



**HAL**  
open science

# Analyse et commande de systèmes multivariables. Application à un turbopropulseur.

Christophe Le Brun

► **To cite this version:**

Christophe Le Brun. Analyse et commande de systèmes multivariables. Application à un turbopropulseur.. Autre. CentraleSupélec, 2015. Français. NNT : 2015CSUP0012 . tel-02918193

**HAL Id: tel-02918193**

**<https://theses.hal.science/tel-02918193>**

Submitted on 20 Aug 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : 2015-12-TH

## CentraleSupélec

ECOLE DOCTORALE STITS

« Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes »

### THÈSE DE DOCTORAT

DOMAINE : STIC

Spécialité : Automatique

Soutenue le 26 juin 2015

Par :

**Christophe LE BRUN**

### Analyse et commande de systèmes multivariables Application à un turbopropulseur

<b>Directeur de thèse :</b>	Emmanuel GODOY	Professeur (CentraleSupélec)
<b>Encadrants de thèse :</b>	Dominique BEAUVOIS Ricardo NOGUERA	Professeur (CentraleSupélec) Maître de conférences (Arts et Métiers ParisTech)
<b>Encadrants industriels :</b>	Nicolas DONCQUE Gwenolé LE PACHE Bogdan LIACU	Ingénieur (Snecma) Ingénieur (Snecma) Ingénieur (Snecma)
<b><u>Composition du jury :</u></b>		
<i>Président du Jury :</i>	Mohamed DJEMAI	Professeur des Universités (Université de Valenciennes)
<i>Rapporteurs :</i>	Frédéric KRATZ Xuefang LIN-SHI	Professeur des Universités (INSA Centre Val de Loire) Professeur des Universités (INSA de Lyon)
<i>Examineurs :</i>	Emmanuel GODOY Saïd MAMMAR Hugues MOUNIER Ricardo NOGUERA Thierry SCHMITT	Professeur (CentraleSupélec) Professeur des Universités (Université d'Evry) Professeur des Universités (Université Paris-Sud) Maître de conférences (Arts et Métiers ParisTech) Chef du département Avant-projets (Snecma)
<i>Membres invités :</i>	Dominique BEAUVOIS Bogdan LIACU	Professeur (CentraleSupélec) Ingénieur Régulation Avant-projets (Snecma)



## Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ces travaux de thèse.

En premier lieu, je tiens à exprimer mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Emmanuel Godoy, pour avoir dirigé cette thèse et m'avoir permis de la réaliser dans les meilleures conditions. Au-delà de l'appui scientifique important qu'il m'a apporté, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Dominique Beauvois, pour la rigueur et la patience qu'il a déployées pour faire avancer mes travaux. Je remercie aussi Ricardo Noguera pour ses conseils et encouragements.

J'adresse mes remerciements à Gwenolé Le Pache, Nicolas Doncque et Bogdan Liacu, pour le soutien inconditionnel qu'ils m'ont apporté durant ces années de thèse. Merci également pour leur excellent encadrement qui a contribué au bon déroulement de cette thèse.

Je remercie également à Patrick Boucher, Didier Dumur, Farid Bakir, Thierry Schmitt, Marc Missout, Nicolas Gueit, et Pierre Lalonde, pour m'avoir fait confiance et accueilli au sein des différentes structures dans lesquelles j'ai eu le plaisir de travailler.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres du jury, en particulier aux rapporteurs Xuefang Lin-Shi et Frédéric Kratz.

Ma reconnaissance va également à l'ensemble du corps enseignant du département Automatique de Supélec pour leurs contributions et pour les pauses tarot du midi. Je pense notamment à Guillaume Sandou, Sorin Olaru, Pedro Rodriguez, Cristina Vlad, Cristina Stoica, Sihem Tebbani, Gilles Duc ainsi qu'à Léon Marquet et Pascale Lepeltier.

Je remercie tous les doctorants pour la bonne ambiance de travail, notamment Maud, Marjorie, Ionela, Liz, Miassa, Younane, Seif, Djawad, Sophie...

Je remercie l'ensemble de mes collègues de Snecma, et en particulier Thomas, Hadrien, Willy, Frédéric, Ana, pour les bons moments passés ensemble et pour leurs suggestions avisées. Je remercie également Typhaine, Sébastien, Bogdan, Charles et Cédric pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail ainsi que pour leurs remarques constructives.

Mes remerciements vont aussi à mes amis de longue date, Paul, Nicolas, Olivier, Guilhem pour tous les bons moments passés durant ces trois années.

Enfin, j'exprime ma gratitude à mes parents, à ma sœur et au reste de ma famille, qui m'ont accompagné et épaulé tout au long de cette thèse. Je remercie tout particulièrement ma compagne Elisabeth pour m'avoir soutenu durant toute cette période, et notamment durant les longs mois de rédaction.





## Publications

### Conférences internationales avec actes

Le Brun C., Godoy E., Beauvois D., Le Pache G., Noguera R., "Modeling and Analysis of a Turbojet Fuel System", *International Conference on Computer Modeling and Simulation (ICCMS), Barcelone, Espagne, 20-21 février 2014*

Le Brun C., Godoy E., Beauvois D., Donque N., Noguera R., "Multi-loop Control using Gershgorin and Ostrowski bands", *International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), Vienne, Autriche, 1-3 septembre 2014*

Le Brun C., Godoy E., Beauvois D., Liacu B., Noguera R., "Control Laws Design of a Turboprop Engine", *International Conference on Mechanics and Control Engineering (ICMCE), Asheville, États-Unis, 26-28 octobre 2014*

Le Brun C., Godoy E., Beauvois D., Liacu B., Noguera R., "Analysis and Control of a Turboprop Engine", *International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), Colmar, France, 21-23 juillet 2015*

### Publications dans des revues internationales

Le Brun C., Godoy E., Beauvois D., Le Pache G., Noguera R., "Modeling and Analysis of a Turbojet Fuel System", (*ICCMS 2014*) - *IJCTE 2014 Volume 6, Issue 3, pp. 260-266*

Le Brun C., Godoy E., Beauvois B., Liacu B., Noguera R., "Control Laws Design of a Turboprop Engine", (*ICMCE 2014*) - *Applied Mechanics and Materials Volume 704, pp. 362-367*



# Sommaire

Remerciements .....	3
Publications .....	5
Sommaire .....	7
Notations .....	11
Liste des figures .....	17
Liste des tableaux .....	21
Introduction .....	23
Chapitre I. Analyse des interactions .....	26
I1. Introduction .....	27
I1a. Définition .....	27
I1b. Problèmes liés aux interactions .....	27
I1c. Objectifs de l'analyse des interactions .....	29
I1d. Méthodologie de comparaison des méthodes d'analyse des interactions .....	30
I2. Méthodes d'analyse des interactions .....	31
I2a. Méthodes fréquentielles .....	31
I2b. Méthodes temporelles .....	39
I2c. Méthodes des grammiens .....	39
I2d. Méthodes liées aux perturbations .....	41
I2e. Méthodes d'analyse post-synthèse .....	42
I2f. Étude comparative .....	43
I2g. Procédure d'analyse des interactions .....	46
I3. Application de la procédure d'analyse des interactions au système de cuves .....	48
I3a. Présentation du système de cuves .....	48
I3b. Analyse des interactions .....	53
I3c. Synthèse de régulateurs de type PI .....	57
I4. Conclusions sur l'analyse des interactions .....	63
Chapitre II. Synthèse d'une commande décentralisée .....	64
II1. Introduction .....	65
II2. Méthodes de réglage monoboucle .....	66
II2a. Généralités .....	66
II2b. Méthodes heuristiques .....	66
II2c. Commande par modèle interne PID-IMC .....	68
II2d. Méthode de réglage monoboucle proposée .....	69

II3.	Méthodes de réglage multiboucle .....	71
II3a.	Méthodes de detuning .....	71
II3b.	Méthodes séquentielles et itératives .....	72
II3c.	Méthodes simultanées .....	75
II3d.	Méthodes indépendantes.....	76
II4.	Application de commandes décentralisées au système de cuves .....	82
II4a.	Méthode de synthèse monoboucle.....	82
II4b.	Méthodes de detuning .....	83
II4c.	Méthodes séquentielles et itératives .....	85
II4d.	Méthodes simultanées .....	87
II4e.	Méthodes indépendantes.....	88
II4f.	Comparaison des méthodes sur le système de cuves .....	91
II5.	Conclusions sur la synthèse d'une commande décentralisée.....	92
Chapitre III.	Méthodes de Découplage .....	94
III1.	Introduction.....	95
III1a.	Principe du découplage.....	95
III1b.	Méthodologie de comparaison des méthodes de découplage .....	96
III2.	Méthodes de découplage statique.....	99
III2a.	Méthodes avec pré-compensateur.....	99
III2b.	Méthodes avec pré-compensateur et post-compensateur.....	107
III2c.	Découplage par retour d'état .....	116
III2d.	Conclusions de l'étude des méthodes de découplage statique .....	121
III3.	Méthodes de découplage dynamique.....	123
III3a.	Méthodes avec pré-compensateur.....	123
III3b.	Méthodes avec pré-compensateur et post-compensateur.....	135
III3c.	Conclusions de l'étude des méthodes de découplage dynamique .....	137
III4.	Procédure de détermination des compensateurs .....	138
III5.	Résultats de simulation dans le cas non linéaire.....	139
III6.	Conclusions sur les méthodes de découplage .....	141
Chapitre IV.	Application à un turbopropulseur .....	142
IV1.	Principe de fonctionnement d'un turbopropulseur.....	143
IV1a.	Description du turbopropulseur .....	143
IV1b.	Modèles et lois de commande.....	146
IV1c.	Objectifs.....	147

IV2.	Identification et analyse .....	148
IV2a.	Choix des points de fonctionnement.....	148
IV2b.	Identification du turbopropulseur .....	152
IV2c.	Analyse des modèles identifiés.....	160
IV2d.	Conclusion sur l'identification et l'analyse des modèles identifiés .....	169
IV3.	Application de la commande décentralisée .....	170
IV3a.	Analyse des interactions .....	170
IV3b.	Découplage du turbopropulseur.....	172
IV3c.	Synthèse des régulateurs.....	175
IV3d.	Mise en place d'une action par anticipation .....	179
IV3e.	Interpolation des lois de commande .....	183
IV3f.	Structure des lois de commande .....	186
IV3g.	Résultats de simulation avec le modèle non linéaire .....	187
IV4.	Étude de la robustesse des lois de commande .....	191
IV4a.	Incertitudes et formes LFT du modèle de turbopropulseur .....	191
IV4b.	Robustesse des lois de commande .....	193
IV5.	Intégration dans le FADEC.....	211
IV5a.	Implantation des lois.....	211
IV5b.	Résultats.....	213
IV6.	Conclusions de l'étude sur le turbopropulseur .....	219
	Conclusions et perspectives .....	220
	Bibliographie .....	223
	Annexes .....	231
	A-1. Grammiens de commandabilité et d'observabilité .....	231
	A-2. Décomposition dyadique .....	233
	A-3. Analyse structurée de la robustesse.....	234
	Résumé.....	238



## Notations

### Symboles d'ordre général

$\otimes$	Produit matriciel de Hadamard (élément par élément)
$\oslash$	Division matricielle (élément par élément)
$tr$	Trace
$s$	Opérateur de Laplace
$\  \cdot \ _2$	Norme $H_2$
$\  \cdot \ _\infty$	Norme $H_\infty$
$\  \cdot \ _H$	Norme de Hankel
$\lambda_i$	$i^{\text{ème}}$ valeur propre
$\sigma_{max}$	Plus grande valeur singulière
$\sigma_H$	Valeurs singulières de Hankel
Log	Logarithme népérien
$\hat{Z}$	Inverse d'une matrice $Z$
$Z^T$	Transposée de la matrice $Z$
$Z^*$	Matrice adjointe
$\bar{Z}$	Matrice conjuguée
$I$	Matrice identité
$P$	Grammien de commandabilité
$Q$	Grammien d'observabilité
$\delta_i$	Différence d'ordre de la sortie $i$
$Z^{(i)}$	Dérivée $i^{\text{ème}}$ de $Z$
$L_i(Z)$	$i^{\text{ème}}$ ligne de $Z$
$C_i(Z)$	$i^{\text{ème}}$ colonne de $Z$

### Réglages

$k_p$	Gain proportionnel d'un correcteur PID
$\tau_i$	Constante de temps du terme intégral d'un correcteur PID
$\tau_d$	Constante de temps du terme dérivateur d'un correcteur PID
$W$	Fonction de pondération
$W_{opt}$	Fonction de pondération optimale selon un critère
$\omega$	Pulsation
$\omega_k$	Grille de pulsations
$\omega_{opt}$	Pulsation optimale selon un critère
$\lambda_c$	Constante de temps désirée en boucle fermée

### Signaux

$r$	Nombre d'entrées et sorties
$y_{ref}$	Référence de la sortie $y$
$y$	Grandeur de sortie
$y^*$	Grandeur de sortie après post-compensateur
$e$	Erreur entre la référence $y_{ref}$ et la sortie réelle $y$
$u$	Grandeur de commande
$u^*$	Grandeur de commande avant pré-compensateur
$d$	Entrée de perturbation



## Notations relatives à un procédé

$G$	Procédé
$G_{ij}$	Transfert de la commande $j$ vers la sortie $i$
$G^{ij}$	Procédé $G$ en enlevant la ligne $i$ et la colonne $j$
$G_{i\bullet}^{ij}$	$i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de $G$ en enlevant le terme $G_{ij}$
$G_{\bullet j}^{ij}$	$j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de $G$ en enlevant le terme $G_{ij}$
$G^i$	Procédé restant après avoir fermé les boucles (en dehors de la $i^{\text{ème}}$ )
$G_{ij}^*$	Transfert lié aux interactions agissant sur le transfert $G_{ij}$
$\tilde{G}_{ij}$	Transfert équivalent comprenant $G_{ij}$ et $G_{ij}^*$
$\tilde{G}^+$	Partie inversible du procédé $G$
$\tilde{G}^-$	Partie non inversible du procédé $G$
$\bar{G}$	Termes diagonaux du procédé $G$
$G_o$	Matrice des gains statiques du procédé $G$
$G_p$	Procédé en réponse à des entrées de perturbations
$K$	Régulateur
$K_i$	$i^{\text{ème}}$ élément du régulateur diagonal $K$
$K_{mono}$	Régulateur élaboré à partir d'une synthèse monoboucle
$K_{multi}$	Régulateur élaboré à partir d'une synthèse multiboucle
$K_M$	Correcteur multivariable
$BO$	Boucle ouverte
$BF$	Boucle fermée
$BF_s$	Boucle fermée sans considérer les interactions
$BF_d$	Boucle fermée désirée
$E$	Différence relative entre $G$ et $\bar{G}$
$S$	Matrice de sensibilité (en sortie)
$\bar{S}$	Matrice de sensibilité décentralisée (en sortie)
$T$	Matrice de sensibilité complémentaire (en sortie)
$\bar{T}$	Matrice de sensibilité décentralisée complémentaire (en sortie)
$M$	Matrice de préfiltre
$L$	Matrice de la commande par retour d'état
$O$	Matrice d'état de l'observateur
$D$	Pré-compensateur
$R$	Post-compensateur
$G_f$	Action par anticipation (dynamique)
$G_{fo}$	Action par anticipation (statique)
$G_b$	Action par anticipation en amont du découpleur (dynamique)
$G_{bo}$	Action par anticipation en amont du découpleur (statique)
$p_i$	Pôles
$z_i$	Zéros

## Notations relatives aux interactions

$\lambda$	Terme d'interaction
$DD_{ci}$	Indice de Diagonale Dominance par colonne de la boucle $i$
$DD_{li}$	Indice de Diagonale Dominance par ligne de la boucle $i$
$\rho_i$	Indice de découplage de la boucle $i$
$\rho$	Indice de découplage global

### Notations relatives au système de cuves

$H_i$	Hauteur de la cuve $T_i$
$H_{ie}$	Hauteur de la cuve $T_i$ à l'équilibre
$Q_{ij}$	Débit de la cuve $T_i$ vers la cuve $T_j$
$Q_i$	Débit de la pompe $P_i$
$Q_{ie}$	Débit de la pompe $P_i$ à l'équilibre

### Notations relatives au turbopropulseur

$WF$	Débit carburant
$\beta$	Pas de l'hélice (angle de calage)
$SHP$	Puissance de l'hélice
$XNP$	Vitesse de rotation de l'hélice
$TRA$	Angle de la manette du pilote
$N_3$	Régime de l'arbre du compresseur HP
$u_{VSV}$	Commande de la vanne VSV
$u_{HBV}$	Commande de la vanne HBV
$T_s$	Période d'échantillonnage
$M$	Nombre de Mach
$A$	Altitude
$G$	Modèle du turbopropulseur
$HBV$	Modèle du turbopropulseur en réponse à une entrée $u_{HBV}$

### Notations relatives à la mu-analyse

$A_{110}$	Paramètre nominal $A_{11}$
$A_{11i}$	Paramètre incertain $A_{11}$
$\delta_{A_{11}}$	Incertitude normalisée sur le terme $A_{11}$
$A_{ij}^{sup}$	Borne supérieure du domaine de variation de $A_{11}$
$A_{ij}^{inf}$	Borne inférieure du domaine de variation de $A_{11}$
$z_{A_{11}}$	Entrée de l'incertitude pour le paramètre $A_{11}$
$v_{A_{11}}$	Sortie de l'incertitude pour le paramètre $A_{11}$
$\Delta_p$	Matrice d'incertitudes normalisées
$\Delta_K$	Matrice diagonale d'incertitudes normalisées
$W_{dyn}$	Pondération associée à une dynamique négligée
$\mu_\Delta$	Valeur singulière structurée avec une structure $\Delta$

## Acronymes

AS	Application Software
BDPFD	Block Decentralized Performance Degradation
BLT	Biggest Log modulus Tunning
BP	Basse Pression
CLDG	Closed-Loop Disturbance Gain
DBRG	Dynamic Block Relative Gain
DCP	Desiral Critical Point
DD	Diagonale Dominance
DD	Décomposition Dyadique
DD <sub>c</sub>	Diagonale Dominance par colonne
DD <sub>l</sub>	Diagonale Dominante par ligne
dDRIA	dynamic Decomposed Relative Interaction Analysis
DIOPM	Dynamic Input-Output Pairing Matrix
DNA	Direct Nyquist Array
dRG	decentralized Relative Gain
DRGA	Dynamic Relative Gain Array
DRIA	Decomposed Relative Interaction Analysis
DRMA	Dynamic Relative Magnitude Array
DVP	Décomposition en Valeurs Propres
DVS	Décomposition en Valeurs Singulières
ERGA	Effective Relative Gain Array
FADEC	Full Authority Digital Engine Control
FI	Flight Idle (régime ralenti vol)
FMU	Fuel Metering Unit (Système de dosage)
GI	General Interaction
GI	Ground Idle (régime ralenti sol)
GRDG	Generalized Relative Disturbance Gain
HBV	Handing Bleed Valve
HIIA	Hankel Interaction Index Array
HP	Haute Pression
HSV	Valeurs Singulières de Hankel
ID	Indicateur (de la boucle sélectionnée)
IMC	Commande par Modèle Interne
INA	Inverse Nyquist Array
IP	Pression Intermédiaire
kft	kilofeet
LS	Moindres Carrés
LQG	Linéaire Quadratique Gaussienne
MCL	Maximum CLimb (régime maximal de montée)
MIMO	Multiple Inputs Multiple Outputs (système multivariable)
MMR	Modèle Moteur Régulé
N4SID	Numerical Subspace Based State Space System Identification
NI	Niederlinsky Index
NRGA	Normalized Relative Gain Array
NRMSE	Normalized Root Mean Square Error
PD	Pseudo-Diagonalisation
PDD	Pseudo-Diagonalisation Dynamique

PEM	Prediction Error Method
PGB	Propeller GearBox (réducteur)
PID	Proportionnel Intégral Dérivé
PM	Participation Matrix
PRG	Partial Relative Gain
PRGA	Performance Relative Gain Array
RDA	Relative Dynamic Array
RDG	Relative Disturbance Gain
RDGA	Relative Disturbance Gain Array
REV	REVerse (inversion de poussée)
RGA	Relative Gain Array
RIA	Relative Interaction Array
rpm	tours par minute
RRA	Relative Response Array
SISO	Single Input Single Output (système monovariable)
SSV	Valeur Singulière Structurée
SSV-IM	Structured Singular Value – Interaction Measure
TITO	Two Inputs Two Outputs
TOGA	Take Off Go Around
VSSM	Valeur Singulière Structurée Maximale
VSV	Variable Stator Vane



## Liste des figures

Figure 0-1 : Stratégies de régulation .....	24
Figure II.1 : Commande décentralisée d'un système TITO.....	27
Figure II.2 : Commande décentralisée.....	28
Figure II.3 : Configurations pour un système TITO.....	29
Figure I2.1 : Représentation possible d'une commande décentralisée.....	37
Figure I2.2 : Schéma de commande traduit par le bouclage de E par T.....	38
Figure I2.3 : Schéma de la structure d'un régulateur en fonction de l'analyse des interactions .....	41
Figure I2.4 : Procédure d'analyse des interactions.....	47
Figure I3-1 : Schéma du système de cuves .....	48
Figure I3.2 : Diagrammes de Bode du modèle linéarisé en réponse à des entrées de commande.....	52
Figure I3.3 : Diagrammes de Bode du modèle linéarisé en réponse à une entrées de perturbation.....	52
Figure I3.4 : DRGA du système de cuves.....	54
Figure I3.5 : RDGA du système de cuves.....	55
Figure I3.6 : PRGA du système de cuves.....	55
Figure I3.7 : CLDG du système de cuves.....	56
Figure I3.8 : Inverse de la $DD_c$ du système de cuves .....	56
Figure I3.9 : Réponses temporelles monovariables et multivariables – réglage lent .....	57
Figure I3.10 : Réponses temporelles à un rejet de perturbations – réglage lent.....	58
Figure I3.11 : Réponses fréquentielles en boucle fermée – réglage lent.....	58
Figure I3.12 : Réponses temporelles monovariables et multivariables – réglage moyen .....	59
Figure I3.13 : Réponses temporelles à un rejet de perturbations – réglage moyen.....	59
Figure I3.14 : Réponses fréquentielles en boucle fermée – réglage moyen.....	60
Figure I3.15 : Réponses temporelles monovariables et multivariables – réglage rapide .....	61
Figure I3.16 : Réponses temporelles à un rejet de perturbations – réglage rapide.....	61
Figure I3.17 : Réponses fréquentielles en boucle fermée – réglage rapide.....	62
Figure II2.1 : Schémas de la génération de l'oscillation entretenue et de la méthode du relais.....	67
Figure II2.2 : Structure de commande par modèle interne .....	68
Figure II2.3 : Procédure de réglage monoboucle d'un correcteur PID.....	70
Figure II3.1 : Procédure de réglage des méthodes itératives.....	74
Figure II3.2 : Schéma de commande permettant d'ouvrir les boucles .....	78
Figure II4.1 : Comparaison des réponses fréquentielles des transferts diagonaux aux ordres 3 et 2 ....	82
Figure II4.2 : Réponses indicielles en boucle fermée des éléments diagonaux.....	83
Figure II4.3 : Comparaison des réponses fréquentielles des boucles originales et équivalentes .....	84
Figure II4.4 : Comparaison des réponses temporelles.....	85
Figure II4.5 : Comparaison des réponses temporelles en fonction des itérations .....	86
Figure II4.6 : Comparaison des réponses temporelles en fonction des itérations .....	87
Figure II4.7 : Comparaison des réponses temporelles – Méthodes simultanées .....	88
Figure II4.8 : Diagrammes de Nyquist du premier élément diagonal .....	89
Figure II4.9 : Diagrammes de Nyquist du second élément diagonal.....	89
Figure II4.10 : Performances spécifiées et gabarits $w_p$ .....	90
Figure II4.11 : Contraintes sur les fonctions de sensibilité décentralisées .....	91
Figure II4.12 : Comparaison des réponses temporelles avec les différentes méthodes.....	91
Figure II5.1 : Utilisation des indices d'interactions dans le cadre d'une synthèse multiboucle.....	93
Figure III1-1 : Schéma du découplage d'un procédé multivariable .....	95
Figure III1-2 : Schéma de la boucle fermée d'une stratégie décentralisée avec découplage .....	96
Figure III1-3 : Schéma de l'implantation des compensateurs .....	96
Figure III1-4 : Fonction de pondération $W(\omega_k)$ .....	98
Figure III2-1 : Inverse de la $DD_c$ avec un pré-compensateur déterminé par inversion .....	102
Figure III2-2 : Inverse de la $DD_c$ avec un pré-compensateur déterminé par optimisation.....	103

Figure III2-3 : Inverse de la $DD_c$ avec un pré-compensateur déterminé par pseudo-diagonalisation	105
Figure III2-4 : Réponses indicielles en boucle fermée avec/sans pré-compensateur statique.....	106
Figure III2-5 : Inverse de la $DD_c$ avec des compensateurs déterminés par DVP.....	109
Figure III2-6 : Évolution de la grandeur $E_{VP}$ .....	110
Figure III2-7 : Évolution de la grandeur $E_{VS}$ .....	111
Figure III2-8 : Inverse de la $DD_c$ avec des compensateurs déterminés par DVS .....	112
Figure III2-9 : Inverse de la $DD_c$ avec des compensateurs déterminés par décomposition dyadique.	113
Figure III2-10 : Diagrammes de Bode des transferts diagonaux.....	114
Figure III2-11 : Comparaison de la $DD_c$ de RGD et de GDKR.....	115
Figure III2-12 : Réponses indicielles en boucle fermée avec/sans compensateurs statique.....	115
Figure III2-13 : Schéma de la commande par retour d'état.....	117
Figure III2-14 : Commande décentralisée d'un procédé découplé par retour d'état.....	119
Figure III2-15 : Schéma de la commande par retour d'état avec observateur.....	120
Figure III2-16 : Réponses indicielles en boucle fermée avec un découpleur par retour d'état .....	121
Figure III3-1 : Schéma du découpleur idéal .....	125
Figure III3-2 : Schéma du découpleur simplifié.....	126
Figure III3-3 : Schéma du découpleur inversé .....	127
Figure III3-4 : Schéma d'une variante du découpleur inversé .....	127
Figure III3-5 : Inverse de la $DD_c$ avec un pré-compensateur dynamique déterminé par optimisation	129
Figure III3-6 : Inverse de la $DD_c$ avec un pré-compensateur déterminé par PDD .....	131
Figure III3-7 : Inverse de la $DD_c$ avec un découpleur idéal réduit.....	133
Figure III3-8 : Réponses indicielles en boucle fermée avec/sans pré-compensateur dynamique .....	134
Figure III4-1 : Procédure de découplage d'un procédé .....	138
Figure III5-1 : Comparaison des sorties et des commandes avec et sans gel de l'action intégrale .....	139
Figure III5-2 : (a) Perte de la directionnalité – (b) Conservation de la directionnalité .....	140
Figure IV1.1 : Illustration du PW150 et schéma du TP400 .....	143
Figure IV1.2 : Photographie du Tyne et schéma de principe .....	143
Figure IV1.3 : Régimes du turbopropulseur.....	145
Figure IV1.4 : Architecture simplifiée de la régulation d'un turbopropulseur.....	147
Figure IV2.1 : Débit carburant WF et angle de calage $\beta$ en fonction du TRA.....	150
Figure IV2.2 : Puissance SHP et Vitesse XNP en fonction du TRA.....	150
Figure IV2.3 : SHP et XNP en fonction de WF et $\beta$ .....	151
Figure IV2.4 : VSV et HBV en fonction du TRA.....	151
Figure IV2.5 : Comportement des vannes HBV .....	152
Figure IV2.6 : Procédure d'identification .....	152
Figure IV2.7 : Scénario d'identification et de validation .....	153
Figure IV2.8 : Modèle de turbopropulseur extrait du MMR.....	154
Figure IV2.9 : Entrées de commande WF et $\beta$ pour la manœuvre $\{M_{0,3}, A_{10}\}$ .....	155
Figure IV2.10 : Données entrées-sorties obtenues sur un point de fonctionnement .....	155
Figure IV2.11 : Comparaison des différentes structures de modèles pour le couple $\{M_{0,3}, A_{10}\}$	157
Figure IV2.12 : Comparaison des méthodes d'identification pour le couple $\{M_{0,3}, A_{10}\}$ .....	158
Figure IV2.13 : Comparaison d'un modèle estimé par rapport aux données de validation .....	159
Figure IV2.14 : Position des pôles discrets des modèles identifiés.....	160
Figure IV2.15 : Position des pôles et des zéros discrets des modèles identifiés .....	161
Figure IV2.16 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés variant avec le TRA .....	162
Figure IV2.17 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés variant avec le Mach .....	163
Figure IV2.18 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés variant avec l'altitude .....	164
Figure IV2.19 : Coefficients des matrices d'état et de commande (TRA).....	165
Figure IV2.20 : Coefficients des matrices d'état et de commande (TRA et Mach) .....	165
Figure IV2.21 : Coefficients des matrices d'état et de commande (TRA et altitude) .....	165
Figure IV2.22 : Correspondance entre le TRA et le $N_3$ (régime de l'arbre du compresseur HP) .....	166

Figure IV2.23 : Choix des points de fonctionnement.....	167
Figure IV2.24 : Position des pôles discrets des transferts liés aux HBV .....	167
Figure IV2.25 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés HBV variant avec le TRA.....	168
Figure IV2.26 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés HBV variant avec le Mach .....	168
Figure IV2.27 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés HBV variant avec l'altitude .....	169
Figure IV3.1 : Indices DRGA .....	170
Figure IV3.2 : Indices NI .....	171
Figure IV3.3 : Stratégie de découplage utilisée pour certains turbopropulseurs.....	172
Figure IV3.4 : $DD_c$ des modèles identifiés .....	173
Figure IV3.5 : Inverse de la $DD_c$ du procédé et de procédés avec compensateurs.....	175
Figure IV3.6 : Application du découpleur inversé au turbopropulseur .....	175
Figure IV3.7 : Ensemble des réponses indicielles en boucle fermée (noir) et gabarits (rouge).....	178
Figure IV3.8 : Diagrammes de Bode des boucles ouvertes (noir) et des gabarits (rouge).....	178
Figure IV3.9 : Schéma du rejet de perturbations d'un système bouclé par anticipation.....	179
Figure IV3.10 : Schéma du rejet de perturbations en amont du découpleur .....	181
Figure IV3.11 : Comparaison du rejet de perturbations sur le modèle linéaire.....	182
Figure IV3.12 : Comparaison du rejet de perturbations sur le modèle non linéaire.....	182
Figure IV3.13 : Interpolation d'une fonction de transfert comportant un pôle et un zéro .....	184
Figure IV3.14 : Comparaison de la puissance avec différentes méthodes d'interpolation .....	185
Figure IV3.15 : Comparaison de la vitesse de l'hélice avec différentes méthodes d'interpolation ...	185
Figure IV3.16 : Comparaison du débit carburant WF avec différentes méthodes d'interpolation.....	186
Figure IV3.17 : Comparaison de l'angle de calage $\beta$ avec différentes méthodes d'interpolation.....	186
Figure IV3.18 : Schéma de la stratégie de commande .....	187
Figure IV3.19 : Manœuvre de validation .....	187
Figure IV3.20 : Références du PowerManagement .....	188
Figure IV3.21 : Puissance de l'hélice SHP (manœuvre de validation) .....	188
Figure IV3.22 : Vitesse de l'hélice XNP (manœuvre de validation).....	189
Figure IV3.23 : Commandes en débit carburant et en angle de calage (manœuvre de validation) ....	189
Figure IV3.24 : Dérivées des commandes WF et $\beta$ (manœuvre de validation).....	190
Figure IV4.1 : Schéma d'analyse de la robustesse de stabilité du procédé incertain bouclé.....	193
Figure IV4.2 : Variation des paramètres .....	194
Figure IV4.3 : Variation des coefficients de la représentation d'état.....	194
Figure IV4.4 : Bornes supérieures et inférieures de la VSS (robustesse de stabilité) .....	195
Figure IV4.5 : Domaines de stabilité robuste.....	196
Figure IV4.6 : Réponses temporelles du système bouclé comprenant un procédé incertain.....	196
Figure IV4.7 : Bornes supérieures et inférieures de la VSS (robustesse des marges de module) .....	197
Figure IV4.8 : Fonctions de sensibilité pour la robustesse des marges de module .....	198
Figure IV4.9 : Bornes supérieures et inférieures de la VSS (robustesse du suivi de consigne).....	199
Figure IV4.10 : Fonctions de sensibilité pour la robustesse du suivi de consigne .....	199
Figure IV4.11 : Bornes supérieures et inférieures de la VSS (robustesse du découplage) .....	200
Figure IV4.12 : Fonctions de sensibilité pour la robustesse du découplage.....	201
Figure IV4.13 : Bornes supérieures et inférieures de la VSS (robustesse du rejet de perturbations)..	202
Figure IV4.14 : Fonctions de sensibilité complémentaires (robustesse du rejet de perturbations) ....	202
Figure IV4.15 : Réponses temporelles à un échelon de perturbation.....	203
Figure IV4.16 : VSSM pour la robustesse de la stabilité .....	204
Figure IV4.17 : VSSM pour la robustesse des marges de stabilité .....	205
Figure IV4.18 : VSSM pour la robustesse de suivi de consigne .....	205
Figure IV4.19 : VSSM pour la robustesse du découplage .....	206
Figure IV4.20 : VSSM pour la robustesse de rejet de perturbations .....	206
Figure IV4.21 : Domaines où le suivi de consigne est garanti.....	209
Figure IV5.1 : Logique de sélection de la dérivée du débit carburant.....	212



Figure IV5.2 : Comparaison de la puissance SHP lors des simulations avec et sans FADEC.....	213
Figure IV5.3 : Comparaison de la vitesse XNP lors des simulations avec et sans FADEC.....	213
Figure IV5.4 : Comparaison des régimes transitoires sur la puissance SHP.....	214
Figure IV5.5 : Comparaison des régimes transitoires sur la vitesse XNP.....	214
Figure IV5.6 : Indicateur de la boucle sélectionnée .....	215
Figure IV5.7 : Puissance SHP après la mise en place de la stratégie de limitation.....	216
Figure IV5.8 : Vitesse XNP après la mise en place de la stratégie de limitation .....	216
Figure IV5.9 : Débit carburant WF après la mise en place de la stratégie de limitation.....	217
Figure IV5.10 : Angle de calage $\beta$ après la mise en place de la stratégie de limitation .....	217
Figure IV5.11 : Transitoires sur la puissance SHP après mise en place de la stratégie de limitation .	218
Figure IV5.12 : Transitoires sur la vitesse XNP après mise en place de la stratégie de limitation .....	218
Figure IV5.13 : Indicateur de la boucle sélectionnée .....	218
Figure A.1 : Représentation par LFT des incertitudes de modélisation .....	234
Figure A.2 : Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité .....	234
Figure A.3 : Schéma du procédé incertain bouclé avec incorporation d'incertitudes complexes en entrée du système .....	236

## Liste des tableaux

Tableau I2-1 : Tableau comparatif des méthodes fréquentielles d'analyse d'interactions.....	44
Tableau I2-2 : Tableau comparatif des méthodes temporelles d'analyse d'interactions.....	44
Tableau I2-3 : Tableau comparatif des méthodes d'analyse d'interactions fondées sur les grammians.....	45
Tableau I2-4 : Tableau comparatif des méthodes d'analyse d'interactions liées aux perturbations .....	45
Tableau I2-5 : Tableau comparatif des méthodes d'analyse d'interactions post-synthèse.....	45
Tableau I3-1 : Paramètres physiques du système de cuves.....	51
Tableau I3-2 : Réglages des correcteurs PI – réglage lent .....	58
Tableau I3-3 : Réglages des correcteurs PI – réglage moyen.....	60
Tableau I3-4 : Réglages des correcteurs PI – réglage rapide .....	61
Tableau II2-1 : Réglages de Ziegler-Nichols .....	67
Tableau II4-1 : Réglages des correcteurs PI –Méthode monoboucle.....	83
Tableau II4-2 : Réglages des correcteurs PI – Méthode de detuning.....	85
Tableau II4-3 : Réglages des correcteurs PI – Méthode de detuning (réglage initial de la boucle 2)...	86
Tableau II4-4 : Réglages des correcteurs PI – Méthode de detuning (réglage initial de la boucle 1)...	87
Tableau II4-5 : Réglages des correcteurs PI – Méthode simultanée .....	88
Tableau II5-1 : Type de méthode multiboucle conseillé en fonction du problème .....	92
Tableau III2-1 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par inversion.....	103
Tableau III2-2 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par optimisation .....	104
Tableau III2-3 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par PD .....	104
Tableau III2-4 : Réglages monoboucle et multiboucle .....	106
Tableau III2-5 : Comparaison des méthodes de synthèse d'un pré-compensateur statique .....	107
Tableau III2-6 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par DVP .....	110
Tableau III2-7 : Indices de découplage avec des compensateurs déterminés par DVS .....	111
Tableau III2-8 : Indices de découplage avec des compensateurs déterminés par DD .....	112
Tableau III2-9 : Indices de découplage avec des compensateurs déterminés par DD.....	113
Tableau III2-10 : Réglages monoboucle et multiboucle .....	114
Tableau III2-11 : Comparaison des méthodes de synthèse d'un pré et post-compensateur statiques .	116
Tableau III2-12 : Réglages monoboucles.....	120
Tableau III2-13 : Méthodes de synthèse d'un découplage par retour d'état .....	121
Tableau III3-1 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par optimisation .....	129
Tableau III3-2 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par PDD .....	131
Tableau III3-3 : Indices de découplage avec un découpleur idéal réduit .....	132
Tableau III3-4 : Réglages monoboucles du procédé découplé.....	134
Tableau III3-5 : Comparaison des méthodes de synthèse d'un pré-compensateur dynamique.....	135
Tableau IV1-1 : Spécifications des boucles considérées comme monovariables.....	147
Tableau IV2-1 : Domaine de vol.....	149
Tableau IV2-2 : Taux de vraisemblance des modèles identifiés (entrées de commande).....	158
Tableau IV2-3 : Taux de vraisemblance des modèles identifiés (entrées de perturbation).....	159
Tableau IV3-1 : Réglages des régulateurs PI pour le procédé découplé par DD .....	174
Tableau IV3-2 : Indices de découplage du procédé avec compensateurs .....	174
Tableau IV3-3 : Saturations et limiteurs considérés lors de la synthèse .....	176
Tableau IV3-4 : Performances spécifiées.....	176
Tableau IV3-5 : Performances spécifiées et performances atteintes .....	179
Tableau IV4-1 : Résultats de l'étude de robustesse sur un point de fonctionnement.....	203
Tableau IV4-2 : Résultats de l'étude de robustesse des lois de commande .....	207
Tableau IV4-3 : Ecarts relatifs des coefficients et plages de fonctionnement robustes .....	208
Tableau IV4-4 : Ecarts relatifs des coefficients et nouvelles plages de fonctionnement robustes .....	210
Tableau IV5-1 : Description des limiteurs .....	211



# Introduction

## Contexte

L'amélioration des performances des moteurs des avions fait partie des grands enjeux de l'aéronautique. Snecma, motoriste aéronautique et spatial de premier rang, travaille actuellement sur le développement d'un turbopropulseur, système de propulsion dont la poussée est obtenue par la rotation d'une hélice, reliée à une turbine de puissance.

Le rendement d'un turbopropulseur est supérieur à celui d'un turbo réacteur, mais son utilisation est limitée par la baisse du rendement aérodynamique de l'hélice au delà d'une vitesse de 800 km/h et au-delà d'une altitude de 8000 m. Les turbopropulseurs sont ainsi bien adaptés aux avions ayant des vitesses de vol et des altitudes modérées, car relativement peu gourmands en carburant.

Le fonctionnement d'un turbopropulseur est décrit par les étapes ci-après :

- Le flux d'air est tout d'abord aspiré dans une série de compresseurs. L'air est alors comprimé, dans le but d'atteindre des vitesses, pressions et températures optimales à l'entrée de la chambre de combustion.
- L'air pénètre ensuite dans la chambre de combustion où du carburant est vaporisé par une série d'injecteurs. Le mélange air-carburant brûle, ce qui produit de la chaleur et fournit de l'énergie aux gaz brûlés.
- Les gaz sortant de la chambre de combustion entraînent par détente différentes turbines liées aux compresseurs, ainsi que la turbine de puissance (également appelée turbine à gaz).
- Cette dernière entraîne l'hélice par l'intermédiaire d'un réducteur mécanique. Un système d'actionnement du pas permet de faire varier l'angle des pales de l'hélice afin d'obtenir différentes puissances hélice, tout en conservant une vitesse de rotation de l'hélice constante.
- L'hélice fournit alors plus de 90% de la poussée du turbopropulseur, la poussée restante provenant des gaz d'échappement.

Le turbopropulseur comporte un système de régulation dont l'objectif principal est de contrôler la puissance souhaitée, tout en conservant une vitesse de rotation de l'hélice constante et sans franchir certaines limites de température, pression et vitesse, quels que soient l'état du turbopropulseur et les conditions extérieures. Le dépassement de ces limites peut en effet entraîner de graves conséquences sur le moteur, allant de l'endommagement ou la fatigue prématurée des pièces, à la perte de contrôle du moteur. Le système de régulation fournit ainsi des fonctions de contrôle à tous les organes du turbopropulseur (gestion de la puissance, contrôle de la puissance et des boucles locales, gestion des températures, démarrage, protections diverses, health monitoring, gestion de la puissance électrique).

D'un point de vue fonctionnel, un turbopropulseur est un système multivariable comprenant deux grandeurs de commande : le débit carburant à injecter dans la chambre de combustion et le pas de l'hélice, ainsi que deux grandeurs de sortie à asservir : la puissance délivrée par l'hélice et sa vitesse de rotation.

Un aspect important de la régulation concerne les interactions entre la puissance et la vitesse de l'hélice. Ces variables sont en effet fortement couplées, ce qui signifie que des variations de l'une entraînent des écarts sur l'autre. Ces écarts sont préjudiciables au turbopropulseur d'un point de vue des performances. Ils entraînent par ailleurs des sur-couples importants qui endommagent les composants en fatigue. En dehors du découplage et d'objectifs de performances classiques (temps de réponse, dépassement, erreur statique), les lois de commande doivent être facilement ajustables et d'une complexité raisonnable.

## Objectifs

Dans ce cadre, l'objectif principal de ces travaux de thèse est de synthétiser des lois de commande performantes et robustes pour ce turbopropulseur. Ces travaux de thèse ont également un aspect méthodologique important et ont pour but d'étendre les outils et les méthodes développés à d'autres applications aéronautiques.

Compte tenu du coût de mise en œuvre d'essais avec un moteur réel, il est important de disposer de modèles de simulation suffisamment fiables de l'ensemble moteur/système de régulation, afin d'étudier et de valider différents scénarios d'utilisation, préalablement à tout essai expérimental. Dans cette optique, un modèle de simulation du turbopropulseur, recalé et validé, a été développé par Snecma. Les lois de commande développées seront validées au moyen de ce simulateur.

## Stratégies de commande

Dans ce contexte industriel, une approche de synthèse de type fréquentiel est envisagée. Différentes stratégies de commande fréquentielle multivariable, représentées sur la Figure 0-1, peuvent être exploitées pour asservir le turbopropulseur :

- La stratégie décentralisée considère uniquement un correcteur diagonal (Figure 0-1a)). La régulation est ainsi composée d'un régulateur monovariante sur chacune des boucles.
- Une stratégie partiellement décentralisée consiste à considérer un régulateur diagonal, complété par quelques termes hors-diagonaux permettant de prendre spécifiquement en compte les couplages entre certaines grandeurs de commande et de sortie (comme sur la Figure 0-1b)).
- Une stratégie décentralisée par blocs met en œuvre un correcteur, composé d'ensembles de correcteurs monovariante ou multivariante sur sa diagonale (Figure 0-1c)).
- Une stratégie centralisée se compose d'un correcteur multivariable plein (Figure 0-1d)), traitant l'ensemble des commandes à partir des informations de chacune des boucles.
- Une alternative à la stratégie centralisée (présentée sur la Figure 0-1e)), est de distinguer un compensateur multivariable visant à découpler le système, c'est-à-dire à réduire les interactions, ainsi qu'un régulateur diagonal permettant d'asservir le procédé découplé. On peut alors parler de stratégie décentralisée avec découplage.

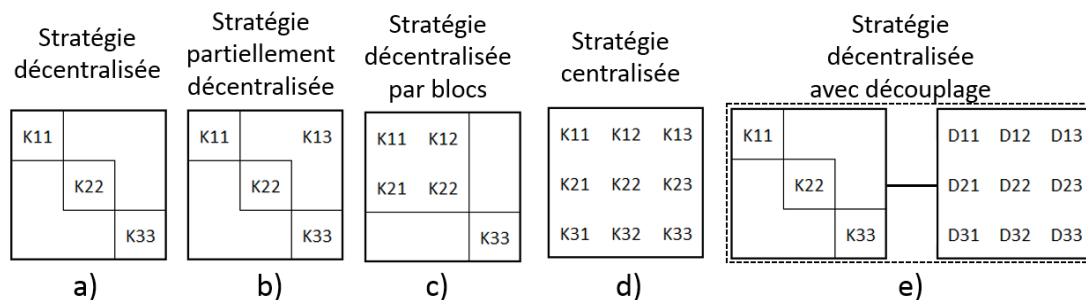


Figure 0-1 : Stratégies de régulation

La stratégie décentralisée avec découplage permet de se ramener aux autres stratégies. Il est en effet possible de se ramener à un correcteur partiellement décentralisé ou à un correcteur décentralisé par blocs en simplifiant le compensateur multivariable. Par ailleurs, le regroupement du compensateur et du régulateur diagonal conduit à un correcteur centralisé.

En remarquant que les deux étapes de la synthèse d'une stratégie décentralisée avec découplage sont distinctes, il est possible d'étudier :

- d'une part la synthèse d'un correcteur diagonal, ce qui correspond à la stratégie décentralisée.
- d'autre part la synthèse d'un compensateur multivariable.

## Plan du mémoire

Le mémoire est composé de quatre chapitres :

- Dans le Chapitre 1, les phénomènes d'interactions dans un système multivariable et les différents indicateurs et méthodes de calcul permettant de les mesurer sont discutés. Cette analyse a pour objectif principal la détermination d'une stratégie de commande et d'une stratégie de réglage adaptées à ces interactions. A l'issue de ce chapitre, une procédure d'analyse des interactions sera finalement proposée.
- Dans le cadre de la commande décentralisée, le Chapitre 2 traite de la synthèse des correcteurs monovariables sans prendre en compte spécifiquement les interactions (synthèse monoboucle) puis en les prenant en compte (synthèse multiboucle). Ces méthodes seront alors présentées puis illustrées. Du fait de la structure simple d'un correcteur décentralisé, il n'est pas toujours possible d'atteindre les performances souhaitées en présence d'interactions importantes, même lorsque celles-ci sont explicitement prises en compte durant la synthèse des correcteurs monovariables. Dans ce cas, il est possible de s'orienter vers une stratégie décentralisée avec découplage.
- Le Chapitre 3 présente les méthodes visant à synthétiser des compensateurs multivariables, dans le but de réduire, voire de supprimer les interactions sur une plage de fréquences aussi large que possible. Les compensateurs permettent alors de ramener le système à une forme *quasiment* diagonale. Les régulateurs monovariables peuvent ensuite être réglés avec des méthodes monoboucle ou multiboucles, à partir du système muni des compensateurs.
- Enfin, les méthodes d'analyse et de commande envisagées dans les chapitres précédents sont appliquées sur le turbopropulseur dans le Chapitre 4. Une analyse structurée de la robustesse des lois de commande permet ensuite de garantir leur robustesse sur certaines plages de fonctionnement. Ces lois de commande sont finalement interpolées en vue d'optimiser leurs performances sur l'ensemble du domaine de vol, avant d'être validées sur le modèle non linéaire précis du turbopropulseur.

## Chapitre I. Analyse des interactions

Le Chapitre I est axé sur l'analyse des interactions. L'introduction (I1) permet en premier lieu d'introduire les phénomènes d'interactions, et d'explicitier les objectifs de leur analyse. La deuxième partie (I2) s'intéresse aux différentes méthodes permettant de mesurer les interactions. Les méthodes retenues seront ensuite appliquées dans la partie I3 sur un système académique, avant de proposer des conclusions sur l'analyse des interactions (I4).

Sommaire du Chapitre I.

I1.	Introduction.....	27
I1a.	Définition .....	27
I1b.	Problèmes liés aux interactions .....	27
I1c.	Objectifs de l'analyse des interactions .....	29
I1d.	Méthodologie de comparaison des méthodes d'analyse des interactions .....	30
I2.	Méthodes d'analyse des interactions .....	31
I2a.	Méthodes fréquentielles .....	31
I2b.	Méthodes temporelles .....	39
I2c.	Méthodes des grammiens .....	39
I2d.	Méthodes liées aux perturbations.....	41
I2e.	Méthodes d'analyse post-synthèse .....	42
I2f.	Étude comparative.....	43
I2g.	Procédure d'analyse des interactions.....	46
I3.	Application de la procédure d'analyse des interactions au système de cuves .....	48
I3a.	Présentation du système de cuves .....	48
I3b.	Analyse des interactions .....	53
I3c.	Synthèse de régulateurs de type PI .....	57
I4.	Conclusions sur l'analyse des interactions .....	63

# I1. Introduction

## I1a. Définition

Les interactions ou couplages peuvent être vus comme l'influence d'une entrée (références, commandes ou perturbations) sur plusieurs sorties, ou bien l'influence de plusieurs entrées (références, commandes ou perturbations) sur une même sortie.

Par la suite, seuls les systèmes carrés, i.e. possédant le même nombre d'entrées et de sorties, seront considérés. Considérons un système linéaire  $G$  possédant  $r$  entrées et sorties, sous forme de matrice de transfert (II.1).

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r1} & \dots & G_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \rightarrow y_1 & \dots & u_r \rightarrow y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 \rightarrow y_r & \dots & u_r \rightarrow y_r \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Chaque fonction de transfert  $G_{ij}$  représente le comportement de la sortie  $y_i$  vis-à-vis de la commande  $u_j$ . Un système sera ainsi parfaitement découplé si la matrice de transfert  $G$  est diagonale. A l'inverse, la présence de termes non-diagonaux impliquera la présence d'interactions.

## I1b. Problèmes liés aux interactions

Considérons le schéma de la Figure II.1.a). Celui-ci représente la régulation décentralisée d'un système TITO (Two Inputs Two Outputs). Le procédé  $G$  est commandé par deux correcteurs monovariables  $K_1$  et  $K_2$ . Les traits pleins représentent les boucles monovariables tandis que les traits en pointillés représentent les termes du procédé liés aux interactions.

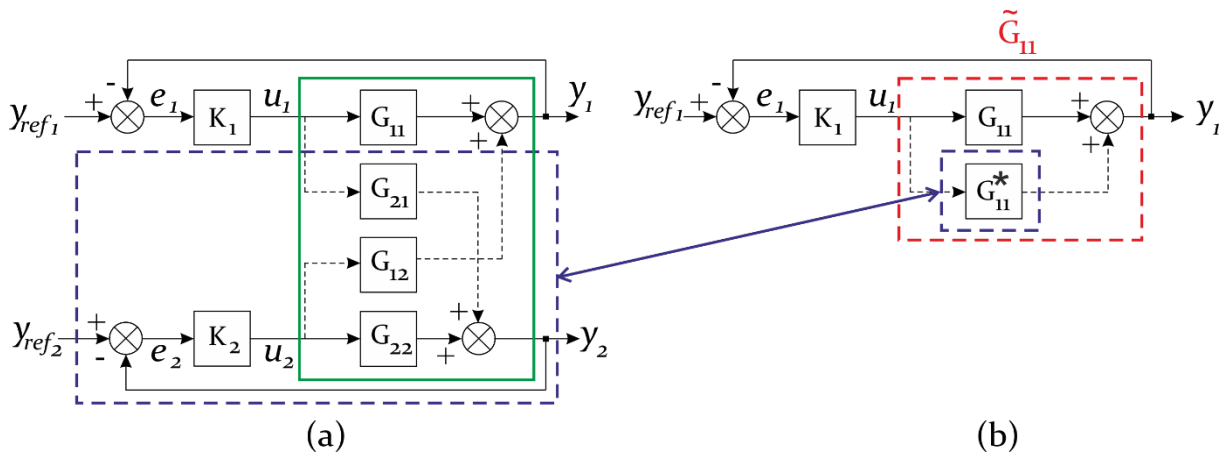


Figure II.1 : Commande décentralisée d'un système TITO

Cet exemple TITO (Two Inputs Two Outputs) montre bien la manière dont les interactions agissent et se propagent dans le cas de systèmes bouclés :

- D'une part, des variations de  $y_{refi}$  perturbent  $y_j$  ( $i \neq j = \{1,2\}$ ). On parlera plutôt dans ce cas d'*interactions entrées-sorties*.
- D'autre part, le transfert  $y_{refi} \rightarrow y_i$  est différent que l'on prenne en compte ou non les termes liés aux interactions.

Sur la Figure II.1.b), le terme  $G_{11}^*$  représente le transfert lié aux interactions. Le terme  $\tilde{G}_{11}$ , calculé dans (II.2), correspond au transfert équivalent, comprenant ainsi les transferts  $G_{11}$  et  $G_{11}^*$ .

$$\tilde{G}_{11}(s) = G_{11}(s) \left( 1 - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)G_{22}(s)} \frac{K_2(s)G_{22}(s)}{1 + K_2(s)G_{22}(s)} \right) \quad (\text{II.2})$$



En posant  $\lambda$  comme le rapport des gains non diagonaux sur les gains diagonaux, et en reconnaissant l'expression de la seconde boucle fermée sans les couplages (notée  $BF_{s2}$ ), on obtient (II.3).

$$\lambda(s) = \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)G_{22}(s)} ; BF_{s2}(s) = \frac{K_2(s)G_{22}(s)}{1 + K_2(s)G_{22}(s)} \quad (II.3)$$

$$\tilde{G}_{11}(s) = G_{11}(s)(1 - \lambda(s) \times BF_{s2}(s)) \quad (II.4)$$

Le transfert  $G_{11}$  (dit *seul* ou *indépendant*) est multiplié par une fonction de transfert composée :

- d'un terme  $\lambda$ , qui caractérise les couplages dans le procédé,
- ainsi que de la boucle fermée  $BF_{s2}$  seule, calculée indépendamment des couplages.

Un indice  $\lambda$  peu important devant 1 indique de faibles différences entre le comportement de  $G_{11}$  et celui de  $\tilde{G}_{11}$ , et donc des interactions modestes. De la même manière, si la pulsation de brisure de  $BF_{s2}$  est faible par rapport à la pulsation de coupure de  $G_{11}$ , les couplages seront relativement limités autour de cette dernière. Inversement, des couplages importants ou une pulsation de brisure  $BF_{s2}$  importante induisent des écarts importants entre les transferts  $G_{11}$  et  $\tilde{G}_{11}$ .

Un correcteur monovariante  $K_1$  synthétisé à partir du transfert seul  $G_{11}$  (et donc sans prendre en compte les interactions) ne permettra pas de garantir la stabilité et les performances prévues en considérant le transfert équivalent. La stabilité et les performances du système multivariable en boucle fermée ne seront ainsi pas assurées. Afin de prendre ces interactions en compte dès la synthèse de  $K_1$ , il est nécessaire de connaître le terme de couplage  $\lambda$ , mais également le correcteur  $K_2$ , dont la synthèse dépend elle-même du terme  $K_1$ .

Cet exemple TITO permet ainsi d'exposer les difficultés induites par les interactions pour une structure de commande décentralisée. Cela est bien sûr généralisable pour des procédés possédant un plus grand nombre d'entrées et de sorties. Le schéma de la Figure II.2 permet de considérer les interactions de la boucle  $i$  avec les autres boucles dans le cas général. Des entrées de perturbations  $d$  sont également appliquées aux sorties du procédé via la matrice de transfert  $G_p$ . Les notations suivantes sont alors utilisées :

- $G^{ij}$  s'obtient à partir de la matrice  $G$  en enlevant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .
- $G_{i\bullet}^{ij}$  correspond au  $i^{\text{ème}}$  vecteur ligne de  $G$  en enlevant le terme  $G_{ij}$ .
- $G_{\bullet j}^{ij}$  correspond au  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $G$  en enlevant le terme  $G_{ij}$ .
- $d^i$  s'obtient à partir du vecteur de perturbations  $d$  en enlevant le  $i^{\text{ème}}$  terme.

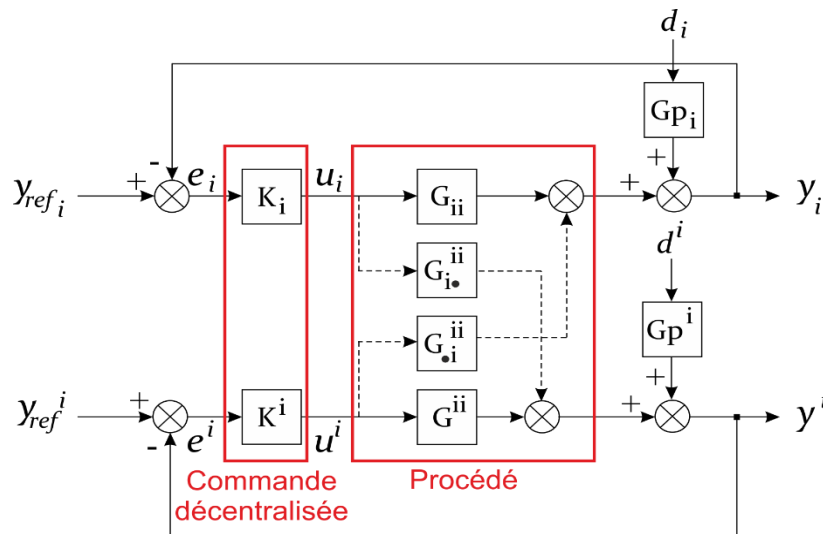


Figure II.2 : Commande décentralisée

## I1c. Objectifs de l'analyse des interactions

Dans le cas où les interactions sont importantes, une commande décentralisée *pure* peut se révéler insuffisante, quelles que soient la configuration commandes-sorties sélectionnée et la méthode de synthèse des lois de commande adoptée. Il est toutefois possible d'utiliser des compensateurs, comme on le verra dans le Chapitre III. Ces derniers ont pour but de réduire les interactions, permettant ainsi d'appliquer une stratégie décentralisée sur le procédé muni des compensateurs. D'autres stratégies comme la commande partiellement décentralisée ou la commande décentralisée par blocs peuvent être adaptées lorsqu'une commande décentralisée *pure* est insuffisante. Le choix de ces stratégies, mais également leur mise en œuvre, requièrent une connaissance précise des interactions.

Dans le cas d'interactions peu importantes, une stratégie décentralisée est généralement suffisante. Se pose alors la question de savoir comment relier les  $r$  commandes et les  $r$  sorties. En fait,  $r!$  configurations permettent de commander le procédé. Pour un système TITO par exemple, il existe deux configurations, comme on peut le voir sur la Figure I1.3 : la configuration dite diagonale où la commande  $u_1$  est élaborée à partir de l'erreur  $e_1$ , et où  $u_2$  est élaborée à partir de  $e_2$ , et la configuration non diagonale où les commandes  $u_1$  et  $u_2$  sont respectivement élaborées à partir des erreurs  $e_2$  et  $e_1$  (cette seconde configuration peut également être représentée comme une configuration diagonale en inversant les transferts du procédé).

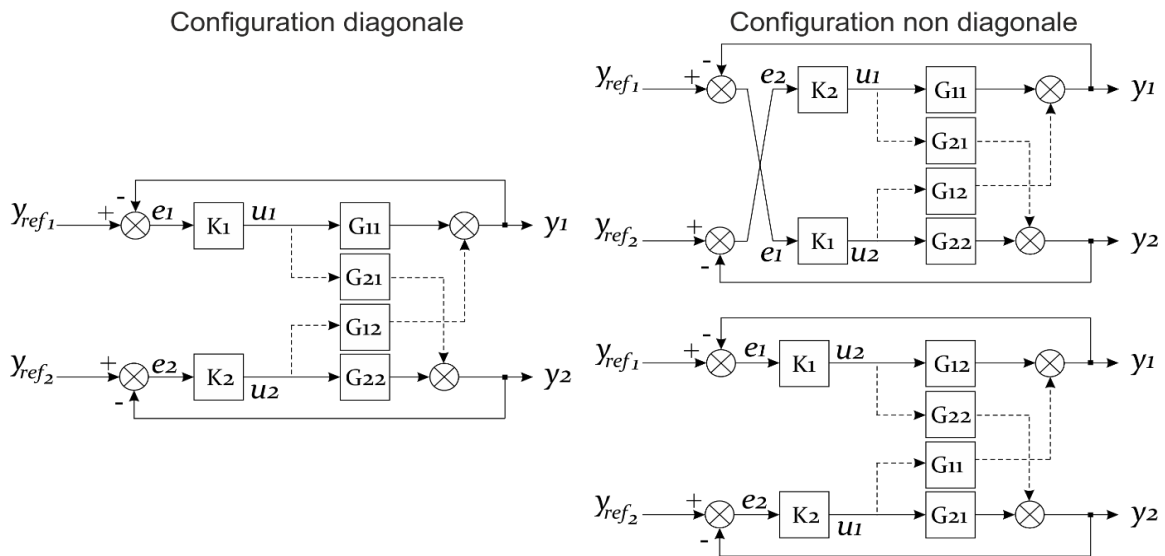


Figure I1.3 : Configurations pour un système TITO

Il est alors nécessaire de trouver la meilleure configuration de commande, i.e. celle où les couplages sont les moins importants. Il s'agit de l'appariage commandes-sorties (ou *input-output pairing*). Dans l'industrie, cet appariage se fait généralement de manière empirique, ce qui conduit à des solutions ad hoc sans aucune garantie d'avoir la solution optimale (Arranz, 2012). Une analyse des interactions permet de déterminer un bon appariage. Cette analyse peut être complétée en utilisant des critères pratiques de commandabilité (présence de zéros instables dans les fonctions de transfert, saturations sur certaines commandes).

L'analyse des interactions permet également d'estimer s'il est nécessaire de prendre en compte les interactions durant la synthèse des correcteurs monovariables (synthèse multiboucle) ou non (synthèse monoboucle).

Les objectifs d'une analyse des interactions sont donc multiples :

- Choix de la stratégie de commande.
- Choix de la configuration commandes-sorties dans le cas de la commande décentralisée.
- Choix de la stratégie de réglage des correcteurs dans le cas de la commande décentralisée.

## I1d. Méthodologie de comparaison des méthodes d'analyse des interactions

L'objectif de ce chapitre est de classer et de comparer les différentes méthodes de mesure des interactions. Il n'est pas évident de classer ces méthodes selon leurs objectifs car nombre d'entre elles peuvent appartenir à plusieurs catégories. L'étude de ces méthodes a montré qu'il était possible de les classer selon leur schéma de calcul. Cinq classes de méthodes sont distinguées dans ces travaux :

- Méthodes fréquentielles.
- Méthodes temporelles.
- Méthodes des grammien.
- Méthodes liées aux perturbations.
- Méthodes d'analyse post-synthèse.

Afin de déterminer les méthodes d'analyse les plus efficaces et pertinentes selon les objectifs précédemment décrits, les performances et la complexité des méthodes vont être prises en compte au travers de différents critères. Pour les performances, les critères suivants sont considérés :

- Approche dynamique : certaines approches considèrent uniquement la matrice des gains statiques du procédé, tandis que d'autres s'appuient sur des informations dynamiques (comme les bandes passantes du procédé ou bien les réponses fréquentielles complètes de celui-ci). Les méthodes qui exploitent ces informations dynamiques seront considérées comme plus précises.
- Analyse des interactions : selon les méthodes, l'analyse des interactions permet de différencier le sens des interactions dans les boucles, i.e. de distinguer les interactions entre une référence  $y_{refi}$  (ou une commande  $u_i$ ) et la sortie  $y_j$ , de celles entre  $y_{refj}$  ou ( $u_j$ ) et  $y_i$ , ce qui est préférable afin de déterminer une stratégie de commande adaptée.
- Confiance / Fiabilité : certaines méthodes aboutissent à des résultats plus fiables que d'autres, dans le sens où elles s'appuient sur des hypothèses plus ou moins respectées. Par ailleurs, certaines méthodes ont pour vocation principale l'analyse des interactions dans le cas TITO. La généralisation de ces méthodes à un procédé quelconque ne conduit pas systématiquement à des résultats fiables.

La complexité des méthodes est prise en compte au travers des critères suivants :

- Dépendance vis-à-vis de la normalisation du système : certains indices dépendent de la normalisation des commandes, sorties et entrées de perturbation. D'autres indices peuvent être appliqués tels quels sur un procédé car ils sont invariants à la normalisation du procédé.
- Dépendance de la configuration commandes-sorties : certains indices permettent d'évaluer les interactions pour l'ensemble des configurations, tandis que d'autres ne donnent des informations que pour la configuration commandes-sorties considérée. Ces derniers doivent alors être calculés pour chaque configuration, ce qui devient fastidieux étant donné que le nombre de configurations augmente rapidement avec le nombre de commandes et de sorties.
- Calcul - Analyse : la complexité des calculs et l'analyse des résultats sont plus ou moins appréhendables en fonction des méthodes. Le cas TITO sera distingué du cas général MIMO (Multiple Inputs Multiple Outputs) car certaines méthodes complexes deviennent relativement simples pour le cas TITO.

Les méthodes d'analyse seront brièvement présentées et le calcul des indices d'interaction sera explicité. Un tableau récapitulatif positionnera les différentes méthodes selon les critères préalablement définis. Les évaluations seront issues des outils théoriques mis en jeu et de tests en simulation effectués avec un système de cuves. Une attention particulière sera apportée aux systèmes TITO (Two Inputs Two Outputs), dont le turbopropulseur que l'on étudiera dans le Chapitre IV fait partie.

## 12. Méthodes d'analyse des interactions

### 12a. Méthodes fréquentielles

Les méthodes d'analyse des interactions dites *fréquentielles* s'appuient sur les réponses fréquentielles du procédé. Il s'agit généralement de l'analyse des gains du procédé, évalués à la pulsation nulle, autour des bandes passantes du procédé, ou bien sur l'ensemble du domaine fréquentiel.

Les méthodes fréquentielles sont les premières à avoir été développées, et sont encore aujourd'hui les méthodes les plus utilisées dans l'industrie, du fait de leur simplicité et d'une interprétation physique relativement aisée. Les méthodes fréquentielles reviennent souvent à comparer les gains des transferts diagonaux par rapport à ceux des transferts non diagonaux. La forme de matrice de transfert est préférable à la représentation d'état pour l'utilisation de ces méthodes. La matrice des gains statiques du procédé  $G$  sera notée  $G_0$ .

#### i. Niederlinsky Index (NI)

(Niederlinski, 1971) introduit l'indice NI (Niederlinsky Index), qui donne une condition suffisante de l'instabilité d'un système décentralisé en boucle fermée, lorsque les correcteurs possèdent une action intégrale. (Grosdidier and Morari, 1985) a introduit des hypothèses supplémentaires pour l'utilisation de cet indice (chaque boucle indépendante doit être stable et strictement propre). Cet indice scalaire est défini comme suit ((I2.1)) et indique la présence d'instabilités dans la configuration évaluée s'il est négatif. Dans le cas TITO, un indice positif indique qu'il est possible de synthétiser un régulateur décentralisé pouvant assurer la stabilité du système bouclé (sous les hypothèses précédentes).

$$NI = \frac{\det(G_0)}{\prod_i G_{0ii}} \quad (I2.1)$$

L'indice NI est pratique puisqu'il permet d'éliminer directement certaines configurations commandes-sorties lors du choix du pairing, en s'appuyant uniquement sur les gains statiques du procédé. En revanche, il ne permet pas de comparer différentes configurations possédant des indices NI positifs. Il s'agit ainsi d'un indice à calculer en premier lieu et à utiliser conjointement avec d'autres indices.

#### ii. Relative Gain Array (RGA)

La méthode la plus classique d'analyse des interactions est la RGA (Relative Gain Array) proposée par (Bristol, 1966). Le calcul de l'indice RGA a pour but le choix de l'appairage commandes-sorties (choix de l'écart  $e_i$  à partir duquel la commande  $u_j$  sera élaborée) avec le plus faible niveau d'interactions. Le principe de la RGA consiste à calculer le rapport entre le gain  $G_{ij}$  de la boucle ouverte isolée du reste du système, et le gain  $\tilde{G}_{ij}$  de cette même boucle en considérant les autres boucles fermées (I2.2). La RGA est une matrice dont chaque élément caractérise pour une configuration commandes-sorties le changement de gain lorsque les interactions sont prises en compte.

$$RGA_{ij} = \frac{G_{ij}}{\tilde{G}_{ij}} \quad (I2.2)$$

Afin de s'affranchir de la dépendance vis-à-vis des correcteurs non synthétisés des autres boucles, l'hypothèse utilisée pour le calcul de la RGA est que les correcteurs des autres boucles sont parfaits dans le sens où ils confèrent une bande passante infinie, et permettent aux différentes boucles de suivre instantanément leurs consignes respectives. Cette approximation revient à supposer que les modules des boucles ouvertes sont grands devant 1, ce qui est le cas en basses fréquences. La RGA est ainsi évaluée à pulsation nulle, là où l'hypothèse est généralement vérifiée. Dans la pratique, la RGA se calcule facilement en utilisant le produit matriciel de Hadamard  $\otimes$  (produit élément par élément) comme indiqué dans (I2.3) (Wang *et al.*, 2008).

$$RGA = G_0 \otimes (G_0^{-1})^T \quad (I2.3)$$

Le gain relatif  $RGA_{ij}$  indique la manière dont le gain statique du transfert  $u_j \rightarrow y_i$  varie lors de la fermeture de toutes les autres boucles. Les interactions peuvent être considérées comme faibles si le gain ne change *pas trop* lors de la fermeture des autres boucles, et donc si l'élément  $RGA_{ij}$  est proche de 1.

Le choix des configurations commandes-sorties doit donc être réalisé de manière à obtenir des éléments relatifs à une configuration d'appairage commandes-sorties proches de 1. Il est ainsi conseillé d'éviter de sélectionner une configuration composée d'éléments largement supérieurs à 1 (qui indiquent la présence de fortes interactions). Par ailleurs, les éléments négatifs peuvent être sources d'instabilités : en effet, cela indique pour les boucles concernées un changement de signe du gain lors de la fermeture des autres boucles.

La RGA est très utilisée car elle est très simple à mettre en œuvre et possède des propriétés algébriques intéressantes (Skogestad, 2005) :

- La RGA est indépendante de la normalisation des commandes/sorties et de l'appairage.
- La somme des éléments par colonne et par ligne est égale à 1.
- La RGA permet par ailleurs d'avoir une idée du conditionnement du système. Celle-ci est en effet liée à l'indice de conditionnement  $\gamma^*$  reflétant la sensibilité aux incertitudes.

Néanmoins, cette méthode présente quelques limitations mentionnées dans (Hägglom, 1995) :

- La RGA ne distingue pas le sens des interactions (un contre-exemple typique où la RGA n'est pas adaptée consiste à considérer un système triangulaire : des interactions importantes ne seront pas décelées par la RGA).
- La RGA ne donne pas d'informations sur les interactions dans un cadre dynamique.
- La RGA caractérise le changement de gain statique lors de la fermeture de l'ensemble des autres boucles, mais n'indique pas le changement de comportement de cette même boucle quand les autres boucles sont fermées les unes après les autres. Les informations issues de la RGA peuvent ainsi s'avérer peu représentatives des interactions réelles lorsque le nombre de commandes et de sorties est élevé.

Finalement, la RGA est une règle empirique qui s'avère efficace dans de nombreuses applications (McAvoy, 1983). Elle est par ailleurs communément acceptée pour des procédés TITO. Dans ce cas, un seul élément de la RGA, donné par (I2.3), permet de déterminer l'ensemble de la matrice RGA du fait de ses propriétés.

$$RGA_{11} = \frac{1}{1 - \frac{G_{012}G_{021}}{G_{011}G_{022}}} = \frac{1}{1 - \lambda_0} = \frac{1}{NI} \quad (I2.4)$$

avec  $\lambda_0$  le gain statique de l'indice  $\lambda$  défini dans (I1.3). De par sa relation avec l'indice de Niederlinsky dans le cas TITO, le signe de la RGA permet de déterminer si une configuration commandes-sorties sera admissible d'un point de vue stabilité avec un régulateur décentralisé.

De nombreuses méthodes ont été développées pour remédier à certaines limitations de la RGA.

### iii. Méthodes dérivées de la RGA

#### Relative Interaction Array RIA

La RIA (Relative Interaction Array) de (Zhu, 1996) est définie comme le rapport, entre la variation de gain statique lorsque l'on ferme toutes les autres boucles  $\tilde{G}_{0ij} - G_{0ij}$ , et le gain apparent  $G_{0ij}$  lorsque les boucles sont ouvertes (I2.5). La RIA est bien sûr liée à la RGA et se calcule généralement à partir de cet indice (I2.6). Dans le cas TITO, l'indice RIA est égal au signe près à l'indice  $\lambda$  issu de (I1.3).

$$RIA_{ij} = \frac{\tilde{G}_{0ij} - G_{0ij}}{G_{0ij}} \quad (I2.5)$$

$$\tilde{G}_{0ij} = (1 + RIA_{ij})G_{0ij} = \frac{G_{0ij}}{RGA_{ij}} \quad (I2.6)$$

Cette mesure peut s'interpréter facilement :

- Quand  $RIA_{ij} > 0$ , les interactions agissent dans le même sens que le transfert seul  $G_{ij}$ .
- Quand  $RIA_{ij} < 0$ , les interactions agissent dans le sens inverse que le transfert seul  $G_{ij}$ .
- Quand  $|RIA_{ij}| > 1$ , les interactions ont un effet plus grand que le transfert seul  $G_{ij}$ .

Il est conseillé de choisir les éléments RIA proches de 0 et éviter ceux qui sont inférieurs à -1 (pour des raisons de stabilité). Il peut par ailleurs être judicieux de minimiser la somme (en valeur absolue) des différents éléments relatifs à une configuration commandes-sorties.

Normalized Relative Gain Array (NRGA)

L'indice NRGA (Normalized Relative Gain Array) de (Fatehi and Shariati, 2007) introduit des pondérations dans la matrice RGA. Les pondérations de NRGA consistent à différencier les espaces  $[0,1]$  et  $[1,+\infty[$ , afin de ne pas considérer de la même façon les nombres  $1-\varepsilon$  et  $1+\varepsilon$  ( $\varepsilon$  étant un nombre quelconque). L'appairage se fait ensuite comme pour la RGA.

RGA Iterative

Une autre approche dérivée de la RGA consiste à calculer itérativement la RGA comme indiqué dans (I2.7) ( $RGA^k$  indique que l'on calcule la RGA de  $RGA^{k-1}(G)$ ). Cela permet généralement de faciliter la lecture des résultats, notamment lorsque le nombre d'entrées et sorties est conséquent. L'appairage se fait ensuite comme pour la RGA.

$$RGA_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} (RGA^k(G)) \quad (I2.7)$$

Nombre RGA

Le Nombre RGA (Skogestad, 2005) permet de sélectionner la configuration qui conduit à la RGA la plus proche de la matrice identité (cela permet de contourner certains cas où la matrice RGA est loin de la matrice identité, tout en ayant une configuration composée d'éléments proches de 1). Le Nombre RGA d'une configuration  $c$  se calcule comme en (I2.8), avec  $I(c)$  la matrice contenant des 1 sur les coefficients correspondant au pairage  $c$  adopté. Le Nombre RGA doit alors être le plus faible possible.

$$\text{Nombre RGA}(c) = \|RGA(G) - I(c)\|_1 \quad (I2.8)$$

iv. Extensions de la RGA pour des procédés non TITO

Partial Relative Gain (PRG)

Comme mentionné précédemment, la RGA caractérise le changement de gain d'un transfert en boucle ouverte lorsque toutes les autres boucles sont fermées. Le PRG (Partial Relative Gain) de (Hägglom, 1997) revient à étudier la RGA dans différentes situations où seul un certain nombre de boucles sont fermées. Le but est alors de déterminer une configuration commandes-sorties où les matrices RGA relatives aux différentes situations sont relativement proches de l'identité.

General Interaction - Decomposed Relative Interaction Analysis (GI-DRIA)

L'approche GI (General Interaction) - DRIA (Decomposed Relative Interaction Analysis) développée dans (He, *et al.*, 2004) poursuit un objectif similaire à la PRG : inclure dans l'analyse la modification



d'un transfert en boucle ouverte lors de la fermeture de chacune des autres boucles prises indépendamment. La DRIA du transfert  $u_j \rightarrow y_i$  résulte conjointement des interactions dans le système sans la boucle  $u_j \rightarrow y_i$ , et de celles en considérant cette boucle fermée. On considère :

- $RGA^{ij}$  la matrice RGA du sous-système  $G^{ij}$  obtenu lorsque la boucle  $u_j \rightarrow y_i$  est ouverte.  $RGA^{ij}$  se compose des éléments  $RGA_{kl}^{ij}$  qui correspondent au changement de gain statique du transfert  $u_l \rightarrow y_k$  lors de la fermeture des autres boucles (hormis la boucle  $u_j \rightarrow y_i$ ). Les interactions entre les différentes boucles sont ainsi considérées.
- $RIA^{ij}$  la matrice RIA du sous-système  $G^{ij}$  lorsque la boucle  $u_j \rightarrow y_i$  est fermée.  $RIA^{ij}$  est formée par l'ensemble des éléments  $RIA_{kl}^{ij}$ , qui représentent les incréments de gain du transfert  $u_l \rightarrow y_k$  lors de la fermeture de la boucle  $u_j \rightarrow y_i$ . On tient ainsi compte des interactions de chacune des boucles avec la boucle  $u_j \rightarrow y_i$ .

La DRIA peut se calculer comme un produit termes à termes des deux indices précédemment définis, comme dans (I2.9). Les équations (I2.10) et (I2.11) permettent cependant d'aboutir plus rapidement au résultat. Les étapes des calculs et les explications associées sont détaillés dans (He, *et al.*, 2004).

$$DRIA^{ij} = RIA^{ij} \otimes RGA^{ij} \quad (I2.9)$$

$$\Delta G_o^{ij} = - \frac{G_{o \bullet j}^{ij} G_{o i \bullet}^{ij}}{G_{o ij}} \quad (I2.10)$$

$$DRIA^{ij} = \Delta G_o^{ij} \otimes (G_o^{ij})^{-1} \quad (I2.11)$$

$$GI^{ij} = \sigma_{max}(DRIA^{ij}) \quad (I2.12)$$

avec les notations adoptées pour la Figure I1.2 :  $G^{ij}$  s'obtient à partir de la matrice  $G$  en enlevant la ligne  $i$  et la colonne  $j$ ,  $G_{i \bullet}^{ij}$  correspond au  $i^{\text{ème}}$  vecteur ligne de  $G$  et  $G_{\bullet j}^{ij}$  au  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $G$  en enlevant le terme  $G_{ij}$ .  $\sigma_{max}$  représente la plus grande valeur singulière.

L'indice GI correspond à la valeur singulière maximale de chaque matrice DRIA. Il est alors conseillé de sélectionner les configurations avec des GI les plus faibles possibles. En cas d'indécision, il est possible de minimiser le produit des GI de chaque configuration.

Les indices PRG et DRIA dépendent de la configuration commandes-sorties choisie. Il est donc nécessaire d'évaluer et d'analyser un grand nombre de fois ces indices lorsque le nombre d'entrées et de sorties est conséquent. Mais c'est dans ces situations que ces indices se démarquent de la RGA, puisqu'ils conduisent à des analyses bien plus fines des interactions. Par ailleurs, ces indices ne donnent pas plus d'informations que la RGA ou la RIA dans le cas TITO, ce qui peut confirmer que ces dernières méthodes sont suffisamment précises pour l'étude d'un procédé de cette nature.

#### v. Extensions dynamiques de la RGA

##### Dynamic Relative Gain Array (DRGA)

La méthode DRGA (Dynamic Relative Gain Array) proposée par (Witcher and McAvoy, 1977) permet d'étendre la RGA des gains statiques au cas dynamique, en considérant les gains des transferts sur l'ensemble du domaine fréquentiel. Il est notamment intéressant de s'intéresser aux pulsations proches des bandes passantes recherchées. La DRGA se calcule de la manière suivante et est généralement représentée sous forme de diagrammes de Bode :

$$DRGA(s) = G(s) \otimes (G(s))^{-1} \quad (I2.13)$$

Les règles de l'appairage sont similaires à celles de la RGA, en considérant les gains évalués sur le domaine fréquentiel à la place d'une matrice de gains statiques. Comme précisé précédemment lors du calcul de la RGA, les modules des boucles ouvertes doivent être suffisamment grands devant 1 pour que les conclusions tirées de l'analyse de la DRGA soient fiables.

Effective Relative Gain Array (ERGA)

L'indice ERGA (Effective Relative Gain Array) (Xiong *et al.*, 2005) est également une extension de RGA au cas dynamique. En utilisant la matrice  $\Omega$  composée des premières pulsations de brisure en boucle ouverte des différents transferts SISO, l'indice ERGA est calculé en utilisant (I2.14) et (I2.15). Le choix des configurations d'appairage se fait ensuite de la même manière que pour RGA.

$$G_{\Omega} = G_0 \otimes \Omega \quad (I2.14)$$

$$ERGA = G_{\Omega} \otimes (G_{\Omega}^{-1})^T \quad (I2.15)$$

Il est à noter que cet indice pourrait également être utilisé en considérant les pulsations de coupure visées en boucle ouverte dans la matrice  $\Omega$ , ce qui permettrait ainsi de prendre en compte les objectifs de la synthèse des lois de commande.

#### vi. Diagonale dominante

En mathématiques, une matrice  $Z$  est dite diagonale dominante par ligne ( $DD_l$ ) et respectivement diagonale dominante par colonne ( $DD_c$ ) si les inégalités (I2.16) et (I2.17) sont vérifiées. Cela correspond à avoir le module d'un élément diagonal plus grand que la somme de ceux des éléments non diagonaux d'une même ligne ou d'une même colonne.

$$|z_{ii}| \geq \sum_{j \neq i}^r |z_{ij}| \quad (I2.16)$$

$$|z_{ii}| \geq \sum_{j \neq i}^r |z_{ji}| \quad (I2.17)$$

La diagonale dominante DD peut être appliquée à un procédé physique (Economou and Morari, 1986 a)) en comparant les gains des différents transferts. Un procédé est  $DD_l$  si la matrice des modules est  $DD_l$  à chacune des pulsations comme dans (I2.18). De la même manière, un procédé est  $DD_c$  si l'inégalité (I2.19) est respectée.

$$DD_{l_i}(G(s)) = \frac{|G_{ii}(s)|}{\sum_{j \neq i}^r |G_{ij}(s)|} \geq 1, i = [1, r] \quad (I2.18)$$

$$DD_{c_i}(G(s)) = \frac{|G_{ii}(s)|}{\sum_{j \neq i}^r |G_{ji}(s)|} \geq 1, i = [1, r] \quad (I2.19)$$

Une DD importante indique que les éléments diagonaux sont importants vis-à-vis des éléments non diagonaux, et indique par conséquent des couplages faibles. La DD de chaque configuration, obtenue en modifiant l'ordonnancement des commandes et sorties, doit être évaluée pour sélectionner la plus favorable. La DD peut ainsi permettre le choix d'une configuration en recherchant celle où la DD est maximale.

L'idéal serait bien sûr de maximiser la diagonale dominante du système en boucle fermée, mais ce n'est pas possible tant que les correcteurs ne sont pas synthétisés. On peut cependant noter que la  $DD_c$  est conservée avec l'ajout d'un régulateur décentralisé en boucle ouverte, comme on le voit dans (I2.20). De la même manière, la  $DD_l$  de l'inverse du procédé est conservée par la pré-multiplication par l'inverse



d'un correcteur diagonal. Cela se traduit par l'égalité (I2.21) en notant  $\hat{Z}$  l'inverse d'une matrice  $Z$  (ces propriétés seront utilisées dans le Chapitre II dans certaines méthodes de synthèse multiboucle).

$$GK = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r1} & \dots & G_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & K_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}G_{11} & \dots & K_{rr}G_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{11}G_{r1} & \dots & K_{rr}G_{rr} \end{bmatrix} \quad (I2.20)$$

$$\hat{K}\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \hat{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{G}_{11} & \dots & \hat{G}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{G}_{r1} & \dots & \hat{G}_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11}\hat{G}_{11} & \dots & \hat{K}_{11}\hat{G}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{K}_{rr}\hat{G}_{r1} & \dots & \hat{K}_{rr}\hat{G}_{rr} \end{bmatrix} \quad (I2.21)$$

Par ailleurs, la DD peut se représenter graphiquement sur le diagramme de Nyquist et permettre l'utilisation de théorèmes garantissant la stabilité du système multivariable, à l'aide des bandes de Gershgorin ou des bandes d'Ostrowski. Cela sera abordé plus en détails dans le Chapitre II.

#### vii. Fonctions de sensibilité

Les notations suivantes seront utilisées pour définir les indices relatifs aux fonctions de sensibilité :

$\bar{G}$  est la matrice de transfert diagonale comportant uniquement les éléments diagonaux de  $G$ . La matrice de sensibilité (en sortie) du système multivariable  $S$  est définie par (I2.23), tandis que la matrice de sensibilité décentralisée (en sortie)  $\bar{S}$  est définie par (I2.24). Cette dernière correspond à la matrice de sensibilité du système diagonal  $\bar{G}$ . De la même manière, les matrices de sensibilité complémentaires (en sortie) sont définies par (I2.25) et (I2.26).  $K$  est un correcteur diagonal.

$$\bar{G}(s) = \text{diag}(G(s)) \quad (I2.22)$$

$$S(s) = (I + G(s)K(s))^{-1} \quad (I2.23)$$

$$\bar{S}(s) = (I + \bar{G}(s)K(s))^{-1} \quad (I2.24)$$

$$T(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s) = I - S(s) \quad (I2.25)$$

$$\bar{T}(s) = (I + \bar{G}(s)K(s))^{-1}\bar{G}(s)K(s) = I - \bar{S}(s) \quad (I2.26)$$

Les méthodes d'analyse relatives aux fonctions de sensibilité permettent de déterminer l'écart entre les performances visées lors d'une synthèse monoboucle (i.e. sans prendre en compte les interactions lors de la synthèse), et les performances réelles attendues (i.e. lorsque les interactions seront prises en compte). Ces méthodes reposent sur la comparaison de la matrice de sensibilité du système multivariable avec la matrice de sensibilité décentralisée.

#### Performance Relative Gain Array (PRGA)

La PRGA (Performance Relative Gain Array) introduite par (Hovd and Skogestad, 1992) est utilisée pour déterminer les détériorations des performances (en termes de suivi de consigne) dues aux interactions. L'indice PRGA est calculé en (I2.27).

$$\text{PRGA}(s) = \bar{G}(s)G^{-1}(s) \quad (I2.27)$$

La matrice de sensibilité  $S$  est reliée à la PRGA et à la matrice de sensibilité décentralisée par la relation (I2.28) (Skogestad, 2005). Celle-ci se résume simplement à (I2.29) lorsque  $\bar{S}$  est proche de 0, i.e. à des pulsations faibles devant les pulsations de coupure désirées.

$$S(s) = (I + \bar{S}(s)(\text{PRGA}(s) - I))^{-1}\bar{S}(s) \times \text{PRGA}(s) \quad (I2.28)$$

$$\bar{S}(s) \approx 0 \implies S(s) \approx \bar{S}(s) \times \text{PRGA}(s) \quad (I2.29)$$

Sachant qu'il est souhaitable d'avoir des fonctions de sensibilité multivariables inférieures à 1 en dessous des pulsations de coupure désirées, la PRGA peut être utilisée pour régler les correcteurs SISO de chaque boucle de manière à avoir (I2.30) (cela implique un réglage indépendant des autres boucles).

$$|1 + G_{ii}(s)K_i(s)| > |PRGA_{ij}(s)|, \forall i, j \quad (I2.30)$$

Aux pulsations inférieures à la pulsation de coupure désirée, l'élément  $PRGA_{ij}$  peut ainsi être interprété comme le gain minimal de la boucle monovariante, permettant d'obtenir des performances acceptables en multivariable.

Un élément  $PRGA_{ij}$  plus grand que 1 est contraignant et signifie qu'il est nécessaire d'avoir un gain élevé pour contrer les interactions. Ces dernières ont ainsi tendance à ralentir les réponses du système multivariable, vis-à-vis des réponses obtenues sans interactions. Dans le cas inverse, des éléments inférieurs à 1 peuvent conduire à une amélioration des performances autour des pulsations considérées.

#### Erreurs relatives

Comme vu précédemment, les éléments non diagonaux caractérisent les couplages et sont comparés aux termes diagonaux, que l'on peut considérer comme les termes nominaux. Une représentation classique d'un procédé multivariable en boucle fermée est donnée sur la Figure I2.1.

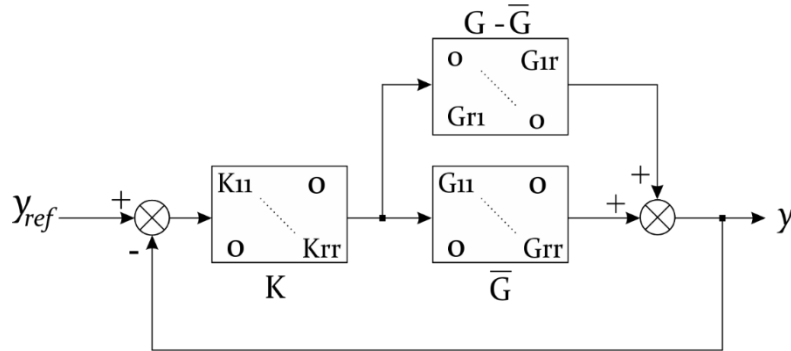


Figure I2.1 : Représentation possible d'une commande décentralisée

La matrice de l'erreur relative  $E$  est la différence relative entre  $G$  et  $\bar{G}$ , décrite dans (I2.31). Il est clair d'après (I2.32), que le système multivariable est d'autant plus proche du système diagonal que  $E$  est proche de 0.

$$E(s) = (G(s) - \bar{G}(s))\bar{G}(s)^{-1} \quad (I2.31)$$

$$G(s) = (I + E(s))\bar{G}(s) \quad (I2.32)$$

Dans le cas TITO, l'expression de  $E$  est équivalente à :

$$E(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{G_{12}(s)}{G_{22}(s)} \\ \frac{G_{21}(s)}{G_{11}(s)} & 0 \end{bmatrix} \quad (I2.33)$$

En fait, la sensibilité du système multivariable peut être reliée à la sensibilité des boucles individuelles en considérant la matrice de l'erreur relative (I2.35).  $E$  doit alors être faible si l'on souhaite que les fonctions de sensibilité du système multivariable  $S$  ne s'éloignent pas trop des fonctions de sensibilité décentralisées  $\bar{S}$ .

$$(I + G(s)K(s)) = (I + E(s)\bar{T}(s))(I + \bar{G}(s)K(s)) \quad (I2.34)$$

$$S(s) = \bar{S}(s)(I + E(s)\bar{T}(s))^{-1} \quad (I2.35)$$

L'exploitation de la matrice de l'erreur relative  $E$  n'est pas évidente. Certaines méthodes d'analyse s'appuient sur la valeur propre de plus grand module de cette matrice (Yau and Nwokah, 1993) ou bien la plus grande valeur singulière.

Mu-Interaction (SSV-IM)

La mesure Mu-Interaction de (Grosdidier and Morari, 1986), notée SSV-IM (Structured Singular Value - Interaction Measure) se calcule comme en (I2.36), en considérant  $\Delta_K$  la structure diagonale du régulateur décentralisé.

$$SSV-IM = \mu_{\Delta_K}^{-1}(E(s)) \quad (I2.36)$$

La SSV-IM est directement reliée à la stabilité et aux performances du système multivariable. En fait, la SSV-IM revient à estimer des contraintes à respecter par les transferts  $\bar{T}$  pour assurer la stabilité de la structure bouclée de la Figure I2.2. La SSV-IM doit alors être la plus grande possible afin d'être la moins contraignante.

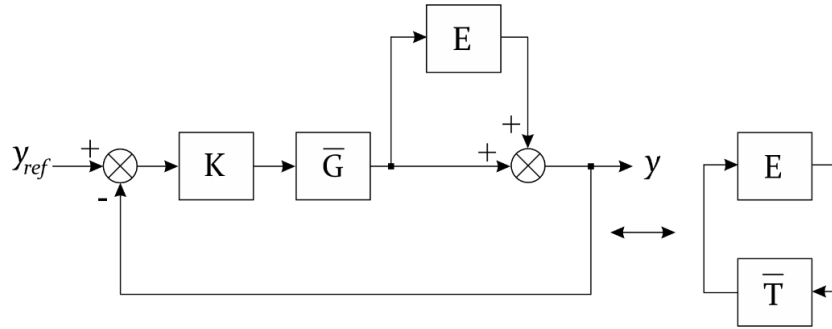


Figure I2.2 : Schéma de commande traduit par le bouclage de  $E$  par  $\bar{T}$

De par son approche, la SSV-IM est un indice rigoureux, qui permet de synthétiser indépendamment des correcteurs monovariabiles pour réaliser une commande décentralisée. Néanmoins, le calcul de cet indice n'est pas évident et l'estimation des performances est valable uniquement lorsque les correcteurs sont synthétisés indépendamment les uns des autres. Dans le cas des systèmes TITO, la SSV-IM se calcule facilement :

$$SSV-IM^{-1} = \mu_{\Delta_K}(E(s)) = \sqrt{\frac{|G_{12}(s)G_{21}(s)|}{|G_{11}(s)G_{22}(s)|}} \quad (I2.37)$$

Ces méthodes, qui s'appuient sur la différence entre les fonctions de sensibilité décentralisées et multivariabiles, peuvent être utilisées pour le choix de la configuration. Cependant, elles sont plus complexes à mettre en œuvre que les méthodes dérivées de la RGA et doivent être calculées pour chaque configuration. Par ailleurs, les conclusions de ces méthodes sont valables lorsque les correcteurs monovariabiles sont synthétisés indépendamment les uns des autres. Ces méthodes sont ainsi utilisées afin d'évaluer les performances multivariabiles attendues avec des synthèses monoboucles, pour une configuration commandes-sorties déjà déterminée.

#### viii. Autres méthodes fréquentielles

Des méthodes d'analyse des interactions fréquentielles existent dans le cas d'une commande décentralisée par blocs. (Manousiouthakis, 1986) introduit par exemple la BRG (Block Relative Gain) comme une extension de la RGA pour l'étude de configurations incluant des régulateurs multivariabiles. Viennent ensuite la DBRG (Dynamic Block Relative Gain) de (Arkun, 1987) et la BDPD (Block Decentralized Performance Degradation) de (Reeves, 1991) que l'on peut voir comme des extensions

de la DRGA et de la PRGA. Ces méthodes ne font pas l'objet de cette étude, car elles ne sont pas applicables pour des procédés TITO, comme le turbopropulseur étudié dans le Chapitre IV.

## I2b. Méthodes temporelles

Les méthodes temporelles d'analyse des interactions s'appuient sur les réponses indicielles des différents transferts du procédé multivariable.

La RDA (Relative Dynamic Array) (McAvoy, 1983) peut être vue comme l'équivalent de la DRGA, en considérant les potentiels dynamiques  $\Phi_{ij}$  à la place des gains statiques (I2.38). Le potentiel dynamique représente l'intégrale de la réponse indicielle  $y_i$  pour un échelon de commande  $u_j$  à l'instant  $t = 0$  (I2.39).

$$RDA = \Phi(\theta) \otimes ((\Phi(\theta))^T)^{-1} \quad (I2.38)$$

$$\Phi_{ij}(\theta) = \int_0^\theta y_{ij}(t) dt \quad (I2.39)$$

L'appairage commandes-sorties est réalisé de la même manière que celui de la RGA. Le choix de  $\theta$  affecte évidemment le calcul de la RDA : pour un  $\theta$  qui tend vers l'infini, seul le régime permanent va être considéré, alors que la RDA va se concentrer sur le régime transitoire pour un  $\theta$  plus faible.  $\theta$  est généralement choisi comme étant entre 20 et 100% de la constante du temps dominante du processus. Une autre alternative envisagée est de considérer les réponses impulsionnelles du procédé et non les réponses indicielles.

De nombreuses variantes de la RDA existent. En fait, la plupart de ces méthodes peuvent être vues comme des transpositions des méthodes fréquentielles dans le domaine temporel. Un avantage est que ces méthodes peuvent s'appliquer directement sur un modèle non linéaire. Bien que plus récentes, elles sont nettement moins utilisées car elles n'apportent pas d'informations supplémentaires par rapport aux méthodes fréquentielles. Par ailleurs, même si le choix de  $\theta$  permet de prendre les aspects dynamiques en compte, cette approche est nettement moins précise que l'approche fréquentielle.

## I2c. Méthodes des grammians

Le principe des méthodes des grammians est d'évaluer la contribution dynamique de chaque transfert d'un procédé. Il est alors possible de négliger les transferts les plus faibles, car cela n'affecte pas ou peu la dynamique générale du système. Contrairement aux méthodes précédentes, les méthodes utilisant les grammians fournissent des informations dans un cadre multivariable quelconque, et non uniquement pour la commande décentralisée (Arranz, 2012). Ces méthodes sont d'ailleurs tout à fait adaptées lors de la synthèse d'une commande partiellement décentralisée.

Les grammians sont définis dans (A-1. Grammiens de commandabilité et d'observabilité). Les grammians de commandabilité et d'observabilité, respectivement notés  $P$  et  $Q$ , sont sensibles à la normalisation des entrées et sorties. Il en va ainsi de même pour les indices d'interactions qui s'appuient sur ces matrices. Par ailleurs, quelques limitations de ces méthodes sont dues à la définition même des grammians : ces méthodes s'appliquent ainsi à des procédés stables, et donc sans intégrateur. L'extension de ces méthodes à d'autres classes de systèmes est un sujet en cours de recherche. Contrairement aux méthodes fréquentielles, le formalisme de représentation d'état est nécessaire pour l'utilisation des méthodes des grammians.

### i. Hankel Interaction Index Array (HIIA)

Les valeurs singulières de Hankel (HSV) d'un système, qu'il soit continu ou discret, sont données par (I2.40) :

$$\sigma_{H_i} = \sqrt{\lambda_i(PQ)} \quad (I2.40)$$

avec  $\lambda_i$  les valeurs propres du produit des grammien de commandabilité  $P$  et d'observabilité  $Q$ .

Les HSV peuvent être interprétées comme une mesure commune de la commandabilité et de l'observabilité des états du système considéré. Elles caractérisent les gains entre les entrées passées et les sorties futures.

La norme de Hankel est quant à elle définie par (I2.41). Cette dernière est considérée comme un bon indicateur pour mesurer simultanément la commandabilité et l'observabilité de la dynamique du système.

$$\|G\|_H = \sqrt{\lambda_{\max}(PQ)} \quad (I2.41)$$

La norme de Hankel est à la base de l'indice HIIA (Hankel Interaction Index Array) (Wittenmark and Salgado, 2002) défini dans (I2.42). Les grammien de commandabilité et d'observabilité sont calculés pour chaque sous système SISO  $G_{ij}$ , avant d'être normalisés. La somme des éléments de la matrice HIIA est donc égale à 1.

$$HIIA_{ij} = \frac{\|G_{ij}\|_H}{\sum_{i,j} \|G_{ij}\|_H} \quad (I2.42)$$

Un terme  $HIIA_{ij}$  important indique un fort impact du signal de commande  $u_j$  sur la sortie  $y_i$ . Une bonne configuration commandes-sorties doit être la plus représentative possible des dynamiques du système, et contenir ainsi les éléments importants de la matrice HIIA. Le but est donc de sélectionner les éléments relatifs à un paire commandes-sorties, de manière à ce que leur somme soit la plus proche possible de 1.

Afin de se concentrer sur une gamme de fréquences spécifiques, une solution consiste à appliquer des filtres adaptés au procédé, avant de calculer l'indice HIIA (Shaker and Tahavory, 2013) (cette remarque s'applique également sur les autres indices d'interactions s'appuyant sur les grammien).

### ii. PM (Participation Matrix)

La norme de Hankel considère uniquement la plus grande HSV du produit des grammien  $PQ$ . L'approche PM (Participation Matrix) proposée par (Salgado and Conley, 2004) permet de quantifier les interactions en considérant l'ensemble des HSV. La somme des valeurs propres étant égale à la trace de la matrice, l'indice PM est finalement calculé par (I2.43).

$$PM_{ij} = \frac{\text{tr}(P_j Q_i)}{\text{tr}(PQ)} \quad (I2.43)$$

avec  $P_j$  le grammien de commandabilité relatif à la  $j^{\text{ème}}$  commande et  $Q_i$  le grammien d'observabilité relatif à la  $i^{\text{ème}}$  sortie.

### iii. Indices $H_2$ et $H_\infty$

Dans le cas où un système se compose de sous-systèmes stables et strictement propres, la norme  $H_2$  de chaque sous système peut se définir par (I2.44) (où  $C_i(C)$  est la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice de sortie  $C$  du procédé).

$$\|G_{ij}\|_2 = \sqrt{C_i(C) P_j C_i^T(C)} \quad (I2.44)$$

La norme  $H_2$  peut être interprétée comme l'énergie de transmission entre une commande et une sortie (Birk and Medvedev, 2003). L'indice  $H_2$  correspond finalement à la normalisation de la norme  $H_2$  de chacun des sous-systèmes (I2.45).

$$H_2(G_{ij}) = \frac{\|G_{ij}\|_2}{\sum_{i,j} \|G_{ij}\|_2} \quad (I2.45)$$

Une mesure fondée sur la norme  $H_\infty$  est également donnée par :

$$H_\infty(G_{ij}) = \frac{\|G_{ij}\|_\infty}{\sum_{i,j} \|G_{ij}\|_\infty} \quad (I2.46)$$

D'après (Halvarsson, 2010), la méthode  $H_2$  permet néanmoins de mieux détecter les interactions en hautes fréquences par rapport à HIIA et PM, tandis qu'elle est moins représentative des interactions en basses fréquences.

#### iv. Dynamic Input-Output Pairing Matrix (DIOPM)

La mesure DIOPM (Dynamic Input-Output Pairing Matrix) (Moaveni and Khaki-Sedigh, 2008) revient à prendre la valeur singulière maximale de la matrice de grammien croisée. Cette mesure est totalement équivalente à l'indice HIIA (qui considère la valeur singulière de Hankel du système) et ne sera donc pas détaillée par la suite.

#### v. Cas de la commande partiellement décentralisée

Dans le cas où une configuration commandes-sorties ne permet pas de sélectionner l'ensemble des transferts ayant les plus grandes contributions dynamiques, il est possible de s'orienter vers une stratégie partiellement décentralisée.

Considérons par exemple la Figure I2.3 où les cases rouges, oranges et blanches correspondent respectivement aux transferts importants, moyens et faibles, d'un point de vue contribution dynamique.

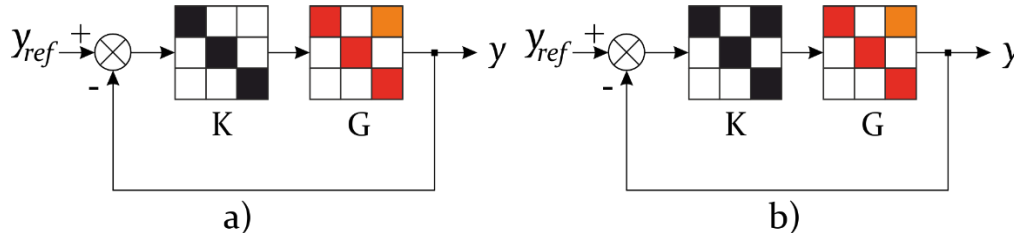


Figure I2.3 : Schéma de la structure d'un régulateur en fonction de l'analyse des interactions

Une première possibilité est de faire une commande décentralisée en prenant les paires  $u_1 \rightarrow y_1$ ,  $u_2 \rightarrow y_2$  et  $u_3 \rightarrow y_3$ . On a donc un correcteur diagonal composé de trois termes Figure I2.3a). Si les performances de la commande décentralisée ne sont pas satisfaisantes, le fait de considérer le transfert  $u_3 \rightarrow y_1$ , et donc d'ajouter un terme supplémentaire au correcteur diagonal peut permettre d'améliorer grandement les performances, tout en ayant un correcteur relativement simple (Figure I2.3b)).

### I2d. Méthodes liées aux perturbations

On a vu qu'il était préférable de choisir une configuration dans laquelle les interactions étaient faibles et perturbaient le moins possible les sorties. Cela est aussi vrai dans le cas de perturbations agissant sur les sorties (Figure II.2) : les perturbations peuvent être amplifiées ou bien réduites en fonction des interactions dans le système. Le choix du pairing peut alors tenir compte des perturbations lorsqu'elles sont connues et considérées comme importantes.

Les méthodes utilisées pour déterminer les meilleures configurations sont principalement dérivées des méthodes fréquentielles présentées dans la partie I2a.

La RDG (Relative Disturbance Gain) (Stanley *et al.*, 1985) se calcule dans (I2.47), après avoir opté pour une configuration commandes-sorties (le symbole  $\oslash$  indique la division matricielle élément par élément,

et  $G_p$  est la matrice de transfert traduisant l'impact des perturbations sur les sorties). L'utilisation de l'indice RDG permet de savoir si les interactions dans le système sont favorables ou non. Si un élément de RDG est de module supérieur à 1, l'effort pour rejeter la perturbation en présence de couplages sera supérieur à celui pour la rejeter en l'absence de ceux-ci.

$$\text{RDG}(s) = (G^{-1}(s)G_p(s)) \oslash (\bar{G}^{-1}(s)G_p(s)) \quad (\text{I2.47})$$

L'indice RDGA (Relative Disturbance Gain Array) de (Chang and Yu, 1992) fournit les mêmes informations que la RDG mais pour l'ensemble des configurations commandes-sorties. Le choix de l'appariage peut être réalisé comme pour la RGA, en choisissant les couples commandes-sorties associés aux éléments proches de 1.

$$\text{RDGA}(s) = [G^{-1}(s)\bar{G}_p(s)]^{-1}\overline{G^{-1}(s)G_p(s)} \quad (\text{I2.48})$$

L'indice CLDG (Closed-Loop Disturbance Gain) introduit par (Hovd and Skogestad, 1992) est défini par (I2.49). La CLDG dépend de la normalisation des sorties  $y$  mais également de celle des entrées de perturbations  $d$ . Cet indice repose sur le même principe que l'indice PRGA défini par (I2.27).

$$\text{CLDG}(s) = \bar{G}(s) \times G^{-1}(s) \times G_p(s) = \text{PRGA}(s) \times G_p(s) \quad (\text{I2.49})$$

$$\bar{S}(s) \approx 0 \implies S(s)G_p(s) \approx \bar{S}(s) \times \text{CLDG}(s) \quad (\text{I2.50})$$

L'expression (I2.50) s'interprète de la même façon que la PRGA : le gain de la boucle ouverte considérée  $i$  doit être supérieur aux gains  $\text{CLDG}_{ij}$  associés, afin d'avoir un rejet de perturbations acceptable (I2.51).

$$|1 + G_{ii}(s)K_i(s)| > |\text{CLDG}_{ij}(s)|, \forall i, j \quad (\text{I2.51})$$

## I2e. Méthodes d'analyse post-synthèse

La plupart des méthodes présentées possèdent un inconvénient majeur : elles ne prennent pas en compte les objectifs des bandes passantes désirées des différentes boucles. C'est évidemment le cas des méthodes statiques, mais également de certaines méthodes dynamiques qui considèrent les bandes passantes du procédé, mais pas les bandes passantes désirées en boucle fermée. Cela peut notamment poser problème lorsque les bandes passantes visées en boucle fermée sont éloignées des bandes passantes du procédé, ou encore lorsque les différentes boucles n'ont pas les mêmes objectifs en termes de bandes passantes.

Afin de remédier à ce problème, des correcteurs provisoires peuvent être synthétisés indépendamment les uns des autres de manière à respecter les spécifications de chacune des boucles, avant d'étudier les interactions. Le problème est qu'il faudrait synthétiser un correcteur pour chaque boucle pour chacune des configurations, ce qui devient fastidieux lorsque le nombre de configurations  $r$  est important. En effet, cela revient à synthétiser  $r \cdot r!$  correcteurs. Il est donc nécessaire de faire un choix a priori sur les configurations les plus prometteuses sans prendre en compte les bandes passantes spécifiées. Une seconde étape est de procéder à une analyse des interactions en incluant les correcteurs provisoires dans le système (ces derniers sont généralement des correcteurs de type PID, synthétisés à partir d'une méthode PID-IMC Chapitre II).

La DRMA (Dynamic Relative Magnitude Array) (Khelassi, 1991) mesure les interactions dans le système en boucle fermée, après avoir choisi une configuration commandes-sorties et synthétisé des correcteurs monovariables. Le but est de calculer le changement de gain lors de la fermeture des autres boucles, de manière à voir comment les autres correcteurs affectent une boucle particulière. Cela permet d'analyser comment se propagent les interactions entre les boucles. (Schmidt, 2003) introduit la dRG



(decentralized Relative Gain) pour analyser les changements de gain mais également de phase, en considérant les boucles fermées.

Les méthodes d'analyse post-synthèse se transposent également aux méthodes temporelles avec par exemple la RRA (Relative Response Array) de (Jain and Babu, 2013).

De la même manière, des méthodes équivalentes axées sur les perturbations permettent d'évaluer la propagation des perturbations entre les boucles, en considérant les bandes passantes de chacune des boucles. C'est notamment le cas de l'indice GRDG (Generalized Relative Disturbance Gain).

Ces méthodes sont intéressantes mais nécessitent le réglage des correcteurs de chaque boucle (bien que celui-ci puisse être automatisé), ainsi qu'une analyse précise des indices obtenus pour chaque pairage commandes-sorties. Un autre inconvénient de ces méthodes est que les correcteurs sont synthétisés indépendamment les uns des autres. L'analyse des interactions n'est donc valable que pour l'étude de la commande décentralisée avec un réglage monoboucle (i.e. sans prendre en compte les interactions lors de la synthèse). Une alternative pourrait être d'adapter ces techniques en utilisant une méthode de réglage multiboucle analytique (II3).

## I2f. Étude comparative

Les tableaux qui suivent comparent l'ensemble des méthodes exposées selon les différents critères établis précédemment. La note maximale attribuée à un critère est présentée dans la colonne correspondante. Cette note est variable selon les critères pour des raisons pratiques, mais il ne s'agit pas de pondérations.

Il n'existe pas de méthode *parfaite* permettant d'analyser les interactions, mais plutôt un ensemble de méthodes aux objectifs variés, présentant différents avantages et inconvénients. Afin de pouvoir analyser les interactions dans diverses situations en répondant à l'ensemble des objectifs fixés au début de cette partie, il a été décidé de sélectionner un ensemble d'indices complémentaires, comme nous allons le voir ci-après.



Indices	Objectifs					Performances				Utilisation			
	Choix stratégie (++)	Synthèse - Découplage (++)	Choix configuration (+++)	Analyse Stabilité (++)	Analyse Performances (++)	Approche dynamique (+)	Analyse interactions (++)	Fiabilité r=2 (+++)	Fiabilité r>2 (+++)	Dépendance Normalisation (+)	Dépendance configuration (+)	Calcul Analyse r=2 (+++)	Calcul Analyse r>2 (+++)
NI			+	++				+++	+++	+		+++	+++
RGA	+	+	+++	+				++	+	+	+	+++	+++
RIA	+	+	+++	+				++	+	+	+	+++	+++
NRGA	+		+++					++	+	+	+	+++	++
RGAinf	+		+++					++	+	+	+	++	++
Nombre RGA	+		+++				+	++	+	+		+++	+++
PRG	+	+	+++	+				++	+++	+++	+	++	
DRIA - GI	+	+	+++	+				++	+++	+++	+	++	+
DRGA	+	+	+++	+		+		++	+	+	+	++	++
ERGA	+	+	+++			+		++	+	+	+	++	++
PRGA	++	++	+		++	+	+	++	++			++	+
DD	++	++	++	++		+	+	++	++			++	++
Mu-Interaction	++	++	+	++	++	+		+++	+++	+		+++	+

Tableau I2-1 : Tableau comparatif des méthodes fréquentielles d'analyse d'interactions

Indices	Objectifs					Performances				Utilisation			
	Choix stratégie (++)	Synthèse - Découplage (++)	Choix configuration (+++)	Analyse Stabilité (++)	Analyse Performances (++)	Approche dynamique (+)	Analyse interactions (++)	Fiabilité r=2 (+++)	Fiabilité r>2 (+++)	Dépendance Normalisation (+)	Dépendance configuration (+)	Calcul Analyse r=2 (+++)	Calcul Analyse r>2 (+++)
RDA	+		+++			+		++	+	+	+	++	++

Tableau I2-2 : Tableau comparatif des méthodes temporelles d'analyse d'interactions

Indices	Objectifs					Performances				Utilisation			
	Choix stratégie (++)	Synthèse - Découplage (++)	Choix configuration (+++)	Analyse Stabilité (++)	Analyse Performances (++)	Approche dynamique (+)	Analyse interactions (++)	Fiabilité r=2 (+++)	Fiabilité r>2 (+++)	Dépendance Normalisation (+)	Dépendance configuration (+)	Calcul Analyse r=2 (+++)	Calcul Analyse r>2 (+++)
Note maximale													
HIIA	++		++			+	+	++	++		+	+	+
PM	++		++			+	+	++	++		+	+	+
H <sub>2</sub>	++		++			+	+	++	++		+	+	+
Hinf	++		++			+	+	++	++		+	+	+
DIOPM	++		++			+	+	++	++		+	+	+

Tableau I2-3 : Tableau comparatif des méthodes d'analyse d'interactions fondées sur les grammians

Indices	Objectifs					Performances				Utilisation			
	Choix stratégie (++)	Synthèse - Découplage (++)	Choix configuration (+++)	Analyse Stabilité (++)	Analyse Performances (++)	Approche dynamique (+)	Analyse interactions (++)	Fiabilité r=2 (+++)	Fiabilité r>2 (+++)	Dépendance Normalisation (+)	Dépendance configuration (+)	Calcul Analyse r=2 (+++)	Calcul Analyse r>2 (+++)
Note maximale													
RDG			++					++	+	+		++	++
RDGA			++			+		++	+	+	+	+++	+++
CLDG		+	++		+	+	+	++	+			++	+

Tableau I2-4 : Tableau comparatif des méthodes d'analyse d'interactions liées aux perturbations

Indices	Objectifs					Performances				Utilisation			
	Choix stratégie (++)	Synthèse - Découplage (++)	Choix configuration (+++)	Analyse Stabilité (++)	Analyse Performances (++)	Approche dynamique (+)	Analyse interactions (++)	Fiabilité r=2 (+++)	Fiabilité r>2 (+++)	Dépendance Normalisation (+)	Dépendance configuration (+)	Calcul Analyse r=2 (+++)	Calcul Analyse r>2 (+++)
Note maximale													
dRG	++		+	+	+	+	+	++	++			++	+
DRMA	+		+	+	+	+	+	++	++			++	+
RRA	+		+	+	+	+	+	++	++			+	+
GRDG	+		+	+	+	+	+	++	++	+		++	+

Tableau I2-5 : Tableau comparatif des méthodes d'analyse d'interactions post-synthèse

## I2g. Procédure d'analyse des interactions

Afin de formaliser l'utilisation des indices retenus, une procédure d'analyse des interactions est proposée. L'approche est schématisée sur la Figure I2.4 et les étapes sont détaillées ci-dessous :

- Dans le cas où le procédé est composé de  $r > 2$  boucles, l'indice **NI** est utilisé en premier lieu pour éliminer définitivement la ou les configurations qui induiront des instabilités dans la structure bouclée.
- Vient ensuite le choix de la configuration. La **DRGA** est évaluée en statique (pulsation nulle), ainsi qu'autour des pulsations de coupure des éléments diagonaux du procédé et des pulsations de brisure désirées en boucle fermée. L'indice **H<sub>2</sub>** est utilisé conjointement à la DRGA pour réaliser l'appairage. L'utilisation de ces deux indices aux schémas de calcul différents permet d'obtenir des solutions plus fiables.
- Dans le cas où le procédé est composé de  $r > 2$  boucles, la **DRIA** de la configuration adoptée peut être calculée afin de vérifier l'existence d'interactions entre les boucles.
- Dans le cas où des perturbations agissant sur le procédé sont connues et considérées comme importantes, l'utilisation de la **RDGA** permet de vérifier si la configuration adoptée est correcte du point de vue du rejet des perturbations.
- Les performances multivariées de la configuration sont ensuite évaluées en utilisant la **PRGA**, puis la **CLDG** dans le cas de perturbations importantes et connues.
- La **DD<sub>c</sub>** est ensuite évaluée dans le but de déterminer si la configuration est acceptable d'un point de vue interactions entrées-sorties.
- La synthèse de correcteurs est finalement réalisée.
- Une analyse rigoureuse de la stabilité et des performances du système multivariable en boucle fermée vis à vis des spécifications permet seulement de conclure quant à la validité ou non des lois de commande. Cette analyse peut également s'intéresser aux performances de chacune des boucles seules (i.e. les performances lorsque les autres boucles sont ouvertes) ainsi qu'à l'ouverture et à la fermeture successive des différentes boucles (en effet, certains procédés doivent assurer la stabilité et des performances minimales pour chaque boucle lorsque les autres sont ouvertes).
- Dans le cas où la configuration adoptée ne répond pas au besoin, une autre configuration est déterminée. Les différents indices sont à nouveau calculés et analysés.
- Si aucune des configurations ne permet d'assurer les performances requises, une autre stratégie de commande doit être sélectionnée. Si l'on souhaite s'orienter vers une stratégie partiellement décentralisée, le calcul de **HIIA** et de **PM** en plus de celui de **H<sub>2</sub>** permet de déterminer la structure du correcteur, comme indiqué sur la Figure I2.3. Une stratégie décentralisée par blocs peut également être envisagée, auquel cas d'autres indices spécifiques à ces configurations doivent être calculés (**BRG** (Block Relative Gain) (Manousiouthakis, 1986), **DBRG** (Dynamic Block Relative Gain) (Arkun, 1987),...). Des compensateurs peuvent également être utilisés pour réduire les interactions, avant de réaliser un régulateur décentralisé (cela fera l'objet du Chapitre III et la **DD<sub>c</sub>** sera alors utilisée). La dernière possibilité est de synthétiser directement un régulateur multivariable.

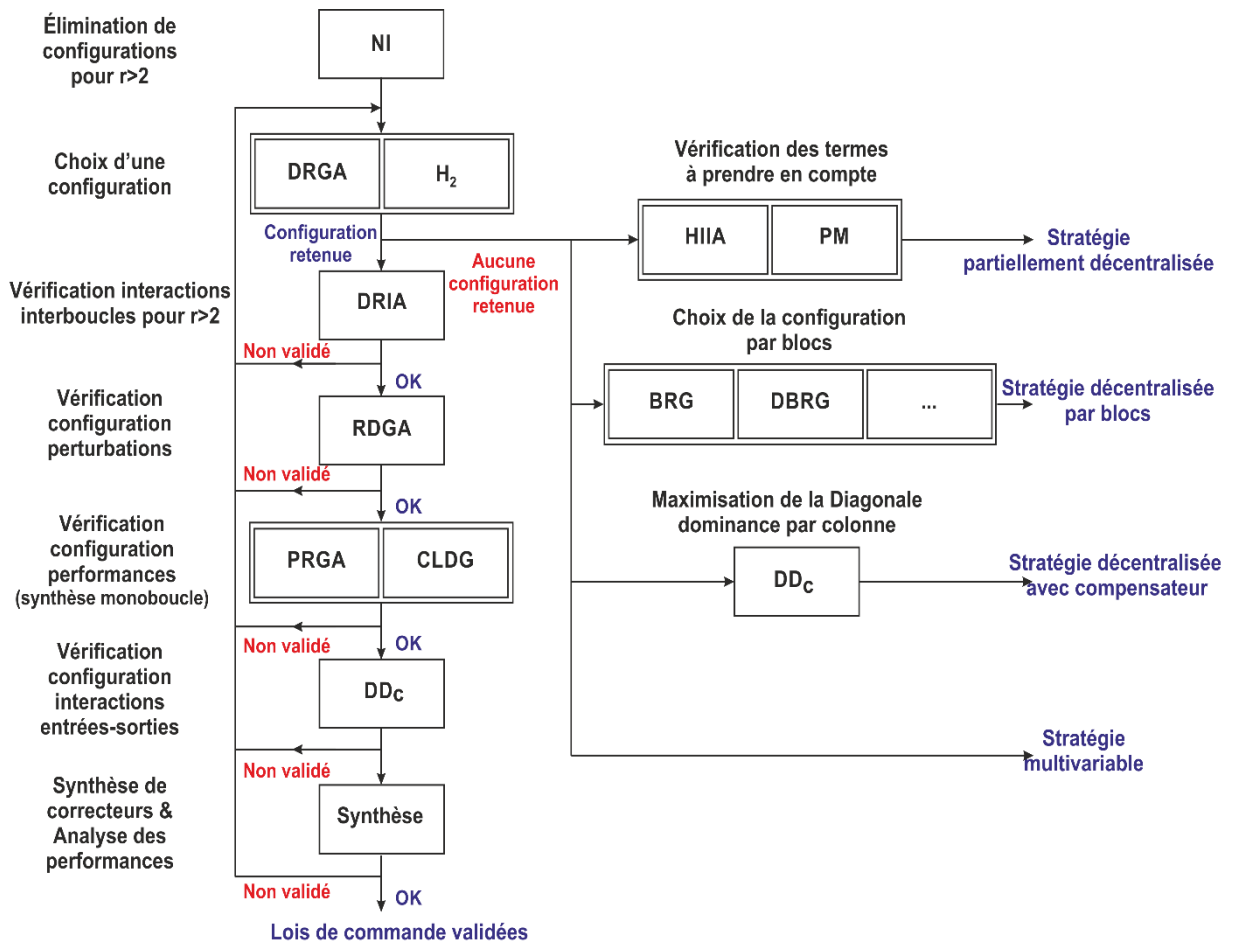


Figure I2.4 : Procédure d'analyse des interactions

## I3. Application de la procédure d'analyse des interactions au système de cuves

Afin d'illustrer les indices d'interaction retenus et de mettre en œuvre la procédure proposée, un système de cuves à eau est considéré (ce système sera également utilisé pour illustrer les méthodes de synthèse d'une commande décentralisée). Il s'agit d'un procédé TITO (Two Inputs Two Outputs) couramment utilisé dans l'analyse des interactions et l'étude de lois de commande multivariables.

### I3a. Présentation du système de cuves

#### i. Présentation

Le système de cuves, représenté sur la Figure I3-1, est un système hydraulique composé de trois cuves, d'une bêche et de deux pompes. Les cuves  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont cylindriques et présentent une même section  $S$ .

Les cuves  $T_1$  et  $T_2$  sont alimentées par des pompes  $P_1$  et  $P_2$  avec des débits respectifs  $Q_1$  et  $Q_2$ . Ces dernières ont un fonctionnement unidirectionnel et sont commandées en débit. Les cuves sont connectées entre elles, comme illustré sur la Figure I3-1. La cuve  $T_2$  est également reliée à la bêche  $T_0$  par une vanne. D'autres vannes entre les cuves et la bêche permettent de simuler diverses défaillances (telles que des fuites) ou des débits utilisateur. Elles seront considérées fermées dans un premier temps.

Les niveaux d'eau dans les cuves, notés  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ , sont mesurés par des capteurs de pression placés au fond des cuves. Il est alors possible d'asservir les hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  en commandant les débits des pompes.

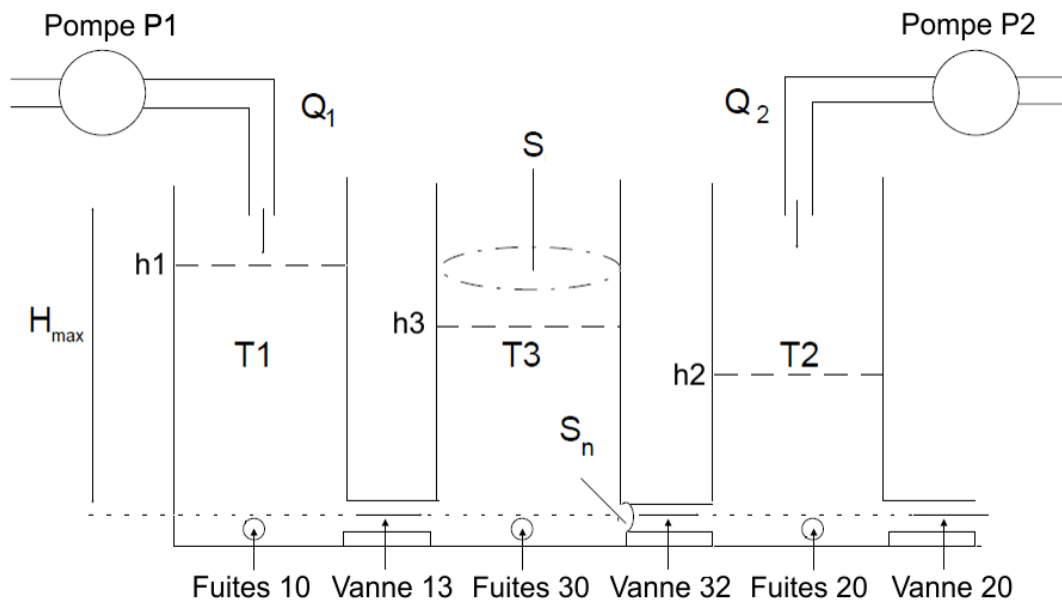


Figure I3-1 : Schéma du système de cuves

#### ii. Mise en équations

Le modèle mathématique de ce procédé peut se retrouver de la façon suivante :

Les niveaux d'eau des trois cuves sont déterminés dans (I3.1), en considérant les variations de hauteur des cuves en fonction des débits entrants et sortants. Les débits  $Q_{ij}$  font référence au débit de la cuve  $T_i$  vers la cuve  $T_j$  (la bêche étant représentée par  $T_0$ ). Les fuites étant supposées nulles, celles-ci n'apparaissent pas dans les équations qui suivent.

$$\begin{aligned}
S \frac{dh_1}{dt} &= Q_1 - Q_{13} \\
S \frac{dh_2}{dt} &= Q_2 - Q_{20} + Q_{32} \\
S \frac{dh_3}{dt} &= Q_{13} - Q_{32}
\end{aligned} \tag{I3.1}$$

Les débits d'alimentation  $Q_1$  et  $Q_2$  sont les commandes du procédé. Les débits entre les cuves peuvent être déterminés par (I3.2) en utilisant la loi de Torricelli.  $S_n$  correspond à la section nominale et les coefficients  $z_{ij}$  sont des coefficients caractérisant l'écoulement entre les cuves  $i$  et  $j$ .

$$\begin{aligned}
Q_{13} &= a_{13} \times \text{signe}(h_1 - h_3) \times \sqrt{|h_1 - h_3|} \\
Q_{32} &= a_{32} \times \text{signe}(h_3 - h_2) \times \sqrt{|h_3 - h_2|} \\
Q_{20} &= a_{20} \times \text{signe}(h_2 - h_0) \times \sqrt{|h_2 - h_0|} = a_{20} \times \sqrt{h_2} \\
\text{avec } a_{ij} &= z_{ij} \times S_n \times \sqrt{2 \times g}
\end{aligned} \tag{I3.2}$$

Le procédé peut donc se mettre sous forme de représentation d'état non linéaire, comme dans les équations de (I3.3).

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} = f(h(t), Q(t)) &= \frac{1}{S} \begin{bmatrix} -Q_{13}(h_1, h_3) \\ Q_{32}(h_3, h_2) - Q_{20}(h_2) \\ Q_{13}(h_1, h_3) - Q_{32}(h_3, h_2) \end{bmatrix} + \frac{1}{S} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \\
y = g(h(t), Q(t)) = g(h(t)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{I3.3}$$

### iii. Linéarisation analytique

L'utilisation d'un modèle linéaire autour d'un point de fonctionnement permettra d'aborder l'analyse fréquentielle, la synthèse de lois de commandes ou encore l'analyse de la robustesse. Il est possible d'en obtenir un à partir d'un modèle non linéaire, en utilisant l'une des trois approches suivantes :

- La transformation, qui consiste à effectuer des changements de variables afin de se ramener à un système linéaire.
- La linéarisation par développement en série limité au premier ordre des équations du système.
- L'identification, qui consiste à considérer le système comme une boîte noire, et à identifier son comportement à partir de données entrées-sorties autour d'un point de fonctionnement.

Étant donné la représentation d'état non linéaire obtenue dans (I3.3), la linéarisation semble être le moyen le plus approprié pour obtenir un modèle linéaire précis et de manière relativement simple. On se propose ainsi de se placer sur un point d'équilibre et de calculer le modèle linéarisé tangent autour d'un point d'équilibre.

A l'équilibre, les variations de hauteurs sont nulles. Des relations entre les débits à l'équilibre (I3.4) sont obtenues à partir de (I3.1). Les hauteurs des cuves à l'équilibre sont ensuite déduites des débits des pompes à l'équilibre (I3.5).

$$\begin{aligned}
Q_{1e} + Q_{2e} &= Q_{20e} \\
Q_{1e} &= Q_{13e} = Q_{32e}
\end{aligned} \tag{I3.4}$$

$$\begin{aligned}
h_{2e} &= \left( \frac{Q_{1e} + Q_{2e}}{a_{20}} \right)^2 \\
h_{3e} &= h_{2e} + \left( \frac{Q_{1e}}{a_{32}} \right)^2 \\
h_{1e} &= h_{3e} + \left( \frac{Q_{1e}}{a_{13}} \right)^2
\end{aligned} \tag{I3.5}$$

Pour la linéarisation, des variations de hauteurs  $\delta h$  sont considérées autour du point d'équilibre  $h_e$ , en fonction des variations des commandes  $\delta Q$  autour de  $Q_e$  (Godoy, 2007). Le développement limité au premier ordre des fonctions  $f$  et  $g$  de (I3.3) permet d'obtenir le linéarisé tangent comme en (I3.7).

$$\begin{aligned}
h &= h_e + \delta h \\
Q &= Q_e + \delta Q \\
y &= y_e + \delta y
\end{aligned} \tag{I3.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta h}{dt} &= \left. \frac{\partial f(h, Q)}{\partial h} \right|_{\substack{h=h_e \\ Q=Q_e}} \delta h + \left. \frac{\partial f(h, Q)}{\partial Q} \right|_{\substack{h=h_e \\ Q=Q_e}} \delta Q \\
\frac{d\delta y}{dt} &= \left. \frac{\partial g(h, Q)}{\partial h} \right|_{\substack{h=h_e \\ Q=Q_e}} \delta h + \left. \frac{\partial g(h, Q)}{\partial Q} \right|_{\substack{h=h_e \\ Q=Q_e}} \delta Q
\end{aligned} \tag{I3.7}$$

La représentation d'état analytique du modèle linéaire est ainsi donnée dans (I3.8) :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{S} \begin{bmatrix} -\frac{a_{13}^2}{2Q_{1e}} & 0 & \frac{a_{13}^2}{2Q_{1e}} \\ 0 & -\frac{a_{32}^2}{2Q_{1e}} - \frac{a_{20}^2}{2(Q_{1e} + Q_{2e})} & \frac{a_{32}^2}{2Q_{1e}} \\ \frac{a_{13}^2}{2Q_{1e}} & \frac{a_{32}^2}{2Q_{1e}} & -\frac{a_{13}^2 + a_{32}^2}{2Q_{1e}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{S} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{I3.8}$$

Les paramètres physiques adoptés par la suite sont présentés dans le Tableau I3-1. Un point de fonctionnement est choisi en fixant les débits  $Q_1$  et  $Q_2$  à 0,5 et 5 cm<sup>3</sup>/s. Les hauteurs à l'équilibre s'en déduisent (I3.9), ainsi que la représentation d'état linéaire autour de ce point (I3.10). Le procédé est également présenté sous forme de matrice de transfert en (I3.11). Le modèle du procédé possède trois pôles communs à l'ensemble des transferts. Malgré le fait qu'il y ait un pôle dominant, l'ordre 3 est conservé afin de préserver les dynamiques hautes fréquences. Par ailleurs, les deux termes non diagonaux sont représentés par un même transfert.

Paramètres	Valeurs
$z_{13}$ [/]	0,8
$z_{32}$ [/]	0,5
$z_{20}$ [/]	0,6
$z_{f10}$ [/]	0,02
$S_n$ [cm <sup>2</sup> ]	0,5
$S$ [cm <sup>2</sup> ]	154
$g$ [m.s <sup>-2</sup> ]	9,81

Tableau I3-1 : Paramètres physiques du système de cuves

$$\begin{bmatrix} h_{1e} \\ h_{2e} \\ h_{3e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,9 \\ 24,7 \\ 24,8 \end{bmatrix} \text{ [cm]} \quad (I3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = 10^{-2} \begin{bmatrix} -2,04 & 0 & 2,04 \\ 0 & -1,22 & 1,15 \\ 2,04 & 1,15 & -3,19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + 10^{-2} \begin{bmatrix} 0,65 & 0 \\ 0 & 0,65 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (I3.10)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G_{11}(s) &= \frac{9,9 \times (1 + 27s) \times (1 + 145s)}{(1 + 20s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4280s)} \\ G_{12}(s) &= \frac{9,0}{(1 + 20s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4280s)} \\ G_{21}(s) &= \frac{9,0}{(1 + 20s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4280s)} \\ G_{22}(s) &= \frac{9,0 \times (1 + 21s) \times (1 + 202s)}{(1 + 20s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4280s)} \end{aligned} \quad (I3.11)$$

La normalisation des commandes et sorties du système n'est pas nécessaire pour le système de cuves puisque les deux commandes sont exprimées dans la même unité (il s'agit de débits en cm<sup>3</sup>/s) et qu'il en va de même pour les sorties (il s'agit de hauteurs en cm).

Les diagrammes de Bode du système sont tracés sur la Figure I3.2. Les pulsations de coupure de ce procédé sont voisines de  $2,2 \times 10^{-3}$  rad/s.



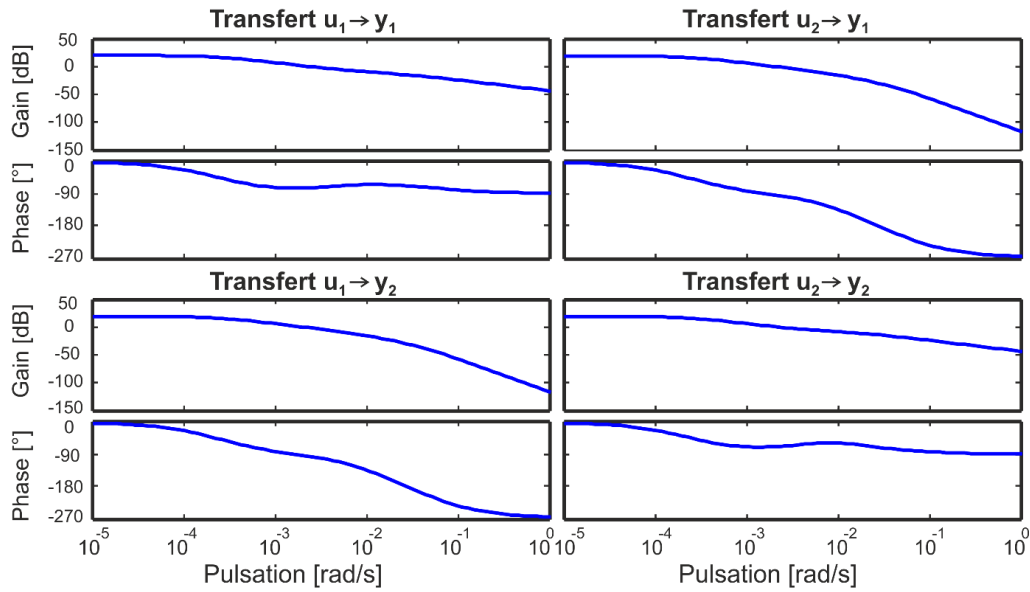


Figure I3.2 : Diagrammes de Bode du modèle linéarisé en réponse à des entrées de commande

On considère que des fuites peuvent intervenir au niveau de la première cuve. Celles-ci résultent de l'ouverture de la vanne entre la cuve  $T_1$  et la bêche  $T_0$  (avec un coefficient  $z_{f10}$  de 0,02), pilotée par un signal  $d$  compris entre 0 et 1. Ces fuites peuvent être représentées comme des perturbations agissant sur les sorties. (I3.2) représente les fonctions de transfert entre  $d$  et les sorties  $y_1$  et  $y_2$  (après simplifications). Les diagrammes de Bode des fonctions de transfert de la perturbation vers les sorties sont tracés sur la Figure I3.3.

$$G_{p1}(s) = \frac{-2,2}{(1 + 4260s)} \quad (I3.12)$$

$$G_{p2}(s) = \frac{-1,9}{(1 + 4260s)}$$

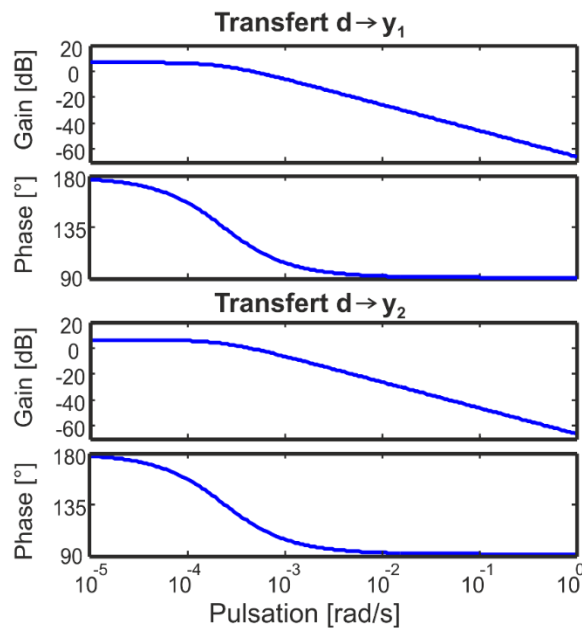


Figure I3.3 : Diagrammes de Bode du modèle linéarisé en réponse à une entrées de perturbation

La matrice des gains statiques du procédé est donnée par (I3.13). La forme de cette matrice peut paraître surprenante, mais celle-ci résulte de la forme de la matrice de transfert du procédé, elle aussi particulière. Ainsi, un échelon sur  $Q_1$  va provoquer des variations légèrement différentes pour chacune des hauteurs en régime permanent. En revanche, une augmentation de  $Q_2$  provoque les mêmes variations pour les trois hauteurs en régime permanent. Par ailleurs, la hauteur  $h_2$  est affectée de la même manière suite à un échelon de commande sur  $Q_1$  ou  $Q_2$ .

$$G_0 = \begin{bmatrix} 9,86 & 8,97 \\ 8,97 & 8,97 \end{bmatrix} \quad (I3.13)$$

Trois cas d'étude sont présentés afin de montrer que les interactions dépendent du procédé mais également des réglages désirés. En utilisant une commande décentralisée, les objectifs sont d'obtenir des fonctions de transfert en boucle fermée présentant des réponses indicielles du premier ordre avec des temps de réponse à 95% (i.e. des temps d'établissement pour des réglages sans dépassement) de :

- 12000 secondes. Cela correspond à des constantes de temps de  $\tau_L = 4000$  secondes et des pulsations de brisure en boucle fermée de  $\omega_L = 2,5 \times 10^{-4}$  rad/s. On parlera dans l'exemple de *réglage lent*.
- 600 secondes, soit 20 fois plus rapide que le premier réglage. Cela correspond à des constantes de temps de  $\tau_M = 200$  secondes et des pulsations de brisure en boucle fermée de  $\omega_M = 5 \times 10^{-3}$  rad/s. On parlera dans l'exemple de *réglage moyen*.
- 30 secondes, soit 400 fois plus rapide que le premier réglage. Cela correspond à des constantes de temps de  $\tau_R = 10$  secondes et des pulsations de brisure en boucle fermée de  $\omega_R = 10 \times 10^{-2}$  rad/s. On parlera dans l'exemple de *réglage rapide*.

L'analyse des interactions sera ainsi ciblée autour de ces trois pulsations.

### I3b. Analyse des interactions

La première étape de la procédure dans le cas TITO est le calcul de la DRGA (Dynamic Relative Gain Array). Celle-ci est tracée sur la Figure I3.4 pour un élément diagonal et un élément hors diagonal (en fait, la DRGA d'un système TITO est composée de quatre transferts groupés deux à deux et la connaissance de l'un des transferts est suffisante, par ailleurs les phases ont été tracées dans le but d'indiquer le signe des éléments).

Il est clair que la DRGA varie beaucoup en fonction de la fréquence. En basses fréquences, la DRGA équivaut à la RGA (I3.14). L'indice RGA obtenu pour la configuration diagonale est positif, tandis que celui de la configuration non diagonale est négatif. La configuration commandes-sorties non diagonale ne doit ainsi pas être utilisée, ce qui ne signifie pas pour autant que la configuration diagonale soit adaptée à une commande décentralisée. La RGA est en effet bien loin de la matrice identité ; on retrouve ainsi le fait que les couplages sont importants en régime permanent, ce qui était prévisible étant donné les réponses fréquentielles observées sur la Figure I3.2.

$$DRGA(0) = RGA = \begin{bmatrix} 11,1 & -10,1 \\ -10,1 & 11,1 \end{bmatrix} \quad (I3.14)$$

La DRGA a tendance à se rapprocher de la matrice identité quand la fréquence augmente. Les couplages en basses fréquences sont ainsi bien plus importants que les couplages en hautes fréquences. Autour des pulsations de coupure recherchées, à savoir  $\omega_L = 2,5 \times 10^{-4}$  rad/s,  $\omega_M = 5 \times 10^{-3}$  rad/s et  $\omega_R = 10 \times 10^{-2}$  rad/s,  $RGA_{11}$  est respectivement égal à 7,5, 0,8 et 1.

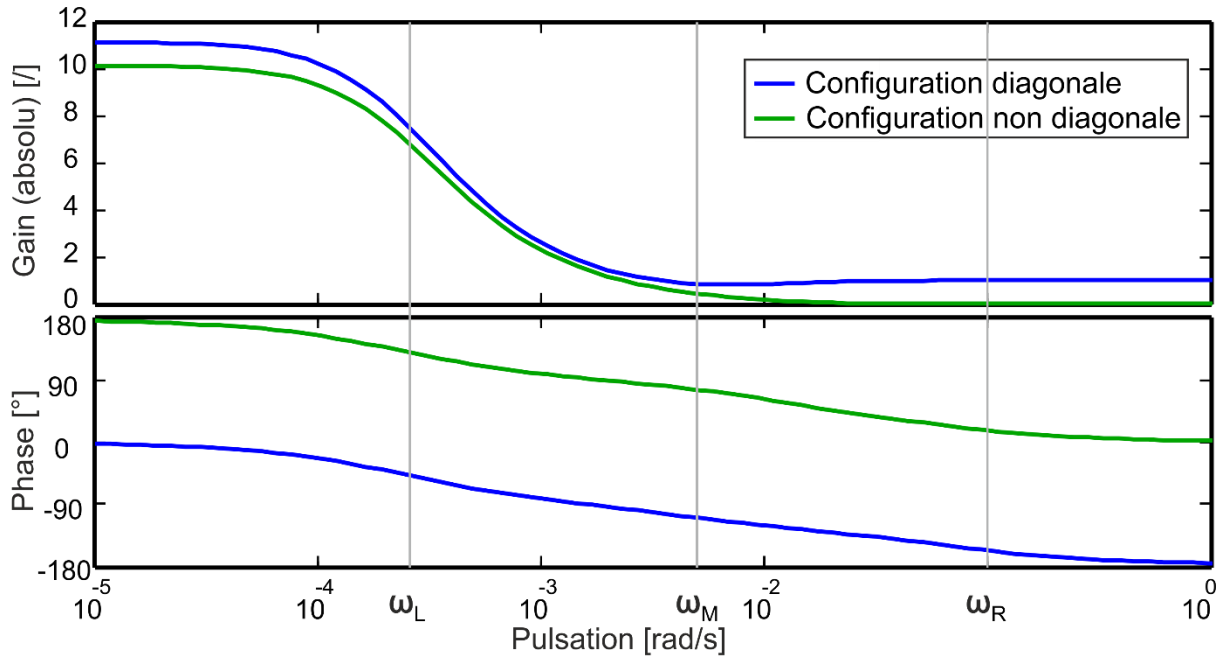


Figure I3.4 : DRGA du système de cuves

En conférant aux boucles ouvertes des bandes passantes de  $\omega_L$ , le système sera soumis à de très fortes interactions, alors que celles-ci seront beaucoup moins importantes si l'on confère des bandes passantes de  $\omega_R$ . Il faut cependant garder à l'esprit que la DRGA suppose les correcteurs de gains infiniment grands, hypothèse de moins en moins vérifiée quand la fréquence augmente.

L'indice  $H_2$  est ensuite évalué pour vérifier les conclusions tirées avec la DRGA. Cet indice reflète l'importance des dynamiques des différents éléments sur l'ensemble du domaine fréquentiel. Afin de cibler plus précisément les pulsations de brisure considérées en boucle fermée, des pondérations sous forme de filtres sont appliquées dans chacun des cas. Ces dernières correspondent à des filtres passe-bas et passe-haut du premier ordre, avec des pulsations de coupure 20 fois plus faibles et 20 fois plus élevées que les pulsations de brisure recherchées. Les résultats obtenus sont présentés dans (I3.15). On retrouve le fait que la configuration diagonale est préférable à la configuration non diagonale et que cela s'accroît au fur et à mesure que la fréquence augmente.

$$\begin{aligned}
 H_2(\omega_L) &= \begin{bmatrix} 0,270 & 0,242 \\ 0,242 & 0,247 \end{bmatrix} \\
 H_2(\omega_M) &= \begin{bmatrix} 0,274 & 0,233 \\ 0,233 & 0,260 \end{bmatrix} \\
 H_2(\omega_R) &= \begin{bmatrix} 0,320 & 0,167 \\ 0,167 & 0,346 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{I3.15}$$

Cet indice semble plus pessimiste que la DRGA, puisque la configuration diagonale représente seulement 52, 53 et 67 % des dynamiques dans les trois cas étudiés, ce qui est relativement faible vis-à-vis des DRGA évaluées. L'étude de  $H_2$  conduit à l'acceptation d'une stratégie décentralisée pour le troisième cas uniquement.

Étant donnée la présence de perturbations, il faut vérifier avec la RDGA que la configuration diagonale est acceptable d'un point de vue des perturbations. Les deux éléments diagonaux de la RDGA sont tracés en trait plein sur la Figure I3.5 (et les éléments non diagonaux en pointillés s'en déduisent car la somme des éléments d'une ligne est égale à 1, comme mentionné dans (Chang and Yu, 1992)). Ces éléments sont plus proches de 1 que ceux obtenus avec la RDGA. On peut donc s'attendre à ce que le suivi de consigne pose plus de problèmes que le rejet de perturbations. La RDGA a par ailleurs tendance à

confirmer le choix du pairage, puisque la configuration diagonale conduit à une matrice RDGA plus proche de la matrice unité que la configuration non diagonale, et ce à chaque fréquence. La RDGA est évaluée à pulsation nulle dans (I3.16).

$$RDGA(0) = \begin{bmatrix} 1,4 & -0,4 \\ 1,45 & -0,45 \end{bmatrix} \quad (I3.16)$$

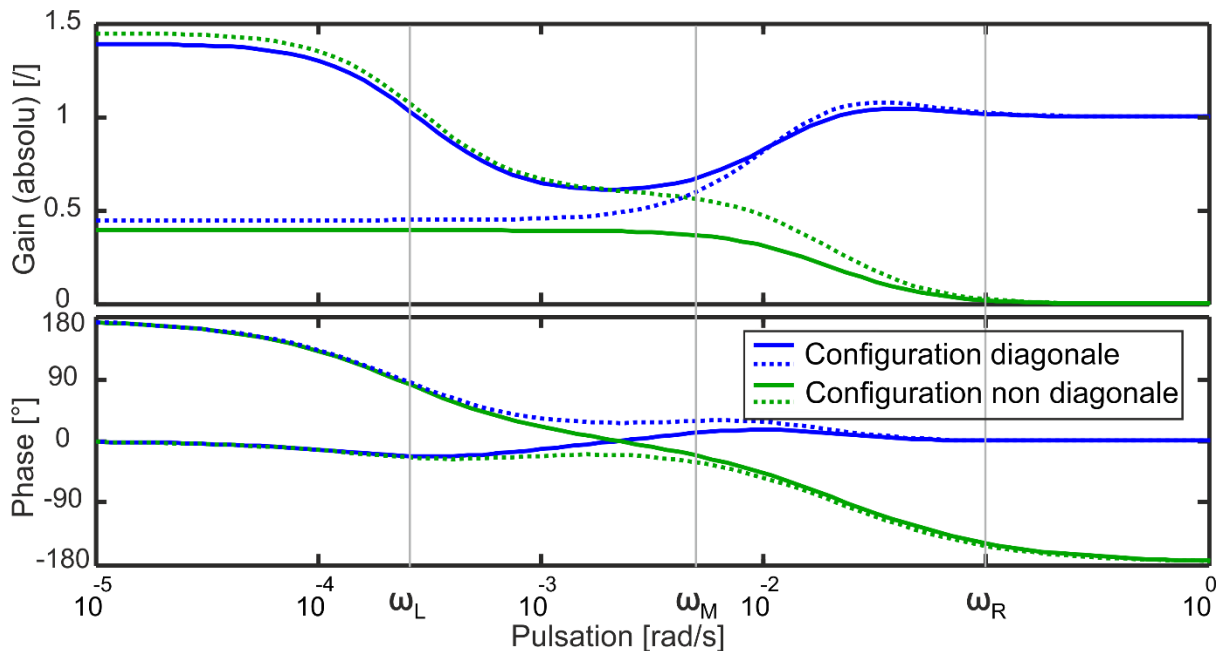


Figure I3.5 : RDGA du système de cuves

Les éléments non diagonaux de la PRGA sont ensuite tracés sur la Figure I3.6 (en effet, les éléments diagonaux correspondent aux éléments de la DRGA). Ces éléments de la PRGA étant élevés, les interactions entre les deux boucles sont sévères. La boucle 2 semble affecter davantage la boucle 1 que l'inverse. Des réglages en basses fréquences impliquent que les réponses du système multivariable seront bien plus lentes que les réponses prévues en monovariable. Afin d'éviter les interactions, il est nécessaire d'avoir des pulsations de brisure en boucle fermée supérieures à  $10^{-2}$  rad/s pour les deux boucles.

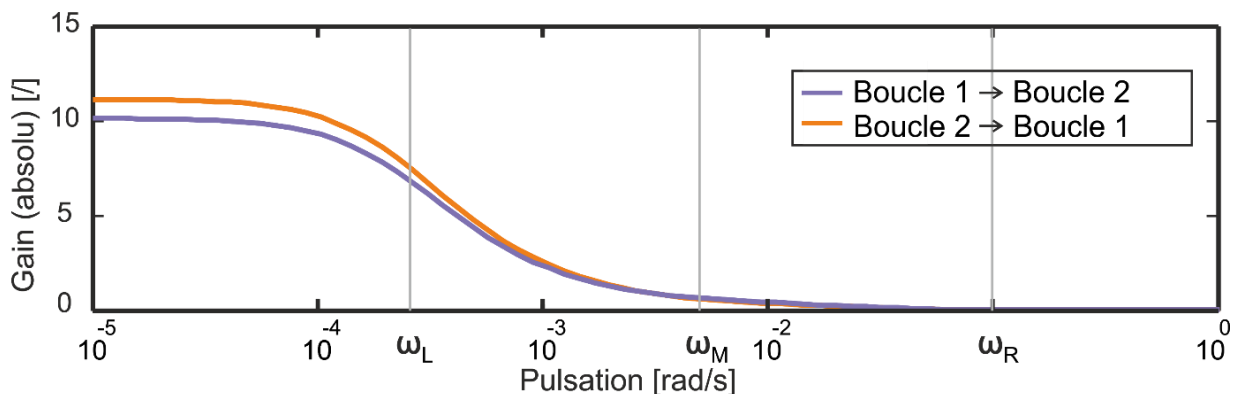


Figure I3.6 : PRGA du système de cuves

De la même manière, les éléments non diagonaux de la CLDG sont tracés sur la Figure I3.7. Le rejet de perturbations est meilleur pour la seconde boucle que pour la première. Les contraintes de synthèse déduites de l'analyse de la CLDG sont moins sévères en termes de bandes passantes que celles issues de l'analyse de la PRGA.

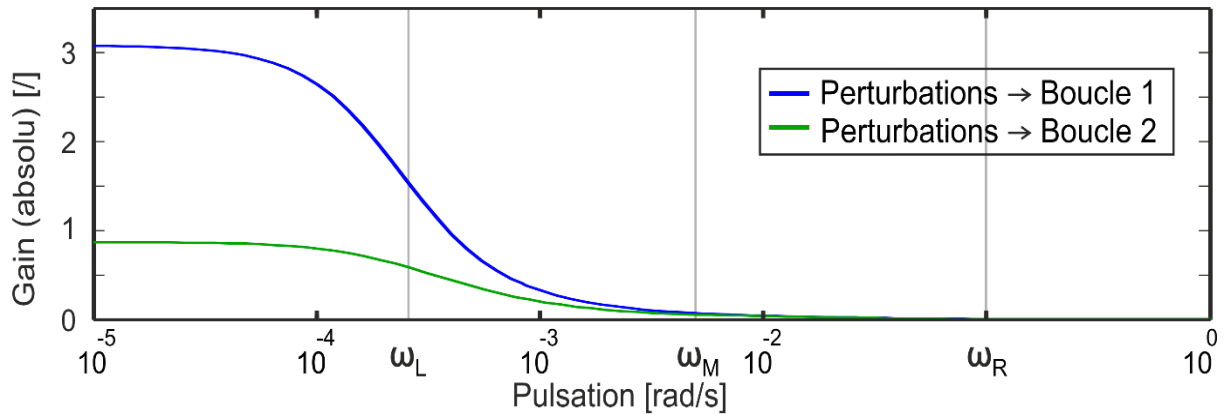


Figure 13.7 : CLDG du système de cuves

La diagonale dominance est à présent étudiée. Les inverses de  $DD_{c1}$  et de  $DD_{c2}$  sont tracés sur la Figure 13.8. On rappelle que les interactions entrées-sorties sont d'autant plus importantes que les indices  $DD_{c1}^{-1}$  et de  $DD_{c2}^{-1}$  sont élevés. En basses fréquences, les commandes ont quasiment le même impact sur chacune des sorties, ce qui présage de fortes interactions entrées-sorties. En hautes fréquences, chaque commande agira uniquement sur la sortie correspondante. Ces indices étant inférieurs à 1, le procédé est diagonal dominant par colonne.

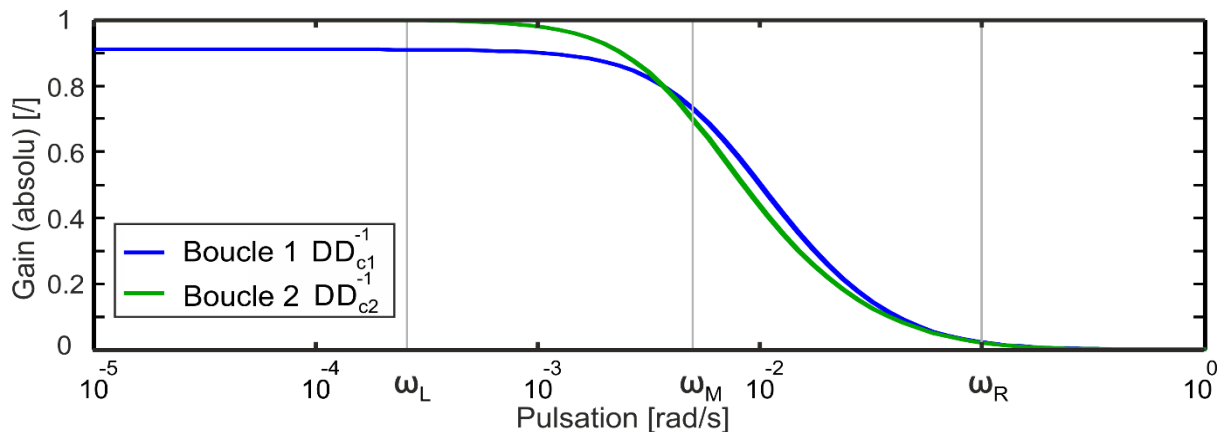


Figure 13.8 : Inverse de la DD du système de cuves

L'application de cette procédure au système de cuves a montré que :

- Une commande décentralisée peut uniquement être réalisée avec la configuration diagonale.
- Les interactions basses fréquences seront assez fortes tandis que les interactions hautes fréquences seront presque négligeables.
- Une commande décentralisée avec des pulsations de brisure très faibles a peu de chance de fonctionner correctement du fait de la présence des couplages. Étant donné que les deux termes non diagonaux ont la même importance, une stratégie partiellement décentralisée ne résoudra le problème des interactions que pour une seule des boucles. Une commande centralisée ou l'utilisation de blocs de découplage en amont du procédé sera ainsi préférable.
- Une commande décentralisée réglée de manière à avoir des pulsations de brisure de l'ordre de  $\omega_M$  conduira à des performances moyennes. Une synthèse multiboucle sera évidemment nécessaire, mais les couplages affecteront le suivi de consignes ainsi que le rejet de perturbations. Par ailleurs, les interactions entrées-sorties seront relativement fortes.
- Une commande décentralisée avec des pulsations de brisure relativement élevées permettra d'obtenir des performances équivalentes à celles de la commande centralisée. De plus, une synthèse monoboucle classique sera suffisante. Les interactions entrées-sorties seront relativement faibles.

### I3c. Synthèse de régulateurs de type PI

Afin de vérifier les conclusions de cette analyse, des régulateurs PI sont synthétisés en fonction des différents objectifs spécifiés. Une première méthode de synthèse est monoboucle (i.e. les correcteurs sont synthétisés à partir des éléments diagonaux du procédé sans prendre en compte les interactions), tandis que la seconde est une méthode multiboucle prenant en compte les interactions. Les méthodes de synthèse ne font pas l'objet de ce chapitre et seront détaillées dans le Chapitre II.

Les réponses indicielles et les réponses à des entrées de perturbation en boucle fermée sont ensuite analysées, tout comme les réponses fréquentielles en boucle fermée.

Exemple 1 : commande décentralisée pour le réglage *lent* ( $\omega_L = 2,5 \times 10^{-4}$  rad/s)

Les réponses spécifiées correspondent aux réponses indicielles à des fonctions de transfert du premier ordre, avec des temps du premier maximum de 12000s.

La Figure I3.9 présente les gabarits correspondant aux spécifications, les réponses obtenues avec les réglages monoboucles sans, puis avec prise en compte des interactions, ainsi que les réponses avec les réglages multiboucles. La figure se lit de la manière suivante : le graphique correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne correspond à la  $i^{\text{ème}}$  sortie en réponse à un échelon unitaire de la  $j^{\text{ème}}$  consigne.

Les réglages réalisés avec la synthèse monoboucle permettent de respecter parfaitement les spécifications lorsque les interactions ne sont pas prises en compte. En effet, les réponses temporelles (en vert) sont quasiment confondues avec les gabarits temporels (en bleu).

En revanche, les réponses sont bien plus lentes lorsque l'on tient compte des interactions, ce qui confirme les résultats tirés de l'analyse de la PRGA. On peut noter que les pentes à l'origine sont similaires, ce que l'on peut associer au fait que les couplages en hautes fréquences sont négligeables. Les interactions entrées-sorties sont importantes : un échelon de consigne sur une voie entraîne d'importantes perturbations sur l'autre voie. Le maximum des perturbations sur  $y_1$  équivaut à 45% de la valeur de la consigne  $y_{2ref}$ . Il est de 40% de la valeur de la consigne  $y_{1ref}$  sur  $y_2$ .

Les réglages multiboucles sont quant à eux nettement meilleurs en termes de suivi de consignes. On note cependant que les pentes à l'origine sont plus importantes, afin d'assurer le suivi de consigne malgré les interactions. Les interactions entrées-sorties sont par ailleurs nettement mieux rejetées qu'avec la synthèse monoboucle.

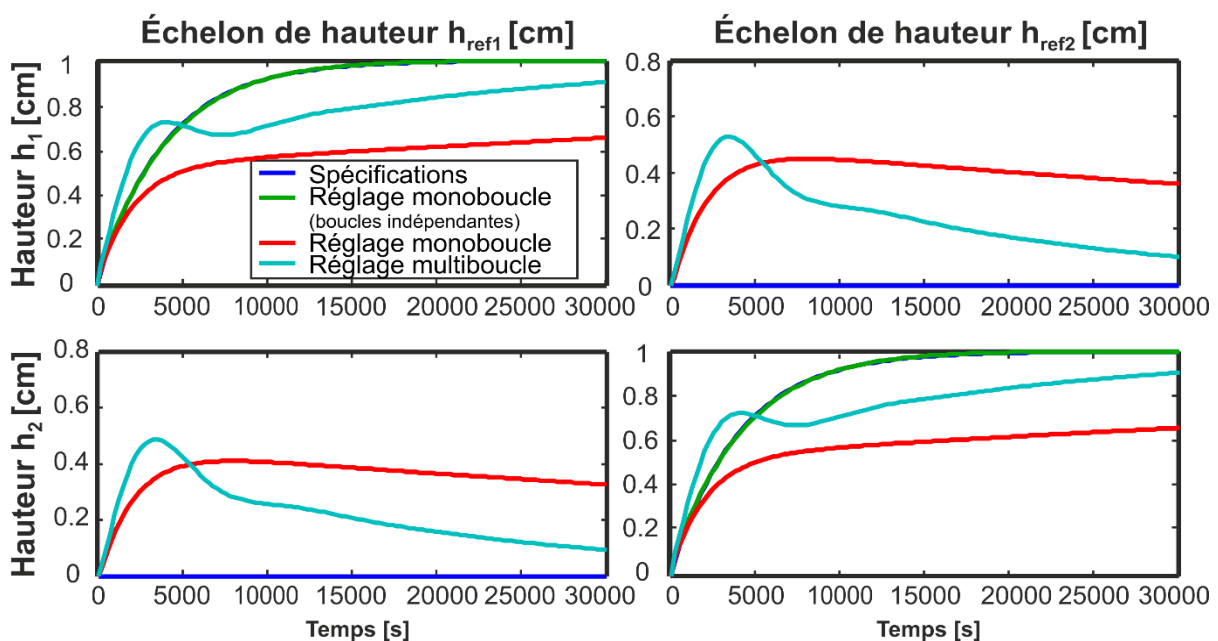


Figure I3.9 : Réponses temporelles monovariabiles et multivariabiles – réglage lent

La Figure I3.10 présente le rejet de perturbations extérieures sur les deux sorties. Les réglages multiboucles permettent d'avoir un meilleur rejet de perturbations, notamment grâce à une action intégrale plus conséquente (Tableau I3-2). Le rejet sur la seconde sortie est plus rapide que celui sur la première, comme on l'avait déduit des résultats de la Figure I3.7.

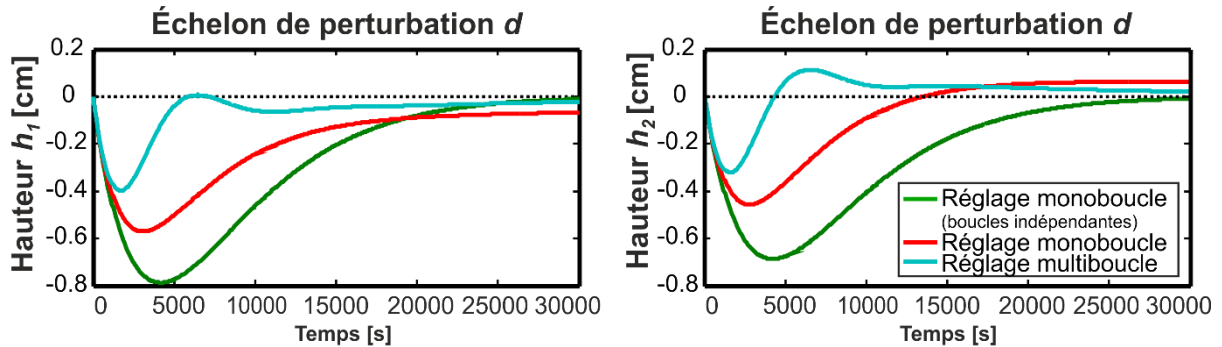


Figure I3.10 : Réponses temporelles à un rejet de perturbations – réglage lent

Il est à noter que les réglages multiboucles sont similaires aux réglages monoboucles pour l'action proportionnelle. En revanche, l'action intégrale est clairement plus importante.

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
Synthèse monoboucle	0,11	4165	0,12	4080
Synthèse multiboucle	0,11	915	0,12	870

Tableau I3-2 : Réglages des correcteurs PI – réglage lent

Les réponses fréquentielles des éléments diagonaux en boucle fermée sont également tracées sur la Figure I3.11. On retrouve l'adéquation entre les gabarits spécifiés et les réglages monovariables des boucles seules (à part en hautes fréquences, ce qui n'a pas d'impact étant donné les faibles valeurs de gain). Lorsque les couplages sont considérés, il est clair que les pulsations de brisure sont presque divisées par 10. Une synthèse multiboucle conduit à des pulsations de coupure plus élevées, mais toujours éloignées des pulsations de coupure spécifiées.

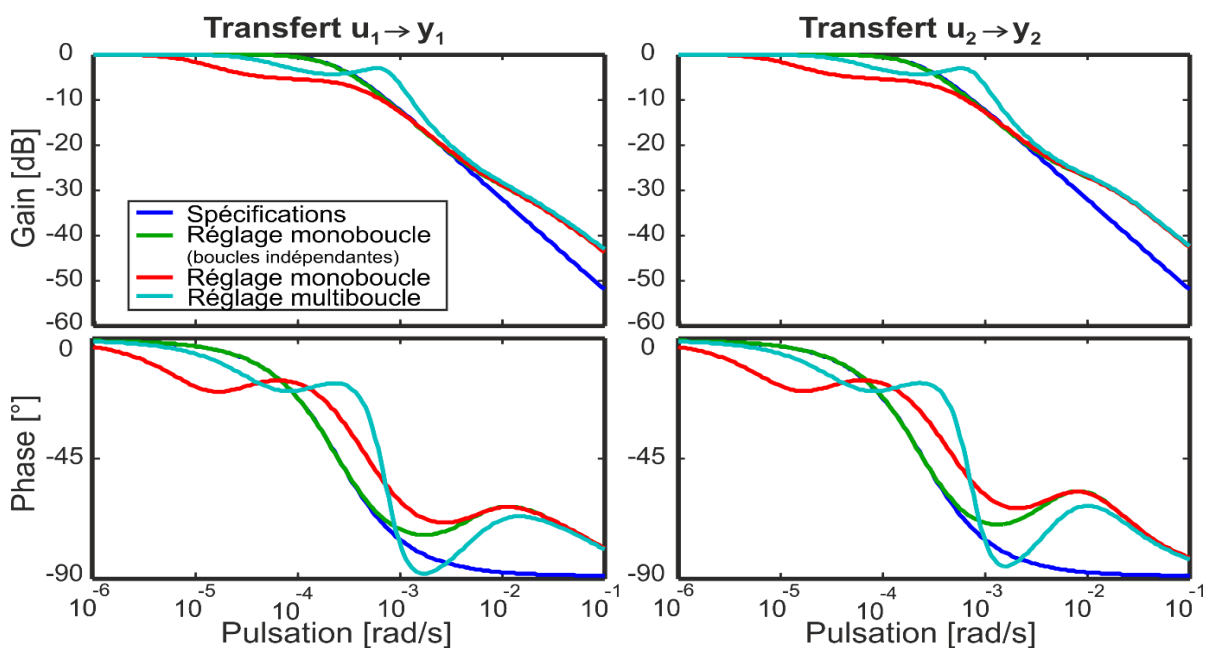


Figure I3.11 : Réponses fréquentielles en boucle fermée – réglage lent



Il est clair que les couplages nuisent grandement aux performances du système bouclé. Bien que les performances soient nettement meilleures avec une synthèse multiboucle, celles-ci restent insuffisantes. Une stratégie décentralisée n'est pas adaptée dans cette situation, comme cela avait été prévu lors de l'analyse des interactions.

Exemple 2 : commande décentralisée pour le réglage *moyen* ( $\omega_M = 5 \times 10^{-3}$  rad/s)

La Figure I3.12 présente les spécifications, les réponses obtenues avec les réglages monoboucles sans, puis avec prise en compte des interactions, et les réponses avec les réglages multiboucles. Les réglages sont présentés dans le Tableau I3-3.

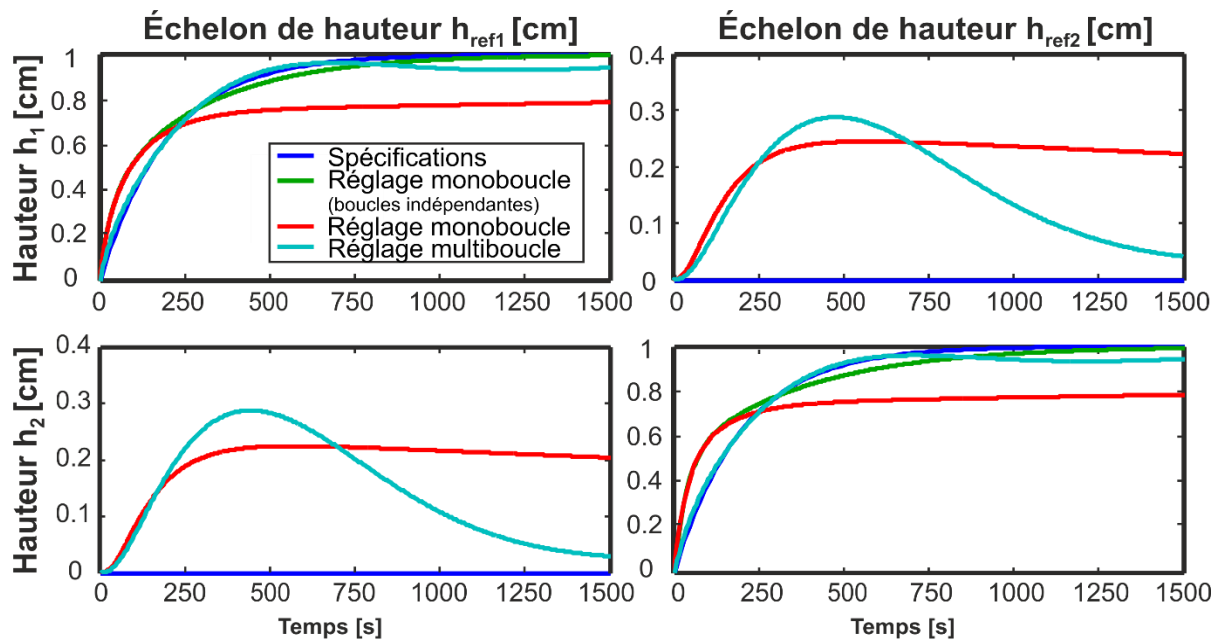


Figure I3.12 : Réponses temporelles monovariables et multivariables – réglage moyen

Les correcteurs PI synthétisés avec la méthode monoboucle conduisent à des réponses indicielles relativement proches des gabarits temporels, même si elles ne sont pas confondues comme dans le cas précédent.

Les allures des réponses indicielles du système multivariable bouclé diffèrent fortement de celles obtenues sans considérer les interactions.

Les réglages multiboucles permettent d'améliorer le suivi de consigne. Par ailleurs, les interactions entrées-sorties sont bien moins importantes que dans le cas précédent : le maximum des perturbations est de l'ordre de 25% de l'échelon sur chacune des voies. La synthèse multiboucle permet ainsi d'améliorer les performances, même si le temps pour atteindre le régime permanent reste conséquent.

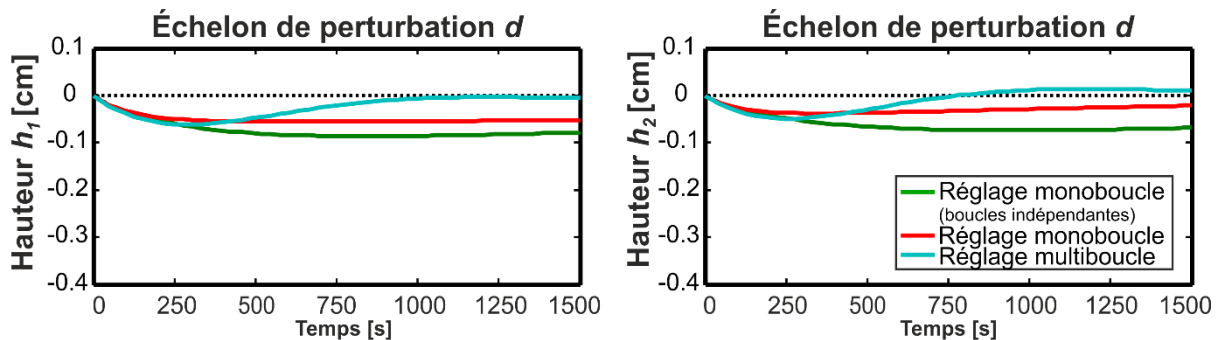


Figure I3.13 : Réponses temporelles à un rejet de perturbations – réglage moyen



Les effets des perturbations extérieures sont également bien moins importants que dans le cas précédent (Figure I3.13). Cela est logique puisque les pulsations de brisure du système bouclé deviennent largement supérieures à celles régissant le modèle de l'effet des perturbations.

Les réponses fréquentielles des éléments diagonaux en boucle fermée sont également tracées sur la Figure I3.14. Contrairement au réglage *lent*, la synthèse multiboucle permet d'avoir des pulsations de brisure presque équivalentes à celles des spécifications.

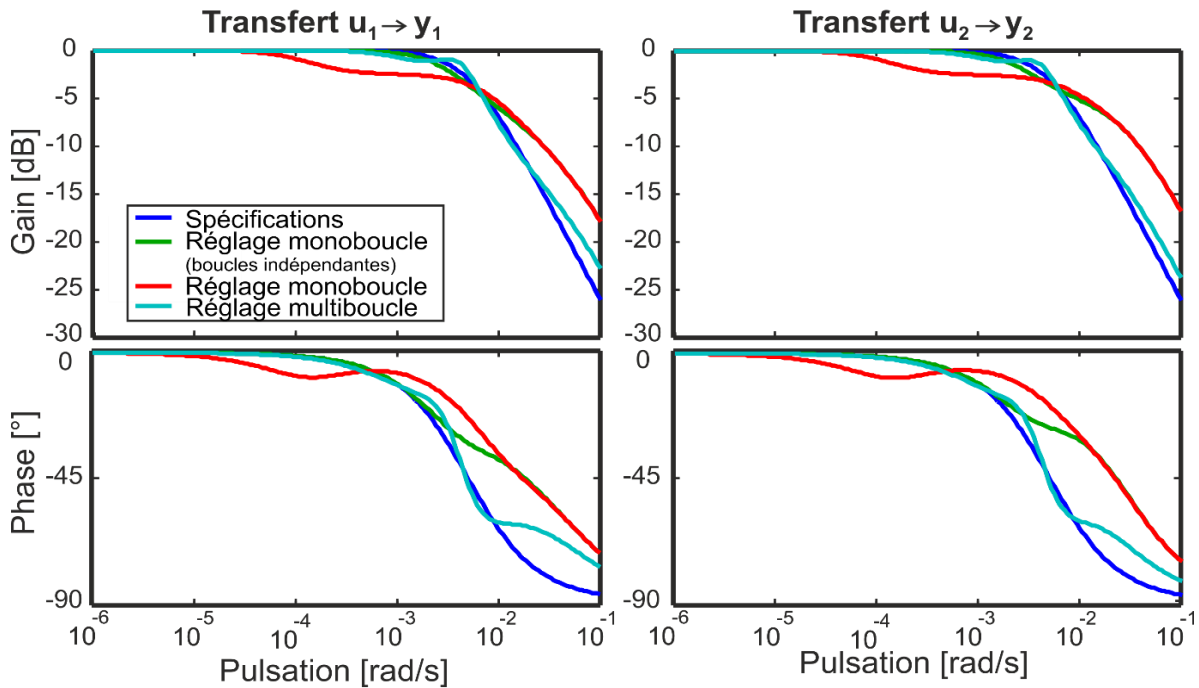


Figure I3.14 : Réponses fréquentielles en boucle fermée – réglage moyen

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
Synthèse monoboucle	2,15	4220	2,35	4170
Synthèse multiboucle	1,2	290	1,0	225

Tableau I3-3 : Réglages des correcteurs PI – réglage moyen

Les interactions sont moins importantes que dans le cas précédent, comme constaté par l'ensemble des mesures d'interactions utilisées. Si une synthèse monoboucle n'est pas envisageable, une synthèse multiboucle permet d'obtenir des performances presque acceptables.

Exemple 3 : commande décentralisée pour le réglage *rapide* ( $\omega_R = 10 \times 10^{-2}$  rad/s)

La Figure I3.15 présente les spécifications, les réponses obtenues avec les réglages monoboucles sans puis avec prise en compte des interactions et les réponses avec les réglages multiboucles.

Contrairement aux cas précédents, les synthèses monoboucles et multiboucles conduisent à des réponses temporelles similaires. On peut également constater dans le Tableau I3-4 que les réglages des régulateurs PI avec les synthèses monoboucle et multiboucle sont proches. Cela correspond à ce qui avait été constaté lors de l'analyse des interactions, à savoir que les interactions sont très faibles aux alentours de 0,1 rad/s, la pulsation de brisure désirée en boucle fermée. On peut noter que les interactions entrées-sorties sont quasiment négligeables : elles ne représentent que 5% des valeurs des consignes des échelons.

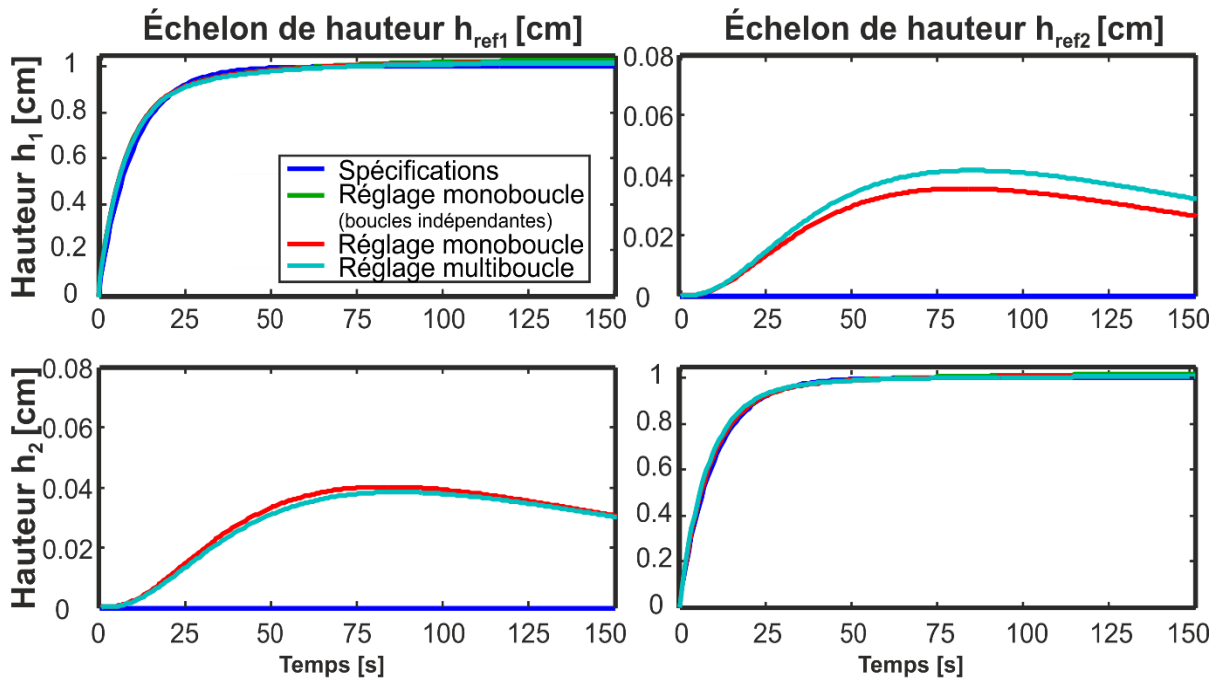


Figure 13.15 : Réponses temporelles monovariables et multivariables – réglage rapide

Les perturbations extérieures n’affectent pas le système comme on peut le voir sur la Figure 13.16, ce qui est normal étant donné l’écart entre les pulsations de brisure du système en boucle fermée et les pulsations de coupure des fonctions de transfert caractérisant l’impact de la perturbation sur les sorties.

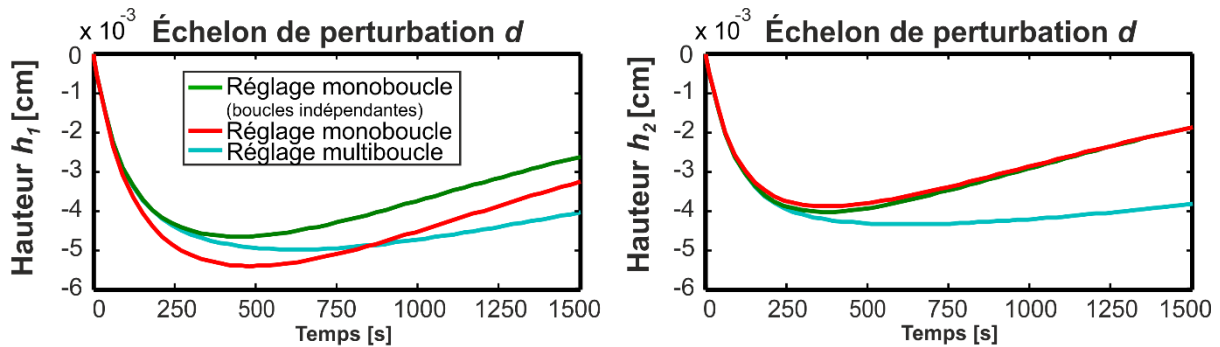


Figure 13.16 : Réponses temporelles à un rejet de perturbations – réglage rapide

Les réponses fréquentielles des éléments diagonaux de la boucle fermée sont tracées sur la Figure 13.17. On retrouve le fait que les réponses fréquentielles obtenues avec les réglages monoboucles et multiboucles sont proches.

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
Synthèse monoboucle	19	120	17	125
Synthèse multiboucle	16	125	18	130

Tableau 13-4 : Réglages des correcteurs PI – réglage rapide

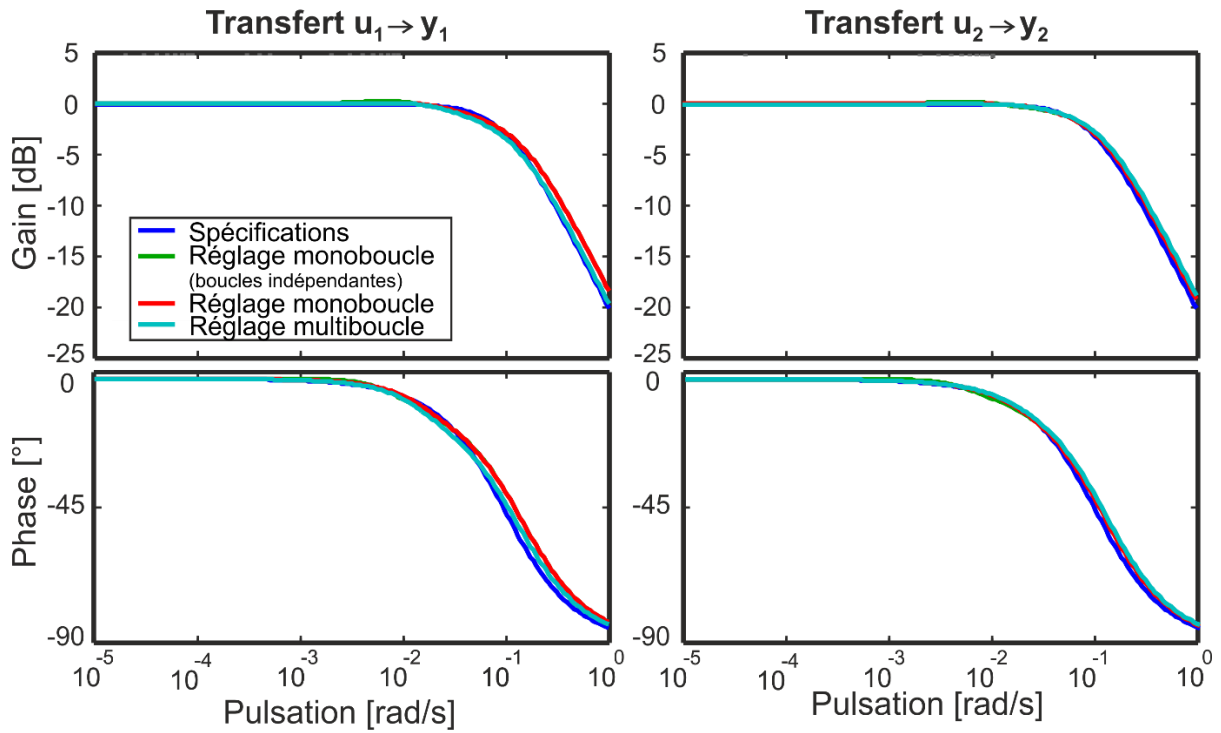


Figure 13.17 : Réponses fréquentielles en boucle fermée – réglage rapide

Contrairement aux deux cas précédents, une synthèse monoboucle s'avère aussi efficace qu'une stratégie multiboucle car les interactions sont faibles autour des pulsations considérées.

## I4. Conclusions sur l'analyse des interactions

Cette partie a permis de mettre en évidence l'importance de la présence d'interactions dans le cadre d'une commande décentralisée. D'une part, les interactions entrées-sorties perturbent l'ensemble des sorties lors de variations de référence. D'autre part, les interactions peuvent affecter sévèrement les performances en boucle fermée, notamment lorsque les régulateurs sont synthétisés sans les prendre en compte. En effet, les termes de couplage modifient les fonctions de transfert en boucle ouverte à considérer lors de la synthèse de régulateurs. La différence entre le transfert monovariante considéré et le transfert équivalent dépend alors des termes de couplage, mais également des correcteurs des autres boucles, d'où la difficulté de la synthèse d'une stratégie décentralisée.

Des méthodes d'analyse des interactions permettent de déterminer une stratégie de commande adaptée en fonction des interactions et des performances recherchées. Dans le cas de la commande décentralisée, les méthodes d'analyse des interactions sont également utilisées afin de déterminer une configuration commandes-sorties où les interactions ne sont pas trop importantes. Par ailleurs, elles permettent de s'orienter vers des stratégies de réglage des régulateurs monovariants.

Ces méthodes d'analyse ont été classifiées, et les avantages et inconvénients de chacune ont été soulignés. Devant l'absence d'une méthode d'analyse *parfaite*, une procédure d'analyse systématique a finalement été proposée. Cette procédure a été appliquée avec succès pour analyser les interactions présentes dans le système de cuves. Les réponses en boucle fermée avec des réglages monoboucle et multiboucle ont été comparées, sans pour autant s'intéresser aux méthodes de synthèse des correcteurs en question.

Cela fait l'objet de la partie suivante, qui s'intéresse aux principales méthodes de synthèse de correcteurs dans le cas d'une stratégie décentralisée.

## Chapitre II. Synthèse d'une commande décentralisée

Le Chapitre II s'intéresse aux méthodes de synthèse d'une commande décentralisée. Une brève introduction (II1) rappelle les différences entre les méthodes de synthèse monoboucle et multiboucles. La partie (II2) récapitule les méthodes classiques de synthèse monoboucle et présente la méthode qui sera utilisée par la suite. Les méthodes multiboucles feront ensuite l'objet de la partie (II3). Les méthodes seront ensuite appliquées sur le système de cuves (II4), avant de dresser dans la partie (II5) un bilan sur les différentes méthodes étudiées.

Sommaire du Chapitre II.

II1.	Introduction.....	65
II2.	Méthodes de réglage monoboucle .....	66
II2a.	Généralités.....	66
II2b.	Méthodes heuristiques.....	66
II2c.	Commande par modèle interne PID-IMC .....	68
II2d.	Méthode de réglage monoboucle proposée .....	69
II3.	Méthodes de réglage multiboucle .....	71
II3a.	Méthodes de detuning.....	71
II3b.	Méthodes séquentielles et itératives .....	72
II3c.	Méthodes simultanées .....	75
II3d.	Méthodes indépendantes.....	76
II4.	Application de commandes décentralisées au système de cuves .....	82
II4a.	Méthode de synthèse monoboucle.....	82
II4b.	Méthodes de detuning.....	83
II4c.	Méthodes séquentielles et itératives .....	85
II4d.	Méthodes simultanées .....	87
II4e.	Méthodes indépendantes.....	88
II4f.	Comparaison des méthodes sur le système de cuves .....	91
II5.	Conclusions sur la synthèse d'une commande décentralisée.....	92

## II1. Introduction

La stratégie de réglage des correcteurs monovariables est importante dans le cas d'une stratégie décentralisée.

Dans le cas où la procédure d'analyse présentée dans le Chapitre I montre que les interactions sont faibles, il est possible de régler les correcteurs indépendamment et de vérifier a posteriori le comportement du système multivariable en boucle fermée. Dans le cas inverse, des méthodes multiboucles permettent de régler les correcteurs monovariables en prenant en compte les interactions. Les performances sont généralement améliorées (comme dans l'exemple du Chapitre I) mais sont relativement plus complexes à mettre en œuvre.

Dans la littérature, ces méthodes sont presque exclusivement appliquées aux correcteurs PI et PID, afin de préserver un des intérêts principaux de la stratégie décentralisée, à savoir la simplicité des lois de commande (Liu and Gao, 2012), (Seborg *et al.*, 2004). La plupart de ces méthodes sont néanmoins facilement généralisables à des correcteurs SISO quelconques.

La difficulté essentielle d'une synthèse multiboucle est qu'il est difficile d'évaluer les performances d'une boucle sans connaître les performances des autres boucles, comme mentionné dans le Chapitre I. On distingue quatre types de synthèse multiboucle :

- Les méthodes de detuning.
- Les méthodes séquentielles ou itératives.
- Les méthodes dites simultanées.
- Les méthodes indépendantes.

Les principes de ces méthodes sont présentés ainsi que leurs avantages et inconvénients. Un exemple de chaque type de méthode est ensuite appliqué au système de cuves à eau. D'autres études ont déjà été réalisées, mais ne considèrent pas forcément les méthodes de synthèse multiboucle les plus récentes. (Sivakumaran *et al.*, 2004) a par exemple comparé différentes méthodes multiboucles, comprenant entre autres les méthodes historiques BLT (Biggest Log modulus Tuning) et celles du relais. Plus récemment, certaines méthodes multiboucles ont été comparées dans (Helgesen, 2008), mais uniquement d'un point de vue théorique.

La plupart des méthodes multiboucles s'appuient sur des méthodes de synthèse monoboucle de correcteurs PID. Après avoir donné quelques généralités sur ces dernières, les méthodes monoboucles les plus utilisées dans le cadre d'une synthèse multiboucle seront explicitées, avant de revenir à l'étude des méthodes multiboucles.

## II2. Méthodes de réglage monoboucle

### II2a. Généralités

Les correcteurs PID sont apparus dans les années 1940, et sont encore aujourd'hui les correcteurs de loin les plus utilisés dans l'industrie : (Aström and Hägglund, 1995) estime que plus de 95% des régulateurs utilisés sont des correcteurs PID (dont la plupart sont en fait des correcteurs PI). Ils permettent en effet d'obtenir de bonnes performances pour la majorité des applications avec une forme simple et intuitive.

Les méthodes de synthèse des correcteurs PID sont nombreuses et variées et aboutissent à différents paramètres convenables. Ces méthodes diffèrent en termes de complexité, de flexibilité, d'efficacité et sont applicables en fonction des connaissances du procédé, des spécifications et de la complexité du système. D'une façon classique, une bonne méthode peut se caractériser par :

- L'obtention d'un bon suivi de consigne.
- L'obtention d'un bon rejet de perturbations.
- La robustesse vis-à-vis d'incertitudes.
- Des calculs d'une complexité raisonnable.

Divers types de méthodes permettent le réglage de correcteurs PID. Les principales sont les :

- Méthodes heuristiques (Ziegler and Nichols, 1942), (Cohen and Coon, 1953), (Hang *et al.*, 1991), (Mann, 2001) à partir des paramètres critiques ou bien à partir d'observations sur la réponse temporelle à un échelon.
- Méthodes analytiques (Truxal, 1955), (Dahlin, 1968), (Chien, 1988), (Branica *et al.*, 2002), (Skogestad S. , 2001), qui comprennent les méthodes de synthèse directe, de modèle interne, de placement de pôles.
- Méthodes d'optimisation (Rovira *et al.*, 1969), (Lopez *et al.*, 1969), (Argelaguet, 1996), (Ingimundarson, 2003).
- Méthodes de modelage (loop-shaping) (Tan, 1998) des réponses fréquentielles ou temporelles des fonctions de sensibilité, de la boucle ouverte ou de la boucle fermée.

Ces catégories ne sont pas forcément exclusives et d'autres méthodes peuvent s'en détacher. De nombreux ouvrages (Aström and Hägglund, 1995), (McMillan, 1994), (O'Dwyer, 2009), (Tan *et al.*, 1999), (Bequette, 2002) décrivent la variété de ces techniques de synthèse.

Les notations utilisées par la suite correspondent au correcteur PID décrit par (II2.1).

$$K_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \quad (\text{II2.1})$$

### II2b. Méthodes heuristiques

Le principe de la méthode de la génération de l'oscillation entretenue de Ziegler-Nichols est de boucler le procédé par un gain proportionnel comme sur la Figure II2.1a). Ce gain est ensuite augmenté jusqu'à une amplitude  $K_u$  de façon à amener le système à la limite de stabilité. Ce régime se caractérise par des oscillations continues à une période  $T_u$  constante, où la sortie et la référence sont en opposition de phase. Le gain critique  $K_u$  et la période critique  $T_u$  servent ensuite à déterminer les paramètres de correcteurs P, PI et PID à l'aide de tables. Le Tableau II2-1 résume les réglages proposés par Ziegler-Nichols.

Type	Paramètres des correcteurs de type PID		
	$k_p$	$\tau_i$	$\tau_d$
P	$0.5K_u$	-	-
PI	$0.45K_u$	$1.2k_p/T_u$	-
PD	$0.8K_u$	-	$k_p T_u/8$
PID	$0.6K_u$	$2k_p/T_u$	$k_p T_u/8$
PID (Pessen)	$0.7K_u$	$2.5k_p/T_u$	$3k_p T_u/20$
PID (peu de dépassement)	$0.33K_u$	$2k_p/T_u$	$k_p T_u/3$
PID (pas de dépassement)	$0.2K_u$	$2k_p/T_u$	$k_p T_u/3$

Tableau II2-1 : Réglages de Ziegler-Nichols

Cette méthode est très pratique puisqu'elle ne nécessite pas la connaissance d'un modèle du procédé. Elle peut même être réalisée directement sur le procédé.

La méthode d'auto-ajustement, également appelée ATV (AutoTune Variation) ou encore méthode du relais vient de (Aström and Hägglund, 1984). Le but est de générer des oscillations afin de déterminer le gain limite et la pulsation correspondant à l'approche précédente. Pour cela, un relais d'amplitude  $a$  est placé dans la boucle à la place de régulateur comme sur la Figure II2.1b). Celui-ci change de signe lorsque l'erreur change de signe. Il en résulte l'établissement d'un régime d'oscillations permanentes d'amplitude  $A$  en sortie du processus et de période  $T_u$ . La pulsation d'oscillation et le gain limite sont donnés dans (II2.2) et servent à déterminer là encore les paramètres du correcteur à partir du Tableau II2-1.

$$\omega_u = \frac{2\pi}{T_u} \quad (II2.2)$$

$$K_u = \frac{4a}{\pi A}$$

La méthode de la génération de l'oscillation entretenue et celle du relais sont deux méthodes historiques très connues, et comptent parmi les méthodes les plus utilisées, de par leur simplicité.

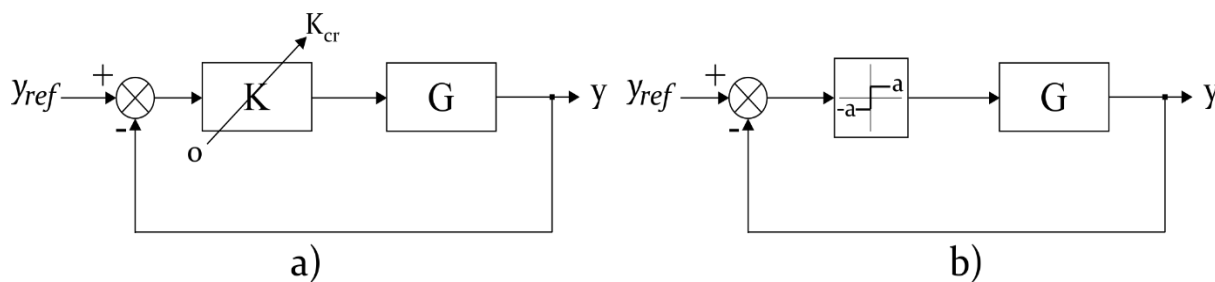


Figure II2.1 : Schémas de la génération de l'oscillation entretenue et de la méthode du relais



## II2c. Commande par modèle interne PID-IMC

Le principe de la commande par modèle interne est brièvement présenté, avant d'aborder la méthode du modèle interne appliquée aux correcteurs PID.

La commande par modèle interne (Garcia and Morari, 1982), (Economou and Morari, 1986a)) incorpore, comme son nom l'indique, un modèle du procédé dans la structure de commande. La commande  $u$  issue du correcteur  $K$  est alors appliquée au procédé  $G$  et au modèle  $\tilde{G}$ . La comparaison des sorties génère un signal d'erreur  $e$  utilisé pour piloter le procédé. La structure de commande par modèle interne est présentée sur la Figure II.2.a).

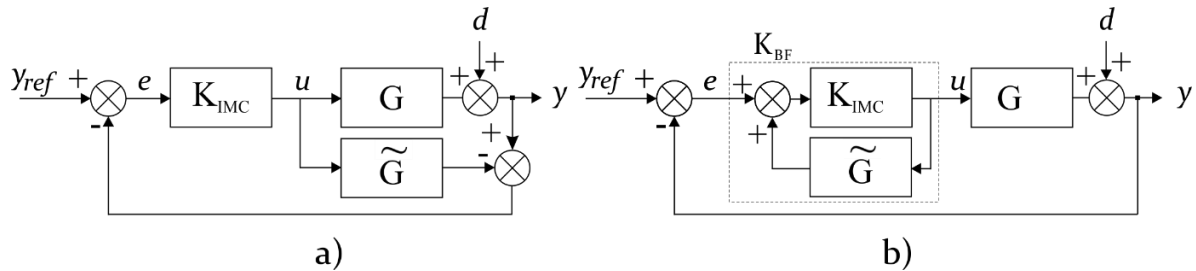


Figure II.2 : Structure de commande par modèle interne

L'avantage principal de cette méthode réside dans la simplicité de la synthèse du correcteur et le réglage explicite de robustesse.

La sortie est déterminée par (II.2.3). Cela implique qu'en choisissant pour  $K_{IMC}$  l'inverse du modèle  $\tilde{G}$ , on obtient un transfert parfait unitaire entre la sortie du procédé  $y$  et la référence  $r$ , quelle que soit la désadaptation modèle-procédé et les perturbations extérieures, sous réserve de stabilité.

$$y(s) = \frac{K_{IMC}(s)G(s)}{1 + K_{IMC}(s)(G(s) - \tilde{G}(s))} y_{ref}(s) + \frac{1 - K_{IMC}(s)\tilde{G}(s)}{1 + K_{IMC}(s)(G(s) - \tilde{G}(s))} d(s) \quad (II.2.3)$$

L'inversion du modèle exact est souvent impossible à réaliser, en l'occurrence lorsque le modèle est à déphasage non minimal ou lorsque son degré relatif est non nul. Des méthodes d'inversion approchée permettent de contourner ce problème. Le principe est de décomposer  $\tilde{G}$  en un produit  $\tilde{G}^+ \tilde{G}^-$  comprenant la partie inversible  $\tilde{G}^+$  et la partie non inversible  $\tilde{G}^-$  (qui contient les zéros instables et les retards purs). Le régulateur  $K_{IMC}$  est déterminé par (II.2.4), en utilisant un filtre de robustesse  $K_{\lambda c}$  qui permet de rendre le régulateur réalisable et d'atténuer les erreurs de modèle. En dehors des artifices permettant de rendre le régulateur réalisable, le filtre de robustesse dépend d'un unique paramètre appelé constante du filtre IMC  $\lambda_c$ . Ce coefficient correspond à la constante de temps du système en boucle fermée dans le cas de systèmes à phase minimale. L'avantage essentiel de cette méthode est que le réglage s'effectue à l'aide de cet unique paramètre  $\lambda_c$ . Cette méthode donne ainsi de très bons résultats en termes de suivi de consigne (de par la construction du correcteur), mais peut-être moins efficace en terme de rejet de perturbations.

$$K_{IMC}(s) = (\tilde{G}^+(s))^{-1} K_{\lambda c}(s) \quad (II.2.4)$$

Le passage d'une structure IMC à la structure classique en boucle fermée est relativement simple, comme on peut le voir sur la Figure II.2.b). Cela se traduit par les équations (II.2.5).

$$K_{BF}(s) = \frac{K_{IMC}(s)}{1 - \tilde{G}(s)K_{IMC}(s)} \quad (II.2.5)$$

$$K_{IMC}(s) = \frac{K_{BF}(s)}{1 + \tilde{G}(s)K_{BF}(s)}$$

Le régulateur  $K_{BF}$  correspond à une fonction de transfert quelconque, mais il est possible de l'approcher par un régulateur PID (Lee *et al.*, 1998). En posant  $g$  comme en (II2.6), un développement en série de Taylor conduit à l'expression (II2.7), qui peut être interprétée comme un correcteur PID en identifiant les termes comme en (II2.8).

$$g(s) = sK_{BF}(s) \quad (\text{II2.6})$$

$$K_{BF}(s) = \frac{1}{s} \left[ g(0) + sg'(0) + s^2 \frac{g''(0)}{2} + \dots \right] \quad (\text{II2.7})$$

$$\begin{aligned} K_p &= g'(0) \\ K_i &= g'(0)/g(0) \\ K_p &= g''(0)/2g'(0) \end{aligned} \quad (\text{II2.8})$$

## II2d. Méthode de réglage monoboucle proposée

La méthode de réglage monoboucle adoptée dans la suite résulte d'une association de la méthode par modèle interne et d'une méthode d'optimisation.

La première étape est la réduction du transfert jusqu'à l'ordre 2 ou 3, en utilisant des algorithmes de réduction de modèles linéaires (Obinata and Anderson, 2001), (Schilders *et al.*, 2008). Ces algorithmes sont en effet relativement efficaces pour réduire les transferts d'ordre élevé tout en garantissant une bonne précision. Selon les besoins, il est par ailleurs possible de cibler certaines gammes de fréquences.

Les méthodes de modèle interne présentées précédemment sont ensuite appliquées sur le transfert réduit. Considérons par exemple un transfert monovarié  $G$  (II2.9), supposé à phase minimale. En supposant le modèle  $\tilde{G}$  parfait, il est possible de considérer pour  $K_{\lambda_c}$  un filtre du premier ordre de gain statique unité et de constante de temps  $\lambda_c$ . On en déduit alors  $K_{BF}$  à partir de  $K_{IMC}$  ce qui conduit à (II2.12). En utilisant un développement en série de Taylor, on aboutit analytiquement à un correcteur PI donné par (II2.15).

$$G(s) = \frac{(\tau_z s + 1)}{(\tau_{p1} s + 1)(\tau_{p2} s + 1)} = \tilde{G}(s) \quad (\text{II2.9})$$

$$K_{IMC}(s) = \tilde{G}^{-1}(s) K_{\lambda_c}(s) = \frac{\tilde{G}^{-1}(s)}{\lambda_c s + 1} \quad (\text{II2.10})$$

$$K_{BF}(s) = \frac{\frac{\tilde{G}^{-1}(s)}{\lambda_c s + 1}}{1 - G(s) \frac{\tilde{G}^{-1}(s)}{\lambda_c s + 1}} = \frac{\tilde{G}^{-1}(s)}{\lambda_c s} \quad (\text{II2.11})$$

$$K_{BF}(s) = \frac{(\tau_{p1} s + 1)(\tau_{p2} s + 1)}{(\tau_z s + 1)\lambda_c s} \quad (\text{II2.12})$$

$$g(s) = \frac{(\tau_{p1} s + 1)(\tau_{p2} s + 1)}{(\tau_z s + 1)\lambda_c} \quad (\text{II2.13})$$

$$g(0) = \frac{1}{\lambda_c} \quad (\text{II2.14})$$

$$g'(0) = \frac{1}{\lambda_c} (\tau_{p1} + \tau_{p2} - \tau_z)$$

$$K_{PI}(s) = \frac{1}{\lambda_c} (\tau_{p1} + \tau_{p2} - \tau_z) \left( 1 + \frac{1}{(\tau_{p1} + \tau_{p2} - \tau_z)s} \right) \quad (\text{II2.15})$$

D'après cette formule, les signes des paramètres du correcteur PI dépendent de la somme algébrique des constantes de temps des pôles et zéros. Lorsque la somme des constantes de temps du dénominateur est supérieure à celle du numérateur, ces réglages sont utilisés. Dans le cas inverse, un modèle équivalent d'ordre 1 est déterminé en utilisant les techniques de réduction, avant de déduire les paramètres du correcteur PI.

La qualité de la réponse en boucle fermée dépend de l'adéquation entre le modèle réduit et le modèle original ainsi que de l'approximation lors du développement en série de Taylor. Afin d'affiner les réglages vis-à-vis des performances recherchées, une optimisation des paramètres du correcteur PI visant à minimiser l'écart entre la réponse indicielle en boucle fermée et la réponse spécifiée en boucle fermée peut être réalisée (II2.16). La fonction de coût dépend des instants où les fonctions de transfert sont évaluées et de l'horizon temporel adopté. Ces paramètres peuvent être aisément déduits de la réponse spécifiée en boucle fermée  $y_{Ref}$ .

$$f_t = \sum |y_{BF}(t) - y_{Ref}(t)| \quad (II2.16)$$

Cette méthode appartient aux méthodes de modélage, mais diffère quelque peu des méthodes classiques. On parle également de *concordance de modèles* (Wang *et al.*, 1999). Au lieu de considérer une multitude de gabarits fréquentiels sur des transferts spécifiques (fonctions de sensibilité, fonction de sensibilité complémentaire...), un gabarit temporel unique est considéré. Un gabarit fréquentiel aurait également pu être utilisé ce qui aurait évité de calculer la réponse temporelle pendant l'optimisation, mais il n'est pas évident de relier les écarts fréquentiels aux écarts temporels.

Les paramètres obtenus par IMC sont utilisés comme conditions initiales à ce problème d'optimisation. Ces dernières servent à également à définir des bornes minimales et maximales sur les paramètres du correcteur. Étant donné qu'il s'agit d'un affinage des paramètres, on peut chercher par exemple à s'éloigner de 10% des conditions initiales pour chacun des paramètres. Afin d'éviter les minima locaux, un algorithme par recuit simulé est utilisé.

Il est tentant de vouloir utiliser directement l'algorithme d'optimisation sans passer par un réglage IMC. Le problème est que la méconnaissance des conditions initiales ne permet pas de trouver de bons réglages avec un temps de calcul acceptable.

La procédure de réglage est présentée schématiquement sur la Figure II2.3.

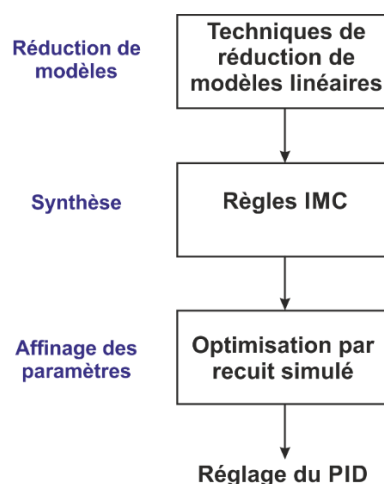


Figure II2.3 : Procédure de réglage monoboucle d'un correcteur PID

## II3. Méthodes de réglage multiboucle

### II3a. Méthodes de detuning

#### i. Principe

Le principe des méthodes de detuning est constitué de deux étapes distinctes :

- La première consiste à régler chacune des boucles monovariables sans prendre en compte les interactions (i.e. en utilisant une synthèse monoboucle).
- La seconde étape consiste à modifier ces réglages avec un facteur de detuning, permettant ainsi de prendre en compte les interactions.

#### Biggest Log modulus Tuning (BLT)

La méthode historique de detuning est la BLT (Biggest Log modulus Tuning) de (Luyben, 1986). La méthode de (Ziegler and Nichols, 1942) décrite dans la partie II2 est tout d'abord appliquée pour déterminer les réglages des boucles individuelles. Les coefficients proportionnel et intégral de chaque boucle sont ensuite déréglés à l'aide d'un facteur  $F$  de la façon suivante pour prendre en compte les interactions :

$$\begin{aligned}K_{multi} &= K_{mono}/F \\ \tau_{i_{multi}} &= \tau_{i_{mono}} \times F\end{aligned}\tag{II3.1}$$

La méthode préconise de choisir le facteur de detuning  $F$  selon l'approche suivante :

On considère  $W$  comme le polynôme caractéristique du système en boucle fermée auquel on retranche 1 (II3.2). En considérant  $W$  comme un pseudo-système monovariable, (Luyben, 1986) propose de définir  $L_{cm}$  comme le gain en dB de la boucle fermée associée (II3.3) et de déterminer  $F$  de manière à ce que le maximum de  $L_{cm}$  soit égal à  $2 \times r$  dB,  $r$  étant le nombre d'entrées-sorties (dans le cas monovariable,  $W$  correspond à la boucle ouverte effective du système, et  $L_{cm}$  à la boucle fermée qui présente une résonance de 2 dB).

$$W(s) = -1 + \det(I + G(s)K(s))\tag{II3.2}$$

$$L_{cm} = 20 \times \log \left| \frac{W(s)}{1 + W(s)} \right|\tag{II3.3}$$

Il est possible de généraliser cette méthode en considérant des correcteurs PI et de choisir un facteur  $F$  différent pour chacune des boucles en fonction de l'importance de ces dernières. De nombreuses méthodes (Monica *et al.*, 1988), (Lee and Edgar, 2005) ont été développées en reprenant les idées de la méthode BLT.

Des méthodes de detuning plus élaborées consistent à calculer le facteur de detuning en fonction d'indices d'interaction. La méthode proposée par (Chien *et al.*, 1999) consiste par exemple à réaliser le detuning à l'aide de la RGA.

#### Méthodes étudiée

Dans le cas TITO, on a vu dans le Chapitre I que le transfert équivalent  $\tilde{G}_{ii}$  prenant en compte les interactions pouvait se calculer analytiquement (II.4). Au lieu de faire l'hypothèse des correcteurs avec des gains infiniment grands pour calculer la RGA, des correcteurs provisoires sont synthétisés indépendamment pour chacune des boucles. On peut ainsi obtenir des transferts de boucles ouvertes équivalentes (Huang *et al.*, 2003) notées  $\tilde{G}_{ii}$  comme en (II3.4) et (II3.5).

$$\tilde{G}_{11}(s) = G_{11}(s)(1 - \lambda(s) \times \text{BF}_{s2}(s)) \quad (\text{II3.4})$$

$$\tilde{G}_{22}(s) = G_{22}(s)(1 - \lambda(s) \times \text{BF}_{s1}(s)) \quad (\text{II3.5})$$

Certaines méthodes évaluent le transfert  $(1 - \lambda \text{BF}_{s_i})$  autour des pulsations de brisure en boucle fermée désirées, afin d'en déduire un facteur scalaire de detuning  $F$  à appliquer directement sur les réglages des correcteurs PI.

On préfère dans cette étude conserver les boucles ouvertes équivalentes de manière analytique, et synthétiser de nouveaux correcteurs SISO à partir de ces dernières. L'avantage de cette solution est que l'on tient compte des interactions sur tout le domaine fréquentiel, et non sur une pulsation particulière.

Dans le cas où le procédé comporte plus de deux boucles, il est possible de généraliser le calcul des boucles ouvertes équivalentes en utilisant la RGA (ou RIA) (étudiée dans la partie I2a). Une autre méthode plus rigoureuse est de considérer la DRIA pour prendre en compte plus finement les interactions. (Wang *et al.*, 2008) définit ainsi une dDRIA (dynamic DRIA) incluant les correcteurs indépendants  $K_s$ . Après avoir synthétisé des correcteurs monovariabiles, la dDRIA est évaluée pour chacune des boucles à la pulsation de brisure en boucle fermée désirée afin d'obtenir des formules déterminant les paramètres de correcteurs PI. Là encore, il est possible de conserver l'expression analytique des boucles équivalentes. Les étapes principales du calcul des boucles ouvertes équivalentes sont résumées ici. Le détail des calculs se trouve dans (Wang *et al.*, 2008).

$$G_K(s) = G(s) + K_s^{-1}(s) \quad (\text{II3.6})$$

$$dDRIA_i(s) = -\frac{G_{\bullet i}^{ii}(s)G_{i \bullet}^{ii}(s)}{G_{ii}(s)} \otimes (G_K^{ii}(s))^{-T} \quad (\text{II3.7})$$

$$dRI_i(s) = \|dDRIA_i(s)\|_{\Sigma} \quad (\text{II3.8})$$

$$\tilde{G}_i(s) = (1 + dRI_i(s)) \quad (\text{II3.9})$$

## ii. Avantages et inconvénients

Les premières méthodes de detuning sont empiriques et très simples à utiliser. Elles permettent d'obtenir des performances correctes mais loin d'être optimales. Un de leurs avantages est qu'elles sont facilement applicables quand le nombre de boucles est important.

Des approches plus récentes permettent de calculer le facteur de detuning en analysant les interactions présentes dans le procédé. Ces méthodes sont ainsi plus rigoureuses et permettent généralement d'obtenir de meilleures performances. Dans le cas TITO, il est possible d'utiliser la RIA ou le facteur  $\lambda$  issu de (II.4). Il est préférable d'utiliser la DRIA dans un cas non TITO, afin de prendre en compte les interactions plus finement. Ces méthodes sont cependant plus difficiles à mettre en place, et les calculs peuvent devenir rapidement complexes quand le nombre d'entrées et sorties augmente.

## II3b. Méthodes séquentielles et itératives

### i. Principe

Le principe des méthodes séquentielles (Mayne, 1973) consiste à régler les boucles les unes après les autres. Les interactions provenant des boucles déjà fermées sont ainsi considérées lors du réglage de la boucle en question. En revanche, ces dernières sont affectées par le réglage de cette boucle.

Une fois que les boucles sont toutes fermées, la plupart des méthodes préconisent de régler les boucles à nouveau. Il est alors possible d'itérer les réglages jusqu'à ce que les performances multivariabiles désirées soient atteintes. On parle plutôt de méthodes itératives dans ce cas, mais la distinction n'est pas toujours faite dans la littérature.

De nombreuses méthodes (Bhalodia and Weber, 1979), (Chiu and Arkun, 1992), (Loh *et al.*, 1993), (Hovd and Skogestad, 1994), (Vázquez *et al.*, 1999) ont été développées à partir de ces principes.

#### Méthode étudiée

Une procédure générale de cette méthode est présentée sur la Figure II3.1. L'ordre de fermeture des boucles est généralement déterminé en considérant les pulsations de coupure des diverses boucles : les boucles les plus rapides sont alors fermées les premières (puisque les interactions provoquées par des boucles plus lentes seront moindres). L'ordre de fermeture des boucles peut être réalisé en estimant les pulsations de coupure requises pour chacune des boucles, en analysant par exemple la PRGA et la CLDG du procédé. La procédure est ensuite relativement simple :

- Le transfert  $\tilde{G}_j^0(s)$  est tout d'abord calculé en prenant en compte les boucles déjà réglées. Le correcteur  $K_j^0(s)$  est ensuite synthétisé avec la méthode monoboucle proposée dans la partie II2 en considérant le transfert monovarié  $\tilde{G}_j^0(s)$ . Cette étape est réalisée pour  $j$  allant de 1 à  $r$ . Une fois que l'ensemble des correcteurs est synthétisé, la procédure séquentielle est terminée. Si les performances sont satisfaisantes, la procédure se termine à cette étape.
- Dans le cas contraire, le transfert  $\tilde{G}_j^i(s)$  est calculé en prenant en compte les boucles déjà réglées. Le correcteur  $K_j^i(s)$  est ensuite synthétisé avec la méthode monoboucle proposée. Si les performances sont satisfaisantes, la procédure est terminée. Sinon, cette étape est réalisée à nouveau en itérant sur  $j$ . Une fois que l'ensemble des correcteurs est synthétisé, cette étape est réalisée à nouveau en itérant sur  $i$ .
- Quand la différence maximale entre les paramètres de deux réglages consécutifs est inférieure à 5%, i.e. quand les réglages ne diffèrent *pas trop* des réglages précédents, la procédure est terminée.

D'autres méthodes de réglage monoboucle peuvent être appliquées en utilisant le même principe de schéma de calcul. Les méthodes de réglage de correcteurs qui s'appuient sur les réponses fréquentielles et non sur les transferts analytiques sont bien adaptées aux méthodes itératives. Les méthodes empiriques de la génération de l'oscillation entretenue et du relais vues dans la partie II2 sont également très bien adaptées à ces problèmes car elles sont rapides et faciles à mettre en place (Shen and Yu, 1994). Un grand nombre d'algorithmes de ce type sont résumés dans (Yu, 2006).

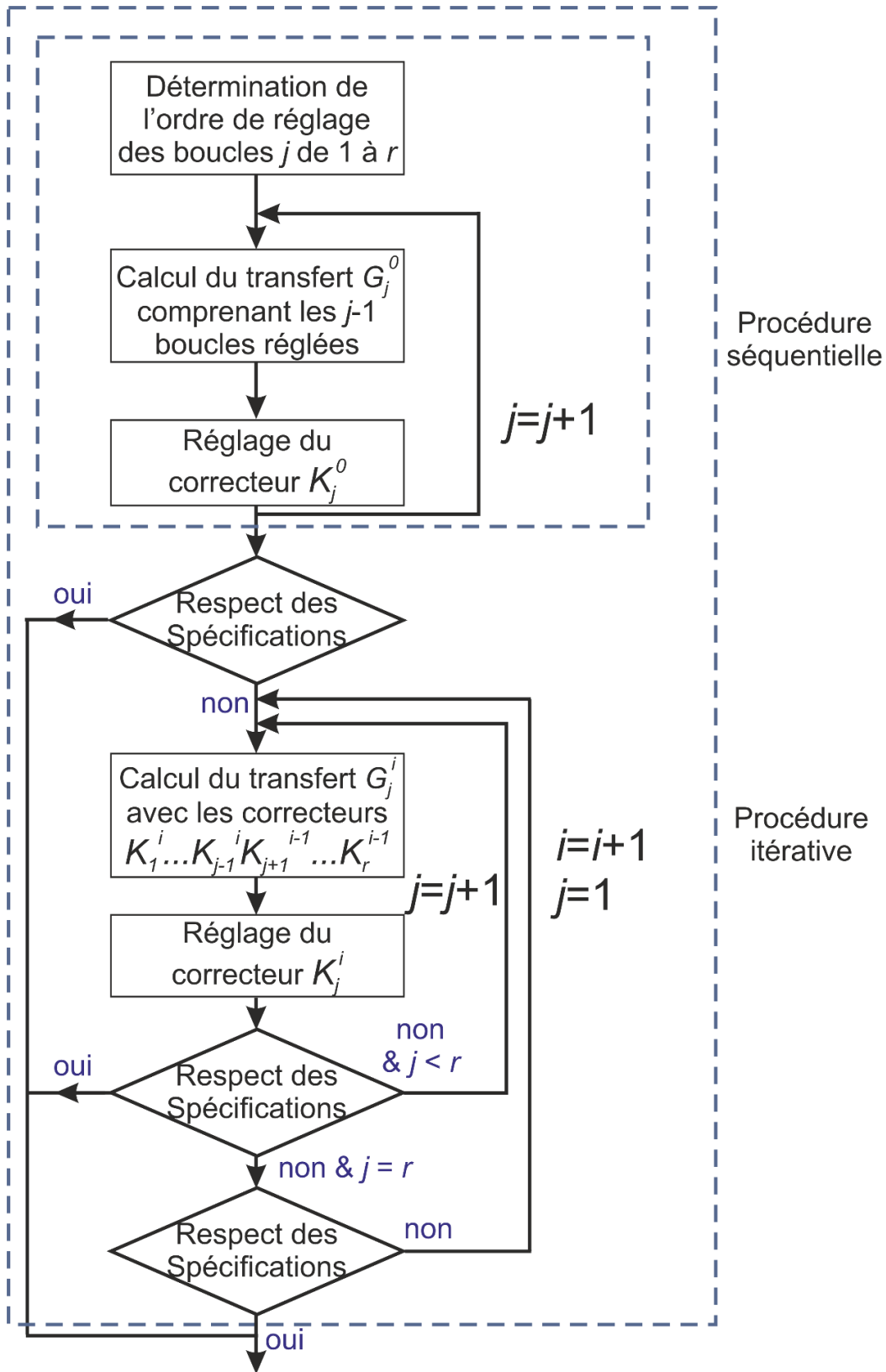


Figure II.3.1 : Procédure de réglage des méthodes itératives

## ii. Avantages et inconvénients

Les méthodes séquentielles/itératives sont relativement simples à appréhender et à mettre en place. Les interactions sont prises en compte et la stabilité du système multivariable est assurée. Dans le cas des méthodes séquentielles, la stabilité est assurée si les boucles sont ouvertes les unes après les autres dans l'ordre inverse où elles ont été réglées. De la même manière, la stabilité est assurée si les boucles sont fermées les unes après les autres dans l'ordre où elles ont été réglées (ce qui peut être important pour certaines applications). Un inconvénient des méthodes séquentielles est que la fermeture d'une boucle peut entraîner des interactions importantes dans les boucles déjà fermées. Ces méthodes restent ainsi relativement bien adaptées aux procédés dont les boucles ont des pulsations de coupure différentes. Dans le cas inverse, les méthodes itératives permettent de résoudre ce problème. Que ce soit pour les méthodes séquentielles ou itératives, le choix de l'ordre de réglage des boucles peut conduire à des résultats différents.

## II3c. Méthodes simultanées

### i. Principe

Le principe des méthodes simultanées est de régler l'ensemble des boucles simultanément tout en prenant en compte les interactions. A l'intérieur de cette catégorie, on distingue différents types de méthodes :

- Les méthodes heuristiques.
- Les méthodes d'optimisation.
- Les méthodes analytiques.

#### Méthodes heuristiques

Les méthodes simultanées *historiques* consistent en une généralisation des méthodes de la génération de l'oscillation entretenue et du relais, déjà utilisées dans les méthodes séquentielles et itératives. Le principe est de mettre un gain (Niederlinski, 1971) et respectivement un relais (Palmor *et al.*, 1995) simultanément dans chacune des boucles. Cela revient à la Figure II.2.1, en considérant le procédé multivariable et les blocs *gain* et *relais* comme des blocs diagonaux, composés respectivement de gains et de relais. Différentes méthodes pour automatiser la recherche des paramètres critiques ont été étudiées par (Halevi *et al.*, 1977), (Wang *et al.*, 1997).

#### Méthodes d'optimisation

On trouve également des méthodes d'optimisation (Wang *et al.*, 2007), (Zhang *et al.*, 2002) parmi les méthodes simultanées.

Une idée pourrait consister à généraliser la méthode d'optimisation par recuit simulé présentée dans la partie II.2, au cadre multivariable. Il serait alors possible de minimiser la somme des écarts entre les réponses temporelles réelles et désirées pour chacune des sorties. La minimisation des termes de découplage pourrait également être ajoutée. Par ailleurs, l'utilisation de pondérations pourrait également favoriser certaines sorties si besoin. Un des problèmes de cette méthode est le choix de l'initialisation de la structure de correction. Qui plus est, le nombre de paramètres d'optimisation est multiplié par le nombre de boucles, ce qui augmente le temps de calcul. Il a d'ailleurs été décidé de ne pas affiner les réglages multivariables par optimisation pour cette raison.

#### Méthodes analytiques

Certaines méthodes analytiques peuvent être considérées comme des méthodes simultanées. La plupart d'entre elles s'appuient sur la théorie de la commande par modèle interne (Jung *et al.*, 1999), (Cha *et al.*, 2002), (Lee *et al.*, 2004), (Liu *et al.*, 2005).



## Méthode étudiée

La méthode décrite ici s'inspire de (Vu and Lee, 2008). Le principe est de calculer par modèle interne un correcteur multivariable et de ne considérer que ses éléments diagonaux.

En prenant  $BF_d$  la matrice de transfert diagonale désirée, on peut déterminer le correcteur multivariable idéal  $K_M$  (II3.11), sous réserve de stabilité. Dans le cas où les couplages sont peu importants, les termes non diagonaux de  $K_M$  peuvent être négligés, auquel cas le correcteur diagonal  $K$  est considéré (II3.12). Chaque régulateur  $K_i$  peut ainsi être déterminé en calculant (II3.13), car seul l'inverse de  $G$  n'est pas diagonal. En utilisant l'expression de la RGA, on obtient (II3.14).

$$BF_d(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} \quad (\text{II3.10})$$

$$K_M(s) = G^{-1}(s)BF_d(s)(I - BF_d(s))^{-1} \quad (\text{II3.11})$$

$$K(s) = \overline{G^{-1}(s)BF_d(s)(I - BF_d(s))^{-1}} \quad (\text{II3.12})$$

$$K_i(s) = (G^{-1}(s))_{ii}BF_{d_i}(s)(I - BF_{d_i}(s))^{-1} \quad (\text{II3.13})$$

$$K_i(s) = RGA_{ii}G_{ii}^{-1}BF_{d_i}(s)(I - BF_{d_i}(s))^{-1} \quad (\text{II3.14})$$

### ii. Avantages et inconvénients

Les méthodes simultanées empiriques sont faciles à utiliser et permettent d'obtenir des réglages bien plus rapidement que les autres méthodes. Ces méthodes sont en effet plus rapides à mettre en place que les méthodes séquentielles et sont connues pour être plus fiables. Néanmoins, elles ne permettent pas de prendre facilement des spécifications en compte.

Les méthodes d'optimisation peuvent s'avérer complexes à mettre en œuvre et difficiles à résoudre numériquement. Le temps de calcul devient par ailleurs très important lorsque le nombre de boucles augmente. Ces méthodes peuvent s'avérer utiles lorsque les procédés sont très bien connus.

Les méthodes analytiques permettent d'assurer de bonnes performances vis-à-vis d'autres méthodes, tout en assurant une bonne robustesse. Cependant, elles ne sont pas forcément beaucoup plus simples que les méthodes analytiques de detuning, et ne prennent pas en compte les correcteurs des autres boucles.

## II3d. Méthodes indépendantes

### i. Principe

Les méthodes indépendantes consistent à traduire les interactions sous formes de contraintes à respecter lors de la synthèse monoboucle des différents correcteurs. Les correcteurs sont ainsi synthétisés indépendamment, mais les interactions sont tout de même prises en compte.

#### Méthodes DNA-INA

Les méthodes indépendantes historiques remontent aux années 70 avec les méthodes DNA (Direct Nyquist Array) et INA (Inverse Nyquist Array) de (Rosenbrock, 1969). Le principe de ces méthodes va être explicité avant d'aborder les méthodes de synthèse de correcteurs PID. Ces méthodes sont décrites en détail dans (Maciejowski, 1989).

Les méthodes DNA et INA permettent d'analyser la stabilité du procédé multivariable sans la connaissance des correcteurs utilisés dans les autres boucles. Les correcteurs peuvent ainsi être synthétisés indépendamment tout en assurant la stabilité du système multivariable en boucle fermée.

Afin d'appliquer la méthode DNA, il est nécessaire d'avoir un procédé  $DD_c$  (Diagonal Dominant par colonne). On a par ailleurs vu dans (I2.20) que cette propriété était conservée par la post-multiplication par un correcteur diagonal. Si un procédé  $G$  est  $DD_c$ , la boucle ouverte  $GK$  comprenant le procédé  $G$  et un régulateur décentralisé  $K$  le sera également. Avec la méthode DNA, la stabilité du système multivariable est assurée grâce au théorème de Nyquist généralisé (Macfarlane and Postlethwaite, 1977), extension du théorème de Nyquist pour les systèmes SISO. En définissant les lieux caractéristiques comme étant l'image du contour de Nyquist par les valeurs propres de la matrice de transfert du système, le théorème est énoncé de la façon suivante :

Soit un système comportant  $n_{pol}$  pôles instables en boucle ouverte. Le système est stable en boucle fermée si et seulement si la somme algébrique du nombre d'encerclements dans le sens trigonométrique du point critique par les lieux caractéristiques est égal à  $n_{pol}$ .

Les lieux caractéristiques peuvent être approchés par les éléments diagonaux de la matrice de transfert, en considérant les bandes de Gershgorin, définies ci-après.

D'après le théorème de Gershgorin, les valeurs propres d'une matrice  $Z$  appartiennent à au moins un des disques de Gershgorin  $D_{ci}$ , ces derniers étant définis par (II3.15). Les valeurs propres appartiennent également à l'un des disques  $D_{li}$ .

$$D_{ci} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z_{ii} - z| \leq \sum_{j \neq i}^r |z_{ji}| \right\} \quad (II3.15)$$

$$D_{li} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z_{ii} - z| \leq \sum_{j \neq i}^r |z_{ij}| \right\}$$

En appliquant le théorème de Gershgorin à la matrice de transfert à chaque pulsation, on obtient ainsi un disque  $D_{ci}$  autour de chacun des éléments diagonaux. L'union des disques à chaque pulsation forme ce qu'on appelle une bande de Gershgorin. D'après le théorème de Gershgorin, les lieux caractéristiques sont inclus dans les bandes de Gershgorin. Si les bandes de Gershgorin n'incluent pas le point critique, on peut conclure que la stabilité d'un système multivariable peut être obtenue en comptant le nombre d'encerclements du point critique par les bandes de Gershgorin.

D'après (II3.15), la largeur de la  $i^{\text{ème}}$  bande de Gershgorin correspond à la somme des modules des éléments non diagonaux de la  $i^{\text{ème}}$  colonne (II3.16). La largeur de la  $i^{\text{ème}}$  bande dépend uniquement du procédé et du  $i^{\text{ème}}$  correcteur, mais ne dépend pas des correcteurs des autres boucles. Les boucles peuvent alors être réglées indépendamment tout en assurant la stabilité du système multivariable.

$$Rc_i(s) = \sum_{j \neq i}^r |G_{ji}(s)K_i(s)| \quad (II3.16)$$

Dans INA, le but est de synthétiser l'inverse du correcteur à partir de l'inverse du procédé. L'inverse du procédé est  $DD_l$  (Diagonal Dominant par ligne) par hypothèse. Cette propriété se conserve par la pré-multiplication par un correcteur diagonal. Ainsi, l'inverse de la boucle ouverte  $\widehat{BO}$ , composée de  $\widehat{G}$   $DD_l$  et de  $\widehat{K}$  diagonal, restera  $DD_l$  (la notation  $\widehat{X}$  correspond à l'inverse de la matrice  $X$ ).

En considérant  $BO$  la chaîne directe,  $BF$  la boucle fermée et  $F$  la matrice fictive de retour (matrice identité), la relation (II3.17) est obtenue. L'inverse de cette relation est décrit par (II3.18) (l'opérateur de Laplace a été omis par soucis de lisibilité).

$$BF = (I + BO \times F)^{-1}BO \quad (II3.17)$$

$$\widehat{BF} = \widehat{BO} + F \quad (II3.18)$$

On considère la  $i^{\text{ème}}$  boucle ouverte en annulant  $F_{ii}$ , comme écrit en (II3.19). Le transfert entre  $y_{ref_i}$  et  $y_i$  correspond ainsi à une boucle ouverte, notée  $BO_i$  (II3.20). Il s'agit d'un transfert monovarié prenant en compte les autres bouclages. Le transfert est également représenté sur la Figure II3.2.

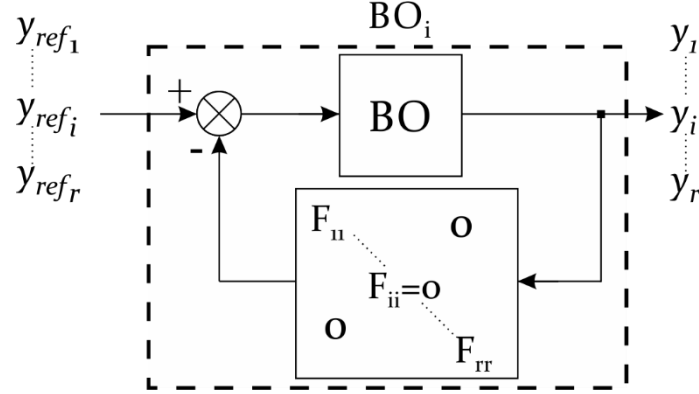


Figure II3.2 : Schéma de commande permettant d'ouvrir les boucles

$$\widehat{BF}_{F_{ii}=0} = \widehat{BO} + F_{F_{ii}=0} \quad (\text{II3.19})$$

$$BO_i = \left[ (\widehat{BF}_{F_{ii}=0})^{-1} \right]_{ii} \quad (\text{II3.20})$$

$BO_i$  dépend évidemment des autres correcteurs et n'est donc pas connu a priori. Il est toutefois possible de l'approcher en utilisant le théorème d'Ostrowski.

Ce dernier précise que l'inégalité (II3.21) est vérifiée pour une matrice  $Z$  diagonale dominante par ligne. Cette relation montre que l'on peut borner l'écart entre un élément diagonal d'une matrice, et l'inverse de l'élément diagonal de la matrice inverse.

$$|z_{ii} - 1/\hat{z}_{ii}| \leq \left( \sum_{k=1, k \neq i}^r |z_{ik}| \right) \times \max_{j \neq i} \left( \sum_{k=1, k \neq j}^r \frac{|z_{jk}|}{|z_{jj}|} \right) \quad (\text{II3.21})$$

En appliquant ce théorème à  $\widehat{BF}$ , DD<sub>1</sub> par construction, on obtient (II3.22). En utilisant (II3.25), (II3.26), (III3.28) et en cherchant un majorant  $\phi_i$  de  $\varphi_i$  (III3.27), on en déduit l'inégalité (II3.29).

$$|\widehat{BF}_{ii} - 1/BF_{ii}| \leq \zeta_i \varphi_i \quad (\text{II3.22})$$

$$\zeta_i = \sum_{k=1, k \neq i}^r |\widehat{BF}_{ik}| = \sum_{k=1, k \neq i}^r |\widehat{BO}_{ik}| \quad (\text{II3.23})$$

$$\varphi_i = \max_{j \neq i} \left( \sum_{k=1, k \neq j}^r \frac{|\widehat{BF}_{jk}|}{|\widehat{BF}_{jj}|} \right) \quad (\text{II3.24})$$

$$\widehat{BF}_{ii} = \widehat{BO}_{ii} + F_{ii} \quad (\text{II3.25})$$

$$\widehat{BF}_{jk} = \widehat{BO}_{jk} \text{ pour } j \neq k \quad (\text{II3.26})$$

$$\varphi_i < \phi_i = \max_{j \neq i} \left( \sum_{k=1, k \neq j}^r \frac{|\widehat{BO}_{jk}|}{|\widehat{BO}_{jj}|} \right) \quad (\text{II3.27})$$

$$\frac{1}{BF_{ii}} = \frac{1}{BO_i} + F_{ii} \quad (\text{II3.28})$$

$$|\widehat{BO}_{ii} - 1/BO_i| \leq \zeta_i \phi_i \quad (\text{II3.29})$$

Ces relations montrent que l'inverse de  $BO_i$  est contenu dans un disque centré en  $\widehat{BO}_{ii}$ . On parle de cercle d'Ostrowski et la réunion de ces cercles sur l'ensemble du domaine fréquentiel forme une bande d'Ostrowski.  $\zeta_i$  n'est autre que le rayon du disque de Gershgorin de  $\widehat{BO}$ , et ne dépend ainsi pas des correcteurs des autres boucles.

Par ailleurs,  $\phi_i$  est plus petit que 1 puisque  $\widehat{BF}$  est DD.  $\phi_i$  est indépendant des correcteurs des autres boucles. La position et la largeur des bandes d'Ostrowski dépendent ainsi uniquement du procédé et du correcteur de la boucle considérée. Il est alors possible de synthétiser un correcteur SISO pour chacune des boucles indépendamment des autres correcteurs, tout en assurant la stabilité du système multivariable.

On peut alors utiliser le théorème inverse de Nyquist :

Soit un système monovarié comportant  $n_{zero}$  zéros instables en boucle ouverte. Le système est stable en boucle fermée, si et seulement si le nombre d'encerclements de l'inverse du lieu de Nyquist autour du point critique est égal à  $n_{zero}$ .

Le lieu de Nyquist de l'inverse de  $BO_i$  étant inclus dans les bandes d'Ostrowski, on peut conclure que la stabilité d'un système multivariable peut être obtenue en comptant le nombre d'encerclements des bandes d'Ostrowski autour du point critique, si celles-ci ne l'incluent pas.

Bien que ces deux approches aboutissent à une synthèse indépendante de correcteurs SISO, on peut noter quelques différences : dans DNA, on utilise une approche multivariable en considérant les lieux caractéristiques pour analyser la stabilité. Cette analyse n'est pas toujours évidente car le théorème de Gershgorin indique uniquement que les lieux caractéristiques d'une boucle peuvent se trouver dans les bandes d'une des boucles. Cela n'est généralement pas problématique car les bandes sont souvent plus ou moins superposées, mais il faut y prêter attention. Pour ces raisons, il ne sera pas possible d'évaluer des marges de stabilité différentes pour chacune des boucles. L'approche INA étant monovarié, elle est plus systématique et flexible. Par ailleurs, elle n'est pas sensible aux incertitudes de modèles contrairement aux lieux caractéristiques de DNA.

Des méthodes utilisant DNA ont été étudiées par (Garcia *et al.*, 2005), (Chen and Seborgb 2002). La méthode proposée ici et présentée dans (Le Brun *et al.*, 2014a)), consiste à utiliser conjointement les méthodes DNA et INA afin d'obtenir des correcteurs moins conservatifs qu'avec DNA ou INA seule.

L'objectif est alors de synthétiser indépendamment des régulateurs PID grâce à l'optimisation d'une fonction de coût. Cette dernière est composée de différents critères, permettant de prendre en compte les performances des boucles SISO indépendantes ainsi que des critères de stabilité multivariable. Les mêmes critères sont définis pour DNA et INA et comprennent :

- Une distance permettant d'*attirer* le lieu de Nyquist autour de certaines zones, afin de respecter le nombre d'encerclements du point critique.
- Des marges de phase et de gain multivariables, considérées comme des extensions des marges de stabilité SISO, en considérant les bandes de Gershgorin ou celles d'Ostrowski à la place des lieux de Nyquist.
- Le maximum de la réponse fréquentielle de la boucle fermée, permettant de limiter la résonance.
- La pulsation de coupure de la boucle ouverte, permettant de régler le temps de réponse en boucle fermée.
- La maximisation de l'action intégrale, afin d'obtenir un rejet de perturbations convenable.

Pour chacune des boucles, les paramètres des correcteurs sont déterminés en résolvant un problème d'optimisation de moindres carrés. Des conditions initiales peuvent être déterminées en utilisant des techniques classiques de synthèse de régulateurs PID. Des pondérations permettent de donner plus ou moins d'importance à chacun des critères.

Le choix de l'approche DNA ou INA est déterminé par la nature même du procédé. En effet, l'utilisation de ces méthodes requiert les hypothèses respectives de  $DD_c$  du procédé et de  $DD_i$  de l'inverse du procédé. Ces propriétés sont uniquement équivalentes dans le cas TITO. Pour un procédé MIMO quelconque, des techniques de découplage permettront de rendre le procédé  $DD_c$  ou son inverse  $DD_i$ , en fonction de la difficulté du problème de découplage (Chapitre III).

Le défaut principal des méthodes DNA et INA vient du fait que les réglages visent à assurer des performances en termes de suivi de consigne pour les boucles monovariables. En effet, seule la stabilité et les marges de stabilité sont étudiées dans le cas multivariable.

#### Méthodes SSV

Afin de prendre en compte les performances multivariables, d'autres méthodes multiboucles indépendantes (Grosdidier and Morari, 1986), (Skogestad and Morari, 1989) et (Hovd and Skogestad, 1993) peuvent être utilisées. Les principes de ces méthodes sont détaillés dans (Vaes, 2005) et résumés ci-après.

L'expression de  $E$  est rappelée en (II3.30) et  $E_S$  est introduit en (II3.31). (Grosdidier and Morari, 1986) a montré qu'un système bouclé par une commande décentralisée est stable si l'inégalité (II3.32) est respectée. Cela signifie que l'on peut assurer la stabilité d'un système multivariable bouclé, à partir des caractéristiques des boucles monovariables et de la connaissance des interactions. On reconnaît la SSV-IM décrite précédemment dans (I2.36) de la partie I2a, qui permet d'estimer des contraintes à respecter par les transferts diagonaux en rebouclage des transferts hors diagonaux pour assurer la stabilité de la structure bouclée. Il s'agit seulement d'une condition nécessaire mais non suffisante. Cela donne la borne la plus faible possible pour  $\sigma_{max}(\bar{T})$ , dans le sens où l'on peut trouver une configuration décentralisée instable si (II3.32) n'est pas respecté ( $\Delta_K$  correspond à la structure diagonale du correcteur).

$$E(s) = (G(s) - \bar{G}(s))\bar{G}^{-1}(s) \quad (\text{II3.30})$$

$$E_S(s) = (G(s) - \bar{G}(s))G^{-1}(s) \quad (\text{II3.31})$$

$$\sigma_{max}(\bar{T}(j\omega)) \leq \mu_{\Delta_K}^{-1}(E(j\omega)) \quad (\text{II3.32})$$

Comme les fonctions de sensibilité complémentaires décentralisées sont diagonales, il est possible de régler le régulateur  $K_{ii}$  de chacune des boucles en imposant un gabarit sur la fonction de sensibilité complémentaire décentralisée comme en (II3.33). Afin de prendre en compte des spécifications différentes dans chacune des boucles, il est possible d'introduire une matrice de pondération diagonale  $W$  et de considérer (II3.34).

$$|\bar{T}_{ii}(j\omega)| \leq \mu_{\Delta_K}^{-1}(E(j\omega)) \quad (\text{II3.33})$$

$$|w_{ii}(j\omega)\bar{T}_{ii}(j\omega)| \leq \mu_{\Delta_K}^{-1}(E(j\omega)W^{-1}(j\omega)) \quad (\text{II3.34})$$

(Skogestad and Morari, 1989) a montré qu'il était également possible de spécifier des conditions sur les fonctions de sensibilité décentralisées afin d'assurer des performances nominales :

Une commande décentralisée assurera des performances telles que  $\|W_p(s)S(s)\|_{\infty} < 1$  si les fonctions de sensibilité décentralisées satisfont l'une des deux conditions (II3.35) et (II3.36). Les fonctions  $s_{NP}$  et  $t_{NP}$  sont calculées à chaque fréquence à partir de (II3.37) et (II3.38), avec  $\Delta_p$  une matrice pleine et  $\Delta_K$  la

structure diagonale du correcteur. Ces contraintes peuvent ensuite se traduire sur la boucle ouverte décentralisée comme pour la stabilité. Il est intéressant de prendre la condition la moins restrictive en chacune des pulsations : on prend généralement la condition sur  $\bar{S}_{ii}$  à basses fréquences et sur  $\bar{T}_{ii}$  à hautes fréquences.

$$|\bar{S}_{ii}(j\omega)| < s_{NP}(j\omega) \quad (\text{II3.35})$$

$$|\bar{T}_{ii}(j\omega)| < t_{NP}(j\omega) \quad (\text{II3.36})$$

$$\mu_{\Delta_{NP}} \begin{pmatrix} 0 & W_p \\ s_{NP} \bar{G} G^{-1} & s_{NP} E_S \end{pmatrix} = 1 \quad (\text{II3.37})$$

$$\mu_{\Delta_{NP}} \begin{pmatrix} W_p & -W_p G \bar{G}^{-1} \\ t_{NP} I & -t_{NP} E \end{pmatrix} = 1 \quad (\text{II3.38})$$

$$\Delta_{NP} = \text{diag}\{\Delta_p, \Delta_K\} \quad (\text{II3.39})$$

L'approche présentée brièvement ici permet d'obtenir des contraintes sur les fonctions de sensibilité décentralisées. Une méthode de type  $H_\infty$  est particulièrement bien adaptée pour prendre en compte ces contraintes lors de la synthèse des correcteurs monovariables.

## ii. Avantages et inconvénients

Les méthodes *historiques* DNA et INA permettent d'assurer la stabilité du système multivariable en réglant indépendamment les correcteurs de chacune des boucles. Ces méthodes sont généralement conservatives et ne permettent pas de garantir des performances multivariables. Elles fonctionnent néanmoins plutôt bien pour le réglage multiboucle de procédés légèrement couplés.

Afin de garantir des performances multivariables, les méthodes SSV permettent de traduire les spécifications sous forme de gabarits fréquentiels sur les fonctions de sensibilité décentralisées, en fonction des couplages. Ces méthodes sont rigoureuses et permettent d'assurer à la fois la stabilité et les performances du système multivariable. Elles permettent également d'assurer indépendamment des performances pour chacune des boucles, contrairement à la plupart des méthodes décrites précédemment. Cela peut être nécessaire lorsque les boucles de régulation d'un procédé doivent être ouvertes ou fermées durant le fonctionnement. Ces méthodes sont néanmoins conservatives car les conditions obtenues sont prises en compte sans exploiter pour autant les informations sur les régulateurs effectivement présents dans les autres boucles. Cela devient ainsi pénalisant lorsque les couplages sont importants. Par ailleurs, les méthodes SSV s'avèrent plus complexes que les autres méthodes de synthèse multiboucle.

## II4. Application de commandes décentralisées au système de cuves

Le système de cuves est à nouveau utilisé comme cas d'étude (la représentation d'état et la matrice de transfert sont données dans le Chapitre I). L'objectif est d'obtenir des pulsations de brisure en boucle fermée  $\omega_M = 5 \times 10^{-3}$  rad/s, ce qui correspond au réglage *moyen* présenté dans la partie I3. Le but est ainsi de synthétiser une régulation décentralisée en présence d'interactions relativement importantes. Des correcteurs PI sont adoptés.

Tout d'abord, les correcteurs PI sont synthétisés de manière indépendante sans prendre en compte les interactions. Cela servira de réglages initiaux pour certaines méthodes ainsi que de point de comparaison. Le principe de la méthode de synthèse monovariable décrit dans la partie II2 sera détaillé sur cet exemple. Les quatre types de méthodes de synthèse multiboucle sont ensuite mises en œuvre sur ce même exemple.

### II4a. Méthode de synthèse monoboucle

Les éléments diagonaux du modèle linéaire  $G$  du système de cuves sont donnés dans (II4.1) et réduits à l'ordre 2. Les réponses fréquentielles des modèles sont quasiment similaires, comme on peut le voir sur la Figure II4.1.

$$G_{11}(s) = \frac{9,9 \times (1 + 27s) \times (1 + 145s)}{(1 + 20s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4280s)} \approx \frac{9,9 \times (1 + 125s)}{(1 + 48s) \times (1 + 4260s)} \quad (\text{II4.1})$$

$$G_{22}(s) = \frac{9,0 \times (1 + 21s) \times (1 + 202s)}{(1 + 20s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4280s)} \approx \frac{9,0 \times (1 + 199s)}{(1 + 65s) \times (1 + 4275s)}$$

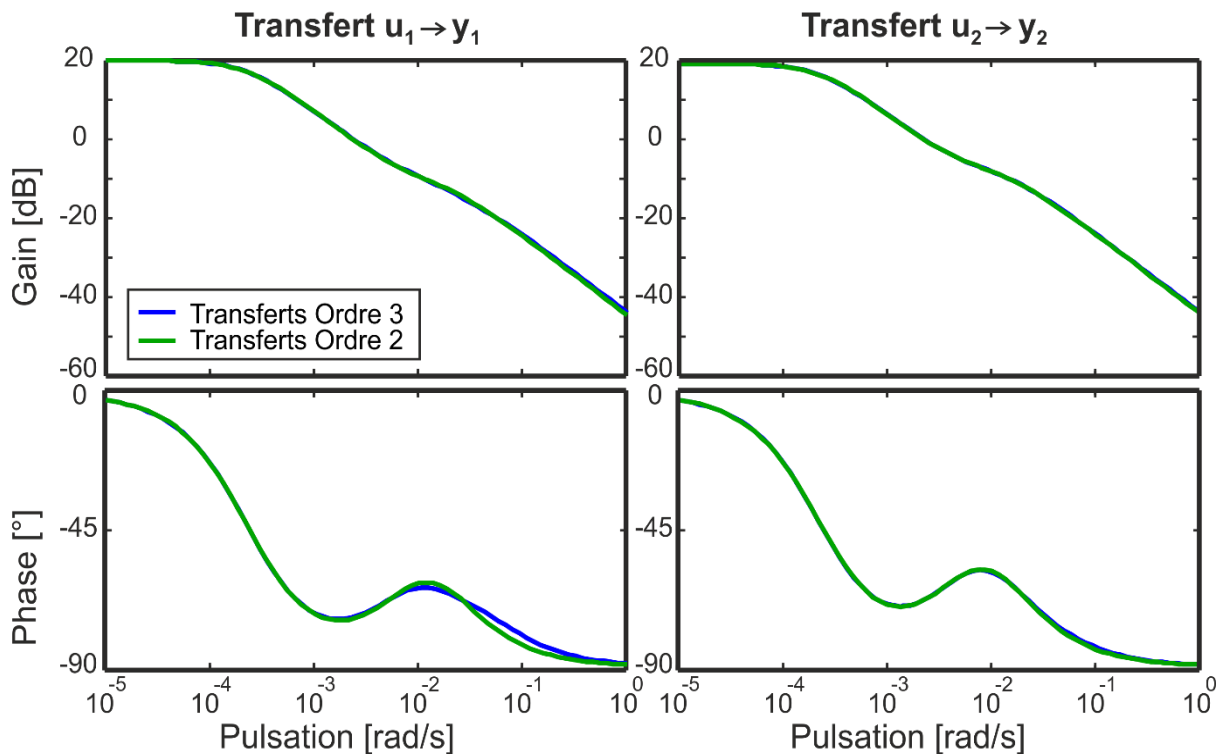


Figure II4.1 : Comparaison des réponses fréquentielles des transferts diagonaux aux ordres 3 et 2

Les réglages IMC vus dans la partie II2 sont ensuite appliqués. Le temps du premier maximum spécifié est de 600 secondes. La constante de temps correspondante est ainsi de 200 secondes, valeur adoptée pour la constante de temps du filtre IMC. Les paramètres des correcteurs PI sont calculés en utilisant (II2.15) :

$$k_{c1} = \frac{(4260+48-125)}{9,9 \times 200} = 2,1 ; k_{c2} = \frac{(4275+65-199)}{9,0 \times 200} = 2,3 \quad (\text{II4.2})$$

$$\tau_{i1} = (4260 + 48 - 125) \approx 4185 ; \tau_{i2} = (4275 + 65 - 199) \approx 4140$$

Le programme d'optimisation présenté dans la partie II2 est utilisé avec les paramètres initiaux obtenus dans (II4.2). Les valeurs obtenues sont proches de celles obtenues par IMC, comme on peut le voir dans le Tableau II4-1. Cela n'est pas étonnant dans ce cas, puisque le modèle réduit d'ordre 2 reste très proche du modèle original. La Figure II4.2 montre les réponses temporelles obtenues avec ces réglages, en considérant chacune des boucles indépendantes (i.e. sans interactions). Les réponses sont relativement proches des spécifications.

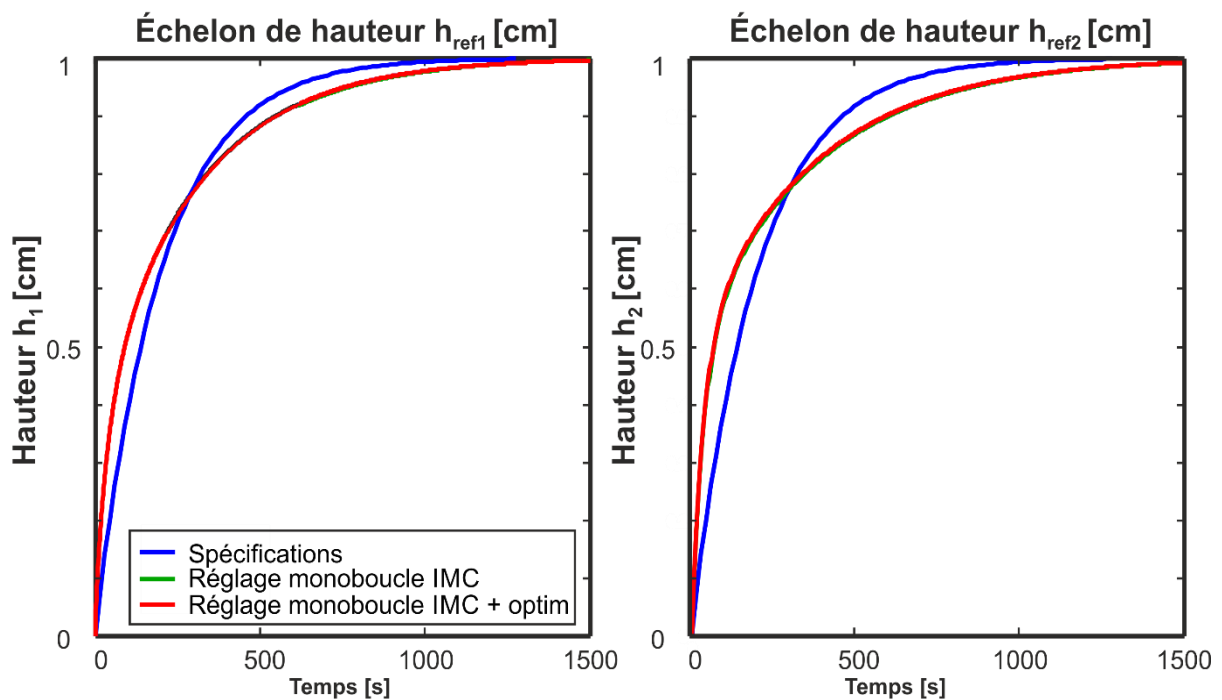


Figure II4.2 : Réponses indicielles en boucle fermée des éléments diagonaux

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
IMC	2,1	4185	2,3	4140
Optimisation	2,15	4220	2,35	4170

Tableau II4-1 : Réglages des correcteurs PI –Méthode monoboucle

#### II4b. Méthodes de detuning

Les correcteurs correspondant aux boucles fermées individuelles doivent tout d'abord être calculés. Il s'agit alors des réglages individuels obtenus dans le Tableau II4-1. Les boucles ouvertes équivalentes  $\tilde{G}_{11}$  et  $\tilde{G}_{22}$  sont ensuite calculées comme en (II3.4) et (II3.5). Les réponses fréquentielles de ces dernières sont représentées sur la Figure II4.3 et comparées à celles des boucles ouvertes individuelles sans correction.



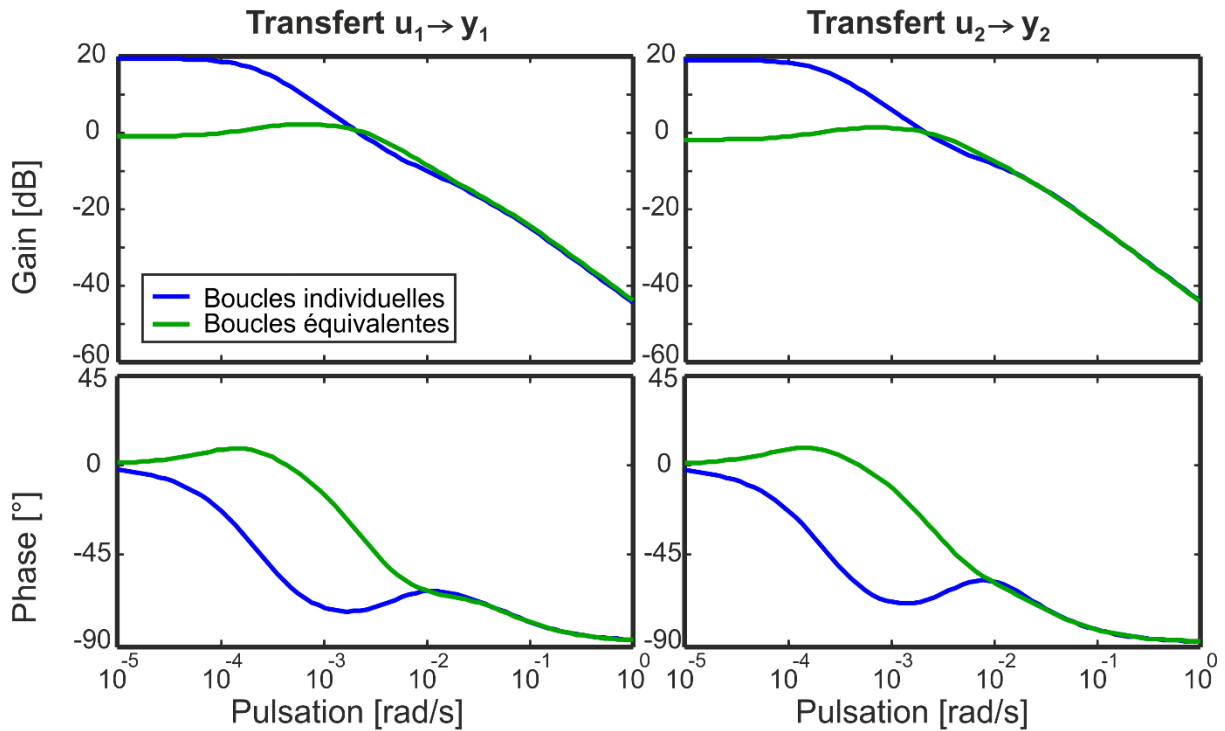


Figure II.4.3 : Comparaison des réponses fréquentielles des boucles originales et équivalentes

Il est clair que les réponses fréquentielles des boucles ouvertes équivalentes sont très différentes des boucles ouvertes originales à basses fréquences. Les gains des boucles équivalentes sont en effet nettement moins importants, ce qui risque de ralentir les réponses indicielles. Cela est en accord avec la PRGA représentée sur la Figure I3.6. Par ailleurs, c'est également ce qui était constaté sur la Figure I3.9 où les réponses temporelles du système multivariable étaient bien plus lentes que celles des boucles indépendantes.

Il reste à présent à synthétiser des correcteurs PI pour les boucles SISO équivalentes  $\tilde{G}_{11}$  et  $\tilde{G}_{22}$ . Jusqu'à présent, aucune réduction n'a été réalisée (en dehors de compensation pôles/zéros) et les boucles équivalentes obtenues sont d'ordre 4. Des algorithmes de réduction de modèle sont appliqués indépendamment aux fonctions de transfert des boucles équivalentes SISO, de manière à obtenir des fonctions de transfert d'ordre 2 (II.4.3).

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{11}(s) &= \frac{0,9(1+24s)(1+56s)(1+6330s)}{(1+20s)(1+39s)(1+369s)(1+4165s)} \cong \frac{0,8(1+12080s)}{(1+285s)(1+8050s)} \\ \tilde{G}_{22}(s) &= \frac{0,8(1+19s)(1+80s)(1+6370s)}{(1+18s)(1+50s)(1+305s)(1+4220s)} \cong \frac{0,75(1+14050s)}{(1+216s)(1+9340s)}\end{aligned}\quad (\text{II.4.3})$$

Il n'est pas possible dans ce cas d'appliquer les règles IMC de II.2 comme en (II.4.2), car cela conduirait à des coefficients proportionnel et intégral de signes différents. En utilisant des règles de simplification, on peut se ramener à des fonctions de transfert du premier ordre (II.4.4).

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{11}(s) &\cong \frac{0,8 \times 12080/8050}{(1+285s)} \\ \tilde{G}_{22}(s) &\cong \frac{0,75 \times 14050/9340}{(1+216s)}\end{aligned}\quad (\text{II.4.4})$$

Les réglages IMC sont directement obtenus à partir des modèles de (II4.4). Ces derniers sont ensuite affinés par optimisation (mais restent proches des réglages initiaux). Les réglages sont finalement présentés dans le Tableau I3-2.

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
IMC	1,15	285	1,0	215
Optimisation	1,2	290	1,0	225

Tableau II4-2 : Réglages des correcteurs PI – Méthode de detuning

Les réponses temporelles obtenues avec ces réglages sont présentées sur la Figure II4.4. Celles-ci sont comparées aux réponses temporelles obtenues avec des réglages monoboucles. Il est clair que la synthèse de detuning multiboucle permet d'obtenir de bien meilleures performances en termes de suivi de consigne et de découplage. Les réponses ne sont évidemment pas parfaites étant donné la présence de couplages. Par ailleurs, le temps pour atteindre le régime permanent reste relativement important vis-à-vis du temps de réponse spécifié.

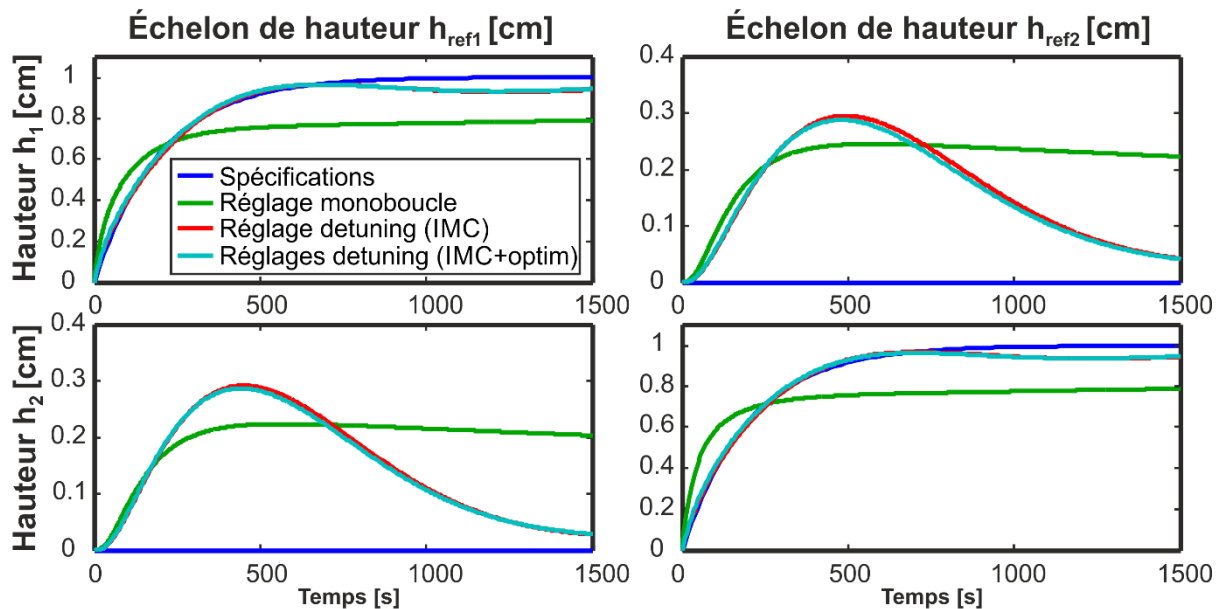


Figure II4.4 : Comparaison des réponses temporelles

Par la suite, seuls les réglages finaux, i.e. obtenus après optimisation seront présentés.

#### II4c. Méthodes séquentielles et itératives

La procédure décrite dans la Figure II3.1 est appliquée. D'après les PRGA et CLDG appliqués dans la partie I3, les deux boucles requièrent une même pulsation de coupure pour obtenir des bonnes performances. On note tout de même sur la Figure I3.6 que la boucle 1 est plus sensible aux interactions que la boucle 2. Sachant que l'on souhaite régler les deux boucles pour avoir un même temps de réponse, il peut être préférable de commencer à régler la boucle 2 en premier. Afin de comparer facilement les réglages avec ceux des autres méthodes, la numérotation des boucles ne sera pas modifiée en fonction de l'ordre de réglage.

Tout comme pour les méthodes de detuning, chaque transfert est simplifié en utilisant les techniques de réduction. Les paramètres du correcteur PI sont ensuite déduits par IMC avant d'être utilisés comme conditions initiales pour un affinage par optimisation.

- Le correcteur  $K_2^0$  est réglé le premier en considérant  $\tilde{G}_2^0$ , qui n'est autre que le transfert  $G_{22}$ . Le réglage a déjà été réalisé (Tableau II4-1). Les réponses indicielles  $BF^{ii}$  correspondent au réglage monoboucle et sont tracées sur la Figure II4.5.
- Après avoir calculé  $\tilde{G}_1^0$  en prenant en compte la deuxième boucle, le correcteur  $K_1^0$  est synthétisé. Les résultats  $BF^{00}$  sont présentés sur la Figure II4.5. La réponse de la première boucle est satisfaisante, puisque celle-ci prend en compte les couplages. A ce stade, les performances de la seconde boucle sont détériorées. La méthode séquentielle s'arrête ici.
- Ne pouvant se satisfaire de ces réglages, la méthode itérative est appliquée. Le réglage de  $K_2^1$  est réalisé pour prendre la première boucle en compte. Les réponses  $BF^{01}$  deviennent alors acceptables pour la seconde boucle, au détriment de celles de la première boucle.
- Les réponses obtenues avec  $BF^{11}$  sont quasiment confondues avec les résultats précédents. Étant donné la proximité des résultats, la procédure d'itération est terminée (en effet, la différence maximale entre les paramètres de deux réglages consécutifs est inférieure à 5%). L'ensemble des réglages est présenté dans le Tableau II4-3.

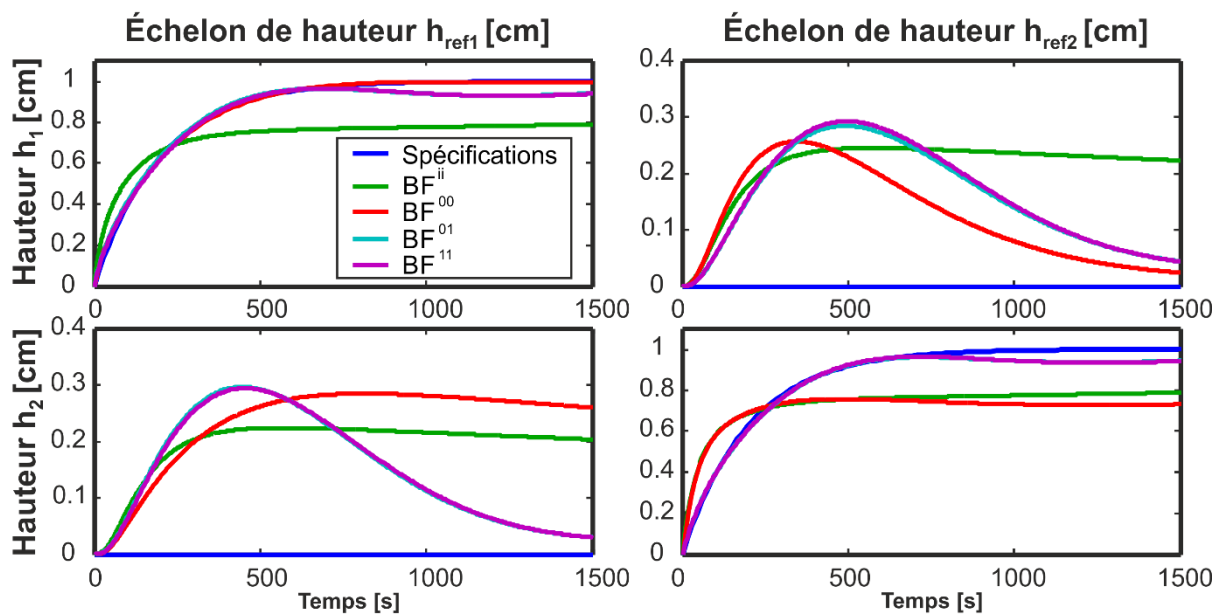


Figure II4.5 : Comparaison des réponses temporelles en fonction des itérations

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
$BF^{ii}$	2,15	4220	2,35	4170
$BF^{00}$	1,25	300	2,35	4170
$BF^{01}$	1,25	300	1,0	230
$BF^{11}$	1,2	290	1,0	230

Tableau II4-3 : Réglages des correcteurs PI – Méthode de detuning (réglage initial de la boucle 2)

La procédure d'itération a été réappliquée, en commençant cette fois par la première boucle. Les réglages obtenus sont présentés dans le Tableau II4-4 et les réponses temporelles sont tracées sur la Figure II4.6.

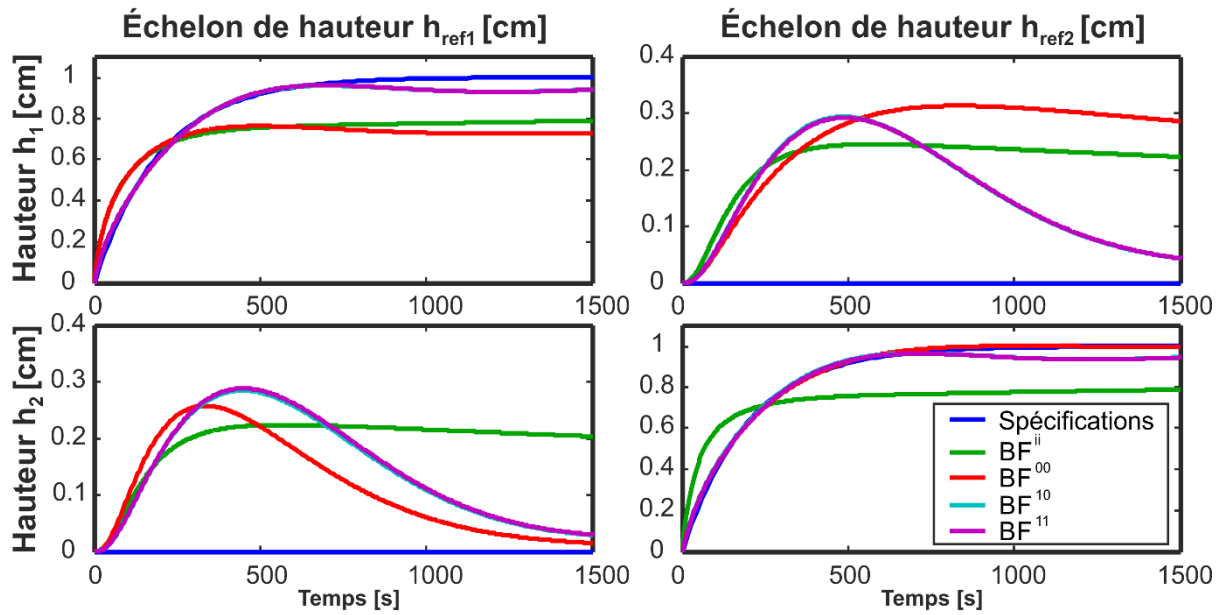


Figure II.4.6 : Comparaison des réponses temporelles en fonction des itérations

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
$BF^{ii}$	2,15	4220	2,35	4170
$BF^{00}$	2,15	4220	1,1	230
$BF^{10}$	1,2	290	1,1	230
$BF^{11}$	1,2	290	1,0	230

Tableau II.4-4 : Réglages des correcteurs PI – Méthode de detuning (réglage initial de la boucle 1)

A partir de ce cet exemple, il est clair que les résultats obtenus avec une procédure purement séquentielle sont insuffisants. La première boucle réglée est en effet très perturbée par le réglage de la seconde boucle. Une itération seulement permet d'aboutir au réglage final. Cela est en partie dû au fait que les deux boucles ont les mêmes caractéristiques et spécifications. On dénombre en général entre deux et six itérations dans la littérature. Les procédures d'itération aboutissent aux mêmes réglages dans cet exemple, que l'on commence par le réglage de la première ou de la seconde boucle.

#### II.4d. Méthodes simultanées

Étant donné la forme du procédé (zéros stables, pas de retard pur, degré relatif de 1), la boucle fermée désirée est fixée comme dans (II.4.5). Les correcteurs SISO s'en déduisent en utilisant (II.4.6). En réduisant le correcteur obtenu à un correcteur PI comme dans (II.2.7), les réglages du Tableau II.4-5 sont obtenus. Les réponses indicielles en boucle fermée sont tracées sur la Figure II.4.7.

$$BF_d(s) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_c}{s + \lambda_c} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_c}{s + \lambda_c} \end{bmatrix}; \lambda_c = \omega_M = 5 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \quad (\text{II.4.5})$$

$$K_i(s) = \frac{RGA_{ii}(s)G_{ii}^{-1}(s)}{\lambda_c} \quad (\text{II.4.6})$$

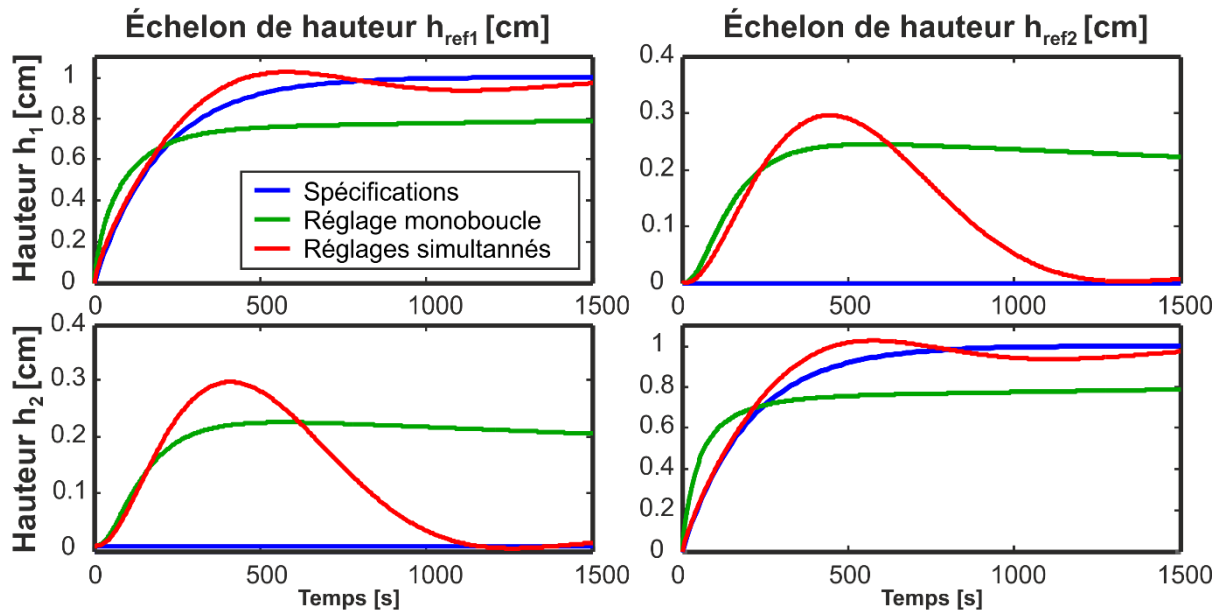


Figure II.4.7 : Comparaison des réponses temporelles – Méthodes simultanées

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
IMC + Optimisation	1,1	187	0,9	135

Tableau II.4-5 : Réglages des correcteurs PI – Méthode simultanée

La méthode est ainsi relativement simple à mettre en place. Tout comme avec les autres méthodes, les performances obtenues avec la synthèse multiboucle sont largement meilleures que celles obtenues initialement. Contrairement à la méthode de detuning utilisée, la dynamique du correcteur de l'autre boucle n'est pas utilisée.

#### II.4e. Méthodes indépendantes

Il est possible d'appliquer les méthodes DNA-INA, car le procédé est diagonal dominant par colonne ( $DD_c$ ). En effet, d'après la Figure I3.8 de la partie I3, les inverses de  $DD_{c1}$  et de  $DD_{c2}$  sont inférieurs à 1. L'inverse du procédé est ainsi diagonal dominant par ligne puisque le procédé est un système TITO.

En prenant comme spécifications les pulsations de coupure désirées en boucle ouverte, des marges complémentaires de module proches de 1 (afin de minimiser les dépassements) et des marges de phase importantes, les correcteurs obtenus sont plus proches des réglages indépendants SISO que des réglages multiboucles trouvés jusqu'à présent. Le problème est que les couplages sont particulièrement importants (on se trouve à la limite de la diagonale dominance et donc dans le cas le plus défavorable pour ces méthodes). De plus, il est possible d'assurer les objectifs de marges de stabilité multivariables tout en ayant des performances médiocres. Il faudrait en fait biaiser les spécifications recherchées en fonction des réglages monoboucles. Par exemple, on pourrait artificiellement augmenter le gain maximum de la boucle fermée, de manière à viser un dépassement avec un réglage monoboucle. Les couplages auraient alors tendance à diminuer le gain et l'on obtiendrait des réponses convenables. Cela revient en quelque sorte au concept de boucles équivalentes mais la méthode perd alors tout son intérêt.

Au lieu d'utiliser cette méthode de la sorte, il a été décidé d'analyser avec les bandes de Gershgorin et d'Ostrowski les boucles ouvertes incluant les correcteurs établis avec la méthode de detuning dans le Tableau I3-2. Les diagrammes de Nyquist des transferts diagonaux de la matrice de transfert en boucle ouverte sont tracés sur la Figure II.4.8 et la Figure II.4.9.

Les bandes de Gershgorin associées à chaque élément diagonal incluent le point critique. Elles ne permettent donc pas de conclure quant à la stabilité du système multivariable. En revanche, les bandes d'Ostrowski n'incluent pas le point critique et ne l'entourent pas non plus. Sachant que le procédé ne possède pas de zéros instables, la stabilité du système multivariable en boucle fermée est assurée. Par ailleurs, les marges de phase obtenues sont importantes. On remarque que les bandes de Gershgorin sont plus larges pour le second élément diagonal. Cela est dû au fait que les couplages entrées-sorties sont plus importants sur la seconde boucle, comme on le constatait déjà avec l'étude de la diagonale dominante de la Figure I3.8.

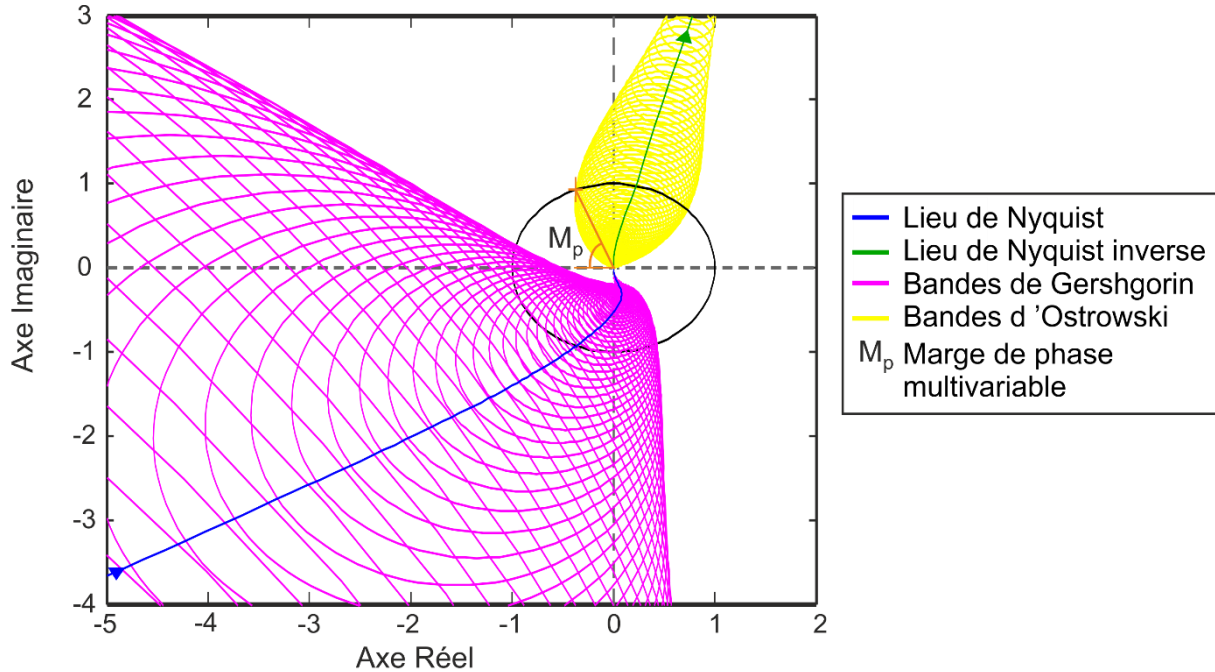


Figure II4.8 : Diagrammes de Nyquist du premier élément diagonal

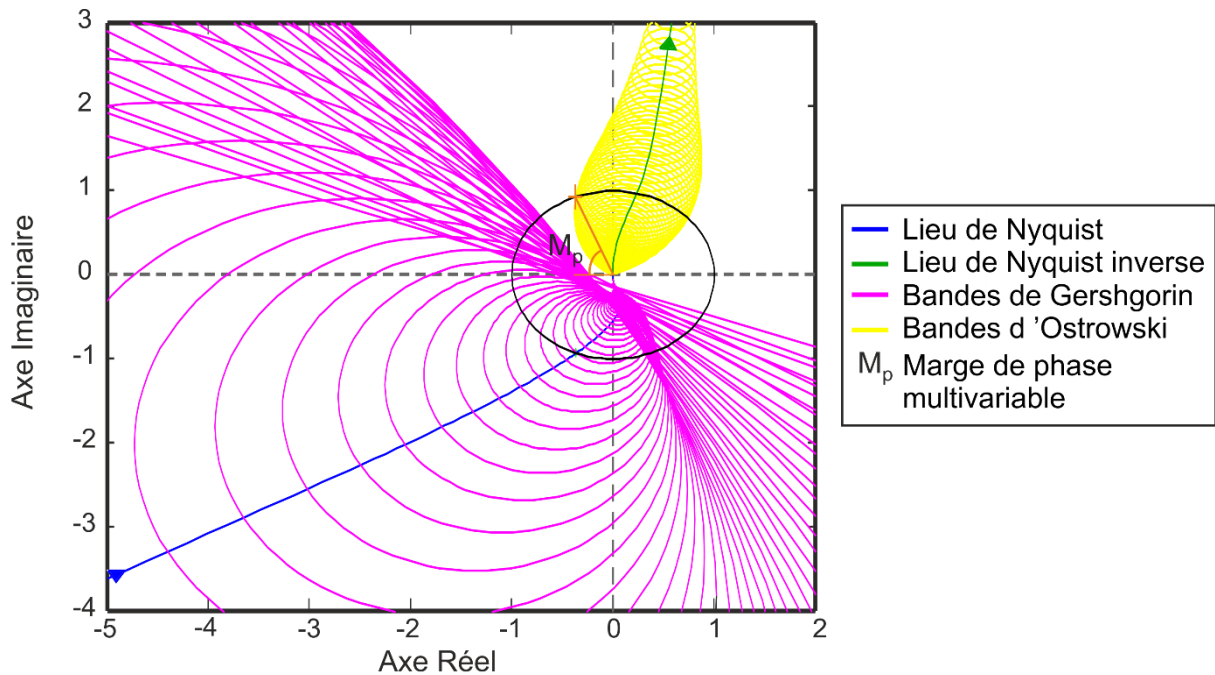


Figure II4.9 : Diagrammes de Nyquist du second élément diagonal

La méthode SSV permettant de définir des bornes sur les fonctions de sensibilité est alors utilisée pour voir s'il est possible de prendre en compte les performances multivariées. La première étape est de définir des gabarits sur les fonctions de sensibilité.

Afin de prendre en compte la stabilité nominale,  $\mu_{\Delta_K}^{-1}(E)$  est calculé pour contraindre les fonctions de sensibilité complémentaires décentralisées (II3.33).  $\mu_{\Delta_K}^{-1}(E)$  est tracé sur la Figure II4.11. Il est clair que si cette valeur est inférieure à 1 (0 dB), les fonctions de sensibilité complémentaires le seront aussi, ce qui entraînera nécessairement de mauvaises performances. Ici,  $\mu_{\Delta_K}^{-1}(E)$  est toujours supérieure ou égal à 1.

Les performances visées peuvent se traduire par un même gabarit fréquentiel  $w_p$  sur les fonctions de sensibilité associées aux deux boucles (lorsque les interactions ne sont pas prises en compte). Celui-ci a été déterminé en fonction des spécifications, comme indiqué sur la Figure II4.10.

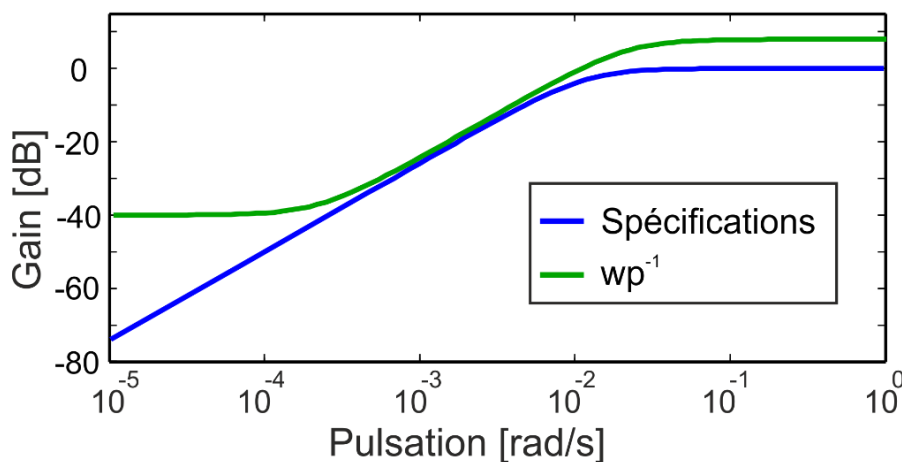


Figure II4.10 : Performances spécifiées et gabarits  $w_p$

Les gabarits  $s_{NP}$  et  $t_{NP}$  sont calculés, en prenant pour  $W_p$  une matrice diagonale composée des deux transferts  $w_p$ . Pour cela, les équations (II3.37) et (II3.38) sont utilisées. Une routine permettant de balayer de larges plages de  $s_{NP}$  et de  $t_{NP}$  est utilisée afin de relever les fréquences où les SSV sont égales à 1. Les gabarits sont finalement tracés sur la Figure II4.11. Il est clair que  $t_{NP}$  est contraignant en basses fréquences. Le problème est que  $s_{NP}$  semble relativement contraignant sur tout le domaine fréquentiel. Il semble ainsi difficile de synthétiser des correcteurs monovariés respectant ces contraintes.

Afin de vérifier la faisabilité de ce problème, les fonctions de sensibilité décentralisées obtenues avec les réglages issus de la méthode de detuning (indiqués dans le Tableau I3-2) sont tracées sur la Figure II4.11. La stabilité nominale ne peut pas être garantie, à cause des résonances des fonctions de sensibilités complémentaires entre  $10^{-3}$  et  $10^{-2}$  rad/s. Par ailleurs, les performances nominales sont effectivement loin d'être garanties. En effet, les fonctions de sensibilité décentralisées sont plus importantes que les gabarits sur une large plage de fréquences. La méthode n'a ainsi pas été appliquée, étant donné les contraintes importantes sur la synthèse des boucles monovariées.

On peut noter que si l'on visait des pulsations de coupure plus importantes, cela aurait tendance à déplacer les courbes vers les hautes fréquences. Les résonances des fonctions de sensibilité complémentaires décentralisées se trouveraient alors en dessous de la SSV-IM, nettement moins contraignante à ces fréquences. On retrouve ainsi le fait qu'une synthèse multiboucle avec un réglage rapide serait plus facile qu'avec un réglage moyen.



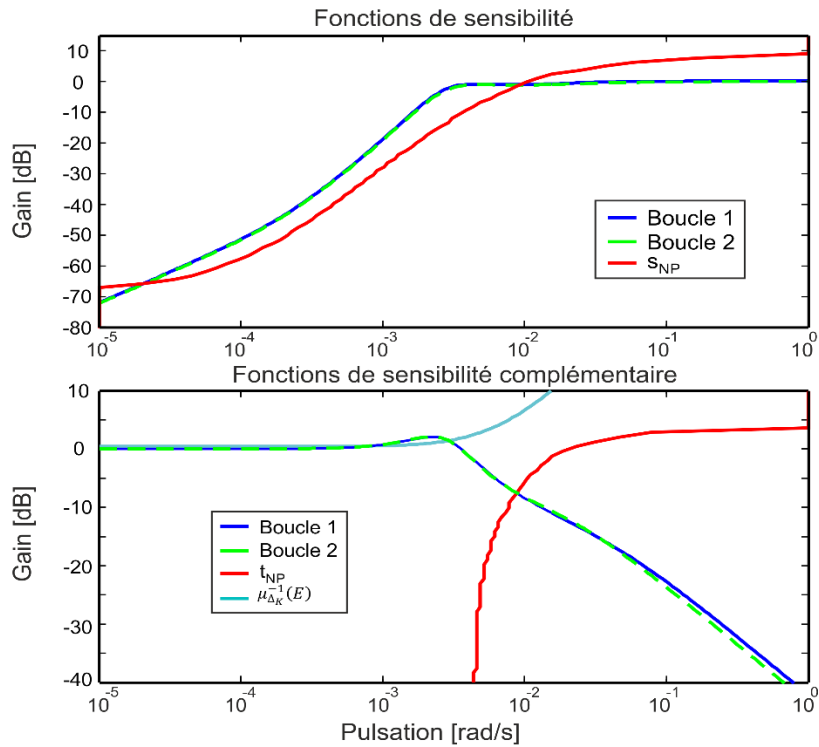


Figure II.4.11 : Contraintes sur les fonctions de sensibilité décentralisées

#### II.4f. Comparaison des méthodes sur le système de cuves

Les réponses indicielles en boucle fermée obtenues avec les différentes méthodes sont tracées sur la Figure II.4.12. On remarque que les méthodes de synthèse multiboucle permettent d'obtenir de bien meilleures performances qu'une synthèse monoboucle standard. Les méthodes de detuning et les méthodes itératives utilisées aboutissent à des réglages similaires pour cette application. Comme on l'a vu, la méthode séquentielle ne permet pas d'aboutir à des résultats corrects dans le cas du système de cuves. La méthode simultanée conduit quant à elle à des réponses plus rapides mais présentant des dépassements. Étant donné que cette dernière prend uniquement en compte les interactions évaluées à pulsation nulle et que celles-ci sont très importantes, les réglages réalisés visent à contrecarrer de fortes interactions sur tout le domaine fréquentiel. Il n'est ainsi pas étonnant de voir des réponses indicielles en boucle fermée plus rapides que les gabarits spécifiés.

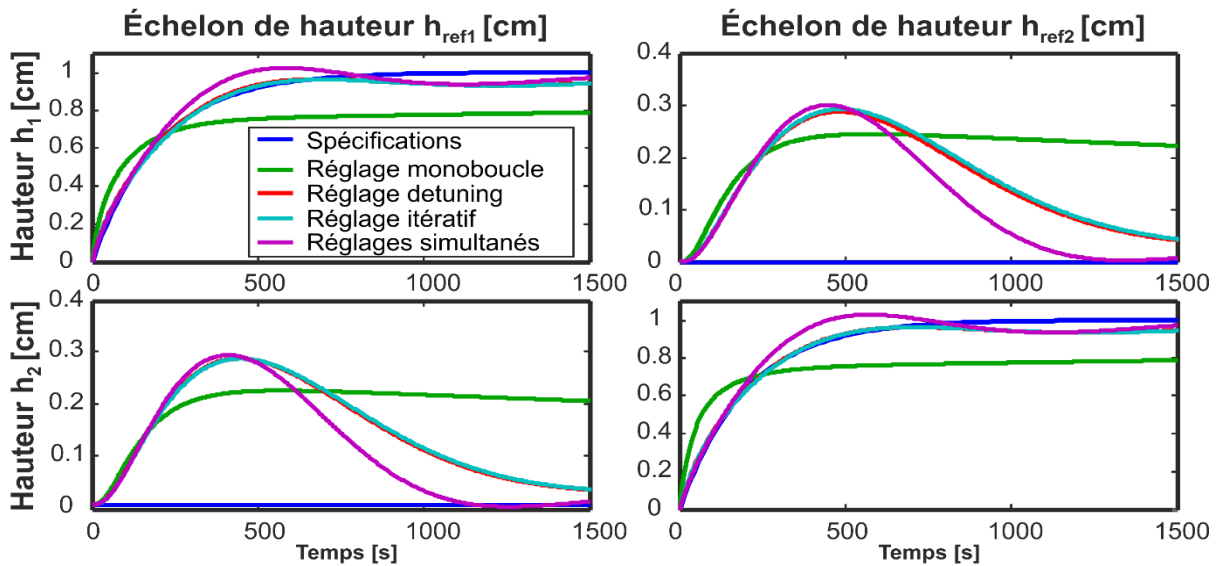


Figure II.4.12 : Comparaison des réponses temporelles avec les différentes méthodes



## II5. Conclusions sur la synthèse d'une commande décentralisée

En conclusion, les méthodes multiboucles permettent d'obtenir de bien meilleurs résultats que les méthodes monoboucles, grâce à la prise en compte des interactions entre les boucles. Les interactions sont prises en compte de différentes manières avec :

- Les méthodes de detuning, dans lesquelles des correcteurs provisoires sont synthétisés indépendamment, ce qui permet le calcul de boucles équivalentes prenant en compte les couplages. Le calcul de boucle équivalente est l'étape la plus complexe, celle-ci peut être réalisée en utilisant divers indices d'interactions comme la DRGA ou la dDRIA.
- Les méthodes séquentielles et itératives, dans lesquelles les correcteurs sont synthétisés les uns après les autres, prenant ainsi en compte les boucles déjà fermées. Les méthodes séquentielles ne sont performantes que lorsque les objectifs des différentes boucles en termes de pulsation de brisure sont assez éloignés. Dans le cas inverse, l'utilisation des méthodes itératives est préférable. Un algorithme itératif de réglage peut facilement être construit. Les performances obtenues sont généralement bonnes, et ce, avec un nombre d'itérations relativement faible.
- Les méthodes simultanées, dans lesquelles les correcteurs peuvent être synthétisés conjointement en utilisant des règles heuristiques, l'optimisation de fonctions de coût ou encore des formules analytiques. Les méthodes heuristiques permettent généralement d'obtenir des performances correctes en un minimum de temps. En revanche, la recherche de bonnes performances requiert l'utilisation de méthodes simultanées, où les calculs sont fastidieux et les temps de calcul importants. L'intérêt original de ces méthodes, à savoir la rapidité de réglage, est alors perdu.
- Les méthodes multiboucles indépendantes, qui permettent de synthétiser les correcteurs indépendamment les uns des autres, tout en assurant la stabilité et les performances du système multivariable en boucle fermée. Les interactions sont transposées sous formes de gabarits fréquentiels que doivent respecter les fonctions de sensibilité décentralisées. Ces méthodes sont plus rigoureuses que les méthodes précédentes mais sont généralement conservatives. Elles ne s'utilisent de ce fait que pour des systèmes légèrement couplés.

Le Tableau II5-1 résume les méthodes préconisées en fonction du procédé et des performances recherchées. Les méthodes simultanées font uniquement référence aux méthodes heuristiques telles que la génération de l'oscillation entretenue ou la méthode du relais. Le choix de l'un de ces types de méthodes est ainsi conditionné par l'évaluation des interactions et le nombre d'entrées-sorties  $r$ .

	Procédé avec $r$ faible		Procédé avec $r$ élevé	
	Couplages faibles	Couplages forts	Couplages faibles	Couplages forts
Réglage rapide	Simultané Séquentiel	Simultané Séquentiel	Simultané Séquentiel	Simultané Séquentiel
Réglage précis	Indépendant Detuning	Detuning Itératif	Indépendant Itératif	Itératif

Tableau II5-1 : Type de méthode multiboucle conseillé en fonction du problème

Par ailleurs, la Figure II5.1 fait état des indices d'interaction utilisés généralement dans les méthodes de synthèse multiboucle.

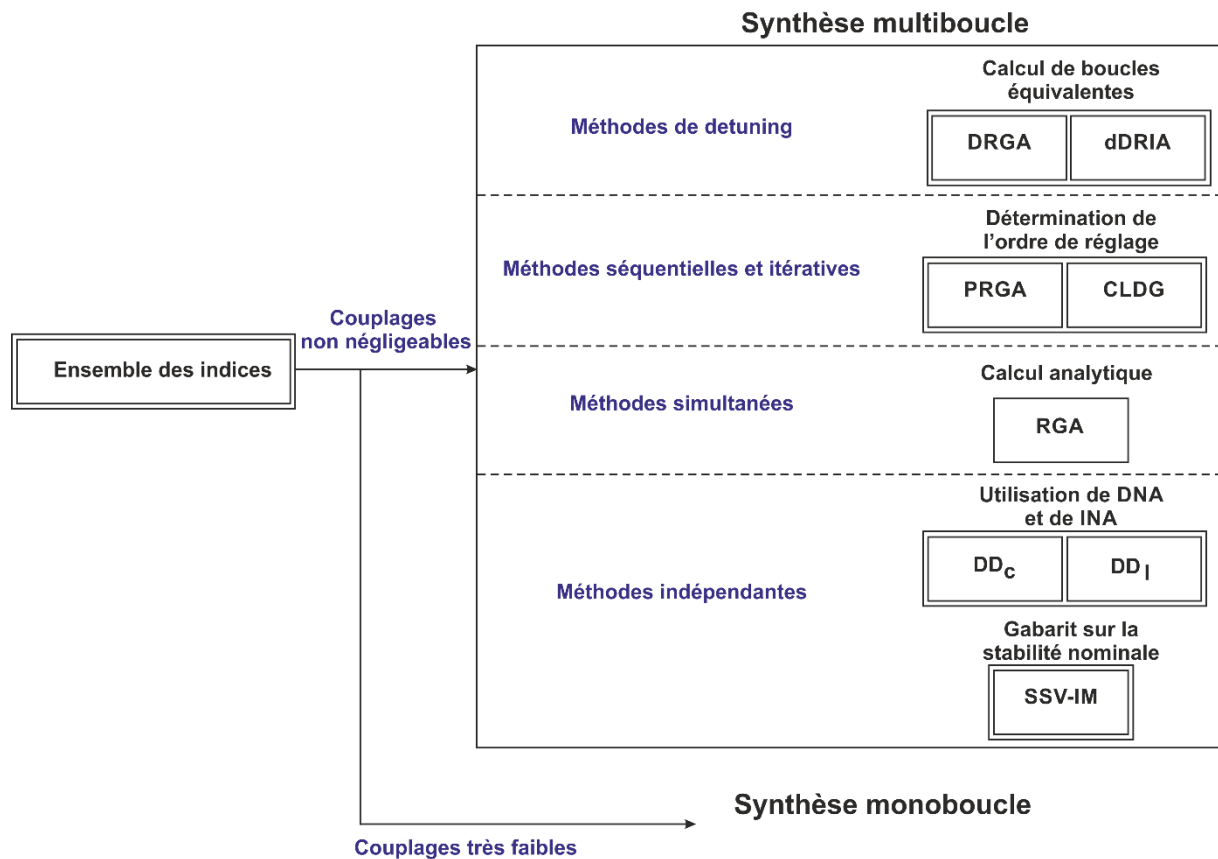


Figure II.5.1 : Utilisation des indices d'interactions dans le cadre d'une synthèse multiboucle

Bien que les interactions soient prises en compte lors des synthèses multiboucles, il n'est pas possible de les *éliminer*. En fait, les méthodes de synthèse multiboucle s'intéressent uniquement à la prise en compte des interactions pour le réglage des éléments diagonaux. Les interactions entrées-sorties ne sont pas explicitement prises en compte dans ces méthodes. Dans le cas où une synthèse multiboucle ne permet pas de respecter les spécifications en termes de découplage, il est nécessaire de considérer des stratégies de régulation plus complexes. Le Chapitre III se focalise sur la stratégie décentralisée avec découplage. Cette stratégie vise à améliorer les performances d'une commande décentralisée, à l'aide de compesanteurs permettant de réduire les interactions entrées-sorties.

## Chapitre III. Méthodes de Découplage

Après une brève introduction sur le découplage (III1), les méthodes de découplage statique seront abordées dans la partie III2. Celles-ci permettent de déterminer des compensateurs sous forme de matrice de gains. Relativement simples à mettre en place, ces dernières ne permettent en revanche pas toujours d'atteindre les objectifs de découplage recherchés. Dans ce cas, il est possible de s'orienter vers des méthodes de découplage dynamique (III3), qui mettent en œuvre des compensateurs sous forme de matrices de transfert. Une procédure de découplage sera donnée dans la partie III4. Les lois de commande synthétisées sur un modèle linéaire du système de cuves seront finalement testées sur le modèle non linéaire dans la partie III5, ce qui permettra de mettre en évidence quelques difficultés utiles dans le cas de commandes multivariables découplantes. La partie III6 sera consacrée aux conclusions de ce Chapitre III.

Sommaire du Chapitre III.

III1.	Introduction.....	95
III1a.	Principe du découplage.....	95
III1b.	Méthodologie de comparaison des méthodes de découplage .....	96
III2.	Méthodes de découplage statique.....	99
III2a.	Méthodes avec pré-compensateur.....	99
III2b.	Méthodes avec pré-compensateur et post-compensateur.....	107
III2c.	Découplage par retour d'état .....	116
III2d.	Conclusions de l'étude des méthodes de découplage statique .....	121
III3.	Méthodes de découplage dynamique.....	123
III3a.	Méthodes avec pré-compensateur.....	123
III3b.	Méthodes avec pré-compensateur et post-compensateur.....	135
III3c.	Conclusions de l'étude des méthodes de découplage dynamique .....	137
III4.	Procédure de détermination des compensateurs .....	138
III5.	Résultats de simulation dans le cas non linéaire.....	139
III6.	Conclusions sur les méthodes de découplage.....	141

### III1. Introduction

Les difficultés de la mise en œuvre d'une stratégie décentralisée ont été mises en évidence dans le Chapitre II. Les réglages individuels de correcteurs SISO ne permettent pas systématiquement d'assurer les performances d'un système multivariable, et dans une moindre mesure sa stabilité. L'utilisation de méthodes de synthèse multiboucles permet alors de prendre en compte les interactions lors de la synthèse des correcteurs SISO. Cela n'est généralement pas suffisant pour atteindre de bonnes performances lorsque les interactions entre les boucles sont conséquentes. Par ailleurs, le problème des interactions entrées-sorties n'est pas résolu par une synthèse multiboucle. L'ensemble des sorties du système en boucle fermée reste ainsi perturbé par les variations de chacune des consignes.

Afin d'améliorer les performances, plusieurs solutions sont envisageables, comme mentionné dans le Chapitre II. Il est ainsi possible de s'orienter vers une stratégie partiellement décentralisée, une stratégie décentralisée par blocs, ou encore une stratégie décentralisée avec découplage. C'est cette dernière solution qui sera étudiée dans ce chapitre. Celle-ci est en effet plus générale que les stratégies partiellement décentralisées et décentralisées par blocs, et peut s'y ramener dans certains cas.

Les premiers travaux sur le découplage ont débuté avec (Voznesenskii, 1938) et ont été repris par (Kavanagh, 1957) et (Strejc, 1960). Le découplage n'est devenu un sujet de recherche important qu'à partir des années 1960, avant que les correcteurs de type LQG et  $H_\infty$  fassent leur apparition. Le découplage par retour d'état a alors été initié par (Morgan, 1964), (Falb and Wolovich, 1967), puis (Gilbert, 1969). Le problème de découplage par blocs a ensuite été introduit par (Morse and Wonham, 1971) et (Silverman and Payne, 1971). Pour plus de détails, l'introduction de (Wang, 2003) donne un bon aperçu de l'ensemble des méthodes historiques de découplage.

#### III1a. Principe du découplage

Le principe du découplage est de transformer un système multivariable en un ensemble de systèmes monovariables aussi indépendants les uns des autres que possible. On parle également de régulation non interactive. Le but est de réduire les interactions entrées-sorties afin de maximiser les performances d'une structure décentralisée.

Pour cela, on considère dans le cas général un pré-compensateur  $D$  en amont du procédé et un post-compensateur  $R$  en aval du procédé, comme représentés sur la Figure III-1. Le pré-compensateur  $D$  a pour but de découpler les commandes, tandis que le post-compensateur  $R$  a pour but de découpler les sorties. Le but est que chaque commande modifiée  $u_i^*$ , agisse presque exclusivement sur la sortie modifiée correspondante  $y_i^*$ . Dans l'idéal, il faudrait que le découplage soit réalisé entre les commandes  $u_i^*$  et  $y_i$ , mais cela n'est pas toujours possible.

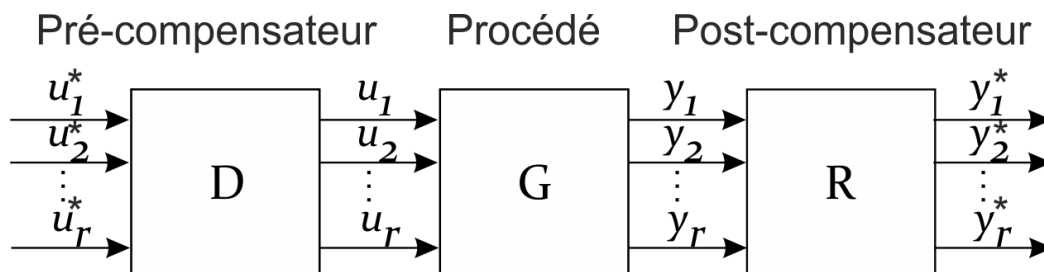


Figure III-1 : Schéma du découplage d'un procédé multivariable

L'implantation des compensateurs en boucle fermée est réalisée comme sur la Figure III-2, en ramenant le post-compensateur  $R$  dans la boucle de retour. Cela revient à considérer que le post-compensateur est implanté en amont du régulateur décentralisé, comme sur la Figure III-3.

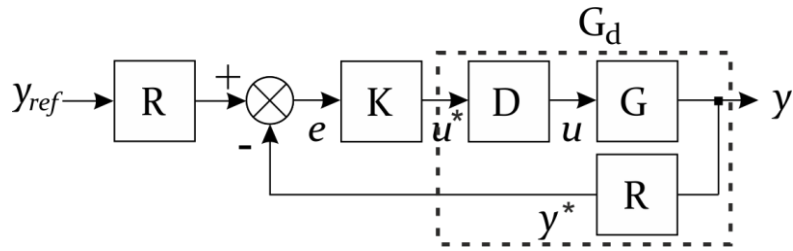


Figure III-2 : Schéma de la boucle fermée d'une stratégie décentralisée avec découplage

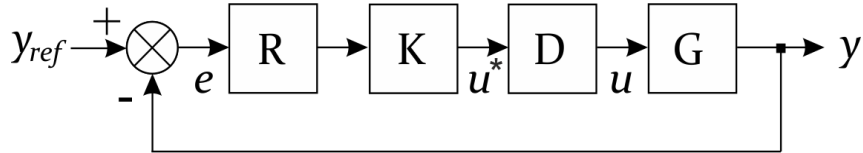


Figure III-3 : Schéma de l'implantation des compensateurs

Le découplage porte généralement directement sur le procédé et donc sur la boucle ouverte. En fait, lorsque le système en boucle ouverte est quasiment découplé, il en va de même pour la boucle fermée. En effet, on peut considérer que le système en boucle fermée correspond à la matrice identité en basses fréquences, et qu'il correspond au système en boucle ouverte en hautes fréquences.

Une autre stratégie consiste à découpler non pas le procédé, mais le système en boucle fermée. Une régulation décentralisée classique peut alors être mise en place, avant de synthétiser un pré-compensateur pour la boucle fermée. Cela revient à modifier non pas les commandes, mais les consignes envoyées au système en boucle fermée. Cette stratégie ne sera pas traitée étant donné les inconvénients majeurs qu'elle présente :

- Les réglages des régulateurs monovariables portent sur un système encore couplé (ce qui rend des synthèses multiboucles obligatoires).
- L'application des méthodes de découplage est plus complexe, car les compensateurs ne doivent pas altérer les dynamiques des éléments diagonaux de la boucle fermée, fixées par les régulateurs monovariables.
- Le découplage n'est pas assuré si des perturbations extérieures s'appliquent sur le système.

Par ailleurs, certaines méthodes ont pour objectif la diagonalisation par blocs du procédé (Torres Munoz, 1990), afin d'appliquer une stratégie décentralisée par blocs. Ces méthodes n'ayant pas d'intérêt pour un procédé TITO tel que le turbopropulseur (Chapitre IV), elles ne seront pas abordées dans ce mémoire.

### III1b. Méthodologie de comparaison des méthodes de découplage

L'objectif est de déterminer les méthodes de découplage les plus efficaces, permettant de découpler les  $r$  commandes des  $r$  sorties. L'hypothèse de se restreindre à un procédé carré est justifiée :

- Dans le cas où le nombre d'entrées est supérieur à celui des sorties, il est possible de se ramener au cas carré en renonçant à utiliser certaines entrées de commande.
- Dans le cas inverse, il n'est pas possible d'obtenir de bonnes performances de découplage, ce qui est logique étant donné que le nombre de commandes est insuffisant.

#### i. Méthodes de découplage étudiées

Afin de découpler les commandes et les sorties du procédé, les compensateurs  $D$  et  $R$  sont déterminés de manière à rendre le procédé *le plus diagonal possible*. Certaines méthodes mettent en œuvre un pré-compensateur uniquement, tandis que d'autres utilisent les pré et post-compensateurs, afin de profiter d'un plus grand nombre de degrés de liberté. De la même manière, ces compensateurs peuvent être statiques, i.e. des matrices de gains, ou dynamiques, i.e. des matrices de transfert.

Ces considérations permettent de regrouper les méthodes de découplage étudiées selon les catégories suivantes :

- Les méthodes de découplage statique, comprenant :
  - o les méthodes avec pré-compensateur,
  - o les méthodes avec pré et post-compensateur,
  - o les méthodes de découplage par retour d'état.
- Les méthodes de découplage dynamique, comprenant :
  - o les méthodes avec pré-compensateur dynamique,
  - o les méthodes avec pré et post-compensateur dynamiques.

## ii. Critères de comparaison

Les critères de comparaison adoptés dans ces travaux sont :

- Les performances en termes de découplage.
- La complexité de la méthode de découplage.
- La complexité des compensateurs résultants.

Il est tout d'abord nécessaire de définir un indice objectif qui caractérise les performances en termes de découplage. L'indice recherché doit :

- prendre en compte les effets dynamiques,
- déterminer le sens des interactions entre les boucles,
- être simple à calculer et à analyser.

Parmi les indices d'interaction présentés dans le Chapitre I, l'indice le plus approprié est la  $DD_c$  (Diagonale Dominance par Colonne), rappelé dans la relation (III.1.1). Cet indice, relativement simple à calculer, est évalué sur l'ensemble du domaine fréquentiel et permet de caractériser indépendamment les interactions pour chaque élément diagonal. Par ailleurs, comme cela a été vu dans le Chapitre I, l'indice  $DD_c$  n'est pas affecté par la post-multiplication par une matrice diagonale. Cela signifie dans le cas du procédé  $G$  muni d'un pré-compensateur  $D$ , que l'indice  $DD_c$  de  $GD$  est le même que celui de  $GDK$ . Il est ainsi possible d'estimer le découplage avant de procéder à la synthèse du régulateur diagonal. Dans le cas de la combinaison pré et post-compensateur, l'indice  $DD_c$  de la boucle ouverte  $RGD$ , qui sert à synthétiser le régulateur diagonal  $K$ , n'est pas égale à la  $DD_c$  de la boucle ouverte réelle  $GDKR$ . On considérera néanmoins que l'indice  $DD_c$  de  $RGD$  peut être globalement représentatif de la qualité du découplage.

$$DD_{c_i}(G(s)) = \frac{|G_{ii}(s)|}{\sum_{j \neq i}^r |G_{ji}(s)|} \geq 1, i = [1, r] \quad (\text{III.1.1})$$

L'inconvénient de l'indice  $DD_{c_i}$  est qu'il s'agit d'une réponse fréquentielle. Il n'est donc pas évident de comparer cet indice et a fortiori la  $DD_c$  de plusieurs procédés.

Afin de remédier à cela, l'indice  $\rho_i$ , que l'on appellera *indice de découplage* (on parlera également de *qualité de découplage*), est introduit à partir de l'indice  $DD_{c_i}$ . Celui-ci est défini dans la relation (III.2) et correspond à une combinaison linéaire entre le maximum et la moyenne pondérée de  $DD_{c_i}^{-1}$  sur une grille fréquentielle. Un indice  $\rho_i$  relativement faible devant 1 indique des interactions limitées, et inversement un indice élevé indique la présence d'interactions importantes.

L'indice  $\rho_i$  permet de prendre en compte le *pire découplage* ainsi que le *découplage moyen* en un indice scalaire unique. Pour quantifier le *découplage moyen*, une fonction de pondération  $W$  est prise en compte afin de cibler plus précisément un intervalle de fréquences où le découplage est nécessaire. La fonction adoptée pour  $W$  est définie dans (III.3). Celle-ci permet d'accentuer le poids de l'intervalle autour d'une pulsation  $\omega_d$ .

$$\rho_i(G) = \beta_i \times \max_k (|DD_{ci}^{-1}(G(j\omega_k))|) + \frac{\sum_k W(\omega_k) \times |DD_{ci}^{-1}(G(j\omega_k))|}{\sum_{\omega} W(\omega_k)} \quad (\text{III.1.2})$$

$$W(\omega_k) = \frac{\text{Log}\left(\left|\frac{\omega_k + \omega_d}{\omega_k - \omega_d}\right|\right)}{\max_k \left(\ln\left(\left|\frac{\omega_k + \omega_d}{\omega_k - \omega_d}\right|\right)\right)} \quad (\text{III.1.3})$$

Afin d'estimer le découplage global, l'indice  $\rho$  est défini comme une somme pondérée des indices  $\rho_i$  de chacune des boucles (III.1.4). Des poids  $\gamma_i$  permettent d'accorder plus ou moins d'importances aux différentes boucles.

$$\rho(G) = \sum_i \gamma_i \rho_i(G) \quad (\text{III.1.4})$$

Les indices  $\rho$  et  $\rho_i$  seront également les fonctions de coût à minimiser lors de l'utilisation de méthodes de découplage s'appuyant sur des outils d'optimisation.

En dehors des performances de découplage estimées à partir de l'indice  $\rho$ , la complexité de la méthode sera prise en compte. La stratégie décentralisée avec découplage perd en effet une partie de son intérêt si sa mise en œuvre se révèle être plus complexe que celle d'une synthèse multivariable standard. De la même manière, la complexité des compensateurs synthétisés doit également faire partie des éléments de comparaison. Si les compensateurs présentent un ordre trop élevé, la stratégie décentralisée avec découplage devient également moins intéressante.

### iii. Application au système de cuves

Le but est de comparer les méthodes de découplage en fonction des critères discutés précédemment. Afin d'y parvenir, celles-ci vont être appliquées au système de cuves.

Pour chacune des catégories de méthodes préalablement établies, les différentes méthodes vont être comparées les unes aux autres. A l'issue de cette étude comparative, une régulation décentralisée composée de régulateurs PI sera synthétisée pour les meilleures solutions, en utilisant les méthodes de detuning présentées dans le Chapitre II.

La fonction de pondération  $W$  utilisée pour le calcul de l'indice de découplage est tracée sur la Figure III-4 (cela correspond au choix  $\omega_d = \omega_M = 5 \times 10^{-3}$  rad/s). Par ailleurs,  $\beta$  sera pris égal à 1/3 dans cette étude, de manière à privilégier la moyenne pondérée de l'indice  $DD_c$ , tout en évitant d'éventuels pics. Étant donné que les boucles ont la même importance, les indices  $\gamma_i$  sont pris égaux à 1. La grille fréquentielle  $\omega_k$  adoptée est composée de 200 pulsations espacées de manière logarithmique entre  $10^{-5}$  et  $10^0$  rad/s.

Dans la plupart des méthodes étudiées, il est nécessaire de normaliser les commandes et les sorties du procédé. Comme précisé dans le Chapitre I, le système de cuves est déjà structurellement normalisé.

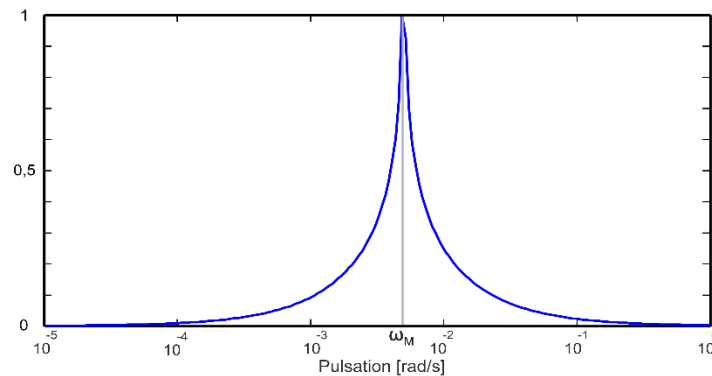


Figure III-4 : Fonction de pondération  $W(\omega_k)$



## III.2. Méthodes de découplage statique

Comme précisé dans la partie précédente, les méthodes de découplage statique mettent en œuvre des compensateurs statiques, i.e. de simples matrices de gains. Ces matrices peuvent être calculées via différentes méthodes, dont les principales seront abordées ici.

Les méthodes de découplage avec pré-compensateur seront tout d'abord traitées. Les méthodes avec pré et post-compensateurs seront ensuite exposées, avant de s'intéresser aux méthodes de découplage par retour d'état. Les méthodes sont ainsi abordées dans un ordre de complexité croissante.

### III.2a. Méthodes avec pré-compensateur

#### i. Inversion du procédé

La méthode la plus simple pour diagonaliser un procédé consiste à considérer un pré-compensateur  $D$ , choisi comme l'inverse du procédé évalué à une certaine pulsation  $\omega_m$  (Aström *et al.*, 2002).

La matrice résultante est de type complexe. Il est donc nécessaire d'approcher cette matrice par une matrice réelle afin de pouvoir l'implanter dans la régulation. Les approximations consistant à considérer uniquement la partie réelle ou bien le module de cette matrice ne sont généralement pas assez précises. La meilleure approximation d'une matrice complexe peut être réalisée par l'algorithme d'alignement ALIGN développé par (MacFarlane and Kouvaritakis, 1977). Cet algorithme étant largement utilisé par la suite, le principe et la résolution de celui-ci sont exposés ci-dessous :

Le but est d'approcher une matrice  $T$  complexe par une matrice  $A$  réelle. Le principe de base de l'algorithme d'alignement (ALIGN) est de chercher la matrice  $A$  telle que  $T^{-1}A \sim I$ .

Soient  $L_i(T^{-1})$  les vecteurs ligne de la matrice  $T^{-1}$  (que l'on peut supposer de norme 1) et  $C_i(A)$  les vecteurs colonne de la matrice  $A$ .  $T^{-1}A$  s'écrit comme en (III.2.1), ce qui conduit à rechercher les colonnes de la matrice  $A$  de manière à obtenir (III.2.2). Il est permis de penser que la maximisation de  $\Phi_i$  défini dans (III.2.3), puisse conduire à une bonne approximation de  $T$ .

$$T^{-1}A = \begin{bmatrix} L_1(T^{-1}) \\ \vdots \\ L_r(T^{-1}) \end{bmatrix} [C_1(A) \quad \dots \quad C_r(A)] = \begin{bmatrix} L_1(T^{-1})C_1(A) & \dots & L_1(T^{-1})C_r(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_r(T^{-1})C_1(A) & \dots & L_r(T^{-1})C_r(A) \end{bmatrix} \sim I \quad (\text{III.2.1})$$

$$L_i(T^{-1})C_j(A) \sim \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (\text{III.2.2})$$

$$\Phi_i = \frac{|L_i(T^{-1})C_i(A)|^2}{\sum_{j \neq i}^r |L_j(T^{-1})C_i(A)|^2}, i = [1, r] \quad (\text{III.2.3})$$

Ce problème d'optimisation peut se ramener à la résolution d'un problème analytique. En effet, l'expression (III.2.3) peut se réécrire comme en (III.2.4) avec  $X_i$  et  $Y_i$  définis dans (III.2.5).  $X_i$  et  $Y_i$  sont des matrices réelles symétriques semi définies positives, comme on peut le voir dans (III.2.6), en introduisant les parties réelles  $\alpha_i$  et imaginaires  $\beta_i$  des vecteurs  $L_i(T^{-1})$ . Leurs valeurs propres sont donc réelles et positives, et les vecteurs propres associés sont réels.

$$\Phi_i = \frac{|L_i(T^{-1})C_i(A)|^2}{\sum_{j \neq i}^r |L_j(T^{-1})C_i(A)|^2} = \frac{C_i(A)^T \overline{L_i(T^{-1})^T} \cdot L_i(T^{-1})C_i(A)}{\sum_{j \neq i}^r C_i(A)^T \overline{L_j(T^{-1})^T} \cdot L_j(T^{-1})C_i(A)} = \frac{C_i(A)^T X_i C_i(A)}{\sum_{j \neq i}^r C_i(A)^T Y_j C_i(A)} \quad (\text{III.2.4})$$



$$X_i = \overline{L_i(T^{-1})^T} \cdot L_i(T^{-1})$$

$$Y_i = \sum_{j \neq i}^r \overline{L_j(T^{-1})^T} \cdot L_j(T^{-1}) \quad (\text{III2.5})$$

$$X_i = \alpha_i \alpha_i^T + \beta_i \beta_i^T$$

$$Y_i = \sum_{j \neq i}^r \alpha_j \alpha_j^T + \beta_j \beta_j^T \quad (\text{III2.6})$$

Les fonctions  $\Phi_i$  (III2.3) sont maximales si l'on a (III2.7), ce qui conduit à un *problème aux valeurs propres généralisé* donné en (III2.8).

$$\frac{d\Phi_i}{dC_i(A)} = 0 \Leftrightarrow 2X_i C_i(A) C_i(A)^T Y_i C_i(A) - 2Y_i C_i(A) C_i(A)^T X_i C_i(A) = 0 \quad (\text{III2.7})$$

$$X_i C_i(A) = \Phi_i Y_i C_i(A) \quad (\text{III2.8})$$

Si  $Y_i$  est inversible,  $\Phi_i$  est la plus grande valeur propre de  $Y_i^{-1} X_i$  et  $C_i(A)$  en est le vecteur propre associé. Si  $Y_i$  n'est pas inversible,  $Y_i$  a une valeur propre nulle et on peut lui associer un vecteur propre non nul (et normalisé)  $C_i(A)$ . Le vecteur  $C_i(A)$  est ainsi aligné avec  $L_j(T^{-1})$ , comme on le voit dans (III2.9).

$$Y_i C_i(A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j \neq i}^r |L_j(T^{-1}) C_i(A)|^2 = 0 \Leftrightarrow L_j(T^{-1}) C_i(A) = 0 \text{ pour } i \neq j \quad (\text{III2.9})$$

L'intérêt de cet algorithme d'alignement ALIGN est que la résolution est analytique et donc immédiate. Par la suite, l'approximation d'une matrice  $T$  complexe par une matrice  $A$  réelle avec l'algorithme d'alignement sera notée :

$$A = \text{ALIGN}(T) \quad (\text{III2.10})$$

Le pré-compensateur  $D$  est ainsi calculé comme dans (III2.11). La qualité du découplage autour de la pulsation  $\omega_m$  est bien sûr liée à l'approximation réelle de  $D$ .

$$D = \text{ALIGN}(G^{-1}(j\omega_m)) \quad (\text{III2.11})$$

La plupart des régulateurs sont composés d'intégrateurs, qui vont de ce fait assurer le découplage du système en basses fréquences. Par ailleurs, un découplage en hautes fréquences n'est pas forcément nécessaire, puisque les gains sont généralement faibles. Un choix plus judicieux est ainsi de réaliser le découplage autour des pulsations de brisure désirées en boucle fermée. Une autre solution consiste à déterminer la pulsation optimale  $\omega_{opt}$ , à laquelle le compensateur déterminé par inversion conduira à la maximisation du découplage. Pour cela, le problème d'inversion peut être inclus dans une procédure d'optimisation, qui consiste à minimiser l'indice de découplage  $\rho$ , défini dans (III1.4) en fonction de la pulsation  $\omega_m$  à laquelle est réalisée l'inversion.

## ii. Optimisation du découplage

Une solution permettant de synthétiser le pré-compensateur optimal est de chercher à minimiser l'indice  $\rho$ , défini dans (III1.4), en fonction des éléments du pré-compensateur.

On note  $L_i(G)$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $G$  et  $C_j(D)$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $D$ . Les éléments de  $G_d$  sont donnés par (III2.12) pour  $i$  et  $j$  variant entre 1 et  $r$ . L'indice  $DD_{ci}$  de chacune des  $r$  boucles peut alors se réécrire comme en (III2.13).

$$G_{d_{ij}}(s) = L_i(G(s))C_j(D) \quad (\text{III.2.12})$$

$$DD_{C_i}(G_d(s)) = \frac{|G_{d_{ii}}(s)|}{\sum_{j \neq i}^r |G_{d_{ji}}(s)|} = \frac{|L_i(G(s))C_i(D)|}{\sum_{j \neq i}^r |L_j(G(s))C_i(D)|} \quad (\text{III.2.13})$$

D'après cette dernière expression, l'indice  $DD_c$  de la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $G_d$  dépend uniquement du procédé et des transferts de la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $D$ . Il en va ainsi de même pour l'indice  $\rho_i$ . Au lieu de minimiser l'indice  $\rho$  en fonction des éléments du pré-compensateur, il est possible de minimiser indépendamment chacun des indices  $\rho_i$  en fonction des éléments de la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $D$ . Notons que les solutions optimales des différents indices  $\rho_i$  conduisent à la solution optimale au sens de l'indice de découplage  $\rho$ .

Par ailleurs, chacun des  $r$  problèmes d'optimisation conduit à la détermination d'une colonne  $C_i(D)$ , composée de  $r$  éléments. En remarquant que la multiplication d'un vecteur colonne  $C_i(D)$  par un scalaire n'affecte pas la  $DD_c$  de la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $G_d$  et donc l'indice  $\rho_i$ , il est possible de se ramener à  $r-1$  éléments (cela revient à dire que seule la direction du vecteur colonne est importante).

### iii. Pseudo-diagonalisation (PD)

(Hawkings, 1972) propose de résoudre un autre problème d'optimisation, qui s'appuie également sur la  $DD_c$  du procédé et de son pré-compensateur. L'avantage de ce problème d'optimisation est qu'il peut être résolu analytiquement. L'expression à maximiser, notée ici  $v_i$ , est donnée en (III.2.14). Celle-ci exprime le rapport entre la somme pondérée des gains de l'élément diagonal et la somme pondérée de la somme des gains des éléments non diagonaux.

$$v_i(G) = \frac{\sum_k W_t(\omega_k) |L_i(G(j\omega_k))C_i(D)|^2}{\sum_k W_t(\omega_k) \sum_{j \neq i}^r |L_j(G(j\omega_k))C_i(D)|^2} \quad (\text{III.2.14})$$

Comme dans le cas précédent, il est possible de maximiser indépendamment chacun des  $v_i$ . L'expression (III.2.14) est similaire à (III.2.3). Le problème d'optimisation peut alors être résolu analytiquement avec l'algorithme d'alignement ALIGN. En posant les  $X_i$  et  $Y_i$  de l'algorithme ALIGN comme en (III.2.15), on se ramène à l'expression (III.2.8), qui correspond au problème aux valeurs propres généralisé précédent. Il s'agit de l'algorithme multi-ALIGN (Maciejowski, 1989).

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_k W_t(\omega_k) \left( \overline{L_i(G(j\omega_k))^T} L_i(G(j\omega_k)) \right) \\ Y_i &= \sum_k \left( W_t(\omega_k) \sum_{j \neq i}^r \left( \overline{L_j(G(j\omega_k))^T} L_j(G(j\omega_k)) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.2.15})$$

Le pré-compensateur est donc composé des colonnes  $C_i(D)$  correspondant chacune aux vecteurs propres des  $Y_i^{-1}X_i$ . On notera par la suite (III.2.16).

$$D = \text{multiALIGN}(G^{-1}, W_t) \quad (\text{III.2.16})$$

On peut remarquer que la pseudo-diagonalisation englobe la méthode de l'inversion présentée précédemment. En effet, en posant  $W_t$  nul excepté en une pulsation  $w_m$ , on se ramène à l'algorithme d'alignement ALIGN utilisé dans l'expression (III.2.11). Contrairement à la méthode de l'inversion, la PD (pseudo-diagonalisation) peut être appliquée en se plaçant à différentes pulsations pour chacune des colonnes.

#### iv. Application au système de cuves

Ces trois méthodes sont à présent testées sur le système de cuves afin de maximiser les performances d'une commande décentralisée et de réduire les interactions entrées-sorties.

##### Inversion

L'inversion de la matrice des gains statiques est tout d'abord testée. L'inversion à la pulsation de brisure désirée en boucle fermée  $\omega_m$  est ensuite réalisée. Une procédure d'optimisation permet ensuite de déterminer la pulsation optimale  $\omega_{opt}$ , à laquelle la méthode d'inversion conduit au pré-compensateur qui minimise l'indice de découplage  $\rho$ .

La Figure III2-1 présente l'inverse de la  $DD_c$  des deux colonnes de la boucle ouverte  $G_d$ . Les indices de découplage sont exposés dans le Tableau III2-1.

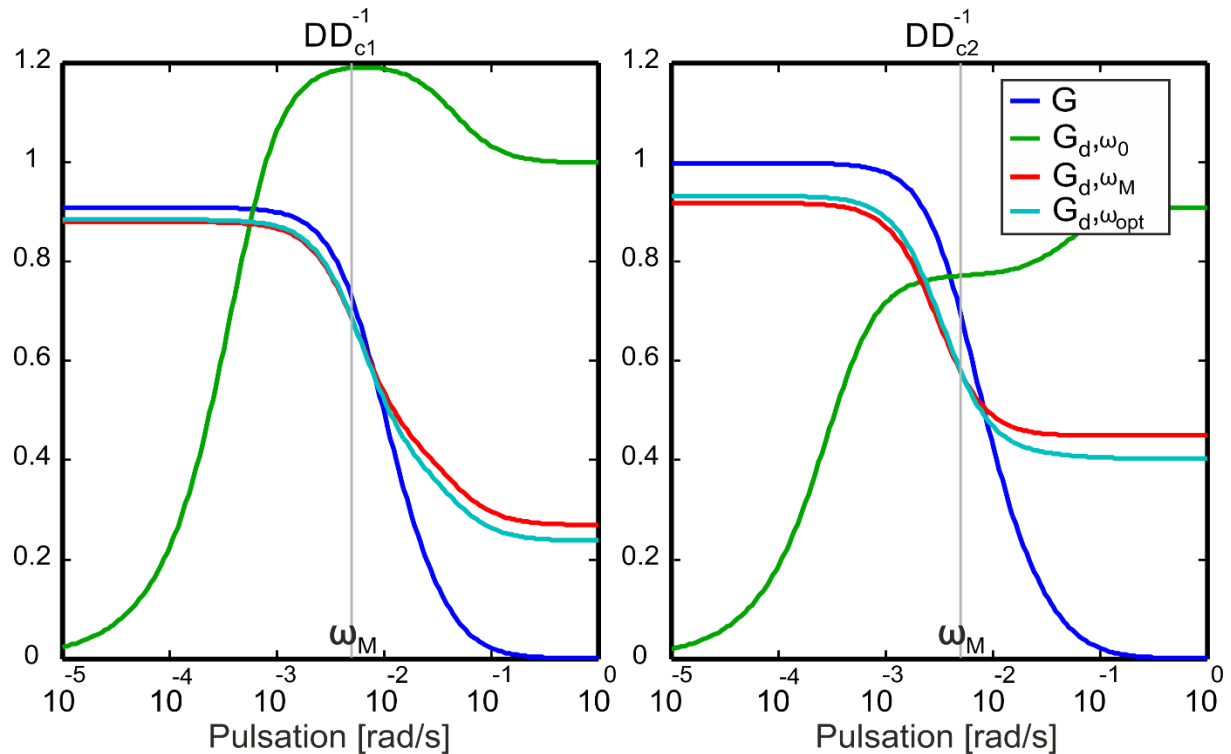


Figure III2-1 : Inverse de la DDC avec un pré-compensateur déterminé par inversion

L'inversion de la matrice des gains statiques conduit à un découplage efficace en basses fréquences, puisque l'inverse de la  $DD_c$  est proche de 0 (courbe verte). En revanche, les interactions deviennent très importantes (et même plus importantes que le procédé initial) autour des pulsations de coupure visées ainsi qu'en hautes fréquences.

Lorsque l'inversion est appliquée autour de la pulsation de coupure visée, le découplage n'est pas particulièrement amélioré, et ce, même autour de cette pulsation. Cela vient du fait que l'inverse de la réponse fréquentielle à cette pulsation est difficilement approchable par une matrice réelle.

L'inversion à la pulsation optimale  $\omega_{opt}$  ne permet pas non plus d'améliorer le découplage.

Les résultats du Tableau III2-1 confirment que l'inversion à pulsation nulle est à éviter pour ce système. Par ailleurs, l'indice de découplage obtenu avec l'inversion à la pulsation optimale reste relativement proche de celui du procédé seul.

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
Inversion $\omega_0 = 0$ rad/s	0,97	1,15	0,80
Inversion $\omega_m = \omega_M = 5 \times 10^{-3}$ rad/s	0,71	0,72	0,69
Inversion $\omega_{opt} = 5,6 \times 10^{-3}$ rad/s	0,71	0,72	0,69

Tableau III2-1 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par inversion

L'inversion est une méthode de découplage relativement simple à mettre en œuvre. En revanche, l'efficacité du compensateur résultant est souvent insuffisante : le découplage se concentre généralement autour d'une pulsation et n'est pas toujours performant à cause des approximations des matrices complexes avec l'algorithme d'alignement ALIGN.

#### Optimisation du découplage

Dans le cas TITO, le compensateur  $D$  peut être recherché sous la forme (III2.17). Les indices  $DD_{c1}$  et  $DD_{c2}$  correspondent à (III2.18). Le but est de trouver indépendamment  $\alpha$  et  $\beta$  de manière à minimiser respectivement les indices  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Il s'agit ainsi de deux problèmes d'optimisation à un paramètre.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III2.17})$$

$$DD_{c1}(G_d(s)) = \frac{|L_1(G(s))C_1(D)|}{|L_2(G(s))C_1(D)|} = \frac{|G_{11}(s) + \alpha G_{12}(s)|}{|G_{21}(s) + \alpha G_{22}(s)|} \quad (\text{III2.18})$$

$$DD_{c2}(G_d(s)) = \frac{|L_2(G(s))C_2(D)|}{|L_1(G(s))C_2(D)|} = \frac{|G_{22}(s) + \beta G_{21}(s)|}{|G_{12}(s) + \beta G_{21}(s)|}$$

L'inverse de la  $DD_c$  du système  $G_d$  est tracé sur la Figure III2-2 et les indices de découplages correspondants sont présentés dans le Tableau III2-2.

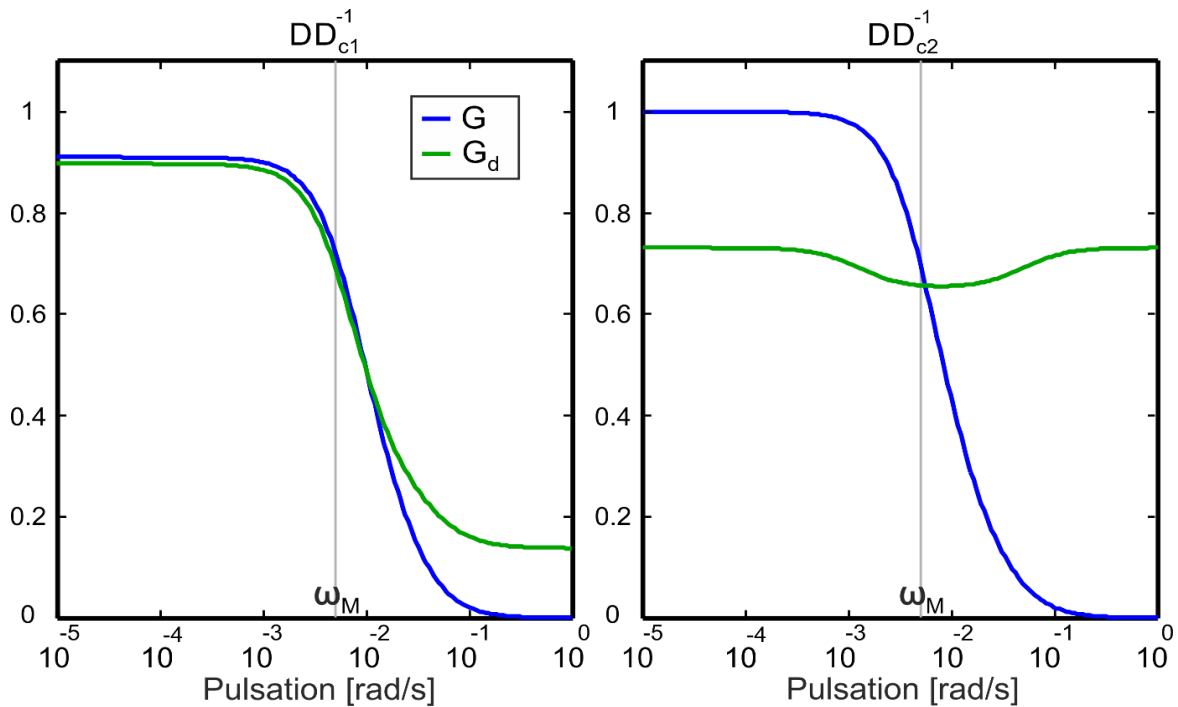


Figure III2-2 : Inverse de la  $DD_c$  avec un pré-compensateur déterminé par optimisation

Les indices de découplage obtenus sont similaires à ceux trouvés avec l'inversion. On note tout de même que la forme de  $DD_{c2}^{-1}$  diffère de la diagonale dominance par colonne du procédé initial et de celles obtenues précédemment.

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
Optimisation	0,70	0,71	0,68

Tableau III2-2 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par optimisation

La méthode de découplage par optimisation permet de trouver une solution de découplage optimale vis-à-vis du critère donné. Cette solution est relativement simple à appliquer pour des procédés comportant un nombre faible d'entrées et sorties, du fait de la décomposition en sous problèmes d'optimisation indépendants. Par ailleurs, le découplage par optimisation ne s'appuie pas sur l'approximation de matrices complexes (qui induisent nécessairement des erreurs) contrairement aux autres méthodes présentées.

#### *Pseudo-diagonalisation (PD)*

La pseudo-diagonalisation est tout d'abord appliquée en se plaçant sur une seule pulsation (i.e. en réduisant  $W_i$  à une pulsation). La pulsation optimale  $\omega_{opti}$ , conduisant à la détermination par pseudo-diagonalisation de la colonne  $C_i$  qui minimise l'indice de découplage  $\rho_i$ , est recherchée. Par rapport à l'inversion, chaque colonne est déterminée indépendamment et à une pulsation différente, ce qui permet de trouver une solution très légèrement meilleure.

La pseudo-diagonalisation est ensuite appliquée en considérant pour  $W_i$  la fonction de pondération  $W$  définie dans la partie III1b (on parlera par la suite de multi-PD lorsque plusieurs pulsations seront considérées). Cette dernière permet de trouver la solution optimale par rapport à l'indice défini dans (III2.14), mais pas vis-à-vis de l'indice  $\rho$  utilisé jusqu'à présent. Les résultats sont en effet moins bons que ceux obtenus avec les solutions précédentes.

Au lieu de considérer  $W_i = W$ , on se propose d'optimiser la fonction de pondération  $W_i$ , afin de déterminer par multi-PD la colonne  $C_i(D)$  qui minimise l'indice de découplage  $\rho_i$ . La forme de  $W_i$  est choisie comme celle de  $W$  dans (III1.3), et l'optimisation porte sur le paramètre  $w_d$ . Cela permet alors d'améliorer légèrement les résultats. En revanche, les résultats ne sont pas meilleurs que ceux obtenus avec la pseudo-diagonalisation autour d'une pulsation.

Les résultats de la pseudo-diagonalisation sont présentés sur la Figure III2-3 et dans le Tableau III2-3.

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
PD [ $\omega_{opt1}, \omega_{opt2}$ ]	0,70	0,71	0,68
multi-PD $W$	0,74	0,79	0,69
multi-PD [ $W_{opt1}, W_{opt2}$ ]	0,71	0,71	0,70

Tableau III2-3 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par PD

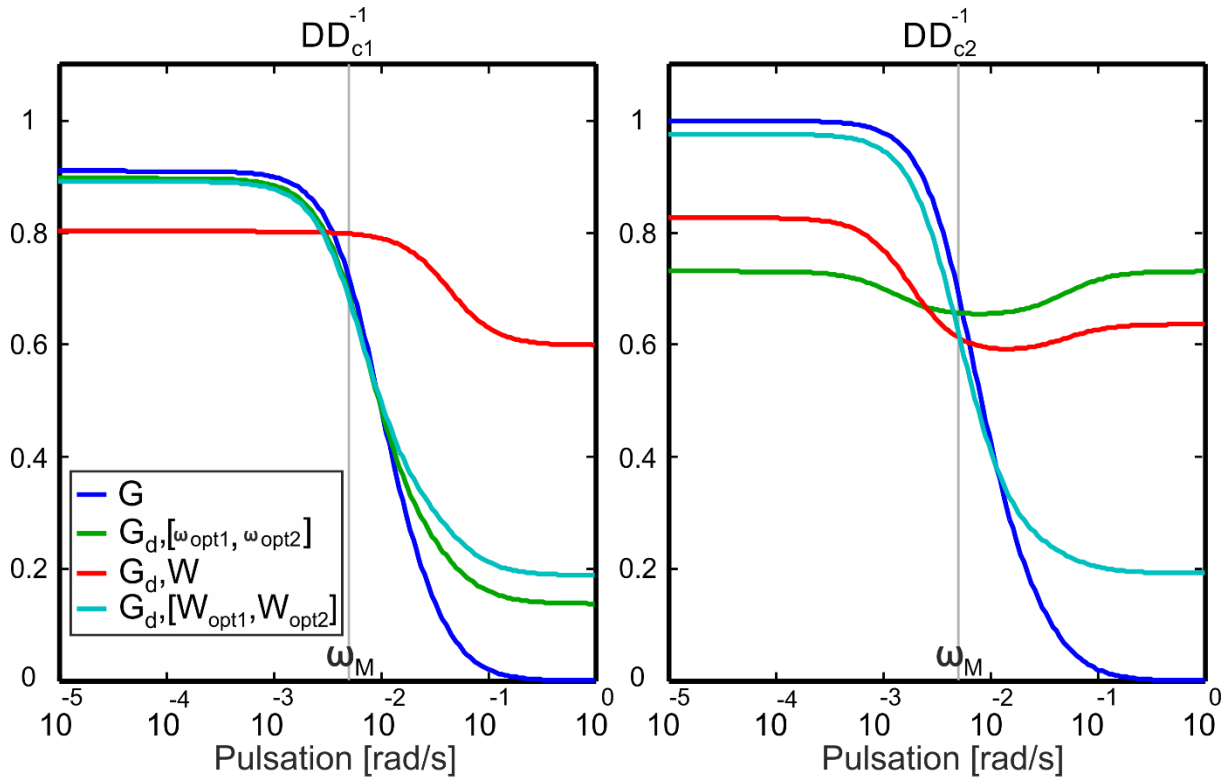


Figure III-2-3 : Inverse de la DDC avec un pré-compensateur déterminé par pseudo-diagonalisation

La méthode de découplage par optimisation permet d'obtenir la solution optimale vis-à-vis du critère donné. Par rapport à cette méthode, l'avantage de la pseudo-diagonalisation et de l'inversion réside dans le fait que le pré-compensateur peut être déterminé analytiquement. Ces méthodes peuvent par ailleurs bénéficier d'une surcouche d'optimisation qui dépend d'un nombre limité de paramètres, contrairement au problème d'optimisation dont le nombre de paramètres croît avec la taille du système. L'utilisation de la PD autour d'une pulsation permet d'obtenir des résultats plus précis que ceux obtenus avec l'inversion. L'utilisation de la PD sur une plage fréquentielle ne permet généralement pas d'obtenir de meilleurs résultats qu'around d'une pulsation.

#### Synthèse des régulateurs

Les meilleurs résultats en termes de découplage proviennent de la méthode de découplage par optimisation. Le pré-compensateur résultant est donné dans (III.2.19). La pseudo-diagonalisation autour des deux pulsations optimales permet de retrouver un pré-compensateur équivalent (III.2.19) (à un facteur multiplicatif près pour chacune des colonnes).

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -0,73 \\ -0,13 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0,59 \\ -0,13 & -0,81 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.19})$$

Bien que les résultats en termes de découplage ne soient pas satisfaisants, la forme de la  $DD_c$  a évolué, notamment celle de la seconde colonne. Des régulateurs PI sont alors synthétisés afin d'observer l'impact de cette modification de  $DD_c$  sur le système multivariable en boucle fermée.

La méthode monoboucle décrite dans la partie II.2d est tout d'abord utilisée. Celle-ci prend uniquement en compte les éléments diagonaux et ne considère donc pas les interactions. La méthode multiboucle de detuning traitée dans la partie II.3a est ensuite appliquée afin de prendre en compte les interactions lors de la synthèse. Les réglages obtenus avec des correcteurs PI sont donnés dans le Tableau III-2-4.

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
Synthèse monoboucle	2,15	2880	1,5	305
Synthèse multiboucle	1,5	960	1,29	210

Tableau III2-4 : Réglages monoboucle et multiboucle

Les réponses indicielles en boucle fermée sont tracées sur la Figure III2-4. Il est à noter que l'utilisation d'un pré-compensateur statique conduit à des réponses indicielles en boucle fermée relativement proches pour les synthèses monoboucles et multiboucles. Les réponses des termes diagonaux sont par ailleurs relativement proches des spécifications. Le pré-compensateur a ainsi permis de faciliter le réglage des correcteurs monovariables. En effet, il n'est pas possible d'obtenir des performances convenables avec une synthèse monoboucle sans l'aide d'un pré-compensateur.

On peut légitimement se demander pourquoi la synthèse monoboucle est efficace avec le pré-compensateur, alors que les indices de découplage du procédé muni du pré-compensateur restent proches de ceux du procédé initial. D'après le Chapitre I, les boucles équivalentes (comprenant les termes d'interactions) dépendent de l'indice  $\lambda = (G_{12}G_{21}) / (G_{11}G_{22}) = DD_{c1}^{-1} \times DD_{c2}^{-1}$ . De manière simplifiée, lorsque l'indice  $\lambda$  est faible, les boucles équivalentes restent proches des transferts diagonaux. Les synthèses monoboucles conduisent donc à des résultats acceptables. Dans le cas du système de cuves, l'indice  $\lambda$  devient globalement plus faible (notamment en basses fréquences), du fait des formes différentes de  $DD_{c1}^{-1}$  et  $DD_{c2}^{-1}$  (Figure III2-2). En revanche, on retrouve le fait que les interactions entrées-sorties ne sont pas réduites et restent à des valeurs trop importantes.

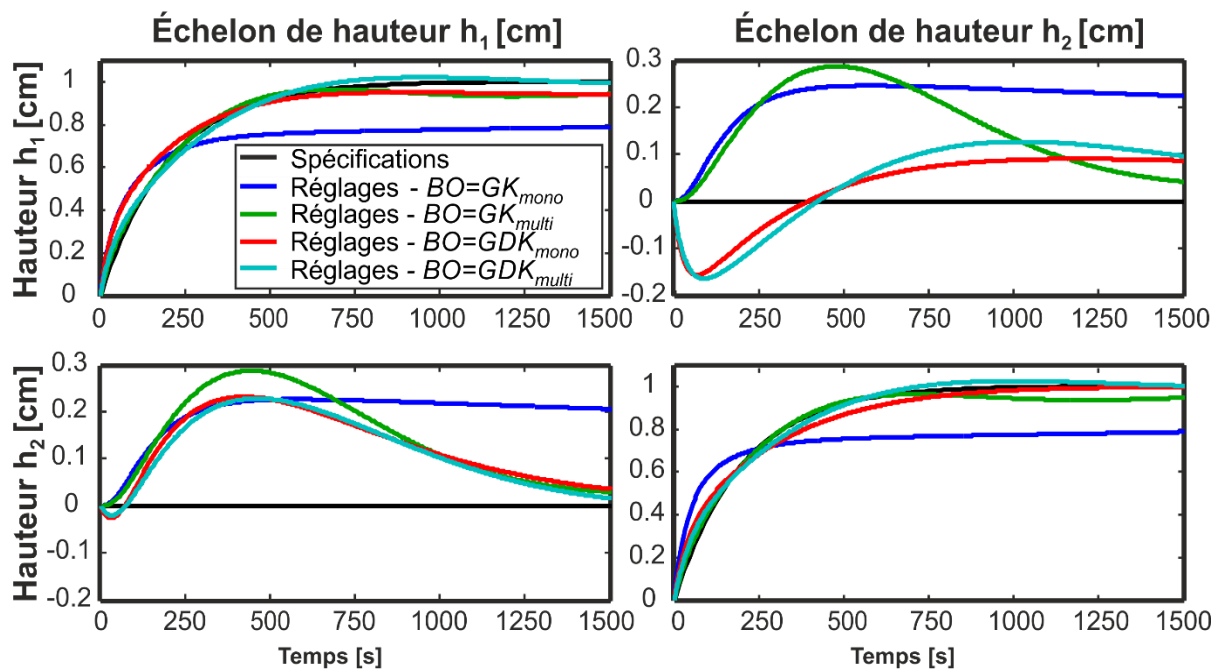


Figure III2-4 : Réponses indicielles en boucle fermée avec/sans pré-compensateur statique

#### v. Comparaison des méthodes de découplage statique avec pré-compensateurs

Les trois méthodes présentées dans III2a ont pour but la synthèse d'un pré-compensateur statique. Leurs avantages résident dans la simplicité des compensateurs et la simplicité de leurs synthèses. Un autre avantage de ces méthodes est qu'elles s'appuient sur les réponses fréquentielles du procédé et non sur un modèle analytique. En revanche, les performances en termes de découplage ne sont pas toujours atteintes, étant donné le peu de degrés de liberté que proposent ces méthodes. Dans le cas du système



de cuves, un pré-compensateur statique a permis de faciliter le réglage des régulateurs PI, mais cela n'a pas permis de réduire les interactions entrées-sorties de manière significative.

Le Tableau III2-5 résume les conclusions précédentes selon les trois critères adoptés. Les notations vont de 1 à 5 et les parenthèses sont à prendre uniquement en compte dans le cas TITO. Finalement, la méthode de découplage par optimisation semble préférable pour un procédé TITO tandis que la pseudo-diagonalisation (avec une surcouche d'optimisation) sera privilégiée pour un procédé avec un plus grand nombre de commandes et sorties.

Méthode	Performances	Mise en place de la méthode	Complexité des compensateurs
Inversion	+	+++++	+++++
Optimisation du découplage	++	+++(+)	+++++
Pseudo-diagonalisation	++	++++	+++++

Tableau III2-5 : Comparaison des méthodes de synthèse d'un pré-compensateur statique

### III2b. Méthodes avec pré-compensateur et post-compensateur

Lorsqu'un pré-compensateur statique ne permet pas d'obtenir un découplage satisfaisant, une solution consiste à ajouter un post-compensateur. La synthèse de ce post-compensateur à partir du procédé muni du pré-compensateur  $GD$  ne conduit généralement pas à de bonnes performances en termes de découplage. Les pré et post-compensateurs doivent alors être synthétisés conjointement.

#### i. Décomposition en valeurs propres (DVP)

Un premier moyen de diagonaliser le procédé au voisinage d'une pulsation donnée  $\omega_m$  est de réaliser une décomposition en valeurs propres (DVP) autour de cette pulsation (MacFarlane and Kouvaritakis, 1977). Les matrices  $V(\omega_m)$  et  $V^{-1}(\omega_m)$  permettant d'y parvenir sont alors composées des vecteurs propres de  $G(\omega_m)$ , comme dans (III2.20). Physiquement, cela revient à projeter les vecteurs comprenant les commandes et les sorties sur la base des vecteurs propres de  $G$ . Chacune des commandes suivant cette base excite alors un système monovarié en considérant les composantes du vecteur de sortie dans la base des vecteurs propres.

Les matrices de vecteurs propres sont de type complexe et nécessitent d'être approchées par des matrices réelles. L'algorithme d'alignement ALIGN est à nouveau utilisé pour cette opération. La boucle ouverte obtenue, ainsi que l'expression des compensateurs sont données dans (III2.21) et (III2.22).

$$G_d(j\omega_m) = V^{-1}(j\omega_m)G(j\omega_m)V(j\omega_m) \quad (\text{III2.20})$$

$$G_d(j\omega) = RG(j\omega)D \quad (\text{III2.21})$$

$$D = \text{ALIGN}(V(j\omega_m)) \quad (\text{III2.22})$$

$$R = \text{ALIGN}(V^{-1}(j\omega_m))$$

Les considérations de la partie III2a à propos du choix de la pulsation  $\omega_m$  sont également valables. On peut ainsi choisir  $\omega_m$  nulle, proche des pulsations de coupure désirées, ou bien chercher la pulsation optimale  $\omega_{\text{opt}}$  permettant de trouver les compensateurs par DVP qui minimisent l'indice  $\rho$ , défini dans (III1.4).

Tout comme la pseudo-diagonalisation traitée dans la partie III2a, une variante de cette solution consiste à considérer une plage fréquentielle au lieu de se placer sur une pulsation particulière (on notera cette



méthode multi-DVP par la suite). Les vecteurs propres sont alors déterminés en un certain nombre de pulsations et une somme pondérée de ces derniers est considérée. En utilisant l'algorithme multi-ALIGN donné en III2a, les matrices  $D$  et  $R$  sont déterminées par (III2.23).

$$D = \text{multiALIGN}(V, W_t) \quad (\text{III2.23})$$

$$R = \text{multiALIGN}(V^{-1}, W_t)$$

#### ii. Décomposition en valeurs singulières (DVS)

La décomposition en valeurs singulières (DVS) repose sur le même principe que la décomposition en valeurs propres (DVP). La DVS est réalisée selon la relation (III2.24) à une pulsation donnée  $\omega_m$ .  $U^*(\omega_m)$  et  $V(\omega_m)$  sont des matrices unitaires, et la notation  $X^*$  correspondant à la matrice adjointe de  $X$ . Ces matrices sont complexes et nécessitent d'être approchées par des matrices réelles. L'algorithme ALIGN est à nouveau utilisé pour cette opération. La représentation en boucle ouverte obtenue, ainsi que l'expression des compensateurs sont données dans (III2.25) et (III2.26).

$$G_d(j\omega_m) = U^*(j\omega_m)G(j\omega_m)V(j\omega_m) \quad (\text{III2.24})$$

$$G_d(j\omega) = RG(j\omega)D \quad (\text{III2.25})$$

$$\begin{aligned} D &= \text{ALIGN}(V(j\omega_m)) \\ R &= \text{ALIGN}(U^*(j\omega_m)) \end{aligned} \quad (\text{III2.26})$$

Comme pour la DVP, l'indice  $\rho$  peut être minimisé en cherchant  $\omega_{opt}$ . On peut également prendre en compte les matrices  $U^*$  et  $V$  sur toute une plage fréquentielle, comme dans (III2.27) (on parlera de multi-DVP).

$$D = \text{multiALIGN}(V, W_t) \quad (\text{III2.27})$$

$$R = \text{multiALIGN}(U^*, W_t)$$

#### iii. Décomposition dyadique (DD)

Suite aux travaux de (Owens, 1978) sur la décomposition dyadique, (Vaes *et al.*, 2003), (Boerlage *et al.*, 2005) proposent de choisir les matrices  $D_p$  et  $R_p$  comme les vecteurs propres respectifs des expressions  $G^{-1}(j\omega_1)G(j\omega_2)$  et  $G(j\omega_2)G^{-1}(j\omega_1)$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  étant des pulsations arbitraires où  $G$  est inversible. Ce choix permet d'obtenir un découplage parfait aux deux pulsations considérées (A-2. Décomposition dyadique).

Les matrices  $D_p$  et  $R_p$  sont des matrices de type complexe et nécessitent d'être approchées par les matrices réelles  $D$  et  $R$ , comme en (III2.28).

$$D = \text{ALIGN}(D_p) \quad (\text{III2.28})$$

$$R = \text{ALIGN}(R_p)$$

Le choix des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  peut être déterminé en considérant des pulsations spécifiques, comme les pulsations de coupure souhaitées des différentes boucles. Il est en général intéressant de déterminer ces pulsations afin de minimiser l'indice  $\rho$ .

#### iv. Optimisation du découplage

Il est également possible de chercher le pré-compensateur  $D$  et le post-compensateur  $R$  par optimisation. Contrairement à l'optimisation du pré-compensateur seul, étudiée dans la partie III2a, il n'est pas possible de subdiviser le problème en sous-problèmes indépendants. Il est néanmoins possible de réduire le problème d'optimisations de  $2r^2$  paramètres à  $(r-1)^2 + (r^2-1)$  paramètres en normalisant les colonnes de  $D$  et en normalisant la matrice  $R$  (il n'est pas possible de normaliser les colonnes de  $R$ , car ces opérations

affecteraient la  $DD_c$  du système et donc l'indice de découplage). Malgré cela, l'optimisation reste relativement fastidieuse d'un point de vue temps de calcul, et ce même pour un procédé TITO.

Il est toutefois possible d'associer l'optimisation à une autre méthode, en utilisant pour l'optimisation de *bonnes* conditions initiales, issues des résultats d'autres méthodes. (Vaes, 2005) propose par exemple de prendre comme conditions initiales les résultats obtenus avec la décomposition dyadique.

v. Application au système de cuves

Décomposition en valeurs propres (DVP)

La décomposition en valeurs propres est tout d'abord appliquée au système de cuves à pulsation nulle, puis autour de la pulsation de brisure recherchée en boucle fermée. La pulsation optimale est ensuite déterminée en incluant la DVP dans une surcouche d'optimisation. Les trois DVP conduisent à des pré et post-compensateur similaires ; les résultats ont été regroupés sur la Figure III2-5 et dans le Tableau III2-6. En fonction de l'ordre dans lequel sont prises les valeurs propres (et donc les vecteurs propres associés), les résultats en termes de  $DD_c$  et d'indice de découplage  $\rho$  sont inversés (les courbes vertes et rouges (confondues avec les courbes magenta) sont les mêmes d'une colonne à l'autre).

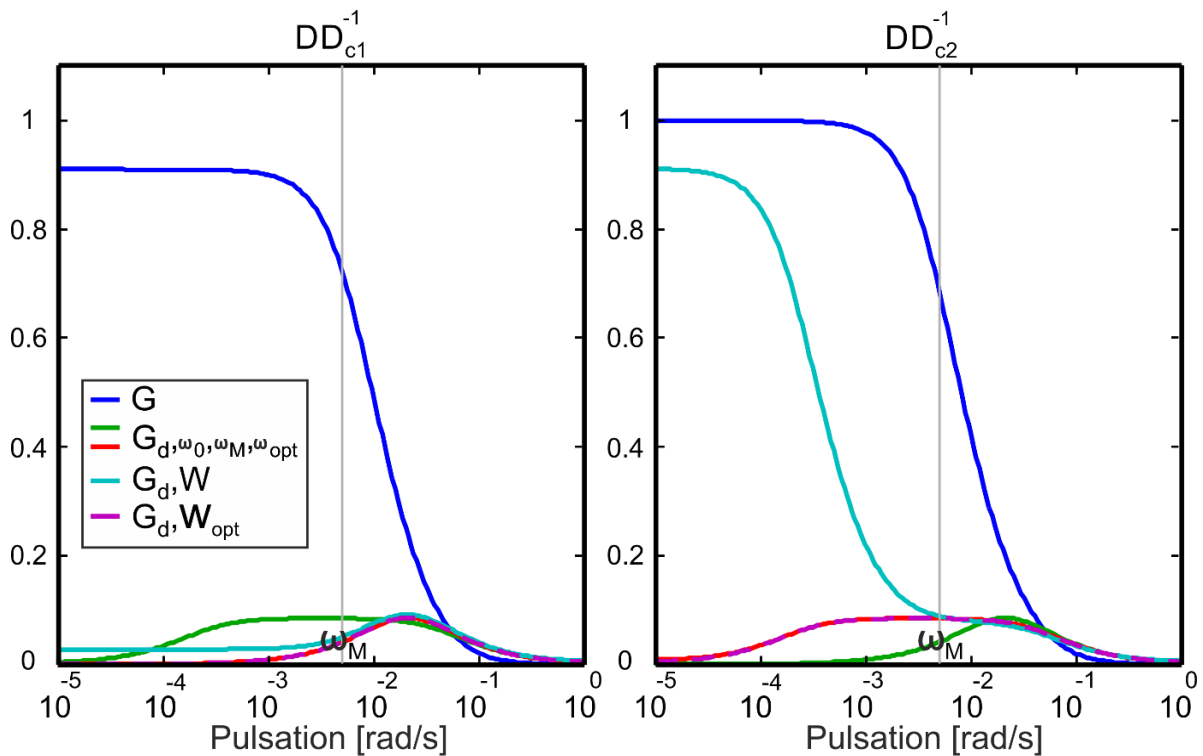


Figure III2-5 : Inverse de la  $DD_c$  avec des compensateurs déterminés par DVP

La multi-DVP est ensuite utilisée, afin de prendre en compte explicitement l'ensemble des vecteurs propres sur tout le domaine fréquentiel. La fonction de pondération  $W$  est tout d'abord considérée, avant de rechercher la fonction de pondération  $W_{opt}$  par optimisation.

Les résultats obtenus sont bien meilleurs que ceux obtenus avec les pré-compensateurs seuls dans la partie III2a. Rappelons cependant qu'il s'agit de la  $DD_c$  de  $RGD$ , et non la  $DD_c$  de la boucle ouverte réelle. En effet, la  $DD_c$  va être affectée par les régulateurs SISO et par le fait de ramener le post-compensateur en amont des régulateurs SISO.

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
DVP $\omega_0, \omega_M, \omega_{opt}$	0,067	0,081	0,052
DVP $\omega_0, \omega_M, \omega_{opt}$	0,067	0,052	0,081
multi-DVP $W$	0,19	0,062	0,32
multi-DVP $W_{opt}$	0,067	0,052	0,081

Tableau III2-6 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par DVP

Malgré le fait que la DVP soit réalisée à une pulsation précise, le découplage reste efficace sur tout le domaine fréquentiel. Par ailleurs, la DVP conduit à des pré et post-compensateurs quasiment identiques sur les différentes pulsations testées. Afin d'en comprendre la raison, on cherche à analyser l'évolution des vecteurs propres. Comme il a été vu dans le Chapitre I, le procédé est décrit par une matrice de transfert symétrique. La réponse fréquentielle du procédé est donc composée de matrices complexes symétriques. Les vecteurs propres de telles matrices ont une même direction. En effet, en considérant  $G_m$  une matrice complexe symétrique de dimension 2, et  $V_1$  et  $V_2$  les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on peut écrire (III2.29). On aboutit ainsi à (III2.31). Les valeurs propres étant différentes dans le cas du système de cuves, les vecteurs propres sont liés.

$$\begin{aligned} G_m V_1 &= \lambda_1 V_1 \Leftrightarrow V_1^T G_m = \lambda_1 V_1^T \\ G_m V_2 &= \lambda_2 V_2 \end{aligned} \quad (III2.29)$$

$$\begin{aligned} V_1^T G_m V_2 &= \lambda_1 V_1^T V_2 \\ V_1^T G_m V_2 &= \lambda_2 V_1^T V_2 \end{aligned} \quad (III2.30)$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) V_1^T V_2 = 0 \Rightarrow V_1^T V_2 = 0 \text{ (si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{)} \quad (III2.31)$$

Il est donc possible de ne s'intéresser qu'à un seul vecteur propre. La grandeur  $E_{vp}$ , donnée dans (III2.32) et tracée sur la Figure III2-6, permet de montrer que l'évolution des vecteurs propres est assez limitée en dehors des hautes fréquences.

$$E_{vp} = \|V_1(0) - V_1(j\omega)\| \quad (III2.32)$$

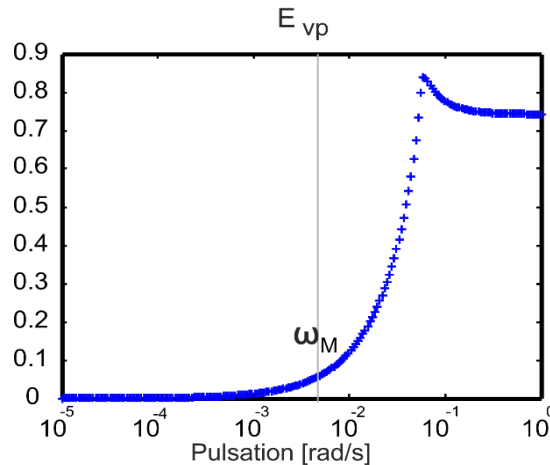


Figure III2-6 : Évolution de la grandeur  $E_{vp}$

Sans surcouche d'optimisation, les résultats obtenus avec la multi-DVP sont nettement moins bons que ceux obtenus avec la DVP, ce qui n'est pas nécessairement anormal (Maciejowski, 1989). L'utilisation des surcouches d'optimisation pour la DVP et la multi-DVP permettent d'aboutir à des résultats identiques pour le système de cuves. Ces méthodes sont généralement plus efficaces que les méthodes mettant uniquement en œuvre des pré-compensateurs statiques. Néanmoins, l'efficacité du découplage dépend de l'évolution des vecteurs propres en fonction de la pulsation.

#### Décomposition en valeurs singulières (DVS)

La DVS est tout d'abord appliquée au modèle du système de cuves à pulsation nulle, puis autour de la pulsation de brisure désirée en boucle fermée. La pulsation optimale est ensuite calculée. La solution multi-DVS est également testée mais la qualité du découplage obtenue est bien moins bonne que celle du procédé seul. En optimisant les paramètres de  $W_t$ , le découplage est amélioré, mais celui-ci reste moins bon que celui obtenu avec la DVS autour d'une pulsation. Cela est notamment dû aux variations des directions des vecteurs singuliers qui sont relativement importantes comme on peut le voir sur la Figure III2-7 (les considérations sur les vecteurs propres évoquées précédemment se transposent aux vecteurs singuliers et le calcul de  $E_{VS}$  est similaire à celui de  $E_{VP}$  en (III2.32)).

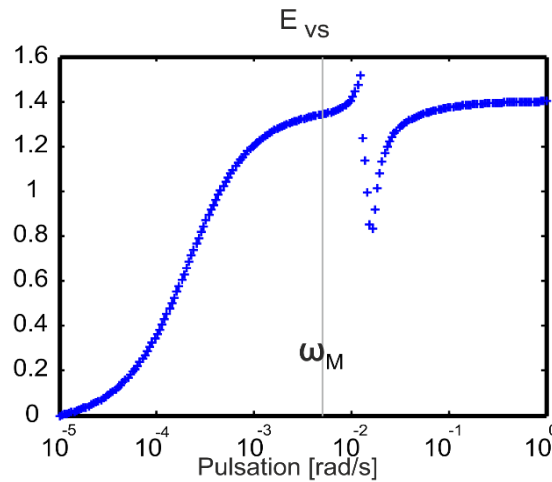


Figure III2-7 : Évolution de la grandeur  $E_{vs}$

La Figure III2-8 présente l'inverse de la  $DD_c$  des deux colonnes du système  $G_d$ . Les indices de découplage sont exposés dans le Tableau III2-7. Les meilleurs résultats obtenus correspondent à la décomposition en valeurs singulières à pulsation nulle. On retrouve alors les mêmes compensateurs que ceux obtenus avec la décomposition en valeurs propres.

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
DVS $\omega_0 = 0$ rad/s	0,067	0,052	0,081
DVS $\omega_m = \omega_M = 5 \times 10^{-3}$ rad/s	0,33	0,07	0,59
DVS $\omega_{opt} = \omega_0$	0,067	0,052	0,081
multi-DVS $W_t$	2,95	1,73	4,17
multi-DVS $W_{opt}$	0,53	0,10	0,96

Tableau III2-7 : Indices de découplage avec des compensateurs déterminés par DVS

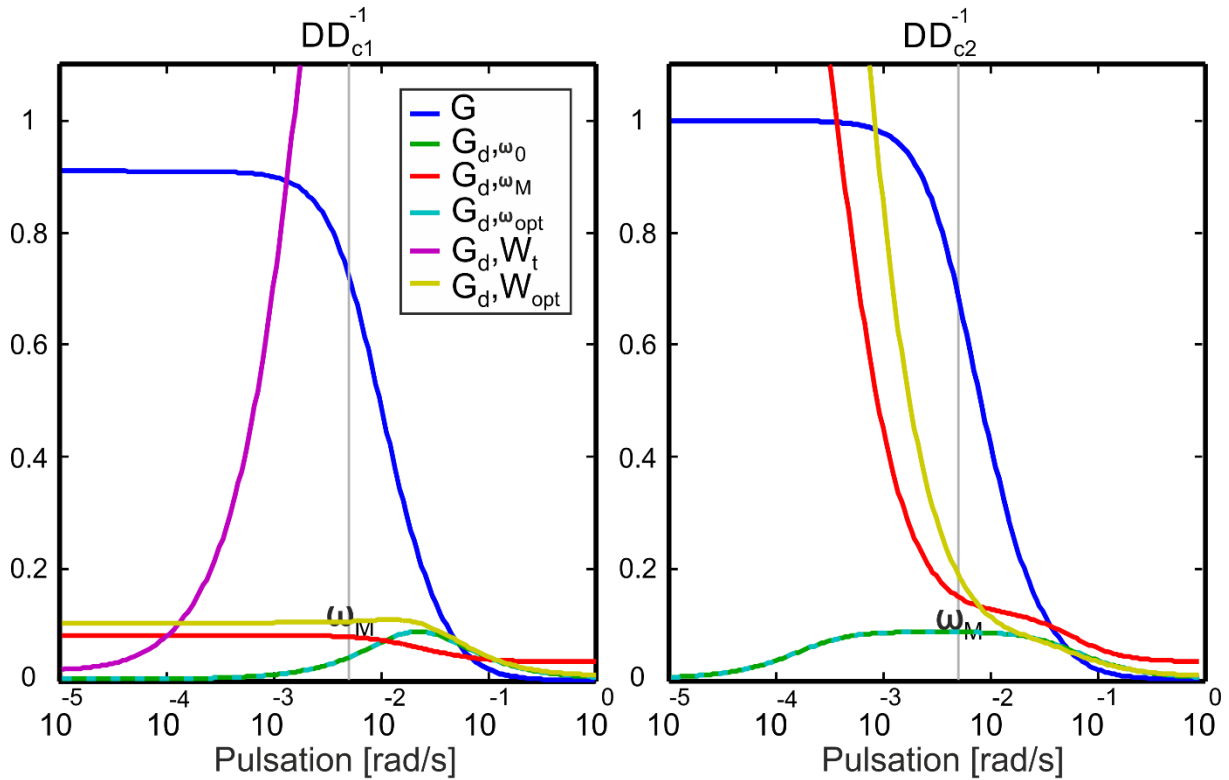


Figure III2-8 : Inverse de la DDC avec des compensateurs déterminés par DVS

La DVS est moins efficace que la DVP sur cet exemple. Néanmoins, les conclusions sur la DVS sont similaires à celles sur la DVP.

#### Décomposition dyadique (DD)

La première étape de la décomposition dyadique (DD) consiste à choisir les pulsations où le découplage est souhaité. Sachant qu'une même pulsation de coupure  $\omega_M$  est souhaitée pour les deux boucles, on propose de choisir  $\omega_1$  et  $\omega_2$  comme étant égales à 1/5 et 5 fois la pulsation  $\omega_M$ . Les compensateurs sont ensuite calculés avec (III2.28). Les résultats sont tracés sur la Figure III2-9 et présentés dans le Tableau III2-8. La recherche des pulsations optimales  $\omega_{opt1}$  et  $\omega_{opt2}$  permet d'améliorer légèrement les indices de découplage.

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
DD $\omega_1 = 10^{-3}$ rad/s; $\omega_2 = 2,5 \times 10^{-2}$ rad/s	0,044	0,028	0,060
DD $\omega_{opt1} = 0$ rad/s; $\omega_{opt2} = 2,3 \times 10^{-2}$ rad/s	0,030	0,027	0,033

Tableau III2-8 : Indices de découplage avec des-compensateurs déterminés par DD

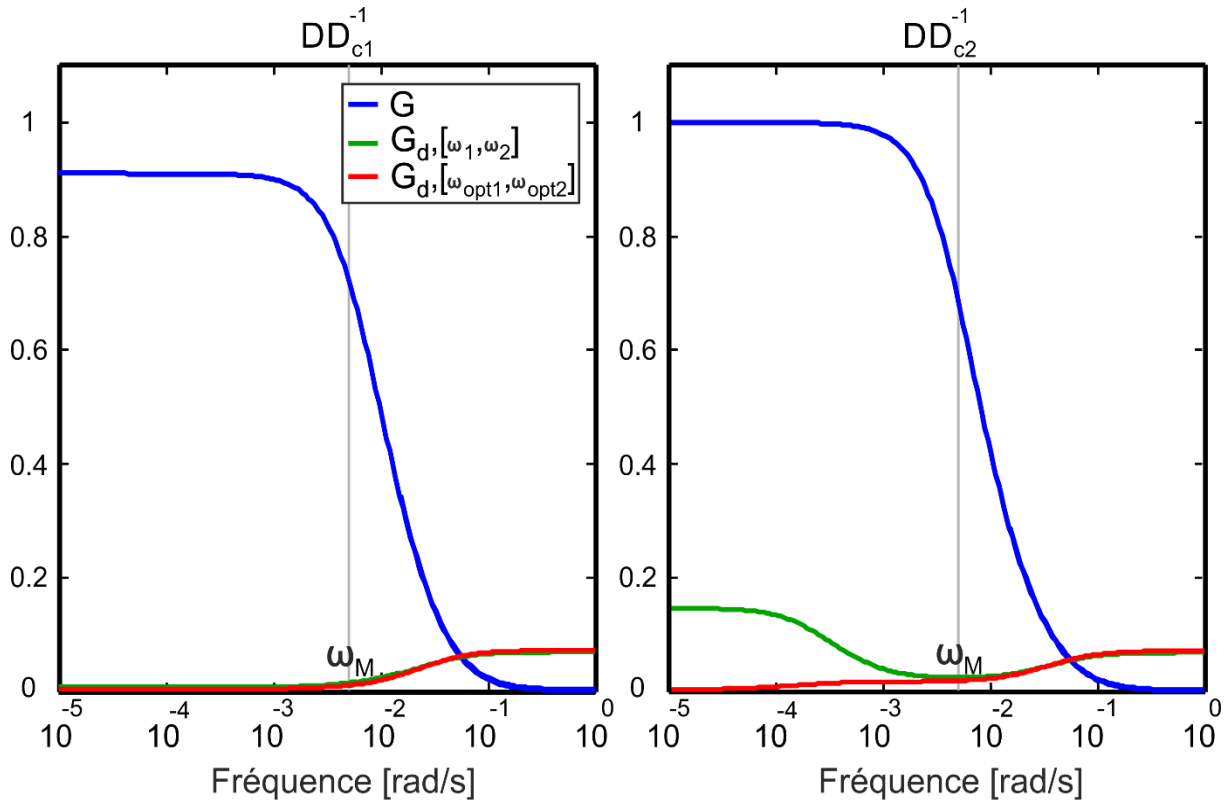


Figure III2-9 : Inverse de la  $DD_c$  avec des compensateurs déterminés par décomposition dyadique

La décomposition dyadique possède un plus grand nombre de degrés de liberté que les méthodes DVP et DVS. En effet, les compensateurs utilisés dans la DVP sont l'inverse l'un de l'autre (aux erreurs près d'approximation des matrices complexes), et ceux utilisés dans le DVS sont des matrices unitaires. Elle permet sur ce procédé d'améliorer la qualité du découplage.

#### Optimisation du découplage

Un algorithme génétique et un algorithme par recuit simulé ont été testés afin de déterminer les coefficients des matrices  $D$  et  $R$ , permettant de minimiser l'indice  $\rho$ . Les conditions initiales sont choisies en prenant les meilleurs résultats obtenus jusqu'à présent, à savoir ceux issus de la décomposition dyadique. Au prix d'un temps de calcul relativement important, le découplage reste quasiment inchangé (avec l'optimisation par recuit simulé dans ce cas), comme on peut le voir dans le Tableau III2-9. L'utilisation de conditions initiales différentes (aléatoires par exemple ne permet pas d'améliorer les résultats, voire même d'atteindre ces résultats).

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
DD $\omega_{opt1} = 0$ rad/s; $\omega_{opt2} = 2,3 \times 10^{-2}$ rad/s	0,030	0,027	0,033
Optimisation avec CI de la DD	0,029	0,027	0,031

Tableau III2-9 : Indices de découplage avec des compensateurs déterminés par DD

La méthode d'optimisation par découplage est déconseillée étant donné le nombre important de paramètres d'optimisation. L'utilisation de conditions initiales provenant des résultats d'autres méthodes est une piste intéressante, mais cette dernière ne permet pas d'améliorer sensiblement la qualité du découplage sur le système de cuves.

## Synthèse de régulateurs SISO

La solution adoptée dans cette partie est celle issue de la décomposition dyadique (réalisée aux pulsations optimales). Les compensateurs mis en œuvre sont donnés dans (III2.33).

$$D = \begin{bmatrix} 0,770 & -0,688 \\ 0,649 & 0,725 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,742 & 0,599 \\ -0,694 & 0,729 \end{bmatrix}$$
(III2.33)

Une synthèse des régulateurs est tout d'abord effectuée sans prendre en compte les interactions puis en les prenant en compte. Les réglages sont donnés dans le Tableau III2-10 et les différences sont minimales entre ces deux méthodes de synthèse.

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
Synthèse monoboucle	1,2	4275	0,8	70
Synthèse multiboucle	1,2	4140	0,8	70

Tableau III2-10 : Réglages monoboucle et multiboucle

On peut en revanche s'étonner de la différence entre les réglages des deux boucles. Celle-ci n'est en fait pas anormale car les transferts diagonaux du procédé découplé  $G_{d11}$  et  $G_{d22}$  s'avèrent très différents (Figure III2-10). Les réglages des deux régulateurs SISO permettent donc de compenser ces différences. Les transferts en boucle ouverte  $G_{d1}K_1$  et  $G_{d2}K_2$  sont d'ailleurs très proches (les réglages monoboucles ont été considérés sur la Figure III2-10, mais cela revient au même avec les réglages multiboucles car les transferts équivalents sont très proches des transferts diagonaux).

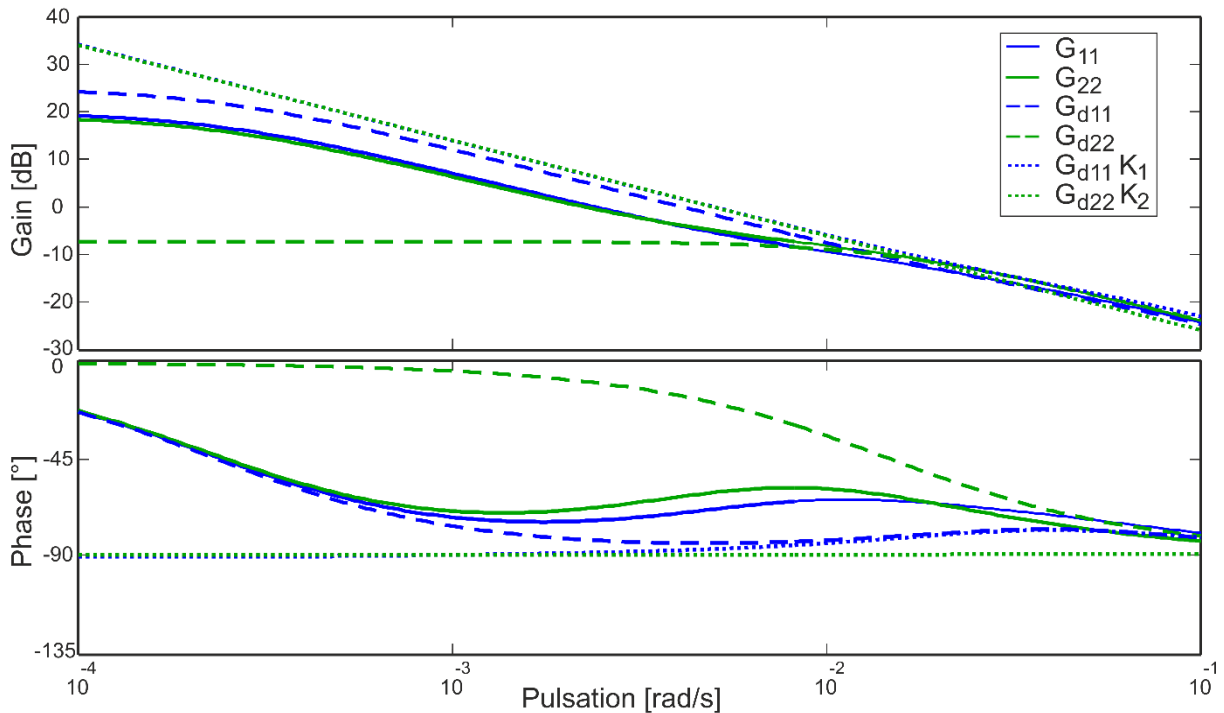


Figure III2-10 : Diagrammes de Bode des transferts diagonaux

La  $DD_c$  de la boucle ouverte réelle  $GDKR$  (i.e. lorsque le post-compensateur est ramené en amont du régulateur décentralisé) est tracée sur la Figure III2-11. Celle-ci est comparée avec la  $DD_c$  de  $RGDK$  (égale à celle de  $RGD$ ). Les  $DD_c$  des deux systèmes sont globalement similaires jusqu'aux

pulsations de coupure visées. La  $DD_c$  de la boucle ouverte *réelle* devient alors moins bonne que la  $DD_c$  de *RGD*. Les indices de découplage  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont respectivement multipliés par 3 et 2,5. Ces indices restent néanmoins largement meilleurs que ceux obtenus dans le cas de l'utilisation d'un pré-compensateur seul.

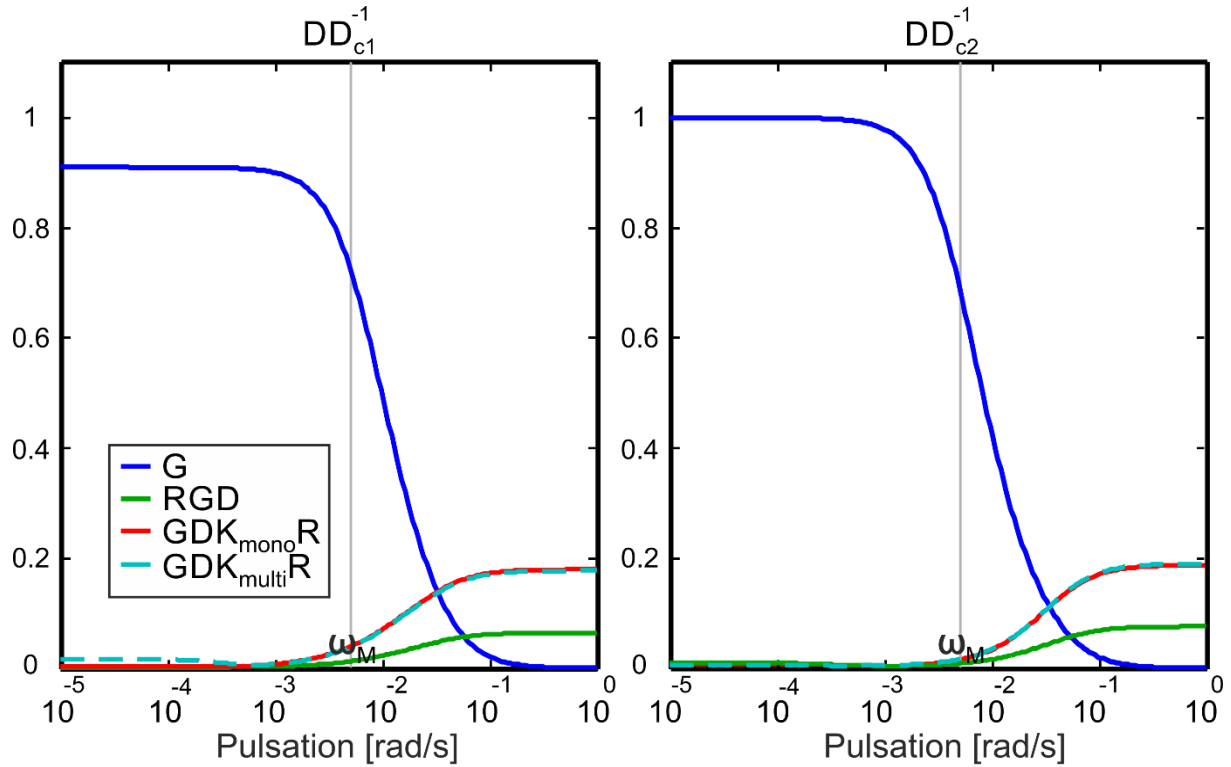


Figure III2-11 : Comparaison de la  $DD_c$  de RGD et de GDKR

Les réponses indicielles en boucle fermée sont finalement tracées sur la Figure III2-12, et comparées aux résultats sans compensateurs. La première remarque est qu'il n'y a presque aucune différence entre le réglage monoboucle et le réglage multiboucle lorsque les compensateurs sont utilisés : une synthèse monoboucle est ainsi suffisante. Le suivi de consigne est par ailleurs nettement amélioré. Celui-ci est en effet quasiment confondu avec le gabarit temporel spécifié. Pour finir, les interactions entrées-sorties ont été largement réduites. Ces dernières n'excèdent pas 2% de la valeur de l'échelon de consigne de l'autre voie, tandis qu'elles étaient de l'ordre de 20% sans compensateurs.

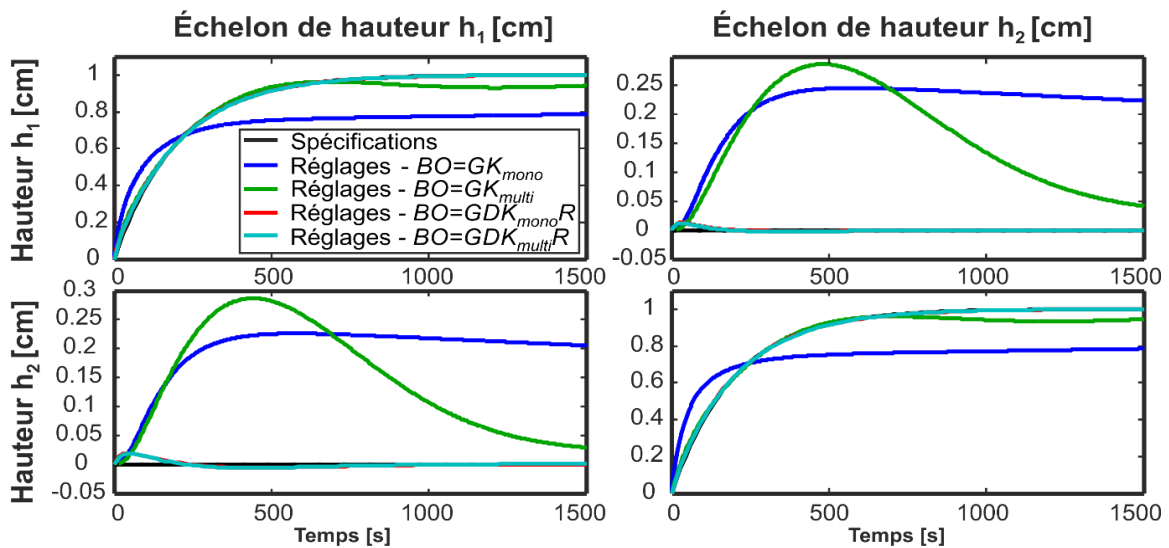


Figure III2-12 : Réponses indicielles en boucle fermée avec/sans compensateurs statique



Le découplage mis en place avec la décomposition dyadique est particulièrement efficace dans le cas du système de cuves. Celui-ci permet d'une part d'avoir un très bon suivi de consigne et d'autre part de réduire fortement les interactions entrées-sorties.

vi. Comparaison des méthodes de découplage statique avec pré et post-compensateurs

Les quatre méthodes présentées dans la partie III2b ont pour but la synthèse conjointe d'un pré-compensateur et d'un post-compensateur statiques. Ces méthodes possèdent plus de degrés de liberté que les méthodes avec pré-compensateur seul (traitées dans III2a), et sont ainsi plus efficaces en termes de découplage. Ces méthodes s'appuient également sur les réponses fréquentielles du procédé et non sur un modèle analytique. Le niveau de complexité des méthodes est néanmoins légèrement plus important. Il en va de même pour l'implantation des compensateurs.

Le Tableau III2-11 résume les points discutés précédemment. Finalement, la décomposition dyadique aux pulsations optimales (suivi éventuellement d'un affinage des paramètres par optimisation) semble être la méthode la plus efficace parmi les méthodes avec pré et post-compensateurs statiques.

Méthode	Performances	Mise en place de la méthode	Complexité des compensateurs
Décomposition en valeurs propres	+++	++++	+++
Décomposition en valeurs singulières	+++	++++	+++
Décomposition dyadique	++++	++++	+++
Optimisation du découplage	+++(+)	+++(+)	+++

Tableau III2-11 : Comparaison des méthodes de synthèse d'un pré et post-compensateur statiques

### III2c. Découplage par retour d'état

Certaines techniques de commande permettent de déterminer un retour d'état découplant. L'inconvénient de ces techniques, comparativement aux stratégies présentées jusqu'à présent, est la difficulté de l'ajustement des réglages des régulateurs. Il est toutefois possible d'utiliser un retour d'état pour réaliser le découplage, et de synthétiser dans un second temps des régulateurs PI à partir du procédé découplé.

i. Découplage par la méthode de Falb-Wolovich (FB)

Le procédé est considéré sous forme de représentation d'état, en considérant nulle la matrice d'action directe.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{III2.34}$$

Le schéma général d'une commande par retour d'état est présenté sur la Figure III2-13.  $L$  est la matrice de la commande par retour d'état et  $M$  la matrice de préfiltre.

La commande résultante est donnée par :

$$u = u^* - Lx \tag{III2.35}$$

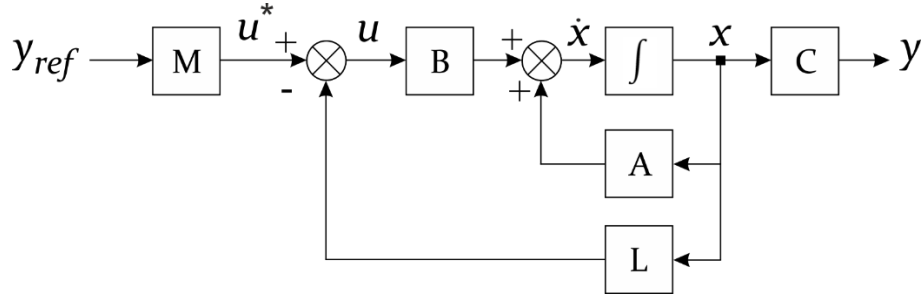


Figure III2-13 : Schéma de la commande par retour d'état

Le principe de la commande découplée de (Falb and Wolovich, 1967) est de synthétiser un retour d'état permettant d'obtenir une matrice de transfert du système bouclé entre  $y$  et  $y_{ref}$  de la forme (III2.36), où les  $r$  fonctions de transfert monovariabiles désirées  $G_{di}$  sont sous la forme (III2.37).

$$G_d(s) = \begin{bmatrix} G_{d1}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & G_{dr}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III2.36})$$

$$G_{di}(s) = \frac{N_i}{D_i(s)} \quad (\text{III2.37})$$

$$D_i(s) = s^{\delta_i} + q_{i,\delta_i-1}s^{\delta_i-1} + \cdots + q_{i,1}s + q_{i,0} = (s - p_{i,1}) \cdots (s - p_{i,\delta_i})$$

Les  $p_{i,j}$  ( $j=[1,\delta_i]$ ) sont les pôles souhaités pour les différentes fonctions de transfert  $G_{di}$  et constituent l'ensemble des pôles imposés au système bouclé découplé qui résulte de cette synthèse. Le nombre de pôles contenus dans  $G_{di}$  est égal à la différence d'ordre de la grandeur  $y_i$  par rapport au vecteur de commandes  $u$ . Il s'agit du plus petit nombre entier  $\delta_i$  pour lequel on a :

$$\begin{cases} L_i(C)B = 0 \\ \vdots \\ L_i(C)A^{\delta_i-1}B \neq 0 \end{cases} \quad (\text{III2.38})$$

avec  $L_i(C)$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur ligne de la matrice de sortie  $C$ .

Cela revient physiquement à l'ordre de la dérivée de  $y_i$  sur laquelle agit directement  $u_i$ . En effet, si l'on considère la dérivée  $k_i^{\text{ième}}$  de  $y_i$  (notée  $y_i^{(k_i)}$ ) avec  $k_i < \delta_i$ , on obtient (III2.39) en utilisant les expressions (III2.34) et (III2.38). (III2.40) est obtenue à partir de la dérivée  $\delta_i^{\text{ième}}$ .

$$y_i^{(k_i)} = L_i(C)x^{(k_i)} = L_i(C)(Ax^{(k_i-1)} + Bu) = L_i(C)Ax^{(k_i-1)} = \cdots = L_i(C)A^{k_i}x \quad (\text{III2.39})$$

$$y_i^{(\delta_i)} = L_i(C)A^{\delta_i}x + L_i(C)A^{\delta_i-1}Bu \quad (\text{III2.40})$$

A partir de (III2.35) et de (III2.40), on obtient :

$$y_i^{(\delta_i)} = (L_i(C)A^{\delta_i} - L_i(C)A^{\delta_i-1}BL)x + L_i(C)A^{\delta_i-1}BM y_{ref} \quad (\text{III2.41})$$

Le but étant que la sortie  $y_i$  ne soit plus influencée que par sa consigne associée  $y_{i,ref}$ , on cherche à avoir la relation (III2.42). Sous forme matricielle, cela revient à (III2.43) pour tout  $y_{ref}$ , ce qui permet d'en déduire  $M$  (III2.44) :

$$L_i(C)A^{\delta_i-1}BM y_{ref} = N_i y_{i,ref} \quad (\text{III2.42})$$

$$\begin{bmatrix} L_1(C)A^{\delta_i-1}B \\ \vdots \\ L_r(C)A^{\delta_r-1}B \end{bmatrix} M y_{ref} = \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_r \end{bmatrix} y_{ref} \quad (\text{III.2.43})$$

$$M = \psi^{-1} \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N_r \end{bmatrix} \text{ avec } \psi = \begin{bmatrix} L_1(C)A^{\delta_i-1}B \\ \vdots \\ L_r(C)A^{\delta_r-1}B \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.44})$$

Les sorties  $y_i$  sont à présent découplées vis-à-vis des consignes. Il reste à présent à les découpler vis-à-vis des états du procédé. A partir de (III.2.41), on cherche la matrice  $L$  en posant (III.2.45). En utilisant (III.2.39), les dérivées successives des  $y_i$  sont remplacées dans (III.2.46). Ceci étant valable quel que soit  $x$ ,  $L$  doit satisfaire l'égalité (III.2.47). Sous forme matricielle,  $L$  est finalement donné dans (III.2.48).

$$(L_i(C)A^{\delta_i} - L_i(C)A^{\delta_i-1}BL)x = -(q_{i,\delta_i-1}y_i^{(\delta_i-1)} + \cdots + q_{i,1}\dot{y}_i + q_{i,0}y_i) \quad (\text{III.2.45})$$

$$(L_i(C)A^{\delta_i} - L_i(C)A^{\delta_i-1}BL)x = -(q_{i,\delta_i-1}L_i(C)A^{\delta_i-1}x + \cdots + q_{i,1}L_i(C)Ax + q_{i,0}L_i(C)x) \quad (\text{III.2.46})$$

$$L_i(C)A^{\delta_i-1}BL = L_i(C)D_i(A) \text{ avec } D_i(A) = \sum_{v=0}^{\delta_i} q_{i,v}A^v \quad (\text{III.2.47})$$

$$L = \psi^{-1} \begin{bmatrix} L_1(C)D_1(A) \\ \vdots \\ L_r(C)D_r(A) \end{bmatrix} = \psi^{-1} \begin{bmatrix} L_1(C) \sum_{v=0}^{\delta_1} q_{1,v}A^v \\ \vdots \\ L_r(C) \sum_{v=0}^{\delta_r} q_{r,v}A^v \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.48})$$

Il est ainsi possible de découpler totalement le procédé en choisissant les matrices  $M$  et  $L$  de la sorte, à partir des fonctions de transfert monovariées désirées  $G_{di}$ . Les degrés de liberté de la méthode concernent finalement le choix des pôles  $p_{i,j}$  ( $j=[1,\delta_i]$ ). Le nombre de pôles que l'on peut placer est égal à la différence d'ordre du système multivariable, i.e. la somme des différences d'ordre de chacune des sorties. En fait, la loi de commande déterminée par cette méthode impose au système bouclé des zéros dans sa matrice de transfert qui compensent les valeurs propres non imposées, de telle sorte qu'elles n'apparaissent pas dans la structure découplée.

Dans le cas où le procédé possède des zéros instables, la méthode de Falb-Wolovich n'est pas applicable car celle-ci introduit des instabilités dans le système bouclé (Ostertag, 2006). Un autre défaut de cette synthèse est qu'elle n'est pas compatible avec l'ajout classique d'intégrateurs pour obtenir une forme augmentée. En effet, le fait d'ajouter des intégrateurs se traduit par l'ajout de pôles instables, sans pour autant augmenter la différence d'ordre. Lors de l'utilisation de la méthode Falb-Wolovich, les pôles instables vont alors être déplacés à la place des pôles du procédé initial (Ostertag, 2006).

La méthode proposée ici, consiste à utiliser la synthèse de Falb-Wolovich pour découpler le procédé, sans pour autant chercher à l'asservir. Les pôles et gains statiques choisis lors de la synthèse peuvent alors être déterminés de manière à conserver *au mieux* les transferts des éléments diagonaux. Une seconde étape consiste ensuite à synthétiser des régulateurs PI sur chacun des transferts, permettant ainsi d'assurer les performances souhaitées. La méthode de réglage PID-IMC est alors choisie pour effectuer ces réglages. La stratégie est résumée par la Figure III-14.

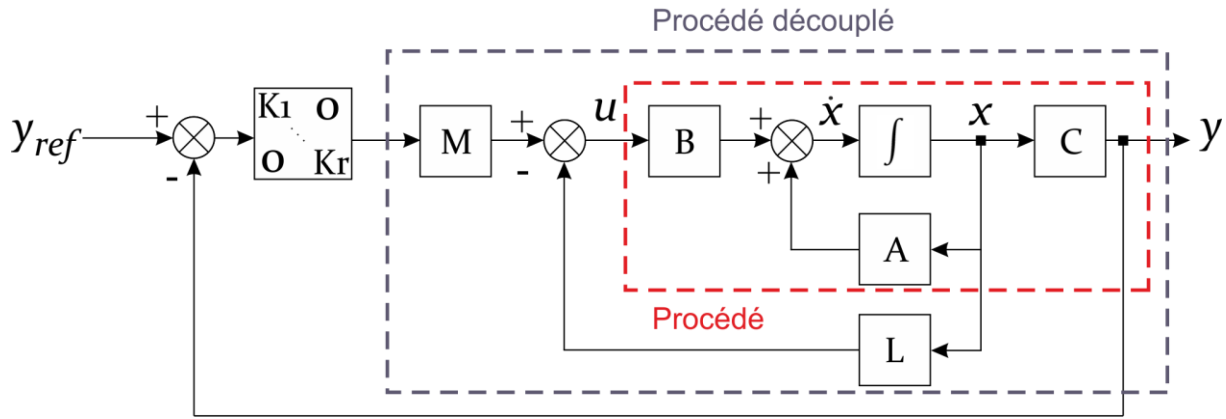


Figure III2-14 : Commande décentralisée d'un procédé découplé par retour d'état

Cette stratégie peut également s'adapter avec d'autres commandes découplantes par retour d'état. On peut mentionner par exemple la synthèse modale complète (Ostertag, 2006). Il s'agit d'une technique de commande par retour d'état, permettant d'imposer toutes les valeurs propres du système bouclé. Dans le cas où le procédé ne comporte pas de zéro instable, cela conduit au même retour d'état que la synthèse de Falb-Wolovich.

ii. Application au système de cuves

Découplage par Falb-Wolovich

La méthode de découplage par Falb-Wolovich est appliquée au système de cuves. D'après, (III2.49), le degré relatif est de 1 sur chacune des sorties. Par ailleurs, la matrice  $\Psi$  est inversible et le procédé ne comporte pas de zéro instable. Il est ainsi possible de découpler le procédé.

$$\begin{aligned}
 L_1(C)B &= [0,0065 \quad 0] \neq 0 \rightarrow \delta_1 = 1 \\
 L_2(C)B &= [0 \quad 0,0065] \neq 0 \rightarrow \delta_2 = 1 \\
 \psi &= \begin{bmatrix} 0,0065 & 0 \\ 0 & 0,0065 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{III2.49}$$

Deux pôles de la boucle fermée peuvent être fixés arbitrairement (sachant que le troisième vient compenser le zéro invariant, qui est stable). Ces deux pôles sont déterminés de manière à conserver au mieux la dynamique des éléments diagonaux. Pour cela, les transferts diagonaux du procédé initial sont réduits à l'ordre 1, comme (III2.50).

$$\begin{aligned}
 G_{d11}(s) &= \frac{9,7}{(1 + 3960s)} \\
 G_{d22}(s) &= \frac{8,7}{(1 + 3770s)}
 \end{aligned}
 \tag{III2.50}$$

En utilisant les pôles et les gains statiques des transferts de (III2.50), on en déduit la matrice  $L$  comme en (III2.51) et la matrice  $M$  (III2.52). Le système bouclé par le retour d'état est alors donné dans (III2.53).

$$L = \begin{bmatrix} -3,1 & 0 & 3,1 \\ 0 & -1,8 & 1,8 \end{bmatrix}
 \tag{III2.51}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0,38 & 0 \\ 0 & 0,36 \end{bmatrix}
 \tag{III2.52}$$

$$G_d(s) = \begin{bmatrix} G_{d11}(s) & 0 \\ 0 & G_{d22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9,7}{(1 + 3960s)} & 0 \\ 0 & \frac{8,7}{(1 + 3770s)} \end{bmatrix} \quad (\text{III2.53})$$

### Synthèse de régulateurs SISO

La seconde étape consiste à synthétiser des correcteurs PI permettant d'assurer les performances souhaitées. La méthode de réglage PID-IMC (définie dans le Chapitre II) est appliquée à chacun des deux transferts et les réglages des correcteurs PI sont donnés dans le Tableau III2-12.

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
Synthèse	2,05	3770	2,17	3960

Tableau III2-12 : Réglages monoboucles

En supposant dans un premier temps l'état du système connu, les réponses nominales sont *parfaites*, comme on peut le voir sur la Figure III2-16. Par ailleurs, le retour d'état consiste uniquement en une matrice constante de taille 2×3. La matrice de préfiltre étant diagonale, celle-ci peut être combinée avec le correcteur diagonal, sans en augmenter la complexité.

Le problème est que la hauteur  $h_3$  n'est pas connue. Il est alors nécessaire de mettre en place un observateur d'état, comme présenté sur la Figure III2-15. Un observateur complet de Luenberger a été synthétisé avec des méthodes classiques de placement de pôles. Le choix des pôles  $-5 \times 10^{-2}$ ,  $-6 \times 10^{-2}$ ,  $-7 \times 10^{-2}$  rad/s conduit à (III2.54) (sachant que ceux de la structure bouclée sont de  $-5 \times 10^{-3}$  rad/s).

$$L = \begin{bmatrix} 0,060 & 0,014 \\ 0,012 & 0,056 \\ 0,045 & 0,029 \end{bmatrix} \quad (\text{III2.54})$$

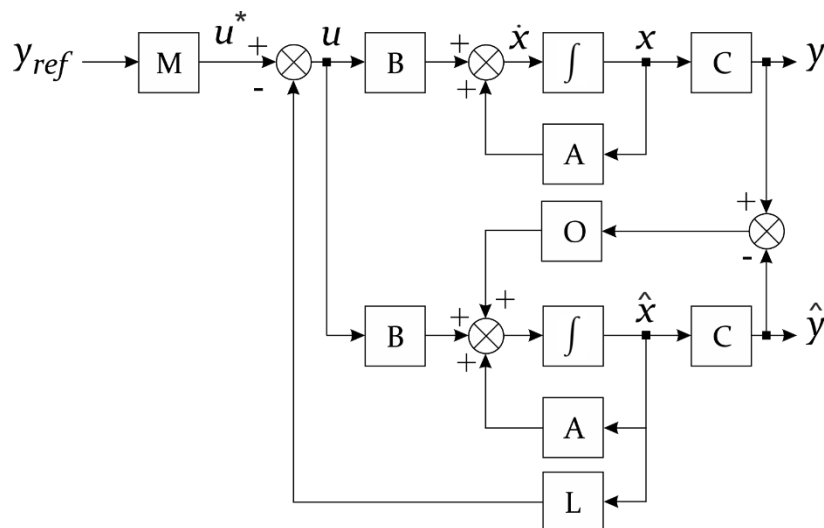


Figure III2-15 : Schéma de la commande par retour d'état avec observateur

Les réponses indicielles du système linéaire en boucle fermée avec l'observateur sont tracées sur la Figure III2-16. L'état initial de l'observateur a été écarté de 10% par rapport à l'état initial réel. Les réponses ne sont ainsi plus *parfaites* mais restent très performantes.

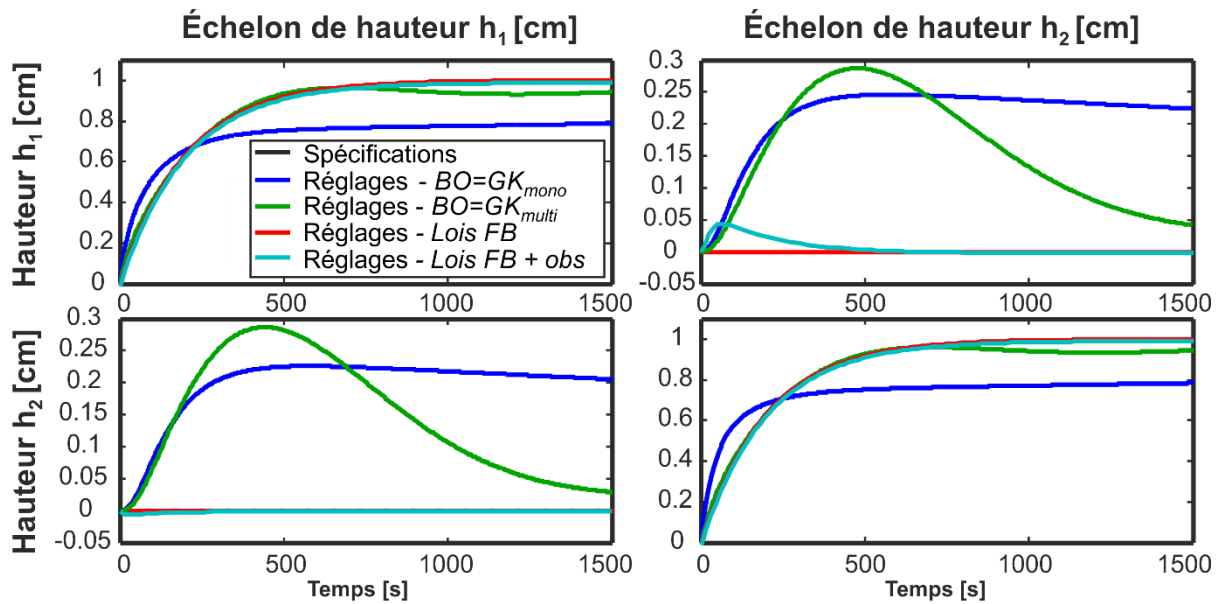


Figure III2-16 : Réponses indicielles en boucle fermée avec un découpleur par retour d'état

### iii. Conclusions sur les méthodes de découplage statique par retour d'état

Les méthodes de découplage par retour d'état peuvent être adaptées de manière à découpler le procédé, sans pour autant chercher à asservir ce dernier. Les pôles du système bouclé par le retour d'état peuvent être choisis afin de conserver au mieux la dynamique des éléments diagonaux du procédé. Une fois le découplage réalisé, il est possible de synthétiser une commande décentralisée tout comme dans le cas des méthodes précédentes.

Un avantage important de cette méthode est que le découplage est parfait sur le modèle nominal. Cela permet alors de faciliter le réglage des correcteurs monovariables puisque ces derniers peuvent être déterminés individuellement.

En revanche, l'utilisation d'un retour d'état nécessite généralement la présence d'un observateur. L'observateur introduit alors nécessairement une perte dans la précision des résultats. Par ailleurs, le fait d'ajouter un observateur complexifie à la fois la synthèse des lois de commande et leur implantation. Le Tableau III2-13 résume les points discutés précédemment.

Méthode	Performances	Mise en place de la méthode	Complexité des compensateurs
Découplage par retour d'état	++++	+++	++

Tableau III2-13 : Méthodes de synthèse d'un découplage par retour d'état

### III2d. Conclusions de l'étude des méthodes de découplage statique

Les avantages des méthodes de découplage statique résident d'une part dans la simplicité des compensateurs, et d'autre part dans la simplicité de leurs synthèses. Si les méthodes mettant uniquement en œuvre un pré-compensateur statique restent relativement limitées, les méthodes avec pré-compensateur et post-compensateur permettent généralement d'obtenir de bonnes performances en termes de découplage. Un autre atout de ces méthodes est qu'elles s'appuient sur les réponses fréquentielles du procédé et non sur un modèle analytique. L'inconvénient de ces méthodes est généralement le manque de degrés de liberté, ce qui conduit généralement à un découplage ciblé uniquement sur une faible plage fréquentielle.

Notons qu'il est possible d'implanter directement le produit des compensateurs et des régulateurs. Cela revient alors à une stratégie centralisée. Dans le cas où les régulateurs sont de type PID, on parle notamment de *Centralized PI/PID* (Garrido *et al.*, 2009), (Liu and Gao, 2012), (Chen *et al.*, 2013). Bien que probablement plus simple à implanter, l'inconvénient principal de ces méthodes est la perte de transparence de la structure et donc la facilité de réglage des lois de commande. Inversement, il semble possible de concevoir un régulateur multivariable de type *Centralized PI*, avant de le décomposer en un régulateur diagonal composé de correcteurs monovariabiles de type PI et un compensateur statique.

Les méthodes de découplage par retour d'état offrent une autre alternative, qui permet d'obtenir un découplage nominal total, sous certaines hypothèses. L'inconvénient de ces dernières est la nécessité de la synthèse d'un observateur.

### III.3. Méthodes de découplage dynamique

Dans le cas où les méthodes statiques ne permettent pas d'obtenir un découplage convenable vis-à-vis des spécifications, il est possible d'utiliser des compensateurs dynamiques. Ces compensateurs peuvent être représentés par des matrices de transfert et possèdent ainsi plus de degrés de liberté.

Comme pour les méthodes statiques, les méthodes de découplage avec pré-compensateur seront tout d'abord traitées. Les méthodes avec pré et post-compensateurs dynamiques seront ensuite exposées. Il est à noter que la plupart des méthodes sont des extensions des méthodes statiques.

#### III.3a. Méthodes avec pré-compensateur

##### i. Optimisation du découplage

Une solution permettant de trouver le pré-compensateur dynamique optimal est de chercher à minimiser l'indice  $\rho$  en fonction des éléments du pré-compensateur, comme lors de l'optimisation dans le cas statique.

Chaque colonne peut être déterminée indépendamment, donc l'optimisation peut être décomposée en  $r$  problèmes d'optimisation indépendants, tout comme dans le cas statique. Le nombre de paramètres à optimiser dépend de la forme du compensateur. Celui-ci est pris comme étant composé de polynômes d'ordre  $p$  (la réalisation du compensateur sera abordée à la fin de la méthode).

Chaque terme  $D_{ij}$  peut ainsi se mettre sous la forme (III.3). Une colonne  $C_i(D(s))$  est ainsi donnée par (III.4). Cette colonne peut ainsi être décomposée en différentes colonnes (III.5) et est constituée de  $r(p+1)$  paramètres à optimiser. Il est toutefois possible de se ramener à  $n=r(p+1)-1$  paramètres.

$$G_{d_{ij}}(s) = L_i(G(s))C_j(D(s)) \quad (III.1)$$

$$DD_{c_i}(G_d(s)) = \frac{|G_{d_{ii}}(s)|}{\sum_{j \neq i}^r |G_{d_{ji}}(s)|} = \frac{|L_i(G(s))C_i(D(s))|}{\sum_{j \neq i}^r |L_j(G(s))C_j(D(s))|} \quad (III.2)$$

$$D_{i,j}(s) = D_{i,j_0} + D_{i,j_1}s + \dots + D_{i,j_{p-1}}s^{p-1} + D_{i,j_p}s^p \quad (III.3)$$

$$C_i(D(s)) = \begin{bmatrix} D_{1,i}(s) \\ D_{2,i}(s) \\ \vdots \\ D_{r-1,i}(s) \\ D_{r,i}(s) \end{bmatrix} = C_{i_0}(D(s))s^0 + \dots + C_{i_c}(D(s))s^c + \dots + C_{i_p}(D(s))s^p \quad (III.4)$$

$$C_i(D(s)) = \begin{bmatrix} D_{1,i_0} \\ D_{2,i_0} \\ \vdots \\ D_{r-1,i_0} \\ D_{r,i_0} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} D_{1,i_c} \\ D_{2,i_c} \\ \vdots \\ D_{r-1,i_c} \\ D_{r,i_c} \end{bmatrix} s^c + \dots + \begin{bmatrix} D_{1,i_p} \\ D_{2,i_p} \\ \vdots \\ D_{r-1,i_p} \\ D_{r,i_p} \end{bmatrix} s^p \quad (III.5)$$

Le problème d'optimisation est ainsi constitué de  $r$  problèmes indépendants comportant chacun  $n=r(p+1)-1$  paramètres.

Le compensateur obtenu se compose de  $r^2$  polynômes de degré  $p$ . Cette matrice n'est bien sûr pas réalisable, mais il est possible d'ajouter un même dénominateur d'ordre  $p$  pour la rendre réalisable, sans pour autant impacter le découplage.



## ii. Pseudo-diagonalisation dynamique (PDD)

La pseudo-diagonalisation dynamique (Ford and Daly, 1979) est une extension de la pseudo-diagonalisation, dans le cas d'un pré-compensateur  $D$  dynamique. Tout comme dans la partie III2a, le but est de minimiser la fonction  $v_i$  définie dans (III3.6).

Dans le cas statique de la partie III2a, on a vu qu'il était possible de se ramener à un problème analytique, qui peut être résolu avec l'algorithme multi-ALIGN. Dans le cas où la colonne  $C_i(D(s))$  est dynamique, il est possible de se ramener au problème multi-ALIGN défini précédemment :

Les notations utilisées dans (III3.4) sont à nouveau considérées. L'expression  $L_i(G(s))C_i(D(s))$  peut être reformulée (III3.7). Il est alors possible de définir  $L_i(H)$  et  $C_j(N)$  comme dans (III3.9). Le but est de s'affranchir des termes dynamiques dans la recherche du pré-compensateur. L'expression  $v_i$  de (III2.14) peut alors être mise sous la forme de (III3.10) avec  $C_i(N)$  une matrice colonne constante et  $W_t$  la matrice de pondération. Des solutions analytiques peuvent alors être déterminées pour rechercher les  $N_i$  en utilisant l'algorithme multi-ALIGN comme dans (III3.11).

$$v_i(G) = \frac{\sum_k W_t(\omega_k) |L_i(G(j\omega_k))C_i(D(j\omega_k))|^2}{\sum_k W_t(\omega_k) \sum_{j \neq i}^r |L_j(G(j\omega_k))C_i(D(j\omega_k))|^2} \quad (\text{III3.6})$$

$$L_i(G(s))C_i(D(s)) = L_i(G(s))C_{i_0}(D(s))s^0 + \dots + L_i(G(s))C_{i_p}(D(s))s^p \quad (\text{III3.7})$$

$$L_i(G(s))C_i(D(s)) = [L_i(G(s)), \dots, s^p L_i(G(s))] \begin{bmatrix} C_{i_0}(D(s)) \\ \vdots \\ C_{i_p}(D(s)) \end{bmatrix} \quad (\text{III3.8})$$

$$L_i(H(s)) = [L_i(G(s)), sL_i(G(s)), \dots, s^p L_i(G(s))]$$

$$C_j(N) = \begin{bmatrix} C_{i_0}(N) \\ \vdots \\ C_{i_p}(N) \end{bmatrix} \quad (\text{III3.9})$$

$$v_i(G) = \frac{\sum_k W_t(\omega_k) |L_i(H(j\omega_k))C_i(N)|^2}{\sum_k W_t(\omega_k) \sum_{j \neq i}^r |L_j(H(j\omega_k))C_i(N)|^2} \quad (\text{III3.10})$$

$$N = \text{multiALIGN}(H^{-1}, W_t) \quad (\text{III3.11})$$

## iii. Inversion dynamique - Découpleurs

Le principe de l'inversion avec un pré-compensateur statique abordé dans la partie III2a est de considérer comme pré-compensateur, une approximation réelle de l'inverse du procédé évalué à une certaine pulsation. L'inconvénient de cette méthode est que le découplage n'est généralement efficace que sur un intervalle fréquentiel limité. Le principe de base de l'inversion dynamique (« Inverse-based decoupling ») consiste à utiliser l'inverse de la matrice de transfert du procédé. Cela permet ainsi de découpler le procédé sur tout le domaine fréquentiel.

Trois techniques sont dérivées de ce principe (Shinskey, 1996) :

- Découpleur idéal,
- Découpleur simplifié,
- Découpleur inversé.

Les premiers travaux sur les découpleurs ont été réalisés par (Zalkind, 1967), (Luyben, 1970), (Changlai and Ward, 1972), (Luyben and Vinante, 1972), (Waller and Fagervik, 1972) et (Waller, 1974). Le découpleur idéal est apparu le premier. Le découpleur simplifié a ensuite été largement utilisé. De par

ses avantages, le découpleur inversé s'est à présent imposé comme la référence (Garrido *et al.*, 2012b), (Stemmann and Rantzer, 2014). Ces techniques vont être présentées pour des procédés TITO, pour lesquelles elles ont été développées à l'origine (Aström *et al.*, 2002).

### Découpleur idéal

Le procédé compensé  $G_d$  est donné par (III.12) (l'opérateur de Laplace a été omis dans les équations qui suivent par soucis de lisibilité). Si  $G_d$  est connu ou fixé, il est ainsi possible d'en déduire  $D$ . Le principe du découpleur idéal est de choisir  $G_d$  comme la matrice de transfert comportant les éléments diagonaux de  $G$  (III.13). L'expression de  $D$  est alors donnée par (III.14). Le schéma du découpleur idéal est présenté sur la Figure III-1.

$$\begin{bmatrix} G_{d11} & G_{d12} \\ G_{d21} & G_{d22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} \begin{bmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

$$D = \frac{1}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} \begin{bmatrix} G_{11}G_{22} & -G_{12}G_{22} \\ -G_{21}G_{11} & G_{11}G_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

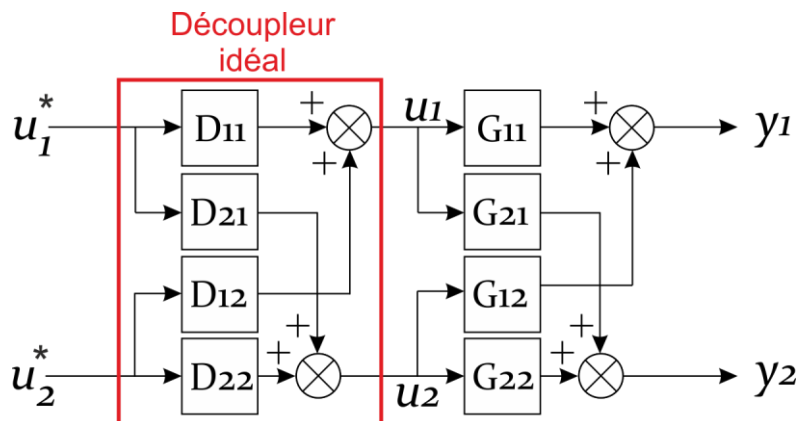


Figure III-1 : Schéma du découpleur idéal

Lorsque cela est possible, ce choix permet d'obtenir un système nominal  $G_d$  parfaitement découplé. Par ailleurs, le fait de conserver les éléments diagonaux du système permet de préserver le sens physique et faciliter le réglage des correcteurs. L'inconvénient majeur du découpleur idéal est que les expressions du compensateur sont généralement complexes. Des considérations sur la stabilité nominale seront étudiées après la présentation des autres formes de découpleur.

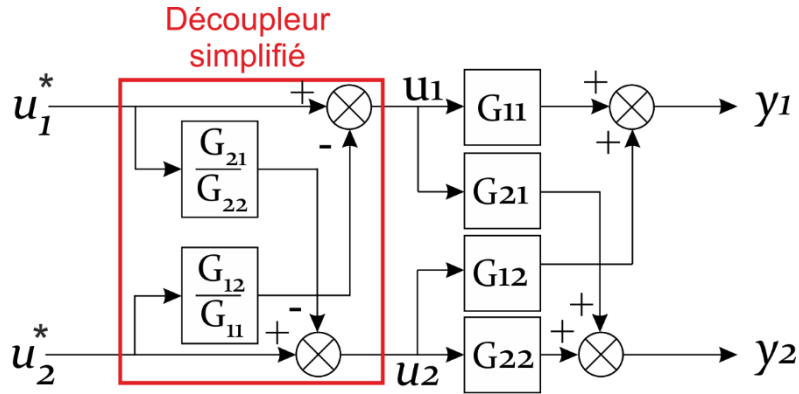
### Découpleur simplifié

Une alternative au découpleur idéal est le découpleur simplifié. Ce dernier met alors en jeu des termes bien plus simples. Le principe du découpleur simplifié est de choisir  $D$  comme dans (III.15). Le schéma correspondant au découpleur simplifié est présenté sur la Figure III-2.

La matrice  $G_d$  résultante est donnée en (III.16) et est totalement découplée. En revanche, la matrice  $G_d$  est nettement moins intéressante que la matrice obtenue dans le cas du découplage idéal. En effet, celle-ci renferme des sommes de fonction de transfert, qui doivent ainsi être approchées pour réaliser la synthèse des régulateurs.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.15})$$

$$G_d = \begin{bmatrix} G_{11} - G_{12} \frac{G_{21}}{G_{22}} & 0 \\ 0 & G_{22} - G_{21} \frac{G_{12}}{G_{11}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.16})$$



*Figure III-2 : Schéma du découpleur simplifié*

#### Découpleur inversé

Pour faciliter la réalisation de la matrice de transfert  $D$  lors d'un découplage idéal, la méthode du découpleur inversé consiste à modifier la structure de réalisation du compensateur permettant le découplage. Les notations de la Figure III-3 sont utilisées : les commandes issues des régulateurs sont notées  $u_1^*$  et  $u_2^*$ , et les commandes réelles sont notées  $u_1$  et  $u_2$ . Par manipulation algébrique, il est alors possible de se ramener à (III.3.20).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.17})$$

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.18})$$

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{G_{12}}{G_{11}} \\ \frac{G_{21}}{G_{22}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.19})$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* - \frac{G_{12}}{G_{11}} u_2^* \\ u_2^* - \frac{G_{21}}{G_{22}} u_1^* \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.20})$$

Cette expression correspond alors au schéma de la Figure III-3. Cette forme ne comporte que deux transferts. On peut noter qu'il s'agit des mêmes transferts que ceux utilisés par le découpleur simplifié. Contrairement à ce dernier, le découpleur inversé permet de conserver la dynamique des éléments diagonaux.

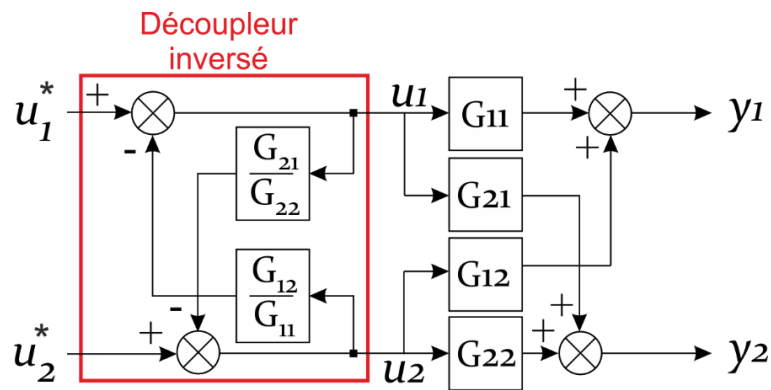


Figure III-3 : Schéma du découpleur inversé

### Stabilité et réalisation des découpleurs

Afin d'utiliser les découpleurs, il est nécessaire de satisfaire des conditions portant sur la stabilité et la réalisation.

En dehors de la stabilité de chacun des transferts, le dénominateur commun des transferts du découpleur idéal ne doit pas comporter de racine instable. Il en va de même pour le découpleur inversé. En effet, la structure du découpleur inversé n'affecte en rien la stabilité de la boucle fermée.

Les structures simplifiées et inversées mettent en jeu les transferts  $G_{12}/G_{11}$  et  $G_{21}/G_{22}$ . Ces derniers doivent ainsi :

- Être réalisables (l'ordre du dénominateur doit être au moins égal à celui du numérateur).
- Ne pas présenter de pôles instables.
- Ne pas présenter des avances (dans le sens de retards purs positifs).

Dans le cas où les transferts ne respectent pas ces conditions, il est possible de contourner ces problèmes en modifiant la structure du découpleur. Différentes solutions sont proposées dans (Garrido *et al.*, 2011a)). Une variante du découpleur inversé a notamment été appliquée dans (Le Brun *et al.*, 2014b)). Cette dernière permet d'assurer le découplage nominal parfait et la conservation des dynamiques des éléments diagonaux, en utilisant les transferts  $G_{11}/G_{12}$  et  $G_{22}/G_{21}$  (i.e. les inverses des transferts utilisés dans la Figure III-3). Pour cela, l'équation (III.20) est transformée en (III.21). Le schéma de cette variante est présenté sur la Figure III-4.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_{22}}{G_{21}}(u_2^* - u_2) \\ \frac{G_{11}}{G_{12}}(u_1^* - u_1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

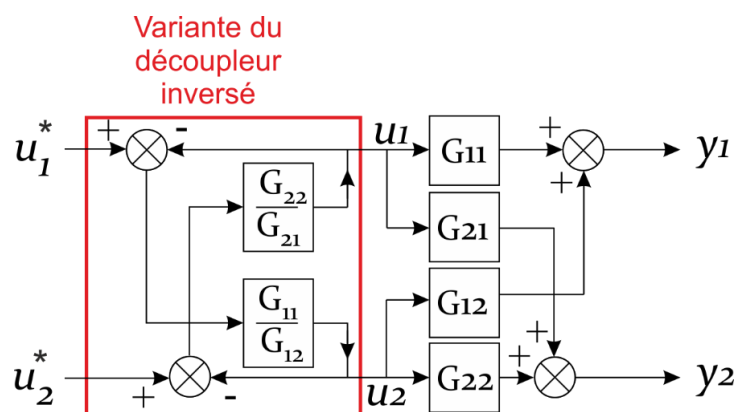


Figure III-4 : Schéma d'une variante du découpleur inversé

## Comparaison des découpleurs

De nombreux auteurs ont comparé les avantages et inconvénients de ces différentes solutions (découpleur idéal, simplifié et inversé). (Gagnon *et al.*, 1998) montre que la stabilité robuste et les performances robustes sont équivalentes pour les trois découpleurs lorsque les régulateurs sont synthétisés de manière à avoir les mêmes performances nominales. (Garrido *et al.*, 2011b)) présente des avantages pratiques du découpleur inversé, notamment sur des problématiques d'initialisation, de commutation mais surtout d'anti-windup pour des correcteurs PI en amont du découpleur.

### Généralisation à des procédés non TITO

Le découpleur idéal peut être facilement appliqué pour des procédés non TITO en utilisant l'expression (III.3.22). Il en va de même pour le découpleur simplifié en utilisant (III.3.23) (Garrido *et al.*, 2012a)). Le découpleur inversé ne se généralise pas à des procédés MIMO quelconques.

$$D(s) = G^{-1}(s) \times \bar{G}(s) \quad (\text{III.3.22})$$

$$D(s) = G^{-1}(s) \times \overline{G^{-1}(s)}^{-1} \quad (\text{III.3.23})$$

#### iv. Application au système de cuves

##### Optimisation du découplage

Comme précisé précédemment, la structure du compensateur est fixée avant de résoudre le problème d'optimisation. Un pré-compensateur à l'ordre 1 est tout d'abord recherché. On a  $r=2$  puisqu'il s'agit d'un procédé TITO et  $p=1$  puisque l'ordre des polynômes est de 1. Le problème se compose ainsi de deux optimisations mettant en œuvre trois paramètres chacune.

La  $DD_c$  est calculée en utilisant (III.3.24) avec les colonnes  $C_1$  et  $C_2$  données dans (III.3.25).

$$DD_{c_1}(G_d(s)) = \frac{|L_1(G(s))C_1(D(s))|}{|L_2(G(s))C_1(D(s))|} \quad (\text{III.3.24})$$

$$DD_{c_2}(G_d(s)) = \frac{|L_2(G(s))C_2(D(s))|}{|L_1(G(s))C_2(D(s))|}$$

$$C_1(D(s)) = \begin{bmatrix} D_{1,1}(s) \\ D_{2,1}(s) \end{bmatrix} = C_{10}(D(s)) + C_{11}(D(s))s = \begin{bmatrix} D_{1,10} \\ D_{2,10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,11} \\ D_{2,11} \end{bmatrix} s \quad (\text{III.3.25})$$

$$C_2(D(s)) = \begin{bmatrix} D_{1,2}(s) \\ D_{2,2}(s) \end{bmatrix} = C_{20}(D(s)) + C_{21}(D(s))s = \begin{bmatrix} D_{1,20} \\ D_{2,20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1,21} \\ D_{2,21} \end{bmatrix} s$$

Divers algorithmes d'optimisation ont été testés. La meilleure solution pour chacune des colonnes a été adoptée. Le pré-compensateur résultant est donné dans (III.3.26), après avoir été mis sous une forme plus *sympathique* sans pour autant modifier la  $DD_c$ .

$$D(s) = \begin{bmatrix} (1 + 203s) & 0,91(1 - 13,8s) \\ -(1 - 21,8s) & -(1 + 159s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.26})$$

Celui-ci comporte deux zéros instables mais ces derniers se retrouvent uniquement sur les transferts non diagonaux du procédé découplé. Cela ne pose donc pas de problème lors de la synthèse des régulateurs SISO. Les inverses de la  $DD_c$  sont tracés sur la Figure III-5 et les indices de découplage sont donnés dans le Tableau III-1.

Le pré-compensateur dynamique optimisé présente des indices de découplage meilleurs que ceux obtenus dans le cas d'un pré-compensateur statique ou avec l'utilisation des pré et post-compensateurs statiques.

Il est possible d'utiliser un pré-compensateur d'ordre 2 pour améliorer le découplage. On obtient ici (III.27), ce qui permet de réduire les indices d'interactions d'un facteur 10.

$$D(s) = \begin{bmatrix} (1 + 16,8s)(1 + 203s) & 0,91(1 - 5,18s + 16,4s^2) \\ -(1 - 3,95s + 28,7s^2) & -(1 + 20,7s)(1 + 146s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

L'augmentation du nombre de degrés de liberté pourrait encore permettre d'améliorer le découplage. Néanmoins, le découpleur simplifié (qui sera abordé ci-après) permet d'obtenir pour cet exemple un pré-compensateur composé de deux transferts d'ordre 2 qui assurent un découplage parfait. Bien que le découpleur simplifié soit en réalité un système d'ordre 4 sous forme de représentation d'état, cette forme peut être plus simple à implanter, et surtout à interpoler (comme on le verra dans le Chapitre IV) que le compensateur obtenu en (III.27) (et a fortiori ceux d'ordre plus élevés).

La règle empirique adoptée par la suite consiste à arrêter la recherche du pré-compensateur dynamique lorsque celui-ci devient plus complexe que le découpleur simplifié.

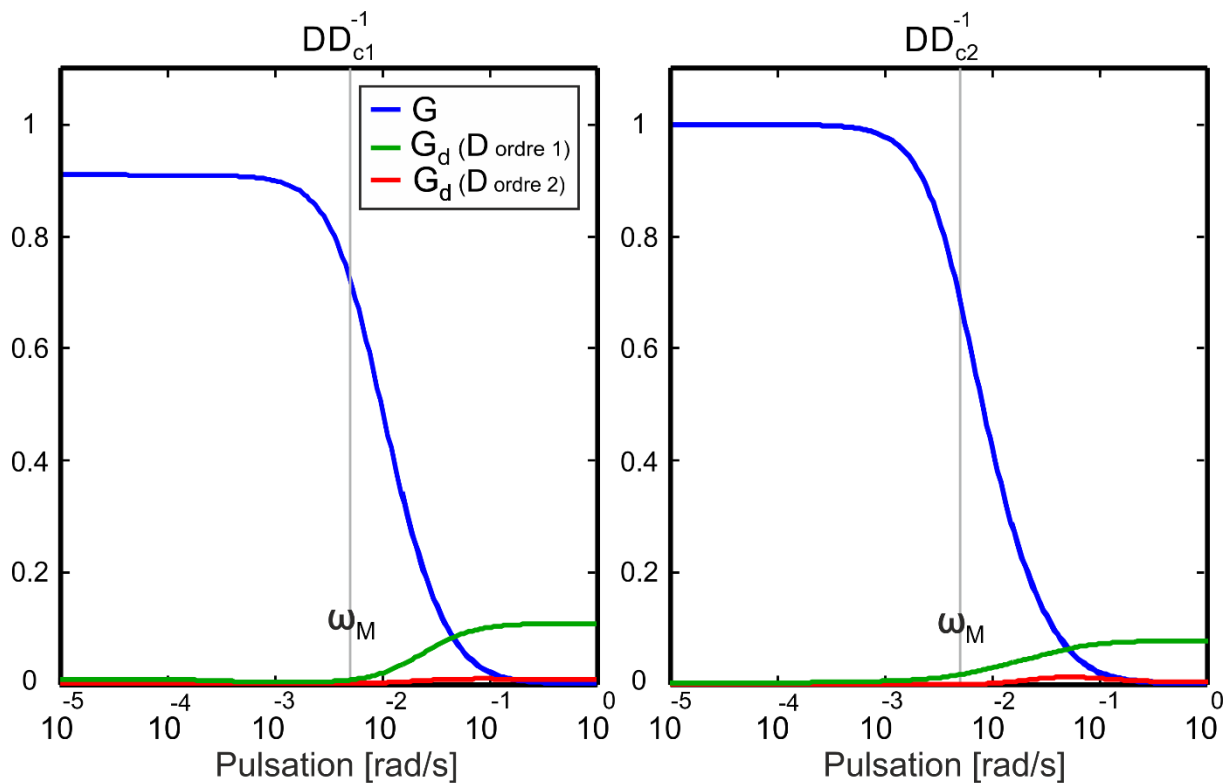


Figure III-5 : Inverse de la  $DD_c$  avec un pré-compensateur dynamique déterminé par optimisation

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
Optimisation Ordre 1	0,038	0,039	0,037
Optimisation Ordre 2	0,0042	0,0033	0,0051

Tableau III-1 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par optimisation

La méthode de découplage par optimisation permet de trouver une solution de découplage optimale vis-à-vis du critère donné. L'augmentation de l'ordre des polynômes recherchés permet d'améliorer l'efficacité du découplage. En revanche, le problème d'optimisation devient plus complexe, tout comme le pré-compensateur obtenu.

#### Pseudo-diagonalisation dynamique

La pseudo-diagonalisation dynamique est appliquée en recherchant un pré-compensateur d'ordre 1. La fonction de pondération  $W_i$  est tout d'abord prise comme égale à  $W$ , définie dans la partie III1b. En considérant  $L_1(H)$  et  $L_2(H)$  définis dans (III3.28),  $C_1(N)$  et  $C_2(N)$  (définis en (III3.9)) sont calculés en utilisant (III3.29). Le compensateur  $D$  en est directement déduit d'après (III3.30).

$$L_1(H(s)) = [G_{1,1}, G_{2,1}, sG_{1,1}, sG_{2,1}] ; L_2(H(s)) = [G_{1,2}, G_{2,2}, sG_{1,2}, sG_{2,2}] \quad (\text{III3.28})$$

$$C_i(N) = \text{ALIGN} \left( \sum_k W_t(\omega_k) |L_i(H(j\omega_k))|^2, \sum_k W_t(\omega_k) \sum_{j \neq i}^r |L_j(H(j\omega_k))|^2 \right) \quad (\text{III3.29})$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} N_{11} + N_{31}s & N_{12} + N_{32}s \\ N_{21} + N_{41}s & N_{22} + N_{42}s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1,10} + D_{1,11}s & D_{1,20} + D_{1,21}s \\ D_{2,10} + D_{2,11}s & D_{2,20} + D_{2,21}s \end{bmatrix} \quad (\text{III3.30})$$

Les résultats obtenus en appliquant cette méthode sont présentés sur la Figure III3-6 et le Tableau III3-2. Les interactions sont réduites au niveau de  $w_d$  mais sont largement accentuées en hautes fréquences. La fonction de pondération  $W_i$  n'est ainsi pas forcément adaptée au problème. Par ailleurs, il s'avère que le problème de valeurs propres généralisé met en jeu des matrices mal conditionnées dont les inverses sont difficilement calculables. Dans ce cas, cela peut impacter fortement la qualité du découplage. Le conditionnement devient par ailleurs de moins en moins bon à mesure que l'ordre des pré-compensateurs recherchés est grand.

Comme précédemment, une surcouche d'optimisation est ajoutée afin de faire varier la fonction de pondération  $W_i$ . L'optimisation porte alors sur le paramètre  $w_d$  utilisé dans (III1.3) (sans pour autant modifier la fonction de pondération  $W$  utilisée dans l'indice de découplage).

Le pré-compensateur obtenu est donné dans (III3.31). La forme de celui-ci est relativement proche du pré-compensateur déterminé par optimisation (III3.26). Les allures des courbes de la  $DD_c$  sont assez proches (Figure III3-6), tout comme les résultats en termes de découplage.

$$D(s) = \begin{bmatrix} (1 + 222s) & 0,911(1 - 13,5s) \\ -(1 - 15,9s) & -(1 + 162s) \end{bmatrix} \quad (\text{III3.31})$$

Bien que cette solution ne soit pas très *physique*, dans le sens où l'on biaise volontairement la fonction de pondération de la pseudo-diagonalisation, les résultats sont similaires à ceux obtenus par optimisation, pour un temps de calcul moins important. Ce gain de temps s'accroît d'autant plus lorsque les dimensions et l'ordre du compensateur augmentent. En effet, le nombre de paramètres de l'optimisation augmente avec la complexité du problème alors que celui-ci reste constant dans le cas de la surcouche d'optimisation pour la pseudo-diagonalisation.

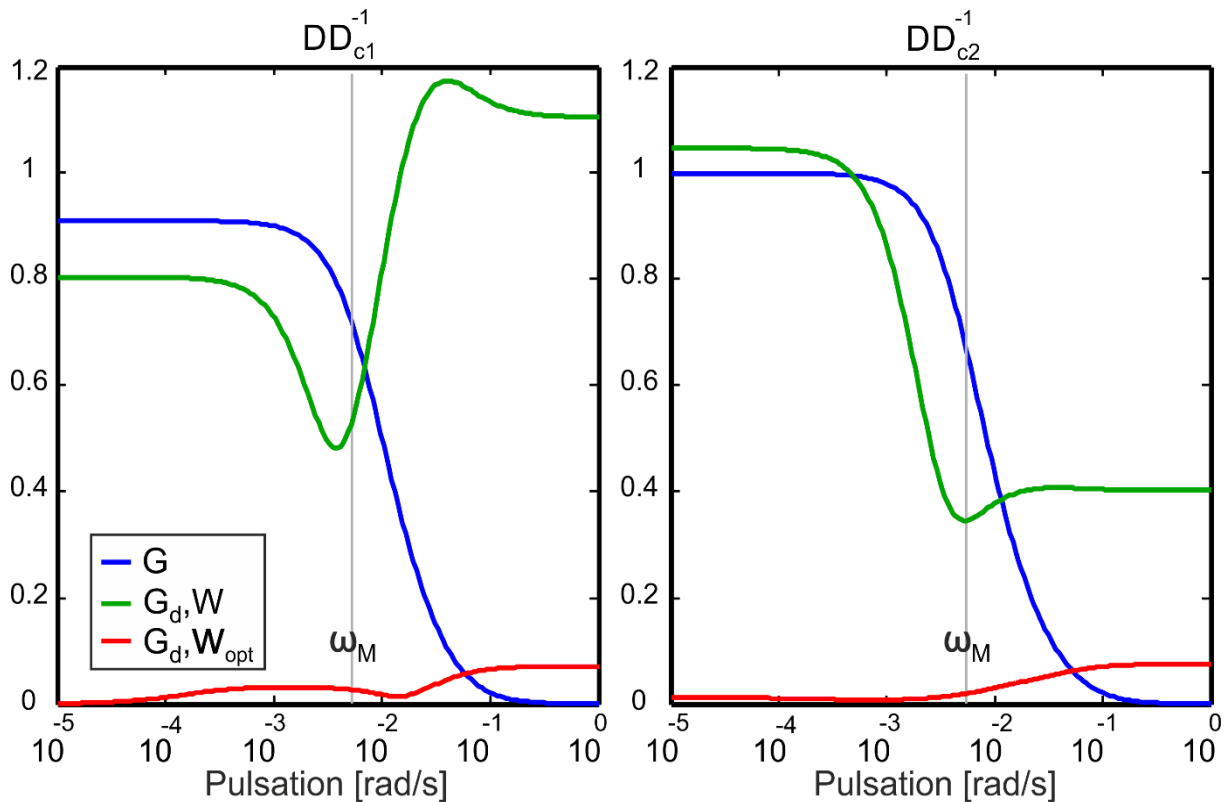


Figure III3-6 : Inverse de la DDc avec un pré-compensateur déterminé par PDD

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
multi-PDD $W$	0,71	0,81	0,61
multi-PDD $W_{opt}$	0,038	0,039	0,036

Tableau III3-2 : Indices de découplage avec un pré-compensateur déterminé par PDD

La pseudo-diagonalisation dynamique est une alternative à l'optimisation. La résolution analytique est un avantage indéniable par rapport à l'optimisation, plus contraignante en termes de temps de calcul. En revanche, la fonction de coût utilisée ne permet pas forcément d'obtenir de bons résultats, vis-à-vis de l'indice de découplage utilisé. Par ailleurs, la résolution analytique repose sur des problèmes mettant en jeu le calcul d'inverses de matrices mal conditionnées, ce qui peut impacter les résultats. Une surcouche d'optimisation est ainsi nécessaire pour améliorer les résultats. Mais contrairement à la méthode de découplage par optimisation, la surcouche d'optimisation se fait sur la fonction de pondération, et donc avec un nombre de paramètres constant, quels que soient la taille du procédé et l'ordre des compensateurs polynomiaux recherchés.

#### Inversion dynamique - Découpleurs

Le découpleur idéal est déterminé avec la formule (III3.14) et donné dans (I3.11). Il s'agit d'une matrice de transfert d'ordre 4, propre (non strictement) et qui ne possède pas de retards purs, de zéros et pôles instables. Bien qu'elle soit réalisable, celle-ci est relativement complexe à implanter.



$$\begin{aligned}
D_{11}(s) &= \frac{11,1 \times (1 + 21,1s) \times (1 + 26,9s) \times (1 + 144,6s) \times (1 + 202,3s)}{(1 + 20,2s) \times (1 + 31,4s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4279s)} \\
D_{12}(s) &= \frac{-11,1 \times (1 + 26,9s) \times (1 + 144,6s)}{(1 + 20,2s) \times (1 + 31,4s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4279s)} \\
D_{21}(s) &= \frac{-10,1 \times (1 + 21,1s) \times (1 + 202,3s)}{(1 + 20,2s) \times (1 + 31,4s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4279s)} \\
D_{22}(s) &= \frac{11,1 \times (1 + 21,1s) \times (1 + 26,9s) \times (1 + 144,6s) \times (1 + 202,3s)}{(1 + 20,2s) \times (1 + 31,4s) \times (1 + 68,5s) \times (1 + 4279s)}
\end{aligned}
\tag{III.32}$$

Étant donné la forme des transferts du procédé  $G$ , les formes standards des découpleurs simplifié et inversé peuvent être utilisées. Les transferts sont donnés par (III.33). Ils sont effectivement réalisables, et ne comportent pas de pôles instables ou d'avances (dans le sens de retards purs positifs).

$$\begin{aligned}
\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} &= \frac{1}{(1 + 21,1s) \times (1 + 202,3s)} \\
\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} &= \frac{-0,91}{(1 + 26,9s) \times (1 + 144,6s)}
\end{aligned}
\tag{III.33}$$

Le découplage étant total avec les trois découpleurs, les  $DD_c$  sont quasiment nulles (aux erreurs numériques près). Devant la complexité des termes du découpleur idéal, il est légitime de se demander quelle serait la qualité du découplage en considérant des découpleurs réduits.

Le découpleur idéal est d'ordre 4 et a été réduit jusqu'à l'ordre 1 par des techniques classiques de réduction. Les résultats obtenus avec les découpleurs réduits sont présentés sur la Figure III-7 et dans le Tableau III-3. La précision du découplage est bien évidemment impactée au fur et à mesure des simplifications.

On peut remarquer qu'à ordre égal, un pré-compensateur obtenu par réduction du découpleur idéal est moins performant en termes de découplage qu'un pré-compensateur déterminé directement par optimisation. Toutefois, le calcul et la réduction du découpleur idéal sont bien plus rapides à mettre en place que l'optimisation. Il est ainsi possible de se servir des résultats du découpleur idéal réduit, afin d'avoir des bonnes conditions initiales pour l'optimisation.

La réduction à l'ordre 1 des transferts des découpleurs simplifié et inversé est en revanche nettement moins efficace. Par ailleurs, la réduction des transferts du découpleur inversé nécessite la vérification de la stabilité de la structure.

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	0,73	0,72	0,74
Découpleur idéal/simplifié/inversé	$10^{-14}$	$10^{-14}$	$10^{-14}$
Découpleur idéal réduit à l'ordre 3	0,054	0,053	0,055
Découpleur idéal réduit à l'ordre 2	0,068	0,057	0,079
Découpleur idéal réduit à l'ordre 1	0,28	0,25	0,30

Tableau III-3 : Indices de découplage avec un découpleur idéal réduit

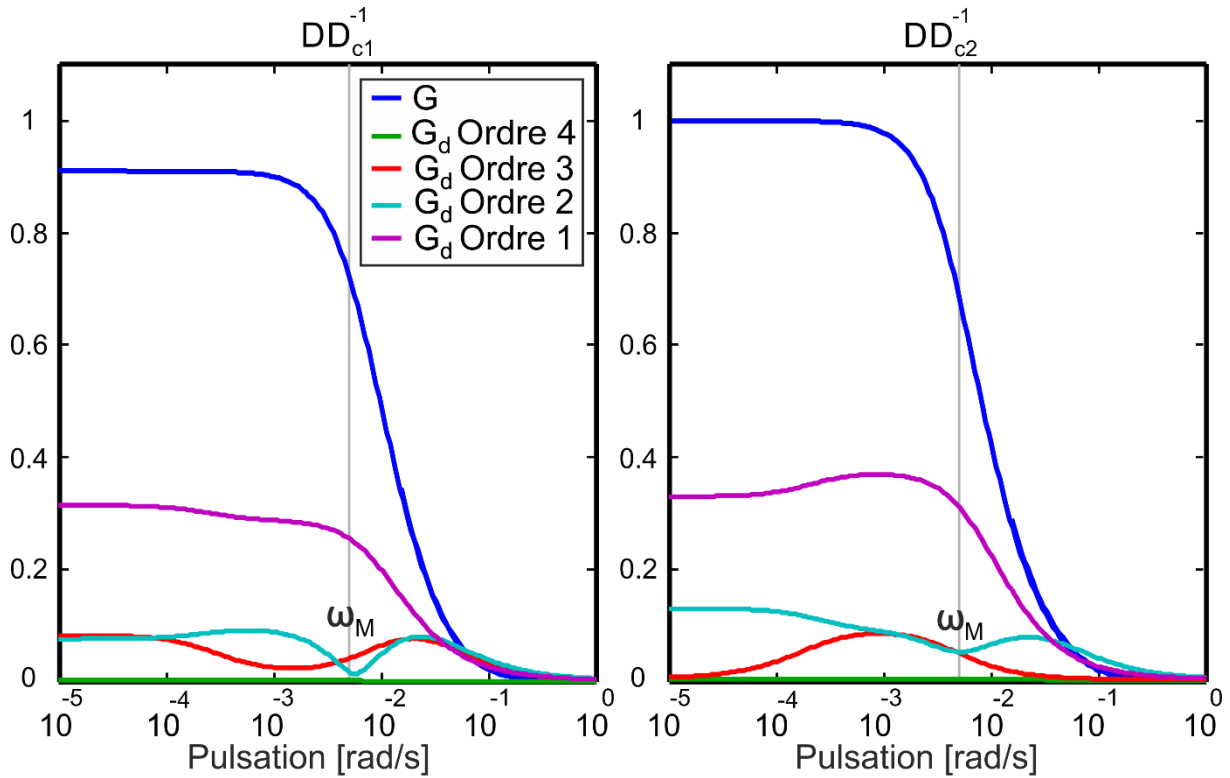


Figure III3-7 : Inverse de la  $DD_c$  avec un découpleur idéal réduit

Les méthodes par inversion dynamique sont finalement rapides à mettre en place et permettent d'obtenir un découplage parfait dans le cas nominal. Leur inconvénient réside dans la complexité du pré-compensateur, même si les formes simplifiée et inversée restent d'une complexité raisonnable. Par ailleurs, ces méthodes utilisent explicitement le modèle du procédé. Cela peut donc poser quelques problèmes de robustesse dans le cas où le procédé est mal connu. Elles sont en général utilisées dans des cas TITO où les dynamiques du procédé n'excèdent pas le second ordre.

#### Synthèse de régulateurs SISO

La synthèse de régulateurs SISO est réalisée pour le système comprenant le procédé et le pré-compensateur d'ordre 1 obtenu par optimisation. En effet, celui-ci est légèrement meilleur que celui obtenu par pseudo-diagonalisation dynamique. Il a été décidé de ne pas retenir le pré-compensateur d'ordre 2 étant donné sa complexité comparativement au découpleur simplifié.

Sachant que les synthèses monoboucle et multiboucle conduisent à des résultats similaires dans le cas des pré et post-compensateurs statiques dans III2b, et que le découplage a été amélioré avec les pré-compensateurs dynamiques, il a été décidé de ne procéder qu'à une synthèse monoboucle.

Le pré-compensateur déterminé dans (III3.26) est composé de polynômes de degré 1. Afin de le rendre réalisable, il est nécessaire d'ajouter des filtres  $F_i$  d'un ordre supérieur ou égal à 1. Un même filtre doit par ailleurs être appliqué sur chacun des transferts d'une colonne dans le but de préserver la  $DD_c$ . Une façon de les déterminer est de choisir des filtres du premier ordre, permettant de se rapprocher au mieux des éléments diagonaux du procédé initial (III3.34). En procédant de la sorte, on obtient les filtres donnés en (III3.35). Les pôles de ces filtres étant relativement proches, il a été décidé de considérer un unique pôle, comme on peut le voir dans (III3.35). Le pré-compensateur résultant est donné en (III3.36), celui-ci correspond à une matrice de transfert d'ordre 1.

$$G(s)D(s)F(s) \approx \bar{G}(s) \quad (\text{III3.34})$$

$$F_1(s) = \frac{11,0}{(1 + 4018s)} \cong \frac{11,0}{(1 + 3931s)} \quad (III.35)$$

$$F_2(s) = \frac{-10,8}{(1 + 3844s)} \cong \frac{-10,8}{(1 + 3931s)}$$

$$D(s) = \frac{1}{(1 + 3931s)} \begin{bmatrix} 11,0(1 + 203s) & -9,83(1 - 13,8s) \\ -11,0(1 - 21,8s) & 10,8(1 + 159s) \end{bmatrix} \quad (III.36)$$

En utilisant la méthode de synthèse SISO du Chapitre II, les réglages des régulateurs SISO sont présentés dans le Tableau III-4 et les réponses temporelles en boucle fermée sont tracées sur la Figure III-8 pour des échelons de consigne unité.

Des régulateurs SISO sont également synthétisés pour le découpleur inversé. Les interactions étant inexistantes dans le cas nominal, il est possible de considérer les réglages obtenus lors des synthèses monoboucles sur le procédé original. Les réponses obtenues avec le découpleur inversé sont également tracées sur la Figure III-8.

Il s'avère que les réponses des éléments diagonaux sont plus éloignées des réponses spécifiées avec le découpleur inversé qu'avec le pré-compensateur d'ordre 1. Cela n'est pas forcément anormal. En effet, les éléments diagonaux du système comprenant le pré-compensateur d'ordre 1 sont plus appropriés à une synthèse de régulateur PI que les transferts diagonaux du procédé original.

	$k_{p1}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i1}$ [s]	$k_{p2}$ [cm <sup>2</sup> /s]	$\tau_{i2}$ [s]
Découpleur Ordre 1	2,01	3805	2,21	3775
Découpleur inversé	2,15	4221	2,35	4171

Tableau III-4 : Réglages monoboucles du procédé découplé

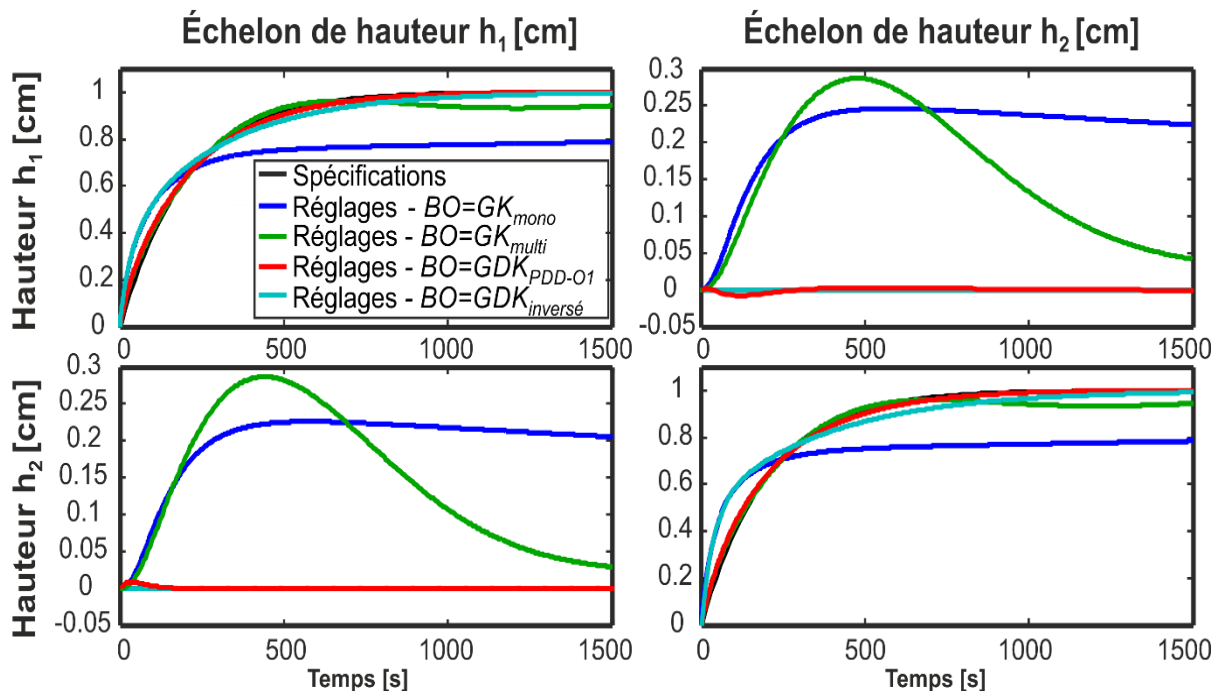


Figure III-8 : Réponses indicielles en boucle fermée avec/sans pré-compensateur dynamique

### v. Comparaison des méthodes de découplage dynamique avec pré-compensateurs

Les trois méthodes présentées dans cette partie ont pour but la synthèse d'un pré-compensateur dynamique. Celles-ci sont des extensions des méthodes traitées dans la partie III2a. L'intérêt de ces méthodes est d'augmenter l'efficacité du découplage, et ce, sur une plage fréquentielle plus importante qu'avec les méthodes statiques. Par ailleurs, lorsque les pré-compensateurs synthétisés atteignent un certain niveau de découplage, il est possible de se contenter d'une synthèse monoboucle.

Le Tableau III3-5 permet de comparer les méthodes étudiées dans le cas TITO et dans le cas général. Si l'on cherche à obtenir un découplage total, le découpleur inversé sera préféré dans le cas TITO, alors que le découpleur simplifié sera utilisé dans le cas général. Si un découplage total n'est pas recherché, les méthodes d'optimisation et de pseudo-diagonalisation à l'ordre 1 peuvent être suffisantes.

Méthode	Performances	Mise en place de la méthode	Complexité des compensateurs
Optimisation	++++	+(+)	++
Pseudo-diagonalisation dynamique	++++	++	++
Découpleur idéal	+++++	++++	+
Découpleur simplifié	+++++	+++	++(+)
Découpleur inversé	(+++++)	(++++)	(++)

Tableau III3-5 : Comparaison des méthodes de synthèse d'un pré-compensateur dynamique

### III3b. Méthodes avec pré-compensateur et post-compensateur

Certaines méthodes permettent de synthétiser des pré-compensateurs et post-compensateurs dynamiques. Ces méthodes sont généralement complexes à mettre en œuvre, sans compter que les compensateurs synthétisés sont d'ordre élevé. Ces méthodes seront brièvement présentées, mais ne seront pas appliquées au système de cuves.

#### i. Méthodes des lieux caractéristiques

La méthode des lieux caractéristiques (MacFarlane and Kouvaritakis, 1977) est une extension de la décomposition en valeurs propres traitée dans la partie III2b. Au lieu de se placer à une pulsation, on peut écrire :

$$G_d(s) = V^{-1}(s)G(s)V(s) \quad (\text{III3.37})$$

$G_d$  et  $V$  contiennent respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de  $G$  sur l'ensemble du domaine fréquentiel. On parle de fonctions caractéristiques et de directions caractéristiques.

Le but est de synthétiser le correcteur diagonal  $K_d$  et de l'associer aux pré et post-compensateurs dynamiques, comme en (III3.38). On parle habituellement de *compensateur commutatif* pour cette structure. En effet,  $G$  et  $K$  commutent d'après (III3.39), puisque  $G_d$  et  $K_d$  sont des matrices de transfert diagonales.

$$K(s) = V(s)K_d(s)V^{-1}(s) \quad (\text{III3.38})$$

$$G(s)K(s) = V(s)G_d(s)K_d(s)V^{-1}(s) = V(s)K_d(s)G_d(s)V^{-1}(s) = K(s)G(s) \quad (\text{III3.39})$$

Le problème est que les fonctions caractéristiques, tout comme les directions caractéristiques sont généralement des fonctions irrationnelles en  $s$ . Les compensateurs ne peuvent donc pas être implantés physiquement.

Il est alors nécessaire d'approcher les directions caractéristiques par des fonctions rationnelles. On parle dans ce cas de *compensateur quasi-commutatif*. Une autre alternative est de synthétiser le correcteur en plusieurs étapes, en différenciant des compensations en basses, moyennes et hautes fréquences (MacFarlane and Kouvaritakis, 1977).

### ii. Décomposition quasi-Nyquist

La décomposition quasi-Nyquist (également appelée *Reversed-frame normalization*) est une extension de la méthode de décomposition en valeurs singulières traitée dans la partie III2b. Le principe est ainsi le même que celui de la méthode des lieux caractéristiques. Au lieu de se placer à une pulsation, on peut écrire :

$$G_d(s) = U^*(s)G(s)V(s) \quad (\text{III3.40})$$

Une difficulté supplémentaire est que les valeurs singulières, représentées par  $G_d$ , sont réelles. Il est alors nécessaire de reconstituer une phase  $Y^*$ , afin de procéder à la synthèse des régulateurs SISO. Cela peut être réalisé comme en (III3.41) (Hung and MacFarlane, 1982).

$$Y^*(s) = \underset{Y}{\operatorname{argmin}}(\bar{\sigma}(V^*(s)U(s) - \operatorname{diag}\{e^{jY}\})) \quad (\text{III3.41})$$

### iii. Décomposition Smith-McMillan

Il est toujours possible de découpler théoriquement un système en se ramenant à sa forme de Smith-McMillan. Il s'agit d'une forme diagonale équivalente à celle du système original. Cette forme possède des propriétés intéressantes (Beauvois, 1996) mais on ne s'intéresse qu'au découplage dans cette partie.

La première étape est de décomposer  $G$  sous la forme :

$$G(s) = \frac{\operatorname{Num}(s)}{\operatorname{Den}(s)} \quad (\text{III3.42})$$

$\operatorname{Den}(s)$  est un polynôme qui correspond au plus petit commun multiple des dénominateurs de chacun des éléments de  $G(s)$ .  $\operatorname{Num}(s)$  est une matrice polynomiale. Cette dernière peut se ramener à une matrice diagonale au travers d'opérations élémentaires :

- Multiplication d'une ligne (respectivement d'une colonne) par une constante.
- Permutation de lignes (respectivement de colonnes).
- Ajout d'une ligne (respectivement d'une colonne) multipliée par un polynôme sur une autre ligne (respectivement sur une autre colonne).

Chaque opération se traduit par la pré-multiplication de  $\operatorname{Num}(s)$  par une matrice polynomiale élémentaire  $R_i(s)$  (pour des opérations sur les lignes), ou la post-multiplication de  $\operatorname{Num}(s)$  par une matrice polynomiale élémentaire  $D_i(s)$  (pour des opérations sur les colonnes). On peut ainsi obtenir la matrice polynomiale diagonale  $\operatorname{Num}_d(s)$  en trouvant les matrices  $R_i$  et  $D_i$  adéquates comme en (III3.43).

$$\operatorname{Num}_d(s) = R_1(s)R_2(s) \dots R_{n_1}(s)\operatorname{Num}(s)D_1(s)D_2(s) \dots D_{n_2}(s) \quad (\text{III3.43})$$

Les pré et post-compensateurs sont des polynômes donnés par (III3.44). Il est évidemment possible d'ajouter des filtres pour les rendre réalisables, mais ces derniers présentent généralement des ordres élevés, et ce même pour un procédé relativement simple (pour le système de cuves,  $D$  et  $R$  sont composés

de polynômes allant jusqu'aux ordres 4 et 2, sachant qu'un découpleur idéal est un pré-compensateur d'ordre 4). Par ailleurs, la forme diagonale équivalente obtenue n'est pas toujours propice à la synthèse des régulateurs SISO.

$$D(s) = D_1(s)D_2(s) \dots D_{n_2}(s) \quad (\text{III3.44})$$

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) \dots R_{n_1}(s)$$

$$Num_d(s) = R(s)Num(s)D(s)$$

### III3c. Conclusions de l'étude des méthodes de découplage dynamique

Les méthodes de découplage dynamique ont pour but la synthèse de compensateurs dynamiques. Les méthodes avec pré et post-compensateurs dynamiques ne semblent pas présenter de réel intérêt, vis-à-vis des méthodes utilisant un pré-compensateur dynamique seul.

Les méthodes utilisées correspondent pour la plupart à des extensions des méthodes de découplage statique. Par rapport à ces dernières, ces méthodes permettent d'augmenter l'efficacité du découplage, et ce, sur une plage fréquentielle plus importante. En effet, les compensateurs dynamiques possèdent plus de degrés de liberté, et il est possible d'augmenter l'ordre des compensateurs jusqu'à atteindre le niveau de découplage souhaité. A contrario, l'inconvénient de ces méthodes réside dans leur complexité, et dans la complexité des compensateurs synthétisés.

### III4. Procédure de détermination des compensateurs

Dans les parties III2 et III3, différentes méthodes de découplage ont été étudiées et comparées sur le système de cuves. Certaines de ces méthodes ont été mises en avant, au vue de leurs performances et de leurs avantages. La Figure III4-1 propose une procédure permettant de découpler un procédé. Les cas TITO et non TITO sont différenciés car les méthodes de découplage proposées ne sont pas les mêmes.

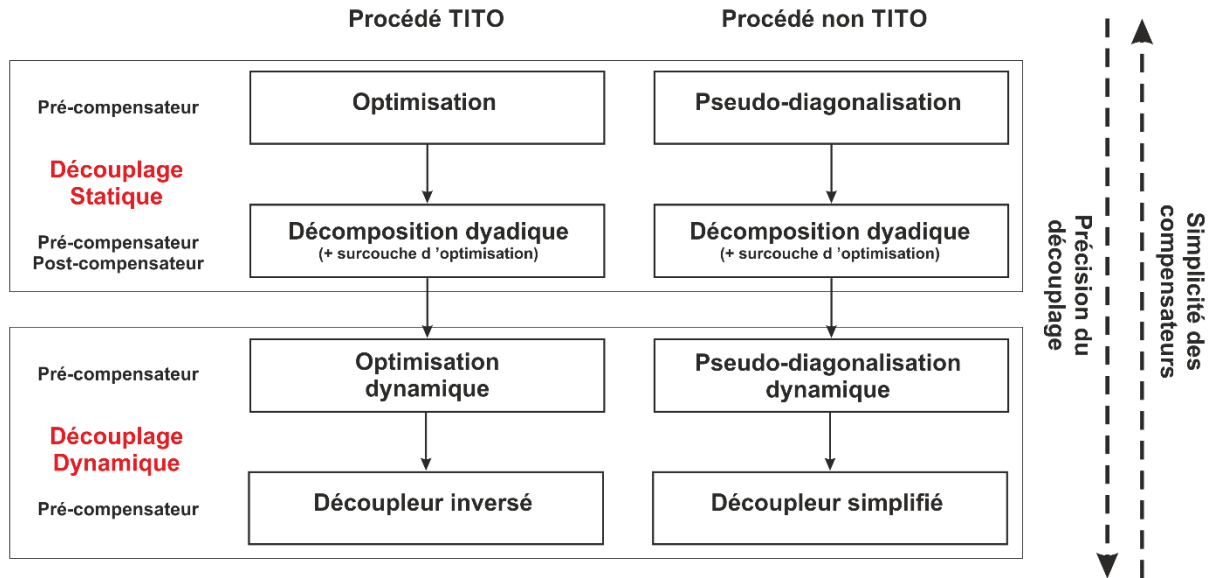


Figure III4-1 : Procédure de découplage d'un procédé

## III5. Résultats de simulation dans le cas non linéaire

Les méthodes recommandées dans la procédure de la Figure III4-1 ont été appliquées sur le modèle linéaire de cuves. En dehors du pré-compensateur seul déterminé par optimisation, les trois autres méthodes se sont avérées efficaces en termes de découplage et de suivi de consigne. Parmi celles-ci, la décomposition dyadique met en œuvre les lois de commande les plus simples. En effet, ces dernières sont composées de deux régulateurs PI et de deux matrices constantes de taille  $2 \times 2$ . Notons par ailleurs que ces lois de commande peuvent également se mettre sous la forme d'une unique matrice de transfert  $2 \times 2$  composée de quatre régulateurs PI.

Les lois de commande incluant les compensateurs obtenus par décomposition dyadique et les régulateurs PI ont été appliquées sur le modèle non linéaire de système de cuves. La manœuvre proposée est composée d'échelons filtrés d'amplitude relativement importante. Les résultats sont présentés sur la Figure III5-1.

Dans un premier temps, on considère que les commandes peuvent être négatives. Les réponses aux échelons filtrés sont relativement bonnes, mais on remarque la présence d'interactions entrées-sorties non négligeables (courbes vertes). Ces dernières représentent environ 15% de la valeur des échelons, alors qu'elles n'en représentaient que 2% dans le cas linéaire (cela reste tout de même mieux qu'en l'absence de compensateurs où les interactions entrées-sorties atteignaient 30% de la valeur des échelons, et ce dans le cas linéaire).

Les pompes étant unidirectionnelles, des saturations sont à présent appliquées en amont du procédé, pour éviter des commandes négatives non physiques. Du fait des saturations sur les commandes, les réponses sont alors bien plus lentes sur ces transitoires et les couplages deviennent extrêmement importants (courbes rouges). Il s'agit en partie des conséquences de l'emballement de l'action intégrale (également appelé *windup*).

La solution adoptée consiste ici à geler les actions intégrales de chacun des régulateurs PI lorsque l'une des commandes est en saturation. Les réponses du système bouclé sont à nouveau tracées sur la Figure III5-1 (en cyan). Les réponses sont alors bien meilleures et le niveau des interactions redevient acceptable.

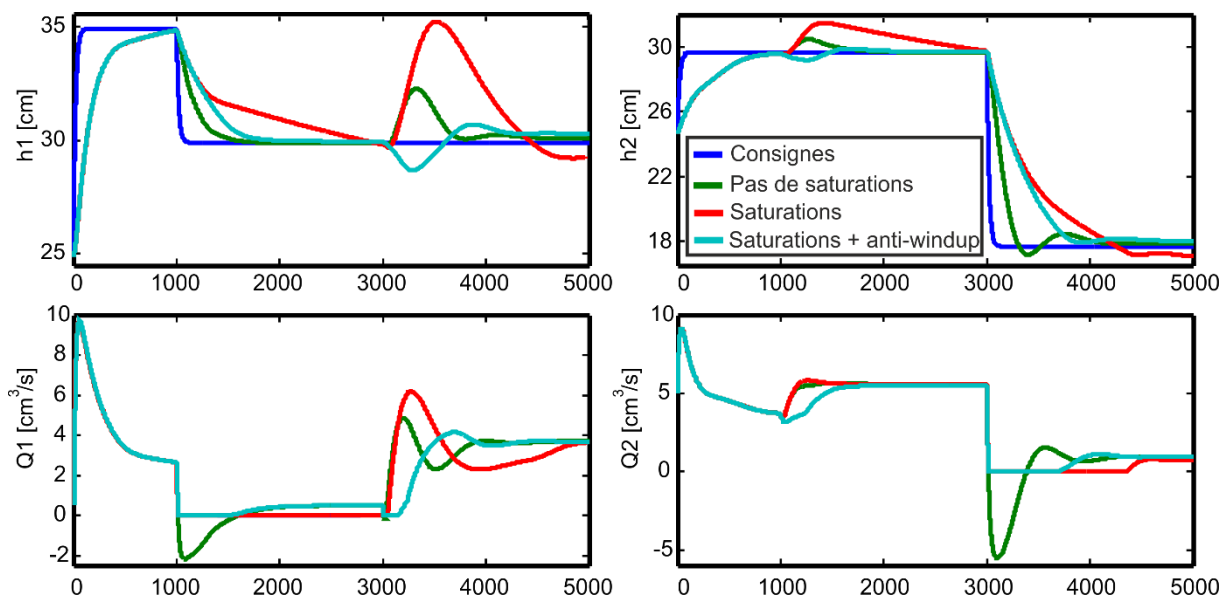


Figure III5-1 : Comparaison des sorties et des commandes avec et sans gel de l'action intégrale



Des solutions d'anti-emballement plus élaborées pourraient permettre d'améliorer les transitoires (Hanus *et al.*, 1987), (Aström and Rundqwist, 1989), mais celles-ci n'ont pas fait l'objet de ces travaux. On peut notamment citer la thèse de (Öhr, 2003) qui expose les principales solutions.

Un problème spécifique aux systèmes multivariables peut être la perte du découplage entre les boucles, même lorsque des solutions élaborées d'anti-emballement sont mises en œuvre. En effet, les commandes d'un procédé découplé sont en quelque sorte synchronisées, de manière à contrecarrer les interactions et assurer le découplage des sorties. Si la valeur ou la dynamique d'une commande est modifiée, le découplage ne sera plus parfaitement assuré. On parle de perte de la directionnalité. Ce phénomène peut s'illustrer par la Figure III5-2 (Horla, 2009) dans le cas TITO.  $v_1$  et  $v_2$  sont les commandes avant saturation, tandis que  $u_1$  et  $u_2$  sont les commandes après saturation (ces notations sont uniquement utilisées pour ce schéma).  $v_t$  et  $u_t$  peuvent être vues comme les directions des vecteurs de commande avant et après saturation. La direction de ce vecteur n'est pas conservée sur la Figure III5-2(a) alors qu'une stratégie a été mise en œuvre sur la Figure III5-2(b) afin de conserver la direction de  $u_t$ . Des solutions permettant de conserver la directionnalité sont données dans (Hippe, 2006).

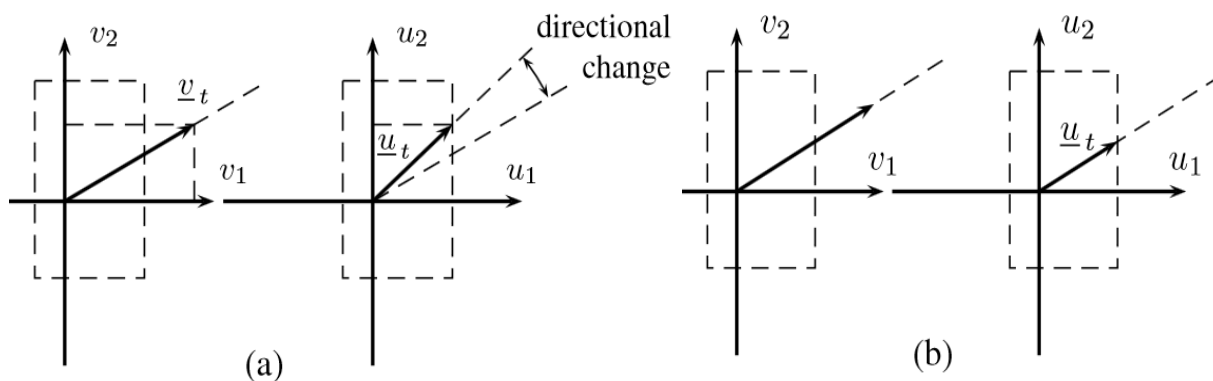


Figure III5-2 : (a) Perte de la directionnalité – (b) Conservation de la directionnalité

## III6. Conclusions sur les méthodes de découplage

Ce chapitre expose le principe et l'intérêt du découplage de systèmes multivariables. Le but est de réduire les interactions entrées-sorties et de maximiser les performances des lois de commande, tout en ayant une structure relativement intuitive et facilement réglable. Une telle structure comprend un régulateur diagonal et des compensateurs.

Après avoir établi un indice permettant de juger de la qualité du découplage, les méthodes de découplage les plus utilisées dans la littérature et l'industrie ont été étudiées. Un système de cuves a permis de comparer l'ensemble des méthodes de manière pratique, en considérant la qualité du découplage, la complexité de la méthode de synthèse et celle des compensateurs obtenus. Une procédure de découplage, composée des méthodes les plus pertinentes, a finalement été proposée.

Dans le cas du système de cuves, plusieurs méthodes permettent d'assurer un très bon découplage dans le cas linéaire nominal. La méthode de découplage la plus simple permettant d'y parvenir est la décomposition dyadique. Les lois de commande, composées des compensateurs dyadiques et de régulateurs PI synthétisés à partir du procédé découplé, ont été implantées sur le procédé non linéaire du système de cuves. Le premier constat est qu'il est difficile de garantir la qualité du découplage sur le modèle non linéaire. Par ailleurs, des problèmes de perte de directionnalité en présence de saturations ont été mis en avant. Une solution relativement simple a été mise en place afin de contourner ces problèmes.

Ce chapitre clôt l'étude de la commande décentralisée avec découplage d'un point de vue méthodologique. Les procédures et méthodes établies dans ces premiers chapitres vont à présent être appliquées sur une application industrielle complexe : un turbopropulseur.

## Chapitre IV. Application à un turbopropulseur

Le Chapitre IV met en œuvre la synthèse de lois de commande pour un turbopropulseur. Le principe du turbopropulseur et les objectifs de cette étude sont tout d'abord décrits dans la partie IV1. La partie IV2 se concentre sur le choix des points de fonctionnement et l'identification de modèles du turbopropulseur. Des lois de commande sont ensuite synthétisées dans la partie IV3, et leur robustesse est étudiée dans la partie IV4. Les lois de commande sont finalement implantées sur un modèle non linéaire précis du turbopropulseur dans la partie IV5. La partie IV6 récapitule les points importants de cette étude.

Sommaire du Chapitre IV.

IV1.	Principe de fonctionnement d'un turbopropulseur.....	143
IV1a.	Description du turbopropulseur .....	143
IV1b.	Modèles et lois de commande.....	146
IV1c.	Objectifs .....	147
IV2.	Identification et analyse .....	148
IV2a.	Choix des points de fonctionnement.....	148
IV2b.	Identification du turbopropulseur .....	152
IV2c.	Analyse des modèles identifiés.....	160
IV2d.	Conclusion sur l'identification et l'analyse des modèles identifiés .....	169
IV3.	Application de la commande décentralisée .....	170
IV3a.	Analyse des interactions .....	170
IV3b.	Découplage du turbopropulseur.....	172
IV3c.	Synthèse des régulateurs.....	175
IV3d.	Mise en place d'une action par anticipation .....	179
IV3e.	Interpolation des lois de commande .....	183
IV3f.	Structure des lois de commande .....	186
IV3g.	Résultats de simulation avec le modèle non linéaire .....	187
IV4.	Étude de la robustesse des lois de commande .....	191
IV4a.	Incertitudes et formes LFT du modèle de turbopropulseur .....	191
IV4b.	Robustesse des lois de commande .....	193
IV5.	Intégration dans le FADEC.....	211
IV5a.	Implantation des lois.....	211
IV5b.	Résultats.....	213
IV6.	Conclusions de l'étude sur le turbopropulseur .....	219

## IV1. Principe de fonctionnement d'un turbopropulseur

### IV1a. Description du turbopropulseur

Un turbopropulseur (Snecma, 2012) est un système de propulsion dont la poussée est principalement obtenue par la rotation d'une hélice. Les turbopropulseurs sont bien adaptés aux avions ayant des vitesses de vol modérées (entre 300 et 800 km/h) car relativement peu gourmands en carburant.

Un turbopropulseur (Turbomeca, 2004) se compose principalement :

- d'un générateur de gaz composé :
  - d'un compresseur haute pression et d'un compresseur basse pression,
  - d'une chambre de combustion,
  - d'une turbine haute pression, d'une turbine de puissance et parfois d'une turbine intermédiaire,
- d'un réducteur,
- d'une hélice généralement à pas variable,
- et d'une nacelle.

Ces éléments, représentés sur la Figure IV1.1 et la Figure IV1.2, sont brièvement décrits ci-dessous dans le cadre du turbopropulseur utilisé.

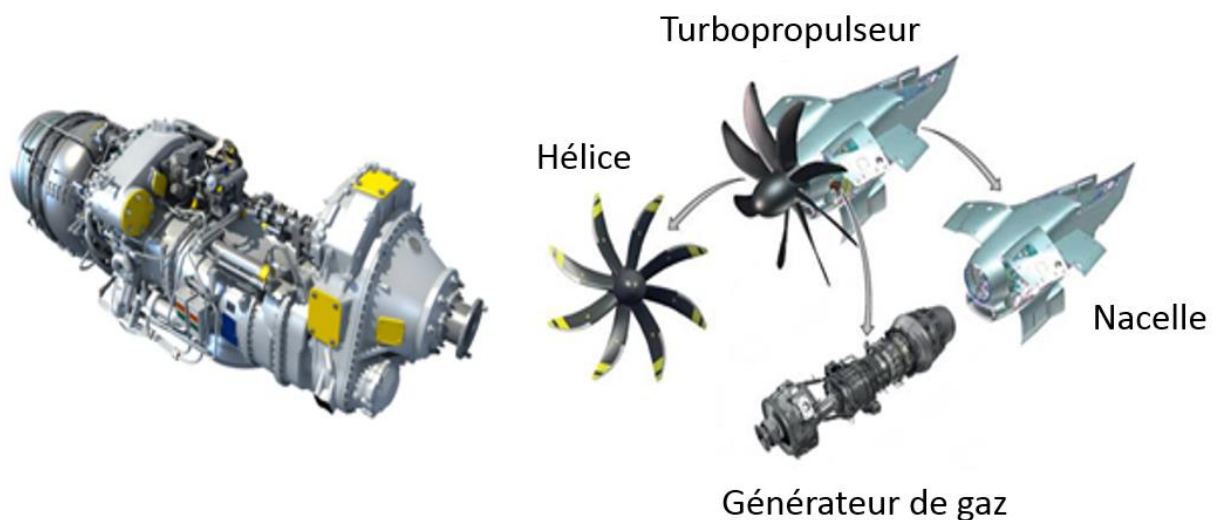


Figure IV1.1 : Illustration du PW150 et schéma du TP400

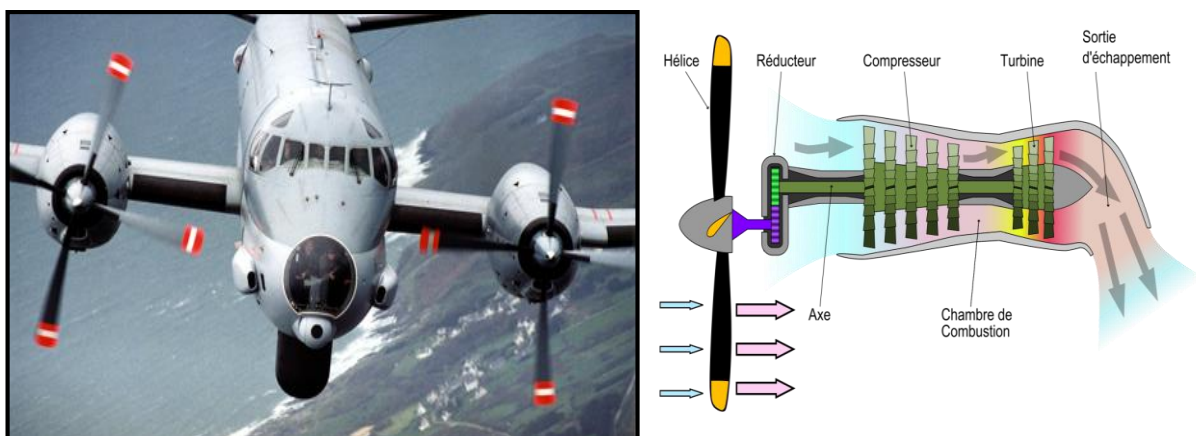


Figure IV1.2 : Photographie du Tyne et schéma de principe

- Le rôle des **compresseurs** est d'aspirer et de comprimer l'air pour l'amener à des vitesses, pressions et températures optimales à l'entrée de la chambre de combustion. Les compresseurs sont composés de plusieurs étages de compression (aubages mobiles), séparés par des étages de redresseurs (aubages fixes). Le but des compresseurs est d'augmenter le taux de compression global et la température de l'air. On distingue sur cette application :
  - o un compresseur IP (Pression Intermédiaire) composé des premiers étages de compression. Le compresseur IP fournit par ailleurs de l'air à certains équipements.
  - o un compresseur HP (Haute Pression) composé des seconds étages de compression. Celui-ci fournit également de l'air pressurisé à d'autres équipements (système air, système de dégivrage...).
- La **chambre de combustion** est l'enceinte dans laquelle se mélangent une partie de l'air issu du compresseur ainsi que le carburant vaporisé par une série d'injecteurs, pour transformer le maximum d'énergie chimique du mélange en énergie calorifique. Dans la phase de démarrage, l'allumage est provoqué par une bougie. La combustion s'auto-entretient par la suite.
- Des **turbines** composées de plusieurs étages sont alimentées par des gaz d'échappement et exploitent la transformation de leur énergie cinétique et thermique :
  - o La turbine HP fournit de la puissance mécanique au compresseur HP en utilisant l'énergie des gaz produits par la chambre de combustion.
  - o La turbine IP fournit de la puissance mécanique à l'arbre IP en utilisant les gaz d'échappement de la turbine HP.
  - o La turbine BP (Basse Pression) est la turbine de puissance, c'est elle qui génère le couple sur l'arbre BP relié à l'hélice.
- Pour obtenir des vitesses en bout de pale qui ne soient pas trop élevées (pour des raisons aérodynamiques), il est nécessaire d'utiliser un **réducteur de vitesse** de rotation. Ce dernier est constitué d'un boîtier d'engrenages monté sur l'arbre d'entraînement turbine BP-hélice. On parle également de PGB (Propeller GearBox). La PGB fait partie de la chaîne cinématique qui se compose des différents arbres entre les turbines et les compresseurs.
- L'**hélice** convertit l'énergie du générateur de gaz en force de propulsion. Un système d'actionnement du pas permet de faire varier l'angle des pales de l'hélice afin d'obtenir différentes puissances hélice, tout en conservant une vitesse de rotation de l'hélice constante.
- La **nacelle** permet de relier le générateur de gaz et l'hélice à l'avion. En dehors de son rôle de protection du moteur et des équipements, elle permet d'assurer les connexions hydrauliques, électriques et pneumatiques avec l'avion. Elle donne une forme aérodynamique au turbopropulseur et guide les flux d'air en entrée et en sortie.

D'autres systèmes essentiels permettent d'assurer le bon fonctionnement du turbopropulseur :

- Le **système carburant** permet de mettre en pression le carburant stocké dans l'avion et de l'envoyer vers les injecteurs. Le carburant est également utilisé comme fluide hydraulique pour l'asservissement des équipements à géométrie variable qui optimisent l'aérodynamique et les jeux de fonctionnement moteur.
- Le **système air** permet de refroidir les pièces du moteur et permet d'assurer des fonctions de pressurisation, d'anti-givrage et d'air conditionné.
- Le **système huile** permet de lubrifier, de refroidir et de débarrasser des particules polluantes les pièces en mouvement.
- Le **sous-système VSV** (Variable Stator Vane) permet de commander l'angle de calage des aubes du stator du compresseur HP, de manière à optimiser son rendement et garantir une bonne opérabilité du moteur en évitant les phénomènes de pompage (instabilité aérodynamique néfaste pour les aubes des compresseurs, qui survient lors d'une différence de pression trop élevée entre la pression d'entrée et de sortie du compresseur). Cela se traduit alors par la modification du

débit d'air en entrée du moteur. Les VSV se composent d'un vérin hydraulique ainsi que d'une servo-vanne permettant de commander le vérin en position.

- Le **sous-système HBV** (Handing Bleed Valve), composé de plusieurs vannes HBV pilotées en tout ou rien, permet de réguler le débit d'air prélevé sur les compresseurs BP et HP pour assurer sa stabilité et éviter les phénomènes de pompage. Pour un même débit carburant, une augmentation du débit air permet d'augmenter l'efficacité du turbopropulseur.

L'objectif du système de régulation est d'assurer la poussée souhaitée tout en conservant une vitesse de rotation de l'hélice constante et sans franchir certaines limites de température et de vitesse quelles que soient les conditions extérieures.

Du point de vue de la commande, un turbopropulseur peut être vu comme un système multivariable comprenant :

- deux grandeurs d'entrée :
  - o le débit carburant, qui sera noté  $WF$ ,
  - o le pas de l'hélice (également appelé angle de calage), qui sera noté  $\beta$ ,
- deux grandeurs de sortie :
  - o la puissance de l'hélice, qui sera notée  $SHP$ ,
  - o la vitesse de rotation de l'hélice, qui sera notée  $XNP$ .

Généralement, la puissance  $SHP$  est commandée par l'action du débit carburant  $WF$ , tandis que la vitesse de rotation de l'hélice  $XNP$  est commandée par l'action sur le pas de l'hélice  $\beta$ . La vitesse de rotation  $XNP$  est asservie autour de plusieurs paliers de vitesse, définis selon les conditions de vol.

Ces boucles *globales* sont complétées par des boucles *locales* qui asservissent d'autres variables, dont le débit carburant  $WF$  et le pas de l'hélice  $\beta$ . La « conduite » du turbopropulseur est réalisée à l'aide d'une manette unique permettant la sélection du régime souhaité comme on peut le voir sur la Figure IV1.3.

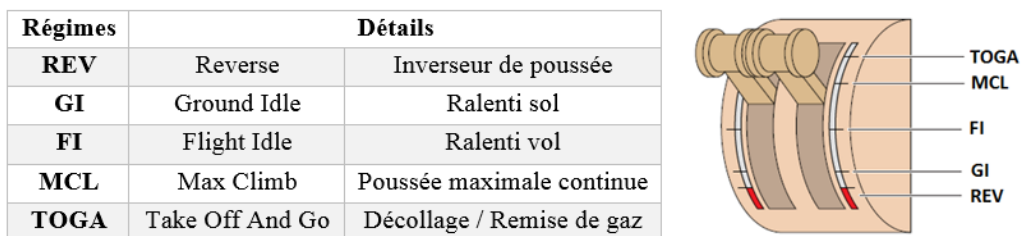


Figure IV1.3 : Régimes du turbopropulseur

On distingue trois modes de régulation :

- Le Forward Speed Mode est le mode utilisé en vol (Régime FI – MCL - TOGA). La puissance est asservie par action sur le débit carburant et la vitesse est asservie par action sur l'angle de calage.
- Le Beta Mode est un mode utilisé uniquement au sol (GI). Contrairement au Forward Speed Mode, l'angle de calage est commandé en boucle ouverte.
- Le Reverse Mode est un mode utilisé uniquement au sol pour freiner (REV). La régulation se comporte de la même façon que pour le Forward Speed Mode.

Seul le Forward Speed Mode sera étudié dans le cadre de ces travaux de thèse.

En termes de performances, la demande de variation de puissance doit avoir le moins d'effet possible sur la vitesse de l'hélice. Inversement, la demande de changement de la vitesse de l'hélice ne doit pas être ressentie sur la puissance. Afin de garantir ces performances, des stratégies de découplage et d'anticipation sont nécessaires pour la synchronisation des boucles.

## IV1b. Modèles et lois de commande

Des modèles dans différents outils de modélisation/simulation permettent de représenter finement le comportement de chacun des composants du turbopropulseur (générateur de gaz, système carburant, système huile, PGB, actionneurs, capteurs). Des modèles simplifiés de ces composants sont intégrés dans Simulink avec l'ensemble des lois de commande. Le modèle complet obtenu, appelé MMR (Modèle Moteur Régulé), a pour but de valider les lois de commande en simulation et sur banc.

Bien que simplifié, le modèle Simulink de turbopropulseur peut être vu comme un modèle mathématique permettant de simuler le comportement réel du processus pour des signaux d'excitation très variés, dans la limite de validité du modèle et des hypothèses prises en compte. En revanche, ce modèle comprend des centaines de paramètres et des équations complexes difficilement manipulables pour la synthèse de lois de commande. Il ne peut donc pas se mettre sous forme d'équations où l'on aurait des relations simples entre les sorties *SHP* (puissance) et *XNP* (vitesse) et les commandes *WF* (débit carburant) et  $\beta$  (angle de calage). Par ailleurs, développer un nouveau modèle à partir des équations mécaniques et thermodynamiques de l'ensemble des composants sort du cadre de ces travaux de recherche. On peut donc considérer que le modèle de turbopropulseur est une sorte de modèle de type « boîte noire ».

Le FADEC (Full Authority Digital Engine Control) fournit des fonctions de contrôle à tous les organes du turbopropulseur (gestion de la puissance, contrôle de la poussée et des boucles locales, gestion des températures, démarrage, protections diverses, health monitoring, gestion de la puissance électrique). L'objectif principal de la régulation est de fournir la poussée demandée par le pilote, tout en garantissant le bon fonctionnement du turbopropulseur. Un autre objectif est de faciliter la maintenance préventive et corrective. Le FADEC comprend entre autres : l'AS (Application Software) qui se compose de l'ensemble des lois de commande, incluant l'élaboration des consignes, les différents modes de fonctionnement et les logiques associées, les correcteurs des boucles principales et secondaires, ainsi que les limiteurs (i.e. les saturations sur les commandes et leurs dérivées). Le FADEC est destiné à être embarqué dans les calculateurs des turbopropulseurs.

De manière simplifiée, on peut représenter graphiquement l'organisation des différentes régulations assurant la loi de commande du turbopropulseur sur le schéma de la Figure IV1.4 (le schéma ne présente pas les retours des boucles fermées par souci de simplification). Les fonctions principales des différents constituants sont résumées ici :

- Le Power Management permet d'élaborer les consignes de régimes permanents en fonction des conditions de vol et de l'angle de la manette du pilote (qui sera notée TRA par la suite). Des consignes transitoires sont ensuite élaborées à partir de ces informations.
- Le bloc Performances permet principalement de calculer la consigne de position de la vanne VSV, la commande de la vanne HBV, ainsi que l'ensemble des limiteurs.
- Les boucles Puissance et Hélice sont les boucles principales. En prenant en compte les limiteurs et les consignes du Power Management, elles élaborent les consignes en débit carburant et en calage hélice.
- Le système de dosage (FMU) et le contrôle du pas de l'hélice sont des boucles locales, permettant d'asservir respectivement le débit carburant et l'angle de calage des pâles. Ces grandeurs sont pilotées par des structures bouclées mettant en œuvre des actionneurs. Les constantes de temps de ces boucles « bas niveau » sont plus faibles que celles du turbopropulseur.
- Les boucles VSV et HBV sont des boucles locales : les actionneurs VSV sont commandés en boucle fermée et les actionneurs HBV sont commandés en boucle ouverte en tout ou rien.

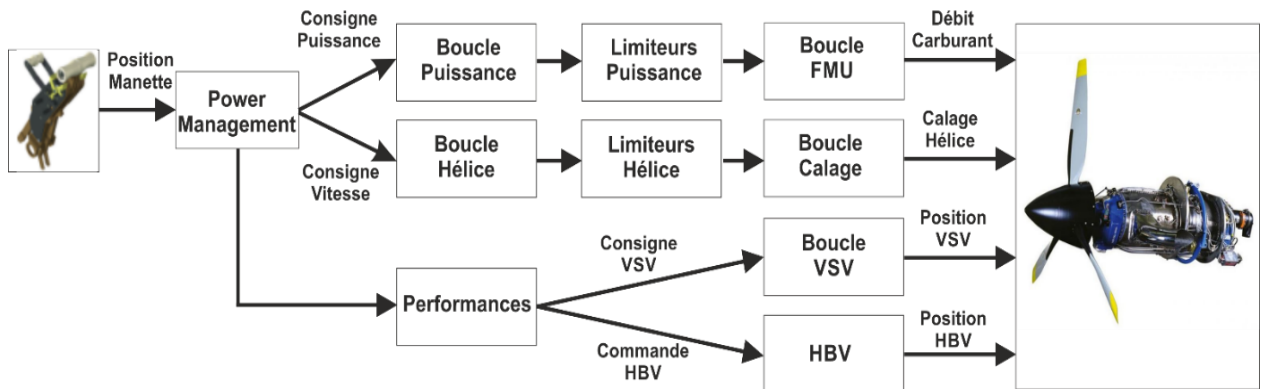


Figure IV1.4 : Architecture simplifiée de la régulation d'un turbopropulseur

### IV1c. Objectifs

Le but de cette étude est de mettre en place les lois de commande sur les boucles principales (Puissance, Vitesse). Les objectifs des lois de commande en termes de performances sont de :

- Respecter les spécifications données dans le Tableau IV1-1.
- Réduire au maximum les couplages entre les boucles.
- Assurer une certaine robustesse vis-à-vis d'incertitudes, de bruit et de perturbations.

En dehors de ces objectifs de performances, les lois de commande doivent être facilement ajustables et d'une « complexité raisonnable ».

Afin de répondre à ces derniers points, la commande décentralisée est adoptée. Des compensateurs seront synthétisés afin de réduire les interactions si nécessaire.

	<b>Erreur statique</b>	<b>Dépassement</b>	<b>Marges de stabilité</b>	<b>Bandes passantes</b>
<b>Régulateur Puissance</b>	0,20%	1%	45° - 6 dB	$\omega_{c1} = 2 \text{ rad/s}$
<b>Régulateur Hélice</b>	1 rpm	5%	45° - 6 dB	$\omega_{c2} = 5 \text{ rad/s}$

Tableau IV1-1 : Spécifications des boucles considérées comme monovariabiles



## IV2. Identification et analyse

Afin d'appliquer les techniques d'analyse et de synthèse des lois de commande, il est nécessaire de disposer de modèles « simples », caractérisés par un nombre limité de paramètres. On choisit généralement des modèles linéaires adaptés à des points de fonctionnements, ce qui permet d'utiliser de nombreux outils de l'Automatique. Les modèles linéaires reflètent ainsi le comportement du système, mais seulement autour des points de fonctionnement où ils ont été élaborés.

Afin de caractériser le comportement du turbopropulseur sur l'ensemble du domaine de vol, il est donc nécessaire de disposer des modèles linéaires en autant de points de fonctionnement que nécessaire. Il s'agit d'une technique couramment utilisée pour la régulation de turboréacteurs et de turbopropulseurs, du fait des changements de comportement à travers le domaine de vol (Reberga, 2005).

Pour obtenir un modèle linéaire à partir d'un modèle physique, trois approches sont possibles : la transformation, la linéarisation et l'identification, comme expliqué dans la partie I3a. Du fait de la complexité et de la taille du modèle non linéaire du générateur de gaz, une étude analytique n'a pas été retenue, ce qui exclut les deux premières méthodes. Bien que la linéarisation puisse également être réalisée numériquement, cette méthode n'est pas intéressante car moins flexible que l'identification, où il est par exemple possible de fixer l'ordre du système.

Le choix des points de fonctionnement est la première étape de ce travail. Un scénario d'identification sera ensuite déterminé, afin d'exciter le système non linéaire autour des différents points de fonctionnement. Après avoir déterminé la structure des modèles recherchés et une méthode d'identification, des modèles linéaires seront identifiés avant d'être validés puis analysés.

### IV2a. Choix des points de fonctionnement

Un point de fonctionnement se caractérise par un état permanent du système qui caractérise le lien entre les valeurs permanentes de diverses grandeurs.

Dans l'approche considérée, le turbopropulseur est considéré comme un système TITO (Two Inputs Two Outputs). Néanmoins, le turbopropulseur de gaz possède une centaine d'entrées (dont la plupart représentent l'état de certains composants et peuvent être assimilés à des paramètres) ainsi qu'une centaine de sorties. Il paraît fastidieux d'étudier le comportement du turbopropulseur avec n'importe quelle combinaison de ses entrées. Ces entrées sont d'ailleurs liées les unes aux autres et certaines combinaisons d'entrées n'ont pas de sens physique.

Afin de déterminer des points de fonctionnement « physique », des conditions balayant tout le domaine de vol sont considérées pour le MMR. Les entrées principales nécessaires à ces conditions sont :

- Les conditions de vol (nombre de Mach, altitude).
- L'angle de la manette (TRA) : il s'agit de la consigne envoyée par le pilote via la manette des gaz.

#### i. Domaine de vol

On considère que le nombre de Mach varie entre 0,1 et 0,5 et que l'altitude est comprise entre 0 et 25 kft (kilofeet). Classiquement, on fait varier le nombre de Mach par intervalle de 0,1 et l'altitude par intervalle de 5 kft. Certains points non représentatifs du domaine de vol ne sont pas pris en compte : par exemple, on considère que l'avion ne sera pas en dessous de Mach 0,3 à une altitude de 25 kft. Le domaine de vol considéré est finalement représenté en bleu clair dans le Tableau IV2-1.

		Altitude (kft)					
		0	5	10	15	20	25
Mach	0.1						
	0.2						
	0.3						
	0.4						
	0.5						



 Domaine de vol Mach/Altitude

Tableau IV2-1 : Domaine de vol

## ii. Angle de la manette des gaz (TRA)

En dehors des conditions de vol (Mach et Altitude), l'état du moteur peut être déterminé par les commandes, les sorties, ou encore des variables externes comme le régime de l'arbre du compresseur HP (noté  $N_3$  par la suite). Toutes ces variables sont corrélées et peuvent être déduites en régime permanent de l'angle de la manette des gaz TRA. En effet, cette dernière génère, via le Power Management, des références pour la puissance de l'hélice et la vitesse de rotation de l'hélice. D'autres variables, commandes et consignes s'en déduisent (par exemple celles des vannes VSV et HBV (Figure IV1.4)).

Ne connaissant pas au préalable la manière dont variait le comportement du turbopropulseur en fonction du TRA, un maillage fin de ce dernier a été effectué : des points de fonctionnement ont été considérés à chaque degré pour un TRA variant de  $1^\circ$  à  $80^\circ$ .

## iii. Détermination de l'état du turbopropulseur sur les points de fonctionnement

Le MMR (Modèle Moteur Régulé) du turbopropulseur a été utilisé (avec des lois de commande provisoires) afin de se positionner sur les différents points de fonctionnement : une manœuvre consistant en une succession d'échelons de  $1^\circ$  pour un TRA variant de  $1^\circ$  à  $80^\circ$  a été réalisée pour chaque couple {Mach, Altitude}. L'ensemble des variables de commande et de sortie (comprenant notamment  $WF$ ,  $\beta$ ,  $SHP$ ,  $XNP$ ,  $N_3$ ) a été enregistré en régime permanent en chacun des points, de façon à caractériser le comportement statique du turbopropulseur.

Les points de fonctionnement ont ainsi été déterminés en utilisant des triplets de la forme {Mach, Altitude, TRA}. Ces variables seront également utilisées pour mener les différentes analyses (analyse statique, analyse des modèles identifiés) pour des raisons pratiques. L'angle de la manette des gaz TRA ne sera cependant pas utilisé lors de l'interpolation des lois de commande, afin de s'affranchir de la dépendance des lois de commande avec le Power Management.

## iv. Analyse statique

Une première analyse consiste à étudier les relations entre les différentes grandeurs en régime permanent. La Figure IV2.1 présente l'évolution du débit carburant  $WF$  et de l'angle de calage  $\beta$  en fonction de la manette des gaz TRA pour une combinaison {Mach, Altitude} arbitraire.

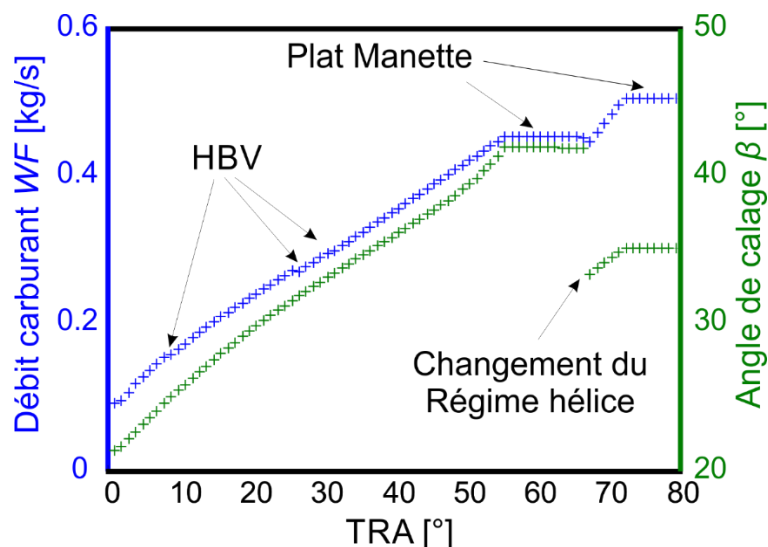


Figure IV2.1 : Débit carburant  $WF$  et angle de calage  $\beta$  en fonction du TRA

Jusqu'à  $56^\circ$  de TRA, les points sont quasiment alignés sur une même droite. Quelques discontinuités sont observées autour de  $TRA = 9^\circ, 27^\circ, 32^\circ$ , notamment sur le débit carburant  $WF$ . Cela correspond au changement de comportement du turbopropulseur lors des ouvertures/fermetures des vannes HBV. Lorsque la manette varie de  $56^\circ$  à  $67^\circ$  et de  $73^\circ$  à  $80^\circ$ ,  $WF$  et  $\beta$  restent constants. Il s'agit d'un « plat manette », i.e. une zone où le système réagit de la même manière quelle que soit la position de la manette. Les points correspondant à ce « plat manette » ont été supprimés par la suite, puisqu'ils n'apportent pas d'informations. Par ailleurs, en dessous de  $7^\circ$  de TRA, l'angle Beta est inférieur à  $16^\circ$  pour certaines combinaisons {Mach, Altitude} ce qui correspond au *Beta mode*. On considérera donc  $7^\circ$  comme la limite inférieure pour le TRA. A partir de  $68^\circ$ , une discontinuité est présente au niveau de la commande  $\beta$ . Celle-ci est due au changement de régime de vitesse hélice *XNP*.

La Figure IV2.2 montre les sorties *SHP* et *SNP* correspondant aux points de fonctionnement visualisés du point de vue des commandes sur la Figure IV2.1. On y retrouve les différentes zones (*Beta mode*, plat manette et changement de régime hélice). On peut noter que la vitesse de l'hélice ne prend que deux valeurs : 730 et 842 rpm.

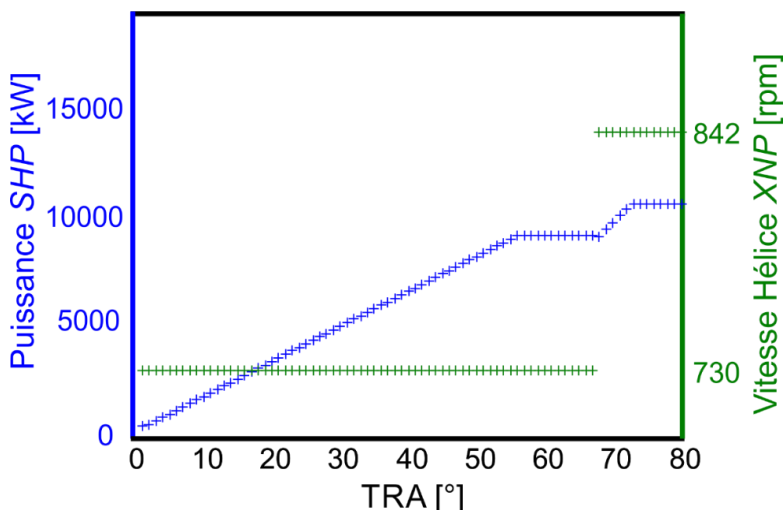


Figure IV2.2 : Puissance *SHP* et Vitesse *XNP* en fonction du TRA

La Figure IV2.3 représente l'évolution des grandeurs de sortie *SHP* (courbe bleue) et *XNP* (courbe verte) en fonction des grandeurs d'entrée  $WF$  et  $\beta$ . Il est normal d'obtenir des courbes et non des nappes 3D, car les variables d'entrée choisies sont corrélées. Cette corrélation se traduit par la courbe rouge dans le plan horizontal (qui correspond à la projection des deux autres courbes). Lorsque le TRA augmente, les

différentes grandeurs se déplacent dans le sens des flèches. Les variations des grandeurs de sortie sont quasiment linéaires (en dehors du changement de palier de vitesse hélice) par rapport aux grandeurs d'entrée. Cela laisse à penser qu'il sera possible de réduire le nombre de points de fonctionnement en fonction du TRA.

Le comportement statique en dehors de la courbe nominale a également été étudié. Du point de vue des grandeurs d'entrée, cela se traduit par la zone orange sur la Figure IV2.3. Les grandeurs de sortie restent alors similaires aux courbes observées précédemment.

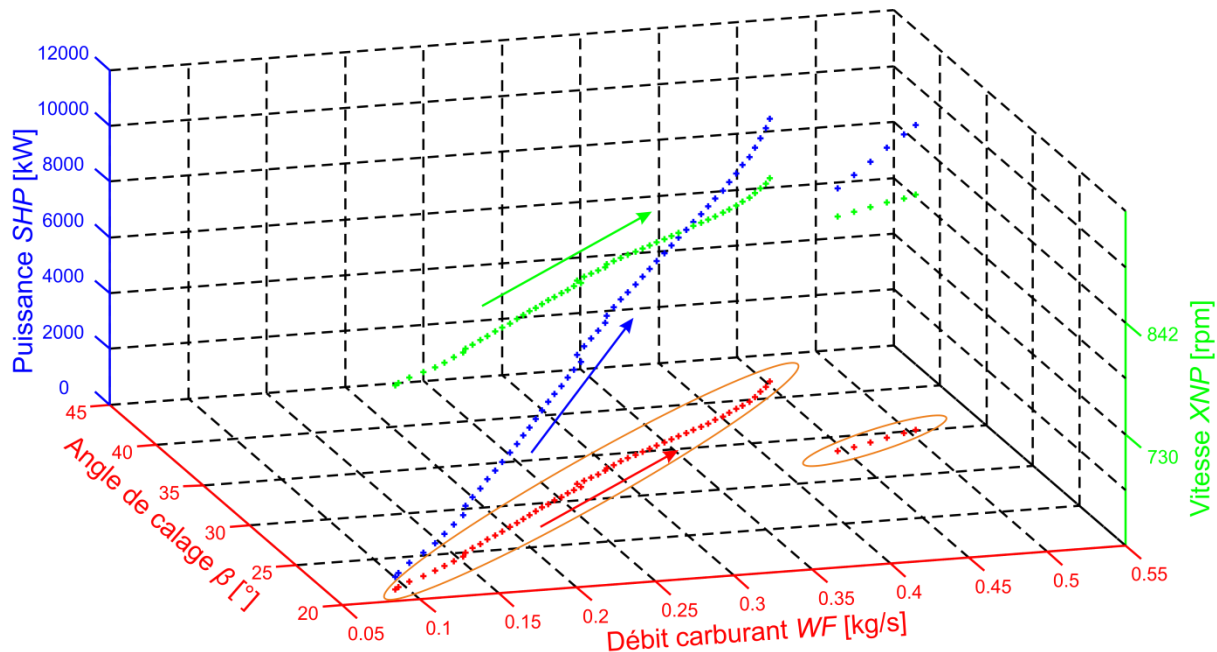


Figure IV2.3 : SHP et XNP en fonction de WF et  $\beta$

A couple {Mach, Altitude} fixe, hormis les commandes d'ouverture/fermeture des VSV et HBV, les entrées du turbopropulseur sont constantes. La Figure IV2.4 présente les variations des commandes de ces vannes en fonction du TRA.

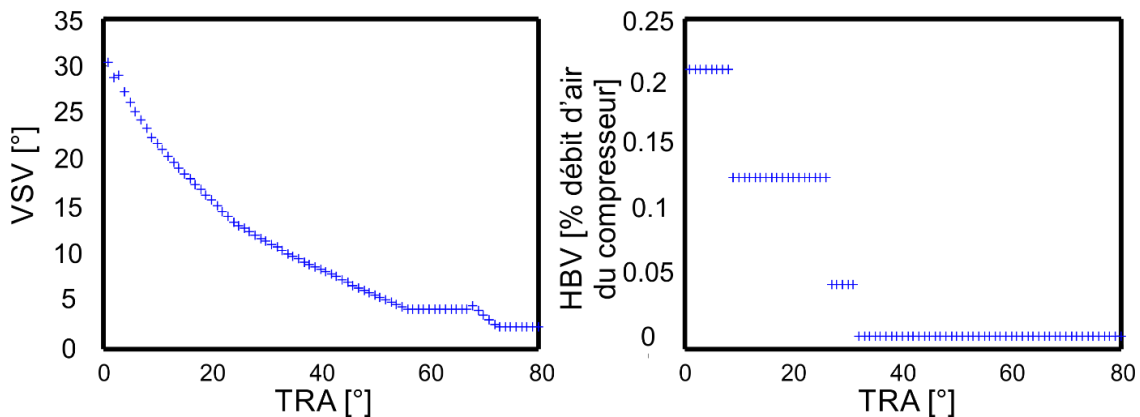


Figure IV2.4 : VSV et HBV en fonction du TRA

Comme il a été vu dans la partie IV1a, la VSV se compose d'un ensemble de vannes avec un diamètre réglable. La commande  $u_{VSV}$  varie donc de manière continue. En revanche, les HBV sont des vannes tout ou rien. La commande  $u_{HBV}$  peut prendre uniquement quatre valeurs, ce qui suffit à contrôler l'ouverture/fermeture des trois vannes associées et de générer quatre niveaux de débit d'air dans le compresseur, comme on peut le retrouver sur la Figure IV2.5.

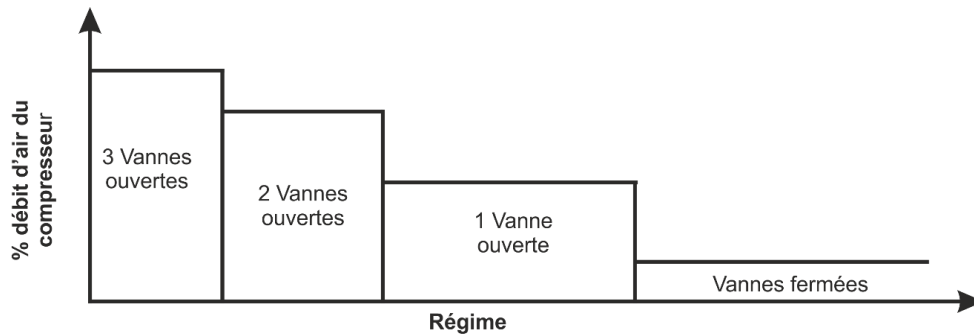


Figure IV2.5 : Comportement des vannes HBV

Les vannes VSV et HBV ne sont donc pas forcément dans le même état sur l'ensemble des points de fonctionnement. On peut noter que les variations des commandes  $u_{HBV}$  se produisent pour  $TRA = 9^\circ, 27^\circ, 32^\circ$ , ce qui correspond aux discontinuités observées précédemment. Elles ont donc un impact non négligeable sur le comportement du système en régime permanent. Par ailleurs, l'ouverture et la fermeture de ces vannes sont connues pour perturber la puissance du turbopropulseur ; leur impact dynamique sera donc également étudié.

### IV2b. Identification du turbopropulseur

Le but de cette partie est de représenter par un modèle linéaire le comportement du modèle non linéaire du turbopropulseur en chaque point de fonctionnement.

La construction d'un tel modèle implique trois entités de base :

- Des résultats de simulation ou d'essais, ici des données temporelles issues de simulations avec un modèle non linéaire précis caractérisant le turbopropulseur.
- Une structure de représentation (ensemble de modèles candidats pour caractériser l'objet en question). Il s'agit ici de la forme de la matrice de transfert à identifier ou de l'ordre du système.
- Une méthode pour déterminer le modèle choisi à partir des règles expérimentales.

Ces trois éléments sont représentés sur la Figure IV2.6 dans le cadre du turbopropulseur et sont détaillés par la suite.

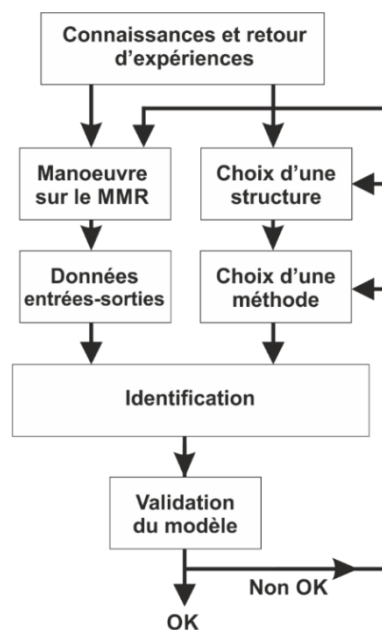


Figure IV2.6 : Procédure d'identification

### i. Scénario d'identification

La première étape de l'identification est d'obtenir des données temporelles entrées-sorties issues de simulations du turbopropulseur. Ces dernières doivent être à la fois représentatives du fonctionnement du turbopropulseur, mais également propices à l'identification.

Afin d'avoir un signal riche en fréquences, des échelons ont été retenus pour exciter le système, ce qui permet d'avoir une identification du comportement dynamique plus précise. Ces échelons de commande sur  $WF$  et  $\beta$  doivent être appliqués successivement, et non pas en même temps comme cela le serait avec une variation de l'angle de la manette des gaz TRA. En effet, avec des échelons simultanés sur les deux entrées, il ne serait pas possible de déterminer la part de chaque entrée dans les réponses. Pour les mêmes raisons, les autres grandeurs d'entrée du turbopropulseur, et notamment les consignes des vannes VSV et HBV doivent rester constantes pour ne pas biaiser l'identification.

L'amplitude des échelons a été définie comme étant la moitié de la moyenne des écarts d'amplitude entre les points de fonctionnement. L'amplitude des échelons en débit carburant  $WF$  est ainsi de 0,0035 kg/s, tandis que celle sur l'angle de calage  $\beta$  est de  $0,15^\circ$ . Des échelons positifs puis négatifs ont été successivement appliqués sur chaque entrée afin de vérifier que le système a le même comportement en réponse à des consignes positives et négatives.

Un premier scénario d'identification consiste à appliquer des échelons sur des périodes de 10 secondes, permettant ainsi d'avoir une durée globalement similaire pour le régime transitoire et le régime permanent, de manière à ce que l'identification ne se focalise pas préférentiellement sur l'une de ces deux parties. Un autre scénario d'identification plus sophistiqué a également été testé, en adaptant les périodes entre les échelons, en fonction des sorties et des points de fonctionnement. Les résultats de l'identification sont restés quasiment inchangés par rapport aux résultats obtenus avec le premier scénario. Le premier scénario a ainsi été retenu pour des raisons pratiques.

Afin de pouvoir valider la pertinence des modèles identifiés, un scénario de validation a été utilisé. Le scénario de validation comporte également des échelons désynchronisés, en débit carburant  $WF$  et en angle de calage  $\beta$ , et d'amplitudes différentes.

Les scénarios d'identification et de validation autour d'un point de fonctionnement sont représentés sur la Figure IV2.7.

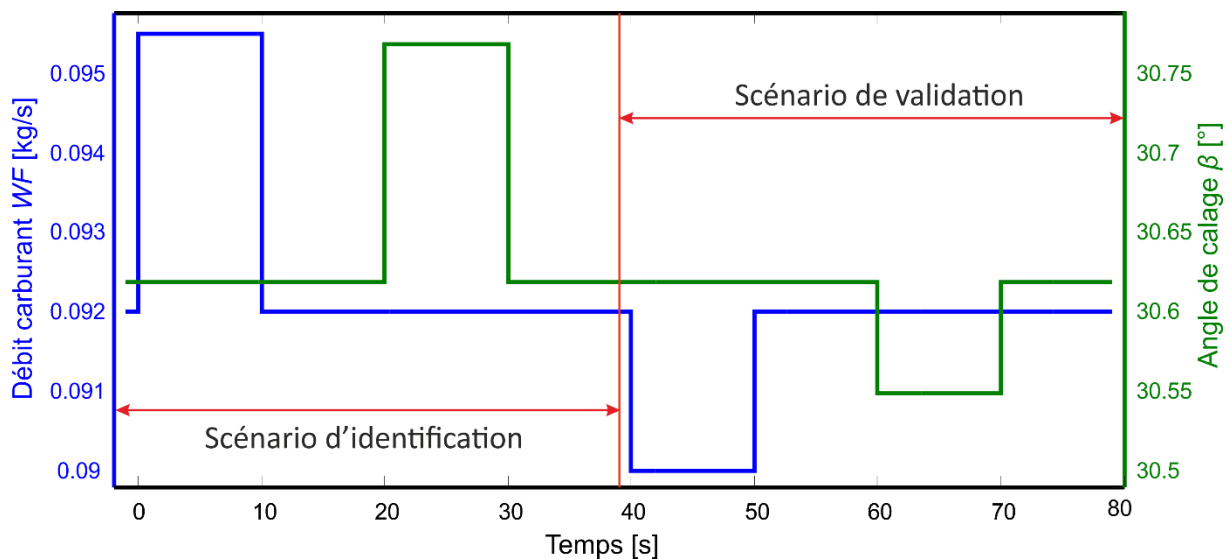


Figure IV2.7 : Scénario d'identification et de validation

## ii. Données entrées-sorties

Lors d'une manœuvre avec le MMR, il n'est pas possible d'imposer directement le scénario d'identification au turbopropulseur. En effet, le modèle du turbopropulseur est bouclé par des lois de commande provisoires, et les consignes sont uniquement imposées par le Power Management via la manette des gaz. Il est donc nécessaire d'extraire du MMR le modèle du turbopropulseur comme on peut le voir sur la Figure IV2.8 (par rapport à la Figure IV1.4).

Les boucles locales *FMU* et *Calage*, permettant d'asservir les grandeurs  $WF$  et  $\beta$  (à partir des consignes données par les boucles globales) ont été incluses dans le modèle de turbopropulseur. Celles-ci ont été assimilées à des fonctions de transfert du premier ordre, identiques sur tout le domaine de vol (hypothèse qui se vérifie assez bien dans la pratique).

Le modèle de turbopropulseur sera ainsi identifié avec les actionneurs. Les variables  $WF$  et  $\beta$ , considérées comme les commandes du turbopropulseur, sont en fait les consignes de débit carburant et de calage hélice envoyées aux régulations locales des actionneurs.

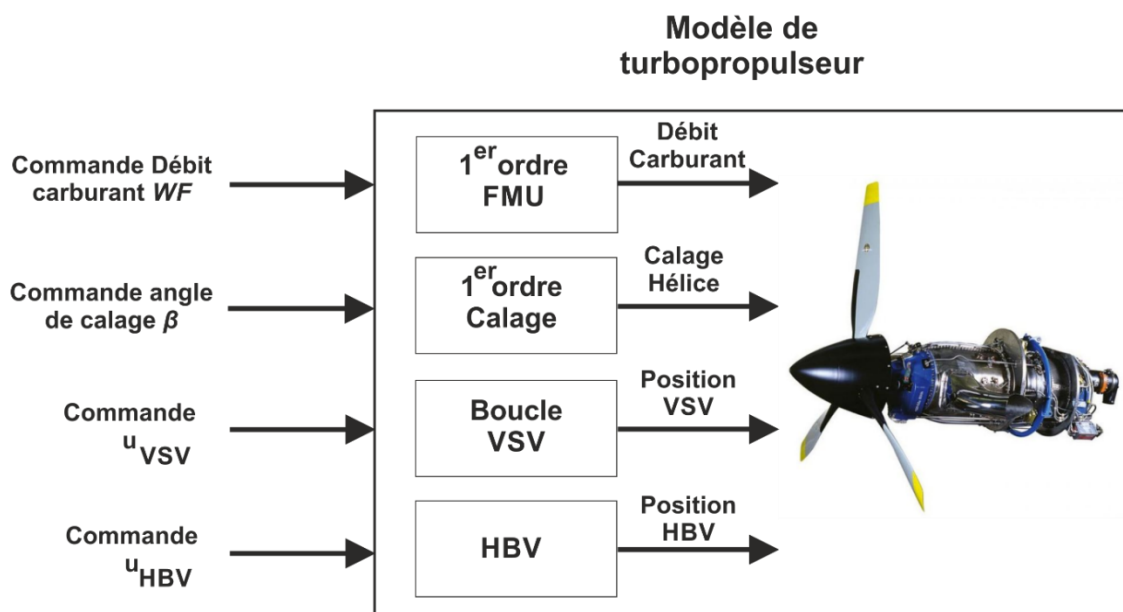


Figure IV2.8 : Modèle de turbopropulseur extrait du MMR

Afin d'obtenir l'ensemble des données entrées-sorties pour chacun des points de fonctionnement, la procédure suivante a été appliquée au modèle de turbopropulseur :

- Pour un couple {Mach, Altitude}, on se place successivement sur chacun des points de fonctionnement (correspondant à un degré de manette TRA).
- Le scénario d'excitation est ensuite appliqué en chacun des points de fonctionnement.
- Les données entrées-sorties de la manœuvre sont enregistrées à la fréquence du calculateur, i.e. 25 Hz, ce qui correspond à un pas de temps  $T_s$  de 0,04 secondes.
- Les données en chacun des points de fonctionnement sont isolées et les composantes moyennes des signaux d'entrée et de sortie sont retranchées (de manière à les centrer autour de 0 et permette l'identification du comportement en variations autour du point de fonctionnement).

Pour le couple {M\_0,3, A\_10}, la manœuvre simulée sur le turbopropulseur est représentée sur la Figure IV2.9. Une autre manœuvre a également permis de balayer des points de fonctionnement supplémentaires, comme indiqués sur la Figure IV2.3 par le domaine orange. L'identification a permis de confirmer que le comportement du turbopropulseur en ces points restait relativement proche de celui sur les points considérés comme nominaux. Seul le comportement nominal sera ainsi considéré par la suite.

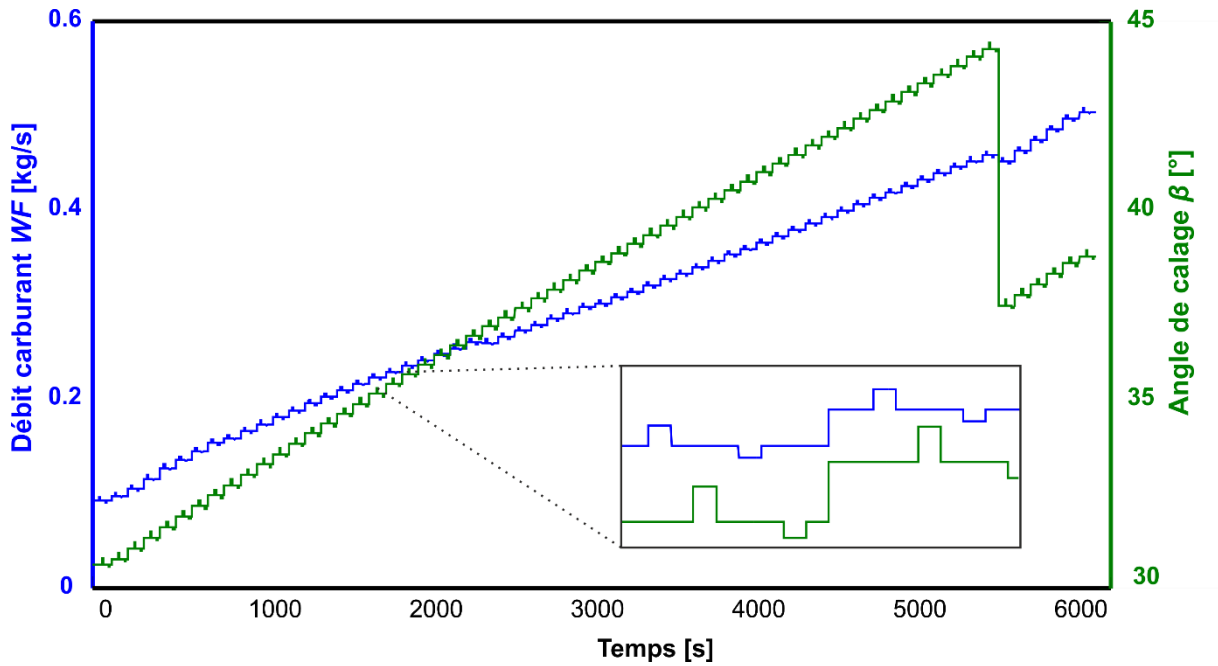


Figure IV.2.9 : Entrées de commande WF et  $\beta$  pour la manœuvre  $\{M_{0,3}, A_{10}\}$

Un échantillon arbitraire de données entrées-sorties centrées autour de 0 est représenté sur la Figure IV.2.10.

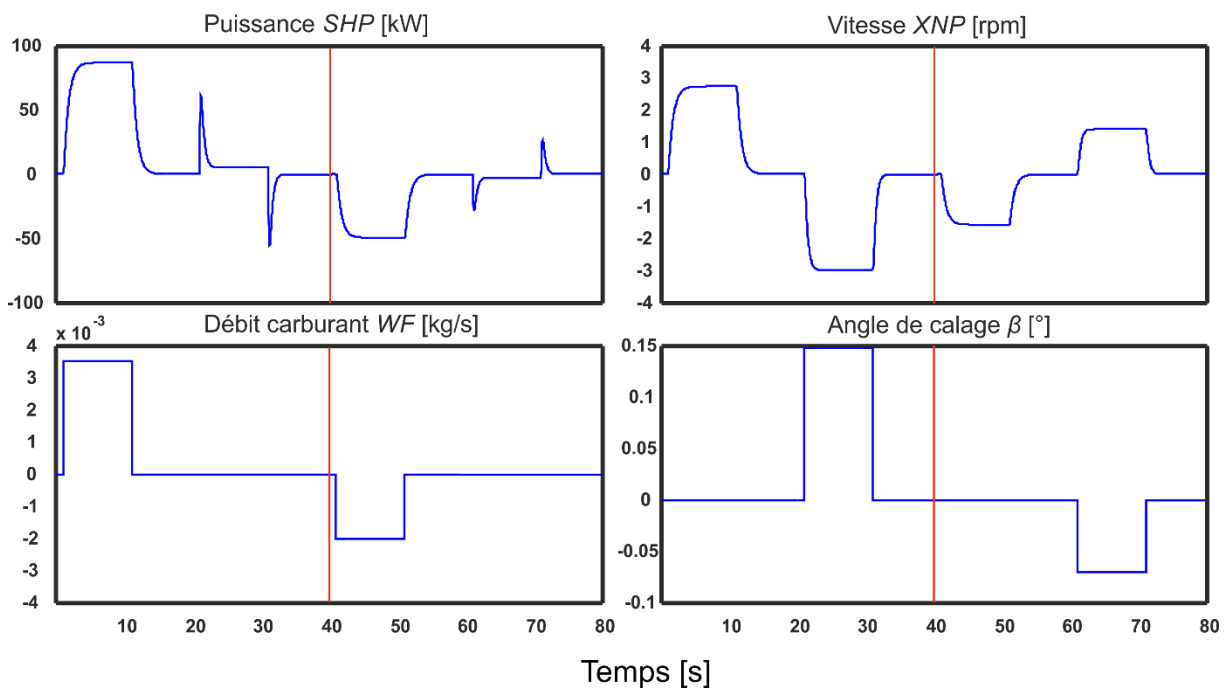


Figure IV.2.10 : Données entrées-sorties obtenues sur un point de fonctionnement

### iii. Choix de la structure des modèles

Les lois de commande seront implantées sous forme numérique dans le calculateur. Pour cette raison, il a été décidé de synthétiser directement ces lois par une approche numérique. Ainsi, les modèles recherchés par identification sont des modèles à temps discret.

Afin d'effectuer l'identification, il est nécessaire de donner des informations a priori sur la structure recherchée. Selon les méthodes, cela peut être l'ordre du système ou bien le nombre de pôles, de zéros et d'échantillons de retard. Plus la structure du modèle recherché est complexe, plus celui-ci sera



susceptible de retranscrire la dynamique du système. En revanche, les lois de commande de tels modèles peuvent être plus difficiles à développer, et l'ordre de ces dernières peut également en être affecté. Il est donc nécessaire de faire un compromis entre la précision désirée et la complexité des modèles recherchés. Étant donné que l'on cherche un modèle pour la synthèse de lois de commande, il est possible de se contenter d'un modèle « moyen ».

Il est possible d'identifier un modèle multivariable à partir d'un échantillon de données entrées-sorties global, comme celui représenté sur la Figure IV2.10, ou bien d'identifier indépendamment chacune des quatre fonctions de transfert monovariante (qui composent le modèle multivariable), en subdivisant l'échantillon de données entrées-sorties. L'avantage de l'identification multivariable est qu'elle conduit généralement à des modèles plus simples, en considérant les pôles multivariables du système, là où l'identification monovariante conduit à des pôles légèrement différents sur chacun des transferts (cela a été constaté en comparant les deux méthodes pour déterminer des modèles du turbopropulseur). L'identification multivariable a ainsi été choisie.

En étudiant les réponses temporelles des différents échantillons entrées-sorties, on s'aperçoit que la forme d'un même transfert sur les différents points de fonctionnement est globalement similaire. On peut donc supposer qu'il est possible d'avoir une structure commune sur chacun des transferts pour l'ensemble des points de fonctionnement. Il est d'ailleurs préférable d'adopter une même structure pour l'ensemble des modèles, afin de faciliter l'interpolation des correcteurs par la suite. En effet, certaines méthodes de synthèse de correcteurs ou encore d'analyse dépendent directement de la structure des modèles.

Étant donné la forme des réponses temporelles, on peut rechercher des transferts sans échantillon de retard. Par ailleurs, la présence des actionneurs dans le modèle non linéaire de turbopropulseur nous incite à rechercher des fonctions de transfert sans action directe (i.e. sans que les commandes agissent instantanément sur les sorties), malgré la forme de la réponse temporelle  $\beta \rightarrow SHP$  sur la Figure IV2.10.

Des procédures d'aide au choix de l'ordre des modèles estimés (reposant sur les méthodes des sous-espaces) ont été appliquées. L'ordre recommandé sur les différents points de fonctionnement est inférieur ou égal à 4. Dans le but de s'assurer de la meilleure structure, des représentations multivariables avec des ordres variant de 2 à 6 ont été testés avec une méthode d'identification (N4SID).

Afin de valider et de comparer les modèles identifiés, les erreurs NRMSE (Normalized Root Mean Square Error) entre les modèles identifiés et les échantillons entrées-sorties de validation (représentant le modèle non linéaire) ont été calculées (IV2.1). On parlera de taux de vraisemblance (ou de « *fit* ») par la suite pour quantifier l'adéquation du modèle identifié avec les échantillons entrées-sorties de validation.

$$fit = 100 \left( 1 - \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y - moy(y)\|} \right) [\%] \quad (IV2.1)$$

$y$  représente les sorties du scénario de validation et  $\hat{y}$  les sorties simulées du modèle estimé en réponse aux entrées du scénario de validation.

Le graphique de la Figure IV2.11 présente les taux de vraisemblance associés à chacune des sorties, sur les différents points de fonctionnement et en fonction des ordres des modèles testés. On constate que la précision des modèles augmente globalement avec l'ordre choisi, ce qui est logique. Quel que soit l'ordre choisi, les taux de vraisemblance dépassent les 85%, ce que l'on peut considérer comme acceptable pour des modèles ayant pour but la synthèse de lois de commande. Le modèle le plus simple, à savoir celui d'ordre 2, a donc été retenu.

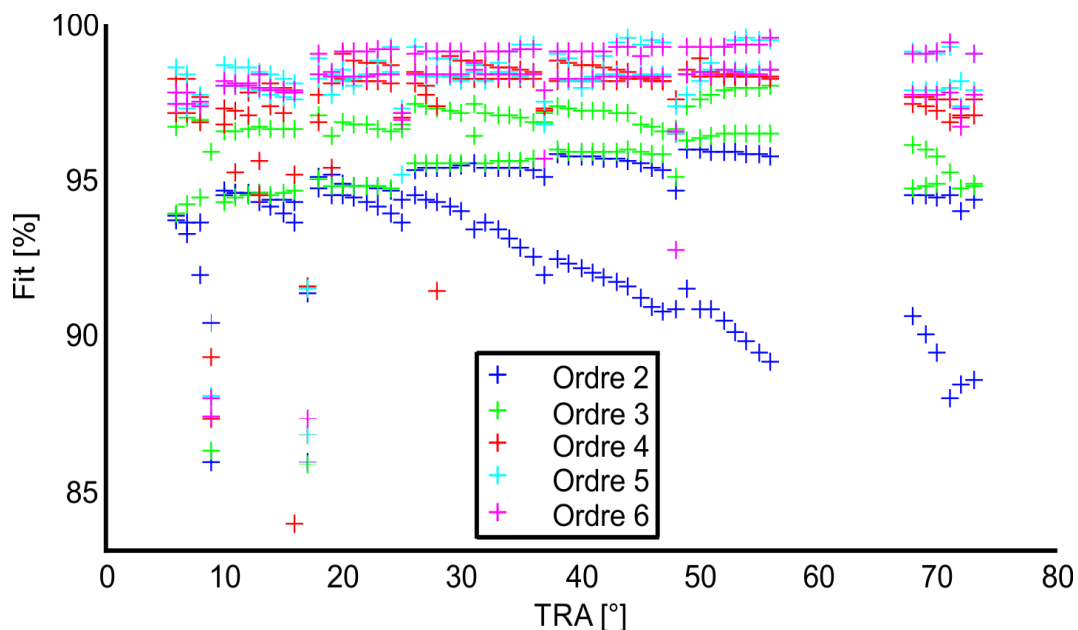


Figure IV2.11 : Comparaison des différentes structures de modèles pour le couple  $\{M_{0,3}, A_{10}\}$

Le but est donc de rechercher des modèles à temps discret d'ordre 2 et sans action directe. Par ailleurs, étant donné que le nombre de variables d'états est égal au nombre d'entrées-sorties, il est possible d'imposer que les sorties correspondent aux variables d'état. Il est en effet pratique d'exprimer les modèles recherchés dans une même base.

#### iv. Choix de la méthode d'identification

Trois méthodes classiques d'identification ont été testées, en utilisant la structure adoptée précédemment. Le but est de déterminer la méthode qui donne les modèles ayant les comportements les plus proches de celui du turbopropulseur, en chacun des points de fonctionnement. Les méthodes testées sont les suivantes (Ljung, 1999) :

- LS (Least Square), avec une structure de type autorégressive à matrices polynomiales,
- PEM (Prediction Error Method) avec une structure de matrice de transfert,
- N4SID (Numerical Subspace Based State Space System Identification) avec une structure de représentation d'état (il s'agit de la méthode utilisée pour déterminer la structure des modèles).

Afin de comparer ces méthodes d'identification sur le turbopropulseur, les taux de vraisemblance ont été comparés pour l'ensemble des points de fonctionnement. La Figure IV2.12 est par exemple obtenue pour le couple  $\{M_{0,3}, A_{10}\}$ .

Pour chacune des méthodes, les taux de vraisemblance sont supérieurs à 85% sur l'ensemble des points de fonctionnement pour le couple  $\{M_{0,3}, A_{10}\}$ . La méthode LS donne de meilleurs résultats que les méthodes PEM et N4SID, notamment sur l'estimation de la seconde sortie.

Le Tableau IV2-2 récapitule les moyennes des taux de vraisemblance obtenus pour l'ensemble des points de fonctionnement. Les écarts-types ont également été calculés pour s'assurer que les moyennes soient bien représentatives de l'ensemble des points.

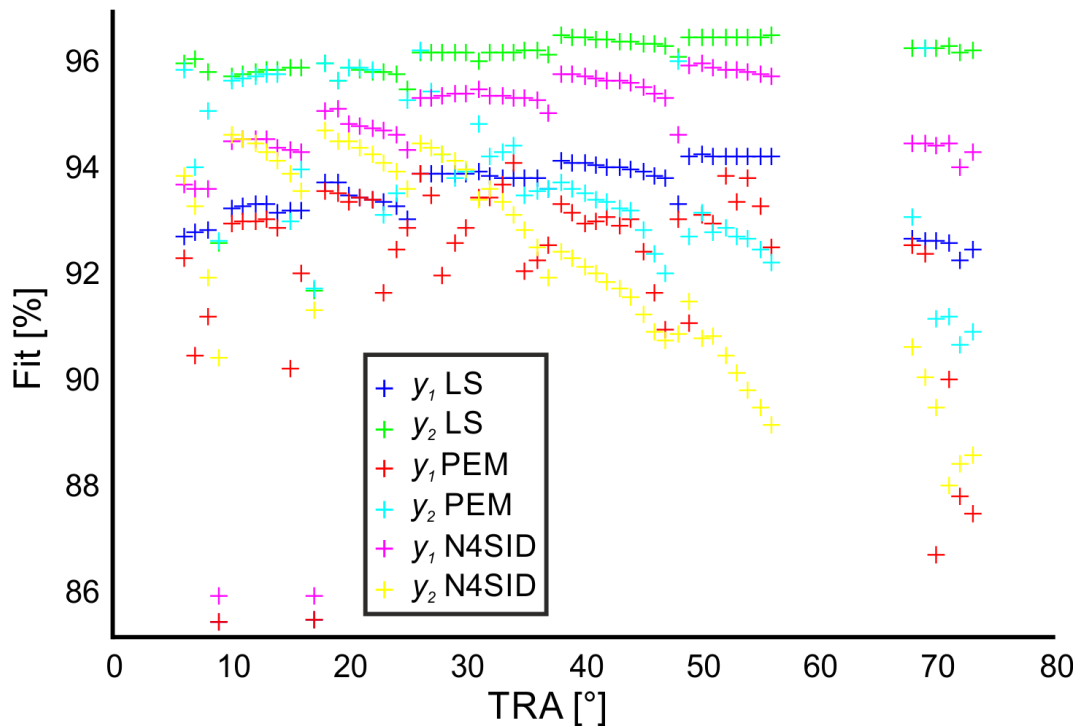


Figure IV2.12 : Comparaison des méthodes d'identification pour le couple  $\{M_{0,3}, A_{10}\}$

Ces résultats confirment ceux obtenus sur la Figure IV2.12, à savoir que les modèles identifiés sont assez représentatifs du turbopropulseur sur les différents points de fonctionnement (puisque les moyennes des taux de vraisemblance dépassent les 90% avec des écarts-types relativement faibles), et que la méthode LS donne des résultats légèrement meilleurs.

	Moyenne $Fit_1$	Écart-type $Fit_1$	Moyenne $Fit_2$	Écart-type $Fit_2$
LS	92,7	2,8	95,9	1,3
PEM	91,0	4,6	93,5	2,2
N4SID	93,8	2,9	90,6	3,9

Tableau IV2-2 : Taux de vraisemblance des modèles identifiés (entrées de commande)

Sur certains points, la méthode LS est moins performante que les autres méthodes. Une solution pourrait être de choisir le meilleur modèle identifié sur chacun des points de fonctionnement. Cependant, il a été décidé de ne conserver que les modèles provenant de la méthode LS, afin d'assurer une transition plus douce entre les modèles issus des différents points de fonctionnement.

La Figure IV2.13 illustre la comparaison entre un modèle estimé avec LS et les données de validation. Le modèle est parfaitement représentatif du comportement du turbopropulseur en régime permanent. L'action du débit carburant  $WF$  sur la puissance  $SHP$  et la vitesse  $XNP$  est également bien identifiée. Des différences sont notables pour l'action de l'angle de calage  $\beta$  sur les deux grandeurs de sortie, mais plus particulièrement sur  $SHP$ .

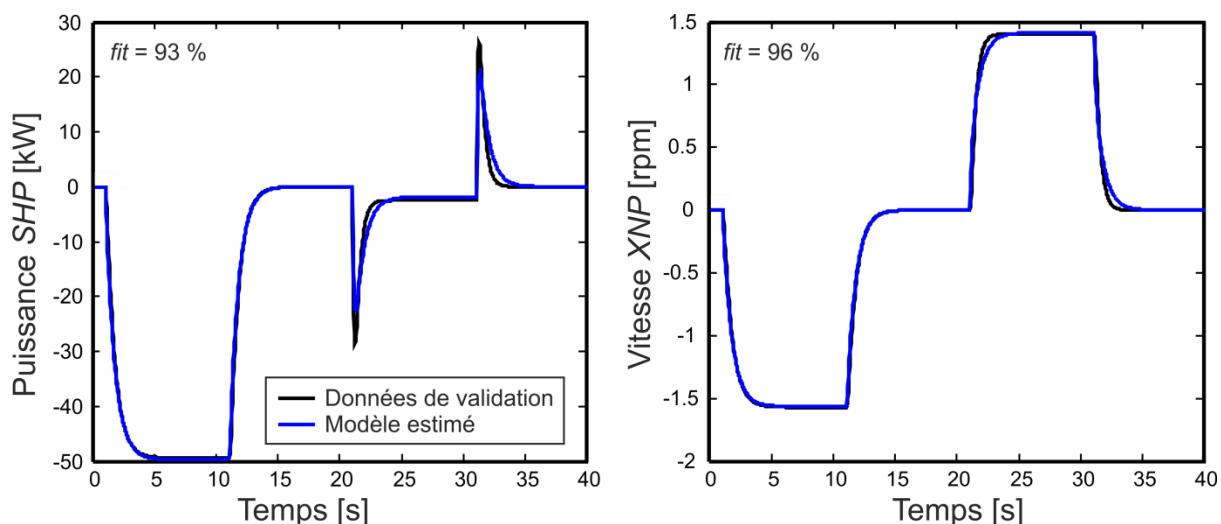


Figure IV2.13 : Comparaison d'un modèle estimé par rapport aux données de validation

#### v. Identification du comportement du turbopropulseur : entrées de perturbations

Après avoir identifié le comportement du turbopropulseur en réponse aux commandes  $WF$  et  $\beta$ , on cherche à identifier le comportement du turbopropulseur en réponse aux perturbations  $u_{HBV}$ . Comme souligné dans la partie IV2a, l'impact des vannes HBV est relativement important. Des retours d'expériences montrent que des pics de puissance  $SHP$  sont provoqués lors de la fermeture des vannes HBV. Ces pics sont néfastes pour divers organes de transmission comme la PGB (Propeller GearBox). La vitesse hélice  $XNP$  est également impactée, mais cela provient des couplages entre les boucles  $SHP$  et  $XNP$ . La détermination d'un modèle représentant le comportement des grandeurs de sortie en réponse à ces perturbations pourrait éventuellement permettre la mise en place d'un rejet de ces perturbations.

En se plaçant sur les points de fonctionnement adoptés dans la partie IV2a, un scénario d'identification et de validation est appliqué. Celui-ci est composé d'échelons  $u_{HBV}$ , en maintenant les commandes  $WF$  et  $\beta$  fixes.

Une recherche sur la structure des modèles identifiés conduit à des taux de vraisemblance plus qu'acceptables pour des modèles multivariables dynamiques d'ordre 1, ce qui est également confirmé par des retours d'expérience sur le comportement des HBV.

Les méthodes d'identification ont à nouveau été testées. Les résultats sont récapitulés dans le Tableau IV2-3. Les taux de vraisemblance obtenus avec les différentes méthodes restent relativement proches les uns des autres (et sont légèrement moins bons et plus dispersés que ceux obtenus précédemment). La méthode LS a été retenue par la suite, étant donné ses résultats légèrement meilleurs.

	Moyenne $Fit_1$	Écart-type $Fit_1$	Moyenne $Fit_2$	Écart-type $Fit_2$
LS	92,5	4,5	93,0	4,3
PEM	91,1	4,6	91,2	4,5
N4SID	92,0	5,2	93,1	4,8

Tableau IV2-3 : Taux de vraisemblance des modèles identifiés (entrées de perturbation)

## IV2c. Analyse des modèles identifiés

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des modèles identifiés. Cette étude permet d'une part de vérifier la cohérence des différents modèles identifiés, vis-à-vis de retours d'expérience sur des applications similaires. D'autre part, cette analyse permet de caractériser la dispersion des modèles, ce qui peut faciliter le choix des points de fonctionnement.

### i. Analyse du comportement du turbopropulseur : entrées de commande

L'identification du comportement du turbopropulseur en réponse aux entrées de commande  $WF$  et  $\beta$  a conduit à des modèles TITO discrets d'ordre 2 (sous forme d'un modèle autorégressif). La forme de représentation d'état associée à ces modèles est donnée dans (IV2.2). Comme précisé lors du choix de la structure des modèles identifiés, les sorties correspondent aux variables d'état (la matrice de sortie est donc l'identité). Sous forme de matrice de transfert, la structure des modèles est donnée dans (IV2.3). Les modèles possèdent deux pôles communs à tous les transferts, mais les zéros sont différents pour chacun d'entre eux. Les modèles seront notés  $G$  par la suite et les différents transferts  $G_{ij}$  sont rappelés en (IV2.4).

$$\begin{bmatrix} SHP[k+1] \\ XNP[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SHP[k] \\ XNP[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WF[k] \\ \beta[k] \end{bmatrix} \quad (IV2.2)$$

$$\begin{bmatrix} SHP(z) \\ XNP(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}(z-z_{11})}{(z-p_1)(z-p_2)} & \frac{K_{12}(z-z_{12})}{(z-p_1)(z-p_2)} \\ \frac{K_{21}(z-z_{21})}{(z-p_1)(z-p_2)} & \frac{K_{22}(z-z_{22})}{(z-p_1)(z-p_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WF(z) \\ \beta(z) \end{bmatrix} \quad (IV2.3)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WF \rightarrow SHP & \beta \rightarrow SHP \\ WF \rightarrow XNP & \beta \rightarrow XNP \end{bmatrix} \quad (IV2.4)$$

La pulsation de brisure des pôles discrets (d'un modèle à temps continu équivalent) peut se calculer en utilisant (IV2.5). La Figure IV2.14 présente la position des pôles discrets dans le plan complexe. La dispersion des pôles est relativement faible. La pulsation du pôle dominant varie autour de 2 rad/s, tandis que la pulsation de l'autre pôle est proche de 10 rad/s.

$$\omega_{za} = \frac{|\text{Log}(z_a)|}{T_s} \quad (IV2.5)$$

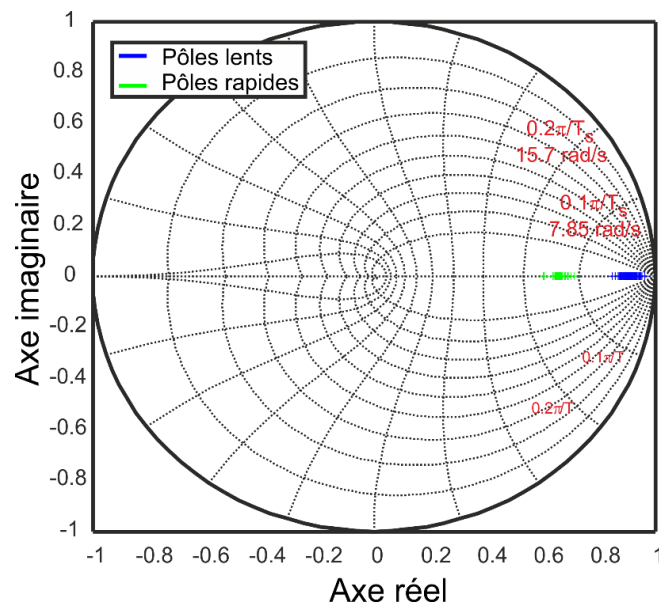


Figure IV2.14 : Position des pôles discrets des modèles identifiés

La Figure IV2.15 présente les pôles et les zéros de chacun des transferts. Il est à noter que certains zéros du transfert  $G_{12}$  (i.e. le transfert angle de calage  $\beta \rightarrow$  puissance  $SHP$ ) sortent du cercle unité. Par ailleurs, les zéros de certains transferts sont très proches des pôles rapides sur les différents points de fonctionnement. Il serait donc possible de réaliser des compensations pôles/zéros afin de se ramener à des transferts du premier ordre. Cependant, il a été décidé de conserver une structure fixe et similaire pour l'ensemble des fonctions de transfert.

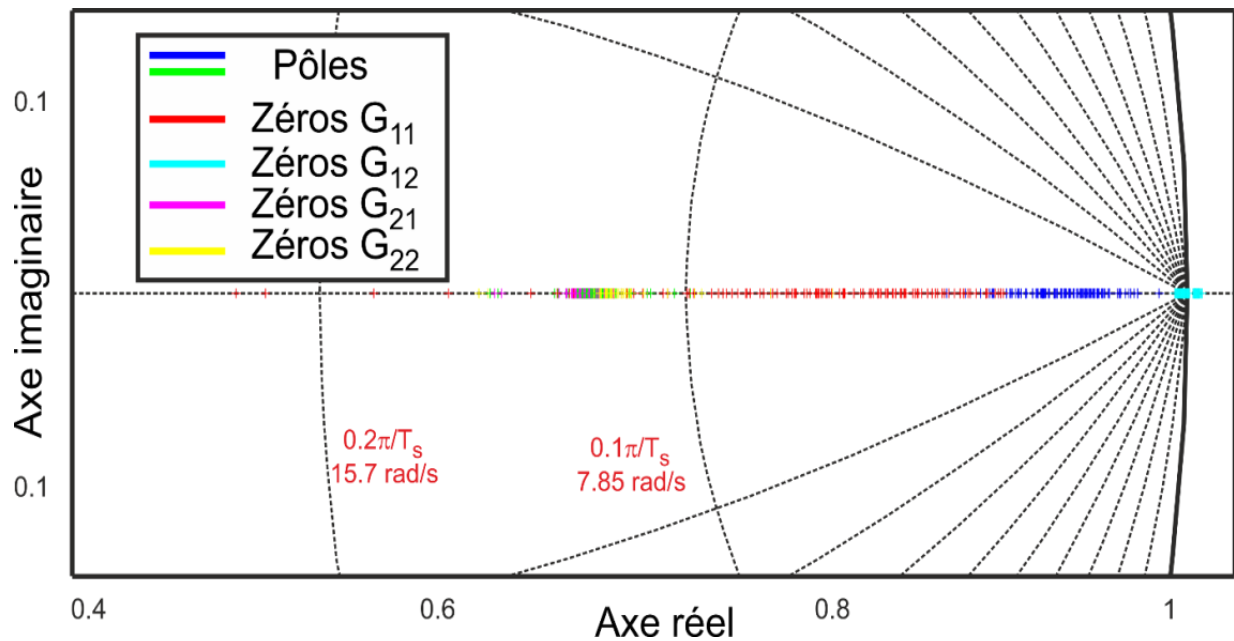


Figure IV2.15 : Position des pôles et des zéros discrets des modèles identifiés

L'analyse des pôles et des zéros permet de caractériser la rapidité des différents transferts, mais ces informations sont difficilement interprétables. Afin d'analyser l'évolution des différents transferts en fonction des variables TRA, Mach et Altitude, et de quantifier la dispersion du comportement des modèles, une analyse fréquentielle a été réalisée. Les figures qui suivent présentent les diagrammes de Bode des modèles identifiés, en faisant varier :

- le TRA avec un couple constant *moyen* {Mach, Altitude} (Figure IV2.16),
- le Mach avec un couple constant *moyen* {TRA, Altitude} (Figure IV2.17),
- l'altitude avec un couple constant *moyen* {TRA, Mach} (Figure IV2.18).

## Évolution du comportement du turbopropulseur avec le TRA

Il est clair que les réponses fréquentielles restent très proches entre deux points de fonctionnement. Lors d'une augmentation du TRA (Figure IV.2.16), les temps de réponse ont tendance à diminuer. Le gain statique du transfert  $G_{11}$  (débit carburant  $WF \rightarrow$  puissance  $SHP$ ) augmente, tandis que ceux des autres transferts diminuent. Le gain statique du transfert  $G_{12}$  (angle de calage  $\beta \rightarrow$  puissance  $SHP$ ) devient même négatif, tout comme le zéro de ce transfert (ce zéro en basses fréquences explique par ailleurs la forme de la réponse fréquentielle de  $G_{12}$ ). Le changement de palier de la vitesse de l'hélice se traduit sur l'ensemble des réponses fréquentielles par une modification plus ou moins brutale du gain statique.

En dehors du transfert  $G_{12}$ , les autres transferts auraient pu être considérés comme des premiers ordres au regard des réponses fréquentielles. Mais comme mentionné précédemment, une même structure sur chacun des transferts a été privilégiée.

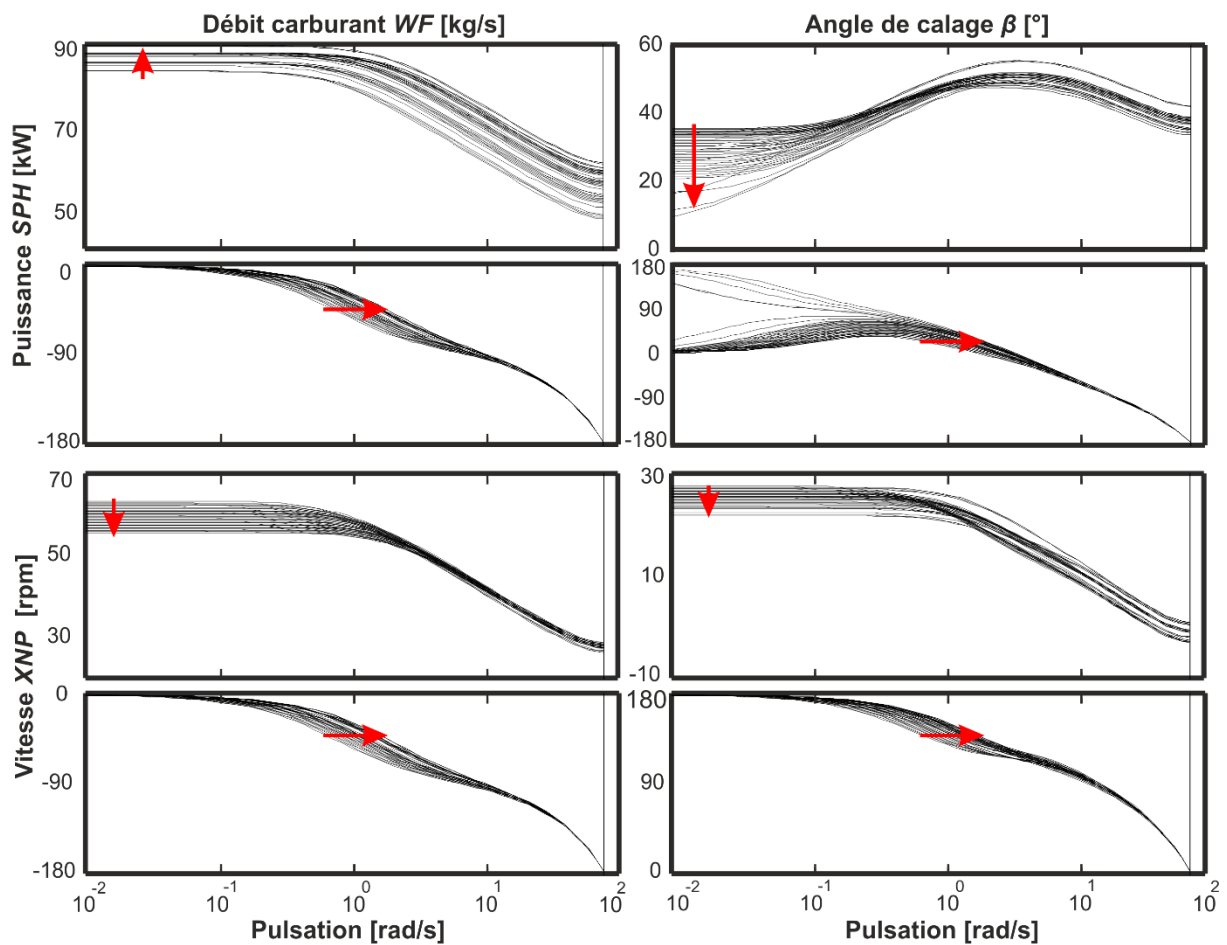


Figure IV.2.16 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés variant avec le TRA

## Évolution du comportement du turbopropulseur avec le Mach

Les réponses fréquentielles des modèles identifiés pour différentes valeurs du nombre de Mach sur un couple constant *moyen* {TRA, Altitude} sont tracées sur la Figure IV2.17.

Le turbopropulseur réagit plus rapidement aux commandes  $WF$  et  $\beta$  à un Mach plus élevé. Les régimes permanents sont en revanche très peu affectés par l'augmentation du Mach, hormis le transfert  $G_{21}$  ( $WF \rightarrow XNP$ ).

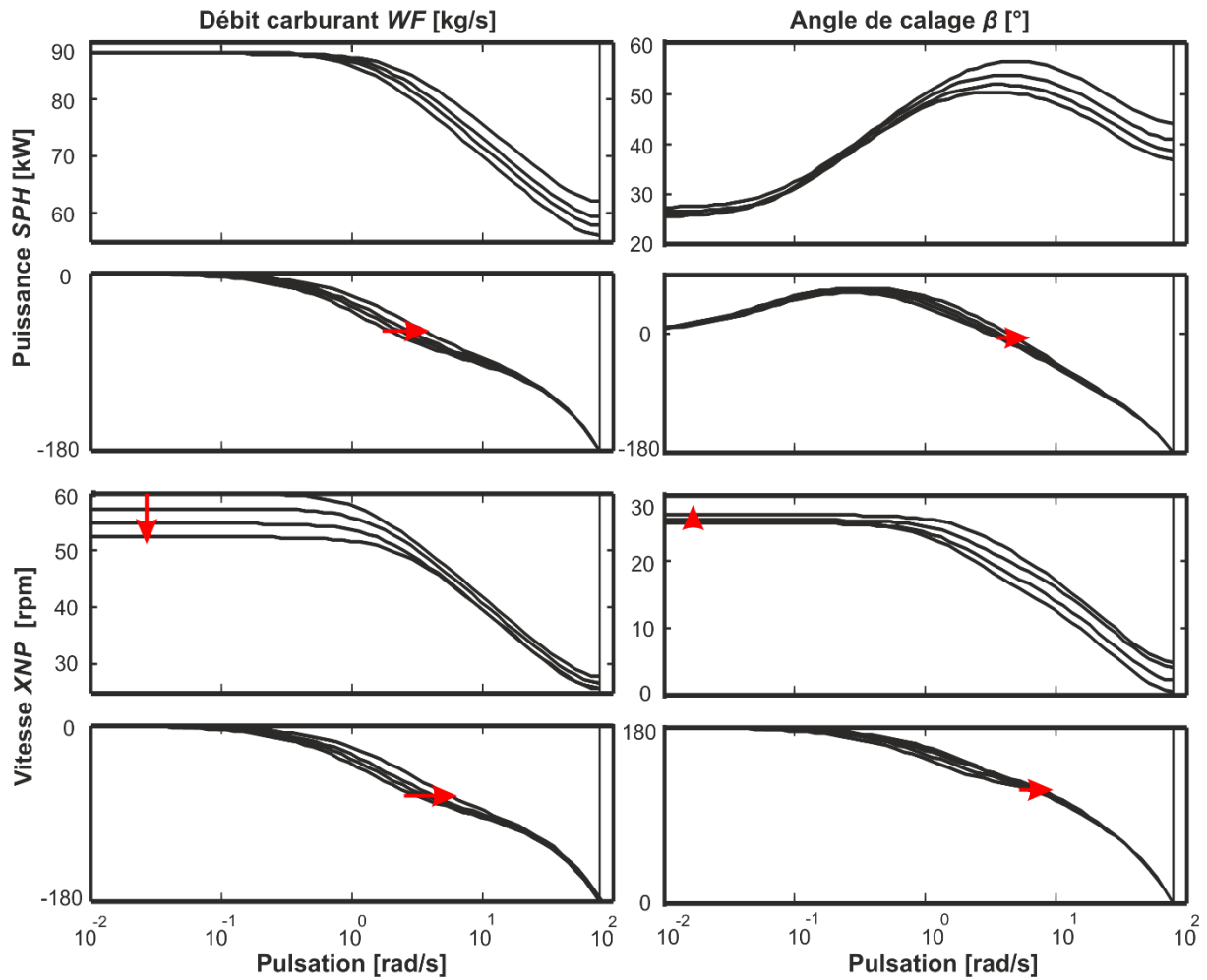


Figure IV2.17 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés variant avec le Mach



## Évolution du comportement du turbopropulseur avec l'altitude

Les réponses fréquentielles des modèles identifiés  $G$  à différentes altitudes sur un couple constant *moyen* {TRA, Mach} sont tracés sur la Figure IV2.18. Les régimes permanents des transferts diagonaux sont peu sensibles à l'altitude, contrairement à ceux des transferts non diagonaux, dont les gains statiques évoluent en sens inverse.

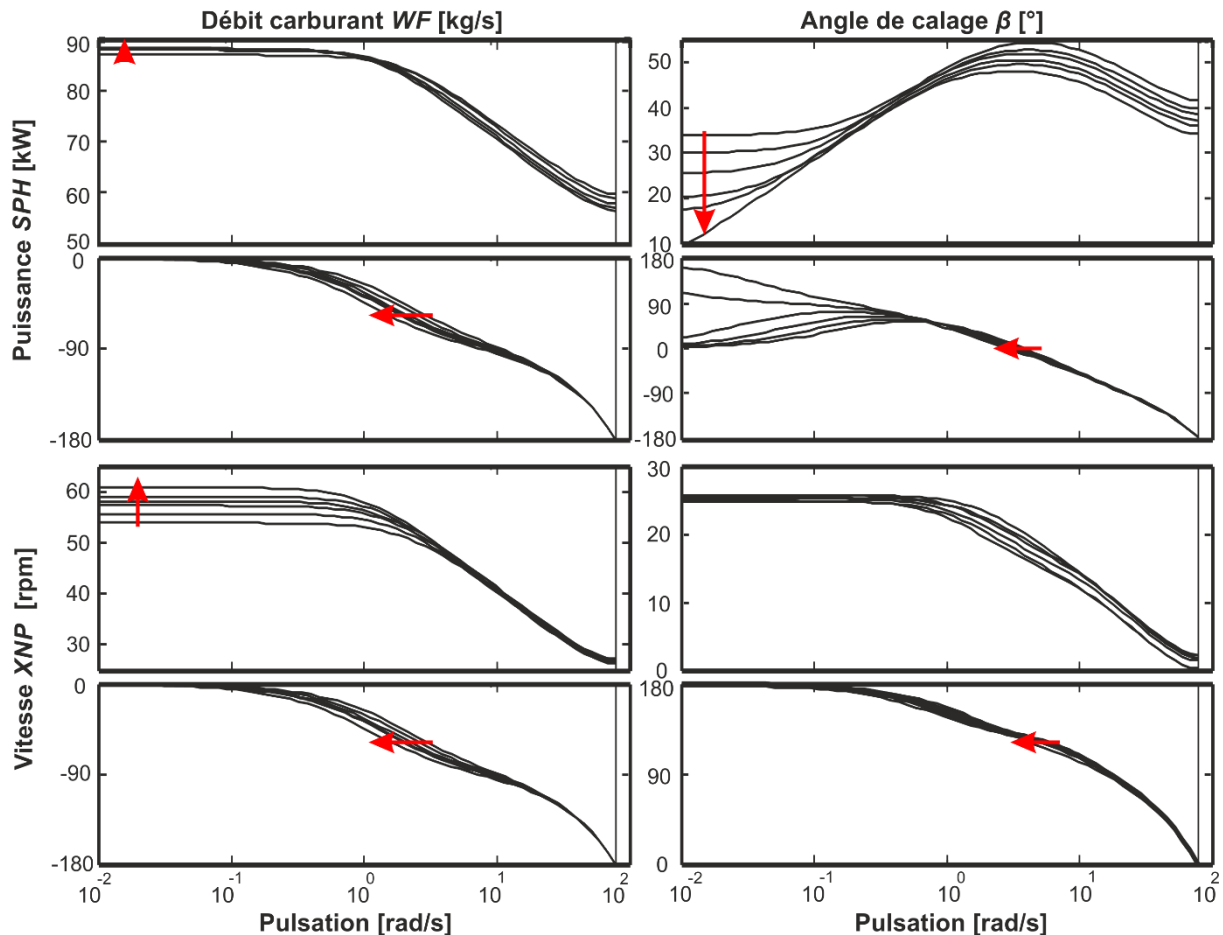


Figure IV2.18 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés variant avec l'altitude

Ces observations d'ordre général sont confirmées par la physique des turbopropulseurs. Cette étude donne par ailleurs un aperçu de la dispersion des gains statiques et des temps de réponse des différents transferts.

### ii. Évolution des modèles en fonction du TRA, du Mach et de l'altitude

Les analyses conduites précédemment montrent que les modèles identifiés entre deux points de fonctionnement ont un comportement similaire. Afin d'avoir une idée plus précise de la variation des paramètres des modèles, les coefficients des matrices d'état  $A$  et de commande  $B$  (issus de la représentation d'état donnée dans (IV2.2)) sont tracés en fonction du TRA sur la Figure IV2.19 (pour un couple {Mach, Altitude} fixé). Certaines zones sont quasiment constantes, ce qui traduit bien l'invariance du comportement du turbopropulseur. Seulement cinq points semblent nécessaires afin de décrire le comportement du turbopropulseur sur ce couple {Mach, Altitude}. Cette constatation est généralisable sur le domaine de vol considéré.

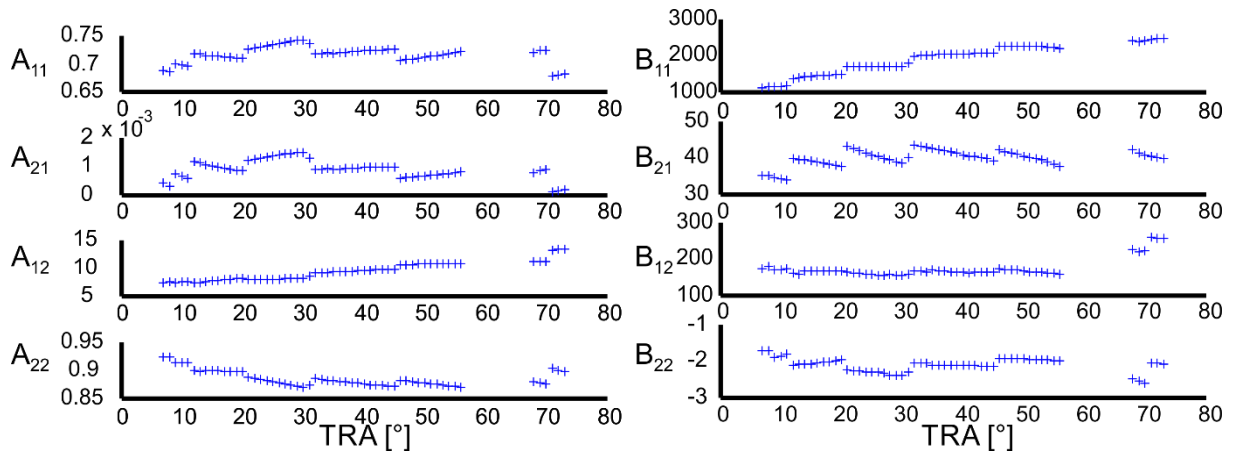


Figure IV2.19 : Coefficients des matrices d'état et de commande (TRA)

Si on se place à une altitude constante (10000 pieds par exemple), la Figure IV2.20 présente l'évolution des paramètres du modèle pour différentes valeurs du nombre de Mach, en fonction de TRA. Les variations des coefficients des matrices d'état et de commande sont similaires à celles observées sur la Figure IV2.19.

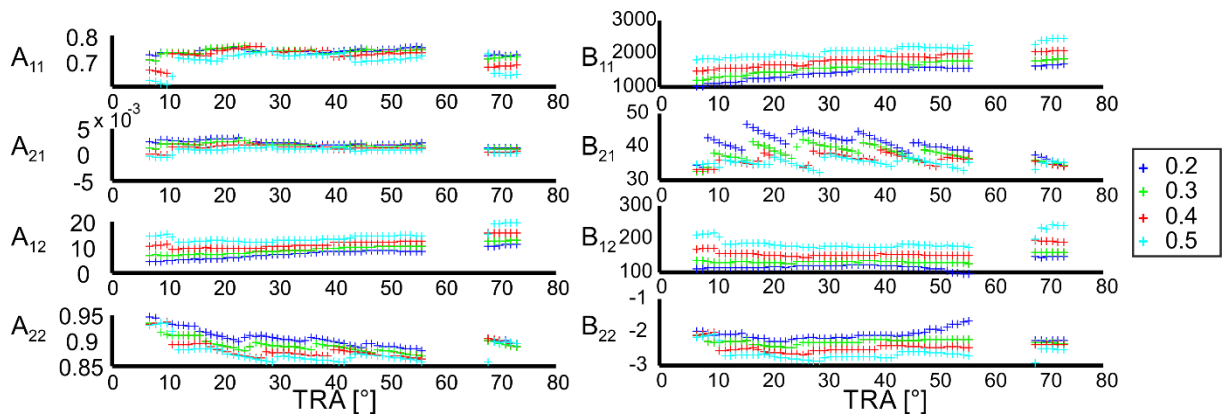


Figure IV2.20 : Coefficients des matrices d'état et de commande (TRA et Mach)

De la même façon, en se plaçant à un Mach constant (0,3 par exemple), la Figure IV2.21 présente les variations des différents coefficients pour différentes altitudes en fonction du TRA.

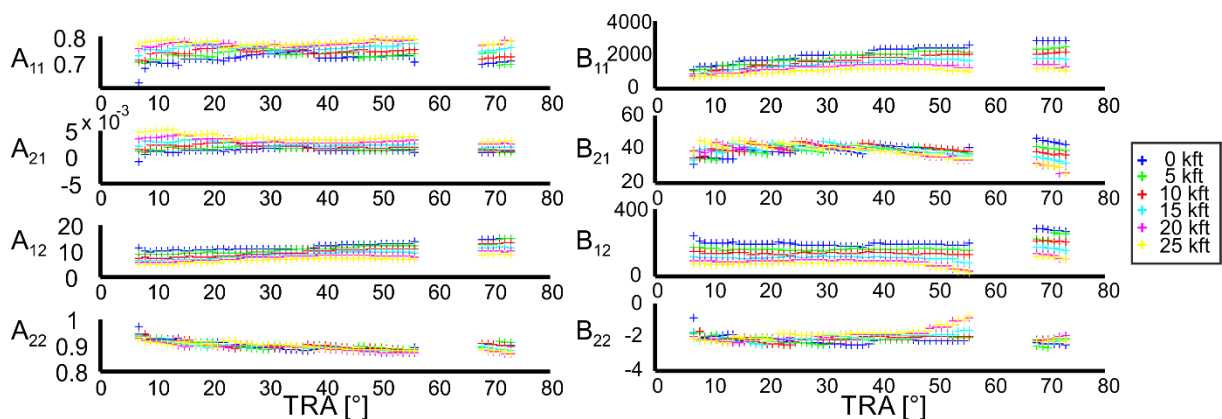


Figure IV2.21 : Coefficients des matrices d'état et de commande (TRA et altitude)

### iii. Adaptation du maillage des points de fonctionnement

Il est donc souhaitable de réduire le nombre de points de fonctionnement, afin de limiter le nombre de synthèses de régulateurs, mais surtout de faciliter l'interpolation de ces lois. Jusqu'à présent, le nombre de points de fonctionnement est de 1120 (20 couples {Mach, Altitude} et 56 TRA : [7,56]U[67,73]).

Le maillage du domaine de vol (défini dans la partie IV2a) en fonction du nombre de Mach [0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5] et de l'altitude [0, 5, 10, 15, 20, 25] kft semble trop fin, d'après les Figure IV2.20 et Figure IV2.21. Néanmoins, il a été décidé conserver ce maillage classique en aéronautique, quitte à le modifier par la suite, lors de l'analyse des résultats en boucle fermée.

Le maillage en fonction du TRA peut quant à lui être largement réduit. Rappelons que l'angle de la manette des gaz TRA ne peut pas servir de variable d'interpolation (afin de s'affranchir d'une dépendance avec le Power Management), comme mentionné dans la partie IV2a. On peut néanmoins associer d'autres variables au TRA, comme le régime  $N_3$  de l'arbre du compresseur HP. Celui-ci est caractéristique de la puissance de l'hélice et est couramment utilisé pour l'interpolation des lois de commande de turbopropulseurs. La Figure IV2.22 présente la correspondance entre le  $N_3$  et le TRA, pour chacun des vingt couples {Mach, Altitude}. Le  $N_3$  n'est pas strictement monotone vis-à-vis du TRA à cause du changement de palier de la vitesse hélice. Rappelons que la vitesse de l'hélice peut prendre deux valeurs : 730 rpm (lorsque le TRA est inférieur à 56°) ou 842 rpm (lorsque le TRA est dans l'intervalle [67°,73°]).

Il est alors possible d'associer un couple  $\{N_3, XNP\}$  à un angle TRA. Les points de fonctionnement définis par {Mach, Altitude, TRA} sont ainsi représentés par la suite par les ensembles {Mach, Altitude,  $\{N_3, XNP\}$ }.

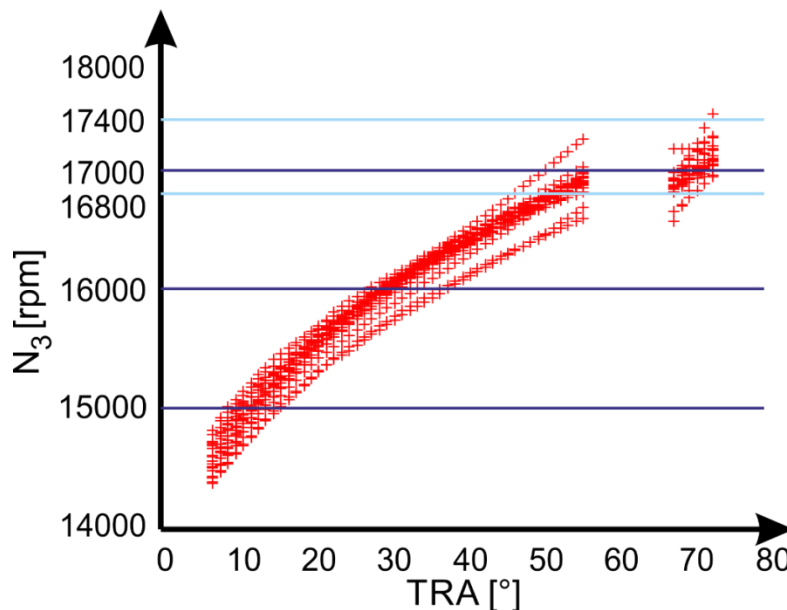


Figure IV2.22 : Correspondance entre le TRA et le  $N_3$  (régime de l'arbre du compresseur HP)

La réduction du maillage est directement réalisée à partir des couples  $\{N_3, XNP\}$ . D'après les variations des coefficients des matrices d'état et de commande, la plage à  $XNP = 730$  rpm semble pouvoir être représentée par trois points. Deux points sont suffisants pour représenter la plage de  $XNP = 842$  rpm. Les points adoptés sont les suivants :

- $\{15000, 730\}$ ,  $\{16000, 730\}$ ,  $\{17000, 730\}$ ,
- $\{16800, 842\}$ ,  $\{17400, 842\}$ .

La difficulté est que les modèles ne sont pas forcément disponibles pour ces valeurs précises. Par ailleurs, ces dernières ne correspondent pas aux mêmes valeurs de TRA pour les différents couples

{Mach, Altitude} comme on peut le voir sur la Figure IV2.22. Des modèles ont ainsi été associés à ces points en interpolant les modèles existants les plus proches. Étant donnée la finesse du maillage initial, les modèles interpolés restent relativement proches des modèles initiaux.

Les coefficients de ces modèles sont reportés (en rouge) sur la Figure IV2.23, et comparés aux coefficients originaux pour le couple {Mach, Altitude} considéré. On constate que les coefficients des modèles interpolés restent très proches des points originaux. De plus, une interpolation linéaire de ces coefficients permet de s'approcher relativement bien de l'ensemble des points. Ces conclusions sont généralisables aux autres couples {Mach, Altitude}.

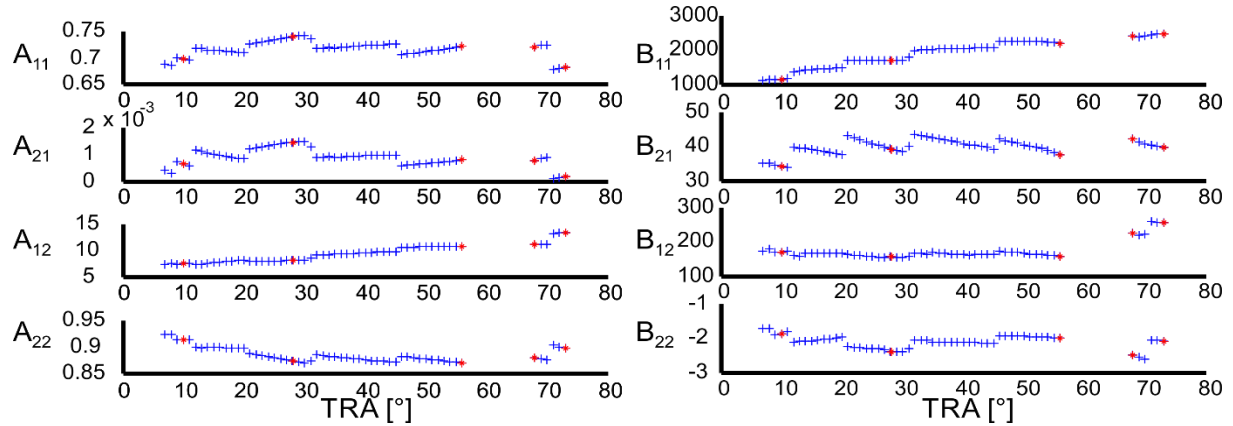


Figure IV2.23 : Choix des points de fonctionnement

#### iv. Analyse du comportement du turbopropulseur : entrées de perturbation

L'identification du comportement du turbopropulseur en réponse aux entrées de perturbations  $u_{HBV}$  a conduit à des modèles discrets, nommés *HBV* (de taille [2,1]), d'ordre 1 et sans zéros (IV2.6), (IV2.7). Les pôles  $z_{HBV}$ , représentés sur la Figure IV2.24, sont ainsi communs aux transferts  $u_{HBV} \rightarrow SHP$  et  $u_{HBV} \rightarrow XNP$ .

$$\begin{bmatrix} SHP \\ XNP \end{bmatrix} = HBV(z)u_{HBV} \quad (IV2.6)$$

$$HBV(z) = \begin{bmatrix} HBV_1(z) \\ HBV_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{HBV_1}}{(z - p_{HBV})} \\ \frac{K_{HBV_2}}{(z - p_{HBV})} \end{bmatrix} \quad (IV2.7)$$

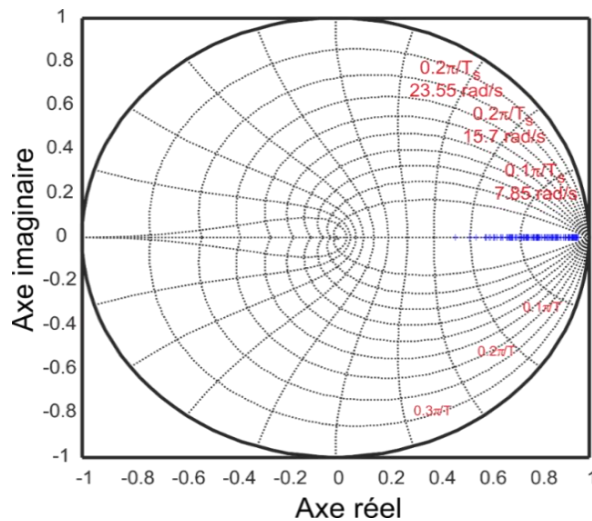


Figure IV2.24 : Position des pôles discrets des transferts liés aux HBV

Les pulsations de brisure de l'ensemble des pôles (des modèles à temps continu équivalent) sont comprises entre 1 et 15 rad/s, pulsations voisines des pôles du turbopropulseur  $G$  (en réponse aux commandes).

Les figures qui suivent présentent les diagrammes de Bode des modèles identifiés  $HBV$  en réponse à des entrées de perturbations, en faisant varier :

- le TRA avec un couple constant *moyen* {Mach, Altitude} (Figure IV2.25),
- le Mach avec un couple constant *moyen* {TRA, Altitude} (Figure IV2.26),
- l'altitude avec un couple constant *moyen* {TRA, Mach} (Figure IV2.27).

Évolution du comportement du turbopropulseur avec le TRA

La Figure IV2.25 montre qu'une augmentation de TRA conduit à des réponses vis-à-vis des perturbations plus rapides et avec un gain statique plus élevé.

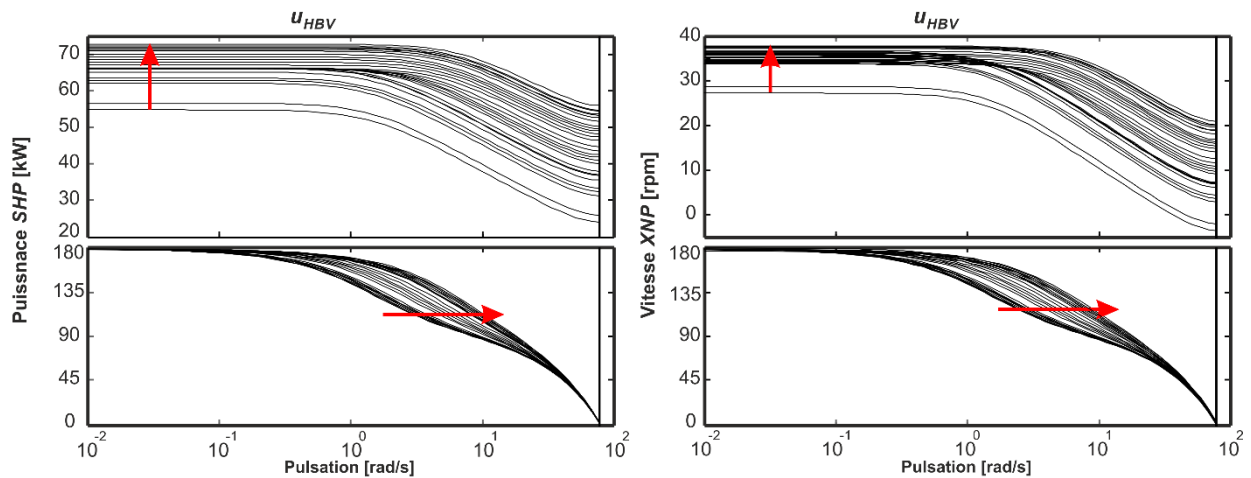


Figure IV2.25 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés  $HBV$  variant avec le TRA

Évolution du comportement du turbopropulseur avec le Mach

La Figure IV2.26 montre qu'une augmentation du nombre de Mach (à TRA et altitude fixes) conduit à une diminution du gain du transfert  $u_{HBV} \rightarrow XNP$ .

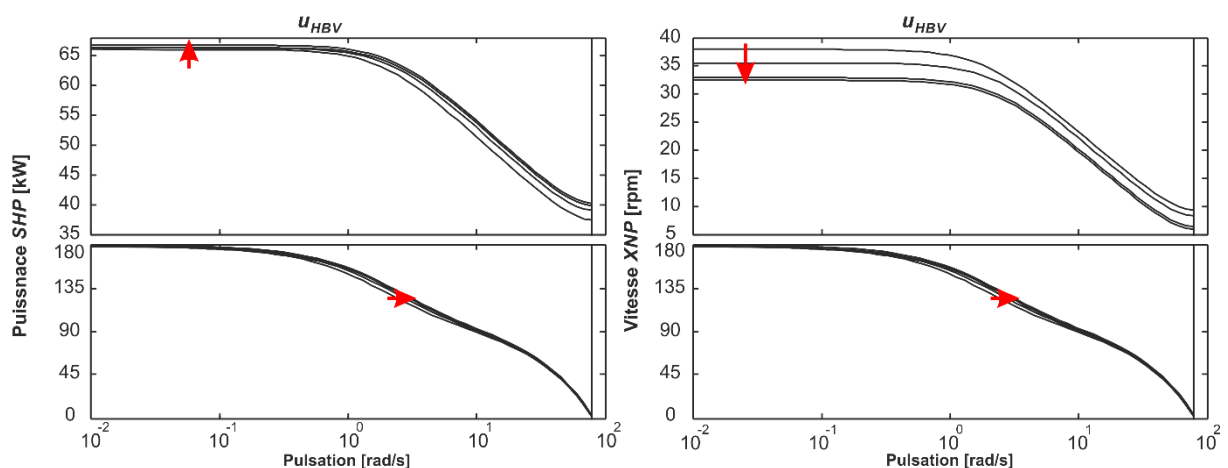


Figure IV2.26 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés  $HBV$  variant avec le Mach

## Évolution du comportement du turbopropulseur avec l'altitude

La Figure IV.2.27 montre qu'une augmentation de l'altitude (à TRA et Mach fixes) conduit à une diminution du gain. La rapidité des transferts reste à peu près constante.

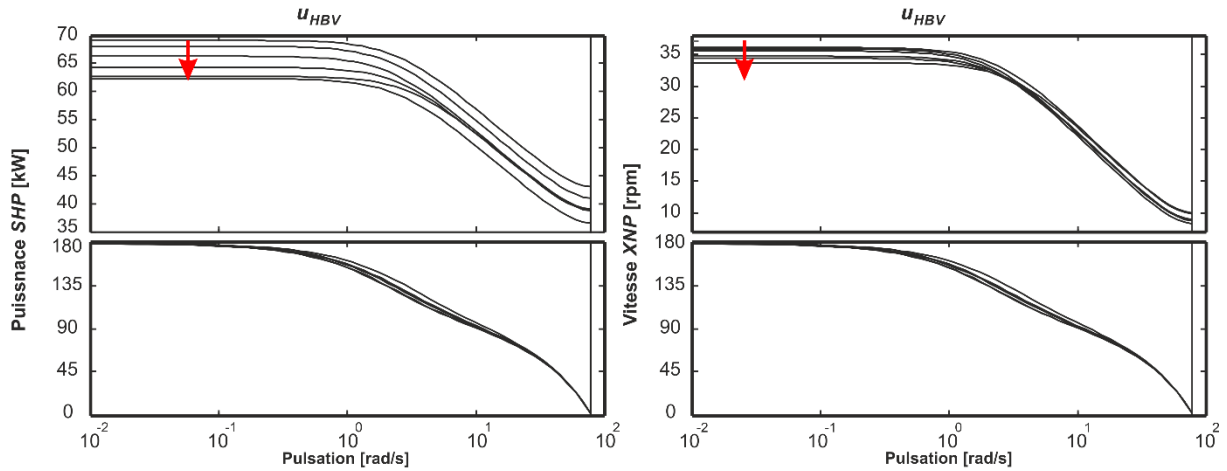


Figure IV.2.27 : Diagrammes de Bode des modèles identifiés HBV variant avec l'altitude

Le maillage de points de fonctionnement établi précédemment est adopté pour les modèles de turbopropulseur en réponse aux perturbations des vannes HBV.

### IV2d. Conclusion sur l'identification et l'analyse des modèles identifiés

Un maillage de points de fonctionnement caractéristique du régime nominal a tout d'abord été déterminé. Celui-ci permet de balayer finement le domaine de vol (défini par le nombre de Mach et l'altitude) et la plage de la manette de gaz TRA.

Des scénarios d'identification et de validation ont ensuite été appliqués sur chacun des points de fonctionnement afin d'obtenir des données entrées-sorties propices à l'identification. Différentes structures de modèles ont été testées, et des modèles multivariables à temps discret d'ordre 2 ont été retenus. Parmi les méthodes d'identification utilisées, la méthode des moindres carrés (LS) s'est révélée représenter le mieux le comportement du turbopropulseur aux entrées de commande  $WF$  et  $\beta$ . Le comportement du turbopropulseur aux entrées de perturbations  $u_{HBV}$  a également été analysé. Des modèles de ce comportement ont été identifiés dans le but d'une éventuelle action par anticipation.

Une analyse des modèles identifiés a ensuite permis de caractériser le comportement du turbopropulseur et également d'adapter le maillage de points de fonctionnement qui sera utilisé pour la synthèse des lois de commande.

## IV3. Application de la commande décentralisée

### IV3a. Analyse des interactions

Une analyse des interactions doit être réalisée pour déterminer si une commande décentralisée est applicable. La procédure établie dans le Chapitre I est appliquée au turbopropulseur.

#### i. Application de la procédure d'analyse

Les commandes et sorties du procédé sont normalisées, de manière à ce que les gains statiques des termes diagonaux soient unitaires.

Dynamic Relative Gain Array DRGA

La DRGA est tout d'abord appliquée afin de vérifier si une stratégie décentralisée est envisageable, et le cas échéant de déterminer une configuration de commande. Le calcul de la DRGA est réalisé à partir des réponses fréquentielles du procédé, celui-ci peut ainsi être directement appliqué aux modèles de turbopropulseur à temps discret. La DRGA des modèles en chacun des points de fonctionnement est tracée sur la Figure IV3.1.

La DRGA relative à la configuration  $WF \rightarrow SHP / \beta \rightarrow XNP$  est relativement proche de 1 en basses fréquences et jusqu'à la pulsation de brisure visée pour la première boucle, i.e.  $\omega_{c1} = 2$  rad/s. Cela traduit des interactions relativement faibles en régime permanent. En revanche, cette configuration présente des interactions importantes à partir de la pulsation de brisure visée pour la seconde boucle fermée, i.e.  $\omega_{c2} = 5$  rad/s. C'est globalement l'inverse pour la configuration  $\beta \rightarrow SHP / WF \rightarrow XNP$ .

A pulsation nulle, la DRGA de la configuration  $WF \rightarrow SHP / \beta \rightarrow XNP$  est supérieure à 1 sur certains points de fonctionnement. Cela signifie d'après les propriétés de la RGA que les indices RGA relatifs à la configuration  $\beta \rightarrow SHP / WF \rightarrow XNP$  sont négatifs sur certains points de fonctionnement. Il en va de même pour les indices de Niederlinsky (puisque'il s'agit d'un procédé TITO), ce qui indique des instabilités de cette configuration avec une stratégie décentralisée.

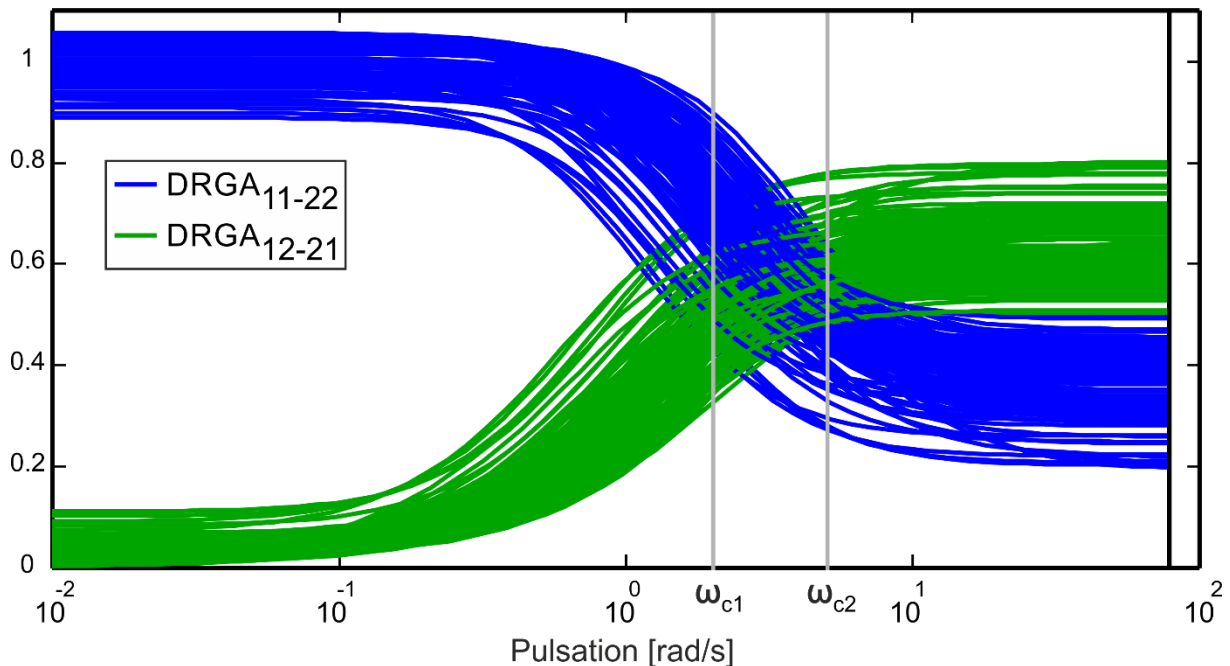


Figure IV3.1 : Indices DRGA

Afin de cibler ces points de fonctionnement, les indices de Niederlinsky (NI) sont calculés et représentés sur la Figure IV3.2. Pour la configuration diagonale, i.e.  $WF \rightarrow SHP / \beta \rightarrow XNP$ , les indices



NI sont positifs en chacun des points. Ce n'est pas le cas de l'autre configuration, i.e.  $\beta \rightarrow SHP / WF \rightarrow XNP$ , où 65% des NI sont négatifs.

La configuration  $\beta \rightarrow SHP / WF \rightarrow XNP$  n'est ainsi pas compatible avec une stratégie décentralisée et la configuration  $WF \rightarrow SHP / \beta \rightarrow XNP$  risque d'être soumise à des interactions très élevées en hautes fréquences. La DRGA montre ainsi qu'une stratégie décentralisée ne permettra pas d'obtenir de bonnes performances.

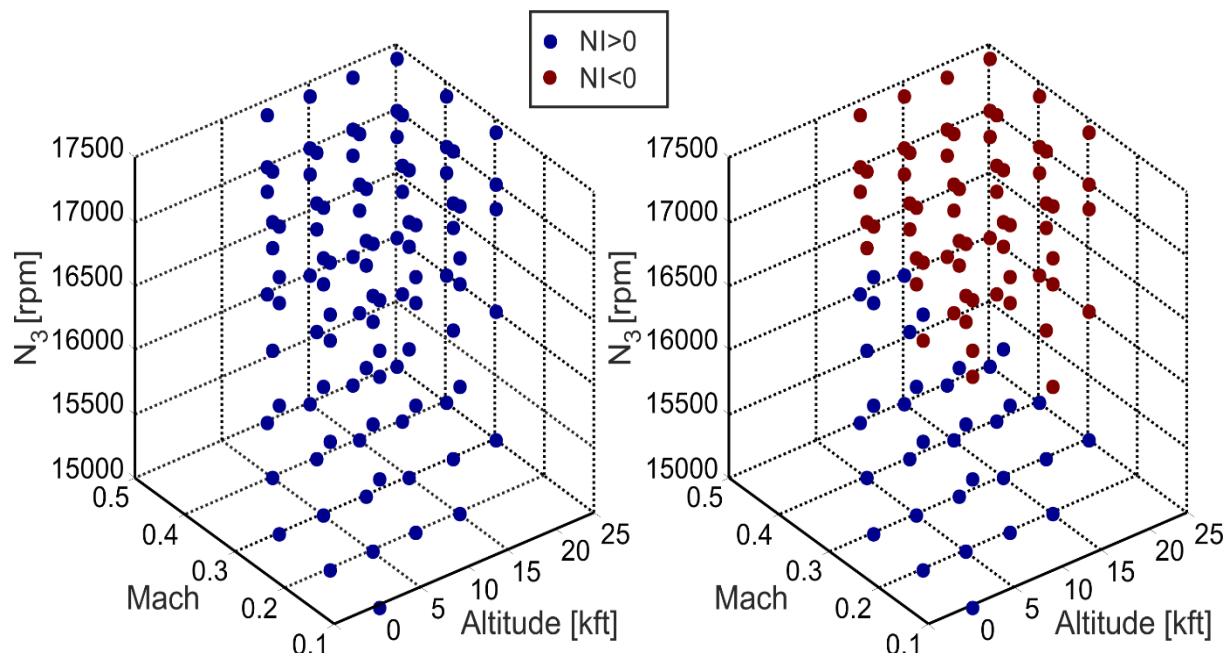


Figure IV3.2 : Indices NI

## Indice $H_2$

L'indice  $H_2$  est à présent calculé afin de vérifier les conclusions tirées de l'analyse de la DRGA. La forme discrète des grammians (A-1. Grammiens de commandabilité et d'observabilité) est utilisée en résolvant les équations discrètes de Lyapunov.

En moyenne sur l'ensemble des points de fonctionnement, l'indice  $H_2$  est donné par (IV3.1). Chacun des transferts représente environ 25% des dynamiques du système global. Cela signifie qu'aucun transfert ne peut être négligé. L'indice  $H_2$  confirme ainsi qu'une stratégie décentralisée ne permettra pas d'obtenir de bonnes performances.

$$H_2(\omega_L) = \begin{bmatrix} 22,8 & 24,8 \\ 24,6 & 27,8 \end{bmatrix} \quad (IV3.1)$$

## ii. Choix d'une autre stratégie de régulation

Ne pouvant procéder à une stratégie décentralisée *pure*, les autres stratégies de régulation sont étudiées :

- Étant donné la forme de l'indice  $H_2$  (confirmée par les indices HIIA et PM), une stratégie partiellement décentralisée ne pourra pas répondre aux spécifications. En effet, les quatre transferts sont globalement d'égale importance.
- Une stratégie décentralisée par blocs revient à une stratégie décentralisée dans le cas TITO.
- La stratégie décentralisée avec compensateur est alors adoptée.



### IV3b. Découplage du turbopropulseur

La procédure de découplage élaborée dans le Chapitre III est appliquée. Les solutions de découplage envisagées sont les suivantes :

- Découplage avec pré-compensateur statique,
- Découplage avec pré et post-compensateurs statiques,
- Découplage avec pré-compensateur dynamique (déterminé par optimisation ou inversion) (Le Brun *et al.*, 2015).

Cela exclut certaines stratégies classiques de découplage appliquées aux turbopropulseurs (High *et al.*, 1991), (Lietzau, 2006), notamment celle consistant à mettre en place un découplage unidirectionnel au niveau des consignes et un découplage unidirectionnel au niveau des commandes, comme représentés sur la Figure IV3.3. Néanmoins, le fait de découpler les consignes à la place des commandes n'a pas été considéré comme souhaitable, comme expliqué dans le Chapitre III.

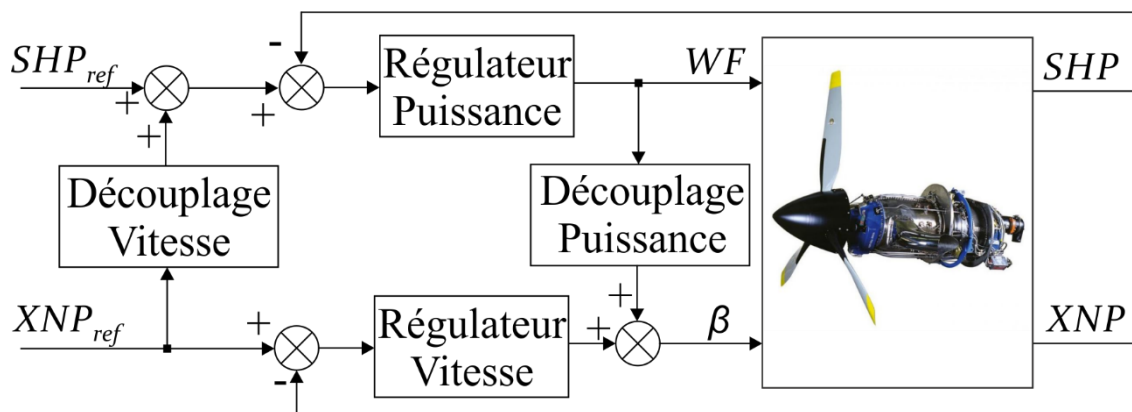


Figure IV3.3 : Stratégie de découplage utilisée pour certains turbopropulseurs

#### Indices de découplage

Les paramètres de la fonction de pondération  $W$  (dont la forme est définie dans le Chapitre III) utilisée pour le calcul des indices de découplage et dans les routines d'optimisation sont :

- $\omega_d = 3,5$  rad/s (soit la moyenne des deux pulsations de brisure recherchées en boucle fermée  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$ ),
- $\beta = 1/3$ ,
- $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ .

On se fixe comme objectif d'avoir des indices de découplage  $\rho_i$  inférieurs à 0,1. Le procédé normalisé est utilisé lors du calcul des compensateurs.

#### Analyse de la $DD_c$

L'inverse de la  $DD_c$  sur les différents points de fonctionnement est tout d'abord tracé sur la Figure IV3.4. En chacun des points de fonctionnement, l'indice  $DD_{c1}^{-1}$  est relativement invariant sur tout le domaine fréquentiel. Les valeurs sont globalement supérieures à 1, ce qui montre que l'impact du débit carburant  $WF$  est plus important sur la vitesse hélice  $XNP$  que sur la puissance de l'hélice  $SHP$ . L'indice  $DD_{c2}^{-1}$  est quasiment nul en basses fréquences mais devient supérieur à 1 à partir de  $\omega_{c2}$ .

Les interactions entrées-sorties sont ainsi très importantes. Celles-ci dépendent des points de fonctionnement comme on peut le voir sur la Figure IV3.4. On se place à présent sur un point de fonctionnement *moyen* du point de vue des interactions. Les indices  $DD_{c1}^{-1}$  et  $DD_{c2}^{-1}$  sont respectivement tracés en rouge et cyan sur la Figure IV3.4. Le modèle normalisé  $G_n$  du turbopropulseur est donné dans (IV3.2).

$$G_n(z) = \frac{1}{(z - 0,676)(z - 0,923)} \begin{bmatrix} 0,081(z - 0,69) & 0,185(z - 0,99) \\ 0,106(z - 0,68) & -0,083(z - 0,698) \end{bmatrix} \quad (\text{IV3.2})$$

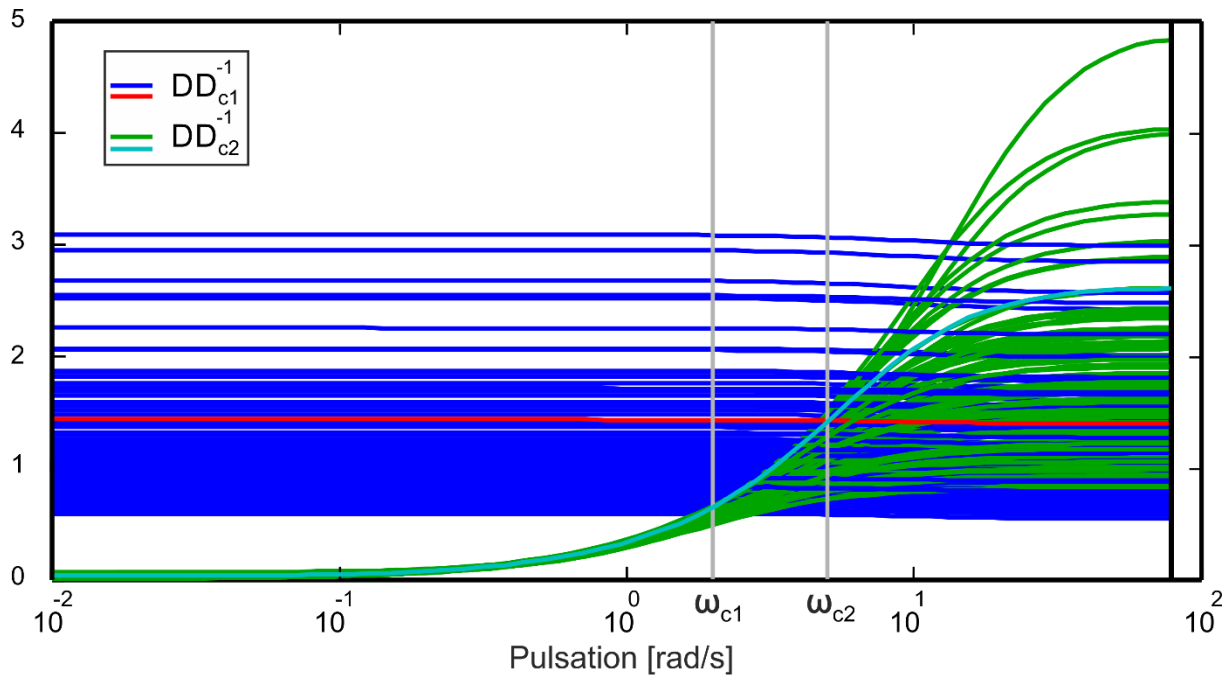


Figure IV3.4 :  $DD_c$  des modèles identifiés

Calcul de l'ordre maximal des compensateurs recherchés

Le découpleur simplifié est tout d'abord calculé, afin d'évaluer la complexité et d'estimer l'ordre d'un compensateur parfait. D'après la structure du procédé (IV2.3) donnée dans la partie IV2c, le découpleur simplifié est composé des transferts (IV3.3). Il s'agit de deux transferts propres et stables (les zéros des termes diagonaux sont stables en chacun des points de fonctionnement, comme indiqué sur la Figure IV2.15).

Ces transferts sont d'ordre 1 et le nombre de paramètres à interpoler sera de 6 pour le découpleur inversé. L'ordre maximal recherché par optimisation sera donc de 0 (puisque un pré-compensateur avec des éléments du premier ordre sera plus complexe). En conséquence, l'approche statique sera considérée pour le découplage par optimisation.

$$D_1(z) = \frac{G_{n_{12}}(z)}{G_{n_{11}}(z)} = \frac{K_{12}(z - z_{12})}{K_{11}(z - z_{11})} \quad (\text{IV3.3})$$

$$D_2(z) = \frac{G_{n_{21}}(z)}{G_{n_{22}}(z)} = \frac{K_{21}(z - z_{21})}{K_{22}(z - z_{22})}$$

Recherche d'un pré-compensateur statique par optimisation

Un pré-compensateur statique seul est tout d'abord recherché. Étant donné qu'il s'agit d'un procédé TITO, le pré-compensateur peut être déterminé par l'optimisation de ses coefficients. Il n'y a évidemment pas de différence entre les domaines continus et discrets pour la recherche d'un tel compensateur.

Le pré-compensateur obtenu est donné dans (IV3.4). Les résultats sont présentés dans le Tableau IV3-2 et l'inverse de la  $DD_c$  est tracée sur la Figure IV3.5. Le pré-compensateur statique permet de réduire drastiquement  $DD_{c1}^{-1}$  sur tout le domaine fréquentiel.  $DD_{c2}^{-1}$  devient constant à une valeur proche de 0,45, ce qui reste encore trop important vis-à-vis des objectifs souhaités.

$$D = \begin{bmatrix} 0,582 & 0,812 \\ 0,814 & -0,584 \end{bmatrix} \quad (\text{IV3.4})$$

Recherche de pré et post-compensateurs statiques par décomposition dyadique

La décomposition dyadique est alors appliquée en prenant les pulsations  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$ . Les vecteurs propres de  $G_n^{-1}(j\omega_{c1})G_n(j\omega_{c2})$  et  $G_n(j\omega_{c2})G_n^{-1}(j\omega_{c1})$  sont déterminés et sont réels. L'utilisation de l'algorithme ALIGN n'est alors pas nécessaire et les compensateurs sont donnés dans (IV3.5).

Il s'avère que le procédé est dyadique (A-2. Décomposition dyadique). Dans ce cas, la décomposition dyadique conduit effectivement à des matrices réelles et indépendantes des pulsations choisies. Ces matrices permettent alors d'assurer un découplage total sur l'ensemble du domaine fréquentiel. Cette propriété est également vraie pour l'ensemble des modèles identifiés sur les autres points de fonctionnement, du fait de la forme particulière du système (le calcul analytique des vecteurs propres des expressions  $G_n^{-1}(j\omega_{c1})G_n(j\omega_{c2})$  et  $G_n(j\omega_{c2})G_n^{-1}(j\omega_{c1})$  à partir de la représentation d'état (IV2.2) permet de vérifier ces conclusions).

$$D = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,569 \\ -0,0197 & 0,822 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0,0384 & 1,19 \\ 0,979 & -0,684 \end{bmatrix} \quad (\text{IV3.5})$$

Afin de valider les performances en termes de découplage, il est nécessaire d'après le Chapitre III de procéder à la synthèse des régulateurs et d'étudier la  $DD_c$  de la boucle ouverte réelle  $G_nDKR$  (et non celle de  $RG_nDK$ ). Des régulateurs PI sont ainsi synthétisés à partir de  $RG_nD$ , et permettent de respecter les spécifications du Tableau IV1-1. Les réglages sont donnés dans le Tableau IV3-1.

	$k_{p1}$	$\tau_{i1}$	$k_{p2}$	$\tau_{i2}$
Découpleur Ordre 1	0,594	0,518	1,01	0,123

Tableau IV3-1 : Réglages des régulateurs PI pour le procédé découplé par DD

La  $DD_c$  de  $G_nDKR$  est tracée sur la Figure IV3.5. Celle-ci ne correspond pas du tout à la  $DD_c$  de  $RG_nDK$ , notamment pour la seconde colonne. Cette solution devient ainsi moins performante que le pré-compensateur seul déterminé par optimisation. Cette conclusion se généralise également aux procédés identifiés sur les autres points de fonctionnement.

	$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$
Procédé	1,4	1,4	1,4
Optimisation	0,24	0,020	0,45
Décomposition dyadique	0,51	0,019	0,99

Tableau IV3-2 : Indices de découplage du procédé avec compensateurs

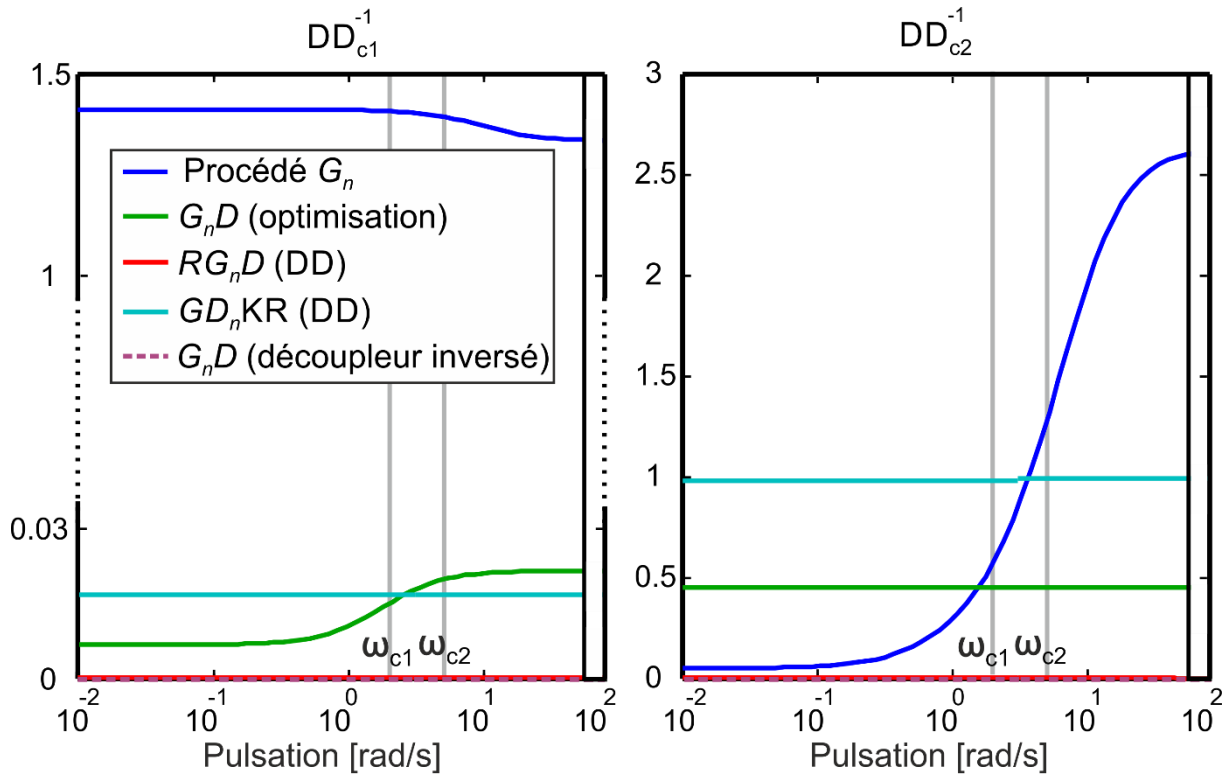


Figure IV3.5 : Inverse de la DDC du procédé et de procédés avec compensateurs

#### Utilisation du découpleur inversé

Les solutions précédentes ne permettent pas d'obtenir des performances correctes en termes de découplage. Le découpleur inversé est à présent mis en œuvre sur le modèle non normalisé  $G$  du turbopropulseur. Les termes du découpleur inversé sont donnés dans (IV3.3) et la structure est rappelée sur la Figure IV3.6. Comme précisé lors du calcul du découpleur simplifié, ces termes sont réalisables. Il s'agit de transferts propres (non strictement) et stables pour l'ensemble des points de fonctionnement.

Il est rappelé que ce découpleur permet d'assurer un découplage nominal total, tout en conservant les éléments diagonaux du procédé.

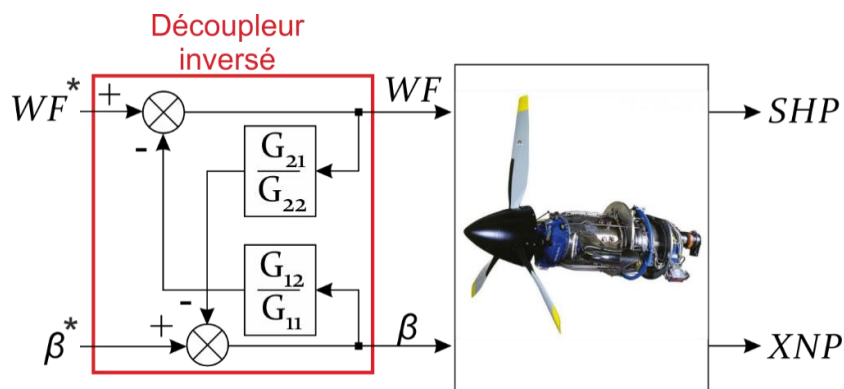


Figure IV3.6 : Application du découpleur inversé au turbopropulseur

### IV3c. Synthèse des régulateurs

#### i. Spécifications

Les objectifs des lois de commande ont été précisés dans la partie IV1c. Les bandes passantes et les marges de stabilité concernent les modèles linéaires. En revanche, les erreurs statiques et les dépassements sont donnés pour le modèle non linéaire. Afin de respecter les objectifs en termes de

dépassement, il a été décidé de se donner pour objectif sur le modèle linéaire un dépassement nul en réponse à un échelon.

Les lois de commande seront échantillonnées avec une période d'échantillonnage  $T_s$  de 0,04 secondes. Cette contrainte est en adéquation avec une règle empirique consistant à choisir la période d'échantillonnage dans l'intervalle  $[0,2/\omega_c, 0,6/\omega_c]$  (Wittenmark, 2001) ( $\omega_c$  étant la pulsation de brisure visée en boucle fermée).

On peut considérer en première approche la présence de saturations sur les commandes et sur les dérivées des commandes comme indiqué dans le Tableau IV3-3. On verra par la suite que ces limiteurs ne sont pas constants mais dépendent des conditions de vol et des contraintes d'opérabilité.

	Saturation haute	Saturation basse	Limiteur bas	Limiteur haut
<b>Débit carburant</b>	0,7 kg/s	0,08 kg/s	- 0,2 kg/s <sup>2</sup>	+ 0,2 kg/s <sup>2</sup>
<b>Calage hélice</b>	80°	16°	- 10 °/s	+ 10 °/s

Tableau IV3-3 : Saturations et limiteurs considérés lors de la synthèse

Il a été décidé d'effectuer les réglages des lois de commande, de manière à être au plus proche des bandes passantes spécifiées, dans le but de respecter ces limiteurs. Afin d'y parvenir et d'avoir un dépassement nul en réponse à un échelon, les spécifications ont été transformées en gabarits sur les boucles ouvertes monovariabiles du procédé. Les gabarits sont des fonctions de transfert du premier ordre donnés dans (IV3.6). Cela permet d'obtenir des fonctions de transfert du premier ordre en boucle fermée (IV3.7).

$$BO_1(z) = \frac{0,08}{(z - 1)} \quad (IV3.6)$$

$$BO_2(z) = \frac{0,2}{(z - 1)}$$

$$BF_1(z) = \frac{0,08}{(z - 0,92)} \quad (IV3.7)$$

$$BF_2(z) = \frac{0,2}{(z - 0,8)}$$

Les caractéristiques correspondant à ces réglages sont données dans le Tableau IV3-4 et comparées aux objectifs initiaux. Les bandes passantes de ces réglages sont les mêmes que les bandes passantes spécifiées et les marges de stabilité sont largement augmentées, ce qui est cohérent au regard de l'objectif choisi en termes de dépassement.

	Marges de phase (deg)	Marges de gain (dB)	Bandes passantes (rad/s)
<b>Spécification Puissance</b>	45	6	2
<b>Gabarit Puissance</b>	88	28	2
<b>Spécification Hélice</b>	45	6	5
<b>Gabarit Hélice</b>	84	20	5

Tableau IV3-4 : Performances spécifiées

Les spécifications étant les mêmes sur tout le domaine de vol du turbopropulseur, les gabarits resteront les mêmes pour l'ensemble des lois de commande sur les différents points de fonctionnement.

## ii. Choix des régulateurs

Même si différentes structures de lois de commande sont actuellement testées, les turbopropulseurs et turboréacteurs sont principalement régulés par des correcteurs PID, que ce soit pour les boucles locales ou les boucles principales. Ces correcteurs peuvent facilement être interpolés et les réglages peuvent être aisément améliorés au moyen d'essais sur bancs.

Lorsque les dynamiques du procédé n'excèdent pas l'ordre 2, que les modes ne sont pas trop oscillants et que le procédé ne possède pas de retards purs importants (Aström and Hägglund, 1995), les correcteurs PID sont généralement préférés à des régulateurs plus complexes. Les modèles identifiés du turbopropulseur entrent parfaitement dans ce cadre. Par ailleurs, étant données les réponses fréquentielles et les bandes passantes désirées, des régulateurs de type PI semblent suffisants (ce qui a été confirmé par une étude complémentaire avec des régulateurs de type PID).

## iii. Choix d'une méthode de synthèse

Comme précisé dans le Chapitre III, le découpleur inversé assure un découplage total. Il est ainsi possible d'utiliser directement les méthodes de synthèse monoboucle. Par ailleurs, le réglage de chacun des régulateurs peut être réalisé sur les transferts diagonaux du procédé, puisque ces derniers restent inchangés avec le découpleur inversé.

Les modèles identifiés du procédé étant discrets et les lois de commande numériques, les régulateurs PI sont directement synthétisés en discret. Cela évite de convertir le modèle du procédé dans le domaine continu puis les correcteurs PID dans le domaine discret, ce qui conduit nécessairement à des approximations (Aström and Hägglund, 1995).

Le méthode monoboucle proposée dans le Chapitre II, i.e. un réglage analytique (PID-IMC) affiné par optimisation, a été choisie pour effectuer les réglages. La forme relativement simple des transferts  $G_{11}$  et  $G_{22}$ , ainsi que celle des spécifications se prêtent bien à la méthode PID-IMC.

## iv. Application de la méthode

A partir du transfert  $G_{ii}$ , il est possible de déterminer un régulateur  $K_i$  permettant de respecter parfaitement la boucle ouverte spécifiée  $BO_i$  (IV3.8). En utilisant les notations de (IV3.9), le régulateur est donné dans (IV3.10). Celui-ci est réalisable et stable (puisque les zéros  $z_a$  sont des zéros stables).

Il est possible de ramener l'expression (IV3.10) à celle d'un régulateur PI (IV3.11) à l'aide d'un développement en série de Taylor et d'une identification des coefficients terme à terme, comme expliqué dans la partie II2d pour le cas continu. Les coefficients sont alors donnés dans (IV3.12).

$$K_i(z) = G_{ii}^{-1}(z)BO_i(z) \quad (IV3.8)$$

$$G_{ii}(z) = \frac{k(z - z_a)}{(z - p_b)(z - p_c)} \quad (IV3.9)$$

$$BO_i(z) = \frac{a}{z - 1}$$

$$K_i(z) = \frac{a(z - p_b)(z - p_c)}{k(z - z_a)(z - 1)} \quad (IV3.10)$$

$$PI(z) = K_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_i} \frac{T_s}{z - 1} \right) \quad (IV3.11)$$

$$K_p = a \frac{((1 - p_b) + (1 - p_c))(1 - z_a) - (1 - p_b)(1 - p_c)}{k(1 - z_a)^2} \quad (IV3.12)$$

$$\tau_i = \frac{((1 - p_b) + (1 - p_c))(1 - z_a) - (1 - p_b)(1 - p_c)}{(1 - z_a)(1 - p_b)(1 - p_c)} T_s$$

Des régulateurs de type PI sont ainsi déterminés sur tout le domaine de vol. Afin d'affiner ces réglages, une optimisation de l'écart entre la réponse à un échelon en boucle fermée et la réponse spécifiée est effectuée, comme dans la partie II2d. Le nombre de paramètres d'optimisation est de 2 et les conditions initiales sont les résultats obtenus analytiquement. L'algorithme d'optimisation par recuit simulé est utilisé afin d'éviter des minima locaux.

Les réglages obtenus avec cette méthode sont légèrement meilleurs que ceux obtenus précédemment. Les différences entre les réglages sont relativement faibles (variations quasiment nulles pour le régulateur *SHP* et inférieures à 5% pour le régulateur *XNP*). La Figure IV3.7 présente les réponses à des échelons de puissance et de vitesse hélice. Il est clair que les régulateurs PI de la première boucle (boucle Puissance *SHP*) conduisent à des réponses très proches du gabarit. Pour la seconde boucle (boucle Hélice *XNP*), on observe des temps de réponse proches du gabarit, et on constate des dépassements qui restent inférieurs au dépassement autorisé de 5%.

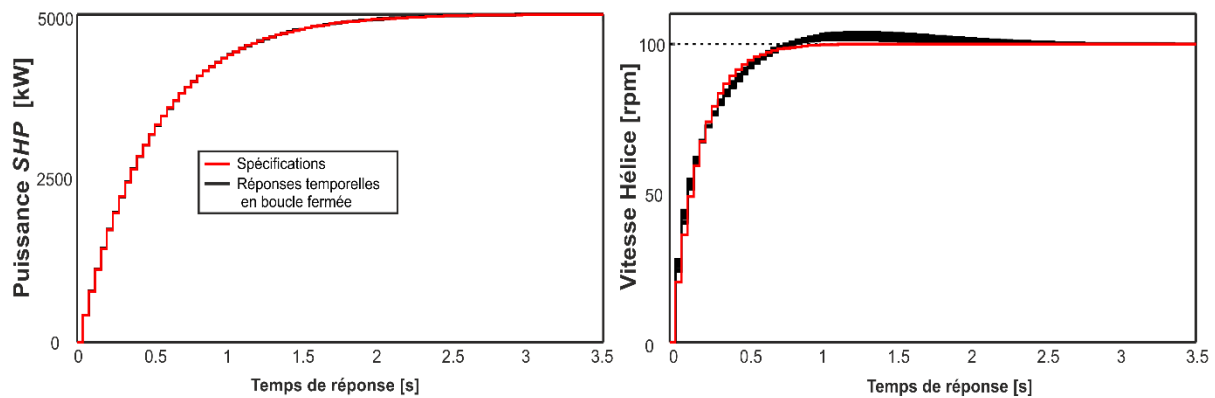


Figure IV3.7 : Ensemble des réponses indicielles en boucle fermée (noir) et gabarits (rouge)

La Figure IV3.8 présente les réponses fréquentielles obtenues sur l'ensemble des points de fonctionnement et les gabarits. Pour la première boucle, les réponses fréquentielles sont presque confondues avec le gabarit fréquentiel. Pour la seconde boucle, on observe de légères différences au niveau de la phase autour des pulsations de coupure, ainsi qu'une augmentation du gain en hautes fréquences.

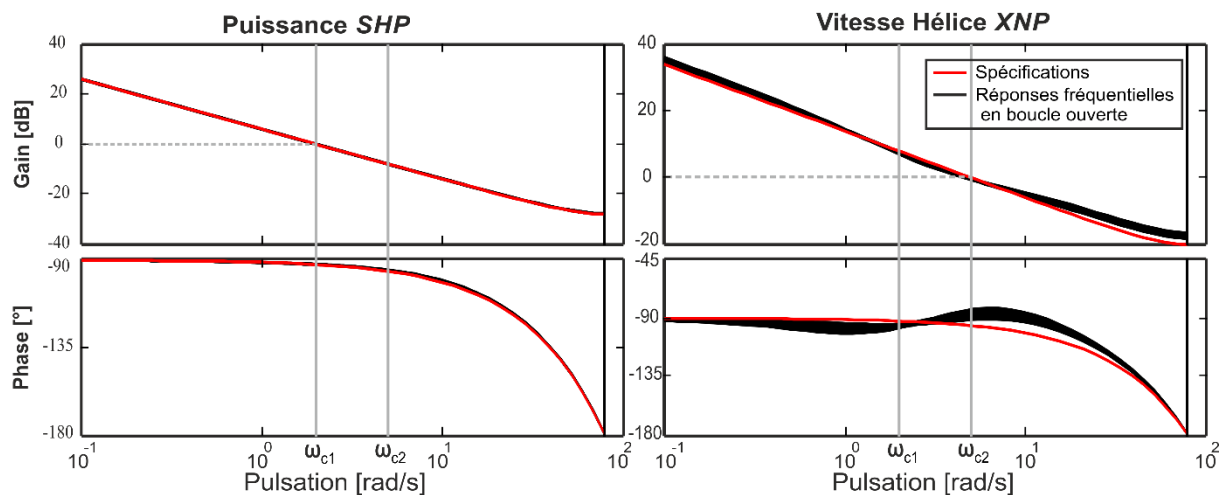


Figure IV3.8 : Diagrammes de Bode des boucles ouvertes (noir) et des gabarits (rouge)

Les pulsations de coupure en boucle ouverte et les marges de stabilité sont légèrement modifiées mais restent en accord avec les spécifications comme on peut le constater dans le Tableau IV3-5.

	Marges de phase (deg)	Marges de gain (dB)	Bandes passantes (rad/s)
<b>Spécification Puissance</b>	45	6	2
<b>Gabarit Puissance</b>	88	28	2
<b>Performances Puissance</b>	82	30	2
<b>Spécification Hélice</b>	45	6	5
<b>Gabarit Hélice</b>	84	20	5
<b>Performances Hélice</b>	[77-104]	20	[5-7]

Tableau IV3-5 : Performances spécifiées et performances atteintes

La méthode utilisée, combinant une méthode analytique et une méthode de modelage de la réponse temporelle de la boucle fermée, permet d'obtenir des résultats satisfaisants sur l'ensemble des points de fonctionnement.

### IV3d. Mise en place d'une action par anticipation

#### i. Application d'une action par anticipation *classique*

Une action par anticipation peut s'avérer utile si une perturbation connue et mesurée, affecte de manière significative les sorties mesurées, malgré la présence des régulateurs. Les perturbations de la puissance et de la vitesse de l'hélice, induites par les ouvertures et les fermetures des vannes HBV entrent tout à fait dans ce cadre. En effet, les commandes  $u_{HBV}$  des vannes HBV sont calculées par le bloc *Performances* de la Figure IV1.4, donc connues. Un modèle entre la commande  $u_{HBV}$  et les sorties du turbopropulseur *SHP* et *XNP* a été identifié dans IV2b. Une action par anticipation peut donc être mise en place afin de réduire les perturbations sur les sorties, en agissant sur les commandes de manière appropriée.

La Figure IV3.9 représente le schéma d'une action par anticipation dans le cas du turbopropulseur ( $K$  est une matrice diagonale composée des deux régulateurs PI, et  $D$  correspond au découpleur inversé). En choisissant l'anticipation  $G_f$  (de taille  $[2 \times 1]$ ) comme dans (IV3.13), il est théoriquement possible d'annuler l'effet des perturbations  $u_{HBV}$  sur les sorties *SHP* (puissance de l'hélice) et *XNP* (vitesse de l'hélice).

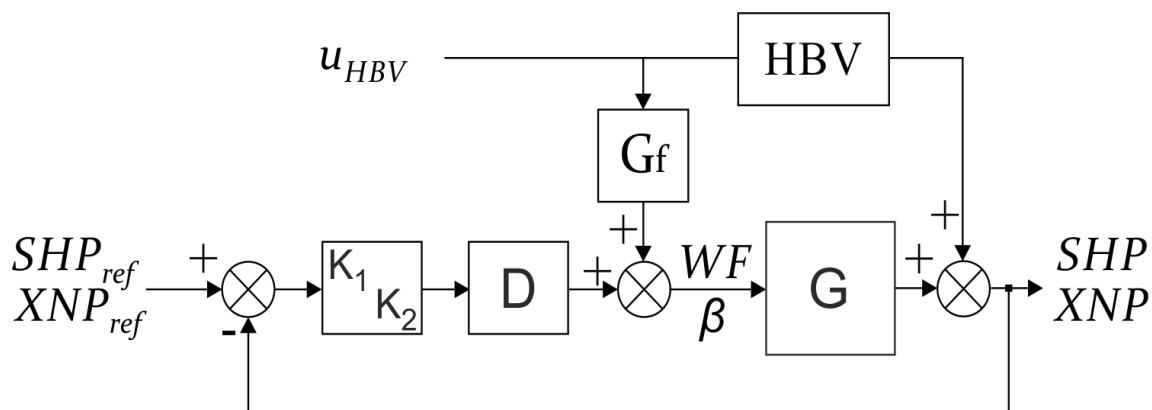


Figure IV3.9 : Schéma du rejet de perturbations d'un système bouclé par anticipation



$$G_f(z) = -G^{-1}(z)HBV(z) \quad (\text{IV3.13})$$

La fonction de transfert  $G_f$  doit alors être stable et réalisable. Afin de vérifier ces propriétés sur l'ensemble des points de fonctionnement,  $G_f$  est calculée analytiquement. De par la structure de  $G$  (IV3.14), son inverse est relativement simple et s'écrit selon la relation (IV3.15).  $G^{-1}$  possède donc les mêmes zéros que ceux de  $G$  arrangés d'une autre manière (comme lorsque l'on prend l'inverse d'une matrice TITO). Cela se vérifie en revenant aux représentations d'état de  $G$  (IV3.16), (IV3.17) et de son inverse  $G^{-1}$  (IV3.18), (IV3.19).

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}(z - z_{11})}{(z - p_1)(z - p_2)} & \frac{K_{12}(z - z_{12})}{(z - p_1)(z - p_2)} \\ \frac{K_{21}(z - z_{21})}{(z - p_1)(z - p_2)} & \frac{K_{22}(z - z_{22})}{(z - p_1)(z - p_2)} \end{bmatrix} \quad (\text{IV3.14})$$

$$G^{-1}(z) = \begin{bmatrix} L_{11}(z - z_{22}) & L_{12}(z - z_{12}) \\ L_{21}(z - z_{21}) & L_{22}(z - z_{11}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV3.15})$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{IV3.16})$$

$$G(z) = \frac{1}{(z - A_{11})(z - A_{22}) - A_{12}A_{21}} \begin{bmatrix} B_{11}(z - A_{22}) + A_{12}B_{21} & B_{12}(z - A_{22}) + A_{12}B_{22} \\ B_{21}(z - A_{11}) + A_{21}B_{11} & B_{22}(z - A_{11}) + A_{21}B_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV3.17})$$

$$G^{-1}(z) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{IV3.18})$$

$$G^{-1}(z) = \frac{1}{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}} \begin{bmatrix} B_{22}(z - A_{11}) + A_{21}B_{12} & -B_{12}(z - A_{22}) - A_{12}B_{22} \\ -B_{21}(z - A_{11}) - A_{21}B_{11} & B_{11}(z - A_{22}) + A_{12}B_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{IV3.19})$$

La matrice de transfert de l'anticipation  $G_f$  est calculée en (IV3.20). Celle-ci comporte le pôle stable  $z_{HBV}$ , et les transferts sont propres (non strictement).

$$G_f(z) = - \begin{bmatrix} \frac{K_{HBV_1}L_{11}(z - z_{22}) + K_{HBV_2}L_{12}(z - z_{12})}{(z - p_{HBV})} \\ \frac{K_{HBV_1}L_{21}(z - z_{21}) + K_{HBV_2}L_{22}(z - z_{11})}{(z - p_{HBV})} \end{bmatrix} \quad (\text{IV3.20})$$

Afin de simplifier les lois de commande, la matrice de transfert  $G_f$  est souvent réduite à une simple matrice de gain, notamment lorsque les dynamiques des perturbations sont du même ordre que celles du procédé. Pour cela, le gain statique  $G_{f0}$  de  $G_f$  est considéré.

## ii. Application d'une variante de l'action par anticipation

Une autre idée est de profiter du découpleur inversé réalisé en amont du procédé. En effet, il est possible de considérer que les perturbations agissent sur le système  $G_d$  comportant le procédé  $G$  et le découpleur inversé  $D$ , et non uniquement sur le procédé  $G$ .

L'action par anticipation doit alors être effectuée en amont du découpleur comme dans la Figure IV3.10. Le calcul de l'anticipation  $G_b$  est obtenu de la même manière avec (IV3.21). L'expression de  $G_b$  est donnée en (IV3.22). Celle-ci est finalement plus complexe que l'anticipation  $G_f$  donnée dans (IV3.20), et n'a donc pas forcément d'intérêt dans ce cas.

$$G_b(z) = -G_d^{-1}(z)HBV(z) \quad (IV3.21)$$

$$G_b(z) = - \begin{bmatrix} K_{HBV_1}(z - p_1)(z - p_2) \\ K_{11}(z - z_{11})(z - p_{HBV}) \\ K_{HBV_2}(z - p_1)(z - p_2) \\ K_{22}(z - z_{22})(z - p_{HBV}) \end{bmatrix} \quad (IV3.22)$$

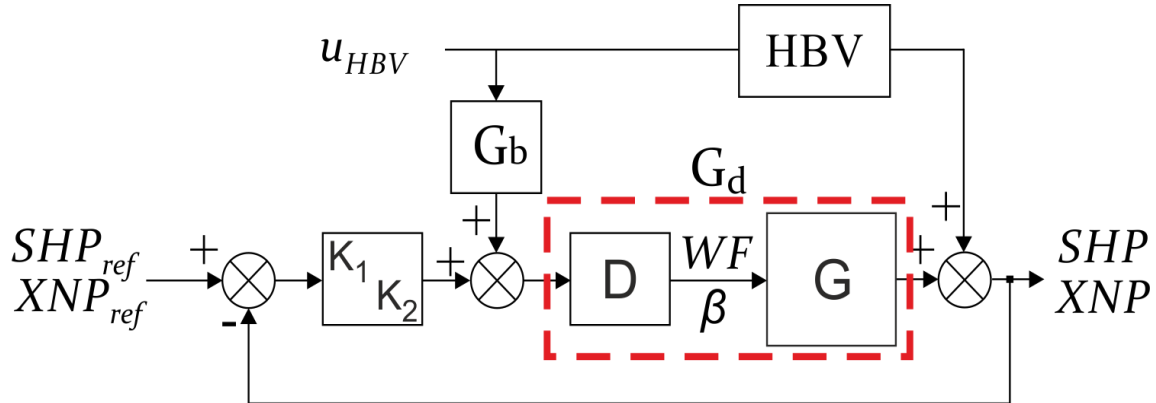


Figure IV3.10 : Schéma du rejet de perturbations en amont du découpleur

Néanmoins, l'aspect « complexité » est similaire pour les deux techniques de rejet de perturbations lorsque les gains statiques  $G_{bo}$  et  $G_{fo}$  des matrices de transfert  $G_b$  et  $G_f$  sont considérés.

D'un point de vue pratique, il semble préférable d'anticiper les perturbations en amont du découplage lorsque l'action par anticipation est réalisée avec un modèle statique ou simplifié. En effet,  $G_f$  a pour but le rejet de perturbations tout en assurant le découplage, tandis que  $G_b$  a uniquement pour but le rejet de perturbations, le découplage étant réalisé a posteriori par le découpleur. Lorsque des modèles simplifiés  $G_{fo}$  et  $G_{bo}$  sont utilisés, le rejet de perturbations est affecté dans les deux cas, mais le découplage est affecté uniquement avec le rejet en aval du découpleur.

Le gain de la stratégie de rejet en amont du découpleur est plus flagrant lorsque les perturbations agissent indépendamment sur les sorties. Dans ce cas, un rejet de perturbations  $G_{bo}$  en amont du découpleur permet d'agir indépendamment sur chacune des sorties perturbées et de ne pas propager ces perturbations via les interactions.

### iii. Comparaison des actions par anticipation sur un modèle linéaire

Les stratégies d'anticipation dynamiques/statiques en amont/en aval du découpleur ont été comparées sur le modèle linéaire en boucle fermée. Les résultats temporels sont présentés sur la Figure IV3.11.

Les stratégies dynamiques en amont/en aval du découpleur permettent de rejeter parfaitement la perturbation (en considérant les modèles nominaux). Comme précisé précédemment, la stratégie en aval du découpleur est plus simple à mettre en œuvre et sera donc privilégiée.

Les stratégies statiques permettent d'améliorer le rejet de perturbations en réduisant l'amplitude de ces dernières d'un facteur 3,5 sur les deux voies. Il est à noter que le rejet de perturbations sur la seconde voie est meilleur lorsqu'il est effectué en amont du découpleur. Cette conclusion sera ainsi utilisée dans le cas statique (et a été généralisée sur les autres points de fonctionnement).

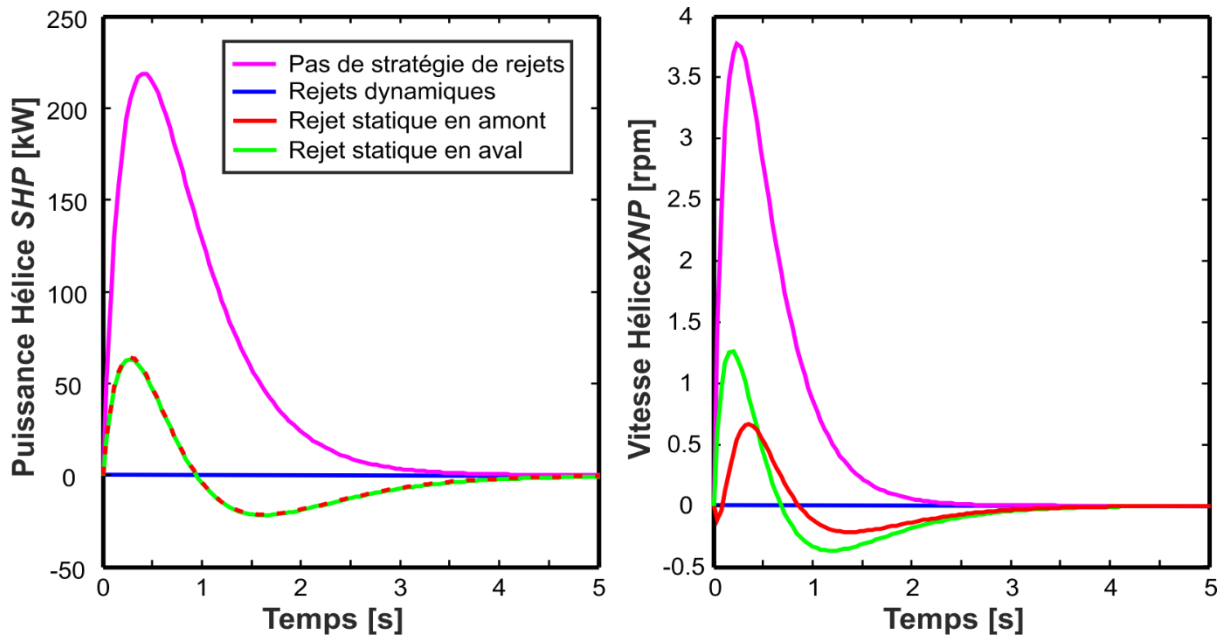


Figure IV3.11 : Comparaison du rejet de perturbations sur le modèle linéaire

#### iv. Validation des performances sur le modèle non linéaire de turbopropulseur

Les stratégies de rejet de perturbations retenues sont à présent testées sur le modèle non linéaire de turbopropulseur.

La Figure IV3.12 présente les réponses aux perturbations subies par le turbopropulseur (courbe magenta). Dans ce cas, les vannes HBV se ferment pour améliorer l'efficacité du turbopropulseur : un débit carburant plus faible permet alors de fournir la même puissance. Durant le transitoire, une augmentation soudaine de la puissance  $SH\dot{P}$  est constatée, tout comme une survitesse de l'hélice. Ces pics de puissance sont néfastes et dépendent de la/des vannes HBV en action. En effet, comme représenté sur la Figure IV2.5, le débit d'air fourni par chaque vanne est différent, ce qui entraîne des pics plus ou moins forts au niveau de la puissance  $SH\dot{P}$ .

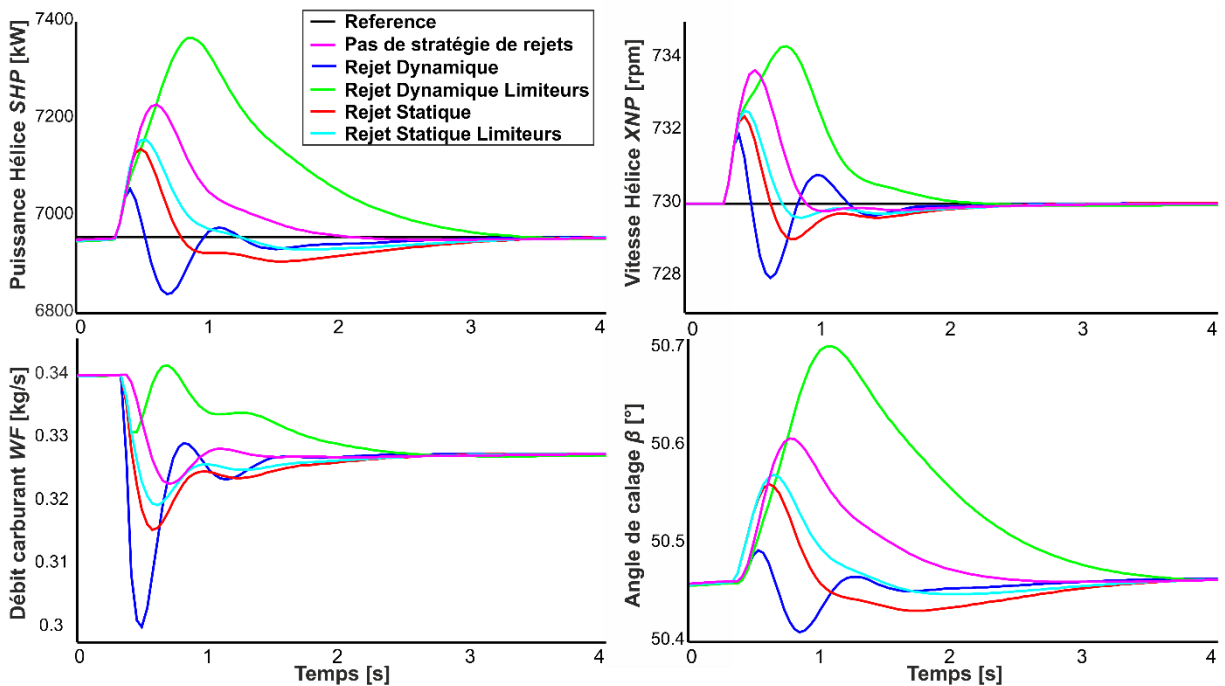


Figure IV3.12 : Comparaison du rejet de perturbations sur le modèle non linéaire

Les limiteurs (saturations sur les commandes  $WF$  et  $\beta$  et sur leurs dérivées) ne sont pas considérés dans un premier temps. La stratégie de rejet dynamique permet de contrer efficacement les perturbations, et de réduire considérablement le pic de puissance (l'amplitude du pic est divisée par un facteur 3,5). La stratégie statique est moins efficace, mais permet tout de même d'abaisser l'amplitude maximale des perturbations. Bien que les pics soient plus importants que dans le cas linéaire, les résultats sont globalement conformes aux résultats attendus.

Tout comme pour le cas linéaire, les commandes  $WF$  et  $\beta$  qui permettent de compenser les perturbations sur  $SHP$  et  $XNP$  ne sont pas contraintes, et peuvent ainsi sortir de leurs plages de fonctionnement. Afin de se placer dans des conditions plus réalistes, des saturations constantes sur les commandes et sur leurs dérivées (Tableau IV3-3) sont prises en compte (ces limiteurs, qui dépendent de la physique des actionneurs mais également de l'état du turbopropulseur, seront abordés plus précisément dans la partie IV5a).

La présence de ces limiteurs ne permet pas d'obtenir un bon rejet de perturbations dans le cas dynamique, où la variation du débit carburant  $WF$  est trop rapide comme on peut le voir sur la Figure IV3.12. En effet, la présence d'une saturation sur la dérivée de la commande  $WF$  limite les performances de la stratégie d'anticipation, et ne permet pas la modification synchronisée des commandes  $WF$  et  $\beta$ , ce qui tend à empirer les effets des perturbations. Cela s'explique par le fait que la directionnalité du système (définie dans la partie III5) est modifiée par ce limiteur. Les perturbations sont alors amplifiées à cause des interactions entre les deux boucles.

La stratégie de rejet statique est beaucoup moins impactée que la stratégie de rejet dynamique, car les variations du débit carburant  $WF$  sont nettement moins importantes à l'origine. La directionnalité est alors moins impactée, ce qui permet de réduire de 30% l'amplitude des pics de perturbation malgré la présence de limiteurs.

La stratégie de rejet de perturbations statique en amont du découpleur s'est également révélée efficace pour réduire les pics de perturbations sur d'autres points de fonctionnement. Celle-ci a ainsi été adoptée par la suite.

### IV3e. Interpolation des lois de commande

L'ensemble des lois de commande doit être interpolé de manière à garantir un bon niveau de performances sur l'ensemble des points de fonctionnement. L'interpolation des correcteurs PI permet de conserver les performances globales du système (erreur statique, temps de réponse, dépassement). L'interpolation des découpleurs garantit un bon découplage et celle des actions par anticipation permet de rejeter efficacement les perturbations dues aux vannes HBV.

#### i. Séquencement de gains

Diverses techniques d'interpolation de lois de commande sont présentées dans (Dupuy, 2005), (Arej-Saade, 2004). La stratégie utilisée ici est une technique de séquencement de gain, consistant à interpoler individuellement les paramètres des lois de commande à l'aide de tables d'interpolation. Les valeurs de chaque paramètre interpolé sont définies dans une table en chacun des points de fonctionnement. Cette table dépend ici du nombre de Mach, de l'altitude, du régime de l'arbre du compresseur HP  $N_3$  et de la vitesse de l'hélice  $XNP$ . Il s'agit des variables d'interpolation usuelles dans le cas des turbopropulseurs, mais d'autres variables auraient pu être sélectionnées, que ce soient des variables de commande, de sortie ou encore des variables extérieures.

L'ensemble des paramètres des lois de commande sont interpolés :

- La forme des régulateurs PI se prête plutôt bien à l'interpolation des gains, puisqu'il s'agit d'une somme de différentes actions pondérées par des gains.

- Le découpleur inversé est composé de deux fonctions de transfert du premier ordre, chacune d'entre elles étant interpolée comme sur la Figure IV3.13. L'intérêt de fonctions de transfert simples dans le découpleur inversé est alors renforcé.
- Enfin, le rejet de perturbations étant statique, il est réalisé par des gains facilement interpolables.

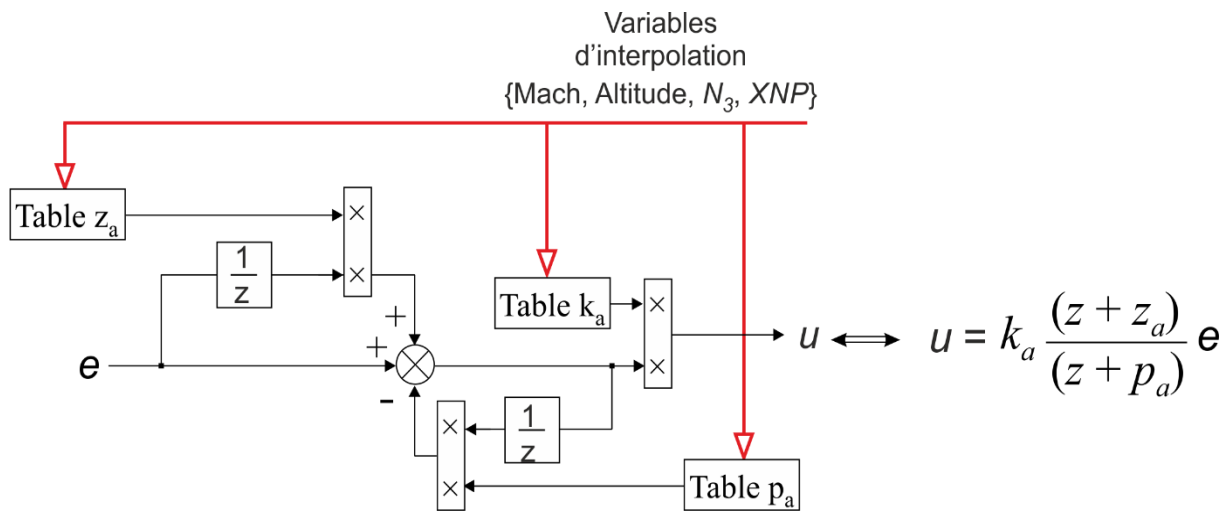


Figure IV3.13 : Interpolation d'une fonction de transfert comportant un pôle et un zéro

## ii. Interpolation incrémentale

On distingue des algorithmes de position et des algorithmes de vitesses (plus souvent appelés algorithmes de type incrémental). L'algorithme de position correspond à une implantation standard, tandis que l'algorithme de vitesse consiste à ajouter un intégrateur en série en aval des lois de commande. Cette forme incrémentale permet de travailler en incrément de commande à partir d'incrément d'erreur, ce qui permet de limiter les à-coups lors de commutations. Cette stratégie a ainsi tendance à lisser l'interpolation des lois de commande (Aström and Hägglund, 1995).

## iii. Validation sur le modèle non linéaire de turbopropulseur

L'interpolation des lois de commande est à présent testée sur le modèle non linéaire du turbopropulseur. Trois solutions sont envisagées :

- L'utilisation de lois de commande moyennes (non interpolées).
- L'interpolation selon un algorithme de position.
- L'interpolation selon un algorithme de vitesse (incrémental).

La manœuvre utilisée pour ces tests est composée d'échelons filtrés portant sur la consigne de la puissance  $SHP_{ref}$ . Ces derniers sont réalisés autour de différents points de fonctionnement et présentent différentes amplitudes.

Afin de limiter d'éventuelles variations trop brusques des coefficients interpolés, ces derniers ont été filtrés par une fonction du premier ordre (avec une constante de temps de l'ordre de la seconde). Par ailleurs, des tests préliminaires ont comparé : l'interpolation par sélection du voisin le plus proche, l'interpolation linéaire et l'interpolation par splines cubiques. Les résultats n'ont pas présenté de différence notable et l'interpolation linéaire a été retenue. Il s'agit d'un compromis théorique entre la rapidité de l'interpolation par sélection du voisin le plus proche et la précision de l'interpolation par splines cubiques.

Les sorties  $SHP$  et  $XNP$  sont présentés sur les Figure IV3.14 et Figure IV3.15 et les commandes  $WF$  et  $\beta$  sur les Figure IV3.16 et Figure IV3.17.

- Sans interpolation, les réponses sont plus rapides que les spécifications et les commandes restent dans les plages nominales de fonctionnement. De très légers dépassements sont constatés sur la

puissance *SHP*. Sans interpolation, le suivi de consigne est donc tout à fait acceptable sur la puissance *SHP* sur les tests réalisés. En revanche, les interactions sur la vitesse hélice *XNP* ne sont pas négligeables.

- Lorsque les lois de commande sont interpolées avec un algorithme de position, les résultats obtenus sont moins bons que les résultats obtenus sans interpolation. Des dépassements plus importants sont observés sur la puissance *SHP*, et les perturbations de la vitesse hélice *XNP* dues aux interactions sont plus importantes.
- L'utilisation d'un algorithme incrémental permet d'avoir des dépassements nuls au niveau de la puissance *SHP* et de réduire les interactions.

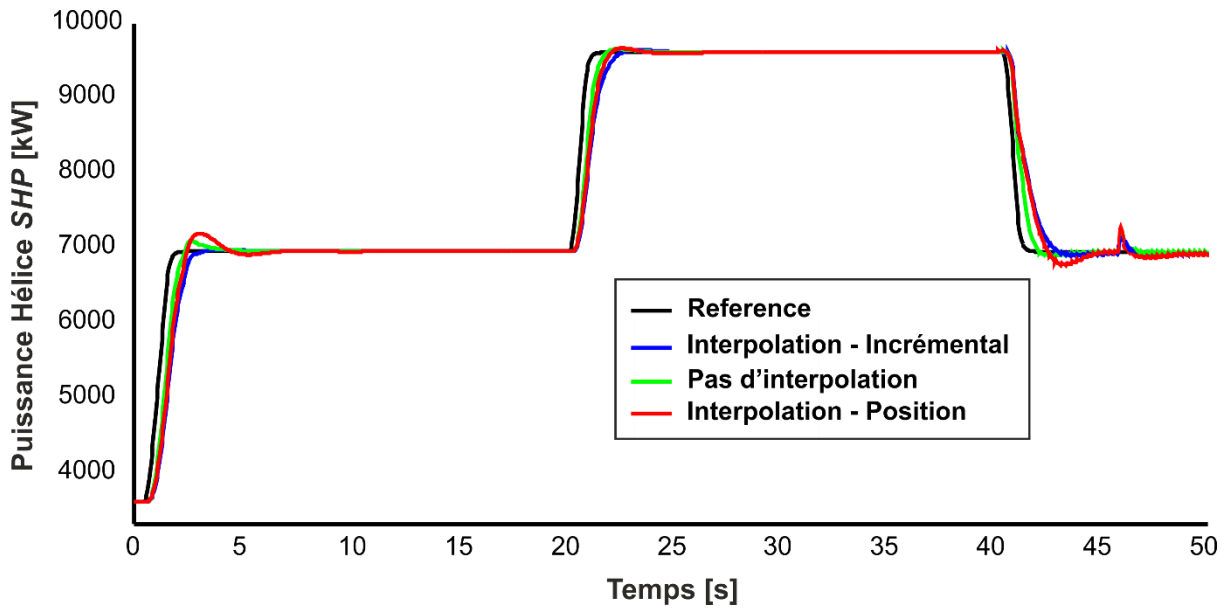


Figure IV3.14 : Comparaison de la puissance avec différentes méthodes d'interpolation

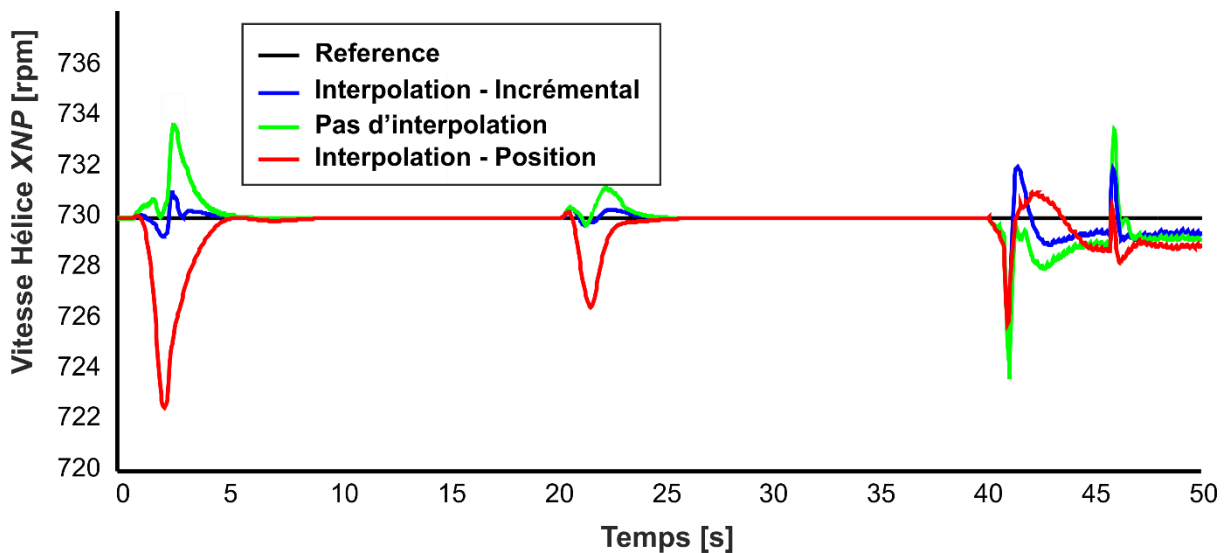


Figure IV3.15 : Comparaison de la vitesse de l'hélice avec différentes méthodes d'interpolation

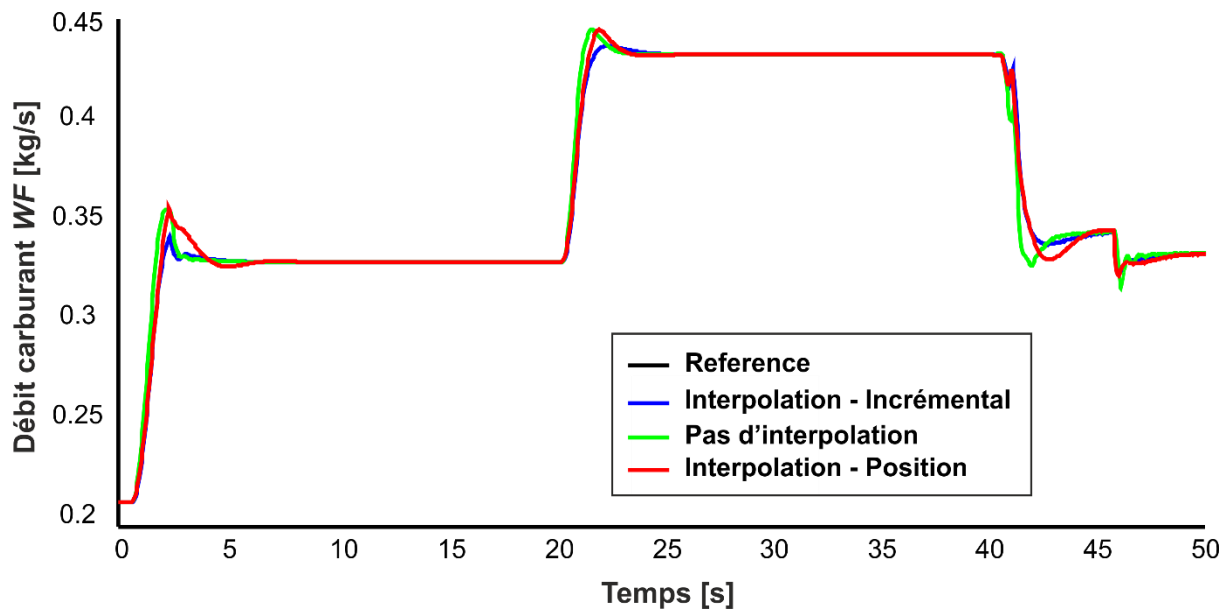


Figure IV3.16 : Comparaison du débit carburant  $WF$  avec différentes méthodes d'interpolation

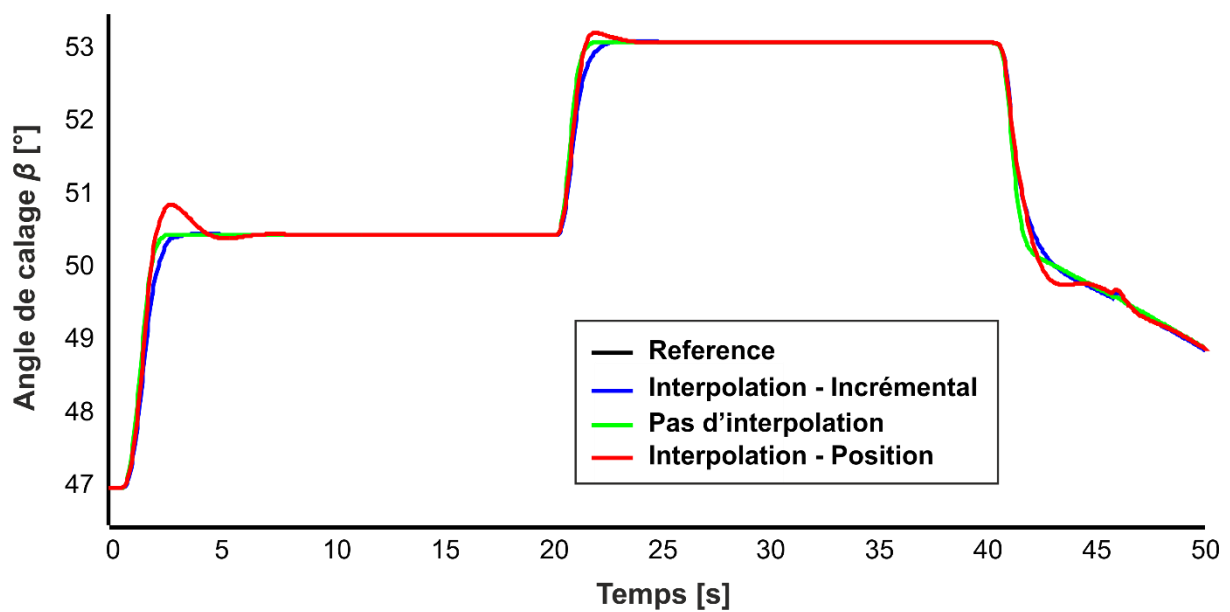


Figure IV3.17 : Comparaison de l'angle de calage  $\beta$  avec différentes méthodes d'interpolation

Les résultats sans interpolation semblent tout à fait acceptables, ce qui peut nous amener à modifier le nombre de points de fonctionnement afin de simplifier les lois de commande. Des considérations sur une réduction du nombre de points de fonctionnement seront exposées dans la partie IV4.

### IV3f. Structure des lois de commande

Les lois de commande globales sont présentées sur la Figure IV3.18.

Au lieu d'implanter dans chacune des boucles le correcteurs PI sur la dérivée de l'erreur, il est possible de considérer directement un correcteur de type PD sur l'erreur. L'action par anticipation est également réalisée de manière incrémentale en dérivant le signal de commande  $u_{HBV}$ .

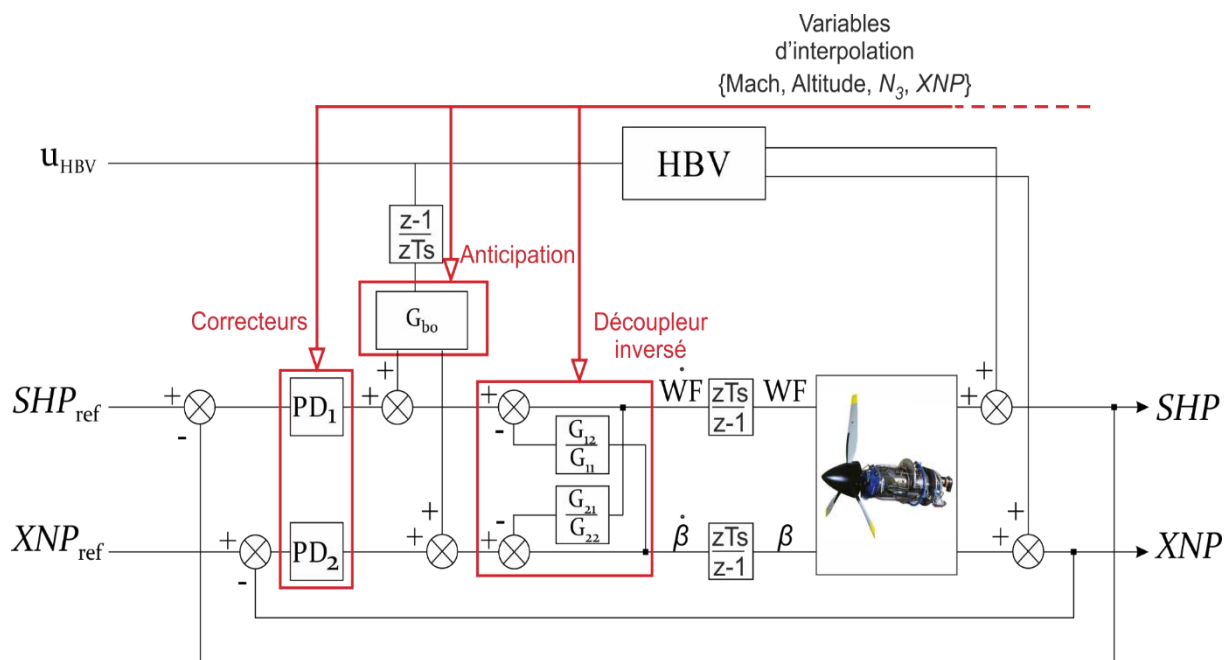


Figure IV3.18 : Schéma de la stratégie de commande

### IV3g. Résultats de simulation avec le modèle non linéaire

Afin de tester les lois de commande et de confirmer ces résultats, une manœuvre de validation en *Speed Mode* est utilisée. Celle-ci permet de parcourir la majorité du domaine de vol considéré. Les évolutions des grandeurs caractérisant cette manœuvre sont représentées sur la Figure IV3.19.

- L'altitude varie de 0 à 20 kft,
- Le nombre de Mach varie de 0 à 0,5,
- Le TRA varie de 5 à 80° (les paliers de TRA sont atteints en environ 1s).

A partir de ces consignes et des informations rebouclées, le Power Management fournit les consignes suivantes, également représentées sur la Figure IV3.20.

- La puissance SHP varie de 800 à 8000 kW,
- La vitesse hélice passe par les paliers 730 et 842 rpm,
- Les vannes HBV se retrouvent dans l'ensemble des positions (0; 0,3; 0,12 ; 0,21% de débit d'air du compresseur),
- Les commandes des vannes VSV varient de 1,5 à 28 mA.

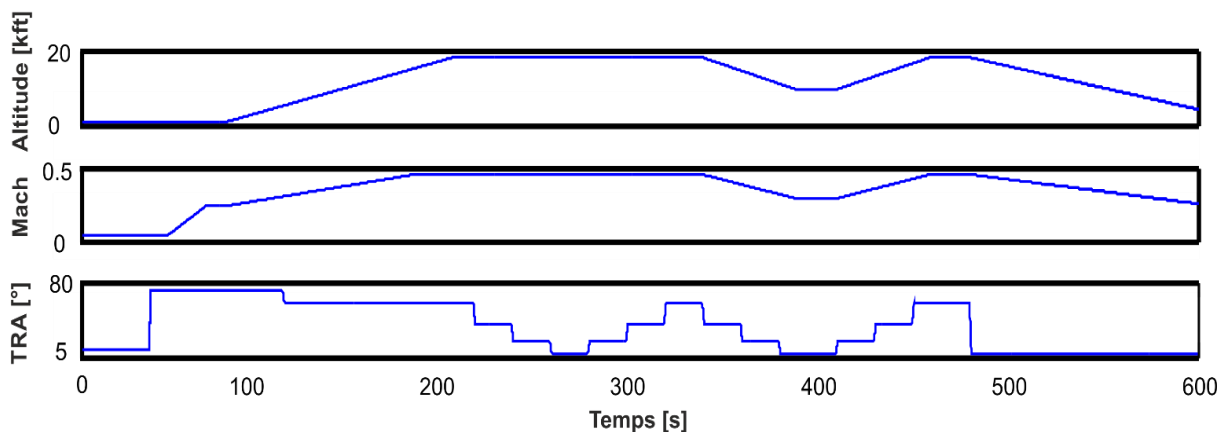


Figure IV3.19 : Manœuvre de validation



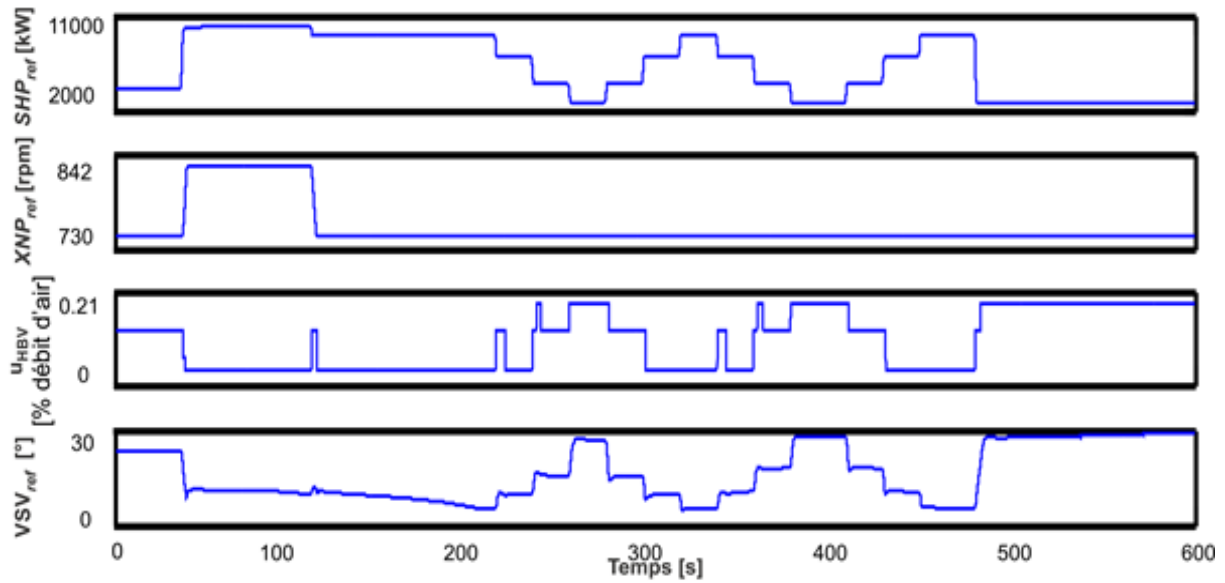


Figure IV3.20 : Références du PowerManagement

Dans cette partie, les lois de commande sont testées en utilisant le modèle non linéaire du turbopropulseur utilisé dans la partie IV2b (Figure IV2.8). Les actionneurs sont ainsi représentés par des fonctions de transfert du premier ordre, et des limiteurs (saturations sur les commandes et sur leurs dérivées) constants sont considérés.

La Figure IV3.21 et la Figure IV3.22 présentent les résultats temporels obtenus lors de la simulation du modèle non linéaire du turbopropulseur. Les lois de commande permettent bien de suivre les références et de respecter les spécifications. Le système en boucle fermée est quasiment découplé : les variations de la puissance hélice  $SHP$  perturbent assez peu la vitesse de l'hélice  $XNP$ . De la même manière, le changement de palier de la vitesse de l'hélice ne perturbe pas la puissance de celle-ci.

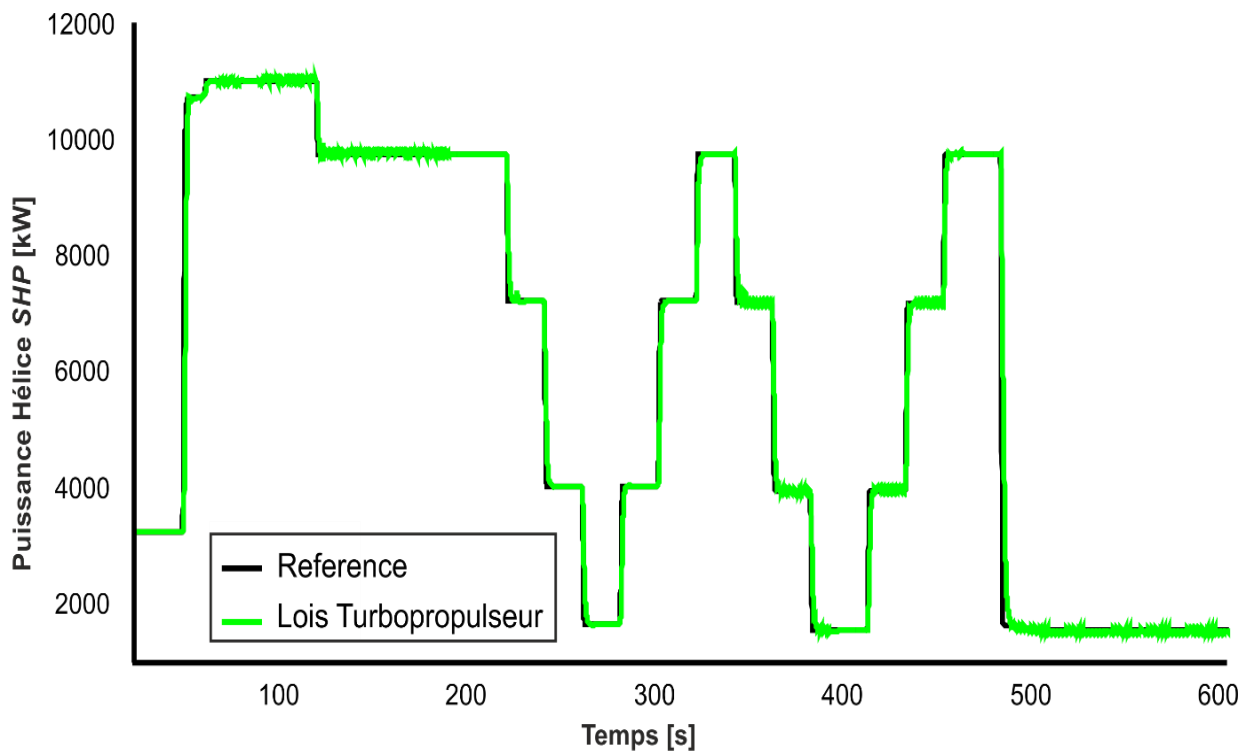


Figure IV3.21 : Puissance de l'hélice SHP (manœuvre de validation)

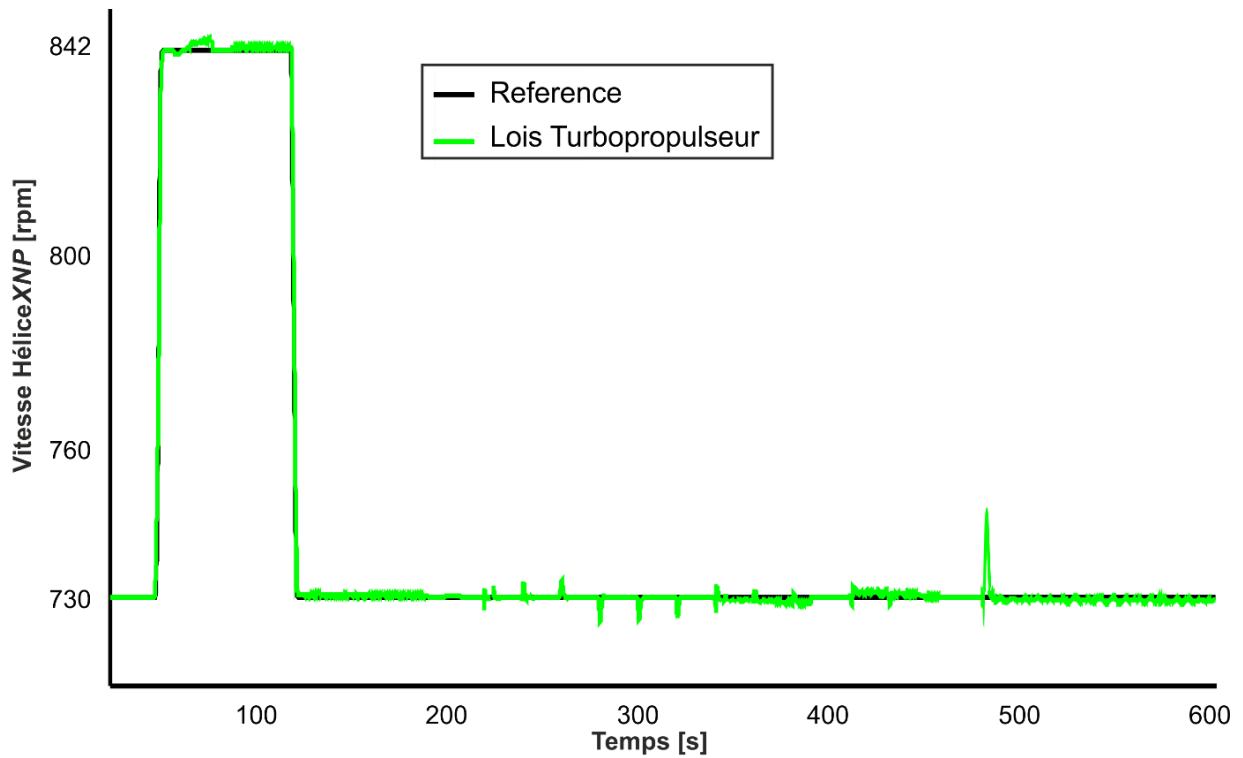


Figure IV3.22 : Vitesse de l'hélice XNP (manœuvre de validation)

Les évolutions des commandes en débit carburant et en angle de calage sont tracées sur la Figure IV3.23. Les dérivées de ces dernières sont également tracées sur la Figure IV3.24. Les limites fixées à  $0,2 \text{ kg/s}^2$  et à  $10^\circ/\text{s}$  sont atteintes uniquement lors des grands échelons de manette (à savoir pendant le premier et le dernier transitoire). En dehors de ces phases, les variations des commandes sont tout à fait acceptables.

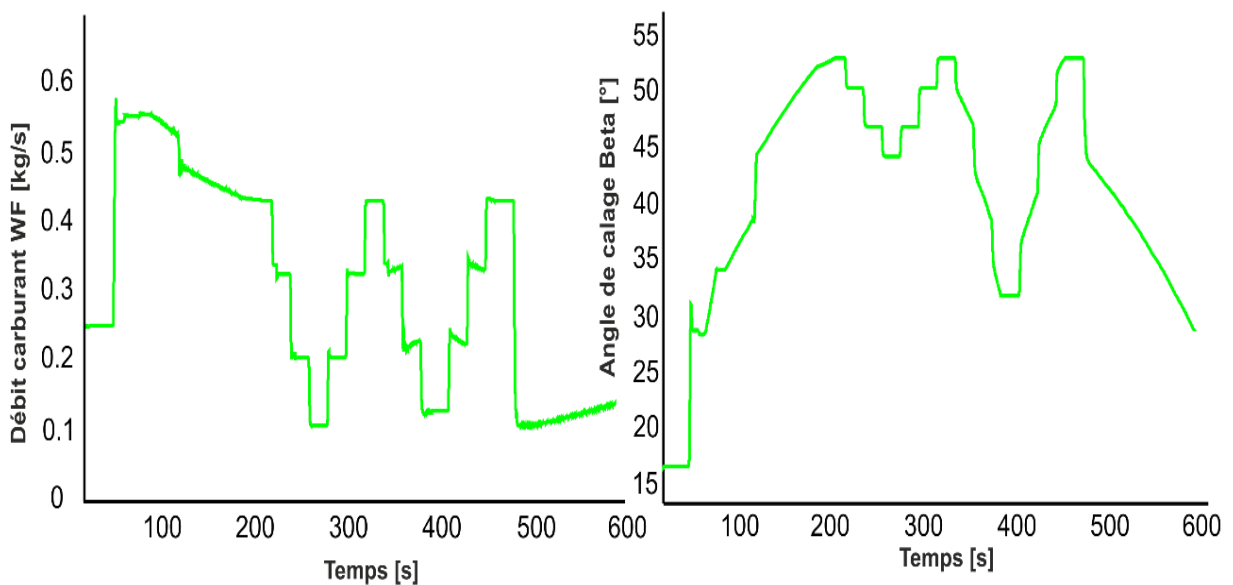


Figure IV3.23 : Commandes en débit carburant et en angle de calage (manœuvre de validation)

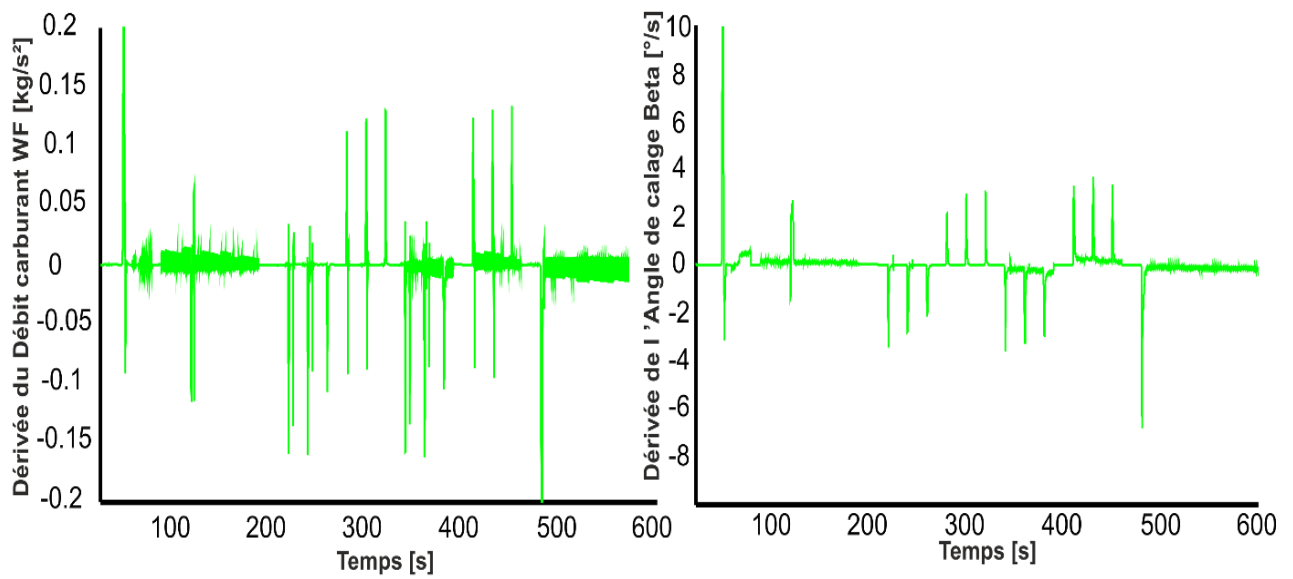


Figure IV.3.24 : Dérivées des commandes WF et  $\beta$  (manœuvre de validation)

Ces simulations ont montré que les réglages proposés permettaient de respecter les spécifications et d'atteindre de bonnes performances, en considérant le modèle non linéaire de turbopropulseur et des limiteurs *moyens*.

## IV4. Étude de la robustesse des lois de commande

Les résultats précédents montrent que les lois de commande sont performantes autour des points de fonctionnement sur lesquelles elles ont été déterminées, mais également au-delà. En effet, les simulations présentées sur la Figure IV3.14 et la Figure IV3.15 ont montré que des lois de commande non interpolées permettaient d'obtenir des performances satisfaisantes sur la manœuvre réalisée.

Une analyse structurée de la robustesse (Mu-analyse) permet de garantir rigoureusement la robustesse de lois de commande, pour des procédés linéaires comportant des incertitudes paramétriques ou encore des dynamiques négligées (A-3. Analyse structurée de la robustesse).

### IV4a. Incertitudes et formes LFT du modèle de turbopropulseur

La première étape de la mu-analyse est de caractériser les incertitudes du procédé. Dans les études « classiques » de mu-analyse, les incertitudes concernent des paramètres physiques connus (par exemple, le diamètre d'un orifice). Dans le cas du turbopropulseur, les modèles utilisés pour la synthèse sont des modèles identifiés, où les paramètres n'ont pas de signification physique. Des incertitudes doivent donc être considérées sur chacun des paramètres du modèle. Par ailleurs, on peut considérer que des dynamiques ont été négligées lors de l'identification ou bien dans la modélisation du turbopropulseur. Des incertitudes, sous forme multiplicative directe en entrée, seront ainsi ajoutées. La mu-analyse sera réalisée avec les lois de commande et le modèle du processus directement sous forme discrète. Ce choix permet ainsi de prendre en compte la période de l'échantillonnage des lois de commande.

Le modèle du processus avec des incertitudes paramétriques va d'abord être mis sous forme de LFT (Transformation Fractionnaire Linéaire) et les dynamiques négligées seront ensuite ajoutées. Ces deux phases peuvent être réalisées indépendamment (A-3. Analyse structurée de la robustesse). Les perturbations causées par les HBV et le rejet par anticipation étant indépendants de la stabilité de la commande dans le cas linéaire, ils seront traités à part.

Sous forme de matrice de transfert, on dénombre dix paramètres (quatre zéros, quatre gains et deux pôles multivariables). Sous forme de représentation d'état, on ne dénombre que huit paramètres correspondant aux coefficients de la matrice d'état et de la matrice de commande (la matrice de sortie est égale à la matrice identité, et la matrice d'action directe est nulle). La forme de représentation d'état a été utilisée par la suite, car celle-ci comporte moins de paramètres et qu'il est plus facile d'isoler les incertitudes en utilisant cette forme.

Les coefficients incertains de la représentation d'état peuvent s'écrire dans le cas général :

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{11_0} + A_{11_i} \delta_{A_{11}}, \delta_{A_{11}} \in ]-1, +1[ , B_{11} = B_{11_0} + B_{11_i} \delta_{B_{11}}, \delta_{B_{11}} \in ]-1, +1[ \\ A_{12} &= A_{12_0} + A_{12_i} \delta_{A_{12}}, \delta_{A_{12}} \in ]-1, +1[ , B_{12} = B_{12_0} + B_{12_i} \delta_{B_{12}}, \delta_{B_{12}} \in ]-1, +1[ \\ A_{21} &= A_{21_0} + A_{21_i} \delta_{A_{21}}, \delta_{A_{21}} \in ]-1, +1[ , B_{21} = B_{21_0} + B_{21_i} \delta_{B_{21}}, \delta_{B_{21}} \in ]-1, +1[ \\ A_{22} &= A_{22_0} + A_{22_i} \delta_{A_{22}}, \delta_{A_{22}} \in ]-1, +1[ , B_{22} = B_{22_0} + B_{22_i} \delta_{B_{22}}, \delta_{B_{22}} \in ]-1, +1[ \end{aligned} \quad (\text{IV4.1})$$

On considère ainsi les valeurs nominales de chacun des paramètres et des incertitudes réelles normalisées  $\delta$  centrées sur les paramètres nominaux.

Les équations du système (IV2.2) sont reformulées en (IV4.2), de manière à séparer les incertitudes du reste du système.

$$\begin{aligned}
SHP[k+1] &= A_{110}SHP[k] + A_{120}XNP[k] + B_{110}WF[k] + B_{120}\beta[k] \\
&\quad + A_{11i}\delta_{A_{11}}SHP[k] + A_{12i}\delta_{A_{12}}XNP[k] + B_{11i}\delta_{B_{11}}WF[k] + B_{12i}\delta_{B_{12}}\beta[k] \\
XNP[k+1] &= A_{210}SHP[k] + A_{220}XNP[k] + B_{210}WF[k] + B_{220}\beta[k] \\
&\quad + A_{21i}\delta_{A_{21}}SHP[k] + A_{22i}\delta_{A_{22}}XNP[k] + B_{21i}\delta_{B_{21}}WF[k] + B_{22i}\delta_{B_{22}}\beta[k]
\end{aligned} \tag{IV4.2}$$

Les signaux  $v$  et  $z$  faisant intervenir les incertitudes sont choisis dans (IV4.3) (les indices temporels ont été omis pour faciliter la lecture) :

$$\begin{aligned}
z_{A_{11}} &= SHP ; \quad v_{A_{11}} = \delta_{A_{11}}SHP ; \quad z_{A_{21}} = SHP ; \quad v_{A_{21}} = \delta_{A_{21}}SHP \\
z_{A_{12}} &= XNP ; \quad v_{A_{12}} = \delta_{A_{12}}XNP ; \quad z_{A_{22}} = XNP ; \quad v_{A_{22}} = \delta_{A_{22}}XNP \\
z_{B_{11}} &= WF ; \quad v_{B_{11}} = \delta_{B_{11}}WF ; \quad z_{B_{21}} = WF ; \quad v_{B_{21}} = \delta_{B_{21}}WF \\
z_{B_{12}} &= \beta ; \quad v_{B_{12}} = \delta_{B_{12}}\beta ; \quad z_{B_{22}} = \beta ; \quad v_{B_{22}} = \delta_{B_{22}}\beta
\end{aligned} \tag{IV4.3}$$

Le système peut alors se représenter sous forme de représentation d'état (IV4.4) en considérant la matrice d'incertitude normalisée  $\Delta_r$  de (IV4.5).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} SHP[k+1] \\ XNP[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{110} & A_{120} \\ A_{210} & A_{220} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SHP[k] \\ XNP[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} & B_{11i} & B_{12i} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{110} & B_{120} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21i} & A_{22i} & B_{21i} & B_{22i} & B_{210} & B_{220} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{A_{11}}[k] \\ v_{A_{12}}[k] \\ v_{B_{11}}[k] \\ v_{B_{12}}[k] \\ v_{A_{21}}[k] \\ v_{A_{22}}[k] \\ v_{B_{21}}[k] \\ v_{B_{22}}[k] \\ WF[k] \\ \beta[k] \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} z_{A_{11}}[k] \\ z_{A_{12}}[k] \\ z_{B_{11}}[k] \\ z_{B_{12}}[k] \\ z_{A_{21}}[k] \\ z_{A_{22}}[k] \\ z_{B_{21}}[k] \\ z_{B_{22}}[k] \\ SHP[k] \\ XNP[k] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SHP[k] \\ XNP[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{A_{11}}[k] \\ v_{A_{12}}[k] \\ v_{B_{11}}[k] \\ v_{B_{12}}[k] \\ v_{A_{21}}[k] \\ v_{A_{22}}[k] \\ v_{B_{21}}[k] \\ v_{B_{22}}[k] \\ WF[k] \\ \beta[k] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{IV4.4}$$

$$\Delta_r = \text{diag}\{\delta_{A_{11}}; \delta_{A_{12}}; \delta_{B_{11}}; \delta_{B_{12}}; \delta_{A_{21}}; \delta_{A_{22}}; \delta_{B_{21}}; \delta_{B_{22}}\} \tag{IV4.5}$$

Il est possible de modéliser les dynamiques négligées par des incertitudes, en choisissant des filtres appropriés. D'après l'étude de la Figure IV2.13, le régime permanent est très bien identifié, tandis que les modèles estimés présentent des erreurs plus importantes en hautes fréquences. Au vu des réponses fréquentielles du système décrites dans la partie IV2c, le filtre donné dans (IV4.6) peut être utilisé pour

modéliser ces incertitudes. Il s'agit d'un filtre passe-haut du premier ordre avec une pulsation de brisure égale à 40 rad/s et une période d'échantillonnage  $T_s$  de 0,04 s.

$$W_{dyn}(z) = 0,6035 \times \frac{(z - 0,993)}{(z - 0,203)} \quad (IV4.6)$$

En regroupant les incertitudes paramétriques et les pondérations associées aux dynamiques négligées, une nouvelle LFT est obtenue, avec une matrice d'incertitude normalisée  $\Delta_T = \{\Delta_r, \Delta_l, \Delta_2\}$ . Le système bouclé comprenant le procédé, les incertitudes réelles et les dynamiques négligées ainsi que les correcteurs PI et le découpleur est représenté sur la Figure IV4.1. L'algorithme incrémental ne changeant ni la stabilité ni les performances, il n'a pas été implanté par souci de simplicité.

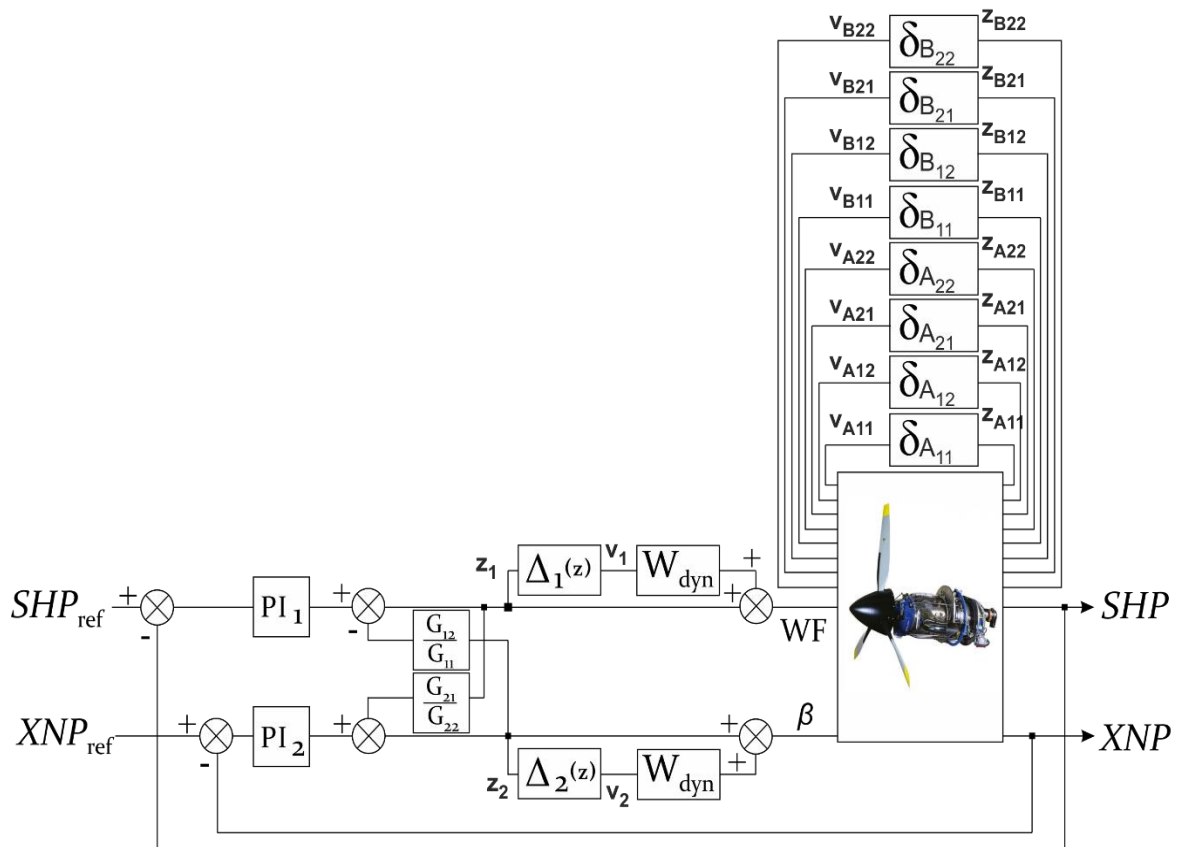


Figure IV4.1 : Schéma d'analyse de la robustesse de stabilité du procédé incertain bouclé

## IV4b. Robustesse des lois de commande

### i. Choix des incertitudes

Le but est de choisir des incertitudes représentatives du turbopropulseur. Une approche classique consiste à définir les incertitudes comme des pourcentages des paramètres nominaux. L'approche proposée consiste à considérer les incertitudes comme des pourcentages des variations maximales attendues pour chaque paramètre, sur toute sa plage de fonctionnement.

La Figure IV4.2 présente ces deux approches sur un exemple élémentaire composé d'un unique paramètre incertain. La première approche, représentée sur la Figure IV4.2.a) présente les domaines incertains pour deux paramètres nominaux différents. Il est clair qu'un domaine incertain de 25% n'a pas la même signification dans les deux situations. Dans la seconde approche, représentée sur la Figure IV4.2.b), le domaine considéré comme incertain est de la même taille, quelle que soit la valeur nominale du paramètre. Cela permet de donner plus de sens aux incertitudes, et de s'affranchir de la dépendance vis-à-vis des paramètres nominaux.

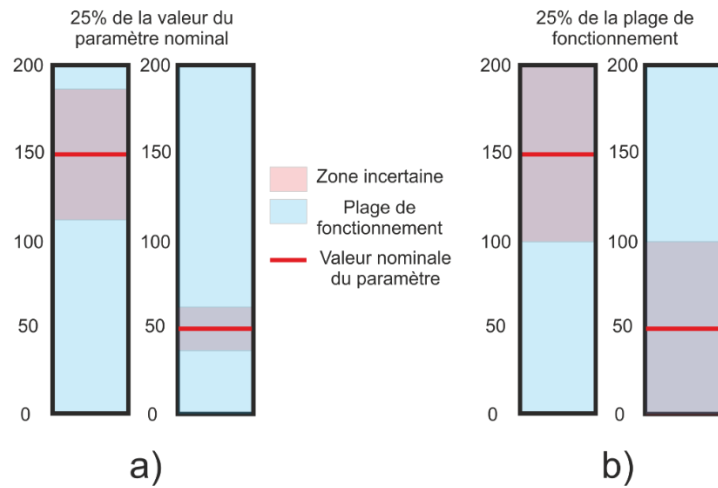


Figure IV.2 : Variation des paramètres

La Figure IV.4.3 présente les coefficients de la représentation d'état de l'ensemble des modèles identifiés (en bleu) et des modèles adoptés pour la synthèse (en rouge).

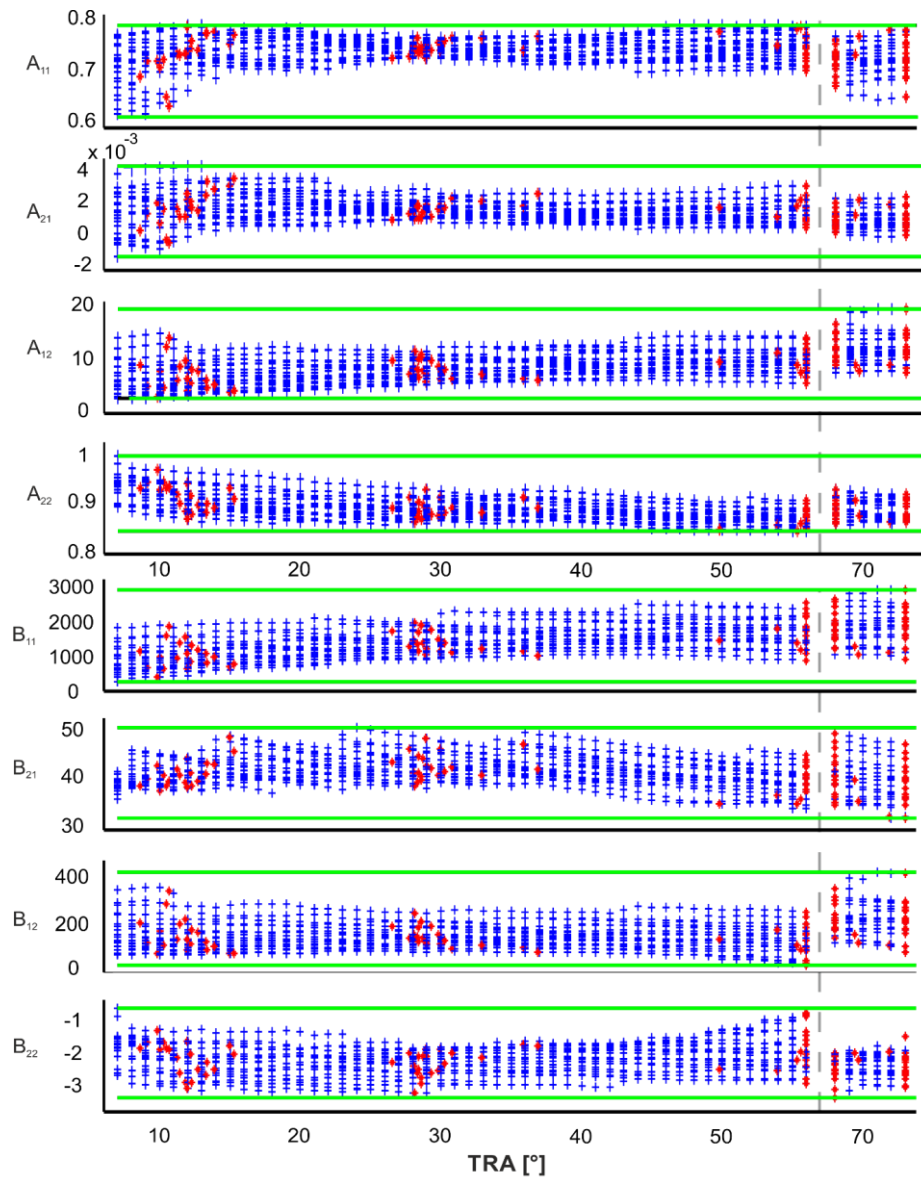


Figure IV.3 : Variation des coefficients de la représentation d'état

Les bornes associées aux variations minimales et maximales des paramètres sont tracées en vert. On considérera par la suite que la plage de fonctionnement de chaque paramètre correspond à l'intervalle défini par ces bornes.

## ii. Étude de la robustesse sur un point de fonctionnement

La robustesse de la stabilité du système bouclé, comprenant le procédé et les lois de commande associées sur un point de fonctionnement quelconque (ici  $\{A_0, M_0,3, N_3_{15000}, XNP_{730}\}$ ), est tout d'abord analysée. Les paramètres incertains  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont posés en (IV4.7), en considérant une incertitude maximale correspondant à 15% de la plage de fonctionnement.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij_0} + 0,15 \left( A_{ij_{sup}} - A_{ij_{inf}} \right) \delta_{A_{ij}} \\ B_{ij} &= B_{ij_0} + 0,15 \left( B_{ij_{sup}} - B_{ij_{inf}} \right) \delta_{B_{ij}} \end{aligned} \quad (IV4.7)$$

### Analyse de la robustesse de stabilité

Le schéma d'analyse de la Figure IV4.1 est considéré. Comme précisé en annexe, la VSS (Valeur Singulière Structurée) est difficilement calculable et l'on préfère calculer des bornes inférieures et supérieures. Ces dernières sont tracées sur la Figure IV4.4. Le maximum de la VSS, noté VSSM (Valeur Singulière Structurée Maximale), est atteint autour de 2 rad/s et est de 0,55. La borne inférieure est relativement proche de cette valeur autour de cette pulsation, ce qui montre que la VSSM n'est pas surévaluée.

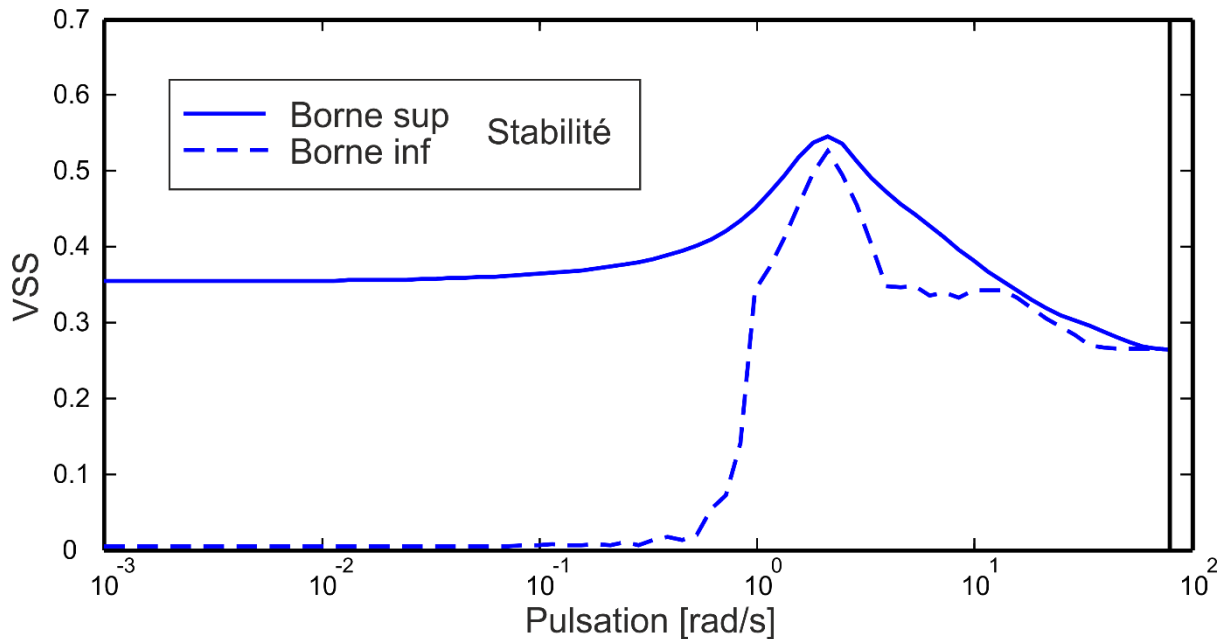


Figure IV4.4 : Bornes supérieures et inférieures de la VSS (robustesse de stabilité)

Rappelons que pour une valeur VSSM, la stabilité est garantie pour toute incertitude  $\Delta$  telle que  $\|\Delta\|_\infty < 1/VSSM$ , ce qui correspond dans cette étude à (IV4.8).

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left[ A_{ij_0} - \frac{0,15}{VSSM} \left( A_{ij_{sup}} - A_{ij_{inf}} \right); A_{ij_0} + \frac{0,15}{VSSM} \left( A_{ij_{sup}} - A_{ij_{inf}} \right) \right] \\ B_{ij} &= \left[ B_{ij_0} - \frac{0,15}{VSSM} \left( B_{ij_{sup}} - B_{ij_{inf}} \right); B_{ij_0} + \frac{0,15}{VSSM} \left( B_{ij_{sup}} - B_{ij_{inf}} \right) \right] \end{aligned} \quad (IV4.8)$$

$$\|W_{dyn}\|_\infty < 1/VSSM$$



D'un point de vue paramétrique, la stabilité est assurée autour des paramètres nominaux pour des variations maximales correspondant à  $15/0,55 = 27,5\%$  des plages précédemment déclarées. Les plages de fonctionnement où la robustesse est garantie sont tracées pour chacun des paramètres de la représentation d'état sur la Figure IV4.5. Les lois de commande permettent alors d'assurer la stabilité de l'ensemble des modèles linéaires correspondant à n'importe quelle combinaison de paramètres dans ces zones robustes. Comme précisé dans (A-3. Analyse structurée de la robustesse), le domaine de stabilité correspond à un hypercube centré sur les paramètres nominaux.

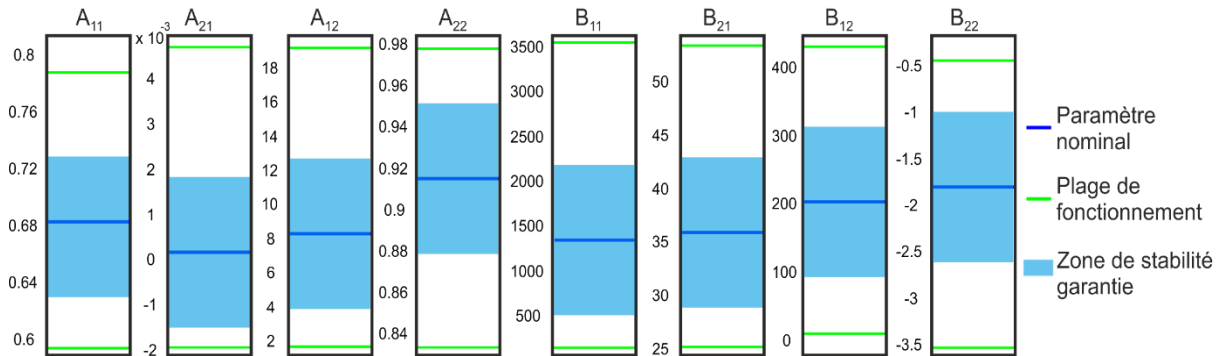


Figure IV4.5 : Domaines de stabilité robuste

La Figure IV4.6 présente les réponses du système bouclé à un échelon de puissance hélice *SHP* de 5000 kW et à un échelon de 100 rpm sur la vitesse hélice *XNP*. Les courbes bleues correspondent aux réponses indicielles du procédé nominal (i.e. le procédé à partir duquel les lois de commande ont été synthétisées). Les courbes vertes correspondent aux réponses indicielles de procédés incertains. Ces derniers sont construits en tirant aléatoirement les coefficients de la représentation d'état, dans des domaines correspondant à 27,5% de leurs plages de fonctionnement respectives (centrées sur les paramètres nominaux). Enfin, les courbes rouges correspondent aux réponses indicielles du pire modèle. Ce dernier correspond au modèle qui limite la VSSM (et plus précisément au modèle qui limite le maximum de la borne inférieure de la VSS).

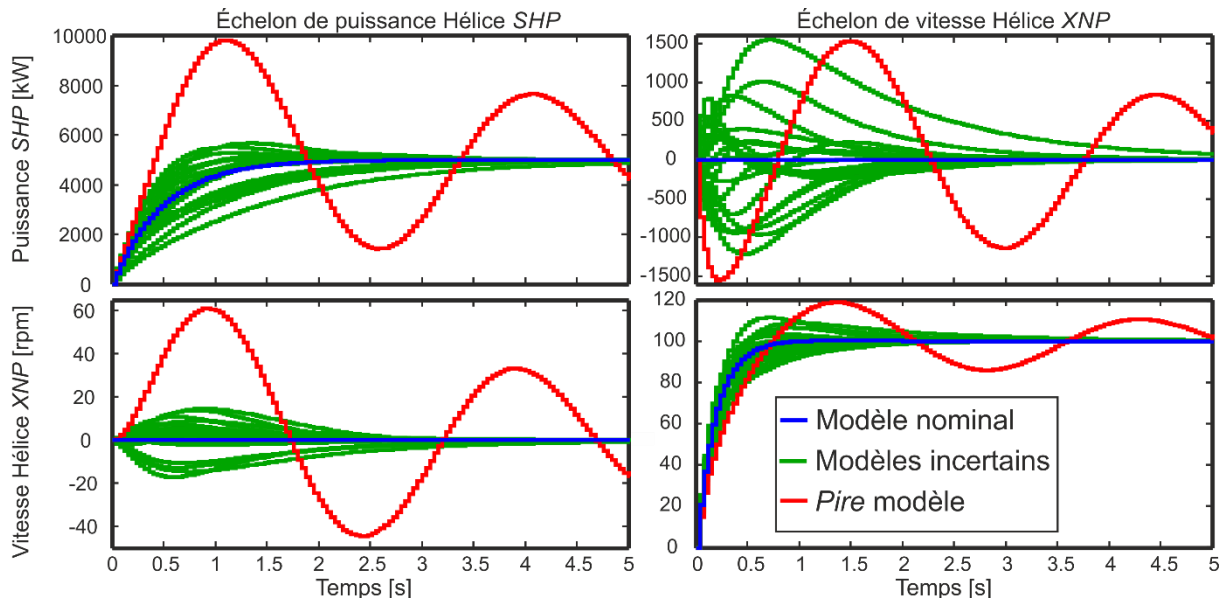


Figure IV4.6 : Réponses temporelles du système bouclé comprenant un procédé incertain

Les réponses du système bouclé sont stables, mais le comportement du turbopropulseur est loin d'être satisfaisant par rapport aux spécifications, d'où la nécessité d'assurer la robustesse de performances.

## Analyse de la robustesse des marges de stabilité

On s'intéresse tout d'abord aux marges de stabilité. Les marges de stabilité peuvent être étudiées soit à partir des marges de phase et de gain, soit avec des marges de module. La seconde approche a été privilégiée afin d'avoir un indicateur unique dont l'analyse est plus aisée.

Les réglages proposés dans la partie IV3c permettent d'atteindre des marges de module de 0,8 en considérant les lois de commande sur le modèle nominal. On cherche à garantir en présence des incertitudes la moitié de ces valeurs, soit des marges de module de 0,4 pour chacune des boucles. Ces objectifs correspondent à des contraintes sur les éléments diagonaux de la matrice de sensibilité (IV4.9), (IV4.10).

$$S(z) = (I + GDK)^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11}(z) & S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & S_{22}(z) \end{bmatrix} \quad (\text{IV4.9})$$

$$S_{11}(z) < 1/0,4 \quad (\text{IV4.10})$$

$$S_{22}(z) < 1/0,4$$

La robustesse des marges de module est étudiée pour les deux boucles de manière indépendante comme précisé en (A-3. Analyse structurée de la robustesse). Les transferts monovariables considérés lors du calcul des marges de module sont les transferts équivalents, prenant ainsi les interactions en compte. La VSSM considérée pour les marges de module sera égale à la VSSM la plus contraignante obtenue suite à l'analyse de chacune des deux boucles.

Les bornes inférieures et supérieures des VSS sont tracées pour chacune des boucles sur la Figure IV4.7. La VSSM de la première boucle est de 0,715. Cela signifie que la marge module de cette boucle sera supérieure à  $0,4/0,715 = 0,55$  pour des paramètres incertains correspondant à  $15/0,715 = 21\%$  des plages de fonctionnement autour des paramètres nominaux. De la même manière, la VSSM de la seconde boucle est de 0,65, ce qui signifie qu'une marge de module de 0,6 sera garantie pour 23% d'incertitudes. La première boucle est ainsi plus restrictive en termes de robustesse des marges de stabilité, et l'on peut conclure que les marges de module seront supérieures à 0,55 pour des incertitudes de 21%.

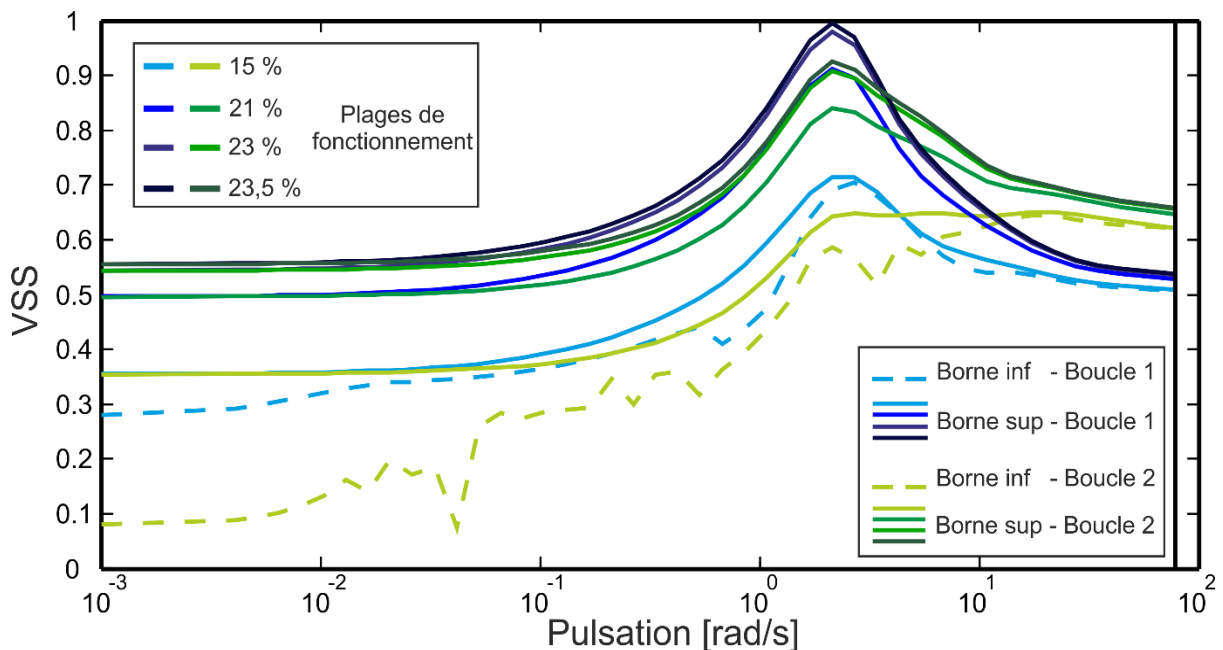


Figure IV4.7 : Borne supérieure et inférieure de la VSS (robustesse des marges de module)

Il est possible d'augmenter uniformément les plages d'incertitudes jusqu'à atteindre une VSSM de 1, afin de déterminer le domaine pour lequel les marges de module sont de 0,4. Pour cela, on peut par exemple multiplier itérativement les plages d'incertitudes par l'inverse de la VSSM la plus contraignante. Les bornes supérieures des VSS obtenues au cours de ces itérations sont tracées sur la Figure IV4.7. De cette manière, il est possible de garantir des marges de module de 0,4 pour 23,5 % des plages de fonctionnement.

La Figure IV4.8 présente les fonctions de sensibilité diagonales  $S_{11}$  et  $S_{22}$ , correspondant au procédé nominal (en bleu), à des procédés incertains définis par des incertitudes aléatoires comprises dans 23,5% de la plage de fonctionnement (en vert), et au pire modèle incertain (en rouge). Les gabarits définis par les inverses des marges de module, tracés en cyan, sont bien respectés.

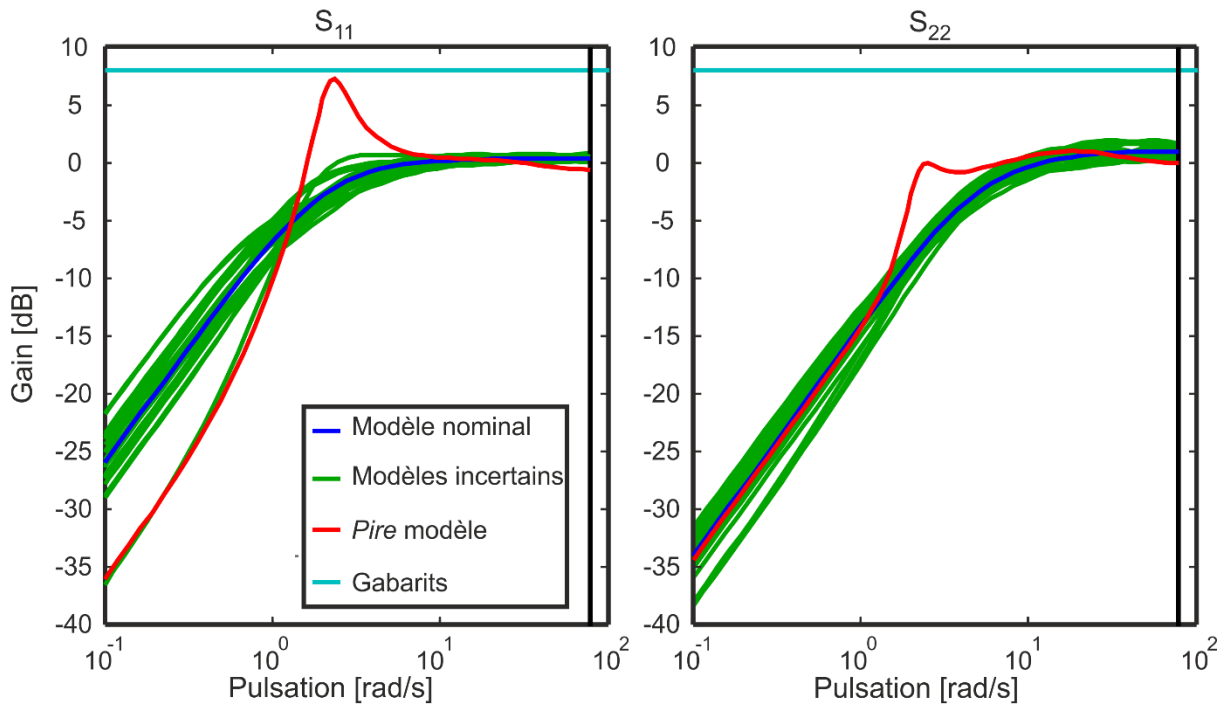


Figure IV4.8 : Fonctions de sensibilité pour la robustesse des marges de module

#### Analyse de la robustesse du suivi de consignes

En dehors de la robustesse des marges de stabilité, la robustesse en termes de suivi de consigne est un élément important du cahier des charges. Les objectifs fixés sont :

- d'assurer des bandes passantes d'au moins 50% des bandes passantes spécifiées dans le cas nominal (ce qui donne 1 rad/s et 2,5 rad/s),
- d'avoir des erreurs statiques inférieures à 1%,
- de limiter les gains en hautes fréquences à 2,5 des éléments diagonaux de la matrice de sensibilité (ce choix permet par ailleurs d'inclure la robustesse de marges de stabilité de 0,4 dans le suivi de consigne).

Ces objectifs sont respectés si les fonctions de sensibilité des éléments diagonaux respectent les contraintes définies dans (IV4.11).

$$S_{11}(z) < 2,39 \times \frac{(z - 1)}{(z - 0,91)} \tag{IV4.11}$$

$$S_{22}(z) < 2,24 \times \frac{(z - 1)}{(z - 0,79)}$$

La robustesse du suivi de consigne de chacune des boucles est étudiée indépendamment de l'autre. Les bornes inférieures et supérieures des VSS sont tracées pour chacune des boucles sur la Figure IV4.9. La VSSM la plus contraignante est proche de 1,05. Le suivi de consigne ne peut donc pas être garanti pour des incertitudes variant au-delà de 15% des plages de fonctionnement. Trois itérations visant à diminuer les incertitudes uniformément conduisent à obtenir une VSSM de 1 pour 13,5% des incertitudes (seules les bornes inférieures et supérieures de la dernière itération ont été reportées sur la Figure IV4.9).

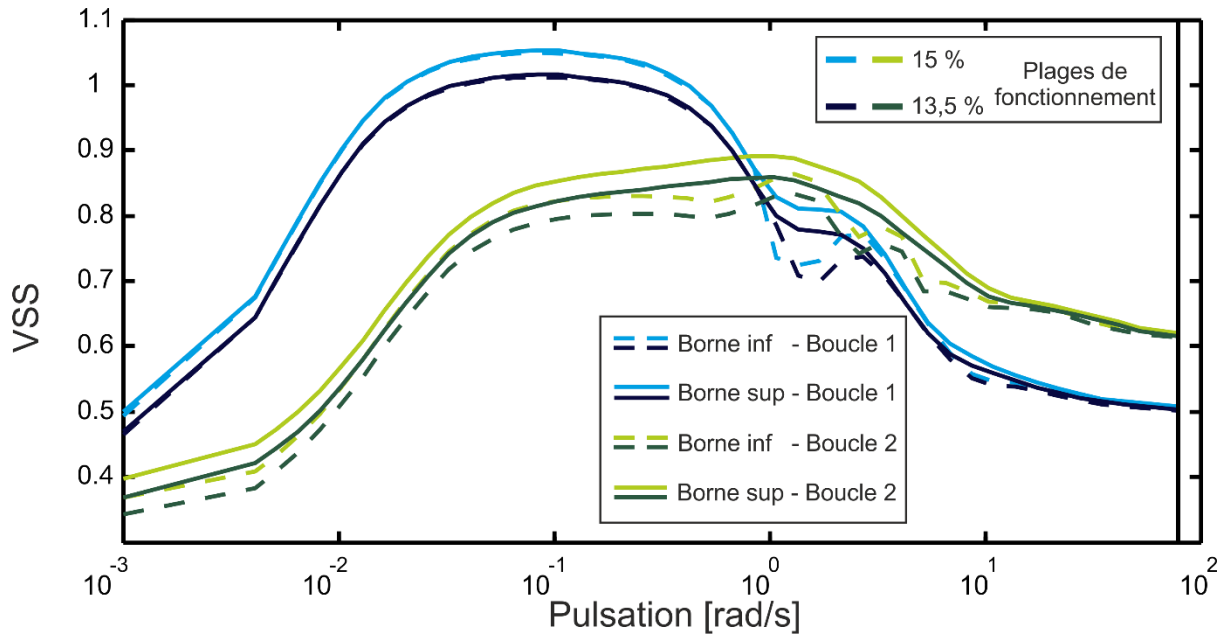


Figure IV4.9 : Bornes supérieures et inférieures de la VSS (robustesse du suivi de consigne)

Les fonctions de sensibilité diagonales  $S_{11}$  et  $S_{22}$  sont tracées sur la Figure IV4.10. Celles-ci respectent bien les gabarits (cyan).

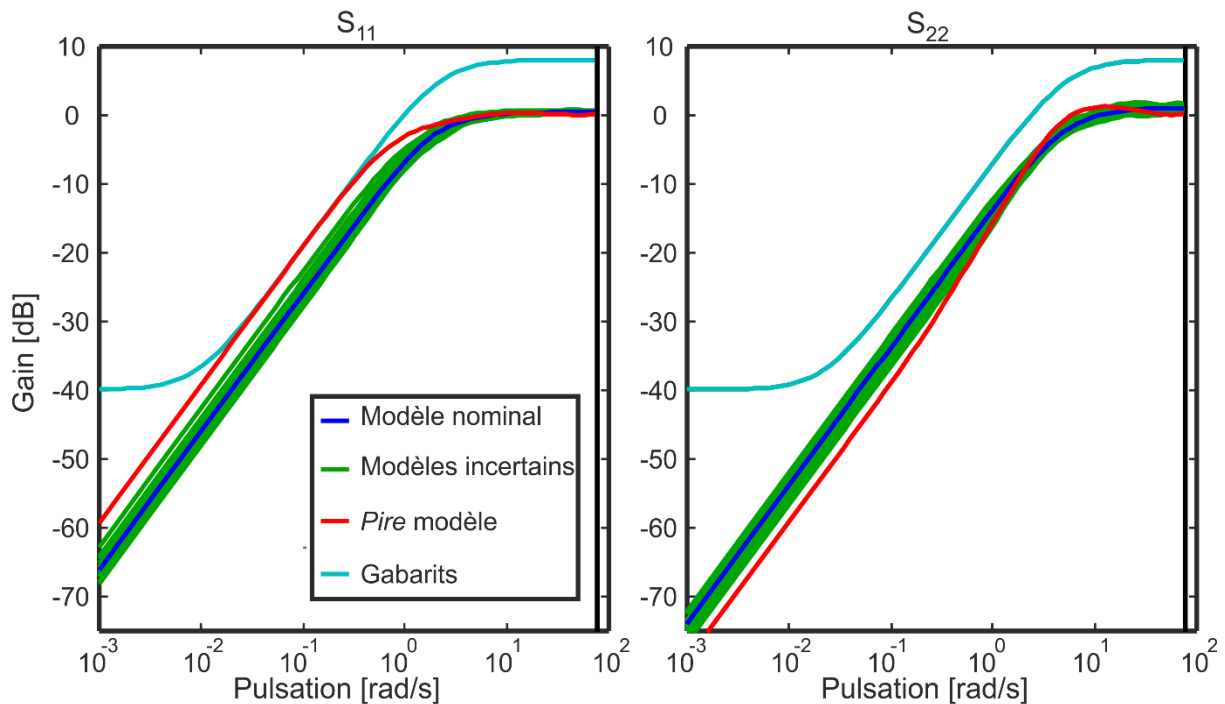


Figure IV4.10 : Fonctions de sensibilité pour la robustesse du suivi de consigne

## Analyse de la robustesse du découplage

Étant donné qu'un des objectifs principaux des lois de commande est d'assurer un découplage des boucles, la robustesse du découplage est également étudiée. Les objectifs fixés sont d'assurer que des échelons de consigne :

- de 5000 kW sur la puissance hélice *SHP* entraînent des écarts inférieurs à 10 rpm sur la vitesse hélice *XNP*,
- de 100 rpm sur la vitesse de l'hélice *XNP* entraînent des écarts inférieurs à 1000 kW sur la puissance hélice *SHP*.

Ces objectifs peuvent se traduire par des gabarits sur les fonctions de sensibilité des éléments non diagonaux (IV4.12). Étant donné les objectifs, des gains correspondant aux rapports entre régimes permanents des entrées et des sorties peuvent être considérés (ce choix est relativement contraignant dans le sens où les réponses fréquentielles des éléments non diagonaux de la matrice de sensibilité peuvent atteindre les gabarits, alors que les objectifs temporels sont largement respectés).

$$S_{12}(z) < 20 \times \log(1000/100) = 20 \text{ dB} \quad (\text{IV4.12})$$

$$S_{21}(z) < 20 \times \log(10/5000) = -54 \text{ dB}$$

Les écarts autorisés peuvent sembler importants, notamment sur la puissance. Néanmoins, les demandes de changement de vitesse hélice *XNP* s'accompagnent toujours de demandes de changement de puissance *SHP*. De plus, les consignes sont filtrées, ce qui a tendance à abaisser les interactions entrées-sorties réelles. Enfin, le calcul des gabarits fréquentiels à partir des objectifs temporels est relativement contraignant.

Les bornes inférieures et supérieures des VSS sont tracées sur la Figure IV4.11. La VSSM étant de 1,7, il n'est pas possible de garantir les objectifs de découplage avec les incertitudes considérées. Les incertitudes sont abaissées progressivement jusqu'à 2%, ce qui conduit à une VSSM de 1.

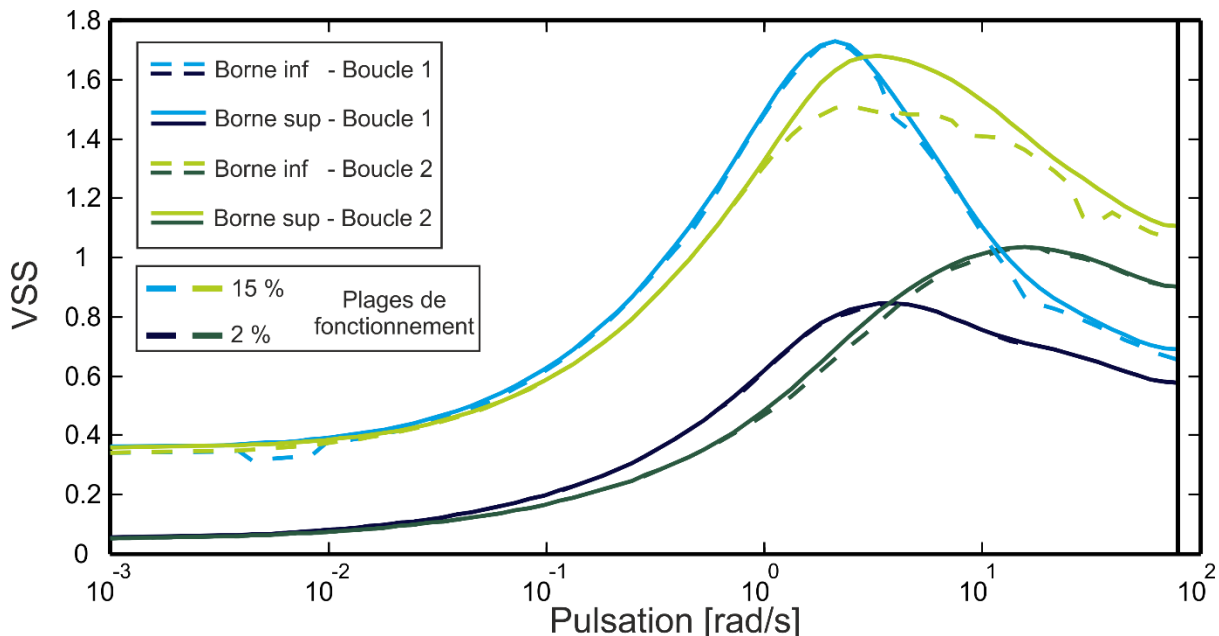


Figure IV4.11 : Bornes supérieures et inférieures de la VSS (robustesse du découplage)

Les éléments non diagonaux de la matrice de sensibilité  $S_{12}$  et  $S_{21}$  respectent bien les gabarits, comme illustré sur la Figure IV4.12 (les fonctions de sensibilité nominales ne sont pas tracées car elles sont de l'ordre de -250 dB et théoriquement nulles).

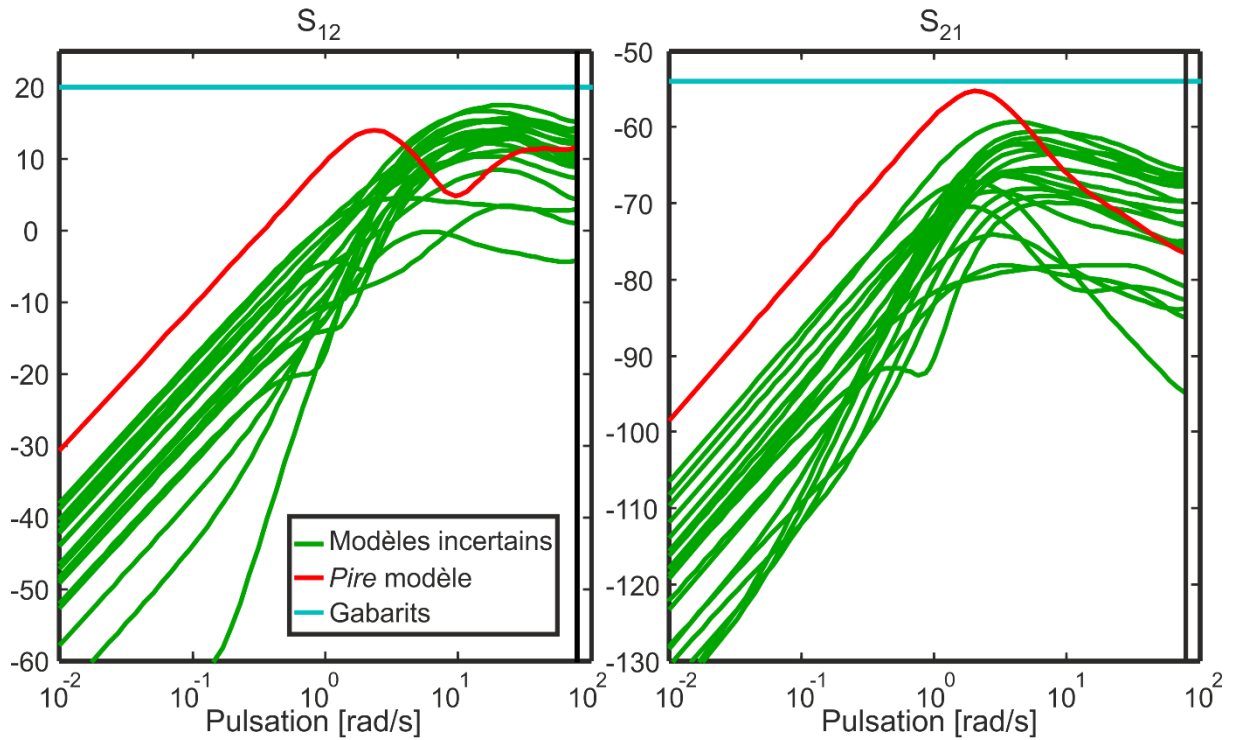


Figure IV.4.12 : Fonctions de sensibilité pour la robustesse du découplage

#### Analyse de la robustesse du rejet de perturbations

Pour finir, on s'intéresse à la robustesse du rejet de perturbations. Des incertitudes paramétriques et des dynamiques négligées ont également été ajoutées sur les fonctions de transfert HBV. Les incertitudes paramétriques ont été choisies en procédant de la même manière que sur la Figure IV.4.2

L'objectif visé est de limiter les écarts de puissance  $SHP$  à 250 kW et les écarts de vitesse de l'hélice  $XNP$  de 5 rpm, pour une entrée de perturbation correspondant à la fermeture des trois vannes HBV. Cela peut se traduire par des contraintes sur les transferts  $u_{HBV} \rightarrow SHP$  et  $u_{HBV} \rightarrow XNP$  obtenus en prenant en compte la structure de commande {boucle fermée, compensation}, comme indiqué dans (IV.4.13) et (IV.4.14).

$$T(z) = \frac{HBV - GDG_{f0}}{(I + GDK)} = \begin{bmatrix} T_1(z) \\ T_2(z) \end{bmatrix} \quad (IV.4.13)$$

$$\begin{aligned} T_1(z) &< 20 \times \log(250/0,24) = 60 \text{ dB} \\ T_2(z) &< 20 \times \log(5/0,24) = 26,5 \text{ dB} \end{aligned} \quad (IV.4.14)$$

Les bornes inférieures et supérieures des VSS sont tracées sur la Figure IV.4.13. La VSSM la plus contraignante est de 1,9. En réduisant les incertitudes à 5% des plages de fonctionnement, on arrive à garantir le rejet de perturbations désiré. Le domaine de robustesse garanti est relativement faible, mais cela est dû au fait que des incertitudes sont considérées à la fois pour le procédé en réponse aux entrées de commandes et également aux entrées de perturbations.

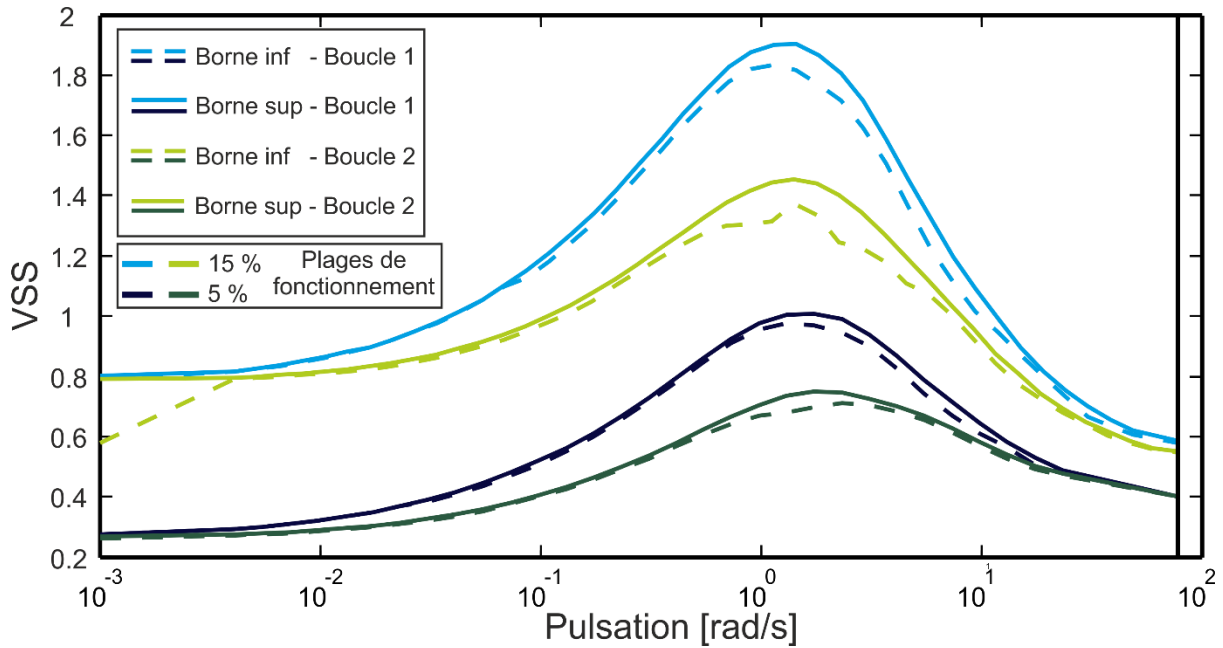


Figure IV4.13 : Borne supérieure et inférieure de la VSS (robustesse du rejet de perturbations)

Les fonctions de transfert  $T_1$  et  $T_2$  sont tracées sur la Figure IV4.14. On peut noter que les différences entre les fonctions de sensibilité avec le modèle nominal et des modèles incertains sont relativement importantes.

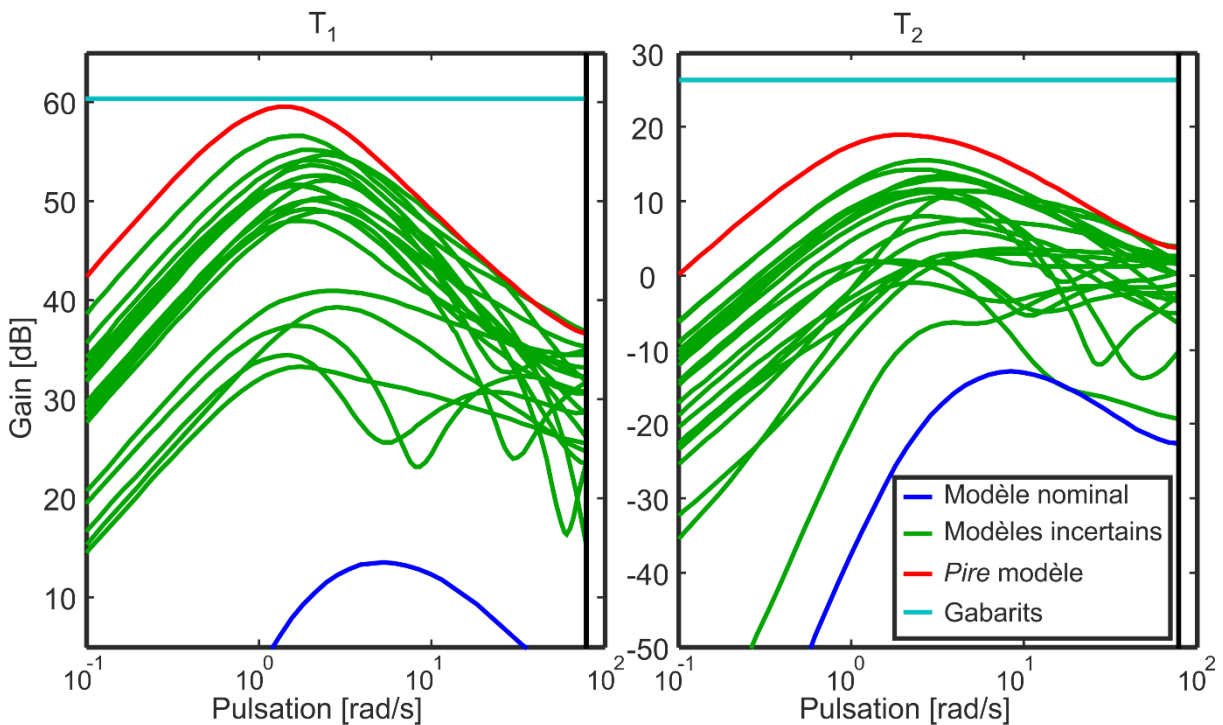


Figure IV4.14 : Fonctions de sensibilité complémentaires (robustesse du rejet de perturbations)

Les réponses temporelles à un échelon de perturbations (d'amplitude -0,24 % de débit d'air) sont tracées sur la Figure IV4.15. Ces dernières n'atteignent pas les gabarits (à 250 kW et 5 rpm). Comme précisé précédemment, les gabarits sur les réponses fréquentielles sont plus contraignants que les gabarits temporels. Les lois choisies permettent d'avoir un rejet presque parfait dans le cas nominal, mais cela ne se généralise pas pour les lois de commande synthétisées sur les autres points de fonctionnement.



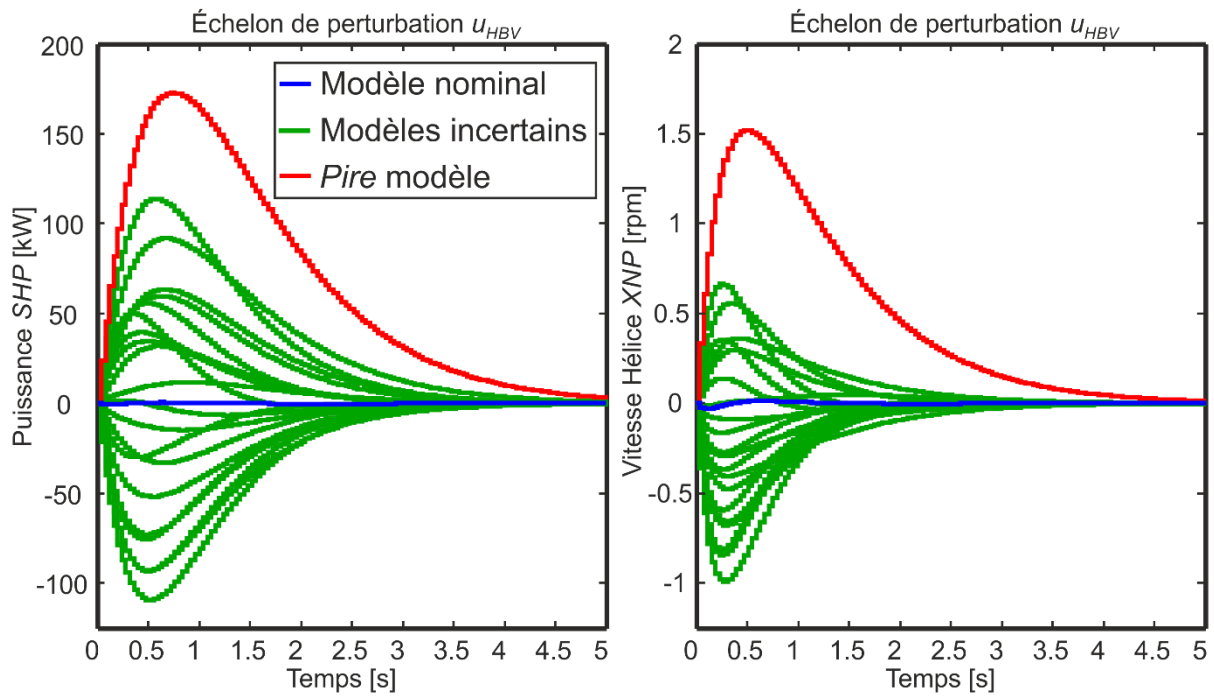


Figure IV4.15 : Réponses temporelles à un échelon de perturbation

#### Conclusions

Les résultats de cette étude de robustesse sont résumés dans le Tableau IV4-1. Les lois de commande  $\{A_0, M_{0,3}, N_{3,15000}, XNP_{730}\}$  permettent d'assurer de bonnes marges de stabilité et un suivi de consigne acceptable pour des domaines incertains relativement vastes. En revanche, il n'est pas évident de garantir mathématiquement la robustesse du découplage ainsi que le rejet de perturbations (ce qui ne signifie pas forcément que ces performances ne soient pas obtenues en pratique).

Robustesse	Plage de fonctionnement garantie [%]
Stabilité	27,5
Marges de stabilité	23,5
Suivi de consigne	13,5
Découplage	2
Rejet de perturbations	5

Tableau IV4-1 : Résultats de l'étude de robustesse sur un point de fonctionnement



### iii. Étude de la robustesse de l'ensemble des lois de commande

Les études au moyen de la mu-analyse sont à présent effectuées pour chacune des 100 lois de commande (on dénombre en effet 20 couples {Mach, Altitude} et 5 couples  $\{N_3, XNP\}$ ). Les pondérations traduisant les objectifs de performances sont les mêmes que dans le cas précédent, tout comme les dynamiques négligées. Les incertitudes paramétriques sont en revanche ajustées en fonction des résultats du Tableau IV4-1. On considérera 25%, 20%, 10%, 2% et 5% des plages de fonctionnement maximales des paramètres du modèle, pour respectivement les objectifs de stabilité, marges de stabilité, suivi de consignes, découplage et rejet de perturbations. Ces dernières sont bien sûr prises autour des paramètres nominaux de chacun des modèles.

Les VSSM (Valeurs Singulières Structurées Maximales) sont présentées sur un graphique 3D en fonction du Mach et de l'altitude. Divers tracés sont réalisés pour les couples  $\{N_3, XNP\}$ .

#### Analyse de la robustesse de stabilité

Les incertitudes paramétriques considérées représentent 25% des plages de fonctionnement. Les VSSM pour la robustesse de la stabilité sont présentées sur la Figure IV4.16.

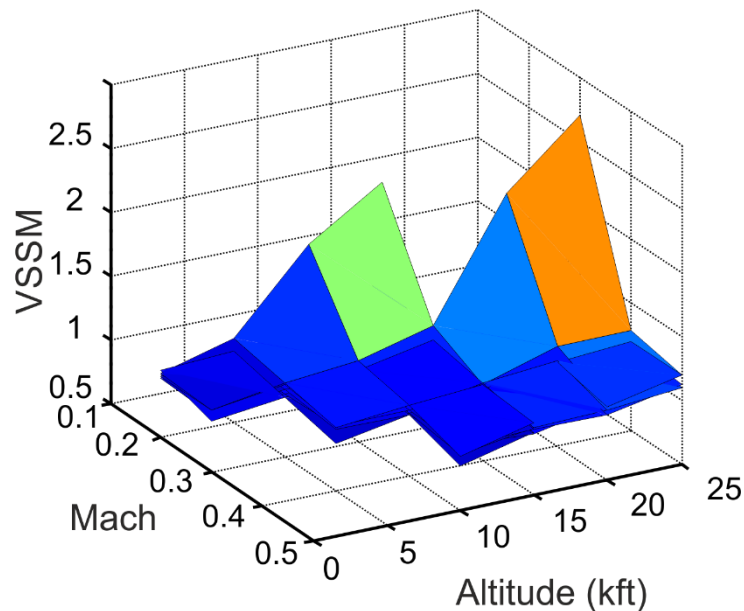


Figure IV4.16 : VSSM pour la robustesse de la stabilité

Les VSSM sont en moyenne égales à 1,1. On note la présence de trois points (concentrés sur la nappe  $\{N_3_{17000}, XNP_{730}\}$ ) dont les VSSM sont supérieures à 2. On peut s'interroger sur l'origine de ces écarts importants entre les VSSM de certains points.

Comme étudié dans la partie IV2c, le comportement du turbopropulseur est différent en fonction des points de fonctionnement, mais les lois de commande ont été synthétisées de manière à obtenir un même comportement en boucle fermée. Les lois de commande synthétisées à partir de modèles possédant des gains et des bandes passantes relativement faibles (en particulier pour le transfert  $\beta \rightarrow XNP$ ) sont composées de régulateurs PI avec des gains importants. Ces dernières permettent d'assurer de bonnes performances nominales, mais la robustesse de ces performances ne semble pas satisfaisante.

#### Analyse de la robustesse des marges de stabilité

Les incertitudes considérées représentent 20% des plages de fonctionnement. Les VSSM pour la robustesse des marges de stabilité sont présentées sur la Figure IV4.17.

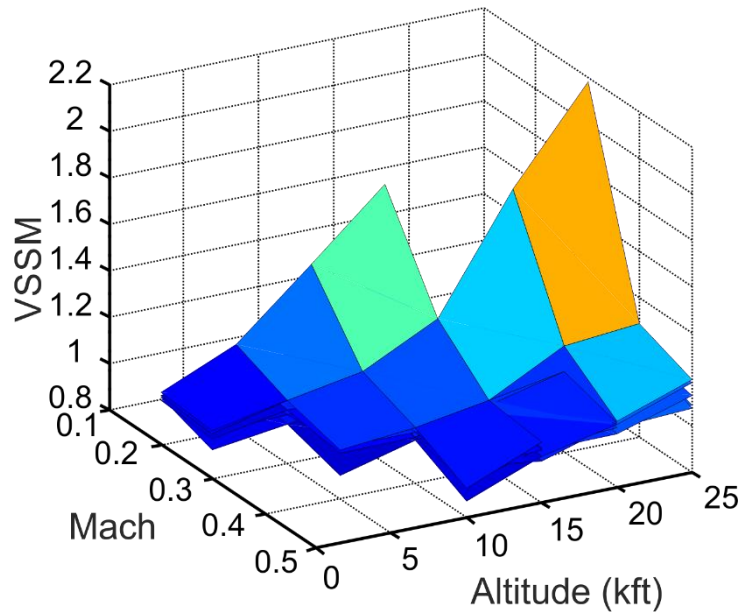


Figure IV4.17 : VSSM pour la robustesse des marges de stabilité

Les VSSM sont en moyenne égales à 1,1 comme dans le cas précédent (rappelons que les incertitudes considérées sont plus faibles). La forme du graphique des VSSM pour les marges de stabilité est très similaire à celle pour la stabilité (Figure IV4.16). On retrouve effectivement les trois points présentant des VSSM très importantes.

#### Analyse de la robustesse du suivi de consignes

Les incertitudes considérées représentent 10% des plages de fonctionnement. Les VSSM pour la robustesse du suivi de consigne sont présentées sur la Figure IV4.18. Comme pour la robustesse de stabilité, trois des points présentent des VSSM particulièrement importantes.

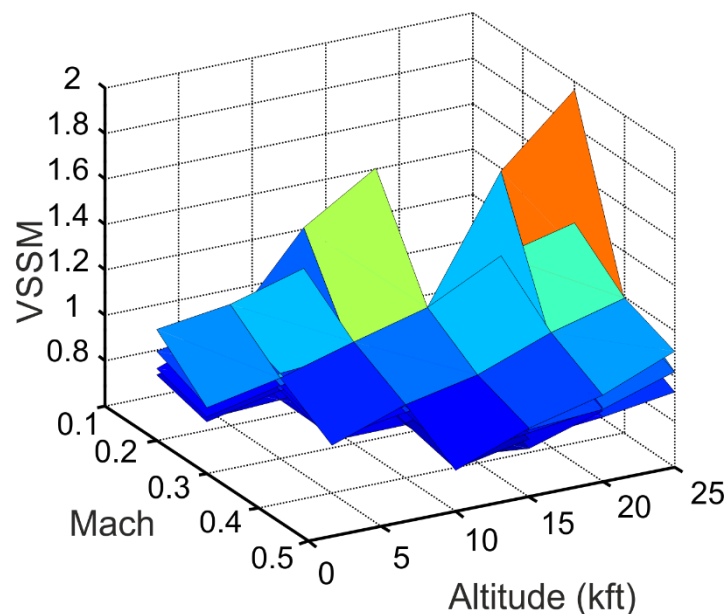


Figure IV4.18 : VSSM pour la robustesse de suivi de consigne

#### Analyse de la robustesse du découplage

Les incertitudes considérées sont abaissées à 2% des plages de fonctionnement. Les VSSM pour la robustesse du découplage sont présentées sur la Figure IV4.19.

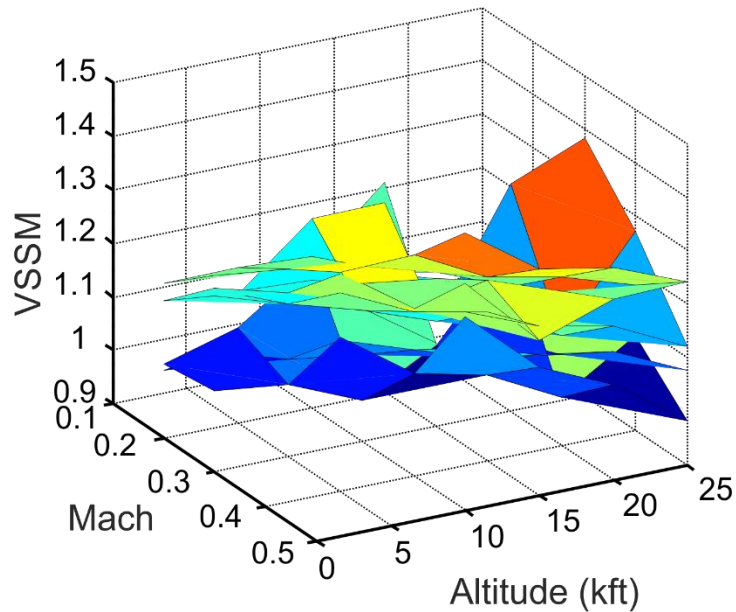


Figure IV4.19 : VSSM pour la robustesse du découplage

La forme du graphique est différente de celles obtenues précédemment, ce qui n'est pas anormal. En effet, la stabilité, les marges de stabilité et le suivi de consigne peuvent être globalement associés aux régulateurs PI, tandis que le découplage concerne plutôt le découpleur inversé. Il n'y a donc pas de raison que des lois de commande robustes en termes de stabilité le soient aussi en termes de découplage. On remarque par ailleurs que les VSSM sont globalement uniformes sur les différents points de fonctionnement.

#### Analyse de la robustesse du rejet de perturbations

Les incertitudes considérées sont abaissées à 5% des plages de fonctionnement. Les VSSM pour la robustesse du découplage sont présentées sur la Figure IV4.20.

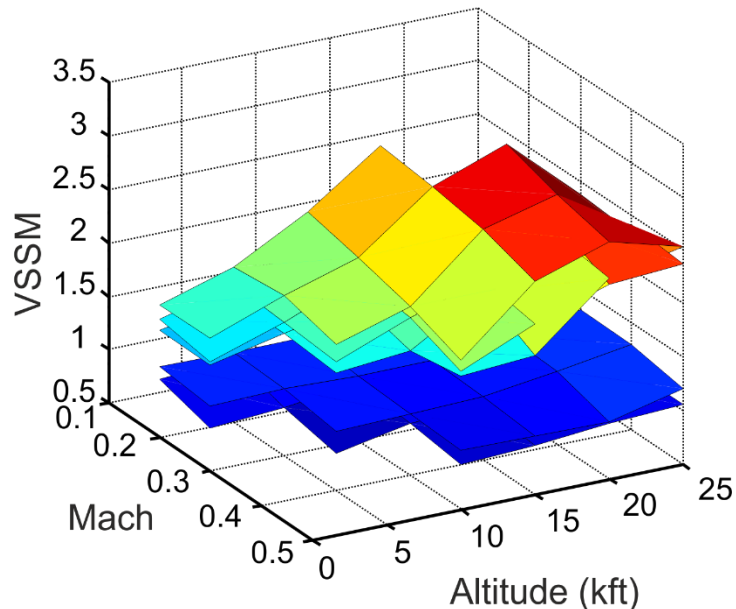


Figure IV4.20 : VSSM pour la robustesse de rejet de perturbations

On distingue deux nappes avec des VSSM comprises entre 0,9 et 1,3 (il s'agit des nappes  $\{N_3_{15000}, XNP_{730}\}$  et  $\{N_3_{16000}, XNP_{730}\}$ ) et trois nappes dont les VSSM sont entre 2 et 3. En fait, les ouvertures et fermetures des vannes HBV causent des perturbations bien plus importantes sur la

puissance *SHP* et la vitesse de l'hélice *XNP* pour des régimes importants (comme constaté dans la partie IV2c). Les gabarits fixés sont donc bien plus faciles à respecter lorsque les fonctions de transfert HBV ont des gains faibles, comme pour les nappes de points  $\{15000, 730\}$  et  $\{16000, 730\}$ .

### Conclusions

Les moyennes et les écarts-types des VSSM sur l'ensemble des lois de commande sont présentés dans le Tableau IV4-2. On retrouve le fait que la stabilité, les marges de stabilité et le suivi de consigne peuvent être garantis sur de larges domaines. Il en va autrement pour le rejet de perturbations et surtout le découplage.

Robustesse	Plages de fonctionnement testées [%]	Moyennes des VSSM	Écarts-types des VSSM
Stabilité	25	1,1	0,25
Marges de stabilité	20	1,1	0,2
Suivi de consigne	10	1	0,2
Découplage	2	1,15	0,1
Rejet de perturbations	5	1,7	0,6

Tableau IV4-2 : Résultats de l'étude de robustesse des lois de commande

#### iv. Simplification des lois de commande

L'étude de la robustesse confirme les constatations de la partie IV3e, à savoir que les lois de commande restent performantes, au moins en termes de suivi de consigne et de marges de stabilité, bien au-delà des modèles nominaux pour lesquelles elles ont été synthétisées.

Il est légitime de se demander s'il est possible de simplifier le nombre de points de fonctionnement utilisés pour caractériser les lois de commande. Actuellement, les vecteurs permettant de définir les points de fonctionnement sont les suivants :

- Mach : [0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5] [/],
- Altitude : [0, 5, 10, 15, 20, 25] [ktf],
- $\{N_3, XNP\}$  :  $[\{15000, 730\}, \{16000, 730\}, \{17000, 730\}, \{16800, 842\}, \{17400, 842\}]$  [rpm].

Il est a priori possible de supprimer les lois de commande sur un point de fonctionnement lorsque les lois de commande des points de fonctionnement voisins assurent de bonnes performances sur celui-ci. De cette manière, si les lois des points voisins assurent des performances robustes en présence d'incertitudes qui englobent un point, celui-ci peut être supprimé. Un raisonnement plus global consiste à supprimer des éléments des vecteurs définissant les points de fonctionnement.

Considérons par exemple l'élément  $\{17400, 842\}$  du vecteur  $\{N_3, XNP\}$ . Si pour l'ensemble des couples  $\{\text{Mach}, \text{Altitude}\}$ , les points de fonctionnement voisins, à savoir les points  $\{16800, 842\}$ , permettent d'assurer la robustesse des lois de commande, avec des incertitudes couvrant les points  $\{17400, 842\}$ , l'élément  $\{17400, 842\}$  du vecteur  $\{N_3, XNP\}$  ne sera plus indispensable.

Pour chaque couple  $\{\text{Mach}, \text{Altitude}\}$ , les écarts relatifs de chacun des paramètres de la représentation d'état entre les modèles  $\{16800, 842\}$  et  $\{17400, 842\}$  sont calculés dans le Tableau IV4-3. Étant donné les valeurs de ces écarts (en moyenne 5,5 %), il semble difficile de réussir à garantir le découplage ou le rejet de perturbations des modèles  $\{17400, 842\}$  à partir des lois de commande des points  $\{16800, 842\}$ . En revanche, il semble possible d'assurer le suivi de consigne et les marges de stabilité.

Les VSSM pour le suivi de consigne des lois {16800, 842} sont présentées dans le Tableau IV4-3. Les plages de fonctionnement garanties sont égales à 0,10/VSSM lorsque ces dernières sont inférieures à 1. Dans le cas inverse, il est possible d'abaisser uniformément les incertitudes comme vu précédemment.

A première vue, il ne semble pas possible de garantir rigoureusement le suivi de consigne des modèles {17400, 842} avec les lois de commande {16800, 842}. En effet, certains paramètres (affichés en surbrillance) ne sont pas contenus dans les zones garanties robustes pour le suivi de consigne.

	$A_{11}$ [%]	$A_{21}$ [%]	$A_{12}$ [%]	$A_{22}$ [%]	$B_{11}$ [%]	$B_{21}$ [%]	$B_{12}$ [%]	$B_{22}$ [%]	VSSM	Plages [%]
M0,1;A0	2,55	1,22	4,72	6,29	4,00	10,77	0,92	4,73	0,90	11,11
M0,2;A0	3,95	0,99	3,50	5,49	3,13	9,09	0,94	5,18	0,89	11,24
M0,3;A0	6,04	2,08	1,48	6,18	0,17	9,90	3,92	2,70	0,83	12,02
<b>M0,2;A5</b>	<b>14,35</b>	<b>9,78</b>	<b>10,41</b>	<b>9,37</b>	<b>2,30</b>	<b>11,17</b>	<b>5,52</b>	<b>11,43</b>	<b>0,89</b>	<b>11,24</b>
M0,3;A5	13,25	9,21	12,27	12,28	2,15	8,52	7,21	13,92	0,88	11,36
M0,4;A5	10,47	3,70	1,57	10,12	3,93	14,10	4,95	8,17	0,83	12,02
M0,2;A10	1,53	0,31	4,63	6,48	2,47	10,66	0,09	0,10	0,97	10,31
M0,3;A10	4,59	1,73	2,24	7,95	3,03	5,24	1,27	2,43	1,03	9,51
M0,4;A10	4,27	1,79	1,24	7,24	1,89	5,14	2,95	1,34	0,84	11,97
M0,5;A10	9,07	12,70	11,10	4,68	11,60	6,85	12,71	3,44	0,84	11,86
M0,2;A15	14,48	9,73	3,41	9,78	3,15	12,34	6,76	11,17	1,02	9,75
M0,3;A15	8,03	2,81	0,50	9,10	1,16	13,01	3,87	0,37	0,97	10,30
M0,4;A15	6,98	2,40	0,44	8,66	1,00	10,74	1,95	5,07	0,90	11,05
M0,5;A15	16,29	8,97	9,26	11,54	0,95	7,77	13,35	14,01	0,81	12,35
M0,3;A20	7,98	2,41	0,15	8,96	4,03	12,93	6,89	9,32	1,07	9,11
M0,4;A20	1,79	2,25	4,18	1,49	3,28	2,08	0,20	3,79	0,99	10,15
M0,5;A20	14,43	6,22	10,23	8,24	2,21	5,02	5,63	11,48	0,91	10,97
M0,3;A25	6,71	2,76	0,74	6,31	4,10	11,18	2,60	0,81	1,17	8,12
M0,4;A25	2,19	0,30	1,28	0,14	0,22	0,49	0,48	0,72	1,05	9,03
M0,5;A25	0,11	0,05	0,05	0,08	0,03	0,08	0,04	0,08	0,93	10,80

Tableau IV4-3 : Ecart relatifs des coefficients et plages de fonctionnement robustes

Néanmoins, il est clair que la majorité des paramètres est largement contenue dans les plages robustes. Une solution est de réduire les incertitudes sur les paramètres dont les écarts relatifs entre les deux modèles sont faibles, afin de réduire la VSSM et donc de maximiser les plages de fonctionnement des autres paramètres.

Considérons par exemple le point  $\{M0,2, A5\}$ . Les incertitudes obtenues lors des études au moyen de la mu-analyse ont été posées pour tous les  $A_{ij}$  et les  $B_{ij}$  comme dans (IV4.15). Les domaines robustes sont alors tous de la même taille (en relatif par rapport aux plages de fonctionnement).

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij_0} + 0,10 \times (A_{ij_{sup}} - A_{ij_{inf}}) \delta_{A_{ij}} \\ B_{ij} &= B_{ij_0} + 0,10 \times (B_{ij_{sup}} - B_{ij_{inf}}) \delta_{B_{ij}} \end{aligned} \quad (IV4.15)$$

La Figure IV4.21 représente graphiquement les paramètres nominaux à partir desquels est réalisée la mu-analyse  $\{M0,2, A5, \{16800, 842\}\}$  (trait bleu), les domaines garantis par la mu-analyse (zone cyan), et les paramètres nominaux du modèle voisin  $\{M0,2, A5, \{17400, 842\}\}$ . Les zones garanties par la mu-analyse ne permettent pas de couvrir totalement les paramètres du modèle voisin, notamment pour le paramètre  $A_{11}$  et  $B_{22}$ . En revanche, certaines zones englobent largement les paramètres du point voisin, comme par exemple pour  $B_{11}$  ou  $B_{12}$ .

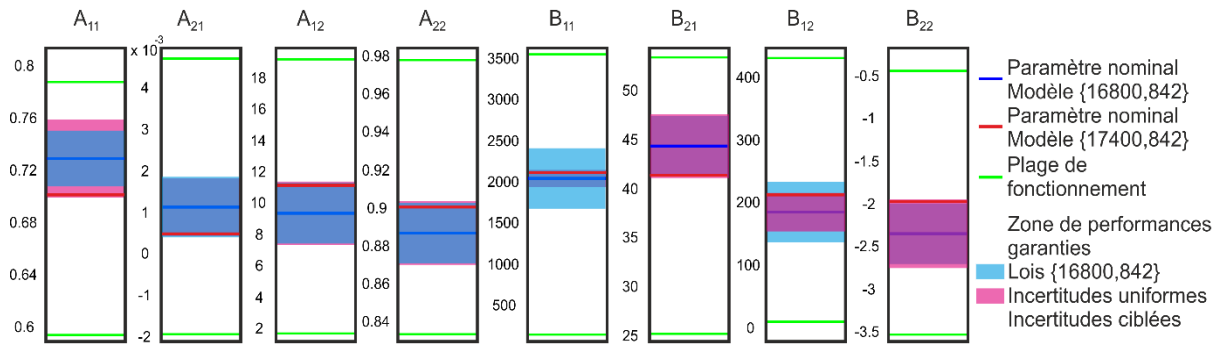


Figure IV4.21 : Domaines où le suivi de consigne est garanti

On considère à présent les incertitudes décrites par (IV4.16) (le choix de ces incertitudes résulte de différents calculs essais/erreurs et de l'analyse de sensibilité des VSSM en fonction des différents paramètres). De cette manière, la VSSM obtenue est alors de 0,76. Les plages de fonctionnement garanties en pourcentage sont reportées sur la Figure IV4.21 et dans le Tableau IV4-4. Celles-ci sont différentes pour chacun des paramètres et permettent d'englober le modèle voisin.

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{11_0} + 0,11 \times (A_{11_{sup}} - A_{11_{inf}}) \delta_{A_{11}}; B_{11} = B_{11_0} + 0,02 \times (B_{11_{sup}} - B_{11_{inf}}) \delta_{B_{11}} \\ A_{12} &= A_{12_0} + 0,09 \times (A_{12_{sup}} - A_{12_{inf}}) \delta_{A_{12}}; B_{12} = B_{12_0} + 0,045 \times (B_{12_{sup}} - B_{12_{inf}}) \delta_{B_{12}} \\ A_{21} &= A_{21_0} + 0,085 \times (A_{21_{sup}} - A_{21_{inf}}) \delta_{A_{21}}; B_{21} = B_{21_0} + 0,095 \times (B_{21_{sup}} - B_{21_{inf}}) \delta_{B_{21}} \\ A_{22} &= A_{22_0} + 0,09 \times (A_{22_{sup}} - A_{22_{inf}}) \delta_{A_{22}}; B_{22} = B_{22_0} + 0,095 \times (B_{22_{sup}} - B_{22_{inf}}) \delta_{B_{22}} \end{aligned} \quad (IV4.16)$$

	$A_{11}$ [%]	$A_{21}$ [%]	$A_{12}$ [%]	$A_{22}$ [%]	$B_{11}$ [%]	$B_{21}$ [%]	$B_{12}$ [%]	$B_{22}$ [%]
Écart relatifs entre les modèles {M_0,2, A_5, {16800,842}} et {M_0,2, A_5, {17400,842}}.	14,35	9,78	10,41	9,37	2,30	11,17	5,52	11,43
Zones robustes uniformes pour le suivi de consigne des lois {M_0,2, A_5, {16800,842}}	11,24	11,24	11,24	11,24	11,24	11,24	11,24	11,24
Zones robustes ciblées pour le suivi de consigne des lois {M_0,2, A_5, {16800,842}}	14,67	11,11	11,84	11,84	2,63	12,50	5,92	12,50

Tableau IV4-4 : Ecart relatifs des coefficients et nouvelles plages de fonctionnement robustes

En procédant de la sorte pour les autres couples {Mach, Altitude} du Tableau IV4-3, on peut conclure que les lois de commande synthétisées sur les modèles {16800, 842} peuvent assurer le suivi de consigne sur les modèles {17400, 842}, ce qui englobe la robustesse des marges de stabilité de 0,4.

On peut considérer que le suivi de consigne et les marges de stabilité peuvent être attribués aux correcteurs PI, que le découplage est attribué au découpleur, et que le rejet de perturbations est uniquement attribué à l'action par anticipation. De cette manière, il est possible de supprimer l'élément {17400, 842} du vecteur  $\{N_3, XNP\}$  pour la synthèse des régulateurs PI. Une étude similaire sur les autres éléments du vecteur  $\{N_3, XNP\}$  montre que les écarts relatifs entre les modèles sont plus importants, et qu'il n'est pas possible de faire d'autres simplifications.

En revanche, une étude sur le Mach conduit à la suppression de l'élément Mach 0,1 pour la synthèse des régulateurs PI. De la même manière, il est possible de supprimer l'élément Altitude 25 kft pour la synthèse des régulateurs PI.

Finalement, les tables d'interpolation des correcteurs PI peuvent se ramener à 64 éléments pour chacune des variables interpolées. Les tables d'interpolation des découpleurs et du rejet statique restent en revanche inchangées. Par ailleurs, les lois de commande les moins robustes ont été réajustées, même si les performances nominales ont été dégradées.



## IV5. Intégration dans le FADEC

Les lois de commande doivent être testées dans le MMR (Modèle Moteur Régulé) afin de prendre en compte des conditions plus réalistes de l'environnement du turbopropulseur. Les lois de commande sont ainsi implantées dans le FADEC (présenté dans la partie IV1b).

### IV5a. Implantation des lois

#### i. Saturations et limiteurs

La régulation est chargée d'assurer le fonctionnement du turbopropulseur dans des limites déterminées, propres au turbopropulseur et à l'aéronef :

- Pour chaque ensemble tournant, il existe des limites de **vitesse** maximale (permettant de limiter les efforts centrifuges sur les disques et aubages) et minimale (pour éviter des phénomènes de résonance mécanique à certaines fréquences).
- Des limitations de **température** évitent la surchauffe de pièces qui peut se traduire par le fluage des pales de turbine et la déformation des pièces.
- Des limitations sur le **débit carburant** permettent d'éviter certains phénomènes comme le pompage des compresseurs ou des extinctions de la chambre de combustion.
- Des limitations sur le **couple** s'imposent également en raison des pressions sur les dentures d'engrenage de la PGB et des efforts de torsion sur les carters.

Les variables physiques du turbopropulseur doivent être étroitement contrôlées pour être proches de leurs limites, mais sans jamais les dépasser. La prise en compte de la majorité de ces contraintes se traduit en limiteurs portant sur la commande de débit carburant  $WF$  et sa dérivée  $WF_{dot}$ . Ces limiteurs varient en fonction des conditions de vol, de l'état du turbopropulseur et de la qualité des mesures. Dans le cas où les commandes ne respectent pas ces limitations, des logiques permettent de passer sur d'autres lois *de recueil* (de secours), permettant de poursuivre la mission en respectant les limites, au prix d'une dégradation des performances. Les limiteurs et leurs indicateurs sont présentés dans le Tableau IV5-1.

ID	Limiteur	Description
1	WF_MIN	Limiter la consigne de débit carburant
2	WF_DOT_MIN	Éviter l'extinction de la chambre
3	T30_MIN	Garantir une température minimale en entrée de la chambre de combustion
4	P30_MIN	Garantir une pression minimale
5	NI_MIN	Protéger le moteur contre les fréquences critiques
6	NH_MIN	Garantir une vitesse minimale du moteur de la pompe
8	NH_DOT_DCL	Garantir les marges de stabilité du compresseur pendant les décélérations
10	Régime nominal	Assurer les performances en régime nominal
12	NH_DOT_ACL	Garantir les marges de stabilité du compresseur pendant les accélérations
14	NH_T30_MAX	Limiter l'autorité de T30_MIN
15	NH_MAX	Éviter que le rotor HP tourne plus vite que la vitesse autorisée
16	NI_MAX	Éviter que le rotor IP tourne plus vite que la vitesse autorisée
18	TRQ_MAX	Éviter les sur-couples
19	WF_DOT_MAX	Éviter le pompage
20	WF_MAX	Limiter la consigne de débit carburant

Tableau IV5-1 : Description des limiteurs



Le schéma de la Figure IV5.1 présente la logique de sélection de la dérivée de la commande ( $WF_{dot}$ ). On parle de logique min-max parce que la logique de sélection met en concurrence le minimum des saturations hautes et le maximum des saturations basses afin de borner le mode nominal (Richter, 2012). Des logiques similaires sont également présentes pour déterminer les consignes en amont  $SHP_{ref}$  et  $XNP_{ref}$ .

Le signal sélectionné est ensuite intégré (du fait de la forme incrémentale des lois de commande), avant d'être transmis en tant que consigne à la boucle locale FMU. Afin d'évaluer les performances des lois de commande synthétisées, l'indicateur doit être sur ID 10. Dans le cas inverse, la consigne de la boucle locale de l'actionneur FMU proviendra des autres boucles.

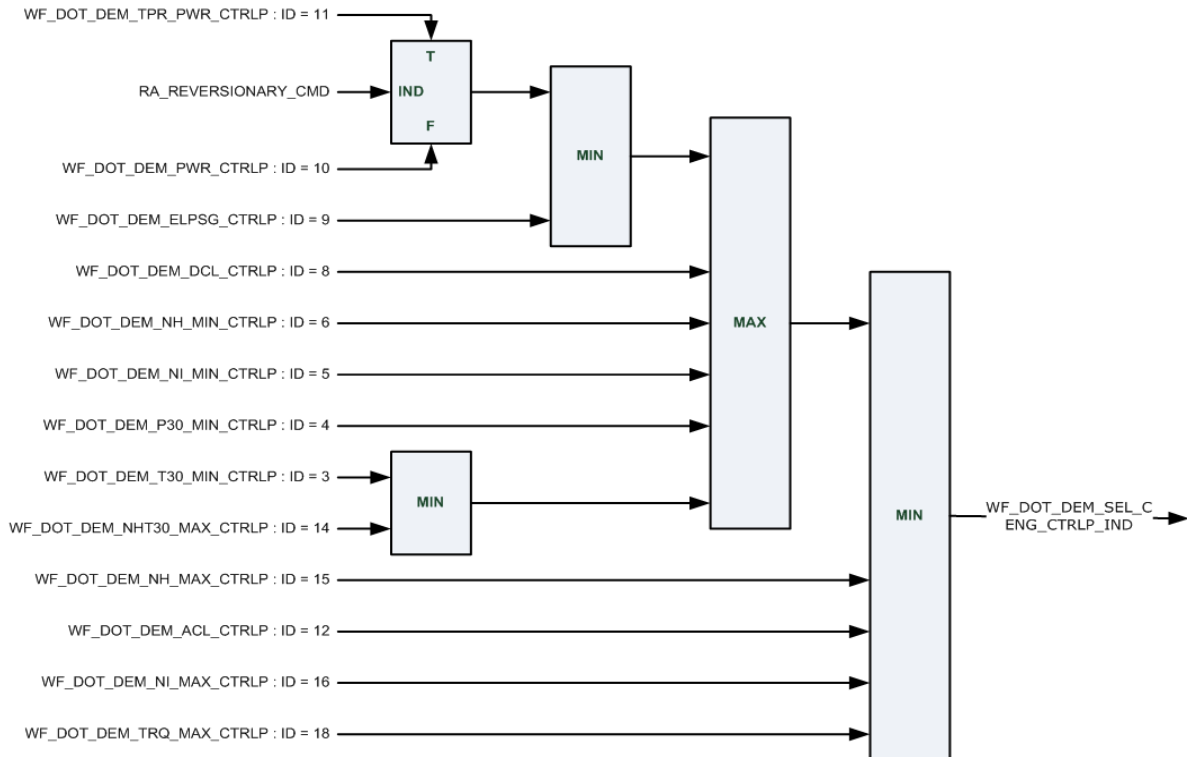


Figure IV5.1 : Logique de sélection de la dérivée du débit carburant

Des limiteurs sont également présents au niveau de l'angle de calage  $\beta$  et de sa dérivée. Ces derniers représentent uniquement les contraintes liées au système d'actionnement du pas des pâles.

## ii. Actionneurs et capteurs

Lors des simulations associées à la partie IV3e, les actionneurs ont été modélisés par des fonctions de transfert du premier ordre. Ces derniers sont à présent modélisés par les modèles physiques des actionneurs et leur régulation. Il en va de même pour les capteurs, qui étaient supposés parfait précédemment.

## iii. Autres

Par ailleurs, lors des simulations précédentes, les entrées du turbopropulseur (en dehors des commandes en débit carburant  $WF$  et en angle de calage  $\beta$ ) n'étaient pas rebouclées. Ces dernières provenaient de scénarios correspondant aux manœuvres choisies. Ces entrées, comprenant entre autres les commandes des vannes VSV et HBV, sont à présent rebouclées.

## IV5b. Résultats

### i. Lois FADEC

La puissance de l'hélice *SHP* et sa vitesse *XNP* sont tracées sur la Figure IV5.2 et la Figure IV5.3 (*Lois de commande implémentées*). Les résultats obtenus précédemment sans les contraintes du FADEC (*Lois de commande brutes*) ont également été tracés, afin de voir l'impact de ces nouvelles contraintes. Les résultats restent globalement proches, en dehors des transitoires de grandes amplitudes.

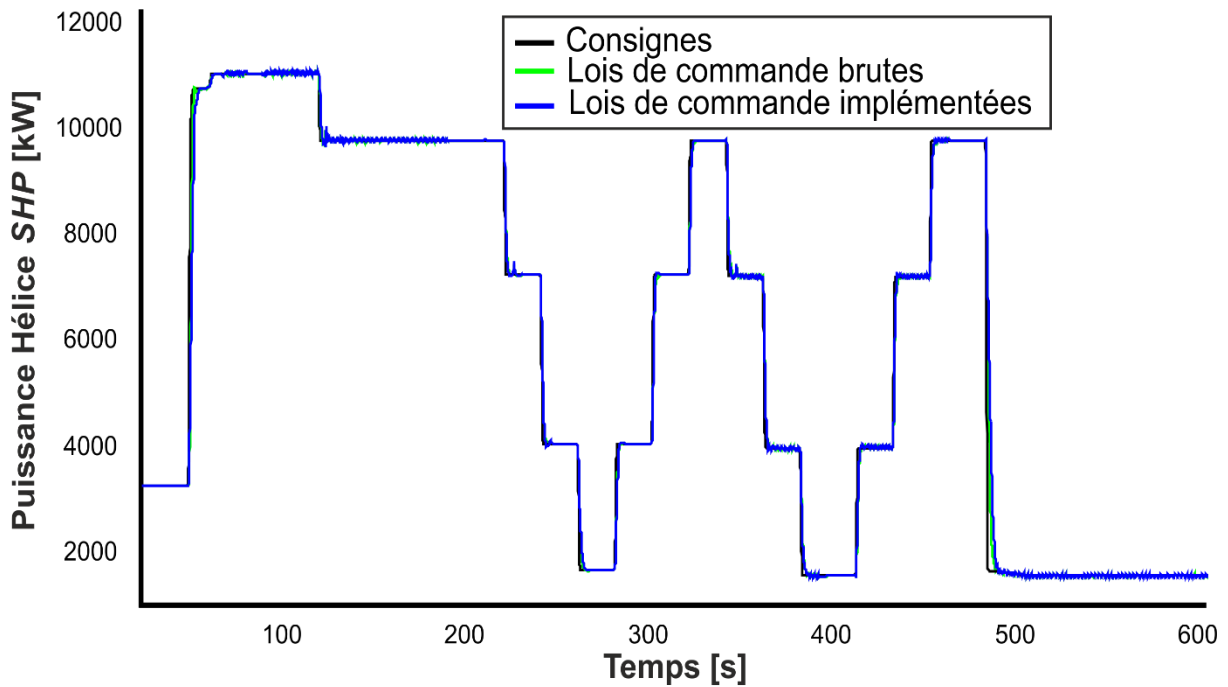


Figure IV5.2 : Comparaison de la puissance *SHP* lors des simulations avec et sans FADEC

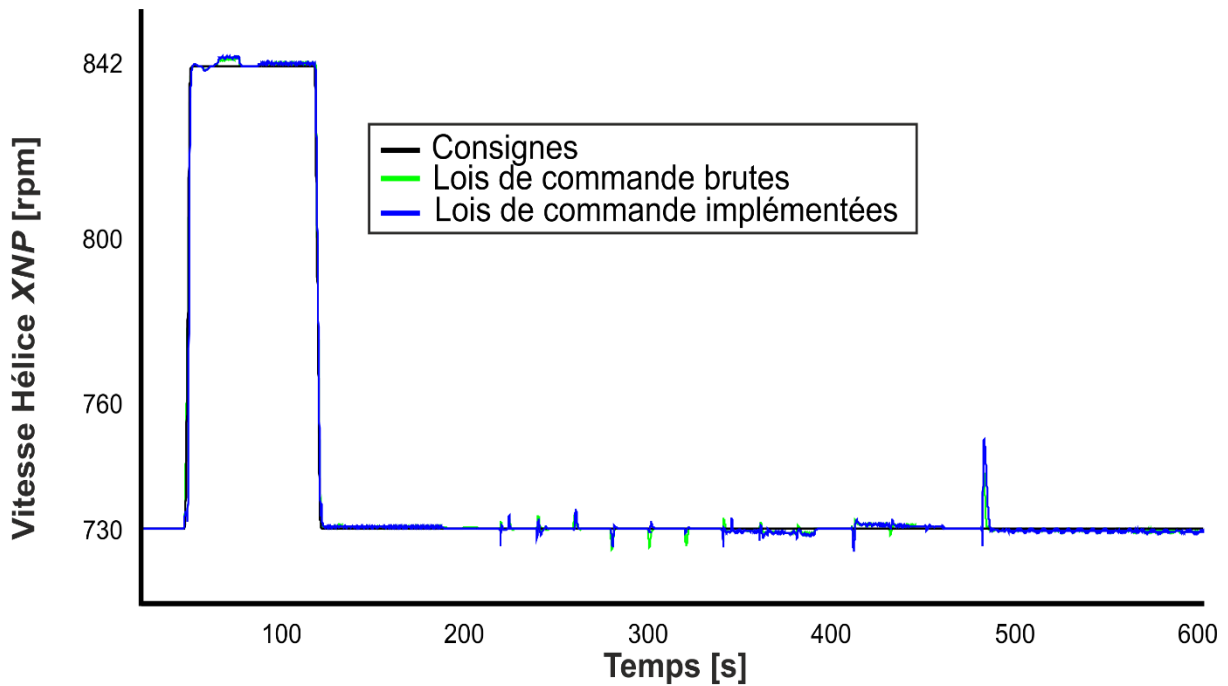


Figure IV5.3 : Comparaison de la vitesse *XNP* lors des simulations avec et sans FADEC

La Figure IV5.4 et la Figure IV5.5 montrent plus précisément :

- le premier échelon manette, qui s'accompagne du changement du régime de la vitesse de l'hélice,
- un transitoire quelconque,
- et le dernier échelon manette, à vitesse de l'hélice constante.

Il est clair que les temps de réponse durant les deux grands échelons manette sont bien plus lents avec les contraintes du FADEC. Les commandes sont en effet limitées, ce qui tend à augmenter les temps de réponse, notamment sur la puissance. La directionnalité du système est également affectée par les limiteurs : le pic de perturbations sur la vitesse de l'hélice *XNP* est par exemple multiplié par deux lors de la diminution de la puissance de l'hélice *SHP*. Les valeurs des temps de réponse durant ces transitoires spécifiques (grandes accélérations et décélérations) sont acceptables et sont la conséquence des filtrages (de premier ou second ordre) des consignes et des limiteurs.

Les autres transitoires sont également affectées par les contraintes du FADEC, mais dans une moindre mesure.

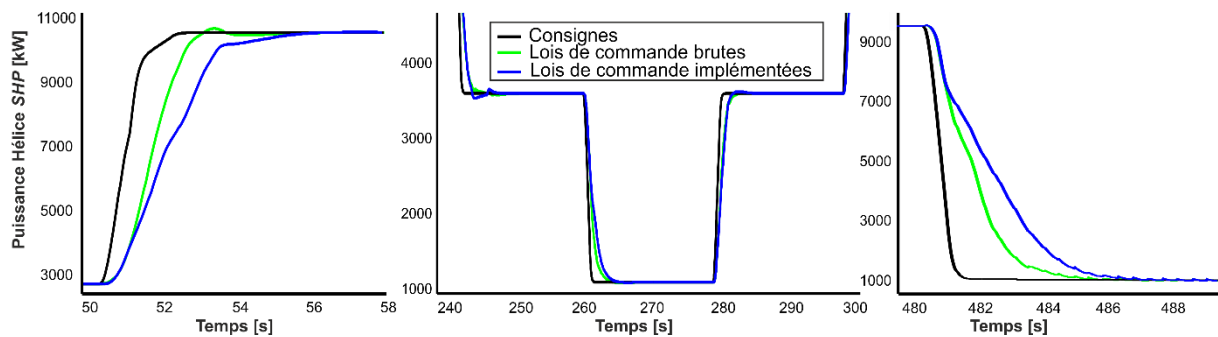


Figure IV5.4 : Comparaison des régimes transitoires sur la puissance SHP

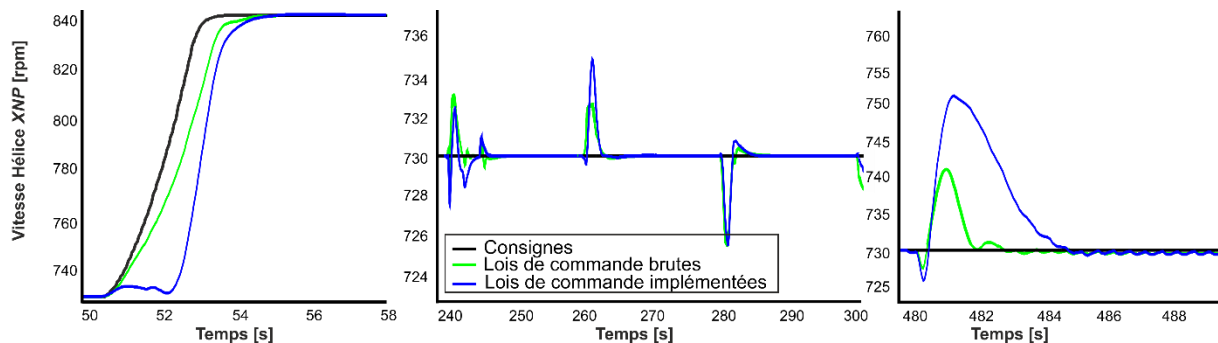


Figure IV5.5 : Comparaison des régimes transitoires sur la vitesse XNP

La Figure IV5.6 indique la boucle sélectionnée en fonction du temps. D'après le Tableau IV5-1 comportant les indicateurs des boucles, la boucle nominale synthétisée (ID 10) est la boucle sélectionnée pendant la majeure partie de la simulation. Néanmoins, lors de la plupart des transitoires, les boucles ID 8, 12 et 19 sont sélectionnées. Le passage sur ces boucles dégradées a lieu uniquement au début des transitoires.

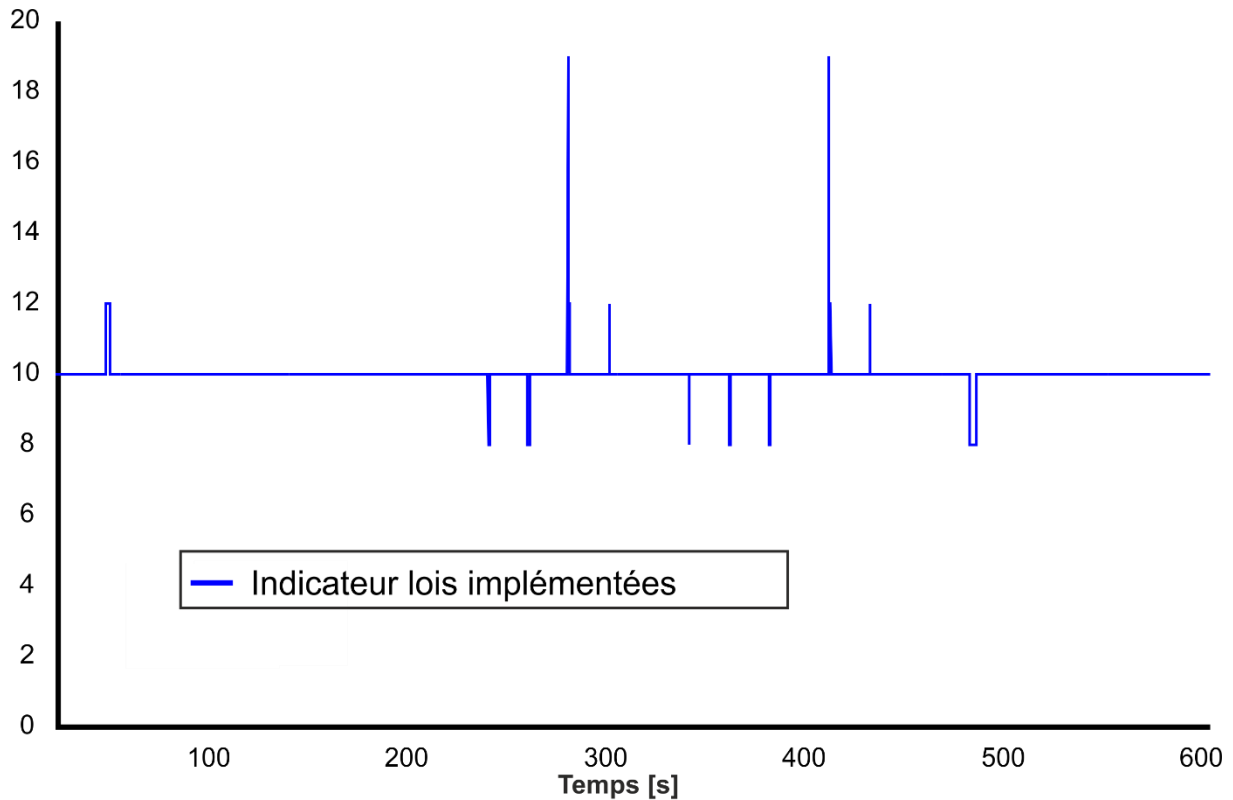


Figure IV5.6 : Indicateur de la boucle sélectionnée

## ii. Lois modifiées FADEC

Afin de ne pas subir les limiteurs, la stratégie proposée consiste à ajouter un facteur multiplicatif  $\alpha$  sur les erreurs en  $SHP$  et en  $XNP$ , ce qui permet de les réduire artificiellement durant certaines phases critiques. Les échelons importants sont détectés en analysant la variation de l'angle de la manette  $\Delta_{TRA}$ . Le facteur  $\alpha$  est ensuite calculé dans (IV5.1).

$$\alpha = \min(\alpha_0(\Delta_{TRA}) + \alpha_1(\Delta_{TRA}) \times t_{TRA}, 1) \quad (IV5.1)$$

Lors de la détection d'un échelon de TRA,  $\alpha$  prend une valeur  $\alpha_0$ , puis augmente avec une pente  $\alpha_1$  avant de reprendre une valeur de 1. Les coefficients  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  ont été déterminés de manière à ce que  $\alpha$  redevienne égal à 1 entre 0,5 et 2 s. La variable  $t_{TRA}$  représente le nombre de pas de temps à partir de l'instant où l'échelon de TRA est détecté (cette variable est réinitialisée à chaque échelon important). Lors d'un transitoire important, l'erreur est ainsi artificiellement abaissée et reprend progressivement sa valeur réelle. Les variations de commandes en début de transitoire sont ainsi abaissées à des valeurs acceptables, ce qui permet d'éviter certains des limiteurs et de préserver le découplage (d'autres stratégies de filtrage des consignes ou des commandes peuvent également être mises en place afin d'assurer ces objectifs).

Cette solution a été implantée dans le FADEC. Les résultats temporels sont présentés sur les figures suivantes (*Lois de commande intégrées*). La puissance  $SHP$  semble peu affectée par la mise en place de cette stratégie tandis que la vitesse hélice  $XNP$  est moins perturbée durant les transitoires. Les commandes  $WF$  et  $\beta$  sont légèrement plus douces durant les transitoires.

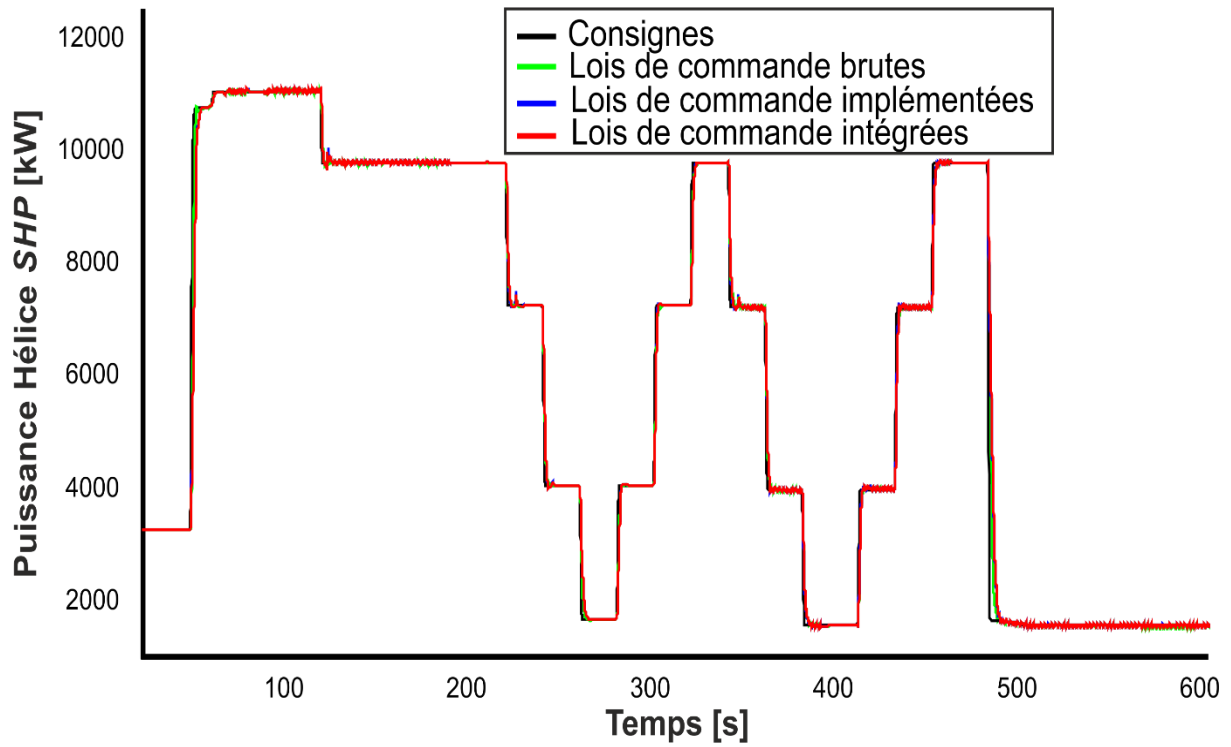


Figure IV5.7 : Puissance SHP après la mise en place de la stratégie de limitation

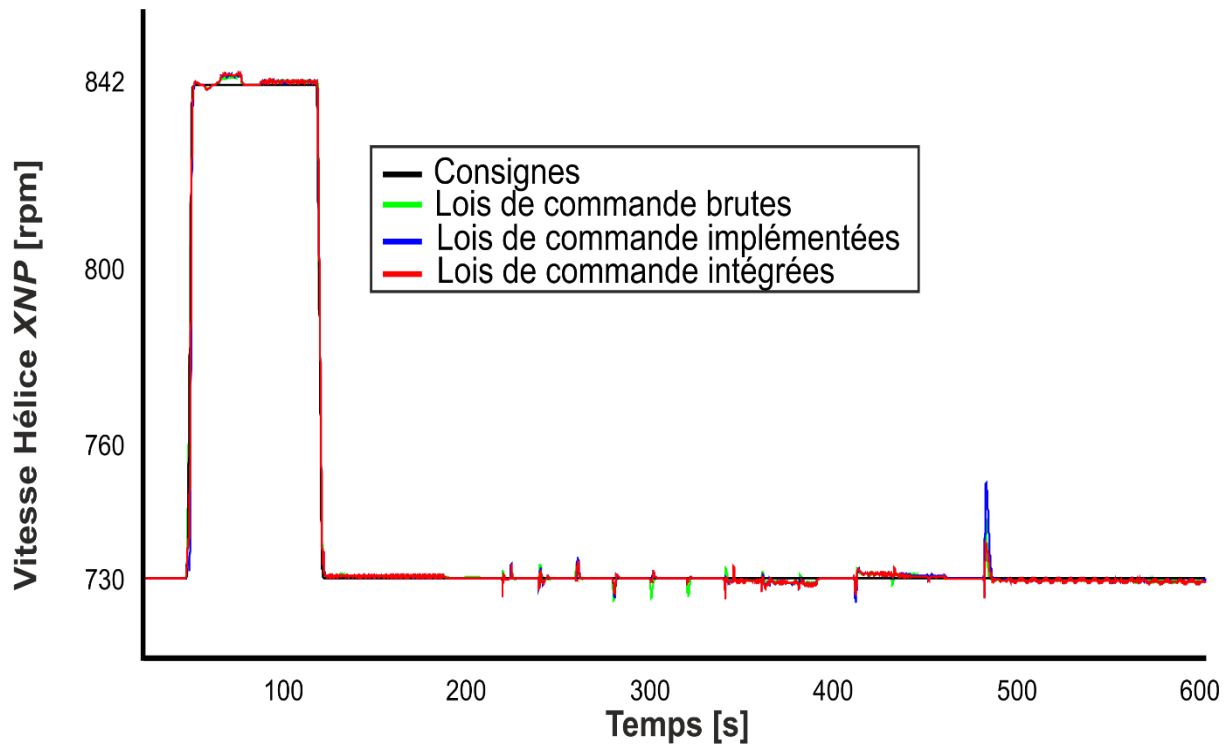


Figure IV5.8 : Vitesse XNP après la mise en place de la stratégie de limitation

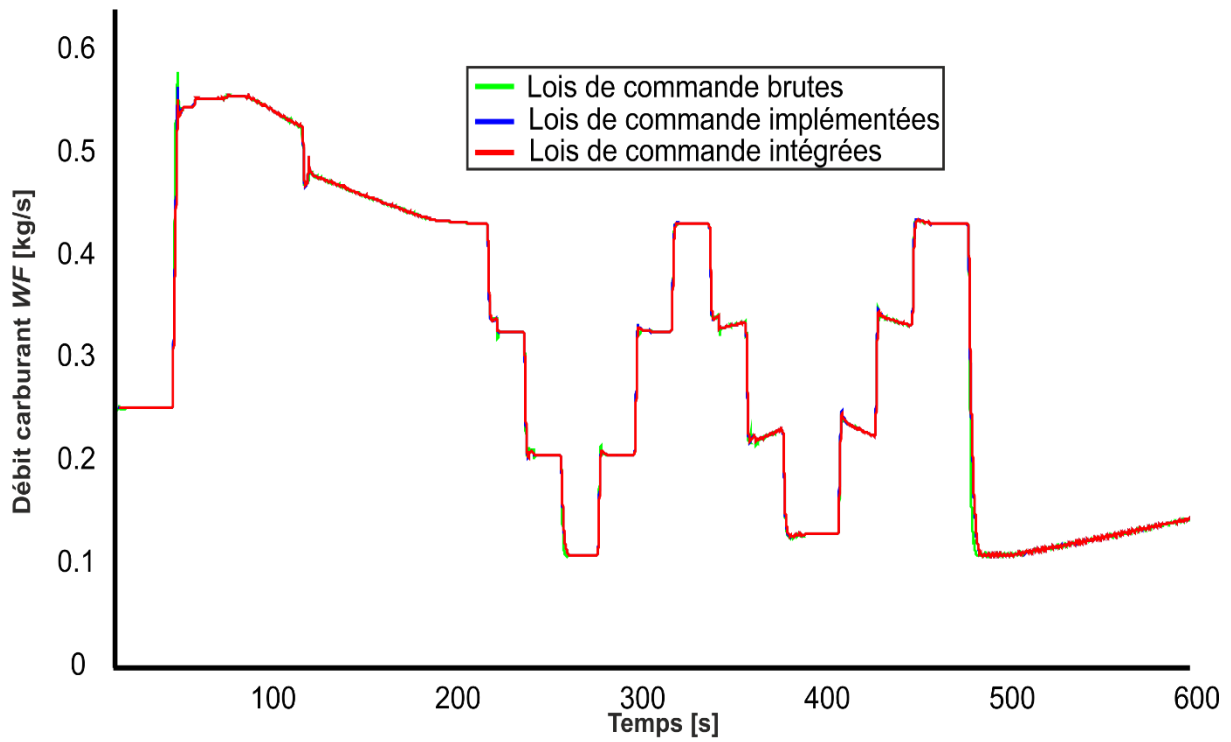


Figure IV5.9 : Débit carburant WF après la mise en place de la stratégie de limitation

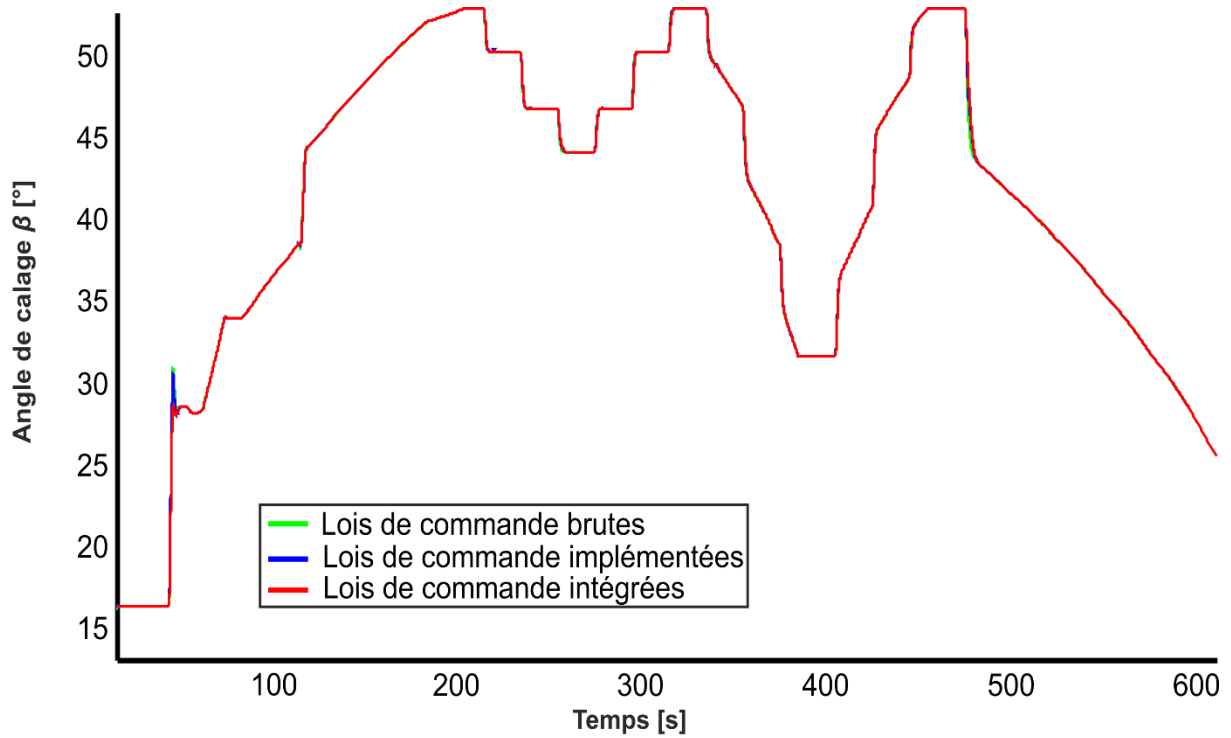


Figure IV5.10 : Angle de calage  $\beta$  après la mise en place de la stratégie de limitation

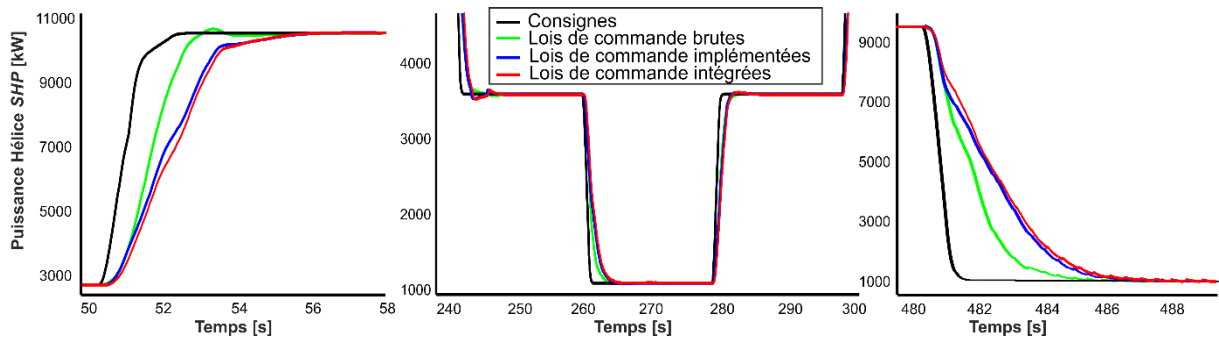


Figure IV5.11 : Transitoires sur la puissance SHP après mise en place de la stratégie de limitation

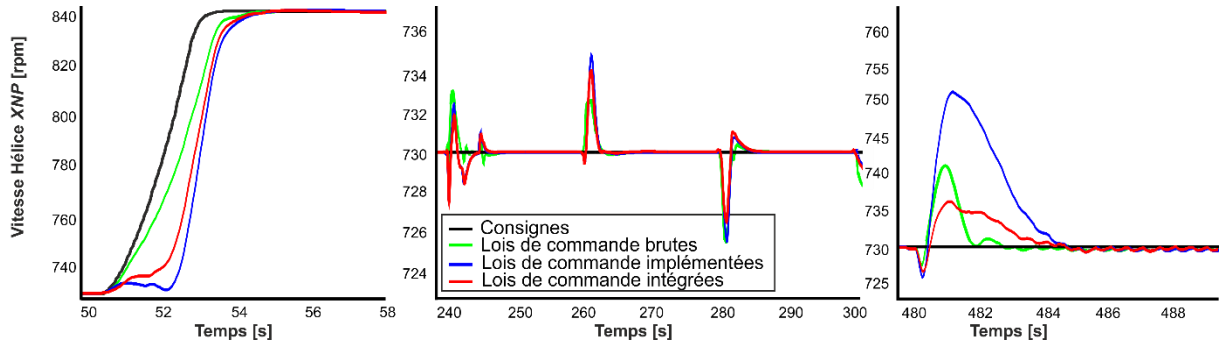


Figure IV5.12 : Transitoires sur la vitesse XNP après mise en place de la stratégie de limitation

L'indicateur de la boucle sélectionnée est présenté sur la Figure IV5.13, et comparée à l'indicateur précédent, sans la stratégie de limitation. Il apparaît que la stratégie de limitation mise en place permet à la stratégie nominale de réaliser trois transitoires supplémentaires. Par ailleurs, les périodes durant lesquelles les boucles dégradées sont actives sont bien plus courtes, notamment pour les transitoires d'amplitudes importantes.

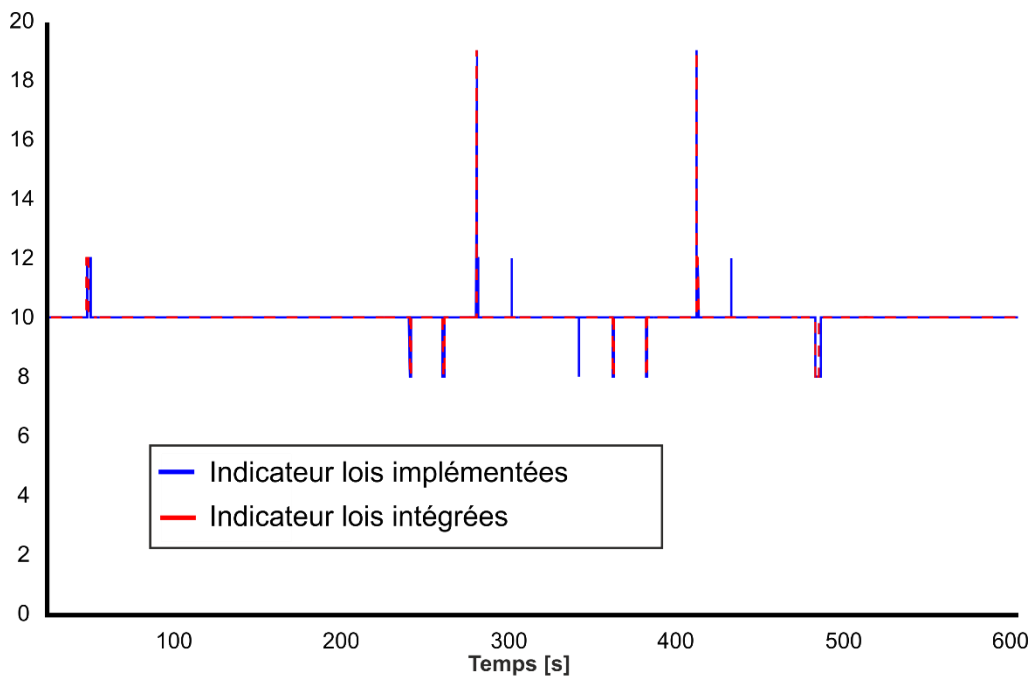


Figure IV5.13 : Indicateur de la boucle sélectionnée

Cette stratégie se révèle donc être intéressante puisqu'elle permet de conserver la directionnalité du système et permet ainsi d'obtenir un découplage acceptable.

## IV6. Conclusions de l'étude sur le turbopropulseur

L'objectif de ce chapitre a été de réaliser des lois de commande décentralisées pour un turbopropulseur.

Des points de fonctionnement caractéristiques du régime nominal ont tout d'abord été déterminés. Des modèles TITO d'ordre 2 à temps discret ont ensuite été identifiés autour de ces points de fonctionnement, en utilisant une méthode des moindres carrés. Une analyse des modèles identifiés a permis d'affiner le choix des points de fonctionnement.

Suite à une analyse des interactions, il a été décidé de s'orienter vers une commande décentralisée incluant une stratégie de découplage. La procédure de découplage a ensuite été appliquée et le découpleur inversé a finalement été retenu. Celui-ci permet d'assurer un découplage total sur les modèles nominaux et de faciliter le réglage des correcteurs SISO. Des correcteurs PI ont été déterminés indépendamment par une méthode analytique puis ajustés par optimisation. Une action par anticipation a complété la stratégie en place afin de rejeter efficacement les perturbations causées par les fermetures des vannes HBV.

Afin d'optimiser les performances sur l'ensemble du domaine de vol, les lois de commande ont été interpolées par une technique de séquençement de gain, en utilisant une réalisation numérique de la commande fondée sur un algorithme incrémental.

Des analyses structurées de la robustesse ont permis de montrer que les lois de commande étaient largement robustes vis-à-vis de la stabilité, des marges de stabilité et même du suivi de consigne en présence d'incertitudes sur les paramètres et de dynamiques négligées. En revanche, la robustesse du découplage et du rejet de perturbations restent perfectibles.

Les lois de commande ont finalement été implantées dans le FADEC, prenant en compte les limiteurs. Afin de s'adapter à ces contraintes, une stratégie d'adaptation de gain a été prise en compte au niveau des erreurs. Les résultats se sont alors montrés satisfaisants en termes de temps de réponse, de découplage, de rejet de perturbations et de robustesse.



## Conclusions et perspectives

Les travaux entrepris au cours de cette thèse ont permis de concevoir des stratégies de commande de systèmes multivariables (outils d'analyse et méthodes de synthèse), dont la finalité a été le développement des lois de commande d'un turbopropulseur. Dans le cadre de cette application, les études menées ont conduit à retenir une stratégie décentralisée avec découplage.

Une part importante de ces travaux de recherche a concerné le développement méthodologique de cette stratégie. Ainsi, les travaux concernés par les trois premiers chapitres de ce mémoire ont porté sur les axes principaux de la commande décentralisée avec découplage. D'un point de vue pratique, les méthodes utilisées ont été illustrées et comparées au moyen d'un modèle multi-cuves.

Le Chapitre I a tout d'abord permis d'introduire les notions d'interactions. Ces dernières peuvent être vues comme l'influence d'une référence/commande sur plusieurs sorties, ou bien l'influence de plusieurs références/commandes sur une même sortie. L'étude de ces interactions a permis de mettre en évidence que leur présence nuit généralement aux performances de la régulation. En particulier dans le cas d'une commande décentralisée, les interactions entre les différentes boucles dépendent de la façon dont sont reliées les commandes et les sorties. Ainsi, la détermination du niveau d'interaction dans un système se révèle importante, tant pour l'analyse du procédé que pour la synthèse des lois de commande. La quantification du niveau d'interaction peut être réalisée à l'aide de différentes méthodes et indicateurs qui s'appuient sur les réponses fréquentielles ou indicielles du système, ou encore sur les grammiens de commandabilité et d'observabilité. Devant le nombre important d'indicateurs d'interaction, il n'est cependant pas toujours aisé de déterminer les plus adaptés à un modèle ou à un contexte précis. Une procédure systématique d'analyse des interactions, composée d'indicateurs complémentaires, a été proposée. Cette procédure a pour but principal de déterminer la stratégie de commande la plus adaptée, en fonction des interactions et des performances désirées. Dans le cas où la commande décentralisée est adoptée, la procédure proposée permet également de choisir une configuration commandes-sorties ainsi qu'une stratégie de réglage des correcteurs monovariables associés.

Dans le Chapitre II, l'accent a été mis sur les méthodes de synthèse monoboucle et multiboucle de correcteurs monovariables, dans le cadre d'une stratégie décentralisée. Les méthodes monoboucles consistent à synthétiser des correcteurs à partir des transferts monovariables du procédé, i.e. sans prendre explicitement en compte les termes d'interactions du procédé. En présence d'interactions importantes, il a été montré que ces méthodes sont déconseillées, car elles ne permettent pas de garantir les performances, voire la stabilité du système multivariable bouclé. Les méthodes multiboucles permettent quant à elles de prendre en compte les interactions lors de la synthèse des correcteurs monovariables. Certaines de ces méthodes consistent à régler d'une façon itérative les correcteurs monovariables, en prenant en compte à chaque itération les boucles déjà réglées. D'autres approches abordent le problème de synthèse en déterminant des correcteurs monovariables à partir de boucles équivalentes prenant en compte les interactions. Une méthode proposée dans cette thèse consiste à synthétiser les correcteurs indépendamment les uns des autres, tout en garantissant la stabilité et les marges de stabilité du système multivariable, à l'aide des bandes de Gershgorin et d'Ostrowski. Les méthodes multiboucles sont d'une complexité méthodologique plus importante que les méthodes monoboucles, mais il a été démontré qu'elles permettent d'obtenir de bien meilleures performances en présence d'interactions importantes. A la suite de l'analyse de ces méthodes, une étude récapitulative présentant les méthodes préconisées en fonction du procédé et des objectifs, a finalement été proposée.

L'approche de synthèse d'une régulation décentralisée par les méthodes multiboucles prend en compte les interactions, mais ne permet pas toutefois de les éliminer. Lorsque le niveau d'interaction est trop important, il est possible d'associer des compensateurs à la régulation décentralisée, ce qui fait l'objet du Chapitre III. Les compensateurs ont pour but de découpler les commandes vis-à-vis des sorties du procédé, ce qui revient à diagonaliser sa matrice de transfert. Il est possible de distinguer des pré-

compensateurs (en amont du procédé) et des post-compensateurs (en aval du procédé). Une autre distinction possible est de considérer une approche statique, où les compensateurs sont des matrices de gains, et une approche dynamique où les compensateurs sont des matrices de transfert. Certaines méthodes permettant de synthétiser ces compensateurs s'appuient sur des outils mathématiques, comme les décompositions en valeurs propres ou en valeurs singulières, tandis que d'autres s'appuient sur une démarche d'optimisation d'un critère lié aux interactions. Différentes méthodes et structures de découplage ont été étudiées et comparées, en introduisant un nouvel indicateur de découplage simple à calculer et à analyser, et représentatif des interactions. Une procédure de découplage, composée des méthodes considérées comme les plus efficaces a finalement été mise en place.

Les études méthodologiques sur l'analyse et la commande des systèmes multivariables ont été appliquées au turbopropulseur dans le Chapitre IV. Le turbopropulseur est un système multivariable composé de deux grandeurs de commande (le débit carburant et l'angle de calage des pales) et deux grandeurs de sortie à asservir (la puissance développée par l'hélice et sa vitesse de rotation). Le but de la régulation est d'assurer la puissance souhaitée, tout en conservant une vitesse de rotation de l'hélice constante. Le changement du palier de vitesse hélice doit également avoir un impact aussi faible que possible sur la puissance développée par l'hélice.

Différents points de fonctionnement caractéristiques du régime nominal ont été préalablement définis, et des modèles ont été identifiés autour de ces points. Cette démarche a été adoptée en raison de la complexité du modèle, disponible sous la forme d'un modèle de simulation recalé et validé.

La procédure d'analyse des interactions a été appliquée sur les différents modèles identifiés, et a montré qu'une architecture de commande décentralisée *pure* ne permet pas de respecter les spécifications en termes de découplage. Une stratégie décentralisée avec découplage a alors été adoptée. L'étude des différentes solutions permettant de découpler le turbopropulseur a conduit à choisir un découpleur inversé, afin de respecter les spécifications relativement strictes en termes de couplages. Chaque boucle de commande décentralisée a été complétée par des correcteurs de type PI synthétisés par une méthode monoboucle. Les paramètres de ces derniers ont été déterminés par une méthode analytique dans une étape d'initialisation, puis ajustés par optimisation. Enfin, une action par anticipation statique a été ajoutée dans le but de rejeter les perturbations dues aux ouvertures et fermetures des vannes de décharge.

Afin d'optimiser les performances sur l'ensemble du domaine de vol, les lois de commande ont été interpolées par une technique de séquençement de gain. Des analyses structurées de robustesse ont par ailleurs permis de montrer que les lois de commande étaient robustes vis-à-vis de la stabilité, des marges de stabilité et du suivi de consigne en présence d'incertitudes. Ces dernières ont finalement été implantées dans le modèle du système de régulation et ont permis d'atteindre les performances attendues et de valider l'approche utilisée.

Dans la continuité de ces travaux sur le turbopropulseur, plusieurs axes de recherche sont envisageables :

- Il est possible d'optimiser le nombre de points de fonctionnement au regard des performances attendues en exploitant les résultats obtenus en mu-analyses et en simulation au moyen du modèle non linéaire.
- Une étude plus précise des limiteurs présents dans le système de régulation du turbopropulseur pourrait permettre de les prendre en compte dès la phase de conception des lois de commande.
- Les mu-analyses ont été effectuées sur chacun des points de fonctionnement dans ces travaux de thèse. Il serait également intéressant d'étudier la robustesse des lois de commande interpolées. Une approche possible serait de considérer un paramètre incertain réel, permettant de faire évoluer le modèle du turbopropulseur ainsi que la loi de commande, selon le point de fonctionnement.
- L'approche utilisée pour la régulation du turbopropulseur consiste à synthétiser des lois de commande sur différents points de fonctionnement, et à les interpoler via une méthode de

séquencement des gains. Bien que cette approche puisse s'apparenter en pratique à une approche LPV (Linéaire à Paramètres Variants), elle ne permet pas de bénéficier de certaines de ses propriétés d'analyse. Ainsi, il serait ainsi plus rigoureux d'identifier un modèle LPV du turbopropulseur, et de synthétiser directement un correcteur selon une structure LPV.

- Enfin, il serait intéressant de comparer les lois de commande élaborées durant ces travaux de thèse, avec des lois de commande composées de correcteurs issus de l'approche de synthèse par optimisation  $H_\infty$ , ou encore de correcteurs par retour d'état, en termes de performances et de complexité.

D'un point de vue plus général, d'autres perspectives de recherche peuvent faire l'objet d'explorations futures :

- L'exploitation de ces techniques d'analyse des interactions et de synthèse d'une commande décentralisée avec découplage doit être poursuivie avec d'autres applications, afin de confirmer la validité des méthodes utilisées et des procédures mises en place.
- Des stratégies permettant de conserver la directionnalité du système en présence de saturations ou de limiteurs peuvent également faire l'objet d'explorations complémentaires à ces travaux de thèse.
- Sur le plan méthodologique, il est possible de poursuivre ces travaux en s'intéressant à nouveau aux méthodes étudiées, mais en présence d'incertitudes structurées sur les modèles. Certaines méthodes d'analyse des interactions ont récemment incorporé la prise en compte des incertitudes, notamment au travers de *pires cas*. Les indicateurs utilisés dans la procédure d'analyse des interactions pourraient alors être généralisés, de manière à prendre explicitement en compte les incertitudes de modèle. De la même manière, il serait intéressant de prendre en compte les incertitudes dans les méthodes de synthèse multiboucle, ou encore dans les méthodes de synthèse des compensateurs. Cela permettrait de garantir la robustesse des performances dès la phase de conception.

## Bibliographie

- Anthonis J., Ramon H., "Linear Mechanical systems and dyadic transfer function matrices." *Automatica Volume 39*, pp. 1353 – 1363, 2001.
- Arej-Saade A., "Élaboration d'une méthode systématique de synthèse de loi de commande pour un turboréacteur." Rapport de stage - ENSAE, 2004.
- Argelaguet R., "A new tuning of PID controllers based on LQR optimisation." *Preprints of the IFAC Workshop on Digital Control. Past, Present and Future of PID Control*, pp. 303-308, 1996.
- Arkun Y., "Dynamic block relative gain and its connection with the performance and stability of decentralized control structures." *International Journal of Control*, Volume 46, Issue 4, 1987.
- Arranz M.C., *Practical tools for the configuration of control structures*. PhD – Lulea University of Technology, 2012.
- Aström K., Hägglund T., *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning (2nd edition)*. Instrument Society of America, 1995.
- Aström K.J., Hägglund T., "Automatic tuning of simple regulators with specification on phase and amplitude margins." *Automatica*, Volume 20, Issue 5, 645-651, 1984.
- Aström K.J., Johansson K.H., Wang Q.-G., "Design of Decoupled PI Controllers for Two-by-Two Systems." *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, Volume 149, Issue 1, pp. 74-81, 2002.
- Aström K.J., Rundqwist L., "Integrator windup and how to avoid it." *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1693-1698, Pittsburgh, Pennsylvania, 1989.
- Bachelier O., "Cours d'Automatique - Représentations d'état linéaires des systèmes monovariables." Cours – ESIP, 2012.
- Beauvois B., "Etude des systèmes multivariables par approche fréquentielle." Cours – Supélec, 1996.
- Bequette B.W., *Process Control - Modeling, Design, and Simulation*. Prentice Hall, 2002.
- Bhalodia M., Weber T.W., "Feedback control of a two-input, two-output interacting process." *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev*, Volume 18, Issue 4, pp.559-607, 1979.
- Birk W., Medvedev A., "A note on gramian-based interaction measures." *Proceedings of European Control Conference*, 2003.
- Boerlage M., Steinbuch M., Angelis G., "Frequency response based multivariable control design for motion systems." *Proc. of the IEEE Conference on Control Applications*, Toronto, Canada, 2005.
- Branica I., Petrovic I., Peric N., "Toolkit for PID Dominant pole design." *Proceedings of 9th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, pp. 1247-1250, 2002.
- Bristol, E., "On a new measure of interactions for multivariable process." *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Volume. 11, Issue 1, pp. 133–134, 1966.
- Cha S., Chun D., Lee J., "Two-step IMC-PID method for multiloop control system design." *Ind. Eng Chem Res*, Volume 41, Issue 12, pp. 3037–3041, 2002.
- Chang J., Yu C., "Relative disturbance gain array." *AIChEJ*, Volume 38, Issue 4, pp. 521-534, 1992.
- Changlai Y., Ward T.J., "Decoupling Control of a Distillation Column." *AIChE*, Volume 18, Issue 1, pp. 225-227, 1972.

- Chen D., Seborg D.E., "Multiloop PI/PID controller design based on Gershgorin bands." *Control Theory and Applications, IEE Proceedings, Volume 149, Issue 1, pp. 68-73, 2002.*
- Chen Q., Luan X., Liu F., "Analytical Design of Centralized PI Controller for High Dimensional Multivariable Systems." *IFAC, Mumbai, India, 2013.*
- Chien I.L., Huang H.P., Yang J.C., "A simple multiloop tuning method for PID controllers with no proportional kick." *Ind Eng Chem Res, Volume 38, Issue 4, pp. 1456-1468, 1999.*
- Chien I.L., "IMC-PID Controller design - an extension." *IFAC Symposium, Adaptive Control of Chemical Processes, Volume 6, pp. 147-152, 1988.*
- Chiu M.S., Arkun Y., "A methodology for sequential design of robust decentralized control systems." *Automatica, Volume 28, Issue 5, pp. 997-1001, 1992.*
- Cohen G.H., Coon G.A., "Theoretical considerations of retarded control." *Transactions of the ASME, Volume 65, pp. 827-834, 1953.*
- Dahlin E.B., "Designing and Tuning digital controllers." *Instruments and Control Systems, 1968.*
- Duc G., "Commande robuste multivariable." Cours - Supélec, 2003.
- Dupuy E., "Application et Développement de Techniques de Commandes Avancées au contrôle de turbopropulseurs." Rapport de stage – Snecma, 2005.
- Economou C.G., Morari M., "Internal Model control 6. Multiloop Design." *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development, Volume 25, Issue 2, pp. 411-419, 1986 a).*
- Economou C.G., Morari M., Palsson B.O., "Internal model control - Extension to non linear systems." *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. and Dev. Volume 25, Issue 2, pp. 403-411, 1986 b).*
- Falb P.L., Wolovich W.A., "Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems." *IEEE Trans. Aut. Cont., Volume 12, Issue 6, pp. 651-659, 1967.*
- Fatehi A., Shariati A., "Automatic Pairing of MIMO Plants Using Normalized RGA." *Mediterranean Conference on Control & Automation, 2007.*
- Ford M., Daly K., "Dominance improvement by pseudodecoupling." *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Volume 126, Issue 12, pp. 1316-1320, 1979.*
- Gagnon E., Pomerleau A., Desbiens A., "Simplified, ideal and inverted decoupling?" *ISA Transactions, Volume 37, Issue 4, pp. 265-276, 1998.*
- Garcia C.E., Morari M., "Internal model control. A unifying review and some new results." *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., Volume 21, Issue 2, pp. 308-323, 1982.*
- Garcia D., Karimi A., Longchamp R., "PID Controller Design for Multivariable Systems using Gershgorin Bands." *IFAC, 2005.*
- Garrido J., Morilla F., Vázquez F., "Centralized PID Control by Decoupling of a Boiler-Turbine Unit." *Proceedings of the European Control Conference, 2009.*
- Garrido J., Vázquez F., Morilla F., "Centralized multivariable control by simplified decoupling." *Journal of Process Control, Volume 22, Issue 6, pp. 1044-1062, 2012 a).*
- Garrido J., Vázquez F., Morilla F., "Generalized Inverted Decoupling for TITO processes." *IFAC, Milano, Italy, Volume 18, Issue 1, pp. 7535-7540, 2011 a).*

- Garrido J., Vazquez F., Morilla F., "Multivariable PID control by inverted decoupling: Application to the Benchmark PID 2012." *IFAC, Brescia, Italy*, 2012 b).
- Garrido J., Vázquez F., Morilla F., Hägglund T., "Practical advantages of inverted decoupling." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2011 b).
- Gilbert E.G., "The decoupling of multivariable systems by state feedback." *SIAM. J. Control, Volume 7, Issue 1, pp. 50-63*, 1969.
- Godoy E., *Régulation Industrielle*. Dunod, 2007.
- Grosdidier P., Morari M., "Interaction measure for systems under decentralized control." *Automatica, Volume 22, Issue 3, pp. 309-319*, 1986.
- Grosdidier P., Morari M., Holt B.R., "Closed-loop properties from steady-state gain information." *Ind. Eng. Chem. Fundam, Volume 24, Issue 2, pp. 221-235*, 1985.
- Hägglblom K.E., "Limitations and use of the RGA as a controllability measure." *Proceeding of the Automations, Helsinki, pp. 178-183*, 1995.
- Hägglblom K.E., "Partial Relative Gain - A New Tool for Control Structure Selection." *AICHE Annual Meeting, Los Angeles, USA*, 1997.
- Halevi Y., Palmor Z.J., Efrati T., "Automatic tuning of decentralized PID controllers for MIMO processes." *Journal of Process Control, Volume 7, Issue 2, pp. 119-128*, 1997.
- Halvarsson B., *Interaction Analysis in Multivariable Control Systems*. PhD - Uppsala University, 2010.
- Hang C.C., Aström K.J., Ho W.K., "Refinement of the Ziegler-Nichols Tuning Formula." *IEEE Proceedings - D, Volume 138, Issue 2, pp. 111-118*, 1991.
- Hanus R., Kinnaert M., Henrotte J.L., "Conditioning technique, a general antiwindup and bumpless transfer method." *Automatica, Volume 23, Issue 6, pp. 729-739*, 1987.
- Hawkings D., "Pseudodiagonalisation and the inverse nyquist array method." *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Volume 119, Issue 3, pp. 337-342*, 1972.
- He M.J., Cai W.J., Li S.Y., "New Criterion for Control-Loop Configuration of Multivariable Processes." *Control, Automation, Robotics and Vision Conference, Volume 2, pp. 913-918*, 2004.
- Helgesen H., *A robust Multi-Loop tuning Procedure based at Successive Semidefinite Programming, that achieves optimal Performance and Failure Tolerance*. Norwegian University of Science and Technology, 2008.
- High G.T., Prevallet L.C., Joseph W., *Apparatus for decoupling a torque loop from a speed loop in a power management system for turboprop engines*. Patent US 5274558 A. Brevet, 1991.
- Hippe P., *Windup in Control - Its Effects and Their Prevention*. Springer, 2006.
- Horla D., "On Directional Change And Anti-Windup Compensation In Multivariable Control Systems." *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., Volume 19, Issue 2, pp. 281-289*, 2009.
- Hovd M., Skogestad S., "Improved independent design of robust decentralized controllers." *Journal of Process Control, Volume 3, Issue 1, pp. 43-51*, 1993.
- Hovd M., Skogestad S., "Sequential design of decentralized controllers." *Automatica, Volume 30, Issue 10, pp. 1601-1607*, 1994.

- Hovd M., Skogestad S., "Simple frequency-dependent tools for control system analysis, structure selection and design." *Automatica*, Volume 28, Issue 5, pp. 989-996, 1992.
- Huang H.-P., Jeng J.-C., Chiang C.-H., Pan W., "A direct method for multi-loop PI/PID controller design." *Journal of Process Control*, Volume 13, Issue 8, pp. 769-786, 2003.
- Hung Y., MacFarlane A., *Multivariable feedback: A quasi-classical approach*. Springer-Verlag, 1982.
- Ingimundarson A., "Criteria for design of PID controllers." *Proceedings of the 2nd IFAC conference Control System Design*, 2003.
- Jain A., Babu B.V., "A New Measure of Process Interaction in Time Domain." *Proceedings of the annual Meeting of AIChE*, 2013.
- Jung J., Choi J.Y., Lee J., "One-parameter method for a multiloop control system design." *Ind. Eng Chem Res*, Volume 38, Issue 4, pp. 1580-1588, 1999.
- Kalman R.E.; "Contributions to the theory of optimal control." *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, Voume. 5, pp. 102-119, 1960.
- Kavanagh R.J., "Noninteracting controls in linear multivariable systems." *AIEE Trans. Applications and Industry*, Volume 76, Issue 5, pp. 95-100, 1957.
- Khelassi A., *Analysis and assessment of interaction in process control systems*. Rapport - Nottingham University, 1991.
- Le Brun C., Godoy E., Beauvois D., Doncque N., Noguera R., "Multi-loop Control using Gershgorin and Ostrowski bands." *Proceedings of the 11th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics* pp. 635-642, 2014 a).
- Le Brun C., Godoy E., Beauvois D., Liacu B., Noguera R., "Control Laws Design of a Turboprop Engine." *Applied Mechanics and Materials*, Volume 704, pp. 362-367, 2014 b).
- Le Brun C., Godoy E., Beauvois D., Liacu B., Noguera R., "Coupling analysis and Control of a Turboprop Engine." *Proceedings of the 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2015.
- Lee J., Edgar T.F., "Continuation method for the modified Ziegler - Nichols tuning of multi-loop control systems." *Ind. Eng. Chem. Res*, Volume 44, Issue 19, pp. 7428-7434, 2005.
- Lee M., Lee L., Kim C., Lee J., "Analytical Design of Multiloop PID Controllers for Desired Closed-Loop Responses." *AIChE Journal*, Volume 50, Issue 7, pp. 1631-1635, 2004.
- Lee Y., Park S., Lee M., Brosilow C., "PID controller tuning for desired closed-loop responses for SI/SO systems." *AIChE Journal*, Volume 44, Issue 1, pp. 106-115, 1998.
- Lietzau K., *Multivalued control system and method for controlling a multivalued controlled system*. Patent US 2006/0004470 A1. Brevet, 2006.
- Liu T., Zhang W., Gu D.Y., "Analytical multiloop PI/PID controller design for two-by-two processes with time delays." *Ind Eng Chem Res*, Volume 44, Issue 6, pp. 1832-1841, 2005.
- Liu T., Gao, F., *Industrial Process Identification and Control Design*. Springer, 2012.
- Ljung L., *System Identification: Theory for the User (2nd edition)*. Prentice Hall, 1999.
- Loh A.P., Hang C.C., Quek C.K., Vasnani V.U., "Autotuning of multi-loop proportional - integral controllers using relay feedback." *Eng. Chem. Res*, Volume 32, Issue 6, pp. 1102-1107, 1993.

- Lopez A.M., Murill P.W., Smith C.L., "Tuning PI and PID digital controllers." *Instruments and Control Systems, Volume 42*, pp. 89-95, 1969.
- Luyben W.L., Vinante C.D., "Experimental Studies of Distillation Decoupling." *Kem. Teollisuus, Volume 29*, pp. 499-511, 1972.
- Luyben W.L., "Distillation Decoupling." *AIChE Journal, Volume 16, Issue 2*, pp. 198-203, 1970.
- Luyben W.L., "Simple Method for Tuning SISO Controllers in Multivariable Systems." *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., Volume 25, Issue 3*, pp. 654-660, 1986.
- MacFarlane A.G.J., Kouvaritakis B., "A design technique for linear multivariable feedback systems." *International Journal of Control, Volume 25, Issue 6*, pp. 837-874, 1977.
- Macfarlane A.G.J., Postlethwaite I., "The Generalized Nyquist Stability Criterion and Multivariable Root Loci." *International Journal of Control, Volume 5, Issue 1*, pp. 81-127, 1977.
- Maciejowski J.M., *Multivariable Feedback Design*. Addison Wesley, 1989.
- Mann G.K.I., "Time domain based design and analysis of new PID tuning rules." *IEE proceedings Control Theory and Applications, Volume 148, Issue 3*, pp. 251-261, 2001.
- Manousiouthakis V., "Synthesis of decentralized process control structures using the concept of block relative gain." *American Institute of Chemical Engineers Journal, Volume 32, Issue 6*, pp. 991-1003, 1986.
- Mayne D.Q., "The design of linear multivariable systems." *Automatica, Volume 9, Issue 2*, pp. 201-207, 1973.
- McAvoy T.J., *Interaction analysis: principles and applications*. Instrument Society of America, 1983.
- McMillan G.K., *Tuning and Control Loop Performance – A Practitioner's Guide (3rd edition)*. Instrument Society of America, 1994.
- Moaveni B., Khaki-Sedigh A., "A New Approach to Compute the Cross-Gramian Matrix and its Application in Input-Output Pairing of Linear Multivariable Plants." *Journal of Applied Sciences, Volume 8, Issue 4*, pp. 608-614, 2008.
- Monica T.J., Yu C.C., Luyben W.L., "Improved multiloop singleinput/single-output (SISO) controllers for multivariable processes." *Ind. Eng. Chem. Res., Volume 27, Issue 6*, pp. 969-973, 1988.
- Morgan B.S., "The synthesis of linear multivariable systems by state variable feedback." *IEEE Trans. Automatic Control, Volume 9, Issue 4*, pp. 404-411, 1964.
- Morse A.S., Wonham W.M., "Status of Non Interacting Control." *IEEE Trans. on Automatic Control, Volume 16, Issue 6*, pp. 568-581, 1971.
- Torres Munoz J.A., *Contribution à l'étude du découplage des systèmes linéaires multivariables*. PhD - IMAG Grenoble, France, 1990.
- Niederlinski A., "A heuristic approach to the design of linear multivariable interacting control systems." *Automatica, Volume 7, Issue 6*, pp. 691-701, 1971.
- Obinata G., Anderson B.D.O., *Model Reduction for Control System Design*. Springer, 2001.
- O'Dwyer A., *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules (3th edition)*. Imperial College Press, 2009.



- Öhr J., *Anti-windup and control of systems with multiple input saturations*. PhD – Uppsala University, 2003.
- Ostertag E., *Commande et estimation multivariables*. Ellipses, 2006.
- Owens D.H., *Feedback and multivariable systems*. Peter Peregrinus Ltd, 1978.
- Palmor Z.J., Halevi Y., Krasney N., "Automatic Tuning of Decentralized PID Controllers for TITO Processes." *Automatica*, *Volume 31, Issue 7*, pp. 1001-1010, 1995.
- Reberga L., *Commande Robuste Multivariable des Turboréacteurs*. PhD – INSA, Snecma, 2005.
- Reeves D.E., *A comprehensive approach to control configuration design for complex systems*. Georgia Institute of Technology, USA, 1991.
- Richter H., *Advanced Control of Turbofan Engines*. Springer, 2012.
- Rosenbrock H.H., "Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array." *Proceedings IEEE*, *Volume 116, Issue 11*, pp. 1929-1936, 1969.
- Rovira A.A., Murill P.W., Smith C.L., "Tuning controllers for setpoint changes." *Instruments and Control Systems*, *Volume 42*, pp. 67-69, 1969.
- Salgado M.E., Conley A., "MIMO interaction measure and controller structure selection." *Int. J. Control*, *Volume 77, Issue 4*, pp. 367-383, 2004.
- Schilders W.H., Van der Vorst H.A., Rommes J., *Model Order Reduction*. Springer, 2008.
- Schmidt J., "Selecting control configurations for performance with independent design." *Computers & Chemical Engineering*, *Volume 27, Issue 1*, pp. 101-109, 2003.
- Seborg D.E., Edgar T.F., Mellichamp D.A., *Process dynamics and control, 2nd edn*. Wiley, 2004.
- Shaker H.R., Tahavory M., "Frequency-interval control configuration selection for multivariable bilinear systems." *Journal of Process Control*, *Volume 23, Issue 6*, pp. 894-904, 2013.
- Shen S.H., Yu C.C., "Use of relay-feedback test for automatic tuning of multivariable systems." *AICHE Journal*, *Volume 40, Issue 4*, pp. 627-646, 1994.
- Shinskey F.G., *Process control systems: Application, design and adjustment*. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1996.
- Silverman L.M., Payne H.J., "Input-output structure of linear systems with application to the decoupling problem." *SIAM J. Control*, *Volume 9, Issue 2*, pp. 199-233, 1971.
- Sivakumaran N., Chanda J.S., Viknesh R., Radhakrishnan T.K., "A Critical Study of Decentralized Controllers for a Multivariable System." *Chemical Engineering & Technology*, *Volume 27, Issue 8*, pp. 880-889, 2004.
- Skogestad S., *Multivariable Feedback Control - Analysis and Design*. Wiley, 2005.
- Skogestad S., Morari M., "Robust performance of decentralized control systems by independent designs." *Automatica*, *Volume 25, Issue 1*, pp. 119-125, 1989.
- Skogestad S., "Probably the best simple PID tuning rules in the world." *Journal of Process Control*, *Volume 13*, pp. 291-309, 2001.
- Snecma, "Training Manual Turboprop - General Familiarization." Rapport – Snecma, 2012.

- Stanley G., Marino-Galarraga M., McAvoy T.J., "Short cut operability analysis: The relative disturbance gain." *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, Volume 24, Issue 4, pp. 1181-1188, 1985.
- Stemmann M., Rantzer A., "Temperature control of two interacting rooms with decoupled PI Control." *IFAC, Cape Town, South Africa*, 2014.
- Strejc V., "The general theory of autonomy and invariance of linear." *Acta Technica* 5, 1960.
- Tan K.K., Wang Q.-G., Hang C.C., Hagglund T.J., *Advances in PID Control*. Springer, 1999.
- Tan W., "PID tuning based on loop-shaping Hinfinitiy control." *IEE Proc. Control theory Appl.*, Volume 145, Issue 6, pp. 485-490, 1998.
- Truxal J.G., "Automatic feedback control system synthesis." *McGraw-Hill*, 1955.
- Turbomeca, "Gas Turbine Engines - Ref X DSO TD 960 2." Rapport – Turbomeca, 2004.
- Vaes D., Souverijns W., De Cuyper J., Swevers J., Sas P., "Optimal decoupling for improved multivariable controller design, applied on an automotive vibration test rig." *Proceedings of the American Control*, 2003.
- Vaes D., *Optimal static decoupling for multivariable control design*. PhD - KU Leuven, 2005.
- Vázquez F., Morilla F., Dormido S., "An iterative method for tuning decentralized PID controllers." *IFAC, Barcelona, Spain*, 1999.
- Voznesenskii I.N., "On controlling machines with a large number of controlled parameters." *Avtomatika i Telemekhanika*, pp. 65-78, 1938.
- Vu T.N.L., Lee M., "Multi-loop PI/PID Controller Design Based on Direct Synthesis for Multivariable Systems." *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, 2008.
- Waller K., Fagervik K., "A Digital Simulation Study of Two-Point Feedback Control in Distillation Columns." *Kem. Teollisuus*, 29, pp. 5-12, 1972.
- Waller K., "Decoupling in distillation." *AIChE Journal*, Volume 20, Issue 3, pp. 592-594, 1974.
- Wang Q.-G., Lin C., Ye Z., Wen G., He Y., Hang C.C., "A quasi-LMI approach to computing stabilizing parameter ranges of multi-loop PID controllers." *Journal of Proc. Control* 17 59-72, 2007.
- Wang Q.-G., Zou B., Lee T.H., "Auto-tuning of multivariable PID controllers from decentralized relay feedback." *Automatica*, Volume 33, Issue 3, pp. 319–330, 1997.
- Wang Q.-G., Ye Z., Cai W.-J., Hang C.C., *PID Control for Multivariable Processes*. Springer, 2008.
- Wang S., Chow J.H., Rajamani R., Minto K.D., "Fixed-order controller design for aircraft engine control applications." *Proceeding of the IEEE CDC*, pp. 1709-1714, 1999.
- Wang Q.-G., *Decoupling Control*. Springer, 2003.
- Witcher M.F., McAvoy T.J., "Interacting control system: steady state and dynamic measurement of interaction." *ISA Trans*, Volume 16, Issue 3, pp. 35-41, 1977.
- Wittenmark B., Salgado M.E., "Hankel-norm based interaction measure for input-output pairing." *IFAC, Barcelona, Spain*, 2002.
- Wittenmark B., "A Sample-induced Delays in Synchronous Multirate Systems." *European Control Conference*, pp. 3276–3281, 2001.

- Xiong Q., Cai W.-J., He M.-J., "A practical loop pairing criterion for multivariable processes." *Journal of Process Control*, Volume 15, Issue 7, pp. 741-747, 2005.
- Yau C.-H., Nwokah O.D.I., "Almost decoupling of uncertain multivariable systems." *International Journal of Control*, Volume 58, Issue 6, pp. 1385-1408, 1993.
- Yu C.-C., *Autotuning of PID Controllers - A relay feedback approach*. Springer, 2006.
- Zalkind C.S., "Practical Approach to Non-Interacting Control." *Instruments Control Systems*, 1967.
- Zhang Y., Wang Q.-G., Aström K.J., "Dominant pole placement for multi-loop control systems." *Automatica*, Volume 38, Issue 7, pp. 1213 – 1220, 2002.
- Zhou K., Doyle J.C., Glover K., *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- Ziegler J.G., Nichols N.B., "Optimum settings for Automatic Controllers." *Trans. ASME*, Volume 64, pp.759-768, 1942.
- Zhu Z.-X., "Variable Pairing Selection Based on Individual and Overall Interaction Measures." *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Volume 35, Issue 11, pp. 4091-4099, 1996.

## Annexes

### A-1. Grammiens de commandabilité et d'observabilité

Les concepts de commandabilité et d'observabilité jouent un rôle important dans les indices d'interaction et dans la réduction de modèle. Ces concepts, introduits par (Kalman, 1960) et présentés dans (Bachelier, 2012), sont brièvement décrits ici.

On considère un système continu linéaire invariant, décrit par le formalisme d'état par (A.1) :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{A.1}$$

Avec un état initial  $x(t_0)$  et une commande  $u(t)$ , la solution de l'équation (III.2.34) pour  $t \geq t_0$  est donnée par :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\tag{A.2}$$

Dans le cas des systèmes invariants dans le temps, on peut poser  $t_0 = 0$ . Un système avec un vecteur de conditions initiales  $x_0$  est dit commandable si et seulement s'il existe une commande  $u(t)$  continue par morceaux telle que  $x(t_1) = x_1$  pour  $t_1 > 0$  quel que soit  $x_1$ . Cette définition signifie que l'on peut déplacer l'état d'un système commandable à partir de n'importe quel état initial vers n'importe quel état final en un temps fini. Une commande qui vérifie l'équation (A.2) est donnée par (A.3) (Zhou *et al.*, 1996) :

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t)}W_c(t_1)^{-1}(e^{At_1}x_0 - x_1)\tag{A.3}$$

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau}BB^T e^{A^T\tau} d\tau\tag{A.4}$$

$W_c(t)$  doit être inversible pour tout  $t$ , afin assurer l'existence de (A.3). Pour un système stable et invariant par rapport au temps, cette condition revient à s'assurer que  $W_c(\infty)$  est de rang plein. La commandabilité peut donc être considérée en utilisant le grammien de commandabilité  $P$  donné dans (A.5). Son rang correspond à la dimension de l'espace commandable.

$$P = \int_0^\infty e^{A\tau}BB^T e^{A^T\tau} d\tau = W_c(\infty)\tag{A.5}$$

De la même manière, le grammien d'observabilité est défini comme en (A.7).  $Q$  doit alors être de rang plein pour que le système soit observable.

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T\tau}C^T C e^{A\tau} d\tau\tag{A.6}$$

$$Q = \int_0^\infty e^{A^T\tau}C^T C e^{A\tau} d\tau = W_o(\infty)\tag{A.7}$$

Ces deux grammien peuvent être obtenus en résolvant les équations continues de Lyapunov :

$$AP + PA^T + BB^T = 0\tag{A.8}$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0\tag{A.9}$$

Dans le cas discret, les grammiens sont définis dans (A.10) et (A.11) et sont obtenus en résolvant les équations discrètes de Lyapunov en (A.12) et (A.13).

$$P = \sum_{\tau=0}^{\infty} A^{\tau} B B^T (A^{\tau})^T \quad (\text{A.10})$$

$$Q = \sum_{\tau=0}^{\infty} (A^{\tau})^T C^T C A^{\tau} \quad (\text{A.11})$$

$$A P A^T - P + B B^T = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$A^T Q A - Q + C^T C = 0 \quad (\text{A.13})$$

Les valeurs singulières de Hankel (HSV) d'un système, qu'il soit continu ou discret, sont données par (A.14) :

$$\sigma_H^{(i)} = \sqrt{\lambda_i} \quad (\text{A.14})$$

les  $\lambda_i$  étant les valeurs propres du produit des grammiens de commandabilité  $P$  et d'observabilité  $Q$ .

La norme de Hankel est définie par :

$$\|G\|_H = \sqrt{\lambda_{\max}(PQ)} \quad (\text{A.15})$$

Les HSV peuvent être interprétées comme une mesure commune de la commandabilité et de l'observabilité des états du système considéré. La norme de Hankel permet donc de mesurer l'impact de n'importe quelle entrée passée sur n'importe quelle sortie future, ce qui en fait un bon indicateur pour mesurer les dynamiques dans le système.

Les deux applications des grammiens lors de ces travaux de thèse sont l'analyse des interactions et la réduction de modèles.

## A-2. Décomposition dyadique

La décomposition dyadique est une méthode de découplage faisant intervenir un pré-compensateur  $D_p$  et un post-compensateur  $R_p$ . Ces derniers sont calculés ci-après.

Cas général

La matrice  $D_p$  (respectivement la matrice  $R_p$ ) est choisie comme composée des vecteurs propres de la matrice  $G^{-1}(j\omega_1)G(j\omega_2)$  (respectivement  $G(j\omega_2)G^{-1}(j\omega_1)$ ) en supposant les valeurs propres distinctes.  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont choisies telles que  $G$  est inversible à ces pulsations. Le but est de démontrer que le système  $RGD$  est totalement découplé à ces pulsations.

Soit  $G_d(j\omega_1)$  et  $G_d(j\omega_2)$  les matrices définies par (A.16) et (A.17), et  $VP_1$  et  $VP_2$  les matrices diagonales contenant les valeurs propres respectives de  $G^{-1}(j\omega_1)G(j\omega_2)$  et  $G(j\omega_2)G^{-1}(j\omega_1)$ .

Le choix des matrices  $D_p$  et  $R_p$  implique les relations (A.18) et (A.19). En multipliant (A.18) à gauche par  $G_d(j\omega_1)$  et (A.19) à droite par  $G_d(j\omega_1)$ , puis en combinant les deux équations, on obtient la relation (A.20). Celle-ci implique que les matrices  $VP_1$  et  $VP_2$  sont semblables et donc égales puisque ces dernières sont diagonales.

En développant la relation (A.20) en (A.21) et en identifiant chacun des termes non diagonaux, il vient (A.22). Les valeurs propres étant distinctes les unes des autres, les termes non diagonaux sont nuls. On retrouve bien le fait que la matrice  $G_d$  est diagonale.

$$G_d(j\omega_1) = R_p G(j\omega_1) D_p \quad (\text{A.16})$$

$$G_d(j\omega_2) = R_p G(j\omega_2) D_p \quad (\text{A.17})$$

$$D_p^{-1} G^{-1}(j\omega_1) G(j\omega_2) D_p = VP_1 \quad (\text{A.18})$$

$$R_p G(j\omega_2) G^{-1}(j\omega_1) R_p^{-1} = VP_2 \quad (\text{A.19})$$

$$G_d(j\omega_1) VP_1 = VP_2 G_d(j\omega_1) \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{bmatrix} G_{d_{11}}(j\omega_1) & \cdots & G_{d_{1r}}(j\omega_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{d_{r1}}(j\omega_1) & \cdots & G_{d_{rr}}(j\omega_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{d_{11}}(j\omega_1) & \cdots & G_{d_{1r}}(j\omega_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{d_{r1}}(j\omega_1) & \cdots & G_{d_{rr}}(j\omega_1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$G_{d_{ij}}(j\omega_1) \lambda_j = \lambda_i G_{d_{ij}}(j\omega_1), i, j \in [1, r] \quad (\text{A.22})$$

Cas TITO

Dans le cas TITO, il est possible de ne pas supposer les valeurs propres distinctes. La relation (A.22) conduit à ce que la matrice de valeurs propres soit égale au produit de l'identité par une constante. On retrouve alors que  $G_d$  est diagonale si les matrices  $G(j\omega_1)$  et  $G(j\omega_2)$  ne sont pas proportionnelles.

Dans le cas où les matrices  $R_p$  et  $D_p$  obtenues sont réelles, le système est dit dyadique (Anthonis and Ramon, 2001) :

- Le système  $G_d$  est alors totalement découplé sur tout le domaine fréquentiel.
- Par ailleurs, les matrices  $R_p$  et  $D_p$  ne dépendent pas du choix des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

### A-3. Analyse structurée de la robustesse

Les bases de l'analyse structurée de la robustesse sont brièvement rappelées dans cette annexe (Duc, 2003).

#### Généralités

La valeur singulière structurée est un outil permettant d'effectuer des analyses de robustesse, en tenant compte de la structure des incertitudes de modèle.

Les incertitudes peuvent être regroupées en trois catégories :

- Les incertitudes paramétriques, qui affectent la valeur de paramètres réels,
- Les dynamiques mal connues ou volontairement négligées dans l'écriture des modèles, représentées par des fonctions de transfert inconnues,
- Des incertitudes globales portant à la fois sur le gain et la phase, représentées par des paramètres complexes.

Une représentation générale d'un système soumis à des incertitudes est donnée sur la Figure A.1. Les incertitudes sont rassemblées dans une matrice  $\Delta(s)$ . La matrice de transfert  $H(s)$ , modélise les interconnexions entre les entrées  $w$ , les sorties  $y$ , et les signaux  $v$  et  $z$  qui permettent de faire intervenir les incertitudes.

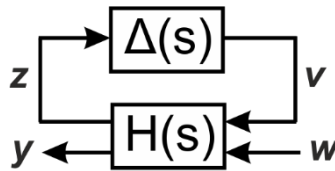


Figure A.1 : Représentation par LFT des incertitudes de modélisation

Le transfert entre  $w$  et  $y$  correspond à une LFT (Transformation Fractionnaire Linéaire). Étant donné que l'association de LFT reste une LFT, il est possible de traiter indépendamment les incertitudes.

Les différentes sources d'incertitude de modèle sont englobées dans la matrice  $\Delta(s)$  ayant la structure suivante (A.23) et vérifiant les conditions de normalisation (A.24).

$$\Delta(s) := \begin{cases} \text{diag}\{\Delta_1(s), \dots, \Delta_q(s), \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \varepsilon_1 I_{c_1}, \dots, \varepsilon_c I_{c_c}\} \in \mathbb{C}^{k \times k} \\ \Delta_i(s) \in \text{RH}_\infty, \delta_i \delta_1 \mathbb{R}, \varepsilon_i \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

$$(\|\Delta_i(s)\|_\infty < 1, \delta_i \in ]-1, 1[, |\varepsilon_i| < 1) \Leftrightarrow \|\Delta(s)\|_\infty < 1 \quad (\text{A.24})$$

L'étude de robustesse consiste à chercher à garantir la stabilité pour un ensemble d'incertitudes  $\Delta(s)$ . Si  $H(s)$  et  $\Delta(s)$  sont stables, la seule source d'instabilité provient du bouclage par  $\Delta(s)$ . Il est alors équivalent d'étudier la stabilité du système de la Figure A.2 avec  $M(s) = H_{zv}(s)$ .

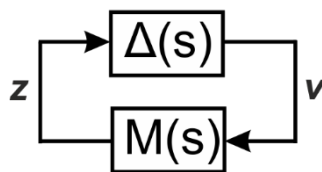


Figure A.2 : Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité

#### Définition de valeur singulière structurée

La valeur singulière structurée de  $P$  relative à l'ensemble  $\underline{\Delta}$  (A.25) est définie par (A.26).

$$\underline{\Delta} := \begin{cases} \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_q, \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_r I_{r_r}, \varepsilon_1 I_{c_1}, \dots, \varepsilon_c I_{c_c}\} \in \mathbb{C}^{k \times k} \\ \Delta_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, \delta_i \in \mathbb{R}, \varepsilon_i \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P) := \left( \inf_{\Delta \in \underline{\Delta}} (\overline{\sigma}(\Delta) : \det(I_k - \Delta P) = 0) \right)^{-1} \quad (\text{A.26})$$

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P) := 0 \text{ si } \forall \Delta \in \underline{\Delta} \det(I_k - \Delta P) \neq 0$$

Le calcul de la valeur singulière structurée de  $P$  est un problème à complexité non polynomiale. Des bornes inférieures et supérieures sont alors recherchées par optimisation. Différentes méthodes sont proposées dans (Duc, 2003).

#### Analyse de robustesse de la stabilité

En considérant  $H(s)$  est stable, le théorème principal de la mu-analyse énonce que le système  $H(s)$  bouclé par les incertitudes  $\Delta(s)$  (Figure A.1) est stable  $\forall \|\Delta(s)\|_{\infty} < \alpha$ , si et seulement si la relation (A.27) est vérifiée.

$$\forall \omega, \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \alpha^{-1} \quad (\text{A.27})$$

La procédure usuelle consiste à choisir un ensemble suffisamment dense de valeurs de  $\omega$ , et à calculer une borne supérieure de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$  pour chaque pulsation  $\omega$ . La valeur maximale de la borne supérieure est notée VSSM. La robustesse de stabilité est alors assurée pour tout  $\Delta(s)$  de norme  $H_{\infty}$  inférieure ou égale à  $\text{VSSM}^{-1}$ .

Le résultat de la mu-analyse correspond alors au plus grand hypercube centré sur l'origine et contenu dans le domaine de stabilité.

#### Analyse de robustesse des performances

La mu-analyse permet également d'assurer la robustesse de certaines performances (comme les marges de stabilité ou encore le suivi de consigne), en présence d'incertitudes de modèles et de dynamiques négligées. Le principe est de transformer des conditions de robustesse de performance en conditions de robustesse de stabilité, en ajoutant des gabarits et des incertitudes fictives appropriées. La mu-analyse permet alors d'assurer la stabilité du schéma global, ce qui conduit aux respects de ces gabarits.

L'incorporation d'incertitudes complexes dans une boucle d'asservissement permet par exemple de garantir des marges de stabilité pour la boucle où elle est introduite. La Figure IV.4.1 illustre pour le turbopropulseur, le schéma d'analyse de la robustesse d'une marge de module de 0,4 sur la première boucle (en tenant compte des incertitudes paramétriques et de dynamiques négligées sur le modèle).



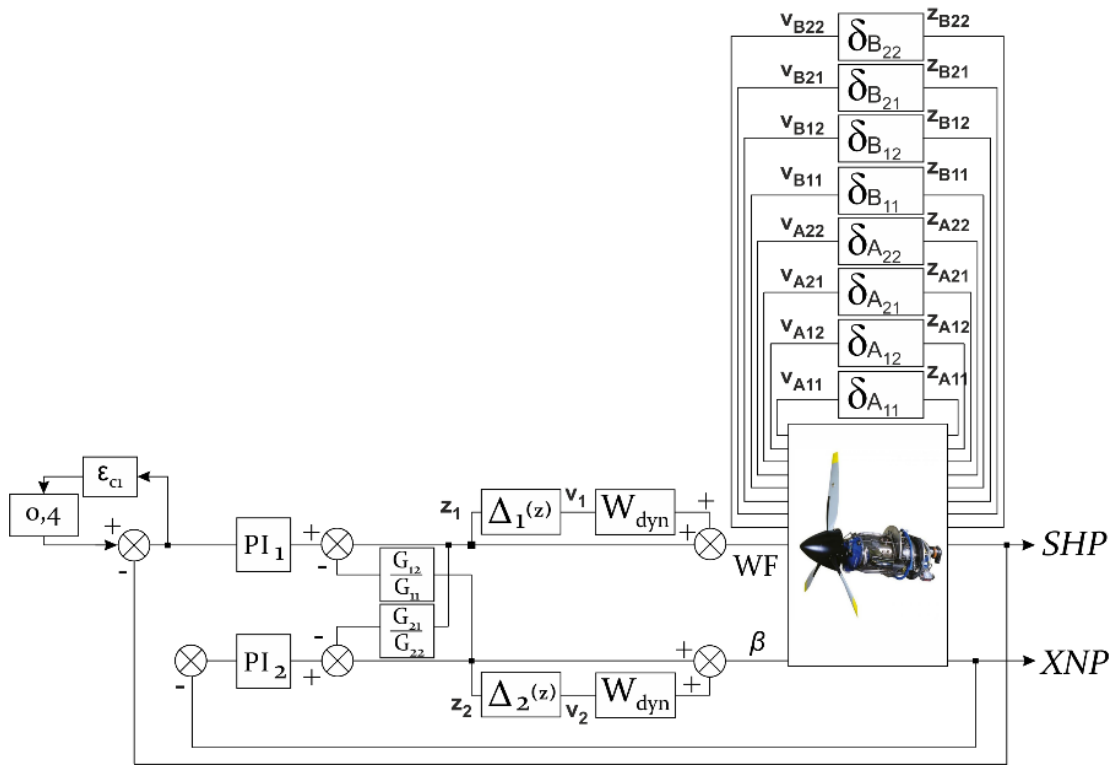


Figure A.3 : Schéma du procédé incertain bouclé avec incorporation d'incertitudes complexes en entrée du système



## Résumé

Les travaux entrepris au cours de cette thèse ont permis de concevoir des stratégies de commande de systèmes multivariables (outils d'analyse et méthodes de synthèse) en vue de leur application au développement de lois de commande d'un turbopropulseur.

D'un point de vue fonctionnel, un turbopropulseur est un système multivariable comprenant deux grandeurs de commande : le débit carburant à injecter dans la chambre de combustion et le pas de l'hélice, ainsi que deux grandeurs de sortie : la puissance délivrée par l'hélice et sa vitesse de rotation. Ces variables sont fortement couplées, ce qui signifie que des variations de l'une entraînent des écarts sur l'autre. L'objectif de ces travaux est de synthétiser des lois de commande facilement ajustables, permettant de respecter des spécifications classiques en Automatique (temps de réponse, dépassement, erreur statique) et de réduire les couplages entre les différentes grandeurs régulées. Dans ce contexte industriel, les approches décentralisées sans et avec découplage sont envisagées. La stratégie décentralisée pure met en œuvre un correcteur diagonal, ce qui revient à asservir un système par plusieurs boucles monovariabiles indépendantes. Bien que relativement facile à synthétiser et à implanter, la stratégie décentralisée ne permet pas d'atteindre les performances souhaitées en présence d'interactions importantes. Dans ce cas, il est possible de l'associer à des compensateurs permettant de diminuer les interactions.

Une part importante de ces travaux de recherche concerne le développement méthodologique de ces stratégies.

La définition d'une stratégie de commande est la première étape. Pour cela, la quantification du niveau d'interaction dans un système se révèle importante. Celle-ci peut être réalisée à l'aide de différentes méthodes et indicateurs qui s'appuient sur les réponses fréquentielles ou temporelles du système, ou encore sur les grammiens de commandabilité et d'observabilité. Une procédure systématique d'analyse des interactions a été proposée afin de déterminer la stratégie de commande la plus adaptée en fonction des interactions.

Dans le cas où l'analyse des interactions conduit à adopter une stratégie décentralisée, les régulateurs peuvent être synthétisés à l'aide de méthodes monoboucles ou multiboucles. Les premières ne prennent pas en compte les interactions tandis que les secondes, plus élaborées mais également plus complexes à mettre en œuvre, permettent de les prendre spécifiquement en compte. A la suite de l'analyse de ces méthodes, une étude récapitulative présentant les méthodes préconisées en fonction du procédé et des objectifs, est finalement proposée.

Dans le cas où l'analyse des interactions montre un niveau de couplage trop important, il est possible d'associer des compensateurs à la régulation décentralisée. Les compensateurs ont pour but de découpler les commandes vis-à-vis des sorties du procédé. Différentes méthodes et structures de découplage ont été étudiées et comparées. Une procédure de découplage, composée des méthodes considérées comme les plus efficaces a finalement été mise en place.

Ces études méthodologiques ont finalement été appliquées au turbopropulseur. Suite à l'analyse des interactions, une stratégie décentralisée avec découplage a été adoptée. L'étude des différentes solutions permettant de découpler le turbopropulseur a conduit à adopter un découpleur inversé. Le découpleur inversé garantissant un découplage total, une méthode de synthèse monoboucle a été proposée afin de synthétiser les correcteurs monovariabiles. Afin d'optimiser les performances sur l'ensemble du domaine de vol, les lois de commande ont été interpolées par une technique de séquençement des gains. Des analyses structurées de robustesse ont par ailleurs permis de montrer que les lois de commande étaient robustes vis-à-vis de la stabilité, des marges de stabilité et du suivi de consigne en présence d'incertitudes. Enfin, les lois de commande ont été implantées dans le modèle du système de régulation et ont permis d'atteindre les performances attendues et de valider l'approche utilisée.