Table des matières

1 Introduction **5**

1.1 Variétés toriques et plongements homogènes de G/H 6
1.2 Plongements lisses de SL_2/H 9
1.3 Modèles mimimaux 11
1.4 critère de quasi-projectivité 11
1.5 Plongements magnifiques 12
1.6 Plongements projectifs avec une seule orbite fermée 12

2 La théorie de Luna-Vust **13**

2.1 Détermination d'un plongement homogène par les anneaux locaux de ses orbites 13
2.2 Utilisation des B-cartes intersectant une G-orbite. 14

3 Plongements homogènes de SL_2/H **19**

3.1 Sous-groupes finis de SL_2 19
3.1.1 Cas où H est binaire diédral, tétraédral, octatédral ou icosaédral. 20
3.1.2 Cas où H est cyclique. 21
3.2 Vecteurs propres de $\mathbb{C}(SL_2)$ sous l'action de B et H 21
3.3 Espace vectoriel $\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{n,\chi_0}$. 22
3.4 Valuations discrètes de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ invariantes par SL_2 24
3.5 Anneau local d'une orbite 25
3.5.1 SL_2-germes de type C (type I) 26
3.5.2 SL_2-germes de type AB (type I) 27
3.5.3 SL_2-germes de type B_+ (type I) 27
3.5.4 SL_2-germes de type A_N (type II) 27
3.5.5 SL_2-germes de type B_-(type II) 28
3.5.6 SL_2-germes de type B_0 (type II) 28

4 Conditions de régularité des anneaux locaux **29**

4.1 SL_2-germes conjugués 29
4.2 SL_2-germes réguliers de type A_N 30

4.2.1 H binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral 30
4.2.2 H cyclique d'ordre impair 32
4.2.3 H cyclique d'ordre pair 33
4.3 SL_2-germes réguliers de type AB 34
4.4 SL_2-germes réguliers de type B_+ 35
4.5 SL_2-germes réguliers de type B_- 35

5 Preuves des conditions de régularité 37
5.1 Réduction aux U-invariants 38
5.2 Régularité des SL_2-germes de type AB (preuves) 39
5.2.1 H cyclique d'ordre k 39
5.2.2 H quelconque 41
5.3 Régularité des SL_2-germes de type B_+ 42
5.3.1 H cyclique d'ordre k 42
5.3.2 H quelconque 42
5.4 Présentation des B-cartes affines selon Timashev 43
5.4.1 Représentation des valuations B-invariantes de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ dans l'hyperespace $\mathcal{H}$ 43
5.4.2 Représentation de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{D}^B$ dans l'hyperespace 45
5.4.3 Hypercône $\mathcal{C}(\mathring{\mathrm{X}})$ associé à une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ 46
5.4.4 SL_2-germes de type I et de type II. 48
5.5 B-cartes $\mathring{\mathrm{X}}$ telles que $\mathring{\mathrm{X}}/U$ soit une variété torique 50
5.6 SL_2-germes de type II 52
5.6.1 SL_2-germes de type A_N 52
5.6.2 SL_2-germes de Type B_- 60
5.7 $\mathring{\mathrm{X}}/U$ torique pour les SL_2-germes de type I 61
5.8 Autre preuve de régularité pour le type I 65
5.8.1 H cyclique d'ordre k. 65
5.8.2 H binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral. 66

6 Les modèles minimaux 69
6.1 Plongements lisses complets 69
6.2 Liste des modèles minimaux 71
6.2.1 cas où H est binaire tétraédral 72
6.2.2 Cas où H est binaire octaédral ou icosaédral 72
6.2.3 Cas où H est cyclique d'ordre k impair supérieur ou égal à 3 . 72
6.2.4 Cas où H est cyclique d'ordre k pair 74
6.2.5 Cas où H est binaire diédral 76
6.3 Morphismes et éclatements 76
6.4 Généralités sur les modèles minimaux de SL_2/H 77
6.5 Suites adjacentes minimales 79

6.6 Preuve de la liste des modèles minimaux 83
6.6.1 Cas où H est binaire tétraédral 83
6.6.2 Cas où H est binaire octaédral ou icosaédral 86
6.6.3 Cas où H est cyclique d'ordre k impair supérieur ou égal à 3 . 86
6.6.4 Cas où H est cyclique d'ordre k pair 93
6.6.5 Cas où H est binaire diédral 94
6.7 Géométrie des modèles minimaux 95
6.7.1 Un critère de quasiprojectivité. 95
6.7.2 Lien avec la description de Nakano des modèles minimaux projectifs 110
6.7.3 Une autre preuve d'un résultat de Luna sur l'inexistence d'une complétion magnifique de SL_2/H 116
6.8 Plongements complets avec une seule orbite fermée 118
6.8.1 fermeture d'une SL_2-orbite dans $(\mathbb{P}^1)^n$ 119
6.8.2 quotient de $\overline{Sl_2.e}$ par un sous-groupe fini d'automorphismes. . 120
6.8.3 $\overline{Sl_2.e}/H$ comme fermeture d'orbite 123
6.8.4 Méthode directe d'étude de la lissité de $\overline{Sl_2.e}/H$. 124

7 Notations **129**

A Détermination des éléments de $\mathbb{C}(SL_2/H)^{(B)}$. **131**
A.1 Caractères de H associés aux vecteurs propres g_ω. 131
A.1.1 Groupe binaire diédral. 131
A.1.2 Groupe binaire tétraédral, octaédral ou icosaédral. 132
A.1.3 groupe cyclique d'ordre k. 132
A.2 Invariants par H dans $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$ 133
A.2.1 Cas où H est binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral.133
A.2.2 cas où H est cyclique d'ordre k. 134

B $\mathcal{O}^U, \mathcal{O}^B, \mathbb{C}[\mathring{\mathbf{X}}]^B$ pour une B-carte $\mathring{\mathbf{X}}$ et un SL_2-germe $\mathcal{O}$ **137**

C étude de la lissité de $\overline{Sl_2.e}/H$ **141**
C.1 Si H est cyclique d'ordre $2(n-2)$ avec $n \geq 3$ alors $\overline{Sl_2.e}/H$ est lisse . 141
C.2 Plongements singuliers de la forme $\overline{Sl_2.e}/H$ 143

D Dimension de l'espace tangent **151**
D.0.1 algorithme général 151
D.0.2 Dimension de l'espace tangent et fractions continues 154

Chapitre 1

Introduction

L'objet de ce travail est l'étude des variétés algébriques complexes munies d'une action algébrique de SL_2 et qui contiennent SL_2/H comme orbite ouverte, H étant un sous-groupe fini de SL_2.

Plus précisément on définit un plongement homogène de SL_2/H comme la donnée d'une SL_2-variété irréductible normale X (quasi-projective ou non) contenant SL_2/H comme orbite ouverte et d'un morphisme SL_2-équivariant de SL_2 dans X.

Les plongements homogènes lisses ainsi que les plongements minimaux (plongements lisses et complets qui ne sont pas des éclatements d'un autre plongement lisse complet) de $SL_2/\{Id\}$ et de $SL_2/\{\pm Id\}$ ont été déterminés par Lucy Moser dans sa thèse [M1] dans le cadre de la classification de Luna-Vust de tous les plongements homogènes normaux de SL_2/H. L'objet du présent travail est de compléter ces résultats en déterminant les plongements homogènes lisses de SL_2/H et les plongements minimaux pour les sous-groupes finis H de SL_2 autres que $\{Id\}$ et $\{\pm Id\}$.

Dans le cas particulier des plongements minimaux projectifs on retrouve les résultats de Tetsuo Nakano [Nak]. En utilisant des résultats d'Alessandra Iozzi et Jonathan Poritz [I-P] sur la normalité de la fermeture d'une SL_2-orbite quelconque de $(\mathbb{P}^1)^n$ et le groupe de ses SL_2-automorphismes on donne une description géométrique différente de celle de Nakano pour certains des plongements minimaux projectifs. Plus généralement on décrit de cette façon tous les plongements projectifs de SL_2/H, H d'ordre pair, qui contiennent exactement une orbite de dimension 1.

On établit un critère de quasi-projectivité pour un plongement homogène quelconque de SL_2/H, critère qui permet en particulier de vérifier l'existence d'un plongement minimal non projectif dans le cas H cyclique.

Enfin on démontre d'une autre façon un résultat de D. Luna sur l'inexistence de complétion magnifique de SL_2/H (définition au § 6.7.3)

1.1 Variétés toriques et plongements homogènes de G/H

Dans toute la suite le corps de base est $\mathbb{C}$.

Soit X une variété algébrique et G un groupe algébrique affine. Une action algébrique de G sur X est la donnée d'un morphisme de $G \times X$ dans X qui à tout couple (g, x) de $G \times X$ associe un élément noté $g.x$ de X et qui satisfait les conditions suivantes :

- $Id.x = x$ pour tout $x \in X$
- $g.(g'.x) = (gg').x$ pour tout $g, g' \in G,\ x \in X$.

X muni de cette action est appelée une G-variété.

Si X contient une orbite ouverte alors on dit que X est un plongement homogène, ou simplement un plongement, de G/H. Quand $\dim(G) = \dim(X)$ cela revient à dire que X contient un point dont le sous-groupe d'isotropie est fini.

Quand $G = (\mathbb{C}^*)^n$ le plongement ou la variété X est dit torique ([Ful], [Oda]). Nous verrons que l'étude locale des plongements de SL_2/H fait intervenir de telles variétés toriques avec $G = (\mathbb{C}^*)^2$.

Pour construire un exemple de variété torique affine considérons un cône rationnel polyédral strictement convexe de $\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire un cône C de la forme $\mathbb{R}^+e_1 + \ldots + \mathbb{R}^+e_k$ avec $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{Z}^n$ et tel que C ne contienne aucune droite passant par l'origine. Notons V l'intersection de C avec $\mathbb{Z}^n$ et formons la sous-algèbre A de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ engendrée comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les mônomes $X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$ où le multi-indice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ décrit V. L'algèbre A est de type fini car V est un semi-groupe finiment engendré (lemme de Gordon) et son spectre X est une variété torique : $(\mathbb{C}^*)^n$ agit sur A par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$. Les propriétés de la variété X et de l'action du tore $(\mathbb{C}^*)^n$ se déduisent des propriétés du cône V de $\mathbb{Z}^n$. Par exemple comme V est saturé ($t.v \in V$ implique $v \in V$ si $t \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{Z}^n$) on peut montrer que A est intégralement clos et X est alors une variété normale. Par ailleurs soient $v_1, \ldots, v_m$ les vecteurs primitifs sur les arêtes de $\mathbb{Z}^n$. Alors la variété X est lisse si et seulement si $m = n$ et si $v_1, \ldots, v_n$ engendrent le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^n$ c'est-à-dire si le déterminant des v_i vaut ± 1.

En réalité toute variété affine torique normale est de la forme précédente et toute variété algébrique torique normale s'obtient en recollant de telles variétés affines toriques. Ce dernier point est une conséquence du résultat général suivant dû à Sumihiro :

> Si G est un groupe réductif et X est une G-variété normale alors tout point x de X est contenu dans un ouvert G-stable $\overset{\circ}{X}$ qui est G-isomorphe à une variété quasi-projective où G agit par automorphismes de l'espace projectif. Si G est un tore on peut choisir $\overset{\circ}{X}$ affine.

On a ainsi une élégante classification combinatoire de toutes les variétés toriques normales qui a donné de nombreux résultats dans l'étude de ces variétés.

Dans un article de 1973 [Pop], V.Popov a obtenu une classification combinatoire des plongements homogènes affines de SL_2. Cependant, contrairement à ce qui se passe pour les variétés toriques normales, une SL_2-variété normale ne peut pas en général être recouverte par des ouverts affines stables par SL_2.

D.Luna et T.Vust, dans leur article de 1983 [LV], contournent l'obstacle en utilisant le théorème de Sumihiro pour prouver le fait suivant valable pour un groupe réductif connexe G et une G-variété algébrique normale :

> Si B est un sous-groupe de Borel fixé de G (un sous-groupe résoluble connexe maximal de G) alors toute G-orbite Y de X rencontre un ouvert affine B-stable $\overset{\circ}{X}$.

Un groupe G est dit réductif quand tout G-module rationnel est somme directe de G-modules irréductibles. SL_2 est un exemple de tel groupe.

Si on fixe un point e de l'orbite ouverte d'un plongement X de G/H alors l'application $g \mapsto g.e$ est un G-isomorphisme entre G/H et l'orbite ouverte $G.e$ de X. Via cet isomorphisme l'anneau local de toute G-orbite de X est un sous-anneau du corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(G/H)$ de G/H. La classification de Luna-Vust des plongements homogènes de G/H repose sur la classification des sous-anneaux de $\mathbb{C}(G)$ qui peuvent être obtenus de cette manière, anneaux locaux que nous appellerons dorénavant G-germes selon la terminologie de Timashev [Tim]. La définition de Luna-Vust d'un plongement homogène est donc un peu différente de celle donnée plus haut, elle fait intervenir le point e choisi dans l'orbite ouverte qui permet l'identification entre les corps $\mathbb{C}(G/H)$ et $\mathbb{C}(X)$.

> Si G est un groupe algébrique et H un sous-groupe algébrique de G on appelle plongement homogène (X, e) de G/H la donnée d'une G-variété algébrique irréductible contenant une orbite ouverte et d'un point e (le point de base du plongement) ayant H comme sous-groupe d'isotropie. Un morphisme entre deux plongements (X, e) et (X', e') est un morphisme algébrique G-équivariant (un G-morphisme) qui envoie e sur e'.

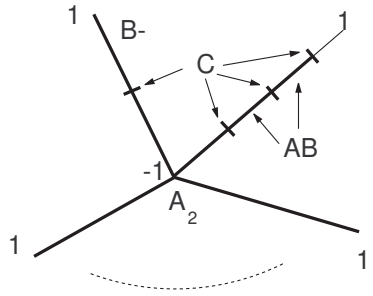
Dans le même article Luna et Vust donnent une méthode générale pour déterminer tous les G-germes normaux possibles ainsi que les collections de G-germes qui correspondent à (et définissent) un plongement homogène dans le cas où l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ est factorielle. Cette méthode débouche sur une classification combinatoire de tous les plongements homogènes normaux de G/H si l'on sait décrire l'ensemble des valuations B-invariantes de $\mathbb{C}(G/H)$. Cette détermination est particulièrement simple quand la complexité de G/H, c'est-à-dire la codimension minimale des orbites de B dans G/H, est inférieure ou égale à 1 [LV].

Dans le cas où la complexité de G/H est nulle, c'est-à-dire quand B a une orbite dense dans G/H, on peut montrer par exemple que tous les plongements ont un

nombre fini d'orbites. Les variétés de ce type sont appelées variétés sphériques et leur étude fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [BLV]).

Dans le cas $G = SL_2$ et $H = Id$ (la complexité de SL_2/H vaut 1) Luna et Vust montrent qu'un plongement homogène normal de SL_2/H est déterminé par un nombre fini de rationnels et d'éléments de $\mathbb{P}^1$. Ces informations sont représentées par un diagramme en étoile dont l'ensemble des branches est en bijection avec $\mathbb{P}^1$. On identifie une branche à l'intervalle $[-1;1]$ de $\mathbb{Q}$ et un rationnel sur une branche donnée correspond à une valuation SL_2-invariante de $\mathbb{C}(SL_2)$. Sur le diagramme d'un plongement X on représente en trait plus épais toutes les valuations SL_2-invariantes dont l'anneau domine l'anneau local d'une orbite de X.

Les orbites sont classées en cinq types appelés : B_0, C, A_N ($N \in \mathbb{N}^*$), AB, B_+, B_-. Les orbites de type B_0 sont les points fixes, celles de type C sont de dimension 2, les autres sont de dimension 1 (définitions au §3.5). Pour un type donné une orbite est représentée sur le diagramme par un ou plusieurs segments qui correspondent à l'ensemble des valuations SL_2-invariantes dominant son anneau local.



Le plongement qui correspond à ce diagramme a une orbite ouverte, une orbite de type A_2, une orbite de type B_-, deux orbites de type AB et quatre orbites de type C.

Dans le cas $G = SL_2$, H un sous-groupe fini de SL_2, L. Moser [M1] applique la même méthode pour obtenir une classification des plongements homogènes normaux de SL_2/H et les diagrammes correspondants. Les branches de ces nouveaux diagrammes représentent cette fois des éléments de $\mathbb{P}^1/H$. On en trouvera dans la présente thèse de nombreux exemples.

Une SL_2-orbite d'un plongement X de SL_2/H est soit entièrement formée de points lisses soit entièrement formée de points singuliers. Dans le premier cas on dira que l'orbite est régulière. Par conséquent une orbite est régulière si et seulement si son anneau local est régulier. Pour $H = \{id\}$ ou $\{\pm id\}$ les méthodes développées par L.Moser permettent de trouver des conditions de régularité pour tous les types d'orbites mais elles s'avèrent insuffisantes en l'état pour la généralisation à tout type de sous-groupe fini H de SL_2.

Le point de départ de notre travail a été de compléter ces résultats en donnant les conditions de régularité des SL_2-orbites pour tous les sous-groupes finis H (cy-

cliques, binaires diédraux, tétraédraux, octaédraux et icosaédraux) en introduisant systématiquement pour chaque orbite Y une certaine surface torique dont la lissité est équivalente à la régularité de Y.

1.2 Plongements lisses de SL_2/H

Dans toute la suite on désignera par plongement de SL_2/H un plongement homogène normal de SL_2/H.

Les conditions de régularité des SL_2-orbites d'un plongement de SL_2/H font l'objet des propositions 1 à 6.

Pour les orbites de type A_N, B_+, B_- la liste des orbites régulières est constituée de quelques familles déterminées chacune par un nombre fini d'éléments de $\mathbb{P}^1/H$ et une suite de nombres rationnels.

Une orbite de type AB est définie par un élément D de $\mathbb{P}^1/H$ et deux nombres rationnels r_1 et r_2 appartenant à un intervalle qui dépend de D. La condition de régularité s'exprime dans ce cas par une condition arithmétique sur r_1 et r_2 (proposition 4) analogue à la notion de fractions adjacentes : $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ irréductibles sont adjacentes quand $|pq' - p'q| = 1$.

Exposons la méthode que nous utiliserons pour trouver les orbites régulières.

Il est déjà connu que les points fixes d'un plongement homogène X de SL_2/H sont singuliers (c'est une conséquence du théorème du slice étale de Luna [L]). Comme X est normal les SL_2-orbites de codimension 1 sont toujours régulières. Reste à étudier le cas des SL_2-orbites de codimension 2.

Soit Y une orbite de dimension 1 de X.

On fixe un sous-groupe de Borel B de SL_2, un tore maximal T de B et on note U le radical unipotent de B. On a vu à la section précédente qu'il existe un ouvert affine B-stable $\mathring{\mathrm{X}}$ de X qui intersecte Y. Un tel ouvert $\mathring{\mathrm{X}}$ sera appelé une B-carte.

H agit sur $\mathbb{C}(SL_2)$ par translation à droite et SL_2, U, B, T agissent sur $\mathbb{C}(SL_2)$ par translation à gauche. Considérons le quotient algébrique $\mathring{\mathrm{X}}//U = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U)$ où $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$ est l'algèbre des éléments de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ invariants par U ($\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$ est de type fini : [LV] et [Tim]). D'après le lemme 5.1.1 p 38 ce quotient n'est autre que le quotient géométrique $\mathring{\mathrm{X}}/U$, et nous adopterons dorénavant cette notation.

Un résultat de D.Luna [BLV] permet de ramener la régularité de l'anneau local de Y dans X à la lissité du point p image de $\mathrm{Y}\cap\mathring{\mathrm{X}}$ dans $\mathring{\mathrm{X}}/U$. Par conséquent on réduit le problème de la lissité d'un point dans une variété de dimension 3 à celui de la lissité d'un point dans une variété de dimension 2. Ce procédé, déja employé par L.Moser dans le cas $H = \{Id\}$ ou $\{\pm Id\}$ est crucial dans le sens qu'il rend possible des calculs autrement inextricables.

A ce stade il est possible de décrire un algorithme pour évaluer la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel m/m^2, où m est l'idéal maximal du point p dans $\mathring{\mathrm{X}}/U$, en fonction

des données de l'orbite Y. On peut utiliser à cette fin la graduation de $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U]$ issue de l'action de $T \cong \mathbb{C}^*$. Il est possible, mais fastidieux, d'en déduire des conditions de régularité de Y. Ce fut notre premier chemin pour aboutir aux résultats de la section 4. Cependant, en s'aidant d'une représentation un peu différente des B-cartes due à Timashev [Tim], il nous est apparu après coup que les B-cartes qui intersectaient une orbite régulière avaient une forme particulière qui indiquait la voie d'une preuve plus simple des conditions de régularité. Cette preuve consiste à se ramener à la condition élémentaire de lissité d'une surface torique. C'est cette approche que nous avons finalement retenue.

Timashev distingue deux cas selon que la dimension de l'anneau $\mathcal{O}^B_{X,Y}$ des invariants par B de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,Y}$ de Y est de dimension 1 ou 0.

Si $\dim(\mathcal{O}^B_{X,Y}) = 1$ on dit que Y est de type I et on vérifie que Y ne peut intersecter que des B-cartes $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ de même type c'est-à-dire telles que $\dim(\overset{\circ}{\mathrm{X}}//B)=1$.

Si $\dim(\mathcal{O}^B_{X,Y}) = 0$ alors Y est dit de type II. On montre que Y ne peut intersecter qu'une seule B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ et que $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ est alors de type II c'est-à-dire qu'elle vérifie $\dim(\overset{\circ}{\mathrm{X}}//B)= 0$.

Dans tous les cas $T \cong \mathbb{C}^* \subset SL_2$ a une action sur $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ pour laquelle p est l'unique point fixe.

Dans le cas d'une orbite Y de type I, on montre que, quitte à remplacer Y, X par Y',X' tels que $\mathcal{O}_{X,Y} = \mathcal{O}_{X',Y'}$, on peut choisir la B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ (dans X') telle que le quotient $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ soit une surface affine torique. L'action du tore $(\mathbb{C}^*)^2$ sur $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ prolonge celle de $T \cong \mathbb{C}^*$ décrite ci-dessus. Les caractères correspondant aux $(\mathbb{C}^*)^2$-vecteurs propres de $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U\ ]$ forment un cône de $\mathbb{Z}^2$ engendré par deux éléments primitifs u_1, u_2. La condition de lissité de p dans $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ est élémentaire : u_1, u_2 doivent engendrer $\mathbb{Z}^2$ c'est-à-dire $|\det(u_1, u_2)| = 1$.

Dans le cas d'une orbite Y de type II, Y n'intersecte qu'une seule B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$. Si le point p est lisse dans $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ on montre que $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ est encore une surface torique pour une action de $(\mathbb{C}^*)^2$ prolongeant celle de $\mathbb{C}^*$, action que l'on peut décrire précisément en fonction des données qui définissent $\mathcal{O}_{X,Y}$ dans la classification de Luna-Vust.

Cette preuve apporte une information supplémentaire sur la géométrie des plongements lisses (voir l'introduction du chapitre 5) :

> Si X est un plongement lisse de SL_2/H alors tout point de X appartient à un ouvert isomorphe à $\mathbb{C}^3$ ou à $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}^2 \setminus l)$ où $\mathbb{C}^2$ est muni d'une certaine action de $\mathbb{C}^*$ pour laquelle l est une $\mathbb{C}^*$-orbite.

Dans le cas des SL_2-orbites de type I nous donnerons, sur une suggestion de M.Brion, une autre démonstration des conditions de régularité de $\mathcal{O}_{X,Y}$ reposant sur le théorème du slice étale de Luna ([L]). Cette autre preuve permet de mieux comprendre la formulation des conditions de régularité.

1.3 Modèles mimimaux

Après l'obtention des conditions de lissité des plongements de SL_2 ou $SL_2/\{\pm Id\}$ le travail de L.Moser a consisté à relier la géométrie d'un plongement aux informations lisibles sur son diagramme de Luna-Vust. Elle a en particulier dans [M1] et [M2] établi la liste de tous les modèles minimaux. Pour H fixé on dit qu'un plongement est mimimal si c'est un plongement homogène lisse et complet de SL_2/H qui ne peut pas être obtenu par éclatement (SL_2-équivariant) d'un autre plongement homogène lisse et complet de SL_2/H. Dans [M3] elle a étudié les anneaux de Chow des plongements de SL_2 et donné un critère de projectivité des plongements lisses et complets de SL_2.

Avec notre description de tous les plongements lisses de SL_2/H pour un sous-groupe fini H quelconque de SL_2 il devient naturel de chercher à étendre les résultats précédents. C'est ce que nous avons fait pour les modèles minimaux (section 6) et le critère de quasiprojectivité (section 6.7.1).

Pour les modèles minimaux nous avons suivi la méthode de L.Moser [M1] avec comme unique différence que les suites de fractions adjacentes sont remplacées par des suites de fractions c-adjacentes (voir définitions 4.3.1 et 4.3.2). Au cours de la démonstration nous indiquons comment on peut déterminer (dans la classification de Luna-Vust) l'éclaté d'un plongement lisse quelconque de SL_2/H le long d'une orbite de dimension 1. La liste des diagrammes des modèles minimaux pour chaque type de sous-groupe H est donnée à la section 6.2.

Pour H fini quelconque les plongements minimaux de SL_2/H avaient déjà été trouvés et décrits par Nakano dans le cas projectif à l'aide de la théorie de Mori [Nak]. Au § 6.7 nous établissons la correspondance entre nos listes de diagrammes des plongements minimaux projectifs et les listes de Nakano.

1.4 critère de quasi-projectivité

Pour un plongement homogène quelconque de SL_2/H, c'est-à-dire qui n'est pas nécessairement lisse ou complet, nous démontrons au § 6.7.1 un critère pour déterminer si la variété du plongement est quasi-projective en fonction de son diagramme. En particulier, dans le cas où H est cyclique d'ordre n, nous mettons en évidence un plongement minimal non projectif qui contient un nombre d'orbites qui croît avec n.

La preuve que nous donnons de ce critère est une application d'un critère d'amplitude des diviseurs de Cartier dans le cadre plus général des plongements de G/H avec G réductif et G/H de complexité 1 [Tim2]. Nous déterminons explicitement un diviseur ample pour tous les plongements projectifs de SL_2/H.

1.5 Plongements magnifiques

En utilisant notre détermination combinatoire complète de tous les plongements lisses nous retrouvons au § 6.1 un résultat de D.Luna sur l'inexistence de plongement magnifique de SL_2/H. On montre en particulier que tout plongement de SL_2/H contenant exactement l'orbite ouverte, une orbite de dimension 1 et deux orbites de dimension 2 est tel que les fermetures des orbites de dimension 2 s'intersectent tangentiellement en l'orbite de dimension 1.

1.6 Plongements projectifs avec une seule orbite fermée

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et e un élément de $(\mathbb{P}^1)^n$ dont toutes les coordonnées sont distinctes. Alessandra Iozzi et Jonathan Poritz on démontré dans [I-P] que la fermeture $\overline{Sl_2.e}$ de l'orbite de e pour l'action diagonale de SL_2 sur $(\mathbb{P}^1)^n$ est normale (mais singulière si $n > 3$). Ils ont montré qu'un SL_2-automorphisme de $\overline{Sl_2.e}$ ne peut être que la restriction d'une permutation des n coordonnées de $(\mathbb{P}^1)^n$. En utilisant ces résultats on donne à la section 6.8 une description comme fermeture d'orbite dans des produits de $\mathbb{P}^i$, de tous les plongements lisses et complets de SL_2/H avec une seule orbite de dimension 1. La lissité de ces plongements peut être démontrée d'une manière complétement indépendante de la théorie de Luna-Vust. Nous en donnons un exemple à l'annexe C dans le cas où H est cyclique d'ordre pair.

Chapitre 2

La théorie de Luna-Vust

2.1 Détermination d'un plongement homogène par les anneaux locaux de ses orbites

Il s'agit ici d'un résumé. Les détails et les preuves se trouvent dans l'article de D.Luna et T.Vust [LV]. L'article de Timashev [Tim], auquel nous empruntons certaines notations, contient également un exposé de la théorie avec des généralisations et des variantes dans les démonstrations.

On se restreint encore dans ce chapitre au corps de base $\mathbb{C}$. Soit G un groupe algébrique affine connexe et H un sous-groupe algébrique de G (non nécessairement connexe). Un plongement homogène de G/H est une variété algébrique irréductible X (non nécessairement quasi-projective) munie d'une action algébrique de G et d'un isomorphisme G-équivariant de G/H sur une orbite ouverte de X.

La classification de Luna-Vust des plongements homogènes de G/H s'applique au cas où G est réductif connexe, d'anneau de fonctions régulières $\mathbb{C}[G]$ factoriel et où X est une variété irréductible normale.

Soit K le corps des fonctions rationnelles de l'espace homogène G/H. Considérant l'isomorphisme entre G/H et l'orbite ouverte de X, l'anneau local de toute sous-variété algébrique de X peut être vu comme un sous-anneau de K. Il est alors naturel d'identifier X à l'ensemble des anneaux locaux de toutes ses sous-variétés muni de la structure de faisceau algébrique induite par la structure de faisceau algébrique sur l'ensemble $\mathcal{L}(K)$ des localités géométriques de K.

Une localité géométrique de K est par définition une sous-algèbre de K qui peut être réalisée comme le localisé en un idéal premier d'une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini de K, de corps de fractions K. L'ensemble $\mathcal{L}(K)$ de ces localités géométriques est muni de la topologie de Zariski : un ouvert de base $V(A)$ de cette topologie est l'ensemble des localisés en tous ses idéaux premiers d'une algèbre de type fini A quelconque de K, de corps de fractions K.

Considérons maintenant l'anneau local $\mathcal{O}_{X,Y}$ d'une certaine G-orbite Y de X.

L'action de G sur G/H par translation à gauche induit une action de G sur $K = \mathbb{C}(G/H)$ ($g \in G$, $f \in K$, $(g.f)(?) = f(g^{-1}.?)$) et une action de l'algèbre de Lie de G sur K (par dérivation). L'anneau local $\mathcal{O}_{X,Y}$ appartient alors au sous-ensemble $\mathcal{L}_1(K)$ de $\mathcal{L}(K)$ formé des localités géométriques stables par G et par l'algèbre de Lie de G. Un élément de $\mathcal{L}_1(K)$ sera appelé dans toute la suite un G-germe. On peut montrer que X est en fait entièrement déterminé par l'ensemble $\mathcal{L}(X)$ des G-germes associés à toutes ses G-orbites.

Le programme consiste donc d'abord à décrire les G-germes, ce qui se fait de façon combinatoire simple dans le cas $G = SL_2(\mathbb{C})$, puis à décrire des conditions pour qu'une collection de G-germes soit effectivement l'ensemble $\mathcal{L}(X)$ d'un plongement homogène X de G/H.

Si $\mathcal{O}$ est un G-germe, une réalisation géométrique de $\mathcal{O}$ est un plongement homogène X de G/H tel que $\mathcal{O}$ soit l'anneau local d'une G-orbite Y de X. On montre que tout G-germe admet une réalisation géométrique.

Si X est un plongement fixé de G/H l'application qui à toute G-orbite Y associe son anneau local $\mathcal{O}_{X,Y}$ est injective. On se permettra souvent dans ce cas de confondre Y et $\mathcal{O}_{X,Y}$. De même si D est un diviseur premier de X, on admettra la confusion entre D et v_D, la valuation discrète associée. Pour les questions purement locales, comme celle de la régularité d'un G-germe $\mathcal{O}$, on ne précise pas nécessairement une réalisation géométrique $Y \subset X$ telle que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,Y}$.

2.2 Utilisation des B-cartes intersectant une G-orbite.

X étant un plongement homogène de G/H, une B-carte affine $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ de X est un ouvert affine stable par B où B est un sous-groupe de Borel fixé de G. Si X est un plongement homogène normal de G/H et Y une sous variété fermée de X stable par G alors il existe une B-carte affine $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ de X qui intersecte Y. Ce résultat s'appuie sur le théorème suivant dû à Sumihiro :

> Si G est réductif et X est une G-variété normale alors tout point x de X est contenu dans un ouvert G-stable $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ qui est G-isomorphe à une variété quasi-projective où G agit par automorphismes de l'espace projectif.

Rappelons que dans le cas où G est un tore, Sumihiro montre que l'on peut choisir $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ affine. C'est le point de départ de la classification des variétés toriques. Dans le cas G réductif on doit se restreindre à un ouvert stable par B pour garder un ouvert affine ([LV], [Br]).

Convention : L'hypothèse de normalité étant essentielle pour le résultat de Sumihiro et par conséquent pour la classification de Luna-Vust, on supposera doré-

navant que tous les plongements homogènes considérés seront normaux.

Soit $\mathring{X}$ une B-carte affine d'un plongement X de G/H. Comme $\mathring{X}$ est normal son anneau de fonctions régulières $\mathbb{C}[\mathring{X}]$ est intégralement clos. Comme il est également noetherien c'est un anneau de Krull [Bou] et en particulier $\mathbb{C}[\mathring{X}] = \bigcap_p \mathbb{C}[\mathring{X}]_p$ où p décrit l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de $\mathbb{C}[\mathring{X}]$.

$\mathbb{C}[\mathring{X}]_p$ est l'anneau d'une valuation discrète de K, appelée valuation essentielle de $\mathbb{C}[\mathring{X}]$ et si l'idéal p n'est pas stable par G alors p définit un diviseur de $\mathring{X}$ dont la fermeture dans X intersecte G/H en un diviseur premier. Les valuations qui nous intéressent sont donc les suivantes :

1. $\mathcal{V}$: ensemble des valuations discrètes géométriques (l'anneau de valuation est une localité géométrique) G-invariantes de K. En utilisant la réductivité de G on montre qu'un élément v de $\mathcal{V}$ est entièrement déterminé par sa restriction à $K^{(B)}$ où $K^{(B)}$ désigne l'ensemble des éléments de K qui sont semi-invariants sous l'action de B.
2. $\mathcal{D}$: ensemble des diviseurs premiers de G/H, ou par abus de langage ensemble de leurs valuations associées. On note v_D la valuation associée au diviseur $D \in \mathcal{D}$.
3. $\mathcal{D}^B$: ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ qui sont stables par B. Les valuations associées sont toutes les valuations discrètes géométriques B-invariantes, non G-invariantes, de $\mathbb{C}(SL_2/H)$.

Si $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^B$ alors sa fermeture $\overline{D}$ intersecte $\mathring{X}$ car sinon ce serait une composante irréductible de codimension 1 de $(G/H)\setminus\mathring{X}$ c'est-à-dire un diviseur premier B-stable. En particulier v_D est essentiel pour $\mathbb{C}[\mathring{X}]$. On a donc :

$$\mathbb{C}[\mathring{X}] = \bigcap_{w\in\mathcal{W}} \mathcal{O}_w \cap \bigcap_{D\in\mathcal{R}} \mathcal{O}_{v_D} \cap \bigcap_{D\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^B} \mathcal{O}_{v_D}$$

où $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}^B$.

$\mathcal{W}$ est fini car si X est un plongement homogène de G/H contenant $\mathring{X}$ alors les éléments de $\mathcal{W}$ sont les valuations associées aux composantes irréductibles de codimension 1 de $X \setminus (G/H)$ (nécessairement G-stables car G est connexe) qui intersectent $\mathring{X}$. Par contre $\mathcal{R}$ est cofini, c'est-à-dire de complémentaire fini dans $\mathcal{D}^B$. En effet si un diviseur premier B-stable de G/H a une fermeture dans X qui n'intersecte pas $\mathring{X}$ alors c'est l'une des composantes irréductibles de codimension 1 (B-stables car B est connexe) du complémentaire de $\mathring{X}$ dans G/H.

Luna et Vust donnent ensuite des conditions sur le choix de $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}^B$ pour que $(\bigcap_{w\in\mathcal{W}} \mathcal{O}_w) \cap (\bigcap_{D\in\mathcal{R}} \mathcal{O}_{v_D}) \cap (\bigcap_{D\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^B} \mathcal{O}_{v_D})$ soit l'anneau des fonctions

régulières d'une B-carte $\mathring{X}$: on dit alors que $\mathcal{W}$ et $\mathcal{R}$ définissent $\mathring{X}$. Une présentation des conditions de Luna-Vust est donnée par Timashev dans [Tim]. Nous la rappelons en 5.4 p 43 car elle nous sera utile pour l'étude de la régularité de l'anneau local d'une orbite.

Considérons maintenant un G-germe $\mathcal{O}$ de réalisation géométrique $Y \subset X$ ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,Y}$) et $\mathring{X}$ une B-carte affine de X qui intersecte Y en $\mathring{Y}$ d'idéal premier $I \subset \mathbb{C}[\mathring{X}]$. Alors $\mathcal{O} = \mathbb{C}[\mathring{X}]_I$ est encore un anneau de Krull et donc on a $\mathcal{O} = \bigcap_p \mathbb{C}[\mathring{X}]_p$ où cette fois p décrit l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbb{C}[\mathring{X}]$ de hauteur 1 contenus dans I. On peut alors montrer que parmi ceux-ci les idéaux p stables par B suffisent à déterminer $\mathcal{O}$. Autrement dit les sous-ensembles $\mathcal{V}(Y)$ et $\mathcal{D}^B(Y)$ de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{R}$ correspondant aux valuations associées aux diviseurs premiers B-stables contenant $\mathring{Y}$ déterminent entièrement le G-germe $\mathcal{O}$. Evidemment $\mathcal{V}(Y)$ et $\mathcal{D}^B(Y)$ ne dépendent ni de la réalisation géométrique de $\mathcal{O}$ ni de la B-carte choisie mais uniquement du G-germe. Ils forment avec $\mathcal{D} \backslash \mathcal{D}^B$ l'ensemble des valuations essentielles de $\mathcal{O}$. On poura donc noter $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{D}^B(\mathcal{O})$ au lieu de $\mathcal{V}(Y)$ et $\mathcal{D}^B(Y)$.

Définition 2.2.1 *Nous appellerons simplement B-carte un ouvert affine B-stable d'un certain plongement de G/H ou encore son anneau $\mathbb{C}[\mathring{X}]$. Une B-carte est donc définie par les ensembles $\mathcal{W}(\mathring{X})$ et $\mathcal{R}(\mathring{X})$.*

Définition 2.2.2 *Soit $G/H \overset{i}{\hookrightarrow} X$ un plongement homogène. Appelons squelette de X l'ensemble* $\mathrm{Sk}(X)$ *des valuations associées à tous les diviseurs premiers G-stables de X.*

Remarque 2.2.3 *Si $\mathring{X} \subset X$ est une B-carte alors $\mathring{X}$ est le complémentaire dans X de la réunion des diviseurs D_v (D_v unique diviseur de X associé à la valuation v) quand v parcourt l'ensemble fini* $(\mathrm{Sk}(X) \setminus \mathcal{W}) \cup (\mathcal{D}^B \setminus \mathcal{R})$.

Pour que $\mathring{X}$ soit inclus dans un plongement X fixé il est nécessaire que $\mathcal{W}$ soit inclus dans le squelette $\mathrm{Sk}(X)$ *de X.*

Définition 2.2.4 *Nous dirons que le G-germe $\mathcal{O}$ est le localisé d'une B-carte $\mathring{X}$ pour dire que $\mathcal{O}$ est un localisé de $\mathbb{C}[\mathring{X}]$ ou encore que l'ensemble $\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cup \mathcal{D}^B(\mathcal{O})$ des valuations essentielles de $\mathcal{O}$ invariantes par B est inclus dans $\mathcal{W}(\mathring{X}) \cup \mathcal{R}(\mathring{X})$.*

Notons que d'après cette définition et la remarque précédente si on a $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,Y}$ pour un plongement X et une orbite Y de X alors $\mathcal{O}$ peut être le localisé d'une B-carte $\mathring{X}$' d'un plongement X' différent de X.

Un autre point de vue est le suivant. On définit la facette de $\mathcal{O}$ comme l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ des valuations $v \in \mathcal{V}$ qui dominent $\mathcal{O}$. Le centre d'une valuation v quelconque de $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ dans $\mathring{X}$ est $\mathring{Y}$. Donc $\mathcal{W}(\mathring{X})$, $\mathcal{R}(\mathring{X})$ et v déterminent $\mathcal{O}$. L'introduction des facettes pour la description des G-orbites permet de donner des conditions simples

pour la séparabilité et la complétude d'un plongement homogène. On reviendra sur ce point lors de l'étude des plongements minimaux.

Dans le cas $G = SL_2(\mathbb{C})$ et H fini, Luna et Vust déduisent de leur étude une classification des G-orbites des plongements homogènes de G/H. Pour exposer cette classification nous avons besoin de décrire plus précisément l'ensemble $\mathcal{V}$ des valuations G-invariantes de $K = \mathbb{C}(G/H) = \mathbb{C}(G)^H$ et l'ensemble $\mathcal{D}^B$ des diviseurs premiers B-stables de G/H. C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Plongements homogènes de SL_2/H

Notations :

- $SL_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix} \right), x, y, z, w \in \mathbb{C},\ xw - yz = 1 \right\}$. En particulier $\mathbb{C}(SL_2) = \mathbb{C}(x, y, z, w)$.
- $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{smallmatrix} \right) \right\}$, $U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix} \right) \right\}$ et $T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \right) \right\}$.

3.1 Sous-groupes finis de SL_2

Soit H un sous-groupe fini de SL_2 et $\widetilde{H}$, de cardinal n, son image dans $SL_2/\{\pm Id\}$ (identifié au groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^1$).

Les sous-groupes finis de SL_2 sont de cinq types : cycliques, binaires diédraux, tétraédraux, octatédraux et icosaédraux. Deux groupes de même type et de même ordre sont conjugués (ces résultats sont dûs à F.Klein, une preuve se trouve par exemple dans [Sp]). On a $\mathrm{card}\,(H) = \mathrm{card}(\widetilde{H})$ si et seulement si $-Id \notin H$, ce qui n'est le cas que si H est cyclique d'ordre impair.

Soit X un plongement homogène de SL_2/H de point de base e. Un autre point $e' = \sigma.e$ ($\sigma \in SL_2$) de l'orbite ouverte a pour sous groupe d'isotropie $\sigma H \sigma^{-1}$. Donc X peut être vu comme un plongement homogène de $SL_2/(\sigma H \sigma^{-1})$ avec pour point de base e'. Si l'on choisit pour chaque type de sous-groupe fini de SL_2 un groupe H auquel tous les autres groupes de même type sont conjugués, la connaissance des plongements homogènes de SL_2/H suffit à déterminer tous les plongements de SL_2/H' pour H' de même type que (i.e conjugué à) H.

Notations :

- n_j : cardinal d'une orbite j de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de H ($j \in \mathbb{P}^1/H$).
- c_j : ordre du sous-groupe d'isotropie d'un élément quelconque d'une orbite j de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de H. On a $c_j = \mathrm{card}\,(H)\,/n_j$.

– $\widetilde{c}_j$: ordre du sous-groupe d'isotropie d'un élément quelconque d'une orbite j de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de $\widetilde{H}$. En particulier $\widetilde{c}_j = c_j$ si card (H) est impair et $\widetilde{c}_j = c_j/2$ si card (H) est pair.

Deux orbites j et j' de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de H sont dites conjuguées quand il existe σ dans le normalisateur de H dans SL_2 tel que $\sigma.j = j'$. Par exemple, deux orbites non génériques (c'est-à-dire ici de cardinal non maximal) sont conjuguées si et seulement si elles ont même cardinal.

3.1.1 Cas où H est binaire diédral, tétraédral, octatédral ou icosaédral.

On a alors $-Id \in H$ d'où $n = \text{card}(\widetilde{H}) = \frac{1}{2}\text{card}\,(H)$. Par ailleurs on peut supposer, quitte à remplacer H par l'un de ses conjugués, que $\widetilde{H} \subset SU_2\,(\mathbb{C})\,/\{\pm id\}$ où $SU_2\,(\mathbb{C}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right) / a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1\}$. En identifiant $\mathbb{P}^1$ à une sphère S par projection stéréographique on a $PSU_2\,(\mathbb{C}) \simeq SO_3\,(\mathbb{R})$ et $\widetilde{\mathrm{H}}$ est alors le groupe des rotations laissant invariant un certain polyèdre (régulier dans le cas non diédral) $P \subset \mathbb{R}^3$. L'ensemble des sommets de P forment une orbite v (vertex) sous l'action de $\widetilde{\mathrm{H}}$, les centres des faces de P forment une autre orbite f (face) et les milieux des côtés une orbite e (edge). Les autres orbites ω sont dites génériques. Les orbites non génériques de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de H correspondant à v, f, e sont définies sans ambiguïté seulement quand elles peuvent se distinguer par leur cardinal sinon elles ne sont connues qu'à conjugaison près. Par exemple dans le cas où H est binaire diédral d'ordre $4k$, f et e sont toujours conjuguées et si H est binaire diédral d'ordre 8 ($k = 2$) alors v, f et e sont conjuguées.

Remarque : v peut représenter dans certains cas une valuation. Le contexte suffit pour lever l'ambiguïté, par exemple $v\,(v, r)$ est la valuation SL_2-invariante associée à $v \in \mathbb{P}^1/H$ et $r \in \mathbb{Q}$ (§ 5.4.2 p. 45).

Si H est binaire diédral et $k = 1$ alors H est également cyclique (d'ordre 4). Nous conviendrons de ne pas inclure ce cas dans les diédraux : un groupe binaire diédral sera toujours supposé d'ordre strictement supérieur à 4 ($k \geq 2$).

Dans le tableau suivant ω représente une orbite générique de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de H.

$\widetilde{\mathrm{H}}$	$n = n_\omega$	n_v	n_f	n_e	$\widetilde{c}_\omega$	$\widetilde{c}_v$	$\widetilde{c}_f$	$\widetilde{c}_e$
diédral	$2k$	2	k	k	1	k	2	2
tétraédral	12	4	4	6	1	3	3	2
octaédral	24	6	8	12	1	4	3	2
icosaédral	60	12	20	30	1	5	3	2

TAB. 3.1: valeurs des n_i et des $\widetilde{c}_i$ dans le cas non cyclique

Les n_i et les c_i vérifient les relations :

$$n_v + n_f + n_e = n_\omega + 2$$
$$\text{c'est-à-dire } \frac{1}{c_v} + \frac{1}{c_f} + \frac{1}{c_e} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n_\omega}$$

3.1.2 Cas où H est cyclique.

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et H le sous-groupe cyclique d'ordre k de $SL_2(\mathbb{C})$ engendré par $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ où ε est une racine primitive k ème de 1.

Sous l'action de H (ou son image $\widetilde{H}$ dans $PSL_2(\mathbb{C})$) sur $\mathbb{P}^1$ on a deux points fixes qui sont $0 = \{[0:1]\}$ et $\infty = \{[1:0]\}$. Les autres orbites, dites génériques, sont de cardinal $\text{card}(\widetilde{H}) = k/2$ si k est pair et $\text{card}(\widetilde{H}) = k$ si k est impair.

$\text{card}(H) = k$	n_ω	n_0	n_∞	$\widetilde{c}_\omega$	$\widetilde{c}_0$	$\widetilde{c}_\infty$
impair	k	1	1	1	k	k
pair	$k/2$	1	1	1	$k/2$	$k/2$

TAB. 3.2: valeurs des n_i et des $\widetilde{c}_i$ dans le cas cyclique

Pour $k = 1, 2$ la régularité des orbites d'un plongement homogène de SL_2/H a été entièrement étudiée dans [M2]. Ces deux cas se distinguent des autres cas cycliques par le fait que H opère trivialement dans $\mathbb{P}^1$. Les techniques d'étude de la régularité d'une SL_2-orbite que nous exposerons sont valables pour un groupe cyclique d'ordre k quelconque mais pour ne pas alourdir les preuves nous ne réécrirons pas les cas $k = 1$ et 2, déjà traités par L.Moser ([M1], [M2]).

3.2 Vecteurs propres de $\mathbb{C}(SL_2)$ sous l'action de B et H

Puisque B est de codimension 1 dans SL_2, l'ensemble des diviseurs premiers de SL_2 stables par B est simplement l'ensemble $SL_2/B \simeq \mathbb{P}^1$ des B-orbites de SL_2. Donc $\mathcal{D}^B$ peut s'identifier à $\mathbb{P}^1/H$.

Pour la description d'un élément ω de $\mathcal{D}^B$ il est commode de considérer sa préimage D par l'application quotient $SL_2 \to SL_2/H$. Cette préimage est une réunion de diviseurs premiers stables par B de SL_2 et $D = g_\omega^{-1}(0)$ où g_ω est le produit des fonctions qui définissent (à coefficient multiplicatif près) chacun de ces diviseurs (SL_2

est factoriel). Par sa définition g_ω est un élément de $\mathbb{C}(SL_2)$ semi-invariant pour les actions de B et de H.

Notons $\mathbb{C}(SL_2)^{(B)}$ l'ensemble des vecteurs propres de $\mathbb{C}(SL_2)$ sous l'action par translation à gauche de B. On vérifie que $\mathbb{C}(SL_2)^{(B)}$ est le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}(x,y)$ engendré par $(\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y) \setminus \{0\}$.

Notons $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B)}$ qui sont également vecteurs propres sous l'action par translation à droite de H. Dans la suite B (ou SL_2) opérera toujours par translation à gauche et H par translation à droite.

A tout élément $\omega = \{[a_1 : b_1], \ldots, [a_{n_\omega} : b_{n_\omega}]\} = \widetilde{H}.[a_1 : b_1]$ de $\mathbb{P}^1/H = \mathcal{D}^B$ associons l'élément

$$\boxed{g_\omega = \prod_i = 1^{n_\omega}(a_i x + b_i y) \in \mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}}$$

Par définition g_ω est défini à un coefficient multiplicatif près par le choix des représentants (a_i, b_i) des $[a_i : b_i]$. Cette indétermination n'intervient ni pour le degré de g_ω, ni pour le caractère de H associé à g_ω comme vecteur propre, ni dans le calcul de $v(g_\omega)$ où v est une valuation de $\mathbb{C}(SL_2)$. Les g_ω engendrent le groupe multiplicatif $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$:

> *Tout élément g de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$ s'écrit de manière unique (à coefficient multiplicatif près) sous la forme $\prod (g_\omega)^{m_\omega}$ $(m_\omega \in \mathbb{Z})$*

Preuve : Soit $g = \frac{g_1}{g_2} \in \mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$ avec $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[SL_2]^{(B)} = \mathbb{C}[x,y]$

En multipliant haut et bas par $\prod_{\sigma\in H, \sigma\neq Id} \sigma.g_2$ on peut considérer que g_1 et g_2 sont tous deux dans $\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}$. Donc on peut supposer dans la preuve que $g \in \mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}$.

Associons à chaque élément p de $\mathbb{P}^1$ un élément $g_p = ax + by$ de $\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$ tel que $[a : b] = p$ et pour $h, k \in \mathbb{C}(x,y)$ notons $h \sim k$ quand il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $h = \lambda k$. Ainsi $g \in \mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$ signifie que pour tout $\sigma \in H$, $\sigma.g \sim g$.

La décomposition en facteurs premiers de g (homogène) dans $\mathbb{C}[x,y]$ assure l'existence d'un sous-ensemble fini $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^1$ tel que $g \sim \prod_{p\in\mathcal{F}} (g_p)^{m_p}$. Par ailleurs, on vérifie que $\sigma.g_p \sim g_{\sigma.p}$ pour $\sigma \in H$. De $\sigma.g \sim \sigma.\left(\prod_{p\in\mathcal{F}} (g_p)^{m_p}\right) \sim \prod_{p\in\mathcal{F}} (g_{\sigma.p})^{m_p}$ et $g \sim \sigma.g$ on déduit alors que l'ensemble $\mathcal{F}$ est stable par H et que les éléments p d'une même orbite de $\mathcal{F}$ sous l'action de H ont même multiplicité m_p.

□

3.3 Espace vectoriel $\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{n,\chi 0}$.

Dans ce paragraphe nous rappelons un résultat qui nous sera utile dans certains calculs (par exemple 5.4.1 p. 44) :

les $g_j{}^{\widetilde{c}_j}$ pour $j \in \mathbb{P}^1/H$ ont même degré n et même caractère χ_0 pour H et engendrent un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

Pour le voir simplement, commençons par fixer un représentant $\sigma_i \in H$ pour chaque élément de $\widetilde{H}$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ on pose $g_\lambda = \prod_{i=1\ldots n} \sigma_i.(\lambda x + y)$ ($g_\lambda \sim g_\omega$ quand $\omega = \widetilde{H}.[\lambda, 1]$ est générique). Si $h \in H$ on définit $\chi(h,\lambda)$ par $h.g_\lambda = \chi(h,\lambda)g_\lambda$. Ainsi, λ étant fixé, $h \mapsto \chi(h,\lambda)$ est un caractère de H. Mais H et son groupe des caractères étant finis $\chi(h,\lambda)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Or, par un simple calcul, on voit que $\chi(h,\lambda)$ est rationnel et donc continu en λ. Donc $\chi(h,\lambda)$ est constant pour h fixé. Les $\omega = \widetilde{H}.[\lambda, 1]$ génériques (on doit éliminer quelques valeurs de λ) ont donc même caractère χ_0.

De plus si $\widetilde{H}.[\lambda : 1]$ est non générique, par exemple dans le cas non cyclique si $\widetilde{H}.[\lambda, 1] = v$, on a $g_\lambda = g_v{}^{\widetilde{c}_v}$ qui a même caractère χ_0 que les g_ω génériques.

En réalité les $g_j{}^{\widetilde{c}_j}$ pour $j \in \mathbb{P}^1/H$ forment un espace vectoriel de dimension 2, l'espace propre $\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{n,\chi_0}$. Ce fait, signalé par Timashev dans [Tim] se démontre facilement à partir du théorème de Lüroth. En effet $\mathbb{C} \subsetneq \mathbb{C}(SL_2/B)^H \subset \mathbb{C}(SL_2/B) \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$, d'où $\mathbb{C}(SL_2/B)^H = \mathbb{C}(t)$ avec $t = a/b$, a, b homogènes de même degré dans $\mathbb{C}[x,y]$, de même caractère χ_0 pour H et sans facteur commun dans $\mathbb{C}[x,y]$. On peut ensuite montrer que a et b engendrent $\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{n,\chi_0}$.

Exemple : supposons que H soit le sous-groupe binaire tétraédral de SL_2 engendré par

$$a' = i\sqrt{3}/3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , r' = \begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}$$

Comme sous-groupe d'automorphismes de $\mathbb{P}^1$, $\widetilde{H}$ est engendré par $a : z \mapsto \frac{z+2}{z-1}$ d'ordre 2 et $r : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ d'ordre 3.

Ici $n = 12$, $n_v = n_f = 4$ et $n_e = 6$.

$v = \widetilde{H}.[1 : 1]$, $f = \widetilde{H}.[0 : 1]$, $e = \widetilde{H}.[\alpha : 1]$ avec $\alpha = 1 + \sqrt{3}$.

ω générique est de la forme $\widetilde{H}.[\lambda : 1]$ avec $[\lambda : 1] \notin v, f$ ou e. On pose $\beta = 1 - \sqrt{3}$.

$$g_v = (x+y)\,x\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}x + y\right)\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}x + y\right) = 4x\left(x^3 + y^3\right)$$

$$g_f = y\,(-2x+y)\left(-2e^{i\frac{2\pi}{3}}x + y\right)\left(-2e^{i\frac{4\pi}{3}}x + y\right) = y\left(-8x^3 + y^3\right)$$

$$\begin{aligned} g_e &= (\alpha x + y)\left(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}x + y\right)\left(\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}x + y\right)(\beta x + y)\left(\beta e^{i\frac{2\pi}{3}}x + y\right)\left(\beta e^{i\frac{4\pi}{3}}x + y\right) \\ &= \left(\alpha^3 x^3 + y^3\right)\left(\beta^3 x^3 + y^3\right) \end{aligned}$$

$$g_\omega = \prod_{i=1}^{12} \sigma_i.(\lambda x + y)$$

On vérifie que $g_e^2 = g_v^3 + g_f^3$ et $g_\omega = \left(\frac{\lambda(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+4)}{4(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}\right)^3 g_v^3 + g_f^3$ (Maple)

On se reportera à l'annexe A p. 131 pour le calcul des caractères des éléments de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$ sous les actions de B et H et la détermination de $\mathbb{C}[SL_2]_{n,\chi_0}^{(B\times H)}$ pour chaque type de sous-groupe H.

3.4 Valuations discrètes de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ invariantes par SL_2

SL_2 est un groupe réductif et la connaissance de ses représentations linéaires irréductibles donne une forme particulièrement simple aux valuations discrètes de $\mathbb{C}(SL_2)$ et de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ invariantes par SL_2. Leur calcul se trouve déjà dans l'article de Luna et Vust dans le cas $H = \{id\}$ et il a été généralisé à H quelconque par L.Moser dans sa thèse [M1]. Nous reprenons ici son point de vue et ses notations.

- $\mathcal{V}$ est l'ensemble des valuations discrètes normalisées géométriques de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ invariantes par SL_2. Pour la normalisation, plutôt que de considérer que le groupe des ordres (valeurs) de $v \in \mathcal{V}$ est $\mathbb{Z}$ on impose que le minimum de v sur $\{g_j^{c_j},\ j \in \mathbb{P}^1/H\}$ soit -1.
- $\mathcal{V}_1$ est le sous-ensemble de $\mathcal{V}$ formé des valuations v telles que $\mathbb{C}_v^{SL_2} \simeq \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}_v$ est le corps résiduel de v et $\mathbb{C}_v^{SL_2}$ le sous-corps de ses invariants par SL_2. C'est l'ensemble des valuations associées aux SL_2-orbites de codimension 1 des plongements homogènes de SL_2/H.
- $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1$ est en fait constitué de l'unique élément de $\mathcal{V}$ qui vaut -1 sur l'ensemble $\{g_j^{c_j},\ j \in \mathbb{P}^1/H\}$.

Proposition 1.2.4 p. 12 de [M1] :
Soit $\omega_0 \in \mathbb{P}^1/H$ de cardinal n_{ω_0} et $r_0 \in \mathbb{Q}\cap[-1, \frac{2}{n_{\omega_0}} - 1]$.
Il existe une unique valuation $v(\omega_0, r_0) \in \mathcal{V}$, invariante par SL_2, vérifiant :

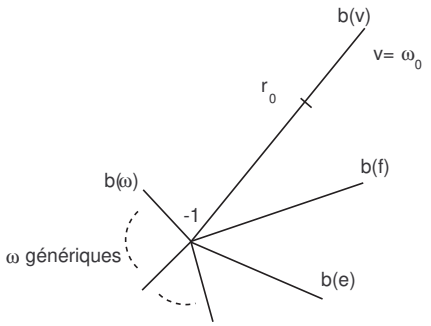
$$\begin{cases} v(\omega_0, r_0)\left(g_j^{c_j}\right) &= -1 \text{ si } j \neq \omega_0 \\ v(\omega_0, r_0)\left(g_{\omega_0}^{c_{\omega_0}}\right) &= r_0 \end{cases}$$

et tout élément de $\mathcal{V}$ s'obtient de cette manière.

Notation : pour $j \in \mathbb{P}^1/H$ nous poserons $b(j) = \frac{2}{n_j} - 1$.

L'application qui à $(\omega_0, r_{\omega_0}) \in (\mathbb{P}^1/H) \times (\mathbb{Q}\cap]-1, b(\omega_0)])$ associe $v(\omega_0, r_0) \in \mathcal{V}_1$ est une bijection. Si $r = -1$ alors $v(j, r)$ ne dépend pas de $j \in \mathbb{P}^1/H$. Cette valuation particulière (notée parfois $v(, -1)$)est l'unique élément de $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1$.

Exemple de diagramme de Luna-Vust : sur la figure suivante on associe à chaque élément j de $\mathbb{P}^1/H$ un segment $\mathbb{Q}\cap[-1, b(j)]$ avec une extrémité commune correspondant à l'unique élément de $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1$. On représente $v(\omega_0, r_0)$ par un trait en r_0 sur le segment associé à ω_0.



représentation d'une valuation de $\mathbb{C}(G/H)$ invariante par G (ici H est non cyclique).

3.5 Anneau local d'une orbite

On a vu que suivant la théorie de Luna-Vust un SL_2-germe $\mathcal{O}$, c'est-à-dire l'anneau local d'une orbite Y d'un plongement X de SL_2/H, est déterminé par ses valuations essentielles invariantes par B c'est-à-dire par les ensembles $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{D}^B(\mathcal{O})$. Les B-cartes ayant un rôle important dans toute la suite on décrira également le SL_2-germe $\mathcal{O}$ comme le localisé d'une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ définie par ses ensembles $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathring{\mathrm{X}})$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathring{\mathrm{X}})$. Le choix de la B-carte n'est en général pas unique. Un SL_2-germe $\mathcal{O}$ est donc déterminé par :

- un sous-ensemble cofini $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}^B \cong \mathbb{P}^1/H$.
- un ensemble fini $\mathcal{W}$ de valuations invariantes par SL_2.
  ($\mathcal{R}$ et $\mathcal{W}$ déterminent une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$).
- une valuation $v_0 \in \mathcal{V}_1$ qui domine $\mathcal{O}$.
  ($\mathcal{O}$ est le localisé de $A = \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ en l'idéal premier $\mathcal{M} = \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}] \cap m_{v_0}$).

Suivant Timashev [Tim], on distingue deux types de B-cartes et deux types de SL_2-germes.

Définition 3.5.1 *Soit $\mathring{X}$ une B-carte :*

1. *$\mathring{X}$ est dit de type I quand $\mathbb{C}[\mathring{X}]^B \neq \mathbb{C}$.*
2. *$\mathring{X}$ est dit de type II quand $\mathbb{C}[\mathring{X}]^B = \mathbb{C}$.*

Timashev définit un G-germe de type I comme étant le localisé d'au moins une B-carte de type I et un G-germe de type II comme n'étant le localisé que de B-cartes de type II [Tim, p 380]. Dans le cas d'un SL_2-germe cette définition se réduit à la suivante (preuve à l'annexe B).

Définition 3.5.2 *Soit $\mathcal{O}$ un SL_2-germe.*

1. *$\mathcal{O}$ est de type I quand* $\dim(\mathcal{O}^B) = 1$ *(dimension de Krull).*
2. *$\mathcal{O}$ est de type II quand* $\mathcal{O}^B = \mathbb{C}$.

A l'annexe B on précise la forme de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^B$ et $\mathcal{O}^B$ pour le type I. On démontre en particulier que $\mathcal{O}^B = \mathbb{C}[t]_{(t)}$.

Pour un SL_2-germe de type II localisé d'une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$, on vérifie [Tim] que les valuations essentielles B-invariantes de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ sont exactement les valuations essentielles B-invariantes de $\mathcal{O}$, il n'y a donc qu'un choix possible de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{R}$ et qu'une seule B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ qui se localise en $\mathcal{O}$. Si $Y \subset X$ est une réalisation géométrique de $\mathcal{O}$ c'est-à-dire si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,\overline{Y}}$ avec X un plongement de SL_2/H et Y une SL_2-orbite de X on en déduit qu'il n'existe qu'une seule B-carte $\mathring{\mathrm{X}} \subset X$ qui intersecte Y.

Par contre pour un SL_2-germe $\mathcal{O}$ de type I, les seules contraintes sur $\mathcal{W}$ et $\mathcal{R}$ définissant une B-carte qui se localise en $\mathcal{O}$ sont que

- $\mathcal{W}$ soit fini dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{R}$ cofini dans $\mathcal{D}^B$
- $\mathring{\mathrm{X}}$ soit de type I
- $\mathcal{V}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{W}$ et $\mathcal{D}^B(\mathcal{O}) \subset \mathcal{R}$.

Ces choix sont soumis à certaines conditions qui déterminent finalement 6 types de SL_2-germes ([LV], [M1]) dont nous allons rappeler les définitions dans les sections suivantes.

Dans les descriptions des SL_2-germes nous avons choisi $\mathcal{W} = \mathcal{V}(\mathcal{O})$ (la B-carte est dite adaptée au SL_2-germe $\mathcal{O}$ dans la terminologie de [LV]) et pour $\mathcal{R}$ un élément maximal (pour l'inclusion) parmi tous les $\mathcal{R}$ possibles. On verra par la suite que des choix différents de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{R}$, c'est-à-dire d'une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ se localisant en $\mathcal{O}$, permettent parfois de simplifier l'étude de la régularité de $\mathcal{O}$.

Enfin nous indiquons l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ (la facette de $\mathcal{O}$) des éléments v_0 de $\mathcal{V}_1$ qui dominent $\mathcal{O}$. Ces éléments seront utiles dans la recherche des modèles minimaux à la section 6 p. 69.

Rappel : $b(j) = \frac{2}{n_j} - 1$ pour $j \in \mathbb{P}^1/H$.

3.5.1 SL_2-germes de type C (type I)

Notation : $\mathcal{O} = C(j, r)$.

$\mathcal{O}$ est l'anneau local d'une orbite de codimension 1 ($\dim(\mathcal{O}) = 1$).

On choisit un élément j de $\mathbb{P}^1/H$ et un nombre rationnel r dans $]-1, b(j)]$ définissant une valuation $w = v(j, r)$ de $\mathbb{C}(SL_2/H)$.

$\mathcal{R} = (\mathbb{P}^1/H) \setminus \{j, j^*\}$ (j^* est un élément de $\mathbb{P}^1/H$ différent de j) et $\mathcal{W} = \{w\}$.

Valuations dominant $\mathcal{O}$: $\mathcal{F}(\mathcal{O}) = \{w\}$.

Valuations essentielles $B-$invariantes de $\mathcal{O}$: $\mathcal{V}(\mathcal{O}) = \mathcal{W}$ et $\mathcal{D}^B(\mathcal{O}) = \varnothing$.

3.5.2 SL_2-germes de type AB (type I)

Notation : $\mathcal{O} = AB\,(j, r_1, r_2)$.

$\mathcal{O}$ est l'anneau local d'une orbite de codimension 2.

On choisit un élément j de $\mathbb{P}^1/H$ puis deux nombres rationnels $r_1 < r_2$ dans $[-1, b\,(j)]$ définissant chacun une valuation $w_i = v(j, r_i)$ $(i = 1, 2)$ de $\mathbb{C}\,(SL_2/H)$.

$\mathcal{R} = (\mathbb{P}^1/H) \backslash \{j, j^*\}$ (j^* est un élément de $\mathbb{P}^1/H$ différent de j) et $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$.

Valuations dominant $\mathcal{O}$: $\mathcal{F}\,(\mathcal{O}) = \{v_0 = v\,(j, r_0)\ /\ r_0 \in]r_1, r_2[\cap \mathbb{Q}\}$.

Valuations essentielles B-invariantes de $\mathcal{O}$: $\mathcal{V}\,(\mathcal{O}) = \mathcal{W}$ et $\mathcal{D}^B\,(\mathcal{O}) = \varnothing$.

3.5.3 SL_2-germes de type B_+ (type I)

Notation : $\mathcal{O} = B_+\,(j, r)$.

$\mathcal{O}$ est l'anneau local d'une orbite de codimension 2.

On choisit un élément j de $\mathbb{P}^1/H$ puis un nombre rationnel r dans $[-1, b\,(j)\,[$ définissant une valuation $w = v(j, r)$ de $\mathbb{C}\,(SL_2/H)$.

$\mathcal{R} = (\mathbb{P}^1/H) \setminus \{j^*\}$ (j^* est un élément quelconque de $\mathbb{P}^1/H$ différent de j) et $\mathcal{W} = \{w\}$

Valuations dominant $\mathcal{O}$: $\mathcal{F}\,(\mathcal{O}) = \{v_0 = v\,(j, r_0)\ /\ r_0 \in]r, b(j)[\cap \mathbb{Q}\}$.

$\mathcal{V}\,(\mathcal{O}) = \mathcal{W}$ et $\mathcal{D}^B\,(\mathcal{O}) = \{j\}$.

3.5.4 SL_2-germes de type $\mathbf{A}_N$ (type II)

Notation : $\mathcal{O} = A_N(\omega_1, \ldots, \omega_N\,;\, r_1, \ldots, r_N)$.

$\mathcal{O}$ est l'anneau local d'une orbite de codimension 2.

On choisit N éléments ω_i de $\mathbb{P}^1/H$ puis N nombres rationnels $r_i \in]-1, b\,(j)]$ vérifiant la condition dite de type A_N

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{1 + r_i} > 1$$

Ces données définissent des valuations $w_i = v\,(\omega_i, r_i)$.

$\mathcal{R} = (\mathbb{P}^1/H) \setminus \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ et $\mathcal{W} = \{w_i,\ i = 1 \ldots N\}$.

Valuations dominant $\mathcal{O}$: $v_0 = v\,(\omega_0, r_0)$ avec

- ω_0 un élément quelconque de $\mathbb{P}^1/H$
- $r_0 \in]-1, b\,(\omega_0)\,[\cap \mathbb{Q}$ si $\omega_0 \in \mathcal{R}$ ou $r_0 \in]-1, r_i[\cap \mathbb{Q}$ si $\omega_0 = \omega_i$ pour un $i \in \{1, \ldots, N\}$.

$\mathcal{V}\,(\mathcal{O}) = \mathcal{W}$ et $\mathcal{D}^B\,(\mathcal{O}) = \mathcal{R}$.

3.5.5 SL_2-germes de type B_-(type II)

Notation : $\mathcal{O} = B_- (j, r)$.

$\mathcal{O}$ est l'anneau local d'une orbite de codimension 2.

On choisit un élément j de $\mathbb{P}^1/H$ puis un nombre rationnel r dans $]0, b(j)[$ definissant une valuation $w = v(j, r)$ de $\mathbb{C}(SL_2/H)$.

$\mathcal{R} = (\mathbb{P}^1/H) \setminus \{j\}$ et $\mathcal{W} = \{w\}$.

Valuations dominant $\mathcal{O}$: $\mathcal{F}(\mathcal{O}) = \{v_0 = v(j, r_0)$ avec $r_0 \in]r, b(j)[\cap \mathbb{Q}\}$.

$\mathcal{V}(\mathcal{O}) = \mathcal{W}$ et $\mathcal{D}^B(\mathcal{O}) = \mathcal{R}$

3.5.6 SL_2-germes de type B_0 (type II)

Notation : $\mathcal{O} = B_0 (j, r)$.

$\mathcal{O}$ est l'anneau local d'un point fixe.

On choisit un élément j de $\mathbb{P}^1/H$ puis un nombre rationnel r dans $]0, b(j)[$ definissant une valuation $w = v(j, r)$ de $\mathbb{C}(SL_2/H)$.

$\mathcal{R} = \mathbb{P}^1/H$ et $\mathcal{W} = \{w\}$.

Valuations dominant $\mathcal{O}$: $\mathcal{F}(\mathcal{O}) = \{v_0 = v(j, r_0)$ avec $r_0 \in]r, b(j)[\cap \mathbb{Q}\}$.

$\mathcal{V}(\mathcal{O}) = \mathcal{W}$ et $\mathcal{D}^B(\mathcal{O}) = \mathcal{R}$.

Chapitre 4

Conditions de régularité des anneaux locaux

On sait que les orbites de dimension 2 sont toujours régulières car les plongements considérés sont normaux et donc lisses en codimension 1. Par ailleurs les points fixes sont toujours singuliers : d'après un lemme de D.Luna [L, p. 96], qui est un cas particulier simple de son théorème du slice étale, on se ramène au cas d'une action linéaire de SL_2 sur l'espace tangent au point fixe. Du point de vue de la régularité il ne reste finalement qu'à étudier les orbites de dimension 1.

Nous donnons les résultats pour chaque type de SL_2-germe associé à une orbite de dimension 1 (type AB, A_N, B_+, B_-) ainsi que les diagrammes associés qui seront utiles pour la recherche des modèles minimaux.

4.1 SL_2-germes conjugués

Soit $\sigma \in SL_2$ et H un sous-groupe fini de SL_2. Le morphisme $x \mapsto \sigma.x$ de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ passe au quotient en un morphisme de $\mathbb{P}^1/H$ dans $\mathbb{P}^1/(\sigma H \sigma^{-1})$ noté encore $\omega \mapsto \sigma.\omega$. Soit maintenant un SL_2-germe $\mathcal{O}$ d'un plongement de SL_2/H déterminé par : son type, des éléments $\omega_1, \ldots, \omega_N$ de $\mathbb{P}^1/H$ et des rationnels r_i. On vérifie que le SL_2-germe $\sigma.\mathcal{O}$, où σ agit sur $\mathbb{C}(SL_2)$ par translation à droite (exceptionnellement) est un SL_2-germe d'un plongement de $SL_2/(\sigma H \sigma^{-1})$, de même type que $\mathcal{O}$, défini par les éléments $\sigma.\omega_1, \ldots, \sigma.\omega_N$ de $\mathbb{P}^1/(\sigma H \sigma^{-1})$ et les mêmes rationnels r_i. Si le premier SL_2-germe correspond à l'anneau local d'une orbite d'un plongement (X, e) le second SL_2-germe est l'anneau local de la même orbite pour le plongement $(X, \sigma.e)$. Un cas intéressant est le cas où σ appartient à $N_{SL_2}(H)$, le normalisateur de H dans SL_2. Nous dirons alors que $\mathcal{O}$ et $\sigma.\mathcal{O}$ sont conjugués.

Pour simplifier la liste des SL_2-germes réguliers nous ne donnerons les SL_2-germes (et leurs diagrammes) qu'à conjugaison près.

Supposons par exemple que H soit le sous-groupe binaire diédral d'ordre 4 de SL_2 engendré par $a_\mu = \left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ et $\alpha_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ où μ est une racine primitive $2k^{ème}$ de 1. On pose $\varepsilon = \mu^2$. Les éléments non génériques de $\mathbb{P}^1/H$ sont $v = \{0, \infty\}$, $f = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{k-1}\}$ et $e = \{\mu, \mu\varepsilon, \ldots, \mu\varepsilon^{k-1}\}$. On a $a_\mu^{-1} H a_\mu = H$, $a_\mu.v = v$, $a_\mu.f = e$, $a_\mu.e = f$. Les SL_2-germes $A_N(v, f, e\,; r_1, r_2, r_3)$ et $A_N(v, e, f\,; r_1, r_2, r_3)$ sont conjugués.

4.2 SL_2-germes réguliers de type $\mathbf{A}_N$

4.2.1 H binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral

Les preuves des propositions 1,2 et 3 se trouvent à la section 5.6. La formulation de la proposition suivante, en particulier la condition 3, arrive naturellement dans la preuve et permet de traiter uniformément les différents types de sous-groupes H.

Proposition 1 *Soit H un sous-groupe fini non cyclique de SL_2 et $\mathcal{O}$ un SL_2-germe de type A_N déterminé par $\mathcal{D}^B(\mathcal{O}) = (\mathbb{P}^1/H) \setminus \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ et $\mathcal{V}(\mathcal{O}) = \{v(\omega_i, r_i),\ i = 1, \ldots, N\}$. Alors $\mathcal{O}$ est un anneau local régulier si et seulement si*

1. *$N \leq 3$ et $\{\omega_1, \ldots, \omega_N\} \subset \{v, f, e\}$.*
2. *les r_i sont maximaux ($r_i = b(\omega_i) = \frac{2}{n_{\omega_i}} - 1$)*
3. *$\{\widetilde{c}_v, \widetilde{c}_f, \widetilde{c}_e\} \setminus \{\widetilde{c}_{\omega_1}, \ldots, \widetilde{c}_{\omega_N}\} = \{2, 3\}, \{2\}$ ou $\emptyset$.*

Interprétation de la proposition pour chaque type de sous-groupe H :
La troisième condition doit être interprétée avec le tableau 3.1 :

$\widetilde{\mathrm{H}}$	$\widetilde{c}_v$	$\widetilde{c}_f$	$\widetilde{c}_e$
diédral	k	2	2
tétraédral	3	3	2
octaédral	4	3	2
icosaédral	5	3	2

Les résultats sont donnés à conjugaison près. Par exemple dans le cas binaire diédral le SL_2-germe $A_2(v, f\,; 0, \frac{2}{k} - 1)$ est conjugué au SL_2-germe $A_2(v, e\,; 0, \frac{2}{k} - 1)$.
La liste des SL_2-germes réguliers est alors la suivante :

- type A_3 avec $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{v, f, e\}$.
- type A_2 avec $\{\omega_1, \omega_2\} = \{v, f\}$
- type A_1 avec :
  - H non binaire diédral et $\omega_1 = v$.

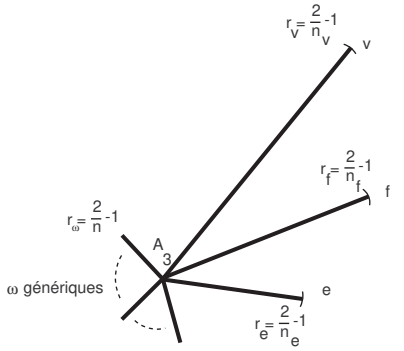
– H binaire diédral d'ordre 12 ($k = 3$), $\omega_1 = f$.

Diagrammes : introduits dans [LV] dans le cadre des plongements homogènes de $SL_2(\mathbb{C})$ ils ont été adaptés ensuite par L.Moser [M1] au cas des plongements homogènes de $SL_2(\mathbb{C})/H$.

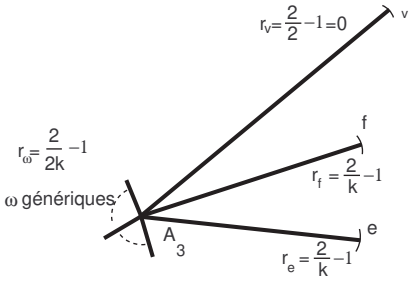
A chaque élément j de $\mathbb{P}^1/H$ on associe un segment $[-1, b(j)]$. Sur ce segment on noircit l'intervalle des rationnels $r \in]-1, b(j)]$ tels que $v(j,r) \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$. Pour les orbites de type AB, C et A_N la facette $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ détermine $\mathcal{O}$. Pour les orbites de type B_+, B_- et B_0 on rajoute le signe $+, -, 0$ et cela suffit avec $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ pour déterminer le SL_2-germe $\mathcal{O}$. Ces diagrammes seront utiles pour la détermination des modèles minimaux.

On donne ci-dessous les diagrammes de tous les SL_2-germes réguliers déterminés par la proposition 1.

Type A_3.

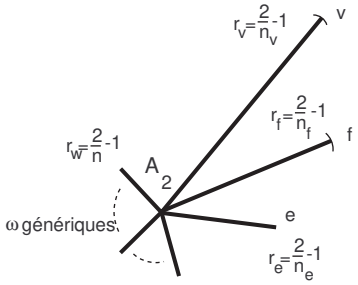


H binaire tétraédral, octaédral ou icosaédral d'ordre 2n

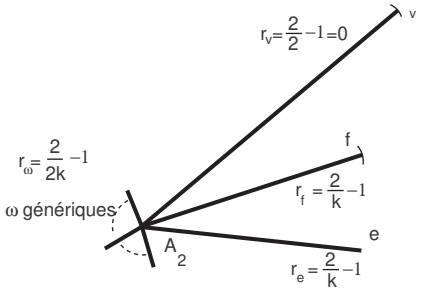


H binaire diédral d'ordre 4k

Type A_2

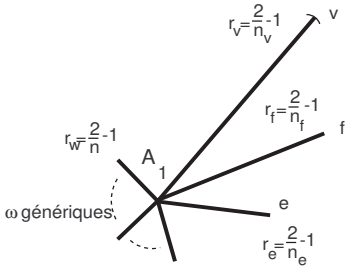


H binaire tétraédral, octaédral
ou icosaédral d'ordre 2n

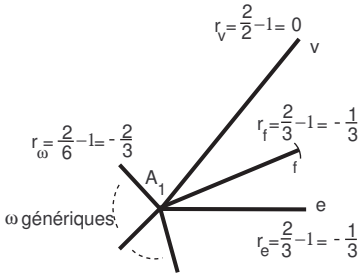


H binaire diédral d'ordre 4k

Type A_1



H binaire tétraédral, octaédral ou icosaédral d'ordre 2n

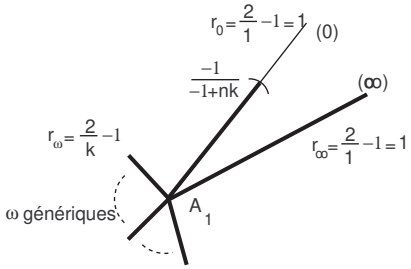


H diédral d'ordre 4*3

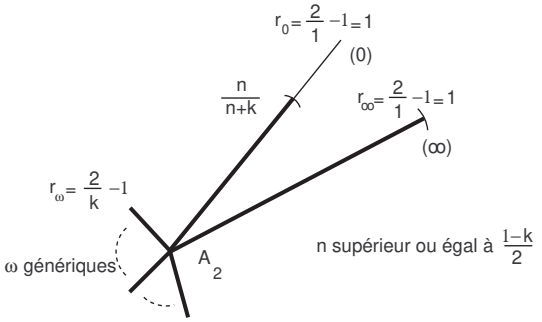
4.2.2 H cyclique d'ordre impair

Proposition 2 *Soit H un sous-groupe fini cyclique d'ordre k impair (≥ 1) de SL_2 et $\mathcal{O}$ un SL_2-germe de type A_N déterminé par $\mathcal{D}^B(\mathcal{O}) = (\mathbb{P}^1/H) \setminus \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ et $\mathcal{V}(\mathcal{O}) = \{v(\omega_i, r_i),\ i = 1, \ldots, N\}$. Alors $\mathcal{O}$ est régulier si et seulement si on est dans l'un des cas suivants :*

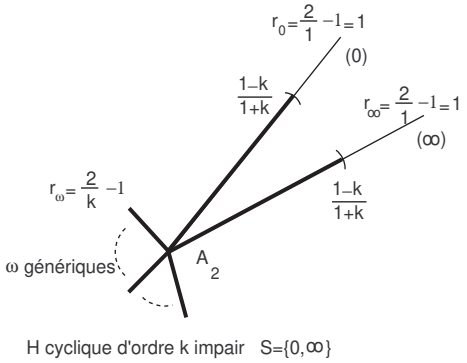
- *$\mathcal{O}$ est de type A_1 avec $\omega_1 = 0$ et r_0 égal à $\frac{-1}{-1+nk}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (ou $n \geq 2$ si $k = 1$)*
- *$\mathcal{O}$ est de type A_2 avec $\{\omega_1, \omega_2\} = \{0, \infty\}$ et :*
  - *soit r_0 est maximal et $r_\infty = \frac{n}{n+k}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n \geq \frac{1-k}{2}$.*
  - *soit $r_0 = r_\infty = \frac{1-k}{1+k}$.*



H cyclique d'ordre k impair S={0} ou {∞}



H cyclique d'ordre k impair S={0,∞}

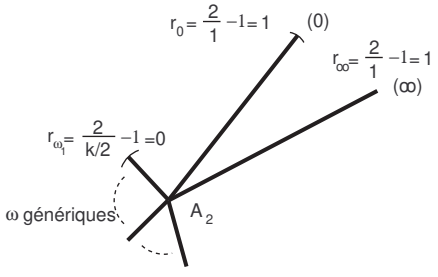


H cyclique d'ordre k impair S={0,∞}

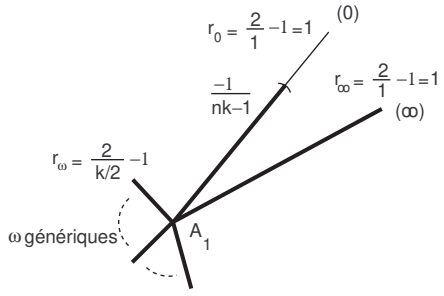
4.2.3 H cyclique d'ordre pair

Proposition 3 *Soit H un sous-groupe fini cyclique d'ordre k pair (≥ 2) de SL_2 et $\mathcal{O}$ un SL_2-germe de type A_N déterminé par $\mathcal{D}^B(\mathcal{O}) = (\mathbb{P}^1/H) \setminus \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ et $\mathcal{V}(\mathcal{O}) = \{v(\omega_i, r_i),\ i = 1, \ldots, N\}$. Alors $\mathcal{O}$ est régulier si et seulement si on est dans l'un des cas suivants :*

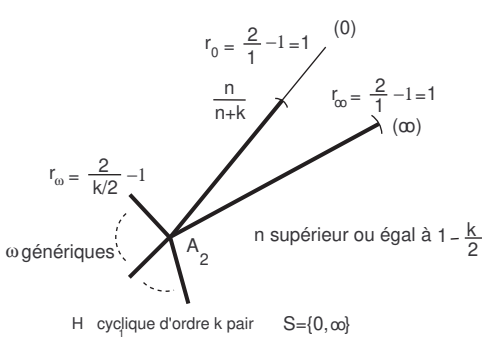
- *$k = 4$ (H est aussi binaire diédral), $\mathcal{O}$ est de type A_2, $\{\omega_1, \omega_2\} = \{\omega_1, 0\}$ avec ω_1 génériques et les r_i sont maximaux.*
- *k est quelconque (y compris 4) et*
  - *$\mathcal{O}$ est de type A_1 avec $\omega_1 = 0$ et $r_0 = \frac{-1}{-1+nk}$ pour un entier $n \geq 1$ si $k > 2$ et $n \geq 2$ si $k = 2$.*
  - *ou $\mathcal{O}$ est de type A_2 avec $\{\omega_1, \omega_2\} = \{0, \infty\}$, r_∞ maximal et $r_0 = \frac{n}{n+k}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 1 - \frac{k}{2}$*
  - *ou $\mathcal{O}$ est de type A_3 avec $\{0, \infty\} \subset \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ et les r_i maximaux.*

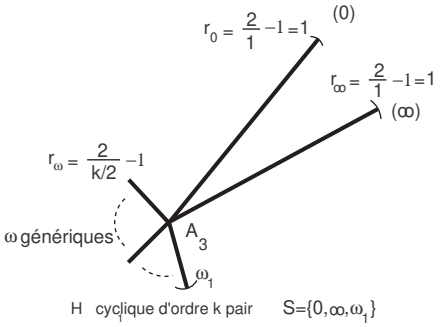


H cyclique d'ordre 4



H cyclique d'ordre k pair S={0} ou {∞}





4.3 SL_2-germes réguliers de type AB

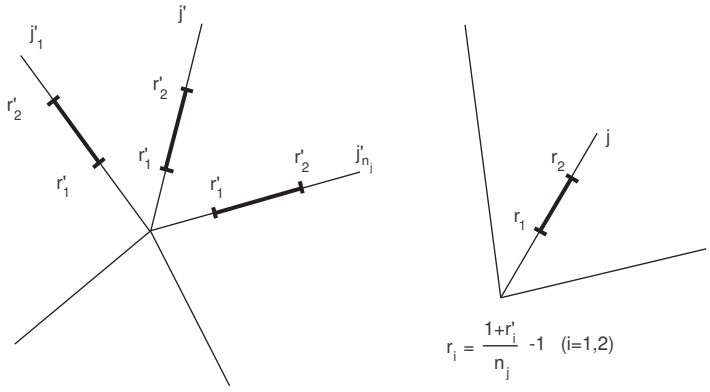
Soit H un sous-groupe fini de SL_2 et $\mathcal{O}$ un SL_2-germe de type AB réalisé géométriquement par un plongement X de SL_2/H ne contenant qu'une seule orbite Y de dimension 1 (d'anneau local $\mathcal{O}$) et deux de dimension 2. On suppose que $\mathcal{O}$ est définie par $j \in \mathbb{P}^1/H$ et des rationnels $r_1 < r_2$ de $[-1, b(j)]$.

Considérons un plongement homogène X' de SL_2, stable sous l'action (à droite) de H, tel que X soit le quotient de X' par H. L'image inverse de Y est une réunion d'orbites Y' de type AB.

Il se trouve qu'il est plus simple de présenter la condition de régularité de $\mathcal{O}$ à partir des éléments qui définissent $\mathcal{O}'$, anneau local d'une orbite Y' définie ci-dessus.

Pour la description de $\mathcal{O}'$ il suffit de remplacer j par l'un des n_j éléments j' de l'image inverse de j dans la projection $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1/H$ et de remplacer les rationnels r_1, r_2 par les rationnels r_1', r_2' définis par

$$r_i = \frac{1 + r_i'}{n_j} - 1$$



Supposons en effet que $j = \{j_1', \ldots, j_{n_j}'\} \in \mathbb{P}^1/H$ et que $v = v(j_1', r')$ soit une valuation SL_2-invariante de $\mathbb{C}(SL_2)$. On a $v(g_j^{c_j}) = c_j v(g_{j_1'} \times \ldots \times g_{j_{n_j}'}) = c_j(r' -$

$(n_j - 1))$ et $v(g_\omega^{c_\omega}) = c_\omega v(g_{\omega'_1} \dots g_{\omega'_n}) = -c_\omega n$ pour $\omega = \{\omega'_1, \dots, \omega'_n\}$ générique différent de j. En renormalisant pour que $v(g_\omega^{c_\omega}) = -1$ on a $v(g_j^{c_j}) = \frac{1+r'}{n_j} - 1$. Donc la restriction à $\mathbb{C}(SL_2/H)$ de $v(j', r')$ est la valuation que nous avons notée $v(j, \frac{1+r'}{n_j} - 1)$.

Enfin, une façon agréable de présenter les cas où $\mathcal{O}$ est régulier consiste à introduire la notion de fraction c-irréductible :

Définition 4.3.1 *Soit $c \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{Q}$. Une fraction p/q représentant r est dite c-irréductible si $q \geq 1$, $p \equiv q \pmod c$ et si q (ou p) est minimum pour ces propriétés.*

Définition 4.3.2 *Deux fractions c-irréductibles $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ sont c-adjacentes quand*

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix} = c.$$

Deux rationnels r_1 et r_2 sont dits c-adjacents quand leurs représentants c-irréductibles sont c-adjacents.

Avec les définitions précédentes on peut énoncer :

Proposition 4 *Soit H un sous-groupe fini de SL_2 et $\mathcal{O}$ un SL_2-germe de type AB défini par $j \in \mathbb{P}^1/H$ et des rationnels $r_1 < r_2$ de $[-1, b(j)]$. Soit r'_i les rationnels associés aux r_i par $r_i = \frac{1+r'_i}{n_j} - 1$ $(i = 1, 2)$. Alors $\mathcal{O}$ est régulier si et seulement si r'_1 et r'_2 sont c_j-adjacents.*

Preuve : section 5.2.

4.4 SL_2-germes réguliers de type B_+

Proposition 5 *Un SL_2-germe $B_+(j,r)$ de type B_+ est régulier si et seulement si on se trouve dans l'un des cas suivants :*

- *H est quelconque, j est générique (donc quelconque si H est cyclique d'ordre 1 ou 2) et $r = -1$.*
- *H est cyclique d'ordre k impair, j est générique et $r = \frac{1}{k} - 1$.*

Preuve : section 5.3.

4.5 SL_2-germes réguliers de type B_-

Proposition 6 *Un SL_2-germe $B_-(j,r)$ de type B_- est régulier si et seulement si H est cyclique d'ordre k, j est non générique (sauf si $k = 1$ ou 2 où j est quelconque) et $r = \frac{1}{1+nk}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve : section 5.6.

Chapitre 5

Preuves des conditions de régularité

Cette partie est la plus technique car même si les calculs sont simples il y a de nombreux cas à discuter.

Il y a deux types de preuve pour les conditions de régularité selon que le SL_2-germe est de type I (AB ou B_+) ou de type II (A_N ou B_-).

Pour les orbites de type I le corollaire 5.1.2, de nature locale, suffit à prouver les conditions de régularité.

Pour les orbites de type II la méthode que nous avons retenue consiste à montrer que si $\mathcal{O}$ est régulier alors $\mathcal{O}$ est le localisé d'une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ telle que $\mathring{\mathrm{X}}/U$ est torique (lemme 5.6.1). On utilisera pour cela une présentation des B-cartes par Timashev (§ 5.4) qui permet de voir plus simplement les cas où $\mathring{\mathrm{X}}/U$ est torique (lemme 5.5.1). La preuve de la condition de régularité des SL_2-germes de type II devient alors une gestion cas par cas et assez technique des conséquences du lemme 5.6.1.

En plus de la question de la régularité des orbites, de nature locale, on montre dans ce chapitre un résultat plus précis sur la géométrie d'un plongement de SL_2/H :

- Tout SL_2-germe de type I, régulier ou non, est toujours le localisé d'une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ telle que $\mathring{\mathrm{X}}/U$ soit une variété affine torique (corollaire 5.7.2).
- Tout point d'une orbite de type I régulière ou non, d'un plongement X, appartient à un ouvert isomorphe à $\mathbb{C} \times S$ ou $\mathbb{C}\times (S \setminus l)$ où S est une surface affine torique et l est isomorphe à $\mathbb{C}^*$ (corollaire 5.7.2).
- Tout point d'une orbite régulière de type II appartient à un ouvert isomorphe à $\mathbb{C}^3$ (corollaire 5.6.2).

Le premier point donne par ailleurs une autre démonstration possible des conditions de régularité des SL_2-germes de type I (§ 5.8).

5.1 Réduction aux U-invariants

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 2 (2) de [Tim2], qui est lui-même une conséquence d'un résultat de Knop [Kn, Prop. 1.2(3)]. Le premier résultat de ce type est celui de D.Luna dans [BLV] qui décrit la structure locale de l'action d'un groupe réductif au voisinage d'une orbite complète.

Lemme 5.1.1
Soit $\overset{\circ}{X}$ une B-carte quelconque d'un plongement homogène X de SL_2/H dont l'anneau des fonctions régulières est défini par un couple $(\mathcal{W},\mathcal{R}) \subset \mathcal{V} \times \mathcal{D}^B$ tel que $\mathcal{R} \neq \mathcal{D}^B$. alors il existe une surface affine S de $\overset{\circ}{X}$ stable par T telle que l'action de B sur $\overset{\circ}{X}$ induise un isomorphisme

$$\overset{\circ}{X} \cong U \times S$$

Remarques : $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U$ est de type fini et $S = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U)$, c'est-à-dire $S = \overset{\circ}{\mathrm{X}}//U$. Le lemme implique donc que le quotient algébrique $\overset{\circ}{\mathrm{X}}//U$ est un quotient géométrique : $\overset{\circ}{\mathrm{X}}//U = \overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$.
Preuve : D'après le lemme 2 (2) de [Tim2] il suffit de vérifier que le sous-groupe parabolique $P = N_{SL_2}(\overset{\circ}{X}) = \{g \in SL_2 \,/\, g.\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{X}\}$ *est égal à* B. Si ce n'était pas le cas on aurait $P = SL_2$. Soit alors D un élément de $\mathcal{D}^B \setminus \mathcal{R}$, c'est-à-dire un diviseur B-stable non SL_2-stable n'intersectant pas $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$, et g un élément de SL_2. On a alors $(g.D) \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}} = g.(D \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}}) = \emptyset$ et donc $g.D$ est un diviseur de $X \setminus \overset{\circ}{\mathrm{X}}$ en particulier un diviseur B-stable non SL_2-stable c'est-à-dire un élément de $\mathcal{D}^B \setminus \mathcal{R}$. Ainsi SL_2 permute les éléments de l'ensemble fini $\mathcal{D}^B \setminus \mathcal{R}$. Comme SL_2 est connexe, SL_2 fixe alors chaque élément de $\mathcal{D}^B \setminus \mathcal{R}$, ce qui est contraire à la définition de $\mathcal{D}^B$.

□

Corollaire 5.1.2 *Soit un SL_2-germe $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,Y}$ correspondant à une orbite de dimension 1 et $\overset{\circ}{X}$ une B-carte de X qui intersecte Y. Alors Y intersecte S en un unique point p et $\mathcal{O}$ est régulier si et seulement si p est lisse dans S.*

En particulier si $\overset{\circ}{X}$ est une B-carte telle que $\mathcal{O}$ est le localisé de $\mathbb{C}[\overset{\circ}{X}]$ en l'idéal $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{O}$ est régulier si et seulement si l'anneau $\mathbb{C}[\overset{\circ}{X}]^U_{\mathcal{M}^U}$ est régulier.

preuve : Une B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ intersectant une orbite Y de dimension 1 vérifie l'hypothèse $\mathcal{R} \neq \mathcal{D}^B$ du lemme. Soit maintenant $\varphi : \overset{\circ}{\mathrm{X}} \to U \times S$ l'isomorphisme du lemme (dont l'inverse est donné par $(u,s) \mapsto u.s$) et π la projection de $U \times S$ sur S. Puisque Y est stable par U on a $(\pi \circ \varphi)\left(Y \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}}\right) = Y \cap S$. Par ailleurs $\pi \circ \varphi$ n'est rien d'autre que la projection canonique $\overset{\circ}{\mathrm{X}} \to \overset{\circ}{\mathrm{X}}/U \cong S$. En particulier $(\pi \circ \varphi)\left(Y \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}}\right)$ est un fermé iréductible de dimension $\dim(Y) - \dim(U) = 0$, par conséquent $Y \cap S$ est réduit à un unique point p et $Y \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}} = U.p$. Les points de $Y \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}}$ sont donc lisses dans $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ en

même temps que le point p dans $\mathring{\mathrm{X}}$. Mais p est lisse dans $\mathring{\mathrm{X}}$ quand $\varphi(p) = (Id, p)$ est lisse dans $U \times S$ c'est-à-dire quand p est lisse dans S.

Pour obtenir la deuxième partie du corollaire il suffit de choisir a posteriori n'importe quel plongement homogène contenant la B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ donnée.

□

Le lemme 2.1.2 p. 27 de L.Moser dans [M1] repris dans l'article [M2] et qui n'utilise que le résultat de D.Luna [BLV] permet aussi de conclure au même résultat : $\mathcal{O}$ est régulier si et seulement si $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U_{\mathcal{M}^U}$ ($= \mathcal{O}^U$ par le résultat de l'annexe B) est régulier.

5.2 Régularité des SL_2-germes de type AB (preuves)

5.2.1 H cyclique d'ordre k

Soit H le sous-groupe cyclique d'ordre k de SL_2 engendré par $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ où ε est une racine primitive $k^{\text{ème}}$ de 1. On considère un SL_2-germe $\mathcal{O}$ de la forme $AB(j, r_1, r_2)$ avec $j \in \mathbb{P}^1/H$.

$\mathcal{O}$ est le localisé d'une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ définie par $\mathcal{R} = (\mathbb{P}^1/H) \setminus \{j, j^*\}$ avec $j^* \neq j$ et $\mathcal{W} = \{v(j, r_1), v(j, r_2)\}$. Posons $j = \{\widehat{j}_1, \ldots \widehat{j}_{n_j}\}$ et $j^* = \{\widehat{j}^*_1, \ldots \widehat{j}^*_{n_{j^*}}\}$ avec $\widehat{j}_i, \widehat{j}^*_i \in \mathbb{P}^1$ et considérons la B-carte $\widehat{X}$ d'un plongement de SL_2 si k est impair ou de $SL_2/\{\pm Id\}$ si k est pair, définie par

- $\widehat{\mathcal{R}} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\widehat{j}_1, \ldots \widehat{j}_{n_j}, \widehat{j}^*_1, \ldots \widehat{j}^*_{n_{j^*}}\}$
- $\widehat{\mathcal{W}} = \{v(\widehat{j}_1, r'_1), \ldots, v(\widehat{j}_{n_j}, r'_1), v(\widehat{j}_1, r'_2), \ldots, v(\widehat{j}_{n_j}, r'_2)\}$, les $v(\widehat{j}_i, r'_1)$ étant les n_j valuations SL_2-invariantes de $\mathbb{C}(SL_2)$ qui prolongent la valuation $v(j, r_1)$ de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ ($r_i = \frac{1+r'_i}{n_j} - 1$).

Posons $\widetilde{H} = H$ si k impair et $\widetilde{H} = H/\{\pm Id\}$ si k est pair. Alors $\mathbb{C}[\widehat{X}]$ est stable pour l'action de $\widetilde{H}$ (par translation à droite) et l'on vérifie que $\mathbb{C}[\widehat{X}]^{\widetilde{H}} = \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$. Soit Φ la projection $\widehat{X} \to \widehat{X}/\widetilde{H} = \mathring{\mathrm{X}}$. Il est clair que Φ est un morphisme fini de degré $\mathrm{card}(\widetilde{H}) = \overline{k}$. Posons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathring{\mathrm{X}},Y}$ avec $Y \subset \mathring{\mathrm{X}}$. Deux cas se présentent selon que Y est ou non dans le lieu de ramification de Φ.

Supposons d'abord que j soit une H-orbite générique de $\mathbb{P}^1$. Dans ce cas Y est dans l'ouvert non ramifié de $\mathring{\mathrm{X}}$ pour Φ : $\Phi^{-1}(Y) = \cup_{i=1}^{\overline{k}} Y_i$ où Y_i est un fermé irréductible de dimension 1 de $\widehat{X}$. Il existe alors un ouvert V de $\mathring{\mathrm{X}}$ pour la topologie forte (la $\mathbb{C}$-topologie) intersectant Y et analytiquement isomorphe à un ouvert V_i de $\widehat{X}$ (pour la topologie forte) qui intersecte Y_i. L'orbite Y est donc régulière en même temps que Y_i. Les anneaux locaux des Y_i étant précisément de la forme $AB(\widehat{j}_i, r'_i, r'_2)$

on en conclut que $\mathcal{O}$ est régulier si et seulement si le SL_2-germe d'un plongement de SL_2 (ou de $SL_2/\{\pm Id\}$) défini par $\widehat{\mathcal{O}}_1 = AB(\widehat{j}_1, r'_i, r'_2)$ est régulier. Mais il est facile de voir que ce SL_2-germe est le localisé d'une B-carte $\widehat{X}_1$ d'un plongement de SL_2 (ou de $SL_2/\mathbb{Z}_2$) telle que $\widehat{X}_1/U$ soit torique (c'est la méthode de L.Moser pour les plongements de SL_2 et de $SL_2/\{\pm Id\}$), ce qui permet de trouver la condition suivante : le SL_2-germe est régulier si et seulement si r'_1 et r'_2 sont adjacents (si k est impair) ou 2-adjacents (si k est pair). C'est exactement le résultat de la proposition 4.

Supposons maintenant j non générique, par exemple $j = \{0\}$. Choisissons $j^* = \{\infty\}$ dans la définition de $\mathring{\mathrm{X}}$. Soit $\widehat{X}$ le spectre de la clôture intégrale de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ dans $\mathbb{C}(SL_2)$. Comme $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ est intégralement clos et $Q\left(\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]\right) = \mathbb{C}(SL_2/H)$ on a $\mathbb{C}[\widehat{X}]^H = \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ c'est-à-dire $\mathring{\mathrm{X}}=\widehat{X}/H$. Par ailleurs les valuations essentielles $\mathbb{C}[\widehat{X}]$ sont exactement les prolongements à $\mathbb{C}(SL_2)$ des valuations essentielles de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ [Bou, prop. 12]. Donc $\widehat{X}$ est la B-carte définie par $\widehat{\mathcal{R}} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ et $\widehat{\mathcal{W}} = \{v(0, r'_1), v(0, r'_2)\}$ vérifie $\mathring{\mathrm{X}}=\widehat{X}/H$ (le choix de $j^* = \{\infty\}$ permet en outre d'avoir $\widehat{X}/U$ torique comme on le démontre plus loin). Soit p l'image de Y dans la projection $\mathring{\mathrm{X}}\to\mathring{\mathrm{X}}/U$. Posons $\mathring{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}} =\mathring{\mathrm{X}}/U$ et $\widehat{X}_{\mathrm{U}} = \widehat{X}/U$. Il est facile de voir que $\mathring{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}}=\widehat{X}_{\mathrm{U}}/H$. Par ailleurs on sait que p est lisse dans $\mathring{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}}$ si et seulement si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathring{\mathrm{X}},\mathrm{Y}}$ est régulier. Nous allons montrer que $\widehat{X}_{\mathrm{U}}$ est une surface torique et il suffira donc d'interpréter en fonction des éléments qui définissent $\mathcal{O}$ (j, r_1, r_2) la condition de lissité du point fixe p de son quotient par H. Le raisonnement que l'on utilise pour montrer que $\widehat{X}_{\mathrm{U}}$ est une surface torique reviendra à plusieurs reprises et nous allons le détailler pour cette première fois.

$\mathbb{C}[\widehat{X}_{\mathrm{U}}] = \mathbb{C}[\widehat{X}]^U$ est stable par $\mathbb{C}^* \simeq T \subset SL_2$ (et par H par translation à droite) et est donc engendré comme espace vectoriel par ses vecteurs propres pour T, c'est-à-dire les éléments f de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B)}$ tels que $v_D(f) \geq 0$ pour tout $D \in \widehat{\mathcal{R}}$ et $v(0, r'_1)(f), v(0, r'_2)(f) \geq 0$.

D'après le § 3.2 p. 21 un tel f est de la forme

$$f = x^m y^n \prod_{\omega \in J} (a_\omega x + b_\omega y)^{\alpha_\omega}$$

où $\omega = [a_\omega : b_\omega]$ et où J est un sous-ensemble fini de $\mathbb{P}^1$ ne contenant ni 0 ni ∞.

La condition $v_D(f) \geq 0$ pour tout $D \in \widehat{\mathcal{R}}$ se traduit par $\alpha_\omega \geq 0$ pour tout $\omega \in J$. En particulier $f = x^m y^n \prod_{\omega \in J} (a_\omega x + b_\omega y)^{\alpha_\omega}$ se développe en $x^m y^n \sum_i \beta_i x^i y^{d-i} = \sum_i \beta_i x^{m+i} y^{n+d-i}$ avec $d = \sum \alpha_\omega$ et $\beta_i \in \mathbb{C}$. Par ailleurs

$$v(0, r'_1)(a_\omega x + b_\omega y) = v(0, r'_1)(y) = -1 \leq v(0, r'_1)(x) = r'_1 \qquad \text{(idem pour } r'_2\text{)}$$

donc $v(0, r'_1)\left(x^{m+i} y^{n+d-i}\right) \geq v(0, r'_1)(f) \geq 0$ (idem pour r'_2). On en conclut que $\mathbb{C}[\widehat{X}_{\mathrm{U}}]$ est engendré comme espace vectoriel par les éléments de la forme $x^m y^n$ tels

que $v\,(0,r'_1)\,(x^m y^n) \geq 0$ et $v\,(0,r'_2)\,(x^m y^n) \geq 0$ c'est-à-dire tels que $mr'_1 - n \geq 0$ et $mr'_2 - n \geq 0$. Par conséquent $\widehat{X}_{\mathrm{U}}$ est une surface affine torique.

L'action de H sur $\mathbb{C}[\widehat{X}_{\mathrm{U}}]$ est donnée par $\alpha.x = \varepsilon x$ et $\alpha.y = \varepsilon^{-1} y$. Pour déterminer $\widehat{X}_{\mathrm{U}}/H$ il est préférable de remplacer par exemple y par xy qui est invariant sous l'action de H. On a alors $\mathbb{C}[\widehat{X}_{\mathrm{U}}] = \langle\,(xy)^m x^n \;/\; (m,n) \in V\rangle$ où V est le cône de $\mathbb{Z}^2$ défini par $\left|\begin{smallmatrix} m & 1 \\ n & 1-r'_1 \end{smallmatrix}\right|, \left|\begin{smallmatrix} m & 1 \\ n & 1-r'_2 \end{smallmatrix}\right| \geq 0$. On peut alors calculer $\mathbb{C}[\widehat{X}_{\mathrm{U}}]^{\mathrm{H}}$ et retrouver le résultat classique suivant [Ful, p. 32] : $\mathbb{C}[\widehat{X}_{\mathrm{U}}]^{\mathrm{H}}$ est la surface torique définie par le cône $V \cap (\mathbb{Z}\times k\mathbb{Z})$ dans le réseau $\mathbb{Z}\times k\mathbb{Z}$. Enfin si $r'_i = \frac{p_i}{q_i}$ est k-irréductible on voit que $(1, 1-r'_i) \sim (q_i, p_i - q_i) \in \mathbb{Z}\times k\mathbb{Z}$ et $(q_i, p_i - q_i)$ a pour coordonnées $\left(q_i, \frac{p_i - q_i}{k}\right)$ dans la base $(1,0),(0,k)$ de $\mathbb{Z}\times k\mathbb{Z}$. Comme $\left(q_i, \frac{p_i - q_i}{k}\right)$ est primitif on en déduit la condition de lissité du point fixe : $\left|\begin{smallmatrix} q_1 & q_2 \\ \frac{p_1-q_1}{k} & \frac{p_2-q_2}{k} \end{smallmatrix}\right| = \pm 1$ c'est-à-dire $\left|\begin{smallmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{smallmatrix}\right| = k = c_j$, conformément au résultat de la proposition 4 p. 35.

5.2.2 H quelconque

Le SL_2-germe $\mathcal{O} = AB(j, r_1, r_2)$ est le localisé d'une B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ définie par $\mathcal{R} = (\mathbb{P}^1/H) \setminus \{j, j^*\}$ avec $j^* \neq j$ et $\mathcal{W} = \{v(j, r_1), v(j, r_2)\}$. Comme dans le cas cyclique posons $j = \{\widehat{j}_1, \ldots \widehat{j}_{n_j}\}$ et $j^* = \{\widehat{j}^*_1, \ldots \widehat{j}^*_{n_{j^*}}\}$ avec $\widehat{j}_i, \widehat{j}^*_i \in \mathbb{P}^1$ et considérons la B-carte $\widehat{X}$ d'un plongement de SL_2 définie par

- $\widehat{\mathcal{R}} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\widehat{j}_1, \ldots \widehat{j}_{n_j}, \widehat{j}^*_1, \ldots \widehat{j}^*_{n_{j^*}}\}$
- $\widehat{\mathcal{W}} = \{v(\widehat{j}_1, r'_1), \ldots, v(\widehat{j}_{n_j}, r'_1), v(\widehat{j}_1, r'_2), \ldots, v(\widehat{j}_{n_j}, r'_2)\}$ $(r_i = \frac{1+r'_i}{n_j} - 1)$.

$\mathbb{C}[\widehat{X}]$ est stable pour l'action de H par translation à droite et l'on a $\mathbb{C}[\widehat{X}]^{\widetilde{H}} = \mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]$. Toujours comme dans le cas cyclique appelons p l'image de Y dans la projection $\overset{\circ}{\mathrm{X}} \to \overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ et posons $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}} = \overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$, $\widehat{X}_{\mathrm{U}} = \widehat{X}/U$. On a $\widehat{X}_{\mathrm{U}}$ qui est stable par H et $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}} = \widehat{X}_{\mathrm{U}}/H$. Soit x un antécédent quelconque de p dans la projection $\widehat{X}_{\mathrm{U}} \to \widehat{X}_{\mathrm{U}}/H = \overset{\circ}{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}}$. Le sous-groupe d'isotropie H_x de x pour l'action de H est le sous-groupe d'isotropie d'un certain élément $\widehat{j}_i$ de j pour l'action de H sur $\mathbb{P}^1$. C'est un sous-groupe cyclique dont l'ordre est le nombre que nous avons noté c_j.

Les groupes H et H_x étant finis on peut construire un ouvert $\widehat{V}$ de $\widehat{X}_{\mathrm{U}}$ pour la $\underline{\mathbb{C}\text{-topologie}}$ tel que $\widehat{V}$ soit stable par H_x et tel que $\widehat{V} \cap g.\widehat{V} = \emptyset$ pour tout $g \in H \setminus H_x$. On a alors un isomorphisme analytique au voisinage de p entre $\widehat{X}_{\mathrm{U}}/H$ et $\widehat{V}/H_x$ et la lissité de p dans $\widehat{X}_{\mathrm{U}}/H = \overset{\circ}{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}}$ est donc équivalente à la lissité de x dans $\widehat{X}_{\mathrm{U}}/H_x$. D'après l'étude du cas H cyclique on trouve comme condition de lissité $\left|\begin{smallmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{smallmatrix}\right| = c_j$. C'est la condition de la proposition 4.

□

5.3 Régularité des SL_2-germes de type B_+

Le SL_2-germe $\mathcal{O} = B_+(j,r)$ est le localisé d'une B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ telle que $\mathcal{R} = (\mathbb{P}^1/H)\setminus\{j^*\}$ et $\mathcal{W} = \{v(j,r)\}$ où j^* est un élément quelconque de $\mathbb{P}^1/\ H$ différent de j. On peut appliquer la même méthode que dans le type AB.

5.3.1 H cyclique d'ordre k

On pose $j = \{\widehat{j}_1, \ldots \widehat{j}_{n_j}\}$ et $j^* = \{\widehat{j}_1^*, \ldots \widehat{j}_{n_j^*}^*\}$ avec $\widehat{j}_i, \widehat{j}_i^* \in \mathbb{P}^1$ et on considère la B-carte $\widehat{X}$ d'un plongement de SL_2 si k est impair ou de $SL_2/\{\pm Id\}$ si k est pair, définie par $\widehat{\mathcal{R}} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\widehat{j}_1^*, \ldots \widehat{j}_{n_j^*}^*\}$ et $\widehat{\mathcal{W}} = \{v(\widehat{j}_1, r'), \ldots, v(\widehat{j}_{n_j}, r')\}$ avec $r = \frac{1+r'}{n_j} - 1$.

Si j est générique on montre comme pour le type AB que $\mathcal{O}$ est régulier si et seulement si le SL_2-germe $\widehat{\mathcal{O}}_1 = AB(\widehat{j}_1, r_i', r_2')$, pour un plongement de SL_2 (ou de $SL_2/\mathbb{Z}_2$) est régulier. A l'aide d'une B-carte $\widehat{X}_1$ telle que $\widehat{X}_1/U$ soit torique on vérifie que la condition de régularité de $\widehat{\mathcal{O}}_1$ est $r' = 0$ (i.e $r = 0$) si k est pair et $r' = 0$ ou -1 (i.e $r = \frac{1}{k} - 1$ ou -1) si k est impair.

Si j est non générique (en particulier $k \geq 3$) par exemple si $j = \{0\}$ on pose $j^* = \{\infty\}$ dans la définition de $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$. La B-carte $\widehat{X}$ définie par $\widehat{\mathcal{R}} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ et $\widehat{\mathcal{W}} = \{v(0, r_1')\}$ vérifie $\overset{\circ}{\mathrm{X}}{=}\widehat{X}/H$. On vérifie ensuite que si $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}}{=}\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ et $\widehat{X}_{\mathrm{U}} = \widehat{X}/U$ alors $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_{\mathrm{U}}{=}\widehat{X}_{\mathrm{U}}/H$ et $\mathbb{C}[\widehat{X}_{\mathrm{U}}] = \langle (xy)^m x^n \ / \ (m,n) \in V \rangle$ où V est le cône de $\mathbb{Z}^2$ défini par $\left|\begin{smallmatrix} m & 0 \\ n & 1 \end{smallmatrix}\right|, \left|\begin{smallmatrix} m & 1 \\ n & 1-r_1' \end{smallmatrix}\right| \geq 0$.

$\widehat{X}_{\mathrm{U}}/H = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[\widehat{X}_{\mathrm{U}}]^H)$ est la surface torique définie par le cône $V \cap (\mathbb{Z}\times k\mathbb{Z})$ dans le réseau $\mathbb{Z}\times k\mathbb{Z}$. Si $r' = \frac{p}{q}$ est k-irréductible on voit que $(1, 1-r') \sim (q, p-q) \in \mathbb{Z}\times k\mathbb{Z}$ et $(q, p-q)$ a pour coordonnées $\left(q, \frac{p-q}{k}\right)$ dans la base $(1,0)$,$(0,k)$ de $\mathbb{Z}\times k\mathbb{Z}$. Comme $\left(q, \frac{p-q}{k}\right)$ est primitif on en déduit la condition de lissité du point fixe : $\left|\begin{smallmatrix} q & 0 \\ \frac{p-q}{k} & 1 \end{smallmatrix}\right| = q = 1$ c'est-à-dire $r' \in \mathbb{Z}$. Comme $r' \in [-1, 1[$ on a $r' = 0$ ou -1, c'est-à-dire $p = 0$ ou -1. Par hypothèse on a $k \geq 3$ et la condition $p \equiv q \pmod k$ n'est pas vérifiée avec ces valeurs de p et q.

5.3.2 H quelconque

La technique utilisée pour le type AB donne comme condition de régularité $\left|\begin{smallmatrix} q & 0 \\ \frac{p-q}{c_j} & 1 \end{smallmatrix}\right| = q = 1$ où c_j est l'ordre du sous-groupe d'isotropie d'un élément de l'orbite j de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de H et $r' = \frac{p}{q} \in [-1, 1]$ est c_j-irréductible. Le résultat de la proposition 5 p. 35 en découle aussitôt.

□

5.4 Présentation des B-cartes affines selon Timashev

Dans la description de Luna-Vust d'une orbite d'un plongement de G/H on cherche à déterminer un G-germe par un nombre minimum d'informations : $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ ou encore $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ et le type de $\mathcal{O}$ (pour les types B_+, B_-, B_0). La présentation de Timashev au contraire laisse un rôle central aux B-cartes $\overset{\circ}{X}$ qui se localisent en un G-germe $\mathcal{O}$ donné. Les B-cartes elles mêmes sont déterminées simplement par des hypercônes mais cette représentation dépend du choix de certains paramètres (notés t et e_ω par Timashev). Cette approche est surtout intéressante dans notre travail pour donner un critère simple pour qu'une B-carte $\overset{\circ}{X}$ vérifie que $\overset{\circ}{X}/U$ soit torique.

Timashev traite le cas où le degré de transcendance de $K^B = \mathbb{C}(X)^B$ sur $\mathbb{C}$ (la complexité de K) vaut 1. La complexité 0 correspond aux variétés sphériques.

L'objet de cette section est de rappeler, sans démonstration, les résultats de l'article de Timashev [Tim] en les particularisant au cas $G = SL_2$.

5.4.1 Représentation des valuations B-invariantes de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ dans l'hyperespace $\mathcal{H}$

Définition. Posons $K = \mathbb{C}(SL_2/H)$ avec H un sous-groupe fini de SL_2. En particulier $K^B \simeq \mathbb{C}(SL_2/B)^H \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^1/H) \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{C}(t)$ est une extension transcendante pure de dimension 1 de $\mathbb{C}$ et on est bien dans le cas de complexité 1. Remarquons que t n'est défini qu'à un automorphisme près de $\mathbb{P}^1$.

Appelons Γ le groupe des caractères de B associés aux éléments de $K^{(B)}$. C'est un groupe libre de rang 1.

Choisissons un élément $e_\omega \in K^{(B)}$ dont le caractère associé engendre Γ.

Soit maintenant une valuation discrète v quelconque de K, à valeurs dans $\mathbb{Q}^*$. La restriction de v à $K^{(B)}$ est déterminée d'une part par sa restriction à K^B et d'autre part par le nombre rationnel $l = v(e_\omega)$. En effet tout élément de $K^{(B)}$ s'écrit sous la forme $f_0.{e_\omega}^n$ où $f_0 \in K^B$ et $n \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs une valuation discrète de $K^B = \mathbb{C}(t)$ est elle même

- soit de la forme δv_{x_0} où $\delta \in \mathbb{Q}^+$, $x_0 \in \mathbb{C}$ et v_{x_0} est la valuation qui à $f = \text{constante} \times \prod (t-x)^{m_x}$ associe m_{x_0}.
- soit de la forme $\delta v_\infty = -\delta \deg_t$ avec $\delta \in \mathbb{Q}^+$.

Ainsi, pour un choix donné des paramètres (t, e_ω), $v/_{K^{(B)}}$ est déterminé par un triplet $(x, \delta, l) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ avec la remarque que $(x, 0, l)$ et $(x', 0, l)$ représentent la même valuation pour x, x' quelconques dans $\mathbb{P}^1$.

Définition 5.4.1 *On appelle hyperespace $\mathcal{H}$ l'ensemble $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q})/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $(x,\delta,l) \sim (x',\delta',l') \Leftrightarrow x = x', \delta = \delta', l = l'$ ou $\delta = \delta' = 0,\ l = l'$. On note $\mathcal{Q}_x$ l'ensemble $(\{x\} \times \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q})/\sim$. On a donc $\mathcal{H} = \bigcup_{x\in\mathbb{P}^1} \mathcal{Q}_x$. La partie centrale de l'hyperespace, notée $\mathcal{Q}$ est l'ensemble $(\mathbb{P}^1 \times \{0\} \times \mathbb{Q})/\sim$, c'est-à-dire que $\mathcal{Q} \simeq \mathbb{Q}$.*

Comme un élément v de l'ensemble $\mathcal{V}$ des valuations SL_2-invariantes de K est entièrement déterminé par sa restriction à $K^{(B)}$ on peut, après avoir fixé les paramètres t et e_ω, identifier $\mathcal{V}$ à une partie de l'hyperespace $\mathcal{H}$ (partie hachurée dans les figures p. 46). On notera $\mathcal{V}_x = \mathcal{V} \cap \mathcal{Q}_x$.

Comme H est fni on peut vérifier que l'application de restriction d'un élément $v_D \in \mathcal{D}^B$ (D un diviseur premier de SL_2/H stable par B) à $K^{(B)}$ est injective. En effet, soit ω_0 l'élément de $\mathbb{P}^1/H$ associé à $D \in \mathcal{D}^B$ (§ 3.2). Avec les notations du § 3.2 p.21, la valuation v_D associe à tout élément $\prod_{\omega\in\mathbb{P}^1/H} g_\omega^{\alpha_\omega}$ de $K^{(B)}$ l'entier relatif α_{ω_0}. En particulier $v_D\left(g_{\omega_0}^{\widetilde{c}_{\omega_0}}\right) = \widetilde{c}_{\omega_0} > 0$ et $v_D\left(g_\omega^{\widetilde{c}_\omega}\right) = 0$ si $\omega \neq \omega_0$. La restriction de v_D à $K^{(B)}$ détermine donc ω_0, c'est-à-dire D.

On peut donc considérer que $\mathcal{D}^B$ s'injecte dans $\mathcal{H}$ pour un choix donné des paramètres t et e_ω.

Au vu de ce qui précède il est naturel de définir l'action d'un élément quelconque $v = (x,\delta,l)$ de l'hyperespace sur un élément $f = f_0.{e_\omega}^n$ de $K^{(B)}$ ($f_0 \in K^B$) par $\langle v, f\rangle = \delta v_x(f_0) + nl$. L'application $\langle\ ,f\rangle$ est linéaire sur chaque $\mathcal{Q}_x$ et si $D \in \mathcal{V} \cup \mathcal{D}^B$ alors $\langle D, f\rangle = v_D(f)$.

Changements de coordonnées en fonction des paramètres (t, e_ω). Les coordonnées (x,δ,l) d'un élément de $\mathcal{V}$ ou de $\mathcal{D}^B$ dans l'hyperespace dépendent des paramètres (t, e_ω) tels que $K^B = \mathbb{C}(t)$ et e_ω engendre Γ. Il est utile de connaître précisément cette dépendance.

Si t est remplacé par $t' = \phi(t)$ où ϕ est un automorphisme de $\mathbb{P}^1$ alors (x,δ,l) est remplacé par $(\phi(x),\delta,l)$. Si maintenant e_ω est remplacé par $e_{\omega'}$ alors $e_{\omega'}/e_\omega \in K^B$ et en posant $\mathrm{div}(e_{\omega'}/e_\omega) = \sum_{x\in\mathbb{P}^1} n_x x$ avec $\sum n_x = 0$ (sommes finies) on vérifie que (x,δ,l) est remplacé par $(x,\delta,l + n_x\delta)$.

Par ailleurs, à chaque choix de $t = a/b$ avec (a,b) engendrant $\mathbb{C}[SL_2]_{n,\chi_0}^{(B\times H)}$ (définition au § 3.3 p. 22) correspond un isomorphisme de $\mathbb{P}^1/H$ sur $\mathbb{P}^1$ que nous allons définir.

Rappelons qu'au § 3.2 on a associé à tout $\omega = \{[a_1 : b_1], \ldots, [a_{n_\omega} : b_{n_\omega}]\} = \widetilde{H}.[a_1 : b_1]$ de $\mathbb{P}^1/H$ un élément $g_\omega = \prod_{i=1}^{n_\omega}(a_i x + b_i y)$ (défini à coefficient multiplicatif près). Si (a,b) est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[SL_2]_{n,\chi_0}^{(B\times H)}$ on peut alors définir un isomorphisme de $\mathbb{P}^1/H$ sur $\mathbb{P}^1$ en associant à tout élément j de $\mathbb{P}^1/H$ l'élément $x_j = [a_j : b_j]$ de $\mathbb{P}^1$ tel que $ab_j - ba_j \sim g_j^{\widetilde{c}_j}$ ($\sim$: $\mathbb{C}$-proportionalité).

Posons $t = a/b$: pour $j \in \mathbb{P}^1/H$ tel que $g_j^{\widetilde{c}_j} \neq b$ on a $x_j \neq \infty$ dans $\mathbb{P}^1$ et $t - x_j \sim g_j^{\widetilde{c}_j}/b$ et pour j tel que $g_j^{\widetilde{c}_j} = b$ on a $x_j = \infty$.

On a $K^B = \mathbb{C}(t)$. Si $t = a/b = a'/b'$ où (a', b') est une autre base de $\mathbb{C}[SL_2]_{n,\chi_0}^{(B\times H)}$ on a $(a, b) \sim (a', b')$ et on définit donc avec (a', b') le même isomorphisme entre $\mathbb{P}^1/H$ et $\mathbb{P}^1$ qu'avec (a, b). Autrement dit cet isomorphisme dépend seulement de t et non du choix de (a, b).

Pour les SL_2-germes de type I nous allons jouer sur ces possibilités de changement de coordonnées pour faire apparaître des B-cartes affines $\mathring{\mathrm{X}}$ telles que $\mathring{\mathrm{X}}/U$ soit torique.

5.4.2 Représentation de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{D}^B$ dans l'hyperespace

Pour chaque type de groupe H on fait un choix des paramètres t et e_ω et on représente les images de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{D}^B$ dans l'hyperespace $\mathcal{H}$.

Remarque : les choix de e_ω sont différents de ceux faits dans [Tim], en particulier tous les cas non cycliques sont regroupés pour simplifier les démonstrations ultérieures.

Cas où H est binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral. Pour $t = \frac{a}{b}$ tel que $K^B = \mathbb{C}(t)$ on choisit une base (a, b) de $\mathbb{C}[SL_2]_{n,\chi_0}^{(B\times H)}$ telle que a et b soient génériques, c'est-à-dire $a, b \neq g_e^{\widetilde{c}_e}, g_v^{\widetilde{c}_v}, g_f^{\widetilde{c}_f}$ ou encore $x_v, x_f, x_e \neq \infty$. Par ailleurs en s'aidant de la détermination des éléments de $K^{(B)}$ (annexe A) on peut vérifier que $e_\omega = g_v g_f g_e^{-1}$ est un élément de $K^{(B)}$ dont le caractère pour B est un générateur de Γ.

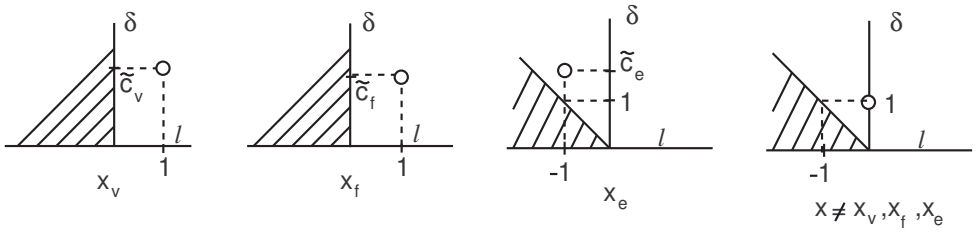
Détermination de $\mathcal{V}_x$ pour $x \in \mathbb{P}^1$:

- $x = x_v$. Soit $v_0 = v(v, r) \in \mathcal{V}$ avec $r \in [-1, \frac{2}{n_v} - 1] \cap \mathbb{Q}$ (notations de 3.4 p. 24). On a $\delta = v_0(t - x_v) = v_0(\frac{g_v^{\widetilde{c}_v}}{b}) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}$ et $l = v_0(e_\omega) = v_0(g_v g_f g_e^{-1}) = \frac{r}{c_v} - \frac{1}{c_f} + \frac{1}{c_e}$. Le cône $\mathcal{V}_x$ est engendré dans $\mathcal{Q}_{x_v} \simeq \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ par (δ, l) quand r décrit $[-1, \frac{2}{n_v} - 1]$ et on vérifie que $\mathcal{V}_x$ est défini par $l \leq 0$.
- $x = x_f$: $\mathcal{V}_x$ est défini par $l \leq 0$ (même méthode)
- $x = x_e$: $\mathcal{V}_x$ est défini par $\delta + l \leq 0$.
- $x \in \mathbb{P}^1$ et $x \neq x_v, x_f, x_e$: $\mathcal{V}_x$ est défini par $\delta + l \leq 0$

Détermination de $(\mathcal{D}^B)_x$ pour $x \in \mathbb{P}^1$:

on calcule $v_j/_{K^B}$ et $v_j(e_\omega)$ pour $j \in \{v, f, e\}$ et $j \in \mathbb{P}^1/H$ générique. Par exemple pour $j \in \{v, f, e\}$ on a $x = x_j$, $\delta = v_j(t - x_j) = v_j\left(\frac{g_j}{b}\right) = \widetilde{c}_j$ et on a $l = v_j(e_\omega) = 1$ si $j = v, f$ et $l = v_j(e_\omega) = -1$ si $j = e$. Pour $x \neq x_v, x_f, x_e$ dans $\mathbb{P}^1$ on trouve de même $\delta = 1$ et $l = 0$.

Dans les figures ci-dessous on a hachuré le cône de $\mathcal{Q}_x$ qui correspond à $\mathcal{V}_x$ et on a indiqué par des cercles les éléments de $\mathcal{D}^B$.

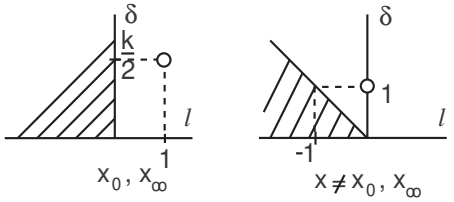


$\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}^B$ pour H binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral

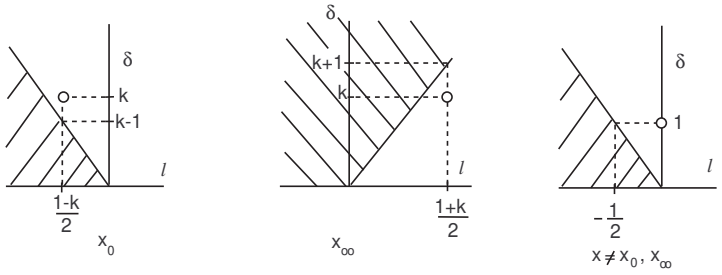
cas où H est cyclique d'ordre k. Pour $t = \frac{a}{b}$ tel que $K^B = \mathbb{C}(t)$ on choisit encore une base (a, b) de $\mathbb{C}[SL_2]^{(B \times H)}_{n,\chi_0}$ telle que a et b soient génériques.

Si k est pair alors, d'après l'annexe A, $e_\omega = g_0 g_\infty$ est un élément de $K^{(B)}$ dont le caractère pour B est un générateur de Γ (e_ω est de degré minimum 2).

Si k est impair on peut prendre $e_\omega = g_0^{\frac{1-k}{2}} g_\infty^{\frac{1+k}{2}}$ (annexe A).



$\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}^B$ pour H cyclique d'ordre k pair



$\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}^B$ pour H cyclique d'ordre k impair

5.4.3 Hypercône $\mathcal{C}(\mathring{\mathbf{X}})$ associé à une B-carte $\mathring{\mathbf{X}}$

Supposons choisi un couple de paramètres (t, e_ω). On peut considérer alors que les valuations (discrètes, géométriques) B-invariantes de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ appartiennent à l'hyperespace $\mathcal{H}$.

Définition 5.4.2 *Si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $K^{(B)}$ et $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ on note $\mathcal{F}^+ = \{v \in \mathcal{H} \ / \ \langle v, f\rangle \geq 0, \ \forall\ f \in \mathcal{F}\}$ et $\mathcal{G}^+ = \{f \in K^{(B)} \ / \ \langle v, f\rangle \geq 0, \ \forall\ v \in \mathcal{G}\}$.*

Un hypercône est un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{C}_x$ est un cône de $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{P}^1$. A tout couple $(\mathcal{W}, \mathcal{R}) \subset \mathcal{V} \times \mathcal{D}^B$ on associe l'hypercône $(\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++} \subset \mathcal{H}$.

L'intérêt de cet hypercône est qu'il permet de visualiser les conditions sur $\mathcal{W}$ et $\mathcal{R}$ pour que $\mathring{\mathrm{X}}$ soit une B-carte et de distinguer facilement les B-cartes de type I et II.

Considérons l'application qui à toute B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ associe le couple $\left((\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++}, \mathcal{R}\right)$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{D}^B$ où $\mathcal{W} \cup \mathcal{R}$ est l'ensemble des valuations essentielles B-invariantes de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ (§ 2.2 p. 14). Cette application est injective ($\mathcal{W}, \mathcal{R}$ déterminent $\mathring{\mathrm{X}}$ et on décrit plus bas à la remarque 5.4.7 comment retrouver $\mathcal{W}$ à partir de $(\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++}$). Nous allons rappeler comment Timashev décrit son image.

Introduisons pour ce faire les définitions suivantes.

Définition 5.4.3 *Un cône $\mathcal{C}_x$ de la partie $\mathcal{Q}_x$ de l'hyperespace est dit <u>plat</u> si tous ses éléments (x, δ, l) vérifient $\delta = 0$. Il est dit <u>droit</u> si il est engendré par un cône plat et l'élément $(x, 1, 0)$ de $\mathcal{Q}_x$.*

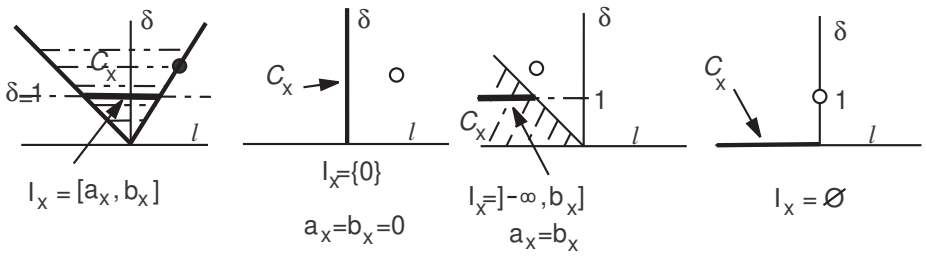
Pour une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ de type I on vérifie [Tim] qu'il existe au moins un $x \in \mathbb{P}^1$ tel que le cône engendré par $(\mathcal{W} \cup \mathcal{R})_x$ soit plat. Pour une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ de type II, on a que pour tout $x \in \mathbb{P}^1$ le cône engendré par $(\mathcal{W} \cup \mathcal{R})_x$ n'est pas plat.

Revenons maintenant aux conditions sur le couple $((\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++}, \mathcal{R})$ pour qu'il provienne d'une B-carte. La définition suivante est une adaptation de la définition 3.1 de [Tim, p 377] pour le cas $G = SL_2$.

Définition 5.4.4 *Soit $\mathcal{C} = \bigcup_{x \in \mathbb{P}^1} \mathcal{C}_x$ une partie de l'hyperespace telle que, pour tout $x \in \mathbb{P}^1$, $\mathcal{C}_x$ soit un cône strictement convexe de $\mathcal{Q}_x$. Pour chaque $x \in \mathbb{P}^1$ on définit l'intervalle I_x (éventuellement vide si $\mathcal{C}_x$ est plat) par $\mathcal{C}_x \cap \{\delta = 1\} = \{x\} \times I_x \times \{1\}$. Les rationnels a_x et b_x sont alors définis par :*

- *$[a_x, b_x] = I_x$ si I_x est un segment.*
- *$a_x = b_x = l$ si I_x est de la forme $]-\infty, l]$ ou $[l, +\infty[$.*

Exemples :



Avec ces notations Timashev démontre que le couple $(\mathcal{C},\mathcal{R}) \subset \mathcal{H}\times\mathcal{D}^B$ est égal au couple $\left((\mathcal{W}\cup\mathcal{R})^{++},\mathcal{R}\right)$ provenant d'une B-carte affine d'un plongement homogène de SL_2/H si et seulement si $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ est un hypercône colorié dans le sens suivant :

Définition 5.4.5 *[Tim, p 377] Un hypercône colorié est un couple $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ tel que $\mathcal{R}$ soit un ensemble cofini de $\mathcal{D}^B$ et $\mathcal{C} = \bigcup_{x\in\mathbb{P}^1}\mathcal{C}_x$ soit une partie de l'hyperspace vérifiant les propriétés suivantes (notations de la définition 5.4.4) :*

1. *$\mathcal{C}_x$ est un cône strictement convexe dans $\mathcal{Q}_x$ pour tout $x\in\mathbb{P}^1$.*
2. *Tous les cônes $\mathcal{C}_x$ sauf un nombre fini d'entre eux sont droits.*
3. *L'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*
   (a) *Il existe un $x_0\in\mathbb{P}^1$ tel que $I_{x_0}=\emptyset$ ($\mathcal{C}_{x_0}$ est plat et l'hypercône $\mathcal{C}$ est dit de type I). $\mathcal{C}_x$ est engendré pour tout $x\in\mathbb{P}^1$ par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{R}$*
   (b) *Tous les I_x sont non vides (aucun cône n'est plat et l'hypercône est dit de type II). Pour tout $x\in\mathbb{P}^1$, $\mathcal{C}_x$ est engendré par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}$ et par $[\sum a_x,\sum b_x]\times\{0\}$ (les sommes sont finies d'après la deuxième propriété). De plus $[\sum a_x,\sum b_x]\cap\mathbb{Q}\subset\mathcal{K}\setminus\{0\}$ où $\mathcal{K}$ est l'ensemble des éléments du cône $\mathcal{C}$ qui vérifient $\delta=0$.*

Les éléments de $\mathcal{R}$ sont appelés les couleurs de l'hypercône.

Remarque 5.4.6 *On a $\mathcal{K}=]-\infty,0]\cap\mathbb{Q}$, $\{0\}$ ou $[0,+\infty[\cap\mathbb{Q}$. La condition (3.b) exige en particulier que $\sum a_x$ et $\sum b_x$ soient de même signe.*

Remarque 5.4.7 *Si $\mathcal{C}=(\mathcal{W}\cup\mathcal{R})^{++}$ avec $\mathcal{W}\cup\mathcal{R}$ l'ensemble des valuations essentielles B-invariantes d'une B-carte $\mathring{X}$ on a $\mathcal{W}=\bigcup_{x\in\mathbb{P}^1}\mathcal{W}_x$ où $\mathcal{W}_x$ est l'ensemble des générateurs des arêtes de $\mathcal{C}_x$ qui ne sont ni dans $\mathcal{R}$ ni dans $[\sum a_x,\sum b_x]\times\{0\}$.*

Remarque 5.4.8 *Une B-carte de type I définit un hypercône $(\mathcal{W}\cup\mathcal{R})^{++}$ de type I et une B-carte de type II définit un hypercône $(\mathcal{W}\cup\mathcal{R})^{++}$ de type II.*

5.4.4 SL_2-germes de type I et de type II.

Soit $\mathring{X}$ la B-carte correspondant à un hypercône colorié $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ avec $\mathcal{C}=(\mathcal{W}\cup\mathcal{R})^{++}$. Choisissons une valuation v invariante par SL_2 telle que $v/_{K^{(B)}}$ soit dans l'intérieur relatif de $\mathcal{C}$ et considérons le SL_2-germe $\mathcal{O}$ qui est le localisé de $\mathbb{C}[\mathring{X}]$ en l'idéal premier $\mathbb{C}[\mathring{X}]\cap m_v$. On a [Tim] :

1. Si $\mathcal{O}$ est un SL_2-germe de type I :
   (a) $\mathring{X}$ est nécesairement de type I.
   (b) Toute valuation SL_2-invariante dominant $\mathcal{O}$ est dans l'intérieur relatif d'un certain cône $\mathcal{C}_{x_0}$ ($x_0\in\mathbb{P}^1$) que l'on notera $\mathcal{C}(\mathcal{O})$.

(c) La facette $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{V}$ qui sont dans l'intérieur relatif de $\mathcal{C}(\mathcal{O})$.

(d) Les valuations essentielles de $\mathcal{O}$ invariantes par B sont les ensembles $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{D}^B(\mathcal{O})$ des éléments de $\mathcal{W}$ et de $\mathcal{R}$ qui sont dans $\mathcal{C}(\mathcal{O})$.

(e) On peut modifier un nombre fini de cônes $\mathcal{C}_x \neq \mathcal{C}(\mathcal{O})$ pour sélectionner une autre B-carte de type I se localisant en $\mathcal{O}$. La seule contrainte est l'existence d'au moins un cône plat.

2. Si $\mathcal{O}$ est un SL_2-germe de II :

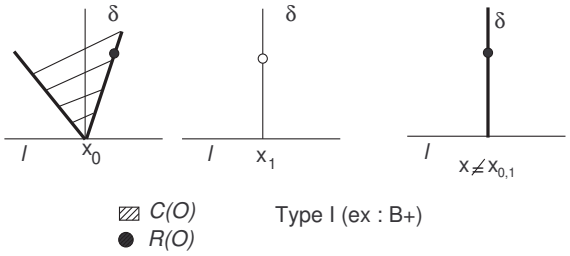
(a) Il n'y a qu'une seule B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_{\mathcal{O}}$ dont $\mathcal{O}$ est le localisé et l'on vérifie que $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_{\mathcal{O}}$ est de type II.

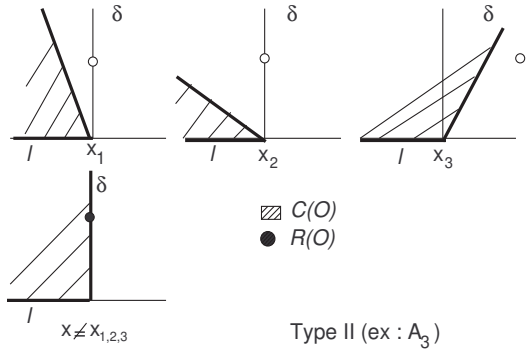
(b) Toute valuation SL_2-invariante dominant $\mathcal{O}$ est dans l'intérieur relatif de l'hypercône $\mathcal{C}$. On notera donc $\mathcal{C}(\mathcal{O}) = \mathcal{C}$.

(c) La facette $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{V}$ qui sont dans l'intérieur relatif de $\mathcal{C}(\mathcal{O})$.

(d) Les valuations essentielles de $\mathcal{O}$ invariantes par B sont les ensembles $\mathcal{V}(\mathcal{O}) = \mathcal{W}$ et $\mathcal{D}^B(\mathcal{O}) = \mathcal{R}$.

(e) Si $\mathcal{O}$ est de type A_N alors $\mathcal{K} \subset \mathbb{Q}^-$ et si $\mathcal{O}$ est de type B_- ou B_0 alors $\mathcal{K} \subset \mathbb{Q}^+$.





5.5 B-cartes $\mathring{\mathrm{X}}$ telles que $\mathring{\mathrm{X}}/U$ soit une variété torique

Soit $\mathring{\mathrm{X}}$ une B-carte dont l'ensemble des valuations essentielles B-invariantes est $\mathcal{W} \cup \mathcal{R}$ avec $(\mathcal{W}, \mathcal{R}) \subset \mathcal{V} \times \mathcal{D}^B$ et soit $\mathcal{C} = (\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++} = \cup_{x \in \mathbb{P}^1} \mathcal{C}_x$ son hypercône associé dans l'hyperespace, pour un choix donné des paramètres t, e_ω (§ 5.4.2). Le tore $T \simeq \mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$ car $T \subset B = N_{SL_2}(U)$.

Lemme 5.5.1
$\mathring{X}/U$ est une surface torique avec une action de $(\mathbb{C}^*)^2$ prolongeant celle de T si et seulement si on peut choisir le paramètre e_ω ($e_\omega \in K^{(B)}$ avec caractère pour B engendrant le groupe des caractères des éléments de K) tel que tous les cônes $\mathcal{C}_x$ de $\mathcal{C}$ soient droits sauf deux au plus.

Preuve : Supposons que $\mathring{\mathrm{X}}/U$ soit une variété torique avec une action de $(\mathbb{C}^*)^2$ prolongeant celle de T. On a alors $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U =< f_1^m f_2^n,\ (m,n) \in V >$ où V est un cône de $\mathbb{Z}^2$ et f_1, f_2 sont deux éléments de $K^{(B)}$. En particulier on peut écrire $f_1 = g_1 e_\omega^a$, $f_2 = g_2 e_\omega^b$ avec $g_i \in \mathbb{C}(t)$ et $a, b \in \mathbb{Z}$.

Quelle que soit la B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ (de type I ou II) on a $Q(\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U) = \mathbb{C}(SL_2/H)^U$ où $Q(\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U)$ est le corps de fraction de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$ (annexe B).

Le fait que $e_\omega \in Q(\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U)$ implique déjà que les exposants a et b dans l'écriture de f_1 et f_2 sont premiers entre eux. Ecrivons maintenant que $t \in Q(\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U)$:

$$t = \frac{\sum a_{ij} f_1^i f_2^j}{\sum b_{ij} f_1^i f_2^j} = \frac{\sum a_{ij} g_1^i g_2^j e_\omega^{ai+bj}}{\sum b_{ij} g_1^i g_2^j e_\omega^{ai+bj}}$$

Il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t \sum_{ai+bj=n} b_{ij} g_1^i g_2^j = \sum_{ai+bj=n} a_{ij} g_1^i g_2^j e_\omega^{ai+bj} \neq 0$. Soit i_0, j_0 tels que $ai_0 + bj_0 = n$. On a :

$$t \sum_\lambda b_{i_0+\lambda b, j_0-\lambda a} g_1^{i_0+\lambda b} g_2^{j_0-\lambda a} = \sum_\lambda a_{i_0+\lambda b, j_0-\lambda a} g_1^{i_0+\lambda b} g_2^{j_0-\lambda a}$$

d'où

$$t = \frac{\sum_\lambda a_{i_0+\lambda b, j_0-\lambda a} (g_1^b g_2^{-a})^\lambda}{\sum_\lambda b_{i_0+\lambda b, j_0-\lambda a} (g_1^b g_2^{-a})^\lambda} = P(g_1^b g_2^{-a})$$

Comme $g_1^b g_2^{-a} \in \mathbb{C}(t)$ on en déduit que P est une homographie. Notons R l'homographie inverse. Si a', b' sont tels que $a'b - b'a = 1$ alors l'égalité $g_1^b g_2^{-a} = R(t)$ donne $g_1 = R(t)^{a'} (Q(t) e_\omega)^a$ et $g_2 = R(t)^{b'} (Q(t) e_\omega)^b$ où $Q \in \mathbb{C}(t)$. Donc, quitte à remplacer t et e_ω par $R(t)$ et $Q(t) e_\omega$ on a $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U =< (t^{a'} e_\omega^a)^m (t^{b'} e_\omega^b)^n \ /\ (m,n) \in V \}$ ou $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U =< t^m e_\omega^n \ /\ (m,n) \in V' >$ où V' est un autre cône de $\mathbb{Z}^2$.

Reconstruisons l'hypercône $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ à partir de cette nouvelle présentation de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$. Par définition de $\mathcal{C} = (\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++}$ un élément $v = (x, \delta, l)$ de l'hyperespace est dans $\mathcal{C}$ si et seulement si $\langle v, f\rangle \geq 0$ pour tout $f \in K^{(B)}$ tel que $\langle \mathcal{W} \cup \mathcal{R}, f\rangle \geq 0$. Mais $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$ est un T-module, engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les éléments de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^{(B)} = \{f \in K^{(B)} \ / \ \langle \mathcal{W} \cup \mathcal{R}, f\rangle \geq 0\}$ et par ailleurs tout élément de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^{(B)}$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $t^m e^n_\omega$ pour $(m, n) \in V'$ (avec le même n). Donc $\mathcal{C}$ est l'ensemble des éléments $v = (x, \delta, l)$ de l'hyperespace tels que $\langle v, f\rangle \geq 0$ pour tout $f = t^m e^n_\omega$ avec $(m, n) \in V'$. Si V' est engendré par $u_1 = (u_{11}, u_{12})$ et $u_2 = (u_{21}, u_{22})$ on en déduit (§ 5.4.1) que $v = (x, \delta, l) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^{+*} \times \mathbb{Q}$ est dans l'hypercône $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{lll} x = 0 & \text{et} & \delta u_{i1} + l u_{i2} \geq 0 \text{ pour } i = 1, 2 \\ \text{ou} \quad x = \infty & \text{et} & -\delta u_{i1} + l u_{i2} \geq 0 \text{ pour } i = 1, 2 \\ \text{ou} \quad x \neq 0, \infty & \text{et} & l u_{i1} \geq 0 \text{ pour } i = 1, 2 \end{array}\right.$$

Selon que les u_{11} et u_{21} sont tous deux positifs, tous deux négatifs ou de signes contraires on voit que la condition sur (δ, l) pour $x \neq 0, \infty$ est $l \geq 0$, $l \leq 0$ ou $l = 0$ donc dans tous les cas $\mathcal{C}_x$ est un cône droit pour $x \neq 0, \infty$.

Réciproquement, supposons que tous les cônes de $\mathcal{C}$ soient droits sauf éventuellement deux, par exemple $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_\infty$ (il suffit de choisir un t adapté d'après § 5.4.1). Les cônes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_\infty$ sont engendrés respectivement par u_1, u_2 et $u_3, u_4 \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$. Les autres cônes sont droits, c'est-à-dire engendrés par $(\delta, l) = (1, 0)$ et $(\delta, l) = (0, \varepsilon)$ où $\varepsilon = 0, 1$ ou -1.

Le T-module $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$ est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par ses éléments semi-invariants par T c'est-à-dire par ses éléments de la forme $g(t)e^n_\omega$ où $g \in \mathbb{C}(t)$. Soit $f = g(t)e^n_\omega \in \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^{(B)}$ avec $g(t) = \prod (t - x)^{m_x}$, $m_x \in \mathbb{Z}$. Comme $(\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^+ = (\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{+++} = \mathcal{C}^+$ on a $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^{(B)} = K^{(B)} \cap \mathcal{C}^+$ d'où (§ 5.4.1) en posant $u_i = (\delta_i, l_i) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{rcl} f \in \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^{(B)} & \Leftrightarrow & \langle \mathcal{C}, f\rangle \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & (\mathrm{I}) \left\{\begin{array}{ll} m_x \geq 0 \text{ pour tout } x \neq 0, \infty & (\langle (x, 1, 0), f\rangle \geq 0) \\ \varepsilon n \geq 0 & ((x, 0, \varepsilon).f \geq 0) \\ \delta_i m_0 + l_i n \geq 0 \text{ pour } i = 1, 2 & (\langle \mathcal{C}_x, f\rangle \geq 0) \\ \delta_i(-\deg_t(g)) + l_i n \geq 0 \text{ pour } i = 3, 4 & (\langle \mathcal{C}_\infty, f\rangle \geq 0) \end{array}\right. \end{array}$$

Comme $m_x \geq 0$ pour tout $x \neq 0, \infty$ on peut développer f sous la forme

$$g(t)\, e^n_\omega = \sum_{i=m_0}^{\deg_t(g)} a_i t^i e^n_\omega \quad (a_i \in \mathbb{C})$$

Mais puisque $\delta_i > 0$ on voit, d'après le système d'inégalités (I) qui conditionne l'appartenance à $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^{(B)}$, que chaque terme $a_i t^i e^n_\omega$ est aussi dans $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^{(B)}$. On en déduit que $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$ est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les éléments de la forme $t^m e^n_\omega$ où (m, n) décrit un cône de $\mathbb{Z}^2$ que l'on déduit du système d'inégalités

précédent. En particulier $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ est une surface torique, pour une action de $(\mathbb{C}^*)^2$ qui prolonge celle de $T \simeq \mathbb{C}^*$ (définie par $(\lambda,\mu).(t^m e_\omega^n) = \lambda^m \mu^n t^m e_\omega^n$). Le lemme est démontré.

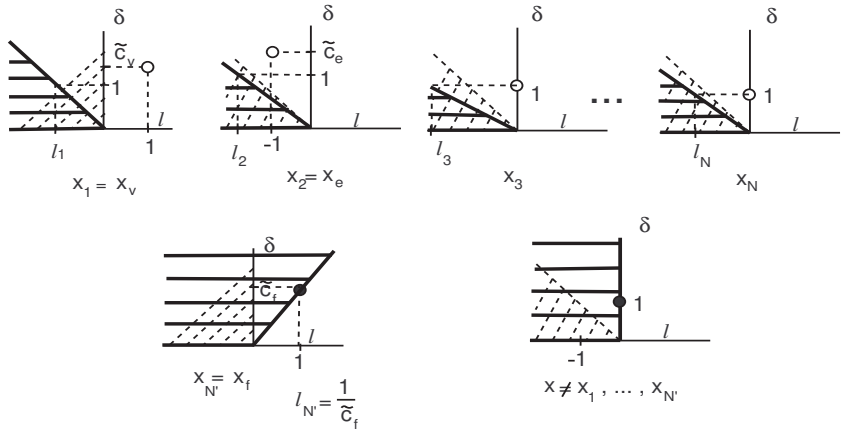
□

5.6 SL_2-germes de type II

Les SL_2-germes des orbites de dimension 1 et de type II sont les SL_2-germes de type A_N et B_-.

5.6.1 SL_2-germes de type $\mathbf{A}_N$

Soit $\mathcal{O}$ un SL_2-germe de type A_N et $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ la B-carte dont il est le localisé. Fixons un élément t tel que $K^B = \mathbb{C}(t)$ et un élément e_ω de $K^{(B)}$ dont le caractère associé engendre Γ, le groupe des caractères de B des éléments de $K^{(B)}$. La B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ définit un hypercône $\mathcal{C} = \bigcup_{x\in\mathbb{P}^1} \mathcal{C}_x$ de l'hyperespace. On sait que tous les cônes sont droits sauf un nombre fini d'entre eux et le fait que $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ soit de type II se traduit par l'absence de cône plat. Chaque cône $\mathcal{C}_x$ est alors engendré dans $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ par $(0,-1)$ et $(1,l_x)$ où $l_x \in \mathbb{Q}$ et les l_x sont nuls sauf un nombre fini : $l_{x_1}, \ldots l_{x_{N'}}$. Rappelons que les l_{x_i} doivent aussi vérifier $\sum l_{x_i} < 0$. A priori $N \neq N'$ comme on le remarque dans l'exemple suivant (t et e_ω sont choisis comme en 5.4.2).



Dans cet exemple H est binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral.

Réduction à la condition de lissité d'une surface affine torique. Les conditions de régularité de $\mathcal{O}$ découleront de :

Lemme 5.6.1

le SL_2-germe $\mathcal{O}$ de type A_N est régulier si et seulement si tous les l_x sont entiers sauf éventuellement deux, $l_{x_1} = -p/q$ et $l_{x_2} = -p'/q'$ (irréductibles) et si la relation suivante est vérifiée :

$$\boxed{pq' + p'q + Lqq' = 1}$$

en posant $L = -\sum_{x \neq x_1, x_2} l_x$.

Corollaire 5.6.2 *tout point d'une orbite régulière de type A_N d'un plongement X appartient à un ouvert isomorphe à $\mathbb{C}^3$.*

Preuve du corollaire : Soit Y une orbite régulière de type A_N d'un plongement lisse, $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ la B-carte qui l'intersecte et x_0 un point de $Y \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}}$. On sait par le lemme 5.1.1 que $\overset{\circ}{\mathrm{X}} \cong U \times S$ avec $S = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U)$. Le fait que tous les l_x soient entiers sauf deux impliquent (lemme 5.5.1) que S est une surface affine torique. Comme S est lisse et possède un point fixe on a $S \cong \mathbb{C}^2$.

□

Preuve du lemme : Posons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\overset{\circ}{\mathrm{X}},\mathrm{Y}}$ avec $Y \subset \overset{\circ}{\mathrm{X}}$ et notons p l'image de Y dans la projection $\overset{\circ}{\mathrm{X}} \to \overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$.

p est l'unique point fixe de $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ sous l'action de $T \simeq \mathbb{C}^*$ et on sait (§ 5.1) que $\mathcal{O}$ est régulier si et seulement si p est lisse dans $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$. Nous appelerons degré d'un élément f de $K^{(B)}$ son caractère associé pour l'action de T, c'est-à-dire l'entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que f s'écrive $g(t)e^n_\omega$ avec $g \in \mathbb{C}(t)$. Il est facile de voir que pour un SL_2-germe de type A_N les éléments de $f = g(t)e^n_\omega$ de $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^{(B)}$ sont de degré négatif : la valuation v de coordonnées $(x, 0, -1)$ (pour $x \in \mathbb{P}^1$ quelconque) dans l'hyperespace est dans $(\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++}$ et $\langle v, f \rangle \geq 0$ s'écrit $-n \geq 0$.

L'idéal maximal $\mathcal{M}$ du point p est engendré par les éléments homogènes de degré strictement négatif.

Supposons p lisse dans $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$. L'idéal $\mathcal{M}$ est donc engendré par deux éléments f_1 et f_2 et l'on peut choisir f_1, f_2 dans $K^{(B)}$ c'est-à-dire $f_1 = g_1(t)e^a_\omega$, $f_2 = g_2(t)e^b_\omega$ avec $g_1, g_2 \in \mathbb{C}(t)$ et $a, b \in \mathbb{Z}^-$.

Montrons que $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U = \mathbb{C}[f_1, f_2]$.

Soit f un élément de $\mathcal{M}$ homogène de degré n $(n < 0)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on peut écrire f sous la forme $f = P_m(f_1, f_2) + f_m$ où P_m est un polynôme de deux variables de degré total m et f_m est un élément homogène de $\mathcal{M}^{m+1}$. Mais les éléments homogènes non nuls de $\mathcal{M}^{m+1}$sont de degré inférieur à $-(m+1)$ donc si $m \geq -n$ on peut choisir $f_m = 0$. Conclusion : $f \in \mathbb{C}[f_1, f_2]$.

En particulier $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ est une surface torique (isomorphe à $\mathbb{C}^2$), pour une action de $(\mathbb{C}^*)^2$ qui prolonge celle de T. Par application du lemme 5.5.1 on en déduit que, quitte à remplacer le paramètre initial e_ω par $R(t)e_\omega$ avec $R \in \mathbb{C}(t)$, tous les cônes sont droits sauf éventuellement deux, c'est-à-dire que tous les l_x sont nuls sauf éventuellement deux. Or le changement de paramètre e_ω a eu pour effet de remplacer

chaque l_x initial par $l_x + \alpha_x$, où l'on a posé $R(t) = \prod (t-x)^{\alpha_x}$ ($\alpha_x \in \mathbb{Z}$). Donc les l_x sont entiers sauf éventuellement deux.

Réciproquement quand tous les l_x sont entiers sauf éventuellement deux (l_{x_1} et l_{x_2}) on se ramène au cas où ils sont tous nuls sauf éventuellement deux en remplaçant e_ω par $R(t)e_\omega$ avec $\mathrm{div}(R) = \sum_{x \neq x_1, x_2} -l_x.x$. Tous les cônes $\mathcal{C}_x$ de $\mathcal{C}$ sont alors droits sauf au plus deux et d'après le lemme 5.5.1 on sait que $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ est une surface torique. Le lemme 5.5.1 précise le cône V' de $\mathbb{Z}^2$ tel que $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U = < t^m e_\omega^n \ (m,n) \in V' >$ et il est ensuite facile de voir que la condition de lissité de $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$, exprimée en fonction des l_x de départ, est celle du lemme.

□

Définition 5.6.3 *Supposons que $\mathcal{O} = A_N(j_1, \ldots, j_N\,; r_1, \ldots, r_N)$. On note S l'ensemble des j_i non génériques qui interviennent dans la définition de $\mathcal{O}$ ($S \subset \{0, \infty\}$ ou $\{v, f, e\}$ selon que H est cyclique ou non) et P l'ensemble des j_i génériques. Le cardinal de S (ou de P) est noté $|S|$ (ou $|P|$).*

Pour la preuve des propositions 1, 2 et 3 p. 30 on distinguera trois types de groupe H : H non cyclique, H cyclique d'ordre pair et H cyclique d'ordre impair. Pour un groupe H donné le paramètre important est le cardinal de S.

Preuve de la condition de régularité pour H binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral. Pour H binaire diédral d'ordre $4k$ on suppose toujours $k \geq 2$, le cas $k = 1$ étant traité comme cyclique. Le tableau

$\widetilde{H}$	$\widetilde{c}_v$	$\widetilde{c}_f$	$\widetilde{c}_e$
diédral	k	2	2
tétraédral	3	3	2
octaédral	4	3	2
icosaédral	5	3	2

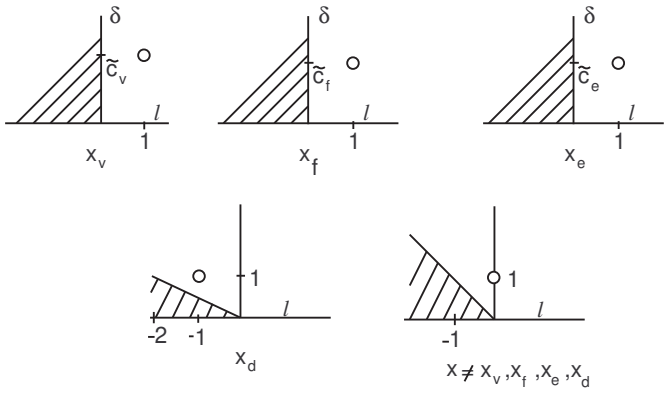
montre alors que $\widetilde{c}_j \geq 2$ pour tout j dans $\mathbb{P}^1/H$. En particulier $1/\widetilde{c}_i \notin \mathbb{Z}$.

Supposons $S = \emptyset$.

On a $l_{xj} = 1/\widetilde{c}_j \notin \mathbb{Z}$ pour $j \in \{v, f, e\}$ et donc, par application du lemme 5.6.1, le SL_2-germe n'est pas régulier.

Supposons card $(S) = 1$.

Posons $S = \{s\}$ et $\{s, s', s''\} = \{v, f, e\}$. Pour ne pas être obligé de distinguer différents cas selon $s \in \{v, f, e\}$ il est préférable de remplacer le paramètre e_ω choisi au § 5.4.2 p. 45 par $(t - x_e)(t - x_d)^{-1} e_\omega$ où d est un élément générique quelconque de $\mathbb{P}^1/H$ qui n'est pas dans P. Après ce changement de paramètre le point $(x_e, \delta, l) = (x_e, \widetilde{c}_e, -1)$ devient $(x_e, \widetilde{c}_e, -1 + \widetilde{c}_e) = (x_e, \widetilde{c}_e, 1)$ et le point $(x_d, \delta, l) = (x_d, 1, 0)$ devient $(x_e, 1, -1)$ (§ 5.4.1 p. 44). La représentation de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}^B$ dans l'hyperespace est alors



En reprenant les notations du lemme 5.6.1 on pose $l_{x_{s'}} = -p/q = -1/\widetilde{c}_{s'}$ et $l_{x_{s''}} = -p'/q' = -1/\widetilde{c}_{s''}$. Les autres l_x sont nécessairement entiers pour que $\mathcal{O}$ soit régulier. On a donc $L = -(\sum_{j\in S\cup P} l_{x_j} + l_{x_d}) = -(\sum_{j\in S\cup P} l_{x_j} - 1)$ avec $l_{x_s} \leq 0$ et $l_{x_j} \leq -1$. En particulier $L \geq |P| + 1$.

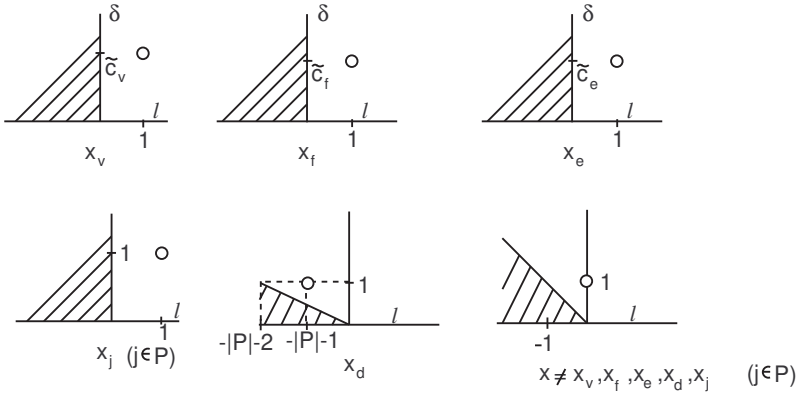
La condition de régularité du lemme 5.6.1 est alors $-\widetilde{c}_{s'} - \widetilde{c}_{s''} + L\widetilde{c}_{s'}\widetilde{c}_{s''} = 1$ que l'on écrit

$$\widetilde{c}_{s'}(\widetilde{c}_{s''} - 2) + \widetilde{c}_{s''}(\widetilde{c}_{s'} - 2) + 2(L-1)\widetilde{c}_{s'}\widetilde{c}_{s''} = 2$$

Comme $\widetilde{c}_{s'}, \widetilde{c}_{s''} \geq 2$ et $L \geq 1$ cette égalité implique $L = 1$ (d'où $|P| = 0$) et $\{\widetilde{c}_{s'}, \widetilde{c}_{s''}\} = \{2, 3\}$. Il s'agit donc d'un SL_2-germe de type A_1 et la condition $\{\widetilde{c}_{s'}, \widetilde{c}_{s''}\} = \{2, 3\}$ est bien celle de la proposition 1 p. 30.

Supposons card $(S) = 2$.

On pose $S = \{s', s''\}$ et $\{v, f, e\} = \{s, s', s''\}$. Puisque $l_{x_s} = 1/\widetilde{c}_s \notin \mathbb{Z}$ il est nécessaire, d'après le lemme 5.6.1 que tous les autres l_x soient entiers sauf éventuellement un : $l_{x_{i_0}}$ pour un certain $i_0 \in S\cup P$. Effectuons un nouveau changement du paramètre e_ω de l'hyperespace pour modifier les cônes $\mathcal{V}_x$ pour $x = x_j$ et $j \in P$: e_ω est remplacé par $(t - x_d)^{-|P|}\prod_{j\in P}(t - x_j)e_\omega$. La représentation de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}^B$ dans l'hyperespace devient (voir § 5.4.1) :



Posons $l_{x_{i_0}} = -p/q$ et $L = -(\sum_{j\in S\cup P} l_{x_j} + l_{x_d}) = -(\sum_{j\in S\cup P} l_{x_j} - |P| - 1) \geq |P| + 1$. La condition du lemme 5.6.1 est alors $p\widetilde{c}_s - q + Lq\widetilde{c}_s = 1$ ou

$$(p + Lq)\widetilde{c}_s = q + 1$$

Comme $L \geq 1,\ \widetilde{c}_s \geq 2,\ p \geq 0,\ q \geq 1$ cette égalité ne peut être vérifiée que si $L = 1$ (donc $|P| = 0$), $\widetilde{c}_s = 2$, $p = 0$ et $q = 1$. C'est le résultat de la proposition 1 pour le type A_2.

Supposons enfin $S = \{v, f, e\}$.

Pour la régularité du SL_2-germe $\mathcal{O}$ il est nécessaire que tous les l_x soient entiers sauf éventuellement $l_{x_{i_0}}$ et $l_{x_{i_1}}$ pour deux éléments i_0, i_1 de $S \cup P$. On choisit le paramètre e_ω comme dans le cas $\mathrm{card}(S) = 1$ (figure en 5.6.1) et on pose $l_{x_{i_0}} = -p/q$ et $l_{x_{i_1}} = -p'/q'$. La condition de régularité du SL_2-germe est $pq' + p'q + Lqq' = 1$.

Comme $L \geq |P| + 1,\ p, p' \geq 0,\ q, q' \geq 1$ cette égalité n'est possible que pour $L = 0$ (donc $|P| = 0$), $p = p' = 0$ et $q = q' = 1$. C'est le résultat de la proposition 1 pour le type A_3.

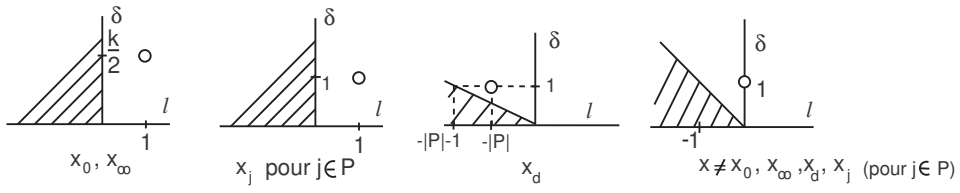
Preuve de la condition de régularité pour H cyclique d'ordre k pair. Pour le cas $k = 2$ la proposition 3 p. 33 est conforme aux résultats de L.Moser ([M1] et [M2]). Nous supposerons donc $k \geq 4$.

Supposons $S = \emptyset$.

On a déjà $l_{x_0} = l_{x_\infty} = \frac{1}{k/2} \notin \mathbb{Z}$ donc tous les autres l_x doivent être entiers et la condition de régularité est $-k/2 - k/2 + L(k/2)^2 = 1$ pour $L = -\sum_{x\neq x_0, x_\infty} l_x$. Comme $k/2 \geq 2$ cette égalité n'est jamais vérifiée.

Supposons $\mathrm{card}\,(S) = 1$, par exemple $S = \{0\}$.

Pour la représentation de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}^B$ dans l'hyperespace on fait un choix différent de celui du § 5.4.2 p. 45. On choisit un élément non générique d de $\mathbb{P}^1/H$ qui n'appartient pas à P et on remplace e_ω par $(t - x_d)^{-|P|}\prod_{j\in P}(t - x_j)e_\omega$ pour que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}^B$ se présentent ainsi (voir § 5.4.1) :



Tous les l_x doivent être entiers sauf $l_{x_\infty} = \frac{1}{k/2}$ et éventuellement $l_{x_{j_o}} = -p/q$ pour un certain $j_0 \in S \cup P$. La condition du lemme 5.6.1 est $p\frac{k}{2} - q + Lq\frac{k}{2} = 1$ ou

$$p\frac{k}{2} + q\big(L\frac{k}{2} - 1\big) = 1$$

avec $L = -(l_{x_d} + \sum_{j\in(S\cup P)\setminus\{\infty,j_0\}} l_{x_j}) = -(-|P| + \sum_{j\in(S\cup P)\setminus\{\infty,j_0\}} l_{x_j}) \geq |P| \geq 0$. Deux cas se présentent :

- Si $L \geq 1$ alors $L\frac{k}{2} - 1 \geq 1,\ q \geq 1,\ p \geq 0$ impliquent $L = 1$ (donc $|P| = 1$), $k/2 = 2,\ p = 0$ et $q = 1$. C'est le résultat pour $k = 4$ de la proposition 3 p. 33.
- Si $L = 0$ alors $|P| = 0$ et $p\frac{k}{2} - q = 1$. En particulier $j_0 = 0$ et $l_{x_0} = -\frac{p}{p\frac{k}{2}-1}$.

Dans le deuxième cas pour retrouver la valeur de r_0 correspondante on pose $v = v\,(0, r_{_0}) \in \mathcal{V}_{x_0}$ et on calcule les coordonnées de v dans l'hyperespace (voir § 5.4.2 p. 45) :

$$\begin{cases} \delta = v\,(t - x_0) = v(g_0^k/b) = \frac{1}{2}(r_0 + 1) \\ l = v\,(e_\omega) = 1/k(r_0 - 1) \end{cases}$$

r_0 vérifie $l/\delta = l_{x_0} = -\frac{p}{p\frac{k}{2}-1}$ c'est-à-dire $r_0 = \frac{-1}{-1+kp}$. c'est le cas régulier de type A_1 de la proposition 3.

Supposons enfin $S = \{0, \infty\}$.

Tous les l_x doivent être entiers sauf éventuellement $l_{x_{j_0}}, l_{x_{j_1}}$ pour deux éléments $j_0, j_1 \in \{0, \infty\} \cup P$. Choisissons e_ω comme dans le cas $\mathrm{card}(S) = 1$ et posons $l_{x_{j_0}} = -\frac{p}{q}$, $l_{x_{j_1}} = -\frac{p'}{q'}$ et $L = -(l_{x_d} - \sum_{j\in(S\cup P)\setminus\{j_o,j_1\}} l_{x_j})$. On a $l_x \leq 0$ pour tout $x \in S \cup P$ et $L = |P| - \sum_{j\in(S\cup P)\setminus\{j_o,j_1\}} l_{x_j} \geq |P| \geq 0$. La condition du lemme 5.6.1 est

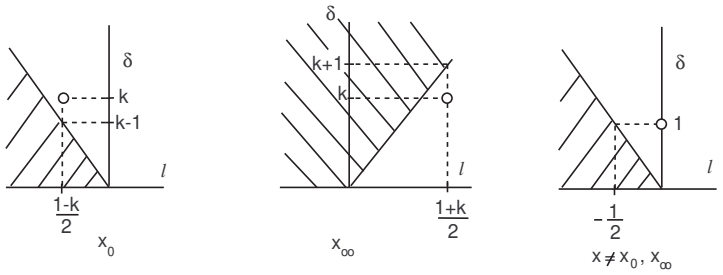
$$pq' + p'q + Lqq' = 1$$

Comme $p, p' \geq 0$, $q, q' \geq 1$ et $L \geq |P| \geq 0$ on a deux cas :

- $|P| = 0$. En particulier $L = 0$ et par exemple $j_0 = 0$ et $j_1 = \infty$. Ensuite on a $pq' + p'q = 1$ d'où $p = 0,\ p' = q = 1$ ou $p' = 0,\ p = q' = 1$. Si par exemple on est dans le premier cas, c'est-à-dire $l_0 = 0$ et $l_\infty = -\frac{1}{q'}$, on en déduit r_0 maximal ($= 1$) et $r_\infty = \frac{n}{n+k}$ pour $n \geq 1 - \frac{k}{2}$ (calcul analogue à celui du cas $\mathrm{card}(S) = 1$). C'est le résultat de type A_2 de la proposition 3.
- $|P| = 1$. Ce cas implique $L = 1$ c'est-à-dire $S \cup P = \{0, \infty, \omega_1\}$ et $l_x = 0$ pour $x \in (S \cup P) \setminus \{j_o, j_1\}$. Ensuite $q = q' = 1$ et $pq' + p'q = 0$ d'où $l_{x_{j_1}} = l_{x_{j_1}} = 0$. Les r_j pour $j \in \{0, \infty, \omega_1\}$ sont donc maximaux et on obtient le résultat de type A_3 de la proposition 3.

Preuve de la condition de régularité pour H cyclique d'ordre k impair
Le cas $k = 1$ a déjà été traité par L.Moser dans [M1] et [M2] et il est conforme à la présentation de la proposition 2 p. 32. Nous supposerons donc $k \geq 3$.

Avec les choix des paramètres t, e_ω du § 5.4.2 ($e_\omega = g_0^{\frac{1-k}{2}} g_\infty^{\frac{1+k}{2}}$) $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}^B$ se présentent ainsi dans l'hyperespace.



Supposons $\mathrm{card}(S) = \emptyset$.

On a alors $l_{x_0} = -\frac{\frac{k-1}{2}}{k}$, $l_{x_\infty} = \frac{\frac{k+1}{2}}{k}$ et comme $k \geq 3$ on en déduit $l_{x_0}, l_{x_\infty} \notin \mathbb{Z}$. D'après le lemme 5.6.1 la régularité du SL_2-germe implique que tous les autres l_{x_j} soient entiers et que $pq' + p'q + Lqq' = 1$ en posant $L = \sum_{j \neq 0,\infty} l_{x_j}$, $l_{x_0} = -\frac{p}{q}$ et $l_{x_\infty} = -\frac{p'}{q'}$. Cette égalité devient :

$$\frac{k-1}{2}k - \frac{k+1}{2}k + Lk^2 = 1$$

ce qui est impossible car $k \geq 3$.

Supposons $\mathrm{card}(S) = 1$, par exemple $S = \{0\}$.

Comme $l_{x_\infty} \notin \mathbb{Z}$, la régularité du SL_2-germe implique qu'il y ait au plus un autre l_{x_j} non entier, disons $l_{x_{j_0}}$, pour $j_0 \in \{0\} \cup P$. Posons $l_{x_{j_0}} = -\frac{p}{q}$ ($p, q \geq 1$ car $l_{x_{j_0}} \leq -\frac{1}{2}$) et $L = -\sum_{j \neq \infty, j_0} l_{x_j}$. La condition de régularité du lemme 5.6.1 est $pk - \frac{k+1}{2}q + Lqk = 1$ ou

$$pk + q\big(kL - \frac{k+1}{2}\big) = 1 \tag{5.1}$$

Pour $j \in (\{0\} \cup P) \setminus \{j_0\}$ on a $l_{x_j} \in \mathbb{Z}$ et $l_{x_j} \leq -\frac{1}{2}$ d'où $l_{x_j} \leq -1$ et $L \geq N - 1 \geq 0$.

Si $L \geq 1$ alors $kL - \frac{k+1}{2} \geq \frac{k-1}{2} \geq 1$ et l'égalité 5.1 est impossible. Supposons donc $L = 0$. En particulier on a $N = 1$ et $P = \emptyset$. L'égalité 5.1 devient

$$pk - q\frac{k+1}{2} = 1$$

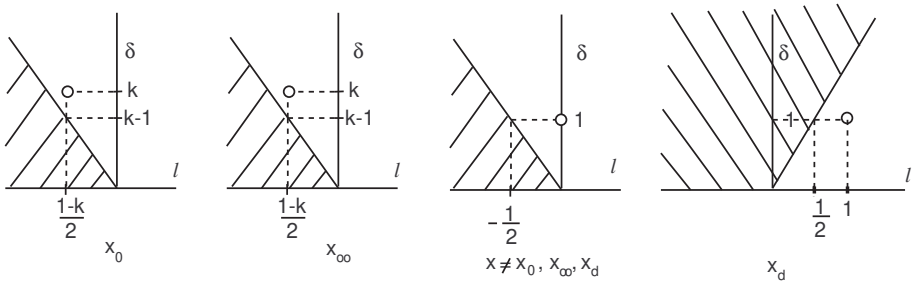
qui se résout en $p = -1 + n\frac{k+1}{2}$ et $q = -2 + nk$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si $v(0, r_0)$ est la valuation SL_2-invariante qui a pour coordonnées $(x_0, \delta, l) = (x_0, 1, -\frac{p}{q})$ dans l'hyperespace on a :

$$\begin{cases} \delta = v\,(t-x_0) = v(g_0^k/b) = r_0+1 \\ l = v\,(e_\omega) = \frac{1}{k}\left(\frac{1-k}{2}r_0 - \frac{1+k}{2}\right) \end{cases}$$

r_0 vérifie $l/\delta = l_{x_0} = \frac{\frac{1-k}{2k}r_0 - \frac{1+k}{2k}}{r_0+1} = -\frac{p}{q}$ d'où $r_0 = \frac{-pk+\frac{1+k}{2}q}{pk+\frac{1-k}{2}q} = -\frac{1}{q+1} = \frac{-1}{-1+nk}$. C'est le résultat de type A_1 de la proposition 2.

Supposons enfin $S = \{0, \infty\}$.

On choisit un élément non générique d de $\mathbb{P}^1/H$ qui n'appartient pas à P et on remplace $e_\omega = g_0 g_\infty$ du § 5.4.2 p. 45 par $(t-x_d)e_\omega$ pour que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}^B$ se présentent ainsi (voir § 5.4.1) :



Pour que le SL_2-germe soit régulier il faut que les l_{x_j} soient tous entiers sauf éventuellement deux, disons $l_{x_{j_0}}$ et $l_{x_{j_1}}$ avec $j_0, j_1 \in S \cup P$. On pose $l_{j_0} = -\frac{p}{q}$ $(\leq -\frac{1}{2})$, $l_{x_{j_1}} = -\frac{p'}{q'}$ $(\leq -\frac{1}{2})$ et $L = -\sum_{j\neq j_0,j_1} l_{x_j} = -(l_{x_d} + \sum_{j\in(S\cup P)\setminus\{j_0,j_1\}} l_{x_j}) = -(1 + \sum_{j\in(S\cup P)\setminus\{j_0,j_1\}} l_{x_j})$ $(\geq |P| - 1 \geq -1)$. La condition du lemme 5.6.1 est $pq' + p'q + Lqq' = 1$. Comme $p, p', q, q' \geq 1$ on a $pq' + p'q \geq 2$ et on ne peut pas avoir $L \geq 0$. Donc $L = -1$, $|P| = 0$ et par exemple $j_0 = 0$ et $j_1 = \infty$. La condition devient

$$pq' + p'q - qq' = 1$$

ou

$$(2p-q)q' + (2p'-q')q = 2$$

avec $2p-q$, $2p'-q' \geq 0$ et $q, q' \geq 1$. Il n'y a que deux possibilités (à permutation près de 0 et ∞) :

1. $2p - q = 2p' - q' = q = q' = 1$ c'est-à-dire $p = p' = q = q' = 1$. Donc $l_{x_0} = l_{x_\infty} = -1$ ce qui équivaut à $r_0 = r_\infty = \frac{1-k}{1+k}$, par un calcul analogue au cas $\mathrm{card}(S) = 1$.
2. $2p' - q' = 0$ et $(2p-q)q' = 2$ c'est-à-dire $p' = 1$, $q' = 2$, $2p - q = 1$. Donc $l_{x_0} = -\frac{p}{2p-1}$ $(p \geq 1)$ et $l_{x_\infty} = -\frac{1}{2}$. Par le même type de calcul que pour le cas $\mathrm{card}(S) = 1$ on en déduit r_∞ maximal et $r_\infty = \frac{n}{n+k}$ pour $n \geq \frac{1-k}{2}$.

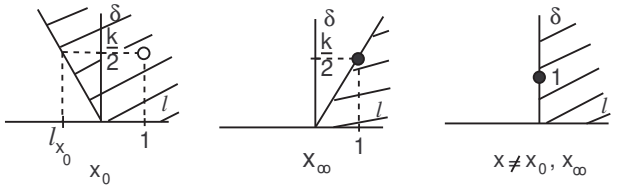
La proposition 2 p. 32 est démontrée.

□

5.6.2 SL_2-germes de Type B_-

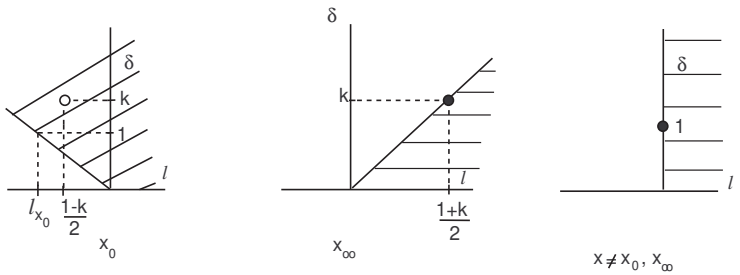
Soit $\mathcal{O} = B_-(j,r)$ un G-germe de type B_- avec $j \in \mathbb{P}^1/H$ et $r \in]0, b(j)[=]0, \frac{2}{n_j} - 1[$. La condition $b(j) > 0$ implique $n_j = 1$. D'après les tableaux 3.1 et 3.2 p. 20 on voit que H est nécessairement cyclique et j non générique (sauf si $k = 1, 2$).

Preuve de la condition de régularité pour H cyclique d'ordre k pair. Supposons par exemple $j = 0$. Avec le choix du paramètre e_ω du § 5.4.2 ($e_\omega = g_0 g_\infty$) l'hypercône de la B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ de $\mathcal{O}$ se présente ainsi :



Pour t tel que $K^B = \mathbb{C}(t)$ on choisit une valeur telle que $x_0 = 0$ et $x_\infty = \infty$ (§ 5.4.1). On voit alors que $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$ est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les éléments de la forme $t^m e_\omega^n$ où (m,n) appartient au cône de $\mathbb{Z}^2$ défini par $m + l_0 n \geq 0$ et $-m + \frac{1}{k/2} n \geq 0$. En particulier $\mathring{\mathrm{X}}/U$ est une surface torique dont la condition de lissité est, en posant $l_0 = -p/q$ (≤ 0) irréductible, $\left|\begin{smallmatrix} 1 & p \\ k/2 & q \end{smallmatrix}\right| = 1$. On a donc $l_0 = -\frac{p}{1+pk/2}$ puis, par un calcul analogue à ceux effectués pour les autres types, $r = \frac{1}{1+pk}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Preuve de la condition de régularité pour H cyclique d'ordre k impair. Supposons toujours $j = 0$. Pour $e_\omega = g_0^{\frac{1-k}{2}} g_\infty^{\frac{1+k}{2}}$ le cône $\mathcal{C}$ de la B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ du SL_2-germe $\mathcal{O}$ est de la forme :



Posons $l_{x_0} = -\frac{p}{q}$. La même méthode que dans le cas pair donne pour condition de régularité de $\mathcal{O}$: $\left|\begin{smallmatrix} \frac{k+1}{2} & p \\ k & q \end{smallmatrix}\right| = 1$ d'où $l_{x_0} = -\frac{p(k+1)/2}{1+kp}$ puis $r = \frac{1}{1+pk}$. Enfin le corollaire 5.6.2 est encore vrai (même démonstration).

La proposition 6 p. 35 est démontrée.

□

5.7 $\mathring{\mathbf{X}}/U$ torique pour les SL_2-germes de type I

Les SL_2-germes des orbites de dimension 1 et de type I et de dimension 1 sont ceux de type AB et $B+$ dans la classification de Luna-Vust.

On a vu au lemme 5.5.1 qu'une B-carte affine $\mathring{\mathrm{X}}$ telle que $\mathring{\mathrm{X}}/U = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U)$ soit torique pour une action de $(\mathbb{C}^*)^2$ prolongeant celle de T est associée à un hypercône $\mathcal{C} = (\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++}$ avec au plus deux cônes non droits, à condition de bien choisir le paramètre e_ω. L'objet du lemme suivant et de son corollaire est de mettre en évidence une telle B-carte pour chaque SL_2-germe de type I.

Lemme 5.7.1 *Soit $\mathcal{O} = AB\,(j, r_1, r_2)$ ou $\mathcal{O} = B_+(j, r)$ un SL_2-germe de type AB ou B_+. Il existe une B-carte affine $\mathring{X}$, dite adaptée à $\mathcal{O}$, dont $\mathcal{O}$ est le localisé et dont le cône $\mathcal{C} = (\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++}$ associé, pour un certain choix des paramètres t, e_ω, est tel que :*

- *$x_j = 0$ et $\mathcal{C}_0$ est un cône engendré par deux éléments primitifs u_1, u_2 de $\mathbb{Z}^2$.*
- *$\mathcal{C}_\infty$ est plat*
- *$\mathcal{C}_x$ est droit pour tout $x \neq 0, \infty$*

Corollaire 5.7.2

(1) Un SL_2-germe de type AB ou B_+ est toujours le localisé d'une B-carte $\mathring{X}$ telle que $\mathring{X}/U$ soit torique.

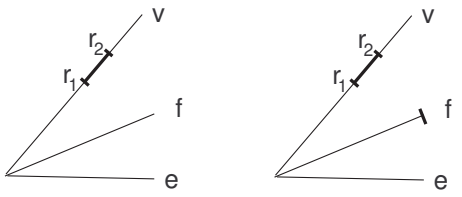
(2) Tout point x d'une orbite de type AB ou B_+ d'un plongement X appartient à un ouvert isomorphe à $U \times (S \setminus l)$ où S est une surface affine torique et l est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

(3) Tout point x d'une orbite de type $AB(j; r_1, r_2)$ ou $B_+\,(j; r)$ d'un plongement X de SL_2/H avec H cyclique et $j \in \{0, \infty\}$ appartient à un ouvert isomorphe à $U \times S$ où $S \cong \mathring{X}/U$ et $\mathring{X}/U$ est une surface torique.

Preuve du corollaire : la partie (1) découle directement des lemmes 5.5.1 et 5.7.1. Les parties (2) et (3) sont une conséquence du lemme 5.1.1 et des remarques à la fin de la preuve du lemme 5.7.1, en particulier la remarque 5.7.6 p. 64.

Remarque 5.7.3 *Il est important de noter que dans l'assertion (2) du corollaire 5.7.2 on ne peut pas toujours choisir un ouvert $\mathring{X} \cong U \times S$ avec S surface affine torique : si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,Y}$ pour un certain plongement X on ne peut pas toujours choisir une B-carte $\mathring{X}$ adaptée à $\mathcal{O}$ qui soit incluse dans X. Supposons par exemple H binaire diédral et un plongement X avec exactement une orbite Y de type AB (définie par $j = v$ et deux rationnels r_1, r_2), deux orbites de dimension 2 et l'orbite ouverte. Pour exhiber une B-carte adaptée on va voir qu'il est nécessaire de disposer d'une*

valuation SL_2-invariante différente de celles qui sont associées aux deux orbites de dimension 2 (elle a pour coordonnées dans l'hyperespace $(f,1,0)$ sur la figure ci-dessous). On doit donc ajouter à X une troisième orbite de dimension 2 pour obtenir un plongement qui contiendra effectivement une B-carte adaptée à $\mathcal{O}$.

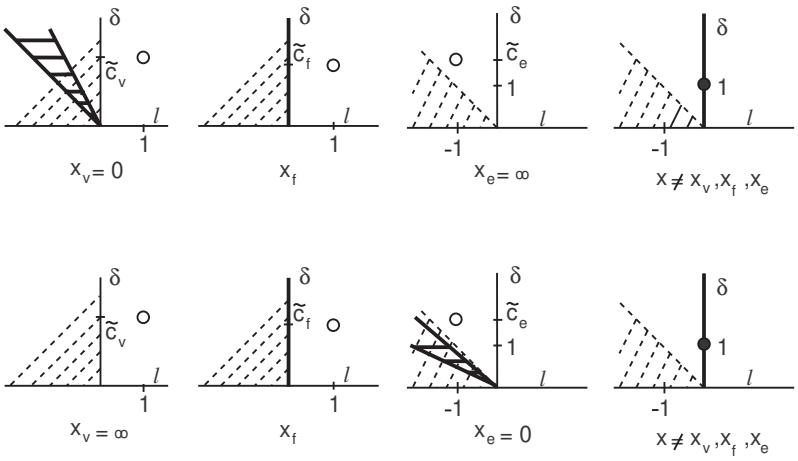


Preuve du lemme : Supposons que pour chaque sous-groupe H on choisisse t et e_ω comme au § 5.4.2 p. 45. Notons j' l'élément de $\mathbb{P}^1/H$ tel que $x_{j'} = \infty$ dans le lemme. Pour chaque type de sous-groupe H de $SL_2(\mathbb{C})$ on voit d'après le § 5.4.2 qu'un seul x au plus dans $\mathbb{P}^1$ vérifie $q_x = (x,1,0) \notin (\mathcal{V} \cup \mathcal{D}^B)_x$. Dans le cas où $q_x \in (\mathcal{V} \cup \mathcal{D}^B)_x$ pour tout $x \in \mathbb{P}^1$ (H cyclique pair) on peut donc prendre $j' \neq j$ quelconque dans $\mathbb{P}^1/H$ pour construire $\overset{\circ}{X}$ comme dans le lemme. Dans les autres cas on choisit $j' \in \mathbb{P}^1/H$ tel que $x_{j'}$ soit l'unique élément de $\mathbb{P}^1$ tel que $q_x \notin (\mathcal{V} \cup \mathcal{D}^B)_x$. Dans les figures suivantes qui illustrent le lemme on a représenté $\mathcal{V}$ en pointillés et $\mathcal{D}^B$ par des cercles. $(\mathcal{W} \cup \mathcal{R})^{++}$ est représenté en trait plein et les éléments de $\mathcal{R}$ sont les disques noirs. Les notations sont celles de la section 3.5 p. 25.

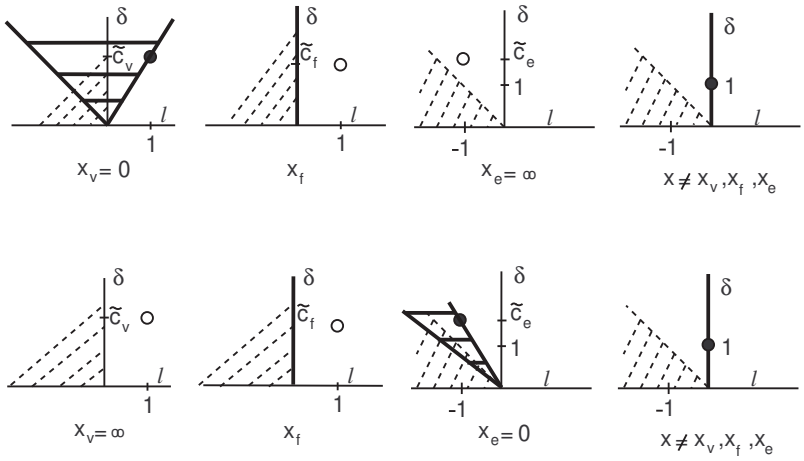
1. H **binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral.**

   (a) Type AB : $\mathcal{O} = AB(j, r_1, r_2)$, $\mathcal{K} = \{0\}$ (le cas $\mathcal{K} = [-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}$ est similaire)

   La première figure correspond aux cas $j \in \{v, f\}$ ou j générique dans $\mathbb{P}^1/H$. Par un automorphisme de $\mathbb{P}^1$ on impose alors $x_j = 0$ et $x_e = \infty$ ($j' = e$). Dans la deuxième figure on a $j = e$ et on choisit $j' = v$.

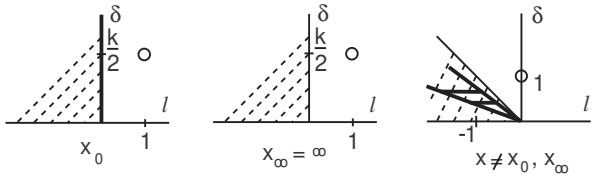


(b) Type B_+ : $\mathcal{O} = B_+(j,r)$.
Première figure : $j \in \{v,f\}$ ou j générique dans $\mathbb{P}^1/H$. On choisit alors $j' = e$.
Deuxième figure : $j = e$ et on choisit $j' = v$.



Remarque : supposons $k \geq 2$ dans le cas diédral. on a alors $\widetilde{c}_i \geq 2$ pour $i = v, f, e$. Un changement du paramètre e_ω transforme les coordonnées $(x, \delta, l) = (x, \widetilde{c}_i, 1)$ dans l'hyperespace par $(x, \widetilde{c}_i, 1 + n\widetilde{c}_i)$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$ et on aura encore $1 + n\widetilde{c}_i \neq 0$. Pour avoir tous les cônes droits sauf deux dont un plat il est donc nécessaire de disposer d'une valuation SL_2-invariante différente de $v\,(j;r_1)$,$v\,(j;r_2)$ (type AB) ou $v\,(j;r)$ (type B_+).

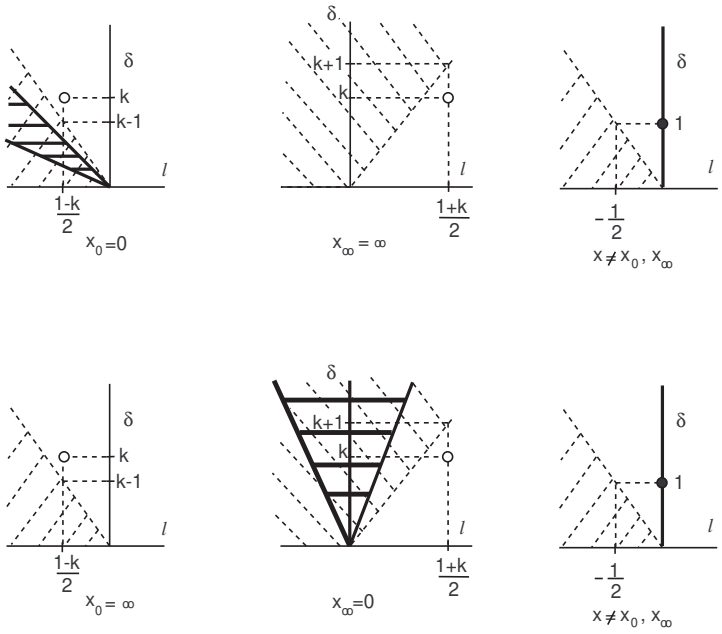
2. H **cyclique pair**.
$(x,1,0) \in (\mathcal{V} \cup \mathcal{D}^B)_x$ pour tout $x \in \mathbb{P}^1$. Donc quel que soit $j \in \mathbb{P}^1/H$ on peut choisir $j' \neq j$ quelconque dans $\mathbb{P}^1/H$ et vérifier les conditions du lemme.
Exemple : type AB



Remarque 5.7.4 *Si j est générique (comme dans l'exemple) et $k \geq 4$ on voit comme dans le cas non cyclique qu'il faut nécessairement disposer d'une valuation SL_2-invariante supplémentaire pour avoir une B-carte adaptée. Ce n'est pas le cas si $j \in \{0, \infty\}$, d'où la partie (3) du corollaire 5.7.2.*

1. H **cyclique impair**.

(a) Type AB : $\mathcal{O} = AB(j, r_1, r_2), \mathcal{K} = \{0\}$. Première figure : $j \neq \infty$ (exemple $j = 0$) et $j' = \infty$. Deuxième figure : $j = \infty$ et $j' \neq j$ quelconque (exemple $j' = 0$)



(b) Type B_+ : $\mathcal{O} = B_+(j, r)$. Mêmes distinctions et mêmes figures que pour le type AB

Remarque 5.7.5 *Dans le cas $j \in \{0, \infty\}$ on voit, comme dans l'exemple illustré ci-dessus, qu'une B-carte adaptée peut être construite sans faire appel à une valuation SL_2-invariante supplémentaire. D'où la partie (3) du corollaire 5.7.2 dans le cas cyclique impair.*

Remarque 5.7.6 *Soit x un point d'une orbite Y de type AB ou B_+ d'un plongement X. Si $\mathring{X}$ est une B-carte dans X qui intersecte Y alors x appartient à un ouvert affine de la forme $g.\mathring{X}$ où $g \in SL_2$.*

D'après l'étude qui précède on voit que quel que soit le sous-groupe fini H de SL_2 on peut choisir $\mathring{X}$ tel que $\mathring{X}/U$ soit localement isomorphe à $\mathring{X}'/U$ où $\mathring{X}'$ est une B-carte $\mathring{X}'$ d'un plongement X' (éventuellement différent de X) telle que $\mathring{X}'/U$ soit affine torique (pour une action de $T \times \mathbb{C}^*$). Plus précisément on peut choisir $\mathring{X}$ tel que $\mathring{X}/U$ soit isomorphe à $(\mathring{X}'/U)\backslash l$ où l est une T-orbite de $\mathring{X}'/U$. D'où la partie (2) du corollaire 5.7.2.

□

5.8 Autre preuve de régularité pour le type I

Comme annoncé, le résultat de la section précédente permet de donner une autre démonstration des conditions de régularité des SL_2-germes de type I.

Supposons que $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ soit une B-carte adaptée à un SL_2-germe $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,Y}$ de type I (lemme 5.7.1), que p soit l'image de $\mathrm{Y} \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}}$ dans l'application de projection $\overset{\circ}{\mathrm{X}} \to \overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ et que $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}^2$ soient définis comme dans le lemme 5.7.1. Il est facile de vérifier que u_1, u_2 engendrent précisément le cône V du lemme 5.5.1. Donc la condition de lissité du point p dans la surface affine torique $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ est $|\det(u_1, u_2)| = 1$. Pour retrouver les conditions de régularité des SL_2-germes de type I (propositions 4 et 5 p. 35) il suffit de traduire la condition $|\det(u_1, u_2)| = 1$ pour chaque type AB, B_+ et chaque type de sous-groupe H en fonction des données du SL_2-germe ($j \in \mathbb{P}^1/H$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ pour type AB, $r \in \mathbb{Q}$ pour B_+). Pour les calculs on peut se ramener à distinguer seulement deux types de groupes (H cyclique et H binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral) et deux cas (j générique et j non générique dans $\mathbb{P}^1/H$) pour chaque type d'orbite (AB et B_+). Il faut pour cela faire des choix judicieux de t et de e_ω en s'aidant des résultats de l'annexe A :

Cas j générique :

- $t = a/b$ avec a, b génériques formant une base de $\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{n,\chi_0}$ et $g_j^{\widetilde{c}_j} \neq b$.
- $e_\omega = \prod_{i\in\mathcal{NG}} g_i^{m_i}$ où $\mathcal{NG}$ est l'ensemble des éléments non génériques de $\mathbb{P}^1/H$ c'est-à-dire $\mathcal{NG} = \{v, f, e\}$ ou $\{0, \infty\}$. Pour chacun des deux cas de sous-groupe H les entiers m_i sont choisis selon les critères des lemmes A.2.1 et A.2.2 de l'annexe A.

Cas j non générique :

- $t = a/b$ avec a, b génériques quelconques formant une base de $\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{n,\chi_0}$.
- $e_\omega = \prod_{i\in\mathcal{NG}} g_i^{m_i}$ où $\mathcal{NG} = \{v, f, e\}$ ou $\{0, \infty\}$. Contrairement au cas précédent on tiendra compte aussi de j pour choisir les m_i.

Avec ces données on peut calculer dans $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ les coordonnées de générateurs u_1 et u_2 du cône $\mathcal{C}_{x_j}$.

Nous ne traiterons que le type AB à titre d'exemple.

5.8.1 H cyclique d'ordre k.

Soit $\mathcal{O} = AB(j, r_1, r_2)$ avec $j \in \mathbb{P}^1/H$ et $r_i \in [-1, b(j)] \cap \mathbb{Q}$. Choix de t et e_ω :

- $e_\omega = g_0^{m_0} g_\infty^{m_\infty}$ avec $(m_0, m_\infty) = (1, 1)$ dans le cas où H est d'ordre pair et $(m_0, m_\infty) = \left(\frac{1-k}{2}, \frac{1+k}{2}\right)$ dans le cas impair.
- $K^B = \mathbb{C}(t)$ avec $t = a/b$ et a, b éléments génériques de $\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{n,\chi_0} = \mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{k,-(-1)^k}$.

(on a posé $\overline{k} = k$ si k est impair et $\overline{k} = \frac{k}{2}$ si k est pair).

Cas j générique ($j \neq 0, \infty$).

Quel que soit $r \in [-1, b(j)] \cap \mathbb{Q}$ les coordonnées de $v = v(j, r)$ dans l'hyperespace sont (x_j, δ, l) avec $\delta = v(t - x_j) = v(g_j^{\widetilde{c}_j}/b) = \frac{\widetilde{c}_j}{c_j}(1 + r) = \frac{\overline{k}}{k}(1 + r)$ et $l = v(e_\omega) = \frac{1}{k}(m_0(-1) + m_\infty(-1)) = \frac{-c_\omega}{k}$.

Conformément à la proposition 4 p. 35 on définit r' par $r = \frac{1+r'}{n_j} - 1 = \frac{1+r'}{\overline{k}} - 1$ et on pose $r' = \frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ c_ω-irréductible c'est-à-dire $q = p + \lambda c_\omega$ avec $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $p \wedge \lambda = 1$. On a alors $(\delta, l) \sim (1 + r', -c_\omega) \sim (p + q, -qc_\omega) = (a, b)$ et $\binom{a}{b} = \begin{pmatrix} 2 & c_\omega \\ -c_\omega & -c_\omega^2 \end{pmatrix}\binom{p}{\lambda}$. Or $c_\omega = 1$ si k impair et $c_\omega = 2$ si k pair (tableau 3.2 p. 21) donc $\binom{a/c_\omega}{b/c_\omega} = \begin{pmatrix} 2/c_\omega & 1 \\ -1 & -c_\omega \end{pmatrix}\binom{p}{\lambda}$ avec $\begin{vmatrix} 2/c_\omega & 1 \\ -1 & -c_\omega \end{vmatrix} = -1$. Donc $(a/c_\omega, b/c_\omega)$ est primitif dans $\mathbb{Z}^2$ et colinéaire à (δ, l). La condition de lissité du point p dans la surface affine torique $\overset{\circ}{X}/U$ est donc $\begin{vmatrix} a_2/c_\omega & a_1/c_\omega \\ b_2/c_\omega & b_1/c_\omega \end{vmatrix} = 1$ c'est-à-dire $\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = c_\omega^2$ ou $\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix} = c_\omega$. La proposition 4 est démontrée dans ce cas.

Cas j non générique ($j \in \{0, \infty\}$), par exemple $j = 0$.

Les coordonnées de $v = v(0, r)$ ($r \in [-1, b(0)] \cap \mathbb{Q}$) dans l'hyperespace sont $(0, \delta, l)$ avec $\delta = v(t - x_0) = \frac{\overline{k}}{k}(1 + r)$ et $l = v(e_\omega) = \frac{1}{k}(m_0 r - m_\infty)$. On a cette fois $r = \frac{1+r'}{n_0} - 1$ et $n_0 = 1$ d'où $r = r'$. On pose $r = p/q$ k-irréductible c'est-à-dire $q = p + \lambda k$ avec $p \wedge \lambda = 1$, et l'on a : $(\delta, l) \sim (\overline{k}(p + q), m_0 p - m_\infty q) = (a, b)$ et $\binom{a}{b} = \begin{pmatrix} 2\overline{k} & k\overline{k} \\ m_0 - m_\infty & -km_\infty \end{pmatrix}\binom{p}{\lambda}$. Par le choix de e_ω on voit que k divise $(m_0 - m_\infty)$ et $\binom{a/k}{b/k} = \begin{pmatrix} 2\overline{k}/k & \overline{k} \\ (m_0 - m_\infty)/k & -m_\infty \end{pmatrix}\binom{p}{\lambda}$ avec $\begin{pmatrix} 2\overline{k}/k & \overline{k} \\ (m_0 - m_\infty)/k & -m_\infty \end{pmatrix} = -1$. Ainsi $(a/k, b/k)$ est primitif dans $\mathbb{Z}^2$ et colinéaire à (δ, l). La condition de lissité est donc $\begin{vmatrix} a_2/k & a_1/k \\ b_2/k & b_1/k \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = k^2$, soit $\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix} = k$. La proposition 4 est démontrée pour H cyclique.

5.8.2 H binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral.

$\mathcal{O} = AB(j, r_1, r_2)$ avec $j \in \mathbb{P}^1/H$ et $r_i \in [-1, b(j)] \cap \mathbb{Q}$. Conformément à l'énoncé de la proposition 4 p. 35 on définit r_i' par $r_i' + 1 = (r_i + 1)\, n_j$ et on pose $r_i' = p_i/q_i$ fraction c_j-irréductible.

On pose $\mathrm{card}\,(H) = 2k$.

Cas j générique ($j \neq v, f, e$).

On fait les choix suivants :

- $t = a/b$ avec a, b éléments génériques de $\mathbb{C}[SL_2]_{n,\chi_0}^{(B \times H)}$ (voir annexe A) tels que $g_j^{\widetilde{c}_j} \neq b$.

– $e_\omega = g_v g_f g_e^{-1}$.

A l'aide de la relation $\frac{1}{c_v}+\frac{1}{c_f}+\frac{1}{c_e}=\frac{1}{2}+\frac{1}{k}$ (3.1 p. 20) et de $c_e = 4$ on trouve pour les coordonnées (δ, l) de $v = v(j, r_i)$ dans l'hyperespace $(i = 1, 2)$: $\delta = v(t - x_j) = \frac{1}{2}(r_i + 1)$ et $l = v(e_\omega) = -1/k$. Les éléments primitifs u_i de $\mathbb{Z}^2$ du lemme 5.5.1 sont $((p_i+q_i)/2, -q_i)$ et la condition de lissité est donc $\left|\begin{smallmatrix}(p_1+q_1)/2 & (p_2+q_2)/2\\ -q_1 & -q_2\end{smallmatrix}\right| = \pm 1$ ou encore $\left|\begin{smallmatrix}p_2 & p_1\\ q_2 & q_1\end{smallmatrix}\right| = 2$. Comme $c_\omega = 2$ on retrouve le résultat de la proposition 4.

Cas j non générique $(j \in \{v, f, e\})$.

– $t = a/b$ avec a, b éléments génériques de $\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{n,\chi_0}$.

– $e_\omega = g_v g_f g_e g_j^{-\widetilde{c}_j}$.

Soit $v = v(j, r_i)$ pour $i = 1, 2$. On trouve pour $\delta = v(t - x_j)$ et $l = v(e_\omega)$: $(\delta, l) \sim (\widetilde{c}_j(p_i+q_i), (1-\widetilde{c}_j)(p_i+q_i)-2q_i) = (a_i, b_i)$. On montre ensuite que $(a_i/c_j, b_i/c_j)$ est c_j-irréductible et la condition de lissité est donc $\left|\begin{smallmatrix}a_1/c_j & a_2/c_j\\ b_1/c_j & b_2/c_j\end{smallmatrix}\right| = \pm 1$ ou encore $\left|\begin{smallmatrix}p_2 & p_1\\ q_2 & q_1\end{smallmatrix}\right| = c_j$ qui est le résultat de la proposition 4.

□

Chapitre 6

Les modèles minimaux

Définition : un modèle minimal est par définition un plongement homogène lisse complet X_0 de SL_2/H qui n'est pas l'éclaté d'un autre plongement lisse complet de SL_2/H.
Remarque : on montrera dans la recherche des modèles minimaux qu'il est équivalent de dire que tout SL_2-morphisme propre de X_0 dans un autre plongement homogène lisse, complet de Sl_2/H est un isomorphisme.

6.1 Plongements lisses complets

Rappelons d'abord qu'un morphisme entre deux plongements de SL_2/H est ici un SL_2-morphisme algébrique qui envoie H/H sur H/H, et qui est donc en particulier l'identité sur SL_2/H.

Supposons que le sous-groupe H soit fixé. Soit $\mathcal{L}^n$ l'ensemble de tous les anneaux locaux d'orbites de plongements normaux de SL_2/H (décrits à la section 3.5), c'est-à-dire l'ensemble de ce que nous avons appelé les SL_2-germes. Considérons un plongement homogène X de SL_2/H. Les anneaux locaux de ses différentes orbites forment un sous-ensemble $\mathcal{L}(X)$ de $\mathcal{L}^n$. Réciproquement, si l'on se donne un sous-ensemble L de $\mathcal{L}^n$, on peut donner des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un plongement homogène X de SL_2/H, unique à isomorphisme près, dont l'ensemble $\mathcal{L}(X)$ des anneaux locaux d'orbite est L.

notations (voir 3.4 p. 24) :

- $\mathcal{V}_1$ est l'ensemble des éléments v de $\mathcal{V}$ (valuations de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ invariantes par SL_2) tels que $\mathbb{C}_v^{SL_2} \simeq \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}_v$ est le corps résiduel de v et $\mathbb{C}_v^{SL_2}$ le sous-corps de ses invariants par SL_2. Ou encore : $\mathcal{V}_1 = \{v(j,r), j \in \mathbb{P}^1/H, r \in]-1, \frac{2}{n_j} - 1]\}$.
- $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{V}$ essentiels pour un SL_2-germe $\mathcal{O}$.
- $\mathcal{L}'$ est l'ensemble des SL_2-germes $\mathcal{O}$ de type B_+ tels que $\mathcal{V}(\mathcal{O}) = \{v(\ , -1)\}$. Autrement dit $\mathcal{L}' = \{B_+(\omega, -1), \omega \in \mathbb{P}^1/H\}$.

– la facette $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ du SL_2-germe $\mathcal{O}$ est l'ensemble des $v \in \mathcal{V}_1$ qui dominent $\mathcal{O}$.

Les conditions sur L sont données par la proposition suivante [LV] :

Soit $L \subset \mathcal{L}^n$. Alors L correspond à un plongement normal si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes :

1. si $\mathcal{O} \in L$ alors $\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_1 \subset L$
2. si $\mathcal{O} \in L$ et $v(\ ,-1) \in \mathcal{V}(\mathcal{O})$ alors L contient un ensemble cofini de $\mathcal{L}'$.
3. $L - \mathcal{L}'$ est fini
4. les facettes $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ de L sont disjointes.

De plus le plongement L (i.e sa variété) est complet si et seulement si la réunion de ses facettes est $\mathcal{V}_1$.

A l'aide de cette proposition et des résultats de la section 4 sur les conditions de régularité des SL_2-germes on peut déterminer par leurs diagrammes (donc à isomorphisme près) tous les plongements lisses complets de SL_2/H ce qui permettra d'en déduire les modèles minimaux. Dans la suite on appellera simplement plongement un plongement homogène lisse et complet de SL_2/H

Notations : On adoptera pour une orbite l d'un plongement X donné la même notation que son anneau local $\mathcal{O}$. Par exemple $l = A_N(j_1, \ldots, j_N\,;\, r_1, \ldots, r_N)$ pour une orbite de type A_N définie par N éléments de $\mathbb{P}^1/H$ et N nombres rationnels r_i. Une orbite de X sera dite régulière si son anneau local est régulier, c'est-à-dire si tous ses points sont lisses dans X.

Si X est un plongement deux cas se présentent :

1. X possède une orbite l de type A_N.

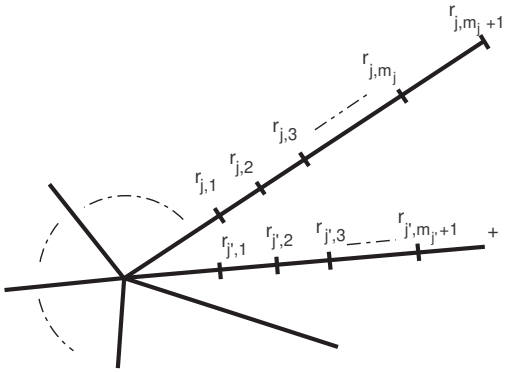
   Posons $l = A_N(j_1, \ldots, j_N\,;\, r_1, \ldots, r_N)$, les r_i vérifiant la condition de type A_N : $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{1+r_i} > 1$. Soit $j \in \{j_1, \ldots, j_N\}$, alors X possède un nombre fini d'orbites $AB(j, r_{j,i}, r_{j,i+1})$ pour $i = 1, \ldots, m_j$ telles que :

   – $r_{j,1} = r_j$

   – $r_{j,i} < r_{j,i+1}$ et $r_{j,i}, r_{j,i+1} \in [-1, b(j)]$.

   – si r'_i est défini par $r_i = \frac{1+r'_i}{n_j} - 1$ alors r'_i et r'_{i+1} sont $\mathrm{c_j}$-adjacents pour $i = 1, \ldots, m_j$ (c'est la condition de lissité, voir section 4)

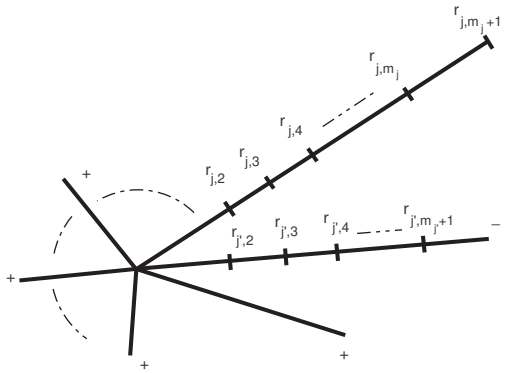
   Si $r_{j,m_j+1} < b(j)$ alors X possède une orbite $B_+\left(j, r_{j,m_j+1}\right)$ ou $B_-\left(j, r_{j,m_j+1}\right)$.
   Enfin X possède des orbites de type C, de dimension 2 :
   $C(j, r_j)\,,\ C(j, r_{j,2}), \ldots, C\left(j, r_{j,m_j+1}\right)$.



2. X possède un ensemble cofini d'orbites de type B_+ de la forme $B_+(j,-1)$ pour $j \in \mathbb{P}^1/H \setminus \{j_1,\ldots,j_m\}$.
   Soit $j \in \{j_1,\ldots,j_m\}$. X possède alors un nombre fini d'orbites $AB(j, r_{j,i}, r_{j,i+1})$ pour $i = 1,\ldots,m_j$ telles que :

   - $r_{j,1} = -1$
   - $r_{j,i} < r_{j,i+1}$ et $r_{j,i}, r_{j,i+1} \in [-1, \frac{2}{n_j} - 1]$.
   - si r'_i est défini par $r_i = \frac{1+r'_i}{n_j} - 1$ alors r'_i et r'_{i+1} sont c_j-adjacents pour $i = 1,\ldots,m_j$.

   Si $r_{j,m_j+1} < \frac{2}{n_j} - 1$ alors X possède une orbite $B_+\left(j, r_{j,m_j+1}\right)$ ou $B_-\left(j, r_{j,m_j+1}\right)$.
   X possède les orbites de type C : $C(j, r_j)$, $C(j, r_{j,2})$, $\ldots$, $C\left(j, r_{j,m_j+1}\right)$.

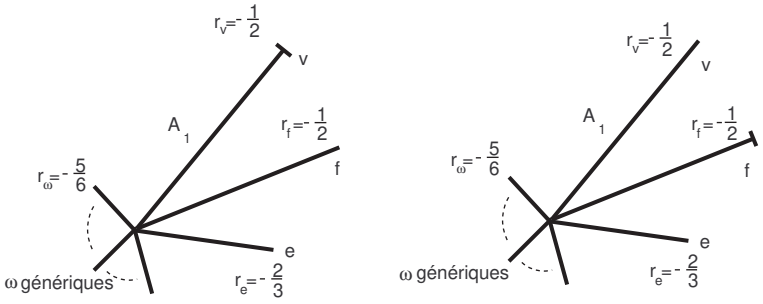


6.2 Liste des modèles minimaux

Les résultats suivants sont démontrés aux sections 6.6 et 6.7. On retrouve les modèles minimaux projectifs donnés par Nakano ainsi que deux modèles minimaux non projectifs dans le cas H cyclique.

6.2.1 cas où H est binaire tétraédral

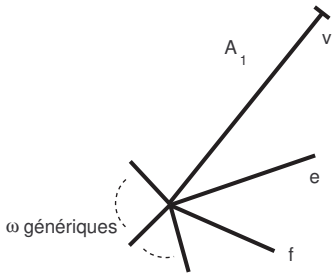
Proposition 7 *Si H est binaire tétraédral les seuls modèles minimaux de SL_2/H ont pour diagrammes :*



Ces deux plongements sont conjugués au sens de la section 4.1 c'est-à-dire qu'ils correspondent à la même SL_2-variété mais avec deux SL_2-isomorphismes différents de SL_2/H sur l'orbite ouverte. Selon la définition de Nakano [Nak] il s'agit donc du même modèle minimal. On en trouve une description au § 6.8.3 p. 123.

6.2.2 Cas où H est binaire octaédral ou icosaédral

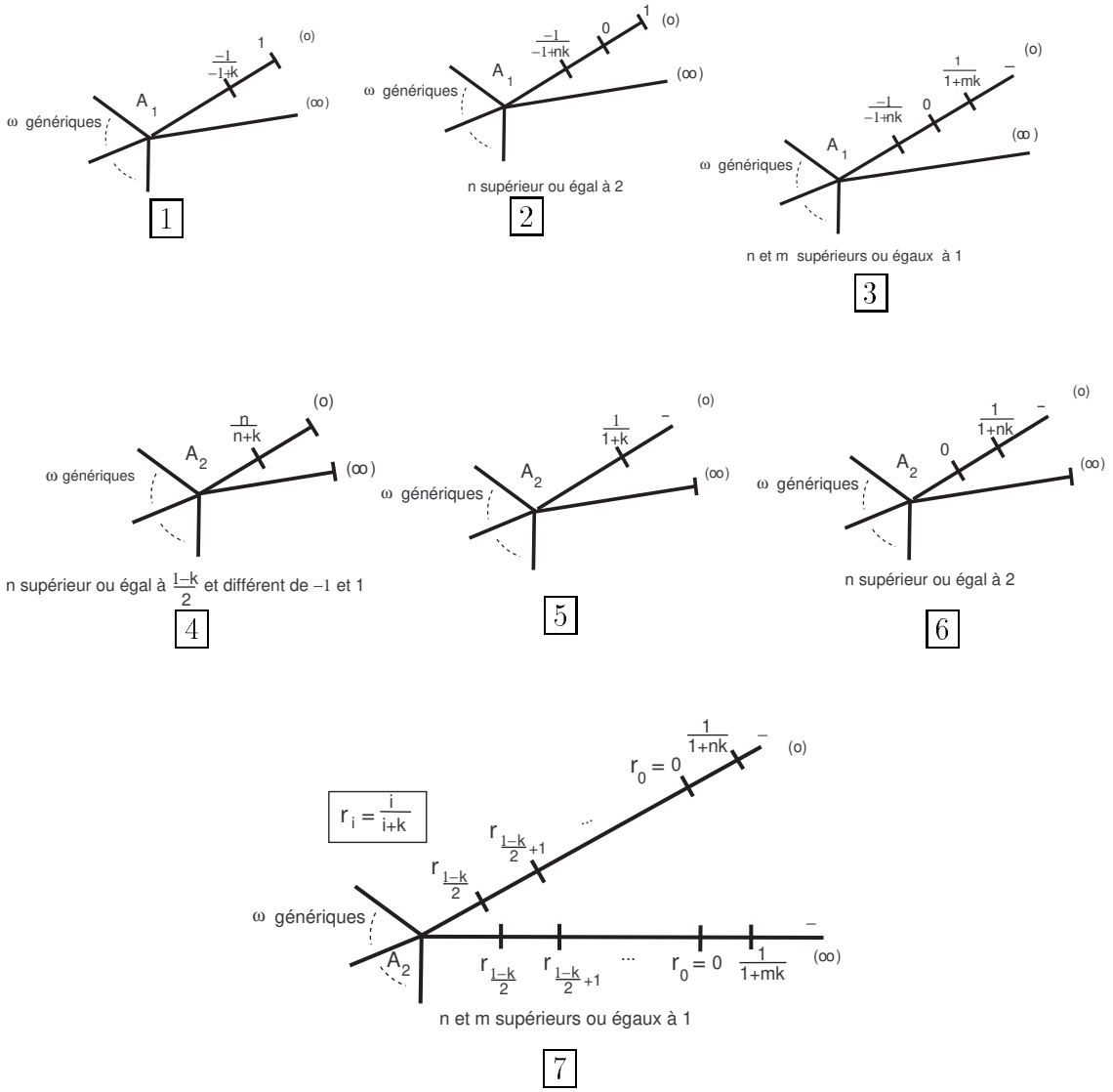
Proposition 8 *Si H est binaire octaédral ou icosaédral alors il y a un seul modèle minimal et il a pour diagramme :*



On retrouve le résultat de S.Mukai et H.Umemura [Muk Um] sur l'existence d'un unique modèle minimal dans ce cas. Description au § 6.8.3 p. 123.

6.2.3 Cas où H est cyclique d'ordre k impair supérieur ou égal à 3

Proposition 9 *Si H est cyclique d'ordre $k \geq 3$ impair alors les diagrammes des modèles minimaux sont les suivants, en ajoutant ceux obtenus par échange de 0 et ∞ (plongements conjugués, § 4.1) :*



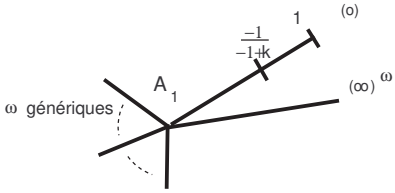
Le lien avec la description de T.Nakano [Nak] est la suivante, avec ses notations. La description géométrique de chacun des modèles est donnée à la section § 6.7.

plongement n°	notation de Nakano	
1	$Z(1-k)$	
2	$X_k(n,n)$	$n \geq 2$
3	$X_k(n,n+m)$	$n \geq 1,\ m \geq 1$
4	$Y(-n,-n-k)$	$n \geq \frac{1-k}{2},\ n \neq \pm 1$
5	$Z(1+k)$	
6	$X_k(0,n)$	$n \geq 2$

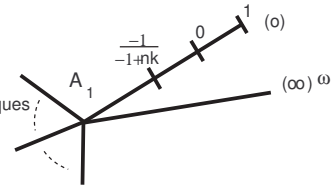
Par contre le plongement 7 de la proposition 9 n'est pas projectif comme on le démontre à la section 6.7.

6.2.4 Cas où H est cyclique d'ordre k pair

Proposition 10 *Si H est cyclique d'ordre k pair supérieur ou égal à 6 alors les diagrammes des modèles minimaux sont les suivants, en ajoutant ceux obtenus par échange de 0 et ∞ (plongements conjugués) :*

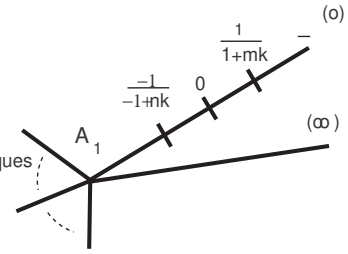


1



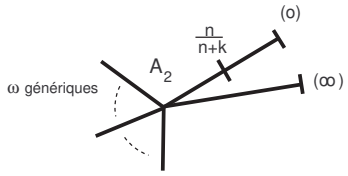
n supérieur ou égal à 2

2



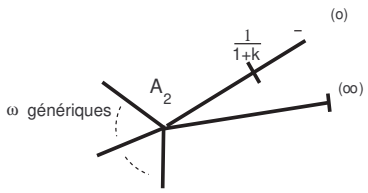
n et m supérieurs ou égaux à 1

3

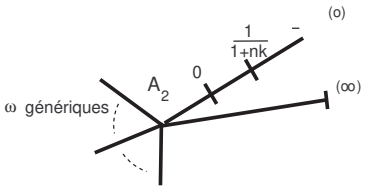


n supérieur ou égal à $1-\frac{k}{2}$ et différent de -1 et 1

4

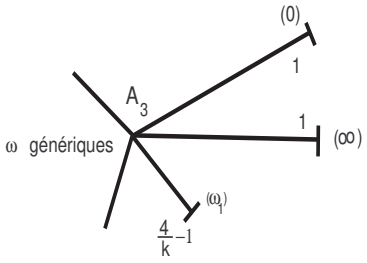


5

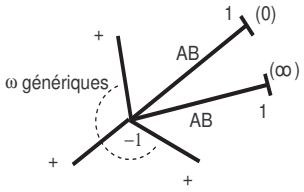


n supérieur ou égal à 2

6

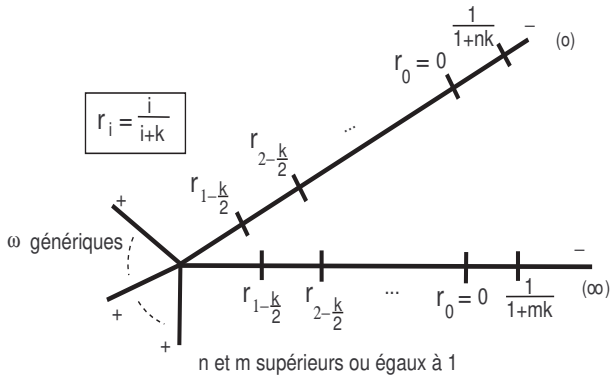


7



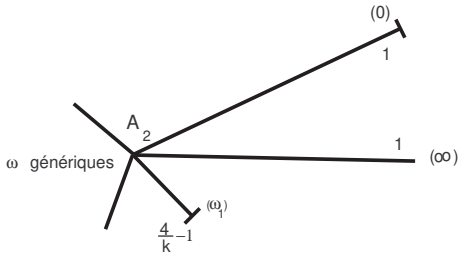
8

(ω_1 est un élément générique quelconque de $\mathbb{P}^1/H$)



9

Proposition 11 *Si H est cyclique d'ordre 4 il suffit de remplacer dans la proposition 10 le plongement avec orbite A_3 par le plongement :*



où ω_1 est un élément générique quelconque de $\mathbb{P}^1/H$.

Pour le cas $k \geq 6$ le lien avec la description de T.Nakano [Nak] est :

plongement n°	notation de Nakano	
1	$Z(1-k)$	
2	$X_k(n,n)$	$n \geq 2$
3	$X_k(n,n+m)$	$n \geq 1$, $m \geq 1$
4	$Y(-n,-n-k)$	$n \geq 1-\frac{k}{2}$, $n \neq \pm 1$
5	$Z(1+k)$	
6	$X_k(0,n)$	$n \geq 2$
7	$Y_0(k)$	
8	$Y(-\frac{k}{2},-\frac{k}{2})$	

Le plongement 9 de la proposition 10 n'est pas projectif.

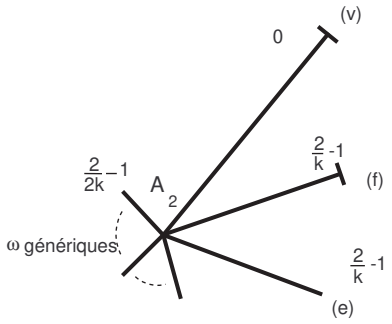
Pour le cas $k = 4$ le 7ème plongement, qui remplace celui avec l'orbite A_3, est $\mathbb{P}(R_2) \times \mathbb{P}(R_1)$ où R_n est l'espace vectoriel des formes binaires de degré n.

6.2.5 Cas où H est binaire diédral

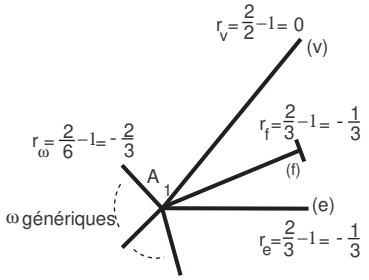
Si H est binaire diédral d'ordre 4 alors H est aussi cyclique et ce cas a déjà été étudié à la section précédente. Les modèles minimaux sont donnés à conjugaison près (§ 4.1).

Proposition 12 *Si H est binaire diédral d'ordre $4k > 4$ alors les modèles minimaux ont pour diagrammes :*

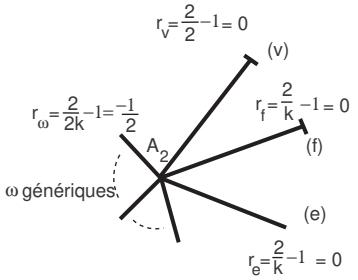
– *si $k > 3$:*



– *si $k = 3$:*



– *si $k = 2$:*



Pour $k \neq 3$ le plongement minimal est décrit et noté $\mathcal{E}_k$ par Nakano et Umemura. A la section 6.8 nous en donnons une autre description comme fermeture d'une orbite dans $\mathbb{P}(R_2) \times \mathbb{P}(R_k)$. Dans le cas $k = 3$ l'unique plongement minimal est $\mathbb{P}(R_3)$.

6.3 Morphismes et éclatements

– [LV] et proposition 4.4.1 p. 84 de [M1], reprise dans [M2] : Soit X et X′ deux plongements normaux de SL_2/H. Alors l'application identité de SL_2/H

s'étend en un morphisme φ (SL_2-équivariant) de X dans X' (nécessairement unique) si et seulement si pour tout $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(X)$ il existe $\mathcal{O}' \in \mathcal{L}(X')$ (nécessairement unique) tel que

- $\mathcal{F}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{O}')$
- dans le cas où $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont de type B alors :
  - si $\mathcal{O}$ est de type B_0 alors $\mathcal{O}'$ est de même type
  - si $\mathcal{O}$ est de type B_+ ou B_- alors $\mathcal{O}'$ est de même type ou de type B_0.

- Le morphisme φ est propre si et seulement si $\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathcal{L}(X)} \mathcal{F}(\mathcal{O}) = \bigcup_{\mathcal{O}\in\mathcal{L}(X')} \mathcal{F}(\mathcal{O})$ (on retrouve le fait que dans le cas où X et X' sont complets tous les morphismes sont propres).
- Soit X un plongement lisse complet de SL_2/H et l_0 une orbite de dimension 1, donc isomorphe à $\mathbb{P}^1$. L'éclaté $\widetilde{X}$ de X le long de l_0 est encore un plongement lisse complet de SL_2/H. Soit l'application d'éclatement $\varphi : \widetilde{X} \to X$ et $D = \varphi^{-1}(l_0)$ le diviseur exceptionnel. Ce diviseur D est une variété irréductible de dimension 2 stable par SL_2.

Nous verrons plus loin que si X est un plongement lisse complet dont on connaît le diagramme et si l_0 est une orbite de dimension 1 de X on peut déterminer par son diagramme l'éclaté $\widetilde{X}$ de X à partir des seules propriétés énoncées dans les deux points précédents.

En développant cette remarque on peut retrouver le résultat suivant, donné par L.Moser [M2, proposition 6.2] dans le cas $H = \{Id\}$, mais dont la démonstration se transpose sans problème au cas H quelconque (La preuve de L.Moser suit une idée de [Muk Um]).

Supposons que X et X' soient deux plongements lisses de SL_2/H et φ un SL_2-morphisme (dans le sens défini ci-dessus) de X dans X'. Alors φ est une composition de contractions.

Nous proposons notre démonstration dans le cas H tétraédral (à titre d'exemple) et X, X' complets, à la remarque 6.6.1 p. 85.

6.4 Généralités sur les modèles minimaux de SL_2/H

Si X est un plongement homogène lisse complet quelconque il existe un plongement minimal X_0 à partir duquel on obtient X par un nombre fini d'éclatements. En effet chaque contraction (inverse d'un éclatement) élimine soit une orbite de dimension 2 (le diviseur exceptionnel en contient au plus une) soit un ensemble cofini d'orbites de type B_+, ce dernier cas n'étant bien sûr possible qu'une seule fois dans

une chaîne de contractions. Comme le nombre d'orbites de dimension 2 est fini, on arrive à un modèle minimal au bout d'un nombre fini de contractions.

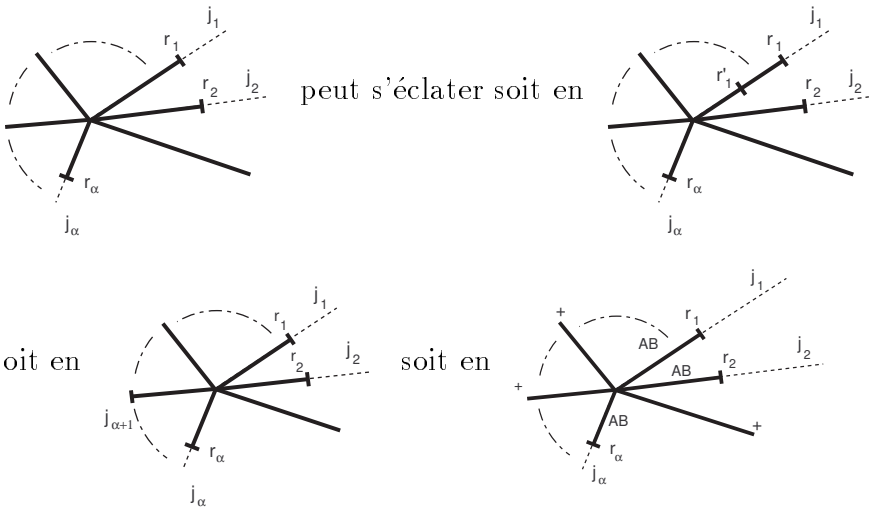
Les diagrammes suivants représentent des plongements homogènes lisses complets. Seule l'orbite l que l'on éclate ou les orbites du diviseur exceptionnel D dans l'éclaté sont représentées. Les pointillés indiquent les autres orbites, de type AB, B_+ ou B_-, laissées invariantes par l'éclatement.

- Si l'orbite l est de type A_N on voit facilement qu'il y a a priori trois types d'éclatements possibles qui respectent à la fois les contraintes des sections 6.1 et 6.3. On verra plus loin que la contrainte de lissité permet de déterminer parmi ceux-ci l'unique éclatement possible avec les paramètres exacts des orbites du diviseur exceptionnel.

  $A_N(j_1,\dots,j_N\,;r_1,\dots,r_N)$ peut être remplacé dans l'éclaté par

  - $A_N(j_1,\dots,j_N\,;r'_1,r_2,\dots,r_N)$, $C\,(j_1,r'_1)$ et $AB\,(j_1,r'_1,r_1)$
  - ou $A_{N+1}(j_1,\dots,j_{N+1}\,;r_1,\dots,r_{N+1})$ et $C\,(j_{N+1},b\,(j_{N+1}))$
  - ou $B_+\,(j,-1)$ pour $j\in\mathbb{P}^1/H\setminus\{j_1,\dots,j_N\}$ et $AB\,(j_1,-1,b\,(j_1))\,,\dots,AB\,(j_N,-1,b\,(j_N))$.

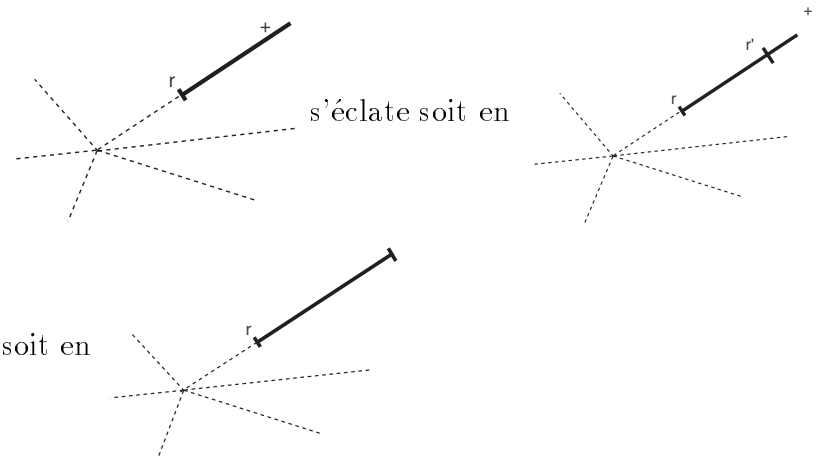
Illustration :



On verra dans la recherche des modèles minimaux comment déterminer dans chaque cas le diagramme de l'éclaté ainsi que ses paramètres en utilisant les conditions de régularité (section 4).

- Si l'orbite l est de type AB, il n'y a qu'une possibilité qui satisfasse aux condition de 6.1 et 6.3 : $AB\,(j,r_1,r_2)$ est remplacé par $AB\,(j,r_1,r)\,,AB\,(j,r,r_2)$ et $C\,(j,r)$. Nous verrons plus loin comment déterminer r à partir des conditions de régularité (corollaire 6.5.5).

– Si l'orbite l est de type B_+ (resp^t B_-) alors $B_+(j,r)$ peut être remplacé dans l'éclaté par
  – $AB(j,r,r')$, $C(j,r')$ et $B_+(j,r')$ (resp^t $B_-(j,r')$)
  – ou $AB(j,r,b(j))$ et $C(j,b(j))$.



6.5 Suites adjacentes minimales

La première étape pour établir la liste des plongements minimaux consiste à comprendre comment on peut diminuer le nombre d'orbites de type AB sur un élément fixé j de $\mathbb{P}^1/H$ par contractions sucessives.

Soit donc $j \in \mathbb{P}^1/H$ et $l_1, \ldots, l_n$ n orbites régulières de type AB telles que $\mathcal{O}_{l_i} = AB(j, r_i, r_{i+1})$, les r_i étant des rationnels vérifiant :

– $-1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_n \leq b(j)$
– Si r'_i est associé à r_i par $r_i = \frac{1+r'_i}{n_j} - 1$ alors r'_i et r'_{i+1} sont c$_j$-adjacents (définition 4.3.2 p. 35).

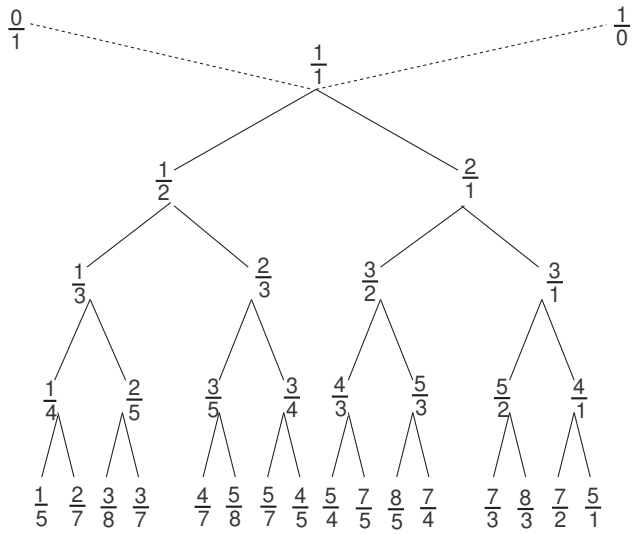
Soit $\frac{p_i}{q_i}$ le représentant c$_j$-irréductible de r'_i. On a : c_j divise $q_i - p_i$ et $p_i \wedge \left(\frac{q_i - p_i}{c_j}\right) = q_i \wedge \left(\frac{q_i - p_i}{c_j}\right) = 1$ (on note pgcd$(p,q) = p \wedge q$). Posons $u_i = (q_i, p_i) \in \mathbb{Z}^2$ et utilisons pour les u_i le même vocabulaire que pour les r_i : les u_i sont c$_j$-irréductibles, u_i et u_{i+1} sont c$_j$-adjacents, $u_i < u_{i+1}$.

Remarque 6.5.1 *Soit Φ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{c_j} & \frac{1}{c_j} \end{pmatrix}$. Il est facile de vérifier que Φ échange les vecteurs c_j-irréductibles et c_j-adjacents de $\mathbb{Z}^2$ avec les vecteurs 1-irréductibles (i.e primitifs) et adjacents de $\mathbb{Z}^2$.*

Dans la recherche des plongements minimaux on est naturellement amené à introduire les notions suivantes :

Définition 6.5.2 *Soit $r < r'$ deux rationnels. Une suite adjacente entre r et r' est une suite de rationnels $r = r_1 < r_2 < \ldots < r_n = r'$ telle que r_i et r_{i+1} sont adjacents pour $i = 1, \ldots, n-1$. La suite est dite minimale si aucune de ses sous-suites n'est adjacente entre r et r'.*

La méthode classique pour construire des suites adacentes consiste à partir des (pseudo) fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ et à répéter l'opération qui consiste à intercaler entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ la fraction médiante $\frac{p+p'}{q+q'}$. A chaque étape la suite obtenue est adjacente. La situation est plus claire si l'on construit l'arbre dit de Stern-Brocot :



Chaque fraction est la médiante de la fraction la plus proche en haut à gauche et de la fraction la plus proche en haut à droite. Toutes les fractions irréductibles apparaissent exactement une fois dans l'arbre [GKP, p. 116]. On en déduit l'existence d'au moins une suite adjacente entre deux fractions données (propriété redémontrée plus bas dans le lemme).

De telles suites apparaissent dans la désingularisation des surfaces toriques. La démonstration du lemme suivant s'inspire de l'exposé de ce cas dans [Ful, p. 42].

Lemme 6.5.3 *Soit $r < r'$ deux rationnels.*

1. *Il existe toujours une suite adjacente entre r et r', et donc aussi une suite minimale.*

2. *Soit $u_i = (q_i, p_i)$ irréductible associé à r_i. La suite adjacente $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ est minimale si et seulement si* $\det(u_i, u_{i+2}) \geq 2$ *pour* $i = 1, \ldots, n-2$
3. *Il n'y a qu'une seule suite adjacente minimale entre r et r' et l'on passe d'une suite adjacente quelconque entre r et r' à cette suite minimale par un nombre fini d'opérations élémentaires consistant à retirer un élément r_i de la suite tel que $u_i = u_{i-1} + u_{i+1}$ (les suites intermédiaires sont alors adjacentes).*
4. *Soit $r_1, \ldots, r_n$ une suite adjacente et $r_{i_1}, \ldots, r_{i_p}$ une sous-suite de (r_i) telle que $i_1 = 1$ et $i_p = n$. Alors on peut passer de la suite (r_i) à la suite (r_{i_j}) par un nombre fini d'opérations consistant à retirer un élément r_i de la suite tel que $u_i = u_{i-1} + u_{i+1}$. On conserve à chaque étape une suite adjacente.*

Corollaire 6.5.4 *Le lemme est encore valable pour des suites c-adjacentes à condition de changer la condition de minimalité par* $\det(u_i, u_{i+2}) \geq 2c$.

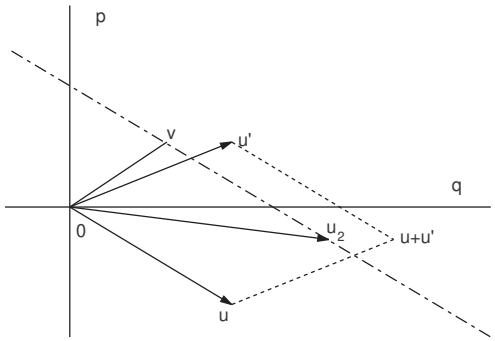
Corollaire 6.5.5 *Si l'orbite régulière $AB(j, r_1, r_2)$ s'éclate en $AB(j, r_1, r)$, $AB(j, r, r_2)$, $C(j, r)$ et les rationnels $r' = \frac{p}{q}, r'_1 = \frac{p_1}{q_1}, r'_2 = \frac{p_2}{q_2}$ (c_j-irréductibles) sont définis par $r = \frac{1+r'}{n_j} - 1$ alors $p = p_1 + p_2$ et $q = q_1 + q_2$.*

Preuve du corollaire 6.5.4 : utiliser l'application Φ de la remarque 6.5.1 et $\det(\Phi) = 1/c$.

Preuve du corollaire 6.5.5 : Soit u_1, u, u_2 les vecteurs de $\mathbb{Z}^2$ associés à r'_1, r', r'_2. La suite r'_1, r'_2 étant minimale entre r'_1 et r'_2, il suffit d'appliquer le point 3 du lemme : on passe de la suite r'_1, r', r'_2 à la suite r'_1, r'_2 en enlevant r' tel que $u = u_1 + u_2$ c'est-à-dire $p = p_1 + p_2$ et $q = q_1 + q_2$.

Preuve du lemme :

1. Soit $u = (q, p)$ et $u' = (q', p')$ irréductibles représentant r et r'. Procédons par récurrence sur $\det(u, u')$ ($\det(u, u') \in \mathbb{N}^*$ car $r < r'$). Si $\det(u, u') = 1$ alors (r, r') est adjacente. Sinon soit $v \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\det(u, v) = 1$. Puisque $\det(u, u') > 1$ il existe un unique entier λ_2 tel que $v + \lambda_2 u = u_2$ soit à l'intérieur du parallélogramme $(0, u', u + u', u)$. Comme $\det(u, u_2) = 1$ on a aussi u_2 irréductible.



Soit $x, y \in [0,1[\cap\mathbb{Q}$ tels que $u_2 = xu + yu'$. On a $\det(u_2, u') = x\det(u, u')$ et donc $\det(u_2, u') < \det(u, u')$. Considérons alors une suite adjacente $u_2 < u_3 < \ldots < u_n = u'$. La suite $u = u_1 < u_2 < \ldots < u_n = u'$ est une suite adjacente entre u et u'.

2. Par définition une suite adjacente $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ est minimale si et seulement si $\det(u_i, u_j) \geq 2$ quand $j - i \geq 2$. Supposons donc $\det(u_i, u_{i+2}) \geq 2$ pour $i = 1, \ldots, n-2$ et montrons que $\det(u_i, u_j) \geq 2$ pour $j - i \geq 2$.
Puisque (u_i, u_{i+1}) et (u_{i+1}, u_{i+2}) sont des bases de $\mathbb{Z}^2$ il existe $a_i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{pmatrix} u_{i+1} \\ u_{i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}$$

En particulier

$$u_{i+2} = -u_i + a_i u_{i+1} \tag{6.1}$$

Comme $\det(u_i, u_{i+1}) = 1$ on a donc $a_i = \det(u_i, u_{i+2}) \geq 2$. Soit (x_i, y_i) les coordonnées de u_i dans la base (u_1, u_2). On tire de (6.1) l'égalité $y_{i+2} = -y_i + a_i y_{i+1}$ d'où

$$y_{i+2} - y_{i+1} = (a_i - 1)\, y_{i+1} - y_i \tag{6.2}$$

qui permet de démontrer par récurrence sur i que $y_{i+1} - y_i \geq 1$. En effet l'inégalité est déjà vraie pour $i = 1, 2$ ($y_1 = 0$ et $y_2 = 1$) et si elle est vraie jusqu'au rang i, (6.2) donne, avec $a_i \geq 2$:

$$y_{i+2} - y_{i+1} \geq y_{i+1} - y_i \geq 1$$

On déduit ensuite de $y_{i+1} - y_i \geq 1$ et $y_1 = 0$ que $y_i \geq i - 1$. Or $u_i = x_i u_1 + y_i u_2$ donne $\det(u_1, u_i) = y_i \det(u_1, u_2) = y_i$ d'où $\det(u_1, u_i) \geq i - 1$. Le même raisonnement en partant d'un premier élément autre que u_1 donne l'inégalité plus générale $\det(u_i, u_j) \geq j - i$ pour $j \geq i$, qui permet de conclure.

3. Soient $r = r_1 < r_2 < \ldots < r_n = r'$ et $r = r'_1 < r'_2 < \ldots < r'_{n'} = r'$ deux suites minimales entre r et r'. Montrons par récurrence sur n que ces deux suites sont égales, quels que soient les rationnels r et r'. Si $n = 2$ la deuxième suite ne peut être minimale que si $n' = 2$. Supposons donc $n \geq 3$ et considérons les suites de vecteurs de $\mathbb{Z}^2$ $u = u_1, u_2, \ldots, u_n = v$ et $u = u'_1, u'_2, \ldots, u'_{n'} = v$ associées aux deux suites de rationnels. Supposons que $r_2 \neq r'_2$. Soit m tel que $r'_m \leq r_2 \leq r'_{m+1}$. On ne peut avoir ni $r'_m = r_2$ ni $r'_{m+1} = r_2$ car $\det(u, u_2) = 1$ alors que $\det(u, u'_m) \geq 2$ pour $m \geq 3$ d'après le point 2 du lemme. Donc $r'_m < r_2 < r'_{m+1}$ et il existe $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $u_2 = xu'_m + yu'_{m+1}$. Or $1 = \det(u, u_2) = x\det(u, u'_m) + y\det\left(u, u'_{m+1}\right)$ avec $x \geq 1$, $\det(u, u'_m) \geq 0$, $y \geq 1$ et $\det\left(u, u'_{m+1}\right) \geq 2$ est impossible. On a donc $r_2 = r'_2$. Les deux suites $r_2 < \ldots < r_n = r'$ et $r_2 = r'_2 < \ldots < r'_{n'} = r'$ sont minimales et la première a pour longueur $n - 1$. Elles sont donc égales

4. Il suffit d'appliquer le point (3) du lemme, pour $j = 1, \ldots, p$, à la suite adjacente $r_{i_j}, r_{i_j+1}, \ldots, r_{i_{j+1}}$ et de remarquer que la suite $r_{i_j}, r_{i_{j+1}}$ est minimale

□

Remarque : il se trouve que l'algorithme décrit dans la preuve de l'existence d'une suite adjacente entre r et r' fournit en réalité la suite minimale. Ce résultat étant utile dans la suite nous allons le démontrer.

Reprenons en effet la preuve du point 1 du lemme. On procède par récurrence sur $\det(u, u')$. Si $\det(u, u') = 1$ alors la suite r, r' est adjacente donc minimale entre r et r'. Soit n>1. Supposons que pour r, r' quelconques tels que $\det(u, u') < n$ l'algorithme fournisse une suite minimale. Soit r, r' tel que $\det(u, u') = n$ et $u = u_1, u_2, \ldots, u_m = u'$ la suite adjacente construite en 1 du lemme. Comme on a montré que $\det(u_2, u') < n$, on sait que $u_2, \ldots, u_m = u'$ est minimale. Si $u, u_2, \ldots, u_m = u'$ n'était pas minimale on aurait donc, d'après le point 2 (ou le point 3) du lemme, $u_2 = u + u_3$ et donc : $\det(u_3, u') = \det(u_2, u') - \det(u, u') < 0$ ce qui est contraire à la définition de u_3 qui doit être à l'intérieur du parallélogramme $(0, u_2, u_2 + u', u')$.

□

6.6 Preuve de la liste des modèles minimaux

Il s'agit de montrer qu'en partant d'un plongement homogène lisse et complet quelconque de SL_2/H on peut se ramener par contractions successives (inverses d'éclatements) à l'un des éléments de la liste des plongements minimaux (6.2 p. 71) et de prouver que ces éléments ne sont pas des éclatés d'un autre plongement. On envisage plusieurs cas selon le sous-groupe H et la forme du plongement lisse de départ.

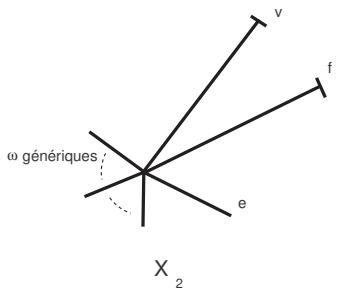
6.6.1 Cas où H est binaire tétraédral

D'après les résultats de la section 4 p. 29 les SL_2-germes réguliers de dimension 1 sont :

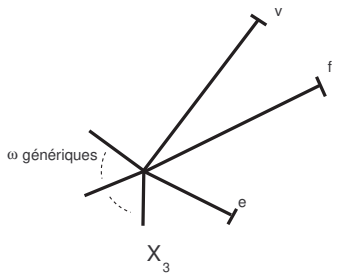
- $A_3(v, f, e; b(v), b(f), b(e))$, $A_2(v, f; b(v), b(f))$, $A_1(v; b(v))$ et $A_1(f; b(f))$ (définition de $b(j)$ p. 3.4).
- $AB(j, r_1, r_2)$ tels que les r'_i définis par $r_i = \frac{1+r'_i}{n_j} - 1$ sont c_j-adjacents ($c_v = c_f = 6$, $c_e = 4$ et $c_\omega = 2$ pour ω générique).
- $B_+(\omega, -1)$ pour ω générique.

Soit X_1 le plongement correspondant au premier diagramme de la proposition 7 p. 72). X_1 a pour orbites non ouvertes $A_1(v; b(v))$ et $C(v; b(v))$. En éclatant X_1 le long de son orbite de dimension 1 on obtient X_2 qui a pour orbite de dimension 1

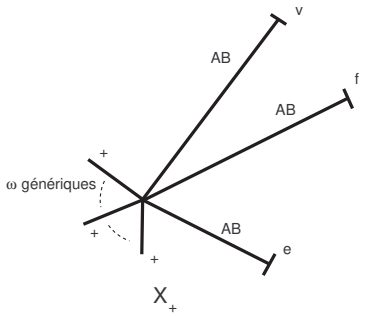
$A_2\,(v,f;b(v),b(f))$. En effet le diviseur exceptionnel D de l'éclaté est un fermé SL_2-stable irréductible de dimension 2 et son anneau local est l'anneau d'une valuation SL_2-invariante $v(j,r)$ $(j \in \mathbb{P}^1/H$ et $r \in \mathbb{Q} \cap [-1, b\,(j)])$. Or v est une valuation essentielle pour toute SL_2-orbite de D, donc si $v = v\,(,-1)$ alors D contient un ensemble cofini d'orbites de type $B_+(\omega,-1)$ (plus éventuellement d'autres orbites de dimension1) et pas d'orbite de type C, et si $v \neq v\,(,-1)$ alors D contient une unique orbite de dimension 2 qui est $C(j,r)$ et un nombre fini d'orbites de dimension 1. D'après la liste des orbites régulières ci-dessus la seule possibilité est X_2 :



Par le même raisonnement, si on éclate X_2 le long de $A_2\,(v,f;b\,(v)\,,b\,(f))$ on obtient X_3 avec l'orbite $A_3\,(v,f,e;b\,(v)\,,b\,(f)\,,b\,(e))$.



En éclatant X_3 le long de $A_3\,(v,f,e;b\,(v)\,,b\,(f)\,,b\,(e))$ on obtient X_+ avec les orbites $B_+\,(j,-1)$ pour j générique et $AB\,(j,-1,b\,(j))$, $C\,(j,b\,(j))$ pour $j \in \{v,f,e\}$.



Considérons maintenant un plongement quelconque X de SL_2/H. S'il possède une orbite A_N il provient de X_1 par un ou deux éclatements successifs. Sinon il a

un ensemble infini d'orbites $B_+(j,-1)$ avec j générique appartenant à un ensemble cofini $(\mathbb{P}^1/H)-J$ (plongement décrit p. 71).

Soit $j\in J$. Il existe une suite de rationnels $r_1=-1<r_2<\ldots<r_n=b(j)$ telle que X possède les orbites $AB(j,r_{i-1},r_i)$ et $C(j,r_i)$ pour $i=2,\ldots,n$ et telle que les r_i' définis à partir des r_i par $r_i=\frac{1+r_i'}{n_j}-1$ forment une suite c_j-adjacente entre -1 et 1. On vérifie facilement que $-1=\frac{-\widetilde{c}_j}{\widetilde{c}_j},1=\frac{1}{1}$ est la suite minimale entre -1 et 1 D'après le lemme 6.5.3 et ses corollaires on peut donc par contractions successives aboutir à un plongement avec l'orbite $AB(j,-1,b(j))$. Ce plongement est lui-même l'éclaté d'un plongement avec l'orbite $B_+(j,-1)$. En appliquant ce traitement à chaque élément j de J on aboutit par contractions successives au plongement X_3. La proposition 7 est démontrée.

□

Remarque 6.6.1 *Si X,X' sont deux plongements (lisses, complets) de SL_2/H (H tétraédral) et φ est un morphisme de X vers X' alors φ est une composition de contractions.*

Preuve : la liste des SL_2-germes réguliers (un seul type d'orbite de type B : le type B_+) nous dit qu'un plongement X est déterminé par son squelette $\mathrm{Sk}(X)$. De même les conditions d'existence d'un morphisme de X vers X' données au § 6.3 se réduisent à $\mathrm{Sk}(X')\subset\mathrm{Sk}(X)$.

Pour un morphisme φ de X vers X', notons $e(\varphi)$ le cardinal de $\mathrm{Sk}(X)\setminus\mathrm{Sk}(X')$. Si $e(\varphi)=0$ alors φ est un isomorphisme. Supposons la proposition démontrée pour tous les φ tels que $e(\varphi)\leq n$ $(n\in\mathbb{N})$ et soit φ tel que $e(\varphi)=n+1$.

Supposons d'abord que $v(,-1)\in\mathrm{Sk}(X)\setminus\mathrm{Sk}(X')$. En particulier X' est égal à l'un des plongements X_1,X_2 ou X_3 de la preuve de la proposition 7. Soit $\pi:X_+\to X'$ la composition de contractions décrite dans la preuve. Comme $\mathrm{Sk}(X_+)\subset\mathrm{Sk}(X)$, on voit que φ se factorise en $\pi\circ\widetilde{\varphi}$ et puisque $e(\widetilde{\varphi})\leq n$, on en déduit que $\widetilde{\varphi}$, puis φ, se decompose en produit de contractions.

Supposons que $v(,-1)\notin\mathrm{Sk}(X)\setminus\mathrm{Sk}(X')$. Soit $v_0=v(j_0,r_0)\in\mathrm{Sk}(X)\setminus\mathrm{Sk}(X')$ avec $j_0\in\mathbb{P}^1/H$ et $r_0\in]-1;b(j_0)]\cap\mathbb{Q}$.

Si v_0 domine (l'anneau de valuation d') une orbite de type A_N dans X' alors v_0 est essentielle pour une orbite de type A_N de X et φ est un morphisme de X_j vers X_i $(1\leq i<j\leq 3)$. D'après la preuve de la proposition 7, φ est un produit de contractions.

Supposons que v_0 domine une orbite $l_0=AB(r,r')$ de X'. Alors X contient les orbites $AB(j_0;r,r_1),AB(j_0;r_1,r_2),\ldots,AB(j_0;r_n,r')$ $(n\geq 1)$. D'après le lemme 6.5.3 et son corollaire 6.5.5 p. 80 on a une suite d'éclatements de X' (on commence par éclater l_0) de composée $\pi:\widetilde{X}'\to X'$ telle que $\mathrm{Sk}(\widetilde{X}')=\mathrm{Sk}(X')\cup\{v(j_0,r_1),\ldots,v(j_0,r_n)\}\subset\mathrm{Sk}(X)$. En particulier φ se factorise en $\pi\circ\widetilde{\varphi}$ et on conclut comme dans le cas précédent.

Supposons enfin que v_0 domine une orbite de type B_+ de X', c'est-à-dire une orbite $l_0 = B_+(j_0, -1)$ avec j_0 générique dans $\mathbb{P}^1/H$.

$v_0 \neq v(,-1)$ donc v_0 est essentielle pour une orbite de X qui n'est pas de type B_+. On en déduit que $v_1 = v(j_0, b(j_0)) \in \mathrm{Sk}(X)$. Considérons l'application d'éclatement $\pi : \widetilde{X}' \to X'$ de l'orbite l_0. On a $\mathrm{Sk}(\widetilde{X}') = \mathrm{Sk}(X') \cup \{v_1\}$, donc on a encore $\mathrm{Sk}(\widetilde{X}') \subset \mathrm{Sk}(X)$ et on peut conclure comme dans les cas précédents.

Par récurrence sur $e(\varphi)$ la proposition 6.6.1 est démontrée.

□

6.6.2 Cas où H est binaire octaédral ou icosaédral

On reprend la preuve du cas tétraédral en remarquant que cette fois la seule orbite de type A_1 est $A_1(v; b(v))$.

□

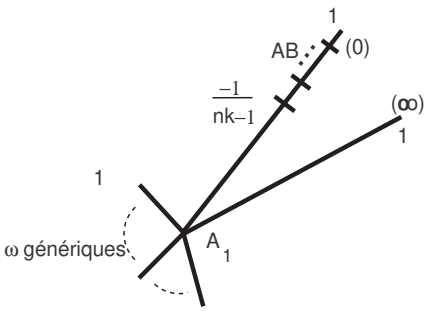
6.6.3 Cas où H est cyclique d'ordre k impair supérieur ou égal à 3

Les SL_2-germes réguliers de dimension 1 sont :

- $A_1\left(0\,;\, \frac{-1}{-1+nk}\right)$ et $A_1\left(\infty\,;\, \frac{-1}{-1+nk}\right)$
- $A_2(0, \infty\,;\, 1, r_n)$ et $A_2(\infty, 0\,;\, 1, r_n)$ avec $r_n = \frac{n}{n+k}$ et $n \geq \frac{1-k}{2}$
- $A_2\left(0, \infty\,;\, r_{\frac{1-k}{2}}, r_{\frac{1-k}{2}}\right)$
- $AB(j, r_1, r_2)$ tels que les r_i' définis par $r_i = \frac{1+r_i'}{n_j} - 1$ sont $\mathrm{c_j}$-adjacents ($c_0 = c_\infty = k$ et $c_\omega = 1$ pour ω générique).
- $B_+(\omega, -1)$ et $B_+\left(\omega, \frac{1-k}{k}\right)$ pour ω générique
- $B_-\left(\omega, \frac{1}{1+nk}\right)$ pour ω non générique et $n \geq 1$.

Partant d'un plongement quelconque X, il faut montrer que par une suite de contractions on aboutit à l'un des modèles de la proposition 9 mais qu'aucun de ces modèles ne peut être contracté.

Un plongement X de SL_2/H contient soit une orbite de type A_1, soit une orbite de type A_2 (deux cas), soit un ensemble infini (cofini dans $\mathbb{P}^1/H$) d'orbites $B_+(\omega, -1)$.
1er cas : X contient une orbite de type A_1, par exemple $A_1\left(0\,;\, \frac{-1}{-1+nk}\right)$.

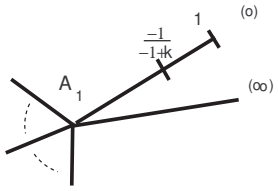


Pour que X soit complet il faut compléter par des orbites $AB\left(0,r_i,r_{i+1}\right)$, $C\left(0,r_i\right)$ et éventuellement une orbite $B_-\left(0,r\right)$.

Supposons que X n'ait pas d'orbite B_-.

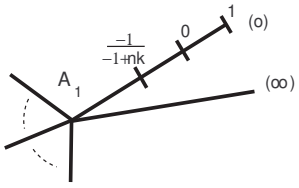
Comme $n_0 = n_\infty = 1$, la formule $r = \frac{1+r'}{nj} - 1$ donne $r = r'$. Les fractions $\frac{-1}{-1+nk}$ et $\frac{1}{1}$ sont k-irréductibles ($c_0 = c_\infty = k$) et comme $\left|\begin{smallmatrix} nk-1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = nk$ elles ne sont k-adjacentes que si $n = 1$.

Si $n = 1$ on peut donc, d'après le lemme 6.5.3 et ses corollaires, contracter X jusqu'au plongement :



Ce plongement est minimal car si on on enlève l'orbite $C\left(0,\frac{-1}{-1+k}\right)$, l'orbite $A_1\left(0,1\right)$ n'est pas régulière et si on enlève l'orbite $C\left(0,1\right)$ il faudrait compléter par une orbite non régulière $B_+\left(0,\frac{-1}{-1+k}\right)$ou $B_-\left(0,\frac{-1}{-1+k}\right)$.

Si $n \geq 2$, la suite k-adjacente minimale entre $\frac{-1}{-1+k}$ et 1 est $\frac{-1}{-1+k}, \frac{0}{k}, \frac{1}{1}$. On peut donc contracter X jusqu'au plongement

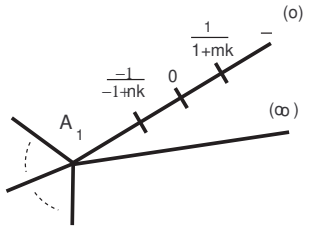


Ce plongement est minimal car si l'on enlève l'une des orbites de type C on ne peut pas garder un plongement lisse en complétant le plongement obtenu par une orbite de dimension 1.

Supposons maintenant que X ait, en plus de ses orbites éventuelles de type AB, une orbite $B_-\left(0,\frac{1}{1+mk}\right)$.

$\frac{-1}{-1+nk}$ et $\frac{1}{1+mk}$ sont k-réduites mais ne sont pas k-adjacentes car $\left|\begin{smallmatrix} -1+nk & 1+mk \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = (n+m)\,k \geq 2k \neq k$. La suite k-adjacente minimale entre $\frac{-1}{-1+nk}$ et $\frac{1}{1+mk}$ est $\frac{-1}{-1+nk}, \frac{0}{k}, \frac{1}{1+mk}$.

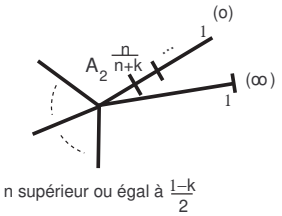
On peut donc se ramener par contractions à



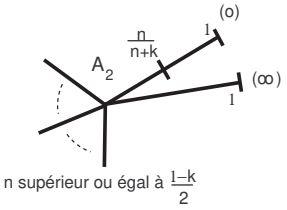
qui est minimale car on ne peut enlever aucune des orbites de type C en conservant un plongement lisse.

2ème cas : X contient $A_2(\infty, 0\,;\, 1, r_n)$ (ou $A_2(0, \infty\,;\, 1, r_n)$) avec $r_n = \frac{n}{n+k}$ et $n \geq \frac{1-k}{2}$.

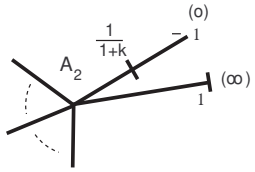
Pour que X soit complet il faut compléter par des orbites $AB(0, r_i, r_{i+1})$, $C(0, r_i)$ et éventuellement une orbite $B_-(0, r)$. Supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'orbite B_-.



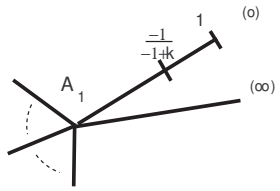
$\frac{n}{n+k}$ et $\frac{1}{1}$ étant adjacents on peut se ramener par contractions successives à



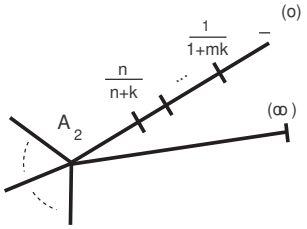
Si par contraction on enlève l'orbite $C\left(0, \frac{n}{n+k}\right)$, l'orbite $A_2(0, \infty\,;\, 1, 1)$ du nouveau plongement n'est pas lisse. Si on contracte l'orbite $C(0, 1)$ il faut que $B_-\left(0, \frac{n}{n+k}\right)$ soit régulière, ce qui n'est possible que si $\frac{n}{n+k} = \frac{1}{1+mk}$ pour un certain $m \geq 1$. Comme ces deux fractions sont k-irréductibles leur égalité équivaut à $n = 1$ et $n+k = 1+mk$, c'est-à-dire $n = m = 1$. On trouve dans ce cas le plongement minimal



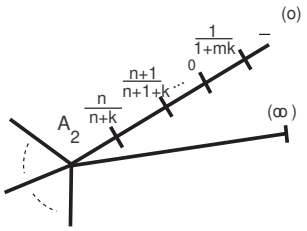
Si enfin on contracte l'orbite $C(\infty, 1)$, l'orbite $A_1\left(0\,;\,\frac{n}{n+k}\right)$ n'est régulière que si $\frac{n}{n+k} = \frac{-1}{-1+mk}$ pour un certain $m \geq 1$. Il faut donc que $n = -1$ et $m = 1$ et on trouve alors après contraction le cas déjà vu :



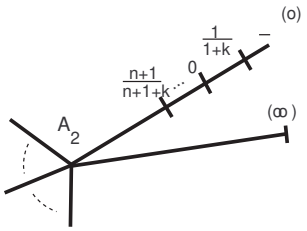
Supposons maintenant qu'il y ait une orbite $B_-(0, r)$:



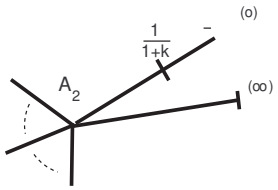
$\frac{n}{n+k}$ et $\frac{1}{1+mk}$ sont k-irréductibles et $\left|\begin{smallmatrix} n+k & mk+1 \\ n & 1 \end{smallmatrix}\right| = k(1-nm)$. Donc $\frac{n}{n+k} \leq \frac{1}{1+mk}$ quand $m = 1$ et $\frac{1-k}{2} \leq n \leq 1$ ou $m \geq 2$ et $\frac{1-k}{2} \leq n \leq 0$. On vérifie en appliquant le critère du lemme 6.5.3 que la suite k-adjacente minimale entre $\frac{n}{n+k}$ et $\frac{1}{1+mk}$ est $\frac{n}{n+k}, \frac{n+1}{n+1+k}, \ldots, \frac{0}{k}, \frac{1}{1+mk}$ si $n \leq 0$. On peut donc par contractions successives se ramener à :



Supposons $m = 1$. Si $n \leq 0$ on vérifie que l'on peut contracter $C\left(0, \frac{n}{n+k}\right)$, $A_2\left(0, \infty\,;\,\frac{n}{n+k}, 1\right)$, $AB\left(0, \frac{n}{n+k}, \frac{n+1}{n+1+k}\right)$ pour trouver le plongement :

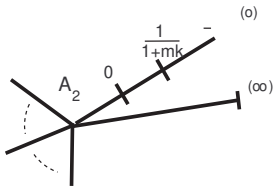


et donc, par contractions successives, on aboutit à



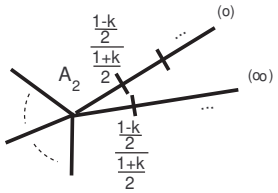
qui est clairement minimal.

Supposons maintenant $m \geq 2$. Comme précedemment, on peut contracter jusqu'à :

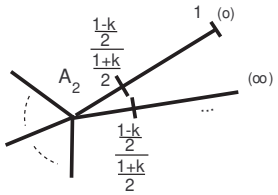


Ce plongement est minimal car on ne peut enlever aucune orbite de type C en préservant la lissité.

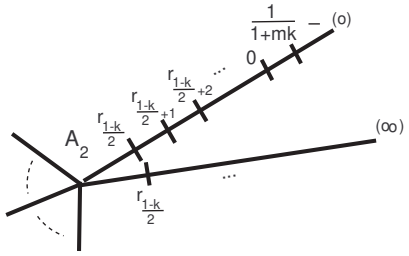
3ème cas : X contient $A_2\left(0,\infty\,;\,\frac{\frac{1-k}{2}}{\frac{1+k}{2}}\frac{\frac{1-k}{2}}{\frac{1+k}{2}}\right)$.



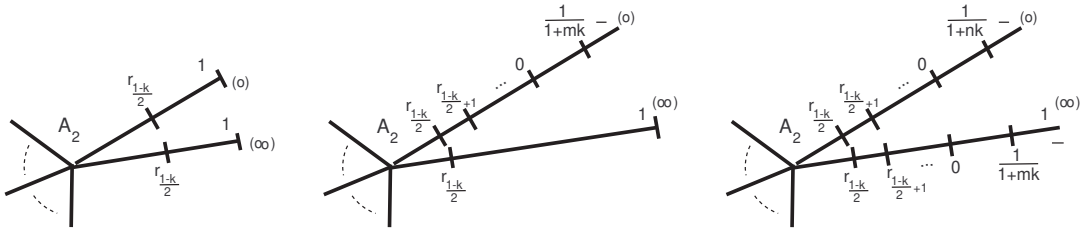
Supposons qu'il n'y ait pas d'orbite $B_-(0,r)$. Comme $\frac{\frac{1-k}{2}}{\frac{1+k}{2}}$ et $\frac{1}{1}$ sont k-adjacentes on peut se ramener par contractions successives à :



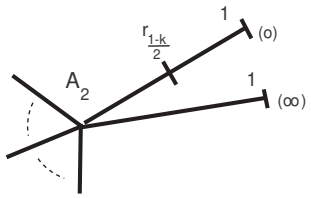
Supposons maintenant qu'il y ait une orbite $B_-(0,r)$. Posons $\boxed{r_n = \frac{n}{n+k}}$. On a $\frac{\frac{1-k}{2}}{\frac{1+k}{2}} = r_{\frac{1-k}{2}}$ et on sait que la suite k-adjacente minimale entre $r_{\frac{1-k}{2}}$ et $\frac{1}{1+mk}$ est $r_{\frac{1-k}{2}}, r_{\frac{1-k}{2}+1}, \ldots, r_0 = 0, \frac{1}{1+mk}$. On peut donc se ramener par contractions successives à :



On peut ainsi se ramener aux 3 plongements suivants (4 en échangeant 0 et ∞) :

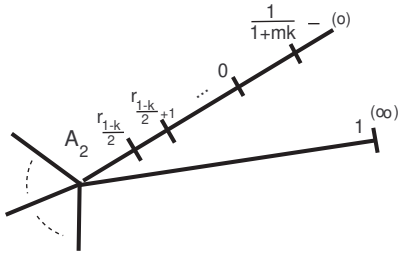


Le premier peut se contracter en



Pour pouvoir contracter ce plongement il faut que $r_{\frac{1-k}{2}} = \frac{-1}{-1+nk}$. On sait que ceci n'est possible que si $\frac{1-k}{2} = -1$ et $n = 1$ et l'on retrouve après contraction un cas déjà étudié. Si $k > 3$ le plongement est minimal (vu précédemment).

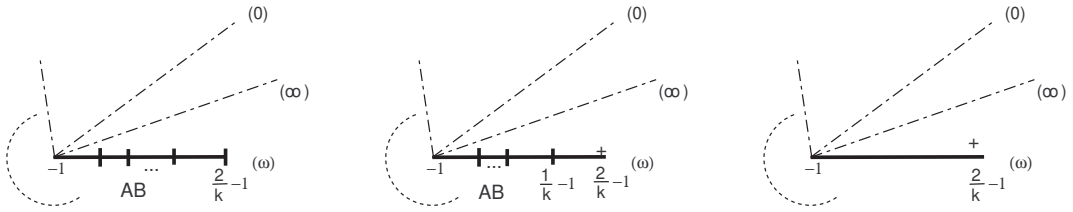
Le deuxième plongement se contracte en



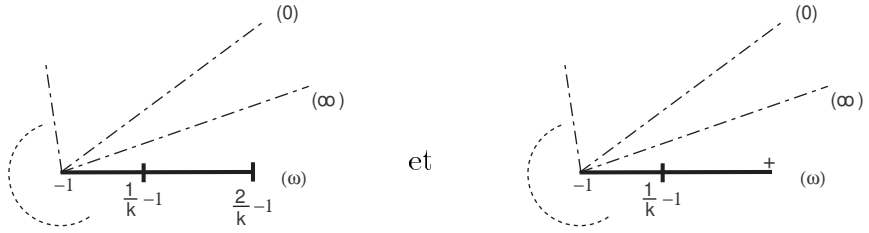
qui est un plongement déjà rencontré. Reste le troisième plongement dont on vérifie facilement qu'il est minimal : on ne peut enlever aucune orbite de type C en maintenant la lissité.

4ème cas : X a une infinité d'orbites $B(\omega, -1)$.

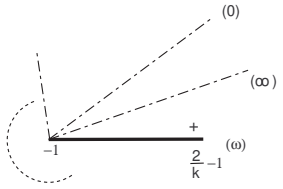
Soit $\omega \in \mathbb{P}^1/H$ générique. Trois cas peuvent se présenter pour les orbites $C(\omega, \dots)$, $B_+(\omega, \dots)$ et $AB(\omega, \dots)$ de X :



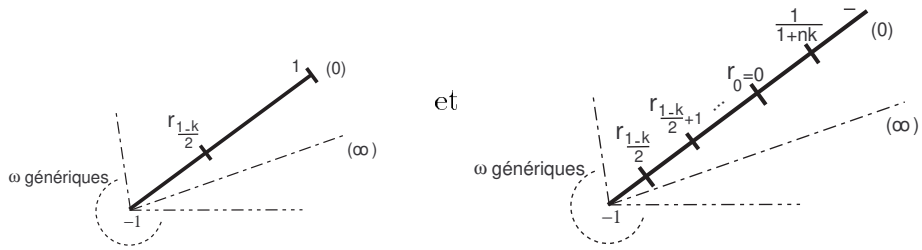
$r = -1, \frac{1}{k} - 1, \frac{2}{k} - 1$ se transforment par la formule $r = \frac{1+r'}{n_\omega} - 1 = \frac{1+r'}{k} - 1$ en $r' = -1, 0, 1$. Or $c_\omega = 1$ et la suite $-1, 0, 1$ est 1-adjacente minimale entre -1 et 1. Par application du lemme 6.5.3 et de ses corollaires on peut donc en contractant X un nombre fini de fois ramener les deux premiers cas à :



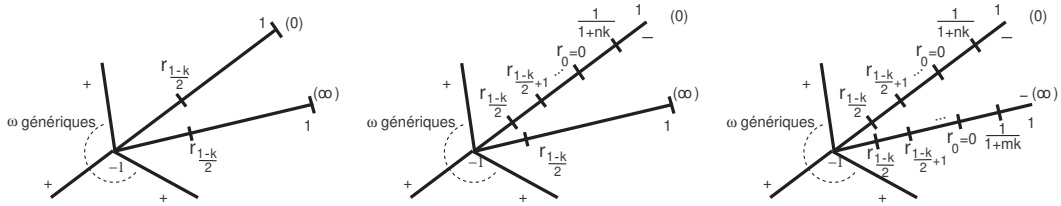
On obtient le premier de ces deux plongements par éclatement de l'orbite $B_+\left(\omega, \frac{1}{k} - 1\right)$ du deuxième et ce dernier est lui-même l'éclaté de :



Si $\omega = 0$ ou ∞ la suite k-adjacente minimale entre -1 et 1 est $-1, r_{\frac{1-k}{2}}, 1$ et la suite k-adjacente minimale entre -1 et $\frac{1}{1+nk}$ est $-1, r_{\frac{1-k}{2}}, r_{\frac{1-k}{2}+1}, \ldots, r_0, \frac{1}{1+nk}$. On est donc ramené par contractions aux deux cas suivants :



D'où finalement trois plongements possibles (4 en échangeant 0 et ∞) :



Chacun de ces plongements est l'éclaté d'un plongement rencontré précédemment (3ème cas, avec une orbite A_2). La proposition est démontrée.

□

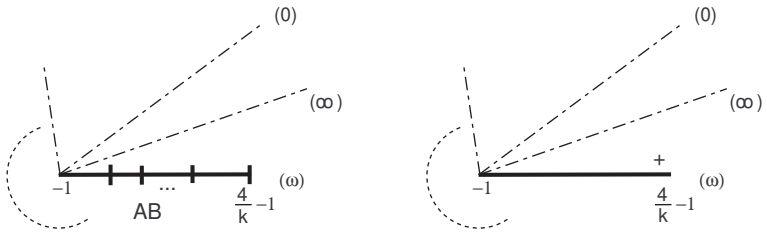
6.6.4 Cas où H est cyclique d'ordre k pair

Les SL_2-germes réguliers de dimension 1 sont :

- $A_1\left(0,\infty\,;\,\frac{-1}{-1+nk},1\right)$ et $A_1\left(\infty,0\,;\,\frac{-1}{-1+nk},1\right)$ pour $n\geq 1$
- $A_2\left(0,\infty\,;\,\frac{n}{n+k},1\right)$ et $A_2\left(\infty,0\,;\,\frac{n}{n+k},1\right)$ pour $n\geq 1-\frac{k}{2}$
- $A_3\left(0,\infty,\omega_1\,;\,1,1,\frac{4}{k}-1\right)$ pour un élément générique ω_1 quelconque de $\mathbb{P}^1/H$.
- $AB\,(j,r_1,r_2)$ tels que les r_i' définis par $r_i=\frac{1+r_i'}{n_j}-1$ sont c$_j$-adjacents ($c_0=c_\infty=k$ et $c_\omega=2$ pour ω générique)
- $B_+\,(\omega,-1)$ pour ω générique.

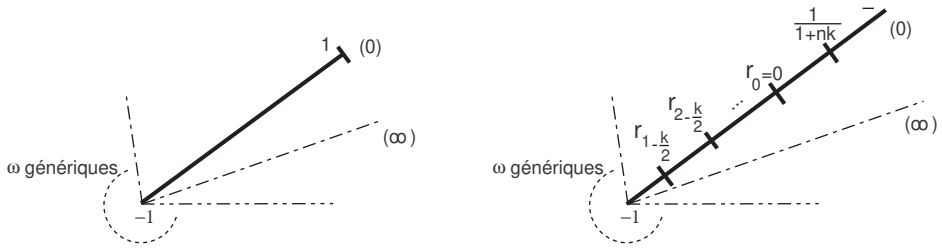
Pour les 6 premiers plongements de la proposition 10 il n'y a aucune différence avec le cas impair. Il est clair que le 7ème plongement est minimal. Il ne reste donc qu'à étudier le cas où le plongement contient un ensemble infini d'orbites $B_+\,(\omega,-1)$.

Soit $\omega\in\mathbb{P}^1/H$ générique. 2 cas peuvent se présenter :

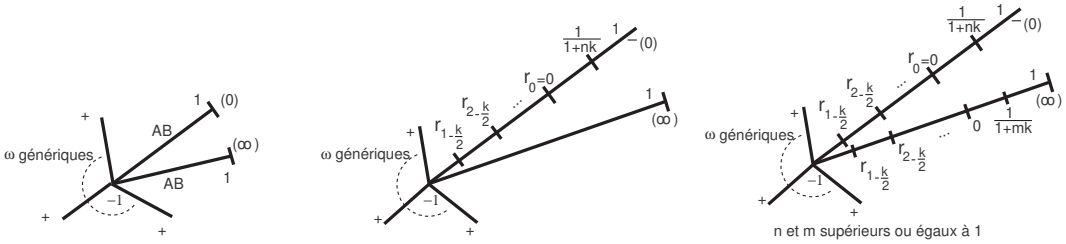


$r=-1,\frac{4}{k}-1$ se transforment par la formule $r=\frac{1+r'}{n_\omega}-1=\frac{1+r'}{k/2}-1$ en $r'=-1,1$. Or $c_\omega=2$ et la suite $-1,1$ est 2-adjacente minimale. Par application du lemme 6.5.3 on peut donc en contractant X un nombre fini de fois se ramener au deuxième cas.

Si $\omega=0$ ou ∞ la suite $-1=\frac{-k/2}{k/2},1$ est k-adjacente minimale et la suite k-adjacente minimale entre -1 et $\frac{1}{1+nk}$ est $-1,r_{\frac{1-k}{2}},r_{\frac{1-k}{2}+1},\ldots,r_0,\frac{1}{1+nk}$. On est donc ramené par contractions aux deux cas suivants



D'où finalement trois plongements possibles (4 en échangeant 0 et ∞) :



Le premier plongement est minimal. Le second est l'éclaté d'un plongement avec une orbite A_2. Le troisième est minimal. La proposition 10 est démontrée.

□

Reste le cas où le groupe cyclique est d'ordre $k = 4$.

Aux SL_2-germes réguliers du cas $k \geq 6$ il faut ajouter $A_2\,(0, \omega_1\,;\, 1, 0)$ et $A_2\,(\infty, \omega_1\,;\, 1, 0)$, pour un élément générique quelconque ω_1 de $\mathbb{P}^1/H$. Il suffit alors de vérifier qu'en éclatant le plongement contenant cette orbite on obtient le plongement avec orbite A_3. La proposition 11 est démontrée.

□

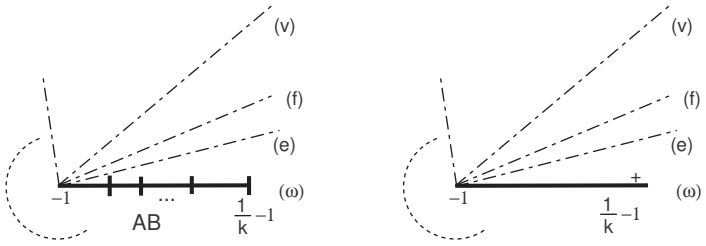
6.6.5 Cas où H est binaire diédral

Les SL_2-germes réguliers de dimension 1 sont :

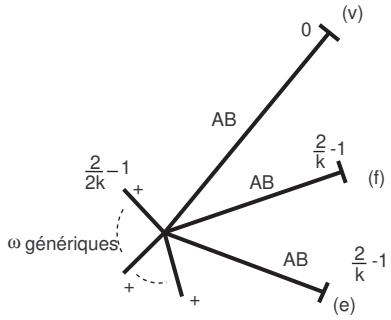
- $A_3\left(v, f, e, 0\,;\, \frac{2}{k} - 1, \frac{2}{k} - 1\right)$
- $A_2\left(v, f, 0\,;\, \frac{2}{k} - 1\right)$ et $A_2\left(v, e\,;\, 0, \frac{2}{k} - 1\right)$ si $k > 1$ plus $A_2\,(f, e\,;\, 0, 0)$ si $k = 2$
- $A_1\left(f\,;\, -\frac{1}{3}\right)$ et $A_1\left(e\,;\, -\frac{1}{3}\right)$ si $k = 3$
- $AB\,(j, r_1, r_2)$ tels que les r_i' définis par $r_i = \frac{1+r_i'}{n_j} - 1$ sont c$_j$-adjacents ($\widetilde{c}_v = 2k$, $\widetilde{c}_f = \widetilde{c}_e = 4$ et $\widetilde{c}_\omega = 2$ pour ω générique)
- $B_+\,(\omega, -1)$ pour $\omega \in \mathbb{P}^1/H$ générique.

Le plongement contenant l'orbite A_3 est toujours l'éclaté d'un plongement contenant une orbite A_2. Si $k > 2$ un tel plongement est minimal, si $k = 2$ c'est l'éclaté d'un plongement contenant une orbite A_1 qui est lui-même minimal.

Soit X un plongement avec une infinité d'orbites $B_+(\omega,-1)$. Pour $\omega \in \mathbb{P}^1/H$ générique on a deux cas :



Par la formule $r = \frac{1+r'}{n_\omega} - 1 = \frac{1+r'}{2k} - 1$, la suite $r = -1, \frac{1}{k} - 1$ se transforme en $r' = -1, 1$. Or $c_\omega = 2$ et la suite $-1, 1$ est 2-adjacente minimale. On peut donc toujours par contractions se ramener au second plongement avec $B_+(\omega,-1)$. Si $j \in \{v, f, e\}$ on peut aussi vérifier que $AB(j,-1,b(j))$ est lisse et on peut par contractions réduire X à un plongement contenant cette orbite. Le plongement obtenu a pour diagramme :



C'est l'éclaté du plongement avec orbite A_3. La proposition 12 est démontrée.

□

6.7 Géométrie des modèles minimaux

6.7.1 Un critère de quasiprojectivité.

L. Moser a établi plusieurs résultats sur la quasi-projectivité d'un plongement homogène (normal) de SL_2/H. Dans une suite non publiée de sa thèse elle a prouvé par exemple le résultat suivant :

> Si X, un plongement homogène normal de SL_2/H a deux orbites Y_1 et Y_2, de type B_0 ou B_- alors X n'est pas quasi-projectif.

Pour la réciproque (dans le cas lisse) on trouve dans son article [M3] la proposition suivante :

(proposition 6.4 de [M3]) Soit X un plongement lisse et complet de SL_2. Alors X est projectif si et seulement si il contient au plus une orbite de type B_-.

Si on considère un plongement X lisse complet de SL_2/H ne contenant pas deux orbites de type B_0 ou B_- alors il est facile de voir que X est obtenu par éclatements successifs d'un plongement minimal qui est projectif, puisqu'il s'agit d'un plongement que l'on retrouve dans la liste de Nakano.

Le critère de quasi-projectivité que nous allons prouver s'applique au cas plus général d'un plongement non nécessairement lisse ni complet.

Timashev décrit dans [Tim2] les diviseurs de Cartier B-stables d'un plongement normal homogène de G/H dans le cas où G est réductif et $\mathbb{C}(G/H)^B$ est de degré de transcendance 1 sur $\mathbb{C}$ (complexité 1). Il donne aussi un critère permettant de vérifier qu'un tel diviseur est ample. A l'aide de ce critère d'amplitude nos allons démontrer le résultat suivant :

Proposition 13 *soit H est un sous-groupe fini de SL_2. Un plongement homogène de SL_2/H n'est pas quasi-projectif si et seulement si il contient deux orbites Y_1 et Y_2 de type B_- ou B_0.*

Corollaire 6.7.1 *Tous les plongements minimaux de SL_2/H sont projectifs sauf le dernier plongement de la proposition 9 p. 72 (H cyclique d'ordre impair ≥ 3) et le dernier plongement de la proposition 10 p. 74 (H cyclique d'ordre pair ≥ 6).*

Les résultats de Timashev que nous utiliserons sont les suivants (théorèmes 5 et 6 de [Tim2]) :

1. Soit δ un diviseur B-stable de X. Alors δ est un diviseur de Cartier si et seulement si pour toute sous-variété irréductible G-stable Y de X (appelée une G-sous-variété de X) il existe $f_Y \in \mathbb{C}(G/H)^{(B)}$ tel que chaque diviseur premier B-stable D contenant Y intervienne dans δ avec la multiplicité $v_D(f_Y)$. Conséquence :
2. D'après 1 un diviseur de Cartier B-stable sur X est déterminé par la donnée de :
   (a) un élément f_Y de $\mathbb{C}(G/H)^{(B)}$ pour chaque G-sous-variété de X, avec la condition que $v_D(f_{Y_1}) = v_D(f_{Y_2})$ pour tout diviseur premier B-stable D contenant Y_1 et Y_2.
   (b) un entier relatif m_D pour chaque diviseur premier B-stable D de $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}^B_Y$, avec la condition que seul un nombre fini d'entiers m_D soient non nuls. Rappel : $\mathcal{D}^B$ est l'ensemble des diviseurs premiers à la fois B-stables et non G-stables de G/H ; parmi ceux-ci $\mathcal{D}^B_Y$ correspond aux diviseurs qui contiennent Y.

3. Soit δ un diviseur de Cartier B-stable déterminé comme en 2 par des ensembles $\{f_Y\}$ et $\{m_D\}$. Alors δ est un diviseur ample si et seulement si on peut choisir pour chaque G-sous-variété Y une B-carte $\overset{\circ}{X}_Y$ (qui l'intersecte) telle que :

   (a) pour toute G-sous-variété Y' de X et tout diviseur premier B-stable D contenant Y' on a $v_D(f_Y) \leq v_D(f_{Y'})$, l'égalité n'ayant lieu que si $D \cap \overset{\circ}{X}_Y \neq \emptyset$.

   (b) pour tout D appartenant à $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}^B_Y$ on a $v_D(f_Y) \leq m_D$, l'égalité n'ayant lieu que si $D \cap \overset{\circ}{X}_Y \neq \emptyset$.

Les plongements lisses et complets de SL_2/H sont décrits au paragraphe 6.1 p. 69. Pour les plongements complets seulement il suffit d'omettre les contraintes de lissité des orbites. On autorise en particulier les orbites de type B_0 (points fixes). Les SL_2-sous-variétés d'un plongement X qui peuvent apparaître sont les suivantes :

1. Les points fixes c'est-à-dire les SL_2-orbites de type B_0.
2. Les SL_2-orbites isomorphes à $\mathbb{P}^1$ c'est-à-dire les orbites de type B_+, B_- ou AB.
3. Les fermetures des SL_2-orbites de dimension 2 c'est-à-dire des orbites de type C.
4. La réunion de l'ensemble (supposé non vide) de toutes les orbites de X de type B_+ ou AB dont l'anneau local admet pour valuation essentielle l'élément $v(,-1)$ de $\mathcal{V}$.

Preuve de la proposition 13 :

Commençons par retrouver la partie déjà démontrée par L.Moser (avec d'autres méthodes) : s'il y a deux orbites de type B_0 ou B_- alors le plongement n'est pas quasi-projectif.

On considère un plongement homogène X de SL_2/H ayant au moins deux orbites de type B_- ou B_0. On sait déjà (§ 5.6.2 p. 60) que H est cyclique et que si card $(H) \geq 3$ alors les orbites de type B_- ou B_0 sont de la forme $B_-(j,r)$ ou $B_0(j,r)$ avec $j \in \{0,\infty\} \subset \mathbb{P}^1/H$.

Nous exposons le cas $H = \{Id\}$, les autres cas étant analogues.

Notons B_1 et B_2 les deux orbites de type B_- ou B_0 :

$$B_1 = B_-(D_1, r_1) \text{ ou } B_0(D_1, r_1)$$
$$B_2 = B_-(D_2, r_2) \text{ ou } B_0(D_2, r_2)$$

avec $D_1, D_2 \in \mathcal{D}^B \cong \mathbb{P}^1$ et $r_1, r_2 \in]0,1[$.

Supposons que X soit quasi-projectif. On peut choisir :

– un diviseur ample défini par :

- un ensemble $\{f_Y\}$ où Y parcourt l'ensemble des SL_2-sous-variétés de X et $f_Y \in \mathbb{C}(SL_2)^{(B)}$,
- Un ensemble $\{m_D\}$ où D parcourt l'ensemble $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}^B_Y$,

– une B-carte $\overset{\circ}{X}_Y$ pour chaque SL_2-sous-variété Y de X,

tels que les conditions de Timashev données au début de la preuve soient satisfaites.

Les fonctions f_Y pour $Y = B_1, B_2$ s'écrivent

$$f_{B_1} = g_{D_1}^{x_1} g_{D_2}^{x_2} g_{D_3}^{x_3} \dots g_{D_N}^{x_N}$$
$$f_{B_1} = g_{D_1}^{y_1} g_{D_2}^{y_2} g_{D_3}^{y_3} \dots g_{D_N}^{y_N}$$

avec $D_i \in \mathcal{D}^B \cong \mathbb{P}^1$ et $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$. Rappelons que l'ensemble des diviseurs premiers B-stables de SL_2 est en bijection avec $\mathbb{P}^1$ et que si D est un tel diviseur son idéal est principal et engendré par une fonction $g_D \in \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$ définie à un coefficient multiplicatif près. Les éléments de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B)}$ s'écrivent $\prod g_D^{\alpha_D}$ avec $\alpha_D \in \mathbb{Z}$ (§ 3.2).

Comme B_i est de type II, il y a une seule B-carte qui intersecte B_i. Elle est définie par :

- $\mathcal{W} = \{v\,(D_i, r_i)\}$
- $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1$ si B_i est de type B_0 ou $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_i\}$ si B_i est de type B_-.

Ecrivons certaines conditions de diviseur ample qui aboutiront à une contradiction :

- $Y = B_1$, $Y' = B_2$, $D = D_\alpha$ pour $\alpha = 3, \dots, N$. On a alors $v_{D_\alpha}(f_{B_1}) = v_{D_\alpha}(f_{B_2})$, ce qui implique

$$x_\alpha = y_\alpha \quad (\alpha = 3, \dots, N) \tag{6.3}$$

- $Y = B_1$, $Y' = B_2$, $D = D_1$. On a alors $v_{D_1}(f_{B_1}) \leq v_{D_1}(f_{B_2})$, ce qui implique

$$x_1 \leq y_1 \tag{6.4}$$

- $Y = B_2$, $Y' = B_1$, $D = D_2$. On a $v_{D_2}(f_{B_2}) \leq v_{D_2}(f_{B_1})$ qui implique

$$y_2 \leq x_2 \tag{6.5}$$

- $Y = B_1$, $Y' = B_2$, $D = C_2$. On a alors $v\,(D_2, r_2)\,(f_{B_1}) < v\,(D_2, r_2)\,(f_{B_2})$ qui s'écrit

$$r_2 x_2 - \sum_{i \neq 2} x_i < r_2 y_2 - \sum_{i \neq 2} y_i$$

ou, en tenant compte de (6.3)

$$r_2x_2 - x_1 < r_2y_2 - y_1$$

ce qui implique, avec (6.4) et (6.5) et en tenant compte de $r_2 > 0$:

$$r_2y_2 - y_1 < r_2x_2 - x_1 < r_2y_2 - y_1$$

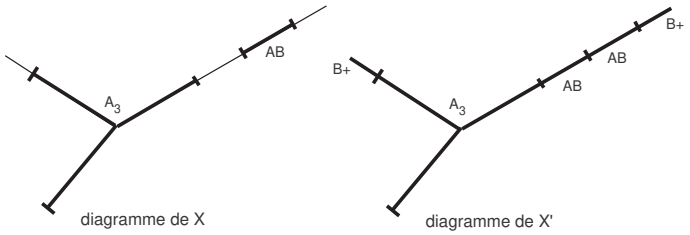
C'est la contradiction cherchée : le plongement ne peut pas être quasi-projectif.

Réciproquement supposons que X soit un plongement homogène de SL_2/H avec au plus une orbite de type B_- ou B_0. Il s'agit de montrer que X est quasi-projectif.

Soit $\widetilde{X}$ le plongement de SL_2 tel que $\widetilde{X}/H \cong X$. Si X a une orbite $B_0(j,r)$ ou $B_-(j,r)$ alors H est nécessairement cyclique et j est non-générique dans $\mathbb{P}^1/H$ (si card $(H) \geq 3$). En particulier $\widetilde{X}$ a le même nombre d'orbites de type B_0 ou B_- que X. Si $\widetilde{X}$ est quasi-projectif alors X est quasi-projectif.

On peut donc supposer pour la preuve que $H = \{id\}$.

Si X n'est pas complet il est facile de construire un plongement complet X' tel que $X \subset X'$ et $X' \setminus X$ soit une réunion finie d'orbites de type B_+ ou AB. En particulier X est un ouvert de X' et X' a le même nombre d'orbites B_- ou B_0 que X.



Si X' est projectif alors l'ouvert X est quasi-projectif. On peut donc supposer que X est complet.

Il s'agit de choisir pour chaque SL_2-sous-variété Y de X une B-carte $\overset{\circ}{X}_Y$ et une fonction f_Y dans $\mathbb{C}(SL_2)^{(B)}$ et pour chaque B-diviseur D de $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}^B_Y$ un entier relatif m_D tels que les conditions de diviseur ample données par Timashev soient satisfaites.

Une B-carte $\overset{\circ}{X}_Y$ d'une SL_2-sous-variété Y est déterminée par l'ensemble des diviseurs premiers B-stables qui l'intersectent. Cet ensemble est formé d'un ensemble $\mathcal{W}$ de diviseurs SL_2-stables (on donnera leur valuation SL_2-invariante associée) et d'un ensemble $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}^B$ de diviseurs B-stables, non SL_2-stables.

Méthode de recherche d'un diviseur ample.

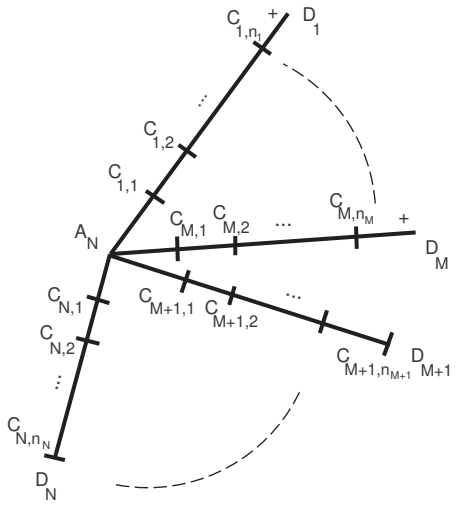
Les fonctions f_Y associées aux SL_2-sous-variétés Y étant en nombre fini seul un nombre fini de fonctions g_D intervient dans leur définition, disons $g_{D_1}, \ldots, g_{D_N}$. Pour

un choix donné de $D_1, \ldots, D_N \in \mathcal{D}^B$ un élément f_Y est donc déterminé par le N-uplet $(\alpha_{Y,1}, \ldots, \alpha_{Y,N})$ formé par les exposants des g_{D_i}. Dans chacun des cas traités ci-dessous l'ensemble des D_i contiendra au moins tous les D_i tels que $C(D_i, r)$ soit une SL_2-orbite de X pour un certain r. Si l'on fixe des B-cartes $\mathring{\mathrm{X}}_Y$, les conditions de Timashev sur les f_Y s'expriment par un système fini d'équations et d'inéquations en les $\alpha_{Y,i}$. C'est un problème simple d'algèbre linéaire dont nous donnons dans chaque cas une solution explicite.

Les éléments g_{D_i} pour $i = 1, \ldots, N$ seront notés g_i, les valuations B-invariantes v_{D_i} associées aux D_i seront notées v_i et les valuations SL_2-invariantes $v(D_a, r_{a,\beta})$ associées aux orbites $C_{a,\beta}$ de type C du plongement X (voir figure) seront notées $v_{\alpha,\beta}$.

Pour simplifier l'écriture, les exposants qui apparaissent dans la définition de f_Y sont exprimés en fonction des rationnels $r_{\alpha,\beta}$. Pour les rendre entiers il suffit de les multiplier par leur dénominateur commun. Nous ne donnons la vérification explicite des conditions de Timashev que dans le premier cas, les autres cas étant analogues.

1er cas : X contient une orbite de type A_N avec $N \geq 2$ et ne contient pas d'orbite de type B_-.



Définition du diviseur ample :

– orbites de type AB : $Y = AB_{\alpha,\beta} = AB(D_\alpha, r_{\alpha,\beta}, r_{\alpha,\beta+1})$ pour $\alpha = 1, \ldots, N$ et $\beta = 1, \ldots, n_\alpha - 1$.
B-carte $\mathring{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta+1}\}$, $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1, \ldots, D_N\}$.

$$f_Y = f_{\alpha,\beta} = g_\alpha^{(N-1)\beta} \prod_{i \neq \alpha} g_i^{\sum_{k=1}^{\beta} r_{\alpha,k}}$$

– fermeture des orbites de type $C : Y = C_{\alpha,\beta} = \overline{C(D_\alpha, r_{\alpha,\beta})}$ pour $\alpha = 1, \ldots, N$ et $\beta = 1, \ldots, n_\alpha$.
B-carte et fonction f_Y identiques à celles de $AB_{\alpha,\beta}$ sauf pour C_{α,n_α} :

– B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{\alpha,n_\alpha}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1, \ldots, D_N\}$

$$f_Y = f_{\alpha,n_\alpha} = g_\alpha^{(N-1)n_\alpha} \prod_{i \neq \alpha} g_i^{\sum_{k=1}^{n_\alpha} r_{\alpha,k}}$$

– orbites de type $B_+ : Y = B_\alpha^+ = B^+(D_\alpha, r_{\alpha,n_\alpha})$ pour $\alpha = 1, \ldots, M$.
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{\alpha,n_a}\}$, $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1, \ldots, \widehat{D_\alpha}, \ldots, D_N\}$.

$$f_Y = f_\alpha = g_\alpha^{(N-1)n} \prod_{i \neq \alpha} g_i^{\mu_\alpha r_{\alpha,n_a} + \sum_{k=1}^{n_\alpha - 1} r_{\alpha,k}}$$

μ_α est défini par $\mu_\alpha = n - n_\alpha + 1$ pour un n entier tel que $n > \sup\{n_i\}$.

– orbite de type $A_N : Y = A_N(D_1, \ldots, D_N\,;\, r_{1,1}, \ldots, r_{N,1})$.
B carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{1,1}, \ldots, v_{N,1}\}$, $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1, \ldots, D_N\}$.

$$f_Y = f = 1$$

– entiers m_D pour $D \in \mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}_Y^B = \{D_{M+1}, \ldots, D_N\}$: il suffit de choisir m_{D_α} supérieur aux nombres $v_\alpha(f_Y)$.

Vérification des conditions d'amplitude :
Les conditions de Timashev de la forme $v_D(f_Y) < v_D(f_{Y'})$ ou $v_D(f_Y) = v_D(f_{Y'})$ pour Y, Y' quelconques et D un diviseur premier SL_2-stable contenant Y' découlent des inégalités et égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
v_{\alpha,\beta}(f_{\alpha,\beta}) &= v_{\alpha,\beta}\left(f_{\alpha,\beta-1}\right) \\
v_{\alpha,1}\left(f_{\alpha,1}\right) &= v_{\alpha,1}\left(f\right) = 0 \\
v_{\alpha,n_\alpha}\left(f_{\alpha,n_\alpha}\right) &= v_{\alpha,n_\alpha}\left(f_\alpha\right) \text{ si } i = 1, \ldots, N \\
v_{\alpha,\beta}(f_{\alpha,\beta}) &> v_{\alpha,\beta}(f_{i,j}) \text{ si } (i,j) \neq (\alpha,\beta), (\alpha,\beta-1) \qquad (6.6) \\
v_{\alpha,n_a}(f_\alpha) &> v_{\alpha,n_\alpha}\left(f_i\right) \text{ si } \alpha \neq i \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Vérifions par exemple les deux dernières inégalités.

$$v_{\alpha,\beta}(f_{\alpha,\beta}) = r_{\alpha,\beta}(N-1)\beta - (N-1)\sum_{k=1}^{\beta} r_{\alpha,k} = (N-1)\sum_{k=1}^{\beta}(r_{\alpha,\beta} - r_{\alpha,k})$$

D'une part on a $v_{\alpha,1}(f_{\alpha,1}) = 0$ et $v_{\alpha,\beta}(f_{\alpha,\beta}) > 0$ dès que $\beta > 1$ (les $r_{\alpha,k}$ sont strictement croissants en fonction de k). D'autre part si $i \neq \alpha$ on a $v_{\alpha,\beta}(f_{i,j}) < 0$. En effet

$$v_{\alpha,\beta}(f_{i,j}) = r_{\alpha,\beta}\sum_{k=1}^{j} r_{i,k} - (N-1)\,j - (N-2)\sum_{k=1}^{j} r_{i,k}$$

et $-1 < r_{i,j} < 1$ implique $v_{\alpha,\beta}(f_{i,j}) < j - (N-1)\,j + (N-2)\,j = 0$.

L'inégalité (6.6) quand $i \neq \alpha$ découle aussitôt de ces deux résultats.

Enfin

$$\begin{aligned} v_{\alpha,\beta}(f_{\alpha,\beta}) - v_{\alpha,\beta}(f_{\alpha,j}) &= (N-1)\left(\beta r_{\alpha,\beta} - \sum_{k=1}^{\beta} r_{\alpha,k} - j r_{\alpha,\beta} + \sum_{k=1}^{j} r_{\alpha,k}\right) \\ &= \begin{cases} (N-1)\sum_{k=\beta+1}^{j}(r_{\alpha,k} - r_{\alpha,\beta}) > 0 \text{ si } j > \beta \\ (N-1)\sum_{k=j+1}^{\beta-1}(r_{\alpha,\beta} - r_{\alpha,k}) > 0 \text{ si } j < \beta - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de l'inégalité (6.6).

Pour l'inégalité (6.7) on sait déjà $v_{\alpha,n_\alpha}(f_\alpha) = v_{\alpha,n_\alpha}(f_{\alpha,n_\alpha}) \geq 0$. Ensuite si $i \neq \alpha$

$$v_{\alpha,n_\alpha}(f_i) = r_{\alpha,n_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n_i-1} r_{i,k} + \mu_i r_{i,n_i}\right) - (N-1)\,n - (N-2)\left(\sum_{i=1}^{n_i-1} r_{i,k} + \mu_i r_{i,n_i}\right)$$

et $-1 < r_{i,j} < 1$ implique $\sum_{i=1}^{n_i-1} r_{i,k} + \mu_i r_{i,n_i} < n_i - 1 + \mu_i = n$. On en déduit

$$v_{\alpha,n_\alpha}(f_i) < n - (N-1)\,n + (N-2)\,n = 0$$

et l'inégalité (6.7) en découle aussitôt.

Ecrivons maintenant les inégalités $v_D(f_Y) < v_D(f_{Y'})$ pour $D \in \mathcal{D}^B_{Y'}$ et $D \cap \mathring{\mathrm{X}}_Y = \emptyset$.

- $Y = A_N$, $Y' = B^+_\alpha$, $D = D_\alpha$:

$$v_\alpha(f) < v_\alpha(f_\alpha) \Leftrightarrow 0 < (N-1)\,n$$

- $Y = AB_{\alpha,\beta}$ ou $C_{\alpha,\beta}$ ($\alpha = 1, \ldots, M$ et $\beta = 1, \ldots, n_\alpha - 1$)
  - $Y' = B^+_\alpha$, $D = D_\alpha$:

$$\begin{aligned} v_\alpha(f_{\alpha,\beta}) < v_\alpha(f_\alpha) \quad &\Leftrightarrow (N-1)\,\beta < (N-1)\,n \\ &\Leftrightarrow \beta < n \end{aligned}$$

  - $Y' = B^+_i$, $D = D_i$ ($i \neq \alpha$) :

$$v_i(f_{\alpha,\beta}) < v_i(f_i) \quad \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\beta} r_{\alpha,k} < (N-1)\,n$$

– $Y = C_{\alpha,n_\alpha}$

– $Y' = B_\alpha^+,\ D = D_\alpha$:

$$v_\alpha\left(f_{\alpha,n_\alpha}\right) < v_\alpha\left(f_\alpha\right) \Leftrightarrow n_\alpha < n$$

– $Y' = B_i^+,\ D = D_i$:

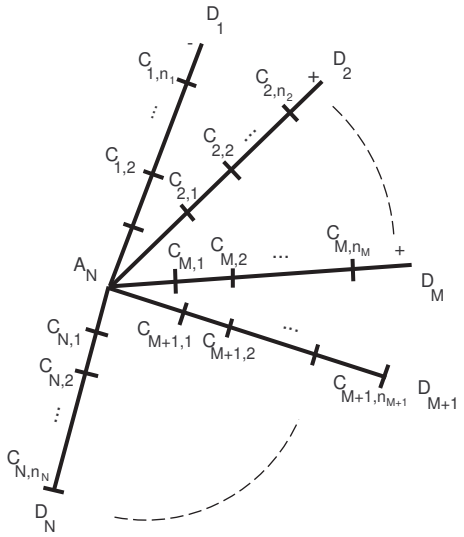
$$v_i\left(f_{\alpha,n_\alpha}\right) < v_i\left(f_i\right) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n_\alpha} r_{\alpha,k} < n$$

– $Y = B_\alpha^+\ (\alpha = 1, \ldots, M),\ Y' = B_i^+,\ i \neq \alpha,\ D = D_i$:

$$v_i\left(f_\alpha\right) < v_i\left(f_i\right) \Leftrightarrow \mu_\alpha r_{\alpha,n_\alpha} + \sum_{k=1}^{n_\alpha - 1} r_{\alpha,k} < (N-1)\, n$$

Comme $\mu_\alpha r_{\alpha,n_\alpha} + \sum_{k=1}^{n_\alpha-1} r_{\alpha,k} < \mu_\alpha + n_\alpha - 1 = n$ cette dernière inégalité est vérifiée dès que $n > 0$ et $N \geq 2$. Les autres inégalités sont vérifiées pour $n > \sup\{n_i\}$.

2ème cas : X contient une orbite de type A_N avec $N \geq 2$ et une orbite de type B_-.



Pour les SL_2-sous-variétés $AB_{\alpha,\beta}$, A_N, B_α^+ et $C_{\alpha,\beta}$ les choix des B-cartes et des f_Y sont les mêmes que dans le premier cas. Les autres choix sont :

– orbite de type B_- : $Y = B_1^- = B_-(D_1, r_{1,n_1})$ avec $0 < r_{1,n_1} < 1$.

B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{1,n_1}\}$, $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1\}$.

$$f_Y = g_1^{(N-1)(n_1-1+\mu_1)} \prod_{i\neq 1} g_i^{(N-1)n}$$

l'entier μ_1 est défini par

$$(N-1)\,n = \mu_1 r_{1,n_1} + \sum_{k=1}^{n_1-1} r_{1,k}$$

– $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y\subset X} \mathcal{D}_Y^B = \{D_1\}$. Il suffit de choisir m_{D_1} supérieur aux $v_1(f_Y)$.

Les conditions d'amplitude sont vérifiées quand $n > \sup\{n_i\}$.

3ème cas : X contient une orbite de type A_N avec $N \geq 2$ et une orbite de type B_0.

On vérifie que l'on peut faire les mêmes choix que dans le cas précédent sauf pour l'orbite B_1^- remplacée par B_1^0. Il n'y a pas de m_D car $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y\subset X} \mathcal{D}_Y^B = \emptyset$.

Orbite de type B_0 : $Y = B_1^0 = B_0(D_1, r_{1,n_1})$ avec $0 < r_{1,n_1} < 1$.

– B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{1,n_1}\}$, $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1$. $\mathcal{D}_Y^B = \mathcal{R}$.

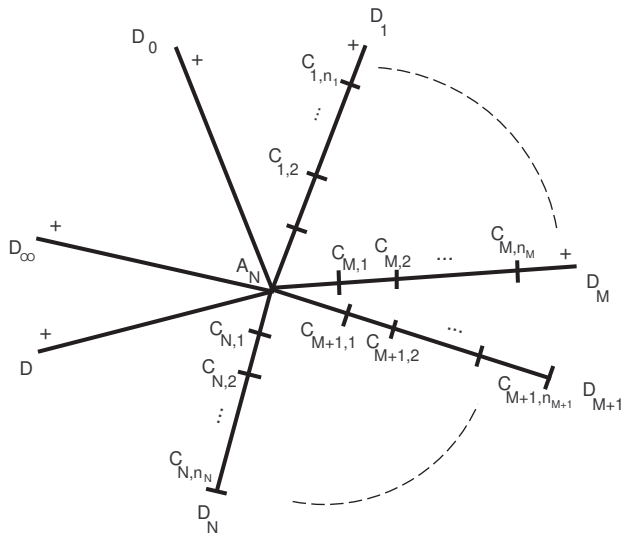
$$f_Y = g_1^{(N-1)(n_1-1+\mu_1)} \prod_{i\neq 1} g_i^{(N-1)n}$$

l'entier μ_1 est toujours défini par

$$(N-1)\,n = \mu_1 r_{1,n_1} + \sum_{k=1}^{n_1-1} r_{1,k}$$

et on choisit $n > \sup\{n_i\}$.

4ème cas : X contient une infinité d'orbites de type B_+ et aucune orbite de type B_- ou de type B_0.



On choisit deux éléments D_0 et D_∞ de $\mathcal{D}^B$ différents de $D_1, \dots, D_N$ et qui interviendront dans la définition du diviseur ample. Pour $\alpha = 1, \dots, N$ on a une orbite supplémentaire de type AB : $AB_{\alpha,0} = AB\,(D_\alpha, -1, r_{\alpha,1})$. Enfin il y a une SL_2-sous-variété de dimension 2 qui n'est pas une fermeture de SL_2-orbite :

$$D_{-1} = \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}^B \setminus \{D_1, \dots, D_N\}} B_D^+ \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha = 1, \dots, N} AB_{\alpha,0} \right)$$

Choix de $\{f_Y\}, \{m_D\}$ et des B-cartes pour la définition d'un diviseur ample :

– $Y = AB_{\alpha,0} = AB\,(D_\alpha, -1, r_{\alpha,1})$ pour $\alpha = 1, \dots, N$:
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v\,(,-1)\,, v_{\alpha,1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_\infty, D_1, \dots, D_N\}$.

$$f_Y = f_{AB_{\alpha,0}} = g_\infty^{-1} g_\alpha$$

– $Y = AB_{\alpha,\beta} = AB\,(D_\alpha, r_{\alpha,\beta}, r_{\alpha,\beta+1})$ pour $\alpha = 1, \dots, N$ et $\beta = 1, \dots, n_\alpha - 1$:
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta+1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_\infty, D_1, \dots, D_N\}$.

$$f_Y = f_{AB_{\alpha,0}} g_0^{\sum_{k=1}^{\beta} r_{\alpha,k}} g_\alpha^\beta$$

– $Y = C_{\alpha,\beta} = \overline{C(D_\alpha, r_{\alpha,\beta})}$ pour $\alpha = 1, \dots, N$ et $\beta = 1, \dots, n_\alpha$:
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ et fonction f_Y identiques à celles de $AB_{\alpha,\beta}$ sauf pour C_{α,n_α} : B-carte définie par $\mathcal{W} = \{v_{\alpha,n_\alpha}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_\infty, \dots, D_N\}$.

$$f_Y = f_{AB_{\alpha,0}} g_0^{\sum_{k=1}^{n_\alpha} r_{\alpha,k}} g_\alpha^{n_\alpha}$$

– $Y = B_D^+ = B_+(D,-1)$ pour $D \in \mathcal{D}^B \setminus \{D_0, D_\infty, D_1, \dots, D_N\}$:
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v(,-1)\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_\infty, D_1, \dots, D_N\}$.

$$f_Y = 1$$

– $Y = B_\alpha^+ = B^+(D_\alpha, r_{\alpha,n_\alpha})$ pour $\alpha = 1, \dots, M$.
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{\alpha,n_a}\}$, $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_\infty, D_1, \dots, \widehat{D_\alpha}, \dots, D_N\}$.

$$f_Y = f_{AB_{\alpha,0}} g_0^{\mu_\alpha r_{\alpha,n_\alpha} + \sum_{k=1}^{n_\alpha - 1} r_{\alpha,k}} g_\alpha^n$$

μ_α est défini par $\mu_\alpha = n - n_\alpha + 1$ et n est un entier tel que $n > \sup\{n_i\}$.

– $Y = B_0^+ = B_+(D_0,-1)$.
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v(,-1)\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_\infty, D_1, \dots, D_N\}$.

$$f_Y = g_0^n g_\infty^{-n}$$

– $Y = B_\infty^+ = B_+(D_\infty,-1)$.
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v(,-1)\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_1, \dots, D_N\}$.

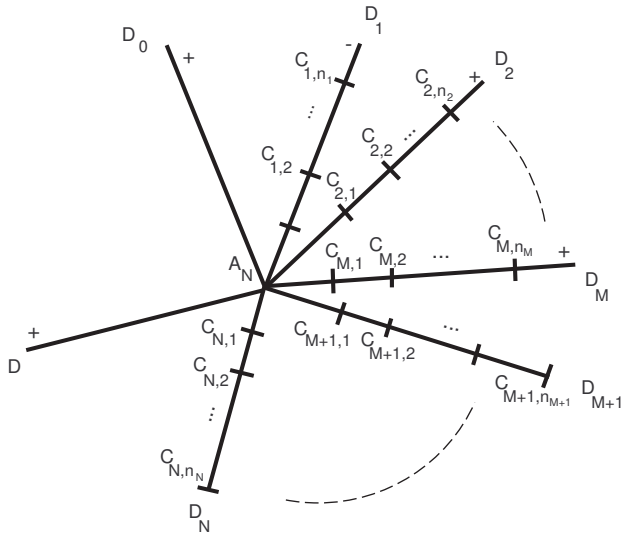
$$f_Y = g_\infty g_0$$

– $Y = D_{-1}$.
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v(,-1)\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_\infty, D_1, \dots D_N\}$.

$$f_Y = 1.$$

– $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}_Y^B = \{D_{M+1}, \dots, D_N\}$: on choisit m_{D_α} supérieur aux $v_\alpha(f_Y)$.

5ème cas : X contient une infinité d'orbites de type B_+ et une orbite de type B_-.



Choix de $\{f_Y\}, \{m_D\}$ et des B-cartes :

- $Y = AB_{\alpha,0} = AB\,(D_\alpha, -1, r_{\alpha,1})$ pour $\alpha = 2, \ldots, N$.
  B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$.définie par $\mathcal{W} = \{v\,(,-1)\,, v_{\alpha,1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_1, \ldots, D_N\}$.

$$f_Y = f_{AB_{\alpha,0}} = g_1^{-1} g_\alpha$$

- $Y = AB_{1,0} = AB\,(D_1, -1, r_{1,1})$
  B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v\,(,-1)\,, v_{1,1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_1, \ldots, D_N\}$.

$$f_Y = g_0^{-1} g_1$$

- $Y = AB_{\alpha,\beta} = AB\,(D_\alpha, r_{\alpha,\beta}, r_{\alpha,\beta+1})$ pour $\alpha = 1, \ldots, N$ et $\beta = 1, \ldots, n_\alpha - 1$.
  B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta+1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_1, \ldots, D_N\}$.

$$f_Y = f_{AB_{\alpha,0}} g_\alpha^{N\beta} \prod_{i \neq \alpha} g_i^{\sum_{k=1}^{\beta} r_{\alpha,k}}$$

- $Y = C_{\alpha,\beta} = \overline{C(D_\alpha, r_{\alpha,\beta})}$ pour $\alpha = 1, \ldots, N$ et $\beta = 1, \ldots, n_\alpha$.
  B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ et fonction f_Y identiques à celles de $AB_{\alpha,\beta}$ sauf pour C_{α,n_α} : B-carte définie par $\mathcal{W} = \{v_{\alpha,n_\alpha}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_1, \ldots, D_N\}$, $f_Y = f_{AB_{\alpha,0}} g_\alpha^{Nn_\alpha} \prod_{i \neq \alpha} g_i^{\sum_{k=1}^{n_\alpha} r_{\alpha,k}}$.
- $Y = B_D^+ = B_+\,(D, -1)$ pour $D \in \mathcal{D}^B \setminus \{D_0, D_1, \ldots, D_N\}$.
  B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v\,(,-1)\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_1, \ldots, D_N\}$.

$$f_Y = 1$$

- $Y = B_\alpha^+ = B^+(D_\alpha, r_{\alpha,n_\alpha})$ pour $\alpha = 2, \ldots, M$.
  B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{\alpha,n_a}\}$, $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_1, \ldots, \widehat{D_\alpha}, \ldots, D_N\}$.

$$f_Y = f_{AB_{\alpha,0}} g_\alpha^{Nn} \prod_{i \neq \alpha} g_i^{\mu_\alpha r_{\alpha,n_\alpha} + \sum_{k=1}^{n_\alpha - 1} r_{\alpha,k}}$$

  μ_α est défini par $\mu_\alpha = n - n_\alpha + 1$ et $n > \sup\{n_i\}$.
- $Y = B_0^+ = B_+\,(D_0, -1)$.
  B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v\,(,-1)\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1, \ldots, D_N\}$.

$$f_Y = g_0^{Nn} g_1^{-Nn}$$

  $Y = B_- : B_1^- = B_-\,(D_1, r_{1,n_1})$ avec $0 < r_{1,n_1} < 1$.

B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{1,n_1}\}$, $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1\}$.

$$f_Y = f_{AB_{1,0}} g_1^{N(n_1-1+\mu_1)} \prod_{i\neq 1} g_i^{1+Nn}$$

l'entier μ_1 est défini par

$$1 + Nn = \mu_1 r_{1,n_1} + \sum_{k=1}^{n_1-1} r_{1,k}$$

– $Y = D_{-1}$.
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v\,(,-1)\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_0, D_1, \ldots D_N\}$.

$$f_Y = 1$$

– $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y\subset X} \mathcal{D}^B_Y = \{D_1\}$. On choisit m_{D_1} supérieur aux $v_1\,(f_Y)$.

6ème cas : X contient une infinité d'orbites de type B_+ et une orbite de type B_0.

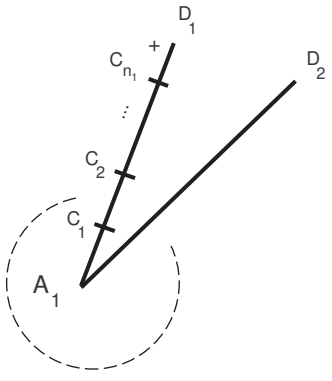
On remplace dans le cas précédent l'orbite B_1^- par l'orbite $B_1^0 = B_0\,(D_1, r_{1,n_1})$. On a cette fois $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y\subset X} \mathcal{D}^B_Y = \emptyset$ et les choix de $\{f_Y\}$ et des B-cartes $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ sont identiques à ceux du cas précédents, sauf pour B_1^- remplacé par B_1^0 :
B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_{1,n_1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1$.

$$f_Y = f_1 = f_{AB_{1,0}} g_1^{N(n_1-1+\mu_1)} \prod_{i\neq 1} g_i^{1+Nn}$$

l'entier μ_1 est défini par

$$1 + Nn = \mu_1 r_{1,n_1} + \sum_{k=1}^{n_1-1} r_{1,k}$$

7ème cas : X contient un orbite de type A_1 et une orbite de type B_+.



On choisit un élément $D_2 \neq D_1$ dans $\mathcal{D}^B \cong \mathbb{P}^1$, utile pour la définition du diviseur ample. Les fermetures d'orbite de type C sont C_α pour $\alpha = 1, \ldots, n_1$ avec pour valuations associées $v_\alpha = v(D_1, r_\alpha)$, $-1 < r_\alpha < 1$. La condition de type A_1 est $\frac{1}{1+r_1} > 1$ c'est-à-dire $r_1 < 0$. On fait les choix suivants pour le diviseur ample :

- $Y = A_1$:
  B-carte $\mathring{\mathrm{X}}_Y$ définie par $\mathcal{W} = \{v_1\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1\}$.
  $$f_Y = 1$$
- $Y = AB_a = AB(D_1, r_\alpha, r_{\alpha+1})$ pour $\alpha = 1, \ldots, n_1 - 1$.
  B-carte définie par $\mathcal{W} = \{v_\alpha, v_{\alpha+1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1, D_2\}$. $\mathcal{D}_Y^B = \emptyset$.
  $$f_Y = g_1^\alpha g_2^{\sum_{k=1}^{\alpha} r_k}$$
- $Y = C_\alpha = \overline{C(D_1, r_\alpha)}$ pour $\alpha = 1, \ldots, n_1$.
  B-carte et fonction f_Y identiques à celles de AB_α sauf pour C_{n_1} : B-carte définie par $\mathcal{W} = \{v_{n_1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_2\}$.
  $$f_Y = g_1^{n_1} g_2^{\sum_{k=1}^{n_1} r_k}$$
- $Y = B_1^+ = B_+(D_1, r_{n_1})$.
  B-carte définie par $\mathcal{W} = \{v_{n_1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D$. On pose $f_Y = f_{C_{n_1}}$.
- $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}_Y^B = \emptyset$.

8ème cas : X contient un orbite de type A_1 et aucune orbite de type B_+, B_- ou B_0

La seule différence avec le cas précédent est l'absence d'orbite B_1^+ et le fait que $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}_Y^B = \{D_1\}$. On choisit un entier m_{D_1} plus grand que tous les $v_{D_1}(f_{C_\alpha})$. Les choix pour le diviseur ample sont les mêmes que dans le cas 7.

9ème cas : X contient un orbite de type A_1 et une orbite de type B_-.

Comme $r_1 < 0$ (condition de type A_1) et $r_{n_1} > 0$ (orbite B_-) on a nécessairement $n_1 > 1$. Choix pour le diviseur ample :

- $Y = A_1$:
  B-carte définie par $\mathcal{W} = \{v_1\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1\}$. On pose et $f_Y = 1$.
- $Y = C_{n_1}$ ou B_1^- :
  B-carte définie par $\mathcal{W} = \{v_{n_1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1\}$.
  $$f_Y = g_1^{x_1 + x_{n_1} + n_1 - 2}$$
  x_{n_1} est un entier positif tel que $0 < x_{n_1} r_{n_1} + \sum_{k=\alpha+1}^{n_1-1} r_k$ pour $\alpha = 1, \ldots, n_1 - 1$.
  x_1 est défini par $0 = x_1 r_1 + x_{n_1} r_{n_1} + \sum_{k=2}^{n_1-1} r_k$.

– $Y = AB_\alpha$ ou $C_\alpha = 1, \ldots, n_1 - 1$:
B-carte définie par $\mathcal{W} = \{v_\alpha, v_{\alpha+1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1 \setminus \{D_1, D_2\}$.

$$f_Y = g_1^{x_1+\alpha-1} g_2^{x_1 r_1 + \sum_{k=2}^{\alpha} r_k}$$

– $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}_Y^B = \{D_1\}$. On choisit m_{D_1} supérieur aux $v_{D_1}(f_Y)$.

10 ème cas : X contient un orbite de type A_1 et une orbite de type B_0.
On fait les mêmes choix que dans le 9ème cas sauf pour C_{n_1} et B_1^- (remplacé par B_1^0). $\mathcal{D}^B \setminus \bigcup_{Y \subset X} \mathcal{D}_Y^B = \emptyset$ et la détermination de x_1 et x_{n_1} se fait comme dans le cas précédent.

– $Y = C_{n_1}$ ou B_1^0 :
B-carte définie par $\mathcal{W} = \{v_{n_1}\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1$.

$$f_Y = g_1^{x_1 + x_{n_1} + n_1 - 2}$$

Dans tous les cas on a montré que l'absence de deux orbites de type B_- ou B_0 entraîne que le plongement est quasi-projectif. La proposition 13 est démontrée.

□

6.7.2 Lien avec la description de Nakano des modèles minimaux projectifs

Pour établir la correspondance entre nos modèles minimaux projectifs et ceux établis par Nakano nous utiliserons essentiellement la décomposition orbitale (sous l'action de SL_2) donnée par ce dernier. Dans cette décomposition les surfaces de Hirzebruch interviennent comme des diviseurs SL_2-stables.

Action de SL_2, B, T sur les surfaces de Hirzebruch. Pour $m \geq 0$ on note $\mathbb{F}_m$ la surface de Hirzebruch définie par $\mathbb{F}_m = \mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m)\right)$. C'est par définition l'espace total d'un fibré sur $\mathbb{P}^1$: $\mathbb{F}_m \stackrel{p_m}{\to} \mathbb{P}^1$.

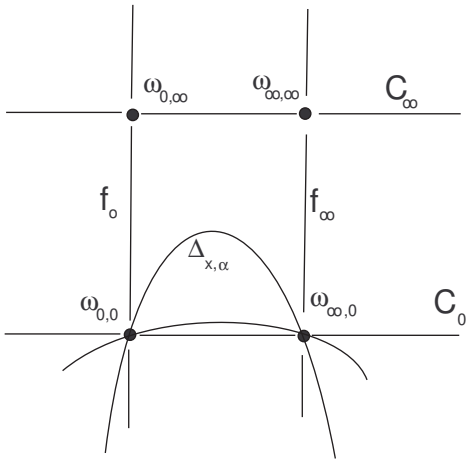
Nous aurons besoin de la description suivante de $\mathbb{F}_m$: si l'on recouvre $\mathbb{P}^1$ par les ouverts $U_x = \{[x:y], x \neq 0\}$ et $U_y = \{[x:y], y \neq 0\}$, $\mathbb{F}_m$ est obtenu comme variété par $(U_x \times \mathbb{P}^1) \amalg (U_y \times \mathbb{P}^1)$ où l'on a identifié $([x:y],[\alpha:\beta]) \in U_x \times \mathbb{P}^1$ avec $([x:y],[x^m\alpha : y^m\beta]) \in U_y \times \mathbb{P}^1$ quand $xy \neq 0$. La projection sur le premier facteur passe au quotient pour donner p_m.

Supposons $m \geq 1$. On peut décrire l'action de SL_2 sur $\mathbb{F}_m$ avec les cartes précédentes. Soit $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2$ et $\omega \in \mathbb{F}_m$.

– Si ω s'écrit $([x:y],[\alpha:\beta])$ dans la carte $U_x \times \mathbb{P}^1$ $(x \neq 0)$ alors :

  - si $ax+by \neq 0$ alors $g.\omega = ([ax+by : cx+dy], [x^m\alpha : (ax+by)^m\beta])$ dans la carte $U_x \times \mathbb{P}^1$.
  - si $cx+dy \neq 0$ alors $g.\omega = ([ax+by : cx+dy], [x^m\alpha : (cx+dy)^m\beta])$ dans la carte $U_y \times \mathbb{P}^1$.
- Si ω s'écrit $([x : y], [\alpha : \beta])$ dans la carte $U_y \times \mathbb{P}^1$ $(y \neq 0)$ alors :
  - si $cx+dy \neq 0$ alors $g.\omega = ([ax+by : cx+dy], [y^m\alpha : (cx+dy)^m\beta])$ dans la carte $U_y \times \mathbb{P}^1$.
  - si $ax+by \neq 0$ alors $g.\omega = ([ax+by : cx+dy], [y^m\alpha : (ax+by)^m\beta])$ dans la carte $U_x \times \mathbb{P}^1$.

Si $m = 0$, $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et l'action décrite ci-dessus est l'action diagonale.
On en déduit les orbites de $\mathbb{F}_m$ sous l'action de SL_2, B, T $(T \subset B \subset SL_2)$.
Action de SL_2 : il y a deux orbites isomorphes à $\mathbb{P}^1$ qui sont des sections de p_m ($\overline{C_0}$ et $\overline{C_\infty}$) et leur complémentaire qui forme une orbite dense.
Action de $T \cong \mathbb{C}^*$:



- Points fixes :
  - $\omega_{0,0} = ([0:1],[0:1])$ et $\omega_{0,\infty} = ([0:1],[1:0]$ (carte $U_y \times \mathbb{P}^1$).
  - $\omega_{\infty,0} = ([1:0],[0:1])$ et $\omega_{\infty,\infty} = ([1:0],[1:0])$ (carte $U_x \times \mathbb{P}^1$).
- Orbites de dimension 1 :
  - $C_0 = \{([x:y],[0:1]),\ x,y \neq 0$, carte quelconque$\}$.
  - $C_\infty = \{([x:y],[1:0]),\ x,y \neq 0$, carte quelconque$\}$.
  - $f_0 = \{[0:1],[\alpha:\beta]),\ \alpha,\beta \neq 0$, carte $U_y \times \mathbb{P}^1\}$.
  - $f_\infty = \{[1:0],[\alpha:\beta]),\ \alpha,\beta \neq 0$, carte $U_x \times \mathbb{P}^1\}$.
  - $\Delta_{x,\alpha} = T.([x:1],[\alpha:1])$ pour $x,\alpha \neq 0$ (carte $U_y \times \mathbb{P}^1$).

Les fermetures des orbites C_0 et C_∞ sont des sections de p_m et les fermetures de f_0 et f_∞ sont des fibres. Ce sont donc des courbes isomorphes à $\mathbb{P}^1$. Les fermetures des orbites $\Delta_{x,\alpha}$ sont singulières quand m est impair différent de 1, sinon elles sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$.

Action de B : les orbites de dimension 1 sont $C_0 \cup \{\omega_{\infty,0}\}, C_\infty \cup \{\omega_{\infty,\infty}\}, f_0$ et les points fixes sont $\omega_{0,0}$ et $\omega_{0,\infty}$.

Caractère d'une action de $\mathbb{C}^*$ sur une courbe rationnelle. Soit C une courbe rationnelle avec une action algébrique Φ de $\mathbb{C}^*$. Considérons l'action induite de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}(C) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ et posons t tel que $\mathbb{C}(C) = \mathbb{C}(t)$ avec t vecteur propre pour l'action de $\mathbb{C}^*$ (c'est toujours possible en utilisant par exemple le fait que tout action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^2$ est diagonalisable).

Supposons l'action non triviale. Si t' est un autre choix on a t' proportionnel à t ou $1/t$. Les caractères de $\mathbb{C}^*$ associés à $1/t$ et t sont opposés et leur valeur absolue commune est appelée le caractère de Φ.

On vérifie que le caractère de l'action de T sur $\overline{C_0}$ et $\overline{C_\infty}$ est 2 et que le caractère de T sur f_0, f_∞ et $\Delta_{x,\alpha}$ ($\Delta_{x,\alpha}$ est rationnel comme $\mathbb{C}^*$-orbite) est m.

Lemme 6.7.2 *Soit X un plongement homogène minimal projectif de SL_2/H pour H cyclique d'ordre k et D un diviseur premier SL_2-stable de X, fermeture d'une orbite de type $C\left(j, \frac{p}{q}\right)$ où $j \in \{0, \infty\} \subset \mathbb{P}^1/H$ et $\frac{p}{q} \in]-1, 1]$ est k-irréductible. Alors :*

(1) Si $\frac{p}{q} < 1$ alors D est SL_2-isomorphe à la surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_{p+q}$.

(2) Si $\frac{p}{q} = 1$ alors D est SL_2-isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ pour l'action diagonale de SL_2.

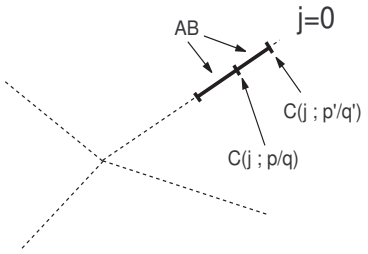
Remarque : En reprenant la méthode de la proposition 2.3 de [M3] qui donne une description géométrique des SL_2-sous-variétés d'un plongement lisse et complet de SL_2 on pourrait prouver le lemme dans le cas où X est seulement lisse et complet et $j \in \mathbb{P}^1/H$ est quelconque.

Preuve du lemme :

Le fait que D soit SL_2-isomorphe à $\mathbb{F}_m$ ou $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est une conséquence de la description orbitale des modèles minimaux par Nakano ([Nak, théorème 2.31 et proposition 2.19] rappelés ci-dessous p. 114 et 115) : dans un modèle minimal les diviseurs SL_2-stables qui ne sont pas une réunion infinie d'orbites sont toujours de cette forme. Reste à montrer que $m = p + q$ dans le cas (1) et que D est SL_2-isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans le cas (2).

Soit D la fermeture de $C\left(0\,; \frac{p}{q}\right)$ avec $0 \in \mathbb{P}^1/H$ et $\frac{p}{q} \in]-1, 1]$, k-irréductible.

Supposons par exemple que l'on soit dans la situation suivante (en particulier $\frac{p}{q} < 1$). Les autres cas se traitent pareillement.



D est formée de trois SL_2-orbites : deux orbites de type AB isomorphes à $\mathbb{P}^1$ et leur complémentaire qui est un ouvert dense de D.

D'après le corollaire 5.7.2 p. 61 on sait que l'on peut choisir une B-carte $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ incluse dans X et adaptée à l'une des orbites de type AB, par exemple l'orbite $l_{AB} = AB\big(j; \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\big)$. Par définition d'une B-carte adaptée on sait que $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ est une surface torique. Comme l_{AB} est lisse on a $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U \cong \mathbb{C}^2$. Par ailleurs on a $\overset{\circ}{\mathrm{X}} \cong U \times S$ où $S = \mathrm{spec}\left(\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U\right) = \overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ (lemme 5.1.1 p. 38). Donc $\overset{\circ}{\mathrm{X}} \cong \mathbb{C}^3$.

D'après les preuves du lemme 5.7.1 p. 61 et de son corollaire et la preuve du lemme 5.5.1 p. 50 on peut préciser le choix de $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$: on peut prendre pour $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ la B-carte définie par $\mathcal{W} = \left\{ v\big(0\,; \frac{p}{q}\big), v\big(0\,; \frac{p'}{q'}\big) \right\}$ et $\mathcal{R} = \mathbb{P}^1/H \setminus \{0, \infty\}$.

Choisissons alors comme paramètres :

– $t = \frac{g_0^{\overline{k}}}{g_\infty^{\overline{k}}}$ ($\overline{k} = k$ si k impair et $\overline{k} = \frac{k}{2}$ si k est pair).

– $e_\omega = g_0 g_\infty$ (k pair) et $e_\omega = g_0^{\frac{1-k}{2}} g_\infty^{\frac{1+k}{2}}$ (k impair)

et posons $q = p + \lambda k$, $q' = p' + \lambda' k$ avec $p \wedge \lambda = p' \wedge \lambda' = 1$. En reprenant les calculs de la preuve du lemme 5.5.1 on voit que $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U$ est engendré comme espace vectoriel par les éléments de la forme $t^m e_\omega^n$ pour (m, n) appartenant au cône de $\mathbb{Z}^2$ engendré par

$$(a, b) = \left(p + \frac{1+k}{2}\lambda, p + q\right) \text{ et } (a', b') = -\left(p' + \frac{1+k}{2}\lambda', p' + q'\right) \text{ si } k \text{ est impair.} \tag{6.8}$$

$$(a, b) = \left(-\lambda, \frac{p+q}{2}\right) \text{ et } (a', b') = -\left(-\lambda', \frac{p'+q'}{2}\right) \text{ si } k \text{ est pair.} \tag{6.9}$$

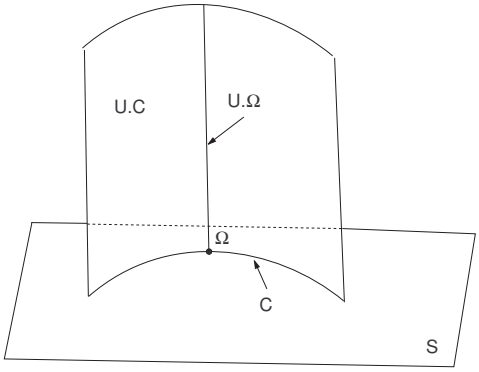
En particulier :

$$\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U = \mathbb{C}[t^a e_\omega^b, t^{a'} e_\omega^{b'}]$$

et l'on retrouve que $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ est isomorphe à $\mathbb{C}^2$. On a donc $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}] \cong \mathbb{C}[U] \otimes \mathbb{C}[t^a e_\omega^b, t^{a'} e_\omega^{b'}]$.

Soit Ω le point d'intersection de l_{AB} avec S et C la courbe d'intersection de D avec S. L'idéal maximal de $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U$ associé à $\Omega \in S$ est $\left(t^a e_\omega^b, t^{a'} e_\omega^{b'}\right)$ et l'idéal

de C est $(t^{a'}e_\omega^{b'}) \subset \mathbb{C}[\mathring{X}]^U$. Comme $U \times \{\Omega\} \cong U.\Omega \subset l_{AB} \cap \mathring{X}$ et que $U \times \{\Omega\}$ et $l_{AB} \cap \mathring{X}$ sont deux sous-variétés fermés (irréductibles) de $\mathring{X}$ de dimension 1, on a donc $U \times \{\Omega\} \cong U.\Omega = l_{AB} \cap \mathring{X}$. De même $U \times C \cong U.C = D \cap \mathring{X}$. En particulier C est stable par T mais pas par B et donc C n'est inclus ni dans C_0 ni dans C_∞.



Etudions l'action de $T \cong \mathbb{C}^*$ sur C. D'après ce qui précède on a $\mathbb{C}(C) \cong \mathbb{C}\left(t^a e_\omega^b\right)$ et C est donc une courbe rationnelle. Le caractère de T associé à e_ω est $\deg(e_\omega) = 1$ si k est impair et 2 si k est pair. Donc T agit sur $t^a e_\omega^b$ par le caractère $b \deg(e_\omega) = p + q > 2$ ($\frac{p}{q} \neq 1$). Le caractère de C sous l'action de T est donc $p + q$. D'après la discussion qui précède le lemme on en déduit que $m = p + q$.

□

Correspondance avec les modèles minimaux projectifs de Nakano.

Cas où H est cyclique d'ordre k impair supérieur ou égal à 3. On se propose de montrer que pour chaque modèle minimal projectif de la proposition 9 p. 72 correspond un unique modèle décrit par Nakano ayant la même décomposition orbitale. Commençons par rappeler les résultats de Nakano que nous utiliserons.

Théorème 2.31 de [Nak] : si $k \geq 3$ est impair alors les modèles minimaux projectifs pour les plongements de SL_2/H, H cyclique d'ordre k, sont :

- $X_k(i,j)$ $(j \geq i \geq 0,\ j \neq 0,1)$
- $Y(a, a-k)$ $(a \leq k/2,\ a \neq \pm 1)$
- $Z(1+k)$, $Z(1-k)$.

- Définition de $X_k(i,j)$ [Nak, p 240]. Soit $i, j \in \mathbf{Z}$ tels que $j \geq i \geq 0$. Considérons l'unique extension de fibrés sur $\mathbf{F}_k$, non triviale et SL_2-équivariante :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_k} \to E_k(i,j) \to p_m^* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2-ik)\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_k}(-jC_\infty) \to 0$$

(voir § 6.7.2 pour les définitions de p_m, C_∞).
$X_k(i,j)$ est le projectivisé du fibré vectoriel de rang 2 : $E_k(i,j) \to \mathbf{F}_k$.

- Définition de $Y(a,b)$ [Nak, p 245]. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \neq b$. On pose $Y(a,b) = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b))$ où $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b)$ est le fibré linéaire sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de bidegré (a,b). On munit $Y(a,b)$ de l'action naturelle de SL_2 qui provient des actions sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b)$.
- Définition de $Z(r)$ [Nak, p 247]. Soit $r \in \mathbf{Z}$. On définit $Z(r)$ comme le projectivisé du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r)$.

Décomposition orbitale de $X(i,j)$ (proposition 2.19 p. 241). On distingue les cas qui sont utiles pour établir la correspondance avec nos résultats. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est muni ici de l'action diagonale de SL_2.

- Soit $n', m' \geq 1$. Les diviseurs SL_2-stables de $X_k(n', n'+m')$ sont isomorphes à $\mathbb{F}_{kn'-2}$, $\mathbb{F}_{km'+2}$ et $\mathbb{F}_k$ (le complémentaire est l'orbite ouverte isomorphe à SL_2/H).
- Soit $n' \geq 2$. Les diviseurs SL_2-stables de $X_k(n', n')$ sont SL_2-isomorphes à $\mathbb{F}_{kn'-2}$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (action diagonale) et $\mathbb{F}_k$.
- Soit $n' \geq 2$. Les diviseurs SL_2-stables de $X_k(0, n')$ sont SL_2-isomorphes à $\mathbb{F}_{kn'+2}$, $\mathbb{F}_0$ et $\mathbb{F}_k$.

Diviseurs SL_2-stables de $Y(-n', -n'-k)$ pour $n' \geq \frac{1-k}{2}$ et $n' \neq \pm 1$ (on a posé $n' = -a$) [Nak, p 245] : $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{F}_{2n'+k}$.
Diviseurs SL_2-stables de $Z(1+k)$ [Nak, p 247] : $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $\mathbb{F}_{k+2}$.
Diviseurs SL_2-stables de $Z(1-k)$: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $\mathbb{F}_{k-2}$.

Par ailleurs notre lemme 6.7.2 permet de donner les diviseurs SL_2-stables des modèles minimaux projectifs de la proposition 9.

plongement n°	diviseurs SL_2-stables
1	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{F}_{k-2}$
2	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{F}_{kn-2}, \mathbb{F}_k$
3	$\mathbb{F}_{kn-2}, \mathbb{F}_k ; \mathbb{F}_{km+2}$
4	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{F}_{2n+k}$
5	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{F}_{k+2}$
6	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{F}_{kn+2}, \mathbb{F}_k$

Il est alors facile d'établir la correspondance présentée à la proposition 9 en prouvant en particulier que l'on a à chaque fois $n = n'$ et/ou $m = m'$.

□

Cas où H est cyclique d'ordre k pair supérieur ou égal à 6. Définition de $Y_0(k)$ [Nak, p 246]. On considère l'unique extension non triviale de fibrés (avec action de SL_2) :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} \to G_0(k) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1+\frac{k}{2}, 1-\frac{k}{2}) \to 0$$

$G_0(k)$ est un fibré vectoriel de rang 2 sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $Y_0(k)$ est son projectivisé.

Dans sa proposition 2.24 p. 246 Nakano ne donne pas la décomposition orbitale complète de ce modèle minimal. Il ne cite qu'un diviseur SL_2-stable isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, mais on peut vérifier qu'il y en a deux autres de même type, ce qui établit que $Y_0(k)$ est le plongement 7 de la proposition 10.

A la section 6.8 nous donnons une description de ce plongement différente de celle de Nakano.

Comme dans le cas impair, on trouve les modèles de Nakano qui correspondent aux 6 premiers plongements de la proposition 10. Il ne reste alors qu'un seul plongement dans les deux descriptions : le plongement (8) et le plongement $Y\left(-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}\right)$ qui sont donc SL_2-isomorphes (on peut aussi vérifier qu'ils ont même décomposition orbitale.

□

6.7.3 Une autre preuve d'un résultat de Luna sur l'inexistence d'une complétion magnifique de SL_2/H

Soit G un groupe réductif connexe et soit X une G-variété. On dit que X est une G-variété magnifique de rang r si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1. X est lisse, irréductible et complète.
2. X a exactement r diviseurs irréductibles G-stables $D_1, \ldots, D_r$. Ces diviseurs sont lisses et leur intersection est non vide et transverse.
3. si $x, x' \in X$ sont tels que $\{i, x \in D_i\} = \{i, x' \in D_i\}$ alors $G.x = G.x'$.

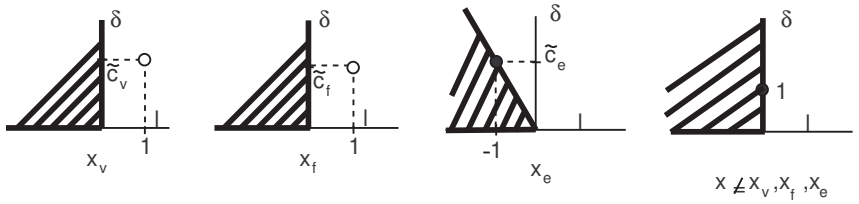
X a alors 2^r G-orbites qui correspondent à toutes les intersections possibles d'une partie des D_i. Il y a une orbite ouverte et une seule orbite fermée. On appelle complétion magnifique un plongement homogène X de G/H tel que X est une G-variété magnifique.

Le résultat de D.Luna [L2] est que toute variété magnifique est sphérique (c'est-à-dire $\mathbb{C}(G/H)^B \cong \mathbb{C}$). Il commence par prouver que l'on peut se ramener au cas d'une variété magnifique de rang 2, puis il prouve que s'il existait une variété magnifique non sphérique de rang 2 alors il existerait une complétion magnifique de SL_2/H pour H fini, enfin il prouve qu'une telle complétion est impossible. A l'aide de notre connaissance de tous les plongements lisses et complets de SL_2/H il est

facile de proposer une autre démonstration de cette dernière étape de la preuve de D.luna.

Soit X une complétion magnifique de SL_2/H. L'unique orbite fermée est nécessairement de type A_N, elle est donc de codimension 2 et X est de rang 2. Donc X possède exactement une orbite ouverte isomorphe à SL_2/H, deux orbites de type C dont les fermetures sont les diviseurs D_i de la définition, et une orbite de type A_2. La liste des SL_2-germes réguliers de type A_N (propositions 1, 2 et 3) implique que H est binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral (le cas cyclique d'ordre 4 est binaire diédral) et que l'orbite est du type $A_2\,(v,f;r_v,r_f)$ avec r_v et r_f maximaux (proposition 1). Le plongement X a donc exactement 4 orbites : l'orbite ouverte isomorphe à SL_2/H, l'orbite de type A_2 que l'on notera l_{A_2} et deux orbites de type $C\,(v,r_v)$ et $C\,(f,r_f)$ que l'on notera l_v et l_f.

Soit $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ l'unique B-carte de X qui intersecte l_{A_2}. En choisissant comme au § 5.4.2 $e_\omega = g_v g_f g_e^{-1}$ l'hypercône $\mathcal{C}$ de $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ dans $\mathcal{H}$ se présente ainsi :



On choisit t tel que $x_v = \infty,\ x_f = 1$ et $x_e = 0$. Pour $x \in \mathbb{P}^1 \backslash \{0, \infty\}$ le cône $\mathcal{C}_x$ est droit et on peut appliquer la méthode du lemme 5.5.1 p. 50 pour déterminer $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U]$. On trouve que $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U]$ est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les éléments de la forme $t^m e_\omega^n$ où (m,n) appartient au cône de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(0,-1)$ et $(-1,-2)$. Autrement dit, en posant $a = e_\omega^{-1}$ et $b = t^{-1} e_\omega^{-2}$ on a $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U] = \mathbb{C}[a,b]$.

Les caractères de a et b pour l'action de $\mathbb{C}^* \cong T \subset SL_2$ sont -1 et -2. La fermeture de toute T-orbite de $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$ différente de l'axe des b est donc tangente à l'axe des a. Soit $\overline{p\,(l_v)}$ et $\overline{p\,(l_f)}$ les fermetures des images des orbites l_v et l_f par la projection $p : \overset{\circ}{\mathrm{X}} \to \overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$. Calculons leurs idéaux I_v et I_f dans $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U]$ par la même méthode qui a permis d'établir $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U] = \mathbb{C}[a,b]$.

I_v est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les éléments de la forme $t^m e_\omega^n$ tels que :

$$\begin{cases} m \leq -1 & (\langle (\infty,1,0), t^m e_\omega^n \rangle > 0) \\ n \leq 0 & (\langle (\infty,0,-1), t^m e_\omega^n \rangle \geq 0) \\ 2m - n \geq 0 & (\langle (0,2,-1), t^m e_\omega^n \rangle \geq 0) \end{cases}$$

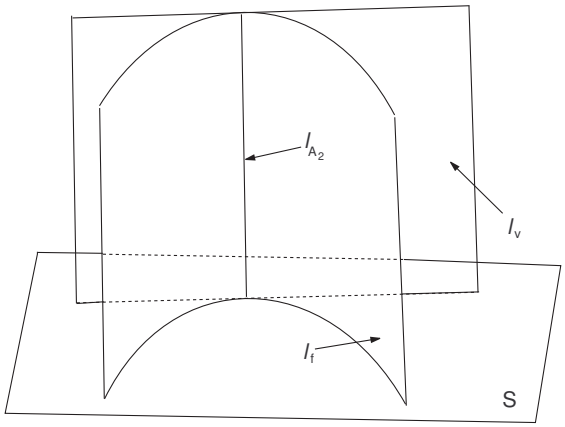
c'est-à-dire, en posant $m' = 2m - n$ et $n' = -m$, par les éléments de la forme $a^{m'} b^{n'}$ tels que $m' \geq 0$ et $n' \geq 1$. On a donc $I_v = b\mathbb{C}[a,b]$ et $\overline{p\,(l_v)}$ est l'axe des a.

De même I_f est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les éléments de la forme $(t-1)\,t^m e_\omega^n$ tels que :

$$\begin{cases} m+1 \leq 0 & (\langle (\infty,1,0),(t-1)\,t^m e_\omega^n \rangle \geq 0) \\ n \leq 0 & (\langle (\infty,0,-1),(t-1)\,t^m e_\omega^n \rangle \geq 0) \\ 2m-n \geq 0 & (\langle (0,2,-1),(t-1)\,t^m e_\omega^n \rangle \geq 0) \end{cases}$$

On a donc $I_f = (t-1)\,b\mathbb{C}[a,b] = (a^2-b)\,\mathbb{C}[a,b]$ et $\overline{p\,(l_f)}$ est différent de l'axe des b.

En particulier $\overline{p\,(l_v)}$ et $\overline{p\,(l_f)}$ sont tangentes à l'origine. Enfin le lemme 5.1.1 permet d'écrire $\overset{\circ}{\mathrm{X}} \cong U \times S$ avec $S \cong \mathrm{spec}(\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}]^U] = \mathbb{C}^2$. Donc $l_v \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}} \cong U \times p\,(l_v)$ et $l_f \cap \overset{\circ}{\mathrm{X}} \cong U \times p\,(l_f)$ sont tangents. C'est une contradiction avec l'hypothèse que $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ est magnifique.



□

6.8 Plongements complets avec une seule orbite fermée

Alessandra Iozzi et Jonathan Poritz, dans leur article [I-P, 1999], ont proposé une méthode simple pour décrire les plongements homogènes (normaux) projectifs de $SL_2/\{\pm Id\}$ contenant exactement, en plus de l'orbite ouverte, une orbite fermée et n orbites de dimension 2. En quotientant de tels plongement X par un sous-groupe fini de SL_2-automorphismes de X on obtient tous les plongements homogènes projectifs de SL_2/H, où H est un sous-groupe fini d'ordre pair de SL_2 (c'est-à-dire qui n'est pas cyclique d'ordre impair), ne contenant qu'une seule orbite de dimension 1. On peut alors tester directement parmi ceux-ci lesquels sont lisses et retrouver ainsi une (petite) partie de la liste des plongements lisses de SL_2/H. Dans cette section nous indiquons une méthode pour étudier la lissité de tels plongements, méthode indépendante de celles développées à la section 5.1. Nous illustrons cette méthode à l'annexe C dans le cas où H est cyclique d'ordre pair.

6.8.1 fermeture d'une SL_2-orbite dans $\left(\mathbb{P}^1\right)^n$

Soit n un entier supérieur à 3. On considère sur $(\mathbb{P}^1)^n$ l'action de Sl_2 définie par :

$$g.\omega = (g.x_1, \dots, g.x_n) \text{ pour } g \in Sl_2 \text{ et } \omega = (x_1, \dots, x_n) \in \left(\mathbb{P}^1\right)^n$$

Un élément ω de $(\mathbb{P}^1)^n$ sera noté $\left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \end{bmatrix}\right) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in \mathbb{P}^1$, $x_{ij} \in \mathbb{C}$ (on note donc $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ au lieu de $[x : y]$).

Soit $e = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}\right)$ un élément de $(\mathbb{P}^1)^n$ dont toutes les composantes sont distinctes. Le point le plus important pour pour ce qui concerne le lien avec la théorie de Luna-Vust est que la SL_2-variété projective $\overline{Sl_2.e}$, fermeture de l'orbite de e dans $(\mathbb{P}^1)^n$, est normale [I-P]. C'est donc un exemple simple de plongement homogène au sens de Luna-Vust. Les autres résultats utiles sont les suivants :

- $\overline{Sl_2.e}$ est (l'espace d') un plongement homogène de $SL_2/\{\pm Id\}$ au sens de Luna-Vust, dont on notera φ_e le morphisme de SL_2 dans $\overline{Sl_2.e}$:

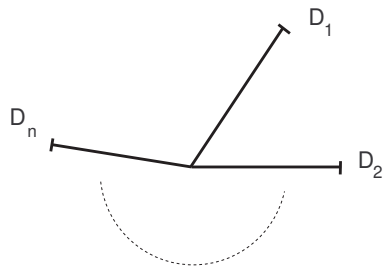
$$\begin{array}{ccc} SL_2 & \xrightarrow{\varphi_e} & \overline{Sl_2.e} \\ g & \longmapsto & g.e \end{array}$$

- $\overline{Sl_2.e}$ est composé de $n+2$ orbites sous l'action de SL_2 :
  - l'orbite ouverte $SL_2.e$ isomorphe à $SL_2/\{\pm Id\}$.
  - l'orbite fermée $\Delta_0 = \{(a, \dots, a), a \in \mathbb{P}^1\} = SL_2.\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
  - n orbites de dimension 2 : pour $i = 1, ..., n$,

$$\Delta_i = \{(a, \dots, a, \overset{i}{b}, a, \dots, a), a \neq b \in \mathbb{P}^1\} = SL_2.\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Diagramme de Luna-Vust. Comme le plongement est complet et n'a qu'une orbite de dimension 1 et n orbites de dimension 2, l'orbite de dimension 1 est forcément de type A_n.

Un morphisme μ du plongement $\overline{Sl_2.e}$ vers le plongement $\overline{Sl_2.e'}$ est un morphisme SL_2-équivariant de $\overline{SL_2.e}$ dans $\overline{SL_2.e'}$ tel que $\mu \circ \varphi_e = \varphi_{e'}$. Le plongement $\overline{Sl_2.e}$ est caractérisé à isomorphisme près par son diagramme de Luna-Vust :



Chaque D_i est un diviseur premier B-stable de $SL_2/\{\pm Id\}$. Pour repérer complètement $\overline{Sl_2.e}$ dans la classification de Luna-Vust il ne reste plus qu'à déterminer les D_i en fonction de $e \in (\mathbb{P}^1)^n$.

Observons d'abord que $\overline{Sl_2.e}$ est muni naturellement de n projections sur $\mathbb{P}^1$ qui sont des fibrations localement triviales de fibre isomorphe à $\overline{B.e}$. On définit en effet pour $i = 1, \ldots, n$ la $i^{ème}$ projection π_i de $\overline{Sl_2.e}$ sur $\mathbb{P}^1$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{Sl_2.e} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Δ_0 étant de type A_n on a $\mathcal{D}^B(\Delta_0) = \mathcal{D}^B \setminus \{D_1, \ldots, D_n\}$ c'est-à-dire que les D_i sont exactement les éléments de $\mathcal{D}^B$ tels que $\Delta_0 \not\subset \overline{D_i}$ (fermeture dans $\overline{Sl_2.e}$). Puisque $\pi_i(\Delta_0) = \mathbb{P}^1$ il suffit donc d'exhiber n diviseurs B-stables $D_i, \ldots, D_n$ de $SL_2/\{\pm Id\}$ tels que $\pi_i\left(\overline{D_i}\right) \not\subset \mathbb{P}^1$ pour que les D_i soient exactement ceux du plongement.

Notons $\widetilde{g}$ l'image de $g \in SL_2$ dans $SL_2/\{\pm Id\}$. Un diviseur B-stable de $SL_2/\{\pm Id\}$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{D}^B$, est de la forme $B.\widetilde{g}$ avec $g \in SL_2$. Si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2$ on a $B.\widetilde{g} = \left\{ \widetilde{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ x & y \end{smallmatrix}\right)}, ay - bx = 1 \right\}$. On peut donc identifier $B.\widetilde{g}$ à l'élément $[a : b]$ de $\mathbb{P}^1$.

Pour $e = \left(\left[\begin{smallmatrix} a_1 \\ b_1 \end{smallmatrix}\right], \cdots, \left[\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \end{smallmatrix}\right]\right)$ on pose $D_i = B\widetilde{g_i} \cong [b_i : -a_i]$, $i = 1, \ldots, n$ et on note π la projection canonique de $\mathbb{C}^2 \setminus \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ sur $\mathbb{P}^1$ qui à $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ associe $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$.

Pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $g \in SL_2$ on a

$$\begin{array}{rcl} \pi_i(g.e) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] & \Leftrightarrow & \pi\left(gg_i^{-1}.\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \\ & \Leftrightarrow & gg_i^{-1} \in B \\ & \Leftrightarrow & g \in Bg_i \end{array}$$

D'où $\pi_i(\overline{Bg_i.e}) = \left\{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right\} \neq \mathbb{P}^1$ et les D_i choisis conviennent pour le plongement $\overline{Sl_2.e}$.

6.8.2 quotient de $\overline{Sl_2.e}$ par un sous-groupe fini d'automorphismes.

Iozzi-Poritz prouvent dans [I-P] le résultat suivant

> Un SL_2-isomorphisme de $\overline{Sl_2.e}$ sur $\overline{Sl_2.e'}$ est nécessairement la restriction d'une permutation des coordonnées de $(\mathbb{P}^1)^n$ $(n \geq 3)$.

A titre d'exemple donnons une autre preuve de ce résultat qui utilise la classification de Luna-Vust.

Soit $\mu : \overline{Sl_2.e} \to \overline{Sl_2.e'}$ un isomorphisme, au sens de Luna-Vust, entre les plongements $\overline{Sl_2.e}$ et $\overline{Sl_2.e'}$ c'est-à-dire un isomorphisme SL_2-équivariant tel que $\mu \circ \varphi_e =$

$\varphi_{e'}$. La différence avec un SL_2-isomorphisme usuel réside dans le fait que l'on impose $\mu(e) = e'$.

On sait qu'un plongement de SL_2/H est entièrement déterminé à isomorphisme près par son diagramme de Luna-Vust. D'après 6.8.1 cela implique que les ensembles $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ sont égaux, en posant $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Soit $\sigma \in S_n$ tel que $e'_i = e_{\sigma(i)}$ et $\widetilde{\sigma}$ le SL_2-automorphisme de $(\mathbb{P}^1)^n$ défini par $(\omega_i) \mapsto (\omega_{\sigma(i)})$. Comme $\widetilde{\sigma}$ est un SL_2-isomorphisme de $\overline{Sl_2.e}$ sur $\overline{Sl_2.e'}$ et qu'il coïncide avec μ sur e, on a $\mu = \widetilde{\sigma}$.

Supposons maintenant que μ soit un SL_2-isomorphisme ordinaire entre $\overline{Sl_2.e}$ et $\overline{Sl_2.e'}$ c'est-à-dire que $\mu\,(e)$ soit quelconque dans $Sl_2.e'$. Posons $\mu(e) = e''$ et $g_0 \in SL_2$ tel que $e'' = g_0.e$.

μ est un isomorphisme entre les plongements $\overline{Sl_2.e}$ et $\overline{Sl_2.e'}$ et donc, comme on vient de le voir, μ est une permutation des coordonnées. cqfd.

Dans le cas particulier d'un SL_2-automorphisme μ de $\overline{Sl_2.e}$, $\varphi_e^{-1} \circ \mu \circ \varphi_e$ est le SL_2-automorphime de SL_2 donné par : $g \mapsto g.g_e(\mu)$ où $g_e(\mu)$ est l'élément de SL_2 défini par $\mu(e) = g_e(\mu).e$.

D'après ce qui précède on a donc la réciproque suivante :

Lemme 6.8.1 *Si $g_0 \in SL_2$ et $e \in (\mathbb{P}^1)^n$, le SL_2-automorphisme de SL_2 : $g \mapsto g.g_0$ peut être prolongé à un SL_2-automorphisme de $\overline{Sl_2.e}$ si et seulement si l'ensemble des coordonnées de e est stable sous l'action de g_0 sur $\mathbb{P}^1$.*

Si g_0 vérifie la condition du lemme pour le plongement $\overline{Sl_2.e}$ notons $\sigma_e(g_0)$ le SL_2-automorphisme correspondant de $\overline{Sl_2.e}$.

$\sigma_e(g_0)$ peut aussi être vu comme un élément du groupe symétrique S_n. On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 6.8.2 *Si H un sous-groupe de SL_2 et e un élément fixé de $(\mathbb{P}^1)^n$, l'action à droite de H sur SL_2 s'étend à $\overline{Sl_2.e}$ via l'application de plongement φ_e si et seulement si l'ensemble $\{e_i\}$ des coordonnées de e est stable sous l'action de H sur $\mathbb{P}^1$.*

Si $H \cup (-H)$ est le sous-groupe de SL_2 engendré par H et $-Id$, alors quand la condition précédente est vérifiée φ_e définit par passage au quotient le plongement (normal) homogène $\overline{Sl_2.e}/\sigma_e(H)$ de $SL_2/\{H \cup (-H)\}$.

D'après ce corollaire il est plus simple de prendre d'emblée H d'ordre pair pour avoir $H \cup (-H) = H$. C'est ce que nous supposerons dorénavant.

Considérons un plongement homogène quelconque (X, e) de G (e : point choisi dans l'orbite ouverte) et un sous-groupe H de G.

Notons encore :

– $\varphi_e : G \to X$ l'application $g \mapsto g.e$

– $\sigma_e(h)$ le G-automorphisme de X (quand il existe) qui prolonge via φ_e le G-automorphisme $g \mapsto gh$ de G.

On a alors

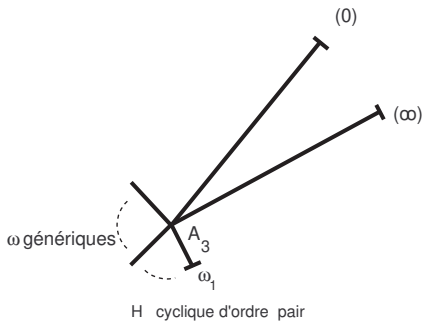
1. si $e' = g_0.e$ est un autre point de l'orbite ouverte de X et si l'action à droite de H sur G s'étend à X via φ_e alors :
   a) l'action à droite de $g_0 H g_0^{-1}$ sur G s'étend à X via $\varphi_{e'}$ (pour tout $h \in H$: $\sigma_e(h) = \sigma_{e'}(g_0 h g_0^{-1})$).
   c) Quand le quotient existe (exemple : H fini) : $X/\sigma_e(H) \simeq X/\sigma_{e'}(g_0 H g_0^{-1})$.
2. si $\gamma : X, e \to X', e'$ est un G-automorphisme entre deux plongements de G (dans le cas que l'on étudie γ :est la restriction d'une permutation des coordonnées de $(\mathbb{P}^1)^n$) qui envoie e sur e'et si l'action à droite de H sur G s'étend à X via φ_e alors cette action s'étend à X' via $\varphi_{\gamma(e)}$ et $X/\sigma_e(H) \simeq X'/\sigma_{\gamma(e)}(H)$.

Soit maintenant H un sous-groupe d'ordre pair de SL_2. Par abus de langage on notera $\overline{Sl_2.e}/H$ à la place de $\overline{Sl_2.e}/\sigma_e(H)$.

Pour étudier les plongements homogènes de SL_2/H de la forme $\overline{Sl_2.e}/H$ il suffit d'après ce qui précède de choisir un ensemble $\{e_i\}$ de n éléments de $\mathbb{P}^1$, stable sous l'action de H, comme ensemble des coordonnées d'un point de base e qui définira le plongement initial (X, e). On peut remplacer H par un conjugué ou remplacer e par $g_0.e$ où g_0 est élément quelconque de SL_2 (remarque 1). D'autre part l'ordre choisi pour les coordonnées de e est indifférent (remarque 2). A priori les possibilités restent nombreuses, mais on va montrer que dès que $\{e_i\} \subset \mathbb{P}^1$ contient plus de trois SL_2-orbites, la variété $\overline{Sl_2.e}/H$ est singulière ce qui donne finalement un nombre fini de cas à étudier en ce qui concerne la lissité. La méthode exacte est donnée à la section suivante et des exemples sont traités dans le détail à l'annexe C.

On retrouve ainsi la liste suivante des plongements homogènes de SL_2/H projectifs et lisses avec une seule orbite de dimension 1 (voir § 4.2.1 pour les diagrammes) :

1. H cyclique d'ordre $2n$: $\overline{Sl_2.e}/H$ contient une orbite de type A_3 avec $\{D_1, D_2, D_3\} = \{0, \infty, \omega_1\}$ et ω_1 générique dans $\mathbb{P}^1/H \cong \mathcal{D}^B$. Diagramme de Luna-Vust :



2. H binaire diédral, octaédral, tétraédral ou icosaédral : trois cas selon que $\overline{Sl_2.e}/H$ contient :

   (a) une orbite de type A_3 avec $\{D_1, D_2, D_3\} = \{v, f, e\}$

   (b) une orbite de type A_2 avec $\{D_1, D_2\} = \{v, f\}$

3. H binaire octaédral, tétraédral ou icosaédral : un plongement supplémentaire avec une orbite de type A_1 et $D_1 = v$.

4. H binaire diédral d'ordre 12 : un plongement supplémentaire avec une orbite de type A_1 et $\{D_1\} = \{f\}$.

6.8.3 $\overline{Sl_2.e}/H$ comme fermeture d'orbite

Supposons pour commencer que H soit cyclique d'ordre $2n$, $n \geq 3$.

Soit $e = (0, \infty, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}) \in (\mathbb{P}^1)^{n+2}$ (ε racine primitive $n^{ème}$ de 1). A l'annexe C on montre que $\overline{Sl_2.e}/H$ est lisse. Il a une seule orbite de dimension 1, c'est donc le plongement minimal n°7 de la liste donnée à la section 10 74.

Soit R_i l'espace vectoriel des formes binaires de degré i muni de l'action de SL_2 suivante : $g \in SL_2$, $f \in R_i$, $(g.f)\binom{x}{y} = f\left(g^{-1}.\binom{x}{y}\right)$. En identifiant $\mathbb{P}^i$ à $\mathbb{P}(R_i)$, l'application de $R_i \times R_j$ dans R_{i+j} qui correspond au produit des formes binaires fournit une immersion fermée SL_2-équivariante de $\mathbb{P}^i \times \mathbb{P}^j$ dans $\mathbb{P}^{i+j}$. On en déduit un morphisme SL_2-équivariant

$$\pi : \left(\mathbb{P}^1\right)^{2+n} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$$

On a alors $\pi\left(\overline{Sl_2.e}\right) = \overline{SL_2.\pi(e)}$ et on vérifie que $\overline{Sl_2.e}/H$ est SL_2-isomorphe à $\overline{Sl_2.\pi(e)}$.

Le même procédé s'applique aux autres cas :

– Si H est binaire diédral d'ordre $4n$ ($n \geq 1$) on peut réaliser le plongement lisse projectif avec une orbite de type A_2 comme une fermeture d'orbite dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^n$ et celui avec orbite de type A_3 comme fermeture d'orbite dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.

  Remarque : pour le premier plongement on peut montrer (par calcul direct des matrices de transition) que la restriction à $\overline{SL_2.\pi(e)}$ de la projection $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^2$ est un fibré (en droites projectives) sur $\mathbb{P}^2$ et que ce fibré est le projectivisé de l'image directe (pour l'application $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$) d'un fibré sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de bidegré $(n, 0)$. On retrouve ainsi la description de Umemura de ce plongement (décrit aussi dans [Nak] p. 234).

– Si H est binaire tétraédral, ocatédral, icosaédral :

- le plongement lisse projectif avec une orbite de type A_1 se réalise comme fermeture d'orbite dans $\mathbb{P}^{n_v}$ (voir § 3.1.1 p. 20 pour les valeurs de n_v, n_f, n_e).
  Remarque : on retrouve ainsi exactement la description de Mukai-Umemura des modèles minimaux comme fermeture d'orbite ([Muk Um] ou [Nak, p 233]) dans le cas H binaire tétraédral, octaédral, icosaédral.
- le plongement lisse projectif avec orbite A_2 se réalise comme fermeture d'orbite dans $\mathbb{P}^{n_v} \times \mathbb{P}^{n_f}$.
- le plongement lisse projectif avec orbite A_3 se réalise comme fermeture d'orbite dans $\mathbb{P}^{n_v} \times \mathbb{P}^{n_f} \times \mathbb{P}^{n_e}$.

– Si H est binaire diédral d'ordre 12 le plongement lisse projectif avec orbite A_1 est $\mathbb{P}^3$.

Remarque : certains des plongements de la liste sont obtenus par éclatement d'autres, le long de l'orbite de dimension 1, comme on l'a vu de façon précise dans la preuve de la liste des modèles minimaux à la section 6.6. L'application d'éclatement se décrit alors très simplement. Par exemple dans le cas H binaire diédral le plongement X_3 avec orbite A_3 est l'éclaté du plongement X_2 avec orbite A_2 et on peut montrer que l'application d'éclatement est la restriction à X_2 et X_3 de la projection $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^n$ sur les deux premiers facteurs.

6.8.4 Méthode directe d'étude de la lissité de $\overline{Sl_2.e}/H$.

L'application $\overline{Sl_2.e} \overset{\pi}{\longmapsto} \overline{Sl_2.e}/H$ est SL_2-équivariante et les SL_2-orbites de $\overline{Sl_2.e}/H$ sont les images par π des SL_2-orbites de $\overline{Sl_2.e}$. Comme $\overline{Sl_2.e}/H$ est normal son lieu singulier est un fermé SL_2-stable de codimension supérieure ou égale à 2, c'est donc $\pi(\Delta_0)$ ou $\emptyset$. Ainsi, pour tester la lissité de $\overline{Sl_2.e}/H$ il suffit de tester la lissité en un seul point $\pi(\omega_0)$ de $\pi(\Delta_0)$. L'idée est de choisir un ouvert affine V de $\overline{Sl_2.e}$ stable par $\sigma_e(H)$ tel que l'ouvert affine $V/H = \operatorname{spec}\left(\mathbb{C}[V]^H\right)$ de $\overline{Sl_2.e}/H$ intersecte l'orbite $\pi(\Delta_0)$.

Choix de V :

Puisque SL_2 agit transitivement sur les triplets d'éléments distincts de $\mathbb{P}^1$ on peut supposer que $e = \left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\a_3\end{smallmatrix}\right], \cdots, \left[\begin{smallmatrix}1\\a_n\end{smallmatrix}\right]\right)$ avec $a_i \in \mathbb{C}^*$ pour $i = 3 \ldots n$ et $a_i \neq a_j$ pour $3 \leq i < j \leq n$ (on a donc privilégié les deux premières coordonnées). Soit $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ un élément de $(\mathbb{P}^1)^n$. Posons $\omega_i = \left[\begin{smallmatrix}x_{i1}\\x_{i2}\end{smallmatrix}\right]$. On a alors [I-P] :

$$\omega \in \overline{Sl_2.e} \Leftrightarrow \left(\forall\, i,j,\, 3 \leq i < j \leq n, \quad a_j \left|\begin{smallmatrix}x_{11} & x_{i1}\\ x_{12} & x_{i2}\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}x_{21} & x_{j1}\\ x_{22} & x_{j2}\end{smallmatrix}\right| - a_i \left|\begin{smallmatrix}x_{11} & x_{j1}\\ x_{12} & x_{j2}\end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix}x_{21} & x_{i1}\\ x_{22} & x_{i2}\end{smallmatrix}\right| = 0\right)$$

Considérons maintenant l'ouvert affine V de $\overline{Sl_2.e}$ défini par $x_{i1} \neq 0$ pour $i = 1 \ldots n$. Il est stable sous l'action de toute permutation des coordonnées en particulier par tout sous-groupe H de SL_2-automorphismes de $\overline{Sl_2.e}$.

L'ouvert de $(\mathbb{P}^1)^n$ défini par $\prod_{i=1}^n x_{i1} \neq 0$ s'identifie à $\mathbb{C}^n$ par l'isomorphisme $\left(\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\y\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\x_3\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}1\\x_n\end{bmatrix}\right) \mapsto (x, y, x_3, \ldots, x_n)$. (on a pris x, y au lieu de x_1, x_2 pour marquer le rôle particulier que l'on a choisi de donner aux deux premières coordonnées dans la suite des calculs). D'après les équations précédentes V est alors isomorphe à la variété affine $Z(I)$ de $\mathbb{C}^n$, ensemble des zéros de l'idéal I engendré par les polynômes F_{ij}, $3 \leq i < j \leq n$:

$$\boxed{F_{ij} = a_j(x - x_i)(y - x_j) - a_i(x - x_j)(y - x_i)}$$

Nous montrons plus bas au lemme 6.8.3 que I est un idéal radical. On a alors $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]/I$ et :

$$\mathbb{C}[V/H] = \mathbb{C}[V]^H = (\mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]/I)^H \cong \mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]^H/_{I^H} \qquad (6.10)$$

Le dernier isomorphisme est un cas particulier de [K, p 97] :

> Si G réductif agit sur une variété affine Z et I est un idéal de $\mathbb{C}[Z]$ stable par G alors $(\mathbb{C}[Z]/I)^G \cong \mathbb{C}[Z]^G/I^G$.

(preuve : notons $\widetilde{f}$ l'image de $\mathbb{C}[Z]$ dans $\mathbb{C}[Z]/I$, et supposons que $\widetilde{f} \in (\mathbb{C}[Z]/I)^G$. Comme G est réductif et que I est un sous G-module de $\mathbb{C}[Z]$ on a $\mathbb{C}[Z] = I \oplus J$ avec J un sous G-module de $\mathbb{C}[Z]$. Soit $g \in G$ et $f = f_I + f_J$ avec $f_I \in I$ et $f_J \in J$. L'hypothèse $\widetilde{f}$ invariant par G donne $g.f - f \in I$ c'est-à-dire $(g.f_I - f_I) + (g.f_J - f_J) \in I$, ce qui implique $g.f_J - f_J = 0$. On a donc $\widetilde{f} = \widetilde{f_J} \in \mathbb{C}[Z]^G/I^G$).

Notons encore $V \xrightarrow{\pi} V/H$ le morphisme canonique. Soit $\pi(\omega_0)$, avec $\omega_0 = (0, \ldots, 0) \in V$ l'élément choisi dans $\pi(\Delta_0)$ pour tester la lissité. L'idéal maximal associé à ω_0 est $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$, en notant $\widetilde{x}_i$ l'image de $x_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ dans $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$, et l'idéal de $\mu(\omega_0)$ est $m = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^H$. Par ailleurs $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^H$ est engendré par un nombre fini de polynômes homogènes non constants $p_1, \ldots, p_t$ ($t \leq \mathrm{card}(H)$ par un théorème d'E.Noether) donc par (6.10) $\mathbb{C}[V]^H$ est engendré par $\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_t$. Le choix de ω_0 et le fait que I soit homogène implique :

$$\boxed{m = (\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_t) \subset \mathbb{C}[V]^H}$$

$\mu(\omega_0)$ est lisse si et seulement si l'anneau local $\mathbb{C}[V]^H_m$ est régulier. On a donc

$$\boxed{\mu(\omega_0) \text{ est lisse si et seulement si } \dim_{\mathbb{C}}(m/m^2)=3}.$$

La recherche des $p_1, \ldots, p_t$ est un calcul classique de la théorie des invariants et on va voir sur des exemples comment on peut tester la condition de lissité ci-dessus.

Lemme 6.8.3 *L'idéal I de $\mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]$ engendré par les F_{ij} est radical.*

Preuve : I et $\sqrt{I}$ sont homogènes. Par ailleurs on a :

$$\boxed{x_i x_j = \alpha_{ij}(x,y)x_i + \alpha_{ji}(x,y)x_j - xy + F_{ij} \quad (3 \leq i < j \leq n)} \tag{6.11}$$

avec $\alpha_{ij}(x,y) = \frac{1}{a_j - a_i}(a_j y - a_i x)$.

Soit f un polynôme homogène de degré m dans $\sqrt{I}$. A l'aide des égalités ci-dessus on peut écrire f sous la forme :

$$f = r + F$$

où r est un polynôme homogène (nul ou) de degré m dont les termes ne sont divisibles par aucun monôme $x_i x_j$:

$$r = \sum_{0 \leq i \leq m} \lambda_i x^i y^{m-i} + \sum_{\substack{3 \leq k \leq n \\ 0 \leq i+j \leq m-1}} \lambda_{ijk} x^i y^j x_k^{m-i-j}$$

et F est un polynôme homogène (nul ou) de degré m dans I. On a $r \in \sqrt{I}$ et il s'agit de prouver que $r = 0$.

On peut écrire :

$$r = (y - x)r^{(1)} + r_1$$

où $r^{(1)}$ et r_1 sont de même type que r mais où $r^{(1)}$ est homogène (nul ou) de degré $m - 1$ et r_1 est de la forme :

$$r_1 = \sum_{\substack{3 \leq k \leq n \\ 0 \leq i \leq m-1}} \lambda_{ik} x^i x_k^{m-i}$$

r_1 s'annule sur $Z(I) \cap Z(y - x) = \bigcup_{3 \leq k \leq n} \overline{\Delta}_k$.

(avec $\Delta_k = \{(x; x, \ldots, x, \overset{k}{\widehat{x_k}}, x, \ldots, x),\ x \neq x_k \in \mathbb{C}\}$).

$x = 0$ et $x_k = 1$ donnent alors $\lambda_{0k} = 0$ pour $k = 3, \ldots, n$ et on a donc $r_1 = x r_2$ avec r_2 de même forme que r_1 et (nul ou) de degré $m-1$. Mais x n'est identiquement nul sur aucun des fermés irréductibles $\overline{\Delta}_i$ $(i \geq 3)$ et donc r_2 s'annule comme r_1 sur $Z(I) \cap Z(y-x)$. On peut donc refaire avec r_2 ce que l'on a fait avec r_1 pour trouver r_3 homogène (nul ou) de degré $m - 2$ tel que $r_2 = x r_3$ et tel que r_3 s'annule sur $Z(I) \cap Z(y-x)$. Le procédé donne une suite de polynômes r_i (nuls ou) homogènes de degré $m - i$ telle que $r_1 = x^{i-1} r_i = 0$. On a donc $r_1 = 0$, ce qui donne $r = (y-x)r^{(1)}$ avec $r^{(1)}$ (nul ou) homogène de degré $m - 1$.

Comme $y - x$ n'est pas identiquement nul sur $Z(I)$ irréductible on voit que $r^{(1)}$ s'annule sur $Z(I)$. En appliquant à $r^{(1)}$ le même raisonnement qu'à r on trouve une suite de polynômes homogènes $r^{(i)}$ (nuls ou) de degré $m - i$ telle que pour tout $i \geq 1$: $r = (y-x)^i r^{(i)}$. Donc $r = 0$.

□

Remarque 6.8.4 *: la preuve précédente montre que si $f \in I \subset \sqrt{I}$, le reste r dans l'écriture $f = r + F$ est nul. Ceci assure que (F_{ij}) est une base de Gröbner minimale de I pour un ordre lexicographique quelconque pour lequel $x_k > x, y$.*

Les résultats et les notations de ce numéro sont repris à l'annexe C où l'on étudie la lissité $\overline{Sl_2.e}/H$ dans le cas particulier (à titre d'exemple) où H est cyclique d'ordre pair.

Chapitre 7

Notations

- $SL_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix} \right), x, y, z, w \in \mathbb{C},\ xw - yz = 1 \right\}$
- $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{smallmatrix} \right), a \in \mathbb{C}^* \right\}$, $U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix} \right), b \in \mathbb{C} \right\}$ et $T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \right), a \in \mathbb{C}^* \right\}$
- $\widetilde{H}$: image dans $PSL_2(\mathbb{C})$, identifié au groupe des automorphismes de $\mathbb{P}$, d'un sous-groupe fini H deSL_2.
- n_j : cardinal d'une orbite j de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de H. ($j \in \mathbb{P}^1/H$).
- c_j : ordre du sous-groupe d'isotropie d'un élément quelconque d'une orbite j de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de H. On a $n_j = \text{card}(H)/c_j$.
- $\widetilde{c}_j$: ordre du sous-groupe d'isotropie d'un élément quelconque d'une orbite j de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de $\widetilde{\mathrm{H}}$. En particulier $\widetilde{c}_j = c_j$ si $\text{card}(H)$ est impair et $\widetilde{c}_j = c_j/2$ si $\text{card}(H)$ est pair.
- v, f, e : éléments non génériques de $\mathbb{P}^1/H$ pour H binaire diédral. v, f, e pour vertex, edge, face.
- $0, \infty$: éléments non génériques de $\mathbb{P}^1/H$ pour H cyclique.
- $\mathcal{NG}$: ensemble des éléments non génériques de $\mathbb{P}^1/H$. C'est-à-dire $\mathcal{NG} = \{v, f, e\}$ ou $\{0, \infty\}$.
- $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,Y}$: anneau local d'une G-orbite d'un plongement homogène X de G/H.
- $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$: ouvert affine stable par B dans un plongement homogène X de G/H. Appelé B-carte de X.
- $\mathbb{C}(SL_2)^{(B)}$: ensemble des vecteurs propres de $\mathbb{C}(SL_2) = \mathbb{C}(x, y, z)$ sous l'action par translation à gauche de B. C'est le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}(x, y)$ engendré par $\{\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y\} \setminus \{0\}$.
- $\mathbb{C}(SL_2)^{(B \times H)}$: ensemble des éléments de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B)}$ qui sont également vecteurs propres sous l'action par translation à droite de H. (les parenthèses indiquent qu'il s'agit de semi-invariants).

- g_j : à tout élément $j = \{[a_1 : b_1], \ldots, [a_{n_j} : b_{n_j}]\} = \widetilde{H}.[a_1 : b_1]$ de $\mathbb{P}^1/H$ on associe $g_j = \prod_{i=1}^{n_j}(a_i x + b_i y) \in \mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$
- $\mathcal{D}$: ensemble des diviseurs premiers de SL_2/H, ou par abus de langage ensemble de leurs valuations associées. On note v_D la valuation associée au diviseur $D \in \mathcal{D}$.
- $\mathcal{D}^B$: ensemble des diviseurs premiers stables par B de SL_2/H ou ensemble des valuations de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ associées. On a $\mathcal{D}^B \cong \mathbb{P}^1/H$.
- $\mathcal{V}$: ensemble des valuations discrètes normalisées géométriques de $\mathbb{C}(SL_2/H)$ invariantes par SL_2. Avec les notations du § 3.4 p.24 on a $\mathcal{V} = \{v(\omega, r) \in \mathcal{V}, \omega \in \mathbb{P}^1/H,\, r \in [-1, b(\omega)] \cap \mathbb{Q}\}$
- $b(j) = \frac{2}{n_j} - 1$ pour $j \in \mathbb{P}^1/H$.
- $v(\omega_0, r_0)$: pour $\omega_0 \in \mathbb{P}^1/H$ et $r_0 \in \mathbb{Q} \cap [-1, b(\omega_0)]$, $v(\omega_0, r_0)$ est l'unique élément de $\mathcal{V}$ qui vérifie $v(\omega_0, r_0)(g_j) = -\frac{1}{c_j}$ si $j \neq \omega_0$ et $v(\omega_0, r_0)(g_{\omega_0}) = \frac{r_0}{c_{\omega_0}}$
- $\mathcal{V}_1$: sous-ensemble de $\mathcal{V}$ formé des valuations v telles que $\mathbb{C}_v^{SL_2} \simeq \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}_v$ est le corps résiduel de v et $\mathbb{C}_v^{SL_2}$ le sous-corps de ses invariants par SL_2. C'est l'ensemble des valuations associées aux SL_2-orbites de codimension 1 des plongements homogènes de SL_2/H. Avec les notations du § 3.4 p.24 on a $\mathcal{V}_1 = \{v(\omega, r) \in \mathcal{V},\, \omega \in \mathbb{P}^1/H,\, r \in]-1, b(\omega)] \cap \mathbb{Q}\}$..
- $\mathcal{R}$: sous-ensemble cofini de $\mathcal{D}^B$.
- $\mathcal{W}$: partie finie de $\mathcal{V}$.
- $k' = \frac{k+1}{2}$ si k est impair et $\frac{k}{2}$ si k est pair.
- $\overline{k} = k$ si k est impair et $\frac{k}{2}$ si k est pair.
- $[x]$: partie entière de x.
- $a \wedge b = \mathrm{pgcd}(a, b)$.

Annexe A

Détermination des éléments de $\mathbb{C}(SL_2/H)^{(B)}$.

A.1 Caractères de H associés aux vecteurs propres g_ω.

Pour $j \in \mathbb{P}^1/H$, g_j est un vecteur propre sous l'action de H auquel est donc associé un caractère χ_j de H défini par : $h.g_j = \chi_j(h)\, g_j$ pour tout $h \in H$. La connaissance de χ_j pour tout j de $\mathbb{P}^1/H$ permet de calculer, d'après le résultat de la section 3.2, le caractère χ_f associé à tout f de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$: si $f = \prod (g_j)^{m_j}$ on a $\chi_f = \prod (\chi_j)^{m_j}$. On explicitera dans la section suivante la condition $\chi_f = 1$ qui exprime le fait qu'un élément f de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$ est invariant par H.

A.1.1 Groupe binaire diédral.

Les sous-groupes finis de H de même type et de même ordre sont conjugués et les plongements associés sont isomorphes. On peut donc choisir par exemple comme générateurs du groupe binaire diédral $a_\mu = \left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ et $\alpha_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ où μ est une racine primitive $2k^{ème}$ de 1 et i une racine carrée de -1. On pose $\varepsilon = \mu^2$.

Soit ω générique de la forme $\widetilde{\mathrm{H}}.[\lambda : 1]$ avec $[\lambda : 1] \notin \{v, f, e\}$

$$
\begin{aligned}
g_v &= xy \\
g_e &= (-1)^k x^k - y^k \\
g_f &= (-1)^k x^k + y^k \\
g_\omega &= \left((-1)^k x^k - \lambda^k y^k\right)\left((-1)^k \lambda^k x^k - y^k\right)
\end{aligned}
$$

Les caractères de H associés à ces vecteurs propres sont donnés par :

$$\begin{array}{ll} \alpha_0.g_v = -g_v & \alpha_\mu.g_v = g_v \\ \alpha_0.g_e = (-1)^{k+1}\, i^k g_e & \alpha_\mu.g_e = -g_e \\ \alpha_0.g_f = (-1)^k\, i^k g_f & \alpha_\mu.g_f = -g_f \\ \alpha_0.g_\omega = (-1)^k\, g_\omega & \alpha_\mu.g_\omega = g_\omega \end{array}$$

A.1.2 Groupe binaire tétraédral, octaédral ou icosaédral.

On peut vérifier que $-Id$ est toujours dans le groupe dérivé H' de H. Les caractères de H sont donc les caractères de $\widetilde{H}$. Le groupe $\widetilde{H}/\widetilde{H}'$ est cyclique d'ordre respectif 3,2 ou 1 et il est engendré par la classe de r_v, r_v étant un générateur quelconque du groupe d'isotropie d'un sommet du polyèdre régulier associé à $\widetilde{H}$. Un caractère χ de H est donc déterminé par $\chi(r_v)$ qui est une racine 3ème , 2ème ou 1ère de l'unité. Le tableau suivant donne $\chi(r_v)$ pour les caractères des semi-invariants g_e, g_f, g_e. Un élément générique g_ω est invariant par H.

	g_e	g_f	g_v
tétraédral	1	j	j^2
octaédral	-1	1	-1
icosaédral	1	1	1

(j est une racine primitive cubique de 1)

A.1.3 groupe cyclique d'ordre k.

$g_0 = y$ et $g_\infty = x$
Pour $\omega = \overline{[\lambda : 1]} \in \mathbb{P}^1/H$ générique on a :

– dans le cas k impair :

$$\begin{aligned} g_\omega &= \prod_{\sigma\in H} \sigma.(\lambda x + y) = \prod_{i=0}^{k-1} \alpha^i.(\lambda x + y) = \prod_{i=0}^{k-1} \left(\varepsilon^i \lambda x + \varepsilon^{-i} y\right) \\ &\sim \lambda^k x^k - (-1)^k y^k \end{aligned}$$

(ε est une racine primitive k ème de 1, $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ engendre H).

– et dans le cas k pair :

$$\begin{aligned} g_\omega &= \prod_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} \alpha^i.(\lambda x + y) = \prod_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} \left(\varepsilon^i \lambda x + \varepsilon^{-i} y\right) \\ &\sim \lambda^{k/2} x^{k/2} - (-1)^{k/2}\, y^{k/2} \end{aligned}$$

en posant $\overline{k} = k$ si k est impair et $\overline{k} = k/2$ si k est pair on a dans tous les cas

$$g_\omega = \lambda^{\overline{k}} x^{\overline{k}} - (-1)^{\overline{k}} y^{\overline{k}}$$

Les caractères de H correspondant aux vecteurs propres g_j sont donnés par :

$$\alpha.g_0 = \varepsilon^{-1} g_0$$
$$\alpha.g_\infty = \varepsilon g_\infty$$

et pour $\omega = [\lambda : 1]$ générique :

$$\begin{aligned}\alpha.g_\omega &= \alpha.\lambda^{\overline{k}} x^{\overline{k}} - (-1)^{\overline{k}} y^{\overline{k}} = \lambda^{\overline{k}} \varepsilon^{\overline{k}} x^k - (-1)^{\overline{k}} \varepsilon^{-\overline{k}} y^k \\ &= \varepsilon^{\overline{k}} (\lambda^{\overline{k}} x^{\overline{k}} - (-1)^{\overline{k}} \varepsilon^{-2\overline{k}} y^{\overline{k}}) \\ &= \varepsilon^{\overline{k}} g_\omega = -(-1)^k g_\omega\end{aligned}$$

($\varepsilon^{\overline{k}} = 1$ si k est impair et $\varepsilon^{\overline{k}} = -1$ si k est pair).

$\mathbb{C}[SL_2]^{(B\times H)}_{\overline{k},-(-1)^k}$ est engendré par exemple par $g_0^{\overline{k}}$ et $g_\infty^{\overline{k}}$ et contient tous les g_ω génériques de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$.

A.2 Invariants par H dans $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$

A.2.1 Cas où H est binaire diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral.

On sait qu'un élément f de $\mathbb{C}(SL_2)^{(B\times H)}$ s'écrit $f = g_1^{m_1} \dots g_p^{m_p} g_v^{m_v} g_f^{m_f} g_e^{m_e}$, en posant $g_i = g_{\omega_i}$ pour ω_i générique de $\mathbb{P}^1/H$ et $m_i \in \mathbb{Z}$.

Lemme A.2.1 *$g_1^{m_1} \dots g_p^{m_p} g_v^{m_v} g_f^{m_f} g_e^{m_e}$ de demi-degré $d = \frac{1}{2}\deg_{x,y}(f)$ appartient à $\mathbb{C}(SL_2)^H$ si et seulement si*

$$m_e \equiv d \ (\mathrm{mod}\ \widetilde{c}_e),\ m_f \equiv d \ (\mathrm{mod}\ \widetilde{c}_f),\ m_v \equiv d \ (\mathrm{mod}\ \widetilde{c}_v)$$

Donc si $f \in \mathbb{C}(SL_2)^H$ on peut poser $m_f = \widetilde{c}_f m'_f + d$, $m_e = \widetilde{c}_e m'_e + d$, $m_v = \widetilde{c}_v m'_v + d$. On a alors : f est de demi-degré d en x,y si et seulement si

$$m_1 + \ldots + m_p + m'_v + m'_f + m'_e = -d$$

Démontrons déjà la première partie du lemme.

Cas tétraédral. Comme $\frac{1}{2}\deg(f) = d = 6(m_1 + \ldots m_p) + 3m_e + 2m_f + 2m_v$ on a toujours

$$m_e \equiv d \ (\mathrm{mod}\ 2) \text{ et } 2(m_f + m_v) \equiv d \ (\mathrm{mod}\ 3)$$

Or la connaissance des caractères de H associés aux vecteurs propre g_j (section A.1) donnent :

$$f = g_1^{m_1} \dots g_p^{m_p} g_v^{m_v} g_f^{m_f} g_e^{m_e} \in \mathbb{C}(SL_2)^H \Leftrightarrow m_f \equiv m_v \ (\mathrm{mod}\ 3)$$

On en déduit facilement l'équivalence cherchée. (voir le tableau des $\widetilde{c}_i$ p. 20).

Cas octaédral. $d = 12\,(m_1 + \ldots m_p) + 6m_e + 4m_f + 3m_v$ donne

$$m_f \equiv d \ (\mathrm{mod}\ 3)\ m_v \equiv d \ (\mathrm{mod}\ 2)$$

et la connaissance des caractères de H associés aux g_j permet d'écrire :

$$f = g_1^{m_1} \ldots g_p^{m_p} g_v^{m_v} g_f^{m_f} g_e^{m_e} \in \mathbb{C}\,(SL_2)^H \Leftrightarrow m_e \equiv m_v \ (\mathrm{mod}\ 2)$$

d'où l'on déduit le résultat le lemme.

Cas icosaédral. Il se traite comme les deux précédents.

Cas diédral. : α_μ et α_0 étant des générateurs de H on a

$$f \in \mathbb{C}(SL_2)^H \Leftrightarrow \alpha_\mu.f = f \text{ et } \alpha_0.f = f$$

d'où avec la connaissance des caractères de H associés aux g_j :

$$\begin{aligned}
&\alpha_\mu.f = f \Leftrightarrow m_e \equiv m_f \ (\mathrm{mod}\ 2)\\
&\alpha_0.f = f \Leftrightarrow k(m_1 + \ldots + m_p) + m_v + m_e + k(m_e + m_f)/2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)
\end{aligned}$$

A l'aide de $\frac{1}{2}\deg(f) = d = k(m_1 + \ldots + m_p) + m_v + \frac{k}{2}(m_e + m_f)$ ces deux équivalences peuvent s'écrire sous la forme indiquée dans le lemme.

Pour la seconde partie du lemme on a, en posant $d_i = \frac{1}{2}\deg(g_i)$ pour $i = \omega, v, f, e$:

$$\begin{aligned}
d = \frac{1}{2}\deg(f) &= d_\omega\,(m_1 + \ldots + m_p) + m_v d_v + m_f d_f + m_e d_e\\
&= d_\omega(m_1 + \ldots + m_p) + (\widetilde{c}_v m'_v + d)\,d_v + \left(\widetilde{c}_f m'_f + d\right) d_f + (\widetilde{c}_e m'_e + d)\,d_e\\
&= d_\omega(m_1 + \ldots + m_p + m'_v + m'_f + m'_e) + d\,(d_v + d_f + d_e)
\end{aligned}$$

mais comme $d_e + d_f + d_v = d_\omega + 1$ ceci donne $m_1 + \ldots + m_p + m'_v + m'_f + m'_e = -d$

□

A.2.2 cas où H est cyclique d'ordre k.

Un élément f de $\mathbb{C}\,(SL_2)^{(B\times H)}$ s'écrit $f = g_1^{m_1} \ldots g_p^{m_p} g_0^{m_0} g_\infty^{m_\infty}$ avec $g_i = g_{\omega_i}$ pour ω_i générique de $\mathbb{P}^1/H$ et $m_i \in \mathbb{Z}$.

Lemme A.2.2 *($\overline{k} = k$ si k est impair et $\overline{k} = k/2$ si k est pair).*

$f = g_1^{m_1} \dots g_p^{m_p} g_0^{m_0} g_\infty^{m_\infty}$ de degré d en x,y appartient à $\mathbb{C}(SL_2)^H$ si et seulement si

$$m_0 \equiv m_\infty \ (\mathrm{mod}\ \overline{k}) \text{ et } 2m_0 \equiv d \ (\mathrm{mod}\ k) \tag{A.1}$$

ou encore :

- *si k est pair : (A.1)$\Leftrightarrow$ d est pair et $m_0 \equiv m_\infty \equiv \frac{d}{2}$ (mod $\frac{k}{2}$)*
- *si k est impair, on pose $k' = \frac{k+1}{2}$ et : (A.1)$\Leftrightarrow$ $m_0 \equiv m_\infty \equiv k'd$ (mod k).*

Preuve :

$$\begin{aligned} f = g_1^{m_1} \dots g_p^{m_p} g_0^{m_0} g_\infty^{m_\infty} \in \mathbb{C}(SL_2)^H &\Leftrightarrow \alpha.f = f \\ &\Leftrightarrow \varepsilon^{\overline{k}(m_1+\dots+m_p)-m_0+m_\infty} = 1 \\ &\Leftrightarrow \overline{k}\,(m_1 + \dots + m_p) - m_0 + m_\infty \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ k) \end{aligned} \tag{A.2}$$

(A.2) implique $m_0 \equiv m_\infty$ (mod $\overline{k}$). D'autre part $d = d_1 m_1 + \dots + d_p m_p + d_0 m_0 + d_\infty m_\infty = \overline{k}\,(m_1 + \dots + m_p) + m_0 + m_\infty$ implique que (A.2) est équivalent à $d - m_0 - m_\infty - m_0 + m_\infty \equiv 0$ (mod k) c'est-à-dire $2m_0 \equiv d$ (mod k).

Si k est pair (1) équivaut à $m_0 \equiv \frac{d}{2}$ (mod $\frac{k}{2}$). Si k est impair $k' = \frac{k+1}{2}$ est l'inverse de 2 dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et (1) équivaut à $m_0 \equiv k'd$ (mod k).

□

Annexe B

$\mathcal{O}^U, \mathcal{O}^B, \mathbb{C}[\mathring{\mathbf{X}}]^B$ pour une B-carte $\mathring{\mathbf{X}}$ et un SL_2-germe $\mathcal{O}$

Rappel : $SL_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix} \right),\ x,y,z,w \in \mathbb{C},\ xw - yz = 1 \right\}$ et $U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix} \right) \right\}$. Le résultat élémentaire suivant est démontré succintement dans [K] p. 190, nous complétons ici les détails manquants :

$$\boxed{\mathbb{C}[SL_2]^U = \mathbb{C}[x,y]}$$

Preuve : soit $f \in \mathbb{C}[SL_2]^U = \mathbb{C}(x,y,z,w)^U = (\mathbb{C}[X,Y,Z,W]/(XW - YZ))^U$. Pour $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix} \right) \in U$ et $g = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix} \right) \in SL_2$ on a $u.g = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ bx+z & by+w \end{smallmatrix} \right)$. Donc $u.f(g) = f(g)$ s'écrit $f(x,y,bx+z,by+w) = f(x,y,z,w)$. Ainsi si $x \neq 0$ on peut choisit $b = -z/x$ et on a $f(x,y,z,w) = f(x,y,0,x^{-1}) = f_1(x,y)/x^n$ pour un certain $f_1 \in \mathbb{C}[x,y]$ et $n \in \mathbb{N}$. De même pour $y \neq 0$ on a $f(x,y,z,w) = f(x,y,-y^{-1},0) = f_2(x,y)/y^m$. Donc pour $x,y \neq 0$ on a $f_1(x,y)\,y^m = f_2(x,y)\,x^n$. L'ouvert de Zariski de SL_2 défini par $x,y \neq 0$ est dense dans SL_2 et cette égalité est donc vrai dans SL_2. Si $F_1(X,Y)$ et $F_2(X,Y)$ sont des polynômes représentants f_1 et f_2 on a donc $F_1(X,Y)\,Y^m - F_2(X,Y)\,X^n = P(X,Y,Z,W)(XW - YZ)$ pour un certain polynôme P, ce qui donne aussitôt $P = 0$. $F_1(X,Y)\,Y^m = F_2(X,Y)\,X^n$. Donc X^n divise $F_1(X,Y)$ et $f = f_1(x,y)/x^n \in \mathbb{C}[x,y]$.

□

Soit $\mathring{\mathrm{X}}$ une B-carte. On a

$$\boxed{\mathbb{C}(SL_2)^U = \mathbb{C}(x,y)}$$

$$\boxed{\mathbb{C}(\mathring{\mathrm{X}})^U = Q(\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U)}$$

Preuve : On peut obtenir ces deux résultats en utilisant les définitions de SL_2 et $\mathring{\mathrm{X}}$ mais il est plus judicieux d'appliquer le résultat élémentaire suivant (suggestion de M.Brion) :

Si Z est une variété affine sur laquelle opère un groupe unipotent U, alors $Q(\mathbb{C}[Z]^U) = \mathbb{C}(Z)^U$.

Preuve : soit $f \in \mathbb{C}(Z)^U$ non nul. On considère

$$M = \{\varphi \in \mathbb{C}[Z] \ / f\varphi \in \mathbb{C}[Z]\}$$

Alors M est non nul et stable par U : c'est un sous U-module de $\mathbb{C}[Z]$. Puisque U est unipotent, M contient un point fixe φ_0 non nul de U. On a alors $f = \frac{f\varphi_0}{\varphi_0} \in Q(\mathbb{C}[Z]^U)$. □

Soit maintenant $\mathcal{O}$ un G-germe et $\mathring{\mathrm{X}}$ une B-carte dont $\mathcal{O}$ est le localisé : $\mathcal{O} = \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]_{\mathcal{M}}$ avec $\mathcal{M} = m_{v_0} \cap \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ où v_0 est un élément de $\mathcal{V}_1$ qui domine $\mathcal{O}$. On a le résultat suivant, valable pour toute B-carte d'un plongement (normal) de G/H avec G groupe réductif connexe, $\mathbb{C}[G]$ factoriel, et H sous-groupe fini de G :

$$\boxed{\mathcal{O}^U = \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U_{\mathcal{M}^U}}$$

Preuve : Il s'agit de montrer l'inclusion $\mathcal{O}^U \subset \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U_{\mathcal{M}^U}$. Posons $A = \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$, $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathring{\mathrm{X}})$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathring{\mathrm{X}})$. Par définition on a

$$\begin{aligned} A &= \bigcap_{w\in\mathcal{W}} \mathcal{O}_w \cap \bigcap_{D\in\mathcal{R}} \mathcal{O}_{v_D} \cap \bigcap_{D\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^B} \mathcal{O}_{v_D} \\ &= \{f \in \mathbb{C}(G/H) \ / \ \langle \mathcal{W} \cup \mathcal{R} \cup (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^B), f\rangle \geq 0\} \end{aligned}$$

A est donc l'ensemble des élements f de $\mathbb{C}(G)$ qui s'écrivent sous la forme $f = gh$ avec $g \in \mathbb{C}[G]^{(H)}$, $h \in \mathbb{C}(G)^{(B\times H)}$, $\chi_g = -\chi_h$ (caractère de H), $\langle \mathcal{R}, h\rangle \geq 0$ et $\langle \mathcal{W}, f\rangle \geq 0$.

Soit $F = \frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{O}^U$ avec $f_1 \in A$ et $f_2 \in A \setminus \mathcal{M}$. Ecrivons $f_1 = g_1h_1$ et $f_2 = g_2h_2$ avec $f_i \in \mathbb{C}[G]^{(H)}$ et $h_i \in \mathbb{C}(G)^{(B\times H)}$ comme précédemment. Si $d = \mathrm{pgcd}\,(g_1, g_2)$, $g_1 = dg_1'$ et $g_2 = dg_2'$ dans $\mathbb{C}[G]$, alors on a encore $d, g_1', g_2' \in \mathbb{C}[G]^{(H)}$. Puisque F, h_1, h_2 sont invariants par U on a $\frac{g_1'}{g_2'}$ (irréductible dans $\mathbb{C}[G]$) invariant par U et donc $g_1', g_2' \in \mathbb{C}[G]^{U\times(H)}$.

En résumé F s'écrit sous la forme $\frac{dk_1}{dk_2}$ avec $d \in \mathbb{C}[G]^{(H)}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{C}[G]^{U\times(H)}$, $\chi_d = -\chi_{k_1} = -\chi_{k_2}$, $\langle \mathcal{R}, \{k_1, k_2\}\rangle \geq 0$, $\langle \mathcal{W}, \{dk_1, dk_2\}\rangle \geq 0$ et $\langle v_0, dk_2\rangle = 0$.

Pour terminer la preuve il suffit de remplacer d par $d' \in \mathbb{C}[G]^{U\times(H)}$ tel que $\chi_{d'} = \chi_d$, $\langle v, d'\rangle \geq \langle v, d\rangle$ pour tout $v \in \mathcal{W}$ et $\langle v_0, d'\rangle = \langle v_0, d\rangle$ ce qui assurera que $d'k_1 \in A^U$ et $d'k_2 \in A^U \setminus \mathcal{M}^U$.

Décomposons le G-module $\langle G.d\rangle$ sous la forme $\bigoplus_{i=1}^N \langle G.d_i\rangle$ où $d_i \in \langle G.d\rangle^{(B)}$ et choisissons $d' \in \{d_i\}$ tel que $\langle v_0, d'\rangle$ soit minimum. On a $\langle G.d\rangle \subset \mathbb{C}[G]^{(H)}_{\chi_d}$ donc $\chi_{d'} = \chi_d$. De plus $\langle v, f\rangle \geq \langle v, d\rangle$ pour tout $f \in \langle G.d\rangle$ et $v \in \mathcal{V}$ donc $\langle v, d'\rangle \geq \langle v, d\rangle$ pour tout $v \in \mathcal{W}$ et $\langle v_0, d'\rangle \geq \langle v_0, d\rangle$. Enfin $\langle v_0, d\rangle \geq \min\{\langle v_0, d_i\rangle\} = \langle v_0, d'\rangle$ d'où $\langle v_0, d\rangle = \langle v_0, d'\rangle$.

□

Par définition, une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ de type I vérifie $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^B \neq \mathbb{C}$ et une B-carte de type II vérifie $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^B = \mathbb{C}$. Précisons le premier cas.

Lemme B.0.3 *Soit $\mathring{X}$ une B-carte de type I et t, e_ω un choix de paramètres pour l'hyperespace tel que les cônes plats de l'hypercône $\mathcal{C}$ associé à $\mathring{X}$ soient $\mathcal{C}_{x_1}, \ldots, \mathcal{C}_{x_N}$ avec $x_1 = \infty$. Alors $\mathbb{C}[\mathring{X}]^B = \mathbb{C}[t]_h$ avec $h = (t - x_2) \ldots (t - x_N)$.*

Preuve : Un élément f de $\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^B$ est de la forme $f(t) = \prod (t - x)^{m_x}$, $m_x \in \mathbb{Z}$ avec $\langle \mathcal{C}, f \rangle \geq 0$. Si $v = (x, \delta, l) \in \mathcal{C}_x$ on a $\langle v, f \rangle = \delta m_x + l.0 = \delta m_x \geq 0$. Or, d'après l'hypothèse on a que pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{x_2, \ldots, x_N\}$ il existe $v = (x, \delta, l) \in \mathcal{C}_x$ avec $\delta > 0$. Donc $f \in \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^B$ si et seulement si $m_x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{C} \in \mathbb{C} \setminus \{x_2, \ldots, x_N\}$ c'est-à-dire si $f \in \mathbb{C}[t]_{(t-x_1)\ldots(t-x_N)}$.

□

Comme application on a le lemme suivant qui permet de donner une définition simple du type (I ou II) d'un SL_2-germe $\mathcal{O}$ en fonction de son anneau $\mathcal{O}^B$:

Lemme B.0.4
Si $\mathcal{O}$ est un SL_2-germe de type I alors $\mathcal{O}^B = \mathbb{C}[t]_{(t)}$ avec t tel que $\mathbb{C}(SL_2/H)^B = \mathbb{C}(t)$.

Preuve : Choisissons des paramètres t, e_ω pour l'hyperespace et une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ de type I tels que :

- l'hypercône $\mathcal{C}$ associé à $\mathring{\mathrm{X}}$ a pour unique cône plat $\mathcal{C}_\infty$.
- $\mathcal{O} = \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]_{\mathcal{M}}$ avec $\mathcal{M} = m_{v_0} \cap \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]$ où v_0 appartient à l'intérieur du cône $\mathcal{C}_0$.

Soit $f \in \mathcal{O}^B$. Puisque $\mathcal{O}^B = (\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]_{\mathcal{M}})^B \subset (\mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]_{\mathcal{M}})^U = \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U_{\mathcal{M}^U}$ on peut écrire $f = \frac{\sum p_i e^i_\omega}{\sum p_j e^j_\omega}$ avec $p_i, q_j \in \mathbb{C}(t)$, $p_i e^i_\omega \in \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^U$et $q_j e^j_\omega \in \mathcal{M}^U$. La condition $f \in \mathbb{C}(SL_2/H)^B$ donne en particulier $f p_0 = q_0$ d'où $f = \frac{f p_0}{q_0}$ avec $p_0 f \in \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^B = \mathbb{C}[t]$ et $q_0 \in \mathbb{C}[\mathring{\mathrm{X}}]^B \setminus \mathcal{M}^B$. Cette dernière condition se traduit par $\langle v_0, p_0 \rangle = 0$ c'est-à-dire $p_0 \in \mathbb{C}[t] \setminus (t)$ d'où $f \in \mathbb{C}[t]_{(t)}$.

□

Annexe C

étude de la lissité de $\overline{Sl_2.e}/H$

Cette annexe complète le § 6.8.4 p. 124 dont elle reprend les résultats et les notations. On y fait, à titre d'exemple, l'étude explicite de la lissité des plongement de la forme $\overline{Sl_2.e}/H$ avec H cyclique d'ordre pair

Soit $n \geq 3$, H un sous-groupe d'ordre pair de SL_2 et $\widetilde{H}$ son image dans $SL_2/\{\pm Id\}$. Pour que l'action par translation à droite de H sur SL_2 se prolonge à $\overline{Sl_2.e}$ avec $e \in (\mathbb{P}^1)^n$ il faut choisir $e = (e_1, \ldots, e_n)$ avec $\{e_i\} \subset \mathbb{P}^1$ stable sous l'action de H.

C.1 Si H est cyclique d'ordre $2(n-2)$ avec $n \geq 3$ alors $\overline{Sl_2.e}/H$ est lisse

On suppose que H est cyclique d'ordre $2(n-2)$ et que son image $\widetilde{H}$ (d'ordre $n-2$) dans $PSL_2 \cong SL_2/\{\pm Id\}$ est engendrée par $z \mapsto \varepsilon z$ avec $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{n-2}i}$. Puisque $\overline{Sl_2.e}$ est inclus dans $(\mathbb{P}^1)^n$ et que l'ensemble des coordonnées de e est formé d'orbites de $\mathbb{P}^1$ sous l'action de H on peut supposer que $e = (0, \infty, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-3}) \in (\mathbb{P}^1)^n$ (notation : x pour $\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1$ et ∞ pour $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$).

$\overline{Sl_2.e}/H$ est la variété du plongement minimal n°7 de la liste des plongements minimaux pour H cyclique pair. Nous allons donc redémontrer sa lissité avec cette nouvelle description.

$\widetilde{H}$ peut être identifié au sous-groupe de S_n (permutations de $\{1, \ldots, n\}$) engendré par le cycle $(3, 4, \ldots, n)$.

En reprenant les notations du § 6.8.4 p. 124, on a :

Proposition 14 *l'idéal m est engendré par les trois éléments $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{x}_3 + \ldots + \widetilde{x}_n$. En particulier le plongement homogène correspondant $X = \overline{Sl_2.e}/H$ de SL_2/H est lisse.*

Preuve : l'idéal I étant homogène (définition de I p. 126), la graduation de $\mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]$ passe au quotient $\mathbb{C}[\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{x}_3, \ldots, \widetilde{x}_n] = \mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]/I$ et si $(m/m^2)_n$ est l'espace vectoriel des éléments (nuls ou) homogènes de degré n de m/m^2 alors $m/m^2 = \bigoplus_{n\geq 0}(m/m^2)_n$.

On notera dorénavant de la même façon un polynôme de $\mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]$ et son image dans $\mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]/I$ (donc sans tilde), quand le contexte permet de lever l'ambiguïté. D'après la section précédente on sait que m est engendré par les éléments de la forme :

$$p_{ij\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}} = \sum_{\sigma\in H} q^\sigma = \sum_{\sigma\in H}(x^i y^j x_3^{\alpha_3}\ldots x_n^{\alpha_n})^\sigma = x^i y^j \sum_{\sigma\in H}(x_3^{\alpha_3}\ldots x_n^{\alpha_n})^\sigma$$

Pour prouver la lissité de X il suffit donc de montrer que tous ces éléments sont dans l'idéal $\mathcal{N} = (x, y, x_3 + \ldots + x_n)$ de $\mathbb{C}[V]^H$.

On étudie dans l'ordre le cas $q = x_{\gamma(3)}\ldots x_{\gamma(k)}$ ($k = 3, \ldots n$ et γ un élément de l'ensemble S_{n-2} des permutations de $\{3, \ldots, n\}$), puis le cas $q = x_3^\beta$ et enfin le cas général.

Supposons donc $q = x_{\gamma(3)}\ldots x_{\gamma(k)}$.

Par substitutions successives dans q des produits $x_i x_j$ à l'aide des formules 6.11 p. 126 on a, dans $\mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]$: $q = \alpha_0(x, y)+\alpha_3(x, y)x_{\gamma(3)}+\ldots+\alpha_n(x, y)x_{\gamma(n)}+F$ avec $F \in I$.

I est invariant par H (comme V) donc on a, cette fois dans $\mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]/I$:

$$\begin{array}{rl} p & = \sum_{\sigma\in H}\left(\alpha_0(x, y) + \alpha_3(x, y)x_{\gamma(3)} + \ldots + \alpha_n(x, y)x_{\gamma(n)}\right)^\sigma \\ & = (n-2)\alpha_0(x, y) + (\alpha_3(x, y) + \ldots + \alpha_n(x, y))\left(\sum_{k=0}^n x_k\right) \end{array}$$

et donc $p \in \mathcal{N}$.

Supposons maintenant $q = x_3^\beta$.

$p = \sum_{l=3}^n x_l^\beta$ s'écrit comme un polynôme en les polynômes symétriques élémentaires $p_k = \sum_{\gamma\in S_{n-2}} (x_3\ldots x_k)^\gamma$ $(k = 3, \ldots, n)$.

Soit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{(n-1)!}\} = \Gamma$ un ensemble de représentants des classes à gauche de S_{n-2} sous l'action de H. On a :

$$q_k = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{\sigma\in H}(x_3\ldots x_k)^{\sigma\gamma} = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{\sigma\in H}(x_{\gamma(3)}\ldots x_{\gamma(k)})^\sigma$$

D'après le cas précédent q_k et donc p appartiennent à $\mathcal{N}$.

Supposons enfin q quelconque.

Le calcul du reste de q dans la base de Gröbner (F_{ij}) (substitution des produits $x_i x_j$ à l'aide des formules 6.11) donne dans $\mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]$:

$$q = x^i y^j x_3^{\alpha_3}\ldots x_n^{\alpha_n} = p_0(x, y) + \sum_{k=3}^n \sum_{1\leq\beta\leq d} p_{k,\beta}(x, y)x_k^\beta + F \quad \text{avec } F \in I$$

soit dans $\mathbb{C}[x, y, x_3, \ldots, x_n]/I$:

$$p = (n-2)\, p_0(x,y) + \sum_{k=3}^{n} \sum_{1 \leq \beta \leq d} \left(p_{k,\beta}(x,y) \sum_{l=3}^{n} x_l^{\beta} \right)$$

et donc $p \in \mathcal{N}$.

□

C.2 Plongements singuliers de la forme $\overline{Sl_2.e}/H$

soit un H un groupe cyclique d'ordre pair et $e = (e_1, \ldots, e_n) \in (\mathbb{P}^1)^n$ tel que $\{c_i\}$ soit une réunion d'orbites sous l'action de H (ou $\widetilde{H}$) sur $\mathbb{P}^1$.

Si l'on a quatre H-orbites ou plus dans $\{e_i\}$, on aura au moins quatre invariants de degré 1 dans $\mathbb{C}[V]^H$ qui seront alors linéairement indépendants dans m/m^2 puisque l'idéal I est engendré par des éléments homogènes de degré 2 (les F_{ij}). La dimension de m/m^2 sera supérieure à 3 et le quotient $\overline{Sl_2.e}/H$ sera singulier.

En tenant compte de la nature des sous-groupes cycliques de $SL_2(\mathbb{C})$ il ne reste donc à étudier que les cas suivants :

1. $\widetilde{H}$ est d'ordre n et engendré par $(1 \ldots n) \in S_n$. Les coordonnées de e forment une seule orbite.
2. $\widetilde{H}$ est d'ordre n-1 et engendré par $(2 \ldots n-1)$. Les coordonnées de e forment une seule orbite.
3. $\widetilde{H}$ est d'ordre n/2 et engendré par $\left(1 \ldots \frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1 \ldots n\right)$. Les coordonnées de e forment deux orbites.
4. $\widetilde{H}$ est d'ordre (n-1)/2 et engendré par $\left(2 \ldots \frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{n-1}{2}+2 \ldots n\right)$. Les coordonnées de e forment deux orbites.
5. $\widetilde{H}$ est d'ordre n/3 et engendré par $\left(1 \ldots \frac{n}{3}\right)\left(\frac{n}{3}+1 \ldots \frac{2n}{3}\right)\left(\frac{2n}{3}+1 \ldots n\right)$. Les coordonnées de e forment trois orbites.

La méthode de calcul est la suivante :

Soit H_i le sous espace vectoriel des éléments homogènes de degré i de m/m^2. Une base de H_1 est toujours facile à obtenir. Par ailleurs les H_i sont supplémentaires. Si on trouve dans H_2 suffisamment d'éléments linéairement indépendants pour que la dimension de $H_1 \oplus H_2$ soit au moins 4 on a fini. Sinon on cherche d'abord une base de H_2 afin de faciliter la recherche d'éléments indépendants dans H_3.

Un élément de degré i dans m^2 est une combinaison linéaire de produits dont les facteurs (au moins deux) appartiennent à un système de représentants des éléments choisis comme base des H_j pour $j < i$. Pour le voir, il suffit de remarquer que m est

engendré comme idéal par des générateurs de l'agèbre de type fini $\mathbb{C}[V]^H$ et que les représentants précédents peuvent êre pris parmi ces mêmes générateurs.

Pour vérifier que $p_1, \ldots, p_q$ sont indépendants dans H_i on écrit donc une égalité dans $\mathbb{C}[V]^H \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ (on prend dans cette section $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour coordonnées dans $\mathbb{C}^n$ car x, y sont utilisés à d'autres fins) entre une combinaison linéaire des p_j et une combinaison linéaire des représentants décrits ci-dessus.

On teste cette égalité sur $\overline{\Delta_s} = \{(y, \ldots, y, \overset{s}{x}, y, \ldots, y),\ x, y \in \mathbb{C}\} \subset V$ pour différentes valeurs de s. Si cela ne suffit pas on égalise ensuite les restes de chaque membre de l'égalité dans la base de Gröbner (F_{ij}).

Nous ne traiterons que le premier cas à titre d'exemple (il contient les principales difficultés).

Lemme C.2.1 *Soit H le sous-groupe de SL_2 d'ordre $2n$ engendré par $\left(\begin{smallmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ où $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ et $e = (1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}) \in (\mathbb{P}^1)^n$. Alors le quotient $\overline{Sl_2.e}/H$ est singulier.*

Preuve : considérons les éléments suivants de $\mathbb{C}[V]^H$:

$$p_1 = \sum_{\sigma \in H} x_1^\sigma \quad p_2 = \sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2)^\sigma \quad p_3 = \sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2 x_3)^\sigma \quad p_4 = \sum_{\sigma \in H} (x_1^2 x_2)^\sigma$$

Il suffit de montrer que p_1, p_2, p_3, p_4 sont linéairement indépendants dans m/m^2.

p_1 est une base de H_1. Prouvons que p_2 est une base de H_2.

Tout d'abord p_2 est non nul dans m/m^2. Sinon on aurait $\sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2)^\sigma = a \left(\sum_{\sigma \in H} x_1^\sigma\right)^2$ dans $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ i.e $\sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2)^\sigma = a \left(\sum_{\sigma \in H} x_1^\sigma\right)^2$ sur $Z(I) = V$. Cette égalité aurait lieu en particulier sur $\overline{\Delta_1} = \{(x, y, \ldots, y),\ x, y \in \mathbb{C}\}$:

$$(n-2)\, y^2 + 2xy = a\left((n-1)\, y + x\right)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{C}$$

ce qui est impossible.

Montrons ensuite que H_2 est engendré par p_2.

Ce sous-espace est engendré par les éléments $\sum_{\sigma \in H} (x_1 x_i)^\sigma \quad i = 1, \ldots, n-1$. Prouvons que chacun d'eux est dans $\langle p_2 \rangle$.

On a en premier lieu

$$\sum_{\sigma \in H} (x_1 x_3)^\sigma = \sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2)^\sigma$$

dans m/m^2, et même dans $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$, c'est à dire :

$$\sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2)^\sigma - \sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2)^\sigma \in I$$

Pour le prouver il suffit de montrer que le reste dans la base de Gröbner (F_{ij}) est nul (

Pour ce faire on va écrire autrement les formules 6.11 p. 126.
Pour des c_i distincts dans $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ on pose

$$\boxed{b(c_1, c_2, c_3, c_4) = \frac{(c_1 - c_3)(c_2 - c_4)}{(c_1 - c_4)(c_2 - c_3)} \quad \text{(birapport)}}$$

on aura besoin des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} b(c_1, c_3, c_2, c_4) &= 1 - b(c_1, c_2, c_3, c_4) \\ b(c_1, c_2, c_4, c_3) &= \frac{1}{b(c_1, c_2, c_3, c_4)} \\ b(c_1, c_3, c_4, c_2) &= \frac{1}{1 - b(c_1, c_2, c_3, c_4)} \\ b(c_1, c_4, c_3, c_2) &= \frac{-b(c_1, c_2, c_4, c_3)}{1 - b(c_1, c_2, c_3, c_4)} \end{aligned}$$

On pose :

$$\boxed{e_i = \begin{bmatrix} 1 \\ c_i \end{bmatrix} \text{ avec } c_i \in \overline{\mathbb{C}}}$$

Pour $3 \leq i \neq j \leq n$ cela donne :

$$\begin{aligned} F_{ij} &= (x - x_i)(y - x_j) - b(c_1, c_2, c_i, c_j)(x - x_j)(y - x_i) \quad \text{(à coefficient près)} \\ &= (1 - b(c_1, c_2, c_i, c_j))(xy + x_i x_j) - y x_i - x x_j + b(c_1, c_2, c_i, c_j)(x x_i + y x_j) \end{aligned}$$

et, dans $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$:

$$\begin{aligned} x_i x_j = -xy + \frac{1}{1 - b(c_1, c_2, c_i, c_j)} y x_i - \frac{b(c_1, c_2, c_i, c_j)}{1 - b(c_1, c_2, c_i, c_j)} x x_i + \\ \frac{1}{1 - b(c_1, c_2, c_i, c_j)} x x_j - y x_j \frac{b(c_1, c_2, c_i, c_j)}{1 - b(c_1, c_2, c_i, c_j)} \end{aligned}$$

$$x_i x_j = -xy + b(c_1, c_i, c_j, c_2) y x_i + b(c_1, c_j, c_i, c_2) x x_i + b(c_1, c_i, c_j, c_2) x x_j + b(c_1, c_j, c_i, c_2) y x_j$$

soit, en notant $s_{ij} = b(c_1, c_i, c_j, c_2)$ et $\alpha_{ij} = s_{ij} y + s_{ji} x$

$$\begin{aligned} x_i x_j &= -xy + s_{ij} y x_i + s_{ji} x x_i + s_{ij} x x_j + s_{ji} y x_j \\ &= -xy + \alpha_{ij} x_i + \alpha_{ji} x_j \end{aligned} \tag{C.1}$$

On peut vérifier que ces égalités sont encore vraies pour i ou j $(\neq i)$ égal à 1 ou 2.

Revenons maintenant au calcul du reste de $\sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2)^\sigma - \sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2)^\sigma$ dans la base de Gröbner (F_{ij}) :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in H} (x_1 x_2)^\sigma &= \sum_{i=1}^{n} x_i x_{r(i)} \qquad (r = (1 \ldots n) \in S_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(-xy + s_{i,r(i)} y x_i + s_{r(i),i} x x_i + s_{i,r(i)} x x_{r(i)} + s_{r(i),i} y x_{r(i)} \right) \end{aligned}$$

et

$$\sum_{\sigma\in H}(x_1x_3)^\sigma=\sum_{i=1}^{n}\left(-xy+s_{i,r^2(i)}yx_i+s_{r^2(i),i}xx_i+s_{i,r^2(i)}xx_{r^2(i)}+s_{r^2(i),i}yx_{r^2(i)}\right)$$

d'où

$$\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2)^\sigma-\sum_{\sigma\in H}(x_1x_3)^\sigma=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(s_{r(i),i}+s_{r^{-1}(i),i}-s_{r^2(i),i}-s_{r^{-2}(i),i}\right)xx_i+\ldots\right.$$
$$\left.\left(s_{i,r(i)}+s_{r^{-1}(i),i}-s_{i,r^2(i)}-s_{i,r^{-2}(i)}\right)yx_i\right]$$

or $s_{ji}=b(c_1,c_j,c_i,c_4)=1-b\left(c_1,c_i,c_j,c_4\right)=1-s_{ij}$ donne

$$\left(s_{i,r(i)}+s_{r^{-1}(i),i}-s_{i,r^2(i)}-s_{i,r^{-2}(i)}\right)=-\left(s_{r(i),i}+s_{r^{-1}(i),i}-s_{r^2(i),i}-s_{r^{-2}(i),i}\right)$$

d'où :

$$\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2)^\sigma-\sum_{\sigma\in H}(x_1x_3)^\sigma=\sum_{i=1}^{n}\left(s_{r(i),i}+s_{r^{-1}(i),i}-s_{r^2(i),i}-s_{r^{-2}(i),i}\right)(x-y)\,x_i$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}s_{ij}&=b(c_1,c_i,c_j,c_2)=b\left(1,\omega^{i-1},\omega^{j-1},\omega\right)\\&=\frac{\left(1-\omega^{j-1}\right)\left(\omega^{i-1}-\omega\right)}{\left(1-\omega\right)\left(\omega^{i-1}-\omega^{j-1}\right)}=\frac{\left(1-\omega^{j-1}\right)\left(1-\omega^{i-2}\right)}{\left(1-\omega\right)\left(\omega^{j-2}-\omega^{i-2}\right)}\end{aligned}$$

permet d'écrire, en tenant compte de $\omega^n=1$

$$s_{r(i),i}=s_{i+1,i}\quad s_{r^{-1}(i),i}=s_{i-1,i}\quad s_{r^2(i),i}=s_{i+2,i}\quad s_{r^{-2}(i),i}=s_{i-2,i}$$

donc $s_{r(i),i}+s_{r^{-1}(i),i}-s_{r^2(i),i}-s_{r^{-2}(i),i}$ est égal à :

$$\begin{aligned}&\frac{\left(1-\omega^{i-1}\right)\left(1-\omega^{i-1}\right)}{\left(1-\omega\right)\left(\omega^{i-2}-\omega^{j-1}\right)}+\frac{\left(1-\omega^{i-1}\right)\left(1-\omega^{i-3}\right)}{\left(1-\omega\right)\left(\omega^{i-2}-\omega^{i-3}\right)}+\ldots\\&\quad\frac{\left(1-\omega^{i-1}\right)\left(1-\omega^{i}\right)}{\left(1-\omega\right)\left(\omega^{i-2}-\omega^{i}\right)}+\frac{\left(1-\omega^{i-1}\right)\left(1-\omega^{i-4}\right)}{\left(1-\omega\right)\left(\omega^{i-2}-\omega^{i-4}\right)}\\&=\frac{\left(1-\omega^{i-1}\right)}{\left(1-\omega\right)^2\omega^{i-2}\left(1+\omega\right)}\omega\left(\omega^{i-3}-1\right)\left(\omega+1\right)+\ldots\\&\left(1-\omega^{i-1}\right)\left(1+\omega\right)+\left(1-\omega^{i-4}\right)\omega^2-\left(1-\omega^{i}\right)\\&=0\end{aligned}$$

et on a donc bien $\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2)^\sigma - \sum_{\sigma\in H}(x_1x_3)^\sigma = 0$ dans $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$.

Montrons maintenant par récurrence sur i que $\sum_{\sigma\in H}(x_1x_i)^\sigma \in \langle p_2\rangle$ pour $i = 4,\dots,n-1$.

En développant $F_{i-1,i}$ on peut écrire dans $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$:

$$x_1x_i = ax_1x_2 + bx_1x_{i-1} + cx_2x_{i-1} + dx_2x_i + ex_{i-1}x_i \quad (a,b,c,d,e\in\mathbb{C})$$

donc

$$\sum_{\sigma\in H}(x_1x_i)^\sigma = (a+e)\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2)^\sigma + (b+d)\sum_{\sigma\in H}(x_1x_{i-1})^\sigma + e\sum_{\sigma\in H}(x_2x_{i-1})^\sigma$$

et $\sum_{\sigma\in H}(x_1x_i)^\sigma \in \langle p_2\rangle$.

Enfin le développement de $\left(\sum_{\sigma\in H}x_1^\sigma\right)^2$ donne immédiatement $\sum_{\sigma\in H}(x_1^\sigma)^2 \in \langle p_2\rangle$.

Pour terminer la preuve, il reste à montrer que $p_3 = \sum_{\sigma\in H}(x_1x_2x_3)^\sigma$ et $p_4 = \sum_{\sigma\in H}(x_1^2x_2)^\sigma$ sont indépendants dans H_3.

D'après ce qui précède une éventuelle relation serait de la forme

$$\lambda\left(\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2x_3)^\sigma\right) + \mu\sum_{\sigma\in H}(x_1^2x_2)^\sigma = a\left(\sum_{\sigma\in H}(x_1)^\sigma\right)^3 + b\left(\sum_{\sigma\in H}(x_1)^\sigma\right)\left(\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2)^\sigma\right)$$

En écrivant cette égalité sur $\overline{\Delta}_1 = \{(x,y,\dots,y),\ x,y\in\mathbb{C}\}$ on trouve $a=0,\ \lambda = 2b,\ \mu = b(n-2)$ ce qui donne

$$b\left[2\sum_{\sigma\in H}\left(x_1^2x_2\right)^\sigma + (n-2)\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2x_3)^\sigma - \sum_{\sigma\in H}(x_1)^\sigma\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2)^\sigma\right] \in I$$

il suffit donc de montrer que

$$2\sum_{\sigma\in H}\left(x_1^2x_2\right)^\sigma + (n-2)\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2x_3)^\sigma - \sum_{\sigma\in H}(x_1)^\sigma\sum_{\sigma\in H}(x_1x_2)^\sigma \notin I$$

et pour cela il suffit de vérifier que le reste dans la base (F_{ij}) est non nul.

Dans $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$ on a pour $i\neq j$:

$$\begin{aligned} x_i^2x_j &= x_i(x_ix_j)\\ &= x_i(-xy + \alpha_{ij}x_i + \alpha_{ji}x_j)\\ &= -xyx_i + \alpha_{ij}x_i^2 + \alpha_{ji}(-xy + \alpha_{ij}x_i + \alpha_{ji}x_j)\\ &= \alpha_{ij}x_i^2 + (-xy + \alpha_{ij}\alpha_{ji})x_i + \alpha_{ji}x_j^2 - \alpha_{ji}xy \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\sigma\in H}\left(x_1^2x_2\right)^\sigma=\sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i,i+1}x_i^2\right)+\sum_{i=1}^n A_ix_i+A \qquad (A,A_i\in\mathbb{C}\left[x,y\right])$$

de même, pour $i\neq j\neq k$:

$$\begin{aligned}x_ix_jx_k&=\left(-xy+\alpha_{ij}x_i+\alpha_{ji}x_j\right)x_k\\ x_ix_jx_k&=-xyx_k+\alpha_{ij}x_ix_k+\alpha_{ji}x_jx_k\\&=-xyx_k+\alpha_{ij}\left(-xy+\alpha_{ik}x_i+\alpha_{ki}x_k\right)+\alpha_{ji}\left(-xy+\alpha_{jk}x_j+\alpha_{kj}x_k\right)\\&=-\left(\alpha_{ij}+\alpha_{ji}\right)xy+\alpha_{ij}\alpha_{ik}x_i+\alpha_{ji}\alpha_{jk}x_j+\alpha_{kikj}x_k\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\sigma\in H}\left(x_1x_2x_3\right)^\sigma=B+\sum_{i=1}^n B_ix_i \qquad (B,B_i\in\mathbb{C}[x,y])$$

Enfin

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\sigma\in H}\left(x_1x_2\right)^\sigma\right)\left(\sum_{\sigma\in H}\left(x_1\right)^\sigma\right)&=\left(\sum_{i=1}^n x_ix_{r(i)}\right)\left(\sum_{i=1}^n s_j\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^n\left(-xy+\alpha_{i,i+1}x_i+\alpha_{i+1,i}x_{r(i)}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\\&=\left(-nxy+\sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i,i+1}+\alpha_{i,i-1}\right)x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\\&=-nxy\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{j\neq i}\left(\alpha_{i,i+1}+\alpha_{i,i-1}\right)x_ix_j+\\&\qquad\sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i,i+1}+\alpha_{i,i-1}\right)x_{i^2}\\&=\sum_{i=1}^n\left(\alpha_{i,i+1}+\alpha_{i,i-1}\right)x_{i^2}+C+\sum_{i=1}^n B_ix_i\end{aligned}$$
$$(C,C_i\in\mathbb{C}[x,y])$$

Le terme en x_i^2 dans

$$2\sum_{\sigma\in H}\left(x_1^2x_2\right)^\sigma+(n-2)\sum_{\sigma\in H}\left(x_1x_2x_3\right)^\sigma-\sum_{\sigma\in H}\left(x_1\right)^\sigma\sum_{\sigma\in H}\left(x_1x_2\right)^\sigma$$

est donc $2\alpha_{i,i+1} - (\alpha_{i,i+1} + \alpha_{i,i-1}) = \alpha_{i,i+1} - \alpha_{i,i-1}$ c'est à dire, en remplaçant α_{ij} par $\alpha_{ij} = s_{ij}y + s_{ji}x$ et s_{ij} par $\frac{(1-\omega^{j-1})(1-\omega^{i-2})}{(1-\omega)(\omega^{j-2}-\omega^{i-2})}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i,i-1} &= (x-y)\left(-\omega^{i-1} + \omega^{3i-2} + \omega^{2i-3} - \omega^{3i-4} - \omega^{2i-2} + \omega^{i+1} - \omega^{2i}\right) \\ &= (x-y)\,\omega^{i-1}(\omega-1)\,(\omega+1)\left(\omega^{i-2}-1\right)\left(\omega^{i-1}-1\right)\end{aligned}$$

Pour $i = n$,par exemple, ce terme est non nul. p_1, p_2, p_3, p_4 sont donc bien indépendants dans m/m^2.

□

Annexe D

Dimension de l'espace tangent

On a vu à la section 5.7 que si Y est une orbite de type I d'un plongement de SL_2/H quelconque alors Y intersecte une B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ telle que $\mathring{\mathrm{X}} \cong U \times (\mathring{\mathrm{X}}/U)$ et $\mathring{\mathrm{X}}/U$ soit une surface torique. Dans le cas où Y n'est pas régulière on a une singularité rationnelle au point fixe p de $\mathring{\mathrm{X}}/U$ [Ful]. On peut consulter le théorème 7 de [Tim2] pour un résultat de ce type dans le contexte plus général des plongements de G/H de complexité 1.

Si par contre Y est de type II, la nature de la singularité éventuelle de p dans $\mathring{\mathrm{X}}/U$ est moins évidente. Dans cette section nous allons montrer comment on peut cependant évaluer la dimension de l'espace tangent en p par un algorithme qui est une variante de celui applicable dans le cas torique et qui fait appel aux fractions continues de Hirzebruch-Jung [Ful, p. 46].

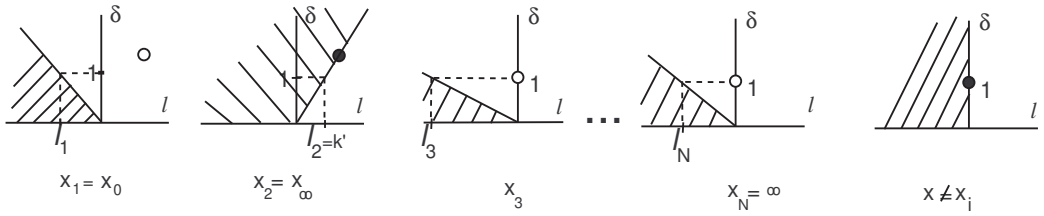
D.0.1 algorithme général

L'algorithme de calcul de la dimension de l'espace tangent s'obtient par application des formules (D.1), (D.2) et du lemme D.0.3. Il consiste essentiellement en le calcul de la dimension du sous-espace $\sum_{j\in\mathcal{P}(n)} f_j P_{a_j+a_{n-j}}$ dans l'espace vectoriel P_{a_n} de dimension fini (formule (D.2)). La remarque D.0.4 permet de prévoir le nombre de calculs nécessaires.

Supposons pour fixer les idées que H soit cyclique d'ordre pair $k = 2k'$ et que Y soit de type $A_M(j_1, \ldots, j_M\,; r_1, \ldots, r_M)$ où $j_1, \ldots, j_N$ sont M éléments de $\mathbb{P}^1/H$ et $r_1, \ldots, r_M$ sont M nombres rationnels tels que $r_i \in]-1; b(j_i)]$.

Si l'on fixe les paramètres t et e_ω (§ 5.4.1) la B-carte $\mathring{\mathrm{X}}$ qui intersecte Y définit un hypercône $\mathcal{C} = \bigcup_{x\in\mathbb{P}^1} \mathcal{C}_x$ de l'hyperespace. On sait que tous les cônes de $\mathcal{C}$ sont droits sauf un nombre fini d'entre eux et il n'y a pas de cône plat. Chaque cône $\mathcal{C}_x$ est alors engendré dans $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}$ par $(0,-1)$ et $(1, l_x)$ où $l_x \in \mathbb{Q}$ et les l_x sont nuls sauf un nombre fini : $l_{x_1}, \ldots l_{x_N}$. Les l_{x_i} doivent également vérifier la condition $\sum_{i=1}^{N} l_{x_i} < 0$. On a en général $N \neq M$.

Choisissons $e_\omega = g_0 g_\infty$ comme à la section 5.4.2 et prenons t tel que $x_N = \infty$. Dans l'exemple illustré par l'hypercône ci-dessous, $\{j_1, \ldots, j_M\}$ est formé de l'élément non générique $0 \in \mathbb{P}^1/H$ et de $M-1$ éléments génériques de $\mathbb{P}^1/H$. On a cependant $N = M+1$ du fait du cône $\mathcal{C}_{x_\infty}$ qui est non droit.



On a déjà vu (§ 5.6) que $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U\ ]$ est engendré par les éléments de la forme $\prod_{i=1}^N (t-x_i)^{m_i}\, e_\omega^n$ avec $m_i \geq -nl_i$ pour $i = 1, \ldots, N-1$ et $m_1 + \ldots + m_{N-1} \leq nl_N$.

Rappelons que $\sum l_i < 0$ implique en particulier que si $\prod_{i=1}^N (t-x_i)^{m_i}\, e_\omega^n$ appartient à $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U\ ]$ alors $n \leq 0$ (§ 5.6). L'entier n est le degré de $\prod_{i=1}^N (t-x_i)^{m_i}\, e_\omega^n$ correspondant à l'action de $T \cong \mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U\ ]$.

Soit $\mathcal{M}$ l'idéal maximal qui correspond au point fixe p de $\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U$, idéal engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les éléements $\prod_{i=1}^N (t-x_i)^{m_i}\, e_\omega^n$ de degré non nul de $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}}/U\ ]$.

Pour un entier positif n on note $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel des éléments (nuls ou) de degré $-n$ et on pose $\widetilde{\mathcal{M}}_n = \mathcal{M}_n / (\mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}^2)$.

Avec ces notations on a immédiatement

$$\boxed{\mathcal{M}/\mathcal{M}^2 = \bigoplus_{n=1}^\infty \widetilde{\mathcal{M}}_n} \tag{D.1}$$

Soit $\mathcal{P}$ le semi-groupe additif des entiers n tels que $a_n \geq 0$ et $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i, n-i \in \mathcal{P}$. Alors

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}}\big(\widetilde{\mathcal{M}}_n\big) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_n) - \dim_{\mathbb{C}}\Big(\sum_{i \in \mathcal{P}(n)} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_{n-i}\Big)} \tag{D.2}$$

où $\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j$ est l'espace vectoriel engendré par les produits $m_i m_j$ pour $m_i \in \mathcal{M}_i$ et $m_j \in \mathcal{M}_j$.

Posons $X = t$ et $Y = e_\omega$. Le résultat suivant est le premier pas vers le calcul de $\dim_{\mathbb{C}}\left(\widetilde{\mathcal{M}}_n\right)$.

Lemme D.0.2

On a $\mathcal{M}_n = F_n P_{a_n}$ *où* P_j *est l'espace vectoriel des polynômes en* X *de degré inférieur ou égal à* j *et* $F_n = Y^n \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{-[-l_i n]}$. *En particulier* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_n) = a_n + 1$ *avec*

$$a_n = \sum_{i=1}^{N} [-n l_i]$$

où $[x]$ *désigne la partie entière de* x.

Preuve : $\mathcal{M}_n$ est engendré par les éléments de la forme

$$\begin{aligned} f &= \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{m_i} Y^n = Y^n \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{-[-l_i n]} \\ &= \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{m_i + [-l_i n]} = F_n \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{\gamma_i} \end{aligned}$$

où l'on a posé $\gamma_i = m_i + [-l_i n]$ (≥ 0). Comme $\sum_{i=1}^{N-1} -[-n l_i] \leq \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i \leq [-n l_N]$ on a $\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i \leq \sum_{i=1}^{N} [-n l_i] = a_n$ et en développant $\prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{\gamma_i}$ on voit que $\mathcal{M}_n = F_n P_{a_n}$

□

On est maintenant en mesure de calculer la dimension de $\sum_{i \in \mathcal{P}(n)} \mathcal{M}_j \mathcal{M}_{n-j}$ et donc de $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ par simple algèbre linéaire dans un espace vectoriel de dimension fini avec le lemme suivant.

Lemme D.0.3 *Soit* $l_i = -\frac{p_i}{q_i}$ *pour* $i = 1, \ldots, N$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *on note* r_n^i *le reste de la division euclidienne de* np_i *par* q_i *et on pose,* $\forall\, n \in \mathcal{P} + \mathcal{P}$, $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$:

- $[r_n^i < r_j^i] = \begin{cases} 1 & si \quad r_n^i < r_j^i \\ 0 & si \quad r_n^i \not< r_j^i \end{cases}$ *(notation de Iverson [Kn, p. 24])*
- $f_j = \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{[r_n^i < r_j^i]}$

Alors

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} \left(\sum_{i \in \mathcal{P}(n)} \mathcal{M}_j \mathcal{M}_{n-j} \right) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\sum_{j \in \mathcal{P}(n)} f_j P_{a_j + a_{n-j}} \right)} \qquad \text{(D.3)}$$

Preuve : tout d'abord pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ il est facile de vérifier que $[-n l_i] - [-j l_i] - [-(n-j) l_i] = [r_n^i < r_j^i]$.

De $\mathcal{M}_j = Y^j F_j P_{a_j} = Y^j \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{-[-j l_i]} P_{a_j}$ (preuve du lemme D.0.2) on déduit que $\mathcal{M}_j \mathcal{M}_{n-j} = Y^n \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{-[-n l_i]} \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{[r_n^i < r_j^i]} P_{a_j + a_{n-j}} = F_n f_j P_{a_j + a_{n-j}}$.

□

Remarque D.0.4 *Ecrivons* $l_i = -\frac{p_i}{q_i}$ *irréductible et posons* $q = \mathrm{ppcm}\{q_1, \ldots, q_N\}$, $l_i = -\frac{s_i}{q}$. *On vérifie facilement que :* $a_q = \sum_{i=1}^N s_i \geq 1$, $a_{kq+m} = k\left(\sum_{i=1}^N s_i\right) + a_m$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et* $r^i_{n+q} = r^i_n$. *Les deux premiers points permettent de calculer facilement une valeur de* n *à partir de laquelle* $\dim_{\mathbb{C}}(\widetilde{\mathcal{M}}_n) = 0$. *En effet si* $a_m \geq 0$ *quand* $m \geq n_0$ *alors* $f_q P_{a_q + a_{n-q}} = P_{a_n}$ *et* $\widetilde{\mathcal{M}}_n = \{0\}$ *dès que* $n \geq q + n_0$.

D.0.2 Dimension de l'espace tangent et fractions continues

Dans certains cas le calcul de la dimension de $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ par l'égalité D.3 et de $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ par l'égalité D.1 se ramène au calcul d'un nombre fini de fractions continues de Hirzebruch-Jung.

Lemme D.0.5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{i=1}^N [-nl_i]$ *et* $\mathcal{P}(n) = \{i \in \{1, \ldots, n-1\} / a_i, a_{n-i} \geq 0\}$

1. *Si* $a_n + 1 \geq \sum_{i=1}^N \sup\{[r^i_n < r^i_j], j \in \mathcal{P}(n)\}$ *alors*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\widetilde{\mathcal{M}}_n) = \sum_{i=1}^N \inf\{[r^i_n < r^i_j], j \in \mathcal{P}(n)\}$$

2. *Supposons que* $a_n + 1 \geq N$ *pour tout* $n \geq 0$.*Alors :*

   (a) *Pour* $p, q \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ *et* $n \in \mathbf{N}$ *notons* r_n *le reste de la division euclidienne de* np *par* q *et posons* $\varphi(p,q)$ *=nombre des entiers* $n \geq 1$ *tels que* $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, r_n < r_i$. *Alors la dimension de* $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ *est égale à* $\sum_{i=1}^N \varphi(p_i, q_i)$ *avec* $l_i = -\frac{p_i}{q_i}$ *irréductible.*

   (b) *Soit*

$$-\frac{q}{p} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ldots - \cfrac{1}{a_l}}}$$

   la fraction continue de Hirzebruch-Jung de $-q/p$ *alors* $\varphi(p,q) = l$.

Preuve de la partie 1 du lemme D.0.5 :
Remplaçons $f_j = \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i)^{[r^i_n < r^i_j]}$ par

$$f_j = Z^{[r^N_n < r^N_j]} \prod_{i=1}^{N-1} (X - x_i Z)^{[r^i_n < r^i_j]} = \prod_{i=1}^{N} g_i^{[r^i_n < r^i_j]} \tag{D.4}$$

et P_n par l'espace R_n des formes homogènes en X, Z de degré n. L'égalité D.3 s'écrit alors

$$\dim_{\mathbb{C}}\Big(\sum_{i\in\mathcal{P}(n)}\mathcal{M}_j\mathcal{M}_{n-j}\Big)=\dim_{\mathbb{C}}\Big(\sum_{j\in\mathcal{P}(n)}f_jR_{a_j+a_{n-j}}\Big)$$

Commençons par démontrer le résultat général suivant :

Lemme D.0.6

Soit $f_1,\dots,f_k$ des polynômes homogènes en X,Z de degré inférieur ou égal à m.
On a

$$f_1R_{m-\deg(f_1)}+\ldots+f_kR_{m-\deg(f_k)}\subset\operatorname{pgcd}(f_1,\dots,f_k)R_{m-\deg(\operatorname{pgcd}(f_1,\dots,f_k))}$$

et si $\dim(R_m)=m+1\geq\deg(\operatorname{ppcm}(f_1,\dots,f_k))$ *alors*

$$f_1R_{m-\deg(f_1)}+\ldots+f_pR_{m-\deg(f_k)}=\operatorname{pgcd}(f_1,\dots,f_k)R_{m-\deg(\operatorname{pgcd}(f_1,\dots,f_k))}$$

Preuve : l'inclusion s'obtient en mettant en facteur $\operatorname{pgcd}(f_1,\dots,f_k)$ dans $f_1R_{m-\deg(f_1)}+\ldots+f_pR_{m-\deg(f_k)}$. Pour l'égalité il suffit de prouver le résultat dans le cas particulier $\operatorname{pgcd}(f_i)=1$, ce que nous supposerons. Enfin par une récurrence facile sur k on peut se ramener au cas $k=2$.

Considérons l'application linéaire Φ de $R_{m-\deg(f_1)}\times R_{m-\deg(f_2)}$ dans R_m qui à (a,b) associe af_1+bf_2.

Un élément (a,b) de son noyau vérifie $af_1=-bf_2$. Si $m\geq\deg(f_1)+\deg(f_2)=\deg(\operatorname{ppcm}(f_1,f_2))$, cela équivaut à l'existence de $c\in R_{m-\deg(f_1)+\deg(f_2)}$ tel que $a=cf_1$ et $b=-cf_2$. On a par conséquent la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\to&R_{m-(\deg(f_1)+\deg(f_2))}&\overset{\Psi}{\to}&R_{m-\deg(f_1)}\times R_{m-\deg(f_2)}&\overset{\phi}{\to}&R_m&\to&0\\&&c&\mapsto&(a,b)&\mapsto&af_1+bf_2&&\end{array}$$

qui permet de conclure rapidement.

□

Appliquons le lemme précédent à $\{f_j, j\in\mathcal{P}(n)\}$.

Comme $a_n+1\geq\sum_{i=1}^N\sup\{[r_n^i<r_j^i], j\in\mathcal{P}(n)\}=\deg\left(\operatorname{ppcm}\{f_j, j\in\mathcal{P}(n)\}\right)$, on a

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\big(\widetilde{\mathcal{M}}_n\big)&=\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{M}_n\right)-\dim_{\mathbb{C}}\Big(\sum_{j\in\mathcal{P}(n)}f_jR_{a_j+a_{n-j}}\Big)\\&=a_n+1-\left(a_n-\deg\left(\operatorname{pgcd}\{f_j,j\in\mathcal{P}(n)\}\right)+1\right)\\&=\sum_{i=1}^N\inf\{[r_n^i<r_j^i],j\in\mathcal{P}(n)\}\end{aligned}$$

Preuve de la partie 2 du lemme D.0.5 :

L'hypothèse entraîne $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$ d'où $\mathcal{P}(n) = \{1, \ldots, n-1\}$ et

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\widetilde{\mathcal{M}}_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \inf\{[r_n^i < r_j^i], 1 \leq j \leq n-1\}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \dim_{\mathbb{C}}\left(\widetilde{\mathcal{M}}_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{N} \inf\{[r_n^i < r_j^i], j = 1, \ldots, n-1\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{+\infty} \inf\{[r_n^i < r_j^i], j = 1, \ldots, n-1\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \varphi(p_i, q_i)
\end{aligned}$$

Le point 2.*b*) du lemme est une conséquence de la remarque suivante : si r est le reste de la division euclidienne de $-q$ par p alors $\varphi(p, q) = 1 + \varphi(r, q)$.

□

Bibliographie

[BLV] M. BRION, D. LUNA, Th. VUST, Espaces homogènes sphériques, *Invent. math.* **84** (1986), 617-632.

[Bou] BOURBAKI, Algèbre commutative, § 7, Diviseurs, Hermann (1965).

[Br] M. BRION, Variétés sphériques, *notes de la session de la S. M. F. "Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques"*, Grenoble 1997, 59 pages

[Ful] W. FULTON, Introduction to toric varieties, *The William H.Roever lectures in geometry,* Princeton University Press (1993).

[GKP] GRAHAM, KNUTH, PATASHNIK, Concrete mathematics, a foundation for computer science, second edition, Addison-Wesley publishing company (1994).

[I-P] A. IOZZI, J-PORITZ, Boundary compactifications of SL(2,$\mathbb{R}$) and SL(2,$\mathbb{C}$), *Forum Math.*, 11-3 (1999), 385-397.

[Kn] F. KNOP, Über Bewertungen, welche unter reduktiven Gruppe invariant sind, *Math. Ann.* **295**, (1993) 333-336.

[KKLV] F. KNOP, H. KRAFT, D. LUNA, et T. VUST, "Local properties of algebraic group actions", *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie* , DMV Seminar **13**, Birkhäuser, (1989), p. 77-88.

[K] H.KRAFT, Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, *Aspekte der Mathematik,* Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden (1985).

[LV] D. LUNA, Th. VUST, Plongements d'espaces homogènes, *Comment. Math. Helvetici* **58** (1983), 186-245.

[L] D.LUNA, Slices étales, *Bull. Soc. math. France* Mémoire **33** (1973), 81-105.

[L2] D.LUNA, Toute variété magnifique est sphérique, *Transformation groups,* **Vol. 1, n°3,** Birkhäuser Boston (1996), p. 249-258.

[M1] L. MOSER-JAUSLIN, Normal embeddings of $SL(2)/\Gamma$, Thèse de doctorat, Université de Genève (1987)

[M2] L. MOSER-JAUSLIN, Normal embeddings of $SL(2)$ and $PGL(2)$, *Journal of Algebra* **Vol. 132**, (1990)

[M3] L. MOSER-JAUSLIN, The Chow rings of smooth complete SL_2-embeddings, *Compositio Mathematica* **82** (1992), 67-106.

[Muk Um] S.MUKAI, H.UMEMURA, mimimal rational Threefolds, *Lectures Notes in Math* **1016** Springer Verlag, (1983) 490-518.

[Nak] T. NAKANO, On equivariant completions of 3-dimensional homogeneous spaces of SL_2, *Japan J. Math. Vol* **15,** No. 2 (1989).

[Oda] TADAO ODA, Convex bodies and algebraic geometry, an introduction to the theory of toric varieties, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge. Band 15,* Springer-Verlag (1988).

[Pop] V.L POPOV, Quasi-homogeneous affine algebraic varieties of the group SL(2), *Izv. Akad. Nauk SSSR ser Mat.* **37,** No 4. (1973), 793-831.

[Slo] P. SLODOWY, "Der Scheibensatz algebraische Transformationsgruppen", *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie* , DMV Seminar **13**, Birkhäuser, (1989), p. 89-113.

[Sp] T.A SPRINGER, Invariant theory, *Lecture notes in Mathematics* **585**, Springer-Verlag (1977).

[Tim] D.A TIMASHEV, Classification of G-varieties of complexity 1, *Izvestiya Mathematics* **61** (1997)]

[Tim2] D.A TIMASHEV, Cartier divisors and geometry of normal G-varieties (1999), à paraître.