



HAL
open science

Modélisation numérique des procédés LCM à l'échelle des milieux homogènes équivalents en cours de déformation – intégration de la pression capillaire lors de l'infusion et équilibrage post-infusion

Koloïna Andriamananjara

► **To cite this version:**

Koloïna Andriamananjara. Modélisation numérique des procédés LCM à l'échelle des milieux homogènes équivalents en cours de déformation – intégration de la pression capillaire lors de l'infusion et équilibrage post-infusion. Autre. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSEM005 . tel-02921453

HAL Id: tel-02921453

<https://theses.hal.science/tel-02921453v1>

Submitted on 25 Aug 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2019LYSEM005

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
L'École des Mines de Saint-Etienne

Ecole Doctorale N° 488
Sciences, Ingénierie, Santé

Spécialité de doctorat :
Discipline : Mécanique et ingénierie

Soutenue publiquement le 01/02/2019, par :
Koloïna Andriamananjara

Modélisation numérique des procédés LCM à l'échelle des milieux homogènes équivalents en cours de déformation – intégration de la pression capillaire lors de l'infusion et équilibrage post-infusion

Devant le jury composé de :

Bréard, Joël	Professeur	Université du Havre	<i>Examineur</i>
Geindreau, Christian	Professeur	Université Grenoble Alpes UGA	<i>Rapporteur</i>
Binetruy, Christophe	Professeur	Centrale Nantes	<i>Rapporteur & Président du jury</i>
Silva, Luisa	Chargée de Recherche HDR	Centrale Nantes	<i>Examinatrice</i>
Drapier, Sylvain	Professeur	Mines Saint-Etienne	<i>Directeur de thèse</i>
Bruchon, Julien	Professeur	Mines Saint-Etienne	<i>Co-directeur de thèse</i>
Moulin, Nicolas	Maitre-Assistant	Mines Saint-Etienne	<i>Encadrant de thèse</i>
Béraud, Jean Marc	R&T Reinforcements Director	Hexcel	<i>Invité</i>

Spécialités doctorales
 SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX
 MECANIQUE ET INGENIERIE
 GENIE DES PROCÉDES
 SCIENCES DE LA TERRE
 SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT

Responsables :
 K. Wolski Directeur de recherche
 S. Drapier, professeur
 F. Gruy, Maître de recherche
 B. Guy, Directeur de recherche
 D. Graillet, Directeur de recherche

Spécialités doctorales
 MATHEMATIQUES APPLIQUEES
 INFORMATIQUE
 SCIENCES DES IMAGES ET DES FORMES
 GENIE INDUSTRIEL
 MICROELECTRONIQUE

Responsables
 O. Roustant, Maître-assistant
 O. Boissier, Professeur
 JC. Pinoli, Professeur
 X. Delorme, Maître assistant
 Ph. Lalevée, Professeur

EMSE : Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)

ABSI	Nabil	CR	Génie industriel	CMP
AUGUSTO	Vincent	CR	Image, Vision, Signal	CIS
AVRIL	Stéphane	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
BADEL	Pierre	MA(MDC)	Mécanique et ingénierie	CIS
BALBO	Flavien	PR2	Informatique	FAYOL
BASSEREAU	Jean-François	PR	Sciences et génie des matériaux	SMS
BATTON-HUBERT	Mireille	PR2	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BEIGBEDER	Michel	MA(MDC)	Informatique	FAYOL
BLAYAC	Sylvain	MA(MDC)	Microélectronique	CMP
BOISSIER	Olivier	PR1	Informatique	FAYOL
BONNEFOY	Olivier	MA(MDC)	Génie des Procédés	SPIN
BORBELY	Andras	MR(DR2)	Sciences et génie des matériaux	SMS
BOUCHER	Xavier	PR2	Génie Industriel	FAYOL
BRODHAG	Christian	DR	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BRUCHON	Julien	MA(MDC)	Mécanique et ingénierie	SMS
CAMEIRAO	Ana	MA(MDC)	Génie des Procédés	SPIN
CHRISTIE	Frédéric	PR	Science et génie des matériaux	SMS
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR1	Génie Industriel	CMP
DEBAYLE	Johan	MR	Sciences des Images et des Formes	SPIN
DEGEORGE	Jean-Michel	MA(MDC)	Génie industriel	Fayol
DELAFOSSSE	David	PR0	Sciences et génie des matériaux	SMS
DELORME	Xavier	MA(MDC)	Génie industriel	FAYOL
DESTRAYAUD	Christophe	PR1	Mécanique et ingénierie	SMS
DJENIZIAN	Thierry	PR	Science et génie des matériaux	CMP
DOUCE	Sandrine	PR2	Sciences de gestion	FAYOL
DRAPIER	Sylvain	PR1	Mécanique et ingénierie	SMS
FAUCHEU	Jenny	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	SMS
FAVERGEON	Loïc	CR	Génie des Procédés	SPIN
FEILLET	Dominique	PR1	Génie Industriel	CMP
FOREST	Valérie	MA(MDC)	Génie des Procédés	CIS
FRACZKIEWICZ	Anna	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	MR(DR2)	Sciences de la Terre	SPIN
GAVET	Yann	MA(MDC)	Sciences des Images et des Formes	SPIN
GERINGER	Jean	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	CIS
GOEURIOT	Dominique	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GONDRAN	Natacha	MA(MDC)	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
GONZALEZ FELIU	Jesus	MA(MDC)	Sciences économiques	FAYOL
GRAILLOT	Didier	DR	Sciences et génie de l'environnement	SPIN
GROSSEAU	Philippe	DR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	PR1	Génie des Procédés	SPIN
GUY	Bernard	DR	Sciences de la Terre	SPIN
HAN	Woo-Suck	MR	Mécanique et ingénierie	SMS
HERRI	Jean Michel	PR1	Génie des Procédés	SPIN
KERMOUCHE	Guillaume	PR2	Mécanique et Ingénierie	SMS
KLOCKER	Helmut	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
LAFORST	Valérie	MR(DR2)	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
LERICHE	Rodolphe	CR	Mécanique et ingénierie	FAYOL
MALLIARAS	Georges	PR1	Microélectronique	CMP
MOLIMARD	Jérôme	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
MOUTTE	Jacques	CR	Génie des Procédés	SPIN
NEUBERT	Gilles			FAYOL
NIKOLOVSKI	Jean-Pierre	Ingénieur de recherche	Mécanique et ingénierie	CMP
NORTIER	Patrice	PR1	Génie des Procédés	SPIN
O CONNOR	Rodney Philip	MA(MDC)	Microélectronique	CMP
OWENS	Rosin	MA(MDC)	Microélectronique	CMP
PERES	Véronique	MR	Génie des Procédés	SPIN
PICARD	Gauthier	MA(MDC)	Informatique	FAYOL
PIJOLAT	Christophe	PR0	Génie des Procédés	SPIN
PINOLI	Jean Charles	PR0	Sciences des Images et des Formes	SPIN
POURCHEZ	Jérémy	MR	Génie des Procédés	CIS
ROUSSY	Agnès	MA(MDC)	Microélectronique	CMP
ROUSTANT	Olivier	MA(MDC)	Mathématiques appliquées	FAYOL
SANAUR	Sébastien	MA(MDC)	Microélectronique	CMP
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences et génie des matériaux	SMS
TRIA	Assia	Ingénieur de recherche	Microélectronique	CMP
VALDIVIESO	François	PR2	Sciences et génie des matériaux	SMS
VIRICELLE	Jean Paul	DR	Génie des Procédés	SPIN
WOLSKI	Krzystof	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR0	Génie industriel	CIS
YUGMA	Gallian	CR	Génie industriel	CMP

A mes parents, Jeannot et Lalao Andriamananjara

Remerciements

Je remercie en premier lieu toute ma famille : mes parents, *Maminirina*, *Tsitohaina* et *Henintsoa* de m'avoir toujours motivé dans la poursuite de mes objectifs et de m'avoir soutenu pendant ces longues années d'études.

Je tiens à remercier l'équipe encadrante à l'école des Mines composée de mon directeur de thèse *Sylvain Drapier*, mon co-directeur de thèse *Julien Bruchon* et mon encadrant *Nicolas Moulin*, pour leur confiance, leur disponibilité ainsi que leur implication pendant ces trois années. Je tiens également à remercier les personnes ayant participé au montage de la Chaire Hexcel qui a permis de financer cette thèse.

J'adresse un grand remerciement aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mes travaux de thèse : *Christophe Binetruy* qui a accepté de présider mon jury de thèse et d'être rapporteur de cette thèse avec *Christian Geindreau* ; *Joël Bréard* et *Luisa Silva* pour leur participation en tant qu'examineurs, et enfin *Jean Marc Béraud* qui m'a fait l'honneur d'assister à ma soutenance.

Je remercie de tout cœur toutes les personnes ayant de près ou de loin aidé à l'aboutissement de cette thèse : *Loïc* (mon super co-bureau), *Laure*, *Marianne*, *Daniella*, *Arnaud*, *Maxime*, *Inès*, *François*, *Dominique*, *Julie* et toute l'équipe MPE ; qui ont fait de ces trois années une expérience humaine inoubliable (Escapades italienne, suédoise et anglaise, Ski, Via Ferrata, Trail de Saint-Etienne, Randonnées, Concours de crêpes, Auberge espagnole, Fléchettes, Barbecue improvisée, ...).

Merci

Table des matières

Table des matières	3
Notations	7
1 Positionnement de l'étude	16
1.1 Les composites Haute Performance (HP)	17
1.2 Les procédés d'élaboration	19
1.3 Le cadre de la Chaire Hexcel	24
1.4 Objectif de la thèse	25
2 Modélisation du procédé d'infusion : cadre et avancées récentes	28
2.1 Cadre de la modélisation	28
2.1.1 Couplage multi-physique	28
2.1.2 Description mécanique du problème	30
2.1.3 Équations de conservation	30
2.2 Écoulements fluides	32
2.2.1 Loi de comportement de la résine	33
2.2.2 Écoulement dans le drainant	33
2.2.3 Écoulement dans la préforme	34
2.2.4 Conditions d'interface drainant/préforme	37
2.3 Résolution numérique du problème fluide	37
2.3.1 Formulation intégrale faible du problème	38
2.3.2 Formulation éléments-finis stabilisée	40
2.4 Modélisation des interfaces	44
2.4.1 Représentation des interfaces	45
2.4.2 Résolution numérique du problème de transport de la Level-set	47
2.5 Déformation mécanique des préformes	49
2.5.1 Formulation lagrangienne actualisée	50
2.5.2 Résolution numérique	51
2.5.3 Comportement de la préforme	52
2.5.4 Actualisation de la porosité et de la perméabilité	53

2.6	Simulation numérique de l'infusion	55
2.6.1	Infusion des préformes indéformables	57
2.6.2	Convergence de maillage et du pas de temps	60
2.6.3	Infusion de préformes déformables	64
2.7	Conclusion sur l'état de l'art de la modélisation	71
3	Modélisation et simulation des effets capillaires à l'échelle macroscopique	73
3.1	Effets capillaires	73
3.1.1	Échelle microscopique	74
3.1.2	Échelle mésoscopique	74
3.1.3	Échelle macroscopique	75
3.2	Cadre mathématique et numérique	76
3.2.1	Représentation à l'échelle macroscopique	76
3.2.2	Intégration numérique du terme surfacique des contraintes capillaires	77
3.3	Gestion de la discontinuité en pression	82
3.3.1	Méthode de type Galerkin Discontinue	83
3.3.2	Stratégie d'enrichissement	83
3.3.3	Enrichissement local en pression	85
3.4	Validation de la stratégie numérique	89
3.4.1	Méthode des solutions manufacturées	89
3.4.2	Calcul de l'ordre de convergence	93
3.5	Confrontation à des résultats expérimentaux	96
3.5.1	Description de l'expérience	96
3.5.2	Simulation numérique de la montée capillaire	97
3.6	Simulation de la phase de remplissage d'un raidisseur	101
3.6.1	Simulation en 2D des écoulements avec les effets capillaires	101
3.6.2	Simulations de l'infusion en 3D	108
3.7	Vers des simulations à l'échelle mésoscopique	111
3.7.1	Cadre mathématique et numérique	111
3.7.2	Écoulement mésoscopique sans et avec effets capillaires	113
3.8	Conclusion et perspectives	119
4	Modélisation et simulation de la phase post-remplissage	121
4.1	État de l'art	121
4.2	Cadre mathématique et numérique	124
4.2.1	Approche thermodynamique de la préforme fibreuse	124
4.2.2	Détermination des coefficients	128
4.2.3	Formulation éléments-finis	131
4.3	Applications numériques	134
4.3.1	Diffusion de la résine dans une préforme isotrope indéformable	134
4.3.2	Simulation du test d'œdomètre - condition drainée	138
4.3.3	Simulation de la post-infusion en condition non-drainée	144
4.3.4	Simulation 3D	149
4.3.5	Couplage avec le problème de remplissage	150
4.4	Conclusion et perspectives	153

5 Conclusion Générale	155
Liste des figures	I
Liste des tableaux	V

Liste des symboles

Paramètres matériaux

μ	Viscosité dynamique
μ_{eff}	Viscosité effective
K	Perméabilité isotrope
K_m	Perméabilité moyenne représentative
K_p	Perméabilité dans le plan du renfort
K_t	Perméabilité transverse du renfort
\underline{K}	Tenseur de perméabilité
ϕ	Porosité de la préforme
τ_{vf}	Taux volumique de fibre
C_{ck}^i	Constante du modèle de Carman-Kozeny dans la direction i –
ρ_f	Masse volumique du fluide
ρ_s	Masse volumique du solide
c_f	Compressibilité du fluide
b	Coefficient de Biot
\underline{b}	Tenseur de Biot
\underline{N}	Module de Biot
E	Module d'élasticité
E_p	Module d'élasticité dans le plan
E_t	Module d'élasticité transverse
E_c	Module de compressibilité
ν_{ij}	Coefficient de Poisson dans le plan (i, j)
G	Module de cisaillement
G_p	Module de cisaillement dans le plan
G_t	Module de cisaillement transverse
\mathcal{K}_{diff}	un scalaire équivalent à un coefficient de diffusion
\underline{f}_c	Force de compression

Variables du problème

\underline{v}	Vitesse du fluide
\underline{v}_h	Approximation éléments-finis de la vitesse
\underline{w}	Champ test en vitesse
\underline{w}_h	Approximation éléments-finis du champ test en vitesse
\underline{v}'	Vitesse à l'échelle sous-grilles
\underline{w}'	Fonction test en vitesse à l'échelle sous-grilles
\underline{v}_c	Vitesse de convection
p	Pression
p_h	Approximation éléments-finis de la pression
q	Champ test en pression
q_h	Approximation éléments-finis du champ test en pression
p'	Pression à l'échelle sous-grilles
q'	Fonction test en pression à l'échelle sous-grilles
\underline{u}	Champ de déplacement
$\delta\underline{u}$	Fonction test CA
\underline{u}_h	Approximation éléments-finis du déplacement
$\delta\underline{u}_h$	Approximation éléments-finis de la fonction test CA
t	Temps
ψ	Fonction Level-Set
ψ_h	Approximation éléments-finis de la Level-set
ψ^*	Fonction test du problème Level-Set
ψ_h^*	Approximation éléments-finis de la fonction test Level-set
$\tilde{\psi}^*$	Fonction test liée à la stabilisation SUPG
$\overline{\psi}_0$	Fonction Level-Set filtrée
t_{eq}	Temps d'équilibre

Symboles liés au problème de mécanique des fluides

c_1^s	Constante de stabilisation du problème de Stokes
c_u	Première constante de stabilisation du problème de Darcy
c_p	Deuxième constante de stabilisation du problème de Darcy
ϵ_{CSF}	Paramètre associé à la régularisation d'une fonction de Heaviside
H_m	Fonction Heaviside valant 1 dans le domaine m ($m = s, m = d$ correspond respectivement
H_{cos}	Fonction Heaviside régularisée (sinusoïdale).
$\tau_{p,e}^d$	Paramètre de stabilisation en pression du problème de Darcy
$\tau_{p,e}^s$	Paramètre de stabilisation en pression du problème de Stokes
$\tau_{v,e}^d$	Paramètre de stabilisation en vitesse du problème de Darcy
$\tau_{v,e}^s$	Paramètre de stabilisation en vitesse du problème de Stokes
s	Saturation (rapport du volume de résine sur le volume de pores)
θ	Angle de contact
$m(t)$	Masse en fonction du temps
$V(t)$	Volume en fonction du temps
$h(t)$	Hauteur du fluide en fonction du temps
$\underline{\dot{\epsilon}}(\underline{v})$	Tenseur des taux de déformation
$\underline{\tau}$	Tenseur des contraintes de cisaillement
$\underline{\sigma}_{cap}$	Tenseur des contraintes capillaires
σ_{cap}^i	Valeur de la contrainte capillaire dans la direction i
\underline{F}_{vis}	Forces visqueuses
\underline{F}_{cap}	Forces capillaires
$\underline{\tau}$	Vecteur tangentiel
α	Coefficient de glissement associé à la condition de Beaver-Joseph-Saffman
V_r	Volume rempli (%)
Q_v	Débit de l'écoulement
\underline{a}^f	Accélération des particules fluides
m_f	Masse volumique du fluide rapportée à la porosité
h	Terme source/puits
\underline{v}_{inter}^r	Vitesse de la résine dans le domaine inter-torons
\underline{v}_{intra}^r	Vitesse de la résine dans le domaine intra-toron
$\mathcal{R}_{h,1}^s$	Résidu EF du problème de Stokes lié à la conservation de la quantité de mouvement
$\mathcal{R}_{h,2}^s$	Résidu EF du problème de Stokes lié à la conservation de la masse
η	Ordre de convergence

l_{cr}	Longueur caractéristique
v_{cr}	Vitesse caractéristique
t_{cr}	Temps caractéristique
p_a	Pression du gaz (ex air)
p_l	Pression du liquide
p_{cap}	Pression capillaire
p_1	Pression imposée à la paroi supérieure
p_0	Pression imposée à la paroi inférieure
p_{init}	Pression initiale
p_{eq}	Pression à l'équilibre
N_J	Fonctions de forme associées aux degrés de liberté classiques P_J
M_1	Fonction de forme associée au degré de liberté en pression supplémentaire C_1
M_2	Fonction de forme associée au degré de liberté en pression supplémentaire C_2
ε_p	Erreur en pression
ε_v	Erreur en vitesse

Symboles liés au problème de mécanique des solides

\underline{x}	Coordonnées d'un point dans la configuration courante
\underline{X}	Coordonnées dans la configuration initiale
$\underline{\underline{F}}$	Tenseur gradient de la transformation
$\underline{\underline{J}}$	Jacobien de la transformation
$\underline{\underline{S}}$	Second tenseur de Piola-Kirchoff
$\underline{\underline{\mathcal{E}}}$	Tenseur de Green-Lagrange
$\underline{\underline{\sigma}}_{eff}$	Contraintes effectives reprises par le renfort
ε_c	Déformation liée à la compaction
$\dot{\varepsilon}$	Vitesse de déformation liée à la compaction
D_s	Dissipation liée à la phase solide
f	Fonction expérimentale décrivant le comportement transverse des renforts HiTape
V_{fib}	Volume des fibres
V_{tot}	Volume total du matériau
\underline{v}_m	Vitesse du maillage
\underline{v}^{solide}	Vitesse du solide
\underline{u}_{ext}^D	Valeur des déplacements imposée sur les bords de type Dirichlet
\underline{t}	Force appliquée sur les bords de type Neumann
$d\underline{u}^{it}$	l'incrément de correction du déplacement
c_v	Coefficient de consolidation
m_v	Compressibilité du milieu poreux dans un milieu confiné

Symboles liés au problème de la Level-set

$d_0(\underline{x})$	Fonction distance signée à l'interface
ε	Largeur du filtre
κ_{ls}	Courbure de la Level-set
τ_e^ψ	Paramètre de stabilisation SUPG
$ v_e $	Vitesse moyenne dans un élément

Autres

$\ll s \gg$	se référant au domaine de Stokes
$\ll d \gg$	se référant au domaine de Darcy
$\ll b \gg$	se référant au problème de Brinkman
$\ll loc \gg$	se référant à la base locale
\underline{f}_v	Force volumique
\underline{h}	Terme source/puits
\underline{I}	Tenseur identité
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\underline{\underline{\sigma}}^T$	Tenseur des contraintes totales (solide + fluide)
\underline{Q}	Vecteur flux de chaleur
h_f	Enthalpie spécifique
\mathbb{E}_i	Énergie interne
G_s	Une fonction d'énergie
Ψ_s	Énergie libre
T	Température
Δt	Pas de temps
η	Ordre de convergence
m_s	Nombre de degrés de liberté classiques
m_e	Nombre de degrés de liberté rajoutés du à l'enrichissement
nb_{noeuds}	Nombre de nœuds
ε_{eq}	Coefficient lié au critère d'équilibre

Nombre adimensionnel

Re	Nombre de Reynolds
Ca	Nombre capillaire
B^*	Coefficient pouvant être lié au coefficient de Skempton

Domaines et géométrie

Ω	Domaine de calcul fluide ou solide
Ω_l	Domaine liquide (ex : résine)
Ω_a	Domaine gazeux (ex : air)
Ω_0	Domaine initial non déformé
Ω_i	Domaine intermédiaire déformé
Ω_t	Domaine courant
$\partial\Omega$	Frontière du domaine de calcul Ω
$\partial\Omega^D$	Frontière du domaine de calcul Ω de type Dirichlet
$\partial\Omega^N$	Frontière du domaine de calcul Ω de type Neumann
$\Gamma_{s/d}$	Interface Stokes/Darcy
$\Gamma_{l/a}$	Front fluide
\underline{n}	Vecteur unitaire normal à une frontière
dim	Dimension du problème
e_p	Épaisseur
R	Rayon
H	Hauteur
L_0	Longueur caractéristique du domaine
h_e	Taille de maille d'un élément
c	2 fois le grand axe d'un toron elliptique
a	Demi-petit-axe d'un toron elliptique

Liste des acronymes

Matériaux et Procédés

LCM	Liquid Composite Molding
RTM	Resin Transfer Molding
LRI	Liquid Resin Infusion
HP	Haute performance
HR	Haute Résistance (fibres de carbone)
HM	Haut Module (fibres de carbone)
UD	UniDirectionnel

Méthodes numériques

EF	Élément Fini
VOF	Volume Of Fluid
VMS	Variational Multi-Scale
SUPG	Streamline Upwind/Petrov-Galerkin
ASGS	Algebraic Sub-Grid Scale
OSGS	Orthogonal Sub-Grid Scale
HVM	Hughes Variational Multiscale
SLR	Surface Local Reconstruction
CSF	Continuum Stress Force
MEF	Méthode Eléments-Finis
E-FEM	Enriched Finite Element Method
X-FEM	Extended Finite Element Method
GD	Galerkin Discontinu

Autres

MMC	Mécanique des Milieux Continus
BJS	Condition de Beaver-Joseph-Saffman
LBB	Ladysenskaya - Brezzi - Babůska
IPP	Intégration Par Partie
ddl	Degré de liberté

Notation mathématiques

\underline{x}	Notation de vecteur x
$\underline{\underline{x}}$	Notation pour les tenseurs x
$\underline{\nabla}$	Opérateur gradient
$\underline{\nabla} \cdot$	Opérateur divergence
δ	Dirac
δ_{CSF}	Fonction s'annulant en dehors de la zone de largeur ϵ_{CSF}
$[K]$	Sous-matrices
\dot{x}	Dérivée temporelle de la quantité x

Propos liminaire

Les matériaux composites structuraux tels que ceux utilisés largement dans le secteur aéronautique notamment, sont étudiés depuis de très nombreuses années pour leurs performances élevées rapportées à leur faible masse volumique [45]. Afin de maîtriser l'élaboration de ces matériaux Haute Performance via des procédés toujours plus économes et adaptés à des cadences industrielles sans sacrifier la qualité, les procédés par infusion de résine liquide sont étudiés depuis quelques années à différentes échelles d'observation. La Chaire Hexcel - Mines Saint-Étienne (2015-2020) vise à structurer, à destination du monde industriel, le cadre numérique de telles approches multi-échelles et multi-physiques par nature.

Ce travail de thèse dans la Chaire Hexcel-Mines Saint-Étienne porte plus particulièrement sur la mise en place de méthodes permettant, à l'échelle macroscopique des structures élaborées, de rendre compte du transport de la résine liquide dans les préformes fibreuses déformables, d'abord durant la phase critique d'infusion, en intégrant les effets liés aux phénomènes capillaires locaux, puis durant la phase de ré-équilibrage des pressions dans le système résine/préforme isolé après infusion.

Les informations sur les composites étant dorénavant très répandues [23]. Dans un souci de concision, le premier chapitre de ce manuscrit tient lieu d'introduction générale, il se veut concis et pose la problématique générale de ce travail.

Sommaire

1.1	Les composites Haute Performance (HP)	17
1.2	Les procédés d'élaboration	19
1.3	Le cadre de la Chaire Hexcel	24
1.4	Objectif de la thèse	25

Les matériaux composites sont des matériaux hétérogènes constitués au minimum de deux composants de natures différentes et non miscibles : le renfort et la matrice. Le renfort peut se présenter sous forme de particules (Figure 1.1a) ou de fibres (Figure 1.1b). Les fibres longues et continues peuvent être assemblées en une structure fibreuse constituant le squelette de la pièce appelée « préforme » qui définit alors la forme globale de la pièce. Les renforts ont pour fonction principale de reprendre les efforts et d'assurer de ce fait, la tenue mécanique de la pièce, tandis que la matrice assure la cohésion des renforts et le transfert des efforts entre ces derniers. Elle protège également les renforts des agressions extérieures et détermine, par exemple, la température maximale d'utilisation de la pièce. Pendant l'élaboration, la matrice doit occuper correctement les espaces entre les fibres et entre les paquets de fibres (appelés aussi « torons » ou « mèches ») afin d'assurer une bonne imprégnation et éviter la formation de zones sèches et/ou de vides (voir dans la suite les problèmes d'imprégnation sur la Figure 1.7). D'autres additifs peuvent être ajoutés à la matrice pour améliorer la tenue mécanique, pour procurer certaines propriétés électriques à la pièce, ou encore pour faciliter les étapes d'élaboration (le démoulage par exemple).

Une forte **anisotropie** de la pièce résulte de cette hétérogénéité du matériau liée notamment à la présence des constituants ayant des propriétés différentes, mais également à la disposition de ces composants entre eux. Par ailleurs, des **non-linéarités matérielles** peuvent être induites par le comportement de ces différents constituants et leurs interactions : frottement, contact ou glissement entre les fibres et/ou la matrice, etc. Toute étude de ces pièces doit donc prendre en compte ces caractéristiques : anisotropie et non-linéarité.

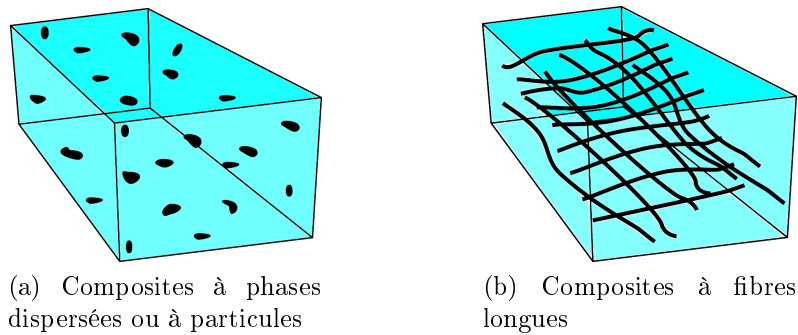


FIGURE 1.1 – Deux types différents de composites

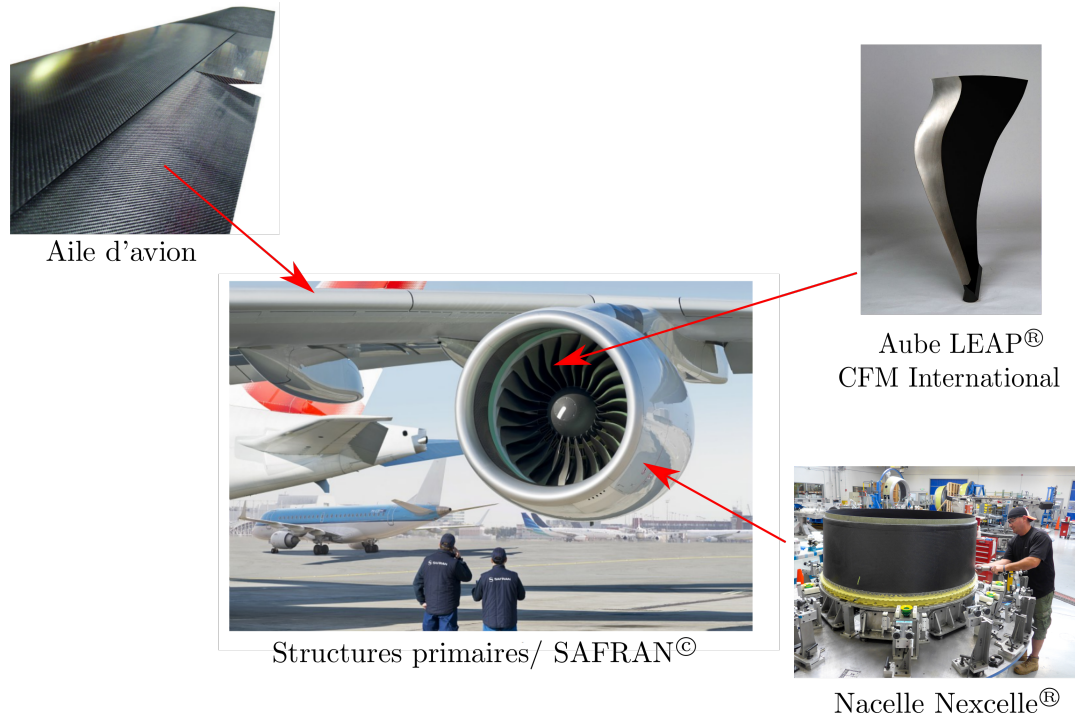
1.1 Les composites Haute Performance (HP)

L'utilisation des matériaux composites dans l'industrie aérospatiale s'explique principalement par le gain de masse obtenu de 25 à 30% [45] par rapport aux alliages métalliques pour des performances équivalentes.

Dans cette étude, nous nous limiterons aux pièces structurales fabriquées à partir de fibres longues continues et à matrice organique à base de résine thermodurcissable. Des tissus peuvent alors être fabriqués à partir des torons ou paquets de fibres (fibres de verre, de carbone, d'aramide, ...) assemblés selon l'orientation et la direction des sollicitations auxquelles est soumise la pièce pendant son utilisation. Dans cette configuration, la performance mécanique des matériaux composites dépend au premier ordre du taux volumique de fibres τ_{vf} (Eq. 1.1) qui représente le rapport du volume de fibres V_{fib} sur le volume total V_{tot} du matériau

$$\tau_{vf} = \frac{V_{fib}}{V_{tot}}. \quad (1.1)$$

Les fibres et résines utilisées pour ces pièces doivent être de très bonne qualité (Tableau 1.1) pour assurer une bonne tenue mécanique de la pièce finale. Un τ_{vf} allant jusqu'à 60% est requis pour ce type de pièces (Figure 1.2) et généralement un taux de porosité final de moins de 2% est visé.

FIGURE 1.2 – Structures primaires aéronautiques en composites ¹

Caractéristiques mécaniques et thermiques	Verre (A. C.)	Aramide (Kevlar 49)	Carbone (H. R.)	Carbone (H. M.)
Rigidité sens fibre (GPa)	74	130	230	390
Rigidité sens transverse (GPa)	74	130	20	12
Contrainte à rupture (MPa)	2500	2900	3200	2600
Température d'utilisation (°C)	700	-	>1500	>1500
Prix (Euros par kg)	10	50	40-90	60-150

TABLEAU 1.1 – Caractéristiques de quelques fibres types [60] avec A. C. = Applications Courantes, H. R. = Haute Résistance, H. M. = Haut Module.

Pour atteindre les propriétés mécaniques requises, une attention particulière doit être portée au procédé de fabrication en plus du choix des constituants. Notre étude porte donc sur une meilleure compréhension du procédé de fabrication des matériaux Haute Performance, par la modélisation et la simulation numérique. De par la nature multi-échelle des composites, l'étude de ces matériaux composites et des phénomènes physiques correspondant peut se faire à différents niveaux (Figure 1.3) : à l'échelle **macroscopique**, à l'échelle **mésoscopique** et à l'échelle **microscopique**.

- L'échelle macroscopique correspond à l'échelle de la structure ou à l'échelle du procédé, de l'ordre du mètre. La structure est classiquement représentée par un milieu homogène équivalent. Les hétérogénéités locales du matériau sont prises en compte via des descripteurs morphologiques de la micro-structure comme le τ_{vf} . Une attention par-

1. Photos extraites du site de Safran <https://www.safran.com>, Nexcelle <http://nexcelle.com> et C3technologies <http://www.c3technologies.fr>

ticulière doit être apportée dans le calcul des paramètres macroscopiques décrivant la structure afin de bien tenir compte des caractéristiques locales et intrinsèques de chaque composant. Cette échelle est la plus adaptée pour étudier l'influence des paramètres du procédé sur la géométrie et les propriétés physiques et mécanique de la pièce finale.

- Dans nos travaux, l'échelle mésoscopique correspond à l'échelle des torons ou des mèches de l'ordre de 10^{-3}m - un toron contenant environ entre 30 000 et 80 000 fibres. Cette échelle est considérée comme une échelle intermédiaire.
- L'échelle microscopique correspond à l'échelle de la fibre, de l'ordre de 10^{-6}m . Pour des structures primaires aéronautiques de l'ordre du mètre, cette échelle bien qu'elle donne une représentation exacte de la configuration de pièce, reste inadaptée pour des études dans un contexte industriel.

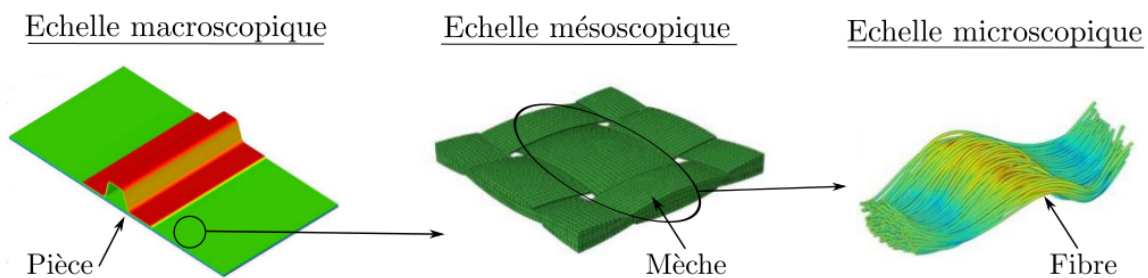


FIGURE 1.3 – Différentes échelles de représentation correspondant aux matériaux composites : macroscopique [54], mésoscopique [26], microscopique [74]

1.2 Les procédés d'élaboration

De nombreuses technologies de fabrication sont disponibles pour produire des composites HP. La chaîne de réalisation des matériaux composites consiste en l'imprégnation des renforts par la matrice avant ou après la phase de préformage [25, 26, 27]; selon une technique bien définie afin d'assurer la géométrie, la performance, le coût et le taux de production souhaités. Il existe deux principaux types de procédés d'élaboration des matériaux composites : les procédés dits par voie **sèche** et les procédés dits par voie **humide**. La première classe de procédés décrit les procédés indirects qui utilisent des produits semi-finis déjà pré-imprégnés de résine (Figure 1.4), connus sous l'appellation « pré-pregs » [100]. Ce type de procédé confère de très bonnes propriétés à la pièce finale en assurant une bonne maîtrise de la forme géométrique et du taux de fibres ainsi qu'une répartition très uniforme des fibres. En revanche, l'utilisation d'autoclaves, de moules, ainsi que l'élaboration des nappes pré-imprégnées augmentent significativement les coûts de la mise en œuvre. En effet, des autoclaves adaptés aux dimensions de la pièce sont nécessaires pour l'élaboration des pièces structurelles.

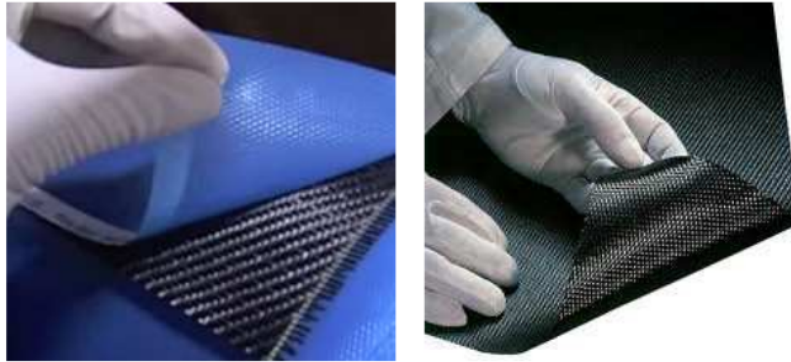


FIGURE 1.4 – Structure des renforts pré-pregs [30]

De plus, les nappes pré-imprégnées doivent être stockées dans des salles frigorifiques afin d'éviter une réticulation précoce de la résine ; d'où l'intérêt grandissant des industriels pour les procédés directs [99] dits par voie humide ou LCM (*Liquid Composite Molding*). Ces derniers regroupent les procédés pour lesquels la résine est utilisée à l'état liquide lors de l'élaboration. Le premier intérêt est de diminuer le nombre d'étapes d'élaboration et de stocker séparément les composants - donc de ne plus avoir d'importantes infrastructures frigorifiques. On retrouve deux types de procédés LCM : les procédés de type **injection** ou RTM (*Resin Transfer Molding*) [3] et les procédés de type **infusion** ou LRI (*Liquid Resin Infusion*). Les procédés de type infusion (Figure 1.5) consistent à imprégner la préforme principalement dans le sens de l'épaisseur - l'objectif étant de minimiser la distance à parcourir pour la résine, surtout dans le cadre de la fabrication de pièces minces. À l'opposé, les procédés d'injection (Figure 1.5) consistent à imprégner la préforme maintenue dans un système de moule/contre-moule fermé, généralement dans le sens plan du renfort en injectant de la résine liquide avec une pression pouvant atteindre 20 bars. Ces procédés permettent d'obtenir d'excellentes propriétés mécaniques notamment une bonne maîtrise de la dimension et un très bon état de surface. Cependant, ils sont adaptés uniquement à des pièces de grande série et non aux pièces de grandes dimensions qui vont requérir des pressions d'injection ou de maintien non réalisables. Les procédés d'infusion sont une bonne alternative technique et économique pour l'élaboration des grandes pièces, principalement parce que le contre-moule est remplacé par une bâche à vide et ne nécessite pas de force motrice autre que le tirage du vide ; ce qui réduit le coût de l'outillage. De plus, le même outillage peut être réutilisé pour différents types et configurations de pièces.

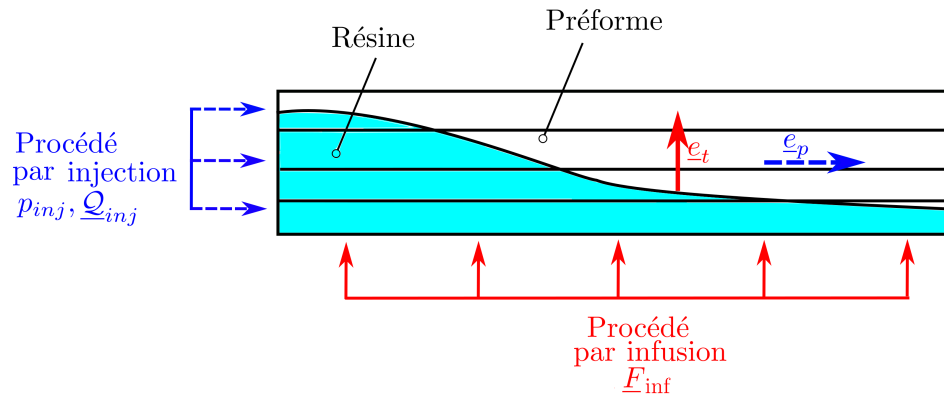


FIGURE 1.5 – Famille des procédés par voie liquide (inspiré de [31]) avec respectivement p_{inj} , Q_{inj} la pression et le débit d'injection et F_{inf} la force motrice générée par la mise sous vide

Procédé par infusion de résine liquide

Le principe de l'infusion [124] (Figure 1.6), s'il paraît simple au premier abord, repose sur des mécanismes assez complexes, rendant sa modélisation difficile. L'élaboration des pièces composites par ce type de procédé se déroule en quatre étapes bien distinctes : la phase de pré-remplissage, l'infusion ou le remplissage, la post-infusion et la cuisson.

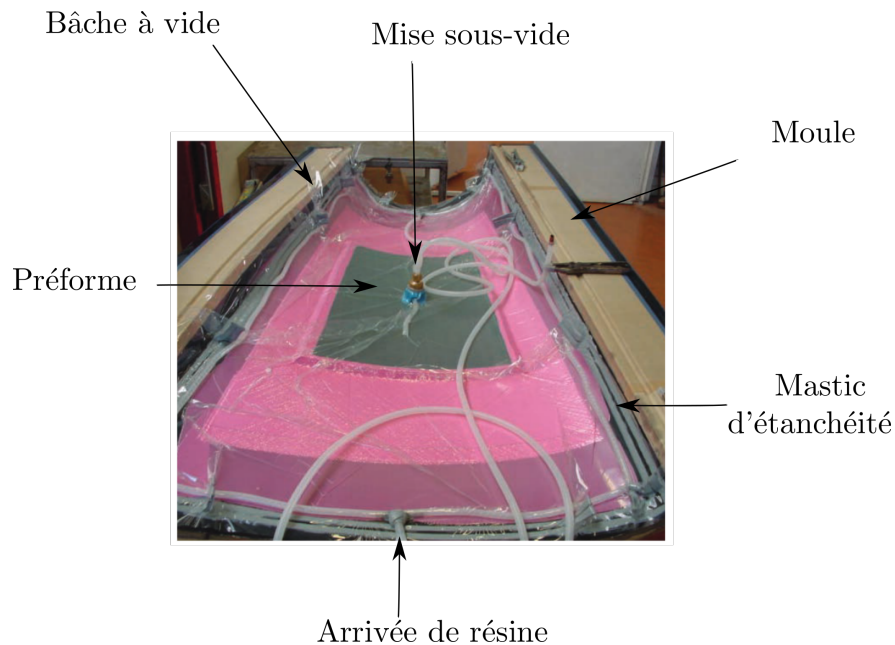


FIGURE 1.6 – Exemple de montage avant mise en oeuvre par procédé LRI [99]

La pré-infusion

La première étape consiste à isoler l'empilement de l'extérieur avec le sac à vide. En évacuant progressivement l'air entre les renforts, la compression sous l'effet de la pression atmosphérique induit un réarrangement local des fibres augmentant ainsi le τ_{vf} global. De ce

fait, la capacité de la préforme sèche à être traversée par des liquides diminue avec la compaction. Cette propriété macroscopique intrinsèque à la préforme se traduit par un paramètre appelé la **perméabilité** [59] - un paramètre clé qui influence considérablement l'écoulement de la résine. Cette compression augmente également la rigidité globale de la préforme sèche, à la fin de la mise sous-vide, du fait de la densification typique due à la compaction des milieux fibreux [23, 40].

L'infusion

La phase de remplissage se fait premièrement dans le drainant, une zone d'écoulement supposée très rapide avec une forte perméabilité assurant une répartition uniforme de la résine dans le plan avant l'imprégnation de la préforme à travers son épaisseur. À cause de l'hétérogénéité et l'architecture de la préforme, le remplissage se fait très souvent à deux niveaux [30] - dans les espaces inter-torons et dans les micro-pores à l'intérieur des torons. En fonction de la vitesse de ces deux écoulements, des micro- ou macro-vides peuvent se former (Figure 1.7), respectivement dans les espaces intra- et inter-torons sachant que les écoulements à l'intérieur des torons peuvent être dominés par les phénomènes capillaires. Ces phénomènes traduisent en effet l'aptitude de la résine à maintenir le contact avec les fibres sans assistance d'autres forces externes.

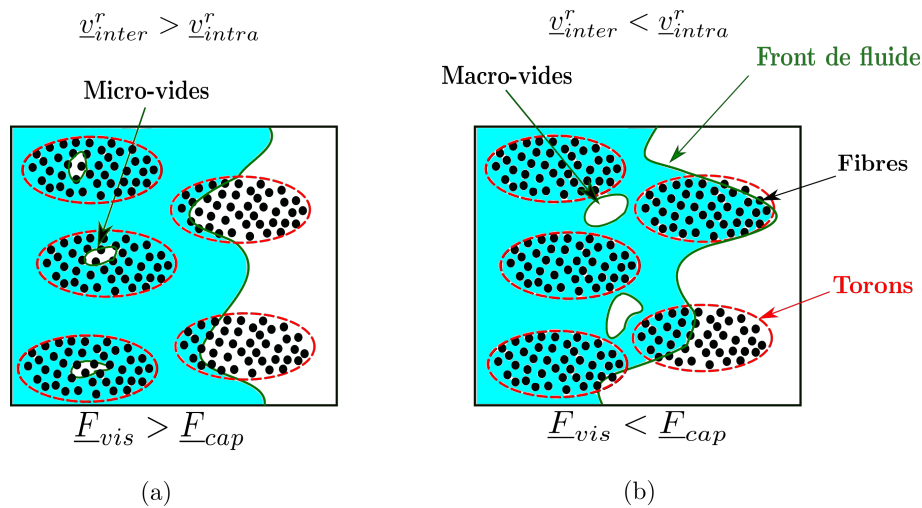


FIGURE 1.7 – Illustration de la compétition entre les forces visqueuses F_{vis} et capillaires F_{cap} entre les fibres et les torons (avec v_{inter}^r et v_{intra}^r respectivement la vitesse de la résine inter- et intra-torons)

La compréhension et la maîtrise de ce type de phénomènes locaux permet de contrôler la formation de vides et par la suite, de prédire globalement l'état final de la pièce.

La post-infusion

Avant la phase de cuisson, la phase de post-infusion plus ou moins longue est l'étape pendant laquelle la pièce est laissée au repos (par exemple, avec le système isolé de l'extérieur) afin d'homogénéiser la répartition de la résine et le taux de fibres dans le mélange (Figure 1.8). Cette phase encore mal maîtrisée impacte significativement les propriétés géométriques finales

de la pièce, mais également ses propriétés mécaniques [63]. En effet, un gradient de pression résiduel subsiste à l'intérieur de la pièce après la fermeture de l'arrivée de la résine (et de l'évent). L'interaction résultant de ce gradient entre l'écoulement de la résine et la déformation de la préforme contrôle en grande partie les propriétés géométriques et mécaniques finales de la pièce.

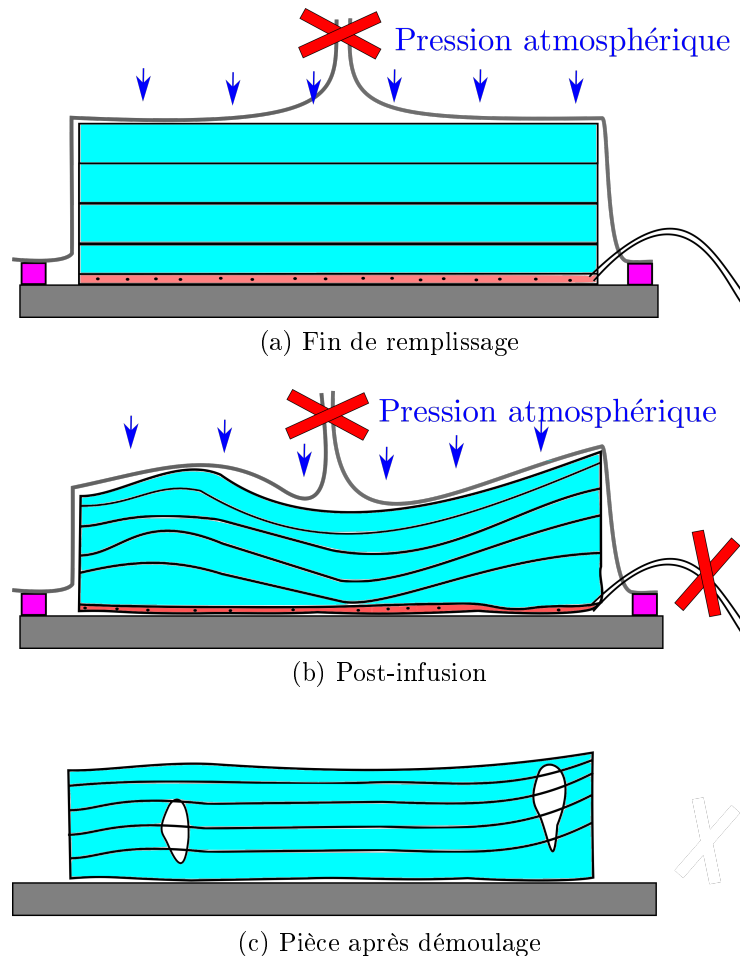


FIGURE 1.8 – Illustration de la phase de post-infusion

La flexibilité de la bache à vide associée au gradient de pression interne peut induire une variation importante de l'épaisseur de la pièce (Figure 1.8b) et aussi des défauts d'imprégnation dans la pièce finale (Figure 1.8c). Afin d'obtenir une pièce bien homogène, il est important de bien calculer le temps de repos nécessaire pour que la pression interne du mélange matrice/préforme s'équilibre avant l'étape de cuisson.

La cuisson

Enfin, l'étape de cuisson [116] consiste à polymériser la matrice à une certaine température afin de solidifier le mélange matrice/renfort. Après refroidissement, la pièce est ensuite démoulée. Des tissus d'arrachage sont généralement associés au drainant afin de faciliter ce démoulage et assurer au mieux l'état de surface de la pièce.

La compréhension ainsi que la maîtrise de ces 4 étapes permettent d'adapter et d'optimiser les stratégies d'infusion.

Inconvénients des procédés par infusion

Bien que ce type de procédé est supposé être plus économique comparé aux autres procédés, la flexibilité de la bache à vide induit une variabilité importante de la répartition de la résine et donc de l'épaisseur de la pièce. Le contrôle de l'épaisseur est d'autant plus difficile lors de l'imprégnation de pièces de grandes dimensions. Cette mauvaise maîtrise des propriétés géométriques (dimension, τ_{vf}) de la pièce ainsi que les défauts d'imprégnation constituent les principaux verrous à l'utilisation de ce type de procédés pour des applications Haute Performance. En effet, la formation de vides et le piégeage d'air durant le procédé peuvent générer des zones de concentration de contraintes qui vont alors affecter significativement la performance mécanique des pièces. À l'échelle macroscopique, des macro-défauts peuvent se former à partir des zones mal imprégnées suite à une mauvaise répartition des arrivées/sortie de résine, par exemple. À l'échelle inférieure, des micro- ou macro-vides peuvent également se former, en raison de l'écoulement à double échelle du fluide à travers le milieu fibreux. La compréhension de ces différents mécanismes d'écoulement de la résine pendant l'infusion est cruciale pour fabriquer des pièces composites de haute qualité avec un faible taux de porosité et de défauts.

1.3 Le cadre de la Chaire Hexcel

Ce travail de recherche s'inscrit dans le cadre d'une chaire industrielle entre Hexcel Reinforcements et Mines Saint-Étienne. L'entreprise Hexcel développe et commercialise des composants tels que le renfort, la résine et les pré-pregs destinés majoritairement à l'industrie du transport. Les travaux dans le cadre de cette chaire portent sur l'élaboration des composites fabriqués à partir des matériaux récemment développés par l'entreprise tels que le HiTape[®] et HiMax[®] [97]. Les renforts HiTape[®] [98] sont des renforts constitués d'ensemble de fibres unidirectionnelles maintenues sur chaque faces par une fine voile thermoplastique (Figure 1.9). Cette structure particulière du renfort confère à la pièce des propriétés mécaniques élevées convenant aux exigences des pièces primaires aéronautiques. Les pièces fabriquées à partir de ce renfort pourraient en effet, concurrencer les matériaux pré-imprégnés en atteignant des taux volumiques de fibres élevés de 55 à 70%. Les renforts cousus HiMax[®] de type *Non-Crimp Fabrics* (NCF) sont des renforts non-tissés constitués par un empilement de fibres unidirectionnelles - chaque pli étant placé selon une orientation imposée.

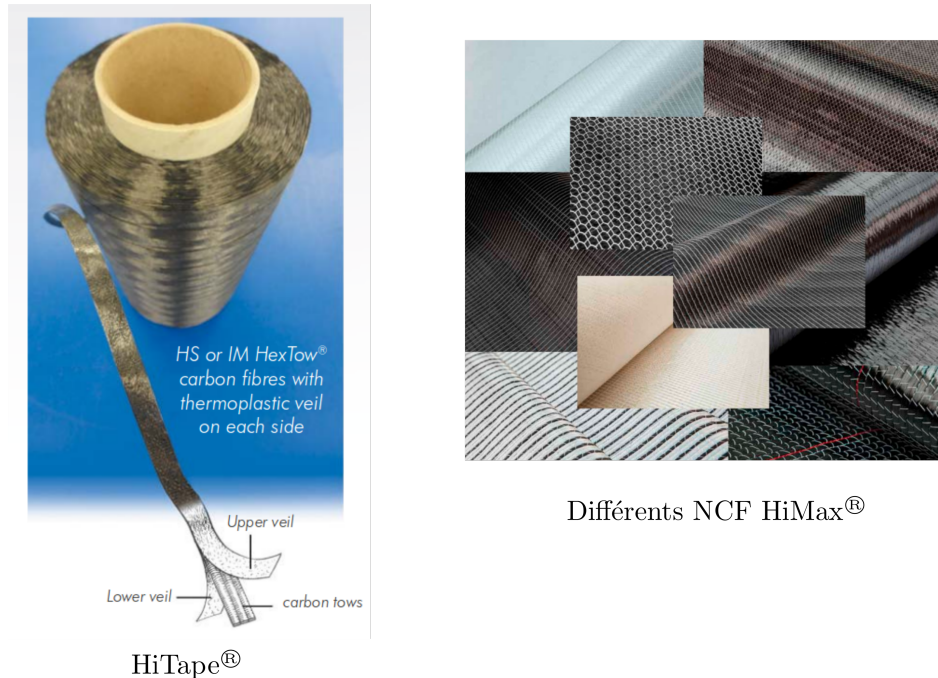


FIGURE 1.9 – Illustration des renforts HiTape[®] [98] et HiMax[®] [97]

Le projet consiste à étudier l'élaboration de préformes à partir de ces renforts par des procédés par infusion décrits au paragraphe précédent afin de concurrencer les technologies onéreuses et complexes des pré-imprégnés, pour des applications aéronautiques. En effet, le procédé par infusion, avec l'utilisation d'un système semi-rigide, offre une alternative économique et technique intéressante comparée aux autres procédés de fabrication. Cependant, la santé matière des pièces résultant de ce type de procédé doit être impérativement maîtrisée pour être utilisée industriellement dans le cadre de l'élaboration des composites Haute Performance. L'objectif de l'étude est de mettre en place des modélisations numériques des principaux phénomènes physiques afin de prédire cette santé matière de la manière la plus réaliste possible, en s'affranchissant des coûts liés aux études « essais/erreurs ».

Le projet de recherche décrit dans cette thèse, s'inscrit dans la continuité de différentes études réalisées au sein du laboratoire [2, 23, 40, 54, 90]. Les travaux consistent, d'une part à inclure la modélisation des phénomènes capillaires durant le remplissage, et d'autre part de modéliser la phase de post-infusion qui peut affecter la pièce. Pour répondre à cette problématique, une étude bibliographique sur la modélisation des différents phénomènes présents durant le procédé par infusion des matériaux composites est présentée dans le Chapitre 2.

1.4 Objectif de la thèse

Ce manuscrit se compose de trois chapitres principaux :

- Le Chapitre 2 décrit les avancées les plus récentes dans la modélisation du procédé par infusion de résine liquide. Après avoir établi le cadre de la modélisation, les représentations mathématiques, ainsi que les méthodes numériques permettant de simuler

les principaux phénomènes physiques apparaissant durant le procédé sont présentées. Ce chapitre décrit donc la modélisation et la résolution des problèmes d'écoulements fluides, de la déformation mécanique de la préforme, ainsi que la description des interfaces. Une section sur les dernières avancées du modèle de simulation du procédé par infusion, ainsi que les améliorations à apporter notamment sur la modélisation des effets capillaires et la modélisation de la phase post-infusion, clôt ce chapitre.

- Le Chapitre 3 décrit le modèle numérique qui permet d'intégrer à l'échelle macroscopique les effets capillaires locaux. Sa modélisation mathématique ainsi que la difficulté numérique associée, y sont présentées. Ensuite, les méthodes numériques qui permettent de résoudre ces problèmes sont décrites. Le modèle est ensuite validé, d'une part par une étude de convergence, et d'autre part par une confrontation avec des données expérimentales. L'infusion de pièce de type industriel est simulée en 2D et en 3D pour illustrer l'influence des effets capillaires sur le scénario de remplissage. Une transition vers la modélisation à l'échelle mésoscopique est ensuite décrite à la fin du chapitre.
- Le dernier chapitre (Chapitre 4) propose une première approche de la modélisation et simulation de la phase de post-infusion se basant sur la théorie de la consolidation en géo-mécanique. Une étude bibliographique sur la modélisation de la post-infusion est présentée en première partie. Deuxièmement, l'approche thermodynamique appliquée aux milieux poreux permettant d'obtenir les équations constitutives du problème est décrite. Les premières simulations sont ensuite présentées avec les améliorations à apporter au modèle.
- Une conclusion générale ainsi que les perspectives offertes à l'issue de la thèse sont présentées en dernière partie du manuscrit.

Modélisation du procédé d'infusion : cadre et avancées récentes

Sommaire

2.1	Cadre de la modélisation	28
2.2	Écoulements fluides	32
2.3	Résolution numérique du problème fluide	37
2.4	Modélisation des interfaces	44
2.5	Déformation mécanique des préformes	49
2.6	Simulation numérique de l'infusion	55
2.7	Conclusion sur l'état de l'art de la modélisation	71

2.1 Cadre de la modélisation

Cette section présente le cadre de la modélisation multi-physique du procédé et les notions qui nous permettent de formuler correctement les différents problèmes qui vont être couplés par la suite.

2.1.1 Couplage multi-physique

À l'échelle macroscopique, le matériau composite est considéré comme un **milieu homogène continu équivalent orthotrope**. La modélisation numérique du procédé d'infusion des matériaux composites à cette échelle est complexe. D'une part, les mécanismes physiques régissant le procédé doivent être correctement décrits, et d'autre part les paramètres d'entrée du modèle numérique, une fois développé, peuvent s'avérer compliqués à caractériser. En se basant sur la description du procédé (section 1.2), la simulation associée repose sur une modélisation **multi-physique** (Figure 2.1) décrivant notamment les écoulements de la résine à travers le drainant et le renfort, la déformation mécanique de la préforme pendant la phase de remplissage et de post-remplissage, et les phénomènes thermo-chimiques. Le couplage entre ces différents phénomènes constitue aussi une difficulté supplémentaire, tant au

niveau de la représentation mathématique, de la modélisation numérique mais également de la caractérisation expérimentale.

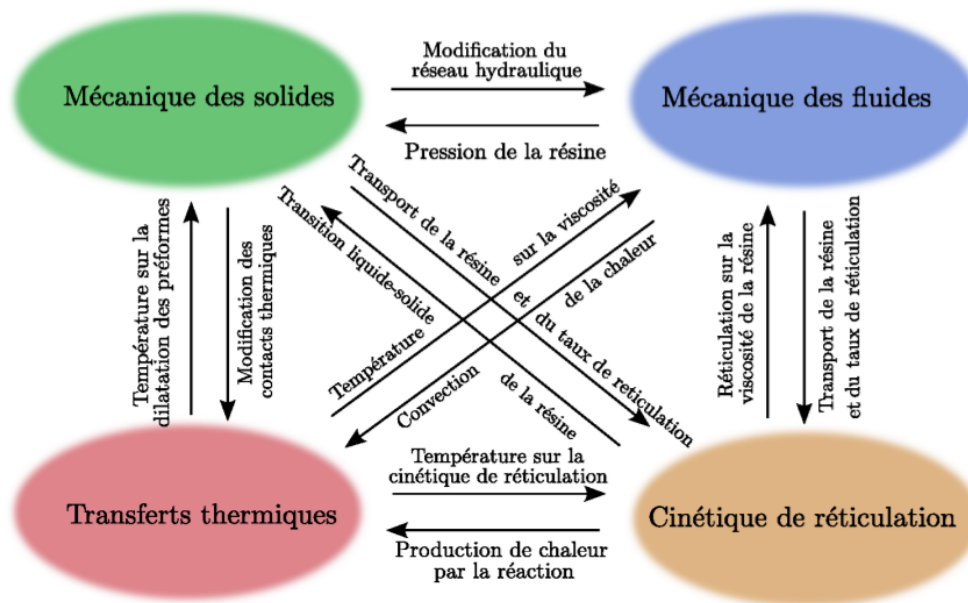


FIGURE 2.1 – Couplage multi-physique des différents mécanismes impliqués dans la modélisation des procédés par infusion - extrait de [23, 90]

Par ailleurs, l'agencement du drainant et de la préforme sous la bache à vide se prête à une approche **multi-domaine** [40, 54] illustrée sur la Figure 2.2 avec de bas en haut :

- une zone d'écoulement rapide dans le drainant (phase d'infusion),
- une zone d'écoulement plus lent dans la préforme ou zone imprégnée : préforme humide (phases d'infusion et de post-infusion),
- une zone non imprégnée : préforme sèche (phases de pré-infusion - compaction- et d'infusion).

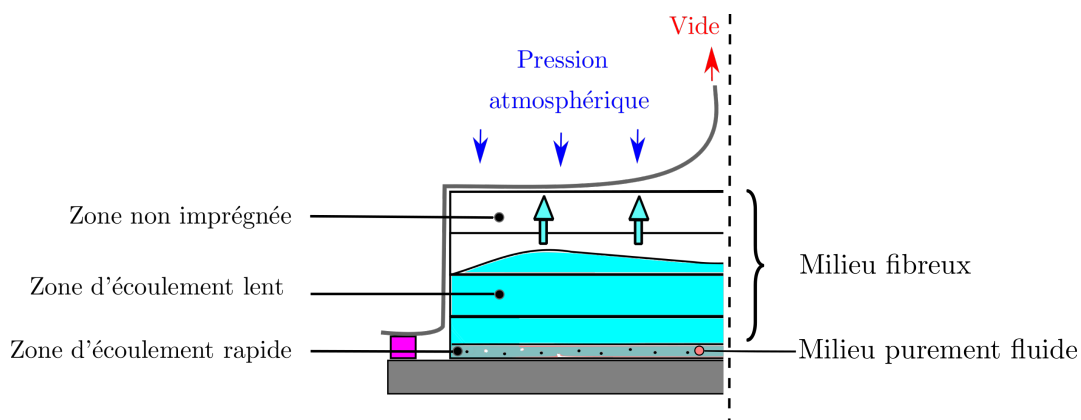


FIGURE 2.2 – Modélisation multi-domaine du procédé LRI

Ce chapitre a pour objectif de présenter un état de l'art de la modélisation complète du procédé à l'échelle **macroscopique**, qui porte sur le problème de la mécanique des fluides

et solides uniquement. Les phénomènes thermo-chimiques sont négligés, d'une part car on suppose que l'élaboration s'effectue dans un environnement isotherme, à une température empêchant la polymérisation de la matrice, et d'autre part les étapes de cuisson et de refroidissement ne sont pas prises en compte. La présence de tout additif chimique dans le mélange est également négligée.

Les limites du modèle existant sont ensuite soulevées afin d'apporter des solutions et augmenter ainsi la représentativité de la modélisation.

2.1.2 Description mécanique du problème

Les sollicitations que subit un corps induisent un changement (de position, de géométrie, etc.) depuis la configuration de référence vers une autre. Étudier cette évolution dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus (MMC) consiste à décrire dans le temps la loi de mouvement du corps considéré comme un milieu continu. Différentes configurations peuvent être alors utilisées pour exprimer les grandeurs mécaniques telles que la contrainte, la déformation ou la vitesse, associées à cette loi de mouvement.

On distingue en particulier trois configurations (représentées plus en détail dans la suite sur la Figure 2.8) : la configuration initiale Ω_0 , ou configuration matérielle, la configuration courante (celle de l'observateur) Ω_t et une configuration intermédiaire déformée Ω_i .

Si le mouvement du corps est décrit par rapport à une configuration de référence connue alors la description est dite Lagrangienne ou matérielle. En fonction du choix de la configuration de référence, deux types de formulations Lagrangiennes existent [42] : la formulation lagrangienne dite « totale » et celle dite « actualisée ». La formulation lagrangienne totale prend comme référence une configuration fixe habituellement la configuration initiale du corps, alors que la seconde formulation prend la dernière configuration déformée connue.

Par contre, si la configuration courante est prise comme référence, on parle de description instantanée ou spatiale dite Eulérienne.

2.1.3 Équations de conservation

Les équations de la MMC expriment la conservation de la masse - une équation scalaire, la conservation de la quantité de mouvement, ainsi que de son moment. Rappelons que nous nous plaçons dans le cas isotherme et ne considérons donc pas la conservation de l'énergie.

Rappel

La dérivée d'une quantité décrite par une fonction $\int_{\Omega(t)} \mathcal{C}(\underline{x}, t) dv$ définie sur un domaine $\Omega(t)$ se traduit par la somme de la variation en temps de $\mathcal{C}(\underline{x}, t)$ dans $\Omega(t)$ et du flux $\mathcal{C}(\underline{x}, t)\underline{v}$

à travers la frontière $\partial\Omega(t)$ du domaine $\Omega(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \mathcal{C}(\underline{x}, t) dv &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \mathcal{C}(\underline{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\partial\Omega(t)} \mathcal{C}(\underline{x}, t) \underline{v} \cdot \underline{n} ds \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \mathcal{C}(\underline{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\Omega(t)} \underline{\nabla} \cdot (\mathcal{C}(\underline{x}, t) \underline{v}) dv \quad (\text{Théorème de la divergence}) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \mathcal{C}(\underline{x}, t) dv &= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathcal{C}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\mathcal{C}(\underline{x}, t) \underline{v}) \right) dv \end{aligned} \quad (2.1)$$

En développant le membre de droite, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \mathcal{C}(\underline{x}, t) dv = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathcal{C}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \mathcal{C}(\underline{x}, t) + \mathcal{C}(\underline{x}, t) \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right) dv \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \mathcal{C}(\underline{x}, t) dv = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{d\mathcal{C}(\underline{x}, t)}{dt} + \mathcal{C}(\underline{x}, t) \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right) dv \quad (2.3)$$

où $\frac{d\mathcal{C}(\underline{x}, t)}{dt}$ est la dérivée particulière de la quantité $\mathcal{C}(\underline{x}, t)$ sur la configuration courante.

Conservation de la masse

La conservation de la masse d'un solide ou d'un fluide se traduit sur la configuration courante par l'invariance de la quantité $\int_{\Omega(t)} \rho(\underline{x}, t) dv$ pour tout domaine matériel $\Omega(t)$, *i.e.*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\underline{x}, t) dv = 0$$

où $\rho(\underline{x}, t)$ est la masse volumique de la particule solide ou fluide de coordonnée \underline{x} au temps t . L'équation de bilan de la masse s'obtient alors en remplaçant $\mathcal{C}(\underline{x}, t)$ par $\rho(\underline{x}, t)$ dans l'équation (2.1). Si de plus, les fonctions ρ et \underline{v} sont continûment différentiables, alors la conservation de la masse se traduit localement par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{ou } \frac{d\rho}{dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.5)$$

Le taux de dilatation volumique, *i.e.* la divergence de la vitesse $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$ peut donc s'écrire directement en fonction de la variation de la masse volumique (Eq. 2.5)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.6)$$

Dans la suite de ce manuscrit, la conservation de la masse est écrite simplement par

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = h \quad (2.7)$$

avec h le terme source/puits qui par exemple vaut zéro dans le cas des fluides incompressibles.

Conservation de la quantité de mouvement

Pour compléter l'équation de conservation de la masse, le bilan de la quantité de mouvement doit également être établi. Le principe de conservation de la quantité de mouvement (Eq. 2.8) exprime le fait que la dérivée en temps de la quantité de mouvement définie par $\int_{\Omega(t)} \rho(\underline{x}, t) \underline{v} dv$ attachée à un domaine matériel $\Omega(t)$, est équilibrée par la somme des forces de cohésion du matériau et les forces volumiques s'exerçant sur ce domaine. Les forces de cohésion sont exprimées grâce au tenseur de contraintes.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\underline{x}, t) \underline{v} dv = \int_{\Omega(t)} \underline{f}_v dv + \int_{\partial\Omega(t)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} ds \quad (2.8)$$

où $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ sont les forces de contact sur la frontière $\partial\Omega(t)$ et \underline{f}_v des forces volumiques. L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'obtient, d'une part en remplaçant \mathcal{C} par $\rho \underline{v}$ dans l'équation (2.1), et d'autre part en appliquant le théorème de la divergence sur le deuxième terme du membre de droite de l'équation (2.8). La forme locale s'exprime alors par

$$\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v} \otimes \underline{v}) = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v \quad (2.9)$$

où \otimes est l'opérateur dyadique¹.

Conservation du moment de la quantité de mouvement

Considérant l'équation (2.8), la conservation du moment de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho(\underline{x}, t) \underline{v} dv = \int_{\Omega(t)} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{f}_v dv + \int_{\partial\Omega(t)} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} ds \quad (2.10)$$

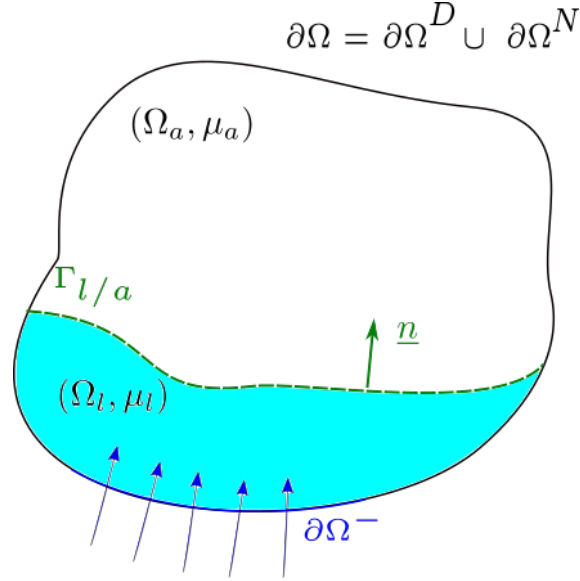
avec \underline{x}_0 une origine arbitraire.

Un développement détaillé de l'équation (2.10) qui ne sera pas présenté dans ce travail, conduit à l'expression de la symétrie du tenseur des contraintes réelles $\underline{\underline{\sigma}}$, dite contraintes de Cauchy.

2.2 Écoulements fluides

Considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^{\dim}$ délimité par une frontière $\partial\Omega$ (dim étant la dimension spatiale dim=2 ou dim=3). Ω est rempli de deux fluides non-miscibles, un liquide de viscosité μ_l occupant la région Ω_l et un gaz (par exemple, l'air) de viscosité μ_a occupant la région Ω_a telle que $\Omega = \Omega_l \cup \Omega_a$, comme illustré sur la Figure 2.3. L'interface entre les deux domaines est désignée par $\Gamma_{l/a}$ telle que $\Gamma_{l/a} = \Omega_l \cap \Omega_a$. La frontière $\partial\Omega$ peut se décomposer en 2 parties selon le type de conditions limites appliquées : $\partial\Omega = \partial\Omega^D \cup \partial\Omega^N$ et $\partial\Omega^D \cap \partial\Omega^N = \emptyset$. Les bords $\partial\Omega^D$ et $\partial\Omega^N$ correspondent respectivement aux conditions limites de type Dirichlet et Neumann. Le bord de flux entrant est décrit par $\partial\Omega^-$ défini comme la partie du bord où la vitesse est entrante. La normale à l'interface $\Gamma_{l/a}$ est \underline{n} .

1. L'opérateur dyadique \otimes peut être défini tel que $(\underline{v} \otimes \underline{v})_{ij} = v_i v_j$

FIGURE 2.3 – Description 2D du domaine fluide Ω

2.2.1 Loi de comportement de la résine

Dans le contexte des procédés d'élaboration des matériaux composites, les résines polymériques utilisées sont des fluides supposés newtoniens incompressibles [57, 58, 88] avant la phase de gélification. La viscosité du fluide est constante par rapport à la pression qu'elle subit. De plus, l'air est également considéré ici comme un fluide newtonien très peu visqueux. En conséquence, le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit dans le domaine Ω comme

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(v) - p\underline{\underline{I}} \quad \mu = \begin{cases} \mu_l & \text{dans } \Omega_l \\ \mu_a & \text{dans } \Omega_a \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\text{avec } \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(v) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}v + \underline{\underline{\nabla}}^T v)$$

avec v la vitesse, p la pression hydrostatique de la résine, $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(v)$ le tenseur des taux de déformations, μ_l la viscosité de la résine, μ_a celle de l'air et $\underline{\underline{I}}$ le tenseur identité. Par ailleurs, nous supposons que durant toute la phase d'infusion la résine est non-réactive.

Les variables primaires correspondant à la loi de comportement du fluide (Eq. 2.11) sont la vitesse (grandeur vectorielle) et la pression (scalaire).

2.2.2 Écoulement dans le drainant

Dans le drainant, l'écoulement d'un fluide (résine ou air) est décrit par les deux équations (2.7) et (2.9) avec la forme du tenseur des contraintes décrite par l'équation (2.11). On en déduit l'équation de Navier-Stokes

$$\rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \underline{\underline{\nabla}}v \right) = -\underline{\underline{\nabla}}p + \mu \underline{\underline{\Delta}}v + \underline{\underline{f}}_v \quad (2.12)$$

Une analyse dimensionnelle montre que le type d'écoulement (de laminaire à turbulent) est défini par le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho_f v_{cr} l_{cr}}{\mu}$$

qui exprime le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses avec v_{cr} et l_{cr} respectivement la vitesse et la longueur caractéristiques. Théoriquement, un écoulement ayant un Re en dessous de 2000 est considéré comme laminaire. Si le Re est compris entre 2000 et 3000, l'écoulement est considéré comme transitoire et turbulent au-delà de 3000.

Dans l'hypothèse d'un écoulement laminaire, ce système (Eq. 2.12) peut se simplifier en un système linéaire, les équations de Stokes.

Équations de Stokes

Pour des écoulements à très faible Reynolds ($Re \ll 1$), les forces d'inertie dans l'équation (2.12) peuvent être négligées, nous obtenons les équations de Stokes (Eq. 2.13). Dans la suite du manuscrit, les variables liées aux équations de Stokes porteront l'exposant « s ».

$$\begin{aligned}
 -\underline{\nabla} \cdot (2\mu \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(v^s)) + \underline{\nabla} p^s &= \underline{f}_v^s && \text{dans } \Omega^s \\
 \underline{\nabla} \cdot v^s &= h^s && \text{dans } \Omega^s \\
 v^s &= \underline{v}_{ext}^{s,D} && \text{sur } \partial\Omega^{s,D} \\
 p^s &= \underline{n}^s \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^s \cdot \underline{n}^s && \text{sur } \partial\Omega^{s,N}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

avec \underline{n}^s la normale aux bords du domaine de Stokes, $\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^s \cdot \underline{n}$ la valeur de la contrainte normale imposée sur les bords de type Neumann $\partial\Omega^{s,N}$ et $\underline{v}_{ext}^{s,D}$ la vitesse imposée aux bords de type Dirichlet $\partial\Omega^{s,D}$, \underline{f}_v^s les forces volumiques et h^s les termes source/puits dans le domaine de Stokes.

Compte tenu des débits de remplissage du drainant de l'ordre de 10^{-5} m/s mesurés expérimentalement par l'équipe d'Hexcel ainsi que l'épaisseur du drainant (de l'ordre de 0,7 mm), l'écoulement des résines de type époxyde dans le drainant peut être considéré comme laminaire. Par conséquent, les équations de Stokes sont considérées comme suffisantes pour décrire l'écoulement dans le drainant.

2.2.3 Écoulement dans la préforme

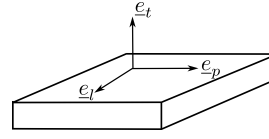
La description de l'écoulement dans la préforme résulte de l'homogénéisation à l'échelle macroscopique d'un écoulement fluide à travers le milieu fibreux. Les écoulements diphasiques en milieu poreux peuvent être décrits par les équations macroscopiques de Darcy ou de Brinkman. Dans notre étude, la préforme fibreuse est assimilée à un milieu homogène équivalent caractérisé par deux paramètres : la porosité ϕ reliée à la fraction volumique de fibres τ_{vf} par $\phi + \tau_{vf} = 1$, et tenseur de la perméabilité $\underline{\underline{K}}$. La perméabilité est une grandeur macroscopique qui caractérise la capacité d'un milieu poreux à se laisser imprégner par un fluide. Les composantes de cette grandeur se mesurent en m^2 .

Par nature, les matériaux composites Haute Performance sont des milieux fibreux hétérogènes et orthotropes, ce qui explique que l'écoulement de la résine à travers ce type de milieu varie selon l'orientation et la configuration des fibres. La perméabilité de ce matériau a donc un caractère orthotrope étant donné qu'elle traduit globalement la configuration du renfort, notamment l'orientation des fibres, l'arrangement des plis ainsi que le taux volumique de fibres utilisé.

En supposant, que les axes du système de coordonnées orthonormales (p, t, l) coïncident avec les normales des trois plans de symétrie du matériau orthotrope, le tenseur de perméabilité

s'écrit :

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_{loc} = \begin{pmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_t & 0 \\ 0 & 0 & K_l \end{pmatrix}_{(p,t,l)}$$



avec K_i la perméabilité dans la direction i , $i \in \{p, t, l\}$ et « loc » se réfère au repère local ou matériel.

Dans des cas plus généraux, les vecteurs propres des tenseurs varient d'un point à l'autre et, par conséquent, ne correspondent pas au repère global. Dans ce cas, le tenseur $\underline{\underline{K}}$ est exprimé dans le repère global par : $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{K}}_{loc} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$, où $\underline{\underline{Q}}$ est le tenseur orthogonal exprimant le passage des bases locales aux bases globales.

Équations de Darcy

D'un point de vue macroscopique, l'écoulement de la résine dans la préforme peut être décrit par les équations de Darcy [53], qui relient la vitesse \underline{v} au gradient de pression p , ici pouvant être associé à la mise sous-vide du système pendant le procédé d'infusion et aux phénomènes capillaires au front fluide. Pour des propriétés homogènes dans le domaine d'étude, les équations de Darcy s'écrivent avec les variables portant l'exposant « d » telles que :

$$\begin{aligned} \mu \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{v}^d + \nabla p^d &= \underline{f}_v^d && \text{dans } \Omega^d \\ \nabla \cdot \underline{v}^d &= h^d && \text{sur } \Omega^d \\ \underline{v}^d &= \underline{v}_{ext}^{d,D} && \text{sur } \partial\Omega^{d,D} \\ p^d &= \underline{n}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^d \cdot \underline{n}^d && \text{sur } \partial\Omega^{d,N} \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec \underline{n}^d la normale aux bords, $\underline{n}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^d \cdot \underline{n}^d$ la valeur de la contrainte imposée sur $\partial\Omega^{d,N}$ et $\underline{v}_{ext}^{d,D}$ la vitesse imposée aux bords $\partial\Omega^{d,D}$, \underline{f}_v^d les forces volumiques et h^d les termes source/puits dans le domaine fluide de Darcy.

La vitesse réelle locale \underline{v}_r du front fluide peut être exprimée en fonction de la vitesse équivalente de Darcy \underline{v}^d et de la porosité du milieu.

Considérons un écoulement unidirectionnel dans un milieu poreux, et S une surface perpendiculaire à cet écoulement. La vitesse de Darcy v^d est alors définie par

$$v^d = \frac{Q_v}{S} \quad (2.15)$$

avec Q_v le débit à travers la surface S , qui s'exprime

$$Q_v = \int_S v_r ds$$

L'équation (2.15) s'exprime alors par

$$\begin{aligned} v^d &= \frac{1}{S} \int_S v_r ds \\ v^d &= \frac{\phi}{S \phi} \int_S v_r ds \\ v^d &= \frac{\phi}{S_r} \int_{S_r} v_r ds \end{aligned}$$

avec S_r la surface fluide.

Si S_r est infinitésimale alors v_r est constante et est exprimée par

$$v_r = \frac{v^d}{\phi}$$

Dans le cas d'un écoulement avec un débit élevé, les effets inertiels peuvent devenir significatifs. De ce fait, une généralisation de la loi de Darcy connue sous le nom de Forchheimer [9, 123] est plus adéquate en rajoutant à l'équation du mouvement un terme non-linéaire décrivant les effets inertiels.

Équations de Brinkman

Les équations de Brinkman [33] diffèrent des équations de Darcy par un terme diffusif supplémentaire, qui permet d'imposer le non-glissement aux parois solides. Les équations de Brinkman permettent donc de prendre en compte le frottement de la résine sur les fibres, et est adaptée pour des écoulements dans des milieux poreux à perméabilités élevées.

Pour des propriétés homogènes dans le domaine d'étude, l'équation de Brinkman s'écrit avec les variables portant l'exposant « b ». L'équivalent de l'équation (2.14) s'écrit donc

$$\underline{\underline{\mu K^{-1}}} \underline{v}^b + \underline{\nabla} p^b + \underline{\mu_{eff} \Delta} \underline{v}^b = \underline{f}_v^b \quad (2.16)$$

avec $\underline{\mu_{eff}}$ la viscosité effective, \underline{f}_v^b les forces volumiques dans le domaine de Brinkman.

Ce modèle est également adapté pour des régions de transition d'un écoulement en milieu poreux à écoulement purement fluide. En effet, si la perméabilité tend vers l'infini, on retrouve dans le cas des fluides incompressibles, les équations de Stokes. Par contre, si elle tend vers des valeurs faibles, on retrouve les équations de Darcy. Cependant, une difficulté de ce modèle est la définition et le sens physique de la viscosité effective. On la prend généralement égale à la viscosité du fluide, par défaut. Dans notre cas, compte tenu des valeurs de la perméabilité envisagée ($10^{-13} - 10^{-16} \text{ m}^2$) et en prenant une viscosité effective égale à la viscosité du fluide, le terme de diffusion dans l'équation de Brinkman est négligeable.

Par ailleurs, compte tenu de la très faible perméabilité des renforts considérés dans ces travaux, l'imprégnation de la préforme est généralement très lente. Le régime d'écoulement dans la préforme peut être aussi considéré comme laminaire. Par conséquent, en ce qui concerne le problème fluide, les équations de Stokes et de Darcy sont donc considérées comme suffisantes pour décrire les écoulements respectivement dans le drainant et dans la préforme.

2.2.4 Conditions d'interface drainant/préforme

La conservation de la quantité de fluide traversant l'interface entre la préforme et le drainant implique la continuité de la vitesse normale à cette interface

$$\underline{v}^s \cdot \underline{n}^s + \underline{v}^d \cdot \underline{n}^d = 0. \quad (2.17)$$

La normale à l'interface vérifie la condition $\underline{n}^s = -\underline{n}^d = \underline{n}$, l'équation (2.17) s'exprime alors sous la forme

$$\underline{v}^s \cdot \underline{n} = \underline{v}^d \cdot \underline{n} \quad (2.18)$$

La continuité de la contrainte normale à l'interface permet également d'exprimer la seconde condition d'interface. En faisant l'hypothèse que la contrainte dans la préforme est liée uniquement à la pression hydrostatique telle que $\underline{\underline{\sigma}}^d = -p^d \underline{I}$ [75], on obtient

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \underline{n} &= \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^d \cdot \underline{n} \\ \text{et donc : } \underline{n} \cdot 2\mu \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v}^s) \cdot \underline{n} &= (p^s - p^d) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour contrôler la vitesse tangentielle à l'interface drainant/préforme, une condition de type BJS (Beaver-Joseph-Saffman) [18, 103] traduisant le frottement entre les couches de fluide peut être appliquée à l'interface. Cette condition décrite par l'équation (2.20) stipule que la différence entre la vitesse d'imprégnation du milieu poreux et la vitesse de glissement du fluide est proportionnelle aux taux de cisaillement, *i.e.* la vitesse tangentielle est non nulle à l'interface drainant/préforme.

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \underline{\tau} &= -\alpha \underline{K}^{-\frac{1}{2}} (\underline{v}^s - \underline{v}^d) \cdot \underline{\tau} \\ \Rightarrow \underline{n} \cdot 2\mu \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v}^s) \cdot \underline{\tau} &= -\alpha \underline{K}^{-\frac{1}{2}} (\underline{v}^s - \underline{v}^d) \cdot \underline{\tau} \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec α un coefficient de glissement, et $\underline{\tau}$ tout vecteur tangentiel à l'interface. Comme la vitesse dans le drainant est largement supérieure à la vitesse d'imprégnation dans la préforme, on a $\underline{v}^s \gg \underline{v}^d$; la vitesse de Darcy dans le terme de droite dans l'équation (2.20) est donc très souvent négligée [103].

2.3 Résolution numérique du problème fluide

Dans le cadre des procédés d'élaboration des matériaux composites, le domaine de calcul Ω (Figure 2.4) est subdivisé en deux domaines représentant le drainant par Ω^s et la préforme par Ω^d et séparés par une interface $\Gamma_{s/d} = \Omega^s \cap \Omega^d$. Les zones imprégnée et non-imprégnée par la résine sont respectivement désignées par les indices « l » et « a ». L'interface entre ces deux zones forme le front fluide qui est désigné par $\Gamma_{l/a} = (\Omega_l^d \cap \Omega_a^d) \cup (\Omega_l^s \cap \Omega_a^s)$.

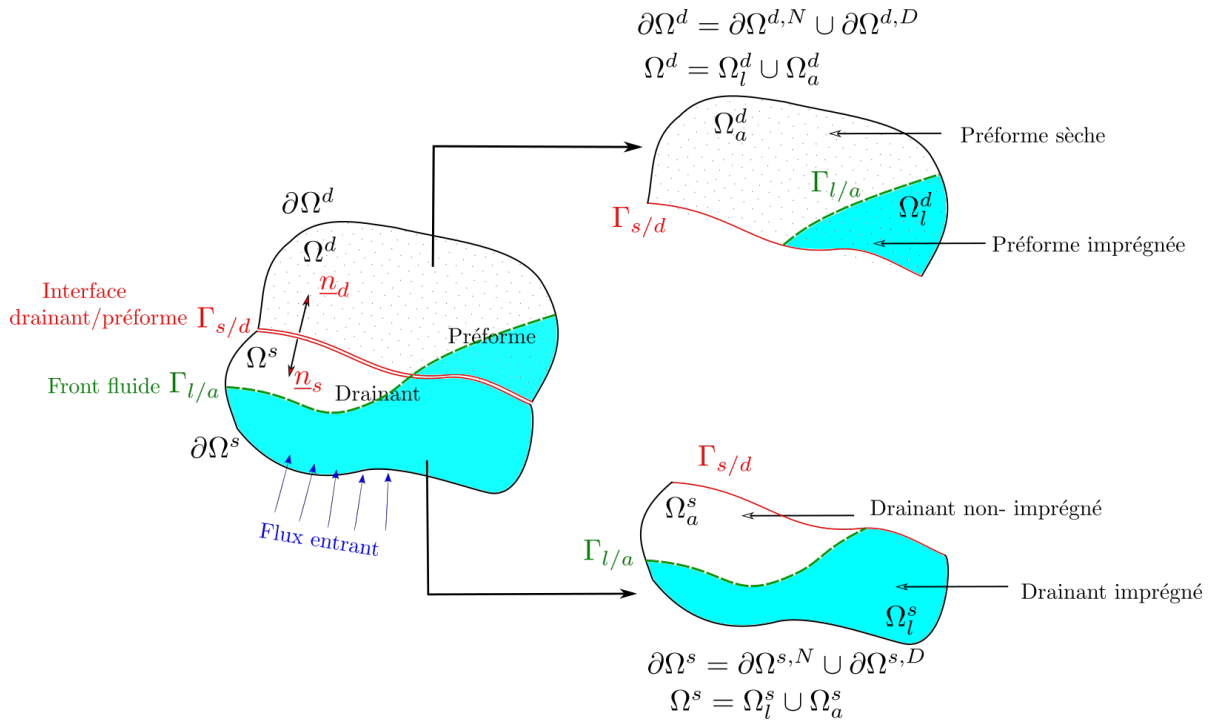


FIGURE 2.4 – Description 2D de l'ensemble du domaine fluide (drainant Ω^s + préforme Ω^d)

Le modèle numérique sur lequel nous travaillons est implémenté dans le logiciel Z-set [109], basé sur la **méthode des éléments-finis**.

2.3.1 Formulation intégrale faible du problème

Dans l'objectif de résoudre le problème par la méthode des éléments-finis, la formulation intégrale faible du problème doit être établie. L'écriture de cette formulation faible du problème fluide dépend du couplage des deux problèmes d'écoulement de Stokes et de Darcy. Une description des différents couplages possibles est de ce fait présentée en premier dans la sous-section suivante.

Approche monolithique/découplé

Deux méthodes existent pour traiter deux phénomènes couplés : l'approche **monolithique** et l'approche **découplée** (ici, itérative). L'approche monolithique consiste à résoudre en un seul problème les équations représentant les phénomènes à coupler tandis que la seconde approche résout séparément les problèmes et définit un critère de convergence qui permet de coupler les problèmes [40, 54, 55].

Dans le cadre de cette étude, un couplage monolithique est choisi. La résolution des équations de Stokes et de Darcy en un seul problème permet de s'affranchir des conditions de convergence. La formulation intégrale faible du problème couplé est obtenue en sommant les formulations faibles des équations de Stokes et de Darcy. Pour gérer au mieux l'(in)compressibilité du fluide, une formulation mixte reposant sur la résolution simultanée de ces équations en vitesse-pressure est choisie pour les problèmes de Stokes et Darcy.

Les espaces fonctionnels (2.21) de Lebesgue des fonctions de carré sommable $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et de

Sobolev $\mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot, \Omega)$ et $\mathcal{H}^1(\Omega)$ sont introduits pour établir la formulation faible des équations.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\Omega) &= \{q : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} q^2 d\Omega < \infty \} \\ \mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot, \Omega) &= \{\underline{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)^{\dim} \mid \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \} \\ \mathcal{H}^1(\Omega) &= \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid \underline{\nabla} u \in \mathcal{L}^2(\Omega)^{\dim} \} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Il n'existe cependant pas de discrétisation du couple vitesse/pression, liée à des éléments simplex iso-paramétriques, stable à la fois pour les problèmes de Stokes et de Darcy. En conséquence, la formulation discrète obtenue devra être stabilisée.

Formulation intégrale faible des équations de Stokes

La formulation faible des équations de Stokes s'obtient en multipliant l'équation (2.13) par une fonction test en vitesse \underline{w}^s et l'équation de la conservation de la masse (2.6) par une fonction test en pression q^s , et en intégrant sur le volume la somme des équations résultantes. Une intégration par parties (IPP) des termes est ensuite effectuée.

Soit les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^s &= \mathcal{L}^2(\Omega^s) \\ \mathcal{V}^s &= \{\underline{v}^s \in \mathcal{H}^1(\Omega^s)^{\dim} \mid \underline{v}^s = \underline{v}_{ext}^{s,D} \text{ sur } \partial\Omega^{s,D}\} \\ \mathcal{V}_0^s &= \{\underline{v}^s \in \mathcal{H}^1(\Omega^s)^{\dim} \mid \underline{v}^s = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega^{s,D}\} \end{aligned}$$

Le problème s'écrit alors :

Trouver le couple $(\underline{v}^s, p^s) \in (\mathcal{V}^s \times \mathcal{Q}^s)$ tel que :

$$\begin{aligned} &\langle 2\mu \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{v}^s) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{w}^s) \rangle_{\Omega^{s,N}} - \langle (2\mu \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{v}^s) \cdot \underline{n}^s), \underline{w}^s \rangle_{\partial\Omega^s} - \langle p^s, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}^s \rangle_{\Omega^s} \\ &+ \langle p^s, \underline{w}^s \cdot \underline{n}^s \rangle_{\partial\Omega^{s,N}} + \langle \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^s, q^s \rangle_{\Omega_s} = \langle \underline{f}_v^s, \underline{w}^s \rangle_{\Omega^s} + \langle h^s, q^s \rangle_{\Omega^s} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$\forall (\underline{w}^s, q^s) \in (\mathcal{V}_0^s \times \mathcal{Q}^s)$ avec $\langle a, b \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} a b dv$, $\langle A : B \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} A : B dv$ le produit scalaire pour des fonctions scalaires ou tensorielles au sens \mathcal{L}^2 .

Formulation intégrale faible des équations de Darcy

Soit les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^d &= \mathcal{L}^2(\Omega^d) \\ \mathcal{V}^d &= \{\underline{v}^d \in \mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot, \Omega^d) \mid \underline{v}^d \cdot \underline{n}^d = v_{ext}^{d,D} \text{ sur } \partial\Omega^{d,D}\} \\ \mathcal{V}_0^d &= \{\underline{v}^d \in \mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot, \Omega^d) \mid \underline{v}^d \cdot \underline{n}^d = 0 \text{ sur } \partial\Omega^{d,D}\} \end{aligned}$$

La formulation faible des équations de Darcy, s'obtient également en multipliant l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (Eq. 2.14) par la fonction test en vitesse \underline{w}^d , l'équation de la conservation de la masse par une fonction test en pression q^d et ensuite en sommant les équations résultantes. La formulation dite *primale* est obtenue en intégrant par parties le terme associé à la conservation de la masse $\langle \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^d, q^d \rangle_{\Omega^d}$. Une seconde variante dite *duale* est obtenue si l'intégration par partie est appliquée sur le terme de gradient de pression $\langle \underline{w}^d, \underline{\nabla} p^d \rangle_{\Omega^d}$.

Dans ce travail, la formulation duale est choisie afin d'avoir les mêmes espaces fonctionnels des éléments finis pour la pression et la vitesse pour le problème de Darcy que pour le problème de Stokes. Cette formulation s'écrit alors

Trouver le couple $(\underline{v}^d, p^d) \in \mathcal{V}^d \times \mathcal{Q}^d$ tel que :

$$\begin{aligned} & \langle \mu \underline{K}^{-1} \underline{v}^d, \underline{w}^d \rangle_{\Omega^d} - \langle p^d, \nabla \cdot \underline{w}^d \rangle_{\Omega^d} + \langle \nabla \cdot \underline{v}^d, q^d \rangle_{\Omega^d} \\ & = \langle \underline{f}_v^d, \underline{w}^d \rangle_{\Omega^d} + \langle \underline{n}^d \cdot \underline{\sigma}_{ext} \cdot \underline{n}^d, \underline{w}^d \cdot \underline{n}^d \rangle_{\partial\Omega^{d,N}} + \langle h^d, q^d \rangle_{\Omega^d} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\forall (\underline{w}^d, q^d) \in \mathcal{V}_0^d \times \mathcal{Q}^d.$$

Remarque : L'expression de la contrainte au niveau des interfaces en tant que condition de Neumann, via le terme $\langle \underline{n}^d \cdot \underline{\sigma}_{ext} \cdot \underline{n}^d, \underline{w}^d \cdot \underline{n}^d \rangle_{\partial\Omega^{d,N}}$ est une raison supplémentaire pour notre choix de la forme duale. Cela sera présenté dans le chapitre suivant.

2.3.2 Formulation éléments-finis stabilisée

La résolution par éléments-finis consiste à discrétiser le domaine de calcul Ω à l'aide d'un maillage \mathcal{D}_h composé d'éléments désignés par e , triangulaires (en 2D) ou tétraédriques (en 3D), tel que

$$\Omega_h = \bigcup_{e \in \mathcal{D}_h} e.$$

Un élément mixte en vitesse-pression est choisi pour cette étude. Les solutions (\underline{v}^m, p^m) sont respectivement approchées par $(\underline{v}_h^m, p_h^m)$, appartenant aux espaces de dimension finie $(\mathcal{V}_h^m \times \mathcal{Q}_h^m)$ sous-espaces de $(\mathcal{V}^m \times \mathcal{Q}^m)$.

Pour que la formulation discrète du problème de Stokes ou de Darcy ait une solution unique (ou de manière équivalente, soit stable), deux solutions sont envisageables. La première consiste à utiliser des approximations compatibles de la vitesse et de la pression pour les problèmes de Stokes et de Darcy. Par exemple, l'approximation polynomiale quadratique en vitesse et linéaire en pression, P2/P1, satisfait la condition de stabilité de Ladyshenskaya - Brezzi - Babuška (LBB), et conduit à l'existence et l'unicité de la solution pour Stokes et aussi pour la forme primale du problème de Darcy. La difficulté est qu'il n'existe pas d'élément analogue valide à la fois pour le problème de Stokes et pour la forme duale de Darcy que nous avons retenue. D'où la deuxième solution envisagée ici, qui est d'utiliser un couple non compatible pour Stokes et Darcy, puis, d'utiliser une méthode de stabilisation consistant à ajouter des termes à la formulation discrète sans ajouter d'erreur de consistance.

Stabilisation multi-échelle

Dans notre cas, les champs de vitesse et pression sont approchés par des fonctions linéaires par morceau et continues (approximation P1/P1), la formulation éléments-finis est ensuite stabilisée par une méthode multi-échelle de type VMS (*Variational MultiScale*). La méthode de stabilisation multi-échelle consiste à décomposer les espaces de définition de la

solution exacte en la somme directe de l'espace d'approximation par éléments-finis et de son complément représentant les effets sous-grilles :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^m &= \mathcal{V}_h^m \oplus \mathcal{V}'^m \\ \mathcal{Q}^m &= \mathcal{Q}_h^m \oplus \mathcal{Q}'^m\end{aligned}$$

où $m \in \{s, d\}$ et $\mathcal{V}'^m, \mathcal{Q}'^m$ sont les compléments respectifs de $\mathcal{V}_h^m, \mathcal{Q}_h^m$.

La solution exacte est donc la somme de deux termes définis à différentes échelles. Le premier représente la solution éléments-finis dite *solution calculable* et le second représente les termes dits *sous-grilles* qui ne peuvent pas être captés par le maillage et dont l'effet sur la solution éléments-finis doit être pris en compte.

Dans notre cas, les solutions (\underline{v}^m, p^m) ainsi que les fonctions tests (\underline{w}^m, q^m) sont décomposées de la manière suivante

$$\begin{aligned}\underline{v}^m &= \underline{v}_h^m + \underline{v}'^m, & p^m &= p_h^m + p'^m \\ \underline{w}^m &= \underline{w}_h^m + \underline{w}'^m, & q^m &= q_h^m + q'^m\end{aligned}$$

où l'indice « h » représente les termes éléments-finis et l'exposant « ' » les termes sous-grilles.

En injectant cette décomposition dans la formulation intégrale faible (Eq. 2.22, 2.23), deux équations représentant chacune une échelle différentes sont obtenues : échelle **calculable** (échelle éléments-finis) et échelle **non calculable** (échelle sous-grille). Le principe de la méthode consiste donc à approcher les termes sous-grilles qui apparaissent dans le système d'équations représentant l'échelle calculable. Plusieurs méthodes découlent de la technique utilisée pour approcher ces termes sous-grilles : la méthode *Algebraic SubGrid Scale* (ASGS) [2, 12, 13, 14, 46, 64], la méthode *Orthogonal SubGrid Scale* (OSGS) [2, 47, 48] et la méthode *Hugues Variational Method* (HVM) [68, 69] en sont des exemples.

Notre choix se porte sur la méthode ASGS [13] car elle stabilise à la fois la formulation EF du problème de Stokes et de Darcy, permettant de définir les solutions des deux problèmes dans les mêmes espaces d'approximation, adaptée à notre approche unifiée. Elle consiste à exprimer les termes sous-grilles en fonction du résidu EF et de paramètres de stabilisation. Plus précisément, la composante sous-grille de la vitesse est exprimée en fonction du résidu éléments-finis de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, et celle de la pression est exprimée en fonction du résidu EF de l'équation de la conservation de la masse.

Formulation EF stabilisée - Stokes

Pour le problème de Stokes, les termes sous-grilles sont calculés en fonction du résidu EF associé à une approximation P1/P1. Le résidu EF résultant du bilan de la quantité de mouvement et celui du bilan de la masse noté respectivement par $\mathcal{R}_{h,1}^s$ et $\mathcal{R}_{h,2}^s$ du système de Stokes s'écrivent

$$\mathcal{R}_{h,1}^s = -\underline{\nabla} \cdot (2\mu \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{v}_h^s)) + \underline{\nabla} p_h^s - \underline{f}_v^s \quad (2.24)$$

$$\mathcal{R}_{h,2}^s = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^s - h^s \quad (2.25)$$

Comme la vitesse \underline{v}_h est linéaire par élément, le premier terme du membre de droite de l'équation (2.24) s'annule. Par conséquent, sur un élément e , les termes sous-grilles s'expriment par

$$\begin{aligned}\underline{v}'^s &\approx -\tau_{p,e}^s \mathcal{R}_{h,1}^s \approx -\tau_{p,e}^s (\underline{\nabla} p_h^s - \underline{f}_v^s) \\ p'^s &\approx -\tau_{v,e}^s \mathcal{R}_{h,2}^s \approx -\tau_{v,e}^s (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^s - h^s)\end{aligned} \quad (2.26)$$

avec $\tau_{v,e}^s$ et $\tau_{p,e}^s$ les paramètres de stabilisation qui s'expriment en fonction de la viscosité, de la constante dite de stabilisation c_1^s (dans notre cas, égale à 2 [2]) et de la taille de l'élément h_e .

$$\begin{aligned}\tau_{v,e}^s &= c_1^s \mu \\ \tau_{p,e}^s &= \frac{1}{c_1^s \mu} h_e^2\end{aligned}$$

La formulation EF stabilisée du problème de Stokes s'écrit donc :

Trouver le couple $(\underline{v}_h^s, p_h^s) \in (\mathcal{V}_h^s \times \mathcal{Q}_h^s)$ tel que :

$$\begin{aligned}& \langle 2\mu \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{v}_h^s) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{w}_h^s) \rangle_{\Omega_h^s} - \langle p_h^s, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^s \rangle_{\Omega_h^s} - \langle \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^s, q_h^s \rangle_{\Omega_h^s} \\ & + \boxed{\sum_e \tau_{p,e}^s \langle \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^s, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^s \rangle_{\Omega_h^{s,e}} + \sum_e \tau_{v,e}^s \langle \underline{\nabla} p_h^s, \underline{\nabla} q_h^s \rangle_{\Omega_h^{s,e}}} \\ & = \langle \underline{f}_v^s, \underline{w}_h^s \rangle_{\Omega_h^s} + \langle h^s, q_h^s \rangle_{\Omega_h^s} + \langle \underline{n}^s \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^s \cdot \underline{n}^s, \underline{w}_h^s \cdot \underline{n}^s \rangle_{\partial \Omega_h^{s,N}} \\ & + \boxed{\sum_e \tau_{v,e}^s \langle -\underline{f}_v^s, \underline{\nabla} q_h^s \rangle_{\Omega_h^{s,e}} + \sum_e \tau_{p,e}^s \langle -h^s, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^s \rangle_{\Omega_h^{s,e}}}\end{aligned}\tag{2.27}$$

$\forall (\underline{w}_h^s, q_h^s) \in (\mathcal{V}_{0,h}^s \times \mathcal{Q}_h^s)$ et \sum_e traduit la somme sur tous les éléments e du problème, et $\mu = \mu_l$ ou μ_a selon le domaine dans lequel on se trouve. Les termes encadrés dans l'équation (2.27) sont les termes résultant de la stabilisation ASGS, le terme $\sum_e \tau_{p,e}^s \langle \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^s, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^s \rangle_{\Omega_h^{s,e}}$ résulte de la décomposition de la pression et améliore l'imposition du terme lié à la compressibilité du fluide $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$.

Formulation EF stabilisée - Darcy

De la même manière que précédemment, les termes sous-grilles sur un élément e pour le problème de Darcy s'expriment en fonction des résidus EF et sont définis par

$$\underline{v}^{d'} \approx -\underline{\underline{\tau}}_{v,e}^d \left(\mu \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{v}_h^d + \underline{\nabla} p_h^d - \underline{f}_v^d \right)\tag{2.28}$$

$$p^{d'} \approx -\tau_{p,e}^d (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^d - h^d)\tag{2.29}$$

avec $\underline{\underline{\tau}}_{v,e}^d$ (Eq. 2.30) et $\tau_{p,e}^d$ (Eq. 2.31) les paramètres de stabilisation exprimés en fonction de la taille des mailles h_e , la géométrie (L_0 la longueur caractéristique du domaine de Darcy), les propriétés du fluide et la perméabilité du milieu.

$$\underline{\underline{\tau}}_{v,e}^d = \frac{h_e}{c_u L_0 \mu} \underline{\underline{K}}\tag{2.30}$$

$$\tau_{p,e}^d = \frac{\mu c_p L_0 h_e}{K_m}\tag{2.31}$$

où c_u et c_p sont des constantes de stabilisation valant chacune 1 dans cette étude. K_m est une perméabilité équivalente calculée par

$$K_m = \frac{1}{\dim} \text{trace}(\underline{\underline{K}})$$

Puisque la perméabilité est un tenseur dans le cas orthotrope, le paramètre de stabilisation $\underline{\tau}_{v,e}^d$ est également représenté par un tenseur ; cette spécificité n'étant pas définie dans la version initiale développée par Badia et Codina dans [13], a été introduite dans les travaux de Blais *et al.* [23].

La formulation discrète finale s'écrit alors :

Trouver le couple $(\underline{v}_h^d, p_h^d) \in (\mathcal{V}_h^d \times \mathcal{Q}_h^d)$ tel que :

$$\begin{aligned}
& \langle \mu \underline{K}^{-1} \underline{v}_h^d, \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^d} - \langle p_h^d, \nabla \cdot \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^d} + \langle \underline{n}^d \cdot \underline{\sigma}_{ext}^d \cdot \underline{n}^d, \underline{w}_h^d \cdot \underline{n}^d \rangle_{\Omega_h^{d,N}} + \langle \nabla \cdot \underline{v}_h^d, q_h^d \rangle_{\Omega_h^d} \\
& + \boxed{\sum_e \tau_{p,e}^d \langle \nabla \cdot \underline{v}_h^d, \nabla \cdot \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^{d,e}} - \sum_e \underline{\tau}_{v,e}^d \langle \mu \underline{K}^{-1} \underline{v}_h^d + \nabla p_h^d, -\mu \underline{K}^{-1} \underline{w}_h^d + \nabla q_h^d \rangle_{\Omega_h^{d,e}}} \\
& = \langle \underline{f}_v^d, \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^d} + \langle h^d, q_h^d \rangle_{\Omega_h^d} \\
& + \boxed{\sum_e \underline{\tau}_{v,e}^d \langle \underline{f}_v^d, -\mu \underline{K}^{-1} \underline{w}_h^d + \nabla q_h^d \rangle_{\Omega_h^{d,e}} + \sum_e \tau_{p,e}^d \langle h^d, \nabla \cdot \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^{d,e}}}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$\forall (\underline{w}_h^d, q_h^d) \in (\mathcal{V}_{0,h}^d \times \mathcal{Q}_h^d)$. Les termes encadrés proviennent de la méthode de stabilisation ASGS, et $\mu = \mu_l$ ou μ_a selon le domaine dans lequel on se trouve.

Formulation EF mixte stabilisée du problème couplé

Pour une écriture plus simplifiée, les formulations EF des équations de Stokes et de Darcy peuvent être exprimées à l'aide des formes bilinéaires B_s , B_d et des formes linéaires L_s , L_d telles que

$$B_s([\underline{v}_h^s, p_h^s][\underline{w}_h^s, q_h^s]) = L_s([\underline{w}_h^s, q_h^s]) - \langle \underline{n}^s \cdot \underline{\sigma}_{ext}^s \cdot \underline{n}^s, \underline{w}_h^s \cdot \underline{n}^s \rangle_{\Gamma_h^{s/d}} \tag{2.33}$$

$$B_d([\underline{v}_h^d, p_h^d][\underline{w}_h^d, q_h^d]) = L_d([\underline{w}_h^d, q_h^d]) - \langle \underline{n}^d \cdot \underline{\sigma}_{ext}^d \cdot \underline{n}^d, \underline{w}_h^d \cdot \underline{n}^d \rangle_{\Gamma_h^{s/d}} \tag{2.34}$$

avec $\Gamma_h^{s/d}$ la discrétisation EF de l'interface Stokes/Darcy et

$$\begin{aligned}
B_s([\underline{v}_h^s, p_h^s][\underline{w}_h^s, q_h^s]) &= \langle 2\mu \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(v_h^s) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(w_h^s) \rangle_{\Omega_h^s} - \langle p_h^s, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^s \rangle_{\Omega_h^s} - \langle \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^s, q_h^s \rangle_{\Omega_h^s} \\
&\quad + \sum_e \tau_{p,e}^s \langle \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^s, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^s \rangle_{\Omega_h^{s,e}} + \sum_e \tau_{v,e}^s \langle -\underline{\nabla} p_h^s, \underline{\nabla} q_h^s \rangle_{\Omega_h^{s,e}} \\
L_s([\underline{w}_h^s, q_h^s]) &= \langle \underline{f}_v^s, \underline{w}_h^s \rangle_{\Omega_h} + \langle h^s, q_h^s \rangle_{\Omega_h^s} + \langle \underline{n}^s \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^s \cdot \underline{n}^s, \underline{w}_h^s \cdot \underline{n}^s \rangle_{\partial\Omega_h^{s,N}} \\
&\quad + \sum_e \tau_{v,e}^s \langle -\underline{f}_v^s, \underline{\nabla} q_h^s \rangle_{\Omega_h^{s,e}} + \sum_e \tau_{p,e}^s \langle -h^s, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^s \rangle_{\Omega_h^{s,e}} \\
B_d([\underline{v}_h^d, p_h^d][\underline{w}_h^d, q_h^d]) &= \langle \mu \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{v}_h^d, \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^d} - \langle p_h^d, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^d} + \langle \underline{n}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^d \cdot \underline{n}^d, \underline{w}_h^d \cdot \underline{n}^d \rangle_{\partial\Omega_h^{d,N,h}} \\
&\quad + \langle \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^d, q_h^d \rangle_{\Omega_h^d} + \sum_e \tau_{p,e}^d \langle \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_h^d, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^{d,e}} \\
&\quad - \sum_e \tau_{v,e}^d \langle \mu \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{v}_h^d + \underline{\nabla} p_h^d, -\mu \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{w}_h^d + \underline{\nabla} q_h^d \rangle_{\Omega_h^{d,e}} \\
L_d([\underline{w}_h^d, q_h^d]) &= \langle \underline{f}_v^d, \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^d} + \langle h^d, q_h^d \rangle_{\Omega_h^d} + \sum_e \tau_{p,e}^d \langle h^d, \underline{\nabla} \cdot \underline{w}_h^d \rangle_{\Omega_h^{d,e}} \\
&\quad + \sum_e \tau_{v,e}^d \langle \underline{f}_v^d, -\mu \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{w}_h^d + \underline{\nabla} q_h^d \rangle_{\Omega_h^{d,e}} .
\end{aligned}$$

La formulation intégrale faible du problème couplé dans le cadre d'une approche unifiée, est obtenue en sommant les deux équations (2.33) et (2.34). Cette formulation assure par construction la continuité de la vitesse normale et le terme

$$\langle \underline{n}^s \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^s \cdot \underline{n}^s, \underline{w}_h^s \cdot \underline{n}^s \rangle_{\Gamma_h^{s/d}} + \langle \underline{n}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^d \cdot \underline{n}^d, \underline{w}_h^d \cdot \underline{n}^d \rangle_{\Gamma_h^{s/d}}$$

désigne la contrainte imposée à l'interface entre les milieux fluide et poreux et est liée à la condition de cisaillement de type BJS (Eq. 2.20).

Le problème est redéfini dans le domaine Ω_h . Une fonction Heaviside H_m avec $m \in \{s, d\}$ égale à 1 dans Ω^m et à 0 ailleurs, permet de distinguer les deux milieux : le drainant (Stokes) et la préforme (Darcy). En effet, H_m permet de passer d'une intégrale définie sur Ω_h^m à une intégrale définie sur Ω_h par

$$\int_{\Omega_h^m} (\dots) dv = \int_{\Omega_h} (\dots) H_m dv.$$

Les domaines de définition associés au problème d'écoulement s'obtiennent donc par

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_h &= \mathcal{V}_s \oplus \mathcal{V}_d \\
\mathcal{V}_h^0 &= \mathcal{V}_s^0 \oplus \mathcal{V}_d^0 \\
\mathcal{Q}_h &= \mathcal{Q}_s \oplus \mathcal{Q}_d
\end{aligned}$$

Par ailleurs, les interfaces fixes (drainant/préforme) ainsi que les interfaces instationnaires, telles que le front fluide, doivent être définies et constituent l'objet de la section suivante.

2.4 Modélisation des interfaces

Le terme « interface » désigne ici une frontière séparant deux milieux de propriétés différentes : la résine et l'air environnant, le drainant et la préforme, etc. Le drainant et la

préforme étant progressivement imprégnés par la résine pendant la phase de remplissage, la modélisation des écoulements fluides requiert également la description de l'évolution du front de la résine.

2.4.1 Représentation des interfaces

Deux approches principales existent pour décrire l'évolution du front fluide : l'approche dite de **suiti d'interface** ou celle dite de **capture d'interface**.

Suiti d'interface

La méthode de suivi d'interface implique l'utilisation de particules ou de marqueurs (Figure 2.5) au niveau du volume [65] ou du front [115], pour suivre soit l'évolution d'une phase, soit directement celle de l'interface. La position des marqueurs $\underline{X}_i(t)$ est actualisée en fonction de la vitesse \underline{v} en résolvant

$$\frac{d\underline{X}_i(t)}{dt} = \underline{v}(\underline{X}_i(t))$$

par un schéma d'intégration en temps (explicite, implicite, à un pas, ...). Ces marqueurs peuvent être les nœuds du maillage. Dans ce cas, on a alors une description lagrangienne (actualisée) du problème fluide. La principale difficulté de ces deux méthodes est d'assurer une redistribution des marqueurs. Une mauvaise répartition de ces derniers peut générer une perte d'informations et nécessite donc une opération de redistribution des marqueurs qui peut être coûteuse. De plus, ce type de méthode n'est pas adapté pour gérer les changements topologiques tels que la fusion ou la séparation d'interfaces. En effet, il faut définir un critère gérant la suppression des marqueurs lors de l'intersection des interfaces, ce qui génère une difficulté supplémentaire.

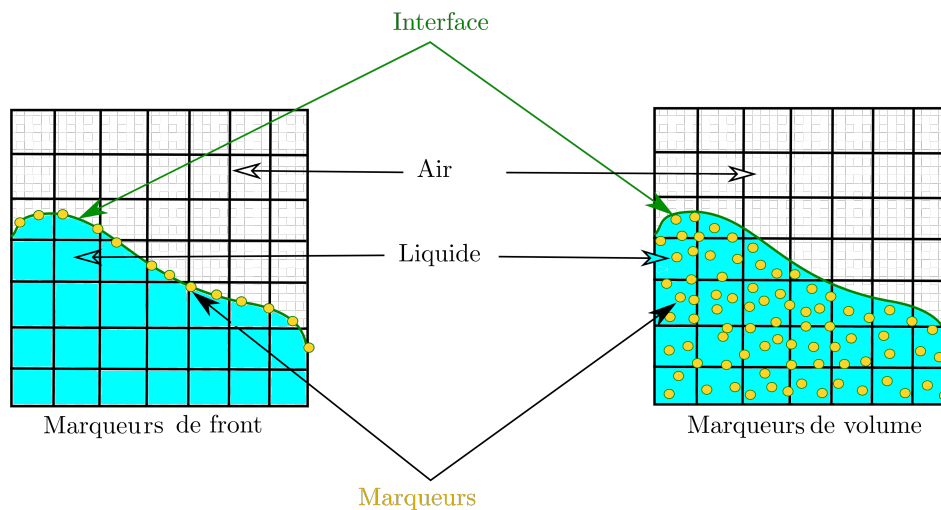


FIGURE 2.5 – Principe de la méthode des marqueurs

Capture d'interface

La méthode de capture d'interface consiste à représenter les deux domaines en présence et implicitement leur interface par un champ scalaire, que l'on notera ψ dans la suite, convecté par un champ de vitesse \underline{v}_c issu du problème physique modélisé (par exemple le problème fluide). Ce type de méthode permet une gestion naturelle des changements topologiques. La convection du champ ψ par la vitesse \underline{v}_c est décrite par l'équation de transport suivante

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{v}_c \cdot \underline{\nabla} \psi = 0 \tag{2.35}$$

Notons que cette approche correspond à une description eulérienne du problème fluide. De plus, la description de deux phases est nécessaire; ce qui signifie que le champ de vitesse doit être calculé dans ces deux phases de part et d'autre de l'interface. On décrit alors l'évolution des deux phases dans un domaine de calcul a priori fixe. Deux techniques de capture d'interfaces sont répandues dans la littérature : la méthode des volumes de fluide ou VOF (*Volume of Fluid*) [67] et la méthode des lignes de niveau ou Level-set [89]. Ces deux méthodes se différencient par le choix du champ scalaire ψ .

- Pour la méthode VOF, le champ scalaire ψ est approché par ψ_h , compris elle entre 0 et 1, décrivant la fraction volumique de fluide contenue dans un élément de la grille de calcul. La localisation de l'interface est construite à partir de cette fraction volumique (Figure 2.6). L'un des inconvénients majeurs de cette méthode est donc l'étape de reconstruction obligatoire dans le cas d'une interface dynamique. Par ailleurs, les propriétés géométriques de l'interface telles que la courbure et la normale ne sont pas évidentes à calculer. Bien que la méthode VOF permette une bonne conservation du volume du fluide transporté, la discontinuité du champ ψ complique le calcul de certaines propriétés de la fonction, notamment le gradient qui intervient dans l'équation (2.35) mais qui est lié également au calcul de la normale à l'interface.

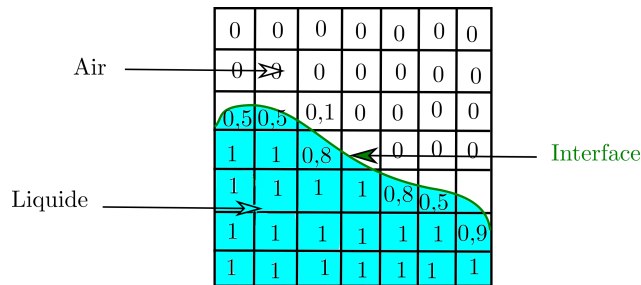


FIGURE 2.6 – Principe de la méthode VOF

- Dans le cadre de la méthode Level-set, le champ ψ est continu, positif d'un côté de l'interface et négatif de l'autre (Figure 2.7). Ainsi, l'interface est implicitement décrite par l'isovaleur zéro de ψ :

$$\Gamma(t) = \{ \underline{x} \in \Omega, \psi(\underline{x}, t) = 0 \} \tag{2.36}$$

Par ailleurs, les propriétés géométriques de l'interface peuvent être facilement calculées à partir de la valeur du champ ψ . La normale \underline{n} et la courbure κ_{ls} s'écrivent respectivement

$$\underline{n} = \frac{\underline{\nabla} \psi}{\| \underline{\nabla} \psi \|}, \quad \kappa_{ls} = \underline{\nabla} \cdot \underline{n}.$$

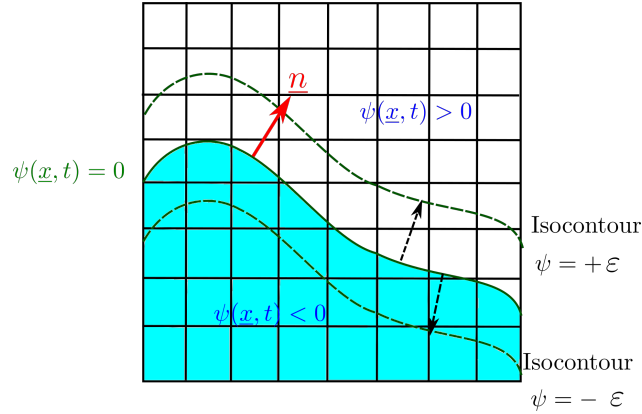


FIGURE 2.7 – Principe de la méthode Level-set

Notre choix se porte sur la méthode Level-set qui permet une localisation précise de l'interface, contrairement à la méthode VOF. La méthode Level-set assure également, d'une part une meilleure gestion des changements topologiques générés par de grandes déformations de l'interface, et d'autre part le calcul des grandeurs caractéristiques de l'interface.

2.4.2 Résolution numérique du problème de transport de la Level-set

Pour que le problème soit bien posé, les conditions aux bords et la condition initiale appropriées doivent être définies en plus de l'équation (2.35). Connaissant à chaque instant $t \in [0, T]$ et la vitesse de convection \underline{v}_c , l'équation de transport consiste à trouver $\psi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{v}_c \cdot \underline{\nabla} \psi &= 0 & \forall (\underline{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \\ \psi(\underline{x}, t = 0) &= \psi_0(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \psi(\underline{x}, t) &= g(\underline{x}) & \forall (\underline{x}, t) \in \partial\Omega^- \times [0, T] \end{aligned} \quad (2.37)$$

avec Ω le domaine d'étude de la Level-set, $\partial\Omega^-$ le bord de flux entrant défini tel que $\partial\Omega^- = \{\underline{x} \in \partial\Omega \mid \underline{v} \cdot \underline{n} < 0\}$ avec \underline{n} la normale au bord, $\psi_0(\underline{x})$ la valeur initiale de la fonction Level-set et $g(\underline{x})$ la valeur à imposer sur le bord entrant. En effet, on doit préciser quelle est la phase qui entre par $\partial\Omega^-$: le liquide ou l'air (respectivement $g(\underline{x}) > 0$ ou $g(\underline{x}) < 0$).

Afin d'établir la formulation intégrale faible de l'équation (2.37), les espaces fonctionnels \mathcal{S} et \mathcal{S}^0 sont définis ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^g &= \{l \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid l = g \text{ sur } \partial\Omega^-\} \\ \mathcal{S}^0 &= \{l \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid l = 0 \text{ sur } \partial\Omega^-\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

La formulation faible du problème (Eq. 2.37) s'obtient en le multipliant par une fonction test $\psi^* \in \mathcal{S}^0$ et en intégrant l'équation résultant sur le domaine :

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi^* \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \underline{v}_c \cdot \underline{\nabla} \psi, \psi^* \right\rangle_{\Omega} = 0 \quad (2.39)$$

Ce dernier est ensuite discrétisé à l'aide du même maillage que celui appliqué au problème mécanique, pour une résolution par éléments-finis. La solution discrète ψ_h est recherchée sur les espaces de dimension finie \mathcal{S}_h^g et \mathcal{S}_h^0 sous espaces respectifs de \mathcal{S}^g et \mathcal{S}^0 .

L'approximation de Galerkin standard n'est pas stable pour les problèmes hyperboliques comme l'équation de transport. Dans nos travaux, ce problème est résolu en stabilisant la formulation EF par une méthode SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*), introduite par Hughes [34] qui consiste à choisir les fonctions tests dans un espace de solution autre que celui des fonctions de forme. Les nouvelles fonctions test se définissent à partir des fonctions tests classiques $\psi_{h|e}^* \in \mathcal{S}_h^0$ par :

$$\tilde{\psi}_{h|e}^* = \psi_{h|e}^* + \tau_e^\psi \underline{v}_c \cdot \underline{\nabla} \psi_{h|e}^*$$

avec τ_e^ψ le paramètre de stabilisation défini par élément en fonction de la vitesse moyenne v_e de l'élément et la taille de l'élément h_e par

$$\tau_e^\psi = \frac{1}{2} \frac{h_e}{|v_e|}.$$

Cette modification des fonctions test ajoute un terme de diffusion artificiel stabilisant la formulation EF permettant de contrôler le terme convectif. Avec la discrétisation du terme transitoire selon la « θ -méthode », le problème final consiste donc à calculer $\psi_h^{n+1} \in \mathcal{S}^g$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle \psi_h^{n+1}, \tilde{\psi}_h^* \rangle_{\Omega_h} + \theta \Delta t \langle \underline{v}_c^{n+1} \cdot \underline{\nabla} \psi_h^{n+1}, \tilde{\psi}_h^* \rangle_{\Omega_h} = \\ \langle \psi_h^n, \tilde{\psi}_h^* \rangle_{\Omega_h} + (\theta - 1) \Delta t \langle \underline{v}_c^n \cdot \underline{\nabla} \psi_h^n, \tilde{\psi}_h^* \rangle_{\Omega_h} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$\forall \tilde{\psi}_h^* \in \tilde{\mathcal{S}}_h^0$ telle que $\tilde{\psi}_h^* = \psi_h^* + \tau_e^\psi \underline{v}_h^{n+1} \cdot \underline{\nabla} \psi_h^*$. Si $\theta = 0$, le schéma est dit d'Euler explicite, si $\theta = 1$ le schéma est dit d'Euler implicite, si $\theta = \frac{1}{2}$, le schéma est semi-implicite, appelé également schéma de Crank-Nicolson.

Remarque : si le maillage a une vitesse \underline{v}_m , la vitesse de convection \underline{v}_c est définie par $\underline{v}_c = \underline{v} - \underline{v}_m$, avec $\underline{v}_m = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$ et \underline{u} le déplacement du maillage.

Filtre de la Level-set

Classiquement, la fonction Level-set ψ peut être initialisée à $t = 0$ par la fonction distance signée à l'interface, $d_0 =: \psi_0(\underline{x}) = d_0(\underline{x})$. Cependant, la mise en place d'un filtre permet de limiter le calcul la propriété liée au gradient de la Level-set autour d'une bande de largeur ε définie autour du front fluide. Le filtre permet également de s'affranchir des termes au bord. L'information utile dans la fonction Level-set permettant de localiser l'interface est en effet concentrée uniquement autour de l'iso-valeur zéro. Cette technique permet ainsi de s'affranchir des éventuels problèmes numériques loin de l'interface. Dans cette étude, un filtre de type tangente hyperbolique est utilisé pour définir une nouvelle fonction $\bar{\psi}_0$ telle que , à $t = 0$

$$\bar{\psi}_0(\underline{x}) = \varepsilon \tanh \left(\frac{d_0(\underline{x})}{\varepsilon} \right) \quad (2.41)$$

2. Notation : $\psi_h^{n+1} = \psi_h(t + \Delta t)$, $\psi_h^n = \psi_h(t)$

La largeur de la bande doit être suffisamment grande pour pouvoir calculer certaines grandeurs, notamment le gradient de ψ . En pratique, une largeur égale à 3 fois la taille de l'élément ($2\varepsilon = 3h_e$) suffit.

Certains auteurs effectuent également une étape de réinitialisation de la fonction Level-set notamment soit par la réinitialisation de Hamilton-Jacobi [111] soit par la méthode de réinitialisation directe [86] afin d'assurer la conservation ici de la propriété (2.41) au cours du temps. Les simulations que l'on a faites ont montré que cette réinitialisation n'était pas indispensable dans notre cas, ce qui évite de gaspiller du temps CPU. En conséquence, les simulations présentées ici ont été réalisées sans réinitialisation.

2.5 Déformation mécanique des préformes

Dans le cadre de ce travail, le renfort fibreux est modélisé à l'échelle macroscopique par un milieu continu homogène élastique [26, 27, 41]. Le renfort à chaque étape du procédé de fabrication subit de fortes sollicitations générées par l'étape de préformage du renfort sec, par la compaction durant la phase de pré-infusion et ensuite par le gonflement induit par la pression hydrostatique de la résine pendant l'imprégnation. En raison de ces importantes déformations, l'hypothèse des petites déformations ne semble pas être adéquate pour la description du comportement des préformes pendant le procédé. C'est pourquoi nous nous plaçons ici dans le contexte des grandes transformations comme dans les références [28, 40, 41].

Comme en mécanique des fluides, les problèmes de mécanique du solide décrivant la déformation des préformes s'expriment par la combinaison des lois de conservation (Eq. 2.42) et d'une loi de comportement qui relie contraintes et déformations. Il s'agit ici du problème mécanique écrit dans les renforts secs ou humides, la distinction étant faite par la loi de comportement.

Sur la configuration courante Ω_t , l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'obtient à partir de l'équation (2.9) en négligeant les efforts d'inertie. Elle est ensuite complétée par les conditions aux bords appropriées. Le système d'équations obtenu s'exprime alors par :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) + \underline{f}_v &= 0 & \text{sur } \Omega_t \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} &= \underline{t} & \text{sur } \partial\Omega_t^N \\ \underline{u} &= \underline{u}_{ext}^D & \text{sur } \partial\Omega_t^D \end{aligned} \quad (2.42)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Cauchy lié au squelette solide, \underline{u} le champ de déplacement dont la valeur sur les bords de type Dirichlet est notée \underline{u}_{ext}^D et \underline{t} la force appliquée sur les bords de type Neumann.

Pour un matériau élastique, un choix naturel de configuration dans laquelle travailler est la configuration sur laquelle la déformation du matériau est nulle. Cependant, compte-tenu des grandes déformations de la pièce et du couplage fluide-solide à effectuer, il semble plus naturel de prendre comme configuration de référence la dernière configuration déformée connue (formulation lagrangienne actualisée).

Il est aussi important de noter que deux types de non-linéarités interviennent dans ce problème. La première est de type géométrique, liée aux grandes transformations que subit le solide, tandis que la seconde est de type matériel liée au comportement non-linéaire de la préforme.

2.5.1 Formulation lagrangienne actualisée

Afin de résoudre le problème mécanique par une approche éléments-finis, la formulation intégrale faible est établie en multipliant l'équation (2.42) par une fonction test cinématiquement admissible et en intégrant sur le domaine dans la configuration de référence. Une intégration par partie est ensuite appliquée à l'expression obtenue pour abaisser la contrainte de dérivabilité sur le champ de solution.

Soit $\underline{x}^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k)$ le vecteur position sur une configuration k (Figure 2.8), $\underline{u}_{k \rightarrow p}$ le déplacement entre deux différentes configurations $k \in \{0, i, t\}$ et $p \in \{0, i, t\}$ (avec l'indice 0 se référant à la configuration initiale, i pour intermédiaire, t pour courante) et $\underline{F}_{k \rightarrow p}$ le tenseur de gradient de transformation entre ces deux configurations. Ce dernier est défini par $\underline{F} = \frac{d\underline{x}^p}{d\underline{X}^k}$ qui permet de relier un élément de longueur $d\underline{x}$ dans la configuration donnée p à un autre de longueur $d\underline{X}$ dans la configuration k . Le Jacobien de la transformation, noté par $\mathcal{J}_{k \rightarrow p}$, est le déterminant de $\underline{F}_{k \rightarrow p}$.

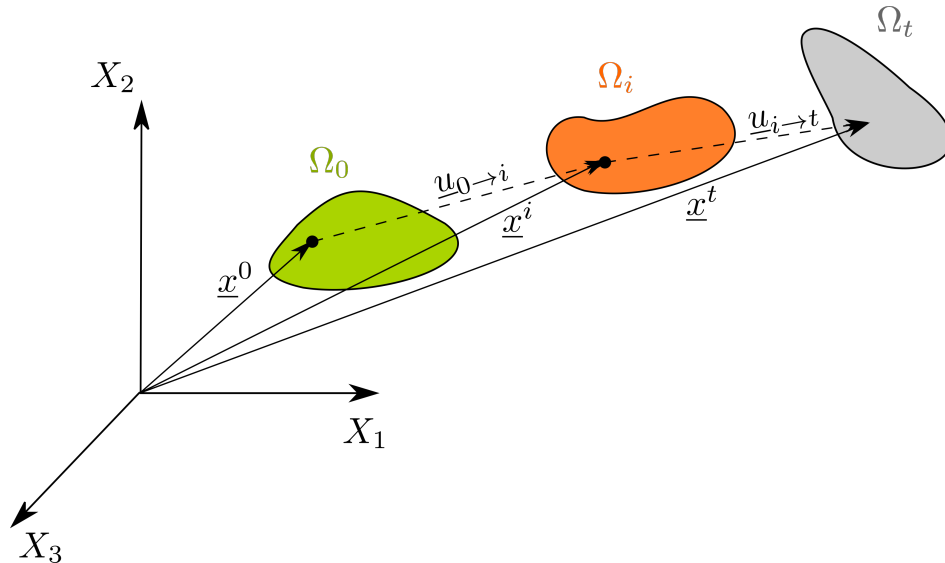


FIGURE 2.8 – Description des trois configurations : initiale Ω_0 , intermédiaire ou déformée Ω_i et courante Ω_t

Afin d'établir la formulation faible, l'espace des solutions doit être défini tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^u &= \{ \underline{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega)^{dim} \mid \underline{u} = \underline{u}_{ext}^D \text{ sur } \partial\Omega^D \} \\ \mathcal{V}_0^u &= \{ \underline{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega)^{dim} \mid \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega^D \} \end{aligned}$$

Pour reporter l'équation d'équilibre (2.42) sur la configuration de référence, la contrainte de

Cauchy peut s'écrire en fonction du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff $\underline{\underline{S}}$ par

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_{k \rightarrow p}) = \mathcal{J}_{k \rightarrow p} \underline{\underline{F}}_{k \rightarrow p} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}_{k \rightarrow p}^T \quad (2.43)$$

Pour passer de l'état initial 0 à l'état courant t , le problème s'écrit alors :

Trouver le champ de déplacement $\underline{u}_{0 \rightarrow t} \in \mathcal{V}^u$ (δu est cinématiquement admissible à 0) :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{S}}(\underline{u}_{0 \rightarrow t}) : \left(\underline{\underline{F}}_{0 \rightarrow t}^T \cdot \nabla_{\underline{x}_0} \delta \underline{u} \right) \rangle_{\Omega_0} = \\ \langle \underline{t}_0, \delta \underline{u} \rangle_{\partial \Omega_0^N} + \langle \underline{f}_v, \delta \underline{u} \rangle_{\Omega_0} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$\forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0^u$ où \underline{f}_v et \underline{t}_0 sont respectivement la force volumique et le vecteur de contraintes sur la configuration initiale.

En définissant respectivement le tenseur du gradient de la transformation ainsi que la relation entre le volume déformé v_i et le volume initial v_0 par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}_{0 \rightarrow t} &= \underline{\underline{F}}_{i \rightarrow t} \cdot \underline{\underline{F}}_{0 \rightarrow i} \\ dv_i &= \frac{\mathcal{J}_{0 \rightarrow i}}{dv_0}, \end{aligned}$$

l'équation (2.44) reportée sur la dernière configuration déformée devient alors :

Trouver le champ de déplacement $\underline{u}_{i \rightarrow t} \in \mathcal{V}^u$ (δu est cinématiquement admissible à 0) :

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{S}}(\underline{u}_{i \rightarrow t}) : \left[\left(\underline{\underline{F}}_{0 \rightarrow i}^T \cdot \underline{\underline{F}}_{i \rightarrow t}^T \right) \cdot \left(\nabla_{\underline{x}^i} \delta \underline{u} \cdot \underline{\underline{F}}_{0 \rightarrow i}^T \right) \right] \mathcal{J}_{0 \rightarrow i}^{-1} \rangle_{\Omega_i} = \\ \langle \mathcal{J}_{0 \rightarrow i}^{-1} \underline{t}_0, \delta \underline{u} \rangle_{\partial \Omega_i^N} + \langle \mathcal{J}_{0 \rightarrow i}^{-1} \underline{f}_v, \delta \underline{u} \rangle_{\Omega_i} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$\forall \delta \underline{u} \in \mathcal{V}_0^u$ et le champ de déplacement $\underline{u}_{0 \rightarrow i}$ connu.

2.5.2 Résolution numérique

Le problème de déformation mécanique résolu par une approche EF, est discrétisé sur le même maillage que le problème fluide et le problème Level-set, avec une approximation P1 du champ de déplacement. La formulation (2.45) est en effet linéarisée en utilisant la méthode de Newton-Raphson. Cette méthode itérative consiste à chercher à l'itération it le champ de déplacement $\underline{u}_{h,i \rightarrow t}^{it}$ de la configuration intermédiaire i vers la configuration courante t qui minimise le résidu $\mathcal{R}(\underline{u}_h^{it})$ défini par l'équation (2.46) en connaissant le champ de déplacement à l'itération d'avant \underline{u}_h^{it-1} .

$$\begin{aligned} \underline{u}_h^{it} &= \underline{u}_h^{it-1} + d\underline{u}_h^{it} \\ \mathcal{R}(\underline{u}_h^{it}) &= - \langle \underline{\underline{S}}(\underline{u}_h^{it}) : \left[\left(\underline{\underline{F}}_{0 \rightarrow i}^T \cdot \underline{\underline{F}}_{i \rightarrow t}^T \right) \cdot \left(\nabla_{\underline{x}^i} \delta \underline{u}_h^{it} \cdot \underline{\underline{F}}_{0 \rightarrow i}^T \right) \right] \mathcal{J}_{0 \rightarrow i}^{-1} \rangle_{\Omega_h^i} \\ &\quad + \langle \mathcal{J}_{0 \rightarrow i}^{-1} \underline{t}_0, \delta \underline{u}_h^{it} \rangle_{\partial \Omega_h^{i,N}} + \langle \mathcal{J}_{0 \rightarrow i}^{-1} \underline{f}_v, \delta \underline{u}_h^{it} \rangle_{\Omega_h^i} \end{aligned} \quad (2.46)$$

$\forall \delta \underline{u}_h^{it} \in \mathcal{V}_0^u$ avec $d\underline{u}_h^{it}$ l'incrément de correction du déplacement exprimé à l'aide d'un développement limité de Taylor du premier ordre. Le système à résoudre revient alors à calculer l'incrément de déplacement $d\underline{u}_h^{it}$ tel que

$$\mathcal{R}(\underline{u}_h^{it}) = \mathcal{R}(\underline{u}_h^{it-1}) + \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \underline{u}_h} \right]_{\underline{u}_h^{it-1}} d\underline{u}_h^{it} = 0 \quad (2.47)$$

avec $\left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \underline{u}_h} \right]_{\underline{u}_h^{it-1}}$ définissant la matrice tangente construite à partir des matrices tangentes au niveau élémentaire. Dans Z-set, nous prenons comme critère de convergence pour une précision de l'ordre de η la quantité

$$\frac{|\mathcal{R}(\underline{u}_h^{it})|}{|\underline{F}_{ext}^{it}|} < 10^{-\eta}$$

où \underline{F}_{ext}^{it} est le vecteur force généralisé associé à l'ensemble des conditions limites imposées au système à l'itération it . Un nombre maximal d'itérations est défini dans la mise en données pour arrêter le calcul si le résultat ne converge pas durant ces itérations.

2.5.3 Comportement de la préforme

En mécanique, définir la loi de comportement d'un matériau consiste à exprimer les contraintes en fonction d'une mesure de déformation. Une étude préalable des mécanismes de déformation prépondérants est donc nécessaire afin de caractériser correctement le comportement du matériau dans chaque mode de déformation.

Mécanismes de déformation - procédé LRI

Décrire la loi de comportement des matériaux composites à l'échelle du procédé est complexe compte tenu de leur structure interne et des sollicitations qu'ils subissent. Néanmoins, la description des préformes à l'échelle macroscopique dans le cadre des problèmes d'infusion ne requiert pas, en première approximation, la caractérisation du comportement complet. Pour des renforts de type plan, l'hypothèse d'un matériau isotrope transverse [23, 28, 40, 54] (Figure 2.9) est fréquemment utilisée pour une description *simplifiée* du renfort. Les déformations hors-plan sont en effet prépondérantes dans le cas des stratifiés durant le procédé par infusion. Dans le cadre de ce type d'élaboration, la description du comportement transverse qui tient compte principalement de la **compaction** et du **gonflement** au cours de l'infusion est suffisante.

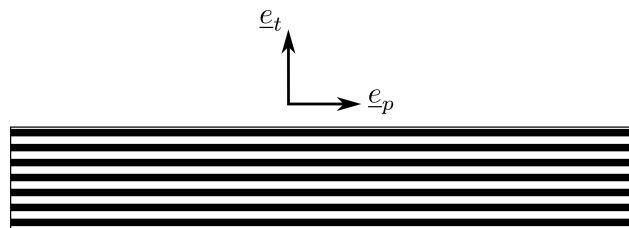


FIGURE 2.9 – Définition de la direction transverse et plane pour des stratifiés en 2D

Couplage fluide-structure

Pour une description correcte de l'état de contraintes de la pièce pendant ou après le remplissage, il faut tenir compte du couplage fluide-structure entre la résine et la préforme. En effet, la pression hydrostatique de la résine induit un changement de l'agencement des fibres et donc une déformation de la préforme, qui en retour va impacter l'écoulement de la

résine. Cette interaction fluide-structure influence le remplissage de la pièce mais également son état pendant la phase post-infusion. Une des lois les plus connues pour tenir compte de l'effet de la résine sur le comportement mécanique de la préforme est la loi de Terzaghi [113] :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{eff}(\underline{u}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) - sp\underline{\underline{I}} \quad (2.48)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}_{eff}(\underline{u})$ le tenseur de contraintes effectives de la préforme imprégnée, $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u})$ la contrainte dans le milieu fibreux uniquement et s le degré de saturation compris entre 0 (préforme sèche) et 1 (préforme humide) et p la pression de la résine.

Ce modèle a été généralisé par Biot aux matériaux compressibles dans le cadre de la consolidation [22] et transforme le terme $sp\underline{\underline{I}}$ de l'équation (2.48) en $sp\underline{\underline{b}}$ avec $\underline{\underline{b}}$ le tenseur de Biot dont les composantes ont des valeurs comprises entre 0 et 1. Dans le cas isotrope, ce tenseur est réduit à un scalaire qu'on notera par la suite b ; b vaut 1 pour des matériaux incompressibles.

2.5.4 Actualisation de la porosité et de la perméabilité

Une conséquence immédiate de la déformation de la préforme est le réarrangement des fibres, ce qui induit un changement de la porosité ϕ . La variation de la porosité peut être évaluée par la conservation de la phase solide au cours de la déformation du solide. Dans la même logique que la conservation de la masse de fluide, la conservation de la masse de la phase solide $\mathcal{M}_s(t)$ telle que

$$\frac{d\mathcal{M}_s(t)}{dt} = 0. \quad (2.49)$$

avec $\mathcal{M}_s(t) = \int_{\omega_t} (1 - \phi)\rho_s(\underline{x}, t)dv$ et où $\rho_s(\underline{x}, t)$ est la masse volumique de la phase solide au point \underline{x} à l'instant t pour tout domaine matériel ω_t .

Écriture eulérienne

Le problème étant défini sur la configuration courante, l'équation (2.49) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho_s(1 - \phi) dv = 0 \quad (2.50)$$

En remplaçant la fonction \mathcal{C} dans l'équation (2.1) par $\rho_s(1 - \phi)$, nous obtenons :

$$\int_{\omega_t} \left[\frac{\partial(\rho_s(1 - \phi))}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho_s(1 - \phi)\underline{v}) \right] dv = 0 \quad (2.51)$$

En considérant la conservation de la masse des fibres solides décrite par

$$(1 - \phi) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (1 - \phi)\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \rho_s = 0,$$

et comme la vitesse convective est nulle (car on est lagrangien réactualisé, la vitesse convective est la différence entre celle du solide et celle du maillage, et est considérée négligeable), développer l'équation (2.51) donne localement

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + (1 - \phi)\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.52)$$

La résolution de l'équation (2.52) par éléments-finis nécessite l'écriture de la formulation intégrale faible dont l'inconnue est la porosité ϕ . Elle s'obtient en multipliant l'équation par une fonction test et en intégrant l'expression obtenue dans le domaine. Dans le cas de notre approche monolithique, le problème peut être résolu par une approximation P1.

Écriture lagrangienne

En description lagrangienne, l'équation (2.50) peut se rapporter sur une configuration de référence et se réécrire telle que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\omega_{ref}} \rho_s \phi \mathcal{J}_{ref \rightarrow t} dV_{ref} \right) = 0 \quad (2.53)$$

pour tout domaine matériel ω_{ref} quelconque, avec $\mathcal{J}_{ref \rightarrow t}$ le Jacobien de la transformation de la configuration de référence (initiale ou déformée) à la configuration courante.

Pour une configuration de référence donnée, l'équation (2.53) se réduit donc à

$$\int_{\omega_{ref}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \phi \mathcal{J}_{ref \rightarrow t}) dV_{ref} = 0 \quad (2.54)$$

Dans notre cadre, pour des fibres supposées intrinsèquement incompressibles, l'équation (2.54) peut se réécrire :

$$\mathcal{J}_{ref \rightarrow t}(\underline{x}, t + \Delta t) \phi(\underline{x}, t + \Delta t) = \mathcal{J}_{ref \rightarrow t}(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t) \quad (2.55)$$

avec $\phi(\underline{x}, t)$ la porosité de la préforme au point \underline{x} à l'instant t .

Le calcul de la variation de la porosité avec cette technique est effectué en post-traitement à la suite de la résolution du problème de déformation mécanique. En effet, la variation du volume de l'élément donne le Jacobien.

Expression analytique de la porosité

Un autre moyen de calculer la porosité est de la calculer via une solution analytique de l'équation (2.52). Nous pouvons en effet calculer un champ de porosité constante par morceaux à partir du bilan massique de la phase solide en se limitant à chaque élément et en considérant que $\phi(t = 0) = \phi_0$. La solution analytique locale de la porosité [85] se lit donc

$$\frac{\partial \phi / \partial t}{(1 - \phi)} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \quad (2.56)$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{x}, t) = 1 - (1 - \phi_0) \exp(-\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) \quad (2.57)$$

Perméabilité

La variation de la fraction volumique de fibres et donc de la porosité, va générer une modification de la capacité de la préforme à se laisser imprégner par un liquide, *i.e* va modifier la perméabilité. L'actualisation de la perméabilité découle de la mise à jour de cette porosité, notamment par des lois phénoménologiques de type Carman-Kozeny [37] :

$$\underline{K}(\phi) = \underline{C}_{ck} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (2.58)$$

avec \underline{C}_{ck} un tenseur dépendant du diamètre des fibres de l'ordre de 10^{-6} m et de la constante de Carman-Kozeny déterminée par rapport à l'expérience. Au niveau numérique, ce calcul (2.58) se fait en post-traitement à la suite du calcul du champ de porosité.

2.6 Simulation numérique de l'infusion

Dans cette section sont appliqués les outils présentés précédemment afin de simuler le procédé d'infusion d'une pièce de type industriel -un raidisseur-. L'algorithme de résolution du problème d'infusion décrivant le couplage entre les différents phénomènes physiques est schématisé sur la Figure 2.10. La résolution de tous les problèmes se fait avec une approche monolithique, *i.e.* sur un maillage unique (ici, non-structuré) et de façon séquentielle. Pour des valeurs initiales données de la porosité, de la perméabilité et de la position de la Level-set, le problème solide est résolu une première fois, puis la porosité et la perméabilité sont calculées à partir du champ de déformation et injectées par la suite dans le problème fluide. Ce dernier est ensuite résolu, puis transfère le champ de pression hydrostatique au problème décrivant la déformation mécanique de la préforme. La vitesse de la résine ainsi que le champ de déplacement de la préforme servent à transporter le front fluide. Par ailleurs, le maillage est mis à jour après chaque résolution du problème solide afin de prendre en compte l'état de déformation du domaine.

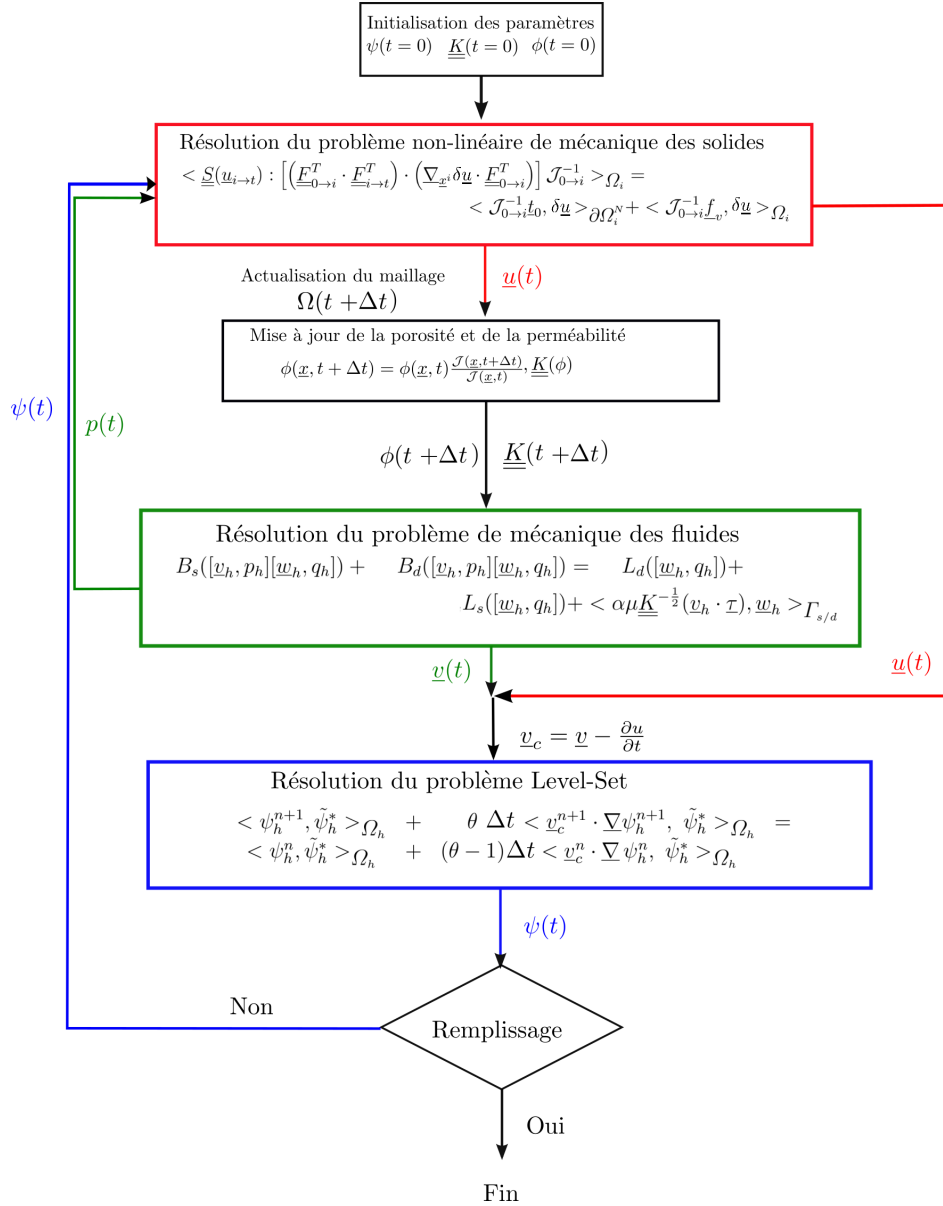


Figure 2.10 – Schéma de l’algorithme de couplage utilisé pour la simulation des infusions, inspiré de [23]

Une infusion de résine liquide dans une préforme indéformable est simulée en 2D, ainsi qu’une infusion dans une préforme déformable ayant la loi de comportement décrite au §2.5.3. Le maillage du domaine est généré par le logiciel Gmsh [61] et est non structuré.

2.6.1 Infusion des préformes indéformables

Dans cette section, nous nous intéresserons aux écoulements pendant le remplissage d'une préforme fibreuse considérée comme indéformable, ce qui équivaut à résoudre le problème couplé des équations de Stokes-Darcy et de la convection de l'interface représentant le front fluide, sans la déformation mécanique. La géométrie, les paramètres d'entrée de la simulation ainsi que les conditions imposées au problème sont décrits sur la Figure 2.11 et dans le Tableau 2.1. Les problèmes fluides et la convection du front de matière sont couplés séquentiellement comme décrit précédemment. Nos calculs ont montré que pour les valeurs très faibles de perméabilités considérées, le terme de BJS à l'interface est négligeable étant donné que la vitesse d'imprégnation de la préforme est très faible.

Problème fluide	Stabilisation ASGS	Problème Level-set
$K_p = 100K_t$ avec $\frac{K_t}{\mu_l} = 3 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2 / (\text{Pa}\cdot\text{s})$	$h_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$2\varepsilon = 3h_e$
$\mu_{air} = 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$	$c_u = c_p = 1$	$\Delta t^{\text{drainant}} = 0,2 \text{ s}$
$\phi = 0,6$	$c_1^s = 2$	$\Delta t^{\text{préforme}} = 50 \text{ s}$
	$L_0 = \sqrt[3]{\text{mes}(\Omega)}$	–

TABLEAU 2.1 – Paramètres d'entrée - Simulation 2D remplissage du raidisseur "T"

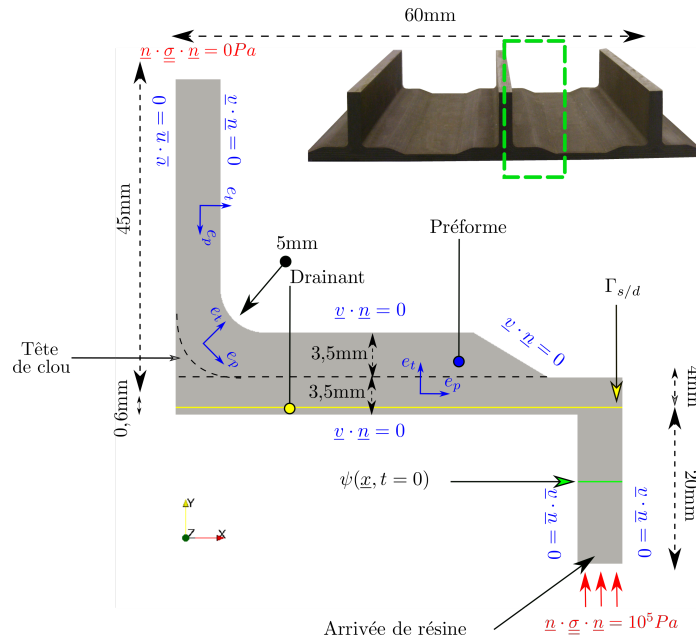


FIGURE 2.11 – Géométrie et conditions limites pour la simulation 2D des écoulements dans un raidisseur en "T"

Comme la déformation de la préforme est négligée, la porosité et la perméabilité ne sont pas réactualisées et restent donc constantes pendant toute la phase de remplissage. Les champs de pression ainsi que la position du front fluide à différents instants sont présentés sur les Figures 2.12. Les vecteurs vitesse peuvent aussi être observés sur la Figure 2.13, dans le drainant et dans la préforme à un instant du remplissage. Aucune perturbation des champs de pression et de vitesse et aucune dégradations du front fluide n'est constatée. De par l'évolution des fronts fluides, on observe bien le caractère orthotrope du problème.

Par ailleurs, pour une préforme d'une surface de 9 cm^2 ayant une perméabilité caractéristique des renforts structuraux aéronautiques (avec un rapport perméabilité/viscosité de l'ordre de grandeur de $10^{-12} - 10^{-14} \text{ m}^2$), le temps de remplissage numérique dure plus de 3h pour une viscosité faible et plus de 8h pour une viscosité élevée, contre une dizaine de secondes (Figure 2.12b) pour le remplissage du drainant. La durée de remplissage de plus de 3h à 8h (pour le jeu de paramètres donné) semble peu réaliste pour la taille de la pièce. Toutefois, une étude de convergence de maillage et de pas de temps est entreprise dans la section suivante pour s'assurer que ces résultats ne varient pas en fonction du pas de temps et du pas d'espace.

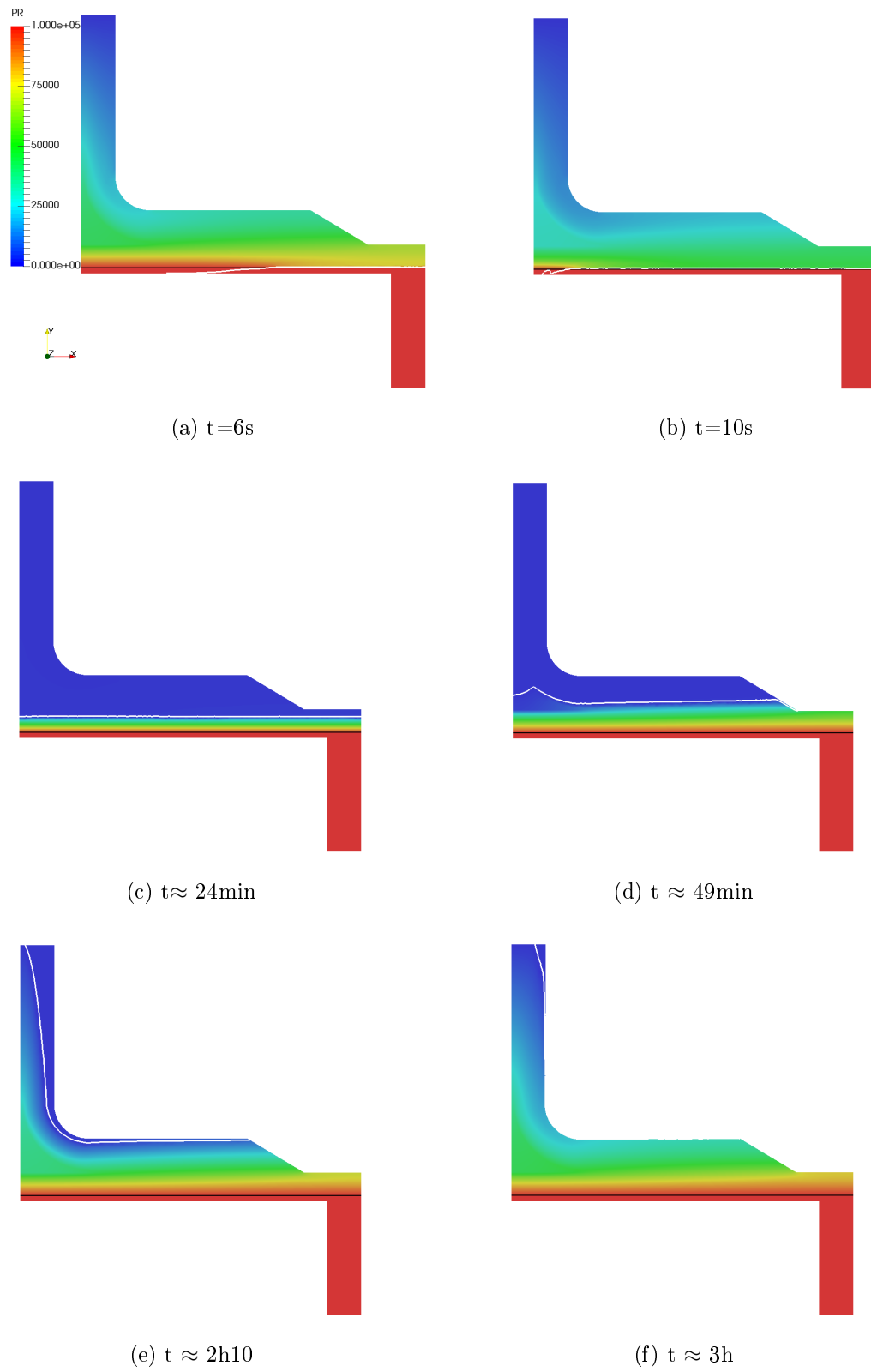


FIGURE 2.12 – Champ de pression à différents instants du remplissage - sans déformation mécanique

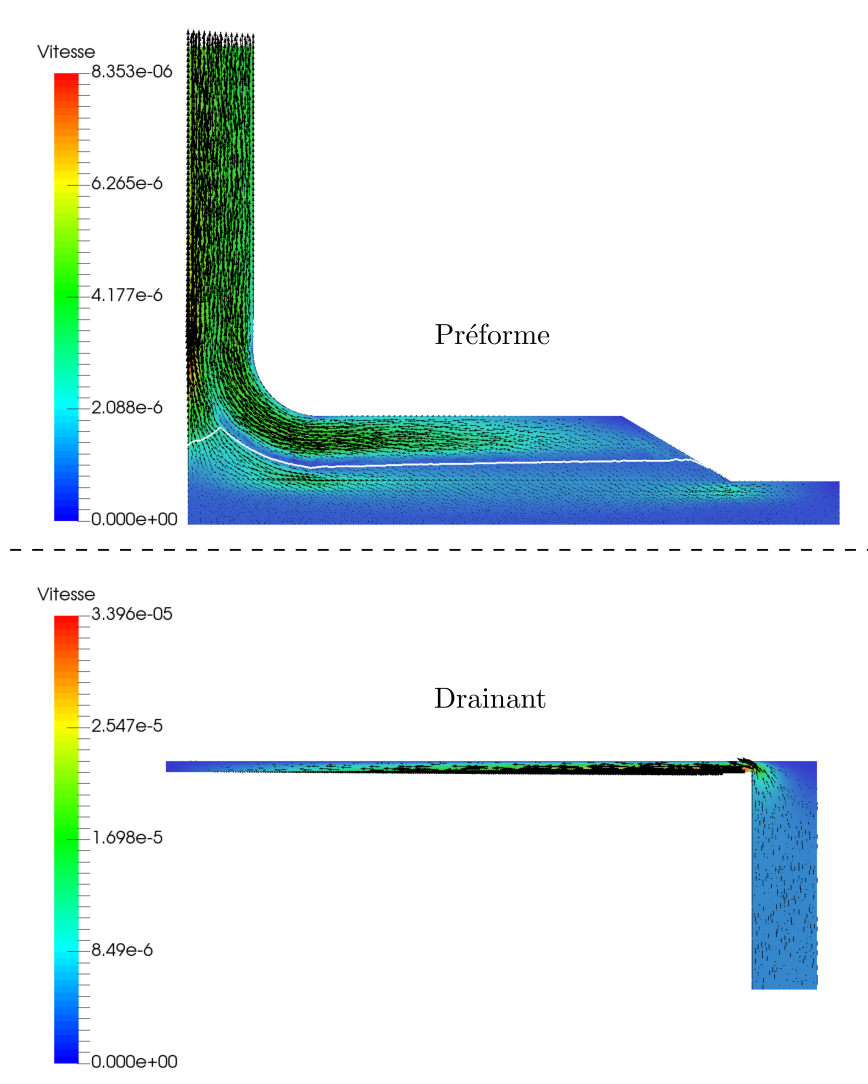


FIGURE 2.13 – Champ de vitesse dans la préforme et le drainant à $t=49$ min (correspondant à la Figure 2.12d)- sans déformation mécanique

2.6.2 Convergence de maillage et du pas de temps

Maillage

Cette section a pour objectif d'étudier la convergence de maillage. Cette étude consiste à démontrer l'indépendance de la solution au raffinement du maillage. Six tailles de maillage non structuré décrites dans le Tableau 2.2 sont considérées, pour un même pas de temps. Nous considérons ici le fluide le plus visqueux.

	h_e (m)	nb_{noeuds}	Δt (s)
Cas 1	$7,5 \cdot 10^{-4}$	3 636	50
Cas 2	$5 \cdot 10^{-4}$	7 760	50
Cas 3	$3,33 \cdot 10^{-4}$	16 787	50
Cas 4	$2,9 \cdot 10^{-4}$	22 567	50
Cas 5	$2,5 \cdot 10^{-4}$	30 255	50
Cas 6	$2 \cdot 10^{-4}$	46 261	50

TABLEAU 2.2 – Différentes tailles de l'élément h_e et nombre de nœuds nb_{noeuds} correspondant, pour un pas de temps Δt fixe

Les champs de vitesse et de pression sont les premières grandeurs d'intérêt analysées. Pour cela, les iso-valeurs de pression et de vitesse sont tracées à un instant de remplissage $t=3h$ le long d'une ligne d'analyse verticale. Cette dernière est placée à $\{x = 0,0025\}$ le long du coude avec des points de repère (numérotés de 1 à 4) comme décrite sur la Figure 2.14.

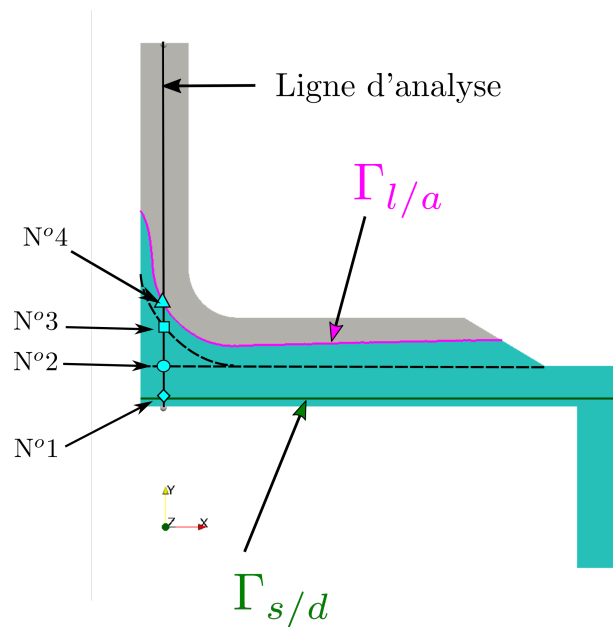


FIGURE 2.14 – État de remplissage à $t=3h$ pour l'étude de la convergence des résultats

Le point N°1 décrit l'intersection de la ligne d'analyse avec l'interface drainant/préforme $\Gamma_{s/d}$. Les points N°2 et N°3 définissent le changement de propriété correspondant respectivement à la face inférieure et supérieure de la tête de clou. Le point N°4 représente l'intersection de la ligne d'analyse avec le front fluide $\Gamma_{l/a}$. Ces points sont ensuite reportés sur les figures représentant les résultats. Les profils de pression et vitesse sont en effet, reportés à la Figure 2.15, uniquement pour trois des six maillages pour plus de visibilité. Nous constatons que les champs de pression (Figure 2.15a) sont bien coïncidents pour les trois maillages. Bien que des décalages plus prononcés sont observés sur les Figures 2.15b, 2.15c, surtout avec le maillage le plus fin ($h_e = 2,5 \cdot 10^{-4}m$), l'allure générale des profils de vitesse est similaire. Les changements de comportement de la courbe décrivant le champ en pression (Figure 2.15a) et en vitesse (Figure 2.15b et 2.15c) le long de la ligne d'analyse, correspondent à des endroits

particuliers tels que l'interface entre le drainant et la préforme, le changement de propriété matériau dû à la tête de clou, et le front fluide.

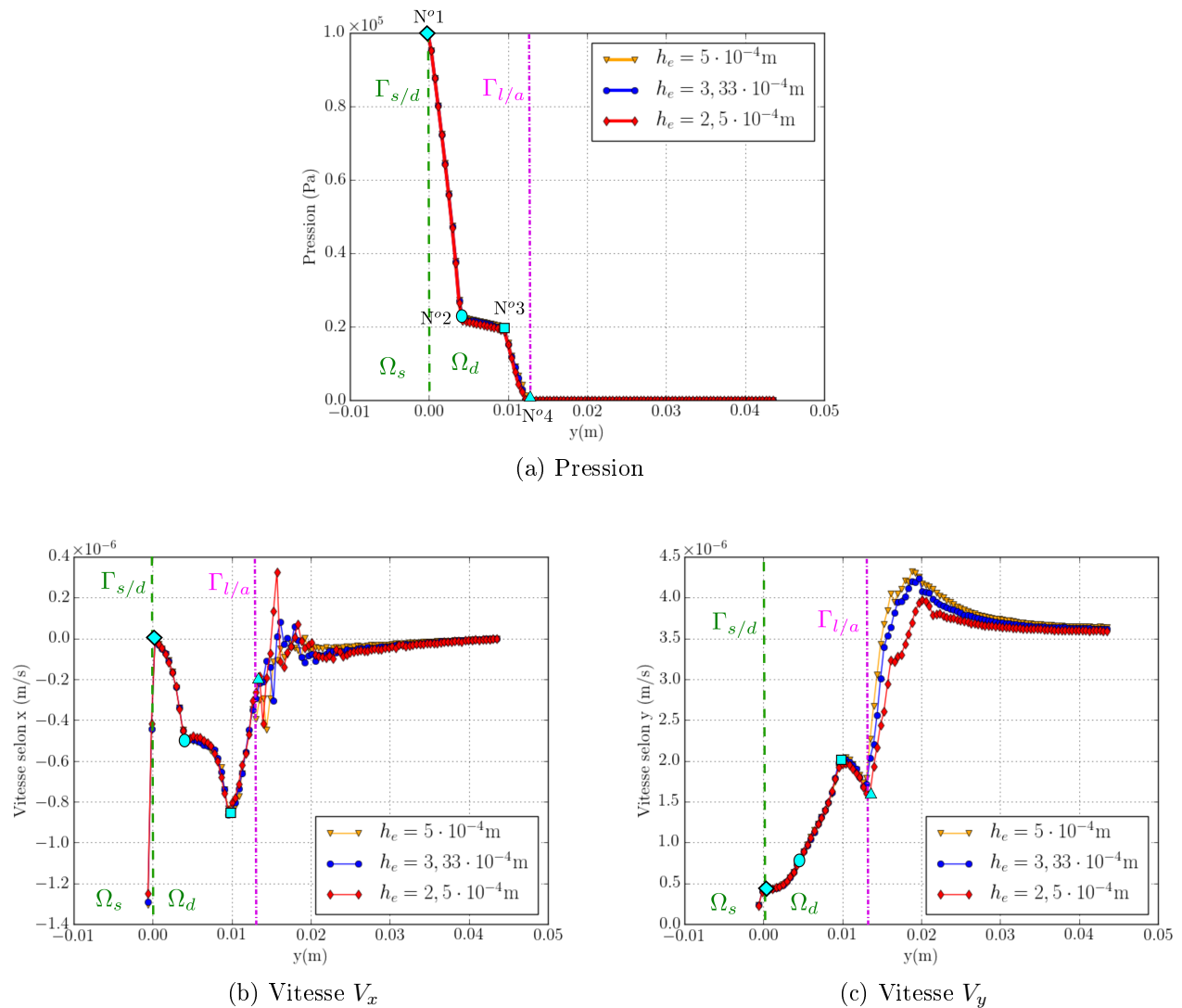


FIGURE 2.15 – Champ de vitesse et de pression en fonction de différentes tailles de mailles à un instant donné du remplissage ($t=3h$)

Dans un contexte industriel, le temps de remplissage constitue une grandeur d'intérêt plus commune que les champs de pression et vitesse. Les profils de remplissage obtenus avec les maillages sont tracés sur la Figure 2.16a. En prenant comme référence le maillage le plus fin, l'écart entre les temps de remplissage (présentés sur le Tableau 2.3) calculés avec le maillage le plus fin et le plus grossier atteint 11%; cela signifie que l'on commet une erreur assez importante sur le maillage le plus grossier (ici correspondant à la taille de maille de $7,5 \cdot 10^{-4}m$).

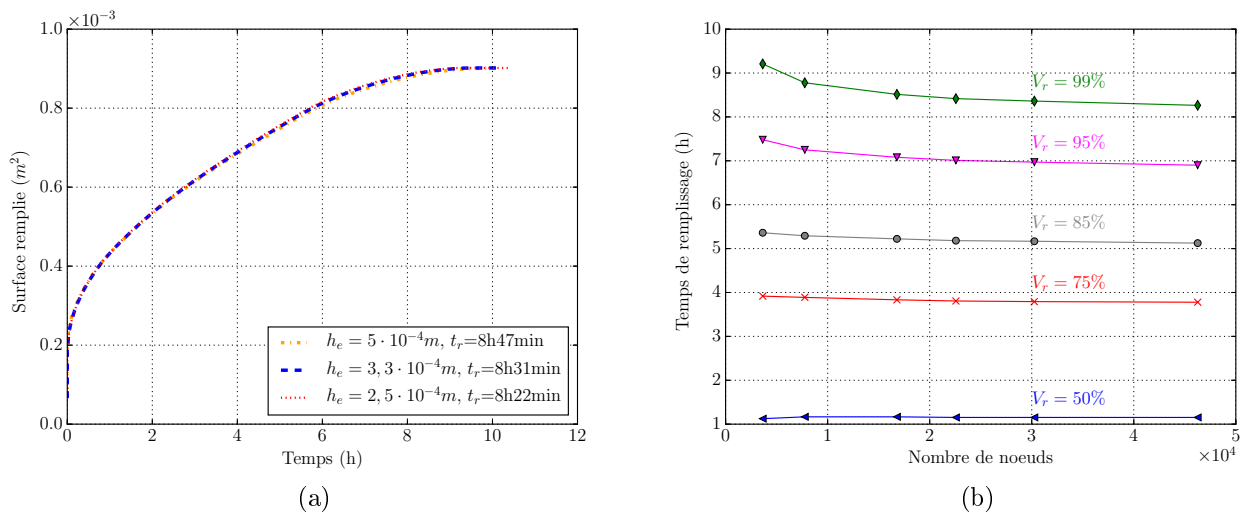


FIGURE 2.16 – Convergence de maillage : scénario de remplissage en fonction du maillage pour différents taux de remplissage (V_r : le volume rempli) - pour une résine de viscosité 0,1 Pa.s

	h_e (m)	nb_{noeuds}	Δt (s)	t_r (s)	t_r (h)
Cas 1	$7,5 \cdot 10^{-4}$	3 636	50	33 148,8	9,208
Cas 2	$5 \cdot 10^{-4}$	7 760	50	31 600,8	8,778
Cas 3	$3,33 \cdot 10^{-4}$	16 787	50	30 736,8	8,514
Cas 4	$2,9 \cdot 10^{-4}$	22 567	50	30 300,1	8,417
Cas 5	$2,5 \cdot 10^{-4}$	30 255	50	30 099,6	8,361
Cas 6	$2 \cdot 10^{-4}$	46 261	50	29 749,7	8,264

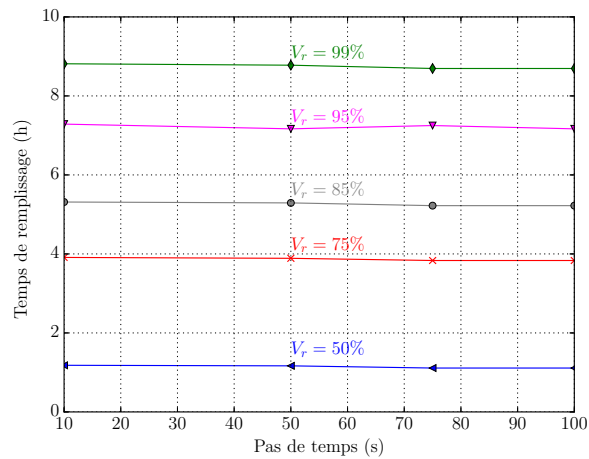
TABLEAU 2.3 – Temps de remplissage t_r en fonction de la taille de l'élément h_e et nombre de nœuds nb_{noeuds} pour un pas de temps Δt fixe, pour un taux de remplissage de 99%

À titre de référence, le temps CPU³ nécessaire pour simuler le cas 2 est de $2,5 \cdot 10^5$ s.

Pas de temps

Ensuite, l'influence du pas de temps sur le scénario du remplissage est analysée et le résultat est présenté sur la Figure 2.17a, pour différents niveaux de remplissage. Une indépendance des résultats au pas de temps est observée pour les 4 pas de temps considérés. Pour l'état de remplissage à 95%, un écart de moins de 2% est calculé pour les deux pas de temps minimum (10s) et maximum (100s). L'erreur due au pas d'espace est plus importante que celle due au pas de temps, cependant dans les deux cas la variation des résultats reste très faible. Cette étude de convergence permet d'assurer que le résultat du modèle numérique à son état actuel ne dépend ni du pas de temps ni du pas d'espace. Les positions des fronts de fluide pour les différents maillages et pas de temps ne sont pas montrés, ils sont identiques.

3. Intel(R) Core(TM) i5-4590 CPU @ 3.30GHz



(a) Pas de temps

FIGURE 2.17 – Convergence du pas de temps : évolution du temps de remplissage en fonction du pas de temps pour différents taux de remplissage (V_r : le volume rempli) - pour une résine de viscosité 0,1Pa.s

2.6.3 Infusion de préformes déformables

Dans cette section, une simulation plus complète de l'infusion est présentée en tenant compte de l'interaction entre la déformation du renfort et l'écoulement de la résine ainsi que la mise à jour des paramètres - porosité et perméabilité -. La perméabilité est mise à jour en utilisant la formule (2.58) avec le tenseur décrit dans le cas isotrope transverse suivant

$$\underline{\underline{C}}_{ck} = \begin{pmatrix} C_{ck}^p & 0 \\ 0 & C_{ck}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-13} & 0 \\ 0 & 10^{-15} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

avec C_{ck}^j la valeur de la constante de Carman-Kozeny dans la direction $j \in \{p, t\}$. Ces valeurs du tenseur $\underline{\underline{C}}_{ck}$ ont été choisies compte-tenu des ordres de grandeur voulues de la perméabilité.

Loi de comportement et propriétés mécaniques

Placé entre la préforme et le contre-moule, le drainant est considéré comme un matériau isotrope dont la déformation est négligeable devant celle de la préforme. Une loi de comportement isotrope rigide avec un module d'Young équivalent à 200 MPa lui est attribuée en plus d'un coefficient de Poisson nul.

Concernant la préforme, la loi de comportement dans le plan peut être définie par les coefficients de rigidité standards, et est indépendante de la loi de comportement transverse étant donné que les déformations dans l'épaisseur sont prépondérantes comparées à celles dans le plan. Le comportement dans le plan est supposé isotrope décrit avec le même module de rigidité normal que celui du drainant.

Comme dans [24], pour décrire la loi de comportement de la préforme, nous considérons ici, le modèle

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\mathcal{E}}}) : \underline{\underline{\mathcal{E}}} \quad (2.60)$$

pour exprimer en grandes déformations la relation entre une mesure de contraintes et une mesure de déformation représentée respectivement par le tenseur de Piola-Kirchoff $\underline{\underline{S}}$, et par le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$. Le tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{\underline{C}}}$ exprime la mesure de rigidité associée au modèle. La notation de Voigt permet d'exprimer (2.60) sous la forme

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{13}^2} & 0 & \frac{\nu_{13}E_{33}}{1-\nu_{13}^2} & 0 & 0 & 0 \\ & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{\nu_{13}E_{33}}{1-\nu_{13}^2} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & G_{12} & 0 & 0 \\ & & & & G_{23} & 0 \\ & & & & & G_{13} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} \\ \mathcal{E}_{22} \\ \mathcal{E}_{33} \\ 2\mathcal{E}_{12} \\ 2\mathcal{E}_{23} \\ 2\mathcal{E}_{13} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

avec $E_{11} = E_{33}$ le module dans la direction plane, ν_{13} le coefficient de Poisson dans le plan d'isotropie (qui correspond ici au plan $(\underline{e}_p, \underline{e}_l)$), f une loi expérimentale qui décrit le comportement transverse de la préforme, $G_{12} = G_{23}$ le module de cisaillement dans la direction transverse approché à partir de la valeur du module transverse E_{22} tel que $G_{12} \approx \frac{1}{2}E_{22} \approx \frac{1}{2}\frac{df(\mathcal{E}_{22})}{d\mathcal{E}_{22}}$ [24, 23].

Le comportement transverse de la préforme sèche est par conséquent, déduit d'une approche expérimentale en déterminant la fonction f telle que $S_{22} = f(\mathcal{E}_{22})$ (Eq. 2.61). Dans cette étude, cette fonction résulte des travaux de caractérisation des renforts HiTape[®] menés par Blais *et al.* dans [23, 24], illustrée sur la Figure 2.18.

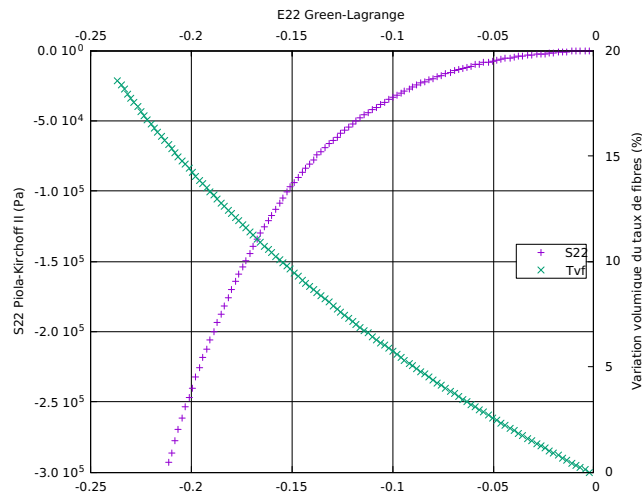


FIGURE 2.18 – La loi de comportement en compression caractérisée expérimentalement [24]

Données d'entrée et conditions aux bords

Les données d'entrée du problème fluide et solide sont décrites respectivement dans le Tableau 2.1 et dans le Tableau 2.4. Les conditions limites du problème mécanique sont également reportées sur la Figure 2.19.

Dans le cas 2D, la simulation peut être réalisée en état de déformation plane ou dans un état de contrainte plane. Dans cette étude, nous choisissons l'état de déformation plane qui est

plus cohérent avec la configuration réelle d'un raidisseur ; qui suppose en effet un raidisseur d'épaisseur infinie contrairement à la contrainte plane qui correspond à une configuration mince du raidisseur.

Problème solide
$\phi_0 = 0,6$
$\nu_{12} = 0$
$\nu_{13} = 0,3$
$E_{11} = 200 \text{ MPa}$
$G_{13} \approx \frac{E_{11}}{2}$
$G_{12} \approx \frac{E_{22}}{2}$

TABLEAU 2.4 – Données d'entrée pour le problème de mécanique des solides

La porosité initiale ϕ_0 de la préforme avant compression est de 0,6 et actualisée par la suite en post-traitement en utilisant le Jacobien de la transformation. La pression atmosphérique sur la préforme est modélisée par une contrainte normale valant 10^5 Pa appliquée sur toute la face supérieure de la préforme. Le contre-moule et l'arrivée de la résine sont considérés comme étant fixes, *i.e.* les déplacements dans l'axe $x-$ et $y-$ sont supposés nuls. Concernant le problème fluide comme dans le cas test précédent : la résine ainsi que l'air environnant sont considérés comme des fluides incompressibles s'écoulant dans la préforme dont la perméabilité transverse est considérée 100 fois inférieure à celle dans le plan. L'étanchéité de la bache à vide est modélisée par des vitesses normales nulles.

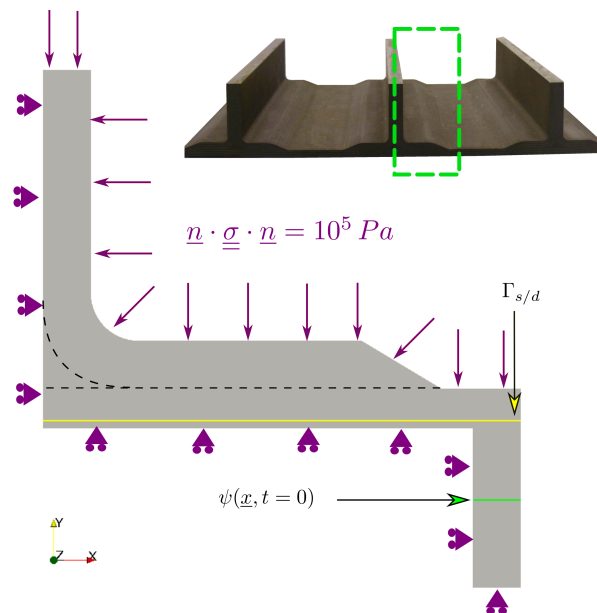


FIGURE 2.19 – Conditions limites pour le problème de déformation de la préforme

Résultats

Les champs de déplacement à différents instants ainsi que la déformée de la pièce sont tracés sur les Figures 2.20. Une première observation permet de constater la compaction de la préforme comparée à la forme initiale en image fond des figures. La surface de la pièce a été réduite de plus de 12% à la fin de l'infusion, passant de 9 cm^2 à 8 cm^2 . Cette variation du volume montre l'importance de prendre en compte la déformation mécanique de la préforme vis-à-vis de la tolérance dimensionnelle des pièces. La durée de remplissage avec et sans prise en compte de la déformation mécanique reste du même ordre de grandeur comme nous pouvons le constater sur la Figure 2.21. Cependant, la comparaison n'est pas directe étant donné que dans le cas avec déformation mécanique, les paramètres tels que la porosité et la perméabilité, sont réactualisés à chaque pas de temps. De plus, le temps de remplissage peut aussi dépendre des propriétés mécaniques attribuées à la préforme.

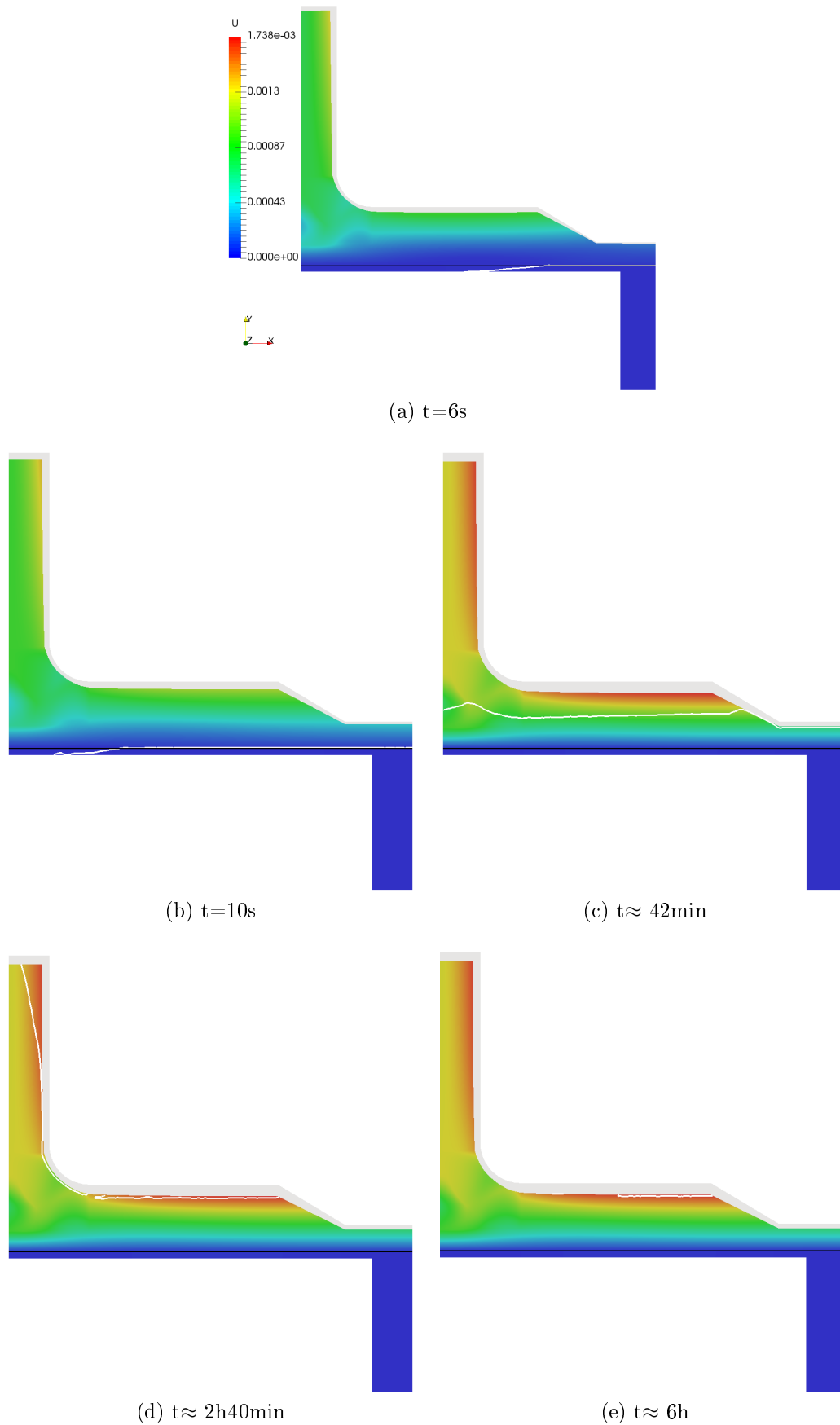


FIGURE 2.20 – Champ de la norme du déplacement et évolution du front fluide à différents instants du remplissage

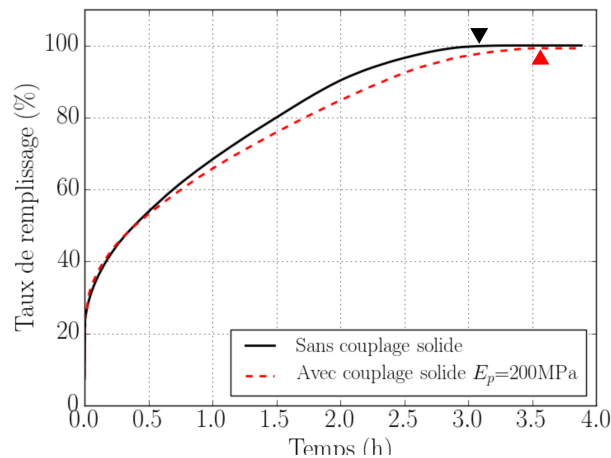


FIGURE 2.21 – Comparaison des taux de remplissage avec et sans déformation mécanique avec les flèches indiquant le remplissage total de la pièce

Le rapport de taux volumique de fibres $\frac{\tau_{vf}}{\tau_{v0}}$ en fin de remplissage est montré sur la Figure 2.22. Il dépend de l'histoire de la déformation des préformes. Comme le taux volumique de fibre peut être déduit directement de la porosité, nous pouvons conclure que prendre en compte la déformation mécanique permet donc de calculer le taux volumique de fibres qui est un critère macroscopique important conditionnant les propriétés mécaniques de la pièce finale. Dans le cas étudié, nous constatons que le τ_{vf} est minimal notamment au niveau des courbures de la pièce. Dans ces zones, le τ_{vf} varie de 12,5% par rapport à la valeur initiale. En effet, un gonflement de la préforme est observé à ces endroits qu'on a pu évaluer en calculant la variation du volume des éléments à ces endroits entre l'état initial et final (Figure 2.23). De la phase de compaction jusqu'à la fin de l'infusion, le τ_{vf} a globalement augmenté en atteignant une valeur de plus de 50%.

Par ailleurs, en prenant en compte la mécanique du solide, des défauts d'imprégnation ou « zones sèches » peuvent être représentées par le modèle comme nous pouvons le constater sur la Figure 2.22. Même si la présence de telles zones pourrait provenir des problèmes numériques, en particulier du fait que la vitesse normale imposée nulle sur le bord implique une vitesse nulle dans les angles, il n'en demeure pas moins que ces zones sont révélatrices de difficultés réelles lors de l'imprégnation. L'industrie a alors recours à différentes méthodes pour éviter la formation de ces zones sèches, comme l'utilisation de membranes semi-perméables laissant passer l'air et pas la résine.

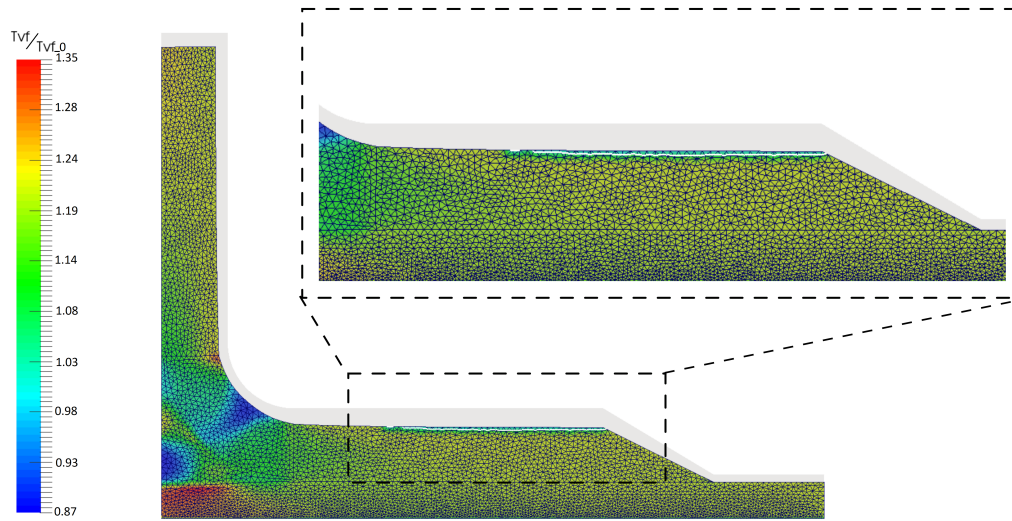


FIGURE 2.22 – État de la pièce en "T" à la fin de la phase de remplissage - défauts d'imprégnation et taux volumique de fibres

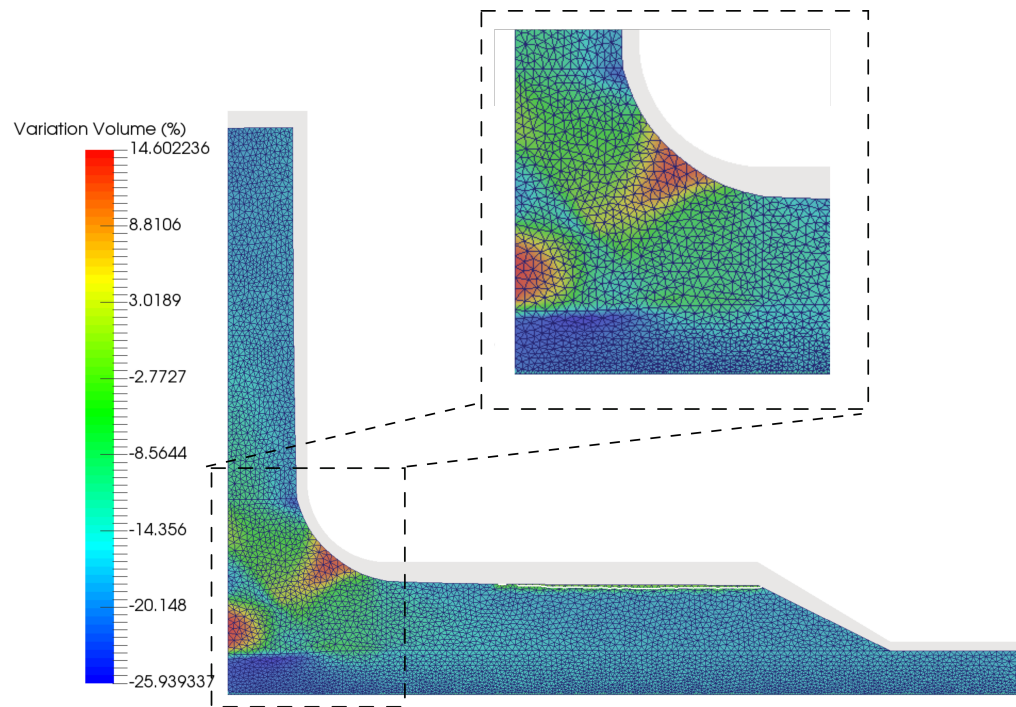


FIGURE 2.23 – Variation du volume des éléments avant et après remplissage à l'état final

2.7 Conclusion sur l'état de l'art de la modélisation

Ce chapitre a présenté les principaux outils numériques implémentés dans le code éléments-finis Z-set, utilisés pour modéliser l'infusion à l'échelle du procédé. Des simulations de la phase de remplissage d'une pièce complexe avec des perméabilités orthotropes caractéristiques de celles des renforts structuraux aéronautiques ont été menées : d'abord, une simulation uniquement des écoulements sans déformation, puis une simulation prenant en compte en plus la déformation de la préforme. Une bonne convergence des résultats est observée lorsque le maillage est suffisamment raffiné dans un intervalle raisonnable de pas de temps. Le principal critère d'intérêt considéré dans les simulations est le temps de remplissage. Les temps de remplissage obtenus avec ou sans déformation semblent plus élevés que les temps réels. Cette constatation nous amène à réfléchir sur les autres phénomènes qui doivent être intégrés dans la modélisation du procédé.

Premièrement, la préforme étant un milieu très faiblement poreux est sujette non seulement aux forces d'origine visqueuse mais aussi aux forces capillaires. Ces dernières peuvent atteindre des valeurs significatives comparées à la pression imposée par la mise sous-vide, ce qui peut influencer le scénario de remplissage. Le prochain chapitre sera donc consacré à l'étude des effets capillaires dans les écoulements dans les préformes fibreuses de faible perméabilité. Ce phénomène sera ensuite modélisé à l'échelle du procédé.

Par ailleurs, le couplage des écoulements avec la déformation mécanique a mis en évidence l'importance de cette dernière au cours du procédé, notamment vis-à-vis de la tolérance dimensionnelle. Le dernier chapitre est de ce fait consacré à la modélisation et la simulation numérique de l'interaction fluide-structure après la phase de remplissage.

Modélisation et simulation des effets capillaires à l'échelle
macroscopique

Sommaire

3.1 Effets capillaires	73
3.2 Cadre mathématique et numérique	76
3.3 Gestion de la discontinuité en pression	82
3.4 Validation de la stratégie numérique	89
3.5 Confrontation à des résultats expérimentaux	96
3.6 Simulation de la phase de remplissage d'un raidisseur	101
3.7 Vers des simulations à l'échelle mésoscopique	111
3.8 Conclusion et perspectives	119

Ce chapitre est consacré au développement d'un modèle numérique intégrant les effets capillaires durant l'infusion de préformes fibreuses à l'échelle du procédé. Un état de l'art des modèles existants ainsi que leurs limites est présenté en première partie. La stratégie que nous avons développée à partir des équations de Darcy, les difficultés numériques qui en résultent et les solutions apportées font l'objet de la partie suivante. La validation du modèle se fait d'abord par une analyse de convergence, ensuite par une confrontation avec des données expérimentales. Par la suite, le remplissage de pièce de type industriel est simulé en 2D et 3D. Le modèle développé est ensuite adapté à la simulation d'écoulement à l'échelle mésoscopique.

3.1 Effets capillaires

Les effets capillaires reflètent la capacité d'un fluide à maintenir le contact avec un solide sans intervention d'une force extérieure, comme par exemple dans le cas des montées spontanées d'un liquide contre une paroi solide. Ce type de phénomène est lié d'une part à la tension superficielle entre le liquide et le milieu environnant tel que l'air, et d'autre part

aux énergies de surface entre les différentes phases liquide-solide et air-solide. Ce sont des phénomènes locaux qui jouent un rôle clé dans la description de l'écoulement de liquide à travers un milieu poreux. Dans notre cas, la compétition entre phénomènes visqueux et capillaires peut générer l'apparition de micro- ou macro-défauts à travers les paquets de fibres, qui vont impacter potentiellement l'écoulement de la résine à l'échelle supérieure. Ces travaux se concentrent sur le développement d'un modèle numérique permettant de tenir compte de ces phénomènes locaux dans une simulation à l'échelle de la pièce.

Les forces capillaires sont traditionnellement négligées dans la simulation des procédés d'élaboration à haute pression des matériaux composites (procédés par injection). Cette hypothèse est pourtant discutable dans le cas des procédés par infusion. En effet, des études expérimentales ont montré que la contrainte capillaire résultant de l'interaction des renforts en carbone et du liquide, tel que l'eau ou la résine époxy, peut atteindre une valeur de 30 à 40 kPa dans les tissus quasi-UD [95, 96], à l'échelle des fibres [125] et aussi dans les tissus en carbone [5]. Cette valeur représente approximativement $\frac{1}{3}$ de la force motrice de 10^5 Pa générée par la mise sous-vide pendant le procédé LRI et ne peut donc pas être négligée. Toute étude sur les matériaux composites, compte tenu de leur nature multi-échelle peut être menée à trois échelles différentes, comme le montrent de nombreux travaux portant sur la simulation de procédés [23, 40, 62, 93] : microscopique (10^{-6} m), mésoscopique (10^{-3} m) et macroscopique ($10^{-1} - 10^0$ m).

3.1.1 Échelle microscopique

À cette échelle, l'équilibre interfacial entre deux fluides non-miscibles en contact avec un milieu solide doit être assuré par l'équilibre de la tension de surface, des énergies de surface et des contraintes exercées de part et d'autre de l'interface. En effet, un saut de pression est présent dès lors que la courbure interfaciale séparant les deux fluides est non nulle. Ce saut est donné par la fameuse loi de Laplace (3.1)

$$[p]_{\Gamma_{l/a}} = p_a - p_l = \gamma \kappa_m \quad (3.1)$$

avec $[p]$ le saut de pression, \underline{n} la normale à l'interface $\Gamma_{l/a}$, κ_m la courbure moyenne, γ la tension interfaciale dépendant de la nature des deux fluides, p_a la pression dans la phase gazeuse (par exemple, l'air) et p_l la pression dans la phase liquide (par exemple la résine). La modélisation numérique de la montée capillaire à cette échelle est bien documentée [15, 19, 81, 120]. Les effets capillaires sont intégrés dans les équations de Stokes ou de Navier-Stokes par le biais de la tension de surface et des énergies de surface entre les trois phases liquide-solide-gaz [4, 35]. Une autre thèse réalisée dans le cadre de la Chaire Hexcel se focalise justement sur la simulation d'écoulements bi-phasiques induits par capillarité, notamment la montée capillaire de la résine dans un réseau de fibres [44].

3.1.2 Échelle mésoscopique

Au niveau des torons, les phénomènes capillaires sont pris en compte à travers la micro-diffusion de la résine dans les torons. Généralement, un terme source/puits dépendant du nombre capillaire est intégré dans les équations constitutives représentant l'écoulement insaturé pour tenir compte des effets capillaires [105, 107, 121]. Le nombre capillaire Ca est en

effet un nombre adimensionnel qui décrit le rapport entre les forces visqueuses et capillaires :

$$Ca = \frac{\mu v}{\gamma}$$

avec v la norme de la vitesse de l'écoulement.

3.1.3 Échelle macroscopique

À l'échelle macroscopique et dans plusieurs domaines de recherche tels que la géo-mécanique, les phénomènes capillaires sont décrits à travers une pression capillaire intégrée à la saturation selon plusieurs modèles tels que ceux proposés par Van Genuchten, Stauffer, Kalaydjian, Gray, Bareblatt, Hassanizadeh [66, 72, 80]. L'expression de la pression capillaire est ensuite reliée au saut de pression de part et d'autre de l'interface séparant les deux fluides (Eq. 3.2), assurant ainsi une équation de fermeture en plus des équations constitutives (les équations de Darcy ou de Brinkman) décrivant l'écoulement

$$[p]_{\Gamma_{l/a}} = p_a - p_l = p_{cap}(s) \quad (3.2)$$

où la pression capillaire p_{cap} est donnée par un modèle en fonction de la saturation s .

Cette approche a été étendue aux procédés d'élaboration des matériaux composites dans l'objectif de simuler l'écoulement pendant le remplissage et ensuite prédire la formation de défauts [32, 83, 91]. Les phénomènes capillaires sont souvent représentés à travers la pression capillaire, par une quantité scalaire bien qu'ils proviennent de mécanismes locaux liés à la fois à la micro- et méso-structure orthotrope des composites et aux tensions/énergies de surface. Or, les effets capillaires ont des directions préférentielles pouvant freiner ou accélérer l'écoulement, notamment pendant le remplissage des renforts fibreux [6, 56, 83].

Une façon d'introduire cette anisotropie à une échelle macroscopique est d'introduire un tenseur de contrainte capillaire appliqué sur l'interface fluide-gaz dans une approche « slug-flow » [83, 117] *i.e.* saturation instantanée (aucune zone de saturation n'est considérée à l'interface). Cette contrainte capillaire peut être d'une part intégrée dans la modélisation 3D du procédé d'infusion décrite dans le chapitre précédent, et d'autre part dans les écoulements à l'échelle des torons dès lors qu'un milieu homogène équivalent peut être utilisé pour représenter le milieu à imprégner.

3.2 Cadre mathématique et numérique

Dans cette section, nous décrivons la modélisation mathématique et numérique mise en place afin de tenir compte des phénomènes capillaires dans l'écoulement de la résine dans la préforme fibreuse, à l'échelle macroscopique. La stratégie adoptée permet de prendre en compte l'anisotropie des phénomènes capillaires due à l'hétérogénéité de la structure des matériaux composites.

3.2.1 Représentation à l'échelle macroscopique

Dans notre modèle macroscopique, les effets capillaires sont représentés par un tenseur des contraintes capillaires appliqué à l'interface formé par le front fluide. Le tenseur des contraintes capillaires est intégré dans les équations de Darcy à travers la formulation faible duale en tant que condition limite de type Neumann ; une raison de plus qui motive notre choix de la formulation duale par rapport à la formulation primale des équations de Darcy. Rappelons la structure du domaine décrivant le milieu poreux sur la Figure 3.1 suivante

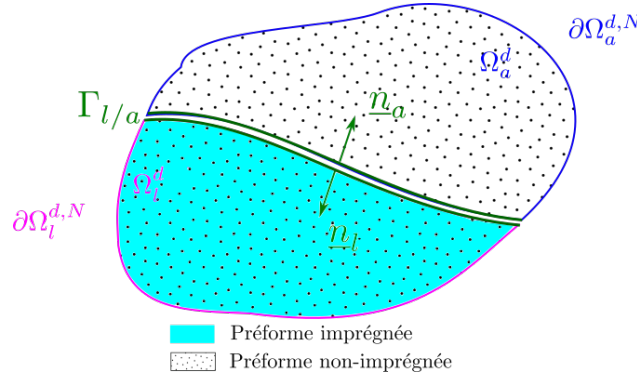


FIGURE 3.1 – Description 2D du milieu poreux (Darcy)

La première étape consiste à décomposer proprement les bords du domaine du milieu poreux (Darcy) où on impose des conditions de type Neumann « N » tel que

$$\partial\Omega^{d,N} = \partial\Omega_l^{d,N} \cup \partial\Omega_a^{d,N} \quad (3.3)$$

où $\partial\Omega_l^{d,N}$ et $\partial\Omega_a^{d,N}$ décrivent respectivement les bords du milieu poreux imprégné par le liquide et celui du milieu non-imprégné (*i.e.* occupé par le milieu environnement, l'air). L'intersection de ces deux bords forme alors le front fluide noté $\Gamma_{l/a}$ tel que

$$\Gamma_{l/a} = \partial\Omega_l^{d,N} \cap \partial\Omega_a^{d,N}. \quad (3.4)$$

En tenant compte de (3.3) et (3.4), le terme $\langle \underline{w}^d \cdot \underline{n}^d, \underline{n}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^d \cdot \underline{n}^d \rangle_{\partial\Omega^{d,N}}$ de l'équation (2.23) s'exprime alors de la manière suivante

$$\begin{aligned} \langle \underline{w}^d \cdot \underline{n}^d, \underline{n}^d \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^d \cdot \underline{n}^d \rangle_{\partial\Omega^{d,N}} &= \langle \underline{w} \cdot \underline{n}_l, \underline{n}_l \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^l \cdot \underline{n}_l \rangle_{\partial\Omega_l^{d,N}} + \langle \underline{w} \cdot \underline{n}_a, \underline{n}_a \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^a \cdot \underline{n}_a \rangle_{\partial\Omega_a^{d,N}} \\ &+ \langle \underline{w} \cdot \underline{n}, \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{cap} \cdot \underline{n} \rangle_{\Gamma_{l/a}} \end{aligned}$$

où les vecteurs \underline{n}_j et les tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}_{ext}^j$ décrivent respectivement les normales et les tenseurs de contraintes au bord $\partial\Omega_j^{d,N}$. Le vecteur \underline{n} décrit ici la normale sortante au front fluide ($\underline{n}_l|_{\Gamma_{l/a}} = -\underline{n}_a|_{\Gamma_{l/a}} = \underline{n}$).

Le terme $\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{cap} \cdot \underline{n}$ décrit le saut de contraintes de part et d'autre de l'interface liquide/air :

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{cap} \cdot \underline{n} = (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^l \cdot \underline{n} - \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext}^a \cdot \underline{n}).$$

Ces contraintes s'expriment dans un repère formé par les directions d'orthotropie du matériau par

$$\underline{\underline{\sigma}}_{cap} = \underline{\underline{\sigma}}_{cap}^{loc} = \begin{pmatrix} \sigma_{cap}^p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cap}^t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cap}^l \end{pmatrix}_{(p,t,l)} \quad (3.5)$$

avec $\sigma_{cap}^{\{p,t,l\}}$ les composantes de la contrainte capillaire à l'interface $\Gamma_{l/a}$ dans les directions p -, t - et l - (loc pour l'expression du tenseur dans le repère local).

On suppose, de par la morphologie de la préforme que le tenseur des contraintes capillaires a les directions principales similaires à celles de la perméabilité. Il s'exprime dans le repère global par $\underline{\underline{\sigma}}_{cap} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{cap}^{loc} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$, où $\underline{\underline{Q}}$ est le tenseur orthogonal qui permet le passage des bases locales aux bases globales.

Dans le cas isotrope, le tenseur des contraintes capillaires se réduit à un scalaire que nous notons par la suite σ_{cap} . En fonction de la nature des fluides et des solides impliqués, les phénomènes capillaires peuvent définir une force s'opposant à l'écoulement de la résine. Les composantes de la contrainte capillaire prennent dans ce cas, des valeurs négatives dans notre modèle numérique. Des techniques spécifiques doivent être mises en place afin de calculer le terme surfacique

$$\langle \underline{w}_h \cdot \underline{n}, \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{cap} \cdot \underline{n} \rangle_{\Gamma_{l/a}^h} = \int_{\Gamma_{l/a}^h} \underline{w}_h \cdot \underline{n} \cdot \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{cap} \cdot \underline{n} ds \quad (3.6)$$

au front fluide, ces techniques font l'objet de la section suivante.

3.2.2 Intégration numérique du terme surfacique des contraintes capillaires

Dans notre approche, les contraintes capillaires sont imposées naturellement au front fluide, *i.e.* elles apparaissent dans la formulation faible sous la forme d'une condition de Neumann, via une intégrale sur l'interface liquide/air. Cependant, cette interface n'est pas décrite par un ensemble de faces d'éléments du maillage, mais de manière implicite à l'aide de l'isosurface zéro de la fonction Level-set, et intersecte donc certains éléments du maillage. L'enjeu de cette section est de décrire les moyens permettant de calculer numériquement dans ces conditions ce terme surfacique (Eq 3.6).

Notre choix s'est porté sur deux méthodes : la méthode de **régularisation** de l'interface CSF (*Continuum Surface Force*) et la méthode de **reconstruction locale** de surface SLR (*Surface Local Reconstruction*).

Afin d'évaluer ces deux méthodes, un cas test prenant en compte la contrainte capillaire au niveau d'un front fluide fixe dans le domaine poreux (ici, le domaine de Darcy) est défini. On considère alors Ω un milieu poreux isotrope en 2D, le carré unitaire de perméabilité $K = 3 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$ contenant deux fluides de viscosité $\mu_a = 10^{-5} \text{ Pa.s}$ et $\mu_l = 10^{-3} \text{ Pa.s}$, respectivement. La contrainte capillaire isotrope appliquée au niveau du front fluide situé en $\{y = \frac{1}{2}\}$ est de $\sigma_{cap} = 32 \text{ kPa}$. Cette dernière est l'unique force motrice considérée dans le problème. Les deux parois $\{y = 0\}$ et $\{y = 1\}$ sont à la pression atmosphérique. Les parois verticales $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$ sont supposées imperméables *i.e.* sur ces parois la vitesse normale est nulle ($\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$). Les paramètres du problème sont résumés sur la Figure 3.2. Ce cas permet également d'évaluer le comportement du modèle numérique pour des matériaux très peu perméables représentatifs des pièces composites HP.

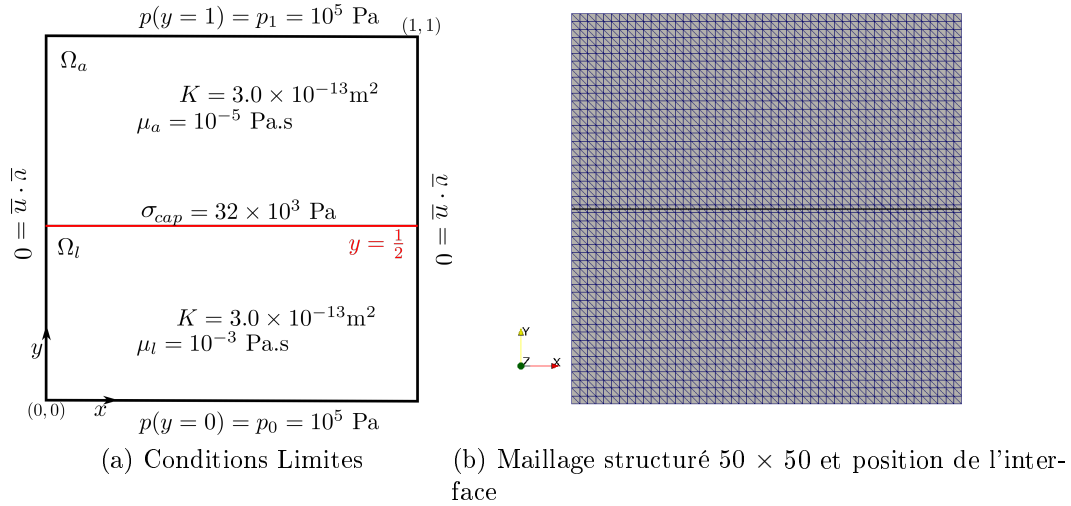


FIGURE 3.2 – Propriétés matériaux et conditions aux bords appliquées à la simulation de l'écoulement unidirectionnel ainsi que la discrétisation du domaine

La solution analytique (Eq. 3.7) de cet écoulement unidirectionnel est facilement calculée

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= \mu_l \mathcal{A} y + p_0 && \text{dans } \Omega_l \\
 p(x, y) &= \mu_a \mathcal{A} (y - l) + p_1 && \text{dans } \Omega_a \\
 [p(x, y)] &= \sigma_{cap} = 32 \text{ kPa} && \text{sur } \Gamma_{l/a} \\
 v(x, y) &= -K \mathcal{A} = 1,901 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} && \text{dans } \Omega_l \text{ et } \Omega_a
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec $\mathcal{A} = \frac{p_1 - p_0 - \sigma_{cap}}{l_c \mu_l + (l - l_c) \mu_a}$. La solution analytique (Eq. 3.7) permet de constater que la contrainte capillaire au niveau du front de matière génère une **discontinuité** du champ de pression à ce front. Les simulations avec les méthodes CSF ou SLR se font sur le maillage structuré

de la Figure 3.2b. La taille de maille h_e vaut $\frac{1}{50}$ m. Remarquons que l'interface $\{y = \frac{1}{2}\}$, représentée par l'isosurface zéro de la fonction Level-set, traverse les éléments « d'interface » de ce maillage.

Méthode de régularisation - CSF

Appliquée au traitement de la contrainte capillaire, la méthode CSF [29] consiste à transformer le terme surfacique (Eq. 3.6) en une intégrale volumique sur une zone définie de largeur ϵ_{CSF} autour du front fluide, comme décrit sur la Figure 3.3.

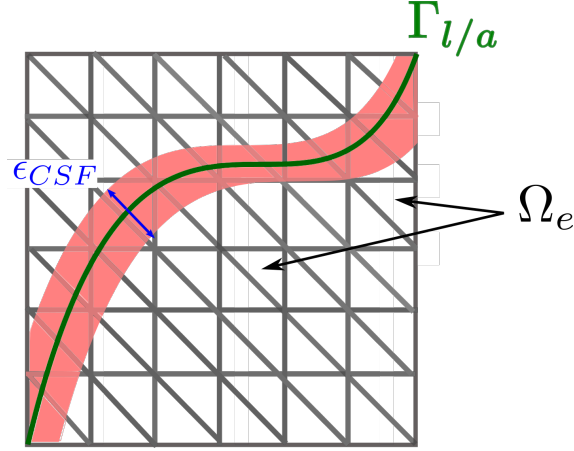


FIGURE 3.3 – Principe de la méthode CSF (Ω_e désigne les éléments du maillage)

En effet, on peut écrire

$$\int_{\Gamma_{l/a}} (\dots) ds = \int_{\Omega} (\dots) \delta(\Gamma_{l/a}) dv$$

où δ est le delta de Dirac. Les méthodes de type CSF consistent à approcher δ par un certain $\delta_{\epsilon_{CSF}}$, nul en dehors d'une bande de largeur $2\epsilon_{CSF}$ autour de l'interface. Ici, nous introduisons d'abord la fonction de régularisation H_{\cos}

$$H_{\cos} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\pi \frac{\psi}{\epsilon_{CSF}}\right) \right) \quad (3.8)$$

valable pour $-\epsilon_{CSF} \leq \psi \leq +\epsilon_{CSF}$, sinon égale à 0. Le delta de Dirac régularisé est alors pris égal à $\frac{H_{\cos}}{\epsilon_{CSF}}$, et le terme volumique résultant de la méthode CSF appliquée au terme (Eq. 3.6) s'écrit

$$\int_{\Gamma_{l/a}} \dots \approx - \int_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_{CSF}} H_{\cos} \|\psi\| \sigma_{cap} \underline{w}_h \cdot \underline{n} dv \quad (3.9)$$

Comme le montrent les Figures 3.4a et 3.4b, la méthode CSF ne permet pas de traiter correctement la discontinuité en pression. Des effets de bords sont également observés dans le champ de vitesse (Figure 3.4a), au niveau de l'intersection du front fluide avec les parois imperméables. De plus, un pic de vitesse d'environ 300% par rapport à la solution analytique est présent au niveau du front fluide.

Concernant le champ de pression, une erreur de 45% par rapport à la solution analytique est observée. L'inconvénient majeur de cette méthode est sa sensibilité à la largeur ϵ_{CSF} de la zone d'intégration. La Figure 3.5 montre que le fait d'augmenter la largeur de la zone de transition permet de réduire le pic de vitesse à l'interface mais dégrade la pression à l'interface en la « relaxant » considérablement. La valeur du saut de pression n'est donc plus correcte.

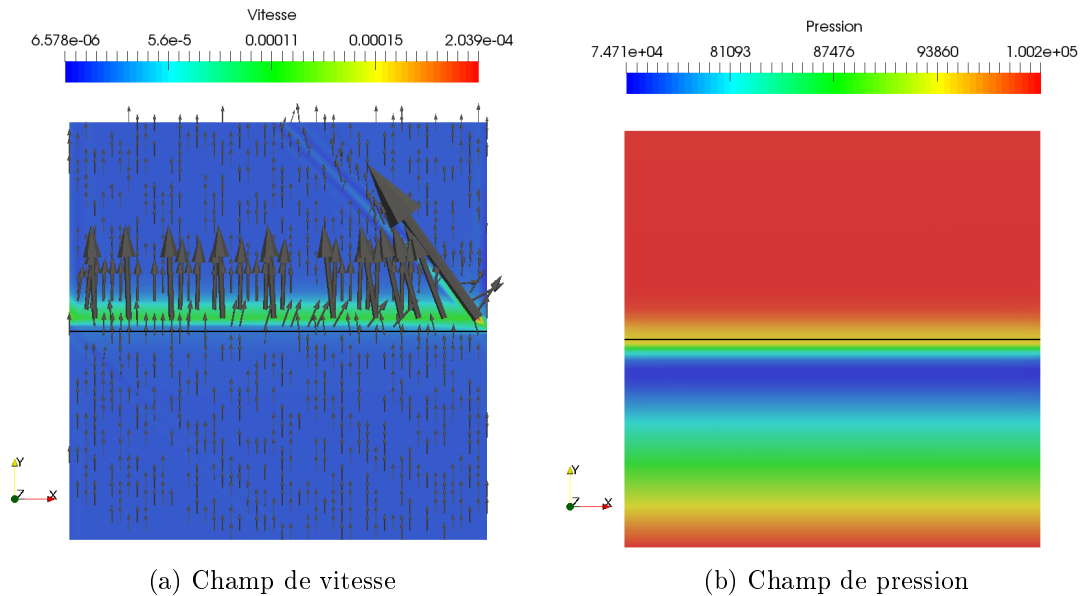


FIGURE 3.4 – Les champs de vitesse et de pression avec la méthode CSF

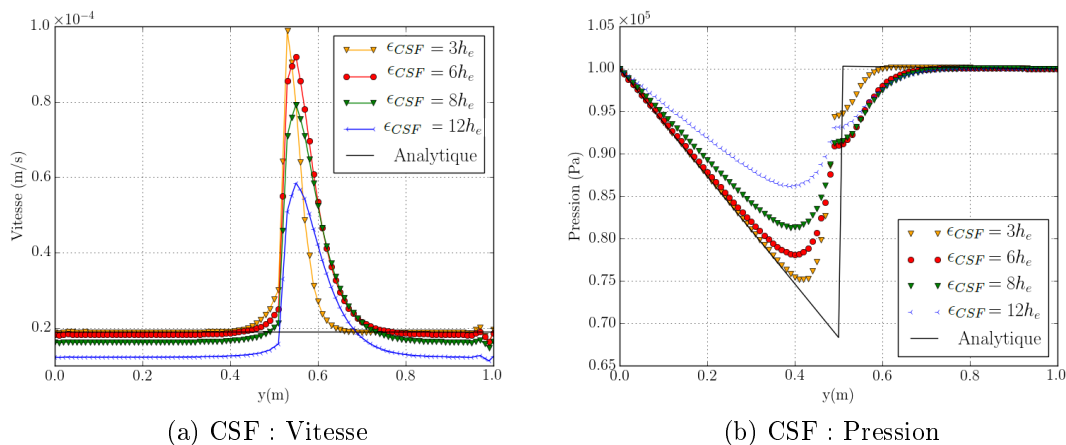


FIGURE 3.5 – Comparaison des résultats numériques et analytiques, le long de ligne $\{x = \frac{1}{2}\}$, pour différentes valeurs de la zone de transition ϵ_{CSF} (méthode CSF)

Méthode de reconstruction - SLR

Avec la méthode de reconstruction SLR [94], le terme surfacique (Eq. 3.6) n'a pas besoin d'être « transformé » mais peut être intégré exactement sur le front fluide. Cette méthode

consiste à reconstruire localement l'interface comme une suite de segments (2D) ou de triangles/quadrilatères (3D) grâce aux valeurs prises par la fonction Level-set dans les éléments traversés par le front fluide (Figure. 3.6). Deux points d'intégration par segment sont alors utilisés pour intégrer le terme (3.6). La méthode SLR permet de plus de diviser les éléments coupés par l'interface en sous-éléments ayant leur propres règles d'intégration, ce qui permet de prendre en compte correctement les valeurs différentes de viscosité de part et d'autre de l'interface.

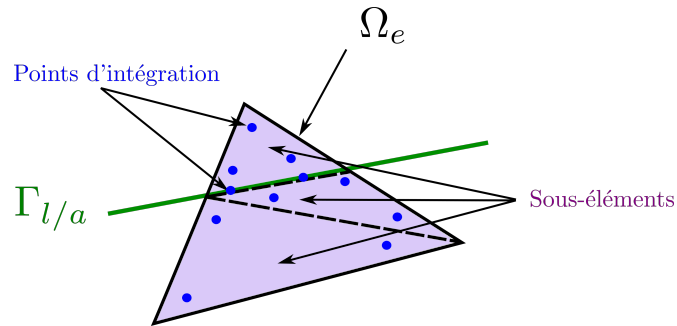


FIGURE 3.6 – Principe de la méthode SLR - 2D

Cependant, comme nous pouvons le constater sur la Figure 3.7, cette méthode ne permet pas de surmonter toutes les difficultés générées par la contrainte capillaire appliquée au front fluide. Le pic de vitesse est toujours présent ainsi que les oscillations au niveau des bords (Figure 3.7a). Toutefois, la méthode SLR montre une erreur relative très faible comparée à la méthode CSF, pour la même taille de maille. La méthode CSF, en utilisant une zone de transition d'une largeur équivalente à 3 fois la taille de maille, produit une erreur de 300% contre environ 70% pour la méthode SLR.

Concernant le champ de pression (Figure 3.7b), les deux méthodes induisent une erreur quasiment identique d'environ 45% par rapport à la solution analytique. L'illustration de ces quantifications est présentée sur la Figure 3.12 dans la sous-section suivante ; qui montre également l'efficacité des techniques mises en œuvre pour s'affranchir de ces effets de bords et des oscillations.

Ces erreurs sont dues au fait que l'approximation P1 de la pression n'est pas adaptée pour capturer la discontinuité générée au front fluide. Des techniques doivent être appliquées afin de gérer cette discontinuité et éviter ces oscillations des solutions.

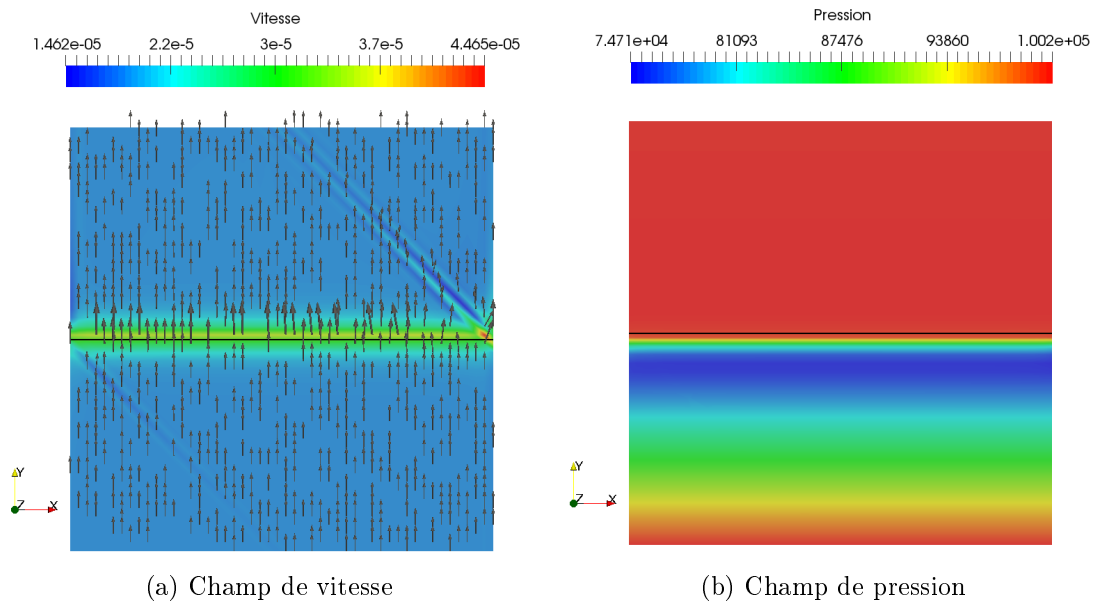


FIGURE 3.7 – Les champs de vitesse et de pression avec la méthode SLR

3.3 Gestion de la discontinuité en pression

À elles seules, les deux méthodes SLR et CSF ne permettent pas de traiter la discontinuité du champ de pression. En effet, l'approche P1/P1, c'est-à-dire l'approximation par des fonctions affines par morceaux et continues des champs de vitesse et de pression ne permet pas de capturer correctement la discontinuité du champ de pression, générant ainsi des vitesses parasites et des oscillations de la solution. Des stratégies numériques sont nécessaires afin de traiter ce problème.

Les discontinuités sont généralement classées en deux catégories. On parle de discontinuité dite forte quand la discontinuité concerne les variables primaires du problème (dans notre cas, la vitesse et la pression). La discontinuité est dite faible quand la discontinuité concerne la dérivée de ces variables. La méthode classique des éléments-finis a été traditionnellement utilisée pour traiter les discontinuités faibles en concevant des maillages conformes dans lesquels les bords des éléments-finis doivent être conformes aux surfaces de discontinuités ; nécessitant ainsi un remaillage dans le cas des discontinuités mobiles.

Deux autres méthodes seront discutées dans cette section : la méthode de Galerkin Discontinue et la méthode des enrichissements. Nous pouvons citer également la méthode I-FEM (*Immersed-Finite Element*) différente des méthodes citées ci-dessus dans la mesure où les fonctions d'interpolation des degrés de liberté globaux sont directement modifiées et aucun degré de liberté supplémentaire n'est ajouté [11, 76, 112]. Cependant, la convergence fait défaut à ce type de méthodes, due à la présence potentielle de discontinuité des nouvelles fonctions d'interpolation sur les bords des éléments - comme discuté dans [79]. C'est la raison pour laquelle cette méthode n'a pas été envisagée dans notre étude.

3.3.1 Méthode de type Galerkin Discontinue

Une technique permettant de traiter la discontinuité consiste à résoudre le problème par une approche de type Galerkin Discontinue (GD) [1, 17, 84]. Cette méthode fait le lien entre la méthode des éléments-finis et celle des volumes-finis. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne requiert pas d'imposer la continuité de la solution entre les éléments du maillage. La continuité entre les éléments est en effet, faiblement imposée par le calcul de flux à travers les faces des éléments. Hughes *et al.* [70] ont élaboré une méthode de stabilisation du problème de Darcy dans le cadre de la méthode GD, permettant à la fois à la pression et à la vitesse d'être discontinue. De plus, cette méthode est localement conservative dans la mesure où chaque élément satisfait à un bilan massique exact. En contre partie, le coût en mémoire est important en raison de la double définition de la solution au niveau des sommets des éléments augmentant ainsi le nombre de degré de liberté à calculer (Figure 3.8). Par ailleurs, la discontinuité est permise uniquement au niveau des bords des éléments *i.e.* les surfaces de discontinuité ne peuvent couper les éléments. Par conséquent, une opération de remaillage est nécessaire quand cette surface de discontinuité change de position afin de garder un front fluide coïncident aux interfaces entre deux éléments voisins. Afin de contourner ces diverses difficultés et rester dans un cadre purement éléments-finis, une alternative intéressante est la méthode d'enrichissement de l'espace des solutions.

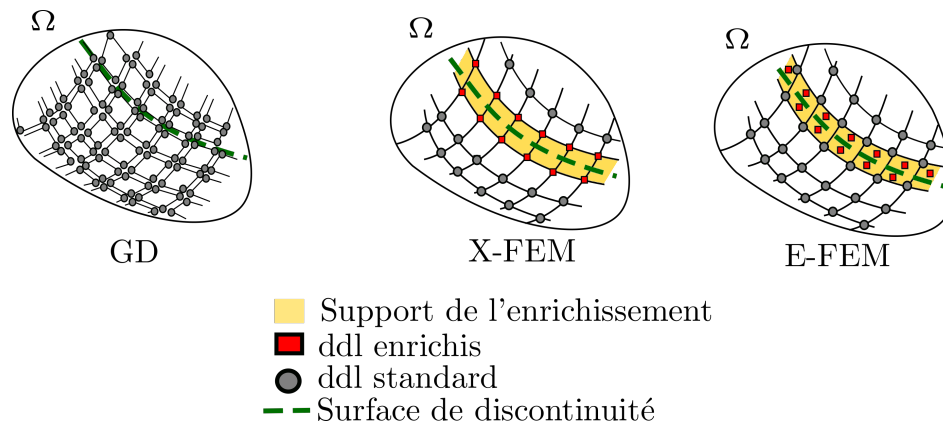


FIGURE 3.8 – Comparaison schématique des méthodes GD (à gauche), X-FEM (au milieu) et E-FEM (à droite) pour des éléments de type Q2

3.3.2 Stratégie d'enrichissement

La méthode d'enrichissement étend l'approche classique de la méthode des éléments finis en élargissant l'espace de solution. Dans notre cas, nous étudierons deux catégories d'enrichissement : la **méthode d'enrichissement nodal** et la **méthode d'enrichissement élémentaire**. La principale différence entre ces deux méthodes est que la première ajoute des degrés de liberté (ddl) supplémentaires définis au niveau des nœuds de l'élément traversé par la surface de discontinuité alors que dans la seconde, les ddl supplémentaires peuvent être définis à l'intérieur des éléments, et donc condensés.

Méthode d'enrichissement nodal

La méthode des éléments-finis étendus X-FEM (*Extended Finite Element Method*, appelée également G-FEM (*Generalized Finite Element Method*) est beaucoup utilisée dans le traitement des discontinuités en mécanique de la rupture. Cette méthode a été développée pour faciliter la résolution de problèmes avec des singularités (fissures, perforations, ...) qui ne sont pas efficacement résolus par le raffinement du maillage et qui dégradent considérablement la convergence de la méthode éléments-finis classique. Les applications de l'approche X-FEM dans le domaine de la mécanique des fluides peuvent être trouvées, par exemple, dans [43, 104] et dans les problèmes d'interface dans [38]. Par ailleurs, la méthode X-FEM combinée à une méthode Level-set est aussi utilisée dans le cadre de la simulation numérique des procédés LCM [71] et permet d'obtenir une bonne approximation du champ de pression au niveau du front fluide autour duquel le gradient de la pression peut être discontinu. Pour décrire proprement les discontinuités, cette technique, contrairement à la méthode GD, ne requiert pas un maillage conforme à la discontinuité. Des fonctions de la base discontinues sont ajoutées aux fonctions de base polynomiale standard aux nœuds appartenant aux éléments au voisinage de la singularité. Bien que pouvant être très efficace, cette méthode peut augmenter le temps de calcul comparée à la méthode classique éléments-finis à cause de ces dds supplémentaires. En effet, les inconnues supplémentaires ne peuvent pas être condensées au niveau élémentaire, ce qui augmente la taille du système global. Il est de plus nécessaire de redimensionner la taille du système linéaire à chaque incrément de temps, pour y introduire ces nouveaux dds.

Des variantes de cette méthode qui permettent de réduire le temps de calcul sont la méthode IG-FEM (ou *Interface-enriched Generalized FEM*) [110] et la méthode DE-FEM (ou *Discontinuity Enriched-FEM*) [8]. Ces deux méthodes reposent sur l'ajout de nœuds uniquement à l'intersection de la surface de discontinuité avec les arêtes de l'élément. La différence entre ces deux méthodes est que la première est adaptée pour résoudre uniquement les problèmes avec des champs de gradient discontinus, *i.e.* faisant intervenir des discontinuités faibles ; alors que la méthode DE-FEM rajoute des dds de façon à capter à la fois les discontinuités faibles et fortes. Cette dernière approche permet alors d'une part, comme l'IG-FEM une économie en temps de calcul en plaçant les nœuds enrichis uniquement le long des discontinuités, et d'autre part améliore l'imposition des conditions de type Dirichlet.

Une solution pour capturer les discontinuités tout en gardant le nombre de dds constant est la méthode d'enrichissement élémentaire, appelée par la suite, E-FEM (*Elementary enriched-Finite Element*).

Méthode E-FEM

La méthode E-FEM consiste à enrichir uniquement l'espace de la solution impactée par la discontinuité. Contrairement à la méthode X-FEM, le support des nouvelles fonctions de forme est l'élément traversé par la singularité et non les nœuds appartenant aux éléments autour de la singularité. Cette technique permet de ce fait l'élimination des dds supplémentaires au niveau élémentaire, ce qui garde la taille du système global constante à l'issue de l'enrichissement. Une étude comparative des deux méthodes X-FEM et E-FEM dans le cadre de la propagation de fissure met en évidence les avantages de la méthode des E-FEM au niveau des temps de calcul mais également au niveau de la convergence [87].

Plusieurs types d'enrichissement E-FEM existent. Des techniques visent à capter uniquement les discontinuités faibles, par exemple celle du gradient de pression [49] pour améliorer ainsi la capacité à simuler des écoulements de fluides de densité différente sous l'effet d'une force gravitationnelle. Dans notre cas, seul le champ de pression est discontinu ; donc seul l'enrichissement local du champ de pression est nécessaire.

3.3.3 Enrichissement local en pression

La stratégie d'enrichissement du champ de pression utilisée dans la suite de ce manuscrit est celle développée par Ausas *et al.* [10], et consiste à enrichir l'espace d'approximation de la pression dans les éléments traversés par le front fluide en considérant deux fonctions de forme supplémentaires, M_1 (Eq. 3.10) et M_2 (Eq. 3.11), toutes deux discontinues (Figure 3.9). Bien évidemment, dans notre cas, l'enrichissement n'a de sens que combiné avec la méthode de reconstruction locale de la surface formée par l'intersection du front fluide et de l'élément. Ces fonctions de forme supplémentaires s'écrivent :

$$M_1(\underline{x}) = (1 - S(\underline{x}))\chi^l(\underline{x}) \tag{3.10}$$

$$M_2(\underline{x}) = S(\underline{x})\chi^a(\underline{x}) \tag{3.11}$$

avec

$$S(\underline{x}) = \sum_{J \in \mathcal{J}^a} N_J(\underline{x}) \tag{3.12}$$

où N_J est la fonction de forme linéaire standard associée au nœud J , χ^l est égal à 1 dans la région liquide, à 0 ailleurs, $\chi^a = 1 - \chi^l$. L'ensemble \mathcal{J}^a correspond aux nœuds de l'élément traversé par l'interface.

Sur les éléments traversés par le front fluide, le champ de pression p_h s'écrit alors :

$$p_h(\underline{x}) = \sum_J P_J N_J(\underline{x}) + C_1 M_1(\underline{x}) + C_2 M_2(\underline{x}) \tag{3.13}$$

où les P_J sont les degrés de liberté aux sommets J de l'élément, et C_1 et C_2 ceux associés aux fonctions de forme discontinues M_1 et M_2 .

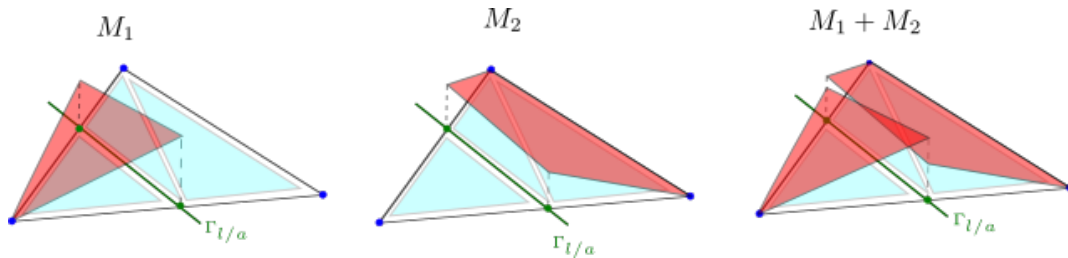


FIGURE 3.9 – Enrichissement local du champ de pression et reconstruction locale du front fluide dans le cas 2D (inspiré de [10])

L'enrichissement permet ainsi à la pression d'être localement discontinue. En pratique, l'implémentation de cet enrichissement est facilitée par l'utilisation de la Level-set. La valeur de cette dernière permet de repérer les éléments traversés par l'interface et ainsi de construire aisément les fonctions de forme discontinues.

Condensation statique

La condensation statique consiste à éliminer les deux degrés de liberté supplémentaires C_1 et C_2 au niveau élémentaire, avant l'étape d'assemblage. Cette élimination peut être effectuée parce que la pression intervient uniquement dans les termes linéaires du problème.

Posons le système linéaire au niveau élémentaire tel que

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{se} \\ K_{es} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}_s \\ \underline{X}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_s \\ \underline{F}_e \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

avec l'indice « e » correspondant aux degrés de liberté (ddls) supplémentaires \underline{X}_e rajoutés par l'enrichissement, « s » aux ddls standards \underline{X}_s , $[K_{ii}]$ et \underline{F}_i respectivement les sous-matrices et les forces extérieures décrites plus précisément dans la suite. La sous-matrice $[K_{ss}]$ est de taille $m_s \times m_s$ avec m_s le nombre total de ddls (en pression et en vitesse). $[K_{ee}]$ est de taille $m_e \times m_e$ avec $m_e = 2$ le nombre de ddls supplémentaires. K_{se} est de taille $m_s \times m_e$ et $[K_{es}]$ de taille $m_e \times m_s$.

Le système (Eq. 3.14) peut s'écrire tel que

$$\begin{cases} [K_{ss}] \underline{X}_s + [K_{se}] \underline{X}_e = \underline{F}_s \\ [K_{es}] \underline{X}_s + [K_{ee}] \underline{X}_e = \underline{F}_e \end{cases} \quad (3.15)$$

L'objectif est d'éliminer les ddls supplémentaires en exprimant \underline{X}_e en fonction de \underline{X}_s . La deuxième équation permet d'écrire

$$\underline{X}_e = [K_{ee}^{-1}] (\underline{F}_e - [K_{es}] \underline{X}_s)$$

ce qui, réinjectée dans la deuxième équation de (3.15), donne

$$[K_{ss} - K_{se} K_{ee}^{-1} K_{es}] \underline{X}_s = \underline{F}_s - [K_{se} K_{ee}^{-1}] \underline{F}_e \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) décrit donc le nouveau système global gardant le nombre de ddls inchangé. La matrice de rigidité et la force extérieure ont cependant été modifiées en conséquence de l'enrichissement¹. $[K_{ss}]$ et \underline{F}_s sont respectivement la sous-matrice et la force extérieure associées aux degrés de liberté standards (en vitesse et pression). Elles correspondent respectivement à la forme bilinéaire B_d et à la forme linéaire L_d associées à la formulation EF des équations de Darcy stabilisée par la méthode ASGS, décrites dans l'équation (2.34). La sous-matrice $[K_{ee}]$ et la force extérieure \underline{F}_e correspondent aux ddls de pression enrichis et s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} [K_{ee}]_{pq} &= - \sum_e \tau_{v,e} \langle \nabla M_p, \nabla M_q \rangle_{\Gamma_{l/a}} \\ F_e^p &= \sum_e \tau_{v,e} \langle \underline{f}_v, \nabla M_p \rangle_{\Gamma_{l/a}} + \langle h, M_q \rangle_{\Gamma_{l/a}} \end{aligned}$$

avec M_p les fonctions de forme liées aux ddls de pression p supplémentaires, M_q celles correspondant aux fonctions test q en pression et F_e^p les composants du vecteur \underline{F}_e lié aux deux degrés de liberté supplémentaires.

1. Le système global sans enrichissement s'écrit $[K_{ss}] \underline{X}_s = \underline{F}_s$

Résultats de l'enrichissement en pression

Appliqué au cas tes décrit précédemment sur la Figure 3.2, l'enrichissement local du champ de pression permet de retrouver exactement la solution analytique : une vitesse constante dont la norme vaut $1,901 \cdot 10^{-5}$ m/s dans tout le domaine (Figure 3.10a), un saut de pression d'une valeur de $[p]_{\Gamma_{1/a}} = \sigma_{cap} = 32$ kPa (Figure 3.10b) avec une erreur moins de 5%. Une comparaison des profils de vitesse et de pression issus des 3 méthodes (CSF, SLR et SLR avec enrichissement de la pression) est illustrée respectivement sur les Figures 3.11a et 3.11b. Les erreurs relatives entre la solution analytique et numérique correspondantes sont également reportées sur les Figures 3.12a et 3.12b. Comme illustré sur la Figure 3.13, la valeur analytique du saut de pression est très vite retrouvée même pour des maillages assez grossiers ($h_e = \frac{1}{25}$ m) ; ce qui démontre encore l'efficacité de la méthode d'enrichissement.

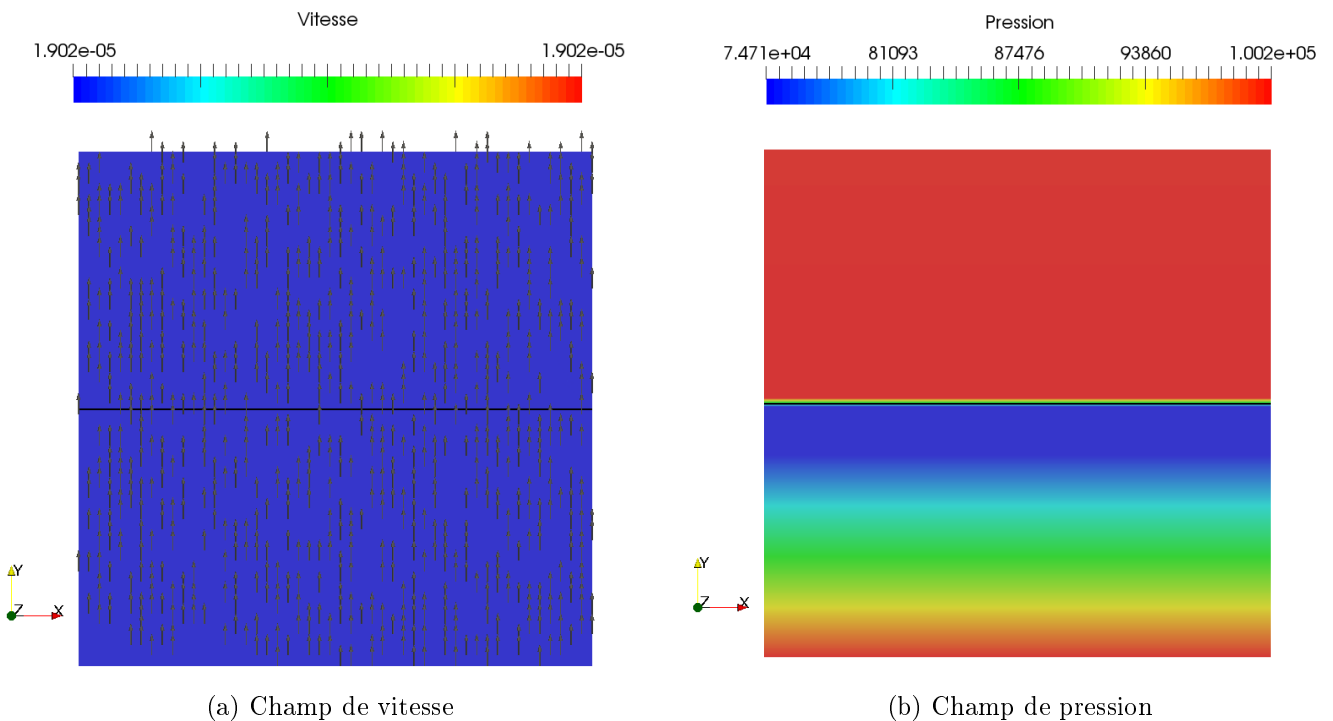


FIGURE 3.10 – Les champs de vitesse et de pression avec la reconstruction de la surface (SLR) et l'enrichissement local de la pression

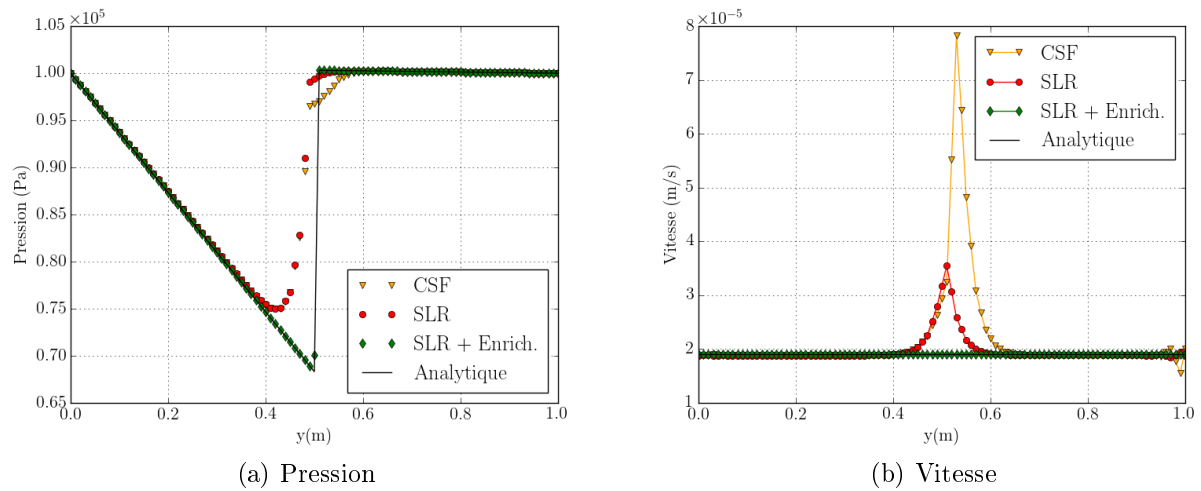


FIGURE 3.11 – Comparaison des champs de pression et vitesse obtenus par les 3 méthodes (SLR, CSF, SLR + Enrichissement) le long de la ligne d'analyse $\{x = \frac{1}{2}\}$ pour la configuration test (Figure 3.2)

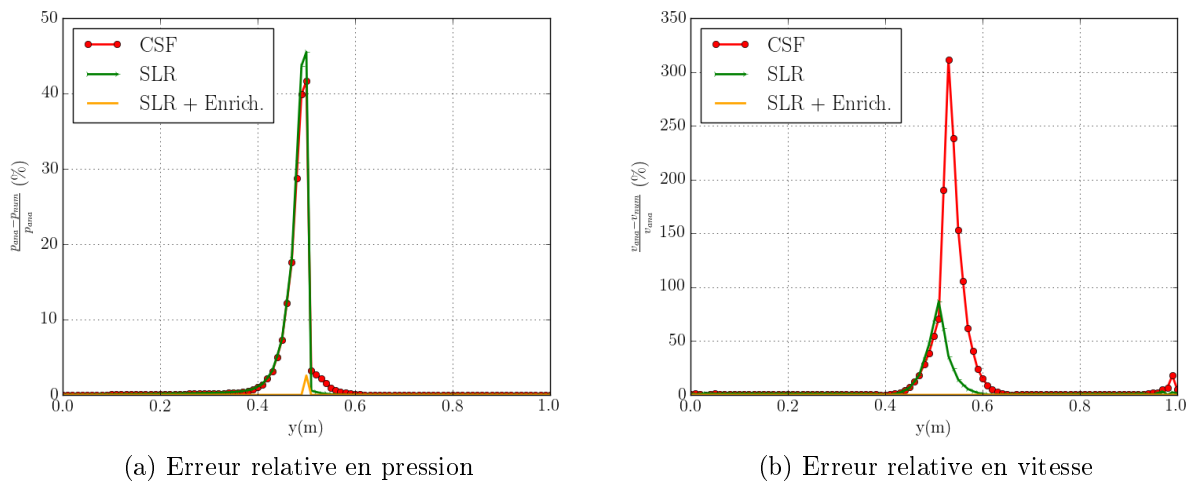


FIGURE 3.12 – Comparaison des erreurs en pression et en vitesse obtenues par les 3 méthodes (SLR, CSF, SLR + Enrichissement) le long de la ligne d'analyse $\{x = \frac{1}{2}\}$ pour la configuration test (Figure 3.2)

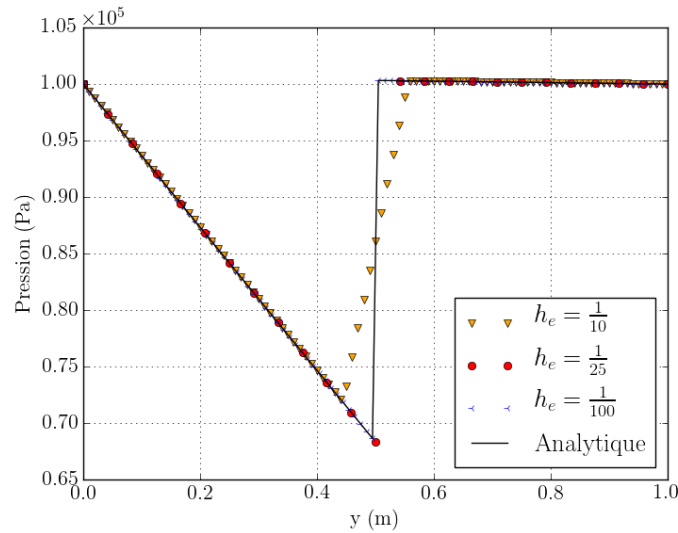


FIGURE 3.13 – Comparaison des champs de pression numérique et analytique, le long de ligne $\{x = \frac{1}{2}\}$, pour différentes tailles de maille h_e avec la méthode SLR combinée à l'enrichissement local de la pression

3.4 Validation de la stratégie numérique

Dans cette partie, une analyse de convergence par la méthode des solutions manufacturées est entreprise afin de valider au niveau mathématique, mais également au niveau de l'implémentation informatique, l'approche développée.

3.4.1 Méthode des solutions manufacturées

La méthode des solutions manufacturées [101] consiste à fabriquer une solution analytique représentative du problème à évaluer. Cette solution analytique est injectée dans la formulation forte des équations de Darcy afin de calculer les seconds membres correspondant à cette solution. Ces termes sont alors implémentés dans la formulation EF. Par la suite, les champs solution résultant de ce modèle EF sont comparés à la solution analytique fabriquée.

Solution analytique

Afin d'évaluer la robustesse du modèle, la solution analytique est définie par un champ de pression sinusoïdal et discontinu à l'interface (Eq. 3.17). Le domaine de calcul est le carré unité, dans lequel on définit un champ de pression discontinu sur la ligne $\{y = \frac{1}{2}\}$:

$$p(x, y) = \begin{cases} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + \sigma_{cap} & \text{si } y < \frac{1}{2} \\ \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) & \text{si } y > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.17)$$

Nous considérons ici $\sigma_{cap} = 1$. En prenant $\frac{K}{\mu} = 1$, la vitesse est donnée par le gradient de la pression, soit

$$v_x = 2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

$$v_y = 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$$

Injecter cette solution dans les équations (2.14) et (2.7) définit respectivement les forces extérieures \underline{f}_v (Eq. 3.18) ainsi que l'expression de la divergence de la vitesse h (Eq. 3.19) telles que :

$$\underline{f}_v = \underline{0} \tag{3.18}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = h = 8\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \tag{3.19}$$

Il faut préciser que la solution analytique choisie doit vérifier la condition de compatibilité définie par

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} dv = \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} ds.$$

Comparaison de la solution analytique et numérique

Dans cette section, nous nous focalisons sur la comparaison de la solution analytique et des résultats numériques calculés sur un maillage structuré par des EF de taille $h_e = \frac{1}{50}\text{m}$ (2 500 nœuds). Une représentation 3D (Figure 3.14) des résultats numériques en pression et en vitesse permet d'observer d'une part, les formes sinusoïdales et d'autre part, la discontinuité du champ de pression à l'interface $\{y = \frac{1}{2}\}$. Pour une analyse plus précise, nous considérons des lignes d'analyse perpendiculaires à l'interface placées respectivement à 3 abscisses différentes : $\{x = \frac{1}{2}\}$, $\{x = \frac{1}{4}\}$ et $\{x = \frac{3}{4}\}$, le long desquelles le champ de pression est tracé. Une très bonne corrélation entre les courbes représentant la solution numérique et celles analytiques est observée (Figures 3.15a, 3.15b, 3.15c). En ayant l'expression de la solution exacte, une étude de convergence peut être menée afin d'évaluer le comportement numérique, lorsque le maillage est raffiné.

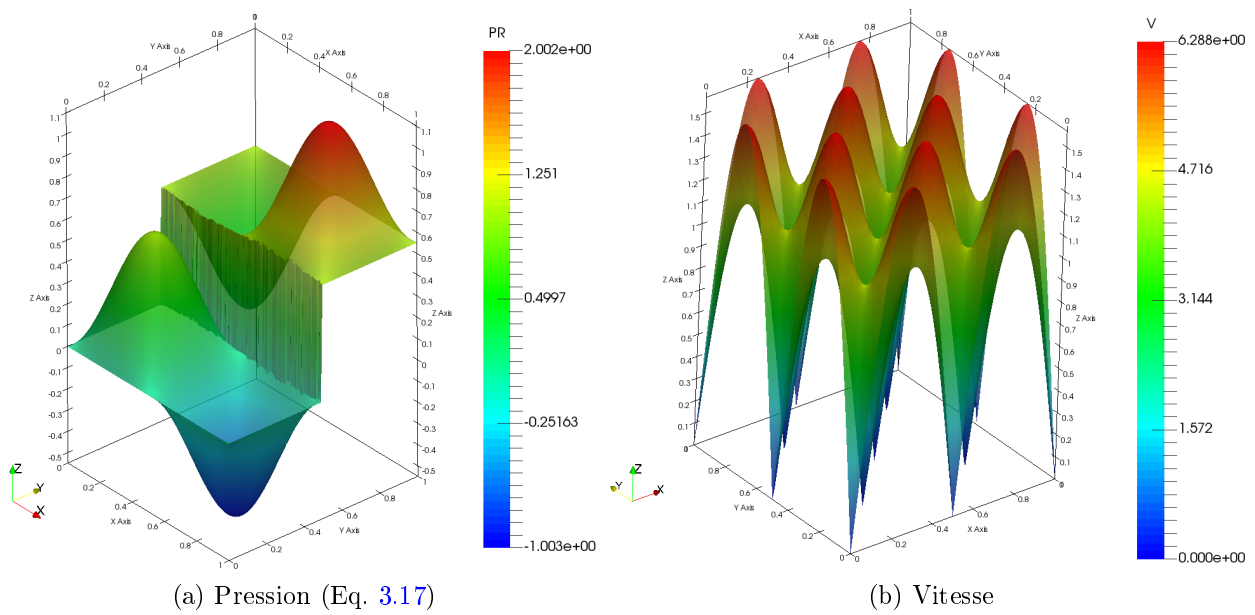


FIGURE 3.14 – Représentation 3D du champ de pression et de la norme de la vitesse, obtenue par le modèle éléments-finis

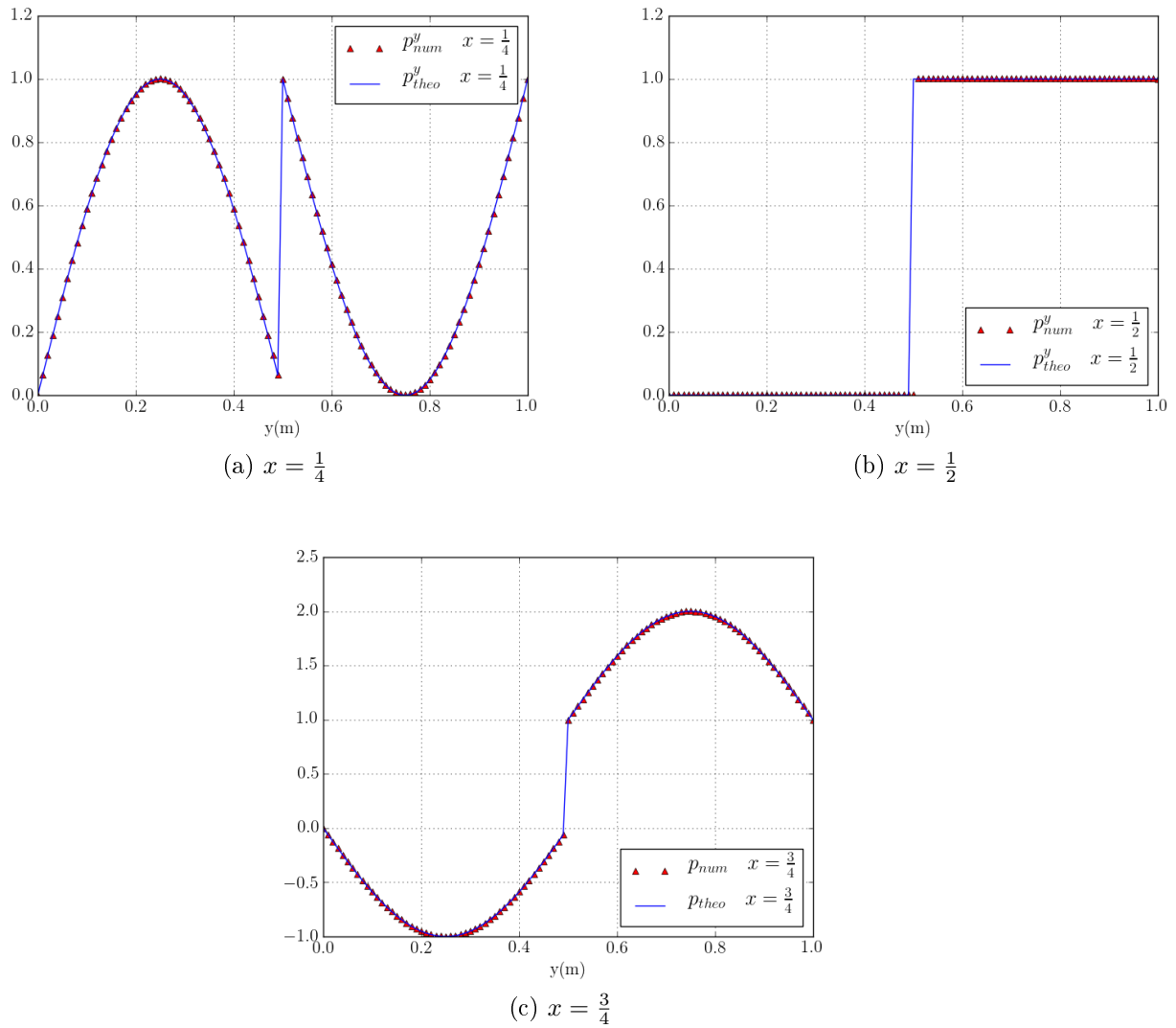


FIGURE 3.15 – Comparaison de la solution analytique (indice « theo ») (Eq. 3.17) et des résultats numériques (indice « num ») tracés selon les lignes $\{x = \frac{1}{4}\}$, $\{x = \frac{1}{2}\}$ et $\{x = \frac{3}{4}\}$

3.4.2 Calcul de l'ordre de convergence

La convergence d'un modèle éléments-finis traduit son aptitude à tendre vers la solution exacte quand la taille de maille diminue. La solution numérique u_h (ici, \underline{v}_h ou p_h) converge à l'ordre η vers la solution exacte u s'il existe une constante C indépendante de la taille de maille, telle que, selon une certaine norme $\|\cdot\|$ on vérifie

$$\|\epsilon\| \leq Ch_e^\eta \tag{3.20}$$

avec $\epsilon = u - u_h$. L'équation (3.20) indique la « vitesse » de convergence de u_h vers u en norme $\|\cdot\|$ lorsque $h_e \rightarrow 0$.

Dans cette perspective, les erreurs en vitesse et pression sont calculées selon les normes \mathcal{L}^2 et/ou $\mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot)$ définies respectivement dans les équations (3.21) et (3.22). Comme le modèle numérique des équations de Darcy est basé sur leur formulation faible duale, l'erreur en pression est évaluée avec la norme \mathcal{L}^2 alors que l'erreur en vitesse est calculée avec les normes \mathcal{L}^2 et $\mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot)$.

$$\|\epsilon\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \epsilon^2 dV \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

$$\|\epsilon\|_{\mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot, \Omega)} = \left(\|\epsilon\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \|\underline{\nabla} \cdot \epsilon\|_{\mathcal{L}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}$$

À titre de référence, l'ordre de convergence théorique [13, 14] de la formulation EF stabilisée ASGS des équations de Darcy sans discontinuité et avec une approximation P1/P1 est de 2 pour la pression en norme \mathcal{L}^2 , de 2 pour la vitesse en norme \mathcal{L}^2 et de 1 pour la vitesse en norme $\mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot)$. Une première simulation en prenant $\sigma_{cap} = 0$ assimilable au cas sans discontinuité est alors entreprise pour vérifier les ordres de convergence précédents. Les résultats sont reportés sur la Figure 3.16a et dans le Tableau 3.1. En norme \mathcal{L}^2 , la vitesse et la pression convergent respectivement à l'ordre 2,13 et 2,40. En norme $\mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot)$, la vitesse converge à l'ordre 1. Ces résultats sont bien conformes à ceux trouvés dans la littérature.

Dans le cas où le champ de pression est discontinu, deux cas sont traités : le premier sans enrichissement (Figure 3.16b) et le second cas, avec enrichissement local du champ de pression (Figure 3.16c) avec la technique décrite à la section 3.3.2.

En norme \mathcal{L}^2 , l'ordre de convergence en pression vaut 0,6 sans enrichissement, et 1,60 avec enrichissement. L'enrichissement permet également de retrouver la convergence théorique en norme $\mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot)$ pour le champ de vitesse, *i.e.*, un ordre de 1. En norme \mathcal{L}^2 , l'ordre de convergence de la vitesse est quant-à elle de 1,62. Ces valeurs sont calculées et affichées dans les Tableaux 3.2 et 3.3.

Maillage	h_e	$\ \epsilon_p\ _{\mathcal{L}^2}$	$\ \epsilon_v\ _{\mathcal{L}^2}$	$\ \epsilon_v\ _{\mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot)}$
20 × 20	0,05	0,0213803	0,0839136	6,76775
40 × 40	0,025	0,00389416	0,0188836	3,3258
80 × 80	0,0125	0,000714466	0,00416498	1,61289
160 × 160	$6,25 \cdot 10^{-3}$	0,000148175	0,00100372	0,812385

TABLEAU 3.1 – Erreur en norme \mathcal{L}^2 pour la pression, en norme \mathcal{L}^2 et $\mathcal{H}(\underline{\nabla}\cdot)$ pour la vitesse dans le cas où la pression est continue

Maillage	h_e	$\ \epsilon_p\ _{\mathcal{L}^2}$	$\ \epsilon_v\ _{\mathcal{L}^2}$	$\ \epsilon_v\ _{\mathcal{H}(\nabla\cdot)}$
20×20	0,05	0,0889837	0,109918	7,2842
40×40	0,025	0,0475362	0,0203123	3,33272
80×80	0,0125	0,0367567	0,00888546	2,1614
160×160	$6,25 \cdot 10^{-3}$	0,0231142	0,00189264	0,906225

TABLEAU 3.2 – Erreur en norme \mathcal{L}^2 pour la pression, en norme \mathcal{L}^2 et $\mathcal{H}(\nabla\cdot)$ pour la vitesse dans le cas où la pression est discontinue et sans enrichissement

Maillage	h_e	$\ \epsilon_p\ _{\mathcal{L}^2}$	$\ \epsilon_v\ _{\mathcal{L}^2}$	$\ \epsilon_v\ _{\mathcal{H}(\nabla\cdot)}$
20×20	0,05	0,0615517	0,0933167	6,94098
40×40	0,025	0,0211956	0,0247864	3,63211
80×80	0,0125	0,00571188	0,00801094	1,9443
160×160	$6,25 \cdot 10^{-3}$	0,00237119	0,00323276	1,55267

TABLEAU 3.3 – Erreur en norme \mathcal{L}^2 pour la pression, en norme \mathcal{L}^2 et $\mathcal{H}(\nabla\cdot)$ pour la vitesse dans le cas où la pression est discontinue et localement enrichie

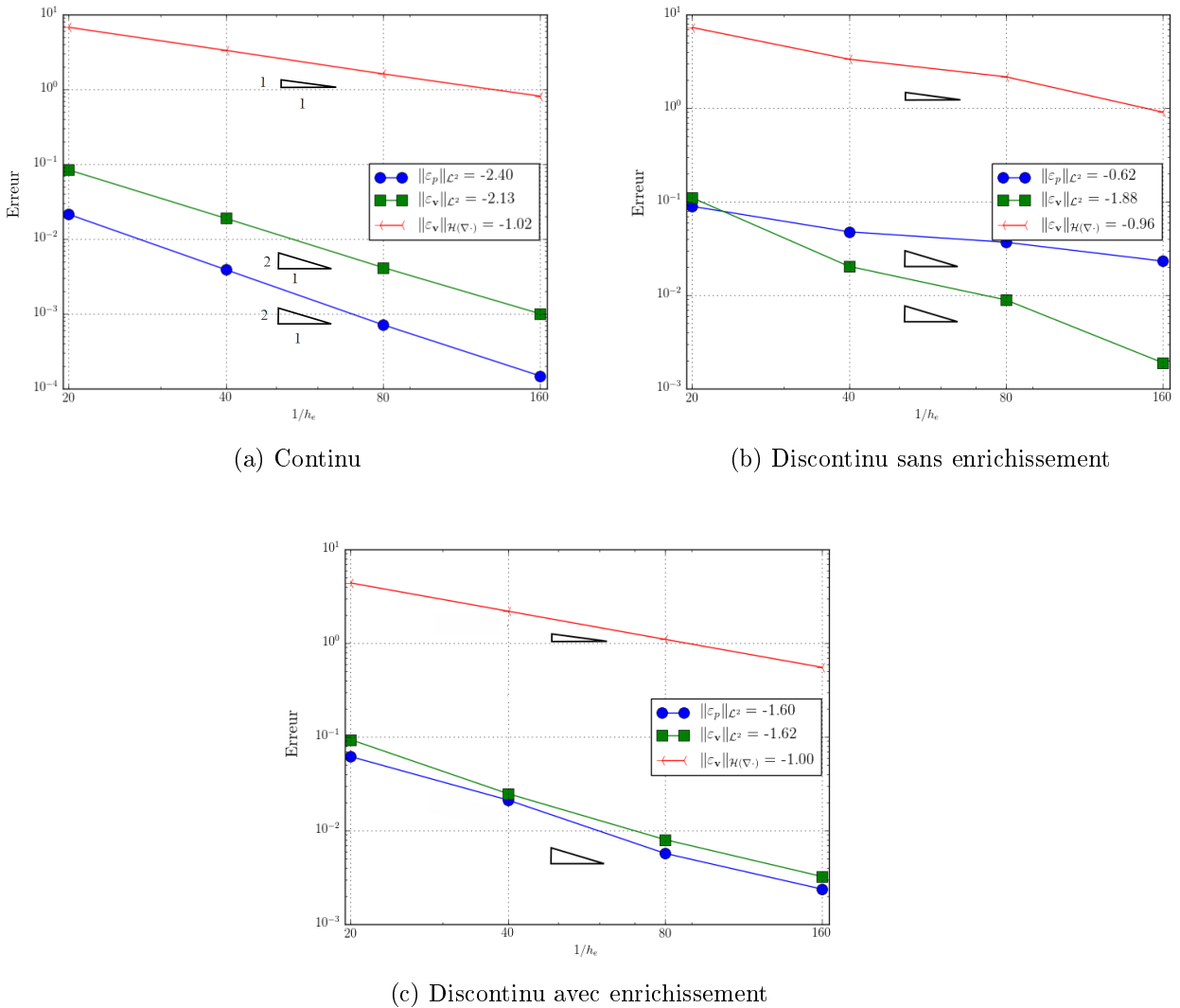


FIGURE 3.16 – Les ordres de convergence du modèle de Darcy dans le cas continu et discontinu avec et sans enrichissement

En conclusion, nous constatons d'une part, que l'enrichissement du champ de pression permet de maintenir des ordres de convergences proches des valeurs théoriques, même si la discontinuité dégrade légèrement la convergence \mathcal{L}_2 . En effet, sans enrichissement, une erreur de 45% est observée pour la pression dans le cas test (Figure 3.2) et une solution quasi-exacte avec l'enrichissement. D'autre part, l'enrichissement permet au modèle d'améliorer la précision en pression de 20% comparé au cas sans enrichissement. Pour le maillage le plus grossier, la valeur de l'erreur avec l'enrichissement, est en effet inférieure à celle sans enrichissement.

3.5 Confrontation à des résultats expérimentaux

Dans cette partie, les résultats du modèle numérique sont confrontés à des résultats expérimentaux. Cette étude se base sur la montée capillaire de l'eau à travers des renforts en carbone obtenus par Pucci *et al.* [95, 96], en considérant les effets capillaires comme seule force motrice.

3.5.1 Description de l'expérience

Une méthode a été développée par Pucci *et al.* [95, 96] permettant de calculer la valeur de la contrainte capillaire résultant de l'interaction de l'eau dans les 3 directions principales d'un renfort UD² en fibre de carbone. La procédure expérimentale consiste à évaluer le carré de la masse d'eau dans le renfort en fonction du temps $m^2(t)$ à l'aide d'un tensiomètre. Les montées instantanées dans les renforts fibreux peuvent être décrites par l'équation de Washburn [122] étendue aux milieux poreux (Eq. 3.23) exprimant le carré de la masse de fluide en fonction du temps t

$$m^2(t) = \left[\frac{(c\bar{r})\phi^2(\pi R^2)^2}{2} \right] \frac{\rho_l^2 \gamma \cos \theta_a}{\mu_l} t \quad (3.23)$$

où c est une constante tenant compte du trajet tortueux du liquide dans un arrangement équivalent de tubes capillaires de rayon moyen \bar{r} . R est le rayon de l'échantillon. Le terme entre crochets [...] de l'équation (3.23) décrit le caractère géométrique du milieu poreux. θ_a est l'angle de contact moyen apparent d'avancée et γ la tension superficielle du liquide.

En prenant en compte la forme cylindrique de l'échantillon, le carré de la masse peut également s'exprimer en fonction de la hauteur locale $h(t)$ du front fluide, de la densité du fluide ρ_l et du volume imprégné du milieu poreux $V(t)$ par l'équation (3.24) :

$$m(t) = \rho_l V(t) \quad \text{avec} \quad V(t) = h(t) \phi 2\pi R^2 \quad (3.24)$$

Or, dans le cas d'une imprégnation spontanée pilotée par les effets capillaires σ_{cap} , l'équation de Darcy appliquée à un écoulement UD permet d'exprimer le carré de la hauteur $h^2(t)$ du fluide en fonction du temps telle que

$$h^2(t) = \frac{2K\sigma_{cap}}{\mu_l \phi} t \quad (3.25)$$

En effet, en assimilant le gradient de pression dans l'équation de Darcy au différentiel de pression rapporté à la longueur de l'écoulement $\frac{\sigma_{cap}}{h(t)}$, la vitesse superficielle de Darcy dans le cas d'une montée spontanée UD s'écrit

$$\phi \frac{dh(t)}{dt} = \frac{K \sigma_{cap}}{\mu h(t)} \quad (3.26)$$

En intégrant $h(t) \frac{dh(t)}{dt}$ à partir de (3.26) dans le temps et en prenant comme condition initiale $h(t=0) = 0$, on retrouve bien l'équation (3.25). En remplaçant $h(t)$ dans (3.24) par l'expression 3.25, la contrainte capillaire peut donc être exprimée à partir de l'équivalence entre l'approche modifiée de Washburn (3.23) et l'équation (3.24), pour une perméabilité donnée dans la direction de l'écoulement.

2. unidirectionnel

3.5.2 Simulation numérique de la montée capillaire

Trois montées capillaires de l'eau dans des renforts en carbone sont simulées dans un cadre bidimensionnel isotrope (Figure 3.17). Chaque simulation correspond à une direction principale (p -, t -, l -) du renfort. Le domaine de calcul en 2D est un rectangle de dimensions $\{2R \times H\}$ avec $R = 6 \text{ mm}$ et $H = 20 \text{ mm}$ comme décrit sur la Figure 3.18. Ce domaine de calcul est discrétisé avec un maillage fixe composé de 2352 éléments triangulaires et 1250 nœuds. Une vitesse normale nulle ($\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$) est imposée sur chaque paroi verticale traduisant des parois imperméables tandis qu'une condition de type Neumann en pression ($p_1 = p_0 = 1 \text{ bar}$) est considérée sur les deux autres parois. Les trois valeurs de la contrainte capillaire correspondent aux trois directions du renfort quasi-unidirectionnel.

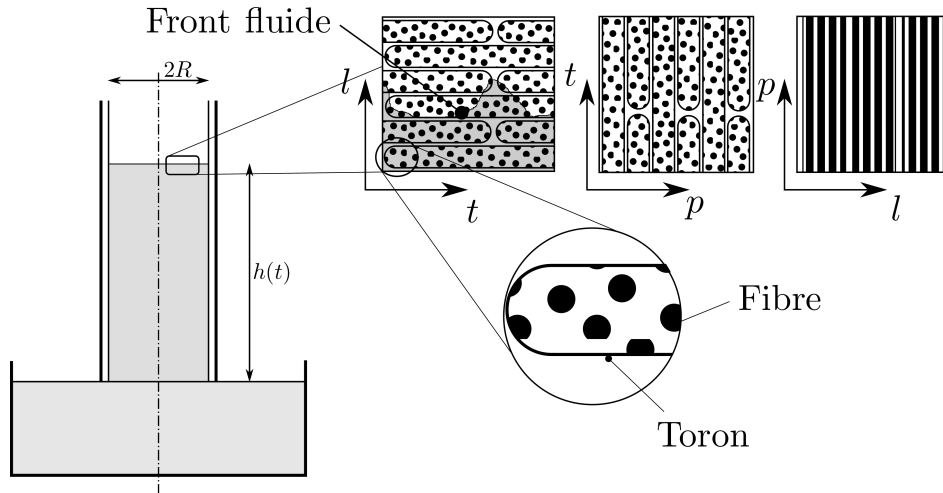


FIGURE 3.17 – Montées capillaires de l'eau dans d'un renfort en carbone UD dans les trois principales directions des fibres

Dans notre simulation, les valeurs des contraintes capillaires sont des données d'entrée du modèle numérique. La première spécificité de cette simulation est l'introduction d'un front fluide mobile, séparant le renfort imprégné du renfort sec. Pour décrire cette interface mobile, la méthode des lignes de niveau (Level-set) présentée en détail dans le chapitre précédent est utilisée. On suppose que la partie non-imprégnée est remplie d'un fluide incompressible newtonien ayant une très faible viscosité correspondant à celle de l'air. Les données d'entrée du modèle sont récapitulées dans le Tableau 3.4.

La simulation permet de calculer la hauteur du front fluide $h(t)$ en récupérant la position du niveau zéro de la Level-set. Le carré de la masse est alors post-traité avec l'équation (3.24). Cette dernière est ensuite confrontée à des courbes expérimentales ainsi qu'à des courbes obtenues analytiquement par le système d'équations (3.25)-(3.24). Les courbes donnant le carré de la masse en fonction du temps obtenues par la simulation numérique, par la solution analytique et celles correspondant aux données expérimentales, sont tracées sur la Figure 3.19 pour les trois directions p -, t -, l -.

On peut observer que les simulations numériques et l'expression analytique donnent des résultats comparables. Bien qu'un décalage entre les courbes expérimentale et numérique est observé lorsque le renfort est supposé saturé, nous nous concentrons surtout sur la pente qui décrit le scénario de remplissage. On constate effectivement que les pentes des courbes

numériques et expérimentales ont des valeurs très proches (Tableau 3.5). Les deux courbes expérimentales considérées ici, correspondent aux courbes qui encadrent toute la série de courbes de l'expérience menée par Pucci *et al.*.

Par conséquent, nous pouvons affirmer qu'avec les bons paramètres d'entrée, le modèle numérique peut simuler correctement les montées capillaires de l'eau dans les renforts isotropes en carbone. Ainsi, cette section valide la résolution des équations de Darcy qui prennent en compte, d'une part les effets capillaires, et d'autre part l'utilisation de paramètres réalistes, dans un milieu isotrope. Cette partie valide également l'équivalence entre l'équation de Darcy et de Washburn.

Perméabilités [78]	(m ²)	Contraintes capillaires [95]	(kPa)
K_p	$3 \cdot 10^{-11}$	σ_{cap}^p	$1,15 \pm 0,30$
K_t	$1,5 \cdot 10^{-11}$	σ_{cap}^t	$0,51 \pm 0,14$
K_l	$3 \cdot 10^{-13}$	σ_{cap}^l	$32,10 \pm 11,60$
Matériaux		Géométries	
μ_{eau}	10^{-3} Pa.s	ϕ	0,60
ρ_{eau}	10^3 kg.m ⁻³	$2R$	$12 \cdot 10^{-3}$ m
μ_{air}	10^{-5} Pa.s	H	$20 \cdot 10^{-3}$ m

TABLEAU 3.4 – Paramètres d'entrée - Simulation montée capillaire

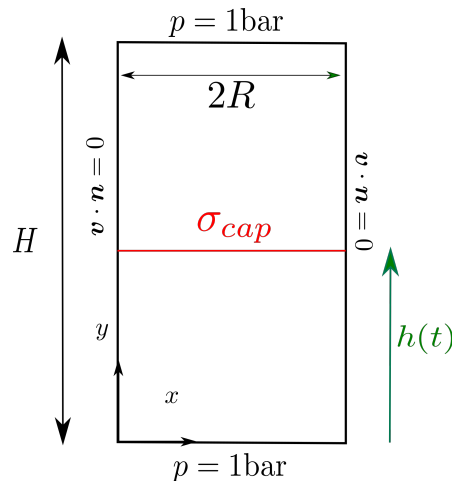


FIGURE 3.18 – Domaine de calcul et conditions aux bords - Simulation de montée capillaire

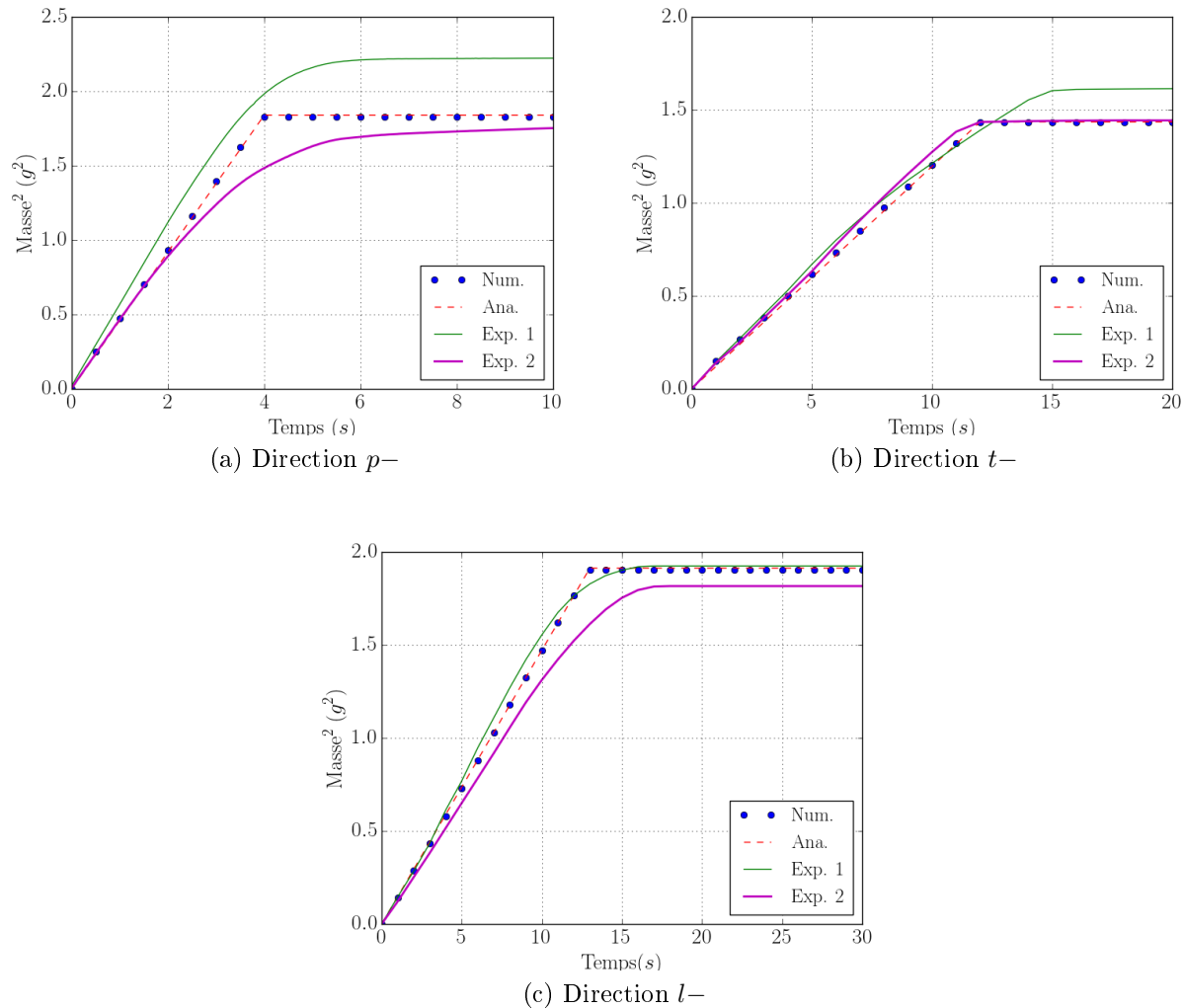


FIGURE 3.19 – Comparaison de la masse au carré - mesurée numériquement et expérimentalement selon les directions $p-$ (a), $t-$ (b) and $l-$ (c)

	Direction $p-$	Direction $t-$	Direction $l-$
Expérience 1	0,49	0,1298	0,1296
Expérience 2	0,41	0,133	0,165
Numérique	0,46	0,12	0,1493

TABEAU 3.5 – Pentés de la courbe (en g^2/s) représentant le scénario de remplissage dans chaque direction principale du renfort

Ces montées capillaires isotropes ont également été simulées en 3D pour évaluer une première fois le comportement du modèle dans le cas tridimensionnel. Le maillage (Figure 3.20a) composé de tétraèdres ($h_e = 7,5 \cdot 10^{-4}$ m) comporte 4860 nœuds. Le pas de temps utilisé est de $\Delta t = 0,2$ s. Les paramètres matériaux dans la direction $l-$ cités dans le Tableau 3.5 sont utilisés.

Les mêmes résultats que le cas 2D (Figure 3.5) sont retrouvés. Les champs de pression et de vitesse à un instant donné sont respectivement illustrés sur les Figures 3.20b et 3.20c. On retrouve, d'une part la discontinuité du champ de pression au niveau du front fluide (avec une erreur de 3,3% comparée à la valeur imposée de 32 kPa), et d'autre part un champ de vitesse quasi-uniforme avec une légère fluctuation de moins de 5% autour de la solution analytique. La valeur numérique de la hauteur du fluide à cet instant est de 0,0105 m pour une valeur analytique de 0,00979 m (une différence de moins de 7%). Par ailleurs, le temps CPU nécessaire pour simuler cette montée capillaire d'une durée de 15s est de 1 123s.

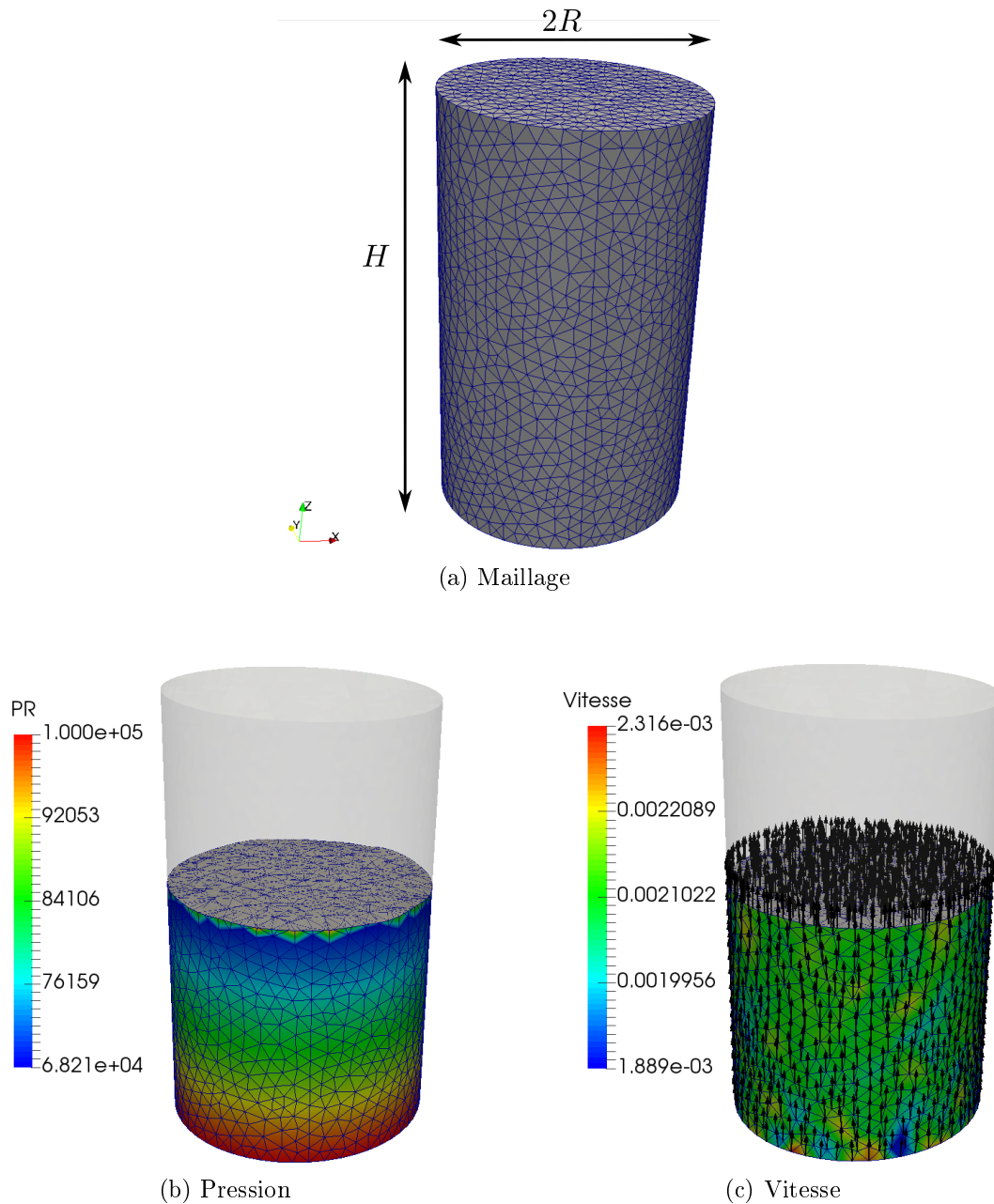


FIGURE 3.20 – Simulation en 3D de la montée capillaire isotrope (pour le cas $l-$) à l'instant $t=2s$

Le modèle numérique développé peut être étendu à la modélisation du procédé d'infusion

de résine liquide (LRI) [23, 40] dans un contexte industriel afin d'évaluer l'influence des effets capillaires sur l'imprégnation de la résine, en particulier le taux de remplissage et la vitesse de remplissage.

3.6 Simulation de la phase de remplissage d'un raidisseur

Cette partie consiste à intégrer les phénomènes capillaires dans la simulation des écoulements durant le procédé LRI et évaluer leur influence sur le scénario de remplissage. Deux simulations des écoulements de la résine dans des préformes indéformables sont réalisées : l'une en 2D et l'autre en 3D.

3.6.1 Simulation en 2D des écoulements avec les effets capillaires

Dans cette section, nous reprenons le raidisseur isotrope transverse décrit dans le chapitre précédent rappelé sur la figure ci-dessous 3.21. L'influence des effets capillaires sur l'écoulement de la résine à travers ce raidisseur orthotrope ayant une porosité de 40 % dans un environnement isotherme est analysée.

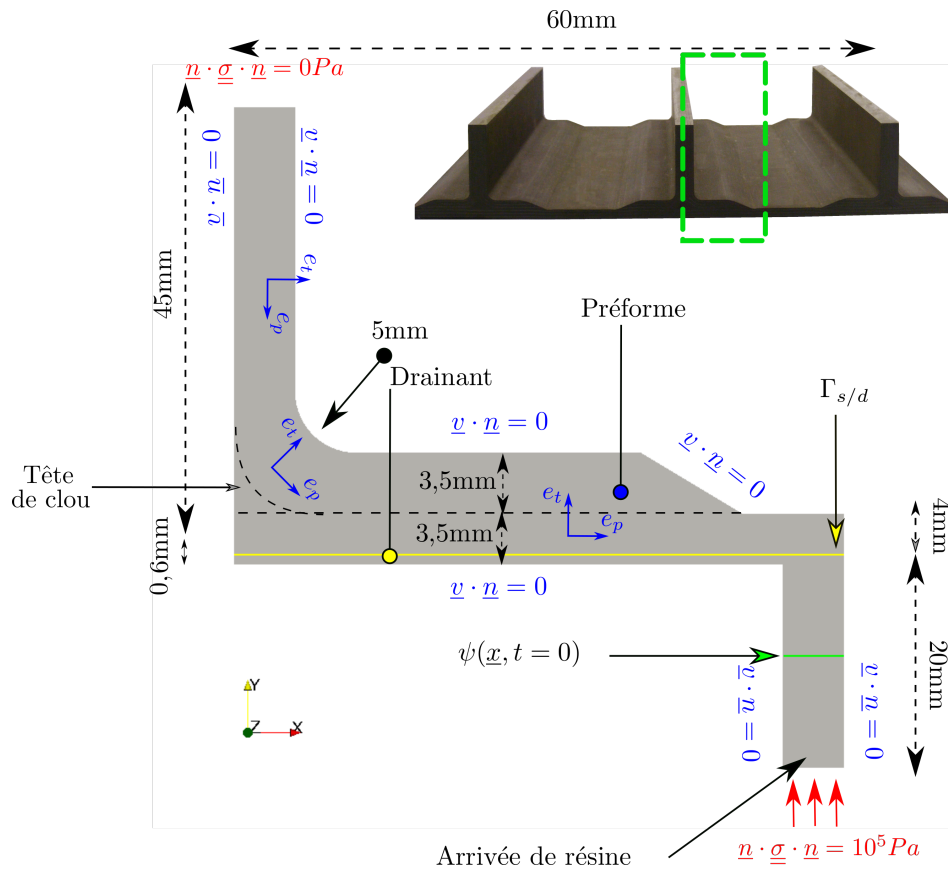


FIGURE 3.21 – Géométrie et conditions limites pour la simulation 2D de l'infusion dans un raidisseur en "T"

Pour une première étude de l'influence des effets capillaires sur le remplissage de pièce structurale, seuls les écoulements sont modélisés sans tenir compte de la déformation méca-

nique de la préforme. Le rapport perméabilité/viscosité dans la direction transverse et plane sont respectivement de l'ordre de 10^{-14} m^2 et 10^{-12} m^2 . À l'image de la préforme, les phénomènes capillaires sont considérés comme orthotropes. Dans sa base propre, la contrainte capillaire s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{cap} = \begin{pmatrix} \sigma_{cap}^t \in [30; 60] & 0 \\ 0 & \sigma_{cap}^p = 20 \end{pmatrix} \text{ kPa} \quad (3.27)$$

Les valeurs de σ_{cap}^t et de σ_{cap}^p sont déduites de la littérature. Pucci *et al.* [95] ont en effet calculé une contrainte capillaire de 32 kPa pour un renfort en carbone de perméabilité transverse prise égale à $3 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$ et une porosité de 0,6 ($\tau_{vf} = 0,4$). Or, Verrey *et al.* [117] ont démontré, en testant dans leur plan des NCF, que moins le milieu poreux est perméable plus les effets capillaires deviennent dominants. La même tendance a été observée par Pucci *et al.* dans les 3 directions du renfort. Cela nous incite alors à choisir une contrainte capillaire plus élevée dans le sens transverse que dans le plan et qui correspondrait à un $\tau_{vf} > 0,4$.

Comme l'ordre de grandeur de la contrainte capillaire correspondant à cette perméabilité n'est pas connue, des valeurs comprises en 30 et 60 kPa sont utilisées, pour une contrainte capillaire plane de 20 kPa. L'influence de la valeur de cette contrainte transverse sur le scénario de remplissage est ensuite étudiée en gardant les autres paramètres tels que la perméabilité et la contrainte capillaire plane, fixes.

Finalement, une analyse de convergence du modèle est entreprise pour évaluer la robustesse du modèle numérique développé.

Résultats

Une première observation est que la vitesse de remplissage est plus importante quand les phénomènes capillaires sont pris en compte (Figure 3.22). En effet, ici, ayant des valeurs positives dans le modèle numérique, les contraintes capillaires accélèrent l'écoulement. Là aussi, comme on pouvait s'y attendre, plus σ_{cap}^t est élevé, plus le temps de remplissage est court : lorsque σ_{cap}^t passe de 30 à 60 kPa, il varie de 1,5 h à 1,25 h alors que ce temps est de 3 h lorsqu'aucun effet capillaire n'est considéré comme le montrent les Figures 3.22a et 3.22b. Cette dernière montre en effet le temps mis pour atteindre un certain taux de remplissage V_r (de 50 à 99 %) en fonction de la contrainte capillaire transverse.

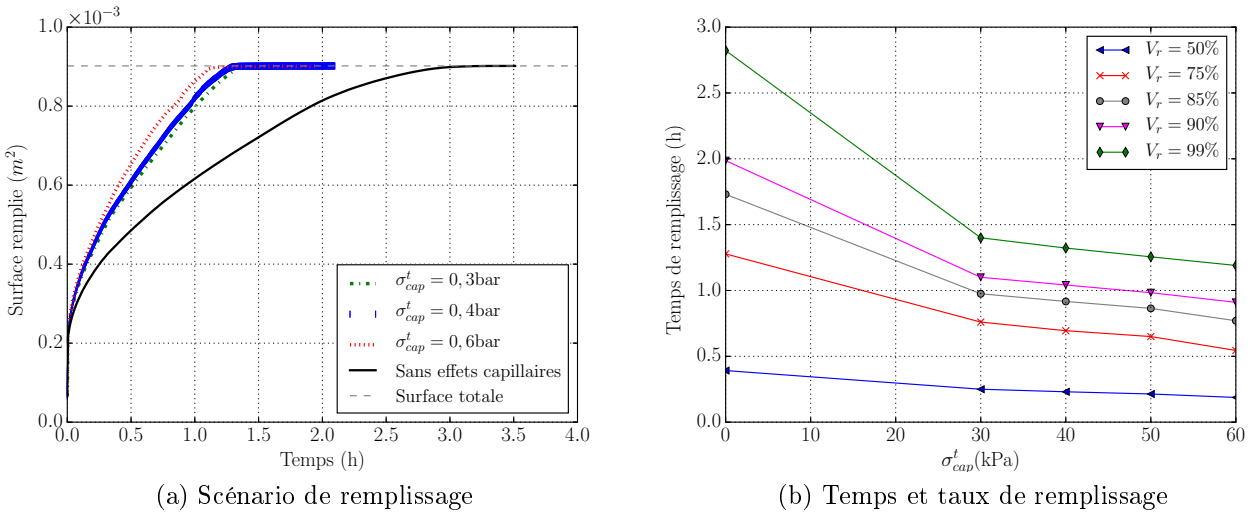


FIGURE 3.22 – Analyse de l'influence de la valeur de la contrainte capillaire transverse sur le scénario de remplissage (pour une contrainte capillaire dans le plan $\sigma_{cap}^p = 20$ kPa)

La Figure 3.23 montre le front fluide, à différents instants, avec et sans prise en compte de la contrainte capillaire. Il est intéressant de noter que durant la dernière phase du remplissage (après que la résine ait passé le coude), l'écoulement se produit principalement dans la direction transverse aux fibres. C'est donc la contrainte σ_{cap}^t qui est « activée », alors que dans la première partie du remplissage, l'écoulement est piloté à la fois par les effets capillaires et la force générée par le gradient de pression global. Les effets capillaires importants expliquent l'écart grandissant entre les deux fronts fluides constaté de la Figure 3.23a à 3.23e.

De plus, ces figures montrent que les fronts fluides dans les deux cas sont décalés et n'ont pas la même forme notamment au niveau des courbures, due probablement à l'orthotropie des effets capillaires. Or, la forme des fronts fluide peut être un paramètre important dans la prédiction des zones sèches à l'intérieur des pièces de géométrie complexe.

Des confrontations avec des essais expérimentaux sont toutefois nécessaires et indispensables afin de calibrer le modèle, notamment définir plus rigoureusement les valeurs de la contrainte capillaire réalistes associées à des renforts HP dans lesquels s'écoulent de résine haute viscosité. Ceci démontre l'intérêt de prendre en compte l'orthotropie du problème.

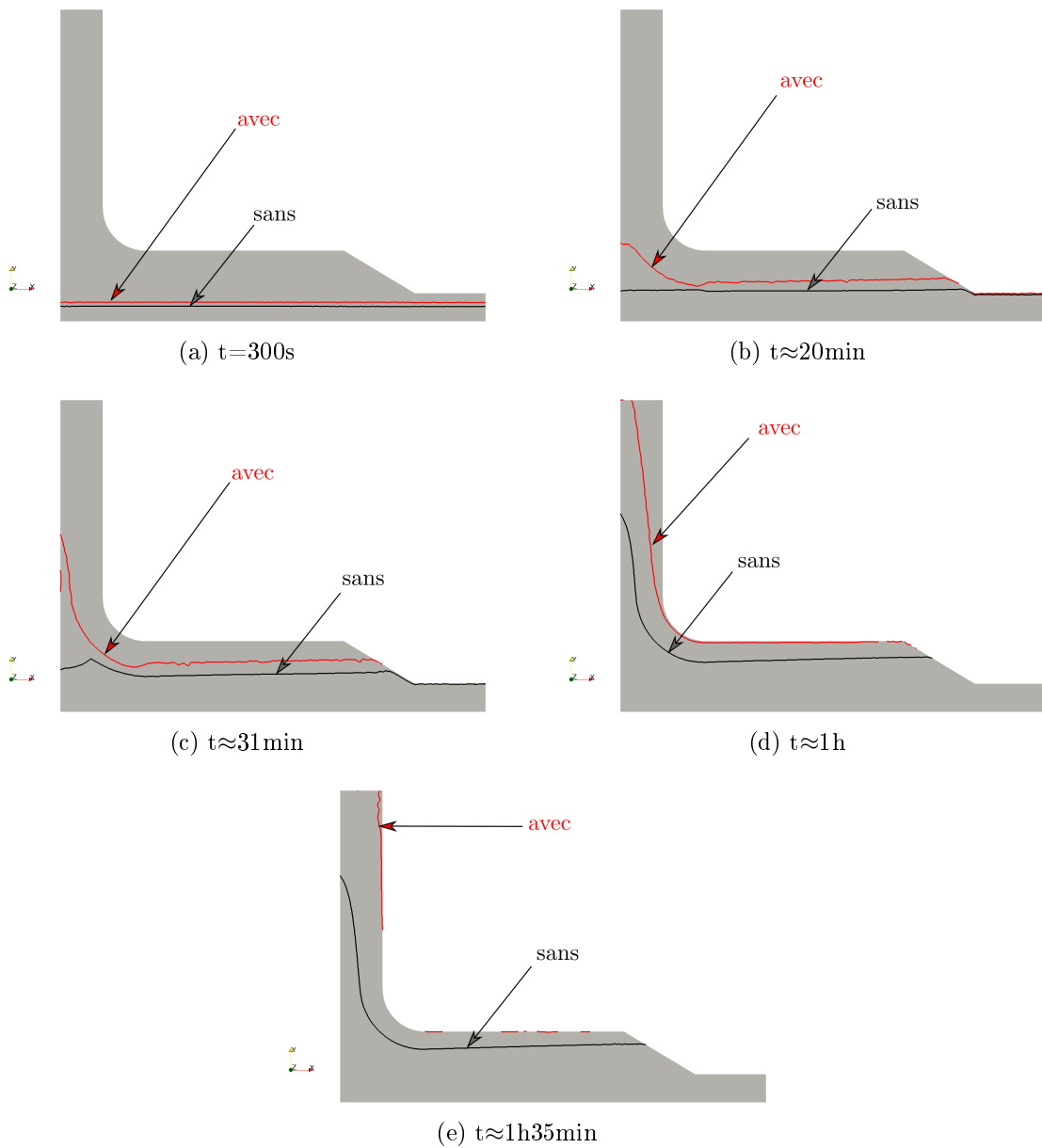


FIGURE 3.23 – Évolution du front fluide avec (rouge) - $\sigma_{cap}^t = 40 \text{ kPa}$ et sans (noir) effets capillaires à l'interface

Convergence de maillage et du pas de temps

Similairement à ce qui a été fait dans le chapitre précédent, une analyse de convergence est conduite afin de s'assurer qu'avec les tailles de maille choisies, la solution est peu sensible au maillage. Pour un pas de temps donné (ici, $\Delta t = 10 \text{ s}$) les profils de remplissage résultants de trois tailles de maille différentes sont comparés pour évaluer leur influence sur le résultat. Ensuite, la sensibilité des résultats au pas de temps est également évaluée avec 3 différents pas de temps pour un pas d'espace donné. Ces paramètres sont détaillés dans le Tableau 3.6.

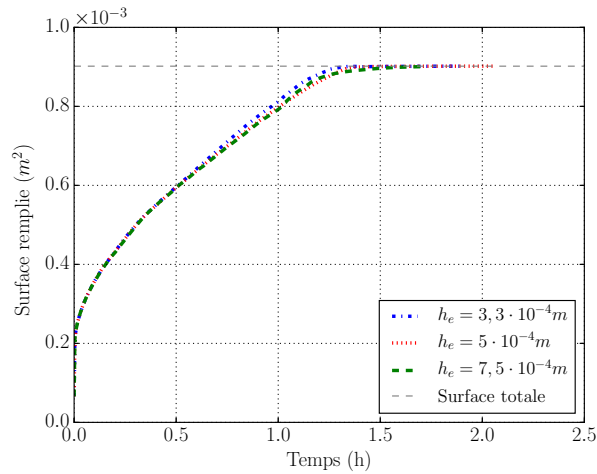
	Taille de l'élément (m)		Pas de temps (s)
Cas 1	$7,5 \cdot 10^{-4}$	Cas 4	5
Cas 2	$5 \cdot 10^{-4}$	Cas 5	10
Cas 3	$3,33 \cdot 10^{-4}$	Cas 6	50
Δt	10 s	h_e	$5 \cdot 10^{-4}$ m

TABLEAU 3.6 – Données sur l'étude de convergence du modèle par rapport au maillage et au pas de temps

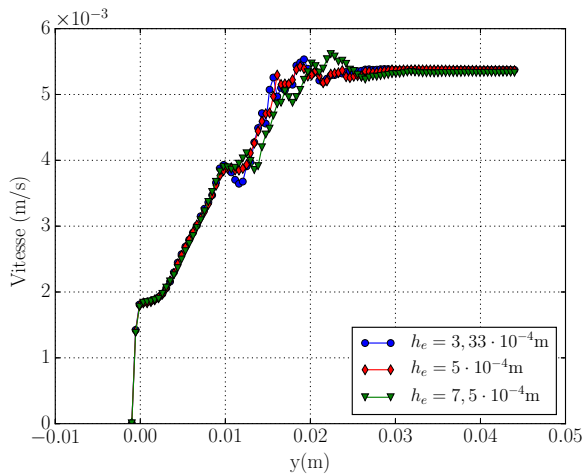
- Les graphiques de la Figure 3.24 montrent l'effet du raffinement du maillage sur les résultats, notamment sur le profil de remplissage mais également sur le champ de pression et le champ de vitesse. Ces derniers sont tracés dans la partie verticale du raidisseur le long de la ligne verticale de coordonnées $\{x = 0,0025\}$ à un instant donné $t=30$ min. Nous constatons que le scénario de remplissage varie très peu en fonction des 3 tailles de maille. De plus, le champ de pression ainsi que le champ de vitesse tracés respectivement sur les Figures 3.24b et 3.24c suivent la même tendance pour les 3 maillages.
- Intégrer les contraintes capillaires sur le front fluide ne modifie pas la sensibilité du modèle au pas de temps comparé à l'étude de convergence dans le chapitre précédent. En effet, la Figure 3.25a compare la position et la forme du front fluide correspondant aux différents pas de temps - cas 4, 5 et 6 - du Tableau 3.6 et montre peu de variation entre les trois cas. Par ailleurs, le profil de remplissage ainsi que le temps nécessaire pour atteindre différents niveaux de remplissage varient peu en fonction du pas de temps comme nous pouvons le constater sur les Figures 3.25b et 3.25c.

Nous pouvons ainsi conclure que notre modèle numérique intégrant les effets capillaires est peu sensible aux valeurs envisagées de taille de maille et de pas de temps. Ce type d'étude de convergence permet alors de choisir le maillage et le pas de temps les plus adaptés afin de minimiser le temps de calcul. Dans notre cas, le maillage correspondant au cas 2 avec un pas de temps de 10 s et 750 incréments de calcul nécessite un temps CPU de 1804s sur un seul processeur³.

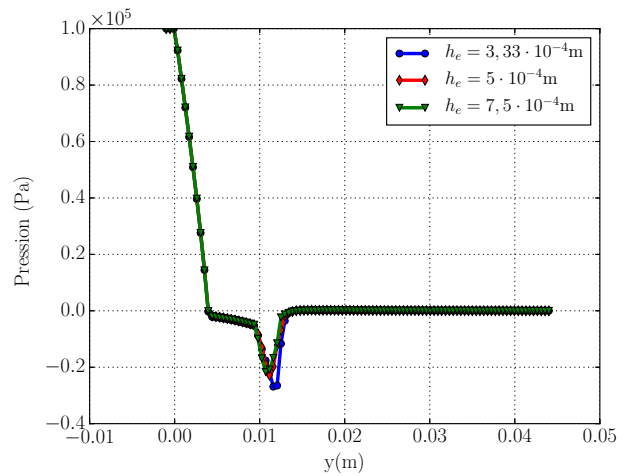
3. Intel(R) Core(TM) i5-4590 CPU @ 3.30GHz



(a) Profil de remplissage

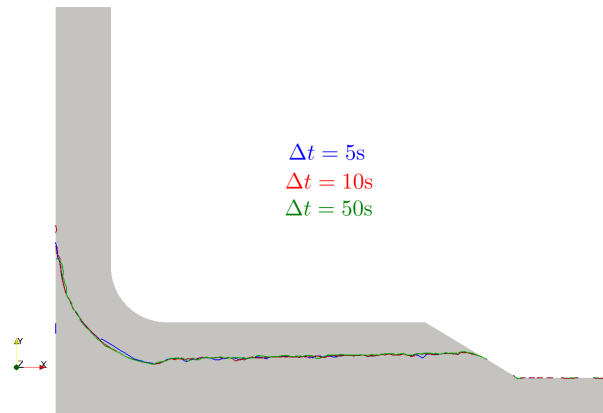


(b) Norme de la vitesse à t=30 min

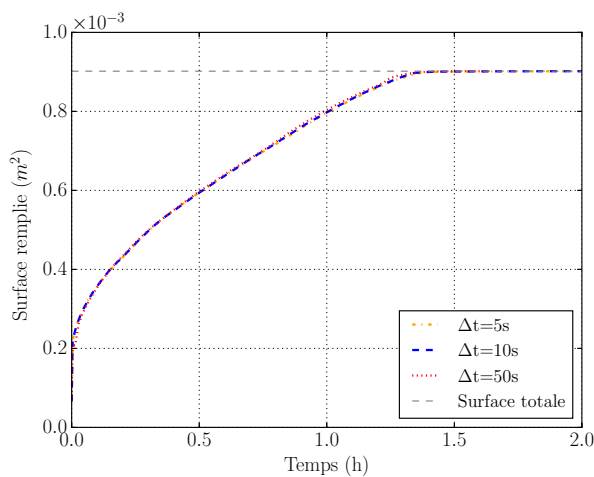


(c) Pression à t=30 min

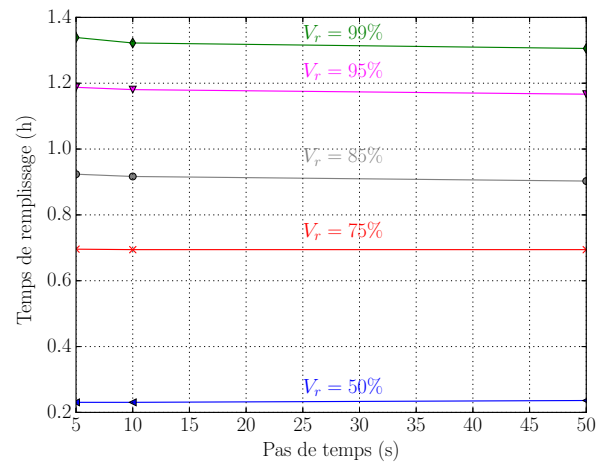
FIGURE 3.24 – Influence du raffinement du maillage sur les résultats - avec effets capillaires ($\sigma_{cap}^t = 40$ kPa)



(a) Positions du front fluide à $t=25\text{min}$ pour 3 différents pas de temps utilisés.



(b) Profil de remplissage



(c) Variation du temps de remplissage en fonction du pas de temps pour différents niveaux de remplissage

FIGURE 3.25 – Influence du pas de temps sur le modèle numérique de l'écoulement en prenant en compte les effets capillaires ($\sigma_{cap}^t = 40 \text{ kPa}$)

3.6.2 Simulations de l'infusion en 3D

L'étude des simulations en 3D avec des paramètres supposés proches des conditions industrielles est menée dans cette section. Dans cette perspective, les conditions limites sont décrites sur la Figure 3.26.

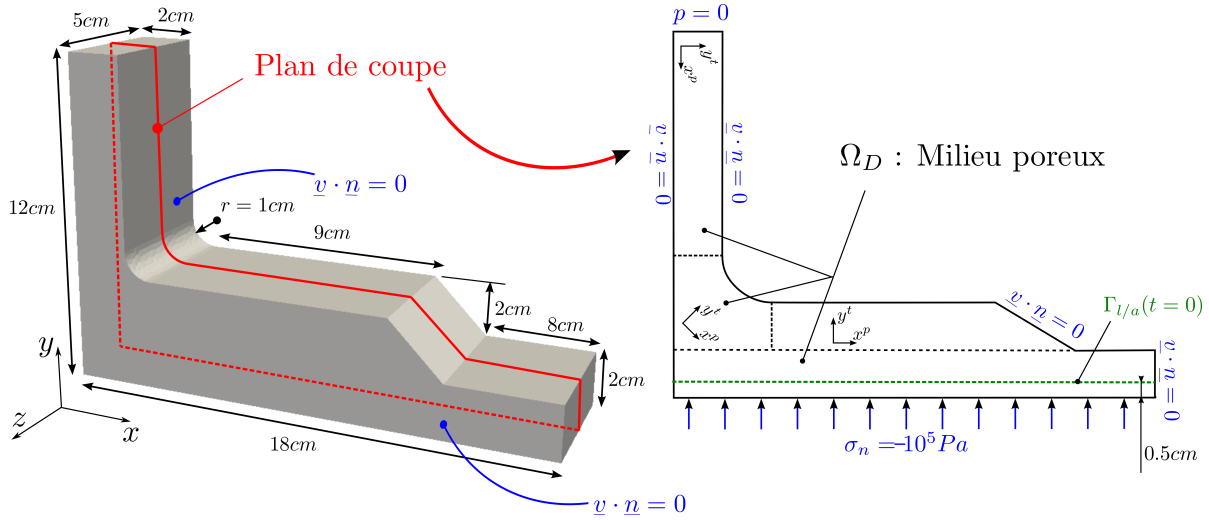


FIGURE 3.26 – Conditions limites du problème d'infusion en 3D

La simulation dans le chapitre précédent a permis d'analyser que dans le cas du raidisseur considéré, le temps de remplissage du drainant est de quelques secondes et est donc négligeable comparé au remplissage de la préforme (en heures). Une première simplification est donc de négliger le remplissage du drainant et de le remplacer par une condition limite adéquate.

Temps de calcul CPU

Dans l'objectif d'évaluer la performance du modèle en terme de temps de calcul CPU (*Central Processing Unit*), on considère pour une première approche que le raidisseur est isotrope avec une perméabilité telle que $\frac{K}{\mu} = 10^{-11} \text{ m}^2$. La contrainte capillaire isotrope correspondante est de 32 kPa. Ce cas est ensuite comparé à un cas dans lequel la valeur de la contrainte capillaire est reportée à la valeur des conditions limites en pression aux bords du domaine (ici, en $y=0$) telle que

en $y = 0$, la condition $\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext} \cdot \underline{n} = 10^5 \text{ Pa}$ est remplacée par $\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext} \cdot \underline{n} = 10^5 \text{ Pa} + \sigma_{cap}$.

En d'autres termes, le gradient global de pression est modifié avec la valeur de la contrainte capillaire en superposant cette dernière à la pression extérieure; évitant ainsi de traiter les discontinuités à l'interface liquide/air.

La position initiale du front fluide est à $y=0,001 \text{ m}$. Le maillage composé de tétraèdres de taille $h_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ contient 10097 nœuds. Le pas de temps utilisé est de $\Delta t = 5 \text{ s}$.

Les performances des deux méthodes sont présentées dans le Tableau 3.7. En prenant comme référence le cas sans discontinuité, nous constatons que pour ce cas 3D, l'enrichissement requiert juste 5% de temps CPU en plus, ce qui nous paraît acceptable.

	Temps CPU (s)	Temps réel- <i>Wall clock</i> (s)
Discontinuité	13 210	13 470
Gradient modifié	12 750	13 000

TABLEAU 3.7 – Le temps CPU pour 500 incréments de calcul avec l'approche numérique développé et avec la modification du gradient global - dans le cas isotrope

Il est toutefois important de noter que cette équivalence entre les deux méthodes n'est pas correcte mais sert uniquement de cas pour comparer le temps de calcul avec et sans enrichissement. En effet, même si l'évolution du front de fluide dans les deux cas pourrait être relativement proche (même vitesse), les champs de pression ne le sont pas. Premièrement, les conditions aux bords en pression ne sont pas identiques et la discontinuité au niveau de l'interface est perdue avec la méthode du gradient modifié, comme on peut le voir sur la Figure 3.27. De plus, les champs de vitesse issus des deux méthodes ne sont similaires que dans le cas isotrope. Une brève étude sur cela peut être trouvée dans [7]. Le caractère orthotrope (en 3D) fait l'objet du paragraphe suivant.

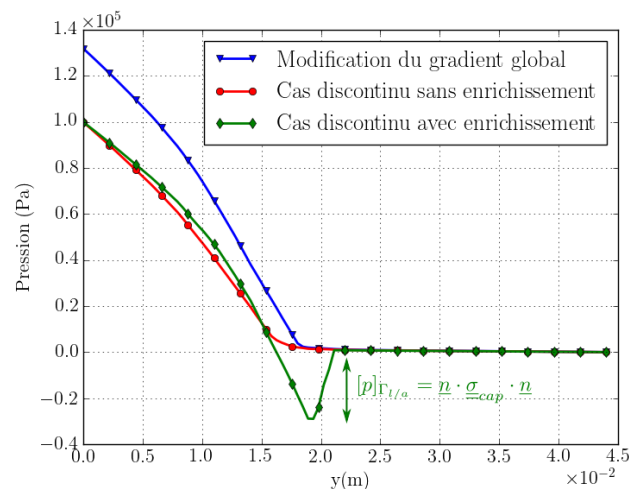


FIGURE 3.27 – Comparaison des profils de pression le long d'une ligne d'analyse verticale $(0,0025;0;0,075)-(0,0025;0,05;0,075)$ à $t = 125s$

Orthotropie

Contrairement au cas 2D isotrope transverse, l'objectif suivant est, d'une part de s'assurer que notre modèle numérique est adapté pour simuler des cas complexes orthotropes, et d'autre part de comparer des écoulements qui prennent ou non en compte les effets capillaires dans le cas orthotrope afin de se rapprocher au mieux des études des pièces réelles. Par conséquent, le tenseur de contraintes capillaires ainsi que celui de perméabilité contiennent trois valeurs différentes selon les directions principales d'orthotropie (Tableau 3.8).

Perméabilités	(m ²)	Contraintes capillaires	(kPa)
$\frac{K_p}{K_t}$	$3 \cdot 10^{-12}$	σ_{cap}^x	30
$\frac{\mu_l}{K_t}$	$3 \cdot 10^{-14}$	σ_{cap}^y	40
$\frac{\mu_l}{K_t}$	$3 \cdot 10^{-10}$	σ_{cap}^z	0,1
Autres			
μ_{air}	10^{-5} Pa.s	Nombre de nœuds	15 000
ϕ	0,40	Δt	10 s

TABLEAU 3.8 – Paramètres d'entrée des simulations orthotropes

La Figure 3.28 montre la différence entre l'évolution du front fluide avec et sans effets capillaires dans le cas orthotrope. Les mêmes constatations que dans le cas 2D peuvent être faites. Cependant, soulignons, même si cela peut paraître trivial, que le passage du 2D ou 3D augmente de façon importante la complexité du calcul, ne serait-ce qu'en terme de nombre de degré de liberté. Cette simulation souligne la robustesse de la stratégie numérique mise en place : le front fluide ne dégénère pas, ce qui signifie, entre autres, que la vitesse et la pression (discontinue) sont bien calculées (pas ou peu d'oscillations à l'interface) malgré le caractère orthotrope du milieu et le maillage pas particulièrement raffiné.

En ce qui concerne le temps de calcul, avec effets capillaires la pièce se remplit en 1 h 40 min contre de 2 h 35 min sans effets capillaires.

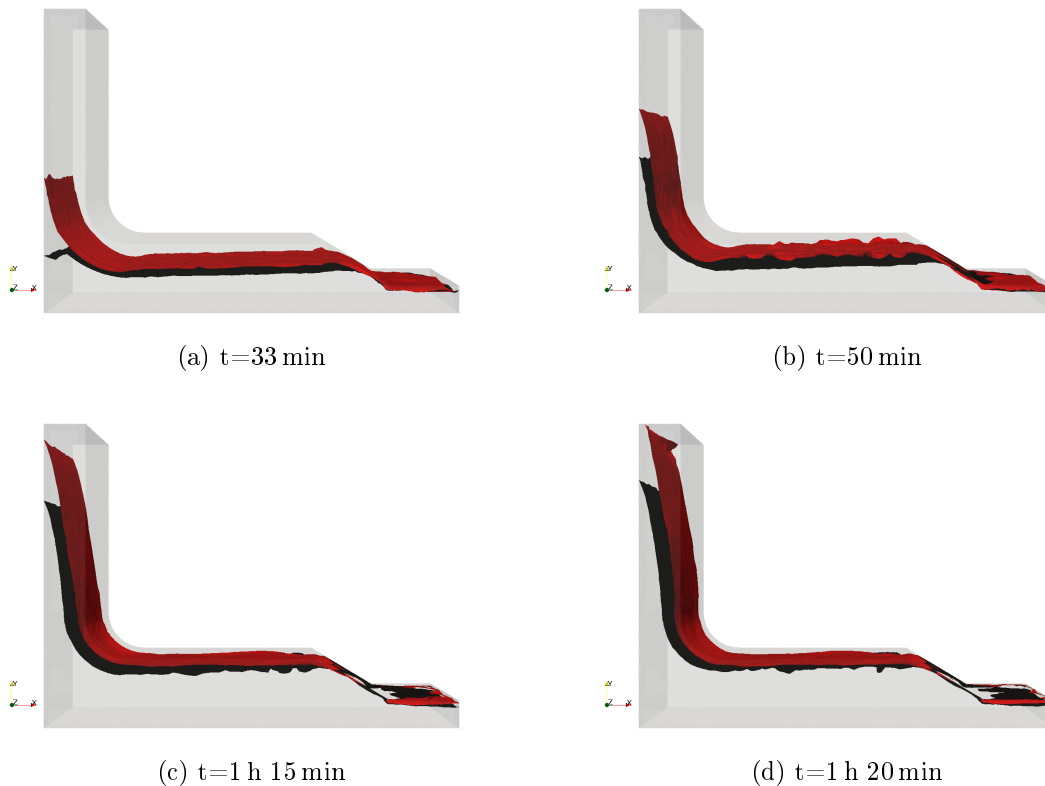


FIGURE 3.28 – Comparaison des simulations 3D avec (rouge) et sans (noir) effets capillaires orthotropes

3.7 Vers des simulations à l'échelle mésoscopique

L'échelle mésoscopique correspond à l'échelle des torons. L'objectif de cette section est de proposer une première approche de la modélisation et simulation des écoulements mésoscopiques qui intègrent les effets capillaires, en s'inspirant du modèle numérique développé dans le chapitre et la section précédents. Notre approche pour intégrer les effets capillaires est en effet fonctionnelle dès lors que le milieu poreux est représenté par un milieu homogène équivalent. L'écoulement de résine notamment dans le sens transverse (des études ont en effet montré que l'imprégnation durant les procédés LCM se font principalement dans le sens transverse aux fibres [20]) aux torons est simulé avec et sans effets capillaires. Les limites ainsi que les potentiels du modèle seront discutés à la fin de ce chapitre.

3.7.1 Cadre mathématique et numérique

Dans l'étude qui suit, l'homogénéisation de l'écoulement se fait au niveau des torons comme schématisée sur la Figure 3.29. De ce fait, l'écoulement intra-toron est représenté par les équations de Darcy alors que l'écoulement inter-torons par les équations de Stokes. Le front fluide ainsi que le contour des torons indéformables est représenté par des fonctions Level-set.

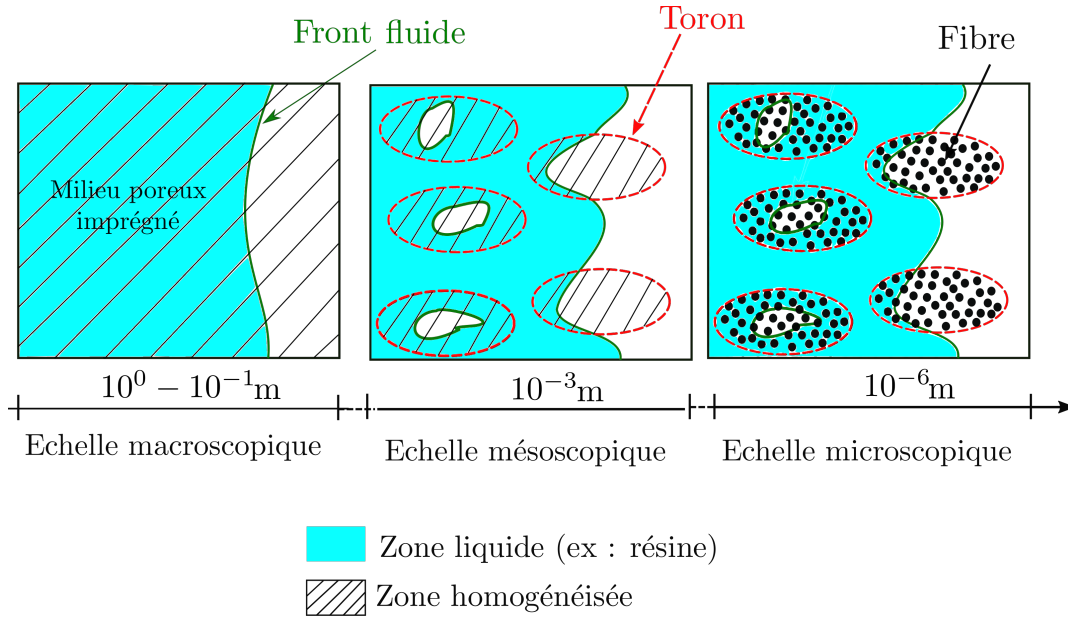


FIGURE 3.29 – Différents niveaux d'homogénéisation des écoulements

Dans cette étude, le modèle d'écoulement mésoscopique se base sur la résolution des équations de Stokes et Darcy par un couplage monolithique similaire à celui développé pour le modèle macroscopique, en utilisant un élément mixte en vitesse/pression (P1/P1) avec une stabilisation ASGS. À l'échelle mésoscopique, seul le cas bidimensionnel isotrope sera traité dans ce manuscrit. Les effets capillaires sont donc également représentés par une contrainte capillaire isotrope activée uniquement dans le milieu poreux (les torons) et appliquée au front de matière.

Nous considérons en première approche des torons de forme elliptique identique qui ne sont pas en contact et sont placés dans une configuration symétrique comme le montre la Figure 3.30a.

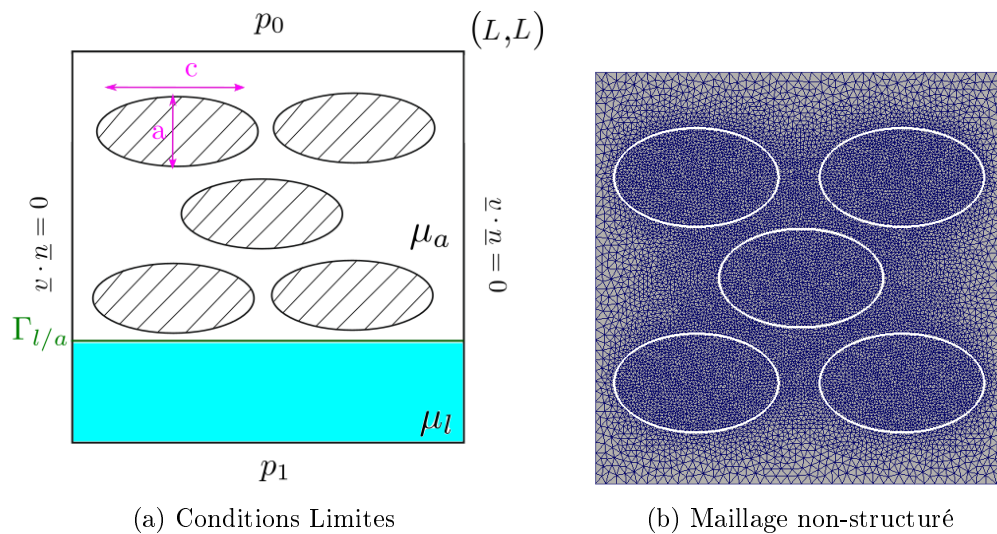


FIGURE 3.30 – La description du problème d'écoulement à l'échelle mésoscopique

La discrétisation du domaine se fait par un maillage non structuré (Figure 3.30b) coïncidant aux contours des torons. L'intérêt de ce type de maillage est d'éviter que dans un même élément co-existent deux milieux de nature très différente (poreux et purement fluide), en plus des sauts de propriétés (viscosité, densité) au passage du front fluide et surtout du saut de pression associé aux phénomènes capillaires. Plusieurs éléments doivent décrire les espaces inter-torons afin de calculer proprement la solution dans cette zone.

3.7.2 Écoulement mésoscopique sans et avec effets capillaires

L'objectif de cette section est de simuler et de comparer les écoulements avec et sans effets capillaires au sein de torons indéformables. Les paramètres d'entrée de la simulation sont récapitulés dans le Tableau 3.9. La valeur de la pression p_1 ici est choisie de sorte à avoir une valeur du gradient de pression $\frac{p_1 - p_0}{L}$ donnée, ici 1 000 Pa/m.

Paramètre matériau	Valeur	Géométrie	Valeur
$\frac{K_p}{\mu_l}$	$3 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$	L	10^{-2} m
μ_a	10^{-5} Pa.s	a	$1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
ϕ	0,40	c	$2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Conditions Limites	Valeur	Autre	
p_0	0 Pa	Δt	0,001s
p_1	10 Pa	ε	$3h_e$

TABLEAU 3.9 – Paramètres d'entrée pour la simulation des écoulements à l'échelle mésoscopique

Observations

a) Sans effets capillaires

La première difficulté est de définir un pas de temps adapté à la fois aux problèmes de Stokes et de Darcy. En effet, une bonne description de l'écoulement très rapide dans l'espace inter-torons requiert un pas de temps largement plus faible que celui dans l'espace intra-toron dans lequel l'écoulement est très lent compte tenu-tenu de la faible perméabilité du milieu. La première stratégie adoptée ici est de définir un pas de temps égal à $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$ adaptée aux équations de Stokes, mais avec l'inconvénient d'augmenter drastiquement le temps de calcul.

Malgré quelques disparités au niveau des éléments les plus grossiers, nous constatons que l'écoulement respecte globalement la symétrie résultant de la configuration et disposition symétrique des torons. Cela est illustré sur les Figures 3.31. Dans le cas où les phénomènes capillaires ne sont pas pris en compte, la résine remplit d'abord l'espace entre les torons. L'espace intra-toron n'est quasiment pas imprégné même après une vingtaine de secondes (Figure 3.31). Comme la vitesse de la résine dans le toron peu perméable est très faible, des micro-vides semblent être piégés à l'intérieur des torons. Ceci devrait être modifié par la prise en compte des effets capillaires à l'intérieur des torons.

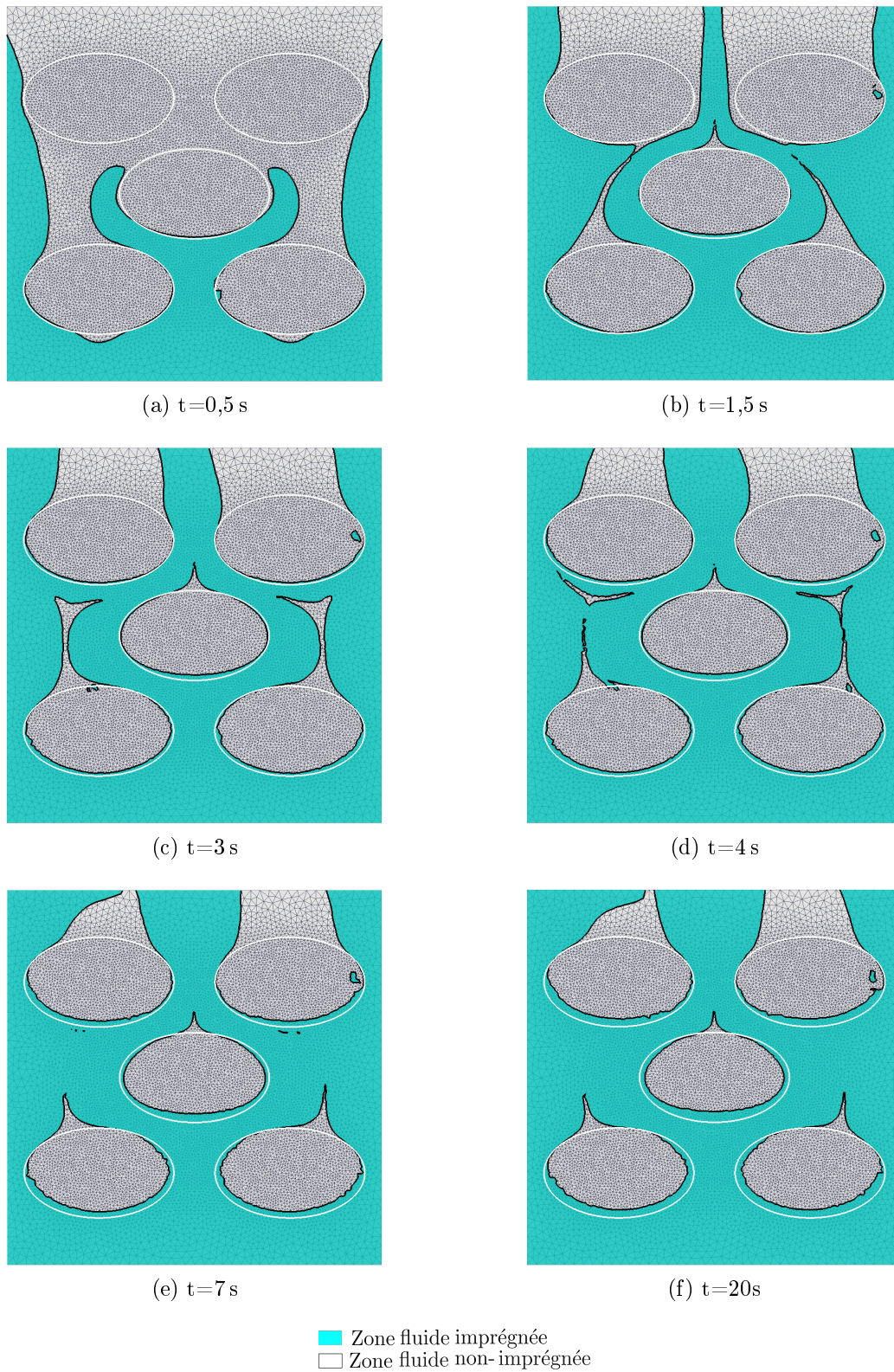


FIGURE 3.31 – Évolution du front fluide sans effets capillaires

b) Avec contrainte capillaire

Nous adaptons aux écoulements mésoscopiques la stratégie développée à l'échelle macroscopique. La contrainte capillaire, ici isotrope, est imposée en tant que condition de Neumann sur le front fluide reconstruit localement afin de pouvoir intégrer le terme surfacique résultant. L'intérieur des torons est localisé à partir des valeurs de la Level-set qui décrit le contour des torons. La contrainte capillaire est imposée uniquement sur le front fluide traversant les éléments qui sont localisés entièrement à l'intérieur du toron. La valeur de la contrainte capillaire choisie pour des torons de perméabilité de l'ordre de 10^{-11} m² est prise égale à 0,5 kPa. Avec la contrainte capillaire, le scénario de remplissage diffère complètement du cas précédent comme nous pouvons le constater sur les Figures 3.32. D'une part, les torons sont maintenant imprégnés et d'autre part, des macro- et micro-défauts sont générées par la compétition entre effets capillaires et visqueux. De plus, la symétrie de l'écoulement est mieux conservée.

Les simulations présentées ici sont encore trop amont pour que l'on puisse mener une analyse de formation et de migration de porosités. Cependant, une telle analyse représente une perspective pour des simulations à cette échelle. Il serait alors intéressant de confronter les résultats de simulation à des données expérimentales. En effet, dans le cadre de l'étude des procédés LCM, plusieurs études expérimentales [16, 39, 92] analysent l'influence des différents paramètres tels que la vitesse d'injection, sur la formation de vides afin d'optimiser le procédé (Figure 3.33).

Dans la suite, nous nous contentons d'examiner la sensibilité de ces résultats à la discrétisation spatiale.

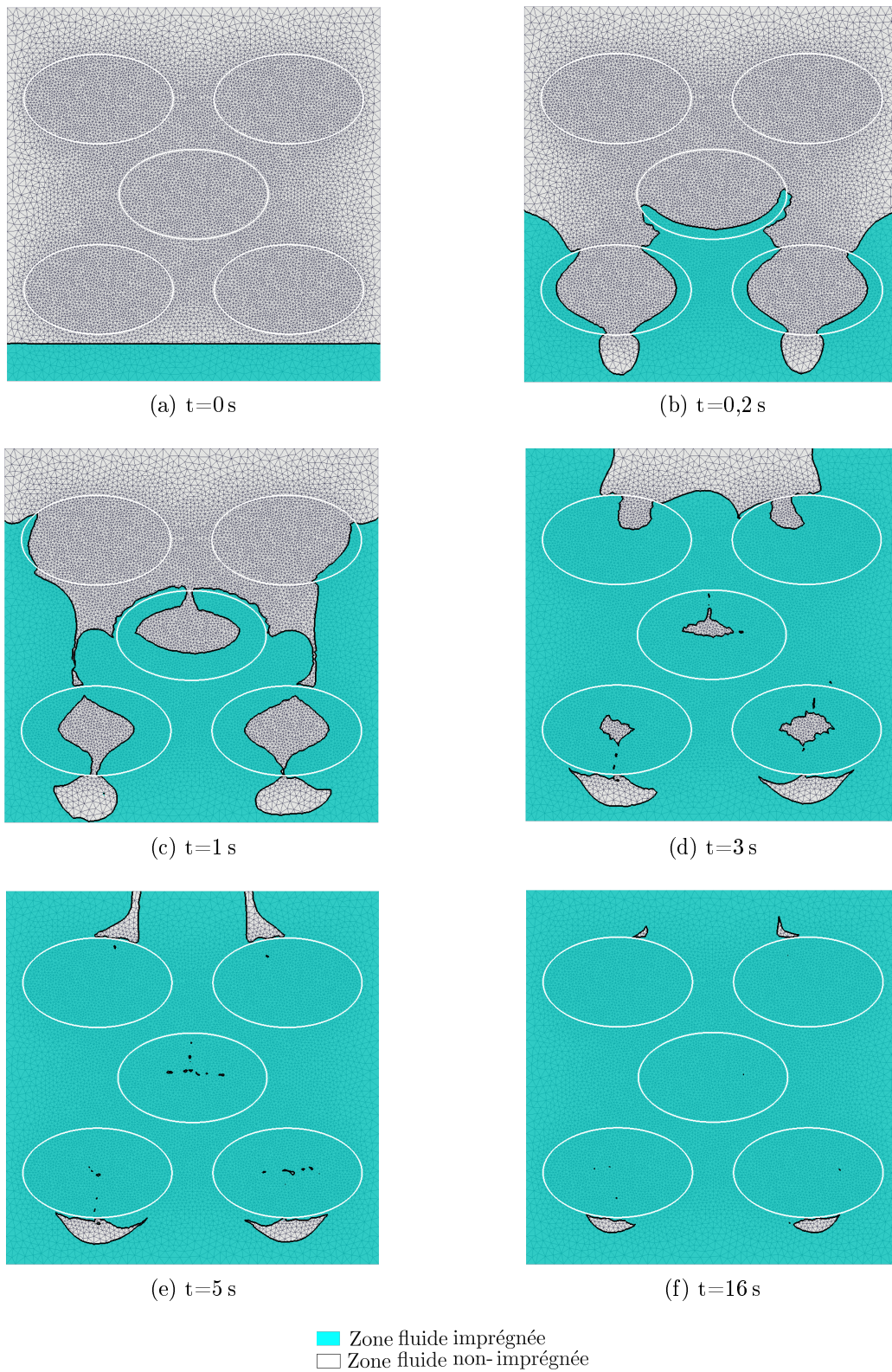


FIGURE 3.32 – Évolution du front fluide avec effets capillaires

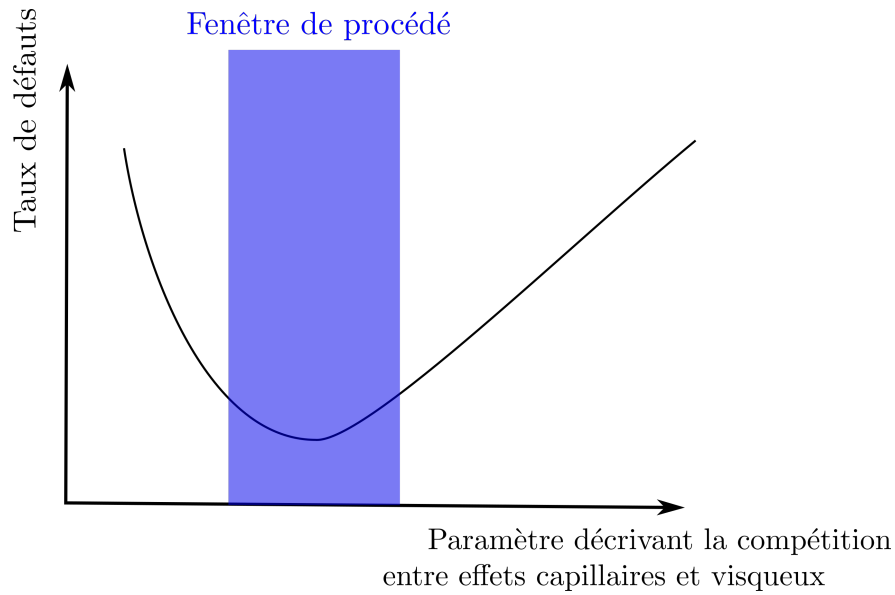


FIGURE 3.33 – Illustration de l'apparition de défauts en fonction de la compétition des effets visqueux/capillaires dans le cadre des procédés LCM

Influence du maillage

Dans cette section, nous évaluerons l'effet du maillage sur l'écoulement prenant en compte les phénomènes capillaires, notamment sur l'évolution du front fluide. Pour cela, trois maillages non structurés décrits dans le tableau ci-dessous (Tableau 3.10) sont utilisés en gardant fixe le pas de temps.

Maillage	Nombre de nœuds	Code couleur
N°1	5 000	noir
N°2	11 772	rouge
N°3	20 678	bleu

TABLEAU 3.10 – Nombre de nœuds pour l'étude de l'influence du maillage

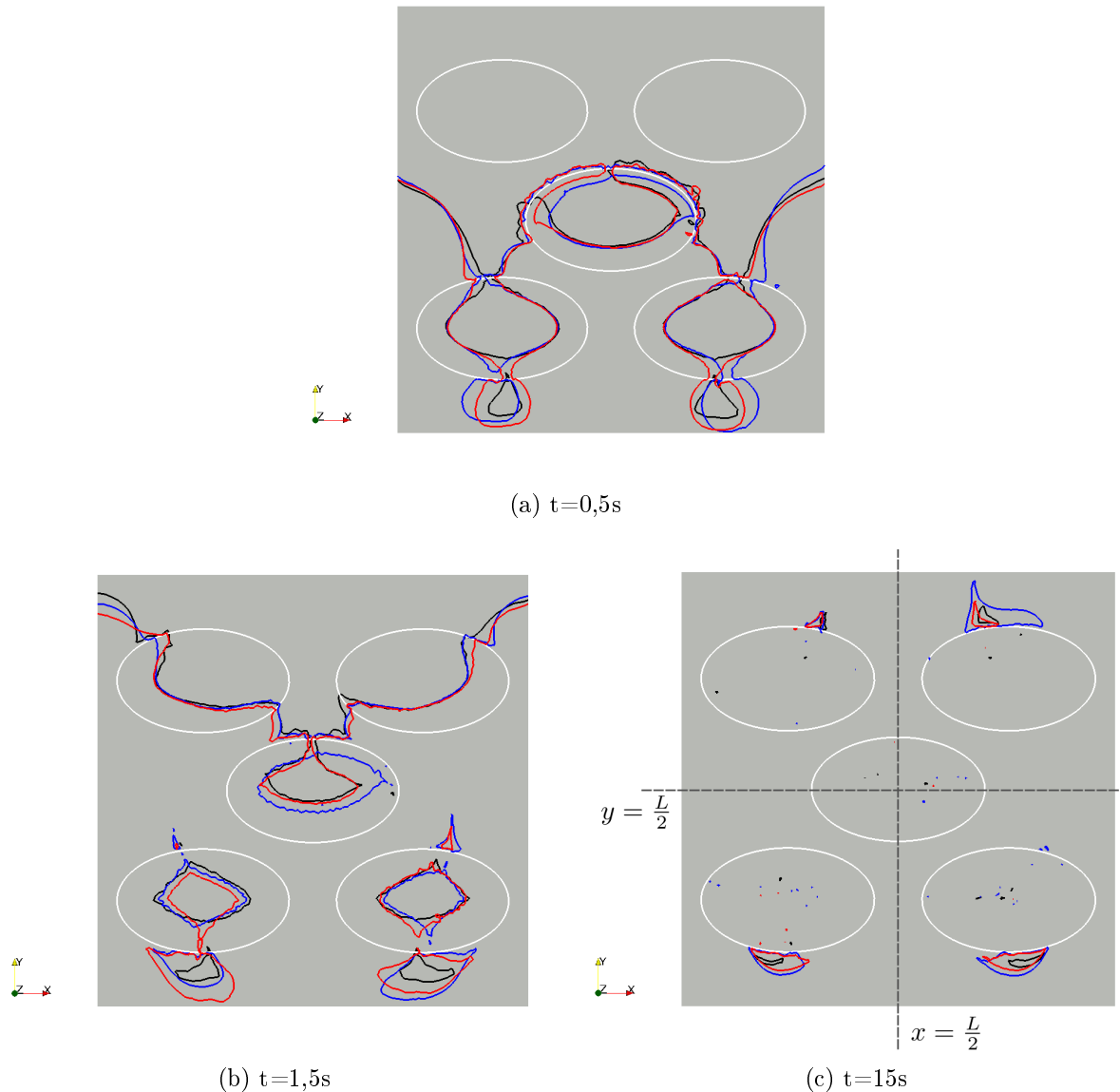


FIGURE 3.34 – Comparaison de la position du front fluide en fonction du maillage - N°1 (noir), N°2 (rouge), N°3 (bleu)

Il est important de rappeler que la largeur ε du filtre de la Level-set doit être adapté à chaque fois que l'on change de maillage, pour que le paramètre ε de l'équation (2.41) soit égal à 3 fois la taille des éléments. Bien qu'une certaine disparité sur les dimensions et la forme des micro- et macro-vides est observée (Figure 3.34), nous constatons que leurs localisations restent globalement similaires. En effet, on peut remarquer sur la Figure 3.34c que l'emplacement des défauts est symétrique, d'une part par rapport à la ligne horizontale de coordonnée $y = \frac{L}{2}$, et d'autre part par rapport à celle verticale à $x = \frac{L}{2}$. Le maillage le plus grossier N°1 montre une perte de la symétrie du problème très prononcée (Figure 3.34a) comparée aux deux autres cas. Ce type d'analyse peut donc permettre de définir un nombre minimum de nœuds requis pour le calcul. Un calcul qui nous semble exploitable nécessite un maillage de 10 000 nœuds pour une taille caractéristique des torons

elliptiques $c = 2 \cdot 10^{-3} \text{m}$. Le maillage contenant 5 000 nœuds montre une différence de plus de 30% contre 6% pour celui contenant 20 000 nœuds (d'après le Tableau 3.11), par rapport au maillage le plus raffiné (N°3) et en prenant comme référence la surface totale non-imprégnée à $t=3\text{s}$.

Maillage	Surface non-remplie (mm^2)
N°1	9,097
N°2	12,26
N°3	13,1

TABLEAU 3.11 – Surface non-remplie à $t=3\text{s}$ (milieu poreux et fluide confondu) selon le raffinement de maillage

3.8 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a présenté le modèle numérique permettant de prendre en compte les effets capillaires locaux à l'échelle du procédé. À cette échelle, la préforme fibreuse est représentée par un milieu homogène équivalent traversé par un front fluide sur lequel est imposé une contrainte capillaire pouvant freiner ou accélérer l'écoulement. Cette représentation induit une discontinuité du champ de pression au niveau du front fluide ne pouvant pas être captée par l'approximation classique continue par éléments-finis, ce qui génère des oscillations de la solution. La méthode de l'enrichissement local du champ de pression a été retenue afin de palier ces problèmes, tout en évitant une augmentation de la taille des systèmes linéaires issus de la discrétisation. Le remplissage de pièces de type industriel a été simulé dans le cas isotrope-transverse en 2D et orthotrope en 3D avec des paramètres proches de la réalité physique et a démontré l'influence que peuvent avoir les effets capillaires et leur caractère orthotrope sur le scénario de remplissage, surtout sur la durée de remplissage.

À la fin du chapitre, une transition d'échelle a été abordée afin de simuler les écoulements isotropes 2D à l'échelle des torons. Dans cette perspective, les mêmes stratégies de modélisation sont appliquées au modèle mésoscopique, l'homogénéisation se faisant au niveau des torons. Les torons sont de ce fait assimilés à des milieux homogènes équivalents. L'écoulement intra-toron est donc décrit par les équations de Darcy, tandis que l'écoulement inter-torons est donné par les équations de Stokes. De plus, une contrainte capillaire est toujours considérée au front fluide dans les torons.

Les perspectives offertes à l'issue de ces travaux sont, d'une part la détermination des valeurs des contraintes capillaires pour les résines de type époxyde pour différents types de fibres, et d'autre part la validation expérimentale du modèle à l'échelle structurelle et aussi à l'échelle des torons. Une confrontation entre les simulations numériques et des études expérimentales est en effet nécessaire dans le but de calibrer le modèle et assurer sa pertinence. Maintenant que le modèle numérique est établi, les plans d'expérience et les essais associés sont à imaginer en interaction avec l'équipe d'Hexcel Reinforcements.

Modélisation et simulation de la phase post-remplissage

Ce chapitre propose une première approche de la modélisation et de la simulation numérique des principaux phénomènes physiques qui se produisent après la phase de remplissage. En effet, un gradient de pression résiduel peut subsister à l'intérieur de la préforme après la phase de remplissage. Cela signifie que la pression de la résine, et par conséquent l'épaisseur de la pièce, continuent à évoluer après remplissage de la préforme jusqu'à ce qu'un équilibre mécanique soit atteint ou que la résine se solidifie et empêche tout écoulement.

Cette phase est donc décrite par l'interaction forte entre l'écoulement de la résine et la déformation du réseau fibreux. Une variation globale du taux volumique de fibres résulte également de cette interaction, conditionnant les propriétés mécaniques de la pièce finale [106]. La compréhension et la maîtrise de cette interaction écoulement/déformation à l'échelle du procédé sont donc primordiales dans la fabrication des pièces en composites Haute Performance. L'objectif de l'étude de la post-infusion est de prédire l'évolution de l'état du système au cours du temps pour adapter ensuite la stratégie d'élaboration vis-à-vis, par exemple, de la phase de cuisson.

Durant la phase de remplissage, l'avancée de la résine est suivie dans le temps via la fonction Level-set. Dans le cas de la simulation de la post-infusion, il s'agit de décrire les états successifs de la pièce au cours du temps dans un régime supposé saturé.

Ce travail propose une première approche de la modélisation par éléments-finis de l'écoulement de la résine pendant l'étape post-infusion.

4.1 État de l'art

Cette partie se concentre sur l'étude bibliographique de la modélisation mathématique et de la simulation numérique de la phase de post-remplissage dans le cadre des procédés d'élaboration des matériaux composites par infusion de résine liquide, dans l'objectif *in fine* d'optimiser le procédé.

Dans le cadre des procédés par voie liquide, la simulation d'écoulement se termine géné-

ralement lorsque la préforme est complètement saturée de résine. Cette considération semble raisonnable pour l'élaboration de pièce utilisant des moules rigides comme durant les procédés par injection. La rigidité des moules empêcherait éventuellement toute déformation de la préforme qui pourrait générer un écoulement supplémentaire de la résine. Cependant, lorsque la déformation de la préforme est possible (notamment pour les procédés d'infusion), l'écoulement de la résine se poursuit même après la phase de remplissage. Un temps de repos est nécessaire pour que le champ de pression s'équilibre.

Plusieurs études portent sur la modélisation et la simulation numérique de la phase de post-remplissage dans le cadre des procédés d'infusion. La majorité de ces travaux établissent leur modèle mathématique à partir de la conservation de la masse qui est exprimée en fonction de la variation du volume de la préforme. Cette variation de volume est ensuite reliée à la variation du taux volumique de fibres. Dans ces travaux [36, 102, 106, 126], les modèles développés sont déduits de la conservation de la masse qui est exprimée par

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\dot{\tau}_{v_f}}{\tau_{v_f}} \quad (4.1)$$

avec \dot{x} la dérivée temporelle de la quantité x .

Simacek *et al.* [106] ont développé un modèle d'écoulement dynamique basé sur les équations de Darcy combinées avec une équation de continuité (4.1) incluant un terme source transitoire. Cette dernière est exprimée en fonction du taux volumique de fibres afin de prendre en compte la déformabilité de la préforme. De plus, la perméabilité est également exprimée en fonction du taux de fibres. L'équation constitutive (Eq. 4.2) ainsi établie est résolue par la méthode des différences finies.

$$\underline{\nabla} \cdot \left(-\frac{K(\tau_{v_f})}{\mu} \cdot \underline{\nabla} p \right) = \frac{\dot{\tau}_{v_f}}{\tau_{v_f}} = \frac{1}{\tau_{v_f}} \frac{\partial \tau_{v_f}(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.2)$$

avec la pression p et τ_{v_f} les inconnues du problème. Une relation supplémentaire reliant ces deux variables est considérée en combinant le principe de Terzaghi et une loi puissance décrivant le comportement en compression de la préforme. En effet, ces auteurs expriment le taux volumique de fibres tel que $\tau_{v_f} = a + b(p_{atm} - p)^c$ avec a , b et c des coefficients identifiés à partir des données expérimentales, et p_{atm} la pression atmosphérique.

Yong *et al.* [126] ont développé un modèle basé sur la méthode des Volumes Finis - une approche qui assure une bonne conservation locale de la masse et de ce fait bien adaptée à l'étude des problèmes de mécanique des fluides. Le système est supposé compressible dans le sens de l'épaisseur de l'empilement et incompressible dans le plan. Les équations du modèle sont obtenues à partir des équations classiques de Darcy (Eq. 4.3) et de l'équation de continuité (Eq. 4.4) transitoire qui dépend de l'épaisseur e_p de la pièce, de la porosité ϕ et de la vitesse \underline{v} de la résine.

$$\underline{v} = -\frac{K}{\mu} \cdot \underline{\nabla} p \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial (e_p \phi)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} e_p \phi) = 0. \quad (4.4)$$

À la différence de l'équation (4.2), les inconnues du problème sont ici la pression et l'épaisseur de la pièce ; dont les valeurs à la fin du remplissage complétées par les propriétés matériaux servent de paramètres d'entrée au modèle de post-infusion décrit par (4.3) et (4.4).

D'autres chercheurs [36, 62, 77, 102] ont développé des modèles basés sur la méthode éléments-finis. Robinson *et al.* [102] modélisent par exemple, l'écoulement de la résine à travers une préforme compressible par un système d'équations non-linéaires (Eq. 4.5) :

$$\underline{\nabla} \cdot \left(\frac{K(\tau_{vf}(p))}{\mu} \underline{\nabla} p \right) + \frac{1}{\tau_{vf}} \frac{\partial \tau_{vf}}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

À la différence de (4.2) et (4.4), l'équation (4.5) a pour seule inconnue la pression. Comme τ_{vf} est exprimée en fonction de la pression via des lois expérimentales de type puissance, une procédure itérative est utilisée pour résoudre le système (4.5). Aussi, une autre différence est que dans les travaux de Simacek *et al.* [106], la perméabilité est calculée à partir de l'équation de Carman-Kozeny alors que dans ceux de Robinson *et al.* [102], elle est calculée à partir de lois en fonction de la pression.

Les travaux de Caglar *et al.* [36] décrivent l'évolution de la préforme saturée par un système d'équations transitoires établi à partir de l'équation de continuité (Eq. 4.6). Cette dernière est écrite en fonction de l'épaisseur e_p de la pièce et de la vitesse \underline{v} de la résine.

$$\frac{\partial e_p}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (e_p \underline{v}) = 0 \quad (4.6)$$

En considérant, d'une part que l'épaisseur de la pièce dépend de la pression de compression qui elle aussi dépend de la pression hydrostatique de la résine, et d'autre part l'expression de la vitesse en fonction du gradient de pression (Darcy), l'équation (4.6) est écrite uniquement avec la pression comme inconnue telle que :

$$\frac{\partial e_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \left(e_p \frac{K}{\mu} \cdot \underline{\nabla} p \right) = 0 \quad (4.7)$$

La vitesse \underline{v} est exprimée en fonction de la pression grâce à la loi de Darcy. Le système final ayant comme variable primaire la pression de la résine est résolu par une approche EF.

Larsson *et al.* [73] proposent eux un modèle diphasique (fluide/solide) décrivant des paquets de fibres compressibles imprégnés par un fluide incompressible. Ce modèle est basé sur la résolution EF des équations de conservation de la quantité de mouvement (Eq. 4.8) et de la conservation de la masse de chaque phase. En effet, la combinaison de l'équation de la conservation de la masse et la loi logarithmique décrivant la déformation ε_c liée à la compaction telle que $\varepsilon_c = -\ln\left(\frac{\rho^s}{\rho_0^s}\right)$ et en considérant en plus une résine incompressible (i.e. la déformation correspondant au fluide est nulle), nous avons la conservation de la masse qui s'écrit par (4.9)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^T + \underline{f}_v^T = 0 \quad (4.8)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v}^{solide} - \tau_{vf} \dot{\varepsilon}_c = -\underline{\nabla} \cdot \underline{v} \quad (4.9)$$

avec la contrainte totale $\underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}^s + \underline{\underline{\sigma}}^f$ où $\underline{\underline{\sigma}}^s$ est la contrainte de la phase solide et $\underline{\underline{\sigma}}^f = -p\underline{\underline{I}}$ la contrainte associée à la phase fluide, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ la vitesse de déformation reliée à la compaction de la phase solide, \underline{v}^{solide} la vitesse du solide.

Dans cette étude, les équations décrivant l'évolution de la phase fluide et celles de la phase solide découlent directement de la description thermodynamique des milieux poreux et non de la simple expression de la divergence de la vitesse en fonction de la variation du volume. La modélisation mathématique et numérique de l'approche proposée dans ces travaux de thèse est décrite dans la section suivante.

4.2 Cadre mathématique et numérique

Dans ce manuscrit, nous présenterons une première approche de la phase post-infusion, basée sur la résolution par EF à la fois des problèmes d'écoulement de la résine et de déformation mécanique de la préforme. Les équations constitutives du problème dérivent directement de la description thermodynamique des milieux poreux. Le modèle développé est capable de tenir compte des caractéristiques spécifiques des composites HP. La loi de comportement affectée à la préforme sèche peut être déduite des essais expérimentaux. Contrairement aux modèles cités dans la section précédente, ces travaux reposent sur la description thermodynamique [51] de la préforme supposée complètement saturée selon la poromécanique. La première hypothèse forte dans ces travaux est de considérer que la déformation de la préforme humide pendant la phase post-infusion se fait en petites transformations.

4.2.1 Approche thermodynamique de la préforme fibreuse

Le premier principe de la thermodynamique exprime un principe de conservation (conservation de l'énergie) alors que le second exprime un principe d'évolution (croissance de l'entropie). Le second principe traduit dans quel sens se font les transformations : **réversibles** ou **irréversibles**. Ce principe introduit le concept d'entropie. Quand les transformations sont irréversibles, l'entropie n'est pas conservée d'un état à un autre et la variation d'entropie est strictement positive.

- La première loi de la thermodynamique permet de décrire la conservation de l'énergie du système en exprimant la variation de la densité de l'énergie interne \mathbb{E}_i .

Dans une description Lagrangienne, on obtient [51] :

$$\frac{d\mathbb{E}_i}{dt} = \underline{\underline{S}} : \frac{d\underline{\underline{\mathcal{E}}}}{dt} - \nabla \cdot (h_f \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{Q}}) + (\underline{f}_v - \underline{a}^f) \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{M}} \quad (4.10)$$

avec $\underline{\underline{S}}$ le second tenseur de contraintes de Piola Kirchoff, $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ le tenseur de déformations de Green-Lagrange, h_f l'enthalpie spécifique du fluide, $\underline{\underline{M}}$ (dont l'expression est définie plus tard) est le champ vectoriel lagrangien attaché à la configuration initiale et lié au transport du fluide dans le milieu poreux du fluide, $\underline{\underline{Q}}$ le vecteur de flux de chaleur, \underline{f}_v la force volumique, \underline{a}^f l'accélération des particules fluides, et $\underline{\underline{F}}$ le tenseur du gradient de la transformation.

- Le second principe de la thermodynamique permet d'exprimer la dissipation au sein du milieu poreux saturé. Dans ce type de matériau, on peut distinguer 3 sources de

dissipations : celle associée à la phase solide, celle associée au fluide et celle associée aux effets thermiques. Dans cette étude, la préforme, *i.e.* la phase solide est considérée comme élastique donc, les transformations correspondantes se font de manière réversible et la dissipation associée à la phase solide est nulle. Le calcul de cette dissipation D_s est détaillé dans les travaux de Coussy [51], et permet de l'exprimer de la manière suivante

$$D_s = \underline{\underline{S}} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}}{dt} + p \frac{d\phi}{dt} - \frac{d\Psi_s}{dt} = 0 \quad (4.11)$$

avec Ψ_s l'énergie libre de la phase solide. Le terme $p \frac{d\phi}{dt}$ traduit l'effet de la pression interstitielle du fluide sur le squelette solide. En considérant l'hypothèse des petites transformations, les tenseurs de Piola-Kirchoff et de Green-Lagrange peuvent être exprimés dans leur forme linéarisée telle que

$$\underline{\underline{\sigma}} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}}{dt} + p \frac{d\phi}{dt} - \frac{d\Psi_s}{dt} = 0 \quad (4.12)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Cauchy et $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} u + \underline{\underline{\nabla}}^T u)$ le tenseur linéarisé des déformations.

L'équation (4.12) peut servir pour établir les équations constitutives du milieu poreux en fonction des variables d'état $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et p . La complexité se situe dans l'expression explicite de l'énergie libre Ψ_s .

Considérons pour cela, une fonction d'énergie G_s telle que $G_s(\underline{\underline{\varepsilon}}, p) = \Psi_s - p\phi$, on a donc

$$\underline{\underline{\sigma}} : \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}}{dt} - \phi \frac{dp}{dt} - \frac{dG_s}{dt} = 0 \quad (4.13)$$

Par différentiation, G_s peut également s'exprimer de la manière suivante :

$$\frac{dG_s}{dt} = \left(\frac{\partial G_s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)_p \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}}{dt} + \left(\frac{\partial G_s}{\partial p} \right)_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \frac{dp}{dt} \quad (4.14)$$

En comparant (4.13) et (4.14), on en déduit les équations d'état :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial G_s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)_p \quad (4.15)$$

$$\phi = - \left(\frac{\partial G_s}{\partial p} \right)_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (4.16)$$

Les équations décrivant le problème de post-infusion, seront exprimées à partir de ces équations d'état.

Problème fluide

Dans une description lagrangienne, la conservation de la masse de fluide [50, 51] s'écrit par

$$\frac{dm_f}{dt} + \underline{\nabla} \cdot \underline{M} = 0 \quad (4.17)$$

avec m_f la masse volumique du fluide rapportée à la porosité qui s'exprime, en supposant que les pores soient saturés par $m_f = \phi \rho_f$, et \underline{M} est exprimée par

$$\underline{M} = \mathcal{J} \underline{F}^{-1} \cdot (m_f \underline{v}).$$

Comme l'hypothèse des transformations infinitésimales est appliquée, les descriptions Eulerienne et Lagrangienne sont équivalentes car les configurations courante et initiale sont supposées confondues. L'équation (4.17) peut donc se ré-écrire :

$$\frac{\partial m_f}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (m_f \underline{v}) = 0 \quad (4.18)$$

Si la masse volumique du fluide est uniforme dans l'espace, nous obtenons alors :

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial m_f}{\partial t} = \phi \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{v}) \quad (4.19)$$

$$\text{avec } \underline{v} = -\frac{K}{\mu} \cdot \underline{\nabla} p \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = c_f \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.20)$$

avec c_f la compressibilité du fluide. Si le fluide peut être considéré intrinsèquement incompressible alors $c_f = 0$.

L'équation de continuité (4.18) de la phase fluide s'écrit alors

$$c_f \phi \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} - \underline{\nabla} \cdot \left(\phi \frac{K}{\mu} \cdot \underline{\nabla} p \right) = 0 \quad (4.21)$$

La prochaine étape consiste à exprimer le terme $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ en utilisant les équations d'état (Eq. 4.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial G_s}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial G_s}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial G_s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial t} + \frac{\partial G_s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 G_s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial p} \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial t} + \frac{\partial^2 G_s}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pour une écriture simplifiée, posons :

$$\underline{\underline{b}} = -\frac{\partial^2 G_s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial p}, \quad \frac{1}{N} = \frac{\partial^2 G_s}{\partial p^2}.$$

En géo-mécanique, les paramètres b et N caractérisent respectivement le tenseur et le module de Biot [22]. Dans le cas isotrope [51, 52, 82, 85], ces deux coefficients sont respectivement exprimés par :

$$b = 1 - \frac{E_m}{E_f} \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{N} = \frac{b - \phi_0}{E_f} \quad (4.24)$$

avec b , E_m , E_f , ϕ_0 respectivement le coefficient de Biot dans le cas isotrope, le module d'élasticité isostatique de la préforme humide, celui de la fibre, et la porosité initiale de la préforme.

$$\left(c_f \phi + \frac{1}{N} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + b \frac{\partial \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\phi \frac{K}{\mu} \nabla p \right) = 0 \quad (4.25)$$

L'équation (4.25) exprime, d'une part la conservation de la masse des fluides et des solides, et d'autre part la loi de Darcy. Par ailleurs, cette équation tient compte de la compressibilité du système formé par la préforme saturée de résine. La compression ici peut être induite par la compression du fluide interstitiel et de la fibre en plus la quantité de fluide expulsée par écoulement et le réarrangement des fibres.

Conditions aux limites

Du point de vue expérimental, différentes stratégies existent afin de minimiser au maximum la variation de l'épaisseur de la pièce [63, 106]. Les conditions limites du problème dépendent donc de la stratégie choisie. On peut notamment citer :

- La stratégie **drainée** : l'évent n'est pas clampé contrairement à l'arrivée de résine, ce qui permet d'uniformiser la pression à l'intérieure de la bache à vide et d'évacuer l'excès de résine hors du système. La pression de la résine s'équilibre en effet avec la pression au niveau de l'évent, assurant par la suite une géométrie uniforme. Bien que jugée très efficace et en assurant une épaisseur uniforme à la pièce et un bon taux volumique de fibres, on risque d'enlever trop de résine limitant ainsi l'imprégnation des torons dans lesquels l'écoulement de la résine est très lent. En effet, en fonction de la pression de l'évent (et donc la vitesse d'« évacuation » de la résine), la vitesse inter-torons peut atteindre des valeurs suffisamment importantes pour que la résine n'ait pas le temps d'imprégner les torons de faible perméabilité avant de sortir du système.
- La condition **non-drainée** : l'évent et l'arrivée de résine sont tous deux clampés à la fin du remplissage, ce qui empêche alors tout écoulement de la résine en dehors du système. La résine doit donc se répartir dans toute la pièce jusqu'à atteindre l'état d'équilibre.

Condition initiale :

L'état initial du problème est défini par l'état final de la phase de remplissage, *i.e.* l'état de pression final ainsi que l'état final de la déformation et donc la fraction volumique de fibres.

Problème solide

Dans la même logique que le problème de remplissage, le comportement effectif de la préforme saturée est, d'une part relié au comportement de la préforme sèche, et d'autre part à la pression hydrostatique de la résine. Comme on l'a indiqué dans le chapitre précédent, cette interaction peut s'exprimer soit par l'équation de Terzaghi [113], soit par l'équation de Biot [22]. Dans le premier cas, les particules solides ainsi que le fluide interstitiel sont considérés comme incompressibles ; de ce fait le seul mécanisme de déformation est généré par l'arrangement des particules solides. Dans le cadre de la post-infusion, cette hypothèse n'est plus considérée étant donné que les préformes sont supposées compressibles à l'échelle macroscopique. L'équation de Biot est donc utilisée et s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_{eff} - bp\underline{\underline{I}} \quad (4.26)$$

Par ailleurs, la conservation de la masse du solide se traduit par la mise à jour de la porosité de la préforme à partir de la déformation du solide. La loi de comportement de la préforme est intégrée dans l'expression du tenseur de la contraintes en fonction de la déformation. Un point important de notre modèle défini par les équations (4.25) et (4.26) est qu'il est très bien adapté pour décrire l'anisotropie - caractère spécifique des matériaux composites HP, d'une part par la définition du tenseur de Biot $\underline{\underline{b}}$ et du tenseur de la perméabilité, et d'autre part par la loi de comportement reliant la contrainte et la déformation. À la différence par exemple du modèle de Larsson (4.9), la vitesse de déformation dans l'équation (4.25) de nos travaux découle directement du calcul de la résolution EF de la déformation mécanique du milieu poreux saturé et non d'un modèle logarithmique.

Pour résumer, l'interaction fluide-structure pendant la phase de ré-équilibrage dans notre modèle se reflète par trois conditions :

1. la pression hydrostatique de la résine est intégrée comme force volumique au problème de déformation,
2. la déformation volumique déduite du problème solide est incluse dans le problème fluide en tant que terme source/puits,
3. les caractéristiques du milieu fibreux (porosité et perméabilité) sont mises à jour à partir du champ de déformation de la préforme (traduisant aussi la conservation de la masse du squelette fibreux).

4.2.2 Détermination des coefficients

Cette section a pour objectif d'analyser la signification physique des coefficients poroélastiques afin de mieux adapter leur caractérisation et leur calcul dans le cadre des matériaux composites.

Tenseur de Biot $\underline{\underline{b}}$

Dans le repère matériau, le tenseur $\underline{\underline{b}}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} b_p & 0 & 0 \\ 0 & b_t & 0 \\ 0 & 0 & b_l \end{pmatrix}_{(p,t,l)} \quad (4.27)$$

avec b_p, b_t et b_l la valeur du coefficient de Biot respectivement dans la direction $p-, t-$ et $l-$. Selon les travaux de Tran *et al.* [114], le tenseur \underline{b} quantifie la déformation de la préforme saturée sous l'effet de la pression hydrostatique. Les composantes $b_i, i \in (p, t, l)$ sont toujours inférieures à 1. Par ailleurs, ces travaux ont également relevé le caractère orthotrope de ce paramètre : sa valeur dans la direction à forte perméabilité est plus élevée que celle dans le sens à faible perméabilité.

Dans le cadre des matériaux isotropes transverses, Tran *et al.* [114] ont calculé des expressions des composantes du tenseur \underline{b} en fonction des coefficients élastiques homogènes du milieu poreux

$$\begin{aligned} b_p = b_l &= 1 + \frac{(1 + \nu_{pt})}{3E_f \left(\frac{2\nu_{pt}^2}{E_t} - \frac{1-\nu_{pt}}{E_p} \right)} \\ b_t &= 1 + \frac{E_t \left(\frac{2\nu_{pt}}{E_t} - \frac{1-\nu_{pt}}{E_p} \right)}{3E_f \left(\frac{2\nu_{pt}^2}{E_t} - \frac{1-\nu_{pt}}{E_p} \right)} \end{aligned}$$

avec E_i le module d'élasticité dans la direction $i, i \in (p, t, l)$, ν_{ij} le coefficient de Poisson dans le plan $(i-, j-)$.

Dans cette étude, nous considérons uniquement le cas isotrope pour mettre en place le modèle.

Paramètre $\frac{1}{M}$

Dans les travaux originaux de Biot [22], le coefficient $\frac{1}{M} = \left(c_f \phi + \frac{1}{N} \right)$ mesure la quantité de liquide qui peut être injectée dans le renfort en gardant son volume constant. Elle évalue donc, la compressibilité du mélange solide/fluide. Selon Verruijt [118, 119], le paramètre $\frac{1}{M}$ représente la capacité de « stockage » (*storativity*) du sol et l'équation (4.25) représente l'équation dite de stockage (*storage equation*).

Le paramètre $\frac{1}{M}$ peut aussi être associée à l'évolution au cours du temps de la pression dans les pores. Ce paramètre vaut zéro dans le cas d'une préforme incompressible, i.e. la pression dans les pores s'équilibre instantanément. Quand le solide est compressible, l'équilibre de la pression est différée par la déformation du squelette.

Quelques ordres de grandeur des coefficients b et N de matériaux issus du domaine de la géologie sont rappelés dans le tableau 4.1. À titre d'information, la quantité N est de nature scalaire [51] même dans le cas anisotrope. Pour une préforme et une résine incompressibles $\underline{b} = \underline{I}$ et $\frac{1}{M} = 0$.

Matériaux	ϕ (%)	E (GPa)	b	N (GPa)
Pâte de ciment	40 - 63	15 - 2	0,07 - 0,37	1170 - 20
Mortier	27 - 40	15 - 3	0,04 - 0,35	2340 - 40
Os	5	12	0,14	160
Granites	1 - 2	25 - 35	0,22 - 0,44	280-370
Marbre	2	40	0,22	280
Grès	2 - 26	4,6 - 13	0,69 - 0,85	17
Calcaire	4 - 29	5 - 39	0,34 - 0,88	100-400

TABLEAU 4.1 – Ordre de grandeur des coefficients de Biot pour quelques matériaux [51] avec E le module d'élasticité du matériau

Écriture adimensionnée du problème fluide isotrope :

Pour une meilleure compréhension des coefficients dans le cas isotrope, l'écriture adimensionnée du problème fluide (Eq. 4.29) est proposée en considérant les paramètres caractéristiques en temps t_{cr} , en longueur l_{cr} et en pression p_{cr} . En définissant respectivement par $p^* = \frac{p}{p_{cr}}$, $t^* = \frac{t}{t_{cr}}$ et $x^* = \frac{x}{l_{cr}}$ les pression, temps et longueur adimensionnés, nous obtenons :

$$\frac{1}{M} \frac{p_c}{t_c} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{1}{t_c} b \frac{\partial tr(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial t^*} - \underline{\nabla}^* \cdot \left(\phi \frac{K}{\mu} \frac{p_c}{l_c^2} \underline{\nabla}^* p^* \right) = 0 \quad (4.28)$$

avec respectivement $\underline{\nabla}^* \cdot$ et $\underline{\nabla}^*$ les opérateurs divergence et gradient adimensionnés.

En multipliant l'équation (4.28) par $\frac{t_{cr}}{p_{cr}} M$, on a

$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*} - \underline{\nabla}^* \cdot (K^* \underline{\nabla}^* p^*) = -B^* \frac{\partial tr(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial t^*} \quad (4.29)$$

avec

$$K^* = M \phi \frac{t_{cr}}{l_{cr}^2} \frac{K}{\mu} \quad (4.30)$$

$$B^* = b \frac{M}{p_{cr}} \quad (4.31)$$

des quantités sans dimensions.

L'équation (4.29) est assimilable à une équation de diffusion instationnaire incluant un second membre dépendant de la déformation volumique de la préforme, K^* (Eq. 4.30) peut être assimilé à un coefficient de diffusion qui associe la perméabilité aux coefficients poroélastiques.

Coefficient de Skempton

Dans le cas isotrope en condition non-drainée et en adimensionnant la pression par le module de compressibilité, la quantité (4.31) peut-être assimilée au coefficient de Skempton [50, 108] en géomécanique. Le coefficient de Skempton est défini comme étant le rapport entre la pression interstitielle induite et la variation de la contrainte appliquée dans des conditions non-drainées. En d'autres termes, ce coefficient exprime le changement de pression interstitielle qui se produit suite à un changement dans le milieu confiné.

4.2.3 Formulation éléments-finis

Dans la continuité de la modélisation complète du procédé d'infusion, les équations modélisant la phase de post-remplissage sont résolues par une approche éléments-finis. Les problèmes fluide et solide sont couplés de manière faible (*i.e.* séquentielle). L'inconnue du problème fluide (Eq. 4.25) est la pression du fluide, le terme transitoire contenant la déformation de la préforme est considéré comme une force extérieure résultant de la résolution du problème solide à l'incrément précédent.

Problème fluide :

La formulation faible du problème fluide s'obtient alors en multipliant l'équation (4.29) par une fonction test en pression q , en intégrant l'équation résultant dans le domaine de calcul et en intégrant par parties le terme contenant l'opérateur $\nabla \cdot$.

Le problème fluide s'écrit sous la forme variationnelle tel que :

Trouver la pression $p \in \mathcal{H}^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} q dV + \int_{\Omega} \left(\phi \frac{K}{\mu} \nabla p \right) \cdot \nabla q dV + \int_{\partial\Omega^N} (\underline{v}_{ext} \cdot \underline{n}) q dS = - \int_{\Omega} b \frac{\partial tr(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial t} q dV$$

$\forall q \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ et \underline{v}_{ext} la vitesse sur les bords dont les conditions aux limites sont de type Neumann.

L'écriture discrétisée du problème est obtenue en discrétisant les termes transitoires selon le schéma d'Euler implicite, en discrétisant le terme de déformation volumique par un schéma de type différences finies décentré en temps, et en considérant le coefficient de Biot constant. En connaissant la pression p^n à l'instant t , le problème consiste alors à trouver p^{n+1} à l'instant $t + \Delta t$ telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{M} \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} q dv + \int_{\Omega} \left(\phi \frac{K}{\mu} \nabla p^{n+1} \right) \cdot \nabla q dv \\ = \int_{\partial\Omega^N} (\underline{v}_{ext} \cdot \underline{n}) q ds - \int_{\Omega} b \frac{tr(\underline{\underline{\varepsilon}})^{n+1} - tr(\underline{\underline{\varepsilon}})^n}{\Delta t} q dv \end{aligned} \quad (4.32)$$

$\forall q^{n+1} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

La discrétisation EF est obtenue en substituant q_h à q et p_h^{n+1} à p^{n+1} . Ces fonctions appartiennent à l'espace de dimension finie des fonctions continues sur Ω et linéaires par élément. Comme précédemment, on utilise un maillage composé d'éléments triangulaires en 2D ou tétraédriques en 3D.

Problème solide :

La formulation EF du problème solide s'obtient également en multipliant l'équation (4.26) par une fonction test cinématiquement admissible $\delta \underline{u}$ et en intégrant l'équation obtenue sur le domaine de calcul. Une IPP est ensuite appliquée au terme correspondant à l'opérateur $\nabla \cdot$. La seule différence avec le problème solide au cours de la phase de remplissage est que l'équation de Terzaghi est remplacée par l'équation de Biot. Aussi, le système se déforme

sous l'hypothèse des petites transformations en première approximation.

Soit

$$\mathcal{C}^u = \{\underline{u} \in H^1(\Omega) \mid \underline{u} = \underline{u}_{ext} \text{ sur } \partial\Omega^D \text{ et } \underline{u} \text{ C.A}(0)\}$$

les déplacements cinématiquement admissibles - $C.A(0)$ et \mathcal{C}_h^u sous-espace de dimension finie de \mathcal{C}^u . Le problème EF s'écrit alors :

Trouver le déplacement $\underline{u}_h \in \mathcal{C}_h^u$ tel que :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_h} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_h) : \underline{\underline{\nabla}} \delta \underline{u}_h dv + \int_{\partial\Omega_h^N} \underline{t}_{ext} \cdot \delta \underline{u}_h ds = \\ - \int_{\Omega_h} \underline{b} p_h \underline{I} : \underline{\underline{\nabla}} \delta \underline{u}_h dv + \int_{\partial\Omega_h} p_h (\delta \underline{u}_h \cdot \underline{n}) ds \quad (4.33) \end{aligned}$$

$\forall \delta \underline{u}_h$ continue et linéaire par éléments et cinématiquement admissible et s'annulant sur les bords $\partial\Omega_h^D$, où est imposé le déplacement, avec \underline{t}_{ext} la force surfacique aux bords dont les conditions aux limites sont de type Neumann $\partial\Omega_h^N$.

L'algorithme de résolution est illustré sur la Figure 4.1. Le problème solide est résolu en premier en prenant en compte l'état initial du système (géométrie initiale, champ de pression initial, champ de déformation initial, porosité initiale, etc.). La variation de la déformation volumique entre deux incréments est intégrée dans le problème fluide en tant que force extérieure. Avant de résoudre le problème fluide, la perméabilité et la porosité sont actualisées à partir de la déformation mécanique du matériau (comme dans le problème de remplissage). La pression résultant du problème fluide est à son tour injectée dans le problème solide à l'incrément de temps suivant, pour tenir compte de l'effet de l'écoulement sur la réponse mécanique du mélange.

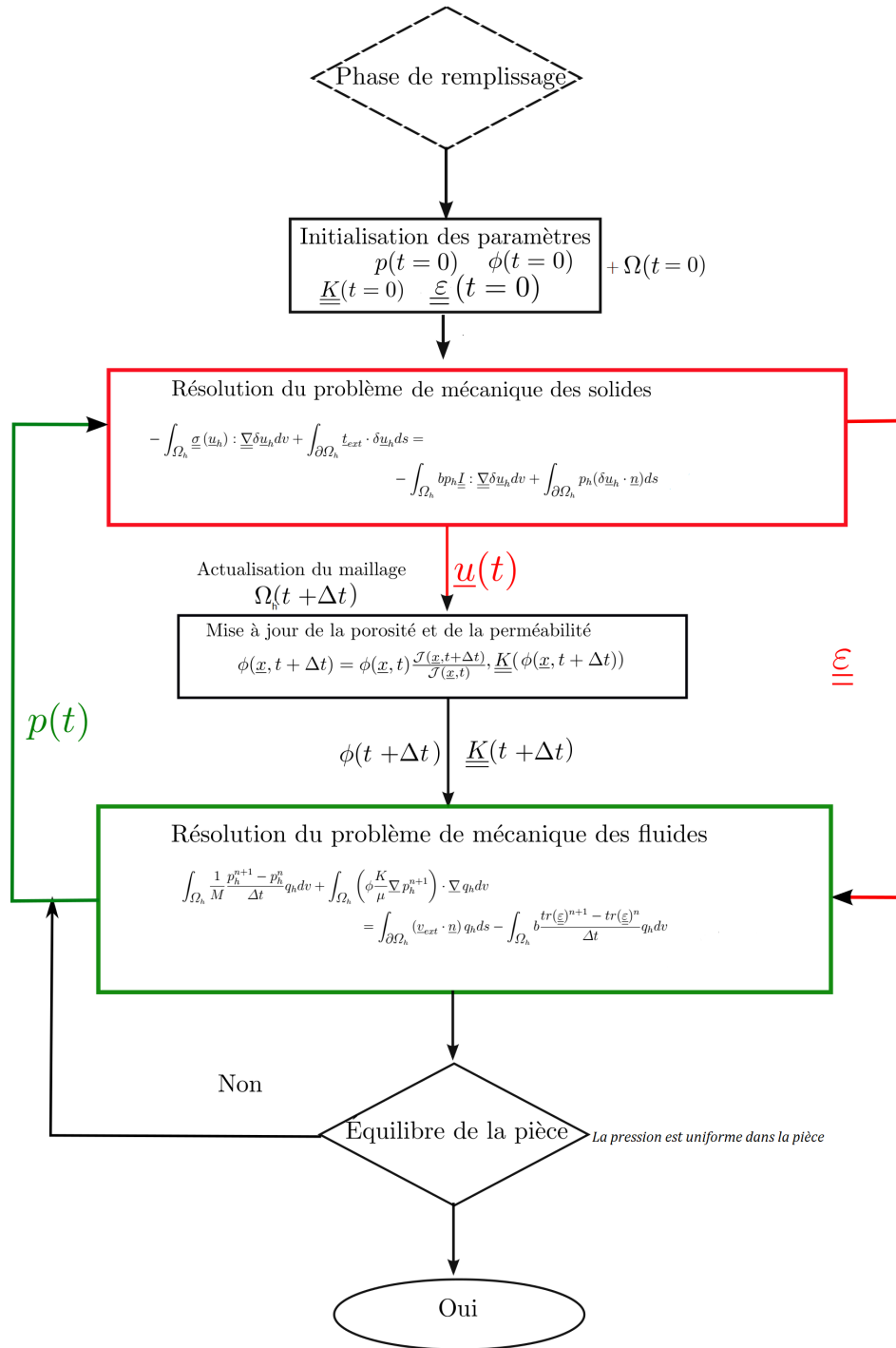


Figure 4.1 – Schéma de l’algorithme de couplage utilisé pour la simulation de la phase post-inflation.

Les paramètres d’entrée du modèle sont les champs de pression, de porosité, de déformation initiaux résultant du problème de remplissage ainsi que les paramètres matériaux notamment la perméabilité, les coefficient et module de Biot, les modules d’élasticité dans les conditions choisies (drainée ou non-drainée) et finalement, la loi de comportement du renfort sec. Dans la suite du problème, la perméabilité est mise à jour à partir du champ de

porosité via le modèle de Carman-Kozeny. La porosité elle-même est actualisée à partir de la déformation du matériau via l'équation (2.55).

4.3 Applications numériques

Cette section a pour objectif de présenter les premières simulations résultant de notre approche de la phase de post-infusion. Dans ces travaux, les cas de simulation de la post-infusion sont menés de manière incrémentale, par ordre de complexité. L'étape préliminaire consiste à valider l'implémentation de l'équation de diffusion décrite par le problème fluide (Eq. 4.28) sur un cas test dont la solution analytique est connue. Ce cas correspond à l'étude de la diffusion de la résine à l'intérieur d'une préforme indéformable, ce qui revient donc à résoudre uniquement l'équation (4.25) sans le terme source. Ensuite, l'étude de la diffusion de la résine dans une préforme déformable isotrope sera menée.

4.3.1 Diffusion de la résine dans une préforme isotrope indéformable

Cette section est dédiée à l'étude de l'écoulement transitoire de la résine à travers une préforme rigide. Le cas étudié ici est un cas unidimensionnel (Eq. 4.34) où la résine ne peut s'échapper en dehors du système *i.e.* en condition non-drainée. Le domaine de calcul (Figure 4.2) est le carré unité discrétisé de manière structurée avec des éléments triangulaires. Une pression de 1 est appliquée sur les deux bords verticaux et des conditions de flux normal nul sur les bords horizontaux. Nous prenons ici $\mathcal{K}_{diff} = 10m^2/s$.

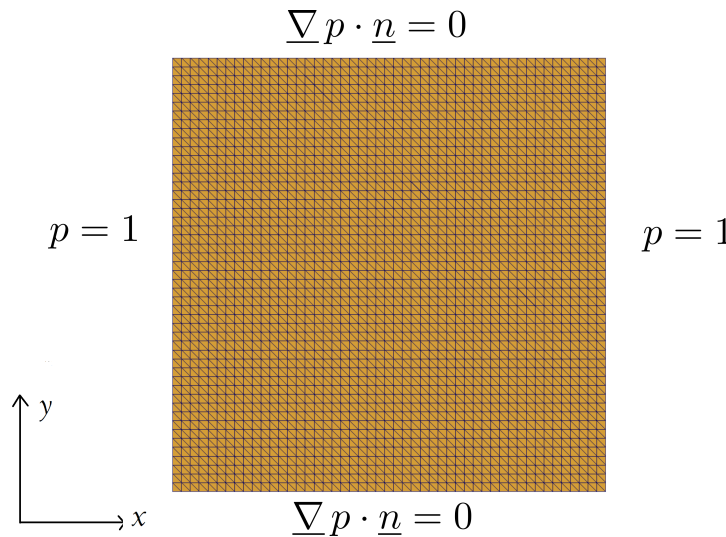


FIGURE 4.2 – Géométrie et conditions limites du problème fluide de la phase post-infusion

L'équation à résoudre décrit l'évolution de la pression en suivant une équation de diffusion et s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \mathcal{K}_{diff} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (4.34)$$

avec \mathcal{K}_{diff} un scalaire équivalent à un coefficient de diffusion (en m^2/s). Par séparation de variables, la solution analytique non-linéaire et le champ de pression initial résultant de ce

type de problème est de la forme :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \exp(-\pi^2 \mathcal{K}_{diff} t) \sin(\pi x) + 1 \\ p(x, t = 0) &= \sin(\pi x) + 1 \end{aligned} \quad (4.35)$$

La seconde équation décrit la condition initiale du problème. Le problème (4.34) est résolu en 2D dans le carré unitaire, la solution est donc étendue selon y . L'évolution du champ de pression dans le domaine est décrite sur la Figure 4.3. En plus du respect de la symétrie du problème, aucune perturbation ni oscillation du champ de pression n'est constatée. Nous observons l'évolution de la pression de la résine du centre du domaine vers les bords selon la direction x jusqu'à atteindre un état d'équilibre $p = 1$ à partir de $t=50s$ (Figure 4.3g). Le pas de temps de calcul vaut $\Delta t = 1s$.

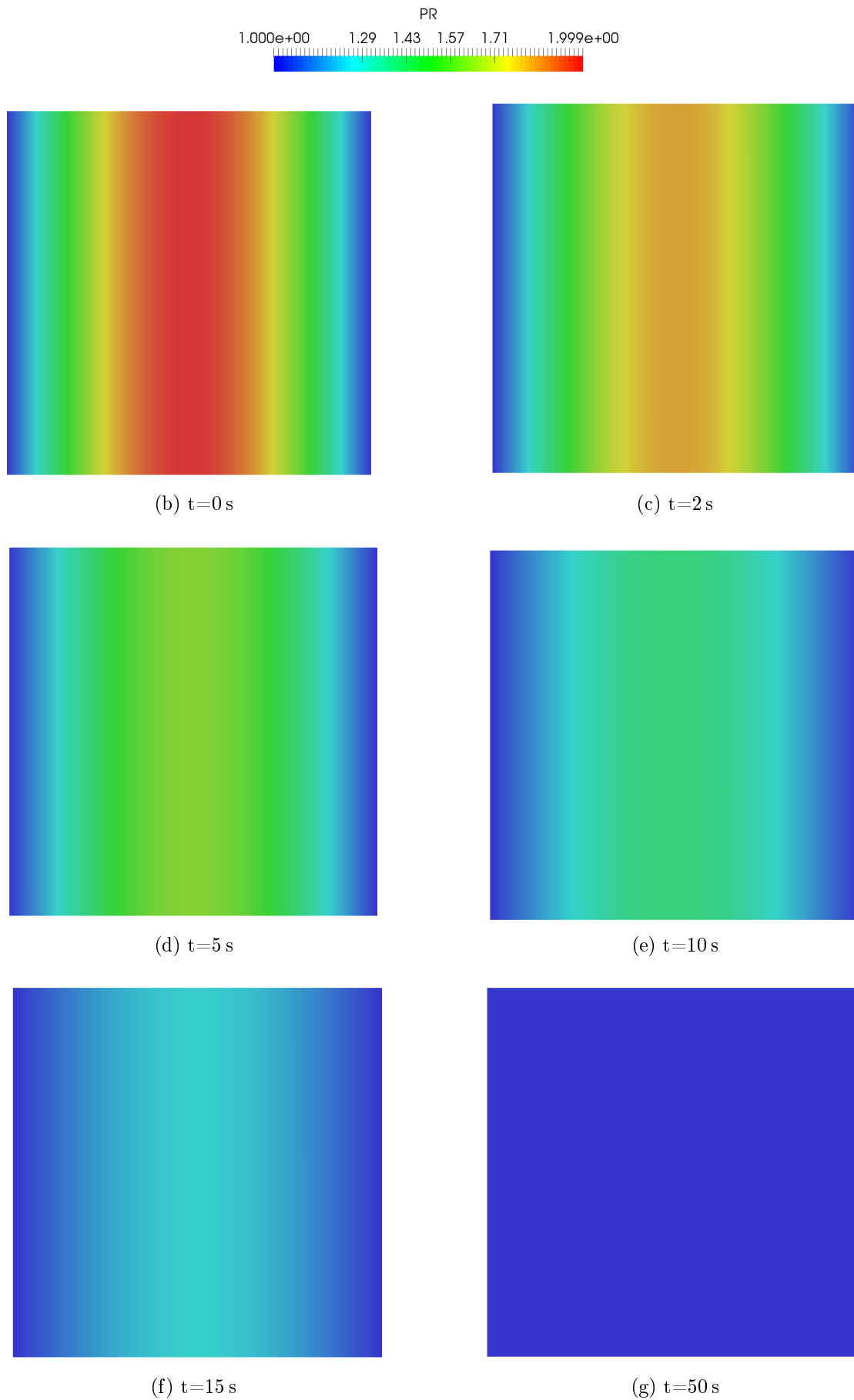


FIGURE 4.3 – Évolution du champ de pression en fonction du temps

Le profil de pression est également tracé selon une ligne d'analyse horizontale placée à $\{y = \frac{1}{2}\}$. Les résultats numérique et analytique (calculés à partir de l'équation 4.35) y sont tracés pour différents instants et une bonne corrélation est constatée comme nous pouvons le voir sur la Figure 4.4. Cette dernière représente des résultats classiques d'équation de diffusion instationnaire.

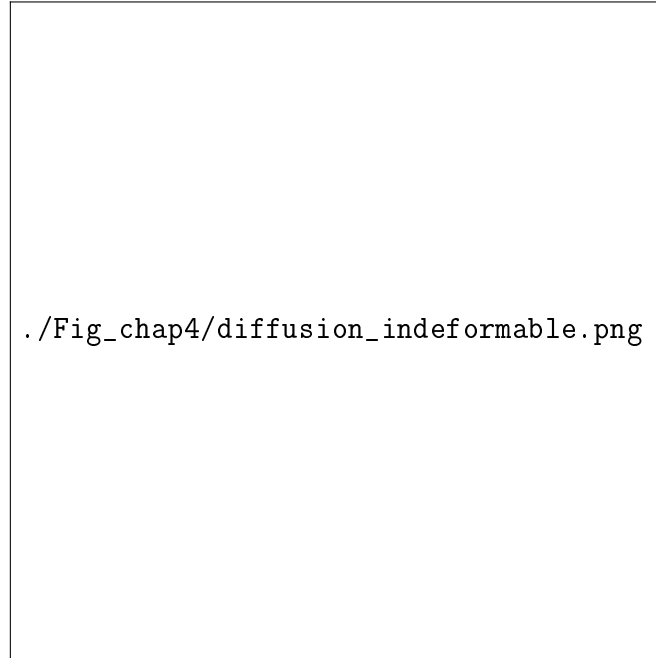


FIGURE 4.4 – Évolution du champ de la pression (numérique « Num » et analytique « Ana ») au cours du temps

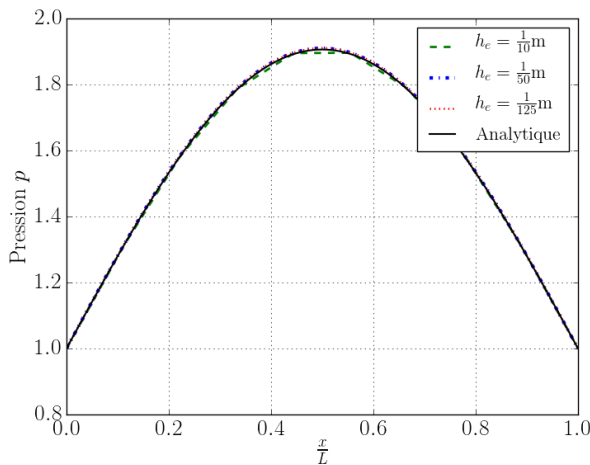
Influence du maillage et du pas de temps

L'influence de la taille de maille est illustrée sur la Figure 4.5a, nous constatons peu d'influence sur la solution numérique. En effet, l'erreur relative entre la pression numérique et la solution analytique est de moins de 1% (par exemple, à $t=2s$ sur la Figure 4.5b) pour les maillages considérés. Comme le problème décrit par l'équation (4.29) est un problème parabolique, une étude de convergence qui évalue l'influence du pas de temps sur la solution est menée. Pour cela, le coefficient de diffusion est fixé à $10^{-2}m^2/s$ et l'influence du pas de temps sur le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre du champ de pression est évaluée. Une condition d'arrêt (Eq. 4.36) est vérifiée à chaque fin d'incrément pour évaluer si la pression s'est équilibrée ou non. Nous définissons aussi le temps nécessaire pour atteindre l'état d'équilibre comme le temps à partir duquel le critère (4.36) est satisfait.

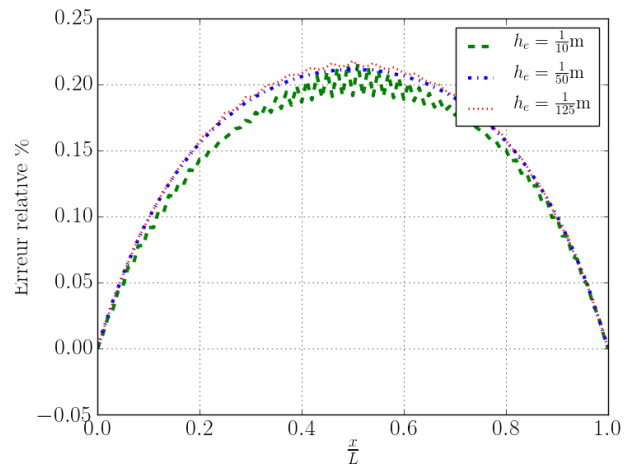
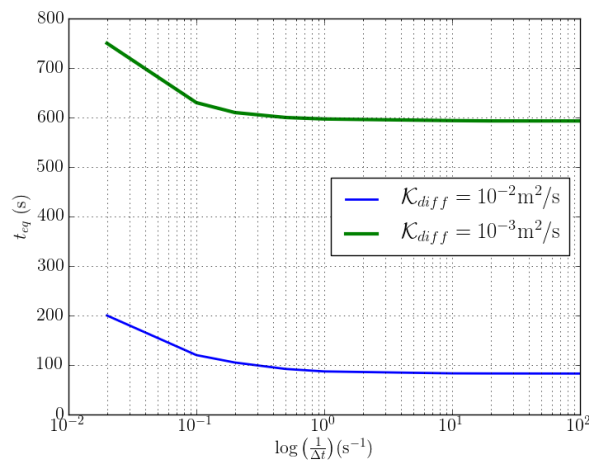
$$\sqrt{\left(\frac{\sum_{i=0}^{nb_{noeuds}} (p_i^{n+1} - p_{eq})}{nb_{noeuds}}\right)^2} < \varepsilon_{eq} \quad (4.36)$$

où la pression d'équilibre p_{eq} vaut 1 dans le cas étudié. Dans cette partie du manuscrit, nous considérons $\varepsilon_{eq} = 10^{-2}$. Nous vérifions sur la Figure 4.5c que ce temps ne dépend plus

du pas de temps lorsque celui-ci est suffisamment petit. L'influence du pas de temps sur le temps d'équilibre est illustrée sur la Figure 4.5c. Un cas supplémentaire avec un coefficient $\mathcal{K}_{diff} = 10^{-3}m^2/s$ est également présenté sur cette dernière figure à titre d'information et pour vérifier l'indépendance de la qualité du résultat par rapport à la valeur de \mathcal{K}_{diff} . Nous constatons que le temps de ré-équilibrage tend vers une même valeur au fur et à mesure que le pas de temps est raffiné. Nous pouvons donc en conclure que le modèle converge par rapport au pas de temps. Par conséquent, cette partie valide le solveur du problème fluide dans le cadre du problème de post-infusion.



(a) Influence du maillage

(b) Erreur en fonction du maillage pour $t = 2s$ 

(c) Influence du pas de temps sur le temps de ré-équilibrage

FIGURE 4.5 – L'influence du raffinement du maillage et du pas de temps

4.3.2 Simulation du test d'œdomètre - condition drainée

L'objectif de cette simulation est de valider notre modèle couplé à partir d'un cas test dont la solution analytique est connue. Pour cela, un cas test standard en mécanique des sols

est étudié : le test de compression dans un milieu confiné. En effet, Verruijt [119] résout par différences finies le problème de Terzaghi étendu aux particules et aux fluides compressibles (équation de Biot). Le domaine de calcul (Figure 4.6) considéré est un rectangle discrétisé par un maillage structuré, sur lequel un chargement en compression f_c est appliqué sur la paroi supérieure. Une pression nulle est également appliquée à cette paroi pour représenter la condition drainée. Les trois autres parois sont imperméables, de ce fait, la composante du gradient de la pression selon l'axe x – est nul.

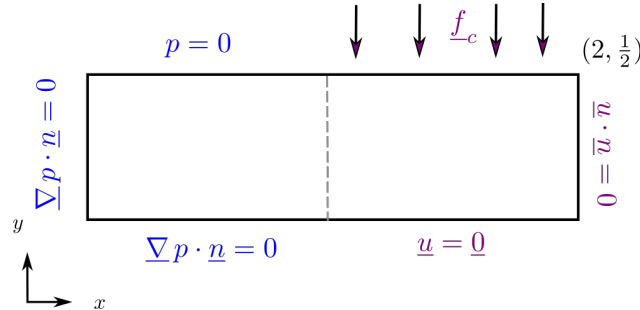


Figure 4.6 – Description du domaine et conditions limites pour le problème fluide (à gauche) et solide (à droite)

En première approximation, le matériau est supposé linéaire élastique isotrope en petites déformations. Pour cette simulation, nous attribuons au matériau les propriétés mécaniques dans le plan des renforts étudiés dans le Chapitre 2 dont un module égal à 200 MPa et un coefficient de Poisson égal à 0,3. La préforme saturée est supposée compressible à l'échelle macroscopique d'où le choix de $b = 0,9$ en plus de la valeur du coefficient de Poisson ci-dessus. La charge de compression (pour $t > 0$) est prise égale à la pression atmosphérique 1 bar. Nous choisissons une viscosité de la résine de 0,1 Pa.s. Nous considérons également une perméabilité faible caractéristique des renforts en carbone, égale à 10^{-11}m^2 . Les paramètres du problème sont résumés dans le Tableau 4.2.

Solide	E	200 MPa	Fluide	$\frac{K}{\mu}$	$1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$
	ν	0,3		ϕ_0	0,6
	M	$5 \cdot 10^5 \text{ MPa}$		Δt	5s
	b	0,9		h_e	0,02m
	f_c	10^5 Pa		-	

TABLEAU 4.2 – Paramètres du problème - compression en milieu confiné

La solution analytique de l'équation (4.25) s'obtient dans ce cas en exprimant la déformation volumique en fonction de l'expression de la contrainte totale et de la pression (dans le cas des matériaux isotropes linéaires [119]). La dérivée dans le temps de la déformation volumique est exprimée en fonction de la contrainte totale et de la pression telle que :

$$\frac{\partial \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial t} = -\frac{1}{E_c} \frac{\partial \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3\partial t} + \frac{b}{E_c} \frac{\partial p}{\partial t}$$

En première approximation, la contrainte totale isotrope est considérée constante dans le temps. L'équation (4.25) se ré-écrit donc juste en fonction de la pression telle que

$$\text{pour } t > 0 : \frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (4.37)$$

où c_v est un paramètre appelé coefficient de consolidation (m^2/s) qui s'exprime en fonction de la perméabilité, viscosité, coefficient de Biot, module de Biot et des modules de compressibilité et cisaillement du milieu poreux, tel que :

$$c_v = \frac{K\phi}{\mu(\frac{1}{M} + b^2 m_v)} \text{ avec } m_v = \frac{1}{E_c + \frac{4}{3}G} \quad (4.38)$$

où m_v représente la compressibilité du milieu poreux dans un milieu confiné, E_c et G représentent respectivement le module d'élasticité isostatique et de cisaillement¹.

La solution analytique (4.39) dont les calculs ne sont pas détaillés ici est obtenue par séparation de variables et en utilisant les transformées de Fourier pour prendre en compte la condition initiale $p(t=0) = p_{init}$, avec p_{init} la valeur du champ initial de pression. Le calcul peut être trouvé dans [119] et donne

$$\frac{p}{p_{init}} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} \cos \left[(2i-1) \frac{\pi y}{2h} \right] \exp \left[-(2i-1)^2 \frac{\pi^2 c_v}{4h^2} t \right] \quad (4.39)$$

avec p_{init} la pression initiale, h la hauteur du domaine. Dans cette étude, 100 termes additionnés suffisent.

L'évolution de la pression obtenue avec notre modèle numérique, à partir du temps $t=1\text{s}$ jusqu'à $t=450\text{s}$ est présentée sur la Figure 4.7b à 4.7k. La symétrie du problème est bien respectée sans aucune perturbation ni oscillation de la solution. Pour cette pièce, l'état d'équilibre (correspondant à $p=0$) est atteint après $t=450\text{s}$ (en se référant au critère (4.36) avec $p_{eq}=0$).

1. Dans le cas isotrope : $E_c = \frac{1}{3} \frac{E}{1-2\nu}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

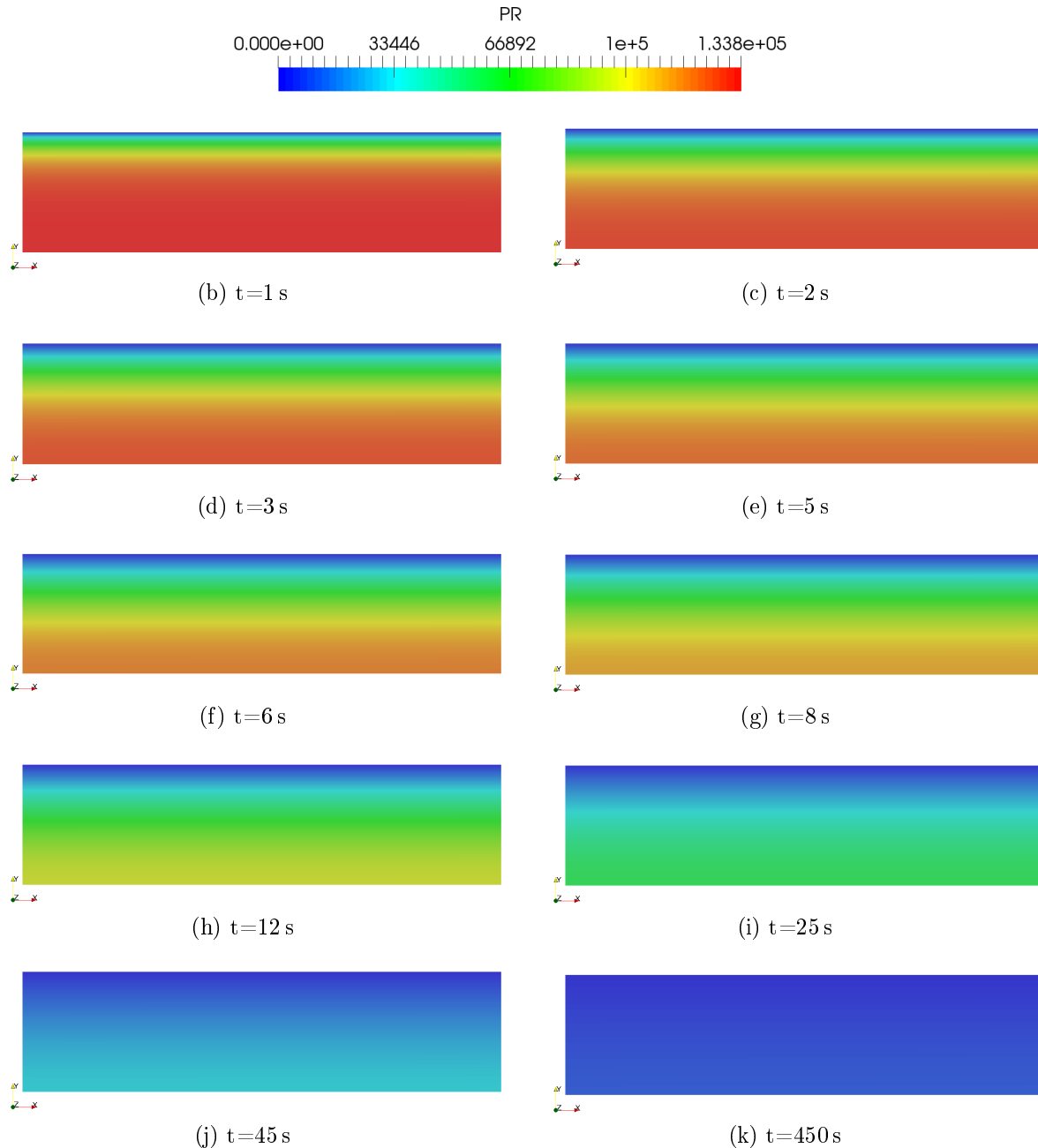


FIGURE 4.7 – Évolution de la pression au cours du temps - dans la configuration drainée

Nous pouvons observer sur la Figure 4.8 les champs de vitesse post-traités à l'aide du champ de pression à partir de l'équation de Darcy. Le flux de résine s'évacue uniquement vers la paroi perméable (paroi supérieure sur laquelle s'applique une condition drainée) de la pièce de façon unidimensionnelle (selon la direction y). Par ailleurs, les vecteurs vitesse du fluide permettent aussi de visualiser la diminution du flux au fur et à mesure que la pièce s'équilibre.

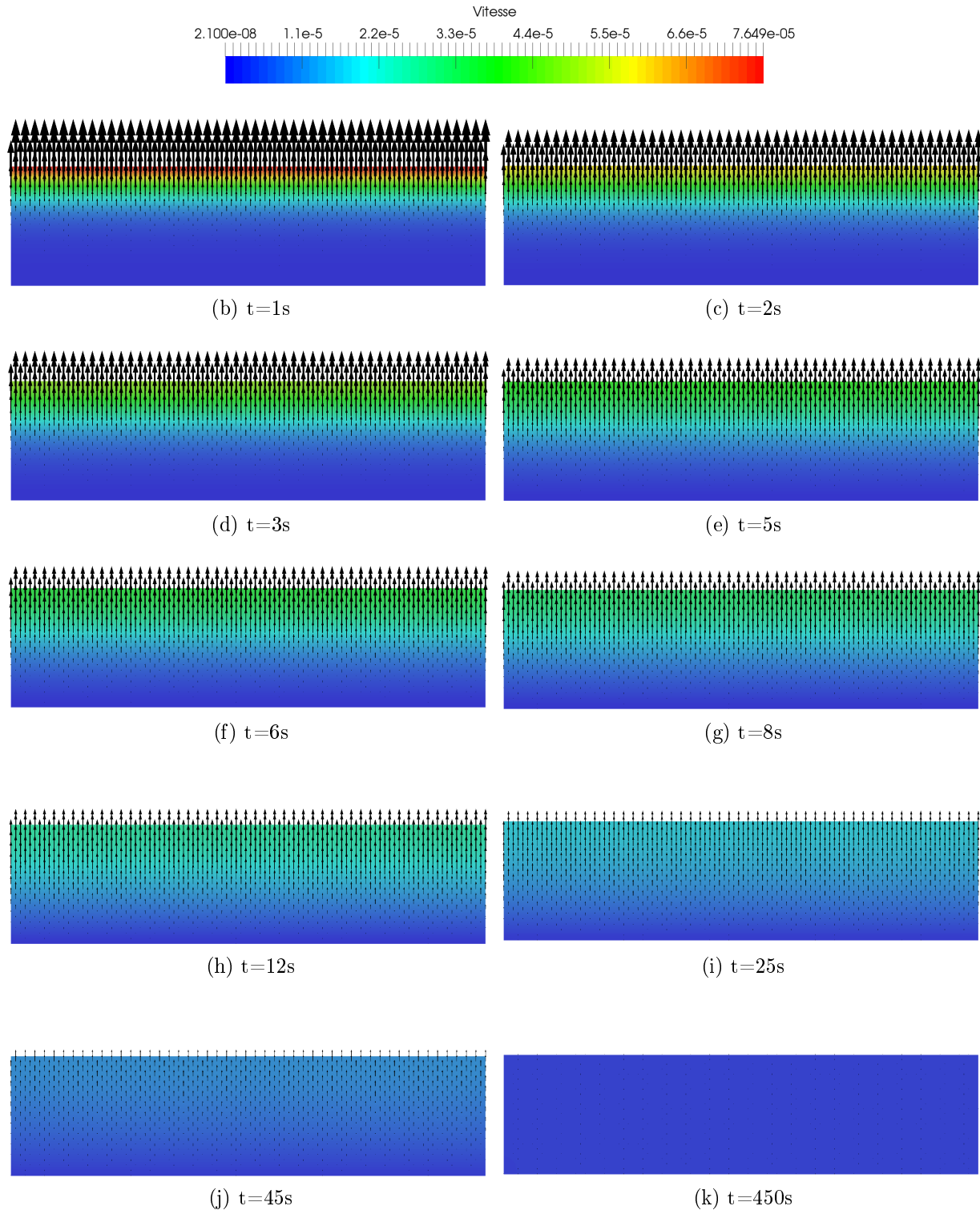


FIGURE 4.8 – Évolution au cours du temps de la vitesse de la résine dans la configuration drainée

L'évolution du profil de la pression dans le temps le long d'une ligne d'analyse verticale placée à $\{x = 1\}$ est présentée sur la Figure 4.9. Plus on avance dans le temps, plus le champ de pression tend à s'uniformiser à la valeur 0. L'évolution du profil (Figure 4.9) dans le temps

est conforme à ce qui est trouvé dans la littérature [119]. La solution numérique est confrontée à la solution analytique (Eq. 4.39) à deux temps différents pour plusieurs pas de temps. La comparaison est reportée à la Figure 4.10. L'allure globale des courbes est similaire. Toutefois un écart avec la solution analytique de 20% est constaté à $t=30s$ pour le pas de temps $\Delta t = 0,1 s$, au niveau du bas de la pièce. À ce stade de notre étude, cela peut nous donner des indications sur le pas de temps à utiliser. Par exemple, pour le jeu de paramètres considéré, un pas de temps de 1 ou 5 s est convenable.

Toutefois, l'écart avec la solution analytique localisé au niveau de la paroi inférieure peut être expliqué par le fait que la condition de flux normal nul intégrée comme une condition aux bords de type Neumann, peut être mal imposée.

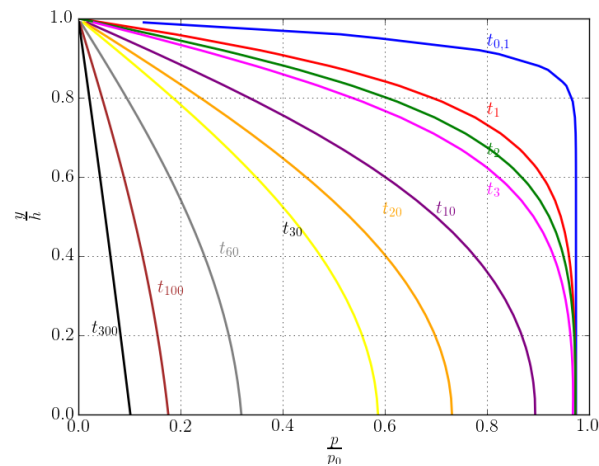


Figure 4.9 – Évolution du champ de pression dans l'épaisseur de la pièce selon une ligne d'analyse verticale à $x=1$ ($t_{0,1} < t_{300}$)

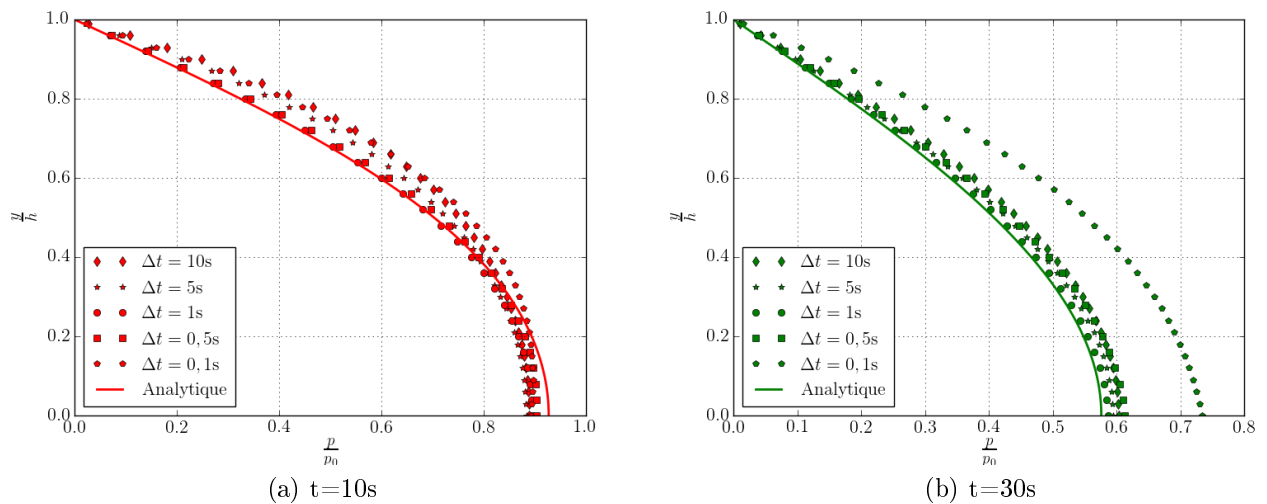


FIGURE 4.10 – Influence du pas de temps sur le profil de pression - Maillage composé de 2 500 nœuds

Ce type de simulation permet également de prédire la répartition de la déformation volumique pendant la phase de ré-équilibrage. Dans le cas étudié ici, la déformation volumique est faible pour le jeu de paramètres considéré mais une répartition de la déformation volumique (calculé à partir de $tr(\underline{\underline{\epsilon}})$) de l'instant initial à la fin de ré-équilibrage peut être observée sur la Figure 4.11. Ici, par exemple nous constatons bien que la déformation volumique est négative à la fin du remplissage, ce qui est cohérent avec la stratégie considérée ici, notamment la compression appliquée au matériau. Une perspective serait aussi d'évaluer le modèle avec des matériaux plus compressibles et plus déformables que ceux utilisés dans cette étude.

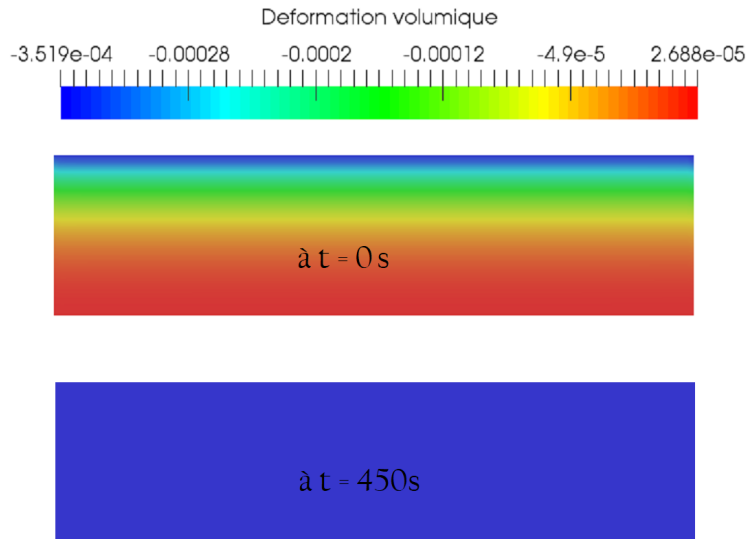


FIGURE 4.11 – Déformation volumique - à l'instant initial et à la fin du ré-équilibrage dans le cas drainé

Cette section valide donc notre modèle basé sur la résolution couplée par approche EF de l'écoulement de la résine et de la déformation de la préforme dans le cadre des matériaux isotropes linéaires à faible perméabilité, et en condition drainée.

4.3.3 Simulation de la post-infusion en condition non-drainée

Dans cette section, nous avons pour objectif de tester notre modèle de post-infusion en condition non-drainée, *i.e.* aucune entrée ni sortie de résine n'est permise dans le système après la phase de remplissage. Pour cela, le même domaine de calcul rectangulaire est considéré, avec les conditions aux bords présentées sur la Figure 4.12. Pour modéliser la condition non-drainée, une pression de 1 bar est appliquée sur la paroi supérieure ainsi que des flux nuls sur les trois autres parois. La paroi inférieure est également fixe et le déplacement normal sur les parois verticales est considéré comme nul. Le champ pression est lui considéré comme polynomial à l'instant initial tel que

$$p(x, y, t = 0) = 10^5 x^4.$$

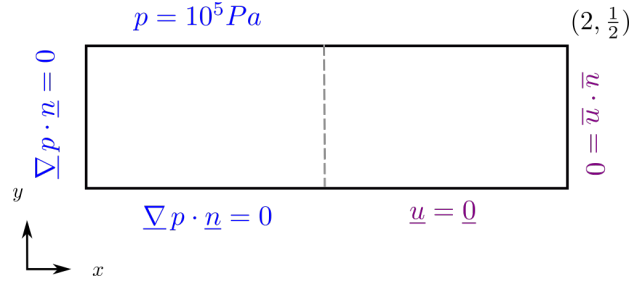


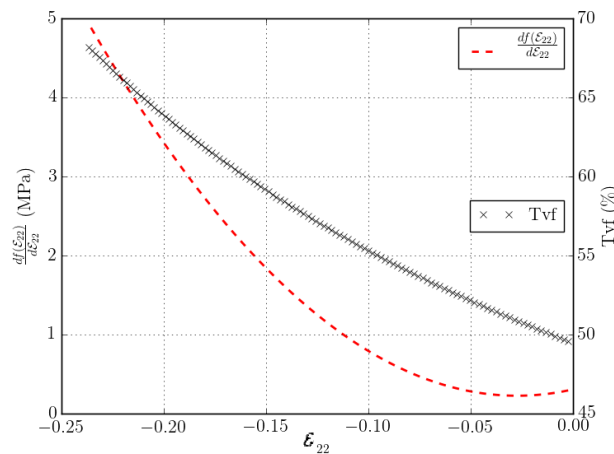
FIGURE 4.12 – Géométrie et conditions limites du problème

Données d'entrée de la simulation

Pour ce cas test, nous voulons évaluer le comportement du modèle avec un jeu de paramètres le plus réaliste et le plus représentatif des conditions rencontrées lors du procédé. Pour cela, le module d'élasticité attribué à la préforme est ici déduit de la courbe f expérimentale issue des travaux de caractérisation dans [23] décrivant le comportement transverse des renforts carbone. Nous considérons en effet un module

$$E \approx E_{22} = \frac{df(\mathcal{E}_{22})}{d\mathcal{E}_{22}}.$$

Nous prenons le module associé à un taux de fibre d'environ 60%. Si on se réfère à la courbe (Figure 4.13) qui décrit l'augmentation de la fraction volumique de fibres avec la compression, cela correspond à une déformation $\mathcal{E}_{22} = -0,15$, et de ce fait à un module de l'ordre du 2 MPa. Concernant le coefficient de Biot, Tran *et al.* [21] ont calculé, pour des renforts en fibre de Kevlar et de Carbone, des coefficients de l'ordre de 0,7 à 0,8 pour des taux de fibres de 60 %.

FIGURE 4.13 – Dérivée de la courbe expérimentale f

Nous prenons donc ici le paramètre b égal à 0,75. En considérant la résine comme incompressible, le paramètre $\frac{1}{M}$ est calculé tel que $\frac{1}{M} = \frac{b - \phi_0}{E_c}$ soit $M = 8$ MPa (E_c calculé à partir

du module d'élasticité et du coefficient de Poisson). La perméabilité choisie est caractéristique des matériaux composites de l'ordre de 10^{-11} m^2 , mais encore assez loin des perméabilités les plus faibles que l'on peut rencontrer pour certaines architecture. Le matériau est considéré comme un milieu isotrope linéaire élastique dont les paramètres caractéristiques sont résumés dans le Tableau 4.3.

Solide	E	2MPa	Fluide	$\frac{K}{\mu}$	$3 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$
	ν	0,3		h_e	0,02m
	M	8MPa		Δt	5s
	b	0,75			

TABLEAU 4.3 – Paramètres du problème - compression en milieu confiné

Résultats

La géométrie initiale ainsi que le champ de pression initial considérés sont présentés sur la Figure 4.14a. L'évolution de ces deux grandeurs dans le temps est aussi décrite dans les Figures 4.14a à 4.14j. Encore une fois, aucune perturbation ni dégradation du champ de pression n'est observée.

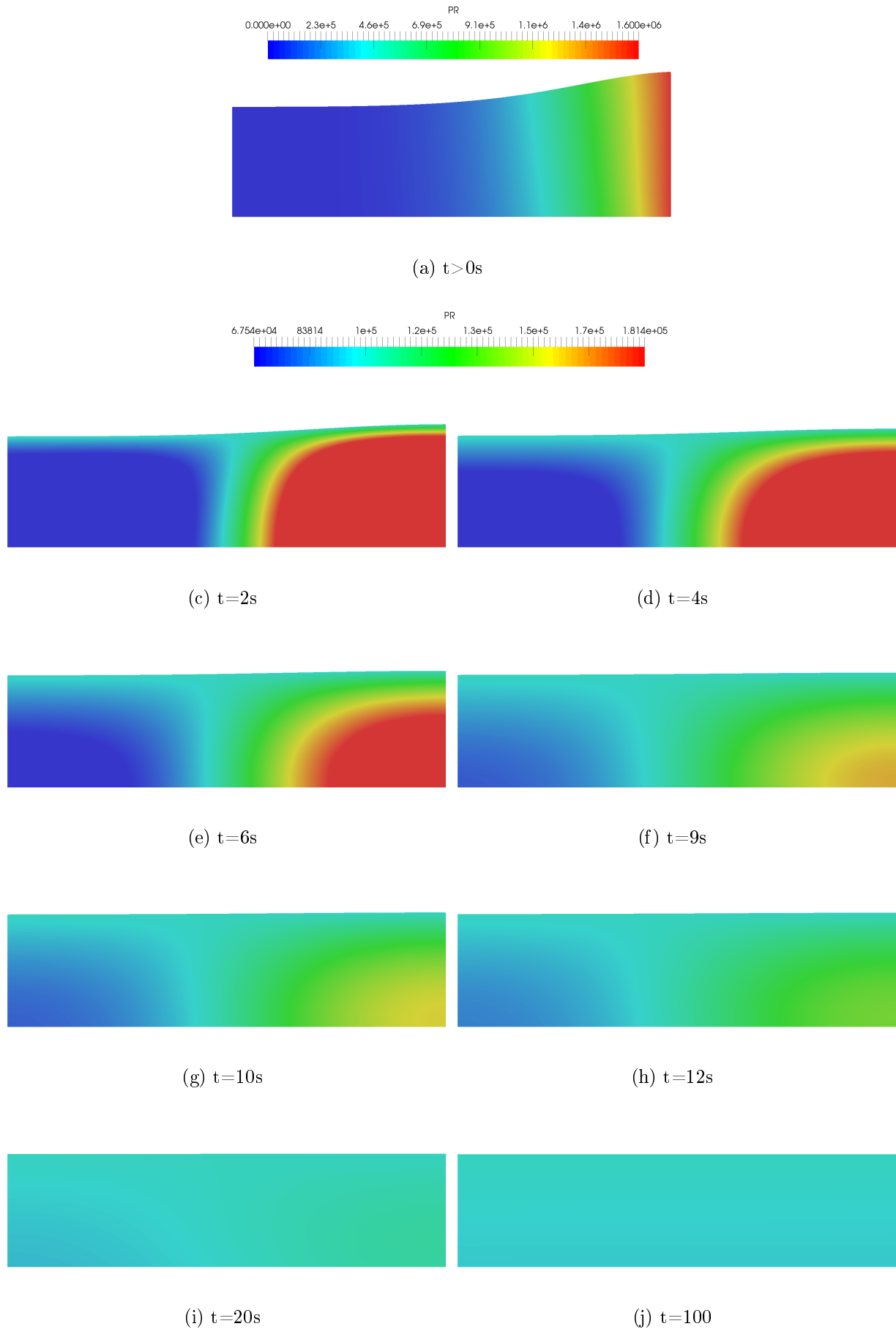


FIGURE 4.14 – Évolution du champ de pression en fonction du temps

Le taux volumique de fibres initial (Figure 4.15b) résulte de la configuration initiale de la pièce. À l'équilibre, la pièce atteint un τ_{vf} à 48 % et sa perméabilité a diminué à $6,1 \cdot 10^{-12} \text{m}^2$. Pour une analyse précise du problème, la valeur de la pression pour deux nœuds respectivement placés l'un au niveau de la partie gonflée de la pièce et l'autre en bas, est tracée en fonction du temps sur la Figure 4.16. Malgré des fortes variations du champ au début de la phase de repos, nous constatons que globalement la pression au nœud en « surpression » à l'instant initial tend à décroître dans le temps alors que la pression du nœud du bas de la pièce tend à augmenter pour atteindre la pression d'équilibre de 1 bar.

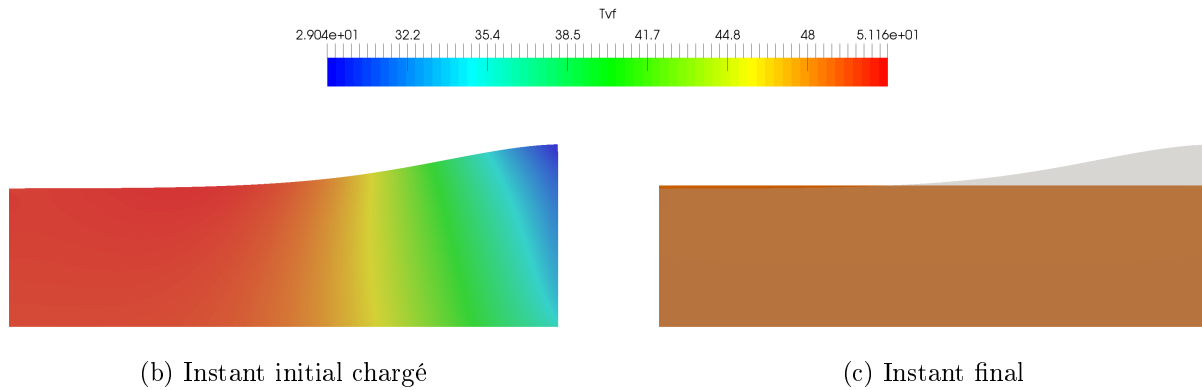


FIGURE 4.15 – Variation du champ du τ_{vf} et de la géométrie

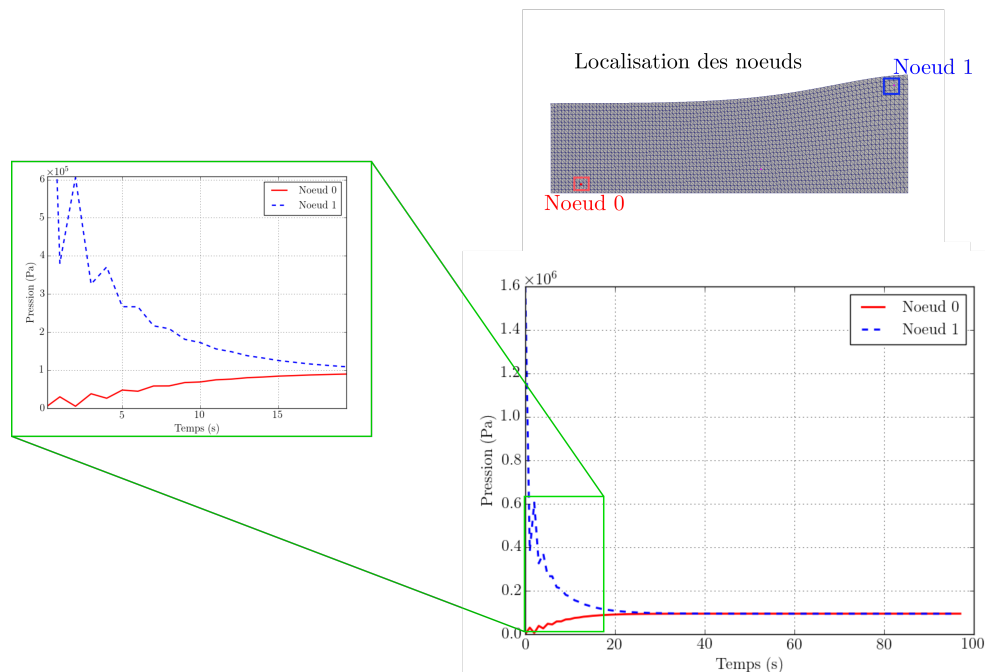


FIGURE 4.16 – Évolution de la pression dans le temps à deux nœuds du maillage

Le même cas est simulé en 3D isotrope avec les mêmes paramètres matériaux et les mêmes conditions limites et initiales dans le paragraphe suivant.

4.3.4 Simulation 3D

Cette étude a pour objectif d'évaluer le comportement du modèle numérique dans le cas tridimensionnel pour la même configuration et la même stratégie de simulation que le cas 2D précédent. Le domaine discrétisé par un maillage non-structuré et le champ de déplacement à $t > 0$ (après le premier calcul mécanique) sont présentés sur la Figure 4.17. Ce champ de déplacement est présenté à différents instants sur la Figure 4.19. Le sens des vecteurs déplacement indique bien l'équilibrage de la pièce tout en respectant les conditions aux bords imposées. La variation de la géométrie entre l'instant initial après application de la pression et à l'état d'équilibre est aussi présentée sur la Figure 4.18 ; cela s'accompagne d'une réduction du volume de la pièce de 9 % entre l'état $t > 0$ et à la fin de la phase de post-infusion due à la compressibilité introduite par les paramètres de Biot. Le changement de volume intrinsèque au comportement est défini par la différence entre la géométrie de la pièce finale et celle de la géométrie à l'état initial sans application de la pression. Ici cette variation de volume vaut $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

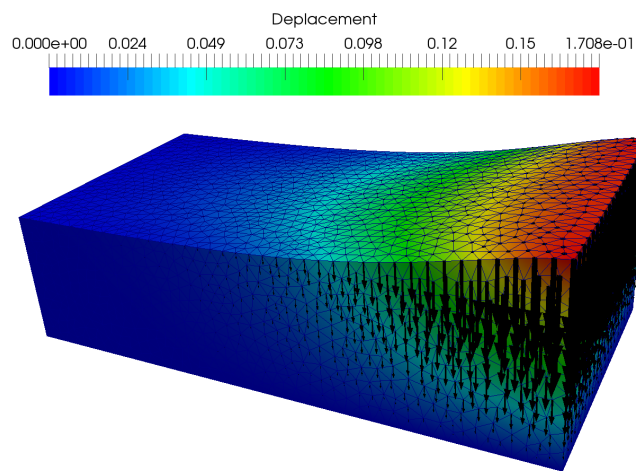


FIGURE 4.17 – Norme et sens du champ de déplacement ($t > 0$ s) dans le cas 3D

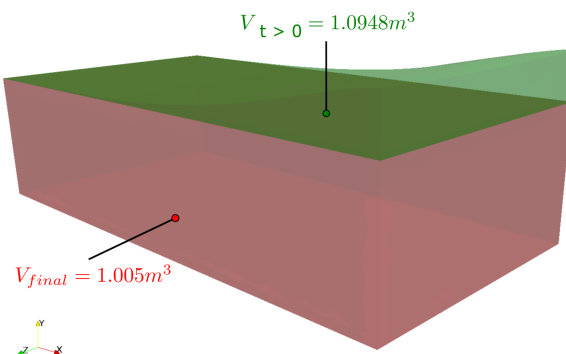


FIGURE 4.18 – Variation de la géométrie et du volume entre l'instant ($t > 0$ s) et la fin de la phase post-infusion

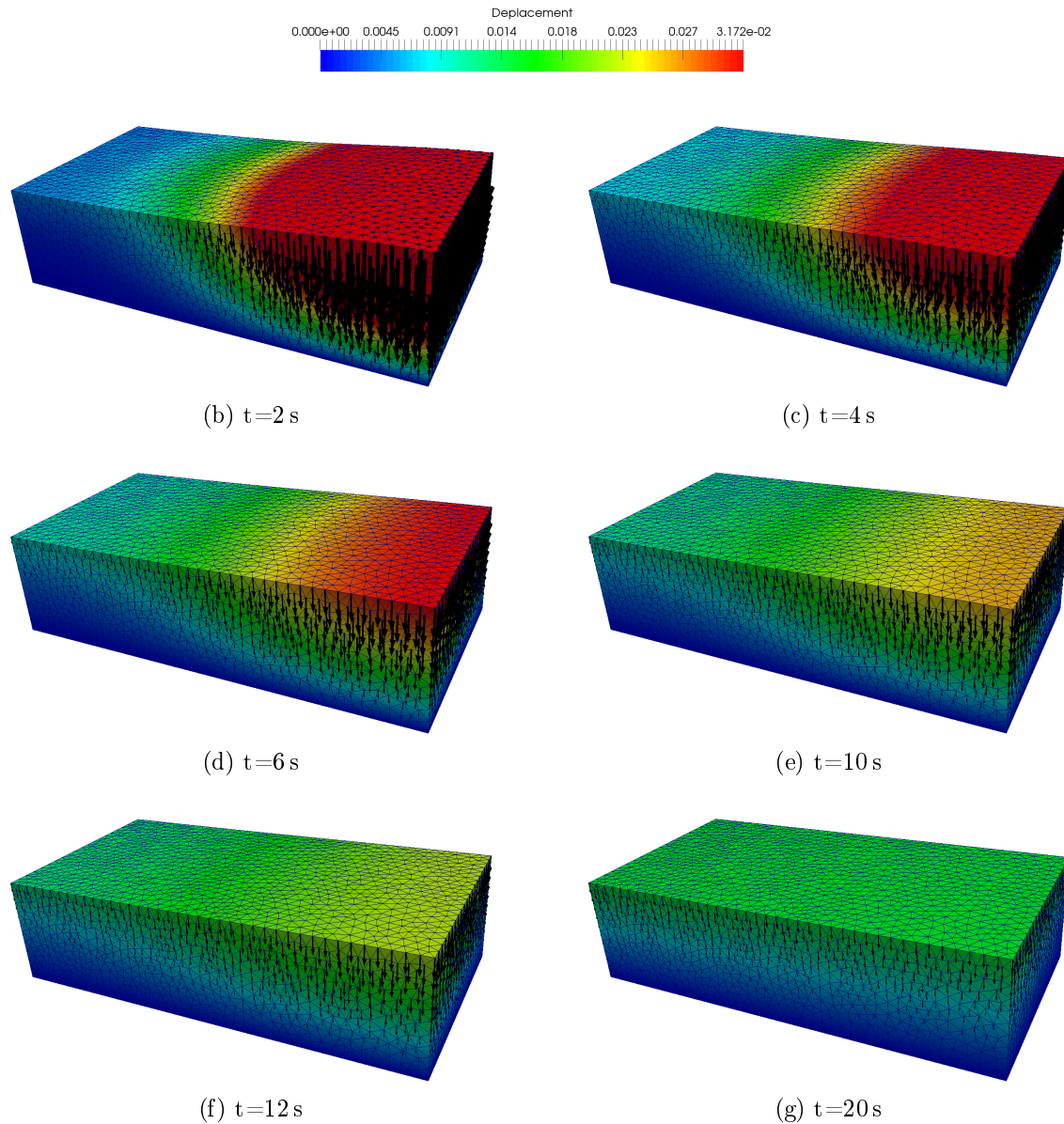


FIGURE 4.19 – Évolution du champ de déplacement en fonction du temps dans le cas 3D

4.3.5 Couplage avec le problème de remplissage

Nous proposons ici un premier chaînage, qui montre avant tout la faisabilité informatique, mais par manque de temps ne constitue pas encore un cas abouti. Pour le problème de remplissage, nous avons considéré l'imprégnation d'un raidisseur isotrope transverse (comme on en a pu en voir dans le Chapitre 3) avec une résine de viscosité 0,1 Pa.s. Le remplissage du drainant ainsi que la déformation de la préforme sont négligés pendant le remplissage. De plus, nous interrompons la simulation à un remplissage d'environ 75% et transférons, par fichier, la pression, grandeur d'entrée de la simulation de la post-infusion.

La spécificité de ce cas est que le champ initial de pression pour la post-infusion résulte d'un problème de remplissage tenant compte de la contrainte capillaire orthotrope ($\sigma_{cap}^t =$

30 kPa, $\sigma_{cap}^p = 10$ kPa) agissant au niveau du front fluide, et est donc discontinu comme indiqué sur la Figure 4.20. Ici, la phase de ré-équilibre est supposée se dérouler en condition drainée. Une pression $p = 0$ est de ce fait imposée sur la paroi supérieure (au sommet du raidisseur) correspondant à l'évent, alors que les autres parois sont considérées imperméables. Concernant la phase de post-infusion, la pièce est considérée comme un matériau isotrope linéaire élastique (en petites déformations) ayant un module d'Young de 200 MPa et un coefficient de Poisson de 0,3. Aussi, nous le considérons *artificiellement* rempli d'un fluide de viscosité 0,1 Pa.s. La perméabilité du milieu est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$. Les résultats de la simulation montrent bien l'homogénéisation progressive de la pression de la pièce jusqu'à atteindre un champ quasi-uniforme à $t=50$ s (Figure 4.21f).

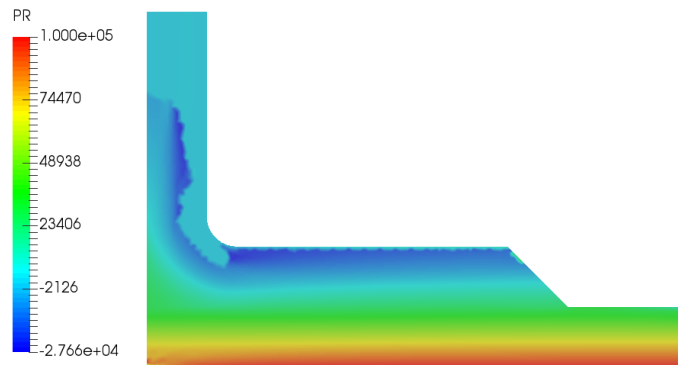


FIGURE 4.20 – Champ de pression initialement discontinu du problème de post-infusion pour le chainage complet (remplissage + post-remplissage)

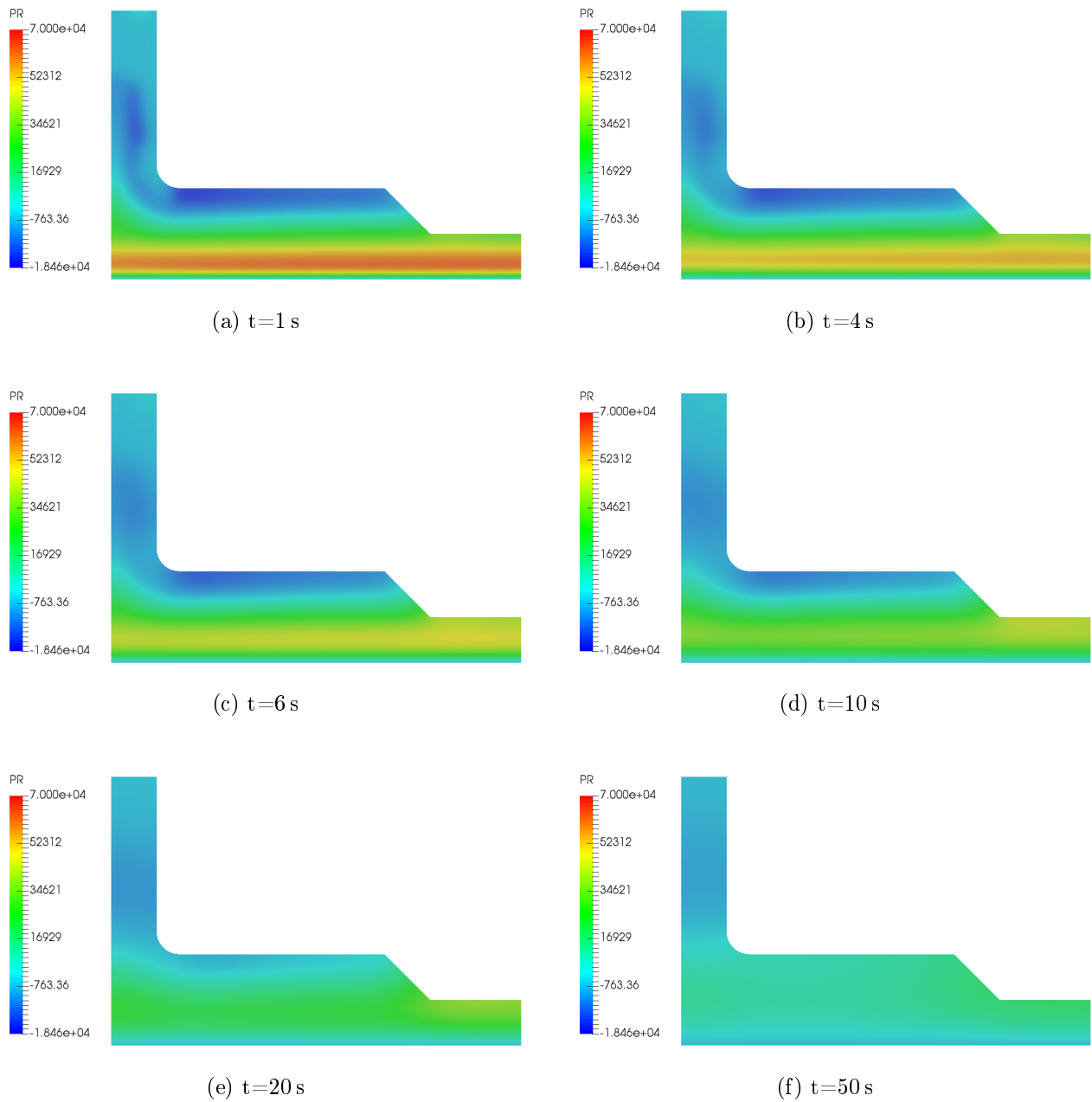


FIGURE 4.21 – Évolution du champ de pression initialement discontinu en fonction du temps pendant la phase de ré-équilibrage

Notre analyse ici, bien que très simple trouve tout son intérêt dans les simulations réelles de pièce industrielle. Elle permet en effet d'imposer directement des champs (pression et/ou taux volumique de fibres) issus de simulations de remplissage. Il serait intéressant de transférer en effet l'état déformé avec une cartographie du τ_{vf} et de la pression après une phase de remplissage qui intègre le couplage écoulement/déformation (*Chapitre 2*) et aussi les effets capillaires (*Chapitre 3*). Dans ces travaux de thèse, seul le transfert du champ de pression est opérationnel. La prochaine étape ici est le transfert du maillage déformé après le remplissage

au problème de post-infusion. Une stratégie pourrait être de gérer automatiquement les deux problèmes (remplissage et post-infusion). Cela consisterait premièrement à détecter le remplissage de la pièce, ensuite à arrêter le problème Level-set et enfin à basculer directement vers le problème de ré-équilibrage. Cela sera une étape importante vers le développement des premiers démonstrateurs de simulation complète du procédé par infusion.

4.4 Conclusion et perspectives

Le modèle développé pour simuler la phase de post-infusion est inspiré d'un modèle de poromécanique dans le domaine de la géomécanique. Les premiers résultats sont prometteurs, d'autant plus que le modèle pourrait être étendu aux matériaux orthotropes - propriété caractéristique des matériaux composites. La simulation de cette phase pourrait permettre, d'une part de prédire l'état macroscopique de la pièce à l'équilibre, notamment sa géométrie et son taux volumique de fibres finaux, et d'autre part d'estimer le temps nécessaire à la pièce pour atteindre cet état d'équilibre. Prendre en compte le caractère non-linéaire du matériau nécessite une analyse plus poussée dont les travaux de Coussy [51] présentent des premières pistes.

Les perspectives issues de ces travaux sur la post-infusion sont le calcul et la caractérisation des différents coefficients poroélastiques dans le cadre des matériaux composites, selon les stratégies de post-infusion envisagées (drainée ou non-drainée). Une fois ces grandeurs déterminées, une deuxième perspective est de réaliser des séries de post-infusion dans l'objectif de confronter le modèle numérique à des essais réels.

Conclusion Générale

Économiquement très prometteuse, la technologie d'élaboration des matériaux composites par infusion nécessite encore de gagner en maturité pour être pleinement applicable dans la fabrication des matériaux de type Haute Performance. La maîtrise des propriétés finales de la pièce par ce type de procédé doit encore être améliorée pour atteindre par exemple des taux volumiques de fibres satisfaisant l'exigence des secteurs de pointe. C'est dans la perspective de comprendre de manière amont la physique de ces procédés par infusion que la Chaire industrielle entre Hexcel Composites et Mines Saint-Étienne a été mise en place. Menés dans le cadre de cette chaire, ces travaux de thèse portent sur la modélisation et la simulation numérique des procédés d'élaboration des matériaux composites Haute Performance à l'échelle macroscopique dans un contexte industriel. Ils s'inscrivent dans la continuité de plusieurs thèses [23, 40, 54] menées aux Mines de Saint-Étienne entre 2006 et 2016. Ces travaux ont mis en place la description physique et une partie de la stratégie numérique reprise dans cette thèse.

Ainsi, l'écoulement de la résine dans le drainant et la préforme est représenté respectivement par les équations de Stokes et les équations de Darcy. La description de l'interface entre le drainant et la préforme ainsi que le suivi de l'évolution du front de résine sont effectuées par une méthode Level-set. Le comportement mécanique de la préforme est décrit par une loi non-linéaire orthotrope issue des travaux de caractérisation de Blais *et al.* [23] sur des renforts de type Haute Performance. L'influence de l'écoulement de la résine sur la déformation de la préforme est prise en compte par l'équation de Terzaghi qui intègre la pression hydrostatique dans l'équation d'équilibre mécanique. La modélisation numérique est basée sur la résolution séquentielle des équations de Stokes ou de Darcy, de la Level-set et de l'équilibre mécanique par la méthode des éléments-finis, avec une approximation continue et linéaire des inconnues. Des techniques de stabilisation de la formulation éléments-finis sont nécessaires à la fois au problème fluide (par la méthode ASGS) et au problème de convection du front fluide (par la méthode SUPG). Une formulation lagrangienne actualisée du problème de déformation est utilisée pour prendre en compte les grands déplacements du matériau au cours de son élaboration. Finalement, l'actualisation de la porosité et de la perméabilité est effectuée après

la résolution du problème de mécanique des solides.

La description dans le Chapitre 2 de l'état actuel de la modélisation et de la simulation des procédés par infusion a permis de mettre en évidence, d'une part les lacunes du modèle, notamment des durées de remplissage trop longues pour des pièces structurales, et d'autre part l'importance de la prise en compte de l'interaction fluide/solide pendant la phase d'élaboration, notamment sur la répartition du taux volumiques de fibres ainsi que sur la tolérance dimensionnelle de la pièce. Deux axes principaux d'amélioration ont donc été menés au cours de cette thèse : d'une part l'intégration des écoulements capillaires à l'échelle macroscopique et mésoscopique, et d'autre part la modélisation mathématique et numérique de la phase de ré-équilibre à la fin du remplissage.

Pour les matériaux composites, les effets capillaires traduisent l'aptitude de la résine à imprégner un milieu fibreux sans l'assistance de forces extérieures. Notre modèle numérique consiste à inclure dans les équations de Darcy, les effets capillaires par un saut de pression au front fluide accélérant ou ralentissant la vitesse du fluide, selon la nature des fluides et solides concernés. Comme les effets capillaires sont reliés à l'architecture hétérogène du milieu fibreux, leur caractère orthotrope est donc pris en compte via un tenseur de contrainte capillaire. Une technique consistant à reconstruire localement l'interface de l'élément traversé par le front fluide permet d'intégrer exactement le terme surfacique résultant de ces effets capillaires dans la formulation EF du problème. La discontinuité du champ de pression générée n'est pas correctement captée par la méthode classique des éléments-finis (approximation continue) et engendre de plus des vitesses parasites. L'enrichissement du champ de pression permet de traiter correctement cette discontinuité sans alourdir le système à résoudre. Cette approche a été validée par une analyse de convergence et par une confrontation avec des données expérimentales, avant d'être étendue à la simulation de remplissage de pièce industrielle. La prise en compte de ces effets capillaires conduit à une réduction considérable le temps de remplissage numérique des renforts à très faible perméabilité. Un recalage avec des séries d'infusion est toutefois nécessaire pour valider l'approche numérique dans le contexte industriel et assurer ainsi sa robustesse.

Une première approche de la modélisation des écoulements à l'échelle des torons tenant compte de ces phénomènes capillaires est également proposée. Cette modélisation est directement inspirée du modèle numérique développé à l'échelle macroscopique en utilisant les mêmes « outils ». La géométrie des torons encore très simpliste (torons elliptiques, identiques et espacés) doit être améliorée afin d'être représentative de mésostructures réelles. Un rapprochement avec les travaux de Chevalier *et al.* [44] sur la modélisation des écoulements capillaires à l'échelle des fibres est aussi une perspective à envisager afin d'apporter une meilleure compréhension des paramètres (par exemple, les calculs numériques de la perméabilité et de la contrainte capillaire) qui peuvent impacter le procédé à l'échelle macroscopique. On pourra alors envisager d'étudier à différentes échelles la formation de porosités, et d'en déduire, par exemple un « champ de probabilité de formation de porosités » à l'échelle macroscopique du procédé.

La littérature ainsi que des observations expérimentales menées par Hexcel Composites de l'état de la pièce à la fin du remplissage ont mis en évidence l'importance de cet état

sur la qualité finale de la pièce. La préforme saturée n'atteint pas son état d'équilibre instantanément après la fermeture de l'arrivée de résine. En effet, la souplesse du sac à vide et la présence de gradient de pression interne génère une répartition hétérogène de l'épaisseur de la pièce. La modélisation de la phase post-infusion ou post-remplissage décrit donc la répartition progressive de la résine dans la préforme en fonction du temps en tenant compte de la déformation de la préforme. Notre approche s'est basée sur la théorie de consolidation en géomécanique. Le modèle numérique développé est composé, d'une part d'une équation transitoire en pression décrivant l'évolution de la pression selon une équation de diffusion intégrant l'effet de la déformation volumique de la préforme, et d'autre part de l'équation de Biot qui est une extension de l'équation de Terzaghi aux matériaux compressibles. L'évolution de la porosité est également calculée à partir de la conservation de la masse du solide. Les simulations ont été faites pour des cas isotropes, mais le modèle peut cependant être étendu à des cas orthotropes dès lors que les bons paramètres poroélastiques sont identifiés.

Les premiers cas tests classiques en géomécanique ont été simulés dans le cadre des matériaux isotropes linéaires élastiques et ont montré de résultats satisfaisants, par exemple en accord avec des solutions analytiques. Il faut également considérer deux étapes importantes, d'une part le travail de caractérisation permettant de déterminer les différents paramètres nécessaires pour alimenter le modèle numérique, et d'autre part le travail de corrélation des résultats numériques et expérimentaux, qui permettrait de recalibrer le modèle et d'assurer sa robustesse ainsi que sa représentativité dans un contexte industriel. Une perspective assez immédiate de ce travail est la mise en place du chaînage automatique 5.1 compaction/infusion et post-remplissage. Nous nous sommes intéressés à ce chaînage, mais par faute de temps, seul le transfert de la pression de la fin du remplissage au début de la post-remplissage sur un cas simple a été fait.

Au-delà de ce couplage, il est impératif de confronter les résultats numériques à l'expérience sur des cas de complexité croissante. Cette étape nécessite la construction d'un démonstrateur instrumenté, permettant de suivre par exemple le passage du front fluide dans des pièces à géométrie contrôlée, ce qui est en cours actuellement chez Hexcel Reinforcements.

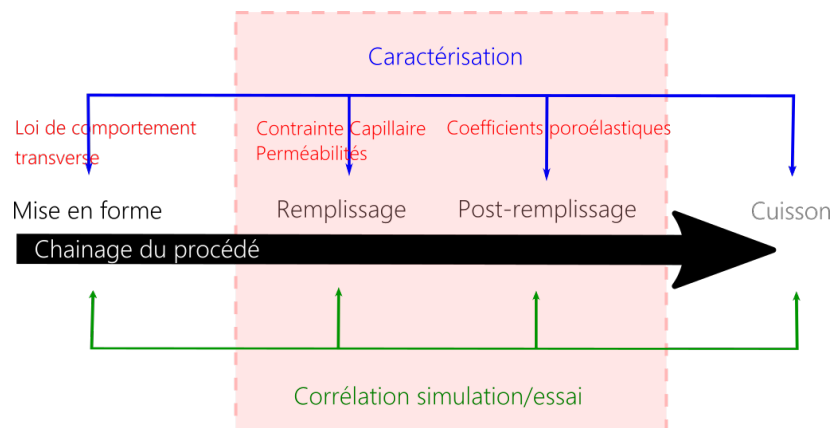


FIGURE 5.1 – Étapes de fabrication des matériaux composites et couplage entre les différentes étapes

Liste des figures

1.1	Deux types différents de composites	17
1.2	Structures primaires aéronautiques en composites ¹	18
1.3	Différentes échelles de représentation correspondant aux matériaux composites : macroscopique [54], mésoscopique [26], microscopique [74]	19
1.4	Structure des renforts pré-pregs [30]	20
1.6	Exemple de montage avant mise en oeuvre par procédé LRI [99]	21
1.7	Illustration de la compétition entre les forces visqueuses F_{vis} et capillaires F_{cap} entre les fibres et les torons (avec \underline{v}_{inter}^r et \underline{v}_{intra}^r respectivement la vitesse de la résine inter- et intra- torons)	22
1.8	Illustration de la phase de post-infusion	23
1.9	Illustration des renforts HiTape [®] [98] et HiMax [®] [97]	25
2.1	Couplage multi-physique des différents mécanismes impliqués dans la modélisation des procédés par infusion - extrait de [23, 90]	29
2.2	Modélisation multi-domaine du procédé LRI	29
2.3	Description 2D du domaine fluide Ω	33
2.4	Description 2D de l'ensemble du domaine fluide (drainant Ω^s + préforme Ω^d)	38
2.5	Principe de la méthode des marqueurs	45
2.6	Principe de la méthode VOF	46
2.7	Principe de la méthode Level-set	47
2.8	Description des trois configurations : initiale Ω_0 , intermédiaire ou déformée Ω_i et courante Ω_t	50
2.9	Définition de la direction transverse et plane pour des stratifiés en 2D	52
2.10	Schéma de l'algorithme de couplage utilisé pour la simulation des infusions, inspiré de [23]	56
2.11	Géométrie et conditions limites pour la simulation 2D des écoulements dans un raidisseur en "T"	57
2.12	Champ de pression à différents instants du remplissage - sans déformation mécanique	59

2.13	Champ de vitesse dans la préforme et le drainant à t=49 min (correspondant à la Figure 2.12d)- sans déformation mécanique	60
2.14	État de remplissage à t=3 h pour l'étude de la convergence des résultats	61
2.15	Champ de vitesse et de pression en fonction de différentes tailles de mailles à un instant donné du remplissage (t=3 h)	62
2.16	Convergence de maillage : scénario de remplissage en fonction du maillage pour différents taux de remplissage (V_r : le volume rempli) - pour une résine de viscosité 0,1 Pa.s	63
2.17	Convergence du pas de temps : évolution du temps de remplissage en fonction du pas de temps pour différents taux de remplissage (V_r : le volume rempli) - pour une résine de viscosité 0,1 Pa.s	64
2.18	La loi de comportement en compression caractérisée expérimentalement [24]	65
2.19	Conditions limites pour le problème de déformation de la préforme	66
2.20	Champ de la norme du déplacement et évolution du front fluide à différents instants du remplissage	68
2.21	Comparaison des taux de remplissage avec et sans déformation mécanique avec les flèches indiquant le remplissage total de la pièce	69
2.22	État de la pièce en "T" à la fin de la phase de remplissage - défauts d'imprégnation et taux volumique de fibres	70
2.23	Variation du volume des éléments avant et après remplissage à l'état final	70
3.1	Description 2D du milieu poreux (Darcy)	76
3.2	Propriétés matériaux et conditions aux bords appliquées à la simulation de l'écoulement unidirectionnel ainsi que la discrétisation du domaine	78
3.3	Principe de la méthode CSF (Ω_e désigne les éléments du maillage)	79
3.4	Les champs de vitesse et de pression avec la méthode CSF	80
3.5	Comparaison des résultats numériques et analytiques, le long de ligne $\{x = \frac{1}{2}\}$, pour différentes valeurs de la zone de transition ε_{CSF} (méthode CSF)	80
3.6	Principe de la méthode SLR - 2D	81
3.7	Les champs de vitesse et de pression avec la méthode SLR	82
3.8	Comparaison schématique des méthodes GD (à gauche), X-FEM (au milieu) et E-FEM (à droite) pour des éléments de type Q2	83
3.9	Enrichissement local du champ de pression et reconstruction locale du front fluide dans le cas 2D (inspiré de [10])	85
3.10	Les champs de vitesse et de pression avec la reconstruction de la surface (SLR) et l'enrichissement local de la pression	87
3.11	Comparaison des champs de pression et vitesse obtenus par les 3 méthodes (SLR, CSF, SLR + Enrichissement) le long de la ligne d'analyse $\{x = \frac{1}{2}\}$ pour la configuration test (Figure 3.2)	88
3.12	Comparaison des erreurs en pression et en vitesse obtenues par les 3 méthodes (SLR, CSF, SLR + Enrichissement) le long de la ligne d'analyse $\{x = \frac{1}{2}\}$ pour la configuration test (Figure 3.2)	88
3.13	Comparaison des champs de pression numérique et analytique, le long de ligne $\{x = \frac{1}{2}\}$, pour différentes tailles de maille h_e avec la méthode SLR combinée à l'enrichissement local de la pression	89

3.14	Représentation 3D du champ de pression et de la norme de la vitesse, obtenue par le modèle éléments-finis	91
3.15	Comparaison de la solution analytique (indice « theo ») (Eq. 3.17) et des résultats numériques (indice « num ») tracés selon les lignes $\{x = \frac{1}{4}\}$, $\{x = \frac{1}{2}\}$ et $\{x = \frac{3}{4}\}$	92
3.16	Les ordres de convergence du modèle de Darcy dans le cas continu et discontinu avec et sans enrichissement	95
3.17	Montées capillaires de l'eau dans d'un renfort en carbone UD dans les trois principales directions des fibres	97
3.18	Domaine de calcul et conditions aux bords - Simulation de montée capillaire	98
3.19	Comparaison de la masse au carré - mesurée numériquement et expérimentalement selon les directions $p-$ (a), $t-$ (b) and $l-$ (c)	99
3.20	Simulation en 3D de la montée capillaire isotrope (pour le cas $l-$) à l'instant $t=2s$	100
3.21	Géométrie et conditions limites pour la simulation 2D de l'infusion dans un raidisseur en "T"	101
3.22	Analyse de l'influence de la valeur de la contrainte capillaire transverse sur le scénario de remplissage (pour une contrainte capillaire dans le plan $\sigma_{cap}^p = 20$ kPa	103
3.23	Évolution du front fluide avec (rouge) - $\sigma_{cap}^t = 40$ kPa et sans (noir) effets capillaires à l'interface	104
3.24	Influence du raffinement du maillage sur les résultats - avec effets capillaires ($\sigma_{cap}^t = 40$ kPa)	106
3.25	Influence du pas de temps sur le modèle numérique de l'écoulement en prenant en compte les effets capillaires ($\sigma_{cap}^t = 40$ kPa)	107
3.26	Conditions limites du problème d'infusion en 3D	108
3.27	Comparaison des profils de pression le long d'une ligne d'analyse verticale (0,0025;0;0,075)-(0,0025;0,05;0,075) à $t= 125s$	109
3.28	Comparaison des simulations 3D avec (rouge) et sans (noir) effets capillaires orthotropes	111
3.29	Différents niveaux d'homogénéisation des écoulements	112
3.30	La description du problème d'écoulement à l'échelle mésoscopique	112
3.31	Évolution du front fluide sans effets capillaires	114
3.32	Évolution du front fluide avec effets capillaires	116
3.33	Illustration de l'apparition de défauts en fonction de la compétition des effets visqueux/capillaires dans le cadre des procédés LCM	117
3.34	Comparaison de la position du front fluide en fonction du maillage - N°1 (noir), N°2 (rouge), N°3 (bleu)	118
4.1	Schéma de l'algorithme de couplage utilisé pour la simulation de la phase post-infusion.	133
4.2	Géométrie et conditions limites du problème fluide de la phase post-infusion	134
4.3	Évolution du champ de pression en fonction du temps	136
4.4	Évolution du champ de la pression (numérique « Num » et analytique « Ana ») au cours du temps	137
4.5	L'influence du raffinement du maillage et du pas de temps	138

4.6	Description du domaine et conditions limites pour le problème fluide (à gauche) et solide (à droite)	139
4.7	Évolution de la pression au cours du temps - dans la configuration drainée	141
4.8	Évolution au cours du temps de la vitesse de la résine dans la configuration drainée	142
4.9	Évolution du champ de pression dans l'épaisseur de la pièce selon une ligne d'analyse verticale à $x=1$ ($t_{0,1} < t_{300}$)	143
4.10	Influence du pas de temps sur le profil de pression - Maillage composé de 2 500 nœuds	143
4.11	Déformation volumique - à l'instant initial et à la fin du ré-équilibre dans le cas drainé	144
4.12	Géométrie et conditions limites du problème	145
4.13	Dérivée de la courbe expérimentale f	145
4.14	Évolution du champ de pression en fonction du temps	147
4.15	Variation du champ du τ_{vf} et de la géométrie	148
4.16	Évolution de la pression dans le temps à deux nœuds du maillage	148
4.17	Norme et sens du champ de déplacement ($t>0s$) dans le cas 3D	149
4.18	Variation de la géométrie et du volume entre l'instant ($t>0s$) et la fin de la phase post-infusion	149
4.19	Évolution du champ de déplacement en fonction du temps dans le cas 3D	150
4.20	Champ de pression initialement discontinu du problème de post-infusion pour le chainage complet (remplissage + post-remplissage)	151
4.21	Évolution du champ de pression initialement discontinu en fonction du temps pendant la phase de ré-équilibre	152
5.1	Étapes de fabrication des matériaux composites et couplage entre les différentes étapes	157

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques de quelques fibres types [60] avec A. C. = Applications Courantes, H. R. = Haute Résistance, H. M. = Haut Module.	18
2.1	Paramètres d'entrée - Simulation 2D remplissage du raidisseur "T"	57
2.2	Différentes tailles de l'élément h_e et nombre de nœuds nb_{noeuds} correspondant, pour un pas de temps Δt fixe	61
2.3	Temps de remplissage t_r en fonction de la taille de l'élément h_e et nombre de nœuds nb_{noeuds} pour un pas de temps Δt fixe, pour un taux de remplissage de 99%	63
2.4	Données d'entrée pour le problème de mécanique des solides	66
3.4	Paramètres d'entrée - Simulation montée capillaire	98
3.5	Pentes de la courbe (en g^2/s) représentant le scénario de remplissage dans chaque direction principale du renfort	99
3.6	Données sur l'étude de convergence du modèle par rapport au maillage et au pas de temps	105
3.7	Le temps CPU pour 500 incréments de calcul avec l'approche numérique développé et avec la modification du gradient global - dans le cas isotrope	109
3.8	Paramètres d'entrée des simulations orthotropes	110
3.9	Paramètres d'entrée pour la simulation des écoulements à l'échelle mésoscopique	113
3.10	Nombre de nœuds pour l'étude de l'influence du maillage	117
3.11	Surface non-remplie à $t=3s$ (milieu poreux et fluide confondu) selon le raffinement de maillage	119
4.1	Ordre de grandeur des coefficients de Biot pour quelques matériaux [51] avec E le module d'élasticité du matériau	130
4.2	Paramètres du problème - compression en milieu confiné	139
4.3	Paramètres du problème - compression en milieu confiné	146

- [1] J. Aarnes and B. Heimsund. Multiscale discontinuous galerkin methods for elliptic problems with multiple scales. In B. Engquist, O. Runborg, and P. Lötstedt, editors, *Multiscale Methods in Science and Engineering*, pages 1–20. Springer Berlin Heidelberg (ISBN 9783540253358), 2005. [83](#)
- [2] L. Abouorm, R. Troian, J. Bruchon, and S. Drapier. Stokes/Darcy coupling in severe regimes using multiscale stabilization for mixed finite element : monolithic approach versus decoupled approach. *European Journal of Computational Mechanics*, 23 :113–137, 2014. [25](#), [41](#), [42](#)
- [3] S. G. Advani and K. T. Hsiao. *Manufacturing techniques for polymer matrix composites (PMCs)*. Woodhead Publishing (ISBN 9780857090676), 2012. [20](#)
- [4] S. Afkhami, Z. Zaleski, and M. Bussman. A mesh-dependent model for applying dynamic contact angles to vof simulations. *Journal of Computational Physics*, 228 :5370–5389, 2009. [74](#)
- [5] K. J. Ahn, J. C. Seferis, and J. C. Berg. Simultaneous measurements of permeability and capillary pressure of thermosetting matrices in woven fabric reinforcements. *Polymer Composites*, 12 :146–152, 1991. [74](#)
- [6] S. Amico and C. Lekakou. An experimental study of the permeability and capillary pressure in resin-transfer moulding. *Composites Science and Technology*, 61 :1945–1959, 2001. [75](#)
- [7] K. Andriamananjara, N. Moulin, J. Bruchon, P-J. Liotier, and S. Drapier. Numerical modeling of local capillary effects in porous media as a pressure discontinuity acting on the interface of a transient bi-fluid flow. *International Journal of Material Forming*, page 1–17, 2018. [109](#)
- [8] A. Aragón and A. Simone. The Discontinuity-Enriched Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 112 :1589–1613, 2017. [84](#)

- [9] J.L. Auriault, C. Geindreau, and L. Orgéas. Upscaling forchheimer law. *Transport in Porous Media*, 70(2) :213–229, 2007. [36](#)
- [10] R. F. Ausas, G. C. Buscaglia, and S. R. Idelsohn. A new enrichment space for the treatment of discontinuous pressures in multi-fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70 :829–850, 2011. [85](#), [II](#)
- [11] R. F. Ausas, S. S. Fabricio, and G. C. Buscaglia. An improved finite element space for discontinuous pressures. *Computational Methods Applied Mechanical Engineering*, 199 :1019–1031, 2010. [82](#)
- [12] S. Badia and R. Codina. On a multiscale approach to the transient Stokes problem : Dynamic subscales and anisotropic space-time discretization. *Applied Mathematics and Computation*, 207 :415–433, 2009. [41](#)
- [13] S. Badia and R. Codina. Unified stabilized finite element formulations for the Stokes and the Darcy problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 47 :1971–2000, 2009. [41](#), [43](#), [93](#)
- [14] S. Badia and R. Codina. Stabilized continuous and discontinuous Galerkin techniques for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1654–1667, 2010. [41](#), [93](#)
- [15] T. A. Baer, R. A. Cairncross, P. R. Schunk, R. R. Rao, and P. A. Sackinger. A finite element method for free surface flows of incompressible fluids in three dimensions. Part II : Dynamic wetting lines. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 33 :405–427, 2000. [74](#)
- [16] Harry Barraza, Youssef K. Hamidi, Levent Aktas, M. Cengiz Altan, and Edgar A. O’Rear. Porosity Reduction in the High-Speed Processing of Glass-Fiber Composites by Resin Transfer Molding (RTM). *Journal of Composite Materials*, 38(3) :195–226, 2004. [115](#)
- [17] P. Bastian. A fully-coupled discontinuous Galerkin method for two-phase flow in porous media with discontinuous capillary pressure. *Computational Geosciences*, 18 :779–796, 2014. [83](#)
- [18] G. S. Beaver and D. D. Joseph. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 30 :197–207, 1967. [37](#)
- [19] L. Benazzouk, E. Arquis, N. Bertrand, C. Descamps, and M. Valat. Motion of a liquid bridge in a capillary slot : a numerical investigation of wettability and geometrical effects. *La Houille Blanche*, 3 :50–56, 2013. [74](#)
- [20] B. Binetruy, C. and Hilaire and J. Pabiot. Tow impregnation model and void formation mechanisms during rtm. *Journal of composite Materials*, 32(3) :223–245, 1998. [111](#)
- [21] C. Binetruy, J. Pabiot, and B. Hilaire. The influence of fiber wetting in resin transfer molding : scale effects. *Polymer Composites*, 21(4) :548–557, 2000. [145](#)

- [22] M. A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *Applied Physics*, 12(2) :155–164, 1941. [53](#), [127](#), [128](#), [129](#)
- [23] M. Blais. *Modélisation et le suivi du procédé d’infusion de résine sur une nouvelle génération de renforts pour application aux structures primaires aéronautiques*. PhD thesis, Mines de Saint-Etienne, 2016. [15](#), [22](#), [25](#), [29](#), [43](#), [52](#), [56](#), [65](#), [74](#), [101](#), [145](#), [155](#), [I](#)
- [24] M. Blais, N. Moulin, P.-J. Liotier, and S. Drapier. Resin infusion-based processes simulation : coupled Stokes-Darcy flows in orthotropic preforms undergoing finite strain. *International Journal of Material Forming*, 10(1) :43–54, 2015. [64](#), [65](#), [II](#)
- [25] P. Boisse. Mise en forme des renforts fibreux de composites. *Techniques de l’ingénieur Plasturgie : procédés spécifiques aux composites*, 2004. [19](#)
- [26] P. Boisse. Simulations of composite reinforcement forming. In Polona Dobnik Dubrovski, editor, *Woven Fabric Engineering*, pages 387–413, 2010. [19](#), [49](#), [I](#)
- [27] P. Boisse, R. Akkerman, J. Cao, J. Chen, S. Lomov, and A. Long. Composites forming. *Advances in Material Forming*, pages 61–79, 2007. [19](#), [49](#)
- [28] L. Bouquerel, N. Moulin, S. Drapier, J.-M. Beraud, and P. Boisse. Modélisation et Simulation de la Mise en Forme d’un Renfort Sec pour Structures Primaires Aéronautiques. *13ème Colloque National en Calcul des Structures - Acte numéro 124305*, pages 1–6, 2017. [49](#), [52](#)
- [29] J. U. Brackbill, D. B. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100 :335–354, 1992. [79](#)
- [30] J. V. Bramon. *Dual-scale flow during vacuum infusion of composites : experiments and modelling*. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid, 2015. [20](#), [22](#), [I](#)
- [31] Joël Bréard and Abdelghani Saouab. Numerical simulation of liquid composite molding processes. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 14(6-7) :841–865, 2005. [21](#)
- [32] J. Bréard, A. Saouab, and G. Bouquet. Numerical simulation of void formation in LCM. *Composites : Part A*, 34 :517–523, 2003. [75](#)
- [33] H. C. Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, 5 :1–27, 1949. [36](#)
- [34] A. N. Brooks and T.J.R Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1) :199–259, 1982. [48](#)
- [35] G. Buscaglia and R. Ausas. Variational formulations for surface tension capillarity and wetting. *Computational Methods Applied Mechanical Engineering*, 200(45-46) :3011–3025, 2011. [74](#)

- [36] B. Caglar, B. Yenilmez, and E. M. Sozer. Modeling of post-filling stage in vacuum infusion using compaction characterization. *Journal of Composite Materials*, 49(16) :1947–1960, 2015. [122](#), [123](#)
- [37] P. C. Carman. Fluid flow through granular beds. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 199(15) :150–166, 1937. [54](#)
- [38] T. Carraro and S. Wetterauer. On the implementation of the eXtended finite element method (XFEM) for interface problems. *Archive of Numerical Software*, 4(2) :1–23, 2016. [84](#)
- [39] Philippe Causse, Christophe Ravey, and François Trochu. Capillary Characterization of Fibrous Reinforcement and Optimization of Injection Strategy in Resin Transfer Molding. *Journal of Composite Sciences*, 2(2) :19, 2018. [115](#)
- [40] P. Celle, S. Drapier, and J-M. Bergheau. Numerical modelling of liquid infusion into fibrous media undergoing compaction. *European Journal of Mechanics -Part A : Solids*, 27(4) :647–661, 2008. [22](#), [25](#), [29](#), [38](#), [49](#), [52](#), [74](#), [101](#), [155](#)
- [41] A. Charmetant. *Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2011. [49](#)
- [42] A. Chateaneuf. La méthode des éléments finis – calcul non-linéaire géométrique. *Techniques de l'ingénieur*, 2016. [30](#)
- [43] J. Chessa and T. Belytschko. An eXtended finite element method for two-phase fluids. *ASME. Journal of Applied Mechanics*, 70 :10–17, 2003. [84](#)
- [44] L. Chevalier, N. Moulin, P-J. Liotier, J. Bruchon, and S. Drapier. Accounting for local capillary effects in two-phase flows with relaxed surface tension formulation in enriched finite element. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(8) :617–633, 2018. [74](#), [156](#)
- [45] J. Cinquin. Les composites en aérospatiale. *Techniques de l'ingénieur*, 2002. [15](#), [17](#)
- [46] R. Codina. On stabilized finite element methods for linear systems of convection-diffusion-reaction equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182 :61–82, 2000. [41](#)
- [47] R. Codina. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :4295–4321, 2002. [41](#)
- [48] R. Codina. Analysis of a stabilized finite element approximation of the oseen equations using orthogonal subscales. *Applied Numerical Mathematics*, 58 :264–283, 2008. [41](#)
- [49] H. Coppola-Owen and R. Codina. Improving eulerian two-phase on finite element approximation with discontinuous gradient pressure shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 49 :1287–1304, 2005. [85](#)

- [50] O. Coussy. *Mécanique des Milieux Poreux*. Technip (ISBN 9782710805953), 2004. [126](#), [130](#)
- [51] O. Coussy. *Poromechanics*. Wiley (ISBN 9780470849200), 2005. [124](#), [125](#), [126](#), [127](#), [129](#), [130](#), [153](#), [V](#)
- [52] O. Coussy, L. Dormieux, and E. Detournay. From mixture theory to Biot’s approach for porous media. *International Journal of Solids and Structures*, 35(34-35) :4619–4635, 1998. [127](#)
- [53] H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Paris : Victor Dalmont, 1856. [35](#)
- [54] A. Dereims, S. Drapier, J-M. Bergheau, and P. De Luca. 3D robust iterative coupling for Stokes, Darcy and solid mechanics for low permeability media undergoing finite strains. *Finite Element Analysis and Design*, 94 :1–15, 2015. [19](#), [25](#), [29](#), [38](#), [52](#), [155](#), [I](#)
- [55] M. Discacciati, D. Hacker, A. Quarteroni, S. Quinodoz, S. Tissot, and F. M. Wurm. Numerical simulation of orbitally shaken viscous fluids with free surface. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(3) :294–315, 2013. [38](#)
- [56] G. Francucci, S. E. Rodriguez, E. Ruiz, and A. Vazquez. Capillary effects in vacuum assisted resin transfer molding with natural fibers . *Polymer Composites*, 33(9) :1593–1602, 2012. [75](#)
- [57] R. Gantois. *Contribution à la modélisation de l’écoulement de résine dans les procédés de moulage des composites par voie liquide*. PhD thesis, Institut Clément Ader - Mines d’Albi - IUT Tarbes, 2013. [33](#)
- [58] R. Gauvin and M. Chibani. The Modelling of Mold Filling in Resin Transfer Molding. *International Polymer Processing*, 21 :163–169, 1987. [33](#)
- [59] R. Gauvin, Y. Trochu, F. Lemenn, and L. Diallo. Permeability measurement and flow simulation through fiber reinforcement. *Composites Science and Technology*, 17 :34–42, 1996. [22](#)
- [60] D. Gay. *Matériaux composites*. Hermes (ISBN 9782866015862), 2005. [18](#), [V](#)
- [61] C. Geuzaine and J. F. Remacle. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009. [56](#)
- [62] Q. Govignon, S. Bickerton, and P. A. Kelly. Simulation of the reinforcement compaction and resin flow during the complete resin infusion process. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 41(1) :45–57, 2010. [74](#), [123](#)
- [63] Q. Govignon, S. Bickerton, and P. A. Kelly. Experimental investigation into the post-filling stage of the resin infusion process. *Journal of Composite Materials*, 47(12) :1479–1492, 2013. [23](#), [127](#)

- [64] O. Guasch and R. Codina. An algebraic subgrid scale finite element method for the convected Helmholtz equation in two dimensions with applications in aeroacoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :4672–4689, 2007. [41](#)
- [65] F. Harlow and J. Welch. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with a Free Surface. *The Physics of Fluids*, 8 :2182–2189, 1965. [45](#)
- [66] R. Helmig, Weiss A., and B. I. Wohlmuth. Dynamic capillary effects in heterogeneous porous media. *Computational Geosciences*, 11(3) :261–274, 2007. [75](#)
- [67] C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries . *Journal of Computational Physics*, 9(1) :201–225, 1981. [46](#)
- [68] T. J. R. Hughes. Multiscale phenomena : Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles, and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127 :387–401, 1995. [41](#)
- [69] T. J. R. Hughes. The variational multiscale method - A paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(1-2) :3–24, 1998. [41](#)
- [70] T. J. R. Hughes, A. Masud, and J. Wan. A stabilized mixed Discontinuous Galerkin method for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(25-28) :3347–3381, 2006. [83](#)
- [71] Y. Jung, S. J. Kim, and W. S. Han. Numerical simulation of RTM process using the extended finite element method combined with the level set method. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 32 :308–317, 2013. [84](#)
- [72] D. Krauss. Two-phase flow in homogeneous porous media - The role of dynamic capillary pressure in modeling gravity driven fingering. Master’s thesis, 2011. [75](#)
- [73] R. Larsson, M. Wysocki, and S. Toll. Process-modeling of composites using two-phase porous media theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 23 :15–36, 2004. [123](#)
- [74] P. Latil, L. Orgéas, C. Geindreau, P. Dumont, and S. Rolland du Roscoat. Towards the 3d in situ characterisation of deformation micro-mechanisms within a compressed bundle of fibres. *Composites Science and Technology*, 71(4) :480–488, 2011. [19](#), [I](#)
- [75] W. Layton, F. Schieweck, and I. Yotov. Coupling fluid flow with porous media flow. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(6) :2195–2218, 2002. [37](#)
- [76] R.J. Leveque and Z. Li. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 31 :1019–1044, 1994. [82](#)
- [77] J. Li, C. Zhang, R. Liang, B. Wang, and S. Walsh. Modeling and Analysis of Thickness Gradient and Variations in Vacuum-Assisted Resin Transfer Molding Process. *Polymer Composites*, 29(5) :473–482, 2008. [123](#)

- [78] M. Li, S. K Wang, Y. Z Gu, K. Potter, and Z. G. Zhang. Evaluation of through-thickness permeability and the capillary effect in vacuum assisted liquid molding process. *Composites Science and Technology*, 72(8) :873–878, 2012. [98](#)
- [79] T. Lin, Y. Lin, and X. Zhang. Partially penalized immersed finite element methods for elliptic interface problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 53 :1121–1144, 2015. [82](#)
- [80] Y. Liu, L. Wang, X. Liu, and T. Ding. Effects of capillary pressure - fluid saturation - relative permeability relationships on predicting carbon dioxide migration during injection into saline aquifers. *Energy Procedia*, 63 :3616–3631, 2014. [75](#)
- [81] R. Masoodi and K. M. Pillai. *Wicking in Porous Materials - Traditional and Modern Approaches*. CRC Press (ISBN 9781439874325), 2012. [74](#)
- [82] A. Merxhani. An introduction to linear poroelasticity. *arXiv :1607.04274 [physics.geo-ph]*, 2016. [127](#)
- [83] V. Michaud and A. Mortensen. Infiltration processing of fibre reinforced composites : governing phenomena. *Composites : Part A*, 32 :98–996, 2001. [75](#)
- [84] A. Monlaur, S. Fernandez-Mendez, and A. Huerta. Discontinuous Galerkin methods for the Stokes equations using divergence-free approximations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57 :1071–1092, 2008. [83](#)
- [85] M. A. Murad, M. Borges, J. A. Obregón, and M. Correa. A new locally conservative numerical method for two-phase flow in heterogeneous poroelastic media. *Computers and Geotechnics*, 48 :192–207, 2013. [54](#), [127](#)
- [86] L. C. Ngo and H. G. Choi. Efficient direct re-initialization approach of a level set method for unstructured meshes . *Computers & Fluids*, 154 :167–183, 2017. [49](#)
- [87] J. Oliver, A. E. Huespe, and P. J. Sánchez. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities : E-FEM vs X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :4732–4752, 2006. [84](#)
- [88] L. Orgéas, C. Geindreau, J-L. Auriault, and J-F. Bloch. Upscaling the flow of generalised newtonian fluids through anisotropic porous media. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 145(1) :15–29, 2007. [33](#)
- [89] S. Osher and R. P. Fedkiw. Level set methods : an overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :463–502, 2000. [46](#)
- [90] G. Pacquaut, J. Bruchon, N. Moulin, and S. Drapier. Combining a level-set method of mixed stabilized p1/p1 formulation for coupling Stokes-Darcy flows. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 69(2) :459–480, 2012. [25](#), [29](#), [I](#)
- [91] C. H. Park, A. Lebel, A. Saouab, J. Bréard, and W. Lee. Modeling and simulation of voids and saturation in liquid composite molding processes. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(6) :658–668, 2011. [75](#)

- [92] N. Patel, V. Rohatgi, and L. James Lee. Micro scale flow behavior and void formation mechanism during impregnation through a unidirectional stitched fiberglass mat. *Polymer Engineering & Science*, 35(10) :837–851, 1995. [115](#)
- [93] R. S. Pierce, B. G. Falzon, and M. C. Thompson. A multi-physics process model for simulating the manufacture of resin - infused composite. *Composites Science and Technology*, 149 :269–279, 2017. [74](#)
- [94] D. Pino Muñoz, J. Bruchon, S. Drapier, and F. Valdivieso. A finite element based level set method for fluid-elastic solid interaction with surface tension. *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 93(9) :919–941, 2013. [80](#)
- [95] M. F. Pucci, P-J. Liotier, and S. Drapier. Capillary wicking in a fibrous reinforcement - orthotropic issues to determine the capillary pressure components. *Composites/A*, 77 :133–141, 2015. [74](#), [96](#), [98](#), [102](#)
- [96] M. F. Pucci, P-J. Liotier, and S. Drapier. Capillary wicking in flax fabrics - effects of swelling in water. *Colloids and Surfaces/A : Physicochemical and Engineering Aspects*, 498 :176–184, 2016. [74](#), [96](#)
- [97] Hexcel Reinforcements. Himax reinforcements. <http://www.hexcel.com/Products/>. [24](#), [25](#), [I](#)
- [98] Hexcel Reinforcements. Hitape reinforcements. <https://www.hexcel.com/Products/Fabrics-Reinforcements/HiTape>. [24](#), [25](#), [I](#)
- [99] Hexcel Reinforcements. Direct processes technology manual. <http://www.hexcel.com/Resources/Technology-Manuals>, 2015. [20](#), [21](#), [I](#)
- [100] Hexcel Reinforcements. Hexply prepreg technology. <http://www.hexcel.com/Resources/Technology-Manuals>, 2015. [19](#)
- [101] P. J. Roache. Code verification by the method of manufactured solutions. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1) :1–4, 2002. [89](#)
- [102] M. J. Robinson and J. B. Kosmatka. Analysis of the post-filling phase of the vacuum-assisted resin transfer molding processes. *Journal of Composite Materials*, pages 1–13, 2013. [122](#), [123](#)
- [103] P. G. Saffman. On the Boundary Condition at the Surface of a Porous Medium . *Studies in Applied Mathematics*, 50(2) :93–101, 1971. [37](#)
- [104] H. Sauerland and T.P. Fries. The stable xfem for two-phase flows. *Computers & Fluids*, 87 :41–49, 2013. [84](#)
- [105] P. Simacek and S. G. Advani. A numerical model to predict fiber tow saturation during liquid composite molding. *Composites Science and Technology*, 63(12) :1725–1736, 2003. [74](#)

- [106] P. Simacek, D. Heider, J. W. Gillespie Jr, and S. Advani. Post-filling flow in vacuum assisted resin transfer molding processes : Theoretical analysis. *Composites : Part A*, 40 :913–924, 2009. [121](#), [122](#), [123](#), [127](#)
- [107] P. Simacek, V. Neacsu, and S. G. Advani. A phenomenological model for fiber tow saturation of dual scale fabrics in liquid composite molding. *Polymer Composites*, 31(11) :1881–1889, 2010. [74](#)
- [108] A W Skempton. The pore-pressure coefficients A et B. *Géotechnique*, 4(4) :143–147, 1954. [130](#)
- [109] Zset Software. <http://www.zset-software.com/>. [38](#)
- [110] S. Soghrati, A. M. Aragon, C. A. Duarte, and P. H. Geubelle. An interface-enriched generalized FEM for problems with discontinuous gradient fields. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 89 :991–1008, 2012. [84](#)
- [111] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114 :146–159, 1994. [49](#)
- [112] Z. Tan, D. V. Le, K. M. Lim, and B. C. Khoo. An immersed interface method for the incompressible Navier-Stokes equations with discontinuous viscosity across the interface. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31 :1798–1819, 2009. [82](#)
- [113] K. Terzaghi. *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley & Sons Inc. (ISBN 9780471853053), 1943. [53](#), [128](#)
- [114] T. Tran, C. Binetruy, S. Comas-Cardona, and N-E. Abriak. Microporomechanical behavior of perfectly straight unidirectional fiber assembly : Theoretical and experimental. *Computers and Geotechnics*, 69(2) :199–206, 2009. [129](#)
- [115] G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, S. Nas, and J-Y. Jan. A Front-Tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of Computational Physics*, 169 :708–759, 2001. [45](#)
- [116] S. Vacher, J. Molimard, H. Gagnaire, and A. Vautrin. A Fresnel’s reflection optical fiber sensor for thermoset polymer cure monitoring. *Polymers and polymer composites*, 12(4) :269–276, 2004. [23](#)
- [117] J. Verrey, V. Michaud, and J.-A. E. Manson. Dynamic capillary effects in liquid composite molding with non-crimp fabrics. *Composite Part/A*, 37(1) :92–102, 2006. [75](#), [102](#)
- [118] Arnold Verruijt. *Consolidation of soils*. In Encyclopedia of Hydrological Sciences (ISBN 9780470848944), 2008. [129](#)
- [119] Arnold Verruijt. *An Introduction to Soil Dynamics*. Springer (ISBN 9789048134410), 2010. [129](#), [139](#), [140](#), [143](#)

- [120] Š. Šikalo, H.-D. Wilhelm, I. V. Roisman, S. Jakirlić, and C. Tropea. Dynamic contact angle of spreading droplets : experiments and simulations. *Physics of Fluids*, 17(6) :062103, 2005. [74](#)
- [121] Y. Wang, M. Moatamedi, and S. M. Grove. Continuum dual-scale modeling of liquid composite molding processes. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 28, 2009. [74](#)
- [122] E. W. Washburn. Note on a method of determining the distribution of the pore sizes in porous material. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 7(4) :115–116, 1921. [96](#)
- [123] S. Whitaker. The Forchheimer equation : A theoretical development. *Transport in Porous Media*, 25 :27–61, 1996. [36](#)
- [124] C. Williams, J. Summerscales, and S. Grove. Resin infusion under flexible tooling (rift) : a review. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 27(7) :517–524, 1996. [21](#)
- [125] M. Yeager, W. R. Hwang, and S. G. Advani. Prediction of capillary pressure for resin flow between fibers. *Composites Science and Technology*, 126 :130–138, 2016. [74](#)
- [126] Y. S. Yong and J. R. Youn. Numerical Investigation on Flow through Porous Media in the Post-infusion Process. *Polymer Composites*, 30(8) :1125–1131, 2008. [122](#)

NNT : 2019LYSEM005

Koloina ANDRIAMANANJARA

MODELISATION NUMERIQUE DES PROCEDES LCM A L'ECHELLE DES MILIEUX
HOMOGENES EQUIVALENTS EN COURS DE DEFORMATION – INTEGRATION DE
LA PRESSION CAPILLAIRE LORS DE L'INFUSION ET EQUILIBRAGE POST-
INFUSION

Speciality: Mechanics

Keywords: LCM, Infusion Processes, Composite Materials, Capillary Effects, Post-filling, Darcy, Biot

Abstract:

The liquid resin infusion process consists in impregnating a fibrous reinforcement through its thickness, under the pressure gradient created by pulling the vacuum in the system. This out-of-autoclave process was developed to reduce manufacturing and material storage costs and ensure proper filling of large parts; hence the increasing interest of the aeronautical industry in this technique.

This work, within the framework of the Hexcel-Mines Saint-Etienne Chair, aims to establish a robust and predictive numerical tool to simulate the main physical phenomena occurring during the process, at the macroscopic scale. In order to properly model the complex and multi-scale phenomena during the infusion process, a new numerical approach based on finite-element method is developed to model the capillary effects during the filling stage and to model the post-filling stage.

Capillary effects are represented by a capillary stress tensor acting at the bi-fluid interface of the flow modelled by Darcy's equations. This strategy, generating a pressure jump, requires a local pressure enrichment of the elements crossed by the fluid front. The latter is represented by a Level-set function convected by the fluid velocity. The convergence and implementation of the model are firstly validated by the Manufactured Solution Method. The numerical results are then compared with experimental data in the case of capillary rises of water in carbon reinforcements. The model is finally adapted to the mesoscopic scale to simulate the flow through the fibre tows.

A first approach of post-filling stage modeling is proposed. This stage describes the strong interaction between the preform deformation and the resin flow at the end of the filling step. Moreover, modeling this stage will allow to study the influence of fluid-solid coupling on the final part geometry regarding the dimensional tolerances, and to predict the evolution of the fibre volume fraction which will ultimately determine the mechanical properties of the part. The constitutive equations of the model are deduced from a thermodynamic approach used in poromechanics, and then solved with a finite element method. The first simulation tests has revealed a high potential and present a first step towards industrial simulators.

NNT : 2019LYSEM005

Koloina ANDRIAMANANJARA

MODELISATION NUMERIQUE DES PROCÉDES LCM A L'ECHELLE DES MILIEUX
HOMOGENES EQUIVALENTS EN COURS DE DEFORMATION – INTEGRATION DE
LA PRESSION CAPILLAIRE LORS DE L'INFUSION ET EQUILIBRAGE POST-
INFUSION

Spécialité : Mécanique

Mots clefs : Procédé d'infusion, LRI, Matériaux Composites, Effets Capillaires, Post-Infusion, Biot, Darcy, Discontinuité, Rééquilibrage

Résumé :

Le procédé d'élaboration par infusion de résine liquide consiste à imprégner un renfort fibreux à travers son épaisseur, sous l'effet d'un gradient de pression créé par la mise sous vide du système. Ce procédé hors autoclave, a été mis au point afin de réduire les coûts de fabrication et de stockage des matériaux et assurer un bon remplissage des pièces de grandes dimensions ; d'où l'intérêt grandissant de l'industrie aéronautique pour cette technique.

Ces travaux de thèse, dans le cadre de la Chaire Hexcel-Mines Saint-Etienne visent à établir un outil numérique robuste et prédictif pour simuler à l'échelle de la structure élaborée les principaux phénomènes physiques apparaissant pendant le procédé. Afin de mieux représenter ces phénomènes complexes multi-physiques, et multi-échelles lors de l'élaboration, une nouvelle approche numérique basée sur la méthode éléments-finis est développée pour modéliser d'une part les effets capillaires lors de la phase critique d'infusion, et d'autre part les écoulements post-infusion durant la phase de rééquilibrage.

Les effets capillaires sont représentés par un tenseur de contraintes capillaires agissant à l'interface bi-fluide de l'écoulement modélisé par les équations de Darcy. Cette stratégie, générant un saut de pression, nécessite un enrichissement local de la pression au niveau des éléments traversés par le front fluide qui est représenté par une fonction Level-set. La convergence et l'implémentation du modèle sont validées par la Méthode de la Solution Manufacturée. Les résultats numériques sont ensuite confrontés à mesures expérimentales dans le cadre d'une montée capillaire de l'eau dans des renforts en carbone. Le modèle est finalement adapté à l'échelle mésoscopique afin de simuler l'écoulement à travers les torons de fibres.

Une première approche de la modélisation de l'étape de post-infusion qui décrit la forte interaction entre la déformation de la préforme et l'écoulement de résine à la fin du remplissage, est ensuite proposée. Cette modélisation permettra, d'une part de prendre en compte l'influence du couplage fluide-structure sur les tolérances dimensionnelles de la pièce finale et le temps de repos nécessaire, et d'autre part de prédire l'évolution du taux volumique de fibres qui conditionnera in fine la performance mécanique de la pièce. Les équations constitutives du modèle sont déduites d'une approche thermodynamique utilisée en poromécanique et résolues par une méthode éléments finis. L'intégration de la modélisation de cette phase présente un premier pas vers les simulateurs dans un contexte industriel.