HAL
open science

Contribution à l'Aanalyse des Bifurcations des Systèmes Non Linéaires: Application au Système Proie-Prédateur

Afef Ben Saad

To cite this version:

Afef Ben Saad. Contribution à l'Aanalyse des Bifurcations des Systèmes Non Linéaires: Application au Système Proie-Prédateur. Automatique / Robotique. Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie, 2019. Français. NNT : . tel-02899637

HAL Id: tel-02899637

https://theses.hal.science/tel-02899637v1

Submitted on 15 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES
APPLIQUEES ET DE TECHNOLOGIE

UNIVERSITE DE CARTHAGE

THESE DE DOCTORAT

Discipline : Informatique industrielle

par

Afef Ben Saad
Ingénieur INSAT

CONTRIBUTION A L'ANALYSE DES BIFURCATIONS DES SYSTEMES NON LINEAIRES: APPLICATION AU SYSTEME PROIE-PREDATEUR

Soutenue le 16 Novembre 2019 devant le jury composé de :

Mr. Hichem Kallel	Professeur, INSAT	**Président**
Mr. Tarak Damak	Professeur, ENIS	**Rapporteur**
Mme. Salwa Elloumi	Maître de conférences, ENICarthage	**Rapporteur**
Mr. Naceur BENHADJ BRAIEK	Professeur, ENSIT	**Examinateur**
Mme. Olfa Boubaker	Professeur, INSAT	**Directeur de thèse**

Unité de Recherche Energy, Robotics, Control and Optimization (ERCO)
Institut National des Sciences Appliquées et Technologie (INSAT)

© RYM BEN BOUBAKER

Année Universitaire 2019/2020

Dédicaces

A mes parents,
A mon frère et ma sœur,
A ma grande famille,
Je vous dédie ce travail

Remerciements

Ces travaux de recherche ont été réalisés au sein de l'unité de recherche Energie, Robotique, Contrôle et Optimisation (ERCO) à l'Institut National des Sciences Appliquées et Technologie (INSAT).

J'exprime mes sincères remerciements à ma directrice de thèse Madame Olfa Boubaker, Professeur à l'INSAT, pour son enthousiasme, sa disponibilité, ses qualités humaines et son soutien tout au long de mes années de thèse. Je tiens à lui remercier pour ses conseils qui m'ont grandement aidé à mener à bien mes travaux de recherche.

Je souhaite remercier très chaleureusement tous les membres de jury qui ont accepté d'évaluer mes travaux de recherche. Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Hichem Kallel, Professeur à l'INSAT, qui m'a fait l'honneur de présider le jury. Veuillez bien trouvez ici le témoignage de mon profond respect.

J'exprime mes vifs remerciements également à Madame Salwa Elloumi, Maître de conférences à l'ENICarthage, pour le temps consacré à l'évaluation de ma thèse. Veuillez bien trouver ici le témoignage de ma profonde estime.

Je tiens à remercier Monsieur Tarak Damak, Professeur à l'ENIS, pour m'avoir fait l'honneur en acceptant de rapporter ce travail. Veuillez bien trouver ici le témoignage de mon profond respect.

J'adresse ma profonde gratitude également à Monsieur Naceur Benhadj Braiek, Professeur à l'ENSIT, pour avoir accepté d'examiner ce modeste travail. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je ne peux pas clôturer ces remerciements sans exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Ali Hmidet pour ses remarques et ses conseils constructifs lors de la validation expérimentale des résultats. Enfin, ma gratitude va également à Monsieur Elhadj Zeraoulia, Professeur à l'université de Tébessa, pour sa collaboration et ses suggestions scientifiques enrichissantes.

Liste des Publications

I. Articles de Journaux Scientifiques (impactés & indexés)

1) A. Ben Saad, O. Boubaker,"Bifurcations, chaos and synchronization of a predator–prey system with Allee effect and seasonally forcing in prey's growth rate," The European Physical Journal Special Topics (EPJ-ST), Vol.227, 2018. DOI :10.1140/epjst/e2018-800022-0.

ISI Thomson Impact Factor : 1.947

2) A. Ben Saad, A. Hmidet, O. Boubaker,"Circuit design and experimental investigations for a predator-prey model," International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems (S2IS), Vol.11, N°1, 2018. DOI :10.21307/ijssis-2018-010.

Indexé ISI Thomson & Scopus

II. Chapitres d'ouvrages

1) A. Ben Saad, O. Boubaker, "A New fractional-order predator-prey system with Allee effect." In : A. Azar , S. Vaidyanathan, A. Ouannas (ed.), Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems, Springer, pp. 857-877, 2017. DOI :10.1007/978-3-319-50249-6.

2) A. Ben Saad, O. Boubaker, E. Zeraoulia,"Period-doubling bifurcation and chaos in a new algebraic structure of predator-prey BB-model," In : O. Boubaker, S. Jafari(ed.), Recent Advances in

Chaotic Systems and Synchronization, Elsevier Academic Press, pp.211-232, 2018. DOI : 10.1016/B978-0-12-815838-8.00011-X

III. Conférences internationales avec comité de lecture

1) A. Ben Saad, O. Boubaker, Z. Elhadj,"A predator-prey model with strong Allee effect and seasonally perturbation," 15ème IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD 2018), pp. 1145-1149, Yasmine Hammamet, 21-24 Mars 2018. DOI : 10.1109/SSD.2018.8570682

2) A. Ben Saad, O. Boubaker, "On bifurcation analysis of the predator-prey BB-model with weak allee effect," 16ème International IEEE Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), pp.19-23Monastir, 21-23 Décembre 2015. DOI :10.1109/STA.2015.7505150

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Sur l'analyse des bifurcations et des comportements chaotiques **5**

1.1 Introduction 6

1.2 Stabilité locale des systèmes non linéaires 6

1.2.1 Analyse des singularités 7

1.2.2 Portrait de phase 8

1.2.3 Attracteur 10

1.2.4 Équivalence topologique 12

1.3 Théorie des bifurcations 12

1.3.1 Définition 12

1.3.2 Bifurcation locale 13

1.3.3 Bifurcation globale 17

1.3.4 Analyse numérique des bifurcations 18

1.4 Théorie du Chaos 20

1.4.1 Définitions 20

1.4.2 Route vers le chaos 21

1.4.3 Signatures du chaos 21

1.5 Cas du modèle proie-prédateur 24

1.5.1 Modélisation des interactions 25

1.5.2 Modélisation des ressources extérieures 27

1.5.3 Modèle de Lotka Volterra 31

1.6 Contribution de la thèse 32
1.7 Conclusion 34

2 Contribution à l'analyse des bifurcations 35
2.1 Introduction 36
2.2 Modèle proie-prédateur de Bazykin-Berezovskaya 36
2.3 Analyse de la stabilité et des bifurcations du modèle . . 38
2.3.1 Modèle avec effet Allee Fort 38
2.3.2 Modèle avec effet Allee Faible 43
2.3.3 Modèle avec effet saisonnier 46
2.4 Étude comparative 52
2.5 Conclusion 55

3 Validation expérimentale et synchronisation chaotique 57
3.1 Introduction 58
3.2 Conception du circuit électrique équivalent 59
3.2.1 Conception du circuit via le logiciel MULTISIM . 59
3.2.2 Validation numérique sous MULTISIM 61
3.3 Validation expérimentale 67
3.3.1 Validation numérique et expérimentale des fonctions non linéaires 67
3.3.2 Validation expérimentale du système 70
3.4 Synchronisation chaotique 72
3.4.1 Position du problème 72
3.4.2 Synchronisation 77
3.4.3 Résultats de simulation 78
3.5 Conclusion 80

4 Modèle proie-prédateur avec polynômes d'ordres fractionnaires 81
4.1 Introduction 82
4.2 Proposition et analyse du premier modèle modifié 82
4.2.1 Modèle avec effet Allee Fort 83

4.2.2 Modèle avec effet Allee Faible 90
4.3 Proposition et analyse du second modèle modifié 93
4.3.1 Modèle avec effet Allee Fort 94
4.3.2 Modèle avec effet Allee Faible 101
4.3.3 Modèle avec effet saisonnier 108
4.4 Conclusion 116

Conclusion générale 117

Bibliographie 119

A Les diagrammes de bifurcations : Algorithmes MATLAB 131
A.1 Algorithme du diagramme de bifurcation relatif au système 2.5 dans le cas d'effet Allee Fort 132
A.2 Algorithme du diagramme de bifurcation relatif au système 2.5 dans le cas d'effet Allee Faible 132

Table des figures

1.1 Portrait de phase : (a) Noeud,(b) Foyer, (c) Selle et (d) Centre 9
1.2 Cycle limite : (a) Stable, (b) Instable et (c) Semi-stable 11
1.3 Tore 11
1.4 Attracteur de Lorenz 11
1.5 Bifurcation Transcritique 14
1.6 Bifurcation Nœud-Selle 15
1.7 Bifurcation de type Hopf : (a) Supercritique (b) Souscritique 16
1.8 Bifurcation de type cycle de point limite [Lange et al., 2013] 16
1.9 Cascade de la bifurcation de dédoublement de période . 17
1.10 Trajectoire homocline 18
1.11 Trajectoire hétérocline 18
1.12 Graphe de proximité pour le point de bifurcation point d'équilibre et cycle limite dans MATCONT (Les continuations numériques possibles à partir des différents points de bifurcation) 19
1.13 Route vers le chaos 21

2.1 Diagramme de bifurcation tridimensionnel du modèle proie-prédateur avec effet Allee Fort obtenu via le logiciel MATCONT 43

2.2 Diagramme de bifurcation tridimensionnel du modèle proie-prédateur avec effet Allee Faible obtenu via le logiciel MATCONT 46
2.3 Diagramme de bifurcation du système proie-prédateur forcé de façon saisonnière avec un effet Allee Fort pour m=0.75, $l = 0.5$ and λ=5 obtenu à l'aide du logiciel MATLAB . . 47
2.4 Diagramme de bifurcation du système proie-prédateur forcé de façon saisonnière avec effet Allee Faible pour m=0.4, $l = -0.2$ and λ= 5 48
2.5 Portrait de phase du système proie-prédateur forcé de façon saisonnière avec un effet Allee Fort 49
2.6 Portrait de phase du système proie-prédateur forcé de façon saisonnière avec un effet Allee Faible pour une seule condition initiale 50
2.7 Exposants de Lyapunov pour les deux cas d'effet Allee . 51
2.8 Portrait de phase du modèle BB avec effet Allee Fort et Faible 53
2.9 Diagramme de bifurcation bidimentionnel pour les deux types d'effet Allee 54

3.1 Circuit électrique équivalent du modèle proie-prédateur 3.1 pour $m = 0.2$ sous MULTISIM 60
3.2 Évolution temporelle du système proie-prédateur pour $m = 0.2$ obtenue via MULTISIM 61
3.3 Portrait de phase du système proie-prédateur pour m = 0.2 62
3.4 Évolution temporelle et portrait de phase du système proie-prédateur pour $m = 0.2$ obtenus via le logiciel MATCONT : (a) Proie, (b) Prédateur et (c) Portrait de phase 63
3.5 Évolution temporelle du système proie-prédateur pour $m = 0.4$ obtenue via le logiciel MULTISIM 63
3.6 Portrait de phase du système proie-prédateur pour $m = 0.4$ obtenu via le logiciel MULTISIM 64

3.7 Évolution temporelle et portrait de phase du système proie-prédateur pour $m = 0.4$ obtenus via le logiciel MATCONT : (a) Proie, (b) Prédateur et (c) Portrait de phase 65
3.8 Évolution temporelle du système proie-prédateur pour $m = 0.6$ obtenue via le logiciel MULTISIM 65
3.9 Portrait de phase du système proie-prédateur pour $m = 0.6$ obtenu via MULTISIM 66
3.10 Évolution temporelle et portrait de phase du système proie-prédateur pour m=0.6 obtenus via le logiciel MATCONT : (a) Proie, (b) Prédateur et (c) Portrait de phase 66
3.11 Circuit équivalent de la fonction non linéaire x^2 68
3.12 Circuit équivalent de la fonction non linéaire x^3 69
3.13 Résultats de la simulation de la fonction x^2 69
3.14 Résultats de la simulation de la fonction x^3 70
3.15 Implémentation du circuit équivalent de la fonction x^2 . 70
3.16 Implémentation du circuit équivalent de la fonction x^3 . 71
3.17 Résultats expérimentaux de la fonction x^2 71
3.18 Résultat expérimental de la fonction x^3 71
3.19 Validation expérimentale du système proie-prédateur à l'aide de la technologie STM 73
3.20 Évolution temporelle et portrait de phase expérimental pour $m = 0.2$ 74
3.21 Évolution temporelle et portrait de phase expérimental pour $m = 0.4$ 75
3.22 Évolution temporelle et portrait de phase expérimental pour $m = 0.6$ 76
3.23 Systèmes proie-prédateur non synchronisés avec un effet Allee Faible 79
3.24 Synchronisation du chaos des systèmes proie-prédateur avec un effet Allee Faible 79
3.25 Erreurs de synchronisation : Effet Allee Faible 80

4.1 Diagramme de Bifurcation du système (4.1) : Étude de cas d'effet Allee Fort 88
4.2 Diagramme de bifurcation du système (4.1) : Étude de cas d'effet Allee Faible 92
4.3 Singularités du point d'équilibre E_3 pour $m \in [l^{1/q_1}, 1]$ et $l \in]0\ 1[$: (a),(d) et (f) Foyer Stable si $q_1 < 1$, (b) Centre si $q_1 = 1$, (c),(e) et (g) Foyer Instable si $q_1 > 1$: Étude de cas d'effet Allee Fort 100
4.4 Diagramme de Bifurcation du system (4.2) : Étude de cas d'effet Allee Fort 102
4.5 Continuation numérique du système (4.2) pour q_2=0.5 : Effet Allee Fort 103
4.6 Diagramme de Bifurcation du système (4.2) : Étude de cas d'effet Allee Faible 107
4.7 Continuation numérique du système (4.2) à partir de la 1re bifurcation Hopf H_1 pour $q_2 = 0.5$: Étude de cas d'effet Allee Faible 109
4.8 Continuation Numérique du système (4.2) à partir de la 2me bifurcation Hopf H_1 pour $q_2 = 0.5$: Étude de cas d'effet Allee Faible 110
4.9 Continuation Numérique du système (4.2) pour $q_2 \neq 0.5$: Étude de cas d'effet Allee Faible 111
4.10 (a) Attracteur étrange en 3 dimensions (b) Projection de l'attracteur chaotique dans le plan $x_1 - x_2$, pour $\lambda = 5$: Étude de cas d'effet Allee Fort 113
4.11 Spectre d'exposant de Lyapunov de l'attracteur étrange du système (4.4) : Étude de cas d'effet Allee Fort 113
4.12 (a) Attracteur étrange en 3 dimension (b) Projection de l'attracteur chaotique dans le plan $x_1 - x_2$, pour $\lambda = 5$: Étude de cas d'effet Allee Faible 114

4.13 Spectre d'exposant de Lyapunov de l'attracteur étrange du système (4.4) : Étude de cas d'effet Allee Faible . . . 115

Liste des tableaux

1.1 Classification des singularités pour un système de second ordre [Gonze and Kaufman, 1961] 8

1.2 Signe des exposants de Lyapunov pour un système de dimension 3 23

1.3 Types de réponses fonctionnelles de Holling 27

2.1 Valeurs propres et singularités : Effet Allee Fort pour $m \in]0\ l[$ et $l \in]0\ 1[$ 41

2.2 Valeurs propres et singularités : Effet Allee Fort pour $m \in]l\ 1[$ et $l \in]0\ 1[$ 42

2.3 Valeurs Propres et singularités :Etude de cas d'effet Allee Faible $m \in]0\ 1[$ et $l \in]-1\ 0[$ 45

4.1 Valeurs propres et singularités : Effet Allee Fort pour $l \in]0\ 1[$ 85

4.2 Singularités du système 4.1 avec effet Allee Fort pour $m \in]0\ l[$ et $l = 0.5$ 87

4.3 Singularités pour un système 4.1 avec effet Allee Fort pour $m \in]l\ 1[$ et $l = 0.5$ 88

4.4 Singularités pour un système 4.1 avec effet Allee Fort pour $m \in]l\ 1[$ et $l = 0.5$ (Suite) 89

4.5 Valeurs propres et singularités du système (4.1) avec effet Allee Faible pour $m \in]0\ 1[$ et $l \in]-1\ 0[$ 90

4.6 Singularités du système (4.1) avec effet Allee Faible pour $m \in]0\ 1[$ et $l = -0.2$ 91
4.7 Valeurs propres : Effet Allee Fort $l \in]0\ 1[$ 96
4.8 Singularités : Effet Allee Fort pour $m \in [0, l^{\frac{1}{q_1}}]$ et $l \in]0\ 1[$ 98
4.9 Singularités : Effet Allee Fort pour $m \in [l^{1/q_1}, 1]$ et $l \in]0\ 1[$ 99
4.10 Valeurs propres :Etude de cas d'effet Allee Faible pour $m \in [0\ 1]$ 104
4.11 Singularités :Etude de cas d'effet Allee Faible pour $m \in [0\ 1]$ 105
4.12 Singularités :Etude de cas d'Effet Allee Faible pour $m \in [0, 1]$ (suite) 106

Introduction générale

La relation entre les systèmes naturels et leurs environnements est caractérisée par des dynamiques non linéaires complexes. Afin d'assurer une fidélité vis à vis du comportement réel, ces dynamiques sont souvent modélisées par des équations différentielles caractérisées par des termes non linéaires tels que les produits de variables ou leur fonctions polynomiales [Jordan and Smith, 1999, Verhulst, 2006]. Néanmoins, les non linéarités existantes dans un modèle rendent la résolution analytique difficile. De ce fait, une diversité d'outils numériques puissants et assez spécifiques a été proposée tel que la méthode du plan de phase appropriée pour les systèmes de second ordre [Lévine, 2004], les séries chronologiques, le diagramme de bifurcation, la sensibilité aux conditions initiales, le spectre et la dimension de Lyapunov.

D'autre part, les systèmes non linéaires peuvent admettre plusieurs points d'équilibre contrairement aux dynamiques linéarisées. Ces systèmes peuvent être aussi le siège d'oscillations caractérisées par leur amplitude et leur fréquence quelques soient les conditions initiales et sans l'apport d'excitations extérieures. Par conséquent, ces systèmes exhibent des comportements dynamiques plus complexes par rapport aux systèmes linéaires.

Récemment, une diversité de domaines d'application font appel à la théorie des systèmes non linéaires dont on peut citer particulièrement les domaines de la biologie, la médecine et l'écologie. Plusieurs travaux de recherche ont été développés dans ce sens pour analyser et contrôler les

interactions entre espèces dans l'écosystème [Dai et al., 2012, Khellaf and Hamri, 2010, Bhaya and Meza, 2012, Din et al., 2017] et les utiliser dans les systèmes d'aide à la décision. La compréhension des intéractions entre les populations conduit actuellement à de nombreux algorithmes d'optimisation importants [Chen et al., 2016, Das and Pal, 2019] basés sur des phénomènes naturels. Le modèle d'interaction le plus basique dans la nature est le modèle proie-prédateur [Bazykin et al., 1981]. Il est basé sur le modèle de Lotka Volterra assez célèbre dans la littérature [Volterra, 1926]. L'analyse de ces modèles peut aider à comprendre et contrôler les dynamiques indésirables des populations vivantes et même prédire et réduire la prolifération de certaines épidémies et catastrophes naturelles. Par ailleurs, le modèle de Lotka Volterra permet d'analyser l'effet des facteurs extérieurs. Parmi les effets les plus traités dans ce sens, nous pouvons citer l'effet retard [Huang et al., 2017, Jana et al., 2017], l'effet impulsif [Banerjee and Das, 2018, Li and Liu, 2016], l'effet Allee [Li and Wang, 2016, González-Olivares et al., 2017] et l'effet saisonnier [Levy et al., 2016]. Malgré qu'il existe quelques travaux de recherche dans ce sens, il n'existe pas à notre connaissance, des modèles qui ont réussi à analyser des dynamiques intégrant à la fois l'effet Allee et l'effet saisonnier. C'est dans le cadre de cette thèse que nous tenterons d'atteindre cet objectif.

D'autre part, la modélisation des systèmes proies-prédateurs par des polynômes d'ordres entiers permet de décrire un ensemble limité d'informations caractérisant le système à analyser. Les modèles polynomiaux ne sont pas capables de fournir toutes les données du système [Royston and Altman, 1994]. Pour atteindre cet objectif, la modélisation de ces systèmes par des polynômes d'ordres fractionnaires pourra étaler le domaine de l'information et faire apparaitre des comportements plus complexes [Gilmour and Trinca, 2005]. C'est dans ce contexte que nous proposerons de nouvelles structures pour les modèles proies-prédateurs considérés faisant appel à la théorie des systèmes d'ordres fractionnaires.

Notre contribution consiste à analyser les bifurcations et les comportements chaotiques d'un système proie-prédateur en intégrant de nouveaux facteurs et de nouvelles structures mathématiques du modèle dynamique en relation avec les cinétiques des populations. L'analyse d'un tel système exige d'étudier les zones où le comportement dynamique du système devient plus riche pour prédire sa complexité et contrôler sa divergence ou son déséquilibre. Par conséquent, nous avons l'intention de procéder en compliquant progressivement l'étude afin d'avoir une image complète sur le comportement dynamique en faisant apparaitre de nouveaux types de bifurcations. Cette analyse consiste à identifier les nouveaux types de bifurcation apparus suite aux modifications proposées en se basant sur la méthode du plan de phase, les attracteurs obtenus, le diagramme de bifurcation, l'exposant de Lyapunov ainsi que la dimension de Kaplan Yorke. Les facteurs qui vont être considérés dans ce travail sont l'effet Allee et l'effet saisonnier. Les dynamiques complexes obtenues, essentiellement chaotiques, vont être contrôlées par la suite pour stabiliser le système vers sa dynamique naturelle. D'autre part, afin de comprendre et de conceptualiser de nombreux aspects de l'expérimentation et de la théorie du vivant, un circuit électrique équivalent du modèle proie-prédateur souffrant d'effet Allee sera conçu et simulé à l'aide du logiciel MultiSIM.

Ce rapport est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre présente un état de l'art de la théorie de bifurcation et du chaos. Il expose, en second lieu, le modèle proie-prédateur ainsi que toutes les interactions internes et externes dont il peut être le siège.

Le second chapitre présente une analyse détaillée du comportement dynamique du modèle proie-prédateur souffrant des effets d'Allee Fort, d'Allee Faible et d'effet saisonnier. Par la suite, une brève comparaison sera réalisée.

Dans le troisième chapitre, une conception d'un circuit électronique équivalent au système proie-prédateur sera proposée. Le circuit associé

sera conçu et simulé à l'aide du logiciel MultiSIM. Ensuite, des investigations expérimentales seront proposées. Enfin, une synchronisation du système sera réalisée pour contrôler son comportement chaotique.

Dans le quatrième et dernier chapitre, deux modifications de la structure des composants élémentaires du modèle proie-prédateur basique seront proposées et analysées. La première consiste à modéliser le taux de croissance de la proie et la réponse fonctionnelle du prédateur par des polynômes d'ordre fractionnaires. La deuxième modification sera au niveau du taux de croissance des proies et de l'efficacité des prédateurs. Des analyses détaillées du système non perturbé et perturbé seront aussi établies.

Ce travail est clôturé par une conclusion générale récapitulant les principales contributions réalisées lors de cette thèse. Comme extension de ces travaux de recherche, un ensemble de perspectives est présenté.

Chapitre 1

Sur l'analyse des bifurcations et des comportements chaotiques des systèmes non linéaires : État de l'art

1.1 Introduction

L'étude des systèmes non linéaires a montré qu'une représentation linéariste ne donne qu'une vision partielle de la réalité de la dynamique du système. Dans plusieurs situations pratiques nous assistons à de fortes déviations du régime de proportionnalité. Pour un système non linéaire, la combinaison de deux actions élémentaires peut produire des effets inattendus créant un comportement chaotique suite à des phénomènes d'émergence et de coopération entre les éléments du même système. Dans cette optique, ce chapitre exposera un bref état de l'art de la théorie de bifurcation et du chaos en se focalisant sur les notions basiques de l'analyse des systèmes non linéaires. Le cas concret du modèle proie-prédateur avec des interactions internes et externes sera ensuite présenté et servira tout le long du rapport comme application des théories explorées.

1.2 Stabilité locale des systèmes non linéaires

L'analyse des systèmes non linéaires se base essentiellement sur les notions de la stabilité locale et de la stabilité globale. L'analyse de la stabilité locale d'un système dynamique est basée sur l'étude du comportement du système autour de ses points d'équilibre. Quant à la stabilité globale, elle fait appel à la théorie des bifurcations.

La stabilité locale permet de prédire le comportement de la trajectoire de la solution du système autour d'un point d'équilibre. L'étude de la stabilité locale peut être élaborée selon les étapes suivantes [Gonze and Kaufman, 1961] :

- Trouver les points d'équilibre du système non linéaire, appelés aussi points singuliers.
- Linéariser le système non linéaire autour de ses points singuliers en déterminant la matrice Jacobienne du système ainsi que les valeurs

propres associées aux différents points singuliers,

- Déterminer la nature de la stabilité en se référant aux valeurs propres associés au points singuliers.

Pour illustrer les étapes précédentes, considérons le système non linéaire bidimensionnel modélisé par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases} \tag{1.1}$$

où x et y $\in \mathbb{R}$ représentent les deux variables d'état du système, f et g sont deux fonctions non linéaires continues dans le temps.

La première étape de l'analyse consiste à trouver les points singuliers qui sont les solutions de l'équation suivante : $f(x,y) = g(x,y) = 0$. L'analyse de la stabilité locale exige une linéarisation du système 1.1 autour des points singuliers E_i et une analyse de singularité basée sur le calcul de la matrice Jacobienne décrite par :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{df}{dx} & \dfrac{df}{dy} \\ \dfrac{dg}{dx} & \dfrac{dg}{dy} \end{pmatrix}_{|E_i}$$

1.2.1 Analyse des singularités

Les valeurs propres associées à chaque point singulier du système non linéaire 1.1, $\lambda_{1,2} = Re(\lambda_{1,2}) \pm iIm(\lambda_{1,2})$, sont les solutions de l'équation caractéristique suivante :

$$det(\lambda I - J) = \lambda^2 - tr(J)\lambda + det(J) = 0 \tag{1.2}$$

Les valeurs propres correspondantes à chaque point singulier donnent des informations sur la direction et la force de l'attraction ou de répulsion des trajectoires. Afin d'analyser la stabilité locale de chaque point singulier, une évaluation du déterminant et de la trace de la matrice

jacobienne J est nécessaire. La Table.1.1 récapitule les singularités possibles pour le cas particulier d'un système non linéaire de dimension 2 en fonction des signes des valeurs propres ou encore en fonction de la trace et du déterminant de la matrice Jacobienne [Gonze and Kaufman, 1961]. Cette méthode d'analyse est appelée méthode du Plan de Phase ou méthode d'Henry Poincarré [Grayling, 2014].

TABLE 1.1 – Classification des singularités pour un système de second ordre [Gonze and Kaufman, 1961]

Valeurs propres	Type de singularité	tr(J)	det(J)	Stabilité
Réelles pures	Nœud	tr(J)<0	det(J)=0	Stable
Complexes	Foyer		det(J)>0	
$\lambda_1 > 0$	Col	tr(J)>0 ou tr(J)<0	det(J)=0	Instable
$\lambda_2 < 0$				
Imaginaires pures	Centre	tr(J)=0	det(J)> 0	Stable ou Instable ou Semi Stable
Réelles pures	Nœud	tr(J)>0	det(J)=0	Instable
Complexes	Foyer		det(J)>0	

1.2.2 Portrait de phase

On appelle portrait de phase l'ensemble des trajectoires qui sont les solutions du système 1.1 représentées dans le plan de phase initiées à partir des conditions initiales différentes comme il est présenté dans la Figure 1.1. Un portrait de phase permet de caractériser les singulari-

tés possibles des points d'équilibre. Ces trajectoires peuvent être sous la forme d'un **nœud**, en spirale formant un **foyer**, d'un **selle (col)** ou d'un **centre**. D'autre part, un point d'équilibre peut être attractif ou répulsif. Lorsque le point d'équilibre est attractif, le système est stable localement. Alors que lorsque le point d'équilibre est répulsif, le système est instable. Dans le cas où une ou deux valeurs propres du point d'équilibre sont nulles, le point d'équilibre est appelé **non hyperbolique** et la détermination analytique du type de sa singularité devient difficile. Par conséquent, pour ces cas particuliers, des outils numériques ont été offerts pour identifier numériquement la singularité [Seydel, 2009].

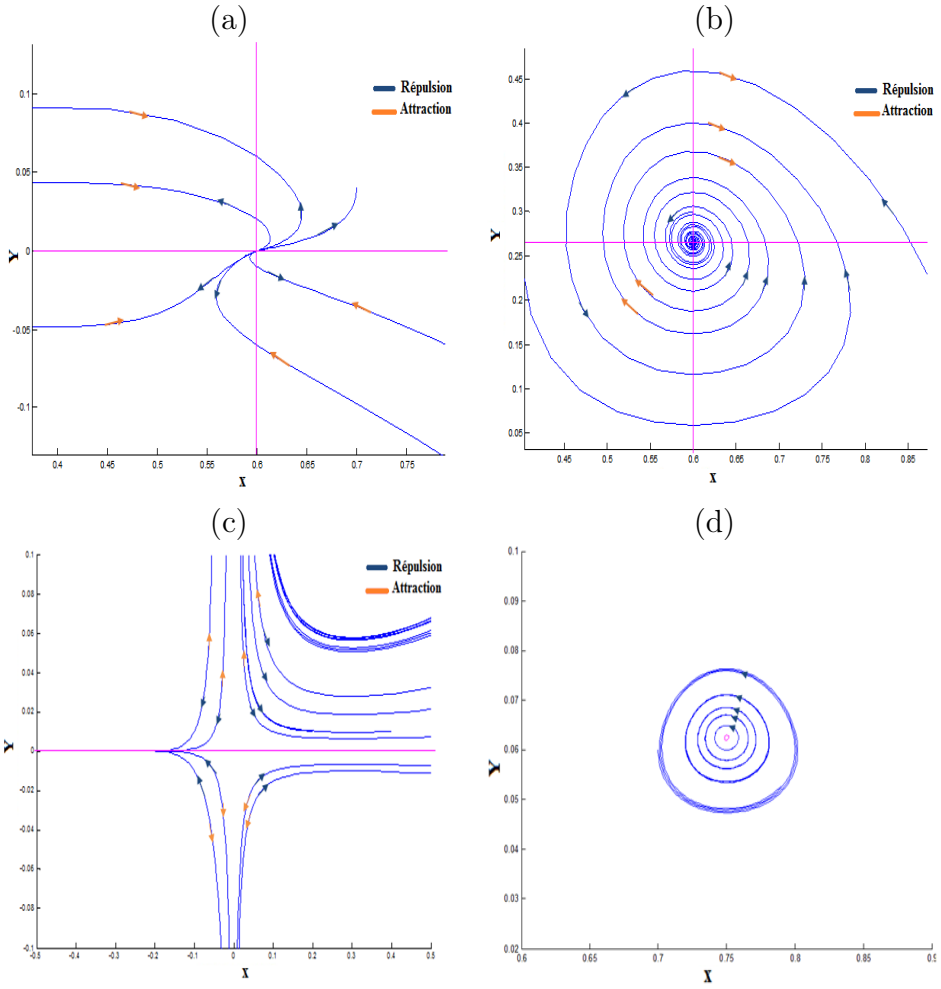


FIGURE 1.1 – Portrait de phase : (a) Noeud,(b) Foyer, (c) Selle et (d) Centre

1.2.3 Attracteur

Pour les systèmes non linéaires, l'analyse de la stabilité locale n'est pas toujours suffisante pour prédire finement le comportement dynamique vue le grand nombre de paramètres qui interagissent. Des méthodes graphiques existent et peuvent caractériser les véritables signatures de certains comportements complexes. La représentation graphique des attracteurs peut être une solution. On appelle attracteur l'espace limité vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations. Chaque attracteur est caractérisé par un bassin d'attraction. Plusieurs types d'attracteur existent dont les plus connus sont [Taylor, 2010, Alligood et al., 1996] :

- Un point fixe : C'est l'intersection des trajectoires de phase. Il est associé à des orbites qui s'approchent d'un état d'équilibre,
- Un cycle Limite : C'est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phase (x,y) (voir Figure 1.2). Plus clairement, le cycle limite est entouré par des trajectoires voisines spirales initiées à partir des conditions initiales différentes. Un cycle limite peut être : Stable, instable ou semi-stable selon la convergence ou la divergence des trajectoires qui l'entourent.
- Un tore : Il est représenté par la Figure 1.3. Il correspond à un comportement dynamique oscillatoire périodique ou quasi-périodique dans l'espace de phase (x,y,z).
- Un attracteur étrange : C'est l'ensemble des orbites qui peuvent exhiber un comportement imprévisible et dont la forme géométrique est plus complexe. Parmi les attracteurs étranges les plus connus, on cite l'attracteur de Lorenz représenté par la Figure 1.4 dans l'espace de phase (x,y) [Lorenz, 1963].

Dans un même portrait de phase, on peut détecter plusieurs attracteurs selon le type de singularités.

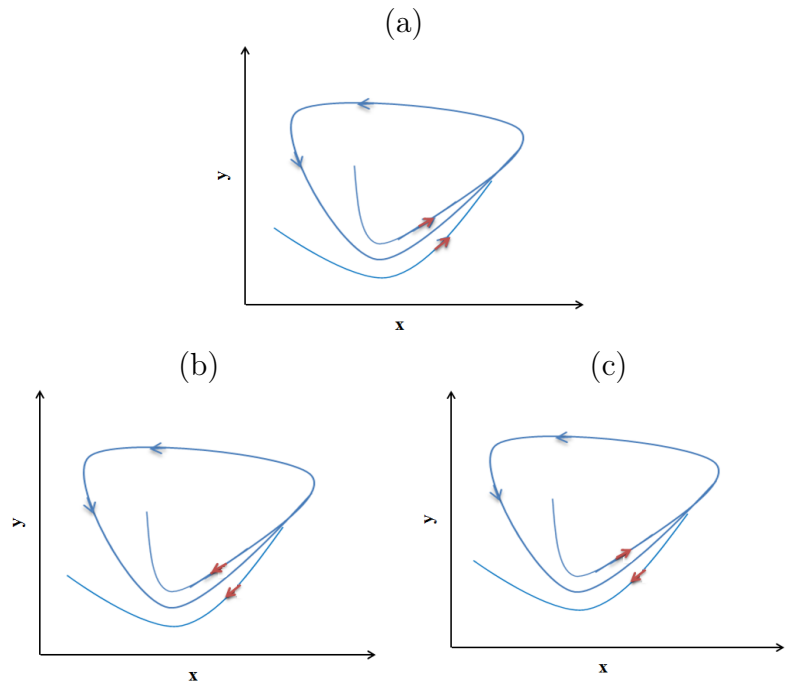


FIGURE 1.2 – Cycle limite : (a) Stable, (b) Instable et (c) Semi-stable

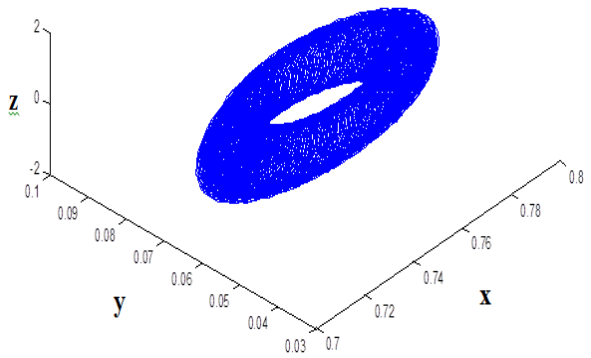


FIGURE 1.3 – Tore

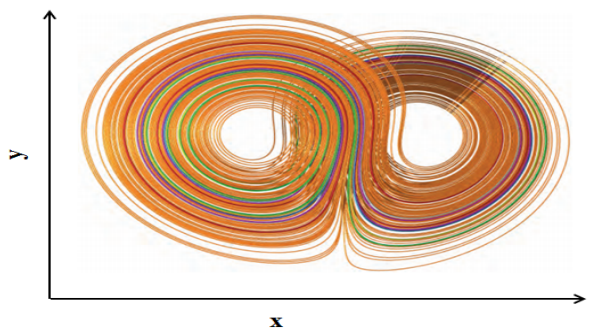


FIGURE 1.4 – Attracteur de Lorenz

1.2.4 Équivalence topologique

Un système non linéaire est appelé topologiquement équivalent à un autre système non linéaire s'il existe un homéomorphisme h : $\mathbb{R}^n$ -> $\mathbb{R}^n$ qui transforme les orbites du premier système aux orbites du second système en gardant la même direction dans le temps. En d'autres termes, nous considérons deux systèmes non linéaires comme équivalents si leurs portraits de phase sont "qualitativement similaires" [Kuznetsov, 2013].

1.3 Théorie des bifurcations

La plupart des résultats de la théorie des singularités, présentés dans le paragraphe précédent, sont directement applicables à l'analyse des points d'équilibre mais jamais pour l'analyse du portrait de phase [Kuznetsov, 2013]. L'intérêt de la théorie des bifurcations, qui sera présentée dans cette section, est d'étudier l'évolution des points d'équilibre et des orbites périodiques. Autrement dit, elle permet d'analyser les changements de type topologique des trajectoires solutions d'un système dynamique non-linéaire quand les paramètres de contrôle varient et franchisent les valeurs critiques.

1.3.1 Définition

On appelle bifurcation toute apparition d'un portrait de phase topologiquement non-équivalent suite à un changement quantitatif des paramètres d'un système non linéaire. En d'autres termes, si le comportement d'un système non linéaire change soudainement lorsque la valeur d'un paramètre varie, alors on dit qu'il a subi une bifurcation. Ce paramètre est appelé paramètre de bifurcation. À un point de bifurcation, la stabilité peut être gagnée ou perdue. Les bifurcations sont répertoriées par leur codimension qui est définie comme étant la plus petite dimension de l'espace de contrôle dans lequel la bifurcation peut exister. On

parle de bifurcation de codimension 1 si le changement se fait sur un seul paramètre et de bifurcation de codimension 2 si le changement se fait sur deux paramètres. Les paramètres contrôlant la bifurcation sont appelés les paramètres de bifurcation [Kuznetsov, 2013, Dhooge et al., 2008, Lynch, 2018].
Lors d'une bifurcation, la trajectoire peut évoluer en faisant apparaître :

- Autres points d'équilibre,
- Une oscillation périodique,
- Une oscillation pseudo-périodique,
- Un comportement étrange.

Les diagrammes de bifurcation constituent un outil important pour identifier l'influence des changements des paramètres sur la réponse du système. Il représente les courbes d'évolution des maximums locaux des variables d'état, que nous noterons dans la suite X_{max}, en fonction du ou des paramètres de bifurcation. Ces courbes représentent en quelque sorte l'évolution des points d'équilibre en fonction du paramètre de bifurcation. Pour l'analyse de ces courbes, on appellera dans toute la suite phénomène de collision tout mécanisme qui permet la superposition de deux poins d'équilibre. On appellera aussi phénomène d'annihilation tout mécanisme qui permet la collision et la disparition mutuelle des points d'équilibre. Il existe deux types de bifurcation à savoir les bifurcations locales et les bifurcations globales.

1.3.2 Bifurcation locale

Une bifurcation locale est un changement qualitatif de la stabilité du système suite à un changement quantitatif d'un paramètre de bifurcation. Elle est détectée à partir d'une analyse locale suite à la linéarisation du système non linéaire autour de ses points d'équilibre. Nous exposerons par la suite les types de bifurcations locales qui vont être utilisées dans les chapitres suivants.

- **Bifurcation Tanscritique (appelé en anglais Branch Point (BP)) :** Tel qu'il est représenté par la Figure 1.5, il s'agit d'un mécanisme qui permet, suite à la variation d'un paramètre de bifurcation, de coller (appelé phénomène de collision), dans une première phase, deux points d'équilibre l'un stable et l'autre instable ensuite de transformer le point d'équilibre instable en un point d'équilibre stable, et vice versa [Strogatz and Herbert, 1996].

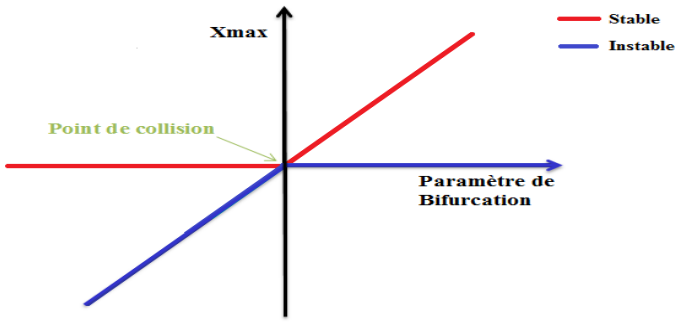


FIGURE 1.5 – Bifurcation Transcritique

- **Bifurcation Nœud-Selle (appelé en anglais Saddle-Node) :** Tel qu'il est représenté par la Figure 1.6, c'est le mécanisme de base par lequel un point d'équilibre stable et un point d'équilibre instable, initialement disjoints, entrent en collision et s'annihilent mutuellement (disparaissent), suite à la variation de la valeur d'un paramètre de bifurcation. Le terme «Bifurcation de nœud de selle» est le plus souvent utilisé en référence à des systèmes dynamiques continus [Strogatz and Herbert, 1996].
- **Bifurcation de type Poincaré-Andronov Hopf (H) :** Il s'agit d'un passage d'un état stationnaire stable ou instable à un régime oscillatoire [Marsden et al., 2012]. C'est une collision entre un foyer et un cycle limite. La bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf se produit lorsque la propriété de la stabilité du point d'équilibre change vers un cycle limite. Ce type de bifurcation apparait quand le système admet une paire de valeurs propres purement imaginaires pour un domaine du paramètre de bifurcation. Il existe deux types

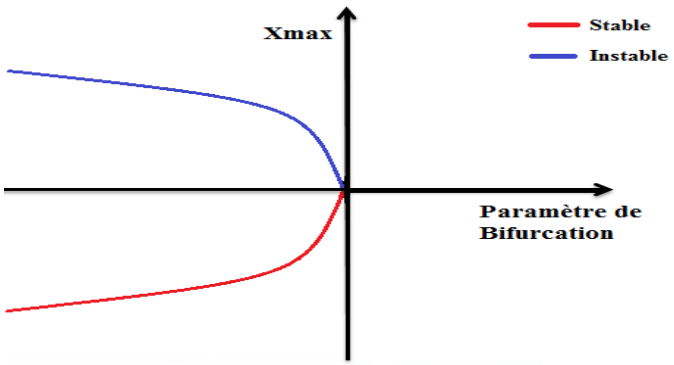


FIGURE 1.6 – Bifurcation Nœud-Selle

de bifurcation Hopf comme il est représenté par la Figure 1.7 : une bifurcation super-critique et une bifurcation sous-critique. Ces deux types sont caractérisés par le premier coefficient de Lyapunov qui peut être respectivement négatif ou positif. Au premier type, le cycle limite qui apparait est stable. Cependant, au niveau du deuxième type, le cycle limite qui apparait est instable. Le premier coefficient de Lyapunov, noté FLC, est déterminé numériquement à l'aide du logiciel MATCONT [Dhooge et al., 2008].

- **Bifurcation de type cycle de point limite (appelé en anglais Limit Point Cycle (LPC)) :** Il s'agit d'un mécanisme qui permet la coexistence de trois types de solutions. Comme il est présenté dans la Figure 1.8, le paramètre critique γ_c auquel se produit une bifurcation de type Hopf sous-critique subdivise l'axe γ en région stable linéaire (solutions de points fixes stables) et la région instable linéaire (solutions instables à points fixes). En particulier, entre le point tournant γ_t et le point de bifurcation de Hopf γ_c coexistent une solution stable à point fixe, une solution périodique instable (cycle limite instable appelé aussi répulsif) et une solution périodique stable (cycle limite stable appelé aussi attracteur). Les deux solutions périodiques s'annulent au tournant γ_t [Lange et al., 2013]. Ce type de bifurcation est appelé aussi bifurcation de pli.

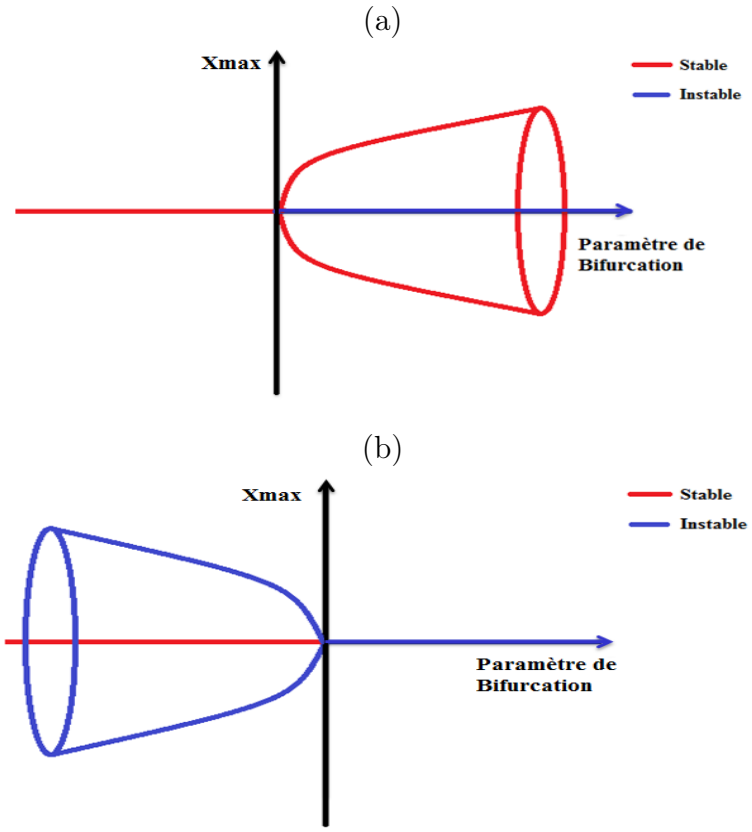


FIGURE 1.7 – Bifurcation de type Hopf : (a) Supercritique (b) Souscritique

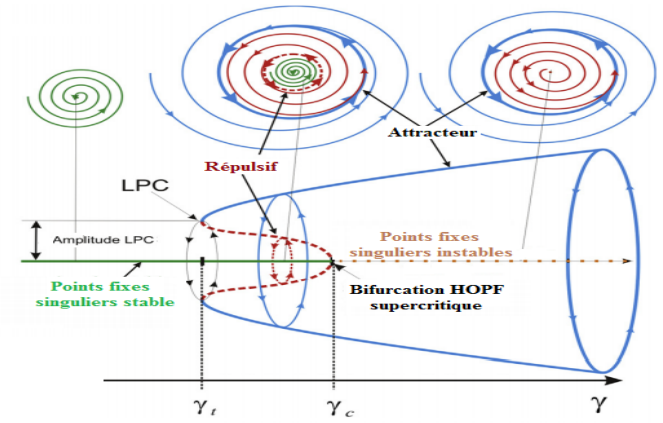


FIGURE 1.8 – Bifurcation de type cycle de point limite [Lange et al., 2013]

- **Bifurcation de type dédoublement de période (appelé en anglais *Period Doubling* (PD) :** C'est un mécanisme qui permet suite à la variation d'un paramètre de bifurcation de multiplier la période d'un cycle limite de période T. On peut avoir une cascade de dédoublement de période comme il est présenté dans la Figure 1.9.

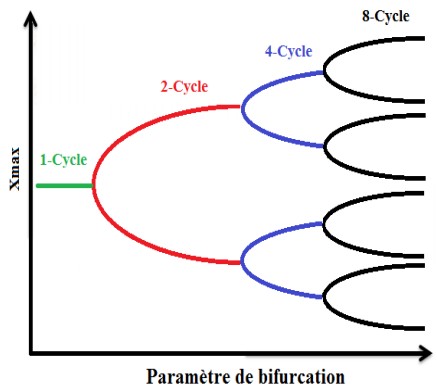


FIGURE 1.9 – Cascade de la bifurcation de dédoublement de période

1.3.3 Bifurcation globale

Les bifurcations globales sont liées à des changements qualitatifs du comportement global du système et ne peuvent pas être déduits à partir d'une analyse locale. Contrairement aux bifurcations locales, les bifurcations globales ne sont pas détectées suite à une linéarisation du système [Kuznetsov et al., 1994, Wu, 2000, Wiggins, 2013]. Ce type de bifurcation se manifeste lors d'une collision entre deux trajectoires. Il existe deux types de collision définis comme suit :

Bifurcation homocline

Une bifurcation homocline est le mécanisme qui permet suite à un changement d'un ou de plusieurs paramètres de bifurcation la collision d'une orbite et d'un point de selle. Au point de bifurcation, la période de l'orbite périodique s'étend à l'infini et devient une trajectoire homocline. Cette dernière part d'un point d'équilibre et y revient comme il

est présenté par la Figure 1.10. Après la bifurcation, il n'ya plus d'orbite périodique. C'est un phénomène assez rare qui se manifeste dans certains systèmes conservatifs [Kuznetsov, 2013].

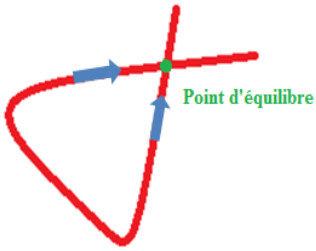


FIGURE 1.10 – Trajectoire homocline

Bifurcation hétérocline

Une bifurcation hétérocline est le mécanisme qui permet suite à un changement d'un ou de plusieurs paramètres de relier un point d'équilibre instable et un point d'équilibre stable comme il est présenté dans la Figure 1.11. Cette bifurcation peut aussi être à l'origine d'un comportement chaotique. [Strogatz and Herbert, 1996].

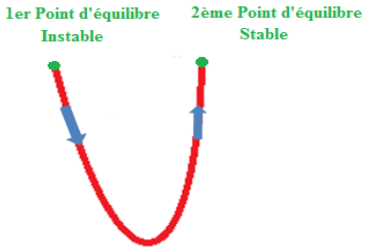


FIGURE 1.11 – Trajectoire hétérocline

1.3.4 Analyse numérique des bifurcations

La détermination des points de bifurcation de codimension 1 est possible analytiquement. Par contre, celle de codimension 2 ne peut être obtenue que numériquement en calculant une suite de points approximatifs. Pour cela, de nombreux outils ont été proposés pour l'analyse

numérique des bifurcations, parmi lesquels on peut citer AUTO [Doedel et al., 1998], Content [Kuznetsov, 1998] et MATCONT [Dhooge et al., 2008]. Actuellement l'outil le plus performant et efficace selon la comparaison faite dans [Dhooge et al., 2008], est le package MATCONT contenant une boite à outils de continuation. En outre, il permet d'obtenir les portraits de phase, les diagrammes de bifurcation en 2D et en 3D ainsi que les continuations numériques. On appelle continuation numérique tout algorithme déterminant les points de bifurcation existants en prenant comme point initial la bifurcation obtenue numériquement [Sanchez et al., 2002,Gros, 2015]. Suite à la continuation numérique, plusieurs types de bifurcations peuvent apparaître dont quelques uns sont présentés par la Figure 1.12. Cette dernière est extraite du graphe global trouvé dans [Dhooge et al., 2008].

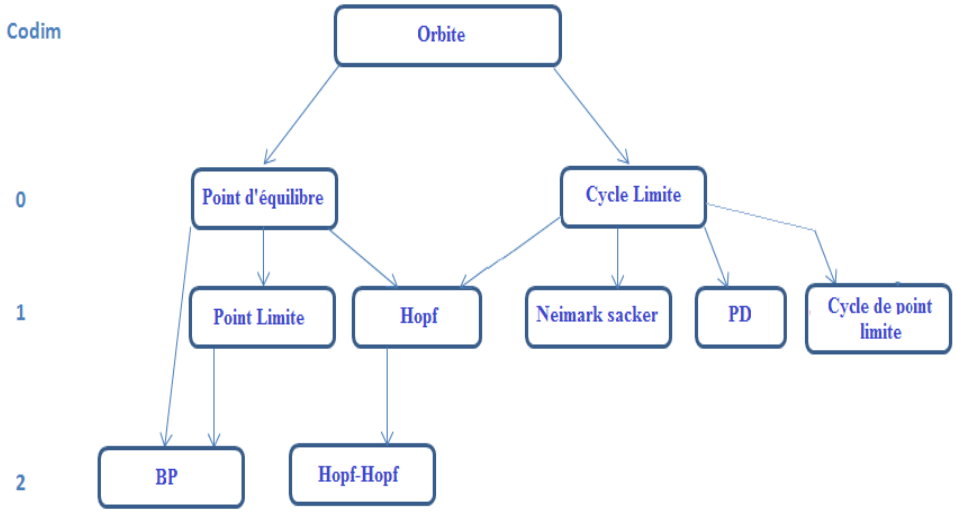


FIGURE 1.12 – Graphe de proximité pour le point de bifurcation point d'équilibre et cycle limite dans MATCONT (Les continuations numériques possibles à partir des différents points de bifurcation)

La figure 1.12 montre qu'au niveau de codimension 0, aucune bifurcation n'est détectée. Par contre, en commençant l'intégration temporelle à partir d'un point donné, un point d'équilibre ou un cycle limite peuvent être détectés. En général, une flèche allant d'un objet de type A à un

objet de type B signifie que ce dernier peut être détecté lors du calcul d'une courbe d'objets de type A. Par exemple, la continuation numérique à partir du point d'équilibre permet de détecter la bifurcation de codimension 1 (Hopf, Point limite) ou de codimension 2 (BP).

1.4 Théorie du Chaos

1.4.1 Définitions

Définition 3.1 [Strogatz and Herbert, 1996] : Un système chaotique est un système déterministe dont le comportement à long terme est apériodique. Il est extrêmement sensible aux conditions initiales. Sa trajectoire évolue d'un attracteur à un autre suite à un état d'expansion puis de rétraction en modifiant ses paramètres de contrôle. Le chaos est un phénomène étrange qui cache de l'ordre dans le désordre.

Définition 3.2 [Strogatz and Herbert, 1996] : Un système déterministe est un système qui n'admet aucune entrée ou paramètre aléatoire ou bruyant. Son comportement irrégulier ne peut provenir que de la non-linéarité du système et non pas de forces motrices bruyantes.

Définition 3.3 [Strogatz and Herbert, 1996] : Un comportement à long terme apériodique indique l'existence de trajectoires qui peuvent errer indéfiniment dans une région bornée sans se fixer à un point fixe ou à une orbite fermée. Dans certains cas, les trajectoires sont attirées par un objet géométrique complexe appelé attracteur étrange qui est un ensemble fractal sur lequel le mouvement est apériodique et sensible à des petits changements des conditions initiales. Cette sensibilité rend le mouvement imprévisible à long terme.

1.4.2 Route vers le chaos

Le comportement chaotique peut être le résultat d'une succession de bifurcations : C'est ce qu'on appelle route vers le chaos. Ce comportement a été bien étudié par le mathématicien Mitchell Feigenbaum en élaborant une théorie qui a été démontrée numériquement par Lanford [Lanford III, 1982]. Feigenbaum affirme qu'il existe un ratio Feigenbaum F_n qui converge vers la valeur 4.669 lorsqu'un système dynamique admet, comme route vers le chaos, une infinité de cascades des bifurcations de dédoublement de période (séquence de Feigenbaum) [Feigenbaum, 1978] [Sander and Yorke, 2012] comme il est représenté dans la Figure 1.13. Cette constante contrôle le nombre de dédoublement de période et rend l'apparition des zones chaotiques ordonnée. Cependant, le comportement du système dans ces zones reste parfaitement imprévisible. Il existe alors une structure sous-jacente au désordre.

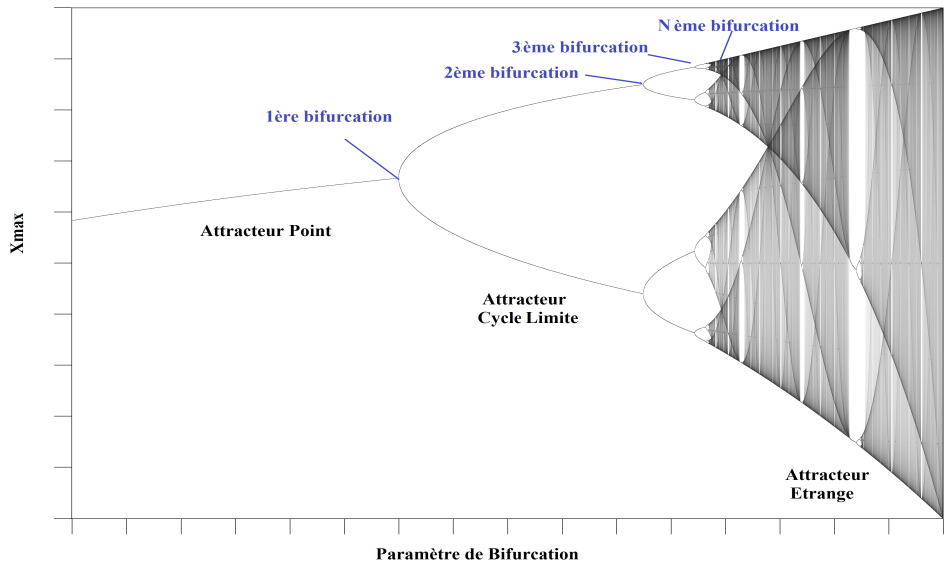


FIGURE 1.13 – Route vers le chaos

1.4.3 Signatures du chaos

Le chaos est caractérisé par certain nombre de signatures qui sont décrites par la suite :

Sensibilité aux conditions initiales

L'état final d'un système chaotique est extrêmement sensible aux minuscules changements de l'état initial. De ce fait, la prédiction à long terme devient impossible [Thompson et al., 2002]. Pour des conditions initiales presque identiques, les courbes évoluent au début dans une même direction mais elles divergent par la suite l'une de l'autre exponentiellement dans le temps.

Attracteur chaotique

Lorenz a prouvé lors de ses recherches sur le comportement du système chaotique, que les trajectoires de ce système ne convergent pas, à long terme, ni vers un point fixe stable ni vers un cycle limite stable [Strogatz and Herbert, 1996]. Cependant, ces trajectoires restent confinées dans une région limitée formant un attracteur étrange. Ainsi, avoir un attracteur étrange est une caractéristique élémentaire d'un système chaotique.

Exposant de Lyapunov

Le comportement chaotique doit être correctement identifié pour les systèmes non linéaires. Parmi les principaux outils de mesure du degré de chaoticité, on trouve l'exposant de Lyapunov qui mesure le taux de divergence des trajectoires voisines dans un système non linéaire. Il est lié à la nature en dilatation et contraction des différentes directions dans l'espace de phase [Savi, 2016]. Le spectre des exposants de Lyapunov décrit la sensibilité aux conditions initiales en montrant les moyennes des taux de croissance des perturbations dans des directions orthogonales le long d'une trajectoire [Skiadas et al., 2011]. Le nombre des exposants de Lyapunov LEs est égal à la dimension du système n. Il est défini mathématiquement comme suit [Wolf et al., 1985] :

$$LE_i = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)}$$

où LE_i sont les exposants de Lyapunov ordonnés du plus grand au

plus petit avec i $\in$ [1 n]. p_i est la longueur de l'axe principal ellipsoïdal définissant le ième exposant de Lyapunov.

L'exposant de Lyapunov est définit comme la moyenne temporelle du taux local de divergence des trajectoires. Ces derniers divergent les uns des autres lorsque LE > 0. En prenant l'exemple d'un système non linéaire de dimension 3, le système admet trois LEs d'ordre décroissant ($LE_1 > LE_2 > LE_3$) et de signe dépendant du régime du comportement dynamique comme il est illustré par le tableau Table. 1.2.

TABLE 1.2 – Signe des exposants de Lyapunov pour un système de dimension 3

Forme d'attracteur	Signe de (LE_1, LE_2, LE_3)
Point fixe	(-,-,-)
Périodique	(0,-,-)
Pseudopériodique	(0,0,-)
Chaotique	(+,0,-)

- Lorsque l'exposant de Lyapunov est positif (+). L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera donc sensible aux très petites variations de sa condition initiale. Ceci est une des caractéristiques des systèmes chaotiques.
- Lorsque l'exposant de Lyapunov est négatif (-), l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant. L'erreur initiale n'aura donc aucun effet à long terme. Autrement dit, les trajectoires ne divergent pas.
- Lorsque l'exposant de Lyapunov est nul (0), nous conclurons qu'il existe un attracteur borné qui ne se résume pas à un point fixe. Cet exposant particulier est associé au fait que la distance entre deux points d'une même orbite séparés d'un intervalle de temps fixe ne peut ni croitre indéfiniment (pas de divergence des trajectoires à l'infini), ni tendre vers zéro (l'attracteur n'est pas un point fixe).

Nous pouvons donc conclure que le comportement reste régulier si le plus grand exposant de Lyapunov est ≤ 0 et qu'il s'agit d'un régime chaotique s'il existe au moins un exposant de Lyapunov positif (+). Numériquement, la détermination du spectre d'exposant de Lyapunov du système dynamique est bien établie en utilisant la boite à outils de Matlab MATDS basée sur l'algorithme de Wolf, comme étant une méthode de calcul [Wolf et al., 1985].

Dimension de Kaplan-Yorke

Kaplan-Yorke a établi un moyen pour calculer la dimension de l'attracteur en se basant sur le spectre des exposants de Lyapunov [Paiva and Savi, 2006]. Il est représenté dans une relation entre les LEs et la dimension de Lyapunov, appelée dimension de Kaplan-Yorke D_L. Pour un système de dimension n, supposons que les LEs sont ordonnés tels que $LE_1 \geq LE_2 \geq ... \geq LE_n$ et soit $j \in 1, ..., n$ le plus grand entier pour lequel $\sum_{i=1}^{j} LE_i \geq 0$. Le système admet un attracteur étrange lorsque D_L est fractal et contenu dans l'intervalle $]j, n[$. La dimension correspondante de Kaplan-Yorke s'écrit comme suit [Kuznetsov et al., 2016] :

$$D_L \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ n'existe pas,} \\ j + \frac{1}{|LE_{j+1}|} \sum_{i=1}^{j} (LE_i) & \text{si} \quad j < n \\ n & \text{si} \quad j = n \end{cases} . \tag{1.3}$$

1.5 Cas du modèle proie-prédateur

Récemment, les scientifiques ont réalisé que le comportement dynamique de nombreux systèmes dans la nature est très complexe. Par conséquent, l'analyse et le contrôle de la dynamique de ces systèmes constituent un grand défi. Les écologistes visent toujours à améliorer leur compréhension de la dynamique de ces systèmes ainsi que des conditions de stabilité écologiques afin de contribuer à la protection de l'environne-

ment en contrôlant les problèmes existants [Upadhyay et al., 2000, Feng and Bailey, 2017, Friedman and Gore, 2017].

1.5.1 Modélisation des interactions

L'une des premières théories de la dynamique des populations est la théorie logistique de Malthus-Verhulst [Malthus, 1852]. Dans la littérature, le premier modèle mathématique a été introduit pour décrire la dynamique d'une seule population. Par la suite, Lotka a proposé le premier modèle mathématique décrivant les interactions existantes entre les populations afin d'expliquer les différents aspects écologiques ou biologiques [Bazykin, 1998].

Modèle à une seule population

Il existe trois types de population. De ce fait, trois types de modèles ont été proposés. Cesrtains de ces modèles peuvent être utilisés comme constituants de modèles de populations en interaction. Les types de populations proposés sont les suivants [Bazykin, 1998] :

— La population libre : elle évolue sans limitation et son modèle se base sur l'équation classique de Malthus suivante [Malthus, 1852] :

$$\dot{x} = ax \tag{1.4}$$

avec a est le taux de croissance de la population.

— La population dont l'évolution est limitée par des ressources extérieures ou des facteurs extérieurs. Cette limitation conduit à la compétition intraspécifique qui se manifeste dans plusieurs éléments décrivant la taille de la population. On considère comme exemple, les deux ressources extérieures proposées par Verhulst et Allee dont les modèles sont décrits respectivement comme suit [Bazykin, 1998] :

$$\dot{x} = ax\frac{(K-x)}{K} \tag{1.5}$$

et

$$\dot{x} = ax(x - L)(K - x) \tag{1.6}$$

avec a est le taux de croissance de la proie, L est le seuil d'effet Allee qui sera défini dans la section 1.5.2 et K est la capacité de charge de la proie.

— La population récoltée modélisée comme suit [Bazykin, 1998] :

$$\dot{x} = F(x) - S(x, \alpha) \tag{1.7}$$

avec $F(x)$ et $S(x, \alpha)$ sont les taux absolus de reproduction et de mortalité des individus.

Modèle à deux populations

Différents types d'interaction entre les espèces vivantes dans la même région sont connus en écologie. Ils sont définis comme une combinaison des interactions positives (+) et négatives (-). L'interaction est dite positive lorsque l'une des espèces ou les deux espèces bénéficient. Par contre, l'interaction est négative lorsque chacune des deux espèces peut bénéficier au détriment de l'autre ou les deux espèces sont blessées. Parmi les principaux types d'interaction, on cite [Bazykin, 1998, Anderson and May, 1978] : La compétition(-/-), le mutualisme (+/+), le parasitisme (+/-) et la prédation (+/-). En considérant le modèle proie-prédateur composé de deux populations en interaction, le modèle général du modèle de Lotka volterra s'écrit comme suit [Bazykin, 1998] :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) - B(x, y) \\ \\ \dot{y} = -C(y) + D(x, y) \end{cases} \tag{1.8}$$

Les principaux facteurs biologiques d'un système proie-prédateur ont des impacts fondamentaux sur les interactions inter et intrapopulation. La dynamique des populations isolées a été étudiée dans la partie précé-

dente. A(x) est le taux de croissance de proie qui peut incorporer deux nouveaux facteurs qui ne faisaient pas partie du système. Ils impliquent le caractère non linéaire de la reproduction de la population de proies à de faibles densités, et la compétition intraspécifique au sein de la population de proies qui est induite par des ressources limitées. B(x,y) est la réponse fonctionnelle de Holling décrivant l'évolution des stratégies de la prédation. On distingue trois types de réponses fonctionnelles (Type I, II et III) [Holling, 1965]. Ainsi, en fonction des facteurs pris en compte, la fonction B(x,y) peut être décrite par l'une des fonctions illustrées dans le tableau Table.1.3.

TABLE 1.3 – Types de réponses fonctionnelles de Holling

Compétition	Type de réponse fonctionnelle		
	I	II	III
Non	bxy	$\frac{bxy}{1+\alpha x}$	$\frac{bx^2y}{1+\alpha x^2}$
Oui	$\frac{bxy}{1+\beta x}$	$\frac{bxy}{(1+\alpha x)(1+\beta y)}$	$\frac{bx^2y}{(1+\alpha x^2)(1+\beta y)}$

C(y) représente le taux de mortalité naturel du prédateur. D(x,y) est le taux de croissance ou de reproduction et de mortalité du prédateur dont l'expression générale s'écrit comme suit :

$$D(x,y) = \frac{dy}{Ny+y}B(x,y) \tag{1.9}$$

avec N est la densité de la population des prédateurs à laquelle le taux de reproduction est la moitié du taux maximal atteint lorsque les proies sont abandonnées.

1.5.2 Modélisation des ressources extérieures

Dans le but de comprendre la dynamique des systèmes biologiques ou écologiques différentes études ont été proposées en considérant soit des changements mineurs soit des changements importants dans les condi-

tions environnementales. Différents facteurs extérieurs existants dans la nature peuvent influencer la dynamique des systèmes. Parmi ces principaux facteurs, on cite :

- ***L'effet Impulsif***

  Dans la nature, il existe souvent le phénomène des perturbations de courte durée ou des changements instantanés. Ce phénomène est présenté sous la forme d'impulsions dans le processus de modélisation des systèmes. Par conséquent, les équations différentielles impulsives fournissent une description naturelle de tels systèmes. Récemment, plusieurs auteurs ont discuté la perturbation impulsive des systèmes proies-prédateurs [Baek et al., 2009, Zhang et al., 2017, Wei et al., 2017, Zhang et al., 2017].

- ***L'effet de retard***

  Les informations postérieurs d'un système proie-prédateur ont un impact très important sur son comportement dynamique actuel. Pour cela, divers travaux ont été proposés pour analyser l'impact de l'effet de retard sur la dynamique des systèmes proies-prédateurs [Zhang and Li, 2017, Jiang and Yu, 2017]. Cet effet peut être incorporé dans plusieurs facteurs élémentaires tel que la prédation, le taux de croissance, le taux de mortalité et les coefficients de la faim. Parmi les modèles les plus connus et les plus simples, nous distinguons le système proie-prédateur retardé suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A((t-\tau), x) - B(t, x, y) \\ \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -C(t, y) + D(t, x, y) \end{cases} \tag{1.10}$$

où τ est le temps de retard, B(x,y) est la fonction de prédation, C(y) est le taux de mortalité naturel du prédateur et D(x,y) est le taux de reproduction du prédateur.

- ***L'effet Saisonnier***

Dans la nature, pratiquement la majorité des organismes vivent dans un environnement forcé par une diversité de facteurs variants selon les saisons. Ce forçage peut être intégré dans les différents paramètres du modèle tels que le taux de croissance intrinsèque de la population ou le taux de mortalité. De ce fait, plusieurs modèles écologiques intégrant une perturbation périodique au niveau des différents paramètres ont été étudiés [Levy et al., 2016, Li et al., 2018]. Les fonctions périodiques analytiques les plus simples sont sinusoïdales et décrites comme suit [Baek and Do, 2009] :

$$r_0(t) = r(1 + \epsilon cos(\omega t)) \tag{1.11}$$

où le paramètre r est le taux de croissance de proie, le paramètre ϵ représente le degré de saisonnalité appartenant à l'intervalle]0,1[, r est la grandeur de la perturbation dans $r_0(t)$, et ω est la fréquence angulaire de la fluctuation causée par la saisonnalité.

- ***L'effet Allee***

On appelle effet Allee, toute corrélation positive entre la densité d'une population et son taux de croissance lorsque la population comporte relativement une quantité faible d'individus. L'impact de l'effet Allee sur les populations a suscité beaucoup d'attention de la part des écologistes vue qu'il présente un concept important dans l'écologie et la biologie de conservation. Il a été démontré que l'effet Allee joue un rôle important dans les invasions biologiques ce qui est

un problème mondial dû à l'augmentation constante des échanges et des déplacements. Le principe de l'effet Allee est basé sur l'existence d'interactions mutuellement bénéfiques (++,coopératives) entre organismes conspécifiques. Un individu d'une espèce qui souffre d'un effet Allee subira une diminution de son aspect physique lorsque la densité conspécifique est faible [Lidicker, 2010, Courchamp et al., 2008].

Dans la littérature, plusieurs modèles mathématiques ont été proposés pour décrire l'effet Allee [Cushing, 2014, Lin et al., 2013, Feng and Kang, 2015]. Le modèle le plus simple décrivant l'effet Allee est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-L) - B(x,y) \\ \\ \dot{y} = -C(y) + D(x,y) \end{cases} \tag{1.12}$$

où L est le seuil d'extinction. L'espèce évolue normalement, lorsque la densité de la population est supérieure à ce seuil. Néanmoins, au dessous de ce seuil, l'espèce souffre d'effet Allee. On distingue deux principaux types d'effet Allee :

- Les effets Allee Forts impliquent qu'il existe une taille de population critique sous laquelle le taux de croissance de la population devient négatif. Par conséquent, il peut considérablement augmenter la probabilité d'extinctions locales et globales [Feng and Kang, 2015]. Le système souffre d'un effet Allee Fort lorsque le seuil L $\in$]0 1[.
- Les effets Allee Faibles, aussi appelés non critiques, impliquent un taux de croissance par habitant réduit à une faible taille de la population mais ne devient jamais négatif. Ce type a été traduit mathématiquement par différentes expressions [Feng and Kang, 2015, Lin et al., 2013, Lai et al., 2010]. Dans [Feng and Kang, 2015], les auteurs ont considéré le seuil L $\in$]-1 0[.

Récemment, de nombreux chercheurs ont considéré l'effet Allee dans différents éléments tels que la proie, le prédateur ou la réponse fonctionnelle [Feng and Kang, 2015, Wei and Chen, 2014, Xie et al., 2015, Pal and Mandal, 2014, Van Voorn et al., 2007, Cai et al., 2013, Cushing, 2014]. Par conséquent, plusieurs modèles biologiques et écologiques ont été mise en application.

De plus, dans la littérature, une diversité des systèmes proies-prédateurs ont été également développés proposant différentes combinaisons des effets [Li and Ye, 2013, Du and Feng, 2013, Tian et al., 2015, Baek and Younghae, 2009, Xie et al., 2015, Wei and Chen, 2014] telle que la combinaison d'effet Allee et effet de retard [Xie et al., 2015] ou la combinaison d'effet saisonnier et effet Impulsif [Banerjee and Das, 2018]. Ces combinaisons ont permis l'apparition des comportements plus complexes qui peuvent donner naissance à des comportements chaotiques.

D'autre part, la modélisation mathématique d'un système décrivant parfaitement toutes les interactions naturelles de la population n'est pas toujours évidente. Pour cela, plusieurs modifications au niveau de la structure de la réponse fonctionnelle ont été proposées. Parmi lesquelles, on peut citer la référence [Pal and Mandal, 2014] qui modélise la réponse fonctionnelle par une fonction de type Bedding-Deangelis basée sur un polynômes d'ordre entier. Ce type de fonction est similaire à la réponse fonctionnelle de Holling de type II, mais elle contient un terme supplémentaire dans le dénominateur décrivant l'interférence mutuelle entre prédateurs.

1.5.3 Modèle de Lotka Volterra

Le modèle mathématique le plus populaire pour l'analyse des systèmes biologiques et écologiques est décrit comme suit [Volterra, 1926] [Bazykin, 1998] :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1 - f(x_1)x_2 \\ \\ \frac{dx_2}{dt} = cx_1x_2 - dx_2 \end{cases} \tag{1.13}$$

avec

- x_1 est la taille de la population de proie,
- x_2 est la taille de la population prédateur,
- a est le taux de croissance de la proie en absence du prédateur,
- $f(x_1)$ est la réponse fonctionnelle du prédateur
- c est l'efficience de la conversion du prédateur
- d est le taux de mortalité du prédateur

Ce sont deux chercheurs, Alfred J. Lotka (1880 – 1949) un statisticien américain, et Vito Volterra (1860-1940) un mathématicien italien, qui étaient à l'origine de la proposition du modèle Lotka Volterra. Ce modèle est couramment utilisé dans la théorie des systèmes non linéaires pour introduire la théorie des équations différentielles. Il permet d'obtenir des conclusions importantes concernant le comportement qualitatif d'un système en utilisant des méthodes purement mathématiques et des hypothèses très simplistes. En particulier, il a conduit à des conclusions sur la dynamique des populations. En raison de ce succès, il est devenu un système classique qui constitue une base standard pour l'analyse des systèmes biologiques ou écologiques.

1.6 Contribution de la thèse

De nos jours, plusieurs disciplines telles que la recherche opérationnelle et l'intelligence artificielle utilisent des algorithmes d'optimisation évolutifs inspirés par des phénomènes naturels. Particulièrement, de nouveaux algorithmes inspirés par la dynamique non linéaire des sy-

sèmes proies-prédateurs ont été proposés dans la littérature [Tilhun and Ong, 2013, Chen et al., 2016, Sidhu and Dhillon, 2018, Zhang and Duan, 2017]. Ceci a motivé notre intérêt pour ces systèmes. D'autres part, nous avons constaté que très peu de travaux de recherche se sont investit autour du modèle proie-prédateur de "Bazykin-Berezovskaya" malgré sa richesse [Van Voorn et al., 2007]. Les travaux de recherche présentés autour de ce modèle se sont limités à l'analyse des bifurcations du système dans le cas d'un effet Allee Fort.

Le premier objectif de cette thèse sera donc d'appliquer la théorie de bifurcation et du chaos dans le but d'explorer la richesse de la dynamique du modèle non linéaire de Bazykin-Berezovskaya. De ce fait, une analyse plus approfondie du système souffrant d'effet Allee Fort sera proposée. D'autre part, une analyse de l'effet Allee Faible sur la proie sera aussi proposée. Par la suite, une comparaison des résultats obtenus des deux cas d'étude sera présentée.

A notre connaissance, il n'existe pas de nos jours de travail de recherche ayant associé l'effet saisonnier dans la proie du modèle de Bazykin-Berezovskaya souffrant déjà de l'effet Allee. Pour cela, une intégration de ce facteur sera proposée afin d'analyser l'influence d'une perturbation périodique sur le taux de croissance de la proie. Nous souhaitons identifier de nouveaux comportements plus complexes menant au chaos.

D'un autre coté, afin d'étendre le domaine de l'information sur la dynamique du système, le taux de croissance de la proie et la réponse fonctionnelle de prédateur seront modélisés par des polynômes fractionnaires.

Pour pouvoir concrétiser et valider les résultats obtenus dans des cas pratiques, un circuit électrique modélisant la dynamique du système proie-prédateur souffrant d'effet Allee sera proposé. Ceci permettra de comprendre et de conceptualiser de nombreux aspects théoriques non linéaires et fractionnaires en utilisant uniquement de simples composants électroniques analogiques. Un bon accord entre la théorie écolo-

gique ou biologique et les expériences électroniques n'est pas évident en raison des imperfections et des incertitudes liées aux composants électroniques. Pour cela, le circuit associé au modèle proie-prédateur sera conçu et simulé à l'aide du logiciel MultiSIM. Par contre, malgré ces effets indésirables, les principales non-linéarités du modèle écologique ou biologique seront validées au moyen de données expérimentales.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils d'analyse des systèmes non linéaires. En outre, nous avons défini la théorie de bifurcation et du chaos en mettant l'accent sur les principaux types de bifurcation et les principaux indicateurs du chaos. Par la suite, nous avons modélisé le système proie-prédateur en considérant les différents types d'interactions entre populations et facteurs extérieurs.

Dans le chapitre suivant, le modèle mathématique basique du système proie-prédateur Bazykin-Berezovskaya sera présenté. En outre, une modélisation mathématique du système combinant deux facteurs extérieurs sera proposée. Notre proposition consiste à combiner à la fois l'effet Allee et l'effet saisonnier et à analyser l'impact de ces facteurs sur le comportement dynamique du système.

Chapitre 2

Contribution à l'analyse des bifurcations du modèle proie-prédateur de Bazykin-Berezovskaya (BB)

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'analyser le comportement dynamique du modèle proie-prédateur Bazykin-Berezovskaya (BB) dans les deux cas d'études d'effet Allee Fort et Faible. Tout d'abord, une analyse de la stabilité et des bifurcations du système sans effet externe sera détaillée en considérant les deux cas d'études. Par la suite, une introduction de l'effet saisonnier sera proposée dans le but d'analyser le comportement dynamique du système intégrant les deux effets internes adjoints à l'effet externe au même temps.
Ce chapitre est organisé en quatre paragraphes : Le second décrit le modèle proie-prédateur de modèle (BB). L'analyse de la stabilité et des bifurcations dans les deux cas d'études d'effet Allee Fort et effet Allee Faible sera détaillée dans le troisième paragraphe. Le quatrième paragraphe présente l'analyse du comportement dynamique du modèle intégrant l'effet saisonnier. Enfin, une analyse comparative sera présentée dans le dernier paragraphe.

2.2 Modèle proie-prédateur de Bazykin-Berezovskaya

Considérons le modèle populaire de Bazykin-Berezovskaya (BB) [Van Voorn et al., 2007, Kooi, 2010] très peu analysé dans la littérature, décrit par le système différentiel non dimensionnel [Kooi, 2010] :

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dT} = a(X_1) - f(X_1)X_2 \\ \\ \frac{dX_2}{dT} = (EX_1 - M)X_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

avec

$a(X_1) = RX_1(X_1 - L)(K - X_1)$, $f(X_1) = AX_1$ et T la variable temporelle.

où X_1 et X_2 représentent respectivement la taille de la population de la proie et la taille de la population du prédateur supposées être positives.

R étant le taux de croissance de la proie en absence du prédateur et K est la capacité de charge. L est le seuil de l'effet Allee supposé être inclut dans l'intervalle $]-1\ 1[$. E représente l'efficience de la conversion du prédateur et M est le taux de mortalité du prédateur en fonction de l'efficience du prédateur appartenant à l'intervalle $[0\ 1]$.
En introduisant les variables et les paramètres non-dimensionnels suivants [Kooi, 2010] :

$$t = \frac{TRK^2}{k^2},\ x_1 = \frac{kX_1}{K},\ x_2 = \frac{k^2X_2A}{RK^2},\ l = \frac{kL}{K},\ e = \frac{E}{RK} \text{ et } m = \frac{M}{EK}$$

et pour $k = e = 1$, le modèle non-dimensionnel correspondant au système (2.1) peut s'écrire comme suit [Bazykin, 1998] :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(x_1 - l)(k - x_1) - x_1x_2 \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = e(x_1 - m)x_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

où x_1 est la taille de la population de la proie et x_2 est la taille de la population du prédateur, l est le seuil d'effet Allee, k est la capacité de charge, e est l'efficience du prédateur et m est le taux de mortalité du prédateur. De plus, pour des considérations biologiques, les contraintes suivantes doivent être respectées : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

Notre principale contribution est d'analyser la dynamique du système 2.2 en présence, tout d'abord, des deux types d'effet (Allee Fort et Allee Faible) [Saad and Boubaker, 2015] et ensuite, de l'effet saisonnier [Saad and Boubaker, 2018a]. A notre modeste connaissance, cette analyse n'a jamais été élaborée auparavant dans d'autres travaux de recherche.

2.3 Analyse de la stabilité et des bifurcations du modèle

2.3.1 Modèle avec effet Allee Fort

Dans cette partie, nous traiterons le cas d'étude d'effet Allee Fort. Nous étudierons alors la stabilité et les bifurcations du système 2.2 en considérant que $l \in]0\ 1[$ selon la définition d'effet Allee dans le chapitre 1.

Points d'équilibre

Les points d'équilibre du système 2.2 sont obtenus en résolvant les équations suivantes :

$$\frac{dx_1}{dt} = 0\,; \qquad \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

le calcul nous a permis de conclure que le nombre des points d'équilibre du système 2.2 change lorsque la valeur du paramètre m varie dans l'intervalle [0 1] tel que :

— Pour $m \leq l$ ou $m = 1$, le système 2.2 admet trois points d'équilibre : E_0 (0,0), E_1 (l, 0) et E_2 (1,0).

— Pour $l < m < 1$, le système 2.2 admet quatre points d'équilibre : E_0 (0,0), E_1 (l, 0), E_2 (1, 0)et E_3 (m, $(m-l)(1-m)$).

Analyse de la stabilité et des bifurcations

Pour l'analyse de la stabilité, nous avons déterminé la matrice Jacobienne du système 2.2 qui s'écrit comme suit :

$$J_i = \begin{pmatrix} -3(x_1)^2 + 2(l+1)x_1 - (l + x_2) & -x_1 \\ \\ x_2 & (x_1 - m) \end{pmatrix}$$

Soit J_0, J_1, J_2 et J_3 les matrices évaluées respectivement aux points d'équilibre E_0, E_1, E_2 et E_3, telles que :

$$J_0 = \begin{pmatrix} -l & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \qquad J_1 = \begin{pmatrix} l(1-l) & -l \\ 0 & (l-m) \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} (l-1) & -1 \\ 0 & (1-m) \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} -2m^2 + m(l+1) & -m \\ (1-m)(m-l) & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce qui suit, nous calculerons, pour chaque point d'équilibre, les valeurs propres de la matrice jacobienne associées ainsi que les types de singularité correspondantes. La synthèse des calculs est donnée dans la Table.2.1 et la Table.2.2 qui montrent que toutes les valeurs propres associées aux points d'équilibre sont des réelles pures sauf le point d'équilibre E_3 dont les valeurs propres $\lambda_{1,2}$ sont données par :

$$\lambda_{1,2} = Re(\lambda_{1,2}) \pm i \; Im(\lambda_{1,2}) \tag{2.3}$$

$$\text{où } Re(\lambda_{1,2}) = \frac{tr(J_3)}{2}\,; \quad Im(\lambda_{1,2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}\,; \quad tr(J_3) = m(l+1-2m)\,;$$
$$\Delta = tr^2(J_3) - 4det(J_3)\,; \quad det(J_3) = m(m-l)(1-m)$$

Les singularités données dans la Table.2.1 et la Table.2.2 ont été déterminées en se basant sur la Table.1.1, présentée dans le chapitre 1 ainsi que des valeurs propres correspondantes à chaque point d'équilibre. Pour le point d'équilibre E_3, les singularités sont déduites après avoir calculé la valeur de m pour laquelle $tr(J_3) = 0$. Vue que pour $m \in \{0, l, 1\}$ une des valeurs propres devient nulle, la Table.2.1 et la Table.2.2 ne présentent que l'analyse faite sur les intervalles ouverts]0 l[et]l 1[. L'analyse montre qu'il existe un changement qualitatif dans le comportement dynamique du système 2.2 selon la valeur du paramètre m [Saad and Boubaker, 2015]. Par conséquent, ce paramètre est

considéré alors comme un paramètre de bifurcation pour le système 2.2. En effet, lorsque la valeur du paramètre m varie de l'intervalle $[0\ l[$ à l'intervalle $]l\ 1]$:

- Le point d'équilibre $E_0(0,0)$ reste stable indiquant que la population peut disparaître dans le cas où la densité de population initiale est Faible.
- La stabilité autour du point d'équilibre E_1 $(l, 0)$ change d'un nœud instable à un Selle.
- Le point d'équilibre E_2 (1,0) admet le même type de singularité Selle.
- La stabilité autour du point d'équilibre E_3 $(m, (m-l)(1-m))$ passe d'un Foyer instable à un cycle limite. Ainsi, le système admet une bifurcation de type Poincaré-Andranov-Hopf.
- Pour le cas où $m \in \{0, l, 1\}$, nous remarquons qu'une des valeurs propres de tous les points d'équilibre E_0, E_1 et E_2 devient nulle. Ce qui complique la déduction sur la nature des singularités comme il est mentionné au chapitre 1. La résolution montre que, même numériquement, nous ne pouvons pas conclure sur la singularité des points d'équilibres E_0, E_1 et E_2 lorsque le paramètre m est égale à l'une des valeurs précédentes. Par contre, notons que le point d'équilibre E_3 coïncide avec E_1 si $m = l$ et avec E_2 si $m = 1$. Ce phénomène de collision indique la présence d'une bifurcation de type 'BP' déjà définie au chapitre 1.

Vue que la stabilité du système est sensible à la variation du paramètre m, ces changements qualitatifs sont prouvés numériquement par le diagramme de bifurcation présenté par la Figure 2.1, obtenu via le logiciel MATCONT, en choisissant m comme paramètre de bifurcation. Notre but est d'approfondir les analyses faites dans [Kooi, 2010] pour le cas d'effet Allee Fort. Pour celà les simulations numériques sont réalisées en prenant la même valeur de $l = 0.5$. $\forall m \in [0\ l[$, le système n'admet

aucune bifurcation. Cependant, pour $m \in [l\ 1]$, il existe les trois points de bifurcation suivants :

- Pour $m = \dfrac{1+l}{2} = 0.75$, il existe une bifurcation de type Poincaré-Andronov-Hopf (H) avec un premier coefficient de lyapunov (FLC) qui est égal -9.230769e-01 < 0. Le point d'équilibre stable est remplacé par des oscillations de faible amplitude dans un domaine attractif lorsque $m \in\ ]l\ 1[$. Autrement dit, le comportement passe d'un point fixe à un cycle limite stable.
- Pour $m = l = 0.5$ et $m = 1$, il existe un point de branchement ou une bifurcation de type 'BP' indiquant le changement de la stabilité et la collision des points d'équilibre respectivement (E_1, E_3) et (E_2, E_3).

TABLE 2.1 – Valeurs propres et singularités : Effet Allee Fort pour $m \in]0\ l[$ et $l \in]0\ 1[$

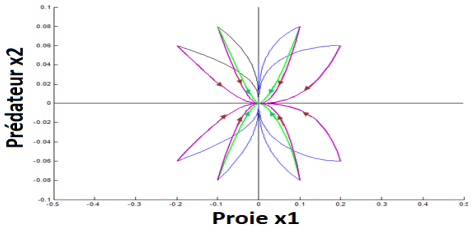
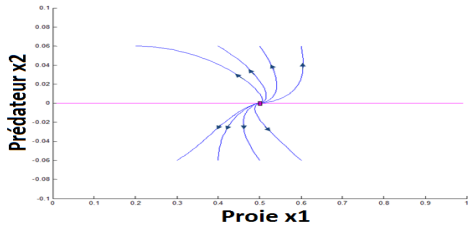
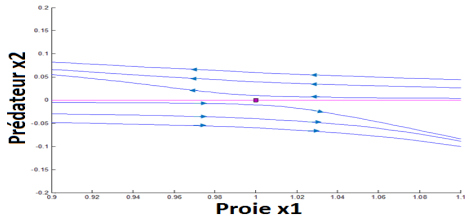
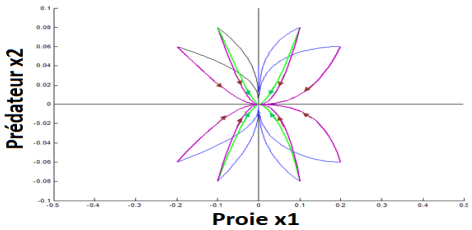
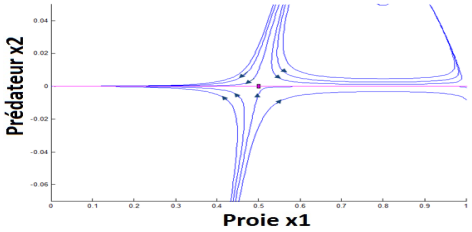
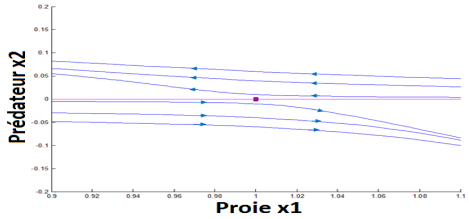
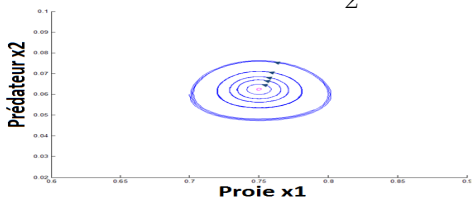
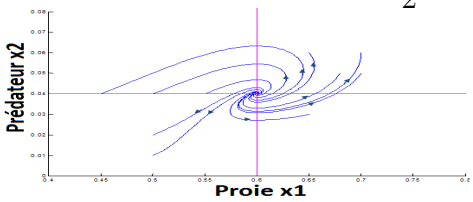
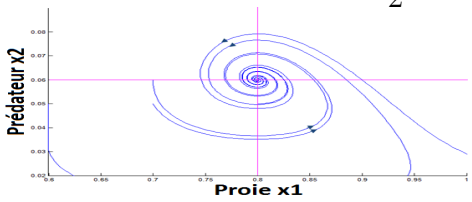
Point d'équilibre	Valeurs propres	Singularité
$E_0(0,0)$	$\lambda_1 = -l$ $\lambda_2 = -m$	**Noeud Stable** 
$E_1(l,0)$	$\lambda_1 = l(1-l)$ $\lambda_2 = l - m$	**Noeud Instable** 
$E_2(1,0)$	$\lambda_1 = l - 1$ $\lambda_2 = 1 - m$	**Selle** 

TABLE 2.2 – Valeurs propres et singularités : Effet Allee Fort pour $m \in]l\ 1[$ et $l \in]0\ 1[$

Point d'équilibre	Valeurs propres	Singularité
$E_0(0,0)$	$\lambda_1 = -l$ $\lambda_2 = -m$	**Noeud Stable** 
$E_1(l,0)$	$\lambda_1 = l(1-l)$ $\lambda_2 = l - m$	**Selle** 
$E_2(1,0)$	$\lambda_1 = l - 1$ $\lambda_2 = 1 - m$	**Selle** 
$E_3(m,(m-l)(1-m))$	$\lambda_1 = \dfrac{tr(J_3) + i\sqrt{\Delta}}{2}$ $\lambda_2 = \dfrac{tr(J_3) - i\sqrt{\Delta}}{2}$	**Centre** $(m = \dfrac{1+l}{2})$  **Foyer Instable** $(m < \dfrac{1+l}{2})$  **Foyer Stable** $(m > \dfrac{1+l}{2})$ 

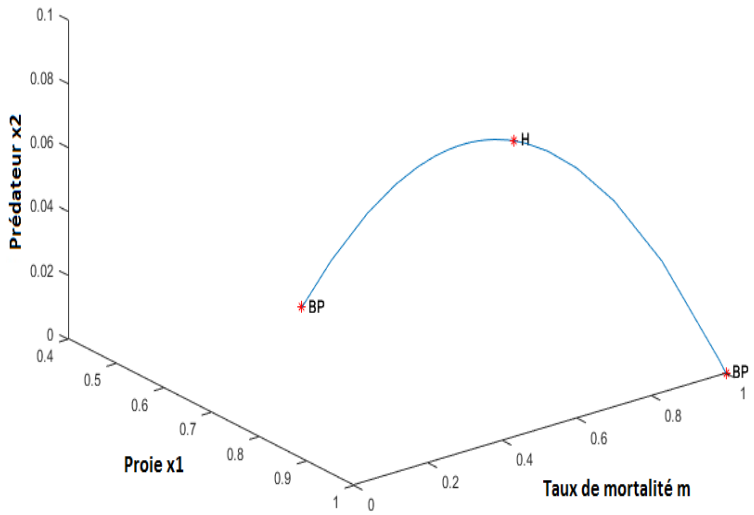


FIGURE 2.1 – Diagramme de bifurcation tridimensionnel du modèle proie-prédateur avec effet Allee Fort obtenu via le logiciel MATCONT

2.3.2 Modèle avec effet Allee Faible

Dans cette partie, nous considérons l'effet Allee faible en prenant $l \in]-1\ 0[$ selon la définition de l'effet Allee Faible dans le chapitre 1. Pour mieux comprendre l'impact de cet effet sur les interactions des populations, une étude de la stabilité et des bifurcations du système 2.2 sera effectuée.

Point d'équilibre et stabilité

Le calcul des points d'équilibre nous a permis de conclure que le système 2.2 avec effet Allee Faible admet trois points d'équilibre $\forall\ m \in [0\ 1[$: E_0 (0,0), E_1 (1,0) et E_2 $(m, (m-l)(1-m))$. Par contre, lorsque $m = 1$, le système 2.2 admet deux points d'équilibre E_0 (0,0) et E_1 (1,0).

En utilisant la même matrice jacobienne J, nous déterminons les valeurs propres ainsi que le type de singularité de chaque point d'équilibre. D'après la Table 2.3, nous remarquons que l'introduction de l'effet Allee Faible modifie le comportement des espèces en rendant le point d'équilibre E_0 instable [Saad and Boubaker, 2015]. Ceci signifie, biologiquement, qu'il n'y a pas une probabilité d'extinction dans ce cas. Par contre,

les deux autres points d'équilibre E_1 (1, 0) et E_2 $(m, (m-l)(1-m))$ gardent le même type de singularité. Pour $m = 0$ ou $m = 1$, nous ne pouvons pas conclure la singularité des points d'équilibre E_0 et E_1 puisqu'ils admettent des valeurs propres nulles. De plus, la résolution numérique réalisée par MATCONT n'a permis d'obtenir aucune singularité pour ces cas exceptionnels.

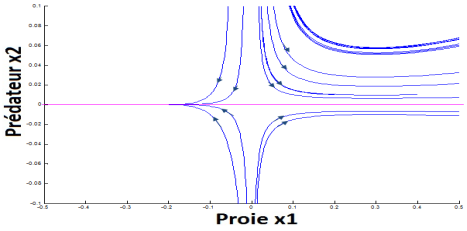
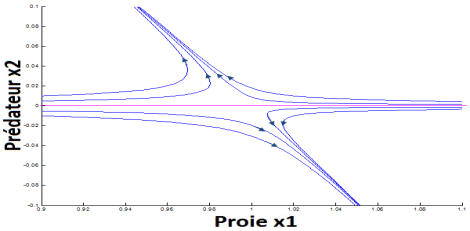
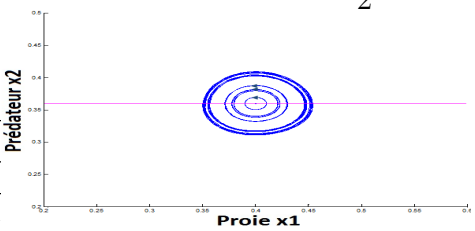
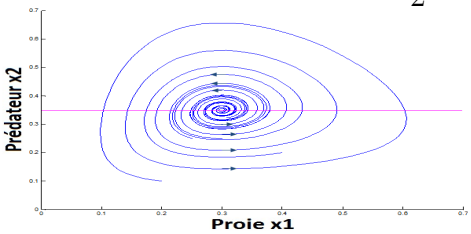
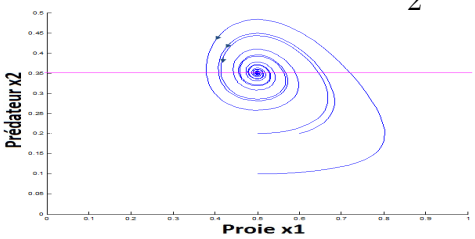
Analyse des Bifurcations

Après avoir étudié la stabilité du système 2.2 avec l'effet Allee Faible, nous étudions les bifurcations existantes en choisissant m comme paramètre de bifurcation vue que la stabilité des points d'équilibre dépend de ce paramètre. Pour les simulations numériques dans le cas d'effet Allee Faible, la valeur du seuil est choisie tel que $l = -0.2$. Le diagramme de bifurcation tridimensionnel présenté dans la Figure 2.2 montre que le système 2.2 avec effet Allee Faible admet trois points de bifurcation $\forall\ m \in [0\ 1]$.

- Pour $m = \dfrac{1+l}{2} = 0.4$, le système admet une bifurcation Poincare-Andronov-Hopf (H) avec un premier coefficient de lyapunov qui est égal -5.263146e-01 <0.
- Pour $m = 0$ et $m = 1$, il existe un point de bifurcation 'BP'. Ce type de bifurcation prouve qu'au niveau de ce point de bifurcation, les points d'équilibre (E_0, E_2) et (E_1, E_2) se collent et changent de stabilité.

Après avoir réalisé l'analyse complète du système avec les deux types d'effet Allee, nous proposerons, par la suite, de forcer périodiquement le taux de croissance de la proie et d'analyser le comportement dynamique du système forcé.

TABLE 2.3 – Valeurs Propres et singularités :Etude de cas d'effet Allee Faible $m \in]0\ 1[$ et $l \in]-1\ 0[$

Point d'équilibre	Valeurs propres	Singularité
$E_0(0,0)$	$\lambda_1 = -l$ $\lambda_2 = -m$	**Selle** 
$E_2(1,0)$	$\lambda_1 = l - 1$ $\lambda_2 = 1 - m$	**Selle** 
$E_3(m,(m-l)(1-m))$	$\lambda_1 = \dfrac{tr(J_3) + i\sqrt{\Delta}}{2}$ $\lambda_2 = \dfrac{tr(J_3) - i\sqrt{\Delta}}{2}$	**Centre** $(m = \dfrac{1+l}{2})$  **Foyer Instable** $(m < \dfrac{1+l}{2})$  **Foyer Stable** $(m > \dfrac{1+l}{2})$ 

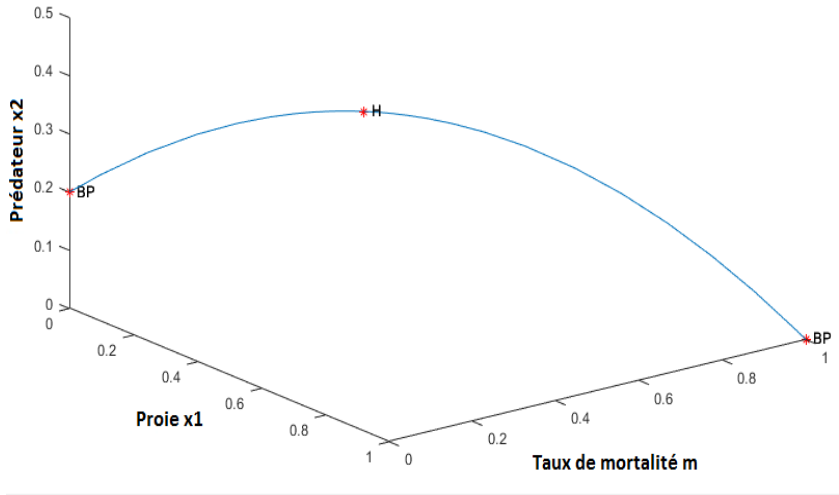


FIGURE 2.2 – Diagramme de bifurcation tridimensionnel du modèle proie-prédateur avec effet Allee Faible obtenu via le logiciel MATCONT

2.3.3 Modèle avec effet saisonnier

Dans cette partie, nous proposerons un forçage saisonnier du système proie-prédateur 2.1 en introduisant l'effet périodique au niveau du taux de croissance de la proie décrit par [Saad et al., 2018a] :

$$R = R_0 + R_1(1 - cos(\theta t))/(X_1 - L)(K - X_1) \tag{2.4}$$

En remplaçant l'expression 2.4 dans le système 2.1 et en introduisant les mêmes variables et paramètres non-dimensionnels définis dans la section précédente, le modèle peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(x_1 - l)(1 - x_1) - x_1x_2 + \lambda x_1(1 - cos(\theta t)) \\ \\ \frac{dx_2}{dt} = (x_1 - m)x_2 \end{cases} \tag{2.5}$$

où $\lambda = \frac{R_1}{R_0}$ et $\theta = \frac{\omega}{R_0} \in [0\ 2\pi]$ sont respectivement l'amplitude et la fréquence de la saisonnalité.

Analyse des Bifurcations

Afin d'identifier les régions de stabilité du système forcé 2.5, nous

présenterons dans la suite les diagrammes de bifurcation pour les deux cas d'études d'effet Allee.

La Figure 2.3, obtenu par le code MATLAB présenté dans l'Annexe 1 illustre la dynamique du système forcé (2.5) avec un effet Allee Fort en présentant les maximums locaux des variables d'état en fonction de la variation du paramètre de bifurcation θ. On remarque que la valeur de la fréquence saisonnière a un impact sur le comportement la dynamique du système :

- Si $\theta \in [0\ 2.18]$ ou $\theta \in [3.45, 6]$, le système (2.5) admet un comportement périodique / pseudo-périodique. Ces intervalles sont déduis à partir de la Figure 2.3 et vérifiés par le calcul numérique des spectres de Lyapunov.
- Si $\theta \in [2.19, 3.44]$, le système (2.5) admet un comportement chaotique puisque il admet un exsposant de Lyapunov $LE_1 > 0$.

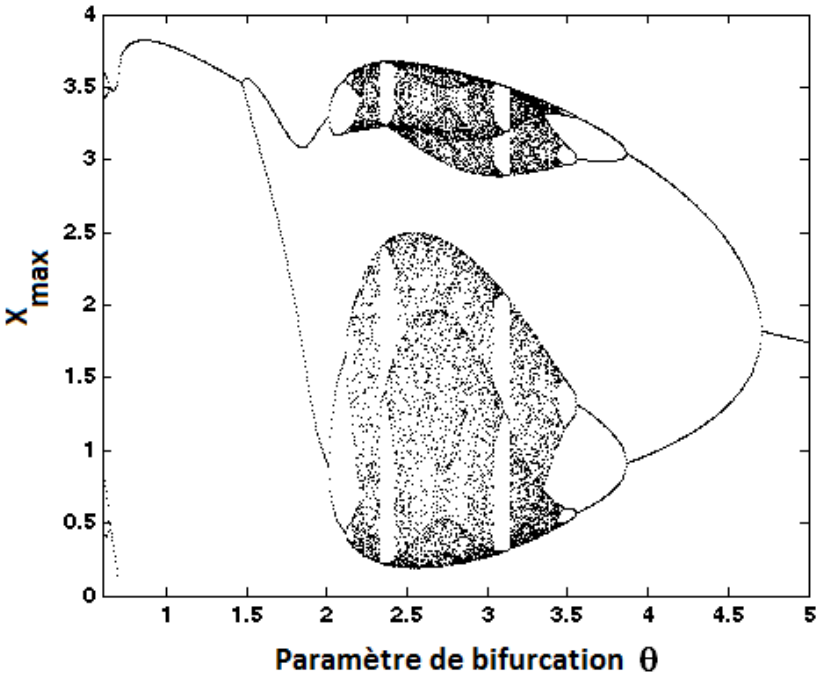


FIGURE 2.3 – Diagramme de bifurcation du système proie-prédateur forcé de façon saisonnière avec un effet Allee Fort pour m=0.75, $l = 0.5$ and λ=5 obtenu à l'aide du logiciel MATLAB

Pour le cas de l'effet Allee Faible, la dynamique du système forcé (2.5)

est décrite par la Figure 2.4, obtenu par un code MATLAB présenté dans l'Annexe 2, qui montre aussi que le comportement du système varie selon la valeur de la fréquence saisonnière comme suit :

- Si $\theta \in [0\ 2.09]$ ou $\theta \in [3.07,\ 3.6]$ ou $\in [3.78,\ 6]$, le système (2.5) admet un comportement périodique / pseudo-périodique
- Si $\theta \in [2.1,\ 3.06]$ou $\in [3.61,\ 3.77]$, le système (2.5) admet un comportement chaotique.

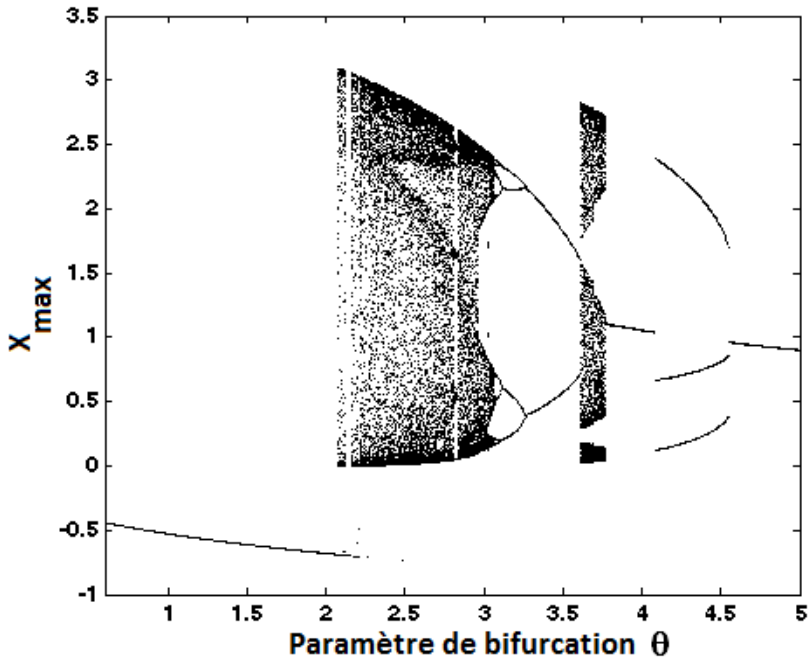


FIGURE 2.4 – Diagramme de bifurcation du système proie-prédateur forcé de façon saisonnière avec effet Allee Faible pour m=0.4, $l = -0.2$ and $\lambda = 5$

Ces résultats obtenus ont été vérifiés en déterminant les attracteurs correspondants aux limites des intervalles de θ comme il est présenté dans la Figure 2.5 et la Figure 2.6. D'autre part, afin de vérifier les signatures du chaos, un changement de variable a été effectué en proposant $x_3 = \theta t$ pour obtenir le spectre de Lyapunov.

La Figure 2.5 montre que le système proie-prédateur admet des attracteurs étranges pour $\theta = 2.19$ et $\theta = 3.44$ quand l'effet Allee est Fort.Quant à l'effet Allee Faible, l'attracteur étrange apparait pour $\theta =$

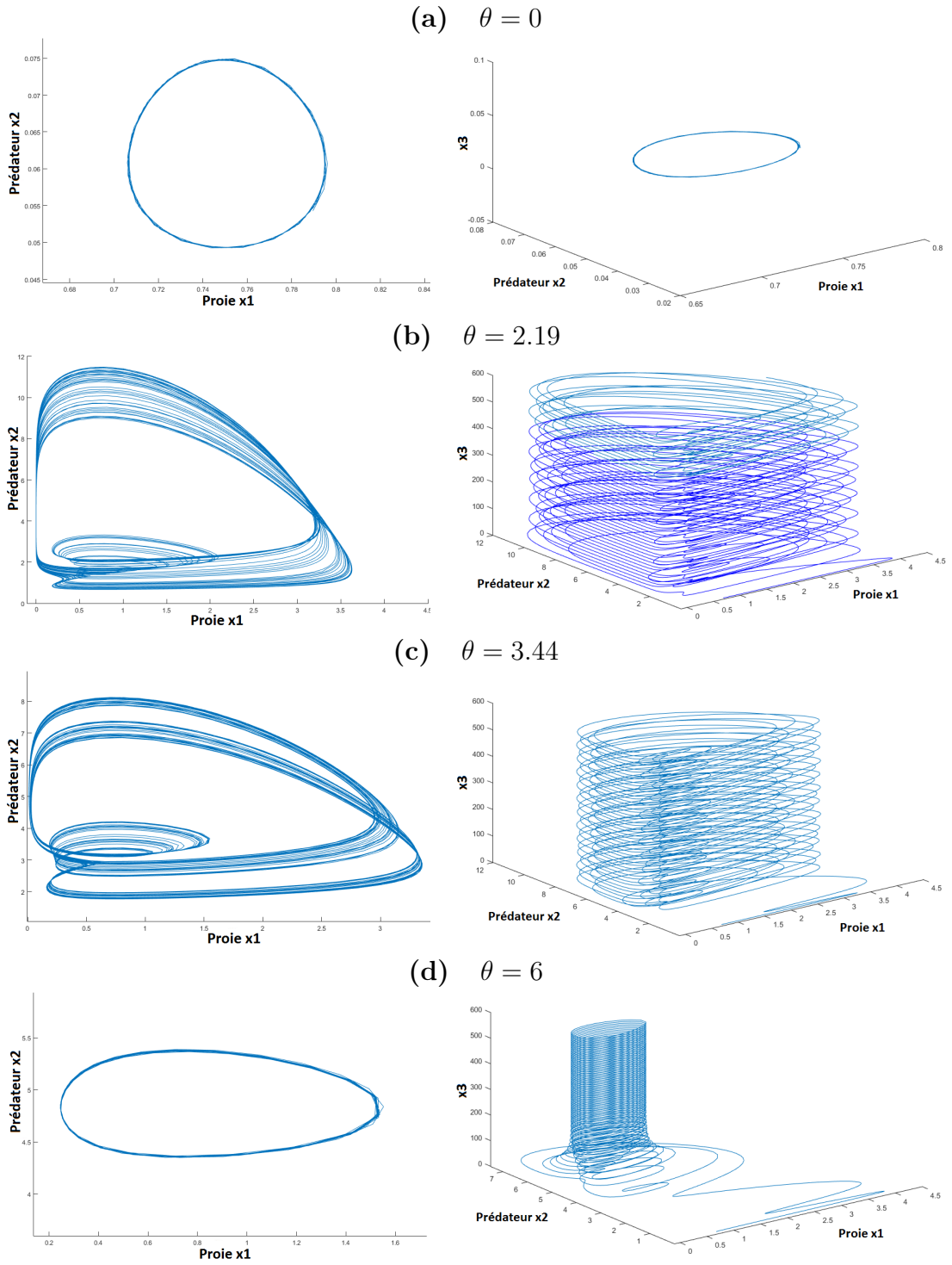


FIGURE 2.5 – Portrait de phase du système proie-prédateur forcé de façon saisonnière avec un effet Allee Fort

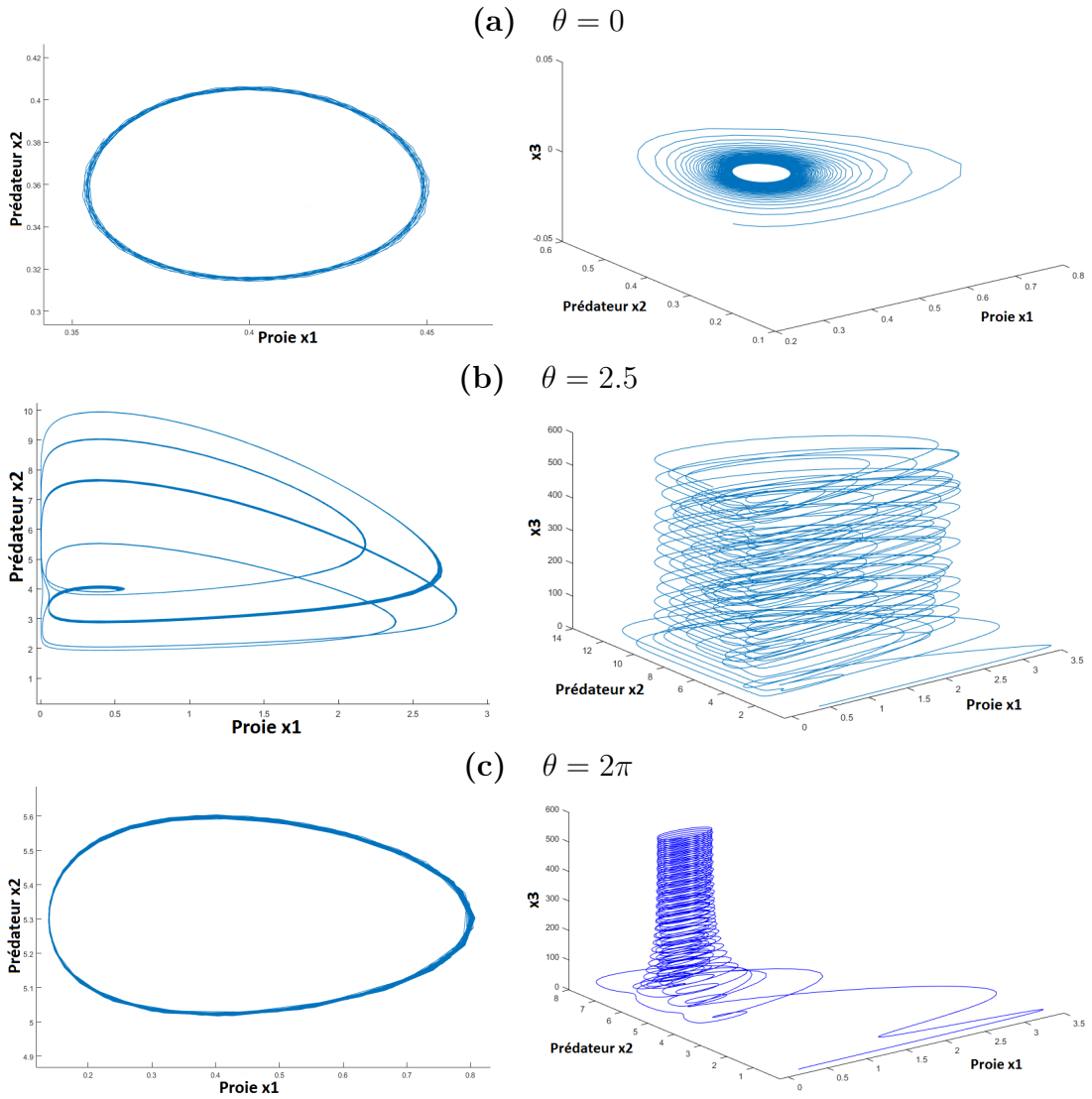
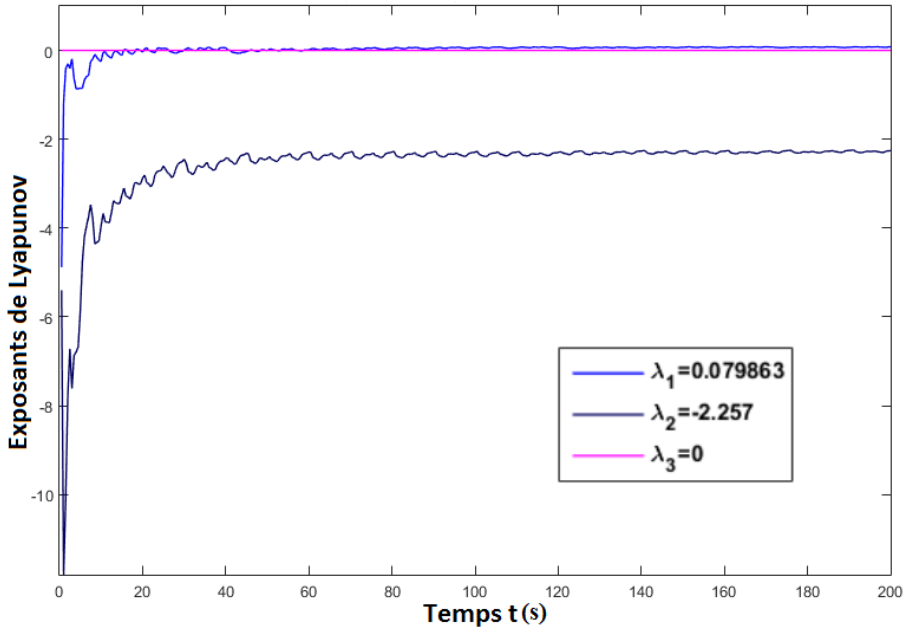


FIGURE 2.6 – Portrait de phase du système proie-prédateur forcé de façon saisonnière avec un effet Allee Faible pour une seule condition initiale

(a) Allee effect fort



(b) Allee effect Faible

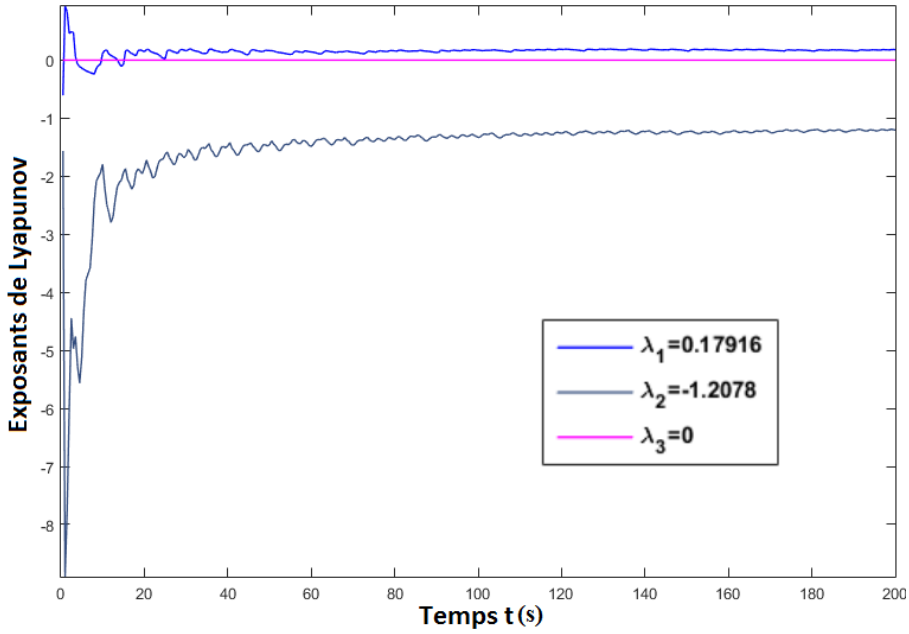


FIGURE 2.7 – Exposants de Lyapunov pour les deux cas d'effet Allee

2.5 comme il est représenté dans la Figure 2.6. L'existence de ce type d'attracteur est une condition nécessaire mais pas suffisante pour conclure l'existence du chaos. En fait, l'analyse des exposants de Lyapunov est requise en utilisant le logiciel Matlab Matds qui est basé sur la fonction prédéfinie l'ode87. Ce dernier est un intégrateur précis du 8ème ordre assurant une erreur locale d'ordre 9. Pour calculer les exposants de Lyapunov, la célèbre méthode [Wolf et al., 1985] de Wolf a été appliquée dans notre travail. L'exposant de Lyapunov (LE) et le calcul de la dimension de Lyapunov sont réalisés en choisissant $\theta = 2.5$. Les spectres de Lyapunov obtenus sont présentés par la Figure 2.7. Pour l'effet Allee Fort et Faible, les exposants de Lyapunov sont respectivement égaux à (0.079863, 0, -2.257) et (0.17916, 0, -1.2078). Ainsi, les trois LEs sont de signe (+,0,-) ce qui prouve l'existence d'un attracteur étrange. D'aprés l'expression 1.3 dans le premier chapitre, la dimension de Lyapunov correspondante au système (2.5) est fractale et égale respectivement à 2.0353 et 2.1483 pour l'effet Allee Fort et Faible. Les LEs et la dimension de Lyapunov obtenus confirment l'existence du chaos pour le système (2.5).

2.4 Étude comparative

L'analyse du système 2.2 montre que l'effet Allee peut être une force déstabilisante dans le système proie-prédateur. Nous nous intéressons donc à ressortir la différence entre les deux types d'effet Allee pour la dynamique du modèle proie-prédateur. Ainsi, nous illustrons dans la Figure 2.8 le portrait de phase en considérant les deux cas d'études en choisissant la même valeur du seuil d'effet Allee en valeur absolue égale à 0.2. Nous remarquons que le portrait de phase est divisé en trois régions :

- Dans le cas d'un effet Allee Fort, pour une valeur de $m < \dfrac{1+l}{2}$, nous avons obtenu trois courbes, présentées dans la figure 2.8 en bleu, autour des trois points d'équilibre $E_0(0,0)$, $E_2(1,0)$ et $E_3(m,(m-$

$l)(1-m))$. Par contre, pour une valeur de $m > \dfrac{1+l}{2}$, nous observons que la trajectoire, présentée en violet, change de direction et de région.

- Dans le cas d'un effet Allee Faible, le cycle limite sépare le portrait de phase en trois régions l'une à l'intérieur du cycle et les deux autres à l'extérieur correspondant à E_0 et E_1.

.

Soit $E_{0.2}$ un point initial de coordonnés $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.1$ et correspondant à $m = |l| = 0.2$. A partir de ce point, on observe que l'orbite converge vers un cycle limite, présentée en bleu ciel, lorsque l'effet Allee est Faible. Cependant, lorsque l'effet Allee est Fort, l'orbite converge vers le point d'équilibre stable E_0.

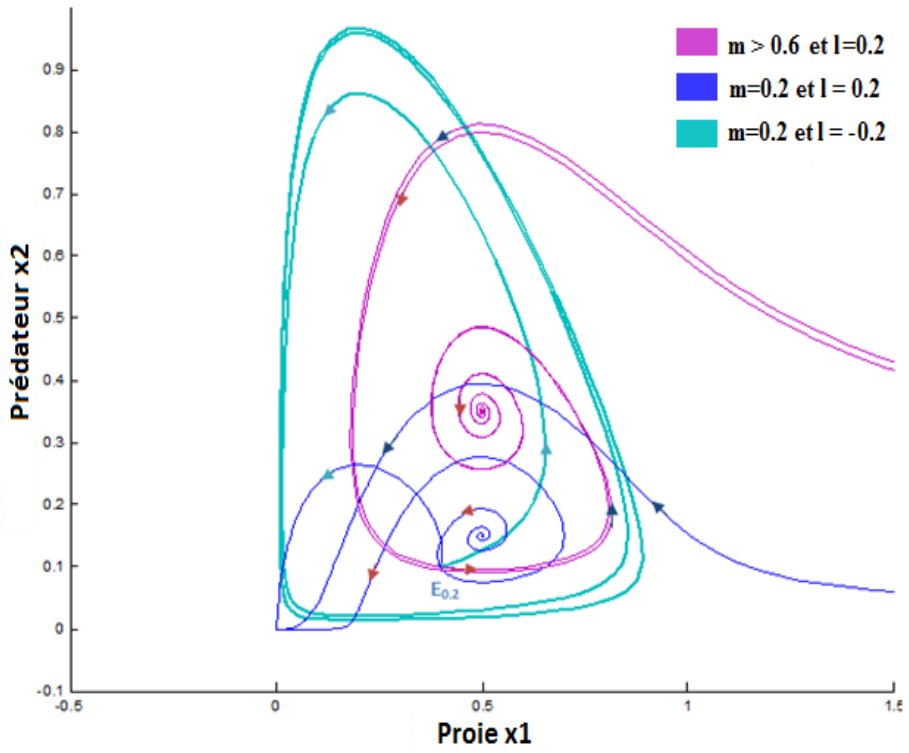


FIGURE 2.8 – Portrait de phase du modèle BB avec effet Allee Fort et Faible

Par la suite, nous nous intéressons à la comparaison de l'analyse de bifurcation en présentant le diagramme de bifurcation bidimensionnel des

deux types d'effet Allee par la Figure 2.9. Nous observons que lorsque le

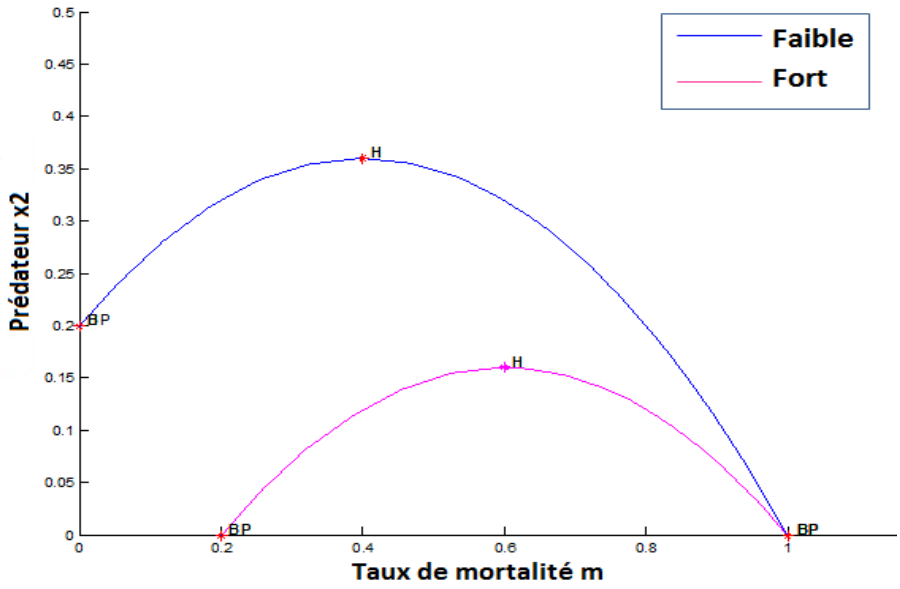


FIGURE 2.9 – Diagramme de bifurcation bidimentionnel pour les deux types d'effet Allee

taux de mortalité du prédateur devient très faible, le taux de croissance de la population du prédateur diminue :

- Dans le cas d'effet Allee Fort, le taux de croissance diminue en dessous d'un seuil critique d'effet Allee et devient négatif, indiquant l'extinction des deux espèces à faible densité.
- Dans le cas de l'effet Allee Faible, le taux de croissance diminue mais ne devient jamais négatif, ce qui signifie que les deux populations ne s'éteignent jamais lorsque les proies sont à faible densité.

Après avoir comparé les deux études de cas, nous comparons maintenant le comportement dynamique du système 2.2 avec celui du système forcé (2.5). Par conséquent, nous constatons que lorsque le taux de croissance de la proie est forcé périodiquement, le comportement dynamique du système devient instable et peut même devenir chaotique. Ce dernier apparait lorsque la fréquence de la saisonnalité est dans l'intervalle [2.19, 3.44] pour le cas d'effet Allee Fort et dans l'intervalle [1.4, 3.06] pour le

cas d'effet Allee Faible.
De plus, en comparant les deux premiers exposants de Lyapunov LEs présentés dans la Figure 2.3.3, nous remarquons que le premier exposant LE_1 pour le cas d'effet Allee Faible, est supérieur à celui obtenu pour le cas de l'effet Allee Fort. Ce qui indique que le taux de divergence des trajectoires de l'attracteur dans le cas Faible est plus élevé que celui du cas Fort. Ce qui permet de conclure que le degré de chaoticité est plus important dans le cas d'effet Allee Faible.

En effet, nous pouvons conclure que :

- Dans le cas de l'effet Allee Fort pour le système 2.2, il existe une probabilité d'extinction des espèces à faible densité des populations.
- Dans le cas d'effet Allee Faible pour le système 2.2, les espèces ne disparaissent jamais à faible densité. Par contre, le système forcé (2.5) souffrant d'effet Allee Faible admet un comportement plus complexe que celui du système forcé dans le cas d'effet Allee Fort.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un effet Allee Faible est introduit dans le taux de croissance de la proie du modèle proie-prédateur. Tout d'abord, nous avons approfondi l'analyse de la stabilité et des bifurcations du modèle souffrant d'effet Allee Fort. Ensuite, une analyse théorique et numérique du système en introduisant un effet Allee Faible et un effet saisonnier au niveau de la croissance intrinsèque de la proie a été détaillée. Cette analyse a été réalisée en déterminant les valeurs propres du système souffrant d'effet Allee Fort et Faible, le portrait de phase, les attracteurs, le diagramme de bifurcation et l'exposant de Lyapunov et de Kaplan-Yorke. Par la suite, une comparaison entre les résultats des analyses précédentes est également donnée. L'incorporation de l'effet Allee Faible met en évidence l'impact de cet effet sur l'évolution de la population des

espèces. Lorsque l'effet Allee est Fort, la population peut disparaitre à une faible densité. D'autre part, nous constatons que l'effet saisonnier génère un nouveau comportement plus complexe qui devient chaotique pour certaines valeurs de la fréquence θ. Dans le chapitre suivant, nous proposerons de concevoir et valider expérimentalement un modèle électrique équivalent au système étudié en considérant l'effet Allee Faible. Par la suite, nous contrôlerons le comportement chaotique du système forcé.

Chapitre 3

Validation expérimentale et synchronisation chaotique

3.1 Introduction

La compréhension de la dynamique des populations conduit de nos jours à de nombreux algorithmes d'optimisation intéressants utilisés pour le contrôle des systèmes non linéaires tels que les algorithmes d'optimisation par essaims particulaires [Mehdi and Boubaker, 2016, Mehdi and Boubaker, 2011], les algorithmes de colonies de fourmis [Pang et al., 2017, Yongwang et al., 2017] et les algorithmes d'optimisation Proie-Prédateur [Zhang and Duan, 2017, Sidhu and Dhillon, 2018]. D'autre part, dans la nature, l'analyse du comportement dynamique des populations permet de veiller à l'équilibre de l'écosystème qui peut nécessiter des années d'observation sans utilisation des techniques numériques de simulation et d'analyse. Outre la modélisation mathématique et l'analyse numérique de la dynamique des populations, une analyse du système biologique par l'implémentation d'un circuit électrique équivalent peut aboutir à une validation des résultats de simulation et une prise de décision plus rapide pour les systèmes biologiques. Dans ce chapitre, un modèle électrique équivalent au modèle proie-prédateur étudié dans le chapitre précédent sera donc conçu et validé expérimentalement. Par la suite, le comportement chaotique du système forcé, non désirable pour l'écosystème, sera contrôlé. Pour atteindre cet objectif, une synchronisation du système forcé avec le modèle proie-prédateur basique sera proposée.

Ce chapitre est organisé en quatre paragraphes : Le second présente le circuit électrique équivalent du modèle proie-prédateur. Le troisième présente la validation expérimentale du circuit équivalent. Enfin, une synchronisation du système chaotique sera détaillée, dans le quatrième paragraphe. Les analyses et les expérimentations présentées dans ce chapitre ont fait l'objet des publications [Saad and Boubaker, 2018a] et [Saad et al., 2018b].

3.2 Conception du circuit électrique équivalent

Dans cette partie, un circuit équivalent au modèle proie-prédateur 2.2, défini dans le chapitre 2, sera proposé afin d'analyser l'accord entre les analyses théorique et l'expérimentation. Par conséquent, une transformation du modèle proie-prédateur 2.2 en un modèle électrique équivalent est réalisée. Nous proposerons alors le modèle équivalent suivant [Saad et al., 2018b] :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{1}{C_1R_1}x_1^3 + \dfrac{1}{C_1R_2}x_1^2 - \dfrac{1}{C_1R_3}x_1 - \dfrac{1}{C_1R_4}x_1x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{C_2R_5}x_1x_2 - \dfrac{1}{C_2R_6}x_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

où C_i $(i = 1, 2)$ sont des capacités et R_j $(j = 1...6)$ sont des résistances. Par identification au modèle 2.2, $\dfrac{1}{C_1R_1} = \dfrac{1}{C_1R_4} = \dfrac{1}{C_2R_5} = 1$; $\dfrac{1}{C_1R_2} = (1 + l)$; $\dfrac{1}{C_1R_3} = l$; $\dfrac{1}{C_2R_6} = m$.

Les capacités C_1 et C_2 seront utilisées pour assurer des opérations d'intégration afin d'obtenir en sortie les densités de population x_1 et x_2. Pour cela, deux intégrateurs sont proposés.

3.2.1 Conception du circuit via le logiciel MULTISIM

En considérant l'étude de cas du modèle proie-prédateur 3.1 avec l'effet Allee, un circuit électronique équivalent est conçu sous le logiciel MultiSIM et présenté par la Figure 3.1. Les composants utilisés sont 3 multiplicateurs, 5 amplificateurs opérationnels, 2 condensateurs et 12 résistances. Les résistances (R_1, R_2 ... R_6) et les valeurs des condensateurs sont fixées en accord avec les paramètres du modèle proie-prédateur 2.2. La valeur des deux condensateurs C_1 et C_2 est fixée à 100 nF. De plus, deux interrupteurs S_1 et S_2 sont utilisés pour introduire les conditions initiales.

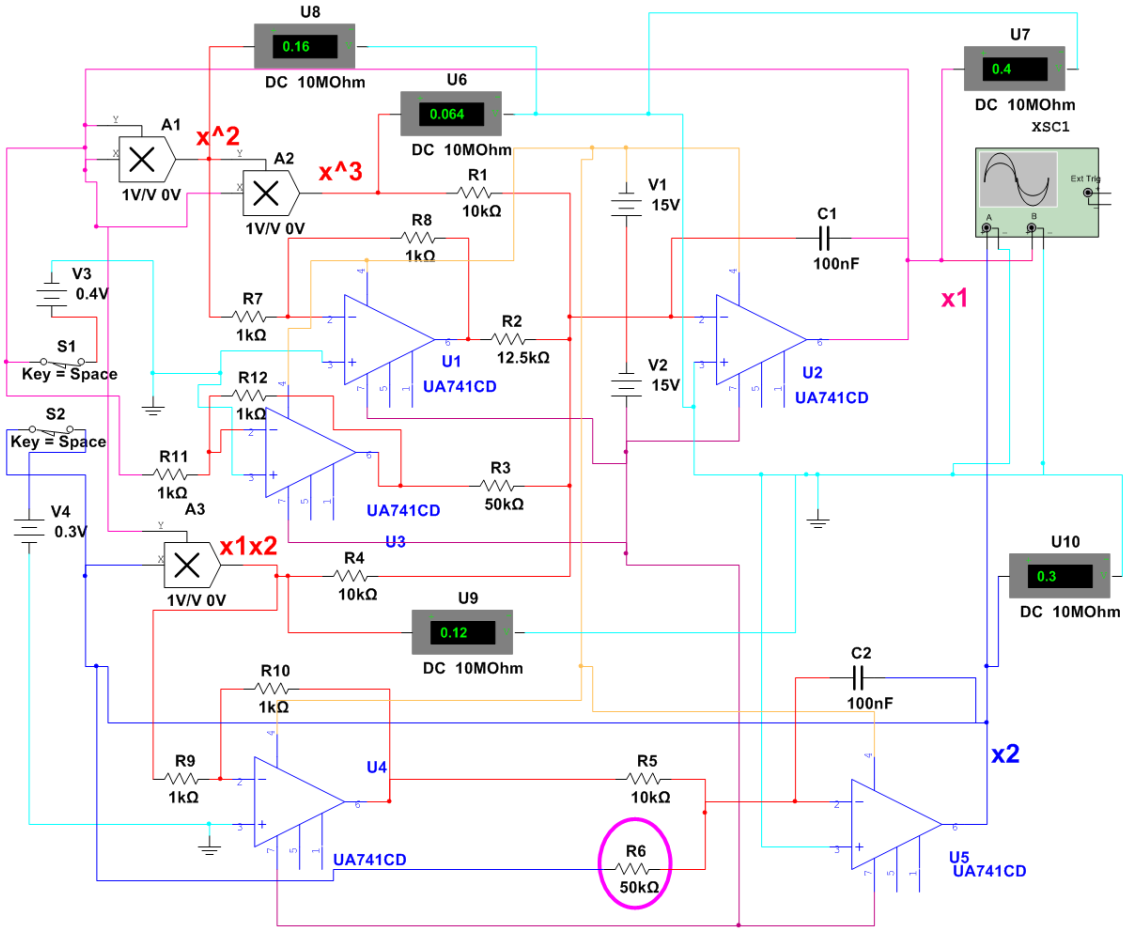


FIGURE 3.1 – Circuit électrique équivalent du modèle proie-prédateur 3.1 pour $m = 0.2$ sous MULTISIM

3.2.2 Validation numérique sous MULTISIM

Pour la validation numérique, une seule étude de cas est suffisante. Pour cela, dans ce qui suit, nous avons choisi de considérer l'étude du cas d'effet Allee Faible. En se référant aux analyses des points d'équilibre présentées dans la section 2 du chapitre 2, et puisque l'expression des deux points d'équilibre E_0 et E_1 ne dépend pas de la valeur du paramètre m, seule la singularité du point d'équilibre E_3 sera validée numériquement pour la condition initiale $x_{10} = 0.4, x_{20} = 0.3$. Par conséquent, sachant que $R_6 = R_5/m$, trois scénarios seront proposés pour la validation en augmentant à chaque fois la valeur du paramètre m par un pas de 0.2. Et par conséquent, la valeur de la résistance R_6 change.

Scénario 1 **:** $m = |l| =$ **0.2**

Dans la première étude de cas, nous considérons un taux de mortalité du prédateur $m = |l| = 0.2$. Par conséquent, la valeur fixe de R_6 dans ce cas est égale à 50K Ω. L'évolution temporelle et le portrait de phase lorsque $m = 0.2$ sont présentés par la Figure 3.2 et la Figure 3.3.

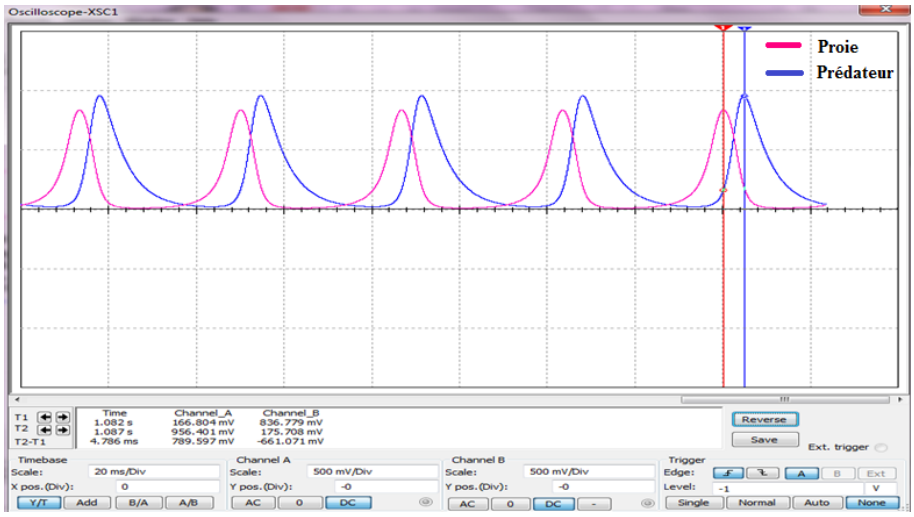


FIGURE 3.2 – Évolution temporelle du système proie-prédateur pour $m = 0.2$ obtenue via MULTISIM

La Figure 3.2 montre que l'amplitude de l'évolution temporelle de la proie est égale à 0.956 V et que l'amplitude de l'évolution tempo-

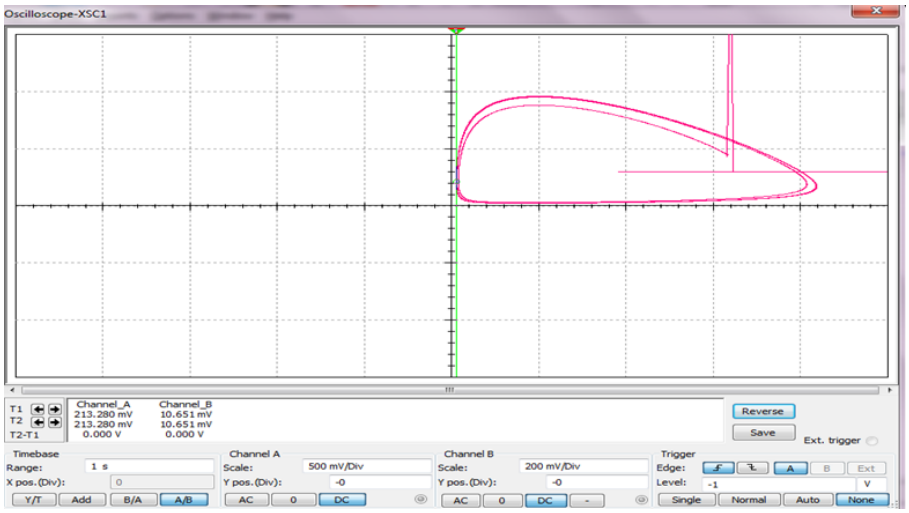


FIGURE 3.3 – Portrait de phase du système proie-prédateur pour m = 0.2

relle du prédateur est égale à 0.836 V. En outre, la Figure 3.3 prouve que le système proie-prédateur admet un cycle limite. En comparant avec les résultats présentés par la Figure 3.4, nous concluons qu'il y a une concordance entre les résultats obtenus via le logiciel d'analyse des circuits électriques MULTISIM et les résultats obtenus via le logiciel d'analyse de bifurcation MATCONT.

Scénario 2 **:** m **= 0.4**

Dans la deuxième étude de cas, nous augmentant le taux de mortalité du prédateur à m =0.4. Par conséquent, nous varions la valeur de R_6 à 25KΩ. L'évolution temporelle et le portrait de phase sont présentés, respectivement, par les Figures 3.5 et 3.6 obtenus via le logiciel MULTISIM.

La Figure 3.5, obtenu via le logiciel MULTISIM montre que l'amplitude maximale de la population de proie atteint la valeur 0.488 V et celle de la population de prédateur atteint la valeur 0.441 V. Ces valeurs sont équivalentes aux valeurs numériques obtenues via MATCONT et présentées par la Figure 3.7. En outre, le portrait de phase obtenu via le logiciel MULTISIM, présenté dans la Figure 3.6 prouve l'existence de la singularité de type centre obtenue par MATCONT présentée par la

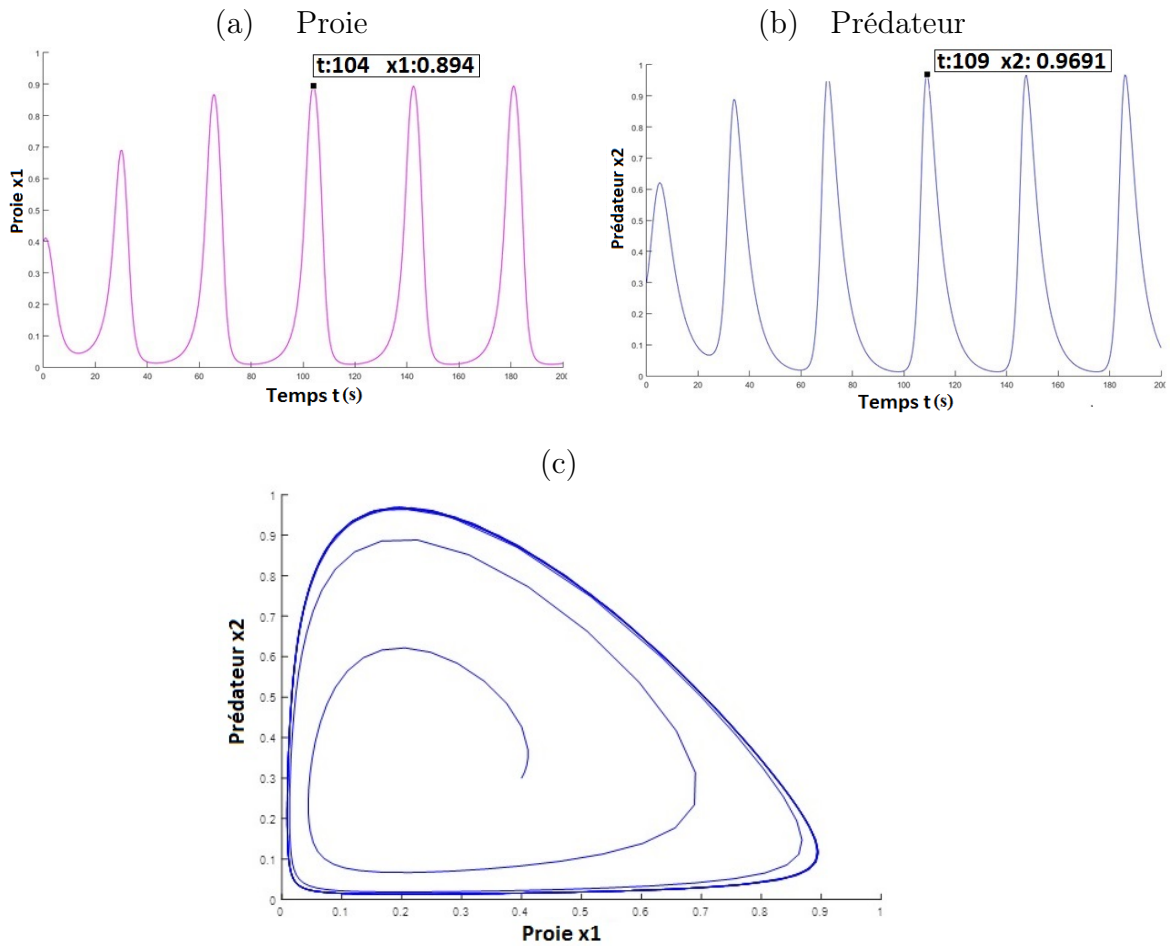


FIGURE 3.4 – Évolution temporelle et portrait de phase du système proie-prédateur pour $m = 0.2$ obtenus via le logiciel MATCONT : (a) Proie, (b) Prédateur et (c) Portrait de phase

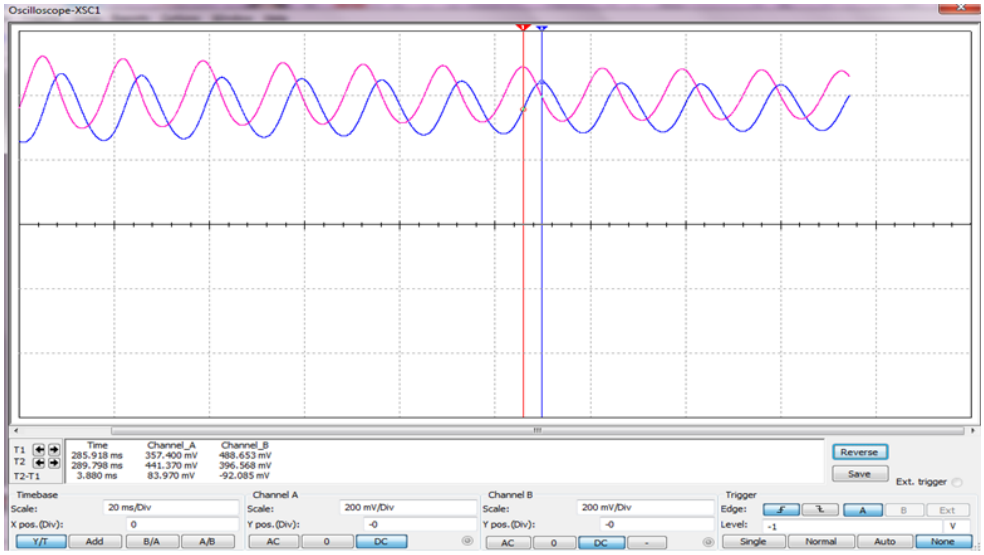


FIGURE 3.5 – Évolution temporelle du système proie-prédateur pour $m = 0.4$ obtenue via le logiciel MULTISIM

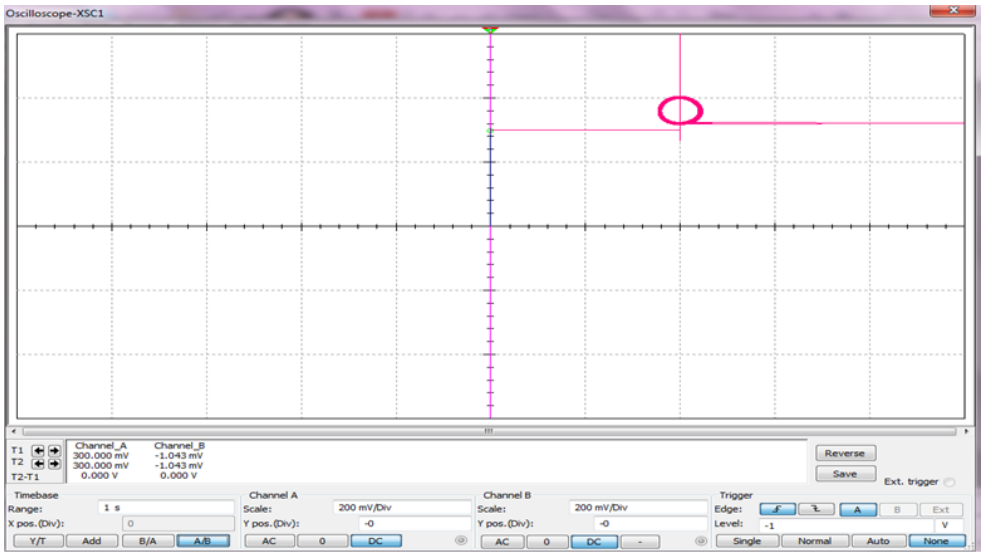


FIGURE 3.6 – Portrait de phase du système proie-prédateur pour $m = 0.4$ obtenu via le logiciel MULTISIM

Figure 3.7.

Scénario 3 : $m = 0.6$

Puisque le taux de mortalité du prédateur m est fixé à 0.6, alors R_6 est fixé à 17KΩ pour les conditions initiales x_{10}=0.4 et x_{20}=0.1. Les Figures 3.8 et 3.9 prouvent que la dynamique du modèle tend vers un point fixe. D'après la Figure 3.8, nous remarquons que la dynamique du système 3.1 oscille pendant le régime transitoire. La population de la proie et du prédateur atteint un pic égal, respectivement, à x_1=0.978 et x_2=0.399V. Cependant, en régime permanent, l'amplitude de l'évolution des populations de la proie et de prédateur devient constante et égale respectivement à 0.586 V et 0.326 V. Ce comportement temporel est décrit par un foyer stable dans le portrait de phase présenté par la Figure 3.9 obtenu via MULTISIM. En comparant avec les résultats numériques présentés par la Figure 3.10 obtenus via MATCONT, nous constatons que les résultats électriques sont conformes aux résultats de simulation.

D'après les trois scénarios, nous concluons que les résultats électriques

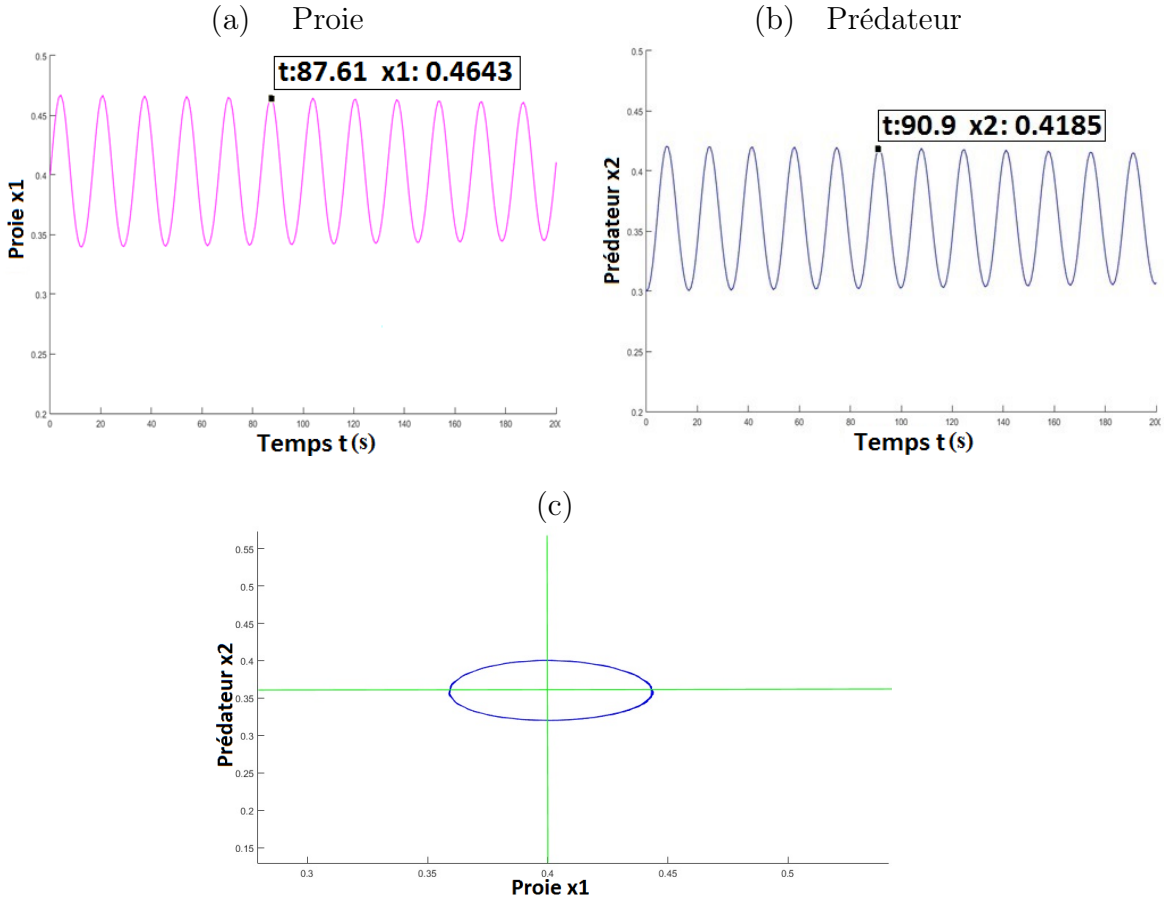


FIGURE 3.7 – Évolution temporelle et portrait de phase du système proie-prédateur pour $m = 0.4$ obtenus via le logiciel MATCONT : (a) Proie, (b) Prédateur et (c) Portrait de phase

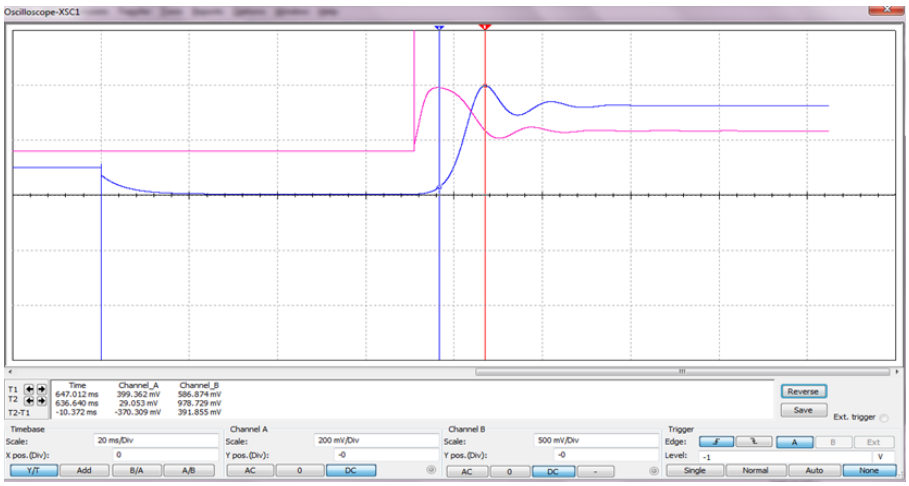


FIGURE 3.8 – Évolution temporelle du système proie-prédateur pour $m = 0.6$ obtenue via le logiciel MULTISIM

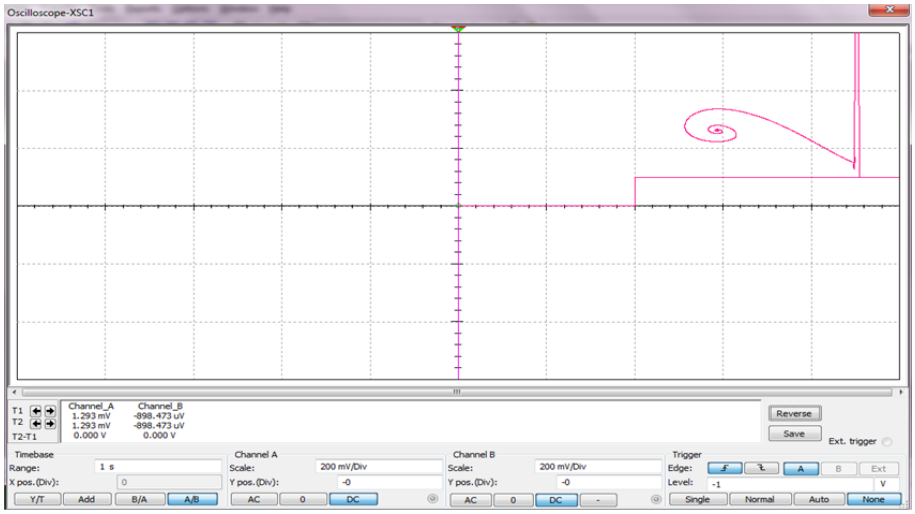


FIGURE 3.9 – Portrait de phase du système proie-prédateur pour $m = 0.6$ obtenu via MULTISIM

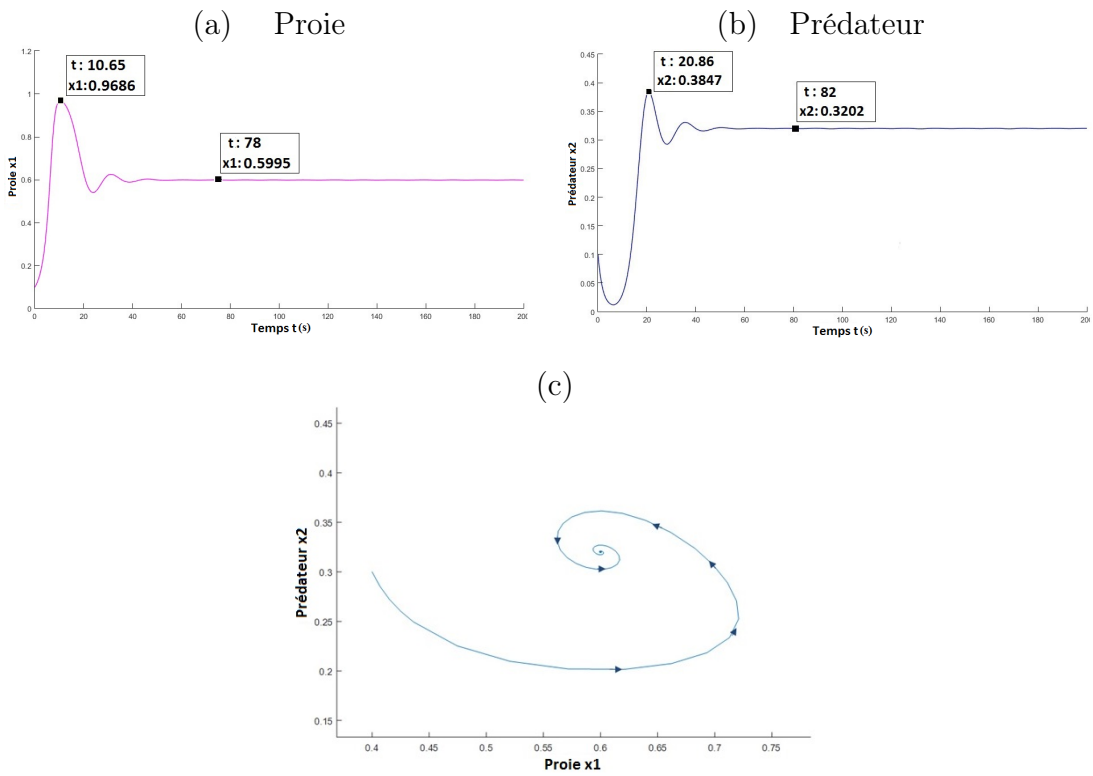


FIGURE 3.10 – Évolution temporelle et portrait de phase du système proie-prédateur pour m=0.6 obtenus via le logiciel MATCONT : (a) Proie, (b) Prédateur et (c) Portrait de phase

obtenus par le logiciel MULTISIM valident les résultats numériques obtenus par le logiciel MATCONT. Par conséquent, nous pouvons conclure que le circuit électrique conçu est équivalent au système proie-prédateur étudié.

3.3 Validation expérimentale

Le modèle mathématique du système proie-prédateur contient plusieurs non-linéarités au niveau de l'équation différentielle régissant la dynamique de la proie qui rendent la validation expérimentale non évidente. De ce fait, deux méthodes de validation expérimentales sont proposées. La première est basée sur l'implémentation du circuit électrique conçu précédemment à l'aide de MULTISIM et la seconde est basée sur la programmation d'un micro-contrôleur STM32780.

3.3.1 Validation numérique et expérimentale des fonctions non linéaires

Le système proie-prédateur 2.2 comporte les termes non linéaires x^2 et x^3. Ces non linéarités rendent l'implémentation du circuit équivalent trés complexe. Dans la section précédente, ils ont été conçus par des multiplicateurs prédéfinis via le logiciel MULTISIM. Dans cette section, des circuits électriques équivalents de ces termes non linéaires seront conçus et simulés via le logiciel MULTISIM, comme première étape, pour être validés par la suite expérimentalement. Le premier circuit à terme non linéaire a besoin d'un multiplicateur AD633. La cellule multiplicative de ce multiplicateur comprend une référence Zener enterrée fournissant un facteur d'échelle global de 10V. Pour cela, une amplification de la sortie avec un gain de 10 est nécessaire. Ainsi, le modèle électrique équivalent

est réalisé comme suit :

$$S_1 = x^2 = \frac{x^2}{10}\frac{R_1 + R_2}{R_1} \tag{3.2}$$

Comme le montre la Figure 3.11, en considérant la fiche technique des composants, le circuit électrique du terme non linéaire x^2 est modélisé par un multiplicateur analogique AD633AN, un amplificateur AOP, 2 condensateurs (C_1, C_2) et 2 résistances (R_1, R_2).

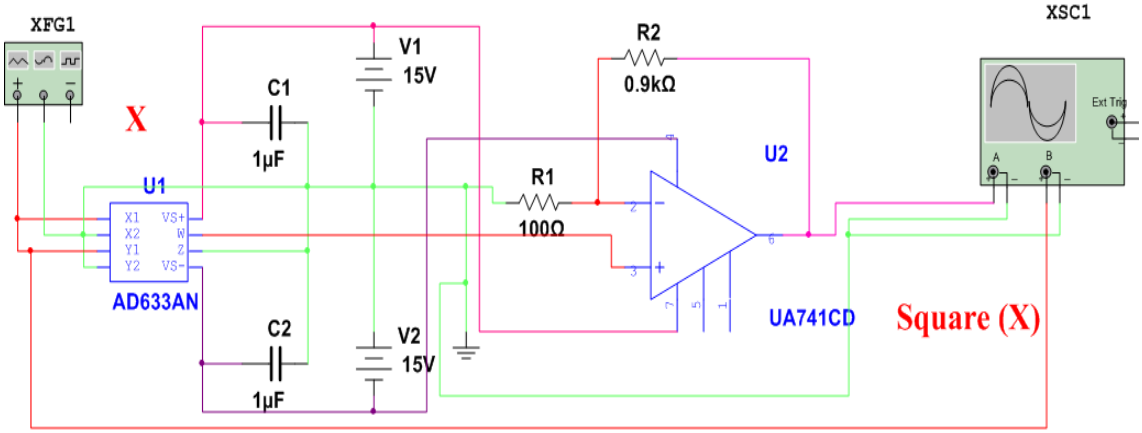


FIGURE 3.11 – Circuit équivalent de la fonction non linéaire x^2

En raison de l'existence de pertes internes dans les composants électriques, la valeur idéale de R_2 choisie pour obtenir le meilleur résultat est égale à 0.9k Ω.
Cependant, pour le terme non linéaire x^3, le circuit électrique est modélisé par 2 multiplicateurs AD633AN, 2 amplificateurs AOP, 4 condensateurs et 4 résistances, comme il est présenté dans la figure Fig 3.12, puisque son modèle électrique est réalisé comme suit :

$$S_2 = x^3 = S_1\frac{R_3 + R_4}{R_3}\frac{x}{10} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 R3}\frac{x^2}{100} \tag{3.3}$$

L'entrée qui sera utilisée pour le circuit équivalent du système 2.2 est continue. Cependant, dans cette partie, afin de vérifier l'efficacité des

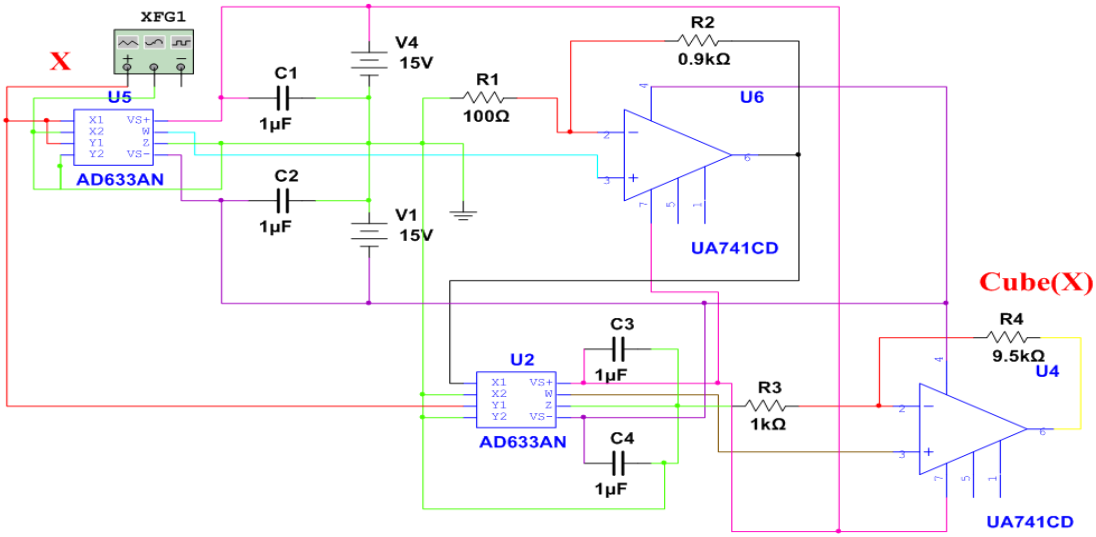


FIGURE 3.12 – Circuit équivalent de la fonction non linéaire x^3

deux circuits équivalents non linéaires proposés, un signal alternatif est utilisé en entrée avec une fréquence faible égale à 1Hz et une amplitude de 2V. Le carré et le cube du signal sont présentés, respectivement, dans les figures Fig. 3.13 et Fig. 3.14. Pour les hautes fréquences (1khz, 10khz, 100khz), nous avons obtenu les mêmes résultats.

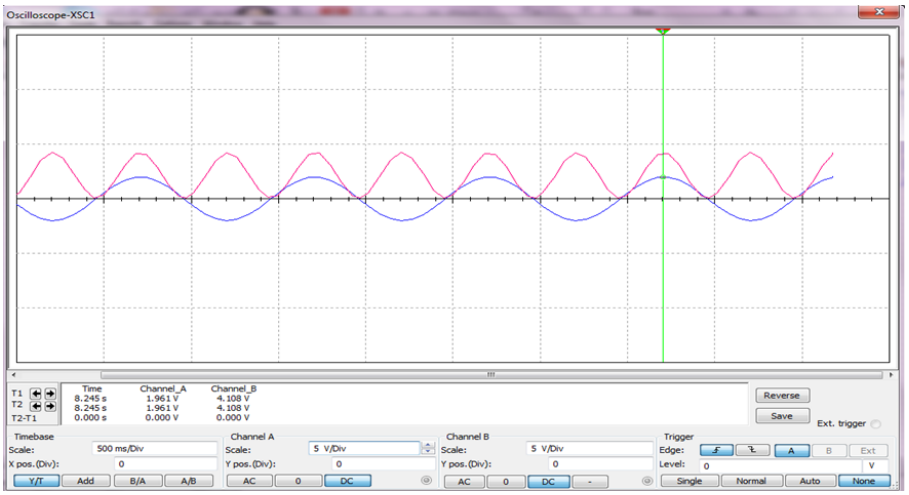


FIGURE 3.13 – Résultats de la simulation de la fonction x^2

L'implémentation expérimentale des circuits équivalents des non-linéarités x^2 et x^3 sont présentés , respectivement, dans les figures 3.15 et la Figure 3.16. En outre, les traces de l'oscilloscope correspondantes aux deux

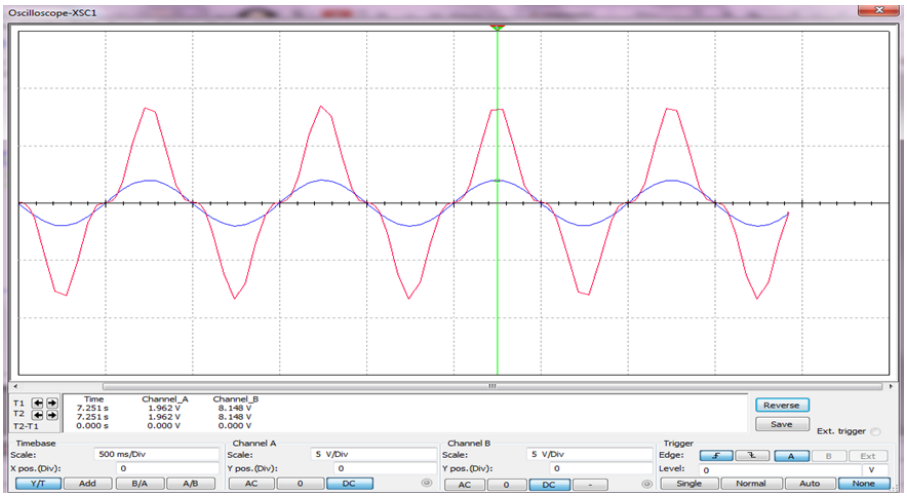


FIGURE 3.14 – Résultats de la simulation de la fonction x^3

non-linéarités sont montrées, respectivement, dans les figures Fig 3.17 et la Figure 3.18. En comparant avec les figures 3.15 et la Figure 3.16, nous constatons que les résultats numériques et expérimentaux sont conformes.

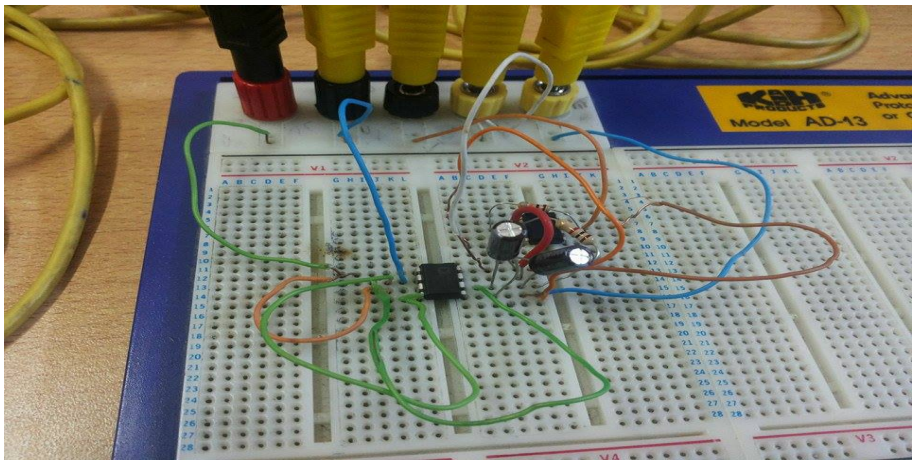


FIGURE 3.15 – Implémentation du circuit équivalent de la fonction x^2

3.3.2 Validation expérimentale du système

Après avoir validé expérimentalement les non linéarités existantes dans le système 2.2, une implémentation expérimentale de tout le circuit électrique équivalent a été réalisée en plaçant les différents composants

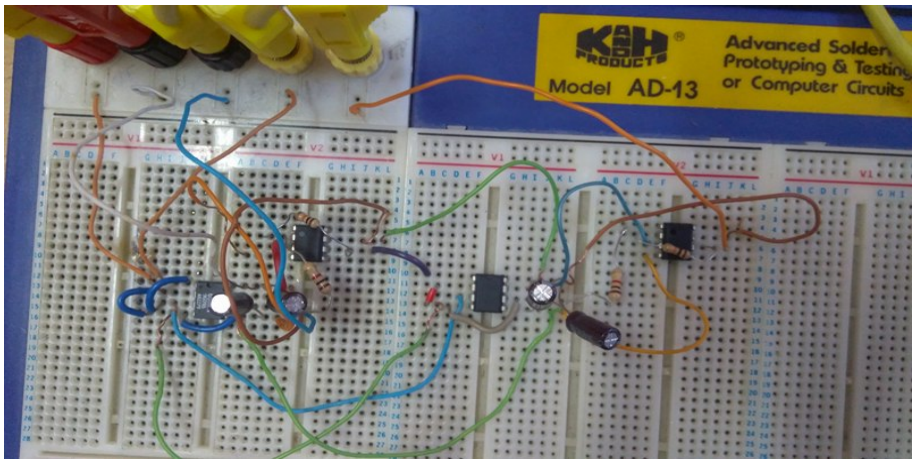


FIGURE 3.16 – Implémentation du circuit équivalent de la fonction x^3

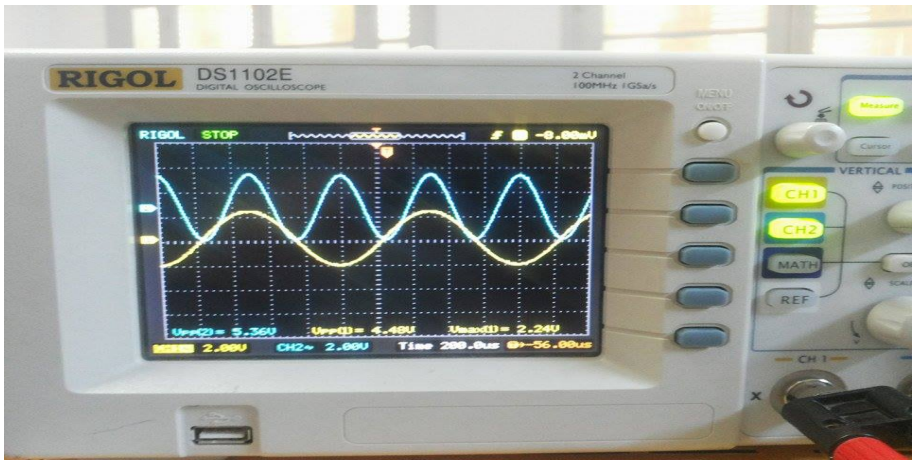


FIGURE 3.17 – Résultats expérimentaux de la fonction x^2

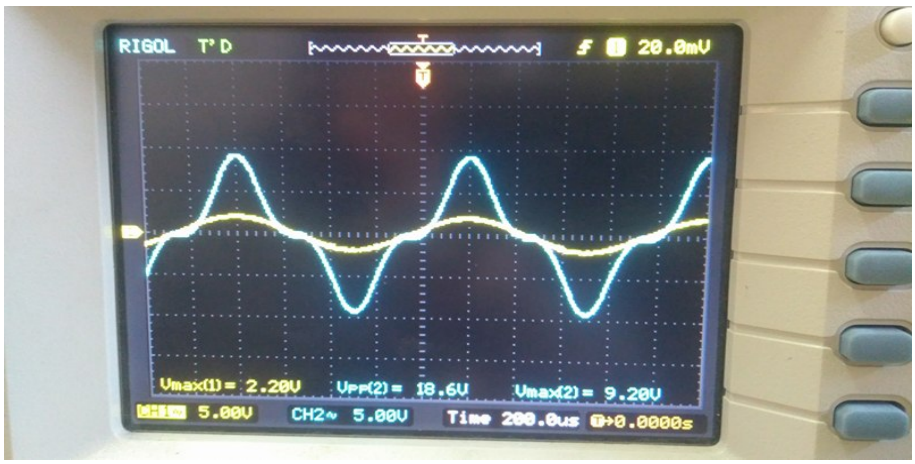


FIGURE 3.18 – Résultat expérimental de la fonction x^3

électriques sur une plaque d'essai au sein de notre laboratoire. Les résultats obtenus sont différents des résultats numériques. Ceci est dû aux non-linéarités existantes dans le modèle mathématique qui sont modélisées par des multiplicateurs AD633 dans le circuit électrique équivalent. La cascade de composants AD633 et AOP avec gain de 10 amplifie très probablement l'imperfection et les incertitudes des composants électroniques et par conséquent déforme les résultats expérimentaux.

De ce fait, afin de résoudre ce problème, une deuxième méthode de validation expérimentale est réalisée en programmant le micro-contrôleur STM3278 présenté par la Figure 3.19. La technologie STM32 est adaptable au besoin d'un large éventail d'applications. La programmation du micro-contrôleur STM32 a été réalisée sous le progiciel MATLAB SIMULINK en considérant les trois cas correspondants à l'effet Allee Faible.
Les résultats expérimentaux correspondants aux trois cas du paramètre m, obtenus par l'oscilloscope, sont présentés dans la Figure 3.20- 3.22. En comparant avec les résultats numériques présentés dans les Figures 3.4, 3.7 et 3.10, nous pouvons conclure que les résultats de la simulation ont été validés expérimentalement.

3.4 Synchronisation chaotique

3.4.1 Position du problème

Pour contrôler le comportement chaotique du système forcé périodiquement 2.5, une synchronisation du système avec le système proie-prédateur basique par un contrôle de rétroaction non linéaire sera proposé et validé [Saad and Boubaker, 2018a]. Considérons le modèle proie-prédateur de base 2.2 où $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ est le vecteur d'état, m et l sont des paramètres constants. Comme il est prouvé précédemment, le forçage saisonnier du taux de croissance de la proie est un générateur

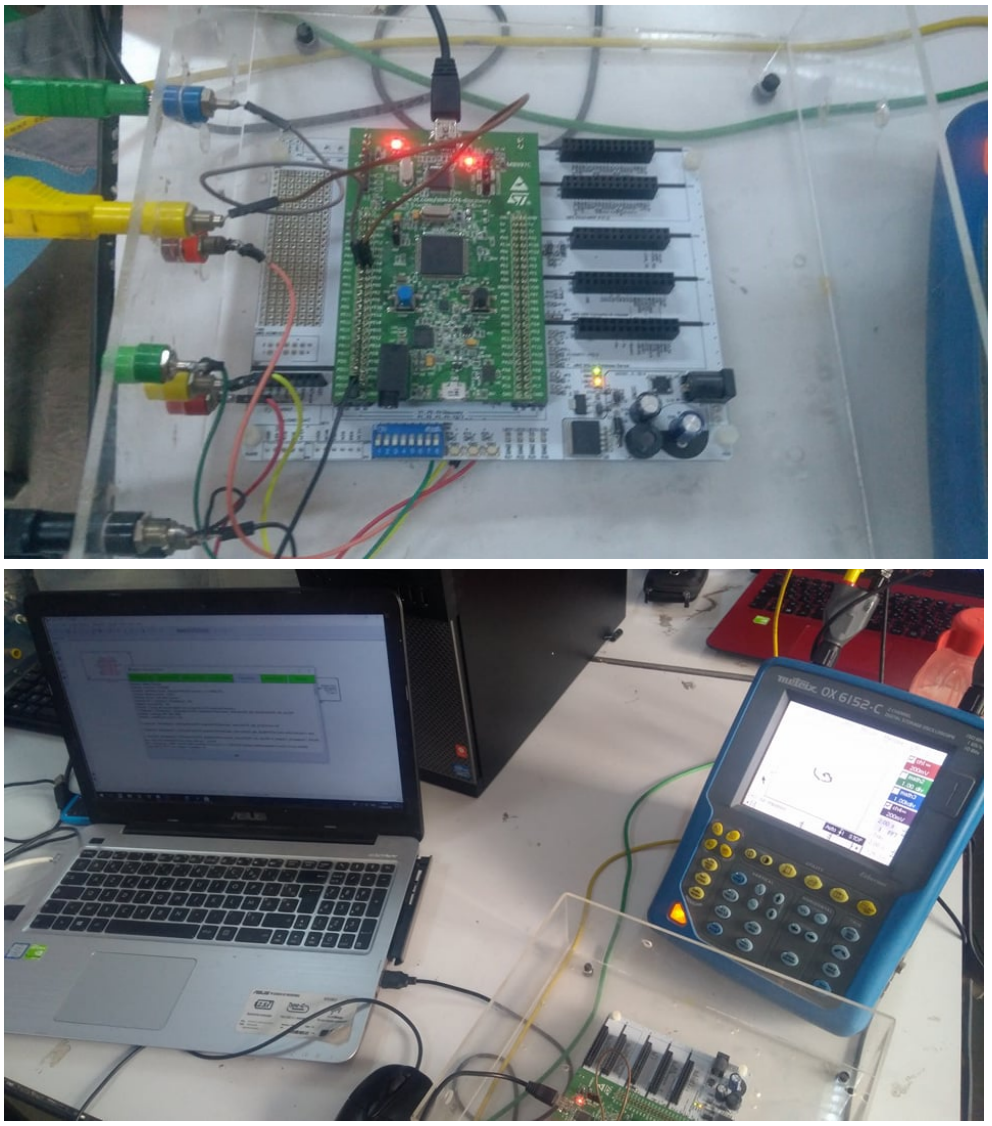


FIGURE 3.19 – Validation expérimentale du système proie-prédateur à l'aide de la technologie STM

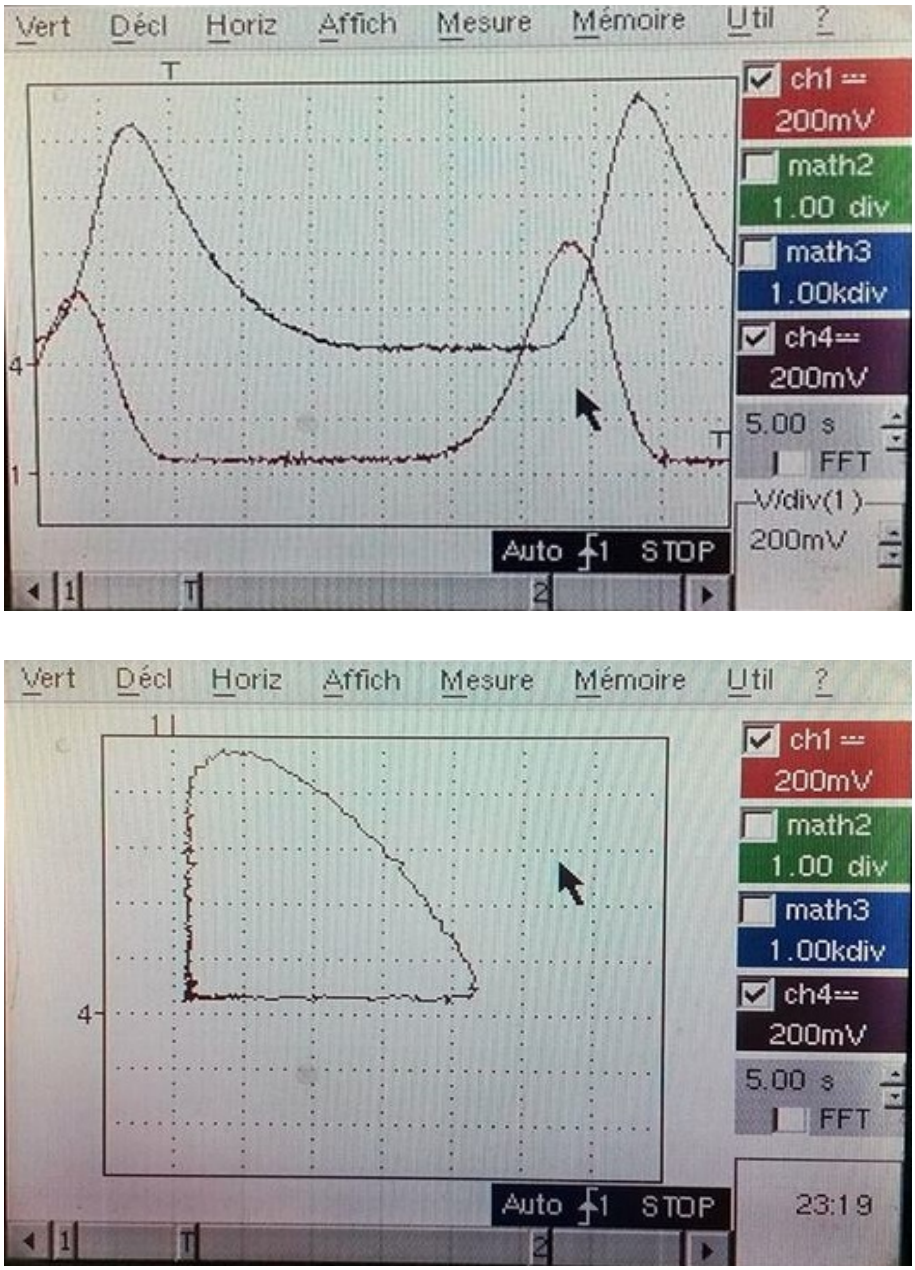


FIGURE 3.20 – Évolution temporelle et portrait de phase expérimental pour $m = 0.2$

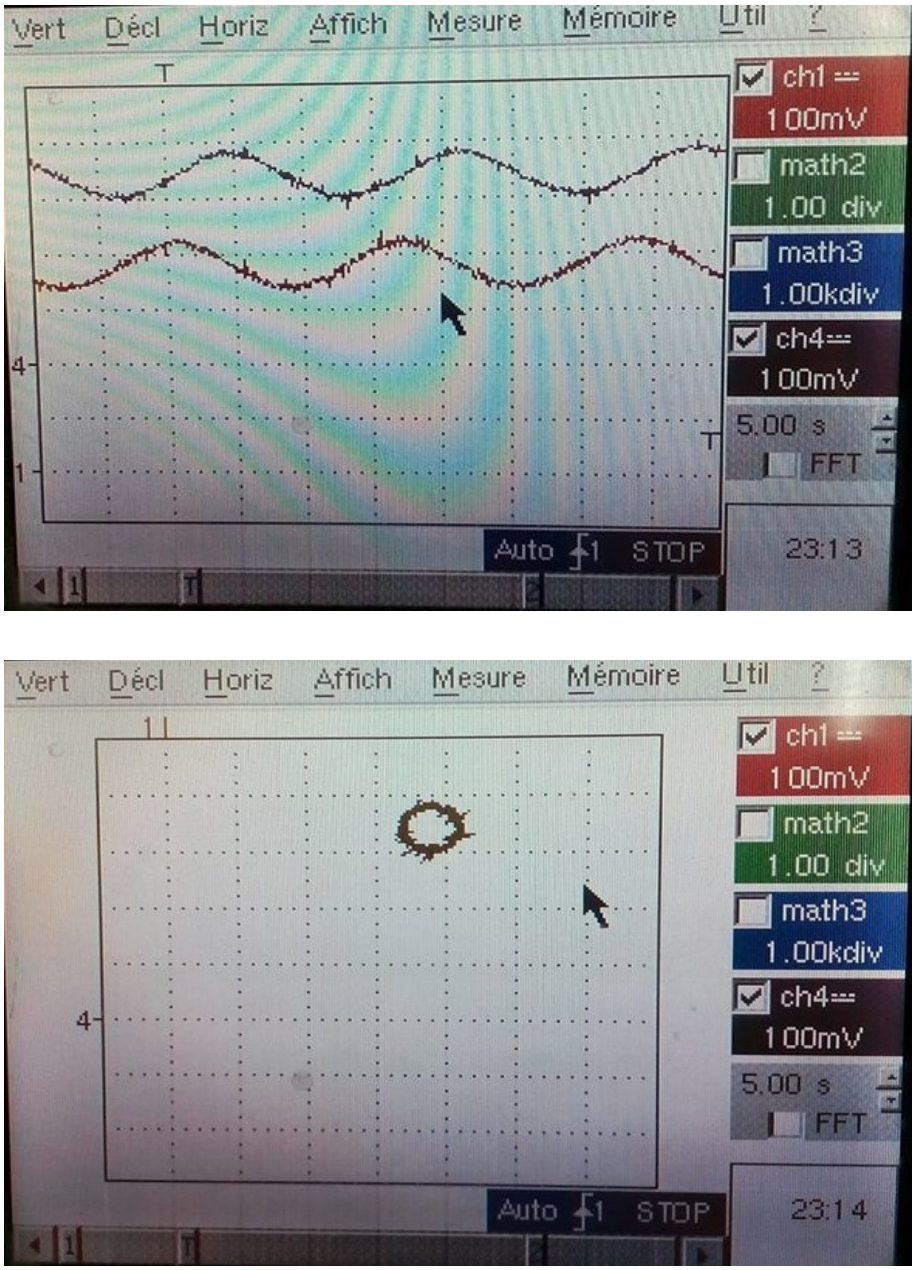


FIGURE 3.21 – Évolution temporelle et portrait de phase expérimental pour $m = 0.4$

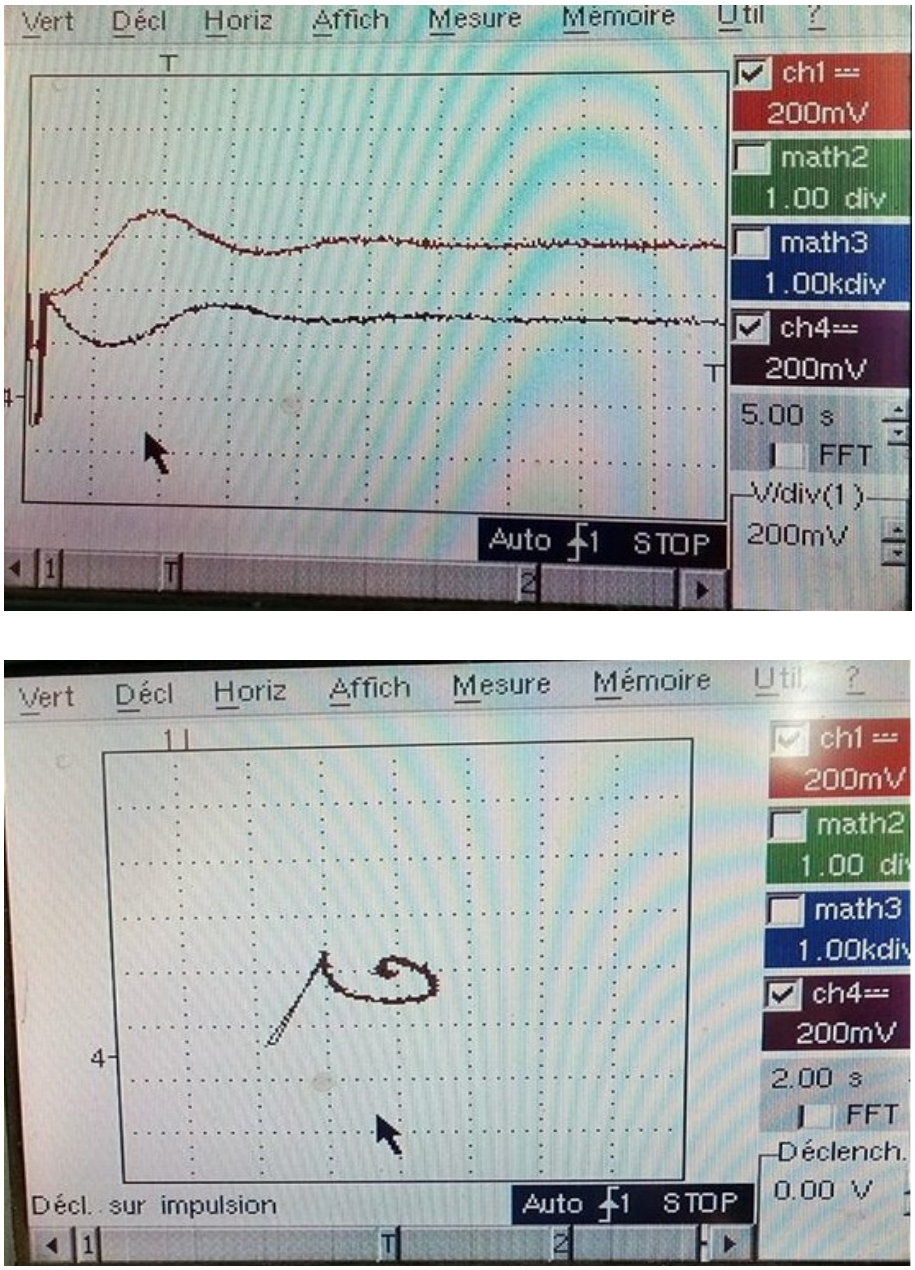


FIGURE 3.22 – Évolution temporelle et portrait de phase expérimental pour $m = 0.6$

du chaos créant un déséquilibre dans l'écosystème ou les systèmes biologiques. Par conséquent, un contrôle de rétroaction est nécessaire pour établir un équilibre du système dans la nature.
Pour atteindre un tel objectif, nous proposons d'établir une synchronisation entre le modèle proie-prédateur 2.2 et le modèle forcé 2.5. En considérant la configuration maitre-esclave comme technique de synchronisation, le modèle proie-prédateur (2.2) est le système maitre et le système esclave est décrit par le modèle chaotique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1(y_1 - l)(1 - y_1) - y_1 y_2 + \lambda y_1(1 - cos(\theta t)) + U_1 \\ \\ \dfrac{dy_2}{dt} = (y_1 - m)y_2 + U_2 \end{cases} \tag{3.4}$$

où $y = [y_1(t), y_2(t)]^T$ est le vecteur d'état du système esclave, λ et θ sont, respectivement, l'amplitude et la fréquence de la saisonnalité. L'objectif du problème de synchronisation est de concevoir une loi de commande $u(t) = [u_1(t), u_1(t)]^T$ tel que

$$\lim_{t \to +\infty} \|e(t)\| = 0 \tag{3.5}$$

où $e(t) = [e_1(t), e_2(t)]^T$ est le vecteur de synchronisation d'erreur défini par

$$\begin{cases} e_1(t) = y_1 - x_1 \\ \\ e_2(t) = y_2 - x_2 \end{cases} \tag{3.6}$$

3.4.2 Synchronisation

Théorème 3.1

Pour les lois de commande

$$\begin{cases} U_1 = (y_1^3 - x_1^3) - (l+1)(y_1 + x_1)e_1 - x_1 x_2 + y_1 y_2 + \lambda y_1(cos(\theta t) - 1) - k_1 e_1 \\ U_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 - k_2 e_2 \end{cases} \tag{3.7}$$

L'erreur de synchronisation 3.6 entre le système maitre (2.2) et le système esclave (3.4) est asymptotiquement stable si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} k_1 > -l \\ k_2 > -m \end{cases} \tag{3.8}$$

Démonstration

En soustrayant la dynamique du système maitre (2.2) de la dynamique du système esclave (3.4), on aura

$$\begin{cases} \dot{e_1} = \dot{y_1} - \dot{x_1} \\ \dot{e_2} = \dot{y_2} - \dot{x_2} \end{cases} \tag{3.9}$$

En introduisant les lois de commande proposées (3.7) dans (3.9), l'erreur de synchronisation peut être écrite comme suit :

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} -(l + k_1) & 0 \\ 0 & -(m + k_2) \end{pmatrix} e \tag{3.10}$$

L'erreur de synchronisation 3.10 est asymptotiquement stable si les conditions 3.8 sont satisfaites.

3.4.3 Résultats de simulation

Pour la validation des lois de commande proposées, un seul cas d'étude est suffisant. Par conséquent, dans la simulation numérique, nous considérons le cas d'effet Allee Faible en choisissant les conditions initiales et les paramètres comme suit : $(x_{10}, x_{20}, y_{10}, y_{20}) = (0.4, 0.3, 0.2, 0.2)$, $m = 0.4$, $l = -0.2$ et $\lambda = 5$. Pour $U_1 = U_2 = 0$, l'évolution temporelle du système (2.2) et du système (3.4) pour un effet Allee Faible sont montrées dans la Figure 3.23. En boucle fermée et pour U_1 et U_2 obéissant aux lois de commande (3.7), les Figure 3.24 et 3.25 prouvent que la synchronisation du chaos est achevée où les gains de contrôle (k_1, k_2) et θ sont choisis, respectivement, comme suit (0.5,0.5) et 2,5.

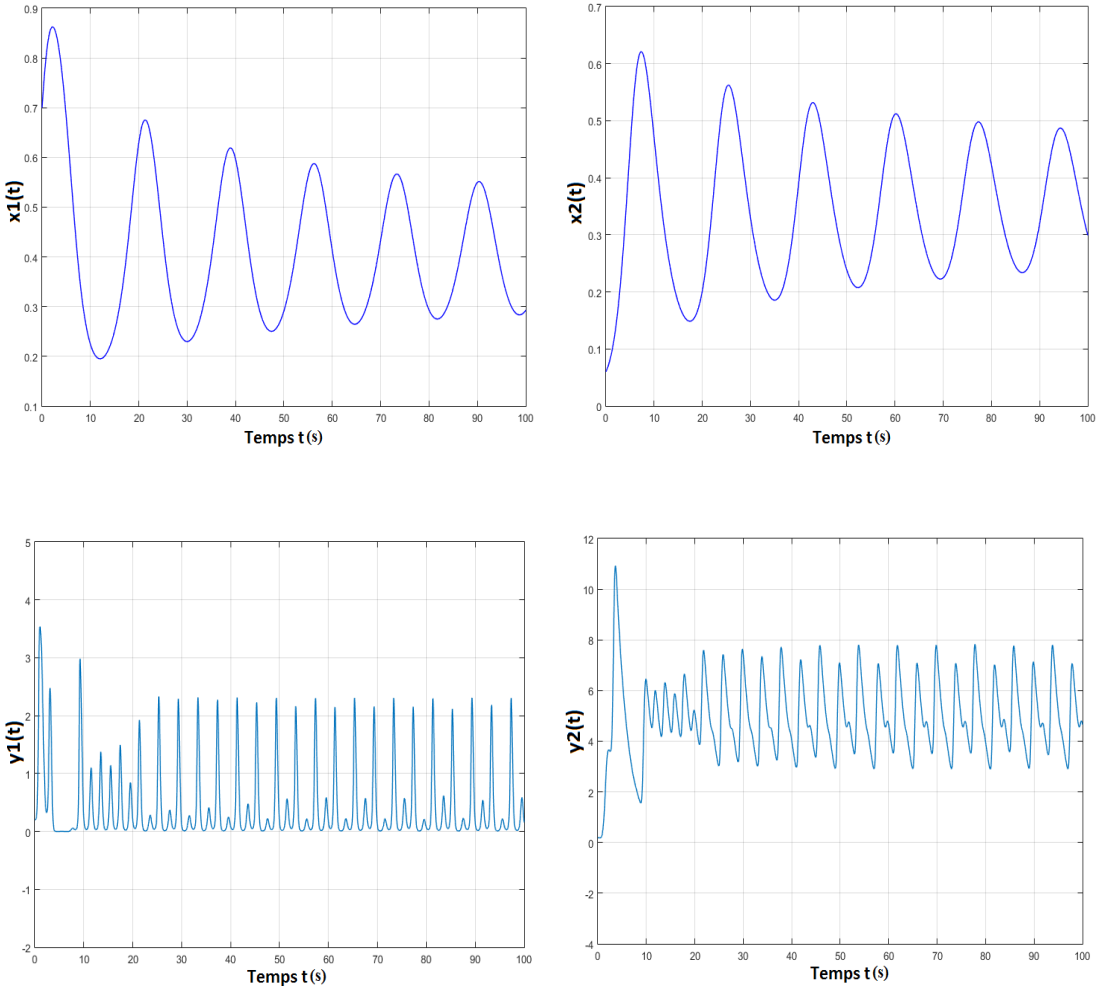


FIGURE 3.23 – Systèmes proie-prédateur non synchronisés avec un effet Allee Faible

(a) proie (b) Prédateur

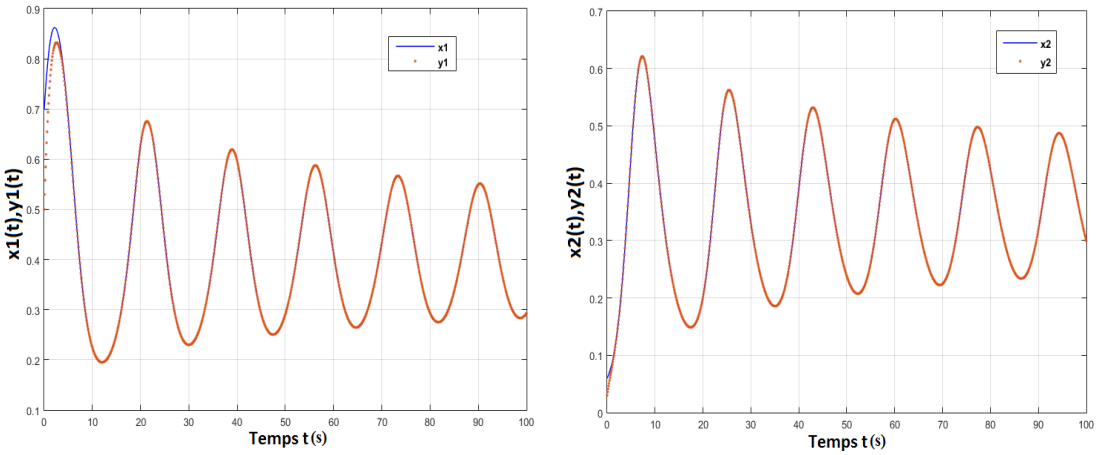


FIGURE 3.24 – Synchronisation du chaos des systèmes proie-prédateur avec un effet Allee Faible

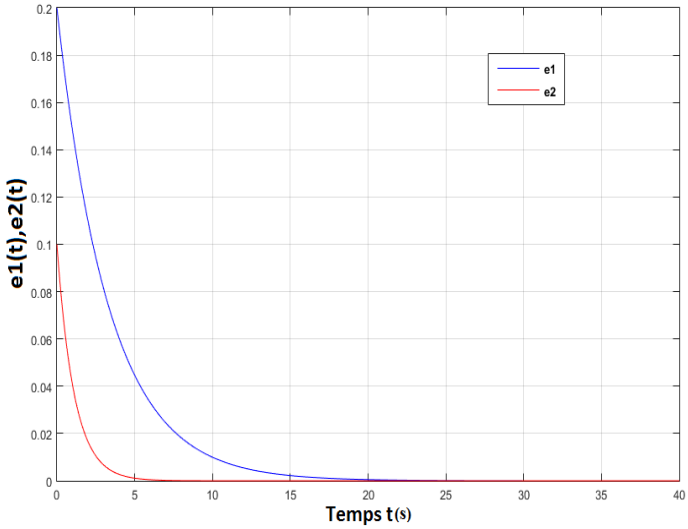


FIGURE 3.25 – Erreurs de synchronisation : Effet Allee Faible

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un circuit électrique équivalent au modèle proie-prédateur a été conçu et simulé sous le logiciel MultiSIM . En traitant le cas d'effet Allee Faible, il a été prouvé que la simulation des circuits électriques sous MultiSIM donne des résultats équivalents aux simulations numériques réalisées sous le logiciel MATCONT. Une validation expérimentale a été aussi proposée en réalisant un circuit électrique équivalent et en utilisant la technologie STM. Les résultats obtenus ont prouvé les résultats de simulation et la possibilité de caractériser les expérimentations écologiques ou biologiques plus rapidement. La rapidité des analyses a été assurée par une application expérimentale. Cependant, établir l'équilibre du système dans la nature nécessite le contrôle des comportements complexes et chaotiques. Ainsi, une synchronisation du modèle proie-prédateur forcé chaotique avec le système proie-prédateur de base a été proposée en utilisant un contrôle de rétroaction non linéaire. L'efficacité de cette synchronisation proposée a été montrée, par la suite, par des simulations numériques sous MATLAB.

Chapitre 4

Modèle proie-prédateur avec polynômes d'ordres fractionnaires

4.1 Introduction

La modélisation des systèmes proies-prédateurs par des polynômes d'ordres fractionnaires est récemment utilisée pour élargir l'ensemble des informations sur la dynamiques des systèmes [Senol et al., 2014, Ryoo et al., 2017, Zhang et al., 2014]. Dans ce chapitre, deux nouvelles structures du modèle de Bazykin-Berezovskaya seront proposées. La première proposition consiste à modéliser, par des polynômes d'ordres fractionnaires, le taux de croissance des proies et la réponse fonctionnelle du prédateur. Par contre, la seconde consiste à modéliser le taux de croissance des proies et l'efficience des prédateurs par des polynômes d'ordres fractionnaires. Ainsi, l'objectif de ce chapitre est d'analyser le comportement dynamique des deux modèles proposés dans les deux cas d'effet Allee Fort et effet Allee Faible. Ensuite, une perturbation saisonnière sera intégrée dans le modèle admettant un comportement plus complexe. L'intégration sera proposée au niveau du taux de croissance de la proie afin d'analyser davantage l'impact de la saisonnalité sur la dynamique du système modélisé par un polynôme d'ordre fractionnaire. Ce chapitre est organisé en trois paragraphes : Le second présentera une analyse de la stabilité et des bifurcations du premier modèle proie-prédateur modifié. Dans le troisième, une analyse complète du comportement dynamique du deuxième modèle proie-prédateur proposé sera détaillée. Tous les résultats obtenus par un calcul analytique ont été revérifiés non seulement numériquement mais aussi via un calcul symbolique en utilisant la boite à outils "Symbolic Toolbox" du logiciel MATLAB.

4.2 Proposition et analyse du premier modèle modifié

Dans cette section, nous proposerons une nouvelle structure du système 2.2, présenté dans le chapitre 2, avec un taux de croissance de la

proie et une réponse fonctionnelle du prédateur modifiés. Le taux de croissance de la proie et la réponse fonctionnelle du prédateur seront modélisés par les polynômes fractionnaires suivants :

$$a = x_1^{q_1-1}(x_1 - l)(1 - x_1),\ f(x_1) = x_1^{q_2}$$

avec q_1 et q_2 deux ordres fractionnaires appartenant à l'intervalle $]0, 1[\cup]1, 2[$. En substituant ces expressions dans le système 1.13, le système peut s'écrire sous la forme [Saad and Boubaker, 2017] :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1^{q_1}(x_1 - l)(1 - x_1) - x_1^{q_2}x_2 \\ \\ \frac{dx_2}{dt} = c(x_1 - m)x_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

Pour étudier le comportement dynamique du modèle précédent, une analyse complète de la stabilité et des bifurcations sera proposée en considérant les deux cas d'études d'effet Allee Fort et Faible. La première étape de l'analyse consiste à calculer les points d'équilibre du modèle en annulant les équations du système 4.1.

4.2.1 Modèle avec effet Allee Fort

Dans cette partie, l'analyse de la stabilité et des bifurcations du système modifié 4.1 est détaillée en considérant que $0 < l < 1$.

Point d'équilibre et analyse de la stabilité

Le calcul des points d'équilibre montre que le nombre des points d'équilibre du système 4.1 change selon la valeur du paramètre m comme suit :

— Pour $m \in [0\ l]$ ou m=1, le système admet les points d'équilibre obtenus par le système 2.2 : $E_0(0, 0)$, $E_1(l, 0)$ et $E_2(1, 0)$

— Pour $m \in]l\ 1[$, le système 4.1 admet quatre points d'équilibre : $E_0(0, 0)$, $E_1(l, 0)$, $E_2(1, 0)$ et $E_3(m, \frac{(m-l)(1-m)}{m^{(q_2-q_1)}})$.

Pour calculer les valeurs propres et les singularités correspondantes à chaque point d'équilibre, nous avons déterminé la matrice Jacobienne du système 4.1 correspondante à chaque point E_i (i $\in$ [0,4]) donnée par :

$$J_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(2+q_1)x_1^{q_1+1} - (1+q_1)(l+1)x_1^{q1} - lq_1x_1^{q_1-1} - q_2x_1^{q2-1}x_2 \\ a_{12} &= -x_1^{q_2} \\ a_{21} &= x_2 \\ a_{22} &= (x_1 - m) \end{aligned}$$

Son équation caractéristique est donnée par :

$$\lambda^2 - tr(J)\lambda + det(J) = 0$$

où $$tr(J) = a_{11} + a_{22} \qquad \det(J) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Les résultats du calcul analytique sont présentés dans la Table 4.1 en se basant sur la Table 1.1 définie dans le chapitre 1.

Nous remarquons que le point d'équilibre E_0 admet une valeur propre nulle $\forall m \in [0\ 1]$. Par ailleurs, lorsque $m \in \{l, 1\}$, un des points d'équilibre E_1 et E_2 devient aussi non hyperbolique. Pour cela, nous avons eu recours à utiliser MATCONT pour déterminer la singularité de ces points d'équilibre numériquement. Les résultats obtenus sont récapitulés dans la Table 4.2 et la Table 4.3. Les portraits de phase correspondants à chaque point d'équilibre ont été déterminés à l'aide du logiciel MATCONT en choisissant la même valeur de l choisie pour les analyses du chapitre 2 qui est égale à 0.5. Les deux tables prouvent que le système 4.1 admet, aux points d'équilibre $E_1(l, 0)$ et $E_2(1, 0)$, les mêmes types de singularité que ceux du système 2.2, données au chapitre 2 $\forall m \in]0\ 1[$. Par contre, aux points d'équilibre E_0 et $E_3(m, \frac{(m-l)(1-m)}{m^{q_2-q_1}})$, de nouveaux types de singularité sont apparus :

TABLE 4.1 – Valeurs propres et singularités : Effet Allee Fort pour $l \in]0\ 1[$

Paramètre m	Point d'équilibre	Valeurs propres	Singularité
$m \in]0\ l[$	$E_0(0,0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -m$	Pas de conclusion
	$E_1(l,0)$	$\lambda_1 = l^{q_1}(1-l)$ $\lambda_2 = l - m$	Nœud Instable
	$E_2(1,0)$	$\lambda_1 = l - 1$ $\lambda_2 = 1 - m$	Selle
$m \in]l\ 1[$	$E_0(0,0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -m$	Pas de conclusion
	$E_1(l,0)$	$\lambda_1 = l^{q_1}(1-l)$ $\lambda_2 = l - m$	Selle
	$E_2(1,0)$	$\lambda_1 = l - 1$ $\lambda_2 = 1 - m$	Selle
	$E_3(m, \frac{(m-l)(1-m)}{m^{q_2-q_1}})$	$\lambda_1 = \frac{tr(J_3)-i\sqrt{\delta}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{tr(J_3)+i\sqrt{\delta}}{2}$	Calcul très complexe

— Le point d'équilibre E_0 admet $\forall m \in]0\ 1]$ une singularité de type Nœud stable. Lorsque le paramètre m passe de l'intervalle $]0\ l[$ à $]l\ 1[\ \forall q_1 et q_2 \in]0\ 1[\ \cup\ ]1\ 2[$ et $l = 0.5$, on observe une apparition d'une singularité Selle et une collision des singularités Selle et Nœud stable. Pour $m \in \{0, l\}$, la résolution numérique n'a aboutit à aucune singularité.

— Pour le point d'équilibre E_3, lorsque $m = \dfrac{l+1}{2}$, les mêmes singularités que celles du système 2.2 à ce point d'équilibre sont obtenues si et seulement si $q_1 = q_2$. Cependant, lorsque $q_1 \neq q_2$, le point d'équilibre admet différentes singularités pour $m = \dfrac{l+1}{2}$. Sa singularité passe d'un foyer stable à un foyer instable lorsque la valeur du paramètre q_1 augmente et devient supérieure au paramètre q_2.

Analyse des bifurcations

L'analyse de la stabilité du système 4.1 montre qu'au niveau du point d'équilibre E_0, le système peut subir une bifurcation de type Nœud-Selle. Dans cette bifurcation, le point fixe peut apparaître et disparaître en fonction de q_1 et q_2. En outre, la variation de stabilité du point d'équilibre E_3 selon la valeur des paramètres m, q_1 et q_2 indique l'existence d'une bifurcation de type Poincaré-Andronov-Hopf. Par conséquent, une analyse numérique des bifurcations du système 4.1 selon le paramètre de bifurcation m pour un ensemble de valeurs q_1 et q_2 varié est proposée en se basant sur le diagramme de bifurcation présenté par la Figure 4.1.

D'après la Figure 4.1, le diagramme de bifurcation obtenu prouve que le système 4.1 admet de nouveaux points de bifurcation Hopf (H) dans le cas d'effet Allee Fort. Pour chaque variation des valeurs de (q_1, q_2), un nouveau point de Hopf apparait.

TABLE 4.2 – Singularités du système 4.1 avec effet Allee Fort pour $m \in]0\ l[$ et $l = 0.5$

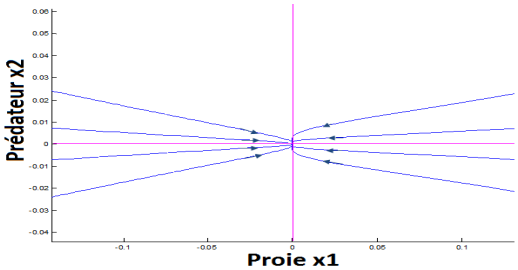
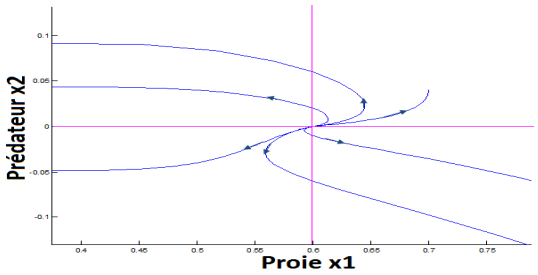
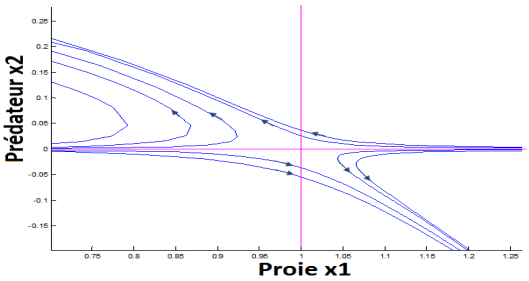
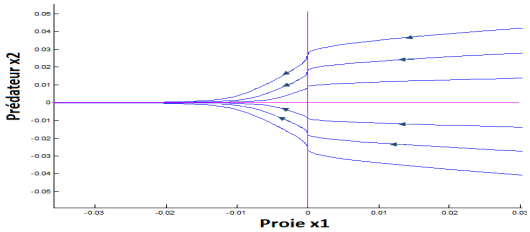
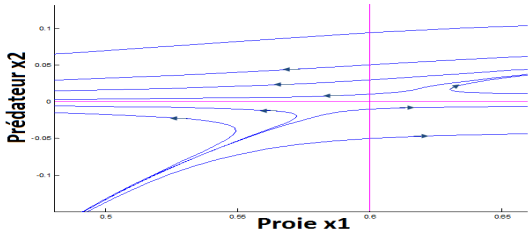
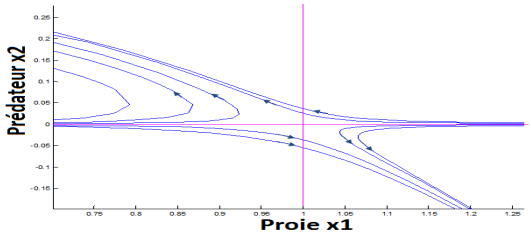
Point d'équilibre	Singularité
$E_0(0,0)$	**Nœud Stable** 
$E_1(l,0)$	**Nœud Instable** 
$E_2(1,0)$	**Col** 

TABLE 4.3 – Singularités pour un système 4.1 avec effet Allee Fort pour $m \in]l\ 1[$ et $l = 0.5$

Point d'équilibre	Singularité
$E_0(0,0)$	**Selle-Nœud Stable** 
$E_1(l,0)$	**Selle** 
$E_2(1,0)$	**Selle** 

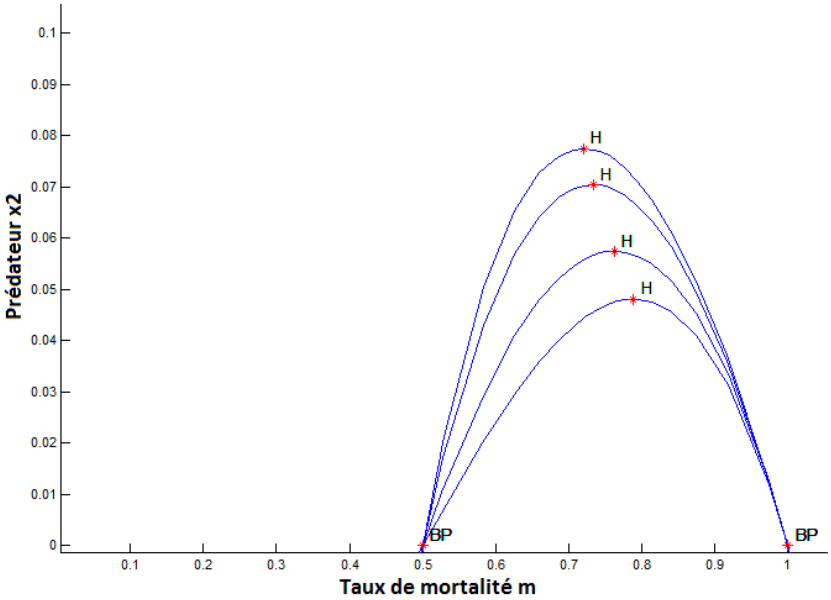
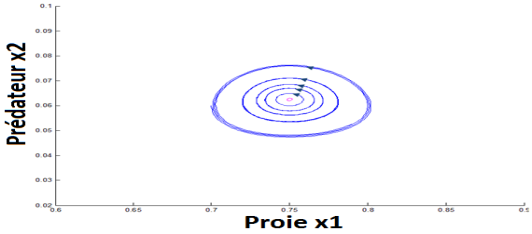
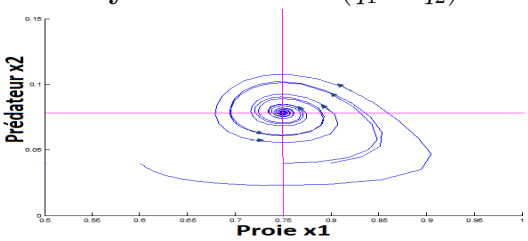
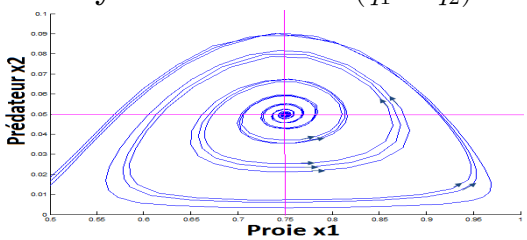
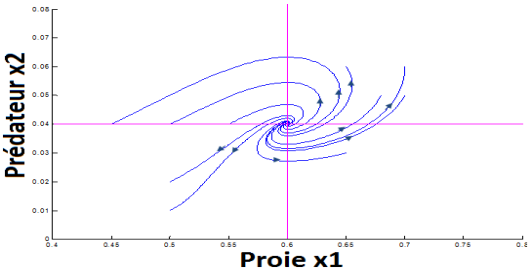
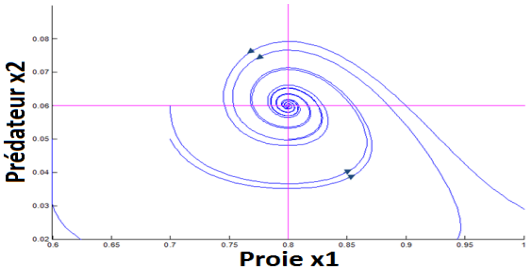


FIGURE 4.1 – Diagramme de Bifurcation du système (4.1) : Étude de cas d'effet Allee Fort

TABLE 4.4 – Singularités pour un système 4.1 avec effet Allee Fort pour $m \in]l\ 1[$ et $l = 0.5$ (Suite)

Point d'équilibre	Singularité
$E_3(m, \frac{(m-l)(1-m)}{m^{q_2-q_1}})$	$\boldsymbol{m = 0.75}$ **Centre** $(q_1 = q_2)$  **Foyer Stable** $(q_1 < q_2)$  **Foyer Instable** $(q_1 > q_2)$  $\boldsymbol{m < 0.75}$ **Foyer Instable**  $\boldsymbol{m > 0.75}$ **Foyer Stable** 

4.2.2 Modèle avec effet Allee Faible

Dans cette partie, l'analyse de la stabilité et des bifurcations du système modifié 4.1 est détaillé en considérant cette fois $-1 < l < 0$.

Point d'équilibre et analyse de la stabilité

En considérant la condition biologique significative, $x_1 \geq 0$, le calcul prouve que le système 4.1 n'admet que trois points d'équilibre $\forall m \in [0\ 1]$: Le point d'équilibre $E_0(0,0)$, $E_2(1,0)$ et $E_3(m, \frac{(m-l)(1-m)}{m^{q_2-q_1}})$.

En utilisant la même matrice jacobienne associée au système 4.1, les valeurs propres correspondantes ainsi que les singularités correspondantes sont déterminées pour chaque point d'équilibre. Comme dans la section précédente, la résolution a été faite analytiquement et numériquement via MATCONT. Les résultats analytiques sont présentés dans la Table 4.5. Par contre, les résultats numériques sont récapitulés dans la Table 4.6. Pour les calculs numériques, la valeur de l choisie est la même que celle choisie dans le chapitre 2 dans le cas d'effet Allee Faible $l = -0.2$.

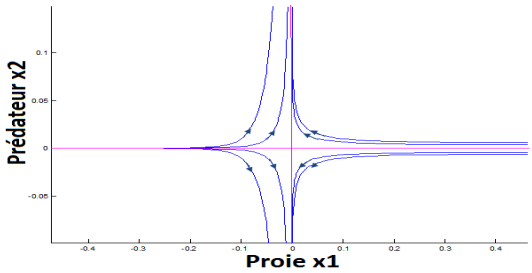
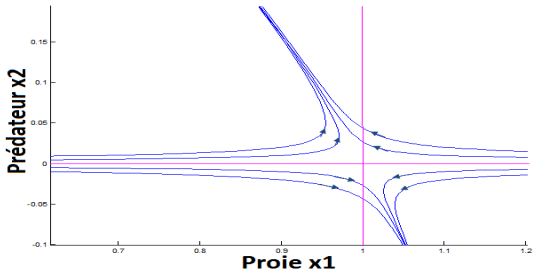
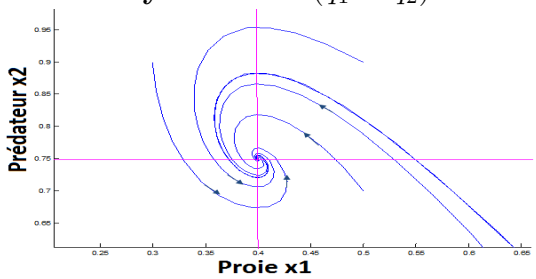
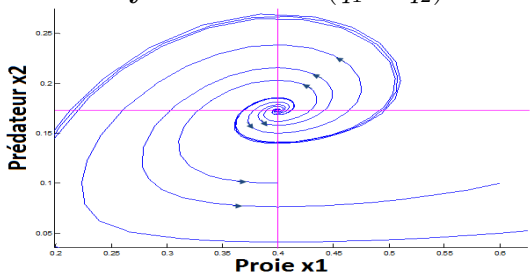
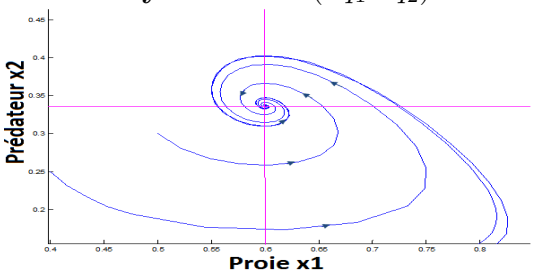
TABLE 4.5 – Valeurs propres et singularités du système (4.1) avec effet Allee Faible pour $m \in]0\ 1[$ et $l \in]-1\ 0[$

Point d'équilibre	Valeurs propres	Singularité
$E_0(0,0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -m$	Pas de conclusion
$E_2(1,0)$	$\lambda_1 = l - 1$ $\lambda_2 = 1 - m$	Selle
$E_3(m, \frac{(m-l)(1-m)}{m^{q_2-q_1}})$	$\lambda_1 = \frac{tr(J)-i\sqrt{\delta}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{tr(J)+i\sqrt{\delta}}{2}$	Calcul très complexe

Les résultats obtenus montre que :

— Les points d'équilibre E_0 et E_2 gardent le même type de singularité que celles du système 2.2 souffrant d'effet Allee Faible.

TABLE 4.6 – Singularités du système (4.1) avec effet Allee Faible pour $m \in]0\ 1[$ et $l = -0.2$

Point d'équilibre	Singularité
$E_0(0,0)$	**Selle** 
$E_2(1,0)$	**Selle** 
$E_3(m, \frac{(m-l)(1-m)}{m^{q_2-q_1}})$	$\boldsymbol{m \leq 0.4}$ **Foyer Stable** $(q_1 < q_2)$  **Foyer Instable** $(q_1 > q_2)$  $\boldsymbol{m > 0.4}$ **Foyer Stable** $(\forall q_1 et q_2)$ 

— La singularité du point d'équilibre $E_3(m, \frac{(ml)(1-m)}{m^{q_2-q_1}})$ passe d'un foyer stable à un foyer instable lorsque la valeur de l'ordre fractionnaire q_1 augmente et devient supérieur à la valeur de l'ordre fractionnaire q_2 $\forall m \leq \dfrac{1+l}{2}$. Par contre $\forall m > \dfrac{1+l}{2}$, le point d'équilibre E_3 admet un foyer stable $\forall q_1 et q_2$. Cela signifie que, dans le modèle de 'Bazykin-Bersovskaya' souffrant d'effet Allee Faible, lorsque l'ordre fractionnaire du taux de croissance q_1 est plus petit que celui de la réponse fonctionnelle du prédateur q_2, l'effet de la variation du taux de mortalité sur le comportement dynamique du système 4.1 sera omis au point d'équilibre E_3. Par conséquent,

Analyse des bifurcations

L'analyse numérique de la bifurcation selon la valeur de m et des ordres fractionnaires q_1 et q_2 est réalisée et présentée dans la Figure 4.2.

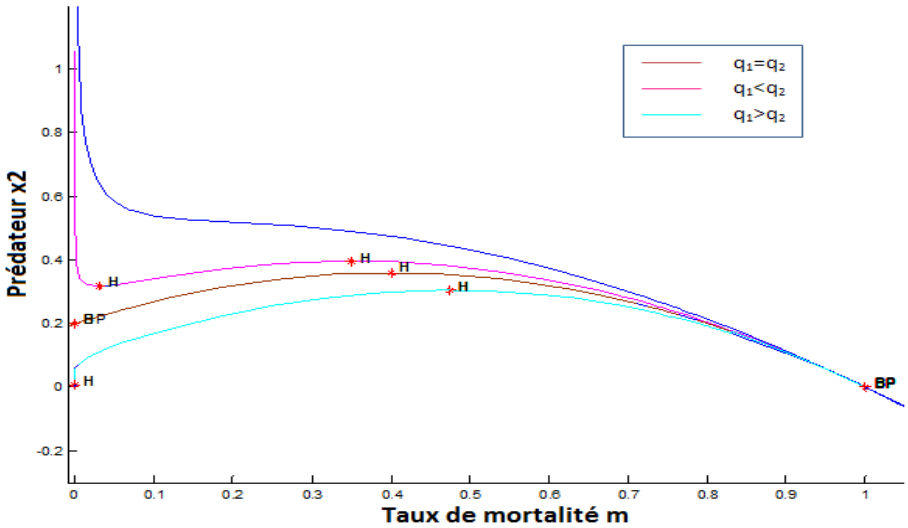


FIGURE 4.2 – Diagramme de bifurcation du système (4.1) : Étude de cas d'effet Allee Faible

Le diagramme de bifurcation du système 4.1 avec effet Allee Faible illustre un ensemble de points de bifurcation selon la valeur des ordres fractionnaires q_1 et q_2 comme suit :

— Lorsque $q_1 = q_2$, le système 4.1 admet les mêmes points de bifurcation que ceux du système 2.2 avec un effet Allee Faible obtenus

dans le chapitre 2 : un point Hopf et deux points de branchement (BP).

— Lorsque $q_1 < q_2$, le système admet un nouveau point Hopf comme il est présenté à droite de la Figure 4.2. Nous constatons que la population de prédateur augmente et ne peut jamais atteindre l'extinction à faible densité des proies.

— Lorsque $q_1 > q_2$, le taux de croissance des prédateurs diminue et peut être négatif. Ainsi, l'ordre fractionnaire du taux de croissance des proies aggrave l'influence de l'effet Allee sur le comportement dynamique du système 4.1 et peut rendre le seuil d'effet Allee Faible un seuil critique.

L'analyse de la stabilité et des bifurcations du premier modèle modifié prouve que la modélisation du taux de croissance de la proie et de la réponse fonctionnelle du prédateur par des polynômes d'ordres fractionnaires permet d'avoir des comportements dynamiques plus complexes mais ne convergent jamais vers le chaos. Pour cette raison, un deuxième modèle modifié sera proposé en agissant cette fois sur le taux de croissance des proies et l'efficience des prédateurs.

4.3 Proposition et analyse du second modèle modifié

Dans cette section, un second modèle modifié du système 1.13 est proposé et analysé. Le taux de croissance de la proie et l'efficience du prédateur sont modélisés par des polynômes d'ordres fractionnaires comme suit :

$$a = (x_1^{q_1} - l)(1 - x_1),\ f(x_1) = x_1\ ,\ c = x_2^{q_2 - 1}$$

En substituant ces expressions dans le système 1.13, le système s'écrit comme suit [Saad and Boubaker, 2018b]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(x_1^{q_1} - l)(1 - x_1) - x_1 x_2 \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (x_1 - m)x_2^{q_2} \end{cases} \tag{4.2}$$

avec q_1 et q_2 sont deux ordres fractionnaires .

4.3.1 Modèle avec effet Allee Fort

Dans cette partie, l'analyse de la stabilité et des bifurcations du modèle 4.2 est détaillée en considérant que $0 \leq l \leq 1$. Pour les calculs numériques, nous choisissons $l = 0.5$

Point d'équilibre

Les calculs faits nous ont permis de constater que le système 4.2 admet les points d'équilibre $E_0(0,0)$ et $E_2(1,0)$ $\forall m \in [0\ 1]$. De plus, il admet un point d'équilibre E_1, tel que $\forall m \in [0\ 1]$

$$x_1^{q_1} = l \text{ et } x_2 = 0$$

Définition 1 [Lassoued and Boubaker, 2017] **:** Considérons l'équation polynomiale fractionnaire donnée par :

$$x^q = b = |b|e^{j\theta_b} \qquad (4)$$

avec x une variable et q étant un nombre rationnel ou irrationnel. b est un paramètre complexe et θ_b est la phase de x^q. Les racines de l'équation (4.3.1) sont données par :

$$x = |b|^{\frac{1}{q}} e^{j(\frac{\theta_b \pm 2n\pi}{q})} \ , n \in \mathbb{N} \qquad (5)$$

où b est un réel pur, $\theta_b = 0$ si $b > 0$ et $\theta_b = \pi$ si $b < 0$.

Pour le cas d'effet Allee Fort, l est un réel positif pur. Ainsi, d'après la définition 1, $\theta_l = 0$ et les coordonnées du point d'équilibre E_1 sont données par :

$$x_1 = l^{\frac{1}{q_1}} \text{ et } x_2 = 0$$

Par conséquent, le système 4.2 admet un point d'équilibre E_1 de coordonnées ($l^{\frac{1}{q_1}}$,0). De plus, il admet un quatrième point d'équilibre E_3 avec les coordonnées suivantes :

$$x_1 = m \text{ et } x_2 = (m^{q_1} - l)(1 - m)$$

En récapitulant, le système 4.2 modifié souffrant d'effet Allee Fort admet un nombre de points d'équilibre qui varie en fonction de la valeur de m :

- Trois points d'équilibre $E_0(0,0)$, $E_1(l^{\frac{1}{q_1}}, 0)$, $E_2(1,0)$, si $m \in [0\ l^{\frac{1}{q_1}}]$ ou $m = 1$,
- Quatre points d'équilibre E_0, E_1, E_2 et $E_3(m, (m^{q_1} - l)(1 - m))$, si $m \in]l^{\frac{1}{q_1}}\ 1[$.

Analyse de la stabilité

La matrice jacobienne du système 4.2 à chaque point d'équilibre E_i (i $\in [0\ 3]$) est donnée par :

$$J_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= -x_1^{q_1+1}(2 + q_1) + (1 + q_1)x_1^{q_1} + 2lx_1 - (l + x_2) \\ a_{12} &= -x_1 \\ a_{21} &= x_2^{q_2} \\ a_{22} &= q_2 x_2^{q_2-1}(x_1 - m) \end{aligned}$$

La matrice jacobienne J_3 du système 4.2 au point d'équilibre E_3 admet une paire de valeurs propres complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(J_3) \pm i\sqrt{\Delta}}{2} \tag{4.3}$$

avec

$$\begin{aligned} tr(J_3) &= -m^{q_1+1}(1+q_1) + q_1 m^{q_1} + lm \\ \Delta &= tr(J_3)^2 - 4det(J_3) \\ det(J_3) &= m[(m^{q_1} - l)(1-m)]^{q_2} \end{aligned}$$

Les calculs analytiques nous ont permis de déterminer les valeurs propres des points d'équilibre présentées dans la Table 4.7.

TABLE 4.7 – Valeurs propres : Effet Allee Fort $l \in]0\ 1[$

Paramètre m	Point d'équilibre	Valeurs Propres
$m \in [0, l^{\frac{1}{q_1}}]$	$E_0(0,0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -l$
	$E_1(l^{1/q_1}, 0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = q_1 l(1 - l^{1/q_1})$
	$E_2(1,0)$	$\lambda_1 = (l-1)$ $\lambda_2 = 0$
$m \in [l^{1/q_1}, 1]$	$E_0(0,0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -l$
	$E_1(l^{1/q_1}, 0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = q_1 l(1 - l^{1/q_1})$
	$E_2(1,0)$	$\lambda_1 = l - 1$ $\lambda_2 = 0$
	$E_3(m, (m_1^q - l)(1-m))$	$\lambda_1 = \frac{tr(J_3) - i\sqrt{\delta}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{tr(J_3) + i\sqrt{\delta}}{2}$

Les résultats obtenus prouvent que les points d'équilibre E_0, E_1 et E_2 sont non hyperboliques. Par conséquent, le type de singularité relatif à ces points ne peut être déduit que numériquement. L'analyse de la stabilité est renforcée numériquement par les différents portraits de phase donnés dans les Tables 4.8 et 4.9 et la Figure 4.3. Pour la simulation numérique du système 4.2 dans le cas de l'effet Allee Fort, nous prenons $q_1 = 0.5$. L'identification de la singularité des points d'équilibre est effectué numériquement en balayant la plage des valeurs des paramètres q_1 et $q_2 \in]0\ 1[\ U\ ]1\ 2[$. Les résultats numériques obtenus montrent que

la singularité des points d'équilibre $\forall m \in [0\ 1]$ dépend du paramètre q_1 et du paramètre q_2. Nous constatons cependant que le portrait de phase peut dégénérer dans un certain sens. Ainsi,

- La singularité du point d'équilibre E_0 passe d'un point de Selle (Col) à un Nœud stable lorsque la valeur du paramètre q_2 passe de l'intervalle $]0\ 0.5]$ à l'intervalle $]0.5\ 1.9[$.
- La singularité du point d'équilibre $E_1(l^{1/q_1}, 0)$ passe d'un point de Selle à un Nœud instable lorsque la valeur du paramètre q_2 passe de l'intervalle $]0\ 0.5]$ à l'intervalle $]0.5\ 1.1[$.
- Le point d'équilibre E_2 n'admet qu'une seule singularité de type Selle (Col)
- La singularité du point d'équilibre E_3 dépend de la valeur de $tr(J_3)$ qui dépend à son tour des paramètres q_1 et m.
  - Si $tr(J_3) > 0$ le système 4.2 admet un foyer instable,
  - Si $tr(J_3) = 0$ le système 4.2 admet un centre,
  - Si $tr(J_3) < 0$ le système 4.2 admet un foyer stable.

Analyse des bifurcations

L'analyse précédente prouve que la stabilité des points d'équilibre est sensible à la variation des deux paramètres q_1 et q_2. Par conséquent, les deux paramètres peuvent être choisis comme paramètres de bifurcation. Les simulations montrent que les continuations numériques effectuées en choisissant q_2 comme paramètre de bifurcation n'ont pas amené à aucune bifurcation par contre celles correspondantes au paramètre q_1 montre que le comportement dynamique du système 4.2 est sensible à ce paramètre comme il est présenté par la Figure 4.3,. Lorsque le paramètre q_1 croise la valeur critique $q_{10} = 1$, le point d'équilibre E_3 a des valeurs propres purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm i\omega(q_{10})$. Pour de tels cas, $tr(J_3) = 0$ et alors $m = \frac{1+l}{2}$. Par conséquent, nous pouvons conclure que le système 4.2 admet une bifurcation de type Hopf quand $q_1 = 1$. Ceci

TABLE 4.8 – Singularités : Effet Allee Fort pour $m \in [0, l^{\frac{1}{q_1}}]$ et $l \in]0\ 1[$

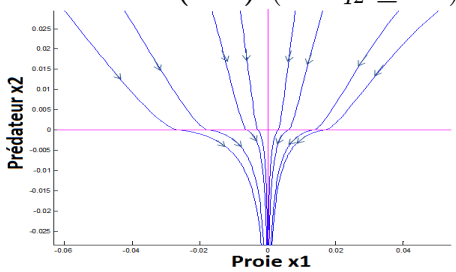
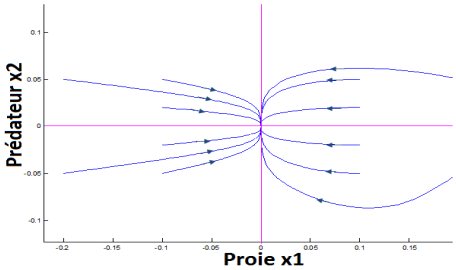
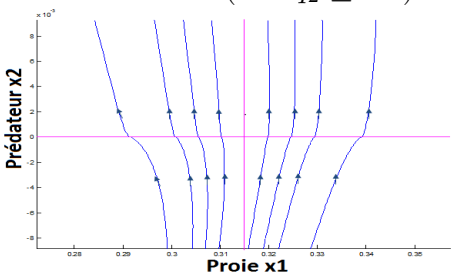
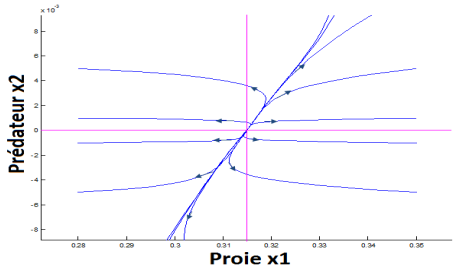
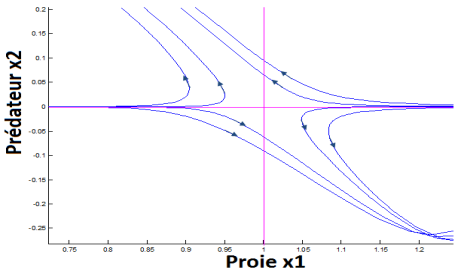
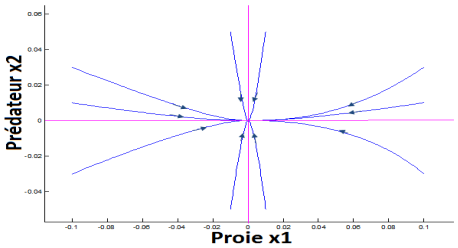
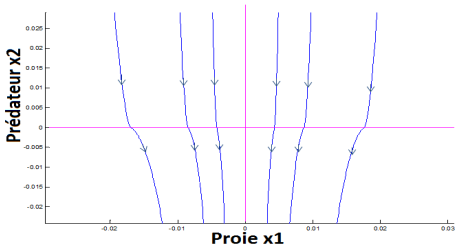
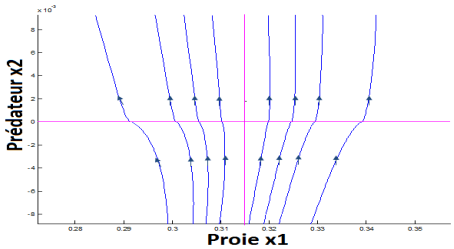
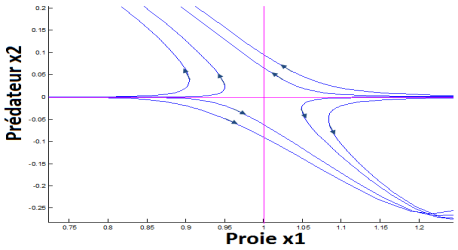
Point d'équilibre	Singularité
$E_0(0,0)$	**Point Selle (Col)** $(0 < q_2 \leq 0.5)$  **Nœud Stable** $(0.5 < q_2 \leq 1.9)$ 
$E_1(l^{1/q_1}, 0)$	**Point Selle** $(0 < q_2 \leq 0.5)$  **Nœud Instable** $(0.5 < q_2 \leq 1.1)$ 
$E_2(1,0)$	**Point Selle** 

TABLE 4.9 – Singularités : Effet Allee Fort pour $m \in [l^{1/q_1}, 1]$ et $l \in]0\ 1[$

Point d'équilibre	Singularité
$E_0(0,0)$	**Nœud Stable** $(0.5 < q_2 \leq 1.9)$  **Point Selle** $(0 < q_2 \leq 0.5)$ 
$E_1(l^{1/q_1}, 0)$	**Point Selle** 
$E_2(1,0)$	**Point Selle** 

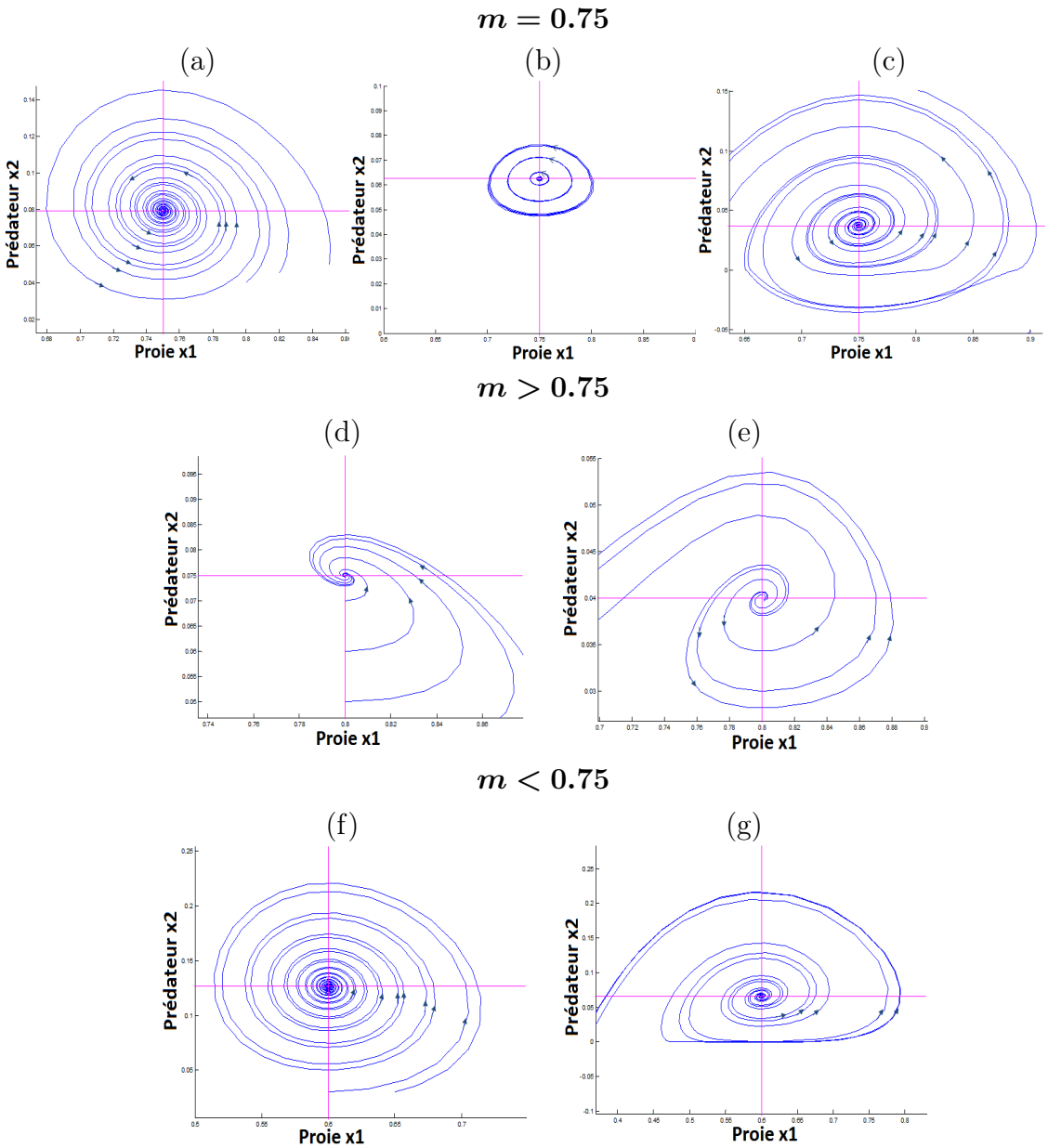


FIGURE 4.3 – Singularités du point d'équilibre E_3 pour $m \in [l^{1/q_1}, 1]$ et $l \in]0\ 1[$: (a),(d) et (f) Foyer Stable si $q_1 < 1$, (b) Centre si $q_1 = 1$, (c),(e) et (g) Foyer Instable si $q_1 > 1$: Étude de cas d'effet Allee Fort

est prouvé numériquement par le diagramme de bifurcation présentée sur la Figure 4.4 qui montre l'existence d'un seul point de bifurcation de Hopf noté H. Elle apparaît lorsqu'une solution périodique du cycle limite se produit dans un petit voisinage du point d'équilibre E_3. Ce point de Hopf correspond au même point de Hopf du système 4.2 d'ordre entier et il admet un premier coefficient de Lyapunov négatif égal à -0.8393214 indiquant l'existence d'une bifurcation de Hopf supercritique.

Cependant, contrairement au système 4.1, le système 4.2 admet une continuation numérique, à partir du point de bifurcation obtenu Hopf, selon la valeur du paramètre q_1 comme il est présenté par la Figure 4.5. Cette dernière montre que le système 4.2 admet les points de bifurcation suivants :

- Une bifurcation de type dédoublement de période PD de codimension 1 qui se produit uniquement lorsque $q_2 = 0.5$ et lorsque le paramètre q_1 atteint la valeur critique $q_1 = 1.036593$. En d'autres termes, la modélisation de l'efficience du prédateur c par $\frac{1}{\sqrt{x_2}}$ peut faire l'objet d'une solution périodique. La période de la bifurcation obtenue est égale à 16,7535. Ceci indique que la bifurcation est supercritique et que le cycle de dédoublement de période obtenu est stable.
- Deux bifurcations de type cycle de point limite (LPC). La première se produit, par intégration dans le temps, près du cycle PD lorsque le paramètre q_1 atteint la valeur critique $q_1 = 1.035979$. Cependant, la seconde se produit, par intégration dans le temps, lorsque le paramètre q_1 atteint la valeur critique $q_1 = 1$.

4.3.2 Modèle avec effet Allee Faible

Dans cette partie, l'analyse de la stabilité et des bifurcations du second système modifié 4.2 est détaillée en considérant que $-1 < l < 0$.

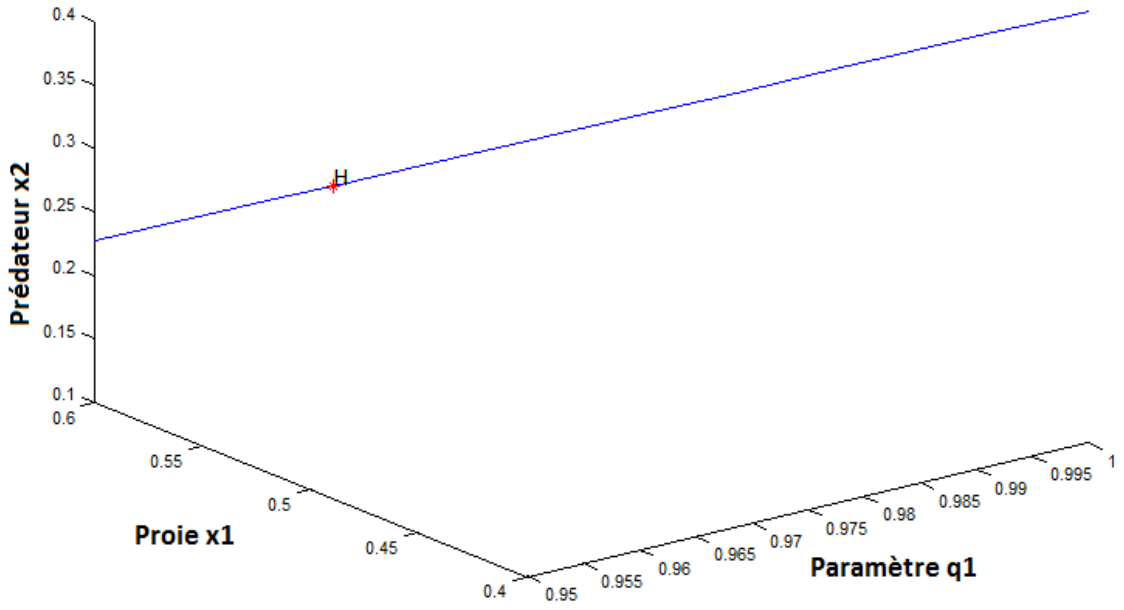


FIGURE 4.4 – Diagramme de Bifurcation du system (4.2) : Étude de cas d'effet Allee Fort

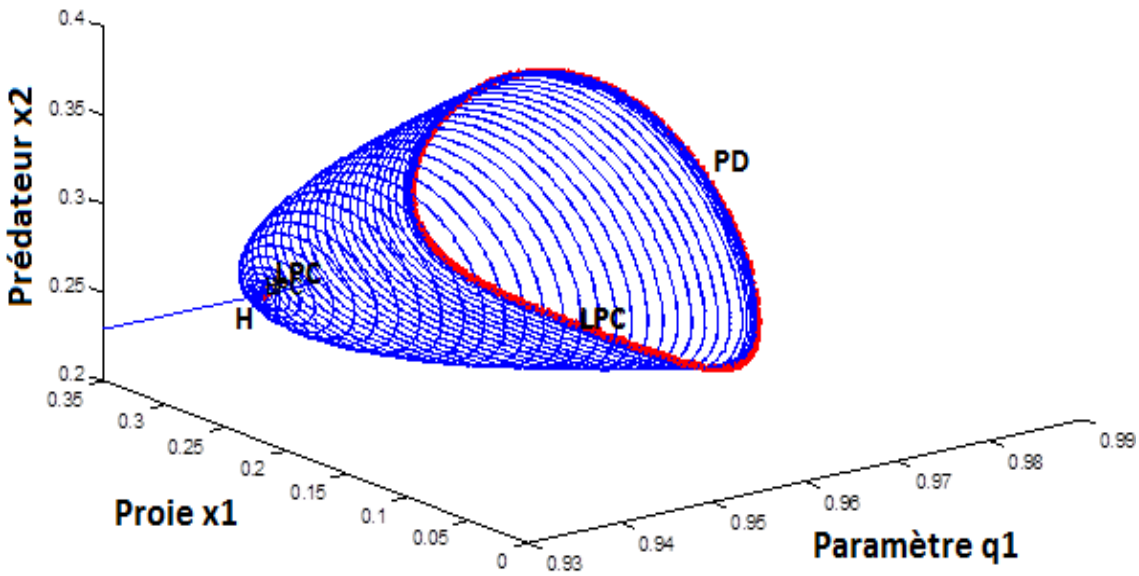
Point d'équilibre et analyse de la stabilité

Dans l'étude de cas d'effet Allee Faible, l est un réel pur négatif. Ainsi, selon la Définition.1, $\theta_l = \pi$ et les coordonnées du point d'équilibre E_1 sont comme suit :

$$x_1 = -|l|^{1/q_1} \text{ et } x_2 = 0$$

En considérant les conditions de signification biologique, les densités de populations x_1 et x_2 doivent être positives. Dans ce cas, la dernière solution n'est plus acceptée et le système 4.2 n'admet que trois points d'équilibre $E_0(0,0)$, $E_2(1,0)$ et $E_3(m,\ (m^{q_1} - l)\ (1-m))\ \forall m \in [0\ 1]$. En se basant sur la même matrice jacobienne du système 4.2, nous déterminons analytiquement les valeurs propres ainsi que les singularités correspondantes comme il est présenté par la Table 4.10. Les résultats analytiques obtenus montrent que le système 4.2 admet deux points d'équilibre non hyperboliques E_0 et E_2. Pour cela, une analyse numérique à l'aide le logiciel MATCONT est nécessaire pour déterminer les types de singularité relatifs au points d'équilibre.

(a)



(b)

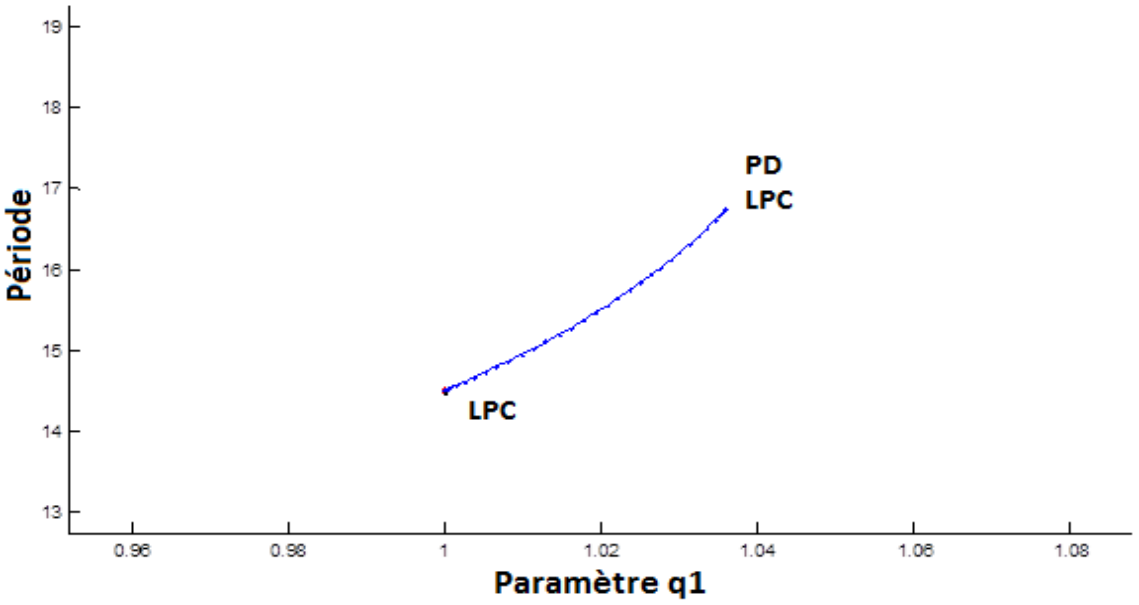


FIGURE 4.5 – Continuation numérique du système (4.2) pour q_2=0.5 : Effet Allee Fort

TABLE 4.10 – Valeurs propres :Etude de cas d'effet Allee Faible pour $m \in [0\ 1]$

Point d'équilibre	Valeurs propres
$E_0(0,0)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -l$
$E_2(1,0)$	$\lambda_1 = (l-1)$ $\lambda_2 = 0$
$E_3(m,(m^{q_1}-l)(1-m))$	$\lambda_1 = \frac{tr(J_3)-i\sqrt{\delta}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{tr(J_3)+i\sqrt{\delta}}{2}$

Les simulations numériques, obtenues via MATCONT, sont présentées dans les Tables 4.11 et 4.12. Nous constatons que :

- La singularité du point d'équilibre E_0 est de type point Selle.
- La singularité du point d'équilibre E_2 est de type point Selle.
- La singularité du point d'équilibre E_3 change selon la valeur des paramètres m et q_1 comme il est expliqué dans le cas d'effet Allee Fort.

Pour la simulation numérique du système 4.2, nous prenons $l = -0.2$. Comme le montre la Table 4.12, le point d'équilibre E_3 admet plusieurs types de singularités en fonction de la valeur du paramètre q_1 pour chaque valeur du paramètre m.

Analyse des bifurcations

En choisissant q_1 comme paramètre de bifurcation, l'analyse des bifurcations du système 4.2 est réalisée en déterminant les diagrammes de bifurcation présentés dans les Figures 4.6,4.7,4.8 et 4.9.

La Figure 4.6 montre que le système 4.2 admet deux points de bifurcation de Hopf qui sont notés H_1 et H_2 et décrits comme suit :

- Le premier point, H_1, se produit quand $q_1 = 0.999967$ et admet un point de Hopf supercritique puisque le premier coefficient de

TABLE 4.11 – Singularités :Etude de cas d'effet Allee Faible pour $m \in [0\ 1]$

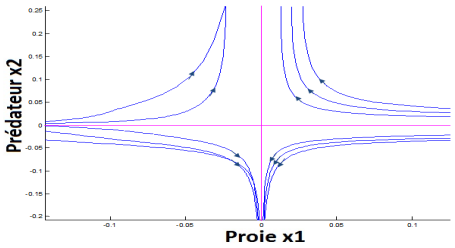
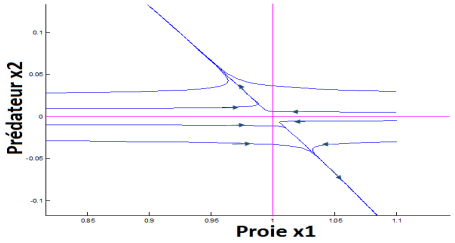
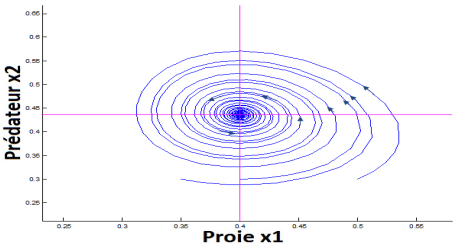
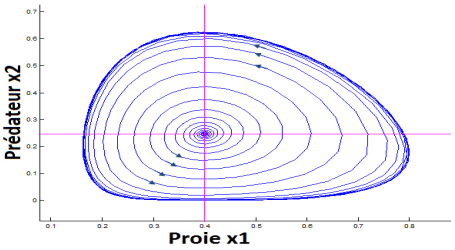
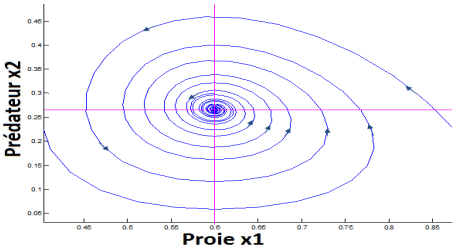
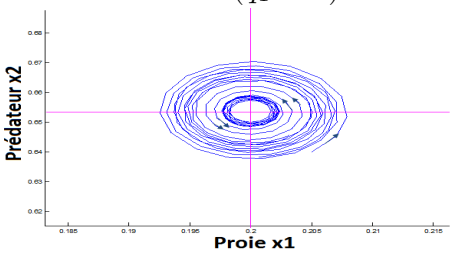
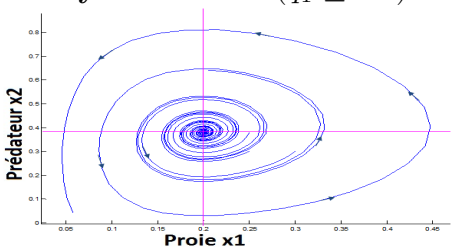
Point d'équilibre	Singularité
$E_0(0,0)$	**Selle** 
$E_2(1,0)$	**Selle** 
$E_3(m,(m^{q_1}-l)(1-m))$	$\boldsymbol{m = 0.4}$ **Foyer Stable** $(q_1 < 1)$  **Centre** $(q_1 \geq 1)$ 

TABLE 4.12 – Singularités :Etude de cas d'Effet Allee Faible pour $m \in [0, 1]$ (suite)

Point d'équilibre	Singularité
$E_3(m, (m^{q_1} - l)(1 - m))$	**$m < 0.4$** **Foyer Stable** ($q_1 < 0.4$)  **Centre** ($q_1 = 1$)  **$m > 0.4$** **Foyer Instable** ($q_1 \geq 0.4$) 

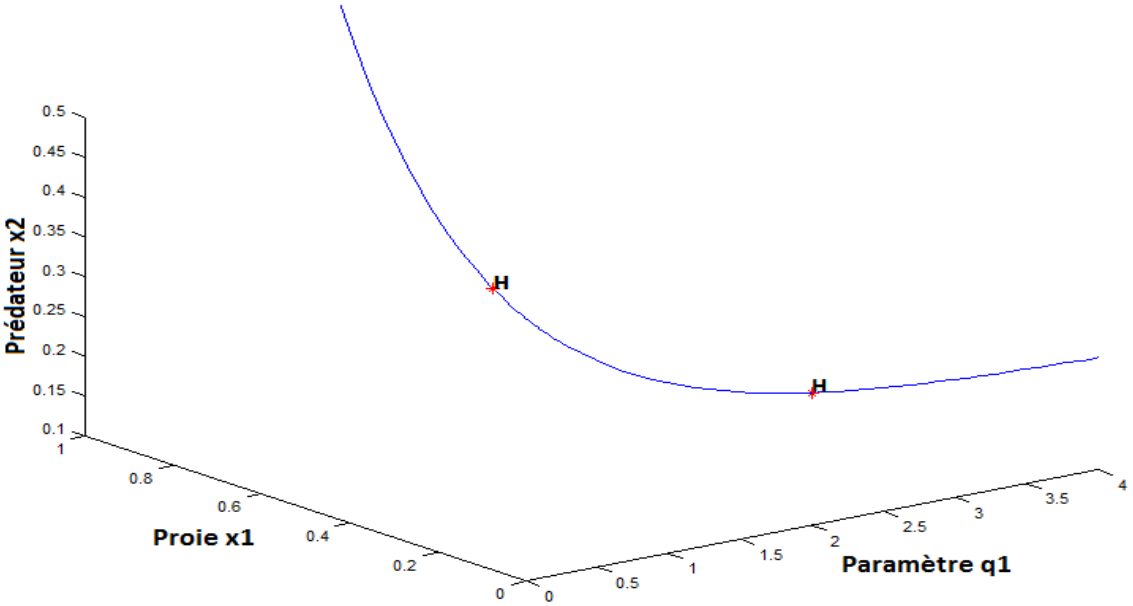


FIGURE 4.6 – Diagramme de Bifurcation du système (4.2) : Étude de cas d'effet Allee Faible

Lyapunov est négatif et égal à -0.4000004.

- Le deuxième point, H_2, se produit quand $q_1 = 3.223516$ et admet un point de Hopf sous-critique puisque le premier coefficient de Lyapunov est égal à 0.004301. Ce point n'est détecté que numériquement et il est vérifié analytiquement par la condition de Hopf.

De plus, la continuation numérique de la bifurcation à partir de chacun de ces deux points de Hopf, H_1 et H_2, présente de nouveaux types de bifurcation.

- Si $q_2 = 0.5$
  - A partir du premier point de bifurcation Hopf H_1, une bifurcation de type dédoublement de période et deux bifurcations de type cycle de point limite sont apparues, comme le montre la Figure 4.7. Le dédoublement de période se produit lorsque le paramètre q_1 atteint la valeur critique $q_1 = 1.773590$. Il admet un cycle de période stable puisqu'il a une période égale à 16.33313. De plus, les deux bifurcations LPC sont obtenues. La première est détecté quand $q_1 = 1$ et la seconde est détecté

quand $q_1 = 1.773618$.

- A partir du second point de Hopf H_2, une bifurcation de type PD et deux bifurcation de type LPC sont également détectées comme il est présenté par la Figure 4.8 mais avec de nouvelles valeurs critiques du paramètre q_1. Le premier point de bifurcation détectée est une bifurcation de type cycle de point limite qui se produit lorsque $q_1 = 3,223605$. Par contre, le deuxième point de bifurcation de type cycle de point limite est apparu lorsque le paramètre q_1 atteint la valeur critique 2.966445. Finalement, la bifurcation de type dédoublement de période se produit quand $q_1 = 2.966560$. Sa période est égale à 17.49135 .

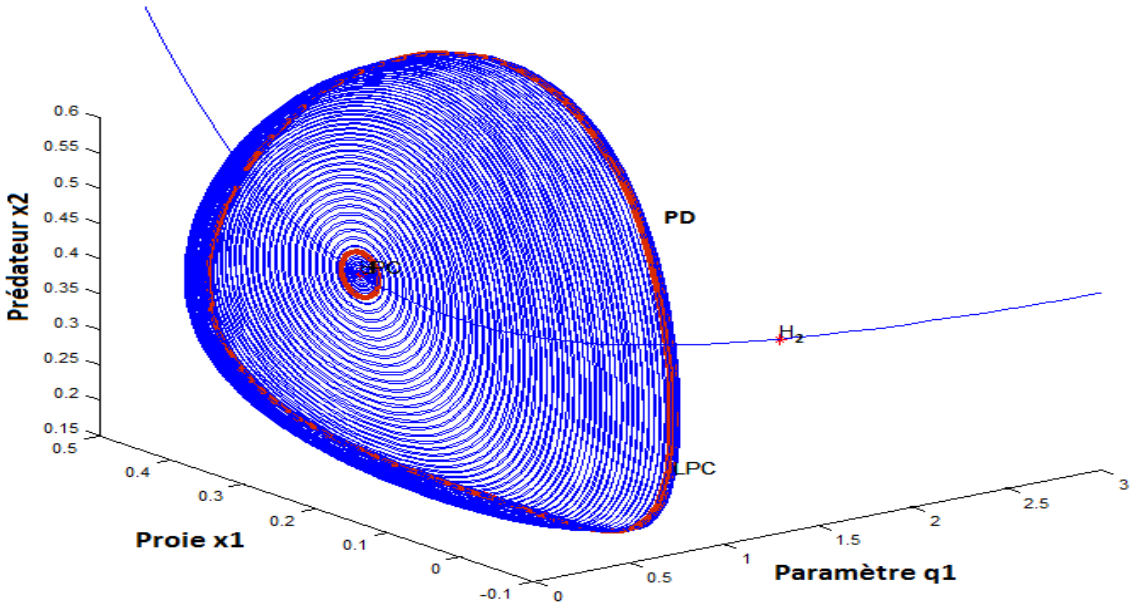
- Pour tout $q_2 \neq 0.5$, la suite présente un nouveau comportement dynamique qui est borné entre les deux points de Hopf détectés, comme le montre la Figure 4.9. Une bifurcation de type LPC apparait lorsque le paramètre q_1 atteint la valeur critique 3.223605.

D'après les résultats obtenus pour les deux modèles modifiés proposés, la modélisation par des polynômes d'ordres fractionnaires permet d'approfondir davantage l'analyse du comportement dynamique en fournissant plus d'informations. De plus, nous avons constaté que le comportement dynamique du second système modifié est très riche et plus complexe. Par conséquent, une perturbation périodique sera introduite, par la suite, dans ce second système afin d'analyser son comportement ainsi que sa robustesse.

4.3.3 Modèle avec effet saisonnier

Dans cette partie, une introduction de l'effet saisonnier au second modèle modifié 4.2 est proposée afin d'identifier le rôle que les effets

(a)



(b)

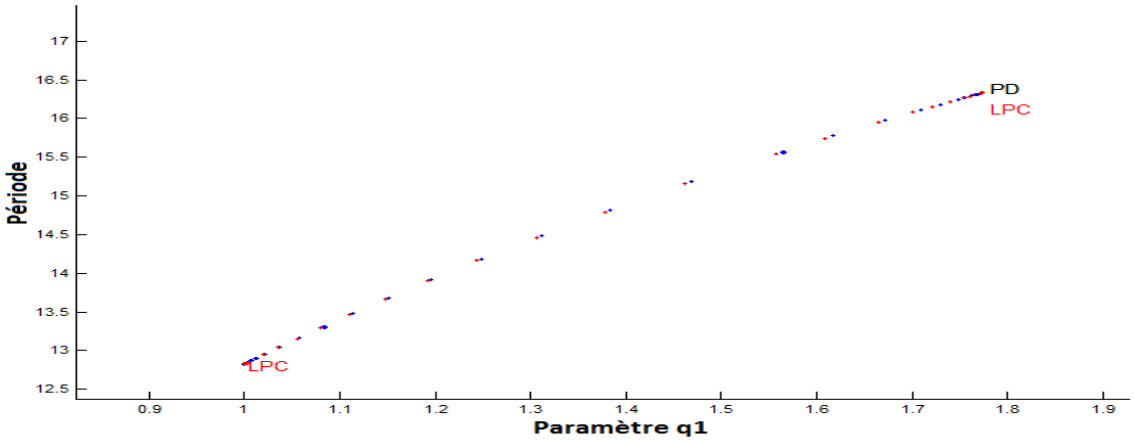
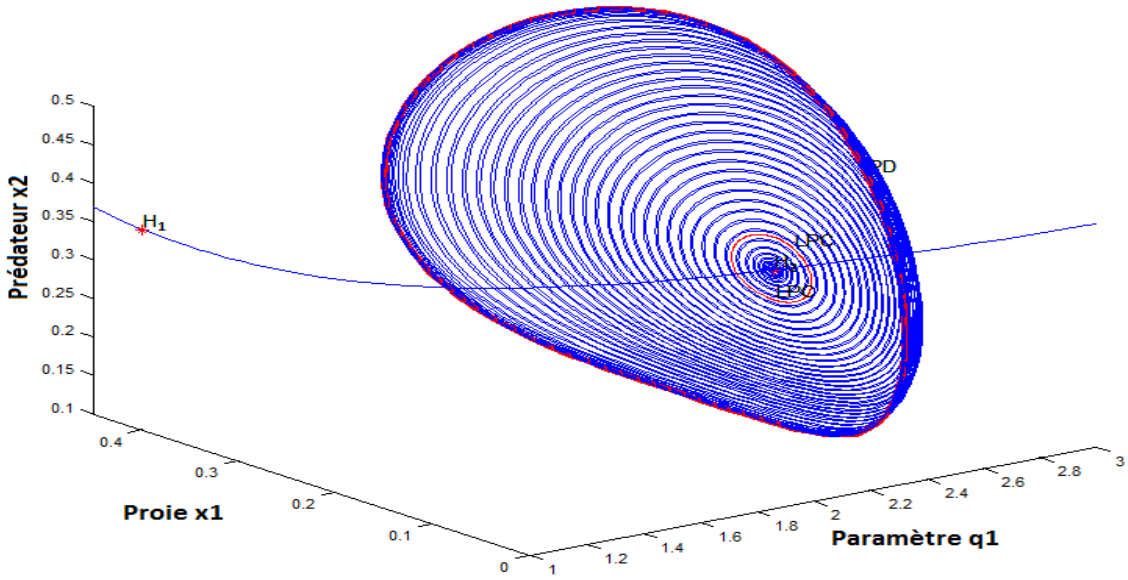


FIGURE 4.7 – Continuation numérique du système (4.2) à partir de la 1re bifurcation Hopf H_1 pour $q_2 = 0.5$: Étude de cas d'effet Allee Faible

(a)



(b)

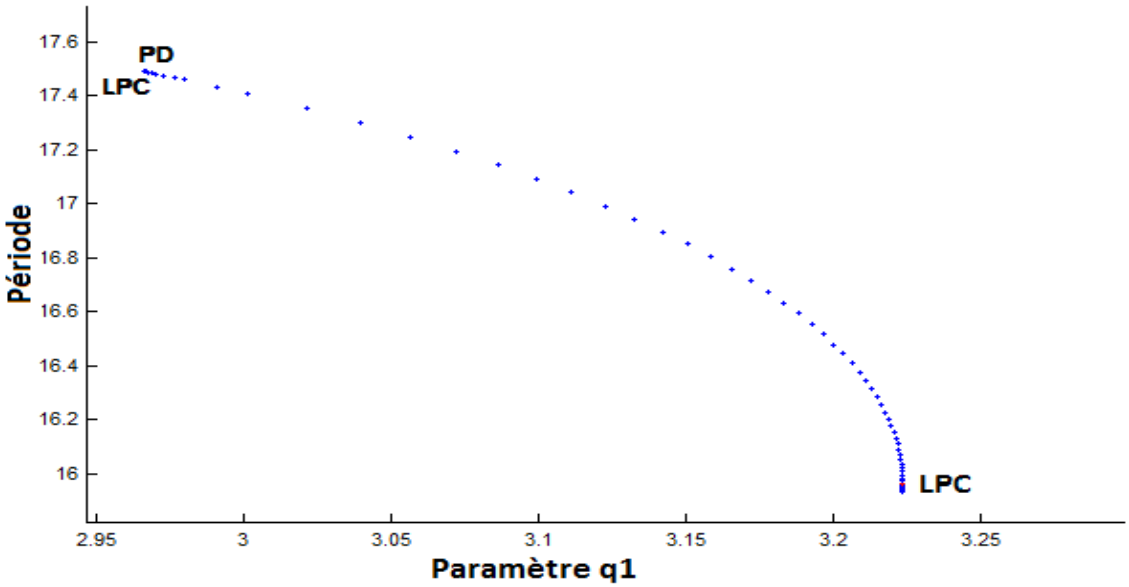
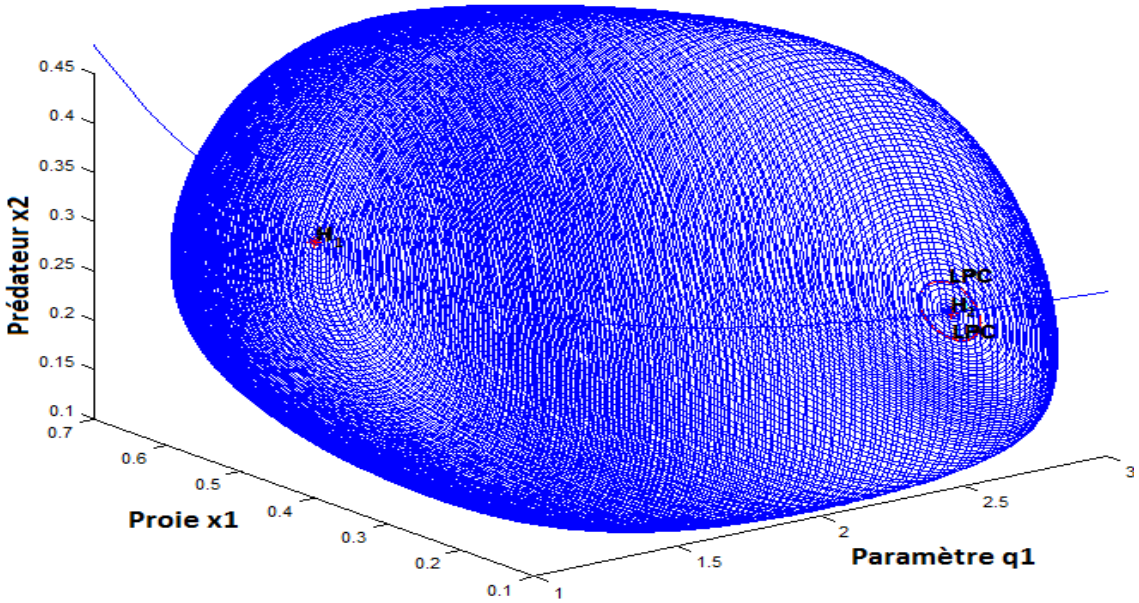


FIGURE 4.8 – Continuation Numérique du système (4.2) à partir de la 2me bifurcation Hopf H_1 pour $q_2 = 0.5$: Étude de cas d'effet Allee Faible

(a)



(b)

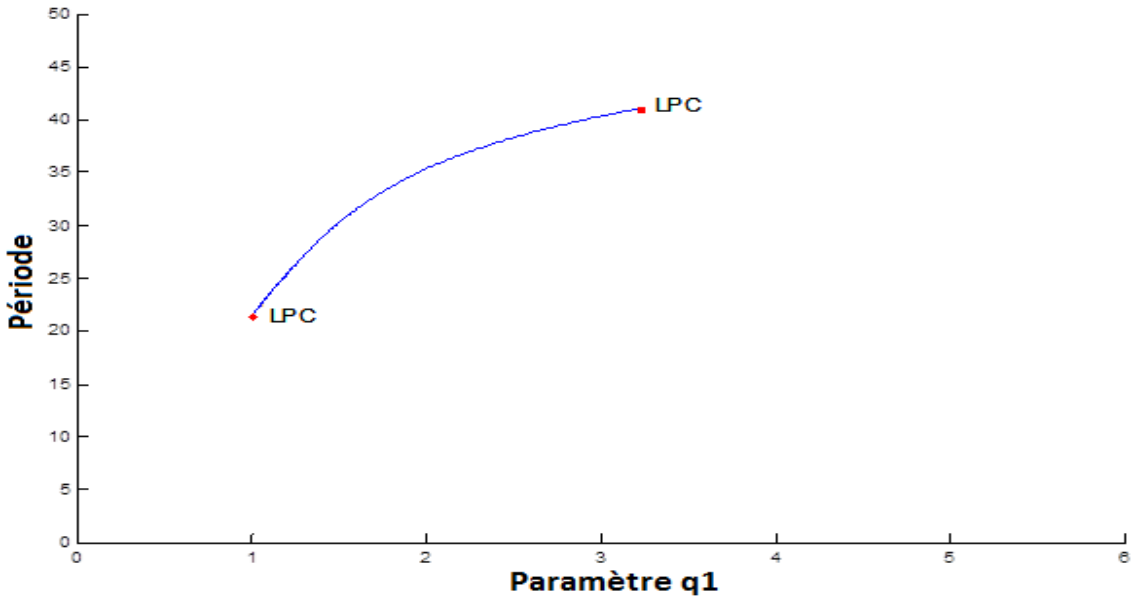


FIGURE 4.9 – Continuation Numérique du système (4.2) pour $q_2 \neq 0.5$: Étude de cas d'effet Allee Faible

saisonniers jouent sur le comportement dynamique du système. Une perturbation saisonnière externe est appliquée pour laquelle le système devient [Saad et al., 2018a].

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(x_1^{q_1} - l)(1 - x_1) - x_1x_2 + P \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (x_1 - m)x_2^{q_2} \end{cases} \tag{4.4}$$

avec

$$P = \lambda x_1(1 - cos(\omega t))$$

où λ et ω sont l'amplitude et la fréquence de la saisonnalité.

Étude de cas d'effet Allee Fort ($l \in]0, 1[$)

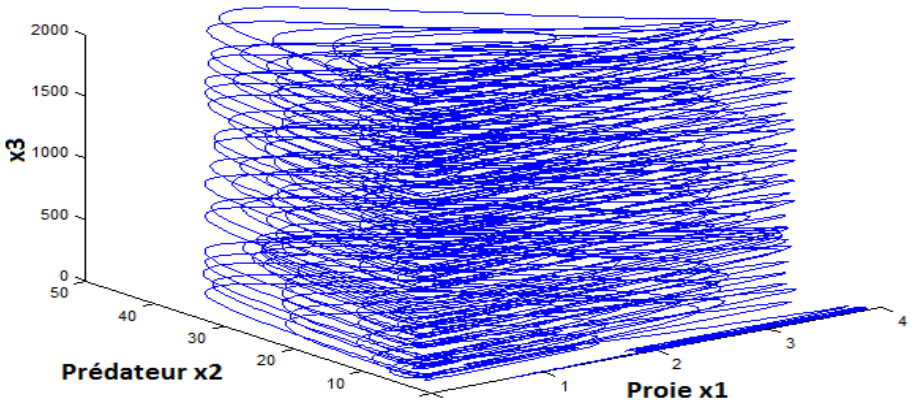
Pour la simulation numérique, l'ensemble le plus élégant d'éléments non entiers donnant un attracteur étrange est $q_1 = 1$ et $q_2 = 1,8$. L'attracteur étrange tridimensionnel et ses projections sont présentés sur la Figure 4.10.

Après avoir obtenu l'attracteur étrange, il est indispensable de vérifier l'existence du comportement chaotique en calculant les exposants de Lyapunov.

Il est important de noter que les exposants de Lyapunov dépendent du temps de calcul et du point de la trajectoire initiale. Le calcul des exposants de Lyapunov exige l'existence de 3 variables d'état au moins. Par conséquent, un changement de variable a été proposé sur le système 4.4 en supposant $x_3 = \omega t$. En fixant le point initial comme $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ $= (0.7, 0.06, 2\pi)$ et le temps de calcul à 600, la Figure 4.6 montre que le système 4.4 admet trois exposants de Lyapunov $LE_1 = 0.3270, LE_2 = 0$ et $LE_3 = -1.72$, pour $q_1 = 1$ et $q_2 = 1.8$ confirmant l'existence d'un attracteur chaotique.

De plus, en calculant la dimension de Lyapunov D_L, la valeur obtenue est égale à 2.19 appartenant ainsi à l'intervalle $]2, 3[$. Par conséquent, nous pouvons conclure que le système 4.4 perturbé périodiquement admet un

(a)



(b)

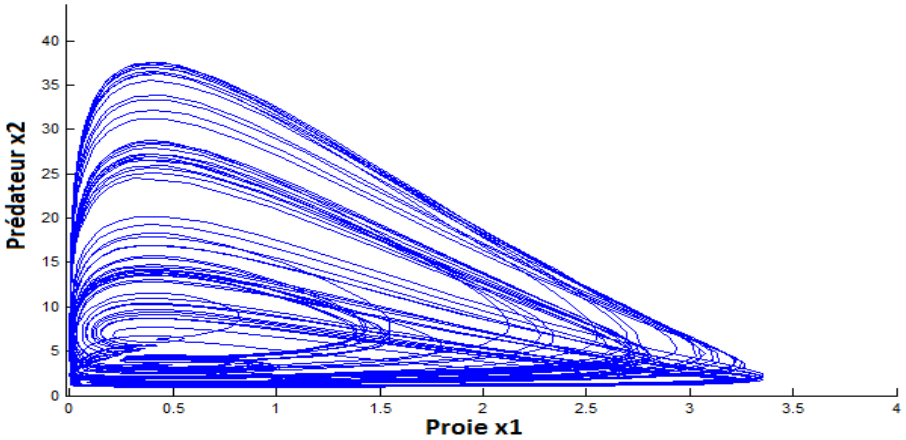


FIGURE 4.10 – (a) Attracteur étrange en 3 dimensions (b) Projection de l'attracteur chaotique dans le plan $x_1 - x_2$, pour $\lambda = 5$: Étude de cas d'effet Allee Fort

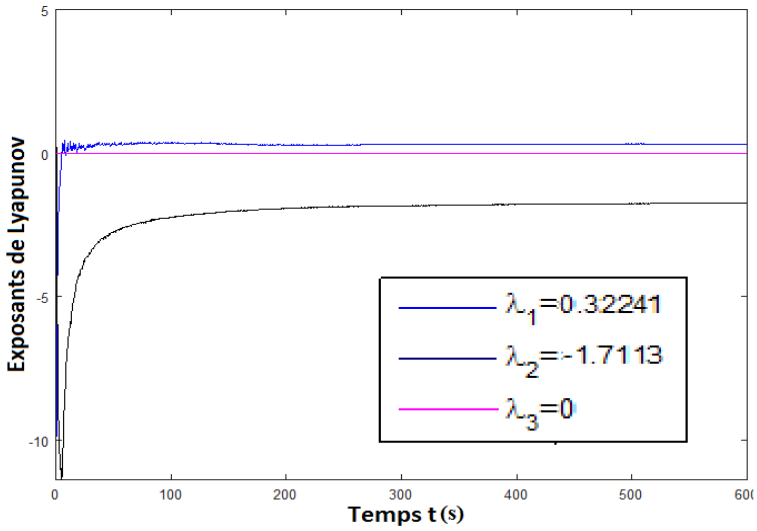


FIGURE 4.11 – Spectre d'exposant de Lyapunov de l'attracteur étrange du système (4.4) : Étude de cas d'effet Allee Fort

comportement chaotique lorsque l'efficience du prédateur est modélisée par $c = x_2^{0.8}$.
D'autre part, nous mentionnons que le comportement dynamique du système (4.4) dépend fortement de la fréquence de la saisonnalité puisque le chaos n'apparaît que lorsque $\omega = 2\pi$.

Étude de cas d'effet Allee Faible ($l \in]-1, 0[$)

L'ensemble le plus élégant d'éléments non entiers donnant un attracteur étrange est $q_2 = 0.5$ et $q_1 = 1$. L'attracteur étrange tridimensionnel et ses projections sont présentés dans la Figure 4.12.

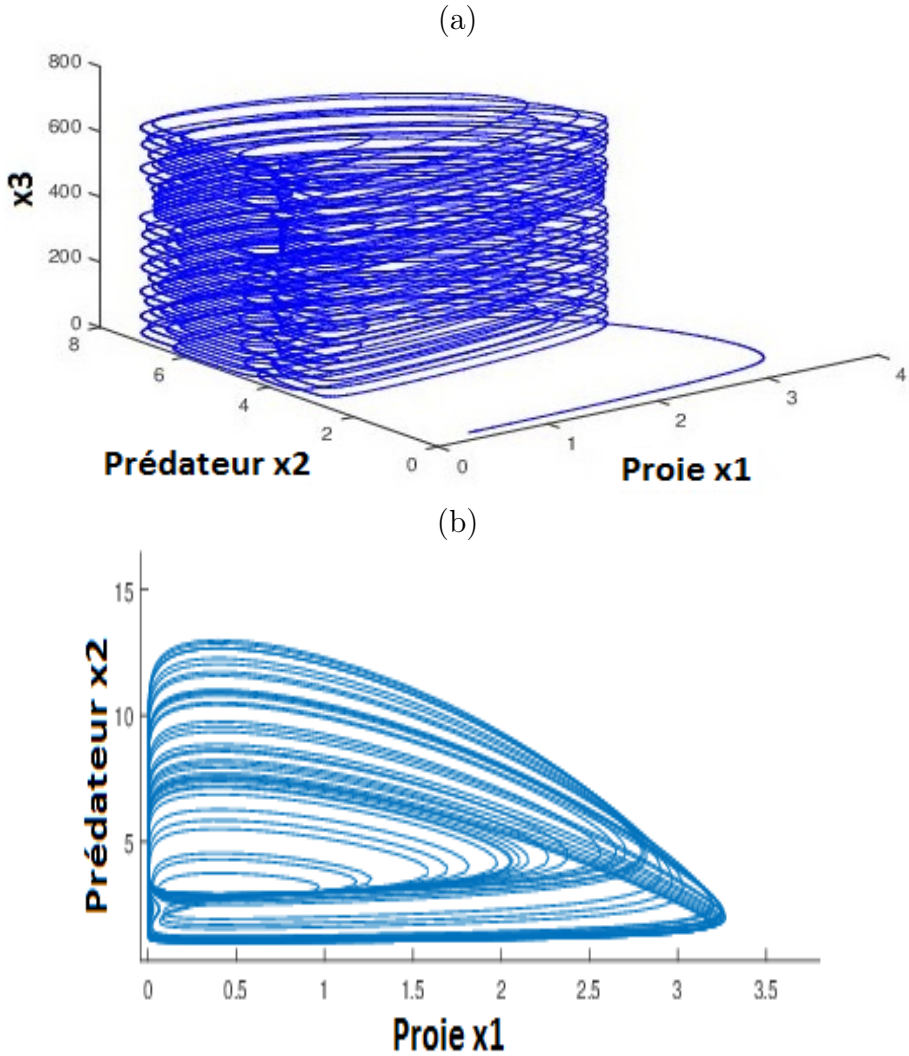


FIGURE 4.12 – (a) Attracteur étrange en 3 dimension (b) Projection de l'attracteur chaotique dans le plan $x_1 - x_2$, pour $\lambda = 5$: Étude de cas d'effet Allee Faible

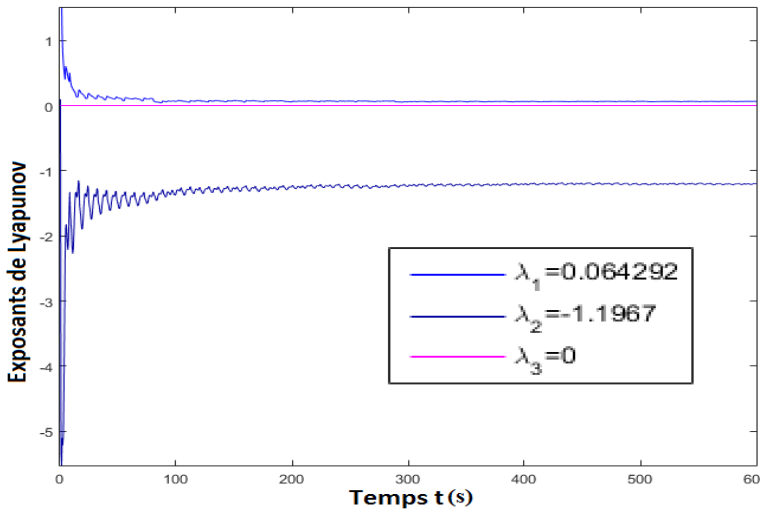


FIGURE 4.13 – Spectre d'exposant de Lyapunov de l'attracteur étrange du système (4.4) : Étude de cas d'effet Allee Faible

Le système 4.4 admet trois exposants de Lyapunov $LE_1 = 0.048$, $LE_2 = 0$, $LE_3 = -1.175$, comme il est indiqué dans la figure 4.13. Le point initial est fixé comme suit $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0{,}4,\ 0{,}3,\ \frac{\pi}{2})$, le temps de calcul est égal à 600, $q_2 = 0.5$ et $q1 = 1$. Les valeurs d'exposants de Lyapunov obtenues prouvent que le système 4.4 admet un attracteur étrange. Pour détecter l'attracteur chaotique, nous calculons davantage la dimension de Kaplan-Yorke donnée par la formule (1.3), donnée dans le chapitre 1, comme suit :

$$D_L = 2 + \frac{LE_1 + LE_2}{|LE_3|} = 2.041$$

Ainsi, nous pouvons conclure que le système perturbé 4.4 admet un comportement chaotique quand son taux de croissance est affecté par un effet Allee Faible et lorsque l'efficience du prédateur est modélisée par $c = x_2^{-0{,}5}$, avec $x_2 \neq 0$. Dans ce cas, le comportement du chaos apparait lorsque la fréquence de la saisonnalité est égale à $\omega = \frac{\pi}{2}$

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, deux nouvelles structures du modèle proie-prédateur basées sur des polynômes d'ordres fractionnaires ont été proposées et analysées. L'analyse du comportement dynamique du premier modèle, en considérant les deux études de cas d'effet Allee Fort et Faible, prouve que la modélisation du taux de croissance des proies et la réponse fonctionnelle des prédateurs par des polynômes d'ordres fractionnaires exhibe des comportements dynamiques plus complexes selon les valeurs des ordres fractionnaires mais ne convergent jamais vers le chaos. Cependant, l'analyse du deuxième modèle proposé prouve que la modélisation du taux de croissance de la proie et de l'efficience du prédateur par des polynômes d'ordres fractionnaires génère de nouveaux types de bifurcation. En effet, lorsque l'efficience du prédateur est modélisée par $\frac{1}{\sqrt{x_2}}$, le système proposé admet une bifurcation PD stable. Vue que le deuxième modèle exhibe un comportement dynamique plus complexe, une analyse du comportement dynamique de ce modèle introduisant une perturbation périodique est proposé. Il est prouvé que le système perd sa stabilité et devient chaotique pour une certaine structure de l'efficience du prédateur. Ainsi, le système perturbé admet un attracteur chaotique lorsque l'efficience du prédateur est modélisée par $x_2^{0.8}$ ou par $1/\sqrt{x_2}$, pour l'étude de cas d'effet Allee, respectivement, Fort ou Faible. Par conséquent, nous pouvons conclure que la structure algébrique de l'efficience du prédateur et la perturbation externe périodique a un effet important sur la topologie et la complexité des interactions des populations.

Conclusion générale

L'objectif de nos travaux dans le cadre de cette thèse est de contribuer à l'analyse des bifurcations des systèmes non linéaires en considérant le modèle proie-prédateur comme modèle d'application. Des nouveaux facteurs extérieurs ainsi que des modifications au niveau de la structure de celui-ci ont été proposés pour enrichir l'analyse.

En se basant sur un modèle proie-prédateur intégrant l'effet Allee Fort, une étude détaillée sur l'impact des effet Allee Fort et Faible ainsi que d'effet saisonnier a été proposée. Une analyse de la stabilité et des bifurcations a été présentée pour étudier le comportement du système avec l'effet Allee et l'effet saisonnier. Les diagrammes de bifurcation obtenus ont prouvé que les populations souffrant d'effet Allee et incorporant un forçage saisonnier au niveau du taux de croissance ont une dynamique plus complexe et instable qui peut être chaotique pour certaines valeurs de la fréquence de la saisonnalité. Par conséquent, afin d'établir l'équilibre, une synchronisation du système forcé saisonnier avec le système prédateur-proie basique a été proposée en utilisant le contrôle de rétroaction non linéaire. De plus, des simulations numériques ont validé l'efficacité de la synchronisation proposée.

Pour valider les résultats obtenus expérimentalement, un circuit électrique du modèle proie-prédateur souffrant d'effet Allee Faible a été conçu et implémenté. Son comportement complexe est prouvé par des résultats numériques et expérimentales. La validation expérimentale montre que le circuit électrique conçu décrit parfaitement le comportement du

système naturel proie-prédateur. Par conséquent, il peut être utilisé dans des algorithmes d'optimisation ou dans des expérimentations écologiques en rendant les expériences plus rapide et l'apprentissage plus efficace pédagogiquement.

La deuxième proposition a été effectué au niveau des structures algébriques du modèle proie-prédateur en introduisant des polynômes d'ordre fractionnaire dans les différents éléments décrivant les interactions entre les espèces. En premier lieu, une modélisation du taux de croissance des proies et de la réponse fonctionnelle du prédateur a été proposée. L'analyse de la bifurcation et de la stabilité prouve que cette modification de structure fait apparaitre, selon les valeurs de l'ordre fractionnaire, des nouveaux types de bifurcation tels que le dédoublement de période et le cycle des points limites. Par conséquent, on peut conclure que la dynamique du système modifié a bifurqué vers un comportement plus complexe mais ne devient jamais chaotique. Par la suite, une autre modélisation a été proposée au niveau du taux de croissance des proies et de l'efficacité des prédateurs en considérant l'effet Allee et l'effet de forçage saisonnier. Pour les deux cas d'études, l'analyse du comportement dynamique du système proposé prouve que l'élément non-entier modélisant le taux de croissance de la proie déstabilise le système et crée plus de singularités pour chaque point d'équilibre. Pour cela, l'ordre du taux de croissance de la proie est choisi comme paramètre de bifurcation lors de l'analyse du système. De plus, l'ordre de l'efficacité du prédateur a un impact important sur le comportement dynamique du système et permet de faire ressortir de nouveaux points de bifurcation. Lorsque la valeur de l'ordre de l'efficacité du prédateur atteint une valeur particulière, le système admet un comportement périodique stable. Autrement dit, une bifurcation de type dédoublement de période (PD) est détectée dans les deux cas d'effet Allee. Cependant, sous l'effet de la force externe saisonnière, le système perd sa stabilité et devient chaotique pour une certaine structure de l'efficacité du prédateur. Ainsi, le système per-

turbé admet un attracteur chaotique lorsque l'ordre de l'efficacité du prédateur atteint deux valeurs particulières pour l'étude de cas Forte ou Faible de l'effet Allee. En fait, nous pouvons conclure que la structure algébrique de l'efficacité du prédateur et la perturbation externe périodique ont un effet important sur la topologie et la complexité des interactions dynamiques des populations.

Les recherches que nous avons effectuées dans le cadre de cette thèse nous ont permis d'envisager plusieurs perspectives d'approfondissement. Une implémentation expérimentale de tous les cas d'étude proposés est envisagée. En outre, autres combinaisons des facteurs extérieurs seront proposées en intégrant l'effet impulsif ou l'effet de retard dans le modèle proie prédateur souffrant d'effet Allee. Ceci nous permettra de découvrir de nouveaux types de bifurcation que le modèle proie-prédateur peut admettre suite aux effets naturels issus de son environnement.

Bibliographie

[Alligood et al., 1996] Alligood, K. T., Sauer, T. D., and Yorke, J. A. (1996). *Chaos : An Introduction to Dynamical Systems*. Springer.

[Anderson and May, 1978] Anderson, R. M. and May, R. M. (1978). Regulation and stability of host-parasite population interactions. i. regulatory processes. *Journal of animal ecology*, 47 :219–247.

[Baek and Do, 2009] Baek, H. and Do, Y. (2009). Seasonal effects on a beddington-deangelis type predator-prey system with impulsive perturbations. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2009. Hindawi.

[Baek et al., 2009] Baek, H., Do, Y., and Saito, Y. (2009). Analysis of an impulsive predator-prey system with monod-haldane functional response and seasonal effects. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009. Doi :10.1155/2009/543187.

[Baek and Younghae, 2009] Baek, H. and Younghae, D. (2009). Seasonal effects on a beddington-deangelis type predator-prey system with impulsive perturbations. *Abstract and Applied Analysis*, 2009. Doi :10.1155/2009/695121.

[Banerjee and Das, 2018] Banerjee, C. and Das, P. (2018). Impulsive effect on tri-trophic food chain model with mixed functional responses under seasonal perturbations. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 26(1-3) :157–176.

[Bazykin et al., 1981] Bazykin, A., Berezovskaya, F., Denisov, G., and Kuznetzov, Y. A. (1981). The influence of predator saturation effect

and competition among predators on predator-prey system dynamics. *Ecological Modelling*, 14(1-2) :39–57.

[Bazykin, 1998] Bazykin, A. D. (1998). *Nonlinear dynamics of interacting populations*. World Scientific. Doi : 10.1142/2284.

[Bhaya and Meza, 2012] Bhaya, A. and Meza, M. E. M. (2012). Control of nonlinear dynamic models of predator-prey type. *Oecologia Australis*, 16(1) :81–98.

[Cai et al., 2013] Cai, L., Chen, G., and Xiao, D. (2013). Multiparametric bifurcations of an epidemiological model with strong allee effect. *Journal of mathematical biology*, 67(2) :185–215.

[Chen et al., 2016] Chen, J. J., WU, Q. H., and JI, T. Y. e. a. (2016). Evolutionary predator and prey strategy for global optimization. *Information Sciences*, 327 :217–232.

[Courchamp et al., 2008] Courchamp, F., Berec, L., and Gascoigne, J. (2008). *Allee effects in ecology and conservation*. Oxford University Press.

[Cushing, 2014] Cushing, J. (2014). Backward bifurcations and strong allee effects in matrix models for the dynamics of structured populations. *Journal of biological dynamics*, 8(1) :57–73.

[Dai et al., 2012] Dai, C., Zhao, M., and Chen, L. (2012). Complex dynamic behavior of three-species ecological model with impulse perturbations and seasonal disturbances. *Mathematics and Computers in Simulation*, 84 :83–97.

[Das and Pal, 2019] Das, A. and Pal, M. (2019). Theoretical analysis of an imprecise prey-predator model with harvesting and optimal control. *Theoretical Analysis of an Imprecise Prey-Predator Model with Harvesting and Optimal Control. Journal of Optimization*, 2019. Doi :10.1155/2019/9512879.

[Dhooge et al., 2008] Dhooge, A., Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., Meijer, H. G. E., and Sautois, B. (2008). New features of the software

matcont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 14(2) :147–175.

[Din et al., 2017] Din, Q., Elsadany, A., and Khalil, H. (2017). Controlling chaos and bifurcations in discrete-time population models. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2017. Doi :10.1155/2017/3476913.

[Doedel et al., 1998] Doedel, E. J., Champneys, A. R., Fairgrieve, T. F., Kuznetsov, Y. A., Sandstede, B., Wang, X., et al. (1998). *Auto97 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont).*

[Du and Feng, 2013] Du, Z. and Feng, Z. (2013). Periodic solutions of a neutral impulsive predator–prey model with beddington–deangelis functional response with delays. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 258 :87–98.

[Feigenbaum, 1978] Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of statistical physics*, 19(1) :25–52.

[Feng and Kang, 2015] Feng, P. and Kang, Y. (2015). Dynamics of a modified leslie–gower model with double allee effects. *Nonlinear Dynamics*, 80(1-2) :1051–1062.

[Feng and Bailey, 2017] Feng, W. and Bailey, R. M. (2017). Stability and critical transitions in mutualistic ecological systems. *Theoritical Biology*, pages 100–126. 10.1016/j.jtbi.2017.11.026.

[Friedman and Gore, 2017] Friedman, J. and Gore, J. (2017). Ecological systems biology : The dynamics of interacting populations. *Current Opinion in Systems Biology*, 1 :114–121.

[Gilmour and Trinca, 2005] Gilmour, S. G. and Trinca, L. A. (2005). Fractional polynomial response surface models. *Journal of agricultural, biological, and environmental statistics*, 10(1) :50–60.

[González-Olivares et al., 2017] González-Olivares, E., Rojas-Palma, A., and González-Yañez, B. (2017). Multiple limit cycles in a leslie–gower-type predator–prey model considering weak allee effect on prey. *Nonlinear analysis modelling and control*, 22(3) :347–365.

[Gonze and Kaufman, 1961] Gonze, D. and Kaufman, M. (1961). Theory of non-linear dynamical systems. *Biophysical journal*, 3 :1405–1415.

[Grayling, 2014] Grayling, M. (2014). phaser : An r package for phase plane analysis of autonomous ode systems. *The R Journal*, 6 :43–51.

[Gros, 2015] Gros, C. (2015). Bifurcations and chaos in dynamical systems. *In Complex and Adaptive Dynamical Systems*, pages 43–77.

[Holling, 1965] Holling, C. (1965). The functional response of predator to prey density and its role in mimicry and population regulation. entomological society of canada. *The American Naturalist*, 97 :5–60.

[Huang et al., 2017] Huang, C., Cao, J., Xiao, M., Alsaedi, A., and Alsaadi, F. E. (2017). Controlling bifurcation in a delayed fractional predator–prey system with incommensurate orders. *Applied Mathematics and Computation*, 293 :293–310.

[Jana et al., 2017] Jana, D., Gopal, R., and Lakshmanan, M. (2017). Complex dynamics generated by negative and positive feedback delays of a prey–predator system with prey refuge : Hopf bifurcation to chaos. *International Journal of Dynamics and Control*, 5(4) :1020–1034.

[Jiang and Yu, 2017] Jiang, J. and Yu, P. (2017). Multistable phenomena involving equilibria and periodic motions in predator–prey systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(03). Doi :10.1142/S0218127417500432.

[Jordan and Smith, 1999] Jordan, D. W. and Smith, P. (1999). *Nonlinear ordinary differential equations : an introduction to dynamical systems*, volume 2. Oxford University Press, USA.

[Khellaf and Hamri, 2010] Khellaf, W. and Hamri, N. (2010). Boundedness and global stability for a predator-prey system with the beddington-deangelis functional response. *International Journal of Differential Equations*, 2010. Doi :10.1155/2010/813289.

[Kooi, 2010] Kooi, B. W. (2010). Numerical bifurcation analysis of dynamical systems.

[Kuznetsov et al., 2016] Kuznetsov, N., Alexeeva, T., and Leonov, G. (2016). Invariance of lyapunov exponents and lyapunov dimension for regular and irregular linearizations. *Nonlinear Dynamics*, 85 :195–201.

[Kuznetsov et al., 1994] Kuznetsov, V. A., Makalkin, I. A., Taylor, M. A., and Perelson, A. S. (1994). Nonlinear dynamics of immunogenic tumors : parameter estimation and global bifurcation analysis. *Bulletin of mathematical biology*, 56(2) :295–321.

[Kuznetsov, 1998] Kuznetsov, Y. A. (1998). Content-integrated environment for analysis of dynamical systems.

[Kuznetsov, 2013] Kuznetsov, Y. A. (2013). *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media.

[Lai et al., 2010] Lai, X., Liu, S., and Lin, R. (2010). Rich dynamical behaviours for predator–prey model with weak allee effect. *Applicable Analysis*, 89(8) :1271–1292.

[Lanford III, 1982] Lanford III, O. E. (1982). A computer-assisted proof of the feigenbaum conjectures. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 6(3) :427–434.

[Lange et al., 2013] Lange, C., Hennig, D., Schulze, M., and Hurtado, A. (2013). Comments on the application of bifurcation analysis in bwr stability analysis. *Progress in Nuclear Energy*, 68 :1–15.

[Lassoued and Boubaker, 2017] Lassoued, A. and Boubaker, O. (2017). Dynamic analysis and circuit design of a novel hyperchaotic system with fractional-order terms. *Complexity*, 2017 :1–10.

[Lévine, 2004] Lévine, J. (2004). Analyse et commande des systèmes non linéaires. *Centre Automatique et Systèmes Ecole des Mines de Paris*.

[Levy et al., 2016] Levy, D., Harrington, H. A., and Van Gorder, R. A. (2016). Role of seasonality on predator–prey–subsidy population dynamics. *Journal of theoretical biology*, 396 :163–181.

[Li and Liu, 2016] Li, S. and Liu, W. (2016). A delayed holling type iii functional response predator-prey system with impulsive perturbation on the prey. *Advances in Difference Equations*, 2016(1) :42. Doi :10.1186/s13662-016-0768-8.

[Li et al., 2018] Li, X., Ren, J., Campbell, S. A., Wolkowicz, G. S., and Zhu, H. (2018). How seasonal forcing influences the complexity of a predator-prey system. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B*, 23(2) :785–808.

[Li and Wang, 2016] Li, Y. and Wang, J. (2016). Spatiotemporal patterns of a predator–prey system with an allee effect and holling type iii functional response. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(05) :1–24.

[Li and Ye, 2013] Li, Y. and Ye, Y. (2013). Multiple positive almost periodic solutions to an impulsive non-autonomous lotka–volterra predator–prey system with harvesting terms. *communications in nonlinear science and numerical simulation*, 18 :3190–3201.

[Lidicker, 2010] Lidicker, W. Z. (2010). The allee effect : its history and future importance. *Open Ecology Journal*, 3 :71–82.

[Lin et al., 2013] Lin, R., Liu, S., and Lai, X. (2013). Bifurcations of a predator-prey system with weak allee effects. *J. Korean Math. Soc*, 50(4) :695–713.

[Lorenz, 1963] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2) :130–141.

[Lynch, 2018] Lynch, S. (2018). Bifurcation theory. In *Dynamical Systems with Applications Using Python*, pages 163–184. Springer.

[Malthus, 1852] Malthus, T. R. (1852). *Essai sur le principe de population.*

[Marsden et al., 2012] Marsden, J., McCracken, M., Sethna, P., and Sell, G. (2012). *The Hopf bifurcation and its applications*, volume 19.

[Mehdi and Boubaker, 2011] Mehdi, H. and Boubaker, O. (2011). Position/force control optimized by particle swarm intelligence for constrained robotic manipulators. In *Intelligent Systems Design and Applications (ISDA), 2011 11th International Conference on*, pages 190–195. IEEE.

[Mehdi and Boubaker, 2016] Mehdi, H. and Boubaker, O. (2016). Pso-lyapunov motion/force control of robot arms with model uncertainties. *Robotica*, 34(3) :634–651.

[Paiva and Savi, 2006] Paiva, A. and Savi, M. A. (2006). An overview of constitutive models for shape memory alloys. *Mathematical problems in engineering*, 2006. Doi :10.1155/MPE/2006/56876.

[Pal and Mandal, 2014] Pal, P. J. and Mandal, P. K. (2014). Bifurcation analysis of a modified leslie–gower predator–prey model with beddington–deangelis functional response and strong allee effect. *Mathematics and Computers in Simulation*, 97 :123–146.

[Pang et al., 2017] Pang, S., Zhang, W., Ma, T., and Gao, Q. (2017). Ant colony optimization algorithm to dynamic energy management in cloud data center. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017. Doi :10.1155/2017/4810514.

[Royston and Altman, 1994] Royston, P. and Altman, D. G. (1994). Regression using fractional polynomials of continuous covariates : parsimonious parametric modelling. *Applied statistics*, pages 429–467.

[Ryoo et al., 2017] Ryoo, J. H., Konold, T. R., Long, J. D., Molfese, V. J., and Zhou, X. (2017). Nonlinear growth mixture models with

fractional polynomials : an illustration with early childhood mathematics ability. *Structural Equation Modeling : A Multidisciplinary Journal*, 24(6) :897–910.

[Saad and Boubaker, 2015] Saad, A. B. and Boubaker, O. (2015). On bifurcation analysis of the predator-prey bb-model with weak allee effect. In *Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2015 16th International Conference on*, pages 19–23. IEEE.

[Saad and Boubaker, 2017] Saad, A. B. and Boubaker, O. (2017). A new fractional-order predator-prey system with allee effect. In *Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems*, pages 857–877. Springer.

[Saad and Boubaker, 2018a] Saad, A. B. and Boubaker, O. (2018a). Bifurcations, chaos and synchronization of a predator-prey system with allee effect and seasonally forcing in prey's growth rate. *The European Physical Journal Special Topics*, 227 :971–981.

[Saad and Boubaker, 2018b] Saad, A. B. and Boubaker, O. (2018b). Period-doubling bifurcation and chaos in a new algebraic structure of predator-prey bb-model. In *Recent Advances in Chaotic Systems and Synchronization : From Theory to Real World Applications*. Elsevier.

[Saad et al., 2018a] Saad, A. B., Boubaker, O., and Zeraoulia, E. (2018a). A predator-prey model with strong allee effect and seasonally perturbation. In *Systems, Signals and Devices (SSD), 2018 15th Multi-Conference on*. IEEE. Doi :10.1109/SSD.2018.8570682.

[Saad et al., 2018b] Saad, A. B., Hmidet, A., and Boubaker, O. (2018b). Circuit design and experimental investigations for a predator-prey model. *International Journal On Smart Sensing and Intelligent Systems*. Doi :10.21307/ijssis-2018-010.

[Sanchez et al., 2002] Sanchez, J., Marques, F., and Lopez, J. (2002). A continuation and bifurcation technique for navier–stokes flows. *Journal of Computational Physics*, 180 :78—-98.

[Sander and Yorke, 2012] Sander, E. and Yorke, J. A. (2012). Connecting period-doubling cascades to chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(02). Doi :10.1142/S0218127412500228.

[Savi, 2016] Savi, M. A. (2016). Nonlinear dynamics and chaos. In *Dynamics of Smart Systems and Structures*, pages 93–117. Springer.

[Senol et al., 2014] Senol, B., Yeroglu, C., and Tan, N. (2014). Analysis of fractional order polynomials using hermite-biehler theorem. In *Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA), 2014 International Conference on*, pages 1–5. IEEE.

[Seydel, 2009] Seydel, R. (2009). *Practical bifurcation and stability analysis*. Springer Science & Business Media. Doi :10.1007/978-1-4419-1740-9.

[Sidhu and Dhillon, 2018] Sidhu, D. and Dhillon, J. (2018). Design of digital iir filter with conflicting objectives using hybrid predator–prey optimization. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 37(5) :2117–2141.

[Skiadas et al., 2011] Skiadas, C., Dimotikalis, I., and Skiadas, C. (2011). Chaos theory : Modeling, simulation and applications. In *Selected Papers from the 3rd Chaotic Modeling and Simulation International Conference (chaos' 2010)*.

[Strogatz and Herbert, 1996] Strogatz, S. H. and Herbert, D. E. (1996). Nonlinear dynamics and chaos. *Medical Physics-New York-Institute of Physics*, 23(6) :993–995.

[Taylor, 2010] Taylor, R. L. (2010). Attractors : Nonstrange to chaotic. *Society for Industrial and Applied Mathematics, Undergraduate Research Online*, pages 72–80.

[Thompson et al., 2002] Thompson, J. M. T., Thompson, M., and Stewart, H. (2002). *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons.

[Tian et al., 2015] Tian, B., Chen, N., and Qiu, Y. (2015). Almost periodic solution for an epidemic prey-predator system with impulsive effects and multiple delays. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2015. Doi :10.1155/2015/486463.

[Tilhun and Ong, 2013] Tilhun, S. L. and Ong, H. C. (2013). Comparison between genetic algorithm and prey-predator algorithm. *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences*, 9. Doi :10.11113/mjfas.v9n4.104.

[Upadhyay et al., 2000] Upadhyay, R. K., Iyengar, S., and Rai, V. (2000). Stability and complexity in ecological systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(4) :533–542.

[Van Voorn et al., 2007] Van Voorn, G. A., Hemerik, L., Boer, M. P., and Kooi, B. W. (2007). Heteroclinic orbits indicate overexploitation in predator–prey systems with a strong allee effect. *Mathematical biosciences*, 209(2) :451–469.

[Verhulst, 2006] Verhulst, F. (2006). *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media.

[Volterra, 1926] Volterra, V. (1926). Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. *Animal ecology*, pages 409–448.

[Wei and Chen, 2014] Wei, C. and Chen, L. (2014). Periodic solution and heteroclinic bifurcation in a predator–prey system with allee effect and impulsive harvesting. *Nonlinear Dynamics*, 76 :1109–1117.

[Wei et al., 2017] Wei, C., Liu, J., and Chen, L. (2017). Homoclinic bifurcation of a ratio-dependent predator–prey system with impulsive harvesting. *Nonlinear Dynamics*, 89(3) :2001–2012.

[Wiggins, 2013] Wiggins, S. (2013). *Global bifurcations and chaos : analytical methods*, volume 73. Springer Science & Business Media.

[Wolf et al., 1985] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., and Vastano, J. A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 16(3) :285–317.

[Wu, 2000] Wu, J. (2000). Global bifurcation of coexistence state for a competition model in the chemostat. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 39 :817–835.

[Xie et al., 2015] Xie, B., Wang, Z., and Xue, Y. e. a. (2015). The dynamics of a delayed predator-prey model with double allee effect. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 8. Doi :10.1155/2015/102597.

[Yongwang et al., 2017] Yongwang, L., Yu-ming, L., Heng-bin, Q., and Yan-feng, B. (2017). A new mathematical method for solving cuttings transport problem of horizontal wells : Ant colony algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017. Doi :10.1155/2017/7898647.

[Zhang and Duan, 2017] Zhang, B. and Duan, H. (2017). A three-dimensional path planning for uninhabited combat aerial vehicle based on predator–prey pigeon-inspired optimization in dynamic environment. In *IEEE/ACM Transactionson Computational Biology and Bioinformatics (TCBB)*, pages 97—107. IEEE.

[Zhang and Li, 2017] Zhang, F. and Li, Y. (2017). Stability and hopf bifurcation of a delayed-diffusive predator–prey model with hyperbolic mortality and nonlinear prey harvesting. *Nonlinear Dynamics*, 88(2) :1397–1412.

[Zhang et al., 2017] Zhang, S., Meng, X., Feng, T., and Zhang, T. (2017). Dynamics analysis and numerical simulations of a stochastic non-autonomous predator–prey system with impulsive effects. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 26 :19–37.

[Zhang et al., 2014] Zhang, Z., Chen, K., Ni, H., and Fan, H. (2014). Predictive value of lactate in unselected critically ill patients : an analysis using fractional polynomials. *Journal of thoracic disease*, 6(7) :995–1003.

Annexe A

Les diagrammes de bifurcations : Algorithmes MATLAB

A.1 Algorithme du diagramme de bifurcation relatif au système 2.5 dans le cas d'effet Allee Fort

```
clear; clc;
l=0.5;m=0.75;lamda=5;global theta; thetarange = 0.6:0.01:5;  k = 0; tspan = 0:0.1:200;xmax = [];
for theta= thetarange
    f = @(t,x) [x(1)*(x(1)-l)*(1-x(1))-x(1)*x(2)+lamda*(1-cos(theta*t))*x(1); x(2)*(x(1)-m)];
    x0 = [0.7 0.06];                    % initial condition
    k = k + 1;
    [t,x] = ode45(f,tspan,x0);          % call ode() to solve the system
    count = find(t>50);
    x = x(count,:);
    j = 1;
    n = length(x(:,1));
    for i = 2:n-1
        if (x(i-1,1)+eps) < x(i,1) && x(i,1) > (x(i+1,1)+eps)
            xmax(k,j)=x(i,1); % Sorting the values of x1 in increasing order
            j=j+1;
        end
    end
    if j>1
        plot(theta,xmax(k,1:j-1),'b.');
    end
    hold on;
    index(k)=j-1;
end
xlabel('Bifurcation parameter \theta');
ylabel('y max');
title('Bifurcation diagram for \theta');
```

A.2 Algorithme du diagramme de bifurcation relatif au système 2.5 dans le cas d'effet Allee Faible

```
clear; clc;
l=-0.2; m=0.4; lamda=5;global theta ;thetarange = 0.6:0.01:5; k = 0; tspan = 0:0.1:200;xmax = [];
for theta= thetarange
    f = @(t,x) [x(1)*(x(1)-l)*(1-x(1))-x(1)*x(2)+lamda*(1-cos(theta*t))*x(1); x(2)*(x(1)-m)];
    x0 = [0.4 0.3];                     % initial condition
    k = k + 1;
    [t,x] = ode45(f,tspan,x0);          % call ode() to solve the system
    count = find(t>50);
    x = x(count,:);
    j = 1;
    n = length(x(:,1));
    for i = 2:n-1
        if (x(i-1,1)+eps) < x(i,1) && x(i,1) > (x(i+1,1)+eps)
            xmax(k,j)=x(i,1);
            j=j+1;
        end
    end
    if j>1
        plot(theta,xmax(k,1:j-1),'b.');
    end
    hold on;
    index(k)=j-1;
end
xlabel('Bifurcation parameter \theta');
ylabel('y max');
title('Bifurcation diagram for \theta');
```

..