



HAL
open science

Hystérésis Magnétique et Rupture dans les Solides Paramagnétiques ou Ferromagnétiques mous

Mohammed Sabir

► **To cite this version:**

Mohammed Sabir. Hystérésis Magnétique et Rupture dans les Solides Paramagnétiques ou Ferromagnétiques mous. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Faculté des Sciences Semlalia, Université Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc, 1997. Français. NNT: . tel-02895634

HAL Id: tel-02895634

<https://theses.hal.science/tel-02895634v1>

Submitted on 9 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
MARRAKECH

THESE

Présentée à la Faculté pour obtenir
le Grade de Docteur d'Etat Es-Sciences
(Option : Mécanique)

**HYSTERESIS MAGNETIQUE ET RUPTURE
DANS LES SOLIDES PARAMAGNETIQUES
OU FERROMAGNETIQUES MOUS**

Par

Mohammed SABIR

(Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie)

Soutenu le 04 Janvier 1997, Devant la Commission d'Examen :

<u>Président :</u>	O. FASSI - FEHRI	Professeur, Université Mohammed V et Directeur de l'E.N.S.E.T.
<u>Examineurs :</u>	G.A. MAUGIN	Directeur de Recherche, Université Pierre et Marie Curie
	B. COLLET	Professeur, Université Pierre et Marie Curie
	A. LAHROUNI	Professeur , Université Cadi Ayyad
	D. AIT EL HABTI	Professeur , Université Cadi Ayyad
	A. BELGHIT	Professeur , Université Cadi Ayyad
	A. DAHLANE	Maître de Conférence, Université Cadi Ayyad

**UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
MARRAKECH

THESE

Présentée à la Faculté pour obtenir
le Grade de Docteur d'Etat Es-Sciences
(Option : Mécanique)

**HYSTERESIS MAGNETIQUE ET RUPTURE
DANS LES SOLIDES PARAMAGNETIQUES
OU FERROMAGNETIQUES MOUS**

Par

Mohammed SABIR
(Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie)

Soutenue le 04 Janvier 1997 devant la commission d'examen:

Président : **O. FASSI - FEHRI** Professeur, Université Mohammed V et
Directeur de l'E.N.S.E.T

Examineurs : **G.A. MAUGIN** Directeur de Recherche, C.N.R.S.,
Université Pierre et Marie Curie
B. COLLET Professeur, Université Pierre et Marie Curie
A. LAHROUNI Professeur, Université Cadi Ayyad
D. AIT EL HABTI Professeur, Université Cadi Ayyad
A. BELGHIT Professeur, Université Cadi Ayyad
A. DAHLANE Maître de Conférence, Université Cadi Ayyad

- *A* la mémoire de mes parents

- *A* ma femme

- *A* mes enfants

Remerciements

Je remercie vivement Monsieur le Colonel Salah EL MOUCH Commandant la Base Ecoles des Forces Royales Air et Commandant l'Ecole Royale de l'Air, d'avoir bien voulu m'autoriser à préparer cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect.

Ce travail a été effectué à la Faculté des Sciences Semlalia, que Monsieur le Professeur Abdelkader MOKHLLISSE, Doyen de cette Faculté, trouve ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance et mes plus vifs remerciements en témoignage à ses efforts pour le développement de la Science et de la Recherche dans notre pays.

Monsieur Omar FASSI-FEHRI, Professeur à l'Université Mohammed V et Directeur de l'E.N.S.E.T. à Rabat, a témoigné Un grand intérêt à mon travail, a accepté la tâche ingrate d'examiner et de juger ce travail et a bien voulu présider le Jury. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect et mes sincères reconnaissances.

Monsieur Gérard A.MAUGIN, Directeur de Recherche au C.N.R.S., m'a initié à la Recherche, m'a encadré durant la préparation de doctorat de l'Université Paris VI et m'a accueilli récemment au sein du Laboratoire de Modélisation en Mécanique pendant environ deux mois. Je tiens à le remercier tout particulièrement pour l'accueil chaleureux qu'il m'a offert, pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté . Qu'il trouve ici mes sincères reconnaissances et que ces collaborations horizontales puissent durer et se renforcer.

Monsieur Abderrahman LAHROUNI, Professeur à l'Université Cadi Ayyad, m'a accueilli au sein du Laboratoire

d'Hydrodynamique et d'Aérodynamique Expérimentale. Je ne saurais trop lui exprimer ici ma profonde gratitude pour l'aide précieuse, la mise en confiance dont il m'a fait bénéficier, les conseils efficaces et l'amitié qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer tout au long de l'élaboration de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

J'adresse mes remerciements à Messieurs Driss AIT EL HABTI, Abdelhamid BELGHIT et Abdelilah DAHLANE, Professeurs à l'Université Cadi Ayyad, qui ont accepté de juger ce travail, je leur en suis très reconnaissant.

Monsieur Bernard COLLET, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, a témoigné un grand intérêt à mon travail et a accepté la tâche ingrate d'examiner et de juger ce travail, dont il est rapporteur. Je le remercie vivement.

J'ai le plaisir d'exprimer ici m'a sympathie à Monsieur Abdelilah KANDRI-RODY, Professeur à l'Université Cadi Ayyad, et de le remercier pour les discussions Scientifiques et amicales que j'avais avec lui pendant la période où je menais mes travaux de Recherche sous sa direction.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du Laboratoire d'Hydrodynamique et d'Aérodynamique Expérimentale ainsi que le personnel du service de 3^{ème} cycle et particulièrement Madame Najat pour leur relations sociales et humaines.

Enfin, mes remerciements vont aussi à mes amis et collègues, Professeurs et Officiers, de l'Ecole Royale de l'Air pour leur aide et leur collaboration tout au long de ce travail.

AVANT PROPOS

- Nom et Prénom de l'auteur: SABIR Mohammed
- Intitulé du travail:
HYSTERESIS MAGNETIQUE ET RUPTURE DANS LES SOLIDES
PARAMAGNETIQUES OU FERROMAGNETIQUES MOUS
- Nom-Prénom du (ou des) Directeur(s) de recherche:
LAHROUNI Abderrahman
- Laboratoire(s) où les travaux ont été réalisés: (intitulé et institution)
Laboratoire d'Hydrodynamique et d'Aérodynamique
Expérimentale, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech
- Laboratoire(s) avec le(s) quel(s) il y a eu collaboration pour ce travail:
Néant
- Date de commencement de ce travail: 1992
- Rapporteur(s) autre(s) que l'encadrant
Professeur Omar FASSI-FEHRI
Professeur Bernard COLLET
- Cadres de coopération-soutien financier
Néant
- Principales publications ou communications auxquelles ce travail a
donné lieu (joindre liste en se limitant à celles qui se rapportent à ce
travail uniquement).

LISTE DES PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

M. SABIR

“Constitutive Relations for Magnetomechanical Hysteresis in Ferromagnetic Materials”, in: *International Journal of Engineering Sciences*, **33**, pp. 1233-1249, 1995.

M. SABIR

“Thermodynamical Formulation of Stress Effects on Magnetic Hysteresis”, in: *international Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, **09**, pp 1- 21, 1996.

M. SABIR and G.A. MAUGIN

“On the fracture of Paramagnets and Soft Ferromagnets”, in: *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **31**, pp. 425-440, 1996.

M. SABIR

“Coupled Magnetomechanical Hysteresis Effects”, Publication Soumise : *Revue Internationale A.J.O.T.*, 1996.

M. SABIR

“Coupled Magnetomechanical Hysteresis Effects” Communication Acceptée au : *Premier Congrès Maghrébin de la Mécanique* , Ghardaia, Mars 1996.

M. SABIR and A.LAHROUNI

“Modèle Mathématique de l’Hystérésis Magnéto-mécanique dans les Matériaux Ferromagnétiques”, Communication Acceptée au : *CIMASI’96*, Casablanca 1996.

ملخص

في هذه الاطروحة سنقدم علاقة أساسية لكي تعطينا وصفا جيدا للتخلفية الميكاطيسية في المواد الحديدية المغنطة. سنقدم أيضا معلومات مثل المغنطة المتخلفة، الدالة للتحميل أو التفريغ المغنطيسي، المنحنية للمغنطة الاولية، الحلقة الكبرى للتخلفية، الحلقة الاولية للتخلفية و المنحنية المشتقة. سنحلل أيضا القياسات الضرورية لبناء هذه الحلقات التخلفية. أخيرا سندرس تأثير استعمال الارهاقات على شكل هذه المنحنيات التخلفية المغنطيسية وعلى مستوى التشبع. إذا في استطاعتنا إيجاد بطريقة عامة الطاقة الضائعة المشاركة للتخلفية.

باستعمالنا للرسم البياني الدينا حراري الذي طور أخيرا لتسوية التخلفية المغنطيسية و المغنطة، تمكنا في هذه الاطروحة من وصف تأثير الميكاطيسية على المغنطة وعلى هياكل الميادين المغنطيسية في المواد الحديدية المغنطة. بتخمين جيد يمكننا أن نعتبر هذه العلاقات كقاعدة دينام حرارية معادلة لنظرية شان (التي قدمت في الحالة الحديدية المكهربة). التأثيرات المتعلقة بالوقت والتأثيرات المستقلة عن المعدل وضعت هي الاخرى تحت الدرس. وحصلنا أيضا على المعادلة التفاضلية التي تظهر حمولة هياكل الميادين. ظاهرة المغنطة المحثة عن الارهاق برهنت هي الاخرى .

إذا أخذنا كقاعدة النظرية الشبه السكوطيسية للمواد المطاطية المتوازية المغنطيسية والمواد الحديدية المغنطة الطرية، يمكننا اثبات العبارات المعدلية للطاقة المتحررة. وتشير إلى أن التكاملات المستقلة عن المحيط الملائم والمفيدة لدراسة الانشقاق درست هي الاخرى في هذه الرسالة. بالتالي يمكن إظهار نفس النتائج المحصل عليها باستعمال النظرية التمهيدية للمجالات التي تستعمل ارهاقات إشبلي والقوات المادية. من خلال استعمالنا لتطبيق بسيط في مشكلة التشقق المقاوم للسطح لهيكل تحصري مغنطيسي تحت تصرف مجال مغنطيسي محوري ، يظهر بوضوح مدى أهمية النتائج المحصل عليها. ويمكننا توظيف نفس المعلومات لدراسة تأثير المطاوعطيسية.

كلمات جوهرية : تخلفية، ميكاطيسية، حديدي ممغنط ، مغنطة، تمطط ، مطاوعة، نظرية طاقة، تشقق مطاطيسي.

Abstract

In this thesis, we present a constitutive relation that appears to give a good description of rate-independent magnetomechanical hysteresis in ferromagnetic materials. Notions such as residual magnetization, magnetic loading (or unloading) function, first magnetization curve, major hysteresis loops, primitive hysteresis loops and derivative curve are introduced. The main arguments which are necessary to construct the magnetic hysteresis loops and the derivative curves are discussed. We also study the effects of couplings with the stress on the overall shape of the magnetic hysteresis loops and the level of saturation. The hysteresis loss associated with a general loop is found.

In this work, we use a recently developed thermodynamical scheme for the modelling of magnetization and magnetic hysteresis. This work aims at a formulation of magnetomechanical effects on magnetization and magnetic domain structures in single crystalline cubic ferromagnets. With the appropriate identifications, these relations can be considered as an equivalent thermodynamical basis for Chen's theory (established for ferroelectrics). Time-dependent effects and rate-independent effects are investigated. An integro-differential equation for the change in domain structures is obtained. The phenomenon of stress induced magnetization is also demonstrated.

Expressions of the energy-release rates are established on the basis of the rotationally invariant (finite-strain) quasi-magnetostatic theory of elastic paramagnets and soft ferromagnets for which neither magnetic ordering nor spin effects need to be introduced. The corresponding path-independent integrals useful in fracture studies are constructed and this is shown to yield essentially the same results as the canonical field-theoretic approach using the notions of Eshelby stress and material forces. A simple application to the antiplane crack problem of a magnetostrictive body in an axial bias magnetic field illustrates the use of the obtained expressions. The same notions could be used to study the so-called magneto-plastic effect.

Key words: Hysteresis, Magnetomechanical, Ferromagnetic, Magnetization, Elasticity, Plasticity, Energy Theory, Magnetoelastic Fracture.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons une relation constitutive qui donne une bonne description d'hystérésis magnétomécanique dans les matériaux ferromagnétiques. Nous présentons des notions comme l'aimantation résiduelle, la fonction de chargement (ou déchargement) magnétique, la courbe de première aimantation, la boucle majeure d'hystérésis, la boucle primitive d'hystérésis et la courbe dérivée. Nous analysons aussi, les arguments nécessaires à la construction de ces boucles d'hystérésis. Nous étudions aussi l'effet de l'application de contraintes sur la forme de ces boucles d'hystérésis magnétique et sur le niveau de saturation. Ainsi, nous avons trouvé d'une manière générale, l'énergie perdue associée à l'hystérésis.

En utilisant un schéma thermodynamique récemment développé pour modéliser l'hystérésis magnétique et l'aimantation, ce travail a pour ambition de formuler l'effet magnétomécanique sur l'aimantation et sur les structures des domaines magnétiques dans les matériaux ferromagnétiques. Avec une bonne approximation, ces relations peuvent être considérées comme une base thermodynamique équivalente à la théorie de Chen (présentée dans le cas ferroélectrique). Les effets dépendant du temps et les effets indépendants du taux sont également étudiés. Une équation différentielle qui montre le chargement des structures des domaines est donc obtenue. Le phénomène de l'aimantation induite par des contraintes est aussi démontré.

En se basant sur la théorie de la quasi-magnétostatique des paramagnétiques élastiques et des ferromagnétiques doux, on a établi les expressions de taux de restitution de l'énergie libérée. Les intégrales indépendantes du contour correspondantes et qui sont utiles pour l'étude de la rupture sont construites. Par conséquent, on peut montrer qu'on a les mêmes résultats que l'approche théorique des champs qui utilise les contraintes d'Eshelby et les forces matérielles. Une simple application au problème des fissures antiplanes d'un corps magnétostrictif, sous l'action d'un champ magnétique axial, illustre bien l'utilisation des expressions obtenues. Les mêmes notions peuvent être utilisées pour étudier l'effet magnéto-plastique.

Mots Clés: Hystérésis, Magnétomécanique, Ferromagnétique, Aimantation, Elasticité, Plasticité, Théorie Energétique, Fissuration Magnétoélastique.

Introduction Générale

Durant ces dernières années, les matériaux ferromagnétiques sont devenus un sujet de très grande importance, aussi bien de point de vue théorique que pratique. Par conséquent, ces matériaux ferromagnétiques sont largement utilisés par la technologie moderne. Comprendre les propriétés magnétiques d'un ferromagnétique est une tâche difficile à cause de la dépendance de ces propriétés de plusieurs facteurs, comme la microstructure, la contrainte interne, la symétrie cristallographique et autres. Par conséquent, un tel sujet reste vaste et les résultats obtenus jusqu'à présent sont loin de l'épuiser. La plus grande partie des travaux existants concerne le cas purement magnétique, les généralisations aux situations plus complexes contenant encore des problèmes non résolus.

On fait varier un stimulus extérieur de manière alternée ou périodique avec, éventuellement, une augmentation simultanée de son amplitude et on enregistre la réponse du système. Après un certain temps, la réponse elle-même devient périodique et le diagramme représentant la réponse en fonction de l'agent extérieur devient un cycle fermé appelé "boucle d'hystérésis". Le phénomène d'hystérésis est rencontré dans plusieurs domaines scientifiques. On peut citer comme exemples : l'hystérésis mécanique, l'hystérésis magnétique et l'hystérésis ferroélectrique.

Preisach [1] est parmi les premiers à s'intéresser à l'hystérésis. Dans son étude, il a considéré un matériau magnétique comme un ensemble de domaines élémentaires possédant chacun un cycle d'aimantation rectangulaire et symétrique. Pour déterminer la cause de l'hystérésis magnétique, il est nécessaire de considérer la question du déplacement des parois entre les domaines [2]. Une paroi entre deux domaines n'est pas une surface géométrique mais c'est une zone intermédiaire de faible épaisseur avec une variation continue de l'orientation du moment magnétique du spin. Ainsi, sous l'action d'un champ magnétique extérieur, les domaines de Weiss, dont la direction d'aimantation spontanée est dans la direction du champ extérieur, s'agrandissent aux dépens de domaines dont la direction est très différente. Ceci se traduit par un déplacement réversible des parois dans les champs faibles, irréversible dans les champs plus élevés. A l'approche de la saturation, les moments magnétiques tournent pour s'orienter parallèlement au champ extérieur [3]. Sous l'action d'une variation du champ extérieur, une paroi se déplace réversiblement et rencontre une discontinuité, elle s'arrête malgré la croissance du champ extérieur [4]. Si celui-ci atteint une valeur suffisamment

élevée, la paroi est arrachée de ce point d'ancrage et se fixe en d'autres points, ce qui crée une situation irréversible lorsque le champ extérieur est supprimé.

Durant ces dernières années, il y a eu plusieurs contributions au sujet des propriétés magnétomécaniques dans les matériaux ferromagnétiques. Nous noterons, entre autres, les travaux de Becker & Kerstein [5] et Becker & Doring [6] sur les effets des contraintes sur la courbe d'aimantation, de Néel [4] sur l'ancrage des parois magnétiques, de Brown [7] sur l'aimantation induite par des contraintes, de Maugin [8 – 10] sur la relaxation magnétique dans les ferromagnétiques rigides ou déformables, de Maugin [3, 11] sur le couplage entre défauts et propriétés magnétoélastiques dans les ferromagnétiques cristallins et de Maugin et al [12 – 14] sur l'examen des relations et des interactions entre l'hystérésis magnétique et l'état mécanique de quelques matériaux. Cela a une grande importance pratique pour le développement de certains aspects du contrôle non destructif, c'est-à-dire, l'aimantation par des mouvements saccadés (effets Barkhausen qui est le signal de haute fréquence réémis par un échantillon ferromagnétique lorsque celui-ci est aimanté en une boucle d'hystérésis sous l'action d'un champ magnétique à basse fréquence) des parois ferromagnétiques [15, 16].

Récemment une théorie basée sur un modèle physique a été faite dans le but de détailler le phénomène d'hystérésis ferromagnétique. Cette théorie qui est due à Jiles & Atherton [17, 18] est très utile, car elle a besoin seulement de peu de paramètres pour caractériser l'hystérésis. Elle a été étendue par Sablik & Jiles [19] dans le but d'expliquer l'effet magnétomécanique dans les aciers et dans autres matériaux ferromagnétiques. En utilisant la théorie des variables internes, on construit simultanément les comportements irréversibles mécanique plastique et hystérésis magnétique (Voir Chernyi [20], Maugin et al [12], Maugin [21, 22], Maugin & Sabir [13] et Motogi & Maugin [23]). De ce fait cette théorie aboutit aux effets de plasticité et d'hystérésis magnétique sous la forme d'équations d'évolution de type "plasticité" pour la déformation plastique et l'aimantation résiduelle d'une part, et les écrouissages mécaniques et magnétiques d'autre part. Les processus réversibles et irréversibles se trouvent couplés par un couplage magnétomécanique de type magnétostrictif (c'est-à-dire un effet produisant une contrainte quadratique dans le champ magnétique).

Durant ces dernières années, plusieurs travaux ont été faits dans le but de développer la théorie des défauts micro et macroscopiques dans les solides électro magnétiques; évidemment, les fissures occupent la seconde place dans la théorie des défauts. Cela est particulièrement vrai dans le cas du problème de rupture dans la théorie électroélastique des piezoélectriques et des céramiques (Voir les travaux de Parton [24], Pak & Herrmann [25], Mc Meeking [26], Sosa [27], Suo et al [28], Maugin & Epstein [29], Dascalu & Maugin [30 – 32] et Lee et al [33]). Ces travaux sont faits essentiellement, dans le but d'établir le critère de propagation des fissures en présence des couplages électromécaniques. Dans ce contexte, l'idée générale la plus pratique est l'intégrale indépendante du contour pour laquelle la célèbre intégrale J de la rupture purement élastique est l'exemple le plus popu-

laire.

La méthode de l'intégrale J et son extension pour exprimer le critère, d'amorçage d'une rupture a fait l'objet, depuis son énoncé par Rice [34] en 1968, d'un développement considérable. Il semble historiquement que la proposition d'exprimer un critère énergétique sous forme d'une intégrale indépendante du contour soit plus ancienne, la première publication sur ce sujet est apparue en 1960 (voir Sanders [35]). Simultanément à Rice en 1968, Charepanov [36] et Atkinson & Eshelby [37] ont proposé une expression équivalente à la force d'extension de fissure sous forme d'intégrale indépendante du contour. En fait, ces théories dérivent naturellement de la théorie des forces agissant sur les défauts dans les cristaux et développé par Eshelby [38] à partir du tenseur d'impulsion-énergie. Toutefois, cette théorie a été modifiée pour être utilisée pour un milieu élastique continu contenant des défauts et des inhomogénéités au lieu de cristaux contenant des dislocations. Le succès de l'intégrale J pour étudier les problèmes de rupture dans le domaine élasto-plastique repose sur les trois propriétés essentielles de cette intégrale de contour : elle est indépendante du contour d'intégration, elle est reliée à la variation d'énergie potentielle du corps fissuré lorsque la fissure se déplace et elle permet de décrire le champ de contraintes et de déformations. L'indépendance de l'intégrale J vis-à-vis du contour d'intégration a été largement démontrée par des calculs en éléments finis et par des expériences.

Dans la première partie de ce travail, on passe en revue les différentes théories simples actuellement disponibles. Ainsi, on présente la magnétostriction comme l'ensemble des relations liant les propriétés mécaniques d'un matériau à ses propriétés magnétiques. Les phénomènes de magnétostriction sont classés, suivant leur aspect extérieur, sans tenir compte de leurs causes profondes. On définit aussi dans cette partie le modèle de Preisach [1] qui est basé sur des hypothèses concernant les mécanismes physiques de l'aimantation, le modèle de Néel [4] qui calcule les changements d'aimantation provoqués par un champ extérieur en tenant compte de l'accroissement de certains domaines aux dépens des voisins, le modèle de Visintin [39] qui est purement mathématique et le modèle de Jiles & Atherton [17, 18] qui donne l'aimantation d'une manière explicite en fonction du champ magnétique. Dans la première partie, on traite aussi la théorie de Néel où l'expression approchée de la force coercive provient des inégalités locales des tensions internes dans le matériau.

En se basant sur des études antérieures [13, 40, 41] de l'hystérésis ferromagnétique, nous présentons dans la deuxième partie de ce travail des simulations numériques pour des effets d'hystérésis magnéto-mécanique. Pour cela, on prend un échantillon ferromagnétique non aimanté ou démagnétisé par élévation de température et on exerce un champ magnétique croissant; la courbe de première aimantation obtenue est totalement réversible lorsqu'il s'agit des matériaux où il n'y a ni impureté ni défauts cristallins et irréversible quand il y a impureté et défauts cristallins [17, 18]. En donnant tous les arguments nécessaires on peut tracer des courbes d'hystérésis ainsi que des courbes dérivées dite "Papillons". Quand on

prend un corps ferromagnétique non aimanté et on exerce en même temps un champ magnétique et une contrainte dont l'effet plastique est non négligeable, sans modifier le seuil magnétique, la courbe finale d'hystérésis change de forme suivant la valeur de la contrainte et la valeur du coefficient de magnétostriction. Comme le champ coercif est resté le même, ce qui n'est pas le cas de point de vue expérimental [42], il faut donc pour une meilleure correspondance faire dépendre convenablement le seuil magnétique de l'état de contraintes; par conséquent, la courbe finale d'hystérésis trouve une forme convenable en tenant compte de la nouvelle saturation, de la valeur de la contrainte appliquée et de la valeur du coefficient de magnétostriction. Les courbes dérivées dépendent elles aussi des contraintes appliquées, du seuil magnétique et du coefficient de magnétostriction.

Dans la troisième partie de ce travail, on utilise le modèle développé dans les références [13], [23] pour déduire un ensemble cohérent de relations thermodynamiques pour la description de l'effet magnétomécanique. On introduit aussi des variables internes pour tenir compte de l'accroissement de certains domaines magnétiques aux dépens des voisins. Un modèle équivalent à celui de Chen [43] est obtenu. Ainsi la théorie est appliquée pour décrire le phénomène de la magnétostriction induite par des contraintes et le phénomène de l'aimantation induite par des contraintes.

Le but de la quatrième partie de ce présent travail est de présenter une formulation générale du taux de restitution de l'énergie et de l'intégrale J magnétoélastique, cela rentre bien sûr dans le cadre de la magnétoélasticité des matériaux paramagnétiques et des matériaux ferromagnétiques doux. Cette restriction signifie que les corps magnétiques considérés sont faiblement magnétisables et que l'effet d'hystérésis n'est pas présent (Pour le cas général, on recommande les travaux de Fométhé & Maugin [44,45]). Pour atteindre notre objectif, on a besoin d'établir soigneusement la théorie de la magnétoélasticité. Cela a été proposé par plusieurs auteurs, notamment dans les années soixante dix (voir particulièrement les travaux récents de Maugin [46] et Eringen & Maugin [47]). Le couplage magnétoélastique utilisé est de type magnétostrictif, mais la théorie est construite de telle manière qu'elle tient compte de toute sorte de couplage magnétoélastique.

References

- [1] **F.Preisach**, Zeit. Physik, 94 , p. 277, 1935
- [2] **L.D.Landau & E.M.Lifshitz**, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, New York, 1960
- [3] **G.A.Maugin**, Classical Magnetoelasticity in Ferromagnets with Defects, in : *Electromagnetic Interactions in Elastic Solids*, Ed. H.Parkus, p. 243-324, Springer Verlag, Wien, 1979
- [4] **L.Néel**, Cahiers de Physique, 12, p. 1, 1942; 13, p. 18, 1943
- [5] **R.Becker & A.Kerstein**, Z. Phys., 64, p. 660, 1930
- [6] **R.Becker & W.Döring**, Ferromagnetismus, Springer Verlag, Berlin, 1939
- [7] **J.W.F.Brown**, Phys. Rev., 75, p. 147, 1949
- [8] **G.A.Maugin**, Physica, 81a, p. 454, 1975
- [9] **G.A.Maugin**, Micromagnetism, in : *Continuum Physics*, Vol III, Ed A.C.Eringen, p. 213-312, Academic Press, New York, 1976
- [10] **G.A.Maugin**, Phys. Rev., B25, p. 7015, 1982
- [11] **G.A.Maugin & A.Fométhé**, Int. J. Engng. Sci., 20, p. 885, 1982
- [12] **G.A.Maugin, M.Sabir & P.Chambon**, Coupled Magnetomechanical Hysteresis in Ferromagnets : Application to non Destructive Testing, in : *Electromagnetomechanical Interactions Solids and Structures*, Ed. Y.Yamamoto & K.Miya, p. 255-264, North-Holland, Amsterdam, 1987
- [13] **G.A.Maugin & M.Sabir**, Int. J. Plasticity, 6, p. 573, 1990
- [14] **M.Sabir & G.A.Maugin**, Arch. Mech., 40, p. 829, 1988
- [15] **V.M.Rudyak**, Soviet Phys. Uspekhi, 13, p. 451, 1971
- [16] **R.Rautioaho, P.Karjalainen & M.Moilanen**, J. Magnetism Magnetic Mater., 68, p. 314, 1987
- [17] **D.C.Jiles & D.L.Atherton**, J. Appl. Phys., 55, p. 2115, 1983
- [18] **D.C.Jiles & D.L.Atherton**, J. Phys. D : Appl. Phys., 17, p. 1265, 1984

- [19] **M.J.Sablik & D.C.Jiles**, J. Appl. Phys., 64, p. 5402, 1988
- [20] **L.T.Chernyi**, Models of Ferromagnetic Continuous Media with Magnetic Hysteresis, in : *Macroscopic Theories of Matter and Fields*, Ed. L.I.Sedov, p. 116-140, Mir Publisher, Moscow, 1983
- [21] **G.A.Maugin**, Coupled Magnetomechanical and Electromechanical Hysteresis Effects, in : *Applied Electromagnetics in Materials*, Ed. K.Miya, p. 5-18, Pergamon Press, Oxford, 1988
- [22] **G.A.Maugin**, Thermodynamics of Hysteresis, in : *Non-Equilibrium Thermodynamics*, Eds. S.Sieniutycz and P.Salamon, p. 25-52, Vol 7, Taylor and Francis, New York, 1991
- [23] **S.Motogi & G.A.Maugin**, Nonlinear Stress-Strain Behavior of Multi-Domain Ferromagnets, in : *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures*, Eds. J.S.Lee, G.A.Maugin & Y.Shindo, p. 99-114, AMD-Vol. 161, (A.S.M.E., New-York, 1993)
- [24] **V.Z.Parton**, Acta Astronautica, 3, p. 671, 1976
- [25] **Y.E.Pack & G.Herrmann**, Int. J. Engng. Sci., 24, p. 1375, 1986
- [26] **R.M.Mc Meeking**, Int. J. Engng. Sci., 28, p. 605, 1991
- [27] **H.Sosa**, Int. J. Solids Structures, 29, p. 2613, 1992
- [28] **Z.Suo, C.M.Kuo, D.M.Barnett & J.R.Willis**, J. Mech. Phys. Solids, 40, p. 739, 1992
- [29] **G.A.Maugin & M.Epstein**, Proc. Roy. Soc. Lond., A433, p. 299, 1991
- [30] **C.Dascalu & G.A.Maugin**, Int. J. Engng. Sci., 32, p. 755, 1994
- [31] **C.Dascalu & G.A.Maugin**, Quart. J. Mech. Appl. Math., 48, p.237, 1995
- [32] **C.Dascalu & G.A.Maugin**, Zeit. Angew. Math. Phys., 46, p.355, 1995
- [33] **J.S.Lee, G.A.Maugin & Y.Shindo** (Editors), *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures*, AMD-Vol 161 and AMD-Vol 42, The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1993
- [34] **J.R.Rice**, J. Appl. Mech., 35, p. 379, 1968
- [35] **J.L.Sanders**, J. Appl. Mech., 27, p. 352, 1960
- [36] **G.P.Charepanov**, Int. Journal of Solids and Structures, 4, p. 811, 1968
- [37] **C.Atkinson & J.D.Eshelby**, Int. J. Fracture Mech., 4, p. 3, 1968

- [38] **J.D.Eshelby**, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A244, p. 87, 1951
- [39] **A.Visintin**, *Mathematical Modeling*, 5, p. 43, 1984
- [40] **B.D.Coleman & M.L.Hodgdon**, *Int. J. Engng. Sci.*, 24, p. 897, 1986
- [41] **B.D.Coleman & M.L.Hodgdon**, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 99, p. 375, 1987
- [42] **J.Friedel**, *Dislocations*, Pergamon, Oxford, 1964
- [43] **P.J.Chen**, *Acta Mechanica*, 48, p. 31, 1983
- [44] **A.Fométhé & G.A.Maugin**, *Material Forces in Thermoelastic Ferromagnets*, Preprint, 1995
- [45] **A.Fométhé & G.A.Maugin**, *On the Fracture of Hard Ferromagnets*, Preprint, 1995
- [46] **G.A.Maugin**, *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1988
- [47] **A.C.Eringen & G.A.Maugin**, *Electrodynamics of Continua*, Two Volumes, Springer Verlag, New York, 1990

Première Partie
Théorie de l'Hystérésis Magnétomécanique

Théorie de l'Hystérésis Magnétomécanique

Résumé

Après avoir présenté la magnétostriction comme l'ensemble des relations liant les propriétés mécaniques d'un matériau à ses propriétés magnétiques, on définit la théorie des cycles d'hystérésis qui repose sur l'analyse précise des déplacements, dans un milieu irrégulièrement perturbé, d'une paroi de séparation entre deux domaines élémentaires. Dans ce travail on passe en revue les différents modèles de l'hystérésis actuellement disponibles. La théorie de Néel où l'expression approchée de la force coercive provient des inégalités locales des tensions internes dans le matériau est aussi traitée.

1 Introduction

La théorie de l'hystérésis ferromagnétique et de la force coercive est basée sur la notion de déplacements irréversibles des parois qui séparent les domaines ferromagnétiques élémentaires. Une paroi est freinée dans son mouvement par les inégalités locales de sa tension superficielle que provoquent soit les perturbations élastiques du réseau cristallin, soit la présence d'inclusions non magnétiques. Néel [37] a proposé un mécanisme simple pour calculer la force coercive : Il existe des fluctuations de la direction et de l'intensité de l'aimantation à l'intérieur des domaines élémentaires. Ces fluctuations sont provoquées (i) en direction par les perturbations élastiques du réseau et (ii) en intensité par les inégalités de concentration ou par la présence d'inclusions ou de cavités. Par suite de l'existence de ces fluctuations, la divergence du vecteur aimantation n'est plus nulle et les charges magnétiques fictives ainsi apparues créent une énergie qui varie suivant la position de la paroi, indépendamment de l'existence d'une tension superficielle de la paroi qui ne joue qu'un rôle secondaire.

Des recherches dans le domaine des techniques d'aimantation ont montré d'une manière expérimentale que la force coercive est proportionnelle à la racine quatrième de la déformation plastique [33], [34]. On trouve aussi des travaux théoriques [35], [36] concernant l'influence des dislocations sur les paramètres de base de la courbe d'aimantation, c'est-à-dire, la force coercive et la perméabilité initiale [27], [46].

L'équation de la courbe d'hystérésis est basée sur une approximation de champ moyen qui ne fait pas intervenir la notion d'ancrage. L'approche théorique du problème d'hystérésis magnétique a généralement suivi deux méthodes. La première de ces méthodes est basée sur le modèle de Preisach-Néel et la seconde est fondée sur la théorie du micromagnétisme de Brown et Aharoni.

Dans ce qui suit on passe en revue les différentes théories simples actuellement disponibles. Ainsi au Paragraphe 2 on présente la magnétostriction comme l'ensemble des relations liant les propriétés mécaniques d'un matériau à ses propriétés magnétiques. Bien entendu, ces relations sont réversibles, et l'on trouve effectivement toute une catégorie d'effets magnétostrictifs inverses, où une modification mécanique (traction, compression, etc...) provoque une variation de la perméabilité du matériau. Les phénomènes de magnétostriction sont classés suivant leur aspect extérieur sans tenir compte de leurs causes profondes. On distingue, comme en piézoélectricité, les effets directs, où l'application d'un champ

magnétique produit une modification de son état mécanique, et les effets inverses, appelés également effets réciproques où la variation d'un paramètre ou d'une constante mécanique d'un matériau produit une modification de son état magnétique [2], [3].

Après avoir commencer par la définition du mot hystérésis, le Paragraphe 3 définit le modèle de Preisach qui est basé sur des hypothèses plausibles concernant les mécanismes physiques de l'aimantation. Ce modèle reste primaire dans le domaine du magnétisme, alors qu'il fut le noyau de plusieurs recherches considérables durant une longue période. Un ferromagnétique est constitué par une multitude de domaines élémentaires, les domaines de Weiss, petits en général vis-à-vis des cristallites, à l'intérieur desquels l'aimantation est uniforme et égale à la saturation. Le modèle de Néel calcule les changements d'aimantation provoqués par un champ extérieur en tenant compte de l'accroissement de certains domaines aux dépens des voisins, c'est-à-dire, d'un déplacement des parois de séparation. Le Paragraphe 3 traite aussi le modèle de Visintin qui est purement mathématique. Dans le cas unidimensionnel, ce dernier modèle présente la relation entre champ magnétique et aimantation comme une fonctionnelle mémoire. Cela est fait en examinant les propriétés mathématiques d'un modèle microscopique du ferromagnétisme. Une théorie simple de l'hystérésis visant à donner l'aimantation d'une manière explicite en fonction du champ magnétique est rappelée aussi en Paragraphe 3 qui trouve son origine dans les travaux de Jiles et Atherton [27], [28] : c'est le modèle de Jiles et Atherton.

Au Paragraphe 4, on a rappelé la théorie de Néel où l'expression approchée de la force coercive provient des inégalités locales des tensions internes dans le matériau. Utilisant ensuite les résultats de Dietrich et Kneller [43] il est alors possible de relier la force coercive à la densité de dislocations et la forme cherchée de la dépendance de cette force coercive par rapport à la déformation plastique résulte alors de la relation entre déformation plastique et densité de dislocations. La théorie de Vicena [36] améliorée par Malek [34] est rappelée aussi au Paragraphe 4 et la formule cherchée est obtenue en utilisant les travaux de Köster et Bangert [45].

La théorie développée dans la dernière partie de ce travail emprunte évidemment des éléments à ces diverses théories mais elle est plus proche en esprit de la théorie du micromagnétisme [24], [30].

2 Matériaux magnétiques

L'objectif de ce Paragraphe est la présentation qualitative du magnétisme. Pour plus d'information, le lecteur est invité à consulter les livres spécialisés dans le domaine (voir en particulier [1])

2.1 Définitions

Il est possible de définir les substances diamagnétiques, paramagnétiques, ferromagnétiques, ferrimagnétiques et autres, en tenant compte de leur réponse magnétique quand on applique un champ magnétique.

2.1.1 Diamagnétisme

Les substances diamagnétiques sont des substances qui s'aimantent en sens inverse du champ magnétique appliqué H . D'après la loi de Lenz, l'aimantation M de telles substances est proportionnelle à H

$$M = \chi_d H, \quad (1)$$

et la susceptibilité diamagnétique usuelle χ_d est négative, très petite ($\chi_d = -10^{-5}$) et indépendante de la température. Une exception, digne d'attention, est le cas des supraconducteurs qui exhibent une susceptibilité diamagnétique immense ($\chi_d \simeq -1$) et cela est prévue quand les valeurs du champ magnétique et de la température sont en dessous des valeurs critiques. A une température basse et sous un champ magnétique intense, l'aimantation dévie de l'équation linéaire (1) dans de nombreux métaux : des comportements oscillatoires apparaissent grâce aux électrons conducteurs. C'est l'effet de Haas-Van Alphen, découvert en 1930.

2.1.2 Paramagnétisme

Le comportement magnétique d'une substance paramagnétique peut être caractérisé encore par une dépendance linéaire de l'aimantation par rapport au champ magnétique appliqué :

$$M = \chi_d H, \quad (2)$$

mais la susceptibilité paramagnétique est positive. On distingue deux types de paramagnétisme : Celui de Pauli qui est caractérisé par une susceptibilité petite indépendamment de la température; et celui de Langevin qui présente une susceptibilité très grande quand la température est faible et qui varie d'une manière

inversement proportionnelle par rapport à la température. Donc, l'équation (2) est seulement une première approximation, et la nonlinéarité apparaît quand le champ magnétique croît ou la température décroît.

2.1.3 Ferromagnétisme

C'est le comportement des substances, comme le Fer. Le ferromagnétisme présente un comportement paramagnétique aux températures élevées

$$\chi_p = \frac{C}{T} \left(\frac{T}{T - T_c} \right)^\gamma \simeq \frac{C}{T - \theta_p} \text{ quand } T \gg T_c, \quad (3)$$

mais avec une susceptibilité qui diverge quand la température T tend vers la température critique T_c ; T_c est appelée aussi la température de Curie ($T_c < \theta_p = \gamma T_c$). C est la constante de Curie et γ est une constante critique. A une température T plus petite devant T_c , la réponse enregistrée quand le matériau est sous l'action d'un champ magnétique est nonlinéaire : C'est le phénomène de l'hystérésis magnétique. L'aimantation est alors grande comparée à celles des substances paramagnétiques et des substances diamagnétiques.

2.1.4 Ferrimagnétisme

Louis Néel a étendu le modèle du champ moléculaire afin d'interpréter les propriétés de substances antiferromagnétiques et de substances ferrimagnétiques. Les substances ferrimagnétiques ont des structures magnétiques complexes. Ces structures ont été observées et interprétées comme des arrangements triangulaires ou hélicoïdaux des moments magnétiques. Récemment, les désordres magnétiques ont été analysés en terme de frustration des interactions magnétiques appelés "Spin-Glasses". Pour toutes ces substances citées ci dessous, une fois la température élevée, le comportement du matériau reste comme celui d'une substance paramagnétique, mais la variation thermique de χ_p dérive de l'équation (3).

2.2 Magnétostriction

Le physicien Anglais Joule a découvert en 1842 qu'un barreau de Fer soumis à un champ magnétique longitudinal s'allongeait suivant ce champ, en même temps qu'il se contractait transversalement, comme sous l'effet d'une traction mécanique. Il donna à ce phénomène le nom de magnétostriction. Depuis lors, d'autres effets mécaniques du champ magnétique ont été mis en évidence. Soumis à un champ magnétique, des échantillons de certaines substances subissent non seulement des dilatations ou contractions linéaires, mais encore des flexions, des torsions, des modifications de densité, ainsi que des variations de leur module de Young. Suite aux travaux de Joule, on a continué à classer ces phénomènes sous le nom de magnétostriction.

Parmi les matériaux qui présentent le plus nettement des propriétés magnétostrictives, on peut citer les matériaux ferromagnétiques. Comme ces derniers sont aussi ceux pour lesquels la perméabilité magnétique varie suivant le champ magnétique qui leur est appliqué, la magnétostriction se présente comme l'ensemble des relations liant les propriétés mécaniques d'un matériau à ses propriétés magnétiques. Bien entendu, ces relations sont réversibles, et l'on trouve effectivement toute une catégorie d'effets magnétostrictifs inverses, où une modification mécanique (traction, compression, etc...) provoque une variation de la perméabilité du matériau.

En général, les phénomènes touchant à la magnétostriction ont des amplitudes extrêmement faibles, ce qui rend leur détection délicate. Comme l'on utilise presque uniquement des corps ferromagnétiques, le plus souvent des métaux ou des alliages métalliques, il faut tenir compte de l'hystérésis magnétique et aussi de l'hystérésis mécanique. Les propriétés magnétostrictives observées sur un échantillon donné dépendent alors de toute l'histoire antérieure de l'échantillon et spécialement de la série des traitements métallurgiques et de toutes les contraintes mécaniques qu'il a subi dans le passé.

Il existe deux principaux types de magnétostriction des matériaux ferromagnétiques: (i) la magnétostriction spontanée et (ii) la magnétostriction induite par un champ magnétique. En général, lorsqu'on parle de magnétostriction, on se réfère au second type, sachant que la magnétostriction spontanée est la conséquence d'une aimantation spontanée.

2.3 Les principaux phénomènes de magnétostriction

En général, les phénomènes de magnétostriction sont classés suivant leur aspect extérieur sans tenir compte de leurs causes profondes. On distingue, comme en piézoélectricité, les effets directs, où l'application d'un champ magnétique (ou variation de ce champ) produit une modification de son état mécanique, et les effets inverses, appelés également effets réciproques où la variation d'un paramètre ou d'une constante mécanique d'un matériau produit une modification de son état magnétique, que ce matériau soit ou non plongé initialement dans un champ magnétique [2], [3].

2.3.1 L'effet Joule longitudinal

Il a trait aux modifications de longueur Δl d'un barreau magnétostrictif de longueur l sous l'action d'un champ magnétique. Cet effet, découvert par Mar- ion et Page (1837), et Joule (1842), est souvent quantifié par la déformation maximale:

$$\lambda_s = \frac{\Delta l}{l} , \quad (4)$$

obtenue à la saturation magnétique, que l'on appelle coefficient de magnétostriction à saturation. Ce coefficient, qui peut prendre des valeurs positives ou négatives joue un rôle très important dans la théorie de la magnétostriction puisqu'il permet de comparer les matériaux entre eux.

L'effet Joule longitudinal inverse, encore appelé effet Villari, fut mis en évidence pour la première fois par Villari en 1865. Dans ce cas, si l'on modifie la longueur naturelle d'un barreau ferromagnétique, ce dernier s'aimante. Par ailleurs, il existe, associé à l'effet Joule longitudinal, une déformation transversale appelée effet Joule transversal. Cette déformation pouvant être obtenue sur un barreau libre est un phénomène supplémentaire à l'effet de Poisson.

2.3.2 L'effet Guillemin

Sous l'action d'un champ magnétique longitudinal, un barreau encastré à une extrémité subit une déformation, comme s'il travaillait à la flexion. Cet effet découvert par Guillemin en 1846, appelé aussi effet de flexion, se traduit par un déplacement transversal de l'ensemble de l'extrémité libre du barreau sous l'action d'un champ magnétique. Cet effet met en évidence la dépendance des constantes de cisaillement du matériau avec le champ.

2.3.3 L'effet Wiedeman

Wiedeman montrait en 1883 que le passage d'un courant électrique axial dans un barreau magnétostrictif provoquait une torsion de ce barreau. L'effet inverse produit une variation hélicoïdale du champ magnétique dans un barreau soumis à un couple de torsion. Ces deux derniers effets font ainsi la preuve de l'existence d'un couplage entre le champ magnétique et la déformation en cisaillement.

2.3.4 L'effet " ΔE "

Un champ magnétique appliqué à un matériau magnétostrictif introduit une déformation en supplément de la déformation créée par l'élasticité. Ce phénomène appelé effet ΔE , correspond à une modification des constantes élastiques du matériau donc de son module de Young lorsque l'on fait varier le champ magnétique appliqué. Cet effet est mis en évidence lors de la propagation d'ondes ultrasonores, car la vitesse des ondes est modifiée, ou dans l'étude de la résonance d'un barreau, à travers les glissements de sa fréquence de résonance.

2.3.5 L'effet de variation de volume

Sauf pour des champs très élevés, le volume global d'un matériau magnétostrictif ne varie pas sous l'action d'un champ magnétique. Il faut des champs de quelques centaines de kA/m pour voir se développer une variation relative de volume linéaire en fonction du champ.

3 Hystérésis

3.1 Définition

Le phénomène de l'hystérésis est un phénomène très ancien, il a attiré l'attention de nombreux chercheurs depuis longtemps. Ce phénomène est omniprésent, il est rencontré dans plusieurs domaines scientifiques. On peut citer comme exemples : l'hystérésis magnétique, l'hystérésis ferroélectrique et l'hystérésis mécanique. Cependant, l'exploitation de l'hystérésis varie d'un domaine scientifique à un autre, d'un papier à un autre et d'un auteur à un autre.

Nous commençons par la définition de l'hystérésis scalaire, et pour qu'elle soit générale, nous adoptons le langage de la théorie du contrôle. Considérons un transducteur (Figure 1) qui peut être caractérisé par une entrée $u(t)$ et une sortie $f(t)$; ce transducteur est appelé un transducteur de l'hystérésis si le rapport entrée-sortie est une multibranche nonlinéaire pour laquelle le passage d'une branche à l'autre se produit après une entrée extrême. Cette multibranche nonlinéaire est montrée en Figure 2. Dans ce qui suit, le cas de l'hystérésis statique nonlinéaire sera discuté. Le terme statique signifie que les branches de tel hystérésis nonlinéaire sont déterminées seulement, par les dernières valeurs extrémales de l'entrée; alors que la vitesse de variations de l'entrée entre les points extrémales n'a pas d'influence sur la formation des branches [4].

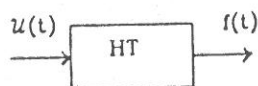


Figure 1

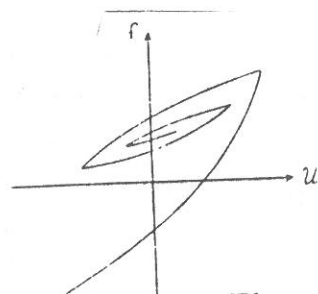


Figure 2

La définition ci-dessus de l'hystérésis scalaire statique est compatible avec les données expérimentales. En effet, on sait que dans le domaine de l'hystérésis magnétique, la forme de la boucle d'hystérésis majeure (Figure 3) peut être

spécifiée sans savoir au préalable comment un champ magnétique rapide H varie entre deux valeurs extrémales $+H_s$ et $-H_s$. Cela indique que les effets du temps sont négligeables et que la définition donnée d'un transducteur de l'hystérésis statique est adéquate. Dans le cas où on a une variation très rapide de l'entrée, les effets du temps deviennent importants, par conséquent, la définition ci-dessus de l'hystérésis statique est fautive. Autrement dit, cette définition a ces limites d'applications aux problèmes réels [5].

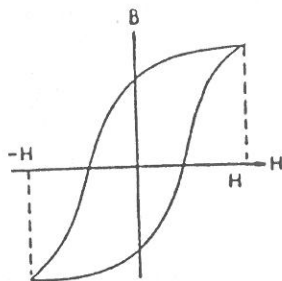


Figure 3

A partir de la définition donnée précédemment, on peut aussi conclure que l'hystérésis scalaire peut être interprété comme une nonlinéarité avec mémoire, lequel révèle lui même la formation des branches d'un bout à l'autre.

Dans la définition ci-dessus de l'hystérésis, la signification physique de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $f(t)$ n'est pas donnée. Cependant, il n'est pas difficile de spécifier $u(t)$ et $f(t)$ dans les applications particulières. Pour l'instant, en magnétisme $u(t)$ est le champ magnétique et $f(t)$ est l'aimantation, en mécanique $u(t)$ est la force et $f(t)$ est le déplacement. La notion du transducteur de l'hystérésis peut être interpréter de plusieurs façons. En magnétisme, par exemple, le transducteur de l'hystérésis peut être construit comme un petit volume infinitésimal du matériau magnétique, et la correspondance entrée-sortie de l'hystérésis nonlinéaire peut être interprétée comme une équation constitutive pour ce matériau.

Tous les phénomènes de l'hystérésis statique nonlinéaire peuvent être classés sous deux formes : (a) l'hystérésis nonlinéaire avec des mémoires locales et (b) l'hystérésis nonlinéaire avec des mémoires nonlocales. L'hystérésis nonlinéaire avec des mémoires locales est caractérisé par les propriétés suivantes : La valeur de la sortie $f(t_0)$ à l'instant t_0 et les valeurs de l'entrée $u(t)$ à tous les instants $t \geq t_0$ déterminent uniquement la valeur de la sortie $f(t)$ pour tout $t \geq t_0$. Autrement dit, pour les transducteurs de l'hystérésis avec des mémoires locales le passé exerce son influence sur le futur à travers la valeur courante de la sortie. Cela n'est pas le cas pour les transducteurs de l'hystérésis avec des mémoires nonlocales. Pour ces derniers transducteurs, les valeurs futures de la sortie $f(t)$ ($t \geq t_0$), dépendent non seulement de la valeur courante de la sortie $f(t_0)$, mais aussi des dernières valeurs extrémales de l'entrée [4].

Il est clair à partir de ces définitions que tous les hystérésis nonlinéaires avec des mémoires locales ont la même particularité qui est la suivante : tout point du diagramme $f - u$ correspond à un état unique. Cet état détermine le comportement du transducteur de l'hystérésis d'une façon exacte quand l'entrée $u(t)$ croît ou bien décroît. D'une autre manière, à tout point du diagramme $f - u$, il y a seulement une ou deux courbes qui présentent le comportement futur du transducteur de l'hystérésis avec une mémoire locale. Cela n'est pas vraie pour le transducteur de l'hystérésis avec des mémoires nonlocales. Dans le dernier cas, à tout point du diagramme $f - u$, il y a une infinité de courbes qui représentent le comportement futur du transducteur. Toutes ces courbes dépendent de l'histoire passée, plus précisément, elles dépendent des dernières valeurs maximales de l'entrée. Par analogie avec la théorie des processus aléatoires, l'hystérésis nonlinéaire avec des mémoires locales peut être appelé l'hystérésis nonlinéaire markovien, en même temps, l'hystérésis nonlinéaire avec des mémoires nonlocales est nonmarkovien. Il est clair que l'hystérésis nonlinéaire avec des mémoires nonlocales est beaucoup plus compliqué que celui avec des mémoires locales.

Nous tournons la discussion vers l'hystérésis vectoriel; cet hystérésis peut être caractérisé par une entrée vectorielle $\underline{u}(t)$ et une sortie vectorielle $\underline{f}(t)$. Une entrée et une sortie à deux ou à trois dimensions sont suffisantes pour les applications pratiques.

Le plus grand problème que nous affrontons, est comment peut-on définir l'hystérésis vectoriel d'une manière rigoureuse. Pour cela, il est important de comprendre la constitution de la partie essentielle de l'histoire des entrées dans le cas de l'hystérésis vectoriel. Pour résoudre ce problème, il est naturel de retourner aux données expérimentales [6]. Malheureusement, les données expérimentales disponibles dans le domaine de l'hystérésis vectoriel sont rares et non concluantes. Ces données expérimentales ne donnent pas des indications claires ni sur le problème ni comment on peut le résoudre. Néanmoins, il est possible de trouver quelques solutions à ce problème par des raisonnements logiques. Le point fort pour trancher est que la notion de l'hystérésis scalaire est un cas particulier de l'hystérésis vectoriel. Ce cas est réalisé quand l'entrée vectorielle $\underline{u}(t)$ varie seulement le long d'une direction. En effet, on peut dire que l'hystérésis scalaire n'existe pas dans la nature. Chaque fois que nous parlons de l'hystérésis scalaire, nous sommes guidés à partir des propriétés spécifiques de l'hystérésis vectoriel qui ont été observées quand l'entrée varie le long d'une direction fixée. Donc, on peut conclure que l'hystérésis vectoriel est réduit à l'hystérésis scalaire, quand l'entrée vectorielle varie, seulement le long d'une direction fixée et arbitraire. Puisque cette réduction peut avoir lieu pour n'importe quelle direction fixée et puisque les dernières valeurs extrémales de l'entrée constituent la partie essentielle de l'histoire

de l'hystérésis scalaire, il est naturel de conclure que dans le cas de l'hystérésis vectoriel, les dernières valeurs extrémales de l'entrée, projetées le long d'une direction quelconque, laissent leurs marques sur le futur. Comme résultat, nous arrivons à la définition suivante de l'hystérésis vectoriel: L'hystérésis vectoriel est un vecteur nonlinéaire avec le fait que les dernières valeurs extrémales de l'entrée, projetées le long d'une direction quelconque, influencent les valeurs futures de la sortie. Puisqu'il n'y a aucune condition sur la vitesse des variations de l'entrée, il est clair que la définition ci-dessus, implique celle de l'hystérésis vectoriel statique. Il est clair aussi que le modèle mathématique de l'hystérésis vectoriel est impératif pour les descriptions cohérentes des systèmes dépendants de l'hystérésis vectoriel. Ces modèles seraient capables de détecter et d'emmagasiner les dernières valeurs extrémales de l'entrée, projetées le long d'une direction quelconque, et de choisir la valeur du vecteur sortie, toute en tenant compte de l'histoire cumulée.

2.3 Modèle de Preisach

Le modèle de Preisach a été déduit à partir des travaux de F.Preisach [7] publiés en 1935. L'approche de Preisach a été purement intuitive. Elle est basée sur des hypothèses plausibles concernant les mécanismes physiques de l'aimantation. Pour cette raison, le modèle de Preisach a été vu comme un modèle physique de l'hystérésis. Ce modèle reste primaire dans le domaine du magnétisme, alors qu'il fut le noyau de plusieurs recherches considérables durant une longue période. On est arrivé à ce résultat grâce aux développements complémentaires au modèle de Preisach et à plusieurs améliorations et vérités scientifiques qui ont été accumulées dans ce domaine. Ces développements et résultats sont rassemblés, pour le moment, dans [4], [8] et [9]; il est important de noter que cette liste des références n'est pas complète.

Le pas décisif pour bien comprendre ce modèle a été fait en 1970 par le Mathématicien M.Krasnoselskii qui a constaté que le modèle de Preisach contient des idées mathématiques nouvelles. Au lieu de présenter ce modèle sous une forme physique comme il était courant, Krasnoselskii l'a présenté sous une forme purement mathématique semblable à une décomposition spectrale des opérateurs [10]. Par conséquent, de nouveaux outils mathématiques ont été développés et peuvent, actuellement, être utilisés pour décrire mathématiquement l'hystérésis dans différents domaines scientifiques. En même temps, l'approche de Krasnoselskii a révélé la nature phénoménologique du modèle de Preisach. Cela a mis ce modèle dans une nouvelle perspective et a aidé à l'éclaircissement de plusieurs controverses qui ont entourés ce modèle.

Nous continuons, maintenant la description purement mathématique du modèle de Preisach. Pour cela, considérons un ensemble infini des opérateurs d'hystérésis

simples $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$. Tous les opérateurs de cet ensemble, peuvent être représentés par une boucle rectangulaire sur le diagramme des entrées-sorties (Figure 4).

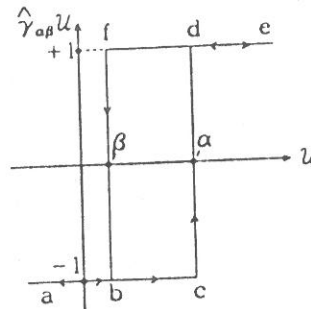


Figure 4

Les nombres α et β sont respectivement la valeur supérieure et la valeur inférieure de l'entrée. On peut supposer que $\alpha \geq \beta$; cette condition est en accord avec le point de vue physique. Les sorties de ces opérateurs d'hystérésis élémentaire prennent seulement deux valeurs 1 et -1. Autrement dit, ces opérateurs peuvent être interprétés comme des relais à deux positions : la position supérieure correspond à $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}u(t) = +1$ et la position inférieure correspond à $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}u(t) = -1$. Si l'entrée $u(t)$ est croissante, la branche ascendante abcde suivra. Quand l'entrée est décroissante, la branche descendante edfba est tracée. Il est clair que les opérateurs $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ représentent l'hystérésis nonlinéaire avec des mémoires locales. Considérons une fonction test arbitraire $\mu(\alpha, \beta)$, nommée la fonction de Preisach. Alors, le modèle de Preisach peut être écrit comme:

$$f(t) = \hat{\Gamma}u(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \hat{\gamma}_{\alpha\beta}u(t) d\alpha d\beta . \quad (5)$$

Ici $\hat{\Gamma}$ est utilisé pour abrégé la notation.

Il est clair que le modèle (5) peut être interprété comme une représentation continue d'un système de relais à deux positions connectés parallèlement. Cette interprétation est illustrée par le diagramme montré en Figure 5.

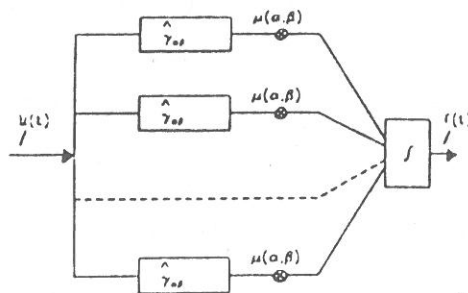


Figure 5

En tenant compte de ce diagramme, la même entrée $u(t)$ est appliquée à chacun des relais à deux positions. Leurs sorties sont multipliées par $\mu(\alpha, \beta)$ et, après, intégrées le long des valeurs $\alpha \geq \beta$. D'où, la fonction sortie $f(t)$.

Il résulte donc que le modèle de Preisach est construit comme une superposition des opérateurs d'hystérésis simples $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$. Ces opérateurs peuvent être construits comme des blocs principaux du modèle (5). Pour l'instant, et en tenant compte de la théorie de la décomposition spectrale pour les opérateurs auto-adjoints, tout opérateur auto-adjoint peut être représenté comme une superposition de projections des opérateurs qui sont des opérateurs auto-adjoints simples. Cette analogie montre que le modèle de Preisach (5) peut être interprété, de point de vue mathématique, comme une décomposition spectrale d'opérateur d'hystérésis compliqué $\hat{\Gamma}$ dans l'opérateur d'hystérésis simples $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$.

Bien que l'hystérésis nonlinéaire de Preisach (5) soit construit comme une superposition d'hystérésis nonlinéaires élémentaires $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ avec des mémoires locales, il a quand même une mémoire nonlocale. On remarque qu'une nouvelle propriété qualitative de mémoire nonlocale émerge comme une propriété collective d'un système ayant un nombre infini de composantes qualitativement similaires.

De ce qui précède, il paraît clair que le modèle de Preisach a été défini sans avoir recours à l'origine physique de l'hystérésis. Cela révèle clairement, la nature phénoménologique du modèle et ces généralités mathématiques. Pour bien étudier cette nouvelle approche du modèle de Preisach, il est essentiel de comparer la définition du modèle donnée ci-dessus avec la définition classique utilisée en magnétisme.

En magnétisme, les domaines magnétiques sont introduits séparément. Ces domaines ont des boucles d'hystérésis rectangulaires et ils jouent le même rôle que les opérateurs d'hystérésis élémentaires $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$. Une boucle typique de ces domaines est montrée en Figure 6. Ici H_u et H_d sont respectivement le champ magnétique supérieur et inférieur, m_s est le moment magnétique qui est identique pour tous les domaines. La notation $\widehat{m}(H_u, H_d)$ est utilisée pour les domaines ayant des boucles d'hystérésis comme celle montrée en Figure 6.

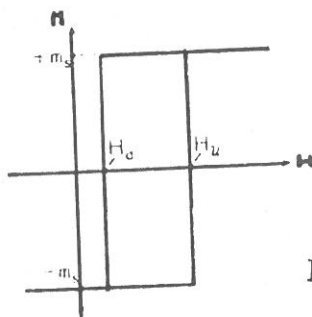


Figure 6

Le matériau magnétique est composé d'un grand nombre de ces domaines. On suppose, aussi, que les différents domaines ont des distributions de champs réversibles H_u et H_d , qui peuvent être caractérisées par une fonction de distribution $\Phi(H_u, H_d)$. Ces fonctions jouent le même rôle que $\mu(\alpha, \beta)$ dans (5). Il faut parler de la nature statique de la fonction de distribution $\Phi(H_u, H_d)$, bien qu'on ne soit pas au courant des justifications rigoureuses de cette interprétation statique. En utilisant les domaines magnétiques et leur fonction distribution, le modèle de Preisach est défini en magnétisme comme :

$$M(t) = \iint_{H_u \geq H_d} \Phi(H_u, H_d) \widehat{m}(H_u, H_d) H(t) dH_u dH_d, \quad (6)$$

où M est l'aimantation,

$$\widehat{m}(H_u, H_d) H(t) = +m_s \quad (7)$$

si le domaine est chargé positivement et

$$\widehat{m}(H_u, H_d) H(t) = -m_s \quad (8)$$

si le domaine est chargé négativement.

La définition ci-dessus est formée d'une manière magnétique et peut naturellement être appelée la définition magnétique. Il est évident que la définition magnétique du modèle de Preisach est équivalente mathématiquement à la définition précédente (5).

La définition magnétique suggère quelques relations entre le modèle de Preisach et certaines réalités physiques, comme, les domaines magnétiques, leur distribution, etc... Pour cette raison, le modèle de Preisach a été vu comme un modèle physique durant une longue période. Cependant, il y a des difficultés intrinsèques concernant cette interprétation. En effet, si les domaines magnétiques sont bien définis, alors leurs formes géométriques et leurs situations spatiales seront importantes et auront une influence sur la valeur de l'aimantation. Mais, dans la définition magnétique du modèle de Preisach, on ne se réfère ni aux situations spatiales des domaines ni à leurs formes. Dans la définition mathématique (5), cette difficulté n'apparaît pas, car on n'a pas besoin de relier l'opérateur, $\widehat{\gamma}_{\alpha\beta}$, à des objets physiques réels.

Une autre difficulté apparaît à partir du fait que la plupart des domaines dans le modèle de Preisach ont des boucles rectangulaires non symétriques ($H_u \neq -H_d$). De telles boucles n'ont pas de signification physique pour un domaine isolé. L'utilisation des boucles non symétriques qui ont eu lieu à cause des interactions

entre les domaines, est fréquemment justifiée par le fait que la non symétrie est une mesure des interactions. Plus précisément, cela signifie que tous les domaines reçoivent non seulement le champ magnétique appliqué $H(t)$, mais aussi un champ magnétique local qui est dû à l'aimantation des domaines voisins. Le champ magnétique local varie d'un domaine à un autre. Ces champs magnétiques locaux découlent des boucles d'hystérésis non symétriques, ces boucles représentent la dépendance de l'aimantation par rapport au le champ magnétique appliqué.

A partir de la discussion présentée précédemment, on peut tirer la conclusion suivante. La définition magnétique du modèle de Preisach est possible et elle a été développée historiquement. Cependant, cette définition obscurcit le modèle, cache sa nature mathématique et phénoménologique, et retrécit son domaine d'application. La définition (5) interprète le modèle de Preisach comme un nouvel outil mathématique et étend son domaine d'application au-delà du domaine magnétique. Pour ces raisons, la définition purement mathématique (5) semble plus logique. Pour plus d'information sur le sujet, voir [4].

3.3 Modèle de L.Néel

Les propriétés, après désaimantation, d'une substance ferromagnétique placée dans des champs magnétiques H faibles vis-à-vis du champ coercitif H_c (H_c est le champ magnétique pour lequel l'aimantation est nulle), sont décrites par les lois de Lord Rayleigh [11]. Depuis 1887, ces lois n'ont reçu aucune interprétation satisfaisante, mais P. Weiss et J. de Frenkenreich [12] ont montré qu'il était possible d'imaginer une substance fictive douée de propriétés semblables. Cette substance est formée d'un ensemble de domaines élémentaires possédant chacun un cycle d'aimantation rectangulaire et symétrique. Les auteurs de [12] supposent en outre que chaque domaine est soumis à un champ uniforme et constant, dû à l'action des domaines voisins.

Un ferromagnétique est constitué d'une multitude de domaines élémentaires, les domaines de Weiss, petits en général vis-à-vis des cristallites, à l'intérieur desquels l'aimantation est uniforme et égale à la saturation. Les changements d'aimantation que provoque un champ extérieur proviennent, soit de la rotation de l'aimantation à l'intérieur d'un domaine soit de l'accroissement de certains domaines aux dépens des voisins, c'est-à-dire d'un déplacement des parois de séparation.

En général, l'aimantation d'un domaine a six orientations possibles, de sorte qu'on distingue deux espèces de parois : les parois dites à 180° , qui séparent deux domaines dont les aimantations sont dirigées en sens opposés, et les parois à 90° , qui séparent deux domaines dont les directions d'aimantation font entre elles un

angle de 90° .

Dans un cristal pur non déformé, l'aimantation de chaque domaine est dirigée suivant un quelconque des axes quaternaires. Ces axes sont dits de facile aimantation. Les trois axes quaternaires du cristal sont rigoureusement équivalents énergétiquement, mais en fait, les impuretés ou toutes autres causes provoquent des écarts locaux à la symétrie cubique. L'un des axes correspond à une énergie un peu plus faible que les deux autres; mais les deux sens possibles sur cet axe sont évidemment équivalents.

A première vue, il semble qu'en chaque point du cristal, en l'absence de champ magnétique, l'aimantation se dirige toujours suivant l'axe i qui correspond à l'énergie u_i la plus faible. Il en est bien ainsi lorsque u_i reste plus petit que u_j et u_k (les indices i, j et k prennent les valeurs 1, 2 et 3) dans un domaine dont l'étendue est très grande vis-à-vis des distances interatomiques, mais lorsque les perturbations sont à échelle très faible des changements trop fréquents dans la direction de l'aimantation sont gênés par l'apparition corrélative de nouvelles parois de séparation, accompagnée d'une dépense d'énergie plus grande que celle qui correspond aux différences $u_k - u_i$ ou $u_j - u_i$. Pour plus d'information voir L.Néel [13].

Imaginons qu'on a une paroi sous la forme d'un plan géométrique, d'un côté duquel les spins sont dans la direction i , et de l'autre côté dans la direction j . Les spins des deux atomes, immédiatement voisins, situés de part et d'autre de la paroi, ne sont pas parallèles et l'énergie à fournir de ce chef, par suite de l'existence de l'énergie d'échange, est considérable. Or cette énergie diminue beaucoup par formation d'une couche de passage, à l'intérieur de laquelle les spins passent progressivement d'une direction à l'autre. Si les énergies d'échange étaient seules en jeu, cette couche de passage tendrait à être aussi épaisse que possible, mais l'énergie magnétocristalline s'y oppose, car à mesure que la couche s'épaissit, s'accroissent aussi les régions à l'intérieur desquelles l'aimantation n'est plus dirigée suivant un axe de facile aimantation. En fait, comme F.Bloch [14] l'a montré le premier, il existe une épaisseur optimale, pour laquelle l'énergie superficielle est minimale.

Dans son mémoire de 1942, L.Néel s'est intéressé au rôle des petites perturbations. Pour cela, soit un grand domaine où l'énergie u_i est partout plus petite que les énergies u_j et u_k , à l'exception d'un petit domaine cubique, à l'intérieur duquel cette condition n'est pas remplie. A partir de ces travaux, on peut conclure que dans les perturbations à grande échelle, l'aimantation s'oriente suivant l'axe i , qui correspond à la plus petite valeur des u_i . Au contraire, la direction de l'aimantation n'est pas affectée par les perturbations locales des u_i à petite

échelle.

En se basant sur l'analyse précise des déplacements, dans un milieu irrégulièrement perturbé, d'une paroi de séparation entre deux domaines élémentaires, on peut interpréter les lois découvertes en 1887 par Lord Rayleigh. Ces lois définissent entièrement les cycles d'hystérésis, décrits par un ferromagnétique lorsque le champ magnétique H reste faible vis-à-vis du champ coercitif. L.Néel [15] a commencé par donner à l'énergie libre une expression analytiquement très maniable en fonction du déplacement de la paroi. Ensuite, par un artifice, il décompose le parcours total de la paroi en domaines de structure très simple. On remarque qu'au cours de tous les cycles possibles la paroi reste enfermée dans le domaine qui la contient initialement. De cette étude, on trouve les lois qui régissent les déplacements moyens d'une paroi isolée, ces lois présentent la même structure que les lois de Rayleigh.

Nous appliquerons maintenant les résultats précédents, relatifs aux lois de déplacement d'une paroi isolée et plane [13], aux déplacements des multiples parois qui séparent les domaines élémentaires d'une substance réelle. Pour cela, on suppose d'abord que, suivant l'hypothèse de Landau, les domaines prennent des formes telles qu'il n'y ait pas de pôles libres à l'intérieur du corps : lorsque le champ démagnétisant de forme est nul, le champ intérieur est donc partout égal au champ extérieur.

Le cas le plus simple est celui du cristal d'une substance uniaxe, dont l'axe est direction de facile aimantation. Nous supposons que le champ magnétique agissant est parallèle à l'axe. Les domaines, que nous pouvons imaginer sous la forme de feuillets empilés et aimantés alternativement en sens inverse, sont séparés par la seule catégorie des parois à 180° . Lorsque la substance passe de la saturation dans un sens à la saturation en sens inverse, les parois balayent tout le volume de la substance. Par conséquent, on obtient la courbe de première aimantation comme fonction du volume de la substance, de la surface totale des parois, du parcours total moyen d'une paroi et du champ magnétique appliqué [15]. Toujours cette substance uniaxe, mais cette fois pour un polycristal, avec répartition isotrope sur la sphère unité des directions des axes, on obtient la courbe de première aimantation fonction des mêmes paramètres que le cas du monocristal mais légèrement différente. Dans le cas d'une substance cubique, le problème est bien plus compliqué, car il existe deux catégories de parois : les unes à 180° , les autres à 90° .

Supposons qu'à l'état initial, dans un champ nul, la paroi soit située à l'une des extrémités de son libre parcours. Appliquons un champ magnétique assez fort et d'après le calcul du déplacement moyen correspondant de la paroi, on

remarque que la partie réversible du déplacement est négligeable devant la partie irréversible, au contraire de ce qui se passe dans le domaine de Rayleigh.

Si on étudie un cristal unique d'une substance possédant une seule direction de facile aimantation, on vérifie bien les formules obtenues à partir de la théorie du Néel [13], [15]. Une première condition précise que, dans le domaine de champ étudié, la variation d'aimantation produite par rotation réversible de l'aimantation à l'intérieur des domaines doit être faible devant la variation qui provient des déplacements de parois.

Avec une répartition homogène des petites déformations, la susceptibilité réversible initiale est proportionnelle à la surface des parois. Pour la simplicité, nous adoptons une structure feuilletée des domaines, de sorte que le déplacement d'une paroi s'effectue sans variation de surface. Cette hypothèse n'est certainement pas correcte; prenons, par exemple, le cas d'une substance monocristalline à direction privilégiée unique; lorsque la saturation est atteinte dans l'un des sens, il n'y a plus de domaines aimantés en sens inverse et la surface des parois est nulle. En réalité, il n'en est pas rigoureusement ainsi, car il subsiste probablement encore des noyaux, très petits, aimantés en sens inverses, qui serviront de germe pour la désaimantation, mais la surface des parois qui leur correspond est négligeable. Ainsi, la surface des parois sensiblement nulle pour l'aimantation est égale à l'aimantation à saturation, doit passer par un maximum quand l'aimantation est égale à zéro. Dans l'état actuel de la théorie, il est difficile de préciser les lois de cette variation. La plupart des théories qui ont été développées supposent constante la surface des parois; elle n'est donc valable qu'au voisinage de l'aimantation égale à zéro.

3.4 Modèle de Visintin

L'auteur de [16] a étudié l'évolution électromagnétique d'un corps ferromagnétique dans le cas unidimensionnel. Il a présenté la relation constitutive entre le champ magnétique H et l'aimantation M comme une fonctionnelle à mémoire :

$$M(x, t) = [\mathfrak{F}(H(x, \cdot), M^0(x))] (t) \text{ dans } \Omega \times [0, T] \quad (9)$$

Ici, Ω est un domaine à trois dimensions, $T > 0$, \mathfrak{F} est la fonctionnelle de Volterra, $H(x, \cdot)$ représente la fonction $T \mapsto H(x, t)$ et $M^0(x) = M(x, 0)$, $\forall x \in \Omega$.

Si à la place de la relation (9), on utilise une relation de la forme $M = \Phi(H)$, avec Φ une fonction monotone de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 , alors la difficulté préalable peut être maîtrisée par le fait de remplacer l'argument de caractère compact : toutefois, cela ne s'applique pas au cas de l'hystérésis. D'ailleurs, la relation (9) ne

tient pas compte des interactions spatiales, et elle est essentiellement une relation constitutive pour les systèmes nondistribués (c'est-à-dire pas de dépendance explicite de l'espace). L'utilisation de relations constitutives nondistribuées (c-à-d, x est représenté comme un paramètre) pour un système distribué est très pratique. Mais, dans le cas de l'hystérésis, il y a un inconvénient mathématique qui est : les valeurs infiniment petites de $H(x, \cdot)$ n'impliquent pas des valeurs infiniment petites de $M(x, \cdot)$.

En cherchant une relation constitutive plus précise, l'auteur de [17] a examiné les propriétés mathématiques d'un modèle microscopique du ferromagnétisme, c'est la théorie classique des domaines de Weiss et les équations de Landau-Lifshitz. Pour cela, on considère un corps ferromagnétique occupant un domaine borné Ω de l'espace Euclidien \mathbf{R}^3 . En tenant compte de la théorie classique de Weiss, au dessous de la température critique et à l'échelle microscopique, le corps est magnétiquement saturé. Donc, on a la relation suivante

$$|m(x, t)| = M \text{ dans } \Omega \times [0, T] \quad , \quad (10)$$

où M est une constante positive et m est l'aimantation microscopique. L'évolution de m est gouvernée par les équations de Landau-Lifshitz.

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \lambda_1 m \wedge h^e - \lambda_2 m \wedge (m \wedge h^e) \text{ dans } \Omega \times [0, T] \quad (11)$$

$$h^e = h + \nabla \cdot (F \cdot \nabla m) - G \cdot m \text{ dans } \Omega \times [0, T] \quad (12)$$

c'est-à-dire,

$$h_i^e = h_i + \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{jk} \frac{\partial m_i}{\partial x_k} \right) - \sum_{j=1}^3 G_{ij} m_j \quad , \quad (13)$$

où λ_1, λ_2 sont des constantes, $\lambda_2 > 0$, h est le champ magnétique, h^e est le champ magnétique local et F et G sont des matrices définies positives. Il faut noter que \wedge représente le produit vectoriel, \cdot représente le produit scalaire, ∇ représente le gradient et $\nabla \cdot$ représente la divergence. La forme équivalente à la relation (11) est l'équation de Gilbert

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \mu_1 m \wedge \left(h^e - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\partial m}{\partial t} \right) \text{ dans } \Omega \times [0, T] \quad , \quad (14)$$

avec μ_1, μ_2 des constantes. Le premier terme de l'équation (11) après le signe égal cause une précession de m autour de h^e et est nondissipatif; le second terme tend à aligner m à h^e et est dû à la viscosité, ici il est dissipatif. Par conséquent, comme Callen l'a déjà remarqué dans son papier [18], si on interprète bien la relation (14), on s'apercevra que la dissipation introduit une contribution proportionnelle

à $\partial m / \partial t$ dans le champ magnétique effectif [47] [48], μ_2 / μ_1 représente le coefficient de viscosité.

Une condition initiale s'impose

$$m(x, 0) = m^0(x) \text{ dans } \Omega \times [0, T] , \quad (15)$$

avec $|m^0| = \mathcal{M}$. Suite aux travaux [16] [17], nous avons

$$\nu \cdot F \cdot \nabla m = \sum_{i,j=1}^3 \left(\nu_i F_{ij} \frac{\partial m}{\partial x_j} \right) = 0 , \quad (16)$$

où ν est le vecteur unitaire normale extérieur à $\partial\Omega$.

A partir d'une procédure standard, nous introduisons l'opérateur moyen suivant :

$$\Phi \longmapsto \langle \Phi \rangle (x) := \frac{1}{\text{vol}(B(x, R) \cap \Omega)} \int_{B(x, R) \cap \Omega} \Phi(x + r) dr , \quad (17)$$

où $B(x, R)$ est la boucle de centre x et de rayon R . On suppose que $B(x, R) \cap \Omega$ est non vide. Nous posons

$$H := \langle h \rangle , \quad H^e := \langle h^e \rangle , \quad M := \langle m \rangle . \quad (18)$$

En utilisant les relations (10) et (12) nous aurons :

$$|M(x, t)| \leq \mathcal{M} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (19)$$

et

$$H^e = H + \nabla \cdot (F \cdot \nabla M) - G \cdot M \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] . \quad (20)$$

Nous supposons que le processus de relaxation décrit par la relation (11) est assez rapide comparé à l'évolution décrite par les équations de Maxwell; dans ce cas là, nous introduisons une condition quasi-stationnaire de la forme [17] :

$$M(x, t) = \left[\mathfrak{S} \left(H^e(x, \cdot), M^0(x) \right) \right] (t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] , \quad (21)$$

avec \mathfrak{S} est une fonctionnelle d'hystérésis et $M^0(x) = M(x, 0)$ dans Ω ; l'aimantation M dépend non seulement de la présente valeur de H^e (H^e est pris comme fonction du temps), mais aussi des différentes valeurs précédentes de H^e .

Dans le cas unidimensionnel, il est possible de construire une approximation de \mathfrak{S} par le moyen des techniques de mesure classiques. Dans la situation multivariante, plutôt que d'utiliser une procédure de mesure directe, il est préférable

d'utiliser un modèle rendant le cas vectoriel cas scalaire. La relation d'hystérésis utilise H et non H^e , mais dans le cas nondistribué (c-à-d pas de dépendance de l'espace), on a $H = H^e$. Cependant, grâce à (11), l'évolution de m est déterminée par h^e , donc il est naturel de considérer que l'évolution de $M = \langle m \rangle$ peut être contrôlée par celle de $H^e = \langle h^e \rangle$ au lieu de H présent dans les équations de Maxwell.

Dans le cas d'une évolution quasi-stationnaire, nous avons

$$H(t) = [\bar{\mathcal{C}}(M(x, \cdot), H^0(x))] (t) + \mathcal{A}M(t) = [\mathcal{C}(M, H^0)] (t) \text{ dans } \Omega \times [0, T] , \quad (22)$$

ici $\bar{\mathcal{C}}$ est l'inverse de \mathfrak{S} (on suppose qu'il existe) en même temps une fonctionnelle d'hystérésis nondistribué, $H^0(x) = H(x, 0)$ dans Ω et \mathcal{A} est un opérateur elliptique du second ordre; \mathcal{C} est un exemple de fonctionnelle d'hystérésis distribué.

3.5 Modèle de Jiles et Atherton

Il n'existe pas de forme générale pour décrire les boucles d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques. Cependant, il y a une forme très convenable en pratique pour décrire ces dernières. Cette forme est discutée par Trebble et Craik [19].

Au paravant, plusieurs tentatives ont eu lieu afin de décrire le phénomène de l'hystérésis, mais aucune équation satisfaisante n'a été développée. Les seules méthodes existantes, utilisent soit des séries comme dans le travail de Brauer [20], soit des polynômes rationnels comme dans le travail de Rivas et al [21].

La meilleure approche théorique du problème de l'hystérésis est formée généralement d'une ou de deux méthodes. La première méthode est basée sur les modèles de Preisach [7] et de Néel [13], [15], lesquelles modèles ont donné naissance à deux grands travaux : celui de Del Vecchio [22] et celui de Rahman et al [23]. La deuxième méthode - théoriquement plus acceptable - est basée sur la théorie micromagnétique de Brown [24] et Aharoni [25].

Appliquons les statistiques de Maxwell-Boltzmann; l'aimantation M est donnée par l'équation de Langevin [26], (Voir les travaux de Jiles et Atherton [27], [28]):

$$M = \mathcal{L} \left(\frac{\mu_0 (H + \alpha M)}{\alpha} \right), \quad (23)$$

où

$$\mathcal{L}(x) = M_s \left\{ \coth x - \frac{1}{x} \right\}, \quad a = \frac{k_B T}{m}, \quad (24)$$

où α est un paramètre représentant le couplage interdomaine et peut être déterminé expérimentalement, H est le champ magnétique, m est le moment magnétique par unité de volume, M_s est l'aimantation à saturation, T est la température absolue, k_B est une constante et μ_0 est la perméabilité à vide.

Bien que l'équation de Langevin est adaptée au paramagnétisme, l'équation de Langevin modifiée (24) ci-dessus, ne donne pas une bonne description du comportement du matériau ferromagnétique, car le modèle ignore le changement possible de l'aimantation, quand elle est gênée par des sites d'ancrage. L'équation (23) est appliquée seulement dans le cas où on a un domaine parfait.

Sous l'action d'un champ magnétique appliqué, le mouvement des parois est gêné par la présence des défauts comme : les inclusions non magnétiques, les impuretés et les trous.

Si une paroi d'un domaine est déplacée dans un potentiel complètement uniforme, aucun changement de l'énergie du paroi ne s'effectuera. Mais, quand le champ magnétique est supprimé, la paroi restera dans sa position finale. Dans le but d'avoir un déplacement réversible de la paroi, comme cela se présente dans un matériau parfait, il est nécessaire d'évoquer un potentiel qui croît avec l'aimantation. Les frontières d'un domaine se stabilisent quand le travail fait par le champ magnétique est équilibré par l'énergie magnétique de l'échantillon; une fois que le champ est écarté, la paroi retourne à sa position d'origine.

Si nous considérons un ferromagnétique naturel, les conséquences dues à l'ancrage d'une paroi devront être incluses dans l'équation de l'énergie. Cela conduit au changement irréversible dans l'aimantation, d'où l'hystérésis.

Par conséquent, sous l'hypothèse d'une distribution uniforme des sites d'ancrages, le travail total pour vaincre l'ancrage est proportionnel au changement de l'aimantation.

L'énergie de l'aimantation est alors, la différence entre l'énergie dans le cas idéal et la perte due à l'hystérésis, soit [28] :

$$M = \mathcal{L} \left(\frac{B_e}{a} \right) - \tau k \frac{dM}{dB_e}, \quad (25)$$

où

$$B_e = \mu_0 (H + \alpha M). \quad (26)$$

Cela est l'équation d'état d'un ferromagnétique sous les conditions données dans [27]. On peut prévoir la variation probable du coefficient k avec M . Le paramètre δ prend les valeurs ± 1 , il est introduit comme un effet d'ancrage et s'oppose toujours au taux de changement de M .

Dans la pratique, le paramètre k de l'équation (25) varie avec M et H . En effet

$$dM = dM_r + dM_{wm} , \quad (27)$$

où dM_r est le changement de M dû à la rotation et dM_{wm} est le changement dû au mouvement de paroi. Alors le paramètre k , d'après [26], est

$$k = k_0(1 - (1 - \gamma) \frac{dM_r}{dH}) , \quad (28)$$

où k_0 est la valeur maximale de k . Donc, pour $0 < \gamma < 1$, k décroît avec le champ magnétique. La forme exacte de k peut être déterminée dans chacun des cas.

La solution de l'équation différentielle pour l'hystérésis, équation (25), peut être obtenue par intégration par parties. La solution a la forme.

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n (k\delta)^n \mathcal{L}^n \left(\frac{B_e}{a} \right) \right] + \delta C(B_{\max}) , \quad (29)$$

où $\mathcal{L}^n(B_e/a)$ est la dérivée n -ième de la fonction de Langevin et $C(B_{\max})$ est une constante d'intégration. Les dérivées successives de la fonction de Langevin tendent rapidement vers zéro et pour $k < a$ les séries (29) convergent assez vite et l'on peut ne retenir que les trois premières termes :

$$M = \mathcal{L} \left(\frac{B_e}{a} \right) - k\tau \mathcal{L}^1 \left(\frac{B_e}{a} \right) + k^2\tau^2 \mathcal{L}^2 \left(\frac{B_e}{a} \right) + \delta C(B_{\max}) . \quad (30)$$

on a ici deux branches d'hystérésis correspondant au champ croissant $\delta = 1$ et au champ décroissant $\delta = -1$. Si on note ces deux branches par M_+ et M_- , alors

$$\begin{cases} M_+ = \mathcal{L} (B_e/a) - k \mathcal{L}^1 (B_e/a) + k^2 \mathcal{L}^2 (B_e/a) + C(B_{\max}) \\ M_- = \mathcal{L} (B_e/a) + k \mathcal{L} (B_e/a) + k^2 \mathcal{L}^2 (B_e/a) - C(B_{\max}) . \end{cases} \quad (31)$$

Par continuité, aux points extrêmes de la boucle d'hystérésis, on doit vérifier que

$$C(B_{\max}) = -k \mathcal{L}^1 \left(\frac{B_{\max}}{a} \right) , \quad (32)$$

et donc les boucles d'hystérésis majeures sont décrites par

$$M = \mathcal{L} \left(\frac{B_e}{a} \right) - k\tau \left[\mathcal{L}^1 \left(\frac{B_e}{a} \right) - \mathcal{L}^1 \left(\frac{B_{\max}}{a} \right) \right] + k^2 \mathcal{L}^2 \left(\frac{B_e}{a} \right) . \quad (33)$$

Pour les boucles d'hystérésis mineures, on a l'équation

$$M - M_r = \mathcal{L} \left(\frac{B_e}{a} \right) - k \tau \mathcal{L}^1 \left(\frac{B_e}{a} \right) - k^2 \mathcal{L}^2 \left(\frac{B_e}{a} \right) \\ + \mathcal{L} \left(\frac{B_e}{a} \right)_r + k_r \tau \mathcal{L} \left(\frac{B_e}{a} \right)_r - k_r^2 \mathcal{L}^2 \left(\frac{B_e}{a} \right)_r, \quad (34)$$

où M est l'aimantation dominante et M_r est l'aimantation lorsque le champ est renversé avec le condition que ces deux aimantations aient la même valeur maximum en $(B_e)_{\max}$. Quand le point de renversement n'est autre que le maximum de la boucle d'hystérésis alors (34) se réduit à (33). Globalement, l'équation générale de l'aimantation d'un ferromagnétique basée sur le modèle (25) avec développement à l'ordre deux s'écrit comme suit :

$$M - M_r = \Lambda \left\{ \mathcal{L} \left(\frac{B_e}{a} \right) - k \tau \mathcal{L}^1 \left(\frac{B_e}{a} \right) + k^2 \mathcal{L}^2 \left(\frac{B_e}{a} \right) \right. \\ \left. - \left[\mathcal{L} \left(\frac{B_e}{a} \right)_r - k_r \tau_r \mathcal{L}^1 \left(\frac{B_e}{a} \right)_r + k_r^2 \mathcal{L}^2 \left(\frac{B_e}{a} \right)_r \right] \right\}, \quad (35)$$

où M et B_e sont les valeurs de l'aimantation et du champ effectif en un point quelconque, M_r et $(B_e)_r$ sont les valeurs au dernier point de renversement, et Λ est donnée par :

$$\Lambda = \frac{A_1^- - A_r^-}{A_1^+ - A_r^+}, \quad (36)$$

où

$$A_{1,r}^\mp = \mathcal{L} \left(\frac{B_e}{a} \right)_{1,r} - k_{1,r} \tau^\mp \mathcal{L}^1 \left(\frac{B_e}{a} \right)_{1,r} + k_{1,r}^2 \mathcal{L}^2 \left(\frac{B_e}{a} \right)_{1,r}, \quad (37)$$

où l'indice r correspond à un extremum de la boucle mineure, l'indice 1 correspond à un point de la boucle majeure, τ^- indique que le paramètre directionnel est -1 et τ^+ indique que le paramètre directionnel est $+1$.

Si un solide est soumis à une contrainte uniaxiale, cela lui causera des dislocations et des changements de l'énergie. La superposition de contrainte appliquée et de contraintes résiduelles internes change la contrainte totale. L'effet de contrainte sur les inclusions non magnétiques n'est pas clair; cependant, la contrainte appliquée causera certainement des changements dans le champ de contrainte.

Donc, la contrainte externe donne des changements dans l'énergie dûs aux impuretés et dans les contraintes résiduelles dûs aux inclusions non homogènes. Cette énergie et ces inclusions non homogènes sont considérées comme les premières

responsables de l'ancrage des parois. La diversité de sites d'ancrages prévoit la difficulté d'établir un rapport exact à propos des effets de contraintes. Cependant, il est raisonnable de considérer que l'énergie d'ancrage de quelques sites décroît pendant que l'énergie d'ancrage d'autres sites croît.

Dans ce qui va suivre, on va tenir compte de l'effet de l'application d'une contrainte σ , de signe quelconque, quand le champ magnétique est constant et très grand. Si les sites d'ancrages sur lesquels les parois sont localisées sous les conditions initiales, sont pris en considération, alors plusieurs d'entre eux ont une énergie d'ancrage croissante, par conséquent la paroi reste attachée à ces sites en changeant légèrement l'aimantation. Parmi les sites d'ancrages dont l'énergie est réduite, on constate que cette réduction d'énergie brise les parois qui se déplacent. Il est nécessaire de comprendre comment ces parois qui succèdent aux parois brisées se déplacent.

Dans les travaux de Jiles et Atherton [27], [28] et [29], une théorie des processus d'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques a été développée clairement. Le processus d'aimantation est expliqué à l'aide de deux phénomènes apparents, le mouvement d'une paroi et la rotation de l'aimantation. Dans le cas idéal où il n'y a pas d'ancrage de parois, l'équation d'énergie est déduite à partir de la théorie du champ. Il a été montré que l'application d'une contrainte de traction ou de compression (quand le champ magnétique est fixé) rend l'aimantation plus proche que celle de la courbe de première aimantation. Cela implique que sur la courbe de première aimantation (à champ magnétique faible), l'aimantation croît quand l'échantillon est soumis à des contraintes cycliques de signes quelconques. Quand on est sur les régions de la branche supérieure de la courbe d'hystérésis, l'aimantation décroît avec les contraintes cycliques.

On rappelle que le champ effectif H^{eff} de la théorie du micromagnétisme [30] peut se mettre sous la forme

$$H_i^{eff} = H_i + H_i^L + \rho^{-1} T_{ij,j} \quad (38)$$

où H est le champ de Maxwell, H^L est le champ magnétique local, T_{ij} est le tenseur des forces d'interactions entre spins magnétiques et ρ est la densité de la matière.

Dans le cas du paramagnétisme (ni forces d'interactions, ni effet gyromagnétique) l'équation d'équilibre du micromagnétisme s'écrit [31] :

$$H_i + H_i^L = 0 \quad (39)$$

En posant

$$H^L(M) = \alpha M - \frac{a}{\mu_0} \mathcal{L}^{-1}(M) , \quad (40)$$

l'équation (39) est équivalente à l'équation de Langevin [27] - [32], (23), car la fonction de Langevin \mathcal{L} est univoque et il existe une fonction inverse \mathcal{L}^{-1} de \mathcal{L} .

Dans le cas d'ancrage des parois d'un ferromagnétique, l'équation (25) est aussi équivalente à l'équation (39) avec un changement éventuel de la forme du champ local H^L , car la fonction de Langevin est univoque, l'équation (39) peut donc s'écrire sous la forme

$$\frac{B_e}{a} = H + \alpha M = \frac{a}{\mu_0} \mathcal{L}^{-1}(M) - \frac{a}{\mu_0} \mathcal{L}^{-1} \left(-\tau k \frac{dM}{dB_e} \right) \quad (41)$$

qui peut se mettre, en tenant compte de (40), sous la forme :

$$H + H^L + H_A = 0 , \quad (42)$$

avec

$$H_A = \frac{a}{\mu_0} \mathcal{L}^{-1} \left(-\tau k \frac{dM}{dB_e} \right) . \quad (43)$$

En réalité le champ magnétique d'ancrage H_A est une contribution -singularisée dans (41)- au champ magnétique H^L , car celui-ci tient compte phénoménologiquement de tous les processus d'interaction, réversibles ou non, entre le champ de moments magnétiques et le substrat matériel (réseau cristallin avec ou sans défauts structuraux). Autrement dit l'équation (39) est toujours vraie dans les deux cas avec ou sans ancrage des parois d'un ferromagnétique.

4 Théorie de la force coercive

La force coercive H_c est un critère très important dans la sélection des matériaux ferromagnétiques pour les applications pratiques. Des recherches dans le domaine des techniques d'aimantation ont montré d'une manière expérimentale que la force coercive H_c est proportionnelle à la racine quatrième de la déformation plastique ε^p [33], [34]. On trouve aussi des travaux théoriques [35], [36] concernant l'influence des dislocations sur les paramètres de base de la courbe d'aimantation, c'est-à-dire, la force coercive et la perméabilité initiale (voir aussi [27], [29]).

La théorie de l'hystérésis ferromagnétique et de la force coercive est basée sur la notion de déplacements irréversibles des parois qui séparent les domaines ferromagnétiques élémentaires. Une paroi est freinée dans son mouvement par

les inégalités locales de sa tension superficielle que provoquent soit les perturbations élastiques du réseau cristallin, soit la présence d'inclusions non magnétique. L.Néel [37] a proposé un mécanisme simple pour calculer la force coercive : Il existe des fluctuations de la direction et de l'intensité de l'aimantation à l'intérieur des domaines élémentaires. Ces fluctuations sont provoquées (i) en direction par les perturbations élastiques du réseau et (ii) en intensité par les inégalités de concentration ou par la présence d'inclusions ou de cavités. Par suite de l'existence de ces fluctuations, la divergence du vecteur aimantation n'est plus nulle et les charges magnétiques fictives ainsi apparues ($-\nabla \cdot \underline{M}$) créent une énergie qui varie suivant la position de la paroi, indépendamment de l'existence d'une tension superficielle de la paroi qui ne joue qu'un rôle secondaire.

Imaginons une paroi P plane et indéformable (rigide) séparant deux domaines aimantés antiparallèlement (la paroi est dite à 180°) et susceptible de se déplacer parallèlement à elle-même. Ses déplacements sont repérés par l'abscisse x du plan de symétrie de la paroi (d'épaisseur δ), comptée suivant un axe Ox perpendiculaire à la paroi. Supposons que l'énergie superficielle γ de la paroi P , rapportée à l'unité de surface, varie avec x d'une manière que $\gamma(x)$ soit irrégulière. Appliquons un champ \underline{H} dirigé parallèlement à l'aimantation $\underline{M} = M_s \underline{e}_y$ du domaine situé du côté des x négatifs. L'action de ce champ est équivalente à celle d'une pression hydrostatique p_H donnée par [15]

$$p_H = -[[\underline{M}]]_p \cdot \underline{H} = -(\underline{M}^+ - \underline{M}^-) \cdot \underline{H} = 2M_s H \quad (44)$$

où $[[\cdot]]_p$ indique le saut à travers la paroi P compté entre le côté + et le - comme en théorie des discontinuités en hydrodynamique.

La paroi se déplace donc jusqu'à un point où la pression (44) est équilibrée par la force F_γ déduite du potentiel γ , soit $\partial\gamma/\partial x$. D'après Néel [37], le champ coercif H_c est lié d'une manière étroite au champ critique correspondant à la valeur maximale de la force F_γ (tension superficielle), donc de la valeur maximale de la pente $\partial\gamma/\partial x$ de la courbe Γ de la figure 7, soit

$$H_c \simeq \frac{1}{2M_s} \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} \right)_{\text{maxi}} \quad (45)$$

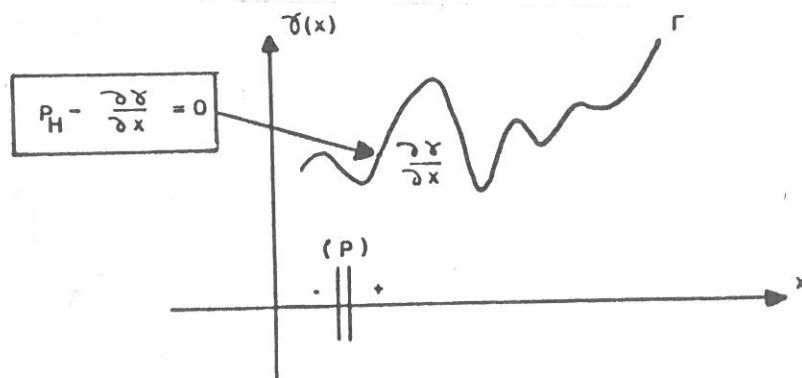


Figure 7

Au point de vue physique il faut rechercher l'origine des variations de la "tension superficielle" soit dans les inégalités de contraintes internes, soit dans l'existence d'inclusions non magnétiques. Dans la suite on néglige le second phénomène, Becker a montré [38] que lorsqu'un ferromagnétique dont, pour simplifier, la magnétostriction à saturation β_s est supposée être isotrope, est soumis à une tension pure σ , faisant un angle θ avec la direction de l'aimantation à saturation M_s , il faut ajouter à l'énergie un terme d'interaction égal à $3(\beta_s \sigma \sin^2 \theta)/2$. La quantité $C = 3\beta_s \sigma/2$ (énergie de déformation magnétoélastique) joue ainsi un rôle identique à celui de la constante d'anisotropie K caractérisant l'énergie magnétocristalline (voir Kléman [39] ou Maugin [40] pour cette analogie).

Soit, maintenant, un ferromagnétique de symétrie cubique dans lequel une fraction v de volume est perturbée par des tensions internes σ . Après un calcul assez long Néel [37] a obtenu la formule suivante pour la force coercive :

$$H_c = \frac{4}{\pi} \frac{\mathcal{P}}{M_s} \frac{C^2}{K + C_r} \left\{ 1,386 + \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{2\pi M_s^2}{C_r + K} \right) \right\} \quad (46)$$

où \mathcal{P} et r sont des constantes. Deux cas de (46) sont particulièrement intéressants:

(i) L'énergie de déformation magnétoélastique C , qui affecte la fraction v du spécimen, est petite comparée à l'énergie magnétocristalline K . Dans ces conditions, (46) se réduit à

$$H_c \simeq \frac{4}{15\pi} \frac{vC^2}{KM_s} \left\{ 1,386 + \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{2\pi M_s^2}{K} \right) \right\} . \quad (47)$$

(ii) L'énergie C est grande devant K ; (46) se réduit à

$$H_c \simeq 0,69 \frac{vC}{M_s} \left\{ 1,386 + \text{Log} \left(\sqrt{\frac{6,8}{C}} \cdot M_s \right) \right\} . \quad (48)$$

Lorsque l'échantillon est très perturbé par la tension interne, $v \simeq 1$ et (48) se rapproche de la formule simple

$$H_c \simeq \frac{C}{M_s} . \quad (49)$$

Introduisons maintenant la notion de dislocation. On considère une dislocation vis. Suivant le processus de Volterra et isolant l'axe (Friedel [41]), on considère que le tube de périmètre $2\pi r$ entourant l'axe a été cisailé d'une quantité b , le

vecteur de Burgers, ce qui donne une composante de cisaillement $b/2\pi r$. La cission correspondante dans un milieu élastique linéaire isotrope est donnée par [42] :

$$\sigma = \frac{Gb}{2\pi r} \quad (50)$$

où G est le module élastique de cisaillement. L'expression (50) n'est pas valable dans le voisinage immédiat de la dislocation en raison de la singularité évidente. Soit N_d la densité de lignes parallèles de dislocations vis dans le cristal. Considérons l'élément de volume cylindrique

$$dv = 2\pi r dr \quad , \quad (51)$$

Dietrich et Kneller [43] ont montré que le produit $v\sigma$ pouvait alors se mettre sous la forme suivante :

$$v\sigma = \frac{1}{2} b G \sqrt{N_d} \quad . \quad (52)$$

Introduisant (52) dans (48) il vient

$$H_c = \frac{1,035}{2} \frac{\beta_s}{M_s} \left\{ 1,386 + \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{13,6.M_s^2}{3\beta_s\sigma} \right) \right\} . b G \sqrt{N_d} \quad . \quad (53)$$

D'après Dietrich et Kneller [43], dans un cas particulier et pour fixer les idées (M_s^2/β_s) $\simeq 0,6.10^{10}$ et $\sigma = \bar{\sigma} = 10^9$, d'où la formule simple

$$H_c = a \frac{\beta_s}{M_s} b G \sqrt{N_d} \quad (54)$$

où a est un coefficient caractéristique du matériau. D'après Kersten [35], N_d dépend de ε^p suivant :

$$N_d = 0,54.10^{11} \sqrt{\varepsilon^p} \quad . \quad (55)$$

Combinant (54) et (55) on a donc

$$H_c = a \frac{\beta_s}{M_s} . 2,32.10^5 . b . G . (\varepsilon^p)^{1/4} \quad . \quad (56)$$

On rappelle brièvement l'interprétation théorique de la dépendance de la force coercive par rapport à la densité de dislocations donnée par Vicena [36]. Ce dernier a montré que lorsque la force coercive est déterminée seulement par les tensions internes, on a l'expression

$$H_c = \frac{1}{2M_s L^{5/2}} \left\{ 2 . \text{Log } p . \int_{(k)} dn(k) . \int_{x_0 - \frac{1}{2}(d+\delta)}^{x_0 + \frac{1}{2}(d+\delta)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Phi^k(x - x_0) \right)^2 dx \right\}^{1/2} \quad (57)$$

où p est le nombre de valeurs indépendantes du champ critique par unité de surface de frontière du domaine pour une géométrie donnée; $n(k)$ est le nombre de régions déformées caractérisées par le paramètre k ; d est la dimension moyenne de la région déformée; $\Phi^k(x-x_0)$ est l'énergie d'interaction entre les perturbations ayant comme paramètre k avec leur centre en x_0 et x le centre de la paroi; δ est l'épaisseur de la paroi et L est la longueur moyenne du domaine. D'après le calcul de Vicena

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi^k(x-x_0)\right)^2 = (R \sin w)^2 L^2 \quad \text{pour } x_0 - \frac{1}{2}\delta < x < x_0 + \frac{1}{2}\delta \quad (58)$$

où w est l'angle caractérisant la perte du plan de glissement de la dislocation par rapport à la paroi et R est l'amplitude de la barrière de potentiel qui doit être surmontée par la paroi pour passer "sur" les dislocations. Cette dernière quantité est donnée par (élasticité linéaire)

$$R = \frac{3}{2}\beta b G \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad , \quad (59)$$

où ν est le coefficient de Poisson, β est l'aimantation par unité de volume, b est le vecteur de Burgers et G est le module de cisaillement élastique. La densité $dn(k)$ est définie par

$$dn(k) = \frac{p_{II}}{2\pi} dw \quad , \quad (60)$$

où p_{II} est le nombre de dislocations qui, dans le domaine, sont parallèles à la paroi. On a

$$p_{II} = N_d \cdot \delta \cdot L \quad . \quad (61)$$

La constante p dans (57) est donnée par (rapport d'aspect de la paroi) :

$$p = \frac{L}{\delta} \quad . \quad (62)$$

Après intégration compte tenu de (58) à (61) Vicena [36] a obtenu la formule simple suivante donnant H_c en fonction de N_d :

$$H_c = \frac{1}{2M_s L} \cdot R \cdot \delta \cdot \sqrt{\text{Log } p} \cdot \sqrt{N_d} \quad . \quad (63)$$

En utilisant la déformation (62) pour p Vicena fait l'approximation que la dimension de perturbation d est nulle, ce qui n'est pas entièrement justifié évidemment. Malek [34] a levé cette simplification en écrivant que

$$p = \frac{2L}{d + \delta} \quad . \quad (64)$$

Dans ce cas (63) est remplacée par l'expression suivante :

$$H_c = \frac{3}{8M_s L} \cdot |\beta| \cdot b \cdot G \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \left\{ (d+\delta) \cdot \delta \cdot \text{Log} \left(\frac{2L}{d+\delta} \right) \right\}^{1/2} \cdot \sqrt{N_d} \quad (65)$$

On note que l'épaisseur de paroi dépend de l'énergie d'échange A et de la constante d'anisotropie magnétique suivant l'expression (Kittel [42], Landau et Lifshitz [44]) :

$$\delta \simeq 2\sqrt{\frac{A}{K}} \quad (66)$$

et que l'expression sous la racine 1/2 dans (65) est une fonction décroissante de N_d , mais non monotone lorsque toutes les autres quantités sont fixées.

D'après les travaux de Köster et Bangert [45], la densité de dislocations N_d peut s'exprimer de la manière suivante en fonction de la déformation plastique ε^p (expression non valable au voisinage de $\varepsilon^p = 0$).

$$N_d = 5,4 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \sqrt{\varepsilon^p} \quad (67)$$

où a est un coefficient caractéristique du matériau. Introduisant (67) dans (65) on obtient l'expression

$$H_c = \frac{Q}{L} \cdot \frac{|\beta|}{M_s} \cdot \left\{ (d+\delta) \cdot \delta \cdot \text{Log} \left(\frac{2L}{d+\delta} \right) \right\}^{1/2} (\varepsilon^p)^{1/4} \quad (68)$$

où

$$Q \equiv 8,7 \cdot 10^4 \cdot \frac{b}{a} \cdot G \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (69)$$

On remarque que les équations résultantes (56) et (68) obtenues soit à partir de la théorie de Néel, soit à partir de la théorie de Vicena, font intervenir les mêmes paramètres et variables, N_d , β , M_s , b et G . En comparant ces expressions on voit que c'est l'équation (68) qui est la plus proche des résultats expérimentaux [33], [34].

Si l'on tient compte de l'effet de température alors H_c s'exprime en fonction de N_d sous la forme [35] :

$$H_c = \frac{1}{M_s} \left(\frac{K k_B T_c}{C} \right)^{1/2} \sqrt{N_d} \quad (70)$$

où T_c est la température de Curie et C est une constante.

5 Conclusion

Afin de pouvoir formuler une théorie générale de l'hystérésis magnéto-mécanique, on a étudié dans cette partie quelques problèmes concernant les matériaux ferromagnétiques, les modèles de l'hystérésis et la théorie de la force coercive.

Après avoir donné la définition d'un matériau ferromagnétique, la section 2 a été consacrée à l'analyse du phénomène de magnétostriction afin de déboucher sur des moyens et méthodes qui permettent la modélisation de ce type de comportement.

Un autre problème abordé dans la section 3 est celui de l'hystérésis. On a défini le modèle physique de Preisach ainsi que le pas décisif fait par Krasnosel'skii, pour pouvoir donner à ce modèle, grâce à la théorie spectrale, une autre forme purement mathématique. En faisant agir un champ magnétique sur une substance formée d'un ensemble de domaines élémentaires, le modèle de Néel résout le problème de l'hystérésis en tenant compte de l'effet des déplacements des parois magnétiques. En se référant au modèle de Visintin, on a donc pu présenter la relation constitutive entre le champ magnétique et l'aimantation comme une fonctionnelle à mémoire. Par conséquent, Visintin a utilisé des notions très poussées de l'analyse fonctionnelle pour résoudre ce problème d'hystérésis. En se basant sur la théorie micromagnétique et en appliquant les statistiques de Maxwell-Boltzmann, le modèle de Jiles et Atherton explique bien le phénomène de l'hystérésis par l'intermédiaire de l'équation de Langevin.

Les équations résultantes obtenues pour la force coercive soit à partir de la théorie de Néel, soit à partir de la théorie de Vicena, font intervenir les mêmes paramètres et variables. Ainsi, dans la section 4, on a établi la relation entre le champ coercif et la déformation plastique.

References

- [1] **E. du Trémolet de Lacheisserie**, *Magnetostriction : Theory and Applications of Magnetoelasticity*, Boca Raton : CRC Press, 1993
- [2] **R.M.Bozorth**, *Ferromagnetism*, 2nd Ed., New York : Van Nostrand, 1951
- [3] **SChikazumi**, *Physics of Magnetism*, Nex York : J.Wiley & Sons, 1964
- [4] **I.D.Mayergoyz**, *Mathematical Models of Hysteresis*, Springer-Verlag, New York, 1991
- [5] **L.Chua & S.Bass**, *IEEE Trans. Circuit Theory*, 19, p.36, 1972
- [6] **D.C.Jiles & J.B.Thoelke**, *IEEE Trans. Magnetics*, 25, p.3928, 1989
- [7] **F.Preisach**, *Z.Phys.*, 94, p.277, 1935
- [8] **L.Néel**, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, 246, p.2313, 1958
- [9] **A.Damlianian & A.Visintin**, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, 297, p.437, 1983
- [10] **M.Krasnoselskii & A.Pokrovskii**, *Systems with hysteresis*, Nauka, Moscow, 1983
- [11] **L.Rayleigh**, *Phil. Mag.*, 23, p.225, 1887
- [12] **P.Weiss & J. de Freudenreich**, *Arch. Sc. Phys. Nat.*, Genève, 42, p.449, 1916
- [13] **L.Néel**, *Cahiers de Physique*, 12, p.1, 1942
- [14] **F.Bloch**, *Z. Physik*, 74, p.295, 1932
- [15] **L.Néel**, *Cahiers de Physique*, 13, p.18, 1943
- [16] **A.Visintin**, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 131, p.203, 1982
- [17] **A.Visintin**, *Mathematical Modelling*, 5, p.43, 1984
- [18] **H.B.Callen**, *J. Phys. Chem. Solids*, 4, p.256, 1958
- [19] **R.S.Treble & D.J. Craik**, *Magnetic Materials*, Wiley, New York, 1969
- [20] **J.R. Brauer**, *IEEE Trans. Magn.* , Mag-11, p.81, 1975

- [21] **J. Rivas, J.M. Zamano, E. Martin & C. Pereira**, IEEE Trans. Magn., Mag-17, p.1498, 1981
- [22] **R.M. Del Vecchio**, IEEE Trans. Magn., Mag-16, p.809, 1980
- [23] **M.A. Rahman, M. Poloujadoff, R.D. Jackson, J. Perrard & S.D. Gowda**, IEEE Trans. Magn., Mag-17, p.3253, 1981
- [24] **W.F. Brown**, J. Appl., 30, p.62, 1959
- [25] **A. Aharoni**, J. Appl. Phys., 30, p.70, 1959
- [26] **M. Langevin**, Ann. Chem. Phys., 5, p.70, 1905
- [27] **D.C. Jiles & D.L. Atherton**, J. app. Phys, 55, p.2115, 1984
- [28] **D.C. Jiles & D.L. Atherton**, J. Phys. D : Appl. Phys, 17, p.1265, 1984
- [29] **D.C. Jiles & D.L. Atherton**, IEEE Trans. Magn., Mag-19, p.2183, 1983
- [30] **G.A. Maugin**, Micromagnetism, in Continuum Physics, Ed. A.C. Eringen, Vol. III, p.213, Academic Press, New York, 1976
- [31] **G.A. Maugin , M. Sabir & P. Chambon**, Coupled Magnetomechanical Hysteresis Effects : Application to Nondestructive Testing, in Electromagnetomechanical Interaction in Deformable Solids and Structures, Ed. Yamamoto & K. Miya, North-Holland, Amsterdam, 1987
- [32] **J.H. Van Vleck**, The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities, Oxford University Press, Landon, 1932
- [33] **I.Y. Dektyar & D.A. Levina**, Phys. Met. Metall, 12, p.27, 1962
- [34] **Z. Malek**, Czech. J. Phys., 9, p.613, 1959
- [35] **M.Kersten**, Physik. Z., 44, p.63, 1943
- [36] **F. Vicena**, Czech. J. Phys., 5, p.480, 1955
- [37] **L. Néel**, Ann. Univ. Grenoble, 22, p.299, 1946
- [38] **R. Becker & W. Döring**, Ferromagnetisms, Springer, Berlin, 1939
- [39] **M. Kleman**, Dislocations, Disclinations and Magnetism, in Dislocations in Solids, 5, Ed. F.R.N. Nabarro, p.349, North-Holland, Amsterdam, 1980
- [40] **G.A. Maugin**, Classical Magnetoelasticity with Defects, in Electromagnetic Interactions in Elastic Solids, Ed. H. Parkus, p.243, Springer-Verlag, Wien, 1979

- [41] **J. Friedel**, Dislocations, Pergamon Press, Oxford, 1964
- [42] **C. Kittel**, Introduction à la Physique de l'état Solide, Dunod, Paris, 1972
- [43] **H. Dietrich & E. Kneller**, Zeit. Metalek, 47, p.716, 1956
- [44] **L.D. Landau & E.M. Lifshitz**, Electrodynamics of Continuous Media, Pergamon Press, New York 1960
- [45] **W. Köster & L. Bangert**, Acta Metallurgica, 3, p.274, 1955
- [46] **J.A. Szpunar & B. Szpunar**, J. Appl. Phys., 57, p.4232, 1985
- [47] **G.A. Maugin**, J. Physics, A5, p.1550, 1972
- [48] **G.A. Maugin**, Physica, 81a, p.454, 1975

Deuxième Partie
Relations Constitutives de l'Hystérésis
Magnéto-mécanique dans les Matériaux
Ferromagnétiques

Relations Constitutives de l'Hystérésis Magnétomécanique dans les Matériaux Ferromagnétiques

1 Résumé

Dans ce travail, nous présentons une relation constitutive qui donne une bonne description de l'hystérésis magnétomécanique. Nous présentons aussi des notions comme l'aimantation résiduelle, la courbe de première aimantation, les boucles mineures et majeures d'hystérésis et la courbe dérivée. Enfin nous étudions l'effet de l'application de contrainte sur la forme de ces boucles d'hystérésis et sur le niveau de saturation. Nous avons donc pu trouver d'une manière générale l'énergie dégagée lors de la formation de la boucle d'hystérésis. L'un des objectifs visés est de produire une explication du bruit ferromagnétique appelé aussi effet Barkhausen (utilisé comme un moyen de contrôle non-destructif pour mesurer les contraintes résiduelles).

2 Introduction

On fait varier un stimulus extérieur de manière alternée ou périodique avec, éventuellement, une augmentation simultanée de son amplitude et on enregistre la réponse du système. Après un certain temps, la réponse elle-même devient périodique et le diagramme représentant la réponse en fonction de l'agent extérieur devient un cycle fermé appelé "boucle d'hystérésis". Le phénomène d'hystérésis est rencontré dans plusieurs domaines scientifiques. On peut citer comme exemples : l'hystérésis mécanique, l'hystérésis magnétique et l'hystérésis ferroélectrique.

Preisach [1] a été l'un des premiers à s'intéresser à l'hystérésis. Pour cela, il a considéré un matériau magnétique comme un ensemble de domaines élémentaires possédant chacun un cycle d'aimantation rectangulaire et symétrique. Une paroi entre deux domaines n'est pas une surface géométrique mais c'est une zone intermédiaire de faible épaisseur avec une variation continue de l'orientation du moment magnétique du spin. Ainsi, sous l'action d'un champ magnétique extérieur, les domaines de Weiss [2, 3], dont la direction d'aimantation spontanée est dans la direction du champ extérieur, s'agrandissent aux dépens de domaines dont la direction est très différente. Ceci se traduit par un déplacement réversible des parois dans les champs faibles, irréversible dans les champs plus élevés. A l'approche de la saturation, les moments magnétiques tournent pour s'orienter parallèlement au champ extérieur. Sous l'action d'une variation du champ extérieur, une paroi se déplace réversiblement et rencontre un obstacle, elle s'arrête malgré la croissance du champ extérieur.

Nous noterons, entre autres, les travaux de Maugin sur la relaxation magnétique dans les ferromagnétiques rigides ou déformables [4 - 6], sur le couplage entre défauts et propriétés magnétoélastiques dans les ferromagnétiques cristallins [7, 8] et sur l'examen des relations et des interactions entre l'hystérésis magnétique et l'état mécanique de quelques matériaux [9 - 11]. Cela a une grande importance pratique pour le développement de certains aspects du contrôle non destructif, c'est-à-dire, l'aimantation par des mouvements saccadés (effets Barkhausen qui est le signal de haute fréquence réémis par un échantillon ferromagnétique lorsque celui-ci est aimanté en une boucle d'hystérésis sous l'action d'un champ magnétique à basse fréquence) des parois ferromagnétiques [12 - 14].

Les différents paramètres de la boucle d'hystérésis magnétique, c'est-à-dire, le champ magnétique coercitif, la valeur maximale de l'amplitude de l'aimantation

résiduelle et ses pentes sont sensibles à des effets diverses [15]. La boucle d'hystérésis est sensible à l'action de la contrainte appliquée [19 - 21].

En se basant sur les études de B.D.Coleman et M.L.Hodgdon [16, 17] sur l'hystérésis purement magnétique, on explore physiquement des implications qui se rapportent à des relations constitutives pour le cas unidimensionnel. On présente dans ce travail des simulations numériques sur les effets des contraintes sur différentes caractéristiques de la boucle d'hystérésis magnétique.

On a étudié les effets de contrainte sur la courbe de première aimantation et sur la pente de cette courbe sans changer le seuil de saturation de l'aimantation résiduelle. La pente de la boucle d'hystérésis dépend non seulement du coefficient de couplage magnétomécanique mais aussi de la contrainte appliquée (contrainte de tension ou de compression). Cependant, à partir du point de vue expérimental, les effets sont plus complexes. Généralement, si on fait subir à un matériau ferromagnétique des chargements mécaniques, tous les paramètres de la boucle d'hystérésis seront influencés par ce chargement. Pour résoudre ce problème, on propose, pour l'instant, une formule qui exprime la dépendance du niveau de saturation sur la contrainte.

3 Relations Générales

L'état d'un milieu, pour les effets dissipatifs, dépend de son passé, et cela en tenant compte des variables internes d'états. Parmi ces variables, nous considérons l'aimantation résiduelle M^R .

Dans le cas unidimensionnel, nous explorons physiquement les implications qui ont un rapport avec des relations constitutives pour l'hystérésis ferromagnétique. Ces relations ont la forme générale suivante (voir B.D.Coleman et M.L.Hodgdon [16, 17]) :

$$\dot{M}^R = \alpha |\dot{H}| (F(H) - M^R) + \dot{H} G(H), \quad (1)$$

où le champ magnétique H et l'aimantation résiduelle M^R sont des fonctions continues dérivables du temps, α est une constante positive et F et G sont des fonctions à valeurs réelles. Dans ce qui suit, on va exploiter la relation (1) sous les hypothèses suivantes.

i) F est une fonction monotone, croissante, impaire et dérivable par morceaux avec une dérivée, F' , non nulle et qui a, pour H assez grand, une limite finie $F'(\infty)$.

ii) G est une fonction continue, paire et qui a une limite, pour H assez grand, vérifiant $G(\infty) = F'(\infty)$.

Si nous appliquons un champ magnétique (c'est le cas purement magnétique), l'aimantation résiduelle M^R est donnée par l'équation (1). Mais, quand nous appliquons un champ magnétique H et une contrainte mécanique σ , l'aimantation \widehat{M}^R (le chapeau correspond au couplage magnétomécanique) dans le milieu correspond à celle obtenue dans le cas où on a appliqué un champ magnétique fictif \widehat{H} de la forme (voir G.A. Maugin et Sabir [10]) :

$$\widehat{H} = H - 2\beta M^R, \quad (2)$$

où β est une quantité réelle.

Par analogie avec l'équation (1), quand nous avons un couplage magnétomécanique, la dérivée de l'aimantation résiduelle a la forme

$$\dot{\widehat{M}}^R = \alpha \left| \dot{\widehat{H}} \right| \left(F(\widehat{H}) - \widehat{M}^R \right) + \dot{\widehat{H}} G(\widehat{H}). \quad (3)$$

4 Observations Générales

Pour produire la courbe d'hystérésis, on a besoin d'appliquer un agent extérieur périodique H comme fonction du temps t avec une amplitude croissante. Si, nous considérons que $\dot{H}(t)$ est non nul à tout temps t , alors $\widehat{H}(t)$ est aussi non nul à tout temps t et les équations (1) et (3) deviennent :

$$\frac{dM^R}{dH} = \alpha S(\dot{H}) \left(F(H) - M^R \right) + G(H), \quad (4)$$

et

$$\frac{d\widehat{M}^R}{d\widehat{H}} = \alpha S(\dot{\widehat{H}}) \left(F(\widehat{H}) - \widehat{M}^R \right) + G(\widehat{H}),$$

où

$$S(\dot{X}) = \begin{cases} +1 \text{ pour } \dot{X} > 0 \\ -1 \text{ pour } \dot{X} < 0 \end{cases}.$$

Nous devons trouver des relations entre l'aimantation résiduelle couplée \widehat{M}^R et le champ magnétique appliqué H (non \widehat{H}). Donc, en tenant compte des équations (2) et (3), la relation (4)₂ devient

$$\frac{d\widehat{M}^R}{dH} = \left\{ 1 - \beta \left[\alpha S(\dot{H}) \left(F(H) - M^R \right) + G(H) \right] \right\}$$

$$\times \left\{ \alpha S(\widehat{H}) (F(\widehat{H}) - \widehat{M}^R) + G(\widehat{H}) \right\}. \quad (5)$$

On montre que si β est très petit devant l'unité, on aura

$$S(\dot{H}) \cdot S(\widehat{H}) = 1.$$

Cela peut être interpréter par le fait que les deux courbes d'hystérésis, pour le cas purement magnétique et le cas du couplage magnétomécanique, atteignent la saturation pour la même valeur de H .

Quand le champ magnétique H est croissant, $S(\dot{H}) = S(\widehat{H}) = 1$, la solution M_L^R de (4) qui commence à partir d'un point (H_0, M_0^R) est donnée par

$$M_L^R(H) = M_L^R(H; H_0, M_0^R) = F(H) + [M_0^R - F(H_0)] e^{-\alpha(H-H_0)} - \quad (6)$$

$$- e^{-\alpha H} \int_{H_0}^H (F'(\xi) - G(\xi)) e^{\alpha \xi} d\xi, \quad H \geq H_0,$$

et la solution \widehat{M}_L^R de (5) qui commence à partir d'un point (H_0, \widehat{M}_0^R) est donnée par

$$\widehat{M}_L^R(H) = \widehat{M}_L^R(H; H_0, \widehat{M}_0^R) = A_L(H) + [\widehat{M}_0^R - A_L(H_0)] e^{-\int_{H_0}^H \Pi_L(t) dt} \quad (7)$$

$$- e^{-\int_{H_0}^H \Pi_L(t) dt} \int_{H_0}^H (A'_L(\xi) - B_L(\xi)) e^{\int_{H_0}^{\xi} \Pi_L(t) dt} d\xi, \quad H \geq H_0,$$

où

$$\Pi_L(H) = \Pi_L(H; H_0, M_0^R) = \alpha \left\{ 1 - \beta \left(\alpha (F(H) - M_L^R(H)) + G(H) \right) \right\} \quad (8)$$

$$B_L(H) = B_L(H; H_0, M_0^R) = G(\widehat{H}) \left\{ 1 - \beta \left(\alpha (F(H) - M_L^R(H)) + G(H) \right) \right\}$$

$$\widehat{H} = H - \beta M_L^R(H)$$

$$A_L(H) = A_L(H; H_0, M_0^R) = F(\widehat{H}) .$$

Quand le champ magnétique H est décroissant, $S(\dot{H}) = S(\widehat{\dot{H}}) = -1$, la solution M_U^R de l'équation (4) qui commence à partir d'un point (H_0, M_0^R) est

$$M_U^R(H) = M_U^R(H; H_0, M_0^R) = F(H) + [M_0^R - F(H_0)] e^{-\alpha(H-H_0)} \quad (9)$$

$$+ e^{\alpha H} \int_H^{H_0} (F'(\xi) - G(\xi)) e^{-\alpha \xi} d\xi, \quad H \leq H_0$$

et la solution \widehat{M}_U^R de (5) qui commence à partir d'un point (H_0, \widehat{M}_0^R) est donnée par

$$\widehat{M}_U^R(H) = \widehat{M}_U^R(H; H_0, \widehat{M}_0^R) = A_U(H) + [\widehat{M}_0^R - A_U(H_0)] e^{-\int_H^{H_0} \Pi_U(t) dt} \quad (10)$$

$$+ e^{\int_{H_0}^H \Pi_U(t) dt} \int_H^{H_0} (A_U'(\xi) - B_U(\xi)) e^{-\int_{H_0}^{\xi} \Pi_U(t) dt} d\xi, \quad H \leq H_0,$$

où

$$\Pi_U(H) = \Pi_U(H; H_0, M_0^R) = \alpha \left\{ 1 - \beta \left[\alpha (M_U^R(H) - F(H)) + G(H) \right] \right\} \quad (11)$$

$$B_U(H) = B_U(H; H_0, M_0^R) = G(\widehat{H}) \left\{ 1 - \beta \left[\alpha (M_U^R(H) - F(H)) + G(H) \right] \right\}$$

$$\widehat{H} = H - \beta M_U^R(H; H_0, M_0^R)$$

$$A_U(H) = A_U(H; H_0, M_0^R) = F(\widehat{H}) .$$

Remarque

Si le champ magnétique H est égal à zéro, l'aimantation résiduelle M^R est aussi égale à zéro. Donc, en utilisant la relation (2), nous avons aussi $\widehat{H} = 0$ et $\widehat{M}^R = 0$ pour toutes les valeurs des champs magnétiques et des contraintes. Les deux courbes de première aimantation sont des courbes de chargement à partir de l'état vierge de non-aimantation (0,0). Elles sont données dans le cas purement magnétique par

$$M_L^R(H) = M_L^R(H; 0, 0) = F(H) - e^{-\alpha H} \int_0^H (F'(\xi) - G(\xi)) e^{\alpha \xi} d\xi,$$

et dans la cas de couplage par

$$\widehat{M}_L^R(H) = \widehat{M}_L^R(H; 0, 0) = A_L(H)$$

$$-e^{-\int_0^H \Pi_L(t) dt} \int_0^H (A'_L(\xi) - B_L(\xi)) e^{\int_0^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi.$$

4.1 Boucles majeures d'hystérésis

Les quantités

$$M_U^R(H; +\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow +\infty} M_U^R(H; H_0, M_0^R) \quad (12)$$

et

$$\widehat{M}_U^R(H; +\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow +\infty} \widehat{M}_U^R(H; H_0, \widehat{M}_0^R),$$

peuvent être considérées comme les aimantations résiduelles d'un matériau qui a été chargé jusqu'à la saturation et puis déchargé jusqu'à la valeur H .

Les graphes des fonctions $H \mapsto M_U^R(H; +\infty)$ ou $H \mapsto \widehat{M}_U^R(H; +\infty)$, $-\infty < H < +\infty$, sont appelés les portions de déchargement des boucles majeures d'hystérésis.

Les fonctions $H \mapsto M_L^R(H; -\infty)$ ou $H \mapsto \widehat{M}_L^R(H; -\infty)$, $-\infty < H < +\infty$, où

$$M_L^R(H; -\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow -\infty} M_L^R(H; H_0, M_0^R) \quad (13)$$

et

$$\widehat{M}_L^R(H; -\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow -\infty} \widehat{M}_L^R(H; H_0, \widehat{M}_0^R),$$

décrivent les portions de chargements des boucles majeures d'hystérésis. On remarque que

$$M_L^R(H; -\infty) = -M_U^R(H; +\infty) \quad (14)$$

$$\widehat{M}_L^R(H; -\infty) = -\widehat{M}_U^R(-H; +\infty)$$

et

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \left(\widehat{M}_L^R(H; H_0, \widehat{M}_0^R) - M_L^R(H; H_0, M_0^R) \right) = 0. \quad (15)$$

Donc le niveau de saturation des deux boucles majeures d'hystérésis est le même.

On remarque aussi que

$$M_U^R(H; +\infty) \geq F(H) \geq M_L^R(H; -\infty) \quad (16)$$

et que

$$M_U^R(0; +\infty) > 0 > M_L^R(0; -\infty) \quad (17)$$

$$\widehat{M}_U^R(0; +\infty) > 0 > \widehat{M}_L^R(0; -\infty).$$

4.2 Champs coercifs

On appelle retentivités M_c^R et $-\widehat{M}_c^R$; les valeurs de M^R et \widehat{M}^R définies par :

$$M_c^R = M_U^R(0; +\infty) = \int_0^{+\infty} (F'(\xi) - G(\xi)) e^{-\alpha\xi} d\xi \quad (18)$$

et

$$\widehat{M}_c^R = \widehat{M}_U^R(0; +\infty) = \int_0^{+\infty} (A_U'(\xi) - B_U(\xi)) e^{-\int_0^\xi \Pi_U(t) dt} d\xi.$$

On remarque que

$$\widehat{M}_c^R > M_c^R \text{ si } \beta < 0; \quad M_c^R > \widehat{M}_c^R \text{ si } \beta > 0. \quad (19)$$

On appelle champs coercifs H_c et H_{cc} les valeurs de H définies par

$$M_L^R(H_c; -\infty) = M_U^R(-H_c; +\infty) = 0 \quad (20)$$

$$\widehat{M}_L^R(H_{cc}; -\infty) = \widehat{M}_U^R(-H_{cc}; +\infty) = 0.$$

On montre aussi qu'on a

$$H_{cc} > H_c \text{ si } \beta < 0; \quad H_{cc} < H_c \text{ si } \beta > 0. \quad (21)$$

4.3 Courbes dérivées

Dans le cas purement magnétique, les courbes dérivées vérifient les relations suivantes

$$\frac{dM_U^R}{dH}(-H; +\infty) = \frac{dM_L^R}{dH}(H; -\infty) \quad (22)$$

$$\frac{dM_L^R}{dH}(H; -\infty) > 0; \quad \frac{dM_U^R}{dH}(H; +\infty) > 0$$

et dans le cas du couplage

$$\frac{d\widehat{M}_U^R}{dH}(-H; +\infty) = \frac{d\widehat{M}_L^R}{dH}(H; -\infty), \quad (23)$$

et

$$\frac{d\widehat{M}_L^R}{dH}(H; -\infty) > 0; \quad \frac{d\widehat{M}_U^R}{dH}(H; +\infty) > 0.$$

Nos courbes dérivées ont les mêmes caractéristiques que les courbes d'enregistrement d'effet Barkhausen [22 - 24].

5 Simulations numériques

On choisit dans ce qui va suivre

$$F(H) = AL(\xi H) = A(\coth(\xi H) - 1/\xi H) \quad (24)$$

$$G(H) = F'(H)(1 - \gamma e^{-\rho|H|})$$

avec A, ξ et ρ des constantes positives et $0 < \gamma < 1$. La fonction $L(X)$ s'appelle la fonction de Langevin. On voit que F et G vérifient toutes les hypothèses de départ et on prend dans les simulations numériques les valeurs suivantes.

$$A = 5000, \quad \xi = 2, \quad \gamma = 0.85, \quad \alpha = 0.85, \quad \rho = 0.1$$

L'influence de l'application des contraintes sur la boucle d'hystérésis est montrée par les Figures 1 (sans changement du seuil de saturation) et par les figures 3 et 4 (avec changement du seuil de saturation). La figure 2 fait montrer l'influence de l'application des contraintes sur la courbe dérivée.

$$M_U^R(H; +\infty) = F(H) + e^{\alpha H} \int_H^{+\infty} (F'(\xi) - G(\xi)) e^{-\alpha \xi} d\xi \quad (42)$$

and

$$\widehat{M}_U^R(H; +\infty) = A_U(H) + e^{\int_0^H \Pi_U(t) dt} \int_H^{+\infty} (A'_U(\xi) - B_U(\xi)) e^{-\int_0^\xi \Pi_U(t) dt} d\xi. \quad (43)$$

Here, the functionals A_U , Π_U and B_U are function of H and $+\infty$, for example $A_U(H) = A_U(H; +\infty)$.

The function $H \mapsto M_L^R(H; -\infty)$ or $H \mapsto \widehat{M}_L^R(H; -\infty)$, $-\infty < H < +\infty$, where

$$M_L^R(H; -\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow -\infty} M_L^R(H; H_0, M_0^R) \quad (44)$$

and

$$\widehat{M}_L^R(H; -\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow -\infty} \widehat{M}_L^R(H; H_0, \widehat{M}_0^R), \quad (45)$$

describes the loading portions of the major hysteresis loops; by the relations (26) and (42), we have

$$\begin{aligned} M_L^R(H; -\infty) &= F(H) - e^{-\alpha H} \int_{-\infty}^H (F'(\xi) - G(\xi)) e^{\alpha \xi} d\xi \quad (46) \\ &= -M_U^R(H; +\infty) \end{aligned}$$

and by the relations (27), (28), (31) and (43), we have

$$\widehat{M}_L^R(H; -\infty) = A_L(H) - e^{-\int_0^H \Pi_L(t) dt} \int_{-\infty}^H (A'_L(\xi) - B_L(\xi)) e^{\int_0^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi \quad (47)$$

$$= -\widehat{M}_U^R(-H; +\infty).$$

Here, the functionals A_L , Π_L and B_L are function of H and $-\infty$, for example $\Pi_L(H) = \Pi_L(H; -\infty)$.

It follows from (26) and (27) that, for each initial pair (H_0, M_0^R) .

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} (M_L^R(H; H, M_0^R) - F(H)) = \lim_{H \rightarrow +\infty} e^{-\alpha H} \int_{H_0}^H (G(\xi) - F'(\xi)) e^{\alpha \xi} d\xi \quad (48)$$

and

6 Boucles primitives d'hystérésis

Une boucle d'hystérésis est une courbe fermée, Γ . Si $t \in [0, \tau]$ tel que $H(0) = H(\tau)$ et si H est décroissant sur $[0, t_m]$ et est croissant sur $[t_m, \tau]$, on peut dire que la boucle est primitive. On a :

$$H(0) = H(\tau) = H_M = \max_{\Gamma} H, \quad H(t_m) = H_m = \min_{\Gamma} H. \quad (25)$$

L'énergie dégagée est :

$$w = \oint_{\Gamma} \dot{H} dB = - \int_{\Gamma} B dH = - \int_0^{\tau} B(t) \dot{H}(t) dt. \quad (26)$$

Pour une boucle primitive, l'énergie dégagée dans le cas sans couplage est donnée par

$$w = \mu_0 \int_{H_m}^{H_M} M_U^R(H) dH - \mu_0 \int_{H_m}^{H_M} M_L^R(H) dH \quad (27)$$

et dans le cas du couplage, elle est donnée par

$$w_c = \mu_0 \int_{H_m}^{H_M} \widehat{M}_U^R(H) dH - \mu_0 \int_{H_m}^{H_M} \widehat{M}_L^R(H) dH. \quad (28)$$

Pour simplifier, on s'intéressera au cas où on a une boucle primitive d'hystérésis symétrique, soit telle que $H_m = -H_M$ et $\widehat{M}_m^R = -\widehat{M}_M^R$ (voir l'annexe I suivante pour les détails).

En particulier, pour une boucle primitive symétrique, l'expression (27) devient

$$\frac{\alpha}{4\mu_0} w(-H_M, H_M) = M_M^R - \int_0^{H_M} G(H) dH \quad (29)$$

où

$$M_M^R = F(H_M) - \int_0^{H_M} (F'(H) - G(H)) \frac{\cosh(\alpha H)}{\cosh(\alpha H_M)} dH.$$

7 Conclusion

Dans ce travail, on a présenté une relation constitutive qui interprète l'effet de l'hystérésis magnétomécanique dans les milieux continus. Cette théorie a été construite dans la cas unidimensionnel; elle a besoin évidemment d'être étendue au cas tridimensionnel puisque l'aimantation est une réponse de nature vectorielle.

References

- [1] **F.Preisach**, Uber die magnetische Nachwirkung, *Zeit Phys.* 94 (1935) 277-302.
- [2] **L.Néel**, Théorie des lois d'aimantation de Lord Rayleigh , Parts I and II, *Cahiers de Physique (Paris)* 12 (1942) 1-20; 13 (1943) 18-30.
- [3] **L.Néel**, Bases d'une nouvelle théorie générale du champ coercitif, *Ann. Univ. grenoble* 22 (1946) 299-343.
- [4] **G.A.Maugin**, On the spin relaxation in deformable ferromagnets, *Physica* 81a (1975) 454-468.
- [5] **G.A.Maugin**, Micromagnetism, in : *Continuum Physics Vol III*, ed. A.C.Eringen, 213-312 (Academic Press, New York, 1976).
- [6] **G.A.Maugin**, A simple thermodynamical model for rigid ferromagnets, *Phys Rev. B* 25 (1982) 7015-7025.
- [7] **G.A.Maugin**, Classical magnetoelasticity in ferromagnets with defects, in : *Electromagnetic Interactions in Elastic Solids*, ed. H.Parkus, 243-324 (Springer-Verlag, Vienna, 1979).
- [8] **G.A.Maugin and A.Fométhé**, On the viscoplasticity of ferromagnetic crystals, *Int. J. Engng. Eci.* 20 (1982) 885-908.
- [9] **G.A.Maugin, M.Sabir and P.Chambon**, Coupled magnetomechanical hysteresis in ferromagnets : Application to non-destructive testing, in : *Electromagnetomechanical Interactions in Solids and Structures*, ed. Y.Yamamoto and K.Miya, 255-264 (North-Holland, Amsterdam, 1987).
- [10] **G.A.Maugin and M.Sabir**, Mechanical and Magnetic Hardening of Ferromagnetic Bodies : Influence of residual stresses and applications to non-destructive testing, *Int. J. Plasticity* 6 (1990) 573-589.
- [11] **M.Sabir and G.A.Maugin**, Microscopic foundations of the Barkhausen effect, *Arch. Mechanics* 40 (1988) 829-841.
- [12] **V.M.Rudyak**, The Barkhausen effects, *Soviet Phys. Uspekhi* 13 (1971) 451-479.
- [13] **L.P.Karjalainen and M.Moilanen**, Detection of plastic deformation during fatigue of mild steel by the measurement of Barkhausen noise, *NDT International* (1979) 51-55.

- [14] **R.Rautioaho, P.Karjalainen and M.Moilanen**, Stress response of Barkhausen noise in a tempered C-Mn steel, *J.Magnetism and Magnetic Materials* 68 (1987) 314-320.
- [15] **G.A.Maugin**, Compatibility of magnetic hysteresis with thermodynamics, *Int. J. of Applied Electromagnetics in Materials* 2 (1991) 7-19.
- [16] **B.D.Coleman and M.L.Hodgdon**, A constitutive relation for rate-independent hysteresis in ferromagnetically soft materials, *Int. J. Engng. Sci.* 24 (1986) 897-919.
- [17] **B.D.Coleman and M.L.Hodgdon**, On a class of constitutive relations for ferromagnetic hysteresis, *Arch. Rational Mech. and Anal.* 99 (1987) 375-396.
- [18] **S.Motogi and G.A.Maugin**, Nonlinear stress-strain behavior of multi-domain ferromagnets, in : *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures*, eds. J.S.Lee, G.A.Maugin and Y.shindo, AMD-Vol. 161,pp. 99-114 A.S.M.E., New York (1993).
- [19] **D.C.Jiles and D.L.Atherton**, Theory of magnetization process in ferromagnets and its application to the magnetomechanical effects, *J. Phys. D. Appl. Phys.* 17 (1984) 1255-1281.
- [20] **D.C.Jiles and D.L.Atherton**, Theory of ferromagnetic hysteresis, *J. Appl. Phys.* 55 (1983) 2115-2120.
- [21] **D.L.Atherton and D.C.Jiles**, Effects on stress on magnetization, *NDI international* 19 (1986) 15-19.
- [22] **M.J.Sablik**, Modeling stress dependence of magnetic properties for NDE of steels, *Nondestr. Test;* 5 (1989) 49-65.
- [23] **M.J.Sablik and D.C.Jiles**, A model for hysteresis in magnetostriction, *J. Appl. Phys.* 64 (1988) 5402-5404.
- [24] **M.J.Sablik and H.Kwun**, Hysteresis model for Barkhausen noise and the magnetically induced velocity change of ultrasonic waves in ferromagnets under stress, *J. Appl. Phys.* 69 (1991) 5791-5793.

Troisième Partie
Formulation Thermodynamique de l'Effet de
Contrainte sur l'Hystérésis Magnétique

Formulation Thermodynamique de l'Effet de Contrainte sur l'Hystérésis Magnétique

1 Résumé

En utilisant un schéma thermodynamique récemment développé pour modéliser l'hystérésis magnétique et l'aimantation, ce travail a pour ambition de formuler l'effet magnéto-mécanique sur l'aimantation et sur les structures des domaines magnétiques dans les matériaux ferromagnétiques. Avec une bonne approximation, ces relations peuvent être considérées comme une base thermodynamique équivalente à la théorie de Chen (présentée dans le cas ferroélectrique). Une équation différentielle qui montre le changement des structures des domaines est donc obtenue. Le phénomène de l'aimantation induite par des contraintes est aussi démontré.

2 Introduction

Récemment, il y a eu plusieurs contributions concernant les propriétés magnéto-mécaniques dans les matériaux ferromagnétiques. Comprendre les propriétés magnéto-mécaniques d'un ferromagnétique est une tâche très difficile à cause de la dépendance de ces propriétés de plusieurs facteurs : comme la microstructure, les effets des domaines, les contraintes internes et la symétrie cristallographique. Les propriétés magnéto-mécaniques d'un ferromagnétique ont été examinées d'une manière très large, microscopiquement et macroscopiquement, mais il reste beaucoup de chose à faire pour mieux comprendre le sujet.

Quand on applique des contraintes mécaniques sur un multi-domaine ferromagnétique, l'énergie magnétoélastique de chaque domaine n'est pas égale à celle du domaine voisin, et cela cause un changement de la structure du multi-domaine ferromagnétique. Si on applique une contrainte de tension le long de l'axe de l'aimantation d'un specimen avec un coefficient de magnétostriction positif, le vecteur aimantation de chaque domaine tourne vers cet axe; tandis que, si on applique une contrainte de compression, le vecteur aimantation prend le sens opposé. Donc la tension favorise l'aimantation tandis que la compression s'oppose à l'augmentation de l'aimantation.

Durant les années trente et quarante, il y a eu plusieurs contributions importantes à ce sujet. Nous noterons, entre autres, les travaux de Becker & Kersten [1] et Becker & Döring [2] sur les effets des contraintes sur la courbe d'aimantation, de Néel [3, 4] sur l'ancrage des parois magnétiques, de Brown [5] sur l'aimantation induite par des contraintes.

Récemment une théorie basée sur un modèle physique a été proposée dans le but de détailler le phénomène de l'hystérésis ferromagnétique. Cette théorie qui est due à Jiles & Atherton [6, 7] est très utile, car elle a besoin seulement de peu de paramètres pour caractériser l'hystérésis. Elle a été étendue par Sablik & Jiles [8] dans le but d'expliquer l'effet magnéto-mécanique dans les aciers et dans d'autres matériaux ferromagnétiques. Dans le papier publié en 1989 [9], l'auteur Sablik a appliqué cette théorie aux techniques de contrôle non destructif pour mesurer les contraintes résiduelles dans les aciers. Pour l'instant, le bruit ferromagnétique change ses caractéristiques sous l'action des contraintes résiduelles [10 – 12] et sous l'action de la vitesse des ondes élastiques [13 – 16]. Des études récentes des effets magnéto-mécaniques sur l'aimantation et sur l'hystérésis magnétique ont été faites en tenant compte des structures des matériaux policristallins imparfaites [6, 7], [17, 20].

Les couplages magnéto-mécaniques, comme les effets ΔE (modification du coefficient d'élasticité de Young), sont incontestablement importants, car ils ont une influence significative sur les performances des matériaux magnétiques [21, 22]. D'ailleurs, des développements récents concernant les contraintes résiduelles ont révélé que l'effet ΔE est aussi important à l'intérieur des structures de l'acier [13, 14].

Une théorie basée thermodynamiquement de l'aimantation et de l'hystérésis a été récemment développée par Chernyi [23], Maugin et al [24], Maugin [25, 26], Maugin et Sabir [27], Motogi & Maugin [28]. Elle est basée sur la thermodynamique du non équilibre avec variables internes (Voir Germain [29] pour la thermodynamique des milieux continus, Maugin [30] pour la théorie générale thermodynamique des matériaux électromagnétiques et Motogi & Fukuda [39] pour la modélisation de l'effet ΔE dans les ferromagnétiques polycristallins). Cette théorie utilise par analogie plusieurs notions de la théorie moderne de la plasticité [31].

Dans ce travail, on utilise le modèle développé en [24], [27, 28] pour déduire un ensemble cohérent de relations thermodynamiques pour la description de l'effet magnéto-mécanique. On introduit aussi les variables internes qui tiennent compte de la structure des domaines magnétiques. Un modèle équivalent à celui de Chen [32 – 34] (présenté dans le cas ferroélectrique) est obtenu. Alors la théorie est appliquée à la description du phénomène de la magnétostriction induite par des contraintes et du phénomène d'aimantation induite par des contraintes.

3 Effets Magnéto-mécaniques.

Dans ce qui va suivre, on suppose que les déformations restent petites et que l'hypothèse quasi-magnéto-statique en tout point intérieur d'un isolant est assurée. En négligeant les forces d'interaction entre spins et l'effet gyromagnétique, on a une relation d'équilibre :

$$\underline{H} + \underline{H}^L = \underline{0} \quad , \quad (1)$$

où \underline{H} est le champ magnétique de Maxwell et \underline{H}^L est le champ magnétique local. Ce dernier tient compte des interactions spin-réseau cristallin.

Dans ces conditions l'inégalité de Clausius-Duhem (expression locale de la deuxième loi de la thermodynamique) se réduit à

$$- \left(\dot{\Psi} + S \dot{\theta} \right) + \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} - H_i^L \dot{M}_i + \theta q \cdot \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \geq 0 \quad , \quad (2)$$

où

$$\Psi = \rho_0 \psi, \quad \underline{M} = \rho_0 \underline{\mu}, \quad S = \rho_0 \eta, \quad (3)$$

et où $\underline{\mu}$ est l'aimantation par unité de masse, ρ_0 est la densité de matière à l'état de référence, ψ est la densité d'énergie libre, η est l'entropie par unité de masse, θ est la température thermodynamique, $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes intrinsèques de Cauchy, \underline{e} est le tenseur de déformation et \underline{q} est le flux de chaleur.

Pour exploiter l'équation (2) nous emploierons la méthode de l'état local selon laquelle l'état thermodynamique d'un matériau en un point donné et à un instant donné est complètement défini lorsqu'on connaît, on ce point et à cet instant, un ensemble de variables dites d'états. Les variables d'états sont de deux types. Les premières sont les variables observables comme, dans notre cas, la température θ , la déformation totale \underline{e} et l'aimantation totale \underline{M} . Les deuxièmes sont les variables internes comme la déformation résiduelle \underline{e}^R , l'aimantation résiduelle \underline{M}^R et une variable interne \underline{I} qui a les mêmes dimensions qu'une aimantation. On notera par \underline{e}^r la déformation réversible et par \underline{M}^r l'aimantation réversible. Alors [27, 28, 35]

$$\underline{e} = \underline{e}^r + \underline{e}^R, \quad \underline{M} = \underline{M}^r + \underline{M}^R. \quad (4)$$

En toute généralité, nous pouvons donc considérer la dépendance suivante pour l'énergie libre Ψ [31]

$$\Psi = \bar{\Psi}(\underline{e}^r, \underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{I}, \theta). \quad (5)$$

On peut poser par définition (voir aussi [24, 27, 28]) ::

$$\bar{S} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta}, \quad \underline{\sigma} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \underline{e}^r}, \quad \underline{H}^L = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \underline{M}^r}, \quad \underline{H}^R = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \underline{M}^R}, \quad \underline{H}^m = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \underline{I}}, \quad (6)$$

$$\underline{H}^T = \underline{H} + \underline{H}^R.$$

Avec $S = \bar{S}$ (axiome thermodynamique de l'état local : bien que l'on soit en présence d'effets dissipatifs, l'entropie conserve en première approximation sa définition de la thermostatique (6)₁) l'équation (2) se réduit à l'inégalité de dissipation suivante

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 \geq 0 \\ \Phi_1 &= \underline{\sigma} : \dot{\underline{e}}^R + \underline{H}^T \cdot \dot{\underline{M}}^R + \underline{H}^m \cdot \dot{\underline{I}} \\ \Phi_2 &= \theta \underline{q} \cdot \nabla (1/\theta) \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

On admet qu'il existe un pseudo-potential de dissipation (P.Germain [29]), Π , à valeurs réelles, positif, qui contient l'origine et est convexe dans l'ensemble de variables $\{\underline{\dot{e}}^R, \underline{\dot{M}}^R, \underline{\dot{I}}\}$. Les équations constitutives complémentaires sont données par

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\dot{e}}^R}, \quad \underline{H}^T = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\dot{M}}^R}, \quad \underline{H}^m = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\dot{I}}}. \quad (8)$$

Ces relations expriment les propriétés de normalité [36].

On peut introduire une fonction de chargement f de telle sorte que la propriété précédente s'écrive en fait

$$\underline{\dot{e}}^R = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}, \quad \underline{\dot{M}}^R = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^T}, \quad \underline{\dot{I}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^m}, \quad f = f(\underline{\sigma}, \underline{H}^T, \underline{H}^m). \quad (9)$$

Alors nous aurons $\dot{\lambda} \geq 0$ si $f = 0$ ou bien $\dot{\lambda} = 0$ si $f < 0$. $\dot{\lambda}$ s'appelle le multiplicateur plastique dans la théorie de la plasticité [31]. La surface de chargement $f = 0$ détermine un convexe "élastique" C tel que

$$C = \left\{ (\underline{\sigma}, \underline{H}^T, \underline{H}^m) / f(\underline{\sigma}, \underline{H}^T, \underline{H}^m) \leq 0 \right\}. \quad (10)$$

Si $\underline{\sigma}$, \underline{H}^T , \underline{H}^m sont des fonctions du temps, alors on peut montrer, généralisant un résultat de plasticité avec écrouissage, que

$$\dot{\sigma} : \underline{\dot{e}}^R + \underline{\dot{H}}^T \cdot \underline{\dot{M}}^R + \underline{\dot{H}}^m \cdot \underline{\dot{I}} = 0, \quad (11)$$

qui est une relation d'orthogonalité entre vitesses.

Soit la forme spéciale de l'énergie libre

$$\Psi = \Psi^{me}(\underline{e}^r, \underline{M}^r, \theta) + \Psi^i(\underline{M}^R, \underline{I}), \quad (12)$$

où le premier terme représente l'énergie magnétothermoélastique et le second terme représente l'énergie stockée [36]. L'expression (11) peut s'écrire en tenant compte de (9) sous la forme :

$$\dot{\sigma} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} + \underline{\dot{H}}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^T} + \underline{\dot{H}}^m \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^m} = 0. \quad (13)$$

Grâce à ces dernières relations, le multiplicateur magnétoplastique $\dot{\lambda}$ s'écrit

$$\dot{\lambda} = \frac{Y(C)}{h} \left\langle \dot{\sigma} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} + \underline{\dot{H}}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^T} \right\rangle, \quad (14)$$

où $Y(C) = 0$ pour $f < 0$ et $+1$ si $f = 0$, et $\langle . \rangle$ est le symbole de Ma Cauly tel que $\langle x \rangle = 0$ si $x < 0$ et $\langle x \rangle = x$ si $x \geq 0$. La quantité h est appelée le module d'écroutissage

$$h = \frac{\partial f}{\partial H_i^m} \cdot \frac{\partial \Psi^i}{\partial I_i \partial M_j^R} \cdot \frac{\partial f}{\partial H_j^T} + \frac{\partial f}{\partial H_i^m} \cdot \frac{\partial \Psi^i}{\partial I_i \partial I_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial H_j^m} . \quad (15)$$

Pour tenir compte des structures de domaine [22], on introduit les expressions suivantes

$$v_i \equiv \frac{1}{V} \sum_k v_k , \quad v_{-i} \equiv \frac{1}{V} \sum_k v_{-k} , \quad (16)$$

où V est le volume du cristal; $\sum_k v_k$ (resp. $\sum_k v_{-k}$) est la somme sur les volumes de tous les domaines orientés le long de $+x_i$ (resp. $-x_i$). Si le champ magnétique et les contraintes sont orientés le long de l'axe x_1 (les directions x_2 et x_3 sont identiques). On a donc

$$v_l \equiv v_1 , \quad v_{-l} \equiv v_{-1} , \quad v_{\perp} \equiv v_2 \equiv v_3 , \quad v_{-\perp} \equiv v_{-2} \equiv v_{-3} . \quad (17)$$

Dans notre cas unidimensionnel, on a

$$v_{\perp} = v_{-\perp} , \quad (18)$$

$$v_l + v_{-l} = 1 - 4v_{\perp} . \quad (19)$$

On peut définir les expressions suivantes :

$$M = M_s (v_l + v_{-l}) , \quad m = M_s v_{\perp} , \quad (20)$$

où M est l'aimantation totale, M_s est l'aimantation à saturation et m une quantité ayant la dimension d'une aimantation [21, 28].

4 Modèle thermodynamique de l'hystérésis magnétomécanique

En tenant compte de l'effet des contraintes sur l'hystérésis magnétique, le champ effectif est (pour plus d'information voir [7, 9, 27] et l'Annexe 2) :

$$\widehat{H}_i = H_i^T - \lambda_{ijkl}^1 \sigma_{jk} H_l^T - \lambda_{ijkl}^2 \sigma_{jk} H_l^R - \lambda_{ijkl}^3 \sigma_{jk} H_l^m , \quad (21)$$

$$\widetilde{H} = \widehat{H} + \underline{H}^m ,$$

où $\underline{\lambda}^1$, $\underline{\lambda}^2$ et $\underline{\lambda}^3$ dépendent des tenseurs de compliances élastiques et des tenseurs des coefficients de magnétostrictions. Une fonction de chargement typique est de la forme [37]:

$$f(\underline{\sigma}, \underline{H}^T, \underline{H}^m) = \|\underline{H}\|^2 - H_c^2 = \widetilde{H}_i a_{ij} \widetilde{H}_j - H_c^2 \quad (22)$$

où \underline{a} est une matrice inversible, positive et qui tient compte de l'anisotropie du phénomène.

En tenant compte de (14), (15), (21) et (22), la relation (9) devient :

$$\dot{c}_{ij}^R = \mp 2 \lambda H_c \|\underline{H}\|^{-1} \{ \lambda_{kijl}^1 H_l^T + \lambda_{kijl}^2 H_l^R + \lambda_{kijl}^3 H_l^m \} a_{kn} \widetilde{H}_n \quad (23)$$

$$\dot{M}_i^R = \pm 2 \lambda H_c \|\underline{H}\|^{-1} \overline{\Sigma}_{ij}^1 a_{jl} \widetilde{H}_l$$

$$\dot{I}_i = \pm 2 \lambda H_c \|\underline{H}\|^{-1} \overline{\Sigma}_{ij}^3 a_{jl} \widetilde{H}_l$$

où

$$\overline{\Sigma}_{ij}^\alpha = \delta_{ij} - \lambda_{iklj}^\alpha \sigma_{kl} ; \alpha = 1, 2, 3 \quad (24)$$

Pour concrétiser le modèle développé dans les prochaines sections, on pose la variable interne \underline{I} comme un vecteur ayant la dimension d'une aimantation :

$$\underline{I} = m \underline{i} = m \frac{\underline{H}}{\|\underline{H}\|} \quad (25)$$

où \underline{i} est un vecteur unité suivant la direction du champ magnétique \underline{H} . En donnant à l'énergie libre une forme convenable et en tenant compte des relations précédentes, on aura

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t [\underline{I} \cdot \underline{\Pi}^{-1} \cdot (\underline{I} - \hat{\underline{I}})] dt \right\}^{1/2} + m_0 \quad (26)$$

où m_0 est une constante. Pour plus d'information le lecteur est invité à lire l'Annexe 2.

5 Lois dépendant du temps

Dans ce cas qui tient compte de l'existence d'une échelle de temps, on peut poser le potentiel de dissipation Π , qui est une fonction homogène de degré deux, de la forme

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{ijkl} \dot{e}_{ij}^R \dot{e}_{kl}^R + \mathcal{P}_{ij} \dot{M}_i^R \dot{M}_j^R + \mathcal{II}_{ij} \dot{I}_i \dot{I}_j \right) \quad (27)$$

où les coefficients \mathcal{G}_{ijkl} , \mathcal{P}_{ij} et \mathcal{II}_{ij} sont donnés par

$$\mathcal{G}_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \dot{e}_{ij}^R \partial \dot{e}_{kl}^R} = \mathcal{G}_{klij} \quad (28)$$

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \dot{M}_i^R \partial \dot{M}_j^R} = \mathcal{P}_{ji}$$

$$\mathcal{II}_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \dot{I}_i \partial \dot{I}_j} = \mathcal{II}_{ji}.$$

En tenant compte de ceux qui précèdent, on peut trouver pour m la même forme que la relation (26)

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t \left[\underline{I} \cdot \underline{\Pi}^{-1} \left(\underline{I} - \hat{\underline{I}} \right) \right] dt \right\}^{1/2} + m_0. \quad (29)$$

où m_0 est une constante. Pour plus d'information le lecteur est invité à lire l'Annexe 2.

6 Comparaison avec le modèle de Chen

Pour comparer le présent modèle à celui de Chen, nous envisageons les manipulations suivantes. Pour cela, on réécrit \underline{H}^T , \underline{H}^L , \underline{H}^R et \underline{H}^m sous les formes suivantes

$$\underline{H}^T = \mathfrak{S}_1 \left(\underline{\dot{M}}^R \right), \quad (30)$$

$$\underline{H}^L = \mathfrak{S}_2 \left(\underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{e}, \underline{I} \right),$$

$$\underline{H}^R = \mathfrak{S}_3 \left(\underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{e}, \underline{I} \right),$$

et

$$\underline{H}^m = \mathfrak{S}_4 \left(\underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{e}, \underline{I} \right),$$

et en utilisant les relations précédentes, l'induction magnétique \underline{B} s'écrit.

$$\underline{B}(t) = \mathcal{B}_{s=-\infty}^{s=0} \left(\underline{H}(\tau), \underline{e}(\tau) \right) \quad (31)$$

où $\tau = t - s$.

Par conséquent, ces formulations peuvent être considérées comme une généralisation du modèle de Chen [32 – 34, 38].

7 Applications

Pour simplifier, on choisit un champ magnétique et une contrainte dirigés suivant l'axe des x_1 . Donc la variable interne vectorielle \underline{l} est remplacée par le scalaire m .

7.1 Magnétostriction induite par des contraintes

On considère le cas où le champ magnétique et l'aimantation sont nuls, $H = 0$, $M = 0$. On considère aussi que la quantité m soit non nulle. Dans ces conditions, on a les expressions suivantes (voir Annexe 2) :

$$f = f(\sigma, H^m), \quad \dot{\epsilon}^R = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad \dot{m} = \lambda \frac{\partial f}{\partial H^m}, \quad (32)$$

$$\lambda = \frac{Y(C)}{h} \left\langle \dot{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle, \quad h = \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial m^2} \left(\frac{\partial f}{\partial H^m} \right)^2.$$

Dans ce cas l'équation (25) sera sous la forme

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t (\Pi^{-1} m^2) dt \right\}^{1/2} + m_0 \quad (33)$$

où

$$m_0 = \mp \sqrt{2} \left\{ \int_0^\infty (\Pi^{-1} m^2) dt \right\}^{1/2} \quad (34)$$

si le coefficient de magnétostriction et la contrainte sont de même signes, et

$$m_0 = \frac{M_s}{4} \mp \sqrt{2} \left\{ \int_0^\infty (\Pi^{-1} m^2) dt \right\}^{1/2} \quad (35)$$

si le coefficient de magnétostriction et la contrainte sont de signes opposés.

Remarque

Si le coefficient de magnétostriction est positif on a :

$$\sigma > 0 \Rightarrow v_\perp \searrow, \quad \sigma < 0 \Rightarrow v_\perp \nearrow$$

Si le coefficient de magnétostriction est négatif on a :

$$\sigma > 0 \Rightarrow v_\perp \nearrow, \quad \sigma < 0 \Rightarrow v_\perp \searrow$$

7.2 Aimantation induite par des contraintes

On applique un champ magnétique croissant de 0 à H_1 , une fois qu'il atteint la valeur H_1 , on le garde constant $H = H_1$, puis on applique une contrainte σ . La fonction f sera (voir Annexe 2) :

$$f = f(\sigma, H^T, H^m), \quad \dot{H}^T = \dot{H}^R. \quad (36)$$

Dans ces conditions, on a :

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t \Pi^{-1} m (m - \widehat{m}) dt \right\}^{1/2} + m_0, \quad (37)$$

où

$$m_0 = \mp \sqrt{2} \left\{ \int_0^\infty \Pi^{-1} m (m - \widehat{m}) dt \right\}^{1/2} \quad (38)$$

si la contrainte et le coefficient de magnétostriction sont de même signes, et

$$m_0 = \frac{M_s}{4} \mp \sqrt{2} \left\{ \int_0^\infty \Pi^{-1} m (m - \widehat{m}) dt \right\}^{1/2} \quad (39)$$

si la contrainte et le coefficient de magnétostriction sont de signes opposés

Remarque

Si le coefficient de magnétostriction est positif on a :

$v_\perp \searrow$ avec $\sigma \nearrow$, $v_\perp \nearrow$ avec $\sigma \searrow$

Si le coefficient de magnétostriction est négatif on a :

$v_\perp \nearrow$ avec $\sigma \nearrow$, $v_\perp \searrow$ avec $\sigma \searrow$

7.3 Cas purement magnétique

On considère le cas où $\sigma = 0$, on a donc (voir Annexe 2)

$$f = f(H^T, H^m), \quad (40)$$

$$\dot{M}^R = \lambda \frac{\partial f}{\partial H^T}, \quad \dot{m} = \lambda \frac{\partial f}{\partial H^m}.$$

Dans ces conditions, on remarque que

$$\dot{M}^R = \dot{m}. \quad (41)$$

C'est ce cas là qui donne l'hystérésis purement magnétique (voir G.A.Maugin, M.Sabir et P.Chambon [24], G.A.Maugin et M.Sabir [27])

8 Conclusion

Dans ce présent travail, on a établi un schéma thermodynamiquement équivalent à la théorie de Chen. On a aussi montré comment les volumes des domaines magnétiques peuvent être déterminés grâce à la résolution d'une certaine équation différentielle. Les simulations numériques, l'extension du modèle aux matériaux polycristallins et la comparaison avec les données expérimentales font partie des futurs développements.

References

- [1] **R.Becker and M.Kersten**, Die Magnetisierung von Nickeldraht unter Starkem Zug, Z. Phys. 64 (1930) 660-681.
- [2] **R.Becker and W.Döring**, Ferromagnetismus, (Springer Verlag, Berlin, 1939).
- [3] **L.Néel**, Théorie des Lois d'Aimantation de Lord Rayleigh, Part I, Cahiers de Phys. (Paris) 12 (1942) 1-20.
- [4] **L.Néel**, Théorie des Lois d'Aimantation de Lord Rayleigh, Part II, Cahiers de Phys. 13 (1943) 18-30.
- [5] **W.F.Brown**, Irreversible Magnetic Effects of Stress, Phys. Rev. 75 (1949) 147-154.
- [6] **D.C.Jiles and D.L.Atherton**, Theory of Magnetic Hysteresis, J. Appl. Phys. 55 (1983) 2115-2120.
- [7] **D.C.Jiles and D.L.Atherton**, Theory of Magnetization Process in Ferromagnets and its Application to Magnetomechanical Effect, J. Phys. D : Appl. Phys. 17 (1984) 1265-1281.
- [8] **M.J.Sablik and D.C.Jiles**, A Model for Hysteresis in Magnetostriction, J. Appl. Phys. 64 (1988) 5402-5404.
- [9] **M.J.Sablik**, Modeling Stress Dependence of Magnetic Properties for NDE of Steels, Nondestructive Testing Eval. 5 (1989) 49-65.
- [10] **C.G.Gardner, G.A.Matzkanin and D.L.Davidson**, The Influence of Mechanical Stress on Magnetization Process and Barkhausen Jumps in Ferromagnetic Materials, Nondestructive Testing 3 (1971) 131-169.
- [11] **R.Rautioaho, P.Karjalainen and M.Moilanen**, Stress Response of Barkhausen Noise in a Tempered C-Mn Steel, J. Mag. Mat. 68 (1987) 314-320.

- [12] **M.Sabir and M.A.Maugin**, Microscopic Foundations of the Barkhausen Effect, *Arch. Mechanics* 40 (1988) 829-841.
- [13] **H.Kwun and C.M.Teller**, The Stress Dependence of Magnetically Induced Ultrasonic Shear Wave Velocity Change in Polycrystalline A 36 Steel, *J. Appl. Phys.* 54 (1983) 4856-4863.
- [14] **S.Motogi and T.Fukuda**, Ultrasonic Wave Velocity in Ferromagnets with ΔE Effect, *Int. J. Electromag. in Mat.* 1 (1990) 227-234.
- [15] **S.Motogi and T.Fukuda**, Ultrasonic Evaluation of Heat Treatment in Magnetoelastic Ferromagnets, *Int. J. Electromag. in Mat.* 3-Supp. (1992) 339-344.
- [16] **T.Yamasaki**, Nondestructive Stress Evaluation using Magnetoacoustic Coupling, Ph. D. Thesis, Osaka Univ., Osaka. (1992).
- [17] **R.A.Langman**, The Effects of Stress on the Magnetization of Mild Steel at Moderate Field Strength, *IEEE Trans. Mag.* MAG-21 (1985) 1314-1320.
- [18] **H.Kwun and G.L.Burkhardt**, Effect of Grain Size, Hardness, and Stress on the Magnetic Hysteresis Loops of Ferromagnetic Steels, *J. Appl. Phys.* 61 (1987) 1576-1579.
- [19] **M.Le Floc'h and A.Globus**, Effects of Perpendicular Stresses on the Magnetization Processes of Polycrystalline Magnetic Materials, *J. Appl. Phys.* 61 (1987) 4850-4857.
- [20] **D.L.Atherton and V.Ton**, The Effects of Stress on a Ferromagnet on a Minor Hysteresis Loop, *IEEE Trans. Mag.* 26 (1990) 1153-1156.
- [21] **S.Motogi and G.A.Maugin**, Elastic Moduli of Demagnetized Polycrystalline Ferromagnets, *J. Phys. D : Appl. Phys.* 26 (1993) 1459-1467.
- [22] **B.D.Cullity**, *Introduction to Magnetic Materials*, (Addison-Wesley, Reading, 1972).
- [23] **L.T.Chernyi**, Models of Ferromagnetic Continuous Media with Magnetic Hysteresis, in : *Macroscopic Theories of Matter and Fields*, ed. L.I.Sedov, 116-140 (Mir Publisher, Moscow, 1983).
- [24] **G.A.Maugin, M.Sabir and P.Chambon**, Coupled Magnetomechanical Hysteresis in Ferromagnets : Application to Non-destructive Testing, in : *Electromagnetomechanical Interaction in Solids and Structures*, ed. Y. Yamamoto and K. Miya, 255-264 (North-Holland, Amsterdam, 1987).

- [25] **G.A.Maugin**, Coupled Magnetomechanical and Electromechanical Hysteresis Effects; in : Applied Electromagnetics in Materials, ed. K. Miya, 5-18 (Pergamon Press, Oxford, 1989).
- [26] **G.A.Maugin**, Thermodynamics of Hysteresis, in : Non-Equilibrium Thermodynamics, eds. S. Sieniutycz and D. Salamon, 25-52 Vol-7 (Taylor and Francis, New-York, 1991).
- [27] **G.A.Maugin and M.Sabir**, Mechanical and Magnetic Hardening of Ferromagnetic Bodies : Influence of Residual Stresses and Applications to Non-destructive Testing, *Int. J. Plasticity* 6 (1990) 573-589.
- [28] **S.Motogi and G.A.Maugin**, Nonlinear Stress-Strain Behavior of Multi-Domain Ferromagnets, in : Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures, eds. J.S.Lee, G.A.Maugin and Y.Shindo, 99-114, AMD-Vol. 161 (A.S.M.E., New-York, 1993).
- [29] **P.Germain**, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Vol. 1 (Masson, Paris, 1973).
- [30] **G.A.Maugin**, Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids (North-Holland, Amsterdam, 1988).
- [31] **G.A.Maugin**, The Thermomechanics of Plasticity and Fracture (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992).
- [32] **P.J.Chen and P.S.Peercey**, One Dimensional Dynamical Electromechanical Constitutive Relations of Ferroelectric Materials, *Acta Mechanica* 31 (1979) 231-241.
- [33] **P.J.Chen**, Three Dimensional Dynamic Electromechanical Constitutive Relations for Ferroelectric Materials, *Int. J. Solids Structures* 16 (1980) 1059-1067.
- [34] **P.J.Chen**, Three Dimensional Constitutive Relations for Ferroelectric Materials in the Presence of Quasi-Static Domain Switching, *Acta Mechanica* 48 (1983) 31-42.
- [35] **G.A.Maugin and W.Muschik**, Thermodynamics with Internal Variables, Part I - General Concepts, Part II - Applications, *J. Non-Equil. Thermodynamics* 19 (1994) 217-249; 19 (1994) 250-289.
- [36] **J.Mandel**, Plasticité Classique et Viscoplasticité (Springer-Verlag, Vienna, CISM Lecture Notes, Udine, 1971).
- [37] **G.A.Maugin**, Compatibility of Magnetic Hysteresis with Thermodynamics, *Int. J. of Applied Electromagnetics in Materials* 2 (1991) 7-19.

- [38] **E.Bassiouny, A.F.Ghaleb and G.A.Maugin**, Thermodynamical Formulation for Coupled Electromechanical Hysteresis Effects II - Poling of Ceramics, *Int. J. Engng. Sci.* 27 (1989) 1297-1306.
- [39] **S.Motogi and T.Fukuda**, Modeling of ΔE effect in Polycrystalline Ferromagnets, in : *Mechanical Modelling of New Electromagnetic Materials*, ed. R.Hsieh, 281-288 (Elsevier, Amsterdam, 1990).

Quatrième Partie
Sur la Rupture des Paramagnétiques et des
Ferromagnétiques Mous

Sur la Rupture des Paramagnétiques et des Ferromagnétiques Mous

1 Résumé

En se basant sur la théorie de la quasi-magnéto-statique des matériaux paramagnétiques élastiques et des matériaux ferromagnétiques mous, on a établi les expressions des taux de restitution de l'énergie libérée et des intégrales indépendantes de contour correspondantes qui sont utiles pour l'étude de la rupture, par conséquent, on montre qu'on a les mêmes résultats que l'approche théorique des champs qui utilise les notions de contraintes d'Eshelby et de forces matérielles.

Le couplage magnétoélastique considéré est de type magnétostrictif, mais la théorie est construite de telle manière qu'elle tient compte de toute sorte de couplage magnétoélastique. Une simple application au problème des fissures antiplanes d'un corps magnétostrictif, sous l'action d'un champ magnétique axial, illustre bien l'utilisation des expressions obtenues et l'effet bénéfique du champ.

2 Introduction

Durant ces dernières années, plusieurs travaux ont été faits dans le but de développer la théorie des défauts micro et macroscopiques dans les solides électromagnétiques; évidemment, les fissures occupent la seconde place dans la théorie des défauts. Cela est particulièrement vrai dans le cas du problème de rupture dans la théorie électroélastique des piezoélectriques et des céramiques (Voir les travaux de Parton [1], Pak & Herrmann [2], Mc Meeking [3], Sosa [4], Suo et al [5], Maugin & Epstein [6], Dascalu & Maugin [7 – 9] et Lee et al [10]). Ces travaux sont faits essentiellement, dans le but d'établir un critère de propagation des fissures en présence de couplages électromécaniques. Dans ce contexte, le concept le plus pratique est celui d'intégrale indépendante du contour dont la célèbre intégrale J de la rupture purement élastique est l'exemple le plus populaire (voir aussi Maugin [11], chapitre 7).

Dans le cas de la magnétoélasticité, les travaux existants ont été seulement consacrés à l'estimation du comportement local des champs (magnétiques et mécaniques) au voisinage des points singuliers. C'est le cas des travaux de Shindo [12, 13]. Le but du présent travail est de présenter une formulation générale du taux de restitution de l'énergie et de l'intégrale J magnétoélastique; cela rentre bien sûr dans le cadre de la magnétoélasticité des matériaux paramagnétiques et des matériaux ferromagnétiques mous. Cette restriction signifie que les corps magnétiques considérés sont faiblement magnétisables et que l'effet d'hystérésis n'est pas présent (pour le cas général, on recommande les travaux de Fomethé & Maugin [14, 15]). Pour atteindre notre objectif, on a besoin de considérer soigneusement la théorie de la magnétoélasticité dans le cadre non linéaire. Cela a été proposé par plusieurs auteurs, notamment dans les années soixante dix (voir particulièrement les travaux récents de Maugin [16] et Eringen & Maugin [17]). Ici, on va suivre la présentation donnée par Abd-Alla & Maugin [18] qui est originellement construite pour étudier la magnétoacoustique non linéaire. Le couplage magnétoélastique considéré est de type magnétostrictif, mais la théorie est construite de telle manière qu'elle tient compte de toute sorte de couplage magnétoélastique. Bien qu'on tient compte du phénomène non dissipatif, la théorie présentée fournit des équations constitutives non linéaires. Nous notons que l'étude de la magnétostriction redevient à la mode grâce à la production des matériaux qui présentent ce qu'on appelle la magnétostriction géante (voir Trémolet de Lacheisserie [19]).

Les notations essentielles sont rappelées dans le paragraphe 3. Les équations générales des champs sont données dans le paragraphe 4 et leurs expressions dans

la configuration de référence dans le paragraphe 5. Cela est complété par les relations d'énergie et les relations constitutives nonlinéaires dans le paragraphe 6. Deux expressions de taux de restitution de l'énergie pour la magnétoélasticité sont établis dans le paragraphe 7. Les intégrales indépendantes du contour correspondantes sont construites au le paragraphe 8. Cela donne le même résultat que l'approche utilisant les forces matérielles et le tenseur de contrainte d'Eshelby (voir [20 – 23], [24], pour le cas des solides élastiques électromagnétiques). Finalement une simple application au problème des fissures antiplanes d'un corps magnétostrictif, sous l'action d'un champ magnétique axial, illustre l'utilisation des expressions obtenues.

3 Equations Générales

Nous considérons la magnétoélasticité des paramagnétiques et des ferromagnétiques mous dans l'approximation quasi-statique. En l'absence de force de volume, les équations d'équilibre magnétoélastostatique sont (A. Abd-Alla et G. A. Maugin [18]) :

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \mathbf{f}^{em} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

Avec les définitions suivantes (\otimes est le produit tensoriel) :

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} + \left({}^L\mathbf{B} \otimes \mathbf{M} \right)_A, \quad \mathbf{B} + {}^L\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (2)$$

$$\mathbf{f}^{em} = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{M}, \quad \mathbf{t}^{em} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}^2 - 2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \right) \mathbf{1}, \quad (3)$$

où \mathbf{H} est le champ magnétique, \mathbf{B} est l'induction magnétique, \mathbf{M} est l'aimantation par unit de volume dans la configuration courante, ${}^L\mathbf{B}$ est l'induction magnétique locale, \mathbf{t} est le tenseur de contrainte de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur de contrainte symétrique et \mathbf{t}^{em} la version magnétoélastostatique du tenseur de contrainte électromagnétique.

Pour des raisons pratiques on considère les transformations suivantes :

$$\mathbf{t}^E = \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{M} \otimes \mathbf{H})_S - \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 \mathbf{1}, \quad (4)$$

$$\mathbf{t}^H = \left(\mathbf{t}^H \right)^T = \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \mathbf{1},$$

$$\bar{\mathbf{t}}^E = \mathbf{t}^E + \mathbf{M}^2 \mathbf{1} = \bar{\mathbf{t}}^E$$

et en tenant compte des équations (2) et des équations (3), l'équation d'équilibre mécanique (1)₁ devient

$$\operatorname{div} (\mathbf{t} + \mathbf{t}^{em}) = \operatorname{div} (\bar{\mathbf{t}}^E + \mathbf{t}^H) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

4 Equations sous forme matérielle

Pour pouvoir exprimer les équations précédentes dans la configuration de référence, on introduit le premier tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{T} et on définit la force \mathbf{F}^{em} à l'aide des formules suivantes

$$\mathbf{T} = J_F \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{F}^{em} = J_F \mathbf{f}^{em}, \quad (6)$$

où \mathbf{F} est le tenseur de déformation, $J_F = \det(\mathbf{F})$. Par conséquent, la relation (1)₁, se transforme en :

$$\operatorname{div}_R \mathbf{T} + \mathbf{F}^{em} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Introduisons maintenant les quantités matérielles suivantes :

$$\hat{\mathbf{B}} = J_F \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{M}} = J_F \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{M}, \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}, \quad \hat{\mathbf{H}} = J_F \mathbf{C}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{H}},$$

où $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ est le tenseur des déformations de Green. Grâce à (1)_{2,3} et (2)₃ on a :

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{M}}, \quad \nabla_R \times \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad \nabla_R \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0. \quad (9)$$

A partir de ces dernières relations, on montre qu'il existe un potentiel magnéto-statique ϕ défini par la relation suivante

$$\hat{\mathbf{H}} = -\nabla_R \phi. \quad (10)$$

Introduisons maintenant le premier tenseur magnétique de Piola-Kirchhoff $\bar{\mathbf{T}}^{em}$ défini par

$$\mathbf{F}^{em} = \operatorname{div}_R \bar{\mathbf{T}}^{em}, \quad \bar{\mathbf{T}}^{em} = J_F \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}^{em}, \quad (11)$$

l'équation (7) prend les formes alternatives suivantes :

$$\operatorname{div}_R (\mathbf{T} + \bar{\mathbf{T}}^{em}) = \operatorname{div}_R (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

où on a défini $\bar{\mathbf{T}}^E$ et \mathbf{T}^H par

$$\bar{\mathbf{T}}^E = J_F \mathbf{F}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{t}}^E, \quad \mathbf{T}^H = J_F \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}^H. \quad (13)$$

Pour des raisons pratiques, on introduit le second tenseur (symétrique) de Piola-Kirchhoff, $\bar{\mathbf{S}}^E$, défini par

$$\bar{\mathbf{S}}^E = \bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{F}^{-T} = (\bar{\mathbf{S}}^E)^T . \quad (14)$$

En écartant les effets de la température qui sont hors propos ici, la densité d'énergie par unité de volume pour un corps anisotrope mais homogène prend la forme suivante :

$$\Sigma = \bar{\Sigma}(\mathbf{E}, \bar{\mathbf{H}}) , \quad (15)$$

où, \mathbf{E} est le tenseur de déformation de Lagrange définit par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}_R) . \quad (16)$$

Des travaux de A.Abd-Alla et G.A.Maugin [18], on tire

$$\bar{\mathbf{S}}^E = \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}} , \quad \widehat{\mathbf{M}} = -\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial \bar{\mathbf{H}}} , \quad (17)$$

et

$$\frac{d}{dt}\Sigma = \bar{\mathbf{S}}^E : \dot{\mathbf{E}} - \widehat{\mathbf{M}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}} . \quad (18)$$

L'ensemble de ces relations peut être complété par la version quasi-statique de conservation de la pseudo-quantité de mouvement (voir G.A.Maugin [20], G.A.Maugin, M.Epstein et C.Trimarco [23]). En appliquant \mathbf{F} à droite de l'équation (12) et intégrant par parties en tenant compte de (15) et (17), on montre que

$$\text{div}_R \mathbf{b}^H = \mathbf{0} , \quad (19)$$

où \mathbf{b}^H est connu sous le nom du tenseur d'Eshelby. Cette dernière équation signifie physiquement que le système matériel est homogène, c.à.d., ces propriétés sont indépendantes du point matériel \mathbf{X} (le corps est fait du même matériau en tout point matériel). Dans l'équation (19) le tenseur d'Eshelby est donné par (pour plus d'information voir annexe 3):

$$\mathbf{b}^H = \Sigma \mathbf{1}_R - \bar{\mathbf{S}}^E \cdot \mathbf{C} + \widehat{\mathbf{M}} \otimes \bar{\mathbf{H}} \quad (20)$$

5 Relations d'énergie

On introduit ici l'enthalpie magnétique W définie par

$$W(\mathbf{E}, \bar{\mathbf{H}}) = \Sigma(\mathbf{E}, \bar{\mathbf{H}}) - \frac{1}{2} J_F \bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{H}} . \quad (21)$$

Dans le but d'avoir des formes convenables à l'étude de la rupture magnétoélastique, on montre à partir de l'équation (21) et des équations précédentes qu'on a deux formes équivalentes de la loi de conservation d'énergie en tout point matériel :

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \nabla_R \cdot [(\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{B}}] = 0 \quad (22)$$

et

$$\frac{d}{dt} \Sigma = \nabla_R \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{v} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{M}}) + R, \quad (23)$$

où R est défini par

$$R = \mathbf{v} \cdot (\text{div}_R \mathbf{T}^H) + \dot{\phi} (\nabla_R \cdot \hat{\mathbf{H}}) \quad (24)$$

et \mathbf{v} est le champ de vitesse. Cela convient très bien à l'étude de la rupture dans le cas de la magnétoélasticité (voir [25, 26]). On note que seule la forme (22) est strictement conservative.

6 Taux de restitution d'énergie

La mécanique de la rupture des solides déformables a bénéficié ces dernières années des travaux importants de Cherepanov, Rice, Gurtin, Son, et d'autres consacrés aux notions de taux de restitution de l'énergie et d'intégrales indépendantes du contour. Dans cette partie, on donne deux extensions de ces quantités au cas magnétoélastique. Soit \mathcal{B} un corps bidimensionnel dans la configuration de référence, nous choisissons le repère (X_1, X_2, X_3) de telle sorte que le corps \mathcal{B} se trouve dans le plan (X_1, X_2) . Nous n'excluons pas les déformations antiplanaires de \mathcal{B} et pour cela, on utilise les vecteurs à trois dimensions qui dépendent seulement des variables X_1 et X_2 . Le domaine \mathcal{B} contient la fissure qui est représentée par la courbe $\mathcal{C}(t)$ et la pointe de cette fissure a une vitesse matérielle $\bar{\mathbf{V}}$ (voir Figure 1, Annexe 3).

Soient $\mathcal{D}_r(t)$ un disque qui a pour centre la pointe de la fissure et $\mathcal{B}_r(t) = \mathcal{B} / \mathcal{D}_r(t)$. Si $\mathcal{S}(t)$ est la frontière du domaine $\mathcal{B} / \mathcal{C}(t)$, alors $\mathcal{S}_r(t)$ est la frontière du domaine $\mathcal{B}_r(t)$ complémentaire à $\partial \mathcal{D}_r(t)$.

On tout point de \mathcal{B}_r , à partir de la relation (22) et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient la relation suivante .

$$\int_{\mathcal{B}_r} \dot{W} dA = \int_{\mathcal{S}_r} \mathbf{N} \cdot \{ (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{B}} \dot{\phi} \} dS \quad (25)$$

$$- \int_{\partial \mathcal{D}_r} \mathbf{N} \cdot \{ (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{B}} \dot{\phi} \} dS,$$

où \mathbf{N} est le vecteur sortant du domaine \mathcal{S}_r . Le terme de gauche de (25) peut être évalué en utilisant le théorème de Truesdell et Toupin [27] pour un domaine évolutif :

$$\int_{\mathcal{B}_r} \dot{W} dA = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_r} W dA + \int_{\partial\mathcal{D}_r} W (\mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{V}}) dS . \quad (26)$$

Substituons (26) à (25) et faisons tendre r vers zéro, on aura l'expression globale suivante pour la conservation de l'énergie pour un corps fissuré.

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} W dA + \mathcal{J} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{N} \cdot \{ (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{B}} \dot{\phi} \} dS , \quad (27)$$

où on a défini le taux de restitution d'énergie $\mathcal{J}(t)$ par :

$$\mathcal{J}(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial\mathcal{D}_r} \mathbf{N} \cdot \{ W \bar{\mathbf{V}} + (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{B}} \dot{\phi} \} dS . \quad (28)$$

Le premier terme de l'intégrale de l'équation (28) est le flux de l'enthalpie magnétique (due au transport de la matière à travers $\partial\mathcal{D}_r$) et les autres représentent le travail subit par le matériel de l'extérieur à l'intérieur de \mathcal{D}_r . Ainsi, \mathcal{J} inclut la contribution générale des champs mécaniques et magnétiques à la propagation de fissure car \mathcal{J} représente l'énergie irréversiblement consommée lors de la progression stationnaire (à vitesse $\bar{\mathbf{V}}$) de la pointe de fissure.

En faisant les mêmes démarches avec l'équation (23), on aura

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \Sigma dA + \mathcal{J}^* = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{N} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{M}} \dot{\phi}) dS + \int_{\mathcal{B}} R dA , \quad (29)$$

avec la définition

$$\mathcal{J}^*(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial\mathcal{D}_r} \mathbf{N} \cdot (\Sigma \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{M}} \dot{\phi}) dS . \quad (30)$$

On remarque que \mathcal{J}^* ne contient apparemment pas une contribution du champ magnétique par l'intermédiaire de la notion de contrainte de Piola-Kirchhoff. \mathcal{J}^* est le taux d'énergie mécanique et magnétique des champs couplés absorbés par la pointe de la fissure durant le processus de propagation de la fissure. Dans la relation (29), on suppose que les intégrales sont convergentes. Si $R = 0$, le calcul ci-dessus est vrai sans aucune condition. Si, par ailleurs, on examine la contribution volumique

$$R = - (\nabla_R \cdot \hat{\mathbf{M}}) \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

et on observe que $\partial \varphi / \partial t$ ne s'évanouit pas dans le processus de limite. On est donc amené à imposer la contrainte suivante

$$\nabla_R \cdot \widehat{\mathbf{M}} = 0$$

qui est une condition suffisante pour avoir sans annuis l'équation (29). Cette dernière condition est vraie dans plusieurs structures magnétiques (Landau et Lifshitz [26]).

7 Intégrales indépendantes du contour

Dans ce paragraphe, on exprime \mathcal{J} et \mathcal{J}^* comme des intégrales indépendantes du contour. Soit $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ le champ de déplacement mécanique tel que

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + (\nabla_R \mathbf{u})^T . \quad (31)$$

On suppose que \mathbf{u} et le potentiel ϕ ont un comportement régulier au voisinage de la pointe de la fissure. Donc on a (voir Gurtin [28], N.Q.Son [29])

$$\dot{\mathbf{u}} = -\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla_R \mathbf{u} + \mathbf{w} , \quad \dot{\phi} = -\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla_R \phi + h , \quad (32)$$

où h et les composantes de \mathbf{u} ont un comportement singulier à la pointe de la fissure. Si les termes de \mathcal{J} contenant \mathbf{w} et h tendent vers zéro quand r tend vers zéro, en tenant compte de (31) et (32), la relation (28) peut s'écrire :

$$\mathcal{J}(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{V}} \cdot \mathcal{F}(r) , \quad (33)$$

où la force matérielle globale $\mathcal{F}(r)$ est donnée par

$$\mathcal{F}(r) := \int_{\partial \mathcal{D}_r} \mathbf{N} \cdot \left\{ W \mathbf{1}_R - (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot (\nabla_R \mathbf{u})^T - \widehat{\mathbf{B}} \otimes \nabla_R \phi \right\} dS . \quad (34)$$

Ceci est une force "matérielle" car ses composantes sont dans la configuration matérielle de référence et elle est engendrée par dualité par une vitesse matérielle ($\bar{\mathbf{V}}$) comme l'indique l'expression (33). La même technique appliquée à \mathcal{J}^* conduit à l'expression

$$\mathcal{J}^*(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{V}} \cdot \mathcal{F}^*(r) \quad (35)$$

$$\mathcal{F}^*(r) := \int_{\partial \mathcal{D}_r} \mathbf{N} \cdot \left\{ \Sigma \mathbf{1}_R - \bar{\mathbf{T}}^E \cdot (\nabla_R \mathbf{u})^T - \widehat{\mathbf{M}} \otimes \nabla_R \phi \right\} dS .$$

On montre que

$$\mathcal{F}^*(r) := \int_{\partial \mathcal{D}_r} \mathbf{N} \cdot \mathbf{b}^H dS , \quad \mathcal{F}(r) = \int_{\partial \mathcal{D}_r} \mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{b}}^H dS , \quad (36)$$

où \mathbf{b}^H et $\bar{\mathbf{b}}^H$ sont des tenseurs de contrainte d'Eshelby.

$$\mathbf{b}^H = \Sigma \mathbf{1}_R - \bar{\mathbf{S}}^E \cdot \mathbf{C} + \widehat{\mathbf{M}} \otimes \bar{\mathbf{H}} . \quad (37)$$

$$\bar{\mathbf{b}}^H = W \mathbf{1}_R - (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{F} + \widehat{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{H}} .$$

Pour simplifier, on suppose que la fissure se propage suivant l'axe des OX_1 . Dans ce cas $\bar{\mathbf{V}} = \dot{l}(t) \mathbf{E}_1$, où \mathbf{E}_1 est le vecteur unité de la direction OX_1 (Figure 2, Annexe 3). Soit un contour Γ qui entoure la pointe de la fissure. En posant

$$J(\Gamma) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathcal{F}(\Gamma) , \quad J^*(\Gamma) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathcal{F}^*(\Gamma) , \quad (38)$$

on aura donc

$$J(\Gamma) = \int_{\Gamma} \left\{ W N_1 - \mathbf{N} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{u}_{,1} - (\widehat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N}) \phi_{,1} \right\} d\Gamma \quad (39)$$

et

$$J^*(\Gamma) = \int_{\Gamma} \left\{ \Sigma N_1 - \mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{u}_{,1} - (\widehat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{N}) \phi_{,1} \right\} d\Gamma , \quad (40)$$

où $N_1 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_1$, par conséquent, \mathcal{J} et \mathcal{J}^* se réécrivent :

$$\mathcal{J} = J(\Gamma) \dot{l} , \quad \mathcal{J}^* = J^*(\Gamma) \dot{l} . \quad (41)$$

Les intégrales données par (39) et (40) sont indépendantes du contour si

$$\mathbf{N} \cdot \widehat{\mathbf{B}}^{\pm} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H)^{\pm} = 0 \quad (42)$$

pour la première intégrale et

$$\mathbf{N} \cdot \widehat{\mathbf{M}}^{\pm} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E)^{\pm} = 0$$

pour la seconde. En tenant compte des conditions précédemment imposées, les relations (42) sont vraies [26].

8 Application

Nous considérons une fissure de mode III d'un corps isotrope magnétostrictif subissant l'action d'un champ magnétique $\mathbf{H}^0 = H^0 \mathbf{E}_3$. Les équations constitutives sont sous la forme explicite suivante (voir l'annexe 3):

$$\bar{T}_{13}^E = \mu u_{,1} + b H^0 h_1 , \quad (43)$$

$$\bar{T}_{31}^E = \mu u_{,1} + (b + 2\chi^2) H^0 h_1 ,$$

$$\bar{T}_{23}^E = \mu u_{,2} + b H^0 h_2 ,$$

$$\bar{T}_{32}^E = \mu u_{,2} + (b + 2\chi^2) H^0 h_2 ;$$

$$T_{13}^H = T_{31}^H = H^0 h_1 , \quad T_{23}^H = T_{32}^H = H^0 h_2 , \quad (44)$$

$$\widehat{M}_1 = \chi h_1 - b H^0 u_{,1} , \quad \widehat{M}_2 = \chi h_2 - b H^0 u_{,2} , \quad (45)$$

$$\widehat{H}_1 = h_1 - H^0 u_{,1} , \quad \widehat{H}_2 = h_2 - H^0 u_{,2} ,$$

où $u = u_3(X_1, X_2)$, et h_1, h_2 sont les deux composantes du champ magnétique induit.

En résolvant le problème (voir Grisvard [31] pour le problème de singularité), la partie singulière de la solution au voisinage de la fissure est donnée par

$$u = A \sqrt{r} \sin(\theta/2) , \quad \phi = -B \sqrt{r} \sin(\theta/2) , \quad (46)$$

où (r, θ) sont des coordonnées polaires centrées à la pointe de la fissure et les coefficients A et B sont déterminés par la géométrie du corps et les conditions aux limites. Au voisinage de la pointe de la fissure, on a :

$$h_1 = -\frac{K^H}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\theta/2) , \quad h_2 = \frac{K^H}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) , \quad (47)$$

où on a introduit le facteur d'intensité du champ magnétique K^H et le facteur d'intensité de déformation K^s par

$$K^H = \sqrt{\pi} B / \sqrt{2} , \quad K^s = \sqrt{\pi} A / 2 . \quad (48)$$

L'ordre de singularité est le même que celui obtenu par shindo [12, 13] et [32].

Pour J et J^* nous obtenons après calcul les expressions suivantes :

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \mu (K^s)^2 - \varepsilon (K^H)^2 \right\} + \bar{b} H^0 K^H K^s \quad (49)$$

et

$$J^* = \frac{1}{2} \left\{ \mu (K^s)^2 - \chi (K^H)^2 \right\} + b H^0 K^H K^s , \quad (50)$$

et leur différence est

$$\Delta J = J - J^* = -\frac{1}{2} (K^H)^2 + H^0 K^H K^s . \quad (51)$$

Si le champ magnétique est supprimé, alors le dernier terme de (51) devient nul et ΔJ qui devient négative et est due seulement au champ magnétique induit.

Cela est équivalent à dire que le champ magnétique a une contribution négative au taux de restitution de l'énergie. Par conséquent, sa présence est bénéfique du point de vue de la rupture. Par conséquent, l'intégrale J a une tendance à minimiser l'évaluation de la rupture tandis que l'intégrale J^* indique, quand un champ critique est appliqué, l'avancement de la fissure.

9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a fait une analyse de la contribution du champ magnétique sur la fissure pour les matériaux ferromagnétiques et on a proposé les expressions des taux de restitution des énergies correspondantes.

D'une manière générale, le présent travail considère un seul type de ce qu'on appelle les forces matérielles. D'un autre point de vue, on peut remarquer qu'un champ magnétique appliqué donne naissance à une force, également matérielle, sur les dislocations (défauts microscopiques) [33, 34].

References

- [1] **V.Z. Parton**, Fracture Mechanics of Piezoelectric Crystals, *Acta Astronautica*, 3, 671-683 (1976).
- [2] **Y.E.Pack and G.Herrmann**, Crack Extension Force in Elastic Dielectrics, *Int. J. Engng. Sci.*, 24, 1375-1388 (1986).
- [3] **R.M.McMeeking**, A J-integral for the Analysis of Electrically-induced Mechanical Stress at Cracks in Elastic Dielectrics, *Int. J. Engng. Sci.*, 28, 605-613 (1991).
- [4] **H.Sosa**, On the Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids, *Int. J. Solids Structures*, 29, 2613-2622 (1992).
- [5] **Z.Suo, C.M.Kuo, D.M.Barnett and J.R.Willis**, Fracture Mechanics for Piezoelectric Ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, 40, 739-765 (1992).
- [6] **G.A.Maugin and M.Epstein**, The Electroelastic Energy-Momentum Tensor, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A433, 299-312 (1991).
- [7] **C.Dascalu and G.A.Maugin**, Energy-Release Rates and Path-Independent Integrals in Electroelastic Crack Propagation, *Int. J. Engng. Sci.*, 32, 755-765- (1994).
- [8] **C.Dascalu and G.A.Maugin**, On the Dynamical Fracture of Piezoelectric Materials, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 48, 237-255 (1995).

- [9] **C.Dascalu and G.A.Maugin**, On the Energy of Electroelastic Fracture, *Zeit. Angew. Math. Phys.*, 46, 355-365 (1995).
- [10] **J.S.Lee, G.A.Maugin and Y.Shindo (Editors)**, Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures, AMD-Vol.161 and MD-Vol.42, the American Society of Mechanical Engineers, New York (1993).
- [11] **G.A.Maugin**, The Thermomechanics of Plasticity and Fracture, Cambridge University Press, U.K. (1992).
- [12] **Y.Shindo**, The Linear Magnetoelastic Problem for a Soft Ferromagnetic Elastic Solid with a Finite Crack, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 44, 47-50 (1977).
- [13] **Y.Shindo**, Magnetoelastic Interaction of a Soft Ferromagnetic Elastic Solid with a Penny-Shaped Crack in a Constant Axial Magnetic Field, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 45, 219-296 (1978).
- [14] **G.A.Maugin**, Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids, North-Holland, Amsterdam (1988).
- [15] **A.C.Eringen and G.A.Maugin**, Electrodynamics of Continua, Two Volumes, Springer-Verlag, New York (1990).
- [16] **A.Fomethé and G.A.Maugin**, Material Forces in Thermoelastic Ferromagnets, Preprint 1995.
- [17] **A.Fomethé and G.A.Maugin**, On the Fracture of Hard Ferromagnets, Preprint 1995.
- [18] **A.N.Abd-Alla and G.A.Maugin**, Nonlinear Magnetoacoustic Equations, *J. Acoust. Soc. America*, 82, 1746-1752 (1987).
- [19] **E.du Trémolet de Lacheisserie**, Magnetostriction : Theory and Applications of Magnetoelasticity, C.R.C., Boca Raton (1993).
- [20] **G.A.Maugin**, Sur la Conservation de la Pseudo-Quantité de Mouvement en Mécanique et Electrodynamique des Milieux Continus, *C. R. A. S. P.*, II-311, 763-768 (1990).
- [21] **G.A.Maugin and C.Trimarco**, Pseudo-Momentum and Material Forces in Electromagnetic Solids, *Int. J. Appl. Electrom. Mat.*, 2, 207-216 (1991).
- [22] **G.A.Maugin, M.Epstein and C.Trimarco**, Pseudo-Momentum and Material Forces in Inhomogeneous Materials : Applications to the Fracture of Electromagnetic Materials in EM Fields, *Int. J. Solids Structures*, 29, 1889-1900 (1992).

- [23] **G.A.Maugin, M.Epstein and C.Trimarco**, The Theory of Elastic Inhomogeneities in Electromagnetic Materials, *Int. J. Engng. Sci.*, 30, 1441-1449 (1992).
- [24] **G.A.Maugin**, Material Inhomogeneities in Elasticity, Chapman and Hall, London (1993).
- [25] **D.F.Nelson**, Electric, Optic and Acoustic Interactions in Dielectrics, Wiley-Interscience, Ney York (1979).
- [26] **L.D.Landau and E.M.Lifshitz**, Electrodynamics of Continua, Revised Edition, Pergamon Press, Oxford (1984).
- [27] **C.A.Truesdell and R.A.Toupin**, The Classical Field THEories, in : Handbuch der Physik, Vol III/1, ed. S.Flügge, Springer-Verlag, Berlin (1960).
- [28] **M.E.Gurtin**, On the Energy-Release Rate in Quasi-Static Elastic Crack Propagation, *J. Elasticity*, 9, 187-195 (1979).
- [29] **N.Q.Son**, Méthodes Energétiques en Mécanique de la Rupture, *J. Mécanique (Paris)*, 19, 363-386 (1980).
- [30] **G.A.Maugin**, Nonlinear Electromechanical Effects - A Series of Lectures, World Scientific, Singapore (1985).
- [31] **P.Grisvard**, Problèmes aux Limites dans les Polygones, *Bull. EDF*, C1, 21-59 (1986).
- [32] **D.D.Asanyan, A.A.Aslyanyan and G.E.Bagdasaryan**, Concentrations of Elastic Stresses and Induced Magnetic Field Caused by an External Magnetic Field Next to a Crack, *Sov. J.Contemporary Engng. Mech.*, (English Translation of *Izv. Akad. Nauk. Armyanskoi SSR : Mekhanika* by Allerton Press Inc.), 41, 10-19 (1988).
- [33] **V.I.Alshits, E.V.Darinskaya, T.M.Perkalina and A.A.Urusovskaya**, Motion of Dislocations in NaCl Crystals Under the Action of a Static Magnetic Field, *Fiz. Tverd. Tela*, 29, 467-471 (1987).
- [34] **V.I.Alshits, E.V.Darinskaya, O.L.Kazakova, B.Yu.Mikchina and E.A.Petrzhik**, Magnetoplastic Effets in Non-Magnetic Crystals and Internal Friction, *J. of Alloys and Compounds*, 211-212, 548-553 (1994).

Conclusion Générale

Après avoir rappelé la définition d'un matériau ferromagnétique, la première partie a été consacrée à l'analyse du phénomène de magnétostriction afin de déboucher sur des moyens et méthodes qui permettent la modélisation de ce type de comportement. Un autre problème abordé dans cette partie est celui de l'hystérésis. On a rappelé le modèle physique de Preisach, le modèle microscopique de Néel et le modèle mathématique de Visintin. En se basant sur la théorie du micromagnétisme et en appliquant les statistiques de Maxwell Boltzmann, le modèle de Jiles et Atherton explique bien le phénomène de l'hystérésis par l'intermédiaire de l'introduction de la fonction de Langevin.

On a présenté dans la deuxième partie de ce travail des simulations numériques pour des effets d'hystérésis magnétomécanique. Pour cela, on prend un échantillon ferromagnétique non aimanté et on exerce un champ magnétique croissant; la courbe de première aimantation obtenue est réversible lorsqu'il s'agit des matériaux où il n'y a ni impureté ni défauts cristallins et irréversible quand il y a impureté et défauts cristallins. En donnant tous les arguments nécessaires on peut tracer des courbes d'hystérésis ainsi que des courbes dérivées. Si cette théorie décrit complètement le cas général pour les boucles d'hystérésis, elle a besoin d'être étendue au cas où les contraintes et le champ magnétique appliqué ne sont pas parallèles et il faut noter que l'influence du couplage magnétomécanique est quantitativement assez mal reproduite, les courbes d'hystérésis magnétique n'étant pas assez sensibles à l'effet de contraintes.

Dans la troisième partie de ce travail, on a utilisé le modèle développé récemment par Motogi et Maugin pour déduire un ensemble cohérent de relations thermodynamiques pour la description de l'effet magnétomécanique. On a introduit aussi des variables internes pour tenir compte de l'accroissement de certains domaines magnétiques aux dépens des voisins. Un modèle équivalent à celui de Chen pour les ferroélectriques est aussi obtenu. Alors la théorie est appliquée à la description du phénomène de la magnétostriction induite par des contraintes et du phénomène de l'aimantation induite par des contraintes. Les simulations numériques, l'extension de ce modèle aux matériaux polycristallins et la comparaison avec des données expérimentales feront, on l'espère, l'objet des travaux futurs.

La quatrième partie de ce travail a été consacrée à la présentation de la formulation générale du taux de restitution de l'énergie et de l'intégrale J magnétoélastique des matériaux paramagnétiques et des matériaux ferromagnétiques mous. Cette restriction signifie que les corps magnétiques considérés sont faiblement magnétisables et que l'effet d'hystérésis n'est pas présent. Une simple application au problème des fissures antiplanes d'un corps magnétostrictif, sous l'action d'un champ magnétique axiale a illustré l'exploitation des expressions obtenues.

Globalement, on a donc étudié certains aspects du comportement magnétique macroscopique complexe en utilisant au mieux les analogies avec les comportements mécaniques typiquement irréversibles (plasticité et rupture). De plus, on a essayé d'introduire dans ces comportements le couplage avec les effets mécaniques (essentiellement contraintes), ceci dans le but de cerner soit l'influence des sollicitations mécaniques sur la réponse magnétique irréversible (l'hystérésis), soit l'influence des champs magnétiques sur le phénomène de rupture mécanique. La conclusion globale est qu'en l'absence d'un véritable passage micro-macro (qui serait certainement difficile pour les phénomènes concernés), la thermodynamique des processus irréversibles fournit un guide très utile. Il reste à rendre certaines modélisations complètement tridimensionnelles et à confirmer certains effets quantitativement par des expériences. De telles expériences sont actuellement en cours dans différents laboratoires Français Américains et Japonais.

Annexe 1



CONSTITUTIVE RELATIONS FOR MAGNETOMECHANICAL HYSTERESIS IN FERROMAGNETIC MATERIALS

MOHAMMED SABIR

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences (Semplalia), B.P. S 15, Marrakech, Morocco

(Communicated by G. A. MAUGIN)

Abstract—In this work, we present a constitutive relation that appears to give a good description of rate-independent magnetomechanical hysteresis in ferromagnetic materials. Notions such as residual magnetization, magnetic loading (or unloading) function, first magnetization curve, major hysteresis loops, primitive hysteresis loops and derivative curve are introduced. The main arguments which are necessary to construct the magnetic hysteresis loops and the derivative curves are discussed. We also study the effects of couplings with the stress on the overall shape of the magnetic hysteresis loops and the level of saturation. The hysteresis loss associated with a general loop is found.

1. INTRODUCTION

Hysteresis is generally considered as a rather well characterized response to a cyclic loading. Typically, after a while, the response itself has become periodic for a periodic loading. Hysteresis phenomena abound in nature and they are observed in many materials and processes: to name a few, the stress–strain mechanical response, the magnetic hysteresis loop of hard ferromagnets and the electric hysteresis loop of ferroelectric crystals.

Preisach [1] was the first to devise such a model by considering a magnetic material as an assembly of small domains, each presenting an ideal, shifted, rectangular hysteresis loop, and then assuming a distribution of such domains in the ad hoc plane. Néel's works [2, 3] go further in a deeper microscopic understanding of magnetic hysteresis by relating ferromagnetic hysteresis to the irreversible motion of magnetic domain walls, the latter being pinned from time to time on structural defects which, themselves, are distributed at random.

Having in the past been concerned with magnetic relaxation in rigid or deformable ferromagnets [4–6] and with the coupling between defects and dynamical magneto-elastic properties in crystalline ferromagnets [7, 8], Maugin and co-workers [9–11] were asked to examine the relationship and interactions between magnetic hysteresis and the mechanical state of some materials. This has an important practical side because of the development of nondestructive methods of stress analysis utilizing the Barkhausen effects, i.e. the magnetization by jerky motion of magnetic domain walls [12–14].

The magnetic hysteresis loop is a manifestation of the key property of ferromagnetic material. Its different parameters, i.e. the coercive magnetic field, the maximum value of the amplitude of the residual magnetization and its slope are sensitive to a wide range of different effects [15]. The hysteresis loop is sensitive to the action of the stress. There is thus evidence of a marked coupling between the ferromagnetic hysteresis loop and the state of stress [19–21].

Basing on previous studies [16, 17] on pure ferromagnetic hysteresis, we explore physically relevant implications of a class of constitutive relations for unidimensional, rate-independent, ferromagnetic hysteresis. We present in this work a numerical simulation of one of the above-mentioned effects on the overall shape of the magnetic hysteresis loop of ferromagnetic materials, namely, the effects of stresses on different features of the magnetic hysteresis loop.

First we study the effects of the stresses on the first magnetization curve and on the slope of the hysteresis loop while holding unchanged the level of saturation of the residual magnetization. The slope of the hysteresis loop will depend on both the magnetomechanical coupling

coefficients and whether the stress is tensile or compressive. However, from the experimental point of view this is not the case. Generally if we submit a ferromagnet to some loading, say, stress, all the parameters of the hysteresis loop will be influenced by this loading. To overcome this problem we propose, for instance, a formula to express the dependence of the level of saturation on the stress.

In the following sections we derive explicit formulae which are necessary to construct the hysteresis loop, namely, the first magnetization curve, the major hysteresis curve, the derivative curve and the hysteresis loss associated with the loop.

2. GENERAL RELATIONS

The state of a medium, for dissipative effects, depends on the past history, and this is accounted for through variables called internal variables. Among these state variables we may consider the residual magnetization M^R , we shall denote by M^r the reversible magnetization. Thus, in the one-dimensional case [10, 18],

$$M^R = M - M^r, \quad (2.1)$$

where M is the total magnetization.

We explore physically relevant implications of classes of constitutive relations for uni-dimensional ferromagnetic hysteresis. These relations have the general form [16, 17]:

$$\dot{B} = \alpha |\dot{H}| (f(H) - B) + \dot{H}g(H), \quad (2.2)$$

in which the magnetic field H and the magnetic flux B are real-valued functions of time with piecewise continuous derivatives, \dot{H} , \dot{B} . Here α is a positive constant, $|\dot{H}|$ is the absolute value of \dot{H} , and f and g are prescribed real-valued functions on $]-\infty, +\infty[$. We here derive consequences of (2.2) under the following hypotheses [17].

- (i) f is a monotone, increasing piecewise smooth odd function with a derivative, f' , that is not identically zero and that has, for large H , a finite limit $f'(\infty)$.
- (ii) g is a piecewise continuous, even with a limit, for large H , obeying

$$g(\infty) = f'(\infty). \quad (2.3)$$

To study a concrete case, we consider that only the behaviour of all the physical quantities along a fixed direction intervene. Thus, in the one-dimensional case, we have the following relations,

$$B = \mu_0(H + M), \quad (2.4)$$

in which μ_0 is the vacuum permeability. We have also

$$\begin{cases} M = M^r + M^R \\ M^r = kH \end{cases}, \quad (2.5)$$

where k is a constant given by

$$k = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=H_S}, \quad (2.6)$$

with H_S is the maximal magnetic field. The second of (2.5) is certainly not true in general as M^r

certainly is a nonlinear function of H over the range of fields considered. Still we use it as an approximation.

Thus, combining equations (2.4), (2.5) and (2.6), one obtains a functional relation between the magnetic-field intensity H , the magnetic-induction intensity B and the residual magnetization M^R ,

$$M^R = \frac{1}{\mu_0} B - (1 + k)H. \quad (2.7)$$

Accounting for equations (2.7), equation (2.2) yields,

$$\dot{M}^R = \alpha |\dot{H}| (F(H) - M^R) + \dot{H}G(H), \quad (2.8)$$

with

$$\begin{cases} F(H) = \frac{f(H)}{\mu_0} - H(1 + k) \\ G(H) = \frac{g(H)}{\mu_0} - (1 + k) \end{cases} \quad (2.9)$$

We can choose the parameters of the functionals $f(H)$ and $g(H)$ in such a manner to have the preceding hypothesis (i) and (ii) for $F(H)$ and $G(H)$.

If we apply a magnetic field (this is the purely magnetic case), the residual magnetization M^R is given by equation (2.8). But, when we apply a magnetic field H and a mechanical stress σ , the magnetization \hat{M}^R (the superhat corresponds to a magnetomechanical coupling) in the medium corresponds to that obtained in the case of a fictive magnetic field \hat{H} in the form [10]:

$$\hat{H} = H - 2\mathfrak{R}\varphi\sigma M^R, \quad (2.10)$$

where φ is the coefficient of elastic compliances and \mathfrak{R} is the coefficient of magnetostriction. The applied magnetic field H is a function of time, but the applied mechanical stress σ is fixed (positive value or negative value). For simplification equation (2.10) is rewritten as

$$\hat{H} = H - \beta M^R, \quad (2.11)$$

where β is a real quantity. In analogy to equation (2.8), when we have a magnetomechanical coupling, the residual-magnetization time rate has the form

$$\dot{\hat{M}}^R = \alpha |\dot{\hat{H}}| (F(\hat{H}) - \hat{M}^R) + \dot{\hat{H}}G(\hat{H}). \quad (2.12)$$

3. GENERAL OBSERVATIONS

To produce the hysteresis curve one needs to apply a periodic external agent H with a possible increase in the amplitude as a function of time t . If we take $\dot{H}(t)$ to be non-zero at each such t , then $\hat{H}(t)$ is also non-zero at each such t , and equations (2.8) and (2.12) become

$$\frac{dM^R}{dH} = \alpha S(\dot{H})(F(H) - M^R) + G(H), \quad (3.1)$$

and

$$\frac{d\hat{M}^R}{d\hat{H}} = \alpha S(\dot{\hat{H}})(F(\hat{H}) - \hat{M}^R) + G(\hat{H}), \quad (3.2)$$

where

$$S(\dot{X}) = \begin{cases} +1 & \text{for } \dot{X} > 0 \\ -1 & \text{for } \dot{X} < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

We must find relations between the coupled residual magnetization \hat{M}^R and the applied magnetic field H . Thus, on account of equations (3.1) and (2.11), the relation (3.2) becomes

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{M}^R}{dH} &= \{1 - \beta[\alpha S(\dot{H})(F(H) - M^R) + G(H)]\} \\ &\times \{\alpha S(\dot{H})(F(\hat{H}) - \hat{M}^R) + G(\hat{H})\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1 Computation of $S(\dot{H})$

When H is increasing we have

$$\begin{cases} S(\dot{H}) = 1 \\ \dot{H} = \|\dot{H}\| \end{cases} \quad (3.5)$$

Using the relations (2.11), (2.8) and (3.5), one may obtain

$$\hat{H} = \dot{H}\{1 - \beta(\alpha(F(H) - M^R) + G(H))\}. \quad (3.6)$$

Under the hypotheses (i) and (ii), we can choose the function $G(H)$ positive and a real positive α . When $\dot{H} > 0$, we have [17]:

$$F(H) \geq M^R. \quad (3.7)$$

Taking into account the form of \hat{H} given by equation (3.6), we can conclude that $\hat{H} > 0$ in two cases

$$\beta < 0, \quad (3.8)$$

or

$$\beta < \frac{1}{\alpha |F(H) - M^R| + G(H)} \quad \text{i.e. } \beta \ll 1. \quad (3.9)$$

When H is decreasing, we have,

$$\begin{cases} S(\dot{H}) = -1 \\ \dot{H} = -|\dot{H}| \end{cases} \quad (3.10)$$

Using the relations (2.11), (2.8) and (3.10), one may obtain

$$\hat{H} = H\{1 - \beta(\alpha(M^R - F(H)) + G(H))\}. \quad (3.11)$$

If $\dot{H} > 0$, we shall have [17]:

$$F(H) \leq M^R. \quad (3.12)$$

Thus, $\hat{H} < 0$ if one of two relations (3.8) or (3.9) is true, in this case, we have

$$S(\dot{H}) \cdot S(\dot{\hat{H}}) = 1. \quad (3.13)$$

Taking into account the form of β given by equations (2.10) and (2.11), the sign of β can be

changed, thus the relation (3.8) is not true. Thus, the only condition on β is the relation (3.9). When equation (3.13) is true, the saturations of the two hysteresis curves, for the purely magnetic case and the coupled magnetic case, are reached at the same time.

3.2 Solution of the hysteresis equations

When H is increasing, $S(\dot{H}) = S(\hat{H}) = 1$, the solution M_L^R of (3.1) that starts at (H_0, M_0^R) is

$$M_L^R(H) = M_L^R(H; H_0, M_0^R) \\ = F(H) + [M_0^R - F(H_0)]e^{-\alpha(H-H_0)} - e^{-\alpha H} \int_{H_0}^H (F'(\xi) - G(\xi))e^{\alpha\xi} d\xi, \quad H \geq H_0, \quad (3.14)$$

and the solution \hat{M}_L^R of (3.4) that starts at (H_0, \hat{M}_0^R) is

$$\hat{M}_L^R(H) = \hat{M}_L^R(H; H_0, \hat{M}_0^R) = A_L(H) + [\hat{M}_0^R - A_L(H_0)]e^{-\int_{H_0}^H \Pi_L(t) dt} \\ - e^{-\int_{H_0}^H \Pi_L(t) dt} \int_{H_0}^H (A_L'(\xi) - B_L(\xi))e^{\int_{H_0}^{\xi} \Pi_L(t) dt} d\xi, \quad H \geq H_0, \quad (3.15)$$

where

$$\begin{cases} \Pi_L(H) = \Pi_L(H; H_0, M_0^R) = \alpha\{1 - \beta(\alpha(F(H) - M_L^R(H)) + G(H))\} \\ B_L(H) = B_L(H; H_0, M_0^R) = G(\hat{H})\{1 - \beta(\alpha(F(H) - M_L^R(H)) + G(H))\} \\ \hat{H} = H - \beta M_L^R(H) \\ A_L(H) = A_L(H; H_0, M_0^R) = F(\hat{H}). \end{cases} \quad (3.16)$$

When H is decreasing, $S(\dot{H}) = S(\hat{H}) = -1$, the solution M_U^R of (3.1) issuing from (H_0, M_0^R) is

$$M_U^R(H) = M_U^R(H; H_0, M_0^R) \\ = F(H) + [M_0^R - F(H_0)]e^{-\alpha(H-H_0)} + e^{\alpha H} \int_H^{H_0} (F'(\xi) - G(\xi))e^{-\alpha\xi} d\xi, \quad H \leq H_0 \quad (3.17)$$

and the solution \hat{M}_U^R of (3.4) issuing from (H_0, \hat{M}_0^R) is

$$\hat{M}_U^R(H) = \hat{M}_U^R(H; H_0, \hat{M}_0^R) = A_U(H) + [\hat{M}_0^R - A_U(H_0)]e^{-\int_{H_0}^H \Pi_U(t) dt} \\ + e^{\int_{H_0}^H \Pi_U(t) dt} \int_H^{H_0} (A_U'(\xi) - B_U(\xi))e^{-\int_{H_0}^{\xi} \Pi_U(t) dt} d\xi, \quad H \leq H_0, \quad (3.18)$$

where

$$\begin{cases} \Pi_U(H) = \Pi_U(H; H_0, M_0^R) = \alpha\{1 - \beta[\alpha(M_U^R(H) - F(H)) + G(H)]\} \\ B_U(H) = B_U(H; H_0, M_0^R) = G(\hat{H})\{1 - \beta[\alpha(M_U^R(H) - F(H)) + G(H)]\} \\ \hat{H} = H - \beta M_U^R(H; H_0, M_0^R) \\ A_U(H) = A_U(H; H_0, M_0^R) = F(\hat{H}). \end{cases} \quad (3.19)$$

3.3 Initial magnetization curves

If the applied magnetic field H is equal to zero, the residual magnetization M^R is also equal to zero. Thus, using the relation (2.11), we have also $\hat{H} = 0$ and $\hat{M}^R = 0$ for each value of the applied stress. The two initial magnetization curves are the loading curves from the demagnetized state $(0, 0)$ and are given in the purely magnetized case by

$$M_L^R(H) = M_L^R(H; 0, 0) = F(H) - e^{-\alpha H} \int_0^H (F'(\xi) - G(\xi))e^{\alpha\xi} d\xi, \quad (3.20)$$

and in the coupled magnetized case by

$$\hat{M}_L^R(H) = \hat{M}_L^R(H; 0, 0) = A_L(H) - e^{-\int_0^H \Pi_L(t) dt} \int_0^H (A_L'(\xi) - B_L(\xi)) e^{\int_0^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi. \quad (3.21)$$

To obtain (3.20) and (3.21) from (3.14) and (3.15) we use the fact that because f is assumed in (i) to be an odd function and use the relation (3.16)

$$A_L(0) = F(0) = 0. \quad (3.22)$$

The function G is assumed in (ii) to be even. It follows from (3.1) [respectively (3.2)] and (3.22) that $G(0)$ [respectively $B_L(0)$] is the slope of the initial magnetization curve in the purely magnetic case (respectively in the coupled magnetic case) at $H = 0$. Thus

$$\frac{\partial}{\partial H} M_L^R(H; 0, 0)|_{H=0} = G(0) > 0, \quad (3.23)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial H} \hat{M}_L^R(H; 0, 0)|_{H=0} = B_L(0) = G(0)(1 - \beta G(0)) > 0. \quad (3.24)$$

Equations (3.1), (3.2), (3.23) and (3.24) and the observation that $G'(0) = 0$ yield

$$\frac{\partial^2 M_L^R}{\partial H^2} (H; 0, 0)|_{H=0} = \alpha(F'(0) - G(0)) \quad (3.25)$$

and

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_L^R}{\partial H^2} (H; 0, 0)|_{H=0} = \alpha[(1 - \beta G(0))^2 - \beta G(0)](F'(0) - G(0)). \quad (3.26)$$

Experience indicates that the initial magnetization curve has a positive second derivative at zero; such is the case here [in equation (3.26) we use the fact that β is very small] if and only if,

$$F'(0) > G(0). \quad (3.27)$$

3.4 Major hysteresis curves

The quantities

$$M_U^R(H; +\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow +\infty} M_U^R(H; H_0, M_0^R) \quad (3.28)$$

and

$$\hat{M}_U^R(H; +\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow +\infty} \hat{M}_U^R(H; H_0, \hat{M}_0^R), \quad (3.29)$$

can be regarded as the residual magnetizations in a material that has been loaded to saturation and then monotonically unloaded until the magnetic field has value H .

The graphs of the functions $H \mapsto M_U^R(H; +\infty)$ or $H \mapsto \hat{M}_U^R(H; +\infty)$, $-\infty < H < +\infty$, are called the unloading portions of the major hysteresis loops. It follows from (3.17) and (3.18) that

$$M_U^R(H; +\infty) = F(H) + e^{\alpha H} \int_H^{+\infty} (F'(\xi) - G(\xi)) e^{-\alpha \xi} d\xi \quad (3.30)$$

and

$$\hat{M}_U^R(H; +\infty) = A_U(H) + e^{\int_0^H \Pi_U(t) dt} \int_H^{+\infty} (A_U'(\xi) - B_U(\xi)) e^{-\int_0^\xi \Pi_U(t) dt} d\xi. \quad (3.31)$$

Here, the functions A_U , Π_U and B_U are function of H and $+\infty$, for example $A_U(H) = A_U(H; +\infty)$.

The function $H \mapsto M_L^R(H; -\infty)$ or $H \mapsto \hat{M}_L^R(H; -\infty)$, $-\infty < H < +\infty$, where

$$M_L^R(H; -\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow -\infty} M_L^R(H; H_0, M_0^R) \quad (3.32)$$

and

$$\hat{M}_L^R(H; -\infty) = \lim_{H_0 \rightarrow -\infty} \hat{M}_L^R(H; H_0, \hat{M}_0^R), \quad (3.33)$$

describes the loading portions of the major hysteresis loops; by the relations (3.14) and (3.30), we have

$$\begin{aligned} M_L^R(H; -\infty) &= F(H) - e^{-\alpha H} \int_{-\infty}^H (F'(\xi) - G(\xi)) e^{\alpha \xi} d\xi \\ &= -M_U^R(H; +\infty) \end{aligned} \quad (3.34)$$

and by the relations (3.15), (3.16), (3.19) and (3.31), we have

$$\begin{aligned} \hat{M}_L^R(H; -\infty) &= A_L(H) - e^{-\int_0^H \Pi_L(t) dt} \int_{-\infty}^H (A_L'(\xi) - B_L(\xi)) e^{\int_0^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi \\ &= -\hat{M}_U^R(-H; +\infty). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Here, the functionals A_L , Π_L and B_L are a function of H and $-\infty$, for example $\Pi_L(H) = \Pi_L(H; -\infty)$.

It follows from (3.14) and (3.15) that, for each initial pair (H_0, M_0^R) .

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} (M_L^R(H; H, M_0^R) - F(H)) = \lim_{H \rightarrow +\infty} e^{-\alpha H} \int_{H_0}^H (G(\xi) - F'(\xi)) e^{\alpha \xi} d\xi \quad (3.36)$$

and

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} (\hat{M}_L^R(H; H_0, \hat{M}_0^R) - A_L(H)) = \lim_{H \rightarrow +\infty} e^{-\int_{H_0}^H \Pi_L(t) dt} \int_{H_0}^H (B_L(\xi) - A_L'(\xi)) e^{\int_{H_0}^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi \quad (3.37)$$

and the assumption that F' and G have limits obeying (2.2) and taking into account of the relations (3.16) yields

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} e^{-\alpha H} \int_{H_0}^H (G(\xi) - F'(\xi)) e^{\alpha \xi} d\xi = 0, \quad (3.38)$$

and

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} e^{-\int_{H_0}^H \Pi_L(t) dt} \int_{H_0}^H (B_L(\xi) - A_L'(\xi)) e^{\int_{H_0}^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi = 0. \quad (3.39)$$

Thus

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} (M_L^R(H; H_0, M_0^R) - F(H)) = 0 \quad (3.40)$$

and

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} (\hat{M}_L^R(H; H_0, \hat{M}_0^R) - A_L(H)) = 0. \quad (3.41)$$

The relation (3.16) yields

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} (F(H) - A_L(H)) = 0. \quad (3.42)$$

According to the three last relations, we have

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} (\hat{M}_L^R(H; H_0, \hat{M}_0^R) - M_L^R(H; H_0, M_0^R)) = 0. \quad (3.43)$$

In the case where we have $(H_0, \hat{M}_0^R) = (H_0, M_0^R) = (0, 0)$, and using (3.43), we can say that the two initial magnetization curves, for both purely magnetized curve and coupled magnetized curve, have the same level of saturation.

In the same manner, and using relations (3.30), (3.31), (3.34), (3.35), (3.16) and (3.19), we have

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} (\hat{M}_L^R(H; -\infty) - M_L^R(H; -\infty)) = 0 \quad (3.44)$$

and

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} (\hat{M}_U^R(H; +\infty) - M_U^R(H; +\infty)) = 0. \quad (3.45)$$

Thus, the level of saturation of the two major hysteresis curves is the same.

We have seen that the second derivative of the initial magnetization curves, equations (3.25) and (3.26), are positive in the demagnetized state if and only if (3.27) holds. If that relation be assumed, then

$$F(H) \geq G(H) \quad \text{for } 0 \leq H \leq +\infty \quad (3.46)$$

yields not only

$$\int_H^{+\infty} (F'(H) - G(H))e^{-\alpha H} dH \geq 0 \quad \text{for } 0 \leq H < +\infty \quad (3.47)$$

and

$$\int_H^{+\infty} (A'_U(H) - B_U(H))e^{-\int_0^H \Pi_U(t) dt} dH \geq 0, \quad 0 \leq H < +\infty \quad (3.48)$$

but also

$$\int_0^{+\infty} (F'(H) - G(H))e^{-\alpha H} dH > 0 \quad (3.49)$$

and

$$\int_0^{+\infty} (A'_U(H) - B_U(H))e^{-\int_0^H \Pi_U(t) dt} dH > 0. \quad (3.50)$$

In view of (3.30) and (3.34), the relation (3.47) implies that

$$M_U^R(H; +\infty) \geq F(H) \geq M_L^R(H; -\infty). \quad (3.51)$$

In the physically important case in which $(0, 0)$ is not on the major hysteresis loop, the consequence (3.51) of (3.47) implies that $(0, 0)$ is anterior to the loop, i.e. that

$$M_U^R(0; +\infty) > 0 > M_L^R(0; -\infty) \quad (3.52)$$

and, in view of (3.22) and (3.30), that (3.49) holds.

In view of (3.31) and (3.35), the relation (3.48) implies that

$$\begin{cases} \hat{M}_U^R(H; +\infty) \geq A_U(H) = A_U(H; +\infty) \\ \hat{M}_L^R(H; -\infty) \leq A_L(H) = A_L(H; -\infty) \end{cases} \quad (3.53)$$

Using relations (3.31), (3.35) and (3.50), we can prove that

$$\hat{M}_U^R(0; +\infty) > A_U(0) = A_L(0) = 0 < \hat{M}_L^R(0; -\infty). \quad (3.54)$$

3.5 Coercive magnetic field

The states on the major hysteresis loop with the applied magnetic field H is zero, in the purely magnetic case, are $(0, M_c^R)$ and $(0, -M_c^R)$; and the states on the major hysteresis loop with the applied magnetic field H is zero, in the coupled magnetic case, are $(0, \hat{M}_c^R)$ and $(0, -\hat{M}_c^R)$. The parameters \hat{M}_c^R and M_c^R are called the retentivities. In view of (3.30), (3.31) and (3.32):

$$M_c^R = M_{U0}^R(0; +\infty) = \int_0^{+\infty} (F'(\xi) - G(\xi))e^{-\alpha\xi} d\xi \quad (3.55)$$

and

$$\hat{M}_c^R = \hat{M}_{U0}^R(0; +\infty) = \int_0^{+\infty} (A'_{U0}(\xi) - B_{U0}(\xi))e^{-\int_0^\xi \Pi_U(t) dt} d\xi. \quad (3.56)$$

It follows from the sentences containing (3.49) and (3.50) that if the thermodynamical relation (3.46) be granted, the retentivities, M_c^R and \hat{M}_c^R , are positive if the second derivatives of the initial magnetization curves, in both purely and coupled magnetic cases, are positive at the demagnetized state.

It is clear from the equations (3.55), (3.56) and (3.19) that

$$\hat{M}_c^R > M_c^R \quad \text{if } \beta < 0 \quad (3.57)$$

and

$$M_c^R > \hat{M}_c^R \quad \text{if } \beta > 0. \quad (3.58)$$

The coercivity, H_c , in the purely magnetic case, obeys the equation

$$M_c^R(H_c; -\infty) = M_{U0}^R(-H_c; +\infty) = 0 \quad (3.59)$$

and the coercivity, H_{cc} , in the coupled magnetic case, obeys the equation

$$\hat{M}_{L0}^R(H_{cc}; -\infty) = \hat{M}_{U0}^R(-H_{cc}; +\infty) = 0. \quad (3.60)$$

Taking into account the last two equations and the expressions of $\hat{M}_{L0}^R(., -\infty)$ and $M_{L0}^R(., +\infty)$ given by (3.34) and (3.35), H_c and H_{cc} are solutions of

$$F(H_c) = e^{-\alpha H_c} \int_{-\infty}^{H_c} (F'(\xi) - G(\xi))e^{\alpha\xi} d\xi \quad (3.61)$$

and

$$A_L(H_{cc}) = e^{-\alpha \int_0^{H_{cc}} \Pi_L(t) dt} \int_{-\infty}^{H_{cc}} (A'_{L0}(\xi) - B_{L0}(\xi))e^{\int_0^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi. \quad (3.62)$$

Using the relations (3.49), (3.50) and taking into account the hypotheses (i) and (ii), we can conclude that

$$\begin{cases} H_c > 0 \\ H_{cc} > 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

It is clear from the relations (3.61), (3.62) and (3.16) that

$$\begin{cases} H_{cc} > H_c & \text{if } \beta < 0 \\ H_{cc} < H_c & \text{if } \beta > 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

We are interested in different scenarios for the hysteresis in the presence or absence of

magnetomechanical couplings. We can conclude that the value of the coercive field and the value of the retentivity will be modified by the coupling with a stress.

3.6 Derivative curves

Taking the derivatives, in the purely magnetic case, the equations (3.34) and (3.30), we obtain the following expressions

$$\frac{dM_L^R}{dH}(H; -\infty) = G(H) + \alpha e^{-\alpha H} \int_{-\infty}^H (F'(\gamma) - G(\xi)) e^{\alpha \xi} d\xi \quad (3.65)$$

$$\frac{dM_U^R}{dH}(H; +\infty) = G(H) + \alpha e^{\alpha H} \int_H^{+\infty} (F'(\xi) - G(\xi)) e^{-\alpha \xi} d\xi \quad (3.66)$$

and

$$\frac{dM_U^R}{dH}(-H; +\infty) = \frac{dM_L^R}{dH}(H; -\infty). \quad (3.67)$$

Taking into account the hypotheses (i) and (ii), we can conclude that

$$\begin{cases} \frac{dM_L^R}{dH}(H; -\infty) > 0 \\ \frac{dM_U^R}{dH}(H; +\infty) > 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

Thus, the derivative curves of the two major hysteresis loops are positive and symmetric. In like manner, in the coupled magnetic case, we obtain the following expressions:

$$\frac{d\hat{M}_L^R}{dH}(H; -\infty) = B_L(H) + \Pi_L(H) e^{-\int_0^H \Pi_L(t) dt} \int_{-\infty}^H (A'_L(\xi) - B_L(\xi)) e^{\int_0^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi \quad (3.69)$$

$$\frac{d\hat{M}_U^R}{dH}(H; +\infty) = B_U(H) + \Pi_U(H) e^{\int_0^H \Pi_U(t) dt} \int_H^{+\infty} (A'_U(\xi) - B_U(\xi)) e^{-\int_0^\xi \Pi_U(t) dt} d\xi \quad (3.70)$$

$$\frac{d\hat{M}_U^R}{dH}(-H; +\infty) = \frac{d\hat{M}_L^R}{dH}(H; -\infty), \quad (3.71)$$

and

$$\begin{cases} \frac{d\hat{M}_L^R}{dH}(H; -\infty) > 0 \\ \frac{d\hat{M}_U^R}{dH}(H; +\infty) > 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

We are interested, here, in the derivative curves, because the Barkhausen effect, i.e. the magnetization by jerky motion of magnetic domain walls, has the same characteristic as the derivative curves [22-24].

4. NUMERICAL SIMULATIONS

We have found that for a ferromagnetic material a useful example is provided by the case in which:

$$\begin{cases} F(H) = AL(\xi H) = A(\coth(\xi H) - 1/\xi H) \\ G(H) = F'(H)(1 - \gamma e^{-\rho |H|}) \end{cases} \quad (4.1)$$

with A , ξ and ρ positive and with $0 < \gamma < 1$. The first of (4.1) introduces the well known Langevin function $L(X)$. The second is introduced in an ad hoc way. In this case we have

$F'(H) > G(H)$ for all finite H and $G(\infty) = F'(\infty) = 0$. For such a material, it follows from (3.23) that the initial permeability obeys,

$$G(0) = \frac{A}{3\xi}(1 - \gamma) > 0. \quad (4.2)$$

Using the relations (4.1) and (3.20), we have the following expressions

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} M_L^R(H; 0, 0) = \lim_{H \rightarrow +\infty} F(H) = A = M_s^R, \quad (4.3)$$

where M_s^R is the residual magnetization at saturation. For all H in the interval $[0, +\infty[$, we can say that the values of the function $F(H)$ are always larger to the values of $M_L^R(H; 0, 0)$.

If we assign to the material parameters the values,

$$A = 5000, \quad \xi = 2, \quad \gamma = 0.85, \quad \alpha = 0.85, \quad \rho = 0.1 \quad (4.4)$$

and using a computer program, the major hysteresis loops and the derivative curves are as shown in Figs 1 and 2.

The nonlinear behavior of the residual magnetization at saturation suggests the following exponential dependence of the maximum value of the amplitude of the residual magnetization on the stress in the one-dimensional form,

$$\hat{M}_s^R = M_s^R(1 + C_1(1 - \exp(-C_2\sigma))) \quad (4.5)$$

where C_1 and C_2 are material coefficients.

Simulations of this influence of stresses on the major hysteresis curves are given in Figs 3 and 4.

In the case in which the amplitude of the maximum value of the residual magnetization does or does not depend on the stress, equation (3.62) shows that the coercive magnetic field will change according to the magnetomechanical couplings as shown in Figs 1, 3 and 4.

The sign of the stress, the coefficient of elastic compliances and the coefficient of magnetostriction (i.e. β) will play an active role in the change of the shape of the hysteresis loop.

Figures 1(a) and (b) show the computed magnetization hysteresis for β negative, and β positive. In this new model, coercivity varies with stress, which is often the case [22], but is not in good agreement with experimental results for alloy steels [19].

According to the form (4.5), application of a compressive (resp. tensile) stress implies a nonlinear decrease (resp. increase) in the amplitude of the maximum value of the residual magnetization, provided that C_1 and C_2 are positive as seen in Figs 3 and 4, but the shape of the hysteresis loop will be influenced by the sign of β .

On account of equation (4.5), the coercive magnetic field, as well as the maximum value of the amplitude of the residual magnetization decrease with increasing compressive stress as shown in Fig. 3(b) produced by the present model and confirmed by the experimental results [20, 23].

The Barkhausen effect is the most widely exploited of the magnetic NDE techniques for measuring stress. Tiny discontinuous jumps in the magnetization of the sample as the field H is changed, are sensed via electromagnetic induction in a pickup coil. The jumps are due to domain walls translating as they get unpinned and then pinned again. As the magnetization changes rapidly with H , the number of Barkhausen counts increases correspondingly.

Figure 2 shows theoretical curves for $\partial M^R / \partial H$ versus H , that have been obtained from the model for a specific set of parameters A , ξ , γ , α , ρ , and for values of $\beta = -0.00008$, 0 , $+0.00008$. The characteristic shape of the curve in Fig. 2 is confirmed in the experimental data [24].

The Barkhausen noise peak coincides with the peak in the differential residual aimantation dM^R/dH , not the peak in the total differential aimantation dM/dH , as previously suggested.

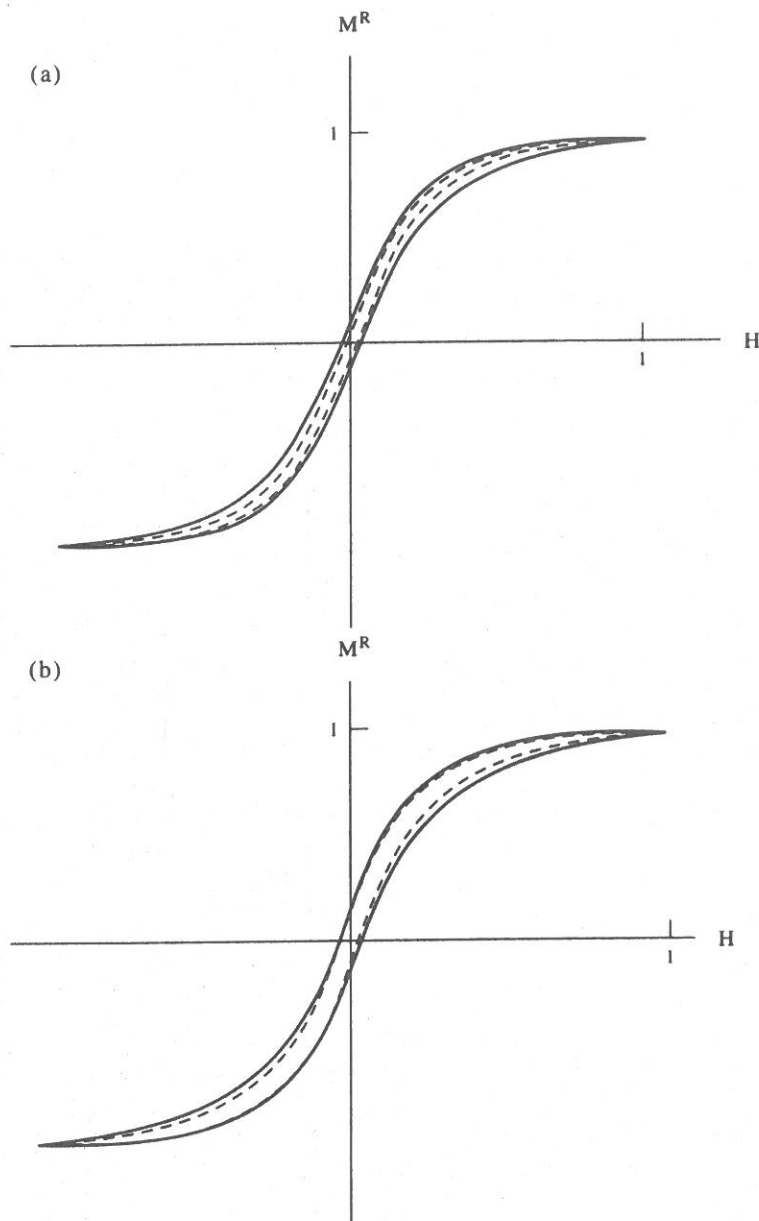


Fig. 1. (a) Hysteresis loops produced by the model: (—) in the absence of couplings and (---) magnetomechanical couplings $\beta = 0.0003$; (b) hysteresis loops produced by the model: (---) in the absence of couplings and (—) magnetomechanical couplings $\beta = -0.0003$.

This is because Barkhausen noise is associated with domain-wall movement, which is associated with the irreversibility.

5. PRIMITIVE HYSTERESIS LOOPS

A hysteresis loop is an oriented closed curve, Γ . Such a curve has a parameterization $t \rightarrow (H(t), M^R(t))$, $0 \leq t \leq \tau$ with the functions $t \mapsto H(t)$ and $t \mapsto M^R(t)$ obeying (2.8) and the conditions $H(0) = H(\tau)$, $M^R(0) = M^R(\tau)$. If this parameterization can be chosen so that H decreases on an interval $[0, t_m]$ with $0 < t_m < \tau$ and increases on $[t_m, \tau]$, we say that the hysteresis loop is primitive, we use such a parameterization, and we therefore have

$$H(0) = H(\tau) = H_M, \quad H(t_m) = H_m \quad (5.1)$$

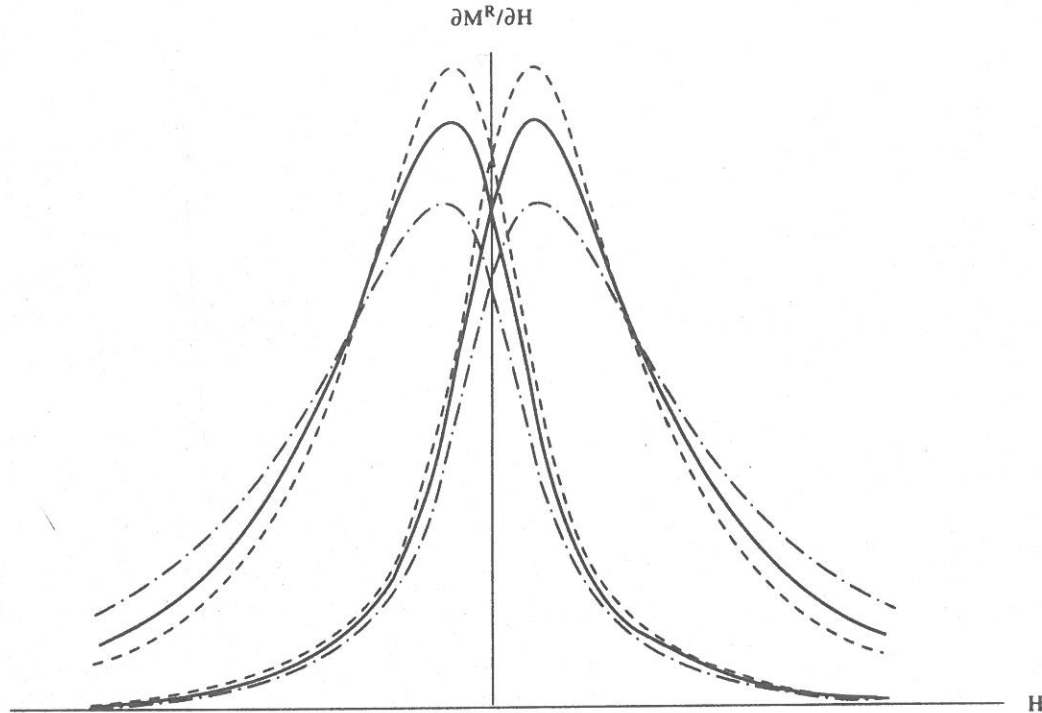


Fig. 2. Derivative curves produced by the model: (—) in the absence of couplings, (---) magnetomechanical coupling $\beta = -0.00008$ and (-·-·-) magnetomechanical coupling $\beta = 0.00008$.

with

$$H_M = \max_{\Gamma} H, \quad H_m = \min_{\Gamma} H. \quad (5.2)$$

The energy expanded in a single complete traversal of a hysteresis loop, in the purely magnetic case, i.e. the hysteresis loss associated with the loop [16, 17], is

$$w = \oint_{\Gamma} H dB = - \int_{\Gamma} B dH = - \int_0^{\tau} B(t) \dot{H}(t) dt. \quad (5.3)$$

Taking into account the relations (2.5), (2.6) and (5.1), the relation (5.3) becomes

$$w = -\mu_0 \int_0^{\tau} M^R(t) \dot{H}(t) dt. \quad (5.4)$$

For a primitive loop,

$$w = \mu_0 \int_{H_m}^{H_M} M_U^R(H) dH - \mu_0 \int_{H_m}^{H_M} M_L^R(H) dH. \quad (5.5)$$

And the energy expanded, in the coupled magnetic case, is

$$w_c = \mu_0 \int_{H_m}^{H_M} \hat{M}_U^R(H) dH - \mu_0 \int_{H_m}^{H_M} \hat{M}_L^R(H) dH. \quad (5.6)$$

In the following relations, we are interested in the coupled magnetic case, because the purely magnetic case is a particular case ($\beta = 0$).

As a primitive loop is a closed curve, the functions \hat{M}_L^R and \hat{M}_U^R have a common value, \hat{M}_M^R , at H_M and another common value, \hat{M}_m^R , at H_m . For simplification we are interested in a symmetric primitive hysteresis loop, i.e. $H_m = -H_M$ and $\hat{M}_m^R = -\hat{M}_M^R$:

$$\begin{cases} \hat{M}_L^R(H_M; \dots) = \hat{M}_U^R(H_M; \dots) = \hat{M}_M^R \\ \hat{M}_L^R(-H_M; \dots) = \hat{M}_U^R(-H_M; \dots) = \hat{M}_m^R = -\hat{M}_M^R \end{cases} \quad (5.7)$$

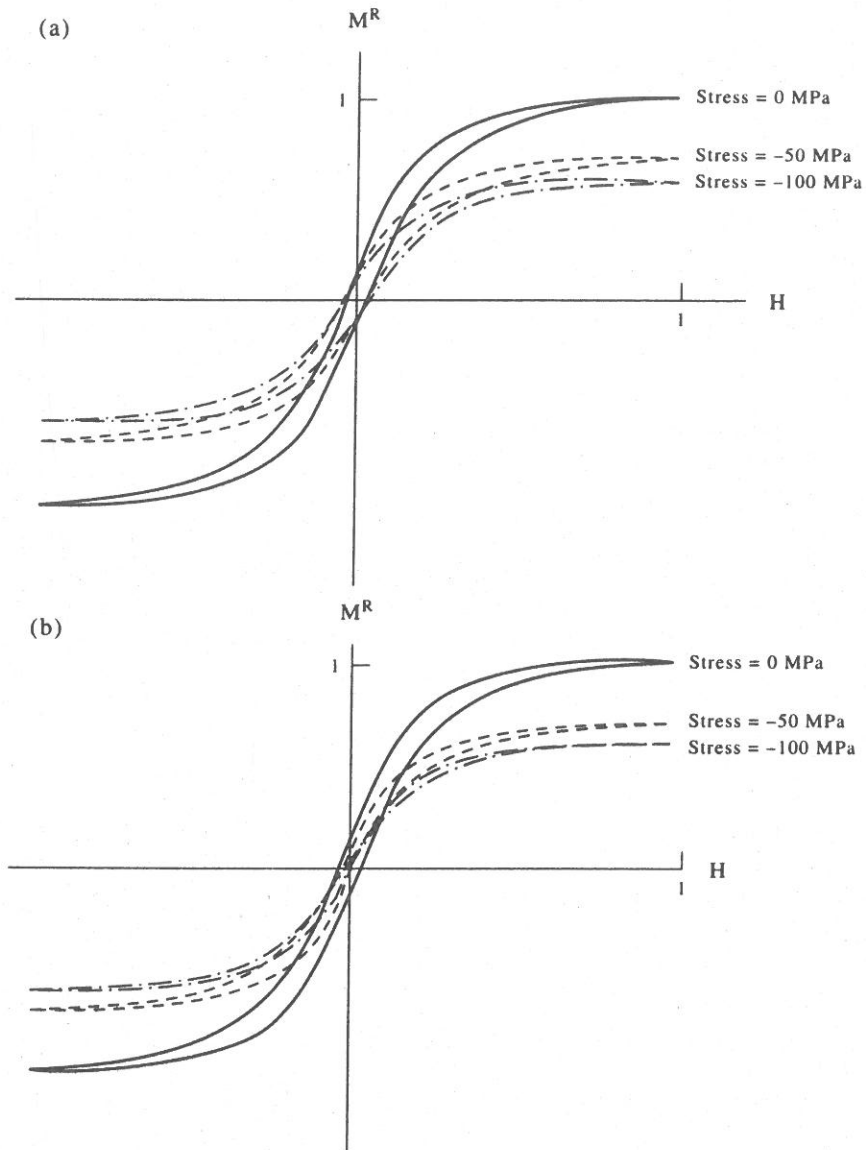


Fig. 3. Theoretical hysteresis loops produced by the model. The level of saturation depends nonlinearly on the stress: (a) $C_1 = 8.5$, $C_2 = 0.7$, $\beta = -0.0003$; (b) $C_1 = 8.5$, $C_2 = 0.7$, $\beta = 0.0003$.

The functions \hat{M}_L^R and \hat{M}_U^R must be as in (3.15) and (3.18) with appropriate values of H_0 and \hat{M}_0^R ; here,

$$\begin{aligned} \hat{M}_L^R(H) = \hat{M}_L^R(H; -H_M, -\hat{M}_M^R) = & A_L(H) - (\hat{M}_M^R + A_L(-H_M))e^{-\int_{-H_M}^H \Pi_L(t) dt} \\ & - e^{-\int_{-H_M}^H \Pi_L(t) dt} \int_{-H_M}^H (A'_L(\xi) - B_L(\xi))e^{\int_{-H_M}^{\xi} \Pi_L(t) dt} d\xi \end{aligned} \quad (5.8)$$

and

$$\begin{aligned} \hat{M}_U^R(H) = \hat{M}_U^R(H; H_M, \hat{M}_M^R) = & A_U(H) + (\hat{M}_M^R - A_U(H_M))e^{-\int_{H_M}^H \Pi_U(t) dt} \\ & + e^{\int_{H_M}^H \Pi_U(t) dt} \int_H^{H_M} (A'_U(\xi) - B_U(\xi))e^{-\int_H^{\xi} \Pi_U(t) dt} d\xi. \end{aligned} \quad (5.9)$$

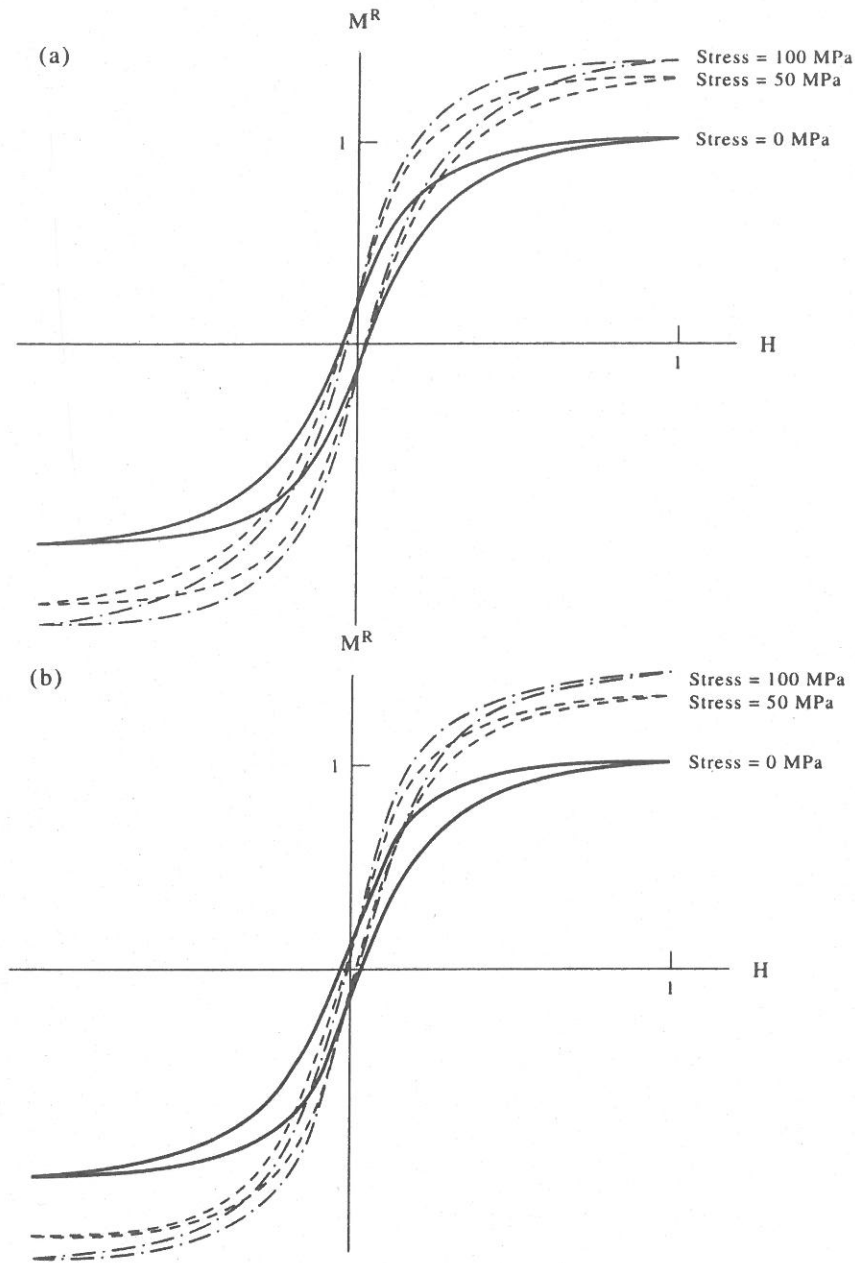


Fig. 4. Theoretical hysteresis loops produced by the model. The level of saturation depends nonlinearly on the stress: (a) $C_1 = 8.5, C_2 = 0.7, \beta = -0.0003$; (b) $C_1 = 8.5, C_2 = 0.7, \beta = 0.0003$.

As the equations $\hat{M}_U^R(H_M; H_M, \hat{M}_M^R) = \hat{M}_M^R$ and $\hat{M}_L^R(-H_M; -H_M, -\hat{M}_M^R) = -\hat{M}_M^R$ hold trivially, the relations (5.7) are equivalent to the following pair of simultaneous equations for $-\hat{M}_M^R$ and \hat{M}_M^R :

$$\begin{cases} \hat{M}_L^R(H_M; -H_M, -\hat{M}_M^R) = \hat{M}_M^R \\ \hat{M}_U^R(-H_M; H_M, \hat{M}_M^R) = -\hat{M}_M^R \end{cases} \quad (5.10)$$

On solving these equations, taking into account the expressions (3.16) and (3.19), we find the following relation

$$\begin{aligned} & (e^{\int_0^{H_M} \Pi_L(t) dt} + e^{-\int_0^{H_M} \Pi_U(t) dt})(\hat{M}_M^R - A_L(H_M)) \\ & = -\int_0^{H_M} (A_L'(\xi) - B_L(\xi))e^{\int_0^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi - \int_0^{H_M} (A_L'(\xi) - B_U(\xi))e^{-\int_0^\xi \Pi_U(t) dt} d\xi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

In the purely magnetic case, $\beta = 0$, the expression (5.11) will be reduced to

$$M_M^R = F(H_M) - \int_0^{H_M} (F'(H) - G(H)) \frac{\cosh(\alpha H)}{\cosh(\alpha H_M)} dH. \quad (5.12)$$

By using (5.11), (3.16) and (3.19) to eliminate $(\hat{M}_M^R + A_L(-H_M))$ from (5.8), and (5.11), (3.16) and (3.19) to eliminate $(\hat{M}_M^R - A_U(H_M))$ from (5.9), one obtains explicit expressions for \hat{M}_L^R and \hat{M}_U^R in terms of the pair $(-H_M, H_M)$, thus proving that a primitive loop is uniquely determined by its extreme values of H . The hysteresis loss $w_c(-H_M, H_M)$ associated with a primitive loop whose extreme values of H are $-H_M$ and H_M is obtained by placing in (5.6) the formulae for $\hat{M}_L^R(H; -H_M, H_M)$ and $\hat{M}_U^R(H; -H_M, H_M)$ obtained from (5.8), (5.9) and (5.11). After some algebra we find that

$$\begin{aligned} w_c(-H_M, H_M) &= 2\mu_0(\hat{M}_M^R - A_L(H_M))e^{-\int_0^{H_M} \Pi_U(t) dt} \times \int_0^{H_M} (e^{-\int_0^t \Pi_L(t) dt} + e^{\int_0^t \Pi_U(t) dt}) dH \\ &+ 2\mu_0 \int_0^{H_M} \left(\int_H^{H_M} (A'_U(\xi) - B_U(\xi)) e^{-\int_H^\xi \Pi_U(t) dt} d\xi \right) dH \\ &+ 2\mu_0 \int_0^{H_M} \left(\int_{-H_M}^H (A'_L(\xi) - B_L(\xi)) e^{\int_H^\xi \Pi_L(t) dt} d\xi \right) dH \end{aligned} \quad (5.13)$$

where $(\hat{M}_M^R - A_L(H_M))$ is given by (5.11).

In the purely magnetic case, $\beta = 0$, the hysteresis loss $w(-H_M, H_M)$ take the form, i.e. (5.13) reduce to:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{4\mu_0} w(-H_M, H_M) &= \int_0^{H_M} (F'(H) - G(H)) dH - \int_0^{H_M} (F'(H) - G(H)) \frac{\cosh(\alpha H)}{\cosh(\alpha H_M)} dH \\ &= \hat{M}_M^R - \int_0^{H_M} g(H) dH. \end{aligned}$$

6. CONCLUSION

We have presented a constitutive relation capable of displaying magnetomechanical hysteresis effects in continuous media.

If the theory is to be completely descriptive of the general case for hysteresis loops, it needs to be extended to the case where the stress axis is in a general orientation, relatively to the applied magnetic field.

Since it is important to be able to detect residual stress in steels, the recent progress made has been heartening, particularly in the development of the theory. Further progress in the future seems imminent.

Acknowledgements—This paper was completed when the author stayed at Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Université Pierre-et-Marie Curie. The author is grateful for scientific discussions with G. A. Maugin and the hospitality offered by members in the Laboratory.

REFERENCES

- [1] F. PREISACH, *Z. Phys.* **94**, 277 (1935).
- [2] L. NÉEL, *Cahiers Physique (Paris)* **12**, 1 (1942); **13**, 18 (1943).
- [3] L. NÉEL, *Ann. Univ. Grenoble* **22**, 299 (1946).
- [4] G. A. MAUGIN, *Physica* **81a**, 454 (1975).
- [5] G. A. MAUGIN, *Micromagnetism*. In *Continuum Physics Vol. III* (Edited by A. C. ERINGEN), pp. 213–312. Academic Press, New York (1976).
- [6] G. A. MAUGIN, *Phys. Rev.* **B25**, 7015 (1982).

- [7] G. A. MAUGIN, Classical magnetoelasticity in ferromagnets with defects. In *Electromagnetic Interactions in Elastic Solids* (Edited by H. PARKUS), pp. 243–324. Springer, Vienna (1979).
- [8] G. A. MAUGIN and A. FOMÉTHÉ, *Int. J. Engng. Sci.* **20**, 885 (1982).
- [9] G. A. MAUGIN, M. SABIR and P. CHAMBON, Coupled magnetomechanical hysteresis in ferromagnets: application to non-destructive testing. In *Electromagnetomechanical Interactions in Solids and Structures* (Edited by Y. YAMAMOTO and K. MIYA), pp. 255–264. North-Holland, Amsterdam (1987).
- [10] G. A. MAUGIN and M. SABIR, *Int. J. Plasticity* **6**, 573 (1990).
- [11] M. SABIR and G. A. MAUGIN, *Arch. Mech.* **40**, 829 (1988).
- [12] V. M. RUDYAK, *Soviet Phys. Uspekhi* **13**, 451 (1971).
- [13] L. P. KARJALAINEN and M. MOILANEN, *NDT Int.* **51** (1979).
- [14] R. RAUTIOAHO, P. KARJALAINEN and M. MOILANEN, *J. Magnetism Magnetic Mater.* **68**, 314 (1987).
- [15] G. A. MAUGIN, *Int. J. Appl. Electromagnetics Mater.* **2**, 7–19 (1991).
- [16] B. D. COLEMAN and M. L. HODGDON, *Int. J. Engng. Sci.* **24**, 897 (1986).
- [17] B. D. COLEMAN and M. L. HODGDON, *Arch. Rational Mech. Anal.* **99**, 375 (1987).
- [18] S. MOTOGI and G. A. MAUGIN, Nonlinear stress–strain behavior of multi-domain ferromagnets. In *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures* (Edited by J. S. LEE, G. A. MAUGIN and Y. SHINDO), AMD-Vol. 161, pp. 99–114, A.S.M.E., New York (1993).
- [19] D. C. JILES and D. L. ATHERTON, *J. Phys. D. Appl. Phys.* **17**, 1255 (1984).
- [20] D. C. JILES and D. L. ATHERTON, *J. Appl. Phys.* **55**, 2115 (1983).
- [21] D. L. ATHERTON and D. C. JILES, *NDI Int.* **19**, 15 (1986).
- [22] M. J. SABLİK, *Nondestr. Test* **5**, 49 (1989).
- [23] M. J. SABLİK and D. C. JILES, *J. Appl. Phys.* **64**, 5402 (1988).
- [24] M. J. SABLİK and H. KWUN, *J. Appl. Phys.* **69**, 5791 (1991).

(Received 24 December 1994; accepted 28 December 1994)

Annexe 2

Thermodynamical formulation of stress effects on magnetic hysteresis

Mohammed Sabir

*Laboratoire Hydrodynamique, Faculté des Sciences (Smlalia), Département de Physique
B.P. S15, Marrakech, Morocco*

Received 27 February 1995

Abstract. In this work, we use a recently developed thermodynamical scheme for the modeling of magnetization and magnetic hysteresis. This paper aims at a formulation of magnetomechanical effects on magnetization and magnetic domain structures in single crystalline cubic ferromagnets. With the appropriate identifications, these relations can be considered as an equivalent thermodynamical basis for Chen's theory. Time-dependent effects and rate-independent effects are investigated. An integro-differential equation for the change in domain structures is obtained. The phenomenon of stress induced magnetization is also demonstrated.

1. Introduction

In the last few decades, ferromagnetic materials have become a subject of growing interest, both from the theoretical and practical points of view. Ferromagnets are widely used in modern technology.

Characterizing and understanding the magnetomechanical properties of ferromagnets is a difficult task, owing to the dependence of these properties on numerous factors, such as microstructure, domain effects, internal stress, crystallographic symmetry and others.

The magnetomechanical properties of ferromagnets have been investigated to some extent, both microscopically and macroscopically, but still much remains to be done for a better understanding of the subject.

When mechanical stresses are applied to multi-domain ferromagnets, the magnetoelastic energies in differently oriented domains are not the same and this causes a change in domain structure.

It is known that if a tensile (positive) stress is applied along the magnetization axis of a specimen with positive magnetostriction, domain vectors will rotate toward the axis, whereas, if a compressive (negative) stress is applied, the domain vectors rotate away from the axis. Thus, tension enhances magnetization whereas compression does the opposite.

There are many contributions to this subject in the literature of the 1930s and 40s. We should notice, among others, pioneering works of Becker and Kersten [1] and Becker and Doring [2] on stress effects on magnetization curve, and of Néel [3, 4] on pinning of domain walls by structural defects, and Brown [5] on stress induced magnetization.

Recently a theory based on physical modeling has been made available to predict the details of ferromagnetic hysteresis. The theory, due to Jiles and Atherton [6, 7], is useful in that only a few material-dependent parameters are needed to characterize the hysteresis. This theory has been extended by Sablik and Jiles [8] to explain magnetomechanical effects in steels and other ferromagnetic

materials. In the paper [9], the author reviews application of that theory [8] to various non-destructive evaluation (NDE) techniques for measuring residual stress in steels. For instance, the Barkhausen noise changes its characteristics under applied and/or residual stresses [10–12], and velocity of elastic waves also depends on the magnetic state [13–16]. Since such NDE is mainly aimed to apply to structural members, recent studies of magnetomechanical effects on magnetization and magnetic hysteresis are concerned with very defective polycrystalline materials [6, 7, 17, 20].

Magnetomechanical couplings such as the ΔE effects are undoubtedly important since they have a significant influence on the performances of magnetic materials [21, 22]. Moreover, recent developments in ultrasonic non-destructive testing of residual or applied stresses have revealed that the ΔE effect is also important even in structured steels [13, 14].

A thermodynamically based theory of magnetization and hysteresis was recently developed by Chernyi [23], Maugin et al. [24], Maugin [25, 26], Maugin and Sabir [27], and Motogi and Maugin [28]. It is based on the non-equilibrium thermodynamics with internal variables (see Germain [29] for the thermodynamics of continua, Maugin [30] for the general thermodynamic theory of electromagnetic materials and Motogi and Fukuda [39] for the modeling of ΔE effect in polycrystalline ferromagnets). The theory borrows several notions from the modern theory of plasticity [31].

In this work, we use the model developed in [24, 27, 28] to deduce a consistent set of thermodynamical relations for the description of the magnetomechanical effect. We also introduce internal variables which take into account the magnetic domain structure. A model equivalent to Chen's model [32–34] in ferroelectrics is obtained. Then the theory is applied to describe "stress induced magnetostriction" and "stress induced magnetization" in the subsequent sections.

2. Summary of model for magnetomechanical effects

2.1. Fundamental thermodynamical laws

In this subsection we set forth the relevant thermodynamic relations developed in [27, 28, 30, 31], for the formulation of magnetomechanical effects on magnetization and magnetic domain structures in single crystalline cubic ferromagnets. We start with the local form of the energy conservation law for deformable ferromagnets:

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} D_{ij} - H_i^L (\rho \hat{\mu}_i) + \Sigma_{ij} \hat{\Xi}_{ij} - \nabla \cdot q + \rho h, \quad (2.1)$$

where ρ , e , $\underline{\sigma}$, \underline{D} , \underline{H}^L , $\underline{\Sigma}$, q and h are, respectively, the mass density, the internal energy per unit mass, the stress tensor, the rate-of-strain tensor, the local magnetic field, the exchange force tensor, the heat-flux vector and the heat supply per unit mass. $\hat{\underline{\mu}}$ and $\hat{\underline{\Xi}}$ are objective time derivatives of $\underline{\mu}$ (the magnetization per unit mass) and $\nabla \underline{\mu}$ is defined in components by

$$\hat{\mu}_i = \dot{\mu}_i - \Omega_{ij} \mu_j, \quad \hat{\Xi}_{ij} = \left(\dot{\mu}_i \right)_{,j} - \Omega_{ik} \mu_{k,j}, \quad (2.2)$$

where $\underline{\Omega}$ is the rate-of-rotation tensor and the superimposed dot denotes the material time derivative. We introduce the Helmholtz free energy density ψ by

$$\psi = e - \eta \theta, \quad (2.3)$$

where η is the entropy per unit mass and θ is the thermodynamic temperature. Then for a deformable material, on account of Eq. (2.1), it is usually shown that the second law of thermodynamics can be written in the form of the so-called Clausius–Duhem inequality

$$-\rho \left(\dot{\psi} + \eta \dot{\theta} \right) + \sigma_{ij} D_{ij} - H_i^L (\rho \dot{\mu}_i) + \Sigma_{ij} \dot{\Xi}_{ij} + \theta q \cdot \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \geq 0. \quad (2.4)$$

The latter relation is the fundamental inequality which governs the thermodynamical evolution of deformable ferromagnetic insulators.

We assume here that the exchange effects are negligible and the mechanical deformations are small. Then the inequality (2.4) reduces to

$$-\left(\dot{\Psi} + S \dot{\theta} \right) + \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} - H_i^L \dot{M}_i + \theta q \cdot \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \geq 0, \quad (2.5)$$

where e is the infinitesimal strain tensor and we have set

$$\Psi = \rho_0 \psi, \quad \underline{M} = \rho_0 \underline{\mu}, \quad S = \rho_0 \eta, \quad (2.6)$$

where ρ_0 is the mass density in the reference state.

2.2. Method of the local state

The basic ideas of this subsection can be found in [27, 28]. A general review of thermodynamics with internal variables by Maugin and Muschik [35] will also be useful.

When very fast phenomena are excluded, the thermodynamic processes can be regarded as sequences of equilibrium states. The thermodynamic state can be completely defined by the values of state variables at a given point and time, and the definition of the state does not include the time rate of the variables. The state variables are of two types. The first type is represented by, in our case, the temperature θ , the total strain \underline{e} , and the net magnetization \underline{M} . The reversible phenomena can be determined by these variables. For dissipative effects, on the other hand, the state actually depends also on the past history, and this is accounted for through the second type of variables called *internal variables*. We may take the residual magnetization \underline{M}^R and a quantity having the *dimension of magnetization I* (see below) as the internal variables. We shall denote by \underline{e}^r and \underline{M}^r the elastic strain and the reversible magnetization, respectively; thus we have

$$\underline{e} = \underline{e}^r + \underline{e}^R, \quad \underline{M} = \underline{M}^r + \underline{M}^R, \quad (2.7)$$

where \underline{e}^R is the irreversible part of the strain which is attributed to the irreversible magnetostriction due to changes in domain structure. We do not consider here pure plastic deformation but \underline{e}^R represents a quasi-plastic effect.

In our simplest situation, the reversible magnetization is attributed to the so-called wall bowing at the very beginning of the magnetization process [36]. The walls are pinned by structural defects and they can be curved (Fig. 1).

The domain structure will completely return back to the original configuration if the magnetic field is turned off. Thus this magnetization process in small field regime is reversible. As is schematically shown in Fig. 1, all the wall bowing will be conceived to contribute to the reversible magnetization

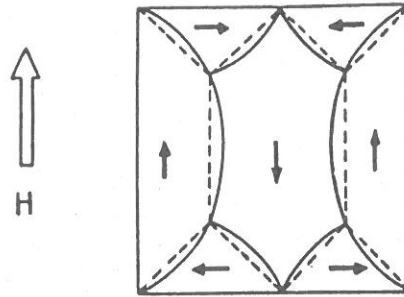


Fig. 1. Reversible wall bowing at beginning of magnetization process (For the sake of simplicity, the junction points of the 180° and 90° walls are considered as pinning sites).

\underline{M}^r . However, the change in the transverse domain volume due to wall bowing might be very small. Thus the internal variable \underline{I} can be regarded as a totally dissipative quantity. Both \underline{M}^R and \underline{I} are due to irreversible motion of domain walls.

Analogously to the modern theory of plasticity [31], we shall consider the free energy in the form of

$$\Psi = \bar{\Psi}(\underline{e}^r, \underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{I}, \theta). \quad (2.8)$$

We can set the *equations of state* (these equations can be found in Motogi and Maugin [28], see also Maugin et al. [24], Maugin and Sabir [27]). They define the partial derivatives of the energy by

$$\bar{S} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta}, \quad \underline{\sigma} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \underline{e}^r}, \quad \underline{H}^L = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \underline{M}^r}, \quad \underline{H}^R = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \underline{M}^R}, \quad \underline{H}^m = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \underline{I}}, \quad (2.9)$$

where we discard viscosity effects. With $S = \bar{S}$ (thermodynamical axiom of the local state) there remain the dissipation inequality

$$\underline{\sigma} : \dot{\underline{e}}^R - \underline{H}^L \cdot \dot{\underline{M}}^R + \underline{H}^R \cdot \dot{\underline{M}}^R + \underline{H}^m \cdot \dot{\underline{I}} + \theta q \cdot \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \geq 0, \quad (2.10)$$

and this can be decomposed as follows:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 \geq 0 \\ \Phi_1 &= \underline{\sigma} : \dot{\underline{e}}^R - \underline{H}^L \cdot \dot{\underline{M}}^R + \underline{H}^R \cdot \dot{\underline{M}}^R + \underline{H}^m \cdot \dot{\underline{I}} \\ \Phi_2 &= \theta q \cdot \nabla (1/\theta) \end{aligned} \right\}, \quad (2.11)$$

where Φ_1 is referred to as the intrinsic dissipation and Φ_2 is the thermal dissipation. It is usually assumed that both dissipations separately satisfy dissipation inequalities. Therefore, we obtain the intrinsic dissipation inequality

$$\Phi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\underline{e}}^R + \underline{H} \cdot \dot{\underline{M}}^R + \underline{H}^m \cdot \dot{\underline{I}} \geq 0, \quad (2.12)$$

or

$$\Phi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\underline{e}}^R + \underline{H}^T \cdot \dot{\underline{M}}^R + \underline{H}^m \cdot \dot{\underline{I}} \geq 0,$$

on account of the fact that

$$\underline{H} = -\underline{H}^L, \quad (2.13)$$

(the local magnetic field opposes the Maxwellian magnetic field) and

$$\underline{H}^T = \underline{H} + \underline{H}^R. \quad (2.14)$$

One can assume the existence of a pseudo-potential of dissipation [29], Π , which takes real values, is positive, contains the origin, and is convex in the set of variables $\{\underline{\dot{e}}^R, \underline{\dot{M}}^R, \underline{\dot{I}}\}$. The complementary constitutive equations are then given by

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\dot{e}}^R}, \quad \underline{H}^T = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\dot{M}}^R}, \quad \underline{H}^m = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\dot{I}}}. \quad (2.15)$$

These relations express the normality properties [36].

More conveniently, we can introduce a loading function f such that the normal-property Eq. (2.15) are written as

$$\underline{\dot{e}}^R = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}, \quad \underline{\dot{M}}^R = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^T}, \quad \underline{\dot{I}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^m}, \quad f = f(\underline{\sigma}, \underline{H}^T, \underline{H}^m). \quad (2.16)$$

There will occur a flow $\dot{\lambda} \geq 0$ if $f = 0$, otherwise $\dot{\lambda} = 0$ if $f < 0$. The multiplier $\dot{\lambda}$ is the so-called plastic multiplier in plasticity theory [31]. The loading surface $f = 0$ determines a convex "elasticity" domain C such that

$$C = \{(\underline{\sigma}, \underline{H}^T, \underline{H}^m) / f(\underline{\sigma}, \underline{H}^T, \underline{H}^m) \leq 0\}. \quad (2.17)$$

Equations (2.16) are none other than the evolution equations of the type of rate-independent plasticity.

It will be worth while noticing here the similarity between plastic deformations and domain wall movements. Plastic flow will take place when the stress state reaches the yield surface. It is attributed to fast movement of dislocations or slip lines. They might be impeded by some obstacles, e.g., grain boundaries and/or inclusions. Such impediment will result in the so-called hardening. The domain wall movements is also very fast, which will occur with an increase of external magnetic field which is needed to overcome the pinning energy by structural defects [3, 4]. The walls are pinned again by next stronger defects. Such jerky motions of domain walls will consecutively occur and apparently irreversibly. This is well known as the Barkhausen jumps. The thermodynamic conjugate forces \underline{H}^R and \underline{H}^m to $\underline{\dot{M}}^R$ and $\underline{\dot{I}}$, respectively, represent such pinning fields or configurational fields which oppose the Maxwellian magnetic field \underline{H} . They give, consequently, the hardening effects, from which the magnetic susceptibility can remain finite. (In very pure crystals, the domain wall movement terminates by a tiny magnetic field in such situations as ours [2]. This means that the susceptibility is practically infinite.) The situation is practically the same at for deformable materials which present both hardening and so-called locking (cf. Refs [26] and [37]).

If $\underline{\sigma}$, \underline{H}^T , \underline{H}^m are functions of time, then one can show that

$$\underline{\dot{\sigma}} : \underline{\dot{e}}^R + \underline{\dot{H}}^T \cdot \underline{\dot{M}}^R + \underline{\dot{H}}^m \cdot \underline{\dot{I}} = 0. \quad (2.18)$$

This is the orthogonality relation which can be obtained by generalizing a result of plasticity with hardening (the proof is similar to the one given in plasticity [31]).

We shall consider here a special form of the free energy as

$$\Psi = \Psi^{me}(\underline{\epsilon}^r, \underline{M}^r, \theta) + \Psi^i(\underline{M}^R, \underline{I}), \quad (2.19)$$

where the first term represents the magnetothermo-elastic energy and the second one is the "stocked" energy related to internal variables [36]. We assume that this latter contribution is a convex function of its arguments. The orthogonality relation (2.18) can be written, using the evolution equations (2.16), as

$$\underline{\dot{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} + \underline{\dot{H}}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^T} + \underline{\dot{H}}^m \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^m} = 0. \quad (2.20)$$

Using Eqs (2.9)₅, and Eq. (2.19), we obtain in components

$$\dot{H}_i^m = - \left(\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial I_i \partial M_j^R} M_j^R + \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial I_i \partial I_j} I_j \right). \quad (2.21)$$

Substituting Eq. (2.21) into Eq. (2.20) and again using Eqs (2.16)_{2,3}, we obtain the expression for the determination of the multiplier λ for a given f as

$$\lambda = \frac{Y(C)}{h} \left\langle \underline{\dot{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} + \underline{\dot{H}}^T \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{H}^T} \right\rangle, \quad (2.22)$$

where $Y(C) = 0$ for $f < 0$ and $+1$ if $f = 0$, and $\langle \cdot \rangle$ means the positive part. The quantity h is called the hardening modulus which is given by

$$h = \frac{\partial f}{\partial H_i^m} \cdot \frac{\partial \Psi^i}{\partial I_i \partial M_j^R} \cdot \frac{\partial f}{\partial H_j^T} + \frac{\partial f}{\partial H_i^m} \cdot \frac{\partial \Psi^i}{\partial I_i \partial I_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial H_j^m}. \quad (2.23)$$

The positiveness of the hardening modulus h can be envisaged from the convexity of the stocked energy Ψ^i .

2.3. Domain structure

We shall consider ferromagnetic single crystals with cubic symmetry. There exists a magnetic internal structure which is called magnetic domains [22]. In each domain, the magnetic spins are uniformly oriented to one of the easy axes of the crystal. The boundaries of adjacent domains are called domain walls. In the case of materials with positive anisotropy constant, the easy directions coincide with the crystallographic axes. On the other hand, in materials with negative anisotropy constant, the easy axes are along the diagonal directions of the cubic crystallographic axes.

We can distinguish six directions of domain orientation, which leads to two kinds of domain walls, one of which is a 180° wall and the other is a 90° wall. The domains separated by a 180° wall are oppositely oriented and those separated by a 90° wall are perpendicularly oriented.

We consider here, in this subsection, the case where an external magnetic field and a uniaxial stress are both applied along the x_1 direction (Fig. 2). In this case the magnetization process is essentially

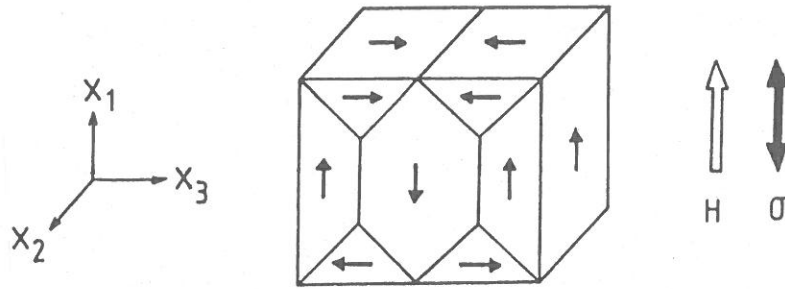


Fig. 2. Magnetic domain structure in a cubic single crystal.

carried by the wall movements. We can observe average responses of the material. One is the average (net) magnetization M and the other is the average (total) strain e in the x_1 direction. These are scalar quantities in this one-dimensional situation.

In order to take into account the domain structure, we shall define domain volume fractions by

$$v_i \equiv \frac{1}{V} \sum_k v_k, \quad v_{-i} \equiv \frac{1}{V} \sum_k v_{-k}, \quad (2.24)$$

where V is the crystal volume and $\sum_k v_k$ and $\sum_k v_{-k}$ are the sums of all domain volumes directed along the $+x_i$ and $-x_i$ directions, respectively. Since the magnetic field and the stress are applied along the x_1 axis, the x_2 and x_3 directions are identical. We can set therefore

$$v_l \equiv v_1, \quad v_{-l} \equiv v_{-1}, \quad v_{\perp} \equiv v_2 \equiv v_3, \quad v_{-\perp} \equiv v_{-2} \equiv v_{-3}. \quad (2.25)$$

In our simple one-dimensional case, all four transverse directions are equivalent. This leads to

$$v_{\perp} = v_{-\perp}, \quad (2.26)$$

then it is easy to show that

$$v_l + v_{-l} = 1 - 4v_{\perp}. \quad (2.27)$$

We can then define the following expressions

$$M = M_s (v_l + v_{-l}), \quad m = M_s v_{\perp}, \quad (2.28)$$

M is the net magnetization in the field direction, M_s is the saturation magnetization per unit volume and m is a quantity having the dimension of magnetization. The reader interested in this type of modeling is referred to studies by Motogi and Maugin [21, 28].

3. Thermodynamic model of magnetomechanical hysteresis

In accounting for the effects of stress on magnetic hysteresis, the effective magnetic field \hat{H} inside the ferromagnets is [7, 9, 27]

$$\hat{H}_i = H_i^T - \lambda_{ijkl}^1 \sigma_{jk} H_l^T - \lambda_{ijkl}^2 \sigma_{jk} H_l^R - \lambda_{ijkl}^3 \sigma_{jk} H_l^m, \quad (3.1)$$

where $\underline{\lambda}^1$, $\underline{\lambda}^2$, and $\underline{\lambda}^3$ depend on the magnetostriction-coefficients tensors and the tensors of elastic compliances.

As a typical loading function we consider a factorizable function that involves only the norm of the magnetizing field $\underline{\tilde{H}}$ [37]:

$$f(\underline{\sigma}, \underline{H}^T, \underline{H}^m) = \left\| \underline{\tilde{H}} \right\|^2 - H_c^2 \quad (3.2)$$

or, obviously,

$$f = f^+ \cdot f^-, \quad f^\pm = \left\| \underline{\tilde{H}} \right\| \mp H_c, \quad (3.3)$$

where

$$\underline{\tilde{H}} = \underline{\hat{H}} + \underline{H}^m. \quad (3.4)$$

The norm $\|\underline{H}\|$ has been defined for an anisotropic body by

$$\|\underline{H}\| = (H_i a_{ij} H_j)^{1/2}, \quad (3.5)$$

where a is the invertible non-negative matrix which accounts for possible anisotropy.

At a given time t the loading function yields the equation $f = 0$, and this provides a value of H_c by

$$H_c = \mp \left\| \underline{\tilde{H}} \right\|. \quad (3.6)$$

This defines specific values of the magnetic field intensity which may be called the magnetic coercive field. At time t , the line segment $(-H_c, H_c)$ defines a convex on the real line \mathbf{R} of magnetic field intensities. The normal to this convex is given by the unit vectors in the positive and negative directions at the right and left end points of this segment.

Taking into account the special form of the loading function given by Eq. (3.2), the hardening modulus h given by Eq. (2.23) can be rewritten in the form

$$h = 4H_c^2 \left\| \underline{\tilde{H}} \right\|^{-2} \cdot \left\{ \bar{\Sigma}_{il}^3 a_{ij} \tilde{H}_j Q_{lm} \bar{\Sigma}_{km}^1 a_{ks} \tilde{H}_s + \bar{\Sigma}_{il}^3 a_{ij} \tilde{H}_j \bar{Q}_{lm} \bar{\Sigma}_{km}^3 a_{ks} \tilde{H}_s \right\}, \quad (3.7)$$

where we have set

$$\bar{Q}_{ij} = \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial I_i \partial I_j}, \quad Q_{ij} = \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial I_i \partial M_j^R} \quad (3.8)$$

and

$$\bar{\Sigma}_{ij}^\alpha = \delta_{ij} - \lambda_{ijkl}^\alpha \sigma_{kl}; \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.9)$$

so that the multiplier λ given by (2.22), becomes

$$\lambda = 2H_c h^{-1} \left\| \underline{\tilde{H}} \right\|^{-1} \left\langle \pm \left\{ \bar{\Sigma}_{il}^1 \dot{H}_l^T - (\lambda_{istl}^1 H_l^T + \lambda_{istl}^2 H_l^R + \lambda_{istl}^3 H_l^m) \cdot \dot{\sigma}_{st} \right\} a_{ij} \tilde{H}_j \right\rangle. \quad (3.10)$$

Computing the right-hand sides of Eqs (2.16)_{1,2,3}, one obtains:

$$\dot{e}_{ij}^R = \mp 2 \lambda H_c \left\| \frac{\tilde{H}}{H} \right\|^{-1} \{ \lambda_{kijl}^1 H_l^T + \lambda_{kijl}^2 H_l^R + \lambda_{kijl}^3 H_l^m \} a_{kn} \tilde{H}_n, \quad (3.11)$$

$$\dot{M}_i^R = \pm 2 \lambda H_c \left\| \frac{\tilde{H}}{H} \right\|^{-1} \bar{\Sigma}_{ij}^1 a_{jl} \tilde{H}_l, \quad (3.12)$$

$$\dot{I}_i = \pm 2 \lambda H_c \left\| \frac{\tilde{H}}{H} \right\|^{-1} \bar{\Sigma}_{ij}^3 a_{jl} \tilde{H}_l. \quad (3.13)$$

To concretize the model developed in all the following sections, let us take for the internal variable \underline{I} a vector having the *physical dimension of magnetization* which may be defined as follows

$$\underline{I} = m \underline{i} = m \frac{\underline{H}}{\| \underline{H} \|}, \quad (3.14)$$

where \underline{i} is a unit vector in the direction of the magnetic field and m is given by Eq. (2.28)₂. That is, we relate \underline{I} to the volume of domains with orientation orthogonal to the macroscopic magnetization.

The free energy is therefore

$$\Psi = \Psi (e^r, \underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{I}, \theta). \quad (3.15)$$

We have used the following expansion for the free energy

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{2} C_{ijkl}(\underline{I}) e_{ij}^r e_{kl}^r + \frac{1}{2} \chi_{ij}^1(\underline{I}) M_i^r M_j^r + \frac{1}{2} \chi_{ij}^2(\underline{I}) M_i^R M_j^R \\ & + \frac{1}{2} \chi_{ij}^3(\underline{I}) I_i I_j + B_{ijkl}^1(\underline{I}) e_{ij}^r M_k^r M_l^r + B_{ijkl}^2(\underline{I}) e_{ij}^r M_k^R M_l^R \\ & + B_{ijkl}^3(\underline{I}) e_{ij}^r I_k I_l + B_{ijkl}^4(\underline{I}) e_{ij}^r M_k^r M_l^R + B_{ijkl}^5(\underline{I}) e_{ij}^r M_k^r I_l \\ & + B_{ijkl}^6(\underline{I}) e_{ij}^r M_k^R I_l + \chi_{ij}^4(\underline{I}) M_i^r M_j^R + \chi_{ij}^5(\underline{I}) M_i^r I_j + \chi_{ij}^6(\underline{I}) M_i^R I_j. \end{aligned} \quad (3.16)$$

For the sake of simplicity, we neglect the thermodynamic temperature θ in the expression of the free energy (3.16).

Accounting for the Eqs (2.9), Eq. (3.16) yields

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & C_{ijkl}^1(\underline{I}) e_{kl}^r + B_{ijkl}^1(\underline{I}) M_k^r M_l^r + B_{ijkl}^2(\underline{I}) M_k^R M_l^R \\ & + B_{ijkl}^3(\underline{I}) I_k I_l + B_{ijkl}^4(\underline{I}) M_k^r M_l^R + B_{ijkl}^5(\underline{I}) M_k^r I_l + B_{ijkl}^6(\underline{I}) M_k^R I_l, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} -H_i^L = & \chi_{ij}^1(\underline{I}) M_j^r + 2B_{ijkl}^1(\underline{I}) e_{jk}^r M_l^r + B_{ijkl}^4(\underline{I}) e_{jk}^r M_l^R \\ & + B_{ijkl}^5(\underline{I}) e_{jk}^r I_l + \chi_{ij}^4(\underline{I}) M_j^R + \chi_{ij}^5(\underline{I}) I_j, \end{aligned} \quad (3.18)$$

and

$$\begin{aligned}
 -H_i^R &= \chi_{ij}^2(I) M_j^R + 2B_{ijkl}^2(I) e_{jk}^r M_l^R + B_{ijkl}^4(I) e_{jk}^r M_l^r \\
 &+ B_{ijkl}^6(I) e_{jk}^r I_l + \chi_{ij}^4(I) M_j^r + \chi_{ij}^6(I) I_j.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Expanding the material coefficients of the studied ferromagnets and retaining only the linear terms in the independent variable \underline{I} we are left with the following constitutive equations

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= (C_{ijkl}^1 + C_{ijklt}^{11} I_t) e_{kl}^r + B_{ijkl}^5 M_k^r I_l + (B_{ijkl}^1 + B_{ijklt}^{11} I_t) M_k^r M_l^r \\
 &+ B_{ijkl}^6 M_k^r I_l + (B_{ijkl}^2 + B_{ijklt}^{21} I_t) M_k^R M_l^R + (B_{ijkl}^4 + B_{ijklt}^{41} I_t) M_k^r M_l^R,
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 -H_i^L &= (\chi_{ij}^1 + \chi_{ijk}^{11} I_k) M_j^r + B_{ijkl}^5 e_{jk}^r I_l + \chi_{ij}^5 I_j + (\chi_{ij}^4 + \chi_{ijk}^{41} I_k) M_j^R \\
 &+ 2(B_{ijkl}^1 + B_{ijklt}^{11} I_t) e_{jk}^r M_l^r + (B_{ijkl}^4 + B_{ijklt}^{41} I_t) e_{jk}^r M_l^R,
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 -H_i^R &= (\chi_{ij}^2 + \chi_{ijk}^{21} I_k) M_j^R + B_{ijkl}^6 e_{jk}^r I_l + \chi_{ij}^6 I_j + (\chi_{ij}^4 + \chi_{ijk}^{41} I_k) M_j^r \\
 &+ 2(B_{ijkl}^2 + B_{ijklt}^{21} I_t) e_{jk}^r M_l^R + (B_{ijkl}^4 + B_{ijklt}^{41} I_t) e_{jk}^r M_l^r
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

and for the vector \underline{H}^m we may assume the following linear form in the state variables

$$\begin{aligned}
 -H_i^m &= \chi_{ij}^3 I_j + 2B_{ijkl}^3 e_{jk}^r I_l + \chi_{ij}^5 M_j^r + B_{ijkl}^5 e_{jk}^r M_l^r \\
 &+ \chi_{ij}^6 M_j^R + B_{ijkl}^6 e_{jk}^r M_l^R.
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

As the constitutive Eqs (3.20)–(3.23) include tensors of odd rank, they are valid for material with no center of symmetry. These equations constitute a fully coupled, three-dimensional thermodynamical set of equations describing the magnetomechanical hysteresis effects of ferromagnets.

Carrying Eqs (3.20)–(3.23) into the definition of $\underline{\tilde{H}}$ given by equation (3.4), and retaining only the linear terms in the independent variable \underline{I} , we obtain

$$\underline{\tilde{H}} = \underline{\mathcal{J}} + \underline{\mathcal{L}}
 \tag{3.24}$$

with

$$\mathcal{J}_i = \{L_i^3 - L_i^5 - \lambda_{ijkl}^1 L_{jk}^1 (L_l^3 - L_l^5) - L_j^7 + \lambda_{ijkl}^2 L_{jk}^1 L_l^5 + \lambda_{ijkl}^3 L_{jk}^1 L_l^7\}
 \tag{3.25}$$

and

$$\mathcal{L}_i = \{L_{ik}^4 - L_{ik}^6 - L_{ik}^8 - \lambda_{ijnl}^1 L_{jn}^1 (L_{lk}^4 - L_{lk}^6) - \lambda_{ijtl}^1 L_{jtk}^2 (L_l^3 - L_l^5) + \lambda_{ijrl}^2 L_{jr}^1 L_{lk}^6 + \lambda_{ijtl}^2 L_{jtk}^2 L_l^6 + \lambda_{ijrl}^3 L_{jr}^1 L_{lk}^8 + \lambda_{ijtl}^3 L_{jtk}^2 L_l^7\} I_k, \tag{3.26}$$

where

$$L_{ij}^1 = C_{ijkl}^1 e_{kl}^r + B_{ijkl}^1 M_k^r M_l^r + B_{ijkl}^2 M_k^R M_l^R + B_{ijkl}^4 M_k^r M_l^R, \tag{3.27}$$

$$L_{ijk}^2 = C_{ijtlk}^{11} e_{tl}^r + B_{ijtlk}^{11} M_t^r M_l^r + B_{ijtlk}^{21} M_t^R M_l^R + B_{ijtlk}^{41} M_t^r M_l^R + B_{ijlk}^5 M_l^r + B_{ijlk}^6 M_l^R, \tag{3.28}$$

$$L_i^3 = \chi_{ij}^1 M_j^r + 2B_{ijkl}^1 e_{jk}^r M_l^r + B_{ijkl}^4 e_{jk}^r M_l^R + \chi_{ij}^4 M_j^R, \tag{3.29}$$

$$L_{ik}^4 = \chi_{ijk}^{11} M_j^r + \chi_{ik}^5 + 2B_{ijtlk}^{11} e_{jt}^r M_l^r + B_{ijtlk}^{41} e_{jt}^r M_l^R + \chi_{ijk}^{41} M_j^R + B_{ijlk}^5 e_{jl}^r, \tag{3.30}$$

$$L_i^5 = \chi_{ij}^2 M_j^R + 2B_{ijkl}^2 e_{jk}^r M_l^R + \chi_{ij}^4 M_j^r + B_{ijkl}^4 e_{jk}^r M_l^r, \tag{3.31}$$

$$L_{ik}^6 = \chi_{ijk}^{21} M_j^R + \chi_{ik}^6 + 2B_{ijtlk}^{21} e_{jt}^r M_l^R + B_{ijtlk}^{41} e_{jt}^r M_l^r + \chi_{ijk}^{41} M_j^r + B_{ijlk}^6 e_{jl}^r, \tag{3.32}$$

$$L_i^7 = \chi_{ij}^5 M_j^r + B_{ijkl}^5 e_{jk}^r M_l^r + B_{ijkl}^6 e_{jk}^r M_l^R + \chi_{ij}^6 M_j^R, \tag{3.33}$$

$$L_{ik}^8 = \chi_{ik}^3 + 2B_{ijlk}^3 e_{jl}^r. \tag{3.34}$$

Therefore, the norm $\|\tilde{H}\|$ becomes

$$\|\tilde{H}\| = (\|\mathcal{J}\| + 2(\mathcal{J}, \mathcal{L}) + \|\mathcal{L}\|)^{1/2}, \tag{3.35}$$

where $(\mathcal{J}, \mathcal{L})$ is the inner product of \mathcal{J} and \mathcal{L} with respect to the metric \underline{a} .

The multiplier λ may be determined by substituting Eqs (3.21)–(3.23), (2.13), (2.14) into the definition of λ given by the equation (3.10)

$$\lambda = 2H_c h^{-1} \|\tilde{H}\|^{-1} \langle \pm Z_i a_{ij} \tilde{H}_j \rangle, \tag{3.36}$$

where

$$Z_i = \bar{\Sigma}_{il}^1 \dot{H}_l^T - (\lambda_{i\alpha\beta l}^1 H_l^T + \lambda_{i\alpha\beta l}^2 H_l^R + \lambda_{i\alpha\beta l}^3 H_l^m) \cdot \dot{\sigma}_{\alpha\beta}, \tag{3.37}$$

while the magnetic hardening h given by the equation (3.7) becomes

$$h = 4H_c^2 \|\tilde{H}\|^{-2} \mathcal{A}_1, \tag{3.38}$$

where

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ \bar{\Sigma}_{i\alpha}^3 a_{ij} \tilde{H}_j Q_{\alpha\beta} \bar{\Sigma}_{k\beta}^1 a_{kl} \tilde{H}_l + \bar{\Sigma}_{i\alpha}^3 a_{ij} \tilde{H}_j \bar{Q}_{\alpha\beta} \bar{\Sigma}_{k\beta}^3 a_{kl} \tilde{H}_l \right\}. \tag{3.39}$$

In the Eqs (3.36)–(3.39), the vectors \underline{H}^T , \underline{H}^R , \underline{H}^m and the tensor $\underline{\sigma}$ are given by Eqs (3.20)–(3.23). Carrying Eqs (3.24)–(3.34), (3.36) and (3.38) into Eq. (3.13) one obtains

$$\dot{\underline{I}} = \pm \underline{\Pi}^{-1} (\underline{I} - \hat{\underline{I}}), \quad (3.40)$$

where

$$\underline{\Pi}^{-1} = \mathcal{A} \cdot \underline{a} \cdot \widehat{\underline{M}}, \quad (3.41)$$

$$\hat{\underline{I}} = -\widehat{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\mathcal{J}} \quad (3.42)$$

and

$$\underline{\mathcal{L}} = \widehat{\underline{M}} \cdot \underline{I} \quad (3.43)$$

$$\mathcal{A} = \frac{\langle \pm \underline{Z} \cdot \underline{a} \cdot \tilde{\underline{H}} \rangle}{\mathcal{A}_1}. \quad (3.44)$$

Equation (3.40) is the rate law governing the evolution with time of the vector \underline{I} ; it is clear that $\dot{\underline{I}} \rightarrow 0$ as the components of $\underline{\Pi}^{-1} \rightarrow 0$ and \underline{I} attains its equilibrium value \underline{I}_{eq} . The tensor $\underline{\Pi}^{-1}$ may be considered as a tensor of process-dependent reciprocal relaxation times. In view of Eqs (3.41), (3.42), Eq. (3.40) is a strongly non-linear evolution equation.

The sign in Eq. (3.40) refers to the branch of the hysteresis loop along which this equation is calculated.

The scalar m given by Eq. (3.14) can be determined by multiplying Eq. (3.40) scalarly by vector \underline{I} and integrating over the time interval ranging from the initial time to the actual instant :

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t [\underline{I} \cdot \underline{\Pi}^{-1} \cdot (\underline{I} - \hat{\underline{I}})] dt \right\}^{1/2} + m_0, \quad (3.45)$$

where m_0 is a scalar constant.

An equation governing the hysteresis effect and mechanical effect may be obtained by substituting Eqs (3.20)–(3.23) into Eqs (3.12) and (3.11) to get

$$\dot{\underline{M}}^R = \pm 4H_c^2 h^{-1} \|\tilde{\underline{H}}\|^{-2} \langle \pm \underline{Z} \cdot \underline{a} \cdot \tilde{\underline{H}} \rangle \cdot \{1 - \lambda^1 (\underline{L}^1 + \underline{L}^2 \cdot \underline{I})\} \cdot \underline{a} \cdot \tilde{\underline{H}} \quad (3.46)$$

and

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}}^R = & \mp 4H_c^2 h^{-1} \|\tilde{\underline{H}}\|^{-2} \langle \pm \underline{Z} \cdot \underline{a} \cdot \tilde{\underline{H}} \rangle \cdot \{ \lambda^1 (\underline{L}^3 - \underline{L}^5 + \underline{L}^4 \cdot \underline{I} - \underline{L}^6 \cdot \underline{I}) \\ & - \lambda^2 \cdot (\underline{L}^5 + \underline{L}^6 \cdot \underline{I}) - \lambda^3 \cdot (\underline{L}^7 + \underline{L}^8 \cdot \underline{I}) \}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

where the tensors $\underline{L}^1, \underline{L}^2, \underline{L}^4, \underline{L}^6, \underline{L}^8$ and the vectors $\underline{L}^3, \underline{L}^5$, and \underline{L}^7 are given by Eqs (3.27)–(3.34).

4. Time dependent rate law

Another rate-law of the internal variable of the viscosity-relaxation type can be derived through the dissipation function Π which is homogeneous of degree two in the fluxes by assuming the following dissipation potential

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{ijkl} \dot{e}_{ij}^R \dot{e}_{kl}^R + \mathcal{P}_{ij} \dot{M}_i^R \dot{M}_j^R + \mathcal{I}\mathcal{I}_{ij} \dot{I}_i \dot{I}_j \right), \quad (4.1)$$

where the material tensor coefficients \mathcal{G}_{ijkl} , \mathcal{P}_{ij} and $\mathcal{I}\mathcal{I}_{ij}$ are given by

$$\mathcal{G}_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \dot{e}_{ij}^R \partial \dot{e}_{kl}^R} = \mathcal{G}_{klij} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \dot{M}_i^R \partial \dot{M}_j^R} = \mathcal{P}_{ji} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{I}\mathcal{I}_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \dot{I}_i \partial \dot{I}_j} = \mathcal{I}\mathcal{I}_{ji}. \quad (4.4)$$

Taking into account the constitutive Eq. (2.15)₃ we may obtain

$$H_i^m = \mathcal{I}\mathcal{I}_{ij} \dot{I}_j \quad (4.5)$$

and consider the same condition so that we can assume the same form of H^m as given by Eq. (2.23). Therefore, Eq. (3.23) and (4.5) yield the following rate law governing the vector \underline{I}

$$\dot{\underline{I}} = \underline{\Pi}^{-1} \left(\underline{I} - \hat{\underline{I}} \right), \quad (4.6)$$

where

$$\underline{\Pi} = - \left(\underline{\chi}^3 + 2\underline{B}^3 \cdot \underline{e}^r \right)^{-1} \cdot \mathcal{I}\mathcal{I} \quad (4.7)$$

$$\hat{\underline{I}} = \left(\underline{\chi}^3 + 2\underline{B}^3 \cdot \underline{e}^r \right)^{-1} \cdot \left\{ \underline{\chi}^6 \cdot \underline{M}^R + \underline{\chi}^5 \cdot \underline{M}^r + \underline{B}^5 \cdot \underline{e}^r \cdot \underline{M}^r + \underline{B}^6 \cdot \underline{e}^r \cdot \underline{M}^R \right\}. \quad (4.8)$$

Equation (4.6) clearly shows that $\dot{\underline{I}} \rightarrow \underline{0}$ as the components of $\underline{\Pi}$ increase indefinitely and we get from Eq. (4.8)

$$\underline{I} \xrightarrow[\underline{\Pi} \rightarrow \infty]{} \underline{I}_{eq} = - \left(\underline{\chi}^3 + 2\underline{B} \cdot \underline{e}^r \right)^{-1} \cdot \left\{ \underline{\chi}^6 \cdot \underline{M}^R + \underline{\chi}^5 \cdot \underline{M}^r + \underline{B}^5 \cdot \underline{e}^r \cdot \underline{M}^r + \underline{B}^6 \cdot \underline{e}^r \cdot \underline{M}^R \right\}. \quad (4.9)$$

Equation (4.9) is equivalent to that of Chen [32–34]. Again, Eq. (4.6) is a nonlinear evolution equation since the tensor of reciprocal relaxation $\underline{\Pi}^{-1}$ depends on thermomagnetic processes. However it is certainly much more regular than (3.40)–(3.42), in the same way as viscoelasticity is a smooth behavior compared to plasticity.

An integral equation similar to Eq. (3.45) may be obtained by multiplying Eq. (4.6) scalarly by \underline{I} and integrating over the time interval

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t \left[\underline{I} \cdot \underline{\Pi}^{-1} \left(\underline{I} - \hat{\underline{I}} \right) \right] dt \right\}^{1/2} + m_0. \quad (4.10)$$

5. Comparison with Chen's model

To compare the present model for ferromagnets and that of Chen [32–34] for ferroelectrics, we envisage the following manipulation. Rewriting Eqs (2.15)₂ and (3.21)–(3.23) in the following form

$$\underline{H}^T = \mathfrak{S}_1 \left(\underline{\dot{M}}^R \right), \quad (5.1)$$

$$\underline{H}^L = \mathfrak{S}_2 \left(\underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{e}, \underline{I} \right), \quad (5.2)$$

$$\underline{H}^R = \mathfrak{S}_3 \left(\underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{e}, \underline{I} \right), \quad (5.3)$$

and

$$\underline{H}^m = \mathfrak{S}_4 \left(\underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{e}, \underline{I} \right), \quad (5.4)$$

and using the assumptions (2.7)₂, (2.13), (2.14) and (3.1) with the following definition of the magnetic induction \underline{B}

$$\underline{B} = \mu_0 \left(\underline{\hat{H}} + \underline{M} \right), \quad (5.5)$$

where μ_0 is the vacuum permeability. One may obtain

$$\begin{aligned} \underline{B} = \mu_0 \left\{ \mathfrak{S}_1 \left(\underline{\dot{M}}^R \right) + \mathfrak{S}_5 \left(\underline{\dot{M}}^R, \underline{e} \right) + \mathfrak{S}_6 \left(\underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{e}, \underline{I} \right) \right. \\ \left. + \mathfrak{S}_7 \left(\underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{e}, \underline{I} \right) + \underline{M}^r + \underline{M}^R \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

which can be rewritten as

$$\underline{B} = \mathfrak{S}_8 \left(\underline{\dot{M}}^R, \underline{I}, \underline{M}^r, \underline{M}^R, \underline{e} \right). \quad (5.7)$$

Due to the relaxation effects in these equations one cannot extract \underline{M}^R as a usual function. Rather one may obtain the following “functional” solution

$$\underline{M}^R = F_{t=-\infty}^{t=0} \left(\underline{H}, \underline{e}, \underline{M}^r, \underline{I} \right). \quad (5.8)$$

The same applies to \underline{M}^r which satisfies an evolution equation, so that formally we have

$$\underline{M}^r = R_{t=-\infty}^{t=0} \left(\underline{H}, \underline{e}, \underline{M}^R, \underline{I} \right). \quad (5.9)$$

By carrying equations (5.8) and (5.9) into the expression (5.7) and using the assumption (3.14) we obtain the following time functional magnetic induction

$$\underline{B}(t) = B_{s=-\infty}^{s=0} \left(\underline{H}(\tau), \underline{e}(\tau) \right), \quad (5.10)$$

where $\tau = t - s$.

With the appropriate identifications, this formulation can be considered as a generalization of Chen's model [32–34] (see also [38] for the electromechanical case).

6. Applications

To simplify the previous problem we consider in this section the simplest case, i.e., the case where an external magnetic field and a uniaxial stress are both applied along the x_1 direction (for example). In this case the internal variable \underline{I} is replaced by m and all vectors and tensors are constants.

6.1. Stress-induced magnetostriction

We shall investigate more fundamental aspects of the effect of domain structure on stress-strain behavior in the *demagnetized* state by thermodynamical considerations. The stress-induced magnetostriction occurs even in the absence of a magnetic field, and this causes a nonlinearity in the stress-strain curve, which explains the well-known ΔE effects and the ΔG effect [21, 28, 39].

We consider in this subsection the case of $H = 0$. The net magnetization is also nil, $M = 0$. We assume, however, that \dot{m} can be non-zero, which means that the stress can alter the domain structure keeping the demagnetized state. In such conditions, the loading function is given by

$$f = f(\sigma, H^m). \quad (6.1)$$

The evolution Eqs (2.16) now read

$$\dot{e}^R = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad \dot{m} = \lambda \frac{\partial f}{\partial H^m}. \quad (6.2)$$

The multiplier is given by

$$\lambda = \frac{Y(C)}{h} \left\langle \dot{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle, \quad (6.3)$$

where we have set

$$h = \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial m^2} \left(\frac{\partial f}{\partial H^m} \right)^2. \quad (6.4)$$

Under this condition, the expansion for the free energy (3.16) reduces to

$$\Psi = \frac{1}{2} C(m) e^r \cdot e^r + \frac{1}{2} \chi^3(m) m \cdot m + B^3(m) e^r \cdot m \cdot m, \quad (6.5)$$

so that Eqs (3.20)–(3.23) reduce to

$$\sigma = (C^1 + C^{11} m) e^r \quad (6.6)$$

and

$$-H^m = \chi^3 m + 2B^3 e^r \cdot m. \quad (6.7)$$

The Eqs (3.4) and (3.8) are now:

$$\tilde{H} = H^m - \lambda^3 \sigma H^m \quad (6.8)$$

and

$$Q = 0, \quad \bar{Q} \neq 0 \quad (6.9)$$

and Eqs (3.25)–(3.26) reduce to

$$\mathcal{J} = 0, \quad (6.10)$$

$$\mathcal{L} = \{(\chi^3 + 2B^3 e^r)(\lambda^3 C^1 e^r - 1)\} m. \quad (6.11)$$

Taking into account the last assumption, Eqs (3.40)–(3.44) become

$$\dot{m} = \pm \Pi^{-1} m \quad (6.12)$$

where

$$\Pi^{-1} = \mathcal{A}(\chi^3 + 2B^3 e^r)(\lambda^3 C^1 e^r - 1), \quad (6.13)$$

$$\mathcal{A} = \frac{\langle \mp \lambda^3 (1 - \lambda^3 \sigma) \dot{\sigma} \rangle}{\mathcal{A}_1^*} \quad (6.14)$$

and

$$\mathcal{A}_1^* = (1 - \lambda^3 \sigma)^4 (\chi^3 + 2B^3 e^r). \quad (6.15)$$

Using the relations (2.27), (2.28) and the result obtained by Motogi and Maugin in [28], the relation (3.45) becomes

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t (\Pi^{-1} m^2) dt \right\}^{1/2} + m_0 \quad (6.16)$$

where

$$m_0 = \mp \sqrt{2} \left\{ \int_0^\infty (\Pi^{-1} m^2) dt \right\}^{1/2} \quad (6.17)$$

if the magnetostriction constant and the uniaxial stress have the same sign, and

$$m_0 = \frac{M_s}{4} \mp \sqrt{2} \left\{ \int_0^\infty (\Pi^{-1} m^2) dt \right\}^{1/2} \quad (6.18)$$

if the magnetostriction constant and the uniaxial stress have opposite signs. The relation (3.47) is reduced to

$$\dot{e}^R = \pm \mathcal{A} \{ \lambda^3 (\chi^3 + 2B^3 e^r) m \}. \quad (6.19)$$

In the same manner the relations (4.6)–(4.10) become

$$\dot{m} = \Pi^{-1} m \quad (6.20)$$

$$\Pi = -(\chi^3 + 2B^3 e^r)^{-1} \mathcal{I}\mathcal{I} \quad (6.21)$$

$$m \xrightarrow[\Pi \rightarrow \infty]{} m_{\text{eq}} = 0 \quad (6.22)$$

and

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t \Pi^{-1} m \cdot m \, dt \right\}^{1/2} + m_0 \quad (6.23)$$

where m_0 is given by Eqs (6.17), (6.18).

6.2. Stress-induced magnetization

We consider a magnetizing process starting from the initial demagnetized state. The loading function $f^0(H^T, H^m)$ corresponds to the initial magnetization process. However, when the stress is not applied in the initial magnetizing process, the function f^0 can be regarded as the intersection of the surface $f = 0$ and the plane $\sigma = 0$, viz.,

$$f^0(H^T, H^m) = f(\sigma = 0, H^T, H^m). \quad (6.24)$$

Let us stop increasing the external magnetic field at H_1 . Keeping H_1 constant, we apply a uniaxial stress σ . In the following process (we call it the stressing process [28]), H does not change ($\dot{H} = 0$). However we can regard the loading function f for the following stressing process as a function of σ , H^T and H^m , viz.

$$f = f(\sigma, H^T, H^m) \quad (6.25)$$

with

$$\dot{H}^T = \dot{H}^R \quad (6.26)$$

i.e., H_1 intervenes as a fixed parameter.

Here, in the one-dimensional case, taking into account the fact that H_1 is a fixed parameter and the expression (6.26), the relations (3.20) and (3.38) become

$$\begin{aligned} (\chi^1 + \chi^{11}m) M^r + B^5 e^r m + \chi^5 m + 2(B^1 + B^{11}m) e^r M^r \\ + (B^4 + B^{41}m) e^r M^R + (\chi^4 + \chi^{41}m) M^R = \text{const} \end{aligned} \quad (6.27)$$

and

$$Z = \bar{\Sigma}^1 \dot{H}^R - (\lambda^1 H^T + \lambda^2 H^R + \lambda^3 H^m) \cdot \dot{\sigma}. \quad (6.28)$$

So that the expressions (3.40)–(3.44) become

$$\dot{m} = \pm \Pi^{-1} (m - \hat{m}) \quad (6.29)$$

where

$$\Pi^{-1} = \mathcal{A}\widehat{M}, \quad (6.30)$$

$$\widehat{m} = -\widehat{M}^{-1}\mathcal{J} \quad (6.31)$$

and

$$\mathcal{L} = \widehat{M}m, \quad (6.32)$$

$$\mathcal{A} = \frac{\langle \pm Z\tilde{H} \rangle}{A_1}. \quad (6.33)$$

The scalar m given by equation (3.45) can be rewritten as

$$m = \pm\sqrt{2} \left\{ \int_0^t \Pi^{-1}m(m - \widehat{m}) dt \right\}^{1/2} + m_0. \quad (6.34)$$

We can conclude that the transverse domain volume (v_{\perp}) decreases with tension and increases with compression in materials with positive magnetostriction constant and vice versa [28], so that, the constant m_0 is

$$m_0 = \mp\sqrt{2} \left\{ \int_0^{\infty} \Pi^{-1}m(m - \widehat{m}) dt \right\}^{1/2} \quad (6.35)$$

if the magnetostriction constant and the uniaxial stress have the same sign, and

$$m_0 = \frac{M_s}{4} \mp\sqrt{2} \left\{ \int_0^{\infty} \Pi^{-1}m(m - \widehat{m}) dt \right\}^{1/2} \quad (6.36)$$

if the magnetostriction constant and the uniaxial stress have opposite signs. In the same manner the relations (4.6)–(4.10) become

$$\dot{m} = \Pi^{-1}(m - \widehat{m}) \quad (6.37)$$

where

$$\Pi = -(\chi^3 + 2B^3e^r)^{-1}\mathcal{I}\mathcal{I}, \quad (6.38)$$

$$\widehat{m} = (\chi^3 + 2B^3e^r)^{-1} \{ \chi^6M^R + \chi^5M^r + B^5e^rM^r + B^6e^rM^R \}, \quad (6.39)$$

$$m \xrightarrow{\Pi \rightarrow \infty} m_{\text{eq}} = -(\chi^3 + 2Be^r)^{-1} \{ \chi^6M^R + \chi^5M^r + B^5e^rM^r + B^6e^rM^R \} \quad (6.40)$$

and

$$m = \pm\sqrt{2} \left\{ \int_0^t \Pi^{-1}m(m - \widehat{m}) dt \right\}^{1/2} + m_0 \quad (6.41)$$

where m_0 is given by Eqs (6.35) and (6.36).

6.3. Purely magnetic case

We consider in this subsection the case of $\sigma = 0$. The loading function is given by

$$f = f(H^T, H^m). \quad (6.42)$$

The evolution equations (2.16) now read

$$\dot{M}^R = \lambda \frac{\partial f}{\partial H^T}, \quad \dot{m} = \lambda \frac{\partial f}{\partial H^m}. \quad (6.43)$$

Under these conditions, the expansion for the free energy (3.16) reduces to

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{2} \chi^1(m) M^r M^r + \frac{1}{2} \chi^2(m) M^R M^R + \frac{1}{2} \chi^3(m) m m \\ & + \chi^4(m) M^r M^R + \chi^5(m) M^r m + \chi^6(m) M^R m, \end{aligned} \quad (6.44)$$

so that Eqs (3.20)–(3.23) reduce to

$$-H^L = (\chi^1 M^r + \chi^4 M^R) + (\chi^5 + \chi^{11} M^r + \chi^{41} M^R) m, \quad (6.45)$$

$$-H^R = (\chi^2 M^R + \chi^4 M^r) + (\chi^6 + \chi^{21} M^R + \chi^{41} M^r) m \quad (6.46)$$

and

$$-H^m = \chi^5 M^r + \chi^6 M^R + \chi^3 m. \quad (6.47)$$

Taking into account the last assumption, Eqs (3.40)–(3.44) become

$$\dot{m} = \pm \Pi^{-1} (m - \hat{m}), \quad (6.48)$$

$$\Pi^{-1} = \mathcal{A} \hat{M}, \quad (6.49)$$

$$\hat{m} = -\hat{M}^{-1} \mathcal{J}, \quad (6.50)$$

$$\mathcal{L} = \hat{M} m \quad (6.51)$$

and

$$\mathcal{A} = \frac{\langle \pm \tilde{H} \dot{H}^T \rangle}{\tilde{H} (Q + \bar{Q}) \tilde{H}}, \quad (6.52)$$

where

$$\mathcal{J} = \chi^1 M^r + \chi^4 M^R - \chi^2 M^R - \chi^4 M^r, \quad (6.53)$$

$$\mathcal{L} = (\chi^5 + \chi^{11} M^r + \chi^{41} M^R - \chi^{21} M^R - \chi^6 - \chi^{41} M^r) m \quad (6.54)$$

and Q, \bar{Q} are defined by Eq. (3.8). In this case, Eq. (3.12) reduces to

$$\dot{M}^R = \pm \mathcal{A} \cdot \tilde{H} = \pm \frac{1}{Q + \bar{Q}} \langle \pm \dot{H}^T \rangle. \quad (6.55)$$

We can remark here that

$$\dot{M}^R = \dot{m}. \quad (6.56)$$

Relation (3.45) becomes

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t m \Pi^{-1} (m - \hat{m}) dt \right\}^{1/2} + m_0 \quad (6.57)$$

where

$$m_0 = \mp \sqrt{2} \left\{ \int_0^\infty m \Pi^{-1} (m - \hat{m}) dt \right\}^{1/2}. \quad (6.58)$$

In both cases, the magnetostriction constant is either positive or negative.

In the same manner the relations (4.6)–(4.10) become

$$\dot{m} = \Pi^{-1} (m - \hat{m}), \quad (6.59)$$

$$\Pi = - (\chi^3)^{-1} \mathcal{I} \mathcal{I}, \quad (6.60)$$

$$\hat{m} = (\chi^3)^{-1} \{ \chi^6 M^R + \chi^5 M^r \}, \quad (6.61)$$

$$m \xrightarrow[\Pi \rightarrow \infty]{} m_{\text{eq}} = - (\chi^3)^{-1} \{ \chi^6 M^R + \chi^5 M^r \} \quad (6.62)$$

and

$$m = \pm \sqrt{2} \left\{ \int_0^t m \Pi^{-1} (m - \hat{m}) dt \right\}^{1/2} + m_0 \quad (6.63)$$

where m_0 is given by Eq. (6.58).

7. Conclusion

In the present work we have established an equivalent thermodynamical basis for Chen's theory. Two different rate-laws of the viscosity-relaxation type (time dependent phenomena) and of the "plastic" type (time independent phenomena) have been derived. We have shown how the transverse domain volume can be determined via an integro-differential equation. We have suggested a specification of the loading function. Numerical simulations and extension of the model to polycrystalline materials and quantitative comparisons with experimental data are our prospect.

Acknowledgement

The author thanks Professor G.A. Maugin for all his suggestions concerning this work. He would also like to express his thanks to him for all his patience and his advice.

References

- [1] R. Becker and M. Kersten, *Z. Phys.* **64** (1930), 660.
- [2] R. Becker and W. Döring, *Ferromagnetismus*, Springer-Verlag, Berlin, 1939.
- [3] L. Néel, *Cahiers de Phys. (Paris)* **12** (1942), 1.
- [4] L. Néel, *Cahiers de Phys. (Paris)* **13** (1943), 18.
- [5] J.W.F. Brown, *Phys. Rev.* **75** (1949), 147.
- [6] D.C. Jiles and D.L. Atherton, *J. Appl. Phys.* **55** (1983), 2115.
- [7] D.C. Jiles and D.L. Atherton, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **17** (1984), 1265.
- [8] M.J. Sablik and D.C. Jiles, *J. Appl. Phys.* **64** (1988), 5402.
- [9] M.J. Sablik, *Nondestructive Testing Eval.* **5** (1989), 49.
- [10] C.G. Gardner, G.A. Matzkanin and D.L. Davidson, *Nondestructive Testing* **3** (1971), 131.
- [11] R. Rautioaho, P. Karjalainen and M. Moilanen, *J. Magn. Mater.* **68** (1987), 314.
- [12] M. Sabir and M.A. Maugin, *Arch. Mechanics* **40** (1988), 829.
- [13] H. Kwun and C.M. Teller, *J. Appl. Phys.* **54** (1983), 4856.
- [14] S. Motogi and T. Fukuda, *Int. J. Electromag. Mat.* **1** (1990), 227.
- [15] S. Motogi and T. Fukuda, *Int. J. Electromag. Mat.* **3** (Suppl.) (1992), 339.
- [16] T. Yamasaki, *Nondestructive Stress Evaluation using Magnetoacoustic Coupling*, PhD Thesis, Osaka University, Osaka, 1992.
- [17] R.A. Langman, *IEEE Trans. Magn.* **MAG-21** (1985), 1314.
- [18] H. Kwun and G.L. Burkhardt, *J. Appl. Phys.* **61** (1987), 1576.
- [19] M. Le Floc'h and A. Globus, *J. Appl. Phys.* **61** (1987), 4850.
- [20] D.L. Atherton and V. Ton, *IEEE Trans. Magn.* **26** (1990), 1153.
- [21] S. Motogi and G.A. Maugin, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **26** (1993), 1459.
- [22] B.D. Cullity, *Introduction to Magnetic Materials*, Addison-Wesley, Reading, 1972.
- [23] L.T. Chernyi, in: *Macroscopic Theories of Matter and Fields*, L.I. Sedov, ed., Mir, Moscow, 1983, p. 116.
- [24] G.A. Maugin, M. Sabir and P. Chambon, in: *Electromagnetomechanical Interaction in Solids and Structures*, Y. Yamamoto and K. Miya, eds, North-Holland, Amsterdam, 1987, p. 255.
- [25] G.A. Maugin, in: *Applied Electromagnetics in Materials*, K. Miya, ed., Pergamon Press, Oxford, 1989, p. 5.
- [26] G.A. Maugin, in: *Non-Equilibrium Thermodynamics*, Vol. 7, S. Sieniutycz and D. Salamon, eds, Taylor and Francis, New York, 1991, p. 25.
- [27] G.A. Maugin and M. Sabir, *Int. J. Plasticity* **6** (1990), 573.
- [28] S. Motogi and G.A. Maugin, in: *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures*, AMD-Vol. 161, J.S. Lee, G.A. Maugin and Y. Shindo, eds, A.S.M.E., New York, 1993, p. 99.
- [29] P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Vol. 1, Masson, Paris, 1973.
- [30] G.A. Maugin, *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [31] G.A. Maugin, *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [32] P.J. Chen and P.S. Peercy, *Acta Mechanica* **31** (1979), 231.
- [33] P.J. Chen, *Int. J. Solids Structures* **16** (1980), 1059.
- [34] P.J. Chen, *Acta Mechanica* **48** (1983), 31.
- [35] G.A. Maugin and W. Muschik, *J. Non-Equil. Thermodynamics* **19** (1994), 217; 250.
- [36] J. Mandel, *Plasticité Classique et Viscoplasticité*, *CISM Lecture Notes*, Springer-Verlag, Vienna, Udine, 1971.
- [37] G.A. Maugin, *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.* **2** (1991), 7.
- [38] E. Bassiouny, A.F. Ghaleb and G.A. Maugin, *Int. J. Eng. Sci.* **27** (1989), 1297.
- [39] S. Motogi and T. Fukuda, in: *Mechanical Modelling of New Electromagnetic Materials*, R. Hsieh, ed., Elsevier, Amsterdam, 1990, p. 281.

Annexe 3



S0020-7462(96)00004-2

ON THE FRACTURE OF PARAMAGNETS AND SOFT FERROMAGNETS

M. Sabir* and G. A. Maugin†‡

* Faculté des Sciences (Semlalia), Département de Physique, B.P. S15, Marrakech, Morocco;

† Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de Modélisation en Mécanique (URA CNRS 229),
Tour 66, 4 place Jussieu, Case 162, 75252 Paris Cédex 05, France

(Received for publication 9 January 1996)

Abstract—Expressions of the energy-release rates are established on the basis of the rotationally invariant (finite-strain) quasi-magnetostatic theory of elastic paramagnets and soft ferromagnets for which neither magnetic ordering nor spin effects need to be introduced. The corresponding path-independent integrals useful in fracture studies are constructed and this is shown to yield essentially the same results as the canonical field-theoretic approach using the notions of *Eshelby stress* and *material forces*. A simple application to the antiplane crack problem of a magnetostrictive body in an axial bias magnetic field illustrates the use of the obtained expressions. The same notions could be used to study the so-called *magneto-plastic effect*. Copyright © 1996 Elsevier Science Ltd.

Keywords: fracture, magnetoelasticity, Eshelby stress

1. INTRODUCTION

In recent years a growing interest has developed in the theory of micro- and macro-defects in electromagnetic solids, cracks obviously belonging in the second class of defects. This is particularly true in the case of fracture problems in the electroelasticity of piezoelectrics and ceramics with the works of Parton [1] and others [2–9]—see also the proceedings of a conference [10]. These works essentially aim at establishing a criterion of progress of cracks in the presence of electromechanical couplings. In this context, the most useful concept from the engineering viewpoint is that of path-independent integral of which the celebrated *J*-integral of pure elastic fracture (e.g. see [11], chap. 7) is the most popular example.

In the context of magnetoelasticity, for the time being we only have works devoted to the estimate of the local behavior of fields of both mechanical and magnetic nature in the vicinity of singular points [12, 13]. The aim of the present work is to present the general formulation of energy-release rates and of the magnetoelastic path-independent *J*-integral within the framework of the magnetoelasticity of paramagnets and/or soft ferromagnets. This restriction means that the magnetic bodies considered are weakly magnetizable, and hysteresis and spin-ordering effects are not present. The generalization to this more involved case is carried out separately; it requires a much more elaborate framework [14, 15]. To achieve our aim we need a carefully established, rotationally-invariant theory of magnetoelasticity. This has been proposed by various authors in the 1960s and 1970s, and more recently. This is exposed at some length in research monographs, for example [16], and treatises [17]. For its convenience and suitability to our purpose, we shall follow the presentation given by Abd-Alla and Maugin [18], originally aimed at studies in non-linear magnetoacoustics. The interest in this formulation stems mainly from the fact that it resembles the electroelastic formulation of Dascalu and Maugin [7], so that we can benefit from the latter, if only by analogy. The magnetoelastic couplings of interest are magnetostriction, in its original form or biased piezomagnetism (linear coupling issued from a linearization of the magnetostrictive effect about a bias magnetic field), but the theory is so constructed that magnetoelastic couplings of any order are *a priori* taken into account. Although no dissipative phenomenon is accounted for, the theory presented accommodates

‡ Author to whom correspondence should be addressed.

magnetic non-linear constitutive equations. We note that magnetostriction finds a renewal of interest with the production of materials that present so-called giant magnetostriction (e.g. TERFENOL-D, see [19]). Elements of the theory of material forces and the Eshelby stress tensor in electromagnetic solids, which are useful for comparison purposes, can be found in [20–23], and chap. 8 of [24].

2. NOTATION

The general motion between a reference configuration K_R that is free of loads, strains, and fields, and the current configuration \mathcal{K}_t at time t , is represented by the following time-parametrized mapping of Euclidean space onto itself:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad \text{or} \quad X_i = \chi_i(X_K, t), \quad (1)$$

where x_i , $i = 1, 2, 3$, are Eulerian coordinates and the X_K , $K = 1, 2, 3$, are so-called material coordinates. The classical (physical) velocity field, velocity-gradient tensor, and rate-of-deformation tensor are defined by

$$\mathbf{v} = \partial\chi/\partial t|_{\mathbf{x}\text{fixed}} = (v_i; i = 1, 2, 3), \quad (\nabla\mathbf{v})_{ij} = v_{i,j}, \quad (2)$$

and ($T =$ transpose):

$$\mathbf{D} = (\nabla\mathbf{v})_s := \frac{1}{2}\{\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\}, \quad (3)$$

respectively. The usual material time derivative of any tensor field $A(\mathbf{X}, t)$ or $a(\mathbf{x}, t)$ is given by

$$\frac{d}{dt}A = \frac{\partial A}{\partial t}\Big|_{\mathbf{x}}, \quad \frac{d}{dt}a = \frac{\partial a}{\partial t}\Big|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)a. \quad (4)$$

The motion gradient, its inverse, and the Jacobian of the motion are defined by

$$\mathbf{F} = \nabla_R\chi = \{x_{i,k} = \partial\chi_i/\partial X_K\} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \nabla\chi^{-1} = \{X_{K,i} = \partial\chi_K^{-1}/\partial x_i\} \quad (6)$$

$$J_F = \det \mathbf{F}. \quad (7)$$

It is assumed that $J_F > 0$ always. Here $X_K = \chi_K^{-1}(x_i, t)$ is the so-called inverse motion. It is checked that \mathbf{F} and \mathbf{F}^{-1} satisfy the following relations:

$$x_{i,k} X_{K,j} = \delta_{ij}, \quad X_{K,i} x_{i,L} = \delta_{KL}. \quad (8)$$

Furthermore, simultaneously with \mathbf{F}^{-1} , one can also define from χ^{-1} the material velocity field

$$\mathbf{V} = \partial\chi^{-1}/\partial t|_{\mathbf{x}} = \{V_K; K = 1, 2, 3\}, \quad (9)$$

that is related to \mathbf{v} through the following obvious relations:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}. \quad (10)$$

The Green and Piola finite-strain tensors are given by

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (11)$$

3. GENERAL EQUATIONS

Here we gather in one place the necessary prerequisites for further developments. We consider the magnetoelasticity of paramagnets and soft ferromagnets in the quasi-static approximation. These equations can be found in [18]. In the absence of body forces of non-magnetic origin and currents, at each regular point \mathbf{X} in the material body we have the

following equilibrium and magnetostatic equations:

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \mathbf{f}^{\text{em}} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (14)$$

In addition we have the following definitions, decomposition and identities (\otimes is the tensor product):

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + {}^L B_{[i} M_{j]}, \quad \text{that is } \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} + ({}^L \mathbf{B} \otimes \mathbf{M})_{\Delta}, \quad (15)$$

$$\mathbf{B} + {}^L \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (17)$$

$$\mathbf{f}^{\text{em}} = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{M}, \quad \text{that is } f_i^{\text{em}} = B_{j,i} M_j = t_{ij,j}^{\text{em}}, \quad (18)$$

$$\mathbf{t}^{\text{em}} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - 2\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{1}. \quad (19)$$

In these equations, \mathbf{H} is the magnetic field, \mathbf{B} is the magnetic induction, \mathbf{M} is the magnetization per unit volume in the current configuration, and ${}^L \mathbf{B}$ is the so-called local magnetic induction. The Lorentz–Heaviside system of electromagnetic units is used. The second-order tensors \mathbf{t} , $\boldsymbol{\sigma}$ and \mathbf{t}^{em} are, respectively, the Cauchy stress tensor, the symmetric intrinsic-stress tensor that appears in a canonical decomposition of the Cauchy stress in a modelling of magnetomechanical interactions (see [16], p. 210), and the magnetostatic version of the electromagnetic stress tensor. The first and last of these in general are *not* symmetric in a general magnetizable body. On taking the skewsymmetric part of equations (15) and (19) and accounting for equations (16) and (17) and the fact that $\boldsymbol{\sigma}$ is symmetric, we obtain:

$$t_{[ij]} = {}^L B_{[i} M_{j]} = M_{[i} B_{j]} = M_{[i} H_{j]} = -t_{[ji]}^{\text{em}}. \quad (20)$$

For subsequent developments it proves to be more convenient to note the following transformations (parentheses around a set of indices indicate symmetrization):

$$t_{ji}^{\text{E}} := \sigma_{ji} + M_{(i} H_{j)} - \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 \delta_{ij} = t_{ij}^{\text{E}}. \quad (21)$$

Introducing then the symmetric stress tensor of the \mathbf{H} field, \mathbf{t}^{H} , and the total stress tensor $\boldsymbol{\tau}$ by:

$$\mathbf{t}^{\text{H}} = (\mathbf{t}^{\text{H}})^{\text{T}} = \{t_{ji}^{\text{H}} = H_j H_i - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \delta_{ji}\} \quad (22)$$

and

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\text{T}} = \mathbf{t} + \mathbf{t}^{\text{em}} = \bar{\mathbf{t}}^{\text{E}} + \mathbf{t}^{\text{H}}, \quad (23)$$

we have the following relations:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^{\text{E}} - \mathbf{M} \otimes \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 \mathbf{1}, \quad (24)$$

$$\mathbf{t}^{\text{em}} = \mathbf{t}^{\text{H}} + \mathbf{M} \otimes \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 \mathbf{1}, \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{t}}^{\text{E}} = \mathbf{t}^{\text{E}} + \mathbf{M}^2 \mathbf{1} = \bar{\mathbf{t}}^{\text{E}}. \quad (26)$$

On account of the identity (18) and of equation (12), the latter can be re-expressed as

$$\operatorname{div}(\mathbf{t} + \mathbf{t}^{\text{em}}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \operatorname{div}(\bar{\mathbf{t}}^{\text{E}} + \mathbf{t}^{\text{H}}) = \mathbf{0}. \quad (27)$$

It seems that we no longer have non-symmetric tensors involved in the theory if we use the two symmetric tensors $\bar{\mathbf{t}}^{\text{E}}$ and \mathbf{t}^{H} , the latter containing only the magnetic field \mathbf{H} . However, this is not exactly true, because in the original natural boundary condition associated with equation (12) is the Cauchy stress, which is *a priori* involved. Indeed, at the boundary $\partial \mathcal{B}$ of

the material body, we should satisfy the following set of conditions in the current configuration:

$$n_j t_{ji} = \mathbf{T}_i^d + \mathbf{T}_i^{\text{em}}, \quad (28)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}] = 0, \quad (29)$$

where the symbolism $[\dots]$ denotes the jump of the enclosed quantity at $\partial\mathcal{B}$, that is

$$[A] = A^+ - A^-, \quad (30)$$

where A^+ and A^- are the uniform limit values of the field A in approaching $\partial\mathcal{B}$ along its normal from the exterior and interior of \mathcal{B} , respectively. \mathbf{T}^d is an applied mechanical traction, and the magnetic surface force \mathbf{T}^{em} is given by

$$T_i^{\text{em}} = n_j [t_{ji}^{\text{em}}]. \quad (31)$$

On account of the above-introduced tensors, the boundary condition (28) can also be rewritten as

$$n \cdot [\boldsymbol{\tau}] + \mathbf{T}^d = \mathbf{0}, \quad (32)$$

when there is no matter outside of \mathcal{B} .

4. MATERIAL EQUATIONS

The way in which so-called material fields should be introduced crucially depends on the fact that we want equations (12)–(14) to take the same form, but in the reference configuration with \mathbf{X} and t as independent space–time variables. For the first equation this is easily realized by introducing the first Piola–Kirchhoff stress \mathbf{T} of components T_{Ki} by

$$\mathbf{T} = J_{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = J_{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}. \quad (33)$$

Noting the identities

$$\nabla_{\mathbf{R}} \cdot (J_{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \equiv \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (J_{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{F}) \equiv \mathbf{0}, \quad (34)$$

and setting

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = J_{\mathbf{F}} \mathbf{f}^{\text{em}}, \quad (35)$$

we can rewrite equation (12) as

$$\text{div}_{\mathbf{R}} \mathbf{T} + \mathbf{F}^{\text{em}} = \mathbf{0}, \quad \text{that is } T_{Kj,K} + F_j^{\text{em}} = 0. \quad (36)$$

Introducing the following material fields:

$$\hat{\mathbf{B}} = J_{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{M} = J_{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{M}, \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}, \quad \hat{\mathbf{H}} = J_{\mathbf{F}} \mathbf{C}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{H}}, \quad (38)$$

so that, reciprocally,

$$\mathbf{B} = J_{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{M} = J_{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (39)$$

we check that equation (17) transforms into the material form

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{M}}, \quad (40)$$

and Maxwell's equations (13) and (14) take on the following material form:

$$\nabla_{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0, \quad (41)$$

on account of the identity

$$J_F \varepsilon_{KLM} X_{M,k} = \varepsilon_{ijk} x_{i,K} x_{j,L} \quad (42)$$

From equation (41), there follows the existence of a (material) magnetostatic potential ϕ such that

$$\hat{\mathbf{H}} = -\nabla_R \phi \quad \text{or} \quad \hat{H}_K = -\phi_{,K} \quad (43)$$

Introducing now a magnetic first "Piola-Kirchhoff" tensor $\bar{\mathbf{T}}^{\text{em}}$ by

$$\mathbf{F}^{\text{em}} = \text{div}_R \bar{\mathbf{T}}^{\text{em}}, \quad \bar{\mathbf{T}}^{\text{em}} = J_F \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}^{\text{em}}, \quad (44)$$

equation (36) takes on the following two alternate forms:

$$\text{div}_R (\mathbf{T} + \bar{\mathbf{T}}^{\text{em}}) = \text{div}_R (\bar{\mathbf{T}}^{\text{E}} + \mathbf{T}^{\text{H}}) = \mathbf{0}, \quad (45)$$

if we additionally define $\bar{\mathbf{T}}^{\text{E}}$ and \mathbf{T}^{H} by

$$\bar{\mathbf{T}}^{\text{E}} = J_F \mathbf{F}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{\text{E}}, \quad \mathbf{T}^{\text{H}} = J_F \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}^{\text{H}}. \quad (46)$$

In particular, the last of these yields

$$\mathbf{T}^{\text{H}} = \hat{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-1} (\bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}). \quad (47)$$

For practical reasons we also introduce the second (symmetric) "elastic" Piola-Kirchhoff, or thermodynamic, stress $\bar{\mathbf{S}}^{\text{E}}$, a fully material tensor, by

$$\bar{\mathbf{S}}^{\text{E}} = \bar{\mathbf{T}}^{\text{E}} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}} = (\bar{\mathbf{S}}^{\text{E}})^{\text{T}}. \quad (48)$$

This denomination stems from the fact that the general constitutive equations in a non-dissipative magnetizable material in finite strains are given by the thermodynamical expressions, see [18]:

$$\bar{\mathbf{S}}^{\text{E}} = \partial \bar{\Sigma} / \partial \mathbb{E}, \quad \hat{\mathbf{M}} = -\partial \bar{\Sigma} / \partial \bar{\mathbf{H}}, \quad (49)$$

for a density of energy (temperature effects are discarded) per unit reference volume in the form

$$\Sigma = \bar{\Sigma}(\mathbb{E}, \bar{\mathbf{H}}) \quad (50)$$

for an anisotropic but materially homogeneous body. Here \mathbb{E} is the Lagrange finite strain defined by

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}_R). \quad (51)$$

Equations (49) follow from the "energy equation"

$$\frac{d}{dt} \Sigma = \bar{\mathbf{S}}^{\text{E}} : \dot{\mathbb{E}} - \hat{\mathbf{M}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}. \quad (52)$$

The above given set of equations can be complemented, at each regular material point, by the quasi-static version of the balance of so-called pseudo-momentum (material momentum—see [20] or [23] for this notion), simply obtained here by multiplying equation (45) on the left by \mathbf{F}^{T} , integrating by parts on account of equation (49), and rearranging terms:

$$\text{div}_R \mathbf{b}^{\text{H}} = \mathbf{0}. \quad (53)$$

This equation means that physically the material system is homogeneous, that is, its properties, here of the coupled magneto-elastic type, do not depend on the material point \mathbf{X} , while equation (52) means that the energy density does not depend explicitly on time t . Hence equations (53) and (52) are but space and time components of a four-dimensional conservation law (so-called energy-momentum). In equation (53), the Eshelby material stress \mathbf{b}^{H} is given by

$$\mathbf{b}^{\text{H}} = \Sigma \mathbf{1}_R - \bar{\mathbf{S}}^{\text{E}} \cdot \mathbf{C} + \hat{\mathbf{M}} \otimes \bar{\mathbf{H}} \quad (54)$$

or, in components,

$$b_{KL}^H = \Sigma \delta_{KL} - \bar{S}_{KP}^E C_{PL} + \hat{M}_K \bar{H}_L, \quad (55)$$

the material divergence in equation (53) being taken on the first index. In contradistinction to equation (36) or (45) whose components are still in \mathcal{X}_t , equation (53) is fully material. It does play a prominent role in fracture studies (see below). To prove equation (53) we simply need to notice the following partial results:

$$F_{jL} \bar{T}_{Kj}^E = C_{PL} \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial E_{KP}}, \quad (56)$$

$$\text{div}_R \mathbf{T}^H = -(\nabla_R \cdot \hat{\mathbf{M}}) \mathbf{H}, \quad (57)$$

$$\mathbf{F}^T \cdot \text{div}_R \mathbf{T}^H = -\text{div}_R (\hat{\mathbf{M}} \otimes \bar{\mathbf{H}}) + \hat{\mathbf{M}} \cdot \nabla_R \bar{\mathbf{H}}, \quad (58)$$

and

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial X_K} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial E_{PL}} C_{PL,K} + \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial \bar{H}_L} \bar{H}_{L,K}. \quad (59)$$

We then leave the checking of equation (53) to the reader.

5. ENERGY RELATIONS

In order to proceed further we need several expressions relating to the concept of energy. First, it can be remarked that equation (52) can also be written as

$$\frac{d}{dt} \Sigma = \bar{T}_{K,i}^E \dot{x}_{i,K} - \hat{M}_K \dot{H}_K. \quad (60)$$

One can also introduce the magnetic enthalpy W such that

$$W(\mathbb{E}, \bar{\mathbf{H}}) = \bar{\Sigma}(\mathbb{E}, \bar{\mathbf{H}}) - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}} = \Sigma(\mathbb{E}, \bar{\mathbf{H}}) - \frac{1}{2} J_F \bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{H}}, \quad (61)$$

from which it follows that

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{H}_K} = \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial \bar{H}_K} - J_F C_{KP}^{-1} \bar{H}_P = -\hat{M}_K - \hat{H}_K = -\hat{B}_K, \quad (62)$$

and, after some short computation,

$$\frac{\partial W}{\partial E_{KL}} = \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial E_{KL}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial E_{KL}} (J_F C_{PQ}^{-1}) \bar{H}_P \bar{H}_Q = \bar{S}_{KL}^E + T_{Kj}^H X_{L,j}. \quad (63)$$

The energy equation (60) is equivalent to

$$\frac{d}{dt} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}} \right) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{H}}} = \bar{T}_{Ki}^E v_{i,K} + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{H}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{H}}} - \dot{\hat{\mathbf{H}}} \cdot \bar{\mathbf{H}}). \quad (64)$$

The first term in the right-hand side can be rewritten with the aid of the equilibrium equation (45) as:

$$\bar{T}_{Ki}^E v_{i,K} = [(\bar{T}_{Ki}^E + T_{Ki}^H) v_{K,i}] - T_{Ki}^H v_{i,K}. \quad (65)$$

We readily check the following results:

$$\hat{\mathbf{H}} \cdot \nabla_R \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} J_F^{-1} \hat{\mathbf{H}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{C}}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{H}}, \quad (66)$$

$$(\bar{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{H}}) \mathbf{F}^{-1} \cdot (\nabla_R \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{H}}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} J_F^{-1} \hat{\mathbf{H}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{C}}{dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{H}}. \quad (67)$$

On account of equations (47), (66) and (67), we obtain the identity:

$$T_{K_i v_{i,K}}^H = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{H}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{H}}} - \dot{\hat{\mathbf{H}}} \cdot \hat{\mathbf{H}}). \quad (68)$$

Combining this with equation (64) finally results in a new form of the local energy equation as

$$\frac{dW}{dt} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{H}}} = \nabla_{\mathbf{R}} \cdot [(\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v}] \quad (69)$$

or, using the representation of equation (43), the true conservation law:

$$\frac{dW}{dt} - \nabla_{\mathbf{R}} \cdot [(\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{B}}] = 0. \quad (70)$$

This is a most convenient form for fracture studies in magnetoelasticity. A less convenient, but physically interesting, form is obtained thus. From equation (68) we note that

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{H}} \right) = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{T}^H \cdot \mathbf{v} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{H}}) + R, \quad (71)$$

where the remainder R is defined by

$$R = \mathbf{v} \cdot (\text{div}_{\mathbf{R}} \mathbf{T}^H) + \dot{\phi} (\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{H}}). \quad (72)$$

Then equation (70) transforms to

$$\frac{d}{dt} \Sigma = \nabla_{\mathbf{R}} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{v} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{M}}) + R. \quad (73)$$

If we further introduce the magnetostatic potential, in the current configuration, by (cf. [25] in the electric case):

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \phi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \quad (74)$$

and take equation (57) into account, we have the energy equation with the source term R given by

$$R = -(\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{M}}) \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (75)$$

where $\partial/\partial t$ here is the partial time derivative in the Eulerian description. The formulation (75) emphasizes the role of magnetic charge played by the divergence of the magnetization (here expressed in the material framework)—a point of view that is expressed by Landau and Lifshitz ([26], chap. 5).

6. ENERGY-RELEASE RATES

In the purely mechanical case of an elastic body containing a crack the energy-release rate associated with the quasi-static propagation of a crack was given by many authors (Cherepanov, Rice, Gurtin, Nguyen Quoc Son; see chap. 7 in [11]). In this section we give two extensions of that quantity to the case of magnetoelastic materials. To that purpose we consider a two-dimensional body \mathcal{B} which we identify with the plane domain it occupies in the reference configuration and we choose a three-dimensional coordinate system X_K so that \mathcal{B} lies in the plane $X_3 = 0$. We do not exclude the antiplane deformation of \mathcal{B} and for that we use three-dimensional vectors and tensors that depend only on the space (material) variables X_1 and X_2 . The regular domain \mathcal{B} is supposed to contain a crack that is represented by a smooth non-self-intersecting curve $\mathcal{C}(t)$ parametrized by the time t , and starting from a boundary point of \mathcal{B} (see Fig. 1). The set of crack points will be denoted by $\mathcal{C}(t)$ and the velocity of the tip by $\bar{\mathbf{V}}$ (this is a material velocity).

We assume that equations (41) and (45), and the complementing constitutive equations hold at all points $\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}(t)$ which are supposed to be regular so that we can use, at these material points, the identities established in the preceding sections. Let $\mathcal{D}_r(t)$ be a disk of

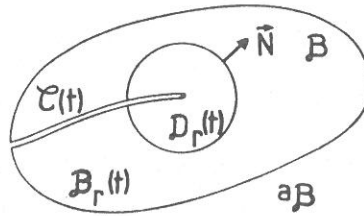


Fig. 1. Computing the energy-release rate.

radius r centered in the tip of the crack and $B_r(t) = B \setminus D_r(t)$. If $\mathcal{S}(t)$ is the boundary of $B \setminus C(t)$, comprising the two faces of the crack, then $\mathcal{S}_r(t)$ will be the part of the boundary of $B_r(t)$ complementary to $\partial D_r(t)$.

In every point of B_r , we have the energy relation (70), so that using the divergence theorem we obtain

$$\int_{B_r} \dot{W} dA = \int_{\mathcal{S}_r} \mathbf{N} \cdot \{(\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{B}} \dot{\phi}\} dS - \int_{\partial D_r} \mathbf{N} \cdot \{(\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{B}} \dot{\phi}\} dS, \quad (76)$$

where \mathbf{N} is the outward unit normal to \mathcal{S}_r , except at ∂D_r , where it is oriented to the boundary of B . The left-hand side of equation (76) can be evaluated with the help of the transport theorem, for example [27]:

$$\int_{B_r} \dot{W} dA = \frac{d}{dt} \int_{B_r} W dA + \int_{\partial D_r} W (\mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{V}}) dS. \quad (77)$$

Substituting from equation (77) into (76) and assuming that the integrals in the obtained expression converge when r approaches zero, we get the following global energy balance for the cracked body:

$$\frac{d}{dt} \int_B W dA + \mathcal{G} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{N} \cdot \{(\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{B}} \dot{\phi}\} dS, \quad (78)$$

where we have defined the energy-release rate $\mathcal{G}(t)$ by

$$\mathcal{G}(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial D_r} \mathbf{N} \cdot \{W \bar{\mathbf{V}} + (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{B}} \dot{\phi}\} dS. \quad (79)$$

The various terms in the integrand can be interpreted as follows. The first one is the flux of magnetic enthalpy due to the transport of material through ∂D_r , (which is moving with the crack tip), and the other terms represent the work done by the material outside of \mathcal{S}_r on the material inside, including the full contribution of coupled and magnetic fields. That is, \mathcal{G} involves the general contribution of mechanical and magnetic fields to crack propagation.

By performing similar calculations, but starting with the energy identity (73) valid at all regular points, we shall obtain another global energy balance for the cracked body B as:

$$\frac{d}{dt} \int_B \Sigma dA + \mathcal{G}^* = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{N} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{M}} \dot{\phi}) dS + \int_B R dA, \quad (80)$$

with the definition

$$\mathcal{G}^*(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial D_r} \mathbf{N} \cdot (\Sigma \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{M}} \dot{\phi}) dS \quad (81)$$

and R is given by equation (75). An analogous interpretation holds good for the integral in equation (81), but observing that the contribution of the magnetic field \mathbf{H} is not involved in \mathcal{G}^* . The price we have to pay for this is the "source" term present in the right-hand side of equation (80). That is, \mathcal{G}^* is the rate of mechanical and magnetization energy of coupled

fields absorbed by the crack tip during the crack-propagation process. Note that in order to obtain equation (80) we assume that the integrals in that relation are convergent. If $R = 0$, then the above computation holds true without reservation. If, furthermore, we examine equation (75) and observe that $\partial\phi/\partial t$ cannot vanish while the crack propagates, then for $R = 0$ we are led to the constraint

$$\nabla_R \cdot \hat{\mathbf{M}} = 0, \tag{82}$$

as a sufficient condition for having equation (80). The condition (82) is realized in several magnetic structures (cf. [26], chap. 5).

7. PATH-INDEPENDENT INTEGRALS

In this section we express \mathcal{G} and \mathcal{G}^* as contour integrals independent of the integration path, which proves to be extremely useful in practical computations. Let $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ be the displacement field such that

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + (\nabla_R \mathbf{u})^T. \tag{83}$$

Suppose that both \mathbf{u} and the magnetostatic potential ϕ have a regular time behavior as observed from the crack tip. This assumption allows us to write (cf. [28, 29]):

$$\dot{\mathbf{u}} = -\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla_R \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \dot{\phi} = -\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla_R \phi + h, \tag{84}$$

where h and the components of \mathbf{w} have no singular behavior at the crack tip. In other words, asymptotically as r goes to zero, we have

$$\delta \mathbf{u} / \delta t = \mathbf{0}, \quad \delta \phi / \delta t = 0 \tag{85}$$

where $\delta/\delta t$ denotes the time derivative in following the motion of the crack tip. Then, if the terms in \mathcal{G} containing \mathbf{w} and h vanish for r tending to zero, we can perform the following transformation:

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{Q}_r} \mathbf{N} \cdot \{(\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{B}} \dot{\phi}\} dS \\ &= - \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{V}} \cdot \int_{\partial \mathcal{Q}_r} [\mathbf{N} \cdot \{(\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot (\nabla_R \mathbf{u})^T + \hat{\mathbf{B}} \otimes \nabla_R \phi\}] dS, \end{aligned}$$

so that the energy-release rate \mathcal{G} takes on the following form:

$$\mathcal{G}(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{V}} \cdot \mathcal{F}(r), \tag{86}$$

where the global material force $\mathcal{F}(r)$ is defined by

$$\mathcal{F}(r) := \int_{\partial \mathcal{Q}_r} \mathbf{N} \cdot \{W \mathbf{1}_R - (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot (\nabla_R \mathbf{u})^T - \hat{\mathbf{B}} \otimes \nabla_R \phi\} dS. \tag{87}$$

The same technique applied to \mathcal{G}^* yields

$$\mathcal{G}^*(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{V}} \cdot \mathcal{F}^*(r) \tag{88}$$

with

$$\mathcal{F}^*(r) := \int_{\partial \mathcal{Q}_r} \mathbf{N} \cdot \{\Sigma \mathbf{1}_R - \bar{\mathbf{T}}^E \cdot (\nabla_R \mathbf{u})^T - \hat{\mathbf{M}} \otimes \nabla_R \phi\} dS. \tag{89}$$

In this relation we can replace $(\nabla_R \mathbf{u})^T$ by \mathbf{F} without loss of generality, if the following assumption holds true:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{Q}_r} \mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{T}}^E dS = \mathbf{0}. \tag{90}$$

This is true according to the local study of the behavior of magneto-mechanical fields in the vicinity of the crack tip for which it was shown (cf. [12, 13])[†] that the stress components and the fields behave like $r^{-1/2}$. Thus, the definition (89) can be replaced by

$$\mathcal{F}^*(r) := \int_{\partial\mathcal{U}_r} \mathbf{N} \cdot \mathbf{b}^H dS, \quad (91)$$

where \mathbf{b}^H is the Eshelby stress tensor defined by [compare with equation (55)]:

$$\mathbf{b}^H = \Sigma \mathbf{I}_R - \bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{F} + \hat{\mathbf{M}} \otimes \bar{\mathbf{H}} = \Sigma \mathbf{I}_R - \bar{\mathbf{S}}^E \cdot \mathbf{C} + \hat{\mathbf{M}} \otimes \bar{\mathbf{H}}. \quad (92)$$

In a like manner, we can rewrite $\mathcal{F}(r)$ as

$$\mathcal{F}(r) = \int_{\partial\mathcal{U}_r} \mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{b}}^H dS, \quad (93)$$

with an Eshelby stress $\bar{\mathbf{b}}^H$ defined by

$$\bar{\mathbf{b}}^H = W \mathbf{I}_R - (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{F} + \hat{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{H}}. \quad (94)$$

At this point we restrict our analysis to the case of a straight-through crack. For simplicity we assume that the coordinate system is such that the crack lies along the OX_1 -axis. In this case $\bar{\mathbf{V}} = \dot{l}(t) \mathbf{E}_1$, where \mathbf{E}_1 is the unit vector oriented along the positive direction of the X_1 -axis (Fig. 2). Consider then a piecewise smooth non-self-intersecting path Γ which begins and ends on the crack and surrounds the tip. We can set

$$J(\Gamma) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathcal{F}(\Gamma), \quad J^*(\Gamma) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathcal{F}^*(\Gamma). \quad (95)$$

For instance,

$$J(\Gamma) = \int_{\Gamma} \{W N_1 - \mathbf{N} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H) \cdot \mathbf{u}_{,1} - (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N}) \phi_{,1}\} d\Gamma \quad (96)$$

and

$$J^*(\Gamma) = \int_{\Gamma} \{\Sigma N_1 - \mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{T}}^E \cdot \mathbf{u}_{,1} - (\hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{N}) \phi_{,1}\} d\Gamma, \quad (97)$$

where $N_1 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_1$, so that we can rewrite \mathcal{G} and \mathcal{G}^* as

$$\mathcal{G} = J(\Gamma) \dot{l}, \quad \mathcal{G}^* = J^*(\Gamma) \dot{l}. \quad (98)$$

However, the integrals introduced in the definitions (91) and (93) or (97) and (96) are contour independent if the following conditions are fulfilled along the faces \pm of the straight crack $\mathcal{C}(t)$:

$$\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{B}}^\pm = 0, \quad \mathbf{N} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E + \mathbf{T}^H)^\pm = \mathbf{0} \quad (99)$$

for the first integral, and

$$\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{M}}^\pm = 0, \quad \mathbf{N} \cdot (\bar{\mathbf{T}}^E)^\pm = \mathbf{0} \quad (100)$$

for the second. Conditions (99) are natural on account of the usual boundary conditions (32) and (29b) transcribed in the material framework, with no traction applied. Conditions (99) are more drastic in that $\bar{\mathbf{T}}^E$ is not the totality of the Piola-Kirchhoff stress associated with the Cauchy stress, while condition (99a) is automatically satisfied if the body is magnetized parallel to the X_1 -axis, or "closure" magnetic domains exist along the crack faces as demonstrated by Landau and Lifshitz ([26], Section 44).

Finally, it must be remarked that the energy-release rates can also be rewritten as the power expended by the global material forces \mathcal{F} or \mathcal{F}^* in a quasi-stationary motion of the

[†] The fact that Shindo uses a slightly different model of magneto-mechanical interactions does not modify this conclusion.

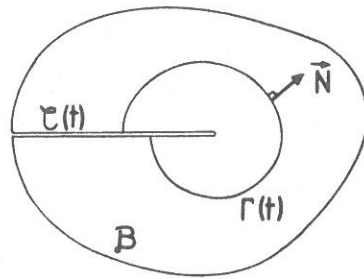


Fig. 2. Mode III crack in magnetoelasticity.

crack tip at material velocity \bar{V} . That is [compare with equations (98)]:

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} \cdot \bar{V}, \quad \mathcal{G}^* = \mathcal{F}^* \cdot \bar{V}. \tag{101}$$

These quantities have to be non-negative as the progress of the crack, if any, is thought to be irreversible. Thus, we in fact have to write the inequalities

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} \cdot \bar{V} \geq 0, \quad \mathcal{G}^* = \mathcal{F}^* \cdot \bar{V} \geq 0. \tag{102}$$

The obvious problem here is that it is possible to construct two different criteria of crack propagation as we have two different expressions of energy-release rates, with two different global thermodynamical forces \mathcal{F} and \mathcal{F}^* . To select one of these as the most appropriate one, we must analyse the physical implications of each of them and, as in the electroelastic case where such an alternative existed already (cf. [7–9]), construct a model problem that allows one to do this selection in a sensible way. For the time being we simply note that a third form has been given in previous works where the expression of material forces such as \mathcal{F} or J was derived in a field-theoretic framework (on the basis of a variational principle and the use of Noether’s theorem). This is a form that considers the fields \mathbf{B} and \mathbf{M} as dual thermodynamical entities [20–23]. In that model, the same conditions as those in equation (99a) need be enforced along the faces of the crack, but $\phi_{,1}$ is replaced by the M_1 component of the magnetization, the latter generally not being derivable from a potential. The vanishing of M_1 on the \pm faces of the crack is the condition (100a)—see comments following equations (100)—so that this last model partakes of the two models so far exhibited in the present paper.

8. AN APPLICATION

For the sake of illustration we consider mode III fracture of an isotropic magnetostrictive solid placed in a bias static magnetic field \mathbf{H}° of intensity H° whose direction is parallel to the normal to Fig. 2, that is, $\mathbf{H}^\circ = H^\circ \mathbf{E}_3$. The relevant boundary-value problem greatly simplifies for the case of an antiplane crack for which only the out-of-plane displacement is non-zero, while the small induced magnetic field \mathbf{h} is parallel to the plane of the figure. Thus we have

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u(X_1, X_2), \tag{103}$$

$$h_1 = h_1(X_1, X_2), \quad h_2 = h_2(X_1, X_2), \quad h_3 = 0. \tag{104}$$

The relevant constitutive equations are read off the Appendix, equations (A26)–(A29):

$$\begin{aligned} \bar{T}_{13}^E &= \mu u_{,1} + bH^\circ h_1, \\ \bar{T}_{31}^E &= \mu u_{,1} + (b + 2\chi^2)H^\circ h_1, \\ \bar{T}_{23}^E &= \mu u_{,2} + bH^\circ h_2, \\ \bar{T}_{32}^E &= \mu u_{,2} + (b + 2\chi^2)H^\circ h_2; \end{aligned} \tag{105}$$

$$T_{13}^H = T_{31}^H = H^\circ h_1, \quad T_{23}^H = T_{32}^H = H^\circ h_2, \quad (106)$$

$$\hat{M}_1 = \chi h_1 - bH^\circ u_{3,1}, \quad \hat{M}_2 = \chi h_2 - bH^\circ u_{3,2},$$

$$\hat{H}_1 = h_1 - H^\circ u_{3,1}, \quad \hat{H}_2 = h_2 - H^\circ u_{3,2}. \quad (107)$$

Introducing the magnetic scalar potential ϕ by equation (43), the governing equations (45b) and (41b) reduce to the following system of two coupled linear equations:

$$\begin{aligned} \mu \Delta u - \bar{b} H^\circ \Delta \phi &= 0, \\ \bar{b} H^\circ \Delta u + \varepsilon \Delta \phi &= 0, \end{aligned} \quad (108)$$

where $\bar{b} = 1 + b$ and $\varepsilon = 1 + \chi$, and Δ denotes the two-dimensional Laplacian operator. If the material constants of the ferromagnet are such that

$$\mu \varepsilon + \bar{b}^2 (H^\circ)^2 \neq 0, \quad (109)$$

then both u and ϕ must be harmonic functions. The boundary conditions (99) to be imposed along the faces of the crack \mathcal{C} are easily shown to read:

$$\begin{aligned} \bar{b} H^\circ u_{,2} + \varepsilon \phi_{,2} &= 0, \\ \mu u_{,2} - \bar{b} H^\circ \phi_{,2} &= 0. \end{aligned} \quad (110)$$

The relation (108) shows that these are equivalent to vanishing Neumann conditions for ϕ and u along the crack. In this case the singular part of the solution in the neighborhood of the crack is given by (singularity of the Laplacian; cf. [31]):

$$u = A\sqrt{r} \sin(\theta/2), \quad \phi = -B\sqrt{r} \sin(\theta/2), \quad (111)$$

where (r, θ) are polar coordinates centered at the tip of the crack and the coefficients A and B are to be determined by the geometry of the body and the boundary conditions applied to it. If we introduce the magnetic-field intensity factor K^H and the strain-intensity factor K^S by

$$K^H = \sqrt{\pi B/\sqrt{2}}, \quad K^S = \sqrt{\pi A/\sqrt{2}}, \quad (112)$$

then from equation (112), in the neighborhood of the crack tip, we obtain:

$$h_1 = -\frac{K^H}{\sqrt{(2\pi r)}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad h_2 = \frac{K^H}{\sqrt{(2\pi r)}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (113)$$

and

$$u_{,1} = -\frac{K^S}{\sqrt{(2\pi r)}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad u_{,2} = \frac{K^S}{\sqrt{(2\pi r)}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (114)$$

the other fields being given by equations (105)–(107). The obtained asymptotic expression for the magnetization \hat{M} shows that relation (82) is verified. The singularity orders obtained are obviously the same as those obtained by Shindo [12, 13] and Asanyan *et al.* [32], in spite of the differing modeling of magnetomechanical interactions and other types of mathematical approaches.

Finally, by evaluating the J and J^* we can now relate the energy rates \mathcal{G} and \mathcal{G}^* to the strain and magnetic-field intensity factors. For J and J^* we thus obtain the following formulas:

$$J = \frac{1}{2} \{ \mu (K^S)^2 - \varepsilon (K^H)^2 \} + \bar{b} H^\circ K^H K^S \quad (115)$$

and

$$J^* = \frac{1}{2} \{ \mu (K^S)^2 - \chi (K^H)^2 \} + b H^\circ K^H K^S, \quad (116)$$

so that their difference is

$$\Delta J = J - J^* = -\frac{1}{2}(K^H)^2 + H^0 K^H K^S. \quad (117)$$

If the bias magnetic field is switched off, then the last contribution in equation (117) vanishes and ΔJ , a negative quantity, is due solely to the induced magnetic field:

$$\Delta J = -\frac{1}{2}(K^H)^2. \quad (118)$$

This is tantamount to saying that the magnetic field has a negative contribution to the energy-release rate, so that its presence is beneficial from the point of view of fracture toughness. From that viewpoint the J -integral, noted J , provides a lower estimate of the actual fracture toughness than the J^* -integral, when a criterion is applied to decide on whether the crack will progress further.

9. CONCLUSIONS

An analysis of the magnetic-field contribution and the related magnetostrictive coupling to the quasi-static propagation of a straight-through crack in a soft ferromagnet has been presented after having proposed expressions of the corresponding energy-release rate. This was illustrated by the results of equations (115)–(118). In order to assess more fully the respective roles of the two J -integrals obtained, an analysis of the same type as that proposed by Dascalu and Maugin [9] in electroelasticity should be carried out. This is outside the scope of the present paper.

On a different level we should note that the present work in fact considers one type of so-called material forces, the configurational forces in equations (91) and (94), which provide one example of the possible action of magnetic fields on the progress of a macro-defect, a macroscopic crack. At a different scale of observation, it is remarked, under the magneto-plastic effect [33, 34], that an applied magnetic field indeed acts as a driving force for dislocations. Therefore, it is legitimate to ask whether a relationship of this type exists. This would indeed be a kind of a magnetic Peach–Koehler force—see equation (8.125) in [24]. Finally, we mention that the case of the fracture of hard ferromagnets involving ferromagnetic exchange forces and magnetic-spin inertia is dealt with elsewhere [14, 15].

Acknowledgement—The first author thanks the LMM for the pleasant and fruitful environment provided during his visit at UPMC (June–July 1994).

REFERENCES

1. V. Z. Parton, Fracture mechanics of piezoelectric crystals. *Acta Astron.* **3**, 671–683 (1976).
2. Y. E. Pack and G. Herrmann, Crack extension force in elastic dielectrics. *Int. J. Engng Sci.* **24**, 1375–1388 (1986).
3. R. M. McMeeking, A J -integral for the analysis of electrically-induced mechanical stress at cracks in elastic dielectrics. *Int. J. Engng Sci.* **28**, 605–613 (1991).
4. H. Sosa, On the fracture mechanics of piezoelectric solids. *Int. J. Solids Structures* **29**, 2613–2622 (1992).
5. Z. Suo, C.-M. Kuo, D. M. Barnett and J. R. Willis, Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *J. Mech. Phys. Solids* **40**, 739–765 (1992).
6. G. A. Maugin and M. Epstein, The electroelastic energy-momentum tensor. *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A433**, 299–312 (1991).
7. C. Dascalu and G. A. Maugin, Energy-release rates and path-independent integrals in electrostatic crack propagation. *Int. J. Engng Sci.* **32**, 755–765 (1994).
8. C. Dascalu and G. A. Maugin, On the dynamical fracture of piezoelectric materials. *Quart. J. Mech. Appl. Mat.* **48**, 237–255 (1995).
9. C. Dascalu and G. A. Maugin, On the energy of electrostatic fracture. *Zeit. angew. Math. Phys.* **46**, 355–365 (1995).
10. J. S. Lee, G. A. Maugin and Y. Shindo (eds), *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures*, AMD-Vol. 161 and MD-Vol. 42. The American Society of Mechanical Engineers, New York (1993).
11. G. A. Maugin, *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, U.K. (1992).
12. Y. Shindo, The linear magnetoelastic problem for a soft ferromagnetic elastic solid with a finite crack. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* **44**, 47–50 (1977).
13. Y. Shindo, Magnetoelastic interaction of a soft ferromagnetic elastic solid with a penny-shaped crack in a constant axial magnetic field. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **45**, 291–296 (1978).
14. A. Fomethé and G. A. Maugin, Material forces in thermoelastic ferromagnets. *Cont. Mech. & Thermodyn.* (in press) (1996).
15. A. Fomethé and G. A. Maugin, On the fracture of hard ferromagnets. Preprint UPMC-LMM, submitted for publication (1995).

16. G. A. Maugin, *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. North-Holland, Amsterdam (1988).
17. A. C. Eringen and G. A. Maugin, *Electrodynamics of Continua*, 2 Vols. Springer, New York (1990).
18. A. N. Abd-Alla and G. A. Maugin, Nonlinear magnetoacoustic equations. *J. Acoust. Soc. Amer.* **82**, 1746–1752 (1987).
19. E. du Trémolet de Lacheisserie, *Magnetostriction; Theory and Applications of Magnetoelasticity*. CRC, Boca Raton (1993).
20. G. A. Maugin, Sur la conservation de la pseudo-quantité de mouvement en mécanique et électrodynamique des milieux continus. *C. R. Acad. Sci. Paris II*–**311**, 763–768 (1990).
21. G. A. Maugin and C. Trimarco, Pseudo-momentum and material forces in electromagnetic solids. *Int. J. Appl. Electrom. Mat.* **2**, 207–216 (1991).
22. G. A. Maugin, M. Epstein and C. Trimarco, Pseudo-momentum and material forces in inhomogeneous materials: applications to the fracture of electromagnetic solids in EM fields. *Int. J. Solids Structures* **29**, 1889–1900 (1992).
23. G. A. Maugin, M. Epstein and C. Trimarco, The theory of elastic inhomogeneities in electromagnetic materials. *Int. J. Engng Sci.* **30**, 1441–1449 (1992).
24. G. A. Maugin, *Material Inhomogeneities in Elasticity*. Chapman and Hall, London (1993).
25. D. F. Nelson, *Electric, Optic and Acoustic Interactions in Dielectrics*. Wiley-Interscience, New York (1979).
26. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continua* (revised edition). Pergamon Press, Oxford (1984).
27. C. A. Truesdell and R. A. Toupin, The classical field theories. In *Handbuch der Physik*, Vol. III/1 (Edited by S. Flügge). Springer, Berlin (1960).
28. M. E. Gurtin, On the energy-release rate in quasi-static elastic crack propagation. *J. Elasticity* **9**, 187–195 (1979).
29. Nguyen Quoc Son, Méthodes énergétiques en mécanique de la rupture. *J. Mécanique (Paris)* **19**, 363–386 (1980).
30. G. A. Maugin, *Nonlinear Electromechanical Effects—a Series of Lectures*. World Scientific, Singapore (1985).
31. P. Grisvard, Problèmes aux limites dans les polygones. *Bull. Electricité de France* **C1**, 21–59 (1986).
32. D. D. Asanyan, A. A. Aslanyan and G. E. Bagdasaryan, Concentrations of elastic stresses and induced magnetic field caused by an external magnetic field next to a crack. *Sov. J. Contemporary Engng Mech.* (English translation of *Izv. Akad. Nauk. Armyanskoi SSR: Mekhanika* by Allerton Press Inc.) **41**, 10–19 (1988).
33. V. I. Alshits, E. V. Darinskaya, T. M. Perekalina and A. A. Urusovskaya, Motion of dislocations in NaCl crystals under the action of a static magnetic field. *Fiz. Tverd. Tela* **29**, 467–471 (1987).
34. V. I. Alshits, E. V. Darinskaya, O. L. Kazakova, B. Yu. Mikchina and E. A. Petrzhih, Magnetoplastic effect in non-magnetic crystals and internal friction. *J. Alloys Compounds* **211–212**, 548–553 (1994).

APPENDIX: CONSTITUTIVE EQUATIONS

Here we gather in one place the non-linear constitutive equations for centrosymmetric magnetizable solids, such as many ferromagnetic polycrystalline materials. There is a strong analogy with parallel developments in electroelasticity [30] and previous formulations in magnetoelasticity [18]. The volume energy density Σ is expanded in terms of its tensorial and vectorial arguments, \mathbb{E} and $\bar{\mathbf{H}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} = & \frac{1}{2} C_{KLMN} E_{KL} E_{MN} + \frac{1}{6} C_{KLMNPQ} E_{KL} E_{MN} E_{PQ} + \frac{1}{24} C_{KLMNPQAB} E_{KL} E_{MN} E_{PQ} E_{AB} - \frac{1}{2} \chi_{AB} \bar{H}_A \bar{H}_B \\ & - \frac{1}{24} \chi_{KLMN} \bar{H}_K \bar{H}_L \bar{H}_M \bar{H}_N + \frac{1}{2} B_{MNKL} \bar{H}_M \bar{H}_N E_{KL} + \frac{1}{4} B_{MNKLPQ} \bar{H}_M \bar{H}_N E_{KL} E_{PQ}, \end{aligned} \quad (A1)$$

where the expansion has been limited to the fourth order in the strains and the magnetic field and jointly in these two arguments. Because of the assumed centrosymmetry there are no odd-order terms in the magnetic field and, therefore, no effects such as piezomagnetism. It was assumed that there are no pre-stress (linear term in \mathbb{E} alone). The various material coefficients introduced obviously have tensorial symmetries and they bear the following meaning: the tensors of components C_{KLMN} , C_{KLMNPQ} and $C_{KLMNPQAB}$ are the tensors of elasticity coefficients, or moduli, of the second, third and fourth orders at zero magnetic field (temperature effects are discarded so that we do not specify if these are isothermal or adiabatic coefficients); the tensors of components χ_{KL} and χ_{KLMN} are tensors of magnetic susceptibility of the second and fourth orders at vanishing strains (there are no third order susceptibilities), and the tensors of components B_{MNKL} and B_{MNKLPQ} are the tensors of coefficients of magnetostriction of the first and second orders, respectively. We only have to substitute from equation (A1) into the constitutive equations (49) to obtain the following expressions:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{KL}^E = & C_{KLMN} E_{MN} + \frac{1}{2} C_{KLMNPQ} E_{MN} E_{PQ} + \frac{1}{6} C_{KLMNPQAB} E_{MN} E_{PQ} E_{AB} \\ & + \frac{1}{2} B_{MNKL} \bar{H}_M \bar{H}_N + \frac{1}{6} B_{MNKLPQ} \bar{H}_M \bar{H}_N E_{PQ}, \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\hat{M}_K = \chi_{KL} \bar{H}_L + \frac{1}{6} \chi_{KLMN} \bar{H}_L \bar{H}_M \bar{H}_N - B_{KLMN} \bar{H}_L E_{MN} - \frac{1}{2} B_{KLMNPQ} \bar{H}_L E_{MN} E_{PQ}. \quad (A3)$$

However, what we really need in the field equations are the expressions of the tensors \bar{T}_{Ki}^E and T_{Ki}^E and the vectors \hat{M}_K and \hat{H}_K in terms of the displacement gradient $\nabla_{\mathbf{R}U}$ and the field $\bar{\mathbf{H}}$. To that purpose we must use the following exact and approximate relations:

$$E_{MN} = \frac{1}{2} (u_{M,N} + u_{N,M} + u_{K,M} u_{K,N}), \quad (A4)$$

$$(\mathbf{F})_{jK} = \chi_{j,K} = \delta_{jK} + u_{j,i} \delta_{iK} = \delta_{jM} (\delta_{KM} + u_{M,K}) \quad (A5)$$

$$(\mathbf{F}^{-1})_{Kj} = \chi_{K,j}^{-1} = \delta_{Kj} - u_{K,L}\delta_{Lj} + u_{K,L}u_{L,R}\delta_{Lj} + \dots \quad (\text{A6})$$

$$J_{\mathbf{F}} = 1 + u_{K,K} + \frac{1}{2}(u_{K,K})^2 - \frac{1}{2}u_{K,R}u_{R,K} + \dots \quad (\text{A7})$$

$$J_{\mathbf{F}^{-1}} = 1 - u_{K,K} + \frac{1}{2}(u_{K,K})^2 + \frac{1}{2}u_{K,R}u_{R,K} + \dots \quad (\text{A8})$$

After some calculations we obtain thus:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{Ki}^I &= \delta_{Ri}(C_{KRMN}u_{M,N} + \gamma'_{KRMNPQ}u_{M,N}u_{P,Q} + \delta'_{KRMNPQAB}u_{M,N}u_{P,Q}u_{A,B} + B''_{KRMN}\bar{H}_M\bar{H}_N \\ &\quad + B''_{KRMNPQ}\bar{H}_M\bar{H}_N u_{P,Q}) + \text{h.o.t.}, \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

$$\begin{aligned} T_{Ki}^{II} &= \delta_{Ri}\{(\delta_{KM}\delta_{NR} - \frac{1}{2}\delta_{NM}\delta_{RK})\bar{H}_M\bar{H}_N + [\delta_{NP}(\frac{1}{2}\delta_{QM}\delta_{KR} - \delta_{KM}\delta_{QR}) + \delta_{KR}(\frac{1}{2}\delta_{NM}\delta_{QR} \\ &\quad - \delta_{QM}\delta_{NR}) + \delta_{MP}(\frac{1}{2}\delta_{QN}\delta_{KR} - \delta_{KQ}\delta_{NR}) + \delta_{PQ}(\delta_{KM}\delta_{NR} - \frac{1}{2}\delta_{MN}\delta_{KR})]\bar{H}_M\bar{H}_N u_{P,Q}\} + \text{h.o.t.}, \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

$$\hat{M}_K = \chi_{KL}\bar{H}_L + \frac{1}{6}\chi_{KLMN}\bar{H}_L\bar{H}_M\bar{H}_N - B_{KLMN}\bar{H}_L u_{M,N} - \lambda_{KLMNPQ}\bar{H}_L u_{M,N} u_{P,Q} + \text{h.o.t.}, \quad (\text{A11})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_K &= \delta_{KL}\bar{H}_L + (\delta_{KL}\delta_{PQ} - \delta_{LP}\delta_{KQ} - \delta_{KP}\delta_{LQ})u_{P,Q}\bar{H}_L \\ &\quad + \{\frac{1}{2}\delta_{KL}\delta_{MN}\delta_{PQ} - \frac{1}{2}\delta_{KL}\delta_{PN}\delta_{MQ} - \delta_{KP}\delta_{MN}\delta_{LQ} \\ &\quad - \delta_{MN}\delta_{PL}\delta_{QK} + \delta_{PK}\delta_{QM}\delta_{LN} + \delta_{LP}\delta_{MQ}\delta_{NK} \\ &\quad + \delta_{KP}\delta_{LM}\delta_{NP}\}u_{P,Q}u_{M,N}\bar{H}_L + \text{h.o.t.}, \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

where we have set

$$\gamma_{KLMNPQ} = \frac{1}{2}(C_{KLMNPQ} + C_{KLPN}\delta_{QM}), \quad (\text{A13})$$

$$\delta_{KLMNPQAB} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}C_{KLMNPQAB} + \frac{1}{2}C_{KLMNAQ}\delta_{BQ} + \frac{1}{2}C_{KLANPQ}\delta_{BM}) \quad (\text{A14})$$

$$\lambda_{KLMNPQ} = \frac{1}{2}(B_{KLMNPQ} + B_{KLPN}\delta_{QM}), \quad (\text{A15})$$

$$\gamma'_{KRMNPQ} = \gamma_{KRMNPQ} + C_{KQMN}\delta_{RP}, \quad (\text{A16})$$

$$\delta'_{KRMNPQAB} = \delta_{KRMNPQAB} + \frac{1}{2}(C_{KRMNPQ}\delta_{AB} + C_{KRPN}\delta_{QM}\delta_{AB}), \quad (\text{A17})$$

$$B'_{KRMNPQ} = B_{KRMNPQ} + \frac{1}{2}B_{KQMN}\delta_{RP}, \quad (\text{A18})$$

and

$$B''_{KRMN} = \frac{1}{2}B_{KRMN} + \chi_{RN}\chi_{KM}, \quad (\text{A19})$$

$$\begin{aligned} B''_{KRMNPQ} &= B'_{KRMNPQ} - B_{MNPQ}\chi_{KR} - B_{RKQP}\chi_{MN} \\ &\quad - \chi_{RN}\chi_{KP}\delta_{QM} - \chi_{RN}\chi_{KQ}\delta_{MP} + \chi_{PM}\chi_{KN}\delta_{QR} + \chi_{KM}\chi_{RN}\delta_{PQ}. \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

For classical magnetostriction we have the following reduction:

$$\bar{T}_{Ki}^I = \delta_{Ri}(C_{KRMN}u_{M,N} + B''_{KRMN}\bar{H}_M\bar{H}_N), \quad (\text{A21})$$

$$T_{Ki}^{II} = \delta_{Ri}(\delta_{KM}\delta_{NR} - \frac{1}{2}\delta_{NM}\delta_{RK})\bar{H}_M\bar{H}_N, \quad (\text{A22})$$

$$\hat{M}_K = \chi_{KL}\bar{H}_L - B_{KLMN}\bar{H}_L u_{M,N}, \quad (\text{A23})$$

$$\hat{H}_K = \delta_{KL}\bar{H}_L + (\delta_{KL}\delta_{PQ} - \delta_{LP}\delta_{KQ} - \delta_{KP}\delta_{LQ})u_{P,Q}\bar{H}_L \quad (\text{A24})$$

and

$$\mathfrak{S}_{KL}^I = C_{KLMN}E_{MN} + \frac{1}{2}B_{KLMN}\bar{H}_M\bar{H}_N. \quad (\text{A25})$$

We obtain the phenomenon of biased piezomagnetism when we linearize the above set equations with respect to $u_{M,N}$ and the components h_K of the small-amplitude magnetic field superimposed on a bias magnetic field $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^0$. We then have the following reduction:

$$\bar{T}_{Ki}^I = \delta_{Ri}(C_{KRMN}u_{M,N} + 2B''_{KRMN}H_M^0 h_N) \quad (\text{A26})$$

$$T_{Ki}^{II} = \delta_{Ri}\{H_K^0 h_R + h_K H_R^0 - (\mathbf{H}^0 \cdot \mathbf{h})\delta_{KR}\} \quad (\text{A27})$$

$$\hat{M}_K = \chi_{KL}h_L - B_{KLMN}H_L^0 u_{M,N}, \quad (\text{A28})$$

$$\hat{H}_K = h_K = (\delta_{KL}\delta_{PQ} - \delta_{LP}\delta_{KQ} - \delta_{KP}\delta_{LQ})H_L^0 u_{P,Q} \quad (\text{A29})$$

and

$$\mathfrak{S}_{KL}^I = C_{KLMN}u_{M,N} + B_{KLMN}H_M^0 h_N. \quad (\text{A30})$$

In the case of isotropic bodies, we have the following simple representations:

$$C_{KRMN} = \lambda \delta_{KR} \delta_{MN} + \mu (\delta_{RM} \delta_{KN} + \delta_{RN} \delta_{KM}), \quad (\text{A31})$$

$$B_{KLMN} = b_1 \delta_{KL} \delta_{MN} + b_2 (\delta_{LM} \delta_{KN} + \delta_{LN} \delta_{KM}), \quad (\text{A32})$$

$$\chi_{KL} = \chi \delta_{KL}, \quad (\text{A33})$$

where λ and μ are Lamé's elasticity coefficients, χ is the only surviving magnetic susceptibility of second order, and b_1 and b_2 are the two remaining magnetostriction constants as introduced by Akulov in the 1930s.

TABLE DES MATIERES

RESUME EN ARABE	1
ABSTRACT	2
RESUME	3
INTRODUCTION GENERALE	4

PREMIERE PARTIE THEORIE DE L'HYSTERESIS MAGNETOMECHANIQUE

RESUME	12
1. INTRODUCTION	13
2. MATERIAUX MAGNETIQUES	15
2.1. DEFINITIONS	15
2.1.1. Diamagnétisme	15
2.1.2. Paramagnétisme	15
2.1.3. Ferromagnétisme	16
2.1.4. Ferrimagnétisme	16
2.2. MAGNETOSTRICTION	16
2.3. LES PRINCIPAUX PHENOMENES DE MAGNETOSTRICTION	17
2.3.1. L'Effet Joule Longitudinal	17
2.3.2. L'Effet Guillemin	18
2.3.3. L'Effet Wiedeman	18
2.3.4. L'Effet "ΔE"	18
2.3.5. L'Effet de Variation de Volume	19
3. HYSTERESIS	19
3.1. DEFINITION	19
3.2. MODELE DE PREISACH	22
3.3. MODELE DE NEEL	26
3.4. MODELE DE VISINTIN	29
3.5. MODELE DE JILES ET ATHERTON	32
4. THEORIE DE LA FORCE COERCIVE	37
5. CONCLUSION	43
REFERENCES	44

DEUXIEME PARTIE
RELATIONS CONSTITUTIVES DE L'HYSTERESIS
MAGNETOMECHANIQUE DANS LES MATERIAUX
FERROMAGNETIQUES

1. RESUME	48
2. INTRODUCTION	49
3. RELATIONS GENERALES	50
4. OBSERVATIONS GENERALES	51
4.1. BOUCLES MAJEURES D'HYSTERESIS	54
4.2. CHAMPS COERCIFS	55
4.3. COURBES DERIVEES	56
5. SIMULATIONS NUMERIQUES	56
6. BOUCLES PRIMITIVES D'HYSTERESIS	58
7. CONCLUSION	58
REFERENCES	59

TROISIEME PARTIE
FORMULATION THERMODYNAMIQUE
DE L'EFFET DE CONTRAINTE
SUR L'HYSTERESIS MAGNETIQUE

1. RESUME	62
2. INTRODUCTION	63
3. EFFETS MAGNETOMECHANIQUES	64
4. MODELE THERMODYNAMIQUE DE L'HYSTERESIS MAGNETOMECHANIQUE	67
5. LOIS DEPENDANT DU TEMPS	68
6. COMPARAISON AVEC LE MODELE DE CHEN	69
7. APPLICATIONS	70
7.1 MAGNETOSTRICTION INDUITE PAR DES CONTRAINTES	70
7.2. AIMANTATION INDUITE PAR DES CONTRAINTES	70
7.3. CAS PURMENT MAGNETIQUE	71
8. CONCLUSION	72
REFERENCES	72

**QUATRIEME PARTIE
SUR LA RUPTURE DES PARAMAGNETIQUES
ET DES FERROMAGNETIQUES MOUS**

1. RESUME	77
2. INTRODUCTION	78
3. EQUATIONS GENERALES	79
4. EQUATIONS SOUS FORME MATERIELLES	80
5. RELATION DE L'ENERGIE	81
6. TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE	82
7. INTEGRALES INDEPENDANTES DU CONTOUR	84
8. APPLICATION	85
9. CONCLUSION	87
REFERENCES	87
CONCLUSION GENERALE	90
ANNEXE 1	92
CONSTITUTIVE RELATIONS FOR MAGNETOMECHANICAL HYSTERESIS IN FERROMAGNETIC MATERIALS	
ANNEXE 2	110
THERMODYNAMICAL FORMULATION OF STRESS EFFECTS ON MAGNETIC HYSTERESIS	
ANNEXE 3	132
ON THE FRACTURE OF PARAMAGNETS AND SOFT FERROMAGNETS	