

Guides d'ondes et transport dans les milieux désordonnés : effets de la symétrie et de la localisation Elie Cheron

▶ To cite this version:

Elie Cheron. Guides d'ondes et transport dans les milieux désordonnés : effets de la symétrie et de la localisation. Acoustique [physics.class-ph]. Le Mans Université, 2019. Français. NNT : 2019LEMA1017 . tel-02906405

HAL Id: tel-02906405 https://theses.hal.science/tel-02906405

Submitted on 24 Jul 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





THESE DE DOCTORAT DE

LE MANS UNIVERSITE COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602 Sciences pour l'Ingénieur Spécialité : Acoustique

Élie CHÉRON

Guides d'ondes et transport dans les milieux désordonnés : effets de la symétrie et de la localisation

Unité de recherche : Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans, UMR CNRS 6613 Thèse n° : 2019LEMA1017 présentée et soutenue à Le Mans, le 08/07/2019

Rapporteurs :	Lluís M. GARCÍA-RAFFI	Professeur, IUMPA – Valence (Espagne)
	Claire PRADA	Directrice de Recherche CNRS, Institut Langevin – Paris (France)
Examinateurs :	Matthieu DAVY	Maître de Conférence, IETR – Rennes (France)
	Juan José SÁENZ	Professeur, DIPC – Saint-Sébastien (Espagne)
Encadrement :	Simon FÉLIX	Chargé de Recherche CNRS, LAUM – Le Mans (France)
	Vincent PAGNEUX	Directeur de Recherche CNRS, LAUM – Le Mans (France)

Remerciements

Je tiens à remercier vivement Lluís M. Garcia Raffí et Claire Prada pour avoir accepté de rapporter ce travail de thèse. Je tiens également à remercier Matthieu Davy et Juan José Sáenz pour avoir accepté de l'examiner. Je souhaite remercier Simon Félix et Vincent Pagneux, mes deux directeurs de thèse, pour m'avoir fait confiance, pour leur implication, leur professionnalisme et leurs idées originales qui ont donné naissance à ce travail.

Je souhaite également remercier Charlotte, Robin, Valentin, Remy et Loïc pour la relecture attentionnée de ce manuscrit dans les dernières secondes de rédaction ainsi que tous les autres pour avoir proposé leur aide avec une réactivité remarquable.

J'ai eu la chance d'avoir pu évoluer pendant ces années dans un environnement agréable et propice au travail. Je voudrais remercier tous les membres du laboratoire et particulièrement mes colocataires de bureau Valentin, Matti, Jianghy et Matthieu pour m'avoir supporté au quotidien. Je souhaite également remercier Florian et Laurianne non seulement pour m'avoir fait découvrir les joies du café mais surtout pour leurs conseils toujours avisés et réconfortants.

J'ai aussi bénéficié pendant 4 ans d'une expérience d'enseignement qui m'a donné goût à la pédagogie. Je remercie donc les responsables de formation qui m'ont fait confiance et qui m'ont épaulé dans ces premiers pas. Je remercie Théo, Omar, Gautier, Romain et Julien qui m'ont grandement facilité cette activité la dernière année.

Cette thèse n'aurait très probablement jamais commencé et ne se serait jamais achevée sans les amis qui m'entourent. Vous êtes trop nombreux pour être listé mais je vous remercie TOUS pour votre extrême patience et votre soutien en toutes circonstances.

Enfin, je tiens à remercier toute ma famille, mes frères, ma sœur et tout particulièrement mes parents : Christian et Patricia qui n'ont jamais cessé de me soutenir, me pousser et m'aider à en arriver jusqu'à l'écriture de ces lignes.



Le Chat de Philippe Geluck

Table des matières

Introduction générale

1	Gui	ides d'ondes et transport dans les milieux désordonnés	11
	1.1	Introduction	12
	1.2	Guide d'onde quasi-1D et équation des ondes	12
		1.2.1 L'équation d'onde	12
		1.2.2 Formalisme matriciel : la matrice de scattering	13
		1.2.3 Caractéristiques statistiques du scattering en milieux désordonnés	14
		1.2.4 Mesure du transport	14
		1.2.5 Théorie des Matrices Aléatoires (TMA)	15
	1.3	Propriétés ondulatoires en milieu complexe	16
		1.3.1 Distribution des valeurs propres	16
		1.3.2 Fluctuations de conductance	18
		1.3.3 Densité d'énergie en régime diffusif	19
	1.4	Conclusion	21
	Ann	nexes	23
	1.A	Modèles numériques	23
		1.A.1 La méthode Multimodale	23
		1.A.2 Intégration numérique	24
	1.B	Combinaison des matrices de scattering	28
	Bibl	liographie	29
2	Bro	adband-Enhanced Transmission through Symmetric Diffusive Slabs	33
	2.1	Introduction	35
	2.2	Conductance enhancement	38
	2.3	Scaling model	39
	2.4	Symmetry breaking	40
	2.5	Conclusion	41
	Ann	nexes	43
	2.A	Transmittance of an opaque barrier	43

 $\mathbf{7}$

	2.B	Scaling model	45
	$2.\mathrm{C}$	Approche énergétique de la propagation d'ondes dans les milieux diffusants	46
		2.C.1 L'équation du transfert radiatif et l'équation de diffusion appliqués à une tranche	
		de milieu diffusant	47
		2.C.2 Milieux diffusants séparés par une interface	59
		2.C.3 Comparaison entre l'approche énergétique et l'approche ondulatoire	63
	Bibl	iographie	63
3	Effe	ect of loss, defect and localization on the enhanced transmission in symmetric	3
	disc	ordered slabs	69
	3.1	Introduction	71
	3.2	Symmetry breaking	71
	3.3	Enhanced transmission through absorbing symmetric slabs	75
		3.3.1 Transmission through absorbing diffusive slabs	75
		3.3.2 A scaling model for the scattering with absorption	77
	3.4	Conclusion	81
	Ann	exes	83
	3.A	RMT simulations with absorption	83
	3.B	Enhanced transmission induced by symmetric localized slabs	83
	$3.\mathrm{C}$	Broadband subwavelength sensitivity with symmetric disordered slabs $\ldots \ldots \ldots$	85
	Bibl	iographie	88
4	Pro	pagation d'ondes dans les milieux désordonnés : localisation	91
	4.1	Introduction	92
	4.2	De la localisation faible à la localisation forte	92
	4.3	Gel et cristallisation : motif spatial et effets des pertes	93
		4.3.1 Visualisation spatiale du gel du champ dans les milieux localisés $\hfill \ldots \hfill \hfill \ldots \hfill \ldots \hfill \ldots \hfill \hfill \ldots \hfill \hfill \ldots \hfill \ldots \hfill \hfill \ldots \hfill \ldots \hfill \ldots \hfill \h$	93
		4.3.2 Gel et cristallisation dans les milieux absorbants	97
	4.4	Quelquefois le dégel	100
	4.5	Conclusion	103
	Bibl	iographie	103
Co	onclu	sion générale et perspectives	107

Introduction générale

La propagation d'ondes dans les milieux désordonnés est un phénomène commun à de nombreux domaines de la physique que l'on expérimente quotidiennement de par la manière dont nous percevons le monde. En effet, la lumière naturelle qui parvient à nos yeux n'effectue jamais de trajet direct mais subit de la diffusion et de l'absorption lors de son passage dans l'atmosphère, dans les nuages, ou lorsqu'elle rencontre des obstacles. Ce que nous percevons est donc le résultat complexe de l'interaction d'ondes avec la matière. À l'échelle microscopique ces interactions sont aléatoires mais à l'échelle macroscopique elles donnent naissance à des propriétés (comme par exemple l'aspect blanc du lait ou la couleur du ciel) qui nous renseignent sur la nature des milieux. L'étude des phénomènes à l'origine de ces propriétés est alors importante lorsque l'on veut comprendre, optimiser ou caractériser la propagation à travers un milieu complexe qu'il soit artificiel ou naturel.

Les premiers travaux concernant la propagation d'ondes en milieux désordonnés apparaissent historiquement dès le début du XXème siècle avec l'étude classique de la conductivité électrique. Considérant que dans un fil électrique un électron se déplace microscopiquement de manière balistique, Drude en 1900, propose de modéliser les interactions entre électrons et les ions d'un métal par des sphères solides qui peuvent entrer en collision. Le milieu est simplifié en une grille régulière dans lequel un point (un électron) peut sauter de maille en maille de manière aléatoire. Le mouvement du point décrit par ce modèle est une marche aléatoire¹ dont une prédiction déterministe de la trajectoire est impossible (un exemple est représenté en Figure 1a). Bien que ce mécanisme soit a priori imprévisible, il donne néanmoins naissance à un phénomène remarquable : la distance moyenne du point à l'origine augmente lentement et ce point semble explorer progressivement tout l'espace disponible. Pour expliquer cette observation une approche probabiliste est donnée par Bachelier la même année. Dans le cas où l'échelle d'observation macroscopique est grande devant les grandeurs microscopiques, le passage à un milieu continu mène à une équation différentielle du second ordre qui n'est rien d'autre qu'une équation de diffusion. Au même titre que d'autres phénomènes physiques, comme par exemple la diffusion de la chaleur dans les matériaux, la propagation d'ondes dans les milieux désordonnés partage des points communs avec la diffusion (Figure 1b). Pour cela, on considère que les milieux étudiés sont suffisamment diffusants pour faire disparaître en moyenne toutes les signatures liées aux

^{1.} Ce mouvement est utilisé pour décrire d'autres types de phénomènes naturels dont l'un des plus connus est le mouvement brownien.



FIGURE 1 - a) Trajectoire d'une particule réalisant une marche aléatoire dans un espace 2D pour 3 valeurs de pas. b) Champs obtenu par la résolution de l'équation d'onde dans un milieu désordonné. Pour réaliser cette image, on résout l'équation d'onde à l'aide d'un schéma aux différences finies dans un espace 2D dans lequel est positionnée une répartition aléatoire de diffuseurs ponctuels.

effets cohérents. Dès lors, il est en général admis qu'une approche diffusive peut être utilisée comme une solution énergétique pour décrire le transport d'ondes dans les milieux désordonnés.

Pourtant, cette description est mise en défaut par une expérience simple : lorsqu'on illumine un échantillon diffusant par un laser et qu'on positionne un écran en transmission ou en réflexion, l'image obtenue présente un motif aléatoire granuleux, comprenant des zones sombres et des zones claires (Figure 2). Ces figures de tavelures (ou "speckle" en anglais) sont le résultat d'effets d'interférences destructives ou constructives liés à l'accumulation de phase associée aux multiples chemins que l'onde dispose pour traverser le milieu. Très sensibles à la position et à la nature des diffuseurs dans l'échantillon, elles représentent en quelque sorte une signature complexe du milieu. L'équation de diffusion ou tout autre description énergétique, qui ne comporte aucun mécanisme de déphasage et phénomènes cohérents, échouent donc à décrire ce phénomène.

Suite à la découverte de nouveaux effets cohérents, l'étude des ondes dans les milieux désordonnés a donc trouvé un regain d'intérêt qui a permis plus récemment de développer de nouvelles techniques pour contrôler la propagation de la lumière, des micro-ondes ou des ondes acoustiques et qui ont mené à montrer une absence de diffusion dans les milieux fortement désordonnés.



FIGURE 2 – Figure de tavelure ("speckle") obtenue par la projection sur un mur d'un faisceau laser traversant une surface plastique. Source : Wikimedia Commons.

C'est dans ce cadre que ce manuscrit introduira dans un premier chapitre les aspects généraux de la propagation et du transport des ondes en milieu désordonné. Il présentera les résultats élémentaires liés aux effets cohérents, comme les fluctuations universelles de conductance, la répartition bimodale des valeurs propres en transmission ou encore l'évolution universelle de la densité d'énergie. Tous les résultats seront issus de la résolution directe de l'équation d'onde par une approche multimodale ou de simulations basées sur la théorie des matrices aléatoires.

Outre les phénomènes remarquables associés au transport diffusif, les effets cohérents se manifestent aussi lorsque la distribution spatiale des diffuseurs présente des symétries. Une observation d'un gain significatif et large bande de la transmission au travers de barrières opaques sera présentée au chapitre 2. Nous en profiterons pour montrer la sensibilité de ce phénomène aux défauts de

symétrie, qui ouvre de nouvelles possibilités pour les essais non destructifs, la cryptographie ou la détection de défauts qui sera approfondie et complétée dans le chapitre 3. On étudiera l'effet de la répartition spatiale des défauts de symétries. Les limites liées à l'absorption, toujours présente dans un contexte expérimental seront également inspectées.

Lorsque le désordre est suffisamment élevé, le régime de diffusion s'efface pour laisser place à un régime localisé dans lequel les ondes restent emprisonnées et le milieu devient isolant. On se focalisera dans le chapitre 4 à l'une des signatures de ce régime : la propagation à l'intérieur des milieux est insensible à la source d'excitation. On dit que le champ se "gèle". On présentera à partir de résultats numériques l'effet des pertes sur cette signature ainsi que des cas particuliers pour lesquels cette propriété est rompue.

Enfin nous conclurons ce manuscrit en présentant des résultats préliminaires comme perspectives à ce travail.

Chapitre 1

Guides d'ondes et transport dans les milieux désordonnés

Sommaire

1.1 Introduction	12
1.2 Guide d'onde quasi-1D et équation des ondes	12
1.2.1 L'équation d'onde \ldots	12
1.2.2 Formalisme matriciel : la matrice de scattering	13
1.2.3 Caractéristiques statistiques du scattering en milieux désordonnés	14
1.2.4 Mesure du transport	14
1.2.5 Théorie des Matrices Aléatoires (TMA)	15
1.3 Propriétés ondulatoires en milieu complexe	16
1.3.1 Distribution des valeurs propres	16
1.3.2 Fluctuations de conductance	18
1.3.3 Densité d'énergie en régime diffusif	19
1.4 Conclusion	21
Annexes	23
1.A Modèles numériques	23
1.A.1 La méthode Multimodale	23
1.A.2 Intégration numérique	24
1.B Combinaison des matrices de scattering	28
Bibliographie	29

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de formuler et d'introduire les outils fondamentaux de la propagation d'ondes dans les guides d'ondes désordonnés. Dans un premier temps on présente l'équation d'onde ainsi qu'un formalisme matriciel adapté à la propagation dans une géométrie quasi-1D. Les principales quantités pour caractériser le transport, qui seront utilisées tout au long de ce document, sont posées. La seconde partie est consacrée aux phénomènes et caractéristiques usuels liés aux aspects cohérents de la propagation en régime diffusif.

Les résultats sont principalement obtenus grâce à la résolution directe de l'équation d'onde à l'aide d'une formulation multimodale que nous détaillerons en annexe. Ils sont complétés par des simulations numériques faisant appel à la théorie des matrices aléatoires.

1.2 Guide d'onde quasi-1D et équation des ondes

1.2.1 L'équation d'onde

Soit un guide d'onde homogène infini de section unitaire quasi-1D, dans lequel est placé un milieu constitué de diffuseurs positionnés aléatoirement dans la région $x \in [-L/2; L/2]$ (Figure 1.1). En



FIGURE 1.1 – Schématisation d'un milieu inhomogène de longueur L placé dans un guide d'onde infini. Les points rouges représentent des diffuseurs modélisés comme un changement d'indice local.

régime harmonique, où ω est la pulsation, la propagation d'une onde $\Psi(x, y, t) = \psi(x, y)e^{-j\omega t}$ est régie par l'équation de Helmholtz,

$$\Delta \psi(x,y) + k_0^2 \left[1 + \delta n(x,y) \right]^2 \psi(x,y) = 0.$$
(1.1)

On note $k_0 = \omega/c$ le nombre d'onde de référence par rapport à un milieu homogène dans lequel les ondes se propagent avec une célérité c. Les diffuseurs sont modélisés par un changement d'indice local $-1 < \delta n < 1$ de moyenne nulle $\langle \delta n \rangle = 0$. On étudie dans ce manuscrit le cas particulier d'ondes acoustiques qui se propagent dans un guide à parois rigide. On impose donc des conditions de Neumann $\partial_y \psi |_{y=0,1} = 0$.

Dans les deux régions homogènes (|x| > L/2), un ensemble de fonctions propres discret et infini

que l'on appellera modes transverses constituent une base de fonctions orthogonales,

$$\int_{0}^{1} \varphi_n(y)\varphi_m(y)dy = \delta_{nm},$$
(1.2)

associées aux valeurs propres,

$$k_n^2 = k_0^2 - n^2 \pi^2. (1.3)$$

Ici, δ_{nm} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 lorsque n = m et 0 sinon. Le choix de conditions de Neumann aux limites impose l'écriture de cette base normalisée comme

$$\varphi_n(y) = \sqrt{2 - \delta_{n0}} \cos(n\pi y) \,. \qquad n \in \mathbb{N}.$$
(1.4)

Les solutions longitudinales sont décrites quant à elles par des exponentielles complexes $\psi_n(z) = \exp(\pm jk_n z)$ et toute solution du problème une fois projeté sur cette base est exprimée pour chaque mode *n* comme une superposition linéaire d'ondes aller et retour d'amplitude c_n^{\pm} :

$$\psi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n^+ \exp(+jk_n z) + c_n^- \exp(-jk_n z) \right) \varphi_n(y).$$
(1.5)

L'équation (1.3) sépare les modes propagatifs avec transport d'énergie ¹ pour lesquelles $k_n^2 > 0$ et les modes évanescents ² pour lesquels $k_n^2 < 0$. En toute rigueur il existe une infinité de modes évanescents pour un nombre N fini de modes propagatifs associé à leur fréquence de coupure. En pratique, lorsque l'indice moyen du milieu désordonné est égal à l'indice du milieu homogène, les quantités calculées à partir de moyennes d'ensemble ne nécessitent pas la prise en compte des modes évanescents [1, 2]. Pour reconstruire les champs ondulatoires, nous prendrons en compte dans ce manuscrit un nombre fini et suffisant de modes évanescents pour faire converger la solution vers une solution correcte.

1.2.2 Formalisme matriciel : la matrice de scattering

Sur une section transverse du guide d'onde, la solution de l'équation de Helmholtz est projetée sur la base des fonctions transverses décrites précédemment et reformulée en fonction des vecteurs $\boldsymbol{a} =$ $\{a_1, ..., a_n, ..., a_N\}$, composante du champ dans la base $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_0(y), ...\phi_n(y), ...\phi_N(y)\}$. L'introduction d'un formalisme matriciel adapté à la propagation en guides d'ondes quasi-1D permet d'écrire le champ $\psi(x, y)$ dans cette base comme :

$$\psi(x,y) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x)\varphi_n(y) = \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{a}, \qquad (1.6)$$

^{1.} Dans ce cas k_n est réel et l'argument de l'exponentiel imaginaire pur.

^{2.} Dans ce cas k_n est imaginaire pur et l'argument de l'exponentielle réel pur.

où ϕ^T représente la transposée du vecteur ϕ . Les ondes entrantes $a^+(-L/2)$, $a^-(L/2)$ sont reliées aux ondes sortantes $a^-(-L/2)$, $a^+(L/2)$ par la matrice de scattering (parfois appelée matrice de diffusion). Noté S, cette matrice de taille $2N \times 2N$ est composée des matrices de réflexions R et R'ainsi que les matrices de transmissions T et T' du milieu :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{-}(-L/2) \\ \boldsymbol{a}^{+}(L/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{T} & \boldsymbol{R}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{+}(-L/2) \\ \boldsymbol{a}^{-}(L/2) \end{pmatrix}.$$
(1.7)

Les systèmes étant sans gain ni perte³, la conservation de l'énergie impose à la matrice de scattering d'être unitaire $\mathbf{SS}^{\dagger} = \mathbf{\mathcal{I}}$ et la réciprocité impose $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{T}$. Ces deux propriétés sont à l'origine du développement d'un modèle à partir de matrices aléatoires explicitées dans la section 1.2.5.

1.2.3 Caractéristiques statistiques du scattering en milieux désordonnés

Il n'existe que très peu de paramètres statistiques pour caractériser un milieu désordonné constitué d'un ensemble de diffuseurs. L'un des plus utilisés est le libre parcours moyen de transport ℓ : la distance moyenne que l'onde parcourt avant de subir suffisamment de scattering pour perdre l'information de sa direction initiale d'incidence. Cette distance permet de mesurer la force de scattering d'un milieu et de caractériser le transport des ondes à une échelle macroscopique.

À une échelle microscopique, le libre parcours moyen de scattering ℓ_s donne quant à lui la distance moyenne entre deux scattering. Le lien entre ces deux distances est l'anisotropie du scattering qui prend place dans le milieu. Si l'on définit θ l'angle formé entre le vecteur d'onde incident et le vecteur d'onde transmis après un événement produisant du scattering : $\ell = \ell_s/(1 - \langle \cos \theta \rangle)$. On notera que ces deux distances sont égales dans le cas où la taille des diffuseurs est petite face à la longueur d'onde : le scattering est dit isotrope.

Dans la suite du document, nous utiliserons souvent le paramètre d'échelle $s = L/\ell$: la longueur du milieu à l'échelle d'un libre parcours moyen de transport.

1.2.4 Mesure du transport

Suivant une idée de Landauer en 1957, le transport d'ondes dans un milieu complexe peut être caractérisé à partir de leurs transmissions [5, 6]. Pour cela, la conductance (sans dimension) du milieu mesure la transmission totale grâce à la contribution de la transmission de tous les modes transverses entrants,

$$g = Tr(TT^{\dagger}) = \sum_{n,m=0}^{N-1} |T_{nm}|^2, \qquad (1.8)$$

où † représente l'opérateur adjoint d'une matrice complexe.

^{3.} Le lecteur pourra se reporter à la référence [3, 4] qui établit les propriétés de la matrice de scattering en présence de modes évanescents.

La difficulté pour étudier directement les propriétés statistiques de la matrice de transmission T est que cette matrice non-Hermitienne n'est pas diagonalisable. On préfère donc considérer sa décomposition aux valeurs singulières. Cette décomposition donne le produit de 3 matrices,

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{V}^{\dagger}, \tag{1.9}$$

dont $\mathbf{\Lambda} = \sqrt{\mathbf{\tau}} = \operatorname{diag}(\sqrt{\tau_1}, ..., \sqrt{\tau_n}, ..., \sqrt{\tau_N})$, une matrice diagonale contenant les valeurs propres en transmission et les deux matrices unitaires complexe $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_{\tau_0}, ...\mathbf{u}_{\tau_n}, ...\mathbf{u}_{\tau_N}\}$, $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_{\tau_0}, ...\mathbf{v}_{\tau_n}, ...\mathbf{v}_{\tau_N}\}$ contenant les vecteur propres. Les matrices $\mathbf{TT}^{\dagger}, \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}, \mathbf{T}'\mathbf{T}'^{\dagger}$ et $\mathbf{T}'^{\dagger}\mathbf{T}'$ ainsi que leurs homologues en réflexions sont quant à elles Hermitiennes et donc diagonalisables. Elles partagent le même set de valeurs propres $\mathbf{\tau}$ pour la transmission (TEV pour "Transmission EigenValues") et décrivent ainsi parfaitement les propriétés de transport d'un système. La conductance s'exprime directement en fonction des TEV comme $g = \sum_n \tau_n$ [7].

Grâce à la décomposition polaire de la matrice de scattering,

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^{\dagger} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{V}^{\dagger} \end{pmatrix},$$
(1.10)

et à la théorie des matrices aléatoires (TMA), les propriétés statistiques de S permettent une étude de l'évolution des TEV et donc des propriétés du transport.

1.2.5 Théorie des Matrices Aléatoires (TMA)

La théorie des matrices aléatoires (TMA) est apparue dans les années 1930 et a trouvé un regain d'intérêt suite aux travaux de Wigner en physique nucléaire [8]. Cette théorie permet entre autres d'étudier le comportement universel de systèmes chaotiques. Elle s'est donc développée dans domaines variés et particulièrement en physique mésoscopique [9, 10]. L'idée sous-jacente à la TMA est que le système étudié est suffisamment chaotique ou désordonné pour que les propriétés statistiques soient modélisées à l'aide de matrices qui, bien qu'aléatoires, répondent aux contraintes physiques du problème. Lorsque la taille de ces matrices tend vers l'infini, l'étude du spectre ne dépend plus de la loi de probabilité qui a été utilisée pour les générer mais seulement des symétries d'ensembles correspondantes. De ce fait, plusieurs ensembles de matrices existent et servent à modéliser des systèmes avec des propriétés particulières. Parmi les plus connus on citera les 3 ensembles Gaussiens introduits par Wigner. Le premier est un ensemble gaussien unitaire (GUE) composé de matrices unitaires, qui décrit les systèmes dont la symétrie par renversement du temps est brisée. L'ensemble gaussien orthogonal (GOE), composé de matrices Hermitiennes complexes où l'invariance par renversement du temps est conservée. Enfin l'ensemble gaussien sympletique (GSE) comprenant des matrices complexes auto-adjointes pour décrire les systèmes avec spin. Ce sont ces ensembles qui ont initialement amorcé les études appliquées aux cavités chaotiques et aux milieux complexes. En général, c'est la matrice de scattering du système que l'on modélise par un ensemble de matrices aléatoires. La TMA se présente

donc comme un outil puissant pour l'étude statistique et numérique de la matrice de scattering et donc du transport d'onde en milieux complexe.

Les simulations réalisées et présentées dans ce document à partir de la TMA sont basées sur le modèle de Verrier et col. [11]. Pour cela, on considère une portion élémentaire de milieux désordonné dans laquelle la transmission et la réflexion totale des ondes sont d'environ 50%. Parmi les principaux ensembles, la matrice S typique du milieu⁴ est générée à l'aide de l'ensemble orthogonal circulaire (COE) tiré des éléments des matrices unitaires symétriques de Dyson.

La matrice de scattering d'un milieu désordonné complet est ensuite reconstruite en combinant les matrices de scattering d'un ensemble de portions élémentaires grâce à la procédure de combinaison donnée en annexe 1.B.

1.3 Propriétés ondulatoires en milieu complexe

1.3.1 Distribution des valeurs propres

En 1982 puis 1988, afin d'étudier la conductivité moyenne des milieux complexes, Dorokov, Mello, Pereyra et Kumar [12, 13] proposent d'exprimer la matrice de transmission de ces milieux comme le produit d'un grand nombre de matrices aléatoires. En supposant que l'on peut modéliser un échantillon désordonné complet comme la combinaison de petites portions de milieux désordonnés, le scattering est traité de manière perturbative afin d'étudier l'évolution des TEV au fur et à mesure que des matrices aléatoires sont combinées. L'équation obtenue pour la distribution $P(\tau_1, ..., \tau_N)$ est connue sous le nom d'équation DMPK (Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar) et a été résolue analytiquement dans le cas d'ensembles de matrices aléatoires GUE [14]. Ils montrent que lorsque $1 \ll s \ll N$, un régime de diffusion s'installe et la distribution des TEV est bimodale,

$$P(\tau) = \frac{N}{s+1} \frac{1}{\tau\sqrt{1-\tau}}.$$
(1.11)

Cette distribution (dont un exemple numérique est présenté en Figure 1.2) indique que la transmission est réalisée seulement par un petit nombre de TEV proches de l'unité qui correspondent aux canaux propres ouverts du système (TEC pour Transmission Eigen Channel). La majorité des TEV sont quant à elles proches de zéro et correspondent aux canaux propres fermés du système.

Grâce à l'équation (1.9) on peut montrer que le champ à la sortie d'un échantillon est le résultat d'un couplage entre chaque TEV avec le champ incident. Une transmission τ_n est obtenue si l'onde incidente est formée de telle sorte que $a^+(-L/2) = v_{\tau_n}$.

Un milieu désordonné est donc rendu parfaitement opaque ou transparent pour une onde selon la source incidente utilisée. La Figure 1.3 montre à titre d'exemple un milieu en régime diffusif éclairé par 3 différents types de source. Dans le premier cas, l'onde incidente est une onde "quelconque"

^{4.} Pour rappel, la matrice de scattering est symétrique $S = S^T$ et unitaire $SS^{\dagger} = I$.



FIGURE 1.2 – Distribution des valeurs propres de la matrice de transmission et de la conductance issue d'une simulation TMA à partir de 20000 réalisations pour N = 50 et s = 8. En trait plein est tracée la distribution bimodale donnée par l'équation 1.11.

pour laquelle tous les modes transverses sont excités de manière homogène : $| \mathbf{a}^+(-L/2) |^2 = 1/N$. Le milieu, opaque, ne transmet qu'une partie de l'énergie incidente. La transmission est typiquement de l'ordre de la conductance moyenne du milieu. Dans le second cas, l'onde incidente est formée pour correspondre à un canal propre ouvert du système : $\mathbf{a}^+(-L/2) = \mathbf{v}_{\tau_1}$, associé à la première valeur propre $\tau_1 = 0.99$. L'onde, qui pénètre dans le milieu, est quasiment entièrement transmise et sa réflexion est quasi nulle. Enfin, le dernier cas montre ce même échantillon excité par une onde incidente formée pour correspondre à un canal fermé du système : $\mathbf{a}^+(-L/2) = \mathbf{v}_{\tau_N}$, associée à la valeur propre du système la plus faible $\tau_N = 0.001$. La transmission est quasi nulle et la réflexion quasi parfaite.

La matrice de transmission est donc un outil puissant pour l'optimisation de la transmission d'ondes en milieu complexe. Plusieurs équipes en acoustique [15], optique [16-18] ou encore microondes [19] ont logiquement tenté de mesurer la distribution bimodale à partir d'une mesure directe de la matrice de transmission mais le second pic correspondant aux canaux ouverts est souvent difficile à observer. Cette difficulté pour observer expérimentalement les canaux ouvert réside dans la complexité à mesurer de la matrice de transmission dans son intégralité [20]. Dans ces expériences, seul un nombre fini de modes incidents et transmis peut être contrôlé, ou la couverture angulaire de l'excitation et de la détection optique est insuffisante. L'autre difficulté est que la matrice de scattering doit rester unitaire et donc les pertes dans l'échantillon doivent être limitées. Au final la première observation directe de cette distribution est réalisée en 2014 dans un guide d'ondes élastique [21].

Malgré ces difficultés Vellekoop et col. proposent d'optimiser la transmission d'ondes à travers un matériau diffusant sans mesure préalable de la matrice de transmission [22, 23]. À partir d'une méthode itérative, un champ incident optimal est construit en utilisant l'intensité mesurée sur une ou plusieurs cible en sortie d'échantillon. L'idée est d'aligner, grâce à un modulateur spatial de lumière (SLM),



FIGURE 1.3 – Calcul du champ dans un échantillon désordonné ($s \simeq 6$) placé dans un guide d'onde infini (N = 30) pour 3 types d'ondes incidentes. Du haut vers le bas : La première est une onde diffuse où la transmission est de l'ordre de la conductance du milieu. Le deuxième et le dernier cas correspondent à une onde incidente profilée pour correspondre à un vecteur propre de la matrice de transmission respectivement associé à la plus grande et plus petite valeur propre $\tau_1 \simeq 1$. La transmission est alors quasi parfaite ou quasi nulle.

la phase de milliers de modes incidents pour donner l'intensité maximale sur la cible considérée. Ils parviennent à obtenir un point focalisé d'une intensité 1000 fois supérieure à l'intensité de la figure de tavelure obtenue avant optimisation. Cette expérience est la première qui utilise le principe de canaux ouverts dans les milieux complexes et d'autres méthodes pour optimiser la transmission d'ondes ont fait leur apparition avec de nombreuses applications à l'imagerie en milieux complexes [24], [25].

1.3.2 Fluctuations de conductance

Il est important de différencier la conductance associée à un échantillon de milieu désordonné et la conductance moyenne d'un milieu. Si l'on considère deux guides d'ondes dans lesquels on place un tirage désordonné de diffuseurs ayant le même paramètre d'échelle $s = L/\ell$, les effets cohérents engendrés impliquent une variation de la conductance entre les deux échantillons. Cela signifie qu'il est impossible de prédire précisément la transmission des ondes sans une connaissance microscopique de l'échantillon. Cependant, pour un nombre de réalisations suffisant, on peut définir la conductivité moyenne du milieu noté $\langle g \rangle$ grâce à un moyennage sur un ensemble d'échantillons auquel est associée une distribution de conductance P(g).

L'équation DMPK fournit une propriété surprenante liée à ces variations : dans un régime de diffusion ($1 \ll s \ll N$), la variation de la conductance $var(g) = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2$ est petite et ne dépend pas des paramètres d'échelles du milieu. La distribution de la conductance P(g) (dont un exemple numérique est présenté en Figure 1.4) est une gaussienne de variance $\delta g = 2/15$ centrée sur la conductance moyenne,

$$P(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta g}} \exp\left(\frac{-(g-\langle g \rangle)^2}{2\delta g}\right).$$
(1.12)

Ce résultat, permet donc de donner une expression de $\langle g \rangle$ lorsqu'un régime de diffusion s'installe :



FIGURE 1.4 – Distribution de la conductance issue d'une simulation TMA à partir de 2.10^4 réalisations pour N = 50 et s = 8. En trait plein est tracé la distribution gaussienne donnée par l'équation (1.12).

$$\langle g_{\rm D}(s) \rangle = \frac{N}{s+1} \tag{1.13}$$

Lorsque le scattering est faible ou inexistant (on parle de régime balistique où $s \ll 1$), les modes transverses du guide homogène sont peu couplés par le milieu. Dans ce cas, $\langle g \rangle \simeq N$, indépendamment de la taille de l'échantillon. À contrario, lorsque le multiple scattering intervient ($1 \ll s \ll N$), les modes transverses sont fortement couplés et la conductance moyenne diminue suivant une loi ohmique. La Figure 1.5 montre un très bon accord entre la conductance moyenne en régime diffusif donnée par l'équation (1.13) et celle issue de simulations numériques par la résolution de l'équation d'onde lorsque $1 \ll s \ll N$. Lorsqu'un moyennage d'ensemble est effectué, les fluctuations disparaissent. Une approche énergétique peut donc être envisagée pour décrire la diffusion des ondes.

L'équation DMPK montre un autre résultat important : la présence d'un terme correctif $\langle \delta g \rangle = -1/3$, appelée correction de localisation faible, ajouté à la conductance indépendamment de s. De plus, lorsque $s/N \simeq 1$ (Figure 1.5), on remarque qu'une transition a lieu. La conductance moyenne du milieu chute brutalement et les fluctuations s'accentuent. Le régime de diffusion laisse place à un régime de localisation. Cette correction et cette transition, absentes des descriptions énergétiques, sont des signatures des effets cohérents qui survivent aux moyennes d'ensemble. Nous aborderons les propriétés du transport propres au régime de localisation dans le chapitre 4.

1.3.3 Densité d'énergie en régime diffusif

L'étude des propriétés de la matrice de scattering a montré que la matrice T donne de nombreuses informations sur la conductivité et la manière d'utiliser les effets cohérents afin de contrôler l'énergie transmise à travers un milieu diffusant. Chaque échantillon est une boîte noire avec une entrée et une sortie. La répartition de l'énergie à l'intérieur de l'échantillon est a priori ignorée. Pourtant, lorsque



FIGURE 1.5 – Conductance en fonction de $s = L/\ell$ obtenue par la résolution de l'équation d'onde dans un guide quasi-1D avec N = 200. La conductance moyennée sur 800 réalisations, représentée par la courbe noire et la conductance pour une réalisation de désordre, représenté par la courbe bleue sont comparées à l'expression de la conductance (1.13) prévue par l'équation DMPK.

l'on observe les champs présentés en Figure 1.3, la répartition de l'énergie des ondes semble différer en fonction de la source incidente. L'intensité du champ tend à décroitre spatialement et progressivement en traversant l'échantillon lorsqu'il est illuminé par une onde quelconque mais l'onde semble pénétrer plus profondément dans l'échantillon lorsque qu'un canal propre ouvert est excité. Pour quantifier cette information, la densité d'énergie transverse totale W(z) et les densités d'énergies associées pour chaque valeurs propres τ_n sont définies :

$$W(z) = \frac{1}{N} \sum_{\tau_n} W_{(\tau_n)}(x) = \int |\psi(x,y)|^2 \, dy.$$
(1.14)

En tout point du guide, en séparant les amplitudes des ondes allers, $a^+(z)$ et retours, $a^-(z)$ la densité d'énergie est réécrite comme la somme du module de l'onde aller, retour et de leurs produits croisés :

$$W_{(\tau_n)}(z) = \sum_n |\mathbf{a}_{(\tau_n)}^+|^2 + |\mathbf{a}_{(\tau_n)}^-|^2 + \overline{\mathbf{a}_{(\tau_n)}^+} \mathbf{a}_{(\tau_n)}^- + \mathbf{a}_{(\tau_n)}^+ \overline{\mathbf{a}_{(\tau_n)}^-}$$
(1.15)

En moyennant la densité d'énergie sur plusieurs itérations du désordre, en régime diffusif, les produits croisés de l'équation (1.15) s'annulent et la densité d'énergie moyenne $\langle W_{(\tau_n)} \rangle(z)$ fournit une information sur la probabilité qu'une onde possède à retourner dans une des régions transverses du guide. Davy, Shi, montrent qu'en régime diffusif pour des guides droits, la densité d'énergie associée à la plus grande valeur propre, est maximale au centre du guide et se décale progressivement vers l'entrée au fur et à mesure que τ_n diminue [26]. Un exemple numérique est présenté en Figure 1.6 et a également été observé expérimentalement [27]. Puisqu'un modèle de diffusion simple permet de décrire l'évolution



FIGURE 1.6 – A gauche, la densité d'énergie moyenne associée aux valeurs propres τ_1 , τ_5 , τ_{10} , τ_{15} , τ_{20} , τ_{25} , τ_{30} . Un profil symétrique piquée au centre du guide apparait pour la valeur propre la plus élevée. Le pic se décale vers l'entrée du guide au fur et à mesure que τ_n diminue. A droite la densité d'énergie moyenne totale. Ces résultats sont issus de la résolution de l'équation d'onde dans un guide d'onde désordonné diffusif supportant N = 30 modes propagatifs.

linéaire de la densité d'énergie totale en régime diffusif, ce profil de répartition d'énergie pour chaque canal a fait l'objet de plusieurs solutions analytiques recherchées dans un premier temps à travers une résolution de l'équation de diffusion avec des conditions de bords particulières [28] avant d'être décrit à partir de méthodes utilisant la théorie diagrammatique [29].

D'autres études ont montrées que la répartition d'énergie varie d'une géométrie à une autre. Le pic d'intensité lié aux canaux ouverts peut être décalé vers l'entrée ou la sortie de l'échantillon en fonction de la géométrie des guides et permet d'accéder à un nouveau degré de liberté pour modifier la répartition spatiale de l'intensité.

1.4 Conclusion

Ce chapitre introduit les différentes notions et éléments théoriques de la propagation d'onde en milieu désordonné et présente les résultats de bases liés au multiple scattering des ondes. L'équation d'onde adaptée aux milieux désordonnés est présentée et un formalisme matriciel adapté aux géométries quasi-1D a permis de définir la matrice de scattering et les quantités essentielles pour la mesure et la caractérisation du transport. On montre que les effets cohérents qui prennent place dans ces milieux mènent à des fluctuations de conductance et que la distribution des valeurs propres en régime diffusif est bimodale. Cela se traduit par un grand nombre de valeurs proches de 0 et un petit nombre de valeurs propres proches de l'unité qui, associé aux canaux propres, permets de rendre un milieu parfaitement opaque ou transparent pour les ondes. Ces canaux possèdent également une répartition spatiale universelle de la densité d'énergie qui offre de nombreuses possibilités pour l'imagerie par les ondes.

Annexes

1.A Modèles numériques

Dans cette annexe nous présentons une méthode numérique basée sur la formulation multimodale de la propagation d'onde dans les guides d'ondes quasi-1D désordonnés. Cette méthode est associée à deux schémas numériques d'intégrations qui ont été utilisés pour obtenir les résultats présentés dans ce manuscrit. Puis, on présente la méthode de combinaison des matrices de scattering.

1.A.1 La méthode Multimodale

L'équation d'Helmholtz donnée par l'équation (1.1) est reformulée sous la forme d'un système d'évolution reliant le champ à la composante longitudinale de son gradient, $\partial_x \psi = \phi$:

$$\partial x \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_0^2 (1 + \delta n(x, y)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix}.$$
 (1.16)

Grâce au formalisme matriciel introduit dans la section 1.2.2 on projette sur la base des modes transverses ψ et ϕ afin de réécrire l'équation 1.16 sous la forme d'un ensemble d'équations couplées sur les amplitudes modales exprimées par les vecteurs $\boldsymbol{a} = \{a_1, ..., a_n, ..., a_N\}$ et $\boldsymbol{b} = \{b_1, ..., b_n, ..., b_N\}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\mathcal{I}} \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}.$$
(1.17)

La matrice de couplage \mathcal{M}_3 s'écrit en fonction de $\mathcal{D} = \int_0^1 \delta n(x, y) \varphi_n \varphi_m dy$, la matrice issue de la projection des indices du milieu et de la matrice diagonale $\mathcal{K} = j\sqrt{k^2 - n^2\pi^2}$ qui contient les nombres d'ondes associés aux modes :

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{K}^2 - k^2 \mathcal{D}. \tag{1.18}$$

Notons que \mathcal{D} est une fonction de x connue analytiquement. Seule une discrétisation suivant l'axe longitudinal est nécessaire pour résoudre le problème.

L'équation (1.17) ne permet pas d'être directement intégrée car numériquement instable notamment lorsque des modes évanescents ou les pertes sont pris en compte. L'introduction d'une matrice admittance, définie par la relation $b = \mathcal{Y}a$, permet de décrire l'évolution de l'admittance sous la forme d'une équation de Ricatti,

$$\partial_x \boldsymbol{\mathcal{Y}} = -\boldsymbol{\mathcal{K}}^2 - \boldsymbol{\mathcal{Y}}^2, \tag{1.19}$$

dont une résolution numérique stable est envisageable. Dans un premier temps $\mathcal{Y}(x)$ est intégré numériquement d'aval en amont du guide à partir d'une condition de Sommerfield à l'infini $\mathcal{Y}(L/2) = \mathcal{K}$, puis le champ est reconstruit d'amont en aval à partir d'une condition initiale que l'on définit en fonction du type d'excitation que l'on souhaite imposer.

Les matrices de réflexion et transmission sont reconstruites directement à partir de la matrice admittance. Pour cela, le champ et son gradient sont décomposés selon une somme de deux ondes se propageant respectivement vers la droite et vers la gauche, formant ainsi un ensemble de deux équations,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}(x) = \boldsymbol{a}^{+}(x) + \boldsymbol{a}^{-}(x) \\ \boldsymbol{b}(x) = \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)\boldsymbol{a}(x) = \boldsymbol{\mathcal{K}}\left[\boldsymbol{a}^{+}(x) - \boldsymbol{a}^{-}(x)\right], \end{cases}$$
(1.20)

qui, à partir de la définition de la matrice de réflexion $a^{-}(x) = R(x)a^{+}(x)$, permet d'obtenir :

$$\boldsymbol{R}(x) = \left[\boldsymbol{\mathcal{K}} + \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)\right]^{-1} \left[\boldsymbol{\mathcal{K}} - \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)\right].$$
(1.21)

La matrice de transmission est quant à elle obtenue en définissant une matrice de propagation entre les points x et x' comme a(x) = G(x, x')a(x'), où x > x'.

L'évolution de la matrice de propagation est une équation du premier ordre :

$$\partial_x \boldsymbol{G}(x, x') = -\boldsymbol{G}(x, x') \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x), \qquad (1.22)$$

qui par définition vaut $G(x, x = x') = \mathcal{I}$. La matrice de transmission est déduite de la matrice de réflexion et de propagation :

$$T(x) = G(x, x' = L/2) \left(\mathcal{I} + R(x) \right).$$
(1.23)

Une fois l'admittance connue, on peut écrire l'équation d'évolution suivante pour le champ,

$$\partial_x \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\mathcal{Y}}\boldsymbol{a}), \qquad (1.24)$$

qui sera résolue numériquement à partir des schémas présentés par la suite.

1.A.2 Intégration numérique

Plusieurs solutions existent pour intégrer numériquement l'équation de Ricatti (1.19) et l'équation d'évolution (1.24). Ici nous présenterons un schéma Magnus, numériquement plus stable que les algorithmes classique

Une deuxième méthode d'intégration numérique basée sur des portions de milieux diffusant discrétisé sous forme de pixels est également présentée. Elle permet dans certaines conditions géométriques, de simplifier et limiter le coût de calcul numérique pour la reconstruction de la matrice de scattering et du champ.

Magnus : Pour un schéma de type Magnus, le guide d'onde est discrétisé suivant l'axe longitudinal suivant une grille régulière de points espacés d'une distance $\Delta_x > 0$. L'équation (1.17) discrétisée est réécrite suivant le schéma Magnus :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_{(x-\Delta_x)} = \exp\left(-\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\mathcal{I}} \\ -\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{3}}(\tilde{x}) & 0 \end{bmatrix} \Delta_x\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_{(x)}, \quad (1.25)$$

où \tilde{x} dépend de l'ordre du schéma. Nous retiendrons ici un ordre 2 pour lequel $\tilde{x} = x - \Delta_x/2$. L'exponentielle matricielle est réécrite comme,

$$\exp\left(-\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ -\mathcal{M}_{\mathbf{3}}(\tilde{x}) & 0 \end{bmatrix} \Delta_{x}\right) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\mathbf{1}}(x) & \mathcal{E}_{\mathbf{2}}(x) \\ \mathcal{E}_{\mathbf{3}}(x) & \mathcal{E}_{\mathbf{4}}(x) \end{pmatrix},$$
(1.26)

et le schéma numérique itératif est établi :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x - \Delta_x) = \left[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{3}}(x) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{4}}(x)\boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)\right] \left[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{1}}(x) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{2}}(x)\boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)\right]^{-1} \\ \boldsymbol{G}(x - \Delta_x) = \boldsymbol{\mathcal{G}}(x) \left[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{1}}(x) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{2}}(x)\right]^{-1}. \end{cases}$$
(1.27)

Grâce aux équations (1.21) et (1.23) qui définissent les matrices de réflexion et de transmission, le champ est reconstruit à partir du schéma itératif :

$$\boldsymbol{a}(x) = [\boldsymbol{\mathcal{E}}_1 + \boldsymbol{\mathcal{E}}_2 \boldsymbol{\mathcal{Y}}(x)]^{-1} \boldsymbol{a}(x - \Delta_x).$$
(1.28)

Pixels : Pour ce schéma, le milieu désordonné est "pixelisé" suivant une grille régulière constituée de mailles carrées de taille $\Delta_x = \Delta_y$ (Figure 1.7). Un milieu désordonné de longueur $L = N_x \Delta_x$ est donc constitué de N_x colonnes (ou portions) numéroté $i = \{0, 1, ..., i, ..., N_x\}$. Pour chaque colonne



FIGURE 1.7 – Représentation schématique d'un guide d'onde infini dans lequel un ensemble de diffuseurs carrés est positionné sur une grille de maillage régulière. La matrice de scattering est dans un premier temps calculée pour chaque colonne homogène avant d'être combinée avec la matrice de scattering globale.

invariante selon x, la matrice de scattering S_i associée peut être calculée. Dans la région $x = [x_i, x_i + \Delta_x]$, le champ est décrit par l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\partial_{xx}\boldsymbol{a} = \mathcal{M}_3\boldsymbol{a},\tag{1.29}$$

qui possède une solution générale construite en fonction des valeurs propres Γ et vecteurs propres Pde la matrice \mathcal{M}_3 (constante et connue analytiquement) pour un segment homogène :

$$\partial_{xx}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Gamma}^2 \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{a}.$$
 (1.30)

Par analogie avec l'équation (1.5) pour un guide d'onde homogène, la solution de l'équation (1.29), s'écrit comme une superposition linéaire d'onde aller et retour d'amplitudes c^{\pm} en fonction d'exponentielles complexe $H = e^{-\Gamma\Delta_x}$. L'onde en amont du segment est exprimée comme la superposition de l'onde incidente et réfléchie : $a_1^+ + a_1^- = a^+(x_i) + a^-(x_i)$, tandis que l'onde en aval du segment correspond à l'onde transmise $a_2^+ = a^+(x_i + \Delta_x)$. Elles sont associées respectivement à une admittance caractéristique $\mathcal{Y}_c = \mathcal{M}_3^{-1} P \Gamma P^{-1}$. Au final un système d'équations en amont et en aval de chaque segment est posé :

$$\begin{cases} a_{1}^{+} + a_{1}^{-} = P [c^{+} + Hc^{-}] \\ \mathcal{Y}_{1} [a_{1}^{+} + a_{1}^{-}] = \mathcal{Y}_{c} [c^{+} - Hc^{-}] \\ a_{2}^{+} = P [Hc_{1} + c^{-}] \\ \mathcal{Y}_{2}a_{2}^{+} = \mathcal{Y}_{c} [Hc^{+} - c^{-}]. \end{cases}$$
(1.31)

L'admittance \mathcal{Y}_1 est évaluée en $x = x_i$ tandis que l'admittance \mathcal{Y}_2 est évaluée en $x = x_i + \Delta_x$. Les définitions des matrices de transmission et de réflexion pour chaque segment $\mathbf{a}_1^- = \mathbf{R}_i \mathbf{a}_1^+, \mathbf{a}_2^+ = \mathbf{T}_i \mathbf{a}_1^+$

permettent de réécrire le ensemble d'équation ci-dessus comme :

$$\begin{cases} (\mathcal{I} + \mathbf{R}_{i})\mathbf{a}_{1}^{+} = \mathbf{P} \left(\mathbf{c}^{+} + \mathbf{H}\mathbf{c}^{-} \right) \\ \mathcal{Y}_{1}(\mathcal{I} + \mathbf{R}_{i})\mathbf{a}_{1}^{+} = \mathcal{Y}_{c}(\mathbf{c}^{+} - \mathbf{H}\mathbf{c}^{-}) \\ T_{i}\mathbf{a}_{1}^{+} = \mathbf{P} \left(\mathbf{H}\mathbf{c}^{+} + \mathbf{c}^{-}\right) \\ \mathcal{Y}_{2}T_{i}\mathbf{a}_{1}^{+} = \mathcal{Y}_{c} \left(\mathbf{H}\mathbf{c}^{+} - \mathbf{c}^{-}\right) \end{cases}$$
(1.32)

Finalement, cet ensemble d'équations, très similaire à l'équation (1.20), permet en posant,

$$\Upsilon = \boldsymbol{H'} \left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}_c + \boldsymbol{\mathcal{Y}}_2 \right)^{-1} \left(\boldsymbol{\mathcal{Y}}_c - \boldsymbol{\mathcal{Y}}_2 \right) \boldsymbol{H'}, \tag{1.33}$$

et $H' = PKP^{-1}$, de calculer la matrice admittance en amont du segment :

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{1} = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{c} \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Upsilon} \right) \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Upsilon} \right)^{-1}.$$
(1.34)

La dérivation de la matrice de réflexion et de transmission est donnée par l'équation (1.21) et (1.23). Dans ce cas la matrice de propagation d'un segment homogène est donnée par :

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\Upsilon}^{\prime - 1} \boldsymbol{H}^{\prime},\tag{1.35}$$

avec, $\Upsilon' = \frac{1}{2} \left[\left(\mathcal{I} + \mathcal{Y}_c^{-1} \mathcal{Y}_2 \right) + H'^2 \left(\mathcal{I} - \mathcal{Y}_c^{-1} \mathcal{Y}_2 \right) \right]$. Chaque segment est symétrique, ainsi R = R' et T = T'. La matrice de scattering associée à chaque segment S_i est connue intégralement,

$$\boldsymbol{S}_{i} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_{i} & \boldsymbol{T}_{i} \\ \boldsymbol{T}_{i} & \boldsymbol{R}_{i} \end{pmatrix}.$$
 (1.36)

Connaissant toutes les matrices de diffusion S_i associées à chaque colonne *i*, la matrice de scattering du guide entier S est calculée grâce à une procédure de combinaison matricielle aussi utilisée pour la combinaison des matrices de scattering issues de la TMA.

L'avantage conséquent de cette méthode est que le maillage spatial ne dépend que de la taille élémentaire des diffuseurs ce qui améliore nettement le coût de calcul numérique comparé au schéma numérique de type Magnus. Une résolution du type Magnus sera privilégiée dans le cas ou la simulation fait intervenir des géométries complexes.

1.B Combinaison des matrices de scattering

Cette section présente la méthode de combinaison des matrices de scattering. Elle permet de construire la matrice de scattering globale d'un milieu à partir de matrices de scattering élémentaires.

Soit S_a et S_b deux matrices de scattering associées à leurs matrices de réflexions R_a, R'_a, R_b, R'_b et transmissions respectives T_a, T'_a, T_b, T'_b . La matrice de scattering totale S_{ab} (Figure 1.8) est donnée la combinaison des deux matrices individuelles :

$$\boldsymbol{S}_{ab} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_{ab} & \boldsymbol{T}'_{ab} \\ \boldsymbol{T}_{ab} & \boldsymbol{R}'_{ab} \end{pmatrix}.$$
 (1.37)

En posant $d_l = \mathcal{I} - R_b R'_a$ et $d_r = \mathcal{I} - R'_a R_b$, les matrices de réflexions et transmissions totales, de la matrice de scattering $S_{a\leftrightarrow b}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ab} &= \mathbf{R}_{a} + \mathbf{T}_{a}^{\prime} \mathbf{d}_{l} \mathbf{R}_{b} \mathbf{T}_{a} \\ \mathbf{T}_{ab} &= \mathbf{T}_{b} \mathbf{d}_{r} \mathbf{T}_{a} \\ \mathbf{T}_{ab}^{\prime} &= \mathbf{T}_{a}^{\prime} \mathbf{d}_{r} \mathbf{T}_{b}^{\prime} \\ \mathbf{R}_{ab}^{\prime} &= \mathbf{R}_{b}^{\prime} + \mathbf{T}_{b} \mathbf{d}_{l} \mathbf{R}_{a}^{\prime} \mathbf{T}_{b}^{\prime} \end{aligned}$$
(1.38)



FIGURE 1.8 – Schématisation de la combinaison de deux matrices de scattering S_a et S_b associées à deux portions d'échantillons désordonnées. La matrice de scattering associée à la juxtaposition de ces deux portions est notée S_{ab}

Bibliographie

- [1] PAYNE, B., MAHLER, T. & YAMILOV, A. G. Effect of evanescent channels on position-dependent diffusion in disordered waveguides. *Waves in Random and Complex Media* **23**, 43-55 (2013).
- [2] YÉPEZ, M. & SÁENZ, J. J. Contribution of evanescent waves to the effective medium of disordered waveguides. *EPL (Europhysics Letters)* 108, 17006 (2014).
- [3] CARMINATI, R., SÁENZ, J. J., GREFFET, J.-J. & NIETO-VESPERINAS, M. Reciprocity, unitarity, and time-reversal symmetry of the *S* matrix of fields containing evanescent components. *Physical Review A* 62, 012712 (2000).
- [4] PAGNEUX, V. & MAUREL, A. Scattering matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids. *The Journal of the Acoustical Society of America* **116**, 1913-1920 (2004).
- [5] LANDAUER, R. Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction, 9 (1957).
- [6] IMRY, Y. & LANDAUER, R. Conductance viewed as transmission. *Reviews of Modern Physics* 71, 7 (1999).
- [7] ROTTER, S. & GIGAN, S. Light fields in complex media : Mesoscopic scattering meets wave control. *Reviews of Modern Physics* **89**, 015005 (2017).
- [8] WIGNER, E. P. Characteristic Vectors of Bordered Matrices With Infinite Dimensions. *The* Annals of Mathematics **62**, 548 (1955).
- BEENAKKER, C. W. J. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of Modern Physics* 69, 731-808 (1997).
- [10] STÖCKMANN, H.-J. Quantum chaos : an introduction (Cambridge University Press, Cambridge [England]; New York, 1999).
- [11] VERRIER, N., DEPRAETER, L., FELBACQ, D. & GROSS, M. Measuring enhanced optical correlations induced by transmission open channels in a slab geometry. *Physical Review B* 93, 161114 (2016).
- [12] DOROKHOV, O. On the coexistence of localized and extended electronic states in the metallic phase. Solid State Communications 51, 381-384 (1984).

- [13] MELLO, P., PEREYRA, P. & KUMAR, N. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. Annals of Physics 181, 290-317 (1988).
- [14] BEENAKKER, C. W. J. & RAJAEI, B. Exact solution for the distribution of transmission eigenvalues in a disordered wire and comparison with random-matrix theory. *Physical Review B* 49, 7499-7510 (1994).
- [15] AUBRY, A. & DERODE, A. Random Matrix Theory Applied to Acoustic Backscattering and Imaging In Complex Media. *Physical Review Letters* 102, 084301 (2009).
- [16] POPOFF, S. M. et al. Measuring the Transmission Matrix in Optics : An Approach to the Study and Control of Light Propagation in Disordered Media. *Physical Review Letters* 104, 100601 (2010).
- [17] KIM, M. et al. Maximal energy transport through disordered media with the implementation of transmission eigenchannels. Nature Photonics 6, 581-585 (2012).
- [18] YU, H. et al. Measuring Large Optical Transmission Matrices of Disordered Media. Physical Review Letters 111, 153902 (2013).
- [19] SHI, Z. & GENACK, A. Z. Transmission Eigenvalues and the Bare Conductance in the Crossover to Anderson Localization. *Physical Review Letters* 108, 043901 (2012).
- [20] GOETSCHY, A. & STONE, A. D. Filtering Random Matrices : The Effect of Incomplete Channel Control in Multiple Scattering. *Physical Review Letters* 111, 063901 (2013).
- [21] GÉRARDIN, B., LAURENT, J., DERODE, A., PRADA, C. & AUBRY, A. Full Transmission and Reflection of Waves Propagating through a Maze of Disorder. *Physical Review Letters* 113, 173901 (2014).
- [22] VELLEKOOP, I. M. & MOSK, A. P. Focusing coherent light through opaque strongly scattering media. Optics Letters 32, 2309 (2007).
- [23] VELLEKOOP, I. M. & MOSK, A. P. Universal Optimal Transmission of Light Through Disordered Materials. *Physical Review Letters* **101**, 120601 (2008).
- [24] YU, H. et al. Recent advances in wavefront shaping techniques for biomedical applications. Current Applied Physics 15, 632-641 (2015).
- [25] VELLEKOOP, I. M. Feedback-based wavefront shaping. Optics Express 23, 12189 (2015).
- [26] DAVY, M., SHI, Z., PARK, J., TIAN, C. & GENACK, A. Z. Universal structure of transmission eigenchannels inside opaque media. *Nature Communications* 6, 6893 (2015).
- [27] SARMA, R., YAMILOV, A. G., PETRENKO, S., BROMBERG, Y. & CAO, H. Control of Energy Density inside a Disordered Medium by Coupling to Open or Closed Channels. *Physical Review Letters* 117, 086803 (2016).

- [28] OJAMBATI, O. S., MOSK, A. P., VELLEKOOP, I. M., LAGENDIJK, A. & VOS, W. L. Mapping the energy density of shaped waves in scattering media onto a complete set of diffusion modes. *Optics Express* 24, 18525 (2016).
- [29] KOIRALA, M., SARMA, R., CAO, H. & YAMILOV, A. Inverse Design of Perfectly Transmitting Eigenchannels in Scattering Media. *Physical Review B* 96, 054209 (2017).

Chapitre 2

Broadband-Enhanced Transmission through Symmetric Diffusive Slabs

Sommaire

2.1 Introduction	35
2.2 Conductance enhancement	38
2.3 Scaling model	39
2.4 Symmetry breaking	40
2.5 Conclusion	41
Annexes	43
2.A Transmittance of an opaque barrier	43
2.B Scaling model	45
2.C Approche énergétique de la propagation d'ondes dans les milieux diffusants	46
2.C.1 L'équation du transfert radiatif et l'équation de diffusion appliqués à une	
tranche de milieu diffusant	47
2.C.2 Milieux diffusants séparés par une interface	59
2.C.3 Comparaison entre l'approche énergétique et l'approche ondulatoire	63
Bibliographie	63

Ce chapitre, rédigé en langue anglaise, (article publié le 25 Mars 2019 dans le journal Physical Review Letter [1]), présente un gain en transmission significatif et large bande à travers une barrière opaque lorsqu'elle est placée entre deux tranches de milieu diffusif symétriques. Ce gain en transmission s'accompagne d'une distribution bimodale des valeurs propres en transmission et, pour une transmittance de barrière donnée, une valeur optimale pour une longueur particulière des tranches désordonnées est déterminée. Un modèle simple nous permet de quantifier les paramètres d'échelles qui montrent que plus la barrière est forte, plus le gain maximal est important. La sensibilité aux défauts de symétrie est également explorée, amenant un intérêt potentiel pour la détection de défaut par les ondes. Afin de trouver des solutions au cas sans symétries, l'annexe de ce chapitre permet d'aborder une approche énergétique pour d'écrire la propagation d'onde en milieu désordonné lorsque des surfaces réfléchissantes sont introduites. Cette dans cette optique que la théorie du transfert radiatif et son approximation à la diffusion sont présentés. Ils permettront d'aborder le problème de diffusion sans et en présence de barrières réfléchissantes selon plusieurs points de vue.

2.1 Introduction

Wave transport in disordered media is often well described by the diffusive theory but it can also be significantly influenced by multiple scattering interferences. These latters lead, for instance, to phenomena such as universal conductance fluctuations, enhanced backscattering, or Anderson localization, where transmission is suppressed with expo- nentially localized waves. [2-4] In disordered waveguides, another coherence effect is the bimodal distribution of the transmission eigenvalues which shows that the full space of incident waves can be split into closed eigenchannels, almost completely reflected, and open eigenchannels, almost completely transmitted [5-7]. Beside leading to these striking phenomena, the coherent transport of waves in disordered media also makes it possible to control the propagation of light, microwaves, or acoustic waves. One major application of the past years is wave front shaping, enabling a focused or enhanced transmission through otherwise opaque media [4, 8-16]. Tailoring the boundary shape of a confined disordered medium also allows an increased control of the scattering, as well as of the profile of the energy density inside the medium [17-23].

Another remarkable consequence of multiple interferences in a complex medium can be observed when the scatterer spatial distribution displays symmetries [24-30]. In particular, for chaotic cavities, due to symmetry induced constructive interferences, it has been shown that a large nonresonant conductance enhancement through a tunnel barrier occurs in symmetric double quantum dots [31-33]. The sensitivity to symmetry breaking such as roughness and geometric imperfections was observed to be less important than bulk defects that have the strongest influence on the conductance [33, 34]. In this Letter, we consider the transmission through a thin opaque barrier imbedded in a disordered waveguide, and we show that the conductance of the "diffusive slab/barrier/diffusive slab" system can be much larger than the conductance of the barrier alone owing to mirror symmetry. This enhanced forward scattering, with constructive interferences due to symmetry, is not a resonance effect and is thus of broadband character. The symmetry of the scatterer spatial distribution is also observed to restore the universal bimodal distribution of the transmission eigenvalues, which was broken by the barrier. As might be expected, the size of the slabs plays an important role; for a given barrier strength, to obtain the maximal enhancement, there is a particular diffusive slab size whose scaling is recovered by a simple model inspired by the quantum dot case [33, 34]. Finally, the effects of symmetry defects are inspected.

Let us begin by comparing the transmission through the three different systems sketched in Fig. 3.3. All are quasi-one-dimensional (Q1D) waveguides, in which the propagation is governed by the Helmholtz equation

$$\Delta \psi(x,y) + k^2 [1 + \delta n(x,y)]^2 \psi(x,y) = 0, \quad x \neq 0,$$
(2.1)

together with hard walls at y = 0 and y = 1. This is a universal model for light, sound, and water waves. At x = 0, there is a thin barrier whose modeling is described in ¹ (we have verified that the described results do not depend on the details of the modeling of the barrier). In the above equation,

^{1.} See Supplemental Material, Sec. 2


FIGURE 2.1 – Sketches of the studied scattering systems. a) Opaque barrier in an otherwise homogeneous Q1D waveguide. (b) Same as (a), with randomly distributed scatterers on both sides of the barrier. (c) Same as (b), but with a left-right symmetry of the scatterers position. (d) Typical open eigenchannel in the symmetrical case, as sketched in (c).

 $k = \omega/c$ is the wave number with respect to a reference homogeneous medium with wave speed c. The random perturbation of the refractive index δn is of average zero and it induces a diffusive transport of the wave, characterized by the mean free path ℓ . For the comparison we consider, we compute in each case the conductance g of a segment of length L and centered at x = 0, as given by the Landauer formula [35]

$$g = \operatorname{Tr}(\mathsf{T}\mathsf{T}^{\dagger}), \tag{2.2}$$

with T_{mn} the transmission coefficients².

Consider first a homogeneous Q1D waveguide ($\delta n = 0$), that is split into two semi-infinite leads by a barrier [Fig. 3.3(a)]. The conductance is then given by the transmittance $N\tau$ of the barrier itself. The limit case $\tau = 1$ corresponds to the perfect transmission (g = N, N number of propagating modes in the leads), in the absence of a barrier. Conversely, an opaque barrier will be characterized by $\tau \ll 1$ and a small conductance g. Suppose now that the region [-L/2, L/2] surrounding the barrier is filled with randomly placed scatterers δn , with a mean free path ℓ [Fig. 3.3(b)]. In the diffusive regime ($\ell \ll L/2 \ll N\ell$), the slabs on both side of the barrier have themselves a low level of conductance $g_S \simeq 2N\ell/L \ll N$. Thus, one may expect that the combined effects of the barrier and of the diffusive medium will lead to a more opaque system than the barrier alone. Fig. 2.2 shows that it is indeed what is observed. Adding disorder in the medium surrounding the barrier lowers the average level of conductance (red curve), when compared to the transmission through the barrier alone (black curve). We stress that the conductance displayed in Fig. 2.2 for the two cases with disorder is

^{2.} See Appendix 2.A

without averaging, for a single realization of the disorder, which explains the fluctuations. Note also that, throughout this Letter, the full wave numerical computations of the solution of Eq. (2.1) are performed using a coupled wave method as described in Refs. [36-38], and that the mean free path is directly determined from our numerical simulations using the analytical expression of $g_{\rm D} = N\ell/(L+\ell)$ [cf. Eq. 2.3].



FIGURE 2.2 – Enhanced transmission through an opaque barrier, when surrounded by a left-right symmetric disordered medium. The conductance is plotted over the frequency range $(N-1)\pi < k < N\pi$, with N = 300 and k the wave number. Three configurations are considered. Black : the barrier alone, with a "strength" parameter $\alpha = 0.133$ (see Supplemental Material). Red : the barrier, in the middle of a disordered slab with length L = 5 and mean free path $\ell = 0.140$. Blue : the barrier, in the middle of a left-right symmetric disorder slab (same L and ℓ). In the last two cases, the conductance is not averaged and comes from a single realization of the disorder.

We observe a completely different behavior when the spatial distribution of the scatterers obeys a left-right mirror symmetry with respect to the barrier (Figs. 3.3c and 2.2). A large enhancement of the conductance is observed, about 15 times higher than the transmittance of the barrier itself for this particular case. This enhancement effect is broadband, not related to some resonance behavior. Its robustness makes it observable for any single realization of the disorder.

A remarkable characteristic of the diffusive transport is the bimodal distribution of the transmission eigenvalues [5, 39, 40]: most of the singular values of the transmission matrix T are either close to unity (open eigenchannels) or close to zero (closed eigenchannels). One can therefore wonder about the fate of this bimodal property in symmetrical systems or in the presence of a barrier. Without barrier, the symmetry of the disordered slabs has no significant effect and the transmission eigenvalues, in both cases, follow the bimodal distribution (Fig. 2.3). The presence of an opaque barrier at the interface between two different slabs strongly breaks this property. The eigenvalue distribution lies within a low range [0, 0.4], limited by some cutoff value imposed by the barrier opacity. Surprisingly, as long as both slabs are in diffusive regime, this cutoff effect is no longer observed if the slabs are symmetric and the usual bimodal distribution is recovered.



FIGURE 2.3 – Transmission eigenvalues distributions. Blue colored data correspond to a symmetric disorder and red ones to ordinary disorder. Filled circles : without barrier. Open circles : with barrier. The frequency is such that N = 300, and the length of the disordered region is L = 5.

2.2 Conductance enhancement

Let us now take a closer look at the symmetry induced conductance enhancement, and how it can be tuned, hence optimized, by varying the transmittance of the barrier and the length of the two symmetric slabs. We already know that the conductance value is $N\tau$ for $s \equiv L/\ell = 0$ (the barrier alone, no disorder), and it is expected to vanish in the limit of long lengths L, since the localized regime will be reached in the disordered slabs. A maximum of the conductance is therefore expected, which corresponds to an optimal configuration for the enhancement effect. Fig. 2.4 shows the variations with s of the averaged conductance, for various values of the barrier transmittance. Generically, starting from the value of the barrier transmittance, - $\langle g(s = 0, \tau) \rangle = N\tau$ - the conductance first increases, reaches a maximum value, and then decreases monoton- ically. Increasing the barrier transmittance naturally increases the overall level of conductance, and the upper limit, displayed by the black-colored data, is the case of a symmetric distribution of scatterers, without barrier. We have verified that this limit no-barrier case is described by the classical Ohm's law for a disordered slab in the diffusive regime (solid black line) [5-7] :

$$\langle g(s,\tau=1)\rangle \simeq g_{\rm D}(s) = \frac{N}{1+s}.$$
 (2.3)

This purely diffusive model does not "see" the symmetry of the scatterer distribution; only the density and scattering cross section of the scatterers, hence the mean free path, are taken into account. The agreement between this model and the full wave numerics without barrier shows, as for the bimodal



FIGURE 2.4 – Average conductance of the symmetric configuration, as a function of the length of the diffusive medium (in mean free path unit : $s = L/\ell$), for various values of the barrier transmittance. Colored dots : full wave numerics, averaged over 100 iterations of the disorder; squares : random matrix theory; solid lines : empirical formula (2.4). The black symbols correspond to the configuration without barrier. In this case, the conductance follows the Ohmic behavior (2.3) predicted by the Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar theory [5-7] (solid black line). Dividing this result by two gives the dashed line, which passes by the maxima the different curves, as predicted by Eq. (2.6). The configuration used to gets Fig. 2.2 is shown by the red cross.

distribution, that the symmetry of the slab is almost indifferent in the absence of a barrier. Note that, to complete the (full wave) numerical analysis, we have also solved the scattering problem using random matrices [41]; both methods give very similar results (Fig. 2.4).

Thus, for a given barrier, it appears that there is an optimal length s_{opt} of the symmetric disordered slabs surrounding the barrier for which the conductance reaches a maximum value, $g_{\text{opt}}(\tau)$. Fig. 2.4 suggests that this optimal length tends to zero when τ tends to its maximum value, 1 (not shown in the figure). Consequently, it also suggests that the conductance enhancement, $g_{\text{opt}}(\tau)/N\tau$, increases with decreasing τ .

2.3 Scaling model

In order to have a more quantitative insight, and to be able to optimize a given system when τ and the diffusive medium (that is, the mean free path ℓ) are known, we build a simple model³. This latter is inspired by the semiclassical description of the conductance through a double quantum dot by Whitney *et al.* [34], where, as in our case, there is an enhanced forward scattering effect with constructive interferences induced by mirror symmetry. This yields the following expression to

^{3.} See Appendix 2.B

approximate the averaged conductance :

$$\langle g(s,\tau)\rangle \simeq \frac{N\tau}{(1+s)\tau + \frac{1-\tau}{1+ns}}.$$
(2.4)

where $\eta \simeq 0.63$; the comparison with full wave numerics shows a very good agreement (Fig. 2.4). From Eq. (2.4), we find that the maximum conductance enhancement is reached when

$$s_{\rm opt} = \sqrt{\frac{1-\tau}{\eta\tau}} - \frac{1}{\eta}.$$
 (2.5)

Then, for an opaque barrier ($\tau \ll 1$), the maximum value of the conductance, g_{opt} , can be simply related to the conductance of the slab itself :

$$g_{\rm opt}(\tau \ll 1) \simeq \frac{g_{\rm D}(s_{\rm opt})}{2} \tag{2.6}$$

(dashed line in Fig. 2.4). It follows that the maximum conductance enhancement scales as the inverse square root of the barrier transmittance (Fig. 2.5) :

$$\frac{g_{\rm opt}(\tau \ll 1)}{N\tau} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\tau}}.$$
(2.7)

A threshold, noticeable in Fig. 2.5, describes the minimum universal barrier strength $\tau < \tau_{\rm c} \equiv \eta(\eta + 1)^{-1}$, required to achieve a transmission enhancement. A strong enhancement can be thus observed, providing that the barrier is sufficiently opaque. In concrete terms, to get a particular enhancement, the barrier needs to be set according to Eq. (2.7). This enhancement is reached by coating the barrier with a given symmetric diffusive slab using Eq. (2.5). In the hypothesis of diffusive transport, hence the validity of Eq. (2.4), the enhancement is observed at frequencies under the condition $s_{\rm opt} \ll N$.

2.4 Symmetry breaking

We now come to an important issue : to what extent is this effect of enhanced conductance sensitive to symmetry defects? We start from a perfectly symmetrical configuration (with a barrier), and, gradually, an increasing number of scatterers are shifted randomly inside the slabs (Fig. 2.6). The averaged conductance of the system rapidly decreases as soon as a few scatterers are shifted, showing a strong sensitivity of the phenomenon. Obviously, as the ratio of shifted scatterers approaches 100%, the conductance value tends to the limit of the asymmetric (ordinary) disorder configuration, which is lower that the barrier transmittance, as already seen in Fig. 2.2.



FIGURE 2.5 – Variations of the maximum conductance enhancement as the inverse square root of the reduced barrier transmittance τ , for different number N of propagating modes in the leads. There is an enhancement when the barrier is set such that $\tau < \tau_c \simeq 0.4$.



FIGURE 2.6 – Decrease of the averaged conductance when shifting a increasing number of scatterers from the initially symmetric configuration. The black horizontal line shows the barrier transmittance $N\tau$. The frequency is such that N = 300, and the diffusive slab has a length L = 5 and a mean free path $\ell = 0.140$.

2.5 Conclusion

In conclusion, we have shown how the transmission through an opaque barrier in a waveguide is significantly enhanced when the barrier is coated with two symmetrical disordered diffusive slabs. While a strong barrier has only closed channels, the density of transmission eigenvalues given by the universal bimodal distribution is recovered once symmetric diffusive slabs are added. This broadband enhancement is observable for a barrier whose transmittance is below a universal value $\tau_c \simeq 0.4$ and can be described by a simple analytical model providing a way to tune or optimize the transmission enhancement. We believe that this effect might be observable in experiments with acoustic or light waves.

In addition, the strong sensitivity to symmetry defects opens new possibilities for nondestructive testing, cryptography, or wave-based sensing of manufactured or aging defects between samples of the same complex structured material.

Annexes

Dans l'annexe 2.A on modélise la barrière utilisée pour obtenir les résultats de ce chapitre et l'annexe 2.B détaille le modèle d'échelle élaboré. Ces annexes font partie "Supplemental Material" publié avec l'article présenté dans ce chapitre.

L'annexe 2.C a pour but d'élaborer un modèle permettant de trouver une solution à la transmission d'onde à travers les milieux désordonnés en présence d'une barrière sans symétrie. Elle est divisée en deux parties.

Dans la première nous introduisons l'équation du transfert radiatif appliquée à une tranche de milieu diffusant ainsi que son approximation à l'équation de diffusion. À l'aide de deux méthodes numériques, l'ETR est résolue et comparée à l'équation de diffusion dont l'approximation est discutée en fonction les deux approches numériques.

Dans la deuxième partie la résolution de l'ETR et de l'ED sont réalisés avec une interface opaque et réflechissante placée au centre des milieux diffusifs. L'approximation de diffusion est une nouvelle fois discutée puis nous comparons ces résultats à ceux issus de la résolution de l'équation d'onde.

2.A Transmittance of an opaque barrier

The waveguide is split into two semi-infinite homogeneous leads by a thin barrier. It should be noted that the results presented in the paper are not sensitive to the barrier model. We have chosen to model it as a medium with high contrast compared with the background medium. In the limit of a zero-thickness barrier, its effect on the continuity of the wavefield can be simply described as

$$\begin{cases} \left[\partial_x \psi(x)\right]_0 = 0, \\ \left[\psi(x)\right]_0 = \alpha \partial_x \psi(0), \end{cases}$$
(2.8)

where the real parameter α gives the "strength" of the barrier. $[f(x)]_0 = \lim_{h \to 0} f(h) - f(-h)$ is the jump of the function f at x = 0.

The parameter α is assumed constant so that no coupling occurs at the barrier between modes ψ_n^{\pm} having different indices *n*. Let $\psi_n^+(x < 0)$ be an incident wave coming from the left side of the

barrier, and let r_n and t_n be the reflection and transmission coefficients, such that

$$\begin{cases} \psi_n^-(0^-) = r_n \psi_n^+(0^-), \\ \psi_n^+(0^+) = t_n \psi_n^+(0^-). \end{cases}$$
(2.9)

The continuity relations (2.52) at x = 0 impose for the scattering coefficients the following conditions :

$$\begin{cases} t_n - 1 + r_n = 0, \\ t_n - 1 - r_n = ik_n \alpha t_n, \end{cases}$$
(2.10)

hence

$$\begin{cases} r_n = \frac{-ik_n\alpha}{2 - ik_n\alpha}, \\ t_n = \frac{2}{2 - ik_n\alpha}. \end{cases}$$
(2.11)

Following the definition of the conductance, the transmittance of the barrier is calculated as the total transmitted flux from N incoherent unit incident fluxes :

$$W_{\rm tr} = \sum_{n=0}^{N-1} |t_n|^2.$$
(2.12)

Expressed in reduced form, the transmittance $\tau(\alpha) = W_{\rm tr}/N$ is upper bounded by $\tau(0) = 1$ (perfect transmission in the absence of a barrier), and it rapidly drops when α increases (Fig. 2.7). Note that, for α large enough, $|t_n| \simeq 2/|k_n|\alpha$, therefore the transmittance decreases asymptotically as $1/\alpha^2$.



FIGURE 2.7 – Reduced transmittance of the barrier as a function of the "strength" parameter α in Eq. (2.52). The frequency is such that N = 300.

2.B Scaling model

The scaling model proposed in the paper derives from semi-classical description of the conductance through a double quantum-dot by Whitney *et al.* [34]. The average conductance is written as

$$\langle g(s,\tau)\rangle = \frac{\zeta_1(s)N\tau}{1+\zeta_2(s)N\tau},\tag{2.13}$$

where ζ_1 and ζ_2 are two functions of s to be determined. A first relation between these two functions is obtained using the Ohm's law

$$\langle g(s,\tau=1)\rangle \simeq g_{\rm D}(s) = \frac{N}{1+s},$$

$$(2.14)$$

corresponding to the case without barrier. From $\langle g(s=0,\tau)\rangle = N\tau$, one gets $\zeta_1(0) = 1$. Numerical computations complete this analysis and show that ζ_1 can be written as the linear function $1 + \eta s$, with $\eta \simeq 0.63$. It follows that

$$\langle g(s,\tau)\rangle = \frac{g_{\rm D}(s)}{1 + \frac{1-\tau}{1+\eta s}\frac{g_{\rm D}(s)}{N\tau}},\tag{2.15}$$

or

$$\langle g(s,\tau)\rangle = \frac{N\tau}{(1+s)\tau + \frac{1-\tau}{1+\eta s}}.$$
(2.16)

2.C Approche énergétique de la propagation d'ondes dans les milieux diffusants

Très utilisée dans l'étude des interactions des rayonnements électromagnétiques avec la matière, la théorie du transfert radiatif est une approche énergétique qui s'est étendue à l'étude des milieux diffusants et tout phénomène diffusif en général. À la différence d'une marche aléatoire qui étudie le mouvement discret d'un point dans l'espace, ici le milieu est continu et l'onde peut lors de sa propagation subir continument du scattering. La quantité étudiée est la densité d'énergie W à la position **r** à partir d'un vecteur de direction unitaire, noté Ω . Son évolution par unité de surface dsest donnée par l'équation de transfert radiatif (ETR) [42-44], aussi appelée équation de Boltzmann :

$$\frac{d\mathcal{W}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})}{ds} = -\tilde{\ell}^{-1}\mathcal{W}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) + \tilde{\ell}^{-1}\int_{\mathbf{\Omega}'} P(\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega})\mathcal{W}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}')\frac{d\mathbf{\Omega}'}{\Gamma_d}.$$
(2.17)

Ici, la fonction de phase $P(\Omega', \Omega)$, est une fonction d'anisotropie liée au scattering. Elle est normalisée par l'aire d'une sphère unité $\Gamma_d = 2\pi$ pour les géométries 2D et $\Gamma_d = 4\pi$ pour les géométries 3D. On distingue ici le libre parcours moyen de transport d'échelle $\tilde{\ell}$, qui diffère du libre parcours moyen d'un facteur géométrique lié à la dimension du milieu que l'on cherche à modéliser :

$$\begin{cases} \tilde{\ell} = 2\ell & 1D \\ \tilde{\ell} = 2\ell/\pi & 2D \\ \tilde{\ell} = 3\ell/4 & 3D \end{cases}$$
(2.18)

Très peu de solutions analytiques à l'ETR sont envisageables [42], il est donc communs de la résoudre numériquement. Nous présenterons en section 2.C.1 de cette annexe deux méthodes pour résoudre l'ETR lorsqu'elle est appliquée à une tranche de milieu désordonné.

Lorsque les milieux sont suffisamment diffusants ($s \gg 1$), la dépendance angulaire de la densité d'énergie est rompue et une approximation à l'équation du transfert radiatif,

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \simeq \frac{1}{\Gamma_d} \left(\Gamma_d \overline{\mathcal{W}}(\mathbf{r}) + d\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Omega} \right),$$
 (2.19)

permet d'étudier l'évolution de la densité d'énergie moyenne $\Gamma_d \overline{\mathcal{W}}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathcal{W}(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega$ pour laquelle la variable angulaire a été éliminée. L'ETR est donc ramenée à une équation de diffusion (ED) simple,

$$D\nabla^2 \overline{\mathcal{W}}(\mathbf{r}) = 0, \qquad (2.20)$$

où $D = \tilde{\ell}/d$ représente le coefficient de diffusion et d la dimension du système.

Ces deux équations (l'ETR et l'ED), qui sont des équations de conservation de l'énergie, partagent ainsi une relation de continuité qui relie linéairement le flux d'énergie et le gradient d'énergie moyen 4:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int \mathcal{W}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{\Omega} d\Omega = -D \nabla \overline{\mathcal{W}}(\mathbf{r}).$$
(2.21)

Une solution analytique de l'équation (2.20) est désormais envisageable à partir de conditions aux limites adaptées que nous présenterons dans la section 2.C.1 de cette annexe.

2.C.1 L'équation du transfert radiatif et l'équation de diffusion appliqués à une tranche de milieu diffusant

Cette section s'articule de la manière suivante : dans un premier temps une géométrie est fixée pour laquelle nous poserons l'équation du transfert radiatif. Les équations qui présentent les quantités de bases sont ici explicités pour les deux cas 2D et 3D. Dans un second temps nous expliciterons, seulement en 2D, deux méthodes numériques qui comprennent une méthode intégrale et une méthode matricielle avant de présenter une solution analytique via l'ED. Ces deux méthodes numériques qui présentent deux points de vue au problème de diffusion d'une onde dans un milieu complexe permettront finalement dans la dernière partie de discuter de l'approximation de diffusion.

L'ETR en régime permanent comporte 5 variables indépendantes (les positions (x, y, z) et les angles (θ, ϕ)) qui peuvent rendre sa résolution numérique complexe. Pour plus de simplicité, nous considérerons une tranche diffusante étendue infinie dans le plan (x, y). L'invariance suivant x et ypermet de réécrire l'ETR en ne considérant que l'axe z comme variable d'espace en fonction des deux angles (θ, ϕ) :

$$\cos(\theta)\frac{d\mathcal{W}(z,\theta,\phi)}{dz} = -\tilde{\ell}^{-1}\mathcal{W}(z,\theta,\phi) + \tilde{\ell}^{-1}\int_{\mathbf{\Omega}'} P(\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega})\mathcal{W}(z,\theta,\phi)\frac{d\mathbf{\Omega}'}{\Gamma_d}.$$
(2.22)

On considère que la source est lointaine ce qui permet d'écrire l'excitation de la tranche diffusante par des ondes planes d'incide θ_{inc} . La densité d'énergie est indépendante de l'angle azimutal ϕ et l'élément de surface ne dépend plus que de l'angle d'incidence tel que : $ds = dz/\cos(\theta)$. La fonction de phase et la densité d'énergie sont réécrites en fonction de l'élément d'angle solide $\Omega = d\cos(\theta)d\phi$

^{4.} Cette relation est aussi appelée loi de Fick.

en prenant en compte les invariances spatiales et azimutales telles que :

$$2\pi \mathcal{W}(z,\mu) = \int_{0}^{2\pi} \mathcal{W}(z,\mu,\phi) d\phi$$

$$2\pi P(z,\mu,\mu') = \int_{0}^{2\pi} P(\mu,\phi,\mu',\phi') d\phi d\phi'.$$
(2.23)

Quelle que soit la dimension, le milieu est donc simplifié en une tranche (slab en anglais) de milieu diffusant qui ne dépend plus que de l'épaisseur z de la tranche et de la direction d'incidence $\mu = \cos(\theta)$ des ondes (Figure 2.8). Par esprit de simplicité nous considérons un scattering isotrope ce qui revient à considérer la fonction de phase unitaire. On introduit la densité d'énergie moyennée suivant les angles



FIGURE 2.8 – Représentation d'une tranche en 3 dimensions illuminée par une onde plane incidente d'angle θ .

 θ qui ne dépend plus que d'une variable spatiale :

$$\overline{\mathcal{W}}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \mathcal{W}(z,\mu) d\theta \text{ pour } d = 2 \text{ et } \overline{\mathcal{W}}(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathcal{W}(z,\mu) d\mu \text{ pour } d = 3.$$
(2.24)

L'équation du transfert radiatif (2.17) appliquée à une tranche de milieu diffusant s'écrit :

$$\tilde{\ell}\mu \frac{\partial \mathcal{W}(z,\mu)}{\partial z} = -\mathcal{W}(z,\mu) + \overline{\mathcal{W}}(z).$$
(2.25)

Cette équation est le point de départ des solutions numériques présentées aux sections 2.C.1 et 2.C.1. Enfin le flux dans le milieu qui ne dépend que de l'axe z est défini :

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{W}(z,\mu) \mu d\theta \text{ pour } d = 2 \text{ et } F(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{W}(z,\mu) \mu d\mu \text{ pour } d = 3.$$
(2.26)

La transmission à travers la tranche de milieu diffusant est définie par T_{rte} ; rapport du flux total

traversant la tranche F(z) sur le flux incident entrant F_0 :

$$T_{rte} = \frac{F(z)}{F_0} = \frac{\int_{\Omega} W(z,\mu)\mu d\Omega}{\int_{\Omega} \mathcal{W}_0(\mu)\mu d\Omega}.$$
(2.27)

Solution de l'ETR : méthode intégrale

Dans la région $z \in [0; L]$ on place une tranche de milieu diffusant (Figure 2.9). L'ETR (équation



FIGURE 2.9 – Schématisation d'une tranche de milieu diffusant.

(2.25)) est décomposée en deux équations différentielles du premier ordre pour la partie ascendante (d'amont en aval) et descendante (d'aval en amont) [42, 45] :

$$\tilde{\ell}\mu \frac{\partial \mathcal{W}(z,\mu)}{\partial z} = -\mathcal{W}(z,\mu) + \overline{\mathcal{W}}(z) \qquad \mu > 0$$

$$\tilde{\ell}\mu \frac{\partial \mathcal{W}(z,-\mu)}{\partial z} = \mathcal{W}(z,-\mu) - \overline{\mathcal{W}}(z) \qquad \mu > 0$$
(2.28)

La tranche est seulement éclairée à son extrémité gauche par une source dont l'amplitude $W_0(\mu)$ peut dépendre de l'angle d'incidence. Aucun flux entrant à l'extrémité droite de la tranche n'est considéré ce qui se traduit par deux conditions aux limites en z = 0 et z = L:

$$\begin{cases} \mathcal{W}(0,\mu) = \mathcal{W}_0(\mu) \\ \mathcal{W}(L,-\mu) = 0 \end{cases}$$
(2.29)

La solution des équations (2.28) associées aux conditions aux limites (2.29) s'exprime :

$$\mathcal{W}(z,\mu) = \mathcal{W}_0 e^{-z/\tilde{\ell}\mu} + \int_0^z \overline{\mathcal{W}}(z') \frac{e^{(-z+z')/\tilde{\ell}\mu}}{\tilde{\ell}\mu} dz'$$

$$\mathcal{W}(z,-\mu) = \int_z^L \overline{\mathcal{W}}(z') \frac{e^{(-z+z')/\tilde{\ell}\mu}}{\tilde{\ell}\mu} dz'$$
(2.30)

Le terme $W_0 e^{-z/\tilde{\ell}\mu}$ traduit la décroissance exponentielle de l'énergie dans la direction d'incidence lors de la propagation. On nomme ce terme "balistique" car il traduit la décroissance exponentielle de la densité d'énergie en fonction de la distance à la source⁵. Tous les autres termes seront identifiés comme des termes "diffusifs" qui décrivent le scattering hors de la direction initiale d'incidence. En intégrant l'équation 2.30 sur tous les angles, la dépendance angulaire est supprimée et l'équation est reposée sous une forme intégrale :

$$\overline{\mathcal{W}}(z) = M_0(z) + \int_0^L M_1(z - z')\overline{\mathcal{W}}(z')dz', \qquad (2.31)$$

comprenant M_0 pour la partie balistique et $M_1(z - z')$ pour la partie diffusive,

$$M_0(z-z') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{W}_0(\mu) e^{-(z-z')/\tilde{\ell}\mu} d\theta, \qquad \qquad M_1(z-z') = \int_0^{\pi} \frac{e^{-|(z-z')|/\tilde{\ell}\mu}}{\pi\tilde{\ell}\mu} d\theta.$$
(2.32)

Dans l'équation (2.31) la partie balistique traduite par M_0 décroît lorsque z augmente. Lorsque $z \gg \tilde{\ell}$, la variation angulaire est faible et ce terme est dominé par la partie diffusive M_1 . Par conséquent, c'est en première approche M_0 qui est négligé lorsque l'approximation de diffusion est faite. À l'inverse, le terme intégral diffusif croît progressivement lorsque z augmente et au fur et à mesure que l'onde subit du scattering dans le milieu.

Intégration numérique L'étape suivante consiste à discrétiser le problème en espace et à évaluer les intégrales par une somme pondérée sur le domaine $z, z' \in [0, L]$. Avant toute discrétisation, il est important de prendre en compte la singularité de M_1 lorsque z = z'. On élabore une procédure de soustraction afin de réécrire l'équation (2.31) sous une forme numériquement stable :

$$\overline{\mathcal{W}}(z) = M_0(z) + \int_0^L M_1(z - z') \left[\overline{\mathcal{W}}(z') - \overline{\mathcal{W}}(z)\right] dz' + M_r(z)\mathcal{W}(z).$$
(2.33)

Dans ce cas, $\left[\overline{W}(z') - \overline{W}(z)\right] = 0$ lorsque z = z' et la singularité est supprimée en faisant apparaître un résidu stable,

$$M_r(z) = \int_0^L M_1(z - z')dz' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 - e^{-z/\tilde{\ell}\mu} - e^{(z-L)/\tilde{\ell}\mu}d\theta, \qquad (2.34)$$

qui est intégré numériquement avec les 2 autres termes de l'équation (2.32).

Plusieurs types de discrétisation existent et parmi les choix possibles, on utilise des points de quadrature de Gauss afin d'éviter les bords du domaine qui présentent des singularités d'un point

^{5.} Ce terme fait directement référence à loi de Beer-Lambert qui établie une relation sur la densité d'énergie cohérente d'un faisceau d'onde traversant un milieu complexe en fonction de son épaisseur.

de vu numérique. Les mailles sont espacées d'une distance $\Delta_{i,j}$ dans lequel $z_i = i\Delta_{i,j}$ avec $i, j = 1, 2, ...N_{\text{num}}$ et associée à un poids $a_{i,j}$. On réécrit les intégrales de manière discrète : $\int_{0}^{L} M(z, z')dz' \simeq \sum_{i=1}^{N_{\text{num}}} a_{i,j}M(z_i, z_j)$ et l'équation (2.33) s'écrit :

$$\overline{\mathcal{W}}(z_i) = \overline{\mathcal{W}}_i = M_{0_i} + \sum_{j \neq i} a_{ij} M_{1_{ij}} \overline{\mathcal{W}}_j - \sum_{j \neq i} a_{ij} M_{1_{ij}} \overline{\mathcal{W}}_i + M_{r_i} \overline{\mathcal{W}}_i.$$
(2.35)

Le problème se résume donc à un système d'équations linéaires couplées que l'on résout grâce aux méthodes numériques classiques⁶. Une fois $\overline{\mathcal{W}}(z,\mu)$ connu, la densité d'énergie $\mathcal{W}(z,\mu)$ est retrouvée grâce à l'équation (2.30). Enfin, on calcule le flux sortant et la transmission totale à l'aide des équations (2.26) et (2.27).

Solution de l'ETR : méthode matricielle

Le point de départ de cette approche est le même que l'approche intégrale [46, 47]. L'ETR est séparée en deux équations différentielles du premier ordre pour le flux ascendant et le flux descendant. Désormais, les angles $\mu \in [0, \pi]$ sont directement discrétisés à l'aide de J_{num} points numériques associés à leurs coefficients a_j obtenus à partir de la quadrature de Gauss. L'intégrale est directement remplacée par une somme pondérée $\int_0^{\pi} W(z, \mu) d\theta \simeq \sum_j a_j W^+(z, \mu_j)$. L'ETR (2.28) ainsi discrétisée prend la forme

$$\begin{cases} \mu_i \partial_z \mathcal{W}^+(z, \mu_i) = -\mathcal{W}^+(z, \mu_i) + \frac{1}{\pi} \sum_j a_j \mathcal{W}^+(z, \mu_j), \\ \mu_i \partial_z \mathcal{W}^-(z, \mu_i) = \mathcal{W}^+(z, \mu_i) - \frac{1}{\pi} \sum_j a_j \mathcal{W}^-(z, \mu_j). \end{cases}$$
(2.36)

À l'aide des matrices $M_{ij} = \delta_{ij}\mu_j$ et $A_{ij} = \delta_{ij}a_j/\pi$, l'équation (2.36) est réécrite sous une forme matricielle entre les vecteurs $\boldsymbol{\mathcal{W}}^{\pm} = \{ \mathcal{W}^{\pm}(z,\mu_1), ... \mathcal{W}^{\pm}(z,\mu_j), ... \mathcal{W}^{\pm}(z,\mu_J) \},$

$$\partial_z \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{W}}^+ \\ \boldsymbol{\mathcal{W}}^- \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{W}}^+ \\ \boldsymbol{\mathcal{W}}^- \end{pmatrix}$$
(2.37)

où la matrice Q de taille $2J_{num} \times 2J_{num}$, s'écrit :

$$Q = \begin{pmatrix} -M^{-1} + M^{-1}A \\ M^{-1} - M^{-1}A \end{pmatrix}.$$
 (2.38)

Cette équation forme un système tout à fait similaire à l'équation d'évolution matricielle couplée sur les modes transverses (équation 1.17) décrits dans l'annexe 1.A.1 du chapitre précédent pour la résolution de l'équation de Helmholtz. À l'image de la méthode multimodale développée pour les ondes se propageant dans un guide d'onde, l'approche matricielle peut, par construction, être vue

^{6.} Par exemple la décomposition LU ou l'inversion matricielle

comme une approche modale au problème de diffusion. La solution pour la densité d'énergie moyenne $\overline{\mathcal{W}}(z)$ est décrite en fonction d'un mode rigide, d'un mode linéaire ainsi que d'une infinité de modes évanescents d'amplitudes A [47] :

$$\overline{\mathcal{W}}(z) = A_0 + A_1 z + A_e \int e^{-\lambda z} d\lambda.$$
(2.39)

L'approximation de diffusion de ce point de vue, revient à décrire les évolutions $\overline{\mathcal{W}}(z)$ sans la prise en compte de ces modes évanescents.

Intégration numérique. Tout comme l'approche intégrale, l'étape suivante consiste à discrétiser l'espace z. On utilise un schéma numérique Magnus [36, 48] pour obtenir les solutions de manière itérative :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{W}}^+(z-\Delta z)\\ \boldsymbol{\mathcal{W}}^-(z-\Delta z) \end{pmatrix} = e^{-\boldsymbol{\mathcal{Q}}d_z} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{W}}^+(z)\\ \boldsymbol{\mathcal{W}}^-(z) \end{pmatrix}.$$
 (2.40)

En écrivant l'exponentielle de matrice comme

$$e^{-\mathbf{Q}d_z} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(z) & \mathbf{E}_2(z) \\ \mathbf{E}_3(z) & \mathbf{E}_4(z) \end{pmatrix},$$
(2.41)

on établie un schéma itératif de la sortie vers l'entrée du domaine afin d'obtenir la matrice de réflexion $\mathcal{R}_i(z) = \frac{\mathcal{W}_i^-(z)}{\mathcal{W}_i^+(0)}$ et de transmission, $\mathcal{T}_i(z) = \frac{\mathcal{W}_i^+(z)}{\mathcal{W}_i^+(0)}$, que l'on définie pour chaque angle tel que :

$$\begin{cases} \mathcal{R}(z-dz) = \left(\mathcal{E}_{\mathbf{3}}(z) + \mathcal{E}_{\mathbf{4}}(z)\mathcal{R}(z) \right) \left(\mathcal{E}_{\mathbf{1}}(z) + \mathcal{E}_{\mathbf{2}}(z)\mathcal{R}(z) \right)^{-1} \\ \mathcal{T}(z-d_z) = \mathcal{T}(z) \left(\mathbf{E}_{\mathbf{1}}(z) + \mathbf{E}_{\mathbf{2}}(z) \right)^{-1} \end{cases}$$

L'initialisation de ce schéma correspond à l'absence de flux entrant en z = L (voir l'équation (2.29)). Pour la réflexion et la transmission ces conditions sont : $\mathcal{R}(z = L) = 0$ et $\mathcal{T}(z = L) = \mathcal{I}$ où \mathcal{I} est la matrice identité. La densité d'énergie $\mathcal{W}^{\pm}(z)$ est obtenue à l'aide du deuxième schéma itératif de l'entrée vers la sortie,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{W}}^+(z+d_z) = \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z)\boldsymbol{\mathcal{R}}(z)\right)\boldsymbol{\mathcal{W}}^+(z) \\ \boldsymbol{\mathcal{W}}^-(z+d_z) = \boldsymbol{\mathcal{R}}(z)\boldsymbol{\mathcal{W}}^+(z+d_z). \end{cases}$$
(2.42)

Pour pouvoir remonter à la densité d'énergie moyenne $\mathcal{W}^+(0)$, on initialise le schéma en fonction du type de source incidente imposée par la condition $\mathcal{W}^+(0) = W_0$ (voir l'équation (2.29)). Enfin on étudie la transmission grâce à la relation (2.27) discrétisée,

$$T_{rte} = 2\sum_{ij} a_j \mu_j T_{ij}(z).$$
 (2.43)

Comparaison des deux méthodes numériques. La Figure 2.10 compare $\mathcal{W}(z,\mu)$ obtenue à partir de la méthode intégrale et matricielle. On remarque que l'approche intégrale diverge pour les angles forts ($\theta \rightarrow \pi/2$) en raison de l'évaluation numérique des intégrales très sensibles à la discrétisation spatiale du milieu. L'approche matricielle, plus simple à mettre en place, montre une meilleure stabilité et efficacité à maillage égal.



FIGURE 2.10 – Densité d'énergie $\mathcal{W}(z,\mu)$ en fonction de z et $\cos(\theta)$ issue d'un calcul à l'aide la méthode intégrale (gauche) et de la méthode matricielle (droite). Paramètres de la simulation : s = 2, $N_{num} = 666$, $J_{num} = 200$.

Solution analytique de l'ED

L'approximation de diffusion permet de réécrire l'ETR comme une équation de diffusion simple dont une solution analytique est envisageable. Dans la configuration géométrique considérée, l'équation de diffusion (2.20) est réécrite suivant la seule coordonnée z. Sa solution est recherchée à travers la fonction de Green $G(z, z_s)$ qui satisfait l'équation différentielle,

$$D\frac{d^2}{dz^2}G(z,z_s) = -\delta(z-z_s)\mathcal{W}_d.$$
(2.44)

Cette équation décrit l'évolution de la densité d'énergie au point z créée par une source ponctuelle au point z_s d'amplitude W_d . La solution au problème initial est retrouvée en intégrant la fonction de Green selon cette source pour toutes les positions z_s :

$$\overline{\mathcal{W}}(z) = \int_{0}^{L} G(z, z_s) S(z, z_s) dz_s, \qquad (2.45)$$

où $S(z, z_s)$ est la fonction de l'excitation. L'équation du second ordre (2.44) doit être associée à deux conditions aux limites afin de déterminer la fonction de Green du problème de diffusion. Les quantités étant invariantes suivant les angles, l'analogie avec les conditions initiales élaborée pour l'ETR n'est pas directe. Des conditions aux limites appropriées au problème de diffusion ont par conséquent fait l'objet de nombreux travaux. Dans les années 90, Zhu et coll. [49], proposent de prendre en compte les réflexions internes aux interfaces en introduisant une nouvelle longueur z_0 , qui prend en compte la distance nécessaire à la dissipation des effets de diffusion en aval et en amont du milieu⁷. Ainsi deux nouvelles conditions qui dépendent du libre parcours moyen sont posées :

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{W}}(0) = z_0 \overline{\mathcal{W}}'(0), \\ \overline{\mathcal{W}}(L) = -z_0 \overline{\mathcal{W}}'(L). \end{cases}$$
(2.46)

L'application des conditions aux limites (2.46) à l'équation de diffusion donne pour solutions deux fonctions linéaires :

$$G(z, z_s) = \begin{cases} \frac{(z_0 + z)(L + z_0 - z_s)}{L + 2z_0} \mathcal{W}_d & z < z_0\\ \frac{(z_0 + z_s)(L + z_0 - z)}{L + 2z_0} \mathcal{W}_d & z > z_0 \end{cases}$$
(2.47)

Elles dépendent de la position de la source ponctuelle z_s . Au final, la solution complète de l'équation de diffusion s'écrit

$$\overline{\mathcal{W}}(z) = \begin{cases} \frac{(z_0 + z)(L + z_0 - z_s)}{L + 2z_0} \mathcal{W}_d & z < z_s \\ \frac{(z_0 + z_s)(L + z_0 - z)}{L + 2z_0} \mathcal{W}_d & z > z_s \end{cases}$$
(2.48)

Lorsque l'excitation du milieu est uniforme sur les angles ($\mathcal{W}(0, \mu > 0) = \mathcal{W}_0$), son amplitude \mathcal{W}_d est normalisée afin d'être comparée avec la solution numérique du transfert radiatif :

$$W_d = \frac{\mathcal{W}_0}{z_0 + z_s}.\tag{2.49}$$

On exprime le flux sortant grâce à la loi de Fick :

$$F(L) = \tilde{\ell} \frac{\overline{\mathcal{W}}(L)}{2z_0}, \qquad (2.50)$$

et on définie la transmittance, comme pour le transfert radiatif, par le rapport entre le flux d'énergie sortant F(z = L) et le flux entrant : $T_d = \frac{F^+(L)}{F_0} = 2\overline{\mathcal{W}}(L)/\mathcal{W}_0$. Appliquée à la solution de l'équation de diffusion, cette transmittance s'écrit :

$$T_d = \frac{\pi}{2} \frac{1}{L + \frac{\pi}{2}\tilde{\ell}}.$$
(2.51)

La transmittance donnée par l'équation (2.51) est générale dans l'approximation de diffusion. On la relie à la conductance d'un guide d'onde quasi 1D diffusif : $g_D = NT_d$.

Résumé des méthodes numériques pour l'ETR et de l'approximation de diffusion : Dans cette première partie d'annexe on a présenté deux méthodes, intégrale et matricielle, pour résoudre

^{7.} Cette longueur z_0 est appelée longueur d'extrapolation, elle dépend de la dimension du milieu considéré : $z_0 = 2\tilde{\ell}/3$ pour d = 3, $z_0 = \pi \tilde{\ell}/4$ pour d = 2.

l'ETR numériquement. Malgré l'avantage numérique donné par la méthode matricielle, ces deux approches que nous schématisons en Figure 2.11 sont complémentaires. Le problème de diffusion peut être abordé d'un point de vue intégral dans lequel deux mécanismes balistique et diffusif interviennent. L'approximation de diffusion consiste dans ce cas à négliger le mécanisme balistique.

Selon un point vue matriciel, l'évolution de la densité d'énergie s'aborde selon un ensemble de modes, rigide, linéaire et d'une infinité de modes évanescents, très similaire à l'approche modale issue de la résolution de l'équation d'onde en géométrie quasi-1D. Selon ce point de vue, l'approximation de diffusion consiste à négliger les modes évanescents.



FIGURE 2.11 – Représentation de l'approche multimodale d'une onde dans un guide avec le problème de diffusion par l'approche matricielle de l'ETR ainsi qu'avec son approximation à l'équation de diffusion.

Résultats et discussions

Afin de mettre en lumière ces aspects, les résultats numériques (Figure 2.13 et Figure 2.14) issus de la résolution de l'ETR (courbes bleues) et les résultats analytiques issus de l'ED (courbes rouges) sont présentés : la Figure 2.12 résume les équations utilisées et les conditions aux limites associées. Sauf mention contraire, tous les résultats présentés sont obtenus à 2 dimensions.

Transfert Radiatif

$$\mathcal{W}(0,\mu) = W_0 \longrightarrow \qquad \text{équation (2.37)} \longrightarrow \mathcal{W}(L,\mu)$$
$$\mathcal{W}(0,-\mu) \longleftarrow \qquad \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^+ \\ \mathbf{W}^- \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{W}^+ \\ \mathbf{W}^- \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow \mathcal{W}(L,-\mu) = 0$$

Équation de diffusion



FIGURE 2.12 – Représentation du problème selon l'équation du transfert radiatif ou l'équation de diffusion associée à leurs conditions aux limites. Pour l'équation de diffusion la source est ponctuelle, située en z_s d'amplitude W_d et représentée par une croix rouge sur le schéma.

La figure 2.13 compare l'évolution de la densité d'énergie $\overline{\mathcal{W}}(z)$ pour une source diffusive incidente (représentée par les croix) ou une onde plane d'incidence normale (traits pleins). Dans le cas du transfert radiatif, une source incidente diffusive se traduit par une illumination homogène sur les angles $\mathcal{W}(0,\mu) = \mathcal{W}_0$, alors qu'une onde d'incidence normale s'écrit : $\mathcal{W}(0,\mu) = \mathcal{W}_0\delta(\mu = 0)$. Pour l'équation de diffusion, puisque les conditions initiales sont posées quelque soit le type d'illumination, seule la position z_s du point source d'amplitude \mathcal{W}_d peut-être modifiée. Typiquement, dans le cas d'une illumination diffuse uniformément répartie suivant μ , le point source est ramené à l'entrée de la tranche ($z_s = 0$). Dans le cas d'une onde plane, il est d'usage de positionner le point source dans la région où le premier scattering a lieu ($z_s = \tilde{\ell} \cos(\theta_{inc})$, avec θ_{inc} l'angle d'incidence).

La comparaison de ces deux modèles montre que lorsque l'illumination est diffusive, en tout point de la tranche, l'ETR est très bien décrite par l'ED. Une légère différence (voir l'encadré de la Figure 2.13) est observable près des extrémités de l'échantillon où l'équation de diffusion s'écarte légèrement du transfert radiatif. En effet, puisque les régions extérieures au milieu complexe ne produisent pas de scattering, le terme balistique (traduit par M_0 dans l'équation (2.32)) devient grand devant le terme intégral diffusif près des extrémités. La variation angulaire de la densité d'énergie qui est bien décrite



FIGURE 2.13 – Courbes rouges : Densité d'énergie dans une tranche de milieu diffusant obtenue à partir de l'expression analytique issue de l'équation de diffusion. La source ponctuelle est placée en $z_s = \tilde{\ell}$ (trait plein) et en $z_s = 0$ (croix). Courbes bleues : Densité d'énergie obtenue à partir de l'équation du transfert radiatif pour une illumination plane d'incidence normale (croix) et une illumination diffusive (trait pleins). Encadré : Zoom à la sortie de la tranche diffusante (Simulation : L = 10, $\tilde{\ell} = 1$).

par les modes évanescents dans l'ETR est plus importante et l'approximation de diffusion devient moins pertinente.

Bien que cette différence soit négligeable lorsque la source est diffusive, elle devient grande lorsqu'une onde plane d'incidence normale est considérée. Dans ce cas, la source pénètre dans la tranche de manière balistique (la densité d'énergie dépend fortement de l'angle) et le terme M_0 est très important face au terme diffusif. L'onde accumule ensuite l'énergie liée à sa diffusion au fur et à mesure de sa progression pour finalement dominer la partie balistique lorsque $z > \tilde{\ell}$.

Selon le second point de vue matriciel, les modes évanescents sont fortement excités avec ce type de source et prennent une part conséquente dans l'évolution de la densité d'énergie à l'entrée de la tranche diffusante.

La transmittance calculée numériquement suivant le modèle de transfert radiatif T_{rte} est comparée en Figure 2.13 à la transmission prévue par l'équation de diffusion T_d . Elle montre que l'approximation de diffusion, permet de décrire très précisément la décroissance ohmique de la transmission dans les milieux diffusants. Lorsque $s \gg 1$, la solution de l'équation de diffusion converge vers la solution numérique du transfert radiatif.

Comme pour l'évolution de la densité d'énergie, les conditions aux limites développées ne rendent pas compte des effets liés aux modes évanescents qui dévient l'ED de l'ETR.



FIGURE 2.14 – Comparaison de la conductance d'une tranche de milieu diffusif en fonction de sa longueur à partir l'expression analytique issue de l'équation de diffusion T_d et de l'équation DMPK (courbe pointillée) avec un résultat issu de la résolution de l'équation de transfert radiatif T_{rte} pour d = 2 et d = 3. Encadré : Rapport entre T_d et T_{rte} . (Simulation : $\tilde{\ell} = 1$).

2.C.2 Milieux diffusants séparés par une interface

La partie qui suit s'articule de la manière suivante : dans un premier temps nous définissons la transmitance et la réflectance d'une barrière dans une géométrie 2D. Puis nous adaptons l'ETR et l'ED au problème de diffusion pour deux tranches diffusives séparées par une barrière opaque. Nous comparons les résultats obtenus et nous comparons le modèle énergétique à l'approche ondulatoire.

Transmittance d'une barrière en géométrie 2D



FIGURE 2.15 – Schématisation d'un milieu désordonné de longueur L séparé par une interface placée en z_b .

Considérons un espace infini dans le plan (y, z) (schématisé en Figure 2.9) dans lequel un milieu diffusant est placé dans la région $z \in [0; L]$. À l'intérieur de cette tranche diffusante, est placée en $z = z_b$ une barrière opaque modélisée comme précédemment comme une interface avec un indice élevé par rapport à l'indice du milieu homogène. Dans la limite d'une barrière d'épaisseur nulle, son effet sur la continuité du champ est :

$$\begin{cases} [\partial_z \psi(x)]_0 = 0, \\ [\psi(z)]_0 = \alpha \partial_z \psi(0). \end{cases}$$
(2.52)

En posant $\mu = \cos(\theta)$, les coefficients de réflexion $R(\mu)$ et de transmission $T(\mu)$ sont :

$$T(\mu) = \frac{2}{j\alpha k\mu + 2} \qquad R(\mu) = \frac{j\alpha k\mu}{j\alpha k\mu + 2}.$$
(2.53)

Ils sont définis à partir du paramètre $\alpha \ge 0$ qui traduit la force de la barrière. Elle est parfaitement transparente lorsque $\alpha = 0$ et parfaitement réfléchissante lorsque $\alpha = \infty$.

Suivant sa définition, la transmittance de la barrière T_w dans une géométrie 2D est :

$$T_w = \int_{0}^{\pi/2} |T(\mu)|^2 \cos(\theta) d\theta.$$
 (2.54)

L'ETR en présence d'une interface

L'ajout d'une interface à un point z_b a pour effet de séparer l'intervalle $z \in [0; L]$ en deux avec $\mathcal{W}_1(z,\mu)$ défini pour $z \in [0; z_b]$ et $\mathcal{W}_2(z,\mu)$ pour $z \in [z_b; L]$. L'ETR (équation 2.25) est donc établie pour chacun de ces intervalles.

$$\tilde{\ell}\mu \frac{\partial \mathcal{W}_{1,2}(z,\mu)}{\partial z} = -\mathcal{W}_{1,2}(z,\mu) + \overline{\mathcal{W}}_{1,2}(z)$$

$$\tilde{\ell}\mu \frac{\partial \mathcal{W}_{1,2}(z,-\mu)}{\partial z} = \mathcal{W}_{1,2}(z,\mu) - \overline{\mathcal{W}}_{1,2}(z).$$
(2.55)

Quatre équations différentielles du premier ordre sont à résoudre, dont le couplage dépend des coefficients de réflexion $R(\mu)$ et de transmission $T(\mu)$ de l'interface. Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{1}(0,\mu) = \mathcal{W}_{0}(\theta) \\ \mathcal{W}_{2}(0,-\mu) = 0 \\ \mathcal{W}_{1}(z_{b},-\mu) = \mathcal{W}_{1}(z_{b},\mu) \mid R(\mu) \mid^{2} + \mathcal{W}_{2}(z_{b},-\mu) \mid T(-\mu) \mid^{2} \\ \mathcal{W}_{2}(z_{b},\mu) = \mathcal{W}_{1}(z_{b},\mu) \mid T(\mu) \mid^{2} + \mathcal{W}_{2}(z_{b},-\mu) \mid R(-\mu) \mid^{2} \end{cases}$$

$$(2.56)$$

La première donne la condition d'illumination $\mathcal{W}_0(\mu)$ à l'entrée de la tranche z = 0 tandis que la deuxième traduit l'absence de flux entrant en z = L. Les deux conditions à l'interface $z = z_b$ font intervenir les densités d'énergie dans les tranches diffusives adjointes. L'ETR posées conjointement avec ces conditions aux limites est résolue par la suite selon les méthodes numériques présentées précédemment.

L'ED en présence d'une interface

Dans le cas d'une tranche diffusante séparée par une barrière opaque, la même équation de diffusion 2.20 est considérée suivant z. Sa solution est recherchée à travers la fonction de Green $G(z, z_s)$ qui satisfait l'équation différentielle. Deux conditions aux limites supplémentaires sont nécessaires pour modéliser la présence de la barrière séparant les deux milieux diffusifs .

Pour obtenir les conditions aux limites à l'interface d'une barrière placée dans un milieu diffusif on applique l'approximation de diffusion sur les équations intégrales pour une interface réfléchissante placée dans un milieu diffusant [50]. Au point $z = z_b$ un saut de la densité d'énergie est donné :

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{W}}(0) = z_0 \overline{\mathcal{W}}'(0), \\ \overline{\mathcal{W}}(L) = -z_0 \overline{\mathcal{W}}'(L), \\ \overline{\mathcal{W}}(z_b^-) - \overline{\mathcal{W}}(z_b^+) = -C \overline{\mathcal{W}}'(z_b^+), \\ \overline{\mathcal{W}}'(z_b^-) = \overline{\mathcal{W}}'(z_b^+), \end{cases}$$
(2.57)

et la continuité de sa dérivée est conservée. Le saut de densité sur la barrière C est [51] :

$$C = \frac{\pi - 2R_j}{R_u}.\tag{2.58}$$

Il est donné en fonction de deux coefficients R_u et R_j qui sont définis à partir du coefficient de réflexion de l'interface,

$$R_{u} = 2 \int_{0}^{\pi/2} (1 - |R(\mu)|^{2}) \mu d\theta, \qquad R_{j} = 2 \int_{0}^{\pi/2} (1 - |R(\mu)|^{2}) \mu^{2} d\theta.$$
(2.59)

La solution de l'équation de diffusion associée à ces conditions donne

$$G(z, z_s) = \frac{(z_0 + z)(L - C + z_0 - z_s)}{(L - C + 2z_0)} \mathcal{W}_0, \qquad z < z_s < z_b,$$

$$G(z, z_s) = \frac{(z_s + z_0)(-C + L + z_0 - z)}{(L - C + 2z_0)} \mathcal{W}_0, \qquad z_s < z < z_b, \qquad (2.60)$$

$$G(z, z_s) = \frac{(z_s + z_0)(-z + L + z_0)}{(L - C + 2z_0)} \mathcal{W}_0, \qquad z_s < z_b < z.$$

On notera que cette solution ne dépend pas de la position de la barrière. Elle permet de donner la transmission dans le milieu également indépendamment de la position de l'interface :

$$T_d^{bar} = \frac{1}{s+1+C}.$$
 (2.61)

Dans le cas où la barrière est parfaitement transparente $(T_w = 1)$ ce saut de densité d'énergie est C = 0



FIGURE 2.16 – Rapport entre la résistance de la barrière T_w^{-1} dans une géométrie 2D avec le saut de densité d'énergie C prévu par l'approximation de diffusion. Pour les barrières opaques $(T_w \ll 1) : T_w^{-1} \simeq C$

et la transmission du milieu diffusif T_d est retrouvée. Lorsque la barrière est faiblement opaque, c'est l'opacité du milieu diffusif qui domine la transmission. Lorsque la barrière est très opaque $(T_w \ll 1)$, la résistance de la barrière domine et la transmission est donnée principalement par la transmission de l'interface. Dans cette limite le saut de densité C coïncide avec l'inverse de transmitance de la barrière T_w^{-1} (Figure 2.16). Ainsi, si l'on définie la résistance du milieu comme l'inverse de sa transmission, l'ajout d'une interface opaque se résume à l'ajout d'une résistance supplémentaire T_w^{-1} à la résistance du milieu diffusif :

$$\frac{1}{T_d^{bar}} \simeq \frac{1}{T_d} + \frac{1}{T_w^{-1}}.$$
(2.62)

Résultats et discussions



FIGURE 2.17 – Représentation du problème selon l'équation du transfert radiatif et l'équation de diffusion. Les conditions aux limites sont les conditions utilisées dans les résultats présentés dans les figures suivantes. Dans le cas du transfert radiatif la source est répartie de manière homogène sur tous les angles (source diffusive). Pour l'équation de diffusion la source est ponctuelle située en z_s d'amplitude W_d

Dans cette section sont présentés les résultats numériques (Figure 2.18) issus de la résolution de l'ETR (courbes bleues) et les résultats analytiques issus de l'ED (courbes rouges). La figure 2.17 ci-dessous donne un apercu des équations utilisées et les conditions aux limites associées. Tous les résultats présentés sont obtenus considérant un milieu à 2 dimensions.

La comparaison de l'évolution de la densité d'énergie $\overline{W}(z)$ considérant une source diffusive incidente présentée en figure 2.18 montre que l'approximation de diffusion permet de décrire le saut de $\overline{W}(z)$ en fonction de l'opacité de la barrière et la décroissance linéaire dans les deux intervalles. On remarquera des légères différences liées à l'approximation de diffusion observables au voisinage de l'interface ($z \simeq z_b$) et des bords du milieu (z = 0, L). Ces effets de bords peuvent être vus comme l'excitation de modes évanescents ou comme la prédominance du terme balistique qui sont négligés par l'ED et sont visibles au voisinage de la barrière.



FIGURE 2.18 – Comparaison entre la densité d'énergie moyennée sur les angles d'un milieu diffusif dans lequel s = 10, à partir de l'équation du transfert radiatif et de l'équation de diffusion pour différente force de barrière.

2.C.3 Comparaison entre l'approche énergétique et l'approche ondulatoire

On a vu précédemment que l'ajout d'une barrière opaque dans la limite $T_w \ll 1$ se résume à l'ajout d'une résistance supplémentaire en complément à la résistance du milieu diffusif. Dans un guide d'onde quasi-1D si l'on définit la résistance du milieu comme :

$$\frac{1}{g_D} = \frac{s+1}{N} \tag{2.63}$$

et la résistance de la barrière (voir annexe 2.A) par τN , la conductance d'un milieu diffusif (sans symétrie) séparé par une barrière se déduit de manière analogue à partir de l'ajout des résistances :

$$\frac{1}{g} \simeq \frac{1}{g_D} + \frac{1}{\tau N}.\tag{2.64}$$

Puisque $g_D = NT_d$, la seule différence pour une correspondance totale entre ces deux modèles sont les définitions des barrières pour une géométrie quasi-1D et 2D. Ce résultat, assez intuitif dans le cas de barrière opaque est résumé en figure 2.19 pourrait être étendu à des barrières moins fortes où le saut de densité C pourrait être redéfini dans l'approche ondulatoire.

Approche énergétique :



FIGURE 2.19 – a) Transmission d'une couche diffusante (s = 2) en géométrie 2D séparée par une barrière en fonction de la transmittance de la barrière. La comparaison s'effectue entre la résolution numérique de l'ETR et de l'approximation de diffusion dans la limite $T_w \ll 1$. b) Présente le rapport de ces deux courbes. c) Conductance moyennée sur 50 réalisations de désordre (s = 2) en guide d'onde quasi-1D pour N = 100 en fonction de la transmittance de la barrière. La comparaison est faite avec l'expression analogie à l'équation de diffusion dans la limite $T_w \ll 1$. d) Présente le rapport de ces deux courbes.

Bibliographie

- CHÉRON, É., FÉLIX, S. & PAGNEUX, V. Broadband-Enhanced Transmission through Symmetric Diffusive Slabs. *Physical Review Letters* 122, 125501 (2019).
- [2] AKKERMANS, E. & MONTAMBAUX, G. Mesoscopic Physics of Electrons and Photons (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [3] GARCÍA-MARTÍN, A. & SÁENZ, J. Statistical properties of wave transport through surfacedisordered waveguides. Waves in Random and Complex Media 15, 229-268 (2005).
- [4] ROTTER, S. & GIGAN, S. Light fields in complex media : Mesoscopic scattering meets wave control. *Reviews of Modern Physics* 89, 015005 (2017).
- [5] DOROKHOV, O. On the coexistence of localized and extended electronic states in the metallic phase. Solid State Communications 51, 381-384 (1984).
- [6] MELLO, P., PEREYRA, P. & KUMAR, N. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. Annals of Physics 181, 290-317 (1988).
- BEENAKKER, C. W. J. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of Modern Physics* 69, 731-808 (1997).
- [8] VELLEKOOP, I. M. & MOSK, A. P. Universal Optimal Transmission of Light Through Disordered Materials. *Physical Review Letters* 101, 120601 (2008).
- [9] VELLEKOOP, I. M., LAGENDIJK, A. & MOSK, A. P. Exploiting disorder for perfect focusing. *Nature Photonics* 4, 320-322 (2010).
- [10] POPOFF, S. M. et al. Measuring the Transmission Matrix in Optics : An Approach to the Study and Control of Light Propagation in Disordered Media. *Physical Review Letters* **104**, 100601 (2010).
- [11] CHOI, W., MOSK, A. P., PARK, Q.-H. & CHOI, W. Transmission eigenchannels in a disordered medium. *Physical Review B* 83, 134207 (2011).
- [12] MOSK, A. P., LAGENDIJK, A., LEROSEY, G. & FINK, M. Controlling waves in space and time for imaging and focusing in complex media. *Nature Photonics* 6, 283-292 (2012).
- [13] DAVY, M., SHI, Z. & GENACK, A. Z. Focusing through random media : Eigenchannel participation number and intensity correlation. *Physical Review B* 85, 035105 (2012).

- [14] PARK, J.-H. et al. Subwavelength light focusing using random nanoparticles. Nature Photonics 7, 454-458 (2013).
- [15] GÉRARDIN, B., LAURENT, J., DERODE, A., PRADA, C. & AUBRY, A. Full Transmission and Reflection of Waves Propagating through a Maze of Disorder. *Physical Review Letters* 113, 173901 (2014).
- [16] VELLEKOOP, I. M. Feedback-based wavefront shaping. Optics Express 23, 12189 (2015).
- [17] DAVY, M., SHI, Z., PARK, J., TIAN, C. & GENACK, A. Z. Universal structure of transmission eigenchannels inside opaque media. *Nature Communications* 6, 6893 (2015).
- [18] SHI, Z. & GENACK, A. Z. Dynamic and spectral properties of transmission eigenchannels in random media. *Physical Review B* 92, 184202 (2015).
- [19] SARMA, R., YAMILOV, A., LIEW, S. F., GUY, M. & CAO, H. Control of mesoscopic transport by modifying transmission channels in opaque media. *Physical Review B* **92**, 214206 (2015).
- [20] OJAMBATI, O. S., MOSK, A. P., VELLEKOOP, I. M., LAGENDIJK, A. & VOS, W. L. Mapping the energy density of shaped waves in scattering media onto a complete set of diffusion modes. *Optics Express* 24, 18525 (2016).
- [21] SARMA, R., YAMILOV, A. G., PETRENKO, S., BROMBERG, Y. & CAO, H. Control of Energy Density inside a Disordered Medium by Coupling to Open or Closed Channels. *Physical Review Letters* 117, 086803 (2016).
- [22] YAMILOV, A., PETRENKO, S., SARMA, R. & CAO, H. Shape-dependence of transmission, reflection and absorption eigenvalue densities in disordered waveguides with dissipation. *Physical Review B* 93, 100201 (2016).
- [23] KOIRALA, M., SARMA, R., CAO, H. & YAMILOV, A. Inverse Design of Perfectly Transmitting Eigenchannels in Scattering Media. *Physical Review B* 96, 054209 (2017).
- [24] BARANGER, H. U. & MELLO, P. A. Reflection symmetric ballistic microstructures : Quantum transport properties. *Physical Review B* 54, R14297-R14300 (1996).
- [25] WHITNEY, R. S., SCHOMERUS, H. & KOPP, M. Semiclassical transport in nearly symmetric quantum dots. I. Symmetry breaking in the dot. *Physical Review E* 80, 056209 (2009).
- [26] WHITNEY, R. S., SCHOMERUS, H. & KOPP, M. Semiclassical transport in nearly symmetric quantum dots. II. Symmetry breaking due to asymmetric leads. *Physical Review E* 80, 056210 (2009).
- [27] GOPAR, V. A., ROTTER, S. & SCHOMERUS, H. Transport in chaotic quantum dots : Effects of spatial symmetries which interchange the leads. *Physical Review B* 73, 165308 (2006).
- [28] KOPP, M., SCHOMERUS, H. & ROTTER, S. Staggered repulsion of transmission eigenvalues in symmetric open mesoscopic systems. *Physical Review B* 78, 075312 (2008).

- [29] BIRCHALL, C. & SCHOMERUS, H. Random-martrix theory of amplifying and absorbi, g resonators with PT or PTT symmetry. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 45, 444006 (2012).
- [30] DHIA, A.-S. B.-B., CHESNEL, L. & PAGNEUX, V. Trapped modes and reflectionless modes as eigenfunctions of the same spectral problem. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical*, *Physical and Engineering Science* 474, 20180050 (2018).
- [31] MACUCCI, M. & MARCONCINI, P. Tunneling enhancement through a barrier surrounded by a mesoscopic cavity. *Journal of Computational Electronics* 6, 203-206 (2007).
- [32] WHITNEY, R. S., SCHOMERUS, H. & KOPP, M. Semiclassical transport in nearly symmetric quantum dots. I. Symmetry breaking in the dot. *Physical Review E* **80**, 056209 (2009).
- [33] TOTARO, M., MARCONCINI, P., LOGOTETA, D., MACUCCI, M. & WHITNEY, R. S. Effect of imperfections on the tunneling enhancement phenomenon in symmetric double quantum dots. *Journal of Applied Physics* 107, 043708 (2010).
- [34] WHITNEY, R. S., MARCONCINI, P. & MACUCCI, M. Huge Conductance Peak Caused by Symmetry in Double Quantum Dots. *Physical Review Letters* 102, 186802 (2009).
- [35] IMRY, Y. & LANDAUER, R. Conductance viewed as transmission. Reviews of Modern Physics 71, 7 (1999).
- [36] PAGNEUX, V. Multimodal admittance method in waveguides and singularity behavior at high frequencies. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **234**, 1834-1841 (2010).
- [37] MAUREL, A., MERCIER, J.-F. & FÉLIX, S. Wave propagation through penetrable scatterers in a waveguide and through a penetrable grating. *The Journal of the Acoustical Society of America* 135, 165-174 (2014).
- [38] MAUREL, A., MERCIER, J.-F. & FÉLIX, S. Modal method for the 2D wave propagation in heterogeneous anisotropic media. *Journal of the Optical Society of America A* **32**, 979 (2015).
- [39] IMRY, Y. Active Transmission Channels and Universal Conductance Fluctuations. Europhysics Letters (EPL) 1, 249-256 (1986).
- [40] PENDRY, J. B., MACKINNON, A. & ROBERTS, P. J. Universality Classes and Fluctuations in Disordered Systems. Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences 437, 67-83 (1992).
- [41] VERRIER, N., DEPRAETER, L., FELBACQ, D. & GROSS, M. Measuring enhanced optical correlations induced by transmission open channels in a slab geometry. *Physical Review B* 93, 161114 (2016).
- [42] CHANDRASEKHAR, S. Radiative transfer. By S. Chandrasekhar. London (Oxford University Press) 1950. 8vo. Pp. 393, 35 figures. 35s. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 76, 498-498 (1950).

- [43] ISHIMARU, A. Wave Propagation and Scattering in Random Media (Elsevier, 1978).
- [44] POMRANING, G. C. The equations of radiation hydrodynamics (Dover Publications, Mineola, N.Y., 2005).
- [45] De JONG, M. J. M. Transition from Sharvin to Drude resistance in high-mobility wires. *Physical Review B* 49, 7778-7781 (1994).
- [46] WATERMAN, P. C. Matrix-exponential description of radiative transfer. Journal of the Optical Society of America 71, 410 (1981).
- [47] EFREMENKO, D. S., MOLINA GARCÍA, V., GIMENO GARCÍA, S. & DOICU, A. A review of the matrix-exponential formalism in radiative transfer. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 196, 17-45 (2017).
- [48] ISERLES, A. & NØRSETT, S. P. On the Solution of Linear Differential Equations in Lie Groups. Philosophical Transactions : Mathematical, Physical and Engineering Sciences 357, 983-1019 (1999).
- [49] ZHU, J. X., PINE, D. J. & WEITZ, D. A. Internal reflection of diffusive light in random media. *Physical Review A* 44, 3948-3959 (1991).
- [50] ARONSON, R. Boundary conditions for diffusion of light. Journal of the Optical Society of America A 12, 2532 (1995).
- [51] RIPOLL, J. & NIETO-VESPERINAS, M. Index mismatch for diffuse photon density waves at both flat and rough diffuse-diffuse interfaces. *Journal of the Optical Society of America A* 16, 1947 (1999).

Chapitre 3

Effect of loss, defect and localization on the enhanced transmission in symmetric disordered slabs

Sommaire

3.1 Introduction	71
3.2 Symmetry breaking	71
3.3 Enhanced transmission through absorbing symmetric slabs	75
3.3.1 Transmission through absorbing diffusive slabs	75
3.3.2 A scaling model for the scattering with absorption	77
3.4 Conclusion	81
Annexes	83
3.A RMT simulations with absorption	83
3.B Enhanced transmission induced by symmetric localized slabs	83
3.C Broadband subwavelength sensitivity with symmetric disordered slabs .	85
Bibliographie	88

Ce chapitre, rédigé en langue anglaise, est un article destiné à être soumis dans le journal "Physical Review B". Il complète le travail présenté au chapitre précédent sur le gain significatif en transmission à travers une barrière lorsqu'elle est placée entre deux milieux diffusifs symétriques.

Dans un premier temps, la sensibilité de ce phénomène aux défauts de symétrie est approfondie en associant la détérioration du gain à la positions des défauts de symétrie. On propose un modèle probabiliste qui permet d'estimer la conductance d'un milieu comprenant un nombre de défauts répartis aléatoirement est proposé.

Dans un contexte expérimental, les pertes sont toujours présentes et peuvent être source de pro-

blème pour la visualisation de certains phénomènes. Nous étudions dans un second temps, la robustesse du gain en transmission lorsque l'absorption est introduite. Le modèle d'échelle élaboré dans le cas conservatif est adapté au cas non-conservatif.

La méthode numérique principalement utilisée pour résoudre le problème de scattering avec perte est présentée en annexe. Elle est basée sur la théorie des matrices aléatoires. Puis, nous étudions les cas où les milieux symétriques se trouvent dans un régime de localisation. Enfin, l'extrême sensibilité de ce phénomène au décalage de la barrière par rapport à son axe de symétrie est présentée.

3.1 Introduction

A recent paper by the authors [1] reported on a significant and broadband enhancement of the transmission through an opaque barrier, when placed between symmetric diffusive slabs. This result naturally raises the questions of the robustness of the observed conductance enhancement to absorption and to symmetry defects. The last point was partially answered in [1], showing a strong sensitivity when moving a increasing number of randomly chosen scatterers in the slabs on either side of the barrier.

The system under study is a quasi-one-dimensional waveguide that supports N propagating modes. The refractive index of a given region in the waveguide is perturbed to account for the presence of randomly distributed scatterers, and a thin opaque barrier splits this region into two equal-length slabs. Besides, in order to observe the transmission enhancement, one imposes the spatial perturbation $\delta n(x, y)$ of the refractive index to obey a left-right mirror symmetry with respect to the barrier (Fig. 3.1-a). In each slab the propagation is governed by the heterogeneous Helmholtz equation

$$\Delta \psi(x,y) + k^2 \left[1 + \delta n(x,y) \right]^2 \psi(x,y) = 0, \tag{3.1}$$

and, beside the wavelength $\lambda = 2\pi/k$, the relevant length scales are the length L of the disordered region and the mean free path ℓ . Let $s \equiv L/\ell$ be the length of the scattering region in mean free path unit; we assume that $1 \ll s \ll N$, so that the incident flux is diffusively transmitted through the slabs. The conductance of the "slab-barrier-slab" (SBS) system within the waveguide is computed as given by the Landauer formula $g = \text{Tr}(\mathsf{TT}^{\dagger})$, T the transmission matrix of the propagating modes [2]. Note that, in the absence of a barrier and under the assumption of diffusive transport, the conductance fulfills the classical Ohm's law g = N/(1+s) [3-5], allowing thus a direct determination of the mean free path ℓ from the numerical computations.

3.2 Symmetry breaking

The initial configuration we consider is the optimal configuration as described in [1], to reach the maximum conductance enhancement : the length of the symmetric SBS is, in mean free path unit,

$$s_{\rm opt} = \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} - 1\right)\left(\frac{1}{\tau_{\rm c}} - 1\right)} - \left(\frac{1}{\tau_{\rm c}} - 1\right) \tag{3.2}$$

with $\tau < \tau_c$ the reduced transmittance of the barrier ($\tau = 1$ for a perfectly transparent barrier) and $\tau_c \simeq 0.4$ the threshold value to achieve a conductance enhancement [1]. Then, the conductance reaches an optimal value g_{opt} , and any symmetry defect in the spatial distribution of the scatterers will result in a decrease of the conductance. To get insight of the sensitivity to symmetry breaking, let us see how it is related to the distance from the barrier to the nearest defect.
Throughout the paper, unless otherwise stated, the scattering by the diffusive slabs on either side of the barrier is solved using random matrices, as this approach has proven to be relevant and effective [1, 6]. Each slab is considered as being composed of M layers whose length is the mean free path ℓ . The scattering matrix of each layer is modeled by elements of the Dyson's circular orthogonal ensemble (COE), to fulfill the properties of reciprocity (symmetry) and energy conservation (unitarity), and the scattering matrix of the slab is then constructed iteratively from the M layer matrices. Finally, once one slab has been "built," the scattering matrix of its symmetric counterpart is straightforwardly deduced from this first operation. To account for symmetry defects, the scattering matrix of n among the M layers of one slab are replaced by new randomly generated matrices, and the distance (in mean free path unit) from the barrier to the nearest defect is denoted as $d \in [0, M - 1]$ (Fig. 3.1).



FIGURE 3.1 – Sketches of the studied scattering system with a symmetry defect. (a) The original system is a symmetric "slab-barrier-slab" (SBS) system, and the diffusive slabs are made of a random distribution of scatterers. (b) The scattering by the SBS within a waveguide is solved using the random matrix theory (RMT), and the slab are then considered as being composed as $M \ell$ -length layers (ℓ the mean free path), the scattering matrix of which is a random matrix. Then, from the fully symmetric configuration shown in (b), the symmetry is broken by modifying one layer (in red), which can be either (c) close to or (d) far from the barrier.

Fig. 3.2 shows the dependence of the conductance of the SBS with d and the number of modified layers, n. It clearly reveals that the limiting factor for a conductance enhancement is the distance from the barrier to the nearest defect, rather than the "amount" of defects, as could suggest our first observation [1]. Whatever the number of defects, if the nearest one is directly adjacent to the barrier (d = 0), then no gain is observed : the conductance value is the one of a fully non-symmetrical system, slightly smaller than $N\tau$, the transmittance of the barrier (red dashed line). Conversely, the transmission through the system is only slightly perturbed if the nearest defect is far enough from the barrier, and the observed conductance is close to its optimal value (blue dashed line). More generally, the evolution of the average conductance with d can be described with a function G(d) independent of n, given, for example, by computing the case with a single defect (n = 1).



FIGURE 3.2 – Conductance (averaged over 100 iterations) of the "slab-barrier-slab" (SBS) system as a function of the distance from the barrier to the nearest defect, and for several values of n, the number of modified, asymmetric, layers. Each slab is composed of M = 25 layers. Red dashed line : transmittance $N\tau$ of the barrier. Blue dashed line : optimal conductance g_{opt} of a fully symmetrical system, with each slab having a length s_{opt} , see Eq. (3.2).

These results are illustrated in Fig. 3.3, which shows full wave numerical computations [7-9] of the wave field in three cases : (a) a fully symmetrical system, (b) the same configuration, with symmetry defects far from the barrier, and (c) the same configuration, with symmetry defects close to the barrier. While the wavefield is only slightly perturbed in case (b), the overall level behind the barrier is much lower in case (c), denoting a strong decrease of the conductance.

Let us now return to Fig. 6 of [1], which shows the decrease of the average conductance when shifting an increasing number of scatterers, randomly chosen in the slabs. Given the result above (Fig. 3.2), this initial observation may be simply recovered, hence explained. As before, we start from a left-right symmetric distribution of 2M layers, with the barrier as symmetry axis. Then we randomly choose n among the M layers of one slab, and change their scattering matrix to a new one, to break the symmetry. M and n being known, the probability of finding a modified layer at a distance d from



FIGURE 3.3 - Typical wavefield (full wave numerical computation) in the SBS, when impinged by incident unit fluxes on each of the N propagating modes in the left lead. a) Fully symmetrical system. b) Same as a), with symmetry defects far from the barrier. c) Same as a), with symmetry defects close to the barrier.

the barrier can be calculated. It reads

$$P(n,d) = \begin{cases} \frac{(M-1-d)!(M-n)!n}{(M-n-d)!M!} & \text{if } M \ge n+d, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$
(3.3)

In particular, a single defect has an evenly distributed probability of being at a distance d from the barrier : P(1, d) = 1/M.

Finally, for a large number of averaging, the conductance, as a function of the number of defects, can be deduced from P(n, d) and the position-dependent conductance G(d) as

$$g(n) = \sum_{d=0}^{M-1} P(n,d) G(d).$$
(3.4)

This simple counting (P), once the dependency to d(G) is known for, *e.g.*, a single defect, allows us to recover accurately the result shown in Fig. 6 of [1], see Fig. 3.4.

The function P(n, d) is a non zeros function if $M \ge n + d$. Consequently, raising the number d of defects into a slab of M layers decrease the variance of the averaged conductance. In Fig. 3.4 inset we show that the variance var(g) decreases monotonically when increasing the number of shifted scatterers. In the particular case of perfect symmetry, we stress that the universal conductance fluctuation in diffusive regime is raised by a factor two when left-right symmetry is involved giving var(g) = 4/15 [10, 11].



FIGURE 3.4 – Decrease of the averaged conductance when shifting an increasing number of scatterers from the initially symmetric configuration using full wave simulations. The red horizontal dashed line shows the barrier transmittance $N\tau$ while the blue dashed line shows the conductance provided the perfectly symmetrical configuration. The frequency is such that N = 300. The mean free path in the diffusive slabs is $\ell = 0.14$ in waveguide width unit, and the length of the SBS is L = 5. Inset : variance of the conductance. It decreases monotonically when increasing the number of shifted scatterers. Highlighted by the blue dashed line, we show the universal conductance fluctuation in disorder slabs enhanced by a factor of two because of the miror symmetry [10-12].

3.3 Enhanced transmission through absorbing symmetric slabs

Absorption, ubiquitous in either acoustical or optical systems, must not only be taken into account to accurately describe and interpret experiments, but also because, more fundamentally, it may significantly affect the transport properties, starting with the regimes of transport themselves [13]. Thus, regarding the effect of symmetry we are interested in, we may wonder about the fate of the observed enhancement when absorption occurs. The following section shows how absorption modifies, and may even predominantly drive, the level of enhancement. First, we give reminders on absorbing diffusive transport in a slab. Then a scaling model is proposed for the symmetric SBS, that generalizes the model that what proposed in [1] and inspired by [14].

3.3.1 Transmission through absorbing diffusive slabs

Let us consider first the disordered waveguide without opaque barrier. To account for a loss mechanism in the disordered slabs, we simply add an imaginary part to the refractive index the Helmholtz equation (3.1):

$$\Delta \psi(x,y) + k^2 \left[1 + \delta n(x,y) + i\gamma \right]^2 \psi(x,y) = 0,$$
(3.5)

In practice, the absorption could result from different loss mechanisms, in the scatterers, in the background medium, or at the waveguide walls. It would require a heterogeneous imaginary part $\gamma(x, y)$, inducing additional scattering. For the sake of simplicity, we consider γ as being uniform in the slab, thus simply inducing a damping of the wave.

The strength of absorption, whether strong or weak, will result in different transport regimes. In the very strong absorbing regime, the wave is rapidly damped before it experiences significant scattering. The conductance of a slab with length L is then $g = N \exp(-L/\ell_a)$, with $\ell_a \equiv 1/2k\gamma$ the ballistic absorption length. For weaker absorption such that $\ell_a \gg \ell$, multiple scattering will occur, allowing diffusive transport or transition to localization [15]. The impact on diffusion and localization of an absorbing medium has been extensively studied by Brouwer [16], who generalized the Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar (DMPK) equation [3, 4] and derived the conductance

$$g_{\rm B}(s, s_{\rm a}) = \frac{N}{s_{\rm a} \sinh\left(\frac{s}{s_{\rm a}}\right) + 1},\tag{3.6}$$

where $s_{\rm a} \equiv \sqrt{\ell_{\rm a}/2\ell}$ is, in mean free path unit, the diffusive absorption length. In the weakly absorbing diffusive regime ($s \ll s_{\rm a} \ll N$, see Fig. 3.5), the conductance follows the Ohmic behavior predicted by the DMPK theory in conservative systems :

$$g_{\rm B}(s, s_{\rm a}) \simeq g_{\rm D}(s) = \frac{N}{s+1},$$
 (3.7)

For stronger absorption, the absorbing diffusive regime $(s_a \ll s \ll N)$ is characterized by an exponential decay of the conductance as

$$g_{\rm B}(s, s_{\rm a}) \simeq \frac{2N}{s_{\rm a}} e^{-s/s_{\rm a}}.$$
 (3.8)

This absorption-induced exponential decrease makes it difficult to establish a clear threshold between diffusive and localized regimes. Other criteria based on the relative variations of the conductance are necessary [17].



FIGURE 3.5 – Schematic representation of the weakly and strongly absorbing diffusive regimes with length scales s and s_{a} . s = N denotes the usual transition to localization in a lossless medium.

3.3.2 A scaling model for the scattering with absorption

Now we consider the complete symmetric SBS. A scaling model is proposed in [1] to compute the average conductance of the symmetric system in the lossless case. It is written as a series resistance model, involving the diffusive conductance $g_{\rm D}(s)$ of the slab and an "enhancement" conductance, $g_{\rm G}(s,\tau)$, which encapsulates the combined effects of the barrier and symmetry :

$$\frac{1}{\langle g(s,\tau)\rangle} = \frac{1}{g_{\rm D}(s)} + \frac{1}{g_{\rm G}(s,\tau)},\tag{3.9}$$

where

$$g_{\rm G}(s,\tau) = \left(1 + \frac{\tau_{\rm c}}{1 - \tau_{\rm c}}s\right)\frac{\tau}{1 - \tau}N.$$
(3.10)

This solution can be improved to take into account the absorption in the slabs.

At first glance, it may seem sufficient to substitute $g_{\rm D}$ for $g_{\rm B}$ in Eq. (3.9). In fact it proves inaccurate. Indeed, such a simple resistance series model would imply that, at large s, $g_{\rm B}^{-1}$ dominates over $g_{\rm G}^{-1}$ and the overall conductance then tends towards a limit that is independent of the strength barrier τ . This is what is observed in the lossless case (see Fig. 4 of [1] and Fig. 3.6 below), but not when absorption is taken into account (Fig. 3.6). Thus, we introduce a corrective factor and write the overall average conductance such that

$$\frac{1}{\langle g(s,s_{\mathbf{a}},\tau)\rangle} = \frac{\alpha(s,s_{\mathbf{a}},\tau)}{g_{\mathbf{B}}(s,s_{\mathbf{a}})} + \frac{1}{g_{\mathbf{G}}(s,\tau)}.$$
(3.11)

Numerical computations shows that this factor is independent of s and may be simply written as

$$\alpha(s_{\rm a},\tau) = 1 + \frac{1}{2s_{\rm a}^2\tau}.$$
(3.12)

This solution also ensures the consistency of Eq. (3.11) with Eq. (3.9) in the lossless limit $s_a \to \infty$.

Comparisons of this scaling model with RMT simulations, for various values of the diffusion length scale, $s_{\rm a}$, and barrier strength, τ , shows a very good agreement (see examples in Fig. 3.6 for a strong absorption, $s_{\rm a} = 3.87$. The computation of absorbing transport with RMT and the determination of $s_{\rm a}$ are explained in the Supplemental Material). As absorption occurs only in the slabs, the starting point of the curves at s = 0 is the transmittance $N\tau$ of the barrier, as in the lossless case (dotted lines). Then the curves deviate from this limit case to rapidly drop when $s > s_{\rm a}$. The asymptotic behaviour at large s is given by the Brouwer's conductance (black solid line) and the corrective factor $\alpha(s_{\rm a}, \tau)$ gives the shift between the asymptotics of each curve (see inset).

Despite the very significant effect of losses, the symmetry-induced enhancement of the transmission is still observed (Fig. 3.7), and the evolution of conductance with s shows that we can still expect an



FIGURE 3.6 – Averaged conductance of the absorbing symmetric SBS, as a function of the length of the system (in mean free path unit : $s \equiv L/\ell$), for various values of the barrier transmittance. Colored circles : RMT with N = 300 and $s_a = 3.87$, averaged over 100 iterations (See Supplemental Material). Solid colored lines : scaling model, Eq. (3.11). Dotted colored lines : Lossless conductance, as given by Eq. (3.9). Data in black (lines and circles) correspond to the configuration without barrier; in this case, the conductance is given by Eq. (3.6). Inset : product $\langle g(s, s_a, \tau) \rangle \alpha(s_a, \tau)$, showing that the shift between the data for large s is given in the scaling model by the corrective factor $\alpha(s_a, \tau)$.

optimal length s_{opt} of the system for which the ratio $\langle g \rangle / N \tau$ reaches a maximum value. This can be



FIGURE 3.7 – Persistence of the symmetry-induced conductance enhancement in an absorbing SBS. (a) Typical wavefield (full wave numerical computation) in a lossless symmetric SBS (N = 50, $\ell = 0.46$, L = 6). b) Same as a), but with added background absorption in the diffusive slabs ($s_a = 2.2$). c) Same as b), but without the left-right symmetry in the scatterers distribution.

simply found from Eq. (3.11), and the maximum enhancement thus obtained is in very good agreement with the numerical simulations, RMT and full wave (Fig. 3.8). Expectedly, the higher the absorption, the lower the maximum possible enhancement. But a remarkable result shown in this figure is the saturation of the conductance enhancement, due to absorption. While the increase of the enhancement in the lossless case in only limited by the transition to localization¹, it is bounded, in the lossy case, by a maximum enhancement driven by the strength of absorption, that is, by s_a . Indeed, assuming $\tau \ll 1$, the derivation of the optimal length from Eq. (3.11) gives

$$s_{\rm opt} \simeq 1.28 s_{\rm a} - 1.$$
 (3.13)

We recall that Eq. (3.11), hence the result above, are valid under the assumption of diffusive transport $(1 \ll s, s_a \ll N)$.



FIGURE 3.8 – Variations of the maximum conductance enhancement as a function of the reduced barrier transmittance τ , for various values of the diffusive absorption length s_a . Colored squares : full wave numerical simulations, averaged over 80 iterations of the disorder. Colored circles : RMT, averaged over 50 iterations. Solid lines : scaling model, Eq. (3.11). A condition for achieving a transmission enhancement is that $\tau < \tau_c \simeq 0.4$ [1]. The saturation levels for $\tau \ll 1$ and finite s_a are given by Eq. (3.14).

Finally, the observations made on the effect of absorption on the transport through symmetry diffusive slabs can be summarized as done in Fig. 3.9, which shows how to practically get a particular enhancement. First, the range of possible values of the barrier transmittance τ and number of propagating modes N is limited by (i) the threshold value τ_c , above which no enhancement is observed, and (ii) the transition to the localized regime². Within these limits, regardless of the strength of absorption, the expected enhancement is independent of the number of propagating modes (note

^{1.} See Supplemental Material

^{2.} See Supplemental Material

that it was already shown in [1] for the lossless case, and s_{opt} in Eq. (3.13) already appeared as being independent of N). Finally, Fig. 3.9 shows the saturation of the conductance enhancement when decreasing τ , and the maximum value is reached for τ values all the greater as the absorption is itself high. This maximum value, as well as the optimal length, depends only on the diffusive absorption length, as long as the barrier is sufficiently opaque :

$$\frac{g_{\rm opt}}{N\tau} \simeq 0.48 s_{\rm a} + 0.23.$$
 (3.14)



FIGURE 3.9 – Maps of the ratio $\log_{10}(g_{opt}/N\tau)$ given by the maximum of the eq. (3.11). The enhancement is independent of the number of modes N. The two white zones represents the threshold of the minimum barrier strength in order to provide a enhancement and the limits of localization regime where Eq. (3.11) is no longer valid.

3.4 Conclusion

We have shown to what extend the significant enhancement of the transmission through lossless symmetric diffusive slabs is affected by defects of the symmetry in the scatterers distribution or by absorption. In the first case, rather than the amount of "defects" (the non-symmetrical pairs of scatterers), the distance from the barrier to the nearest defect appears as the limiting factor for the conductance enhancement. This could be particularly interesting for non-destructive testing applications, since the information on the position of a defect could therefore be available from a measurement of the conductance. When absorption occurs, the symmetry-induced enhancement, while weakened, is still observed, and this enhancement might even be a mean to experimentally quantify the absorption length, as its level is predominantly driven by the absorption.

Annexes

Dans ces annexes on décrit le modèle basé sur la théorie des matrices aléatoires lorsque les pertes sont introduites. Puis, le gain en transmission à travers une barrière recouverte de deux milieux en régime localisé est étudié. Enfin, nous rapportons la sensibilité large bande du gain en transmission aux déplacements sub-longueur d'onde de la barrière par rapport à son axe de symétrie.

3.A RMT simulations with absorption

Most of the numerical results performed to solve the scattering problem are carried out using RMT simulations. Based on the Verrier *et al.* procedure [6], we consider a disorder slab, with length L, as being composed of $M \simeq L/\ell$ layers whose length is equal to the mean free path.

When absorption is considered, the scattering problem of each layers is first considered as a system in which $N + N_{loss}$ modes propagates. The $2(N + N_{loss}) \times 2(N + N_{loss})$ scattering matrices, modeled by elements of the Dyson's circular orthogonal ensemble (COE), fulfills the properties of reciprocity (symmetry) and energy conservation (unitarity). They are then reduced to $2N \times 2N$ matrices and the scattering matrix of the full slab is constructed iteratively from the M layers reduced matrices. The averaged conductance as a function of s is then fitted (Figure 3.10) to $g_{\rm B}$: the conductance derived from the generalized DMPK equation in the absorbing diffusive regime, showing that the absorption length in mean free path unit is

$$s_a \simeq \sqrt{\frac{N}{2N_{loss}}}.$$
(3.15)

3.B Enhanced transmission induced by symmetric localized slabs

Localization is a phenomenon purely related to multiple wave interferences that occurs in situations where the length of the system is greater than the localization length such as $L \gg N\ell$. Solving the DMPK equation in this limit of $s \gg L/\ell$ shows that the conductance fluctuations become large and the transmission drops exponentially with the length of the medium : $g_L = \exp(-2L/N\ell)$. [5, 18]. Because of large fluctuations we stress that the conductance is not well defined. To see the transition from the diffusive to the localized regime, we consider the typical averaged conductance $\langle \log g \rangle$.

We know that in diffusive regime, the maximum conductance enhancement $g_{opt} = g(s_{opt}, \tau)$ scales



FIGURE 3.10 – Averaged conductance as a function of s obtained numerically using RMT simulations over 50 iterations with N = 300 and $N_{loss} = 0, 1, 2, 2, 3, 4, 10$. It is fitted (colored lines) with s_a as a fitting parameter to the conductance predicted by the Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar theory given by Eq 3.6.

as the inverse square root of the barrier transmittance and is reached for a particular length of the slabs. This was given by our scaling model hence the validity of $s_{opt} \ll N$.

We show in Figure 3.11 g_{opt} as a function of τ . When condidering strong barriers with no constraints about the slab lengths, the maximum conductance enhancement saturate to a value that depends on the frequency.



FIGURE 3.11 – Variations of the maximum conductance enhancement as a function of the barrier transmittance τ for different frequencies (denoted here by the number of propagating modes in the leads)

We now have a closer look at the particular case of N = 1 propagating modes. In contrast with a diffusive regime, the conductance of this slab/barrier/slab configuration in the ordinary disordered case is not written as a series of resistance model but as the product of each resistance involving the conductance $g_L(s)$ of the localized slab and the transmittance $N\tau$ of the barrier :

$$\left\langle \log(g(s, N=1)) \right\rangle = \log(g_L(s)) + \log(\tau). \tag{3.16}$$

In Figure 3.12 we compare the both cases of ordinary disorder and symmetric disorder with and without barrier. Both cases follows g_L as predicted by equation (3.16). It shows that symmetry has no significant effect on conductance when N = 1. To get a particular enhancement in localized slabs a large number of propagating modes has to be considered such that $N \gg 1$.



FIGURE 3.12 – Averaged conductance as a function of s obtained numerically using RMT simulations over 100 iterations with N = 1 with or without barrier when the system displays symmetry or not. Black lines shows the value of the conductance expected by the DMPK equation.

3.C Broadband subwavelength sensitivity with symmetric disordered slabs

In this section we explore the sensitivity of the enhanced transmission in symmetric disorder media regarding to the relative position of the barrier to the symmetry axis.

We consider an homogeneous Q1D waveguide in which N = 300 modes can propagates that is split by a barrier into two semi-infinite leads. The barrier is characterized by its transmission τ being $\tau = 1$ for the perfectly transparent case to $\tau = 0$ for the perfectly reflecting case.

We then consider three different cases. The first one is a case where both sides of the barrier are coated by two diffusive slabs of length L/2 made of one realization of (ordinary) randomly placed scatterers with mean free path ℓ . In mean free path unit, the length of the total disordered system is $s = L/\ell$.



FIGURE 3.13 – Enhanced transmission through an opaque barrier, when surrounded by perfectly left-right symmetric disordered medium. The conductance is plotted over the frequency range $(N-1)\pi < k < N\pi$, with N = 300 and k the wave number. Black : the barrier alone, with a "strength" parameter $\alpha = 0.133$ (see Supplemental Material [36]). Three configurations are then considered where the conductance is not averaged and comes from a single realization of the disorder. Red : the barrier, in the middle of a disordered slab with length L = 5 and mean free path $\ell = 0.140$. Dark blue : the barrier, in the middle of a left-right symmetric disorder slab (same L and ℓ). Light blue : Same as the dark blue curve but the barrier is slightly shifted by the order of a subwavelength scale $dx \simeq \lambda/100$.

The second case is the same than the first one but the spatial distribution of scatterers respects a perfectly left-right mirror symmetry. Because of the coherent effects induced by the spatial symmetry, the transmission through this slab/barrier/slab configuration is enhanced in regard to the "barrier" transmission $N\tau$ and reach a maximized conductance g_{opt} when the diffusive slabs are optimized as described in [1].

For the third case we reconsider the same optimal symmetrical configuration but we slightly shift the barrier from the symmetry axis by a small distance $dx = \lambda/100$ where $\lambda = 2\pi/k$ represents the wavelength into the homogeneous leads. Displayed in Figure 3.13, adding disorder in the medium surrounding the barrier lowers symmetry the conductance lowers the averaged conductance (red curve). As it has been already shown in [1], adding symmetry provides a broadband-enhanced transmission higher than the transmittance of the barrier (dark blue curve). Surprisingly, this enhancement induced by symmetry is considerably reduced when the barrier is shifted at a subwavelength scale (light blue



FIGURE 3.14 – Decrease of the averaged conductance over 50 realizations, when shifting the barrier of a distance dx from the initially symmetric configuration. The red horizontal dashed line shows the barrier transmittance $N\tau$ and the blue horizontal dashed line shows the conductance of the perfectly symmetrical case. Red : The barrier is shifted in a disordered slab with length L = 5 and mean free path $\ell = 0.140$. Blue : the barrier is shifted in a left-right symmetric disorder slab (same L and ℓ). The frequency is such that N = 300, and the diffusive slab has a length L = 5 and a mean free path $\ell = 0.140$.

curve).

In order to explore this subwavelength sensitivity, we fix the frequency and we shift progressively the barrier from the symmetry axis. The averaged conductance presented in Figure 3.13 shows that the conductance drops rapidly. When, dx approach $\lambda/100$ almost all benefits induced by symmetry is suppressed and reach the limit value of the ordinary disorder configuration when $dx > \lambda/50$ showing a strong and subwavelength sensitivity.

Bibliographie

- CHÉRON, É., FÉLIX, S. & PAGNEUX, V. Broadband-Enhanced Transmission through Symmetric Diffusive Slabs. *Physical Review Letters* 122, 125501 (2019).
- [2] IMRY, Y. & LANDAUER, R. Conductance viewed as transmission. *Reviews of Modern Physics* 71, 7 (1999).
- [3] DOROKHOV, O. On the coexistence of localized and extended electronic states in the metallic phase. Solid State Communications 51, 381-384 (1984).
- [4] MELLO, P., PEREYRA, P. & KUMAR, N. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. Annals of Physics 181, 290-317 (1988).
- [5] BEENAKKER, C. W. J. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of Modern Physics* 69, 731-808 (1997).
- [6] VERRIER, N., DEPRAETER, L., FELBACQ, D. & GROSS, M. Measuring enhanced optical correlations induced by transmission open channels in a slab geometry. *Physical Review B* 93, 161114 (2016).
- [7] PAGNEUX, V. Multimodal admittance method in waveguides and singularity behavior at high frequencies. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **234**, 1834-1841 (2010).
- [8] MAUREL, A., MERCIER, J.-F. & FÉLIX, S. Wave propagation through penetrable scatterers in a waveguide and through a penetrable grating. *The Journal of the Acoustical Society of America* 135, 165-174 (2014).
- [9] MAUREL, A., MERCIER, J.-F. & FÉLIX, S. Modal method for the 2D wave propagation in heterogeneous anisotropic media. *Journal of the Optical Society of America A* 32, 979 (2015).
- [10] GOPAR, V. A., MARTÍNEZ, M., MELLO, P. A. & BARANGER, H. U. The invariant measure for scattering matrices with block symmetries. *Journal of Physics A : Mathematical and General* 29, 881-888 (1996).
- [11] WHITNEY, R. S., SCHOMERUS, H. & KOPP, M. Semiclassical transport in nearly symmetric quantum dots. I. Symmetry breaking in the dot. *Physical Review E* **80**, 056209 (2009).
- [12] KOPP, M., SCHOMERUS, H. & ROTTER, S. Staggered repulsion of transmission eigenvalues in symmetric open mesoscopic systems. *Physical Review B* 78, 075312 (2008).

- [13] YAMILOV, A. & PAYNE, B. Classification of regimes of wave transport in quasi-one-dimensional non-conservative random media. *Journal of Modern Optics* 57, 1916-1921 (2010).
- [14] WHITNEY, R. S., MARCONCINI, P. & MACUCCI, M. Huge Conductance Peak Caused by Symmetry in Double Quantum Dots. *Physical Review Letters* 102, 186802 (2009).
- [15] YAMILOV, A. G. & PAYNE, B. Interplay between localization and absorption in disordered waveguides. Optics Express 21, 11688 (2013).
- [16] BROUWER, P. W. Transmission through a many-channel random waveguide with absorption. *Physical Review B* 57, 10526-10536 (1998).
- [17] CHABANOV, A. A., STOYTCHEV, M. & GENACK, A. Z. Statistical signatures of photon localization. *Nature* 404, 850-853 (2000).
- [18] ROTTER, S. & GIGAN, S. Light fields in complex media : Mesoscopic scattering meets wave control. *Reviews of Modern Physics* 89, 015005 (2017).

Chapitre 4

Propagation d'ondes dans les milieux désordonnés : localisation

Sommaire

4.1 Introduction	
4.2 De la localisation faible à la localisation forte	
4.3 Gel et cristallisation : motif spatial et effets des pertes 93	
4.3.1 Visualisation spatiale du gel du champ dans les milieux localisés $\ldots \ldots 93$	
4.3.2 Gel et cristallisation dans les milieux absorbants	
4.4 Quelquefois le dégel	
4.5 Conclusion	
Bibliographie	

4.1 Introduction

La localisation a initialement été découverte par Anderson en 1958 quand il constate l'absence de diffusion lorsque la propagation d'électrons est réalisée dans un potentiel fortement désordonné [1]. Ses travaux ont ouvert un domaine de recherche à part entière [2, 3] qui ont mené à montrer que ce phénomène n'est pas lié à un aspect quantique mais à un aspect ondulatoire. Il prévoit par conséquent la présence de la localisation pour tout type d'onde cohérente comme les ondes électromagnétiques, les ondes élastiques ou les ondes acoustiques [4-6].

Dans ce chapitre nous étudions particulièrement l'une des caractéristiques propre à ce régime qui repose sur le gel du champ : la forme du champ transmis est indépendante de l'onde incidente. Une visualisation nouvelle du gel est proposée et la robustesse de ce phénomène aux pertes est présentée. Enfin, nous évoquons des cas particuliers où le gel disparait, ouvrant des perspectives à ces travaux.

4.2 De la localisation faible à la localisation forte

Dans un régime localisé, le système se trouve dans une situation où sa longueur L est supérieure à la longueur de localisation $N\ell$ (Figure 4.1). Dans ces conditions, la probabilité pour une onde de retourner vers un même volume cohérent plus d'une fois est non négligeable. Les interférences engendrées dans ce volume emprisonnent les ondes dans des boucles fermées qui restent confinées dans une région finie de l'espace. La conductivité du milieu chute drastiquement, il y a transition entre le régime diffusif et le régime de localisation forte : c'est la localisation d'Anderson [7, 8].

Régime	Régime	Régime
Ballistique	Diffusif	Localisé
]	L I	N S

FIGURE 4.1 – Représentation schématique des différents régimes de transport en fonction de la longueur d'échelle $s = L/\ell$. s = 1 montre la transition entre le régime balistique et le régime diffusif tandis que s = N montre la transition entre le régime de localisation.

La résolution de l'équation DMPK [9-11] dans la limite $s = L/\ell \gg N$ montre que la distribution de la conductance P(g) passe d'une loi Gaussienne propre au régime diffusif à une loi log-normale. La conductance chute de manière exponentielle en fonction de la longueur du milieu et les fluctuations deviennent grandes :

$$\langle \log g \rangle = -2L/N\ell = \frac{1}{2} \operatorname{var}(\log g).$$
 (4.1)

Notons qu'à cause de ces grandes fluctuations la moyenne de la conductance n'est pas bien définie. On considère la moyenne du logarithme de la conductance $\langle \log g \rangle$.

L'observation de la localisation reste cependant complexe car la mesure de la conductance seule ne constitue pas une preuve de la localisation. L'absorption, toujours présente en contexte expérimental, est souvent un problème et le critère de localisation g < 1 ne permet pas de définir un seuil clair entre le régime de diffusion et de localisation. Typiquement, il est préférable de mesurer la variance de la conductance qui demeure relativement insensible aux pertes [12] mais impose aussi de connaître la matrice de transmission complète souvent difficile à mesurer expérimentalement.

4.3 Gel et cristallisation : motif spatial et effets des pertes

Pour déterminer si un système se trouve dans un régime localisé, on peut considérer d'autres propriétés liées à la localisation forte. L'une d'entre elles est aussi prédite par l'équation DMPK [11] dans la limite $s = L\ell \gg N$: la distribution des valeurs propres en transmission (TEV), qui est bimodale en régime diffusif, est modifiée. La transmission s'effectue à travers une seule TEV qui domine les autres comme $1 \gg \tau_1 \gg \tau_2 \gg ... \gg \tau_N$ [13, 14]. Dans ce régime, la distribution des TEV se factorise en un produit de distributions gaussiennes centrées sur une grille régulière. On dit qu'elles se cristallisent.

Pour illustrer cette propriété on compare en Figure 4.2 le spectre de la conductance et les spectres des TEV d'un système comprenant N = 30 modes propagatifs en régime diffusif ($s \simeq 6$) et en régime localisé ($s \simeq 60$). Contrairement au régime diffusif où la conductance est portée par plusieurs TEV, on remarque en régime localisé que le spectre de la conductance suit le spectre de τ_1 tel que $g \simeq \tau_1$. Cela signifie qu'un seul canal propre domine tous les autres et que la figure de tavelure obtenue en transmission ne dépend pas de l'onde incidente : **le champ se gèle**. Cette propriété remarquable a été observée expérimentalement par Shi et col. [15] et l'un de leurs résultats donné en Figure 4.3. Elle présente les figures de tavelures obtenues grâce à l'illumination successive de deux systèmes par deux sources a et a' distinctes. Ils mettent en évidence l'opposition entre un régime diffusif dans lequel les figures de tavelures en transmission ont une dépendance forte à l'illumination avec l'aspect gelé des tavelures lorsque le milieu est localisé.

La cristallisation et le rapport élevé entre les contributions de chaque TEV permettent de mettre en place un critère simple à partir d'une réalisation unique du désordre à fréquence fixe. Lorsque la mesure complète de la matrice de transmission est indisponible, un paramètre de corrélation entre les figures de tavelures a été élaboré et vérifié numériquement [16].

4.3.1 Visualisation spatiale du gel du champ dans les milieux localisés

Pour compléter l'observation et mieux comprendre le gel des figures de tavelures en transmission, on se propose de visualiser le champ à l'intérieur des milieux désordonnés localisés. On considère une réalisation de désordre en régime localisé ($s \simeq 60$) placé dans un guide d'onde supportant N = 30modes propagatifs. Ce guide est excité par deux sources distinctes et on observe successivement les champs dans différentes régions (Figure 4.4). Cette représentation permet de remarquer que le champ est gelé au centre et à la sortie du milieu désordonné mais est sensible à la source à l'entrée.

Pour pouvoir visualiser la transition entre la région sensible à l'excitation et le caractère gelé des



FIGURE 4.2 – Spectre des valeurs propres en transmission (traits pleins en couleurs) et de la conductance (trait noir pointillé) d'un échantillon désordonné placé dans guide d'onde quasi-1D supportant N = 30 modes. Gauche : l'échantillon est en régime diffusif ($s \simeq 6$). Droite : l'échantillon est localisé ($s \simeq 60$).



FIGURE 4.3 – Figure de tavelures en transmission à travers un milieu désordonné éclairé successivement par une source a puis a'. La fréquence est fixée. Le régime est dans un cas diffusif, dans l'autre cas localisé. Ces résultats sont obtenus expérimentalement par Shi et col. [15].

ondes au cours de la propagation, on considère maintenant une réalisation de désordre en régime localisé ($s \simeq 16$) dans un guide comprenant N = 3 modes transverses propagatifs¹. On illumine le milieu par deux sources distinctes puis on observe la totalité des champs en Figure 4.5. Notons que le rapport d'échelle suivant l'axe x et y est ici adapté pour la représentation.

On observe que la partie non gelée représente une région non négligeable du milieu. Le champ se gèle progressivement au cours de la propagation et semble complètement gelé dans la région x > 2L/5.

Puisque le gel du champ est très robuste aux conditions initiales, nous explorons l'évolution du motif spatial du champ lorsque les conditions de sorties sont modifiées. On ajoute pour cela une

^{1.} Notons que pour observer les champs, la résolution numérique est réalisée en considérant $N_e = 10$ modes évanescents.

portion désordonnée de longueur L' = 1/5L au milieu initialement présenté. Représenté en Figure 4.5, on observe que le motif spatial du champ entre le milieu sans et avec longueur ajoutée (qui présente les mêmes caractéristiques de gel lors de la propagation) est modifié dans la région $x \leq L$ mais que des corrélations fortes semblent persister dans la région où le gel prend place.

Nous pensons que cette nouvelle représentation pourrait dans le futur permettre d'étudier les caractéristiques du gel des champs, et de les associer aux répartitions spatiales de la densité d'énergie lorsque le régime de localisation est établi [17, 18].





4.3.2 Gel et cristallisation dans les milieux absorbants

Lorsque les pertes sont introduites, selon le niveau d'absorption quantifié par le libre parcours moyen d'absorption ℓ_a , le passage entre les différents régimes de transports peut être modifié ou supprimé [19]. Dans cette section, nous nous posons la question de l'évolution du caractère gelé et de la cristallisation des TEV lorsque l'absorption empêche toute transition à un régime de localisation.

Considérons pour cela le cas d'un milieu désordonné absorbant dans lequel la propagation des ondes est donnée par l'équation :

$$\Delta\psi(x,y) + k_0^2 \Big[1 + \delta n(x,y) + i\gamma \Big]^2 \psi(x,y) = 0.$$
(4.2)

Comme nous l'avons décrit au chapitre précédent, l'absorption peut être modélisée par un indice complexe $\gamma > 0$ moyen qui prend en compte l'absorption globale dans le milieu et les diffuseurs.

L'absorption est ensuite identifiée en deux catégories grâce à la longueur d'absorption que l'on rapporte à l'échelle d'un libre parcours moyen $s_a = \sqrt{\ell_a/2\ell}$. La première concerne un régime d'absorption forte où $s_a \ll 1$. Dans ce cas, la transmission chute exponentiellement comme $g = N \exp(-L/\ell_a)$ et les mécanismes de localisation et de diffusion sont absents pour ne laisser place qu'à un régime purement absorbant.

Ici, nous nous intéressons plus particulièrement au cas d'une absorption modérée $1 < s_a \ll N$. Dans ce régime, la transition dans le régime de localisation a été empêchée par les mécanismes d'absorption mais un régime de diffusion absorbant s'installe. L'évolution de la conductance est donnée dans ce cas par [12] :

$$g_B(s, s_s a) \simeq \frac{2N}{s_a} \exp(-s/s_a). \tag{4.3}$$

Le milieu étudié est le même que celui décrit précédemment. Il est construit à l'aide d'une réalisation unique de désordre qui, dans le cas sans perte est dans un régime localisé $s \simeq 16$ (pour rappel le guide d'onde supporte N = 3 modes propagatifs). Nous ajoutons de l'absorption à ce milieu de telle sorte à ce que le régime de localisation disparaisse ($s_a \simeq 1.3$). Puis, à l'aide de deux sources distinctes nous comparons en Figure 4.6 le profil spatial des champs dans les cas sans et avec absorption².

On remarque que de manière similaire aux milieux conservatifs, le champ dans le milieu absorbant se gèle progressivement. Cette propriété associée au régime localisé semble donc robuste à l'absorption.

^{2.} Pour pouvoir représenter le champ avec absorption, une échelle logarithmique est choisie





On décide d'étudier l'évolution des propriétés de la cristallisation lorsque les pertes sont introduites à partir des distributions des TEV de ces systèmes. Pour cela, nous basons nos résultats sur des simulations réalisées grâce à la TMA qui nous permettent d'obtenir des ensembles statistiques suffisants.

Deux systèmes sont élaborés. Le premier concerne un cas non absorbant localisé où s = 4N = 40. Nous le comparons à un deuxième, similaire au premier, en ajoutant une absorption de telle sorte que la longueur d'absorption à l'échelle d'un libre parcours moyen soit $s_a = (\ell/\ell_a)^{1/2} = 1$. Dans cette configuration, le régime de localisation à disparu pour laisser place au régime de diffusion absorbant.

Nous comparons en Figure 4.7 la distribution des TEV pour ces deux cas sur un ensemble statistique de 400000 configurations. Comme prévu par la théorie DMPK, on remarque dans le premier cas sans pertes que la distribution des TEV se répartie sur une grille régulière dans laquelle $\log(\tau_2/\tau_1) \simeq 16$. Dans le deuxième cas, l'ajout de perte n'empêche pas la cristallisation des valeurs propres avec $\log(\tau_2/\tau_1) \simeq 7$. Cela signifie que la transmission est toujours dominée par un seul et unique canal et que le gel persiste malgré l'absence d'un régime localisé.



FIGURE 4.7 – a) Distribution des TEV $P(\log(\tau_n))$ à l'aide de simulations RMT en régime localisé (s = 40 et N = 10), le milieu est conservatif. b) même configuration que a) en considérant l'absorption tel que $s_a = 1$.

4.4 Quelquefois le dégel

Cette section a pour objectif de présenter des cas particuliers pour lesquels le gel disparait malgré la localisation.

Soit un milieu désordonné localisé obtenu à l'aide d'une réalisation de désordre ($s \simeq 16$) placé dans un guide comprenant N = 3 modes transverses propagatifs. Il a été vu dans la section précédente que ces systèmes voient leurs TEV se cristalliser et leurs champs se geler progressivement au cours de la propagation des ondes ($\tau_1 \gg \tau_2$). Cependant, lorsque l'on observe l'évolution des TEV en fonction de la fréquence, on peut identifier des situations pour lesquelles τ_2 tend à se rapprocher de τ_1 (Voir la Figure 4.8 et son encadré). Ces fréquences particulières sont intéressantes car la propagation, habituellement dominée par un unique canal propre, est dans ce cas dominée par deux canaux propres.



FIGURE 4.8 – Spectre en transmission de la conductance et des deux premières valeurs propres de la matrice de transmission τ_1 et τ_2 d'un milieu localisé dans lequel N = 3. Encadré : Zoom sur une région ou la deuxième valeur propre tends à se rapprocher de la première.

On propose en Figure 4.9 de reconstruire les champs dans ces situations. À gauche (Figure 4.9a et 4.9a'), l'excitation est réalisée à une fréquence où un mode domine les autres tel que $\tau_2/\tau_1 \simeq 10^{-5}$ et à droite (Figure 4.9b et 4.9b') une fréquence particulière où deux canaux portent la transmission $\tau_2/\tau_1 \simeq 1$.

Les figures 4.9b et 4.9b' représentent quant à elles les profils des champs transverses transmis et normalisés $|p(L, y)|^2$ issus de la résolution de l'équation d'onde lorsque les milieux sont éclairés par deux sources distinctes. Leurs profils spatiaux dans la région 46/50L < x < L sont représentés en figures 4.9c et 4.9c'.

On remarque que le champs à la sortie de l'échantillon présente le caractère gelé déjà observé précédemment dans la première situation $(\tau_2/\tau_1 \simeq 10^{-5})$ mais qui disparait dans la seconde situation



 $(\tau_2/\tau_1 \simeq 1)$. Nous nommerons "dégel", l'absence de gel du champ malgré que le régime de localisation soit installé.

FIGURE 4.9 – Zoom sur les spectres de g, τ_1 et τ_2 dans un cas où a) le ratio $\tau_2/\tau_1 \ll 10^{-5}$ et dans un cas ou a') $\tau_2/\tau_1 \simeq 1$. Les lignes pointillées donnent les fréquences utilisée pour reconstruire les champs. Deux sources distinctes sont considérées. En b) et b') les champs transverses |p(L, y)| sont représentés. En c) et c') sont tracés les modules des champs à la sortie du guide désordonné.

On propose d'étudier la localisation via l'approche initialisée par Edwards et Thouless dans les années 70 [20]. Ils proposent de décrire les systèmes complexes à partir d'un paramètre unique défini comme le rapport entre deux temps caractéristiques. L'idée est de considérer l'excitation des milieux désordonnés comme la superposition de modes résonants internes (QNM pour quasi-Normal Modes). Contrairement à un système fermé ces QNM possèdent des fréquences de résonances complexes qui traduisent les pertes aux limites du milieu ouvert. Lorsqu'un mode est étendu, sa transmission est constante quelle que soit la longueur de l'échantillon. Plus un mode est localisé en espace moins il sera sensible aux conditions aux limites imposées aux extrémités du milieu contrairement à un mode étendu.

Une façon de quantifier cette sensibilité est de mesurer la largeur caractéristique des QNMs, $\delta \omega$ qui peut être mise en relation avec le temps nécessaire pour l'onde de traverser le milieu (appelé temps de Thouless). Cette largeur fréquentielle caractéristique est alors comparée avec l'espacement fréquentiel moyen entre chaque QNM $\Delta \omega$ qui peut être mis en relation avec le plus long temps nécessaire à l'onde pour retourner dans un volume cohérent. Le ratio entre largeur moyenne et l'espacement moyen entre deux QNM $\delta = \frac{\delta \omega}{\Delta \omega}$ donne ainsi un critère pour déterminer les régimes de transport. En régime diffusif, le temps de parcours des ondes est court, les QNMs se chevauchent : $\delta \omega > \Delta \omega$. À contrario, en régime localisé les ondes restent emprisonnées dans le milieu, leur temps de parcours est long, les QNMs ne se chevauchent pas : $\delta \omega < \Delta \omega$.

Si l'on observe l'évolution de la conductance en fonction de la fréquence, des pics de transmissions s'établissent lorsque la fréquence d'excitation du milieu correspond à la résonance d'un QNM et le canal propre en transmission dominant s'aligne sur le profil spatial du QNM [21-23].

L'objectif initial est d'associer le dégel du champ à la transition entre deux QNM distincts. Cependant, lorsque l'on compare en Figure 4.10 l'évolution de la conductance en fonction de la fréquence avec l'évolution du rapport τ_2/τ_1 (qui nous renseigne sur les fréquences où le champ dégèle) on remarque que deux résonances de QNMs successives ne sont pas systématiquement séparées par un dégel du champ.

On remarque aussi que la résonance d'un QNM ne semble pas pouvoir coïncider avec un dégel. Cependant, l'espacement moyen entre chaque dégel et l'espacement moyen entre deux résonances semble régulier. Nous pensons qu'une relation intime persiste entre les résonances propres des milieux et l'évolution des ses TEV.



FIGURE 4.10 – Spectre en transmission de la conductance et du rapport τ_2/τ_1 . Le milieu, en régime localisé $s \simeq 16$ supporte N = 3 modes transverses propagatifs et $N_p = 10$ modes transverses évanescents.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la propagation d'onde dans les guides quasi-1D dans lesquels un régime de transport localisé est installé. On s'est focalisé sur certaines caractéristiques associées aux effets cohérents dans ce régime : les valeurs propres en transmission se cristallisent et la transmission est dominée exponentiellement par un unique canal propre. Nous avons pu observer le gel progressif du champ à l'intérieur des milieux désordonnés qui nous ont permis de montrer que le champ au cours de sa propagation devient progressivement insensible à l'excitation du système.

En introduisant l'absorption, le régime de localisation laisse place à un régime de transport diffusif absorbant. Or, malgré l'absence de localisation, les valeurs propres se repartissent toujours sur une grille régulière et conservent un canal en transmission dominant. Le gel du champ dans ces conditions d'absorption à pu être observé à l'intérieur des milieux.

L'étude des spectres des valeurs propres montre que malgré la cristallisation, la deuxième valeur propre tends parfois à se rapprocher de la première. Lorsque les systèmes sont excités à ces fréquences, la transmission est dominée par 2 canaux propres et le dégel du champ a pu être observé. Afin d'expliquer ce dégel nous avons proposé une piste d'étude à partir des pics en transmission en régime localisé. Ces pics, qui sont associés aux modes de résonances interne des milieux (QNM), ont pour caractéristique d'être alignés avec les canaux propres dominants lorsque la fréquence d'excitation correspond à la résonance du QNM. Nous avons mis en évidence des caractéristiques équivalentes entre les fréquences d'apparitions de ces dégels et les fréquences d'apparitions des pics en transmission qui nécessitent une étude future approfondie pour comprendre les relations et les mécanismes à l'origine de ces observations.

Bibliographie

- ANDERSON, P. W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review* 109, 1492-1505 (1958).
- [2] AKKERMANS, E. & MONTAMBAUX, G. Mesoscopic Physics of Electrons and Photons (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [3] LAGENDIJK, A., TIGGELEN, B. v. & WIERSMA, D. S. Fifty years of Anderson localization. *Physics Today* 62, 24-29 (2009).
- [4] WIERSMA, D. S., BARTOLINI, P., LAGENDIJK, A. & RIGHINI, R. Localization of light in a disordered medium. 390, 671-673 (1997).
- [5] CHABANOV, A. A., STOYTCHEV, M. & GENACK, A. Z. Statistical signatures of photon localization. *Nature* 404, 850-853 (2000).
- [6] HU, H., STRYBULEVYCH, A., PAGE, J. H., SKIPETROV, S. E. & van TIGGELEN, B. A. Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Physics* 4, 945-948 (2008).
- [7] Van ROSSUM, M. C. W. & NIEUWENHUIZEN, T. M. Multiple scattering of classical waves : microscopy, mesoscopy, and diffusion. *Reviews of Modern Physics* 71, 313-371 (1999).
- [8] GARCÍA-MARTÍN, A. & SÁENZ, J. Statistical properties of wave transport through surfacedisordered waveguides. Waves in Random and Complex Media 15, 229-268 (2005).
- [9] DOROKHOV, O. On the coexistence of localized and extended electronic states in the metallic phase. Solid State Communications 51, 381-384 (1984).
- [10] MELLO, P., PEREYRA, P. & KUMAR, N. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. Annals of Physics 181, 290-317 (1988).
- [11] BEENAKKER, C. W. J. & RAJAEI, B. Exact solution for the distribution of transmission eigenvalues in a disordered wire and comparison with random-matrix theory. *Physical Review B* 49, 7499-7510 (1994).
- [12] BROUWER, P. W. Transmission through a many-channel random waveguide with absorption. *Physical Review B* 57, 10526-10536 (1998).
- [13] BEENAKKER, C. W. J. Random-matrix theory of quantum transport. *Reviews of Modern Physics* 69, 731-808 (1997).

- [14] ROTTER, S. & GIGAN, S. Light fields in complex media : Mesoscopic scattering meets wave control. *Reviews of Modern Physics* 89, 015005 (2017).
- [15] SHI, Z. & GENACK, A. Z. Transmission Eigenvalues and the Bare Conductance in the Crossover to Anderson Localization. *Physical Review Letters* **108**, 043901 (2012).
- [16] LESEUR, O., PIERRAT, R., SÁENZ, J. J. & CARMINATI, R. Probing two-dimensional Anderson localization without statistics. *Physical Review A* 90, 053827 (2014).
- [17] DAVY, M., SHI, Z., PARK, J., TIAN, C. & GENACK, A. Z. Universal structure of transmission eigenchannels inside opaque media. *Nature Communications* 6, 6893 (2015).
- [18] NEUPANE, P. & YAMILOV, A. G. Applicability of the position-dependent diffusion approach to localized transport through disordered waveguides. *Physical Review B* 92, 014207 (2015).
- [19] YAMILOV, A. & PAYNE, B. Classification of regimes of wave transport in quasi-one-dimensional non-conservative random media. *Journal of Modern Optics* 57, 1916-1921 (2010).
- [20] EDWARDS, J. T. & THOULESS, D. J. Numerical studies of localization in disordered systems. Journal of Physics C: Solid State Physics 5, 807-820 (1972).
- [21] PEÑA, A., GIRSCHIK, A., LIBISCH, F., ROTTER, S. & CHABANOV, A. A. The single-channel regime of transport through random media. *Nature Communications* 5, 3488 (2014).
- [22] DAVY, M. & GENACK, A. Z. Selectively exciting quasi-normal modes in open disordered systems. *Nature Communications* 9, 4714 (2018).
- [23] WANG, J., SHI, Z., DAVY, M. & GENACK, A. Z. Wave Propagation and Localization via Quasi-Normal Modes and Transmission Eigenchannels. International Journal of Modern Physics : Conference Series 11, 1-11 (2012).

Conclusion générale et perspectives

Dans ce manuscrit nous avons étudié la propagation d'ondes guidées en milieux désordonnés. Le premier chapitre a permis développer le formalisme matriciel usuel pour l'étude des différents régimes de transport dans une géométrie quasi-1D. Les principaux phénomènes et effets connus liés au transport cohérent des ondes, comme les fluctuations de conductance, la répartition bimodale des valeurs propres en transmission ou encore la répartition spatiale universelle de la densité d'énergie ont été présenté grâce à une méthode multimodale appliquée à l'équation d'onde. Cette méthode, utilisée tout au long de ce manuscrit, est complétée avec une méthode basée sur la théorie des matrices aléatoires.

Nous avons ensuite montré dans le chapitre 2 comment la transmission à travers une barrière opaque dans un guide d'ondes est significativement améliorée lorsque deux milieux diffusants symétriques sont ajoutés de part et d'autre de la barrière. Ce gain, large bande, n'est pas un effet de résonance local mais est directement lié aux interférences constructives induit par la symétrie.

Alors qu'une barrière opaque n'a que des canaux fermés, la distribution des valeurs propres en transmission, donnée par la distribution bimodale, est récupérée une fois que des portions de milieux diffusifs symétriques sont ajoutées. Ce gain est observable pour des barrières dont la transmittance est inférieure à une valeur universelle $\tau_c \simeq 0.4$ que nous déduisons à l'aide d'un modèle d'échelle simple vérifié numériquement. Il permet d'ajuster ou d'optimiser ce gain en transmission en fonction des paramètres d'échelle des milieux.

Pour compléter cette étude, nous avons également abordé le problème de scattering par une approche énergétique. Elle a permis d'introduire l'équation du transfert radiatif ainsi que l'équation de diffusion que nous avons comparé selon deux approches. Le problème de scattering a été abordé à partir de mécanismes balistique et diffusif ou à partir d'une analyse comparable à une description multimodale en guide d'ondes. Enfin, un modèle pour prédire la transmission à travers un milieu diffusant séparé par une barrière opaque sans symétrie a été trouvé. On a montré que l'ajout d'une barrière opaque peut se rapporter à l'ajout d'une résistance supplémentaire en série avec la résistance du milieu diffusif.

Le chapitre 3 a permis d'étudier la sensibilité de ce gain en transmission aux défauts de symétries. On montre que la détérioration du gain associée aux défauts de symétrie, ne dépend que de la position du premier défaut à la barrière. Alors qu'un défaut situé loin de l'axe de symétrie est négligeable sur le gain en transmission observé, un défaut situé près de la barrière supprime tout bénéfice à la symétrie. Grâce à un modèle probabiliste, la conductance d'un milieu comprenant un nombre de défauts répartis
aléatoirement est reconstruite.

En réalité, l'absorption est toujours présente. Elle est souvent source de problèmes pour visualiser de certains phénomène expérimentalement. Les pertes doivent être prises en compte dans les modèles afin de pouvoir interpréter et comprendre avec précision les expériences. En introduisant les pertes dans nos modèles, nous avons étudié la robustesse du gain en transmission face à l'absorption. On montre que la longueur d'absorption, une fois rapportée au libre parcours moyen (s_a) , détermine directement le gain maximal auquel un milieu diffusif symétrique peut prétendre. Ce gain maximal est $g_{opt}/N\tau = 0.48s_a + 0.23$. Dans le cas où l'absorption des ondes acoustiques ou électromagnétiques est connue, cette relation simple permet de dimensionner les systèmes symétriques pour une éventuelle mise en évidence expérimentale de ce phénomène qui constitue une perspective directe à ces travaux.

Dans le chapitre 4, un tout autre régime de transport est étudié. Lorsque la taille du milieu devient grande face à la longueur de localisation, le régime de transport diffusif laisse place à un régime localisé où la transmission est supprimée. Dans ces conditions, les propriétés du transport sont modifiées et donnent aux milieux des caractéristiques particulières. Parmi elles, nous nous sommes concentré sur la cristallisation des valeurs propres en transmission et la prédominance d'un canal propre qui domine les autres. Nous avons pu mettre en évidence l'aspect gelé du profil spatial du champ et son insensibilité à différentes excitations. La particularité de ce travail est que nous avons pu observer les champs à l'intérieur même du milieu ce qui nous a permis de visualiser le gèle progressif du champ au cours de la propagation.

L'absorption affecte de manière significative les propriétés du transport et modifie les transitions dans les différents régimes. Lorsque les pertes sont introduites nous avons montré que la cristallisation et le gèle persistent.

Enfin, on a mis en évidence qu'en fonction de la fréquence d'excitation d'un système localisé, la seconde valeur propre en transmission tend parfois à se rapprocher de la première malgré la cristallisation. À ces fréquences particulières on a observé le dégèle du champ. Nous avons exploré cette particularité en parallèle avec la répartition des modes de résonances internes des systèmes ce qui ouvre des perspectives pour étudier les mécanismes responsables de ces observations.

Durant cette thèse, plusieurs autres aspects de la propagation d'ondes dans les milieux désordonnés ont été initiés. Nous présentons quelques résultats préliminaires qui donnent des perspectives et des pistes de recherches pour des études futures.

Convergence et effet des modes évanescents dans l'étude des milieux désordonnés : Les résultats obtenus dans ce manuscrit sont réalisés à l'aide d'une méthode numérique basée sur un formalisme multimodal de la propagation. Dans ce cadre, nous avons porté une attention particulière à la prise en compte des modes transverses évanescents pour résoudre l'équation d'onde.

Les modes évanescents dont l'enveloppe spatiale est exponentiellement décroissante, provoquent des effets de champ proche qui ne transportent pas d'énergie et n'interviennent pas dans la mesure du transport. La matrice de transmission est généralement mesurée loin des systèmes désordonnés et pour limiter les coûts de calculs, l'usage est en général de négliger ces modes évanescents.

Cependant, lorsque l'on étudie des milieux diffusifs ou localisés, la distance inter-diffuseur est amenée à diminuer et les couplages via les modes évanescents deviennent important. La conséquence directe est que l'observation des champs à l'intérieur des milieux oblige la prise en compte de ces modes pour faire converger la solution numérique vers une solution correcte (Figure 4.11a). Dans ce manuscrit, tous les champs observés ont été calculés en prenant compte d'un nombre N_e suffisant de modes évanescents. Pour cela, il a été nécessaire d'augmenter N_e progressivement afin de trouver une solution finale correcte. La Figure 4.11b montre un exemple numérique de l'erreur relative commise sur l'évaluation de la matrice de transmission en fonction du nombre de modes évanescents pris en compte dans la résolution. On remarque que la convergence est régulière et dépend du taux de remplissage de diffuseurs dans le milieu (noté p) mais reste à étudier dans le cadre de travaux futurs.

Remarque : En ce qui concerne les quantités moyennées, si l'indice moyen du milieu désordonné est égal à l'indice du milieu homogène les modes évanescents peuvent être négligés. Dans le cas contraire, ils doivent être pris en compte ou une renormalisation de ℓ doit être considérée [1, 2].



FIGURE 4.11 – Champs issus de la résolution de l'équation d'onde dans un milieu désordonné avec N = 30 modes propagatifs et en considérant N_e modes évanescents .

Transmission et répartition de la densité d'énergie dans les guides d'ondes désordonnés courbes : Évoqué au chapitre 1, la répartition universelle de la densité d'énergie à l'intérieur des milieux peut être modifiée en fonction de la géométrie des milieux permettant d'accéder à un nouveau degré de liberté pour le contrôle des ondes. Ces études qui ouvrent de nombreuses perspectives pour l'imagerie dans les milieux complexes, ont été menées en particulier en considérant une section variable des guides quasi-1D [3-6]. Dans cette optique, d'autres types de modifications sont envisageables.

Dans les guides d'ondes homogènes, si l'on considère un rayon qui se réfléchie sur des parois successivement courbées et droites selon les lois de Snell-Descartes, ce rayon adopte des comportements chaotiques similaires à ceux engendrés par les billards quantiques (billards de Sinaï ou stades de Bunimovich) [7, 8]. On peut imaginer que pour les milieux désordonnés ces variations géométriques, qui engendrent de la diffusion supplémentaire, puissent modifier le transport et de la répartition spatiale de la densité d'énergie.

L'un des avantages de l'approche multimodale appliquée à l'équation d'onde est qu'elle permet d'intégrer ce type de variations géométriques (Figure 4.12) [9, 10] et se présente comme une méthode adaptée à l'étude de ces systèmes.



FIGURE 4.12 – Représentation des champs dans des guides d'ondes courbes désordonnés. À gauche, le guide est un quart de cercle dans lequel des rayons géométriques directes sans réflexions sont disponibles. À droite, le guide est un 3/4 de cercle. Il n'est pas possible de trouver de rayons géométriques directes de l'entrée vers la sortie.

Propagation et transmission dans les labyrinthes : Soit un guide d'onde quasi-1D homogène dans lequel est placé un ensemble d'obstacles (murs, barrières, etc). Si une ou plusieurs valeurs propres proches de l'unité sont disponibles, il est possible de transmettre ou réfléchir les ondes parfaitement grâce aux canaux propres en transmission [11]. Après avoir élaboré deux types de labyrinthes dans lesquels une ou plusieurs valeurs propres proches de l'unité en transmission sont disponibles (voir Figure 4.13), on observe les champs lorsqu'un canal ouvert est excité. On remarque que la répartition spatiale des champs à l'intérieur des labyrinthes est de nature différente. Dans le premier cas, un faisceau d'onde est visible. Dans le second, tout le labyrinthe (y compris les chemins "sans issues") est illuminé. Dans le but d'optimiser et d'améliorer le chemin emprunté par les ondes, une solution envisageable est d'utiliser une méthode proposée initialement par Rotter et col. Ils proposent d'ajouter une information de temps de passage des ondes dans les milieux à l'aide d'une matrice Hermitienne appelée Wigner Smith Time Delay Matrix, obtenue à partir de la matrice de scattering [12]. Ils montrent numériquement pour les cavités régulières, chaotiques et désordonnées qu'il est possible



FIGURE 4.13 – Représentations de champs dans des guides d'ondes dans lequel sont placés des labyrinthes. Les champs incidents correspondent aux canaux associés aux plus grandes valeurs propres $\tau_1 \simeq 1$.

de créer un faisceau d'onde optimisé transmis si une base commune entre les valeurs propres de la matrice de transmission et la Wigner Smith Delay Matrix est trouvée. L'adaptation de cet outil à la propagation dans des labyrinthes pourrait présenter un axe de travail futur dans le but de construire un seuil entre une solution "simple" pour laquelle un faisceau d'onde traverse le milieu et une solution plus "complexe" pour laquelle la totalité du labyrinthe est illuminée.

Propagation dans les milieux hyper-uniformes : Le principe des cristaux phononiques et photoniques est de construire des structures périodiques de matériaux pour lesquelles les interférences dominent le transport des ondes. Elles présentent en général des bandes de fréquences, appelées bandes interdites, dans lesquelles la propagation est stoppée et qui dépendent de la géométrie et de la périodicité du milieu.

D'autres solutions pour construire des matériaux avec des propriétés similaires ont récemment été proposées en introduisant le concept d'hyper-uniformité [13, 14]. Ces structures aussi bien présentes à l'état naturel que produites de manière artificielle font la jonction entre les milieux désordonnés et périodiques grâce à des corrélations géométriques qui modifient les degrés de désordre selon les échelles d'observation. Les études concernant la propagation d'ondes dans de telles structures ont montré que les milieux pouvaient être également entièrement transparents ou opaques en fonction des longueurs d'ondes considérées et permettent de combiner certaines propriétés associées aux milieux diffusifs avec les propriétés associées aux milieux périodiques [15-18].

À titre d'exemple, la Figure 4.14 montrent un milieu désordonné et un milieu hyper-uniforme auquel on associe un facteur de structure S(k). Ce facteur qui représente dans l'espace de Fourier les corrélations géométriques entre les diffuseurs (un autre facteur de structure qui intègre l'indice des diffuseurs ainsi que l'angle de scattering peut-être aussi utilisé) donne une information sur la capacité du milieu à produire du scattering en fonction de la longueur d'onde. Ici, un milieu de type "Stealthy" est présenté³ pour lequel le facteur de structure $S(k) \to 0$ lorsque $k < k_c$ et S(k) > 0 pour $k > k_c$. Ici, k_c représente un nombre d'onde de coupure qui dépend du degré de corrélation du désordre [14].



FIGURE 4.14 – Exemples de répartition désordonnée et hyper-uniforme de diffuseurs dans un espace à 2 dimensions pour lesquels on associe le facteur de structure, S(k) correspondant. Dans le cas désordonné, le facteur de structure est homogène en fonction de k. Dans le cas hyper-uniform $S(k) \rightarrow 0$ lorsque $k < k_c$ et S(k) > 0 pour $k > k_c$

Dans le but d'élaborer de nouveaux matériaux pour contrôler la propagation et la transmission des ondes, l'étude des propriétés statistiques de ces milieux, comme les fluctuations de conductance, la distribution des valeurs propres ou encore les corrections liées à la localisation faible, constituent un axe de recherche prometteur dans le prolongement de ces travaux.

^{3.} On utilise la procédure explicitée dans la référence [16] pour générer ce milieu hyper-uniforme.

Bibliographie

- [1] PAYNE, B., MAHLER, T. & YAMILOV, A. G. Effect of evanescent channels on position-dependent diffusion in disordered waveguides. *Waves in Random and Complex Media* **23**, 43-55 (2013).
- [2] YÉPEZ, M. & SÁENZ, J. J. Contribution of evanescent waves to the effective medium of disordered waveguides. *EPL (Europhysics Letters)* 108, 17006 (2014).
- [3] YAMILOV, A., PETRENKO, S., SARMA, R. & CAO, H. Shape-dependence of transmission, reflection and absorption eigenvalue densities in disordered waveguides with dissipation. *Physical Review B* 93, 100201 (2016).
- [4] SARMA, R., YAMILOV, A. G., PETRENKO, S., BROMBERG, Y. & CAO, H. Control of Energy Density inside a Disordered Medium by Coupling to Open or Closed Channels. *Physical Review Letters* 117, 086803 (2016).
- [5] SARMA, R., YAMILOV, A., NEUPANE, P. & CAO, H. Using geometry to manipulate long-range correlation of light inside disordered media. arXiv :1505.02383 [physics] (2015).
- [6] KOIRALA, M., SARMA, R., CAO, H. & YAMILOV, A. Inverse Design of Perfectly Transmitting Eigenchannels in Scattering Media. *Physical Review B* 96, 054209 (2017).
- [7] DITTRICH, T., DORON, E. & SMILANSKY, U. Classical diffusion, Anderson localization, and spectral statistics in billiard chains. *Journal of Physics A : Mathematical and General* 27, 79-114 (1994).
- [8] FÉLIX, S. & PAGNEUX, V. Ray-wave correspondence in bent waveguides. Wave Motion 41, 339-355 (2005).
- [9] FÉLIX, S. & PAGNEUX, V. Sound propagation in rigid bends : A multimodal approach. The Journal of the Acoustical Society of America 110, 1329-1337 (2001).
- [10] PAGNEUX, V. Multimodal admittance method in waveguides and singularity behavior at high frequencies. Journal of Computational and Applied Mathematics 234, 1834-1841 (2010).
- [11] GÉRARDIN, B., LAURENT, J., DERODE, A., PRADA, C. & AUBRY, A. Full Transmission and Reflection of Waves Propagating through a Maze of Disorder. *Physical Review Letters* 113, 173901 (2014).

- [12] ROTTER, S., AMBICHL, P. & LIBISCH, F. Generating Particlelike Scattering States in Wave Transport. *Physical Review Letters* 106, 120602 (2011).
- [13] BATTEN, R. D., STILLINGER, F. H. & TORQUATO, S. Classical disordered ground states : Superideal gases and stealth and equi-luminous materials. *Journal of Applied Physics* 104, 033504 (2008).
- [14] FLORESCU, M., TORQUATO, S. & STEINHARDT, P. J. Designer disordered materials with large, complete photonic band gaps. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106, 20658-20663 (2009).
- [15] LESEUR, O., PIERRAT, R. & CARMINATI, R. High-density hyperuniform materials can be transparent. Optica 3, 763 (2016).
- [16] FROUFE-PÉREZ, L. S. et al. Role of Short-Range Order and Hyperuniformity in the Formation of Band Gaps in Disordered Photonic Materials. *Physical Review Letters* **117**, 053902 (2016).
- [17] TORQUATO, S., ZHANG, G. & STILLINGER, F. H. Ensemble Theory for Stealthy Hyperuniform Disordered Ground States. *Physical Review X* 5, 021020 (2015).
- [18] FROUFE-PÉREZ, L. S., ENGEL, M., SÁENZ, J. J. & SCHEFFOLD, F. Band gap formation and Anderson localization in disordered photonic materials with structural correlations. *Proceedings* of the National Academy of Sciences **114**, 9570-9574 (2017).

UNIVERSITE BRETAGNE SCIENCES LOIRE POUR L'INGENIEUR



Titre : Guides d'ondes et transport dans les milieux désordonnés : effets de la symétrie et de la localisation.

Mots clés : Milieux complexes et désordonnés, régimes de transport, symétrie spatiale, diffusion, localisation, propagation guidée.

Résumé : Dans cette thèse est étudiée la propagation dans les guides d'ondes désordonnés. Dans un premier temps, les concepts et les outils de base pour l'étude de la propagation en guide d'onde complexe sont introduits. Nous présentons les différents régimes de transport et les phénomènes liés aux effets cohérents (comme les fluctuations universelles de conductance, l'augmentation de la rétrodiffusion cohérente ou la localisation d'Anderson).

Outres les phénomènes remarquables associés au transport diffusif, les effets cohérents des ondes dans les milieux désordonnés se manifestent aussi lorsque la distribution spatiale des diffuseurs présente des symétries. Une observation d'un gain significatif et large de la transmission au travers de barrières opaques fait l'objet d'une deuxième partie. Puis la sensibilité du gain en transmission aux défauts de symétrie est étudiée dans le troisième temps. Les limites liées à l'absorption, toujours présente dans un contexte expérimental, sont inspectées.

La quatrième partie de ses travaux se focalise sur l'une des signatures du régime de localisation : la propagation à l'intérieur des milieux isolants est insensible à la source d'excitation. Nous présentons particuliers auelaues cas ou cette propriété est rompue. Enfin, plusieurs études préliminaires liées à d'autres phénomènes de propagation en milieu complexe sont discutées comme perspectives à ce travail.

Title: Waveguides and transport in disordered media: Effects of symmetry and localization.

Keywords : Complex and disordered media, transport regime, spatial symmetry, diffusion, localization, waveguide.

In this thesis, the propagation in disordered waveguides is studied. First, the basic concepts and tools are introduced in order to study guided wave propagation. We present the different transport regimes and phenomena related to coherent effects (such as universal conductance fluctuations, enhanced coherent backscattering or Anderson's localization).

In addition to the remarkable phenomena associated with diffusive transport, the coherent effects of waves in disordered media also occur when the spatial distribution of the scatterers displays symmetries. A second part is devoted to the observation of a significant and broadband enhancement in transmission through opaque barriers.

Then the sensitivity of this enhancement to symmetry defects is studied. Then we inspect the effect of absorption that always occurs in an experimental context. The fourth part of his work focuses on one of the signatures of the localization regime: the propagation within the insulating media is insensitive to the source of excitation. We present some special cases where this property is broken. Finally, several preliminary studies related to other propagation phenomena in complex environments are discussed as perspectives.