



HAL
open science

Modelling and characterisation of anisotropic multilayered plates on a wide frequency range

Fabien Marchetti

► **To cite this version:**

Fabien Marchetti. Modelling and characterisation of anisotropic multilayered plates on a wide frequency range. Acoustics [physics.class-ph]. Université de Lyon, 2019. English. NNT : 2019LYSEI130 . tel-02902084

HAL Id: tel-02902084

<https://theses.hal.science/tel-02902084>

Submitted on 17 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : 2019LYSEI130

THESE de DOCTORAT **DE L'UNIVERSITE DE LYON**

opérée au sein de
Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Ecole Doctorale N° ED162
MEGA de Lyon
(Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique)

Spécialité de doctorat : Acoustique

Soutenue publiquement le 16/12/2019, par :
Fabien MARCHETTI

Modélisation et caractérisation large
bande de plaques multicouches
anisotropes

Devant le jury composé de :

Loredon, Alexandre	Professeur des Universités	ISAT, Université de Bourgogne	Rapporteur
Pézerat, Charles	Professeur des Universités	LAUM, Université du Maine	Rapporteur
Rouleau, Lucie	Maître de Conférences	LMSSC, CNAM	Examinatrice
Ouisse, Morvan	Professeur des Universités	FEMTO-ST, ENSMM	Examineur
Ege, Kerem	Maître de Conférences	LVA, INSA-Lyon	Co-directeur de thèse
Leclère, Quentin	Maître de Conférences, HDR	LVA, INSA-Lyon	Co-directeur de thèse
Roozen, Nicolaas Bernardus	Professeur	K.U. Leuven	Invité
Guyader, Jean-Louis	Professeur des Universités émérite	LVA, INSA-Lyon	Invité

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr INSA : R. GOURDON	M. Stéphane DANIELE Institut de recherches sur la catalyse et l'environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 Avenue Albert EINSTEIN 69 626 Villeurbanne CEDEX directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI École Centrale de Lyon 36 Avenue Guy DE COLLONGUE 69 134 Écully Tél : 04.72.18.60.97 Fax 04.78.43.37.17 gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : H. CHARLES secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	M. Philippe NORMAND UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX philippe.normand@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ http://www.ediss-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : M. LAGARDE secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 Avenue Jean CAPELLE INSA de Lyon 69 621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04.72.68.49.16 emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://edinfomaths.universite-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	M. Luca ZAMBONI Bât. Braconnier 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.26.23.45.52 zamboni@maths.univ-lyon1.fr
Matériaux	MATÉRIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIÈRE INSA de Lyon MATEIS - Bât. Saint-Exupéry 7 Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://edmega.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction mega@insa-lyon.fr	M. Jocelyn BONJOUR INSA de Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69 621 Villeurbanne CEDEX jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://ed483.univ-lyon2.fr Sec. : Véronique GUICHARD INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.72.76 veronique.cervantes@univ-lyon2.fr	M. Christian MONTES Université Lyon 2 86 Rue Pasteur 69 365 Lyon CEDEX 07 christian.montes@univ-lyon2.fr

Remerciements

Je voudrais dans un premier temps remercier mes directeurs de thèse Kerem EGE et Quentin LECLÈRE pour leurs qualités de pédagogues et de scientifiques, leur disponibilité et leur confiance qu'ils m'ont accordée tout au long de ces 3 années. Nos échanges quotidiens ont permis à la fois de guider mon travail de recherche et d'améliorer ma démarche scientifique. J'ai éprouvé un réel plaisir à travailler avec vous et j'ai le sentiment que ce plaisir perdurera pour les projets futurs.

Je remercie également mes rapporteurs Charles PÉZERAT et Alexandre LOREDO d'avoir consacré une partie de leur temps à lire ce manuscrit ainsi que Lucie ROULEAU et Morvan OUISSE d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Je leur suis reconnaissant de l'intérêt qu'ils portent à mon travail.

Ces travaux de thèse n'auraient jamais vu le jour sans Fabien CHEVILLOTTE qui m'a donné goût à la recherche. Je tiens donc à le remercier tout particulièrement.

J'adresse mes sincères remerciements à toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de collaborer pendant ma thèse : Thomas MONNIER, Alain BERRY ainsi que Jean-Louis GUYADER et Bernard LAULAGNET pour les nombreuses discussions et conseils. Je remercie également Bert ROOZEN de m'avoir accueilli chaleureusement en Belgique pour mener à bien plusieurs campagnes expérimentales. Ces 4 mois d'échange ont permis d'élargir mes connaissances aussi bien sur le plan scientifique que culturel. Je désire aussi remercier l'entreprise HEXCEL qui par le biais de Christian BONNENFANT nous a fournis les plaques composites étudiées tout au long de ce manuscrit.

Enfin, je tiens à remercier tous les membres du LVA pour les bons moments passés au labo ou en congrès. Mes dernières pensées sont dédiées à mes parents pour leur soutien, leurs encouragements inestimables.

Résumé

Le présent travail de thèse traite de la modélisation vibratoire et de la caractérisation dynamique de matériaux multicouches anisotropes. Dans le premier chapitre, une classification de quelques modèles analytiques de multicouche et techniques de caractérisation expérimentales de structures planes est établie sous la forme d'une synthèse bibliographique. Elle regroupe les récents résultats publiés autour du sujet.

Le second chapitre propose une extension d'un modèle équivalent de multicouche au cas des structures anisotropes. Ce modèle décrit les premières courbes de dispersion de la structure et tient compte des phénomènes de cisaillement pouvant agir sur le mode de flexion en hautes fréquences. Le principal avantage du modèle réside dans sa simplicité et sa rapidité grâce à son nombre de variables cinématiques indépendant du nombre de couches. Les caractéristiques du multicouche sont définies par les 5 rigidités de flexion d'une plaque équivalente mince qui est comparée à ce dernier. L'extension de modèle est validée à l'aide d'une étude expérimentale réalisée sur des plaques composites en fibres de carbone.

Un intérêt tout particulier est porté sur la modélisation de l'amortissement structurel. Une définition énergétique du facteur de perte, décrite par une formulation spatiale et temporelle de l'atténuation, est comparée à une définition équivalente. Une nouvelle définition de la formulation spatiale est proposée dans le cas de structures très amorties et est comparée aux résultats de la littérature.

Dans le troisième chapitre, la technique de caractérisation RIC est étendue au cas des structures anisotropes. Cette méthode inverse s'appuie sur l'analyse du champ de déplacement de la structure et possède, grâce à son aspect local, des atouts non négligeables pour des applications industrielles. La méthodologie est tout d'abord présentée pour l'identification de sources (objectif initial de la méthode) et est ensuite adaptée à la caractérisation. Plusieurs applications numériques et expérimentales sont présentées afin de valider cette extension.

Enfin, le quatrième chapitre porte sur la caractérisation expérimentale d'un sandwich en nids d'abeille sur une large bande fréquentielle (1 à 300 kHz). Le comportement dynamique complexe de cette structure épaisse est décrit au travers des résultats prometteurs fournis par les simulations de notre modèle et les estimations de RIC. Ces résultats sont également comparés à ceux d'un modèle de référence et d'autres méthodes de caractérisation.

Mots clés : multicouches anisotropes, sandwichs épais, modèle équivalent, rigidités de flexion, amortissement structurel, caractérisation dynamique, méthodes inverses.

Abstract

This PhD thesis concerns the modelling and the dynamic characterisation of anisotropic multilayered structures. In the first chapter, a classification of some analytical models and experimental methods of characterisation is presented in the form of a bibliographical synthesis where the main published results are gathered.

The second chapter introduces an extension of an equivalent model of multilayered structures to the case of anisotropic materials. This model describes the first dispersion curves of the structure and considers the shear phenomena that can affect the bending mode in high frequencies. The main advantage of the model lies in its simplicity and rapidity thanks to a number of kinematic variables independent of the number of layers. The characteristics of the multilayer are defined by the 5 flexural rigidities of a thin equivalent plate which is compared to the multilayer. The results of the model are validated by means of an experimental study on carbon fiber composite plates.

A particular interest is dedicated to the modelling of structural damping. An energetic loss factor, based on a temporal and spatial definition of the attenuation, is compared to an equivalent one. A new definition of the spatial attenuation is suggested for high damped structures and is compared to literature.

In the third chapter, the methodology of the characterisation technique CFAT is adapted for anisotropic plates. This inverse method is based on the displacement field analysis of the structure and has, by means of its local aspect, relevant advantages for industrial applications. This adaptation is, as a first step, introduced for the identification of sources (initial objective of the method) and applied, in a second step, for the characterisation. Several numerical and experimental applications are presented to validate the results of the method.

Finally, the fourth chapter deals with the experimental characterisation of a honey comb sandwich on a high frequency range (1 to 300 kHz). The complex dynamic behaviour of this thick structure is described through the promising results given by the simulations of our model and the estimations of RIC. These results are also compared to the ones of a reference model and other characterisation methods.

Keywords : anisotropic multilayers, thick sandwiches, equivalent model, flexural rigidities, structural damping, dynamic characterisation, inverse methods.

Table des matières

Liste des sigles	xv
Introduction générale	1
Chap. 1 Synthèse bibliographique	5
1.1 Modélisation de plaques multicouches	5
1.1.1 Modèles monocouches équivalents	6
1.1.2 Modèles Layer-Wise ou <i>par morceaux</i>	11
1.1.3 Modèles Zig-Zag	12
1.1.4 Définition et modélisation de l'amortissement	15
1.2 Techniques de caractérisation expérimentale non destructives de structures planes	17
1.2.1 Mesure du champ vibratoire	18
1.2.2 Méthodes de caractérisation globales	20
1.2.3 Méthodes de caractérisation locales	23
1.3 Conclusion	32
Chap. 2 Modèle analytique équivalent de multicouches anisotropes	33
2.1 Méthodologie	34
2.1.1 Champs de déplacement et de déformation	34
2.1.2 Loi de comportement	36
2.1.3 Relations de continuité entre les couches	39
2.1.4 Équations d'équilibre	41
2.1.5 Solution particulière et équations de dispersion	43
2.1.6 Équivalence plaque mince	48
2.2 Caractérisation expérimentale sur des plaques en composite	51
2.2.1 Protocole expérimental	52
2.2.2 Plaque composite d'empilement uniforme ($0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$)	53
2.2.3 Plaque composite d'empilement croisé ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	55
2.2.4 Plaque composite d'empilement laminé ($60^\circ/-60^\circ/-60^\circ/60^\circ$)	57
2.3 Modélisation de l'amortissement	59
2.3.1 Courbes de dispersion du système non-conservatif	59
2.3.2 Comparaison de différentes définitions de l'amortissement	60

2.3.3	Amortissement d'un vitrage automobile : comparaison au modèle de Shorter	65
2.3.4	Amortissement d'un sandwich orthotrope : comparaison au modèle de Ghinet	67
2.4	Conclusion	68
Chap. 3	Méthode de caractérisation expérimentale de plaque anisotrope	71
3.1	Bibliographie autour de l'identification de source	72
3.2	Extension de RIC pour l'identification de source	72
3.2.1	Schéma aux différences finies de RIFF	72
3.2.2	Réponse en nombre d'onde de RIFF	76
3.2.3	Schéma corrigé de RIC	77
3.2.4	Validation sur champ non bruité	82
3.3	Application de RIC en présence de bruit	87
3.3.1	Technique de régularisation du bruit	87
3.3.2	Validation sur champ bruité	89
3.3.3	Étude expérimentale sur des plaques en composite	91
3.4	Adaptation de RIC pour la caractérisation	94
3.4.1	Méthodologie	94
3.4.2	Applications sur champs non bruités	95
3.4.3	Applications sur champs bruités	98
3.4.4	Étude expérimentale sur les plaques en composite	104
3.5	Conclusion	106
Chap. 4	Étude expérimentale d'un sandwich en nids d'abeille	109
4.1	Protocoles expérimentaux	110
4.1.1	Excitation avec une cellule piézoélectrique (protocole A)	110
4.1.2	Excitation au laser (protocole B)	111
4.2	Étude du mode de flexion de la structure	113
4.2.1	Analyse par méthode locale	113
4.2.2	Analyse par méthodes globales	117
4.2.3	Estimation large bande du nombre d'onde	119
4.3	Étude des autres modes de la structure	121
4.4	Comparaison des performances des méthodes globales et locales	123
4.5	Conclusion	125
	Conclusion générale et perspectives	127
Annexe A	Détails des coefficients et des matrices du modèle analytique	131
A.1	Définition des coefficients δ	131
A.2	Définition des coefficients λ	132
A.3	Énergie cinétique	134
A.4	Énergie de déformation	134
A.5	Matrice de masses généralisées	136

TABLE DES MATIÈRES

A.6	Matrice de raideurs généralisées	136
A.7	Définition des coefficients l et d	137
Annexe B	Description cubique du cisaillement	139
Annexe C	Modèle de Love Kirchhoff	143
Annexe D	Calibration du capteur de force	147
Annexe E	Modèle de Lamb isotrope	149
	Bibliographie	151

Liste des sigles

Sigle	Description
CFAT	Corrected Force Analysis Technique
CLT	Classical Lamination Theory
DMA	Dynamic Mechanical Analysis
ESL	Equivalent Single Layer
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
FAT	Force Analysis Technique
FSDT	First order Shear Deformation Theory
HOT	High Order Theory
HSDT	High order Shear Deformation Theory
IWC	Inhomogeneous Wave Correlation
LDV	Laser Doppler Vibrometer
LW	Layer Wise
MSE	Modal Strain Energy
MSKE	Modal Strain and Kinetic Energy
RIC	Résolution Inverse Corrigée
RIFF	Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée
RSB	Rapport Signal à Bruit
SFEM	Spectral Finite Element Method
TPA	Transfert Path Analysis
TSVD	Truncated Singular Value Decomposition
VFM	Virtual Field Method
ZZ	Zig-Zag

Introduction générale

Contexte

Dans une démarche d'amélioration continue, les entreprises mettent au point de nouvelles solutions technologiques pour répondre aux attentes de leurs clients ou encore aux contraintes économiques et environnementales actuelles. Ces solutions passent par le développement et l'utilisation de matériaux innovants dans les produits commercialisés.

À titre d'exemple, dans le domaine du transport, l'allègement des véhicules est au cœur des questions actuelles sur l'économie d'énergie. Pour y répondre, le choix des matériaux s'est porté vers les multicouches, notamment ceux en composites, permettant d'associer légèreté et robustesse. Leur utilisation s'est généralisée dans d'autres domaines, tels que le sport afin d'améliorer la performance des athlètes, ou encore dans le secteur de la facture instrumentale pour réduire le coût de fabrication des instruments. Les multicouches sont également utilisées dans le domaine du bâtiment où l'isolation sonore est un critère important. Les matériaux classiques (murs en béton par exemple) ont un indice d'affaiblissement sonore proportionnel à leur épaisseur. L'utilisation de mur épais est cependant impossible à mettre en œuvre du point de vue économique. Une autre forme de matériau multicouche, appelée sandwich, a alors été adoptée afin d'atteindre des performances similaires ou supérieures aux matériaux classiques pour des épaisseurs de cloisons plus faibles et un coût réduit. Les sandwichs sont également utilisés dans le domaine du transport (vitrage automobile par exemple) ou de la protection individuelle (casques, gilets pare-balle). La Figure 1 présente quelques applications faisant appel à des matériaux multicouches dans l'industrie.

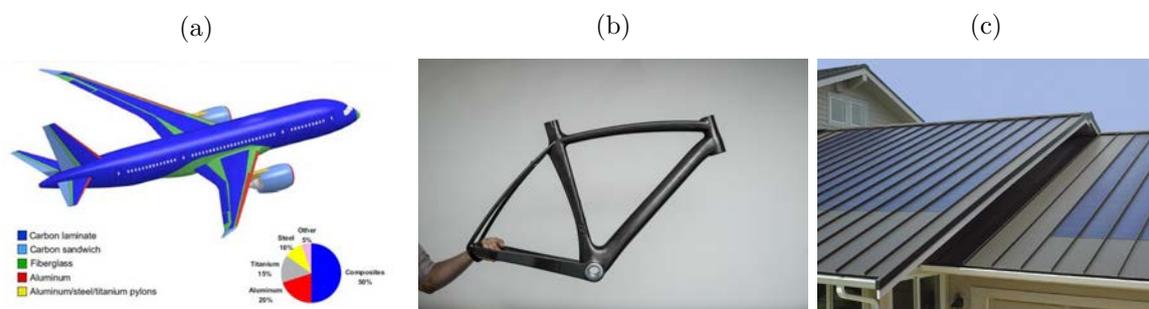


FIGURE 1 – Exemples d'applications des matériaux multicouches. Répartition des différents types de matériaux utilisés dans le Boeing[®] 787 (a). Cadre de vélo en composite de la marque Dassi[®] (b). Toiture en matériau sandwich (c).

Le terme composite englobe tous les matériaux associant une matrice (résine, élastomère, caoutchouc, ciment) à un renfort (tissus, sable, fibres de carbone, de bois, de verre). La distribution géométrique de ces matrices et renforts ainsi que leurs interactions permettent de créer différentes variétés de composites. Les renforts modifient les propriétés mécaniques de la matrice en créant une orthotropie. Dans le cas de multicouche, l'orientation des fibres de chacune des couches permet d'ajuster les propriétés mécaniques en fonction des besoins demandés. Les sandwichs, quant à eux, sont des structures multicouches dont les couches, collées entre-elles, ont des propriétés mécaniques différentes et complémentaires. Ils associent généralement des matériaux rigides (métaux, bois, composites) à des matériaux souples et amortissants (nids d'abeille, poreux, polystyrène). Des exemples de multicouches sont présentés à la Figure 2.

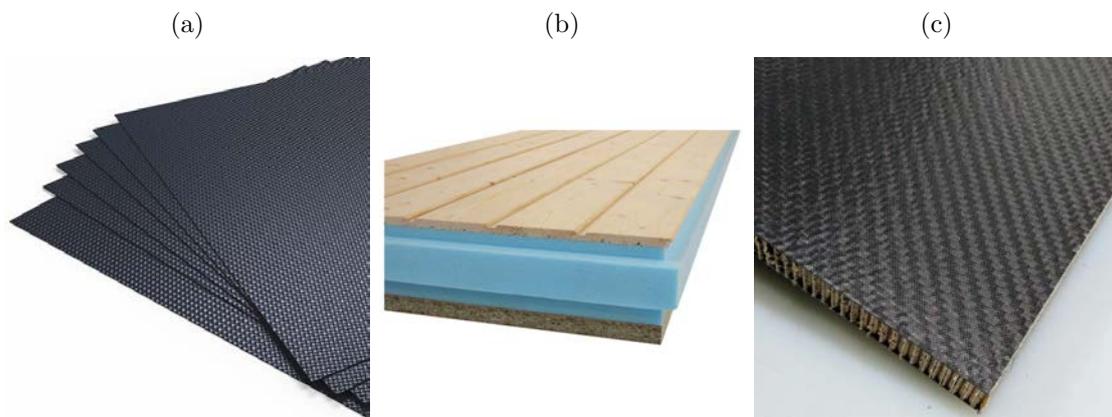


FIGURE 2 – Différentes variétés de multicouches. Plaques composites en fibres de carbone (a). Structure sandwich en bois avec une âme en polystyrène (b). Structure sandwich en nids d'abeille avec des peaux en composites (c).

Les matériaux multicouches sont finalement appréciés pour leurs propriétés mécaniques modulables que les matériaux homogènes classiques ne peuvent offrir. La connaissance de leurs comportements dynamiques est cependant nécessaire pour pouvoir pleinement exploiter leurs potentiels. La caractérisation de la structure apparaît alors comme un aspect fondamental du processus de conception. Elle se divise en deux étapes : la modélisation de la structure et l'identification des paramètres matériaux du modèle.

Objectifs

Plusieurs modèles de multicouches existent et sont généralement valides pour une gamme de fréquence donnée ainsi qu'une forme ou un type de structure en particulier. Dans une étude vibroacoustique, on s'intéresse principalement au mode de flexion de la structure puisque son rayonnement acoustique est généralement supérieur à celui des autres modes. Les modèles de plaques minces (Love-Kirchhoff [65]) le décrivent avec robustesse pour des matériaux de faibles épaisseurs. Lorsque l'épaisseur de la structure est importante (matériaux sandwichs, composites), le comportement en flexion est modifié par le cisaillement de la structure. Des modèles plus précis, tels que celui de Guyader et Lesueur [42] alliant la théorie des plaques épaisses (Hencky-

Mindlin [83]) à une description individuelle des couches, sont alors nécessaires pour décrire ce phénomène. Guyader et Cacciolati [40] ont proposé, à partir de ce modèle, une méthodologie d'équivalence, développée à l'origine pour les matériaux isotropes, pour caractériser le multicouche. Notre premier objectif consiste à étendre cette méthodologie au cas des multicouches anisotropes (bois, composites, nids d'abeille) abondamment utilisées dans l'industrie. L'amortissement est également une caractéristique importante des matériaux mais elle reste difficile à quantifier. Notre second objectif consiste donc à regrouper différentes définitions d'amortissement structurel et à établir leur relation.

Les techniques expérimentales de caractérisation sont également valides pour une gamme de fréquence et un type de structure donné. Les approches modales sont le plus souvent consacrées à une étude basses fréquences tandis que les techniques ultrasonores sont appliquées en très hautes fréquences. Dans le domaine des moyennes et hautes fréquences, domaine principalement étudié dans ce manuscrit, ce sont les méthodes d'analyses de champs vibratoire qui sont employées. Parmi elles, la méthode non destructive RIC [57] (Résolution Inverse Corrigée) s'appuie sur l'analyse du champs de déplacement de la structure qui est aisément accessible par la mesure. À l'instar du modèle présenté précédemment, la méthode RIC homogénéise une structure multicouche en un monocouche équivalent. Son aspect local permet à la fois d'appliquer la méthode sans avoir connaissance des éléments extérieurs à la zone étudiée (autres sources, conditions aux limites) mais également de cartographier les paramètres matériaux de la structure. La méthode RIC présente donc des caractéristiques intéressantes pour des applications vibroacoustiques dans le domaine industriel. Notre troisième objectif est d'étendre cette méthode, actuellement développée pour les matériaux isotropes, aux structures anisotropes.

Plan du manuscrit

Le manuscrit est divisé en quatre chapitres. Le chapitre 1 dresse un état de l'art approfondi des connaissances disponibles à ce jour sur le sujet et regroupe les principaux résultats publiés dans la littérature. Dans un premier temps, une classification des modèles réduits de multicouche est proposée et est accompagnée de quelques définitions d'amortissement structurel où la notion de dissipation est introduite. Dans un deuxième temps, nous passons en revue différentes méthodes d'analyses de champs et présentons quelques techniques de caractérisation non destructives.

Le chapitre 2 traite de l'extension de la méthodologie d'équivalence proposée par Guyader et Cacciolati [40] aux structures anisotropes. Les différents étapes de construction du modèle analytique sont tout d'abord exposées et ses résultats sont présentés au travers de quelques exemples. Puis, une étude expérimentale réalisée sur des plaques composites en fibres de carbone permet de valider cette extension. Enfin, une modélisation énergétique et équivalente de l'amortissement structurel sont comparées et une nouvelle définition de la formulation spatiale de l'amortissement énergétique est proposée dans le cas de structures très dissipatives. Les résultats de cette nouvelle formulation sont confrontés à ceux de la littérature.

Le chapitre 3 expose l'extension de la méthode RIC aux structures anisotropes. Cette exten-

sion est tout d'abord présentée pour l'identification de source, objectif initial de la méthode [58], et est validée numériquement et expérimentalement sur des structures anisotropes. Puis, la méthodologie est adaptée à la caractérisation à l'aide d'une approche itérative et par minimisation. La notion de régularisation du bruit de mesure est également traitée. Enfin, l'extension de la méthode RIC est validée pour la caractérisation à travers quelques exemples numériques ainsi qu'une étude expérimentale sur les plaques composites citées précédemment.

Le dernier chapitre a pour but de caractériser, sur une large bande fréquentielle, un sandwich en nids d'abeille afin d'évaluer les performances de notre modèle analytique et de la méthode RIC pour ce type de structures complexes et épaisses. Les différentes mesures effectuées sur ce sandwich sont dans un premier temps présentées à travers deux protocoles expérimentaux. Dans un deuxième temps, le mode de flexion de la structure est analysé à partir des résultats de RIC et d'autres techniques de caractérisation telles que la corrélation de Hankel, dont la formulation est adaptée au cas orthotrope elliptique. Les résultats de ces méthodes sont également comparés à ceux de notre modèle. Dans un troisième temps, un modèle de référence (Lamb [55]) nous permet à la fois d'étudier les autres modes de la structure et de déterminer les limites de notre modèle.

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

Sommaire

1.1 Modélisation de plaques multicouches	5
1.1.1 Modèles monocouches équivalents	6
1.1.2 Modèles Layer-Wise ou <i>par morceaux</i>	11
1.1.3 Modèles Zig-Zag	12
1.1.4 Définition et modélisation de l'amortissement	15
1.2 Techniques de caractérisation expérimentale non destructives de structures planes	17
1.2.1 Mesure du champ vibratoire	18
1.2.2 Méthodes de caractérisation globales	20
1.2.3 Méthodes de caractérisation locales	23
1.3 Conclusion	32

Ce chapitre dresse un état de l'art du sujet abordé dans ce manuscrit. Une classification des modèles analytiques de structures multicouches est tout d'abord proposée. La notion de dissipation est également introduite à travers plusieurs définitions de l'amortissement structural. Puis, différentes méthodes d'analyses de champs sont présentées. Enfin, quelques techniques de caractérisation non destructives sont décrites.

1.1 Modélisation de plaques multicouches

La caractérisation d'une structure passe dans un premier temps par la modélisation de celle-ci. Deux choix sont alors possibles. Le premier est d'utiliser un modèle exact ou complet [89, 87] permettant de décrire le comportement tridimensionnel de la structure à l'aide d'un très grand nombre de degrés de liberté et de paramètres. Ces modèles, de dimensions importantes, sont souvent développés pour un type de structure, cas de chargement ou conditions aux limites précis [119]. Le second est d'utiliser un modèle réduit dont les hypothèses émises sur le comportement de la structure permettent de réduire le nombre de degrés de liberté et de paramètres à

identifier. L'étude se concentre alors sur les mécanismes dominants où le domaine de validité de chaque solution doit être établi par rapport aux modèles exacts.

Dans la suite ce manuscrit, nous nous intéresserons uniquement aux modèles réduits de plaques multicouches continus, c'est-à-dire constitué de couches viscoélastiques. Les formes discontinues de certains matériaux, tels que, par exemple, les nids d'abeille ou les matériaux poreux (couches poroélastiques) ne seront pas considérés dans notre modélisation.

Les modèles réduits se différencient essentiellement par le choix émis sur la cinématique pour décrire le comportement de la structure. Plusieurs postulats de champs cinématiques sont possibles tels que la formulation par champ de déplacement, de contrainte ou mixte, c'est-à-dire les deux à la fois. Cette dernière formulation est intéressante dans le cas de multicouche car elle permet vérifier les conditions de continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces entre les couches. Carrera [18] fait référence à ces conditions en leur donnant le nom de C_z^0 requirements. Ces conditions impliquent également que les couches soient bien collées entre-elles. Cette hypothèse sera gardée tout au long du manuscrit.

Dans le cas de structures planes, l'épaisseur, définie ici suivant l'axe z , est d'un ordre de grandeur relativement plus faible que les longueurs caractéristiques de la structure. En conséquence, les modèles réduits utilisent l'hypothèse de la séparation des composantes spatiales :

$$H(x, y, z) = G(x, y)F(z), \quad (1.1)$$

où F est une fonction décrivant la distribution de la variable cinématique G dans l'épaisseur. Cette fonction est connue et imposée par le modèle. Le niveau de précision et de complexité du modèle est généralement défini par l'ordre d'expansion de cette fonction.

L'imposante quantité de modèles de multicouche existant dans la littérature ont conduit certains auteurs comme Reddy *et al.* [105] ou Carrera [19, 20] à en élaborer des classifications. Trois principales catégories de modèles multicouches ressortent de ces classifications. Les sections suivantes détaillent chacune d'entre-elles avec divers exemples. Une quatrième section porte tout particulièrement sur la définition de l'amortissement dans les modèles réduits.

1.1.1 Modèles monocouches équivalents

L'appellation monocouche équivalent ou ESL pour *Equivalent Single Layer* regroupe les modèles décrivant le multicouche comme une plaque homogène dans l'épaisseur. La dynamique du multicouche est alors gouvernée par le champ cinématique de la plaque équivalente. Le nombre de variable cinématique ne dépend donc pas du nombre de couche. Chaque composante du champ cinématique peut s'écrire sous la forme d'une somme de variables cinématiques :

$$H(x, y, z) = G_1(x, y)F_1(z) + \dots + G_N(x, y)F_N(z). \quad (1.2)$$

Cette formulation permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté et la complexité du modèle. Ainsi, les modèles équivalents ont facilement été adoptés par la communauté pour leur facilité d'implémentation et leur rapidité de calcul pour n'importe quel nombre

de couche. Cependant, la description du multicouche étant globale, le comportement individuel de chaque couche ne peut pas être modélisé et les caractéristiques du multicouche sont définies par des paramètres matériaux équivalents. L'ordre d'expansion du modèle est aussi un critère important. Un ordre élevé apporte une description plus fine du comportement dans l'épaisseur (voir Figure 1.1) donnant accès à l'identification de modes d'ordres supérieurs.

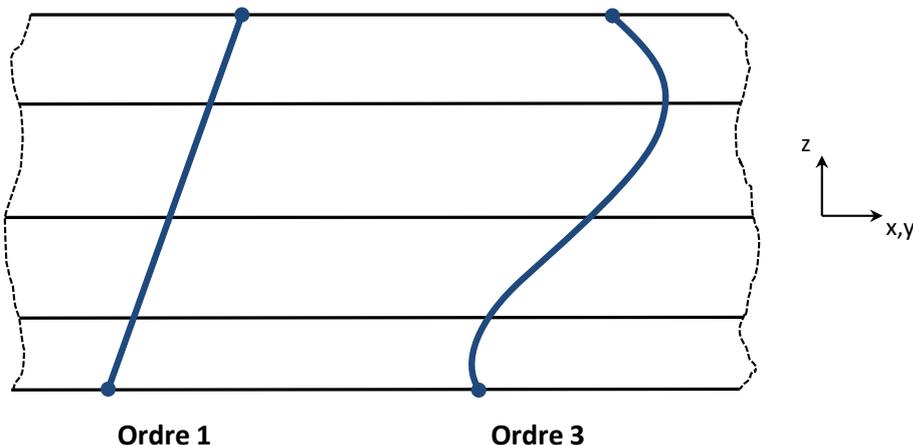


FIGURE 1.1 – Exemples de champs de déplacement d'ordre 1 et 3 postulés par les modèles monocouches équivalents pour un multicouche composé de 4 couches.

Modèle de plaque mince

Les modèles monocouches équivalents d'ordre 1 font référence aux théories classiques de plaque telles que le modèle Love-Kirchhoff [65] ou CLT pour *Classical Lamination Theory*. Ce modèle décrit le mode de flexion de la structure, tout en négligeant le cisaillement hors-plan. Cette formulation permet de limiter le nombre de degrés de liberté à trois variables cinématiques : u_x^0 et u_y^0 , les déplacements membranaires de la fibre neutre de plaque en x et en y ainsi que u_z^0 , le déplacement transverse supposé constant dans l'épaisseur. De plus, les sections planes de la plaque sont supposées rester droites et perpendiculaires à la fibre neutre lors du mouvement, négligeant ainsi leurs effets d'inertie de rotation. Ces hypothèses nous conduisent à la définition du champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) - zu_{z,i}^0(x, y), & i = x, y, \\ u_z(x, y, z) = u_z^0(x, y). \end{cases} \quad (1.3)$$

La vitesse de phase $c_\phi = \frac{\omega}{k}$ du mode de flexion décrit par la théorie CLT tend vers l'infini avec la fréquence (voir Figure 1.2b), ce qui, du point de vue physique, n'a pas de sens. Ce phénomène montre la limite haute fréquence du modèle, imposée par les hypothèses précédentes. De plus, le domaine fréquentiel de validité du modèle est d'autant plus faible que la structure est épaisse. Le modèle de Love-Kirchhoff tire ainsi son attribut de *modèle de plaque mince* du fait qu'il est

adapté à la modélisation de plaques de faibles épaisseurs (telles que les composites en fibre de carbone par exemple) dans un domaine où le produit fréquence-épaisseur reste relativement bas. Des *modèles de plaque épaisse* ont alors été suggérés pour modéliser des structures telles que des sandwichs dans des domaines de fréquences élevées.

Modèle de plaque épaisse

Par la suite, Hencky [46] et Mindlin [83] ont développé un modèle de plaque épaisse d'ordre 1 connu sous le nom de FSDT pour *First order Shear Deformation Theory*. Contrairement au modèle de Kirchhoff, la rotation de la section droite est prise en compte et engendre un cisaillement de la structure dans l'épaisseur. Deux nouvelles variables cinématiques ϕ_{iz} sont utilisées pour décrire ce cisaillement dans l'écriture du champ de déplacement de la structure :

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) - zu_{z,i}^0(x, y) + F(z)\phi_{iz}(x, y), & i = x, y, \\ u_z(x, y, z) = u_z^0(x, y), \end{cases} \quad (1.4)$$

où $F(z)$ correspond à la distribution du cisaillement suivant l'épaisseur, qui, dans le cas du modèle de Mindlin, est linéaire (voir Tableau 1.1). Tel que Ege [29] le mentionne dans les annexes de sa thèse, l'onde de flexion ($k \propto \sqrt{\omega}$) se transforme en onde de cisaillement ($k \propto \omega$) dans les hautes fréquences (voir Figure 1.2a). La vitesse de phase du mode de flexion tend vers la célérité des ondes de cisaillement pures avec la fréquence et n'est donc plus infinie (voir Figure 1.2b). La limite en fréquence du modèle de plaque épaisse est ainsi supérieure à celle du modèle de plaque mince.

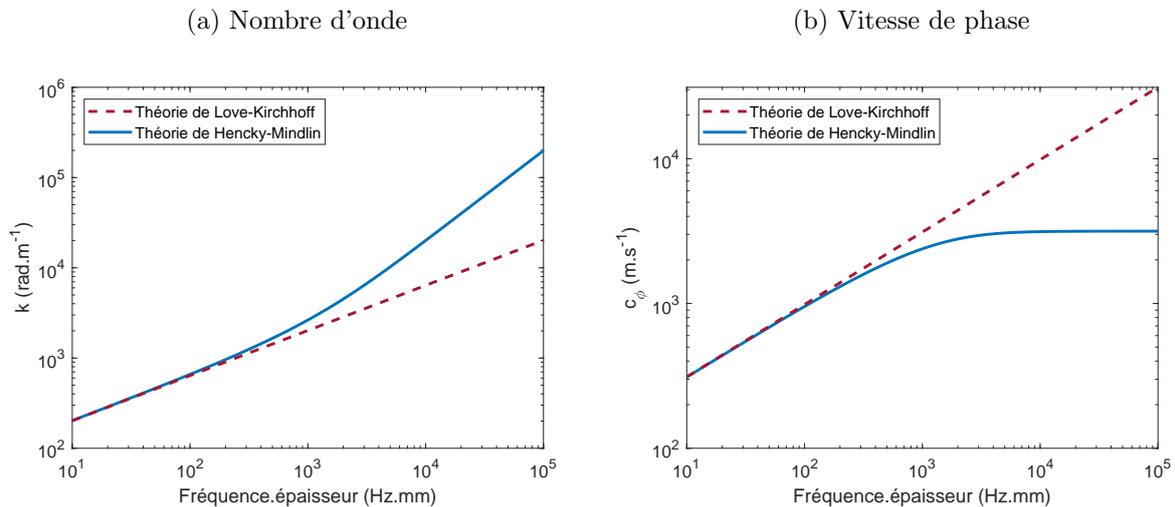


FIGURE 1.2 – Nombre d'onde (a) et vitesse de phase (b) propre au mode de flexion d'une plaque d'aluminium ($E = 70$ GPa, $\rho = 2700$ kg.m⁻³, $\nu = 0.3$) en fonction du produit fréquence-épaisseur. Modélisation en plaque mince de Love-Kirchhoff (---) et en plaque épaisse de Hencky-Mindlin (—).

Malgré l'apport d'Hencky et Mindlin d'ajouter le cisaillement dans leur cinématique, celle-ci peut parfois être insuffisante. En effet, les champs de déformation et de contrainte associés

au cisaillement hors-plan sont constants dans l'épaisseur. Cette approximation ne permet pas d'appliquer la condition de contraintes nulles aux surfaces inférieures et supérieures de la plaque ($\sigma_{iz}(z = \pm h/2) = 0$, h étant l'épaisseur totale de la structure) qui est une condition essentielle dans la modélisation de la réponse dynamique de plaque épaisse [130]. En conséquence, les courbes de dispersion obtenues à partir de la théorie FSDT sont différentes de celle des modèles tridimensionnelles tel que Lamb [55] ou d'ordres supérieurs comme le modèle de Reddy *et al.* [104], décrit dans la section suivante (voir Figure 1.3). Ce sujet est également traité par Margerit [76] dans sa thèse à l'aide d'une comparaison entre la théorie FSDT et le modèle éléments finis de Shorter [115].

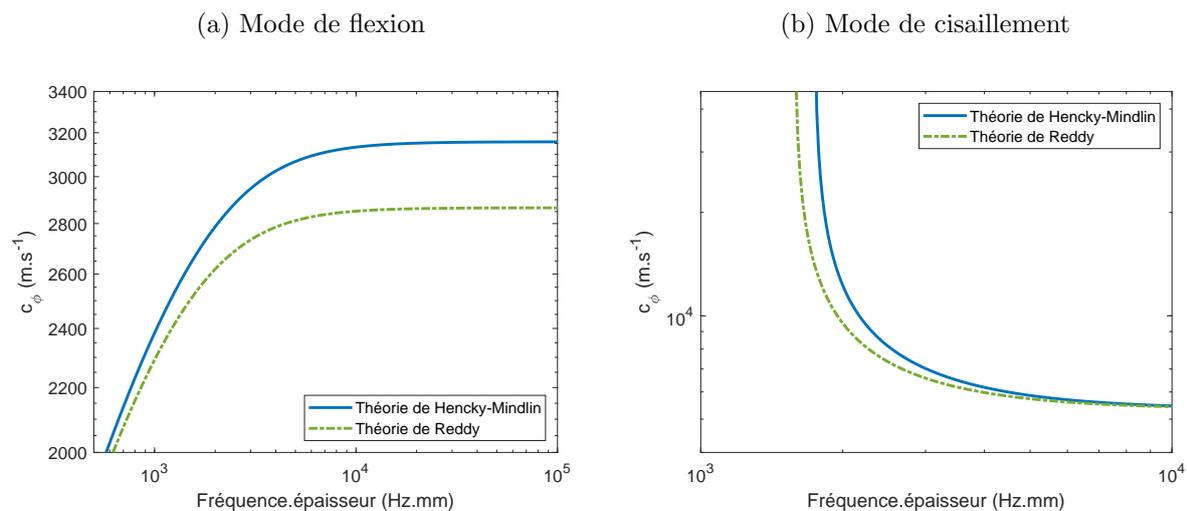


FIGURE 1.3 – Vitesse de phase des modes de flexion (a) et de cisaillement (b) d'une plaque d'aluminium ($E = 70$ GPa, $\rho = 2700$ kg.m⁻³, $\nu = 0.3$) en fonction du produit fréquence-épaisseur. Modélisation en plaque épaisse de Hencky-Mindlin (—) et de Reddy (-.-).

Mindlin [83] propose alors de corriger l'approximation faite sur le cisaillement en ajoutant un facteur multiplicatif ϵ au module de cisaillement reliant contrainte et déformation. Comme le souligne Margerit [76], ce coefficient correcteur peut être calculé de différentes façons. La première et la plus connue consiste à égaliser la fréquence de coupure du premier mode de cisaillement donnée par le modèle FSDT avec les modèles tridimensionnels (voir Figure 1.3b), conduisant à $\epsilon = \pi^2/12$ dans le cas isotrope. Le facteur π^2 provient des fonctions trigonométriques utilisées dans les modèles tridimensionnels pour décrire le comportement du cisaillement dans l'épaisseur tandis que le facteur 12 provient de la description linéaire du cisaillement dans le modèle d'Hencky-Mindlin. On pourra également noter que $\epsilon = 5/6$ dans le cas statique [91]. Une seconde manière de calculer ce coefficient correcteur peut aussi être envisagée en égalisant la valeur asymptotique de la vitesse de phase du mode de flexion (voir Figure 1.3a). Cette possibilité est bien plus complexe car elle dépend du coefficient de Poisson et reste assez proche des résultats de $\epsilon = \pi^2/12$. Dans le cas de matériaux anisotropes, la correction s'applique indépendamment sur chacune des raideurs de la matrice de Hooke reliant les contraintes de cisaillement hors-plan au champ de déformation (trois dans le cas orthotrope) [135].

Il est important de noter qu’une première solution de modèle de plaque épaisse avait déjà été proposée par Reissner [106, 107] quelques années avant Mindlin. Les deux théories ont souvent été perçues comme identiques par la communauté alors que leurs cinématiques sont différentes, comme le soulignent Wang *et al.* [132]. Le modèle de Reissner, développé dans le cas statique, postule une cinématique plus riche que celle de Mindlin avec une formulation en champ de contrainte. La distribution de ce champ suivant l’épaisseur est supposée linéaire pour la flexion et parabolique pour le cisaillement tout en prenant en compte la contrainte transverse. La condition de contraintes nulles aux surfaces inférieures et supérieures de la plaque est alors respectée et aucune correction du cisaillement n’est requise.

Modèles d’ordres supérieurs

La théorie de Mindlin a inspiré plusieurs auteurs sur le choix de $F(z)$ pour décrire au mieux le comportement du cisaillement dans l’épaisseur. Leurs travaux les ont conduits à développer des théories avec des ordres d’expansion élevés que l’on nomme HSDT pour *High order Shear Deformation Theory*. Quelques exemples de ces théories sont présentés dans le paragraphe suivant et leurs fonctions $F(z)$ associées sont résumées dans le Tableau 1.1.

Théorie	$F(z)$
Hencky [46] et Mindlin [83]	z
Levinson [62] et Reddy [102]	$z - \frac{4z^3}{3h^2}$
Touratier [126]	$\frac{h}{\pi} \sin(\frac{\pi z}{h})$
Soldatos et Timarci [117]	$h \sinh(\frac{z}{h}) - z \cosh(\frac{1}{2})$
Karama <i>et al.</i> [51]	$ze^{-2(z/h)^2}$
Mantari <i>et al.</i> [71]	$\sin(\frac{\pi z}{h})e^{\frac{1}{2} \cos(\frac{\pi z}{h})} + \frac{\pi}{2h}z$

Tableau 1.1 – Exemple de fonctions $F(z)$ utilisées pour décrire la distribution du cisaillement dans l’épaisseur dans les modèles de plaques épaisses. h représente l’épaisseur totale de la structure.

Levinson [62] et Reddy [102] ont aussi constaté l’importance de la condition $\sigma_{iz}(z = \pm h/2) = 0$ dans la dynamique des plaques épaisses. Ils ont alors décidé d’étendre la théorie de Mindlin à l’ordre 3 (ordre minimal pour respecter cette condition) tout en conservant le même nombre de variables cinématiques. La composante d’ordre 3 sur le champ de déplacement permet d’accéder à une distribution parabolique des champs de déformation et de contrainte associés au cisaillement hors-plan. D’autres auteurs ont utilisé des fonctions trigonométriques ou exponentielles pour décrire la distribution du cisaillement dans l’épaisseur. Tout comme les théories utilisant des polynômes d’ordre 3, ces fonctions permettent de satisfaire la condition $\sigma_{iz}(z = \pm h/2) = 0$. Les modèles trigonométriques ont été introduit par Touratier [126] avec une fonction sinusoidale. Soldatos et Timarci [117] ont ensuite proposé une nouvelle théorie définie à partir de fonctions hyperboliques. Puis, Karama *et al.* [51] ont montré l’avantage des fonctions exponentielles par

rapport aux fonctions sinusoidales. Le développement limité des fonctions exponentielles est semblable à un polynôme contenant des ordres d'expansion paires et impaires tandis que les fonctions sinusoidales ne contiennent que les impaires. Enfin, nous pouvons citer Mantari *et al.* [71] qui ont associé des fonctions sinusoidales et exponentielles.

Les modèles cités jusqu'à présent ont été développés avec une description d'ordre élevé des déplacements membranaires afin de décrire au mieux le comportement du mode de cisaillement hors-plan. Malgré cela, le déplacement transverse est à chaque fois considéré comme constant suivant l'épaisseur, négligeant ainsi toute déformation selon cet axe. Il existe cependant plusieurs théories appelées HOT pour *High Order Theory* où les trois composantes du champ cinématique sont d'ordre élevé. Une telle description de la composante transverse du déplacement permet d'accéder à l'identification des modes de "respiration" (modes symétriques de Lamb). Parmi ces modèles, on pourra notamment citer celui de Whitney et Sun [136] d'ordre 1 sur le déplacement transverse ainsi que celui de Zenkour [138], développé pour les poutres, prenant en compte un cisaillement d'ordre 3 et une déformation transverse d'ordre 2.

1.1.2 Modèles Layer-Wise ou *par morceaux*

Les modèles Layer-Wise (LW) sont qualifiés de modèles *par morceaux* car, contrairement aux modèles ESL, ils décrivent les couches du multicouche indépendamment les unes des autres. Chaque couche l est interprétée comme une plaque avec sa propre cinématique et son propre nombre de variables cinématiques :

$$H^l(x, y, z) = G_1^l(x, y)F_1^l(z) + \dots + G_N^l(x, y)F_N^l(z), \quad l = 1, 2, \dots, N_L, \quad (1.5)$$

N_L étant le nombre de couche.

Des équations de continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces entre les couches viennent ensuite s'ajouter au modèle. Le nombre total de variables cinématiques dépend ainsi du nombre de couches. La dimension du modèle peut alors vite devenir importante. Les modèles LW se classent dans la catégorie opposée aux modèles ESL avec une précision plus accrue mais un temps de calcul plus long. La complexité et la précision du modèle dépendent cette fois-ci de l'ordre d'expansion de chacune des couches (voir Figure 1.4).

Nous pouvons par exemple citer le modèle de Ghinet et Atalla [35] postulant une cinématique de Mindlin par couche. Le nombre de variables cinématiques propres à chaque couche est alors de cinq, tandis que les équations de continuité sont au nombre de trois par interface. Son modèle possède donc un total de $8N_L - 3$ variables indépendantes. Ghinet et Atalla introduisent également dans leur modèle la possibilité d'étudier le mode de dilatation de sandwich composé d'une âme très amortie et de peaux très raides. Ce mode, généralement gouverné par l'âme du sandwich, ne peut pas être représenté par une cinématique de Mindlin. En conséquence, Ghinet et Atalla utilisent un champ de déplacement complémentaire pour l'âme uniquement où le déplacement transverse est linéaire et la distribution du cisaillement est définie par des fonctions trigonométriques.

Une cinématique similaire à celle de Ghinet a aussi été observée dans le modèle de Srin-

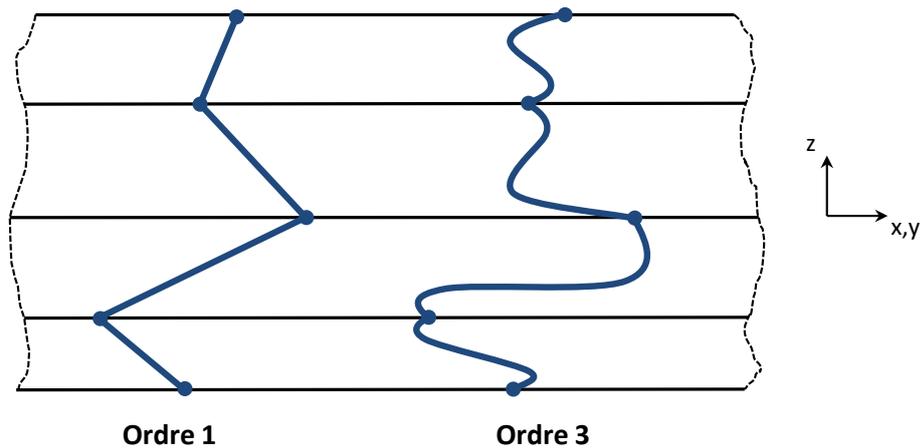


FIGURE 1.4 – Exemples de champs de déplacement d’ordre 1 et 3 postulés par les modèles Layer-Wise pour un multicouche composé de 4 couches.

vas [118]. Reddy [103] a étendu cette formulation à un ordre plus élevé en ajoutant une description linéaire du déplacement transverse pour chaque couche. Par la suite, Nosier *et al.* [88] ont utilisé le modèle de Reddy pour déterminer les premières fréquences propres de plaques composites et les comparer aux résultats d’un modèle exact ainsi que d’autres théories classiques de monocouche équivalent. Nous pouvons également noter qu’il existe des modèles LW d’ordre élevé, tel que celui de Cho *et al.* [23] d’ordre 3 sur les déplacements membranaires et 2 sur le déplacement transverse, ainsi que des modèles développés avec une formulation mixte du champ cinématique [90].

1.1.3 Modèles Zig-Zag

Nous avons vu jusqu’ici que les modèles ESL et LW ont des caractéristiques opposées. Le premier est rapide et simple d’utilisation mais le comportement individuel de chaque couche n’est pas pris en compte. Le second offre une meilleure précision mais possède des temps de calcul importants. La théorie Zig-Zag (ZZ) apporte un compromis entre ces deux modèles. À l’instar de la formulation LW, l’idée principale des modèles Zig-Zag consiste à postuler un champ cinématique par couche. Les conditions de continuité sont cependant formulées pour relier les variables cinématiques de chaque couche entre elles. De ce fait, les modèles ZZ s’inscrivent dans la catégorie des modèles ESL puisque leurs nombres de variables cinématiques ne dépendent également pas du nombre de couches. Une composante du champ cinématique des modèles ZZ peut alors s’écrire sous la forme :

$$H(x, y, z) = G_1(x, y)F_1^l(z) + \dots + G_N(x, y)F_N^l(z), \quad (1.6)$$

où F_i^l est une fonction continue par morceaux décrivant la distribution dans l’épaisseur de G_i pour chaque couche indépendamment.

À titre d'exemple, prenons un champ de déplacement de la forme :

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = -z u_{z,i}^0(x, y) + \epsilon_i^l(z) \phi_{iz}(x, y), & i = x, y, \\ u_z(x, y, z) = u_z^0(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

où ϵ_i^l est la fonction Zig-Zag continue par morceaux dont l'expression décrit la distribution du cisaillement pour chaque couche. Une illustration de ce champ est présentée à la Figure 1.5 dans le cas où ϵ_i^l est un polynôme d'ordre 1 et 3. Nous remarquons que pour ce cas précis la fibre neutre de chaque couche suit le comportement global de flexion (tirets sur la Figure 1.5) tandis que le cisaillement reste individuel pour chaque couche.



FIGURE 1.5 – Exemples de champs de déplacement postulés par les modèles Zig-Zag avec une description linéaire (ordre 1) et cubique (ordre 3) du cisaillement dans le cas d'un multicouche composé de 4 couches.

Les modèles Zig-Zag font leur apparition avec Lekhnitskii [61] dont la formulation par champ de contrainte a été développée pour les poutres puis a été étendue aux structures orthotropes et anisotropes par Ren [109]. Les contraintes de cisaillement sont décrites par quatre variables cinématiques indépendantes dont les ordres d'expansion associés sont paraboliques. Une formulation similaire a été proposée par Ambartsumian [4] avec deux variables cinématiques pour le cisaillement préservant ainsi le même nombre de variables que la théorie FSDT. Son modèle a été étendu aux structures anisotropes par Whitney [134]. Par la suite, Murakami [84] a appliqué la formulation mixte de Reissner [108] dans le cas de plaque multicouche. Le champ de déplacement proposé dans son modèle consiste en un raffinement de la théorie FSDT par l'ajout d'une fonction Zig-Zag tandis que le champ de contrainte reste indépendant et parabolique dans chaque couche. Une extension d'ordre plus élevé a ensuite été proposée par Toledano et Murakami [125] et plus récemment par Demasi [26]. On pourra également citer les travaux de Arya *et al.* [5] où le cisaillement est décrit par une fonction Zig-Zag linéaire couplée à une fonction sinusoïdale globale.

Le modèle de Guyader et Lesueur [42], étudié dans ce manuscrit, s’inscrit dans la catégorie des modèles Zig-Zag. Sa théorie, basée sur les hypothèses de Sun et Whitney [122], considère une cinématique semblable à celle de Mindlin pour chaque couche. Les relations de continuité aux interfaces permettent de réduire le nombre de variables cinématiques total aux cinq degrés de liberté de la première couche. Une méthode énergétique basée sur la fonctionnelle d’Hamilton est ensuite utilisée pour écrire les équations du mouvement en fonction de ces cinq variables cinématiques. Une solution particulière de type onde plane est ensuite suggérée pour identifier les courbes de dispersion de la structure.

Par la suite, Guyader et Cacciolati [40] comparent le multicouche à un monocouche équivalent régi par la théorie de Love-Kirchhoff afin de déterminer des paramètres matériaux équivalents (rigidités de flexion). À chaque fréquence, le mode de flexion de la plaque équivalente est identifié à celui calculé par le modèle. Cependant, contrairement au modèle de Guyader, la théorie de Love-Kirchhoff ne prend pas en compte le cisaillement. En conséquence, les paramètres équivalents identifiés par cette comparaison varient en fonction de la fréquence selon l’influence du cisaillement dans la structure. Un exemple de cette variation est illustré à la Figure 1.6 pour un sandwich isotrope. En basse fréquence, là où le cisaillement est peu influent, la rigidité équivalente tend vers la valeur donnée par la théorie CLT, tandis qu’en haute fréquence, elle tend vers la somme des rigidités des peaux, comme le précise Ege *et al.* [31] dans leur article. Cette comparaison permet ainsi d’obtenir, à une fréquence donnée, une plaque mince équivalente dont les paramètres prennent en compte le cisaillement du multicouche.

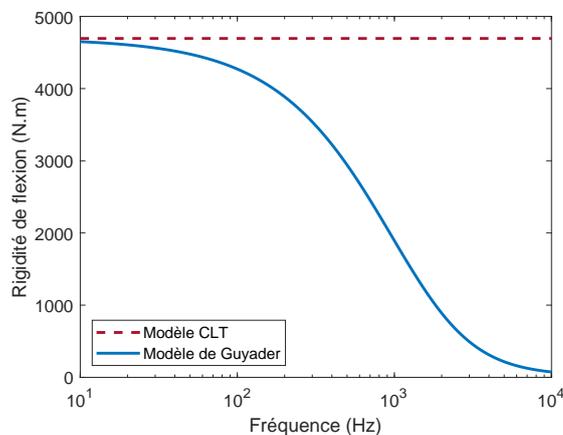


FIGURE 1.6 – Rigidité de flexion d’un sandwich isotrope, composé de peaux en aluminium ($h = 1$ mm, $E = 70$ GPa, $\rho = 2700$ kg.m⁻³, $\nu = 0.3$) et d’une âme visqueuse ($h = 10$ mm, $E = 0.3$ GPa, $\rho = 400$ kg.m⁻³, $\nu = 0.3$) calculé à partir de la théorie CLT (---) et de l’équivalence plaque mince du modèle de Guyader et Cacciolati (—).

Le modèle de Guyader et Lesueur a été étendue au cas anisotrope par Woodcock [137]. Par la suite, Loredo *et al.* [64] a donné une formulation générale du champ de déplacement dont l’effet Zig-Zag a été définie par quatre fonctions nommées *warping functions*. Castel [21] a utilisé différentes définitions de ces fonctions pour remonter à des modèles connus. Quelques années plus tard, Loredo [63] a étendu son modèle en prenant en compte la déformation transverse de

la structure grâce à une autre de ces fonctions. La notion de *warping functions* a déjà été utilisée dans les travaux de Pai [91], où leurs expressions ont été déterminées à partir des conditions de continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces.

1.1.4 Définition et modélisation de l'amortissement

La viscoélasticité d'un matériau est définie à partir du principe de superposition de Boltzmann faisant l'état de la relation linéaire entre contrainte et déformation au cours du temps. L'amortissement se traduit alors par une loi de comportement complexe et est généralement symbolisé par un module E^* complexe où la notion de facteur de perte η peut être introduit. Ce module s'écrit :

$$E^* = E + jE' = E(1 + j\eta), \quad (1.8)$$

en utilisant la convention $e^{j\omega t}$. Dans un multicouche, cette loi est appliquée pour chacune des couches. De plus, pour des couches anisotropes, chaque coefficient de la loi de comportement possède son propre facteur de perte. L'équation d'équilibre du multicouche fait intervenir une matrice de dissipation D en plus des matrices de raideur K et de masse M :

$$(K + j\omega D - \omega^2 M)X = F. \quad (1.9)$$

Cette matrice peut être modélisée de différentes façons. Quelques exemples de modèles d'amortissement, également résumés dans la thèse de Margerit [76], et leurs relations sont présentés dans les paragraphes suivants.

Amortissement modal

Avec une approche modale, on suppose qu'il existe une base modale Φ_r permettant de diagonaliser le système :

$$\Phi_r^H (K + j\omega D - \omega^2 M) \Phi_r = k_r + j\omega d_r - \omega^2 m_r = 0. \quad (1.10)$$

Les pulsations modales ω_r^* sont complexes et l'amortissement modal se définit alors par :

$$\xi_r = \frac{d_r}{2\sqrt{m_r k_r}}. \quad (1.11)$$

Amortissement énergétique

Une approche énergétique, appelée MSE pour *Modal Strain Energy* [50, 69], utilise les hypothèses de Basile dans sa modélisation de l'amortissement. Le mécanisme de perte est modélisé par une légère perturbation du système conservatif. La méthodologie du modèle MSE repose sur un modèle hystérétique dont l'équation de mouvement libre est :

$$M\ddot{X} + (K_R + jK_I)X = 0. \quad (1.12)$$

La dissipation est alors portée par la matrice K_I . Une recherche aux valeurs propres de l'équation précédente conduit à :

$$(K_R + jK_I)\Phi_r^* = \lambda_r^* M \Phi_r^*, \quad (1.13)$$

où λ_r^* et Φ_r^* sont les r ème valeurs propres et vecteurs propres complexes. Ces valeurs propres peuvent s'exprimer en fonction du facteur de perte η_r :

$$\lambda_r^* = \lambda_r(1 + j\eta_r). \quad (1.14)$$

On suppose alors que la perturbation est très petite et que les vecteurs propres Φ_r^* s'apparentent aux vecteurs propres du système conservatif Φ_r calculé à partir de l'équation 1.13 avec $K_I = 0$. Dans ce cas, le facteur de perte peut s'écrire :

$$\eta_r = \frac{\Phi_r^H K_I \Phi_r}{\Phi_r^H K_R \Phi_r}. \quad (1.15)$$

La MSE est considérée comme l'extension de l'amortissement structural [127] car, contrairement à ce dernier, le facteur de perte dépend de la fréquence et prend en compte l'hétérogénéité de la structure. Shorter [115] définit ce même facteur de perte comme étant le rapport entre l'énergie de dissipation et l'énergie potentielle élastique. La formulation de Shorter implique cependant que la viscoélasticité de chaque couche n soit modélisée par un facteur de perte global η_n et que la matrice de dissipation puisse être écrite $K_I = \sum_n \eta_n K_{R,n}$. Le modèle de Shorter ne permet donc pas de modéliser l'hétérogénéité de l'amortissement de chaque couche dans le cas anisotrope. Une formulation identique a aussi été utilisée par Ghinet et Atalla [35] dans leur modèle Layer-Wise. De plus, Lyon et DeJong [68] relient l'amortissement énergétique à l'amortissement modal par la relation :

$$\eta_r = 2\xi_r, \quad (1.16)$$

Cette relation est cependant valide uniquement sur les modes propres de la structure et pour de faibles dissipations.

Modèle de plaque mince et amortissement spatial

Le modèle de Love-Kirchhoff définit l'amortissement du monocouche équivalent à partir du mode de flexion. Le facteur de perte est introduit sur les rigidités de flexion et est directement fonction du nombre d'onde de flexion k_f :

$$\eta_{eq} = -\frac{\text{Im}(k_f^4)}{\text{Re}(k_f^4)}. \quad (1.17)$$

Tel que le mentionne Lyon et DeJong [68], dans le cas de faibles dissipations, l'amortissement

énergétique est relié à l'amortissement spatial $\gamma = \frac{\text{Im}(k)}{\text{Re}(k)}$ à partir de l'équation suivante :

$$\eta = -2\gamma \frac{c_g}{c_\phi} = -2r\gamma, \quad (1.18)$$

où $c_\phi = \frac{\omega}{k}$ correspond à la vitesse de phase et $c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ correspond à la vitesse de groupe. L'amortissement spatial représente l'atténuation spatiale de l'onde se propageant dans la structure. Pour une plaque de Love-Kirchhoff, le nombre d'onde de flexion étant proportionnel à la racine carré de la fréquence, le ratio entre c_g et c_ϕ est égal à 2 quelle que soit la fréquence. On obtient ainsi :

$$\eta_{eq} = -4\gamma. \quad (1.19)$$

1.2 Techniques de caractérisation expérimentale non destructives de structures planes

Après l'élaboration d'un modèle de structure, la caractérisation passe, dans un second temps, par l'identification expérimentale des paramètres de ce modèle. Les méthodes usuelles utilisées pour identifier ces paramètres se différencient par le domaine fréquentiel dans lequel elles peuvent être appliquées. Quelques-unes d'entre elles sont présentées à la Figure 1.7 et détaillées dans les paragraphes suivants.

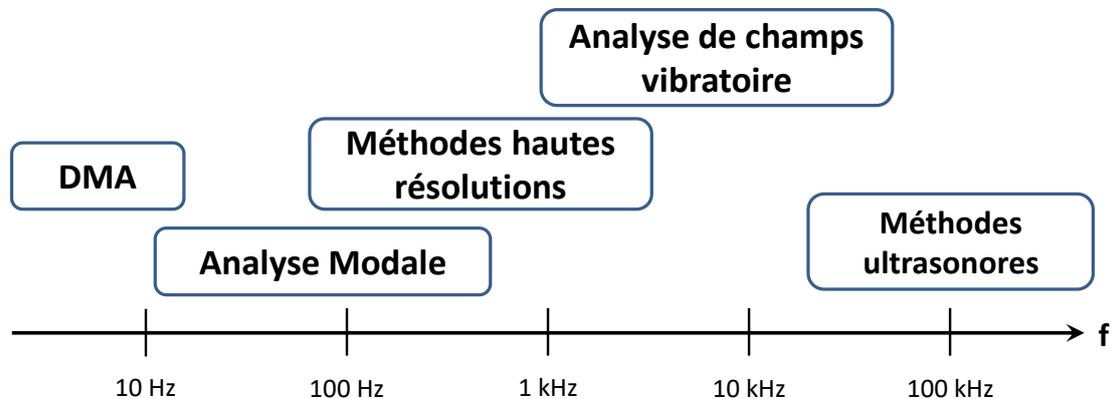


FIGURE 1.7 – Domaine de fréquence de quelques méthodes expérimentales non destructives de caractérisation.

En très basses fréquences, les méthodes quasi-statiques telles que la DMA pour *Dynamic Mechanical Analysis* [81] sont appliquées. Cette méthode mesure les déformations de la structure soumise à différentes contraintes. Les paramètres matériaux sont identifiés à partir de la loi de comportement linéaire (de Hooke) reliant les contraintes et les déformations. La DMA s'applique facilement dans le cas de matériaux isotropes mais présente des limitations dans le cas de structures complexes comme les composites.

En basses fréquences, l'analyse modale étudie les résonances de la structure où le rapport signal sur bruit est le plus fort. Les paramètres viscoélastiques sont identifiés par comparaison

des fréquences de résonance, des déformés modales (nombre de MAC), et du facteur perte (bande passante à -3 dB) avec un modèle théorique. Ces méthodes ne fournissent des résultats qu'aux fréquences de résonance et sont limitées en moyenne et haute fréquence par le recouvrement modal [92]. De multiples applications sur des structures complexes existent comme par exemple l'étude de sandwich en composite hybride [54], de rotor avec des pales en composite [123] ou de l'amortissement de poutre sandwich [131]. Les méthodes hautes résolutions, telles que la méthode ESPRIT [112, 30], viennent compléter l'analyse modale, notamment dans l'étude de matériaux très dissipatif, en étendant efficacement le domaine fréquentiel des caractérisations expérimentales même pour des recouvrements modaux importants. À ce titre, nous pouvons citer également les récents travaux de Margerit *et al.* [77, 78] qui ont appliqué la méthode ESPRIT pour l'analyse en nombre d'onde sur des structures 1D (type poutre) et 2D (type plaque) avec des résultats remarquables sur une large gamme fréquentielle.

En hautes fréquences, les méthodes ultrasonores basées sur des modèles ondulatoires, telles que Lamb [55] par exemple, sont utilisées. Elles peuvent notamment permettre l'estimation de tenseur d'élasticité [14] ou encore la détection de défauts de petites tailles [3, 121].

En moyennes fréquences, les techniques de caractérisation correspondent à des analyses de champs vibratoires où les paramètres matériaux sont identifiés à partir du champ de déplacement de la structure. Dans les sections suivantes, nous détaillerons plusieurs techniques de mesure de champs ainsi que ces méthodes de caractérisation qui se divisent en deux groupes : les méthodes globales et les méthodes locales.

1.2.1 Mesure du champ vibratoire

Les techniques de mesure de champ généralement utilisées dans le domaine vibro-acoustique se divisent en deux catégories. La première rassemble les capteurs à contact tels que les accéléromètres ou les cales piézoélectriques. Ce type de capteur est intrusif et ajoute une masse supplémentaire à la structure mesurée. Les accéléromètres mesurent l'accélération en un point sur une gamme de fréquence pouvant aller jusqu'à 50 kHz tandis que les cales piézoélectriques mesurent le déplacement sur une bande de fréquence beaucoup plus élevée. La seconde catégorie rassemble toutes les techniques utilisant des capteurs sans contact telles que l'holographie acoustique, l'holographie optique, la vibrométrie laser, la corrélation d'image ou la déflectométrie.

L'holographie acoustique de champ proche [45] mesure le champ de pression rayonné par la structure à une distance $d < \lambda/2$. Le champ vibratoire de la structure est ensuite reconstruit à partir du champ de pression par des algorithmes de rétropropagation [128]. La mesure peut être plein champ avec un réseau de microphones (voir Figure 1.8a) ou ponctuelle à balayage avec un seul. L'holographie acoustique est utilisée pour la localisation de source vibratoire, la détection de défauts ou le calcul de transfert d'énergie mais son principal avantage reste l'analyse de la relation entre le rayonnement acoustique et le comportement dynamique de la structure. Cependant, la résolution spatiale est faible et les algorithmes de calcul utilisés amplifient grandement le bruit.

Parmi les techniques optiques de mesure sans contact [37], l'holographie optique [53] est une méthode d'interférométrie basée sur le principe d'interférence d'ondes lumineuses cohérentes.

Une onde émise par un laser est séparée en deux par un prisme donnant naissance à une onde de référence et une onde objet. L'onde de référence est connue et n'est pas perturbée tandis que l'onde objet est perturbée par la structure mesurée. L'hologramme est caractérisé par l'interférence entre ces deux ondes. La différence de phase entre deux hologrammes successifs est proportionnelle au champ de déplacement entre ces deux instants.

La vibrométrie laser utilise aussi un interféromètre. La vitesse de la structure est déterminée par l'effet Doppler observé entre l'onde référence et l'onde objet. Plusieurs modèles de vibromètre laser existent (1D, 2D et 3D). Le vibromètre 1D ou monopoint (voir Figure 1.8b) mesure le déplacement transverse en un point tandis que le vibromètre 2D le mesure sur tout le champ en scannant la structure. Enfin, le vibromètre 3D mesure les trois composantes du champ de déplacement en scannant également la structure. Leur facilité de mise en œuvre ainsi que leurs très bonnes résolutions temporelles et fréquentielles en font des outils performants et largement utilisés dans la communauté. Dans certains cas, un traitement de la zone de mesure s'avère nécessaire pour permettre une bonne diffusion du faisceau optique. De plus, la mesure ponctuelle du champ implique d'utiliser un champ stationnaire. Les mesures présentées dans ce manuscrit ont toutes été réalisées avec ce type d'appareil.

(a) Antenne de microphones

(b) Vibromètre laser monopoint

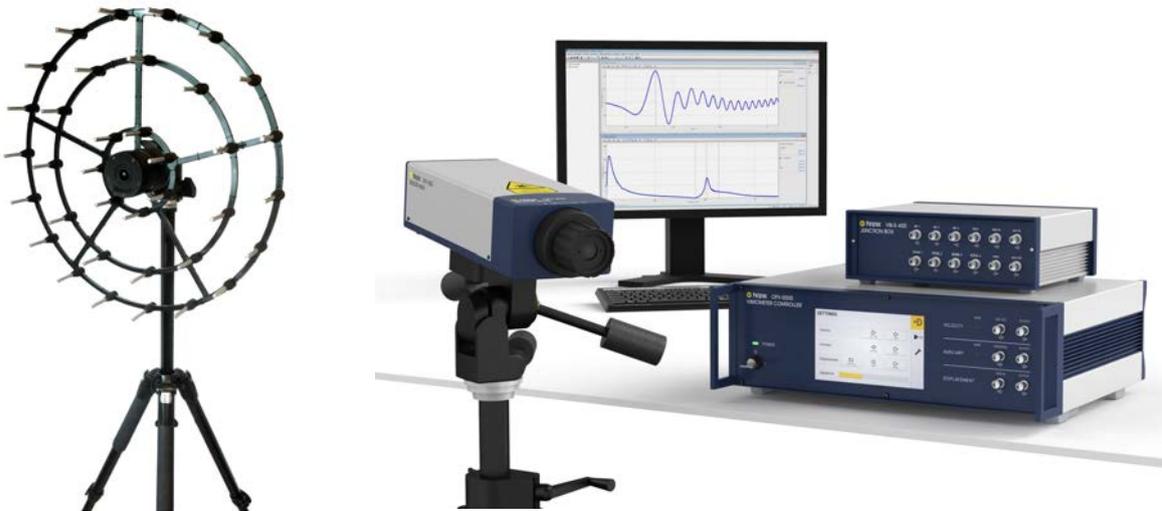


FIGURE 1.8 – Antenne de microphones, image issue de MicrodB (a). Vibromètre laser monopoint, image issue de Polytech (b).

Une autre catégorie de techniques optiques regroupe les méthodes utilisant des caméras rapides telles que la corrélation d'images successives ou DIC pour *Digital Image Correlation* [66]. Ces méthodes ont l'avantage d'obtenir des mesures plein champ synchrones avec une résolution spatiale élevée mais elles possèdent cependant une calibration complexe et sont limitées à l'étude des premiers modes. Une mesure 3D est aussi possible grâce à la méthode *Stereo DIC* [67] qui utilise deux caméras.

La déflectométrie [36] utilise aussi une caméra rapide afin de filmer le reflet d'une grille de

mesure sur l'objet à mesurer. La zone de mesure doit donc être réfléchissante. Les vibrations de l'objet déforment l'image de la grille capturée par la camera dont la phase est étudiée pour identifier le champ de pentes locales.

1.2.2 Méthodes de caractérisation globales

Transformée de Fourier Discrète

Parmi les méthodes d'analyse de champs en moyennes et hautes fréquences, nous pouvons distinguer les méthodes dites globales faisant l'hypothèse de paramètres matériaux homogènes dans la structure comme par exemple la Transformée de Fourier Discrète (DFT). Cette méthode, utilisée principalement pour sa rapidité, suppose que le champ est connu sur une grille uniforme de dimension (N_x, N_y) et est 2D-périodique en dehors. La DFT permet d'explorer le contenu en nombre d'onde du champ de déplacement mesuré $w(x, y)$:

$$\hat{w}(k_{xp}, k_{yq}) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} w(x_i, y_j) e^{-j(k_{xp}x_i + k_{yq}y_j)}, \quad (1.20)$$

avec $k_{xp} = p\Delta k_x = p\frac{2\pi}{N_x\Delta_x}$ et $k_{yq} = q\Delta k_y = q\frac{2\pi}{N_y\Delta_y}$. Les variations spatiales des propriétés mécaniques peuvent ainsi être observées dans le cas de structures anisotropes. La DFT possède quelques avantages comme la rapidité et la bijectivité. Elle ne permet cependant pas d'identifier la partie imaginaire du nombre d'onde et est sensible au repliement et aux effets de bord. Ainsi, le domaine des nombres d'onde étudié dépend directement de la dimension et de la résolution de la grille de mesure ($k_x \in [\frac{-\pi}{\Delta_x}, \frac{\pi}{\Delta_x}]$ et $k_y \in [\frac{-\pi}{\Delta_y}, \frac{\pi}{\Delta_y}]$).

Transformée de Fourier Continue

Ferguson *et al.* [34] suppriment cette dernière limitation de la DFT avec la Transformée de Fourier Continue (CFT). Cette méthode est définie, à une constante multiplicative près, par la même formulation que la DFT :

$$\hat{w}(k_x, k_y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} w(x_i, y_j) e^{-j(k_x x_i + k_y y_j)}. \quad (1.21)$$

Elle permet d'augmenter la discrétisation en nombre d'onde (k_x, k_y) et ainsi la précision des résultats. Tel que l'indique Berthaut [10], cette transformée n'est plus bijective, la CFT "inventant" de l'information. Berthaut mentionne également le fait que cette méthode fait preuve de souplesse puisqu'elle peut être appliquée sur une grille de mesure non-uniforme. Il est cependant difficile de maîtriser le repliement avec une telle grille. De plus, la CFT reste limitée à l'identification de la partie réelle du nombre d'onde uniquement.

Inhomogeneous Wave Correlation (IWC)

Afin d'estimer l'amortissement de la structure, la méthode de Ferguson a permis d'introduire le concept de corrélation du champ de mesure avec un champ virtuel. Ce principe a déjà été observé dans les travaux de Hillström *et al.* [47] où le champ virtuel est composé de deux ondes planes (propagative aller et retour) d'amplitude différentes. Mc Daniel *et al.* [80] ont repris la méthode d'Hillström *et al.* en ajoutant les ondes évanescentes dans le champ virtuel. Les différentes amplitudes de chaque onde sont identifiées par une méthode des moindres carrés dont l'erreur entre le champ reconstruit et le champ réel est calculé pour différents nombres d'onde complexes. Une corrélation optimale est obtenue lorsque cette erreur est minimale. Berthaut *et al.* [11] proposent une méthode similaire appelée IWC pour *Inhomogeneous Wave Correlation* où le champ virtuel est seulement composé d'une onde plane propagative définie par un nombre d'onde complexe. Un indice de corrélation, similaire au nombre de MAC utilisé pour les comparaisons des déformées modales, est calculé pour chaque fréquence et direction θ en fonction du nombre d'onde k et de l'amortissement γ de l'onde plane. Pour un maillage régulier, cet indice s'écrit :

$$\text{IWC}(k, \gamma) = \frac{\left| \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathcal{C}(x_i, y_j) w(x_i, y_j) \sigma_{k, \gamma}^*(x_i, y_j) \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathcal{C}(x_i, y_j) |w(x_i, y_j)|^2 \cdot \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathcal{C}(x_i, y_j) |\sigma_{k, \gamma}(x_i, y_j)|^2}}, \quad (1.22)$$

où \mathcal{C} correspond à la cohérence de la mesure et σ à l'onde inhomogène :

$$\sigma_{k, \gamma}(x, y) = e^{-jk(1+j\gamma)(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))}. \quad (1.23)$$

L'objectif de la méthode IWC est de trouver le couple (k, γ) maximisant l'indice de corrélation pour une fréquence et une direction donnée. Pour cela, Berthaut utilise un algorithme en quatre étapes :

- Postuler une plage de valeurs de k et γ possible,
- Trouver k_{\max} de tel sorte que $\text{IWC}(k_{\max}, 0) = \max(\text{IWC}(k, 0))$,
- Trouver γ_{\max} de tel sorte que $\text{IWC}(k_{\max}, \gamma_{\max}) = \max(\text{IWC}(k_{\max}, \gamma))$,
- Affiner la recherche autour du couple $(k_{\max}, \gamma_{\max})$.

Berthaut *et al.* [11] ont appliqué leur technique sur des plaques isotropes ainsi que des plaques munies de raidisseurs. Par la suite, Ichchou *et al.* [48] ont modélisé des sandwichs en nids d'abeille à partir d'une plaque mince de Love-Kirchhoff dont les paramètres ont été identifiés grâce à la méthode IWC. Enfin, Cherif *et al.* [22] ont utilisé la méthode IWC pour caractériser une structure en composite. Leurs résultats sont affichés à la Figure 1.9.

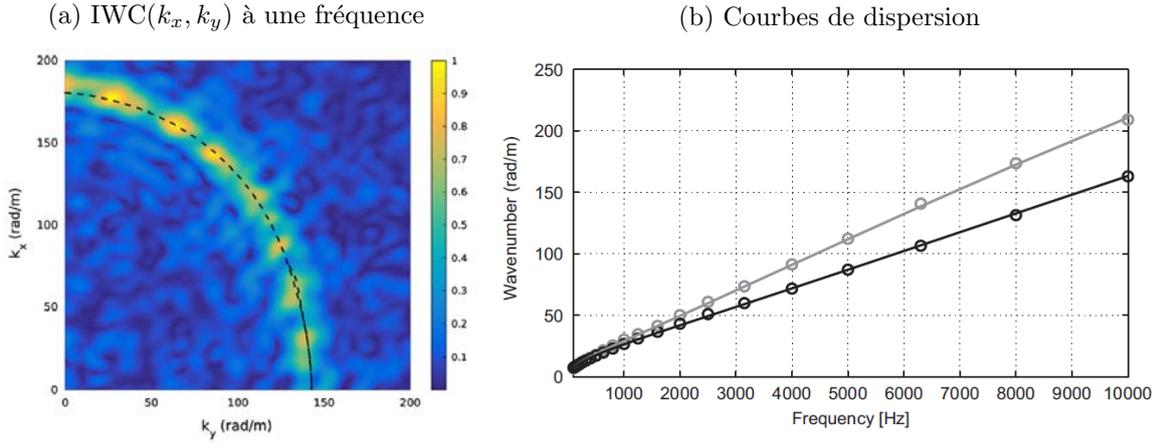


FIGURE 1.9 – Application de la méthode IWC sur une plaque en composite. (a) $IWC(k_x, k_y)$ à une fréquence. Corrélation maximale (---). (b) Courbes de dispersion du mode de flexion dans les directions x (—) et y (---) obtenues par IWC (cercles) en comparaison avec des valeurs théoriques (lignes). Résultats issus des travaux de Cherif *et al.* [22].

Corrélation par fonctions de Hankel

Roozen *et al.* [114] soulignent cependant le fait que la corrélation d'ondes planes n'est pas réaliste proche des sources. En conséquence, ils optent pour une corrélation avec un noyau de Green prenant en compte les ondes propagatives et évanescentes. La réponse du milieu à une excitation ponctuelle élémentaire positionnée en (x_0, y_0) est modélisée par deux fonctions de Hankel $H_0^{(1)}$ de première espèce d'ordre 0. Dans le cas d'une plaque isotrope infinie de Love-Kirchhoff, ce noyau s'écrit :

$$G_\infty(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{8k^2 D} \left(H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(jkr) \right), \quad (1.24)$$

avec $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ la distance à la source et D la rigidité de flexion. À partir des travaux de Cuenca *et al.* [25], Roozen *et al.* couplent ce champ à la technique des sources images afin de tenir compte des conditions aux limites de la plaque. Le champ virtuel de corrélation se compose alors de la somme pondérée des champs de Green associés à la source principale et aux sources miroirs :

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_n \alpha_n G_\infty(x - x_0(n), y - y_0(n)), \quad (1.25)$$

où α_n est le coefficient de pondération de la source n . Par la suite, le champ mesuré w est assimilé au champ virtuel \tilde{w} afin d'identifier α_n à partir d'une méthode moindres carrés couplée à une régularisation de Tikhonov pour en réduire la sensibilité. Roozen *et al.* modélisent la corrélation à partir de l'erreur entre les deux champs pour différentes valeurs de k complexe, le maximum de corrélation étant atteint pour un minimum d'erreur :

$$e(k, \gamma) = \frac{\|w - \tilde{w}\|^2}{\|w\|^2} \quad (1.26)$$

Un exemple de l'influence des sources images sur le champ virtuel ainsi que sur l'erreur de la corrélation de Hankel est présenté à la Figure 1.10. On remarque qu'avec quelques sources images, l'erreur décroît relativement vite et le champ virtuel concorde avec des simulations en éléments finis. Cette méthode possède cependant quelques limitations puisqu'elle nécessite de connaître avec précision la position de la source. De plus, le noyau de Green n'a pour l'instant été développé, à notre connaissance, que pour des plaques minces isotropes et orthotropes elliptiques tel que le décrit Berthaut [10] dans les annexes de sa thèse.

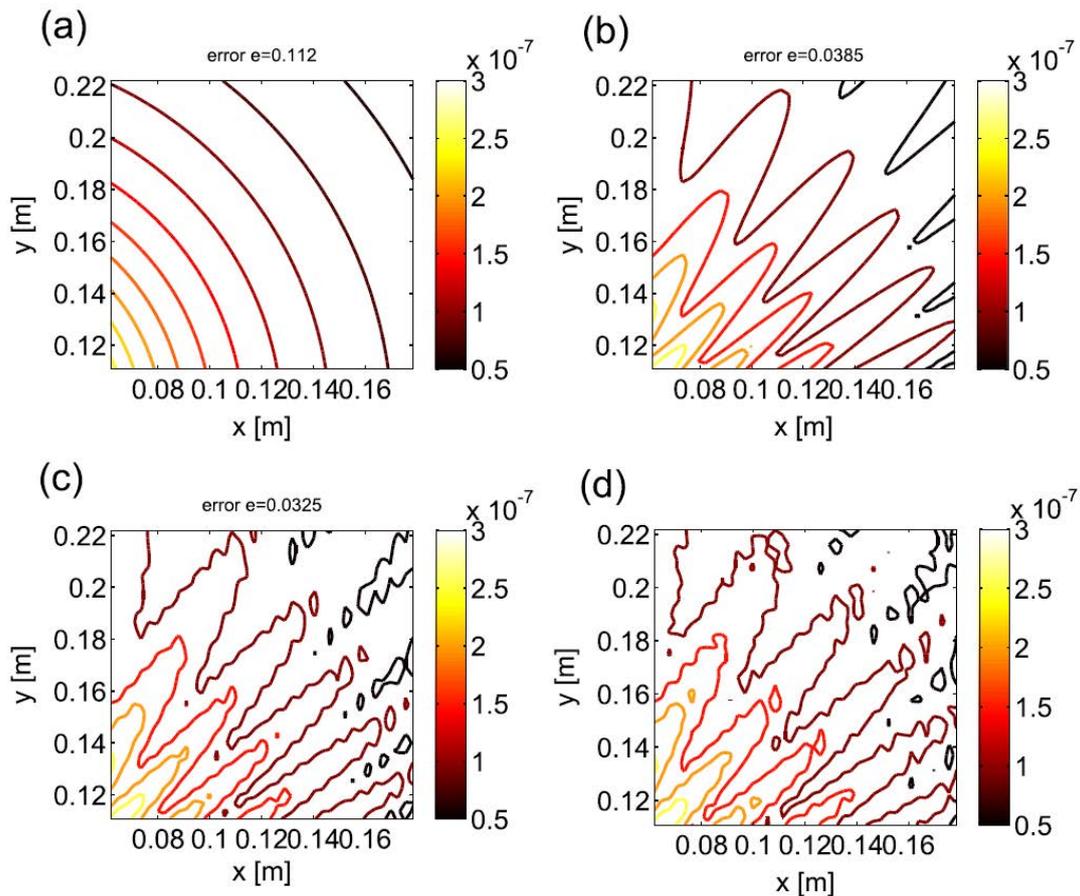


FIGURE 1.10 – Courbes de contour des niveaux de vibration d'une plaque libre-libre à une fréquence. Champ de Green couplé aux sources images. 1 source (a). 2 sources (b). 4 sources (c). L'erreur de la corrélation de Hankel est inscrite au-dessus des figures. Champ synthétisé par éléments finis (d). Résultats issus des travaux de Roozen *et al.* [114].

1.2.3 Méthodes de caractérisation locales

Les méthodes d'analyse de champs dites locales vérifient localement les équations d'équilibre du modèle de la structure. En conséquence, ces méthodes peuvent être appliquées sans prendre en considération les conditions aux limites ou les sources externes à la zone étudiée. Plusieurs approches locales ont initialement été développées pour l'identification de source comme par exemple l'intensimétrie vibratoire [86, 93] permettant de cartographier le flux de puissance vibratoire. Il est ainsi possible d'identifier différentes informations telles que les chemins vibratoires,

les positions des sources ou les puits d'énergie. La théorie de l'intensité vibratoire fait intervenir plusieurs dérivées partielles du déplacement estimées en utilisant un schéma aux différences finies. L'avantage est de n'avoir besoin que de la mesure du champ de vitesse transverse de la structure.

Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée (RIFF)

Une approche similaire à l'intensimétrie, appelée RIFF pour *Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée*, a été initialement développée pour l'identification de source sur des structures isotropes (poutres [99] et plaques [100]) par Pézerat et Guyader. La communauté la connaît aussi sous l'acronyme anglais FAT pour *Force Analysis Technique*. La méthodologie de RIFF fait appel à un modèle de structure mince. De la même manière que l'intensimétrie, un schéma aux différences finies est appliqué au déplacement transverse mesuré afin d'estimer les dérivées spatiales de l'équation de mouvement.

Dans le cas de plaques isotropes, la théorie de Love-Kirchhoff est utilisée. Le champ de pression exact de la structure s'écrit, au régime harmonique ω :

$$p(x, y) = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \rho h \omega^2 w(x, y), \quad (1.27)$$

où D est la rigidité de flexion. Un schéma aux différences finies de 13 points est alors utilisé pour estimer les dérivées partielles et reconstruire la distribution des efforts p^{RIFF} appliqués à la structure :

$$p^{\text{RIFF}}(x, y) = D \nabla^{\text{RIFF}}(x, y) - \rho h \omega^2 w(x, y), \quad (1.28)$$

où $\nabla^{\text{RIFF}} = \delta^{4x} + \delta^{4y} + \delta^{2x2y}$ est l'opérateur bilaplacien estimé par RIFF et δ^{ij} sont les estimations par différences finies des dérivées spatiales.

Bien que RIFF n'emploie pas d'inversion de matrice, la méthode présente tout de même des sensibilités liées au bruit de mesure. Cette sensibilité provient du schéma aux différences finies qui amplifie grandement l'énergie du bruit de mesure contenue dans les hauts nombres d'onde lors de l'estimation des dérivées spatiales d'ordre quatre (voir Figure 1.11). Un filtrage passe-bas en nombre d'onde a alors été utilisé en tant que technique de régularisation [100]. Ce filtrage est défini par un nombre d'onde de coupure k_c généralement proportionnel au nombre d'onde naturel de flexion k_f de la structure. Ce paramètre est ajusté en fonction de la qualité de la mesure et de la fréquence afin de doser l'influence du filtrage. L'utilisation de ce filtrage ne permet cependant pas de supprimer les efforts résiduels aux bords du domaine étudié. La limitation spatiale de la zone de mesure entraîne une discontinuité de la distribution des efforts sur son périmètre, plus connue sous le nom de phénomène de Gibbs. Une seconde régularisation consiste donc à multiplier le champ de pression identifié par une fenêtre de Tukey spatiale afin d'atténuer ce phénomène. Ce fenêtrage doit être appliqué avant le filtrage pour ne pas laisser apparaître de lobes secondaires sur les résultats comme le précisent Pézerat et Guyader [100].

RIFF a fait l'objet de nombreuses adaptations et applications. Djamaa *et al.* [28] développèrent la théorie pour les coques. Renzi *et al.* l'adaptèrent pour les éléments finis dans le but

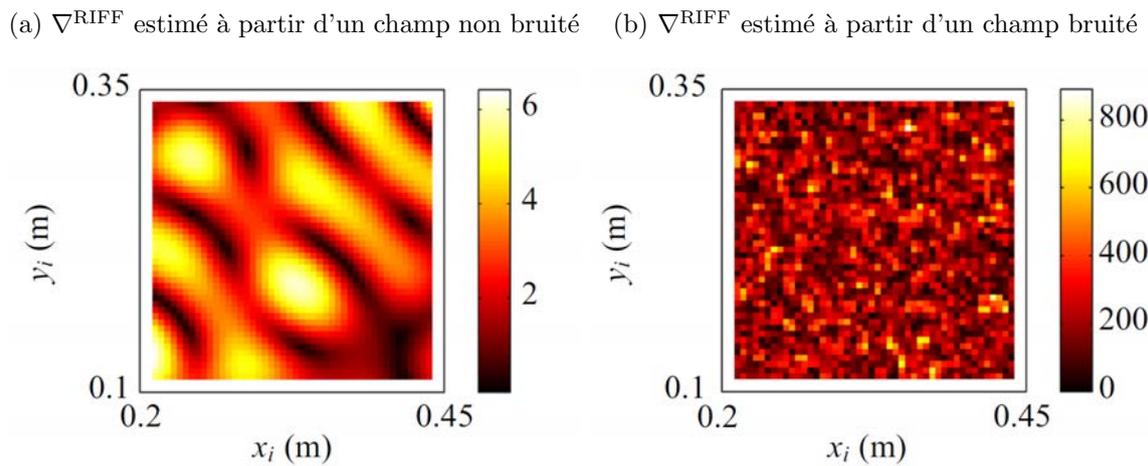


FIGURE 1.11 – Exemple d'opérateur bilaplacien (m^{-3}) calculé à partir de champ de déplacement non bruité (a) et bruité avec un rapport signal à bruit RSB=40 dB (b). Résultats issus des travaux de Ablitzer *et al.* [1].

d'accéder à des applications plus industrielles. L'opérateur analytique de l'équation de mouvement est alors obtenu par le modèle éléments finis et une régularisation de Tikhonov est utilisée. Renzi *et al.* ont testé leur approche sur des poutres [110] et des plaques [111]. Une régularisation bayésienne a aussi été récemment testée avec RIFF par Faure *et al.* [33]. Des mesures par holographie acoustique ont également été analysées avec RIFF par Pézerat *et al.* [101] pour de l'identification de sources vibratoires. Enfin, des applications aéronautiques et navales de RIFF ont été réalisées par Grosset [38] où la notion de couplage fluide-structure a été introduite. Cette notion a également été étudiée par Carpentier *et al.* [17] sur des vitrages automobiles afin de prédire l'environnement acoustique à l'intérieur de l'habitacle.

De multiples travaux ont été publiés sur l'application de RIFF à la caractérisation de structures. La technique consiste à mesurer la structure sur une zone située loin de l'excitation et d'estimer le champ de pression nul sur le domaine étudié ($p^{\text{RIFF}} \approx 0$). La rigidité de flexion D devient alors l'inconnue du problème. L'aspect local de RIFF ajoute également une dépendance spatiale à cette rigidité et permet ainsi de cartographier les paramètres matériaux sur le domaine étudié à chaque fréquence. Ablitzer *et al.* [1] ont utilisé RIFF en isotrope pour caractériser expérimentalement des plaques composites renforcées en fibres de verre munies de patches élastomères. Malgré le fait que ces plaques orthotropes aient été modélisées avec une plaque équivalente isotrope possédant une seule rigidité de flexion, RIFF a obtenu des cartographies exploitables permettant de comprendre le comportement et l'influence des patches dans la structure. À l'emplacement du patch, les cartographies identifiées montrent bien une augmentation de l'amortissement ainsi qu'une diminution de la raideur équivalente due à l'ajout de masse (voir Figure 1.12).

Dans le cas de champs bruités, la régularisation par filtrage et fenêtrage de RIFF est directement appliquée sur le champ de déplacement et l'opérateur bilaplacien, du fait que le champ de pression est considéré comme étant nul. Les paramètres matériaux étant inconnus, le nombre d'onde de coupure k_c utilisé dans la méthode de filtrage ne peut être implicitement

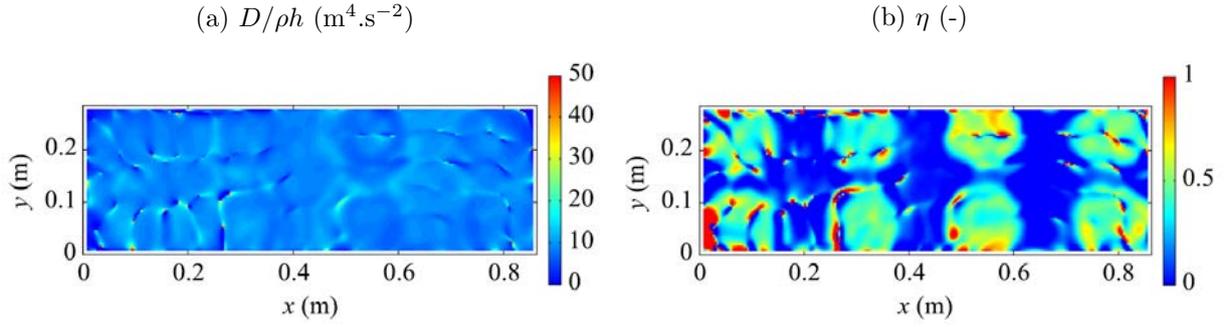


FIGURE 1.12 – Rigidité de flexion (a) et amortissement (b) d’une plaque composite en fibres de verre munie de patches élastomère identifiée par la méthode RIFF isotrope à $f = 2$ kHz. Résultats issus des travaux de Ablitzer *et al.* [1].

choisi. Un algorithme est alors proposé par Ablitzer *et al.* dans le but de déterminer un nombre d’onde de coupure optimal permettant d’atténuer le bruit tout en identifiant correctement les caractéristiques de la structure. Cet algorithme émet l’hypothèse d’homogénéité des paramètres matériaux sur la surface de la plaque. À chaque fréquence, une plage de nombre d’onde de coupure est proposée et les paramètres matériaux sont identifiés pour chacun d’entre eux en utilisant une méthode des moindres carrés sur tout le champ de mesure. On remarque alors que pour des très grandes valeurs de k_c , c’est-à-dire un filtrage peu influent, les paramètres identifiés divergent de leur véritable valeur. La somme des carrés des résidus est ensuite calculée pour chaque valeur de k_c . Le nombre d’onde de coupure optimal doit être choisi comme étant celui pour lequel la pente de cette somme dépasse un certain critère. Ce critère a été fixé par Ablitzer *et al.* à 5% de la valeur maximale de la pente.

Dans un second article, Ablitzer *et al.* [2] ont étendu la méthode RIFF à la caractérisation de plaques orthotropes sans connaissance à priori des axes d’orthotropie de la structure. Une modélisation de plaque mince est également utilisée. La méthode d’Ablitzer *et al.* permet d’identifier les trois rigidités de flexion (D_{11} , D_{22} et D_{12}) décrivant l’orthotropie de la structure ainsi que la direction principale de cette orthotropie, définie par un angle. Cet angle d’orthotropie θ ajoute deux dérivées partielles du déplacement à l’équation de mouvement une fois projetée dans le repère de mesure :

$$\left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} & \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} & \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \end{array} \right] P(\theta) \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{22} \end{bmatrix} = \rho h \omega^2 w(x, y), \quad (1.29)$$

où $P(\theta)$ est la matrice de projection entre le repère d'orthotropie et celui de mesure :

$$P(\theta) = \begin{bmatrix} c^4 & c^2s^2 & s^4 \\ s^4 & c^2s^2 & c^4 \\ 6c^2s^2 & c^4 - 4c^2s^2 + s^4 & 6c^2s^2 \\ 4c^3s & 2(cs^3 - c^3s) & -4cs^3 \\ 4cs^3 & 2(c^3s - cs^3) & -4c^3s \end{bmatrix}, \quad \text{avec } c = \cos(\theta) \text{ et } s = \sin(\theta). \quad (1.30)$$

Le schéma aux différences finies doit alors être élargi de 13 à 25 points afin d'estimer toutes les dérivées partielles. La forme de ce nouveau schéma est représentée par un losange dont 16 points de mesure ne sont pas utilisés. Ablitzer *et al.* proposent alors de tourner le schéma de 45° afin d'optimiser son utilisation. Cette optimisation ne peut être cependant réalisée que si le maillage de mesure est carré. De plus, l'angle d'orthotropie identifié par ce schéma tourné est par conséquent également décalé de 45° .

Malgré l'orthotropie de la structure, le filtrage utilisé par Ablitzer *et al.* est isotrope et se concentre autour du nombre d'onde de flexion. Les propriétés mécaniques étant fonction de la direction de propagation, le choix du nombre d'onde de coupure s'est alors porté vers le plus petit nombre d'onde de flexion en fonction de la direction. Ce choix a été motivé par le fait que RIFF est moins sensible à une sur régularisation ($k_c \ll k_f$) qu'à une sous régularisation ($k_c \gg k_f$). Les paramètres matériaux étant initialement inconnus, un algorithme similaire au cas isotrope a été proposé.

Ablitzer *et al.* ont mené des mesures expérimentales sur une plaque composite de 8 couches unidirectionnelles renforcées en fibres de verre. Cette plaque a été accrochée de sorte à former un angle de 21° entre la direction des fibres et le maillage de mesure. Les résultats obtenus par la méthode RIFF sont présentés à la Figure 1.13. L'angle identifié correspond fidèlement à l'angle d'orientation de la plaque avec une valeur moyenne de 22.5° .

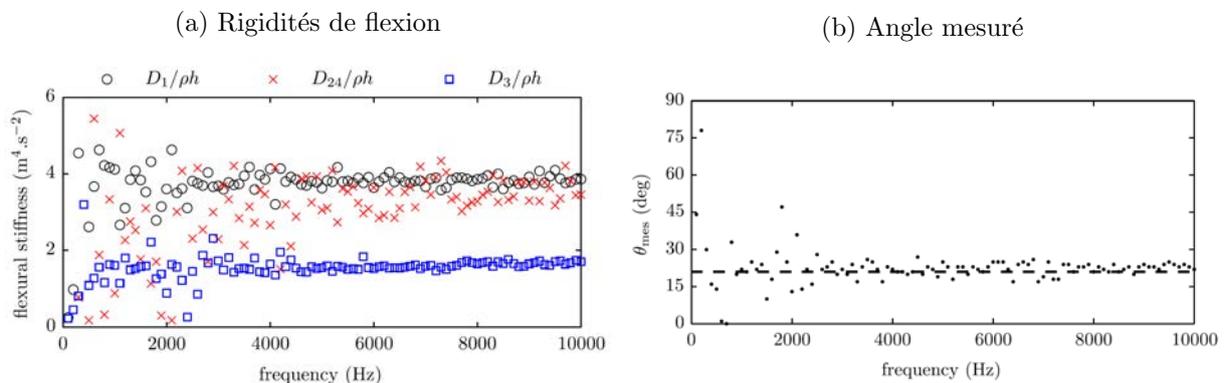


FIGURE 1.13 – Application expérimentale de RIFF sur une plaque en composite en fibres de verre inclinée de 21° . Rigidités de flexion identifiées (a). Angle mesuré (b). Résultats issus des travaux de Ablitzer *et al.* [2].

Wassereau *et al.* [133] ont appliqué RIFF pour la caractérisation de poutres épaisses modélisées par la théorie de Timoshenko. Ils démontrent par leurs travaux l’adaptabilité de RIFF à tout type de modélisation. À l’instar de la théorie de Mindlin pour les plaques, le modèle de Timoshenko prend en compte le cisaillement de la structure dans l’équation de mouvement :

$$\begin{bmatrix} I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} & \rho I \omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \frac{E}{G} + 1 \end{bmatrix} = \left(\rho S \omega^2 - \frac{\rho^2 I}{G} \omega^4 \right) w(x), \quad (1.31)$$

où I correspond au moment quadratique et S à la section de la poutre. Les propriétés mécaniques à identifier sont alors composées du module de Young E et de cisaillement G , tous les deux complexes. On remarque la présence d’une dérivée partielle d’ordre 2 ainsi que d’un terme inertiel supplémentaire par rapport à la théorie de poutre mince d’Euler-Bernouilli. Les dérivées partielles sont estimées grâce à un schéma aux différences finies composé de 7 points. L’identification de E et G au sens des moindres carrés appliqué à l’Eq. (1.31) est impossible du fait que le module de cisaillement est présent des deux côtés de l’équation. Wassereau *et al.* proposent une méthode itérative pour éviter ce problème en supprimant les effets d’inertie de rotation à la première itération et en les réintroduisant à la seconde. Quatre itérations suffisent généralement à converger.

En présence de bruit, la régularisation classique de RIFF par filtrage est instable dans le cas de la poutre de Timoshenko. Cette instabilité vient du fait que la régularisation modifie fortement les données exactes du problème. En effet, dans l’équation de mouvement de Timoshenko, la relation entre le champ de déplacement et les dérivées n’est pas linéaire mais légèrement courbée, contrairement au cas Euler-Bernouilli. Les multiples paramètres viscoélastiques sont à l’origine de cette courbure. Wassereau *et al.* montrent que la régularisation supprime la courbure pour tendre vers un profil linéaire. L’estimation des paramètres matériaux est alors erronée. Pour contourner cette difficulté, une analyse multi-fréquentielle est adoptée permettant l’accès à d’avantage de données sur une bande de fréquence définie. La courbure de chaque jeu de données est toujours supprimée mais l’ajout d’informations stabilise l’estimation moindres carrés. Avec cette analyse multi-fréquentielle, les paramètres viscoélastiques identifiés sont considérés constants sur la bande de fréquence choisie.

Wassereau *et al.* ont validé leur méthode expérimentalement sur une poutre sandwich en nid d’abeille avec des peaux en composite en fibres de verre. Les paramètres viscoélastiques ont été déterminés à la fois avec la méthode RIFF classique (modèle d’Euler Bernouilli) et la méthode de Wassereau *et al.* (modèle de Timoshenko). Les résultats, présentés à la Figure 1.14, confirment la discussion établie au préalable à la section 1.1.3 à propos de l’équivalence plaque mince du modèle de Guyader et Cacciolati. Le module de Young identifié avec la méthode RIFF classique chute fortement du fait que le modèle d’Euler Bernouilli ne prend pas en compte le cisaillement de la structure qui devient influent devant la flexion en haute fréquence. À l’inverse, avec la méthode de Wassereau *et al.*, les modules identifiés restent constants en fréquence.

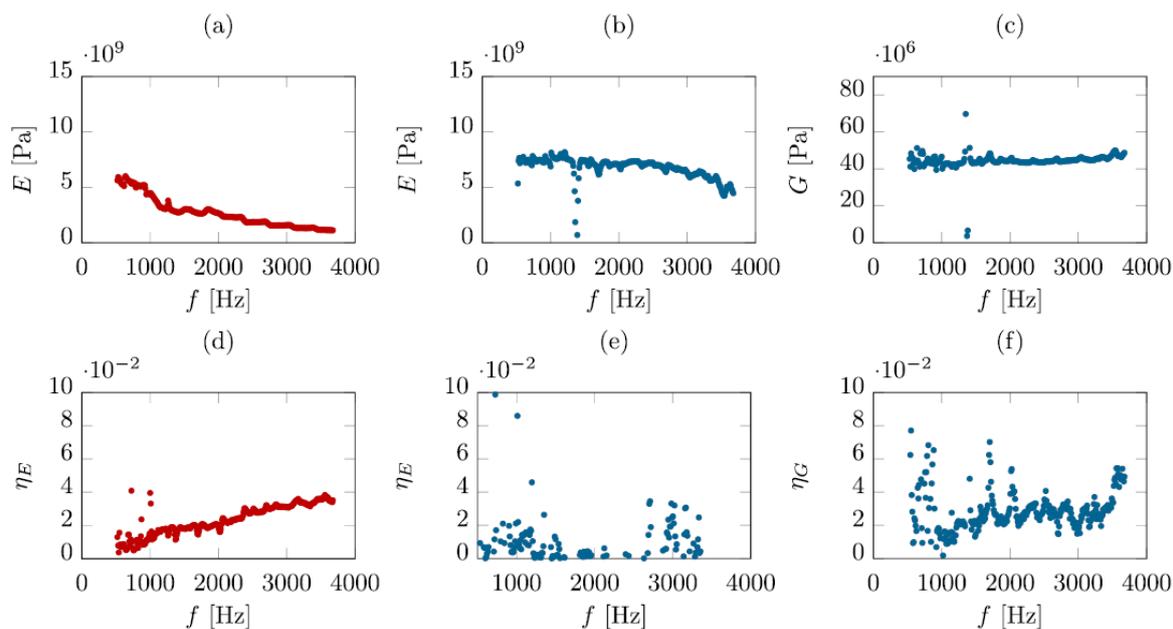


FIGURE 1.14 – Paramètres élastiques d’une poutre sandwich en nid d’abeille identifiés à partir de RIFF avec une modélisation d’Euler-Bernoulli : module de Young (a), et une modélisation de Timoshenko : module de Young (b), module de cisaillement (c). Facteurs de perte respectifs (d)-(f). Résultats issus des travaux de Wassereau *et al.* [133].

Résolution Inverse Corrigée (RIC)

En parallèle de la sensibilité au bruit de RIFF, la discrétisation de l’équation de mouvement par différence finie entraîne aussi une erreur de modélisation. Leclère et Pézerat [58] montrent que la réponse en nombre d’onde de RIFF, correspondant au ratio entre le champ de pression reconstruit et réel, possède une singularité autour du nombre d’onde naturel de flexion. Cette erreur de biais dépend d’un paramètre appelé nombre de point par longueur d’onde correspondant au ratio entre la longueur d’onde de flexion de la structure et le pas du schéma ($n = \frac{\lambda_f}{\Delta} = \frac{2\pi}{k_f \Delta}$). La singularité est d’autant plus prononcée que ce nombre est petit (voir Figure 1.15a). RIFF présente donc une limitation en haute fréquence où n est faible.

Leclère et Pézerat proposent alors une nouvelle méthode, appelée RIC pour *Résolution Inverse Corrigée* ou CFAT pour *Corrected Force Analysis Technique* en anglais, qui a tout d’abord été développée pour l’identification de source [58] puis a été étendue pour la caractérisation de plaque isotrope par Leclère *et al.* [57] également. RIC fait appel à des coefficients correcteurs (μ, ν) permettant de modifier la pression reconstruite en pondérant l’estimation de chaque dérivée partielle :

$$p^{\text{RIC}} = D(\mu\delta^{4x} + \mu\delta^{4y} + 2\nu\delta^{2x2y}) - \rho h\omega^2 w(x, y), \quad (1.32)$$

avec

$$\mu = \frac{\Delta^4 k_f^4}{4 \left[1 - \cos(k_f \Delta)\right]^2}, \quad \nu = \frac{\Delta^4 k_f^4}{8 \left[1 - \cos\left(\frac{k_f \Delta}{\sqrt{2}}\right)\right]^2} - \mu, \quad (1.33)$$

où k_f est le nombre d’onde de flexion. Les coefficients sont calculés de sorte que la singularité

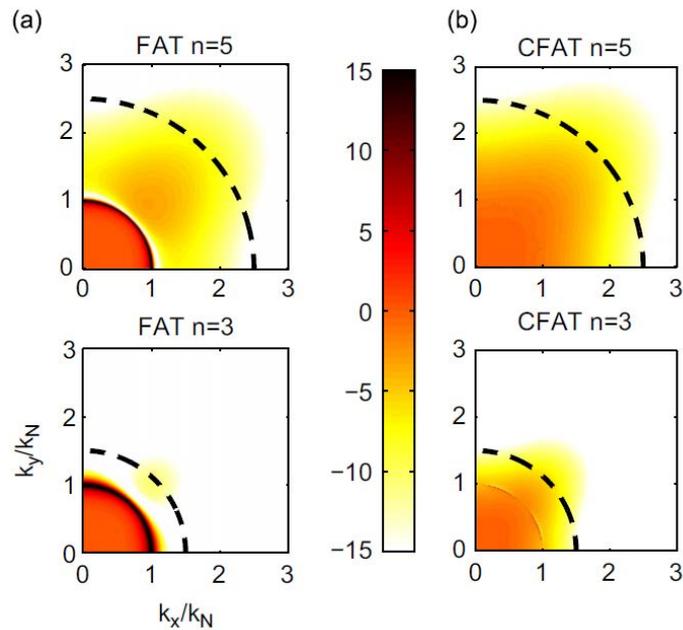


FIGURE 1.15 – Réponse de RIFF (a) et RIC (b) dans l'espace des nombres d'onde pour $n = 5$ (haut) et $n = 3$ (bas). k_N est le nombre d'onde de flexion. Résultats issus des travaux de Leclère et Pézerat [58].

de RIFF soit atténuée au maximum (voir Figure 1.15b). RIC, en corrigeant l'erreur de biais, permet ainsi d'étendre la limite haute fréquence de la méthode. Cette conclusion est vérifiée par Leclère *et al.* [57] dans leur article sur l'adaptation de RIC à la caractérisation. Ils montrent que, contrairement à RIC, l'erreur de biais de RIFF entraîne une surestimation de la rigidité en fonction de la fréquence (voir Figure 1.16).

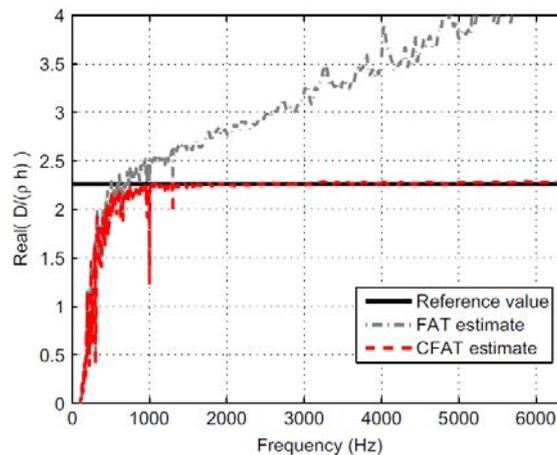


FIGURE 1.16 – Partie réelle de la rigidité de flexion identifiée par RIFF (---) et RIC (---) sur une plaque en aluminium. Valeur de référence (—). Résultats issus des travaux de Leclère *et al.* [57].

Tout comme RIFF, RIC a été adapté à la caractérisation en considérant le champ de pression nul loin des sources. Cependant, les coefficients correcteurs propres à RIC dépendent du nombre d'onde de flexion k_f qui est inconnu. Une méthode itérative peut alors être suggérée où la première

itération détermine les caractéristiques de la structure en appliquant RIFF. Si l'erreur de biais est importante, ces paramètres seront faux mais permettront de calculer les coefficients correcteurs nécessaires à leur correction dans une seconde itération. L'accumulation des itérations peut ainsi permettre de converger vers les vrais paramètres matériaux. Cependant, cette technique peut également diverger dès lors que la première itération donne des résultats aberrants. La correction est alors inefficace et peut au contraire augmenter l'écart avec la réalité. En conséquence, Leclère *et al.* [57] suggèrent une approche itérative plus stable de Gauss–Newton. Ils ont par la suite mené une application expérimentale de RIC sur une plaque en aluminium munie d'un patch viscoélastique. Les cartographies de la raideur et de l'amortissement identifiées conduisent aux mêmes conclusions que celles émises dans l'étude menée par Ablitzer *et al.* [1] (voir Figure 1.17). Le patch augmente localement l'amortissement de la structure tout en diminuant légèrement sa raideur. Leclère *et al.* montrent également que, contrairement à RIC, l'erreur de biais de RIFF entraîne une surestimation de la rigidité en fonction de la fréquence (voir Figure 1.16).

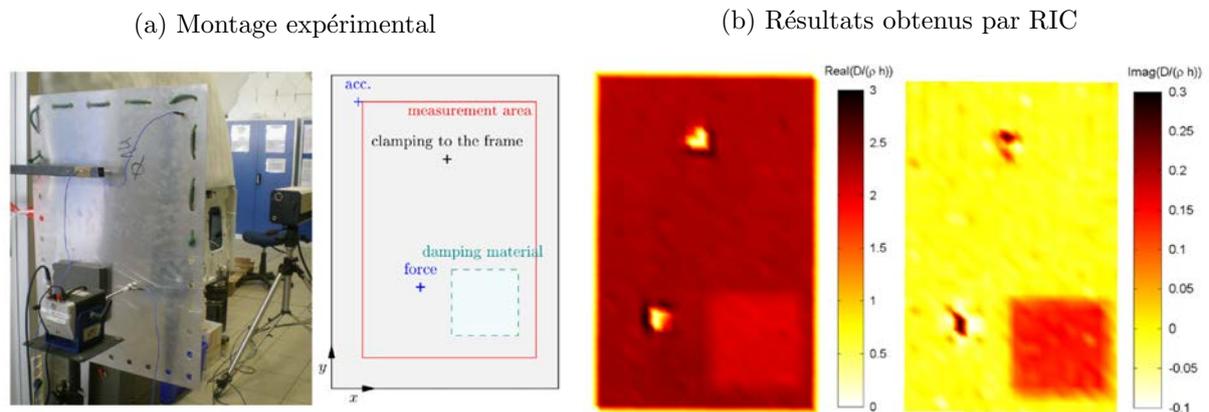


FIGURE 1.17 – Application expérimentale de RIC sur une plaque en aluminium munie d'un patch viscoélastique. Montage expérimental (a). Cartographies des paramètres structuraux identifiés par RIC (b). Résultats issus des travaux de Leclère *et al.* [57].

La correction de RIFF permet également de se passer des méthodes de régularisation par filtrage et fenêtrage pour atténuer le bruit de mesure [56]. En effet, la réponse de RIC se comporte comme un filtre passe-bas où le nombre d'onde de coupure est défini en fonction de n . Leclère montre que RIC peut être appliquée sur une plage de fréquence où n est compris entre 2 (critère de Shannon) et 4 sans que le bruit de mesure soit pénalisant. Il apparaît alors intéressant d'adapter la taille du schéma en fonction de la fréquence pour conserver $2 < n < 4$ et pouvoir appliquer RIC sur toute la plage de fréquences. En appliquant cette technique, le schéma sera donc de taille importante en basse fréquence et diminuera en fonction de la fréquence. Dans le cas d'un maillage de mesure régulier et de pas égaux dans les deux directions, le schéma peut aussi être tourné à 45° afin d'obtenir une marge de manœuvre supplémentaire dans son adaptation en fréquence sur un maillage régulier donné. Cette technique ne peut pas être appliquée sur la méthode RIFF à cause de sa singularité autour du nombre d'onde naturel de flexion qui est importante pour des valeurs de n faibles.

Virtual Field Method (VFM)

Une approche locale similaire aux méthodes RIFF et RIC, appelé VFM pour *Virtual Field Method*, a été développée à partir de la formulation faible de l'équation de mouvement. Le livre de Pierron et Grédiac [96] présente cette méthode dans le cas de la caractérisation de matériau avec divers exemples sur des structures isotropes et orthotropes. La VFM s'appuie sur le principe des travaux virtuels pouvant se traduire comme le bilan des travaux fournis par des efforts appliqués à un champ de déplacement virtuel. Ces travaux sont au nombre de trois et englobent la quantité d'accélération, les efforts extérieurs et intérieurs. La VFM possède l'avantage d'avoir une sensibilité réduite au bruit par rapport à RIFF et RIC, puisqu'elle ne nécessite qu'une différentiation d'ordre deux du champ de déplacement mesuré. Il est intéressant de noter que dans le cas de mesure par déflectométrie, une seule différentiation est nécessaire. Le principe des travaux virtuels requiert cependant le choix arbitraire d'un champ virtuel étant décrit par une fonction dérivable et continue dans le domaine étudié. Quelques travaux concernant la VFM appliquée à l'identification de source ont été publiés par Berry *et al.* [9] qui utilisent des polynômes d'Hermite linéairement indépendants en tant que champ virtuel. Cette étude a ensuite été élargie au cas d'excitations spatialement corrélées [8].

1.3 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de situer nos objectifs par rapport aux différentes études réalisées sur le sujet jusqu'à présent. Comme indiqué dans l'introduction, ce travail de thèse se concentrera principalement sur l'extension de la méthodologie d'équivalence proposée par Guyader et Cacciolati [40] ainsi que celle de la méthode RIC aux structures anisotropes. Notre choix a été motivé par les caractéristiques de ces deux méthodes, notamment la notion de plaque homogène équivalente, pouvant conduire à des applications industrielles intéressantes.

Chapitre 2

Modèle analytique équivalent de multicouches anisotropes

Sommaire

2.1	Méthodologie	34
2.1.1	Champs de déplacement et de déformation	34
2.1.2	Loi de comportement	36
2.1.3	Relations de continuité entre les couches	39
2.1.4	Équations d'équilibre	41
2.1.5	Solution particulière et équations de dispersion	43
2.1.6	Équivalence plaque mince	48
2.2	Caractérisation expérimentale sur des plaques en composite	51
2.2.1	Protocole expérimental	52
2.2.2	Plaque composite d'empilement uniforme ($0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$)	53
2.2.3	Plaque composite d'empilement croisé ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	55
2.2.4	Plaque composite d'empilement laminé ($60^\circ/-60^\circ/-60^\circ/60^\circ$)	57
2.3	Modélisation de l'amortissement	59
2.3.1	Courbes de dispersion du système non-conservatif	59
2.3.2	Comparaison de différentes définitions de l'amortissement	60
2.3.3	Amortissement d'un vitrage automobile : comparaison au modèle de Shorter	65
2.3.4	Amortissement d'un sandwich orthotrope : comparaison au modèle de Ghinet	67
2.4	Conclusion	68

Ce chapitre est consacré à l'extension du modèle analytique équivalent développé par Guyader et Lesueur [42] pour les multicouches anisotropes. Dans une première partie, le développement du modèle est présenté et une extension de l'équivalence plaque mince au cas anisotrope est proposée. Dans une seconde partie, le modèle est utilisé pour caractériser des plaques composites en fibres de carbone à partir de mesures expérimentales. Enfin, une troisième partie traite de la

modélisation de l'amortissement structural du multicouche et fournit plusieurs comparaisons à la littérature.

Ces travaux ont fait l'objet d'une conférence au *Congrès Français de Mécanique* [72] et ont été soumis sous forme d'article dans le *Journal of Sound and Vibration* [75].

2.1 Méthodologie

Le modèle de Guyader fait parti de la catégorie des modèles dits *Zig-Zag*. Comme indiqué dans la section 1.1.3, ce type de modèle considère une cinématique par couche. Des conditions de continuité aux interfaces entre les couches permettent de relier les variables cinématiques des couches entre elles afin de réduire le nombre d'inconnues cinématiques du modèle tout en conservant une description indépendante de chaque couche. Ainsi, le comportement de tout le multicouche est défini à partir de celui d'une couche de référence, qui sera ici la première. Par la suite, les équations du mouvement de la structure sont formulées à partir d'un principe énergétique basé sur la fonctionnelle d'Hamilton faisant le bilan de l'énergie cinétique et de déformation du système. Une solution de la forme d'une onde plane est alors suggérée pour résoudre ces équations et identifier les courbes de dispersion de la structure. Enfin, les caractéristiques du multicouche sont identifiées en comparant ce dernier à une plaque homogène équivalente de Love-Kirchhoff à chaque fréquence. Les rigidités de flexion de cette plaque constituent les paramètres matériaux équivalents du multicouche.

2.1.1 Champs de déplacement et de déformation

Le multicouche, de dimension $a \times b$, est représenté dans un repère orthonormé de référence $Oxyz$ positionné sous la première couche (voir Figure 2.1). Chaque couche n , d'épaisseur h_n , peut être orthotrope avec des axes d'orthotropie alignés avec un repère orthonormé local Ox_ny_nz . Ce repère est orienté d'un angle θ_n , appelé angle d'orthotropie, par rapport au repère de référence. De plus, la coordonnée en z de la fibre neutre de chaque couche n est définie par la variable R_n et le nombre total de couches est symbolisé par la variable N_L .

La cinématique choisie par Guyader dans son modèle s'appuie sur la théorie d'Hencky-Mindlin [46, 83] présentée à la section 1.1.1. Le comportement de chaque couche est décrit par trois phénomènes : la flexion, le cisaillement et le déplacement membranaire de la fibre neutre, respectivement définis par les variables W , ϕ et ψ . Ces phénomènes sont schématisés à la Figure 2.2. Tel que mentionné dans la section 1.1.1, le mode de flexion se transforme en mode de cisaillement dans les hautes fréquences. Cette transformation apparaît d'autant plus rapidement en fréquence que la structure est épaisse. La prise en compte de ce cisaillement dans le modèle analytique nous permettra donc de caractériser des multicouches épais tels que les sandwiches. La théorie de Mindlin suppose également que le cisaillement soit linéaire dans l'épaisseur. Cette hypothèse permet de simplifier grandement le modèle mais entraîne une mauvaise estimation du mode de flexion en haute fréquence. Cette erreur apparaît cependant dans des domaines de fréquences supérieurs à ceux étudiés et ne sera donc pas prise en compte. Des descriptions plus

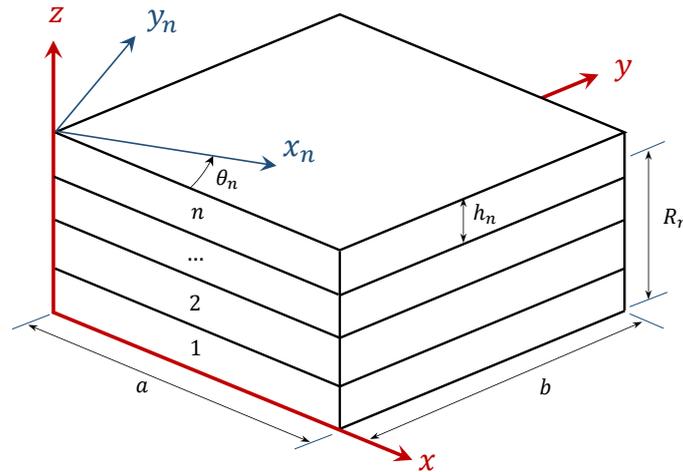


FIGURE 2.1 – Schéma du multicouche.

fines du cisaillement peuvent également être suggérées. L'annexe B présente la formulation de Castel où la description du cisaillement est cubique. Plusieurs comparaisons ont montrées dans cette annexe que la description cubique ne fournissait pas une nette différence par rapport à la description linéaire pour la gamme fréquentielle et le type de structure que nous étudierons dans cette thèse. Le déplacement transverse est quant à lui supposé constant dans l'épaisseur de la couche, négligeant ainsi toute déformation selon cet axe. Les modes de respiration ou symétriques, que l'on rencontre dans les modèles ondulatoires tels que Lamb [55], ne pourront pas être décrits. Les équations de continuité conduiront également à un déplacement transverse identique pour toutes les couches.

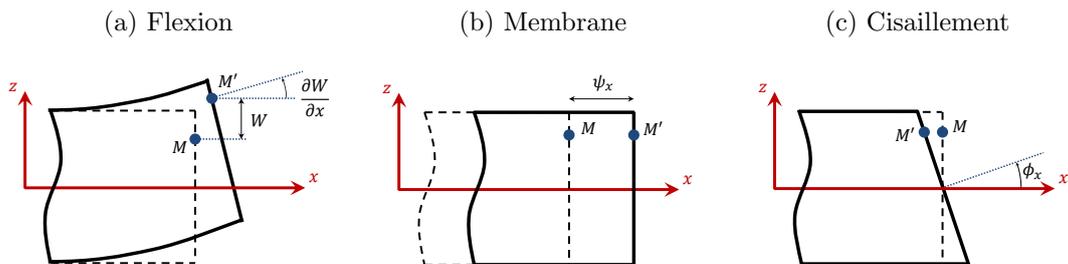


FIGURE 2.2 – Schéma des phénomènes de flexion (a), de membrane (b), et de cisaillement (c) décrit par le modèle de Guyader.

À partir des hypothèses émises précédemment sur la cinématique du multicouche, nous pouvons dresser le champ de déplacement suivant pour chaque couche n :

$$\begin{cases} u_x^n(x, y, z, t) = \psi_x^n(x, y, t) + (R_n - z) \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \phi_x^n(x, y, t) \right), \\ u_y^n(x, y, z, t) = \psi_y^n(x, y, t) + (R_n - z) \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \phi_y^n(x, y, t) \right), \\ u_z^n(x, y, z, t) = W(x, y, t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Le champ de déformation de la couche n peut être exprimé dans le repère de référence à partir du champ de déplacement postulé précédemment à l'Eq. 2.1 :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^n \\ \epsilon_{yy}^n \\ 2\epsilon_{xy}^n \\ 2\epsilon_{xz}^n \\ 2\epsilon_{yz}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x^n \\ u_y^n \\ u_z^n \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

La composante ϵ_{zz}^n est nulle du fait que l'hypothèse de déplacement transverse constant n'entraîne aucune déformation dans l'épaisseur.

2.1.2 Loi de comportement

La loi de comportement d'un matériau permet d'établir la relation entre son champ de contraintes $\{\sigma\}$ et de déformation $\{\epsilon\}$. Cette relation est supposée linéaire et est définie, dans le cas de structures planes, par :

$$\{\sigma\} = [Q]\{\epsilon\}, \quad (2.3)$$

où $[Q]$ représente le tenseur des raideurs qui, dans ce manuscrit, suit la notation de Voigt.

Dans le modèle étudié, chaque couche n est considérée comme orthotrope dans le repère local $Ox_n y_n z$ et possède, dans ce même repère, une loi de comportement pouvant s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_n x_n}^n \\ \sigma_{y_n y_n}^n \\ \sigma_{y_n z}^n \\ \sigma_{x_n z}^n \\ \sigma_{x_n y_n}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^n & \bar{Q}_{12}^n & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12}^n & \bar{Q}_{22}^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{66}^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{x_n x_n}^n \\ \epsilon_{y_n y_n}^n \\ 2\epsilon_{y_n z}^n \\ 2\epsilon_{x_n z}^n \\ 2\epsilon_{x_n y_n}^n \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Le tenseur des raideurs de chaque couche est finalement défini par 6 composantes \bar{Q}_{ij}^n indépendantes pouvant être directement exprimées à partir des paramètres de l'ingénieur :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^n &= \frac{E_x^n}{1 - \nu_{xy}^n \nu_{yx}^n}; & \bar{Q}_{22}^n &= \frac{E_y^n}{1 - \nu_{xy}^n \nu_{yx}^n}; & \bar{Q}_{12}^n &= \frac{\nu_{yx}^n E_x^n}{1 - \nu_{xy}^n \nu_{yx}^n} = \frac{\nu_{xy}^n E_y^n}{1 - \nu_{xy}^n \nu_{yx}^n}; \\ \bar{Q}_{44}^n &= G_{yz}^n; & \bar{Q}_{55}^n &= G_{xz}^n; & \bar{Q}_{66}^n &= G_{xy}^n, \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec (E_x^n, E_y^n) les modules d'Young, $(G_{xy}^n, G_{xz}^n, G_{yz}^n)$ les modules de cisaillement et (ν_{xy}^n, ν_{yx}^n) les coefficients de Poisson. Afin de modéliser l'amortissement structurel, les raideurs \bar{Q}_{ij}^n peuvent être

complexes. Cet aspect est présenté plus en détail dans la section 2.3. Finalement, les raideurs \overline{Q}_{ij}^n ainsi que l'épaisseur h_n , la masse volumique ρ_n et l'angle d'orthotropie θ_n définissent les paramètres matériaux de chaque couche.

Afin de modéliser le cas général des structures laminées, l'angle d'orthotropie θ_n peut être différent d'une couche à l'autre. L'orientation des couches doit être judicieusement choisie en fonction de l'utilisation du multicouche. En effet, certains couplages entre les modes de la structure peuvent apparaître en fonction de l'orientation, des paramètres matériaux et de l'épaisseur de chaque couche. À titre d'exemple, Berthelot et Cole [12] ont décrit dans leur livre quelques types d'empilement de stratifié : équilibré (angles opposés), croisé (90° de différence d'une couche à l'autre), symétrique ou non-symétrique par rapport à la fibre neutre du stratifié. Les stratifiés non-symétrique peuvent présenter un couplage entre la flexion et la membrane créant un flambement statique de la structure. Certaines applications industrielles utilisent ce type de stratifié lors de la conception de profils courbés. Les stratifiés symétriques, au contraire, ne possèdent pas de couplage membrane-flexion.

Par la suite, la loi de comportement de chaque couche est projetée dans le repère de référence à l'aide de la matrice de projection $[P^n]$ permettant de passer du repère (Ox_ny_nz) au repère $(Oxyz)$:

$$[P^n] = \begin{bmatrix} c_n & -s_n & 0 \\ s_n & c_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

avec $c_n = \cos(\theta_n)$ et $s_n = \sin(\theta_n)$.

Le tenseur des contraintes $[\sigma^n]_{xyz}$ du repère de référence est alors relié à celui du repère local $[\sigma^n]_{x_ny_nz}$ par la relation [12, 76] :

$$[\sigma^n]_{xyz} = [P^n][\sigma^n]_{x_ny_nz}[P^n]^T, \quad (2.7)$$

où :

$$[\sigma^n]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^n & \sigma_{xy}^n & \sigma_{xz}^n \\ \sigma_{xy}^n & \sigma_{yy}^n & \sigma_{yz}^n \\ \sigma_{xz}^n & \sigma_{yz}^n & \sigma_{zz}^n \end{bmatrix}; \quad [\sigma^n]_{x_ny_nz} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_nx_n}^n & \sigma_{x_ny_n}^n & \sigma_{x_nz}^n \\ \sigma_{x_ny_n}^n & \sigma_{y_ny_n}^n & \sigma_{y_nz}^n \\ \sigma_{x_nz}^n & \sigma_{y_nz}^n & \sigma_{zz}^n \end{bmatrix}.$$

La relation précédente peut également être exprimée avec les champs de contrainte sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^n \\ \sigma_{yy}^n \\ \sigma_{yz}^n \\ \sigma_{xz}^n \\ \sigma_{xy}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_n^2 & s_n^2 & 0 & 0 & -2c_n s_n \\ s_n^2 & c_n^2 & 0 & 0 & 2c_n s_n \\ 0 & 0 & c_n & -s_n & 0 \\ 0 & 0 & s_n & c_n & 0 \\ c_n s_n & -c_n s_n & 0 & 0 & c_n^2 - s_n^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_n x_n}^n \\ \sigma_{y_n y_n}^n \\ \sigma_{y_n z}^n \\ \sigma_{x_n z}^n \\ \sigma_{x_n y_n}^n \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

À l'inverse, le tenseur des déformations du repère local $[\epsilon^n]_{x_n y_n z}$ est relié à celui du repère de référence $[\epsilon^n]_{xyz}$ par la relation [12, 76] :

$$[\epsilon^n]_{x_n y_n z} = [P^n]^T [\epsilon^n]_{xyz} [P^n], \quad (2.9)$$

où :

$$[\epsilon^n]_{xyz} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^n & \epsilon_{xy}^n & \epsilon_{xz}^n \\ \epsilon_{xy}^n & \epsilon_{yy}^n & \epsilon_{yz}^n \\ \epsilon_{xz}^n & \epsilon_{yz}^n & \epsilon_{zz}^n \end{bmatrix}; \quad [\epsilon^n]_{x_n y_n z} = \begin{bmatrix} \epsilon_{x_n x_n}^n & \epsilon_{x_n y_n}^n & \epsilon_{x_n z}^n \\ \epsilon_{x_n y_n}^n & \epsilon_{y_n y_n}^n & \epsilon_{y_n z}^n \\ \epsilon_{x_n z}^n & \epsilon_{y_n z}^n & \epsilon_{zz}^n \end{bmatrix}.$$

La relation précédente peut également être exprimée avec les champs de déformation sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{x_n x_n}^n \\ \epsilon_{y_n y_n}^n \\ 2\epsilon_{y_n z}^n \\ 2\epsilon_{x_n z}^n \\ 2\epsilon_{x_n y_n}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_n^2 & s_n^2 & 0 & 0 & c_n s_n \\ s_n^2 & c_n^2 & 0 & 0 & -c_n s_n \\ 0 & 0 & c_n & s_n & 0 \\ 0 & 0 & -s_n & c_n & 0 \\ -2c_n s_n & 2c_n s_n & 0 & 0 & c_n^2 - s_n^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^n \\ \epsilon_{yy}^n \\ 2\epsilon_{yz}^n \\ 2\epsilon_{xz}^n \\ 2\epsilon_{xy}^n \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Les équations (2.4), (2.8) et (2.10) nous permettent ainsi d'établir la loi de comportement de la couche n dans le repère de référence :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^n \\ \sigma_{yy}^n \\ \sigma_{yz}^n \\ \sigma_{xz}^n \\ \sigma_{xy}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^n & Q_{12}^n & 0 & 0 & Q_{16}^n \\ Q_{12}^n & Q_{22}^n & 0 & 0 & Q_{26}^n \\ 0 & 0 & Q_{44}^n & Q_{45}^n & 0 \\ 0 & 0 & Q_{45}^n & Q_{55}^n & 0 \\ Q_{16}^n & Q_{26}^n & 0 & Q_{66}^n & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^n \\ \epsilon_{yy}^n \\ 2\epsilon_{yz}^n \\ 2\epsilon_{xz}^n \\ 2\epsilon_{xy}^n \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} Q_{11}^n \\ Q_{22}^n \\ Q_{12}^n \\ Q_{66}^n \\ Q_{16}^n \\ Q_{26}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_n^4 & s_n^4 & 2c_n^2 s_n^2 & 4c_n^2 s_n^2 \\ s_n^4 & c_n^4 & 2c_n^2 s_n^2 & 4c_n^2 s_n^2 \\ c_n^2 s_n^2 & c_n^2 s_n^2 & c_n^4 + s_n^4 & -4c_n^2 s_n^2 \\ c_n^2 s_n^2 & c_n^2 s_n^2 & -2c_n^2 s_n^2 & (c_n^2 - s_n^2)^2 \\ c_n^3 s_n & -s_n^3 c_n & s_n^3 c_n - c_n^3 s_n & 2(s_n^3 c_n - c_n^3 s_n) \\ s_n^3 c_n & -c_n^3 s_n & c_n^3 s_n - s_n^3 c_n & 2(c_n^3 s_n - s_n^3 c_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11}^n \\ \bar{Q}_{22}^n \\ \bar{Q}_{12}^n \\ \bar{Q}_{66}^n \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{44}^n \\ Q_{55}^n \\ Q_{45}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_n^2 & s_n^2 \\ s_n^2 & c_n^2 \\ -c_n s_n & c_n s_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q}_{44}^n \\ \bar{Q}_{55}^n \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Le tenseur des raideurs de chaque couche défini à l'Eq. (2.11) correspond à celui d'un matériau orthotrope en dehors de ses axes d'orthotropie, c'est à dire avec un seul plan de symétrie, en l'occurrence Oxy . Ainsi, les composantes des mécanismes plans (indices xx , yy et xy) sont découplées des mécanismes hors-plan (indices xz et yz).

2.1.3 Relations de continuité entre les couches

Tel que mentionné dans la section 1.1.3, les modèles Zig-Zag établissent des relations de couplage entre les variables cinématiques de chaque couche. Ces relations sont définies par la continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement aux interfaces entre deux couches successives :

$$\begin{pmatrix} u_x^n \\ u_y^n \\ u_z^n \end{pmatrix} \left(x, y, z = R_n - \frac{h_n}{2} \right) = \begin{pmatrix} u_x^{n-1} \\ u_y^{n-1} \\ u_z^{n-1} \end{pmatrix} \left(x, y, z = R_n - \frac{h_n}{2} \right), \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xz}^n \\ \sigma_{yz}^n \end{pmatrix} \left(x, y, z = R_n - \frac{h_n}{2} \right) = \begin{pmatrix} \sigma_{xz}^{n-1} \\ \sigma_{yz}^{n-1} \end{pmatrix} \left(x, y, z = R_n - \frac{h_n}{2} \right). \quad (2.15)$$

En s'appuyant sur la définition du champ de déplacement Eq. (2.1) et de la loi de Hooke Eq. (2.11), ces conditions peuvent être développées de la façon suivante :

$$\psi_x^n + \frac{h_n}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \phi_x^n \right) = \psi_x^{n-1} - \frac{h_{n-1}}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \phi_x^{n-1} \right), \quad (2.16)$$

$$\psi_y^n + \frac{h_n}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \phi_y^n \right) = \psi_y^{n-1} - \frac{h_{n-1}}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \phi_y^{n-1} \right), \quad (2.17)$$

$$Q_{55}^n \phi_x^n + Q_{45}^n \phi_y^n = Q_{55}^{n-1} \phi_x^{n-1} + Q_{45}^{n-1} \phi_y^{n-1}, \quad (2.18)$$

$$Q_{45}^n \phi_x^n + Q_{44}^n \phi_y^n = Q_{45}^{n-1} \phi_x^{n-1} + Q_{44}^{n-1} \phi_y^{n-1}, \quad (2.19)$$

et peuvent également s'écrire sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \phi_x^n \\ \psi_x^n \\ \frac{\partial W}{\partial y} \\ \phi_y^n \\ \psi_y^n \end{pmatrix} = [T^n] \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \phi_x^{n-1} \\ \psi_x^{n-1} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \\ \phi_y^{n-1} \\ \psi_y^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{xx}^n & 0 & 0 & \mathcal{A}_{xy}^n & 0 \\ \mathcal{B}^n & \mathcal{C}_{xx}^n & 1 & 0 & \mathcal{C}_{xy}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{yx}^n & 0 & 0 & \mathcal{A}_{yy}^n & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{yx}^n & 0 & \mathcal{B}^n & \mathcal{C}_{yy}^n & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \phi_x^{n-1} \\ \psi_x^{n-1} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \\ \phi_y^{n-1} \\ \psi_y^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{xx}^n &= \frac{Q_{55}^{n-1} Q_{44}^n - Q_{45}^{n-1} Q_{45}^n}{Q_{55}^n Q_{44}^n - (Q_{45}^n)^2}, & \mathcal{A}_{yy}^n &= \frac{Q_{44}^{n-1} Q_{55}^n - Q_{45}^{n-1} Q_{45}^n}{Q_{55}^n Q_{44}^n - (Q_{45}^n)^2}, & \mathcal{A}_{xy}^n &= \frac{Q_{45}^{n-1} Q_{44}^n - Q_{44}^{n-1} Q_{45}^n}{Q_{55}^n Q_{44}^n - (Q_{45}^n)^2}, \\ \mathcal{A}_{yx}^n &= \frac{Q_{45}^{n-1} Q_{55}^n - Q_{55}^{n-1} Q_{45}^n}{Q_{55}^n Q_{44}^n - (Q_{45}^n)^2}, & \mathcal{B}^n &= \frac{-h_{n-1} - h_n}{2}, & \mathcal{C}_{xx}^n &= -\frac{h_{n-1}}{2} - \frac{h_n}{2} \mathcal{A}_{xx}^n; \\ \mathcal{C}_{yy}^n &= -\frac{h_{n-1}}{2} - \frac{h_n}{2} \mathcal{A}_{yy}^n; & \mathcal{C}_{xy}^n &= -\frac{h_n}{2} \mathcal{A}_{xy}^n; & \mathcal{C}_{yx}^n &= -\frac{h_n}{2} \mathcal{A}_{yx}^n. \end{aligned}$$

En appliquant la relation matricielle (2.20) pour toutes les couches, les variables cinématiques de n'importe quelle couche n peuvent être exprimées en fonction de celles de la première couche :

$$(L^n) = [T^n] [T^{n-1}] \dots [T^3] [T^2] (L^1) = [\mathcal{J}^n] (L^1), \quad (2.21)$$

où $[\mathcal{J}^n]$ est de la forme suivante :

$$[\mathcal{J}^n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{xx}^n & 0 & 0 & \alpha_{xy}^n & 0 \\ \beta^n & \gamma_{xx}^n & 1 & 0 & \gamma_{xy}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yx}^n & 0 & 0 & \alpha_{yy}^n & 0 \\ 0 & \gamma_{yx}^n & 0 & \beta^n & \gamma_{yy}^n & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

avec :

$$\beta^n = \sum_{i=1}^n \mathcal{B}^i = R_1 - R_n.$$

Les autres coefficients de $[\mathcal{J}^n]$ peuvent être calculés analytiquement mais ne seront pas mentionnés du fait de leurs complexités. Dans ce manuscrit, ils ont été calculé numériquement par multiplication matricielle. Dans le cas particulier où $N_L = 1$, la matrice de couplage $[\mathcal{J}^1]$ se résume à la matrice identité.

À l'aide de l'équation (2.21), le champ de déplacement de la couche n peut être réécrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_x^n = \psi_x^1 + F_w \frac{\partial W}{\partial x} + F_{xx}^n \phi_x^1 + F_{xy}^n \phi_y^1, \\ u_y^n = \psi_y^1 + F_w \frac{\partial W}{\partial y} + F_{yx}^n \phi_x^1 + F_{yy}^n \phi_y^1, \\ u_z^n = W, \end{cases} \quad (2.23)$$

où :

$$F_{ij}^n = \alpha_{ij}^n (R_n - z) + \gamma_{ij}^n, \quad i, j = x, y, \quad \text{et} \quad F_w = R_1 - z. \quad (2.24)$$

Ainsi, le comportement de tout le multicouche est décrit uniquement en fonction des 5 variables cinématiques $(W, \phi_x^1, \psi_x^1, \phi_y^1, \psi_y^1)$ de la première couche. Il est intéressant de noter que si les fonctions F_{xy}^n ou F_{yx}^n sont non nulles, le déplacement u_x^n dépend du cisaillement en y et inversement. Cet aspect apparaît lorsque les axes d'orthotropie de la couche n ne sont pas alignés avec ceux de la première couche et que les modules de cisaillement hors-plan en x sont différents de ceux en y ($G_{xz}^n \neq G_{yz}^n$). La formulation (2.23) a déjà été écrite par Loredo et Castel [64] qui en ont donné une expression globale¹ pour tout le multicouche. Les fonctions F_{ij} , appelée *warping functions*, sont alors continues par morceaux et ne sont plus définies pour chaque couche.

2.1.4 Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre de la structure sont établies à partir d'une formulation énergétique basée sur la fonctionnelle d'Hamilton \mathcal{H} . Cette formulation définit l'action du système durant un intervalle de temps quelconque $[t_0, t_1]$:

$$\mathcal{H} = \int_{t_0}^{t_1} (E_c - E_d + E_w) dt, \quad (2.25)$$

où E_c , E_d et E_w correspondent respectivement à l'énergie cinétique et de déformation du système ainsi qu'aux travaux des efforts volumiques extérieurs qui y sont appliqués. Nous supposons ici que les efforts E_w sont nuls. L'énergie cinétique et de déformation peuvent également être exprimées par leur densité surfacique respective, notées e_c et e_d :

$$E_c = \int_{-a/2}^{-a/2} \int_{-b/2}^{-b/2} e_c dx dy \quad ; \quad E_d = \int_{-a/2}^{-a/2} \int_{-b/2}^{-b/2} e_d dx dy. \quad (2.26)$$

1. Dans la formulation de Loredo et Castel [64], le repère de référence est positionné de telle sorte que $R_1 = 0$.

Énergie cinétique

Dans le cas d'un multicouche, la densité d'énergie cinétique e_c correspond à la somme des densités de chacune des couches :

$$e_c = \frac{1}{2} \sum_n \int_{R_n-h_n/2}^{R_n+h_n/2} \rho_n \left[\left| \frac{\partial u_x^n}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_y^n}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_z^n}{\partial t} \right|^2 \right] dz. \quad (2.27)$$

En utilisant la nouvelle définition du champ de déplacement (Eq. (2.23)) de chaque couche, la densité d'énergie cinétique peut être écrite en fonction des 5 variables cinématiques de la couche de référence sous la forme :

$$e_c = \frac{1}{2} \left[\delta_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \right)^2 + \dots + \delta_{18} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial t} \frac{\partial \phi_y^1}{\partial t} \right) \right], \quad (2.28)$$

où les 18 coefficients δ , définis dans l'annexe A.1, dépendent uniquement de l'épaisseur et de la masse volumique de chaque couche ainsi que des fonctions F_{ij} et F_w . L'expression complète de l'Eq. (2.28) est écrite dans l'annexe A.3.

Énergie de déformation

De la même manière, la densité d'énergie de déformation du multicouche est définie par la somme de la densité de chacune des couches :

$$e_d = \frac{1}{2} \sum_n \int_{R_n-h_n/2}^{R_n+h_n/2} \{\sigma^n\} \{\epsilon^n\}^T dz. \quad (2.29)$$

Cette densité peut se développer de la façon suivante en utilisant la loi de comportement de chaque couche (2.11) :

$$e_d = \frac{1}{2} \sum_n \int_{R_n-h_n/2}^{R_n+h_n/2} Q_{11}^n (\epsilon_{xx}^n)^2 + Q_{22}^n (\epsilon_{yy}^n)^2 + 2Q_{12}^n (\epsilon_{xx}^n \epsilon_{yy}^n) + 4Q_{66}^n (\epsilon_{xy}^n)^2 + 4Q_{16}^n (\epsilon_{xx}^n \epsilon_{xy}^n) + 4Q_{26}^n (\epsilon_{yy}^n \epsilon_{yx}^n) + 4Q_{44}^n (\epsilon_{xz}^n)^2 + 4Q_{55}^n (\epsilon_{yz}^n)^2 + 8Q_{45}^n (\epsilon_{xz}^n \epsilon_{yz}^n) dz. \quad (2.30)$$

La nouvelle définition du champ de déplacement (2.23) nous permet également d'écrire la densité d'énergie de déformation en fonction des 5 variables de référence, sous la forme :

$$e_d = \frac{1}{2} \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \dots + \lambda_{69} (\phi_x^1 \phi_y^1)^2 \right], \quad (2.31)$$

où les 69 coefficients λ , définis dans l'annexe A.2, dépendent uniquement de l'épaisseur et de loi de comportement de chaque couche ainsi que des fonctions F_{ij} et F_w . L'expression complète de l'Eq. (2.31) est écrite dans l'annexe A.4.

Équations de mouvement

Les équations du mouvement de la structure peuvent être définies à partir de la fonctionnelle d'Hamilton en appliquant le principe de moindre action ($\Delta\mathcal{H} = 0$). Ce principe s'appuie sur la minimisation du Lagrangien, $\mathcal{L} = e_c - e_d$, par rapport à une variable α et est défini par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,t}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,y}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,xt}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,yt}} \right) \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,xy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,tt}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{,yy}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

où $\alpha_{,i} = \frac{\partial \alpha}{\partial i}$ et $\alpha_{,ij} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial i \partial j}$.

En appliquant l'Eq. (2.32) pour $\alpha = W, \phi_x^1, \psi_x^1, \phi_y^1$ et ψ_y^1 successivement, nous pouvons dresser 5 équations de mouvement et les écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\left([M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} + [K] \right) \{\mathcal{W}\} = \{0\}, \quad (2.33)$$

où $\{\mathcal{W}\} = \{W, \phi_x^1, \psi_x^1, \phi_y^1, \psi_y^1\}^T$ est le vecteur déplacement de la première couche, $[K]$ est la matrice de raideurs généralisées obtenue à partir de l'énergie de déformation du système et $[M]$ est la matrice de masses généralisées obtenue à partir de l'énergie cinétique du système. Les expressions de ces deux matrices sont respectivement détaillées dans les annexes A.6 et A.5.

2.1.5 Solution particulière et équations de dispersion

Plusieurs solutions sont envisageables pour résoudre les équations de mouvement (2.33) établies précédemment. Guyader utilise une solution particulière de la forme d'une onde plane se propageant dans la direction x . Bien que la modélisation proposée par Guyader soit écrite pour les structures orthotropes dans son article [42], cette solution se restreint au cas isotrope [40]. Dans le cas de multicouches anisotropes, où les paramètres matériaux dépendent de la direction, nous avons considéré une onde plane se propageant dans une direction orientée à un angle θ par rapport à l'axe x du repère de référence. Cette onde est également définie par une pulsation ω et un nombre d'onde k :

$$\{\mathcal{W}\} = \{\mathcal{W}_0\} e^{-jk[x \cos(\theta) + y \sin(\theta)]} e^{j\omega t}, \quad (2.34)$$

où $\{\mathcal{W}_0\}$ est un vecteur non nul ne dépendant d'aucune variable d'espace et de temps.

En introduisant cette solution particulière (2.34) dans les équations de mouvement (2.33), nous obtenons le système suivant :

$$\left([\mathcal{K}] - \omega^2 [\mathcal{M}] \right) \{\mathcal{W}_0\} = \{0\}, \quad (2.35)$$

où les matrices de raideur $[\mathcal{K}]$ et de masse $[\mathcal{M}]$ sont de la forme :

$$[\mathcal{K}] = \begin{bmatrix} k^4 l_1 & jk^3 l_2 & jk^3 l_3 & jk^3 l_4 & jk^3 l_5 \\ -jk^3 l_2 & k^2 l_6 & k^2 l_7 & k^2 l_8 & k^2 l_9 \\ -jk^3 l_3 & k^2 l_7 & k^2 l_{10} + l_{37} & k^2 l_{11} & k^2 l_{12} + l_{69} \\ -jk^3 l_4 & k^2 l_8 & k^2 l_{11} & k^2 l_{13} & k^2 l_{14} \\ -jk^3 l_5 & k^2 l_9 & k^2 l_{12} + l_{69} & k^2 l_{14} & k^2 l_{15} + l_{38} \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

$$[\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} k^2 d_1 + d_8 & jkd_2 & jkd_3 & jkd_4 & jkd_5 \\ -jkd_2 & d_6 & d_7 & 0 & d_9 \\ -jkd_3 & d_7 & d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ -jkd_4 & 0 & d_{11} & d_{13} & d_{14} \\ -jkd_5 & d_9 & d_{12} & d_{14} & d_{15} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Les coefficients l et d sont donnés dans l'annexe A.7 et dépendent respectivement des coefficients λ et δ ainsi que de l'angle de propagation θ de l'onde plane. Nous remarquons que ces matrices sont hermitiennes et que les hypothèses de continuité de notre modèle conduisent à une matrice de masse dépendante des paramètres de raideur des couches. Ainsi, lorsque ces paramètres sont complexes, l'amortissement du multicouche est défini à la fois via la matrice de raideur et de masse. De plus, lorsque le système est conservatif, les matrices restent tout de même complexes. Ces différents aspects seront détaillés plus amplement dans la section 2.3.

Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour résoudre l'Eq. (2.35). Shorter [115] transforme le problème aux valeurs propres linéaire en ω^2 en un problème quadratique en k . Cette approche lui permet notamment de pouvoir fixer la fréquence. Le vecteur $\{\mathcal{W}_0\}$ étant non nul, les solutions l'Eq. (2.35) peuvent également être identifiées en résolvant l'équation suivante :

$$\det([\mathcal{K}] - \omega^2[\mathcal{M}]) = 0, \quad (2.38)$$

qui correspond à la relation de dispersion de la structure. Pour une fréquence et une direction fixée, ce déterminant s'écrit sous la forme d'un polynôme de degré 6 en k^2 . Les coefficients de ce polynôme ne seront pas détaillés dans ce manuscrit mais peuvent être là encore obtenus analytiquement grâce à des logiciels de calcul formel tels que Maple ou Matlab. Les 6 solutions dont la partie réelle est négative correspondent à des ondes se propageant de l'infini vers la source et ne sont pas donc pris en compte à cause des conditions de Sommerfeld. Les 6 solutions

restantes correspondent aux nombres d'onde naturels des modes de la structure décrit par le modèle. Ainsi, en faisant varier la fréquence et la direction, nous pouvons identifier les courbes et les surfaces de dispersion $k(f, \theta)$ de la structure. Les racines peuvent cependant se mélanger lors d'un changement de fréquence ou de direction. Ce phénomène apparaît essentiellement lorsque elles se croisent et peut être corrigé par une étude des pentes de chaque racine. Une représentation tridimensionnelle de la forme $(\text{Re}(k), \text{Im}(k), f)$ permet également de suivre plus facilement l'évolution et le croisement des racines dans l'espace. Manconi et Sorokin [70] utilisent ce type de représentation dans leur étude concernant les effets de l'amortissement sur les courbes de dispersion.

Simulation d'un sandwich anisotrope

À titre d'exemple, la Figure 2.3 présente les courbes de dispersion d'un sandwich anisotrope composé de deux peaux en fibres de carbone et d'une âme en bois d'épicéa avec un empilement spécifique. Les caractéristiques des couches de carbone et du bois sont résumées dans le Tableau 2.1. Les résultats de cette simulation correspondent uniquement à ceux du système conservatif. Un second exemple est présenté à la section 2.3.1 dans le cas d'un système non conservatif. La simulation de ce sandwich a été réalisée sur une plage de fréquences supérieure au seuil audible (jusqu'à 100 kHz) afin de visualiser le comportement de tous les modes en fonction de la fréquence. L'axe des abscisses de la Figure 2.3 est divisé en deux parties : le sens positif correspond à la partie réelle des courbes de dispersion et le sens négatif à la partie imaginaire. Cette représentation permet de visualiser à la fois les ondes évanescentes et propagatives.

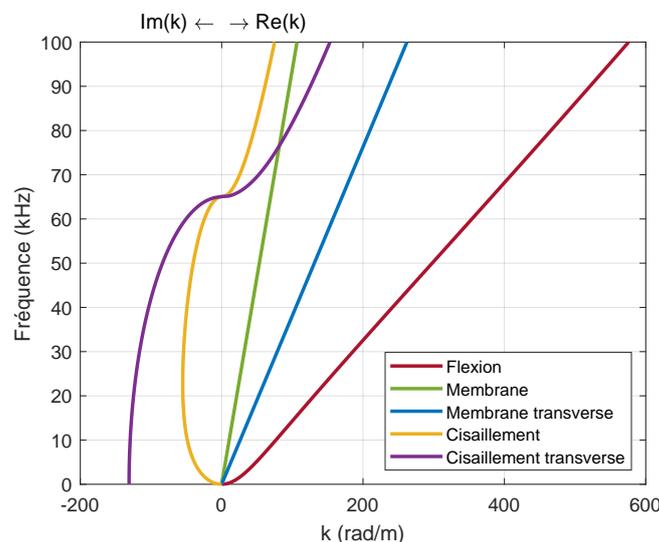


FIGURE 2.3 – Courbes de dispersion dans la direction x d'un sandwich anisotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.1). Flexion (—), Membrane (—), Membrane transverse (—), Cisaillement (—), Cisaillement transverse (—).

Les ondes propagatives possèdent suffisamment d'énergie pour se propager dans la structure. Elles sont définies par un nombre d'onde dont la partie réelle est supérieure à la partie imaginaire. Parmi elles, le mode de flexion (—), représenté à la Figure 2.4a, possède un nombre d'onde

	h	ρ	E_x	E_y	$G_{xy} = G_{yz} = G_{xz}$	ν_{xy}
Carbone	0.2 mm	1450 kg.m ³	120 GPa	6.5 GPa	3.5 GPa	0.35
Bois	7 mm	417 kg.m ³	12 GPa	0.18 GPa	0.62 GPa	0.47

Tableau 2.1 – Paramètres matériaux des couches d’un sandwich anisotrope. Les peaux sont composées de deux couches en fibres de carbone et l’âme est en bois d’épicéa. Orientation des couches : (30°/−30°/0°/−30°/30°).

supérieur à ceux des autres modes. Ce mode est largement étudié dans le domaine vibroacoustique puisqu’au dessus de la fréquence critique de la structure, l’énergie des ondes de flexion est transmise efficacement au fluide environnant sous forme de rayonnement. Notre modèle identifie également les ondes de membrane dans la direction de propagation (—) et dans la direction transverse (—). Ces modes sont représentés par des mouvements de traction et de compression (voir Figures 2.4b et 2.4d). Les ondes évanescentes ou non propagatives sont, quant à elles, définies par un nombre d’onde dont la partie réelle est inférieure à la partie imaginaire et ne possèdent pas assez d’énergie pour pouvoir se propager. L’onde est alors confinée près des singularités telles que les sources ou les limites de la structure. En basse fréquence, le mode de cisaillement (—), représenté à la Figure 2.4c, fait partie de cette catégorie et peut s’apparenter à un mode de flexion évanescent dans ce domaine de fréquence du fait de la symétrie de leur nombre d’onde (voir Figure 2.3). Lorsque la fréquence augmente, le cisaillement de la structure, en particulier celui de l’âme, s’amplifie et permet à l’onde de se propager. Cette transition intervient à la fréquence de coupure du mode (65 kHz ici) pouvant être calculée en fixant $k = 0$ dans l’Eq. (2.38) et en cherchant ω . Une onde cisaillement (—) est également décrite dans la direction transverse de la propagation (voir Figure 2.4e).

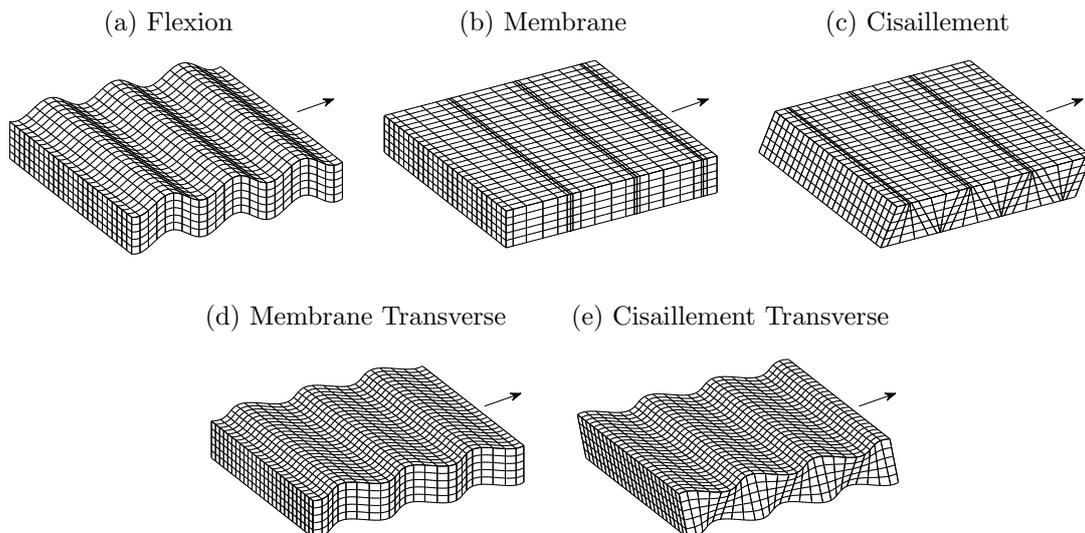


FIGURE 2.4 – Schéma des types d’ondes propagatives décrites par notre modèle. Flexion (a). Membrane (b). Cisaillement (c). Membrane transverse (d). Cisaillement transverse (e). Direction de propagation de l’onde plane (→).

Les surfaces de dispersion de ce sandwich anisotrope sont également présentées à la Figure 2.5 à 5 et 50 kHz. En moyennes fréquences, la flexion (—) est essentiellement gouvernée par le cisaillement du cœur du sandwich. Ainsi, la forme du mode de flexion à 5 kHz est elliptique à cause de l'orthotropie du bois. À plus hautes fréquences, les peaux commencent également à cisailler puisque la longueur d'onde devient de l'ordre de leur épaisseur. Ainsi, la forme du mode de flexion à 50 kHz est définie à partir de l'empilement des couches de carbone. Pour les autres modes, leur forme varie peu sur la gamme de fréquences étudiées. De plus, comme nous l'avons mentionné précédemment, la forme de l'onde de cisaillement (—) est semblable à celle du mode de flexion en basse fréquence.

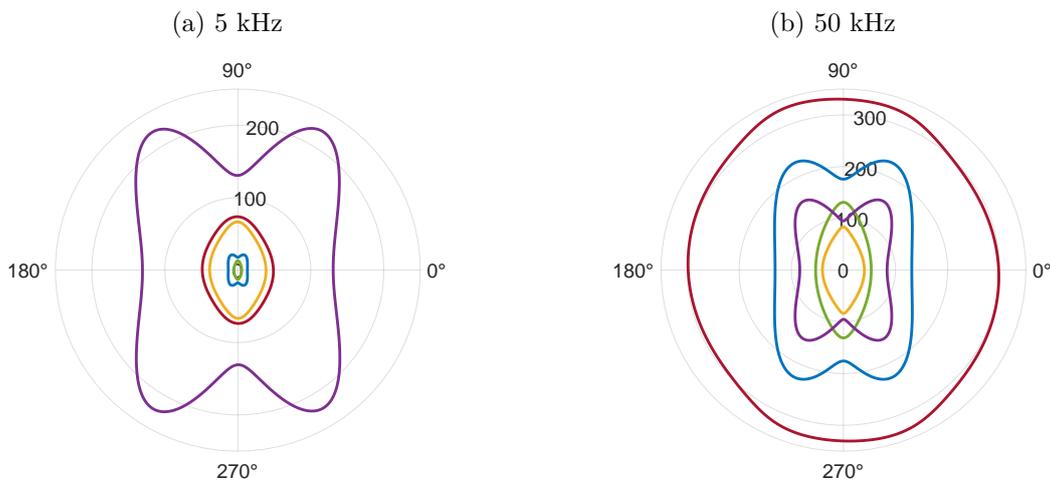


FIGURE 2.5 – Surfaces de dispersion (en valeur absolue) à 5 kHz (a) et 50 kHz (b) d'un sandwich anisotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.1). Flexion (—), Membrane (—), Membrane transverse (—), Cisaillement (—), Cisaillement transverse (—).

Finalement, ces 5 ondes ont été identifiées à partir des 5 degrés de liberté de notre système décrit par le vecteur $\{W\}$. La sixième racine correspond une onde totalement évanescence. Du fait que notre étude vibroacoustique se concentre principalement sur les ondes propagatives, cette racine n'a pas été représentée sur les Figures 2.3 et 2.5 et ne sera pas étudiée dans ce manuscrit.

Comparaison à un modèle de référence

Les résultats de notre modèle ont également été comparés à ceux du modèle éléments finis spectral (SFEM) utilisé par Shorter [115]. Cette comparaison porte sur l'étude des courbes de dispersion, présentées à la Figure 2.6, d'un sandwich isotrope entre 100 Hz et 10 kHz. Les caractéristiques des couches de ce sandwich sont résumées dans le Tableau 2.2. Comme le mentionne Margerit [76] dans sa thèse, le modèle SFEM fournit une solution exacte du problème et est donc une base de référence pour la validation de notre modèle. Les 5 modes propagatifs (flexion (a), membrane (b), cisaillement (c), membrane transverse (d), et cisaillement transverse (e)) identifiés par notre modèle correspondent bien à ceux du modèle SFEM, qui en fournit également un sixième (f). Ce dernier correspond au mode de respiration de la structure

ou au premier mode symétrique des ondes de Lamb. Ce mode forme en réalité la continuité du mode de membrane (b) qui voit son nombre d'onde augmenter brusquement jusqu'à atteindre celui du mode de flexion. Cette transition apparaît à une fréquence de coupure que l'on peut appeler fréquence de respiration (8 kHz ici). En hautes fréquences, la contribution du mode de respiration au rayonnement acoustique de la plaque ne peut être négligée. Notre modèle analytique ne permet cependant pas d'identifier ce mode de respiration à cause de l'hypothèse de déplacement transverse constant et présente donc une limite haute fréquence. La cohérence des résultats concernant les autres modes permet tout de même d'assurer la validité de notre modèle sur le reste de la plage fréquentielle.

	h	ρ	E	ν
Peaux	0.6 mm	2700 kg.m ³	71 GPa	0.3296
Âme	15 mm	48 kg.m ³	30 MPa	0.2

Tableau 2.2 – Paramètres matériaux des couches du sandwich isotrope étudié par Shorter [115].

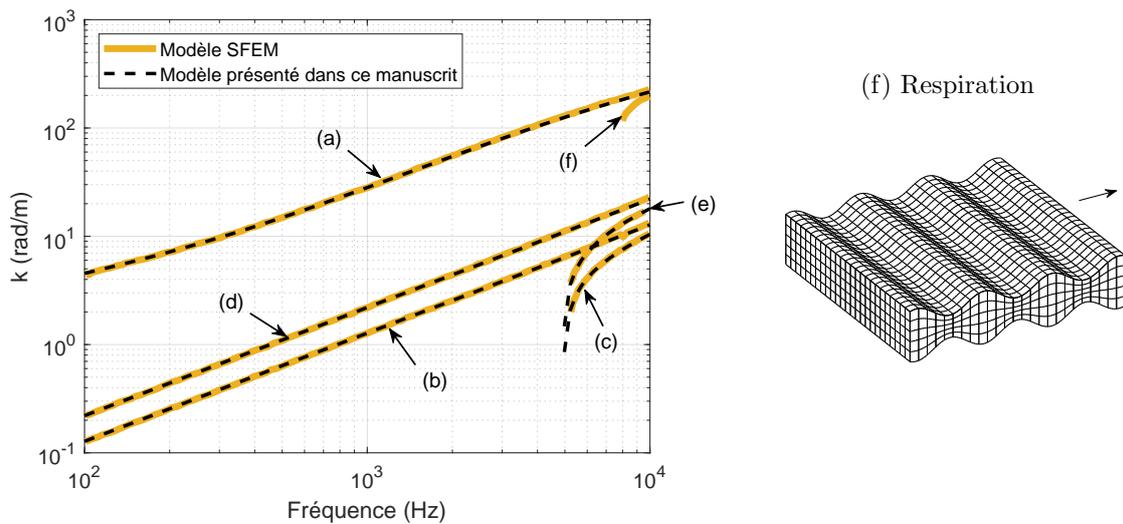


FIGURE 2.6 – Courbes de dispersion dans la direction x d'un sandwich isotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.2). Résultats du modèle SFEM utilisé par Shorter [115] (—), Résultats de notre modèle (---). Schéma du mode de respiration (f).

2.1.6 Équivalence plaque mince

Dans une dernière étape, comme nous l'avons décrit à la section 1.1.3, le multicouche est assimilé à une structure équivalente homogène gouvernée par la théorie de Love-Kirchhoff. Cette comparaison, réalisée à chaque fréquence, permet de caractériser le multicouche à l'aide des paramètres matériaux de la plaque équivalente. La théorie de Love-Kirchhoff décrivant uniquement le mode de flexion de la structure, ces paramètres varieront en fonction de la fréquence selon l'influence du cisaillement dans le multicouche.

Cette méthodologie d'équivalence, proposée par Guyader et Cacciolati pour le cas isotrope [40], a été étendue dans notre travail aux structures multicouches orthotropes laminés. Cette adaptation forme l'un principaux apports de notre modélisation analytique par rapport à la bibliographie. D'après l'annexe C, décrivant la théorie de Love-Kirchoff, la plaque équivalente propre à ce type de structures possède une équation de mouvement de la forme :

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + D_{12} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} = -\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (2.39)$$

où les coefficients D_{ij} correspondent aux rigidités de flexion de la plaque et sont considérées comme étant les paramètres matériaux équivalents du multicouche. Plusieurs points particuliers sont à noter sur ces rigidités. Premièrement, si le multicouche possède des couches orthotropes dont les axes d'orthotropie sont alignés avec les axes x et y , les rigidités D_{16} et D_{26} sont nulles. Deuxièmement, dans le cas d'une structure isotrope, D_{16} et D_{26} sont également nulles et $D_{11} = D_{22} = D_{12}/2$. Le coefficient h correspond à l'épaisseur totale du multicouche et ρ a sa masse volumique équivalente estimée par l'équation :

$$\rho = \frac{\sum_n h_n \rho_n}{\sum_n h_n}. \quad (2.40)$$

Une solution particulière de la forme d'une onde plane a également été choisie pour la structure équivalente :

$$W = W_0 e^{-jk_f[x \cos(\theta) + y \sin(\theta)]} e^{j\omega t}, \quad (2.41)$$

où k_f est le nombre d'onde de flexion calculé par le modèle à l'Eq. (2.38). Afin d'identifier facilement ce nombre d'onde, Guyader émet l'hypothèse que la structure est fine et néglige les effets d'inertie des autres modes. Cette hypothèse se traduit par l'annulation de tous les termes δ dans la matrice de masse (Eq. (2.37)) mise à part δ_{13} représentant la masse de la structure. Ainsi, uniquement le nombre d'onde de flexion est identifié par l'Eq. (2.38) sans se soucier d'une possible interaction avec les racines des autres modes.

En injectant la solution particulière (2.41) dans l'équation de mouvement (2.39), nous obtenons l'équation de dispersion de la plaque équivalente :

$$k_f^4 (D_{11}c^4 + D_{22}s^4 + D_{12}c^2s^2 + D_{16}c^3s + D_{26}cs^3) = \rho h \omega^2, \quad (2.42)$$

avec $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$. Le nombre d'onde de flexion étant à la fois fonction de la direction et de la fréquence, l'Eq. (2.42) peut être écrite sous la forme matricielle suivante à chaque fréquence f et pour i directions différentes :

$$[\Delta] \{\mathcal{D}\} = \rho h \omega^2 \{\kappa\}, \quad (2.43)$$

avec

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} c_1^4 & s_1^4 & c_1^2 s_1^2 & c_1^3 s_1 & c_1 s_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_i^4 & s_i^4 & c_i^2 s_i^2 & c_i^3 s_i & c_i s_i^3 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} c_1 = \cos(\theta_1); \\ s_1 = \sin(\theta_1); \\ c_i = \cos(\theta_i); \\ s_i = \sin(\theta_i); \end{array}$$

$$\{\kappa\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{k_f^4(f, \theta_1)} \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{k_f^4(f, \theta_i)} \end{pmatrix}; \quad \{\mathcal{D}\} = \begin{pmatrix} D_{11}(f) \\ D_{22}(f) \\ D_{12}(f) \\ D_{16}(f) \\ D_{26}(f) \end{pmatrix}.$$

Les rigidités de flexion sont identifiées grâce à une méthode moindres carrés décrite par l'équation :

$$\{\mathcal{D}\} = \rho h \omega^2 \left([\Delta]^T [\Delta] \right)^{-1} [\Delta]^T \{\kappa\}. \quad (2.44)$$

La convergence de la méthode moindres carrés dépend du nombre de directions θ_i choisi à l'Eq. (2.43). Un minimum de 5 valeurs angulaires différentes sont requises pour obtenir correctement les 5 rigidités. La précision des résultats augmente en fonction du nombre de directions choisies. De plus, la répartition de ces angles doit permettre de décrire tout le profil du nombre d'onde dans le plan d'onde, en particulier lorsque ce dernier est de forme complexe. Le nombre d'onde étant π périodique, une répartition sur 180° est généralement suffisante.

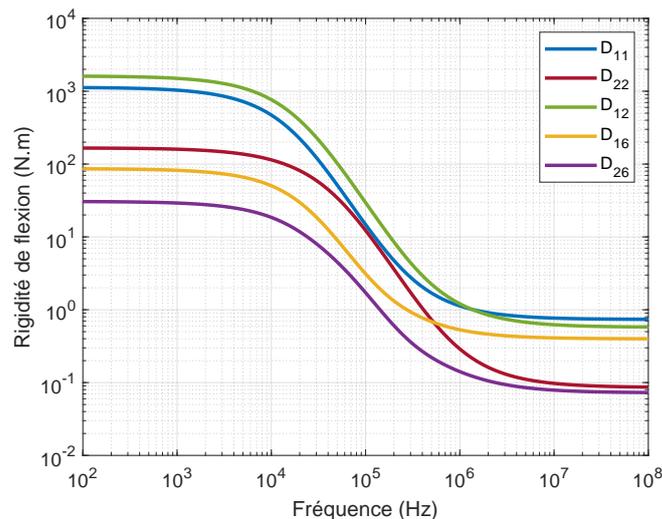


FIGURE 2.7 – Rigidités de flexion équivalentes d'un sandwich anisotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.1). D_{11} (—), D_{22} (—), D_{12} (—), D_{16} (—), D_{26} (—).

En appliquant l'Eq. (2.44) pour toutes les fréquences, les rigidités de flexion D_{ij} permettant de caractériser le multicouche peuvent être décrites en fonction de la fréquence. À titre d'exemple,

les rigidités équivalentes du sandwich en composite carbone et en épicea étudié à la section 2.1.5 sont présentées à la Figure 2.7. À l’instar de l’exemple présentée à la section 1.1.3, les paramètres équivalents chutent en fréquence sous l’influence du cisaillement dans le multicouche. Ainsi, pour des structures épaisses, le cisaillement apparaît plus rapidement en fréquence et la rigidité équivalente chute également plus rapidement. En basses fréquences, les rigidités tendent vers les valeurs données par la théorie CLT (Eq. (C.8)) tandis qu’en hautes fréquences elles tendent vers la somme des rigidités des peaux [31]. Cette dernière asymptote n’apparaît que lorsque les effets d’inertie des autres modes sont négligés. En effet, cette hypothèse modifie la forme du mode de flexion dans les hautes fréquences. La vitesse de phase de ce dernier ne tend plus vers une constante mais vers l’infini, ce qui, comme nous l’avons vu à la section 1.1.1, n’a pas de sens du point de vue physique. En prenant en compte les effets d’inertie, la vitesse de phase tend alors bien vers une constante et les rigidités équivalentes tendent vers zéro. Un exemple de l’influence des effets d’inertie sur le nombre d’onde de flexion et la rigidité équivalente est présenté à la Figure 2.8 à l’aide d’une simulation du sandwich isotrope étudié à la section 2.1.5. La suppression des effets d’inertie peut donc être appliquée dans le cas d’une étude en basse et moyenne fréquence. Au delà, leur prise en compte devient nécessaire.

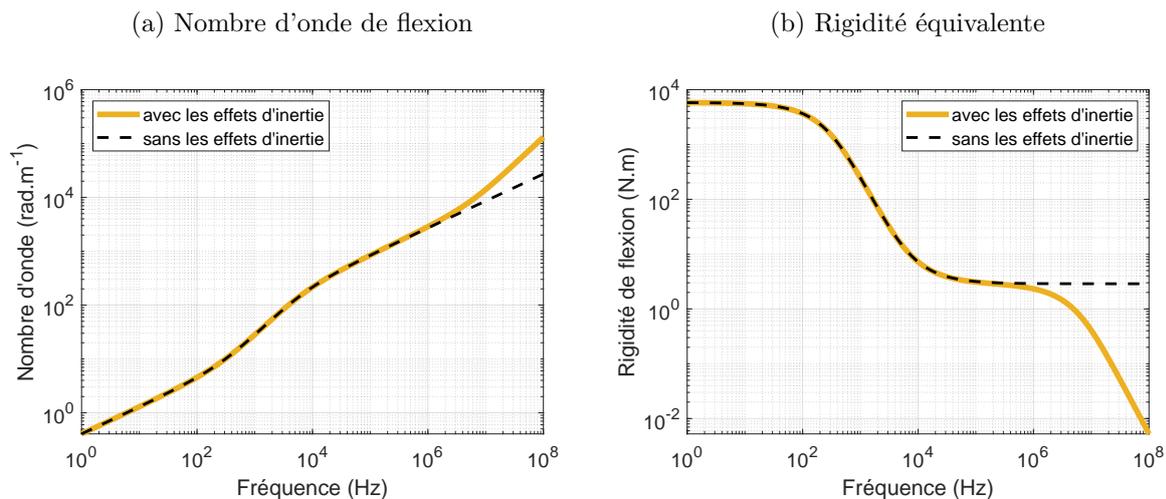


FIGURE 2.8 – Nombre d’onde de flexion (a) et rigidité équivalente (b) d’un sandwich isotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.2) obtenus à partir d’une matrice de masse avec (—) et sans (--) les effets d’inertie.

2.2 Caractérisation expérimentale sur des plaques en composite

Cette section se concentre sur la caractérisation expérimentale de plaques composites ainsi que la comparaison des résultats avec des simulations provenant du modèle décrit à la section 2.1. Trois plaques en fibres de carbone, fournies par l’entreprise Hexcel (Dagneux, France), ont été étudiées. Chacune d’entre elle est composée de 4 couches avec différentes orientations des fibres. Celles de la première sont dans le même sens ($0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$) tandis que celles de la seconde sont croisées ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$). La troisième plaque a un empilement dit symétrique et opposé

($60^\circ / -60^\circ / -60^\circ / 60^\circ$). La résine utilisée dans le processus de fabrication correspond à de l'époxy. Chaque plaque mesure $0.6 \times 0.8 \text{ m}^2$ pour une épaisseur totale de 0.748 mm et possède une masse volumique de 1540 kg.m^{-3} .

2.2.1 Protocole expérimental

Les plaques ont été suspendues par des élastiques à une armature métallique pour simuler de façon réaliste des conditions aux limites libre-libre. L'excitation, sous forme de bruit blanc allant de 1 à 10 kHz, a été réalisée grâce à un pot vibrant (Brüel & Kjær 4810) collé à l'arrière de la structure. Puis, le champ vibratoire de la plaque a été mesuré en utilisant un vibromètre laser à balayage (PSV-400, Polytec) (voir Figure 2.9a). Uniquement la zone rouge, présenté à la Figure 2.9b, a été scannée à travers un maillage régulier de 67×69 points de mesure dont l'espacement entre deux points consécutifs était de 5.3 mm dans les deux directions. Ce maillage a été dimensionné afin d'obtenir au minimum 3 points par longueur d'onde dans la direction de raideur la plus faible et à la plus haute fréquence mesurée afin de respecter les conditions de Shannon spatiales. Les angles décrivant l'empilement des couches des différentes plaques ont pour axe de référence l'axe y du repère de mesure (voir Figure 2.9b), le sens positif étant défini par le sens horaire.

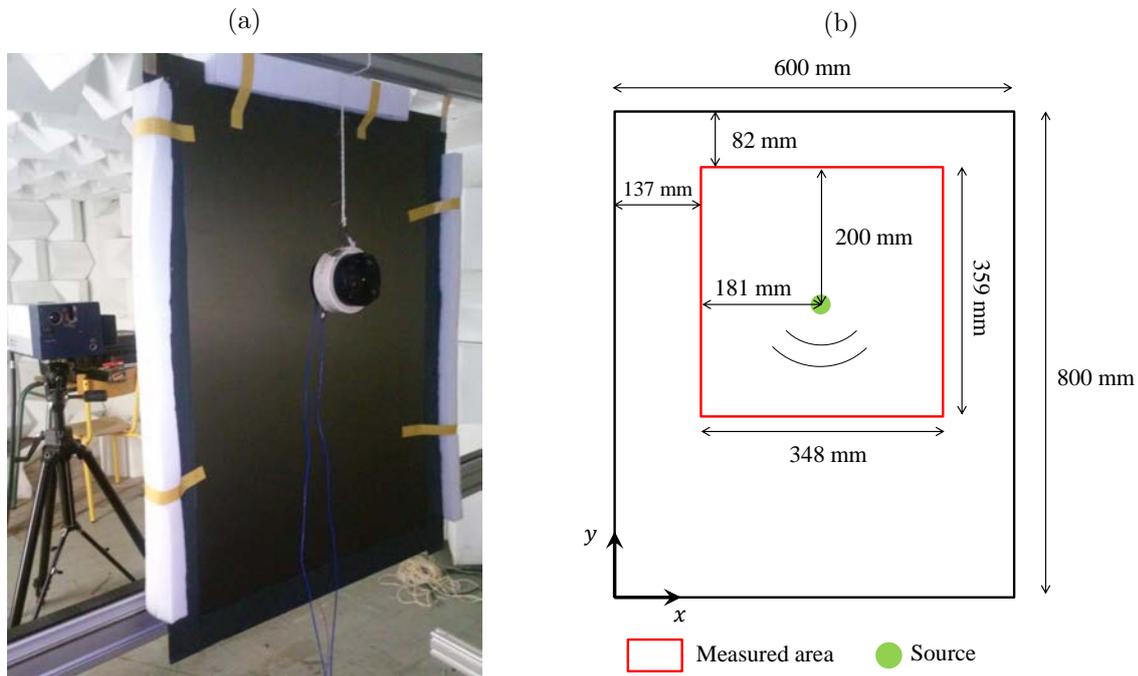


FIGURE 2.9 – Montage expérimental. Photo du dispositif (a). Schéma de la zone mesurée et de l'emplacement de la source (b).

Pour chaque plaque, la méthode IWC, présentée à la section 1.2.2, a été utilisée pour analyser les données mesurées. Cette analyse porte sur l'identification du nombre d'onde naturel de flexion k_f des plaques en fonction de la fréquence et de la direction. En associant ce nombre d'onde à la théorie de Love-Kirchhoff, les rigidités de flexion identifiées expérimentalement pourront être

comparées à celles calculées par le modèle. De plus, comme le montre la photo 2.9a, de la mousse a été scotchée sur les bords de la plaque afin d'augmenter artificiellement l'amortissement de la structure dans cette région et ainsi atténuer les ondes réfléchies (non modélisables par la méthode IWC) pour obtenir un meilleur indice de corrélation. Cette mousse a également permis de diminuer le temps de réverbération de la plaque pour des raisons de temps d'acquisition.

Seule l'identification de la partie réelle des rigidités a été menée sur ce premier cas expérimental, le facteur de perte des fibres de carbone étant beaucoup trop faible (inférieur à 5 pour mille) pour pouvoir être identifié correctement. Ainsi, l'amortissement spatial γ du champ virtuel de la méthode IWC (Eq. (1.23)) a été fixé à zéro.

2.2.2 Plaque composite d'empilement uniforme ($0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$)

La stratégie du choix du domaine de recherche du nombre d'onde k de la méthode IWC est guidée par les données fournies par le constructeur afin de satisfaire des résultats dans le domaine de fréquences étudiées (voir Tableau 2.3). Ce domaine est compris entre 50 et 400 rad.m^{-1} . La Figure 2.10a présente les nombres d'onde fournissant les meilleurs indices de corrélation avec la méthode IWC pour chaque fréquence et direction. Cette direction est définie par un angle θ par rapport à l'axe x du repère de mesure présenté à la Figure 2.9b. Nous pouvons rappeler ici que le nombre identifié par IWC correspond à celui du mode de flexion dont le déplacement transverse est bien sûr prépondérant par rapport à celui des autres modes dans le domaine de fréquences étudiées. L'orthotropie de la structure est bien décrite par la variation du nombre d'onde (inversement proportionnel à la raideur) en fonction de la direction. Les résultats d'IWC restent tout de même bruités puisque cette méthode ne possède pas de technique de régularisation.

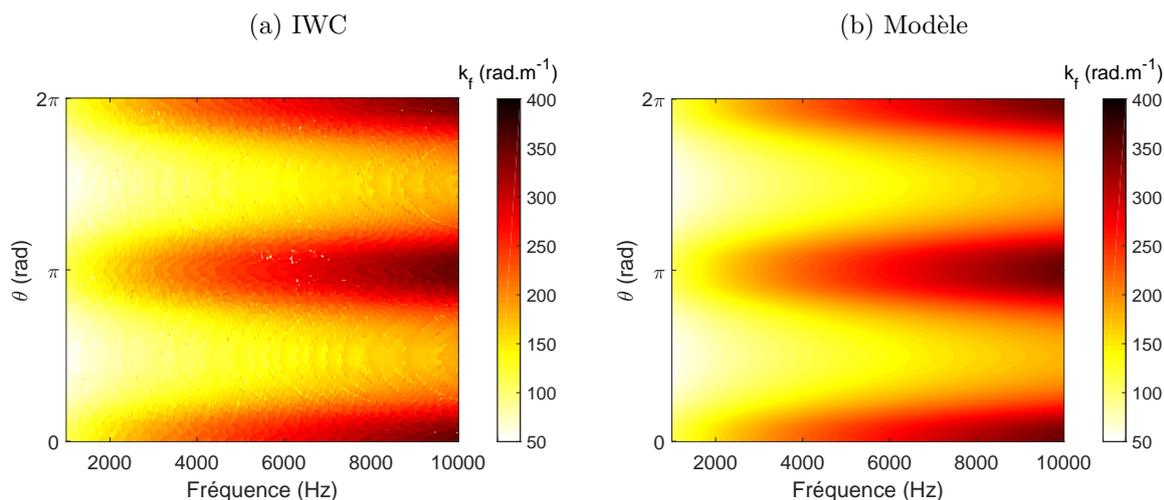


FIGURE 2.10 – Nombre d'onde naturel de flexion k_f de la plaque composite d'empilement uniforme identifié expérimentalement avec la méthode IWC (a) et calculé analytiquement avec le modèle multicouche (b) en fonction de la fréquence et de la direction.

Par la suite, nous avons assimilé le multicouche à une plaque de Love-Kirchhoff afin d'identi-

fier des rigidités de flexion équivalentes en fonction de la fréquence (pointillés sur la Figure 2.11). Pour cela, les nombres d’ondes identifiés par IWC ont été lissés avec la fonction *smooth* de Matlab afin de réduire la sensibilité au bruit de la méthode moindres carrés utilisée dans la méthodologie d’équivalence plaque mince. En effet, les erreurs d’estimation des nombres d’onde sont amplifiées par le terme à la puissance 4 de la relation de dispersion (Eq. (2.42)). Dans cette configuration d’empilement des couches, la structure est purement orthotrope dans le repère de mesure et les rigidités D_{16} et D_{26} de l’équation de dispersion (2.42) sont nulles.

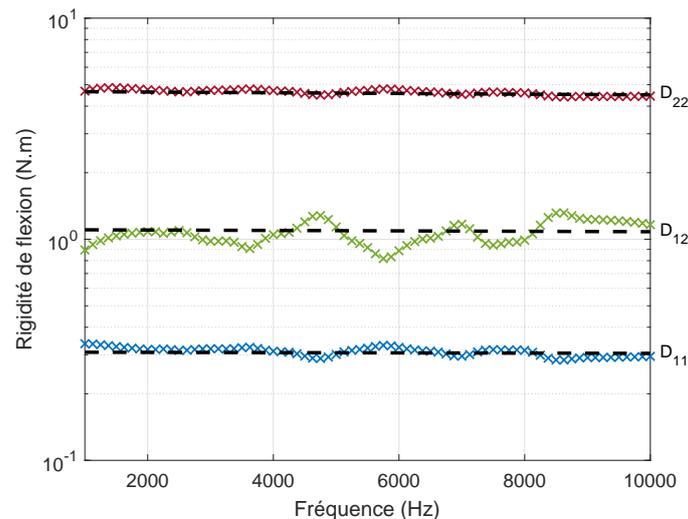


FIGURE 2.11 – Rigidités de flexion équivalentes de la plaque composite d’empilement uniforme identifiées expérimentalement avec la méthode IWC (D_{11} (\times), D_{22} (\times), D_{12} (\times)). Valeurs théoriques du modèle multicouche (—).

Le multicouche a également été simulé avec le modèle analytique présenté tout au long de ce chapitre. Les paramètres matériaux des couches ont, dans un premier temps, été choisis égaux à ceux fournis par le constructeur (voir Tableau 2.3). Quelques écarts ont été observés entre les rigidités identifiées par IWC et celles calculées par le modèle. Nous avons donc, dans un second temps, ajusté les paramètres matériaux des couches (uniquement les modules d’Young et de cisaillement) afin d’obtenir le minimum d’écart entre les résultats du modèle et ceux de la mesure sur toute la plage de fréquences étudiées. Dans cette zone de fréquence et pour nos applications, les modules de cisaillement hors-plan (G_{xz} et G_{yz}) sont supposés égaux au module de cisaillement dans le plan (G_{xy}). Les paramètres permettant de satisfaire ce minimum d’écart sont résumés dans le Tableau 2.3. Le nombre d’onde ainsi que les rigidités équivalentes obtenues par le modèle avec ces paramètres optimaux sont respectivement présentées aux Figures 2.10b et 2.11. Les écarts moyens entre les rigidités identifiées par IWC et celles calculées par le modèle sont de l’ordre de 4.2% pour D_{11} , 2.2% pour D_{22} et 11% pour D_{12} .

Une comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode IWC et le modèle a également été réalisée dans le plan d’onde (k_x, k_y) pour la plus petite et la plus grande fréquence étudiée (voir Figure 2.12). Nous observons, pour ces deux fréquences, une parfaite cohérence entre la courbe calculée par le modèle et le maximum d’indice de corrélation de la méthode IWC. De

2.2. CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE SUR DES PLAQUES EN COMPOSITE

	h	ρ	E_x	E_y	$G_{xy} = G_{yz} = G_{xz}$	ν_{yx}
Paramètres du constructeur	0.187 mm	1540 kg.m ³	9.6 GPa	145 GPa	4.6 GPa	0.31
Paramètres optimaux	0.187 mm	1540 kg.m ³	8.8 GPa	133 GPa	6.6 GPa	0.31

Tableau 2.3 – Paramètres matériaux d’une couche de fibre de carbone donnés par le constructeur et paramètres optimaux permettant d’obtenir une corrélation maximale avec les résultats expérimentaux obtenus par IWC. Les fibres de la couche sont alignés avec l’axe y .

plus, la forme ovale du nombre d’onde, et donc l’orthotropie de la structure, reste identique entre ces deux fréquences. Le pourcentage de corrélation (calculé entre le champ simulé et le champ mesuré pour toutes directions) est faible (au maximum 37%) du fait que la méthode IWC assimile le champ de mesure à une onde plane mais il reste cependant suffisant pour discerner le nombre d’onde naturel de flexion de la plaque.

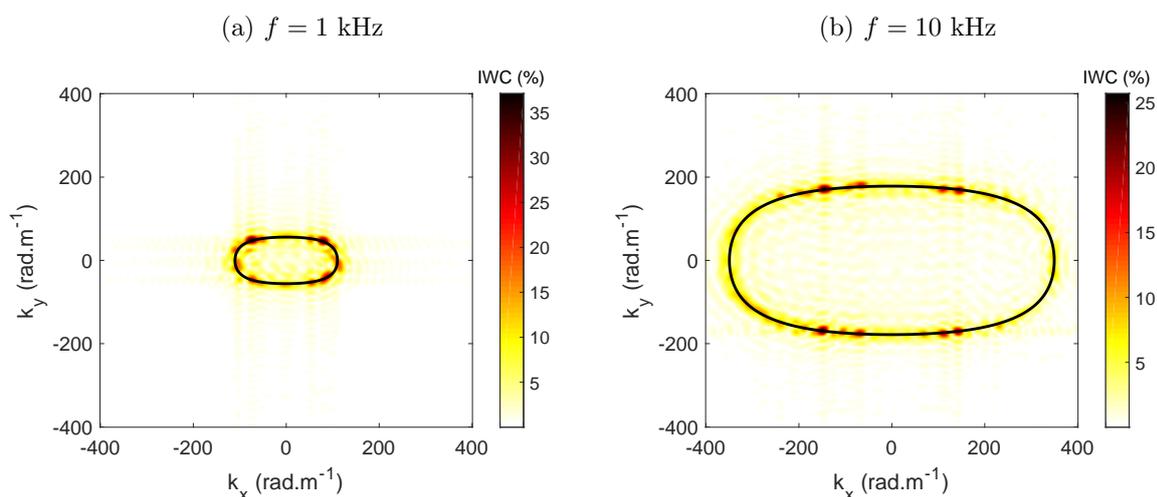


FIGURE 2.12 – Indices de corrélation obtenus par la méthode IWC sur la plaque composite d’empilement uniforme dans le plan d’onde (k_x, k_y) pour $f = 1$ (a) et 10 (b) kHz. Nombre d’onde flexion calculé par le modèle (—).

2.2.3 Plaque composite d’empilement croisé ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

Dans le but de s’assurer de la validité de notre méthodologie de caractérisation, nous avons étudié une seconde plaque orthotrope avec un empilement différent. Une analyse expérimentale similaire au cas précédent a été appliquée avec la méthode IWC en utilisant un domaine de recherche en nombre d’onde identique. Les fibres de carbone et la résine utilisées dans la fabrication de cette deuxième plaque étant identiques à celles de la première, elle a été simulée avec le modèle à l’aide des paramètres du Tableau 2.3 en changeant uniquement l’orientation des couches. Les nombres d’onde naturels de flexion identifiés à la fois par IWC et le modèle sont également très similaires pour cette plaque (voir Figure 2.13).

L’équivalence plaque mince a été à nouveau appliquée sur cette plaque, que ce soit à partir

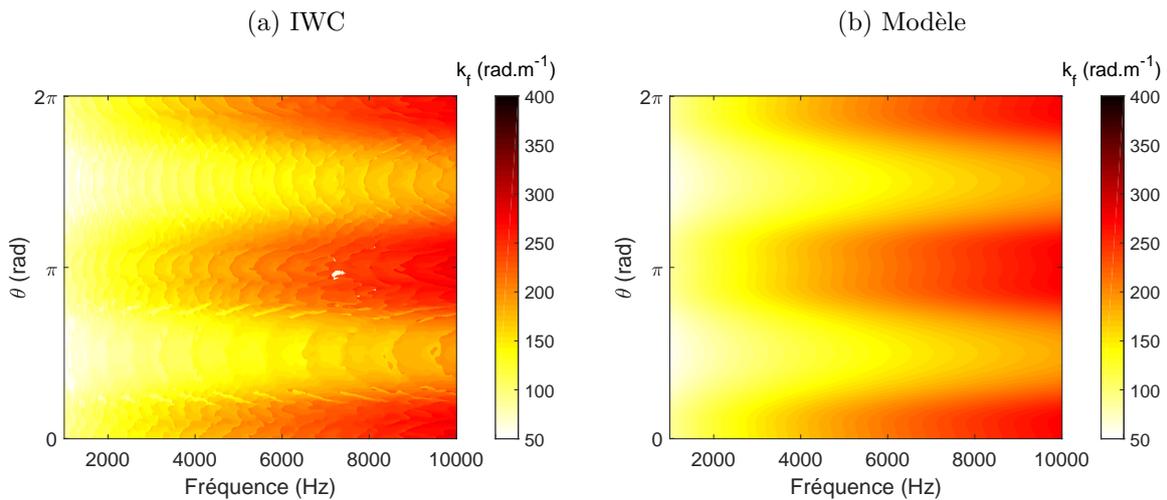


FIGURE 2.13 – Nombre d’onde naturel de flexion k_f de la plaque composite d’empilement croisé identifié expérimentalement avec la méthode IWC (a) et calculé analytiquement avec le modèle multicouche (b) en fonction de la fréquence et de la direction.

des résultats du modèle ou ceux de la méthode IWC qui ont été lissés. Le repère d’orthotropie de cette seconde plaque étant aligné avec le repère de mesure, les rigidités de flexion D_{16} et D_{26} sont supposées nulles. Les résultats, présentés à la Figure 2.14, décrivent parfaitement l’influence du croisement des couches qui implique logiquement une diminution du rapport d’orthotropie (D_{22}/D_{11}) de la structure. Les écarts moyens entre les estimations d’IWC et les prédictions de notre modèle restent, pour chaque rigidité, du même ordre de grandeur que pour la plaque précédente.

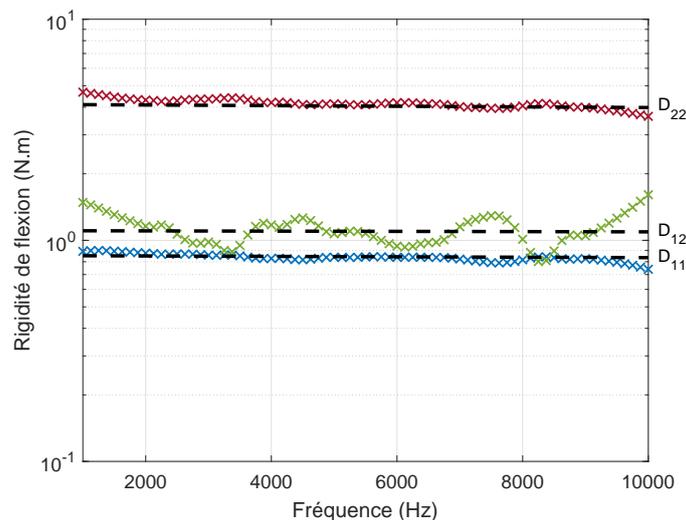


FIGURE 2.14 – Rigidités de flexion équivalentes de la plaque composite d’empilement croisé identifiées expérimentalement avec la méthode IWC (D_{11} (\times), D_{22} (\times), D_{12} (\times)). Valeurs théoriques du modèle multicouche (—).

La diminution du rapport d’orthotropie de la structure est également visible sur les cartographies des plans d’onde (voir Figure 2.15). Finalement, les résultats obtenus par le modèle en

utilisant les paramètres du Tableau 2.3 restent cohérents avec ceux de la méthode IWC pour cette plaque.

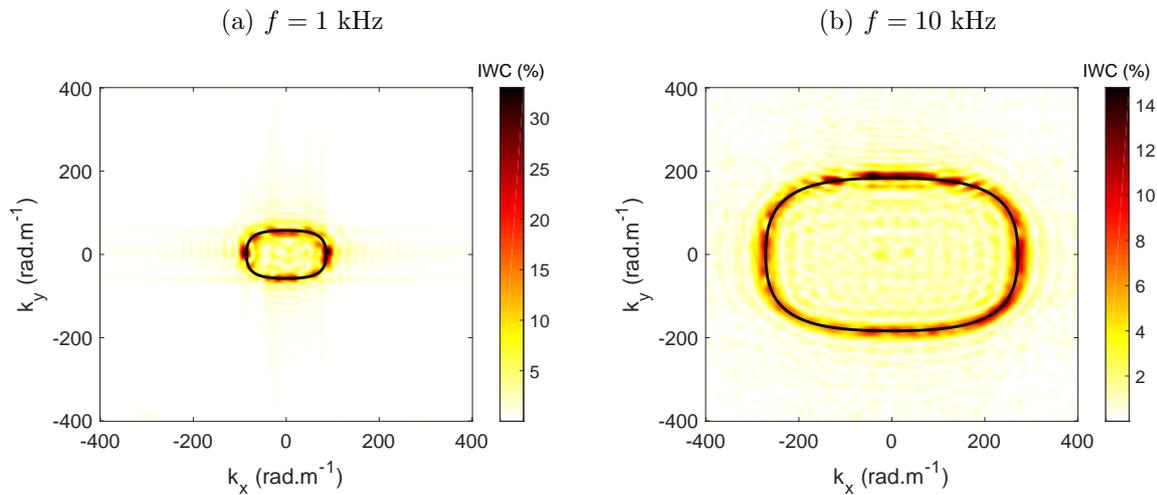


FIGURE 2.15 – Indices de corrélation obtenus par la méthode IWC sur la plaque composite d’empilement croisé dans le plan d’onde (k_x, k_y) pour $f = 1$ (a) et 10 (b) kHz. Nombre d’onde flexion calculé par le modèle (—).

2.2.4 Plaque composite d’empilement laminé ($60^\circ / -60^\circ / -60^\circ / 60^\circ$)

Afin de valider l’aspect anisotrope de notre modèle, nous avons étudié une troisième plaque avec un empilement symétrique et en dehors des axes d’orthotropie. Les données de mesure de cette plaque ont été analysées de la même manière que les deux autres. Cette plaque a également été analysée avec le modèle en utilisant les paramètres du Tableau 2.3. Son empilement spécifique implique que le nombre d’onde de flexion k_f n’est alors plus symétrique par rapport à l’axe $\theta = \pi$ (voir Figure 2.16).

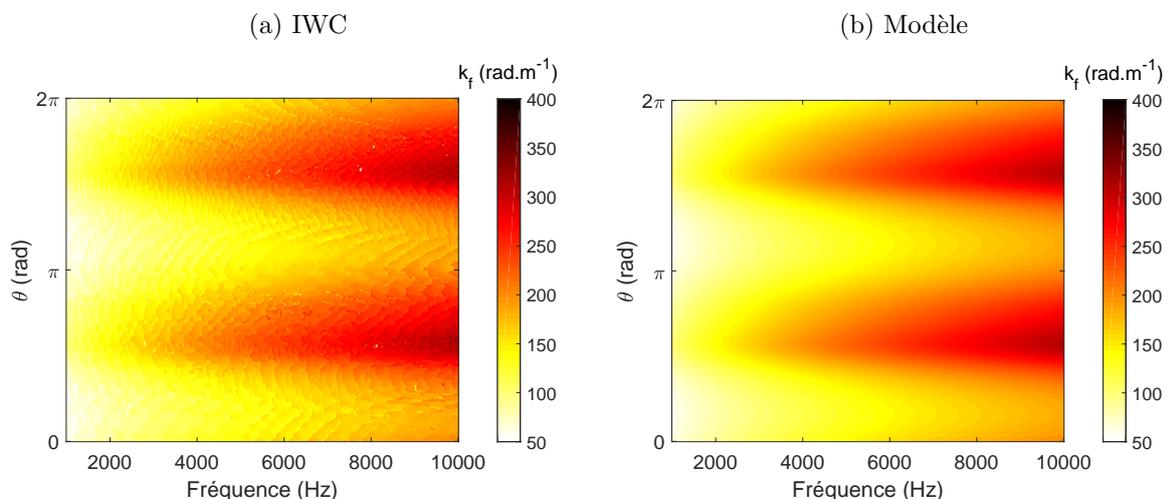


FIGURE 2.16 – Nombre d’onde naturel de flexion k_f de la plaque composite d’empilement laminé identifié expérimentalement avec la méthode IWC (a) et calculé analytiquement avec le modèle multicouche (b) en fonction de la fréquence et de la direction.

La plaque correspond alors à une structure monoclinique possédant un seul plan de symétrie (Oxy). Lors de l'équivalence plaque mince, toutes les rigidités ont donc bien été prises en compte. La Figure 2.17 présente celles identifiées à la fois à partir des résultats du modèle et de la méthode IWC, qui ont encore une fois été lissés pour diminuer la sensibilité de la méthode moindres carrés. Nous remarquons que les trois premières rigidités sont totalement différentes de celles des deux autres plaques, puisque D_{12} est plus importante que D_{11} et D_{22} , à cause de l'empilement spécifique de cette plaque. Les écarts moyens entre les rigidités prédites par notre modèle et IWC restent relativement du même ordre de grandeur que les deux autres plaques (11% au maximum).

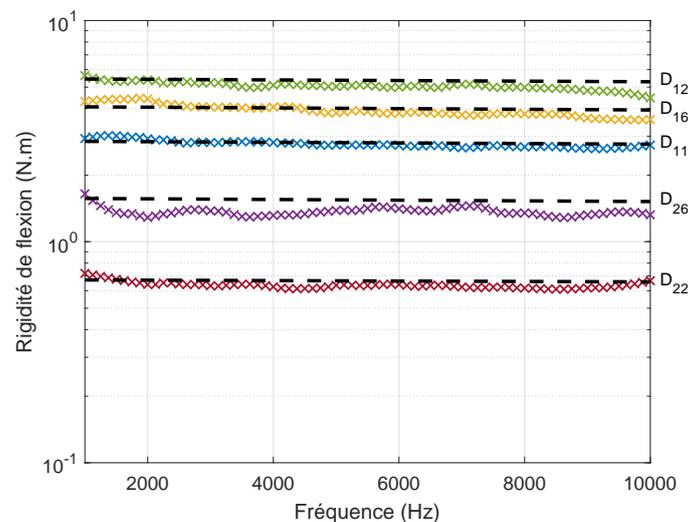


FIGURE 2.17 – Rigidités de flexion équivalentes de la plaque composite d'empilement laminé identifiées expérimentalement avec la méthode IWC (D_{11} (\times), D_{22} (\times), D_{12} (\times), D_{16} (\times), D_{26} (\times)). Valeurs théoriques du modèle multicouche (—).

Les plans d'onde, présentés à la Figure 2.18, fournissent également quelques détails supplémentaires. En effet, leurs formes ne sont plus tout à fait ovales, puisque la structure est monoclinique et ne possède plus qu'un seul plan de symétrie. Ce phénomène correspond au couplage entre les moments de flexion et de torsion de la plaque engendré par l'opposition des angles dans l'empilement des couches.

Finalement, les rigidités des plaques varient très peu dans le domaine de fréquences étudiées. Nous pouvons tout de même remarquer une légère diminution en fonction de la fréquence que ce soit sur les résultats analytiques ou expérimentaux. En effet, leurs épaisseurs étant très faible, le cisaillement de la structure ne devient influent devant la flexion qu'en très hautes fréquences. Ainsi, pour ce type structure, la plaque mince équivalente définie par notre modèle convient parfaitement dans le domaine de fréquences étudiées. De plus, les résultats du modèle sont conformes à ceux de la méthode IWC. La simulation de la première plaque d'empilement uniforme nous a permis d'identifier les paramètres matériaux optimaux des couches permettant d'obtenir la meilleure cohérence entre les résultats expérimentaux et analytiques. Puis, les deux autres plaques, d'empilement différent, ont été simulées à l'aide de ces paramètres optimaux

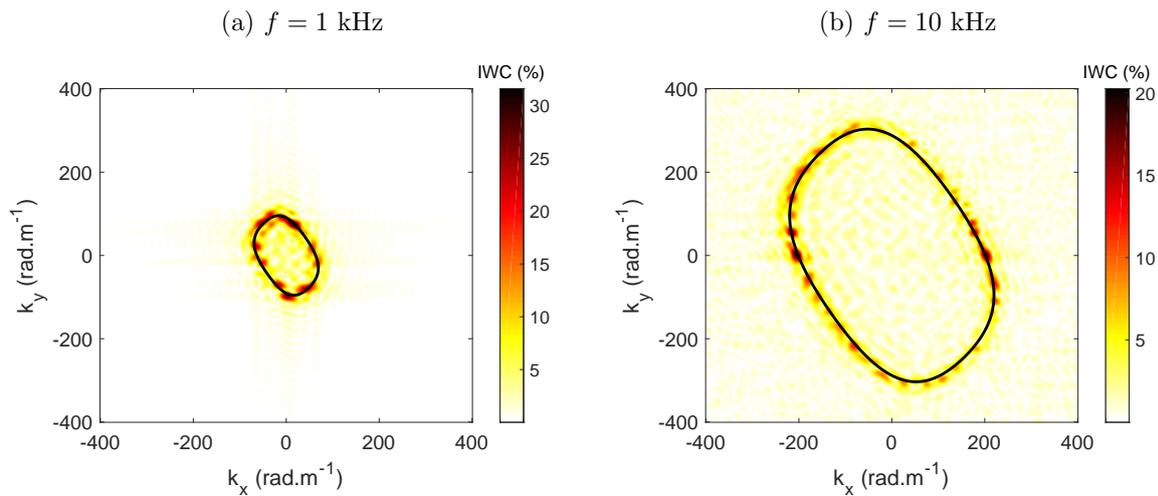


FIGURE 2.18 – Indices de corrélation obtenus par la méthode IWC sur la plaque composite d’empilement laminaire dans le plan d’onde (k_x, k_y) pour $f = 1$ (a) et 10 (b) kHz. Nombre d’onde flexion calculé par le modèle (—).

et les caractéristiques équivalentes obtenues par le modèle concernant ces deux plaques sont conformes à ceux de la méthode IWC.

2.3 Modélisation de l’amortissement

Cette section traite de la modélisation de l’amortissement structural du multicouche dans le modèle présenté dans ce chapitre. Dans une première partie, les courbes de dispersions du système non-conservatif sont présentées au travers d’un exemple. Dans une seconde partie, nous comparons une modélisation équivalente de l’amortissement à une modélisation énergétique basée à la fois sur une définition temporelle et spatiale de la dissipation. Enfin, la section s’achève avec deux comparaisons des résultats de notre modèle à la littérature.

2.3.1 Courbes de dispersion du système non-conservatif

La définition de l’amortissement dans notre modèle se traduit par une loi de comportement complexe pour chaque couche du multicouche. Pour un domaine de fréquences réelles fixées, les courbes de dispersion décrivent alors l’atténuation spatiale des ondes dans le multicouche. À titre d’exemple, la Figure 2.19 présente les courbes de dispersion du sandwich isotrope étudié à la section 2.1.5 avec un facteur de perte de 0.5% sur les peaux et 4% sur le cœur. Nous remarquons que dans le cas non-conservatif, tous les modes possèdent un nombre d’onde ayant à la fois une partie réelle et imaginaire non nulle. Leur propriété de propagation ou de non propagation reste cependant identique pour de faibles dissipations. Nous remarquons également que l’ajout d’amortissement dans le système adoucit la coupure des modes de cisaillement.

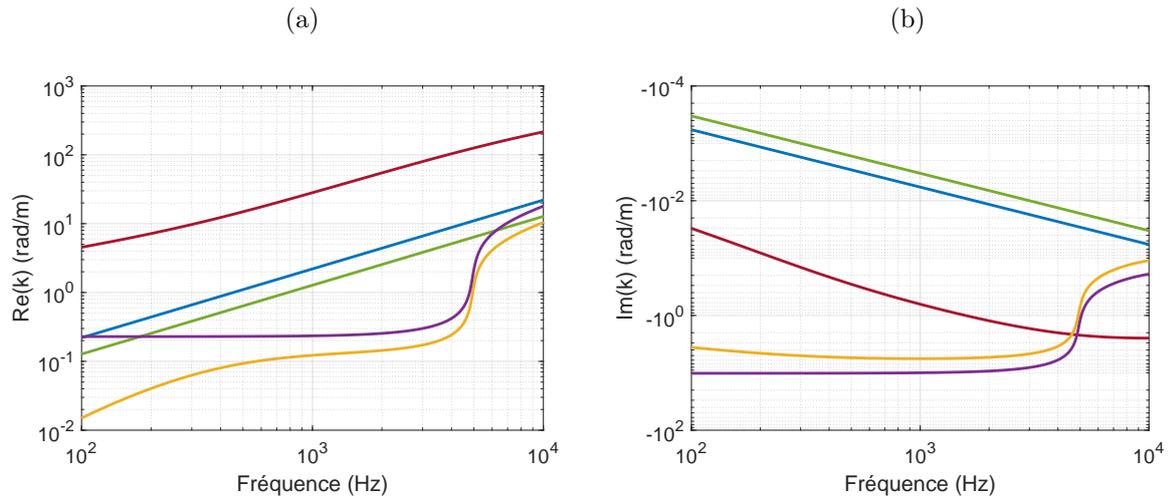


FIGURE 2.19 – Courbes de dispersion dans la direction x d'un sandwich isotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.2). Amortissement des peaux : 0.5%. Amortissement du cœur : 4%. Partie réelle (a) et imaginaire (b) du nombre d'onde. Flexion (—), Membrane (—), Membrane transverse (—), Cisaillement (—), Cisaillement transverse (—).

2.3.2 Comparaison de différentes définitions de l'amortissement

L'amortissement structurel du multicouche est défini pour chaque mode à partir des courbes de dispersion complexes estimées à la section 2.3.1. Plusieurs définitions d'amortissement ont été présentées à la section 1.1.4 et sont résumées dans le Tableau 2.4.

Nom	Définition
Amortissement spatial	$\gamma = \frac{\text{Im}(k)}{\text{Re}(k)}$
Amortissement équivalent	$\eta_{\text{eq}} = -\frac{\text{Im}(k^4)}{\text{Re}(k^4)}$
Amortissement énergétique (méthode MSE)	$\eta = \frac{\Phi^H K_I \Phi}{\Phi^H K_R \Phi}$
Amortissement énergétique (formulation spatiale)	$\eta = -2\gamma \frac{c_g}{c_\phi} = -2r\gamma$
Amortissement énergétique (formulation temporelle)	$\eta = \frac{\text{Im}(\omega^2)}{\text{Re}(\omega^2)}$

Tableau 2.4 – Résumé des différentes définitions d'amortissement structurel présentées dans ce manuscrit.

Dans cette section, nous étudions et comparons trois de ces définitions : la formulation spatiale et temporelle de l'amortissement énergétique ainsi que l'amortissement équivalent. Ce dernier est défini à partir de la méthodologie d'équivalence retenue dans notre modélisation.

L'amortissement du multicouche est alors assimilé à celui de la plaque équivalente qui est défini par un facteur de perte dépendant uniquement du nombre d'onde de flexion complexe. La formulation spatiale de l'amortissement énergétique suppose une dissipation spatiale de l'énergie. Le facteur de perte énergétique est défini en fonction de l'amortissement spatial γ de chaque mode ainsi que du ratio entre la vitesse de groupe et de phase de ce même mode. La formulation temporelle suppose, à l'inverse, une dissipation temporelle de l'énergie. Le facteur de perte énergétique est alors défini par un nombre d'onde réel et une fréquence complexe (voir Tableau 2.4). Cette dernière formulation de l'amortissement énergétique a notamment été comparée à la méthode MSE par Manconi et Mace [69] pour des structures anisotropes.

Amortissement d'un sandwich isotrope

Les différentes définitions de l'amortissement présentées à la section précédente ont été appliquées au sandwich isotrope étudié à la section 2.3.1 (voir Figure 2.20a). L'amortissement équivalent étant défini à partir du mode de flexion, uniquement ce mode a été étudié dans cette comparaison. Le ratio entre la vitesse de groupe et de phase de ce mode a également été tracé à la Figure 2.20b.

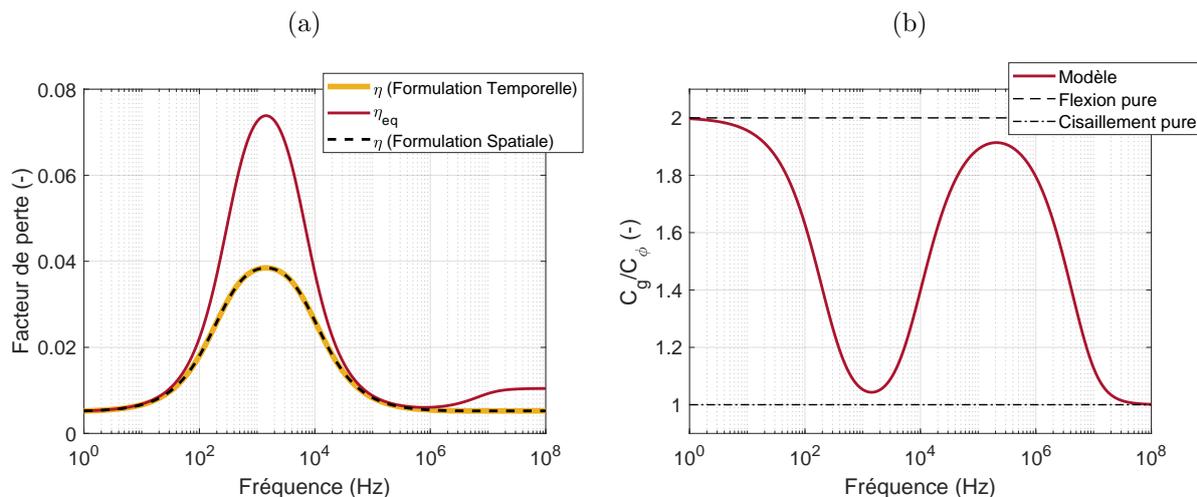


FIGURE 2.20 – (a) Amortissement équivalent (—) et énergétique avec la formulation temporelle (—) et spatiale (--) du mode de flexion d'un sandwich isotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.2). Amortissement des peaux : 0.5%. Amortissement du cœur : 4%. (b) Ratio entre les vitesses de groupe et de phase de ce même mode.

La première constatation que l'on peut émettre en observant la Figure 2.20a est la forme générale des facteurs de perte identifiés par les différentes définitions d'amortissement. Cette forme est caractéristique de l'amortissement des sandwichs ayant un cœur plus amorti que les peaux. En basses fréquences (de 1 à 10 Hz sur la Figure 2.20), le cisaillement du multicouche étant faible, son amortissement tend vers celui des peaux. Lorsque la fréquence augmente (entre 10 Hz et 1 kHz), le cisaillement de l'âme devient important et l'amortissement du multicouche tend vers celui de l'âme (Backström et Nilsson [7], Buteau *et al.* [16], Ege *et al.* [31], Millithaler *et al.* [82]).

Ce phénomène est bien décrit par les deux définitions de l'amortissement énergétique. Cependant, nous observons que l'amortissement équivalent dépasse cette valeur maximale. Cet écart provient de l'équivalence en elle-même, puisque le modèle Love-Kirchhoff ne prend pas en compte le cisaillement de la structure et suppose que k_f est proportionnel à $\sqrt{\omega}$. Cela peut se traduire par un ratio entre la vitesse de groupe et de phase du mode de flexion égale à 2 sur toute la plage de fréquences. Cependant, comme nous pouvons l'observer sur la Figure 2.20b, le ratio calculé par notre modèle varie entre 2 (flexion pure : $k_f \propto \sqrt{\omega}$) et 1 (cisaillement pur : $k_f \propto \omega$). À plus hautes fréquences (entre 10^3 et 10^6 kHz), un phénomène de découplage entre les couches est observé et l'amortissement du multicouche tend une nouvelle fois vers celui des peaux. Enfin, en très hautes fréquences (à partir de 10^6 Hz), les peaux commencent à cisailer. Ce phénomène est bien pris en compte par les formulations énergétiques (ratio c_g/c_ϕ tend vers 1) et l'asymptote hautes fréquences de leur amortissement est bien égale à la valeur de l'amortissement des peaux. Cependant, l'amortissement équivalent ne décrivant pas ce cisaillement (ratio $c_g/c_\phi = 2$), il possède une valeur asymptotique deux fois plus importante qui ne correspond pas à l'amortissement des peaux.

Par la suite, nous avons étudié l'influence de certains paramètres comme l'épaisseur du cœur sur l'amortissement du sandwich. Les Figures 2.21 et 2.22 présentent les facteurs de perte et les ratios c_g/c_ϕ du sandwich étudié précédemment pour différentes épaisseurs du cœur. Lorsque l'épaisseur de l'âme est proche de celles des peaux, le cisaillement de la structure a peu d'influence comparé à la flexion. Le ratio c_g/c_ϕ est alors supérieur à 1 dans la zone de transition (entre 100 Hz et 10 kHz ici) et la valeur maximale de l'amortissement du sandwich est inférieur à l'amortissement de l'âme. Au contraire, lorsque l'âme est épaisse, le cisaillement devient influent devant la flexion plus rapidement en fréquence et sur une plage fréquentielle plus grande. Le ratio c_g/c_ϕ et l'amortissement du sandwich sont alors respectivement proche de 1 et de l'amortissement de l'âme dans la zone de transition. La surestimation faite par l'équivalence plaque mince sur l'amortissement équivalent est également présente quel que soit l'épaisseur mais est cependant plus faible pour une âme fine puisque le cisaillement est moins influent. Le comportement hautes fréquences, étant gouverné par celui des peaux, reste quant à lui identique quel que soit l'épaisseur du cœur.

Pour synthétiser ce paragraphe, l'hypothèse de plaque mince utilisée dans la définition de l'amortissement équivalent suppose un ratio entre les vitesses de groupes et de phase constant et égale à 2 sur toute la plage de fréquences. Ces hypothèses entraînent quelques erreurs d'estimation notamment sur la maximum d'amortissement et la valeur asymptotique en hautes fréquences. En prenant en compte les variations de ce ratio, la formulation spatiale de l'amortissement énergétique obtient des résultats similaires à ceux de la formulation temporelle. Cette observation rejoint la conclusion faite par Lyon et DeJong [68] stipulant que pour de faibles perturbations, ces deux formulations sont identiques.

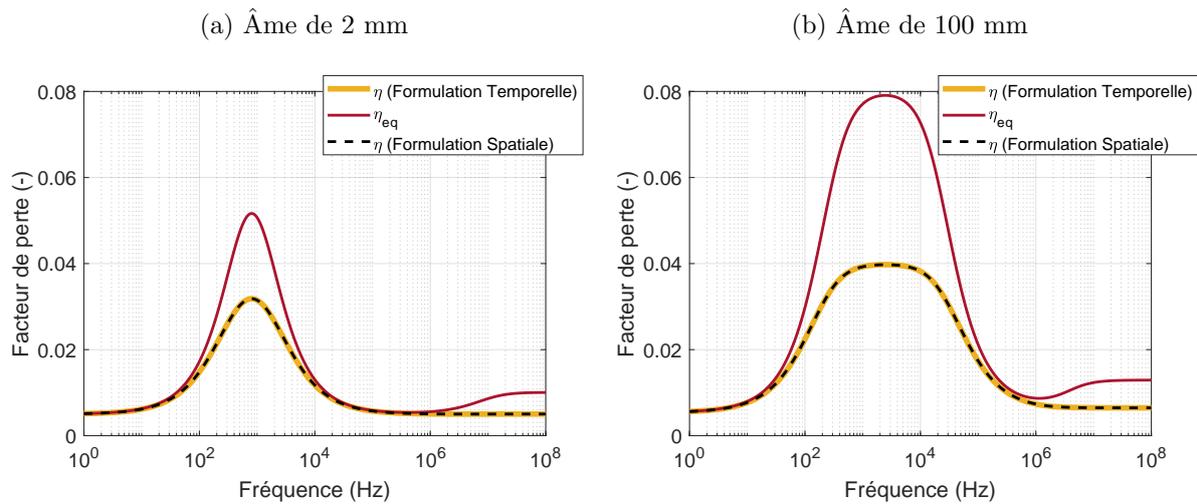


FIGURE 2.21 – Amortissement équivalent (—) et énergétique avec la formulation temporelle (—) et spatiale (---) du mode de flexion d'un sandwich isotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.2). Épaisseur du cœur de 2 mm (a) et de 100 mm (b). Amortissement des peaux : 0.5%. Amortissement du cœur : 4%.

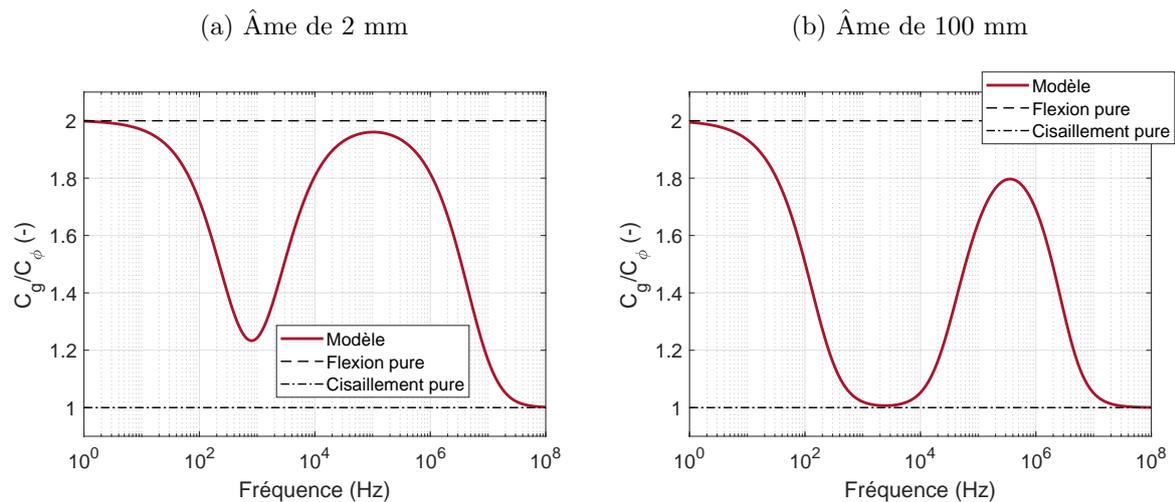


FIGURE 2.22 – Ratio entre les vitesses de groupe et de phase du mode de flexion d'un sandwich isotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.2) avec une épaisseur du cœur de 2 mm (a) et de 100 mm (b).

Amortissement énergétique dans le cas de fortes dissipations

Dans le cas de fortes dissipations, des écarts peuvent être observés entre la définition spatiale et temporelle de l'amortissement énergétique. À titre d'exemple, la Figure 2.23a compare les deux formulations dans le cas du sandwich isotrope étudié à la section 2.3.1 avec un amortissement artificiel de 80% sur l'âme. Des différences apparaissent entre les deux définitions dans la zone de transition.

Pour corriger ces différences, nous proposons de redéfinir la formulation spatiale de l'amortissement énergétique dont la définition, donnée à l'Eq. (1.18), a été développée en supposant que les dissipations étaient faibles. Pour cela, nous reprenons la formulation de Lyon et DeJong [68],

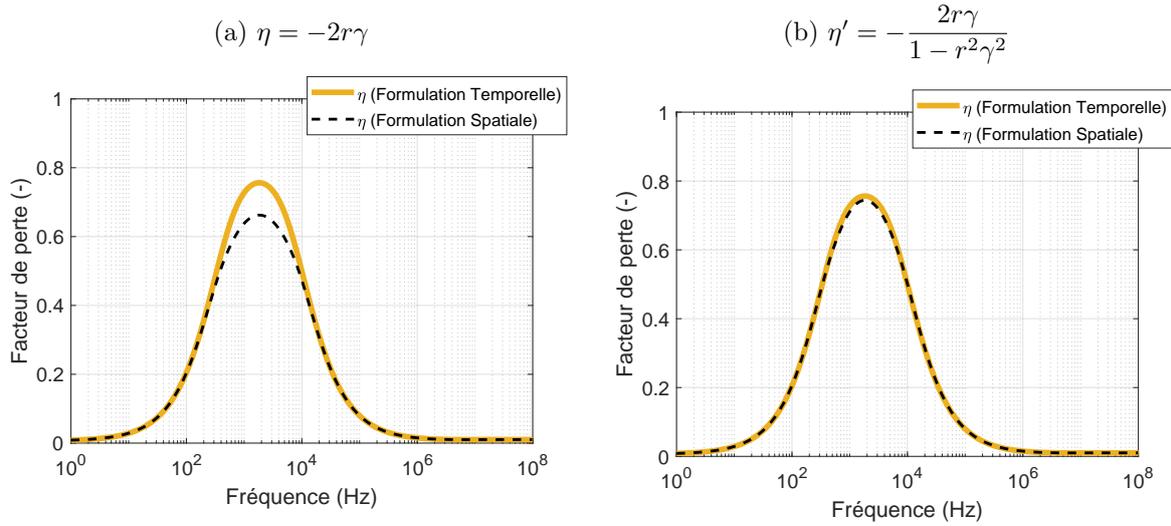


FIGURE 2.23 – Formulation spatiale (---) obtenue à partir de $\eta = -2r\gamma$ (a) et de $\eta' = -2r\gamma/(1 - r^2\gamma^2)$ (b) et temporelle (—) de l'amortissement énergétique du mode de flexion d'un sandwich isotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.2). Amortissement des peaux : 0.5%. Amortissement du cœur : 80%.

qui définit l'amortissement énergétique par une perturbation en fréquence $\Delta\omega$ de tel sorte que les courbes de dispersion complexes de la structure s'écrivent :

$$k(\omega) \rightarrow k(\omega + j\Delta\omega). \quad (2.45)$$

Cette perturbation en fréquence est accompagnée par une perturbation en nombre d'onde Δk toutes deux reliées par la vitesse de groupe $c_g = \Delta\omega/\Delta k$ conduisant ainsi à une onde plane de la forme :

$$e^{-jkx} \rightarrow e^{-jk(1+j\gamma)x} = e^{-jkx} e^{-\Delta kx} = e^{-jkx} e^{-\Delta\omega x/c_g}. \quad (2.46)$$

Nous pouvons alors faire le lien entre la perturbation Δk et l'amortissement spatial γ :

$$\gamma = -\frac{\Delta k}{k}, \quad (2.47)$$

ainsi qu'entre la perturbation $\Delta\omega$ et la formulation temporelle de l'amortissement énergétique η :

$$\eta = \frac{\text{Im}((\omega + j\Delta\omega)^2)}{\text{Re}((\omega + j\Delta\omega)^2)} = \frac{2\omega\Delta\omega}{\omega^2 - \Delta\omega^2}. \quad (2.48)$$

Une nouvelle formulation spatiale de l'amortissement énergétique η' peut alors être donnée en assimilant ce dernier à sa formulation temporelle :

$$\eta' = \frac{2\omega c_g \Delta k}{\omega^2 - c_g^2 \Delta k^2} = -\frac{2\omega c_g \gamma k}{\omega^2 - c_g^2 \gamma^2 k^2} = -\frac{2r\gamma}{1 - r^2\gamma^2}, \quad (2.49)$$

où r représente le ratio entre la vitesse de groupe et de phase.

Pour de faibles dissipations, γ étant petit, le dénominateur de η' a été négligé devant son

numérateur et l'on retrouve bien la définition précédente de $\eta = -2r\gamma$. Cette nouvelle définition de η est également comparée à la formulation temporelle à la Figure 2.23b pour le même sandwich isotrope. L'amortissement énergétique de structures multicouches très amorties peut ainsi être estimé uniquement à partir de son nombre d'onde complexe. Cet aspect peut s'avérer très intéressant en terme d'applications expérimentales où le nombre d'onde, en particulier celui de flexion, reste un paramètre aisément accessible par la mesure. Les sections suivantes ont pour but de comparer cette nouvelle formulation spatiale de l'amortissement énergétique à des résultats de la littérature obtenus notamment grâce à la méthode MSE.

2.3.3 Amortissement d'un vitrage automobile : comparaison au modèle de Shorter

Cette section se concentre sur l'estimation analytique de l'amortissement d'un vitrage feuilleté, initialement étudié par Shorter [115]. Cette vitre est composée de deux peaux en verre séparées par une couche de PVB (polybutyral de vinyle) dont les caractéristiques sont résumées dans le Tableau 2.5. Comme tout polymère, le PVB possède un module de Young et un amortissement dépendant de la fréquence (voir Figure 2.24). De plus, le faible facteur de perte du verre a été négligé devant celui du PVB.

	h	ρ	E	ν	η
Peaux	4 mm	2300 kg.m ³	62 GPa	0.24	0
Âme	0.75 mm	1000 kg.m ³	voir Figure 2.24	0.49	voir Figure 2.24

Tableau 2.5 – Paramètres matériaux des couches d'un vitrage de voiture étudié par Shorter [115].

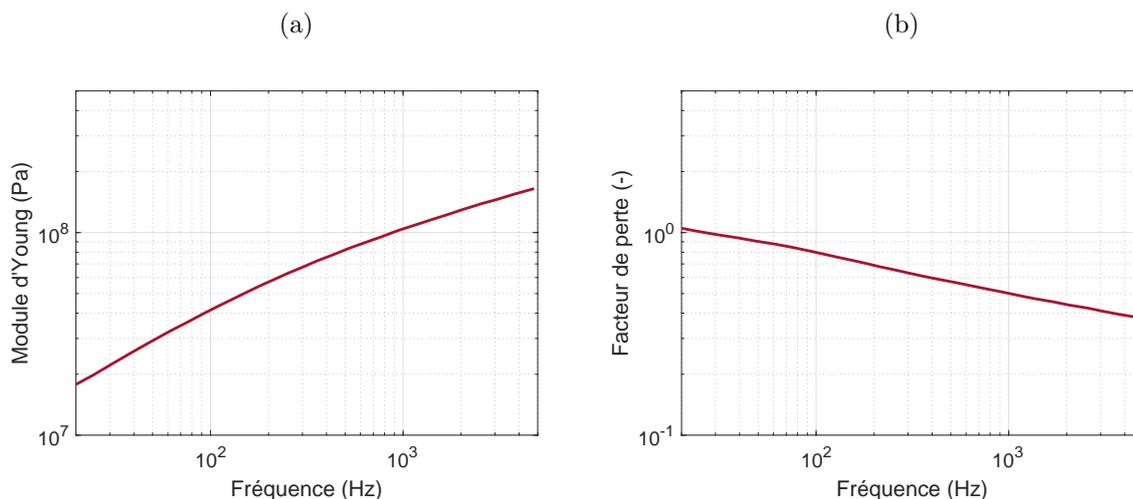


FIGURE 2.24 – Évolution fréquentielle des paramètres viscoélastiques de la couche de PVB d'une vitre de voiture (caractéristiques des autres couches au Tableau 2.5). Module de Young (a). Facteur de perte (b).

Shorter a estimé, avec le modèle éléments finis SFEM, les amortissements des modes de flexion, de membrane et de cisaillement de ce sandwich à l'aide de la méthode MSE.

Afin de valider les estimations de notre modèle par rapport aux résultats de Shorter, nous avons dans un premier temps estimé l'amortissement énergétique en utilisant la même formulation de la méthode MSE. Tel que nous l'avons mentionné à la section 1.1.4, cette formulation est quelque peu différente de celle présentée dans le Tableau 2.4 et s'écrit pour un mode r donné :

$$\eta_r = \frac{\sum_n \eta_n \Phi_r^H K_{R,n} \Phi_r}{\Phi_r^H K_R \Phi_r}, \quad (2.50)$$

où η_n et $K_{R,n}$ correspondent respectivement à l'amortissement et la matrice de raideur du système conservatif de la couche n tandis que $K_R = \sum_n K_{R,n}$. Les vecteurs propres Φ_r du mode r sont déterminés à partir d'une recherche aux valeurs propres de la formulation matricielle de l'équation de mouvement (2.35).

Dans un second temps, l'amortissement énergétique a également été déterminé via la formulation spatiale définie à l'Eq. (2.49). Les résultats obtenus à partir de ces différentes formulations sont comparés à la Figure 2.25 pour chaque mode.

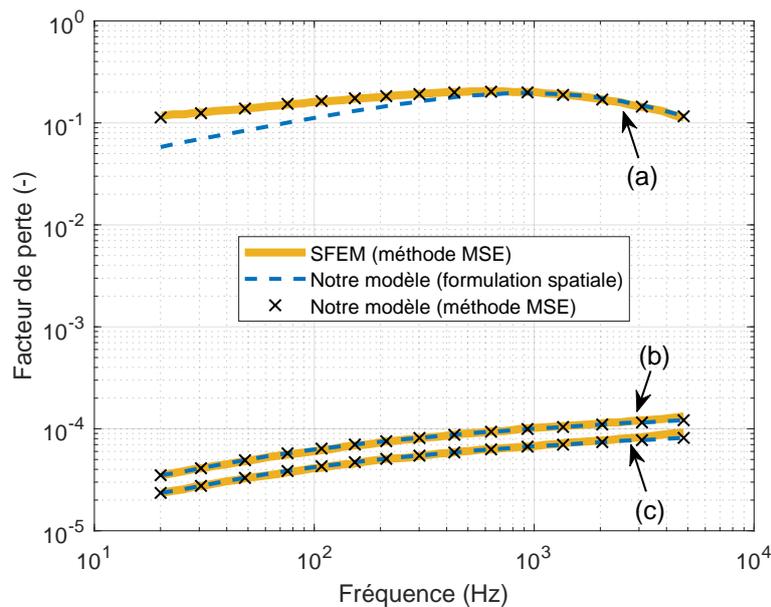


FIGURE 2.25 – Amortissement énergétique des modes de flexion (a), membrane (b) et cisaillement (c) d'une vitrage automobile (caractéristiques des couches au Tableau 2.5) estimés par le modèle SFEM (Shorter [115]) avec la méthode MSE (—) ainsi que notre modèle avec la formulation spatiale défini à l'Eq. (2.49) (--) et avec la méthode MSE (×).

Nous remarquons tout d'abord qu'avec une même définition de l'amortissement énergétique (méthode MSE), les résultats prédits par notre modèle sont identiques à ceux du modèle SFEM. Les estimations obtenues avec la formulation spatiale de l'amortissement énergétique sont cependant différentes concernant le mode de flexion (a) en basses fréquences. Dans la gamme de fréquences étudiées, l'énergie de ce mode est principalement concentrée dans la feuille en PVB qui cisaille. L'amortissement de cette feuille étant supérieur à 100% en basses fréquences, cet écart peut provenir des hypothèses de la méthode MSE qui ne sont valides que pour des

faibles dissipations. De plus, la différence entre les résultats s'estompe avec la fréquence lorsque l'amortissement du PVB diminue. Les amortissements des modes de membrane (b) et de cisaillement (c) estimés par la formulation spatiale et par la méthode MSE sont quant à eux identiques. Ils sont cependant très faibles puisque, comme le mentionne Shorter, l'énergie de ces ondes est principalement concentrée dans les peaux dont l'amortissement a été fixé à zéro.

2.3.4 Amortissement d'un sandwich orthotrope : comparaison au modèle de Ghinet

Cette section traite de l'estimation analytique de l'amortissement d'un sandwich orthotrope. Ce sandwich, initialement étudié par Ghinet et Atalla [35] possède des peaux en composite en fibres de carbone et une âme en polymère. Les caractéristiques de ses couches sont résumées dans le Tableau 2.6. Chaque peau est composée d'une seule couche de carbone alignée avec l'axe x qui est définie par des paramètres élastiques orthotropes et un amortissement isotrope. Le polymère est quant à lui isotrope et possède un fort amortissement.

	h	ρ	E_x	E_y	$G_{xy} = G_{yz}$	G_{xz}	ν_{xy}	η
Peaux	1.52 mm	1600 kg.m ³	125 GPa	12.5 GPa	5.9 GPa	3.0 GPa	0.4	0.01
Âme	0.127 mm	970 kg.m ³	2.1 MPa	2.1 MPa	0.7 MPa	0.7 MPa	0.49	0.5

Tableau 2.6 – Paramètres matériaux des couches d'un sandwich orthotrope étudié par Ghinet et Atalla [35]. Les peaux sont des composites en fibres de carbone tandis que l'âme est un polymère.

Ghinet a estimé l'amortissement de ce sandwich en utilisant son modèle DLM pour *Discrete Laminate Model*. Ce modèle fait partie de la catégorie des modèles Layer-Wise et utilise également une cinématique de Mindlin par couche. Dans le cas de structure sandwich, Ghinet a ajouté un degré de liberté supplémentaire à son modèle en supprimant l'hypothèse de déplacement transverse constant pour le cœur du sandwich. Le mode de respiration de la structure est alors décrit par une fonction trigonométrique dans l'épaisseur. Ghinet utilise la méthode MSE, défini à l'Eq. (2.50), pour identifier l'amortissement énergétique du sandwich qui dépend à la fois de la fréquence et de la direction puisque la structure est orthotrope.

La Figure 2.26 compare les résultats de Ghinet et ceux obtenus par notre modèle avec la méthode MSE et la formulation spatiale de l'amortissement énergétique (Eq. (2.49)). Ces résultats correspondent uniquement à l'amortissement du mode de flexion et sont présentés pour différentes directions ainsi qu'une moyenne sur toutes les directions. À partir de ces résultats, nous pouvons tout d'abord observer que l'orthotropie de la structure modifie principalement la valeur et la position du maximum d'amortissement selon la direction. Ce comportement est bien décrit par les différentes définitions de l'amortissement énergétique. Quelques différences peuvent tout de fois être notées entre les deux modèles avec la méthode MSE, notamment à 90°. Ces différences peuvent provenir du mouvement de dilatation du cœur, décrit par le modèle de Ghinet et que notre modèle ne prend pas en compte. De plus, d'autres écarts entre la formulation spatiale et la méthode MSE sont visibles avec notre modèle et peuvent encore une fois être dus

à la validité de la méthode MSE pour de fortes dissipations. Nous remarquons également que l'amortissement du multicouche reste bien inférieur à celui du polymère puisque ce dernier est de faible épaisseur devant les peaux et cisaille donc peu.

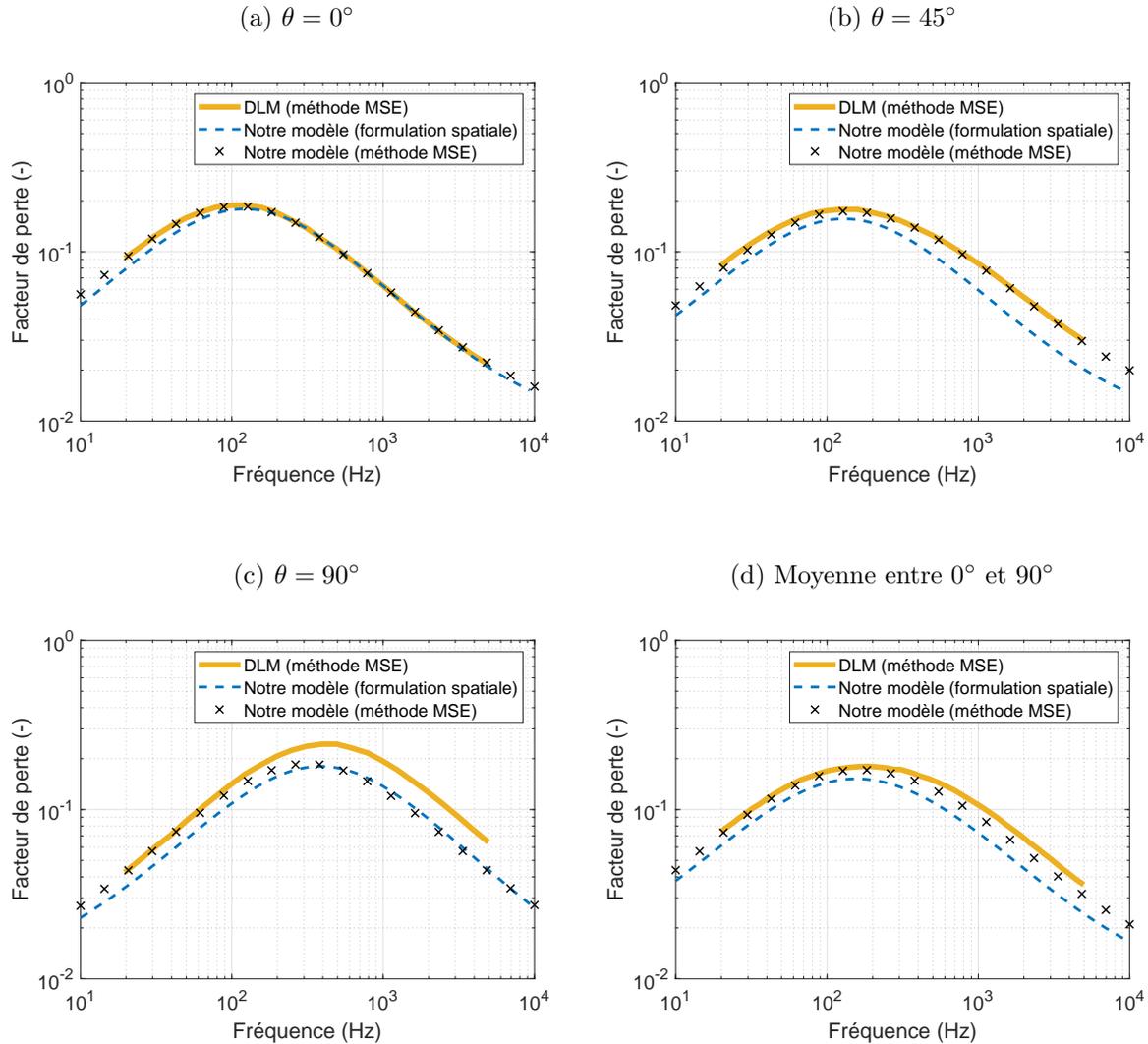


FIGURE 2.26 – Amortissement énergétique du mode de flexion d'un sandwich orthotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.6) estimé par le modèle DLM de Ghinet et Atalla [35] avec la méthode MSE (—) ainsi que notre modèle avec la formulation spatiale défini à l'Eq. (2.49) (---) et avec la méthode MSE (×). $\theta = 0^\circ$ (a). $\theta = 45^\circ$ (b). $\theta = 90^\circ$ (c). Moyenne entre 0° et 90° (d).

2.4 Conclusion

Dans ce second chapitre, nous avons développé un modèle analytique équivalent de multicouche anisotrope à partir des travaux de Guyader et Lesueur [42] ainsi que ceux de Loredo et Castel [64]. L'extension de la méthodologie de plaque équivalente pour ce type structure forme la principale nouveauté par rapport à la littérature. Le multicouche est caractérisé par cinq rigidités de flexion équivalentes. La robustesse du modèle a été validée par une comparaison au modèle élément finis SFEM utilisé par Shorter [115] sur les premiers modes de dispersion de la

structure.

Une étude expérimentale a été menée sur trois plaques composites en fibres de carbone d'empilement différent. Les nombres d'onde de flexion de chaque plaque ont été identifiés à partir des mesures des champs de déplacement transverse à l'aide de la méthode IWC. Les caractéristiques de la première plaque, avec une empilement identique des couches, ont été obtenues expérimentalement grâce à la méthodologie d'équivalence plaque mince. Notre modèle nous a ensuite permis d'identifier les paramètres matériaux d'une couche de carbone permettant d'obtenir la meilleure corrélation entre les rigidités analytiques et expérimentales de cette plaque. Par la suite, les rigidités équivalentes des autres plaques ont été prédites par notre modèle à partir de ces paramètres optimaux de couche et comparées à celles estimées expérimentalement. Les résultats montrent une bonne cohérence pour ces deux plaques et nous ont ainsi permis de valider notre modèle équivalent.

La question de la modélisation de l'amortissement a été soulevée. Une définition équivalente et énergétique a été comparée et a montré quelques différences. La formulation équivalente, contrairement à la formulation énergétique, surestime l'amortissement structurel du multicouche lorsque le cisaillement de la structure est fort. Cette erreur provient de l'hypothèse de plaque mince émise par l'équivalence qui considère le mode de flexion comme étant pur. L'amortissement énergétique a quant à lui été défini à la fois à partir d'une formulation temporelle et spatiale. Cette dernière dépend uniquement du nombre d'onde complexe de la structure et est donc intéressante en terme d'applications expérimentales. Une nouvelle définition de la formulation spatiale de l'amortissement énergétique a été proposé pour les structure très amorties.

Dans la suite de ce manuscrit, notre objectif consiste à comparer les rigidités analytiques prédites par notre modèle à celles estimées par la méthode de caractérisation expérimentale RIC qui modélise également le multicouche à partir d'une plaque mince équivalente de Love-Kirchhoff.

Chapitre 3

Méthode de caractérisation expérimentale de plaque anisotrope

Sommaire

3.1	Bibliographie autour de l'identification de source	72
3.2	Extension de RIC pour l'identification de source	72
3.2.1	Schéma aux différences finies de RIFF	72
3.2.2	Réponse en nombre d'onde de RIFF	76
3.2.3	Schéma corrigé de RIC	77
3.2.4	Validation sur champ non bruité	82
3.3	Application de RIC en présence de bruit	87
3.3.1	Technique de régularisation du bruit	87
3.3.2	Validation sur champ bruité	89
3.3.3	Étude expérimentale sur des plaques en composite	91
3.4	Adaptation de RIC pour la caractérisation	94
3.4.1	Méthodologie	94
3.4.2	Applications sur champs non bruités	95
3.4.3	Applications sur champs bruités	98
3.4.4	Étude expérimentale sur les plaques en composite	104
3.5	Conclusion	106

Ce chapitre traite de l'extension des méthodes RIFF et RIC, présentées à la section 1.2.3, aux structures anisotropes. Cette extension est, dans un premier temps, décrite pour l'identification de source, objectif initial des méthodes, et dans un second temps, adaptée pour la caractérisation. De ce fait, une courte synthèse bibliographique autour de la thématique de l'identification de source est présentée en début de chapitre. Les avantages et les inconvénients ainsi que les limites de chaque méthode sont détaillés et comparés à travers plusieurs simulations numériques et mesures expérimentales tout au long du chapitre.

Ces travaux ont fait l'objet d'une conférence au *Congrès Français d'Acoustique* [73] et au congrès international NOVEM [74].

3.1 Bibliographie autour de l'identification de source

Cette section présente une courte synthèse bibliographique sur les méthodes inverses (dont RIFF et RIC font parties) appliquées à l'identification de source.

Les problèmes inverses tentent de déterminer les causes à partir des conséquences, c'est-à-dire les excitations appliquées à la structure à partir de sa réponse. Tel que le mentionne Stevens [120], la structure est alors considérée comme son propre capteur de force. Les problèmes inverses s'opposent aux problèmes directs où l'on utilise des transducteurs afin d'estimer les efforts injectés.

Les méthodes inverses ont initialement été développées avec l'analyse par chemin de transfert ou TPA pour *Transfer Path Analysis* dont le principe se résume à l'inversion de la matrice de transfert entre les différents points de mesure et excitations. Dans le cas où le nombre de point de mesures est égal au nombre de sources, l'inversion de la matrice laisse apparaître des singularités aux fréquences propres du système. Le surdimensionnement du problème par l'ajout de points de mesure permet de le stabiliser [27]. L'inversion de la matrice rectangulaire ne peut alors être résolue que par une méthode moindres carrés qui génère cependant une solution instable et non unique du point de vue mathématique [43]. De faibles erreurs de mesure, typiquement du bruit, peuvent entraîner de fortes dispersions sur les résultats à cause d'un mauvais conditionnement du système [120]. Ce phénomène a été constaté dès les premiers travaux abordant la thématique du problème inverse [32, 59]. La modélisation du système constitue donc un critère important des méthodes inverses.

Afin d'atténuer la sensibilité de la solution aux variations des données d'entrée, des méthodes de régularisation ont été implémentées telles que la troncature en valeurs singulières ou TSVD pour *Truncated Singular Value Decomposition* et la régularisation de Tikhonov [124, 49, 6]. Les dépendances linéaires de la fonction de transfert, généralement masquées par le bruit de mesure, sont définies par son nombre de valeurs singulières. La TSVD établit un seuil en dessous duquel certaines valeurs singulières sont rejetées [98]. La régularisation de Tikhonov ajoute un paramètre ajustable [44] dans la formulation du problème au sens des moindres carrés. Cette régularisation a un effet inverse à la TSVD : les petites valeurs singulières sont rehaussées tandis que celles néfastes ne sont pas amplifiées [13]. La méthode des moindres carrés pondérés [79, 39] est également une technique d'optimisation, similaire à celle de Tikhonov. La matrice de transfert est multipliée par une matrice de pondération, basée sur le rapport signal à bruit (RSB) de la mesure, afin d'ajuster en fréquence l'influence de chaque réponse.

3.2 Extension de RIC pour l'identification de source

3.2.1 Schéma aux différences finies de RIFF

La méthode RIFF [100] modélise la structure à partir de la théorie plaque mince de Love-Kirchhoff (voir annexe C). Dans le cas d'une étude d'identification de sources, une excitation supposée harmonique de pulsation ω est appliquée à la plaque. Le champ de pression $p(x, y)$ constitue alors l'inconnu du problème.

Structures anisotropes

Dans le cas où la structure est anisotrope et définie par 5 rigidités de flexion D_{ij} , l'équation de mouvement de la plaque s'écrit :

$$p(x, y) = D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + D_{12} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} - \rho h \omega^2 W(x, y), \quad (3.1)$$

avec h l'épaisseur et ρ la masse volumique de la structure.

L'objectif de la méthode RIFF est d'identifier le champ de pression $p(x, y)$ en estimant les dérivées partielles du déplacement transverse $W(x, y)$ à partir de la mesure de ce dernier. Cette estimation s'appuie sur la méthode des différences finies où la dérivée partielle de W par rapport aux deux variables d'espace x et y est estimée par :

$$\frac{\partial W}{\partial x} \approx \frac{W(x + \Delta_x, y) - W(x - \Delta_x, y)}{2\Delta_x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial y} \approx \frac{W(x, y + \Delta_y) - W(x, y - \Delta_y)}{2\Delta_y}, \quad (3.2)$$

où Δ_x et Δ_y correspondent respectivement à un pas spatial dans les axes x et y . À l'aide de cette méthode, une approximation des différentes dérivées d'ordre 4 de l'Eq. 3.1 peut être établie :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \approx \delta^{4x} = \frac{1}{16\Delta_x^4} \left[W_{4,0} - 4W_{2,0} + 6W_{0,0} - 4W_{-2,0} + W_{-4,0} \right], \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \approx \delta^{4y} = \frac{1}{16\Delta_y^4} \left[W_{0,4} - 4W_{0,2} + 6W_{0,0} - 4W_{0,-2} + W_{0,-4} \right], \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \delta^{2x2y} = \frac{1}{16\Delta_x^2 \Delta_y^2} & \left[W_{2,2} + W_{2,-2} + W_{-2,2} + W_{-2,-2} \right. \\ & \left. - 2(W_{2,0} + W_{-2,0} + W_{0,2} + W_{0,-2}) + 4W_{0,0} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} \approx \delta^{3xy} = \frac{1}{16\Delta_x^3 \Delta_y} & \left[W_{3,1} - W_{3,-1} - W_{-3,1} + W_{-3,-1} \right. \\ & \left. - 3(W_{1,1} - W_{1,-1} - W_{-1,1} + W_{-1,-1}) \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} \approx \delta^{x3y} = \frac{1}{16\Delta_x \Delta_y^3} & \left[W_{1,3} - W_{-1,3} - W_{1,-3} + W_{-1,-3} \right. \\ & \left. - 3(W_{1,1} - W_{1,-1} - W_{-1,1} + W_{-1,-1}) \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $W_{a,b} = W(x + a\Delta_x, y + b\Delta_y)$. Les 25 points $W_{i,j}$ forment le schéma aux différences finies de la méthode, représenté à la Figure 3.1. Les distances Δ_x et Δ_y correspondent finalement à la moitié de la distance entre deux points consécutifs du schéma dans les directions x et y . Nous remarquons qu'à l'intérieur de la forme en losange du schéma, certains points ne sont pas utilisés. Ablitzer *et al.* [2], dans leur étude sur la caractérisation de plaques orthotropes orientées, ont remédié à cela en proposant un second schéma tourné de 45° . Ce schéma ne peut cependant être appliqué que sur un maillage cartésien régulier dont les pas sont identiques dans les deux

directions. Afin de rester dans une configuration la plus générale possible, nous n'étudierons pas ce second schéma dans ce manuscrit.

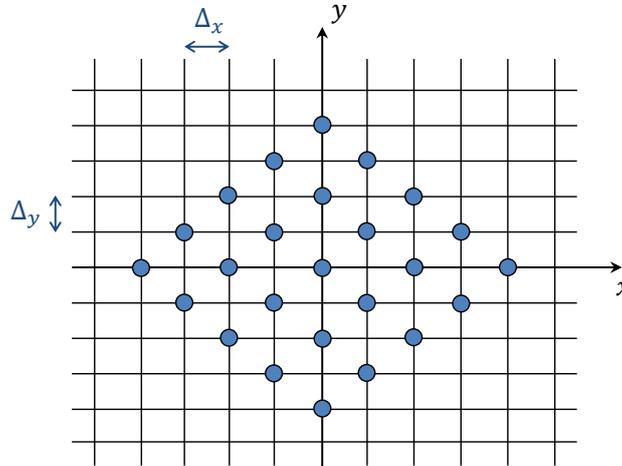


FIGURE 3.1 – Représentation du schéma aux différences finies de RIFF appliqué sur plaque anisotrope.

Considérons à présent un maillage de mesure cartésien et régulier défini par d_x et d_y les distances entre deux points consécutifs en x et en y . Dans cette configuration de maillage, les pas du schéma sont identiques à ceux du maillage ($\Delta_x = d_x$, $\Delta_y = d_y$) et les points $W_{a,b}$ correspondent à des points de mesure. Le champ de pression estimé par RIFF peut alors être identifié en scannant toute la zone de mesure à l'aide du schéma aux différences finies et s'écrit :

$$p^{\text{RIFF}}(x, y) = D_{11}\delta^{4x} + D_{22}\delta^{4y} + D_{12}\delta^{2x2y} + D_{16}\delta^{3xy} + D_{26}\delta^{x3y} - \rho h \omega^2 W(x, y). \quad (3.8)$$

La forme du schéma aux différences finies implique également que le champ de pression ne peut pas être estimé sur la totalité du champ de mesure. Sa dimension est alors réduite de 4 points sur chaque bord.

Le nombre de point par longueur d'onde (n_x, n_y) du schéma dans les directions x et y constitue une caractéristique importante de la méthode. Ce nombre est défini par le ratio entre la longueur d'onde de flexion de la structure et la distance entre deux points consécutifs du schéma :

$$n_x = \frac{\lambda_x}{2\Delta_x} = \frac{\pi}{\Delta_x k_f(\theta = 0)}; \quad n_y = \frac{\lambda_y}{2\Delta_y} = \frac{\pi}{\Delta_y k_f(\theta = \pi/2)}, \quad (3.9)$$

où k_f représente le nombre d'onde de flexion de la plaque défini par l'Eq. (2.42).

La limite hautes fréquences de la méthode peut alors être définie directement à partir de ces nombres de points à l'aide de la condition de Shannon spatial qui est :

$$n_x > 2 \quad \text{et} \quad n_y > 2. \quad (3.10)$$

Il est important de noter que cette condition, qui doit théoriquement être vérifiée dans toutes les directions, ne peut pas l'être avec un maillage cartésien. Nous avons donc choisi les axes

principaux du maillage.

Structures orthotropes

Dans le cas où la structure mesurée est orthotrope et possède des axes d'orthotropie alignés avec les axes du maillage de mesure, les rigidités D_{16} et D_{26} sont considérées comme nulles. RIFF peut alors être appliquée sur le champ de déplacement de la structure avec la méthodologie précédente en supposant que δ^{3xy} , δ^{x3y} , μ_{16} et μ_{26} sont également nuls. Cette supposition implique cependant que 12 points supplémentaires deviennent inutiles dans le schéma aux différences finies. Il est alors possible de diviser par deux la taille du schéma ($\Delta_x/2, \Delta_y/2$) (voir Figure 3.2). Ce schéma condensé correspond à celui utilisé sur plaque isotrope [100] avec des pas différents dans les deux directions :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \approx \delta^{4x} = \frac{1}{\Delta_x^4} \left[W_{2,0} - 4W_{1,0} + 6W_{0,0} - 4W_{-1,0} + W_{-2,0} \right], \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \approx \delta^{4y} = \frac{1}{\Delta_y^4} \left[W_{0,2} - 4W_{0,1} + 6W_{0,0} - 4W_{0,-1} + W_{0,-2} \right], \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \approx \delta^{2x2y} = \frac{1}{\Delta_x^2 \Delta_y^2} \left[W_{1,1} + W_{1,-1} + W_{-1,1} + W_{-1,-1} \right. \\ \left. - 2(W_{1,0} + W_{-1,0} + W_{0,1} + W_{0,-1}) + 4W_{0,0} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

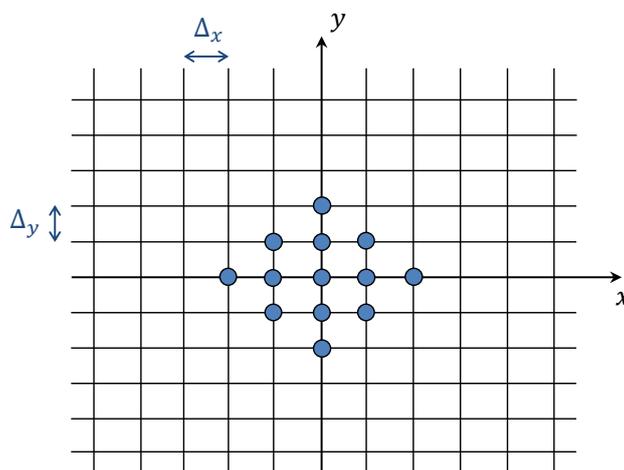


FIGURE 3.2 – Représentation du schéma aux différences finies de RIFF et RIC appliqué sur plaque orthotrope.

Avec ce schéma, le nombre de points par longueur d'onde est défini par :

$$n_x = \frac{\lambda_x}{\Delta_x} = \frac{2\pi}{\Delta_x k_f(\theta = 0)}; \quad n_y = \frac{\lambda_y}{\Delta_y} = \frac{2\pi}{\Delta_y k_f(\theta = \pi/2)}, \quad (3.14)$$

et est donc deux fois plus important que celui du schéma utilisé sur des plaques anisotropes.

La méthodologie décrite dans les sections suivantes se concentre essentiellement sur les structures anisotropes. Elle reste cependant valide pour les structures orthotropes en utilisant le schéma de la Figure 3.2. Dans ce chapitre, la méthode sera appliquée avec ce schéma sur toutes les structures orthotropes étudiées.

3.2.2 Réponse en nombre d'onde de RIFF

Afin de comparer le champ reconstruit par RIFF et le champ réel, l'expression de ces deux champs a été écrite dans l'espace des nombres d'onde :

$$\widehat{p}(k_x, k_y) = (D_{11}k_x^4 + D_{22}k_y^4 + D_{12}k_x^2k_y^2 + D_{16}k_x^3k_y + D_{26}k_xk_y^3 - \rho h\omega^2) \widehat{W}(k_x, k_y), \quad (3.15)$$

$$\widehat{p}^{\text{RIFF}}(k_x, k_y) = (D_{11}\widehat{\delta}^{4x} + D_{22}\widehat{\delta}^{4y} + D_{12}\widehat{\delta}^{2x2y} + D_{16}\widehat{\delta}^{3xy} + D_{26}\widehat{\delta}^{x3y} - \rho h\omega^2) \widehat{W}(k_x, k_y), \quad (3.16)$$

où \widehat{W} , \widehat{p} et $\widehat{p}^{\text{RIFF}}$ représentent respectivement la transformée de Fourier de W , p et p^{RIFF} . Les coefficients $\widehat{\delta}^{ij}$ ont été déterminés à partir de la transformée de Fourier des points $W_{a,b}$ définie par :

$$\widehat{W}_{a,b} = \widehat{W}(k_x, k_y) e^{j(a k_x \Delta_x + b k_y \Delta_y)}. \quad (3.17)$$

À l'aide de la formule d'Euler et de quelques relations trigonométriques, les coefficients $\widehat{\delta}^{ij}$ peuvent être exprimés sous la forme suivante :

$$\widehat{\delta}^{4x} = k_x^4 \text{sinc}^4(k_x \Delta_x), \quad (3.18)$$

$$\widehat{\delta}^{4y} = k_y^4 \text{sinc}^4(k_y \Delta_y), \quad (3.19)$$

$$\widehat{\delta}^{2x2y} = k_x^2 k_y^2 \text{sinc}^2(k_x \Delta_x) \text{sinc}^2(k_y \Delta_y), \quad (3.20)$$

$$\widehat{\delta}^{3xy} = k_x^3 k_y \text{sinc}^3(k_x \Delta_x) \text{sinc}(k_y \Delta_y), \quad (3.21)$$

$$\widehat{\delta}^{x3y} = k_x k_y^3 \text{sinc}(k_x \Delta_x) \text{sinc}^3(k_y \Delta_y). \quad (3.22)$$

Pour plus de facilité, les équations suivantes ont été écrites dans un repère polaire (k, θ) avec $k_x = k \cos(\theta)$ et $k_y = k \sin(\theta)$. Les expressions de \widehat{p} et $\widehat{p}^{\text{RIFF}}$ montrent que ces deux champs ne sont pas tout à fait identiques. L'erreur E de RIFF peut être définie de la façon suivante :

$$E_{\text{RIFF}}(\omega, \Delta_x, \Delta_y, k, \theta) = \frac{\widehat{p}^{\text{RIFF}}(k, \theta)}{\widehat{p}(k, \theta)} = \frac{\mathcal{K}_{\text{RIFF}}^4 - k_f^4}{k^4 - k_f^4}, \quad (3.23)$$

où :

$$\mathcal{K}_{\text{RIFF}}^4 = \frac{D_{11}\widehat{\delta}^{4x} + D_{22}\widehat{\delta}^{4y} + D_{12}\widehat{\delta}^{2x2y} + D_{16}\widehat{\delta}^{3xy} + D_{26}\widehat{\delta}^{x3y}}{D_{11}c^4 + D_{22}s^4 + D_{12}c^2s^2 + D_{16}c^3s + D_{26}cs^3},$$

avec $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$.

L'Eq. (3.23) peut également être considérée comme étant la réponse de RIFF dans le domaine des nombres d'onde. À titre d'exemple, la Figure 3.3 présente cette réponse dans le cas de la plaque composite à empilement laminé étudiée dans la section 2.2.4 pour deux valeurs de (n_x, n_y) .

Les paramètres matériaux de la plaque ont été identifiés à l'aide des résultats du modèle présentés à la Figure 2.17 à 10 kHz. La taille du schéma (Δ_x, Δ_y) a été calculée à partir des valeurs de (n_x, n_y) choisies et du nombre d'onde de flexion calculé par le modèle.

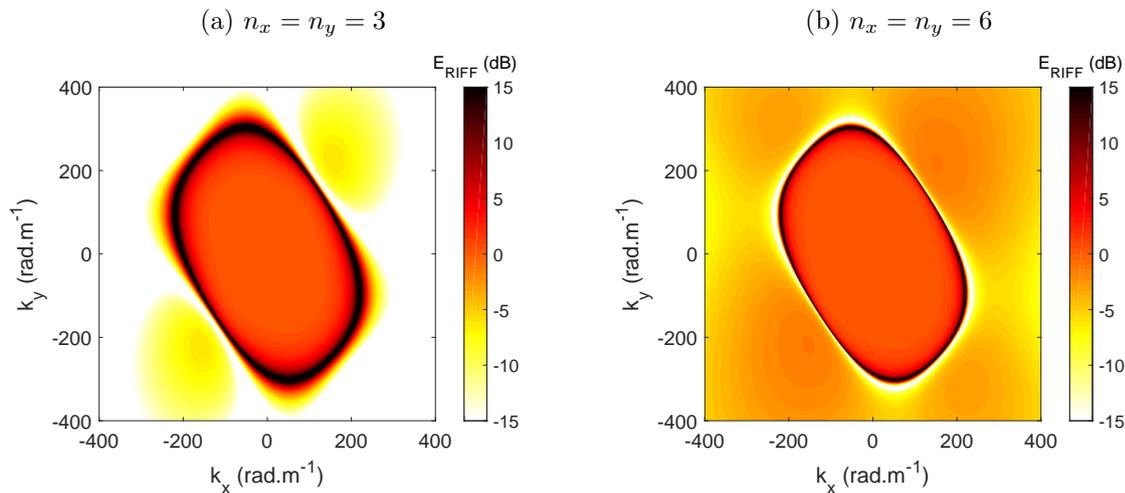


FIGURE 3.3 – Réponse de RIFF dans le domaine des nombres d'onde pour $n_x = n_y = 3$ (a) et $n_x = n_y = 6$ (b). Résultats obtenus à partir des caractéristiques de la plaque composite à empilement laminaire (caractéristiques des couches au Tableau 2.3) à 10 kHz.

Les résultats de la Figure 3.3 montrent finalement que la réponse de RIFF possède deux singularités. La première correspond à l'annulation du dénominateur de E_{RIFF} et se situe lorsque $k = k_f$. Nous retrouvons d'ailleurs parfaitement la trajectoire du nombre de flexion au niveau de cette singularité. Le schéma aux différences finies surestime alors fortement les résultats autour de ce nombre d'onde. La deuxième singularité correspond à l'annulation du numérateur de E_{RIFF} et se situe après k_f . Dans ce cas, le schéma sous-estime fortement les résultats. De plus, la réponse de RIFF dépend du paramètre (n_x, n_y) puisque l'écart entre les deux singularités diminue lorsque ce paramètre est important. Cela peut se traduire, pour une fréquence fixée, par une taille de schéma petite devant la longueur d'onde de flexion de la structure à cette même fréquence. Ainsi, les sinus cardinaux contenus dans les coefficients $\hat{\delta}^{ij}$ tendent vers 1 et les champs \hat{p} et \hat{p}^{RIFF} sont proches. Par ailleurs, pour une taille de schéma fixée, le paramètre (n_x, n_y) nous permet de définir la limite hautes fréquences de la méthode RIFF.

3.2.3 Schéma corrigé de RIC

La méthode RIC [58] a été développée dans le but d'atténuer les singularités de RIFF en corrigeant l'estimation du schéma aux différences finies, pour le cas des plaques isotropes. Nous proposons ici d'étendre cette méthode au cas général d'une plaque anisotrope. Chaque coefficient δ^{ij} du schéma est multiplié par un facteur correctif μ_{ij} dépendant uniquement de la fréquence :

$$\begin{aligned}
 p^{\text{RIC}}(x, y) = & D_{11}\mu_{11}\delta^{4x} + D_{22}\mu_{22}\delta^{4y} + D_{12}\mu_{12}\delta^{2x2y} + D_{16}\mu_{16}\delta^{3xy} \\
 & + D_{26}\mu_{26}\delta^{x3y} - \rho h \omega^2 w(x, y).
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

De la manière que RIFF, la réponse en nombre d'onde de RIC peut être définie par :

$$E_{\text{RIC}}(\omega, \Delta_x, \Delta_y, k, \theta) = \frac{\widehat{p}^{\text{RIC}}(k, \theta)}{\widehat{p}(k, \theta)} = \frac{\mathcal{K}_{\text{RIC}}^4 - k_{\text{f}}^4}{k^4 - k_{\text{f}}^4}, \quad (3.25)$$

avec :

$$\mathcal{K}_{\text{RIC}}^4 = \frac{D_{11}\mu_{11}\widehat{\delta}^{4x} + D_{22}\mu_{22}\widehat{\delta}^{4y} + D_{12}\mu_{12}\widehat{\delta}^{2x2y} + D_{16}\mu_{16}\widehat{\delta}^{3xy} + D_{26}\mu_{26}\widehat{\delta}^{x3y}}{D_{11}c^4 + D_{22}s^4 + D_{12}c^2s^2 + D_{16}c^3s + D_{26}cs^3}.$$

La valeur des coefficients correcteurs est choisie de sorte à égaliser autant que possible le numérateur et le dénominateur de E_{RIC} lorsque $k = k_{\text{f}}$, ce qui peut se traduire pour une direction θ donnée par :

$$\mathcal{K}_{\text{RIC}}^4(k_{\text{f}}(\theta), \theta) = k_{\text{f}}^4(\theta). \quad (3.26)$$

À l'instar de la méthode d'identification des rigidités de flexion décrite dans la section 2.1.6, une approche numérique peut être utilisée pour déterminer les coefficients correcteurs. L'Eq. (3.26) est considérée pour un nombre i de valeurs arbitraires de θ bien plus grand que le nombre de coefficient à déterminer. La formulation matricielle suivante peut alors être écrite :

$$[\mathcal{Q}]\{\mu\} = \{\mathcal{P}\}, \quad (3.27)$$

avec :

$$[\mathcal{Q}] = \begin{bmatrix} D_{11}\widehat{\delta}^{4x}(\theta_1) & D_{22}\widehat{\delta}^{4y}(\theta_1) & D_{12}\widehat{\delta}^{2x2y}(\theta_1) & D_{16}\widehat{\delta}^{3xy}(\theta_1) & D_{26}\widehat{\delta}^{x3y}(\theta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{11}\widehat{\delta}^{4x}(\theta_i) & D_{22}\widehat{\delta}^{4y}(\theta_i) & D_{12}\widehat{\delta}^{2x2y}(\theta_i) & D_{16}\widehat{\delta}^{3xy}(\theta_i) & D_{26}\widehat{\delta}^{x3y}(\theta_i) \end{bmatrix}$$

$$\{\mathcal{P}\} = \begin{pmatrix} \rho h \omega^2 \\ \vdots \\ \rho h \omega^2 \end{pmatrix}; \quad \{\mu\} = \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{22} \\ \mu_{12} \\ \mu_{16} \\ \mu_{26} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients correcteurs sont alors identifiés au moyen d'une méthode moindres carrés :

$$\{\mu\} = ([\mathcal{Q}]^T[\mathcal{Q}])^{-1}[\mathcal{Q}]^T\{\mathcal{P}\}. \quad (3.28)$$

La convergence des résultats de la méthode moindres carrés dépend du nombre d'équations dans le système (3.27), le minimum étant 5 dans le cas anisotrope. Afin que l'atténuation de l'erreur de biais soit la plus uniforme possible, les valeurs de θ doivent permettre de décrire le plus précisément la forme de $k_{\text{f}}(\theta)$ en allant de 0 à π , le nombre d'onde étant π périodique. La

Figure 3.4 présente un exemple de la variation des coefficients correcteurs identifiés par cette approche moindres carrés en fonction du nombre de valeurs de θ . Cette simulation a également été effectuée à 10 kHz ($n_x = n_y = 3$) sur la plaque composite laminé étudiée dans la section 2.2.4. La valeur des coefficients correcteurs a été divisée par leur valeur asymptotique calculée pour 1000 équations. Les estimations de l'approche moindres carrés présentent quelques fluctuations jusqu'à 15 équations. Au delà, l'erreur relative par rapport à la valeur asymptotique diminue graduellement jusqu'à atteindre des valeurs de moins de 1% pour 35 équations. Finalement, une valeur de 100 équations sera utilisée dans ce manuscrit afin de s'assurer de la convergence des résultats.

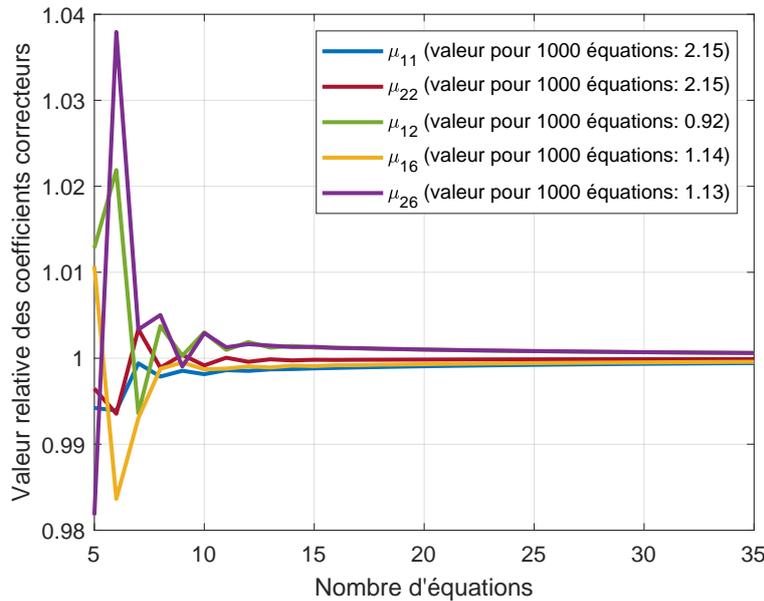


FIGURE 3.4 – Valeurs des coefficients correcteurs de la méthode RIC en fonction du nombre d'équation de l'approche moindres carrés (divisée par leur valeur pour 1000 équations). Résultats obtenus à partir des caractéristiques de la plaque composite à empilement laminé (caractéristiques des couches au Tableau 2.3) à 10 kHz. $n_x = n_y = 3$. μ_{11} (—), μ_{22} (—), μ_{12} (—), μ_{16} (—), μ_{26} (—).

La réponse de RIC a également été illustrée sur le même exemple que celui utilisé pour RIFF à la section 3.2.2 (voir Figure 3.5). Dans cet exemple, les coefficients correcteurs de la méthode ont été calculés avec l'approche moindres carrés en utilisant 100 équations. Pour $n_x = n_y = 3$, la singularité de RIFF est bien atténuée mais n'a pas été totalement supprimée puisque les coefficients correcteurs ne dépendent pas de la direction. L'erreur de biais a tout de même disparue pour quelques points sur la courbe $k = k_f$. La position de ces points est automatiquement déterminée par la méthode moindres carrés qui a pour but d'atténuer la singularité dans toutes directions le plus équitablement possible. Pour $n_x = n_y = 6$, l'association de la correction avec le haut nombre de points par longueur d'onde renforce davantage l'atténuation de la singularité qui devient presque indiscernable avec la plage dynamique d'affichage choisie. De plus, comme nous l'avons mentionné à la section précédente, l'erreur de biais de RIFF est atténuée lorsque n_x et n_y sont grands. Dans ce cas, la correction de RIC devient négligeable et les coefficients

correcteurs tendent vers 1 (voir Figure 3.6). Dans la pratique, pour un maillage de mesure donné, le paramètre (n_x, n_y) décroît en fréquence. C'est pour cela que la correction de RIC étend la limite hautes fréquences de RIFF.

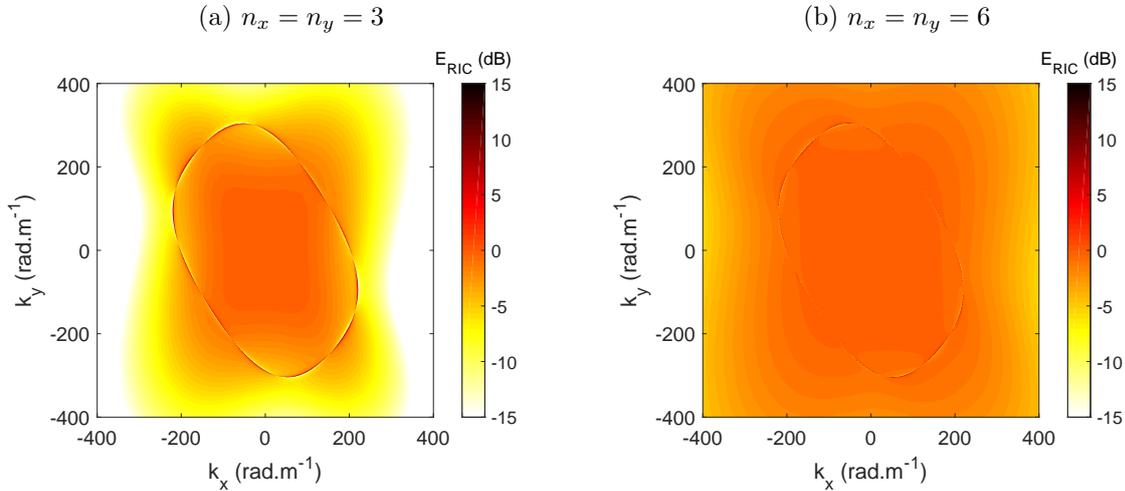


FIGURE 3.5 – Réponse de RIC dans le domaine des nombres d'onde pour $n_x = n_y = 3$ (a) et $n_x = n_y = 6$ (b). Résultats obtenus à partir des caractéristiques de la plaque composite à empilement laminaire (caractéristiques des couches au Tableau 2.3) à 10 kHz.

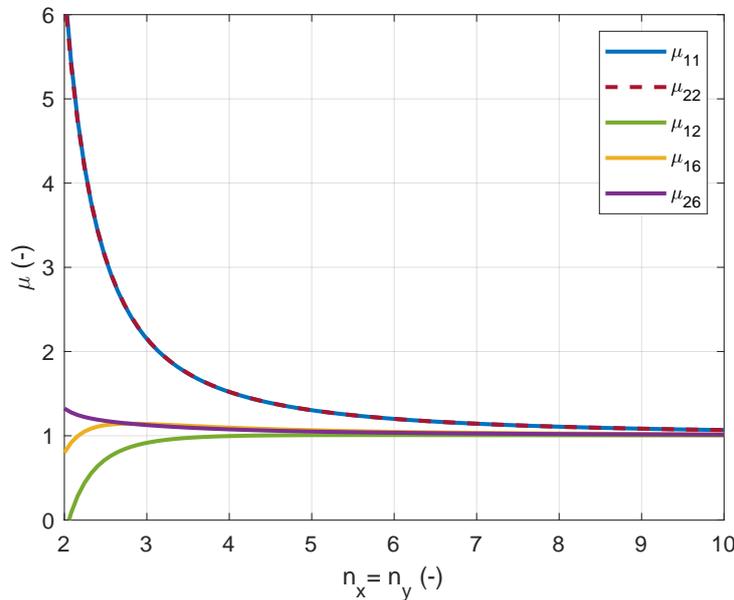


FIGURE 3.6 – Valeur des coefficients correcteurs de la méthode RIC en fonction du nombre de points par longueur d'onde ($n_x = n_y$). Résultats obtenus à partir des caractéristiques de la plaque composite à empilement laminaire (caractéristiques des couches au Tableau 2.3) à 10 kHz. μ_{11} (—), μ_{22} (---), μ_{12} (—), μ_{16} (—), μ_{26} (—).

Nous avons également essayé de donner une expression analytique des coefficients correcteurs la plus simple possible tel que Leclère et Pézerat [58] l'ont fait dans leur approche sur plaques isotropes. L'objectif est d'obtenir un système linéaire en considérant l'Eq. (3.26) pour

un nombre de valeurs arbitraires de θ étant égal au nombre de coefficients à déterminer. Dans le cas anisotrope, 5 directions différentes doivent être considérées pour déterminer les 5 coefficients correcteurs [74]. Les trois premières directions ont été choisies identiques à celles utilisées par Leclère et correspondent à $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$ et $\theta_3 = 45^\circ$. Les deux dernières, $\theta_4 = \text{atan}(\Delta_x/\Delta_y)$ et $\theta_5 = -\text{atan}(\Delta_x/\Delta_y)$, dépendent du pas du maillage afin de simplifier le calcul analytique. Finalement, ces directions permettent d'obtenir une expression simple des coefficients μ_{11} et μ_{22} :

$$\mu_{11} = \frac{1}{\text{sinc}^4 \left(\sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D_{11}}} \Delta_x \right)}, \quad (3.29)$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{\text{sinc}^4 \left(\sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D_{22}}} \Delta_y \right)}. \quad (3.30)$$

Les expressions des autres coefficients correcteurs sont légèrement plus complexes et correspondent à :

$$\mu_{12} = \frac{\Delta_x^2 \Delta_y^2}{D_{12}} \left[\frac{\rho h \omega^2}{2} \left(\frac{1}{\text{sin}^4 \left(\sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{A_1}} \right)} + \frac{1}{\text{sin}^4 \left(\sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{A_2}} \right)} \right) - \frac{D_{11} \mu_{11}}{\Delta_x^4} - \frac{D_{22} \mu_{22}}{\Delta_y^4} \right], \quad (3.31)$$

$$\mu_{16} = \frac{\Delta_x^3 \Delta_y}{D_{16}} \left[\frac{\rho h \omega^2 - \frac{D_{11} \mu_{11}}{\Delta_x^4} A_4^4 - \frac{D_{22} \mu_{22}}{\Delta_y^4} A_5^4 - \frac{D_{12} \mu_{12}}{\Delta_x^2 \Delta_y^2} A_4^2 A_5^2 - A_3 A_4 A_5^3}{(A_4^3 A_5 - A_4 A_5^3)} \right], \quad (3.32)$$

$$\mu_{26} = \frac{\Delta_x \Delta_y^3}{D_{26}} \left[A_3 - \frac{D_{16}^* \mu_{16}}{\Delta_x^3 \Delta_y} \right], \quad (3.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{D_{11}}{\Delta_x^4} + \frac{D_{22}}{\Delta_y^4} + \frac{D_{12}}{\Delta_x^2 \Delta_y^2} + \frac{D_{16}}{\Delta_x^3 \Delta_y} + \frac{D_{26}}{\Delta_x \Delta_y^3}, \\ A_2 &= \frac{D_{11}}{\Delta_x^4} + \frac{D_{22}}{\Delta_y^4} + \frac{D_{12}}{\Delta_x^2 \Delta_y^2} - \frac{D_{16}}{\Delta_x^3 \Delta_y} - \frac{D_{26}}{\Delta_x \Delta_y^3}, \\ A_3 &= \frac{\rho h \omega^2}{2} \left(\frac{1}{\text{sin}^4 \left(\sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{A_1}} \right)} - \frac{1}{\text{sin}^4 \left(\sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{A_2}} \right)} \right), \\ A_4 &= \text{sin} \left(\sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D_{11} + D_{22} + D_{12} + D_{16} + D_{26}}} \Delta_x \right), \\ A_5 &= \text{sin} \left(\sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D_{11} + D_{22} + D_{12} + D_{16} + D_{26}}} \Delta_y \right). \end{aligned}$$

Il est important de constater qu'il n'existe pas une expression analytique générale des coeffi-

cients correcteurs puisqu'ils sont déterminés en fonction des directions θ_i choisies. De plus, les coefficients correcteurs analytiques peuvent également être calculés avec l'approche numérique en écrivant l'Eq. (3.27) pour ces différentes directions θ_i .

La Figure 3.7 compare, dans le cas de la plaque composite d'empilement laminaire, la réponse de RIC obtenue avec des coefficients correcteurs calculés analytiquement et numériquement. Cette réponse est présentée dans le cas limite du nombre de points par longueur d'onde ($n_x = n_y = 2$) afin de bien visualiser la singularité. Avec l'approche analytique, nous pouvons remarquer que la singularité est totalement supprimée dans les directions θ_i que nous avons choisies. Deux d'entre elles (θ_4 et θ_5) sont cependant très proches l'une de l'autre (autour de 120°). La singularité est alors très prononcée entre 90° et θ_4 ainsi qu'entre θ_5 et 180° . Au contraire, l'approche numérique permet d'obtenir une répartition plus uniforme de l'atténuation de la singularité.

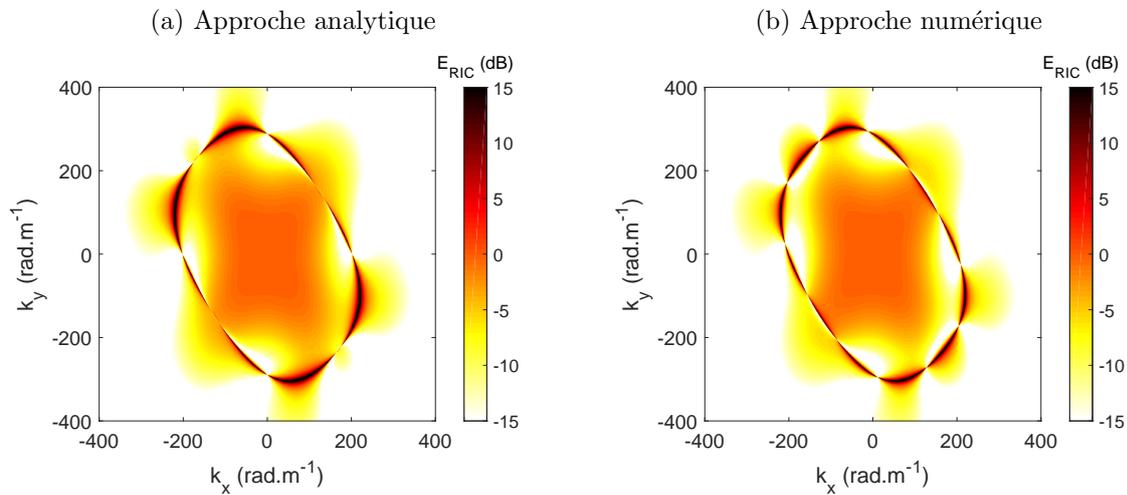


FIGURE 3.7 – Réponse de RIC obtenue avec des coefficients correcteurs calculés analytiquement (a) et numériquement (b). Résultats obtenus à partir des caractéristiques de la plaque composite à empilement laminaire (caractéristiques des couches au Tableau 2.3) à 10 kHz. $n_x = n_y = 2$.

Finalement, l'approche analytique présente quelques limites puisque les directions θ_4 et θ_5 dépendent du pas du maillage et peuvent impliquer une mauvaise répartition de la singularité. Par exemple, dans le cas où $\Delta_x = \Delta_y$, l'approche analytique ne convient pas puisque la valeur $\theta = 45^\circ$ est appliquée trois fois. La méthode numérique possède quelques avantages par rapport à la méthode analytique puisqu'elle est facile à implémenter, converge rapidement et permet d'obtenir une répartition uniforme de la correction. Nous utiliserons donc principalement cette méthode dans ce manuscrit pour calculer les coefficients correcteurs.

3.2.4 Validation sur champ non bruité

Afin d'illustrer les performances de l'extension de RIC, nous avons considéré une plaque orthotrope avec des axes d'orthotropie parallèles aux axes d'un repère Oxy (voir Figure 3.8), les fibres de la plaque étant alignées avec l'axe x de ce repère. Les caractéristiques de la plaque correspondent à celles de la plaque composite d'empilement uniforme étudiée à la section 2.2 (voir Tableau 2.3). Les rigidités de flexion ont cependant été supposées constantes en fonction

de la fréquence et égales à celles identifiées en basses fréquences. La plaque a été modélisée avec des dimensions $L_x = L_y = 0.5$ m et est supposée simplement supportée sur ses bords. Une solution analytique des fréquences propres ω_{mn} ainsi que des déformées modales Φ_{mn} de la plaque peuvent être données par :

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left(D_{11} \left(\frac{m}{L_x} \right)^4 + D_{22} \left(\frac{n}{L_y} \right)^4 + D_{12} \left(\frac{m}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right)}, \quad (3.34)$$

$$\Phi_{mn}(x, y) = \sin \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right). \quad (3.35)$$

L'amortissement de la structure est défini par un facteur de perte η de 0.5% ajouté à chaque rigidité de flexion. Une excitation ponctuelle d'amplitude $F_1 = 1$ N a été appliquée au point S_1 de coordonnées $(x_1, y_1) = (0.25, 0.25)$. À une pulsation ω donnée, le champ de déplacement de la structure peut être exprimé dans le repère Oxy par la superposition modale suivante :

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{mn}(x, y) \Phi_{mn}(x_0, y_0) F_0}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (3.36)$$

où $M_{mn} = \frac{\rho h L_x L_y}{4}$ représente la masse modale. La sommation modale de l'Eq. (3.36) a été tronquée de façon à conserver les modes dont la fréquence propre était jusqu'à dix fois supérieure à la fréquence étudiée.

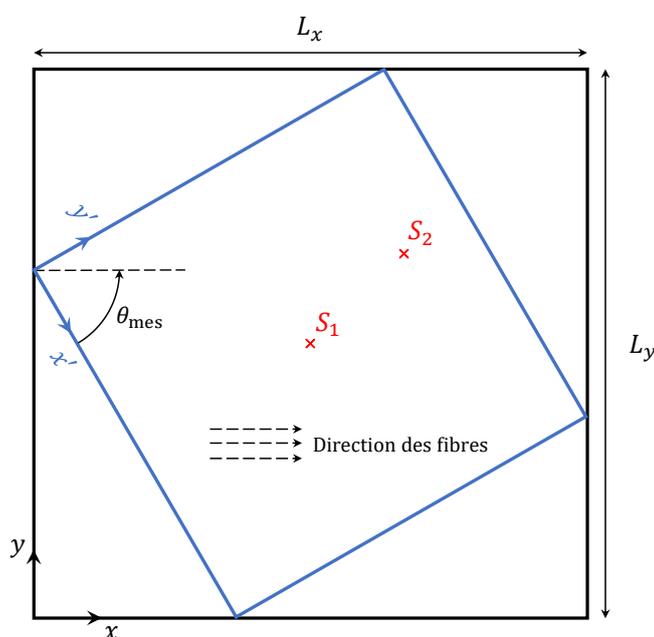


FIGURE 3.8 – Configuration de la simulation modale d'une plaque orthotrope pour l'identification de sources. Position des sources (\times). Carré bleu : zone d'application de RIC.

L'étude a été effectuée sur un domaine de fréquence allant de 1 à 10 kHz. La méthode RIC

a été appliquée sur un maillage de mesure (x', y') tourné d'un angle $\theta_{\text{mes}} = 60^\circ$ par rapport au repère Oxy autour du point S_1 (voir Figure 3.8). La structure est alors considérée comme étant anisotrope dans le repère de mesure et est définie par 5 rigidités de flexion calculées à l'aide de la matrice de projection (1.30). Les valeurs de ces rigidités sont résumées dans le Tableau 3.1. Un pas de maillage $d_x = d_y = 4$ mm a été défini afin d'obtenir un nombre de points par longueur d'onde environ égale à 3 à la plus haute fréquence étudiée dans la direction de raideur la plus faible. La Figure 3.9 présente ce nombre de points dans les deux directions ainsi que la valeur des coefficients correcteurs en fonction de la fréquence. Tel que nous l'avons mentionné à la section précédente, la correction s'accroît (coefficients correcteurs s'éloignent de 1) au fur et à mesure que le nombre de points par longueur diminue.

h	ρ	D_{11}	D_{22}	D_{12}	D_{16}	D_{26}
0.748 mm	1540 kg.m ³	0.67 N.m	2.85 N.m	5.46 N.m	2.10 N.m	5.44 N.m

Tableau 3.1 – Paramètres matériaux de la plaque composite d'empilement uniforme dans le repère de mesure $Ox'y'$ orienté de 60° par rapport au repère de référence Oxy .

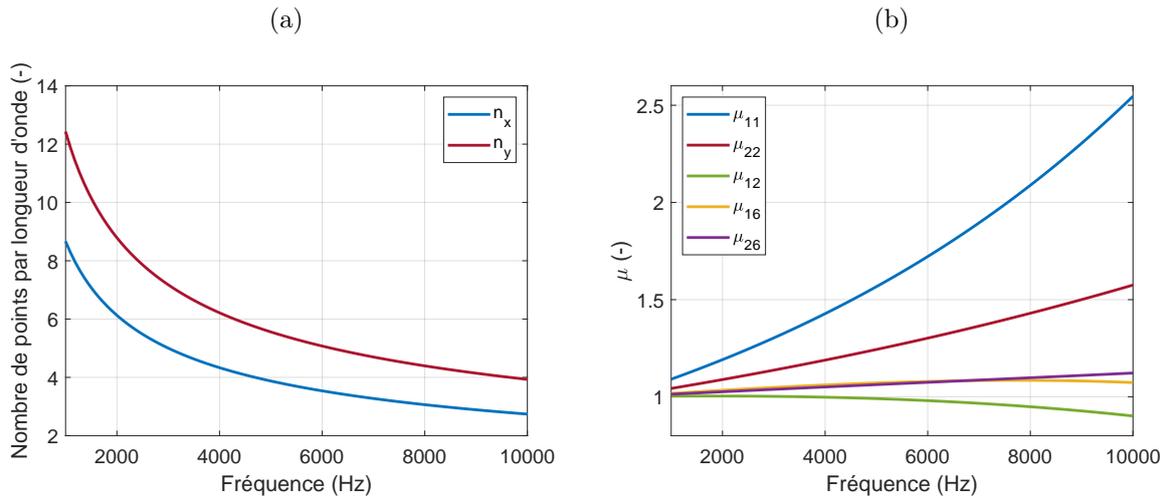


FIGURE 3.9 – Nombre de points par longueur d'onde (n_x, n_y) (a) et coefficients correcteurs μ estimés par RIC (b). Résultats obtenus à partir de la simulation d'une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

La Figure 3.10 présente les champs de pression estimés par les deux méthodes, intégrés sur la bande de fréquences étudiée. D'après ces cartographies, la position de la source est facilement identifiable avec les deux méthodes et correspond aux coordonnées du maximum de pression. Le haut niveau de pression autour du point d'excitation, représenté par la tâche noire sur les cartographies de la Figure 3.10, forme la zone de chargement. Les principales différences entre RIFF et RIC se situent en dehors de cette zone, là où le champ de pression est théoriquement nul. Les estimations de RIFF fournissent des efforts résiduels non négligeables par rapport aux efforts injectés avec des écarts inférieurs à 5 dB. Ces estimations peuvent s'expliquer par le fait qu'en dehors de la zone de chargement, l'énergie est principalement gouvernée par les résonances de la plaque, lorsque le nombre d'onde de l'onde propagative est égal au nombre d'onde de flexion

de la structure. La singularité de RIFF autour de ce nombre d'onde, essentiellement marquée en hautes fréquences par le faible nombre de points par longueur d'onde, amplifie alors l'énergie de l'onde ainsi que l'estimation du champ de pression dans cette zone. La correction de la méthode RIC permet de limiter cette amplification et ainsi d'atténuer les efforts résiduels qui deviennent négligeables en comparaison des efforts injectés avec des écarts supérieurs à 30 dB.

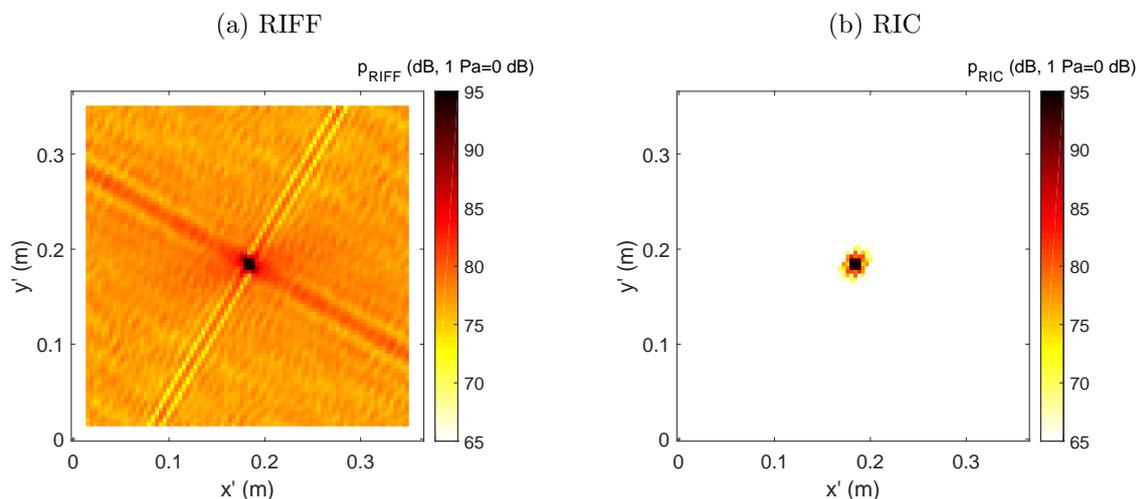


FIGURE 3.10 – Champs de pression reconstruit par RIFF (a) et RIC (b) intégrés de 1 à 10 kHz. Résultats obtenus à partir de la simulation d'une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

Une conclusion identique peut également être émise concernant les forces estimées par RIFF et RIC en fonction de la fréquence. À titre d'exemple, la Figure 3.11 compare deux spectres pour chaque méthode. Le premier correspond à la force au point d'excitation (—) qui a été calculée en intégrant spatialement les champs de pression à chaque fréquence dans la zone de chargement. Les estimations de RIC correspondent bien à la valeur théorique de 1 N injectée à la plaque sur toute la bande de fréquences tandis que celles de RIFF montrent beaucoup plus d'oscillations autour de cette valeur. Le second correspond aux forces résiduelles sur le reste de la plaque (---) qui ont été calculées à partir de la somme quadratique des pressions estimées dans cette zone. Une très nette différence est observée entre les estimations des deux méthodes concernant cette deuxième force. Dans le cas de RIFF, les efforts résiduels augmentent avec la fréquence et deviennent non négligeable devant la force au point d'excitation à partir de 3 kHz à cause de l'erreur de biais de la méthode. La correction de RIC permet quant à elle d'obtenir des efforts résiduels constants en fréquence et négligeables devant la force au point d'excitation avec une différence de 30 dB sur toute la plage de fréquences. Ces résultats sont finalement en accord avec les observations faites sur les champs de pression.

Tel que nous l'avons mentionné à la section 3.2.3, le choix des directions θ_i dans le calcul analytique ou numérique des coefficients correcteurs est important. À titre d'exemple, RIC a été appliquée sur la simulation précédente en utilisant des coefficients correcteurs calculés avec $\theta \in [0^\circ : 90^\circ]$ au lieu de $[0^\circ : 180^\circ]$. La Figure 3.12 présente la réponse de RIC pour $n_x = n_y = 3$ ainsi que les champs de pression reconstruits intégrés en fréquence. L'atténuation de la singularité

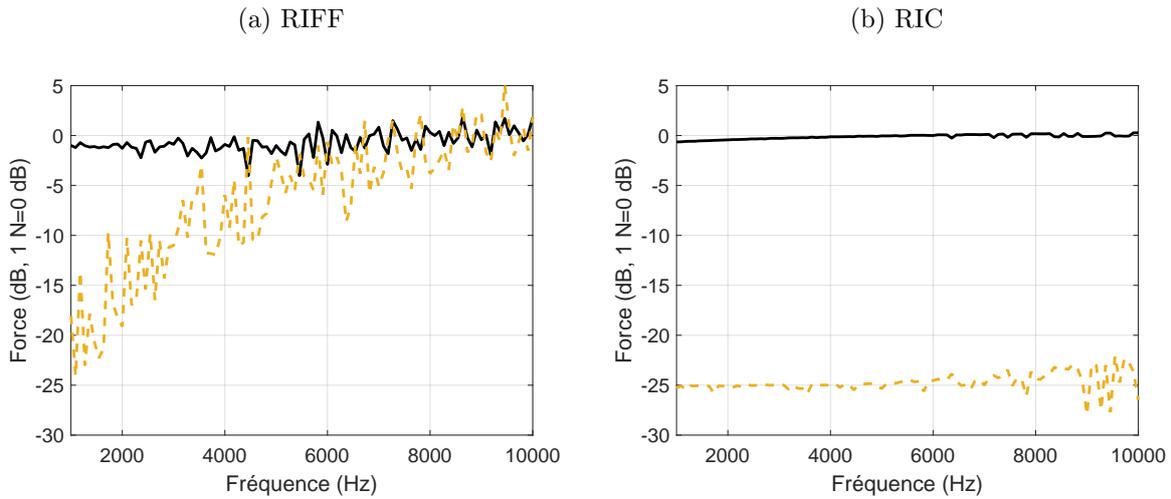


FIGURE 3.11 – Spectre des efforts estimés par RIFF (a) et RIC (b). Force au point d’excitation (—). Forces résiduelles sur le reste de la plaque (---). Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

est bien présente dans toutes les directions choisies mais également de 180° à 270° puisque la forme du nombre d’onde est π périodique. Dans les autres directions, la singularité est encore plus prononcée que dans le cas de RIFF (voir Figure 3.3). Des efforts résiduels sont alors visibles sur les cartographies des champs de pression. Il est donc important de choisir une plage de directions décrivant au minimum la moitié du profil du nombre d’onde de flexion.

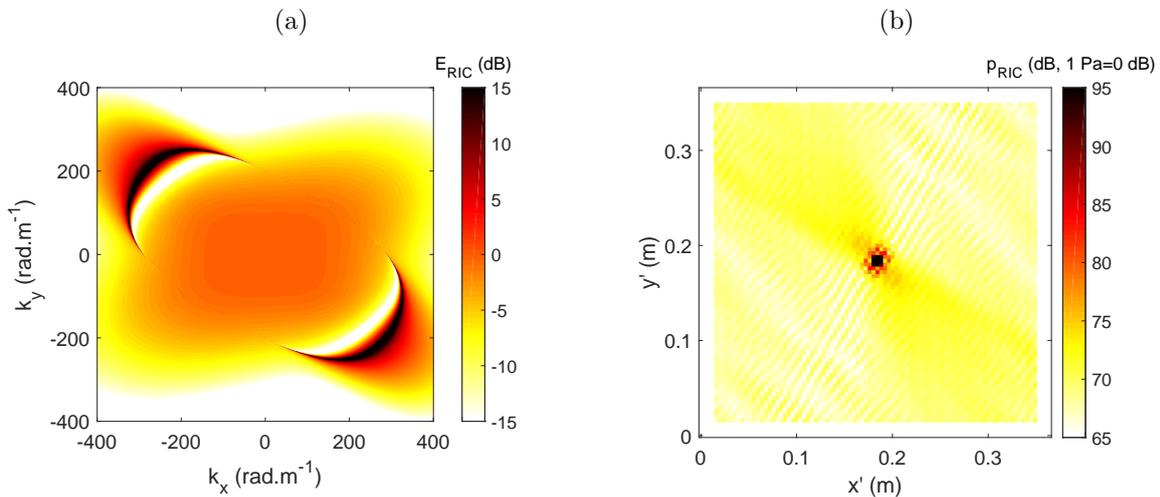


FIGURE 3.12 – Réponse de RIC pour $n_x = n_y = 3$ (a) et champs de pression reconstruits par RIC intégrés de 1 à 10 kHz (b). Calcul des coefficients correcteurs avec $\theta \in [0^\circ : 90^\circ]$. Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

Afin d’illustrer les atouts de l’aspect local de RIC, un second champ de déplacement a été mesuré avec une source S_2 d’amplitude $F_2 = 1$ N positionnée à la coordonnée $(x_2, y_2) = (0.33, 0.33)$ dans le repère Oxy (voir Figure 3.8). Les coordonnées de ce point correspondent à $(x'_2, y'_2) = (0.15, 0.29)$ dans le repère de mesure. Afin de modéliser une double excitation ponctuelle de la

plaque, ce second champ a été ajouté à celui calculé avec la source S_1 (S_1 et S_2 étant corrélées et en phase). La Figure 3.13 présente la cartographie des champs de pression reconstruit par RIC appliqué sur la somme de ces deux champs. La position des deux excitations est précisément identifiée par la méthode grâce à son aspect local. De plus, les amplitudes des deux sources étant identiques, nous retrouvons bien le même niveau de pression dans les deux zones de chargement.

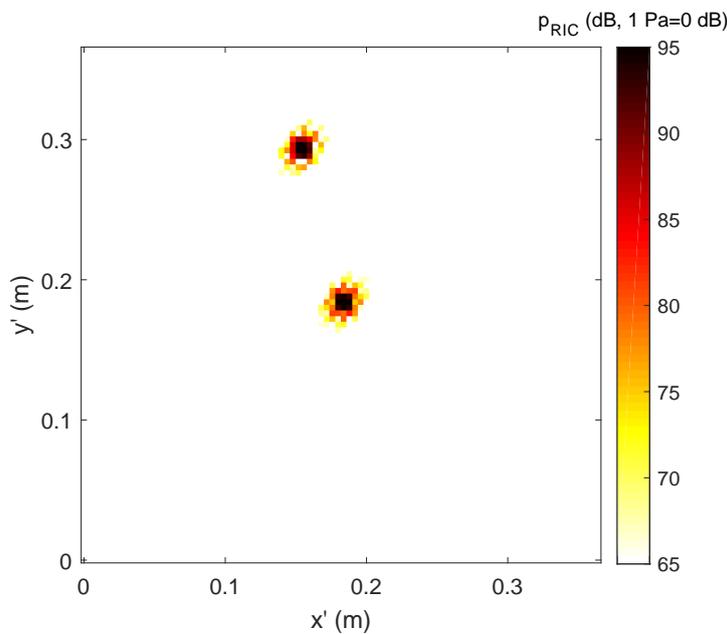


FIGURE 3.13 – Champs de pression reconstruits par RIC intégrés de 1 à 10 kHz dans le cas d’une double excitation ponctuelle. Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

3.3 Application de RIC en présence de bruit

3.3.1 Technique de régularisation du bruit

La mesure du champ de déplacement de la structure implique généralement la présence de bruit numérique dans ce dernier. Comme nous l’avons vu à la section 1.2.3, le schéma aux différences finies peut dans certains cas fortement amplifier le bruit. C’est le cas dans les basses fréquences, lorsque la taille du schéma devient petite devant la longueur d’onde. Dans la pratique, le problème apparaît lorsque le paramètre n devient supérieur à environ 4. Or, ce nombre de 4 points par longueur d’onde représente également une limite haute fréquence de la méthode RIFF au delà de laquelle l’erreur de biais du schéma devient importante. L’amplification du bruit est donc en pratique un problème pour la méthode RIFF sur toute la bande de fréquence utile, définie par $n < 4$. Dans le but d’atténuer le bruit, RIFF applique un filtrage passe-bas dans le domaine des nombres d’ondes ainsi qu’un fenêtrage sur le champ mesuré. Cette technique utilise un nombre d’onde de coupure isotrope et n’a pas été développée pour le cas de structures anisotropes, bien qu’elle reste relativement efficace sur des plaques orthotrope [2].

Dans le cas de la méthode RIC, l’erreur de biais du schéma est corrigée, ce qui rend la

méthode utilisable pour des valeurs de n largement inférieures à 4, jusqu'à la limite de Shannon de 2 points par longueur d'onde. Une bande de fréquence apparaît donc, définie pour $2 < n < 4$, dans laquelle le biais de schéma est maîtrisé et le bruit de mesure non pénalisant, le filtre RIC se comportant comme un filtre passe bas dans le domaine des nombres d'ondes. Leclère *et al.* [56] proposent alors d'adapter la taille du schéma en fonction de la fréquence, de manière à conserver la valeur de n dans cette plage optimale. Développée pour le cas isotrope, cette approche est étendue ici au cas général anisotrope. Un critère de 4 points par longueur d'onde maximum a alors été choisi pour atténuer suffisamment le bruit sans détériorer l'estimation de la méthode. Le maillage de mesure étant cartésien, cette condition est appliquée dans les directions x et y indépendamment :

$$n_x < 4; \quad n_y < 4. \quad (3.37)$$

Ce critère, ainsi que celui de Shannon (Eq. (3.10)), doit être respecté sur toute la plage de fréquences en adaptant la taille du schéma qui est alors défini par :

$$\Delta'_x = m_x(f)\Delta_x; \quad \Delta'_y = m_y(f)\Delta_y, \quad (3.38)$$

où (m_x, m_y) sont des entiers naturels dépendant de la fréquence qui correspondent aux paramètres d'agrandissement du schéma dans les directions x et y . Ainsi, la taille du schéma sera grande en basses fréquences et diminuera avec la fréquence. Avec cette technique de régularisation, la dimension du champ de pression reconstruit est en contrepartie réduite de $4m_x$ sur les bords droit et gauche du maillage et de $4m_y$ sur le dessus et le dessous du maillage. Un exemple d'adaptation est présenté à la Figure 3.14 dans le cas où $(m_x, m_y) = (2, 1)$.

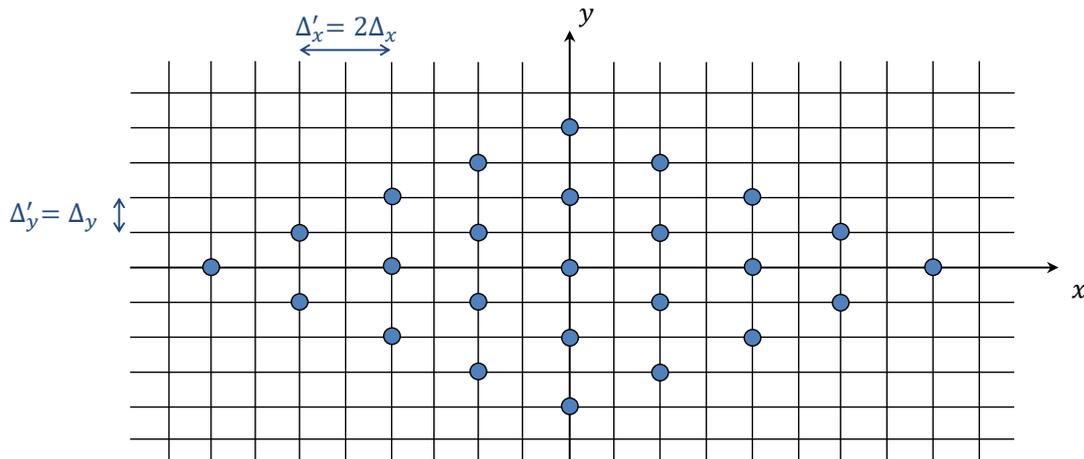


FIGURE 3.14 – Représentation de l'adaptation du schéma aux différences finies de RIC en présence de bruit dans le cas où $(m_x, m_y) = (2, 1)$.

À une fréquence donnée, le couple (Δ'_x, Δ'_y) est déterminé en sélectionnant la valeur de (m_x, m_y) permettant d'avoir (n_x, n_y) le plus proche possible d'une valeur optimale n_{opt} comprise entre 2 et 4. Cette valeur doit être choisie en fonction de l'influence de la régularisation sur les résultats ainsi que du ratio signal à bruit (RSB). Lorsque la régularisation est trop forte (n_{opt}

proche de 2), des erreurs d'estimation peuvent apparaître. À l'inverse, lorsque la régularisation est trop faible (n_{opt} proche de 4), le bruit de mesure peut dominer les résultats.

3.3.2 Validation sur champ bruité

Afin d'illustrer la fiabilité de la technique de régularisation de RIC, un bruit blanc N a été ajouté au champ de déplacement de la structure anisotrope étudiée à la section 3.2.4 :

$$W_{\text{bruité}} = W_{\text{exact}} + N, \quad (3.39)$$

où N suit une distribution gaussienne centrée dont la variance est choisie de manière à satisfaire un RSB de 30 dB. Le champ en question correspond à celui calculé avec la source S_1 .

La technique de régularisation de RIC a été appliquée en choisissant une valeur $n_{\text{opt}} = 3.5$ dans le but d'éviter des erreurs d'estimation. L'adaptation en fréquence de la taille du schéma est illustrée à la Figure 3.15 au travers des paramètres (m_x, m_y) et du nombre de points (n_x, n_y) . Nous pouvons remarquer que le couple (n_x, n_y) varie autour de n_{opt} avec de grandes fluctuations, dépassant même la valeur limite indiquée à la condition (3.37). Ces fluctuations sont dues aux faibles possibilités d'adaptation de la taille du schéma qui est directement conditionnée par la taille du maillage. Un maillage plus fin permettrait d'obtenir davantage de flexibilité concernant le choix de (m_x, m_y) et ainsi de réduire l'écart entre (n_x, n_y) et n_{opt} sur toute la bande de fréquences.

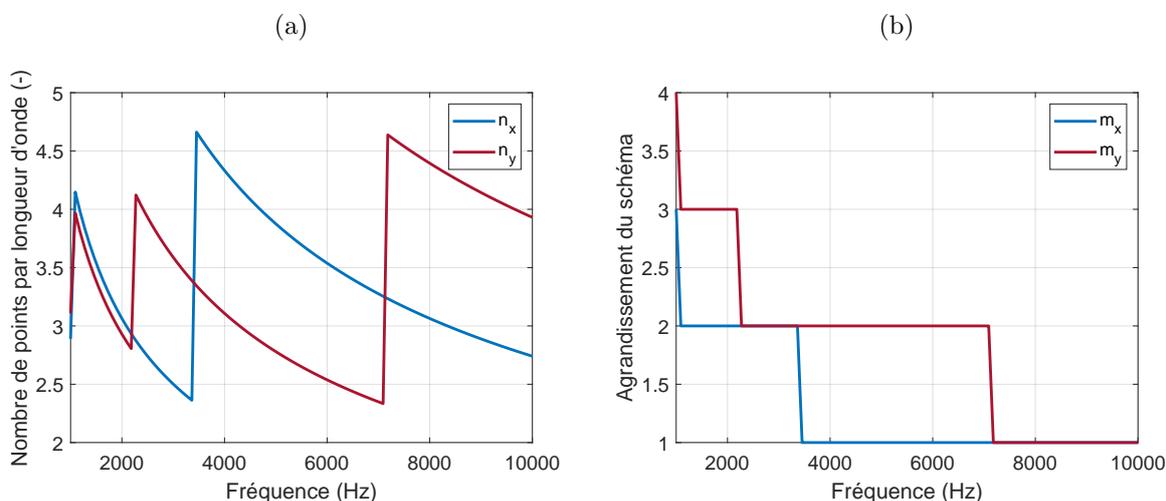


FIGURE 3.15 – Nombre de points par longueur d'onde (n_x, n_y) (a) et agrandissement (m_x, m_y) (b) du schéma de RIC dans le cas d'un champ de déplacement bruité (RSB=30 dB). Résultats obtenus à partir de la simulation d'une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

L'effet du filtrage dépend également de la direction. À titre d'exemple, la Figure 3.16 présente la longueur d'onde de la plaque anisotrope à 4 et 10 kHz. Les limites inférieures et supérieures du nombre de points par longueur d'onde sont respectivement représentées par les rectangles rouge et bleu définis par la valeur de (Δ'_x, Δ'_y) à ces fréquences. Nous pouvons constater que la longueur d'onde évolue autour de ces rectangles. Pour une direction donnée, de fortes erreurs

d'estimation peuvent apparaître si la longueur d'onde est à l'intérieur du rectangle rouge. À l'inverse, les résultats peuvent être dominés par le bruit de mesure si la longueur d'onde est à l'extérieur du rectangle bleu.

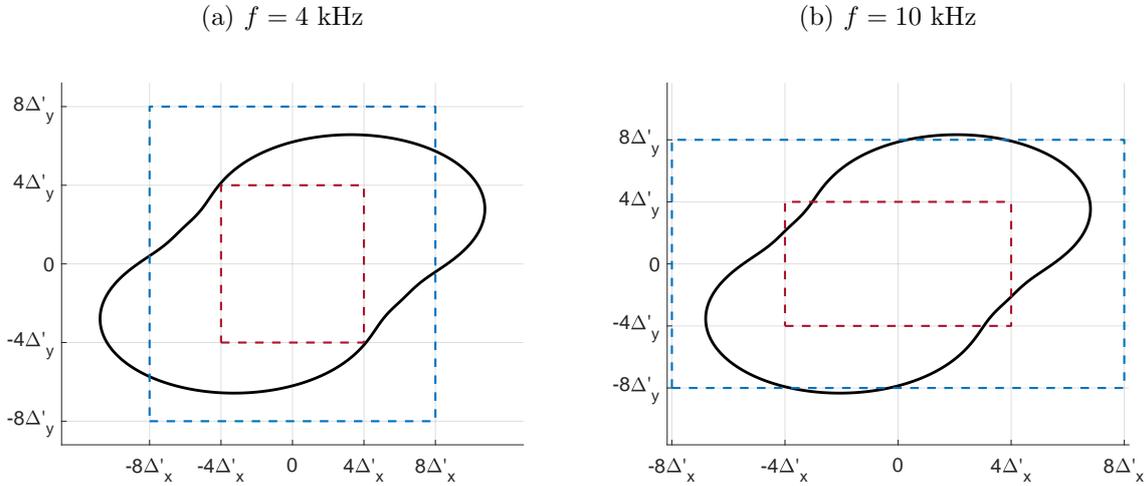


FIGURE 3.16 – Longueur d'onde de flexion (—) d'une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1) à 4 kHz (a) et à 10 kHz (b). Le rectangle rouge représente la limite inférieure de (n_x, n_y) correspondant au critère de Shannon. Le rectangle bleu représente la limite supérieure de (n_x, n_y) .

Le faible nombre de points par longueur d'onde implique également une forte correction de la part de RIC sur toute la bande de fréquences étudiée. La Figure 3.17 présente les coefficients correcteurs utilisés par RIC en fonction de la fréquence dans le cas de la plaque anisotrope étudiée. Ainsi, la technique de régularisation de RIC ne peut être utilisée avec RIFF puisque sa singularité serait trop importante pour obtenir des résultats corrects.

La Figure 3.18 présente les champs de pression intégrés en fréquence ainsi que les spectres de la force au point d'excitation et des efforts résiduels estimés par RIC à partir du champ de déplacement bruité. La position de la source est encore parfaitement identifiable sur la cartographie des champs de pression. Le spectre de la force au point d'excitation reste proche de la valeur théorique de 1 N. Les efforts résiduels ont légèrement augmentés par rapport au cas non bruité mais restent négligeables devant les efforts au point d'excitation. Les fortes valeurs de (n_x, n_y) à certaines fréquences sont à l'origine de cette augmentation. L'effet du filtrage est alors limité et le bruit de mesure amplifie les efforts résiduels à ces fréquences.

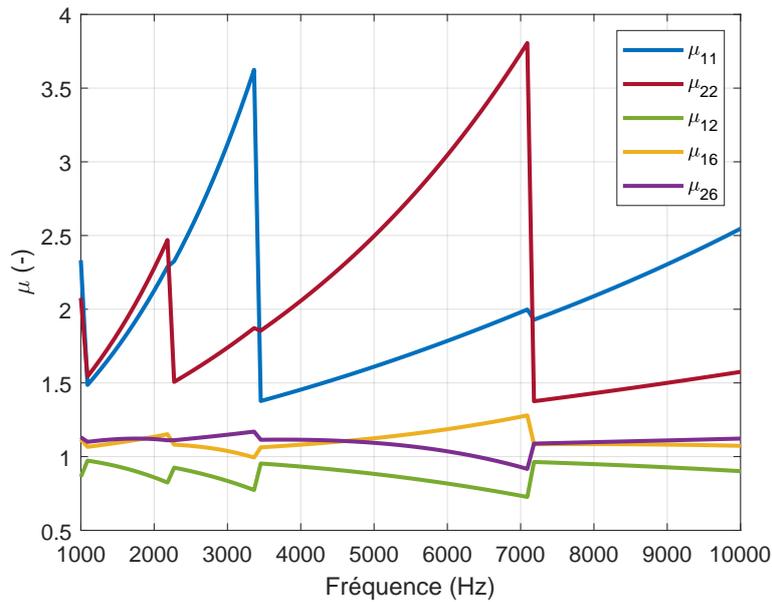


FIGURE 3.17 – Coefficients correcteurs utilisés par RIC dans le cas d’un champ de déplacement bruité (RSB=30 dB). Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

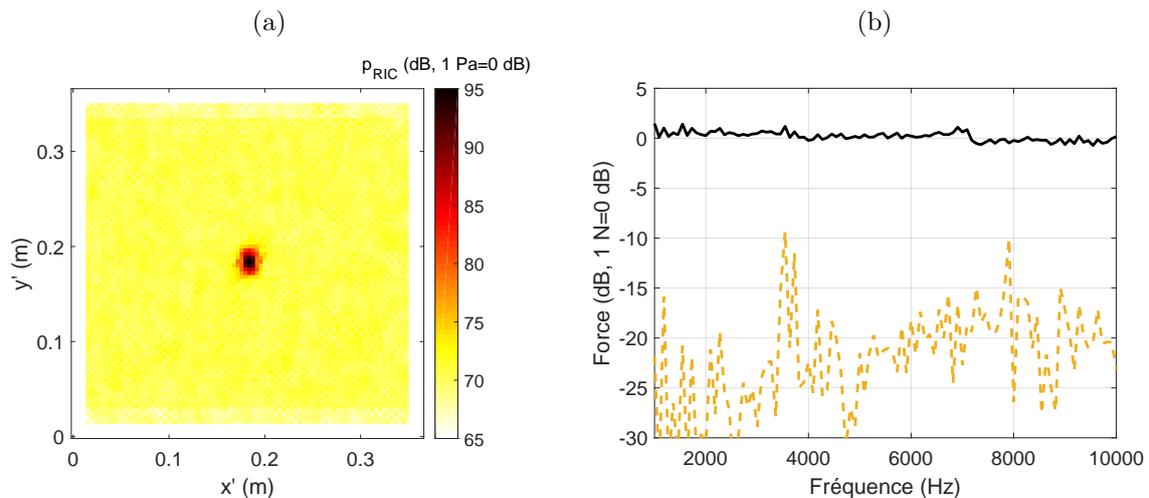


FIGURE 3.18 – Champs de pression intégrés en fréquence (a) et spectres de la force au point d’excitation (—) et des efforts résiduels (---) (b) estimés par RIC dans le cas d’un champ de déplacement bruité (RSB=30 dB). Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

3.3.3 Étude expérimentale sur des plaques en composite

Cette section traite de l’application expérimentale de l’extension de la méthode RIC sur les plaques composites en fibres de carbone d’empilement uniforme et laminé présentées à la section 2.2. Une seconde mesure identique à celle de la section 2.2.1 (voir Figure 2.9) a été réalisée pour chaque plaque en ajoutant un capteur de force à l’extrémité du pot vibrant. Le capteur a ensuite été directement collé sur la plaque. Un maillage de $55 \times 57 = 3135$ points a

été utilisé pour scanner la zone mesurée de $0.28 \times 0.30 \text{ cm}^2$. Le pas de ce maillage $d_x = d_y = 5.3 \text{ mm}$ nous a permis de respecter le critère de Shannon (Eq. (3.10)) jusqu'à 7 kHz pour les deux plaques et ainsi éviter les erreurs d'estimation. Les rigidités de flexion des deux plaques ont été calculées à chaque fréquence à l'aide de l'équivalence plaque mince de notre modèle multicouche et correspondent à celles identifiées sur les Figures 2.11 et 2.17. La plaque d'empilement uniforme étant orthotrope par rapport au maillage de mesure, les dérivées partielles du déplacement ont été estimées à l'aide du schéma de la Figure 3.2. La technique de régularisation de RIC a été appliquée en conservant le critère de l'Eq. (3.37) sur toute la bande de fréquences étudiée. La Figure 3.19 présente les champs de pression estimés par RIC et intégrés en fréquence pour les deux plaques. Ces cartographies permettent d'établir des conclusions similaires à l'application numérique de la section précédente concernant la reconstruction du champ de pression de la structure par CFAT. Les efforts résiduels autour de la zone de chargement sont bien négligeables avec plus de 25 dB d'écart par rapport au maximum de pression. Nous pouvons également remarquer la forme allongée de la zone de chargement qui est due entre autres à l'adaptation du schéma.

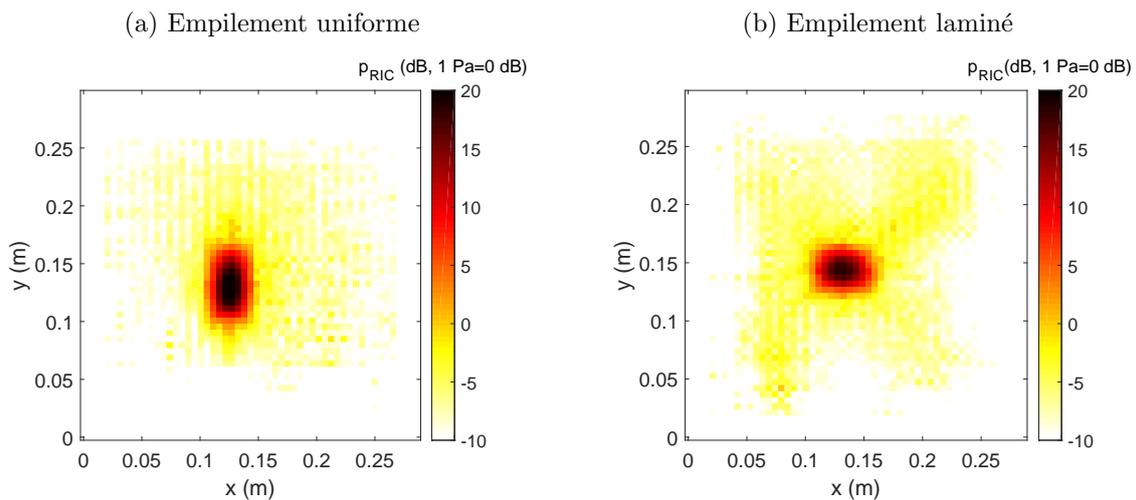


FIGURE 3.19 – Champs de pression estimés par RIC à partir de la mesure expérimentale des plaques composites d'empilement uniforme (a) et laminé (b) (caractéristiques des couches au Tableau 2.3). Résultats intégrés en fréquence entre 1 et 7 kHz.

La Figure 3.20 compare quatre spectres d'efforts pour chaque plaque. Le premier correspond à la force au point d'excitation (—) obtenu en intégrant les champs de pression reconstruits par RIC dans la zone de chargement. Le deuxième spectre (—) correspond à la force mesurée par le capteur de force. Tel que l'ont mentionné Leclère *et al.* [57] dans leur article, cette force de référence ne correspond pas directement à la force transmise par le pot vibrant à la structure. Les effets inertiels de la masse interne du capteur de force (m_s) génèrent une force proportionnelle à son accélération qui doit alors être prise en compte à l'aide d'une calibration du capteur. L'annexe D décrit la procédure de cette calibration qui nous a permis d'identifier une masse $m_s = 9.2 \text{ g}$ pour le capteur choisi lors de la mesure. Une force corrigée, correspondant au troisième spectre (—), a alors été obtenue en enlevant les effets inertiels $-\omega^2 m_s W(x_0, y_0)$ à la

3.3. APPLICATION DE RIC EN PRÉSENCE DE BRUIT

force mesurée par le capteur de force, avec $W(x_0, y_0)$ le déplacement de la structure à la position de la source. Cette position correspond aux coordonnées de la valeur maximale des cartographies présentées à la Figure 3.19 mais ne coïncide pas forcément avec un point du maillage. Une interpolation bicubique de ces cartographies ainsi que du champ de déplacement transverse a alors été effectuée dans une zone autour du maximum de pression afin d'obtenir la position de la source avec une précision de 0.5 mm. Enfin, le quatrième spectre (—) représente une force recalculée F_c définie à partir du ratio entre la vitesse au point d'excitation et l'admittance théorique d'une plaque orthotrope infinie Y_c [116, 15] :

$$F_c = \frac{j\omega W(x_0, y_0)}{Y_c}, \quad (3.40)$$

où Y_c s'écrit :

$$Y_c = \frac{\mathcal{F}}{4\pi\sqrt{\rho h\sqrt{D_{11}D_{22}}}},$$

avec \mathcal{F} l'intégrale elliptique de première espèce :

$$\mathcal{F} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 0.5 \left(1 - \frac{D_{12}}{2\sqrt{D_{11}D_{22}}} \right) \sin^2(\theta) \right)^{-0.5} d\theta.$$

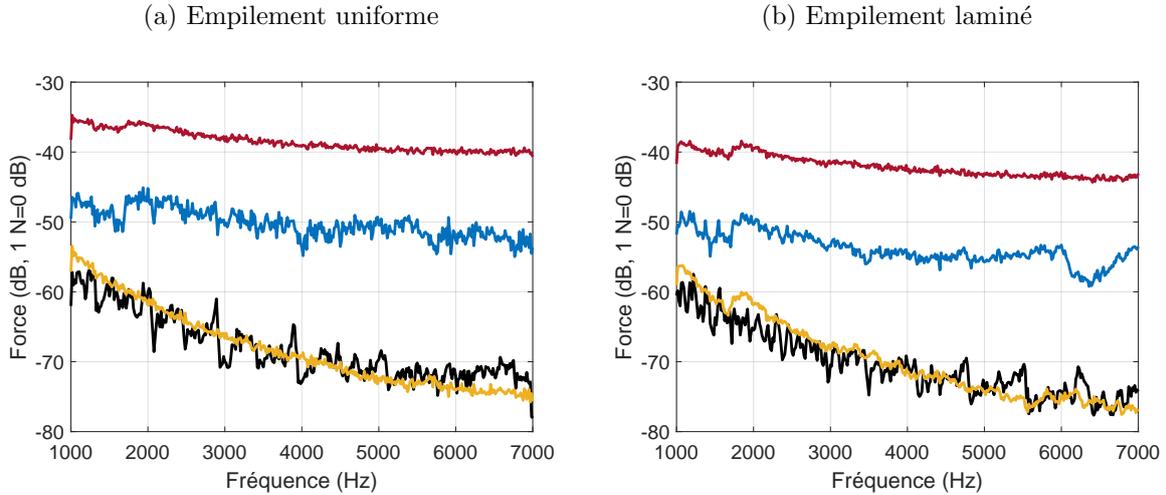


FIGURE 3.20 – Spectres de forces concernant les plaques composites d'empilement uniforme (a) et laminé (b) (caractéristiques des couches au Tableau 2.3). Force au point d'excitation estimée par RIC (—), force mesurée par le capteur de force (—), force corrigée (—), force recalculée (—).

D'après les résultats des spectres de la Figure 3.20, nous pouvons tout d'abord observer une bonne concordance entre les estimations de RIC et la force recalculée sur toute la plage de fréquences étudiée pour la plaque d'empilement uniforme. Cette bonne concordance est également présente pour la plaque d'empilement laminé malgré le fait que la force recalculée corresponde à celle d'une plaque orthotrope. Cependant, d'importants écarts de plus de 30 dB sont observés entre la force estimée par RIC et la force mesurée par le capteur de force. La correction de cette dernière permet de réduire cet écart de 10 dB sur toute la plage de fréquences en ajustant légèrement la valeur de la masse interne du capteur ainsi que la position de la source. La

force corrigée reste cependant supérieure aux estimations de RIC. Nous en avons donc conclu au vu des résultats concordants entre les estimations de RIC et la force recalculé que la correction de la force mesurée par le capteur de force n'est ici pas suffisante, la structure étant trop légère.

3.4 Adaptation de RIC pour la caractérisation

3.4.1 Méthodologie

La méthodologie de RIC peut également être adaptée à la caractérisation de matériaux. Cette adaptation a déjà été présentée par Leclère *et al.* [57] dans le cas de structures isotropes. L'objectif de cette section est donc de proposer une adaptation similaire de la méthode pour les structures anisotropes à l'aide de l'extension présentée à la section 3.2. La technique de caractérisation consiste à appliquer la méthode loin de tout éléments dynamiques ou statiques, tels que les sources, les conditions aux limites ou les points de fixation. Le champ de pression est alors supposé nul dans la zone étudiée ($p_{RIC}(x, y) \approx 0$) et les rigidités de flexion D_{ij} deviennent les inconnues du problème :

$$D_{11}\mu_{11}\delta^{4x} + D_{22}\mu_{22}\delta^{4y} + D_{12}\mu_{12}\delta^{2x2y} + D_{16}\mu_{16}\delta^{3xy} + D_{26}\mu_{26}\delta^{x3y} = \rho h \omega^2 W(x, y). \quad (3.41)$$

Les coefficients correcteurs μ_{ij} étant fonction du nombre d'onde de flexion de la structure, ils dépendent également des rigidités D_{ij} . Le problème est donc non linéaire si l'on tente d'identifier ces rigidités directement à partir de l'Eq. (3.41). Afin d'obtenir un système linéaire, nous allons, dans un premier temps, identifier les coefficients $\tilde{D}_{ij} = D_{ij}\mu_{ij}$ qui correspondent aux rigidités estimées par la méthode RIFF. À une fréquence donnée, en supposant que ces rigidités sont constantes sur toutes la surface mesurée, l'Eq. (3.41) peut être écrite pour les N points de mesure. Une approche moindre carré similaire à celle de l'Eq. (2.44) peut alors être utilisée pour identifier les coefficients \tilde{D}_{ij} :

$$\{\tilde{\mathcal{D}}\} = \rho h \omega^2 \left([\Delta]^T [\Delta] \right)^{-1} [\Delta]^T \{\kappa\}, \quad (3.42)$$

avec

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_1^{4x} & \delta_1^{4y} & \delta_1^{2x2y} & \delta_1^{3xy} & \delta_1^{x3y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_N^{4x} & \delta_N^{4y} & \delta_N^{2x2y} & \delta_N^{3xy} & \delta_N^{x3y} \end{bmatrix}; \quad \{\kappa\} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix};$$

$$\{\tilde{\mathcal{D}}\} = \left(\tilde{D}_{11} \quad \tilde{D}_{22} \quad \tilde{D}_{12} \quad \tilde{D}_{16} \quad \tilde{D}_{26} \right)^T.$$

Dans un second temps, les rigidités D_{ij} sont identifiées à partir des coefficients \tilde{D}_{ij} en appliquant la correction de RIC. Pour cela, nous proposons dans ce manuscrit deux méthodologies différentes. La première est une approche itérative qui consiste à calculer, pour une itération n donnée ($n \geq 1$), des coefficients correcteurs $\mu_{ij}^{(n)}$ à partir de rigidités $D_{ij}^{(n-1)}$ à l'aide de l'Eq. (3.27)

et à identifier de nouvelles rigidités $D_{ij}^{(n)} = \tilde{D}_{ij}/\mu_{ij}^{(n)}$. Cette approche itérative est initialisée par $D_{ij}^{(0)} = \tilde{D}_{ij}$. La section suivante discute de la convergence de cette méthode ainsi que du critère d'arrêt à travers un exemple.

La deuxième méthodologie correspond à une approche par minimisation qui considère la fonction $\mathcal{R}_{\text{RIC}}(k, \theta)$ sous la forme :

$$\mathcal{R}_{\text{RIC}} = \frac{\mathcal{K}_{\text{RIC}}^4}{k_f^4} - 1 = \frac{\tilde{D}_{11}\hat{\delta}^{4x} + \tilde{D}_{22}\hat{\delta}^{4y} + \tilde{D}_{12}\hat{\delta}^{2x2y} + \tilde{D}_{16}\hat{\delta}^{3xy} + \tilde{D}_{26}\hat{\delta}^{x3y}}{\rho h \omega^2} - 1. \quad (3.43)$$

Tel que nous l'avons mentionné à la section 3.2.3, pour une direction θ donnée, la singularité du schéma est atténuée lorsque $\mathcal{K}_{\text{RIC}}^4 = k_f^4$, ce qui revient à $\mathcal{R}_{\text{RIC}}(k_f, \theta) = 0$. Le nombre d'onde de flexion de la structure peut alors être reconstruit, pour toutes directions θ , en identifiant la valeur complexe de k permettant de minimiser $|\mathcal{R}_{\text{RIC}}(k, \theta)|$. La relation de dispersion de Love-Kirchhoff permet ensuite d'estimer les rigidités de la structure à l'aide de la méthode moindres carrés décrite par l'Eq. (2.44).

Ces deux approches permettent uniquement de corriger l'erreur de biais du schéma et elles sont toutes les deux sensibles aux valeurs de \tilde{D}_{ij} estimées par la méthode inverse. Une comparaison des résultats obtenus par ces deux approches est présentée à la section suivante à l'aide d'un exemple.

Les rigidités de flexion de la structure peuvent également être identifiées en fonction des paramètres d'espace (x, y) grâce à l'aspect local de la méthode. Une cartographie de chaque rigidité peut alors être établie à chaque fréquence. Pour cela, la structure doit être mesurée N fois, N étant supérieur ou égal au nombre de rigidités à identifier. Ces mesures doivent être effectuées sur un même maillage avec des positions différentes et non corrélées de l'excitation. À une fréquence donnée, les approches moindres carrés précédentes sont alors appliquées sur les N mesures effectuées. Une autre possibilité consiste à mesurer la structure une seule fois et à supposer que les rigidités soient constantes en fréquence. Les approches moindres carrés sont alors appliquées sur les N points de l'échelle fréquentielle. Cet aspect ne sera cependant pas détaillé davantage dans ce chapitre et nous supposons que les rigidités de toutes les structures étudiées ne dépendent pas des paramètres d'espace.

3.4.2 Applications sur champs non bruités

Cette section illustre les performances de la méthode RIC pour la caractérisation de matériaux anisotropes à travers la simulation de la plaque orthotrope étudiée à la section 3.2.4. La Figure 3.21 présente la configuration de la simulation. La plaque est excitée par une source ponctuelle positionnée au point S_3 de coordonnées $(x_3, y_3) = (0.45, 0.2)$ et d'amplitude $F_3 = 1$ N. Les méthodes RIFF et RIC ont été appliquées sur un maillage de mesure (x', y') positionné à la fois loin de la source et des bords de la plaque (rectangle bleu sur la Figure 3.21). Ce maillage, dont les pas sont identiques dans les deux directions ($d_x = d_y = 4$ mm), est également tourné d'un angle $\theta_{\text{mes}} = 60^\circ$ par rapport au repère Oxy . Les caractéristiques de la plaque dans le repère de mesure correspondent donc théoriquement aux paramètres inscrits dans le Tableau 3.1.

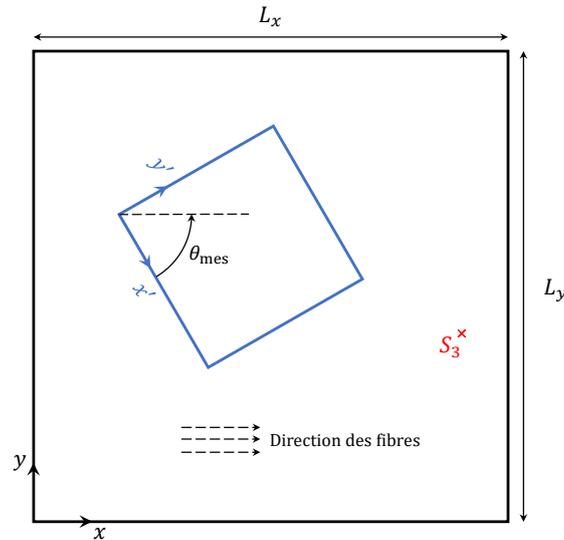


FIGURE 3.21 – Configuration de la simulation modale d’une plaque orthotrope pour l’identification de paramètres matériaux. Position de la source (\times). Carré bleu : zone d’application de RIC.

La Figure 3.22 compare les rigidités identifiées par RIFF (\tilde{D}_{ij}) à celles identifiées par RIC à l’aide de la méthode itérative. Les résultats de RIC sont satisfaisants puisqu’ils correspondent aux rigidités théoriques données par le Tableau 3.1 que nous avons choisies constantes en fonction de la fréquence. À l’inverse, les estimations de RIFF divergent grandement de ces valeurs théoriques. Ces écarts proviennent des efforts résiduels amplifiés par la singularité de RIFF. La condition de pression nulle sur le champ mesure ne peut alors être vérifiée et les rigidités identifiées sont fausses. Cette erreur d’estimation s’intensifie avec la fréquence puisque la singularité de RIFF s’accroît également du fait que le nombre de points par longueur d’onde diminue.

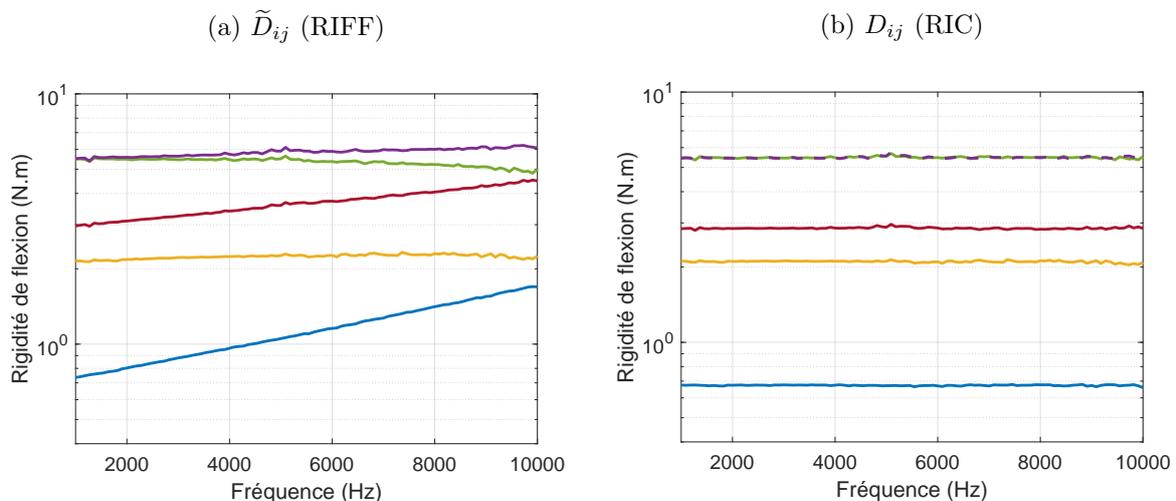


FIGURE 3.22 – Rigidités de flexion (D_{11} (—), D_{22} (—), D_{12} (—), D_{16} (—), D_{26} (—)), estimées par RIFF (a) et par RIC (b) avec l’approche itérative (30 itérations). Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

La Figure 3.23 présente l'erreur d'estimation de la méthode itérative par rapport aux rigidités théoriques en fonction du nombre d'itération. La méthode itérative converge bien et fournit une erreur d'estimation inférieure à 1% à partir de 8 itérations. Ce faible pourcentage est tout de même présent puisque la singularité ne peut être totalement supprimée dans toutes les directions. Au delà de 8 itérations, peu de variations sont visibles. Nous avons donc fixé un critère d'arrêt de la méthode itérative à 30 itérations pouvant être ajusté en fonction de la structure étudiée.

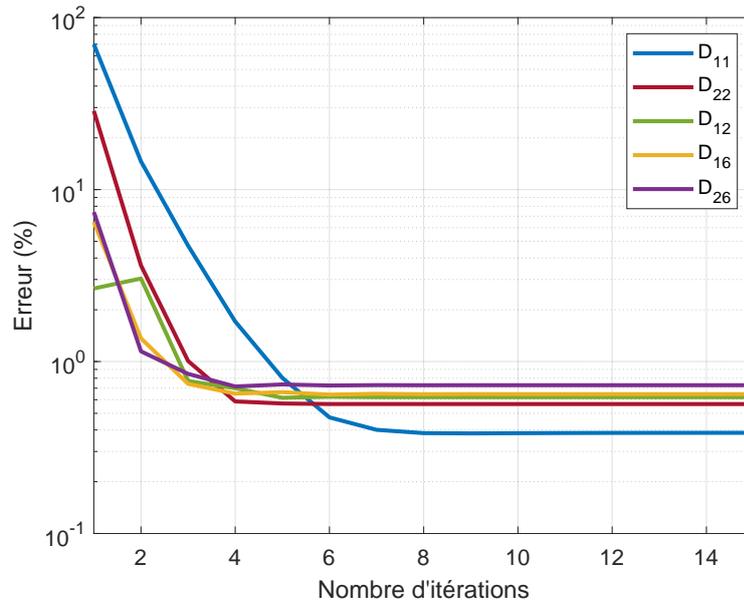


FIGURE 3.23 – Erreur (%) d'estimation, moyennée en fréquence, des rigidités estimées par RIC avec la méthode itérative par rapport aux rigidités théoriques en fonction du nombre d'itération. D_{11} (—), D_{22} (—), D_{12} (—), D_{16} (—), D_{26} (—). Résultats obtenus à partir de la simulation d'une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

RIC a également été appliquée en utilisant l'approche par minimisation. La Figure 3.24 présente les rigidités identifiées par la méthode en fonction de la fréquence ainsi que la cartographie de \mathcal{R}_{RIC} à 10 kHz pour différentes valeurs de k . Les résultats présentent également une bonne concordance avec les valeurs théoriques des rigidités. Quelques différences apparaissent en hautes fréquences tel que nous pouvons le voir sur la cartographie de la Figure 3.24 où le minimum de $|\mathcal{R}_{RIC}|$ ne correspond pas tout à fait au nombre d'onde de flexion théorique dans certaines directions. Ces écarts proviennent de la correction en elle-même qui ne permet pas de supprimer totalement la singularité dans toutes les directions. De plus, la singularité est d'autant plus forte que le nombre de points par longueur d'onde est faible, ce qui est le cas en hautes fréquences. La cartographie de la Figure 3.24 nous permet également de constater que la solution de $\mathcal{R}_{RIC} = 0$ est périodique dans l'espace des nombres d'onde, la périodicité étant fixée par le pas du maillage ($\pi/\Delta_x, \pi/\Delta_y$). Cet aspect est à prendre en compte lors d'une analyse avec l'approche par minimisation.

Finalement, l'approche itérative et par minimisation fournissent des résultats assez similaires. À l'instar de la méthode IWC, l'approche par minimisation cherche à minimiser \mathcal{R}_{RIC} en fonction

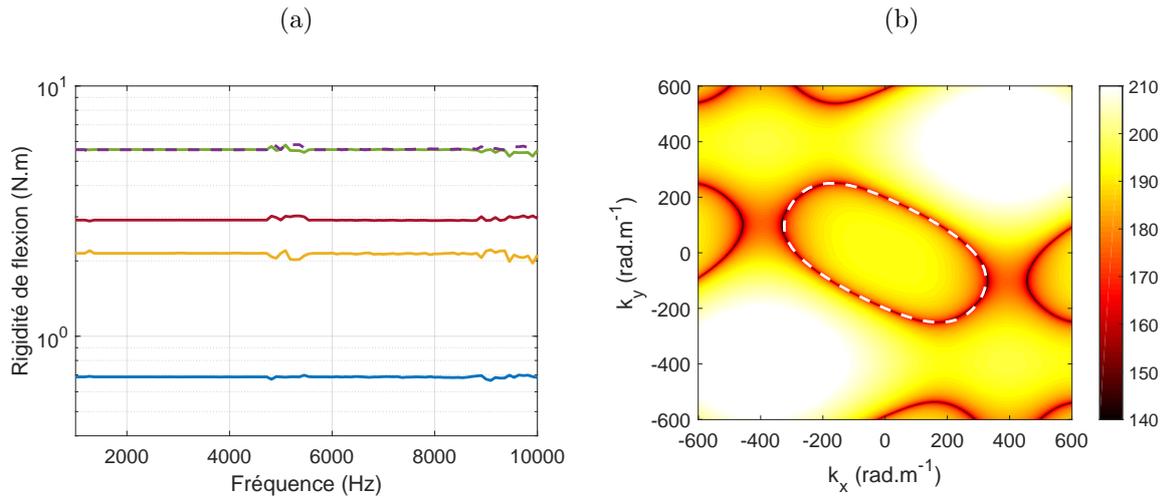


FIGURE 3.24 – Rigidités de flexion (D_{11} (—), D_{22} (—), D_{12} (—), D_{16} (—), D_{26} (—)), estimées par RIC avec l’approche par minimisation (a). Cartographie de \mathcal{R}_{RIC} à 10 kHz (b). Nombre d’onde de flexion théorique (tirets blanc). Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

de 3 paramètres (k , θ mais également γ , l’amortissement spatial, dans le cas où l’on veuille identifier le facteur de perte de la structure). De ce fait, le temps de calcul de l’approche par minimisation est plus long que celui de l’approche itérative.

3.4.3 Applications sur champs bruités

Comparaison de la technique de régularisation de RIFF et de RIC

Afin d’illustrer les performances de RIC sur champs bruités, un bruit blanc a été ajouté au champ de déplacement de la plaque composite anisotrope étudiée à la section 3.4.2 et a été normalisé afin de satisfaire un RSB de 30 dB sur toute la plage de fréquences étudiée. Dans le cas de l’identification des paramètres matériaux, la technique de régularisation de RIC reste identique à celle présentée à la section 3.3.1. Elle nécessite cependant une approximation de la longueur d’onde de la structure dans les directions x et y afin de pouvoir judicieusement choisir les paramètres d’adaptation (m_x, m_y) du schéma en fonction de la fréquence. En pratique, une transformée de Fourier est appliquée au champ mesuré afin d’estimer un ordre de grandeur de la partie réelle de cette longueur d’onde. Dans cet exemple, nous avons calculé la longueur d’onde à partir des valeurs théoriques des caractéristiques de la structure. Un nombre de point optimal $n_{\text{opt}} = 3.5$ a été choisi dans la méthode de régularisation pour limiter les erreurs d’estimation. Les rigidités de la plaque ont ensuite été calculées en utilisant la méthode itérative et la méthode par minimisation. Peu de différences sont visibles entre les résultats des deux méthodes, présentés à la Figure 3.25, excepté dans les basses fréquences.

Les résultats restent tout de même bruités. Ces variations proviennent de la non uniformité de la régularisation. Tel que nous l’avons vu à la section 3.2.4, le nombre de points par longueur d’onde n’est pas identique dans toutes les directions. Il est alors possible que pour certaines directions, le nombre de points soit supérieur à n_{opt} et donc que la technique de régularisation

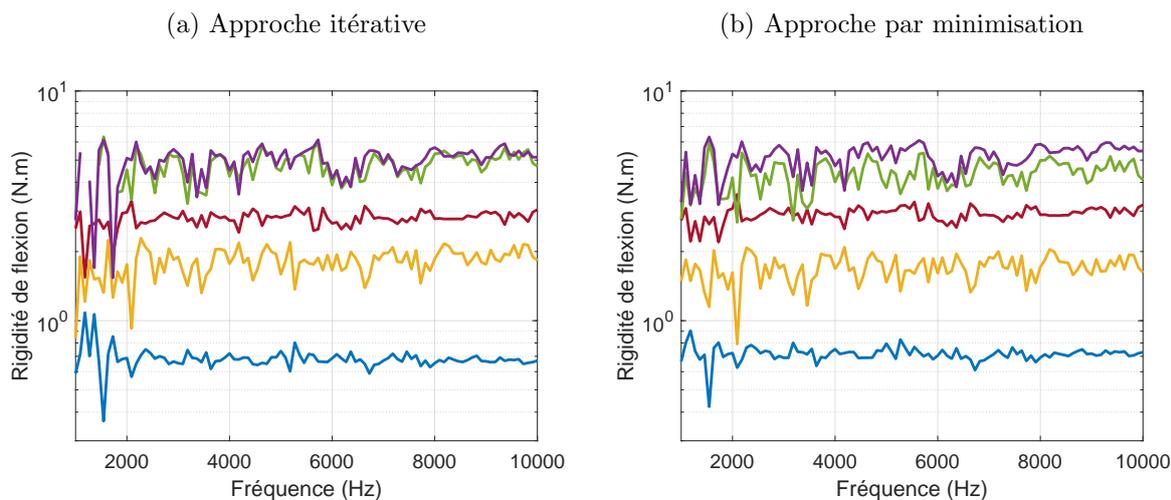


FIGURE 3.25 – Rigidités de flexion (D_{11} (—), D_{22} (—), D_{12} (—), D_{16} (—), D_{26} (—)), estimées par RIC avec l’approche itérative (a) et par minimisation (b). RSB=30 dB. Technique de régularisation de RIC. Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

soit peu efficace. À titre d’exemple, la Figure 3.26 compare les cartographies de \mathcal{R}_{RIC} obtenues à 1 kHz à partir d’un RSB de 300 dB et de 30 dB. Nous pouvons constater que lorsque le bruit est peu influant, le nombre d’onde de flexion de la structure est correctement reconstruit. À l’inverse, lorsque le niveau de bruit est important, des erreurs d’estimation apparaissent dans certaines directions du fait que la régularisation n’est pas assez efficace dans ces directions. L’estimation du nombre d’onde reste cependant correcte dans les directions x et y puisque la régularisation est adaptée pour ces directions.

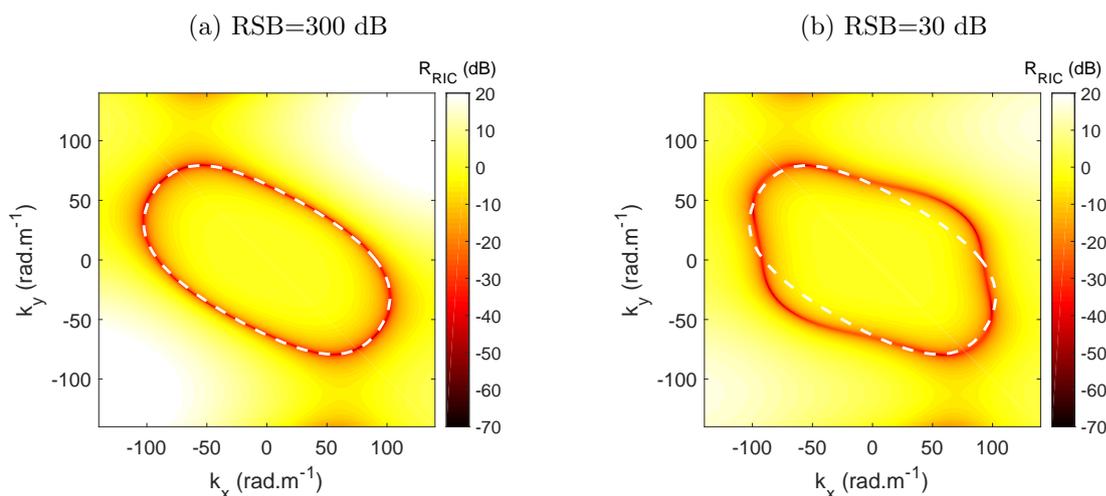


FIGURE 3.26 – Cartographie de \mathcal{R}_{RIC} obtenues à 1 kHz à partir d’un RSB de 300 dB (a) et de 30 dB (b). Nombre d’onde de flexion théorique (tirets blanc). $n_{\text{opt}} = 3.5$. Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

Il est également possible d’intensifier la régularisation en choisissant un n_{opt} plus faible afin de vérifier la condition (3.37) dans toutes les directions. Des erreurs d’estimation peuvent cependant

apparaître dans certaines directions si la condition de Shannon (3.10) n'est pas respectée (Δ'_x et Δ'_y grands). Les solutions périodiques de $\mathcal{R}_{\text{RIC}}(k_f, \theta) \approx 0$ peuvent alors corrompre la véritable valeur du nombre d'onde de flexion par effet de repliement. À titre d'exemple, la Figure 3.27 compare les cartographies de \mathcal{R}_{RIC} obtenus à 10 kHz avec une régularisation définie par $n_{\text{opt}} = 3$ et $n_{\text{opt}} = 3.5$.

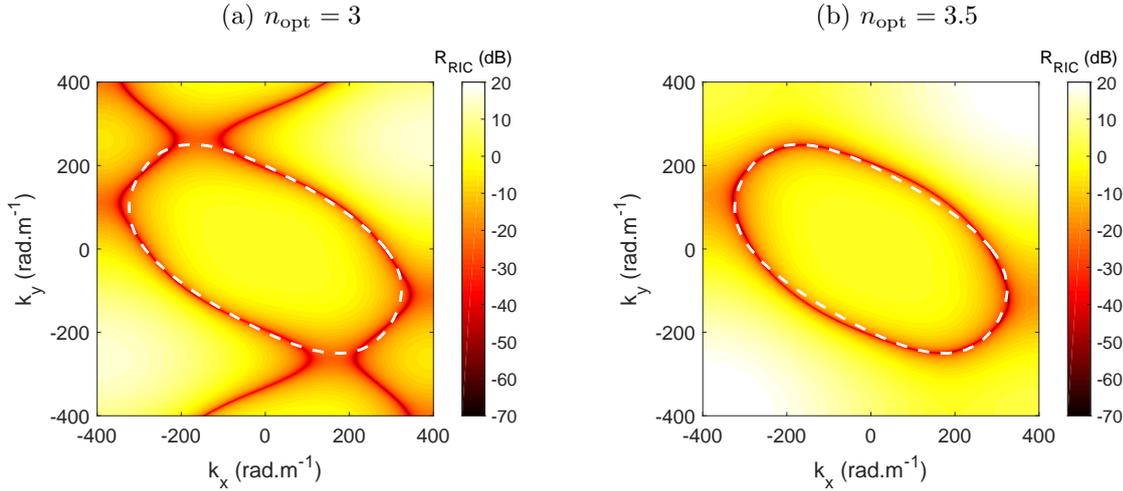


FIGURE 3.27 – Cartographie de \mathcal{R}_{RIC} obtenus à 10 kHz avec une régularisation définie par $n_{\text{opt}} = 3$ (a) et $n_{\text{opt}} = 3.5$ (b). RSB=30 dB. Nombre d'onde de flexion théorique (tirets blanc). Résultats obtenus à partir de la simulation d'une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

Finalement, la technique de régularisation de RIC ne semble pas être efficace pour la caractérisation de structures anisotropes. Pour un maillage de mesure cartésien fixe en fréquence, le filtrage n'est pas identique en fonction de la direction et de la fréquence. De ce fait, les rigidités \tilde{D}_{ij} estimées par RIFF sont identifiées à partir de champs de mesure encore bruités. La correction de RIC ne peut alors reconstruire correctement le nombre d'onde de flexion à partir des coefficients \tilde{D}_{ij} estimés.

À titre de comparaison, nous avons décidé d'utiliser la technique de régularisation de RIFF tout en gardant la correction de RIC. Tel que nous l'avons présenté à la section 1.2.3, cette régularisation est divisée en deux étapes et dépend d'un nombre d'onde de coupure k_c . Dans un premier temps, un fenêtrage, défini par une fenêtre spatiale de Tukey ψ_{2D} , est appliqué au champ de pression reconstruit :

$$\psi_{2D}(x, y) = \psi_{1D}(x) \cdot \psi_{1D}(y), \quad (3.44)$$

où

$$\psi_{1D}(x) = \begin{cases} 0.5 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{\alpha}\right) \right) & \text{si } 0 < x < \alpha, \\ 1 & \text{si } \alpha < x < L - \alpha, \\ 0.5 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(x - L + 2\alpha)}{\alpha}\right) \right) & \text{si } L - \alpha < x < L, \end{cases} \quad (3.45)$$

avec

$$\alpha = \begin{cases} \lambda_c & \text{si } L \geq 2\lambda_c, \\ L/2 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}.$$

L correspond à la longueur effective où le schéma peut être appliqué sur le maillage de mesure. Par exemple, pour un maillage régulier de $N_x \times N_y$ points, $L = (N_x - 8)\Delta_x$ dans la direction x et $L = (N_y - 8)\Delta_y$ dans la direction y . Dans un second temps, le champ de pression fenêtré est convolué à la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas définie par :

$$H_{2D}(x, y) = H_{1D}(x) \cdot H_{1D}(y), \quad (3.46)$$

où

$$H_{1D}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_c N} \left(1 + \cos\left(\frac{k_c x}{2}\right) \right) \text{sinc}(k_c x) & \text{si } x \in [-\lambda_c, \lambda_c], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.47)$$

avec N un paramètre de normalisation défini de sorte que $\int H_{1D}(x) dx = 1$.

Dans le cas d'identification de paramètres matériaux, le champ de pression étant supposé nul, le fenêtrage et le filtrage sont appliqués aux coefficients δ^{ij} et au déplacement W puisque la multiplication et la convolution sont distributives. Le nombre de coupure k_c est en règle générale choisi proportionnel au nombre d'onde de flexion de la plaque k_f . Dans le cas de structures anisotropes, il est préférable, tel que l'ont mentionné Ablitzer *et al.* [2], de choisir $k_c = \min(k_f(\theta))$ du fait que la méthode est plus sensible à une sous-régularisation ($k_c \gg k_f$) qu'à une sur-régularisation ($k_c \ll k_f$) et que l'information contenue dans des nombres d'onde supérieurs à k_f est inutile. Le nombre d'onde de la structure étant inconnu, un ordre de grandeur de k_c peut être obtenu à l'aide d'une méthodologie similaire à celle donnée par Ablitzer. À chaque fréquence, plusieurs valeurs arbitraires de k_c sont définies. Pour chacune de ces valeurs, les coefficients \tilde{D}_{ij} sont identifiés à partir des champs $W(x, y)$ et $\delta^{ij}(x, y)$ fenêtrés et filtrés grâce à la technique de régularisation de RIFF. Le nombre d'onde de flexion de la structure est ensuite reconstruit à partir des coefficients \tilde{D}_{ij} en utilisant soit l'approche par minimisation soit l'approche itérative. La valeur optimale du nombre de coupure correspond à celle minimisant la différence $|k_c - \min(k_{f,r}(\theta))|$, $k_{f,r}$ étant le nombre d'onde reconstruit à partir de la valeur de k_c choisie. À titre d'exemple, la Figure 3.28 présente la cartographie de $|k_c - \min(k_{f,r}(\theta))|$ en fonction de k_c et de la fréquence dans le cas de la structure étudiée dans cette section. Nous pouvons remarquer que la valeur optimale du nombre de coupure correspond bien à la valeur théorique de $\min(k_f(\theta))$.

La technique de régularisation de RIFF a ensuite été appliquée, à l'aide de ce nombre d'onde de coupure optimal, sur les champs bruités $W(x, y)$ et $\delta^{ij}(x, y)$ de la structure étudiée. La Figure 3.29 présente les rigidités estimées à la fois par RIFF (\tilde{D}_{ij}) et par RIC (D_{ij}) avec la méthode itérative. Les résultats sont beaucoup plus satisfaisants puisqu'ils sont similaires au cas non-bruité (voir Figure 3.22). La technique de régularisation de RIFF a l'avantage, par rapport à celle de RIC, d'être uniforme dans toutes les directions et de ne pas dépendre du maillage de mesure choisi. La correction de RIC reste cependant nécessaire comme nous pouvons le voir à

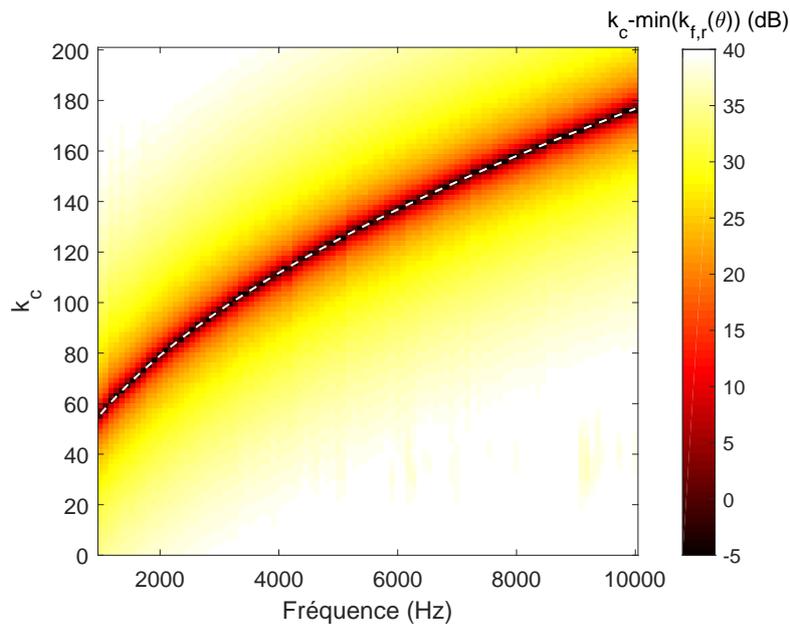


FIGURE 3.28 – Cartographie de $|k_c - \min(k_{f,r}(\theta))|$ permettant de choisir le nombre d’onde de coupure optimal dans la technique de régularisation de RIFF. Valeur théorique de $\min(k_f(\theta))$ (tirets blanc). Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1). RSB=30 dB.

la Figure 3.29. Dans la suite de ce manuscrit, nous avons donc décidé d’associer la technique de régularisation de RIFF et la correction de RIC pour l’identification des paramètres matériaux de structures anisotropes.

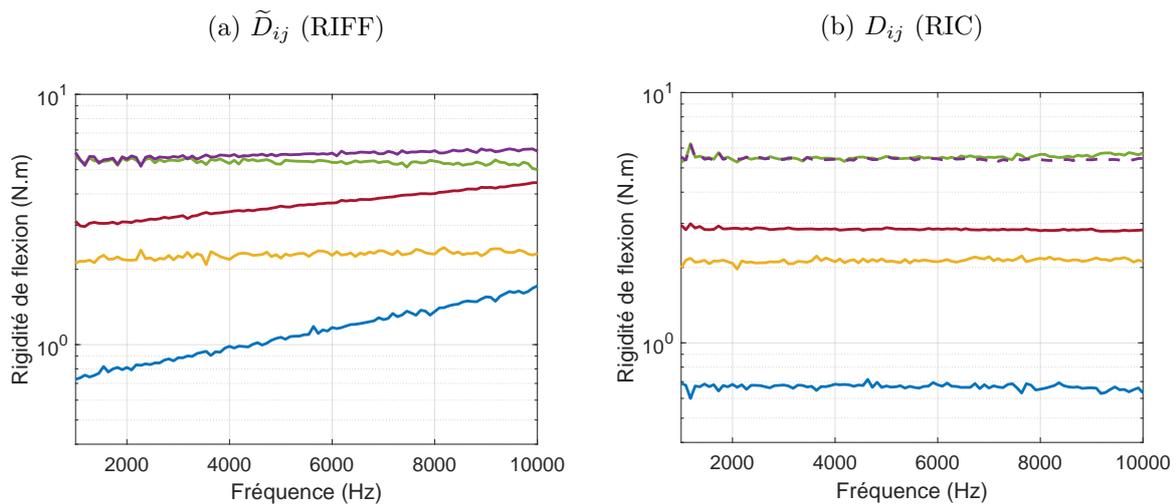


FIGURE 3.29 – Rigidités de flexion (D_{11} (—), D_{22} (—), D_{12} (—), D_{16} (—), D_{26} (—)), estimées par RIFF (a) et par RIC (b) avec l’approche itérative (30 itérations). RSB=30 dB. Technique de régularisation de RIFF. Résultats obtenus à partir de la simulation d’une plaque anisotrope (paramètres matériaux au Tableau 3.1).

Identification de l'amortissement

La méthodologie de RIC permet d'identifier des rigidités complexes et donc l'amortissement de la structure. Afin d'illustrer cet aspect, le champ de déplacement du sandwich en composite et en bois étudié à la section 2.1.5 a été calculé analytiquement à l'aide de la superposition modale décrite à la section 3.2.4. Cette modélisation modale n'étant valide que pour des structures orthotropes, nous avons décidé d'orienter les fibres de toutes les couches dans la direction x du repère de mesure (voir Figure 3.30). Un amortissement de 0.5% et de 3% a été respectivement ajouté aux modules des couches en composite et de la couche de bois définis dans le Tableau 2.1. Le champ de déplacement de la structure a été calculé à chaque fréquence en utilisant les rigidités équivalentes calculées par notre modèle multicouche. L'étude a été effectuée entre 1 et 100 kHz, domaine fréquentiel dans lequel la variation de l'amortissement de la structure est importante. Un maillage de mesure de 83×50 points représenté par le rectangle bleu sur la Figure 3.30 a été défini par un pas $d_x = d_y = 3$ mm afin de satisfaire un nombre de points par longueur d'onde supérieur à 2.5 dans les deux directions à toutes les fréquences. Un bruit blanc a également été ajouté au champ de déplacement calculé afin d'obtenir un RSB de 30 dB à toutes les fréquences et la technique de régularisation de RIFF a été utilisée afin d'atténuer l'influence de ce bruit sur les résultats.

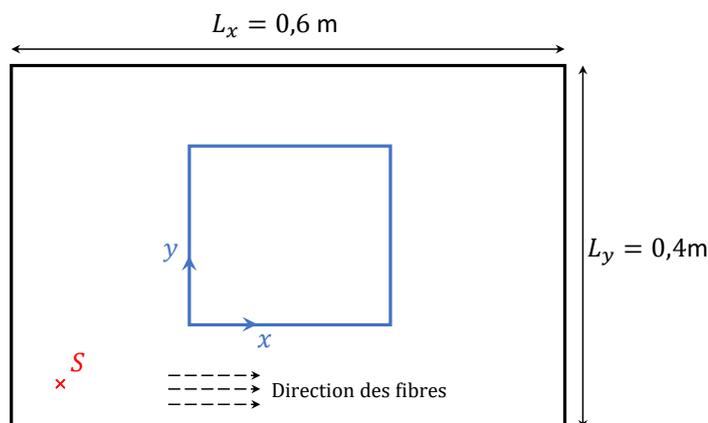


FIGURE 3.30 – Configuration de la simulation modale d'un sandwich orthotrope avec des peaux en composite et une âme en bois. Position de la source (\times). Carré bleu : zone d'application de RIC.

Les rigidités de flexion complexes de la structure ont été identifiées à l'aide de la méthode itérative de RIC. Le nombre d'onde de flexion complexe a ensuite été reconstruit en fonction de la fréquence et de la direction en utilisant la relation de dispersion (2.42) à partir de ces rigidités. L'amortissement énergétique de la structure a alors pu être identifié à l'aide de la nouvelle formulation spatiale donnée à l'Eq. (2.49). La Figure 3.31 compare cet amortissement à celui calculé par le modèle dans les directions $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$. Nous pouvons observer une bonne concordance des résultats de RIC et du modèle entre 10 et 100 kHz. À plus basses fréquences, la longueur d'onde de la structure est bien plus grande que la dimension de la zone mesurée. Le champ de déplacement ne fournit pas assez d'informations pour obtenir des résultats

corrects à ces fréquences. Cette constatation a déjà été observée par Ablitzer *et al.* [2] qui en ont conclu que la limite basse fréquence de la méthode dépend de la taille de la zone de mesure par rapport à la longueur d’onde de la structure.

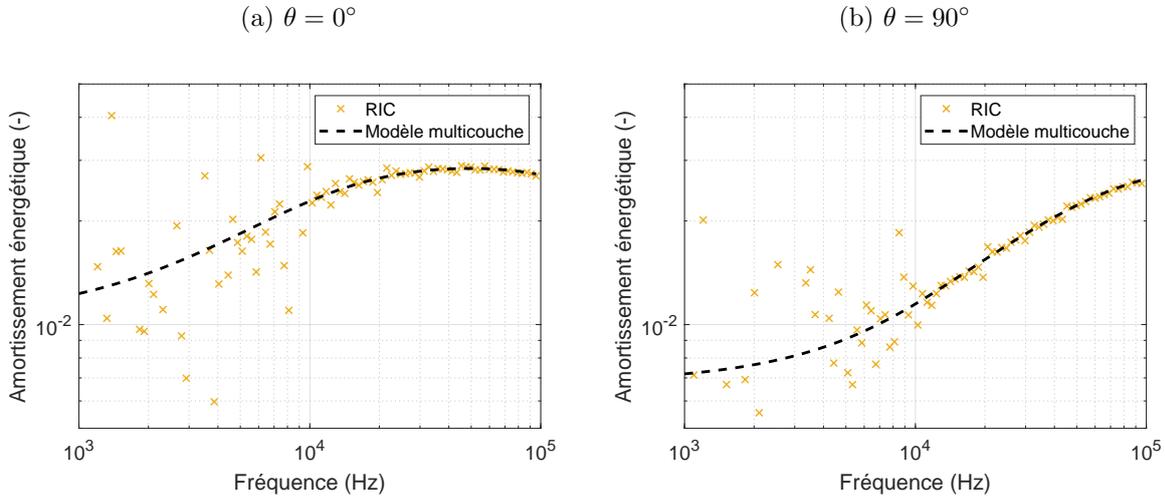


FIGURE 3.31 – Amortissement énergétique d’un sandwich orthotrope (caractéristiques des couches au Tableau 2.1, avec un empilement uniforme selon x et un amortissement de 3% sur le bois et 0.5% sur les couches de carbone) obtenu avec la formulation spatiale (Eq. (2.49)) dans les directions $\theta = 0^\circ$ (a) et $\theta = 90^\circ$ (b). RSB=30 dB. Estimations de RIC avec la régularisation de RIFF (\times) et prédictions de notre modèle multicouche (—).

3.4.4 Étude expérimentale sur les plaques en composite

Cette section traite de la caractérisation expérimentale des plaques composites d’empilement uniforme et laminé étudiées à la section 2.2 à l’aide de la méthode RIC. Le protocole expérimental est assez similaire à celui de la section 2.2.1. Les plaques ont été suspendues à une armature métallique à l’aide d’élastiques afin d’approcher des conditions aux limites libres-libres. L’excitation par pot vibrant a été remplacée par une excitation avec des cellules piézoélectriques afin de faciliter la mise en œuvre. Six champs de déplacement ont été mesurés avec le même vibromètre laser à balayage pour chaque plaque, chacun d’entre eux étant obtenu par des excitations de positions différentes (voir Figure 3.32). Ces mesures nous ont permis d’observer l’influence de la position de la source sur les résultats. Un matériau viscoélastique (bandes vertes sur la photo de la Figure 3.32) a également été collé sur les bords de la plaque afin de diminuer son temps de réverbération pour des raisons de temps d’acquisition. Cette manipulation n’a en théorie aucune influence sur les résultats de RIC puisque son aspect local permet de négliger les éléments extérieurs à la zone mesurée. La plaque d’empilement uniforme a été mesurée sur un maillage de 73×37 points défini par un pas $d_x = 4.5$ mm et $d_y = 8.8$ mm tandis que celle d’empilement laminé a été mesurée sur un maillage de 73×71 points défini par un pas $d_x = d_y = 4.5$ mm. La technique de régularisation de RIFF a été utilisée afin de limiter l’influence du bruit de mesure sur les résultats. L’étude a été effectuée entre 1 et 10 kHz afin de comparer les résultats de RIC à ceux de la méthode IWC présentés à la section 2.2.1. La correction de RIC a été appliquée

avec l'approche itérative.

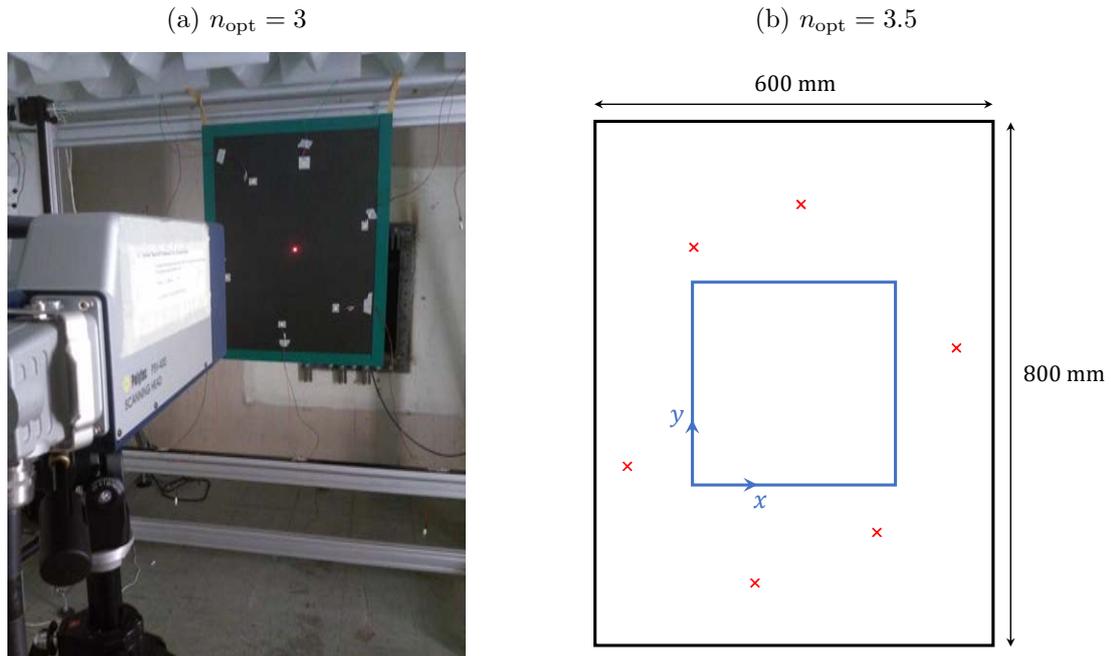


FIGURE 3.32 – Configuration de la mesure expérimentale réalisée sur les plaques en composites pour l'identification de paramètres matériaux avec RIC. Position des sources (\times). Zone mesurée (\square).

Pour les deux plaques, la position de la source a montré peu d'influence sur les résultats. La Figure 3.33 présente le nombre d'onde reconstruit en fonction de la fréquence et de la direction ainsi que les rigidités de flexion obtenues à partir de la moyenne des résultats des 6 champs mesurés sur la plaque d'empilement uniforme. RIC montre davantage de précision concernant l'estimation des rigidités (en particulier pour D_{12}) par rapport à la méthode IWC qui ne possède pas de technique de régularisation (voir Figure 2.11). La cartographie du nombre d'onde reconstruit est nettement moins bruitée que celle obtenue par IWC et est comparable à la cartographie du nombre d'onde théorique (voir Figure 2.10). Des résultats similaires ont également été obtenus avec la plaque d'empilement laminé (voir Figure 3.34).

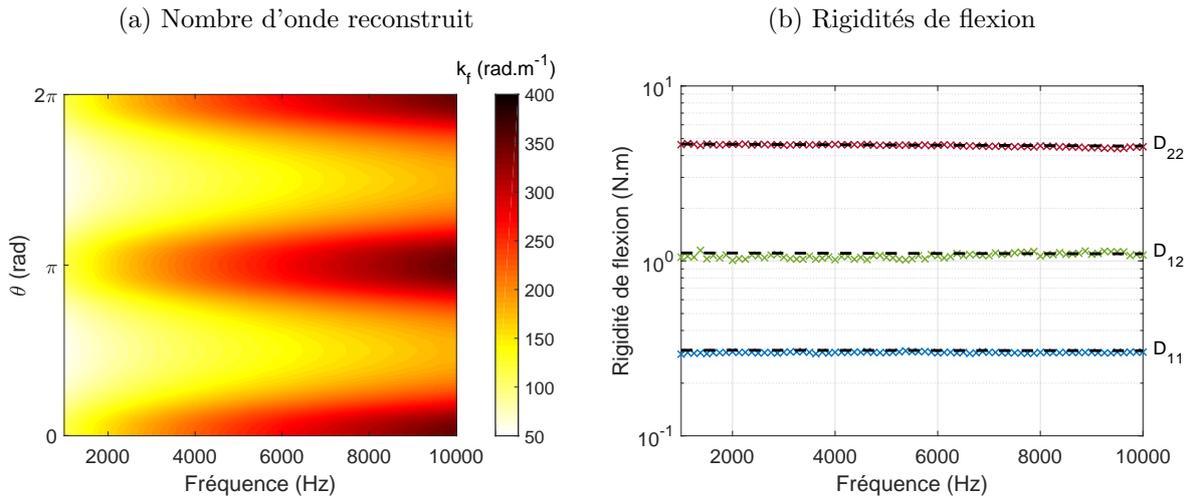


FIGURE 3.33 – Résultats de la caractérisation de la plaque composite d’empilement uniforme avec RIC en utilisant la régularisation de RIFF. (a) Nombre d’onde de flexion reconstruit. (b) Rigidités de flexion (D_{11} (\times), D_{22} (\times), D_{12} (\times)). Valeurs théoriques de notre modèle multicouche (—).

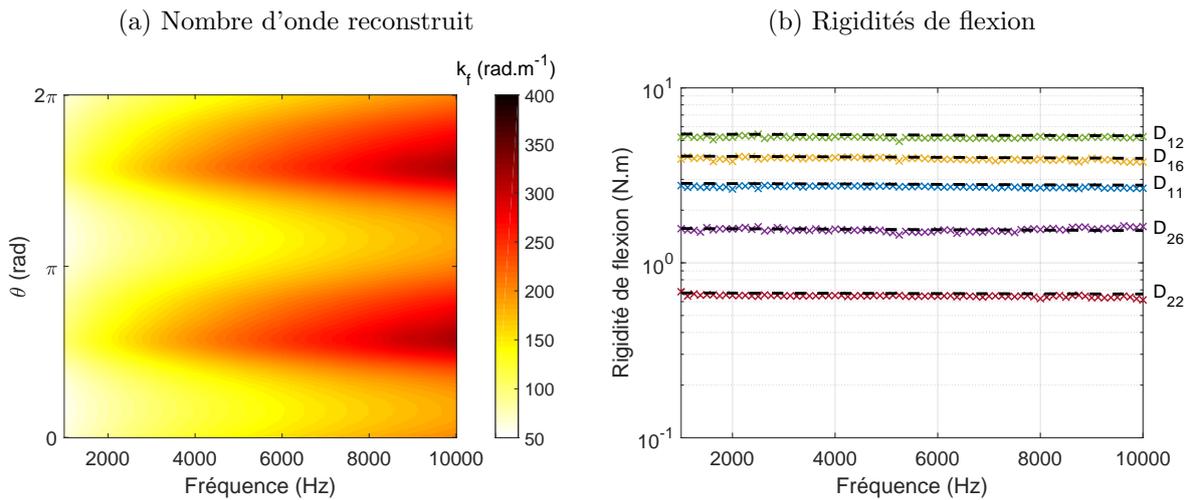


FIGURE 3.34 – Résultats de la caractérisation de la plaque composite d’empilement laminé avec RIC en utilisant la régularisation de RIFF. (a) Nombre d’onde de flexion reconstruit. (b) Rigidités de flexion (D_{11} (\times), D_{22} (\times), D_{12} (\times), D_{16} (\times), D_{26} (\times)). Valeurs théoriques de notre modèle multicouche (—).

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthodologie de RIFF et de RIC a été adaptée aux structures anisotropes définies par 5 rigidités de flexion. Le schéma aux différences finies permettant d’estimer les dérivées partielles du déplacement est alors composé de 25 points. Les résultats de RIFF montrent une surestimation des efforts résiduels du champ de pression reconstruit lorsque le nombre de points par longueur d’onde (n_x, n_y) est faible, c’est-à-dire en hautes fréquences. Cette surestimation provient de l’erreur de biais du schéma et entraîne également des erreurs d’estimation des rigidités de flexion lors de la caractérisation de la structure. La correction de RIC permet

d'étendre la limite hautes fréquences de RIFF en atténuant les singularités de la méthode à l'aide de 5 coefficients correcteurs μ_{ij} . Notre principal apport dans ce travail réside dans l'estimation de ces coefficients. Pour l'identification de source, nous proposons une solution analytique ou numérique, la méthode numérique permettant cependant d'obtenir une meilleure répartition de la correction en fonction de la direction par rapport à la méthode analytique. Dans le cas de l'identification de paramètres matériaux, nous proposons une approche par minimisation ainsi qu'une approche itérative pour appliquer la correction de RIC. Ces deux approches fournissent des résultats similaires bien que celle par minimisation soit plus longue. Elles dépendent tout de fois fortement de la valeur des rigidités estimées par RIFF en amont. Avec la correction de RIC, des résultats satisfaisants peuvent être obtenus avec un maillage de mesure grossier respectant au minimum le critère de Shannon (3.10) à la plus haute fréquence mesurée. La limite basse fréquence de la méthode est quant à elle définie par la taille de la zone mesurée par rapport à la longueur d'onde de la structure.

Dans le cas de champs bruités, RIC possède sa propre technique de régularisation qui consiste à adapter la taille du schéma dans les deux directions pour maintenir un nombre de points par longueur d'onde faible sur toute la plage fréquentielle. Le schéma est alors très grand en basses fréquences et retrouve sa taille d'origine en hautes fréquences. En conséquence, le champ de pression reconstruit est beaucoup plus petit en basses fréquences qu'en hautes fréquences. De plus, le maillage de mesure doit être suffisamment grand pour pouvoir utiliser le schéma en basses fréquences. Cette technique de régularisation n'est cependant pas uniforme en fonction de la fréquence. La taille du schéma et donc l'importance du filtrage peuvent changer brusquement d'une fréquence à une autre. Pour remédier à cela, il est possible de mesurer la structure sur un maillage beaucoup plus fin afin d'obtenir davantage de possibilités d'adaptation du schéma en fonction de la fréquence même si, en contre partie, les temps de mesure et d'analyse des résultats seront beaucoup plus longs. Ce point de vue rend cependant inutile la correction de RIC qui permet à l'inverse d'utiliser la méthode sur un maillage grossier. De plus, la longueur d'onde de la structure étant fonction de la direction, le nombre de points par longueur d'onde et donc l'effet du filtrage n'est pas identique dans toutes les directions. Des erreurs d'estimation peuvent alors apparaître dans certaines directions où le filtrage est peu ou trop intense. Cet aspect est essentiellement visible pour la caractérisation de matériaux puisque le nombre d'onde reconstruit par la méthode est soit sur-estimé soit sous-estimé dans ces directions. Les résultats en terme d'identification de source restent néanmoins corrects avec cette technique de régularisation. La technique de régularisation de RIFF présente quant à elle un filtrage identique dans toutes les directions qui ne dépend ni de la taille ni de la finesse du maillage. Elle est définie uniquement à partir d'un nombre d'onde de coupure généralement égal à la plus petite valeur du nombre d'onde de flexion de la structure en fonction de la direction. Ce filtrage isotrope permet d'obtenir de bons résultats même si la structure est anisotrope.

Finalement, la technique de régularisation de RIFF associée à la correction de RIC forment une méthodologie de caractérisation performante pour les structures anisotropes sur des champs bruités mesurés avec un maillage de mesure grossier et constant en fréquence. La méthodologie d'adaptation en fréquence de la taille du schéma proposée par RIC pourrait également être

optimisée en mesurant la structure avec un maillage pouvant s'adapter à la fois en fréquence et en direction. Ce type de maillage reste cependant complexe à réaliser.

Chapitre 4

Étude expérimentale d'un sandwich en nids d'abeille

Sommaire

4.1	Protocoles expérimentaux	110
4.1.1	Excitation avec une cellule piézoélectrique (protocole A)	110
4.1.2	Excitation au laser (protocole B)	111
4.2	Étude du mode de flexion de la structure	113
4.2.1	Analyse par méthode locale	113
4.2.2	Analyse par méthodes globales	117
4.2.3	Estimation large bande du nombre d'onde	119
4.3	Étude des autres modes de la structure	121
4.4	Comparaison des performances des méthodes globales et locales	123
4.5	Conclusion	125

Ce chapitre traite de l'étude expérimentale d'un sandwich en nids d'abeille, structure épaisse dont les comportements large bande complexes sont difficiles à modéliser. Cette étude forme donc une application intéressante pour notre modèle dont les performances sont mis en lumière à l'aide d'une comparaison au modèle de référence des ondes de Lamb. Les différentes mesures effectuées sur ce sandwich sont analysées avec les méthodes de caractérisation RIC, IWC ou encore la corrélation par fonctions de Hankel. Leurs résultats en terme de nombre d'onde et de rigidités de flexion sont comparés entre eux ainsi qu'aux estimations du modèle de référence des ondes de Lamb et à celles de notre modèle.

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un échange de 3 mois que j'ai effectué au cours de ma thèse avec l'université de Louvain (K.U.Leuven) en collaboration avec le professeur Bert Roozen grâce à un financement d'aide à la mobilité des doctorants du labex CeLyA (ANR-10-LABX-0060) de l'Université de Lyon.

4.1 Protocoles expérimentaux

La plaque, de dimensions $0.73 \times 0.52 \text{ m}^2$, est composée de deux peaux en aluminium de 0.6 mm d'épaisseur chacune et d'une âme en nids d'abeille de 9 mm d'épaisseur. Ces nids d'abeille ont été réalisés en Nomex[®], matériau constitué d'un papier aramidique imprégné d'une résine phénolique (voir Figure 4.1). Il est important de noter que la forme alvéolaire des nids d'abeille rend la structure orthotrope. Dans notre étude, nous modéliserons donc ces nids d'abeille en une couche homogène et orthotrope.

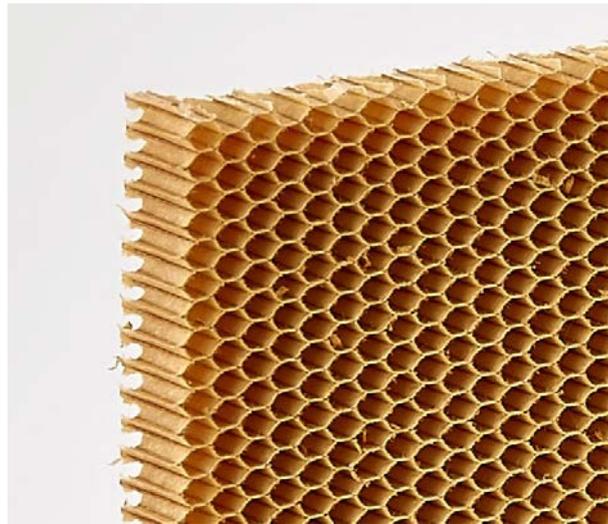


FIGURE 4.1 – Nids d'abeille en Nomex[®].

Deux protocoles expérimentaux ont été réalisés pour mesurer ce sandwich. Le premier était défini par une excitation avec une cellule piézoélectrique et nous a permis d'explorer le contenu moyennes et hautes fréquences de la structure tandis que le second, défini par une excitation au laser, nous a permis d'étendre cette étude vers les très hautes fréquences.

4.1.1 Excitation avec une cellule piézoélectrique (protocole A)

Une première série de mesures a été effectuées sur une plage fréquentielle allant de 1 à 10 kHz et de 10 à 50 kHz avec des pas de maillage différents afin de réduire le temps d'acquisition. Ces mesures, dont les caractéristiques sont résumées dans le Tableau 4.1, ont été réalisées en collaboration avec le professeur Mathias Kersemans, collègue de Bert Roozen, et son doctorant Joost Segers de l'université de Gand à l'aide d'un vibromètre laser 3D (Polytec PSV-500-3D XTRA) (voir Figure 4.2a). Ce type de vibromètre nous a permis de mesurer à la fois le champ de déplacement transverse dans la direction z (W) de la structure et membranaire dans les directions x (U) et y (V). Le protocole expérimental reste similaire à celui retenu pour l'étude des plaques composites étudiées à la section 2.2. La plaque a été suspendue à une armature à l'aide d'élastiques afin d'approcher des conditions aux limites libre-libre et a été excitée à l'aide d'une cellule piézoélectrique collée en son centre. Le repère de mesure, parallèle aux bords de la plaque, est représenté à la Figure 4.2b. Il est également important de noter que les axes

4.1. PROTOCOLES EXPÉRIMENTAUX

principaux des alvéoles de la structure en nids d'abeilles sont orientés d'un angle $\theta_T \neq 0$ par rapport au repère de mesure. Ainsi, le sandwich est considéré comme monoclinique dans ce même repère. Plusieurs trous d'environ 1 cm de diamètre ont été percés sur les bords de la plaque afin de pouvoir y faire passer une corde amortissante qui permet, à l'instar des patches amortissant collés sur les plaques composites étudiées à la section 2.2, d'atténuer les ondes réfléchies et d'améliorer les performances des méthodes de corrélation.

	Mesure n°1	Mesure n°2
Plage fréquentielle	1 à 10 kHz	10 à 50 kHz
Fréquence d'échantillonnage	25 kHz	125 kHz
Maillage	138 × 94 points	270 × 187 points
Pas de maillage	$d_x = d_y = 4$ mm	$d_x = d_y = 2$ mm
Type d'excitation	Sinus glissant	Sinus glissant

Tableau 4.1 – Caractéristiques des mesures effectuées sur un sandwich en nids d'abeille à l'aide d'un vibromètre laser 3D.

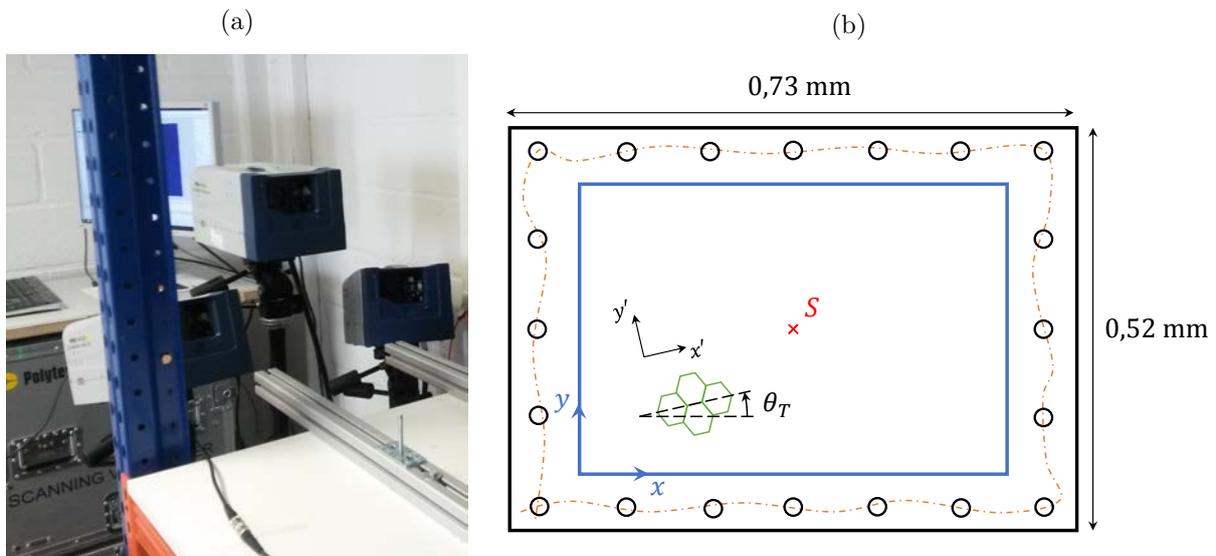


FIGURE 4.2 – (a) Vibromètre laser 3D (Polytec PSV-500-3D XTRA). (b) Configuration de la mesure effectuée sur la plaque sandwich en nids d'abeille. Position de la source (\times). Zone mesurée (—). Corde amortissante (---).

4.1.2 Excitation au laser (protocole B)

Une deuxième série de mesures a été effectuée sur une plage fréquentielle allant de 10 à 300 kHz en utilisant une excitation par impulsion photo-acoustique à l'aide d'un laser Nd-YAG (grenat d'yttrium-aluminium dopé au néodyme). Ce laser possède une longueur d'onde de 1064 nm et une énergie maximal de 200 mJ par pulsation pour un total de 10 pulsations par

seconde. Ces pulsations sont de l'ordre de 1 ns, ce qui permet d'exciter tous les modes de la plaque jusqu'au GHz.

Le protocole expérimental utilisé dans cette étude et détaillé à la Figure 4.3 est similaire à celui réalisé par Roozen *et al.* [113] où un sandwich isotrope (acier-polymère-acier) est caractérisé à l'aide du même laser. La plaque est suspendue à une armature afin d'approcher des conditions aux limites libre-libre. La corde, enroulée dans les trous aux bords de la plaque, est conservée afin d'atténuer les ondes réfléchies et d'améliorer les résultats des méthodes par corrélation. De plus, la mesure est effectuée au centre de la plaque afin de s'éloigner le plus possible des bords. La puissance du laser Nd-YAG est ajustée afin de fournir suffisamment d'énergie pour exciter la structure sans la détériorer. Le laser étant fixe, il est plus judicieux d'utiliser le principe de réciprocité et d'exciter la structure sur plusieurs points en mesurant sa réponse sur un seul. Pour cela, le faisceau du laser est projeté sur la plaque à l'aide d'un miroir positionné sur un slider. La réponse de la plaque est quant à elle mesurée à l'aide de deux vibromètres laser monopoint (LDV1 et LDV2) de références Polytec OFV 353 et Polytec OFV 303 positionnées à 27° de part et d'autre de l'axe perpendiculaire à la plaque. Cette configuration permet d'identifier le déplacement transverse de la structure en sommant les données mesurées par ces deux vibromètres ainsi que le déplacement membranaire en les soustrayant. Le système d'acquisition utilisé pour recueillir ces données est un oscilloscope de référence LeCroy 9350A doté d'une résolution temporelle de 50 000 points. À chaque position du miroir, un total de 400 moyennes temporelles est effectué pour améliorer le RSB de la mesure. Chaque moyenne est définie par un temps de mesure de 0.05 s afin d'obtenir une fréquence d'échantillonnage de 1 MHz. L'impulsion du laser, captée par une cellule photosensible, est utilisée pour déclencher le début de chaque moyenne sur l'ordinateur. Une fois les moyennes effectuées à une position donnée, le slider passe à la position suivante. Enfin, ce dispositif a été entièrement contrôlé par un programme LabView développé par Ludovic Labelle de l'université de Louvain.

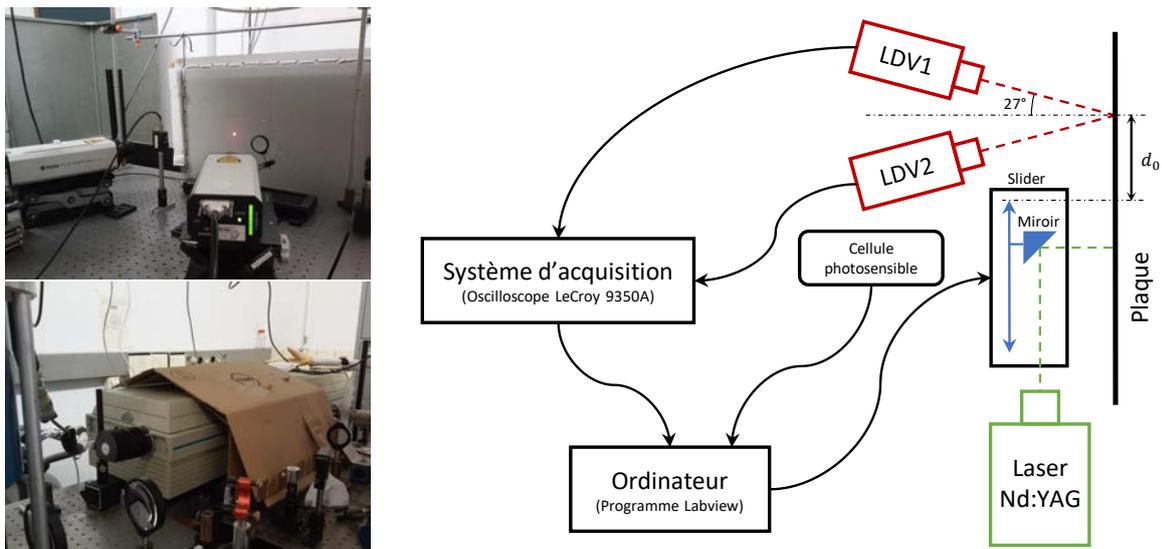


FIGURE 4.3 – Configuration de la mesure effectuée sur la plaque sandwich en nids d'abeille avec une excitation par laser.

Avec ce dispositif, la réponse de la structure a uniquement été mesurée selon une ligne. De ce fait, nous avons décidé de mesurer la plaque selon ses axes principaux, c'est-à-dire selon les axes x et y du repère de mesure présenté à la Figure 4.2b. La mesure selon l'axe y a simplement été réalisée en tournant la plaque de 90° . Il est important de rappeler que ces deux axes ne correspondent pas aux axes d'orthotropie du nids d'abeille. Dans chaque direction, les différentes excitations ont été appliquées sur un maillage de 302 points défini par un pas de 0.5 mm. Le point de mesure, aligné avec ce maillage, était positionné à une distance d_0 du premier point d'excitation (voir Figure 4.3), d_0 étant égale à 13 mm pour la mesure selon l'axe x et 17 mm pour la mesure selon l'axe y .

La Figure 4.4 présente le déplacement transverse de la plaque en fonction des différents points d'excitation et du temps dans les deux directions étudiées. Nous pouvons tout d'abord remarquer que les phénomènes de dispersion interviennent essentiellement entre $0.8 \text{ ms} < t < 1.2 \text{ ms}$ après l'impulsion. Les ondes réfléchies sont également présentes mais leurs niveaux d'énergie restent faibles par rapport à ceux des ondes directes.

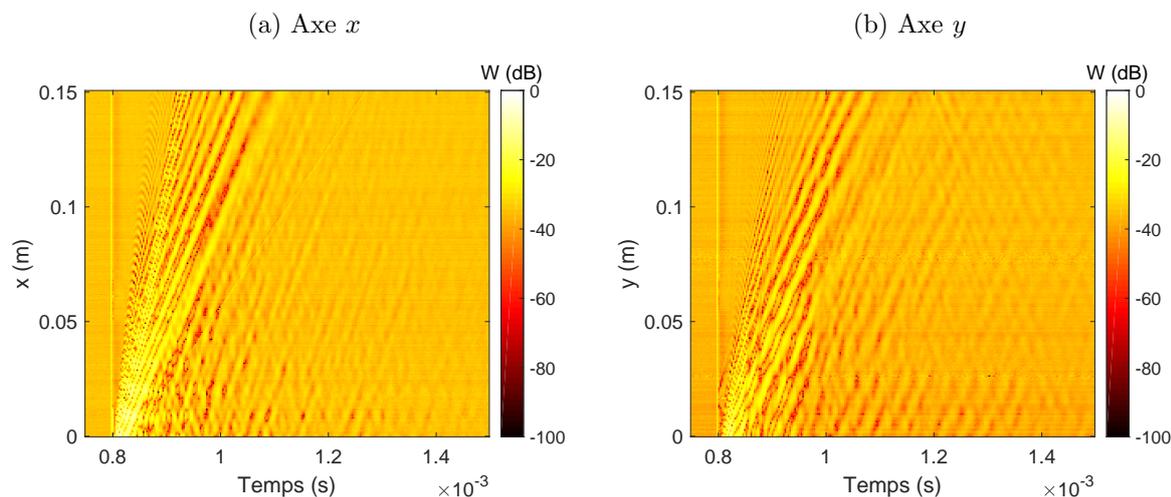


FIGURE 4.4 – Déplacement transverse mesuré sur le sandwich en nids d'abeille avec une excitation au laser. Axe temporel compris entre 0.75 et 1.5 ms. Résultats dans les directions x (a) et y (b).

4.2 Étude du mode de flexion de la structure

4.2.1 Analyse par méthode locale

Les mesures effectuées avec le protocole A ont tout d'abord été analysées avec la méthode RIC dont les résultats en terme de nombre d'onde sont présentés à la Figure 4.5. Le schéma aux différences finies a été appliqué sur les points du maillage de mesure situés à plus de 6 cm de la source, distance suffisante pour supposer que le champ de pression soit nul sur ces points. Le bruit de mesure a été atténué en utilisant une nouvelle fois la technique de régularisation de RIFF avec une plage de potentiels nombre d'onde de coupure comprise entre 10 et 600 rad.m^{-1} . Enfin, la correction de RIC a été appliquée en utilisant la méthode par itération.

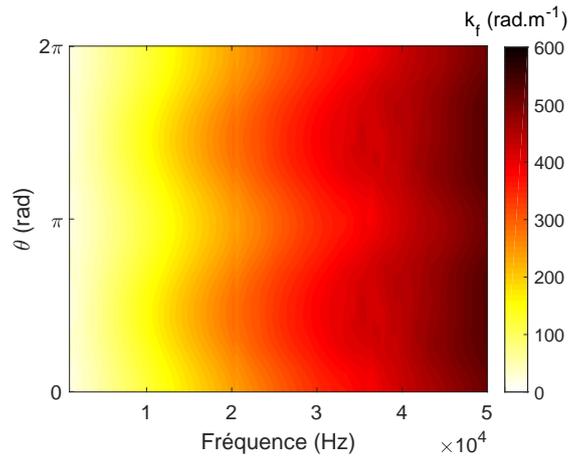


FIGURE 4.5 – Nombre d’onde de flexion du sandwich nids d’abeille reconstruit par RIC en utilisant la technique de régularisation de RIFF.

La Figure 4.6a compare les rigidités de flexion identifiées par RIC à celles prédites par notre modèle multicouche. Le choix des paramètres matériaux utilisés dans le modèle pour chacune des couches est justifié dans le paragraphe suivant. Nous pouvons tout d’abord noter le remarquable accord entre les résultats de RIC et ceux de notre modèle sur une large bande fréquentielle et ceci pour les 5 rigidités identifiées. Ces résultats mettent en lumière les performances de la méthodologie expérimentale mise en place et la précision du modèle analytique développé. Les rigidités équivalentes diminuent en fonction de la fréquence dans la gamme de fréquences étudiée. Cette décroissance provient de l’hypothèse de plaque mince émise à la fois par RIC et par le modèle qui considère uniquement la flexion de la structure et souligne donc le fait, comme nous l’avons indiqué à la section 1.1.1, que le cisaillement du sandwich augmente avec la fréquence. De plus, nous constatons que la structure équivalente est anisotrope entre 5 et 30 kHz ($D_{11} \neq D_{22}$) et tend vers l’isotropie au delà ($D_{11} \simeq D_{22} \simeq D_{12}/2$ et $D_{16}, D_{26} \simeq 0$). Ainsi, nous pouvons en conclure que le comportement dynamique du sandwich est essentiellement dominé par le cisaillement du cœur orthotrope dans ce domaine de fréquences tandis qu’à plus hautes fréquences, il est dominé par celui des peaux isotropes. Les résultats du modèle nous permettent également d’indiquer que la structure équivalente tend asymptotiquement en basses fréquences vers un comportement isotrope.

Peaux en aluminium	Âme en Nomex [®]
$h = 0.6 \text{ mm}$	$h = 9 \text{ mm}$
$\rho = 2700 \text{ kg.m}^3$	$\rho = 170 \text{ kg.m}^3$
$E = 70 \text{ GPa}$	$G_{xz} = 75 \text{ MPa}; G_{yz} = 110 \text{ MPa}$
$\nu = 0.3$	$\nu_{xz} = 0.2; \nu_{yz} = 0.3$
	$\theta_T = -7^\circ$

Tableau 4.2 – Paramètres matériaux des couches du sandwich nids d’abeille utilisés dans notre modèle multicouche.

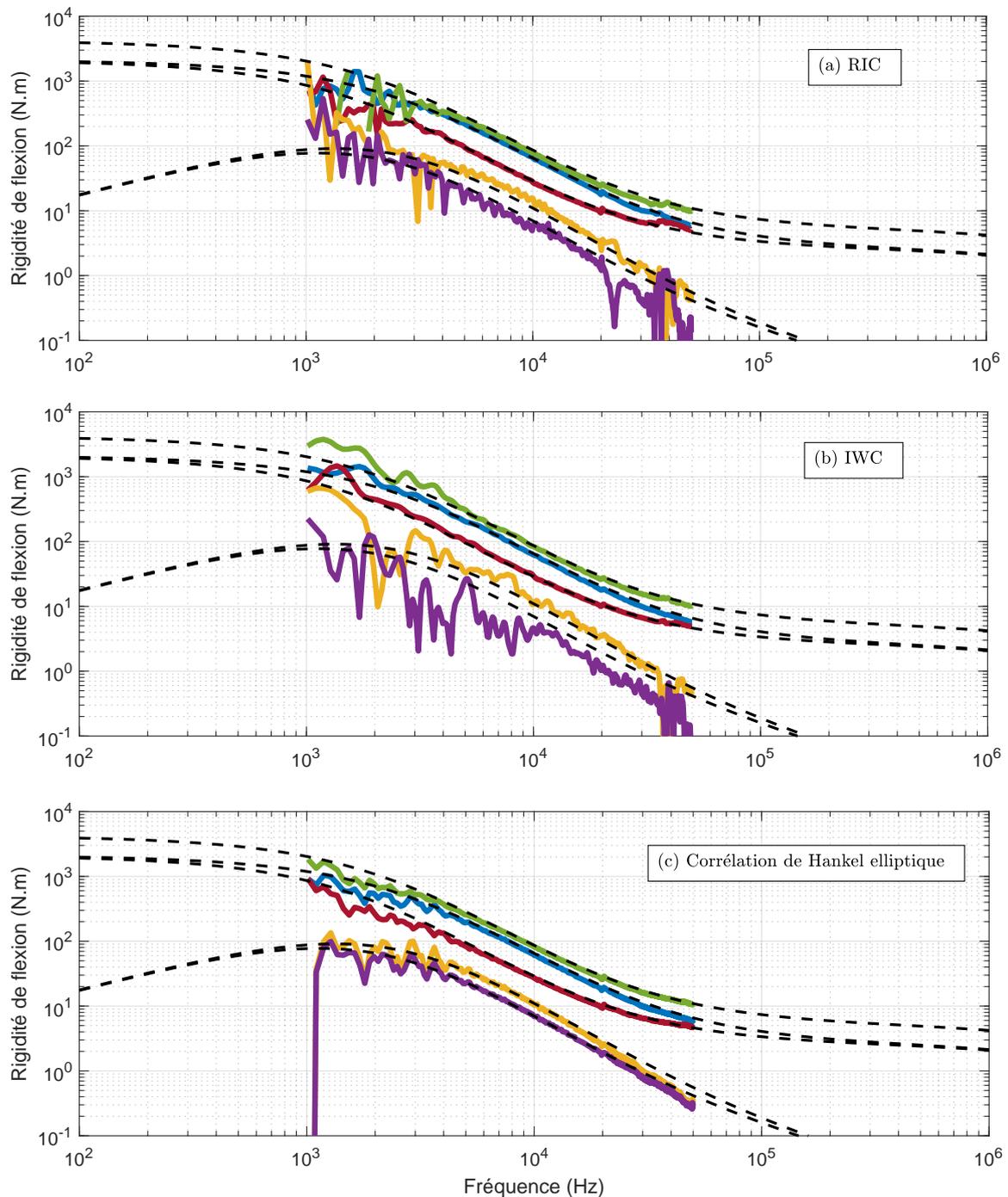


FIGURE 4.6 – Rigidités de flexion du sandwich nids d’abeille identifiées par RIC (a), IWC (b) et la corrélation de Hankel elliptique (c). (D_{11} (—), D_{22} (—), D_{12} (—), D_{16} (—), D_{26} (—)). Valeurs théoriques de notre modèle multicouche (—).

Les paramètres matériaux, utilisés dans le modèle pour chacune des couches, ont été sélectionnés à partir de données recueillies dans la littérature des structures sandwichs nid d’abeilles afin d’obtenir la meilleure cohérence possible avec les résultats de RIC. Les peaux en aluminium ont été définies par des paramètres standards pour ce type de matériau (voir Tableau 4.2).

Concernant les paramètres de l'âme du sandwich, nous avons tout d'abord identifié son angle d'orthotropie en utilisant la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} D'_{11} \\ D'_{22} \\ D'_{12} \\ D'_{16} \\ D'_{26} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & c^2s^2 & c^3s & cs^3 \\ s^4 & c^4 & c^2s^2 & -cs^3 & -s^3c \\ 6c^2s^2 & 6c^2s^2 & c^4 + s^4 - 4c^2s^2 & 3(cs^3 - c^3s) & 3(c^3s - cs^3) \\ -4c^3s & 4cs^3 & 2(c^3s - cs^3) & c^4 - 3c^2s^2 & -s^4 + 3c^2s^2 \\ -4cs^3 & 4c^3s & 2(cs^3 - c^3s) & -s^4 + 3c^2s^2 & c^4 - 3c^2s^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

avec $c = \cos(\theta_T)$ et $s = \sin(\theta_T)$. Cette relation permet d'écrire les rigidités de flexion D' de la structure définies dans le repère $Ox'y'$ (voir Figure 4.2b) à partir de celles estimées par RIC dans le repère Oxy (voir Figure 4.7a). L'angle d'orthotropie correspond à la valeur de θ_T pour laquelle la structure est considérée comme orthotrope dans le repère $Ox'y'$, c'est-à-dire $D'_{16} \approx D'_{26} \approx 0$. La Figure 4.7b présente l'angle d'orthotropie de la structure estimé par cette technique en fonction de la fréquence. Nous pouvons observer qu'entre 5 et 30 kHz, lorsque le cisaillement de l'âme du sandwich est important, l'angle d'orthotropie est d'environ $\theta_T = -7^\circ$. À plus hautes et plus basses fréquences, les angles d'orthotropie identifiés sont incorrects. En hautes fréquences ($f > 30$ kHz), la structure équivalente étant isotrope, le modèle n'est plus le bon. En basses fréquences ($f < 5$ kHz), les estimations de RIC sont incorrectes puisque les longueurs d'ondes sont trop grandes par rapport à la zone de mesure.

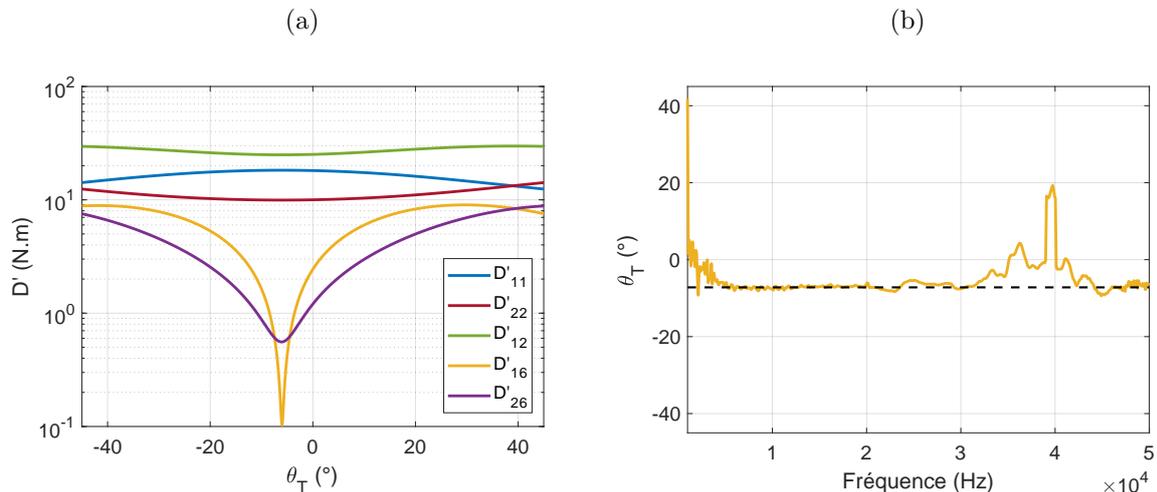


FIGURE 4.7 – Rigidités de flexion D' calculées avec l'Eq. (4.1) à partir des rigidités estimées par RIC à 20 kHz (a). Angle d'orthotropie (—) identifié à partir des résultats de RIC (b). Valeur d'angle d'orthotropie sélectionnée : $\theta_T = -7^\circ$ (—).

Par la suite, nous avons constaté que les modules E_x , E_y et G_{xy} de l'âme avaient peu d'influence sur les rigidités équivalentes prédites par notre modèle, tandis que les modules de cisaillement transverse G_{xz} et G_{yz} permettaient de définir l'orthotropie de la structure. Cette

constatation est en accord avec le modèle de poutre sandwich de Nilsson et Nilsson [85] qui définit les paramètres matériaux du nids d'abeille uniquement à partir de ces deux derniers modules. N'ayant pas de matériau Nomex à disposition, il ne nous a pas été possible de le caractériser seul. L'identification de sa densité ρ ainsi que ses modules de cisaillement G_{xz} et G_{yz} n'a donc pas pu être menée expérimentalement. Nous avons donc fait des hypothèses ; le choix que nous avons retenu est de faire varier ces trois paramètres pour minimiser l'écart aux courbes de dispersion (principalement des ondes de flexion, et des couplages modaux avec les modes A0/A1/S0, voir section 4.3). Les paramètres optimaux de chaque couche sont finalement résumés dans le Tableau 4.2.

4.2.2 Analyse par méthodes globales

Les mesures effectuées avec le protocole A ont également été analysées avec des méthodes de caractérisation globales telles que IWC ou la corrélation de Hankel. La Figure 4.8 présente les nombres d'onde identifiés par IWC. Nous pouvons remarquer, à l'instar des résultats obtenus sur les plaques en composite étudiées à la section 2.2, que les résultats de IWC restent bruités en hautes fréquences malgré une bonne concordance avec ceux de RIC. Nous avons donc eu recours à un lissage des nombres d'onde identifiés par IWC afin d'atténuer la sensibilité de la méthode moindres carrés lors de l'estimation des rigidités de flexion. Ces rigidités, présentées à la Figure 4.6b restent également proches de celles calculées par le modèle avec les paramètres du Tableau 4.2.

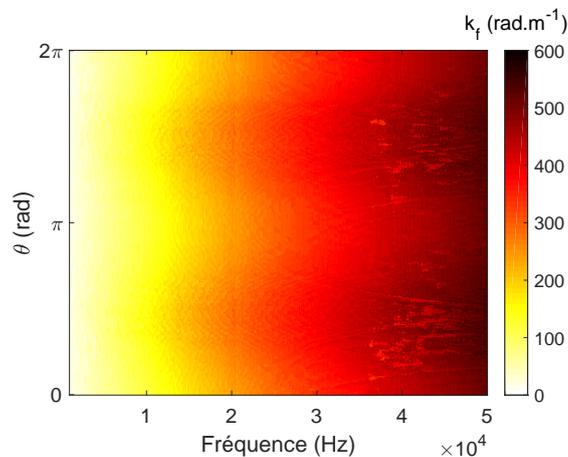


FIGURE 4.8 – Nombre d'onde de flexion du sandwich nids d'abeille reconstruit par IWC.

La Figure 4.9 présente l'indice de corrélation obtenu par la méthode IWC dans l'espace des nombres d'onde à 10 et 50 kHz. À l'aide de ces représentations, nous pouvons facilement observer les variations des propriétés mécaniques du sandwich en fonction de la fréquence. À 10 kHz, la structure présente une orthotropie pouvant s'apparenter à une orthotropie dite *elliptique* définie par la relation $D'_{12} = 2\sqrt{D'_{11}D'_{22}}$. De plus, les axes d'orthotropie, représentés en bleu sur la Figure 4.9, forment bien un angle de 7° par rapport aux axes du repère de mesure. À 50 kHz, le facteur d'orthotropie (D'_{22}/D'_{11}) de la structure s'approche de 1 et les propriétés mécaniques de la structure tendent vers l'isotropie.

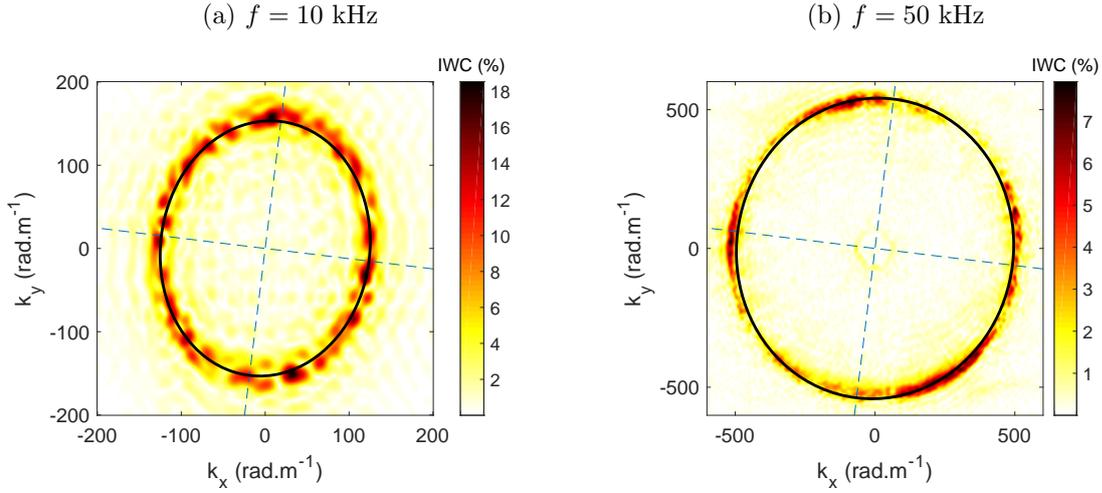


FIGURE 4.9 – Indice de corrélation de la méthode IWC appliqué au champ mesuré sur le sandwich nids d’abeille à 10 kHz (a) et 50 kHz (b) dans le plan d’onde. Valeurs théoriques du modèle multicouche (—). Axes d’orthotropie (---).

Une troisième technique d’estimation, la corrélation de Hankel, a été utilisée après RIC et IWC. Afin de l’appliquer sur le sandwich orthotrope étudié, quelques modifications de la méthodologie ont été nécessaires. Tel que nous l’avons vu à la section 1.2.2, cette corrélation fait appel à un champ de Green isotrope [114]. Ce champ peut également être adapté aux structures orthotropes *elliptiques* tel que Berthaut [10] le présente dans les annexes de sa thèse. Berthaut indique cependant qu’il est *”très délicat, voir impossible, de trouver le noyau de Green analytiquement”* pour les structures orthotropes non elliptiques ou anisotropes¹ (voir l’annexe B de Berthaut [10]). Les derniers résultats présentés à la Figure 4.9 nous offrent cependant la possibilité d’utiliser la corrélation de Hankel avec un champ de Green orthotrope elliptique ($D'_{12} = 2\sqrt{D'_{11}D'_{22}}$) sur le sandwich étudié. Ce type de champ s’écrit pour une plaque mince :

$$G_{\infty}(r, \theta_r) = \frac{j^4 D_{11} D_{22}}{8\sqrt{\rho h \omega^2}} \left(H_0^{(1)}(\kappa(\theta_r)r) - H_0^{(1)}(j\kappa(\theta_r)r) \right), \quad (4.2)$$

où $\kappa(\theta_r)$ est un pseudo nombre d’onde défini par :

$$\kappa^4(\theta_r) = \rho h \omega^2 \left(\frac{\cos^2(\theta_r)}{\sqrt{D_{11}}} + \frac{\sin^2(\theta_r)}{\sqrt{D_{22}}} \right)^2, \quad (4.3)$$

avec $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ et $\theta_r = \text{atan}((y - y_0)/(x - x_0)) - \theta_T$, le couple (x_0, y_0) représentant la position de la source.

Le procédé de corrélation de Hankel, présenté à la section 1.2.2, reste identique avec ce nouveau champ de Green. À une fréquence f donnée, le champ mesuré est comparé au champ numérique défini par les deux paramètres D_{11} et D_{22} en supposant que l’angle d’orthotropie connu et égal à $\theta_T = -7^\circ$. Le nombre d’onde de flexion de la structure est ensuite reconstruit à

1. Berthaut propose plusieurs solutions pour trouver le noyau de Green de telles structures, comme par exemple un changement de variable dans l’équation différentielle ou une intégration directe de la formulation de Fourier. Ces solutions restent cependant difficile à trouver ou à calculer.

partir des valeurs de D_{11} et D_{22} minimisant l'erreur entre les deux champs :

$$k^A(f, \theta) = \frac{\rho h \omega^2}{(\sqrt{D_{11}} \cos^2(\theta) + \sqrt{D_{22}} \sin^2(\theta))^2}. \quad (4.4)$$

Dans cette approche, le fait d'ajouter des sources images n'apporte rien aux résultats de la méthode du fait que l'énergie des ondes réfléchies ait été atténuée grâce à la corde amortissante enroulée sur les bords de la plaque.

La Figure 4.10 présente le nombre d'onde et les rigidités estimés par cette corrélation de Hankel elliptique sur le sandwich nids d'abeille. Nous pouvons remarquer que les résultats semblent moins bruités que ceux obtenus par IWC. Cette dernière constatation est due au fait que l'on suppose une forme parfaitement elliptique du nombre d'onde dans le plan d'onde dépendant uniquement de deux paramètres : D_{11} et D_{22} . À l'inverse, IWC fournit une estimation du nombre d'onde dans une multitude de directions à chaque fréquence et est donc davantage sujet à une dispersion des résultats. De ce fait, les rigidités identifiées par la corrélation de Hankel elliptique sont également bien plus proches de celles prédites par notre modèle (voir Figure 4.6c).

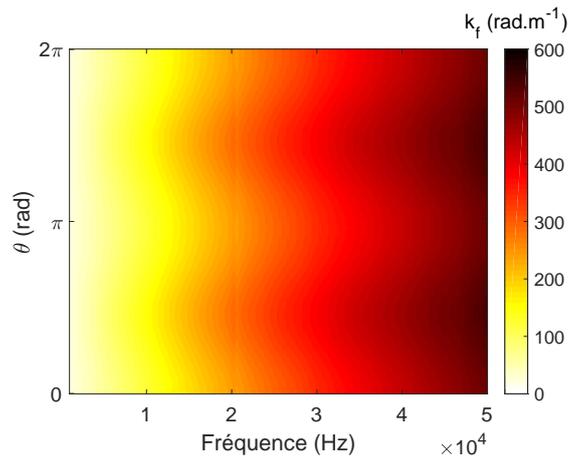


FIGURE 4.10 – Nombre d'onde de flexion du sandwich nids d'abeille reconstruit par la corrélation de Hankel elliptique.

4.2.3 Estimation large bande du nombre d'onde

Cette section regroupe les résultats obtenus à partir des deux protocoles expérimentaux afin d'étudier le nombre d'onde naturel de la structure sur une large bande fréquentielle. Les mesures du protocole A ont été analysées entre 5 et 50 kHz tandis que celles du protocole B ont été analysées entre 50 et 300 kHz. Le maillage de mesure choisi dans le protocole B étant mono-dimensionnel, nous avons uniquement utilisé la méthode IWC puisque le schéma aux différences finies de RIC ne pouvait pas être appliqué sur ces mesures. De plus, les mesures du protocole B ayant été effectuées uniquement selon les axes x et y parallèles aux bords de la plaque, nous avons également appliqué IWC dans les mêmes directions ($\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$) sur les mesures du protocole A. Il est également important d'indiquer que le taux de corrélation obtenu avec les mesures du protocole B était très élevé (IWC > 90%) du fait que le champ corrélé était mono-

dimensionnel et pouvait donc davantage s'apparenter à une onde plane. Afin d'obtenir un taux de corrélation similaire avec les mesures du protocole A, nous avons donc appliqué la méthode IWC uniquement sur les points formant un angle de maximum 2° entre la source et les axes étudiés, soit x et y . La Figure 4.11 compare le nombre d'onde estimé à la fois par IWC et le modèle analytique dans les deux directions. Nous remarquons, que ce soit à partir des résultats expérimentaux ou analytique, que le nombre d'onde évolue entre deux asymptotes. Ces dernières correspondent également aux limites basses et hautes fréquences des rigidités équivalentes présentées dans les sections précédentes. Ces deux asymptotes sont également identiques entre les axes x et y , ce qui souligne l'isotropie de la structure en basses et hautes fréquences.

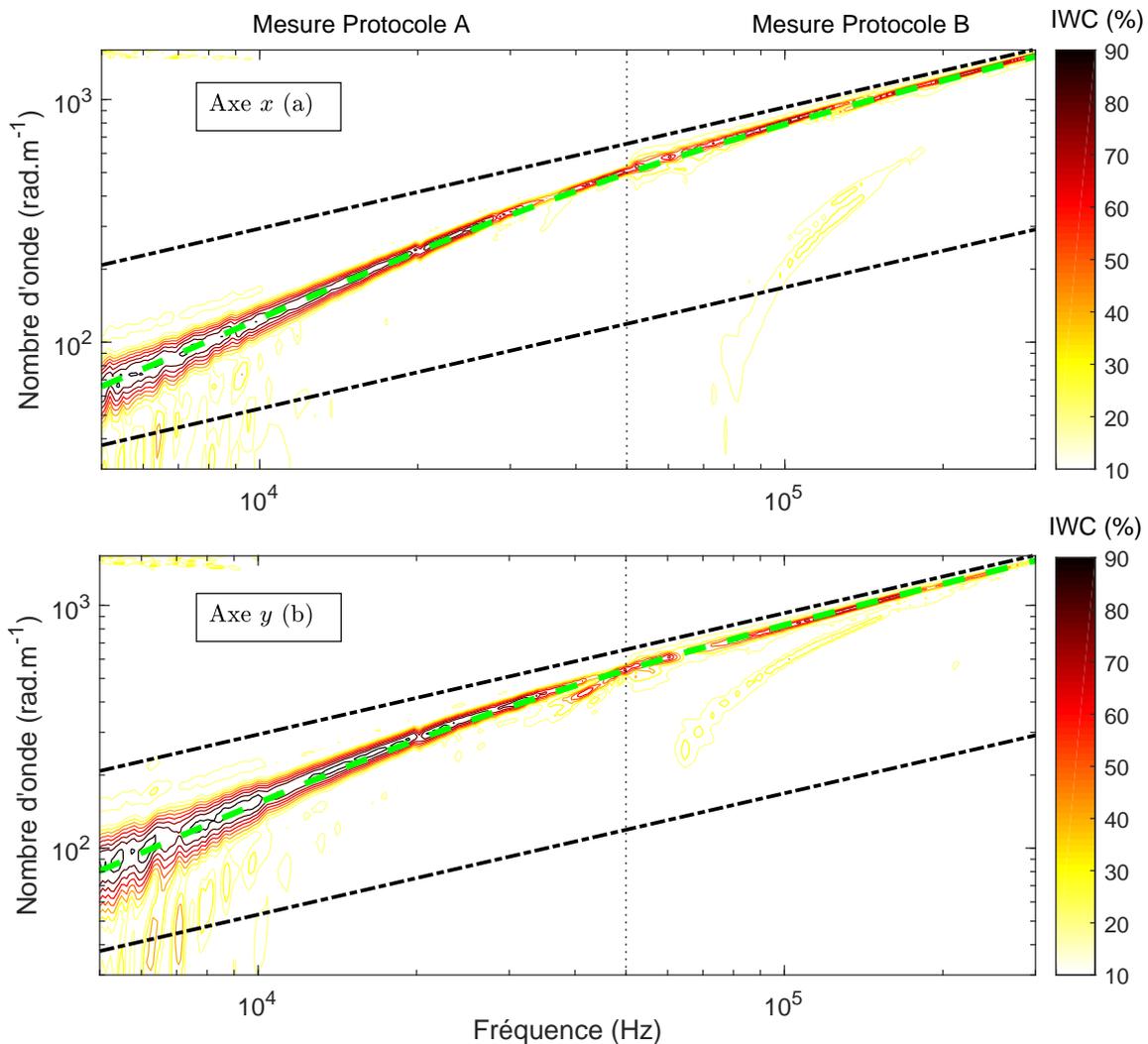


FIGURE 4.11 – Indice de corrélation de la méthode IWC dans les axes x (a) et y (b) représenté sous la forme de contour. Valeurs théoriques du nombre d'onde de flexion calculé par le modèle multicouche ($- -$). Valeurs asymptotiques basses et hautes fréquences ($- \cdot -$).

4.3 Étude des autres modes de la structure

À l'inverse des deux autres méthodologies de caractérisation qui sont basées sur le modèle de plaque mince de Love-Kirchhoff, IWC n'est pas restreint uniquement à l'étude du mode de flexion. Les résultats fournis par la méthode à la Figure 4.11 nous permettent également d'identifier les courbes de dispersion des autres modes de la structure dans le domaine des hautes fréquences. Il est alors intéressant de comparer ces résultats au modèle des ondes de Lamb généralement utilisé dans la caractérisation non-destructive par ultrasons. Ce modèle offre des solutions exactes pouvant servir de référence aux modèles simplifiés tels que le nôtre puisque, contrairement à ce dernier, il n'émet aucune hypothèse sur la forme du champ de déplacement de la structure. Ainsi, dans cette section, nous comparerons à la fois les estimations de ces deux modèles et les résultats d'IWC. Cette comparaison porte essentiellement sur l'analyse des mesures du protocole B dans les directions x et y du repère de mesure présenté à la Figure 4.2b. De ce fait, nous avons choisi d'utiliser un modèle de Lamb isotrope (détails du modèle dans l'Annexe E) dont les vitesses des ondes longitudinales et transversales de l'âme du sandwich ont été calculées à partir des modules de cisaillement identifiés dans le Tableau 4.2.

La Figure 4.12 compare les estimations de Lamb aux résultats obtenus par IWC sur le champ de déplacement transverse. Le mode de flexion ou premier mode antisymétrique (A0) est correctement identifié par Lamb. Le second mode identifié à la fois par IWC et par Lamb correspond à un mode de *respiration* ou symétrique (S0) gouverné essentiellement par la compression dans l'épaisseur du nids d'abeille. La courbe de dispersion de ce mode présente une fréquence de coupure autour de 33 kHz où le nombre d'onde augmente jusqu'à rejoindre celui du mode de flexion. À partir de 70 kHz, l'énergie rayonnée par les modes A0 et S0 est donc équivalente. Le troisième mode identifié par le modèle de Lamb correspond au second mode antisymétrique (A1). Il est également visible sur les résultats de IWC par la présence d'un *locus-veering* ou *virage local* autour du mode de flexion entre 110 et 150 kHz sur l'axe x . Ce phénomène apparaît lorsque plusieurs modes possèdent des fréquences propres proches les unes des autres, provoquant ainsi une interaction modale. Les courbes de dispersion de ces modes se repoussent alors mutuellement. Le phénomène de *locus-veering* a notamment été observé par Leissa [60] sur les fréquences propres d'une membrane rectangulaire et a ensuite été rapporté sur des applications industrielles telles que les disque-aubes par Pierre [95] ou les machines tournantes par Crandall et Yeh [24]. Enfin, les autres modes symétriques et antisymétriques identifiés par Lamb forment également des *locus-veering* avec le mode de flexion plus haut en fréquence.

Par la suite, nous avons analysé avec la méthode IWC les champs de déplacement membranaire (U,V) mesurés avec le protocole B afin d'identifier les courbes de dispersion des modes de membrane et de cisaillement. La Figure 4.13 présente le taux de corrélation obtenu à partir de cette analyse dans les axes x et y . Ces résultats sont comparés aux estimations du modèle de Lamb et de notre modèle multicouche. Nous pouvons observer que le taux de corrélation est maximal pour des petits nombres d'onde ($k < 400 \text{ rad.m}^{-1}$) et correspond aux modes de membrane et de cisaillement prédits par les deux modèles. Les résultats d'IWC ne sont cependant pas suffisamment précis pour discerner ces modes. À l'aide de cette comparaison, nous pouvons

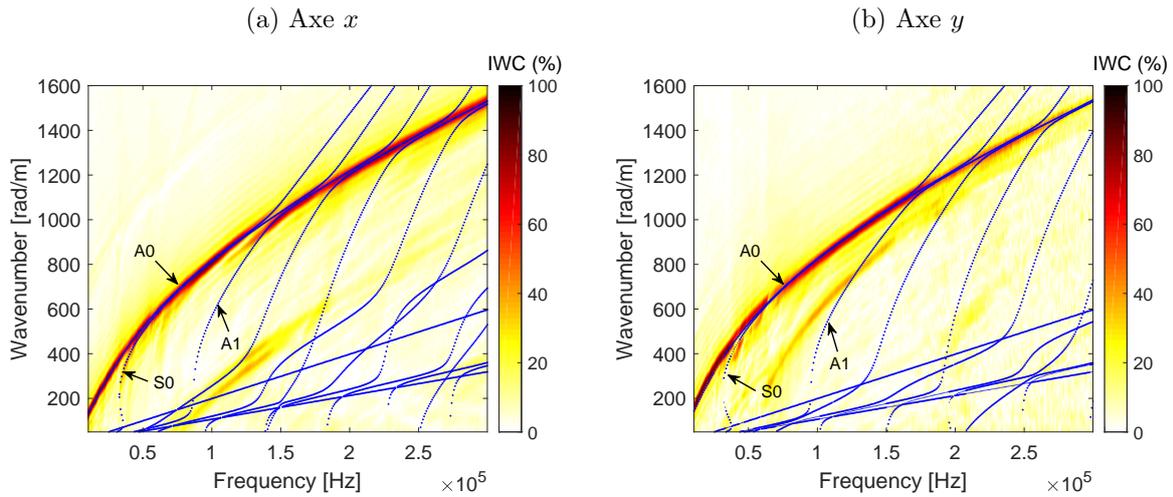


FIGURE 4.12 – Indice de corrélation de la méthode IWC appliqué aux champs de déplacement transverse mesuré dans les axes x (a) et y (b) sur le sandwich nids d'abeille. Valeurs théoriques des courbes de dispersion calculées par le modèle des ondes de Lamb (\cdot).

également observer les différences entre les estimations des deux modèles. Le mode de flexion est légèrement sous-estimé en hautes fréquences par notre modèle multicouche tandis que les autres modes sont surestimés. Ces écarts proviennent des hypothèses émises par notre modèle sur la cinématique du multicouche.

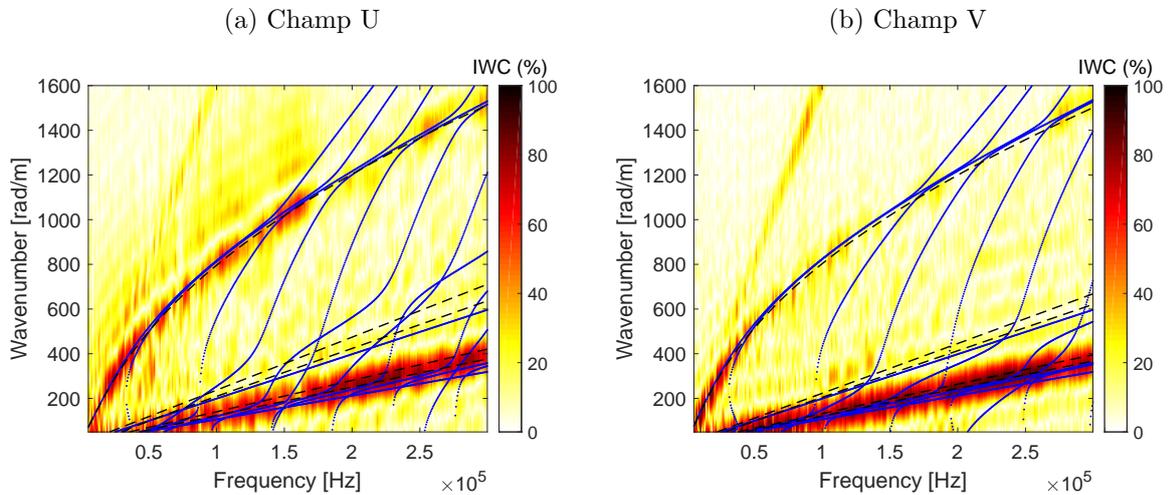


FIGURE 4.13 – Indice de corrélation de la méthode IWC appliqué aux champs de déplacement membranaire (U,V) respectivement mesuré dans les axes x (a) et y (b) avec le protocole B sur le sandwich nids d'abeille. Valeurs théoriques des courbes de dispersion calculées par le modèle des ondes de Lamb (\cdot) et notre modèle multicouche ($--$).

Les mesures des champs de déplacements membranaires (U,V) effectuées avec le vibromètre laser 3D dans le protocole A offrent également quelques informations sur les modes de cisaillement et de membrane. La Figure 4.14 présente le taux de corrélation dans le plan d'onde à 50 kHz obtenu lors de l'analyse de ces mesures avec la méthode IWC. Ces résultats sont comparés aux estimations de notre modèle multicouche. Nous pouvons remarquer que, pour les deux champs,

le taux de corrélation maximal forme deux cercles qui regroupent les modes longitudinaux et transverses (voir Figure 4.14). Ce taux est donc davantage marqué, sur le champ U, selon l'axe x pour les modes longitudinaux et selon l'axe y pour les modes transverses, et inversement pour le champ V. Les prédictions de notre modèle valident ces constatations expérimentales. De plus, la forme circulaire de ces modes reflète l'isotropie de la structure à cette fréquence.

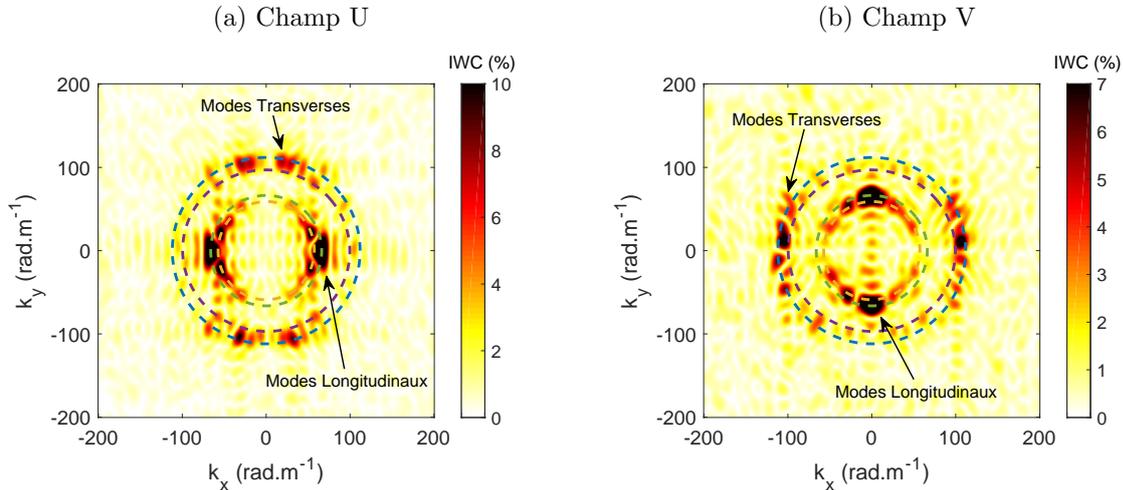


FIGURE 4.14 – Indice de corrélation de la méthode IWC appliqué aux champs de déplacement membranaire mesuré par le vibromètre 3D sur le sandwich nids d'abeille. $f = 50$ kHz. Valeurs théoriques des courbes de dispersion calculées par notre modèle multicouche (Membrane (—), Membrane transverse (---), Cisaillement (—-), Cisaillement transverse (- -)).

4.4 Comparaison des performances des méthodes globales et locales

Cette dernière section compare les performances des méthodes RIC, IWC et de la corrélation de Hankel au travers de l'analyse des mesures effectuées sur le sandwich étudié dans ce chapitre.

Dans un premier temps, nous avons résumé les caractéristiques principales de ces méthodes dans le Tableau 4.3. La colonne *Estimations directes* correspond aux valeurs estimées directement par les méthodes tandis que la colonne *Estimations indirectes* correspond aux valeurs pouvant être reconstruites à partir des estimations directes. Nous remarquons que chaque méthode possède un nombre de paramètres distincts dont leur discrétisation peut avoir une influence sur le temps de calcul lors de l'analyse des champs mesurés.

Afin d'observer cette influence, nous avons, dans un second temps, mesuré le délai de post-traitement des données obtenues avec le vibromètre laser 3D entre 10 et 50 kHz. Le Tableau 4.4 résume ces temps (par fréquence) pour deux analyses différentes, toutes deux effectuées avec le même ordinateur (Intel Core i7, 4.2 GHz, 32 Go de RAM). Au cours de ces analyses, nous nous sommes intéressés uniquement à l'estimation de la partie réelle des caractéristiques du sandwich, négligeant ainsi les paramètres d'amortissement des méthodes de corrélation. La première analyse imposait des valeurs candidates de k_c pour RIC, k pour IWC, ainsi que D_{11} et D_{22} pour

	Valeurs discrétisés	Estimations directes	Estimations indirectes
RIC + RIFF	- Fréquence : f - Nombre d'onde de coupure : k_c - Nombre d'itération pour la correction	$D_{ij}^*(f)$	$k^*(\theta, f) \forall \theta$
IWC	- Fréquence : f - Direction : θ - Nombre d'onde : k - Amortissement spatial : γ	$k^*(\theta, f)$	$D_{ij}^*(f)$ (moindres carrés)
Corrélation de Hankel elliptique	- Fréquence : f - Rigidité en x : D_{11} - Rigidité en y : D_{22} - Amortissement en x : η_{11} - Amortissement en y : η_{22}	$D_{11}^*(f)$; $D_{22}^*(f)$	$k^*(\theta, f) \forall \theta$; $D_{ij}^*(f)$ (elliptique)

Tableau 4.3 – Caractéristiques des méthodes IWC, RIC couplée à la technique de régularisation de RIFF et de la corrélation de Hankel elliptique. Symbole * : valeur complexe.

Hankel indépendantes de la fréquence et discrétisées en 500 points chacun. Lors de la seconde analyse, ces valeurs candidates dépendaient des résultats obtenus à la fréquence précédente, ce qui nous a permis de réduire leur discrétisation à 50 points et ainsi d'accélérer le post-traitement tout en gardant une forte précision. Cette technique suppose cependant que ces paramètres varient peu d'une fréquence à l'autre et que les résultats obtenus à la fréquence précédente soient justes.

	RIC + RIFF		IWC		Hankel	
	Discrétisation	Temps	Discrétisation	Temps	Discrétisation	Temps
Analyse n°1	k_c : 500 points	51 s	θ : 500 points k : 500 points	272 s	D_{11} : 500 points D_{22} : 500 points	2450 s
Analyse n°2	k_c : 50 points	6 s	θ : 500 points k : 50 points	27 s	D_{11} : 50 points D_{22} : 50 points	29 s

Tableau 4.4 – Propriétés et temps de calcul moyen par fréquence des méthodes IWC, RIC couplée à la technique de régularisation de RIFF et de la corrélation de Hankel elliptique. Application sur le sandwich nids d'abeille.

Pour les deux analyses, RIC reste la méthode la plus rapide puisqu'elle ne dépend majoritairement que de k_c . Hankel présente un temps de calcul extrêmement long lors de la première analyse qui est notamment dû à la fine discrétisation des rigidités D_{11} et D_{22} ainsi qu'à la méthode moindres carrés utilisée pour générer le champ virtuel défini à l'Eq.(1.25). En réduisant

la discrétisation de ces paramètres lors de la deuxième analyse, le temps de calcul devient similaire à celui de IWC. De plus, la cohérence des résultats entre les deux analyses est excellente avec une erreur relative de moins de 1% pour toutes les méthodes. Ainsi, la technique utilisée lors de la seconde analyse permet d'obtenir un gain de temps non négligeable pour des résultats similaires.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les méthodes RIC, IWC et la corrélation de Hankel ont été utilisées pour caractériser un sandwich en nids d'abeille sur une large bande fréquentielle allant de 1 à 300 kHz. Les rigidités équivalentes identifiées par ces méthodes diminuent en fonction de fréquence, ce qui indique que le cœur de la structure cisaille dans le domaine de fréquences étudiées. De ce fait, l'évolution du comportement dynamique du multicouche est gouverné par le nids d'abeille et la structure équivalente estimée est anisotrope. L'angle d'orthotropie du nids d'abeille a pu être identifié à l'aide d'une matrice de projection et des rigidités identifiées expérimentalement. Les caractéristiques du nids d'abeille ont également pu être identifiées à l'aide de notre modèle multicouche en corrélant les rigidités équivalentes prédites par le modèle à celles identifiées expérimentalement.

À l'aide de cette étude, nous avons pu discerner les avantages et inconvénients de chaque méthode expérimentale. RIC, associé à la technique de régularisation de RIFF, offre un temps d'analyse rapide avec des résultats peu bruités mais reste néanmoins limité à l'étude du mode de flexion. À l'inverse, la méthode IWC permet d'identifier les autres modes de la structure mais demandent énormément de ressources en terme de puissance et de temps de calcul. La corrélation de Hankel reste quant à elle limitée au cas de structures orthotropes elliptiques et se différencie donc de la méthode IWC. Cependant, l'estimation de l'amortissement peut être théoriquement plus juste avec Hankel du fait que le champ de Green considère l'atténuation intrinsèque de l'onde.

Enfin, les prédictions du modèle des ondes de Lamb nous ont permis de confirmer les conclusions émises au Chapitre 2 concernant les limites hautes fréquences de notre modèle multicouche, dues notamment aux hypothèses faites sur la forme de la cinématique de la structure.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion

Ce travail de thèse porte sur la modélisation vibratoire et la caractérisation dynamique de matériaux multicouches. Ce type de structures (architecturés ou non), dont l'industrialisation est en pleine croissance, possèdent des propriétés mécaniques intéressantes en terme de poids, raideur ou amortissement que les matériaux traditionnels ne peuvent fournir. Leur modélisation reste cependant complexe et les techniques expérimentales de caractérisation peuvent parfois être limitées pour des raisons de mise en œuvre ou de fiabilité des résultats. Les travaux réalisés au cours de cette thèse ont donc porté sur la recherche, l'étude et l'amélioration de modèles et de techniques de caractérisation simples et robustes en vue d'applications industrielles dans le domaine des moyennes et hautes fréquences.

La synthèse bibliographique élaborée dans le premier chapitre nous a permis de classer les différents types de modèles réduits de multicouches existant dans la littérature. Dans ce travail de thèse, nous nous sommes orientés principalement vers le modèle de Guyader et Lesueur [42] permettant de décrire les premiers modes de dispersion (flexion, membrane et cisaillement) de la structure grâce à sa modélisation en plaque épaisse pour chaque couche. Ce modèle offre également un bon compromis entre précision et rapidité de calcul puisque le nombre de variables cinématiques totales ne dépend pas du nombre de couche. L'équivalence plaque mince [40], permettant de caractériser la structure, n'avait cependant été développée originellement que pour des multicouches isotropes.

Notre premier objectif s'est donc concentré sur l'adaptation de cette approche équivalente au cas des structures anisotropes. La plaque est alors régie par cinq rigidités de flexion dans le cas monoclinique et trois dans le cas orthotrope. Notre modèle a été validé expérimentalement sur des plaques composites en fibres de carbone d'empilements différents en comparant les rigidités estimées à celles identifiées par la méthode IWC après analyse des mesures. Les résultats obtenus sur la plaque composite monoclinique nous ont également permis d'observer le couplage entre le mode de flexion et le mode de torsion de cette plaque.

De plus, la question de la modélisation de l'amortissement a été soulevée. Une définition énergétique de l'amortissement structurel a été comparée à une définition équivalente régie par la théorie de plaque mince proposée par notre modèle. Contrairement à la définition énergétique, nous avons observé une surestimation de l'amortissement structurel avec la définition équivalente du fait que sa méthodologie ne considère que la flexion de la structure. L'amortissement énergétique

a quant à lui été défini à la fois avec une formulation spatiale et temporelle. L'intérêt de la formulation spatiale réside dans le fait qu'elle dépend uniquement du nombre d'onde complexe, paramètre facilement identifiable expérimentalement, contrairement à la formulation temporelle qui est défini par une fréquence complexe. Bien que ces deux formulations fournissent des résultats identiques dans le cas de structures peu dissipatives, elles ont montrées quelques différences pour de fortes dissipations. Une nouvelle définition de la formulation spatiale a alors été suggérée et forme, avec la plaque équivalente anisotrope, les principales nouveautés de notre modèle par rapport à la littérature.

La synthèse bibliographique nous a également permis de classer quelques techniques de caractérisation non destructives. Dans la gamme de fréquences étudiées, ce sont les méthodes dites d'analyse de champs qui sont les plus utilisées. Parmi elles, nous nous sommes intéressé aux techniques RIFF [100] et RIC [58], qui possèdent, grâce à leur aspect local et leur facilité de mise en œuvre, des atouts non négligeables pour des applications industrielles. À l'instar de notre modèle multicouche, ces méthodes homogénéisent la structure en une plaque mince équivalente.

Notre second objectif s'est concentré sur l'adaptation de la méthode RIC, initialement développée pour les structures isotropes, au cas anisotrope. L'estimation des coefficients correcteurs permettant d'étendre la limite haute fréquence de la méthode forme la principale nouveauté apportée par cette adaptation. Cette correction a été appliquée à la fois avec une méthode itérative et par minimisation qui ont montré des résultats similaires. De plus, dans le cas de champs bruités, nous avons montré que la technique de régularisation proposée par RIC n'est pas adaptée pour des structures anisotropes car elle dépend, contrairement à celle de RIFF, du maillage de mesure. L'effet du filtrage n'est alors pas uniforme selon la fréquence et la direction. Enfin, une étude expérimentale réalisée sur les plaques composites citées précédemment nous a permis, d'une part, de valider l'extension de RIC et, d'autre part, d'obtenir des résultats moins bruités que ceux de la méthode globale IWC.

Enfin, RIC a été utilisé pour caractériser un sandwich en nids d'abeille et a montré des résultats cohérents avec les estimations de notre modèle pour ce type de structures complexes et épaisses. Le comportement dynamique du sandwich, notamment le cisaillement du cœur, a été décrit au travers des rigidités de flexion identifiées. Nous avons également conclu à travers cette étude que RIC tire un avantage en terme de rapidité par rapport aux méthodes de corrélation mais reste cependant limité à la description du mode de flexion à cause de l'hypothèse faite sur l'équation du mouvement de la structure (à l'instar de la corrélation de Hankel). De plus, une comparaison au modèle de référence de Lamb [55] nous a permis d'observer les erreurs d'estimation et les limites de notre modèle en hautes fréquences.

Perspectives

Notre modèle analytique équivalent de multicouche a montré son efficacité pour des applications vibroacoustiques dans le domaines des moyennes et hautes fréquences. Une première application industrielle envisageable consisterait à implémenter ce modèle dans des logiciels éléments

finis. Les matériaux multicouches pourrait être remplacées par des plaques minces définies avec les paramètres équivalents donnés par notre modèle. Le nombre d'éléments nécessaire pour mailler la structure serait alors faible, ce qui permettrait de réduire fortement les temps de calcul.

Plusieurs perspectives peuvent être proposée dans la formulation même du modèle. Nous pouvons par exemple penser à une équivalence plaque épaisse afin de prendre en compte le cisaillement de la plaque équivalente et ainsi d'étendre le domaine de validité des caractéristiques équivalentes estimées. De plus, les modes de respiration de la structure pourraient être pris en compte en supprimant l'hypothèse de déplacement transverse constant. Loredó [63] a déjà proposé plusieurs solutions à ce sujet. Enfin, d'autres matériaux, tels que les poreux par exemple, ainsi que leurs couplages avec les matériaux classiques pourraient être modélisés. La prise en compte des défauts de collage dans les interfaces entre les couches permettrait également de ce rapprocher de la réalité. Toutes ces modifications entraîneraient cependant une complexification du modèle non négligeable et doivent donc être judicieusement choisies en fonction des conditions exigées.

La formulation spatiale de l'amortissement énergétique proposée dans ce manuscrit pourrait également être validée expérimentalement en le comparant à un amortissement modal puisque ce dernier se rapproche de la formulation temporelle de l'amortissement énergétique. Il serait intéressant d'observer les résultats de la formulation spatiale sur des structures très amorties telles que, par exemple, des sandwichs avec un cœur thermovisqueux liquide [41].

Une modélisation en plaque épaisse de RIC pourrait former une perspective intéressante pour la méthode. À l'instar de notre modèle analytique, cette extension permettrait de corriger les rigidités estimées par RIC en hautes fréquences. Nous pouvons pour cela nous inspirer du travail de Wassereau [133] qui a adapté la méthode pour des poutres épaisses. De plus, nous pouvons penser à appliquer RIC sur un maillage non régulier adapté en fréquence afin de profiter pleinement du filtrage fourni par sa correction sur une large bande fréquentielle et dans toutes les directions. Enfin, au vue des résultats prometteurs obtenus par RIC et IWC sur le sandwich nids d'abeille étudié dans ce manuscrit, il serait intéressant d'appliquer ces méthodes sur des structures architecturées, telles que les métamatériaux possédant des "band gap" [94] où l'énergie des ondes de flexion est atténuée sur certaines plages de fréquences.

Annexe A

Détails des coefficients et des matrices du modèle analytique

Cette annexe contient les détails de quelques éléments du modèle multicouche étudié dans le Chapitre 2.

A.1 Définition des coefficients δ

Les coefficients δ sont utilisés dans la définition de l'énergie cinétique (2.28) ainsi que celle de la matrice de masse (2.37) de la structure. Ils dépendent des paramètres matériaux de chaque couche ainsi que des fonctions F_{ij} (Eq. (2.24)) et sont définis par :

$$\delta_i = \sum_n \int_{R_n-h_n/2}^{R_n+h_n/2} \rho_n \delta_i^n dz, \quad i = 1 : 18, \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_1^n &= (F_w)^2, & \delta_2^n &= (F_{xx}^n)^2 + (F_{yy}^n)^2, \\ \delta_3^n &= 1, & \delta_4^n &= 2F_w F_{xx}^n, \\ \delta_5^n &= 2F_w, & \delta_6^n &= 2F_{xx}^n, \\ \delta_7^n &= (F_w)^2, & \delta_8^n &= (F_{xy}^n)^2 + (F_{yy}^n)^2, \\ \delta_9^n &= 1, & \delta_{10}^n &= 2F_w F_{yy}^n, \\ \delta_{11}^n &= 2F_w, & \delta_{12}^n &= 2F_{yy}^n, \\ \delta_{13}^n &= 1, & \delta_{14}^n &= 2F_{xx}^n F_{xy}^n + 2F_{yy}^n F_{yx}^n, \\ \delta_{15}^n &= 2F_w F_{xy}^n, & \delta_{16}^n &= 2F_w F_{yx}^n, \\ \delta_{17}^n &= 2F_{yx}^n, & \delta_{18}^n &= 2F_{xy}^n. \end{aligned}$$

A.2 Définition des coefficients λ

Les coefficients λ sont utilisés dans la définition de l'énergie de déformation (2.31) ainsi que celle de la matrice de raideur (2.36) de la structure. Ils dépendent des paramètres matériaux de chaque couche ainsi que des fonctions F_{ij} (Eq. (2.24)) et sont définis par :

$$\lambda_i = \sum_n \int_{R_n-h_n/2}^{R_n+h_n/2} \lambda_i^n dz, \quad i = 1 : 69, \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1^n &= Q_{11}^n (F_w)^2, \\ \lambda_2^n &= Q_{11}^n (F_{xx}^n)^2 + 2Q_{16}^n F_{yx}^n F_{xx}^n + Q_{66}^n (F_{yx}^n)^2, \\ \lambda_3^n &= Q_{11}^n, \\ \lambda_4^n &= 2Q_{11}^n F_{xx}^n F_w + 2Q_{16}^n F_{yx}^n F_w, \\ \lambda_5^n &= 2Q_{11}^n F_w, \\ \lambda_6^n &= 2Q_{11}^n F_{xx}^n + 2Q_{16}^n F_{yx}^n, \\ \lambda_7^n &= Q_{22}^n (F_w)^2, \\ \lambda_8^n &= Q_{22}^n (F_{yy}^n)^2 + 2Q_{16}^n F_{xy}^n F_{yy}^n + Q_{66}^n (F_{xy}^n)^2, \\ \lambda_9^n &= Q_{22}^n, \\ \lambda_{10}^n &= 2Q_{22}^n F_{yy}^n F_w + 2Q_{16}^n F_{xy}^n F_w, \\ \lambda_{11}^n &= 2Q_{22}^n F_w, \\ \lambda_{12}^n &= 2Q_{22}^n F_{yy}^n + 2Q_{26}^n F_{xy}^n, \\ \lambda_{13}^n &= 2Q_{12}^n (F_w)^2, \\ \lambda_{14}^n &= 2Q_{12}^n F_w F_{yy}^n + 2Q_{16}^n F_w F_{xy}^n, \\ \lambda_{15}^n &= 2Q_{12}^n F_w, \\ \lambda_{16}^n &= 2Q_{12}^n F_w F_{xx}^n + 2Q_{26}^n F_w F_{yx}^n, \\ \lambda_{17}^n &= 2Q_{12}^n F_{xx}^n F_{yy}^n + 2Q_{16}^n F_{xx}^n F_{xy}^n + 2Q_{26}^n F_{yx}^n F_{yy}^n + 2Q_{66}^n F_{xy}^n F_{yx}^n, \\ \lambda_{18}^n &= 2Q_{12}^n F_{xx}^n + 2Q_{26}^n F_{yx}^n, \\ \lambda_{19}^n &= 2Q_{12}^n F_w, \\ \lambda_{20}^n &= 2Q_{12}^n F_{yy}^n + 2Q_{16}^n F_{xy}^n, \\ \lambda_{21}^n &= 2Q_{12}^n, \\ \lambda_{22}^n &= 4Q_{66}^n (F_w)^2, \\ \lambda_{23}^n &= Q_{66}^n (F_{xx}^n)^2 + 2Q_{26}^n F_{xx}^n F_{yx}^n + Q_{22}^n (F_{yx}^n)^2, \\ \lambda_{24}^n &= Q_{66}^n (F_{yy}^n)^2 + 2Q_{16}^n F_{xy}^n F_{yy}^n + Q_{11}^n (F_{xy}^n)^2, \\ \lambda_{25}^n &= Q_{66}^n, \\ \lambda_{26}^n &= Q_{66}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{27}^n &= 4Q_{66}^n F_w F_{xx}^n + 4Q_{26}^n F_w F_{yx}^n, \\
 \lambda_{28}^n &= 4Q_{66}^n F_w F_{yy}^n + 4Q_{16}^n F_w F_{xy}^n, \\
 \lambda_{29}^n &= 4Q_{66}^n F_w, \\
 \lambda_{30}^n &= 4Q_{66}^n F_w, \\
 \lambda_{31}^n &= 2Q_{66}^n F_{xx}^n F_{yy}^n + 2Q_{16}^n F_{xx}^n F_{xy}^n + 2Q_{26}^n F_{yx}^n F_{yy}^n + 2Q_{12}^n F_{xy}^n F_{yx}^n, \\
 \lambda_{32}^n &= 2Q_{66}^n F_{xx}^n + 2Q_{26}^n F_{yx}^n, \\
 \lambda_{33}^n &= 2Q_{66}^n F_{xx}^n + 2Q_{26}^n F_{yx}^n, \\
 \lambda_{34}^n &= 2Q_{66}^n F_{yy}^n + 2Q_{26}^n F_{xy}^n, \\
 \lambda_{35}^n &= 2Q_{66}^n F_{yy}^n + 2Q_{26}^n F_{xy}^n, \\
 \lambda_{36}^n &= 2Q_{66}^n, \\
 \lambda_{37}^n &= Q_{44}^n \left(\frac{dF_{xx}^n}{dz} \right)^2 + 2Q_{45}^n \frac{dF_{yx}^n}{dz} \frac{dF_{xx}^n}{dz} + Q_{55}^n \left(\frac{dF_{yx}^n}{dz} \right)^2, \\
 \lambda_{38}^n &= Q_{55}^n \left(\frac{dF_{yy}^n}{dz} \right)^2 + 2Q_{45}^n \frac{dF_{xy}^n}{dz} \frac{dF_{yy}^n}{dz} + Q_{44}^n \left(\frac{dF_{xy}^n}{dz} \right)^2, \\
 \lambda_{39}^n &= 4Q_{16}^n (F_w)^2, \\
 \lambda_{40}^n &= 2Q_{16}^n F_w F_{xx}^n + 2Q_{12}^n F_w F_{yx}^n, \\
 \lambda_{41}^n &= 2Q_{16}^n F_w, \\
 \lambda_{42}^n &= 4Q_{16}^n F_w F_{xx}^n + 4Q_{66}^n F_w F_{yx}^n, \\
 \lambda_{43}^n &= 2Q_{16}^n (F_{xx}^n)^2 + 2Q_{26}^n (F_{yx}^n)^2 + 2Q_{12}^n F_{xx}^n F_{yx}^n + 2Q_{66}^n F_{xx}^n F_{yx}^n, \\
 \lambda_{44}^n &= 2Q_{16}^n F_{xx}^n + 2Q_{66}^n F_{yx}^n, \\
 \lambda_{45}^n &= 4Q_{16}^n F_w, \\
 \lambda_{46}^n &= 2Q_{16}^n F_{xx}^n + 2Q_{12}^n F_{yx}^n, \\
 \lambda_{47}^n &= 2Q_{16}^n, \\
 \lambda_{48}^n &= 2Q_{16}^n F_w F_{yy}^n + 2Q_{11}^n F_{xy}^n, \\
 \lambda_{49}^n &= 2Q_{16}^n F_w, \\
 \lambda_{50}^n &= 2Q_{16}^n F_{xx}^n F_{yy}^n + 2Q_{16}^n F_{xy}^n F_{yx}^n + 2Q_{11}^n F_{xx}^n F_{xy}^n + 2Q_{66}^n F_{yy}^n F_{yx}^n, \\
 \lambda_{51}^n &= 2Q_{16}^n F_{xx}^n + 2Q_{66}^n F_{yx}^n, \\
 \lambda_{52}^n &= 2Q_{16}^n F_{yy}^n + 2Q_{11}^n F_{xy}^n, \\
 \lambda_{53}^n &= 2Q_{16}^n, \\
 \lambda_{54}^n &= 4Q_{26}^n (F_w)^2, \\
 \lambda_{55}^n &= 2Q_{26}^n F_w F_{xx}^n + 2Q_{22}^n F_w F_{yx}^n, \\
 \lambda_{56}^n &= 2Q_{26}^n F_w, \\
 \lambda_{57}^n &= 4Q_{26}^n F_w F_{yy}^n + 4Q_{66}^n F_w F_{xy}^n, \\
 \lambda_{58}^n &= 2Q_{26}^n F_{xx}^n F_{yy}^n + 2Q_{26}^n F_{xy}^n F_{yx}^n + 2Q_{22}^n F_{yy}^n F_{yx}^n + 2Q_{66}^n F_{xx}^n F_{xy}^n, \\
 \lambda_{59}^n &= 2Q_{26}^n F_{yy}^n + 2Q_{66}^n F_{xy}^n,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{60}^n &= 4Q_{26}^n F_w, \\
 \lambda_{61}^n &= 2Q_{26}^n F_{xx}^n + 2Q_{22}^n F_{yx}^n, \\
 \lambda_{62}^n &= 2Q_{26}^n, \\
 \lambda_{63}^n &= 2Q_{26}^n F_w F_{yy}^n + 2Q_{12}^n F_{xy}^n, \\
 \lambda_{64}^n &= 2Q_{26}^n F_w, \\
 \lambda_{65}^n &= 2Q_{26}^n (F_{yy}^n)^2 + 2Q_{16}^n (F_{xy}^n)^2 + 2Q_{12}^n F_{xy}^n F_{yy}^n + 2Q_{66}^n F_{xy}^n F_{yy}^n, \\
 \lambda_{66}^n &= 2Q_{26}^n F_{yy}^n + 2Q_{66}^n F_{xy}^n, \\
 \lambda_{67}^n &= 2Q_{26}^n F_{yy}^n + 2Q_{12}^n F_{xy}^n, \\
 \lambda_{68}^n &= 2Q_{26}^n, \\
 \lambda_{69}^n &= 2Q_{44}^n \frac{dF_{xx}^n}{dz} \frac{dF_{xy}^n}{dz} + 2Q_{45}^n \frac{dF_{xx}^n}{dz} \frac{dF_{yy}^n}{dz} + 2Q_{45}^n \frac{dF_{xy}^n}{dz} \frac{dF_{yx}^n}{dz} + 2Q_{55}^n \frac{dF_{yy}^n}{dz} \frac{dF_{yx}^n}{dz}.
 \end{aligned}$$

A.3 Énergie cinétique

L'équation ci-dessous correspond à la forme complète de l'énergie cinétique décrite à l'Eq. (2.28) :

$$\begin{aligned}
 e_c = \frac{1}{2} & \left[\delta_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \right)^2 + \delta_2 \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial t} \right)^2 + \delta_3 \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial t} \right)^2 + \delta_4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \frac{\partial \phi_x^1}{\partial t} \right) + \delta_5 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \frac{\partial \psi_x^1}{\partial t} \right) + \right. \\
 & \delta_6 \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial t} \frac{\partial \psi_x^1}{\partial t} \right) + \delta_7 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t} \right)^2 + \delta_8 \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial t} \right)^2 + \delta_9 \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial t} \right)^2 + \delta_{10} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t} \frac{\partial \phi_y^1}{\partial t} \right) + \\
 & \delta_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t} \frac{\partial \psi_y^1}{\partial t} \right) + \delta_{12} \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial t} \frac{\partial \psi_y^1}{\partial t} \right) + \delta_{13} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \delta_{14} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial t} \frac{\partial \phi_y^1}{\partial t} \right) + \\
 & \left. \delta_{15} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \frac{\partial \phi_y^1}{\partial t} \right) + \delta_{16} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t} \frac{\partial \phi_x^1}{\partial t} \right) + \delta_{17} \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial t} \frac{\partial \phi_x^1}{\partial t} \right) + \delta_{18} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial t} \frac{\partial \phi_y^1}{\partial t} \right) \right] \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

A.4 Énergie de déformation

L'équation ci-dessous correspond à la forme complète de l'énergie de déformation décrite à l'Eq. (2.31) :

$$\begin{aligned}
 e_d = \frac{1}{2} & \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right)^2 + \lambda_3 \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right)^2 + \lambda_4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \lambda_5 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) + \lambda_6 \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) + \lambda_7 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \lambda_8 \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \right)^2 + \\
 & \left. \lambda_9 \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial y} \right)^2 + \lambda_{10} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \right) + \lambda_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_y^1}{\partial y} \right) + \lambda_{12} \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \frac{\partial \psi_y^1}{\partial y} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{13} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \lambda_{14} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \right) + \lambda_{15} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial y} \right) + \\
& \lambda_{16} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right) + \lambda_{17} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \right) + \lambda_{18} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial y} \right) + \\
& \lambda_{19} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) + \lambda_{20} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \right) + \lambda_{21} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial y} \right) + \\
& \lambda_{22} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + \lambda_{23} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right)^2 + \lambda_{24} \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right)^2 + \lambda_{25} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right)^2 + \\
& \lambda_{26} \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right)^2 + \lambda_{27} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right) + \lambda_{28} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \\
& \lambda_{29} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) + \lambda_{30} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{31} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \\
& \lambda_{32} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) + \lambda_{33} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{34} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \\
& \lambda_{35} \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{36} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{37} (\phi_x^1)^2 + \lambda_{38} (\phi_y^1)^2 + \tag{A.4} \\
& \lambda_{39} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + \lambda_{40} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right) + \lambda_{41} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) + \\
& \lambda_{42} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right) + \lambda_{43} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \right) + \lambda_{44} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) + \\
& \lambda_{45} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) + \lambda_{46} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right) + \lambda_{47} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) + \\
& \lambda_{48} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{49} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{50} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \\
& \lambda_{51} \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{52} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{53} \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) + \\
& \lambda_{54} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + \lambda_{55} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right) + \lambda_{56} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) + \\
& \lambda_{57} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \right) + \lambda_{58} \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right) + \lambda_{59} \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) + \\
& \lambda_{60} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial y} \right) + \lambda_{61} \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \phi_x^1}{\partial y} \right) + \lambda_{62} \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_x^1}{\partial y} \right) + \\
& \lambda_{63} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{64} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{65} \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \\
& \lambda_{66} \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{67} \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{68} \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_y^1}{\partial x} \right) + \lambda_{69} \phi_x^1 \phi_y^1
\end{aligned}$$

A.5 Matrice de masses généralisées

La matrice de masses généralisées $[M]$ utilisée à l'Eq. (2.33) est de la forme :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & -M_2 & -M_3 & -M_4 & -M_5 \\ M_2 & M_6 & M_7 & M_8 & M_9 \\ M_3 & M_7 & M_{10} & M_{11} & M_{12} \\ M_4 & M_8 & M_{11} & M_{13} & M_{14} \\ M_5 & M_9 & M_{12} & M_{14} & M_{15} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

avec

$$\begin{aligned} M_1 &= 2 \left[\delta_{13} - \delta_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \delta_7 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right], & M_2 &= \delta_5 \frac{\partial}{\partial x}, & M_3 &= \delta_4 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_{16} \frac{\partial}{\partial y}, \\ M_4 &= \delta_{11} \frac{\partial}{\partial y}, & M_5 &= \delta_{15} \frac{\partial}{\partial x} + \delta_{10} \frac{\partial}{\partial y}, & M_6 &= 2\delta_3, \\ M_7 &= \delta_6, & M_8 &= 0, & M_9 &= \delta_{18}, \\ M_{10} &= 2\delta_2, & M_{11} &= \delta_{17}, & M_{12} &= \delta_{14}, \\ M_{13} &= 2\delta_9, & M_{14} &= \delta_{12}, & M_{15} &= 2\delta_8. \end{aligned}$$

A.6 Matrice de raideurs généralisées

La matrice de raideurs généralisées $[K]$ utilisée à l'Eq. (2.33) est de la forme :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_2 & -K_3 & -K_4 & -K_5 \\ K_2 & K_6 & K_7 & K_8 & K_9 \\ K_3 & K_7 & K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ K_4 & K_8 & K_{11} & K_{13} & K_{14} \\ K_5 & K_9 & K_{12} & K_{14} & K_{15} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

avec :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 2 \left[\lambda_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (\lambda_{13} + \lambda_{22}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda_7 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \lambda_{39} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + \lambda_{54} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} \right], \\
 K_2 &= - \left[\lambda_5 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\lambda_{19} + \lambda_{29}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (\lambda_{41} + \lambda_{45}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \lambda_{56} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right], \\
 K_3 &= - \left[\lambda_4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\lambda_{16} + \lambda_{27}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (\lambda_{40} + \lambda_{42}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \lambda_{55} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right], \\
 K_4 &= - \left[\lambda_{49} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\lambda_{60} + \lambda_{64}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (\lambda_{15} + \lambda_{30}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \lambda_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right], \\
 K_5 &= - \left[\lambda_{48} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\lambda_{57} + \lambda_{63}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (\lambda_{14} + \lambda_{28}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \lambda_{10} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right], \\
 K_6 &= -2 \left[\lambda_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{25} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_{47} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \\
 K_7 &= - \left[\lambda_6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{32} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\lambda_{44} + \lambda_{46}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \\
 K_8 &= - \left[\lambda_{53} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{62} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\lambda_{21} + \lambda_{36}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \\
 K_9 &= - \left[\lambda_{52} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{59} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\lambda_{20} + \lambda_{34}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \\
 K_{10} &= -2 \left[\lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{23} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_{43} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda_{37} \right], \\
 K_{11} &= - \left[\lambda_{51} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{61} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\lambda_{18} + \lambda_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \\
 K_{12} &= - \left[\lambda_{50} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{58} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\lambda_{17} + \lambda_{31}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda_{69} \right], \\
 K_{13} &= -2 \left[\lambda_{26} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_9 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_{68} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \\
 K_{14} &= - \left[\lambda_{35} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\lambda_{66} + \lambda_{67}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \\
 K_{15} &= - \left[\lambda_{24} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_8 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_{65} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \lambda_{38} \right].
 \end{aligned}$$

A.7 Définition des coefficients l et d

Les équations suivantes correspondent aux coefficients l et d respectivement contenus dans les matrices $[\mathcal{K}]$ et $[\mathcal{M}]$ du système (2.35) permettant de dresser les courbes de dispersion du multicouche.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 2(\lambda_1 c^4 + \lambda_{39} c^3 s + (\lambda_{13} + \lambda_{22}) c^2 s^2 + \lambda_{54} c s^3 + \lambda_7 s^4), \\
 l_2 &= \lambda_5 c^3 + (\lambda_{41} + \lambda_{45}) c^2 s + (\lambda_{19} + \lambda_{29}) c s^2 + \lambda_{56} s^3, \\
 l_3 &= \lambda_4 c^3 + (\lambda_{16} + \lambda_{27}) c s^2 + (\lambda_{40} + \lambda_{42}) c^2 s + \lambda_{55} s^3, \\
 l_4 &= \lambda_{49} c^3 + (\lambda_{60} + \lambda_{64}) c s^2 + (\lambda_{15} + \lambda_{30}) c^2 s + \lambda_{11} s^3, \\
 l_5 &= \lambda_{48} c^3 + (\lambda_{57} + \lambda_{63}) c s^2 + (\lambda_{14} + \lambda_{28}) c^2 s + \lambda_{10} s^3, \\
 l_6 &= 2(\lambda_3 c^2 + \lambda_{25} s^2 + \lambda_{47} c s),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_7 &= \lambda_6 c^2 + \lambda_{32} s^2 + (\lambda_{44} + \lambda_{46}) cs, \\
 l_8 &= \lambda_{53} c^2 + \lambda_{62} s^2 + (\lambda_{21} + \lambda_{36}) cs, \\
 l_9 &= \lambda_{52} c^2 + \lambda_{59} s^2 + (\lambda_{20} + \lambda_{34}) cs, \\
 l_{10} &= 2(\lambda_2 c^2 + \lambda_{23} s^2 + \lambda_{43} cs), \\
 l_{11} &= \lambda_{51} c^2 + \lambda_{61} s^2 + (\lambda_{18} + \lambda_{33}) cs, \\
 l_{12} &= \lambda_{50} c^2 + \lambda_{58} s^2 + (\lambda_{17} + \lambda_{31}) cs, \\
 l_{13} &= 2(\lambda_{26} c^2 + \lambda_9 s^2 + \lambda_{68} cs), \\
 l_{14} &= \lambda_{35} c^2 + \lambda_{12} s^2 + (\lambda_{66} + \lambda_{67}) cs, \\
 l_{15} &= 2(\lambda_{24} c^2 + \lambda_8 s^2 + \lambda_{65} cs), \\
 l_{37} &= 2\lambda_{37}, \\
 l_{38} &= 2\lambda_{38}, \\
 l_{69} &= \lambda_{69}, \\
 d_1 &= 2\omega^2 (\delta_1 c^2 + \delta_7 s^2), \\
 d_2 &= \delta_5 c, \\
 d_3 &= (\delta_4 c + \delta_{16} s), \\
 d_4 &= \delta_{11} s, \\
 d_5 &= (\delta_{15} c + \delta_{10} s), \\
 d_6 &= 2\delta_3, \\
 d_7 &= \delta_6, \\
 d_8 &= 2\delta_{13}, \\
 d_9 &= \delta_{18}, \\
 d_{10} &= 2\delta_2, \\
 d_{11} &= \delta_{17}, \\
 d_{12} &= \delta_{14}, \\
 d_{13} &= 2\delta_9, \\
 d_{14} &= \delta_{12}, \\
 d_{15} &= 2\delta_8,
 \end{aligned}$$

avec : $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$, θ étant l'angle de propagation de l'onde plane choisie en tant que solution particulière de la l'équation de mouvement (2.33).

Annexe B

Description cubique du cisaillement

Cette section fait suite aux hypothèses émises par notre modèle analytique équivalent sur la cinématique du multicouche à la section 2.1 et présente une formulation décrivant le cisaillement avec une forme cubique dans l'épaisseur. Les résultats du modèle obtenus avec cette formulation seront comparés à ceux obtenus avec la formulation linéaire dans le cas d'une des structures étudiées dans ce manuscrit.

Les modèles d'ordres supérieurs, décrits à la section 1.1.1, nous ont permis de montrer l'importance de la description du cisaillement suivant l'épaisseur dans la modélisation de multicouche épais. Le choix d'une description linéaire dans le modèle décrit au Chapitre 2 implique que les contraintes de cisaillement de chaque couche sont constantes dans l'épaisseur et ne peuvent pas s'annuler aux surfaces inférieures et supérieures du multicouche. Le non-respect de cette condition entraîne une erreur d'estimation du mode de flexion en hautes fréquences et de la fréquence de coupure du mode de cisaillement. Afin de vérifier ces conditions, nous proposons d'étudier la cinématique proposée par Loredo [64] et Castel [21] avec une forme cubique du cisaillement dans le champ de déplacement. Pour cela, les fonctions F_{ij}^n ($i, j = x, y$), utilisées dans le champ de déplacement de la structure (Eq. (2.23)), seront de la forme :

$$F_{ij}^n = a_{ij}z^3 + b_{ij}z^2 + c_{ij}^nz + d_{ij}^n \quad (\text{B.1})$$

Ces fonctions polynomiales ont déjà été utilisées par Kim [52]. Elles associent une forme cubique globale à la forme linéaire Zig-Zag. Cette forme globale est nécessaire puisque le nombre d'équation permettant de trouver les coefficients des polynômes est limité ($8N_L + 8$ au total). Tout d'abord, la continuité des contraintes de cisaillement hors-plan fournit $4N_L - 4$ équations que l'on peut résumer de la façon suivante :

$$\left(Q_{4a}^n \frac{dF_{xj}^n}{dz} + Q_{a5}^n \frac{dF_{yj}^n}{dz} \right) \left(z = R_n - \frac{h_n}{2} \right) = \left(Q_{4a}^{n-1} \frac{dF_{xj}^{n-1}}{dz} + Q_{a5}^{n-1} \frac{dF_{yj}^{n-1}}{dz} \right) \left(z = R_n - \frac{h_n}{2} \right), \quad (\text{B.2})$$

pour $a = 4, 5$, et $n = 2$ à N_L . La continuité des déplacements, quant à elle, correspond à la

continuité des fonctions F_{ij} et fournit également $4N_L - 4$ équations :

$$F_{ij}^n(z = R_n - \frac{h_n}{2}) = F_{ij}^{n-1}(z = R_n - \frac{h_n}{2}). \quad (\text{B.3})$$

Plusieurs conditions sont également imposées sur la couche de référence. À la fibre neutre de cette couche, le champ de déplacement doit être égal au déplacement membranaire de cette même couche, ce qui impose :

$$F_{ij}^1(z = R_1) = 0. \quad (\text{B.4})$$

De plus, Loredo normalise la dérivée des fonctions F_{ij}^1 à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{dF_{ij}^1}{dz}(z = R_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Enfin, les conditions de contraintes nulles aux surfaces inférieures et supérieures apportent les 8 dernières équations permettant de déterminer le reste des coefficients des polynômes F_{ij}^n :

$$\frac{dF_{ij}^1}{dz}(z = 0) = \frac{dF_{ij}^{N_L}}{dz}(z = h_{\text{tot}}) = 0, \quad (\text{B.6})$$

où $h_{\text{tot}} = \sum_n h_n$ est l'épaisseur totale du multicouche.

La formulation linéaire du modèle peut également être retrouvée à l'aide des relations précédentes en posant $a_{ij} = b_{ij} = 0$ dans l'expression des F_{ij}^n à l'Eq. (B.6). Afin de résoudre ses relations, nous avons utilisé la *toolbox symbolic* de Matlab qui a montré une grande rapidité d'exécution.

Une comparaison des formulations linéaire et cubique des fonctions F_{ij}^n a été menée à l'aide d'une simulation d'un sandwich isotrope classique (Shorter [115]) avec des peaux en aluminium et un cœur en polymère. Les paramètres matériaux des couches de ce sandwich sont résumés dans le Tableau B.1. La Figure B.1 présente la forme de la contrainte σ_{xz} dans l'épaisseur de ce sandwich pour les deux formulations. Nous remarquons tout d'abord que la contrainte de la formulation linéaire est constante dans l'épaisseur et directement égale au module de cisaillement de la première couche. La formulation cubique, quant à elle, respecte bien la condition de contraintes nulles aux surfaces inférieures et supérieures. La contrainte de l'âme reste cependant pratiquement constante dans l'épaisseur. La forme du champs de déplacement n'a pas été présentée ici du fait qu'elle est très similaire pour les deux formulations dans le cas du sandwich simulé.

	h	ρ	E	ν
Peaux	1 mm	2700 kg.m ³	70 GPa	0.3
Âme	7 mm	48 kg.m ³	0.8 GPa	0.2

Tableau B.1 – Paramètres matériaux des couches du sandwich isotrope étudié par Shorter [115].

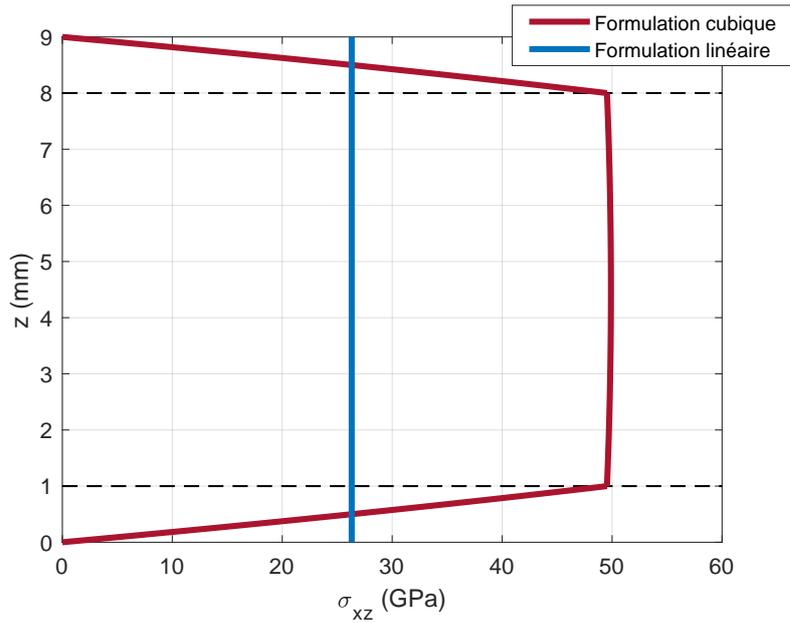


FIGURE B.1 – Forme de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur d'un sandwich isotrope (caractéristiques des couches au Tableau B.1). Formulation cubique (—) et linéaire (—) des fonctions F_{ij} . Interface entre les couches (---).

La Figure B.2 présente également les courbes de dispersions de la structure obtenues à partir des deux formulations. Très peu de différences sont visibles entre les résultats. Nous pouvons tout de même noter un décalage de la fréquence de coupure des modes de cisaillement de quelques Hz ainsi qu'une très légère différence des modes de flexion en hautes fréquences.

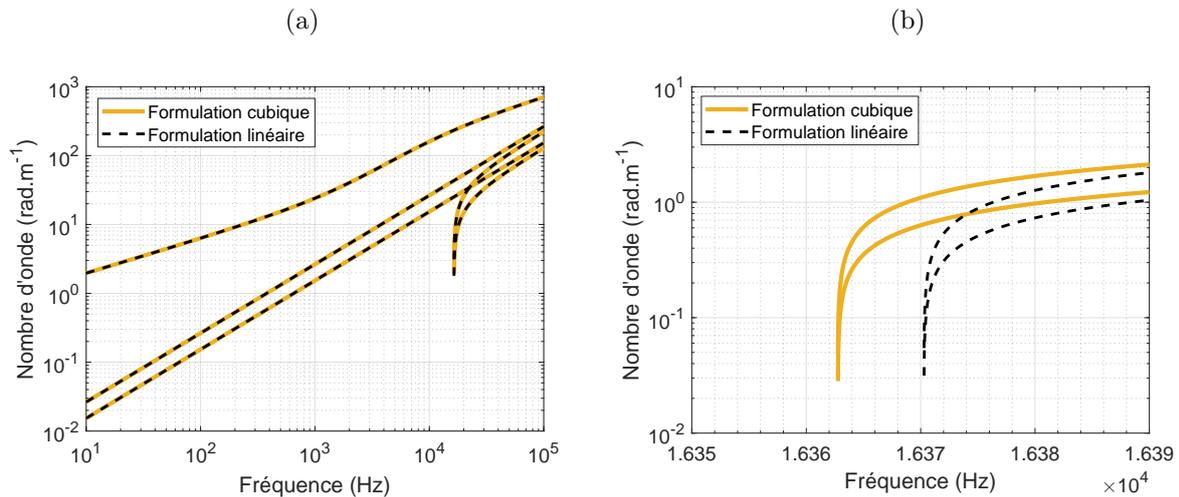


FIGURE B.2 – Courbes de dispersion (a) d'un sandwich isotrope (caractéristiques des couches au Tableau B.1) obtenues à partir d'une représentation cubique (—) et linéaire (---) de la forme du cisaillement. Zoom sur les modes de cisaillement (b).

Finalement, pour la gamme de fréquences et les structures étudiées dans ce manuscrit, les modifications apportées par la formulation cubique sont minimales. Cependant, les expressions analytiques des coefficients λ et δ des matrices de masse et de raideur du système sont bien plus

complexes. C'est pour cela que nous avons décidé de conserver dans ce manuscrit la formulation linéaire instaurée par Guyader [42] afin de préserver la simplicité du modèle équivalent.

Annexe C

Modèle de Love Kirchhoff

Cette annexe présente la méthodologie de la théorie de Love-Kirchhoff [65] dans le cas d'une plaque monoclinique. La formulation de la méthode est décrite jusqu'à l'équation de mouvement de la structure. La plaque est représentée dans un repère cartésien $Oxyz$, sa fibre neutre se trouvant à la coordonnée $z = 0$. Le comportement de cette plaque est orthotrope dans un repère orienté d'un angle d'orthotropie θ par rapport à $Oxyz$

La théorie de Love-Kirchhoff décrit le mouvement en flexion de la plaque, supposée mince, tout en négligeant son cisaillement (nous invitons le lecteur à prendre connaissance des hypothèses de ce modèle à la section 1.1.1). Le champ de déplacement de la structure est alors uniquement décrit par son déplacement transverse, symbolisée par la variable cinématique W :

$$\begin{cases} u_x(x, y, z, t) = -z \frac{\partial W}{\partial x}, \\ u_y(x, y, z, t) = -z \frac{\partial W}{\partial y}, \\ u_z(x, y, z, t) = W(x, y, t). \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Le champ de déformation de la structure peut alors être établi à partir de ce champ de déplacement :

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ \epsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \\ \epsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Les déformations hors-plan ($\epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$) sont nulles du fait que le modèle de Love-Kirchhoff néglige le cisaillement de la plaque.

Le champ de contraintes $\{\sigma\}$ est quant à lui déterminé à partir de la loi de comportement

de la structure, définie, pour un matériau monoclinique, par la relation :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

où les paramètres Q_{ij} représentent les composantes du tenseur des raideurs. Elles peuvent s'écrire en fonction des paramètres de l'ingénieur et de l'angle d'orthotropie θ à l'aide de l'Eq. (2.12) (nous invitons le lecteur à lire la section 2.1.2 qui détaille déjà cet aspect pour le modèle multicouche étudié dans le Chapitre 2).

Une formulation énergétique, identique à celle décrite à la section 2.1.4, a été utilisée pour établir l'équation de mouvement de la structure. Cette formulation s'appuie sur la fonctionnelle d'Hamilton (Eq. (2.25)) faisant l'état de l'énergie cinétique et de déformation du système. Les énergies relatives aux efforts externes sont supposées nulles. Dans le cas d'une plaque mince de Love Kirchhoff, les effets d'inertie du mode flexion sont négligés et la densité d'énergie cinétique s'écrit simplement :

$$e_c = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left| \frac{\partial u_z}{\partial t} \right|^2 dz = \rho h \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2. \quad (\text{C.4})$$

L'énergie de déformation de la plaque est quant à elle égale à :

$$e_d = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} \{\epsilon\}^T dz = \frac{h^3}{24} \left[Q_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + Q_{22} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4Q_{66} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2Q_{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + 4Q_{16} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + 4Q_{26} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right]. \quad (\text{C.5})$$

L'équation de mouvement de la plaque peut alors être établie en appliquant le principe de moindre action (Eq. (2.32) à la fonctionnelle d'Hamilton :

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + D_{12} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{C.6})$$

où les coefficients D_{ij} correspondent aux rigidités de flexion de la plaque :

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{h^3}{12} Q_{11}; & D_{22} &= \frac{h^3}{12} Q_{22}; & D_{12} &= \frac{h^3}{6} (Q_{12} + 2Q_{66}); \\ D_{16} &= \frac{h^3}{3} Q_{16}; & D_{26} &= \frac{h^3}{3} Q_{26}; \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

On peut rappeler que la relation entre les rigidités et les paramètres matériaux (module de Young et coefficient de Poisson) est donnée par l'Eq. (2.12) via une matrice de projection qui dépend de l'angle d'orthotropie.

Dans le cas de plaques multicouches, la théorie CLT définit les rigidités de la structure sous

la forme suivante [12]

$$\begin{aligned}D_{11} &= \sum_{k=1}^{nL} \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) Q_{11}^k, \\D_{22} &= \sum_{k=1}^{nL} \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) Q_{22}^k, \\D_{12} &= 2 \sum_{k=1}^{nL} \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) (Q_{12}^k + 2Q_{66}^k), \\D_{16} &= 4 \sum_{k=1}^{nL} \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) Q_{16}^k, \\D_{26} &= 4 \sum_{k=1}^{nL} \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) Q_{26}^k.\end{aligned}\tag{C.8}$$

où e_k et z_k correspondent respectivement à l'épaisseur et à la coordonnée en z de la fibre neutre de la couche k .

Annexe D

Calibration du capteur de force

Cette annexe, inspirée des travaux de Leclère [57], décrit la procédure de calibration visant à identifier la masse interne du capteur de force utilisé à la section 3.3.3. Cette calibration, tirée des travaux de thèse de Pinho [97], considère deux masses (m_1, m_2) montées à tour de rôle sur le capteur. Le pot vibrant excite ensuite la structure à l'aide d'un sinus glissant sur la plage de fréquences étudiées. La réponse en fréquence R_i correspondant au ratio entre l'accélération A_i et le voltage U_i du capteur a été mesurée à l'aide du vibromètre laser pour chaque masse en son centre. En considérant chaque masse comme indéformable et en supposant un mouvement de translation pure, la force mesurée par le capteur correspond pour chaque masse i à :

$$F_i = (m_i + m_s)A_i, \quad i = 1, 2. \quad (\text{D.1})$$

où m_s correspond à la masse interne du capteur. La réponse en fréquence de chaque masse peut alors être écrit en fonction de m_s , m_i et de la sensibilité du capteur S

$$R_i = \frac{A_i}{U_i} = \frac{1}{(m_i + m_s)S} \quad i = 1, 2. \quad (\text{D.2})$$

La sensibilité S et la masse interne m_s peuvent alors être déterminée à l'aide des réponses en fréquence (R_1, R_2) et des masses (m_1, m_2) :

$$S = \frac{1}{m_2 - m_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right); \quad m_s = \frac{R_2 m_2 - R_1 m_1}{R_1 - R_2}. \quad (\text{D.3})$$

Cette calibration a été appliquée sur le capteur utilisé à la section 3.3.3 à l'aide de deux masses $m_1 = 1.9$ g et $m_2 = 6.7$ g. La Figure D.1 présente la sensibilité et la masse interne de ce capteur calculées à partir de l'Eq. (D.3). Les résultats montrent une bonne cohérence de la sensibilité avec celle donnée par le fabricant (110 mV/N). La courbe de la masse interne varie entre 8 et 10 g. La valeur basse fréquence de 9.2 g a été retenue.

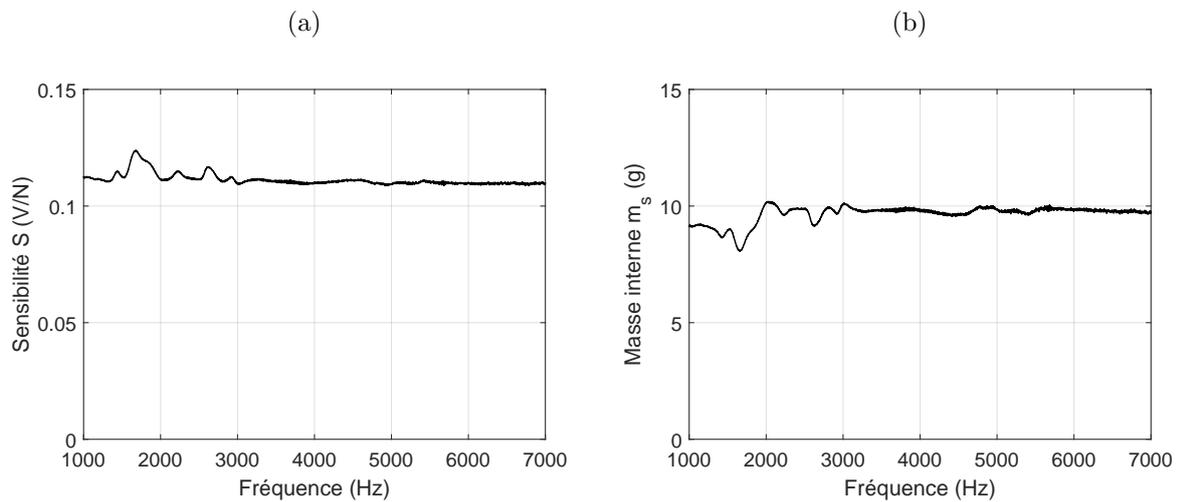


FIGURE D.1 – Sensibilité (a) et masse interne (b) du capteur de force étudié à la section 3.3.3. Résultats obtenus à partir de la calibration du capteur.

Annexe E

Modèle de Lamb isotrope

Le modèle des ondes de Lamb a été développé par Lamb [55] et a notamment été repris par Viktorov [129]. Dans le cas de structure multicouche composée de N_L couches, ce modèle fait partie de la catégorie des modèles Layer-Wise, présenté à la section 1.1.2. Son nombre d'inconnue cinématique dépend donc du nombre de couche dans le multicouche. Dans le modèle présenté ci-dessous, chaque couche est supposée isotrope et infinie dans les directions x et y , l'axe z étant défini selon l'épaisseur de la structure (voir Figure E.1).

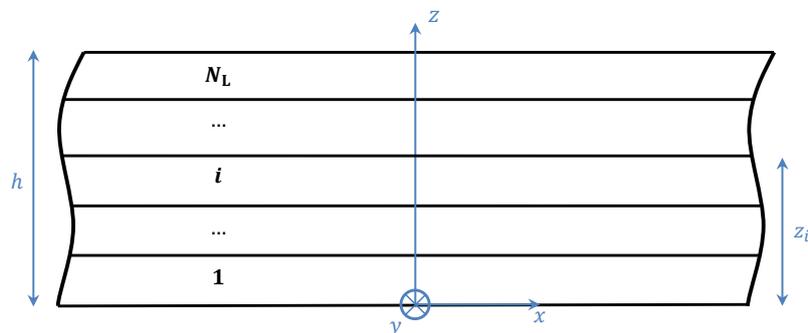


FIGURE E.1 – Schéma du multicouche dans le modèle des ondes de Lamb.

Le modèle de Lamb décrit deux types d'ondes pour chaque couche i , une onde longitudinale définie par un potentiel ϕ_i et une onde transversale définie par un potentiel ψ_i . Dans le cas isotropes, si l'onde est polarisée dans le plan Oxz , ces potentiels sont solutions des équations d'ondes :

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_{L,i}^2} \phi_i = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_{T,i}^2} \psi_i = 0, \quad (\text{E.1})$$

où $c_{L,i}$ et $c_{T,i}$ représentent respectivement la vitesse de propagation des ondes longitudinales et transversales de chaque couche i . Ces vitesses peuvent être exprimées en fonction des caractéristiques des couches par :

$$c_{L,i} = \sqrt{\frac{E_i(1 - \nu_i)}{\rho_i(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)}}; \quad c_{T,i} = \sqrt{\frac{E_i}{2\rho_i(1 + \nu_i)}}; \quad (\text{E.2})$$

Une solution particulière des équations d'ondes (E.1) peut être suggérée en utilisant les potentiels :

$$\begin{aligned}\phi_i &= \left(A_i e^{-(k^2 - \omega^2/c_{L,i}^2)z} + B_i e^{(k^2 - \omega^2/c_{L,i}^2)z} \right) e^{j(\omega t - kx)}, \\ \psi_i &= \left(C_i e^{-(k^2 - \omega^2/c_{T,i}^2)z} + D_i e^{(k^2 - \omega^2/c_{T,i}^2)z} \right) e^{j(\omega t - kx)},\end{aligned}\tag{E.3}$$

où k correspond au nombre d'onde des ondes se propageant dans la structure et les paramètres A_i , B_i , C_i et D_i sont les amplitudes inconnues de ces ondes.

Le champ de déplacement de chaque couche est ensuite défini par :

$$\begin{cases} u_{x,i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i}{\partial z}, \\ u_{z,i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \end{cases}\tag{E.4}$$

et permettent d'établir leur champ de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx,i} = \rho_i \left[(c_{L,i}^2 - 2c_{T,i}^2) \frac{\partial u_{z,i}}{\partial z} + c_{L,i}^2 \frac{\partial u_{x,i}}{\partial x} \right], \\ \sigma_{zz,i} = \rho_i \left[(c_{L,i}^2 - 2c_{T,i}^2) \frac{\partial u_{x,i}}{\partial x} + c_{L,i}^2 \frac{\partial u_{z,i}}{\partial z} \right], \\ \sigma_{xz,i} = \rho_i c_{T,i}^2 \left(\frac{\partial u_{x,i}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z,i}}{\partial x} \right). \end{cases}\tag{E.5}$$

Enfin, les relations de couplage entre les couches, pouvant se résumer par la continuité des déplacements et des contraintes transverses entre les couches, forment le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} u_{x,i}(z = z_i) = u_{x,i+1}(z = z_i), \\ u_{z,i}(z = z_i) = u_{z,i+1}(z = z_i), \\ \sigma_{zz,i}(z = z_i) = \sigma_{zz,i+1}(z = z_i), \\ \sigma_{xz,i}(z = z_i) = \sigma_{xz,i+1}(z = z_i), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N_L - 1\tag{E.6}$$

et sont accompagnées par les conditions aux limites aux surfaces inférieures et supérieures du multicouche :

$$\begin{cases} \sigma_{zz,1}(z = 0) = 0, \\ \sigma_{xz,1}(z = 0) = 0, \\ \sigma_{zz,N_L}(z = h) = 0, \\ \sigma_{xz,N_L}(z = h) = 0. \end{cases}\tag{E.7}$$

Le système est alors composé de $4N_L$ équations pour $4N_L$ inconnues et peut être défini sous forme matricielle. Les courbes de dispersion de la structure correspondent aux valeurs pour lesquels le déterminant de cette matrice est nul. Pour les identifier, une méthode numérique par dichotomie est utilisée à chaque fréquence.

Bibliographie

- [1] F. Ablitzer, C. Pézerat, J.M. Génevaux, and J. Bégué. Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion. *Journal of Sound and Vibration*, 333(9) :2454 – 2468, 2014.
- [2] F. Ablitzer, C. Pézerat, B. Lascoup, and J. Brocaïl. Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori knowledge of the principal directions. *Journal of Sound and Vibration*, 404 :31 – 46, 2017.
- [3] D.N. Alleyne and P. Cawley. The interaction of lamb waves with defects. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39(3) :381–397, 1992.
- [4] S.A. Ambartsumian. On the theory of bending plates. *Investiia Akad. Nauk SSSR*, 5 :69 – 77, 1958.
- [5] H. Arya, R.P. Shimpi, and N.K. Naik. A zigzag model for laminated composite beams. *Composite Structures*, 56(1) :21 – 24, 2002.
- [6] M. Aucejo. Structural source identification using a generalized Tikhonov regularization. *Journal of Sound and Vibration*, 333(22) :5693 – 5707, 2014.
- [7] D. Backström and A.C. Nilsson. Modelling the vibration of sandwich beams using frequency-dependent parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3) :589 – 611, 2007.
- [8] A. Berry and O. Robin. Identification of spatially correlated excitations on a bending plate using the virtual fields method. *Journal of Sound and Vibration*, 375 :76 – 91, 2016.
- [9] A. Berry, O. Robin, and F. Pierron. Identification of dynamic loading on a bending plate using the virtual fields method. *Journal of Sound and Vibration*, 333(26) :7151 – 7164, 2014.
- [10] J. Berthaut. *Contribution à l'identification large bande des structures anisotropes : Application aux tables d'harmonie des pianos*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2004.
- [11] J. Berthaut, M.N. Ichchou, and L. Jezequel. K-space identification of apparent structural behaviour. *Journal of Sound and Vibration*, 280(3) :1125 – 1131, 2005.
- [12] J.M. Berthelot and J.M. Cole. *Composite Materials : Mechanical Behavior and Structural Analysis*. Mechanical Engineering Series. Springer New York, 1998.
- [13] M. Blau. Inverse force synthesis : state of the art and future research. Nice, France, 2000.

- [14] P. Bodian, P. Guy, B. Chassignole, O. Dupont, and L. Doudet. Évaluation non destructive des propriétés d'élasticité et d'atténuation ultrasonore dans des matériaux anisotropes. In *Congrès Français d'Acoustique CFA*, 2010.
- [15] X. Boutillon and K. Ege. Vibroacoustics of the piano soundboard : Reduced models, mobility synthesis, and acoustical radiation regime. *Journal of Sound and Vibration*, 332(18) :4261 – 4279, 2013.
- [16] P. Butaud, E. Foltête, and M. Ouisse. Sandwich structures with tunable damping properties : On the use of shape memory polymer as viscoelastic core. *Composite Structures*, 153 :401 – 408, 2016.
- [17] J. Carpentier, J.H. Thomas, C. Pézerat, C. Bailly, and A. Berry. Comprehension of phenomena generating acoustic noise inside the passenger compartment of cars. sources identification and simulation. In *23rd International Congress on Sound and Vibration - ICSV23*, Athènes, Grèce, 2016.
- [18] E. Carrera. c_z^0 requirements - models for the two dimensional analysis of multilayered structures. *Composite Structures*, 37 :373 – 383, 1997.
- [19] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, 50(2) :183 – 198, 2000.
- [20] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(2) :87–140, 2002.
- [21] A. Castel. *Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissants*. PhD thesis, Université de Bourgogne, 2013.
- [22] R. Cherif, J.-D. Chazot, and N. Atalla. Damping loss factor estimation of two-dimensional orthotropic structures from a displacement field measurement. *Journal of Sound and Vibration*, 356 :61 – 71, 2015.
- [23] K.N. Cho, C.W. Bert, and A.G. Striz. Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory. *Journal of Sound and Vibration*, 145(3) :429 – 442, 1991.
- [24] S.H. Crandall and N.A. Yeh. Automatic generation of component modes for rotordynamic substructures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 111(1) :6–10, 1989.
- [25] J. Cuenca, F. Gautier, and L. Simon. The image source method for calculating the vibrations of simply supported convex polygonal plates. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4) :1048 – 1069, 2009.
- [26] L. Demasi. Refined multilayered plate elements based on murakami zig-zag functions. *Composite Structures*, 70 :308 – 316, 1997.
- [27] G. Desanghere. Quantification of noise and vibration sources : state of the art. Louvain, Belgique, 1988.
- [28] M.S. Djamaa, N. Ouella, C. Pézerat, and J.L. Guyader. Reconstruction of a distributed force applied on a thin cylindrical shell by an inverse method and spatial filtering. *Journal of Sound and Vibration*, 301 :560–575, 2007.

- [29] K. Ege. *La table d'harmonie du piano. Études modales en basses et moyennes fréquences*. PhD thesis, École polytechnique, 2009.
- [30] K. Ege, X. Boutillon, and B. David. High-resolution modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 325(4) :852 – 869, 2009.
- [31] K. Ege, N.B. Roozen, Q. Leclère, and R.G. Rinaldi. Assessment of the apparent bending stiffness and damping of multilayer plates ; modelling and experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 426 :129 – 149, 2018.
- [32] J.A. Fabunmi. Feasibility of dynamic load determination from measured mobilities. Houston, TX, USA, 1987.
- [33] C. Faure, F. Ablitzer, J. Antoni, and C. Pezerat. Empirical and fully bayesian approaches for the identification of vibration sources from transverse displacement measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 94 :180–201, 2017.
- [34] N.S. Ferguson, C.R. Halkyard, and B.R. Mace. The estimation of wavenumbers in two-dimensional structures. *Proceedings of ISMA 2002*, pages 799 – 806, 2002.
- [35] S. Ghinet and N. Atalla. Modeling thick composite laminate and sandwich structures with linear viscoelastic damping. *Computers and Structures*, 89(15) :1547 – 1561, 2011.
- [36] A. Giraudeau and F. Pierron. Measurement of vibrating plate spatial responses using deflectometry and high speed camera. *AIP Conference Proceedings*, 1253(1) :241–246, 2010.
- [37] M. Grédiac and F. Hild. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. Wiley-ISTE, 2012.
- [38] O. Grosset. *Identification de la pression pariétale turbulente par problème inverse vibratoire dans les domaines aéronautique et naval*. PhD thesis, Université du Maine, 2017.
- [39] P. Guillaume, E. Parloo, and G. De Sitter. Source identification from noisy response measurements using an iterative weighted pseudo-inverse approach. Louvain, Belgique, 2002.
- [40] J.L. Guyader and C. Cacciolati. Viscoelastic properties of single layer plate material equivalent to multi-layer composites plate. *Internoise*, pages 1558–1567, 2007.
- [41] J.L. Guyader, H.D. Hwang, and K. Ege. Sandwich patch with thermoviscous fluid core, for increasing damping of panels. In *20th International Congress on Sound and Vibration, ICSV20*, page #17, Bangkok, Thailand, 2013.
- [42] J.L. Guyader and C. Lesueur. Acoustic transmission through orthotropic multilayered plates, part 1 : Plate vibration modes. *Journal of Sound and Vibration*, 58(1) :51 – 68, 1978.
- [43] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, pages 49 – 52, 1902.
- [44] P.C. Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 34(4) :561 – 580, 1992.

- [45] S.I. Hayek. *Nearfield Acoustical Holography*, pages 1129 – 1139. Springer New York, New York, NY, 2008.
- [46] H. Hencky. Über die berücksichtigung der schubverzerrung in ebenen platten. *Ingenieur-Archiv*, 16(1) :72–76, 1947.
- [47] L. Hillström, M. Mossberg, and B. Lunberg. Identification of complex modulus from measured strains on an axially impacted bar using least squares. *Journal of Sound and Vibration*, 230(3) :689 – 707, 2000.
- [48] M.N. Ichchou, O. Bareille, and J. Berthaut. Identification of effective sandwich structural properties via an inverse wave approach. *Engineering Structures*, 30(10) :2591 – 2604, 2008.
- [49] E. Jacquelin, A. Bennani, and P. Hamelin. Force reconstruction : analysis and regularization of a deconvolution problem. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1) :81 – 107, 2003.
- [50] C.D. Johnson and D.A. Kienholz. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *AIAA Journal*, 20 :1284 – 1290, 1982.
- [51] M. Karama, K.S. Afaq, and S. Mistou. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures*, 40(6) :1525 – 1546, 2003.
- [52] J.S. Kim and M. Cho. Enhanced modeling of laminated and sandwich plates via strain energy transformation. *Composites Science and Technology*, 66(11) :1575 – 1587, 2006.
- [53] T.H. Kreiss. *Holographic Interferometry – Principles and Methods*. Akademie Verlag GmbH, 1996.
- [54] M. Kurhe Nikhil, B. Shedbale Indrajeet, D. Charapale Utkarsh, and R. Manoharan. Modal analysis of hybrid laminated composite sandwich plate. *Materials Today : Proceedings*, 5(5, Part 2) :12453 – 12466, 2018.
- [55] H. Lamb. On waves in an elastic plate. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 93(648) :114 – 128, 1917.
- [56] Q. Leclère, F. Ablitzer, and C. Pézerat. Identification of loads of thin structures with the corrected force analysis technique : An alternative to spatial filtering regularization. *Proceedings of ISMA 2014*, 2014.
- [57] Q. Leclère, F. Ablitzer, and C. Pézerat. Practical implementation of the corrected force analysis technique to identify the structural parameter and load distributions. *Journal of Sound and Vibration*, 351 :106–118, 2015.
- [58] Q. Leclère and C. Pézerat. Vibration source identification using corrected finite difference schemes. *Journal of Sound and Vibration*, 331(6) :1366–1377, 2012.
- [59] J.K. Lee and Y.S. Park. Response selection and dynamic damper application to improve the identification of multiple input forces of narrow frequency band. *Journal of Mechanical System and Signal Processing*, 8(6) :649 – 664, 1994.

- [60] A.W. Leissa. On a curve veering aberration. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 25(1) :99–111, 1974.
- [61] S.G. Lekhnitskii. Strength calculation of composite beams. *Vestnik inzhen i tekhnikov*, 9 :137 – 148, 1935.
- [62] M. Levinson. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7(6) :343 – 350, 1980.
- [63] A. Loredo. A multilayered plate theory with transverse shear and normal warping functions. *Composite Structures*, 156 :361 – 374, 2016.
- [64] A. Loredo and A. Castel. A multilayer anisotropic plate model with warping functions for the study of vibrations reformulated from Woodcock’s work. *Journal of Sound and Vibration*, 332(1) :102 – 125, 2013.
- [65] A.E.H. Love. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 179 :491–546, 1888.
- [66] B.D. Lucas and T. Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo vision (ijcai). volume 2, pages 674 – 679, 1981.
- [67] P.F. Luo, Y.J. Chao, and M.A. Sutton. Application of stereo vision to three-dimensional deformation analyses in fracture experiments. *Optical Engineering*, 33(3) :981 – 990, 1994.
- [68] R.H. Lyon and R.G. DeJong. *Theory and application of Statistical Energy Analysis (2nd edition)*. Butterworth Heinemann, 1995.
- [69] E. Manconi and B.R. Mace. Estimation of the loss factor of viscoelastic laminated panels from finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 329(19) :3928 – 3939, 2010.
- [70] E. Manconi and S. Sorokin. On the effect of damping on dispersion curves in plates. *International Journal of Solids and Structures*, 50(11) :1966 – 1973, 2013.
- [71] J.L. Mantari, A.S. Oktem, and C. Guedes Soares. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B : Engineering*, 43(3) :1489 – 1499, 2012.
- [72] F. Marchetti, K. Ege, and Q. Leclère. Modèle monocouche équivalent de plaque multicouche orthotrope. In *Congrès Français de Mécanique CFM*, Lille, France, 2017.
- [73] F. Marchetti, K. Ege, and Q. Leclère. Extension de la méthode CFAT aux structures stratifiées. In *Congrès Français d’Acoustique CFA*, Le Havre, France, 2018.
- [74] F. Marchetti, K. Ege, and Q. Leclère. Localisation and identification of sources on laminated structures : Extension of CFAT method. In *Noise and vibration : Emerging methods - NOVEM 2018*, page 171981, Ibiza, Espagne, 2018.
- [75] F. Marchetti, K. Ege, Q. Leclère, and N.B. Roozen. On the structural dynamics of laminated composite plates and sandwich structures ; modelling and experiment. Submitted to *Journal of Sound and Vibration*, 2018.
- [76] P. Margerit. *Caractérisation large bande du comportement dynamique linéaire des structures hétérogènes viscoélastiques anisotropes. Application à la table d’harmonie du piano*. PhD thesis, Université Paris Est, 2018.

- [77] P. Margerit, A. Lebé, J.F. Caron, and X. Boutillon. High resolution wavenumber analysis (hrwa) for the mechanical characterisation of viscoelastic beams. *Journal of Sound and Vibration*, 433 :198 – 211, 2018.
- [78] P. Margerit, A. Lebé, J.F. Caron, K. Ege, and X. Boutillon. The high-resolution wavevector analysis for the characterization of the dynamic response of composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, 458 :177 – 196, 2019.
- [79] P. Mas, P. Sas, and K. Wyckaert. Indirect force identification based upon impedance matrix inversion : a study on statistical and deterministical accuracy. Louvain, Belgique, 1994.
- [80] J.G. McDaniel, P. Dupont, and L. Salvino. A wave approach to estimating frequency-dependent damping under transient loading. *Journal of Sound and Vibration*, 231(2) :433 – 449, 2000.
- [81] K. Menard. *Dynamic mechanical analysis : A practical introduction to techniques and applications*. CRC Press, 2008.
- [82] P. Millithaler, J.B. Dupont, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, and N. Bouhaddi. Viscoelastic property tuning for reducing noise radiated by switched-reluctance machines. *Journal of Sound and Vibration*, 407 :191 – 208, 2017.
- [83] R.D. Mindlin. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18 :31–38, 1951.
- [84] H. Murakami. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *Journal of Applied Mechanics*, 53 :661 – 666, 1986.
- [85] E. Nilsson and A.C. Nilsson. Prediction and measurement of some properties of sandwich structures with honeycomb and foam cores. *Journal of Sound and Vibration*, 251(3) :409 – 430, 2002.
- [86] D.U. Noiseux. Measurement of power flow in uniform beams and plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 47(1B) :238 – 247, 1969.
- [87] A.K. Noor and W.S. Burton. Three-dimensional solutions for the free vibrations and buckling of thermally stressed multilayered angle-ply composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 59(4) :868 – 877, 1992.
- [88] A. Nosier, R.K. Kapania, and J. N. Reddy. Free vibration analysis of laminated plates using a layerwise theory. *AIAA Journal*, 31(12) :2335 – 2346, 1993.
- [89] N.J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, 4 :20 – 34, 1970.
- [90] N.J. Pagano. Stress fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 14(5) :385 – 400, 1978.
- [91] P.F. Pai. A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 32(16) :2295 – 2313, 1995.

- [92] A. Parrinello and G.L. Ghiringhelli. Modal density of rectangular structures in a wide frequency range. *Journal of Sound and Vibration*, 419 :380 – 389, 2018.
- [93] G. Pavić. Measurement of structure borne wave intensity, part i : Formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 49(2) :221 – 230, 1976.
- [94] A. Pelat, T. Gallot, and F. Gautier. On the control of the first bragg band gap in periodic continuously corrugated beam for flexural vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 446 :249 – 262, 2019.
- [95] C. Pierre. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, 126(3) :485 – 502, 1988.
- [96] F. Pierron and M. Grédiac. *The virtual fields method. Extracting constitutive mechanical parameters from full-field deformation measurements*. Springer-Verlag, 2012.
- [97] M. Pinho. *Comportement statique et dynamique d'une suspension de haut-parleur à joint de ferrofluide*. PhD thesis, Université du Maine, 2011.
- [98] R.E. Powell and W. Seering. Multichannel structural inverse filtering. *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*, 106 :22 – 28, 1984.
- [99] C. Pézerat and J.L. Guyader. Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam. *Acta Acustica*, 3 :1–10, 1995.
- [100] C. Pézerat and J.L. Guyader. Identification of vibration sources. *Applied Acoustics*, 61(3) :309 – 324, 2000.
- [101] C. Pézerat, Q. Leclère, N. Totaro, and M. Pachebat. Identification of vibration excitations from acoustic measurements using near field acoustic holography and the force analysis technique. *Journal of Sound and Vibration*, 326(3) :540 – 556, 2009.
- [102] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :745 – 752, 1984.
- [103] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Communications in Applied Numerical Methods*, 3(3) :173 – 180, 1987.
- [104] J.N. Reddy and N.D. Phan. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory. *Journal of Sound and Vibration*, 98(2) :157 – 170, 1985.
- [105] J.N. Reddy and D.H. Robbins. Theories and computational models for composite laminates. 47 :147 – 169, 1994.
- [106] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12 :68–77, 1945.
- [107] E. Reissner. On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(1) :55–68, 1947.
- [108] E. Reissner. On a mixed variational theorem and on a shear deformable plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23 :193 – 198, 1986.

- [109] J.G. Ren. A new theory of laminated plates. *Composite Science and Technology*, 26 :225 – 239, 1986.
- [110] C. Renzi, C. Pézerat, and J.L. Guyader. Vibratory source identification by using the finite element model of a subdomain of a flexural beam. *Journal of Sound and Vibration*, 332(3) :545 – 562, 2013.
- [111] C. Renzi, C. Pézerat, and J.L. Guyader. Local force identification on flexural plates using reduced finite element models. *Computers and Structures*, 144 :75 – 91, 2014.
- [112] R. Richard and T. Kailath. Esprit - estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on acoustics speech and signal processing*, 37(7) :984 – 995, 1989.
- [113] N.B. Roozen, L. Labelle, Q. Leclère, K. Ege, and S. Alvarado. Non-contact experimental assessment of apparent dynamic stiffness of constrained-layer damping sandwich plates in a broad frequency range using a nd :yag pump laser and a laser doppler vibrometer. *Journal of Sound and Vibration*, 395 :90 – 101, 2017.
- [114] N.B. Roozen, Q. Leclère, K. Ege, and Y. Gerges. Estimation of plate material properties by means of a complex wavenumber fit using Hankel’s functions and the image source method. *Journal of Sound and Vibration*, 390 :257 – 271, 2017.
- [115] P.J. Shorter. Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(5) :1917–1925, 2004.
- [116] E. Skudrzyk. The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 67(1) :1105 – 1135, 1980.
- [117] K.P. Soldatos and T. Timarci. A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures*, 25(1) :165 – 171, 1993.
- [118] S. Srinivas. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, 30(4) :495 – 507, 1973.
- [119] S. Srinivas, C.V. Joga Rao, and A.K. Rao. An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 12(2) :187 – 199, 1970.
- [120] K.S. Stevens. Force identification problems : an overview. pages 838 – 844, 1987.
- [121] Z. Su, L. Ye, and Y. Lu. Guided lamb waves for identification of damage in composite structures : A review. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3) :753 – 780, 2006.
- [122] C.T. Sun and J.M. Whitney. Theories for the dynamic response of laminated plates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 11 :178 – 183, 1973.
- [123] A. Teter and J. Gawryluk. Experimental modal analysis of a rotor with active composite blades. *Composite Structures*, 153 :451 – 467, 2016.
- [124] A. Tikhonov and V. Arsenine. Méthodes de résolution de problèmes mal posés. page 192, Moscou : Mir, 1976.

- [125] A. Toledano and H. Murakami. A composite plate theory for arbitrary laminate configurations. *Journal of Applied Mechanics*, 54 :181 – 189, 1987.
- [126] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29(8) :901 – 916, 1991.
- [127] E.E. Ungar and J.A. Zapfe. *Structural Damping*, chapter 14, pages 579 – 609. John Wiley and Sons, Ltd, 2007.
- [128] W.A. Veronesi and J.D. Maynard. Nearfield acoustic holography (nah) ii. holographic reconstruction algorithms and computer implementation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 81(5) :1307 – 1322, 1987.
- [129] I.A. Viktorov. *Rayleigh and Lamb Waves : Physical Theory and Applications*. Plenum press, New York, 1967.
- [130] B.F. Vlasov. On the equations of bending of plates. *Dokla Ak. Nauk. Azerbeijanskoi-SSR*, 3 :955 – 979, 1957.
- [131] B. Wang and M. Yang. Damping of honeycomb sandwich beams. *Journal of Materials Processing Technology*, 105(1) :67 – 72, 2000.
- [132] C.M. Wang, G.T. Lim, J.N. Reddy, and K.H. Lee. Relationships between bending solutions of reissner and mindlin plate theories. *Engineering Structures*, 23(7) :838–849, 2001.
- [133] T. Wassereau, F. Ablitzer, C. Pézerat, and J.L. Guyader. Experimental identification of flexural and shear complex moduli by inverting the timoshenko beam problem. *Journal of Sound and Vibration*, 399 :86 – 103, 2017.
- [134] J.M. Whitney. The effects of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *Journal of Composite Materials*, 3 :534 – 547, 1969.
- [135] J.M. Whitney. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *Journal of Applied Mechanics*, 40 :302, 1973.
- [136] J.M. Whitney and C.T. Sun. A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *Journal of Sound and Vibration*, 30(1) :85 – 97, 1973.
- [137] R.L. Woodcock. Free vibration of advanced anisotropic multilayered composites with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 312(4) :769 – 788, 2008.
- [138] A.M. Zenkour. Transverse shear and normal deformation theory for bending analysis of laminated and sandwich elastic beams. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 6 :267 – 283, 1999.



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : Marchetti
Prénom : Fabien

DATE de SOUTENANCE : 16 Décembre 2019

TITRE : Modélisation et caractérisation large bande de plaques multicouches anisotropes

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2019LYSEI130

Ecole doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité : Acoustique

RESUME :

Le présent travail de thèse traite de la modélisation vibratoire et la caractérisation dynamique de matériaux multicouches anisotropes. Dans le premier chapitre, une classification de quelques modèles analytiques de multicouche et techniques de caractérisation expérimentales de structures planes est établie sous la forme d'une synthèse bibliographique. Elle regroupe les récents résultats publiés autour du sujet. Le second chapitre propose une extension d'un modèle équivalent de multicouche au cas des structures anisotropes. Ce modèle décrit les premières courbes de dispersion de la structure et tient compte des phénomènes de cisaillement pouvant agir sur le mode de flexion en hautes fréquences. Le principal avantage du modèle réside dans sa simplicité et sa rapidité grâce à son nombre de variables cinématiques indépendant du nombre de couches. Les caractéristiques du multicouche sont définies par les 5 rigidités de flexion d'une plaque équivalente mince qui est comparée à ce dernier. L'extension de modèle est validée à l'aide d'une étude expérimentale réalisée sur des plaques composites en fibres de carbone. Un intérêt tout particulier est porté sur la modélisation de l'amortissement structurel. Une définition énergétique du facteur de perte, décrite par une formulation spatiale et temporelle de l'atténuation, est comparée à une définition équivalente. Une nouvelle définition de la formulation spatiale est proposée dans le cas de structures très amorties et est comparée aux résultats de la littérature. Dans le troisième chapitre, la technique de caractérisation RIC est étendue au cas des structures anisotropes. Cette méthode inverse s'appuie sur l'analyse du champ de déplacement de la structure et possède, grâce à son aspect local, des atouts non négligeables pour des applications industrielles. La méthodologie est tout d'abord présentée pour l'identification de sources (objectif initial de la méthode) et est ensuite adaptée à la caractérisation. Plusieurs applications numériques et expérimentales sont présentées afin de valider cette extension. Enfin, le quatrième chapitre porte sur la caractérisation expérimentale d'un sandwich en nids d'abeille sur une large bande fréquentielle (1 à 300 kHz). Le comportement dynamique complexe de cette structure épaisse est décrit au travers des résultats prometteurs fournis par les simulations de notre modèle et les estimations de RIC. Ces résultats sont également comparés à ceux d'un modèle de référence et d'autres méthodes de caractérisation.

MOTS-CLÉS : multicouches anisotropes, sandwichs épais, modèle équivalent, rigidités de flexion, amortissement structurel, caractérisation dynamique, méthodes inverses.

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire Vibrations Acoustique

Directeur de thèse : Kerem Ege et Quentin Leclère

Président de jury : Morvan Ouisse

Composition du jury : Alexandre Loredon (Rapporteur), Charles Pézerat (Rapporteur), Lucie Rouleau, Morvan Ouisse, Kerem Ege, Quentin Leclère.