



**HAL**  
open science

# Études expérimentales d'ondes d'inertie en régime non-linéaire : attracteurs et turbulence d'ondes

Maxime Brunet

► **To cite this version:**

Maxime Brunet. Études expérimentales d'ondes d'inertie en régime non-linéaire : attracteurs et turbulence d'ondes. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2020. Français. NNT : 2020UPASS112 . tel-02923811

**HAL Id: tel-02923811**

**<https://theses.hal.science/tel-02923811v1>**

Submitted on 27 Aug 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Études expérimentales d'ondes d'inertie en régime non-linéaire : attracteurs et turbulence d'ondes

## Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n°579 : Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux  
et géosciences (SMEMaG)

Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides

Unité de recherche : Université Paris-Saclay, CNRS, FAST, 91405, Orsay, France.

Réfèrent : Faculté des sciences

Thèse présentée et soutenue à Orsay, le 1<sup>er</sup> juillet 2020, par

**Maxime Brunet**

### Composition du Jury

**Michael Le Bars**

Directeur de recherche au CNRS,  
Aix Marseille Université (IRPHE)

Rapporteur & Examineur

**Nicolas Mordant**

Professeur des Universités,  
Université Grenoble Alpes (LEGI)

Rapporteur & Examineur

**Sébastien Galtier**

Professeur des Universités,  
Université Paris-Saclay (LPP, École polytechnique)

Président

**Laurène Jouve**

Maîtresse de conférences,  
Université Paul Sabatier (IRAP)

Examinatrice

**Pierre-Philippe Cortet**

Chargé de recherche au CNRS,  
Université Paris-Saclay (FAST)

Directeur de thèse



# Remerciements

Les remerciements constituent malheureusement le seul petit paragraphe où l'on rend justice à cette aventure fondamentalement humaine qu'est la thèse de doctorat au sein d'un manuscrit profondément déshumanisé. J'espère que le lecteur gardera cela en tête tout au long de sa lecture de ce manuscrit et qu'il sera reconnaissant envers les personnes qui rendent ce travail possible et agréable.

Je souhaite tout d'abord exprimer ma gratitude aux membres de mon jury pour m'avoir fait l'honneur de manifester de l'intérêt envers mes travaux. En premier lieu mes rapporteurs Nicolas Mordant et Michael Le Bars pour avoir lu attentivement mon manuscrit et aussi Sébastien Galtier et Laurène Jouve pour avoir accepté de l'examiner dans cette délicate période confinée.

Mes remerciements les plus vifs vont à mon maître de thèse Pierre-Philippe Cortet qui aura su tout faire pour obtenir des résultats scientifiques sans jamais tomber dans la course à la publication. L'exigence, la réactivité et la droiture qui te caractérisent resteront à jamais des références pour moi.

Je remercie aussi Thierry Dauxois et Basile Gallet pour avoir été de formidables collaborateurs aux redoutables critiques constructives.

Un grand merci à l'ensemble de l'équipe technique pour avoir effectué un travail d'une grande qualité sur la plateforme. Alban pour avoir électrisé ma thèse et avoir tenu son rang de responsable hygiène et sécurité en 2020, Lionel pour avoir architecturé et réalisé de superbes montages expérimentaux, Raphaël, Johannes et Christophe pour leurs brillantes idées de bricolages qui rendent la vie d'un expérimentateur bien plus facile. Je remercie aussi Babacar pour avoir su nous ouvrir toutes les portes (parfois avec un coup de main de Raphaël) et configuré nos nombreux NAS.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble de l'équipe administrative du FAST constitué de Mai, Monique et Fabienne pour leur réactivité et sollicitude (et aussi quelques ti punch) dans un travail souvent ingrat.

En cette année 2020, je souhaite également exprimer ma reconnaissance envers le gouvernement français pour m'avoir mis dans les meilleures conditions pour rédiger cette thèse en me privant de sortie pendant mes deux derniers mois de rédaction.

Je remercie chaleureusement l'ensemble des permanents du Laboratoire FAST pour leur sympathie. Merci à Ludovic pour m'avoir montré comment bien choisir mon bureau, Cyprien pour avoir montré son amour de la mécanique des fluides en buvant une impressionnante quantité d'eau tous les midis, Laurent pour m'avoir permis d'afficher notre logo sur mes présentations, Jérôme pour ses longues passes à l'Ultimate, Frédérique pour avoir su faire entendre sa voix dans les pauses café et Frédéric M pour avoir apporté le petit support qui a permis à ma thèse de bien tourner. Je remercie aussi George, Anne, Neil, Georg, Philippe, Béatrice, Mojtaba, Sophie,

---

Lamine, Frédéric D, Antoine, Yann, Nicole, Dominique et Carine pour leur agréable conversation autour d'un repas ou d'une pause café. Je remercie tout particulièrement les deux directeurs du labo : Marc pour avoir été un directeur qui déménage et Harold pour avoir hérité du virus des difficultés administratives qui incombe à ce poste. Je tiens aussi à féliciter Jean-Pierre Hulin pour être un retraité d'une impressionnante énergie et d'une gentillesse à toute épreuve.

Je remercie tout aussi chaleureusement les non-permanents du FAST pour leur bonne humeur contagieuse. Merci à Perrine dont j'ai tellement apprécié la compagnie que la simple vue de sa voiture sur le parking suffisait à m'arracher un sourire, Florent pour avoir endosser des responsabilités au sein du labo sur lesquelles personne ne s'est essuyé, Aurore pour avoir été la pierre angulaire du CinéFAST en plus d'être capable de faire d'une pierre deux articles, Yiqin, Marguerite et Clotilde pour avoir été d'une gentillesse exceptionnelle, Arnaud pour avoir été un véritable coach de thèse pour moi, Chen pour ses excellentes passes à l'Ultimate, Marine pour avoir un montage expérimental très bien huilée et avec le vent en poupe, Julien pour avoir anticipé bien en avance la logistique de la raclette, Wladimir qui n'aura pas vécu d'effondrement dans une première année de thèse marquée par le déménagement et le confinement, Jishen pour son arrivée remarquée au sein du labo et Robin pour avoir vendu la Bretagne d'une façon aussi séduisante que les PC LaVision. Special thanks to Akash, Misa, Gianluca, Anastasia and Nicolo for being very nice people despite the language barrier, I will remember our bet forever. Je tiens aussi à remercier ceux qui ont partagé mon bureau : merci à Manon pour avoir fait une thèse qui déménage, Wen pour m'avoir montré comment se servir des clés de la réussite pour s'ouvrir des portes et Romaric pour avoir démontré ses talents d'expérimentateur en nous montrant sa technique d'ouverture d'une bouteille de coca secouée sans la faire mousser. Enfin, je tiens à remercier Eduardo Monsalve pour être un excellent voisin de bureau et pour avoir rapidement compris les nombreux rouages du montage expérimental et de mes codes Matlab labyrinthiques.

Je souhaite aussi remercier l'ensemble des personnes qui ont fait le déplacement pour voir ma soutenance de thèse à commencer par les anciens du magistère : Arnaud et sa coupe de cheveux de théoricien, Valentin qui aura fait une thèse sans aucune pression (même à 15 jours de rendre son manuscrit), Rémy et son délicieux cidre, Clément et ses cousins manouches et je remercie aussi ceux qui n'ont pas pu venir à cause du confinement : Martin, Cécile et Adrien. Merci aussi à Valentin qui aura eu le courage de partir de La Rochelle pour faire sa thèse à Saclay. Merci aussi à mes vieux amis de Virson pour leur bonne humeur contagieuse. Bien entendu ma plus profonde gratitude va à toute ma famille qui m'aura toujours soutenu pendant toutes ces années alors qu'elle ne comprenait pas réellement mon travail.

Merci à vous tous !

# Table des matières

Préambule	1
<b>1 Ondes d’inertie et turbulence en rotation</b>	<b>3</b>
1.1 L’équation de Navier-Stokes en référentiel tournant . . . . .	3
1.2 Le théorème de Taylor-Proudman ( $Ro \rightarrow 0, \sigma^* \rightarrow 0, Ro \ll Re$ ) . . . . .	4
1.3 Les ondes d’inertie ( $Ro \rightarrow 0, \sigma^* \leq 1$ ) . . . . .	5
1.3.1 Propagation des ondes d’inertie . . . . .	5
1.3.2 Faisceau d’ondes d’inertie auto-similaire . . . . .	8
1.4 Instabilité par résonance triadique ( $Ro \rightarrow 0, \sigma^* \leq 1, Re \geq 1$ ) . . . . .	11
1.5 Turbulence en rotation ( $Ro \lesssim 1, Re \gg 1$ ) . . . . .	16
1.5.1 La turbulence isotrope . . . . .	17
1.5.2 Bidimensionnalisation de la turbulence par la rotation . . . . .	20
1.5.3 Transfert d’énergie entre échelles . . . . .	22
1.5.4 Asymétrie cyclone-anticyclone . . . . .	26
1.6 Quel modèle pour la turbulence en rotation ? . . . . .	26
1.6.1 La turbulence d’ondes d’inertie . . . . .	28
1.6.2 Les ondes d’inertie dans les expériences et les simulations de turbulence . . . . .	31
1.7 Objectifs de cette thèse . . . . .	37
<b>2 Dispositifs expérimentaux</b>	<b>41</b>
2.1 La plateforme tournante “Gyroflow” . . . . .	41
2.2 Mesure des champs de vitesse . . . . .	42
2.2.1 Principe de la vélocimétrie par images de particules (PIV) . . . . .	42
2.2.2 Matériel utilisé pour la vélocimétrie par images de particules . . . . .	43
2.2.3 Calibrations et acquisitions PIV réalisées pendant cette thèse . . . . .	44
2.3 Dispositifs expérimentaux . . . . .	45
2.4 Dispositif électronique et mécanique du forçage des écoulements . . . . .	46
<b>3 Attracteurs d’ondes d’inertie en régime linéaire et non-linéaire</b>	<b>51</b>
3.1 Les attracteurs d’ondes internes . . . . .	52
3.1.1 Attracteurs inviscides . . . . .	52
3.1.2 Attracteur en présence de viscosité . . . . .	54
3.1.2.a Le modèle de Hazewinkel <i>et al.</i> . . . . .	55
3.1.2.b Le modèle de Grisouard et Staquet . . . . .	58

TABLE DES MATIÈRES

---

3.1.2.c	Extensions du modèle de Grisouard et Staquet . . . . .	59
3.2	Les observations numériques et expérimentales des attracteurs . . . . .	63
3.2.1	Régime linéaire . . . . .	63
3.2.2	Régime non-linéaire . . . . .	66
3.3	Une expérience d’attracteur d’ondes d’inertie . . . . .	68
3.3.1	Dispositif expérimental . . . . .	69
3.3.2	Résultats préliminaires . . . . .	72
3.3.2.a	Modèle pour l’onde forcée . . . . .	72
3.3.2.b	Régime transitoire de l’écoulement . . . . .	73
3.4	Régime linéaire . . . . .	74
3.5	Régime non-linéaire . . . . .	83
3.6	Instabilité par résonance triadique de l’attracteur . . . . .	91
3.7	Écoulement aux basses fréquences . . . . .	97
3.8	Conclusion . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Émergence d’un mode géostrophique</b>	<b>101</b>
4.1	Ondes d’inertie en régime non-linéaire, une voie vers la turbulence d’ondes ? . . .	102
4.1.1	Étude d’un tore oscillé par Duran-Matute <i>et al.</i> (2013) . . . . .	103
4.1.2	Étude numérique d’une instabilité elliptique par Le Reun <i>et al.</i> (2017) . .	104
4.1.3	Étude expérimentale d’une instabilité elliptique par Le Reun <i>et al.</i> (2019)	105
4.2	Dispositif expérimental . . . . .	107
4.3	Régime stationnaire de l’écoulement . . . . .	111
4.3.1	Spectres temporels du champ de vitesse . . . . .	111
4.3.2	Mode forcé . . . . .	113
4.3.3	Ondes sous-harmoniques . . . . .	115
4.3.4	Mode à basse fréquence . . . . .	117
4.3.5	Effet de “sweeping” . . . . .	120
4.4	Quel mécanisme donne naissance au mode géostrophique ? . . . . .	123
4.4.1	Émergence d’un mode géostrophique par des interactions quasi-résonantes	123
4.4.2	Régime transitoire de l’écoulement . . . . .	125
4.4.3	Instabilité par résonance quartetique . . . . .	129
4.5	Influence du taux de dissipation dans la couche limite sur le fond de l’aquarium .	134
4.6	Conclusion . . . . .	138
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Coefficients d’interactions quartetique</b>	<b>145</b>
A.1	Quartetique interaction coefficients . . . . .	146
	<b>Bibliographie</b>	<b>151</b>

# Préambule

La modification de la turbulence par une rotation d'ensemble est un phénomène majeur de la dynamique des écoulements géophysiques et astrophysiques, comme ceux dans les océans et l'atmosphère terrestres, le noyau liquide de la Terre, les planètes gazeuses, les étoiles [1–3]... La rotation d'ensemble est l'un des ingrédients essentiels de ces écoulements qui s'ajoute le plus souvent à d'autres comme la stratification en densité, la convection thermique, la magnétohydrodynamique dans les fluides conducteurs [3]... Dans ces écoulements, la turbulence joue un rôle majeur en réalisant des mélanges, en homogénéisant la température et, dans les fluides conducteurs, en pouvant même créer un champ magnétique par effet dynamo [4]. Ces ingrédients physiques variés permettent aussi la propagation de classes d'ondes spécifiques comme par exemple les ondes d'inertie pour les fluides en rotation, les ondes internes de gravité pour les fluides stratifiés ou encore les ondes d'Alfvén pour les fluides conducteurs. Tout comme la turbulence, ces ondes peuvent transporter de l'énergie et la redistribuer spatialement. Dans les écoulements géo et astrophysiques, les instabilités et les interactions non-linéaires que peuvent subir ces ondes sont elles-mêmes sources de turbulence et la compréhension de la dynamique régissant les ondes et la turbulence constitue alors un véritable défi.

Dans mon travail de thèse, j'ai étudié le régime non-linéaire d'écoulements soumis à une rotation d'ensemble et où l'énergie est injectée dans des ondes d'inertie. La trame de fond de ce travail est d'apporter des éléments de compréhension expérimentaux (et parfois théoriques) à la question du rôle des ondes d'inertie au sein des écoulements turbulents soumis à une rotation d'ensemble. L'objectif initial de cette thèse était ainsi l'obtention au laboratoire d'un régime de turbulence en rotation dominé par les ondes d'inertie que l'on nomme régime de turbulence d'ondes d'inertie. Celui-ci fait l'objet de prédictions précises mais n'avait jamais été mis en évidence expérimentalement ou numériquement à la date du début de ma thèse.

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Chapitre 1

## Ondes d'inertie et turbulence en rotation

### 1.1 L'équation de Navier-Stokes en référentiel tournant

Nous présentons tout d'abord les équations qui régissent la dynamique des fluides en rotation à partir desquelles nous mettrons en valeur différents régimes limites. On considère un fluide newtonien de masse volumique  $\rho$  (constante et uniforme) et de viscosité cinématique  $\nu$  soumis à une rotation d'ensemble définie par le vecteur taux de rotation  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ . L'évolution de son champ de vitesse Eulérien  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  dans le référentiel en rotation est régie par l'équation de Navier-Stokes, à laquelle on ajoute la force de Coriolis

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.1)$$

Dans cette équation, la rotation globale agit sur le champ de vitesse à travers la densité massique de la force de Coriolis  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ . Il est à noter que la densité massique de la force centrifuge a de son côté été absorbée dans le terme de gradient de pression à travers une redéfinition de la pression selon  $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2$  où  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  est le vecteur position depuis une origine sur l'axe de rotation. Cette absorption traduit en pratique la neutralité de la force centrifuge sur la dynamique des fluides en rotation à taux constant.

À partir des grandeurs caractéristiques du forçage de l'écoulement, une vitesse  $U$ , une longueur  $L$  et un taux d'évolution  $\sigma$ , on peut faire émerger de cette équation quatre nombres sans dimension indépendants :

1. le nombre de Reynolds  $Re = \frac{UL}{\nu} \simeq \frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|}$  qui compare le terme non-linéaire au terme visqueux,
2. le nombre de Rossby  $Ro = \frac{U}{2\Omega L} \simeq \frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|}{|2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}|}$  qui compare le terme non-linéaire à la force de Coriolis,
3. la fréquence adimensionnée  $\sigma^* = \frac{\sigma}{2\Omega} \simeq \frac{|\partial_t \mathbf{u}|}{|2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}|}$  qui compare le taux d'évolution du champ

de vitesse à la fréquence de Coriolis (égale à deux fois le taux de rotation),

4. le nombre d'Ekman  $E_k = \frac{\nu}{2\Omega H^2} \simeq \frac{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|}{|2\Omega \times \mathbf{u}|}$ , construit comme le rapport du terme visqueux et de la force de Coriolis mais en utilisant cette fois-ci comme échelle caractéristique la hauteur  $H$  de l'écoulement. Ce nombre sans dimension sera associé aux processus se développant dans ou en lien avec les couches limites sur les parois. Ce nombre peut aussi s'écrire comme  $E_k \sim \frac{Ro}{Re} \left(\frac{L}{H}\right)^2$ .

Dans la suite de ce chapitre, nous essayons dans un premier temps d'apporter quelques éléments pour se repérer dans le vaste espace des paramètres de la mécanique des fluides en rotation. Nous évoquerons en particulier la classe d'ondes internes spécifique aux fluides en rotation, les ondes d'inertie. Nous présentons ensuite un état de l'art succinct des connaissances sur la turbulence en rotation qui recouvre elle-même différents régimes et sur les ondes d'inertie en régime non-linéaire. Nous introduisons finalement la problématique du rôle que jouent les ondes d'inertie au sein de la turbulence en rotation et la question de la pertinence du formalisme de turbulence d'ondes pour décrire la turbulence en rotation.

## 1.2 Le théorème de Taylor-Proudman ( $Ro \rightarrow 0$ , $\sigma^* \rightarrow 0$ , $Ro \ll Re$ )

Le théorème de Taylor-Proudman s'obtient en prenant la limite de l'équation de Navier-Stokes en référentiel tournant lorsque le nombre de Rossby  $Ro = U/2\Omega L$  et la fréquence temporelle adimensionnée  $\sigma^* = \sigma/2\Omega$  tendent vers zéro, autrement dit lorsque la rotation est infiniment grande. Pour obtenir ce résultat, on néglige par ailleurs le terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes, c'est-à-dire que l'on considère le nombre de Rossby beaucoup plus petit que le nombre de Reynolds,  $Ro \ll Re$ . Le théorème de Taylor-Proudman traduit alors un équilibre, dit "géostrophique", entre le gradient de pression et la force de Coriolis

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = -2\Omega \times \mathbf{u}. \quad (1.2)$$

Cet équilibre a pour première conséquence un alignement des lignes isobares avec le champ de vitesse. La deuxième conséquence est obtenue en prenant le rotationnel de l'équation (1.2),

$$(\Omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0, \quad (1.3)$$

qui prédit une invariance du champ de vitesse dans la direction de l'axe de rotation. L'écoulement est alors bidimensionnel, i.e. indépendant de la coordonnée  $z$ , mais éventuellement avec trois composantes non-nulles du champ de vitesse.

Le théorème de Taylor-Proudman est souvent invoqué pour interpréter la tendance à la bidimensionnalisation des écoulements en rotation, y compris dans le cas turbulent. Il est important de souligner que, pour la turbulence en rotation, cette interprétation est incertaine, le théorème de Taylor-Proudman étant un résultat purement linéaire. Le théorème de Taylor-Proudman décrit ainsi un écoulement compatible avec l'état asymptotique des fluides en rotation

lorsque le nombre de Rossby décroît vers zéro [5–7]. Il n'explique cependant pas les processus qui construisent l'invariance des écoulements en rotation selon l'axe de rotation et encore moins lorsque ceux-ci sont non-linéaires. On notera finalement que le terme visqueux doit être négligé pour que le théorème soit valide, ce qui ne sera en pratique jamais le cas près des parois.

### 1.3 Les ondes d'inertie ( $Ro \rightarrow 0, \sigma^* \leq 1$ )

L'équation de Navier-Stokes en rotation (1.1) autorise la propagation d'une classe d'ondes spécifique, les ondes d'inertie, fruits de l'action de rappel de la force de Coriolis. Ces ondes sont cousines des ondes internes de gravité se propageant dans les fluides stratifiés en densité et qui trouvent leur origine dans l'action de la force de flottabilité. Dans le contexte géo et astrophysique [2], ces deux types d'ondes peuvent être excités, dans les océans, l'atmosphère, le noyau liquide des planètes (...), par de nombreux mécanismes et à des échelles variées [1]. Parmi ces mécanismes, on peut mentionner l'excitation de modes résonants dans le cœur des planètes par les forces de marée [8, 9] ou par des mouvements harmoniques perturbant la rotation de l'astre, tels la précession [10] et la libration [11]. Ces ondes peuvent aussi apparaître à la suite d'un forçage local comme les tremblements de terre [12, 13].

#### 1.3.1 Propagation des ondes d'inertie

Pour comprendre la structure et la dynamique de ces ondes, nous allons dans un premier temps nous intéresser à la limite  $Ro = 0$  de l'équation de Navier-Stokes en rotation (1.1), i.e.

$$\partial_t \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.4)$$

À cette équation s'ajoute la condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.5)$$

En utilisant des combinaisons des dérivées spatiales et temporelles des équations (1.4) et (1.5), on obtient l'équation

$$\left[ (\partial_t - \nu \nabla^2)^2 \nabla^2 + (2\Omega)^2 \partial_{zz} \right] \mathbf{u} = 0, \quad (1.6)$$

qui est en fait l'équation d'ondes des ondes d'inertie. En considérant une onde plane

$$\mathbf{u} = \Re \left[ \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \quad (1.7)$$

de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$  et de pulsation complexe  $\omega = \sigma + i\sigma_i$  ( $\Re$  désigne ici la partie réelle d'un nombre complexe), on obtient la relation de dispersion des ondes d'inertie :

$$\sigma = s 2\Omega \frac{k_z}{k}, \quad (1.8)$$

où  $s$  est le signe de  $k_z$  et  $k$  est la norme de  $\mathbf{k}$ .

On déduit aussi de ce calcul que le taux de dissipation visqueux d'une onde plane est

$$\sigma_i = \nu k^2, \quad (1.9)$$

montrant qu'une onde plane d'inertie est d'autant plus atténuée que sa longueur d'onde est petite.

La relation de dispersion (1.8) peut se réécrire

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{2\Omega} = s \cos \theta, \quad (1.10)$$

avec  $\theta$  l'angle que fait le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  avec l'axe de rotation (ici vertical). Nous voyons qu'une pulsation adimensionnée  $\sigma^* = \sigma/2\Omega$  sélectionne la direction du vecteur d'ondes sans imposer sa norme. Les ondes d'inertie sont donc anisotropes comme le montre la figure 1.1 montrant le champ de vitesse d'une onde plane d'inertie. Cette relation de dispersion implique aussi que les ondes d'inertie ont leur pulsation adimensionnée  $\sigma^*$  comprise entre 0 et 1.

À partir de l'expression (1.10), on détermine la vitesse de phase

$$\mathbf{c}_\varphi = \sigma \frac{\mathbf{k}}{k^2} \quad (1.11)$$

ainsi que, pour une onde se propageant dans le plan vertical  $(x, z)$ , l'expression de la vitesse de groupe

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \sigma = s \frac{2\Omega k_x}{k^3} (-k_z, 0, k_x) \quad (1.12)$$

des ondes d'inertie. Il est important de remarquer ici que la vitesse de groupe est perpendiculaire à la vitesse de phase, ce qui signifie que l'onde se propage dans un plan faisant un angle  $\theta$  avec l'horizontale.

Le champ de vitesse obtenue en injectant l'expression (1.7) d'une onde plane se propageant dans le plan vertical  $(x, z)$  dans l'équation d'onde (1.6) est

$$u_x = \Re \left[ ik_z u_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \quad (1.13)$$

$$u_y = \Re \left[ sk u_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \quad (1.14)$$

$$u_z = \Re \left[ -ik_x u_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right], \quad (1.15)$$

où  $u_0$  est l'amplitude de l'onde. Ce champ de vitesse correspond à un mouvement de translation circulaire à la pulsation  $\sigma = 2\Omega \cos \theta$  dans le plan incliné d'un angle  $\theta$  et toujours dans le sens anticyclonique (i.e. opposé à la rotation globale, cf. figure 1.1). Un tel champ de vitesse peut s'écrire  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_\xi(\xi, y, \eta, t) \mathbf{e}_\xi + u_y(\xi, y, \eta, t) \mathbf{e}_y$ , où  $u_\xi = \cos \theta u_x + \sin \theta u_z$  et  $(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\eta)$  est un système de coordonnées cartésiennes attaché au plan incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale, comme le montre la figure 1.1. La phase évoluant linéairement avec la coordonnée  $\eta$  normale au plan dans lequel a lieu le mouvement, les plans parallèles inclinés de  $\theta$  sont en fait

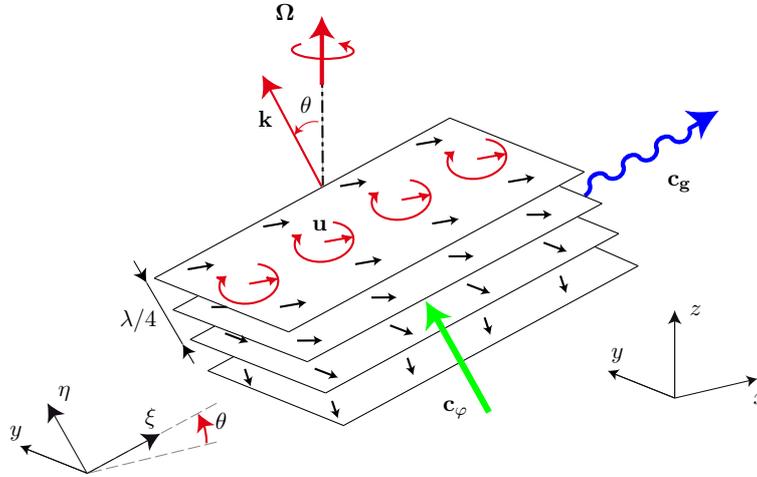


FIGURE 1.1 – Vue schématique de la géométrie d’une onde plane d’inertie d’hélicité négative ( $s = +1$ ) et définition des systèmes de coordonnées cartésiennes.

tous animés du même mouvement de translation circulaire mais avec un déphasage proportionnel à leur distance. Ce déphasage construit un cisaillement qui a pour conséquence un champ de vorticité  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  parallèle en chaque point au vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  (cf. figure 1.1). C’est de cet alignement entre vorticité et vitesse que vient un autre nom parfois utilisé pour désigner les ondes d’inertie, les “ondes hélicoïdales”. Le signe  $s$  est opposé à celui de l’hélicité de l’onde  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}$ . On note par ailleurs que le vecteur d’onde  $\mathbf{k}$  est normal au plan dans lequel le mouvement a lieu, ce qui fait des ondes d’inertie des ondes transverses.

Les ondes d’inertie sont cousines des ondes internes de gravité apparaissant dans les fluides stratifiés en densité. En effet ces deux types d’ondes ont pour particularité d’avoir leur pulsation qui impose leur direction de propagation mais qui n’impose pas leur nombre d’ondes. Les ondes internes de gravité ont elles aussi une vitesse de phase orthogonale à leur vitesse de groupe. Le mouvement des particules fluides au sein d’une onde interne de gravité est toutefois diff rent de celui dans une onde d’inertie : les particules fluides oscillent parallèlement à la direction de propagation et aucune vitesse dans la direction normale à la gravité et à la propagation n’est présente (la direction  $y$  dans nos notations). La similarité entre les relations de dispersion des ondes d’inertie et des ondes internes de gravité amène évidemment certaines propriétés similaires comme les lois décrivant l’épaississement visqueux des faisceaux se propageant depuis une source locale ou la structure primaire des attracteurs d’ondes dans lesavit s. Mais assez vite, ces deux types d’ondes présentent des comportements différents, en régimes linéaire et non-linéaire. Une des raisons à ces différences réside dans la différence de dimensionnalité du mouvement des particules fluides dans ces ondes : les ondes d’inertie ont une composante de vitesse oscillante dans la direction normale à la propagation et à la rotation (la direction d’invariance  $y$  pour notre onde plane) alors que le mouvement des particules fluides dans une onde interne est constitué d’une translation oscillante selon la direction de propagation de l’onde. Nous comparerons

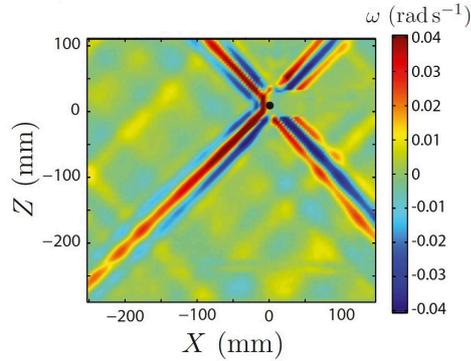


FIGURE 1.2 – Illustration expérimentale de la croix de Saint-André produite par l’oscillation verticale d’un cylindre horizontal situé en  $(0, 0)$ . Le cylindre oscille à la fréquence  $\sigma^* = \sigma/2\Omega = 0.67$ , indiquant que les quatre faisceaux font un angle  $\theta = 48^\circ$  avec l’horizontale. La carte de couleur montre la composante hors-plan de la vorticité  $\omega_y$ . Extrait de Cortet *et al.* [18].

régulièrement ces deux types d’ondes dans ce manuscrit.

### 1.3.2 Faisceau d’ondes d’inertie auto-similaire

Dans la partie précédente, nous avons étudié la structure d’une onde plane d’inertie. Nous allons maintenant nous intéresser à celle d’un faisceau issu d’une source ponctuelle 2D, c’est-à-dire une source ligne (invariante dans la direction horizontale  $y$ ) dans l’espace à trois dimensions, et de pulsation  $\sigma$ . Les faisceaux d’ondes émis par une source “ligne” sont d’une grande importance dans les fluides en rotation puisque la plupart des forçages harmoniques, même à grande échelle, conduisent à l’excitation de faisceaux localisés à travers l’apparition de couches limites d’Ekman qui sont sujettes à des éruptions sur des lignes dites critiques [14]. En géophysique et en astrophysique, les mouvements harmoniques de précession et de libration des planètes ainsi que les mouvements de fluide liés aux marées conduisent à l’émission de tels faisceaux d’ondes internes (de gravité et/ou d’inertie) aux latitudes critiques de la croûte planétaire [14] ou sur les lignes critiques des topographies des fonds océaniques [15]. La description de la propagation des faisceaux d’ondes émis par une source “ligne” a ainsi reçu une attention importante par le passé avec notamment la célèbre approche auto-similaire de Moore et Saffman [16] et Thomas et Stevenson [17] de l’étalement visqueux du faisceau que nous allons présenter dans cette partie.

Une source ligne, c’est-à-dire une source ponctuelle dans le plan  $(x, z)$  et invariante dans la direction horizontale  $y$ , d’ondes inertie à la fréquence  $\sigma$  va imposer à travers la relation de dispersion l’angle de propagation  $\theta = \arccos(\sigma/2\Omega)$  des ondes produites avec l’horizontale. Dans le plan  $(x, z)$ , la source va ainsi émettre quatre faisceaux d’ondes formant un motif appelé “croix de Saint-André”. Une illustration expérimentale de ce motif réalisée par Cortet *et al.* [18] grâce à l’oscillation d’un cylindre horizontal dans un fluide en rotation est représentée à la figure 1.2.

Les quatre faisceaux d’ondes produits par la source ont une structure auto-similaire qui se traduit par un étalement des échelles transverses (largeur du faisceau et longueur d’onde) et une

### 1.3. LES ONDES D'INERTIE ( $Ro \rightarrow 0, \sigma^* \leq 1$ )

---

atténuation de l'amplitude en vitesse de l'onde à mesure que l'on s'éloigne de la source. Dans la suite de cette partie, nous allons décrire la physique de ce comportement. Une source ligne va émettre un large spectre de longueurs d'onde. La forme de ce spectre va dépendre de l'ordre de la polarité de la source ponctuelle –monopolaire, dipolaire, ...–, chaque ordre étant associé à la conservation le long du faisceau d'un moment particulier du champ de taux d'expansion de la source [19, 20]. Pour la source monopolaire, le flux de matière est ainsi conservé le long du faisceau alors que celui-ci est nul pour la source dipolaire et c'est le moment suivant qui est conservé. Alors que l'atténuation visqueuse d'une onde plane d'inertie est exponentielle (cf. équation (1.9)), l'amplitude en vitesse d'un faisceau d'ondes auto-similaire suit une loi de puissance. Nous ne fournirons ci-dessous que des arguments qualitatifs mais nous invitons le lecteur cherchant une démonstration à se référer à l'article de Machicoane *et al.* [19].

Pendant un intervalle de temps  $t$ , l'amplitude d'une onde plane d'inertie monochromatique de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  diminue d'un facteur  $\epsilon_k = \exp(i\sigma_i t) = \exp(-\nu k^2 t)$  alors que l'onde parcourt une distance  $\xi = c_g t$  avec  $c_g$  la norme de la vitesse de groupe. Comme  $c_g = 2\Omega k_x / k^2 = 2\Omega \sin \theta / k$  (cf. équation 1.12), le facteur d'atténuation peut s'écrire :

$$\epsilon_k = \exp(-\ell^2 k^3 \xi) \quad (1.16)$$

avec

$$\ell = \frac{\nu^{1/2}}{(2\Omega \sin(\theta))^{1/2}} = \frac{\nu^{1/2}}{((2\Omega)^2 - \sigma^2)^{1/4}} \quad (1.17)$$

une longueur visco-rotationnelle caractéristique des couches limites d'Ekman sur les parois.

À une distance  $\xi$  de la source, le plus grand vecteur d'onde pour lequel l'énergie a été dissipée d'un facteur plus petit qu'une valeur arbitraire  $\epsilon^*$  est  $k_{max} = (\ell^2 \xi)^{-1/3} \ln \epsilon^*$  et le faisceau d'ondes est alors constitué d'ondes de vecteurs d'ondes compris entre 0 et  $k_{max}$ . La largeur caractéristique et la longueur d'onde caractéristique du faisceau à la distance  $\xi$  de la source vont alors être proportionnelles à la longueur  $\delta(\xi) \sim k_{max}^{-1}$  soit

$$\delta(\xi) = \xi^{1/3} \ell^{2/3}. \quad (1.18)$$

À la lumière de ce raisonnement, on peut essayer d'utiliser la longueur caractéristique  $\delta(\xi)$  pour adimensionner la coordonnée transverse  $\eta$  au faisceau d'ondes dans l'équation de propagation. On démontre alors le caractère auto-similaire des solutions de ce problème (voir Machicoane *et al.* [21]). Les solutions sont de la forme

$$u_\xi^{(m)}(\xi, \eta, t) = U_0 \left( \frac{\ell}{\xi} \right)^{(m+1)/3} [c_m(\eta/\delta) \cos(\sigma t + \phi) + s_m(\eta/\delta) \sin(\sigma t + \phi)], \quad (1.19)$$

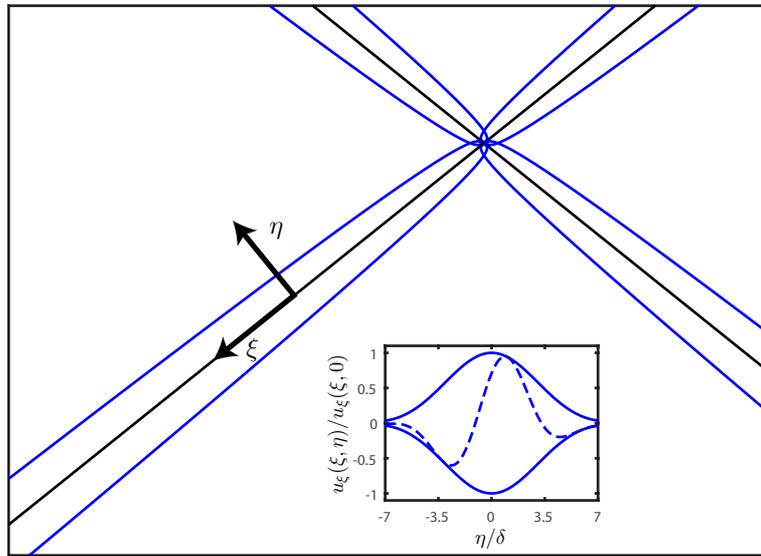


FIGURE 1.3 – Illustration des quatre faisceaux d’ondes émis par une source ligne (invariante dans la direction normale à la figure) prédits par l’équation (1.19) dans un fluide en rotation autour de l’axe vertical formant le motif de la croix de Saint-André. La largeur à mi-hauteur de l’enveloppe des quatre faisceaux d’ondes auto-similaires issus d’une source monopolaire ( $m = 0$ ) est représentée en bleu. La miniature montre en pointillé un profil instantané de la composante selon  $\xi$  de la vitesse en fonction de la coordonnée transverse au faisceau  $\eta$  et son enveloppe en trait plein. On note que la normalisation de l’axe des abscisses par  $\delta(\xi)$  et celle de l’axe des ordonnées par  $u_\xi(\xi, 0)$  implique que cette coupe est identique quelque soit la coordonnée  $\xi$  le long du faisceau.

#### 1.4. INSTABILITÉ PAR RÉSONANCE TRIADIQUE ( $Ro \rightarrow 0$ , $\sigma^* \leq 1$ , $Re \geq 1$ )

---

pour la composante de la vitesse le long de l'axe de propagation du faisceau et

$$\omega_y^{(m)}(\xi, \eta, t) = \frac{U_0}{\ell} \left(\frac{\ell}{\xi}\right)^{(m+2)/3} [-s_{m+1}(\eta/\delta) \cos(\sigma t + \phi) + c_{m+1}(\eta/\delta) \sin(\sigma t + \phi)], \quad (1.20)$$

pour la composante hors-plan de la vorticité. Dans ces formules  $\eta$  est la coordonnée transverse locale (cf. figure (1.3)) et  $\delta$  est défini par l'équation (1.18). La normalisation par  $\delta$  montre que les échelles caractéristiques du faisceau évoluent en  $\xi^{1/3}\ell^{2/3}$  conformément au raisonnement qualitatif effectué précédemment. Les fonctions  $c_m$  et  $s_m$  ont été introduites par Moore et Saffman [16] ainsi que Thomas et Stevenson [17] pour décrire respectivement les faisceaux auto-similaires d'ondes internes d'inertie et de gravité. Ces fonctions réelles sont défini par

$$c_m(\zeta) + is_m(\zeta) = \int_0^\infty K^m e^{-K^3 + iK\zeta} dK. \quad (1.21)$$

Les équations (1.19) et (1.20) nous disent que toute une classe de solution existent pour les différentes valeurs de l'indice  $m$ . On peut alors montrer que dans les équations (1.19), (1.20) et (1.21), l'entier  $m + 1$  correspond à l'ordre multipolaire de la source d'ondes (voir [21]) :  $m = 0$  correspond à une source monopolaire et  $m = 1$  à une source dipolaire. Comme le montre l'équation (1.19), la principale différence entre les deux types de source est le déclin de l'amplitude en vitesse en  $\xi^{-1/3}$  pour une source monopolaire et  $\xi^{-2/3}$  pour une source dipolaire. Afin de fournir une illustration visuelle d'un faisceau d'ondes auto-similaire, nous montrons à la figure 1.3 les quatre faisceaux produits par une source monopolaire ( $m = 0$ ) selon l'équation (1.19).

La pertinence de ce modèle pour décrire les faisceaux expérimentaux produits par des sources monopolaires et dipolaires a été confirmée par Machicoane *et al.* [21] en 2015. Leurs profils expérimentaux de vorticité dans la direction  $\eta$  transverse au faisceau dans le plan  $(x, z)$  sont comparés, pour les cas mono et dipolaire, avec la prédiction théorique de l'équation (1.20)   la figure 1.4.

#### 1.4 Instabilité par résonance triadique ( $Ro \rightarrow 0$ , $\sigma^* \leq 1$ , $Re \geq 1$ )

Nous allons voir dans cette partie que les ondes d'inertie sont instables lorsque leur amplitude dépasse un certain seuil : c'est la célèbre instabilité par résonance triadique des ondes internes qui est à la fois observée pour les ondes internes de gravité et d'inertie. Dans cette partie, nous présentons succinctement le mécanisme de l'instabilité par résonance triadique d'une onde plane d'inertie. Le lecteur est invité à lire l'article de Bordes *et al.* [22] qui étudie expérimentalement cette instabilité dans un fluide en rotation ainsi que les articles de Smith et Waleffe [23] et de Koudella et Staquet [24] qui donnent les bases pour la décrire théoriquement.

Le mécanisme d'instabilité par résonance triadique appar it naturellement lorsqu'on introduit la décomposition du champ de vitesse sur la base des modes hélicoïdaux comme le font Smith et Waleffe [23]. Ainsi, tout champ de vitesse  $\mathbf{u}$  peut être vu comme une superposition de

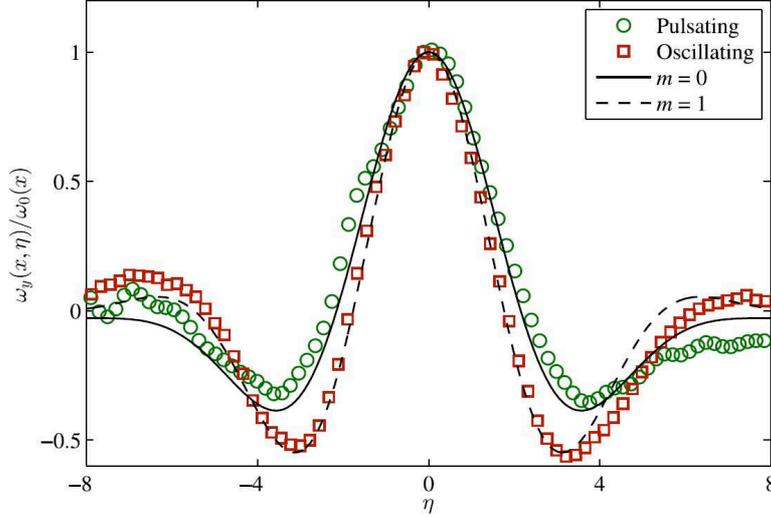


FIGURE 1.4 – Courbes expérimentales du profil de vorticité normalisé  $\omega_y(\eta, t)/\omega_0(x)$  d'un faisceau produit par un cylindre dont le diamètre oscille et un cylindre en translation verticale oscillante en fonction de la coordonnée transverse locale  $\eta$ . Ces courbes sont comparées aux profils des faisceaux de Moore et Saffman produits par une source monopolaire ( $m = 0$ ) et une source dipolaire ( $m = 1$ ). Dans les notations de l'article,  $\eta$  est normalisé par  $\delta = x^{1/3}\ell^{2/3}$ . L'instant  $t$  est choisi de sorte que le maximum du profil soit en  $\eta = 0$ . Extrait de Machicoane *et al.* [21].

modes hélicoïdaux d'amplitude  $b_s(\mathbf{k}, t)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1} b_s(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_s(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \sigma_s(\mathbf{k})t]}, \quad (1.22)$$

où  $\sigma_s(\mathbf{k})$  est la pulsation,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde et  $-s$  le signe de l'hélicité du mode hélicoïdal. Un mode hélicoïdal  $\mathbf{h}_s(\mathbf{k})$  est orthogonal à  $\mathbf{k}$  (par incompressibilité du fluide) et est défini par

$$\mathbf{h}_s(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}|} + i s \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}|}, \quad (1.23)$$

avec  $\hat{\mathbf{z}}$  le vecteur unitaire de l'axe de rotation  $z$  et  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ .

Cette décomposition n'est pas spécifique aux fluides en rotation mais est particulièrement adaptée à l'étude des ondes d'inertie parce qu'elles possèdent une structure hélicoïdale (cf. partie 1.3). Le champ de vitesse d'une onde plane d'inertie peut ainsi s'écrire  $\mathbf{h}_s(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \sigma_s(\mathbf{k})t)}$  avec la pulsation  $\sigma_s(\mathbf{k})$  vérifiant la relation de dispersion  $\sigma_s(\mathbf{k}) = s 2\Omega k_z/k$  des ondes d'inertie.  $b_s(\mathbf{k}, t)$  est alors l'amplitude en vitesse de l'onde qui évolue sur des temps longs relativement à la période de l'onde. On peut ainsi interpréter cette décomposition comme l'analogue d'une transformée de Fourier dans une base hélicoïdale adaptée aux ondes d'inertie.

En injectant cette décomposition dans l'équation de Navier-Stokes en rotation (1.1), on

#### 1.4. INSTABILITÉ PAR RÉSONANCE TRIADIQUE ( $Ro \rightarrow 0$ , $\sigma^* \leq 1$ , $Re \geq 1$ )

---

obtient l'équation

$$(\partial_t + \nu k^2) b_{s_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{0}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{q}}} e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t}, \quad (1.24)$$

où la barre  $\bar{\cdot}$  désigne le complexe conjugué et  $b_{s_{\mathbf{k}}}$  et  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}}$  sont des notations condensées de  $b_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t)$  et  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k})$ . Dans l'équation (1.24), la somme doit être comprise comme une somme sur tous les vecteurs d'onde  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  tels que  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$  (il s'agit de la condition de résonance spatiale) avec les hélicités correspondantes  $-s_{\mathbf{p}}$  et  $-s_{\mathbf{q}}$ . Le coefficient d'interaction est donné par

$$C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} = \frac{s_{\mathbf{q}}q - s_{\mathbf{p}}p}{2} [\bar{\mathbf{h}}_{s_{\mathbf{p}}}(\mathbf{p}) \times \bar{\mathbf{h}}_{s_{\mathbf{q}}}(\mathbf{q})] \cdot \bar{\mathbf{h}}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}). \quad (1.25)$$

Celui-ci est homogène à un nombre d'ondes. La série d'équation (1.24) décrit l'évolution de l'amplitude de chaque mode hélicoïdal en fonction de ces interactions triadiques avec tous les couples d'autres modes en présence dans l'écoulement. Dans cette écriture, on suppose que chaque mode est l'objet d'une évolution temporelle faite d'une oscillation rapide à la fréquence  $\sigma_s(\mathbf{k})$  vérifiant la relation de dispersion et d'une évolution lente dont rend compte l'amplitude  $b_s(\mathbf{k}, t)$ . Cette décomposition prend tout son sens lorsque l'écoulement est effectivement composé d'ondes d'inertie en interactions faiblement non-linéaires. Elle reste toutefois correcte, même si elle perd de son intérêt, lorsque l'écoulement n'est plus composé d'ondes, les amplitudes  $b_s$  évoluant alors aussi vite, voire plus vite, que l'oscillation sinusoïdale. Dans le cas où les modes sont bien des ondes d'amplitude en lente évolution, le terme d'oscillation temporelle  $\exp i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t$  est alors en général de moyenne quasi nulle sur des temps longs et rendra donc les interactions triadiques peu efficaces. Cette conclusion ne concerne toutefois pas les triades d'ondes résonantes, lorsque les trois modes en interactions sont en résonance triadique temporelle, c'est-à-dire lorsque  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}} = 0$ .

En supposant un état de base composé d'une unique onde plane d'inertie de pulsation  $\sigma_0$ , de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$ , d'hélicité de signe  $-s_0$  et d'amplitude  $b_{s_{\mathbf{k}_0}}$  et en restreignant la décomposition (1.24) à trois ondes d'inertie en résonance temporelle  $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 0$  et en résonance spatiale  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ , il est possible de prédire la croissance exponentielle de l'amplitude de couples d'ondes secondaires de vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  avec un taux de croissance [22, 24]

$$\gamma = \sqrt{\frac{\nu^2}{4}(k_1^2 - k_2^2)^2 + C_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_0\mathbf{k}_2}^{s_{\mathbf{k}_1}s_{\mathbf{k}_0}s_{\mathbf{k}_2}} C_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_0\mathbf{k}_1}^{s_{\mathbf{k}_2}s_{\mathbf{k}_0}s_{\mathbf{k}_1}} |b_{s_{\mathbf{k}_0}}|^2} - \frac{\nu}{2}(k_1^2 + k_2^2)}. \quad (1.26)$$

On note que le taux de croissance inviscide de cette instabilité par résonance triadique est homogène à l'inverse d'un temps non-linéaire  $1/\tau_{nl} = U/L$  où  $U$  est la vitesse caractéristique de l'onde primaire de l'instabilité et  $L$  est l'échelle de longueur d'onde (supposée du même ordre de grandeur pour les trois ondes de la triade). Dans l'équation (1.26), le taux de croissance inviscide est équilibré par un taux de dissipation visqueuse volumique classique en  $\nu/L^2$  donnant au final à l'instabilité par résonance triadique un seuil en terme du nombre de Reynolds de l'onde primaire et donc indépendant du taux de rotation  $\Omega$ .

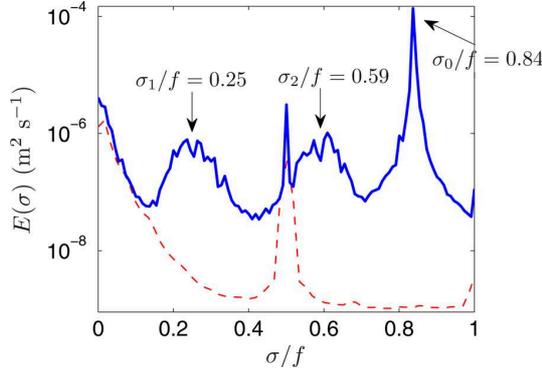


FIGURE 1.5 – Spectre temporel de l'énergie du champ de vitesse mesuré lors d'une expérience où l'on force une onde plane à la fréquence adimensionnée  $\sigma_0^* = \sigma_0/2\Omega = 0.84$ . Les fréquences en abscisses sont adimensionnées par la fréquence  $f = 2\Omega$ . La courbe en trait rouge tireté montre le spectre obtenu lors d'une expérience réalisée sans forçage. Extrait de Bordes *et al.* [22].

Il est ainsi remarquable de noter que dans cette approche théorique, la physique des ondes d'inertie n'apparaît pas explicitement dans l'équation (1.24) et n'intervient qu'indirectement dans les coefficients d'interaction  $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s\mathbf{k}s\mathbf{p}s\mathbf{q}}$  de l'équation (1.25) entre les modes et donc dans le taux de croissance de l'instabilité (1.26) à travers les contraintes imposées aux vecteurs d'ondes par la relation de dispersion et les relations de résonances temporelle et spatiale.

On constate aussi que les coefficients d'interaction triadique  $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s\mathbf{k}s\mathbf{p}s\mathbf{q}}$  de l'équation (1.25) sont strictement nuls si la triade résonante implique un mode 2D, c'est-à-dire invariant verticalement. Ce résultat, parfois appelé "Théorème de Greenspan" [25] nous affirme que des ondes d'inertie ne peuvent pas échanger d'énergie avec un mode 2D à travers une interaction par résonance triadique. Nous soulignons finalement que les ondes d'inertie peuvent toutefois bien échanger de l'énergie avec un mode 2D au sein d'une triade non-résonante. Mais ces échanges resteront évidemment moins efficaces qu'au sein d'une triade résonante impliquant trois ondes à trois dimensions. Nous reviendrons sur ce sujet au chapitre 4 où deux modèles d'échanges d'énergie entre ondes 3D et mode 2D à travers des triades non-résonantes seront présentés.

La première illustration expérimentale de l'instabilité par résonance triadique dans le cas d'une onde plane d'inertie date de 2012 et a été réalisée par Bordes *et al.* [22]. En forçant une onde plane à la fréquence  $\sigma_0/2\Omega = 0.84$ , les auteurs ont observés dans leur spectre temporel de l'énergie cinétique l'apparition de deux bosses centrées autour des fréquences  $\sigma_1/2\Omega = 0.25$  et  $\sigma_2/2\Omega = 0.59$ . Ces fréquences sous-harmoniques sont bien en résonance triadique avec celle de l'onde forcée, c'est-à-dire  $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2$ . Bordes *et al.* [22] ont aussi démontré que les ondes sous-harmoniques vérifiaient la condition de résonance spatiale  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$  et surtout que le couple d'ondes secondaires observé correspondait à celui déterminé par la maximisation du taux de croissance théorique (1.26) sur tous les couples d'ondes secondaires résonants possibles. On remarque finalement dans les spectres temporels de Bordes *et al.* (cf. figure 1.5) que les bosses sous-harmoniques sont larges, traduisant le caractère peu sélectif de l'instabilité dans ces

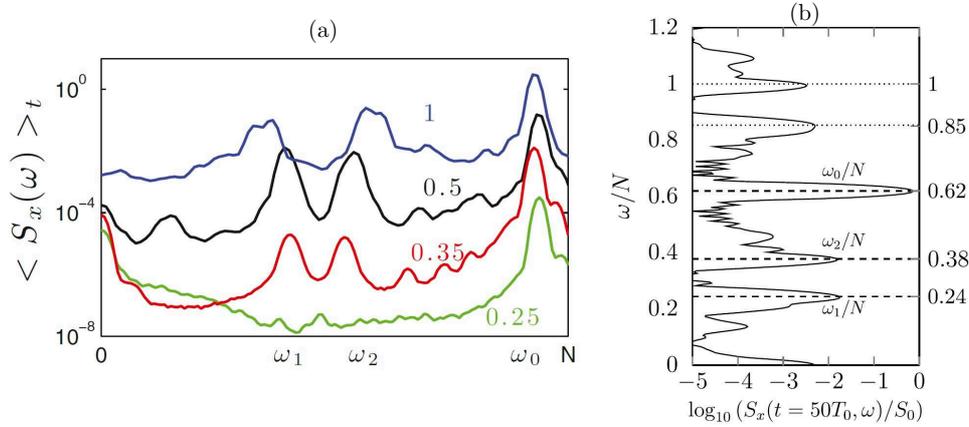


FIGURE 1.6 – (a) Spectre temporel de l'énergie du champ de vitesse mesuré lors d'une expérience réalisée au sein d'un fluide stratifié en densité où l'on force une onde interne de gravité à la fréquence adimensionnée  $\omega_0 = 0.94 N$  avec  $N$  la fréquence de flottabilité aussi dite de Brunt-Väisälä. Extrait de Joubaud *et al.* [26]. (b) Spectre temporel de l'énergie du champ de vitesse mesuré lors d'une expérience où est généré un attracteur d'ondes internes de gravité à la fréquence  $\omega_0 = 0.62 N$ . Extrait de Scolan *et al.* [27].

expériences.

Les ondes internes de gravité peuvent elles aussi subir une instabilité par résonance triadique tout à fait similaire à celle des ondes d'inertie. Il est alors intéressant de comparer l'instabilité par résonance triadique de l'onde plane d'inertie obtenue par Bordes *et al.* [22] avec celle de l'onde interne de gravité obtenue par Joubaud *et al.* [26] (cf. figure 1.6(a)) expérimentalement en 2012 ainsi qu'avec celle obtenue par Scolan *et al.* [27] (cf. figure 1.6(b)) dans un attracteur d'ondes internes de gravité en 2013. Si l'instabilité par résonance triadique de Joubaud *et al.* [26] semble aussi peu sélective que celle de Bordes *et al.* [22], celle de Scolan *et al.* [27] l'est bien plus, ce qui se traduit par des bosses sous-harmoniques plus piquées dans les spectres temporels de l'énergie (cf. figure 1.6(b)). Par ailleurs, comme nous le verrons dans la partie 3.2.2 du chapitre 3, l'instabilité par résonance triadique obtenue par Jouve et Ogilvie [28] en 2014 dans des simulations numériques 2D d'un attracteur d'ondes d'inertie est fortement sélective. La question de la sélectivité de l'instabilité par résonance triadique notamment en fonction de la géométrie du problème et de la nature du faisceau de l'onde primaire reste donc un problème ouvert.

On remarque aussi que l'instabilité par résonance triadique obtenue par Joubaud *et al.* [26] (cf. figure 1.6(a)) produit des bosses sous-harmoniques qui s'éloignent de la moitié de la fréquence de forçage avec l'augmentation de l'amplitude de forçage. Or l'équation (1.26) prédit que les bosses sous-harmoniques se rapprochent de la moitié de la fréquence de forçage avec l'augmentation du nombre de Reynolds de l'onde primaire. Par ailleurs, Jouve et Ogilvie [28] observent des pics sous-harmoniques qui se rapprochent de la moitié de la fréquence de forçage avec l'augmentation du nombre de Reynolds. L'explication de ces différents comportements de

l'instabilité par résonance triadique en fonction du nombre de Reynolds (et de la structure) de l'onde primaire constitue aussi un problème ouvert.

Au cours de cette thèse, nous aborderons expérimentalement ces deux problèmes à la fois au chapitre 3 dans le cas d'un attracteur d'ondes et au chapitre 4 dans le cas d'une assemblée de faisceaux d'ondes auto-similaires.

## 1.5 Turbulence en rotation ( $Ro \lesssim 1$ , $Re \gg 1$ )

Dans cette partie, nous allons toujours nous intéresser aux effets d'une rotation d'ensemble sur la dynamique des fluides mais cette fois-ci dans des régimes turbulents. Notre intérêt se tournera ainsi en direction de la turbulence dans un fluide en rotation, sujet de recherche aux motivations géo et astrophysique fortes. L'introduction d'un axe privilégié dans l'écoulement (celui de la rotation) va naturellement rendre la turbulence anisotrope. Un certain nombre d'effets de la rotation sur la turbulence sont aujourd'hui très bien caractérisés. Ces effets peuvent se résumer en trois points :

- La rotation d'ensemble entraîne l'écoulement vers l'état asymptotique décrit par le théorème de Taylor-proudman (cf. partie 1.2), c'est-à-dire un écoulement bidimensionnel invarié selon l'axe de rotation mais sans l'atteindre complètement [29–34].
- La cascade d'énergie directe (des grandes vers les petites échelles), caractéristique de la turbulence tridimensionnelle, est rendue anisotrope par la rotation. Cette modification de la cascade de l'énergie vers les petites échelles est le plus souvent accompagnée d'une diminution de son intensité et/ou de l'émergence d'une cascade inverse d'énergie vers les grandes échelles [33, 35–39].
- La statistique des champs de vitesse brise la symétrie miroir par rapport aux plans verticaux, i.e. parallèles à l'axe de rotation. De manière plus intuitive, cela se traduit par une présence dominante de tourbillons cycloniques, i.e. tournants dans le même sens que la rotation d'ensemble, par rapport aux tourbillons anticycloniques [29, 32, 40, 41].

Ces trois propriétés de la turbulence en rotation ont reçues une grande attention depuis la fin des années 1970. Il serait trop long de discuter en détail l'ensemble de ces propriétés ici et nous ne présenterons que quelques études expérimentales ou numériques les illustrant. Le lecteur est invité à se reporter aux livres de référence de Sagaut et Cambon [42] et de Davidson [3] sur le sujet.

Avant de discuter de ces différents effets de la rotation sur la turbulence, nous allons réaliser quelques rappels de notions classiques sur la turbulence isotrope et invitons le lecteur désireux d'obtenir plus de détails à consulter les nombreux ouvrages de références qui traitent de ce sujet comme par exemple [43, 44].

### 1.5.1 La turbulence isotrope

L'équation de Navier-Stokes

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.27)$$

fait apparaître deux termes qui pilotent la dynamique du champ de vitesse  $\mathbf{u}$  : le terme non-linéaire d'advection  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  et le terme de diffusion visqueuse  $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ . En considérant un forçage qui engendre une vitesse typique  $U_f$  à une échelle spatiale  $L_f$ , l'importance relative des processus non-linéaires et visqueux peut être évaluée par le nombre de Reynolds associé au forçage  $Re_f = U_f L_f / \nu \sim |(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}| / |\nu \nabla^2 \mathbf{u}|$ . Pour un petit nombre de Reynolds  $Re_f \ll 1$ , la dynamique est dominée par les effets linéaires et visqueux et l'écoulement est laminaire. Les échelles caractéristiques (en vitesse et en longueur) que l'on retrouve dans l'écoulement sont celles du forçage. En revanche, à grand nombre de Reynolds  $Re_f \gg 1$ , la dynamique de l'écoulement est dominée par les effets non-linéaires. L'écoulement est alors turbulent et se compose d'un ensemble complexe de structures (tourbillons, couches de cisaillement ...) d'échelles spatiales distribuées sur un large continuum et qui évoluent de manière chaotique [44]. Le rapport entre l'échelle d'injection  $L_f$  et la plus petite échelle turbulente à laquelle la dissipation d'énergie a finalement lieu est de l'ordre de  $Re_f^{-3/4}$  [43].

Dans la vision communément admise de la turbulence 3D homogène et isotrope, il existe ainsi une gamme d'échelles dominées par les effets non-linéaires, appelée gamme inertielle, où l'énergie est transférée de proche en proche de la plus grande échelle de l'écoulement  $L_f$  vers les petites échelles à un taux  $\Pi$  indépendant de l'échelle : c'est la cascade d'énergie de Richardson [44, 45]. Considérons une échelle  $r$  dans cette gamme et donc associée à un nombre de Reynolds élevé  $Re_r = U_r r / \nu \gg 1$  avec  $U_r$  la vitesse associée à cette échelle. Son évolution temporelle est dans ce cas dominée par les interactions non-linéaires avec les autres échelles à travers le terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ . Le temps caractéristique sur lequel l'énergie dans les tourbillons de taille  $r$  est transférée aux tourbillons de plus petites tailles est évidemment le temps non-linéaire  $\tau_{r, \text{nl}} \sim r / U_r$  associé à cette échelle. On en déduit que le taux de transfert de l'énergie à travers l'échelle  $r$  est en moyenne de l'ordre de  $\Pi_r \sim U_r^2 / \tau_{r, \text{nl}}$ . De par la conservation du flux d'énergie dans la cascade, on a l'égalité  $\Pi_r = \Pi$  tant que  $Re_r \gg 1$ , c'est-à-dire tant que la dissipation visqueuse est négligeable. Le nombre de Reynolds associé à une échelle  $r$  de la cascade vérifie alors  $Re_r = \Pi^{1/3} r^{4/3} / \nu$  et décroît avec l'échelle  $r$ . La cascade s'arrêtera à l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  pour laquelle les effets visqueux deviennent significatifs, soit  $Re_\eta = \Pi^{1/3} \eta^{4/3} / \nu \sim 1$ . L'énergie est alors dissipée par les effets visqueux à un taux  $\varepsilon$  imposé par le taux de transfert  $\Pi$  de la cascade d'énergie, ce dernier étant lui-même fixé par les instabilités à la plus grande échelle de l'écoulement  $L_f$ , de sorte que

$$\varepsilon \sim \Pi \sim \Pi_{L_f} \sim \frac{U_f^3}{L_f}. \quad (1.28)$$

On note ici que c'est bien la viscosité du fluide  $\nu$  qui permet la dissipation de l'énergie mais que celle-ci n'intervient pas dans l'expression du taux moyen de dissipation de l'énergie  $\varepsilon \sim U_f^3 / L_f$ .

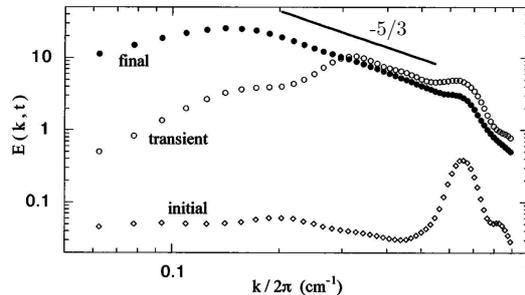


FIGURE 1.7 – Évolution temporelle du spectre spatial de l'énergie du champ de vitesse d'une expérience de turbulence dans un fluide conducteur dans un aquarium presque 2D ( $15 \times 15 \times 0.6 \text{ cm}^3$ ) forcée par un champ électromagnétique. La droite en trait plein montre une loi de puissance en  $k^{-5/3}$ . Extrait de Paret *et al.* [46].

Il s'agit là d'un élément central de la turbulence que l'on appelle anomalie dissipative de la turbulence.

Nous présentons à présent un argument qualitatif permettant de prédire la densité spectrale de puissance à une dimension (spatiale)  $E(k)$  du champ de vitesse turbulent en fonction du nombre d'onde  $k$ . L'analyse dimensionnelle de la relation de Parseval reliant le spectre spatial de l'énergie à l'énergie cinétique nous permet d'écrire que  $E(k)k \sim U_r^2$ , ce qui, d'après l'équation (1.28) et en rappelant que  $r \sim k^{-1}$  peut se réécrire

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (1.29)$$

Il s'agit là de la célèbre loi de puissance en  $k^{-5/3}$  qui constitue l'un des résultats les plus robustes de la turbulence isotrope. Cette loi a reçu un grand nombre de vérifications expérimentales dès les années 60 [47] et est valable sur toute la gamme inertielle d'échelles.

On remarque ici que le sens de la cascade est direct, i.e. des grandes vers les petites échelles, ce qui est bien observé expérimentalement [43, 44] pour une turbulence 3D. Pour une turbulence 2D isotrope, le sens de la cascade sera inverse, i.e. des petites vers les grandes échelles. Dans une turbulence 2D, l'énergie est en pratique transportée jusqu'à des échelles de l'ordre de grandeur des dimensions horizontales de l'aquarium dans lequel l'écoulement a lieu. Les arguments qualitatifs permettant de prédire le spectre de la turbulence présentés plus tôt sont toujours valides et on s'attend donc toujours à un spectre spatial de l'énergie en  $k^{-5/3}$ . Une mise en évidence remarquable de la cascade inverse de la turbulence 2D a été réalisée par Paret *et al.* en 1997 [46]. Les auteurs étudient le mouvement d'un fluide conducteur contenu dans un aquarium de  $15 \times 15 \times 0.6 \text{ cm}^3$  (c'est à dire presque 2D). En étudiant l'évolution temporelle du spectre spatial de l'énergie pendant le régime transitoire de leur écoulement, ils ont mis en évidence une propagation progressive de l'énergie à des échelles de plus en plus grandes suivant la loi de Kolmogorov (1.29) en  $k^{-5/3}$  (cf. figure 1.7).

Un autre outil central de la description statistique en échelle spatiale de la turbulence 3D

## 1.5. TURBULENCE EN ROTATION ( $Ro \lesssim 1$ , $Re \gg 1$ )

---

est l'incrément de vitesse

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.30)$$

Son moment d'ordre 2,  $E(\mathbf{r}, t) = \langle (\delta \mathbf{u})^2 \rangle$ , avec  $\langle \cdot \rangle$  désignant une moyenne d'ensemble et/ou spatiale renseigne sur la distribution de l'énergie dans l'espace des échelles  $\mathbf{r}$ . Pour une turbulence homogène (non nécessairement isotrope), l'évolution de  $E$ , et donc la conservation du flux de l'énergie dans l'espace des échelles, est régie par l'équation de Kármán-Howarth-Monin (KHM) [44, 48]

$$\partial_t E(\mathbf{r}, t) + 4\Pi(\mathbf{r}, t) = 2\nu \nabla_{\mathbf{r}}^2 E - 4\varepsilon + 2 \langle \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{f} \rangle \quad (1.31)$$

avec

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle \delta \mathbf{u}^2 \delta \mathbf{u} \rangle, \quad (1.32)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\nu}{2} \langle (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \rangle, \quad (1.33)$$

et où  $\mathbf{f}$  désigne un champ de force par unité de masse et  $\nabla_{\mathbf{r}}$  est la divergence par rapport au vecteur séparation  $\mathbf{r}$ . Le terme  $\varepsilon$  est le taux moyen de dissipation d'énergie cinétique par unité de masse et  $\Pi(\mathbf{r}, t)$  s'interprète comme le taux de transfert de l'énergie à l'échelle  $\mathbf{r}$ . L'équation de KHM se dérive de manière exacte à partir de l'équation de Navier-Stokes. On note qu'elle reste exacte et inchangée dans le cas en rotation en conséquence du fait que la force de Coriolis ne travaille pas. Dans la gamme inertielle d'une turbulence homogène et isotrope, l'équation de KHM se simplifie en

$$\Pi(\mathbf{r}) = -\varepsilon, \quad (1.34)$$

avec  $\Pi(\mathbf{r}) = \Pi(r \mathbf{e}_{\mathbf{r}})$ , traduisant de manière formelle la conservation du flux d'énergie évoquée plus tôt. En intégrant (1.34) sous l'hypothèse d'isotropie, on obtient la fameuse loi des  $4/5^{\text{ème}}$  de Kolmogorov [49],

$$\langle \delta u_l^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon r, \quad (1.35)$$

avec  $\delta u_l = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{r}}$  l'incrément longitudinal de vitesse. Cette loi, qui formalise de manière exacte la loi d'échelle  $\varepsilon \sim U_r^3/r$  évoqué plus tôt, a été vérifiée de nombreuses fois numériquement [50] et expérimentalement [51] dans des écoulements à grand nombre de Reynolds. À titre d'exemple, nous pouvons regarder l'étude de Moisy *et al.* de 1999 [34]. Cette étude expérimentale a été réalisée dans un écoulement de Von Kármán d'hélium gazeux, configuration qui a permis d'atteindre des nombres de Reynolds très élevés. Elle montre, grâce à des mesures de la vitesse locale au fil "chaud", un facteur  $K(r) = -\langle \delta u_l^3 \rangle / (\varepsilon r)$  qui sature de manière remarquable à la valeur  $4/5 = 0.8$  sur plus d'une décade d'échelles  $r$ , comme le prédit la loi (1.35) (cf. figure 1.8). On note que la vérification de la loi des  $4/5^{\text{ème}}$  sur les flux d'énergie entre échelles est beaucoup plus exigeante en terme de grand nombre de Reynolds que la loi des  $-5/3$  sur le spectre de l'énergie.

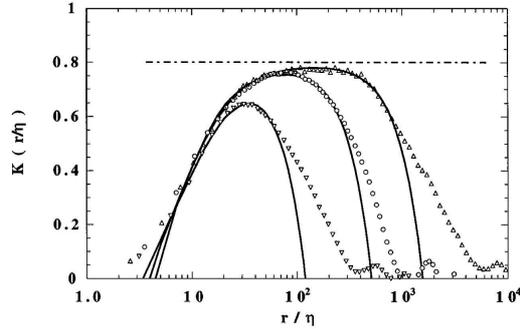


FIGURE 1.8 – Moment d'ordre 3 de la fonction de structure longitudinale normalisée  $K(r) = -\langle \delta u_l^3 \rangle / (\varepsilon r)$  pour des nombres de Reynolds croissants dans un écoulement de Von Kármán d'hélium gazeux. Les lignes en trait plein montrent des courbes prédites théoriquement. Extrait de Moisy *et al.* [34].

### 1.5.2 Bidimensionnalisation de la turbulence par la rotation

Nous discutons à présent de l'influence de la rotation sur la turbulence. L'effet le plus marqué que produit une rotation d'ensemble sur un écoulement turbulent est de l'entraîner vers un état anisotrope 2D tel que décrit par le théorème de Taylor-Proudman (cf. partie 1.2). Cette bidimensionnalisation fait uniquement référence à une invariance de l'écoulement selon l'axe de rotation  $\mathbf{e}_z$  et en aucun cas à la disparition de la composante verticale  $u_z$  du champ de vitesse. Cette tendance a été mise en évidence dans de nombreuses études expérimentales et numériques [32, 33, 39, 52–56].

Une des expériences pionnières qui illustre cette tendance est celle de Hopfinger, Browand et Gagne [32] datant de 1982 dans laquelle une grille horizontale est oscillée verticalement dans un cylindre en rotation. Cette expérience montre l'émergence de tourbillons alignés avec l'axe de rotation (cf. figure 1.9). On remarque toutefois que les petites échelles brisent l'invariance verticale de ces tourbillons. On devine ainsi que l'anisotropie de l'écoulement est dépendante de l'échelle considérée et que la bidimensionnalisation n'est pas totale.

Une autre illustration historique de la bidimensionnalisation de la turbulence par la rotation a été obtenue par Jacquin *et al.* [33] en 1990 dans une expérience de turbulence de grille en soufflerie dont une portion est en rotation. Des mesures au fil chaud de séries temporelles de la vitesse dans l'écoulement turbulent ont notamment permis de mesurer la longueur de corrélation du champ de vitesse selon l'axe de rotation. Les auteurs constatent que cette longueur croît avec le taux de rotation  $\Omega$  du fluide (cf. figure 1.10) indiquant la croissance d'une forte invariance le long de l'axe de rotation avec le taux de rotation  $\Omega$ .

Plus récemment, dans une expérience de turbulence en rotation et en déclin générée par la translation initiale d'une grille, Lamriben *et al.* [30] ont étudié en 2011 la répartition de l'énergie entre échelles orientées en calculant la carte du moment d'ordre 2 des incréments de vitesse  $E(\mathbf{r}, t) = \langle (\delta \mathbf{u})^2 \rangle$  (cf. équation (1.30)). Ils observent une répartition isotrope de l'énergie en l'absence de rotation (cf. figure 1.11(a)) et une répartition de l'énergie beaucoup plus inva-

## 1.5. TURBULENCE EN ROTATION ( $Ro \lesssim 1$ , $Re \gg 1$ )

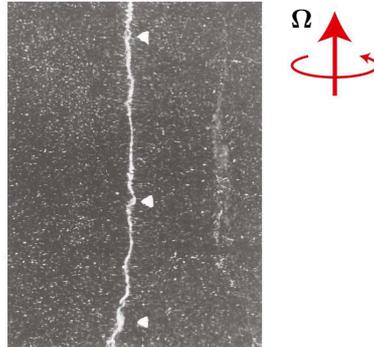


FIGURE 1.9 – Photographie dans un plan parallèle à l’axe de rotation vertical d’un écoulement en rotation dans une expérience où une grille horizontale (en bas de la cuve) oscille verticalement. Il s’agit d’une photographie posée pour observer les trajectoires de bulles. La visualisation est rendue possible par la présence de bulles d’air dans l’eau qui s’agrègent dans les zones de basse pression (correspondant aux cœurs des tourbillons). Extrait de Hopfinger *et al.* [32].

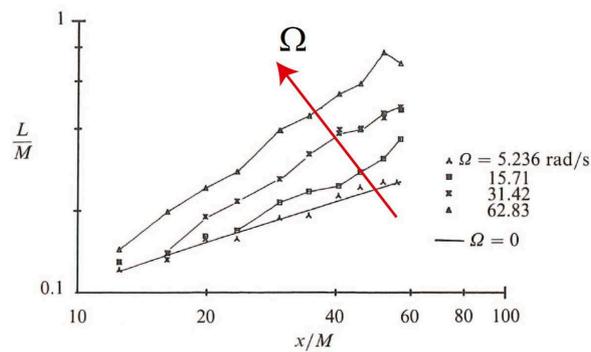


FIGURE 1.10 – Expérience de turbulence de grille en rotation de Jacquin *et al.* [33] dans une soufflerie “tournante”. Échelle intégrale (longueur de corrélation du champ de vitesse) selon l’axe de rotation en fonction de la distance  $x$  à la grille et du taux de rotation  $\Omega$ .  $M$  est la taille des mailles de la grille. Extrait de Jacquin *et al.* [33].

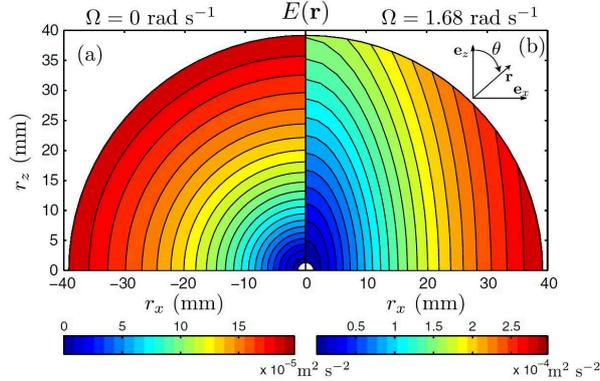


FIGURE 1.11 – Expérience de turbulence de grille en déclin de Lamriben *et al.* [30] dans un fluide en rotation. Cartes du moment d'ordre 2 des incréments de vitesse  $E(\mathbf{r}, t) = \langle (\delta \mathbf{u})^2 \rangle$  (cf. équation (1.30)) dans le plan vertical, pour un taux de rotation (a)  $\Omega = 0$  et (b)  $\Omega = 1.68 \text{ rad s}^{-1}$ . Cette carte renseigne sur la répartition de l'énergie de l'écoulement turbulent entre les échelles spatiales orientées, mesurée par le vecteur séparation  $\mathbf{r}$  (l'axe de rotation est vertical). Extrait de Lamriben *et al.* [30].

riante verticalement en présence de rotation (cf. figure 1.11(b)). Ils remarquent aussi que cette bidimensionnalisation est moins marquée aux petites échelles qu'aux grandes.

Finalement, il est intéressant d'évoquer les simulations numériques de turbulence en rotation homogène de Clark di Leoni *et al.* [31] qui ont réalisé en 2014 une étude analogue à celle de Lamriben *et al.* [30] mais dans l'espace spectral. Ils ont ainsi tracé la carte de la densité spectrale de puissance du champ de vitesse en fonction de la composante  $k_{\perp}$  du vecteur d'onde orthogonale à l'axe de rotation et de la composante  $k_{\parallel}$  parallèle à l'axe de rotation pour deux taux de rotation  $\Omega$ . Clark di Leoni *et al.* mettent en évidence une forte tendance à l'invariance verticale de leur écoulement turbulent avec des lignes iso-contours du spectre de l'énergie qui tendent vers l'horizontale et une concentration de l'énergie vers les modes de composante verticale du vecteur d'ondes nulles  $k_{\parallel} = 0$  (cf. figure 1.12). Ces résultats montrent que ces tendances sont plus marquées aux grandes échelles et aux fort taux de rotation en accord avec l'étude expérimentale de Lamriben *et al.*

Dans l'ensemble des études présentées dans cette partie, on constate que la rotation a provoqué une croissance des échelles parallèles à l'axe de rotation pour toutes les échelles perpendiculaires à l'axe de rotation. Il s'agit là d'un comportement qui reflète la tendance à la bidimensionnalisation selon l'axe de rotation du fluide provoquée par la rotation. On constate toutefois que cette tendance affecte moins les petites échelles horizontales que les grandes et qu'elle devient d'autant plus marquée que la rotation est forte.

### 1.5.3 Transfert d'énergie entre échelles

Comme nous venons de le voir, la turbulence en rotation est un état intermédiaire entre une turbulence 2D invariante verticalement et une turbulence 3D isotrope. Il s'agit là d'un change-

## 1.5. TURBULENCE EN ROTATION ( $Ro \lesssim 1$ , $Re \gg 1$ )

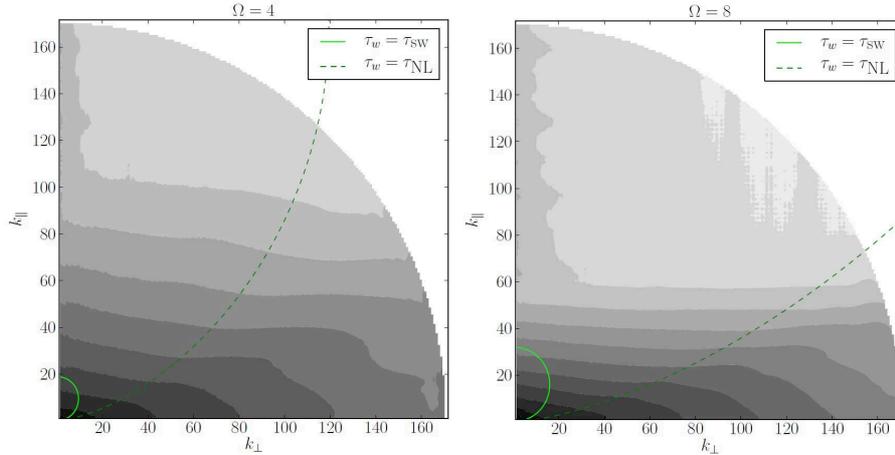


FIGURE 1.12 – Simulations numériques de Clark di Leoni *et al.* [31] de turbulence homogène dans un fluide en rotation. Cartes de la densité spectrale de puissance du champ de vitesse  $e(k_{\perp}, k_{\parallel})$  en fonction des deux composantes du vecteur d’onde,  $k_{\perp}$  orthogonale à l’axe de rotation et  $k_{\parallel}$  parallèle à l’axe de rotation, pour deux taux de rotation  $\Omega$ . Extrait de Clark di Leoni *et al.* [31].

ment majeur puisque l’on sait que contrairement à la turbulence 3D isotrope, la turbulence 2D donne naissance à une cascade inverse d’énergie [44, 46, 57] dirigée vers les grandes échelles, plutôt qu’une cascade directe d’énergie, c’est-à-dire dirigée vers les petites échelles (cf. partie 1.5.1). Pour la turbulence en rotation, se pose alors naturellement la question de la direction des flux d’énergie dans le plan perpendiculaire à l’axe de rotation.

Dans les expériences pionnières de Hopfinger, Browand et Gagne [32] de 1982 dans laquelle une grille horizontale est oscillée verticalement dans un cylindre en rotation et qui ont déjà été introduites dans la partie précédente, les auteurs constatent une augmentation des échelles caractéristiques des tourbillons dans le plan horizontal en présence de la rotation (cf. figure 1.13). Cette observation ne constitue pas une preuve formelle de la présence d’une cascade inverse emmenant l’énergie vers des grandes échelles mais illustre bien ses effets.

L’émergence d’une cascade inverse dans les écoulements turbulents en rotation a plus tard été mise en évidence dans plusieurs études expérimentales à commencer par le travail de Yarom et Sharon [38] en 2013. Ils ont ainsi étudié l’évolution temporelle du spectre spatial de l’énergie dans le plan horizontal pendant la phase transitoire d’une turbulence en rotation forcée par un réseau de jets. Il s’agit en fait d’une analyse similaire à celle de Paret *et al.* [46] présentée à la partie 1.5.1 mettant en évidence la cascade inverse de la turbulence 2D (cf. figure 1.7). Yarom et Sharon mettent ainsi en évidence une propagation progressive, pendant le régime transitoire, de l’énergie vers des échelles de plus en plus grandes (cf. figure 1.14). On remarque toutefois dans les spectres spatiaux de l’énergie de Yarom et Sharon le peuplement progressif en énergie de nombres d’ondes horizontaux plus grands que le nombre d’ondes de forçage, traduisant la présence de flux d’énergie directs, i.e. vers les petites échelles, en parallèle de la cascade inverse d’énergie.

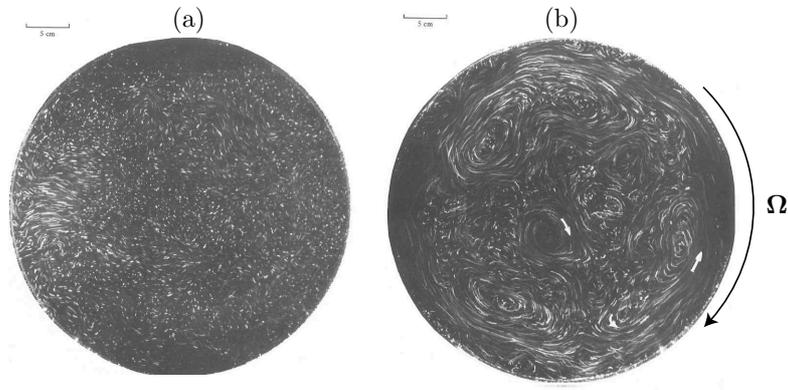


FIGURE 1.13 – Photographies d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation d'un écoulement en rotation dans une expérience où une grille horizontale (en bas de la cuve) oscille verticalement. La photographie (a) est prise sans rotation, et la photographie (b) avec. Extrait de Hopfinger *et al.* [32].

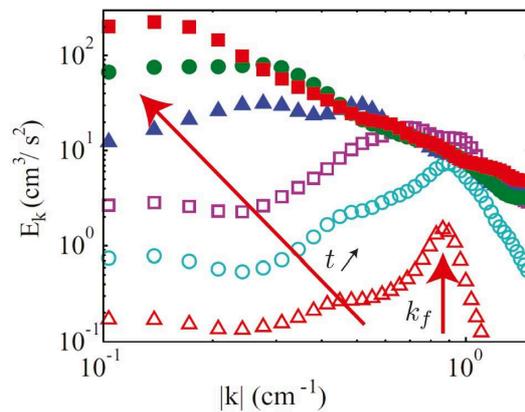


FIGURE 1.14 – Évolution temporelle du spectre spatial de l'énergie du champ de vitesse horizontal dans un plan horizontal d'une expérience de turbulence en rotation forcée par un réseau de jets. L'échelle de forçage est indiquée par  $k_f$ . Extrait de Yarom *et al.* [38].

## 1.5. TURBULENCE EN ROTATION ( $Ro \lesssim 1$ , $Re \gg 1$ )

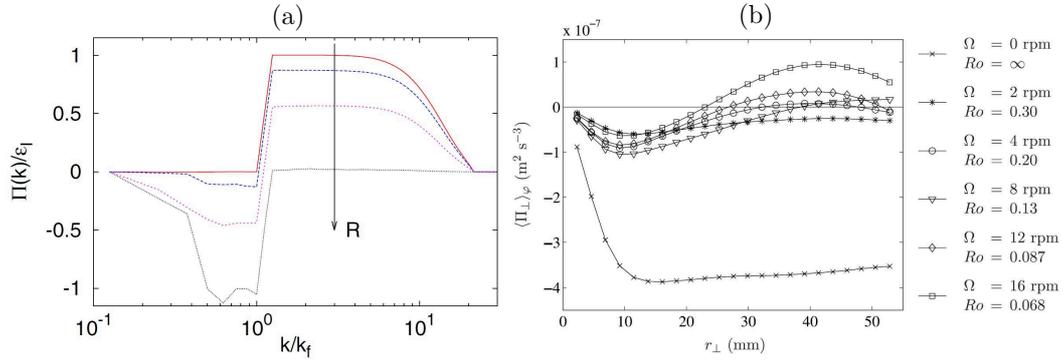


FIGURE 1.15 – (a) Flux d'énergie  $\Pi$  ( $\Pi > 0$  indique un flux dans le sens direct) en fonction du nombre d'onde  $k$  dans des simulations numériques de turbulence en rotation. La flèche indique les taux de rotation  $R$  croissants. Extrait de Deusebio *et al.* [41]. (b) Moyenne azimutale du flux d'énergie horizontal  $\langle \Pi_{\perp} \rangle_{\varphi}$  ( $\Pi > 0$  indique un flux dans le sens inverse) en fonction de la longueur horizontale de séparation  $r_{\perp}$  pour différents taux de rotation  $\Omega$  dans une expérience de turbulence en rotation forcée par une arène de générateurs de dipôle de tourbillons. Extrait de Campagne *et al.* [37].

Campagne *et al.* [37] et Deusebio *et al.* [41] se sont aussi intéressés en 2014 à la question de la direction des flux d'énergie respectivement dans une expérience de turbulence en rotation forcée par une arène de générateurs de dipôle de tourbillons et des simulations numériques. Ces deux équipes ont mesuré directement les flux d'énergie entre échelles  $\Pi$  dans l'espace spectral pour Deusebio *et al.* et dans l'espace réel pour Campagne *et al.* (cf. figure 1.15). Ces deux études ont ainsi mis en évidence l'émergence d'une cascade inverse d'énergie lorsque le taux de rotation augmente. Elles montrent aussi que cette cascade cohabite avec une cascade directe vers les petites échelles qui est de plus en plus inhibée avec l'augmentation du taux de rotation. On note toutefois une différence entre ces travaux qui est que l'échelle d'inversion de la cascade d'énergie est naturellement l'échelle de forçage pour les simulations numériques alors qu'elle dépend du taux de rotation dans les expériences. Finalement, Deusebio *et al.* ont montré en changeant les dimensions de leur boîte de simulation numérique que le seuil d'apparition de la cascade inverse était évidemment dépendant du taux de rotation mais aussi naturellement du rapport d'aspect de l'écoulement.

On note ici que cette coexistence d'une cascade d'énergie inverse et une cascade directe dont les propriétés varient avec le taux de rotation  $\Omega$  illustre toute la complexité que peuvent développer les régimes de turbulence en rotation. Même si nous ne l'avons pas directement montré, la nature du forçage va elle aussi fortement influencer la turbulence produite et il serait trop long de détailler toutes les études qui mettent en valeurs les différents facteurs influençant la nature de la turbulence en rotation.

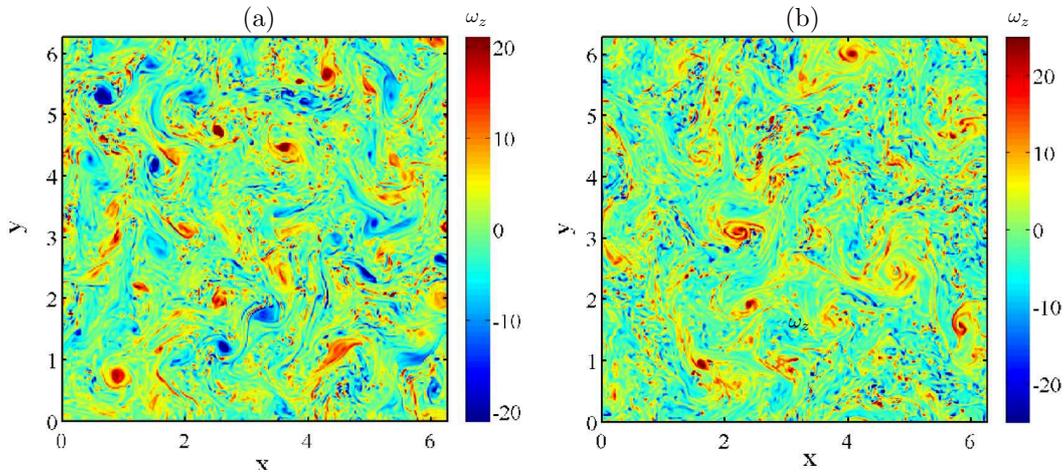


FIGURE 1.16 – Carte du champ de la composante verticale de la vorticité  $\omega_z$  dans un plan horizontal dans des simulations numériques de turbulence homogène, (a) sans rotation et (b) avec rotation. Extrait de Deusebio *et al.* [41].

#### 1.5.4 Asymétrie cyclone-anticyclone

Une autre propriété bien établie des écoulements turbulents en rotation est l'asymétrie cyclone/anticyclone qui désigne une prédominance des tourbillons qui tournent dans le même sens que la rotation d'ensemble (cyclones) sur ceux qui tournent dans le sens opposé (anticyclones).

Il existe de nombreux travaux mettant en évidence cette asymétrie [52, 58–60] et parmi ceux-ci, nous discuterons des simulations numériques de Deusebio *et al.* [41] qui ont déjà été introduites à la partie précédente (cf. figure 1.15). Les auteurs montrent par exemple un champ de vorticité dans le plan horizontal sans rotation (cf. figure 1.16(a)) et un autre avec (cf. figure 1.16(b)). En présence de la rotation, le champ de vorticité est dominé par les valeurs positives de la composante verticale de la vorticité  $\omega_z$ , ce qui indique une prédominance des tourbillons cycloniques sur ceux anticycloniques. On remarque aussi que cette prédominance est moins marquée aux petites échelles.

Une autre illustration de ce résultat, cette fois-ci expérimentale, vient du travail de Morize *et al.* [40] en 2005. Cette étude consiste en une expérience de turbulence en déclin et en rotation où le forçage est réalisé au moyen de la translation verticale d'une grille horizontale. Par des mesures de champs de vitesse dans le plan horizontal, les auteurs constatent l'émergence avec le temps d'une asymétrie en faveur des valeurs positives dans la composante verticale de la vorticité  $\omega_z$  (cf. figure 1.17). Cette asymétrie s'accentue au cours du déclin révélant la construction progressive des effets de la rotation pendant le déclin de la turbulence.

## 1.6 Quel modèle pour la turbulence en rotation ?

Dans un écoulement turbulent, ce qui pilote le taux de dissipation de l'énergie est le taux de transfert de l'énergie entre échelles dans la cascade d'énergie turbulente. En turbulence hydro-

## 1.6. QUEL MODÈLE POUR LA TURBULENCE EN ROTATION ?

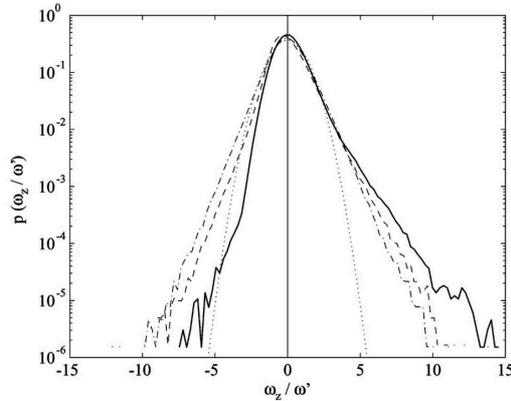


FIGURE 1.17 – Densité de probabilité de la composante dirigée selon l’axe de rotation  $\omega_z$  de la vorticité de une expérience de turbulence en rotation en déclin initiée par la translation d’une grille de Morize *et al.* [40]. Le taux de rotation est fixée à 15 tr/min, la vorticité est normalisée par la vorticité instantanée rms du champ et les traits en tireté-pointillé, tireté et plein indiquent différents instants pendant le déclin (dans l’ordre croissant en temps). La courbe pointillée indique la distribution gaussienne. Extrait de Morize *et al.* [40].

dynamique classique, les structures portant l’énergie dans cette cascade sont des tourbillons, des couches de cisaillement, etc. Lorsque le système physique d’intérêt permet la propagation d’ondes dispersives, le formalisme de la turbulence d’ondes, aussi appelé turbulence faible, prévoit lui aussi l’émergence d’un régime turbulent où cette fois-ci ce sont les ondes qui portent l’énergie et la transmettent à d’autres échelles à travers des processus faiblement non-linéaires, d’où le nom de turbulence faible. Le formalisme théorique de la turbulence d’ondes a été développé à partir des années 1960 avec les travaux de Zakharov. Il permet la prédiction analytique de diverses quantités statistiques et a été formellement appliqué à de nombreux systèmes [61]. Ce régime de turbulence d’ondes peut en effet en principe émerger dans tous les systèmes d’ondes dispersives [61], en mécanique des fluides, des solides, en optique non-linéaire... Depuis les années 2000, cette théorie a permis de décrire avec succès des systèmes mécaniques à deux dimensions comme les ondes à la surface des liquides [62] et les ondes de flexion dans les plaques élastiques [63].

Dans ce contexte, les fluides permettant la propagation d’ondes internes, comme les fluides en rotation, stratifiés ou conducteur (en magnétohydrodynamique), constitue un cas singulier à la frontière entre turbulence hydrodynamique et turbulence d’ondes. La théorie de la turbulence d’ondes est particulièrement intéressante pour ces systèmes car, comme nous allons le voir pour les fluides en rotation, elle est finalement un des rares formalismes analytiques conduisant à des prédictions explicites.

Comme la partie 1.5 sur les expériences et les simulations de turbulence en rotation a pu le mettre en évidence, la turbulence en rotation consiste le plus souvent en la superposition d’un mode géostrophique 2D portant une majorité de l’énergie turbulente et d’un mode tridimensionnel. Le mode 2D, composé de tourbillons invariants verticalement, est le siège d’une cascade inverse d’énergie vers les grandes échelles en accord avec la phénoménologie de la turbulence à

deux dimensions. En parallèle, le mode 3D, composé au moins pour partie d'ondes d'inertie, est le siège d'une cascade d'énergie directe et anisotrope. Une question centrale est ici de savoir si le formalisme de turbulence d'ondes, appliqué aux ondes d'inertie, peut décrire ce qu'il se passe dans le mode 3D. Cette question reste actuellement ouverte. La cohabitation entre turbulence 2D et turbulence d'ondes dans les écoulements soumis à une forte rotation reste en effet un problème encore mal compris.

Le théorème de Taylor-Proudman et la théorie de la turbulence d'ondes d'inertie, tous deux dérivés dans la limite des écoulements soumis à une forte rotation (petits nombres de Rossby  $Ro$ ) conduisent à deux visions de la turbulence en rotation, relativement aveugles l'une à l'autre. Nous avons notamment déjà remarqué dans la partie 1.4 que les interactions triadiques résonantes, qui sont le cœur des échanges d'énergie au sein de la turbulence d'ondes d'inertie, ne peuvent pas conduire à des échanges d'énergie avec le mode strictement 2D de la turbulence en rotation. Il reste donc dans ce contexte encore beaucoup à comprendre et mon travail de thèse essaie d'apporter quelques éléments expérimentaux en ce sens.

Comme déjà dit plus haut, le régime de turbulence d'ondes d'inertie est le seul régime de turbulence en rotation faisant l'objet de prédictions théoriques qui ne soient pas phénoménologiques. Nous allons à présent décrire les bases théoriques de ce formalisme avant de présenter des études expérimentales et numériques qui s'y sont intéressées.

### 1.6.1 La turbulence d'ondes d'inertie

La turbulence d'ondes d'inertie est dérivée dans la limite faiblement non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes en rotation, c'est-à-dire pour de faible de nombre de Rossby [64]. Elle s'appuie sur la décomposition du champ de vitesse en modes hélicoïdaux introduit dans la partie 1.4. En injectant cette décomposition dans l'équation de Navier-Stokes, on obtient l'équation (1.24) que nous rappelons ici :

$$(\partial_t + \nu k^2) b_{s_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{0}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{q}}} e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}}+\sigma_{s_{\mathbf{p}}}+\sigma_{s_{\mathbf{q}}})t}, \quad (1.36)$$

où  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}}$  est la pulsation d'une onde de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ ,  $b_{s_{\mathbf{k}}}$  son amplitude et  $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}}$  est le coefficient d'interaction entre trois modes de vecteur d'ondes  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  dont l'expression est donnée par l'équation (1.25). Comme nous l'avons mentionné à la partie 1.4, cette décomposition décrit un écoulement composé d'ondes si les amplitudes  $b_{s_{\mathbf{k}}}$  évoluent lentement devant la période des ondes  $1/\sigma_{s_{\mathbf{k}}}$ , c'est-à-dire que le temps non-linéaire est grand devant le temps linéaire qui est la période des ondes. C'est en fait cette condition de faible non-linéarité qui est l'hypothèse sous laquelle on s'attend à ce que la turbulence d'ondes soit valide. Elle explique au passage l'autre nom de turbulence faible souvent donné à la turbulence d'ondes. On note que cette condition s'écrit

$$\tau_{nl,k} = \frac{1}{u_k k} \gg \frac{k}{2\Omega k_{||}} = \frac{1}{\sigma_k}. \quad (1.37)$$

## 1.6. QUEL MODÈLE POUR LA TURBULENCE EN ROTATION ?

---

pour l'onde de vecteur d'ondes  $\mathbf{k}$ . Cette condition se réécrit  $Ro_k \ll k_{\parallel}/k = \sigma^*$ . Elle est donc plus exigeante que la simple condition  $Ro \ll 1$  souvent évoquée. Le nombre de Rossby doit ici être petit devant la fréquence adimensionnée des ondes.

Le formalisme de la turbulence d'ondes d'inertie a été dérivé pour la première fois de manière exacte par Galtier en 2003 [64]. Galtier y réalise un développement asymptotique de la décomposition de l'équation de Navier-Stokes sur la base des modes hélicoïdaux dans la limite faiblement non-linéaire. Ce calcul lui permet de dériver les "équations cinétiques" décrivant l'évolution temporelle des spectres spatiaux de l'énergie et de l'hélicité. Ce premier résultat lui permet de démontrer qu'au sein de la cascade d'énergie de la turbulence d'ondes d'inertie, les flux seront dirigés vers les petites échelles et vers les basses fréquences, c'est-à-dire vers des modes de plus en plus invariants verticalement puisque  $\sigma^* = k_{\parallel}/k$ .

En se plaçant ensuite dans la limite des ondes de basse fréquence  $\sigma \ll 2\Omega$  et donc telles que  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ , Galtier réussit à dériver une expression pour le spectre spatial de l'énergie turbulente qui est évidemment anisotrope :

$$E(k_{\perp}, k_{\parallel}) \sim (\varepsilon\Omega)^{-1/2} k_{\perp}^{-5/2} k_{\parallel}^{-1/2}. \quad (1.38)$$

Il est possible de retrouver certains des résultats prédits par la théorie de la turbulence d'ondes d'inertie en couplant phénoménologie et analyse dimensionnelle. Regardons à nouveau l'équation (1.36). Pour une interaction triadique quelconque on remarque que le terme exponentiel complexe  $e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t}$  faisant intervenir la somme des fréquences des trois ondes en jeu va rendre les échanges d'énergie inefficaces sur des temps longs puisque sa moyenne est nulle. On remarque alors que cette conclusion ne sera plus vraie pour les triades résonantes telles que  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}} = 0$ , qui vont donc dominer les échanges d'énergie. La réalité de la turbulence d'ondes est en pratique un peu plus subtile et on peut la comprendre de la manière suivante : les coefficients  $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}}$  sont homogènes à un nombre d'ondes et conduisent donc à un temps caractéristique pour le transfert de l'énergie classique, i.e. le temps non-linéaire  $\tau_{nl} = 1/(u_k k)$ . Le terme de brouillage de phase  $e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t}$  va toutefois rendre l'interaction entre les ondes  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  efficace pendant un temps réduit en moyenne d'un facteur  $\tau_{\sigma}/\tau_{nl}$  où l'on suppose que  $1/(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}}) \sim \tau_{\sigma}$ , c'est à dire que les trois ondes impliquées dans la triade ont des fréquences du même ordre de grandeur. Le temps caractéristique des transferts d'énergie au sein de la cascade turbulente sera alors  $\tau_{nl}^2/\tau_{\sigma}$  et on s'attend à ce que le taux de transfert de l'énergie entre échelles et donc le taux de dissipation de l'énergie suivent la loi d'échelle suivante

$$\Pi_k = Ro u_k^3 k, \quad (1.39)$$

avec  $u_k$  la vitesse caractéristique de l'échelle  $1/k$ . Ce type de raisonnement a pour la première fois été proposé dans les années 60 par Kraichnan [65] et Iroshnikov [66] pour décrire les ondes Alfvén dans les fluides conducteurs en magnétohydrodynamique. On conclut ainsi que le taux de dissipation de l'énergie de la turbulence d'ondes d'inertie suivra la loi  $\varepsilon \propto Ro U^3/L$  et sera donc réduit d'un facteur Rossby par rapport à la loi de la turbulence isotrope. Cette loi a été

proposée dans de nombreux travaux théoriques [54, 64, 67–69] et constitue l'une des prédictions majeures du régime de turbulence d'ondes.

Il est ensuite possible de retrouver la prédiction pour le spectre anisotrope de l'énergie en utilisant la conservation du flux d'énergie (1.39). Comme  $E(k_\perp, k_\parallel)k_\perp k_\parallel \sim u_k^2$  et que  $Ro = \tau_\sigma/\tau_{nl} \sim k_\perp^2 U/(\Omega k_\parallel)$ , l'équation (1.39) permet de retrouver le spectre anisotrope

$$E(k_\perp, k_\parallel) \sim (\varepsilon \Omega)^{-1/2} k_\perp^{-5/2} k_\parallel^{-1/2}. \quad (1.40)$$

sous l'hypothèse  $k \sim k_\perp \gg k_\parallel$ .

Nazarenko *et al.* [61, 70] ont ensuite proposé en 2011 une phénoménologie de la cascade d'énergie de la turbulence d'ondes en trois étapes (cf. figure 1.18) :

1. Aux grandes échelles limitées par l'échelle d'injection  $k_0$ , l'écoulement est dans un régime de turbulence d'ondes dans lequel l'énergie est transportée par les interactions entre ondes vers les petites échelles et les basses fréquences. Nazarenko *et al.* se limitent ici au cas des ondes respectant  $k_\perp \gg k_\parallel$  et font l'hypothèse que  $k_\parallel$  est constant. Dans ce régime, le rapport entre la période des ondes et le temps non-linéaire évolue comme  $\tau_\sigma/\tau_{nl} \sim \Omega^{-3/4} k_\perp^{5/4} k_\parallel^{-3/4}$ . Celui-ci va donc augmenter pendant la cascade et passer d'une valeur petite (c'est l'hypothèse de faible non-linéarité) à des valeurs d'ordre 1 (si les effets visqueux restent faibles).
2. À l'échelle pour laquelle  $\tau_\sigma/\tau_{nl} \sim 1$ , c'est-à-dire lorsque que  $k_\parallel \sim \Omega^{-1} k_\perp^{5/3}$ , la physique de la turbulence d'ondes n'est alors plus valable puisque la condition de faible non-linéarité n'est plus respectée. Les échanges d'énergie entre les modes se font alors sur des temps aussi courts que la période des ondes et on ne peut donc plus parler d'ondes. On entre dans un régime de turbulence "forte" en rotation. Pour décrire celui-ci, Nazarenko *et al.* proposent d'utiliser la phénoménologie de la "balance critique", introduite par Goldreich *et al.* en 1995 [71] pour les fluides conducteurs, et qui fait l'hypothèse que la cascade d'énergie va se poursuivre dans l'espace des échelles  $(k_\perp, k_\parallel)$  en suivant un chemin imposé par un équilibre entre dynamique linéaire et non-linéaire, c'est-à-dire  $\tau_\sigma \sim \tau_{nl}$ . Dans ce régime, Nazarenko *et al.* prédisent un spectre de la forme  $E(k_\perp, k_\parallel) \sim k_\perp^{-5/3} k_\parallel^{-1}$  et les flux d'énergie entre échelles reprennent la loi d'échelle classique  $\varepsilon \sim U^3/L_\perp$ . Dans la cascade d'énergie prévue par la "balance critique", le rapport entre l'échelle verticale et l'échelle horizontale décroît comme le montre l'équation  $k_\parallel \sim \Omega^{-1} k_\perp^{5/3}$ .
3. À l'échelle pour laquelle  $k_\perp/k_\parallel \sim 1$ , l'anisotropie disparaît, le nombre de Rossby redevient d'ordre 1, et Nazarenko *et al.* proposent que la suite de la cascade d'énergie retrouve le comportement classique d'une turbulence isotrope non affectée par la rotation décrite à la partie 1.5.1. Le spectre est alors  $E(k) \sim k^{-5/3}$ .

Les principales prédictions du régime de turbulence d'ondes d'inertie sont donc la modification du taux de transfert  $\Pi_k$  et donc du taux de dissipation  $\varepsilon$  de l'énergie d'un facteur  $Ro$  et la prédiction du spectre spatial (1.38). Il existe aussi une phénoménologie associée à ce régime qui est résumée dans la figure 1.18 extraite de Nazarenko *et al.* [61]. On peut finalement noter que, si l'hypothèse de faible non-linéarité n'est pas vérifiée à l'échelle d'injection, la "balance critique"

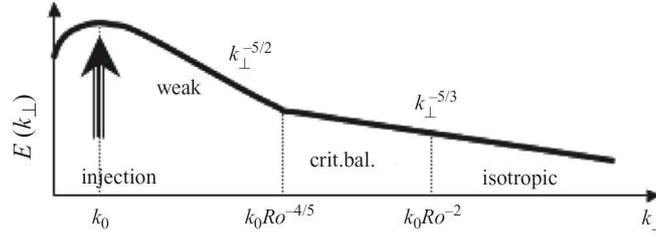


FIGURE 1.18 – Spectre spatial  $E(k_{\perp})$  en fonction de la composante horizontale  $k_{\perp}$  du vecteur d’onde prédit par la phénoménologie de Nazarenko *et al.* pour une échelle d’injection  $k_0$ . Les lois d’échelles prévues pour les trois régimes attendus —turbulence d’ondes, “balance critique”, isotrope— sont représentées. Extrait de Nazarenko *et al.* [61].

constitue une proposition théorique à part entière pour décrire l’ensemble de la turbulence forte en rotation attendue.

### 1.6.2 Les ondes d’inertie dans les expériences et les simulations de turbulence en rotation

Dans la partie précédente, nous avons pu constater que le régime de turbulence d’ondes d’inertie est finalement le seul régime de la turbulence en rotation faisant l’objet de prédictions théoriques qui ne sont pas issues d’une phénoménologie. Nous allons toutefois constater dans cette partie qu’encore très peu de données expérimentales ou numériques d’écoulements turbulents en rotation viennent pour l’instant attester de la pertinence du formalisme de turbulence d’ondes d’inertie pour les décrire. Nous discutons ainsi dans cette partie de différentes études numériques ou expérimentales qui ont cherché à vérifier les pré-requis et/ou les prédictions de la turbulence d’ondes d’inertie. On constatera que ces études sont peu nombreuses, probablement en lien avec la difficulté de mesurer dans un référentiel tournant et un écoulement 3D anisotrope les observables révélant la présence d’ondes d’inertie, comme par exemple la densité spectrale de puissance spatio-temporelles du champ de vitesse en trois dimensions.

Dans les études que nous allons évoquer, les auteurs s’intéressent à l’un ou l’autre de deux points cruciaux suivants relativement au formalisme de la turbulence d’ondes d’inertie :

- Dans quelles proportions l’écoulement turbulent en rotation, et plus précisément sa composante 3D, est-il composé d’ondes d’inertie plutôt que de structures tourbillonnaires [31, 72, 73] ;
- La loi d’échelle des flux d’énergie vers les petites échelles au sein de la composante 3D de l’écoulement turbulent suit-elle la prédiction de la théorie de la turbulence d’ondes d’un taux réduit d’un facteur  $Ro$  par rapport au cas isotrope (cf. équation (1.39)) [31, 74].

Parmi les travaux ayant cherché à mettre en évidence la présence d’ondes d’inertie, on trouve l’étude pionnière de Yarom et Sharon [72], dans la même expérience de turbulence forcée par un réseau de jets que dans leur étude de l’émergence d’une cascade inverse [38] (évoquée en partie 1.5.3). À partir de la même expérience, Yarom et Sharon ont réalisé en 2014 une analyse

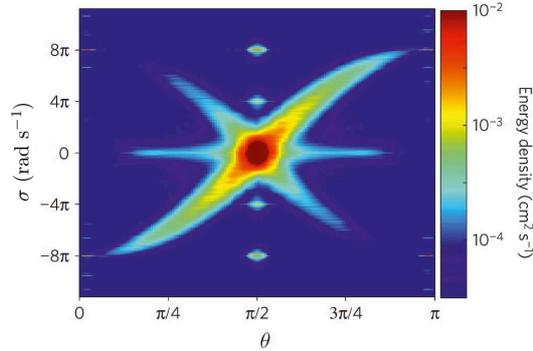


FIGURE 1.19 – Spectre spatio-temporel de l'énergie cinétique moyenné sur les nombres d'ondes compris entre  $2.3 k_f$  et  $2.9 k_f$  représenté dans le plan  $(\sigma, \theta)$ ,  $\theta$  indiquant l'angle entre le vecteur d'onde et l'axe de rotation et  $\sigma$  la pulsation. Données issues d'une expérience de turbulence en rotation ( $\Omega = 4\pi$  rad s<sup>-1</sup>) forcée par un réseau de jets au nombre d'onde  $k_f$ . La relation de dispersion des ondes d'inertie est ici  $\sigma = \pm 8\pi \cos \theta$ . On note une concentration de l'énergie autour de cette relation. Extrait de Yarom et Sharon [72].

spectrale spatio-temporelle de champs de vitesse 3D3C dans le régime stationnaire. Pour les échelles plus petites que l'échelle de forçage, ils ont montré que l'énergie se concentre en partie sur la relation de dispersion des ondes d'inertie (cf. figure 1.19). Ce résultat constitue un vrai tour de force puisque Yarom et Sharon ont ici testé le lien prédit par la relation de dispersion entre la fréquence des structures hydrodynamiques et la direction du vecteur d'ondes dans un espace à trois dimensions. Cette analyse constitue la première observation claire de la présence d'ondes d'inertie au sein d'un écoulement turbulent en rotation.

On remarque dans le spectre spatio-temporel de la figure 1.19 que l'énergie aux échelles plus petites que l'échelle d'injection est essentiellement concentrée en  $(\theta = \pi/2, \sigma = 0)$  où le spectre ne permet pas d'identifier clairement des ondes d'inertie. Par ailleurs, comme le montre les spectres spatiaux de Yarom et Sharon présentés plus tôt à la figure 1.14, une majorité de l'énergie de leur écoulement se situe à des échelles plus grandes que celles du forçage (alimentées par le mécanisme de cascade inverse décrit dans la partie 1.5) correspondant à des tourbillons géostrophiques. Leurs expériences produisent donc un écoulement dominé par une composante géostrophique, faite de tourbillons 2D et hébergeant une cascade inverse, qui cohabite avec une composante 3D faiblement énergétique. C'est au sein de ce mode 3D que des ondes d'inertie ont été détectées, ne représentant toutefois qu'une proportion limitée de l'énergie de ce mode 3D.

En 2015, Campagne *et al.* [73] ont aussi pu mettre en évidence la présence d'ondes d'inertie dans leur expérience de turbulence en rotation forcée par une arène de générateurs de dipôle de tourbillons. De manière similaire aux résultats de Yarom et Sharon [72], une majorité de l'énergie de l'écoulement turbulent de Campagne *et al.* était portée par un mode 2D constitué de tourbillons invariants verticalement et siège d'une cascade inverse de l'énergie. Sur la figure 1.20a, On observe les niveaux d'énergie de la composante 2D et de la composante 3D de leur écoulement où pour le taux de rotation le plus élevé étudié, 90% de l'énergie est portée par le mode 2D.

## 1.6. QUEL MODÈLE POUR LA TURBULENCE EN ROTATION ?

---

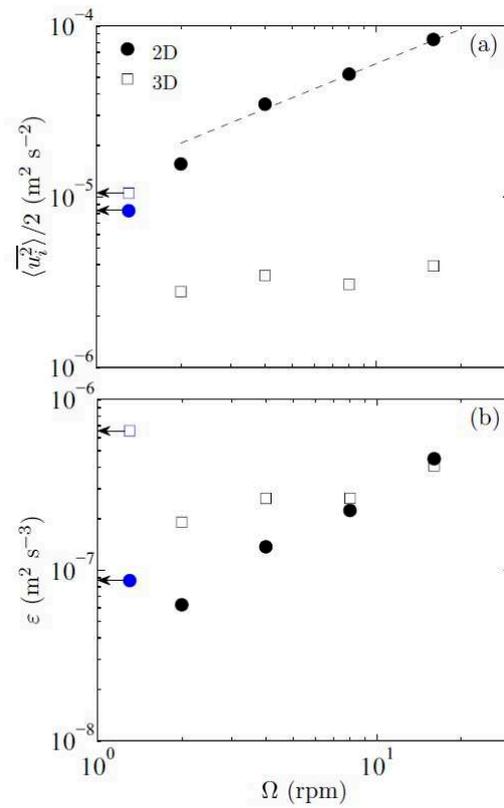


FIGURE 1.20 – (a) Moyenne de l'énergie cinétique et (b) taux de dissipation  $\varepsilon$  en fonction du taux de rotation  $\Omega$  pour le mode 2D et le mode 3D dans une expérience de turbulence en rotation forcée par une arène de générateurs de dipôle de tourbillons. Dans les deux figures, les premiers points indiqués par des flèches correspondent au taux de rotation  $\Omega = 0$ . Extrait de Campagne *et al.* [73].

Sur la figure 1.20b, la densité massique du taux de dissipation moyen de l'énergie dans chacun de ces modes est aussi présentée révélant que 50% de la dissipation de l'énergie a toujours lieu dans le mode 3D. Ce résultat illustre l'importance du mode 3D de la turbulence en rotation, même lorsque celui-ci est peu énergétique : la cascade d'énergie dont il est le siège joue toujours un rôle important et sa compréhension est donc fondamentale pour dresser le bilan énergétique de l'écoulement.

Campagne *et al.* ont pu mettre en évidence au sein du mode 3D de leur écoulement la présence d'ondes d'inertie en calculant la corrélation en deux points de la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse dont ils ont montré que la forme des lignes de niveau respectait la relation de dispersion des ondes d'inertie aux grandes échelles. Pour les échelles 3D plus petites, les auteurs ont montré qu'il leur était impossible de tester si elles étaient des ondes ou non car leur signature temporelle était dominée par un effet Doppler induit par l'advection des structures 3D par les tourbillons intenses du mode 2D.

Cet effet, connu sous le nom de "sweeping" en anglais provoque, pour une structure d'échelle horizontale  $r$ , un décalage fréquentiel  $\delta\sigma = CU_{\perp}/r$  où  $U_{\perp}$  désigne la vitesse locale du mode 2D dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation et  $C$  est une constante d'ordre 1. Si la fréquence intrinsèque du mode 3D est  $\sigma_i$ , sa fréquence apparente sera  $\sigma = \sigma_i + \delta\sigma$  relation que l'on peut traduire de manière dimensionnelle pour des ondes d'inertie (vérifiant  $\sigma_i = 2\Omega \cos\theta$ ) en la relation

$$1/S = N + C, \quad (1.41)$$

avec  $N = 2\Omega r_{\perp}/(U_{\perp}\sqrt{1+2A^{-2}})$  et  $S = U_{\perp}/\sigma r_{\perp}$  où  $U_{\perp}$  est la vitesse horizontale rms du mode 2D et  $A = r_{\perp}/r_{\parallel}$  est l'anisotropie des lignes de niveau pour la fréquence  $\sigma$  des cartes de corrélations en deux points de la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse. Lorsque Campagne *et al.* [73] ont tracé  $N$  en fonction du paramètre de "sweeping"  $S$ , ils ont pu remarquer que l'ensemble des points se regroupaient sur une courbe maitresse pour les expériences à différents taux de rotation, et pour l'ensemble des échelles horizontales et des fréquences mesurées (cf. figure 1.21). Cette constatation révèle que les structures 3D sont ici clairement identifiées comme des ondes d'inertie seulement lorsque le paramètre de sweeping  $S$  est petit, c'est-à-dire aux grandes échelles et/ou aux grandes fréquences (la droite pointillée en  $N = 1/S$  traduisant le comportement prédit par la relation de dispersion des ondes). En revanche, lorsque  $S$  augmente,  $N$  sature à une valeur basse d'ordre 1 ce qui correspond à une fréquence dominée par l'effet Doppler induit par le mode 2D. Cette dernière remarque est très importante puisque les structures advectées par l'effet de "sweeping" vont avoir une fréquence apparente différente de leur fréquence intrinsèque. Dans ces conditions, on ne peut savoir si ces structures sont des ondes d'inertie ou non. Le point de départ du formalisme de turbulence d'ondes reposant sur le fait que l'écoulement est composé d'ondes d'inertie en interactions triadiques faiblement non-linéaires et résonantes (ou quasi-résonantes) sera ici probablement fortement contrarié par l'effet de l'advection des ondes par le mode 2D. Intuitivement, on sent bien que les relations de résonances spatiale  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$  et temporelle  $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 0$  au sein d'une triade d'ondes seront en effet fortement perturbées par l'effet de sweeping par le mode 2D remettant en cause le formalisme

## 1.6. QUEL MODÈLE POUR LA TURBULENCE EN ROTATION ?

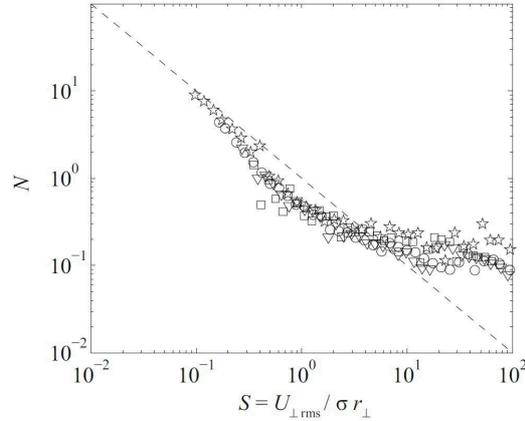


FIGURE 1.21 – Paramètre d’anisotropie  $A$  des cartes de corrélation en deux points de la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse normalisé  $N = 2\Omega r_{\perp} / (U_{\perp} \sqrt{1 + 2A^{-2}})$  en fonction du paramètre de “sweeping”  $S = U_{\perp} / \sigma r_{\perp}$  dans une expérience de turbulence en rotation forcée par une arène de générateurs de dipôle de tourbillons. La ligne tiretée  $N = 1/S$  montre la prédiction pour une assemblée d’ondes d’inertie non affectées par le “sweeping”. Les symboles indiquent différents taux de rotation. Extrait de Campagne *et al.* [73].

de turbulence d’ondes ou plutôt appelant à son amélioration.

L’étude numérique de Clark Di Leoni *et al.* [31] datant de 2014 et déjà évoquée en partie 1.5.2, a aussi mis en évidence la présence d’ondes d’inertie dans un écoulement turbulent en rotation statistiquement stationnaire forcé à grande échelle. Au moyen d’une analyse spectrale spatio-temporelle, ils montrent que la distribution d’énergie se concentre sur la relation de dispersion des ondes d’inertie pour des nombres d’ondes proches de l’échelle d’injection  $k_f$  (cf. figure 1.22). Il s’agit là d’un indice marqué de la présence d’ondes d’inertie dans les structures 3D de leur écoulement. Toutefois, les auteurs remarquent que la majorité de l’énergie se situe aux grandes échelles dans des tourbillons 2D invariants verticalement. Tout comme dans l’étude de Campagne *et al.* [73], Clark Di Leoni *et al.* observent que ces tourbillons provoquent un important effet de “sweeping” sur les structures 3D de leur écoulement.

Dans cette partie, les travaux évoqués jusqu’ici se sont attachés à mettre en évidence la présence ou l’absence d’ondes d’inertie au sein d’écoulements turbulents en rotation, résultat qui constitue un pré-requis à l’applicabilité du formalisme de turbulence d’ondes. Dans d’autres travaux, les auteurs ont cherché à tester la prédiction de ce formalisme pour la loi d’échelle du taux de transfert de l’énergie vers les petites échelles (1.39) qui prévoit une réduction du taux de transfert de l’énergie  $\varepsilon$  d’un facteur  $Ro$ . Dans ce cadre, on note l’expérience de turbulence en rotation forcée par une hélice de Campagne *et al.* [74]. Les auteurs y ont montré un accord remarquable entre la puissance injectée dans leur écoulement par le forçage, qui a été mesurée directement, et l’estimation du flux d’énergie vers les petites échelles que l’on peut faire en utilisant la loi d’échelle d’une turbulence isotrope (cf. figure 1.23). Ce résultat montre que le taux de transfert de l’énergie suit ici la loi classique de la turbulence isotrope  $\Pi \sim U^3/L$  alors même

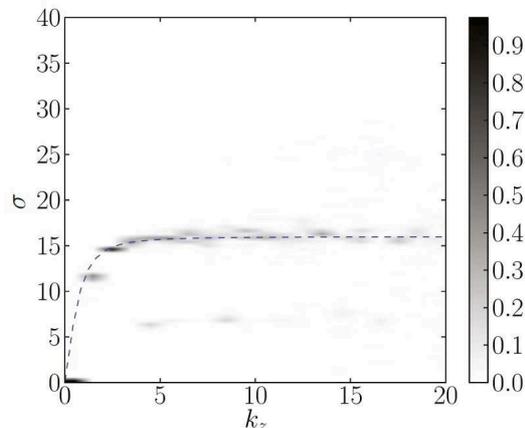


FIGURE 1.22 – Spectre spatio-temporel de l'énergie du champ de vitesse représenté dans le plan  $(\sigma, k_z)$  pour  $k_x = 0$  et  $k_y = k_f/\sqrt{3}$ , issu d'une simulation numérique de turbulence en rotation forcée au nombre d'onde  $k_f$  par un champ de force massique. La courbe tiretée représente la relation de dispersion des ondes d'inertie. Extrait de Clark Di Leoni *et al.* [31].

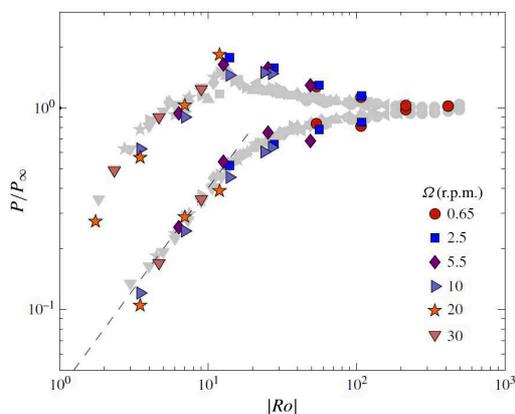


FIGURE 1.23 – Estimation de la puissance dissipée  $P$  dans l'écoulement turbulent produit par une hélice dans un aquarium en rotation en intégrant sur le volume de l'écoulement la loi d'échelle isotrope pour la densité volumique du taux de dissipation de l'énergie  $\varepsilon \sim U^3/L$ . Ces données (en couleur) sont comparées à une mesure directe de la puissance injectée (en grisé).  $P$  est normalisée par sa valeur dans les expériences sans rotation  $P_\infty$  et tracée en fonction du nombre de  $Ro = \omega/\Omega$  où  $\omega$  est le taux de rotation de l'hélice dans le référentiel tournant au taux  $\Omega$ . Extrait de Campagne *et al.* [74].

## 1.7. OBJECTIFS DE CETTE THÈSE

---

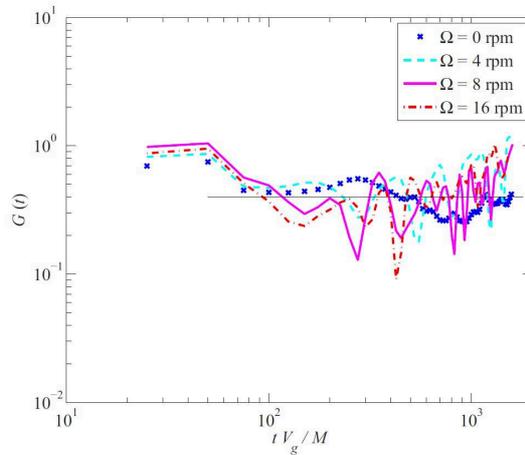


FIGURE 1.24 – Taux de déclin  $G(t)$  de l'énergie normalisé par  $U^3/L$  en fonction du temps  $t$  dans une expérience de turbulence en déclin forcée par la translation initiale d'une grille, pour différents taux de rotation  $\Omega$ .  $U$  est la vitesse rms instantanée de l'écoulement et  $L$  son échelle intégrale horizontale. Extrait de l'Habilitation à Diriger des Recherches de Cortet [75] (page 151).

que les effets de la rotation sur la structure de l'écoulement turbulent sont très importants avec notamment une forte anisotropie. On constate donc très bien ici que le mode 3D de la turbulence en rotation peut être fortement affecté par la rotation sans toutefois suivre la phénoménologie de la turbulence d'ondes : c'est le régime de turbulence forte en rotation dans lequel il est probable que la plupart des expériences et simulations numériques réalisées jusqu'à présent se trouvent. C'est aussi le régime que la phénoménologie de la "balance critique" cherche à décrire sans avoir toutefois reçu de test concluant à ce jour.

On peut ensuite évoquer un des seuls autres tests expérimentaux de la modification du taux de transfert de l'énergie entre échelles par la rotation, réalisé sur les expériences de turbulence de grille en déclin de Lamriben *et al.* [30]. Dans la figure 1.24 publiée dans l'Habilitation à Diriger des Recherches de Cortet [75], est ainsi reporté le taux de déclin de l'énergie normalisé par la loi d'échelle attendue pour une turbulence isotrope,  $U^3/L$ , et ce pour des expériences sans rotation et pour trois taux de rotation de différents. Ces données semblent montrer à nouveau que le taux de dissipation de l'énergie de l'écoulement turbulent n'est pas ici modifié par la rotation, alors même qu'une fois encore la turbulence est fortement affectée par la rotation (cf. figure 1.11).

## 1.7 Objectifs de cette thèse

Les expériences de turbulence en rotation présentées dans ce chapitre s'appuient sur des systèmes de forçage en général classiques en turbulence expérimentale : grille oscillée ou translattée, jets turbulents, hélice, générateur de tourbillons... Ces systèmes de forçage permettent de produire une turbulence intense en injectant l'énergie dans des structures tourbillonnaires. Dans les

travaux présentés, les différentes équipes se sont intéressées à comprendre comment une rotation d'ensemble modifiaient une turbulence intense.

Il ressort des études exposées dans la partie précédente que le régime de turbulence d'ondes d'inertie prédit par Galtier [64] et Nazarenko *et al.* [61, 70] n'a pas encore été clairement observé dans de tels écoulements turbulents en rotation. Si plusieurs études ont pu mettre en évidence la présence d'ondes d'inertie en leur sein [31, 72, 73], celles-ci n'y représentent qu'une faible part de l'énergie de l'écoulement qui est dominé par un mode 2D verticalement invariant : le mode géostrophique. Les ondes voient par ailleurs leur signature fréquentielle modifiée par l'effet induit par leur advection par le mode géostrophique.

Dans cette thèse, nous n'avons pas cherché à perturber un écoulement pleinement turbulent par une rotation d'ensemble. Nous avons testé un autre chemin vers la turbulence d'ondes d'inertie en partant d'ondes d'inertie linéaires pour explorer leur devenir quand les non-linéarités augmentent. Ainsi, on cherche à rendre turbulent un écoulement fait d'ondes par les processus non-linéaires que subissent les ondes forcées. En augmentant l'amplitude des ondes forcées au-delà du seuil d'apparition de l'instabilité par résonance triadique, on espère faire émerger un régime de turbulence d'ondes d'inertie. Nous présenterons dans la partie 4.1 du chapitre 4 les quelques études qui ont aussi adopté cette stratégie.

Dans cette thèse, nous présentons deux études expérimentales dans lesquelles le système de forçage injecte l'énergie dans des ondes d'inertie uniquement.

Dans le chapitre 2, nous décrivons le matériel utilisé qui est constitué d'une plateforme tournante et d'un système de Vélocimétrie par Images de Particules (PIV). Nous présentons aussi les dispositifs de forçage des écoulements conçus pendant cette thèse et utilisés dans le chapitre 3 et dans le chapitre 4.

Dans le chapitre 3, nous présentons une étude expérimentale des régimes linéaires et non-linéaires d'un attracteur d'ondes d'inertie dans une cavité trapézoïdale en rotation. Nous mettons en évidence que l'attracteur est sujet à une instabilité par résonance triadique qui a pour conséquence de réduire l'amplitude de l'attracteur et de faire croître sa longueur d'onde en accord avec des résultats récents dans des simulations numériques et des expériences en fluide stratifié. En variant le taux de rotation ainsi que l'amplitude et la longueur d'ondes du forçage, nous identifions les lois d'échelles suivies par l'amplitude et la longueur d'onde de l'attracteur dans les régimes linéaire et non-linéaire. Nous montrons que le régime non-linéaire de l'attracteur peut être décrit quantitativement en remplaçant dans le modèle linéaire, aujourd'hui bien établi, la viscosité du fluide par une viscosité turbulente, prenant en compte de manière effective la dissipation que constitue l'instabilité triadique pour l'attracteur.

Dans le chapitre 4, nous présentons les résultats d'une expérience dans laquelle est forcée une assemblée d'ondes d'inertie à la même fréquence et se propageant dans une grande variété de directions. Pour une amplitude de forçage modérée, une partie de l'énergie des ondes forcées est transférée à des ondes sous-harmoniques selon le processus d'instabilité par résonance triadique. Ce phénomène est en accord avec le scénario proposé par la théorie de la turbulence d'ondes, où une cascade d'énergie vers les basses fréquences est portée par des interactions triadiques résonantes. Toutefois, pour des amplitudes de forçage plus grandes, le système ne tend pas vers

## 1.7. OBJECTIFS DE CETTE THÈSE

---

un régime de turbulence d’ondes. Au lieu de cela, nous mettons en évidence que la majorité de l’énergie se condense dans un mode géostrophique. L’émergence de ce mode est tout à fait remarquable car les interactions triadiques résonantes sont théoriquement incapables de transférer de l’énergie vers un tel mode 2D (théorème de “Greenspan”).

Les résultats de cette thèse ont fait l’objet des publications suivantes :

1. M. Brunet, T. Dauxois et P.-P. Cortet, *Linear and nonlinear regimes of an inertial wave attractor*, Phys. Fluids **4**, 034801 (2019). [Sélectionné comme “Editors’ Suggestion”](#)
2. M. Brunet, B. Gallet, et P.-P. Cortet, *Shortcut to Geostrophy in Wave-Driven Rotating Turbulence : The Quartetic Instability*, Phys. Rev. Lett. **124**, 124501 (2020). [Sélectionné comme “Editors’ Suggestion”](#)



## Chapitre 2

# Dispositifs expérimentaux

Pendant ma thèse de doctorat, nous avons mis en œuvre deux expériences d’hydrodynamique en rotation dont un des objectifs était de s’approcher du régime de turbulence d’ondes d’inertie. Par rapport aux expériences de turbulence en rotation discutées dans la littérature, la spécificité de ces expériences était en premier lieu une injection de l’énergie uniquement dans des ondes d’inertie que l’on entraîne dans un régime non-linéaire en augmentant l’intensité du forçage.

Dans ce chapitre, nous présentons les aspects techniques des deux dispositifs expérimentaux utilisés dans le cadre de cette thèse. Certains de ces éléments techniques sont utilisés dans l’équipe du FAST depuis plusieurs années, comme la plateforme tournante du FAST baptisée “Gyroflow” et le système de mesure des champs de vitesse par vélocimétrie par images de particules. D’autres ont été élaborés puis mis en œuvre pendant cette thèse, comme les deux systèmes de forçage d’ondes d’inertie. Le développement et la mise au point de ces dispositifs de forçage ont fait partie intégrante de mon travail de thèse même si bien entendu ceux-ci ont été réalisés avec l’aide de l’ensemble de l’équipe technique du laboratoire FAST.

### 2.1 La plateforme tournante “Gyroflow”

La plateforme tournante “Gyroflow” est dédiée à la réalisation d’expériences d’hydrodynamique en rotation. Elle a été conçue et réalisée par un bureau d’étude pour le FAST sur l’initiative de Frédéric Moisy (Professeur de l’Université Paris-Saclay) et est opérationnelle depuis octobre 2009. Cette plateforme mécanique de précision, de 2 m de diamètre, peut embarquer jusqu’à une tonne de matériel en rotation, comprenant en particulier les cuves où les écoulements sont générés. Elle peut atteindre une vitesse de rotation  $\Omega$  de 30 tr/min avec des fluctuations relatives inférieures à  $\Delta\Omega/\Omega \sim 1\%$ . Pour plus de détails techniques, le lecteur pourra consulter la thèse de doctorat de Cyril Lamriben [53] soutenue en 2012 et qui s’appuie elle aussi sur cette plateforme tournante.

Au-delà de ses qualités mécaniques, son atout est de permettre d’embarquer dans le référentiel tournant et de piloter à distance via un collecteur tournant un système de vélocimétrie par images de particules (PIV) et les dispositifs expérimentaux permettant de générer les écoulements. Les

dimensions de cette plateforme nous ont autorisé à réaliser des mesures de champs de vitesse dans des plans verticaux du référentiel tournant et de mettre en œuvre des dispositifs de forçage d’ondes d’inertie particulièrement élaborés.

Il existe actuellement un nombre relativement important de plateformes tournantes dédiées à la mécanique des fluides aux dimensions et caractéristiques comparables à la nôtre. En France, on peut par exemple citer les plateformes du Laboratoire de Physique de l’ENS de Lyon, de l’IRPHÉ à l’Université d’Aix-Marseille, du LadHyx à l’École polytechnique et de l’Institut Néel à Grenoble. À titre de comparaison, la plus grande plateforme tournante dédiée à l’hydrodynamique en référentiel tournant est la plateforme “Coriolis” située au LEGI à l’Université Grenoble Alpes, d’un diamètre de 13 m et pouvant aller jusqu’à une vitesse de rotation de  $\Omega = 6$  tr/min.

## 2.2 Mesure des champs de vitesse

Dans l’ensemble des études expérimentales réalisées pendant cette thèse, nous avons caractérisé les écoulements grâce à un système de vélocimétrie par images de particules embarqué sur la plateforme tournante. Ce système nous a permis de mesurer les deux composantes du champ de vitesse dans un plan vertical du référentiel tournant.

### 2.2.1 Principe de la vélocimétrie par images de particules (PIV)

La vélocimétrie par images de particules repose sur la comparaison d’images successives de particules matérielles en suspension dans le fluide. Pour mettre en œuvre cette technique, il faut évidemment que les particules utilisées soient de bons traceurs, c’est-à-dire que leur mouvement correspond bien à celui des particules fluides. Il est important pour cela que le rapport entre l’énergie cinétique de la particule et celle que le fluide est capable de dissiper par frottement (i.e. le nombre de Stokes  $St$ ) reste petit devant 1. Il est important aussi que les particules soient plus petites que les plus petites échelles des structures hydrodynamiques de l’écoulement à l’étude. Finalement, on choisit aussi des particules de densité proche de celle du fluide étudié pour éviter leur sédimentation ou leur flottaison pendant les expériences.

Une nappe laser, produite par un dispositif optique à la sortie d’un laser, éclaire un plan de l’écoulement. Les particules introduites dans le fluide et présentes dans le plan laser diffusent alors chacune la lumière du laser en créant un halo lumineux : cette tache lumineuse marquant la position de la particule dans le plan laser est évidemment plus grosse que la taille de la particule. Dans la configuration de PIV simple que nous avons souvent utilisée pendant cette thèse, une caméra enregistre une série d’images des particules illuminées dans le plan laser. Les images sont découpées en un quadrillage régulier de fenêtres d’interrogation. L’algorithme de PIV détermine alors, pour chaque fenêtre, le déplacement  $\delta \mathbf{x}_{opt}$  qui maximise la corrélation entre les motifs dessinés par le nuage de particules visible dans deux images successives séparées d’un intervalle de temps  $\delta t$ . L’algorithme détermine ensuite la vitesse locale du fluide par la formule  $\mathbf{u} = \frac{\delta \mathbf{x}_{opt}}{\delta t}$ , cette vitesse constituant une mesure de la vitesse du fluide moyennée spatialement sur la taille de la fenêtre d’interrogation, sur l’épaisseur de la nappe laser et temporellement sur l’échelle de

temps  $\delta t$ . En répétant cette procédure de maximisation de corrélation d'images sur toutes les fenêtres d'interrogation et toutes les images, l'algorithme de PIV permet finalement de calculer des séries de coupes du champ de vitesse de l'écoulement dans le plan laser.

### 2.2.2 Matériel utilisé pour la vélocimétrie par images de particules

Le matériel utilisé pour réaliser les mesures de vélocimétrie par images de particules pendant cette thèse se compose de :

1. un laser TWINS BSL 140 de la marque Quantel Laser. C'est un laser Nd:Yag pulsé double-cavité de longueur d'onde 532 nm et d'énergie 140 mJ par pulse. En sortie du laser, on place une lentille cylindrique de manière à créer une nappe laser d'environ 1 mm d'épaisseur. La fréquence de tir maximale de chaque cavité laser de ce laser double-cavité est de 40 Hz mais sa double cavité permet d'effectuer deux pulses décalés d'un intervalle de temps  $\delta t$  aussi petit qu'on le souhaite ;
2. deux caméras CCD double frame "Imager SX 4M"  $2360 \times 1776$  pixels<sup>2</sup> vendues par LaVision. Ce sont des caméras allant jusqu'à une fréquence d'acquisition de 31 Hz, ayant une sensibilité de 12 bits par pixel. Ce sont des caméras ayant une "double trame", c'est-à-dire que le capteur CCD peut acquérir des doublets d'images séparées d'un intervalle de temps  $\delta t$  beaucoup plus petit que l'inverse de la fréquence d'acquisition  $f_{acq}$  ;
3. des particules de verre creuses "Spherical 110P8" de diamètre  $d_p = 10 \mu\text{m}$  et de masse volumique  $\rho_p = 1.1 \text{ g cm}^{-3}$ . On peut vérifier rapidement que ces particules vont constituer de bons traceurs dans le cadre de cette thèse. Les écoulements que nous allons étudier sont constitués en premier lieu d'ondes d'inertie de longueur d'onde de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres. Les plus petites échelles hydrodynamique en jeu sont de l'ordre de  $L \simeq 1 \text{ cm}$ . La taille des particules est donc évidemment bien plus faible que la plus petite échelle des écoulements qui sont étudiés. La vitesse typique de nos écoulements est de l'ordre de  $U \simeq 1 \text{ cm s}^{-1}$ . Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre des particules et sur la vitesse typique de nos écoulements est donc d'environ  $10^{-1}$  si bien que l'écoulement autour de des particules de PIV peut être considéré comme un écoulement de Stokes. Ceci nous autorise à considérer le nombre de Stokes  $St = \frac{\rho+2\rho_p}{\rho} \frac{d_p^2 U}{36\nu L}$  [76] avec  $\rho$  et  $\nu$  respectivement la densité et la viscosité cinématique du fluide (dans notre cas de l'eau). On obtient alors un nombre de Stokes de l'ordre de  $St \sim 10^{-5} \ll 1$  signifiant ainsi que les particules de verres "Spherical 110P8" vont correctement suivre les particules fluides. Nos particules constituent donc de bons traceurs de l'écoulement.

Le laser et les caméras sont commandés par un boîtier électronique de synchronisation lui-même piloté par un ordinateur, l'ensemble étant embarqué dans le référentiel tournant. L'acquisition des images et le calcul des champs de vitesse sont réalisés à l'aide du logiciel "DaVis" de la société LaVision. Un schéma de l'organisation sur la plateforme tournante du système de mesure de vélocimétrie par images de particules dans le référentiel tournant est représenté à la figure 2.1(a) et une photographie du montage expérimental utilisé dans l'ensemble du chapitre 4 est présentée

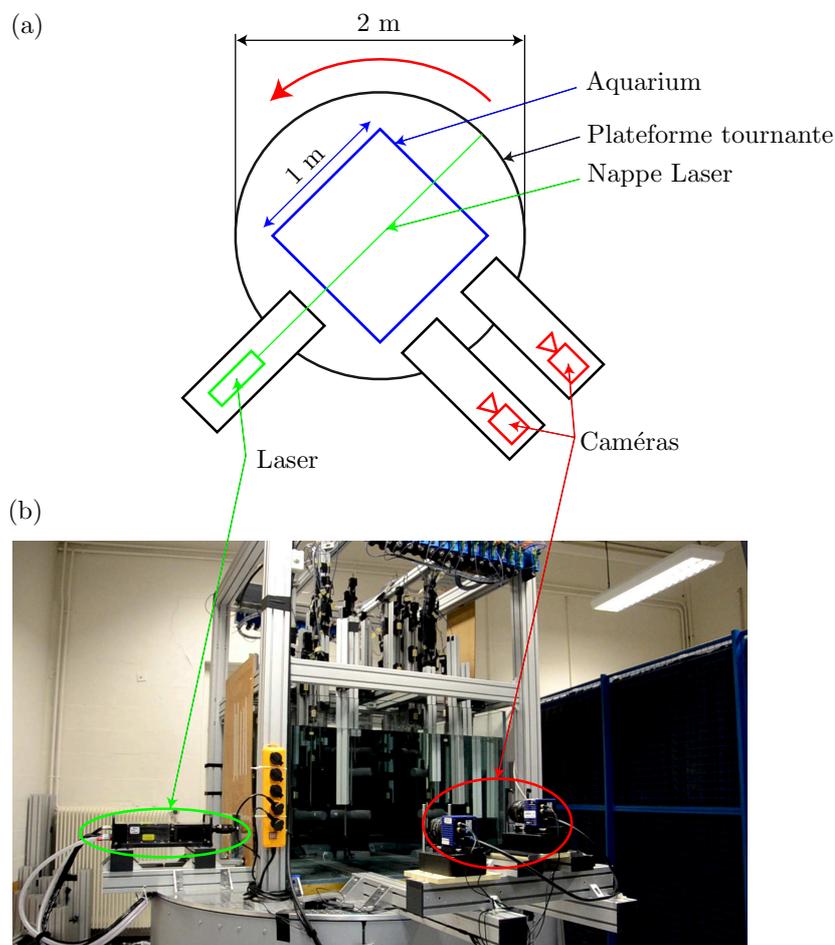


FIGURE 2.1 – (a) Schéma de l’organisation spatiale sur la plateforme tournante du système de mesure de vélocimétrie par images de particules vue de dessus. (b) Photographie du montage expérimental utilisé dans l’ensemble du chapitre 4.

à la figure 2.1(b).

### 2.2.3 Calibrations et acquisitions PIV réalisées pendant cette thèse

Avant toute acquisition, il est nécessaire de calibrer les images des caméras pour faire correspondre un pixel de l’image à une position spatiale dans le plan de mesure. Ces calibrations sont réalisées au moyen de la prise d’images d’une mire dont le logiciel de PIV connaît le motif. Cette calibration permet finalement de faire correspondre les pixels des images à des coordonnées spatiales en unités dimensionnées et corrige au passage les distorsions optiques induites par les changements d’indice optique (air-verre-eau sur la face avant de l’aquarium) et l’objectif de la caméra.

Une fois cette calibration effectuée, deux modes d’acquisition sont possibles pour la PIV :

- le mode “single frame” dans lequel on enregistre une série d’images à la fréquence  $f_{acq}$ .

## 2.3. DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

---

Les corrélations d’images sont ensuite réalisées entre les images successives de la série et l’intervalle de temps entre deux images est alors  $\delta t = 1/f_{acq}$  ;

- le mode “double frame” dans lequel on enregistre une série de doublets d’images à la fréquence  $f_{acq}$ . À l’intérieur de chaque doublet d’images, les deux images sont espacées d’un temps  $\delta t$  plus court que l’inverse de la fréquence d’acquisition  $1/f_{acq}$ . Les corrélations se font entre les images de chaque doublet. Ce mode d’acquisition est rendu possible à la fois par nos caméras “double frame” pouvant acquérir des doublets d’images à intervalles réguliers et par notre laser à double cavité pouvant effectuer un pulse par image de chaque doublet d’images.

Quelque soit le mode d’acquisition, le pas de temps  $\delta t$  est choisi de sorte que les particules se déplacent, au maximum, d’environ un quart de la taille de la fenêtre d’interrogation entre les deux images utilisées pour les corrélations. De manière générale, il n’est pas toujours possible de respecter ce réglage optimal de l’intervalle de temps  $\delta t$  lorsqu’il existe une composante de vitesse perpendiculaire au plan de mesure importante. La fréquence d’acquisition  $f_{acq}$  est réglée de telle manière à résoudre temporellement les dynamiques les plus rapides de l’écoulement, sans être toutefois inutilement élevée pour limiter les quantités de données à sauvegarder qui peuvent vite être importantes. C’est pourquoi le mode d’acquisition double-frame est utilisé dès que le nombre d’images que produirait une acquisition en mode single-frame avec un  $\delta t$  optimal devient trop important. Dans notre cas, nous avons en général choisi d’acquérir 12 images ou doublets d’images par période des ondes d’inertie étudiées, nos acquisitions pouvant couvrir 3000 périodes des ondes pendant une expérience dans l’objectif d’explorer les dynamiques lentes de l’écoulement. Tous les calculs des champs de vitesse par corrélation d’images ont finalement été réalisés sur des fenêtres d’interrogation de taille  $32 \times 32$  pixels<sup>2</sup> avec un recouvrement en surface des fenêtres de 50%.

Dans le dispositif expérimental du chapitre 3, la taille du champ de mesure était celle de l’aquarium (environ 1 m) et il a alors été nécessaire de construire une mire de cette taille. Pour pouvoir obtenir un champ de vitesse couvrant cette dimension de 1 m tout en conservant une bonne résolution des petites échelles de l’écoulement, nous avons utilisées nos deux caméras en parallèle, chacune filmant une moitié différente du champ de mesure. C’est alors au moyen d’une calibration spatiale que nous avons fusionné chaque paire d’images en une seule recouvrant l’intégralité du champ de mesure.

Dans le dispositif expérimental du chapitre 4, la taille du champ de mesure est de l’ordre de 30 cm. Une seule caméra a été utilisée pour des mesures de PIV à deux dimensions classiques.

## 2.3 Dispositifs expérimentaux

Nous avons mis en œuvre, dans le cadre de cette thèse, deux dispositifs expérimentaux représentés à la figure 2.2. Nous forçons des écoulements dans un aquarium de base carrée de dimensions  $L_x \times L_y = 105 \times 105$  cm<sup>2</sup>, de hauteur 75 cm, rempli de 62 cm d’eau et centré sur l’axe de rotation de la plateforme tournante.

Le premier dispositif expérimental, schématisé à la figure 2.2(a) et montré à la figure 2.2(c), consiste en une cavité trapézoïdale obtenue en introduisant un plan incliné d'un angle  $58^\circ$  avec l'horizontal dans l'aquarium évoqué plus haut. Le "plafond" de la cavité trapézoïdale est lui constitué d'une série de 23 barres horizontales oscillants verticalement. Ces barres sont espacées de 5 mm dans la direction  $x$ , ont une section carrée de 40 mm de coté, font 86 cm de long et sont centrées dans l'aquarium dans la direction  $y$ . Le mouvement vertical de chaque barre est imposé au moyen d'un moteur "linéaire" dont le mouvement est transmis par une tige profilée en aluminium (cf. partie 2.4). Ce système impose finalement à la frontière supérieure de la cavité un mouvement ondulatoire harmonique approximant la fonction :

$$Z(x, t) = H + A [\cos(\sigma_0 t + k_0 x) - 1], \quad (2.1)$$

où  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $A$  et  $H$  étant respectivement la longueur d'onde, l'amplitude et l'altitude maximum du profil imposé au fluide. Ce dispositif expérimental est utilisé dans l'ensemble du chapitre 3 et un descriptif plus détaillé en est fait dans la partie 3.3.1.

Le second, schématisé à la figure 2.2(b) et montré à la figure 2.2(d), est constitué d'un ensemble de 32 cylindres horizontaux oscillant verticalement. La coordonnée verticale  $z_i$  du cylindre numéro  $i$  suit le mouvement

$$z_i(t) = H_i + A \cos(\sigma_0 t + \varphi_i), \quad (2.2)$$

où  $H_i$  est l'altitude moyenne du cylindre,  $\varphi_i$  sa phase initiale (choisie aléatoirement),  $A$  est l'amplitude du mouvement et  $\sigma_0$  sa pulsation. Ces cylindres sont répartis régulièrement autour d'une sphère virtuelle de 80 cm de diamètre centrée horizontalement dans l'aquarium. Les cylindres, tangents à la sphère virtuelle, sont répartis sur quatre latitudes de celle-ci : 8 cylindres d'une longueur de 12 cm sont placés à la latitude  $46^\circ\text{N}$ , 8 d'une longueur de 15 cm à la latitude  $28^\circ\text{N}$ , 8 d'une longueur de 18 cm sont sur l'équateur et les 8 derniers sont à la latitude  $28^\circ\text{S}$ . La sphère virtuelle est tronquée à la latitude  $40.5^\circ\text{S}$  par le fond de l'aquarium. Ce dispositif expérimental est utilisé dans l'ensemble du chapitre 4 et un descriptif plus détaillé en est fait dans la partie 4.2.

## 2.4 Dispositif électronique et mécanique du forçage des écoulements

Pour que les barres ou les cylindres des deux dispositifs de forçage présentés à la partie précédente puissent se mouvoir, on associe un moteur "linéaire" L3518S1204-T6X1-A50 de la marque Nanotec<sup>®</sup> à chaque objet oscillant. Ces moteurs sont en fait des moteurs rotatifs dont le mouvement de rotation est transformé en mouvement de translation grâce à une vis sans fin couplée à un guide linéaire. Ces moteurs ont une limite en vitesse de  $22 \text{ mm s}^{-1}$  et une course de 5 cm. Ces contraintes se traduisent dans les paramètres des mouvements discutés dans la partie précédente dans les équations (2.1) et (2.2) par  $A < 2.5 \text{ cm}$  et  $A\sigma_0 < 22 \text{ mm s}^{-1}$ . Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé deux taux de rotation de la plateforme tournante  $\Omega = 18 \text{ tr/min}$

## 2.4. DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE ET MÉCANIQUE DU FORÇAGE DES ÉCOULEMENTS

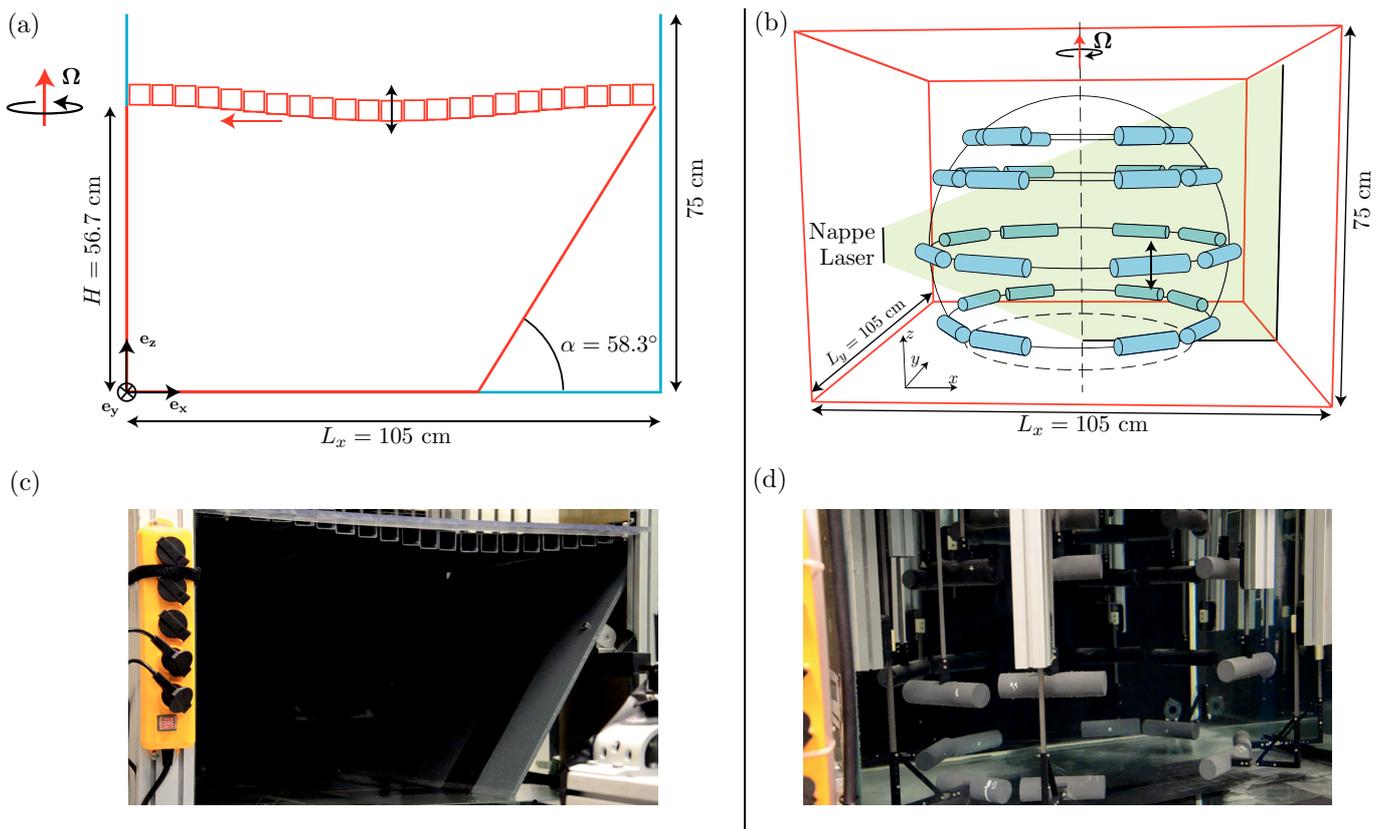


FIGURE 2.2 – (a) Schéma et (c) photographie du dispositif expérimental utilisé dans le chapitre 3. Le plafond de la cavité est constitué de 23 barres horizontales de section carrée, chacune connectée à un moteur linéaire permettant son mouvement dans la direction verticale. (b) Schéma et (d) photographie du dispositif expérimental utilisé dans l'ensemble du chapitre 4 : 32 cylindres horizontaux oscillent verticalement et sont répartis régulièrement autour d'une sphère virtuelle de 80 cm de diamètre centrée horizontalement dans l'aquarium.

## CHAPITRE 2. DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX

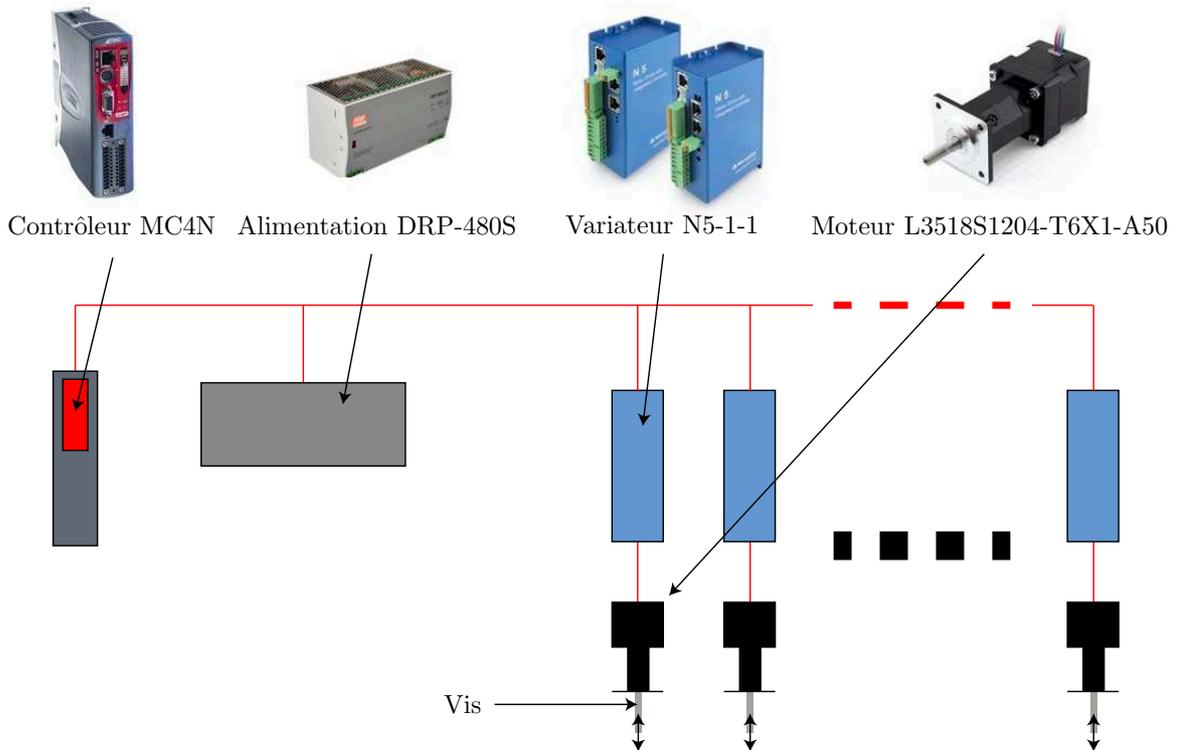


FIGURE 2.3 – Schéma du dispositif électronique servant au contrôle des moteurs. Alimentés par une alimentation DRP-480S et dirigés par un contrôleur MC4N, les variateurs N5-1-1 commandent les mouvements des moteurs L3518S1204-T6X1-A50. Ces moteurs “linéaires” imposent alors à la vis un mouvement dirigé selon l’axe vertical. Les traits rouges matérialisent les branchements électroniques entre les composants.

et  $\Omega = 3$  tr/min. C’est la contrainte  $A\sigma_0 < 22 \text{ mm s}^{-1}$  qui limitait l’amplitude maximum du système lorsque  $\Omega = 18$  tr/min et la contrainte  $A < 2.5 \text{ cm}$  qui limitait l’amplitude maximum du système lorsque  $\Omega = 3$  tr/min. Ces moteurs peuvent développer une force de 240 N largement suffisante pour mettre en mouvement les cylindres et barres de section carrée que nous avons utilisés. La résolution du mouvement de ces moteurs est de  $5 \mu\text{m}$ , nous autorisant les faibles amplitudes de forçage explorées au chapitre 3 (la plus faible étant  $A = 90 \mu\text{m}$ ).

Chaque moteur est commandé par un variateur N5-1-1 de la marque Nanotec<sup>®</sup> et alimenté par un générateur de tension DRP-480S de la marque Mean Well<sup>®</sup>. L’ensemble des variateurs est lui-même commandé par un unique contrôleur MC4N de la marque Trio Motion Technology<sup>®</sup>. Un schéma du dispositif électronique est représenté à la figure 2.3. On pilote l’ensemble des moteurs en communiquant avec le contrôleur MC4N par un logiciel (Motion Perfect) installé sur un ordinateur. Ce logiciel utilise le langage TrioBASIC que nous avons dû apprendre à utiliser (avec l’aide précieuse du revendeur des moteurs).

Si les moteurs sont à l’origine du mouvement, il faut toutefois un dispositif mécanique pour le transmettre à l’objet devant être finalement oscillé dans l’eau : nous utilisons à cet effet une

## 2.4. DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE ET MÉCANIQUE DU FORÇAGE DES ÉCOULEMENTS

---

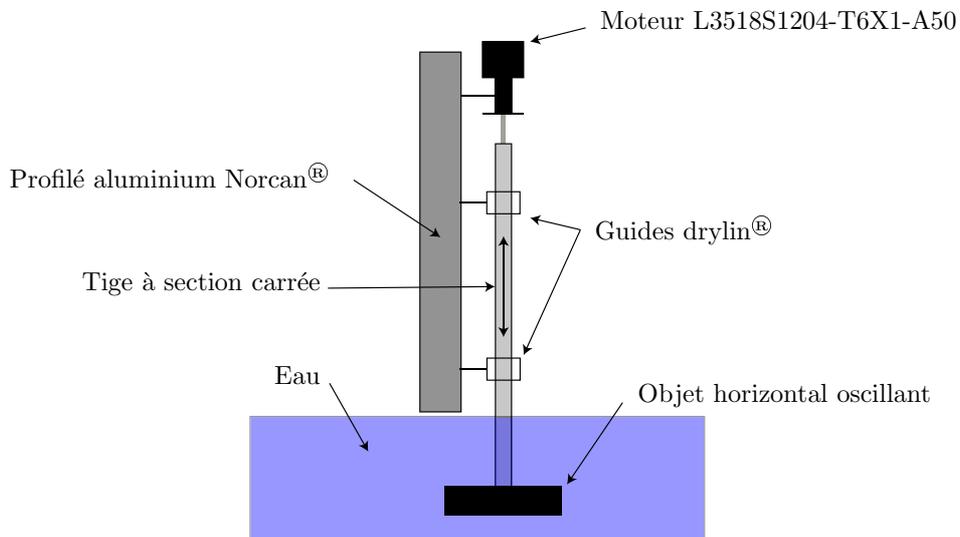


FIGURE 2.4 – Schéma du dispositif transmettant le mouvement d'un moteur L3518S1204-T6X1-A50 (visible en haut) à l'objet horizontal et de son support profilé aluminium Norcan®.

tige profilée en aluminium de section carrée passant par deux guides de section carrée (la tige et les guides sont de la gamme drylin® de chez Iigus®) entre le moteur et l'objet horizontal. Le moteur et les guides sont fixés sur un support en aluminium Norcan® profilé de côté 45 mm. Un schéma de ce dispositif mécanique est présenté à la figure 2.4.



## Chapitre 3

# Attracteurs d'ondes d'inertie en régime linéaire et non-linéaire

La motivation première de cette thèse était de mettre en œuvre un dispositif expérimental permettant de générer un écoulement dans le régime de turbulence d'ondes d'inertie. L'originalité de notre approche est de forcer l'écoulement en injectant l'énergie uniquement dans des modes ondulatoires et non dans des modes tourbillonnaires comme cela a été le cas dans la grande majorité des expériences passées où le forçage était réalisé au moyen de grilles oscillées ou translitées, de réseaux de jets turbulents, de générateurs de tourbillons, etc. [30, 38, 40, 73].

Nous nous sommes alors inspirés des travaux de Brouzet *et al.* [77, 78] qui ont mis en évidence en 2017 l'émergence d'une cascade d'instabilités par résonance triadique d'ondes internes de gravité dans un fluide stratifié en densité. Dans leur cavité trapézoïdale, l'énergie se concentre d'abord le long d'un attracteur d'ondes avant d'être transférée vers d'autres fréquences à travers une série de résonances triadiques discrètes. Ces observations, bien qu'encore éloignées d'un régime de turbulence d'ondes où un flux d'énergie s'écoulerait en moyenne statistique le long d'un continuum d'échelles et de fréquences, constituaient cependant ce qui s'en rapprochait le plus pour ce qui est des ondes internes (de gravité ou d'inertie) à la date du début de ma thèse, en octobre 2017.

Réaliser des expériences d'attracteurs d'ondes d'inertie n'était pas la piste initialement choisie pour remplir notre objectif de réaliser une turbulence d'ondes d'inertie au laboratoire. Cependant, le caractère prometteur des expériences de Brouzet *et al.* dans l'équipe de Thierry Dauxois à l'ENS de Lyon associé à l'absence d'étude expérimentale quantitative sur les attracteurs d'ondes d'inertie (hormis leur structure élémentaire étudiée par Manders et Maas en 2003 et 2004 [79, 80]) nous ont convaincus de remettre à plus tard le projet d'expérience initialement prévu qui s'est concrétisé par les résultats présentés au chapitre 4.

### 3.1 Les attracteurs d'ondes internes

#### 3.1.1 Attracteurs inviscides

Les attracteurs d'ondes internes peuvent apparaître dans les cavités où au moins une paroi n'est ni parallèle ni perpendiculaire à l'axe de rotation pour les ondes d'inertie ou à la pesanteur pour les ondes internes de gravité. L'émergence de ces attracteurs est une conséquence de la réflexion anormale de ces ondes sur les parois solides : la fréquence des ondes internes impose un angle  $\theta$  constant à la direction de propagation de l'énergie par rapport à l'horizontale. Ainsi, lors de sa réflexion sur une paroi inclinée d'un angle  $\alpha$ , un faisceau d'ondes internes ne respectera pas la loi de Snell-Descartes : le faisceau réfléchi aura le même angle de propagation par rapport à l'horizontale que le faisceau incident comme l'illustre la figure 3.1.

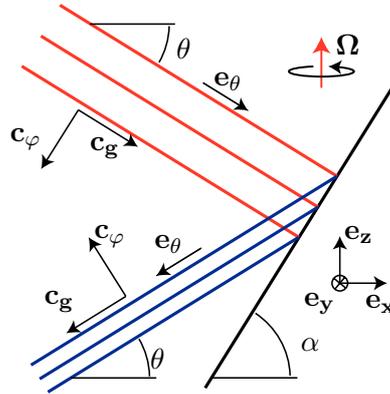


FIGURE 3.1 – Réflexion focalisante d'un faisceau d'onde d'inertie de pulsation  $\sigma = 2\Omega \cos \theta$  sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$ . Les vecteurs  $\mathbf{c}_\varphi$  et  $\mathbf{c}_g$  montrent les directions de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe pour le faisceau incident et le faisceau réfléchi.

Selon que l'onde descend ou remonte la pente de la paroi inclinée, cette propriété singulière conduit lors de la réflexion à une augmentation ou, respectivement, à une réduction des échelles transverses du faisceau d'un facteur

$$\gamma = \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha - \theta)}.$$

Lorsque l'onde descend la pente, la réflexion va ainsi concentrer l'énergie spatialement : on parle de réflexion focalisante. De manière symétrique, la réflexion sera "défocalisante" lorsque l'onde remonte la pente.

On peut écrire la conservation du flux d'énergie lors de la réflexion : pour une onde plane d'inertie de pulsation  $\sigma = 2\Omega \cos \theta$ , de longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude en vitesse  $U$ , la conservation du flux d'énergie  $U^2 c_g \lambda$ , où  $c_g = \Omega \lambda \sin \theta / \pi$  est la vitesse de groupe de l'onde, implique que le produit  $U \lambda$  est conservé. Lors d'une réflexion focalisante, comme  $\lambda$  est réduit d'un facteur  $\gamma$ , l'amplitude en vitesse de l'onde  $U$  sera amplifiée d'un facteur  $\gamma$  et la vorticité, en  $U/\lambda$ , sera

### 3.1. LES ATTRACTEURS D'ONDES INTERNES

elle amplifiée d'un facteur  $\gamma^2$ .

Depuis les travaux pionniers de Leo Maas *et al.* [81, 82] au milieu des années 90, nous savons qu'au sein d'une cavité fermée possédant des parois non-uniquement verticales et horizontales, le mécanisme de focalisation dominera lors de réflexions multiples d'ondes. Ce mécanisme conduit l'énergie des ondes à une certaine fréquence à se concentrer le long d'un cycle limite, que l'on appelle attracteur d'ondes. Ce mécanisme de concentration peut facilement s'observer en traçant les trajectoires de rayons d'ondes à une fréquence donnée (et donc un angle  $\theta$  donné) : on constate que pour certaines gammes de fréquences, dépendant de la géométrie de la cavité, tous les rayons convergent vers un même cycle limite. La figure 3.2 illustre la convergence de deux rayons dans une cavité trapézoïdale vers un cycle limite en forme de parallélogramme.

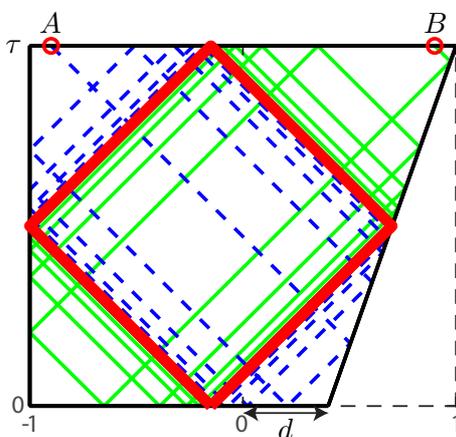


FIGURE 3.2 – Schéma montrant la convergence de deux rayons d'ondes internes vers un cycle limite dans une cavité trapézoïdale. Les deux rayons sont associés à des ondes ayant la même fréquence (l'une est représentée en trait plein vert et l'autre en tirets bleus) et partent respectivement des points A et B pour converger vers le cycle limite en rouge matérialisant l'attracteur.

L'étude des domaines d'existence des attracteurs inviscides pour des ondes se propageant à  $\theta = 45^\circ$  dans une cavité trapézoïdale de hauteur  $\tau$ , de grande base 2 et de petite base  $1 + d$  (cf. figure 3.2) a été réalisée par Maas *et al.* [82]. Cette étude décrit en fait toutes les cavités trapézoïdales et tous les angles  $\theta$  possibles puisqu'il suffit de poser  $\tau' = \tau \tan \theta$  pour retomber sur la configuration d'une cavité équivalente où les ondes se propagent avec un angle de  $45^\circ$ . Maas *et al.* ont en pratique construit le diagramme de la figure 3.3(a) qui montre la carte de  $\log_{10}(-\Lambda)$  en fonction de  $d$  et  $\tau$  où  $\Lambda$  est l'exposant de Lyapunov associé à la convergence des rayons vers un cycle limite. Maas *et al.* ont ainsi constaté la forte variabilité de la vitesse de convergence vers un attracteur. La figure 3.3(a) montre en effet des zones de forte convergence en blanc, en forme de langue, séparées par des zones de convergence lente en gris et des zones sans convergence en noir.

Les régions blanches de la figure 3.3(a) correspondent en pratique aux régions pour lesquelles les attracteurs sont les plus susceptibles d'apparaître en présence de viscosité : la convergence y étant forte, l'énergie des ondes est susceptible de se concentrer significativement avant d'avoir

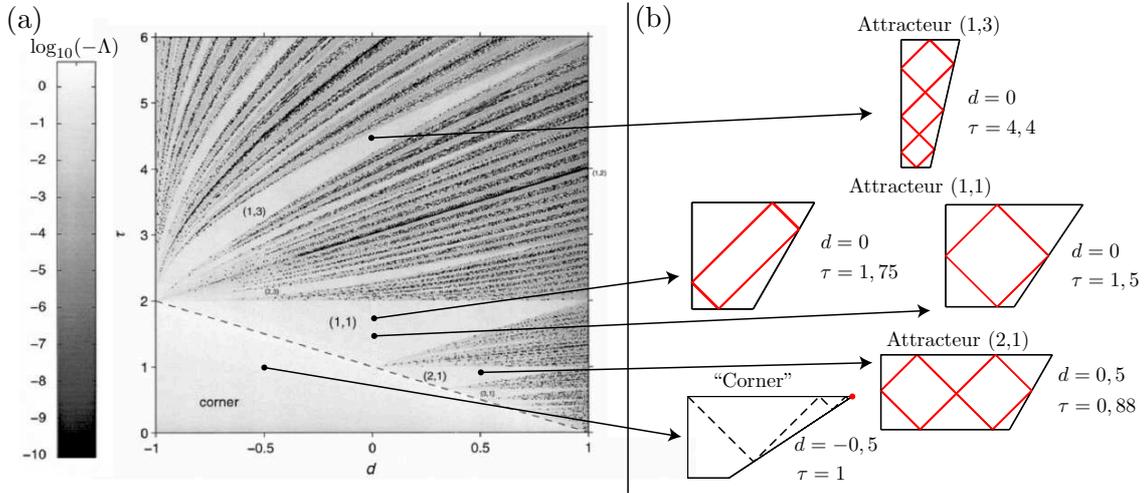


FIGURE 3.3 – (a) Exposant de Lyapunov  $\Lambda$  associé à la convergence des rayons vers un cycle limite en fonction des paramètres  $(d, \tau)$  d’une cavité trapézoïdale (cf. figure 3.2). L’échelle de gris représente  $\log_{10}(-\Lambda)$  : plus la carte est blanche, plus la convergence des rayons vers l’attracteur est rapide. Extrait de Maas *et al.* [81]. (b) Exemples de cycles limites pour différents couples  $(d, \tau)$ . Dans la configuration “corner”, un rayon se propageant au sein de la cavité est illustré en trait tireté et converge vers un seul point situé dans l’angle aigu de la cavité. La dénomination des régions attractives par le couple  $(m, n)$  est explicitée dans le texte.

subit une dissipation visqueuse trop importante pendant la propagation des ondes. Chaque région blanche correspond à un type d’attracteur qui peut être caractérisé par un couple d’entiers  $(m, n)$ , avec  $m$  le nombre de réflexions de l’attracteur sur la grande base du trapèze et  $n$  le nombre de réflexions de l’attracteur sur la paroi inclinée. Quelques exemples d’attracteurs élémentaires sont représentés dans figure 3.3(b).

Un comportement singulier intervient lorsque l’angle de propagation des ondes  $\theta$  est plus grand que celui de la paroi inclinée  $\alpha$ , i.e.  $\tau \leq 1 - d$  : les rayons ne convergent pas vers un cycle limite mais vers l’angle aigu de la cavité comme illustré à figure 3.3(b). Sur la figure 3.3(a), ce type de convergence vers un point apparaît dans la région dénommée “corner” par Maas *et al.* et délimitée par un trait tireté.

### 3.1.2 Attracteur en présence de viscosité

Lorsqu’un fluide visqueux est considéré, la concentration de l’énergie des ondes sur l’attracteur inviscide, infiniment fin, ne peut évidemment se réaliser complètement. L’énergie des ondes aura bien tendance à se concentrer le long de l’attracteur inviscide mais l’attracteur visqueux aura une certaine épaisseur, une échelle transverse caractéristique. Cet étalement visqueux des ondes autour de l’attracteur inviscide est bien illustré, par exemple, par le champ de gradient de densité de la figure 3.4, mesuré par Christophe Brouzet pendant sa thèse [83] pour un attracteur d’ondes internes de gravité dans un fluide stratifié linéairement. La convergence de l’énergie des

### 3.1. LES ATTRACTEURS D'ONDES INTERNES

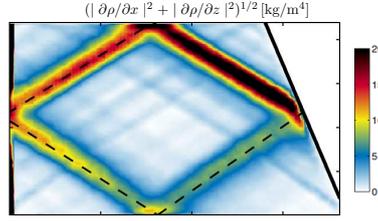


FIGURE 3.4 – Attracteur d’ondes internes de gravité dans un fluide linéairement stratifié mesuré dans le plan vertical d’une cavité trapézoïdale dans une expérience menée par Christophe Brouzet pendant sa thèse [83]. Une onde est forcée sur toute la hauteur de la cavité par un générateur d’onde constituant la paroi de gauche. L’attracteur inviscide est représenté en trait noir tireté et la carte de couleur montre l’amplitude du gradient de densité du fluide. Extrait de la thèse de Christophe Brouzet [83].

ondes vers le cycle limite inviscide est stoppée par la dissipation visqueuse qui est plus forte pour les petites longueurs d’onde. L’échelle transverse de l’attracteur est alors le fruit d’un équilibre entre l’amplification de l’amplitude des ondes lors de leurs réflexions focalisantes et l’atténuation visqueuse de celles-ci lors de leur propagation.

#### 3.1.2.a Le modèle de Hazewinkel *et al.*

Durant leur convergence vers l’attracteur inviscide, les ondes voient leur longueur d’onde diminuer d’un facteur  $\gamma$  à chaque réflexion focalisante. Ce processus de réduction des échelles des ondes à chaque “tour de cavité” pendant leur propagation est visible dans les expériences d’attracteur d’ondes internes de gravité menées en 2017 par Brouzet *et al.* [78] au sein d’une cavité trapézoïdale : en forçant une onde plane à grande échelle (de la hauteur de la cavité), ils ont étudié l’évolution avec le temps de la longueur d’onde dominant le champ de vitesse pendant l’établissement de l’écoulement et aussi après l’arrêt du forçage.

Visible à la figure 3.5, leurs données révèlent une décroissance de la longueur d’onde vers une valeur asymptotique durant l’établissement de l’attracteur ainsi qu’une deuxième décroissance pendant son déclin, après l’arrêt du forçage. Des résultats comparables avaient déjà été présentés en 2008 par Hazewinkel *et al.* [84] toujours dans des expériences d’attracteur d’ondes internes de gravité.

Hazewinkel *et al.* proposaient dans ce même article un modèle pour l’attracteur en considérant la progression d’une onde plane monochromatique de fréquence  $\sigma_0$ , de longueur d’onde initiale  $\lambda_f$  et d’amplitude en vitesse initiale  $U_0$ . Pendant la propagation de l’onde sur une distance  $\xi$ , le facteur d’atténuation visqueux de l’amplitude en vitesse de l’onde s’écrit :  $\epsilon_{\lambda_f} = \exp(-\ell^2 \xi (2\pi)^3 / \lambda_f^3)$  avec  $\ell^2 = \nu / \sqrt{4\Omega^2 - \sigma_0^2}$  pour une onde d’inertie (cf. partie 1.3.2) et  $\ell^2 = \nu / 2\sqrt{N^2 - \sigma_0^2}$  pour une onde interne de gravité avec  $N$  la fréquence de flottabilité aussi dite de Brunt-Väisälä. En notant la longueur de l’attracteur inviscide  $L_a$  et en considérant que l’onde se propage dès ses “premiers tours” le long de l’attracteur inviscide, l’onde aura, après un tour d’attracteur et juste après sa réflexion sur la paroi inclinée, une amplitude en vitesse

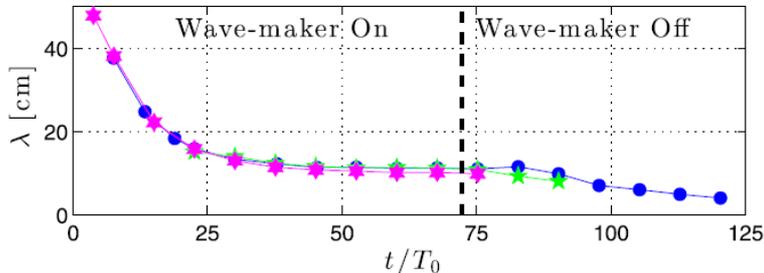


FIGURE 3.5 – Longueur d’onde  $\lambda$  dominant le champ de vitesse en fonction du temps dans une expérience où une onde interne de gravité est forcée à grande échelle dans une cavité trapézoïdale. On observe le régime transitoire après le démarrage du forçage, l’établissement du régime stationnaire puis un autre régime transitoire suivant l’arrêt du forçage (matérialisé par la droite verticale tireté). Les couleurs indiquent différentes amplitudes de forçage. Extrait de Brouzet *et al.* [78].

$U_1 = U_0 \gamma \exp(-\ell^2 L_a (2\pi)^3 / \lambda_f^3)$ . On peut montrer par récurrence qu’après  $n$  tours d’attracteur, l’amplitude en vitesse  $U_n$  de l’onde sera

$$U_n = U_0 \gamma^n e^{-\ell^2 L_a (2\pi)^3 \frac{1-\gamma^{3n}}{\lambda_f^3 (1-\gamma^3)}} \quad (3.1)$$

et sa longueur d’onde

$$\lambda_n = \lambda_f / \gamma^n. \quad (3.2)$$

À partir de ce modèle, Hazewinkel *et al.* ont pu prédire le “spectre spatial” dans la direction transverse à la direction de l’attracteur inviscide. Ce spectre résulte de la superposition de toutes les ondes ayant effectuées un nombre de tours d’attracteur différents. La comparaison du modèle aux expériences est visible à la figure 3.6. L’accord raisonnable entre le spectre expérimental et le spectre théorique montre que ce modèle réussit à rendre compte de la physique régissant les échelles transverses de l’attracteur en montrant l’émergence d’une échelle dominante conforme à celle observée. Le désaccord observé aux petites échelles est attribué par Hazewinkel *et al.* au bruit de mesure.

Remarquons ici que le spectre mesuré par Hazewinkel *et al.* est continu alors que leur modèle prédit l’existence d’une assemblée de longueurs d’onde discrètes et donc d’un spectre composé de pics à ces longueurs d’ondes. La version continue du modèle représentée en ligne tiretée à la figure 3.6 est obtenue en considérant  $n$  comme une variable continue dans l’équation (3.1). Ce n’est pas évoqué par les auteurs, mais cela peut se justifier par le fait que le forçage expérimental n’injecte pas l’énergie dans une onde plane monochromatique mais dans un paquet d’ondes portant une longueur d’onde caractéristique.

Il est possible de pousser plus loin cette approche que ne l’ont fait Hazewinkel *et al.* : on peut

### 3.1. LES ATTRACTEURS D'ONDES INTERNES

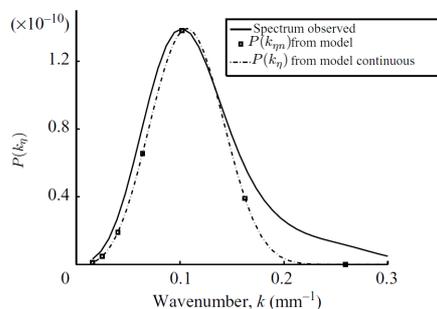


FIGURE 3.6 – Densité spectrale de puissance  $P(k_\eta)$  de la composante du gradient de densité dirigée selon l'axe  $\eta$  transverse à l'attracteur en fonction du nombre d'onde  $k_\eta$  observé dans une expérience d'attracteur d'ondes internes de gravité. Les données expérimentales sont en trait plein et le modèle décrit dans le texte est représenté par les carrés noirs. La version continue du modèle (obtenue en considérant  $n$  comme une variable continue dans l'équation (3.1)) est représentée par une ligne tiretée. Le modèle est normalisé pour que le maximum de la courbe ait la même valeur que celui de la courbe expérimentale. Extrait de Hazewinkel *et al.* [84].

en effet écrire l'amplitude en vitesse de l'onde plane lors de sa propagation le long de l'attracteur inviscide pendant son  $n+1^{\text{ème}}$  tour d'attracteur. Pour cela, il faut prendre en compte l'atténuation visqueuse qu'aura subie l'onde après avoir parcouru une distance  $s \in [0, L_a]$  depuis sa dernière réflexion sur la paroi inclinée. L'amplitude de l'onde après  $n$  tours et le parcours de la distance  $s$  pendant le  $n + 1^{\text{ème}}$  tour s'écrit ainsi

$$U(n, s) = U_0 \gamma^n e^{-\ell^2 L_a (2\pi)^3 \frac{1-\gamma^{3n}}{\lambda_f^3 (1-\gamma^3)}} e^{-\ell^2 s (2\pi)^3 \frac{\gamma^{3n}}{\lambda_f^3}}. \quad (3.3)$$

On peut alors prédire l'échelle dominant l'attracteur localement à la coordonnée  $s$  en calculant la longueur d'onde associée au maximum par rapport à  $n$  de la fonction  $U(n, s)$  de l'équation (3.3). En dérivant par rapport à  $n$ , on trouve que le maximum de  $U(n, s)$  est atteint pour

$$n_{max} = \frac{-\ln \left( \frac{3\ell^2 (2\pi)^3}{\lambda_f^3} \left[ s + \frac{L_a}{(\gamma^3 - 1)} \right] \right)}{3 \ln(\gamma)}. \quad (3.4)$$

On trouve l'échelle dominante à la coordonnée  $s$  en injectant  $n_{max}$  dans l'équation (3.2) :

$$\lambda_{n_{max}}(s) = 2\pi 3^{1/3} \ell^{2/3} \left( s + \frac{L_a}{(\gamma^3 - 1)} \right)^{1/3}. \quad (3.5)$$

Remarquons ici que  $n$  représente le nombre de tours d'attracteur et qu'il ne peut par conséquent qu'être positif. Pour que la longueur d'onde dominant l'attracteur soit bien  $\lambda_{n_{max}}$ , il est donc nécessaire d'avoir  $n_{max} \geq 0$ , ce qui peut se réécrire

$$\lambda_f \geq \lambda_{n_{max}}(s). \quad (3.6)$$

Comme  $U(n, s)$  ne comporte qu'un seul maximum local par rapport à  $n$ , cette dernière relation montre que l'échelle dominant l'attracteur sera le minimum entre la longueur d'onde du forçage  $\lambda_f$  et  $\lambda_{n_{max}}$ . Cette prédiction reflète l'absence de processus "défocalisant" permettant de transférer l'énergie de l'onde forcée vers des ondes de plus grandes échelles au sein de la cavité de l'attracteur.

En posant  $\xi = s + L_a/(\gamma^3 - 1)$  dans l'équation (3.5), on trouve pour la longueur d'onde caractéristique de l'attracteur la loi  $\lambda(\xi) \propto \ell^{2/3}\xi^{1/3}$ . Cette loi est formellement identique à celle pour la longueur d'onde caractéristique d'un faisceau d'onde auto-similaire issu d'une source ponctuelle (invariante selon  $y$ ) à une distance  $\xi$  de la source (cf. partie 1.3.2). On peut même remarquer que les préfacteurs numériques à ces deux lois sont proches (9.06 dans l'équation (3.5) contre 7.07 dans un faisceau auto-similaire de Moore et Saffman). Ainsi, le faisceau d'ondes de l'attracteur, une fois "déplié", peut être vu comme un faisceau auto-similaire issue d'une source ponctuelle virtuelle qui serait située à une distance  $L_0 = L_a/(\gamma^3 - 1)$  en amont de la réflexion focalisante.

### 3.1.2.b Le modèle de Grisouard et Staquet

Indépendamment du modèle de Hazewinkel *et al.* et reprenant une idée de Rieutord *et al.* [85], il a justement été proposé en 2008 par Grisouard et Staquet [86] de décrire les attracteurs d'ondes internes de gravité dans les fluides stratifiés linéairement, une fois "dépliés", comme un faisceau auto-similaire de Moore et Saffman (décrit dans la partie 1.3.2) émis par une source locale virtuelle située en amont de la réflexion focalisante. Une représentation de ce modèle au sein d'une cavité trapézoïdale est visible à la figure 3.7.

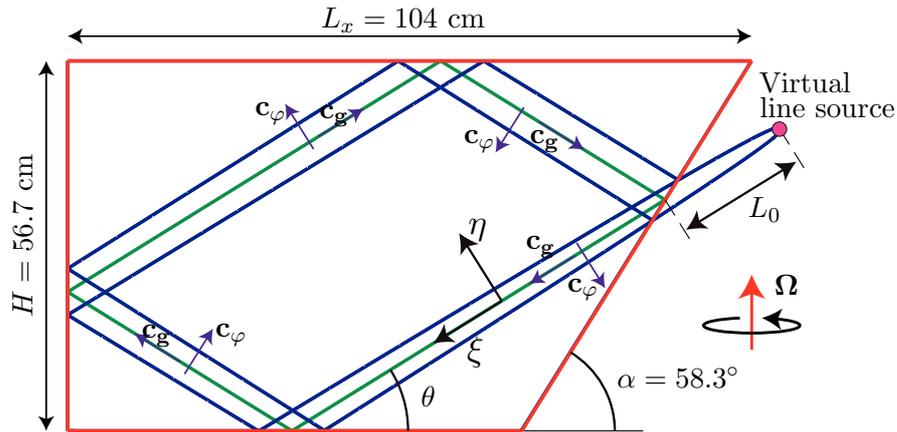


FIGURE 3.7 – Schéma des attracteurs inviscides (en vert) et visqueux (en bleu) dans la cavité trapézoïdale utilisée dans nos expériences. La ligne bleue matérialise la largeur à mi-hauteur de l'enveloppe en vorticité de Moore-Saffman (décrit dans la partie 1.3.2). Les vecteurs  $\mathbf{c}_\varphi$  et  $\mathbf{c}_g$  montrent la direction des vitesses de phase et de groupe pour chaque branche de l'attracteur.

En notant  $L_0$  la distance entre la source virtuelle et le point de focalisation et  $\delta(\xi)$  l'échelle ca-

### 3.1. LES ATTRACTEURS D'ONDES INTERNES

---

ractéristique transverse locale de l'attracteur, l'équilibre entre l'étalement visqueux, en  $\ell^{2/3}\xi^{1/3}$ , du faisceau auto-similaire de  $\xi = L_0$  à  $\xi = L_0 + L_a$  et la réflexion focalisante amène à la relation

$$\delta(L_0 + L_a) = \gamma \delta(L_0), \quad (3.7)$$

ce qui implique que  $L_0 = L_a/(\gamma^3 - 1)$ . Cette dernière relation amène finalement à l'équation

$$\delta \propto \ell^{2/3} (s + L_0)^{1/3} \quad (3.8)$$

qui est identique à l'équation (3.5) au préfacteur près.

Comme démontré dans la partie 3.1.1, la conservation du flux d'énergie lors de la réflexion du faisceau sur la paroi inclinée implique que  $U(L_0 + L_a)\lambda(L_0 + L_a) = U(L_0)\lambda(L_0)$  avec  $U(\xi)$  l'amplitude en vitesse. Cette conservation, couplée à l'équation (3.8) valable pour la longueur d'onde caractéristique du faisceau, permet d'identifier à  $-1/3$  l'exposant de déclin de l'amplitude en vitesse du faisceau auto-similaire avec la coordonnée  $\xi$ , comme l'avait d'ailleurs noté Rieutord *et al.* [85]. Comme nous l'avons vu à la partie 1.3.2, un tel exposant de déclin de la vitesse  $-1/3$  correspond à une source d'onde monopolaire.

Le modèle que nous avons développé dans la partie 3.1.2.a permet en fait lui aussi de déterminer cet exposant. Pour cela, il suffit de calculer l'expression de la vitesse dominante au sein du faisceau en insérant l'expression de  $n_{max}$  dans celle de  $U(n, s)$ , ce qui conduit à l'équation

$$U(n_{max}, s) = 3^{-1/3} \frac{U_0 \lambda_f}{2\pi} \ell^{-2/3} \left( s + \frac{L_a}{\gamma^3 - 1} \right)^{-1/3} e^{-\frac{\ell^2 L_a (2\pi)^3}{\lambda_f^3 (1 - \gamma^3)} - \frac{1}{3}} \quad (3.9)$$

qui révèle aussi une loi de puissance de l'amplitude en vitesse en  $\xi^{-1/3}$ . On peut noter que cette approche nous fournit une relation entre la vitesse caractéristique de l'attracteur et les caractéristiques du forçage (i.e. la vitesse de forçage  $U_0$  et la longueur d'onde  $\lambda_f$ ) couplée avec les caractéristiques du système (i.e. la longueur visqueuse  $\ell$ , la longueur de l'attracteur  $L_a$ , le coefficient de focalisation  $\gamma$ ).

#### 3.1.2.c Extensions du modèle de Grisouard et Staquet

Pour que le faisceau auto-similaire du modèle de Grisouard et Staquet puisse s'auto-alimenter lors de la réflexion focalisante, il est nécessaire de supposer à l'équation (3.7) que le faisceau réfléchi en  $\xi = L_0 + L_a$  coïncide avec le faisceau auto-similaire issu de la source ponctuelle virtuelle en  $\xi = L_0$ . Cette hypothèse est qualitativement vérifiée lorsque la distance entre la source virtuelle et la réflexion focalisante  $L_0$  est plus grande que la largeur du faisceau avant la réflexion focalisante  $\kappa(L_0 + L_a)$  où  $\kappa(\xi)$  est ici la largeur à mi-hauteur du faisceau de Moore et Saffman issu d'une source monopolaire (cf. partie 1.3.2). Cette limitation n'a pas été évoquée par Grisouard et Staquet mais elle impose la condition

$$\frac{L_a}{\ell} \gg 2\pi 3^{1/3} \gamma^{3/2} (\gamma^3 - 1). \quad (3.10)$$

On peut facilement se convaincre de la pertinence de ce critère en regardant la figure 3.8 où il est évalué pour deux cavités ayant un facteur de focalisation  $\gamma$  différent ainsi que différentes valeurs du rapport  $L_a/\ell$  pour chacune des cavités.

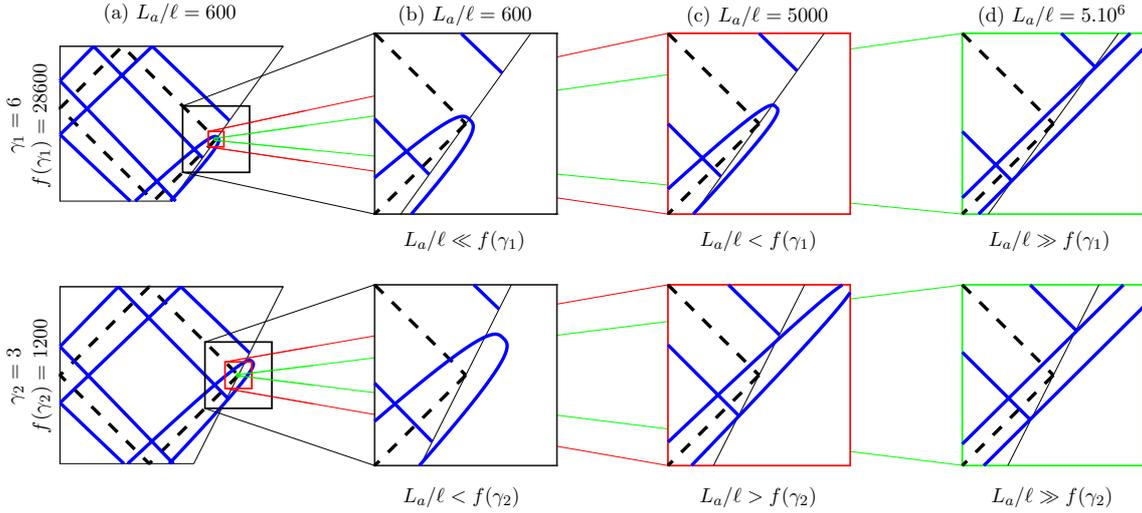


FIGURE 3.8 – (a) Schéma du modèle de Grisouard et Staquet avec l'attracteur inviscide en trait noir tireté et la largeur à mi-hauteur  $\kappa$  d'un faisceau de Moore et Saffman issu d'une source monopolaire en trait plein bleu au sein de deux cavités ayant un facteur  $\gamma_1 = 6$  pour la cavité du haut et  $\gamma_2 = 3$  pour celle du bas. (b), (c) et (d) zooms de (a) pour les deux cavités et différentes valeurs de  $L_a/\ell$ . Il est indiqué en dessous de chaque zoom la comparaison entre  $L_a/\ell$  et  $f(\gamma) = 2\pi 3^{1/3} \gamma^{3/2} (\gamma^3 - 1)$  discutée dans le texte juste avant l'équation (3.10).

Par ailleurs, des extensions des modèles présentés précédemment peuvent être proposées : si les modèles de Hazewinkel *et al.* et de Grisouard et Staquet ont été introduits pour prendre en compte la dissipation visqueuse pendant la propagation des ondes internes, ils négligent la dissipation visqueuse lors des réflexions du faisceau sur les parois. Beckebanze *et al.* [87] ont étudié ce problème en 2018 et montrés que le facteur d'atténuation visqueuse de la vitesse  $\epsilon$  lors de la réflexion d'une onde plane interne de gravité de longueur d'onde  $\lambda_f$  sur une paroi inclinée d'un angle  $\alpha$  s'écrit :

$$\epsilon = e^{-\frac{2\pi R_\alpha \ell}{\lambda_f \sqrt{\tan \theta}}}, \quad (3.11)$$

avec  $R_\alpha = \sin \theta \sin(2\theta) / \left( \sin(\alpha - \theta) \sqrt{|\sin^2 \alpha - \sin^2 \theta|} \right)$ . En prenant en compte la dissipation visqueuse subie par l'onde lors de ses quatre réflexions pendant un tour d'attracteur (1,1), ce facteur s'écrit :

$$\epsilon = e^{-\frac{2\pi R \ell}{\lambda_f \sqrt{\tan \theta}}}, \quad (3.12)$$

avec  $R = R_\alpha + R_{\pi/2} + 2R_0$ . Il est possible d'utiliser ce résultat de Beckebanze *et al.* [87] dans le

### 3.1. LES ATTRACTEURS D'ONDES INTERNES

---

modèle développé à la partie 3.1.2.a mais en considérant cette fois que l'onde plane n'est amortie que par ses réflexions sur les parois. On peut alors montrer par récurrence que l'amplitude en vitesse  $U_n$  de l'onde après  $n$  tours d'attracteur est

$$U_n = U_0 \gamma^n e^{-2\pi R \ell \frac{(\gamma^n - 1)}{(\gamma - 1) \lambda_f \sqrt{\tan \theta}}}. \quad (3.13)$$

Comme pour le modèle développé à la partie 3.1.2.a, en cherchant le maximum de  $U_n$  par rapport à  $n$  et en l'injectant dans l'équation (3.2), on peut montrer que la longueur d'onde dominante  $\lambda_{ref}$  est alors

$$\lambda_{ref} = \frac{2\pi R \ell}{(\gamma - 1) \sqrt{\tan \theta}}. \quad (3.14)$$

Cette longueur d'onde peut-être comparée avec celle obtenue à la partie 3.1.2.a en ne considérant que les effets de dissipation visqueuse en volume lors de la propagation du faisceau que l'on nommera  $\lambda_{prop}(s)$ . Les modèles décrits précédemment, prenant en compte uniquement la dissipation volumique des ondes dans le cas d'un écoulement 2D, seront en pratique pertinents lorsque  $\lambda_{prop}(s = 0) \gg \lambda_{ref}$ , c'est à dire lorsque (cf. équations (3.5) et (3.14))

$$\frac{L_a}{\ell} \gg \frac{R^3(\gamma^3 - 1)}{3(\tan \theta)^{3/2}(\gamma - 1)^3}. \quad (3.15)$$

Cette inégalité montre en fait que le modèle est valide tant que la longueur de l'attracteur  $L_a$  est plus grande que celle de la dissipation visqueuse  $\ell$ , que la focalisation  $\gamma$  n'est pas trop faible et que l'angle de la pente  $\alpha$  est assez éloigné de celui des ondes  $\theta$ . Dans les expériences de Brouzet *et al.* [78] utilisant deux cavités différentes,  $L_a/\ell > 1500$  alors que l'autre membre de l'inégalité (3.15) est toujours inférieur à 1.45, la dissipation liée aux couches limites sur les parois réfléchissantes étant donc ici complètement négligeable. Il est à noter que l'expression (3.11) a été dérivée pour la réflexion des ondes internes de gravité. Même si l'on s'attend à une loi similaire pour les ondes d'inertie, l'existence d'une composante de vitesse additionnelle dans la direction  $y$  pour les ondes d'inertie modifiera probablement les préfacteurs numériques intervenants dans cette loi.

Par ailleurs, les modèles de Hazewinkel *et al.* et de Grisouard et Staquet sont des modèles 2D invariant selon l'axe  $y$ . Les effets 3D qu'il est important d'envisager sont ceux liés à la présence de parois verticales, parallèles à la vitesse de groupe des ondes, en  $y = 0$  et  $y = L_y$  dans une cavité tri-dimensionnelle réaliste. D'après Beckebanze *et al.* [87], pour une onde interne de gravité plane effectuant un tour d'attracteur de longueur  $L_a$ , ces parois induiront une dissipation visqueuse additionnelle :

$$\epsilon' = e^{-\frac{2\pi L_a \ell \psi}{\lambda_f \sqrt{\tan \theta} L_y}}, \quad (3.16)$$

avec  $\psi = \Re[2\sqrt{2} \sin \theta e^{i(\theta + \pi/4)}]$ . En utilisant le même raisonnement que pour le paragraphe

précédent, on peut prédire la longueur d'onde caractéristique de l'attracteur (juste après la réflexion sur la paroi inclinée) dans le cas où seule la dissipation liée aux parois verticales en  $y = 0$  et  $y = L_y$  est à l'œuvre :

$$\lambda_{par} = \frac{L_a}{L_y} \frac{2\pi\psi\ell}{(\gamma - 1)\sqrt{\tan\theta}}. \quad (3.17)$$

Les modèles 2D, où seule la dissipation volumique est à l'œuvre, seront ainsi pertinents lorsque  $\lambda_{prop}(s = 0) \gg \lambda_{par}$ , c'est à dire lorsque (cf. équations (3.5) et (3.17))

$$\frac{L_y}{\ell} \gg \left(\frac{L_a}{\ell}\right)^{2/3} \frac{\psi(\gamma^3 - 1)^{1/3}}{3^{1/3}(\gamma - 1)\sqrt{\tan\theta}}. \quad (3.18)$$

Cette inégalité montre que les effets des parois latérales domineront lorsque la cavité est très fine dans la direction  $y$ , lorsque la viscosité est forte ou lorsque  $\gamma$  est proche de 1. Dans le grand aquarium des expériences de Brouzet *et al.* [78],  $L_y/\ell$  vaut 1.4 fois le terme de droite de l'inégalité (3.18), montrant que les effets de la dissipation visqueuse en volume et de celle sur les parois latérales sont du même ordre de grandeur et que les deux doivent être pris en compte pour correctement prédire le champ de vitesse de l'attracteur, comme illustré dans l'article de Beckebanze *et al.* [87].

Il est important d'insister ici sur le fait que la prédiction (3.17), décrivant les effets de la dissipation visqueuse des ondes sur les parois latérales  $y = 0$  et  $y = L_y$ , a été réalisée par Beckebanze *et al.* [87] dans le cas des ondes internes de gravité dans les fluides linéairement stratifiés. Il est probable que ces lois soient différentes dans le cas des ondes d'inertie dans les fluides en rotation. Les ondes internes de gravité sont en effet associées à un mouvement de translation linéaire dans le plan de propagation de l'onde (ici, le plan  $(x, z)$ ). Un attracteur d'ondes 2D invariant selon la direction  $y$  est donc compatible avec des conditions aux limites inviscides dans le cas où des parois sont introduites en  $y = 0$  et  $y = L_y$ . Les choses sont profondément différentes pour les ondes d'inertie où l'attracteur 2D n'est pas compatible avec la présence de parois latérales dans le cas de conditions aux limites inviscides, puisque le mouvement des particules fluides consiste en une translation circulaire dans le plan incliné de l'angle  $\theta$  (cf. partie 1.3) incluant donc des oscillations dans la direction  $y$  incompatibles avec la non-pénétration des parois latérales. La description des couches limites visqueuses sur les parois latérales développée par Beckebanze *et al.* [87] dans le cas des fluides stratifiés ne peut donc a priori pas se transposer aux cas des fluides en rotation. Ce problème reste donc ouvert même si l'on ne s'interdira pas de constater ce que prédirait le modèle dérivé pour les ondes de gravité dans le cas de nos expériences en rotation, comme si celui-ci était valide.

## 3.2 Les observations numériques et expérimentales des attracteurs

### 3.2.1 Régime linéaire

Les expériences pionnières d'attracteurs d'ondes internes datent de 1997 et ont été réalisées par Maas *et al.* [82] dans un fluide stratifié au sein d'une cavité trapézoïdale oscillée verticalement. Les formes géométriques des attracteurs expérimentaux présentées dans cet article correspondent bien à celles prédites théoriquement par les tracés de rayons pour les attracteurs inviscides.

Ces observations ont été suivies par deux articles de Manders et Maas [79, 80] parus en 2003 et 2004 où sont présentés les premières observations expérimentales d'attracteurs d'ondes d'inertie. Dans ces travaux, Manders et Maas présentent des mesures par PIV des champs de vitesse dans une cavité trapézoïdale en rotation. Le forçage est réalisé au moyen d'une libration longitudinale, c'est-à-dire une modulation harmonique du taux de rotation de la forme  $\Omega(t) = \Omega_0(1 + \epsilon \sin(\sigma t))$ . Les champs de vitesse expérimentaux observés par Manders et Maas ont permis, près des parois de la cavité  $y = 0$  et  $y = L_y$  normales au plan incliné, de mettre en évidence la présence d'attracteurs d'ondes dont la structure primaire (le squelette) est en accord avec celle attendue. Il est cependant à noter que dans le plan central de leur cavité,  $y = L_y/2$ , l'attracteur n'est plus visible (cf. figure 3.9). Ces observations sont en pratique la conséquence naturelle du forçage

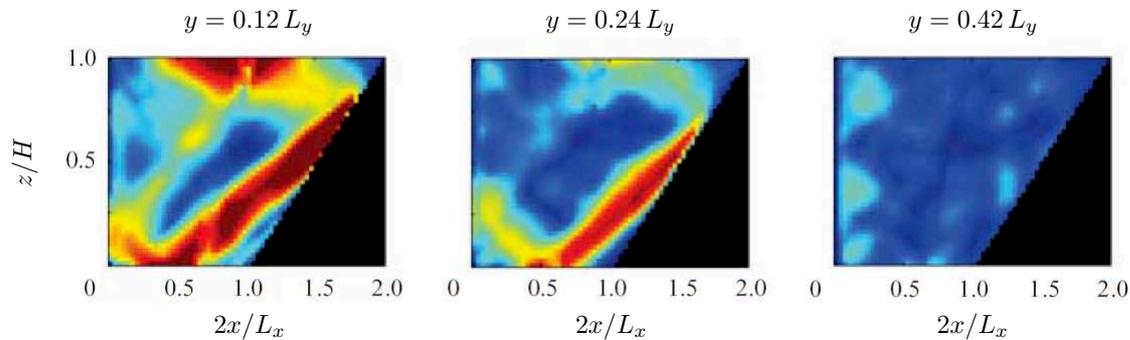


FIGURE 3.9 – Attracteur d'ondes d'inertie dans une cavité trapézoïdale en libration obtenu dans les expériences de Manders et Maas [79]. Les champs montrent l'amplitude en vitesse des ondes à la fréquence de forçage dans les plans  $y = 0.12 L_y$ ,  $y = 0.24 L_y$  et  $y = 0.42 L_y$  ( $y = 0$  est l'une des parois de la cavité) dans un aquarium de profondeur  $L_y = 500$  cm, de hauteur  $H = 80$  cm et de largeur  $L_x = 107$  cm. L'échelle de l'amplitude en vitesse varie de 0 (bleu foncé) à  $0.4 \text{ cm s}^{-1}$  (rouge foncé). Extrait de Manders et Maas [79].

des ondes par un mouvement de libration qui conduit à l'émergence d'ondes, par éruption des couches limites oscillant sur les parois de la cavité, en opposition de phase entre les demi-espaces  $y > L_y/2$  et  $y < L_y/2$  de la cavité. La forte dépendance avec la coordonnée  $y$  du forçage et des champs de vitesse observés dans ces expériences constitue une différence majeure avec

l'hypothèse de bidimensionnalité des modèles d'attracteurs que nous avons présentés plus tôt et rend difficile toute comparaison avec ceux-ci.

Grisouard et Staquet [86] ont présenté, en 2008, les résultats de simulations numériques 2D d'attracteur d'ondes internes de gravité dans un fluide linéairement stratifié. Ils ont observé l'évolution de la longueur d'onde transverse  $\lambda$  avec la coordonnée  $\xi$  le long de l'attracteur inviscide théorique (cf. figure 3.10),  $\xi$  étant la distance à la source virtuelle des modèles vus dans la partie 3.1.2. Ces données montrent des comportements en loi de puissance avec des exposants s'écartant de l'exposant  $1/3$  prédit par l'équation (3.8) de  $-25\%$  et  $+40\%$  pour  $\gamma = 1.67$  et  $\gamma = 6.96$  respectivement. L'écart observé dans la configuration  $\gamma = 6.96$  peut être expliqué par

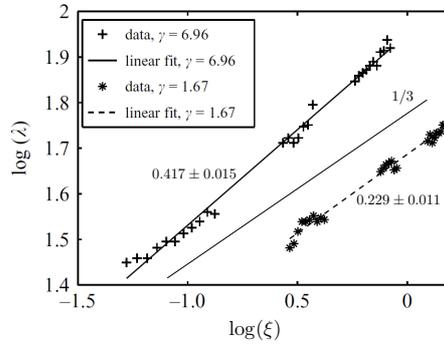


FIGURE 3.10 – Attracteur d'ondes internes de gravité dans les simulations numériques 2D de Grisouard et Staquet [86]. Longueur d'onde  $\lambda$  en fonction de la coordonnée le long de l'attracteur  $\xi$  pour deux configurations différentes :  $\gamma = 1.67$  représentée par des étoiles et  $\gamma = 6.96$  représentée par des croix,  $\xi$  étant la distance à la source virtuelle des modèles vus dans la partie 3.1.2. Nous avons ajouté à cette figure, pour guider l'œil, une droite de pente  $1/3$  correspondant au comportement prédit par le modèle de Grisouard et Staquet. Extrait de Grisouard et Staquet [86].

le fait que  $L_a/\ell \simeq 800$  alors que  $2\pi 3^{1/3} \gamma^{3/2} (\gamma^3 - 1) \simeq 56000$ . Comme nous l'avons vu dans la partie 3.1.2.c, la comparaison de ces deux nombres montre qu'un faisceau auto-similaire ne peut ici pas correctement décrire le champ d'onde car il ne se "boucle" pas correctement lors de sa réflexion focalisante. En revanche, dans la configuration  $\gamma = 1.67$ ,  $2\pi 3^{1/3} \gamma^{3/2} (\gamma^3 - 1) \simeq 70$  alors que  $L_a/\ell \simeq 2000$ , ce qui est conforme à l'inégalité (3.10). On s'attend donc à ce que, dans cette configuration, le modèle de faisceau auto-similaire soit pertinent. Même si la valeur 0.229 de l'exposant de la loi de puissance annoncée par Grisouard et Staquet est significativement différente de la valeur théorique attendue  $1/3$ , l'exposant qui peut être déduit directement à partir de leurs données (cf. figure 3.10) est lui très proche de la valeur théorique. L'article de Grisouard et Staquet présente donc une incohérence de ce point de vue. Les données qui y sont rapportées pour le cas où  $\gamma = 1.67$  semblent en tout cas bien être les premières permettant de valider la loi d'échelle en  $\xi^{1/3} \ell^{2/3}$  pour la longueur d'onde le long de l'attracteur. Dans ce travail, aucune étude de l'évolution de l'amplitude en vitesse de l'attracteur le long de l'attracteur inviscide ou en fonction de l'amplitude du forçage n'a été menée.

### 3.2. LES OBSERVATIONS NUMÉRIQUES ET EXPÉRIMENTALES DES ATTRACTEURS

Dans des simulations, elles aussi 2D, d'un attracteur d'ondes d'inertie dans une cavité carrée penchée, Jouve et Ogilvie [28] ont confirmé en 2014 la pertinence de la structure transverse du faisceau de Moore-Saffman pour la description des attracteurs en la comparant avec différentes coupes de la vitesse longitudinale  $u_\xi$  normalisée par  $\xi^{-1/3}$  en fonction de la coordonnée transverse  $\eta$  normalisée par  $\xi^{1/3}$  de l'attracteur simulé (cf. figure 3.11). Les normalisations de ces deux quantités permettent de confirmer plus clairement la loi de puissance de l'épaississement visqueux d'un attracteur en  $(\xi/\ell)^{1/3}$  et celle du déclin de son amplitude en vitesse en  $(\xi/\ell)^{-1/3}$  avec la position le long de l'attracteur. Cette validation du modèle se fait alors que dans leurs simulations

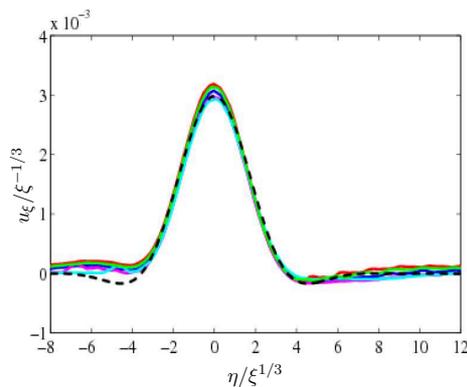


FIGURE 3.11 – Simulation numérique 2D d'un attracteur d'ondes d'inertie dans une cavité carrée penchée par Jouve et Ogilvie [28]. Profils de la vitesse longitudinale  $u_\xi$  du faisceau de l'attracteur normalisée par  $\xi^{1/3}$  (pour prendre en compte le déclin visqueux du faisceau) en fonction de la coordonnée transverse  $\eta$  normalisée par  $\xi^{1/3}$ . Ces profils de vitesse instantanée sont pris à une phase donnée de l'oscillation des ondes. Chaque coupe est prise à une coordonnée  $\xi$  différente le long d'une branche de l'attracteur inviscide et est indiquée par une couleur différente. Le trait tireté montre la prédiction théorique pour le profil de vitesse d'un faisceau auto-similaire issu d'une source monopolaire. Extrait de Jouve et Ogilvie [28].

$L_a/\ell \simeq 225$ , ce qui est à peine plus grand que  $2\pi 3^{1/3} \gamma^{3/2} (\gamma^3 - 1) \simeq 180$  montrant que le modèle auto-similaire semble rester valide lorsque les deux membres de l'inégalité (3.10) sont du même ordre de grandeur. On note que dans la cavité carrée de Jouve et Ogilvie, les quatre branches de l'attracteur sont identiques, suivant chacune la même réflexion focalisante. Les lois de puissance de l'atténuation et de l'étalement visqueux pour un faisceau auto-similaire n'ont ainsi été testées qu'à l'intérieur d'une même branche par Jouve et Ogilvie, si bien que la dissipation lors des réflexions sur les parois, même si elle était forte, ne peut pas ici remettre en cause ces lois contrairement aux attracteurs dans les cavités trapézoïdales.

Dans des expériences d'attracteurs d'ondes internes de gravité dans une cavité trapézoïdale, Brouzet *et al.* [78] ont étudié en 2017 l'évolution de l'épaisseur du faisceau de l'attracteur entre deux cavités de même forme dont l'une est trois fois plus grande que l'autre. En notant  $L_{a1}$  et  $\kappa_1$  respectivement la longueur de l'attracteur et la largeur à mi-hauteur du faisceau dans la première branche de l'attracteur de la petite cavité et  $L_{a2}$  et  $\kappa_2$  celles de la grande, ils observent que  $\frac{\kappa_1 L_{a2}}{\kappa_2 L_{a1}} = 2.02$  ce qui est très proche de la valeur  $(L_{a1}/L_{a2})^{-2/3} = 2.08$  prédite par la loi de

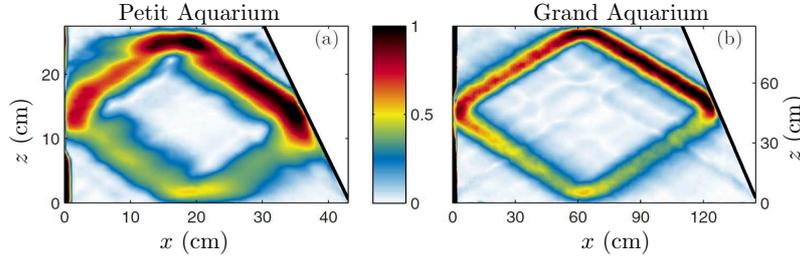


FIGURE 3.12 – Attracteurs d’ondes internes de gravité obtenus expérimentalement par Brouzet *et al.* [78]. Valeur absolue de la dérivée par rapport à la coordonnée horizontale de la perturbation de densité  $|\partial\rho'/\partial x|$  normalisée par le maximum de la carte. Cette quantité est représentée pour deux attracteurs similaires (i.e. même couple  $(d, \tau)$ ) dans deux cavités trapézoïdales de tailles différentes : (a) attracteur au sein d’un aquarium de  $80 \times 30 \times 17.5 \text{ cm}^3$ , (b) attracteur au sein d’un aquarium de  $200 \times 90 \times 17.4 \text{ cm}^3$ . Extrait de Brouzet *et al.* [78].

puissance  $\kappa/L_a \sim L_a^{-2/3}$  (cf. équation (3.5)). Cette évolution de la largeur relative de l’attracteur visqueux avec la taille de la cavité est clairement visible sur leurs champs (cf. figure 3.12). Dans ces expériences, le facteur  $L_a/\ell$  est toujours supérieur à 1500 alors que le facteur  $2\pi 3^{1/3} \gamma^{3/2} (\gamma^3 - 1)$  est toujours inférieur à 170 donc l’inégalité (3.10) est respectée montrant que le faisceau auto-similaire peut en principe correctement se “boucler” lors de la réflexion focalisante.

Comme nous l’avons vu dans la partie 3.1.2.c et comme l’a montré Beckebanze *et al.* [87] en 2018, la dissipation visqueuse sur les parois verticales en  $y = 0$  et  $y = L_y$  contribue à la sélection de la largeur du faisceau de Brouzet *et al.* On s’attend ainsi à ce que les lois d’échelle pour l’amplitude et les échelles transverses du faisceau soient ici à la frontière entre le régime dominé par la dissipation volumique (en  $\xi^{1/3}$  pour la longueur d’onde) et celui dominé par la dissipation visqueuse sur les parois verticales (avec une longueur d’onde indépendante de  $\xi$  comme l’explicite l’équation (3.17)).

### 3.2.2 Régime non-linéaire

Dans les simulations numériques de Jouve et Ogilvie [28] en 2014, le faisceau de l’attracteur d’ondes d’inertie subit une instabilité par résonance triadique au-delà d’un certain nombre de Reynolds de forçage (ce type d’instabilité a déjà été présenté dans la partie 1.4) : l’attracteur entre alors dans un régime non-linéaire. Dans les spectres temporels (cf. figure 3.13) on remarque ainsi la croissance progressive de deux pics symétriques par rapport à la moitié de la fréquence de forçage. Ces pics deviennent plus énergétiques et se rapprochent de la moitié de la fréquence de forçage avec l’augmentation de l’amplitude de forçage. Cette observation est en accord avec la théorie de l’instabilité par résonance triadique qui prédit une dégénérescence de la fréquence des ondes filles vers la moitié de l’onde primaire lorsque le nombre de Reynolds de l’onde primaire devient grand. Par ailleurs, Jouve et Ogilvie observent qualitativement un élargissement progressif du faisceau de l’attracteur corrélé à l’intensité de l’instabilité par résonance triadique.

### 3.2. LES OBSERVATIONS NUMÉRIQUES ET EXPÉRIMENTALES DES ATTRACTEURS

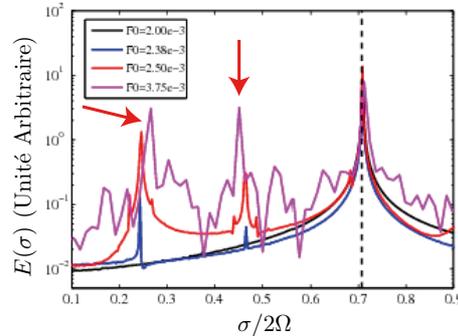


FIGURE 3.13 – Simulation numérique 2D d'un attracteur d'ondes d'inertie dans une cavité carrée penchée par Jouve et Ogilvie [28]. Densité spectrale de puissance  $E(\sigma)$  du champ de vitesse en fonction de la fréquence adimensionnée  $\sigma/2\Omega$  pour différentes amplitudes de forçage  $F_0$ . La fréquence de forçage ( $\sigma/2\Omega \simeq 0.7$ ) est indiquée par un trait tireté et les ondes sous-harmoniques issues de l'instabilité par résonance triadique sont indiquées par des flèches rouges. Extrait de Jouve et Ogilvie [28].

Dans les attracteurs expérimentaux d'ondes internes de gravité de Scolan *et al.* [27] datant de 2013 ainsi que ceux de Brouzet *et al.* [77, 78] datant de 2017, une instabilité par résonance triadique est là aussi observée (cf. figure 3.14(a)). Elle est localisée dans la première branche de l'attracteur. Cette instabilité apparaît lorsque le nombre de Reynolds  $Re$  construit avec les paramètres du forçage dépasse 500. Comme Jouve et Ogilvie, Brouzet *et al.* [78] ont aussi pu constater un élargissement du faisceau de l'attracteur en présence de cette instabilité (cf. figure 3.14(b)). Cet élargissement est accompagné d'une diminution du rapport entre la vitesse observée dans l'attracteur et celle du forçage. Grâce à une étude quantitative, Brouzet *et al.* ont pu remarquer que ces phénomènes sont d'autant plus importants que l'amplitude de forçage est grande. Ils peuvent être compris qualitativement comme la conséquence de la puissance prélevée à l'attracteur par l'instabilité triadique qui agit comme une source de dissipation effective pour celui-ci. On comprend alors que l'échelle caractéristique de l'attracteur, fruit d'un équilibre entre dissipation et concentration de l'énergie lors des réflexions focalisantes, soit modifiée et en pratique augmentée par l'instabilité par résonance triadique.

Les expériences d'attracteur d'ondes internes de gravité de 2017 de Brouzet *et al.* [77] ont par ailleurs montré l'émergence d'une série d'instabilités par résonance triadique lorsque le nombre de Reynolds continue d'augmenter au-delà du seuil de la première instabilité par résonance triadique. La série d'instabilités est clairement visible sur le diagramme de la figure 3.15(a) représentant la densité spectrale de puissance du champ de vitesse en fonction du temps ( $t = 0$  correspond au démarrage du forçage). Ce diagramme temps-fréquence montre que l'onde primaire à la fréquence normalisée  $\sigma_0/N = 0.6$  subit d'abord, une vingtaine de périodes après le démarrage du générateur d'onde, une instabilité par résonance triadique qui alimente en énergie des ondes filles aux fréquences normalisées  $\sigma_1/N \simeq 0.36$  et  $\sigma_2/N \simeq 0.24$ . Ensuite, une centaine de périodes après le démarrage du générateur d'onde, les ondes filles entrent en résonance triadique

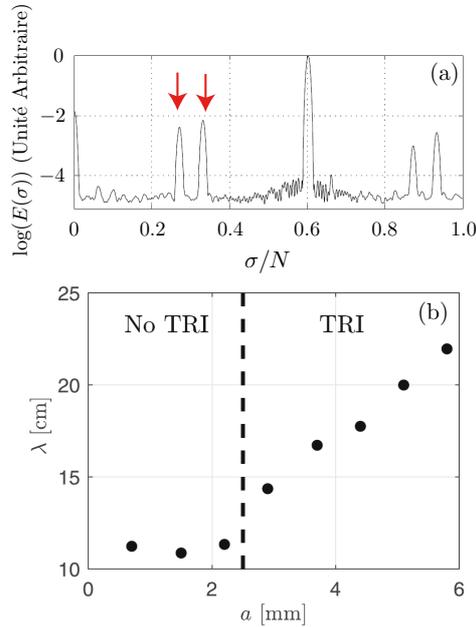


FIGURE 3.14 – Expériences d’attracteur d’ondes internes de gravité de Brouzet *et al.* [77, 78]. (a) Densité spectrale de puissance  $E(\sigma)$  du champ de vitesse en fonction de la fréquence  $\sigma$  normalisée par la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$ . Extrait de Brouzet *et al.* [77]. Les flèches rouges montrent les pics des ondes sous-harmoniques de l’instabilité par résonance triadique. (b) Longueur d’onde  $\lambda$  d’un attracteur expérimental d’ondes internes de gravité en fonction de l’amplitude de forçage  $a$ . La droite verticale tiretée matérialise l’amplitude à partir de laquelle une instabilité par résonance triadique est observée. Extrait de Brouzet *et al.* [78].

produisant une onde à la fréquence  $\sigma_{12} = \sigma_1 - \sigma_2$  qui interagit avec le forçage pour produire une onde à la fréquence  $\sigma_{012} = \sigma_0 - \sigma_{12}$  à partir de  $t \simeq 100T$ . Plusieurs autres interactions par résonance triadiques entre les fréquences déjà apparues viennent encore enrichir le spectre d’énergie de plusieurs pics à d’autres fréquences entre  $t \simeq 100T$  et  $t \simeq 200T$  conduisant à  $t = 400T$  à un spectre composé d’une forêt de pics (cf. figure 3.15(b)).

### 3.3 Une expérience d’attracteur d’ondes d’inertie

Notre étude a eu pour ambition de caractériser la structure fine du champ d’onde d’un attracteur d’ondes d’inertie dans un fluide en rotation, ce qui n’avait jamais été fait expérimentalement, et de la comparer aux modèles existants. Notre dispositif expérimental s’appuie sur un forçage inertiel quasi-invariant dans la direction horizontale  $y$  (aux effets de bords près) qui injecte l’énergie à l’échelle de cavité. Bien que quasiment invariant dans la direction horizontale parallèle à la paroi inclinée, c’est-à-dire quasiment 2D, nos expériences se distinguent évidemment des simulations réellement 2D de Jouve et Ogilvie [28] à travers l’effet des parois latérales situées en  $y = 0$  et  $y = L_y$ . On peut rappeler ici que l’on s’attend à ce que l’effet de ces parois sur les attracteurs d’ondes d’inertie soit différent de celui décrit par Beckebanze *et al.* [87] pour les

### 3.3. UNE EXPÉRIENCE D'ATTRACTEUR D'ONDES D'INERTIE

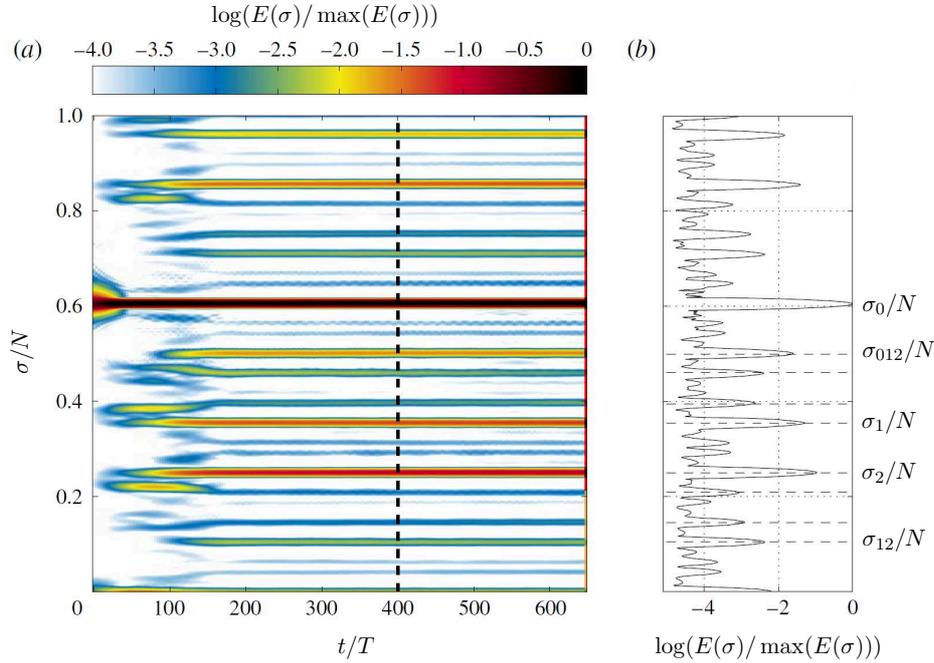


FIGURE 3.15 – Expériences d’attracteur d’ondes internes de gravité de Brouzet *et al.* [77]. (a) Densité spectrale de puissance du champ de vitesse  $E(\sigma, t)$  en fonction du temps  $t$  normalisé par la période de forçage  $T$  et de la fréquence  $\sigma$  normalisée par la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$ . (b) Densité spectrale de puissance à  $t = 400T$  correspondant à la coupe du diagramme temps-fréquence indiquée par le trait tireté sur (a). La fréquence de forçage est  $\sigma = 0.6 N$  et le générateur d’onde démarre à  $t = 0$ . Extrait de Brouzet *et al.* [77].

attracteurs d’ondes internes de gravité puisque l’interaction des ondes avec ces parois verticales est purement visqueuse pour les ondes internes de gravité et est en revanche inertielle pour les ondes d’inertie.

#### 3.3.1 Dispositif expérimental

Dans nos expériences, l’attracteur est généré dans un aquarium parallélépipédique de base  $105 \times 105 \text{ cm}^2$  et de hauteur 75 cm rempli par 63 cm d’eau. Une plaque introduite dans cet aquarium est inclinée d’un angle  $\alpha = 58.3^\circ$  par rapport à l’horizontale pour obtenir un volume trapézoïdal de hauteur  $H = 56.7 \text{ cm}$ , de longueur  $L_x = 104 \text{ cm}$  et de largeur  $L_y = 105 \text{ cm}$  (cf. figure 3.16). Pour forcer une onde à grande échelle, le “plafond” de la cavité est constitué d’une série de 23 barres horizontales de 86 cm de long centrées dans l’aquarium dans la direction  $y$ . Les barres ont une section carrée de 40 mm de coté dans le plan  $(x, z)$  et sont espacées de 5 mm dans la direction  $x$ . Chaque barre est reliée à un moteur linéaire permettant son mouvement dans la direction verticale. Ce système impose finalement à la frontière supérieure de la cavité

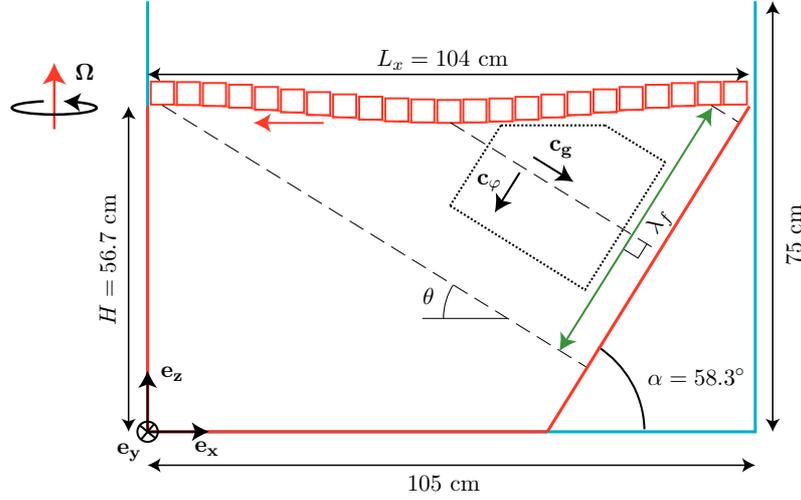


FIGURE 3.16 – Schéma de l'aquarium (en bleu) avec la cavité trapézoïdale (en rouge). Le plafond de la cavité est constitué de 23 barres horizontales de section carrée, chacune connectée à un moteur linéaire permettant son mouvement dans la direction verticale. La zone délimitée par des pointillés montre la région sur laquelle la moyenne de l'amplitude en vitesse de la figure 3.18 est calculée.

un mouvement ondulatoire harmonique approximant la fonction :

$$Z(x, t) = H + A [\cos(\sigma_0 t + k_0 x) - 1], \quad (3.19)$$

où  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  et deux valeurs de longueur d'onde ont été utilisées :  $\lambda_0 = 11 \times 4.5 \text{ cm} = 49.5 \text{ cm}$  et  $\lambda_0 = 22 \times 4.5 \text{ cm} = 99 \text{ cm}$  (4.5 cm étant la taille d'une barre oscillante plus l'intervalle entre deux barres).

Notre forçage est donc invariant selon la direction horizontale  $y$  et se distingue ainsi de celui de Manders et Maas [79, 80] (décrit dans la partie 3.2.1) qui produisait un écoulement où les demi-espaces  $y > L_y/2$  et  $y < L_y/2$  étaient en opposition de phase ( $y = 0$  étant la face avant de l'aquarium). Notre forçage est par ailleurs inertiel (alors que celui de Manders et Maas était visqueux) et est très similaire à celui des expériences d'attracteurs d'ondes internes de gravité de Brouzet *et al.* [77, 78].

Pendant cette étude, nous avons varié l'amplitude  $A$  du mouvement des barres  $Z(x, t)$  de 0.09 mm à 18 mm. L'ensemble du système est embarqué sur la plateforme tournante décrite dans la partie 2.1 et tourne à une vitesse constante de  $\Omega = 3$  ou 18 tr/min autour de l'axe vertical  $z$ . La plateforme est mise en rotation au moins 30 min avant le démarrage du générateur d'ondes de sorte que la mise en rotation solide du fluide soit terminée. La pulsation du générateur d'ondes est réglée à  $\sigma_0 = 0.85 \times 2\Omega$  ce qui correspond à des ondes se propageant selon un angle  $\theta = \arccos(0.85) = 32.0^\circ$ . Pour nos expériences, les paramètres ( $d, \tau$ ) de Maas *et al.* [82] valent  $d = 1 - \frac{2H}{L \tan \alpha} \simeq 0.33$  et  $\tau = \frac{2H}{L \tan \theta} \simeq 1.74$ . À la figure 3.17, nous avons reporté le point correspondant dans le diagramme de convergence des rayons d'ondes dans une cavité trapézoïdale

### 3.3. UNE EXPÉRIENCE D'ATTRACTEUR D'ONDES D'INERTIE

de Maas *et al.* déjà présenté à la figure 3.3(a) dans la partie 3.1.1. Comme l'avait montré Maas *et al.*, notre configuration expérimentale doit conduire à un attracteur (1,1) (soit un cycle limite se réfléchissant une fois sur la paroi inclinée et une fois sur le plafond de la cavité). Ces paramètres

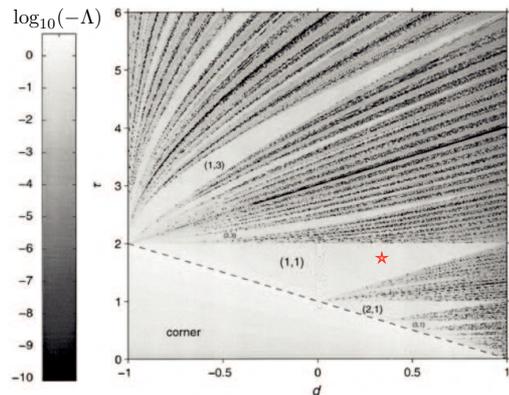


FIGURE 3.17 – Exposant de Lyapunov  $\Lambda$  associé à la convergence des rayons d’ondes internes dans une cavité trapézoïdale en fonction des paramètres  $(d, \tau)$ . Il s’agit de la figure 3.3(a) présentée dans la partie 3.1.1 avec une étoile rouge qui positionne nos expériences dans le diagramme. Extrait de Maas *et al.* [81].

correspondent à un attracteur théorique inviscide de longueur  $L_a \simeq 214.2$  cm avec un facteur de focalisation  $\gamma \simeq 2.25$ . La source virtuelle des modèles présentés dans la partie 3.1.2 est alors située à une distance  $L_0 = L_a/(\gamma^3 - 1) \simeq 20.5$  cm en amont de la réflexion focalisante. La longueur visqueuse  $\ell = \left(\nu/\sqrt{4\Omega^2 - \sigma_0^2}\right)^{1/2}$  vaut 0.71 mm lorsque le taux de rotation  $\Omega$  est égal à 18 tr/min et 1.74 mm lorsque  $\Omega = 3$  tr/min.

Dans nos expériences, le membre de droite de l’inégalité (3.10) est, au minimum, 4 fois plus élevé que celui de gauche montrant ainsi qu’un faisceau auto-similaire d’ondes peut se “boucler” correctement lors de la réflexion focalisante et ce pour les deux taux de rotation  $\Omega$  étudiés. Le terme de gauche de l’inégalité (3.15) est lui 30 (respectivement 75) fois plus faible que celui de droite pour  $\Omega = 3$  tr/min (respectivement  $\Omega = 18$  tr/min). En supposant que les lois dérivées par Beckebanze *et al.* pour la dissipation dans les couches limites lors des réflexions des ondes internes de gravité restent pertinentes en ordre de grandeur pour les ondes d’inertie, ces valeurs impliquent que la dissipation lors des réflexions du faisceau sera négligeable devant celle liée à la propagation du faisceau. Enfin le membre de droite de l’inégalité (3.18) est, au minimum, 10 fois plus élevé que celui de gauche. Cela montre que la dissipation du faisceau sur les parois verticales en  $y = 0$  et  $y = L_y$  serait négligeable si la loi dérivée pour les ondes de gravité était aussi valide pour les ondes d’inertie.

Nous mesurons les deux composantes  $(u_x, u_z)$  du champ de vitesse dans le plan vertical  $y = y_0 = L_y/3$  ( $y = 0$  est la face avant de l’aquarium) grâce au système de PIV embarqué dans le référentiel tournant décrit dans la partie 2.2. Chacune des deux caméras filme une moitié différente de la cavité et c’est au moyen d’une calibration spatiale que l’on peut fusionner chaque

paire d'images en une seule recouvrant l'intégralité de la cavité trapézoïdale. Pour les amplitudes du générateur d'ondes  $A \leq 1.50$  mm, les acquisitions ont consisté en une série de 1440 à 5760 paires d'images enregistrées en configuration "singleframe" (cf. partie 2.2). La fréquence est alors comprise entre 1.5 et 24.4 Hz : elle est adaptée aux vitesses caractéristiques de l'écoulement pour que le déplacement typique du fluide entre deux images successives permette une mesure précise par corrélation d'images. Ces acquisitions correspondent en pratique à 120 périodes du générateur d'ondes avec une résolution temporelle comprise entre 12 et 48 paires d'images par période de forçage. Pour les amplitudes du générateur d'ondes  $A$  plus grandes que 1.5 mm, les acquisitions sont réalisées en configuration "doubleframe" (cf. partie 2.2) et les doublets d'images sont séparés d'un intervalle de temps  $dt \in [9 \text{ ms}, 29 \text{ ms}]$ . Cette configuration est rendue nécessaire par les plus grandes valeurs de la vitesse du fluide. Pour ces grandes valeurs de  $A$ , 120 à 360 périodes du générateur d'ondes ont été enregistrées avec une résolution en temps de 12 doublets de paires d'images par période du générateur. Indépendamment du mode d'acquisition, avec un recouvrement de 50% des fenêtres d'interrogation de  $32 \times 32$  pixels, le calcul PIV produit finalement des champs de vitesse avec une résolution spatiale de 4.17 mm composés de 130 lignes et de 164 (au fond) à 244 (au plafond) colonnes de vecteurs couvrant presque entièrement la cavité trapézoïdale.

### 3.3.2 Résultats préliminaires

#### 3.3.2.a Modèle pour l'onde forcée

On s'attend à ce que notre générateur d'ondes produise une onde d'inertie avec une énergie qui se propage selon un angle  $\theta = \arccos(\sigma_0/2\Omega) \simeq 32^\circ$  par rapport à l'horizontale et une longueur d'onde  $\lambda_f = \lambda_0 \sin \theta = 26.2$  ou  $52.4$  cm (cf. figure 3.16). Comme le montre l'équation (3.19), la phase du générateur d'ondes se propage vers les  $x$  décroissants, ce qui doit conduire à l'excitation d'une onde avec une énergie se propageant vers les  $x$  croissants (cf. partie 1.3). C'est ce qu'illustre la représentation de la vitesse de groupe  $\mathbf{c}_g$  et de la vitesse de phase  $\mathbf{c}_\varphi$  de l'onde forcée par le générateur dans la figure 3.16.

Une caractéristique de l'onde produite par le générateur plus difficile à prédire est son amplitude en vitesse. La faible épaisseur de la couche limite d'Ekman attendue à l'interface entre le fluide et les barres du générateur d'ondes ( $\delta_{Ek} \sim \sqrt{\nu/2\Omega} \simeq 0.5$  mm) permet a priori de négliger, dans les conditions aux limites, le rôle de la viscosité aux échelles de l'onde produite, et d'utiliser une condition aux limites inviscide de non-pénétration, comme discuté dans l'article de Machicoane *et al.* [19]. On s'attend ainsi à ce que le générateur impose, au-delà de la fine couche limite visqueuse, seulement la composante verticale  $U_z$  du champ de vitesse.

Dans une onde d'inertie, le mouvement des particules fluides est une translation circulaire (anticyclonique) dans un plan incliné par rapport à l'horizontale de l'angle  $\theta$  imposé par sa fréquence (cf. partie 1.3). Le rapport entre les composantes verticale et horizontale de la vitesse est donc imposé par la fréquence de l'onde et notre condition aux limites inviscide imposant  $U_z$  imposera en pratique toutes les composantes de la vitesse : la vitesse dans la direction  $\theta$  de propagation de l'onde sera ainsi  $U_\theta = U_z / \sin \theta$ . Ceci nous permet de penser que la vitesse de

### 3.3. UNE EXPÉRIENCE D'ATTRACTEUR D'ONDES D'INERTIE

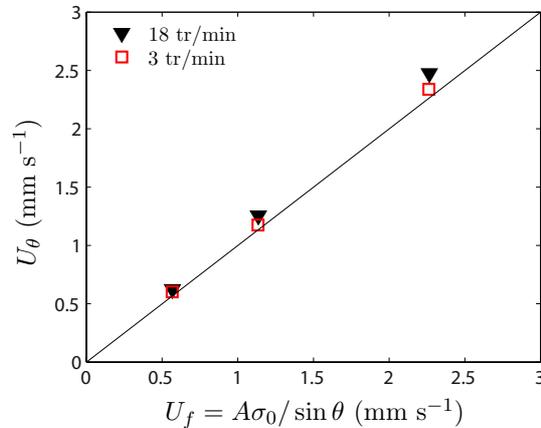


FIGURE 3.18 – Amplitude en vitesse  $U_\theta$  de l’onde excitée par le générateur d’ondes en l’absence de plan incliné pour  $\Omega = 3$  et 18 tr/min,  $\lambda_f = 52.4$  cm, et trois amplitudes  $A = 0.09, 0.19$  et  $0.36$  mm. Les données sont montrées en fonction de  $U_f = A\sigma_0/\sin\theta$ . La droite noire indique la fonction identité.

l’onde forcée sera  $U_f = A\sigma_0/\sin\theta \in [0.6, 36.2]$  mm s<sup>-1</sup>. On s’attend à ce que cette prédiction soit correcte pour  $\theta \rightarrow 90^\circ$  mais elle deviendra évidemment fautive pour  $\theta \rightarrow 0^\circ$  puisqu’elle impliquerait une divergence de l’amplitude en vitesse de l’onde.

Pour évaluer la pertinence de la prédiction  $U_f = A\sigma_0/\sin\theta$  pour l’angle  $\theta = 32.0^\circ$  utilisé dans nos expériences, nous avons réalisé quelques acquisitions en régime permanent sans le plan incliné. Dans la figure 3.18, nous montrons l’amplitude en vitesse  $U_\theta$  de l’onde dans la direction  $\theta$ , c’est-à-dire la direction de la vitesse de groupe, en fonction de la prédiction  $U_f = A\sigma_0/\sin\theta$ . Pour obtenir  $U_\theta$ , nous réalisons d’abord un filtrage temporel de Fourier du champ de vitesse obtenu par PIV autour de la fréquence de forçage  $\sigma_0$ . On extrait ensuite l’amplitude  $U_\theta$  des oscillations de vitesse dans la direction de l’onde forcée. On finit par prendre la moyenne spatiale de  $U_\theta$  sur la région délimitée par des pointillés sur la figure 3.16 au centre de l’onde excitée.

La figure 3.18 confirme que l’amplitude de l’onde excitée est proche de  $U_f = A\sigma_0/\sin\theta$  à 10% près. Les valeurs trouvées pour  $U_\theta$  sont en pratique légèrement plus grandes que  $U_f$ . Ce désaccord peut être la conséquence du fait que les hypothèses utilisées pour prédire  $U_f$ , c’est à dire la condition de glissement aux parois et le fait que notre générateur d’ondes est imperméable (ce qui n’est en réalité pas le cas à cause des espaces de 5 mm séparant les barres) ne sont valides qu’en première approximation. Ce désaccord peut aussi révéler une superposition de l’onde directement issue du forçage avec la même onde ayant effectuée quatre réflexions sur les parois, c’est-à-dire un “tour” de l’aquarium.

#### 3.3.2.b Régime transitoire de l’écoulement

Nous avons réalisé quelques acquisitions préliminaires pendant la phase d’établissement de l’écoulement qui suit la mise en route du générateur d’ondes. Ces acquisitions ont été réalisées avec une configuration légèrement différente de celle présentée à la partie 3.3.1 et dans le reste

de ce chapitre : la paroi était ici inclinée d'un angle  $\alpha = 48^\circ$ , l'angle de propagation des ondes valait  $\theta = 37.8^\circ$ , le taux de rotation était de  $\Omega = 18$  tr/min et la longueur d'onde du générateur valait  $\lambda_0 = 99$  cm. La figure 3.19 montre les séries temporelles de la moyenne dans le plan de mesure de l'énergie cinétique  $K = \langle u_x^2 + u_z^2 \rangle / 2$  en fonction du temps  $t$  normalisé par la période de forçage  $T$  pour quatre amplitudes de forçage pendant les 50 premières périodes du forçage après le démarrage du générateur. Cette figure montre que le régime permanent de l'attracteur semble être atteint après environ une trentaine de périodes du générateur d'onde, ce qui est comparable aux observations faites lors des expériences d'attracteurs d'ondes internes de gravité en régime linéaire de Brouzet *et al.* [78] où le régime stationnaire était atteint après une quarantaine de périodes de forçage (cf. figure 3.5) en régime linéaire.

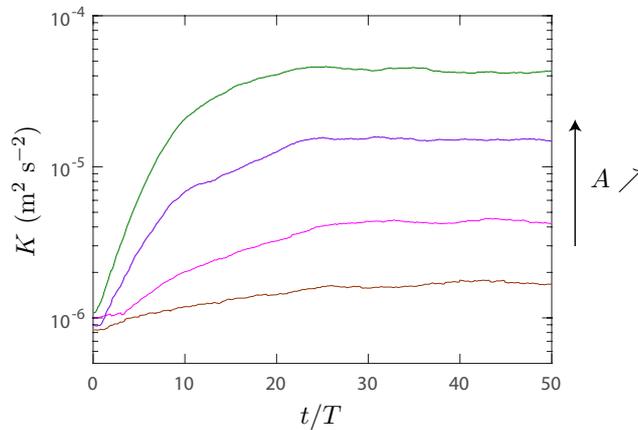


FIGURE 3.19 – Série temporelle de la moyenne spatiale de l'énergie cinétique  $K = \langle u_x^2 + u_z^2 \rangle / 2$  pour  $\Omega = 18$  tr/min, et quatre amplitudes de forçage :  $A = 0.22$  mm,  $A = 0.44$  mm,  $A = 0.89$  mm et  $A = 1.78$  mm. Le temps  $t$  est normalisé par la période  $T$  du générateur d'ondes. L'instant initial  $t = 0$  correspond au démarrage du générateur. Pour chaque série temporelle, on a réalisé une moyenne glissante avec une fenêtre de cinq périodes  $T$ .

Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter des résultats expérimentaux pour des expériences réalisées dans les conditions décrites dans la partie 3.3.1. Lors de ces expériences, les acquisitions PIV ont été démarrées 500 périodes après la mise en route du forçage nous donnant confiance dans le fait que l'écoulement étudié est en régime stationnaire. Dans la figure 3.20, nous pouvons ainsi constater le caractère statistiquement stationnaire de l'énergie cinétique moyennée spatialement  $K = \langle u_x^2 + u_z^2 \rangle / 2$  en fonction du temps  $t$  pour trois expériences à faible amplitude de forçage.

### 3.4 Régime linéaire

Dans nos expériences, l'énergie est injectée à la fréquence  $\sigma_0 = 0.85 \times 2\Omega$  par le générateur d'ondes. Pour explorer le contenu fréquentiel de notre écoulement, nous calculons pour chaque

### 3.4. RÉGIME LINÉAIRE

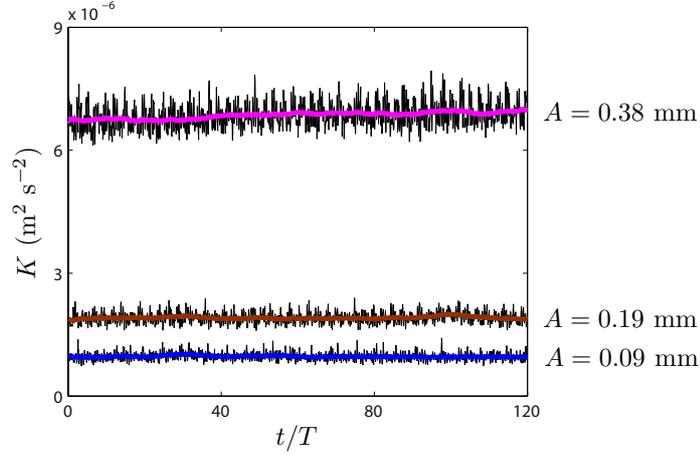


FIGURE 3.20 – Série temporelle de la moyenne spatiale de l'énergie cinétique  $K = \langle u_x^2 + u_z^2 \rangle / 2$  pour  $\Omega = 18$  tr/min,  $\lambda_f = 52.4$  cm et trois amplitudes de forçage :  $A = 0.09$  mm,  $A = 0.19$  mm et  $A = 0.38$  mm. Le temps  $t$  est normalisé par la période  $T = 2\pi/\sigma_0$  du générateur d'ondes,  $t = 0$  étant le début de l'acquisition intervenant 500 périodes après le démarrage du générateur d'ondes. Pour chaque série temporelle, la ligne noire montre les données brutes et l'épais trait de couleur montre sa moyenne glissante avec une fenêtre de cinq périodes  $T$ .

acquisition la densité spectrale de puissance temporelle du champ de vitesse selon

$$E(\sigma) = \frac{4\pi}{T} \langle |\tilde{u}_j(x, z, \sigma)|^2 \rangle, \quad (3.20)$$

avec

$$\tilde{u}_j(x, z, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T u_j(x, y_0, z, t) e^{-i\sigma t} dt \quad (3.21)$$

la transformée de Fourier temporelle de  $u_j(x, y_0, z, t)$ ,  $j = x, z$  et où les crochets désignent la moyenne spatiale sur le plan de mesure (situé en  $y_0 = L_y/3$ ) et  $T$  est la durée d'acquisition.

Dans la figure 3.21, nous montrons la densité spectrale de puissance  $E(\sigma)$  pour une expérience avec une longueur d'onde forcée  $\lambda_f = 52.4$  cm et la plus petite amplitude de forçage  $A = 0.09$  mm à  $\Omega = 18$  tr/min en fonction de la fréquence adimensionnée  $\sigma^* = \sigma/2\Omega$ . Ce spectre est principalement composé d'un pic à la fréquence de forçage  $\sigma_0$  et d'un pic secondaire à la fréquence de la plateforme tournante  $\sigma = \Omega$ . Ce dernier correspond à un écoulement excité par la rotation de la Terre qui induit une précession de la plateforme tournante [88]. Dans le cas d'une cavité sphérique ou ellipsoïdale subissant une précession, il est connu en anglais sous le nom d'écoulement de "tilt-over". D'autres pics faiblement énergétiques sont aussi présents dans le spectre, correspondant à la première harmonique de l'écoulement de tilt-over ( $\sigma^* = 1$ ), à l'interaction entre le forçage et l'écoulement de tilt-over à  $\sigma^* = \sigma_0^* - 0.5 \simeq 0.35$  et à l'interaction entre le forçage et la première harmonique de l'écoulement de tilt-over à  $\sigma^* = 1 - \sigma_0^* \simeq 0.15$ .

On peut aussi remarquer dans le spectre la présence d'énergie aux basses fréquences  $\sigma/2\Omega <$

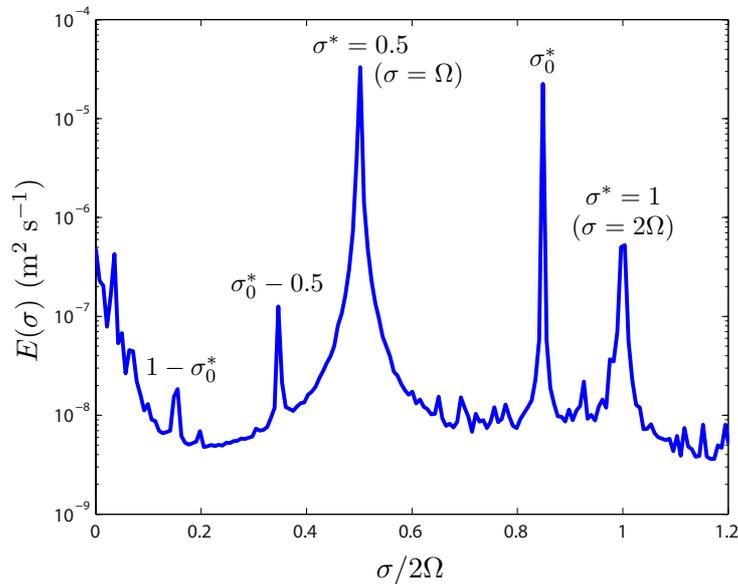


FIGURE 3.21 – Densité spectrale de puissance  $E(\sigma)$  du champ de vitesse (cf. équation (3.20)) en fonction de la fréquence normalisée  $\sigma^* = \sigma/2\Omega$  pour l'expérience à  $A = 0.09$  mm,  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. Nous avons indiqué cinq pics remarquables aux fréquences  $\sigma_0^* = \sigma_0/2\Omega$ ,  $\sigma^* = 0.5$  (i.e.  $\sigma = \Omega$ ),  $\sigma^* = 1$  (i.e.  $\sigma = 2\Omega$ ),  $\sigma^* = \sigma_0^* - 0.5$  et  $\sigma^* = 1 - \sigma_0^*$ .

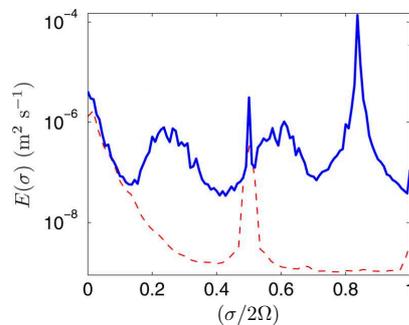


FIGURE 3.22 – Spectres temporels de l'énergie de Bordes *et al.* [22] où une onde plane d'inertie est forcée. La ligne continue bleue est le spectre d'une acquisition réalisée avec un forçage à la fréquence  $\sigma^* = 0.84$  et le trait tireté rouge est le spectre d'une acquisition réalisée sans forçage. Extrait de Bordes *et al.* [22].

0.15. Dans le travail de Bordes *et al.* [22] mené en 2012 sur la même plateforme tournante, il avait été montré que le pic énergétique à la fréquence nulle (avec une queue s'étendant jusqu'à  $\sigma^* \simeq 0.15$ ) était déjà présent en l'absence de forçage, suggérant que les basses fréquences du spectre sont potentiellement la conséquence d'une convection thermique dans l'aquarium. La figure 3.22, extraite de Bordes *et al.* [22], réunit en effet les spectres temporels obtenus lors de deux expériences, l'une où une onde plane d'inertie est forcée et l'autre sans aucun forçage. On remarque effectivement que le pic énergétique à basse fréquence semble indépendant du forçage

### 3.4. RÉGIME LINÉAIRE

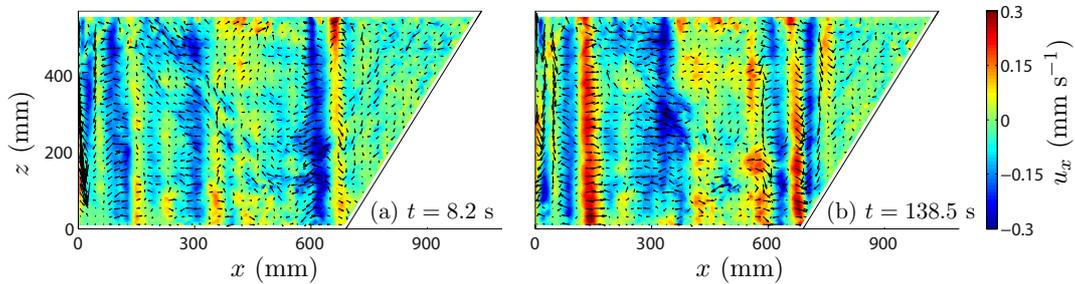


FIGURE 3.23 – Instantanés du champ de vitesse après une moyenne glissante sur une fenêtre temporelle de 8 périodes du générateur d’ondes (i.e. une fréquence de coupure de  $\sigma^* = \sigma/2\Omega \simeq 0.11$ ) dans le plan vertical  $y = y_0 = L_y/3$  pour l’expérience à  $\lambda_f = 52.4$  cm et pour la plus faible amplitude de forçage  $A = 0.09$  mm à  $\Omega = 18$  tr/min pour deux instants différents :  $t = 8.2$  s et  $t = 138.5$  s ( $t = 0$  correspond au début de l’acquisition soit 500 périodes après le démarrage du générateur d’ondes).

réalisé.

Dans notre expérience, correspondant au spectre de la figure 3.21, on peut visualiser la structure de l’écoulement associé aux basses fréquences grâce à une moyenne temporelle glissante du champ de vitesse avec une fenêtre de 8 périodes de forçage  $T$ . Cette analyse correspond en pratique à un filtrage passe-bas avec une fréquence de coupure  $\sigma_c = \sigma_0/8 \simeq 0.11 \times 2\Omega$ . Deux champs résultant de ce filtrage sont montrés à la figure 3.23 pour l’expérience à faible amplitude de forçage de la figure 3.21, révélant la présence de colonnes qui dérivent lentement dans l’aquarium. Ces colonnes apparaissent comme similaires à celles observées dans les expériences de convection thermique en rotation [89, 90] (cf. figure 3.24 extraite de [89]). Il est aussi possible qu’une partie de l’énergie aux très basses fréquences dans nos expériences puisse être liée à des phénomènes non-linéaires, de type dérive de Stokes ou écoulement redressé, qui affecterait l’écoulement à la fréquence de forçage  $\sigma_0$  ou à la fréquence de la plateforme  $\Omega$  [9, 14, 91, 92].

Dans nos expériences, l’écoulement produit par le générateur d’ondes pour la plus faible amplitude de forçage à  $\Omega = 18$  tr/min semble ainsi être en régime linéaire. Pour étudier proprement l’attracteur excité en faisant abstraction des écoulements “parasites” évoqués plus tôt, nous réalisons toutefois un filtrage de Fourier passe bande autour de la fréquence  $\sigma_0/2\Omega = 0.85$  de largeur  $\delta\sigma/2\Omega = \pm 0.04$ . La figure 3.25 montre un instantané du champ résultant sur lequel est superposé la largeur à mi-hauteur d’un faisceau de Moore et Saffman issu d’une source monopolaire virtuelle située en amont de la paroi inclinée (cf. modèle de la partie 3.1.2.b). Ce champ de vitesse révèle une concentration d’énergie sur l’attracteur théorique. Cette concentration n’est cependant que partielle puisqu’on peut observer d’autres faisceaux d’ondes eux aussi inclinés d’un angle  $\theta$  en dehors de la région où l’attracteur est attendu : dans la figure 3.25, l’ordre de grandeur de la vitesse au sein de l’attracteur (de 1 à 2 mm/s) est seulement 3 à 7 fois plus important que celui de la vitesse de l’onde forcée  $U_f \simeq 0.27$  mm/s. On s’attend donc naturellement à voir les ondes pendant leur convergence vers l’attracteur inviscide.

Pour mieux comparer l’écoulement expérimental à la fréquence  $\sigma_0$  à l’attracteur théorique

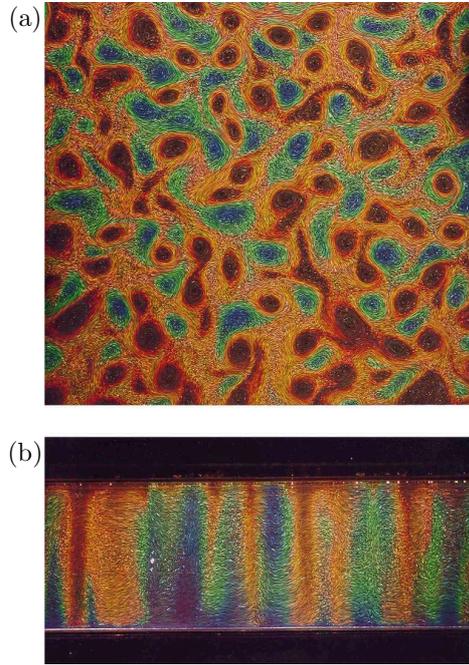


FIGURE 3.24 – Colonnes thermiques dans un fluide en rotation. Les couleurs indiquent la température : le rouge indique les zones froides de l'écoulement et le bleu les chaudes. (a) Coupe horizontale de l'écoulement. (b) Coupe verticale. Extrait de Sakai [89].

correspondant, on étudie son profil transverse en fonction de la coordonnée longitudinale  $s = \xi - L_0$  le long de l'attracteur inviscide. Pour empêcher les faisceaux n'ayant pas encore convergé vers l'attracteur inviscide et traversant le faisceau de l'attracteur d'interférer avec cette étude, nous réalisons un filtrage spatial de Fourier du champ de vitesse nommé filtrage de Hilbert (décrit en détail par Mercier *et al.* [93]). Pour réaliser ce filtrage, on commence par un filtrage passe-bande du champ brut autour de la fréquence d'intérêt  $\sigma_0$  en gardant uniquement les fréquences positives. On prend ensuite la transformée de Fourier spatiale à deux dimensions par rapport à  $x$  et  $z$  du champ complexe ainsi obtenu. Nous mettons ensuite à zéro les quadrants du plan  $(k_x, k_z)$  autres que celui qui nous intéresse avant de calculer la transformée de Fourier spatiale inverse à deux dimensions. Il suffit alors de prendre le double de la partie réelle du champ résultant pour obtenir le champ de vitesse filtré à la fréquence  $\sigma_0$  et pour lequel l'on n'a conservé qu'un seul quadrant dans l'espace des vecteurs d'ondes. Nous réalisons finalement une moyenne de phase à la fréquence de forçage  $\sigma_0$ .

Nous montrons dans la figure 3.26 un instantané du champ de vitesse résultant de quatre filtrages de Hilbert réalisés sur l'ensemble du champ brut : cet instantané est divisé en quatre régions, chacune correspondant au filtrage de Hilbert sélectionnant le quadrant de vecteur d'onde de la branche correspondante de l'attracteur théorique. Le vecteur d'onde de chaque branche est aligné avec la vitesse de phase  $\mathbf{c}_\varphi$  représentée sur la figure 3.7.

Dans l'encart de la figure 3.26, nous montrons un profil transverse (selon l'axe  $\eta$ ) de la

### 3.4. RÉGIME LINÉAIRE

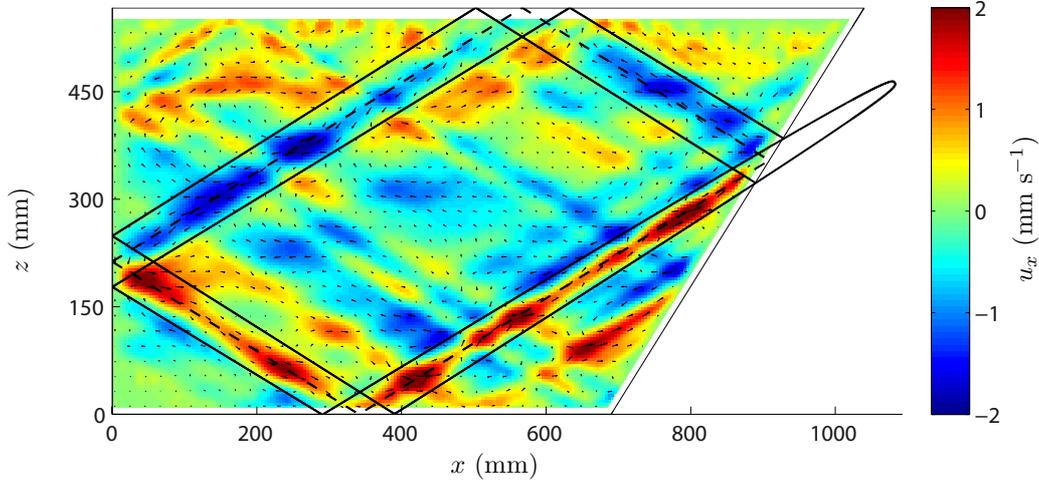


FIGURE 3.25 – Attracteur en régime linéaire : instantané du champ de vitesse dans le plan vertical  $y = y_0 = L_y/3$  après un filtrage de Fourier à la fréquence de forçage  $\sigma_0$  pour  $\lambda_f = 52.4$  cm et la plus petite amplitude de forçage  $A = 0.09$  mm à  $\Omega = 18$  rpm. Un schéma de l’attracteur théorique est superposé au champ expérimental : la ligne tiretée montre l’attracteur inviscide et les deux lignes en trait plein délimitent la largeur à mi-hauteur de l’amplitude en vitesse du faisceau visqueux de Moore et Saffman (cf. partie 3.1.2.b).

composante hors plan de la vorticité  $w_y(\xi = s + L_0, \eta, \varphi)$  correspondant au filtrage de Hilbert de la première branche de l’attracteur conservant le quadrant  $k_x > 0, k_z < 0$ . Ce profil est pris selon le trait noir de la figure 3.26 à la coordonnée  $s = 49.7$  cm le long de l’axe de l’attracteur ( $s = 0$  étant le point de réflexion de l’attracteur inviscide sur le plan incliné)   une phase arbitraire, pour  $\lambda_f = 52.4$  cm,  $\Omega = 18$  tr/min et à la plus faible amplitude de forçage  $A = 0.09$  mm. Nous montrons aussi l’enveloppe du faisceau  $\omega_{y,0}(\xi, \eta) = \sqrt{2\langle \omega_y(\xi, \eta, \varphi)^2 \rangle_\varphi}$  où  $\langle \cdot \rangle_\varphi$  désigne une moyenne sur la phase  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Nous mesurons alors l’amplitude en vorticité  $W(\xi) = \max_\eta[\omega_{y,0}(\xi, \eta)]$  du faisceau ainsi que la longueur d’onde  $\lambda(\xi)$  en prenant la moyenne sur  $\varphi$  du double de la distance transverse séparant le maximum du minimum de  $\omega_y(\xi, \eta, \varphi)$  (désignée par  $\lambda/2$  dans l’encart de la figure 3.26).

Nous montrons à la figure 3.27 l’amplitude en vorticité  $W(\xi)$  pour l’expérience à  $A = 0.09$  mm,  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min en fonction de la coordonnée  $\xi = s + L_0$  le long du faisceau théorique émis par la source virtuelle (située à une distance  $L_0$  de la réflexion focalisante). Les données sont absentes sur cinq portions de  $\xi$  correspondant aux régions proches des réflexions sur les parois où le champ de vitesse ne peut être correctement mesuré par PIV. L’amplitude en vorticité de l’attracteur  $W(\xi)$  présente des oscillations dues aux interférences entre le faisceau de l’attracteur et les autres ondes à  $\sigma_0$  présentes dans la cavité (visibles à la figure 3.25) ainsi qu’aux interférences entre deux branches de l’attracteur proches des réflexions. Bien que bruitées, les données expérimentales semblent ici tout à fait compatibles avec un comportement en loi de puissance d’exposant  $-2/3$  comme prévu par les modèles de Hazewinkel *et al.* et de

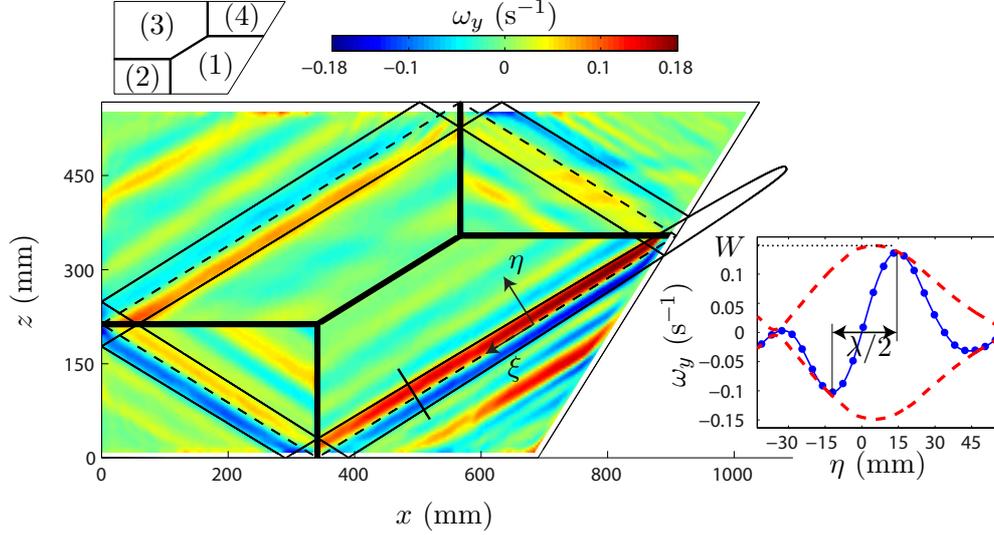


FIGURE 3.26 – Attracteur en régime linéaire : instantané de la composante hors-plan de la vorticité de champ obtenu après filtrage de Hilbert à la fréquence de forçage  $\sigma_0$  pour  $A = 0.09$  mm,  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. Le champ montré est un assemblage de quatre régions pour lesquelles un filtrage de Hilbert sélectionnant pour chacun un quadrant de vecteur d'onde en accord avec la direction du vecteur d'onde attendue pour chaque branche de l'attracteur théorique (cf. figure 3.7) : dans la région (1), on garde ainsi le quadrant de vecteur d'onde ( $k_x > 0, k_z < 0$ ), dans (2) ( $k_x > 0, k_z > 0$ ), dans (3) ( $k_x < 0, k_z > 0$ ) et dans (4) ( $k_x < 0, k_z < 0$ ). Un schéma de l'attracteur théorique est superposé avec la même mise en page qu'à la figure 3.25. En encart, nous montrons un profil transverse expérimental (ligne bleue avec les points de données représentés par des cercles) de la composante  $y$  de la vorticité  $\omega_y(\xi = s + L_0, \eta, \varphi)$  du champ filtré dans la région (1)   la fréquence  $\sigma_0$  et dans le quadrant ( $k_x > 0, k_z < 0$ ). Le profil de vorticité est pris au niveau du segment noir dans le champ à la coordonnée  $s = 49.7$  cm le long de l'axe de l'attracteur théorique et à une phase arbitraire. Nous montrons aussi dans cette figure l'enveloppe du faisceau d'ondes expérimental (la ligne rouge tiretée) calculée à partir des profils transverse expérimentaux comme  $\omega_{y,0}(\xi, \eta) = \sqrt{2\langle \omega_y(\xi, \eta, \varphi)^2 \rangle_\varphi}$  où  $\langle \cdot \rangle_\varphi$  désigne une moyenne sur la phase  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Grisouard et Staquet. Il s'agit de la première étude expérimentale de l'évolution de l'amplitude en vorticité en fonction de la coordonnée  $\xi$  effectuée sur les quatre branches de l'attracteur. Dans les attracteurs d'ondes d'inertie numériques de Jouve et Ogilvie [28] (présentés à la partie 3.2.1), cette analyse est réalisée au sein d'une seule branche de l'attracteur, ce qui est naturel car les quatre branches de l'attracteur sont a priori identiques dans leur cavité carrée penchée, tout au moins en régime linéaire.

  la figure 3.28 nous montrons l'évolution avec  $\xi$  de la longueur d'onde  $\lambda$  du même attracteur que celui de la figure 3.27, normalisée par la longueur d'atténuation visqueuse  $\ell$  (cf.  quation (1.17)). Comme pour la figure 3.27 la mesure est impossible près des réflexions du faisceau sur les parois de la cavité. Les bandes sont ici plus larges que pour la vorticité : la mesure

### 3.4. RÉGIME LINÉAIRE

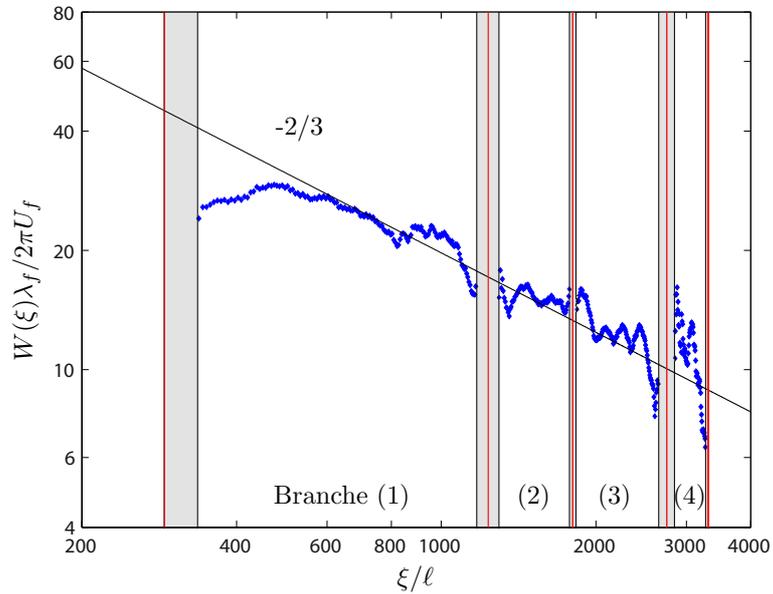


FIGURE 3.27 – Amplitude en vorticité  $W(\xi)$  de l’attracteur en fonction de la coordonnée  $\xi = s + L_0$  pour  $A = 0.09$  mm,  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min.  $W(\xi)$  est normalisée par la “vorticité de forçage”  $2\pi U_f/\lambda_f$  et la position  $\xi$  par  $\ell$  (cf.  quation (1.17)). Les lignes rouges verticales matérialisent les réflexions sur les parois de la cavité et les régions grisées montrent les zones où la mesure PIV est impossible. Une loi de puissance avec un exposant  $-2/3$  correspondant au modèle de faisceau auto-similaire (cf.  quation (1.20)) est représentée par une droite continue.

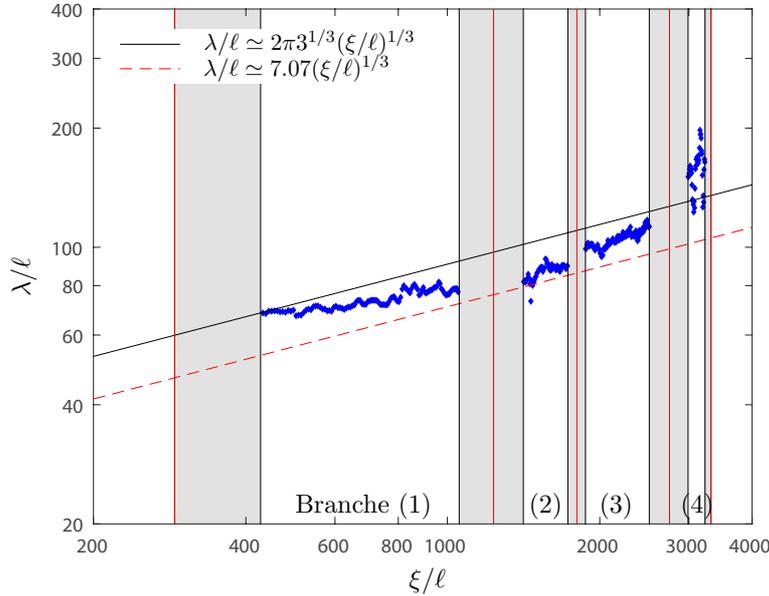


FIGURE 3.28 – Longueur d’onde normalisée  $\lambda/\ell$  de l’attracteur en fonction de la distance normalisée à la source virtuelle  $\xi/\ell$  pour  $A = 0.09$  mm,  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. Les lignes rouges verticales matérialisent les réflexions du faisceau sur les parois de la cavité et les régions grisées montrent les zones où les effets de bords rendent la mesure impossible. La ligne rouge tiretée montre la prédiction pour un faisceau d’ondes auto-similaire de Moore et Saffman issu d’une source monopolaire (décrit dans la partie 3.1.2.b) et le trait plein noir montre la prédiction du modèle développé dans la partie 3.1.2.a.

de la longueur transverse de l’attracteur est impossible lorsque le faisceau est à une distance des parois de l’ordre de sa largeur transverse ( $\sim 100\ell - 200\ell$ ). Nous montrons aussi la prédiction théorique pour un faisceau auto-similaire de Moore et Saffman issu d’une source monopolaire en ligne rouge tireté (cf. partie 3.1.2.b) et la prédiction de notre modèle développé à la partie 3.1.2.a en trait plein noir.

Nous avons testé plus avant ces lois en réalisant une série d’expériences en faisant varier la fréquence de forçage de sorte que l’angle  $\theta$  de propagation de l’onde forcée avec l’horizontale varie de  $\theta = 30^\circ$  à  $\theta = 35^\circ$  par pas de  $1^\circ$ . Par rapport à la série d’expériences décrite dans la partie 3.3.1, nous avons gardé constant l’angle  $\alpha$  de la paroi inclinée avec l’horizontale, le taux de rotation  $\Omega = 18$  tr/min, la longueur d’onde du générateur d’ondes  $\lambda_0 = 99$  cm ainsi que l’amplitude de forçage  $A = 0.09$  mm. Comme l’angle  $\theta$  change, la longueur d’onde de l’onde forcée  $\lambda_f = \lambda_0 \sin \theta$ , le facteur de focalisation  $\gamma = \sin(\alpha + \theta)/\sin(\alpha - \theta)$ , la longueur  $L_a$  de l’attracteur inviscide et la distance  $L_0 = L_a/(\gamma^3 - 1)$  entre la source virtuelle et la réflexion focalisante changent légèrement pour chaque expérience. Les attracteurs inviscides théoriques attendus pour chacune de ces expériences sont représentés à la figure 3.29. À la figure 3.30 nous montrons l’évolution avec la distance à la source virtuelle  $\xi$  de la longueur d’onde  $\lambda$  de l’attracteur pour chacune de ces expériences, normalisée par la longueur d’atténuation visqueuse

### 3.5. RÉGIME NON-LINÉAIRE

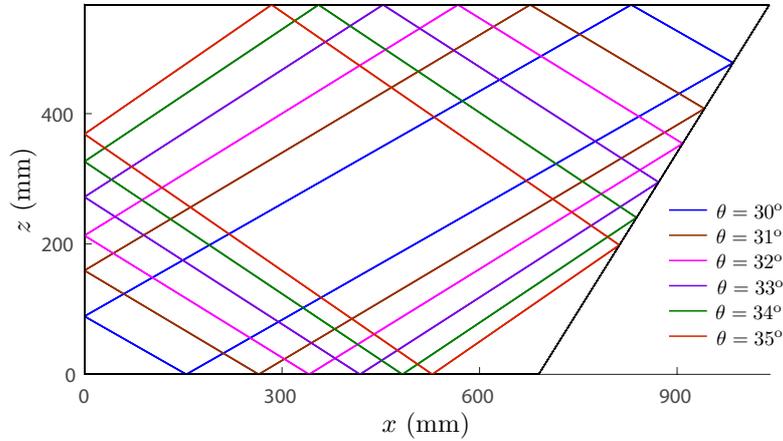


FIGURE 3.29 – Attracteurs inviscides théoriques associés à la série d’expériences décrite dans le texte. Le taux de rotation  $\Omega = 18$  tr/min, la longueur d’onde du générateur d’onde  $\lambda_0 = 99$  cm ainsi que l’amplitude de forçage  $A = 0.09$  mm sont constants pour toute la série.

$\ell$ . Les bandes représentées dans la figure 3.28 matérialisant les réflexions du faisceau sur les parois sont à des coordonnées  $\xi$  différentes pour chaque attracteur de la figure 3.29 et ne sont pas représentées ici par soucis de lisibilité. Nous montrons la prédiction théorique pour un faisceau d’ondes auto-similaire de Moore et Saffman issu d’une source monopolaire en ligne rouge tireté (cf. partie 3.1.2.b) et la prédiction de notre modèle développé dans la partie 3.1.2.a en trait plein noir. Ces deux modèles prédisent, pour toute la série d’expériences, une loi de puissance en  $(\xi/\ell)^{1/3}$  pour la longueur d’onde normalisée  $\lambda/\ell$  qui, dans l’ensemble, est en bon accord avec les mesures expérimentales. Le modèle développé dans la partie 3.1.2.a semble, à travers son préfacteur, fournir une estimation quantitative de la longueur d’onde légèrement meilleure que celle issue du modèle de faisceau d’ondes auto-similaire de Moore et Saffman (sachant que seul le préfacteur de la loi de puissance les distingue).

On peut remarquer dans les figures 3.27, 3.28 et 3.30 que les mesures dans la quatrième branche de l’attracteur sont très bruitées et montrent un écart plus significatif aux prédictions théoriques. La quatrième branche de l’attracteur est celle ayant la plus faible amplitude en vorticité et les mesures de l’amplitude en vorticité  $W(\xi)$  et de la longueur d’onde  $\lambda(\xi)$  sont donc beaucoup plus sensibles aux ondes forcées par le générateur mais n’ayant pas encore été focalisées que pour les autres branches de l’attracteur.

### 3.5 Régime non-linéaire

Nous étudions dans cette partie l’évolution de l’attracteur lorsque l’amplitude de forçage est augmentée. Dans la figure 3.31 nous reproduisons les mêmes analyses que dans la partie précédente pour toutes les amplitudes de forçage de la série d’expériences décrite dans la partie 3.3.1. Le graphique 3.31(a) montre ainsi l’évolution avec  $\xi$  de la longueur d’onde  $\lambda$  et le graphique 3.31(b) montre l’évolution de l’amplitude en vorticité  $W$  normalisée par la “vorticité de forçage”

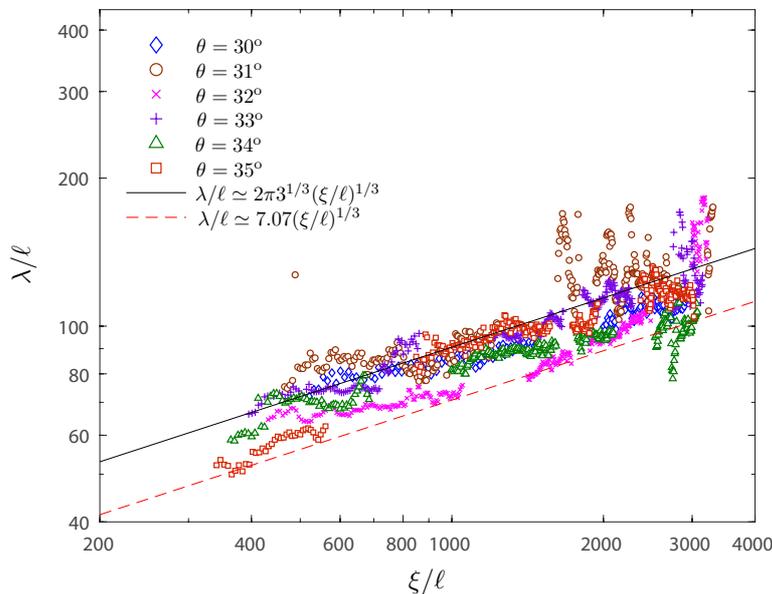


FIGURE 3.30 – Longueur d’onde normalisée  $\lambda/\ell$  de chaque attracteur de la figure 3.29 en fonction de la distance normalisée à la source virtuelle  $\xi/\ell$  pour  $A = 0.09$  mm,  $\lambda_0 = 99$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. La ligne rouge tiretée montre la prédiction pour un faisceau d’ondes auto-similaire de Moore et Saffman issu d’une source monopolaire (décrit dans la partie 3.1.2.b) et le trait plein noir montre la prédiction du modèle développé dans la partie 3.1.2.a.

$2\pi U_f/\lambda_f$  à  $\Omega = 18$  tr/min et  $\lambda_f = 52.4$  cm. On remarque que la longueur d’onde et l’amplitude en vorticité, une fois normalisées, sont similaires pour les trois plus petites amplitudes de forçage confirmant que l’attracteur est bien en régime linéaire. Pour les plus grandes amplitudes de forçage, la longueur d’onde croît et la vorticité normalisée décroît avec l’amplitude  $A$  de forçage montrant que l’attracteur entre en régime non-linéaire. On remarque aussi que la longueur d’onde et la vorticité semblent au premier ordre conserver les mêmes comportements en loi de puissance par rapport à  $\xi$  que ce soit en régime linéaire ou en régime non-linéaire (bien que le préfacteur change lors de l’entrée de l’attracteur en régime non-linéaire).

Pour illustrer l’épaississement du faisceau avec l’accroissement de l’amplitude  $A$ , nous montrons à la figure 3.32 un instantané du champ de vitesse issu d’un filtrage de Fourier passe bande autour de la fréquence  $\sigma_0/2\Omega = 0.85$  pour l’expérience avec  $A = 3.00$  mm,  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. Si on y observe toujours une concentration de l’énergie autour de l’attracteur inviscide, elle est moins prononcée qu’à basse amplitude de forçage comme on peut le voir en comparant cette figure 3.32 avec la figure 3.25. Ces résultats rappellent bien sûr l’élargissement des attracteurs expérimentaux d’ondes internes de gravité observé par Scolan *et al.* [27] en 2013 et par Brouzet *et al.* [77, 78] en 2017 lorsqu’ils entrent en régime non-linéaire (cf. partie 3.2.2).

  la figure 3.33, nous présentons la longueur d’onde  $\lambda$  (figure 3.33(a)) et l’amplitude en vorticité  $W$  (figure 3.33(b)) toutes deux moyenn es sur la première branche de l’attracteur (celle qui suit la réflexion focalisante) en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f = U_f\lambda_f/\nu$ .

### 3.5. RÉGIME NON-LINÉAIRE

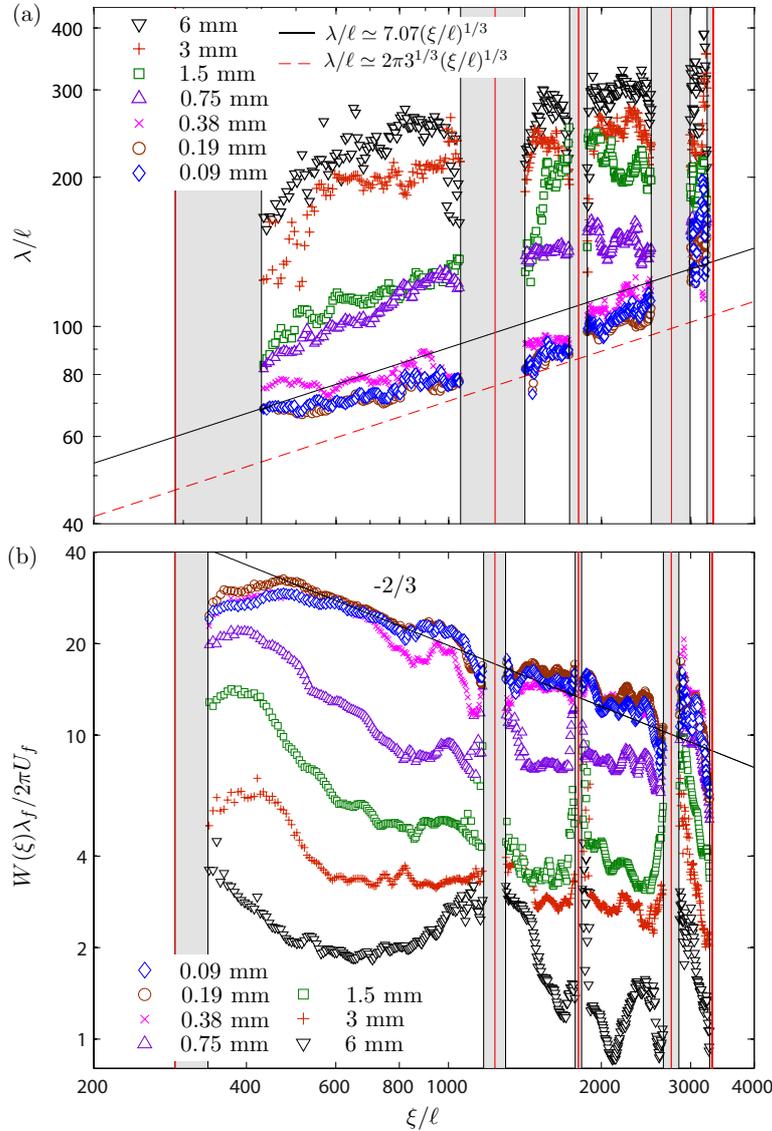


FIGURE 3.31 – (a) Longueur d’onde normalisée  $\lambda/\ell$  et (b) amplitude en vorticité normalisée  $W(\xi)\lambda_f/2\pi U_f$  en fonction de la distance normalisée à la source virtuelle  $\xi/\ell$  pour  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. Dans les deux figures, les lignes rouges verticales matérialisent les réflexions du faisceau sur les parois de la cavité et les régions grisées montrent les zones où les effets de bords rendent la mesure impossible. Dans (a), la ligne rouge tiretée montre la prédiction pour un faisceau d’ondes auto-similaire de Moore et Saffman issu d’une source monopolaire (cf. partie 3.1.2.b) et le trait plein noir montre la prédiction du modèle développé dans la partie 3.1.2.a. Dans (b), une loi de puissance d’exposant  $-2/3$  est montr e, correspondant à la loi de puissance prédite par les deux modèles.

Trois séries de données y sont représentées correspondant aux trois configurations

- $\Omega = 18$  tr/min et  $\lambda_f = 52.4$  cm,

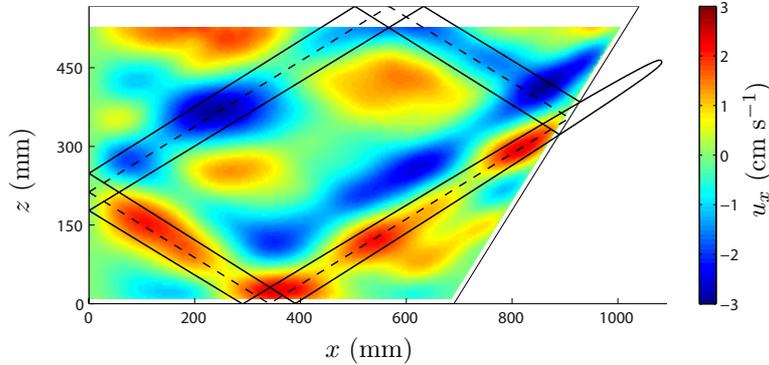


FIGURE 3.32 – Attracteur en régime non-linéaire : instantané du champ de vitesse dans le plan vertical  $y = y_0 = L_y/3$  après un filtrage de Fourier à la fréquence de forçage  $\sigma_0$  pour  $A = 3.00$  mm,  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. Comme à la figure 3.25, un schéma de l’attracteur prédit par le modèle de faisceau auto-similaire est superposé au champ expérimental.

- $\Omega = 18$  tr/min et  $\lambda_f = 26.2$  cm,
- $\Omega = 3$  tr/min et  $\lambda_f = 52.4$  cm.

À la figure 3.33(a), la longueur d’onde est normalisée par  $\ell^{2/3}L_0^{1/3}$  qui correspond à la loi d’échelle prédite dans le régime linéaire. On remarque que les trois séries de données, une fois normalisées, se regroupent sur une courbe maîtresse que ce soit dans le régime linéaire ou dans le régime non-linéaire. Cela suggère que le nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  est le seul paramètre de contrôle de l’évolution de l’attracteur en régime non-linéaire. On remarque aussi la présence d’un plateau pour les trois plus faibles nombres de Reynolds, c’est-à-dire lorsque l’attracteur est en régime linéaire. La longueur d’onde normalisée  $\lambda/\ell^{2/3}L_0^{1/3}$  de ce plateau est proche de celle prédite par le modèle de Grisouard et Staquet  $\Lambda_1 \simeq 9.68$  ainsi que de celle prédite par notre modèle développé dans la partie 3.1.2.a  $\Lambda_2 \simeq 12.4$  ( $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont les moyennes des prédictions sur la première branche de l’attracteur et sont montrées par les droites respectivement noire et rouge horizontales en tiretés pointillés).

Toujours dans la figure 3.33(a), les droites horizontales en trait plein noir, rouge et bleu montrent la longueur d’onde normalisée  $\lambda_f/\gamma$  pour les trois séries d’expériences, ce qui correspond à la longueur d’onde de l’onde excitée par le générateur d’ondes après une réflexion sur la paroi inclinée. Cette valeur constitue a priori une limite supérieure pour la longueur d’onde mesurée dans la première branche de l’attracteur comme expliqué par le modèle développé dans la partie 3.1.2.a. Pour deux des expériences à  $Re_f \simeq 9500$ , la longueur d’onde de l’attracteur  $\lambda$  approche cette limite suggérant que c’est l’onde après la première réflexion sur la paroi inclinée qui domine ici le champ de vitesse. C’est bien ce qu’on observe dans les deux instantanés du champ de vitesse de la figure 3.34 associés à ces expériences. Cette propriété traduit le fait que l’énergie à la fréquence de forçage ne se concentre ici plus autour de l’attracteur inviscide. À titre de comparaison, pour la série à  $\Omega = 18$  tr/min et  $\lambda_f = 52.4$  cm, la longueur d’onde de l’attracteur expérimental pour le plus grand nombre de Reynolds  $Re_f \simeq 19000$  est toujours

### 3.5. RÉGIME NON-LINÉAIRE

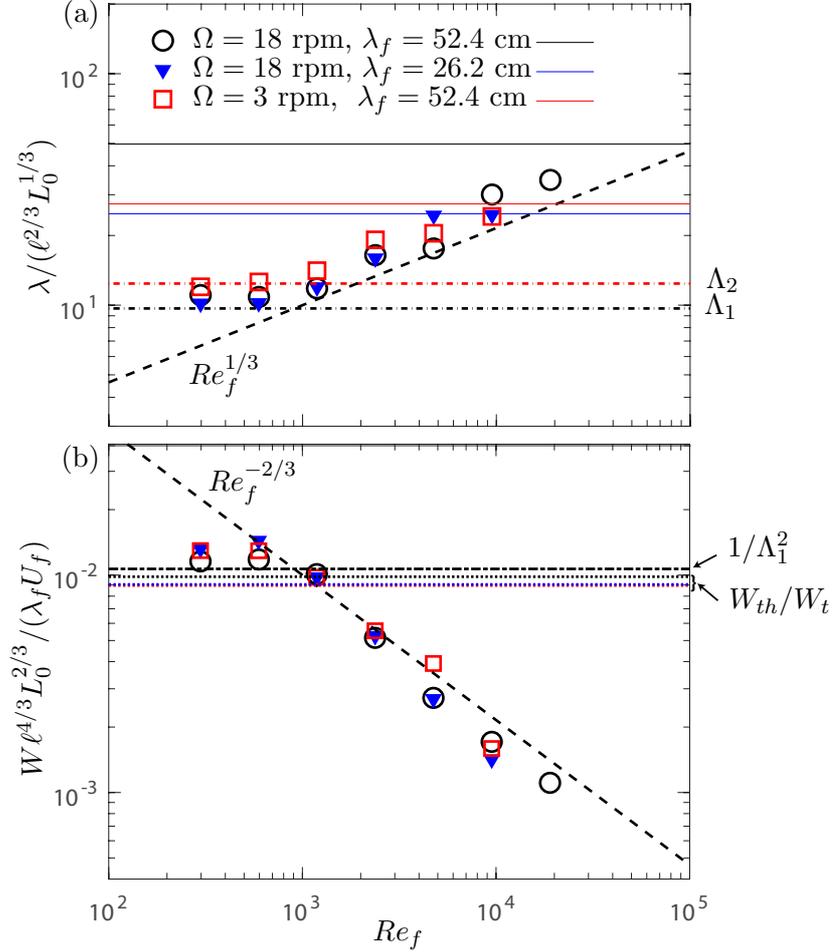


FIGURE 3.33 – (a) Longueur d’onde normalisée  $\lambda/\ell^{2/3}L_0^{1/3}$  et (b) amplitude en vorticité normalisée  $W\ell^{4/3}L_0^{2/3}/\lambda_f U_f$  toutes deux moyennées sur la première branche de l’attracteur (celle qui suit la réflexion) en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f = U_f \lambda_f / \nu$ . Les lignes tiretées dans (a) et (b) montrent respectivement les lois de puissance  $\lambda/\ell^{2/3}L_0^{1/3} = Re_f^{1/3}$  et  $W\ell^{4/3}L_0^{2/3}/\lambda_f U_f = Re_f^{-2/3}$  prédites par les modèles de l’attracteur linéaire lorsqu’on remplace la viscosité du fluide par de la viscosité turbulente  $\nu_t = U_f \lambda_f$  dans la longueur visqueuse  $\ell$ . Dans (a), la droite horizontale tiretée-pointillée noire montre la valeur prédite par le modèle de Grisouard et Staquet  $\Lambda_1$  et la droite horizontale tiretée-pointillée rouge montre la valeur  $\Lambda_2$  prédite par le modèle développé dans la partie 3.1.2.a. Les traits pleins en noir, rouge et bleu montrent la longueur d’onde  $\lambda_f/\gamma$  du faisceau excité par le générateur d’ondes après une réflexion sur la paroi inclinée pour les trois configurations expérimentales. Dans (b), les droites horizontales pointillées montrent les estimations de la vorticité  $W_{th}/W_t$  (voir texte) du modèle développé dans la partie 3.1.2.a pour chacune des séries d’expériences. La droite horizontale noire tiretée-pointillée montre la valeur numérique de  $1/\Lambda_1^2$  qui est une estimation de la vorticité normalisée par le modèle de faisceau auto-similaire.

significativement plus faible que la longueur d'onde de l'onde forcée après une réflexion  $\lambda_f/\gamma$ . Ce résultat traduit le fait que la concentration de l'énergie autour de l'attracteur inviscide semble encore à l'œuvre pour ces expériences.

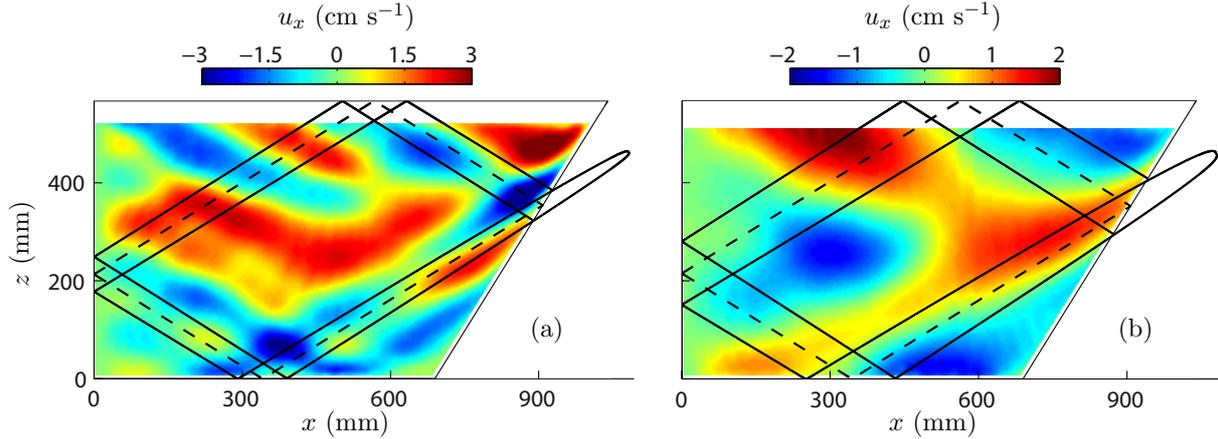


FIGURE 3.34 – Expériences “sans attracteur” : instantanés de deux champs de vitesse dans le plan vertical  $y = y_0 = L_y/3$  à  $Re_f = 9\,500$ , filtré à la fréquence  $\sigma_0$  pour (a)  $A = 6$  mm,  $\Omega = 18$  tr/min, et  $\lambda_f = 26.2$  cm et (b)  $A = 18$  mm,  $\Omega = 3$  tr/min et  $\lambda_f = 52.4$  cm. Les attracteurs ne sont pas observables dans ces champs parce que la longueur d'onde du forçage est plus petite que celle de l'attracteur théorique (non-linéaire). Tout comme à la figure 3.25, un schéma de l'attracteur théorique en régime linéaire est représenté sur chaque champ expérimental.

À la figure 3.33(b), nous montrons l'amplitude en vorticité  $W$  normalisée par  $W_t = U_f \lambda_f / \left( \ell^{2/3} L_0^{1/3} \right)^2$  en fonction de  $Re_f$ . Nous avons choisi cette normalisation en notant que le produit entre la vitesse et la longueur d'onde d'une onde d'inertie est conservé lors de sa réflexion inviscide sur une paroi inclinée (comme discuté dans la partie 3.1.1). On peut ainsi s'attendre à ce que le produit de la vitesse caractéristique par la longueur caractéristique de l'attracteur soit proportionnel à ce même produit  $\lambda_f U_f$  pour l'onde forcée, ce qui impliquerait une vorticité de l'attracteur qui suivrait la loi d'échelle  $W_t = U_f \lambda_f / \left( \ell^{2/3} L_0^{1/3} \right)^2$  où  $\ell^{2/3} L_0^{1/3}$  est l'échelle spatiale caractéristique de l'attracteur en régime linéaire. Cette normalisation fait cette fois encore se rassembler les trois séries de données sur une courbe maîtresse. On remarque que la vorticité normalisée  $W/W_t$  est d'abord constante aux faibles nombres de Reynolds  $Re_f \lesssim 1\,000$ , confirmant que l'écoulement est en régime linéaire puis elle décroît lorsque  $Re_f \gtrsim 1\,000$  traduisant l'émergence des non-linéarités.

Par ailleurs, l'équation (3.3) du modèle développé dans la partie 3.1.2.a nous donne l'amplitude en vitesse  $U(n, s)$  d'une onde ayant effectuée  $n$  “tours” d'attracteur à la coordonnée  $s$  le long de l'attracteur inviscide ( $s = 0$  étant la réflexion focalisante). Dans ce modèle, la vitesse théorique  $V(s)$  au centre de l'attracteur est le fruit de la superposition de toutes les ondes ayant

### 3.5. RÉGIME NON-LINÉAIRE

---

effectuées un nombre de tours d'attracteur différent, c'est-à-dire :

$$V(s) = \sum_{n=0}^{\infty} U(n, s). \quad (3.22)$$

Une prédiction possible pour la vorticité de l'attracteur pourrait donc être  $W_{th}(s) = V(s)/\lambda(s)$  avec  $\lambda(s) = 2\pi 3^{1/3} \ell^{2/3} (L_0 + s)^{1/3}$  la longueur d'onde de l'attracteur à la coordonnée  $s$  de l'attracteur inviscide. On calcule cette série numériquement et la valeur  $W_{th}/W_t$  de la moyenne de  $W_{th}(s)/W_t$  sur la première branche est reportée en trait pointillé à la figure 3.33(b) pour chaque série d'expériences. On constate que  $W_{th}$  fournit une estimation très raisonnable de l'amplitude en vorticité de l'attracteur en régime linéaire sous-estimant cependant les valeurs expérimentales.

Le modèle de faisceau auto-similaire de Grisouard et Staquet prédit la structure spatiale de l'attracteur mais n'aborde pas la question de son amplitude en vitesse ou en vorticité. Toutefois, comme une onde d'inertie conserve le produit de sa vitesse par sa longueur d'onde lors de sa réflexion inviscide sur une paroi, on peut s'attendre, en première approximation, à ce que la vorticité  $W$  soit proportionnelle au produit  $U_f \lambda_f$  divisé par le carré de la longueur d'onde caractéristique prédite pour l'attracteur par le modèle de faisceau auto-similaire. Nous obtenons ainsi  $W/W_t = 1/\Lambda_1^2 \simeq 1.07 \times 10^{-2}$  comme estimation de la vorticité normalisée prédite par le modèle de faisceau auto-similaire. Dans la figure 3.33(b), cette prédiction pour le rapport  $W/W_t$  est représentée par la ligne horizontale tiretée pointillée noire. On peut voir qu'elle donne une estimation de l'amplitude en vorticité très proche de  $W_{th}/W_t$  fruit du modèle développé dans la partie 3.1.2.a et qu'il s'agit donc d'une estimation raisonnable de l'amplitude en vorticité de l'attracteur en régime linéaire.

La figure 3.33 nous permet finalement d'établir que la longueur d'onde de l'attracteur  $\lambda$  et l'amplitude en vorticité  $W$  suivent les lois de puissance prédites par le modèle linéaire mais sont modifiées dans le régime non-linéaire par un préfacteur dépendant du nombre de Reynolds de forçage :

$$\lambda = \ell^{2/3} L_0^{1/3} f(Re_f), \quad (3.23)$$

$$W = \frac{U_f \lambda_f}{\ell^{4/3} L_0^{2/3}} g(Re_f). \quad (3.24)$$

Comme déjà discuté plus tôt, lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  prédite par l'équation (3.23) devient plus grande que  $\lambda_f/\gamma$ , l'attracteur ne peut pas se développer : les équations (3.23) et (3.24) ne seront donc plus valides lorsque  $Re_f \geq f^{-1}(\lambda_f/\gamma \ell^{2/3} L_0^{1/3})$ .

Comme on le verra par la suite, l'élargissement de l'attracteur et la diminution de son amplitude relative lorsque  $Re_f$  augmente au delà de  $Re_f \simeq 1\,000$  sont corrélés avec l'apparition d'une instabilité par résonance triadique du faisceau de l'attracteur (ce type d'instabilité a déjà été décrit dans la partie 1.4). Cette instabilité draine de l'énergie du mode à  $\sigma_0$  vers les basses fréquences. Pour le mode à  $\sigma_0$ , l'instabilité peut ainsi être vue comme un puits d'énergie s'ajou-

tant à la dissipation visqueuse. Une façon simple d'essayer de rendre compte de cette dissipation effective est de remplacer la viscosité  $\nu$  par une viscosité turbulente  $\nu_t = U_f \lambda_f = \nu Re_f$  dans le modèle linéaire de l'attracteur. Comme la longueur visqueuse  $\ell$  intervenant dans le modèle linéaire est proportionnelle à la racine carrée de la viscosité  $\nu$ , le remplacement de  $\nu$  par  $\nu_t$  dans les équations (3.23) et (3.24) amène directement à  $f(Re_f) = Re_f^{1/3}$  et  $g(Re_f) = Re_f^{-2/3}$ . En traçant les lois des équations (3.23) et (3.24) avec ces expressions dans la figure 3.33(a) et 3.33(b), on observe un excellent accord avec le comportement en régime non-linéaire de la longueur d'onde et de l'amplitude en vorticité de l'attracteur.

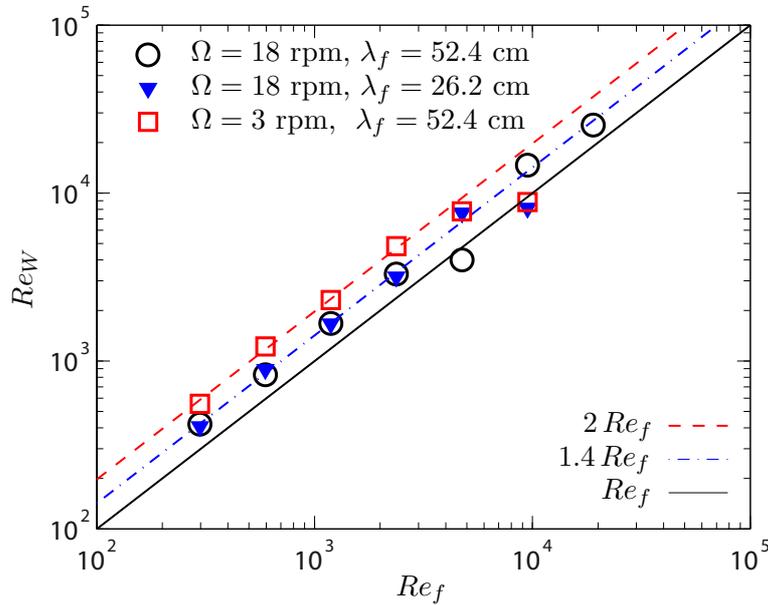


FIGURE 3.35 – Nombre de Reynolds de l'attracteur  $Re_W = W\lambda^2/\nu$  moyenné sur la première branche de l'attracteur (celle qui suit la réflexion focalisante) en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f = U_f\lambda_f/\nu$ .

Il est finalement intéressant d'observer à la figure 3.35 que le nombre de Reynolds de l'attracteur défini comme  $Re_W = W\lambda^2/\nu$  croît linéairement avec le nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  sur toute la gamme étudiée. Comme le montre les équations (3.23) et (3.24), une telle proportionnalité est prévue par le modèle d'attracteur linéaire mais aussi par son extension non-linéaire impliquant une viscosité turbulente. Dans les expériences, il est ainsi remarquable que le rapport  $Re_W/Re_f$  ne soit pas affecté par l'apparition de l'instabilité triadique à  $Re_f \simeq 1000$ . Celui-ci est en revanche faiblement dépendant de  $\Omega$  avec  $Re_W/Re_f \simeq 2.0$  pour  $\Omega = 3$  tr/min et  $Re_W/Re_f \simeq 1.4$  pour  $\Omega = 18$  tr/min. L'équation (3.22) du modèle de Hazewinkel *et al.* permet de proposer une prédiction théorique pour le rapport  $Re_W/Re_f$  dans le régime linéaire pour chacune des séries d'expériences réalisées. Dans ce modèle, une fois la géométrie (c'est-à-dire  $\gamma$  et  $\sigma^*$ ) fixée, le rapport  $Re_W/Re_f$  est une fonction du nombre sans dimension  $Ek = \nu L_a/\Omega\lambda_f^3$  qui est une sorte de nombre d'Ekman. Les prédictions sont alors :

### 3.6. INSTABILITÉ PAR RÉSONANCE TRIADIQUE DE L'ATTRACTEUR

$A$ (mm)	0.09	0.19	0.38	0.75	1.50	3.00	6.00
$Re_f$	300	600	1 190	2 380	4 750	9 500	19 000
$\sigma_1^*$	—	—	$0.32 \pm 0.01$	$0.32 \pm 0.02$	$0.31 \pm 0.02$	$0.29 \pm 0.05$	$0.23 \pm 0.04$
$\sigma_2^*$	—	—	—	$0.53 \pm 0.02$	$0.54 \pm 0.02$	$0.62 \pm 0.05$	$0.64 \pm 0.04$
$(\sigma_1 + \sigma_2)/\sigma_0$	—	—	—	$1.00 \pm 0.05$	$1.00 \pm 0.05$	$1.07 \pm 0.12$	$1.02 \pm 0.09$

TABLE 3.1 – Fréquences normalisées  $\sigma_1^* = \sigma_1/2\Omega$  et  $\sigma_2^* = \sigma_2/2\Omega$  des centres des bosses sous-harmoniques observées dans les spectres temporels pour  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min (cf. figure 3.36) en fonction de l'amplitude de forçage  $A$ . Les cellules vides (i.e. avec “—”) correspondent aux expériences où les bosses ne sont pas observées.

- $Re_W/Re_f \simeq 1.53$  pour la série à  $\Omega = 18$  tr/min et  $\lambda_f = 52.4$  cm,
- $Re_W/Re_f \simeq 1.41$  pour la série à  $\Omega = 18$  tr/min et  $\lambda_f = 26.2$  cm et
- $Re_W/Re_f \simeq 1.39$  pour celle à  $\Omega = 3$  tr/min et  $\lambda_f = 52.4$  cm.

On note que ces valeurs sont très proches de celles observées expérimentalement à la figure 3.35 lorsque  $\Omega = 18$  tr/min. Notre modèle prédit une dépendance molle du rapport  $Re_W/Re_f$  avec  $\lambda_f$  et  $\Omega$  qui ne reflète toutefois pas très bien les tendances observées expérimentalement.

Le fait que le modèle développé dans la partie 3.1.2.a ne rende pas compte correctement des dépendances (de second ordre) du rapport  $Re_W/Re_f$  avec  $\lambda_f$  et  $\Omega$  suggère que des ingrédients expérimentaux ignorés du modèle sont en jeu. On peut ainsi noter la présence des couches limites visqueuses sur les parois de la cavité sur lesquelles les ondes se réfléchissent et l'interaction inertielle et visqueuse des ondes avec les parois verticales  $y = 0$  et  $y = L_0$  brisant notamment l'invariance en  $y$ . Finalement, on peut penser que les dépendances secondaires des caractéristiques de l'attracteur discutées dans cette dernière partie vont être des fonctions du nombre d'Ekman  $\nu/2\Omega H$  et de la longueur d'onde d'injection adimensionnée  $\lambda_f/H$ , où  $H$  est la hauteur de la cavité.

### 3.6 Instabilité par résonance triadique de l'attracteur

Dans le but de mieux comprendre les non-linéarités de l'écoulement, nous montrons à la figure 3.36 les spectres temporels du champ de vitesse calculés selon l'équation (3.20) pour toutes les amplitudes de forçage  $A$  de la série à  $\Omega = 18$  tr/min et  $\lambda_f = 52.4$  cm. On y observe l'émergence de deux bosses sous-harmoniques lorsque l'attracteur entre en régime non-linéaire (c'est-à-dire à partir de l'expérience  $A = 0.38$  mm soit  $Re_f = 1200$ ). La fréquence associée au maximum de chaque bosse est désignée par les fréquences  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  et les barres d'erreur horizontales montrées à la figure 3.36 représentent l'incertitude sur  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$ . On observe dans le tableau 3.1 que les fréquences  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  sont parfaitement compatibles avec la condition de résonance  $\sigma_1^* + \sigma_2^* = \sigma_0^*$  avec la fréquence de forçage  $\sigma_0^*$ . On assiste en fait ici à l'émergence de modes sous-harmoniques produits par l'instabilité par résonance triadique des ondes forcées à la fréquence  $\sigma_0^*$  selon un scénario classique déjà décrit dans la partie 1.4. Comme cela a déjà été discuté précédemment, le pic à la fréquence adimensionnée  $\sigma^* = 0.5$  (i.e.  $\sigma = \Omega$ ) correspond à

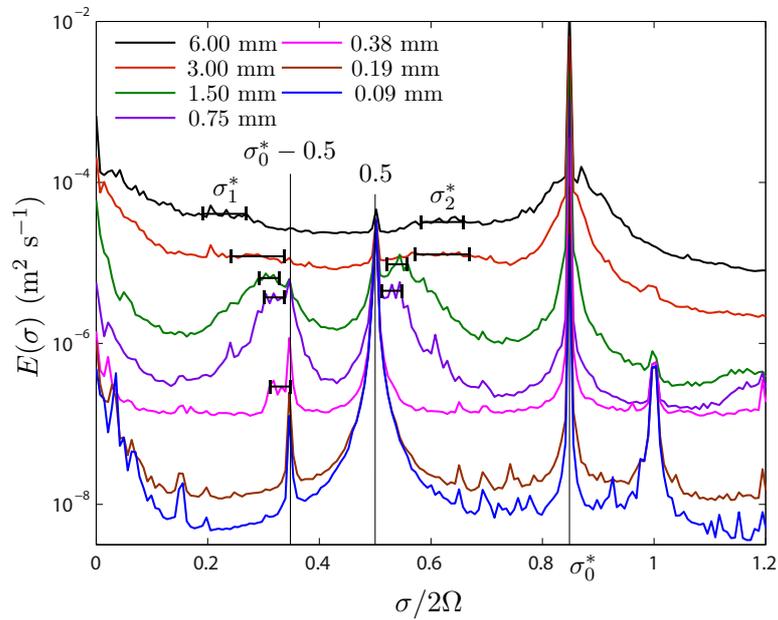


FIGURE 3.36 – Densité spectrale de puissance temporelle  $E(\sigma)$  (cf. équation (3.20)) en fonction de la fréquence normalisée  $\sigma^* = \sigma/2\Omega$  pour toutes les amplitudes de forçage  $A$  avec  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. Pour chaque spectre, les barres d'erreur horizontales indiquent l'intervalle en fréquence autour duquel les bosses sous-harmoniques sont centrées. Ces intervalles correspondent aux fréquences reportées dans le tableau 3.1. Nous avons indiqué par des droites verticales trois pics remarquables aux fréquences  $\sigma_0^* = \sigma_0/2\Omega$ ,  $\sigma^* = 0.5$  (i.e.  $\sigma = \Omega$ ) et  $\sigma^* = \sigma_0^* - 0.5$ .

### 3.6. INSTABILITÉ PAR RÉSONANCE TRIADIQUE DE L'ATTRACTEUR

---

l'écoulement dit de "tilt-over" forcé par la précession de l'axe de rotation induite par la rotation de la terre [88, 94]. Dans le spectre temporel de l'expérience à  $A = 0.38$  mm, ce pic vient masquer la seconde bosse produite par l'instabilité triadique, pour laquelle seule la bosse à  $\sigma_1^* = 0.32$  peut être clairement observée. Pour les amplitudes de forçage plus grandes, la présence du pic associé au mode de tilt-over ne cache cependant plus la seconde bosse produite par l'instabilité triadique qui est de plus en plus énergétique.

On note que l'émergence d'une instabilité par résonance triadique à la figure 3.36 coïncide parfaitement avec l'accroissement des échelles transverses de l'attracteur et de l'amortissement de son amplitude normalisée montrées dans les figures 3.31 et 3.33. On constate à la figure 3.36 que les bosses sous-harmoniques sont larges, ce qui a déjà été constaté dans les expériences de Bordes *et al.* [22] où une instabilité par résonance triadique d'une onde plane d'inertie est observée (voir figure 3.22). Cette faible sélectivité de l'instabilité n'a en revanche pas été mise en évidence par Jouve et Ogilvie [28] dans leurs simulations numériques 2D : ceux-ci observent au contraire des bosses sous-harmoniques très piquées (leurs spectres sont représentés à la figure 3.13).

Dans les spectres représentés à la figure 3.36, on remarque par ailleurs que les fréquences  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  s'éloignent de  $\sigma_0^*/2$  avec l'augmentation de l'amplitude de forçage  $A$ . On note qu'en parallèle les bosses énergétiques associés à ces deux modes semblent deviennent de plus en plus larges tandis que leur amplitude  $E(\sigma_{1,2}^*)$  relative au niveau de base du spectre décroît avec  $A$ . Pour les deux plus grandes amplitudes de forçage  $A = 3$  mm et  $A = 6$  mm (i.e.  $Re_f \simeq 9500$  et  $19000$ ), les bosses associées aux ondes sous-harmoniques deviennent même difficilement distinguables du niveau de base du spectre temporel. Cela ne signifie pourtant pas que l'instabilité a disparu puisque l'énergie totale dans les modes sous-harmoniques continue de croître avec  $Re_f$ .

La figure 3.37 montre ainsi l'énergie cinétique contenue dans les modes de fréquence adimensionnée  $\sigma^*$  compris entre 0.1 et  $\sigma_0^*/2 = 0.42$  en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . L'énergie cinétique est obtenue par intégration des spectres temporels de la figure 3.36 et constitue une bonne mesure de l'énergie contenue dans la première bosse sous-harmonique produite par l'instabilité par résonance triadique. On constate que cette énergie croît régulièrement jusqu'au plus grand nombre de Reynolds de forçage et que le spectre presque plat observé à grand nombre de Reynolds dans la gamme de fréquence  $0.1 < \sigma^* < \sigma_0^*/2$  est effectivement le fruit d'un fort étalement de l'énergie en fréquence et non d'une disparition des modes sous-harmonique produit par l'instabilité par résonance triadique. La figure 3.37(b) montre une vue rapprochée des mêmes données sur la gamme de nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  de 0 à 5000. Cette représentation permet d'estimer de manière grossière le seuil de l'instabilité par résonance triadique à une valeur de  $Re_f^c$  comprise entre 600 et 1200, soit  $Re_f^c = 900 \pm 300$ . Il est intéressant de retranscrire ce nombre de Reynolds de forçage critique en terme du nombre de Reynolds du faisceau d'ondes de l'attracteur  $Re_W = W\lambda^2/\nu$ ,  $W$  et  $\lambda$  étant respectivement la vorticité et la longueur d'onde mesurées dans la première branche de l'attracteur. Par l'intermédiaire du coefficient reliant les deux nombres de Reynolds mis en évidence à la figure 3.35, on obtient directement  $Re_W^c \simeq 1.4 \times Re_f^c \simeq 1260 \pm 420$ . On peut finalement chercher à estimer le seuil de l'instabilité en terme de nombre de Reynolds construit sur la vitesse typique dans la première

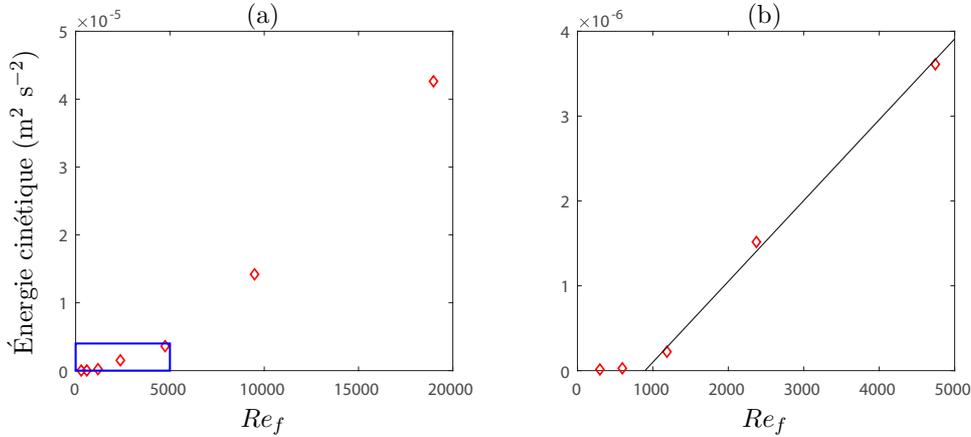


FIGURE 3.37 – Énergie cinétique en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  associée à la première bosse sous-harmonique ( $0.1 < \sigma^* < \sigma_0/2$ ) de l'instabilité par résonance triadique pour la série à  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. L'énergie cinétique est obtenue par intégration des spectres temporels de la figure 3.36. (b) est un agrandissement correspondant au rectangle bleu de (a). Un ajustement affine des points entre  $1000 < Re_f < 5000$  est représenté pour mettre en évidence le seuil d'apparition de l'instabilité par résonance triadique.

branche de l'attracteur et non sur la vorticité. Connaissant les expressions de la vorticité  $W$  et de la vitesse  $U$  dans un faisceau auto-similaire, nous pouvons facilement donner une expression de leur rapport au centre du faisceau en fonction de l'ordre de la polarité de la source  $n$ . Pour une source monopolaire qui est le cas pertinent pour le faisceau de l'attracteur, comme nous l'avons montré en partie 1.3.2, l'amplitude en vitesse du faisceau suit la loi  $U \simeq 0.28 W \lambda$ . On en déduit donc que le nombre de Reynolds critique naturel  $Re_U^c = U \lambda / \nu$  de l'instabilité par résonance triadique vaut  $Re_U^c \simeq 0.28 Re_W^c = 350 \pm 120$ . Sauf erreur de notre part, ce résultat constitue la première estimation expérimentale du seuil de l'instabilité par résonance triadique pour une onde d'inertie, ici dans le cas d'un faisceau auto-similaire de Moore et Saffman. On peut toutefois souligner que le faible nombre d'expériences réalisées ici près du seuil de l'instabilité ne permet pas une évaluation fine de celui-ci.

Comme cela a déjà été discuté dans la partie 1.4, la théorie de l'instabilité par résonance triadique d'une onde plane d'inertie prédit un rapprochement des fréquences sous harmoniques  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  vers la moitié  $\sigma_0^*/2$  de la fréquence de forçage avec l'augmentation du nombre de Reynolds de l'onde primaire. Cette prédiction est contraire à ce qu'on observe dans nos expériences mais conforme   ce qu'avaient observé Jouve et Ogilvie [28] pour un attracteur d'ondes d'inertie numérique 2D (cf. figure 3.13). La différence majeure entre d'une part nos expériences et d'autre part la théorie et les simulations numériques de Jouve et Ogilvie réside dans la présence de parois verticales parallèles à l'attracteur situées en  $y = 0$  et  $y = L_y$ . Ces parois participent à briser l'invariance dans la direction  $y$  et donc le caractère purement 2D de l'écoulement expérimental.

Pour confirmer que les bosses d'énergie aux fréquences  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  correspondent bien à des ondes d'inertie, nous comparons la localisation de l'énergie dans le spectre spatiotemporel du

### 3.6. INSTABILITÉ PAR RÉSONANCE TRIADIQUE DE L'ATTRACTEUR

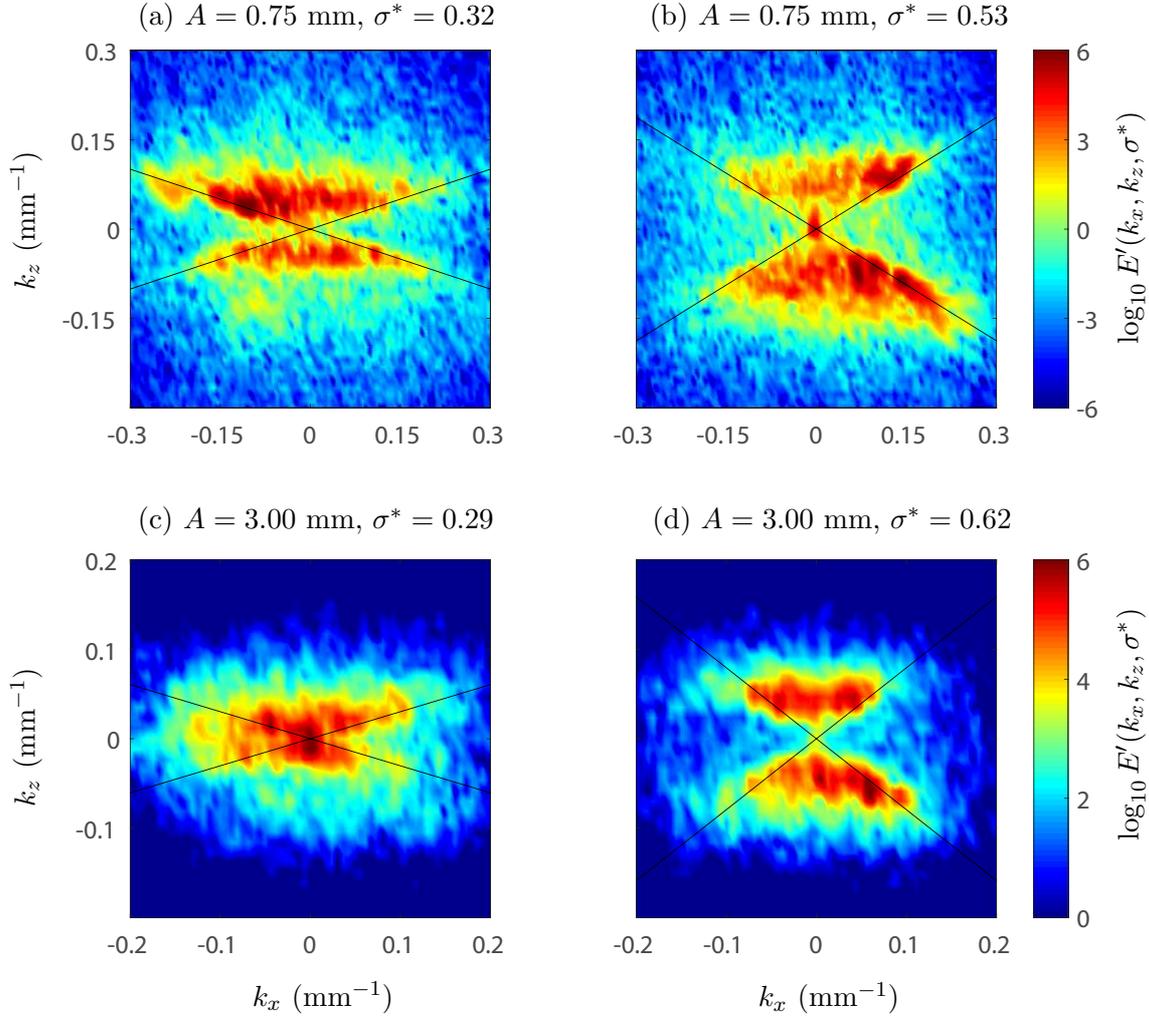


FIGURE 3.38 – Densité spectrale de puissance spatiotemporelle  $E'(k_x, k_z, \sigma)$  (cf. équation (3.25)) pour les expériences avec  $\lambda_f = 52.4$  cm,  $\Omega = 18$  tr/min et  $A = 0.75$  mm (a-b,  $Re_f \simeq 2400$ ) et  $A = 3.00$  mm (c-d,  $Re_f \simeq 9500$ ). Ces expériences correspondent respectivement à la courbe violette et à la courbe rouge dans les spectres temporels de la figure 3.36. Les fréquences montrées pour chaque expérience correspondent au maximum des bosses sous-harmoniques dans leur spectre temporel, i.e.  $\sigma^* = 0.32$  (a) et  $\sigma^* = 0.53$  (b) pour  $A = 0.75$  mm et  $\sigma^* = 0.29$  (c) et  $\sigma^* = 0.62$  (d) pour  $A = 3.00$  mm (cf. tableau 3.1). Sur chaque graphique, les droites noires correspondent à la relation de dispersion  $|\sigma^*| = |k_z|/(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$  des ondes d'inertie se propageant dans le plan de mesure  $k_y = 0$ .

champ de vitesse avec celle prédite par la relation de dispersion des ondes d'inertie. Nous calculons ainsi pour chaque expérience la densité spectrale de puissance spatiotemporelle normalisée

$$E'(k_x, k_z, \sigma^*) = \frac{|\tilde{u}'_j(k_x, k_z, \sigma^*)|^2}{\langle |\tilde{u}'_j(k_x, k_z, \sigma^*)|^2 \rangle}, \quad (3.25)$$

où

$$\tilde{u}'_j(k_x, k_z, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^H u_j(x, y_0, z, t) e^{-i(\sigma t + k_x x + k_z z)} dz dx dt \quad (3.26)$$

est la transformée de Fourier spatiotemporelle de  $u_j(x, y_0, z, t)$  avec  $j = x, z$  et où  $H$  est la hauteur de la cavité,  $L_x$  sa longueur. Dans l'équation (3.25), les crochets indiquent une moyenne sur l'espace des vecteurs d'ondes : le spectre spatial à la fréquence  $\sigma^*$  est donc normalisé par l'énergie totale dans cette fréquence.

À la figure 3.38, nous montrons le spectre spatiotemporel  $E'(k_x, k_z, \sigma^*)$  aux fréquences  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  associées au centre des bosses sous-harmoniques pour les deux amplitudes de forçage  $A = 0.75$  mm ( $Re_f \simeq 2400$ ) et  $A = 3.00$  mm ( $Re_f \simeq 9500$ ) de la série à  $\Omega = 18$  tr/min et  $\lambda_f = 52.4$  cm. Les droites noires matérialisent la relation de dispersion  $|\sigma^*| = |k_z|/(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$  des ondes d'inertie se déplaçant dans le plan de mesure (i.e. avec  $k_y = 0$ ). Dans cette figure, on remarque que les maximums de la densité spectrale de puissance sont bien situés sur les droites correspondant à la relation de dispersion. Le nombre de Rossby  $U/2\Omega L$  associé à ces vecteurs d'ondes est toujours inférieur à  $6.10^{-2}$ , ce qui est de l'ordre de grandeur attendu dans le cas d'une onde d'inertie. On remarque aussi qu'une portion significative de l'énergie est dans les régions entre les deux droites noires  $|\sigma^*| = |k_z|/(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$  et contenant l'axe  $k_x = 0$ . L'expression générale de la relation de dispersion des ondes d'inertie est :  $|\sigma^*| = |k_z|/(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ . Si une onde se propage en dehors du plan de mesure, la composante hors-plan  $k_y$  de son vecteur d'onde sera non nulle et elle apportera donc son énergie à la région entre les deux droites noires  $|\sigma^*| = |k_z|/(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$  et contenant l'axe  $k_x = 0$ . Ces caractéristiques des spectres spatiotemporels de la figure 3.38 se retrouvent pour tout les spectres spatiotemporels associés aux bosses sous-harmoniques de l'instabilité triadique, indépendamment de l'amplitude de forçage  $A$ . Cette figure prouve donc que l'écoulement aux fréquences  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  est bien composé d'ondes d'inertie dont une proportion significative possède une composante  $k_y$  non nulle.

Seul le spectre spatiotemporel à la fréquence de forçage  $\sigma_0$ , représenté à la figure 3.39 pour les mêmes expériences que dans la figure 3.38, présente une énergie parfaitement concentrée sur les droites noires. Cela prouve que notre forçage, invariant dans la direction  $y$ , produit bien un attracteur qui reste globalement à deux dimensions (avec  $k_y \simeq 0$ ) dans le plan de mesure  $y = L_y/3$ . Pour les autres fréquences  $\sigma^*$ , la présence dominante d'ondes avec un vecteur d'onde dans le plan  $y = y_0$  est naturelle dans la mesure où l'instabilité par résonance triadique d'un attracteur invariant selon la direction  $y$  amène à de telles ondes sous-harmoniques en l'absence de brisure spontanée de symétrie. Les ondes d'inertie possédant une composante  $k_y \neq 0$  observées ici peuvent être le fruit d'imperfections de l'attracteur le rendant non-exactement invariant selon

### 3.7. ÉCOULEMENT AUX BASSES FRÉQUENCES

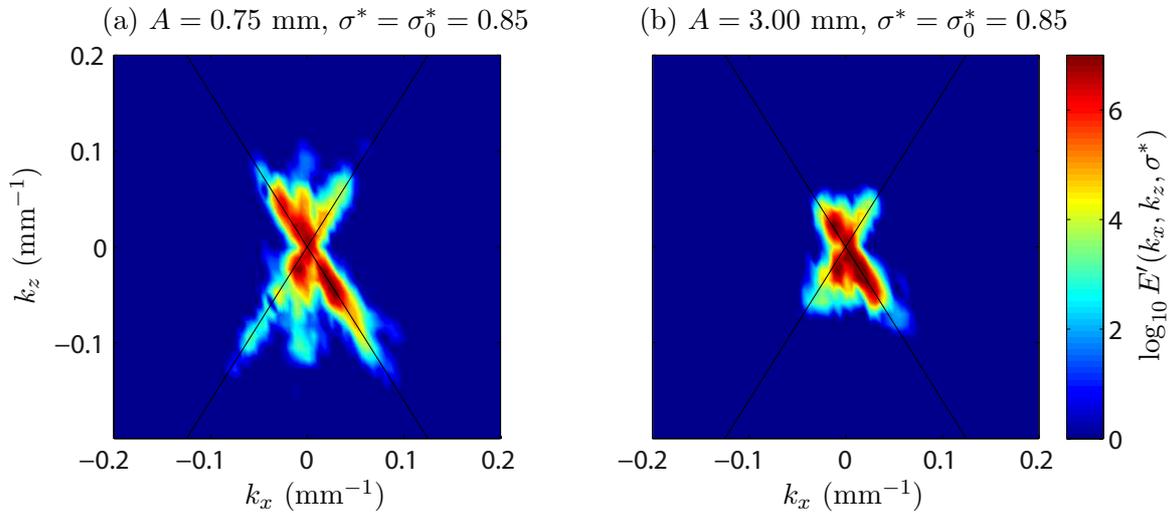


FIGURE 3.39 – Densité spectrale de puissance spatiotemporelle  $E'(k_x, k_z, \sigma)$  (cf. équation (3.25)) à la fréquence de forçage  $\sigma = \sigma_0$  pour les expériences à  $\Omega = 18$  tr/min,  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $A = 0.75$  mm (a,  $Re_f \simeq 2400$ ) et  $A = 3.00$  mm (b,  $Re_f \simeq 9500$ ). Ces expériences correspondent respectivement à la courbe violette et à la courbe rouge dans les spectres temporels de la figure 3.36. Sur chaque graphique, les droites noires correspondent à la relation de dispersion  $|\sigma^*| = |k_z| / (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$  des ondes d’inertie se propageant dans le plan de mesure  $k_y = 0$ .

la direction  $y$  comme les couches limites sur les parois verticales en  $y = 0$  et  $y = L_y$  ou encore les effets de bords liés au fait que notre générateur d’ondes est moins large que notre aquarium (86 cm contre 105 cm).

### 3.7 Écoulement aux basses fréquences

Dans les spectres temporels de la figure 3.36 on remarque un accroissement de l’énergie aux basses fréquences avec l’augmentation du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Pour quantifier ce phénomène, on trace à la figure 3.40 l’énergie cinétique du mode à basse fréquence (correspondant aux fréquences adimensionnées  $\sigma^* < 0.1$ ) et à titre de comparaison celle du mode associé à la première bosse sous-harmonique produite par l’instabilité par résonance triadique (associée aux fréquences adimensionnées  $0.1 < \sigma^* < \sigma_0/2$ ) en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Ces énergies sont obtenues par intégration des spectres temporels de la figure 3.36. Pour  $Re_f \leq 600$ , l’énergie du mode basse fréquence semble indépendante de l’amplitude du forçage. Ce comportement est compatible avec l’interprétation faite dans la partie 3.4 suggérant que les basses fréquences pourraient être des colonnes de convections thermiques (en rotation) et/ou le fruit d’une dérive de Stokes ou un écoulement redressé affectant l’écoulement induit par la rotation de la Terre à la fréquence  $\sigma^* = 0.5$ . Mais au delà de  $Re_f = 1000$ , on voit que le mode basse fréquence croît avec  $Re_f$ . Cette croissance montre que des phénomènes non-linéaires affectant les ondes forcées ou celles produites par l’instabilité triadique construisent le

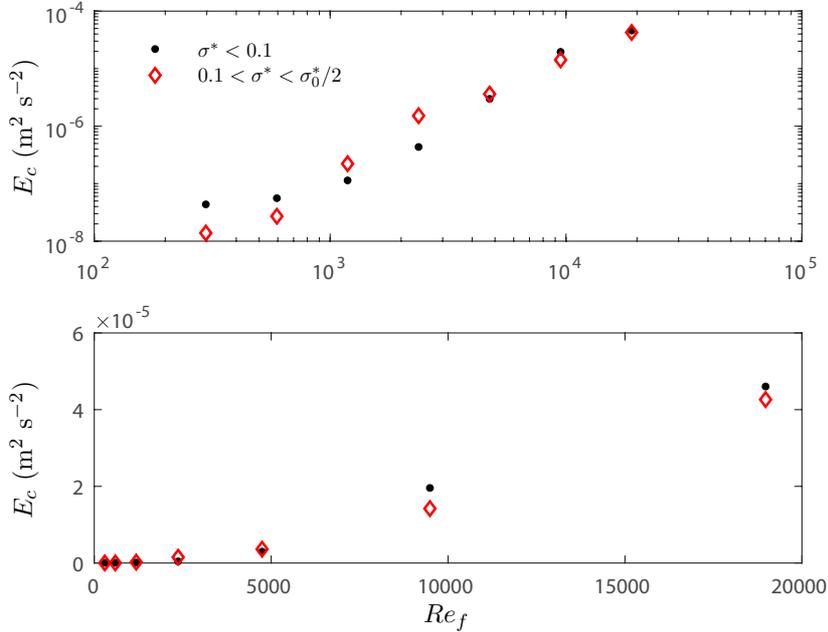


FIGURE 3.40 – Énergie cinétique en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  du mode à basse fréquence ( $\sigma^* < 0.1$ ) et du mode associé à la première bosse sous-harmonique ( $0.1 < \sigma^* < \sigma_0/2$ ) de l'instabilité par résonance triadique pour la série à  $\lambda_f = 52.4$  cm et  $\Omega = 18$  tr/min. Le graphique du haut est en échelle logarithmique et celui du bas en échelle linéaire. L'énergie cinétique est obtenue par intégration des spectres temporels de la figure 3.36.

mode basse fréquence à grande amplitude de forçage. On note que les énergies du mode basse fréquence et celle du mode associé à la première bosse sous-harmonique sont du même ordre de grandeur et que leur évolution avec  $Re_f$  sont tout à fait comparables. L'observation des champs de vitesse associés aux basses fréquences pour les plus grandes amplitudes de forçage  $A$  révèle des colonnes invariantes verticalement, beaucoup plus larges que celles observées à la figure 3.23 pour la plus faible amplitude de forçage. Ces colonnes portent une vitesse presque purement horizontale et semblent correspondre à des tourbillons verticaux dérivant horizontalement dans l'aquarium. Comme illustration, nous montrons à la figure 3.41 un instantané typique du champ de vitesse issu d'un filtrage de Fourier passe-bas avec une fréquence de coupure de  $\sigma^* = \sigma/2\Omega \simeq 0.1$  pour l'expérience à  $\lambda_f = 52.4$  cm,  $\Omega = 18$  tr/min et pour l'amplitude de forçage  $A = 6$  mm. Lors de la réalisation des expériences décrites dans ce chapitre et de l'analyse de celles-ci pendant la première année de ma thèse, aucune étude détaillée de l'origine de ce mode basse fréquence observé à grand nombre de Reynolds n'a été réalisée. Nous pouvons toutefois émettre l'hypothèse que l'écoulement moyen observé ici pourrait être le fruit d'une dérive de Stokes ou être un écoulement redressé affectant le mode forcé à la fréquence  $\sigma_0$  ou encore les modes sous-harmoniques produits par l'instabilité par résonance triadique du mode forcé. On note cependant que dans ce cas là, on s'attend à un écoulement moyen d'amplitude en vitesse proportionnelle

### 3.8. CONCLUSION

---

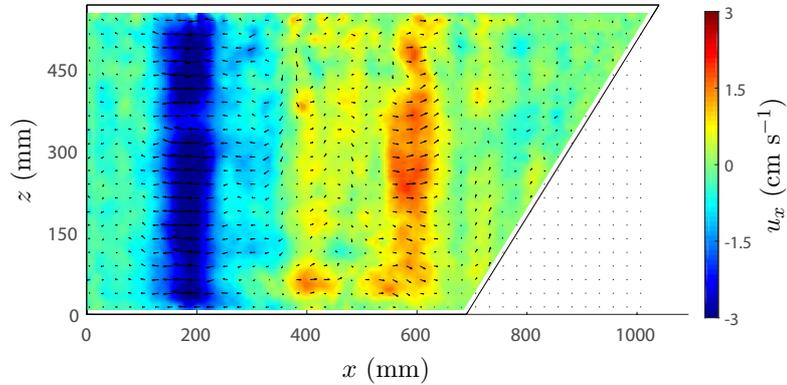


FIGURE 3.41 – Instantané du champ de vitesse issu d’un filtrage de Fourier passe-bas avec une fréquence de coupure de  $\sigma^* = \sigma/2\Omega \simeq 0.1$  dans le plan vertical  $y = y_0 = L_y/3$  pour l’expérience à  $\lambda_f = 52.4$  cm et pour la plus forte amplitude de forçage  $A = 6$  mm à  $\Omega = 18$  tr/min.

au carré de la vitesse de l’écoulement oscillant. La figure 3.40 ne semble pas du tout faire apparaître de telles lois d’échelles puisque que l’énergie cinétique de l’écoulement moyen y semble proportionnelle au nombre de Reynolds de forçage.

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par proposer une extension au modèle d’attracteur d’ondes internes de Hazewinkel *et al.* [84]. Nous avons montré qu’elle conduisait à la prédiction d’un faisceau de l’attracteur avec une structure de faisceau auto-similaire issu d’une source monopolaire. Cette prédiction est par ailleurs en accord avec l’hypothèse de départ d’un faisceau auto-similaire dans le modèle d’attracteur d’ondes internes de Grisouard et Staquet [86]. Au sein d’une cavité trapézoïdale, en variant le taux de rotation ainsi que l’amplitude et la longueur d’ondes du forçage, nous avons ensuite pu confirmer, pour la première fois expérimentalement, que la structure spatiale prédite par ces modèles décrivait correctement l’amplitude et la longueur d’onde de nos attracteurs expérimentaux dans le régime linéaire. Notre extension du modèle de Hazewinkel *et al.* nous a par ailleurs permis de proposer une relation entre la vitesse de forçage de l’onde forcée et la vitesse observée au sein de l’attracteur qui s’est révélée en accord avec nos mesures expérimentales dans le régime linéaire.

En augmentant l’amplitude de forçage dans les expériences, on observe que le faisceau d’ondes de l’attracteur subit une instabilité par résonance triadique. Cette instabilité est corrélée avec une réduction de l’amplitude de l’attracteur et une croissance de sa longueur d’onde en accord avec des résultats récents dans des simulations numériques et des expériences en fluide stratifié [28, 77, 78]. Mais, contrairement à l’étude numérique d’attracteur d’ondes d’inertie de Jouve et Ogilvie [28], nous constatons dans le spectre temporel de l’énergie de l’écoulement une augmentation de la largeur en fréquence des bosses sous-harmoniques associées aux ondes filles de

l'instabilité et un éloignement de celles-ci de la moitié de la fréquence de forçage avec l'augmentation du nombre de Reynolds de l'attracteur. Ce comportement reste inexpliqué même si nous suspectons l'interaction des ondes avec les parois parallèles à leur propagation, absentes des simulations numériques 2D, d'être à l'œuvre.

Le résultat le plus marquant de ce chapitre reste la description quantitative du régime non-linéaire de l'attracteur en remplaçant, dans le modèle linéaire, la viscosité du fluide par une viscosité turbulente prenant en compte de manière effective la dissipation que constitue l'instabilité par résonance triadique pour l'attracteur. Ce modèle non-linéaire prédit correctement les lois d'échelle observées expérimentalement pour l'évolution de l'amplitude et de la longueur d'onde du faisceau de l'attracteur avec le nombre de Reynolds de forçage.

On note finalement l'émergence, dans le régime non-linéaire de l'attracteur, d'un mode à basse fréquence qui pourrait être le fruit d'une dérive de Stokes ou être un écoulement redressé produit à partir du mode forcé à la fréquence  $\sigma_0$  ou encore des modes sous-harmoniques eux-mêmes produits par l'instabilité par résonance triadique. La loi d'échelle observée pour l'amplitude du mode basse fréquence avec l'amplitude du mode forcé ne semble toutefois pas en accord direct avec cette hypothèse. Mais la forte inhomogénéité spatiale des champs de vitesse de l'attracteur ne permet pas une conclusion définitive sur ce sujet sans une étude plus approfondie. Au chapitre suivant, nous proposons une explication alternative à l'émergence d'un mode basse fréquence à partir d'ondes d'inertie. Ce scénario s'appuie sur une instabilité impliquant quatre ondes résonantes, que nous avons baptisée instabilité par résonance quartetique.

## Chapitre 4

# Émergence d'un mode géostrophique dans une expérience de turbulence en rotation forcée par des ondes d'inertie

Dans la majorité des expériences de turbulence en rotation de la littérature [30, 38, 40, 73], l'énergie est injectée dans des modes tourbillonnaires au moyen de grilles oscillées ou translattées, de réseaux de jets turbulents, de générateurs de tourbillons, etc. Avec ce type de forçage, la condition de faible non-linéarité de la turbulence d'ondes n'est pas respectée à l'échelle d'injection, situation peu propice à l'émergence d'un régime de turbulence d'ondes. Ces remarques n'enlèvent évidemment rien à l'intérêt très fort de tous ces travaux sur la turbulence "forte" en rotation qui n'avaient pas pour objectif d'étudier le régime de turbulence d'ondes. Dans ce travail de thèse nous explorons un chemin différent consistant à partir d'ondes d'inertie et à essayer de construire un état turbulent en les rendant non-linéaires.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats d'une expérience où l'énergie est injectée dans une assemblée de nombreux faisceaux d'ondes auto-similaires, tous à la même fréquence mais se propageant tous dans des directions différentes. L'idée derrière ce forçage était de construire au centre de l'expérience une assemblée statistiquement homogène et axisymétrique d'ondes à la même fréquence et d'hélicité globalement nulle. On souligne que, les faisceaux d'ondes forcés étant auto-similaires, le forçage injecte l'énergie dans une gamme d'échelles spatiales et non de manière monochromatique. Finalement, le caractère monofréquentiel de notre forçage nous garantit que toutes nouvelles fréquences émergeant dans le champ de vitesse seront le fruit de phénomènes non-linéaires.

Comme nous allons le voir dans ce chapitre, ce dispositif a permis de mettre en évidence le comportement non-linéaire d'une assemblée d'ondes d'inertie mono-fréquentielle au-delà de la classique instabilité par résonance triadique. Il a ainsi révélé l'émergence d'un mode 2D géostrophique fruit d'une instabilité secondaire pour laquelle nous proposons un mécanisme que nous

avons baptisé “instabilité par résonance quartetique”. Nous présentons finalement des expériences préliminaires qui montrent que cette dernière instabilité peut être inhibée par l’introduction d’une dissipation sélective du mode géostrophique, ouvrant la voie aux interactions triadiques secondaires et à une exploration expérimentale du régime de turbulence d’ondes.

## 4.1 Ondes d’inertie en régime non-linéaire, une voie vers la turbulence d’ondes ?

Une première manière de répondre à la question au centre de cette thèse —La phénoménologie de la turbulence d’ondes (d’inertie) correspond-elle effectivement à un régime de l’équation de Navier-Stokes en rotation?— est de s’intéresser aux travaux expérimentaux et numériques qui ont étudiés les ondes d’inertie en régime non-linéaire. C’est ce que nous faisons dans cette partie, en se concentrant sur les travaux les plus importants relativement à la question posée.

Certains de ces travaux ont en fait déjà été décrits dans les chapitres précédents. Ainsi le travail expérimental de Bordes *et al.* [22] de 2012 mettant en évidence la déstabilisation d’une onde plane d’inertie par le processus d’instabilité par résonance triadique a déjà été discuté dans la partie 1.4 du chapitre introductif. Dans ce travail, les auteurs montrent qu’une onde plane d’inertie de fréquence  $\sigma_0$  et de vecteur d’ondes  $\mathbf{k}_0$  est instable et transmet de l’énergie à deux ondes sous-harmoniques de fréquences  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et de vecteurs d’ondes  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  en interaction triadique résonante avec l’onde mère, c’est-à-dire que leurs fréquences vérifient  $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2$  et leurs vecteurs d’ondes vérifient  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Dans ce travail, les auteurs ont par ailleurs montré que le duo d’ondes filles sélectionnées correspond à celui que l’on peut prédire théoriquement en maximisant le taux de croissance théorique de l’instabilité par résonance triadique d’une onde plane et ce pour différentes fréquences de forçage adimensionnées.

On peut ensuite souligner le travail de Jouve et Ogilvie qui ont réalisés des simulations numériques d’attracteurs d’ondes d’inertie [28] qui ont déjà été décrite dans la partie 3.2. Dans ces simulations, les auteurs constatent que le faisceau d’ondes subit une instabilité par résonance triadique. On note une différence avec le travail expérimental de Bordes *et al.* qui est qu’ici le faisceau d’ondes est auto-similaire et ne contient dans sa largeur qu’une seule longueur d’onde environ alors que le faisceau de Bordes *et al.* était de longueur d’onde uniforme et contenant quatre longueurs d’onde dans sa largeur, ce qui constitue une configuration plus facile à décrire théoriquement. Jouve et Ogilvie rapportent en pratique dans leurs spectres temporels (cf. figure 3.13) la croissance progressive de deux pics d’énergie sous-harmoniques symétriques par rapport à la moitié de la fréquence du faisceau d’ondes de l’attracteur. Ces pics deviennent plus énergétiques et se rapprochent de la moitié de la fréquence de forçage avec l’augmentation de l’amplitude de forçage. Cette dernière observation est en accord avec la théorie de l’instabilité par résonance triadique qui prédit, pour une onde plane tout au moins, une dégénérescence de la fréquence des ondes filles sur la moitié de la fréquence de l’onde primaire lorsque le nombre de Reynolds de l’onde primaire devient grand.

Dans les parties qui suivent, nous allons décrire des travaux numériques et expérimentaux

#### 4.1. ONDES D'INERTIE EN RÉGIME NON-LINÉAIRE, UNE VOIE VERS LA TURBULENCE D'ONDES ?

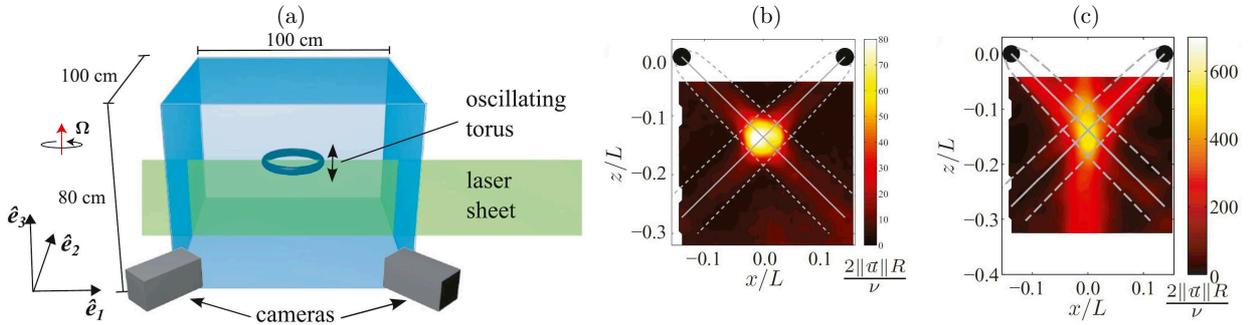


FIGURE 4.1 – (a) Dispositif expérimental de Duran-Matute *et al.* [95] : un tore oscille verticalement dans un aquarium cubique en rotation. (b), (c) Champ de la vitesse rms expérimental dans le plan vertical contenant l’axe du tore pour une petite amplitude d’oscillation (b) et une grande amplitude d’oscillation (c). Extrait de Duran-Matute *et al.* [95].

dans lesquels des phénomènes non-linéaires plus riches que l’instabilité par résonance triadique ont été observés. On pense ici notamment à l’émergence de tourbillons “géostrophiques” invariants verticalement et donc avec un axe de rotation aligné avec celui du système. Comme nous allons le voir, les mécanismes à l’origine de tels modes géostrophiques restent encore un sujet de débat et différentes propositions ont été faites. Une des subtilités intervenant ici est que des ondes d’inertie à travers le processus d’interactions triadiques résonantes sont incapables de transmettre de l’énergie à un mode géostrophique, invariant verticalement et de fréquence nulle. La raison en est que les coefficients d’interaction triadique sont strictement nuls pour une triade résonante comportant un mode de fréquence nulle, comme nous l’avons vu en partie 1.4. À cause des effets de brouillage de phase décrit à la partie 1.6, les triades résonantes dominent les échanges d’énergie entre échelles dans les écoulements soumis à une forte rotation, c’est-à-dire à très petit nombre de Rossby. Il est ainsi naturel de penser qu’un mode de fréquence nulle, c’est-à-dire un mode invariant verticalement, ne peut émerger spontanément à partir d’ondes d’inertie. C’est ce que l’on appelle parfois le “Théorème de Greenspan” [25]. Nous allons découvrir que, très souvent, ce n’est pas ce qui est observé dans les expériences d’ondes d’inertie en régime non-linéaire où évidemment le nombre de Rossby n’est pas infiniment petit et la rotation infiniment forte.

##### 4.1.1 Étude expérimentale et numérique d’un tore oscillé par Duran-Matute *et al.* (2013)

À travers des expériences et des simulations numériques, Duran-Matute *et al.* [95] ont en 2013 étudié l’écoulement produit dans un fluide en rotation par l’oscillation d’un tore selon son axe lui même parallèle à l’axe de rotation (cf. figure 4.1(a)). Cette oscillation a pour conséquence d’exciter de part et d’autre du plan horizontal contenant le tore un faisceau d’ondes auto-similaire en forme de cône, convergeant en un point situé sur l’axe du tore où se concentre l’énergie des ondes.

La figure 4.1(b) montre un champ de la vitesse rms expérimental lorsque l'amplitude de forçage est "faible". Les disques noirs représentent la coupe du tore dans le plan de mesure et les traits pointillés soulignent les faisceaux auto-similaires produit par l'oscillation du tore. On remarque que les plus grandes vitesses de l'écoulement se situent bien au point de convergence du cône d'ondes. La figure 4.1(c) montre un champ de la vitesse rms moyenne expérimental lorsque l'amplitude de forçage est plus grande. En plus des faisceaux d'ondes excités, Duran-Matute *et al.* observent pour cette amplitude la présence d'un tourbillon cyclonique stationnaire d'axe confondu avec l'axe du tore et donc invariant selon l'axe de rotation.

Dans ce travail, les fréquences sous-harmoniques de la fréquence de l'onde primaire n'ont pas été étudiées et aucune instabilité par résonance triadique des faisceaux d'ondes d'inertie émis par l'oscillation du tore n'a été mise en évidence, même si l'existence de celle-ci est tout à fait possible. Duran-Matute *et al.* mettent finalement en évidence au point de convergence des faisceaux d'ondes coniques dans l'expérience à forte amplitude de forçage un caractère désordonné, turbulent, du champ de vitesse ainsi que dans la simulation numérique associée, de l'énergie à des fréquences plus hautes que la limite des ondes d'inertie  $2\Omega$  traduisant aussi le caractère turbulent (au sens classique, i.e. tourbillonnaire) de l'écoulement. Ce caractère turbulent pourrait être lié au déferlement des ondes d'inertie à l'endroit où elles convergent. Duran-Matute *et al.* interprètent alors l'apparition du mode géostrophique comme la conséquence d'un "mélange de moment cinétique", analogue au mélange de densité qu'il est possible d'observer dans les fluides stratifiés lorsque les ondes internes déferlent [96] (lui faisant ainsi perdre sa stratification). Ce mélange de moment cinétique serait ici le fruit du déferlement des ondes d'inertie au point de convergence des faisceaux d'ondes. Aucun détail n'est toutefois donné sur le mécanisme qui conduit à l'émergence du tourbillon géostrophique.

#### 4.1.2 Étude numérique d'une instabilité elliptique par Le Reun *et al.* (2017)

Dans des simulations numériques, Le Reun *et al.* [97] ont étudié en 2017 l'écoulement produit par une déformation elliptique tournant avec une fréquence  $n$  autour du même axe que la rotation de base du fluide au taux  $\Omega$ . Ce type de forçage modélise par exemple l'influence d'une force de marée sur l'écoulement du noyau liquide d'une planète. Dans le référentiel tournant, l'écoulement de base oscille à la fréquence  $2(\Omega - n)$  et subit, au-delà d'un certain seuil en amplitude de forçage, la célèbre instabilité elliptique. Dans ce travail numérique, Le Reun *et al.* montrent que, lorsque la fréquence  $|\Omega - n|$  est plus faible que  $2\Omega$ , l'instabilité elliptique produit deux ondes d'inertie à la fréquence  $\Omega - n$  avant que n'émerge dans un second temps un écoulement composé de tourbillons d'axes verticaux (cf. figure 4.2). Ce mode géostrophique présente alors une dynamique classique de la turbulence bidimensionnelle avec une cascade inverse d'énergie jusqu'à ce que la boîte de simulation ne contienne plus qu'un seul tourbillon de sa taille. Le mode géostrophique porte alors quasiment toute l'énergie de l'écoulement. Comme cela est montré par les droites pleines et tiretées dans la figure 4.2(a), le taux de croissance du mode géostrophique est ici deux fois plus grand que celui des ondes d'inertie initialement produites par l'instabilité paramétrique de l'écoulement de base. Le Reun *et al.* concluent de cette propriété que le mode géostrophique

#### 4.1. ONDES D'INERTIE EN RÉGIME NON-LINÉAIRE, UNE VOIE VERS LA TURBULENCE D'ONDES ?

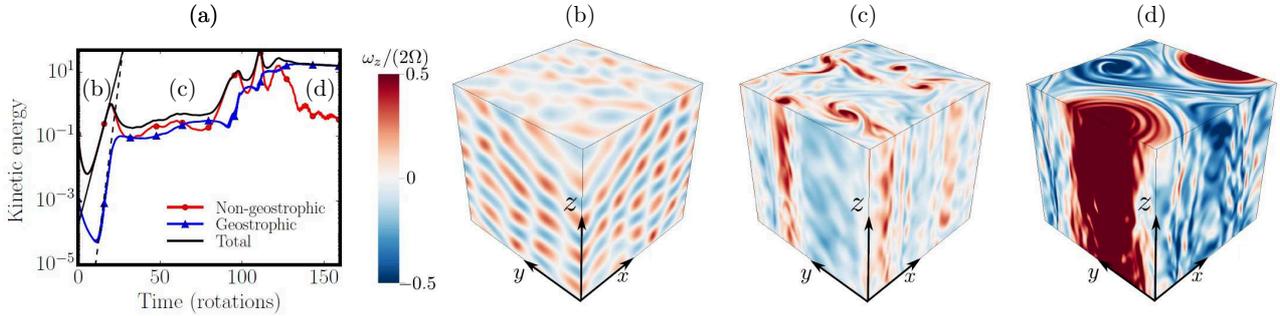


FIGURE 4.2 – (a) Série temporelle de l'énergie cinétique en fonction du temps pour le mode géostrophique et pour le reste de l'écoulement. Les instantanés des champs de vorticité montrent l'évolution typique de l'écoulement : les ondes d'inertie produites par l'instabilité elliptique (b), l'émergence d'un mode géostrophique dominant (c) et sa saturation lorsque la cascade inverse fait atteindre aux tourbillons géostrophiques la taille de la boîte de simulation (d). Extrait de Le Reun *et al.* [97].

n'est pas ici le fruit d'une instabilité secondaire mais d'une interaction non-linéaire directe entre les ondes d'inertie produites par l'instabilité paramétrique.

Dans un deuxième temps, Le Reun *et al.* introduisent dans leurs simulations un terme ad-hoc amortissant de manière sélective le mode géostrophique. Dans les simulations où le mode géostrophique a été amorti, les auteurs observent alors l'émergence d'ondes d'inertie rassemblées autour de deux fréquences en résonance triadique avec les ondes primaires, elles-mêmes fruit de l'instabilité de l'écoulement de base (cf. figure 4.3). On note ainsi dans ce travail qu'un enchaînement de deux instabilités —l'instabilité elliptique suivi d'une instabilité par résonance triadique d'ondes d'inertie— a conduit l'énergie de la déformation elliptique à alimenter des ondes d'inertie sur de larges gammes de fréquences comme le montre la figure 4.3. On conclut ainsi de ce travail remarquable que l'atténuation sélective du mode géostrophique peut constituer une piste intéressante dans la recherche du régime de turbulence d'ondes d'inertie.

##### 4.1.3 Étude expérimentale d'une instabilité elliptique par Le Reun *et al.* (2019)

Ce travail numérique a été suivi en 2019 par un travail expérimental réalisé par la même équipe (Le Reun *et al.* [98]) et traitant toujours de l'instabilité elliptique. Il s'agit d'un travail réalisé pendant la même période que celui que nous présentons dans ce chapitre. Leur dispositif expérimental est ici composé d'une cavité ellipsoïdale subissant une libration longitudinale (cf. figure 4.4), c'est-à-dire une modulation harmonique du taux de rotation de la forme  $\Omega(t) = \Omega_0(1 + \epsilon \sin(4\Omega_0 t))$ , la fréquence de forçage étant ici quatre fois celle de la rotation. À travers le calcul des spectres temporels de l'énergie des champs de vitesse expérimentaux mesurés par PIV, Le Reun *et al.* montrent que l'écoulement de base forcé par la libration de la cavité ellipsoïdale produit à travers un processus d'instabilité elliptique des modes d'inertie à la fréquence moitié du forçage, c'est-à-dire  $2\Omega_0$ , fréquence qui correspond à la frontière supérieure du

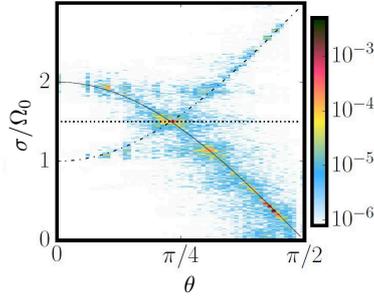


FIGURE 4.3 – Densité spectrale de puissance du champ de vitesse en fonction de l’angle  $\theta$  que fait le vecteur d’onde  $\mathbf{k}$  avec la verticale et de la fréquence normalisée par le taux de rotation  $\Omega_0$ . La courbe en trait plein noire matérialise la relation de dispersion des ondes d’inertie et la courbe en pointillé montre la fréquence des ondes produites par l’instabilité elliptique. Ces données sont associées à des simulations dans lesquelles une atténuation sélective du mode géostrophique a été introduite. Extrait de Le Reun *et al.* [97].

domaine d’existence des ondes d’inertie (cf. figure 4.5). Dans ces spectres de l’énergie, les auteurs observent aussi deux bosses d’énergie à des fréquences plus faibles, sous-harmoniques, typiques d’une instabilité par résonance triadique qui affecterait les modes d’inertie à la fréquence  $2\Omega_0$ . Lorsque le nombre de Rossby de forçage  $Ro_i$  est augmenté (par l’augmentation de l’amplitude  $\epsilon$  de la modulation harmonique du taux de rotation), les bosses d’énergie sous-harmoniques produites par l’instabilité par résonance triadique semblent s’atténuer. Cette évolution ressemble beaucoup à l’étalement en fréquence des bosses d’énergie sous-harmoniques que nous avons mis en évidence dans nos expériences d’attracteur d’onde d’inertie (cf. partie 3.6). Aux plus grandes amplitudes de forçage, Le Reun *et al.* rapportent finalement l’émergence d’un mode géostrophique. Ce mode finit par porter une énergie qui domine largement celle des ondes d’inertie dans l’écoulement. On retrouve donc ici un scénario très similaire à celui mis en évidence dans les simulations numériques de Le Reun *et al.* [97] de 2017 décrite à la partie 4.1.2. On remarque ainsi dans les spectres temporels de la figure 4.5 une augmentation importante de l’énergie portée par les basses fréquences avec l’accroissement du nombre de Rossby de forçage  $Ro_i$ .

Le Reun *et al.* ont finalement pu établir un diagramme de stabilité de leur écoulement en fonction des nombres adimensionnés de Rossby  $Ro_i = \epsilon\beta$  où  $\beta = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$  est l’ellipticité horizontale de la cavité ellipsoïdale ( $a$  et  $b$  sont respectivement le demi grand axe et le demi petit axe de l’ellipse dans le plan horizontal) et d’Ekman  $E_k = \nu/(2\Omega_0 L^2)$ . Ils remarquent que le seuil de l’instabilité donnant naissance au mode géostrophique est bien décrit par la loi  $Ro_i = 25 E_k^{1/2}$  (cf. figure 4.6). Les mécanismes derrière une telle loi pour le critère d’instabilité pour l’apparition d’un mode géostrophique reste encore à comprendre. On peut toutefois noter que cette loi est compatible avec un taux de croissance inviscide de l’instabilité en  $Ro/\tau_{nl} = Ro^2 \Omega$  avec  $\tau_{nl} = \lambda/U$  le temps non-linéaire défini comme le rapport entre la longueur d’onde  $\lambda$  et la vitesse  $U$  de l’onde primaire. Ce taux de croissance serait en compétition avec une dissipation volumique de l’énergie en  $\nu/\lambda^2 = E_k \Omega$ . Cette loi est aussi compatible, de manière alternative, avec un taux de croissance en  $1/\tau_{nl} = Ro \Omega$  en compétition avec une dissipation dans des couches limites d’Ekman

## 4.2. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

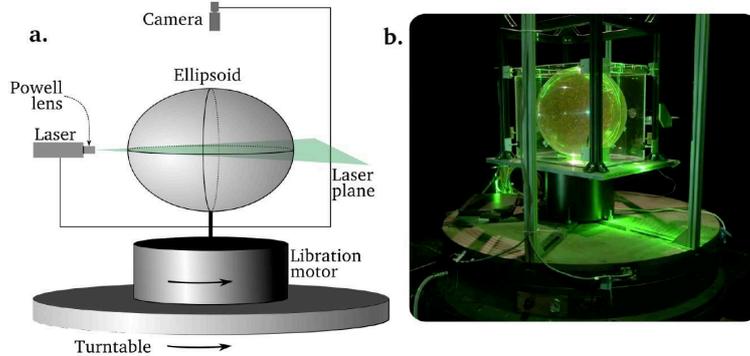


FIGURE 4.4 – Schéma (a) et photographie (b) du dispositif expérimental de Le Reun *et al.* [98] pour étudier l’instabilité elliptique. Un aquarium de forme ellipsoïdale est placé sur une plateforme tournant à la fréquence  $\Omega_0$  couplée, grâce à un moteur secondaire, à une oscillation  $\Omega_0 \epsilon \sin(4\Omega_0 t)$  du taux de rotation autour du même axe, d’amplitude  $\Omega_0 \epsilon$  et de fréquence  $4\Omega_0$ . L’aquarium ellipsoïdale fait 43 cm de hauteur. Extrait de Le Reun *et al.* [98].

laminaires en  $E_k^{1/2} \Omega$ . On souligne ici que le Reun *et al.* avaient dans leur travail numérique [97] (cf. partie 4.1.2) interprété la croissance du mode géostrophique comme le fruit d’une résonance directe de deux ondes d’inertie à la même fréquence alors que dans ce travail expérimental, il apparaît que le mode géostrophique est le fruit d’une instabilité. L’interprétation théorique de l’émergence d’un mode géostrophique à partir d’ondes d’inertie reste ainsi une question ouverte et les travaux de l’équipe de Marseille semblent nous dire que différents processus peuvent être à l’œuvre.

Les résultats que nous avons pu mettre en évidence dans nos expériences sont similaires de plusieurs points de vue à ceux de Le Reun *et al.* [97, 98] parus en 2017 et 2019. Dans ce chapitre, nous ferons donc régulièrement le parallèle entre nos travaux et ceux de Le Reun *et al.* Une différence importante de nos expériences avec ces travaux réside dans le fait que les ondes d’inertie primaires, qui pourront transmettre de l’énergie à des ondes sous-harmoniques et à un écoulement géostrophique sont forcées directement et ne sont pas le fruit d’une première instabilité d’un écoulement de base lui-même géostrophique. L’amplitude des ondes primaires peut donc dans notre système être modifiée de manière continue depuis les plus petites amplitudes.

## 4.2 Dispositif expérimental

Un schéma du dispositif expérimental est représenté à la figure 4.7. L’écoulement est généré dans un aquarium (le même que celui utilisé dans le chapitre 3) de base  $L_x \times L_y = 105 \times 105 \text{ cm}^2$ , de hauteur 75 cm, rempli de 62 cm d’eau et centré sur l’axe de rotation de la plateforme tournante (décrite à la partie 2.1). Le forçage de l’écoulement est réalisé au moyen de 32 cylindres horizontaux de diamètre  $d = 4 \text{ cm}$  oscillant verticalement. Ces cylindres sont répartis régulièrement autour d’une sphère virtuelle de 80 cm de diamètre centrée horizontalement dans l’aquarium.

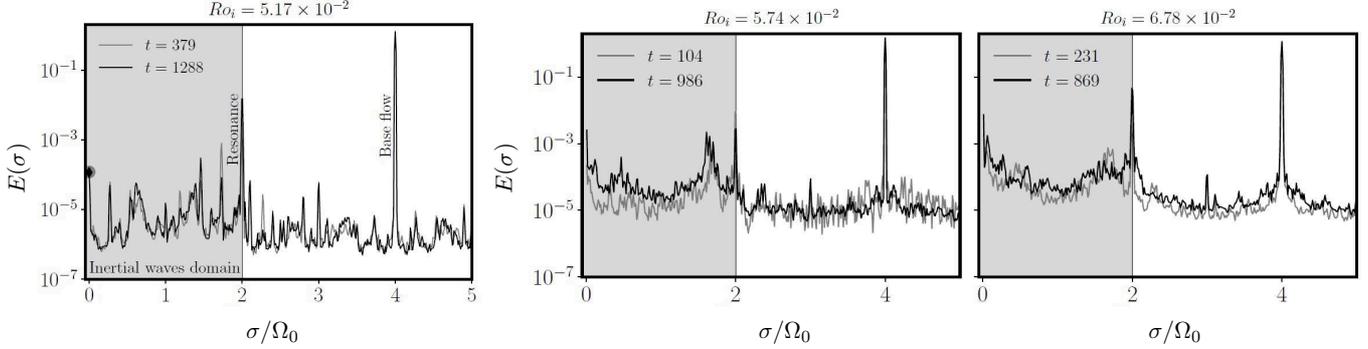


FIGURE 4.5 – Densité spectrale de puissance  $E(\sigma)$  des champs de vitesse en fonction de la fréquence  $\sigma$  normalisée par le taux de rotation  $\Omega_0$  pour des nombres de Rossby de forçage croissants et des instants  $t$  différents. La fréquence de forçage est  $\sigma = 4\Omega_0$  et le mode résonant est à la fréquence  $\sigma = 2\Omega_0$ . La zone grisée montre le domaine d'existence des ondes d'inertie :  $\sigma < 2\Omega_0$ . Extrait de Le Reun *et al.* [98].

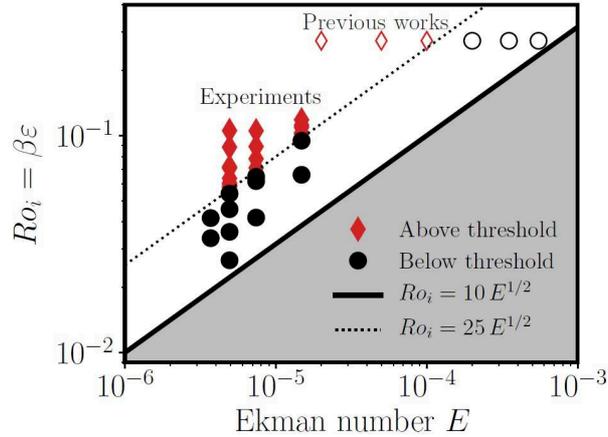


FIGURE 4.6 – Diagramme de stabilité du mode géostrophique en fonction du nombre d'Ekman  $E = \nu/(2\Omega_0 L^2)$  et du nombre de Rossby  $Ro_i$ . La ligne pointillée  $Ro_i = 25 E^{1/2}$  correspond au seuil d'instabilité du mode géostrophique. Celle continue  $Ro_i = 10 E^{1/2}$  correspond au seuil de l'instabilité elliptique. La zone grisée correspond à un écoulement de base qui est stable et ne produit pas de mode à la fréquence  $2\Omega_0$ . Extrait de Le Reun *et al.* [98].

Les cylindres, tangents à la sphère virtuelle, sont répartis sur quatre latitudes de celle-ci : 8 cylindres d'une longueur de 12 cm sont placés à la latitude  $46^\circ\text{N}$ , 8 d'une longueur de 15 cm à la latitude  $28^\circ\text{N}$ , 8 d'une longueur de 18 cm sont sur l'équateur et les 8 derniers sont à la latitude  $28^\circ\text{S}$  (voir figure 4.7). La sphère virtuelle est tronquée à la latitude  $40.5^\circ\text{S}$  par le fond de l'aquarium. Grâce au système décrit à la partie 2.4, chaque cylindre est entraîné dans un mouvement vertical sinusoïdal par un moteur linéaire placé au-dessus de l'aquarium et dont le mouvement est transmis par une tige profilée en aluminium de section carré guidée. Finalement,

## 4.2. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

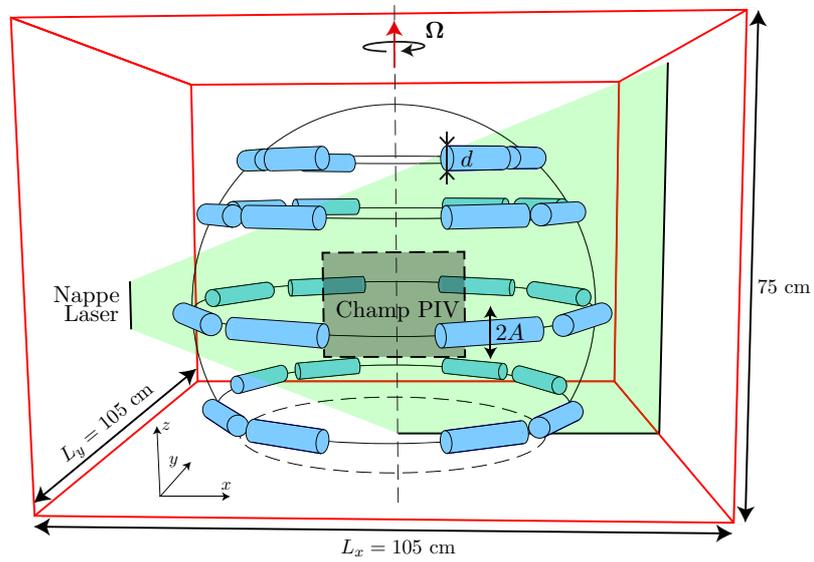


FIGURE 4.7 – Dispositif expérimental utilisé dans l’ensemble du chapitre 4 : 32 cylindres horizontaux d’un diamètre  $d = 4$  cm oscillent verticalement à la pulsation  $\sigma_0 = 0.84 \times 2\Omega$  avec une amplitude  $A$  variant dans la gamme  $[1, 8.2]$  mm. La zone où le champ de vitesse est mesuré par PIV est représentée par un rectangle en trait tireté, et est située dans le plan vertical  $y = L_y/2$  ( $y = 0$  est la face avant de l’aquarium) passant par l’axe vertical de la sphère virtuelle dessinée par les 32 cylindres. Le dispositif est centré sur l’axe de rotation de la plateforme tournante (décrite à la partie 2.1) et tourne à un taux de rotation de  $\Omega = 18$  tr/min.

la coordonnée verticale  $z_i$  du cylindre numéro  $i$  suit le mouvement

$$z_i(t) = H_i + A \cos(\sigma_0 t + \varphi_i), \quad (4.1)$$

où  $H_i$  est la hauteur moyenne du cylindre et  $\varphi_i$  sa phase initiale (choisie aléatoirement). La pulsation du mouvement est fixée à  $\sigma_0 = 0.84 \times 2\Omega$  où  $\Omega = 18$  tr/min est le taux de rotation de la plateforme. L'amplitude  $A$  de forçage est variée dans la gamme  $[1, 8.2]$  mm, ce qui correspond à un nombre de Reynolds de forçage  $Re_f = A\sigma_0 d/\nu$  variant de 130 à 1040 et un nombre de Rossby de forçage  $Ro = A\sigma_0/2\Omega d$  dans la gamme  $[0.022, 0.172]$ . L'ensemble de ce système est entraîné en rotation ainsi que la caméra et le laser permettant la mesure des champs de vitesse par PIV. La plateforme (décrite en partie 2.1) est mise en rotation au moins 30 min avant le démarrage du forçage de sorte que la mise en rotation solide du fluide soit terminée.

Les études expérimentales, réalisées par le passé et décrites en partie 1.3.2, de l'écoulement produit par un objet oscillé dans un fluide en rotation nous affirment que chacun des cylindres oscillant de notre système générera quatre faisceaux d'ondes auto-similaires, se propageant selon les angles  $\theta = \pm \arccos(\sigma_0/2\Omega) \simeq 32.9^\circ$  avec l'horizontale, formant le célèbre motif de la croix de Saint-André dans le plan normal à l'axe du cylindre. On s'attend ainsi à ce que notre système de forçage conduise, au centre de la sphère, à une superposition de nombreux faisceaux d'ondes ayant la même fréquence adimensionnée  $\sigma_0^* = \sigma_0/2\Omega$  mais se propageant toutes dans des directions différentes.

Comme nous l'avons vu en partie 1.3.2, les faisceaux auto-similaires produits par des cylindres oscillés ont une longueur d'onde  $\lambda$  qui croît avec la distance à la source  $\xi$  selon la loi de puissance

$$\lambda = \alpha \xi^{1/3} \ell^{2/3}, \quad (4.2)$$

où  $\alpha \simeq 7.07$  et la longueur d'Ekman vaut

$$\ell = \sqrt{\frac{\nu}{(4\Omega^2 - \sigma_0^2)^{1/2}}}. \quad (4.3)$$

Pour le taux de rotation  $\Omega = 18$  tr/min utilisé dans ce chapitre, cette longueur  $\ell$  vaut 0.70 mm. On rappelle que la largeur à mi-hauteur des faisceaux auto-similaires produits par un cylindre oscillant suit la même loi de puissance et est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde qu'ils contiennent (cf. partie 1.3.2). Dans notre cas, les faisceaux d'ondes que l'on observera dans le champ de vitesse mesuré par PIV auront parcouru en moyenne la distance  $\xi = 40$  cm, c'est-à-dire le rayon de la sphère virtuelle. D'après l'équation (4.2), leur longueur d'onde sera ainsi de l'ordre de 4 cm. Cette longueur d'onde caractéristique est celle attendue en régime linéaire des faisceaux d'ondes pour les nombres de Reynolds de forçage faibles à modérés. En régime non-linéaire, on peut s'attendre, même si cela n'a pour l'instant jamais été rapporté dans la littérature, à un épaississement des faisceaux comparable à celui observé dans le chapitre précédent dans le cas des attracteurs d'ondes et lié aux instabilités qui vont affecter les ondes forcées.

### 4.3. RÉGIME STATIONNAIRE DE L'ÉCOULEMENT

---

Comme discuté dans la partie 1.3, les ondes se propageant vers le haut ont une hélicité négative et celles se propageant vers le bas ont une hélicité positive. En considérant les faisceaux qui se dirigent vers le centre de la sphère, il y a 16 cylindres dans l'hémisphère nord qui produisent des faisceaux d'ondes d'hélicité positive et 8 dans l'hémisphère sud qui en produisent avec une hélicité négative. Toutefois, les faisceaux d'ondes issus des cylindres de l'hémisphère sud et se propageant vers le bas se réfléchissent sur le fond de l'aquarium et repartent vers le centre de la sphère virtuelle avec une hélicité négative : on peut donc s'attendre à obtenir au centre de la sphère autant d'ondes avec une hélicité positive que d'ondes avec une hélicité négative.

Grâce au système de PIV embarqué dans le référentiel tournant décrit à la partie 2.2, nous mesurons les deux composantes  $u_x$  et  $u_z$  du champ de vitesse dans le plan vertical  $y = y_0 = L_y/2$  ( $y = 0$  est la face avant de l'aquarium). Ce plan de mesure défini par la nappe laser est un plan méridien de la sphère virtuelle autour de laquelle sont organisés les cylindres. En utilisant des fenêtres d'interrogation de  $32 \times 32$  pixels avec un recouvrement de 50%, les corrélations croisées d'images produisent des champs de vitesse de  $285 \times 215$  mm<sup>2</sup> de résolution spatiale 1.94 mm ainsi constitués de 112 lignes et 144 colonnes de vecteurs. Pour la majorité des expériences, la fréquence d'acquisition est fixée à 12 champs par période de forçage  $T = 2\pi/\sigma_0$ . Les acquisitions sont réalisées en configuration "doubleframe" (cf. partie 2.2) où les doublets d'images sont séparés d'un intervalle de temps  $dt \in [10 \text{ ms}, 29 \text{ ms}]$ . Seule l'acquisition pour la plus faible amplitude de forçage ( $A = 1$  mm) est réalisée en configuration "singleframe" avec une fréquence d'acquisition produisant 24 champs par période de forçage. Toutes les acquisitions couvrent 3 000 périodes  $T$  de forçage et démarrent en même temps que le forçage permettant d'observer le régime transitoire puis le régime stationnaire de l'écoulement.

## 4.3 Régime stationnaire de l'écoulement

### 4.3.1 Spectres temporels du champ de vitesse

Pour explorer l'écoulement généré par notre dispositif expérimental, nous allons dans cette première partie calculer les densités spectrales de puissance temporelles du champ de vitesse mesuré. Ces densités spectrales de puissance  $E(\sigma)$  (cf. équation (3.20)) sont calculées sur 2 500 périodes de forçage  $T$  en excluant les 500 premières périodes pour s'assurer d'être en régime statistiquement stationnaire de l'écoulement. Nous utilisons la méthode de Welch qui consiste à calculer la moyenne d'ensemble de plusieurs densités spectrales calculées sur des sous parties du signal de 2 500 périodes. Nous réalisons en pratique une moyenne d'ensemble sur 9 densités spectrales de puissance calculées sur des portions de 500 périodes de forçage  $T$  avec un recouvrement de 50%. Cette méthode permet une convergence plus rapide du calcul du spectre au prix d'un renoncement aux plus faibles fréquences, ici celles inférieures à  $1/(500T)$ . Comme nous le verrons, aucune dynamique aussi lente ne semble émerger dans notre écoulement, cette coupure à  $500T$  ne semble ainsi masquer aucune physique importante de notre système.

La densité spectrale de puissance  $E(\sigma)$  est tracée pour différents nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$  à la figure 4.8. Comme dans la figure 3.21 du chapitre 3 sur les attracteurs d'ondes

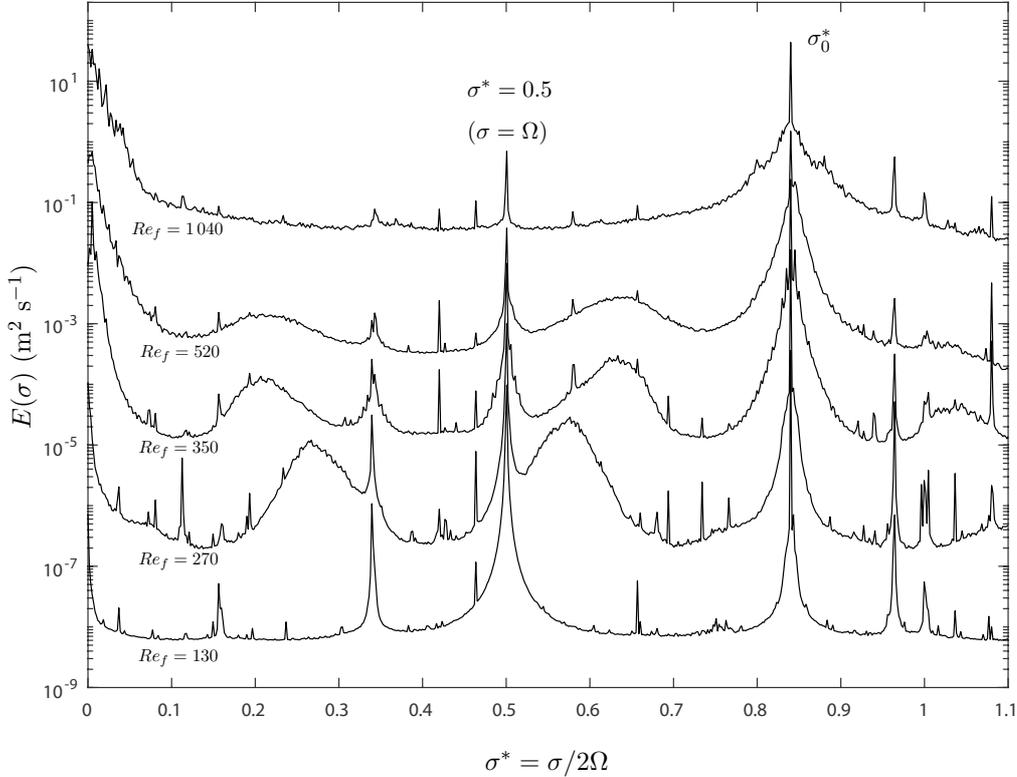


FIGURE 4.8 – Densité spectrale de puissance temporelle  $E(\sigma)$  en fonction de la fréquence normalisée  $\sigma^* = \sigma/2\Omega$  pour cinq nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$ . La méthode de Welch est employée pour améliorer la convergence statistique. Un décalage vertical d'un facteur 10 entre les spectres successifs a été introduit par soucis de lisibilité.

d'inertie, le spectre correspondant au nombre de Reynolds de forçage le plus faible, ici  $Re_f = 130$ , est principalement composé d'un pic à la fréquence de forçage  $\sigma_0$  et d'un pic secondaire à la fréquence de la plateforme tournante  $\sigma = \Omega$ . Ce dernier correspond à un écoulement induit par la rotation de la Terre qui entraîne notre plateforme tournante en précession [88]. Dans le cas d'une cavité sphérique ou ellipsoïdale subissant une précession, il est connu en anglais sous le nom d'écoulement de "tilt-over". Des pics plus faiblement énergétiques —deux ordres de grandeurs plus faibles que le pic associé au tilt-over— sont aussi visibles dans ce spectre à bas nombre de Reynolds : ceux-ci correspondent à la première harmonique de l'écoulement de tilt-over ( $\sigma^* = 1$ ), à l'interaction entre le forçage et l'écoulement de tilt-over à  $\sigma^* = \sigma_0^* - 0.5 \simeq 0.35$  et à l'interaction entre le forçage et la première harmonique de l'écoulement de tilt-over à  $\sigma^* = 1 - \sigma_0^* \simeq 0.15$ . On remarque aussi la présence d'un pic à la fréquence adimensionnée  $\sigma^* = 0.96$  pour lequel un filtrage de Fourier passe-bande révèle un champ uniforme oscillant. Ce pic d'énergie ne correspond donc pas à un écoulement réel : il est le fruit d'une vibration de la caméra, du bras la portant ou de l'objectif. Ces derniers pics déjà faiblement énergétiques dans les expériences à faible nombre de Reynolds deviennent progressivement de plus en plus négligeables devant les modes forcés par

### 4.3. RÉGIME STATIONNAIRE DE L'ÉCOULEMENT

---

notre système et disparaissent progressivement dans le bruit de mesure lorsque le nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  augmente.

Dans le spectre correspondant à un nombre de Reynolds de forçage  $Re_f = 270$ , on remarque l'apparition de deux bosses centrées autour des fréquences  $\sigma_1^* = 0.26 \pm 0.04$  et  $\sigma_2^* = 0.58 \pm 0.04$ . Comme pour les attracteurs d'ondes d'inertie dans le chapitre précédent, il s'agit d'ondes d'inertie produites par l'instabilité par résonance triadique des ondes forcées (ce type d'instabilités a déjà été décrit dans la partie 1.4). Ces ondes sous-harmoniques satisfont la condition de résonance temporelle avec les ondes primaires de l'instabilité  $\sigma_1^* + \sigma_2^* \simeq \sigma_0^* = 0.84$ . Lorsque l'amplitude de forçage est encore augmentée, on remarque que les bosses sous-harmoniques produites par l'instabilité par résonance triadique s'étalent progressivement en fréquence et qu'elles s'éloignent de la moitié de la fréquence de forçage  $\sigma_0^*/2$ . On retrouve ici un comportement comparable à celui observé dans les spectres de nos expériences d'attracteurs d'ondes présentés à la partie 3.6. Ce comportement est contraire à celui prédit par la théorie de l'instabilité par résonance triadique d'une onde plane d'inertie dans laquelle une dégénérescence des fréquences sous harmoniques  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  vers la moitié  $\sigma_0^*/2$  de la fréquence de forçage est attendue avec l'augmentation du nombre de Reynolds de l'onde primaire (cf. partie 1.4).

Une autre propriété remarquable de ces spectres est l'émergence, lorsque l'amplitude du forçage augmente, d'un pic d'énergie à fréquence nulle et s'étalant jusqu'à  $\sigma^* \simeq 0.1$ . Le mode à basse fréquence correspondant est très énergétique : pour le plus grand nombre de Reynolds présenté ici,  $Re_f = 1040$ , celui-ci porte par exemple une énergie 2.5 fois plus grande que celle du mode forcé à  $\sigma_0^*$ .

#### 4.3.2 Mode forcé

Nous traçons à la figure 4.9, l'énergie cinétique  $\langle K_{\sigma_0^*} \rangle$  dans l'écoulement à la fréquence de forçage en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . L'énergie cinétique  $\langle K_{\sigma_0^*} \rangle$  est calculée par intégration des spectres temporels de la figure 4.8 sur la gamme de fréquence  $\sigma_0^* - 0.1 \leq \sigma^* < \sigma_0^* + 0.1$ . Cette figure rend compte de toutes les expériences réalisées dans cette série dont seuls cinq cas particuliers avaient été représentés dans la figure 4.8 des spectres temporels par soucis de clarté. La figure 4.9(b) tracée en représentation logarithmique permet de se rendre compte que  $\langle K_{\sigma_0^*} \rangle \propto Re_f^2$  pour les faibles nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$ , révélant le comportement linéaire de l'écoulement à la fréquence de forçage jusqu'à un nombre Reynolds de forçage d'environ 300.

Toutefois, comme nous l'avons vu au chapitre 3, la présence d'une instabilité par résonance triadique modifie le déclin spatial de la vitesse d'un faisceau d'ondes auto-similaire ainsi que l'augmentation de sa longueur d'onde avec la distance à la source, en introduisant un terme effectif de dissipation d'énergie pour le faisceau d'ondes. Dans le chapitre 3, nous avons pu montrer que, dans le cas d'un attracteur d'ondes expérimental, le remplacement, dans le modèle linéaire, de la viscosité du fluide par une viscosité turbulente permettait de rendre compte de manière quantitative de l'élargissement non-linéaire du faisceau d'ondes et de l'amplification de son déclin. Dans l'expérience décrite dans ce chapitre, il est plus difficile que dans le cas de

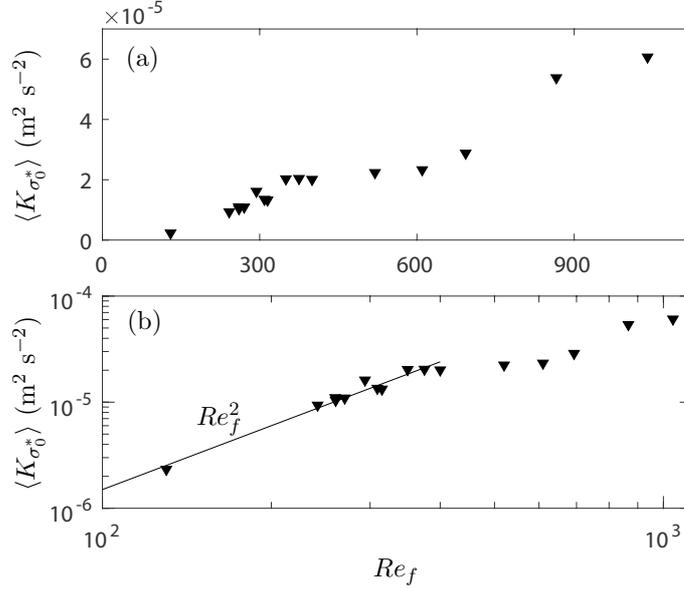


FIGURE 4.9 – Énergie cinétique du mode forcé  $\langle K_{\sigma_0^*} \rangle$  en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . L'énergie est calculée par intégration des spectres temporels de la figure 4.8 dans la bande de fréquence  $\sigma_0^* - 0.1 \leq \sigma^* < \sigma_0^* + 0.1$ . La figure (b) est une version de (a) en échelle logarithmique. La loi  $\langle K_{\sigma_0^*} \rangle \propto Re_f^2$  est représentée par une droite dans la figure (b).

l'attracteur de modéliser l'efficacité du forçage à alimenter un faisceau d'ondes d'inertie car le forçage est ici visqueux alors qu'il était inertiel dans le chapitre précédent, et nous n'essayerons pas de proposer un modèle pour l'amplitude des ondes forcées à la fréquence  $\sigma_0$ . Il est toutefois naturel de s'attendre à ce qu'une fois entré dans le régime non-linéaire (associé à l'instabilité par résonance triadique), les faisceaux d'ondes auto-similaires à la fréquence de forçage voient leurs échelles croître et leur amplitude relative à celle de forçage décroître. La figure 4.9 montre en effet que l'amplitude du mode forcé à  $\sigma_0$  s'écarte de la loi linéaire observée aux faibles amplitudes de forçage en direction de valeurs plus faibles.

On peut noter finalement que l'évolution non-linéaire du mode à la fréquence de forçage peut aussi résulter pour partie de phénomènes non-linéaires affectant les couches limites d'Ekman sur les parois des cylindres oscillants et leur éruption à l'origine des faisceaux auto-similaires.

Nous présentons à la figure 4.10 trois champs de vitesse instantanés du mode à la fréquence de forçage (obtenus après un filtrage de Fourier passe-bande dans la gamme de fréquence  $\sigma_0^* - 0.1 \leq \sigma^* < \sigma_0^* + 0.1$ ) pour trois nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$  différents. À travers l'observation directe des séries temporelles de champs de vitesse du type de ceux représentés à la figure 4.10, on peut estimer la longueur typique des ondes du mode forcé en fonction du nombre de Reynolds. Pour les expériences de la figure 4.10, on obtient  $\lambda = 6.1 \pm 0.5$  cm,  $8.1 \pm 0.7$  cm,  $10.1 \pm 1.5$  cm respectivement pour les nombres de Reynolds de forçage  $Re_f = 130$ ,  $520$  et  $1040$ . On remarque une augmentation des échelles caractéristiques des faisceaux forcés avec le nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  en accord qualitatif avec l'évolution attendue dans le régime non-linéaire des

### 4.3. RÉGIME STATIONNAIRE DE L'ÉCOULEMENT

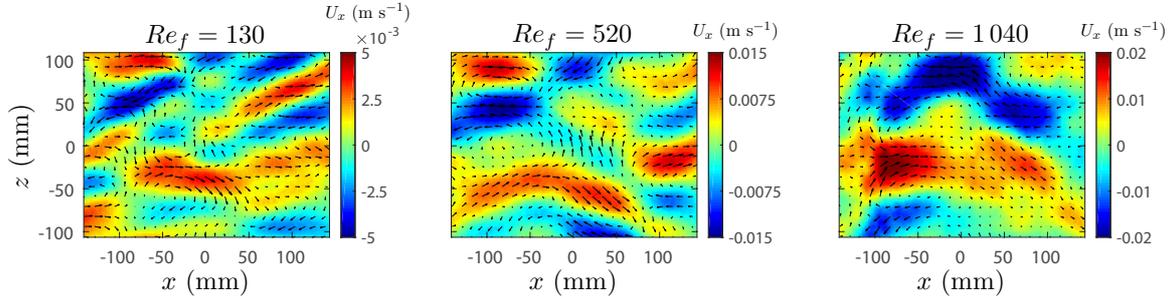


FIGURE 4.10 – Instantanés du champ de vitesse du mode à la fréquence de forçage pour trois nombres de Reynolds. Les champs sont obtenus après un filtrage de Fourier passe-bande dans la gamme de fréquence  $\sigma_0^* - 0.1 \leq \sigma^* < \sigma_0^* + 0.1$  et sont pris à  $t = 100T$  après le démarrage des générateurs d'ondes.

faisceaux auto-similaires.

#### 4.3.3 Ondes sous-harmoniques

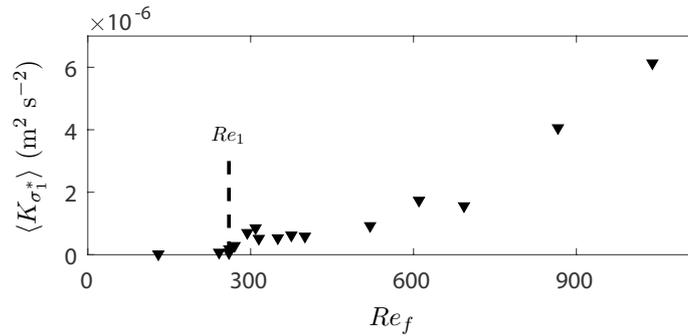


FIGURE 4.11 – Énergie cinétique du mode associé à la première bosse sous-harmonique  $\langle K_{\sigma_1^*} \rangle$  en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . L'énergie est calculée par intégration des spectres temporels de la figure 4.8 dans la bande de fréquence  $0.1 \leq \sigma^* \leq \sigma_0^*/2$ .

Pour mettre en évidence de manière précise l'émergence de l'instabilité par résonance triadique dans nos expériences, nous traçons à la figure 4.11 l'énergie cinétique  $\langle K_{\sigma_1^*} \rangle$  associée à l'écoulement correspondant à la première bosse de l'instabilité par résonance triadique en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . L'énergie cinétique  $\langle K_{\sigma_1^*} \rangle$  est calculée par intégration des spectres temporels de la figure 4.8 sur la gamme de fréquence  $0.1 \leq \sigma^* \leq \sigma_0^*/2$ . Dans la figure 4.11, on constate que le mode sous-harmonique à la fréquence  $\sigma_1$  apparaît au-delà d'un nombre de Reynolds critique de  $Re_1 = 260 \pm 10$  où  $\langle K_{\sigma_1^*} \rangle$  devient non-nul. Ce nombre de Reynolds critique constitue le seuil de l'instabilité par résonance triadique des faisceaux d'ondes d'inertie produits par les cylindres oscillés et cette courbe constitue un diagramme de bifurcation pour cette instabilité.

Il est intéressant de chercher la valeur critique  $Re_U^c$  du nombre de Reynolds basé sur la vitesse  $U$  et sur la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes primaires correspondant au nombre de Reynolds critique  $Re_1$  construit à partir des paramètres du forçage. On construit ainsi un nombre de Reynolds  $Re_U = U\lambda/\nu$  caractérisant les faisceaux d'ondes primaires en estimant leur vitesse  $U$  par la vitesse rms du mode à la fréquence de forçage  $\sqrt{2\langle K_{\sigma_0^*} \rangle}$ ,  $\langle K_{\sigma_0^*} \rangle$  étant l'énergie cinétique représentée à la figure 4.9. On mesure la longueur d'onde  $\lambda$  des faisceaux d'ondes directement grâce à l'observation des champs de vitesse équivalents à ceux de la figure 4.10 mais pour les deux expériences de part et d'autre du seuil  $Re_1$  de l'instabilité. On obtient une estimation de la longueur d'onde de  $\lambda = 6.1 \pm 0.5$  cm et un nombre de Reynolds critique de  $Re_U^c = 285 \pm 25$ . Cette valeur du seuil en nombre de Reynolds de l'instabilité par résonance triadique en terme des paramètres de l'onde primaire est proche de celle obtenue dans le cas d'un attracteur d'ondes  $Re_U^c = 350 \pm 120$  (voir partie 3.6). Ce résultat est assez naturel car le faisceau d'ondes issu d'un cylindre oscillant et celui de l'attracteur sont tous deux auto-similaires avec des structures spatiales comparables. Ils contiennent notamment tous les deux environ une longueur d'onde dans leur largeur. On note toutefois qu'ils sont légèrement différents dans leur forme ce qui pourrait expliquer une éventuelle différence dans le seuil de leur instabilité : le faisceau produit par le cylindre oscillant correspond à la solution auto-similaire de Moore et Saffman issue d'une source dipolaire alors que celui de l'attracteur d'ondes correspond à la solution issue d'une source monopolaire (cf. partie 1.3.2 et le travail de Machicoane *et al.* [21]).

On peut souligner qu'aucune étude expérimentale du seuil de l'instabilité par résonance triadique n'existait dans la littérature jusqu'aux deux présentées dans le cadre de cette thèse. Il semble toutefois que la réalisation d'études plus fines de ce seuil serait intéressante. On s'attend en effet à ce que ce seuil dépende de la structure du faisceau d'ondes primaire et notamment du nombre de longueurs d'onde contenu dans la largeur du faisceau (le seuil pour une onde plane sera a priori plus faible que pour les faisceaux auto-similaires que nous avons étudiés dans cette thèse). Grâce à des simulations numériques dans le cas des ondes internes de gravité, Bourget *et al.* [99] ont en effet montré que ce nombre était un paramètre affectant le taux de croissance de l'instabilité. Il serait intéressant d'explorer cette question dans le cas des ondes internes d'inertie.

Nous montrons finalement à la figure 4.12 trois instantanés du champ de vitesse associé à la première bosse de l'instabilité par résonance triadique (obtenus par un filtrage de Fourier passe-bande dans la gamme de fréquence  $0.1 \leq \sigma^* \leq \sigma_0^*/2$ ) pour trois nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Ces instantanés montrent des ondes présentes dans tout le plan de mesure. On remarque une augmentation des échelles avec l'accroissement de  $Re_f$  qui passent de typiquement 3.2 cm à  $Re_f = 270$  à 7.8 cm à  $Re_f = 1040$ . Cette augmentation de la longueur d'onde des ondes à la fréquence  $\sigma_1$  est a priori la conséquence naturelle de l'augmentation des échelles des ondes primaires de l'instabilité par résonance triadique discutée plus haut : les vecteurs d'ondes des trois ondes impliquées dans une triade doivent en effet vérifier la relation de résonance spatiale  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$ . On note finalement que les longueurs d'onde des ondes secondaires du mode  $\sigma_1$  sont du même ordre de grandeur mais plus petites que celle des ondes primaires à la fréquence  $\sigma_0$  en accord avec les observations réalisées par Bordes *et al.* [22] pour une onde primaire plane

### 4.3. RÉGIME STATIONNAIRE DE L'ÉCOULEMENT

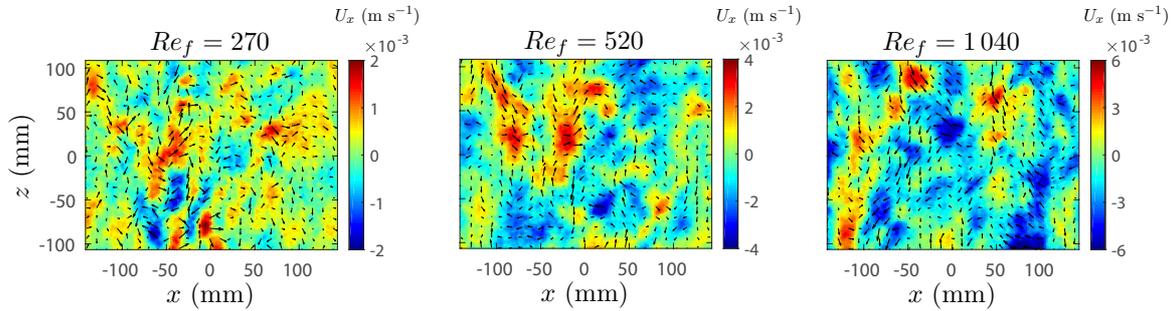


FIGURE 4.12 – Instantanés du champ de vitesse associé à la première bosse sous-harmonique pour trois nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Les champs sont obtenus après un filtrage de Fourier passe-bande dans la gamme de fréquence  $0.1 \leq \sigma^* \leq \sigma_0^*/2$  et sont pris à l'instant  $t = 110T$  après le démarrage des générateurs d'ondes.

de nombre de Reynolds 220 (et donc proche de ceux étudiés ici). Ce transfert d'énergie vers des échelles plus petites est aussi une propriété prévue par la théorie de l'instabilité par résonance triadique d'une onde plane comme discuté en partie 1.4.

#### 4.3.4 Mode à basse fréquence

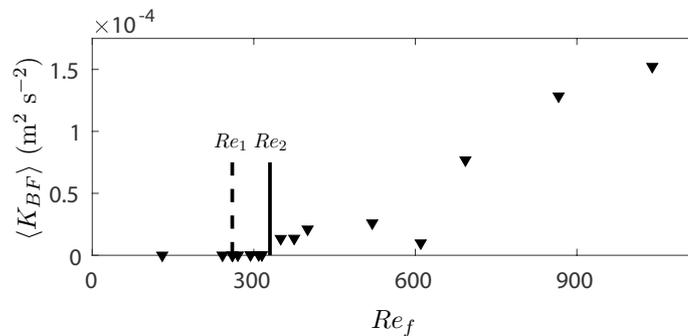


FIGURE 4.13 – Énergie cinétique associée au mode à basse fréquence  $\langle K_{BF} \rangle$  en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . L'énergie est calculée par intégration des spectres temporels de la figure 4.8 dans la bande de fréquence  $\sigma^* \leq 0.1$ .  $Re_1$  est le seuil en nombre de Reynolds de forçage de l'instabilité par résonance triadique déterminé à la figure 4.11.

Nous traçons finalement à la figure 4.13 l'énergie cinétique  $\langle K_{BF} \rangle$  associée à l'écoulement correspondant au mode à basse fréquence en fonction du nombre de Reynolds du forçage  $Re_f$ . L'énergie est calculée par intégration des spectres temporels sur la gamme de fréquence  $\sigma^* \leq 0.1$ . Dans cette figure, on constate que le mode à basse fréquence émerge au-delà d'un nombre de Reynolds de forçage critique  $Re_2 = 330 \pm 15$ . On note ainsi que l'instabilité donnant naissance au mode à basse fréquence apparaît à un nombre de Reynolds de forçage proche mais supérieur à celui de l'instabilité par résonance triadique, comme l'atteste les points situés entre les deux

seuils, possédant une énergie dans la première bosse sous harmonique  $\langle K_{\sigma_1^*} \rangle$  non nulle (cf. figure 4.11) et une énergie dans les basses fréquences  $\langle K_{BF} \rangle$  nulle. L'existence d'un seuil en  $Re_f$  à l'apparition du mode basse fréquence, qui plus est distinct de celui de l'instabilité par résonance triadique, suggère que le mode à basse fréquence est ici le fruit d'une instabilité et non d'un processus d'écoulement redressé ou de dérive de Stokes qui affecteraient les ondes forcées à la fréquence  $\sigma_0$  ou les ondes produites par l'instabilité par résonance triadique et impliquerait une amplitude du mode basse fréquence en carré de celle des ondes primaires [91, 92]. Ces caractéristiques du mode géostrophique émergeant dans notre expérience sont ainsi comparables à celles mise en évidence par Le Reun *et al.* [98] dans leur travail expérimental sur la libration d'une cavité ellipsoïdale où un seuil à l'apparition du mode géostrophique a aussi été mis en évidence. On note aussi que l'interprétation de Duran-Matute *et al.* [95] à l'apparition d'un mode géostrophique comme la conséquence d'un "mélange de moment cinétique" (cf. partie 4.1.1) ne peut pas s'appliquer dans notre cas où aucun déferlement des ondes d'inertie ne semble à l'œuvre.

L'apparition du mode à basse fréquence semble ainsi dans notre expérience être le fruit d'une instabilité secondaire de l'instabilité par résonance triadique. Alors que l'apparition de l'instabilité par résonance triadique des ondes forcées constituent une première étape en accord avec la cascade d'énergie vers les basses fréquences prévue par la phénoménologie de la turbulence d'ondes, le système semble ici trouver un processus non-linéaire pour transférer directement son énergie vers la fréquence nulle en une seule étape. Le système court-circuite ainsi le développement d'une cascade d'énergie vers les basses fréquences (et les petites échelles) attendues pour une turbulence d'ondes d'inertie (cf. partie 1.6).

En comparant  $\langle K_{BF} \rangle$  à l'énergie  $\langle K_{\sigma_0^*} \rangle$  portée par le mode forcé (cf. figure 4.9), on est surpris de constater que le mode à basse fréquence porte significativement plus d'énergie. Ainsi, à grand nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ ,  $\langle K_{BF} \rangle$  est 2.5 fois plus grand que  $\langle K_{\sigma_0^*} \rangle$ .

Pour mieux caractériser cet écoulement, on observe à la figure 4.14 quelques champs de vitesse  $u_{BF}$  issu d'un filtrage de Fourier passe-bas avec une fréquence de coupure  $\sigma^* = 0.1$ . Ces champs révèlent un écoulement invariant verticalement constitué d'une ou plusieurs colonnes portant une vitesse presque purement horizontale sans préférence pour le signe de celle-ci. Ces colonnes apparaissent et disparaissent lentement dans le champ de mesure de PIV. C'est cette dynamique lente qui construit l'étalement du pic à fréquence nulle jusqu'à la fréquence  $\sigma^* \simeq 0.1$ . Le mode basse fréquence est en pratique constitué d'un ou de quelques tourbillons d'axes verticaux, invariants verticalement et dérivant lentement dans le plan  $(x, y)$  perpendiculaire à l'axe de rotation. La figure 4.14 présente une série temporelle de quatre champs de vitesse du mode basse fréquence pour l'expérience à  $Re_f = 1040$  séparés chacun de quelques périodes de forçage. Cette série illustre la traversée du champ de mesure par un tourbillon 2D typique du mode à basse fréquence : une série de schéma en vue de dessus vient aider à l'interprétation des champs mesurés.

Dans le but de caractériser de manière plus globale le mouvement de ces tourbillons "géo-

### 4.3. RÉGIME STATIONNAIRE DE L'ÉCOULEMENT

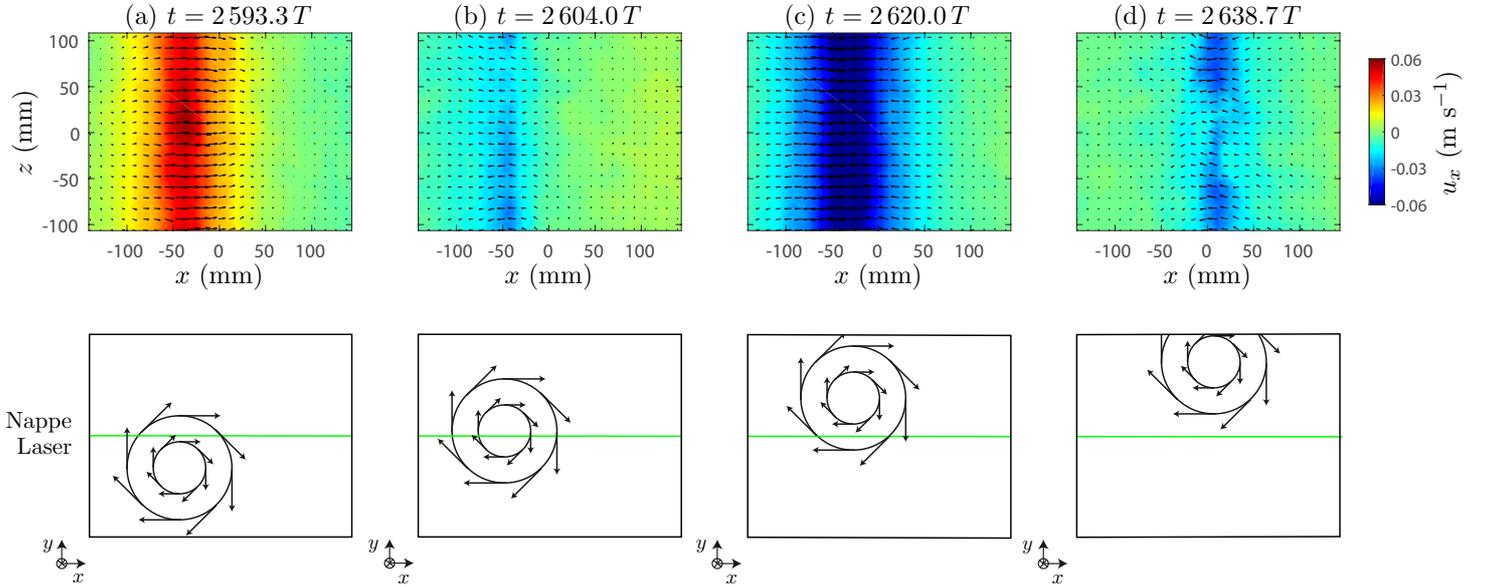


FIGURE 4.14 – Instantanés du champ de vitesse  $u_{BF}$  issu d'un filtrage de Fourier passe-bas avec une fréquence de coupure  $\sigma^* = 0.1$  pour l'expérience correspondant à un nombre de Reynolds de 1040 à quatre instants différents. Les miniatures du bas présentent une interprétation schématisée de l'écoulement dans le plan horizontal  $(x, y)$  : un tourbillon 2D invariant verticalement dérive dans l'aquarium horizontalement et traverse le champ de mesure PIV.

strophiques” au cours du temps, nous montrons à la figure 4.15 la carte spatio-temporelle

$$u_{2D}(x, t) = \frac{1}{\Delta z} \int_0^{\Delta z} u_{BF}(x, z, t) dz \quad (4.4)$$

construite comme la moyenne verticale sur la hauteur  $\Delta z$  du champ de vitesse  $u_{BF}$  issu d'un filtrage de Fourier passe bas avec une fréquence de coupure  $\sigma^* = 0.1$ . Cette figure montre d'abord que plusieurs tourbillons peuvent coexister dans l'écoulement (voir figure 4.15(b), lorsque  $Re_f = 520$ ). On peut dans cette figure aussi visualiser directement la dynamique lente de dérive de ces tourbillons 2D pendant toute la durée des expériences. On remarque que les colonnes deviennent plus larges et dérivent de plus en plus vite à mesure que le nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  augmente. Cette augmentation de la vitesse de dérive des tourbillons géostrophiques avec le nombre de Reynolds de forçage, qui est a priori le fruit de mécanismes d'advection au sein du mode basse fréquence, est naturelle puisque l'énergie et donc les vitesses du fluide dans le mode 2D croissent avec  $Re_f$ .

On peut toutefois noter ici qu'il est difficile d'avoir une vision complète de ce mode géostrophique à basse fréquence à partir de la seule coupe verticale du champ de vitesse que l'on réalise ici : une mesure d'une coupe horizontale aurait évidemment été plus riche en information pour ce mode. Celle-ci est cependant quasiment impossible à mettre en œuvre à cause de l'encombrement très important de l'espace au-dessus de l'aquarium par le système activant les

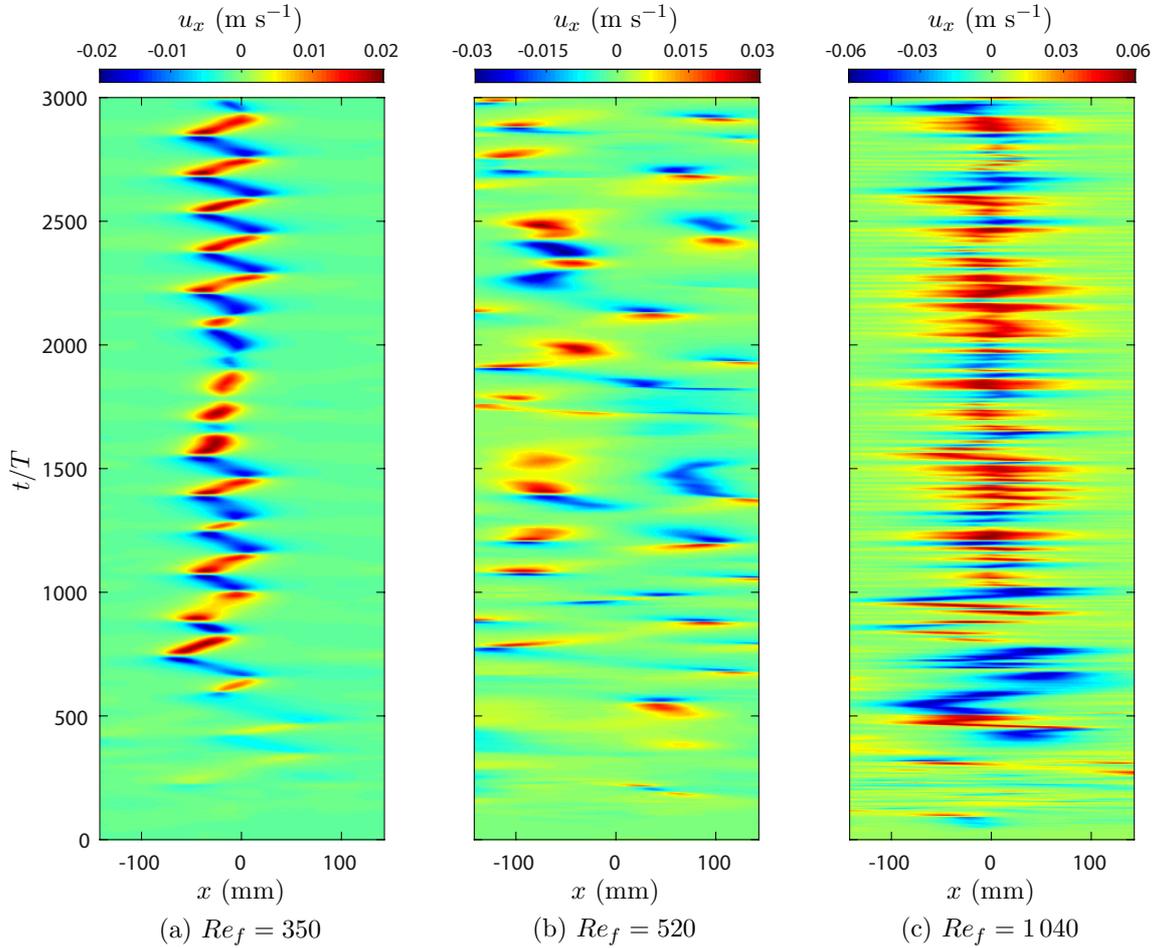


FIGURE 4.15 – Composante  $u_x$  du champ de vitesse  $u_{2D}$  en fonction du temps  $t$  et de la coordonnée horizontale  $x$  pour trois nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$ .  $u_{2D}$  est la moyenne verticale du champ de vitesse  $u_{BF}$  issu d'un filtrage de Fourier passe-bas avec une fréquence de coupure  $\sigma^* = 0.1$  (cf. équation 4.4). Le temps  $t$  est normalisé par la période de forçage  $T$ .

32 générateurs d'ondes. On note toutefois que pour tous les autres modes présents dans notre écoulement, la coupe du champ de vitesse la plus intéressante est bien la coupe verticale qui a été réalisée.

#### 4.3.5 Effet de “sweeping”

Dans les spectres temporels de la figure 4.8, nous avons remarqué plus tôt que les pics associés aux ondes à la fréquence de forçage  $\sigma_0$  et les bosses associées aux modes sous-harmoniques s'étaient progressivement en fréquence lorsque le nombre de Reynolds de forçage augmente. On peut aussi noter que cet étalement semble corrélé avec l'émergence du mode géostrophique à basse fréquence. Cet étalement pourrait ainsi, tout au moins en partie, être le fruit d'un effet Doppler induit par l'advection des ondes d'inertie par les tourbillons intenses composant le

### 4.3. RÉGIME STATIONNAIRE DE L'ÉCOULEMENT

---

mode basse fréquence. Cet effet, que l'on nomme "sweeping" en anglais, a déjà été observé par Antoine Campagne *et al.* [73] (cf. partie 1.6.2) au sein d'une expérience où coexistaient déjà un mode géostrophique et des ondes d'inertie (dans des proportions toutefois très différentes avec seulement quelques pour-cents de l'énergie de l'écoulement portée par des ondes). Pour une onde de vecteur d'ondes  $\mathbf{k}$ , le décalage fréquentiel induit par le mode géostrophique à basse fréquence peut s'écrire simplement comme

$$\Delta\sigma = \mathbf{U}_{\mathbf{BF}} \cdot \mathbf{k} \simeq U_{BF} k \sin \theta, \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{U}_{\mathbf{BF}}$  est la vitesse locale et instantanée du mode géostrophique. Comme les tourbillons du mode géostrophique possèdent seulement une composante horizontale de vitesse, seule la composante horizontale du vecteur d'onde  $k_{\perp} = k \sin \theta$  des ondes advectées va ici intervenir. On peut directement voir à partir de l'expression du décalage Doppler (4.5), que les ondes à petites échelles (i.e.  $k$  grand) et à basse fréquence (i.e.  $\sigma^* = \cos \theta$  petit) seront plus fortement affectées, comme observé dans Campagne *et al.* [73].

Pour quantifier l'influence de ce phénomène dans notre écoulement, nous allons estimer l'ordre de grandeur de l'étalement en fréquence  $\Delta\sigma^*$  induit par le mode basse fréquence sur le mode forcé et sur les bosses sous-harmoniques de l'instabilité par résonance triadique. Pour cela, on mesure l'ordre de grandeur de la composante  $k_x$  selon  $x$  du vecteur d'ondes pour chaque expérience à partir de l'observation des champs de vitesse issus d'un filtrage de Fourier passe bande sur la gamme de fréquence

- $\sigma_0^* - 0.1 < \sigma^* < \sigma_0^* + 0.1$  pour le mode forcé,
- $0.1 < \sigma^* < \sigma_0^*/2$  pour la première bosse sous-harmonique,
- $\sigma_0^*/2 < \sigma^* < \sigma_0^* - 0.1$  pour la seconde bosse sous-harmonique.

On utilise par ailleurs la vitesse rms du mode basse fréquence calculée à partir de l'énergie cinétique  $\langle K_{BF} \rangle$  du diagramme de bifurcation de la figure 4.13 (i.e.  $U_{BF} = \sqrt{2\langle K_{BF} \rangle}$ ). Même si nos mesures dans un plan vertical nous limitent ici aux composantes dans la direction  $x$  des quantités impliquées dans l'expression de l'étalement Doppler  $\Delta\sigma^*$ , le produit de ces deux quantités nous fournit une estimation de l'ordre de grandeur de l'effet de "sweeping" induit par le mode basse fréquence sur les ondes forcées. Nous reportons cette estimation sur la figure 4.16 (reprenant les spectres de la figure 4.8) des spectres temporels de l'énergie à travers des barres d'erreur horizontales de taille  $\Delta\sigma^*$  centrées sur les pics d'énergie du mode forcé et le centre des bosses sous-harmoniques.

On constate que la largeur du pic de forçage à la fréquence  $\sigma_0^*$  et la largeur des bosses sous-harmoniques sont bien du même ordre de grandeur que l'étalement Doppler  $\Delta\sigma^*$  prévu par le "sweeping" et que ces deux quantités suivent, au moins qualitativement, une même évolution vers un plus grand étalement lorsque le nombre de Reynolds de forçage augmente.

Toutefois le "sweeping" n'explique pas totalement la largeur des bosses sous-harmoniques observée dans les spectres de la figure 4.8 puisque celles-ci sont déjà larges lorsque  $Re_f = 270$ , c'est-à-dire en dessous du seuil d'apparition du mode géostrophique à l'origine du "sweeping". On rappelle qu'un étalement intrinsèque des bosses avec l'accroissement du nombre de Reynolds

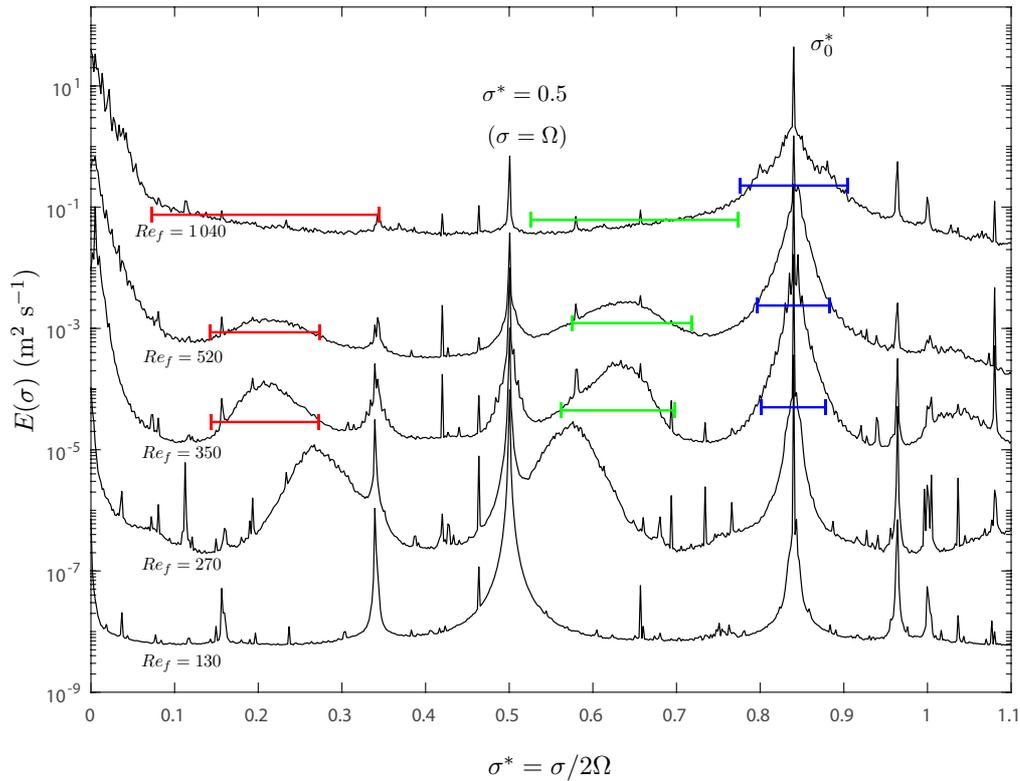


FIGURE 4.16 – Densité spectrale de puissance temporelle  $E(\sigma)$  en fonction de la fréquence normalisée  $\sigma^* = \sigma/2\Omega$  pour cinq nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$ . La méthode de Welch est employée pour améliorer la convergence statistique. Un décalage vertical d'un facteur 10 entre les spectres successifs a été introduit par soucis de lisibilité. Les barres d'erreur rouges, vertes et bleues matérialisent l'étalement fréquentiel associé à l'effet de "sweeping" induit par le mode à basse fréquence respectivement pour la première bosse sous-harmonique, la seconde et le mode forcé.

#### 4.4. QUEL MÉCANISME DONNE NAISSANCE AU MODE GÉOSTROPHIQUE ?

---

de forçage  $Re_f$  est prédit par la théorie de l'instabilité par résonance triadique d'une onde plane d'inertie (cf. partie 1.4). Le "sweeping" n'explique pas non plus l'éloignement des bosses de la moitié de la fréquence de forçage  $\sigma_0^*/2$  avec l'augmentation du nombre de Reynolds  $Re_f$ , qui reste un comportement inexplicable et opposé à ce qui est attendu selon la théorie de l'instabilité par résonance triadique d'une onde plane.

### 4.4 Quel mécanisme donne naissance au mode géostrophique ?

Comme nous l'avons déjà discuté dans la partie 1.4, l'émergence d'un mode géostrophique, c'est-à-dire un mode basse fréquence et invariant verticalement, est théoriquement impossible à travers des interactions triadiques résonantes avec des ondes d'inertie. On constate en effet que les coefficients d'interaction triadique sont strictement nuls si ils impliquent un mode 2D et que les trois modes (deux ondes 3D et le mode 2D) en jeu sont résonants temporellement (et évidemment spatialement). Ce résultat, parfois appelé "Théorème de Greenspan" comme dans l'article de Le Reun *et al.* [25] (cf. partie 4.4.1), nous affirme que des ondes d'inertie ne peuvent ainsi pas donner leur énergie à un mode 2D à travers une interaction triadique résonante. On s'attend alors, dans la limite des très faibles nombres de Rossby pour laquelle les interactions triadiques résonantes doivent dominer les échanges d'énergie entre échelles, à ce qu'un mode 2D ne puisse pas émerger à partir d'ondes d'inertie. Les interactions triadiques résonantes étant incapables de faire apparaître un mode géostrophique à partir d'ondes, il est naturel de considérer le rôle des interactions triadiques non-résonantes (que ce soit faiblement ou fortement), c'est-à-dire des triades d'ondes qui ne respectent pas la condition de résonance temporelle  $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2$ . Nous allons voir que ces interactions apparaissent notamment lorsque l'on continue le développement multi-échelle en temps de la décomposition de l'équation de Navier-Stokes en rotation sur la base des modes hélicoïdaux un ordre plus loin en nombre de Rossby que le développement correspondant à la turbulence d'ondes. Les valeurs des nombres de Rossby dans les expériences, simulations numériques et même dans les écoulements naturels n'étant pas extrêmement faibles en général, ce développement à l'ordre supérieur semble avoir toute sa place.

#### 4.4.1 Émergence d'un mode géostrophique par des interactions quasi-résonantes

Le Reun *et al.* [25] ont proposé dans un article actuellement soumis à la revue *Journal of Fluid Mechanics* et publié sur le site arXiv que le mode géostrophique pourrait être le fruit d'une instabilité triadique d'une onde d'inertie produisant le mode géostrophique et une autre onde, les trois modes n'étant pas en résonance exacte mais en quasi-résonance. Le Reun *et al.* établissent par un développement asymptotique en  $Ro$  l'expression du taux de croissance de l'instabilité d'une onde d'inertie pour une triade faiblement non résonante impliquant comme "ondes filles" un mode géostrophique de fréquence  $\sigma_2 = 0$  et une onde d'inertie de fréquence  $\sigma_1$  en quasi-résonance temporelle avec l'onde mère  $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \Delta\sigma$ . Le taux de croissance d'une telle instabilité est nul pour une triade résonante mais Le Reun *et al.* montrent qu'il

devient non nul lorsque  $\Delta\sigma$  est proche de zéro. Ils réalisent ensuite une maximisation du taux de croissance en question sur toutes les triades possibles (pour chaque mode géostrophique) et montrent que le taux de croissance effectif sera en  $Ro^2\Omega$  aux très faibles nombres de Rossby et en  $Ro\Omega$  aux nombres de Rossby faibles à modérés. Par comparaison, le taux de croissance inviscide de l'instabilité par résonance triadique est  $Ro\Omega$ , c'est-à-dire homogène à l'inverse du temps non linéaire  $\tau_{nl} = \lambda/U$  avec  $\lambda$  et  $U$  respectivement la longueur d'onde et la vitesse caractéristique de l'onde primaire.

En parallèle de cette étude théorique, Le Reun *et al.* ont réalisés des simulations numériques dans le but de tester leur mécanisme. À partir d'un écoulement de base constitué d'une onde plane d'inertie, ils constatent que l'onde se déstabilise d'abord par une instabilité par résonance triadique puis par une instabilité donnant naissance à un mode géostrophique (cf. figure 4.17). À grand nombre de Rossby ( $Ro = 2.83 \times 10^{-2}$ ), les lois d'échelles ainsi que les valeurs des taux de croissance de l'instabilité donnant naissance au mode géostrophique correspondent de manière remarquable à ce que prédit leur mécanisme d'instabilité par "quasi-résonance" triadique.

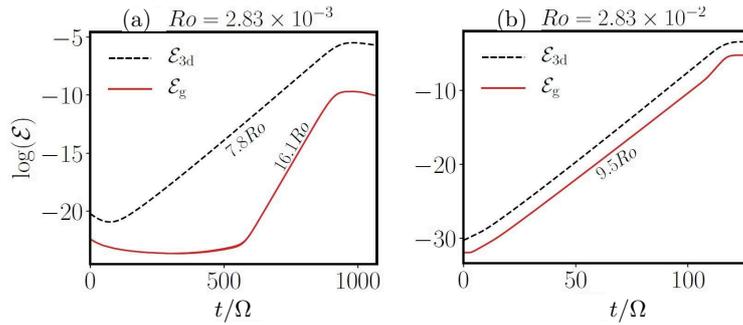


FIGURE 4.17 – Série temporelle de l'énergie cinétique pour deux nombres de Rossby basés sur les caractéristiques de l'onde plane primaire (a)  $Ro = 2.83 \times 10^{-3}$  et (b)  $Ro = 2.83 \times 10^{-2}$ . L'énergie cinétique est calculée pour le mode géostrophique (trait plein rouge) et les modes sous-harmoniques produit par l'instabilité par résonance triadique de l'onde plane de base (trait noir tireté). Extrait de Le Reun *et al.* [25].

Le Reun *et al.* vont plus loin en montrant que leur modèle prédit de manière quantitative le taux de croissance du mode géostrophique en fonction de sa longueur d'onde confirmant de manière claire la pertinence de leur modèle pour décrire l'émergence d'un mode géostrophique à partir d'une onde plane d'inertie (cf. figure 4.18). Toutefois, il est à noter que dans les simulations numériques, l'amplitude du mode géostrophique qui émerge reste faible. En effet, celui-ci porte environ 100 fois moins d'énergie que les ondes sous-harmoniques produite par l'instabilité par résonance triadique qui a lieu en parallèle de l'instabilité par "quasi-résonance" triadique lorsque le nombre de Rossby  $Ro$  vaut  $2.83 \times 10^{-2}$  (cf. figure 4.17(b)) qui portent elles-mêmes moins d'énergie que le mode forcé. Lorsque le nombre de Rossby  $Ro$  vaut  $2.83 \times 10^{-3}$ , le mode géostrophique est encore moins énergétique relativement aux ondes produites par l'instabilité par résonance triadique (cf. figure 4.17(a)). Dans nos expériences à grandes amplitudes de forçage, le mode géostrophique devient très énergétique : il domine les ondes produites par l'instabilité

#### 4.4. QUEL MÉCANISME DONNE NAISSANCE AU MODE GÉOSTROPHIQUE ?

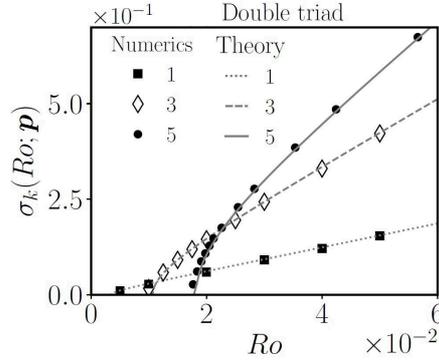


FIGURE 4.18 – Taux de croissance  $\sigma_k(Ro; \mathbf{p})$  du mode géostrophique pour différents vecteurs d’ondes de celui-ci  $\mathbf{p} = 2\pi[0, p_y, 0]$  avec  $p_y \in \{1, 3, 5\}$  en fonction du nombre de Rossby  $Ro$  de l’onde plane primaire. Les points représentent les résultats des simulations numériques et les courbes sont les prédictions théoriques de l’instabilité par quasi-résonance triadique. Extrait de Le Reun *et al.* [25].

par résonance triadique des ondes primaires et même ces ondes primaires elles-mêmes. C’est aussi le cas dans les simulations numériques de Le Reun *et al.* [97] de 2017 et les expériences de Le Reun *et al.* [98] de 2019 où le mode géostrophique domine l’écoulement. Le mécanisme d’instabilité par “quasi-résonance” triadique ne prétend pas déterminer l’amplitude à saturation du mode géostrophique et il est donc nécessaire de poursuivre ce travail théorique pour expliquer l’émergence d’un mode géostrophique intense.

#### 4.4.2 Régime transitoire de l’écoulement

En lien avec les travaux décrits plus tôt, il est intéressant d’étudier les taux de croissance des différents modes composant notre écoulement. Nous explorons ainsi dans cette partie le déroulement des expériences à compter du démarrage du forçage à  $t = 0$ . Nous montrons ainsi à la figure 4.19 la série temporelle de l’énergie cinétique du mode forcé  $K_{\sigma_0^*}$ , celle du mode basse fréquence  $K_{BF}$  et celle du mode associé à la première bosse de l’instabilité par résonance triadique  $K_{\sigma_1^*}$  pour différents nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Ces énergies cinétiques sont calculées à partir du champ de vitesse issu d’un filtrage de Fourier sur la gamme de fréquence

- $\sigma_0^* - 0.1 < \sigma^* < \sigma_0^* + 0.1$  pour  $K_{\sigma_0^*}$ ,
- $0.1 < \sigma^* < \sigma_0^*/2$  pour  $K_{\sigma_1^*}$ ,
- $\sigma^* < 0.1$  pour  $K_{BF}$ .

On s’intéresse dans un premier temps aux ondes à la fréquence  $\sigma_0$  directement forcées par les générateurs d’ondes et en particulier au temps de mise en place de ce mode. On remarque ainsi sur la figure 4.19(a), présentant les 100 premières périodes de forçage  $T$ , que l’énergie cinétique  $K_{\sigma_0^*}$  associé au forçage met entre 12 et 20 périodes avant de saturer. Cette durée de mise en place du mode forcé semble ne pas dépendre du nombre de Reynolds de forçage. Cette première phase correspond a priori au temps nécessaire aux faisceaux d’ondes pour se propager des cylindres

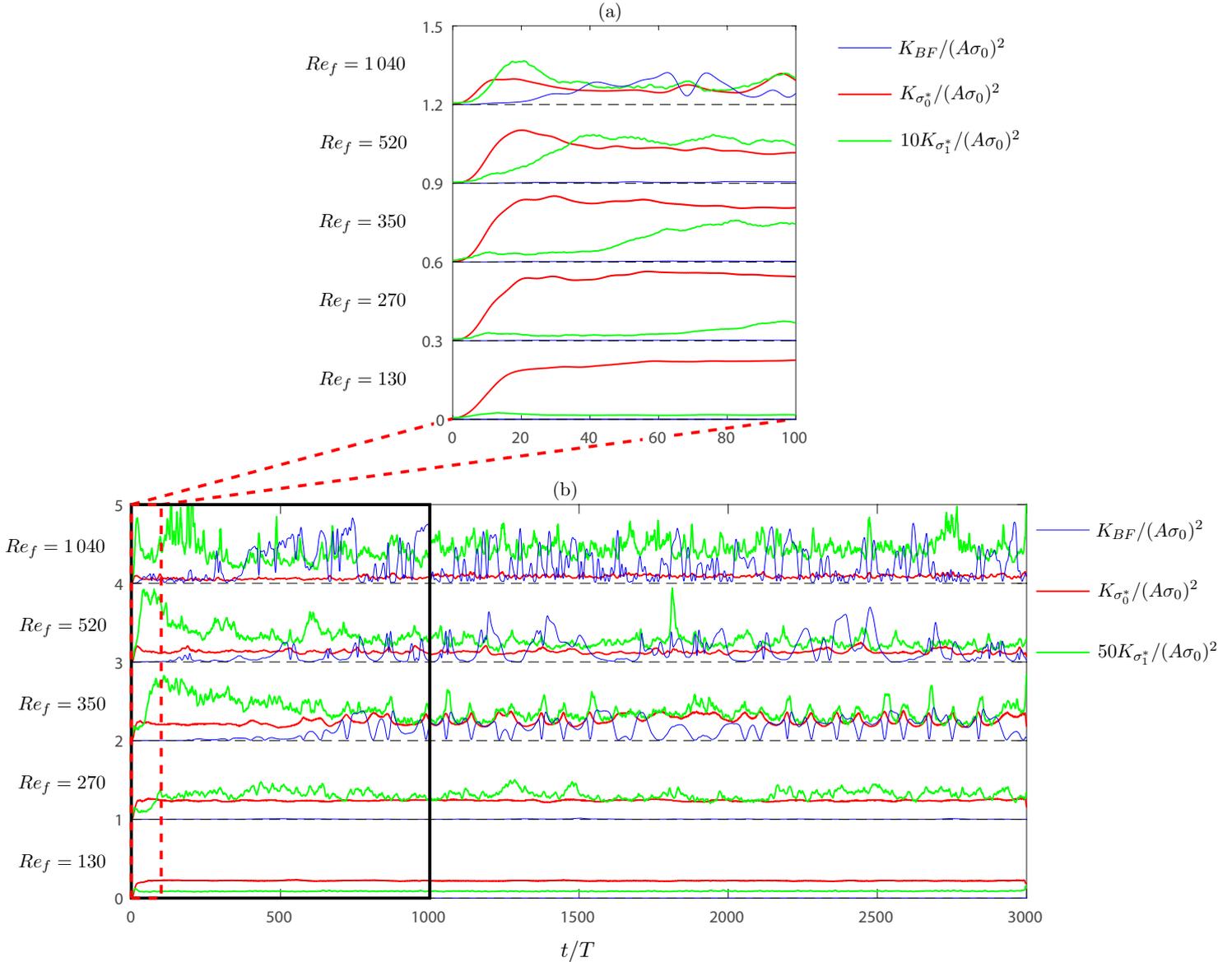


FIGURE 4.19 – Série temporelle de l'énergie cinétique du mode forcé  $K_{\sigma_0^*}$ , celle du mode basse fréquence  $K_{BF}$  et celle du mode associé à la première bosse de l'instabilité par résonance triadique  $K_{\sigma_1^*}$  pour différents nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Toutes les énergies cinétiques sont normalisées par la vitesse de forçage au carré  $(A\sigma_0)^2$  et le temps  $t$  est normalisé par la période de forçage  $T$ . (a) est un agrandissement de (b) entre  $t = 0T$  et  $t = 100T$ . Dans (a),  $K_{\sigma_1^*}$  est multiplié par 10 et un décalage de 0.3 est appliqué entre les courbes des différentes expériences par soucis de lisibilité. Dans (b),  $K_{\sigma_1^*}$  est multiplié par 50 et le décalage est de 1. Le rectangle noir matérialise l'agrandissement représenté à la figure 4.20.

#### 4.4. QUEL MÉCANISME DONNE NAISSANCE AU MODE GÉOSTROPHIQUE ?

---

oscillants vers la zone de mesure du champ de vitesse au centre de l'expérience. Une estimation théorique de ce temps peut être faite en calculant le rapport entre la distance  $\xi \simeq 40$  cm des générateurs d'ondes au centre de l'expérience et la vitesse de groupe des ondes forcées dont la norme vaut  $c_g = 2\Omega \sin(\theta)/k = 1.3$  cm/s qui donne une valeur  $t \simeq 15T$  tout à fait cohérente avec celles observées expérimentalement.

On s'intéresse ensuite au mode à la fréquence  $\sigma_1$  correspondant à la première bosse sous-harmonique de l'instabilité par résonance triadique. Lorsque  $Re_f = 130$ , on observe que l'énergie cinétique  $K_{\sigma_1^*}$  reste proche de 0 parce qu'on se situe en dessous du seuil de l'instabilité par résonance triadique  $Re_1 \simeq 260$ . Au dessus de ce seuil, lorsque  $Re_f > Re_1$ , on remarque que l'énergie cinétique  $K_{\sigma_1^*}$  reste toujours nettement plus faible que celle du mode forcé  $K_{\sigma_0^*}$ . C'est d'ailleurs pour pouvoir l'observer clairement sur la figure qu'on la multiplie par un facteur 10 dans la figure 4.19(a) et par un facteur 50 dans la figure 4.19(b). On remarque sur la figure 4.19(b) que l'énergie cinétique  $K_{\sigma_1^*}$  atteint la saturation environ 100 périodes  $T$  après le démarrage du forçage et que cette valeur diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Cette observation est en accord avec la théorie de l'instabilité par résonance triadique (cf. partie 1.4) qui prédit une augmentation du taux de croissance  $\gamma_{\sigma_1^*}$  de l'instabilité avec le nombre de Reynolds  $Re_f$ . Avec l'objectif d'estimer ces taux de croissance, nous traçons à la figure 4.20 les énergies cinétiques de la figure 4.19 avec une échelle logarithmique en ordonnée. Le taux de croissance pour le mode  $\sigma_1$  varie d'environ  $0.02$  s<sup>-1</sup> lorsque  $Re_f = 270$  à  $0.09$  s<sup>-1</sup> lorsque  $Re_f = 1040$  (voir tableau 4.1 qui montre les valeurs des taux de croissance  $\gamma_{\sigma_1^*}$ ). À titre de comparaison et en reprenant un cas particulier décrit dans Bordes *et al.* [22], le taux de croissance de l'instabilité par résonance triadique d'une onde plane prédit par la théorie vaut  $0.09$  s<sup>-1</sup> à  $Re = 220$  (nombre de Reynolds basé sur les caractéristiques de l'onde plane évidemment) pour des paramètres expérimentaux comparables ( $\sigma_0/2\Omega = 0.84$ ,  $U = 0.29$  cm.s<sup>-1</sup> et  $\lambda = 7.6$  cm). On retrouve ici l'ordre de grandeur des taux de croissance observés dans nos expériences. Toutefois cette estimation ne prend pas en compte les effets de taille finie de l'onde primaire qui ont tendance à diminuer le taux de croissance  $\gamma_{\sigma_1^*}$  de l'instabilité, comme l'ont montré Bourget *et al.* [99] pour les ondes internes de gravité dans un travail numérique et théorique.

On s'intéresse finalement à la mise en place du mode géostrophique associé aux basses fréquences. L'énergie cinétique  $K_{BF}$  devient non-nulle à partir du seuil  $Re_2 \simeq 330$  comme déjà dit plus tôt. On remarque aussi que l'énergie cinétique  $K_{BF}$  devient rapidement plus importante que celle contenue dans le mode forcé  $K_{\sigma_0^*}$  (en moyenne temporelle) lorsque le nombre de Reynolds de forçage augmente. Pour les expériences réalisées au-delà du seuil  $Re_2 \simeq 330$  de l'instabilité donnant naissance au mode géostrophique, on remarque que l'énergie cinétique  $K_{BF}$  dans ce mode est très intermittente, notamment à travers des fluctuations entre un niveau de valeur maximal et des valeurs très faibles, et ce que l'on soit dans le régime transitoire ou stationnaire des expériences. La nature intermittente de  $K_{BF}$  est la conséquence de la lente dérive dans l'aquarium des tourbillons invariants verticalement qui constituent l'écoulement à basse fréquence. Lorsqu'un tourbillon passe dans le plan de mesure, il augmente brutalement l'énergie cinétique associée aux basses fréquences puis elle redescend à presque zéro lorsque le tourbillon sort du plan de mesure. On constate aussi que le mode à basse fréquence met jus-

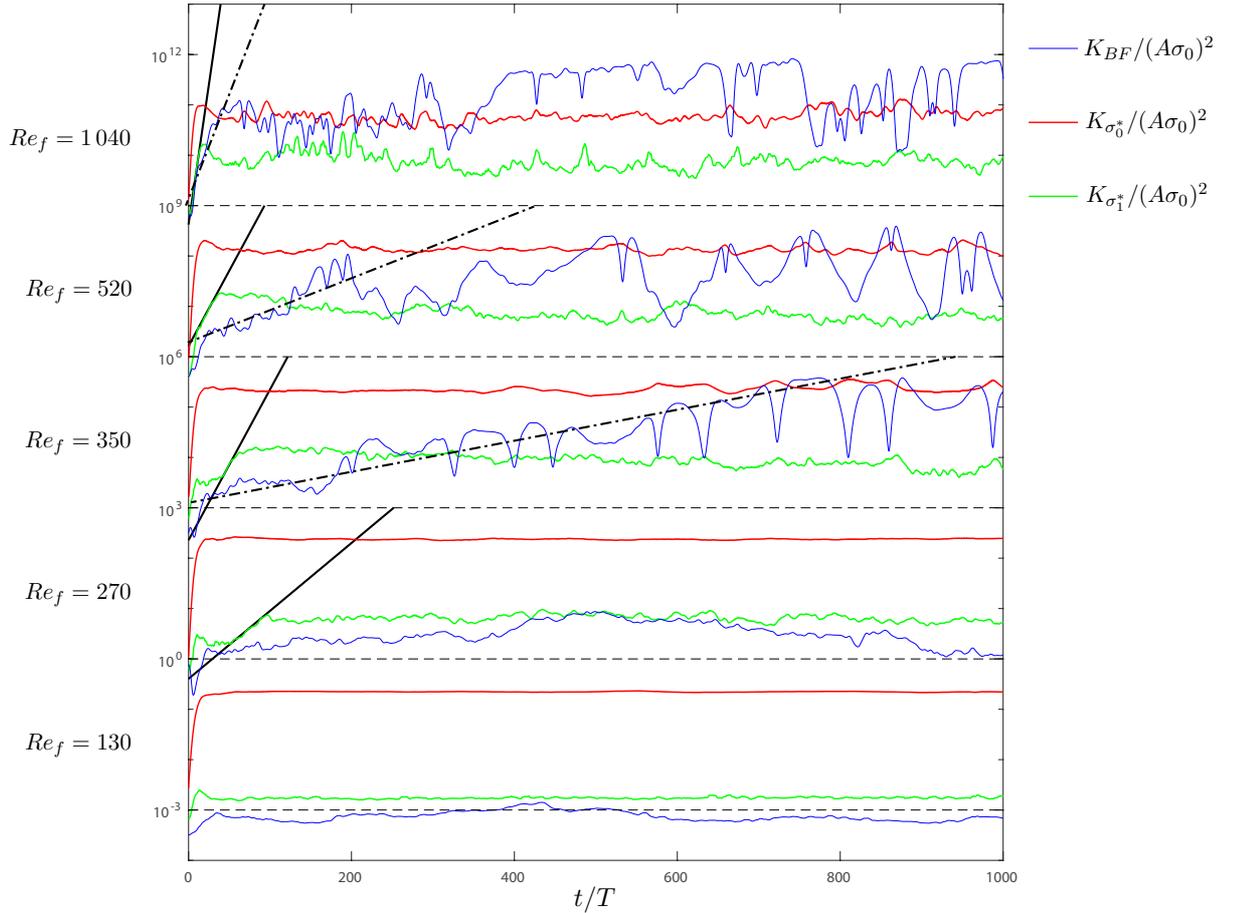


FIGURE 4.20 – Agrandissement de la figure 4.19 entre  $t = 0T$  et  $t = 100T$ . Série temporelle de l'énergie cinétique  $K_{\sigma_0^*}$ ,  $K_{\sigma_1^*}$  et  $K_{BF}$  pour différents nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Toutes les énergies cinétiques sont normalisées par la vitesse de forçage au carré  $(A\sigma_0)^2$  et le temps  $t$  est normalisé par la période de forçage  $T$ . L'ordonnée est en échelle logarithmique et un facteur 1000, matérialisé par les droites noires tiretées, est appliqué entre les courbes des différentes expériences par soucis de lisibilité. Les droites noires pleines et tiretées-pointillées montrent les pentes utilisées pour l'estimation du taux de croissance  $\gamma_{\sigma_1^*}$  de l'instabilité par résonance triadique et du taux de croissance  $\gamma_{BF}$  du mode géostrophique respectivement. Un récapitulatif des valeurs des taux de croissance est donné dans le tableau 4.1.

#### 4.4. QUEL MÉCANISME DONNE NAISSANCE AU MODE GÉOSTROPHIQUE ?

$Re_f$	270	350	520	1 040
$\gamma_{\sigma_1^*}$ (s <sup>-1</sup> )	0.016	0.035	0.035	0.087
$\gamma_{BF}$ (s <sup>-1</sup> )	—	0.004	0.009	0.043
$\gamma_{BF}/\gamma_{\sigma_1^*}$	—	0.10	0.27	0.50
$Ro$	0.05	0.06	0.09	0.17

TABLE 4.1 – Taux de croissance  $\gamma_{\sigma_1^*}$  de l’instabilité par résonance triadique et  $\gamma_{BF}$  de l’instabilité donnant naissance au mode géostrophique en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Le rapport entre les deux est aussi indiqué pour faciliter la comparaison ainsi que le nombre de Rossby de forçage  $Ro = A\sigma_0/2\Omega d$ , avec  $d$  le diamètre du cylindre et  $A\sigma_0$  la vitesse de forçage. Les taux de croissance rassemblés dans ce tableau correspondent aux pentes représentées à la figure 4.20.

qu’à 500 périodes  $T$  pour atteindre la saturation pour les expériences réalisées près de son seuil d’apparition (voir  $Re_f = 350$ ). Comme on le voit à la figure 4.20 et dans le tableau 4.1, où l’on estime de manière grossière le taux de croissance  $\gamma_{BF}$  de l’instabilité donnant naissance au mode à basse fréquence, celui-ci augmente avec le nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$ . Le caractère intermittent du mode à basse fréquence empêche toutefois d’obtenir une mesure précise de ce taux de croissance. Comme le mode géostrophique est celui qui met le plus longtemps à atteindre son état statistiquement stationnaire, c’est ce dernier qui pilote la durée du régime transitoire. C’est guidé par cette observation que nous avons choisi d’écarter les 500 premières périodes dans le calcul des spectres de la figure 4.8 afin qu’ils soient représentatifs du régime stationnaire de l’écoulement.

On remarque dans le tableau 4.1 que le taux de croissance de l’instabilité par résonance triadique  $\gamma_{\sigma_1^*}$  est toujours plus grand que le taux de croissance  $\gamma_{BF}$  de l’instabilité donnant naissance au mode géostrophique. En s’intéressant au rapport  $\gamma_{BF}/\gamma_{\sigma_1^*}$ , on remarque que celui-ci augmente avec le nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  (on passe ainsi de  $\gamma_{BF} \simeq 0.10\gamma_{\sigma_1^*}$  lorsque  $Re_f = 350$  à  $\gamma_{BF} \simeq 0.50\gamma_{\sigma_1^*}$  lorsque  $Re_f = 1\,040$ ). Cela indique que le taux de croissance  $\gamma_{BF}$  croît plus rapidement avec le nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  que  $\gamma_{\sigma_1^*}$  même si ce dernier reste significativement plus grand quelque soit le nombre de Reynolds  $Re_f$ . Dans nos expériences, nous n’avons pas fait varier le taux de rotation  $\Omega$  et donc pas réellement exploré la dépendance de nos observations avec le nombre de Rossby  $Ro$  de forçage. On peut toutefois noter que nos observations pourraient être compatibles avec un taux de croissance du mode géostrophique  $Ro$  fois plus petit que celui de l’instabilité par résonance triadique (qui est en  $U/\lambda = Ro\Omega$ ), c’est-à-dire en  $Ro^2\Omega$ .

#### 4.4.3 Interprétation de l’émergence du mode géostrophique : l’instabilité par résonance quartetique

Nous présentons dans cette partie une interprétation théorique à l’émergence du mode géostrophique observée dans nos expériences. Ce travail théorique a principalement été réalisé par

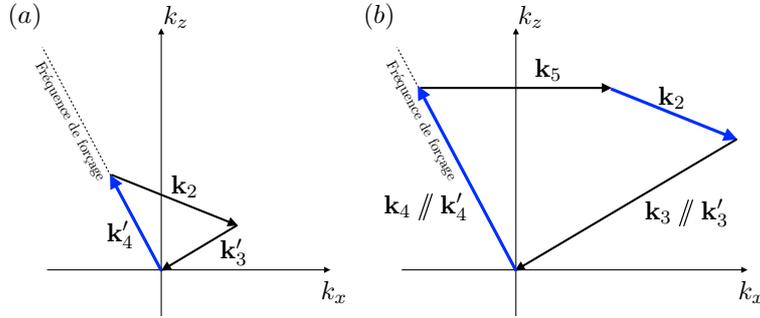


FIGURE 4.21 – Illustration de l’instabilité quartetique secondaire. (a) Transfert d’énergie du mode  $\mathbf{k}'_4$  vers les modes  $\mathbf{k}_2$  et  $\mathbf{k}'_3$  par l’instabilité par résonance triadique. (b) Quartet résonant entre  $\mathbf{k}_2$ , un vecteur d’onde horizontal  $\mathbf{k}_5$  et deux vecteurs d’ondes  $\mathbf{k}_4$  et  $\mathbf{k}_3$  fermant le quartet et parallèles à  $\mathbf{k}'_4$  et  $\mathbf{k}'_3$  respectivement. Le vecteur d’onde  $\mathbf{k}_4$  est issu du forçage et  $\mathbf{k}_2$  est alimenté en énergie par l’instabilité par résonance triadique à l’étape (a). Le mode géostrophique  $\mathbf{k}_5$  émerge spontanément grâce à l’instabilité quartetique, tout comme  $\mathbf{k}_3$ .

Basile Gallet, chercheur au CEA Saclay avec qui nous avons collaboré. L’équipe du FAST est ici intervenue principalement à travers une analyse critique de cette description théorique et pour sa mise en forme.

En 1999, Smith et Walleffe ont montré, en réalisant un développement multi-échelle en temps de la décomposition de l’équation de Navier-Stokes sur la base des modes hélicoïdaux, que lorsque le nombre de Rossby n’est pas infiniment petit, deux triades non-résonantes impliquant quatre modes résonants (temporellement et spatialement) peuvent échanger efficacement de l’énergie et ce y compris dans le cas où le “quartet” implique un mode 2D et trois ondes d’inertie en son sein. Dans notre article, nous repartons du développement multi-échelle de Smith et Walleffe pour montrer que ces interactions quartetiques résonantes peuvent être la base d’un mécanisme d’instabilité transférant spontanément de l’énergie d’un couple d’ondes d’inertie vers un mode 2D et une troisième onde. Nous avons baptisé ce mécanisme “Instabilité par résonance quartetique” : l’équivalent à quatre ondes de l’instabilité par résonance triadique. Dans notre cas expérimental, l’écoulement de base de cette instabilité quartetique serait constitué d’une onde forcée et d’une onde produite par l’instabilité par résonance triadique et l’instabilité par résonance quartetique produirait une onde fille et un mode 2D.

Nous choisissons un écoulement de base proche de l’écoulement forcé par les cylindres oscillants constitué de faisceaux auto-similaires composés d’ondes à la fréquence  $\sigma_0 = 0.84 \times 2\Omega$  et comportant chacun une distribution de vecteurs d’ondes parallèles, centrés autour d’un vecteur d’ondes dominant (cf. partie 1.3.2). Dans l’exemple théorique décrit ici, on considère un écoulement de base constitué d’une superposition d’ondes d’inertie à la fréquence  $\sigma(\mathbf{k}'_4) = 0.89 \times 2\Omega$  et impliquant une certaine distribution de vecteurs d’ondes parallèles. Cette distribution contient notamment les vecteurs d’ondes  $\mathbf{k}'_4 = k_0[-12/5; 0; 24/5]$  et  $\mathbf{k}_4 = k_0[-4; 0; 8]$ . Ce choix de vecteurs d’ondes particuliers pour les ondes primaires du modèle, associés à une fréquence légèrement différente de celle des ondes forcées expérimentales, est motivé par la volonté de simplifier

#### 4.4. QUEL MÉCANISME DONNE NAISSANCE AU MODE GÉOSTROPHIQUE ?

---

les lourds calculs analytiques menés dans l'annexe A, sans toutefois s'éloigner de manière importante des valeurs expérimentales. Le scénario que nous décrivons ensuite implique l'instabilité par résonance triadique de l'onde  $\mathbf{k}'_4$  de vecteur d'ondes  $k_0[-12/5; 0; 24/5]$  suivi d'une instabilité quartetique impliquant comme écoulement de base une des ondes produites par l'instabilité triadique et l'onde "forcée"  $\mathbf{k}_4 = k_0[-4; 0; 8]$ . Nous choisissons pour cela, relativement arbitrairement une seule triade d'ondes résonantes ainsi qu'un quartet d'ondes associé dans le but de donner un exemple simple d'un transfert d'énergie vers le mode géostrophique par le mécanisme d'instabilité par résonance quartetique. Un schéma de la triade et du quartet considéré est montré à la figure 4.21. Le quartet est en fait le même que celui considéré par Smith et Waleffe [23] dans leur article de 1999.

Nous considérons dans un premier temps la triade de la figure 4.21(a) impliquant les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_2 = k_0[6; 0; -3]$ ,  $\mathbf{k}'_3 = k_0[-18/5; 0; -9/5]$  et  $\mathbf{k}'_4 = k_0[-12/5; 0; 24/5]$  et les polarités  $s_2 = +1$ ,  $s'_3 = +1$ ,  $s'_4 = +1$ . Au delà d'un premier seuil en vitesse de forçage, le mode  $\mathbf{k}'_4$  transfère spontanément une partie de son énergie vers les modes  $\mathbf{k}'_3$  et  $\mathbf{k}_2$  par le mécanisme d'instabilité par résonance triadique. Nous introduisons ensuite le quartet de la figure 4.21(b) impliquant les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{k}_3 = k_0[-10; 0; -5]$ ,  $\mathbf{k}_4 = k_0[-4; 0; 8]$  et  $\mathbf{k}_5 = k_0[8; 0; 0]$  et les polarités  $s_2 = +1$ ,  $s_3 = +1$ ,  $s_4 = +1$ ,  $s_5 = -1$ .  $\mathbf{k}_3$  et  $\mathbf{k}_4$  sont parallèles à  $\mathbf{k}'_3$  et  $\mathbf{k}'_4$  respectivement et correspondent donc à des ondes à la même fréquence en accord avec la relation de dispersion des ondes d'inertie

$$\sigma = s \frac{2\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{|\mathbf{k}|} \quad (4.6)$$

qui relie la fréquence des ondes à la direction du vecteur d'ondes comme détaillé dans la partie 1.3. Au delà d'un second seuil en vitesse de forçage, ce sont les modes  $\mathbf{k}_4$  et  $\mathbf{k}_2$  qui transfèrent spontanément une partie de leur énergie vers le mode  $\mathbf{k}_3$  et le mode géostrophique  $\mathbf{k}_5$ .

Nous allons en effet montrer que le mode  $\mathbf{k}_3$  et le mode géostrophique  $\mathbf{k}_5$  peuvent émerger spontanément par une instabilité par résonance quartetique. On note par la suite  $b_i$  l'amplitude en vitesse du mode du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$  de polarité  $s_i$ . L'écoulement de base de l'instabilité quartetique est constitué de deux ondes d'amplitudes  $b_2$  et  $b_4$ , supposées indépendantes du temps, qui ont respectivement été alimentées en énergie par le forçage et par l'instabilité par résonance triadique. Le développement asymptotique multi-échelles dans la limite des faibles nombres de Rossby de la décomposition de l'équation de Navier-Stokes sur la base des modes hélicoïdaux conduit aux équations d'évolution suivantes pour le quartet :

$$(\partial_t + \nu k_3^2) b_3 = C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_5}^{+1, +1, +1, -1} \overline{b_2} \overline{b_4} \overline{b_5}, \quad (4.7)$$

$$(\partial_t + \mu + \nu k_5^2) b_5 = C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_4}^{-1, +1, +1, +1} \overline{b_2} \overline{b_3} \overline{b_4}, \quad (4.8)$$

la barre désignant ici la conjugaison complexe. Le développement asymptotique ainsi que l'expression des coefficients d'interaction quartetique  $C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_5}^{+1, +1, +1, -1}$  et  $C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_4}^{-1, +1, +1, +1}$  sont détaillés en annexe A. Dans l'équation (4.8) le terme dissipatif  $\mu$  spécifique au mode 5 invariant verticalement a été ajouté de manière ad-hoc. Celui-ci traduit le puits d'énergie que vont constituer

pour le mode 2D la dissipation dans les couches limites sur la paroi constituant le fond de l'écoulement. Dans le cas où ces couches limites d'Ekman sont laminares, leur épaisseur est  $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$  et le taux de dissipation de l'énergie qui leur est associé est  $\nu(U_\perp/\delta)^2$  ou  $U_\perp$  est la vitesse au-delà de la couche limite. Si l'écoulement balayant le fond de l'aquarium est un mode géostrophique, invariant verticalement, de vitesse locale horizontale  $U_{BF}$ , la dissipation volumique équivalente induite par la couche limite laminaire sur le tourbillon géostrophique sera  $\epsilon_{Ek} \sim \nu \left( \frac{U_{BF}}{\delta} \right)^2 \frac{\delta}{H} = \sqrt{\nu\Omega} U_{BF}^2 / H$ . Dans le cas où les couches limites des tourbillons géostrophiques sur le fond de l'aquarium restent laminaire, le coefficient  $\mu$  de l'équation (4.8) aura donc pour loi d'échelle  $\mu = \epsilon_{Ek} / U_{BF}^2 = \sqrt{\nu\Omega} / H$ .

Nous considérons ensuite la stabilité de l'écoulement de base composé des ondes d'amplitudes  $b_2$  et  $b_4$  vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale composés des modes 3 et 5,  $b_3(t) \ll 1$  et  $b_5(t) \ll 1$ . En considérant des modes 3 et 5 évoluant en  $e^{\gamma_{BF}t}$ , les équations (4.7) et (4.8) permettent d'explicitier le taux de croissance  $\gamma_{BF}$  de l'instabilité en négligeant dans un premier temps les termes dissipatifs

$$\gamma_{BF} = \pm \sqrt{C_{\mathbf{k}_3;\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_4;\mathbf{k}_5}^{+1,+1,+1,-1} \times \overline{C}_{\mathbf{k}_5;\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3;\mathbf{k}_4}^{-1,+1,+1,+1}} |b_2||b_4|. \quad (4.9)$$

Comme démontré en l'annexe A, le terme sous la racine est positif, montrant que le mode géostrophique  $\mathbf{k}_5$  émerge bien spontanément via une instabilité par résonance quartetique. Lorsque les termes dissipatifs  $\nu k_3^2$ ,  $\nu k_5^2$  et  $\mu$  sont cette fois pris en compte, le taux de croissance (4.9) devient positif seulement au-delà d'un seuil pour le produit  $|b_2||b_4|$  des amplitudes des ondes mères de l'instabilité. Cette valeur est déterminée par une analyse linéaire de stabilité réalisée sur les équations (4.7) et (4.8), avant de chercher la condition pour laquelle le taux de croissance  $\gamma_{BF}$  s'annule. On obtient finalement le critère d'instabilité :

$$|b_2||b_4| \geq \sqrt{\frac{\nu k_3^2 (\mu + \nu k_5^2)}{C_{\mathbf{k}_3;\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_4;\mathbf{k}_5}^{+1,+1,+1,-1} \times \overline{C}_{\mathbf{k}_5;\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3;\mathbf{k}_4}^{-1,+1,+1,+1}}}. \quad (4.10)$$

En d'autres termes, le système a besoin d'être suffisamment au-delà du seuil de l'instabilité par résonance triadique, avec une amplitude en vitesse  $|b_2|$  de l'onde produite par l'instabilité triadique primaire suffisamment grande, pour déclencher le mécanisme d'instabilité par résonance quartetique.

Nous effectuons à présent une analyse dimensionnelle des équations (4.9) et (4.10). L'annexe A nous permet d'écrire que  $\sqrt{C_{\mathbf{k}_3;\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_4;\mathbf{k}_5}^{+1,+1,+1,-1} \times \overline{C}_{\mathbf{k}_5;\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3;\mathbf{k}_4}^{-1,+1,+1,+1}} \simeq \sqrt{726} k_0^2 / \Omega \simeq 0.27 k_4'^2 / \Omega$ . Ainsi, le taux de croissance inviscide de l'instabilité quartetique pourra s'écrire dimensionnellement comme le rapport du nombre de Rossby sur le temps non-linéaire  $\tau_{NL} = L/U$  associé aux ondes mères de l'instabilité, i.e.

$$\gamma_{BF} \sim U^2 / \Omega L^2 = Ro / \tau_{NL}, \quad (4.11)$$

où  $L$  et  $U$  sont respectivement la longueur d'onde et la vitesse caractéristique des ondes mères de

#### 4.4. QUEL MÉCANISME DONNE NAISSANCE AU MODE GÉOSTROPHIQUE ?

---

l'instabilité que l'on suppose ici du même ordre de grandeur pour les deux ondes mères (ce qui n'est pas le cas dans les expériences). En unités adimensionnées par le taux de rotation  $\Omega$ , le taux de croissance inviscide de l'instabilité quartetique  $\gamma_{BF}$  est donc d'ordre  $Ro^2$ . Celui-ci est plus petit d'un facteur  $Ro$  que le taux de croissance inviscide de l'instabilité par résonance triadique  $\gamma_{\sigma_1^*}$  qui est proportionnel à l'inverse du temps non-linéaire de l'onde primaire et donc d'ordre  $Ro$  en unités adimensionnées (cf. partie 1.4). On s'attend donc à ce que l'instabilité par résonance quartetique soit plus lente, typiquement d'un facteur  $Ro$  que l'instabilité par résonance triadique. Même si nos données restent trop parcellaires pour conclure, cette prédiction est compatible avec les valeurs obtenues expérimentalement du rapport  $\gamma_{BF}/\gamma_{\sigma_1^*}$  du tableau 4.1 entre le taux de croissance du mode géostrophique et celui des ondes sous-harmoniques qui sont bien de l'ordre de  $Ro$ .

En négligeant le terme ad-hoc de dissipation dans les couches limite d'Ekman  $\mu$  devant la dissipation volumique  $\nu k_5^2$ , le critère d'instabilité (4.9) s'écrit en analyse dimensionnelle  $U^2 \geq \nu\Omega$  soit

$$Ro \geq E_k^{1/2} \quad (4.12)$$

avec  $Ro = U/2\Omega L$  le nombre de Rossby et  $E_k = \nu/\Omega L^2$  le nombre d'Ekman tous deux construits sur les échelles de vitesse et de longueur d'onde des ondes mères de l'instabilité. La loi (4.12) correspond à celle mise en évidence pour l'apparition du mode géostrophique par Le Reun *et al.* [98] dans leurs expériences d'instabilité elliptique dans une cavité ellipsoïdale (cf. figure 4.6 de la partie 4.1.3). Si au contraire, la dissipation dans les couches limites d'Ekman laminaire domine la dissipation en volume (i.e.  $\mu = \sqrt{\nu\Omega}/H$  domine  $\nu k_5^2$ ), on obtient pour critère d'instabilité  $U^2 \geq \nu^{3/4}\Omega^{5/4}LH^{-1/2}$  soit

$$Ro \geq E_k^{3/8} \sqrt{\frac{L}{H}}. \quad (4.13)$$

Bien qu'il soit relativement simple (une triade d'ondes dans un plan vertical et un quartet associé dans le même plan), le scénario d'instabilités par résonance triadique puis quartetique que l'on vient de décrire constitue une interprétation théorique séduisante aux observations expérimentales que nous avons présentées plus tôt et en particulier aux diagrammes de bifurcations des figures 4.11 et 4.13. Dans nos expériences, en accord avec le scénario théorique que nous venons de proposer, une première instabilité par résonance triadique est suivie d'une seconde instabilité permettant l'apparition du mode géostrophique. Expérimentalement, cette succession est à la fois observée dans le temps pendant le régime transitoire des expériences et pour le régime statistiquement stationnaire, en fonction du nombre de Reynolds de forçage  $Re_f$  (cf. figures 4.19 et 4.20).

Pour essayer d'aller plus loin dans la confrontation aux expériences, nous allons dans la suite de cette partie estimer les ordres de grandeurs expérimentaux des différents termes intervenants dans le critère d'instabilité quartetique (4.10). Nous estimons ainsi chacun des termes de l'inégalité (4.10) pour l'expérience  $Re_f = 315$  la plus proche sous le seuil  $Re_2$  de l'instabilité donnant

naissance au mode géostrophique. L'amplitude de l'onde primaire  $|b_4|$  vaut approximativement  $\sqrt{2\langle K_{\sigma_0^*} \rangle} \simeq 5.2 \text{ mm s}^{-1}$ . La racine carrée de l'énergie  $\langle K_{\sigma_1^*} \rangle$  du mode sous-harmonique  $\sigma_1$  donne elle  $|b_2| \simeq 1.0 \text{ mm s}^{-1}$ , et le membre de gauche de l'inégalité (4.10) est donc de l'ordre de  $5.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ . Les vecteurs d'ondes ont une longueur comparable dans le quartet représenté à la figure 4.21. Nous estimons donc que  $\nu k_5^2 \simeq \nu k_4^2$ . Dans l'expérience près du seuil de l'instabilité quartetique, le taux de dissipation lié aux couches limites d'Ekman  $\mu = \sqrt{\nu\Omega}/H \simeq 2.3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  est bien plus petit que le terme de dissipation visqueuse en volume  $\nu k_5^2 \simeq \nu k_4^2 \simeq 2.5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  donc nous gardons seulement ce dernier lorsque nous calculons l'ordre de grandeur du membre de droite de l'inégalité (4.10). Par ailleurs, d'après les calculs effectués en annexe A, on a  $k_4 = \sqrt{80}k_0$  et  $C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_5}^{+1, +1, +1, -1} \times \overline{C}_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_4}^{-1, +1, +1, +1} \simeq 726 k_0^4 / \Omega^2$ . Le membre de droite de l'inégalité (4.10) est alors bien approximé par  $80 \nu \Omega / \sqrt{726} \simeq 5.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ . On constate qu'au seuil de l'instabilité générant expérimentalement le mode géostrophique, les deux membres de l'inégalité (4.10) ont des amplitudes tout à fait comparables. Le succès remporté par cette application numérique permet de confirmer que le modèle d'instabilité par résonance quartetique proposé dans cette partie constitue un scénario pertinent pour décrire nos observations.

Pour aller au delà de ces calculs d'ordres de grandeur et essayer de confirmer que l'approche développée ici est bien la bonne, il faudrait inclure dans le modèle l'écoulement de base que l'on observe effectivement dans nos expériences et qui est constitué de faisceaux d'ondes auto-similaires se propageant dans des plans différents. En nous restreignant à un seul faisceau d'ondes auto-similaire comme écoulement de base et aux triades et quartets contenus dans un seul plan de l'espace des vecteurs d'ondes, le travail théorique serait déjà plus raisonnable. Une prédiction quantitative pour le scénario proposé dans cette partie impliquerait ici de maximiser les taux de croissance des instabilités par résonance triadique et quartetique sur l'ensemble des quartets possibles. Une telle étude théorique, ambitieuse, reste à faire.

## 4.5 Influence du taux de dissipation dans la couche limite sur le fond de l'aquarium

Le dispositif expérimental présenté dans ce chapitre avait pour motivation la production d'un écoulement turbulent en rotation où l'énergie serait portée uniquement par des ondes d'inertie, autrement dit, il devait permettre de construire un régime de turbulence d'ondes d'inertie (cf. partie 1.6). Nous avons montré dans les parties précédentes, qu'après avoir subit dans un premier temps une instabilité par résonance triadique, en accord avec le scénario de la turbulence d'ondes, les ondes présentes dans l'écoulement transfèrent une partie de leur énergie directement vers un mode géostrophique, à basse fréquence, constitué de tourbillons d'axe verticaux dérivant horizontalement dans l'aquarium. Nous avons finalement proposé une interprétation théorique à ce processus qui court-circuite l'émergence d'une cascade d'énergie vers les petites échelles et les basses fréquences comme prévue par la phénoménologie de la turbulence d'ondes. Notre modèle montre la possibilité pour une assemblée d'ondes à la même fréquence de transférer leur énergie à un mode géostrophique en deux étapes : d'abord la classique instabilité par

#### 4.5. INFLUENCE DU TAUX DE DISSIPATION DANS LA COUCHE LIMITE SUR LE FOND DE L'AQUARIUM

---

résonance triadique suivie d'une instabilité par résonance quartetique impliquant une onde primaire et une onde produite par la première instabilité comme écoulement de base. Ce modèle demande encore à être étoffé pour devenir prédictif, principalement à travers une recherche du taux de croissance maximal de l'instabilité quartetique sur tous les quartets possibles, mais fournit déjà une explication crédible à nos observations et prédit notamment que l'instabilité quartetique ne sera déclenchée que lorsque les ondes sous-harmoniques produites par l'instabilité triadique primaire dépassent une certaine amplitude. L'équation (4.10) fournit ainsi l'expression du seuil de l'instabilité quartetique (sur un exemple de quartet particulier mais compatible avec les ondes observées expérimentalement) où le produit de l'amplitude des ondes primaires par celles des ondes secondaires doit dépasser une valeur critique. Cette valeur critique fait intervenir des termes dissipatifs et notamment le taux de dissipation  $\mu$ , introduit de manière ad-hoc et traduisant la dissipation des tourbillons géostrophiques dans les couches limites sur le fond de l'aquarium. Cette formule prédit que si l'on augmente ce taux  $\mu$  spécifique au mode géostrophique, on pourra inhiber l'instabilité quartetique sans pour autant affecter la physique des ondes laissant la possibilité à des interactions triadiques secondaires et à une cascade de turbulence d'ondes d'émerger.

Pour pouvoir observer un régime de turbulence d'ondes, il est donc souhaitable de pouvoir modifier le taux de dissipation  $\mu$  de la couche limite située sur le fond de l'aquarium afin d'empêcher l'instabilité par résonance quartetique de faire apparaître le mode géostrophique. En essayant de dissiper de manière sélective le mode 2D dans notre expérience, nous avons ici cherché à reproduire ce que Le Reun *et al.* [97] ont fait en 2017 dans leurs simulations numériques en introduisant un terme d'amortissement sélectif du mode 2D basse fréquence (cf. partie 4.1.2).

Dans ce but, nous avons placé sur le fond de notre aquarium une grille carrée de 50 cm de côté, de 2 cm de hauteur et possédant une structure en nid d'abeille de maille 1.7 cm. Cette grille est centrée dans le carré de  $105 \times 105 \text{ cm}^2$  qui constitue le fond de l'aquarium et fait un angle de  $45^\circ$  avec à ce dernier dans le plan  $(x, y)$ . L'idée derrière l'ajout de cette grille est de transformer les couches limites d'Ekman, a priori laminaires, associées aux tourbillons géostrophiques en couches limites turbulentes, en forçant le décollement de la couche limite du fond de l'aquarium. Les couches limites turbulentes étant bien plus dissipatives, nous espérons augmenter le taux de dissipation effectif  $\mu$  apparaissant dans l'équation (4.10) ou, autrement dit, atténuer fortement le mode géostrophique mais de manière sélective. Nous avons réalisé trois nouvelles expériences en présence de cette grille en nid d'abeille au fond de l'aquarium pour les nombres de Reynolds de forçage  $Re_f = 260, 520$  et  $1040$ . Les acquisitions démarrent en même temps que le forçage et durent 1000 périodes de forçage  $T$  avec une fréquence d'acquisition de 12 images par périodes.

La figure 4.22 reproduit les courbes de bifurcation de l'énergie  $\langle K_{\sigma_1^*} \rangle$  dans le premier mode sous-harmonique et  $\langle K_{BF} \rangle$  dans le mode basse fréquence en fonction du nombre de Reynolds de forçage pour les expériences réalisées sans le fond en nid d'abeille (déjà présentées dans les figures 4.11 et 4.13). Nous y avons ajouté les points de données obtenus lors des expériences avec la grille en nid d'abeille au fond de l'aquarium.

Dans cette figure, on observe que le mode basse fréquence semble avoir complètement disparu, signifiant que le seuil de l'instabilité quartetique semble avoir été repoussé à une valeur de

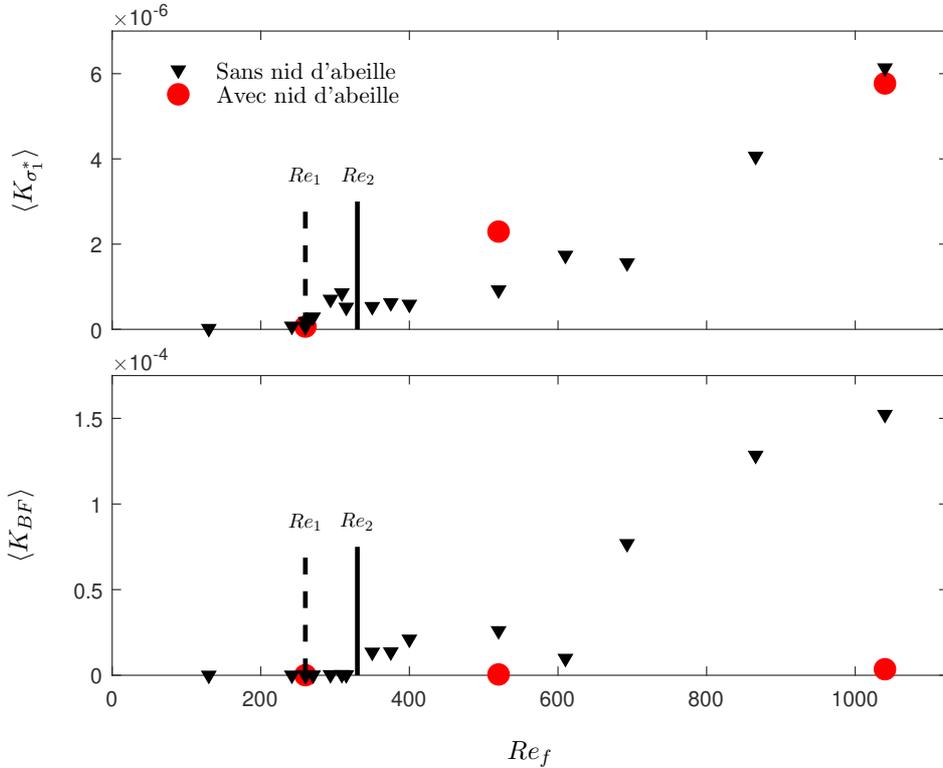


FIGURE 4.22 – Énergie cinétique  $\langle K_{\sigma_1^*} \rangle$  et  $\langle K_{BF} \rangle$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_f$ . Les énergies sont calculées par intégration des spectres temporels dans la bande de fréquence  $0.1 < \sigma^* < \sigma_0^*/2$  pour  $\langle K_{BF} \rangle$  et  $\sigma^* \leq 0.1$  pour  $\langle K_{\sigma_1^*} \rangle$ . Les triangles noirs représentent les acquisitions réalisées sans la structure en nid d'abeille et les points rouges celles réalisées avec.

nombre de Reynolds bien au-delà de ceux explorés. En parallèle, l'énergie cinétique mesurée dans le premier mode sous-harmonique semble n'avoir subi aucune influence significative de la grille en nid d'abeille en accord avec notre intuition que celle-ci n'affecterait pas les ondes mais seulement les tourbillons géostrophiques. Ces nouveaux résultats expérimentaux semblent confirmer que l'instabilité donnant naissance au mode géostrophique est bien distincte de celle de l'instabilité par résonance quartetique.

Avant de réaliser ces expériences, nous avons testé l'influence de la grille en nid d'abeille sur les ondes d'inertie en étudiant la réflexion d'un faisceau d'ondes auto-similaire sur celle-ci. L'observation directe des champs de vitesse rendait difficile la distinction entre l'onde réfléchie et l'onde incidente, et c'est pourquoi cette dernière a été filtrée grâce à un filtrage de Hilbert conservant le quadrant de vecteurs d'onde ainsi que la fréquence correspondant à l'onde réfléchie (Ce filtrage a déjà été décrit dans la partie 3.4 et l'est plus en détail dans Mercier *et al.* [93]). Nous comparons ainsi à la figure 4.23 un faisceau se réfléchissant sur la grille en nid d'abeille (figure 4.23(a)) à un faisceau se réfléchissant sur une plaque lisse (figure 4.23(b)). Les faisceaux d'ondes sont ici produits par un cylindre oscillant à la fréquence  $\sigma^* = 0.87$  situé à environ 45 cm en amont de la réflexion. On observe dans cette figure que les deux faisceaux réfléchis ne pré-

#### 4.5. INFLUENCE DU TAUX DE DISSIPATION DANS LA COUCHE LIMITE SUR LE FOND DE L'AQUARIUM

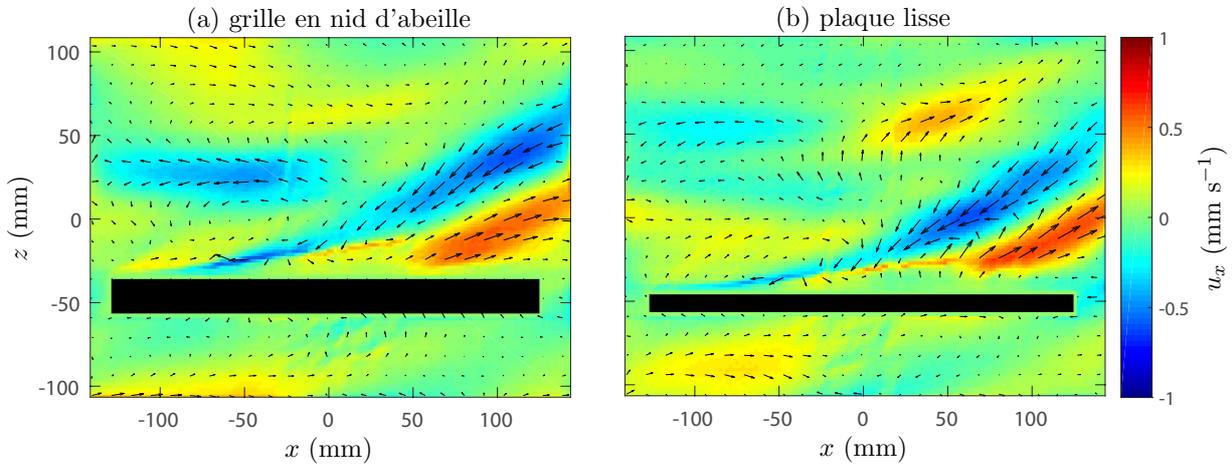


FIGURE 4.23 – Expériences de réflexion d’un faisceau d’ondes auto-similaire issu d’un cylindre oscillant verticalement. Réflexion (a) sur une grille en nid d’abeille de maille de 2.2 cm (contre une maille de 1.7 cm pour la grille utilisée dans les autres expériences) ou (b) sur une plaque. Les rectangles noirs montrent la position de la plaque ou de la grille. Sur ces champs de vitesse, seule l’onde réfléchie apparaît. L’onde incidente a été filtrée grâce à un filtrage de Hilbert conservant le quadrant de vecteurs d’onde ainsi que la fréquence correspondant à l’onde réfléchie. Ce filtrage a déjà été décrit dans la partie 3.4 et l’est plus en détail dans Mercier *et al.* [93]. L’onde incidente est à la fréquence adimensionnée  $\sigma^* = \sigma/2\Omega = 0.87$ , la plateforme tourne à 18 tr/min et la vitesse de forçage est  $U_f = 5 \text{ mm s}^{-1}$ , en dessous du seuil de l’instabilité par résonance triadique.

sentent pas de différences significatives en terme d’amplitude ou de structure. Ces observations semblent confirmer que la grille en nid d’abeille n’affecte que très peu les ondes d’inertie.

Il est intéressant finalement de regarder à la figure 4.24 les spectres temporels des expériences avec la grille en nid d’abeille (en rouge) et de les comparer aux spectres des expériences sans la grille en nid d’abeille aux mêmes nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$  (en noir). On observe évidemment en premier lieu une très forte diminution de l’amplitude du pic d’énergie à basse fréquence en cohérence avec les données de la figure 4.22 déjà discutées. Il semble par ailleurs que, comme dans le cas sans nid d’abeille, les bosses d’énergie sous-harmoniques produites par l’instabilité par résonance triadique deviennent de plus en plus larges et s’éloignent de la moitié de la fréquence de forçage  $\sigma_0^*/2$  lorsque le nombre de Reynolds de forçage augmente (même si seuls deux spectres viennent en témoigner ici). À nombre de Reynolds de forçage identique, les spectres avec et sans la grille en nid d’abeille sont toutefois très différents : en plus d’avoir fortement atténué les basses fréquences, le nid d’abeille a modifié la position et la forme des bosses sous-harmoniques qui sont moins larges et plus proches de la fréquence moitié de la fréquence de forçage  $\sigma_0^*/2$  en présence du nid d’abeille. Ainsi, si l’effet de “sweeping” décrit à la partie 4.3.5 peut expliquer une partie de l’élargissement des bosses par la présence du mode géostrophique (donc l’absence de la grille en nid d’abeille), il ne l’explique pas totalement. C’est en fait ce que nous avons déjà observé dans les expériences d’attracteurs d’ondes du chapitre précédent où il n’y avait pas de présence d’un fort écoulement géostrophique. L’évolution non-linéaire des

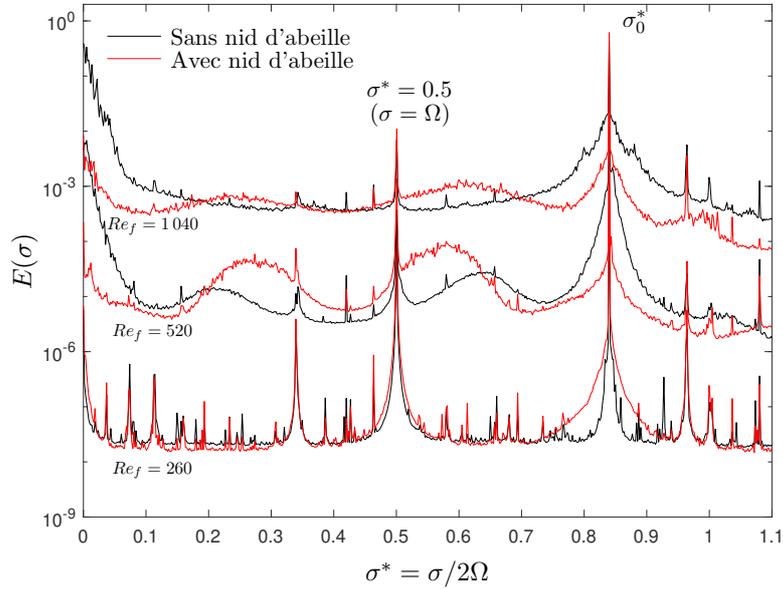


FIGURE 4.24 – Densité spectrale de puissance temporelle  $E(\sigma)$  en fonction de la fréquence normalisée  $\sigma^* = \sigma/2\Omega$  pour trois nombres de Reynolds  $Re_f$ . Les courbes rouges correspondent aux densités spectrales de puissance associées aux expériences réalisées avec la grille en nid d'abeille et les courbes noires à leur équivalent sans nid d'abeille. Un décalage vertical d'un facteur 10 entre les spectres issus d'expériences à des nombres de Reynolds  $Re_f$  différents a été introduit par soucis de lisibilité.

bosses d'énergie des modes sous-harmoniques produits par l'instabilité par résonance triadique reste de ce point de vue largement incomprise.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mesuré expérimentalement le seuil en nombre de Reynolds  $Re_f^c = 285 \pm 25$  de l'instabilité par résonance triadique pour un faisceau d'ondes auto-similaire. À notre connaissance, celui-ci n'avait jamais été déterminé auparavant quelque soit la géométrie du faisceau d'onde étudié (plane, auto-similaire...). Au delà de ce seuil, nous avons constaté que les faisceaux d'ondes auto-similaires issus d'une source ponctuelle s'élargissait et diminuait en intensité lorsque les ondes d'inertie subissent une instabilité par résonance triadique. Ce constat est identique à celui fait sur les attracteurs d'ondes d'inertie présenté dans le chapitre 3 et vient en fait renforcer ses conclusions en les étendant à tous les faisceaux auto-similaires. Nous avons aussi pu confirmer l'augmentation de la largeur des bossés sous-harmoniques des ondes filles et l'éloignement du centre des bossés de la moitié de la fréquence de forçage avec l'augmentation du nombre de Reynolds des ondes primaires. Ce comportement, comparable à celui observé dans nos attracteurs d'ondes d'inertie dans la partie 3.6, est contraire à ce que prédit la théorie de l'instabilité par résonance triadique développée pour les ondes planes et décrite dans la partie 1.4.

## 4.6. CONCLUSION

---

Le résultat majeur de ce chapitre reste que pour les amplitudes de forçage plus grandes que le seuil de l'instabilité par résonance triadique, le système ne tend pas vers un régime de turbulence d'ondes. Au lieu de cela, nous mettons en évidence que la majorité de l'énergie se condense dans un mode géostrophique, invariant verticalement. L'émergence de ce mode est tout à fait remarquable car les interactions triadiques résonantes sont théoriquement incapables de transférer de l'énergie vers un tel mode 2D (théorème de "Greenspan"). En nous inspirant des travaux de Smith et Waleffe [23], nous proposons, conjointement avec Basile Gallet, une description théorique de nos observations s'appuyant sur un développement de l'équation de Navier-Stokes en rotation au troisième ordre en nombre de Rossby et non plus simplement au deuxième ordre comme proposé dans la théorie de la turbulence d'ondes. Nous montrons que l'assemblée d'ondes d'inertie que nous forçons expérimentalement peut conduire à travers une instabilité à quatre ondes résonantes à l'émergence d'un mode géostrophique. Cette "instabilité par résonance quartetique" a pour conséquence de court-circuiter la cascade d'énergie par résonances triadiques prévue par la théorie de la turbulence d'ondes. Cette nouvelle instabilité permet à un forçage composé d'ondes d'inertie de conduire à une composition de l'écoulement finalement comparable à celle obtenue avec les forçages plus usuels de turbulence en rotation.

Toutefois, nous avons aussi montré qu'en introduisant un fond rugueux (par exemple une structure en nid d'abeille), il est possible d'inhiber l'instabilité quartetique ouvrant potentiellement la voie à l'exploration du régime de turbulence d'ondes d'inertie. Ce résultat est très encourageant et constitue un équivalent expérimental à ce qu'avaient réalisé Le Reun *et al.* en 2017 [97] dans leur simulations numériques en introduisant un terme d'amortissement sélectif du mode 2D basse fréquence (cf. partie 4.1.2). Ce type de dissipation sélective peut exister dans les écoulements géophysiques où la rugosité des fond océaniques, surface terrestre ou même manteau terrestre pour le noyau liquide de la Terre pourrait jouer un rôle comparable à notre structure en nid d'abeille.



# Conclusion générale et perspectives

Cette thèse de doctorat est consacrée à l'étude expérimentale d'ondes d'inertie en régime non-linéaire. Les objectifs étaient de caractériser l'instabilité par résonance triadique des ondes d'inertie au-delà du seuil d'instabilité mais aussi d'explorer plus avant le régime non-linéaire des ondes avec l'ambition de trouver une voie expérimentale vers un régime de turbulence d'ondes. Nous avons pour cela mis en œuvre deux dispositifs expérimentaux originaux, l'un produisant un attracteur d'ondes d'inertie et l'autre une assemblée de nombreux faisceaux d'ondes d'inertie auto-similaires.

Dans un premier temps, nous avons présenté les résultats de l'étude expérimentale d'un attracteur d'ondes d'inertie en régime linéaire et non-linéaire dans une cavité trapézoïdale. Nous avons proposé une extension au modèle d'attracteur d'ondes internes de Hazewinkel *et al.* [84] conduisant à une prédiction pour l'amplitude en vitesse de l'attracteur. Nous avons ensuite démontré la pertinence des lois d'échelle pour l'amplitude et la longueur d'onde prédites par ce modèle pour décrire la structure auto-similaire de notre attracteur expérimental en régime linéaire. Pour prolonger ce travail, il serait intéressant d'étudier la structure de l'attracteur d'ondes d'inertie lorsque la dissipation d'énergie dominante n'est plus volumique mais celle qui se produit dans les couches limites sur les parois sur lesquelles ont lieu les réflexions des ondes mais surtout sur les parois verticales parallèles à la propagation des ondes. Un tel travail théorique a récemment été réalisé pour les attracteurs d'ondes internes de gravité par Beckebanze *et al.* [87]. On note ici qu'une telle étude devrait conduire à des conclusions différentes pour les attracteurs d'ondes d'inertie. Ces différences attendues sont liées au caractère tridimensionnel du mouvement des particules fluides dans les ondes d'inertie à la différence du mouvement de translation de ces particules dans les ondes internes de gravité. On pense en particulier ici à l'interaction inertielle des ondes d'inertie avec les parois parallèles à la propagation de l'onde alors que celle-ci est purement visqueuse dans le cas des ondes internes de gravité.

En augmentant l'amplitude de forçage dans ces expériences d'attracteur d'ondes, nous avons observé une réduction de l'amplitude de l'attracteur et une croissance de sa longueur d'onde en accord avec des résultats récents dans des simulations numériques et des expériences en fluide stratifié [28, 77, 78]. Nous avons réussi à décrire quantitativement ce régime non-linéaire de l'attracteur en remplaçant, dans le modèle linéaire, la viscosité du fluide par une viscosité turbulente : les lois d'échelles, avec le nombre de Reynolds associé au forçage, prédites pour les

caractéristiques de l'attracteur se sont révélées en très bon accord avec nos mesures expérimentales où taux de rotation, longueur d'onde et amplitude de forçage ont été variés. Nos résultats démontrent ainsi expérimentalement la pertinence du modèle de faisceau auto-similaire pour décrire les attracteurs d'ondes d'inertie (d'inertie ou de gravité) en régime linéaire et non-linéaire.

Nous avons pu observer que l'entrée de l'attracteur en régime non-linéaire était due à la déstabilisation du faisceau d'ondes par le mécanisme d'instabilité par résonance triadique. Nous avons mesuré expérimentalement le seuil de cette instabilité en nombre de Reynolds de l'onde primaire. Nous avons constaté dans le spectre temporel de l'énergie une augmentation de la largeur en fréquence des bosses sous-harmoniques associées aux ondes filles de l'instabilité et un éloignement de celles-ci de la moitié de la fréquence de forçage avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Ce résultat se distingue des prédictions obtenues à partir de la maximisation du taux de croissance de l'instabilité par résonance triadique d'une onde plane qui prévoit un rapprochement de la fréquence des ondes filles vers la fréquence moitié de celle de l'onde primaire. Il est possible que ce comportement inattendu soit lié aux interactions visqueuses et inertielles de l'attracteur avec les parois verticales parallèles à l'attracteur. En effet, l'instabilité observée pour un attracteur d'ondes d'inertie dans des simulations numériques 2D (invariante dans la direction horizontale normale à la propagation des ondes) de Jouve et Ogilvie [28] montre des bosses sous harmoniques très piquées et se rapprochant de la moitié de la fréquence de forçage avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Nos résultats révèlent ainsi les lacunes des connaissances actuelles sur l'instabilité par résonance triadique des ondes d'inertie. On peut ainsi souligner que nous sommes les premiers, à notre connaissance, à avoir déterminé le seuil de l'instabilité en nombre de Reynolds. Ce seuil a ici été obtenu pour un faisceau d'ondes auto-similaire et il serait intéressant de le déterminer pour une onde plane d'inertie possédant une structure spatiale très différente. Notre travail a aussi montré qu'il manquait une explication à la largeur en fréquence des bosses sous-harmoniques de l'instabilité et à leur éloignement de la moitié de la fréquence de forçage constatée expérimentalement. Une piste d'interprétation alternative à ces différences entre théorie pour une onde plane et expérience réside peut-être dans le fait qu'il est peut être trop simple de penser que ce sont nécessairement les ondes associées au taux de croissance maximal de l'instabilité qui vont dominer. Les mécanismes de saturation des ondes produites par l'instabilité peuvent en effet perturber cette vision et restent largement à comprendre. Les prochaines études expérimentales ou numériques sur le sujet pourraient ainsi s'attacher à clarifier ces différents mécanismes de saturation des ondes sous-harmoniques.

Dans un second temps, nous avons présenté les résultats d'une étude expérimentale dans laquelle on force une assemblée de nombreux faisceaux d'ondes d'inertie auto-similaires. En présence de l'instabilité par résonance triadique, on remarque que les faisceaux d'ondes forcées s'élargissent et diminuent en intensité relative. Ce constat est identique à celui réalisé dans le régime non-linéaire des attracteurs d'ondes d'inertie et vient renforcer les conclusions précédentes en les étendant à tous les faisceaux auto-similaires. Par ailleurs, les bosses sous-harmoniques produites par l'instabilité par résonance triadique dans le spectre temporel de l'énergie révèlent ici un comportement comparable à celui observé dans les expériences d'attracteur avec l'augmen-

## 4.6. CONCLUSION

---

tation de l'amplitude de forçage. Ce constat conforte nos conclusions précédentes sur l'instabilité par résonance triadique.

Le résultat majeur de cette thèse a été obtenu pour des amplitudes de forçage plus grandes que le seuil de l'instabilité par résonance triadique : le système ne tend en effet pas vers un régime de turbulence d'ondes. Au lieu de cela, nous mettons en évidence que la majorité de l'énergie se condense dans un mode géostrophique, invariant verticalement. L'émergence de ce mode est tout à fait remarquable car les interactions triadiques résonantes sont théoriquement incapables de transférer de l'énergie vers un tel mode 2D (théorème de "Greenspan"). Cette émergence d'un mode 2D à partir d'ondes d'inertie avait déjà été observée par le passé par Duran-Matute *et al.* [95] mais nous sommes les premiers, conjointement avec Le Reun *et al.* [98] à montrer que ce mode 2D est issu d'une instabilité des ondes d'inertie (évidemment différente de l'instabilité par résonance triadique). L'émergence de ce mode 2D vient remettre en cause la vision classique de la turbulence en rotation présentée dans le chapitre introductif dans laquelle les ondes d'inertie sont incapables de transférer de l'énergie vers un tel mode 2D et ne jouent un rôle que dans la partie 3D de l'écoulement. Cette nouvelle instabilité semble empêcher l'apparition de la turbulence d'ondes en court-circuitant sa cascade et permet à un forçage composé d'ondes d'inertie de conduire à une composition de l'écoulement finalement comparable à celle obtenue avec les forçages plus usuels de turbulence en rotation.

Nous avons ensuite proposé une description théorique de ces observations s'appuyant sur les travaux de Smith et Waleffe [23] et qui explique l'apparition du mode géostrophique par un mécanisme d'instabilité par résonance "quartetique" dans lequel une onde primaire se déstabilise conjointement à une onde sous-harmonique produite par l'instabilité par résonance triadique. Cette instabilité s'appuie en fait sur la combinaison de deux triades d'ondes d'inertie non-résonantes (les interactions sont bien toujours triadiques) impliquant au total quatre ondes en résonance quartetique. Dans ce travail de thèse, nous avons montré que ce mécanisme fournissait une explication crédible à nos observations notamment vis-à-vis du seuil observé pour l'instabilité quartetique. Toutefois, pour rendre ce modèle prédictif et donc le confirmer de manière définitive, il reste à réaliser un travail majeur : maximiser le taux de croissance de l'instabilité sur tous les quartets d'ondes possibles, travail qu'il faut associer à une connaissance fine des ondes primaires présentes dans l'écoulement qui doivent au moins être deux. On peut finalement souligner que Le Reun *et al.* [25] ont récemment proposé un autre mécanisme à l'émergence d'un mode géostrophique à partir d'ondes d'inertie, s'appuyant lui sur des triades faiblement non-résonantes. Il faut donc retenir de (ou des!) instabilité(s) donnant naissance au mode géostrophique qu'il reste encore un important travail théorique avant de pouvoir pleinement l'expliquer.

Nous avons finalement montré qu'en introduisant un fond rugueux (dans notre cas une structure en nid d'abeille), nous inhibons l'apparition du mode géostrophique sans affecter les ondes d'inertie. Ce type de dissipation sélective peut exister dans les écoulements géophysiques où la rugosité des fond océaniques, de la surface terrestre ou même du manteau terrestre pour le noyau liquide de la Terre pourraient jouer un rôle comparable à notre structure en nid d'abeille. Avoir ainsi réussi à inhiber l'instabilité donnant naissance au mode géostrophique dans notre

expérience nous permet encore d'envisager l'étude d'un régime de turbulence d'ondes d'inertie. C'est porté par cet espoir que nous avons réalisé ces derniers mois de nouvelles expériences sur le même dispositif expérimental que celui utilisé dans le chapitre 4. Dans le but d'augmenter le nombre de Reynolds de forçage, nous avons remplacé les 32 moteurs utilisés dans cette thèse par des moteurs capables d'atteindre des vitesses de forçages plus importantes. Ce système permet d'atteindre des nombres de Reynolds de forçage  $Re_f$  de l'ordre de 3000, soit trois fois plus que le plus grand nombre de Reynolds  $Re_f$  du chapitre 4. Nous avons pour l'instant réalisé de nouvelles expériences avec un fond comportant une structure en nid d'abeille en faisant varier le nombre de Reynolds de forçage pour deux taux de rotations (9 et 18 tr/min). Nous sommes encore en train d'analyser les données de ces nouvelles expériences et avons fait le choix de ne pas les présenter dans ce manuscrit bien que les premiers résultats soient très encourageants.

## Annexe A

# Coefficients d'interactions quartetique

Nous présentons dans cette annexe le fruit du travail théorique réalisé par Basile Gallet sur l'instabilité par résonance quartetique. Il s'agit du “Supplemental Material” de notre lettre Brunet *et al.* parue en 2020.

### —Supplemental Material—

## Shortcut to geostrophy in wave-driven rotating turbulence : the quartetic instability

We detail here the precise conventions considered throughout the Letter, and the asymptotic expansions leading to the quartetic evolution equations and to the quartetic interaction coefficients. Following Smith & Waleffe [23], we decompose the velocity field onto the wavevectors of a triply periodic box, using a helical basis :

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\pm 1} b_s(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_s(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma_s(\mathbf{k})t]}, \quad (\text{A.1})$$

where the first sum is over all wavevectors  $\mathbf{k}$ . The helical basis vectors  $\mathbf{h}_s(\mathbf{k})$  are defined as :

$$\mathbf{h}_s(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}|} + i s \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}|}, \quad (\text{A.2})$$

where  $\hat{\mathbf{z}}$  is the unit vector in the vertical direction, and  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ . The reality constraint for the velocity field imposes  $b_s(\mathbf{k}, t) = \bar{b}_s(-\mathbf{k}, t)$ . The helical basis vectors correspond to the spatial structure of inertial-wave modes, the frequency  $\sigma_s(\mathbf{k})$  of the mode at wavenumber  $\mathbf{k}$  with polarity  $s$  being given by the dispersion relation :

$$\sigma_s(\mathbf{k}) = 2\Omega s \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{k}, \quad (\text{A.3})$$

where  $k = |\mathbf{k}|$ .

## A.1 Quartetic interaction coefficients

Inserting the decomposition (A.1) into the rotating Navier-Stokes equation leads to :

$$(\partial_t + \nu k^2 + \mu \delta_{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{z}}; 0}) b_{s_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2} \sum C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}} s_{\mathbf{p}} s_{\mathbf{q}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{q}}} e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t}. \quad (\text{A.4})$$

This is equation (5) of SW, where we have included an additional  $\mu$ -term mimicking bottom drag acting on the 2D modes, using a kroenecker delta. The sum is over all wavenumbers  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{q}$  such that  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ , and over the polarities  $s_{\mathbf{p}} = \pm 1$ ,  $s_{\mathbf{q}} = \pm 1$ . The triadic interaction coefficients are :

$$C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}} s_{\mathbf{p}} s_{\mathbf{q}}} = \frac{s_{\mathbf{q}} q - s_{\mathbf{p}} p}{2} [\bar{\mathbf{h}}_{s_{\mathbf{p}}}(\mathbf{p}) \times \bar{\mathbf{h}}_{s_{\mathbf{q}}}(\mathbf{q})] \cdot \bar{\mathbf{h}}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}). \quad (\text{A.5})$$

We non-dimensionalize Eq. (A.4) using the timescale  $\Omega^{-1}$  and a length scale  $L$  (for instance, the height of the fluid layer) :

$$(\partial_{\tilde{t}} + \tilde{\nu} \tilde{k}^2 + \tilde{\mu} \delta_{\tilde{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{z}}; 0}) \tilde{b}_{s_{\tilde{\mathbf{k}}}} = \frac{1}{2} \sum C_{\tilde{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}}^{s_{\tilde{\mathbf{k}}} s_{\tilde{\mathbf{p}}} s_{\tilde{\mathbf{q}}}} \tilde{\bar{b}}_{s_{\tilde{\mathbf{p}}}} \tilde{\bar{b}}_{s_{\tilde{\mathbf{q}}}} e^{i(\tilde{\sigma}_{s_{\tilde{\mathbf{k}}}} + \tilde{\sigma}_{s_{\tilde{\mathbf{p}}}} + \tilde{\sigma}_{s_{\tilde{\mathbf{q}}}})\tilde{t}}, \quad (\text{A.6})$$

where  $\tilde{t} = \Omega t$ ,  $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}L$ ,  $\tilde{\nu} = \nu/L^2\Omega$ ,  $\tilde{\mu} = \mu/\Omega$ ,  $\tilde{b}_{s_{\tilde{\mathbf{k}}}} = b_{s_{\mathbf{k}}}/L\Omega$ ,  $\tilde{\sigma}_{s_{\tilde{\mathbf{k}}}} = \sigma_{s_{\mathbf{k}}}/\Omega$ . We drop the tildes in the following to alleviate notations. For rapid global rotation, the Rossby number based on the rms velocity  $U$  is small,  $Ro = U/L\Omega \ll 1$ . We introduce a multiple timescale expansion :

$$b_{s_{\mathbf{k}}} = Ro b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)}(t, T_1, T_2) + Ro^2 b_{s_{\mathbf{k}}}^{(1)}(t, T_1, T_2) + Ro^3 b_{s_{\mathbf{k}}}^{(2)}(t, T_1, T_2) + \dots, \quad (\text{A.7})$$

where the slow time variables are  $T_1 = Rot$  and  $T_2 = Ro^2 t$ . We also consider the weakly damped regime,  $\nu = Ro^2 \nu_0$  and  $\mu = Ro^2 \mu_0$ . In these relations, the quantities  $\nu_0$ ,  $\mu_0$ ,  $b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)}(t, T_1, T_2)$ ,  $b_{s_{\mathbf{k}}}^{(1)}(t, T_1, T_2)$  are at most of the order  $\mathcal{O}(1)$ . Inserting into Eq. (A.6) and collecting terms at order  $\mathcal{O}(Ro)$  yields simply :

$$\partial_t b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)}(t, T_1, T_2) = 0, \quad (\text{A.8})$$

i.e., the wave amplitudes do not vary on the fast timescale.

To order  $\mathcal{O}(Ro^2)$ , Eq. (A.6) yields :

$$\partial_t b_{s_{\mathbf{k}}}^{(1)} + \partial_{T_1} b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}} s_{\mathbf{p}} s_{\mathbf{q}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}}^{(0)} \bar{b}_{s_{\mathbf{q}}}^{(0)} e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t}. \quad (\text{A.9})$$

Averaging the right-hand side with respect to the fast variable  $t$  gives zero, except for resonant triads : if  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}} = 0$ , then the fast-time average is non-zero. When this is the case, we obtain  $\partial_{T_1} b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)} \neq 0$  when averaging (A.9) : this evolution with time  $T_1$  corresponds to the

## A.1. QUARTETIC INTERACTION COEFFICIENTS

---

standard nonlinear interactions within resonant triads of waves. Upon subtracting the  $t$ -average of (A.9) from the full Eq. (A.9), we obtain :

$$\partial_t b_{s_{\mathbf{k}}}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}} \neq 0} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}}^{(0)} \bar{b}_{s_{\mathbf{q}}}^{(0)} e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t}. \quad (\text{A.10})$$

The sum is still over all values of the wave vectors  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{q}$  such that  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ , and over the polarities  $s_{\mathbf{p}} = \pm 1$ ,  $s_{\mathbf{q}} = \pm 1$ , but omitting the resonant triads, that satisfy  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}} = 0$ . The solution to this equation is :

$$b_{s_{\mathbf{k}}}^{(1)} = -\frac{i}{2} \times \sum_{\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}} \neq 0} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} \frac{\bar{b}_{s_{\mathbf{p}}}^{(0)} \bar{b}_{s_{\mathbf{q}}}^{(0)}}{\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}}} e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t}. \quad (\text{A.11})$$

To order  $\mathcal{O}(Ro^3)$ , Eq. (A.6) yields :

$$\partial_t b_{s_{\mathbf{k}}}^{(2)} = -\partial_{T_2} b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)} - \partial_{T_1} b_{s_{\mathbf{k}}}^{(1)} - \nu_0 k^2 b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)} - \mu_0 \delta_{\mathbf{k}, \hat{\mathbf{z}}; 0} b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)} + \sum C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}}^{(0)} \bar{b}_{s_{\mathbf{q}}}^{(1)} e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t} \quad (\text{A.12})$$

We denote as  $\langle \cdot \rangle$  the average over the fast time variable  $t$ . The left-hand side of (A.12) vanishes under this fast-time average, and we obtain :

$$(\partial_{T_2} + \nu_0 k^2 + \mu_0 \delta_{\mathbf{k}, \hat{\mathbf{z}}; 0}) b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)} = \sum C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}}^{(0)}(T) \left\langle \bar{b}_{s_{\mathbf{q}}}^{(1)}(t, T) e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t} \right\rangle. \quad (\text{A.13})$$

where we have used  $\langle \partial_{T_1} b_{s_{\mathbf{k}}}^{(1)} \rangle = 0$ . Substituting the expression of  $b_{s_{\mathbf{k}}}^{(1)}$  the right-hand side becomes :

$$\begin{aligned} & \sum C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}}^{(0)} \left\langle e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t} \frac{i}{2} \sum_{\sigma_{s_{\mathbf{q}}} + \sigma_{s_1} + \sigma_{s_r} \neq 0} \bar{C}_{\mathbf{q}\mathbf{l}\mathbf{r}}^{s_{\mathbf{q}}s_1s_r} \frac{b_{s_1}^{(0)} b_{s_r}^{(0)}}{\sigma_{s_{\mathbf{q}}} + \sigma_{s_1} + \sigma_{s_r}} e^{-i(\sigma_{s_{\mathbf{q}}} + \sigma_{s_1} + \sigma_{s_r})t} \right\rangle \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\sigma_{s_{\mathbf{q}}} + \sigma_{s_1} + \sigma_{s_r} \neq 0} \frac{C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} \bar{C}_{\mathbf{q}\mathbf{l}\mathbf{r}}^{s_{\mathbf{q}}s_1s_r}}{\sigma_{s_{\mathbf{q}}} + \sigma_{s_1} + \sigma_{s_r}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}}^{(0)} b_{s_1}^{(0)} b_{s_r}^{(0)}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

where the latter sum is over all  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{r}$  such that  $\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{q} = 0$ ,  $\mathbf{q} + \mathbf{l} + \mathbf{r} = 0$ ,  $\sigma_{s_{\mathbf{q}}} + \sigma_{s_1} + \sigma_{s_r} \neq 0$  and  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} - \sigma_{s_1} - \sigma_{s_r} = 0$ , with  $s_{\mathbf{p}} = \pm 1$ ,  $s_{\mathbf{q}} = \pm 1$ ,  $s_l = \pm 1$ ,  $s_r = \pm 1$ . Upon changing the blind variables  $\mathbf{l}$  and  $\mathbf{r}$  to  $-\mathbf{l}$  and  $-\mathbf{r}$ , making use of the reality condition  $b_s(\mathbf{k}) = \bar{b}_s(-\mathbf{k})$ , we finally obtain :

$$(\partial_{T_2} + \nu_0 k^2 + \mu_0 \delta_{\mathbf{k}, \hat{\mathbf{z}}; 0}) b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)} = \frac{i}{2} \sum \frac{C_{\mathbf{k}; \mathbf{p}; \mathbf{l}; \mathbf{r}}^{s_{\mathbf{k}}; s_{\mathbf{p}}; s_{\mathbf{l}}; s_{\mathbf{r}}} \bar{C}_{\mathbf{l}; \mathbf{r}; -\mathbf{l}; -\mathbf{r}}^{s; s_1; s_r}}{\sigma_s(\mathbf{l} + \mathbf{r}) - \sigma_{s_1} - \sigma_{s_r}} \bar{b}_{s_{\mathbf{p}}}^{(0)} \bar{b}_{s_1}^{(0)} \bar{b}_{s_r}^{(0)}, \quad (\text{A.15})$$

where the sum is over all values of  $\mathbf{p}, \mathbf{l}$ , and  $\mathbf{r}$  such that  $\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{r} = 0$ ,  $\sigma_s(\mathbf{l} + \mathbf{r}) - \sigma_{s_1} - \sigma_{s_r} \neq 0$ ,  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_1} + \sigma_{s_r} = 0$ , with  $s_{\mathbf{p}} = \pm 1$ ,  $s_1 = \pm 1$ ,  $s_r = \pm 1$ ,  $s = \pm 1$ .

We now focus on the quartet in Fig. 4 of the Letter\* : the dominant flow only includes the quartet of modes we are interested in, i.e.,  $b_{s_{\mathbf{k}_2}}^{(0)} \neq 0$ ,  $b_{s_{\mathbf{k}_3}}^{(0)} \neq 0$ ,  $b_{s_{\mathbf{k}_4}}^{(0)} \neq 0$ ,  $b_{s_{\mathbf{k}_5}}^{(0)} \neq 0$ , with the polarities  $(s_{\mathbf{k}_2}, s_{\mathbf{k}_3}, s_{\mathbf{k}_4}, s_{\mathbf{k}_5}) = (+1, +1, +1, -1)$ , and  $b_{s_{\mathbf{k}}}^{(0)} = 0$  for the other modes (except the ones needed to ensure the reality condition). Equation (A.15) for the mode 5 reads :

$$(\partial_{T_2} + \nu_0 k_5^2 + \mu_0) b_{s_{\mathbf{k}_5}}^{(0)} = C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_4}^{-1, +1, +1, +1} \bar{b}_{s_{\mathbf{k}_2}}^{(0)} \bar{b}_{s_{\mathbf{k}_3}}^{(0)} \bar{b}_{s_{\mathbf{k}_4}}^{(0)}, \quad (\text{A.16})$$

where the quartetic interaction coefficient is :

$$C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_4}^{-1, +1, +1, +1} = i \left[ \frac{C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}^{-1; +1; +1} \bar{C}_{\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4; -\mathbf{k}_3; -\mathbf{k}_4}^{+1; +1; +1}}{\sigma_{+1}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_3) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_4)} + \frac{C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}^{-1; +1; -1} \bar{C}_{\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4; -\mathbf{k}_3; -\mathbf{k}_4}^{-1; +1; +1}}{\sigma_{-1}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_3) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_4)} \right. \\ \left. + \frac{C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4}^{-1; +1; +1} \bar{C}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4; -\mathbf{k}_2; -\mathbf{k}_4}^{+1; +1; +1}}{\sigma_{+1}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_2) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_4)} + \frac{C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4}^{-1; +1; -1} \bar{C}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4; -\mathbf{k}_2; -\mathbf{k}_4}^{-1; +1; +1}}{\sigma_{-1}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_2) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_4)} \right. \\ \left. + \frac{C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3}^{-1; +1; -1} \bar{C}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3; -\mathbf{k}_2; -\mathbf{k}_3}^{-1; +1; +1}}{\sigma_{-1}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_2) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_3)} \right]. \quad (\text{A.17})$$

Similarly, Eq. (A.15) for the mode 3 reads :

$$(\partial_{T_2} + \nu_0 k_3^2) b_{s_{\mathbf{k}_3}}^{(0)} = C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_5}^{+1, +1, +1, -1} \bar{b}_{s_{\mathbf{k}_2}}^{(0)} \bar{b}_{s_{\mathbf{k}_3}}^{(0)} \bar{b}_{s_{\mathbf{k}_4}}^{(0)}, \quad (\text{A.18})$$

where the quartetic interaction coefficient is :

$$C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_5}^{+1, +1, +1, -1} = i \left[ \frac{C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_4}^{+1; +1; -1} \bar{C}_{\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_4; -\mathbf{k}_5; -\mathbf{k}_4}^{-1; -1; +1}}{\sigma_{-1}(\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_4) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_4)} + \frac{C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4}^{+1; -1; +1} \bar{C}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4; -\mathbf{k}_2; -\mathbf{k}_4}^{+1; +1; +1}}{\sigma_{+1}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_2) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_4)} \right. \\ \left. + \frac{C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4}^{+1; -1; -1} \bar{C}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4; -\mathbf{k}_2; -\mathbf{k}_4}^{-1; +1; +1}}{\sigma_{-1}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_2) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_4)} + \frac{C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5}^{+1; +1; +1} \bar{C}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5; -\mathbf{k}_2; -\mathbf{k}_5}^{+1; +1; -1}}{\sigma_{+1}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_2)} \right. \\ \left. + \frac{C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5}^{+1; +1; -1} \bar{C}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5; -\mathbf{k}_2; -\mathbf{k}_5}^{-1; +1; -1}}{\sigma_{-1}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_5) - \sigma_{+1}(\mathbf{k}_2)} \right]. \quad (\text{A.19})$$

Our expressions for the quartetic interaction coefficients differ from that of SW : both polarities arise for the intermediate wavevectors of the form  $\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j$  appearing at the denominator, provided this denominator does not vanish. Instead, SW pick the values of these polarities somewhat arbitrarily.

After substituting the expression of the triadic interaction coefficients in the expressions

---

\*. Identique à la figure 4.21 de cette thèse

## A.1. QUARTETIC INTERACTION COEFFICIENTS

---

above, the dimensional values of the quartetic coefficients appearing in the Letter are :

$$C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_5}^{+1, +1, +1, -1} = \frac{k_0^2}{\Omega} \times \frac{3i}{10} (73 + 49\sqrt{5}), \quad (\text{A.20})$$

$$C_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_4}^{-1, +1, +1, +1} = \frac{k_0^2}{\Omega} \times \frac{24i}{5} (5 - \sqrt{5}), \quad (\text{A.21})$$

and the product of coefficients appearing in the growth rate is :

$$C_{\mathbf{k}_3; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_4; \mathbf{k}_5}^{+1, +1, +1, -1} \times \overline{C}_{\mathbf{k}_5; \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3; \mathbf{k}_4}^{-1, +1, +1, +1} = \frac{k_0^4}{\Omega^2} \times \frac{144}{25} (30 + 43\sqrt{5}) \simeq 726 \frac{k_0^4}{\Omega^2} > 0. \quad (\text{A.22})$$



# Bibliographie

- [1] M. Le Bars, D. Lecoanet, *Fluids Mechanics of Planets and Stars*, (Springer-Verlag, Heidelberg, 2019).
- [2] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, (Springer-Verlag, Heidelberg, 1987).
- [3] P.A. Davidson, *Turbulence in rotating, stratified and electrically conducting fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [4] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoin, M. Moulin, Ph. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, et F. Ravelet, *Generation of a Magnetic Field by Dynamo Action in a Turbulent Flow of Liquid Sodium*, Phys. Rev. Lett. **98**, 044502 (2007).
- [5] J. Proudman, *On the motion of solids in a liquid possessing vorticity*, Proc. R. Soc. Lond. A **92**, 408 (1916).
- [6] G.I. Taylor, *Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational*, Proc. R. Soc. Lond. A **93**, 92 (1917).
- [7] H. Greenspan, *The Theory of Rotating Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1968).
- [8] S. T. Suess, *Viscous flow in a deformable rotating container*, J. Fluid Mech. **45**, 189 (1971).
- [9] C. Morize, M. Le Bars, P. Le Gal, A. Tilgner, *Experimental determination of zonal winds driven by tides*, Phys. Rev. Lett. **104**, 214501 (2010).
- [10] F.H. Busse, *Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell*, J. Fluid Mech. **33**, 739 (1968).
- [11] K.D. Aldridge, A. Toomre, *Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container*, J. Fluid Mech. **37**, 307 (1969).
- [12] P. Melchior, B. Ducarme, *Detection of inertial gravity oscillations in the Earth's core with a superconducting gravimeter*, Phys. Earth Planet. Inter. **42**, 129 (1986).
- [13] K.D. Aldridge, L. I. Lumb, *Inertial waves identified in the Earth's fluid outer core*, Nature **325**, 421 (1987).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [14] R.R. Kerswell, *On the internal shear layers spawned by the critical regions in oscillatory Ekman boundary layers*, J. Fluid Mech. **298**, 311 (1995).
- [15] P. Echeverri, T. Peacock, *Internal tide generation by arbitrary two-dimensional topography*, J. Fluid Mech. **659**, 247 (2010).
- [16] D. W. Moore, P. G. Saffman, *The structure of free vertical shear layers in a rotating fluid and the motion produced by a slowly rising body*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **264**, 597 (1969).
- [17] N.H. Thomas, T. N. Stevenson, *A similarity solution for viscous internal waves*, J. Fluid Mech. **54**, 495 (1972).
- [18] P.-P. Cortet, C. Lamriben, F. Moisy, *Viscous spreading of an inertial wave beam in a rotating fluid*, Phys. Fluids **22**, 086603 (2010).
- [19] N. Machicoane, V. Labarre, B. Voisin, F. Moisy, P.-P. Cortet, *Wake of inertial waves of a horizontal cylinder in horizontal translation*, Phys. Rev. Fluids **3**, 034801 (2018).
- [20] B. Voisin, *Limit states of internal wave beams*, J. Fluid Mech. **496**, 243-293 (2003).
- [21] N. Machicoane, P.-P. Cortet, B. Voisin, F. Moisy, *Influence of the multipole order of the source on the decay of an inertial wave beam in a rotating fluid*, Phys. Fluids **27**, 066602 (2015).
- [22] G. Bordes, F. Moisy, T. Dauxois, P.-P. Cortet, *Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid*, Phys. Fluids **24**, 014105 (2012).
- [23] L.M. Smith, F.Waleffe, *Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence*, Phys. Fluids **11**, 1608 (1999).
- [24] C.R. Koudella, C. Staquet, *Instability mechanisms of a two-dimensional progressive internal gravity wave*, J. Fluid Mech. **548**, 165 (2006).
- [25] T. Le Reun, B. Gallet, B. Favier, M. Le Bars, *Near-resonant instability of geostrophic modes : beyond Greenspan's theorem*, soumis à J. Fluid Mech.
- [26] S. Joubaud, J. Munroe, P. Odier, T. Dauxois, *Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids*, Phys. Fluids **24**, 041703 (2012).
- [27] H. Scolan, E. Ermanyuk, T. Dauxois, *Nonlinear fate of internal waves attractors*, Phys. Rev. Lett. **110**, 234501 (2013).
- [28] L. Jouve, G. I. Ogilvie, *Direct numerical simulations of an inertial wave attractor in linear and nonlinear regimes*, J. Fluid Mech. **745**, 223 (2014).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [29] P. Bartello, O. Métais, M. Lesieur, *Coherent structures in rotating three-dimensional turbulence*, J. Fluid Mech. **273**, 1 (1994).
- [30] C. Lamriben, P.-P. Cortet, F. Moisy, *Direct measurements of anisotropic energy transfers in a rotating turbulence experiment*, Phys. Rev. Lett. **107**, 024503 (2011).
- [31] P. Clark di Leoni, P.J. Cobelli, P.D. Mininni, P. Dmitruk, W.H. Matthaeus, *Quantification of the strength of inertial waves in a rotating turbulent flow*, Phys. Fluids **26**, 035106 (2014).
- [32] E.J. Hopfinger, F.K. Browand, Y. Gagne, *Turbulence and waves in a rotating tank*, J. Fluid Mech. **125**, 505 (1982).
- [33] L. Jacquin, O. Leuchter, C. Cambon, J. Mathieu, *Homogeneous turbulence in the presence of rotation*, J. Fluid Mech. **220**, 1 (1990).
- [34] F. Moisy, P. Tabeling, H. Willaime, *Kolmogorov Equation in a Fully Developed Turbulence Experiment*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3994 (1999).
- [35] R.A. Wigeland, H.M. Nagib, *Effects of rotation on decay of turbulence*, Bull. Am. Phys. Soc. **23**(8), 998 (1978).
- [36] C. Morize, F. Moisy, *On the energy decay of rotating turbulence in confined geometry*, Phys. Fluids **18**, 065107 (2006).
- [37] A. Campagne, B. Gallet, F. Moisy, P.-P. Cortet, *Direct and inverse energy cascades in a forced rotating turbulence experiment*, Phys. Fluids **26**, 125112 (2014).
- [38] E. Yarom, Y. Vardi, E. Sharon, *Experimental quantification of inverse energy cascade in deep rotating turbulence*, Phys. Fluids **25**, 085105 (2013).
- [39] C. Cambon, N.M. Mansour, F.S. Godeferd, *Energy transfer in rotating turbulence*, J. Fluid Mech. **337**, 303 (1997).
- [40] C. Morize, F. Moisy, M. Rabaud, *Decaying grid-generated turbulence in a rotating tank*, Phys. Fluids **17**, 095105 (2005).
- [41] E. Deusebio, G. Boffetta, E. Lindborg, S. Musacchio, *Dimensional transition in rotating turbulence*, Phys. Rev. E **90**, 023005 (2014).
- [42] P. Sagaut, C. Cambon, *Homogeneous turbulence Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [43] S.B. Pope, *Turbulent Flows*, (Cambridge University Press, Cambridge 2000).
- [44] U. Frisch, *Turbulence - The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [45] P.A. Davidson, *Turbulence : An Introduction for Scientists and Engineers* (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [46] J. Paret, P. Tabeling, *Experimental Observation of the Two-Dimensional Inverse Energy Cascade*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4162 (1997).
- [47] H.L. Grant, R.W. Stewart, A. Moilliet, *Turbulence spectra from a tidal channel*, J. Fluid Mech, **12**, 241-268 (1962).
- [48] A.S. Monin, A.M.Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, vol. 2, (MIT Press, Cambridge, 1975).
- [49] A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids at very large Reynolds numbers*, **30**(4), 299 (1941); *On the degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluids*, **31**(6), 538 (1941); *Dissipation of energy in isotropic turbulence*, **32**(1) 19 (1941).
- [50] Y. Kaneda, J. Yoshino, T. Ishihara, *Examination of Kolmogorov's 4/5 law by high-resolution direct numerical simulation data of turbulence*, J. Phys. Soc. Jpn., 77, 064401 (2008).
- [51] J. Salort, B. Chabaud, E. Lévêque, P.-E. Roche, *Energy cascade and the four-fifths law in superfluid turbulence*, EPL **97**, 34006 (2012).
- [52] A. Campagne, *Cascades d'énergie et turbulence d'ondes dans une expérience de turbulence en rotation*, Thèse de doctorat de l'Université Paris-Sud (2015).
- [53] C. Lamriben, *Transferts anisotropes d'énergie en turbulence en rotation et excitation de modes d'inertie*, Thèse de doctorat de l'Université Paris-Sud (2012).
- [54] C. Cambon, L. Jacquin, *Spectral approach to non-isotropic turbulence subject to rotation*, J. Fluid Mech. **202**, 295 (1989).
- [55] P.D. Mininni, D. Rosenberg, A. Pouquet, *Isotropization at small scales of rotating helically driven turbulence*, J. Fluid Mech. **699**, 263 (2012).
- [56] A. Delache, C. Cambon, F.S. Godeferd, *Scale by scale anisotropy in freely decaying rotating turbulence*, Phys. Fluids **26**, 025104 (2014).
- [57] J. Sommeria, *Experimental-study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box*, J. Fluid Mech. **170**, 139 (1986).
- [58] J.A. Johnson, *The stability of shearing motion in a rotating fluids*, J. Fluid Mech **17**, 337 (1963).
- [59] M. Lesieur, S. Yanase, O. Métais, *Stabilizing and destabilizing effects of a solid-body rotation on quasi-two-dimensional shear layers*, Phys. Fluids A **3**, 403 (1991).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [60] D. Tritton, *Stabilization and destabilization of turbulent shear flow in a rotating fluid*, J. Fluid Mech **241**, 503 (1992).
- [61] S. Nazarenko, *Wave turbulence*, (Springer-Verlag, Heidelberg, 2011).
- [62] Q. Aubourg, N. Mordant, *Investigation of resonances in gravity-capillary wave turbulence*, Phys. Rev. Fluids **1**, 023701 (2016).
- [63] T. Humbert, O. Cadot, G. Düring, C. Josserand, S. Rica, C. Touzé, *Wave turbulence in vibrating plates : The effect of damping*, EPL **102**, 30002 (2013).
- [64] S. Galtier, *Weak inertial-wave turbulence theory*, Phys. Rev. E **68**, 015301 (2003).
- [65] R. Kraichnan, *Inertial ranges in two-dimensional turbulence*, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
- [66] P.S. Iroshnikov, *Turbulence of a conducting fluid in a strong magnetic field*, Soviet Astronomy **7**, 4 (1964).
- [67] D. Benney, P. Saffman, *Nonlinear interaction of random wave in a dispersive medium*, Proc. R. Soc. Lond. A **289**, 301 (1966).
- [68] V. Zakharov, V. L'vov, G. Falkovich, *Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).
- [69] A.C. Newell, *Rossby wave packet interactions*, J. Fluid Mech. **35**, 255 (1969).
- [70] S.V. Nazarenko, A.A. Schekochihin, *Critical balance in magnetohydrodynamic, rotating and stratified turbulence : towards a universal scaling conjecture*, J. Fluid Mech. **677**, 134 (2011).
- [71] P. Goldreich, S. Sridhar, *Toward a theory of interstellar turbulence. 2 : Strong alfvénic turbulence*, Astrophysical J. Part 1 **438**, 763 (1995).
- [72] E. Yarom, E. Sharon, *Experimental observation of steady inertial wave turbulence in deep rotating flows*, Nat. Phys. Lett. **10**, 510 (2014).
- [73] A. Campagne, B. Gallet, F. Moisy, P.-P. Cortet, *Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating-turbulence experiment*, Phys. Rev. E **91**, 043016 (2015).
- [74] A. Campagne, N. Machicoane, B. Gallet, P.-P. Cortet, F. Moisy, *Turbulent drag in a rotating frame*, J. Fluid Mech. **794**, R5 (2016).
- [75] P.-P. Cortet, *Hydrodynamique en rotation et instabilité dynamique du pelage des adhésifs*, Habilitation à Diriger des Recherche de l'Université Paris-Sud (2015).
- [76] J.L. Lumley, *Some problems connected with the motion of small particles in turbulent fluid*, PhD Thesis, The John Hopkins University, Baltimore (1957).
- [77] C. Brouzet, E. Ermanyuk, S. Joubaud, G. Pillet, T. Dauxois, *Internal wave attractors : different scenarios of instability*, J. Fluid Mech. **811**, 544 (2017).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [78] C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, E. V. Ermanyuk, S. Joubaud, T. Dauxois, *Scale effects in internal wave attractors*, Phys. Rev. Fluids **2**, 114803 (2017).
- [79] A.M.M. Manders, L.R.M. Maas, *Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary*, J. Fluid Mech. **493**, 39 (2003).
- [80] A.M.M. Manders, L.R.M. Maas, *On the three-dimensional structure of the inertial wave field in a rectangular basin with one sloping boundary*, Fluid Dyn. Res. **35**, 1 (2004).
- [81] L.R.M. Maas, F.-P. A. Lam, *Geometric focusing of internal waves*, J. Fluid Mech. **300**, 1 (1995).
- [82] L.R.M. Maas, D. Benielli, J. Sommeria, F.-P. A. Lam, *Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid*, Nature **388**, 557 (1997).
- [83] C. Brouzet, *Internal wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing*, Thèse de doctorat de l'École Normale Supérieure de Lyon (2016).
- [84] J. Hazewinkel, P. van Breevoort, S. Dalziel, L. R.M. Maas, *Observations on the wavenumber spectrum and evolution of an internal wave attractor*, J. Fluid Mech. **598**, 373 (2008).
- [85] M. Rieutord, B. Georgeot, L. Valdetaro, *Inertial waves in a rotating spherical shell : attractors and asymptotic spectrum*, J. Fluid Mech. **435**, 103 (2001).
- [86] N. Grisouard, C. Staquet, I. Paireaud, *Numerical simulation of a two-dimensional internal wave attractor*, J. Fluid Mech. **614**, 1 (2008).
- [87] F. Beckebanze, C. Brouzet, I. N. Sibgatullin, L. R.M. Maas, *Damping of quasi-two-dimensional internal wave attractors by rigid-wall friction*, J. Fluid Mech. **841**, 614 (2018).
- [88] J. Boisson, D. Cébron, F. Moisy, P.-P. Cortet, *Earth rotation prevents exact solid-body rotation of fluids in the laboratory*, EPL **98**, 59002 (2012).
- [89] S. Sakai, *The horizontal scale of rotating convection in the geostrophic regime*, J. Fluid Mech. **333**, 85 (1997).
- [90] E. M. King, J. M. Aurnou, *Thermal evidence for Taylor columns in turbulent rotating Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev E **85**, 016313 (2012).
- [91] A. Sauret, D. Cébron, C. Morize, M. Le Bars, *Experimental and numerical study of mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity*, J. Fluid Mech. **662**, 260 (2010).
- [92] G. Bordes, A. Venaille, S. Joubaud, P. Odier, T. Dauxois, *Experimental observation of a strong mean flow induced by internal gravity waves*, Phys. Fluids **24**, 086602 (2012).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [93] M.J. Mercier, N.B. Garnier, T. Dauxois, *Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform*, Phys. Fluids **20**, 086601 (2008).
- [94] S. A. Triana, D. S. Zimmerman, D. P. Lathrop, *Precessional states in a laboratory model of the Earth's core*, J. Geophys. Res. **117**, B04103 (2012).
- [95] M. Duran-Matute, J.-B. Flór, F.S. Godefert, C. Jause-Labert, *Turbulence and columnar vortex formation through inertial-wave focusing*, Phys. Rev. E **87**, 041001 (2013).
- [96] Y. Dossman, B. Bourget, C. Brouzet, T. Dauxois, S. Joubaud, P. Odier, *Mixing by internal waves quantified using combined PIV/PLIF technique*, Exp Fluids **57**, 132 (2016).
- [97] T. Le Reun, B. Favier, A.J. Barker, M. Le Bars, *Inertial Wave Turbulence Driven by Elliptical Instability*, Phys. Rev. Lett. **119**, 034502 (2017).
- [98] T. Le Reun, B. Favier, M. Le Bars, *Experimental study of the nonlinear saturation of the elliptical instability : inertial wave turbulence versus geostrophic turbulence*, J. Fluid Mech. **879**, 296 (2019).
- [99] B. Bourget, H. Scolan, T. Dauxois, M. Le Bars, P. Odier, S. Joubaud, *Finite-size effects in parametric subharmonic instability*, J. Fluid Mech. **759**, 739 (2014).

**Titre :** Études expérimentales d'ondes d'inertie en régime non-linéaire : attracteurs et turbulence d'ondes

**Mots clés :** Turbulence, Ondes d'inertie, Fluides en rotation, Attracteur d'ondes, Écoulement géostrophique

**Résumé :** Les fluides en rotation, à travers l'action de la force de Coriolis, permettent la propagation d'ondes internes appelées ondes d'inertie. Celles-ci constituent un des ingrédients majeurs de la dynamique des écoulements géophysiques et astrophysiques. La trame de fond de cette thèse est d'apporter des éléments de compréhension à la question du rôle des ondes d'inertie au sein des écoulements turbulents soumis à une rotation d'ensemble. Nous présentons deux études expérimentales d'écoulements ayant l'originalité d'être forcés uniquement à travers des ondes d'inertie. Dans la première, nous étudions un mode ondulatoire appelé attracteur d'ondes dans lequel toute l'énergie à une fréquence donnée tend à se concentrer sur un cycle limite. Nous mettons en évidence que l'attracteur est sujet à une instabilité par résonance triadique qui a pour conséquence de réduire son amplitude relative et de faire croître sa longueur d'onde. Nous montrons que ce régime non-linéaire de l'attracteur peut être décrit quantitativement en remplaçant dans le

modèle linéaire la viscosité du fluide par une viscosité turbulente, prenant en compte de manière effective la dissipation que crée l'instabilité pour l'attracteur. La seconde étude porte sur un écoulement forcé à travers une assemblée d'ondes d'inertie se propageant dans une grande variété de directions. Pour une amplitude de forçage modérée, les ondes forcées subissent une instabilité par résonance triadique. Pour des amplitudes plus grandes, le système ne tend toutefois pas vers un régime de turbulence d'ondes. Au lieu de cela, nous mettons en évidence que la majorité de l'énergie se condense dans un mode géostrophique. Nous proposons une description théorique de ces observations expliquant l'apparition du mode géostrophique par un mécanisme d'instabilité par résonance « quartétique » dans lequel une onde primaire se déstabilise conjointement avec une onde sous-harmonique produite par l'instabilité par résonance triadique de l'onde primaire.

**Title :** Experimental studies of inertial waves in non-linear regime : attractors and wave turbulence

**Keywords :** Turbulence, Inertial waves, Rotating fluids, Waves attractor, Geostrophic flow

**Abstract :** Fluids submitted to a global rotation, through the action of the Coriolis force, allow the propagation of internal waves called inertial waves which are one of the key ingredients of geophysical and astrophysical flow dynamics. This thesis provides elements of understanding about the question of the role of inertial waves in turbulent flows subject to a global rotation. We present two experimental studies of flows with the originality of being forced only through inertial waves. In the first one, we study a wave mode called wave attractor in which all the energy at a given frequency tends to concentrate on a limit cycle. We point out that the attractor is subject to a triadic resonance instability which has the consequence of reducing the relative amplitude and increasing the wavelength of the attractor. We show that this non-linear regime of the attractor can be described quantitatively

by replacing in the linear model the viscosity of the fluid by a turbulent viscosity, taking effectively into account the dissipation that the instability creates for the attractor. The second study focuses on a flow forced by an assembly of numerous inertial wave beams propagating in different directions. For a moderate amplitude of the forcing, the forced waves are subjected to a triadic resonance instability. Stronger forcing however does not lead to an inertial-wave turbulence regime. Instead, we show that the majority of the energy goes in a geostrophic mode. We propose a theoretical description of these observations explaining the emergence of the geostrophic mode by a "quartetic" resonance instability mechanism in which a primary wave is unstable together with a subharmonic wave produced by the triadic resonance instability of the primary wave.