacement, theta rotations and
potentiel electric)

Return:
in voigt notation: strains tensor in plane, strains curvature tensor, shear
tensor, electric potential and
electric gradient; of both trial and
test functions

"""

(u,w,phi) = split(uu) # Split of trial function
(u_,w_,phi_) = split(vv) # Split of test function

dep = as_matrix([ (u[2*a],u[2*a+1]) for a in range(n+1) ])
dep_ = as_matrix([ (u_[2*a],u_[2*a+1]) for a in range(n+1) ])

```

```

eps = as_matrix([ (dep[a,0].dx(0),dep[a,1].dx(1),dep[a,0].dx(1)+dep[a,1].dx(
                    0)) for a in range(n+1) ])
eps_ = as_matrix([ (dep_[a,0].dx(0),dep_[a,1].dx(1),dep_[a,0].dx(1)+dep_[a,1]
                    .dx(0)) for a in range(n+1) ])

g_u1 = as_vector([ (a*u[2*a]) for a in range(1,n+1) ])
g_w1 = as_vector([ (w[a].dx(0)) for a in range(m+1) ])

g_u2 = as_vector([ (a*u[2*a+1]) for a in range(1,n+1) ])
g_w2 = as_vector([ (w[a].dx(1)) for a in range(m+1) ])

g_u1_ = as_vector([ (a*u_[2*a]) for a in range(1,n+1) ])
g_w1_ = as_vector([ (w_[a].dx(0)) for a in range(m+1) ])

g_u2_ = as_vector([ (a*u_[2*a+1]) for a in range(1,n+1) ])
g_w2_ = as_vector([ (w_[a].dx(1)) for a in range(m+1) ])

if m == 0:
    eps_33 = as_vector([ 0.0 ])
    eps_33_ = as_vector([ 0.0 ])
else:
    eps_33 = as_vector([ (a*w[a]) for a in range(1,m+1) ])
    eps_33_ = as_vector([ (a*w_[a]) for a in range(1,m+1) ])

phi_d0 = phi.dx(0) # x electric field
phi_d1 = phi.dx(1) # y electric field

phi_d0_ = phi_.dx(0)
phi_d1_ = phi_.dx(1)

return [eps,eps_,g_u1,g_u1_,g_u2,g_u2_,g_w1,g_w1_,g_w2,g_w2_,eps_33,eps_33_,
        phi,phi_,phi_d0,phi_d0_,phi_d1,phi_d1_,u_,w_]
    
```

- Le calcul des puissance se fait comme suit :

```

def virt_w_auto(Mat,n,m,eps,eps_,g_u1,g_u1_,g_u2,g_u2_,g_w1,g_w1_,g_w2,g_w2_,
                eps_33,eps_33_,phi,phi_,phi_d0,phi_d0_,
                phi_d1,phi_d1_,w_):
r""" Defining virtual work, mechanical part (elastic + piezoelectric coupling
    ) and electrical part (dielectric part
    + piezoelectric coupling)

Args: Mat(integrated in z matrices of material constant), all kinematics
    returns

Return: Pi_elastic and Pi_elec: mechanical and electric parts of virtual work
    """

Pi_elastic = 0.0

for i in range(n+1):
    for j in range(n+1):
        Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['A'][3*i:3*i+3,3*j:3*j+3]).astype(float)))*
                        eps[j,:],eps_[i,:])

for i in range(n+1):
    if m >= 1:
        Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['B'][3*i:3*i+3,:]).astype(float))) *eps_33
                        , eps_[i,:] )
        Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['B'][3*i:3*i+3,:]).astype(float))).T*eps[i,:]
                        , eps_33_ )
        Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['C'][3*i:3*i+3,:]).astype(float))) *phi
                        ,
    
```

```

                                eps_[i,:] )
Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['D1'][0:n,0:n].astype(float))) *g_u1,
                                g_u1_)
Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['D1'][0:n,n:n+m+1].astype(float))) *g_w1,
                                g_u1_)

Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['D1'][n:n+m+1,0:n].astype(float))) *g_u1,
                                g_w1_)
Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['D1'][n:n+m+1,n:n+m+1].astype(float))) *g_w1,
                                ,g_w1_)

Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['D2'][0:n,0:n].astype(float))) *g_u2,
                                g_u2_)
Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['D2'][0:n,n:n+m+1].astype(float))) *g_w2,
                                g_u2_)

Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['D2'][n:n+m+1,0:n].astype(float))) *g_u2,
                                g_w2_)
Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['D2'][n:n+m+1,n:n+m+1].astype(float))) *g_w2,
                                ,g_w2_)

Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['E1'][0:n,:].astype(float))) *phi_d0,
                                g_u1_)
Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['E1'][n:n+m+1,:].astype(float))) *phi_d0,
                                g_w1_)

Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['E2'][0:n,:].astype(float))) *phi_d1,
                                g_u2_)
Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['E2'][n:n+m+1,:].astype(float))) *phi_d1,
                                g_w2_)

if m >= 1:
Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['F'].astype(float))) *eps_33,eps_33_)
Pi_elastic += dot(as_matrix((Mat['G'].astype(float))) *phi,eps_33_)

Pi_elec = 0.0

Pi_elec += dot(as_matrix((Mat['Psie33'].astype(float))) *phi,phi_)
Pi_elec += dot(as_matrix((Mat['Psie11'].astype(float))) *phi_d0,phi_d0_)
Pi_elec += dot(as_matrix((Mat['Psie22'].astype(float))) *phi_d1,phi_d1_)

for i in range(n+1):
Pi_elec -= dot(as_matrix((Mat['C'][3*i:3*i+3,:].astype(float))).T *eps[i,:],
                                phi_)

Pi_elec -= dot(as_matrix((Mat['E1'][0:n,:].astype(float))).T *g_u1,
                                phi_d0_)
Pi_elec -= dot(as_matrix((Mat['E1'][n:n+m+1,:].astype(float))).T *g_w1,
                                phi_d0_)

Pi_elec -= dot(as_matrix((Mat['E2'][0:n,:].astype(float))).T *g_u2,
                                phi_d1_)
Pi_elec -= dot(as_matrix((Mat['E2'][n:n+m+1,:].astype(float))).T *g_w2,
                                phi_d1_)

if m >= 1:
Pi_elec -= dot(as_matrix((Mat['G'].astype(float))).T *eps_33,phi_)

return [Pi_elastic*dx, Pi_elec*dx]

```

• On définit les conditions aux limites, ici un encastrement et un potentiel électrique imposé sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque

```
## Boundaries conditions ##
```

```

# fix end
bc_CCCC.append(DirichletBC(UWP.sub(1),Constant(np.zeros((m+1))),
                           all_boundary))

for i in range(n+1):
    bc_CCCC.append(DirichletBC(UWP.sub(0).sub(i).sub(0),Constant(0.0),
                              all_boundary))
    bc_CCCC.append(DirichletBC(UWP.sub(0).sub(i).sub(1),Constant(0.0),
                              all_boundary))

# imposed electric potential on bot and top surfaces
bc_V1 = DirichletBC(UWP.sub(2).sub(N_dofz_el-1), Constant((V0)), mid_surf,
                   method="pointwise")
bc_V2 = DirichletBC(UWP.sub(2).sub(0), V1, mid_surf, method=
                   "pointwise")

bc_V = [bc_V1, bc_V2]

bcs = bc_CFFF + bc_V
    
```

• On définit également le travail des forces extérieures, ici une pression uniforme. On assemble le système et on le résout.

```

# # External work # #
q0 = 10e3
f = Constant(q0)
z0 = h/2.0
ext = 0.0
for i in range(m+1):
    ext += (z0**i)*w_[i]

# # Building of a bilinear form and L linear form # #
a = Pi_elastic + Pi_elec
L = ext_w

# # Solve # #
AA, b = assemble_system(a, L, bcs=bcs_tot) # assembling system
solver = LUSolver("umfpack") # choice of solver
uwp = Function(UWP) # initialisation of solution function
solver.solve(AA, uwp.vector(), b) # solving static problem
Enreg(uwp) # saving function

(u,w,thet,p) = uwp.split(deepcopy = True) # extraction from the solution of
                                         displacements, rotations and
                                         electrical potential
    
```

## 2.5 Équations discrétisées des modèles

Les modèles éléments finis de poutre et de plaque permettent d'obtenir les équations discrétisées de la structure FGPM suivantes :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{q}_u + \mathbf{K}_{u\phi}\mathbf{q}_\phi = \mathbf{F} \quad (2.97)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}\mathbf{q}_\phi + \mathbf{K}_{u\phi}^t\mathbf{q}_u = \mathbf{0} \quad (2.98)$$

où  $\mathbf{q}_u$  et  $\mathbf{q}_\phi$  sont les vecteurs des degrés de libertés mécaniques et électriques respectivement ;  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  et  $\mathbf{K}_{u\phi}$  sont respectivement les matrices globales de masse, de rigidité, de "rigidité électrique" et de couplage piézoélectrique ;  $\mathbf{F}$  est le vecteur d'effort mécanique.

## 2.6 Conclusion

Le FGPM utilisé dans ce travail est un composite, mixant un matériau conducteur, l'aluminium, et un matériau isolant, le PZT4. Il montre des propriétés électriques particulières. En effet, le phénomène de percolation intervient quand il y a assez de particules conductrices pour former un chemin conducteur, rendant ainsi tout le matériau conducteur. Le modèle développé ici, prend en compte ce phénomène. Le FGPM possède donc une partie conductrice en son centre (où la percolation a eu lieu) et deux parties isolantes vers l'extérieur. Les propriétés matériaux sont décrites par une loi des mélanges, en considérant que la fraction volumique de l'aluminium suit une loi puissance, gérée par l'indice  $k$ .

Dans la deuxième partie de ce chapitre, afin de modéliser des structures FGPM élancées, trois types d'éléments finis sont implémentés. Un élément de poutre, basé sur la cinématique de Timoshenko, à deux nœuds avec intégration consistante et un potentiel électrique approximé quadratiquement par couche numérique et constant par élément.

Un élément de plaque et un élément 3D servant de référence sous FEniCS sont implémentés. L'élément de plaque est basé sur une cinématique généralisée (modèle de Reissner-Mindlin ou modèle d'ordre supérieur) et sur un potentiel électrique quadratique par couches discrètes dans l'épaisseur.

La méthode des éléments finis permet ainsi d'obtenir :

- Les équations discrétisées de la structure FGPM élancée.
- La base modale de la structure FGPM élancée déduite des équations précédentes.

## 2.7 Références

- ABERT, C., L. EXL, F. BRUCKNER, A. DREWS et D. SUESS. 2013, «magnum. fe : A micromagnetic finite-element simulation code based on fenics», *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 345, p. 29–35. 43
- AMBARTSUMYAN, S. 1969, *Theory of anisotropic plate*, Technomic Publishing Co.,. 49
- BAÏLON, J. et J. DORLOT. 2000, *Des matériaux*, Presses Internationales Polytechnique, ISBN 9782553007705. URL <https://books.google.fr/books?id=Mo0PuyOgeqQC>. 33
- BERLINCOURT, D. A., D. R. CURRAN et H. JAFFE. 1964, «Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers», *Physical Acoustics : Principles and Methods*, vol. 1, n° Part A, p. 247. 40
- BOYD, R. W., R. J. GEHR, G. L. FISCHER et J. SIPE. 1996, «Nonlinear optical properties of nanocomposite materials», *Pure and Applied Optics : Journal of the European Optical Society Part A*, vol. 5, n° 5, p. 505. 35
- BROADBENT, S. R. et J. M. HAMMERSLEY. 1957, «Percolation processes : I. crystals and mazes», dans *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 53, Cambridge University Press, p. 629–641. 36
- CALAME, J., A. BIRMAN, Y. CARMEL, D. GERSHON, B. LEVUSH, A. SOROKIN, V. SEMENOV, D. DADON, L. MARTIN et M. ROSEN. 1996, «A dielectric mixing law for porous ceramics based on fractal boundaries», *Journal of applied physics*, vol. 80, n° 7, p. 3992–4000. 35
- CARRERA, E. 2001, «Developments, ideas, and evaluations based upon reissner’s mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells», *Applied Mechanics Reviews*, vol. 54, n° 4, p. 301–329. 46
- CARRERA, E. 2003, «Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells», *Applied mechanics reviews*, vol. 56, n° 3, p. 287–308.
- CHO, M. et J.-S. KIM. 2000, «A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element», *Composites Part B : Engineering*, vol. 31, n° 1, p. 65–74. 48
- CHUAQUI, T. et C. ROQUE. 2017, «Analysis of functionally graded piezoelectric timoshenko smart beams using a multiquadric radial basis function method», *Composite Structures*, vol. 176, p. 640–653. 37
- CHÝLEK, P. et V. SRIVASTAVA. 1983, «Dielectric constant of a composite inhomogeneous medium», *Physical Review B*, vol. 27, n° 8, p. 5098. 36
- CLAUSIUS, R. 1879, *Die mechanische wärmetheorie : bd. Die mechanische behandlung der electricität. 1879*, vol. 2, f. Vieweg und sohn. 34
- GARNETT, J. M. 1904, «Xii. colours in metal glasses and in metallic films», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 203, n° 359-371, p. 385–420. 35
- HILDEBRAND, F., E. REISSNER et G. THOMAS. 1949, «Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells», . 48
- HOFFMAN, J., J. JANSSON, R. V. DE ABREU, N. C. DEGIRMENCI, N. JANSSON, K. MÜLLER, M. NAZAROV et J. H. SPÜHLER. 2013, «Unicorn : Parallel adaptive finite element simulation of turbulent flow and fluid–structure interaction for deforming domains and complex geometry», *Computers & Fluids*, vol. 80, p. 310–319. 43



- KRAUS, H. 1967, *Thin elastic shells : an introduction to the theoretical foundations and the analysis of their static and dynamic behavior*, John Wiley & Sons. 47
- LEVINSON, M. 1980, «An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates», *Mechanics Research Communications*, vol. 7, n° 6, p. 343–350. 49
- LI, J.-F., K. TAKAGI, N. TERAOKUBO et R. WATANABE. 2001, «Electrical and mechanical properties of piezoelectric ceramic/metal composites in the Pb(Zr, Ti)O<sub>3</sub>/Pt system», *Applied Physics Letters*, vol. 79, n° 15, p. 2441–2443. 36
- LOGG, A., K.-A. MARDAL et G. WELLS. 2012, *Automated solution of differential equations by the finite element method : The FEniCS book*, vol. 84, Springer Science & Business Media. 42
- MEJDOUBI, A. 2007, *Étude par simulation numérique des propriétés diélectriques d'hétérostructures multiphasiques contenant des inclusions de forme arbitraire*, thèse de doctorat, Thèse de doctorat de l'université de Bretagne Occidentale. 35
- MICHEL, B. et A. LAKHTAKIA. 1996, «On the application of the strong property fluctuation theory for homogenizing chiral-in-chiral composites», *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 29, n° 6, p. 1431. 35
- MINDLIN, R. D. 1951, «Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates», *J. appl. Mech.*, vol. 18, p. 31–38. 47
- MOSSOTTI, O. F. 1846, *Discussione analitica sull'influenza che l'azione di un mezzo dielettrico ha sulla distribuzione dell'elettricità alla superficie di più corpi elettrici disseminati in esso*, dai tipi della r. D. camera. 34
- MURTHY, M. 1981, «An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates», . 49
- ORLOWSKA, S. 2003, *Conception et prédiction des caractéristiques diélectriques des matériaux composites à deux et trois phases par la modélisation et la validation expérimentale*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 36
- PANC, V. 1975, *Theories of elastic plates*, vol. 2, Springer Science & Business Media. 49
- PECHARROMÁN, C. et J. S. MOYA. 2000, «Experimental evidence of a giant capacitance in insulator–conductor composites at the percolation threshold», *Advanced Materials*, vol. 12, n° 4, p. 294–297. 36
- POLIT, O. et I. BRUANT. 2006, «Electric potential approximations for an eight node plate finite element», *Computers & Structures*, vol. 84, n° 22, p. 1480–1493. 39
- PRINKEY, M. T., A. LAKHTAKIA et B. SHANKER. 1994, «On the extended maxwell-garnett and the extended burggeman approaches for dielectric-in-dielectric composites», *Optik*, vol. 96, n° 1, p. 25–30. 34
- REDDY, J. 1987, «A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates», *Communications in applied numerical methods*, vol. 3, n° 3, p. 173–180. 47
- REDDY, J. N. 1984, «A simple higher-order theory for laminated composite plates», *Journal of applied mechanics*, vol. 51, n° 4, p. 745–752. 49
- REISSNER, E. 1950, «On a variational theorem in elasticity», *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 29, n° 1-4, p. 90–95. 46
- REISSNER, E. 1984, «On a certain mixed variational theorem and a proposed application», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, n° 7, p. 1366–1368. 46

- ROBBINS JR, D. et J. REDDY. 1993, «Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory», *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 36, n° 4, p. 655–677. [47](#)
- TAKAGI, K., J.-F. LI, S. YOKOYAMA, R. WATANABE, A. ALMAJID et M. TAYA. 2002, «Design and fabrication of functionally graded pzt/pt piezoelectric bimorph actuator», *Science and Technology of Advanced Materials*, vol. 3, n° 2, p. 217–224. [36](#)
- VYNNYTSKA, L., M. ROGNES et S. CLARK. 2013, «Benchmarking fenics for mantle convection simulations», *Computers & geosciences*, vol. 50, p. 95–105. [43](#)
- WHITNEY, J. 1973, «Shear correction factors for orthotropic laminates under static load», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 40, n° 1, p. 302–304. [48](#)



# Chapitre 3

## Automatisme et Contrôle Actif des vibrations

*« Étrange époque où il est plus facile de désintégrer l'atome que de vaincre un préjugé. »*

Albert Einstein

### Sommaire

---

<b>3.1 Représentation d'état du système FGPM</b>	<b>67</b>
3.1.1 Décomposition sur une base modale	67
3.1.2 Prise en compte de l'amortissement	68
3.1.3 Représentation d'état du système et notations	69
<b>3.2 Systèmes linéaires commandés-observés</b>	<b>70</b>
3.2.1 Le régulateur	70
3.2.2 L'Observateur	72
3.2.3 Observateur de Luenberger	73
<b>3.3 Les régulateurs linéaires et la synthèse quadratique</b>	<b>73</b>
3.3.1 Synthèse observateur-régulateur	73
3.3.2 La synthèse quadratique : le régulateur linéaire quadratique (LQR)	74
<b>3.4 La logique floue</b>	<b>76</b>
3.4.1 Les ensembles flous	76
3.4.2 Implications floues	79
3.4.3 Le régulateur flou	81
<b>3.5 Le régulateur flou pour la plaque FGPM</b>	<b>84</b>
3.5.1 Sous-régulateur flou pour le mode $i$	85
3.5.2 Le régulateur flou décentralisé	87
<b>3.6 Optimisation des réseaux d'actionneurs et de capteurs en contrôle actif</b>	<b>89</b>
3.6.1 Optimisation du réseau d'actionneurs	89
3.6.2 Critère d'optimisation du réseau de capteurs en contrôle actif	90
<b>3.7 Conclusion</b>	<b>92</b>
<b>3.8 Références</b>	<b>93</b>

---

Automatique est un raccourci pour contrôle automatique (automatic control, en anglais). Le terme contrôle (à l'instar du control anglo-saxon) possède deux significations, la première est la surveillance (vérification, supervision, sécurisation), la seconde est la conduite (le pilotage). On contrôle (au sens de piloter) un véhicule, un navire, un avion, ou n'importe quel processus : échangeur thermique, bras articulé, haut-fourneau ...

Autrefois, les systèmes de contrôle automatique (régulations ou asservissements) intégraient dans un même dispositif mécanique ou électromécanique les fonctions suivantes :

- la prise d'informations,
- son traitement,
- la réalisation des actions de commande,
- sans oublier le prélèvement énergétique nécessaire à leur fonctionnement.

Nous pouvons citer par exemple, la soupape de contrôle de pression d'un autocuiseur, le régulateur de vitesse à boules de Watt, la vanne réglante de température d'un radiateur de chauffage central ... Les progrès de l'électromécanique (relais), de l'hydraulique (vérins et distributeurs), de la technologie pneumatique, de l'électronique, enfin et surtout des ordinateurs et microprocesseurs ont conduit à bien séparer les fonctions capteurs, actionneurs, et traitements des informations.

Dans les régulations modernes, ces fonctions apparaissent avec évidence. Ainsi, dans un régulateur de vitesse automobile, la vitesse mesurée par un capteur est convertie en signal informatique, ainsi que la consigne de vitesse émanent du conducteur. La différence est traitée numériquement par le "contrôleur" selon une loi de commande qui engendre une demande d'accélération ou de décélération. Celle-ci est transmise au moteur du véhicule, à travers un calculateur dédié à la gestion des actionneurs individuels d'admission d'air, d'injection du carburant et d'avance de l'allumage, en vue de réaliser l'accélération requise. La conduite du véhicule peut être schématisée par la Figure 3.1.

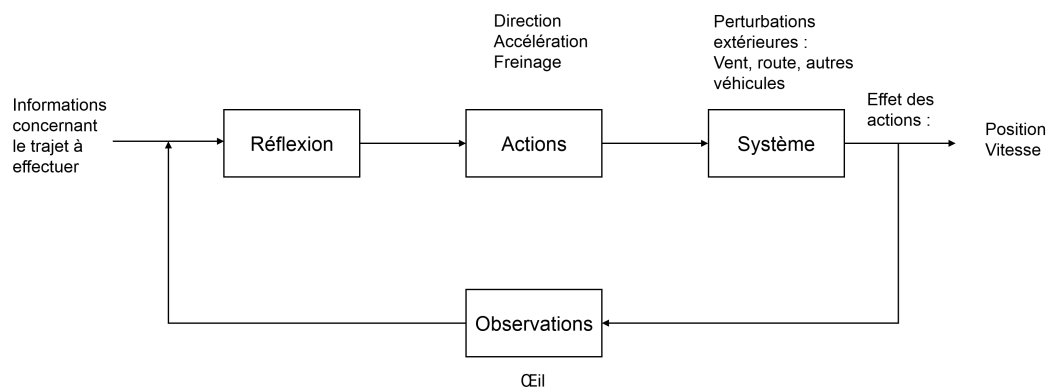


FIGURE 3.1 – Conduite d'un véhicule

La représentation précédente met en évidence l'opération de bouclage du système : en permanence, les actions (direction, accélération, freinage) sont ajustées de manière à ce que les grandeurs réglées (la position et la vitesse) suivent au mieux les consignes (durée de trajet, consommation). C'est ce qu'on appelle un système asservi. Il est usuel de représenter un tel système par le schéma 3.2.

Un tel système possède deux chaînes :

- Une chaîne directe ou chaîne d'action comportant le système de commande (ou régulateur).
- Une chaîne de retour ou chaîne d'information comportant le capteur.

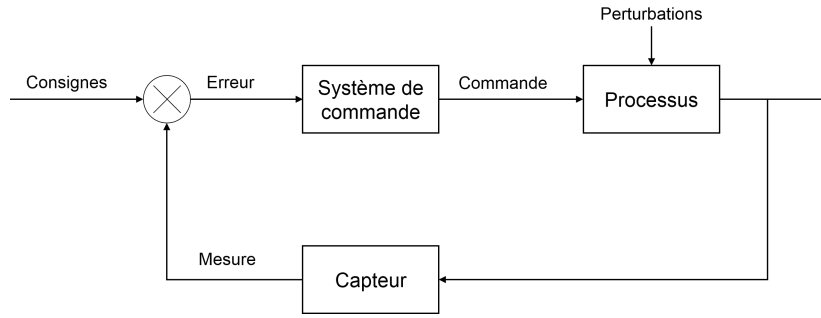


FIGURE 3.2 – Représentation d'un système asservi

Comme dans l'exemple de la conduite d'un véhicule, de nombreuses grandeurs sont régulées par bouclage. Avant toute élaboration d'une loi de commande, une étape de modélisation du système à étudier est nécessaire. Suivant la représentation mathématique du système, un algorithme mathématique de commande sera alors adopté.

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les outils fondamentaux nécessaires pour commander les systèmes linéaires, et d'explicitier les deux régulateurs mis en place pour le contrôle actif des vibrations des structures FGPM étudiées dans ce travail :

- dans le cas de la poutre, à l'aide d'un régulateur optimal basé sur la méthode de la synthèse quadratique, encore appelé linear quadratic regulator (LQR), consistant à rechercher une commande optimale minimisant un critère quadratique de l'état de la commande,
- dans le cas de la plaque, à l'aide d'un régulateur intelligent basé sur la logique floue, généralisant la logique booléenne classique avec des valeurs de vérité partielles. Ce régulateur flou décentralisé permet la gestion d'une multitude d'actionneurs et un contrôle adaptatif.

### 3.1 Représentation d'état du système FGPM

Afin de se ramener à la représentation d'état du système, utilisée dans la mise en place du contrôle actif des vibrations des structures, on utilise la décomposition sur une base modale du système discrétisé, obtenu ici grâce aux modèles éléments finis.

#### 3.1.1 Décomposition sur une base modale

Les modèles éléments finis de poutre et de plaque permettent d'obtenir les équations discrétisées de la structure FGPM suivantes :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{K}_{uu}\mathbf{q}_u + \mathbf{K}_{u\phi}\mathbf{q}_\phi = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}\mathbf{q}_\phi + \mathbf{K}_{u\phi}^t\mathbf{q}_u = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{q}_u$  et  $\mathbf{q}_\phi$  sont les vecteurs des degrés de libertés mécaniques et électriques respectivement;  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  et  $\mathbf{K}_{u\phi}$  sont respectivement les matrices globales de masse, de rigidité, de rigidité électrique et de couplage piézoélectrique;  $\mathbf{F}$  est le vecteur d'effort mécanique.

Le potentiel électrique peut être séparé en deux parties, les potentiels des capteurs et des actionneurs, et en utilisant l'équation 3.2 dans 3.1 on obtient le système suivant (BENJEDDOU et col-lab. [2006]) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{K}_{tot}\mathbf{q}_u = \mathbf{F} + \mathbf{K}_a\mathbf{q}_{\phi_a} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{q}_{\phi_s} = -\mathbf{K}_{\phi_s\phi_s}^{-1} \left( \mathbf{K}_{u\phi_s}^t\mathbf{q}_u + \mathbf{K}_{\phi_s\phi_a}\mathbf{q}_{\phi_a} \right) \quad (3.4)$$

où les indice  $a$  et  $s$  font référence aux potentiels actionneurs et capteurs respectivement, et :

$$\mathbf{K}_{tot} = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\phi_s} \mathbf{K}_{\phi_s\phi_s}^{-1} \mathbf{K}_{\phi_s u} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{K}_{u\phi_s} \mathbf{K}_{\phi_s\phi_s}^{-1} \mathbf{K}_{\phi_s\phi_a} - \mathbf{K}_{u\phi_a} \quad (3.6)$$

Afin de se ramener aux équations usuelles de l'automatique pour mettre en place le contrôle actif, on cherche une solution en déplacement sur la base des modes propres de la structure. La base modale de la structure est obtenue en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{K}_{tot} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (3.7)$$

avec  $\boldsymbol{\psi}$  la matrice contenant les modes propres et  $\omega$  les pulsations propres.

Les modes propres sont normés au sens de la matrice de masse et vérifient les relations d'orthogonalités suivantes (GÉRARDIN et RIXEN [1993]) :

$$\boldsymbol{\psi}_i^t \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_j = \delta_{ij} \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\psi}_i^t \mathbf{K}_{tot} \boldsymbol{\psi}_j = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (3.9)$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker.

La technique de superposition modale consiste alors à utiliser les modes propres comme base de la solution, soit :

$$\mathbf{q}_u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_n(t) \boldsymbol{\psi}_n \quad (3.10)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}_n$  est le déplacement modal du  $n^{ième}$  mode.

On restreint communément l'étude aux modes les plus excités et on considère une solution approchée tenant compte des  $N$  premiers modes :

$$\mathbf{q}_u(t) \simeq \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\alpha}_n(t) \boldsymbol{\psi}_n \quad (3.11)$$

En injectant l'équation 3.11 dans 3.3 et en utilisant les propriétés d'orthogonalité on obtient le système suivant :

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_n + \omega_n^2 \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\psi}_n^t \mathbf{F} + \boldsymbol{\psi}_n^t \mathbf{K}_a \mathbf{q}_{\phi_a} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{q}_{\phi_s} = \sum_{n=1}^N -\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{u\phi_s}^t \boldsymbol{\psi}_n \boldsymbol{\alpha}_n - \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{\phi\phi_a} \mathbf{q}_{\phi_a} \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Prise en compte de l'amortissement

Nous avons supposé jusqu'à présent que la structure avait un comportement conservatif. En réalité, sa réponse comporte le plus souvent une partie visqueuse (comportement, liaison, ...), dissipant de l'énergie en faible quantité LEMAITRE et CHABOCHE [1988]. Il est donc essentiel de prendre en compte la présence d'amortissement dans la modélisation du mouvement de la structure.

Tenir compte de l'amortissement peut compliquer considérablement la solution du problème, entraînant un couplage entre les équations différentielles en  $\boldsymbol{\alpha}_n(t)$  :

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k + \omega_n^2 \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\psi}_n^t \mathbf{F} + \boldsymbol{\psi}_n^t \mathbf{K}_a \mathbf{q}_{\phi_a} \quad (3.14)$$

où les coefficients  $\beta_{nk}$  représentent l'amortissement. L'approche modale perd alors de son intérêt pour le calcul de la solution numérique des équations du mouvement. En effet, les équations vérifiées par les  $\boldsymbol{\alpha}_n$  restent couplées par les coefficients d'amortissement  $\beta_{nk}$ .

Toutefois, dans le cas faiblement amorti, Lord Rayleigh (GÉRADIN et RIXEN [1993]) a émis l'hypothèse d'amortissement diagonal ( $\beta_{nk} = 0$  si  $n \neq k$ ), permettant de simplifier les équations 3.14 sous la forme :

$$\ddot{\alpha}_n + \beta_{nn} \dot{\alpha}_n + \omega_n^2 \alpha_n = \Psi_n^t \mathbf{F} + \Psi_n^t \mathbf{K}_a \mathbf{q}_{\phi_a} \quad (3.15)$$

et en posant  $\beta_{nn} = 2\eta_n \omega_n$  :

$$\ddot{\alpha}_n + 2\eta_n \omega_n \dot{\alpha}_n + \omega_n^2 \alpha_n = \Psi_n^t \mathbf{F} + \Psi_n^t \mathbf{K}_a \mathbf{q}_{\phi_a} \quad (3.16)$$

où  $\eta_n$  représente le taux d'amortissement correspondant au  $n^{\text{ième}}$  mode (le taux d'amortissement est obtenu par des essais sur maquette). Cette hypothèse ne repose sur aucune justification physique mais elle est dans la plupart des cas physiquement cohérente avec l'hypothèse de faible dissipation (GÉRADIN et RIXEN [1993]). On utilisera cette équation par la suite.

Les coefficients d'amortissement  $\eta_n$  du  $n^{\text{ième}}$  mode peuvent être définis par (CLOUGH et PENZIEN [1975]) :

$$2\eta_n = \frac{\beta_1}{\omega_n} + \beta_2 \omega_n \quad (3.17)$$

où  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont deux coefficients proportionnels à la masse et à la raideur respectivement. Ceux-ci sont identifiés en utilisant deux modes indépendants ( $i, \omega_i$ ) et ( $j, \omega_j$ ). On obtient :

$$\beta_1 = 2 \frac{\eta_i \omega_i - \eta_j \omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad \beta_2 = 2 \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} (\eta_j \omega_i - \eta_i \omega_j) \quad (3.18)$$

### 3.1.3 Représentation d'état du système et notations

Jusqu'à présent, nous avons considéré la tension électrique à appliquer aux actionneurs comme une donnée du problème. L'automatique propose pour des systèmes dynamiques linéaires, appelée représentation d'état, des méthodes de commande fiables et efficaces.

Ayant choisi une base modale tronquée (on ne considère que les N premiers modes), le problème modal peut s'écrire sous la forme d'un système dynamique linéaire. On introduit le vecteur d'état, noté  $\mathbf{x}$ , défini comme :

$$\mathbf{x} = \{\omega_1 \alpha_1 \dots \omega_N \alpha_N \quad \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_N\}^t \quad (3.19)$$

On peut alors mettre le système précédent, composé des équations 3.16 et 3.13, dans sa forme de représentation d'état :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \phi_a + \mathbf{F}_e \quad (3.20)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \phi_a \quad (3.21)$$

avec :

$$\mathbf{y} = \mathbf{q}_{\phi_s} \quad \text{et} \quad \phi_a = \mathbf{q}_{\phi_a} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega} & -2\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Psi}^t \mathbf{K}_a \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{C} = \left[ \mathbf{K}_{\phi^s \phi^s}^{-1} \mathbf{K}_{\phi^s u} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\omega}^{-1} \quad \mathbf{0} \right] \quad (3.25)$$

$$\mathbf{D} = \left[ \mathbf{K}_{\phi^s \phi^s}^{-1} \mathbf{K}_{\phi^s \phi^a} \right] \quad (3.26)$$



$$\mathbf{F}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Psi^t \mathbf{F} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

où  $\mathbf{y}$  et  $\boldsymbol{\phi}_a$  sont le vecteur de sortie et le vecteur de commande,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont les matrices d'état, de commande, d'observation et d'action directe respectivement,  $\mathbf{F}_e$  le vecteur des efforts extérieurs et  $\boldsymbol{\omega}$  et  $\boldsymbol{\eta}$  sont des matrices diagonales contenant les pulsations propres et les coefficients d'amortissement naturel respectivement.

Il faut maintenant mettre en place une loi de commande en utilisant les méthodes de l'automatique afin d'amortir les vibrations.

## 3.2 Systèmes linéaires commandés-observés

La représentation d'état (3.20, 3.21) sur la base des  $N$  premiers modes propres, fait partie des systèmes appelés système linéaire commandé-observé par les automaticiens. L'intérêt de la représentation d'état (qu'elle soit linéaire ou non) est double :

- elle permet de décrire des systèmes multivariables (gestion de plusieurs commandes et de plusieurs sorties),
- dès que l'équation d'état est résolue, on connaît l'évolution de chacune des variables d'état à tout instant (la représentation classique, à l'aide d'une fonction de transfert, ne fournirait que le lien entre la sortie du système et ses entrées sans les conditions initiales).

Le système commandé-observé (3.20, 3.21) contient deux types de variables mesurables : la commande  $\boldsymbol{\phi}_a(t)$  et la sortie  $\mathbf{y}(t)$ . On souhaite en contrôle actif :

1. amener l'état  $\mathbf{x}(t)$  du système à une valeur quelconque prédéfinie et en un temps fini le plus court possible, au moyen de la commande,
2. reconstruire l'état complet du système à partir de l'information partielle que constitue la sortie,

ceci en garantissant la stabilité du système.

L'automatique permet, sous certaines conditions et à l'aide de dispositifs spécifiques, d'atteindre les objectifs 1 et 2. Pour ce faire, les deux points essentiels sont :

- construire, après avoir vérifié que le système soit gouvernable, une commande ou régulateur. Dans notre étude, on utilisera une commande par retour d'état. Dans le cas du contrôle de poutres, on considérera un régulateur optimal quadratique linéaire (LQR). Dans le cas des plaques un régulateur intelligent basé sur la logique floue sera développé.
- construire un dispositif appelé observateur qui fournira une estimation notée  $\hat{\mathbf{x}}$  de  $\mathbf{x}$  à partir de l'information donnée par la sortie, en s'assurant que le système vérifie la propriété d'observabilité.

### 3.2.1 Le régulateur

En modélisant le système mécanique sous la forme (3.20), où la commande  $\boldsymbol{\phi}_a(t)$  contient les tensions électriques à appliquer aux bornes des actionneurs, on est amené à construire un régulateur. Celui-ci va permettre, sous la condition que le système soit gouvernable, d'atténuer les vibrations. Pour y arriver, on définit tout d'abord la notion de gouvernabilité.

#### 3.2.1.a Notion de gouvernabilité

La construction d'un régulateur implique que le système ait la propriété de gouvernabilité.

**Définition 1** *Le système linéaire 3.20 est gouvernable si pour tout  $\mathbf{x}(\mathbf{0})$  et quelque soit  $\mathbf{x}_T$  il existe un temps fini  $T$  et une fonction continue par morceaux  $\boldsymbol{\phi}_a(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$  telle que  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$ .*

D'autre part Kalman (D'ANDRÉA NOVEL et DE LARA [2000]) propose une caractérisation algébrique très simple de la gouvernabilité, celle-ci peut être définie comme suit :

**Théorème 1 Critère de gouvernabilité de Kalman :** *le système linéaire 3.20 est gouvernable si et seulement si la matrice de gouvernabilité :*

$$\mathbf{G} = (\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{2N-1}\mathbf{B}) \quad (3.28)$$

est de rang  $2N$ , où  $2N$  est la dimension du vecteur d'état  $\mathbf{x}$ . On dit alors que la paire  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  est gouvernable.

La définition de la gouvernabilité, ainsi que le critère de gouvernabilité de Kalman sont totalement indépendants de la notion d'observation ou de sortie du système et sont par conséquent identiques quelle que soit la sortie du système (3.21). Lors des applications réelles, la recherche du rang d'une matrice est une opération numériquement délicate, qui s'achève toujours par la décision de considérer qu'un résidu est nul lorsqu'il est suffisamment petit. Il existe un second critère de gouvernabilité, parfois plus pratique, faisant intervenir la matrice grammienne. Ce critère est très souvent utilisé lors de la recherche de l'emplacement des actionneurs.

**Définition 2** *On appelle matrice grammienne de gouvernabilité la matrice symétrique définie positive (KAILATH [1980]) :*

$$\mathbf{G}_c(\mathbf{T}) = \int_0^{\mathbf{T}} e^{s\mathbf{A}} \mathbf{B} \mathbf{B}^t e^{s\mathbf{A}^t} ds \quad (3.29)$$

**Proposition 1** *Lorsque  $\mathbf{T} \rightarrow \infty$ , si le système est stable, la matrice grammienne de gouvernabilité :  $\mathbf{G}_c = \lim_{\mathbf{T} \rightarrow \infty} \mathbf{G}_c(\mathbf{T})$  existe et est solution de l'équation de Lyapunov :*

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_c + \mathbf{G}_c\mathbf{A}^t + \mathbf{B}\mathbf{B}^t = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

**Proposition 2** *La matrice de gouvernabilité permet par conséquent d'introduire un nouveau critère de gouvernabilité, équivalent au critère de Kalman : le système est dit gouvernable si et seulement si  $\mathbf{G}_c(\mathbf{T})$  est inversible (D'ANDRÉA NOVEL et DE LARA [2000]).*

### 3.2.1.b Notion de stabilité

Si le système est gouvernable, nous pouvons construire un régulateur. Ce dispositif doit rendre l'état initial  $\mathbf{x}_0$  du système commandé asymptotiquement stable. La stabilité asymptotique d'un état d'équilibre peut être définie par (D'ANDRÉA NOVEL et DE LARA [2000]) :

**Définition 3** *Le système dynamique linéaire*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}_e \quad (3.31)$$

est dit asymptotiquement stable si, écarté de son état d'équilibre  $\mathbf{x}_e$ , en l'absence de perturbation extérieure, il revient à son état d'équilibre :

$$\text{Si } \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \text{ Alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e \quad (3.32)$$

Cette notion de stabilité est liée directement au signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice d'état. Dans le cas particulier du point d'équilibre  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  on dispose d'un critère simple de stabilité asymptotique :

**Théorème 2** *L'état d'équilibre  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  du système (3.20) est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont à partie réelle strictement négative.*

### 3.2.2 L'Observateur

La commande par retour d'état nécessite la connaissance de l'état, mais il peut s'avérer coûteux, voir irréalisable, de mesurer l'état complet d'un système à l'aide de capteurs. Lorsque l'état d'un système n'est pas mesurable, on conçoit un observateur d'état permettant de reconstruire l'état à partir d'un modèle du système dynamique et des mesures des capteurs. Pour ce faire, il faut introduire la notion d'observabilité.

#### 3.2.2.a Notion d'observabilité

Nous pouvons définir l'observabilité comme suit :

**Définition 4** *Le système linéaire (3.20, 3.21) est dit observable si pour tout vecteur  $\mathbf{x}_0$ , il existe un temps  $T$  fini et une commande  $\Phi_a(t)$  définie sur  $[0, T]$  tels que si  $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$  et qu'on applique  $\Phi_a(t)$ , alors la connaissance de  $\mathbf{y}(t)$  sur l'intervalle  $[0, T]$  permet de déterminer  $\mathbf{x}_0$ .*

De même que pour la gouvernabilité, il existe une caractérisation algébrique simple d'observabilité dite d'observabilité de Kalman :

**Théorème 3 Critère d'observabilité de Kalman :** *le système linéaire (3.20, 3.21) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité définie par :*

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{2N-1} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

*est de rang  $2N$ . On dit alors que la paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  est observable.*

On constate (DE LARMINAT [1996]) que la matrice  $\mathbf{O}^t$  est identique à la matrice de gouvernabilité qui serait associée à un système fictif d'état  $\mathbf{q}$  et d'entrée  $\mathbf{v}$  :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^t \mathbf{q} + \mathbf{C}^t \mathbf{v} \quad (3.34)$$

On peut donc effectuer, à partir de  $\mathbf{O}^t$ , toutes les manipulations relatives à la gouvernabilité. Il existe également un second critère d'observabilité faisant intervenir la matrice grammienne d'observabilité.

**Définition 5** *On appelle matrice grammienne d'observabilité la matrice symétrique définie positive KAILATH [1980] :*

$$\mathbf{G}_o(T) = \int_0^T e^{s\mathbf{A}^t} \mathbf{C}^t \mathbf{C} e^{s\mathbf{A}} ds \quad (3.35)$$

Par dualité avec la gouvernabilité, on a les résultats suivants (DE LARMINAT [1996], D'ANDRÉA NOVEL et DE LARA [2000]) :

**Proposition 3** *Lorsque  $T \rightarrow \infty$ , si le système est stable, la matrice  $\mathbf{G}_o = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{G}_o(T)$  existe et est solution de l'équation de Lyapunov :*

$$\mathbf{A}^t \mathbf{G}_o + \mathbf{G}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^t \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

**Proposition 4** *Le système (3.20, 3.21) est observable si et seulement si  $\mathbf{G}_o(T)$  est inversible, pour au moins un  $T$  positif.*

### 3.2.3 Observateur de Luenberger

L'observateur de Luenberger est un observateur asymptotique linéaire qui permet de fournir une estimation  $\hat{x}$  de  $x$ .

**Définition 6** *L'observateur du système (3.20, 3.21) est un modèle d'état de la forme :*

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}\phi_a - \mathbf{L}(\mathbf{C}\hat{x} - y) \quad (3.37)$$

où la matrice  $\mathbf{L}$  de dimension  $2N \times N_c$  est telle que  $\hat{x}$  tend vers  $x$  quand  $t$  tend vers l'infini et ce pour toutes conditions initiales  $x(0)$  et  $\hat{x}(0)$ , où  $N_c$  est le nombre de capteurs.

La matrice  $\mathbf{L}$ , appelée matrice de gain de l'observateur, pondère l'écart entre la sortie mesurée  $y(t)$  et la sortie reconstruite  $\mathbf{C}\hat{x}$ . Elle fixe la dynamique de l'observateur, c'est à dire quelle permet d'agir sur la stabilité et la rapidité en fixant les valeurs propres de la matrice  $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ . Le système sera stable lorsque celles-ci seront à partie réelle strictement négative. Plus précisément, on a le théorème de placement des pôles de l'observateur (D'ANDRÉA NOVEL et DE LARA [2000]) suivant :

**Théorème 4** *Si la paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  est observable, on peut choisir une matrice de gain  $\mathbf{L}$  pour placer arbitrairement les valeurs propres de  $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ . Ainsi, tout système (3.20, 3.21) observable admet un observateur asymptotique.*

## 3.3 Les régulateurs linéaires et la synthèse quadratique

Dans le cas d'un système linéaire gouvernable, on étudie le moyen d'élaborer un régulateur linéaire rendant le point d'équilibre  $x_e$  du système commandé (3.20) asymptotiquement stable.

**Définition 7** *On appelle régulateur linéaire du système (3.20) une loi de commande de la forme :*

$$\phi_a(t) = -\mathbf{K}x(t) \quad (3.38)$$

où  $\mathbf{K}$  de dimension  $N_a \times 2N$  est dite matrice de gain de contre-réaction, avec  $N_a$  le nombre d'actionneurs.

Avec un choix judicieux de la matrice de gain  $\mathbf{K}$  du régulateur, on peut stabiliser tout système gouvernable. Ceci est confirmé par le théorème suivant (D'ANDRÉA NOVEL et DE LARA [2000]) :

**Théorème 5** *Considérons le système commandé-observé (3.20,3.21). Si la paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  est gouvernable, on peut choisir une matrice de gain  $\mathbf{K}$  du régulateur (3.38) pour placer arbitrairement les valeurs propres de  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ . En conséquence, tout système (3.20) gouvernable peut être stabilisé par un régulateur linéaire.*

Le problème à résoudre est alors de placer correctement les pôles du système bouclé à l'intérieur du demi-plan de stabilité. Pour ce faire, dans la suite, nous utilisons la méthode de la synthèse quadratique en commande optimale. Cette méthode permet, en effet, de transformer le problème en celui du choix d'une fonction coût qu'il s'agit de minimiser. La loi de commande résultante stabilise alors naturellement le système. On détaille cette méthode dans le paragraphe 3.3.2.

### 3.3.1 Synthèse observateur-régulateur

On sait donc construire un régulateur linéaire pour un système gouvernable dont on connaît l'état et un observateur asymptotique pour un système observable dont on mesure une partie de l'état. Il semble alors naturel, dans le cas d'un système gouvernable et observable, de construire un régulateur comme si tout l'état était mesuré, puis de remplacer dans le régulateur l'état par son observateur.

**Définition 8** On appelle observateur-régulateur du système (3.3), (3.4) un système d'entrée  $\phi_a$ , d'état  $\hat{x}$  et de sortie  $y$  de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}\phi_a - \mathbf{L}(\mathbf{C}\hat{x} - y) \\ \phi_a &= -\mathbf{K}\hat{x}\end{aligned}\quad (3.39)$$

Cette démarche stabilise le système. En effet, compte-tenu que  $y = \mathbf{C}x$ , le système d'état  $[\hat{x}, \dot{\hat{x}}]^t$  devient d'après (3.20) et (3.39) :

$$\dot{x} = \mathbf{A}x - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{x} + \mathbf{F}_e \quad (3.40)$$

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{L}\mathbf{C}x + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{x} \quad (3.41)$$

En faisant le changement de variable suivant :

$$[x, \hat{x}] \rightarrow [x, \epsilon] = [x, \hat{x} - x] \quad (3.42)$$

le système 3.40,3.41 devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{F}_e \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Les valeurs propres de ce système sont donc les valeurs propres du régulateur et de l'observateur. Ainsi le système est stable.

Il existe plusieurs méthodes pour la création de la matrice de gain  $\mathbf{K}$  comme la méthode de placement de pôles ou la synthèse quadratique. Dans ce travail, on met en place un régulateur à partir de la synthèse quadratique, qui a l'avantage d'être une commande optimale et efficace.

### 3.3.2 La synthèse quadratique : le régulateur linéaire quadratique (LQR)

La méthode de la synthèse quadratique permet de transformer le problème du placement des pôles en celui de la recherche d'une fonction coût à minimiser, afin de construire les matrices de régulation et d'observation  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$ .

Considérons le système linéaire commandé-observé (3.20,3.21). Soit  $\mathbf{Q}$  une matrice symétrique positive et  $\mathbf{R}$  une matrice symétrique définie positive, la méthode de la synthèse quadratique consiste à choisir une loi de commande minimisant la fonction coût  $J$  suivante :

$$J(\phi_a) = \int_0^{\infty} (\phi_a^t \mathbf{R} \phi_a + x^t \mathbf{Q} x) dt \quad (3.44)$$

Le premier terme de  $J$  représente l'énergie de commande à fournir et le second terme l'énergie associée à l'état vibratoire. Les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont dites matrices de pondération de l'état et de la commande.

La commande optimale  $\phi_a$  du problème de minimisation du critère  $J$  est égale à :

$$\phi_a = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{P} x \quad (3.45)$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice définie positive, symétrique, solution de l'équation de Riccati :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^t \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (3.46)$$

La commande optimale ainsi définie est malheureusement difficilement réalisable en pratique car elle nécessite la connaissance de  $\mathbf{P}$  à chaque instant. Cependant, lorsque le temps tend vers l'infini, la matrice  $\mathbf{P}$  tend vers une matrice constante  $\mathbf{P}_c$ , solution de l'équation algébrique de Riccati LIONS [1968] :

$$\mathbf{P}_c \mathbf{A} + \mathbf{A}^t \mathbf{P}_c - \mathbf{P}_c \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{P}_c + \mathbf{Q} = 0 \quad (3.47)$$

ce qui conduit à la solution sous optimale suivante du problème de minimisation du critère  $J$  :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{P}_c \mathbf{x} \quad (3.48)$$

La valeur minimale de la fonction coût correspondante est alors :

$$\min_u(J) = \mathbf{x}_0^t \mathbf{P}_c \mathbf{x}_0 \quad (3.49)$$

L'avantage principal de cette méthode est qu'elle est robuste et garantit la stabilité du système. Elle reporte le problème du choix des pôles du système en boucle fermée sur le choix des matrices de pondération  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ . Elles doivent être choisies en fonction de l'ordre de grandeur de l'état et des bornes limites admissibles pour la commande. À  $\mathbf{Q}$  fixée, plus la matrice  $\mathbf{R}$  possède de petites valeurs, plus le système bouclé est rapide, mais la diminution des valeurs des composantes de  $\mathbf{R}$  peut entraîner une saturation des actionneurs. Le choix de  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  va donc dépendre du cahier des charges imposé (tension maximale admissible par les actionneurs, rapidité du système bouclé) et va nécessiter plusieurs simulations numériques pour en déterminer les valeurs optimales.

### 3.3.2.a Construction de la matrice de gain de l'observateur par la synthèse quadratique

Comme nous l'avons rappelé précédemment la matrice gain de l'observateur fixe la dynamique de l'observateur. Elle doit être choisie de façon à ce que les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$  soient à partie réelle strictement négative.

En pratique, deux méthodes existent pour satisfaire ce critère :

- La première, appelée méthode de placement des pôles, consiste à choisir les valeurs propres de  $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$  puis à trouver la matrice  $\mathbf{C}$  correspondante (BLANGUERNON [1997]). Il existe dans la plupart des logiciels d'automatique une fonction déjà définie qui utilise cette méthode.
- La seconde méthode, appelée méthode du système fictif est basée sur la dualité entre régulateur et observateur (D'ANDRÉA NOVEL et DE LARA [2000]). En effet, le calcul de la matrice  $\mathbf{L}$  est semblable à celui de la matrice  $\mathbf{K}$  du régulateur LQR en vue d'obtenir une dynamique fixée.

Imaginons le système fictif dual du système à observer (3.20, 3.21) suivant :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^t \mathbf{q} + \mathbf{C}^t \mathbf{v} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}^t \mathbf{q} \quad (3.51)$$

À condition que ce système soit gouvernable, on peut déterminer une loi de commande du type retour d'état de la forme  $\mathbf{v} = -\mathbf{H}\mathbf{q}$  par synthèse quadratique, telle que ce système, une fois bouclé ait ses valeurs propres fixées.

La condition de gouvernabilité correspond à la condition d'observabilité, d'après le paragraphe 3.2.2. Dans ces conditions, le système fictif devient, en boucle fermée :

$$\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{A}^t - \mathbf{C}^t \mathbf{H}) \mathbf{q} \quad (3.52)$$

et ses valeurs propres sont les mêmes que celles de  $\mathbf{A} - \mathbf{H}^t \mathbf{C}$ . En comparant  $\mathbf{A} - \mathbf{H}^t \mathbf{C}$  à  $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ , ceci revient à prendre  $\mathbf{L} = \mathbf{H}^t$ .

On se ramène ainsi par cette méthode à l'utilisation de la synthèse quadratique appliquée au système fictif (3.50,3.51).

### 3.3.2.b Inconvénients de la synthèse quadratique

Les principaux inconvénients de la synthèse quadratique sont :

- la difficulté de régler les coefficients de la matrice  $\mathbf{R}$  lorsque le nombre d'actionneurs est supérieur à deux,
- les termes des matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{Q}$  sont réglés pour une sollicitation donnée et donc optimaux uniquement pour celle-ci,
- la nécessité de plusieurs simulations numériques pour le réglage.

Nous avons ainsi choisi la méthode de la synthèse quadratique pour créer le régulateur et l'observateur de la poutre FGPM. En effet pour les sollicitations considérées dans ce travail, un ou deux actionneurs seulement sont nécessaires pour activement contrôler les vibrations de la poutre FGPM.

Dans le cas d'une plaque FGPM, il est possible de placer de multiples actionneurs et capteurs et la synthèse quadratique est difficilement applicable. C'est pourquoi nous avons développé dans cette thèse, un régulateur intelligent basé sur la logique floue permettant d'utiliser plusieurs actionneurs et capteurs en même temps. Afin de comprendre comment un régulateur flou fonctionne, il est tout d'abord nécessaire d'introduire les notions de la logique floue.

## 3.4 La logique floue

Le raisonnement humain est basé sur des données imprécises ou incomplètes et soumis à l'appréciation et l'expérience de l'être humain. Un ordinateur, quant à lui est basé sur la logique classique traitant des données exactes. L'idée principale de la logique floue, introduite en 1965 par Zadeh (ZADEH [1968]), est de transmettre la faculté de raisonnement humain à un ordinateur.

Les sous-ensembles flous (ZADEH [1975], ZADEH [1976]) sont une manière mathématique de représenter l'imprécision du langage. Ils peuvent être considérés comme une généralisation de la théorie des ensembles classiques. La logique floue est aussi appelée logique linguistique car ses valeurs de vérités sont des mots du langage courant comme : "proche, loin, presque vrai, faible, ...".

En automatique, l'approche floue est très utile pour des problèmes mal définis, où la connaissance et le raisonnement humain sont indispensables. Cette approche permet au concepteur de mieux appréhender les phénomènes naturels, imprécis et difficilement modélisables en s'appuyant sur la définition de règles et de fonctions d'appartenance aux ensembles flous. La logique floue est maintenant souvent utilisée dans l'industrie pour créer des régulateurs efficaces, sans avoir besoin d'effectuer des développements théoriques importants (KERRE et NACHTEGAEL [2013], MELIN et CASTILLO [2014], SUGANTHI et collab. [2015], KORENEVSKIY [2015]). Son efficacité tient également de la prise en compte des expériences acquises par les utilisateurs et opérateurs du processus à commander.

### 3.4.1 Les ensembles flous

En théorie des ensembles classiques, l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble est booléenne. Les sous-ensembles flous permettent en revanche de connaître le degré d'appartenance d'un élément au sous-ensemble. Les ensembles flous ont le grand avantage de constituer une représentation mathématique de variables linguistiques largement utilisées dans l'expression de connaissances expertes, qualitatives et manipulées dans un raisonnement humain. Ces ensembles sont donc un moyen de réaliser l'interface entre l'information quantitative (mesures, résultats numériques, ...) et l'information symbolique (linguistique, qualitative).

#### Définition 9 Sous-ensemble flou

Soit  $X$  un ensemble, un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  est caractérisé par sa fonction d'appartenance  $\mu_A$ ,

telle que :

$$\begin{aligned}\mu_A : X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow \mu_A(x)\end{aligned}$$

où  $\mu_A(x)$  représente le degré d'appartenance avec lequel  $x$  appartient à l'ensemble flou  $A$ .

### 3.4.1.a Caractéristiques et opérations des sous-ensembles flous

On redéfinit pour les sous-ensembles flous les notions de support, noyau et hauteur.

- **Support d'un sous-ensemble flou**

Le support d'un sous-ensemble flou  $A$  est caractérisé par l'ensemble des éléments de  $X$ , qui sont à des degrés divers dans  $A$ , défini par :

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) \neq 0\}$$

- **Noyau d'un sous-ensemble flou**

Le noyau d'un sous-ensemble flou  $A$  est caractérisé par l'ensemble des éléments de  $X$ , qui appartiennent totalement à  $A$ , défini par :

$$N(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$$

- **Hauteur d'un sous-ensemble flou**

La hauteur d'un sous-ensemble flou  $A$  est défini par :

$$H(A) = \sup\{\mu_A(x) \mid x \in X\}$$

Afin d'utiliser les ensembles flous comme des ensembles classiques, Zadeh a généralisé les opérations d'égalité, d'inclusion, de complémentation, d'union et d'intersection aux ensembles flous. Pour les définitions suivantes on considère  $A_i$  et  $A_j$  deux éléments de  $M(X)$ , où  $M(X)$  est l'ensemble de tous les sous-ensembles flous de  $X$ .

- **Égalité**

$$A_i = A_j \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_{A_i}(x) = \mu_{A_j}(x)$$

- **Inclusion**

$$A_i \subset A_j \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_{A_i}(x) \leq \mu_{A_j}(x)$$

- **Intersection**

L'intersection de  $A_i$  avec  $A_j$  définit un nouveau sous-ensemble  $A_k$ , ayant pour fonction d'appartenance  $\mu_{A_k}$  définie par :

$$\mu_{A_k}(x) = \min(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_j}(x)), \forall x \in X$$

- **Réunion**

La réunion de  $A_i$  avec  $A_j$  définit un nouveau sous-ensemble  $A_k$ , ayant pour fonction d'appartenance  $\mu_{A_k}$  définie par :

$$\mu_{A_k}(x) = \max(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_j}(x)), \forall x \in X$$

- **Complémentaire**

Le complémentaire  $\bar{A}_i$  de  $A_i$  a pour fonction d'appartenance  $\mu_{\bar{A}_i}$ , définie par :

$$\mu_{\bar{A}_i}(x) = 1 - \mu_{A_i}(x), \forall x \in X$$



Le choix des opérateurs *min* et *max* pour définir respectivement l'intersection et l'union de sous-ensembles flous est justifié par le fait qu'ils préservent presque toute la structure de la théorie des ensembles classiques. En effet, d'après les définitions données ci-dessus, nous pouvons retrouver les propriétés classiques de l'intersection et de l'union à savoir : l'associativité, la commutativité, la distributivité, l'idempotence et la monotonie.

Néanmoins, d'autres opérateurs sont envisageables si l'on est moins exigeant sur la préservation des propriétés classiques. Ils sont définis à l'aide d'une norme triangulaire et d'une conorme triangulaire pour l'intersection et l'union respectivement.

### 3.4.1.b Les fonctions d'appartenances

Dans le cas où l'ensemble  $X$  appartient à l'ensemble des réels, cas le plus souvent utilisé pour décrire des paramètres physiques, on présente les principaux types de fonctions d'appartenance  $\mu(x)$  des sous-ensembles flous prenant des valeurs dans  $[0, 1]$ .

- **Fonction d'appartenance triangulaire**

Une fonction d'appartenance triangulaire, illustrée par la Figure 3.3, est caractérisée par trois paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ , et est définie comme suit :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

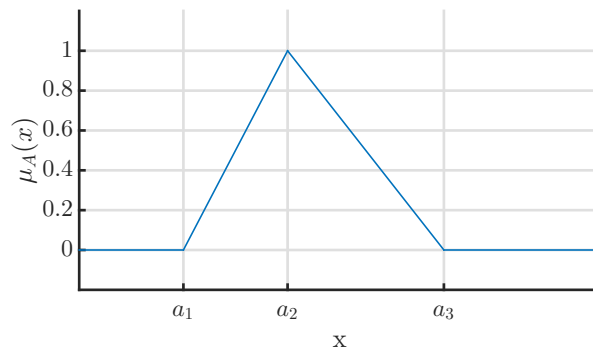


FIGURE 3.3 – Fonction d'appartenance triangulaire

- **Fonction d'appartenance trapézoïdale**

Une fonction d'appartenance trapézoïdale, illustrée par la Figure 3.4, est définie par quatre paramètres  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$ . Cette fonction est définie par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_3 - a_4} & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Fonction d'appartenance gaussienne**

Une fonction d'appartenance gaussienne, illustrée par la Figure 3.5, est caractérisée par sa valeur centrale  $m$  et son écart type  $\sigma$ . Elle est définie par :

$$\mu_A(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m}{\sigma}\right)^2\right)$$

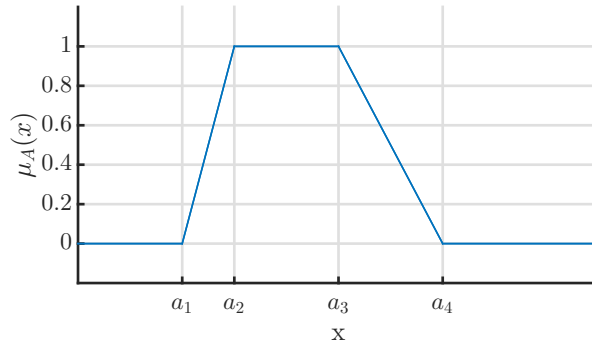


FIGURE 3.4 – Fonction d'appartenance trapézoïdale

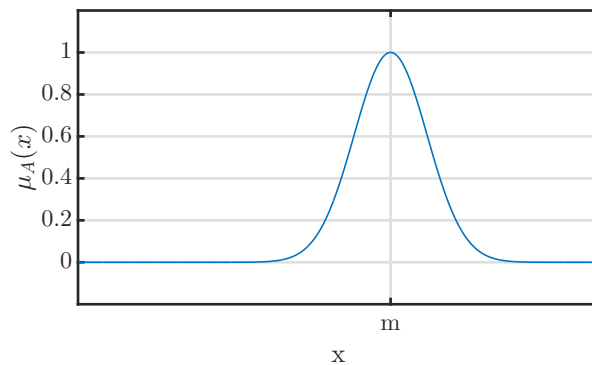


FIGURE 3.5 – Fonction d'appartenance gaussienne

### 3.4.2 Implications floues

On introduit tout d'abord les notions de "variable linguistique" et de "proposition floue".

#### 3.4.2.a Variable linguistique

Une variable linguistique est une variable dont les valeurs sont des mots ou des phrases exprimées dans une langue naturelle ou dans un langage artificiel **ZADEH [1975]**. Elle est représentée par le quadruplet  $(V, X, T_V, \mu_x)$  :

- V la variable,
- X un ensemble de référence (ensemble des réels, des nombres entiers, ...),
- $T_V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  un ensemble fini de sous ensembles flous normalisés de X, qui sont utilisés pour caractériser V,
- $\mu_{A_i}$  les fonctions d'appartenance associées à chacun des sous ensembles flous  $A_i$ .

Les termes  $A_i$  sont donc choisis pour effectuer des descriptions de V, et chacun est associé à un sous ensemble flou de X de fonction d'appartenance  $\mu_{A_i}$ , définie sur X et à valeurs dans  $[0, 1]$ . Pour simplifier, on note  $A_i$  à la fois le terme linguistique et le sous ensemble flou qui lui est associé. **Exemple :** On considère la température d'une pièce, la variable linguistique *température* sera définie comme suit :

$$(\text{Température}, X = \{0, 30\}, T_V = \{A_1, A_2, A_3\}, \mu_x = \{\mu_{x1}, \mu_{x2}, \mu_{x3}\})$$

où :

- X est l'univers de la température défini en degré,
- l'ensemble  $T_V$  est constitué de trois étiquettes linguistiques :  $A_1 = \text{froide}$ ,  $A_2 = \text{tempérée}$  et  $A_3 = \text{chaude}$ ,

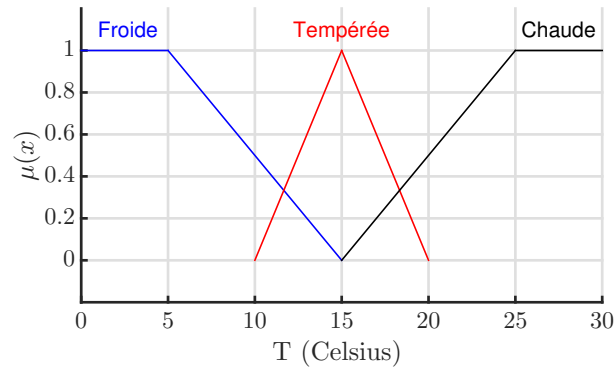


FIGURE 3.6 – Fonctions d'appartenance pour la température

- les fonctions d'appartenances définies pour chaque terme linguistique sont illustrées dans la Figure 3.6.

### 3.4.2.b Proposition floue

Le traitement et la représentation des connaissances symboliques non numériques, passent par le conditionnement des données sous forme de variables linguistiques. On se limite à des descriptions de la forme suivante : la taille est moyenne, la température de la pièce est froide, etc. On considère un ensemble  $L$  de variables linguistiques.

Une proposition floue élémentaire est définie à partir d'une variable linguistique  $(V, X, T_V, \mu_x)$  de  $L$  et par la qualification  $(V \text{ est } A_i)$ . La valeur de vérité de cette proposition est donnée par sa fonction d'appartenance  $\mu_{A_i}$ .

Une proposition floue générale est obtenue par la composition de propositions floues élémentaires. L'utilisation de la proposition floue générale la plus simple, s'exprime par la conjonction (intersection) de propositions floues élémentaires sous la forme suivante :

$$(V \text{ est } A_i) \text{ et } (W \text{ est } A_j)$$

où  $V$  et  $W$  sont des variables définies sur les référentiels  $X$  et  $Y$ .

La proposition floue générale est associée au produit cartésien  $A_i \times A_j$  qui caractérise la valeur conjointe  $(V, W)$  sur l'ensemble  $X \times Y$ .

On peut également composer deux propositions floues élémentaires par disjonction (réunion) sous la forme :

$$(V \text{ est } A_i) \text{ ou } (W \text{ est } A_j)$$

### 3.4.2.c Implication floue

Une implication floue est une proposition floue qui possède la forme suivante :

$$\mathbf{Si} (V \text{ est } A_i) \mathbf{Alors} (W \text{ est } A_j)$$

D'une manière générale, les propositions floues sont construites à l'aide de différents opérateurs, comme la disjonction, la conjonction et l'implication portant sur des propositions floues quelconques.

En particulier une proposition floue utilisant une implication floue entre deux propositions floues ayant la forme suivante :

$$\mathbf{Si} (V \text{ est } A_i) \text{ et } (W \text{ est } A_j) \mathbf{Alors} (U \text{ est } A_k)$$

est appelée règle floue. Le membre de gauche  $(V \text{ est } A_i \text{ et } W \text{ est } A_j)$  est appelé la prémisse de la règle floue, et  $(U \text{ est } A_k)$  est sa conclusion.

### 3.4.3 Le régulateur flou

Un régulateur flou est un système à base de connaissances particulières, utilisant un raisonnement assez simple, dans un processus de chaînage. Les régulateurs flous utilisent, en général, une expertise proche du langage humain sous forme de règles floues.

Un régulateur flou a donc pour but de construire les sorties en fonction des données d'entrée, à partir de l'évaluation d'un ensemble de règles floues. Ce régulateur est divisé en trois étapes essentielles (Figure 3.7) :

- La fuzzification est l'étape de définition des variables linguistiques caractérisant les variables numériques (réelles) du problème (entrées et sorties) et également l'étape de transformation des valeurs des variables numériques d'entrée à leurs valeurs floues (constitue les entrées floues dans l'inférence).
- L'inférence est dans un premier temps l'application de toutes les règles floues définies par le concepteur à partir de son expertise. Chaque règle donne une sortie floue "partielle". Il faut ensuite agréger l'ensemble des sorties partielles pour obtenir la sortie floue globale.
- La défuzzification transforme la sortie floue issue de l'inférence en une valeur numérique  $y^*$  de sortie.

Ces différentes étapes sont explicitées par la suite grâce à l'exemple suivant : on considère la conduite d'un véhicule et son comportement à l'approche d'un feu rouge. Les deux entrées du système sont la distance au feu et la vitesse du véhicule. La sortie du système d'inférence est le freinage du véhicule.

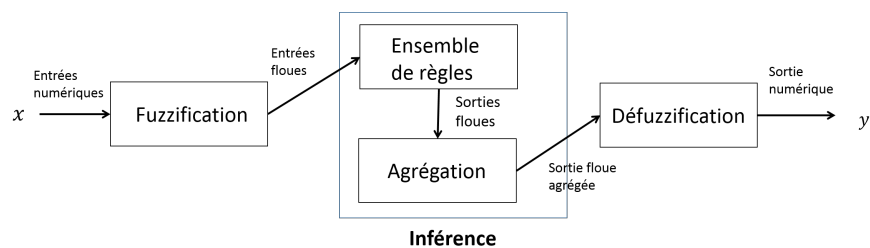


FIGURE 3.7 – Structure d'un système d'inférence flou

#### 3.4.3.a La fuzzification

L'étape de fuzzification a pour but de transformer une valeur numérique en valeur floue. Pour cela, le concepteur du système flou doit définir les variables linguistiques décrivant chaque variables d'entrée et de sortie du système. La caractérisation des variable nécessite de bien connaître le domaine d'application afin de proposer un modèle adéquat à l'aide de la logique floue. Dans la plupart des cas on effectue une normalisation des variables d'entrée physique pour se ramener à un univers dont les variables normalisées varient généralement entre  $-1$  et  $1$ .

Pour l'exemple du véhicule s'approchant d'un feu rouge :

- On définit chaque variable comme suit (Voir Figure 3.8) :

$$(\text{Distance}, X = \{0, 70\}, \{\text{Proche}, \text{Moyenne}, \text{Loi n}\}, \mu_x = \{\mu_{\text{proche}}, \mu_{\text{moyenne}}, \mu_{\text{loin}}\})$$

$$(\text{Vitesse}, X = \{0, 80\}, \{\text{Faible}, \text{Normale}, \text{Élevée}\}, \mu_x = \{\mu_{\text{faible}}, \mu_{\text{Normale}}, \mu_{\text{élevée}}\})$$

$$(\text{Freinage}, X = \{0, 50\}, \{\text{Doux}, \text{Fort}\}, \mu_x = \{\mu_{\text{doux}}, \mu_{\text{fort}}\})$$

- Le passage des entrées numériques à leur valeurs floues est illustré en considérant la distance égale à 20m et la vitesse égale à 65 km/h :

$$distance = 20 \rightarrow \mu_{proche}(20) = 0.42, \mu_{moyenne}(20) = 0.57, \mu_{loin} = 0$$

$$vitesse = 65 \rightarrow \mu_{faible}(65) = 0, \mu_{normale}(65) = 0.375, \mu_{élevée} = 0.833$$

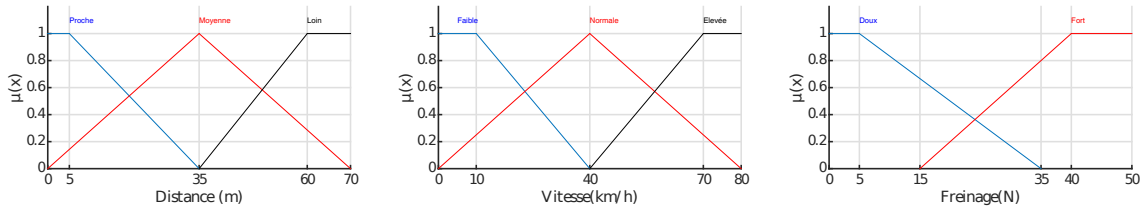


FIGURE 3.8 – Représentation floue des variables pour un véhicule s'approchant d'un feu rouge

### 3.4.3.b L'inférence floue

Le but de l'inférence floue est de déterminer les sorties du système à partir des entrées floues (valeurs floues des entrées numériques) issues de la fuzzification. L'inférence floue est basée sur un ensemble de règles, décrivant comment le système doit être commandé. Chaque règle donne donc par implication floue une conclusion partielle représentée par une fonction d'appartenance. Les conclusions sont alors agrégées pour former la sortie floue du système. Étant donné un ensemble de règles, le mécanisme d'inférence consiste à générer un sous-ensemble flou de sortie à partir de l'agrégation des conclusions de l'ensemble des règles floues.

On considère un ensemble de  $n$  règles comme suit :

$$\text{Règle } n : \text{ Si } x_1 \text{ est } A_1 \text{ ET/OU } x_2 \text{ est } A_2 \dots \text{ ET/OU } x_n \text{ est } A_n \text{ alors } Y \text{ est } B_n \quad (3.53)$$

On illustre l'inférence grâce à l'exemple de la conduite du véhicule : on considère comme entrées que la distance est égale à 20 mètres et que le véhicule à une vitesse de 65 km/h. Les deux règles d'inférence sont les suivantes :

- $R_1$  : Si Distance est Proche ET Vitesse est Élevée Alors Freinage est Fort
- $R_2$  : Si Distance est Moyenne ET Vitesse est Normale Alors Freinage est Doux

On a donc pour les règles les valeurs suivantes (Voir Figure 3.10) :

$$R_1 = \mu_{fort} = [\min(\mu_{proche}(0.42), \mu_{élevée}(0.833))] = \min(0.42, 0.833) = 0.42$$

$$R_2 = \mu_{doux} = [\min(\mu_{moyenne}(0.57), \mu_{normale}(0.375))] = \min(0.57, 0.375) = 0.375$$

Les deux règles donnent des résultats différents, le freinage doit être à la fois fort et doux. Il faut alors agréger ces deux résultats, la fonction d'appartenance  $\mu^*$  de l'agrégation est montrée dans la Figure 3.10.

### 3.4.3.c La défuzzification

Le but de la défuzzification est de transformer la sortie floue de l'inférence en variable numérique. Il existe plusieurs méthodes de défuzzification, parmi les plus utilisées on peut distinguer la méthode de la moyenne des maximas et celle du centre de gravité :

- La méthode de la moyenne des maximas revient à prendre l'abscisse correspondant à la moyenne des abscisses ayant pour ordonnée la valeur maximale des fonctions d'appartenance. C'est une méthode rapide mais assez imprécise. D'un point de vue formel, soit  $y^*$  la valeur défuzzifiée :

$$y^* = \frac{\int_S x dx}{\int_S dx} \quad \text{avec } S = \{x, \mu(x) = \sup(\mu(x))\}$$

Règle1 : Si Distance est Proche et Vitesse est Elevée Alors Freinage Fort

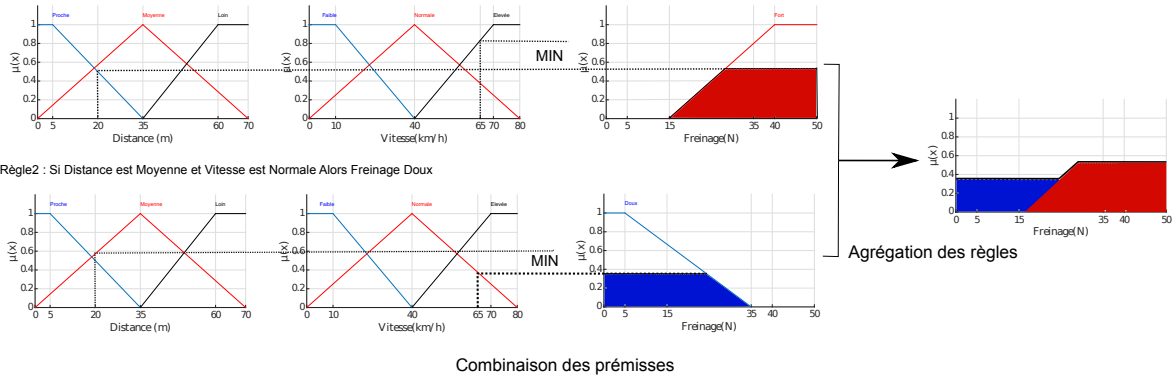


FIGURE 3.9 – Méthode d’inférence de deux règles floues

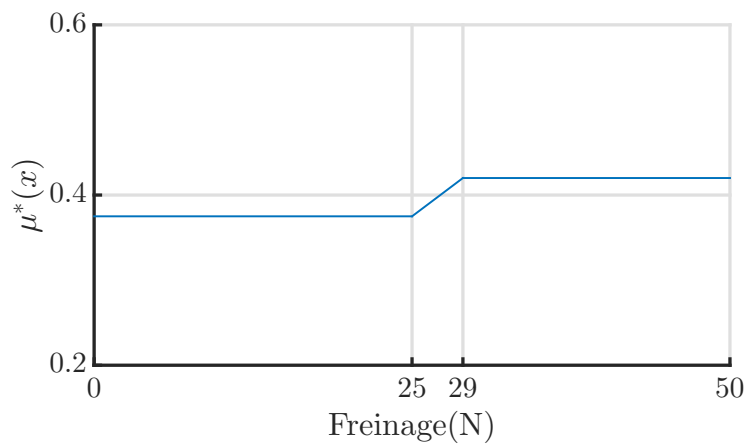


FIGURE 3.10 – Inférence à deux règles : sortie agrégée

- La méthode du centre de gravité consiste à prendre l’abscisse correspondant au centre de gravité de la fonction d’appartenance. C’est une méthode plus précise que la première mais nécessite plus de calcul. Formellement, on a :

$$y^* = \frac{\int_S \mu(x) \cdot x \, dx}{\int_S \mu(x) \, dx} \quad \text{avec } S \text{ le domaine de la fonction d'appartenance.}$$

Dans l’exemple du freinage du véhicule on obtient :

- Avec la méthode de la moyenne des maximas :

$$y^* = \frac{\int_{29}^{50} x \, dy}{\int_{29}^{50} dy} = 39.5\text{N}$$

La sortie indique que le conducteur doit exercer une force de 39.5 N sur le frein.

- Avec la méthode du centre de gravité :

$$y^* = \frac{\int_0^{50} \mu^*(x) \, dx}{\int_0^{50} dx} = 25.77\text{N}$$

La sortie indique que le conducteur doit exercer une force de 25.77 N sur le frein.

### 3.4.3.d Avantages et inconvénients

La logique floue permet de raisonner sur des variables linguistiques, i.e des variables qualitatives (grand, petit, moyen, loin, près, ...). Le fait de raisonner sur des variables linguistiques permet

de pouvoir manipuler des connaissances en langage naturel. Les seules données nécessaires à donner au système sont des règles d'inférences exprimées en langage naturel.

L'avantage principal est ainsi de pouvoir contrôler des systèmes complexes non forcément modélisables de façon intuitive.

Les inconvénients sont :

- l'expression des connaissances sous la forme de règles dans un langage naturel ne permet pas de prouver que le système aura un comportement optimal,
- les réglages du système se font de façon arbitraires,
- pas de garantie de la stabilité du système, ni de la précision, ni l'optimalité, ni même que les règles entrées ne soient contradictoires.

En conclusion, la logique floue possède l'avantage d'être intuitive et de pouvoir faire fonctionner une quantité importante de systèmes différents possédant une forte expertise humaine. Néanmoins, il faut garder à l'esprit qu'en logique floue, il est impossible de prédire les performances d'un système. La qualité de la méthode dépend principalement du réglage des paramètres.

### 3.5 Le régulateur flou pour la plaque FGPM

Afin de contrôler activement la plaque FGPM à l'aide d'un réseau de plusieurs capteurs et d'actionneurs, on a choisi de construire un régulateur flou.

Quelques chercheurs ont utilisé ce régulateur pour le contrôle actif des vibrations de structures intelligentes piézoélectriques, comme **SUSHEEL et collab. [2016]** qui utilisent un régulateur flou pour le contrôle d'une plaque FGM équipée d'un capteur et d'un actionneur FGPM.

On peut aussi noter que plusieurs études expérimentales montrent l'efficacité du régulateur flou (**GU et SONG [2005]**, **DE ABREU et RIBEIRO [2002]**, **LI et collab. [2011]**, **LIN [2005]**).

Les régulateurs flous peuvent être classifiés selon certaines caractéristiques :

- Selon la nature des équations discrétisées du modèle utilisé pour modéliser la structure :
  - ▷ par la méthode des éléments finis (**KUMAR [2013]**, **MARINAKI et collab. [2015]**, **SHARMA et collab. [2005]**, **SUSHEEL et collab. [2016]**),
  - ▷ par la méthode modale (**LI et collab. [2011]**, **SHARMA et collab. [2007]**, **DE ABREU et RIBEIRO [2002]**, **ZORIĆ et collab. [2013]**).
- Selon la forme et le nombre des fonctions d'appartenance choisies pour la représentation floue des entrées et de la sortie :
  - ▷ La plupart des auteurs utilisent des fonctions triangulaires ou trapézoïdales et le même nombre de fonctions d'appartenances pour décrire les entrées et la sortie :
    - **SHARMA et collab. [2007]** et **DE ABREU et RIBEIRO [2002]** utilisent trois fonctions d'appartenances,
    - **ZORIĆ et collab. [2013]** en utilisent cinq,
    - **LI et collab. [2011]**, **LIN [2005]**, **SUSHEEL et collab. [2016]**, **SHARMA et collab. [2014]** en considèrent sept,
    - **KUMAR [2013]** en utilise neuf.
  - ▷ **MARINAKI et collab. [2015]** considèrent trois, cinq et neuf fonctions triangulaires pour la vitesse, le déplacement et la force de contrôle respectivement.
  - ▷ **GU et SONG [2005]** quand à eux utilisent des fonctions d'appartenance de forme gaussienne.
  - ▷ Plus on utilise de fonction d'appartenance plus le régulateur flou construit sera précis mais plus il sera complexe : augmentation de règles à considérer et de paramètres à définir.

- Selon les différentes façons d'utiliser le régulateur flou :
  - ▷ **LI et collab. [2011]** utilisent un régulateur flou adaptatif décentralisé où chaque mode propre est régulé par un actionneur.
  - ▷ Dans **SHARMA et collab. [2007]** l'actionneur est dédié, à chaque instant, à la régulation du mode ayant la plus grande énergie modale.
  - ▷ **LIN [2005]** utilise un régulateur flou en parallèle, chaque sous système du régulateur est associé à un mode et la commande totale est générée par la somme de chaque sous commande.

Dans le cas de la plaque FGPM, afin d'assurer une régulation efficace, on décide de créer une commande pour chaque mode contrôlé ( $N_a = N$ ) et de définir pour chacun d'eux un régulateur flou.

Ainsi, le régulateur flou créé pour le contrôle actif de cette plaque FGPM est en fait l'addition de plusieurs sous-régulateurs flous contrôlant chacun un seul mode. C'est un régulateur flou dit décentralisé, car chaque sous-régulateur n'a accès qu'aux informations propres au mode qu'il doit contrôler. Le sous régulateur présenté après est construit en se basant sur la littérature présentée ci-dessus. L'originalité du régulateur flou décentralisé tient à donc à l'association de l'ensemble de sous régulateur et aux différentes façons de distribuer l'énergie électrique injecté dans le régulateur à chaque instant.

### 3.5.1 Sous-régulateur flou pour le mode $i$

On suppose que le système est observable et que l'observateur permet de reconstruire l'état du système, i.e reconstruire le déplacement modal et la vitesse modale  $\hat{\alpha}_i$  et  $\hat{\dot{\alpha}}_i$  du mode  $i$ . Ces deux composantes modales du mode  $i$  sont les données d'entrée du sous-régulateur. la sortie du sous-régulateur est le potentiel à appliquer à l'actionneur, noté  $\phi_i^{fuz}$ .

#### 3.5.1.a La fuzzification

La première étape est de normaliser les données d'entrée, elles sont notés  $\bar{\alpha}_i$  et  $\bar{\dot{\alpha}}_i$  :

$$\bar{\alpha}_i(t) = \frac{\hat{\alpha}_i(t)}{\max_{\tau \in [0; t]} |\hat{\alpha}_i(\tau)|} \quad \bar{\dot{\alpha}}_i(t) = \frac{\hat{\dot{\alpha}}_i(t)}{\max_{\tau \in [0; t]} |\hat{\dot{\alpha}}_i(\tau)|} \quad (3.54)$$

$\bar{\alpha}_i$  et  $\bar{\dot{\alpha}}_i \in [-1, 1]$ .

Puis on doit transformer ces données d'entrées, variables numériques en variables linguistiques, que l'on note  $\alpha_i^{fuz}$  et  $\dot{\alpha}_i^{fuz}$ . Lors de la fuzzification, on définit les fonctions d'appartenance des deux données d'entrée. Afin d'avoir un sous-régulateur précis mais relativement simple, on choisit cinq fonctions d'appartenance de forme triangulaire, ayant les variables linguistiques suivantes : très négatif, négatif, zéro, positif, très positif (N+, N, Z, P, P+). Celles-ci sont présentées dans la figure 3.11. On utilise les mêmes types de fonctions pour  $\alpha_i^{fuz}$  et  $\dot{\alpha}_i^{fuz}$  et la commande  $\phi_i^{fuz}$ .

Les valeurs utilisées pour les bornes des différentes fonctions d'appartenance sont les valeurs obtenues par **ZORIĆ et collab. [2013]** après optimisation pour un problème similaire : il étudie une poutre composite équipée de deux actionneurs et un capteur piézoélectriques et utilisent un régulateur flou pour contrôler le premier mode de la poutre. Les entrées et la sortie du régulateur sont également le déplacement modal, la vitesse modale et le potentiel actionneur.

Les fonctions d'appartenance pour les entrées  $\alpha_i^{fuz}$  et  $\dot{\alpha}_i^{fuz}$  sont similaires et considèrent que l'entrée est P+ ou N+ dès 6% de la valeur maximale. Le régulateur réagit donc très vite même si la perturbation subie est faible. **MARINAKI et collab. [2015]** donnent également après optimisation des fonctions d'appartenance similaires.



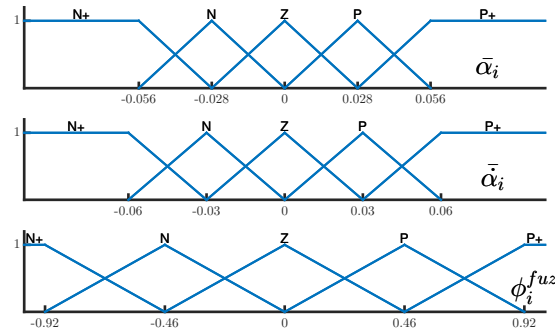


FIGURE 3.11 – Fonctions d'appartenance de  $\bar{\alpha}_i$ ,  $\bar{\alpha}_i$  et  $\phi_i^{fuz}$

### 3.5.1.b Le moteur d'inférence

Le moteur d'inférence est l'ensemble des règles floues, basées sur la connaissance humaine du problème. Dans le contrôle actif de structure élancées, les règles sont basées sur les observations suivantes, expliquées facilement sur le cas d'un système masse-ressort : soit  $x$  et  $x'$  le déplacement et la vitesse de la masse. La position d'équilibre de la poutre est  $x = x' = 0$ .

Si  $x$  est négatif, la masse est positionnée en amont de sa position d'équilibre. Afin de ramener la masse à sa position d'équilibre on considère trois cas :

- si  $x'$  est positif : la masse est en train de revenir à sa position d'équilibre donc on applique une commande positive faible.
- si  $x'$  est négatif : la masse continue à s'éloigner de sa position d'équilibre donc on applique une commande positive forte.
- si  $x'$  est nulle : la poutre est à la position la plus éloignée de sa position d'équilibre et commence à revenir vers celle-ci donc on applique une commande positive moyenne.

On peut faire le même raisonnement avec un déplacement  $x$  positif, ou quasi nul.

Dans le cas du sous-régulateur associé au mode  $i$ , on définit les règles pour la sortie floue qui représente la commande  $\phi_i^{fuz}$  à la Table 3.1 .

	$\bar{\alpha}_i$				
$\bar{\alpha}_i$	P <sup>+</sup>	P	Z	N	N <sup>+</sup>
P <sup>+</sup>	N <sup>+</sup>	N <sup>+</sup>	N <sup>+</sup>	N	N
P	N	N	N	Z	Z
Z	N	N	Z	P	P
N	Z	Z	P	P	P
N <sup>+</sup>	P	P	P <sup>+</sup>	P <sup>+</sup>	P <sup>+</sup>

Table 3.1 – Moteur d'inférence pour la commande  $\phi_i^{fuz}$  (ZORIĆ et collab. [2013])

### 3.5.1.c La défuzzification

Le passage des données d'entrées fuzzifiées par le moteur d'inférence génère une multitude de commandes  $\phi_i^{fuz}$ , que l'on fusionne à l'aide de l'opérateur logique flou OU. La deuxième étape de la défuzzification est le passage des variables linguistiques aux variables numériques de la commande, noté  $\bar{\phi}_i^c$ , valeur comprise dans  $[-1, 1]$ . Dans ce sous-régulateur on utilise la méthode du centre de gravité.

On peut construire la surface de réponse du régulateur flou, c'est à dire calculer la réponse  $\bar{\phi}_i^c$  pour

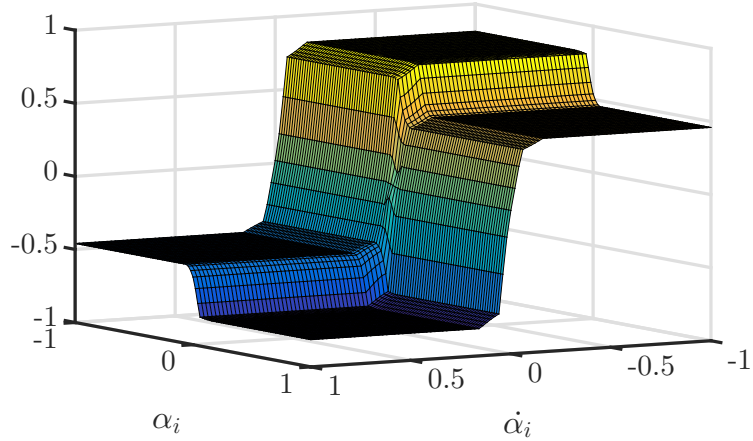


FIGURE 3.12 – Surface de réponse du sous-régulateur flou

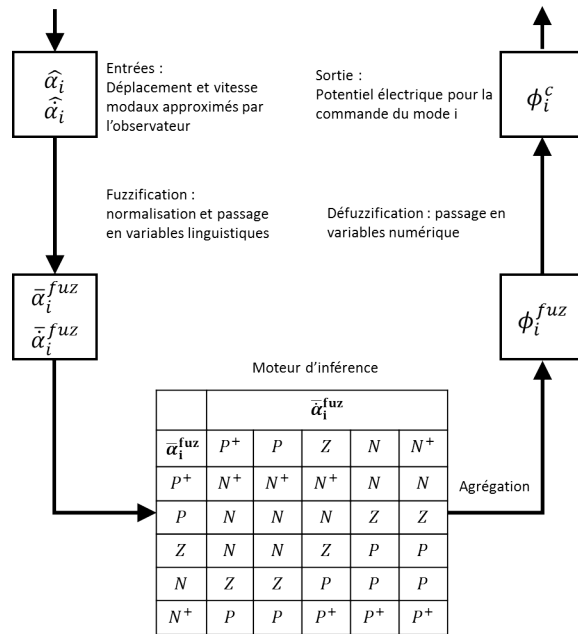


FIGURE 3.13 – Sous-Régulateur pour le mode i

toutes les valeurs des deux entrée  $\alpha_i$  et  $\dot{\alpha}_i$ . Celle-ci est présentée dans la Figure 3.12. On remarque que le maximum (en valeur absolue) de  $\bar{\phi}_i^c$  ne vaut pas 1 mais est égal à  $\max |\bar{\phi}_i^c| = 0.814$ .

On re-normalise donc la commande associée au mode i pour avoir une commande dont le maximum et minimum valent respectivement 1 et -1, à l'aide de la relation suivante :

$$\phi_i^c(t) = \frac{\bar{\phi}_i^c(t)}{\max |\bar{\phi}_i^c|} \quad (3.55)$$

Le schéma fonctionnel du sous-régulateur est présenté dans la figure 3.13.

### 3.5.2 Le régulateur flou décentralisé

Le régulateur flou de la plaque FGPM est donc l'assemblage de l'ensemble des sous-régulateurs flous chacun dédié au contrôle d'un seul mode  $i$ .

Ainsi pour créer un régulateur contrôlant les N premiers modes, il faut choisir N actionneurs, dédiés chacun à un seul mode  $i \in [1, N]$ . Chaque sous-régulateur donne à chaque instant  $t$  une

valeur  $\phi_i^c(t)$  pour la commande du mode  $i$ .

L'énergie électrique  $\phi^{\text{TOT}}$  injectée dans le système à chaque instant  $t$  étant limitée, il est nécessaire de créer une distribution de cette énergie entre les différentes paires d'actionneurs.

On note  $\phi_i$  la commande, après distribution, envoyée à l'actionneur contrôlant le mode  $i$ . On a considéré trois sortes de distribution :

- **La distribution équitable**, chaque actionneur reçoit la même part du potentiel électrique total  $\phi^{\text{TOT}}$  :

$$\phi_i(t) = \frac{\phi^{\text{TOT}}}{N} * \phi_i^c(t) \quad (3.56)$$

- **La distribution maximale**, tout le potentiel électrique est envoyé au mode le plus excité. On définit l'énergie modale  $J_i$  du mode  $i$  comme :

$$J_i(t) = \omega_i^2 \hat{\alpha}_i^2(t) + \hat{\alpha}_i^2(t) \quad (3.57)$$

La commande maximale  $\phi_i$  est alors donnée par :

$$\phi_i(t) = \phi^{\text{TOT}} \phi_i^c(t) \quad \text{si } J_i(t) = \max J_i(t) \quad \text{sinon } \phi_i(t) = 0 \quad (3.58)$$

- **La distribution adaptative**, le potentiel électrique est réparti entre modes en fonction de leur énergie modale. On définit la fraction d'énergie modale du mode  $i$ ,  $J_i^{\%}$ , comme :

$$J_i^{\%}(t) = \frac{J_i(t)}{\sum_{i=1}^N J_i(t)} \quad (3.59)$$

La commande adaptative  $\phi_i$  est alors donnée par :

$$\phi_i(t) = \phi^{\text{TOT}} J_i^{\%}(t) \phi_i^c(t) \quad (3.60)$$

La distribution adaptative permet d'avoir un régulateur adaptatif, activant les actionneurs de façon pertinente sans exclure un ou plusieurs modes, et s'adapte facilement aux changements brutaux de chargements. Les performances de ces trois distributions seront étudiées en détail dans le Chapitre 5.

La figure 3.14 schématise le système plaque FGPM observé/contrôlé à l'aide d'un observateur de Luenberger et le régulateur flou décentralisé.

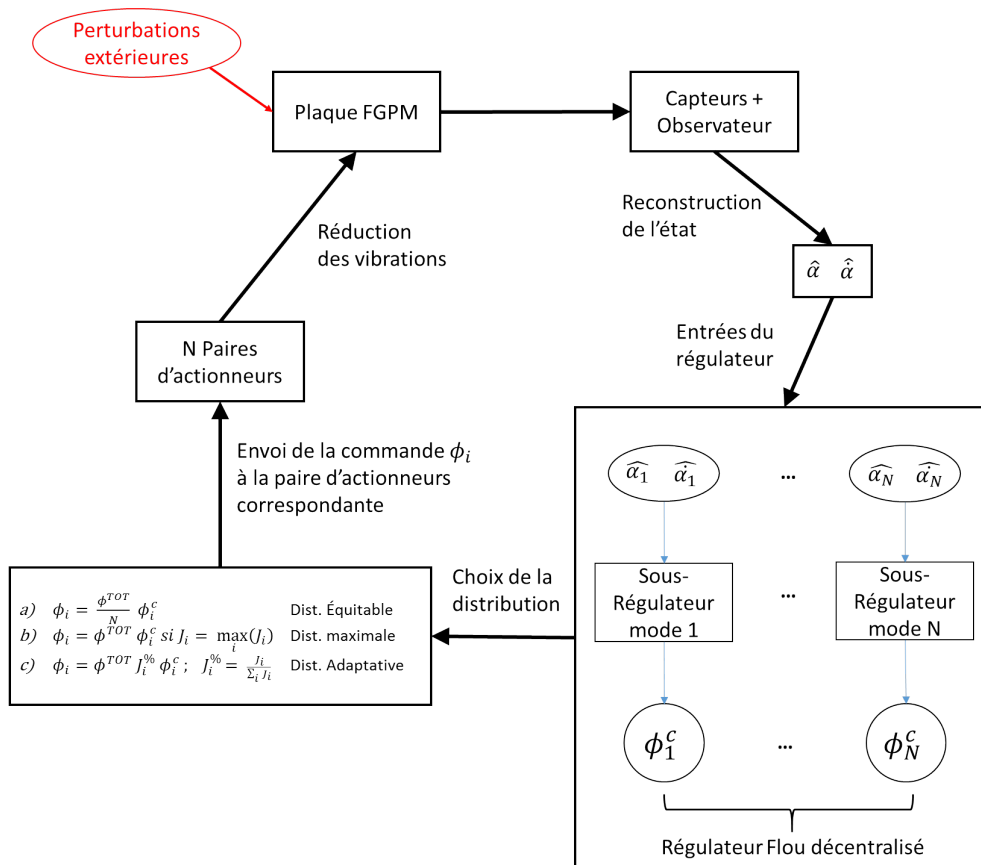


FIGURE 3.14 – Système plaque contrôlé-observé par un régulateur flou décentralisé

### 3.6 Optimisation des réseaux d'actionneurs et de capteurs en contrôle actif

Le choix des électrodes utilisées pour les capteurs ou les actionneurs est un paramètre essentiel du régulateur en contrôle actif. Il apparaît nécessaire d'introduire des critères d'optimisation, permettant de discriminer les performances capteur ou actionneur des différentes électrodes entre elles.

#### 3.6.1 Optimisation du réseau d'actionneurs

De nombreuses études ont montré l'influence importante de la position des actionneurs sur les performances de la commande, d'où la nécessité d'optimiser celle-ci. On cherche à optimiser la position des actionneurs en considérant le choix du régulateur inconnu, afin que le réseau d'actionneurs obtenu soit valable quelque soit la méthode de commande utilisée. Cette approche est basée sur la notion de gouvernabilité.

On rappelle que  $N$  représente le nombre de modes à contrôler,  $N_a$  le nombre d'actionneurs à choisir et que les équations d'états sont données par (3.19, 3.20, 3.21).

Dans le cas du régulateur flou  $N = N_a$ , tandis que dans le cas de la poutre FGPM, la commande LQR utilisée est construite en considérant un actionneur pour contrôler les quatre premiers modes,  $N = 4$  et  $N_a = 1$ .

La construction de la commande se faisant à partir des mesures obtenues par les capteurs, on considère que le système est observable et gouvernable.

Afin d'optimiser la position des actionneurs, on choisit d'utiliser l'approche développée par ARBEL [1981], HAÇ et LIU [1993], DEVASIA et collab. [1993] qui cherche à rendre le système à l'état désiré  $x_T$ , en minimisant la quantité, appelée énergie de contrôle du système, définie par :

$$J_a = \int_0^T \Phi_a^t(\tau) \Phi_a(\tau) d\tau \quad (3.61)$$

En considérant les conditions initiales du système  $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ , **HAC et LIU [1993]** ont montré que la solution optimale est de la forme :

$$\Phi_a(t) = -\mathbf{B}^t e^{\mathbf{A}(T-t)} \mathbf{G}_c^{-1}(t) (e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T) \quad (3.62)$$

où  $\mathbf{G}_c(t)$  est la matrice grammienne de gouvernabilité (Équation 3.29).

Ainsi :

$$J_a = (e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T)^t \mathbf{G}_c^{-1}(t) (e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T) \quad (3.63)$$

Cette énergie  $J_a$  dépend de la position des actionneurs principalement via  $\mathbf{G}_c(t)$ . La minimisation de  $J$  revient donc à minimiser  $\mathbf{G}_c^{-1}(t)$ , soit maximiser une mesure de cette matrice. La position du réseau d'actionneurs sera ainsi valable quelque soit  $\mathbf{x}_0$ . **HAC et LIU [1993]** ont démontré que, pour un temps suffisamment grand, la matrice grammienne de gouvernabilité peut être approximée par une matrice diagonale dominante, indépendante de  $T$  :

$$\hat{\mathbf{G}}_c = \begin{pmatrix} \lambda_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_a \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

où  $\lambda_a$  est une matrice carrée diagonale de dimension  $N$  qui s'exprime comme :

$$(\lambda_a)_{ii} = \frac{1}{4\eta_i\omega_i} \sum_{j=1}^{N_a} B_{ij}^2 \quad (3.65)$$

$(\lambda_a)_{ii}$  est la valeur propre de la matrice grammienne de gouvernabilité  $\hat{\mathbf{G}}_c$  associée au  $i^{\text{ème}}$  mode. Elle correspond à l'énergie de contrôle pour le  $i^{\text{ème}}$  mode. Ainsi, plus  $(\lambda_a)_{ii}$  est élevé, plus les actionneurs sont capables d'amortir le mode  $i$ . À l'inverse quand  $(\lambda_a)_{ii}$  tend vers 0 ce mode sera difficile à amortir.

L'objectif est maintenant de créer un critère d'optimisation du réseau d'actionneurs prenant en compte les modes de manière homogène. **BRUANT et PROSLIER [2005]** proposent d'établir une homogénéité entre les différents termes diagonaux de  $\lambda_a$  en divisant chacun d'eux par leur valeur maximale :

$$(\tilde{\lambda}_a)_{ii} = \frac{(\lambda_a)_{ii}}{\max_{\text{position acts}} (\lambda_a)_{ii}} = \frac{\sum_{j=1}^{N_a} B_{ij}^2}{\max_{\text{position acts}} \sum_{j=1}^{N_a} B_{ij}^2} \quad (3.66)$$

De ce fait  $(\tilde{\lambda}_a)_{ii}$  varie entre 0 et 1. L'équation 3.66 représente l'énergie de contrôle du réseau actuel des actionneurs pour le  $i^{\text{ème}}$  mode, divisée par l'énergie maximale que pourrait transmettre le réseau des actionneurs pour ce  $i^{\text{ème}}$  mode. Après application de ce critère au système d'électrodes considéré dans ce travail, on choisira les actionneurs pour un mode  $i$  parmi les électrodes maximisant  $(\tilde{\lambda}_a)_{ii}$  (**BRUANT et collab. [2010]**).

### 3.6.2 Critère d'optimisation du réseau de capteurs en contrôle actif

Le rôle des capteurs en vibration est de mesurer à tout instant la position, la vitesse ou la déformation transverse de la structure en certains points. L'information transmise par les capteurs peut s'écrire sous la forme intrinsèque, sans la présence de la commande  $\Phi_a$  :

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.67)$$

La connaissance du vecteur de sortie  $\mathbf{y}$  permet alors, sous l'hypothèse que le système d'état associé à la structure soit observable, de construire une estimation de l'état  $\mathbf{x}$  de la structure à tout instant. Cette estimation est cruciale car elle permet de connaître le mouvement vibratoire de la structure et d'en déduire éventuellement une commande à appliquer pour amortir les vibrations. Intuitivement, on souhaite donc optimiser le réseau des capteurs afin que l'information  $\mathbf{y}$  soit maximale. Or, quelque soit la modélisation faite, la position des capteurs intervient dans les composantes de la matrice de sortie  $\mathbf{C}$ . Dans le cas de l'utilisation d'un seul capteur piézoélectrique, on peut montrer que les zones de la structure où le système est peu ou pas observable sont les zones où le centre du capteur est sur un nœud de la courbure d'un des modes à mesurer. La composante associée à ce mode dans le vecteur  $\mathbf{C}$  est alors proche de zéro. Le déplacement modal associé sera donc mal mesuré, et la commande construite à partir de celui-ci ne sera pas correcte.

L'optimisation du réseau des capteurs est donc nécessaire, afin de s'assurer de bien observer chaque composante modale du déplacement.  $N$  représente le nombre de mode à mesurer et  $N_c$  le nombre de capteurs.

### 3.6.2.a Maximisation de l'énergie de sortie

L'optimisation du réseau des capteurs en contrôle actif des vibrations de structures peut s'appuyer sur la quantité appelée énergie de sortie définie par :

$$J_c = \int_0^{\infty} \mathbf{y}^t \mathbf{y} dt \quad (3.68)$$

Maximiser  $J$  semble en effet être un bon critère pour assurer une information globale sur l'ensemble des modes propres.

Lorsque le système, libre d'effort, est ramené à l'état d'équilibre ( $\mathbf{x}(t=0) = 0$ ) en boucle ouverte ( $\Phi_a(t) = 0, \forall t > 0$ ), tout comme lorsqu'il est soumis à un effort, **HAĆ et LIU [1993]** ont montré que maximiser l'énergie de sortie  $J$  conduit à maximiser la matrice grammiennne d'observabilité  $\mathbf{G}_o$  (Équation 3.35) de dimension  $(2N \times 2N)$ .  $\mathbf{G}_o$  est une matrice diagonale dominante et peut être approximée par (**HAĆ et LIU [1993]**) :

$$\hat{\mathbf{G}}_o \simeq \begin{pmatrix} \lambda_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_c \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

où  $\lambda_c$  est une matrice de dimension  $(N \times N)$  diagonale. **HAĆ et LIU [1993]** ont montré que :

$$(\lambda_c)_{ii} = \sum_{j=1}^{N_c} \frac{C_{ji}^2}{4\eta_i \omega_i} \quad (3.70)$$

Chaque terme diagonal  $(\lambda_c)_{ii} = (\mathbf{G}_o)_{ii}$  correspond à l'énergie de sortie  $J_c$  associée au mode propre  $i$ .

Comme pour l'optimisation du réseau d'actionneur, **BRUANT et PROSLIER [2005]** proposent d'établir une homogénéité entre les différents termes diagonaux de  $\lambda_c$  en divisant chacun d'entre eux par leur valeur maximale :

$$(\tilde{\lambda}_c)_{ii} = \frac{(\lambda_c)_{ii}}{\max_{\text{position cap}} (\lambda_c)_{ii}} = \frac{\sum_{j=1}^{N_c} C_{ji}^2}{\max_{\text{position cap}} \sum_{j=1}^{N_c} C_{ji}^2} \quad (3.71)$$

De ce fait, tous les termes  $(\tilde{\lambda}_c)_{ii}$  varient entre 0 et 1. L'équation (3.71) représente l'énergie mesurée par le réseau des capteurs pour le  $i^{\text{ème}}$  mode, divisée par l'énergie maximum mesurable par le réseau des capteurs dans le système pour cet  $i^{\text{ème}}$  mode. Si  $(\tilde{\lambda}_c)_{ii}$  est proche de 0, le mode  $i$  n'est quasiment pas observé par le réseau des capteurs. En revanche s'il est proche de 1, le mode  $i$  est observé de façon optimale par le réseau de capteurs.

Ainsi, au lieu de considérer la matrice grammiennne d'observabilité  $\mathbf{G}_o$  pour déterminer le réseau des capteurs, on propose d'utiliser la matrice appelée semi-grammiennne d'observabilité  $\hat{\mathbf{G}}_o$ , matrice diagonale, ayant sur sa diagonale les valeurs  $(\tilde{\lambda}_c)_{ii}$ .

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les différents outils de l'automatique ont été présentés afin de mettre en place les deux systèmes commandés-observés que sont la poutre et la plaque FGPM. Un observateur de Luenberger permettant de donner une approximation de l'état du système, sera utilisé pour les deux types de structures. Celui-ci est basé et réglé par la synthèse quadratique.

La structure poutre, équipée d'un capteur et d'un actionneur, sera commandée par un régulateur quadratique linéaire (LQR). Ce régulateur est robuste et facile à implémenter et a permis de montrer la faisabilité du contrôle actif pour ce type de structure FGPM.

Pour la plaque, l'utilisation d'une multitude d'actionneurs a conduit à changer de type de régulateur. Le choix s'est porté, dans ce travail, sur un régulateur flou décentralisé. Celui-ci est constitué de plusieurs sous-régulateurs flous régulant chacun un seul mode et va permettre de considérer facilement autant d'actionneurs que de modes à réguler. Il permet également, grâce à une distribution adéquate de l'énergie électrique injectée dans le système, une régulation adaptative.

### 3.8 Références

- DE ABREU, G. L. C. et J. F. RIBEIRO. 2002, «A self-organizing fuzzy logic controller for the active control of flexible structures using piezoelectric actuators», *Applied soft computing*, vol. 1, n° 4, p. 271–283. [84](#)
- ARBEL, A. 1981, «Controllability measures and actuator placement in oscillatory systems», *International Journal of Control*, vol. 33, n° 3, p. 565–574. [89](#)
- BENJEDDOU, A., S. BELOUETTAR, B. TOPPING, G. MONTERO et R. MONTENEGRO. 2006, «On the evaluation and application of the modal properties of piezoelectric adaptive structures», *Innovation in Computational Structures Technology. Stirlingshire : Saxe-Coburg Publications*, p. 287–302. [67](#)
- BLANGUERNON, A. 1997, *Contrôle actif de poutres et de plaques à l'aide d'un composant piézocéramique*, thèse de doctorat, Paris 6. [75](#)
- BRUANT, I., L. GALLIMARD et S. NIKOUKAR. 2010, «Optimal piezoelectric actuator and sensor location for active vibration control, using genetic algorithm», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 10, p. 1615–1635. [90](#)
- BRUANT, I. et L. PROSLIER. 2005, «Optimal location of actuators and sensors in active vibration control», *Journal of intelligent material systems and structures*, vol. 16, n° 3, p. 197–206. [90](#), [91](#)
- CLOUGH, R. W. et Y. PENZIEN. 1975, *DYNAMIQUE DES STRUCTURES*, Pluralis. [69](#)
- DE LARMINAT, P. 1996, *Automatique : commande des systèmes linéaires*, Hermes Paris. [72](#)
- DEVASIA, S., T. MERESSI, B. PADEN et E. BAYO. 1993, «Piezoelectric actuator design for vibration suppression-placement and sizing», *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 16, n° 5, p. 859–864. [89](#)
- GÉRADIN, M. et D. RIXEN. 1993, *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*, vol. 2, Masson Paris. [68](#), [69](#)
- GU, H. et G. SONG. 2005, «Active vibration suppression of a composite i-beam using fuzzy positive position control», *Smart materials and structures*, vol. 14, n° 4, p. 540. [84](#)
- HAĆ, A. et L. LIU. 1993, «Sensor and actuator location in motion control of flexible structures», *Journal of sound and vibration*, vol. 167, n° 2, p. 239–261. [89](#), [90](#), [91](#)
- KAILATH, T. 1980, *Linear systems*, vol. 156, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ. [71](#), [72](#)
- KERRE, E. E. et M. NACHTEGAEL. 2013, *Fuzzy techniques in image processing*, vol. 52, Physica. [76](#)
- KORENEVSKIY, N. 2015, «Application of fuzzy logic for decision-making in medical expert systems», *Biomedical Engineering*, vol. 49, n° 1, p. 46–49. [76](#)
- KUMAR, V. 2013, «Vibration control of a plate with help of fuzzy logic controller», *International Journal of Enhanced Research in Science Technology and Engineering*, vol. 2, p. 100–106. [84](#)
- LEMAITRE, J. et J.-L. CHABOCHE. 1988, *Mécanique des matériaux solides*, © Bordas, Paris. [68](#)
- LI, D., W. LIU, J. JIANG et R. XU. 2011, «Placement optimization of actuator and sensor and decentralized adaptive fuzzy vibration control for large space intelligent truss structure», *Science China Technological Sciences*, vol. 54, n° 4, p. 853–861. [84](#), [85](#)
- LIN, J. 2005, «An active vibration absorber of smart panel by using a decomposed parallel fuzzy control structure», *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 18, n° 8, p. 985–998. [84](#), [85](#)



- LIONS, J. L. 1968, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod. 74
- MARINAKI, M., Y. MARINAKIS et G. E. STAVROULAKIS. 2015, «Fuzzy control optimized by a multi-objective differential evolution algorithm for vibration suppression of smart structures», *Computers & Structures*, vol. 147, p. 126–137. 84, 85
- MELIN, P. et O. CASTILLO. 2014, «A review on type-2 fuzzy logic applications in clustering, classification and pattern recognition», *Applied soft computing*, vol. 21, p. 568–577. 76
- D'ANDRÉA NOVEL, B. et M. C. DE LARA. 2000, *Commande linéaire des systèmes dynamiques*, Presses des MINES. 71, 72, 73, 75
- SHARMA, A., R. KUMAR, R. VAISH et V. S. CHAUHAN. 2014, «Lead-free piezoelectric materials' performance in structural active vibration control», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 25, n° 13, p. 1596–1604. 84
- SHARMA, M., S. SINGH et B. SACHDEVA. 2005, «Fuzzy logic based modal space control of a cantilevered beam instrumented with piezoelectric patches», *Smart materials and structures*, vol. 14, n° 5, p. 1017. 84
- SHARMA, M., S. SINGH et B. SACHDEVA. 2007, «Modal control of a plate using a fuzzy logic controller», *Smart materials and structures*, vol. 16, n° 4, p. 1331. 84, 85
- SUGANTHI, L., S. INIYAN et A. A. SAMUEL. 2015, «Applications of fuzzy logic in renewable energy systems—a review», *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 48, p. 585–607. 76
- SUSHEEL, C., R. KUMAR et V. S. CHAUHAN. 2016, «Active shape and vibration control of functionally graded thin plate using functionally graded piezoelectric material», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 84
- ZADEH, L. A. 1968, «Probability measures of fuzzy events», *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 23, n° 2, p. 421–427. 76
- ZADEH, L. A. 1975, «Fuzzy logic and approximate reasoning», *Synthese*, vol. 30, n° 3-4, p. 407–428. 76, 79
- ZADEH, L. A. 1976, «A fuzzy-algorithmic approach to the definition of complex or imprecise concepts», dans *Systems Theory in the Social Sciences*, Springer, p. 202–282. 76
- ZORIĆ, N., A. SIMONOVIĆ, Z. MITROVIĆ et S. STUPAR. 2013, «Active vibration control of smart composite beams using pso-optimized self-tuning fuzzy logic controller», *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 51, n° 2, p. 275–286. ix, 84, 85, 86

# Chapitre 4

## Simulations de Poutres FGPM

*« Plus que bu, oui!... [...] quand on est parti, on s'est aperçu que la terre tournait. [...] Comme quoi, il faut être pochard pour constater les lois de la nature! »*

---

Occupe toi d'Amélie, Feydeau

### Sommaire

---

<b>4.1 Validation et convergence de l'élément fini de poutre</b> . . . . .	<b>96</b>
4.1.1 Convergence du nombre d'éléments dans la longueur . . . . .	97
4.1.2 Convergence du nombre de couches numériques $n_l$ dans l'épaisseur . . . . .	97
4.1.3 Tests de validations à l'aide du modèle 3D en statique . . . . .	98
4.1.4 Tests de validation en fréquences à l'aide du modèle 3D . . . . .	98
<b>4.2 Études statiques</b> . . . . .	<b>99</b>
4.2.1 Sensibilité du capteur FGPM aux paramètres $k$ et $V_T$ . . . . .	99
4.2.2 Efficacité de l'actionneur FGPM en fonction des paramètres $k$ et $V_T$ . . . . .	101
<b>4.3 Contrôle Actif d'une poutre FGPM avec un régulateur LQR</b> . . . . .	<b>101</b>
4.3.1 Construction du système contrôlé-observé . . . . .	102
4.3.2 Paramétrage des simulations . . . . .	103
4.3.3 Poutre FGPM encastree-libre : étude paramétrique sur $k$ et $V_T$ . . . . .	104
4.3.4 Poutre FGPM simplement supportée : étude de la position des électrodes . . . . .	106
<b>4.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>110</b>
<b>4.5 Références</b> . . . . .	<b>111</b>

---

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux comportements statique et dynamique de la poutre FGPM. Celle-ci est modélisée grâce à l'élément fini de poutre à deux nœuds, présenté à la section 2.2. On rappelle que les propriétés piézoélectriques du FGPM sont activées grâce à des électrodes déposées sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre de façon symétrique par rapport à la ligne moyenne. Les électrodes utilisées pour les capteurs sont libres électriquement, et celles utilisées pour les actionneurs sont soumises à un potentiel électrique appliqué (condition de Dirichlet). De plus, le modèle FGPM prenant en compte le phénomène de percolation, on impose un potentiel nul aux interfaces entre les parties isolantes et la partie conductrice du matériau.

L'étape préliminaire de validation et de convergence de l'élément fini de poutre est présentée dans un premier temps. Cette étude est double en raison de l'approximation par couches numériques du potentiel électrique dans l'épaisseur : il faut déterminer le nombre d'éléments dans la longueur et le nombre de couches numériques  $n_l$  par élément. Les études numériques sur la poutre FGPM sont divisées en deux groupes :

- Des analyses statiques permettant de mieux comprendre le comportement du FGPM. On étudie la sensibilité des capteurs et actionneurs aux paramètres suivants : à l'indice de fraction volumique  $k$  (gérant la gradation du FGPM) et au seuil de percolation  $V_T$
- Des simulations de contrôle actif de la poutre grâce à un régulateur linéaire quadratique et un observateur de Luenberger (Section 3.3). On étudie l'influence des paramètres  $k$  et  $V_T$  et également celle de la position des électrodes sur les performances et la faisabilité du contrôle.

Dans tout ce chapitre on considère une poutre FGPM dont les propriétés matériaux et géométriques sont données dans la Table 4.1.

Propriétés	Aluminium	PZT4	Propriétés	Valeur
Module de Young $Y$ (GPa)	69	63	Longueur $L$ (m)	1
Coefficient de Poisson $\nu$	0.3	0.3	Épaisseur $h$ (m)	0.01
Constante piézoélectrique $e_{31}$ (C/m <sup>2</sup> )	0	-2.1	Largeur $b$ (m)	0.01
Constant diélectrique $\epsilon_{33}$ (nF/m)	0	15		
Densité $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	3960	7600		

Table 4.1 – Propriétés matériaux et géométriques

## 4.1 Validation et convergence de l'élément fini de poutre

La première étape est de valider l'élément fini de poutre par rapport à des résultats analytiques ou de la littérature. Cet élément a été validé pour plusieurs configurations :

- Une poutre constituée d'un seul matériau : des résultats analytiques sont accessibles dans le cas de poutre de Timoshenko (BATOZ et DHATT [1990]) pour plusieurs conditions aux limites.
- Une poutre bimorphe piézoélectrique, encadrée-libre, en polymère PVDF. Des résultats de la littérature sont accessibles : pour le cas actionneur (PABLO et collab. [2009]) et pour le cas capteur (FUKUNAGA et collab. [2001]).
- Une poutre FGM (Acier/Aluminium) simplement supportée, les fréquences propres sont disponibles dans ALSHORBAGY et collab. [2011].

Ces trois configurations ont permis une première étape de validation et l'élément de poutre donne d'excellents résultats.

#### 4.1.1 Convergence du nombre d'éléments dans la longueur

Des études de convergence sur le nombre d'éléments dans la longueur en statique et en vibration, pour une poutre encastree-libre, ont permis de déterminer que :

- 10 éléments dans la longueur assurent la convergence en déplacement dans le cas statique. La Table 4.2 présente l'étude de convergence sur la flèche maximale d'une poutre encastree libre soumise à une force ponctuelle  $f = 1\text{N}$  en bout de poutre, pour trois valeurs de  $k$  et  $V_T = 0.3$ .

$n_e \backslash k$	0.4	1	5
4	5.95	6.09	6.21
6	6.00	6.15	6.27
10	6.03	6.18	6.30
16	6.04	6.18	6.30

Table 4.2 – Étude de convergence : Flèche maximale ( $mm$ ) d'une poutre encastree-libre ( $V_T = 0.3$ )

- 40 éléments dans la longueur sont nécessaires pour la convergence des cinq premières fréquences propres de la poutre. La Table 4.3 présente l'étude de convergence sur les fréquences propres d'une plaque encastree-libre ( $k = 1$  et  $V_T = 0.3$ ).

$n_e \backslash f$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
10	5.411	34.291	97.788	196.898	337.368
20	5.403	33.942	95.410	188.036	313.156
40	5.401	33.856	94.834	185.940	307.593
100	5.401	33.832	94.674	185.360	306.676

Table 4.3 – Étude de convergence : Fréquences propres (Hz) d'une poutre encastree-libre avec  $k = 1$  et  $V_T = 0.3$

À notre connaissance il n'existe par d'article permettant de valider le cas d'une poutre FGPM (PZT4/Al/PZT4) construit dans ce travail. De ce fait, on compare le modèle poutre au modèle 3D développé sous FEniCS (Section 2.3.2). Celui-ci à été validé par rapport à une solution analytique 3D, voir section 5.1.

#### 4.1.2 Convergence du nombre de couches numériques $n_l$ dans l'épaisseur

On considère une poutre FGPM encastree-libre et équipée d'une paire d'électrodes utilisée, selon le cas, pour le capteur ou l'actionneur. Les électrodes sont placées proche de l'encastrement et mesurent  $L/10$  de long.

- Dans le cas capteur : une force ponctuelle  $f = 1\text{N}$  est appliquée en bout de poutre. La Table 4.4 présente les résultats de l'étude de la convergence du potentiel capté en fonction de  $n_l$ , pour trois valeurs de  $k$  et  $V_T = 0.3$ .
- Dans le cas actionneur : un potentiel  $\phi_a = 250\text{V}$  est appliqué sur les électrodes. La Table 4.5 présente la convergence de la flèche maximale générée par le potentiel appliqué en fonction de  $n_l$ , et pour trois valeurs de  $k$  et  $V_T = 0.3$ .

La convergence est donc obtenue dans les deux cas avec 10 couches. On gardera donc un maillage constitué de 10 éléments avec 10 couches numériques par élément.

$n_l \backslash k$	0.4	1	5
4	1.31	9.62	27.47
10	1.31	9.60	27.56
50	1.30	9.57	27.55
100	1.30	9.57	27.55

Table 4.4 – Étude du capteur FGPM : Convergence du potentiel capté (V)

$n_l \backslash k$	0.4	1	5
4	74.5	75.0	62.8
10	74.5	74.9	62.8
50	74.4	74.7	62.8
100	74.4	74.7	62.8

Table 4.5 – Étude de l'actionneur FGPM : Convergence de la flèche maximale ( $\mu m$ )

### 4.1.3 Tests de validations à l'aide du modèle 3D en statique

On présente ici deux tests de validation utilisant le modèle 3D comme référence :

- Le cas actionneur : un potentiel  $\phi_a = 250V$  est appliqué sur les électrodes et on relève la flèche maximale  $w_{max}$ . La table 4.6a présente les résultats pour trois valeurs de  $k$  et  $V_T = 0.3$ .
- Le cas capteur : une pression uniforme  $f = 10N/m$  est appliquée sur toute la poutre et on relève la flèche maximale  $w_{max}$  et le potentiel moyen sur les électrodes  $\phi_{moy}$ . La table 4.6b présente les résultats pour trois valeurs de  $k$  et  $V_T = 0.3$ .

Dans les deux études, le modèle poutre donne des résultats très proches de ceux du 3D FEniCS. En effet, l'erreur maximale pour la flèche est inférieure à 2% et celle sur le potentiel moyen capté par les électrodes est inférieure à 5%.

$k$	3D FEniCS	Poutre
$w_{max}(mm)$		
0.5	2.24	2.27
1	2.28	2.31
2	2.30	2.34
$\phi_{moy}(V)$		
0.5	0.840	0.883
1	3.18	3.37
2	6.17	6.66

(a) Validation cas actionneur

(b) Validation cas capteur

Table 4.6 – Validation élément fini de poutre FGPM

### 4.1.4 Tests de validation en fréquences à l'aide du modèle 3D

On effectue à présent un test sur les fréquences propres pour la poutre encastree libre (Table 4.7) et trois valeurs de  $k$  et  $V_T = 0.3$ . Ce test a été effectué avec un maillage de 40 éléments, nécessaire pour avoir une convergence des cinq premières fréquences propres. Pour les trois valeurs de  $k$  considérées, le modèle poutre donne d'excellents résultats (moins de 2.5% d'erreur) sur les cinq premières fréquences.

$f_i$ (Hz)	3D FEniCS	Poutre	3D FEniCS	Poutre	3D FEniCS	Poutre
	$k = 1$		$k = 2$		$k = 0.5$	
1	5.451	5.401	5.156	5.106	5.810	5.760
2	34.21	33.84	32.36	31.99	36.46	36.09
3	96.02	94.71	90.83	89.53	102.34	101.00
4	188.91	185.47	178.68	175.35	201.35	197.81
5	313.42	306.37	296.92	289.64	334.62	326.74

Table 4.7 – Validation fréquences propres pour une poutre FGPM encastree-libre

L'élément fini de poutre FGPM à deux nœuds est validé à la fois pour des chargements mécaniques (capteur) qu'électriques (actionneur). Des études similaires effectuées pour le cas de la poutre simplement appuyée donnent des résultats satisfaisants.

## 4.2 Études statiques

Dans cette partie, on étudie l'influence sur les réponses statiques du système des paramètres suivants : l'indice de gradation  $k$  du FGPM et le seuil de percolation  $V_T$ .

On précise que :

- L'indice  $k$  est un paramètre défini à la fabrication du matériau. On considère qu'il peut prendre des valeurs dans l'intervalle  $[0, 5]$ .
- Le seuil de percolation  $V_T$  est un paramètre inhérent à la microstructure du matériau, il dépend du processus de fabrication et du choix de l'indice  $k$ . Selon la littérature, on a pu déterminer que  $V_T$  se trouve dans l'intervalle  $[0.1, 0.3]$  (voir Section 2.1.3). On considère dans les études effectuées trois valeurs possibles :  $V_T = 0.1, 0.2, 0.3$ .

### 4.2.1 Sensibilité du capteur FGPM aux paramètres $k$ et $V_T$

On considère une poutre encastree-libre subissant une force de 1 N transversale au bout libre de la poutre, équipée d'une paire d'électrodes utilisées comme capteur. Ces électrodes mesurent  $\frac{L}{10}$  m et sont placées à l'encastrement.

#### 4.2.1.a Influence sur le potentiel capté

La Figure 4.1 montre l'influence des paramètres  $k$  et  $V_T$  sur le potentiel capté. Ce dernier augmente avec ces deux paramètres. Pour expliquer ce comportement, on peut assimiler le fonctionnement d'un capteur piézoélectrique (ici du capteur FGPM) à celui d'un condensateur classique. Dans un condensateur, le potentiel  $\phi_g$  généré entre ses deux plaques est donné par la formule suivante :

$$\phi_g = \frac{de}{Y\epsilon} \quad (4.1)$$

où  $d$  est la distance entre les deux plaques du condensateur,  $e$  la constante piézoélectrique,  $Y$  le module de Young et  $\epsilon$  la constante diélectrique du matériau constituant le condensateur. En faisant la comparaison avec la structure FGPM considérée, la distance  $d$  correspond à l'épaisseur de la partie isolante, soit :  $d = h - h_T$ . Donc, le potentiel capté suit la loi de comportement suivant :

$$\phi_s \simeq \frac{(h - h_T)e_{31}}{Y\epsilon_{33}} \quad (4.2)$$

Quand l'indice de fraction  $k$  augmente,  $(h - h_T)$  et  $e_{31}$  augmentent et  $\epsilon_{33}$  et  $Y$  diminuent. De plus, le seuil de percolation  $V_T$  a seulement un effet sur l'épaisseur de la partie isolante, qui augmente

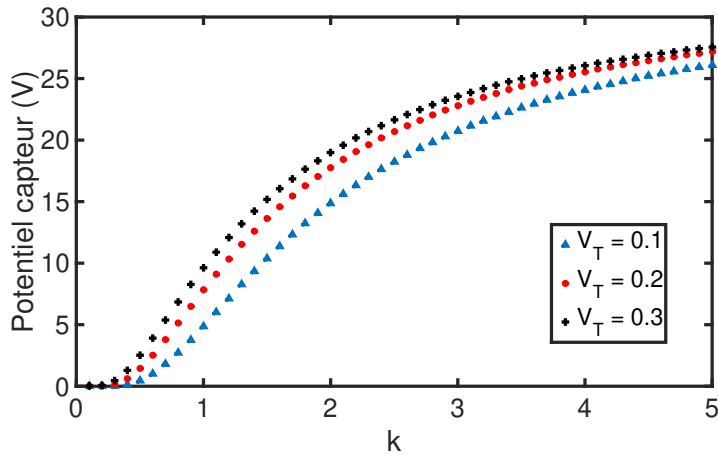


FIGURE 4.1 – Étude du capteur FGPM : Sortie potentiel capteur

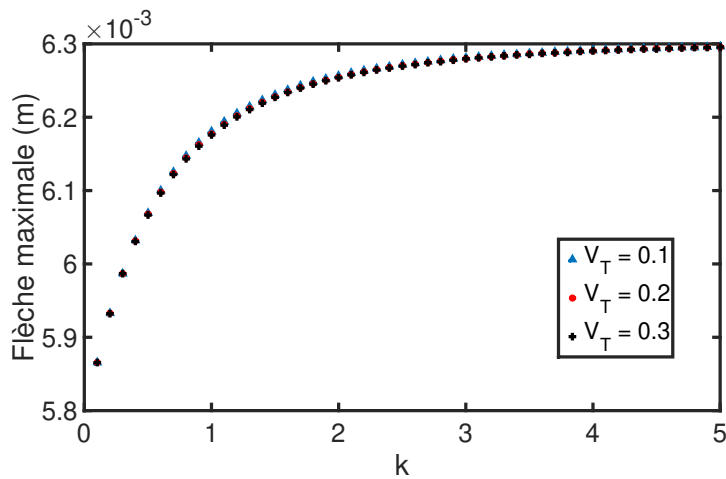


FIGURE 4.2 – Étude du capteur FGPM : flèche maximale

quand le seuil est plus important. On peut en conclure que le potentiel capté croît logiquement lorsque ces deux paramètres augmentent. La Figure 4.1 montre également que le capteur FGPM est inefficace (signal trop faible) si  $k$  est inférieur à un certain seuil, noté  $k_{lim}$ . En effet, quand  $k$  tend vers zéro l'épaisseur de la partie isolante,  $(h - h_T)$ , tend également vers zéro. Dans notre cas, les simulations indiquent un seuil  $k_{lim} = 0.4$ , et ceci pour toutes les valeurs prises par  $V_T$ .

#### 4.2.1.b Influence sur le déplacement transverse

La figure 4.2 montre que la flèche maximale augmente avec  $k$  et qu'elle est quasi indépendante de  $V_T$ . La flexion de la poutre sous l'effet de la force ponctuelle, est principalement d'ordre mécanique et est directement reliée à la rigidité de celle-ci. Le couplage électro-mécanique influence peu ou pas la réponse de la structure. Donc  $V_T$  n'influençant que l'épaisseur de la couche conductrice a peu ou pas d'effet sur la flèche de la poutre. Ainsi, la tendance générale de la réponse est facilement explicable : quand  $k$  augmente, le module de Young effectif diminue et tend vers la valeur du module de Young du PZT4, celui-ci étant inférieur à celui de l'aluminium.

Un capteur piézoélectrique est donc d'autant plus efficace quand son épaisseur est grande et que ses coefficients piézoélectriques sont importants. On peut donc en conclure que le capteur FGPM est d'autant plus efficace que les paramètres  $k$  et  $V_T$  sont grands.

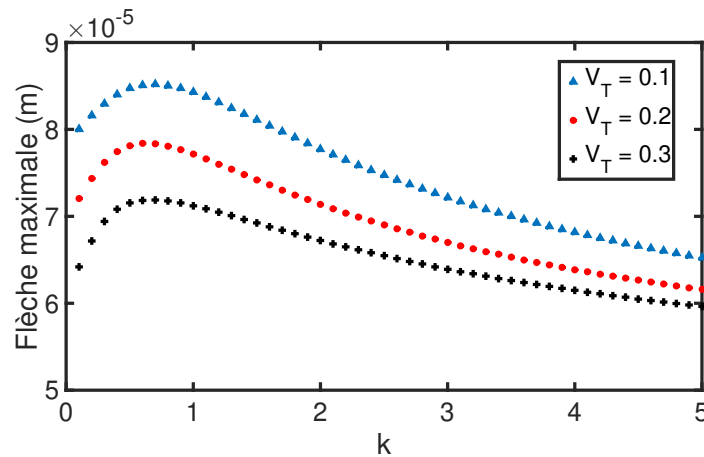


FIGURE 4.3 – Étude de l'actionneur FGPM : flèche maximale

#### 4.2.2 Efficacité de l'actionneur FGPM en fonction des paramètres $k$ et $V_T$

Dans ce paragraphe, on étudie l'influence des mêmes paramètres  $k$  et  $V_T$  sur l'efficacité en statique de l'actionneur FGPM. On considère une poutre FGPM encastree libre équipée d'une paire d'électrodes utilisées comme actionneur. Elles sont placées proche de l'encastrement et mesurent  $L/10$  de long. Un potentiel électrique  $\phi_a = 250\text{V}$  est appliqué aux électrodes.

Classiquement pour les actionneurs piézoélectriques, quand un potentiel extérieur est appliqué, la déformation électriquement générée est proportionnelle à la fois au coefficient piézoélectrique  $e_{31}$  du matériau utilisé et au potentiel électrique  $\phi_a$  appliqué. Elle est également inversement proportionnelle à l'épaisseur de l'actionneur, ici à l'épaisseur de la partie isolante  $(h - h_T)$ . Les actionneurs sont donc plus performants quand ils sont fins. On peut ainsi écrire que la déformation de flexion générée électriquement suit la tendance suivante :

$$\varepsilon_a \simeq \frac{\phi_a e_{31}}{h - h_T} \quad (4.3)$$

La Figure 4.3 montre la flèche maximale de la poutre FGPM générée par le potentiel appliqué en fonction de  $k$  et de  $V_T$ . Contrairement au comportement en mode capteur, le déplacement induit ne varie pas de façon monotone avec  $k$ . REDDY [2000] observe ce même comportement pour des plaques FGM soumises à des chargement thermiques. On observe donc une augmentation au début, avec des maxima atteint pour des valeurs de  $k$  comprises entre 0.4 et 0.7, puis la flèche subit une diminution induite principalement par l'augmentation de  $(h - h_T)$ . Ce comportement non monotone est dû à l'évolution du rapport entre les deux termes  $e_{31}$  et  $(h - h_T)$ .

D'autre part, les performances de l'actionneur FGPM sont meilleures quand le seuil de percolation est plus faible. En effet quand  $V_T$  augmente l'épaisseur de la couche isolante augmente également. Cette étude met en évidence que l'actionneur FGPM est plus efficace quand  $k \in [0.4, 0.7]$  et quand le seuil de percolation est faible.

Ces deux études sur l'efficacité du capteur et de l'actionneur FGPM montrent que des compromis dans le choix de  $k$  et  $V_T$  seront à faire, car les deux configurations nécessitent des valeurs opposées pour ces deux paramètres afin de fonctionner de manière optimale.

### 4.3 Contrôle Actif d'une poutre FGPM avec un régulateur LQR

La construction du régulateur LQR et de l'observateur de Luenberger constitue la première étape pour simuler le contrôle actif de la poutre FGPM.



### 4.3.1 Construction du système contrôlé-observé

#### 4.3.1.a Construction du régulateur

La base modale de la structure, nous permet de construire le régulateur et l'observateur en utilisant la synthèse quadratique. L'utilisation de la synthèse quadratique (Section 3.3) nécessite le choix des deux matrices de pondération  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ . En pratique, le choix des matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  n'est pas évident. On choisit ici les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  de façon à ce que la fonctionnelle à minimiser ait un sens physique (LAMMERING et collab. [1994], COLLET [1996]), c'est à dire qu'elle représente l'énergie du système. Par définition, l'énergie d'un système quelconque est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne.

- L'énergie cinétique du système est définie par :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i(t) \quad (4.4)$$

- L'énergie interne du système peut être découpée en une partie mécanique,  $E_m(t)$  et une partie électrique,  $E_e(t)$ .

La partie mécanique de l'énergie s'écrit :

$$E_m(t) = \frac{1}{2} \sum_1^N \dot{\alpha}_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_1^N \alpha_i^2(t) \omega_i^2 \quad (4.5)$$

ou sous le forme matricielle :

$$E_m(t) = \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (4.6)$$

La matrice  $\mathbf{Q}$  est donc prise égale à la matrice identité  $\mathbf{I}$  pour que le terme  $\mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x}$  représente l'énergie mécanique du système.

La partie électrique de l'énergie peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$E_e(t) = \boldsymbol{\phi}_a^t \mathbf{R} \boldsymbol{\phi}_a \quad (4.7)$$

Les coefficients de la matrice  $\mathbf{R}$  seront choisis de façon à ce que le tension électrique ne dépasse pas la valeur maximale  $V_0$  de la tension admissible par les actionneurs. L'ajustement des coefficients de la matrice  $\mathbf{R}$  est effectué en supposant le chargement connu et nécessite plusieurs tests numériques.

#### 4.3.1.b Construction de l'observateur

L'estimation du vecteur d'état  $\hat{\mathbf{x}}$  est construite à partir de l'observateur de Luenberger. La matrice de gain de l'observateur  $\mathbf{L}$  est obtenue par la méthode du système fictif détaillée au paragraphe 3.3.2.a. La matrice  $\mathbf{L}$  est donc construite comme la matrice  $\mathbf{K}$  du régulateur par la méthode de la synthèse quadratique.

On considère alors une matrice  $\mathbf{Q}_{obs}$  égale à la matrice identité  $\mathbf{I}$  et les coefficients de la matrice  $\mathbf{R}_{obs}$  permettent de régler la dynamique de l'observateur.

Pour choisir ces coefficients, plusieurs tests d'estimation numérique du vecteur d'état  $\mathbf{x}$  sont à effectuer. Pour ce faire, on se place dans le cas où le système observé est libre de commande, de perturbation extérieure et en équilibre à l'instant initial ( $\boldsymbol{\phi}_a(t) = 0$ ,  $\mathbf{F}_e = 0$ ,  $\mathbf{x}_0 = 0$ ). La solution analytique de ce système est évidente et est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = 0 \quad \mathbf{y}(t) = 0$$

L'estimation  $\hat{\mathbf{x}}$  du vecteur d'état est alors solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \neq 0 \end{aligned}$$

La résolution de ce système permet d'obtenir l'erreur  $\mathbf{Er} = \mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$  de la sortie estimée. On appelle alors temps de réponse de l'observateur, noté  $t_{rep}$ , le temps nécessaire pour que l'erreur  $\mathbf{Er}$  soit inférieure à un seuil  $\epsilon_{obs}$ . L'observateur sera réglé lors des simulations pour qu'il réponde en un temps  $t = t_{rep}$  fixé.

### 4.3.2 Paramétrage des simulations

Les simulations de contrôle actif de la poutre FGPM ont pour objectif principal de montrer la faisabilité du contrôle actif avec ce FGPM et d'étudier l'influence des paramètres matériaux  $k$  et  $V_T$  ainsi que la position des électrodes.

Le paramétrage des simulations s'effectue comme suit :

#### 1. Matériau et Géométrie :

- Les coefficients d'amortissement  $\eta_n$  du  $n^{ième}$  mode sont définies par l'équation (3.17). Dans le cadre de ce travail, on supposera que les coefficients d'amortissement des deux premiers modes sont égaux ( $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ ). On obtient alors :

$$\beta_1 = \frac{2\eta}{\omega_1 + \omega_2} \quad \beta_2 = 2\eta \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (4.8)$$

On considère une poutre FGPM dont les propriétés géométriques et matériaux sont données dans la Table 4.1 et on suppose que l'amortissement modal des deux premiers modes est de 5%.

- Deux types de conditions aux limites sont étudiés : la poutre simplement appuyée et la poutre encastree-libre.

#### 2. Modèle :

- On utilise l'élément fini de poutre avec un maillage régulier (40 éléments avec chacun 10 couches numériques dans l'épaisseur) pour obtenir la base modale de la structure.
- On ne considère que les 4 premiers modes propres. Une étude préliminaire, en considérant de 6 à 8 modes a été menée et montre que les modes à partir du cinquième sont peu ou pas excités par les chargements considérés et peuvent donc être négligés.

#### 3. Régulateur et Observateur :

- Le potentiel maximum injecté aux actionneurs à chaque instant  $t$  est  $V_0 = 250V$ , réglé via la matrice  $\mathbf{R}$ .
- La dynamique de l'observateur est réglé, via la matrice  $\mathbf{L}$ , pour qu'il ait un temps de réponse  $t_{rep} = 0.8s$ .
- Les coefficients des matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{L}$  ont besoin d'être réglés à chaque simulation. Ils sont dépendants du matériau ( $k$  et  $V_T$ ), des conditions aux limites et du chargement. Ces coefficients sont déterminés par essais successifs jusqu'à l'obtention des objectifs.

#### 4. Simulations :

- Les simulations sont menées sur 10 s, avec un pas de temps de  $2.10^{-5} s$ .
- La réponse temporelle du système est calculée avec un bloqueur d'ordre un, utilisant une extrapolation de degré un entre deux échantillons successifs [MATLAB \[2019\]](#).

Les six premières fréquences propres de la structure sont données pour différentes valeurs de  $k$  dans les Tables 4.8 et 4.9 pour la poutre encastree-libre et la poutre simplement appuyée, respectivement.

k	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
0.4	5.88	36.83	103.11	202.04	333.97	498.85
1	5.40	33.85	94.77	185.69	306.94	458.47
2	5.11	31.00	89.59	175.55	290.18	433.44
5	4.86	30.48	58.33	167.21	276.39	412.86

Table 4.8 – Fréquences propres (Hz) pour la poutre encastree-libre

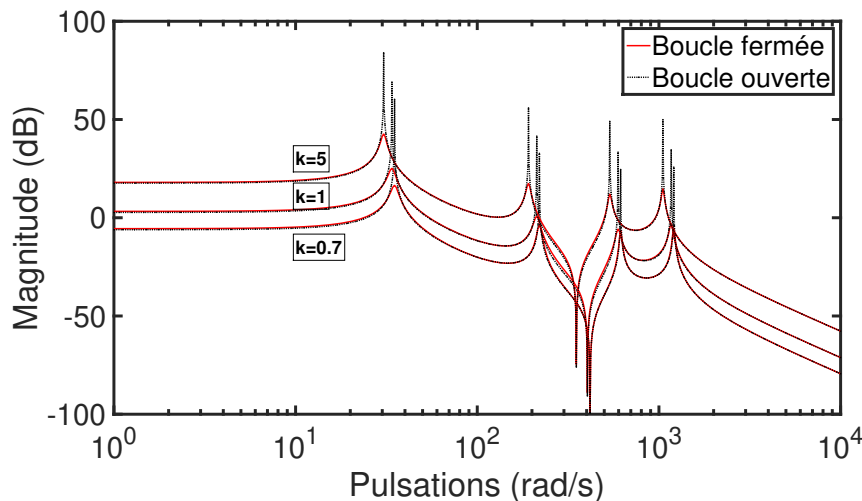
k	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
0.4	16.50	65.98	148.45	263.90	412.30	593.66
1	15.16	60.64	136.43	242.53	378.93	545.61
2	14.33	57.33	128.98	229.29	358.24	515.82
5	13.65	54.60	122.85	218.40	341.22	491.33

Table 4.9 – Fréquences propres (Hz) pour la poutre simplement appuyée

### 4.3.3 Poutre FGPM encastree-libre : étude paramétrique sur $k$ et $V_T$

On considère une poutre FGPM encastree-libre munie de deux paires d'électrodes de longueur  $\frac{1}{10}L$ , l'une servant pour l'actionneur placée à l'abscisse  $x = 0$  (à l'encastrement) et l'autre utilisée pour le capteur placée à l'abscisse  $x = 0.1$ . L'actionneur et le capteur ne sont donc pas colocalisés. Selon BRUANT et PROSLIER [2013] cette configuration est la configuration optimale pour l'actionneur et le capteur non colocalisés sur une poutre encastree-libre, elle assure une bonne observabilité et contrôlabilité pour chaque mode propre.

La Figure 4.4 présente les diagrammes de Bode pour trois valeurs de  $k$ , en boucle ouverte (BO, sans régulateur) et en circuit fermé (BF, avec régulateur). Les trois valeurs de  $k = 0.7, 1, 5$  représentent le cas où l'actionneur est le plus performant, un cas intermédiaire et le cas où le capteur est optimal. On remarque clairement l'écart entre les fréquences de résonance en fonction de  $k$ . La baisse de la magnitude (db) des quatre pics de résonance entre la boucle ouverte et la boucle fermée, montre la performance du contrôle actif et ce quelque soit la valeur de  $k$ .


 FIGURE 4.4 – Diagrammes de Bode pour  $k = 0.4$ ,  $k = 1$  et  $k = 5$ , et  $V_T = 0.3$ 

Afin d'étudier l'influence des paramètres  $k$  et  $V_T$  on soumet la poutre à un chargement de 1 N appliqué en  $x = L$  pendant un temps  $t_f(k) = \frac{10}{f_1(k)}$ . Ce temps correspond au 10 premières périodes relatives à la première fréquence propre. Ce temps dépend donc de  $k$  via la fréquence et permet de "lâcher" la poutre au même état vibratoire quelque soit  $k$ .

Les deux études paramétriques seront menées en considérant l'autre paramètre constant :

- Étude sur  $k$  : trois valeurs de  $k$  égalent à 0.7, 1, ou 5 sont considérées avec  $V_T = 0.3$ .
- Étude sur  $V_T$  : trois valeurs de  $V_T$  égalent à 0.1, 0.2, ou 0.3 sont considérées avec  $k = 0.7$ .

#### 4.3.3.a Poutre FGPM encastree-libre : influence de $k$

Afin d'étudier l'influence de  $k$  sur le contrôle actif des vibrations, on choisit trois valeurs représentatives : le  $k$  où l'actionneur est le plus performant  $k = 0.7$ ,  $k = 1$  où la distribution matériau est linéaire et  $k = 5$  où le FGPM est principalement constitué de PZT4 (le capteur est optimal).

La Figure 4.5 montre le potentiel de sortie du capteur au cours du temps. On remarque la même tendance qu'en statique, le potentiel capté augmente quand  $k$  augmente.

Les Figures 4.6 et 4.7 montrent l'influence de  $k$  sur le potentiel à envoyer à l'actionneur afin de contrôler les vibrations et la flèche maximale de la poutre. Au vu de l'évolution de la flèche dans le temps, on peut affirmer que la poutre est correctement contrôlée quelle que soit la valeur de  $k$ .

La configuration où  $k = 0.7$  permet le meilleur contrôle pour ce test.

Ces simulations ont été menées sans prendre en compte les bruits de mesure des capteurs, ceux-ci devront être caractérisés et inclus dans les futures simulations. On peut mettre en avant le fait que même si le potentiel capté est faible, il est suffisant pour donner une bonne estimation de l'état de la structure.

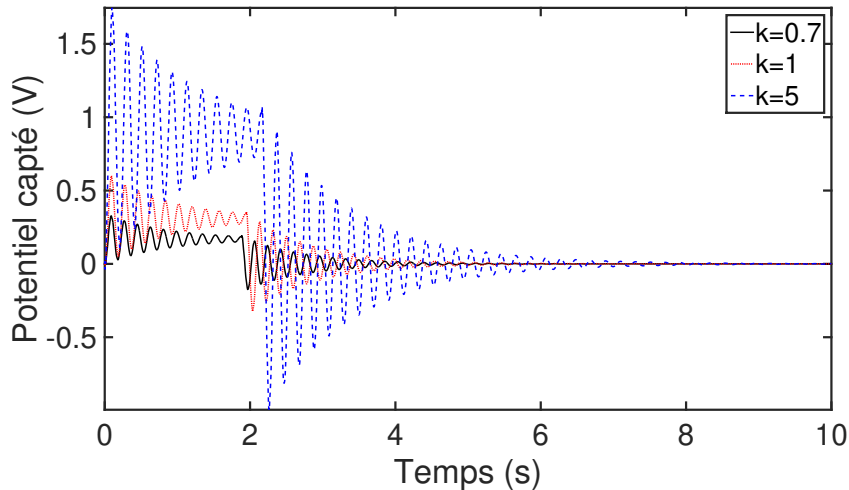


FIGURE 4.5 – Influence de  $k$  : Potentiel capté pour  $V_T = 0.3$

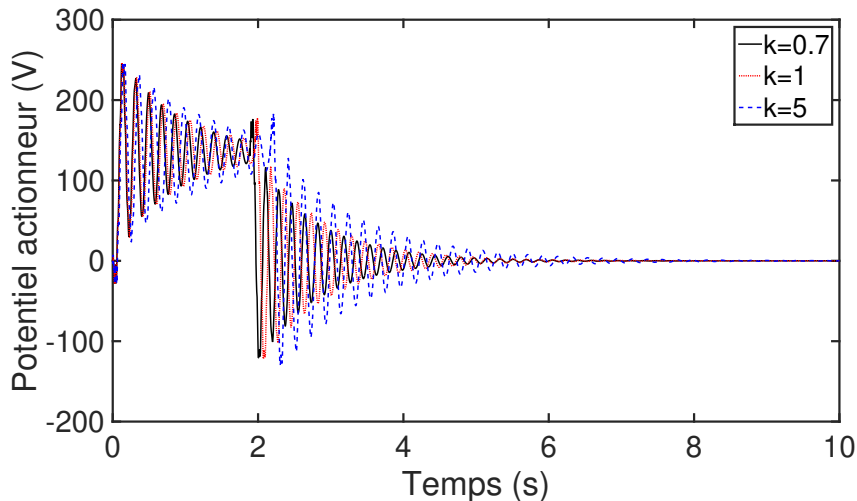


FIGURE 4.6 – Influence de  $k$  : Potentiel actionneur injecté pour  $V_T = 0.3$

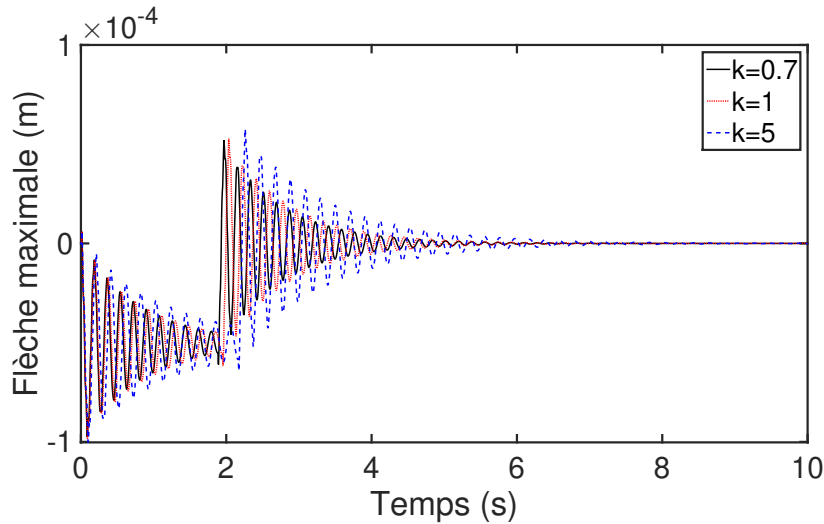


FIGURE 4.7 – Influence de  $k$  : Flèche maximale pour  $V_T = 0.3$

#### 4.3.3.b Poutre FGPM encastree-libre : influence de $V_T$

L'étude de l'influence du seuil de percolation est menée à  $k = 0.7$  constant. Comme dans le cas statique, le potentiel capté est plus important quand  $V_T$  augmente (Figure 4.8).

Les Figures 4.9 et 4.10 montrent respectivement la flèche maximale et le potentiel appliqué à l'actionneur. On remarque que les courbes sont quasiment superposées mais que la flèche est la plus faible quand  $V_T = 0.1$ . En effet, l'actionneur est optimal dans ce cas là. D'autres tests ont été menés sur la poutre encastree-libre, (i.e, un test de lâcher et un test sinusoïdal) et ils conduisent aux mêmes conclusions.

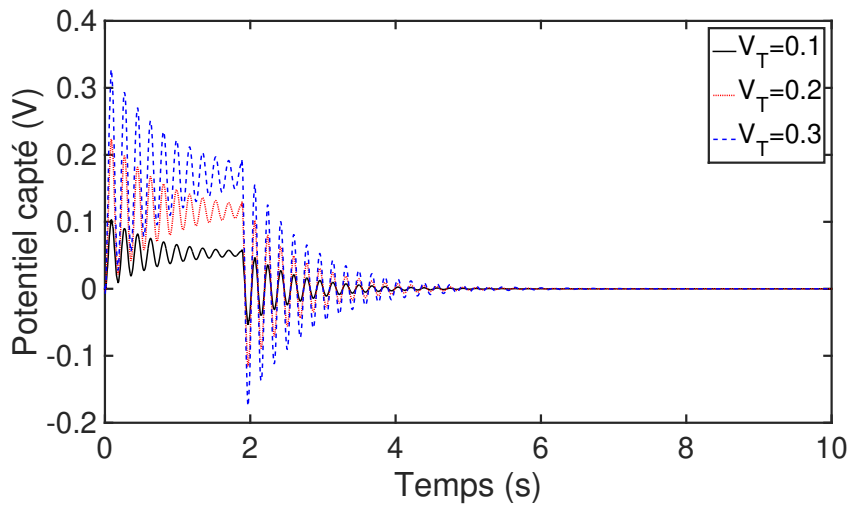


FIGURE 4.8 – Influence de  $V_T$  : Potentiel capté pour for  $k = 0.7$

#### 4.3.4 Poutre FGPM simplement supportée : étude de la position des électrodes

Une poutre FGPM simplement supportée est considérée. L'actionneur et le capteur sont cette fois-ci colocalisés. On considère une paire d'électrodes posées de façon symétrique, l'électrode supérieure sera utilisée pour l'actionneur et l'électrode inférieure pour le capteur. La longueur des électrodes est fixée à  $\frac{1}{10}L$  et trois positionnements sont considérés (Figure 4.11), les coordonnées selon l'axe  $x$  du côté gauche des électrodes sont  $\{P_1, P_2, P_3\} = \{0, 0.225, 0.450\}$ .

D'autre part, on fixe les paramètres  $k$  et  $V_T$  aux valeurs donnant les meilleures performances,

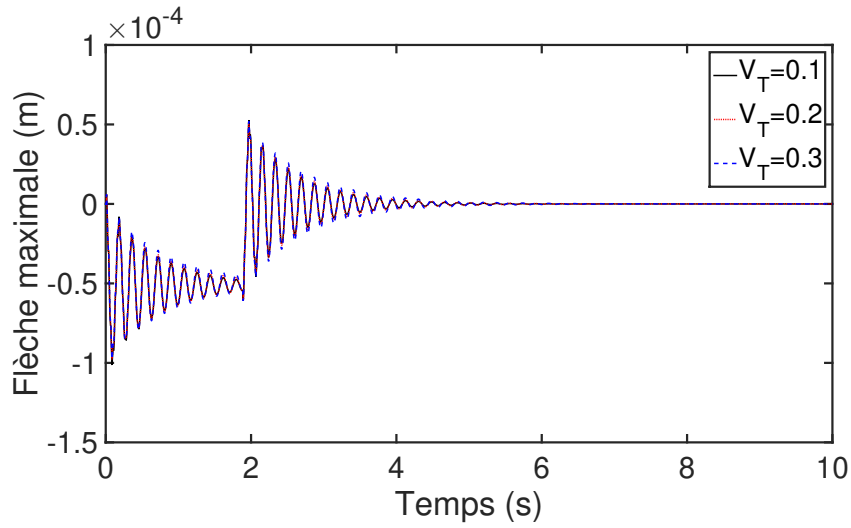


FIGURE 4.9 – Influence de  $V_T$  : Flèche maximale pour  $k = 0.7$

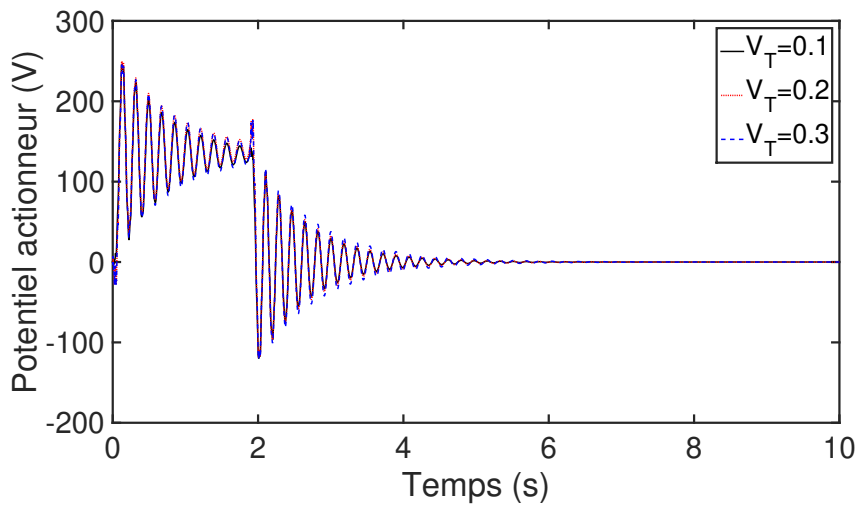


FIGURE 4.10 – Influence de  $V_T$  : Potentiel actionneur injecté pour  $k = 0.7$

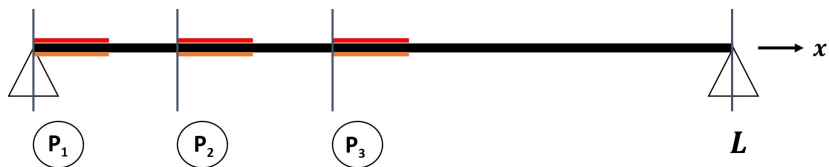


FIGURE 4.11 – Poutre FGPM simplement supportée : Position des électrodes

soit  $k = 0.7$  et  $V_T = 0.1$ .

La poutre est soumise à deux chargements transverse sinusoïdaux différents :

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \cos(0.8\omega_1 t) & \text{à } x &= \frac{L}{2} \\ F_2(t) &= 10\cos(1.2\omega_2 t) & \text{à } x &= \frac{L}{4} \end{aligned}$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les deux premières fréquences propres. Le premier chargement  $F_1$  sollicite la structure principalement sur son premier mode propre, tandis que le chargement  $F_2$  sollicite principalement le deuxième.

La comparaison entre les différentes configurations (emplacement des électrodes) se fait grâce l'énergie électro-mécanique du système. Cette énergie peut être divisée en énergie mécanique et en énergie électrique, respectivement données par :

$$E_m(t) = \mathbf{x}(t)^t \mathbf{x}(t) \quad (4.9)$$

$$E_{el}(t) = \boldsymbol{\phi}_a(t)^t \mathbf{R} \boldsymbol{\phi}_a \quad (4.10)$$

Par soucis de lisibilité, on trace seulement le haut de l'enveloppe des énergies adimensionnées par leur valeur maximale. Les Figures 4.12 et 4.14 et les Figures 4.13 et 4.15 montrent respectivement l'évolution de l'énergie mécanique et celle de l'énergie électrique, durant le temps de simulation (10s) pour les chargement  $F_1$  et  $F_2$ .

Quand la poutre est sujette au chargement  $F_1$ , toutes les configurations assurent un contrôle actif des vibrations de la poutre, comme nous montre la diminution de l'énergie mécanique (Figure 4.12).

La position la plus efficace est la position  $P_3$  : cette position entraîne la plus grande réduction de l'énergie mécanique tout en utilisant le moins d'énergie électrique (Figure 4.13).

Enfin, la position  $P_2$  est quasi similaire, tandis que la position  $P_1$  est clairement moins efficace.

Pour le deuxième chargement, qui excite principalement le deuxième mode, on peut également noter que toutes les positions permettent un contrôle des vibrations (Figure 4.14). Mais dans ce cas là, la position la plus efficace est la  $P_2$ . C'est également la position nécessitant le moins d'énergie électrique afin de contrôler les vibrations (voir Figure 4.15).

Au final, la position optimale des électrodes dépend du mode le plus excité par les sollicitations extérieures. Ainsi, il faudrait créer un régulateur pouvant choisir entre les trois actionneurs selon le chargement subi.

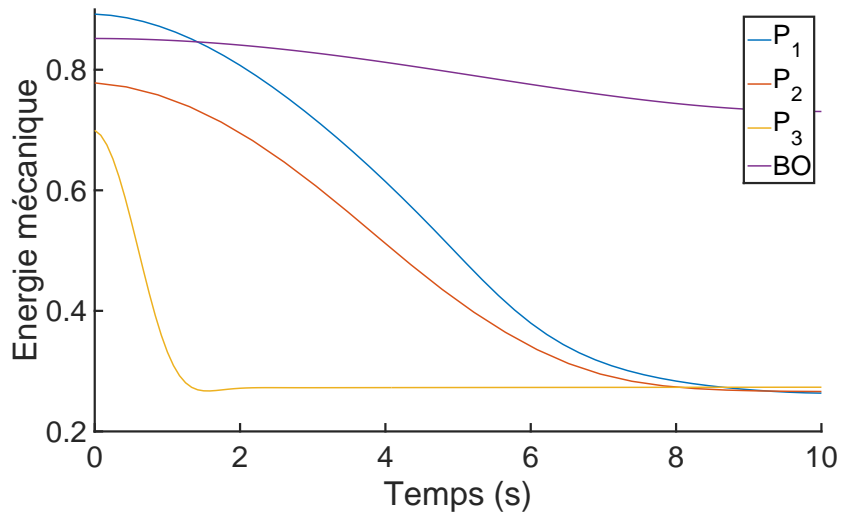


FIGURE 4.12 – Poutre FGPM simplement supportée, chargement  $F_1$  : Énergie mécanique

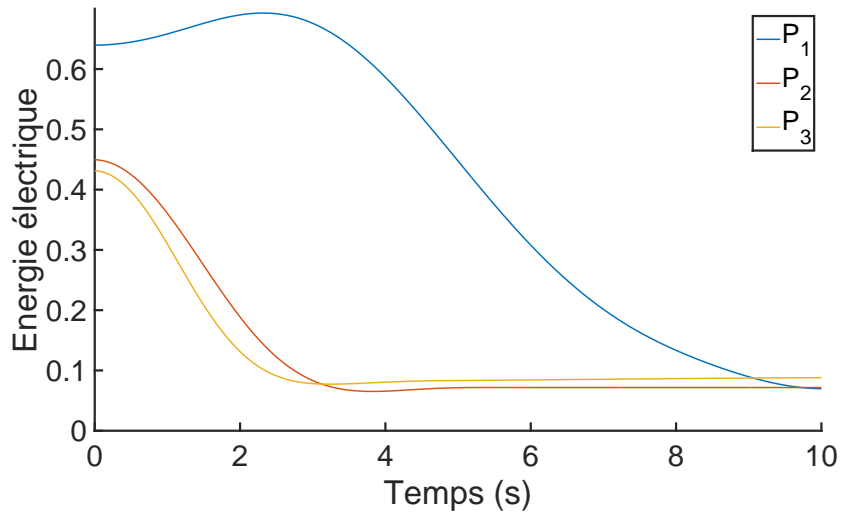


FIGURE 4.13 – Poutre FGPM simplement supportée, chargement  $F_1$  : Énergie électrique

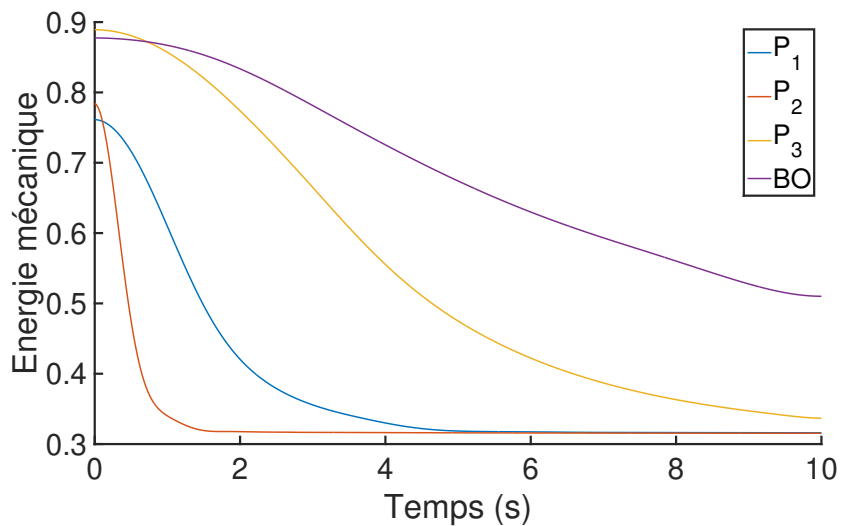
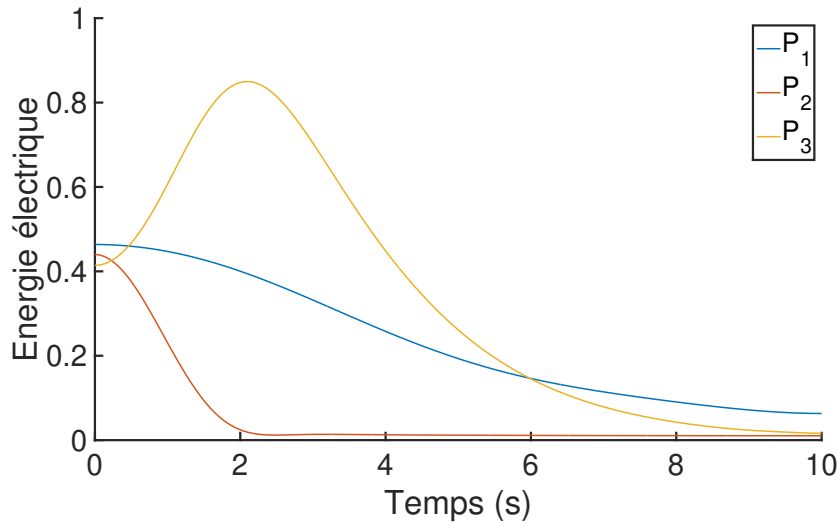


FIGURE 4.14 – Poutre FGPM simplement supportée, chargement  $F_2$  : Énergie mécanique



FIGURE 4.15 – Poutre FGPM simplement supportée, chargement  $F_2$  : Énergie électrique

#### 4.4 Conclusion

Deux types d'études numériques, statique et dynamique, ont été menées sur la poutre "intelligente" faite d'une seule couche de FGPM (PZT4/A/PZT4).

Un élément fini de poutre a été implémenté, élément pouvant prendre en compte la loi de comportement graduelle du FGPM. Cet élément est basé sur la théorie de la piézoélectricité linéaire, avec la cinématique de Timoshenko et une approximation par couches numériques dans l'épaisseur pour le potentiel électrique. L'élément permet d'effectuer des études statiques et également de calculer la base modale de la structure nécessaire pour le contrôle actif des vibrations. La poutre FGPM est équipée d'électrodes réparties de façon discrète, qui permettent l'activation des capacités capteur et actionneur du matériau. Afin de contrôler activement les vibrations, une loi de commande LQR avec un observateur d'état est implémentée.

Les résultats des simulations montrent que la poutre FGPM "intelligente" peut contrôler activement les vibrations. Les études paramétriques, s'intéressant à l'influence des paramètres tel que l'indice de fraction volumique  $k$  et le seuil de percolation  $V_T$ , montrent que  $k$  joue un rôle majeur dans les capacités de la poutre FGPM de capteur et d'actionneur, alors que le seuil de percolation a un moindre rôle. Elles mettent également en avant que les capacités capteur et actionneur de la poutre sont optimales pour des valeurs de  $k$  et  $V_T$  à l'opposé. Le capteur est optimal pour des  $k$  assez grands alors que l'actionneur est optimal pour des  $k \in [0.4, 0.7]$ . Les simulations ont montré que la poutre FGPM peut contrôler activement les vibrations quelque soit la valeur de  $k$  Ce contrôle est optimal quand l'actionneur est le plus performant et ce car l'observateur d'état arrive à reconstruire l'état même avec des capacités de capteur assez faible. Les capacités capteur et actionneur dépendent également de la position des électrodes. Il faudrait donc créer un régulateur permettant de changer d'actionneur utilisé en fonction du chargement subit. Le régulateur flou décentralisé pour la plaque FGPM a été développé pour répondre à cette problématique. Il utilise les différents actionneurs selon la mesure de l'énergie des différents modes et permet un contrôle adaptatif.

## 4.5 Références

- ALSHORBAGY, A. E., M. ELTAHER et F. MAHMOUD. 2011, «Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, n° 1, p. 412–425. [96](#)
- BATOZ, J.-L. et G. DHATT. 1990, *Modélisation des structures par éléments finis : Solides élastiques*, Presses Université Laval. [96](#)
- BRUANT, I. et L. PROSLIER. 2013, «Improved active control of a functionally graded material beam with piezoelectric patches», *Journal of Vibration and Control*, vol. 21, n° 10, p. 2059–2080. [104](#)
- COLLET, M. 1996, *Contrôle actif des structures rayonnantes*, thèse de doctorat, Ecully, Ecole centrale de Lyon. [102](#)
- FUKUNAGA, H., N. HU et G. REN. 2001, «Fem modeling of adaptive composite structures using a reduced higher-order plate theory via penalty functions», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, n° 48-49, p. 8735–8752. [96](#)
- LAMMERING, R., J. JIA et C. ROGERS. 1994, «Optimal placement of piezoelectric actuators in adaptive truss structures», *Journal of sound and vibration*, vol. 171, n° 1, p. 67–85. [102](#)
- MATLAB. 2019, «Matlab function lsim : Simulate time response of dynamic system to arbitrary inputs», URL <https://fr.mathworks.com/help/control/ref/lsim.html>. [103](#)
- PABLO, F., I. BRUANT et O. POLIT. 2009, «Use of classical plate finite elements for the analysis of electroactive composite plates. numerical validations», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 20, n° 15, p. 1861–1873. [96](#)
- REDDY, J. 2000, «Analysis of functionally graded plates», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n° 1-3, p. 663–684. [101](#)



# Chapitre 5

## Simulations de Plaques FGPM

*« La vie c'est comme une boîte de chocolats, on ne sait jamais sur quoi on va tomber. »*

---

Forrest Gump

### Sommaire

---

<b>5.1 Validation de l'élément fini de plaque FGPM</b>	<b>114</b>
5.1.1 Validation mono-couche FGPM PZT4	114
5.1.2 Validation pour une plaque FGPM PZT4/Al/PZT4	121
<b>5.2 Contrôle Actif d'une plaque FGPM avec contrôleur flou décentralisé</b>	<b>124</b>
5.2.1 Paramétrage des simulations de contrôle actif	124
5.2.2 Système commandé-observé	125
5.2.3 Étude du spillover dans le cas d'une plaque en appui simple	126
<b>5.3 Comparaison des différentes distributions pour le contrôleur flou décentralisé</b>	<b>131</b>
5.3.1 Plaque simplement appuyée	131
5.3.2 Plaque encastrée libre	131
<b>5.4 Intérêt du régulateur flou vis à vis de la commande LQR</b>	<b>138</b>
5.4.1 Plaque simplement appuyée	138
5.4.2 Plaque encastrée libre	138
<b>5.5 Conclusion</b>	<b>145</b>
<b>5.6 Références</b>	<b>145</b>

---

L'objectif de ce chapitre est de présenter les simulations de contrôle actif des vibrations d'une plaque FGPM (PZT4/Al/PZT4). Celle-ci est équipée de seize électrodes rectangulaires, déposées symétriquement par rapport au plan moyen, pouvant être utilisées pour les actionneurs ou les capteurs.

La plaque est contrôlée à l'aide du régulateur flou décentralisé (Section 3.5) et d'un observateur de Luenberger (Section 3.2.3). Ce système commandé-observé nécessite le choix des électrodes utilisées comme actionneur et capteur. Celui-ci sera effectué de façon optimale en utilisant les critères d'optimisation du placement des actionneurs et des capteurs (Section 3.6).

La plaque FGPM est modélisée par la méthode des éléments finis, en utilisant l'élément de plaque développé sous FEniCS (Section 2.4.5). La première partie de ce chapitre porte sur la validation de cet élément, à l'aide de résultats analytiques obtenus dans la littérature et également grâce au modèle 3D de référence développé sous FEniCS.

Dans une seconde partie, on présente les simulations de contrôle actif des vibrations, qui portent notamment sur :

- L'étude du phénomène de spillover (activation des modes non-contrôlés par le régulateur),
- Les performances du régulateur flou décentralisé selon la distribution du potentiel maximum admissible  $\phi^{\text{TOT}}$ ,
- Une comparaison entre le contrôle avec un régulateur flou et le contrôle avec un régulateur LQR.

## 5.1 Validation de l'élément fini de plaque FGPM

L'élément fini de plaque FGPM développé dans ce travail possède une cinématique d'ordre supérieur, rappelée ci-après :

$$u_\alpha(x, y, z, t) = u_\alpha^{(0)}(x, y, t) + z u_\alpha^{(1)}(x, y, t) + \dots + z^n u_\alpha^{(n)}(x, y, t) \quad (5.1)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w^{(0)}(x, y, t) + z w^{(1)}(x, y, t) + \dots + z^m w^{(m)}(x, y, t) \quad (5.2)$$

avec  $\alpha = 1, 2$  et  $n, m$  les ordres des expansions en  $z$  du déplacement dans le plan et du déplacement transverse respectivement.

Dans la suite, on notera  $(u_\alpha^{(n)}, w^{(m)})$  les différentes cinématiques utilisées pour l'élément selon leur degré d'expansion  $n$  et  $m$ . Par exemple, un élément ayant la cinématique de Reissner-Mindlin est noté  $(u_\alpha^{(1)}, w^{(0)})$ .

La validation de l'élément a été effectuée pour deux structures :

- Pour une plaque mono-couche FGPM PZT4 simplement appuyée dont la solution analytique est donnée par [LU et collab. \[2006\]](#),
- Pour une plaque FGPM PZT4/Al/PZT4 grâce au modèle 3D de référence.

### 5.1.1 Validation mono-couche FGPM PZT4

On considère une plaque mono-couche FGPM présentée dans [LU et collab. \[2006\]](#) et [BRISCHETTO et CARRERA \[2009\]](#). La plaque est simplement appuyée, de dimension  $a \times b \times h$ , avec ici  $a = b = 1m$ . Le matériau de référence de la plaque est le PZT-4 (Table 5.1). Les propriétés du matériau sont graduelles dans l'épaisseur et suivent la loi exponentielle suivante :

$$\begin{aligned} C_{ij}(z) &= C_{ij}^0 \exp^{\beta(\frac{z}{h} + \frac{1}{2})} \\ e_{ij}(z) &= e_{ij}^0 \exp^{\beta(\frac{z}{h} + \frac{1}{2})} \\ \epsilon_{ij}(z) &= \epsilon_{ij}^0 \exp^{\beta(\frac{z}{h} + \frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (5.3)$$

avec  $h$  l'épaisseur de la plaque,  $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$  et  $\beta$  le paramètre exponentiel de la loi variant dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

$C_{11}^0$ (GPa)	$C_{12}^0$	$C_{33}^0$	$C_{13}^0$	$C_{44}^0$	$C_{55}^0$	$C_{66}^0$	$e_{31}^0$ (C/m <sup>2</sup> )	$e_{33}^0$	$e_{15}^0$	$\epsilon_{11}^0$ (nF/m)	$\epsilon_{33}^0$
139	77.8	115	74.3	25.6	25.6	30.6	-5.2	15.1	12.7	13.06	11.51

Table 5.1 – Propriétés matériaux du PZT4

### 5.1.1.a Configurations actionneur et capteur

La plaque étant simplement appuyée et les quatre bords étant mis à la terre électriquement, les conditions aux limites sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} u_2 = u_3 = \phi = 0 & \text{ pour } x = 0, a \\ u_1 = u_3 = \phi = 0 & \text{ pour } y = 0, b \end{aligned} \quad (5.4)$$

Selon l'utilisation du FGPM (capteur ou actionneur) des conditions supplémentaires sont à considérer. La Figure (5.1) décrit ces deux configurations :

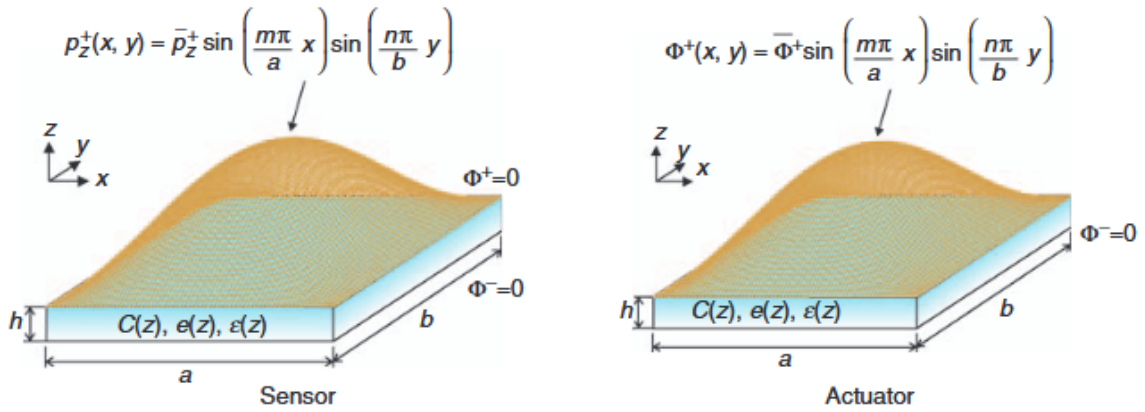


FIGURE 5.1 – Mono-couche FGPM : configurations capteur et actionneur (BRISCHETTO et CARRERA [2009])

**La configuration "capteur" :** la plaque est soumise à un chargement mécanique sinusoïdal appliqué sur la surface supérieure et à un potentiel nul sur les surfaces supérieure et inférieure :

$$\begin{aligned} P_z^+ &= \bar{P}_z \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \phi^+ &= \phi^- = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

avec  $m = n = 1$  et  $\bar{P}_z = -1$ .

Les exposants + et – correspondent respectivement aux surfaces supérieure et inférieure ( $z = \pm \frac{h}{2}$ ) de la plaque et  $m, n$  sont les nombres d'ondes choisis dans le plan.

**La configuration actionneur :** la plaque est soumise à un potentiel électrique sinusoïdale appliqué sur la surface supérieure tandis que la surface inférieure a un potentiel électrique nul :

$$\begin{aligned} \phi^+ &= \bar{\Phi}_z \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \phi^- &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

avec  $m = n = 1$  et  $\bar{\Phi}_z = 1$ .

### 5.1.1.b Résultats et analyses statiques

Une étude paramétrique sur le coefficient  $\beta$  est menée, pour les deux configurations et pour deux types de plaques : fine  $h = 0.1 m$  ou très fine  $h = 0.01 m$ . Le coefficient  $\beta$  régit la loi de distribution graduelle ( $\beta = 0$  correspond à un PZT4 homogène). Les résultats sont donnés en  $x = y = 0.25$  pour :

- les inconnues du problème : les déplacements  $u_1$  et  $u_3$  et le potentiel électrique  $\phi$ ,
- les valeur post-traitées suivantes : la composante en  $z$  du déplacement électrique  $D_3$  et les contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{33}$ .

Les Tables 5.2, 5.3 et 5.4, 5.5 présentent les résultats pour la configuration capteur et actionneur respectivement, obtenus par le modèle élément fini 3D et le modèle élément finis de plaque utilisant différentes cinématiques raffinées  $((u_\alpha^{(1)}, w^{(0)}), (u_\alpha^{(1)}, w^{(1)}), (u_\alpha^{(2)}, w^{(2)}), (u_\alpha^{(4)}, w^{(4)}))$ .

Ces résultats sont comparés à ceux obtenus par LU et collab. [2006] et BRISCHETTO et CARRERA [2009], donnant respectivement une solution 3D exacte et une solution approximée par la méthode des éléments finis avec la CUF (Carrera Unified Formulation). BRISCHETTO et CARRERA [2009] utilisent un élément de plaque, où chaque inconnue (déplacements et potentiel) est approximée par une série de Taylor d'ordre 4.

**Pour le modèle 3D :** la plaque est maillée avec  $(15 \times 15 \times 8)$  éléments tétraédriques. Le modèle 3D donne d'excellents résultats et ce même pour les plaques très fines. Seul le déplacement électrique  $D_3$  dans la configuration capteur n'est pas bien reconstruit.

Ces résultats permettent par la suite de prendre cet élément 3D comme référence pour le FGPM PZT4/Al/PZT4.

**Pour le modèle de plaque :** la plaque est discrétisée avec un maillage non-structuré de 724 éléments triangulaires ayant chacun six couches numériques pour le potentiel électrique. Les modèles  $(u_\alpha^{(2)}, w^{(2)})$  et  $(u_\alpha^{(4)}, w^{(4)})$  donnent tous les deux de très bons résultats et ce, pour les deux épaisseurs de la plaque. On peut noter que dans le cas actionneur, la contrainte plane  $\sigma_{11}$  et la contrainte transverse  $\sigma_{33}$  nécessitent l'utilisation du modèle d'ordre 4.

La condition de nullité de la contrainte transverse  $\sigma_{33}$  en  $z = \pm \frac{h}{2}$  dans le cas actionneur et en  $z = -\frac{h}{2}$  dans le cas capteur est difficile à reconstruire dans le cas de la plaque très mince. Une solution possible est d'utiliser par exemple, un élément mixte considérant les contraintes de cisaillements  $\sigma_{12}$  et transverses  $\sigma_{33}$  comme des variables indépendantes.

Le fait que les bords de la plaque soient mis à la terre électriquement entraîne un effet de pincement de la plaque dans l'épaisseur. Le modèle de Reissner-Mindlin est incapable de reproduire un tel effet et donne donc de larges erreurs. BRISCHETTO et CARRERA [2009] donnent également les résultats pour un modèle de Reissner-Mindlin, ceux-ci ne sont pas reportés ici par soucis de lisibilité. Notre modèle, comparé au leur, donne des résultats similaires. Enfin, le modèle  $(u_\alpha^{(1)}, w^{(1)})$  n'apporte aucune amélioration au modèle de Reissner-Mindlin.

### 5.1.1.c Étude des vibrations libres

En vue du contrôle actif des vibrations, un test de validations en fréquence à été mené. ZHONG et YU [2006] présentent la première fréquence propre de la plaque mono-morphe FGPM simplement appuyée et non mis à la terre électriquement. La comparaison de la première fréquence propre adimensionnée  $\bar{f}_1 = \frac{\omega_1 h}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}}}$ , où  $\omega$  est la pulsation propre, est donnée dans la Table 5.6.

Le modèle de Reissner-Mindlin donne des résultats satisfaisants, à moins de 4% d'erreur avec ceux de ZHONG et YU [2006].

$\beta$	h=0.1						
	3D Lu	Plate Brisc.	3D FEniCS	$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(0)})$	$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(1)})$	$(u_{\alpha}^{(2)}, w^{(2)})$	$(u_{\alpha}^{(4)}, w^{(4)})$
$u_1 10^{-9}(z=0)$							
-1	0.650	0.647	0.663	0.474	0.452	0.677	0.673
-0.5	0.247	0.243	0.242	0.186	0.159	0.248	0.246
0	-0.031	-0.029	-0.028	0.000	-0.028	-0.029	-0.029
0.5	-0.197	-0.192	-0.192	-0.113	-0.140	-0.195	-0.194
1	-0.275	-0.273	-0.274	-0.174	-0.198	-0.285	-0.284
$u_3 10^{-9}(z=0)$							
-1	-0.251	-0.248	-0.251	-0.196	-0.196	-0.251	-0.253
-0.5	-0.196	-0.194	-0.193	-0.152	-0.152	-0.193	-0.195
0	-0.151	-0.151	-0.150	-0.180	-0.118	-0.150	-0.151
0.5	-0.119	-0.118	-0.118	-0.0921	-0.0921	-0.118	-0.119
1	-0.094	-0.092	-0.093	-0.072	-0.072	-0.094	-0.094
$\phi 10^{-2}(z=0)$							
-1	0.596	0.591	0.599	0.220	0.224	0.601	0.601
-0.5	0.492	0.493	0.493	0.181	0.183	0.494	0.495
0	0.393	0.393	0.391	0.143	0.143	0.392	0.393
0.5	0.299	0.299	0.299	0.109	0.107	0.300	0.300
1	0.220	0.217	0.220	0.0801	0.756	0.221	0.221
$D_3 10^{-9}(z=0)$							
-1	0.312	0.316	0.341	0.275	0.007	0.333	0.332
-0.5	0.144	0.142	0.156	0.143	0.009	0.144	0.144
0	-0.061	-0.059	-0.045	0.00	-0.059	-0.059	-0.059
0.5	-0.267	-0.259	-0.247	-0.140	-0.123	-0.263	-0.263
1	-0.445	-0.432	-0.434	-0.275	-0.176	-0.451	-0.451
$\sigma_{11}(z = -\frac{h}{2})$							
-1	15.23	15.21	15.23	10.27	16.51	15.39	15.37
-0.5	13.05	12.97	12.96	8.695	14.00	12.95	12.99
0	10.92	10.96	11.03	7.328	11.86	10.86	10.95
0.5	9.138	9.156	9.323	6.143	10.01	9.062	9.176
1	7.529	7.504	7.811	5.114	8.418	7.512	7.628
$\sigma_{12}(z = \frac{h}{2})$							
-1	3.041	3.039	3.159	2.341	2.325	3.070	3.099
-0.5	3.616	3.612	3.671	2.775	2.743	3.595	3.627
0	4.247	4.241	4.257	3.277	3.220	4.207	4.241
0.5	4.959	4.952	4.943	3.861	3.777	4.931	4.967
1	5.830	5.773	5.756	4.543	4.426	5.804	5.841
$\sigma_{33}(z = -\frac{h}{2})$							
-1	-0.500	-0.511	-0.503	-5.190	-5.248	-0.384	-0.513
-0.5	-0.500	-0.507	-0.503	-6.068	-6.200	-0.429	-0.508
0	-0.500	-0.500	-0.504	-7.090	-7.330	-0.504	-0.500
0.5	-0.500	-0.596	-0.504	-8.295	-8.720	-0.585	-0.489
1	-0.500	-0.481	-0.501	-9.721	-10.38	-0.635	-0.477

Table 5.2 – Configuration capteur valeurs prises à  $x = y = 0.25m$  : déplacements plan  $u_1$ , déplacement transverse  $u_3$ , potentiel électrique  $\phi$ , déplacement électrique  $D_3$ , contraintes planes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  et contrainte transverse normale  $\sigma_{33}$



h=0.01							
$\beta$	3D Lu	Plate Brisc.	3D FEniCS	$(\mathbf{u}_\alpha^{(1)}, \mathbf{w}^{(0)})$	$(\mathbf{u}_\alpha^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)})$	$(\mathbf{u}_\alpha^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)})$	$(\mathbf{u}_\alpha^{(4)}, \mathbf{w}^{(4)})$
$u_1 10^{-9} (z=0)$							
-1	-	0.695	0.693	0.473	0.497	0.723	0.723
-0.5	-	0.280	0.272	0.186	0.195	0.283	0.283
0	-	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	-	-0.170	-0.165	-0.113	-0.119	-0.172	-0.172
1	-	-0.260	-0.170	-0.174	-0.183	-0.266	-0.266
$u_3 10^{-6} (z=0)$							
-1	-	-0.237	-0.236	-0.181	-0.181	-0.241	-0.241
-0.5	-	-0.184	-0.181	-0.140	-0.140	-0.185	-0.185
0	-	-0.143	-0.140	-0.101	-0.109	-0.143	-0.143
0.5	-	-0.112	-0.110	-0.085	-0.085	-0.112	-0.112
1	-	-0.087	-0.087	-0.067	-0.067	-0.087	-0.087
$\phi 10^{-1} (z=0)$							
-1	-	-0.588	-0.590	-0.186	-0.181	-0.598	-0.598
-0.5	-	-0.490	-0.487	-0.153	-0.152	-0.493	-0.493
0	-	-0.390	-0.386	-0.122	-0.122	-0.391	-0.391
0.5	-	-0.297	-0.296	-0.093	-0.093	-0.299	-0.299
1	-	-0.216	-0.218	-0.068	-0.066	-0.220	-0.212
$D_3 10^{-7} (z=0)$							
-1	-	0.379	0.405	0.265	0.118	0.394	0.395
-0.5	-	0.202	0.220	0.135	0.063	0.205	0.205
0	-	-0.001	0.019	0.000	-0.000	-0.001	-0.001
0.5	-	-0.203	-0.182	-0.135	-0.064	-0.206	-0.206
1	-	-0.380	-0.368	-0.265	-0.120	-0.395	-0.396
$\sigma_{11} 10^3 (z = -\frac{h}{2})$							
-1	-	1.509	1.503	1.003	1.648	1.503	1.501
-0.5	-	1.286	1.258	0.8488	1.397	1.273	1.270
0	-	1.088	1.091	0.7151	1.182	1.074	1.071
0.5	-	0.909	0.923	0.5992	0.9972	0.9022	0.8990
1	-	0.745	0.775	0.4988	0.8380	0.7529	0.7483
$\sigma_{12} 10^3 (z = \frac{h}{2})$							
-1	-	0.312	0.319	0.235	0.237	0.318	0.319
-0.5	-	0.370	0.369	0.279	0.280	0.371	0.372
0	-	0.432	0.426	0.239	0.329	0.431	0.433
0.5	-	0.502	0.492	0.389	0.386	0.503	0.505
1	-	0.582	0.569	0.457	0.452	0.589	0.590
$\sigma_{33} (z = -\frac{h}{2})$							
-1	-0.500	-0.511	-0.406	-527.9	-521.9	-0.801	4.008
-0.5	-0.500	-0.507	-0.381	-618.0	-613.2	2.945	4.976
0	-0.500	-0.500	-0.351	-722.8	-723.1	4.492	6.252
0.5	-0.500	-0.490	-0.170	-845.7	-855.8	6.518	7.924
1	-0.500	-0.480	-0.275	-990.6	-1015	13.01	10.11

Table 5.3 – Configuration capteur valeurs prises à  $x = y = 0.25m$  : déplacements plan  $u_1$ , déplacement transverse  $u_3$ , potentiel électrique  $\phi$ , déplacement électrique  $D_3$ , contraintes planes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  et contrainte transverse normale  $\sigma_{33}$

$\beta$	h=0.1						
	3D Lu	Plate Brisc.	3D FEniCS	$(u_\alpha^{(1)}, w^{(0)})$	$(u_\alpha^{(1)}, w^{(1)})$	$(u_\alpha^{(2)}, w^{(2)})$	$(u_\alpha^{(4)}, w^{(4)})$
$u_1 10^{-9}(z=0)$							
-1	-0.129	-0.125	-0.129	-0.0296	-0.119	-0.129	-0.129
-0.5	-0.129	-0.128	-0.129	-0.0297	-0.128	-0.129	-0.129
0	-0.129	-0.128	-0.129	-0.0297	-0.131	-0.129	-0.129
0.5	-0.129	-0.128	-0.129	-0.0297	-0.129	-0.129	-0.129
1	-0.129	-0.125	-0.129	-0.0296	-0.122	-0.129	-0.129
$u_3 10^{-9}(z=0)$							
-1	0.327	0.325	0.335	0.0184	-0.444	0.336	0.338
-0.5	0.140	0.139	0.139	-0.0411	-0.0264	0.140	0.141
0	-0.074	-0.072	-0.072	-0.105	-0.105	-0.072	-0.072
0.5	-0.280	-0.283	-0.280	-0.170	-0.185	-0.285	-0.285
1	-0.480	-0.466	-0.480	-0.231	-0.257	-0.484	-0.485
$\phi 10^{-2}(z=0)$							
-1	0.180	0.183	0.183	0.181	0.162	0.182	0.182
-0.5	0.210	0.212	0.212	0.209	0.199	0.211	0.212
0	0.242	0.243	0.242	0.239	0.239	0.242	0.242
0.5	0.272	0.273	0.273	0.269	0.280	0.272	0.272
1	0.300	0.303	0.302	0.298	0.317	0.302	0.301
$D_3 10^{-9}(z=0)$							
-1	-0.457	-0.455	-0.457	-0.401	-0.443	-0.455	-0.455
-0.5	-0.609	-0.606	-0.606	-0.533	-0.600	-0.604	-0.604
0	-0.787	-0.788	-0.788	-0.693	-0.789	-0.786	-0.760
0.5	-1.009	-1.004	-1.006	-0.884	-0.999	-1.001	-1.000
1	-1.257	-1.249	-1.257	-1.106	-1.220	-1.249	-1.250
$\sigma_{11}(z = -\frac{h}{2})$							
-1	-18.06	-18.04	-18.21	-35.46	-21.60	-13.00	-17.59
-0.5	-19.71	-19.71	-20.02	-46.17	-23.44	-16.84	-19.49
0	-23.79	-23.68	-23.93	-59.53	-25.28	-21.90	-23.69
0.5	-31.75	-31.75	-31.10	-75.82	-27.56	-28.40	-31.31
1	-44.27	-45.61	-42.64	-95.19	-55.34	-36.51	-43.37
$\sigma_{12}(z = \frac{h}{2})$							
-1	-14.22	-13.80	-14.57	-3.198	-9.850	-14.18	-14.22
-0.5	-20.31	-19.99	-20.43	-4.530	-16.23	-20.07	-20.08
0	-27.19	-27.16	-27.36	-6.142	-25.58	-27.09	-27.07
0.5	-34.84	-34.56	-34.77	-7.910	-38.50	-34.67	-34.61
1	-41.72	-41.00	-41.56	-9.600	-55.34	-41.65	-41.56
$\sigma_{33}(z = -\frac{h}{2})$							
-1	0.000	0.002	0.001	54.24	31.06	6.223	0.006
-0.5	0.000	0.003	0.002	73.67	26.41	4.516	0.033
0	0.000	0.005	0.004	98.11	8.971	3.962	0.792
0.5	0.000	0.008	0.004	128.1	-27.89	7.812	0.107
1	0.000	0.001	0.003	164.2	-90.56	21.80	0.176

Table 5.4 – Configuration actionneur valeurs prises à  $x = y = 0.25m$  : déplacements plan  $u_1$ , déplacement transverse  $u_3$ , potentiel électrique  $\phi$ , déplacement électrique  $D_3$ , contraintes planes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  et contrainte transverse normale  $\sigma_{33}$

h=0.01							
$\beta$	3D Lu	Plate Brisc.	3D FEniCS	$(u_\alpha^{(1)}, w^{(0)})$	$(u_\alpha^{(1)}, w^{(1)})$	$(u_\alpha^{(2)}, w^{(2)})$	$(u_\alpha^{(4)}, w^{(4)})$
$u_1 10^{-8}(z=0)$							
-1	-	-0.126	-0.130	-0.030	-0.120	-0.130	-0.130
-0.5	-	-0.129	-0.131	-0.030	-0.128	-0.130	-0.130
0	-	-0.130	-0.131	-0.030	-0.130	-0.130	-0.130
0.5	-	-0.129	-0.130	-0.030	-0.128	-0.130	-0.130
1	-	-0.126	-0.130	-0.030	-0.120	-0.130	-0.130
$u_3 10^{-7}(z=0)$							
-1	-	0.379	0.386	0.089	-0.012	0.394	0.394
-0.5	-	0.202	0.200	0.046	0.062	0.204	0.204
0	-	-0.001	-0.001	0.000	0.000	-0.001	-0.001
0.5	-	-0.204	-0.201	-0.048	-0.064	-0.205	-0.206
1	-	-0.380	-0.387	-0.091	-0.120	-0.395	-0.395
$\phi(z=0)$							
-1	-	0.188	0.188	0.188	0.168	0.187	0.188
-0.5	-	0.219	0.219	0.218	0.207	0.218	0.218
0	-	0.250	0.250	0.249	0.249	0.249	0.249
0.5	-	0.281	0.281	0.280	0.291	0.280	0.280
1	-	0.311	0.311	0.310	0.330	0.311	0.310
$D_3 10^6(z=0)$							
-1	-	-0.461	-0.463	-0.407	-0.449	-0.462	-0.462
-0.5	-	-0.613	-0.614	-0.540	-0.608	-0.612	-0.612
0	-	-0.796	-0.797	-0.700	-0.795	-0.795	-0.795
0.5	-	-1.011	-1.014	-0.890	-1.002	-1.010	-1.010
1	-	-1.253	-1.264	-1.108	-1.221	-1.256	-1.256
$\sigma_{11}(z = -\frac{h}{2})$							
-1	-	-187.3	-187.6	-374.3	-123.8	-152.0	-182.6
-0.5	-	-206.3	-208.8	-489.1	-232.0	-193.1	-204.4
0	-	-250.2	-252.8	-632.3	-250.3	-250.5	-250.5
0.5	-	-337.7	-332.6	-806.5	-273.2	-322.5	-335.8
1	-	-486.5	-456.6	-1012.8	-304.0	-410.4	-467.8
$\sigma_{12}(z = \frac{h}{2})$							
-1	-	-131.5	-137.8	-30.93	-97.80	-135.6	-135.9
-0.5	-	-188.0	-191.4	-43.12	-160.1	-189.3	-189.5
0	-	-250.6	-252.3	-57.00	-250.3	-250.5	-250.5
0.5	-	-309.2	-313.0	-70.77	-372.5	-311.0	-310.8
1	-	-348.8	-359.7	-81.02	-527.4	-356.0	-355.3
$\sigma_{33}(z = -\frac{h}{2})$							
-1	0.000	0.000	0.013	513.3	280.1	40.17	-1.195
-0.5	0.000	0.000	0.008	685.3	210.8	14.70	-0.922
0	0.000	0.000	0.010	892.2	1.114	0.322	-0.148
0.5	0.000	0.000	0.125	1130	-418.2	-31.61	1.066
1	0.000	-0.002	0.125	1391	-1112	169.2	3.911

Table 5.5 – Configuration actionneur valeurs prises à  $x = y = 0.25m$  : déplacements plan  $u_1$ , déplacement transverse  $u_3$ , potentiel électrique  $\phi$ , déplacement électrique  $D_3$ , contraintes planes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  et contrainte transverse normale  $\sigma_{33}$

Table 5.6 – Première fréquence propre adimensionnée par ZHONG et YU [2006]

k	0	0.1	1	2	5
$\bar{f}_1 \cdot 10^{-3}$ (Zhong)	8.14	8.14	7.85	7.14	4.87
$\bar{f}_1 \cdot 10^{-3}$ ( $u_\alpha^{(1)}, w^{(0)}$ )	8.32	8.32	7.97	7.30	4.92

### 5.1.2 Validation pour une plaque FGPM PZT4/Al/PZT4

On utilise à présent le modèle 3D de référence pour valider le modèle de plaque dans le cas d'une structure FGPM PZT4/Al/PZT4. On souhaite également montrer que le modèle de Reissner-Mindlin ( $u_\alpha^{(1)}, w^{(0)}$ ) peut être suffisant pour des conditions aux limites classiques et des sollicitations en flexion simple. La plaque est maillée dans le cas 3D avec  $15 \times 15 \times 8$  éléments tétraédriques et dans le cas 2D avec 724 éléments triangulaires ayant chacun six couches numériques pour le potentiel électrique.

On considère une plaque FGPM PZT4/Alu/PZT4 dont les propriétés matériaux et géométriques sont données dans la Table 5.7. La loi de comportement dans l'épaisseur est celle présentée à la section 2.1.4, prenant en compte le phénomène de percolation. Le seuil de percolation est fixé à  $V_T = 0.3$  pour toutes les études suivantes. Le FGPM étant conducteur dans sa partie centrale, on impose un potentiel nul aux interfaces  $z = \pm h_T/2$ .

Propriétés		Aluminium	PZT4
Module de Young (GPa)	$\Upsilon$	69	-
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3	-
Constantes piézoélectriques (C/m <sup>2</sup> )	$e_{31} = e_{32}$	-	-5.2
	$e_{15} = e_{24}$	-	2.7
	$e_{33}$	-	15.1
Constantes diélectriques (nF/m)	$\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$	-	13.09
	$\epsilon_{33}$	$26.55e^{-3}$	11.51
Constantes élastiques (GPa)	$C_{11} = C_{22}$	-	139
	$C_{33}$	-	115
	$C_{12}$	-	77.8
	$C_{13}$	-	74.3
	$C_{44} = C_{55}$	-	25.6
	$C_{66}$	-	30.6
Densité (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$	3960	7600

Propriétés	Valeur
Longueur L (m)	1
Épaisseur h (m)	0.01
Largeur b (m)	0.8

Table 5.7 – Propriétés matériaux et géométriques

On considère deux types de conditions aux limites :

- Une plaque simplement appuyée sur son pourtour (notée AAAA) :

$$\begin{aligned}
 u_2 = u_3 = 0 & \quad \text{pour } x = 0, a \\
 u_1 = u_3 = 0 & \quad \text{pour } y = 0, b \\
 \phi = 0 & \quad \text{pour } z = \pm \frac{h_T}{2}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

- Une plaque encastree-libre (notée CFFF) :

$$\begin{aligned}
 u_1 = u_2 = u_3 = 0 & \quad \text{pour } x = 0 \\
 \phi = 0 & \quad \text{pour } z = \pm \frac{h_T}{2}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Trois études sont menées dont deux en statique (configurations actionneur et capteur) et une en vibration libres. Pour chaque cas, les simulations sont menées avec le modèle plaque en considérant des cinématiques plus ou moins riches, et le modèle 3D. Dans ces études, les valeurs notées entre parenthèses sont les erreurs relatives par rapport à la référence et l'analyse des résultats est donnée au paragraphe 5.1.2.d.

### 5.1.2.a Configuration actionneur

Dans la configuration actionneur, les surfaces  $z = \pm h/2$  sont soumises à un potentiel électrique uniforme  $V_0 = 250V$ . On relève la déflexion maximale  $w_{max}$  engendrée, pour trois valeurs de  $k$ , en  $(L, \frac{b}{2}, 0)$  pour la plaque encastree-libre (Table 5.8) et en  $(\frac{L}{2}, \frac{b}{2}, 0)$  pour la plaque simplement appuyée (Table 5.9).

CFFF	$w_{max}(mm)$			
k	3D	$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(0)})$	$(u_{\alpha}^{(2)}, w^{(2)})$	$(u_{\alpha}^{(4)}, w^{(4)})$
0.5	1.808	1.929 (6.7%)	1.708 (5.5%)	1.818 (0.6%)
1	1.723	1.810 (5.0%)	1.683 (2.3%)	1.723 (0.0%)
2	1.572	1.631 (3.8%)	1.562 (0.6%)	1.562 (0.6%)

Table 5.8 – Plaque FGPM encastree-libre ( $V_T = 0.3$ ), configuration actionneur

AAAA	$w_{max}(\mu m)$			
k	3D	$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(0)})$	$(u_{\alpha}^{(2)}, w^{(2)})$	$(u_{\alpha}^{(4)}, w^{(4)})$
0.5	2.273	2.382 (4.8%)	2.158 (3.2%)	2.275 (0.1%)
1	2.172	2.242 (5.1%)	2.131 (1.9%)	2.171 (0.0%)
2	1.989	2.028 (0.1%)	1.982 (0.0%)	1.975 (0.7%)

Table 5.9 – Plaque FGPM simplement appuyée ( $V_T = 0.3$ ), configuration actionneur

### 5.1.2.b Configuration capteur

Dans la configuration capteur, la structure est soumise à une pression uniforme de  $10kPa$ . On relève, pour trois valeurs de  $k$ , les valeurs suivantes :

- le déplacement maximal  $w_{max}$  : en  $(\frac{L}{2}, \frac{b}{2}, 0)$  pour la plaque simplement appuyée et en  $(L, \frac{b}{2}, 0)$  pour la plaque encastree-libre,
- le potentiel moyen  $\phi_{moy}$ , capté sur toute la surface supérieure de la plaque ( $z = h/2$ ).

Les résultats sont donnés dans les Tables (5.10,5.11) et (5.12,5.13) pour la plaque encastree-libre et la plaque simplement appuyée respectivement.

CFFF	$w_{max}(\mu m)$			
k	3D	$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(0)})$	$(u_{\alpha}^{(2)}, w^{(2)})$	$(u_{\alpha}^{(4)}, w^{(4)})$
0.5	182.495	186.020 (3.1%)	182.122 (0.9%)	182.731 (1.2%)
1	170.946	173.889 (1.7%)	170.724 (0.1%)	171.256 (0.2%)
2	161.495	163.743 (1.4%)	161.295 (0.1%)	161.870 (0.2%)

Table 5.10 – Plaque FGPM encastree-libre ( $V_T = 0.3$ ), configuration capteur : flèche maximale ( $\mu m$ )

### 5.1.2.c Fréquences propres

On étudie également les fréquences propres de la plaque FGPM. Les Tables 5.14 et 5.15 présentent les six premières fréquences propres des plaques encastree-libre et simplement appuyée.

CFFF	$\Phi_{moy}(V)$			
	k	3D	$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(0)})$	$(u_{\alpha}^{(2)}, w^{(2)})$
0.5	23.418	23.182 (1.9%)	23.182 (0.9%)	23.921 (2.1%)
1	80.209	78.600 (0.1%)	81.523 (1.2%)	80.967 (0.6%)
2	142.360	140.551 (0.8%)	143.956 (0.4%)	143.448 (0.2%)

 Table 5.11 – Plaque FGPM encastrée-libre ( $V_T = 0.3$ ), configuration capteur : potentiel moyen (V)

AAAA	$w_{max}(\mu m)$			
	k	3D	$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(0)})$	$(u_{\alpha}^{(2)}, w^{(2)})$
0.5	3.621	3.699 (2.2%)	3.591 (0.8%)	3.619 (0.1%)
1	3.366	3.432 (2.0%)	3.340 (0.8%)	3.365 (0.0%)
2	3.153	3.204 (1.6%)	3.128 (0.8%)	3.154 (0.0%)

 Table 5.12 – Plaque FGPM simplement appuyée ( $V_T = 0.3$ ), configuration capteur : flèche maximale ( $\mu m$ )

AAAA	$\Phi_{moy}(V)$			
	k	3D	$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(0)})$	$(u_{\alpha}^{(2)}, w^{(2)})$
0.5	4.512	4.361 (3.3%)	4.502 (0.2%)	4.682 (3.8%)
1	15.629	15.125 (3.2%)	15.797 (1.1%)	15.688 (0.4%)
2	28.106	27.393 (2.5%)	28.433 (1.2%)	28.082 (0.1%)

 Table 5.13 – Plaque FGPM simplement appuyée ( $V_T = 0.3$ ), configuration capteur : potentiel moyen (V)

Fréquences (Hz)	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
3D	6.56	18.79	65.91	73.90	115.97	130.90
$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(0)})$	6.42 (2.1%)	18.55 (1.3%)	64.61 (2.0%)	72.62(1.7%)	112.83 (2.7%)	127.68(2.5%)

 Table 5.14 – Fréquences propres de la plaque encastrée-libre,  $k = 0.5$ ,  $V_T = 0.3$ 

Fréquences (Hz)	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
3D	48.10	104.95	195.14	286.06	293.52	348.10
$(u_{\alpha}^{(1)}, w^{(0)})$	47.06 (2.2%)	102.21 (2.6%)	189.31(3.0%)	278.61(2.6%)	282.13(3.9%)	335.63(3.6%)

 Table 5.15 – Fréquences propres de la plaque simplement appuyée,  $k = 0.5$ ,  $V_T = 0.3$ 

#### 5.1.2.d Conclusions des simulations de la plaque PZT4/Al/PZT4

Les modèles d'ordre supérieur  $(u_{\alpha}^{(2)}, w^{(2)})$  et  $(u_{\alpha}^{(4)}, w^{(4)})$  donnent d'excellent résultats en statique, en configurations actionneur et capteur.

Par ailleurs, avec des sollicitations simples de flexion le modèle de Reissner-Mindlin est également très satisfaisant, avec au maximum 5% d'erreur. Ce modèle donne également des résultats très corrects en ce qui concerne l'évaluation de la base modale (fréquences propres et modes propres). Au vue de ces résultats, on choisit donc d'utiliser dans la suite de ces travaux le modèle de Reissner-Mindlin pour créer la représentation d'état du système. L'intérêt est notamment de limiter la taille du système à résoudre, permettant de réduire le temps de calcul des simulations de contrôle actif.

Par ailleurs, en effectuant des tests statiques sur la plaque FGPM, on observe le même comportement que pour la poutre FGPM (voir section 4.2) : l'actionneur est optimal pour un  $k$  faible compris dans la plage  $[0.4, 0.7]$  et pour des seuils de percolation faible. Au contraire, le capteur est plus performant quand  $k$  est grand et dépend peu du seuil de percolation.

## 5.2 Contrôle Actif d'une plaque FGPM avec contrôleur flou décentralisé

Dans ce paragraphe, on souhaite mettre en œuvre le contrôle actif d'une plaque FGPM à l'aide du régulateur flou décentralisé (Section 3.5). On considère une plaque FGPM (PZT4/Alu/PZT4) rectangulaire, équipée de 16 électrodes de  $0.1m \times 0.06m$ . Les électrodes sont déposées sur les surfaces externes (supérieures et inférieures) symétriquement par rapport au plan moyen. L'ensemble de deux électrodes, une sur chaque face, sert pour un capteur ou pour un actionneur. Cette configuration augmente les capacités d'actionnement et de mesure. Il y a donc 16 positions possibles pour les actionneurs et les capteurs (Figure 5.2). Selon la configuration de la structure (conditions aux limites), le choix des électrodes servant pour les capteurs ou les actionneurs sera différent.

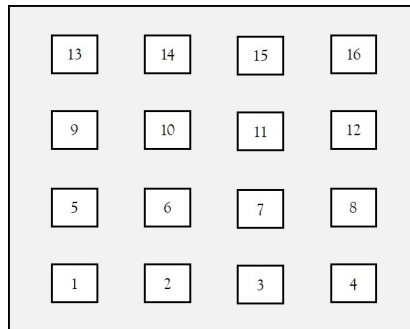


FIGURE 5.2 – Plaque FGPM équipée de 16 électrodes

### 5.2.1 Paramétrage des simulations de contrôle actif

Le paramétrage des simulations s'effectue comme suit :

#### 1. Matériau et Géométrie :

- La plaque FGPM est rectangulaire, équipée de 16 électrodes, les dimensions et les propriétés matériaux sont données dans la table 5.7. Les paramètres matériaux du FGPM sont fixés à :  $V_T = 0.3$  et  $k = 0.5$ .
- L'amortissement naturel de la structure est pris en compte. Comme pour la poutre (Équation 3.17), on considère que les coefficients d'amortissement des deux premiers modes sont égaux,  $\eta_1 = \eta_2 = 5\%$ .
- Deux types de conditions aux limites sont étudiés : la poutre simplement appuyée et la poutre encastree-libre.

#### 2. Modèle :

- Le modèle de plaque  $(u_\alpha^{(1)}, w^{(0)})$  (cinématique de Reissner-Mindlin) est utilisé pour obtenir la représentation d'état du système contrôle-observé.
- La structure est maillée avec 724 éléments possédant chacun six couches numériques dans l'épaisseur.

#### 3. Régulateur et Observateur :

- Un régulateur flou décentralisé contrôlant les quatre premiers modes. Celui-ci est paramétré avec les choix :
  - ▷ du potentiel maximal,  $\phi^{\text{TOT}}$ , admissible à chaque instant  $t$ , on considère ici que  $\phi^{\text{TOT}} = 250V$ ,
  - ▷ de la distribution de  $\phi^{\text{TOT}}$  selon une distribution équitable, maximale ou adaptative (voir section 3.5.2). Elles sont respectivement notées par la suite DE, DM et DA.

- Un observateur de Luenberger construit à l'aide de quatre capteurs, de la même façon que l'observateur utilisé pour la poutre (section 4.3.1.b). L'observateur est réglé pour avoir un temps de réponse,  $t_{rep} = 0.5s$ .
- Les actionneurs et capteurs utilisés dépendent des conditions aux limites, le choix de ceux-ci est étudié dans les Sections 5.2.2 et 5.2.3

4. Simulations :

- Les simulations sont effectuées à l'aide d'un algorithme de Runge Kutta d'ordre 4, pour un temps  $t \in [0, 5s]$  en considérant un pas de temps  $\Delta t = 0.5ms$ .
- Les simulations sont effectuées en considérant les 6 premiers modes de la plaque. Une étude préliminaire, en considérant plus de 6 modes a été menée et montre que les modes supérieurs à 6 sont négligeables pour les chargements considérés.

5.2.2 Système commandé-observé

Le système plaque commandé-observé (Figure 3.14) construit ici , est constitué :

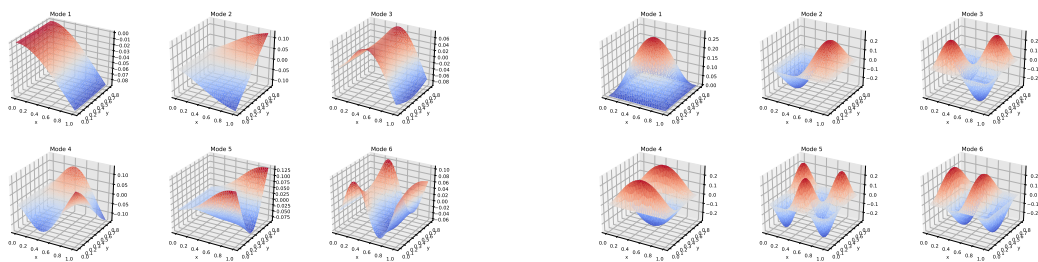
- du régulateur flou décentralisé contrôlant les quatre premiers modes de flexion,
- d'un observateur de Luenberger construit grâce à la méthode du système fictif (Section 3.3.2.a).

Il faut donc choisir les quatre actionneurs utilisés par le régulateur flou ainsi que les capteurs utilisés par l'observateur pour reconstruire l'état du système. Ces choix sont effectués à l'aide des critères d'optimisation de placement des actionneurs et des capteurs, présentés à la Section 3.6.

En utilisant les critères d'optimisation présentés à la section 3.6, on peut définir par mode et par emplacement les performances capteur et actionneur de chaque électrode par rapport aux autres.

Afin de faciliter la lecture, on regroupe dans un tableau, où chaque case correspond à une électrode, les valeurs des critères  $(\tilde{\lambda}_a)_{ii}$  et  $(\tilde{\lambda}_c)_{ii}$  pour les quatre premiers modes, normalisées par la plus grande valeur. Plus ces valeurs seront proches de 1, meilleur sera l'efficacité de l'actionneur et du capteur.

L'emplacement des électrodes étant fixé, les valeurs de  $(\tilde{\lambda}_a)_{ii}$  et  $(\tilde{\lambda}_c)_{ii}$  dépendent uniquement des conditions aux limites de la plaque. On considère deux configurations : encadrée-libre et simplement appuyée sur son pourtour, dont les 6 premiers modes de flexion sont présentés dans la Figure 5.3.



(a) Modes propres de la plaque encadrée libre

(b) Modes propres de la plaque simplement appuyée

FIGURE 5.3 – Modes propres de la plaque FGPM

**Plaque encadrée-libre :** les performances des actionneurs et des capteurs (Figure 5.4) sont maximales quand les déformations modales sont maximales : proche de l'encastrement pour les deux premiers modes, au centre vers les bords ( $y = 0, b$ ) pour le troisième mode et au centre vers le bout de la plaque ( $x = L$ ) pour le quatrième mode.



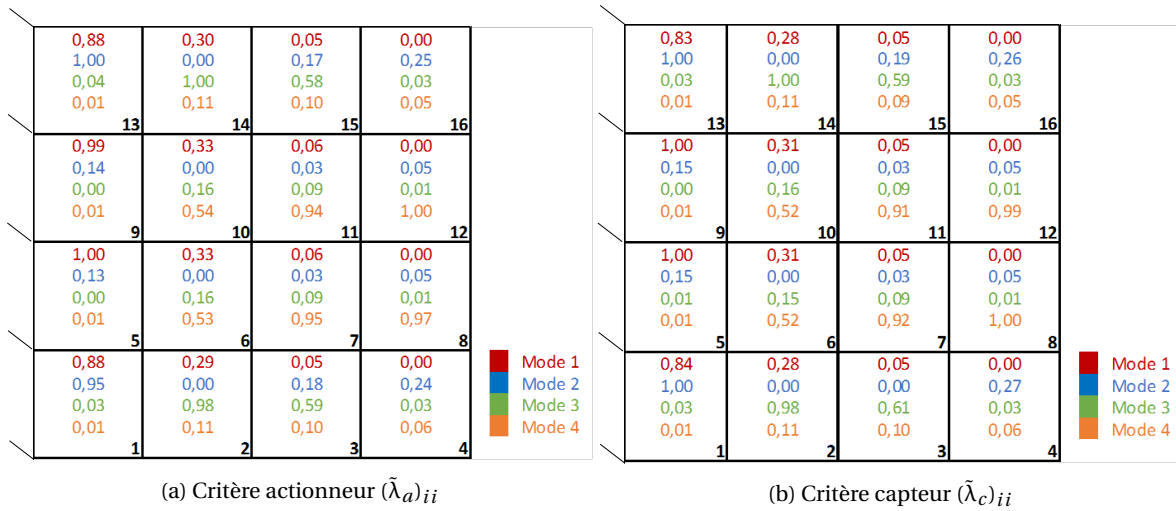


FIGURE 5.4 – Critères d'optimisation pour la plaque encastree libre

**Plaque simplement appuyée :** les performances des actionneurs et des capteurs (Figure 5.5) sont maximales quand leur emplacement est proche du ventre de vibration du mode  $i$ , correspondant dans cette configuration aux emplacements où les déformations modales sont maximales, et sont minimales aux nœuds de vibrations du mode  $i$  : soit pour le mode 1 : proche du centre, pour le mode 2 : la position 5,8,9 ou 12, pour le mode 3 : près des coins et pour le mode 4 : les positions 2,3,14 ou 15.

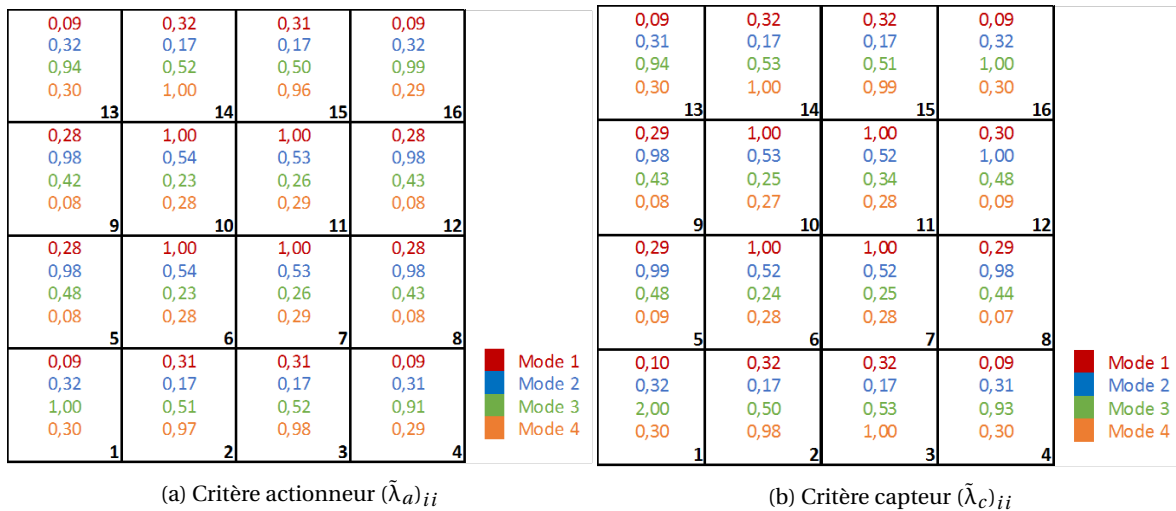


FIGURE 5.5 – Critères d'optimisation pour la plaque simplement appuyee

### 5.2.3 Étude du spillover dans le cas d'une plaque en appui simple

Le spillover est l'activation des modes non contrôlés par la régulation des autres modes. On cherche à montrer que l'effet de spillover, engendré par le régulateur flou décentralisé, n'est pas prépondérant devant les sollicitations des modes contrôlés et qu'on peut le réduire en considérant un couple d'actionneurs par mode pour le régulateur flou, au lieu d'un seul actionneur par mode. Le potentiel électrique envoyé par la commande pour le mode  $i$ , sera alors divisé de façon égale entre les deux actionneurs.

Ainsi, on considère deux régulateurs flous différents ayant chacun la distribution adaptative :

- Le DA simple : chaque mode est contrôlé par un actionneur dédié,

- Le DA double : chaque mode est contrôlé par deux actionneurs dédiés. Dans ce cas la commande  $\phi_i$  est divisée entre les deux actionneurs.

On considère une plaque, en appui simple sur son pourtour, soumise à :

- Une condition initiale :  $x_i(t = 0) = 1$  pour  $i \in [1, 4]$ .
- Une pression uniforme :  $P_0 = 2kPa$  sur toute la surface de la plaque pour  $t \in [1.0, 1.11]$ .

À partir des résultats de la Figure 5.5, le choix des actionneurs et capteurs pour les deux régulateurs sont :

Mode	1	2	3	4
Actionneurs DA double	6/11	5/12	1/16	2/15
Actionneurs DA simple	6	5	1	2
Capteurs	7	8	4	3

Table 5.16 – Étude du spillover plaque simplement appuyée : choix des actionneurs et capteurs

Dans la suite de ces travaux pour des soucis de lisibilité, seule l'enveloppe des courbes des déplacements modaux, des potentiels capteurs et de la flèche, est tracée.

La Figure 5.6 présente les déplacements modaux des six premiers modes de la structure. On remarque que les deux régulateurs donnent des résultats quasi similaires pour le contrôle des quatre premiers modes, avec toutefois un contrôle avec moins d'oscillations et légèrement meilleur pour le régulateur avec deux actionneurs par mode (DA double). Les déplacements modaux des modes non contrôlés montrent bien l'effet de spillover. Alors qu'en boucle ouverte (sans contrôle) ces deux modes ne sont jamais sollicités, en présence d'un régulateur ceux-ci sont activés par le contrôle des autres modes. On remarque que cet effet est réduit dans le cas du régulateur DA double. L'utilisation de deux actionneurs permet en effet de solliciter ces modes non contrôlés en opposition et ainsi réduire en partie leur sollicitation.

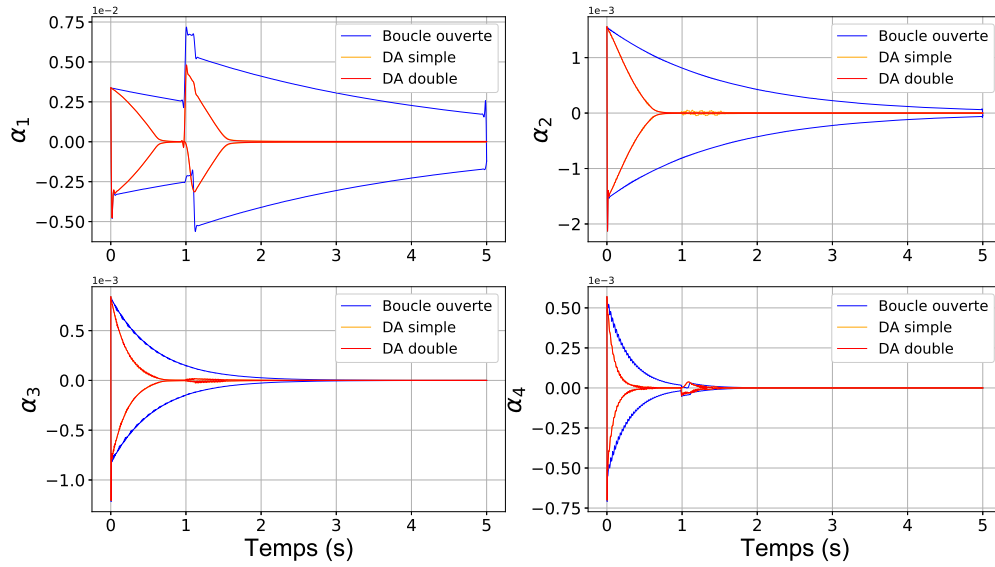
La flèche relevée au milieu de la plaque est présentée dans la Figure 5.8. Les deux régulateurs assurent le contrôle de la plaque avec des performances quasi égales, le régulateur DA double donne une flèche légèrement inférieure. En effet, même avec un effet de spillover plus important pour le régulateur DA simple, les déplacements modaux des modes non contrôlés sont de deux ordres de grandeurs inférieurs aux déplacements modaux des quatre premiers modes. On a donc également des résultats similaires pour le potentiel envoyé à chaque instant  $t$  aux actionneurs et le potentiel capté (Figures 5.7a et 5.7b).

Les mêmes conclusions peuvent être déduites du cas encastree-libre, le dédoublement des actionneurs par mode permet de réduire l'effet de spillover et d'avoir un contrôle plus régulier et un peu plus performant. Ces simulations nous conduisent donc, dans toute la suite de ce travail de considérer le régulateur flou construit avec deux actionneurs par mode.

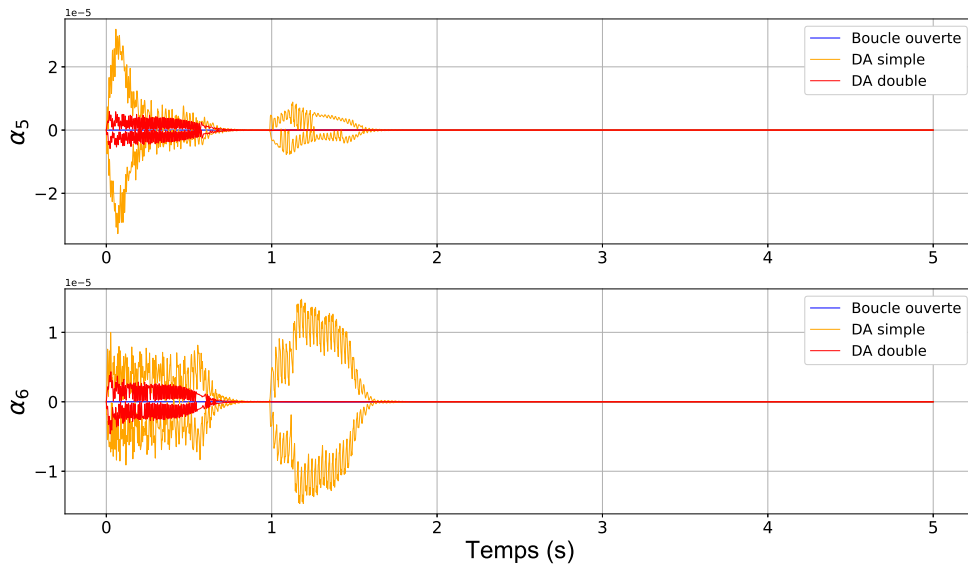
Les Tables 5.17 et 5.18 résument le choix des actionneurs pour le contrôle et le choix des capteurs pour l'observation des quatre premiers modes, pour la plaque simplement-appuyée et la plaque encastree-libre, respectivement.

Mode	1	2	3	4
Actionneurs	6/11	5/12	1/16	2/15
Capteurs	7	8	4	3

Table 5.17 – Choix des actionneurs et capteurs pour la plaque simplement appuyée



(a) Modes contrôlés : 1 à 4

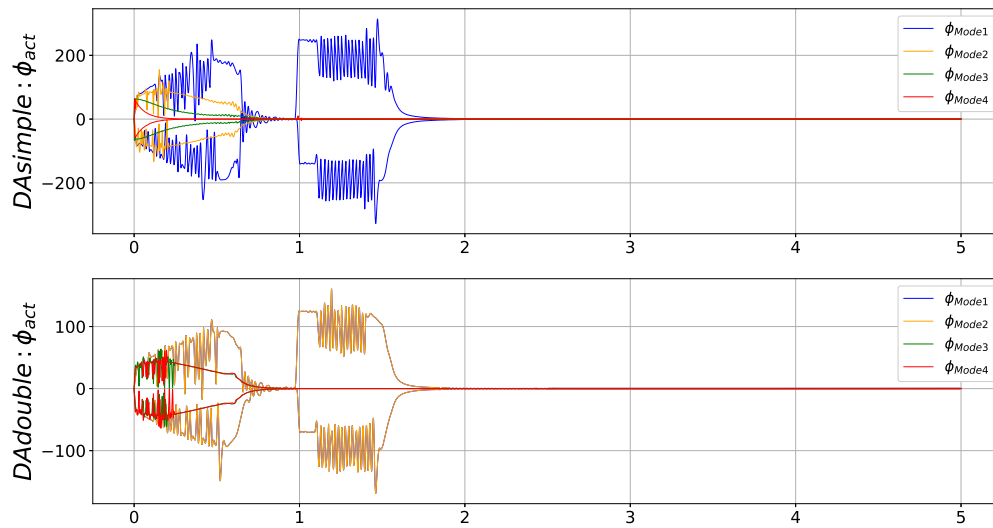


(b) Modes non contrôlés : 5 et 6

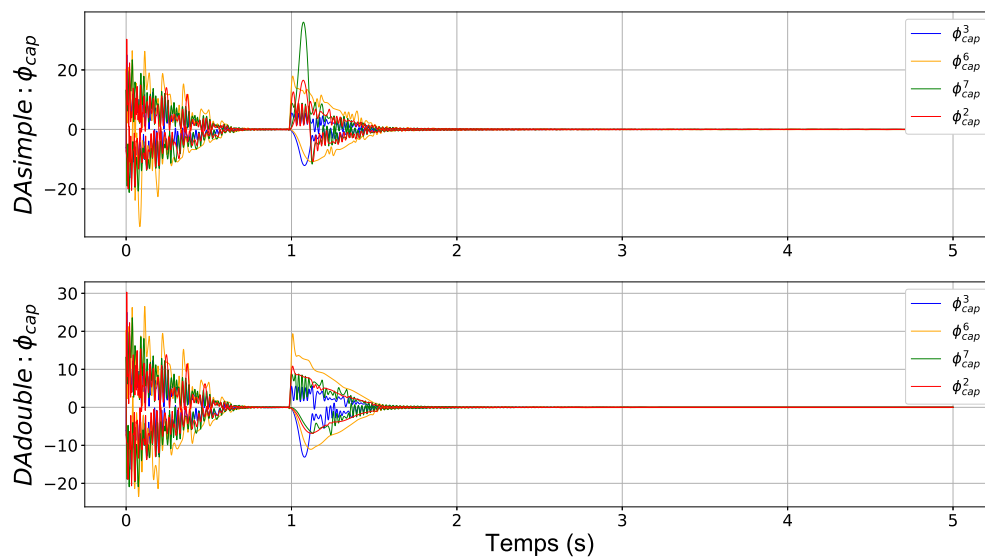
FIGURE 5.6 – Étude du spillover plaque simplement appuyée : Déplacements modaux  $\alpha_i$

Mode	1	2	3	4
Actionneurs	5/9	1/13	2/14	7/11
Capteurs	6	4	3	12

Table 5.18 – Choix des actionneurs et capteurs pour la plaque encastree libre



(a) Potentiel actionneur



(b) Potentiel capteur

FIGURE 5.7 – Étude du spillover plaque simplement appuyée : Potentiel actionneur et capteur

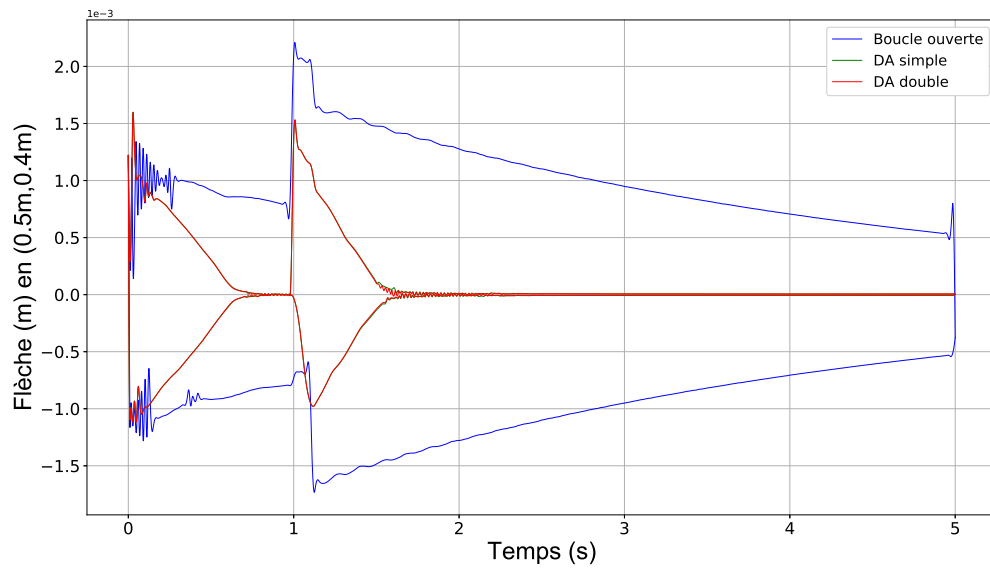


FIGURE 5.8 – Étude du spillover plaque simplement appuyée : Flèche

### 5.3 Comparaison des différentes distributions pour le contrôleur flou décentralisé

On étudie dans ce paragraphe les performances des trois distributions du potentiel maximal admissible  $\phi^{\text{TOT}}$  à chaque instant  $t$  : la distribution équitable (DE), la distribution maximale (DM) et la distribution adaptative (DA).

#### 5.3.1 Plaque simplement appuyée

On traite le cas de la plaque, en appui simple sur son pourtour, soumise à :

- Une condition initiale représentant un lâcher de la plaque :  $x_i(t = 0) = 1$  pour  $i \in [1, 4]$ ,
- Une pression uniforme,  $P_0 = 2kPa$ , sur toute la surface de la plaque pour  $t \in [1.0, 1.11]$ , simulant un impact.

La Figure 5.9 présente les déplacements modaux pour les trois distributions et le système non contrôlé (boucle ouverte). Pour les modes contrôlés, les trois distributions permettent de réduire ces déplacements. Les distributions DM et DA réduisent plus rapidement les déplacements modaux des modes 1 et 2, qui sont les plus énergétiques. La distribution équitable (DE) réduit plus rapidement les déplacements modaux des modes 3 et 4, car un quart de  $\phi^{\text{TOT}}$  est dédié à chaque instant  $t$  à la commande de ces modes. En ce qui concerne les modes non contrôlés, on remarque que la distribution maximale engendre le plus de spillover.

La Figure 5.10 présente les potentiels envoyés aux actionneurs et les potentiels captés par les capteurs. La Figure 5.11 représente la flèche de la plaque en  $(\frac{L}{2}, \frac{b}{2}, 0)$ .

Les trois distributions permettent de réduire les déplacements de la plaque. Mais selon la distribution le comportement amortissant n'est pas le même :

- Pour le cas du lâcher ( $t \in [0, 1]$ ) :
  - les distributions DM et DA annulent 90% des vibrations en 0.7s,
  - la DM est plus performante mais génère des oscillations, alors que la DA contrôle la plaque de façon plus régulière,
  - la DE réduit seulement la flèche de moitié sur cette période.
- Lors de l'impact ( $t \in [1.0, 1.11]$ ) :
  - la flèche des systèmes observés-contrôlés est moins élevée que le système non-contrôlé. Le système avec la DM atténue un peu moins bien l'impact que les deux autres distributions,
  - Les distributions DM et DA annulent 90% des vibrations en environ 0.5s alors que la distribution DE en environ 1s.

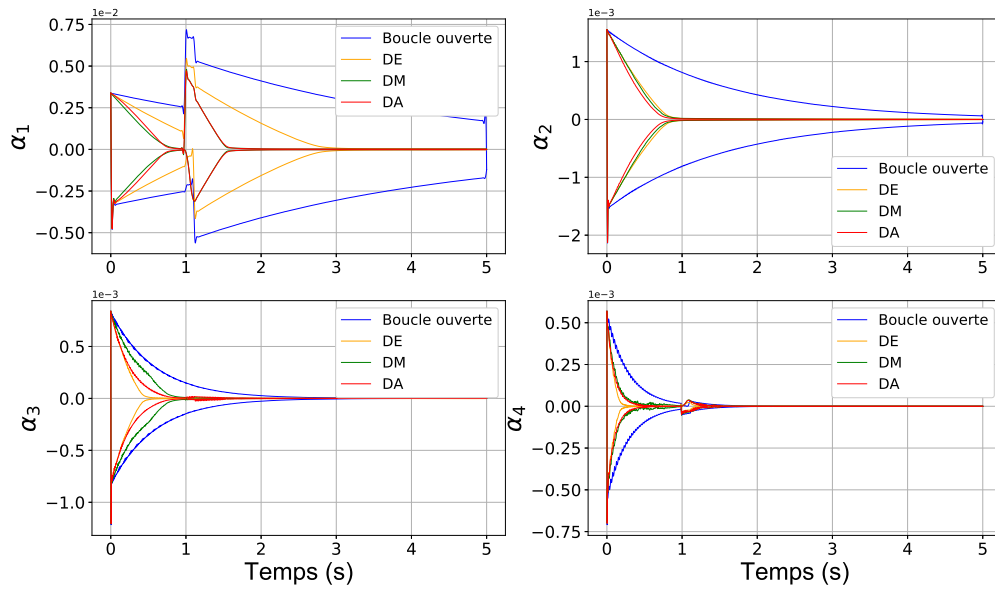
Comme on pouvait le prévoir, la distribution équitable est donc la moins performante car, contrairement aux deux autres, elle ne s'adapte pas en fonction du ou des mode(s) le(s) plus excité(s). Si principalement un seul mode est excité, comme c'est le cas lors de l'impact, cette distribution ne peut donc envoyer au maximum que  $\frac{\phi^{\text{TOT}}}{4}$  à l'actionneur de ce mode.

Les distributions DM et DA ont des performances similaires, elles s'adaptent toutes les deux de façons différentes. La distribution adaptative présente l'avantage de générer un contrôle plus régulier.

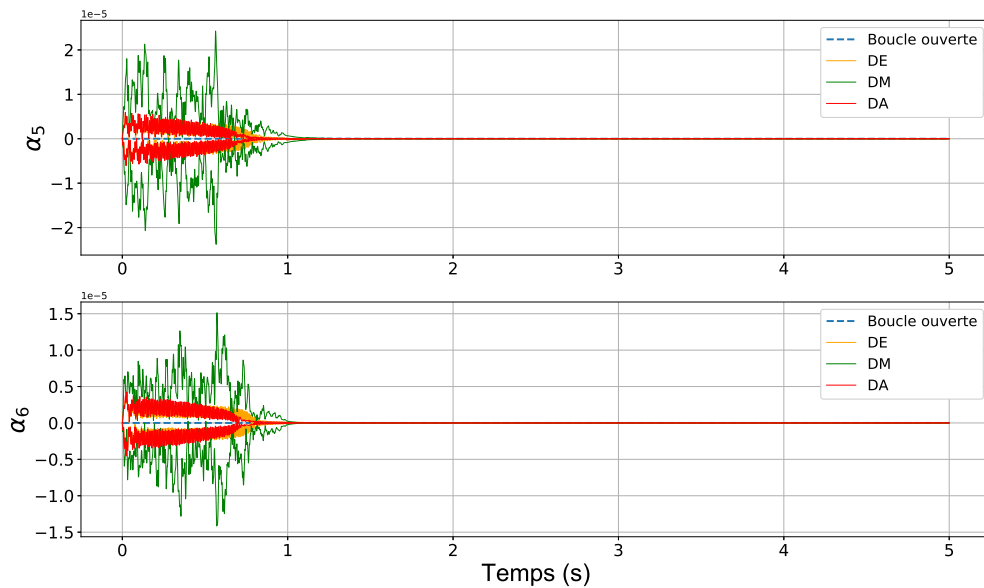
#### 5.3.2 Plaque encastree libre

On considère à présent la plaque FGPM encastree-libre soumise à :

- Une condition initiale représentant un lâcher de la plaque :  $x_i(t = 0) = 0.2$  pour  $i \in [1, 4]$ ,
- Une pression uniforme,  $P_0 = 0.1kPa$ , sur toute la surface de la plaque pour  $t \in [1.0, 1.11]$ , simulant un impact.



(a) Modes contrôlés : 1 à 4

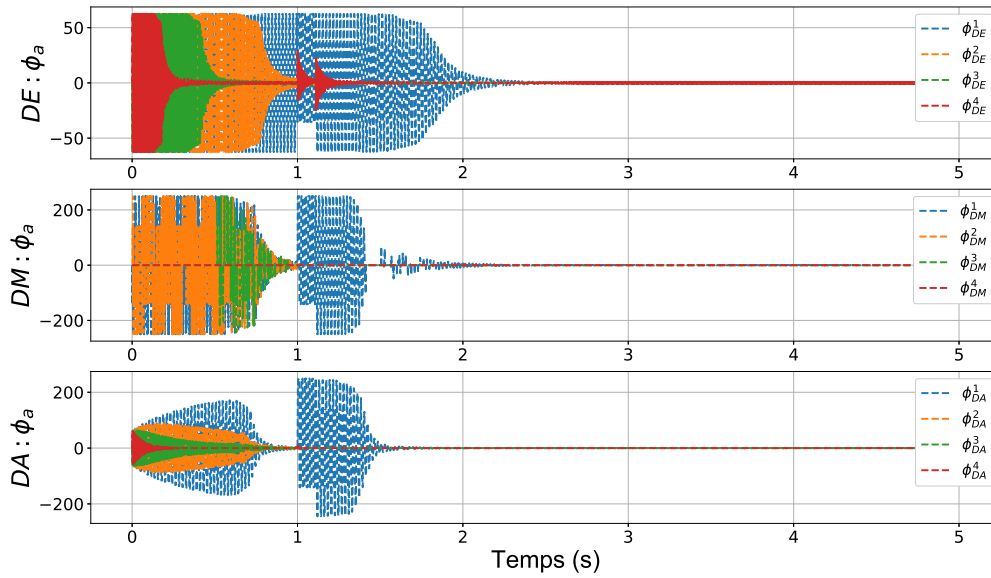


(b) Modes non contrôlés : 5 et 6

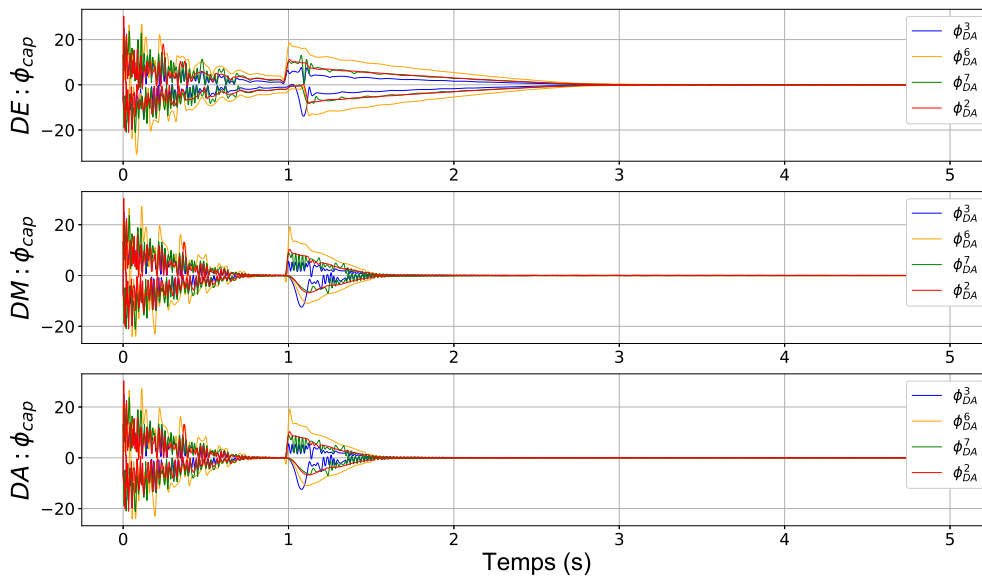
FIGURE 5.9 – Comparaison des distributions plaque simplement appuyée : Déplacements modaux  $\alpha_i$

Les Figures 5.12, 5.13 et 5.14 présentent respectivement les déplacements modaux, les potentiels actionneur et capteur et la flèche en  $(L, \frac{b}{2}, 0)$ . Les conclusions déduites du cas simplement appuyée sont mises en exergue dans le cas de la plaque encastree libre :

- La distribution equitable est la moins performante. La réduction du déplacement lors du lâcher n'est pas significative et elle met plus de 4s pour réduire les vibrations après l'impact,
- Les distributions DM et DA réduisent d'environ 35% les vibrations dues au lâcher en 1s et annulent les vibrations en 2.5s après l'impact,
- La distribution maximale est plus performante que la distribution adaptative mais de façon beaucoup moins régulière. La DM engendre le plus d'effet de spillover et beaucoup d'oscil-



(a) Potentiel actionneur



(b) Potentiel capteur

FIGURE 5.10 – Comparaison des distributions plaque simplement appuyée : Potentiel actionneur et capteur

lations dans le contrôle.

En conclusion, on privilégiera la distribution adaptative du régulateur flou décentralisé. Elle permet un contrôle régulier s’adaptant à n’importe quelles sollicitations et engendre peu d’effet de spillover.



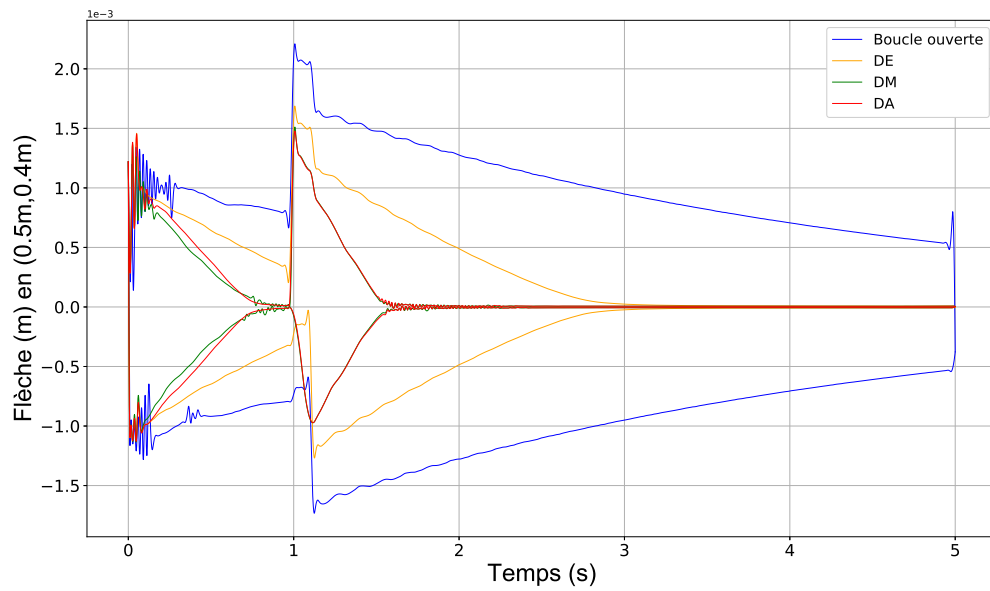
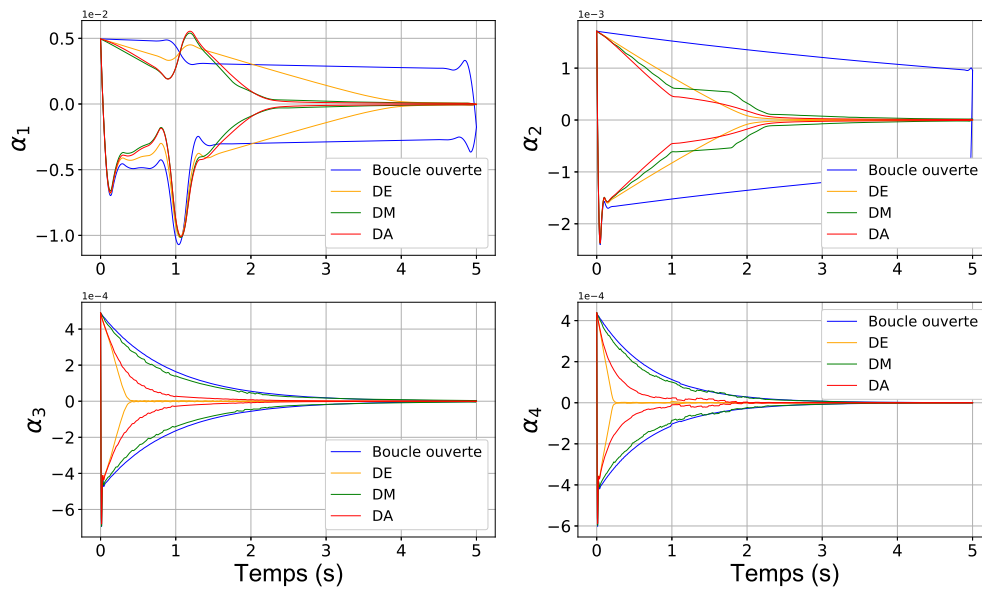
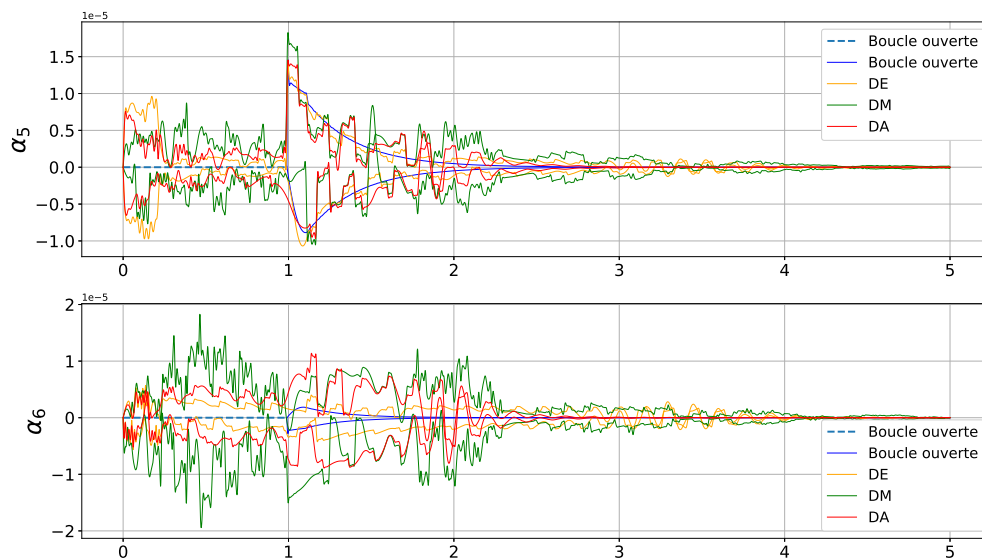


FIGURE 5.11 – Comparaison des distributions plaque simplement appuyée : Flèche

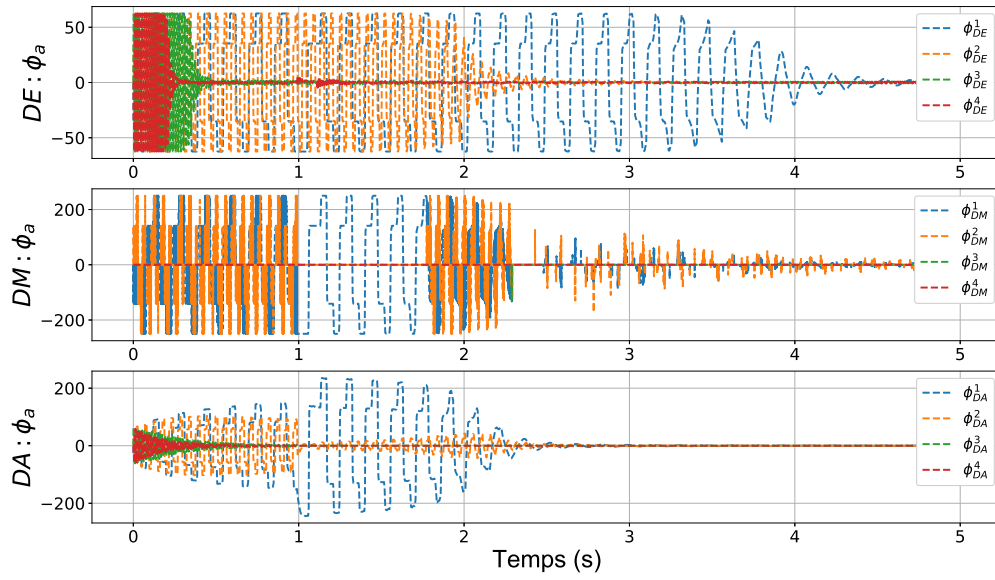


(a) Modes contrôlés : 1 à 4

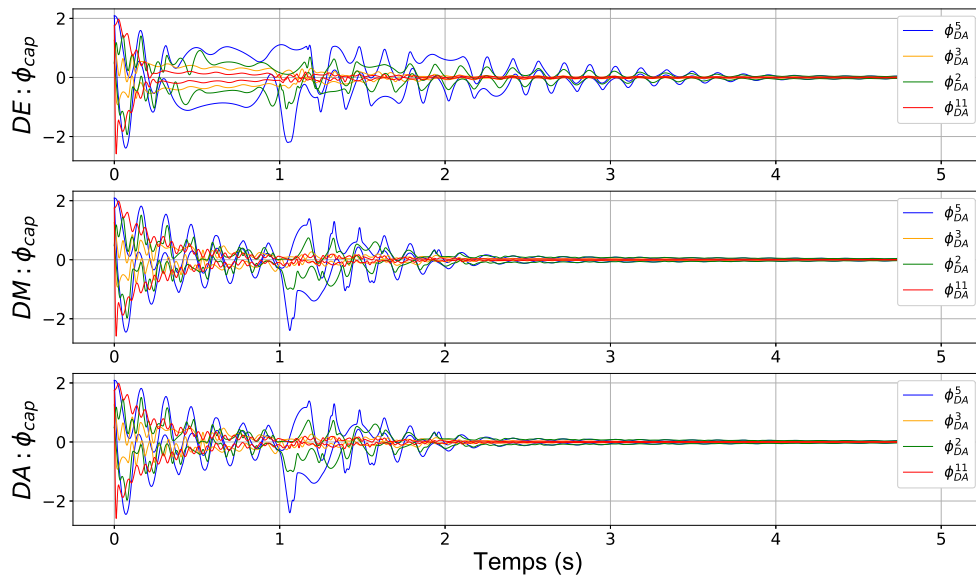


(b) Modes non contrôlés : 5 et 6

FIGURE 5.12 – Comparaison des distributions plaque encastree-libre : Déplacements modaux  $\alpha_i$



(a) Potentiel actionneur



(b) Potentiel capteur

FIGURE 5.13 – Comparaison des distributions plaque encadrée-libre : Potentiel actionneur et capteur

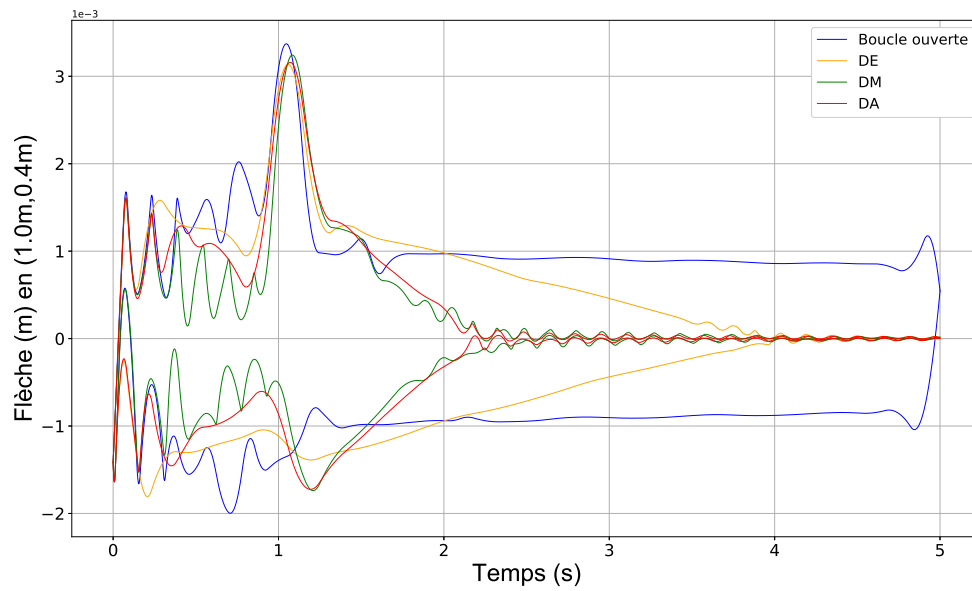


FIGURE 5.14 – Comparaison des distributions plaque encastree-libre : Flèche

## 5.4 Intérêt du régulateur flou vis à vis de la commande LQR

Dans cette dernière étude on compare le contrôleur flou décentralisé ayant une distribution adaptative, à un régulateur LQR. Les deux systèmes contrôlé-observé utilisent le même observateur.

La plaque FGPM est soumise à :

- Une condition initiale représentant un lâcher de la plaque :  $x_i(t = 0) = C$  pour  $i \in [1, 4]$ , avec  $C$  une constante,
- Une pression uniforme  $P$  sur toute la surface de la plaque, pour  $t \in [1.0, 5.0]$ , ayant une amplitude suivant une loi uniforme de distribution, reproduisant une sollicitation externe aléatoire.

Le régulateur LQR est construit avec deux actionneurs, choisis parmi les électrodes ayant le meilleur critère pour le contrôle du premier mode de la plaque. De la même façon que pour le contrôle de la poutre, la matrice  $\mathbf{Q}$  est prise égale à la matrice identité et les coefficients de la matrice  $\mathbf{R}$  permettent de régler la dynamique du régulateur et le potentiel maximal envoyé aux actionneurs. Ici, on ajuste ces coefficients de sorte que le potentiel maximum envoyé à chacun des deux actionneurs soit égal à  $\frac{\phi^{\text{TOT}}}{2}$ . Cet ajustement s'effectue sur le test du lâcher (supposé connu) et nécessite plusieurs simulations afin de régler correctement les coefficients.

On étudie les deux configurations suivantes : la plaque simplement appuyée sur son pourtour et la plaque encastrée-libre.

### 5.4.1 Plaque simplement appuyée

Dans le cas de la plaque simplement appuyée, le régulateur LQR est construit avec les actionneurs 6 et 10, et celle-ci est soumise à des vibrations induites par une condition initiale  $C = 1$  puis une pression uniforme d'intensité aléatoire  $P \in [-2, 2] \text{ kPa}$ .

La Figure 5.15 montre les déplacements modaux de la plaque :

- Les  $\alpha_i$  des modes contrôlés sont réduits par les deux régulateurs,
- Pour les modes non contrôlés, le régulateur LQR génère moins de spillover que le régulateur flou.

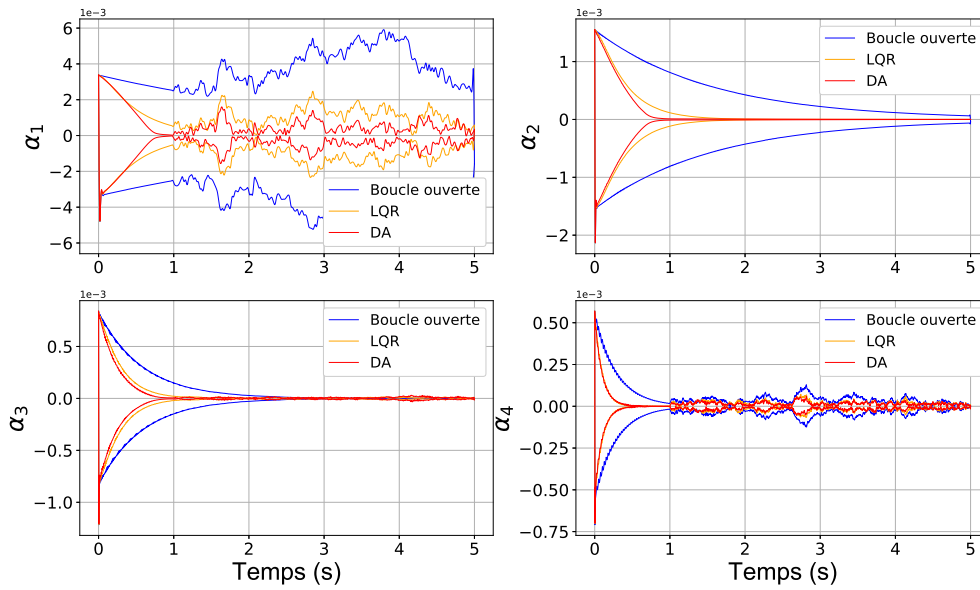
La Figure 5.16 présente les potentiels actionneur et capteur. On remarque que pendant la sollicitation aléatoire dans le cas de la commande LQR, la somme des potentiels actionneurs est inférieure à  $\phi^{\text{TOT}}$  : le LQR étant réglé pour le lâcher il n'est plus optimal pour d'autres sollicitations. D'après la Figure 5.17, représentant la flèche, on montre que le régulateur flou assure un meilleur contrôle. Il annule 90% des vibrations du lâcher en environ 0.5s alors que le régulateur LQR n'atténue que 75% des vibrations en 1s. Pour les sollicitations aléatoires, on remarque que le régulateur flou s'adapte mieux et entraîne une atténuation plus importante des vibrations que le régulateur LQR.

### 5.4.2 Plaque encastrée libre

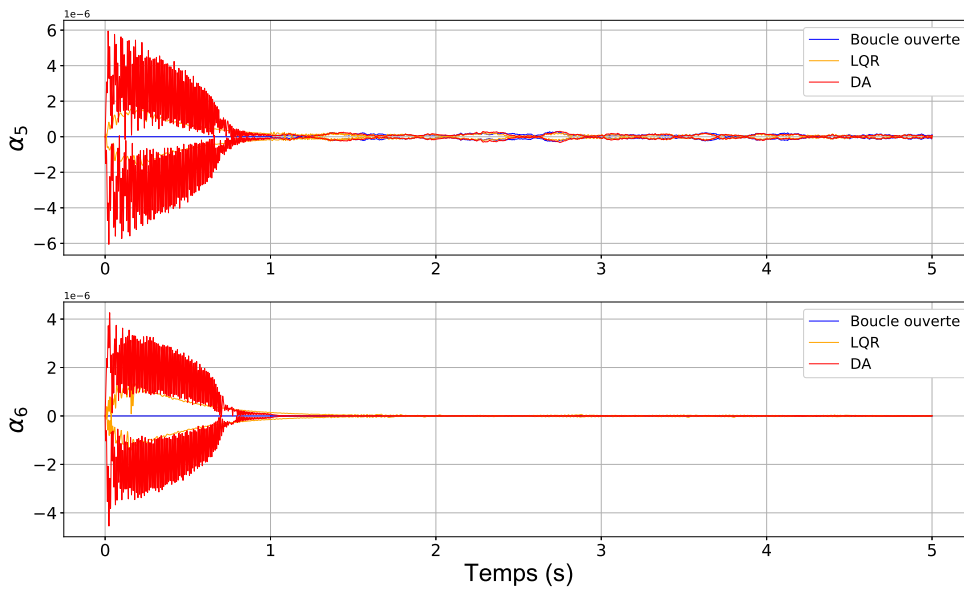
Dans le cas de la plaque encastrée-libre, le régulateur LQR est construit avec les actionneurs 5 et 9. La plaque est soumise à des vibrations induites par une condition initiale  $C = 0.2$  puis une pression uniforme d'intensité aléatoire  $P \in [-0.1, 0.1] \text{ kPa}$ .

Les Figures 5.18, 5.19, 5.20 présentent respectivement les déplacements modaux, les potentiels actionneur et capteur et la flèche. On peut faire les observations suivantes :

- Le régulateur flou assure un meilleur contrôle que le régulateur LQR,
- Le régulateur LQR génère moins de spillover que le régulateur flou,
- Le régulateur LQR n'utilise que 40% de  $\phi^{\text{TOT}}$  à chaque instant  $t$ , lors de la sollicitation aléatoire.



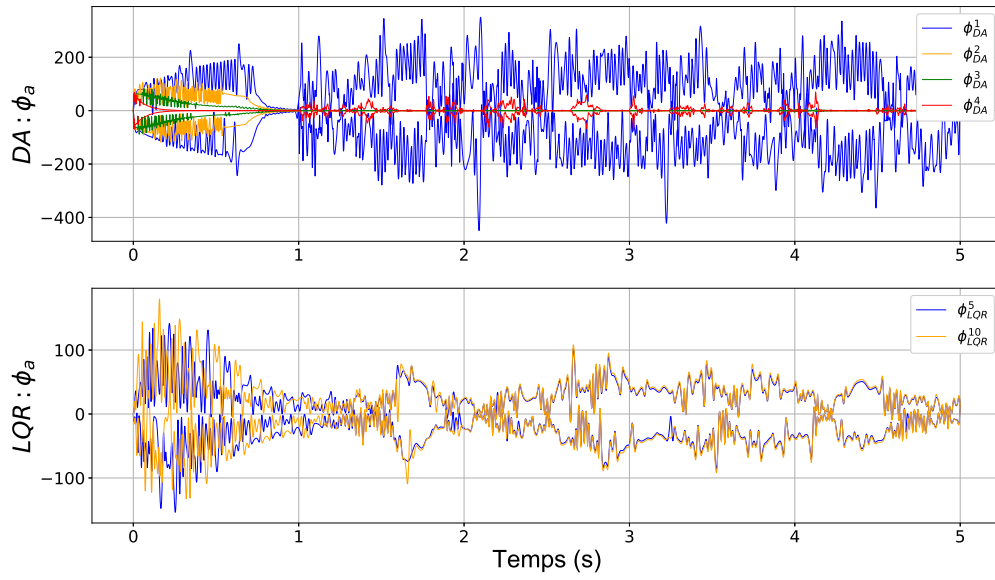
(a) Modes contrôlés : 1 à 4



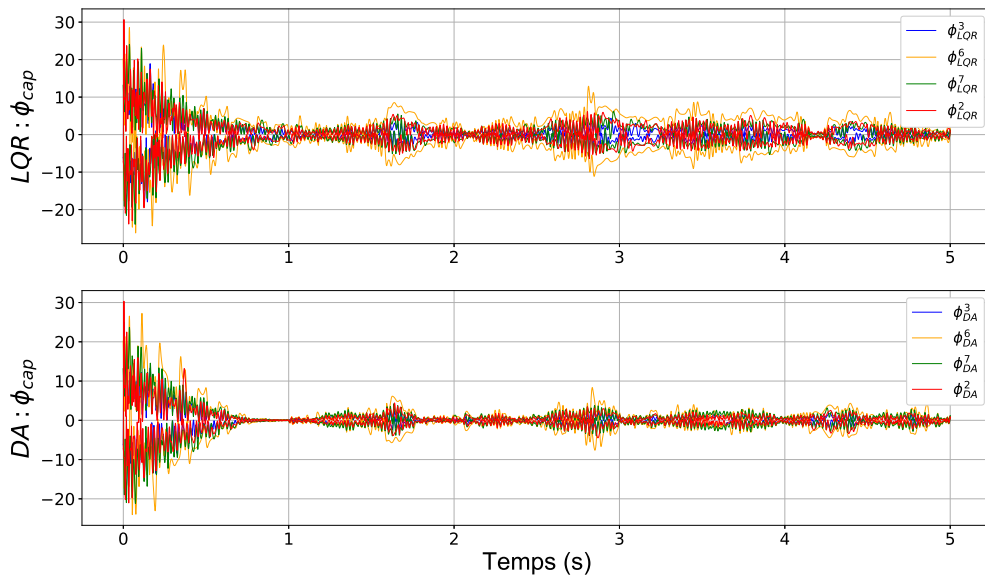
(b) Modes non contrôlés : 5 et 6

FIGURE 5.15 – Comparaison LQR plaque simplement appuyée : Déplacements modaux  $\alpha_i$

À nouveau, le régulateur LQR a été réglé pour le test de lâcher : il est donc optimal pour ce test mais est donc moins efficace sur d'autres sollicitations. À l'opposé, une fois le choix des actionneurs effectué, le régulateur flou ne nécessite aucun autre réglage et peut s'adapter à toutes sollicitations grâce à la mesure de l'énergie modale.



(a) Potentiel actionneur



(b) Potentiel capteur

FIGURE 5.16 – Comparaison LQR plaque simplement appuyée : Potentiel actionneur et capteur

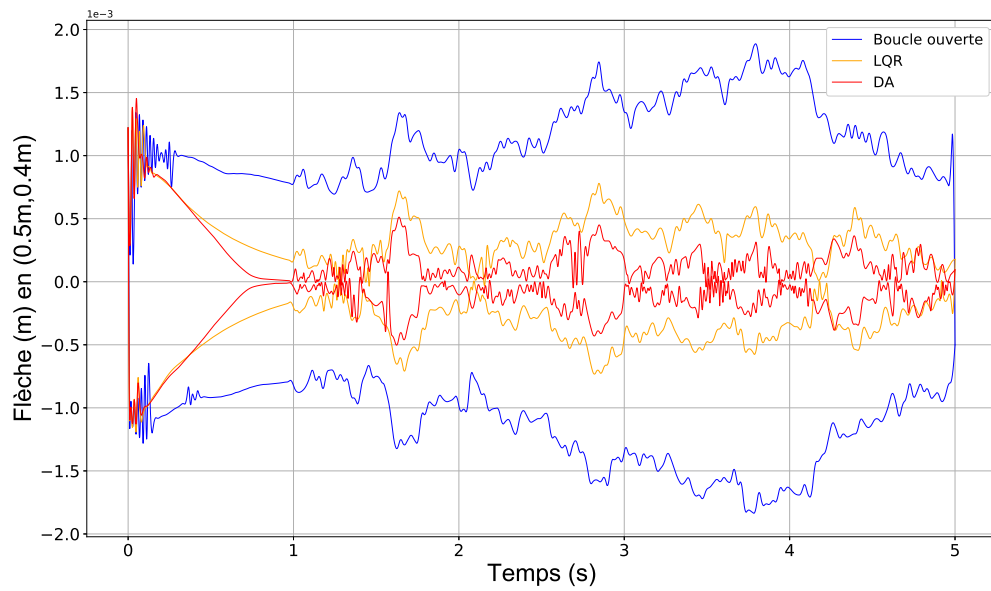
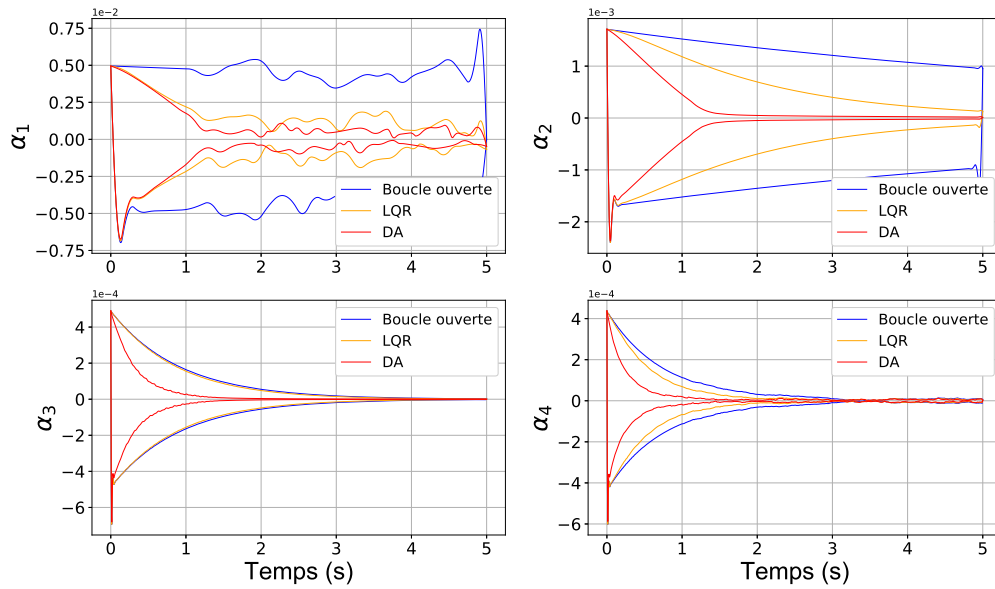
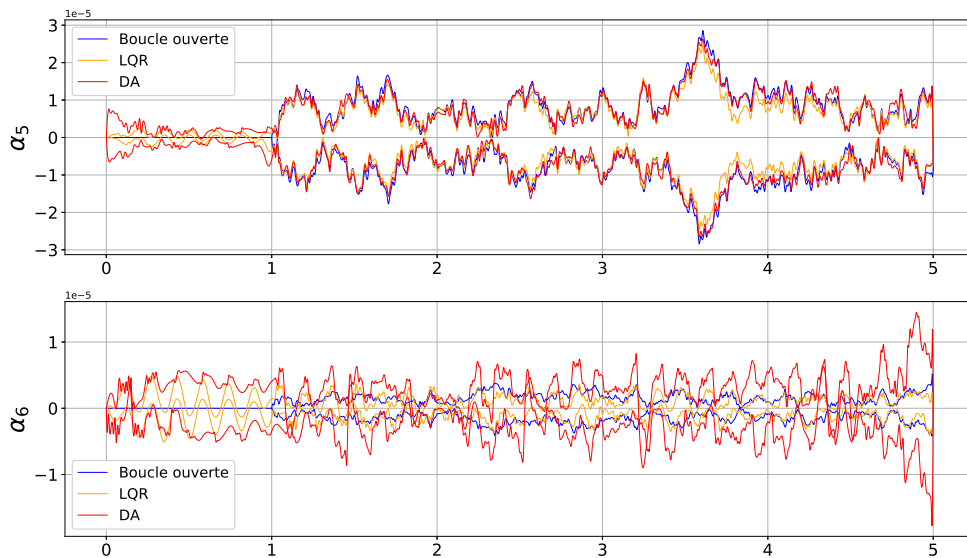


FIGURE 5.17 – Comparaison LQR plaque simplement appuyée : Flèche



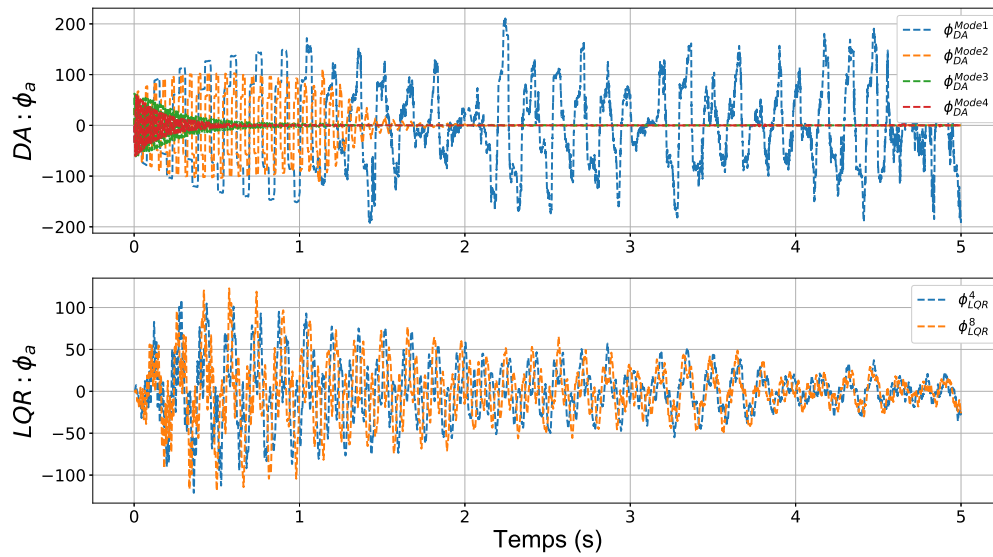


(a) Modes contrôlés : 1 à 4

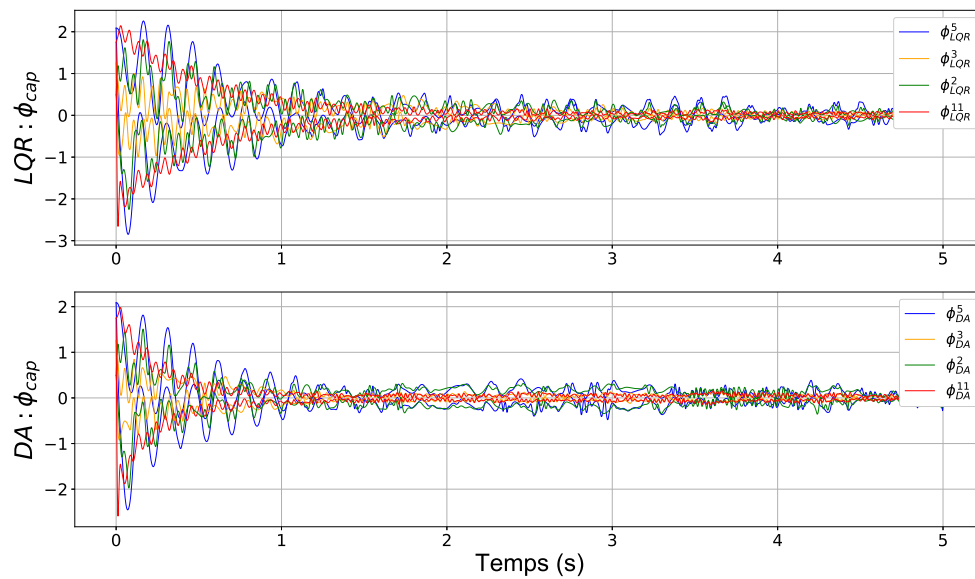


(b) Modes non contrôlés : 5 et 6

FIGURE 5.18 – Comparaison LQR plaque encastée-libre : Déplacements modaux  $\alpha_i$



(a) Potentiel actionneur



(b) Potentiel capteur

FIGURE 5.19 – Comparaison LQR plaque encastree-libre : Potentiel actionneur et capteur

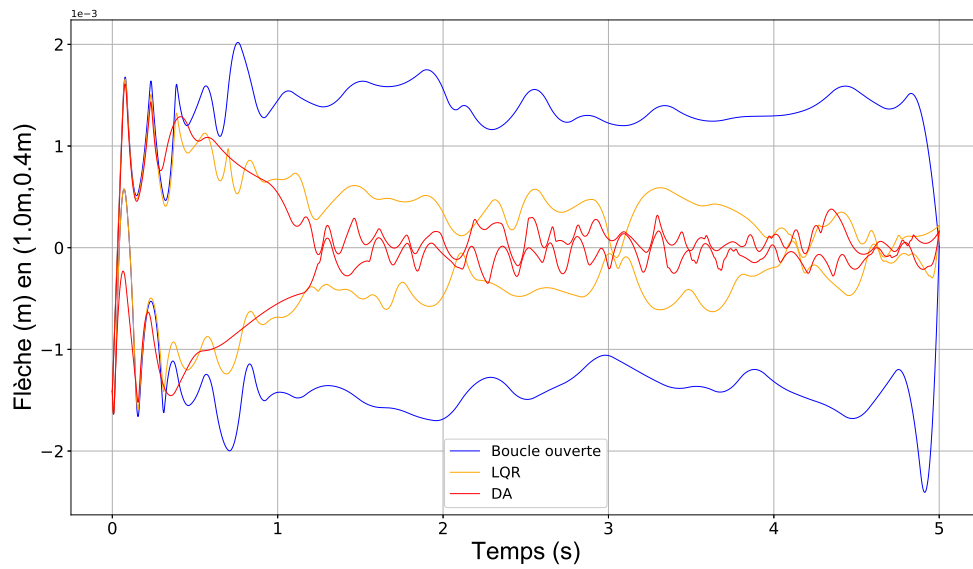


FIGURE 5.20 – Comparaison LQR plaque encastree-libre : Flèche

## 5.5 Conclusion

Ce chapitre porte sur les simulations de contrôle actif d'une plaque FGPM. Celle-ci est modélisée grâce à la méthode des éléments finis. L'élément de plaque d'ordre supérieur développé sous FEniCS à été validé. L'élément ayant la cinématique de Reissner-Mindlin est utilisé pour construire la représentation d'état du système.

La plaque FGPM considérée pour le contrôle actif est équipée de 16 électrodes pouvant servir comme capteurs ou actionneurs. Des critères d'optimisation de positionnement des actionneurs et des capteurs sont utilisés pour discriminer les électrodes en fonction de leur emplacement et du mode considéré.

Le système plaque commandé-observé est constitué d'un régulateur flou contrôlant les quatre premiers modes de la plaque et d'un observateur de Luenberger utilisant quatre capteurs.

Les différentes simulations de contrôle ont montré que :

- Le contrôle de chaque mode à l'aide de deux actionneurs au lieu d'un seul permet de réduire l'effet de spillover subi par la structure,
- Les trois distributions du potentiel maximum admissible donnent les résultats suivants :
  - La distribution équitable est la moins performante car elle n'adapte pas la répartition du potentiel,
  - Les distributions maximale et adaptative montrent des performances similaires. La distribution adaptative permet un contrôle entraînant moins d'effet de spillover et plus régulier.
- Le régulateur flou assure un contrôle plus efficace qu'un régulateur LQR dans le cas d'une variation de l'excitation au cours du temps,
- Le régulateur flou décentralisé nécessite une étape de paramétrage importante (forme et nombre de fonctions d'appartenance, méthode de défuzzification, choix des actionneurs et des capteurs, choix de la distribution, ...), mais qui ne dépend pas de la sollicitation : une fois ces paramètres établis, le régulateur flou s'adapte à n'importe quelle sollicitation.

## 5.6 Références

- BRISCHETTO, S. et E. CARRERA. 2009, «Refined 2d models for the analysis of functionally graded piezoelectric plates», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 20, n° 15, p. 1783–1797. [viii](#), [114](#), [115](#), [116](#)
- LU, P., H. LEE et C. LU. 2006, «Exact solutions for simply supported functionally graded piezoelectric laminates by stroh-like formalism», *Composite Structures*, vol. 72, n° 3, p. 352–363. [114](#), [116](#)
- ZHONG, Z. et T. YU. 2006, «Vibration of a simply supported functionally graded piezoelectric rectangular plate», *Smart materials and structures*, vol. 15, n° 5, p. 1404. [ix](#), [116](#), [121](#)



# Conclusion et Perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur le contrôle actif des vibrations de structures élancées (poutre et plaque) formées de matériau piézoélectrique à gradient de propriétés (FGPM).

Les principaux objectifs de ce travail ont été :

- de modéliser ces structures FGPM à l'aide de la méthode des éléments finis,
- de montrer la faisabilité et la potentialité des FGPM pour le contrôle actif des vibrations.

La première partie de ces travaux s'articule sur la modélisation du FGPM PZT4/Al/PZT4 utilisé pour le contrôle. Celui-ci s'inspire des bimorphes piézoélectriques et est pensé pour remplacer les structures intelligentes habituellement utilisées (une structure hôte à contrôler équipée de pastilles piézoélectriques). Il est graduel dans l'épaisseur et varie symétriquement du PZT4 sur les deux surfaces extérieures à de l'aluminium à la fibre moyenne. Le phénomène de percolation apparaît dans ce genre de composite, celui-ci entraîne l'apparition de trois parties : une partie conductrice au centre riche en aluminium (où la percolation a eu lieu) et deux parties isolantes proches des faces extérieures riches en PZT4 (où la percolation n'a pas eu lieu). Le matériau FGPM est caractérisé par deux paramètres :

- l'indice de gradation  $k$ , qui est choisi à la fabrication du matériau et varie dans l'intervalle  $[0, 5]$ ,
- le seuil de percolation  $V_T$ , qui est inhérent à la microstructure du matériau et dépend donc du processus de fabrication et de l'indice  $k$ . Celui-ci peut varier dans l'intervalle  $[0.1, 0.3]$

La méthode des éléments finis est utilisée afin d'étudier ces structures élancées FGPM. On a été amené à développer trois éléments finis :

- Un élément fini de poutre à deux nœuds développé sous Matlab, basé sur la cinématique de Timoshenko et dont le potentiel électrique est approximé par élément à l'aide de couches numériques,
- Un élément fini 3D tétraédrique à dix nœuds développé sous FEniCS, servant à valider les modélisations poutre et plaque,
- Un élément fini de plaque triangulaire à six nœuds développé sous FEniCS, basé sur une cinématique d'ordre supérieure et dont le potentiel électrique est approximé au nœud à l'aide de couches numériques.

Ces différents modèles ont permis dans un premier temps de comprendre l'influence des paramètres matériaux  $k$  et  $V_T$  sur les comportements statique et dynamique des structures FGPM :

- L'actionneur FGPM est le plus performant : i.e entraîne la plus grande déformée, lorsque  $k \in [0.4, 0.7]$  et lorsque le seuil de percolation est le plus faible,
- Le capteur FGPM est le plus performant : i.e génère le plus grand potentiel électrique, lorsque  $k$  tend vers sa plus grande valeur (le FGPM est quasiment entièrement constitué de PZT4) et pour les plus grandes valeurs du seuil de percolation,
- Les fréquences propres sont dépendantes de  $k$ , car ce paramètre modifie la rigidité globale et la masse volumique de la structure. Les fréquences diminuent quand  $k$  augmente. Le seuil de percolation n'a aucun impact sur les fréquences.

Dans un deuxième temps ces modèles ont permis de créer la représentation d'état de la structure, utilisée couramment dans le domaine de l'automatique et permettant la mise en place du contrôle actif des vibrations des structures. Celle-ci est basé sur la décomposition modale du système discrétisé, obtenu ici par la méthode des éléments finis.

La deuxième partie de ces travaux s'articule sur les simulations du contrôle actif de structures FGPM élancées. Le contrôle actif nécessite la construction d'un régulateur, générant la commande à envoyer aux actionneurs afin de réduire les vibrations et un observateur afin de reconstruire l'état de la structure à partir de la mesure fournie par les capteurs. Le contrôle à été mis en place pour la poutre et la plaque FGPM. Les deux systèmes observé-contrôlé on été construits à l'aide d'un observateur de Luenberger via la méthode de la synthèse quadratique et d'un régulateur LQR pour la poutre et un régulateur flou décentralisé pour la plaque.

Les simulations de contrôle de la poutre FGPM mettent en avant la possibilité de contrôle de structures FGPM et l'efficacité de ce type de contrôleur et ce pour toutes les valeurs de l'indice de gradation  $k$ . Les études paramétriques montrent que le contrôle avec un indice  $k$  faible réduit plus rapidement les vibrations.

Un des avantages des structures FGPM est l'activation des propriétés piézoélectriques via des électrodes déposées sur les surfaces extérieures. Dans le cas de la plaque, ces électrodes utilisées comme capteurs ou actionneurs peuvent à priori avoir n'importe quelle forme et taille, et on peut en déposer un grand nombre. Le régulateur flou décentralisé est alors construit dans l'idée de pouvoir facilement utiliser une multitude d'actionneurs ce qui est assez vite difficile pour un régulateur LQR. Ce régulateur est construit à l'aide d'un ensemble de sous-régulateurs contrôlant chacun un seul mode de la plaque et utilisant un ou deux actionneurs. Les simulations de contrôle de la plaque FGPM montrent que la régulation floue permet un contrôle performant et s'adaptant facilement aux changements de sollicitations subies par la structure.

La suite de ce travail peut s'ouvrir sur plusieurs perspectives :

1. L'optimisation du système plaque FGPM observé-contrôlé. Celle-ci peut porter sur plusieurs points :
  - L'optimisation du régulateur flou décentralisé : choix, nombre et bornes des fonctions d'appartenance des variables linguistiques ; règles d'inférence, méthode de défuzzification, ...
  - L'optimisation de la forme, de la taille, de la position et du nombre d'électrodes.
2. Une étude de fiabilité du contrôle actif des vibrations à l'aide d'un régulateur LQR ou d'un régulateur flou. Cette étude peut inclure :
  - Les bruits de mesures sur le potentiel capté par les capteurs non inclus dans ce travail,
  - Les incertitudes liées à la fabrication du FGPM : i.e les incertitudes sur l'indice de gradation  $k$ , sur le seuil de percolation  $V_T$  et également sur l'hypothèse de symétrie du FGPM entre les deux parties supérieure et inférieure,
  - Les incertitudes sur la base modale de la structure, qui est fortement liée à l'indice de gradation  $k$ ,
  - Sur le maintien d'une régulation efficace après un changement de conditions aux limites, par exemple un bord de la plaque passe d'un appui simple à libre.
3. De considérer l'étude d'un FGPM ayant des indices de gradation  $k$  différents dans la partie supérieure et inférieure. On pourrait ainsi optimiser les capacités actionneurs dans la partie supérieure et les capacités capteurs dans la partie inférieure. Il faudra par conséquent utiliser les électrodes supérieures en tant qu'actionneur et les électrodes inférieures en tant que capteur.  
On pourrait également étudier un FGPM où le matériau piézoélectrique est différent entre les parties supérieure et inférieure. Afin d'améliorer les performances capteurs, on peut

considérer le FGPM PZT4/Al/PVDF. En effet, le PVDF est un polymère piézoélectrique plus souple possédant de meilleures capacités capteur que le PZT4.





# Publications

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont reliés aux publications suivantes :

## Revue internationale avec comité de lecture

1. J. Maruani, I. Bruant, F. Pablo, L. Gallimard, *A numerical efficiency study on the active vibration control for a FGPM beam*, Composite Structures, 182, 478-486, 2017
2. J. Maruani, I. Bruant, F. Pablo, L. Gallimard, *Active vibration control of a smart functionally graded piezoelectric material plate using an adaptive fuzzy controller strategy*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2019

## Conférences internationales avec comité de lecture

1. J. Maruani, I. Bruant, F. Pablo, L. Gallimard, 20th International, *Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plates*, Conference on Composite Structure (ICCS20), Paris, France, 4-7 Septembre 2017
2. J. Maruani, I. Bruant, F. Pablo, L. Gallimard, *Fuzzy logic control of FGPM plates*, Design Modelling and Experiments for Advanced Structures and Systems (DeMEASS IX), Sesimbra, Portugal, 1-3 Octobre 2018

## Séminaires

1. J. Maruani, *Active vibration control of FGPM beam*, Séminaire de l'école doctorale franco-allemande (CDEFA), Stuttgart, Allemagne, Février 2016
2. J. Maruani, *Sensitivity analysis of FGPM beam static and active vibration control studies*, Séminaire de l'école doctorale franco-allemande (CDEFA), Stuttgart, Allemagne, Décembre 2016
3. J. Maruani, *Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plates*, Séminaire de l'école doctorale franco-allemande (CDEFA), Sèvres, France, Décembre 2017



# Annexe A

## Annexes

### A.1 Le verrouillage numérique d'une poutre en flexion simple

Afin d'introduire le problème du verrouillage numérique, considérons le problème d'une poutre en flexion simple. Les inconnues sont donc le déplacement transverse  $w_0$  et la rotation  $\theta_0$ .

On interpole les deux champs inconnus de la façon la plus générale en considérant les expressions suivantes :

$$w_0 = \sum_{j=1}^m w_j N_j \quad \theta_0 = \sum_{j=1}^n \theta_j M_j$$

où  $w_j$  et  $\theta_j$  sont des coefficients inconnus et où  $N$  et  $M$  sont les fonctions d'interpolations lagrangiennes de degré  $n-1$  et  $m-1$  respectivement. De façon générale,  $m$  et  $n$  sont indépendants bien que le cas  $m = n$  soit le plus commun.

Le degré minimal d'interpolation admissible correspond à un modèle linéaire, où les dérivées premières de  $w_0$  et  $\theta_0$  sont non nulles.

En considérant le cas le plus simple, c'est à dire  $m = n = 2$  (interpolation linéaire) on démontre qu'il existe un problème numérique.

En effet dans ce cas là :

- La dérivée de  $w_0$  est constante sur un élément et s'exprime comme :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w_2 - w_1}{l} \quad \text{où } l \text{ est la longueur de l'élément}$$

- $\theta_0(x)$  s'exprime :

$$\theta_0(x) = \theta_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \theta_2 \frac{x}{l} \quad \forall x$$

Or, en regardant le cas des poutres fines (i.e hypothèses d'Euler-Bernoulli) la déformation de cisaillement transversale est négligeable et on a l'égalité suivante :  $\theta_0(x) = -\frac{dw}{dx}$ .

En développant cette expression :

$$\begin{aligned} \theta_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \theta_2 \frac{x}{l} &= \frac{w_2 - w_1}{l} \\ x(\theta_2 - \theta_1) + \theta_1 l &= w_2 - w_1 \\ \text{impliquant : } \theta_1 = \theta_2 &= \frac{w_2 - w_1}{l} = \text{Cste} \end{aligned}$$

et  $\theta_0(x)$  est alors constant sur l'élément :

$$\theta_0(x) = \theta^1 = \text{Cste}$$

Un état constant de  $\theta_0(x)$  n'est cependant pas admissible car il implique une énergie nulle sur l'élément :

$$E_{flex} = \int_{x_e}^{x_e+l} \frac{EI}{2} \left(\frac{d\theta_0}{dx}\right)^2 dx = 0$$

Ce problème numérique est connu dans la littérature des éléments finis comme le verrouillage numérique en cisaillement ou shear locking.

Pour éviter le blocage numérique deux méthodes existent (REDDY [1993]) :

- L'interpolation consistante : on utilise une approximation de  $w_0$  et  $\theta_0$  telle que  $\frac{dw_0}{dx}$  et  $\theta_0$  soient des polynômes de même degré, donc en prenant  $m = n + 1$ .
- L'intégration réduite : on interpole  $w_0$  et  $\theta_0$  de la même façon (i.e  $m = n$ ) et on évalue le coefficient de rigidité associé à  $E_{flex}$  en utilisant une loi d'intégration numérique cohérente avec l'interpolation de  $\theta_0$ . Cependant, le coefficient de rigidité associé à l'énergie de cisaillement

$$\int_{x_e}^{x_e+l} \frac{GS}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} + \theta_0 \right)^2 dx$$

doit être évalué en utilisant une loi d'intégration numérique qui considère  $\theta_0$  avec une interpolation de même ordre que  $\frac{dw_0}{dx}$ . Si  $w_0$  et  $\theta_0$  sont approximés avec des polynômes linéaires, on doit utiliser une intégration en un point pour évaluer les coefficients de rigidité lié aux deux énergies. Cette intégration en un point est suffisante dans ce cas pour évaluer l'énergie de flexion mais sous estime l'énergie de cisaillement.

## A.2 Références

REDDY, J. N. 1993, *An introduction to the finite element method*, vol. 2, McGraw-Hill New York. II

