



# Étude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien

Aimé Lachal

## ► To cite this version:

Aimé Lachal. Étude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien. Probabilités [math.PR]. Université Lyon 1 - Claude Bernard, 1992. Français. NNT : . tel-02924274

**HAL Id: tel-02924274**

**<https://theses.hal.science/tel-02924274>**

Submitted on 27 Aug 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée

devant l'Université Claude Bernard – LYON I

pour obtenir le diplôme de Doctorat

Spécialité : Mathématiques

## ÉTUDE DES TRAJECTOIRES DE LA PRIMITIVE DU MOUVEMENT BROWNIEN

par **Aimé LACHAL**

Soutenue le 19 mars 1992 devant le Jury composé de :

|                      |                    |                                     |
|----------------------|--------------------|-------------------------------------|
| <b>E. Pardoux</b>    | Président du Jury  | <i>Université d'Aix-Marseille I</i> |
| <b>J. Brossard</b>   | Rapporteur         | <i>Université Grenoble I</i>        |
| <b>J.-F. Le Gall</b> | Rapporteur         | <i>Université Paris VI</i>          |
| <b>A. Goldman</b>    | Directeur de thèse | <i>Université Lyon I</i>            |





N° d'ordre : 60-92

Année : 1992

**THESE**

présentée

devant l'Université Claude Bernard - LYON I

pour obtenir le diplôme de Doctorat

Spécialité : Mathématiques

**ETUDE DES TRAJECTOIRES  
DE LA PRIMITIVE DU MOUVEMENT BROWNIEN**

par **Aimé LACHAL**

Soutenue le 19 Mars 1992 devant le Jury :

M. le Professeur E. PARDOUX - Université de Aix-Marseille I  
M. le Professeur J. BROSSARD - Université de Grenoble I  
M. le Professeur A. GOLDMAN - Université de Lyon I  
M. le Professeur J.F. LE GALL - Université de Paris VI



## REMERCIEMENTS

*J'exprime en premier lieu ma plus grande reconnaissance à Monsieur le Professeur A. GOLDMAN pour les conseils qu'il m'a prodigués et l'intérêt qu'il a porté à la réalisation de ce travail.*

*J'adresse mes plus vifs remerciements à Messieurs les Professeurs J. BROSSARD et J.F. LE GALL pour avoir bien voulu rapporter sur cette thèse et participer au Jury.*

*Je remercie également avec plaisir Monsieur le Professeur E. PARDOUX qui m'a fait l'honneur de présider ce Jury.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Madame M. GAFFIER qui a assuré avec patience et efficacité la dactylographie de ce document.*

*Je remercie enfin Madame DELCHER et Monsieur LEGER pour la reprographie de cette thèse.*



# TABLE DES MATIERES

|                    |      |
|--------------------|------|
| INTRODUCTION ..... | p. 1 |
|--------------------|------|

## CHAPITRE I : EQUATION DE LANGEVIN

|                                                                                                            |       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Introduction .....                                                                                         | p. 4  |
| 1. Description de l'expérience physique .....                                                              | p. 4  |
| 2. Une solution de l'équation de Langevin : un processus<br>gaussien stationnaire $(x_t)_{t \geq 0}$ ..... | p. 6  |
| 3. Le nombre de zéros du processus $(x_t)_{t \geq 0}$ .....                                                | p. 10 |

## CHAPITRE II : ETUDE D'UN CAS PARTICULIER : L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

|                                                                                                        |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Introduction .....                                                                                     | p. 15  |
| 1. La loi conjointe du couple $(\tau_a, B_{\tau_a})$ sous la probabilité<br>$P_{(a,y)}$ .....          | p. 18  |
| 2. Les lois des variables aléatoires $\tau_a$ et $B_{\tau_a}$ sous la<br>probabilité $P_{(x,y)}$ ..... | p. 24  |
| 3. La loi conjointe du couple $(\tau_a, B_{\tau_a})$ sous la probabilité<br>$P_{(x,y)}$ .....          | p. 26  |
| - Sur l'intégrale du mouvement brownien .....                                                          | p. 29  |
| - Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement<br>brownien .....                      | p. 37  |
| - Sur les temps de passages successifs de l'intégrale du mouvement<br>brownien .....                   | p. 63  |
| - Dernier instant de passage pour l'intégrale du mouvement brownien ..                                 | p. 74  |
| - Sur les excursions de l'intégrale du mouvement brownien .....                                        | p. 89  |
| - Les excursions de l'intégrale du mouvement brownien .....                                            | p. 98  |
| - Les moments du temps de séjour de l'intégrale du mouvement<br>brownien .....                         | p. 121 |



|                                                                                                                                         |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 4. Les lois conjointes des couples $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$ et $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$ sous la probabilité $P_{(x,y)}$ ..... | p. 131 |
| 4.1 Un problème d'optimisation .....                                                                                                    | p. 131 |
| 4.2 Extensions diverses .....                                                                                                           | p. 135 |
| - A propos de l'intégrale du mouvement brownien .....                                                                                   | p. 136 |
| - Sur la distribution de certaines fonctionnelles de l'intégrale du mouvement brownien avec dérive parabolique et cubique .....         | p. 154 |

### CHAPITRE III : PROBLEMES OUVERTS

|                                                                                                            |        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 1. Premier instant d'atteinte d'une barrière bilatère $\{a,b\}$ pour le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ ..... | p. 176 |
| 2. Premier instant de sortie d'un quadrant pour le processus $(U_t)_{t \geq 0}$ .....                      | p. 178 |
| 3. Temps de séjour du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ .....                                                   | p. 179 |
| 4. Primitives itérées du mouvement brownien .....                                                          | p. 183 |
| 5. L'opérateur différentiel $d^4/dx^4$ .....                                                               | p. 184 |

|                     |        |
|---------------------|--------|
| BIBLIOGRAPHIE ..... | p. 185 |
|---------------------|--------|

# INTRODUCTION

Dans ce travail nous rassemblons l'essentiel des résultats que nous avons obtenus sur le comportement de l'intégrale du mouvement brownien linéaire, et plus particulièrement sur les distributions des premiers instants de passage des trajectoires.

Le premier chapitre décrit le problème physique qui est à l'origine de ces recherches et qui conduit à considérer une classe générale de processus gaussiens, solutions de l'équation de Langevin, englobant en particulier l'intégrale du mouvement brownien. Ce type de processus a fait l'objet de nombreuses recherches à partir des années quarante, centrées principalement sur la répartition des zéros successifs. Nous rassemblons ici les principaux résultats connus à ce jour.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du processus bidimensionnel  $U_t = (X_t, B_t)$ ,  $t \geq 0$ , constitué du mouvement brownien linéaire  $(B_t)_{t \geq 0}$  et de sa primitive  $X_t = \int_0^t B_s ds$ ; ce couple est la solution de l'équation de Langevin dans le cas particulier où l'on ne considère aucun amortissement et aucune force harmonique.

Dans les deux premiers paragraphes nous rappelons l'essentiel des résultats obtenus par H.P. Mc Kean ([24], 1963), M. Goldman ([7], 1971) et Ju. P. Gor'kov ([8], 1975) concernant respectivement le premier instant  $\tau_0$  où le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  retourne à l'origine, le premier instant  $\tau_a$  où le processus visite le point  $a \neq 0$  et la position  $B_{\tau_a}$  du mouvement brownien à cet instant. Nous indiquons de plus une conséquence, décrite par E. Wong ([29], 1966), de la formule de H.P. Mc Kean relative à la loi de l'intervalle de temps séparant deux zéros successifs d'un processus stationnaire particulier solution de l'équation de Langevin.

Le troisième paragraphe regroupe l'essentiel de nos travaux sur ce sujet.

Dans un premier temps, nous avons pu obtenir la loi conjointe du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$ , le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  démarrant d'un point quelconque  $(x, y)$  ([12], [13]). Notre idée a consisté à ramener cette question à la résolution d'un problème aux limites "très particulier" associé à un opérateur aux dérivées partielles "dégénéré".

Notre résultat a alors permis de répondre à diverses questions ouvertes relatives au comportement des trajectoires du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ .



En premier lieu nous étudions les temps de passages successifs  $\tau_n^\pm$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , en zéro du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , postérieurs et antérieurs à l'instant déterministe 1. Plus précisément nous déterminons, en nous appuyant sur le caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , la distribution absolue des chaînes de Markov  $(\tau_n^\pm, B_{\tau_n^\pm})_{n \geq 1}$  ([14] ; H.P. Mc Kean en avait déterminé les probabilités de transition en 1963, [24]).

Nous nous intéressons également au dernier instant "avant T",  $\tau_{a,T}^-$ , où le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  passe par le point a,  $T > 0$  étant fixé. La propriété de Markov du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  nous a permis d'explicitier plus généralement la loi conjointe du triplet  $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$ ,  $\tau_{a,T}^+$  désignant le premier instant d'atteinte du point a par le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  "après T".

La technique précédemment utilisée ne permet pas de déterminer la loi conjointe du quadruplet  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$ . Pour résoudre ce problème nous avons été amenés naturellement à étudier les excursions (encadrant un instant déterministe T) du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Cette investigation, qui fait intervenir, de manière cruciale le processus dual et le processus absorbé associés à  $(X_t)_{t \geq 0}$ , nous a fourni, outre la distribution recherchée, plus généralement celle du vecteur aléatoire  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}, Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}, B_{\tau_{a,T}^+}, \tau_{a,T}^+)$  avec  $Z_t = U_{t+\tau_{a,T}^-}$  pour  $0 \leq t \leq \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-$  et  $0 < t_1 < \dots < t_n < \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-$  ([16], [17]).

Les informations que nous avons obtenues, lors de l'étude des excursions de l'intégrale du mouvement brownien, sur le processus absorbé en un point b,  $(X_t)_{0 \leq t \leq \tau_b}$ , nous ont permis d'exprimer analytiquement les moments successifs du temps de séjour  $T_{a,b} = \int_0^{\tau_b} 1_{[a,+\infty[}(X_t) dt$  du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  dans la demi-droite  $[a,+\infty[$  relativement à l'intervalle de temps  $[0, \tau_b]$  ([18]).

Dans un autre ordre d'idées, nous nous intéressons, au paragraphe 4, à la position du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à l'instant où le mouvement brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  atteint un seuil



déterministe. Cette étude se compose deux parties distinctes.

Tout d'abord nous exposons dans un premier paragraphe l'approche probabiliste, faisant appel au processus bidimensionnel  $(U_t)_{t \geq 0}$ , d'un problème d'optimisation (minimisation du coût de l'atterrissage d'un avion), décrite par M. Lefèvre et P. Whittle ([21], [23]). La résolution de ce problème nécessite la connaissance de la loi conjointe du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$ , où  $\sigma_b$  désigne le premier instant d'atteinte du seuil  $b$  par le mouvement brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  (le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  démarrant d'un point  $(x, y)$ ). Par une technique d'équations aux dérivées partielles M. Lefèvre a pu exprimer la transformée de Laplace du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$ , en termes de fonctions d'Airy ([21], 1989).

Dans un second temps nous présentons quelques nouveaux résultats que nous avons obtenus dans ce contexte.

En premier lieu nous avons remarqué que la formule de M. Lefèvre pouvait se déduire du caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ . Cette approche nous a permis d'accéder à la transformée de Laplace-Fourier du couple  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$ , où  $\sigma_{ab}$  est le premier instant d'atteinte de la barrière bilatère  $\{a, b\}$  par le processus  $(B_t)_{t \geq 0}$ , ainsi qu'à la transformée de Laplace-Fourier du quadruplet  $(\sigma_a, X_{\sigma_a}, \sigma_b, X_{\sigma_b})$  ([19]).

Par la suite nous avons étudié le cas d'un mouvement brownien soumis à une dérive de la forme  $tz + \frac{t^2}{2}w$ . En notant  $\bar{B}_t = B_t + tz + \frac{t^2}{2}w$ ,  $\bar{X}_t = X_t + \frac{t^2}{2}z + \frac{t^3}{6}w$ , nous avons obtenu les lois explicites des couples  $(\bar{\tau}_a, \bar{B}_{\bar{\tau}_a})$ ,  $(\bar{\sigma}_b, X_{\bar{\sigma}_b})$  et  $(\bar{\sigma}_{ab}, \bar{X}_{\bar{\sigma}_{ab}})$ , les fonctionnelles  $\bar{\tau}_a$ ,  $\bar{\sigma}_b$  et  $\bar{\sigma}_{ab}$  étant associées aux processus  $(\bar{B}_t)_{t \geq 0}$  et  $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$ . Dans le cas particulier où  $z = 0$  la loi du temps d'arrêt  $\bar{\sigma}_b$  a été récemment découverte par P. Grøeneboom ([9], 1989).

Nous terminons enfin ce travail en exposant dans le dernier chapitre quelques problèmes encore ouverts à ce jour, prolongeant ces recherches.

# CHAPITRE I

## EQUATION DE LANGEVIN

### INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous rappelons la description "naïve" du modèle de l'oscillateur harmonique excité par un bruit blanc, présentée par M. Kac dans [11], et faisant intervenir la primitive du mouvement brownien. En fait les processus stochastiques introduits dans ce modèle interviennent concrètement en théorie de la transmission des ordres radio et servent, d'un point de vue pratique, à modéliser les perturbations électriques, ceci dans le but d'en contrôler le parasitage induit. Historiquement on doit à l'ingénieur S.O. Rice d'avoir introduit ce modèle aléatoire et d'avoir conjecturé de nombreux résultats qui furent démontrés rigoureusement par la suite de H. Cramer et M.R. Leadbetter. Cela étant, cinquante ans après la publication de l'article "historique" de S.O. Rice ([26]), de nombreuses questions restent toujours sans réponse. Plus particulièrement la distribution du premier zéro est (hormis dans le cas où il s'agit de la primitive du mouvement brownien) inconnue.

### 1. DESCRIPTION DE L'EXPERIENCE PHYSIQUE

Nous reprenons ici la description de l'expérience physique faite par M. Kac ([11]), et qui nous servira de support tout au long de ce chapitre.

Considérons un miroir suspendu par un fil de torsion dans une enceinte fermée. Soit  $m$  son moment d'inertie et  $C$  la constante de torsion du fil. Une bande photographique enregistre les rotations du miroir. Placés dans un vide parfait, les déplacements angulaires  $x_t$  du miroir sont régis par l'équation :

$$m \frac{d^2 x_t}{dt^2} + C x_t = 0$$

si l'on néglige l'amortissement dû au fil de torsion. La solution de cette équation est sinusoïdale de période  $2\pi/\omega$  avec  $\omega = \sqrt{C/m}$ . Ensuite, plaçons le système dans une



enceinte contenant un gaz homogène raréfié. L'effet des chocs aléatoires dus à l'agitation thermique des molécules du milieu agit comme un couple aléatoire  $\Gamma_t$  sur le miroir, où  $\Gamma_t$  est une fonction aléatoire gaussienne stationnaire ; cette fois les déplacements angulaires aléatoires  $x_t$  seront régis par l'équation :

$$(E) \quad m \frac{d^2 x_t}{dt^2} + C x_t = \Gamma_t.$$

Si nous convenons d'appeler  $F_t = \Gamma_t - E(\Gamma_t)$ , l'équation (E) peut se mettre sous la forme :

$$m \frac{d^2 x_t}{dt^2} - E(\Gamma_t) + C x_t = F_t$$

où  $E(\Gamma_t)$  traduit l'effet macroscopique des chocs, tandis que  $F_t$  se présente comme une force aléatoire pure due à l'agitation brownienne des molécules. Par un argument de nature physique, l'on peut évaluer  $E(\Gamma_t)$  :

$$E(\Gamma_t) = -f \frac{dx_t}{dt}$$

où l'on convient d'appeler  $f$  le coefficient de frottement. Donc l'équation (E) peut se mettre, après avoir posé  $\beta = f/m$  et  $G_t = F_t/m$ , sous la forme de Langevin :

$$(L) \quad \frac{d^2 x_t}{dt^2} + \beta \frac{dx_t}{dt} + \omega^2 x_t = G_t.$$

Faisons une hypothèse correspondant à l'idée intuitive que la fonction aléatoire centrée  $G_t$  a une corrélation microscopique vis-à-vis des grandeurs macroscopiques  $x_t$  et  $\frac{dx_t}{dt}$  que nous considérons finalement :

$$E(G_s G_t) = 2D \delta(t-s)$$

où  $D$  est lié aux autres constantes selon la formule d'Einstein

$$D = \frac{kT\beta}{m}.$$

Cela revient à supposer que l'on peut écrire :

$$G_t = \sqrt{2D} V_t$$

où  $(V_t)_{t \geq 0}$  est un bruit blanc gaussien.

## 2. UNE SOLUTION DE L'EQUATION DE LANGEVIN : UN PROCESSUS GAUSSIEN STATIONNAIRE $(x_t)_{t \geq 0}$

a) Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien linéaire défini par l'équation différentielle stochastique  $dB_t = V_t dt$ .

En résolvant formellement l'équation de Langevin (L) par la méthode de la variation de la constante, on obtient la solution sous la forme d'une intégrale stochastique ([2],[25], [27]) :

$$x_t = \sqrt{2D} \int_0^t \frac{e^{r_2(t-u)} - e^{r_1(t-u)}}{r_2 - r_1} dB_u + \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} x_0 + \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} y_0 ,$$

$r_1, r_2$  désignant les racines, réelles ou imaginaires, de l'équation algébrique  $r^2 + \beta r + \omega^2 = 0$ , et  $y_t$  la dérivée de  $x_t$ . Nous nous limiterons au cas où les racines  $r_1, r_2$  sont distinctes (le cas d'une racine double  $r_1 = r_2$  mène à une représentation analogue de la solution sous la forme :

$$x_t = \sqrt{2D} \int_0^t (t-u) e^{r_1(t-u)} dB_u + e^{r_1 t} [(1-r_1 t)x_0 + ty_0] .$$

L'expérience physique suggère de rechercher un processus stationnaire, et amène ainsi à imposer des contraintes sur les conditions initiales  $x_0$  et  $y_0$ . Considérons à cet effet la fonction de corrélation  $c_s(t) = \mathbb{E}(x_s x_{s+t})$ . En écrivant que  $c_s(t)$  ne dépend pas de  $s$ , on est conduit à choisir pour  $x_0$  et  $y_0$  des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes entre elles, de variances respectives  $\mathbb{E}(x_0^2) = \frac{D}{\beta \omega^2}$ ,  $\mathbb{E}(y_0^2) = \frac{D}{\beta}$ , et indépendantes du mouvement brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$ .

Avec ce choix, le processus gaussien  $(x_t)_{t \geq 0}$  est stationnaire, et sa fonction de corrélation s'écrit très simplement :



$$c(t) = \frac{D}{\beta\omega^2} \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1}.$$

On pourra noter que  $c$  est solution de l'équation différentielle déterministe associée à l'équation de Langevin :

$$\begin{cases} \frac{d^2 c}{dt^2} + \beta \frac{dc}{dt} + \omega^2 c = 0 \\ c(0) = \frac{D}{\beta\omega^2} \\ \frac{dc}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

ce qui pouvait d'ailleurs se vérifier directement à partir de la définition  $c(t) = \mathbb{E}(x_s x_{s+t})$  et de l'équation différentielle stochastique (L) satisfaite par le processus  $(x_t)_{t \geq 0}$ , avec les hypothèses faites sur  $x_0$  et  $y_0$ .

Un simple conditionnement par rapport au vecteur gaussien  $(x_0, y_0)$  permet enfin d'introduire, le cas échéant, des conditions initiales déterministes quelconques.

## b) Propriété de Markov

Afin de faciliter l'étude du processus  $(x_t)_{t \geq 0}$ , il serait vivement souhaitable d'avoir à notre disposition une propriété de type Markov. Or la présence de la deuxième condition initiale  $y_0 = \frac{dx_0}{dt}$  dans l'expression de  $x_t$  enlève toute chance à celui-ci d'être markovien. Néanmoins les deux conditions initiales couplées  $x_0$  et  $y_0$  nous incitent à considérer le processus bidimensionnel  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$ , où  $y_t = \frac{dx_t}{dt}$  décrit la vitesse du mobile.

Il apparaît alors que le processus  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$  est gaussien, stationnaire, et présente cette fois l'avantage d'être markovien. En effet, écrivons l'équation de Langevin sous forme matricielle

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2D} \, v_t \end{pmatrix},$$

A désignant la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\beta \end{pmatrix}$ , ce qui donne :

$$(S) \quad \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \sqrt{2D} \int_0^t e^{(t-u)A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ dB_u \end{pmatrix}.$$

Cette dernière égalité unifie les expressions bien connues de  $x_t$  et  $y_t$  ([2], [25], [27]) :

$$(S') \quad \begin{cases} x_t = \sqrt{2D} \int_0^t \frac{e^{r_2(t-u)} - e^{r_1(t-u)}}{r_2 - r_1} dB_u + \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} x_0 + \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} y_0 \\ y_t = \sqrt{2D} \int_0^t \frac{r_2 e^{r_2(t-u)} - r_1 e^{r_1(t-u)}}{r_2 - r_1} dB_u + \omega^2 \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} x_0 + \frac{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} y_0. \end{cases}$$

L'écriture (S) permet alors de mettre en évidence la propriété de Markov du processus  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$ . En effet, pour  $t_0 > 0$  fixé, on a l'identité entre processus :

$$(M) \quad \begin{pmatrix} x_{t_0+t} \\ y_{t_0+t} \end{pmatrix} = \sqrt{2D} \int_0^t e^{(t-u)A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ d\tilde{B}_u \end{pmatrix} + e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} x_{t_0} \\ y_{t_0} \end{pmatrix},$$

$(\tilde{B}_u)_{u \geq 0}$  désignant un mouvement brownien indépendant de  $(x_t)_{0 \leq t \leq t_0}$ .

Cette égalité recèle en fait deux résultats plus précis.

D'abord le couple  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$  est fortement markovien, c'est-à-dire que la relation (M) subsiste lorsque l'on remplace le temps déterministe  $t_0$  par un temps d'arrêt  $\tau$  adapté au processus, ce qui se démontre aisément en approximant (par un procédé habituel)  $\tau$  par une suite de temps d'arrêt étagés.



Le deuxième point fondamental est l'existence d'un semi-groupe d'opérateurs  $(T_t)_{t \geq 0}$  naturellement lié au processus  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$ . Il agit sur les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables bornées selon :

$$(T_t f)(x, y) = \mathbb{E}_{(x, y)} [f(x_t, y_t)],$$

$\mathbb{E}_{(x, y)}$  désignant l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}[ \cdot | (x_0, y_0) = (x, y) ]$ .

Le générateur infinitésimal coïncide alors avec l'opérateur différentiel ([2], [10], [11], [27]) :

$$\mathfrak{D} = D \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial x} - (\omega^2 x + \beta y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ces deux remarques sont, d'un point de vue théorique, très intéressantes puisqu'elles permettent de mettre en équation divers problèmes relatifs au processus  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$ , et en particulier celui de la détermination de la loi du premier instant d'atteinte de zéro du processus  $(x_t)_{t \geq 0}$  :

$$\tau_0 = \inf\{t > 0 : x_t = 0\}.$$

Plus précisément, dans la présente étude, nous sommes confrontés au problème aux limites suivant, satisfait par la transformée de Laplace  $\varphi(x, y) = \mathbb{E}_{(x, y)} (e^{\lambda \tau_0})$  de la variable aléatoire  $\tau_0$  conditionnée par  $(x_0, y_0) = (x, y)$  ([10], [11]) :

$$\begin{cases} \mathfrak{D} \varphi(x, y) = \lambda \varphi(x, y), & (x, y) \in ]-\infty, 0[ \times ]-\infty, +\infty[ \\ & \text{(resp. } (x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]-\infty, +\infty[), \\ \varphi(0^-, y) = 1, \ y > 0 \text{ (resp. } \varphi(0^+, y) = 1, \ y < 0). \end{cases}$$

Cette démarche, bien classique et très efficace pour l'étude du mouvement brownien, apparaît toutefois dans notre cas, de par la dégénérescence de l'opérateur différentiel  $\mathfrak{D}$  et de l'originalité des conditions aux limites associées, d'un maniement moins aisé.



Notons ici la particularité de la condition portant sur les valeurs de la fonction  $\phi$  à la frontière du domaine  $]-\infty, 0[ \times ]-\infty, +\infty[$  (resp.  $]0, +\infty[ \times ]-\infty, +\infty[$ ). On connaît a priori les valeurs  $\phi(0^-, y)$  (resp.  $\phi(0^+, y)$ ) seulement pour  $y > 0$  (resp.  $y < 0$ ). Ceci résulte de la "dégénérescence" du couple  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$ , due à la relation  $y_t = \frac{dx_t}{dt}$ ; par conséquent, le signe de  $y_t$  indique le sens de variation des trajectoires de  $(x_t)_{t \geq 0}$  et ne fournit ainsi, sur l'axe  $x = 0$ , que des points irréguliers pour le processus  $(x_t)_{t \geq 0}$  au sens où ([3])  $\tau_0 > 0$   $P_{(0,y)}$  - presque sûrement, pour tout  $y \neq 0$ .

Nous savons résoudre ce problème dans le cas particulier où l'équation de Langevin est de la forme  $\frac{d^2x_t}{dt^2} = V_t$ . Cette étude fera l'objet du chapitre 2.

Dans le cas général, ce problème demeure actuellement non-résolu. Cependant des résultats concernant le nombre de zéros dans un intervalle de longueur temporelle fixée ont pu être explicités, tout d'abord heuristiquement par S.O. Rice ([26]) et M. Kac ([10], [11]), puis confirmés rigoureusement par H. Cramer et M.R. Leadbetter ([4]).

Nous rappelons succinctement dans le paragraphe suivant l'essentiel de ces travaux.

### 3. LE NOMBRE DE ZEROS DU PROCESSUS $(x_t)_{t \geq 0}$

Introduisons des notations, qui nous seront utiles par la suite :

$$p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, y_1; \dots; x_n, y_n) = \frac{P\{(x_{t_1}, y_{t_1}) \in dx_1 dy_1, \dots, (x_{t_n}, y_{t_n}) \in dx_n dy_n\}}{dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n}$$

est la densité du vecteur gaussien  $(x_{t_1}, y_{t_1}, \dots, x_{t_n}, y_{t_n})$ .

Le processus  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$  étant stationnaire, on a :

$$p_{t_1, \dots, t_n} = p_{0, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}}.$$

Dans le cas  $n=1$  nous notons :

$$p(x,y) = p_{t_1}(x,y) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{c(0)} - \frac{y^2}{c''(0)} \right]}}{2\pi \sqrt{-c(0)c''(0)}}$$

et dans le cas  $n=2$  nous explicitons certaines valeurs de la densité :

$$p_{0,t}(0,y ; 0,z) = \frac{e^{-\frac{1}{2D(t)} [a(t)(y^2+z^2) + 2b(t)yz]}}{4\pi^2 \sqrt{D(t)}},$$

$D(t)$  désignant le déterminant de la matrice des covariances du vecteur  $(x_0, y_0, x_t, y_t)$ , soit :

$$\begin{pmatrix} c(0) & 0 & . & c(t) & c'(t) \\ 0 & -c''(0) & . & -c'(t) & -c''(t) \\ \hline c(t) & -c'(t) & . & c(0) & 0 \\ c'(t) & -c''(t) & . & 0 & -c''(0) \end{pmatrix},$$

et  $a(t)$ ,  $b(t)$  les cofacteurs de cette matrice concernés, soit explicitement :

$$D(t) = [c(0)c''(0) - c(t)c''(t) + c'(t)^2]^2 - [c''(0)c(t) - c(0)c''(t)]^2$$

$$a(t) = c''(0)[c(t)^2 - c(0)^2] - c(0)c'(t)^2$$

$$b(t) = c''(t)[c(t)^2 - c(0)^2] + c(t)c'(t)^2$$

$$a(t)^2 - b(t)^2 = [c(0)^2 - c(t)^2] D(t).$$

#### a) La méthode heuristique de S.O. Rice

Au cours de ses travaux ([26]), S.O. Rice explicita, entre autres, les deux expressions limites suivantes :

$$(\mathcal{L}_1) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\{\exists s \in [t, t+\varepsilon[ : x_s = 0\},$$

$$(\mathcal{L}_2) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \eta \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\{\exists s \in [t, t+\varepsilon[ : x_s = 0 \mid \exists u \in [0, \eta[ : x_u = 0]\}.$$

Ses calculs sont basés sur l'approximation élémentaire :

$$x_s \approx x_t + (t-s)y_t \text{ lorsque } s \rightarrow t.$$

Le premier résultat alors obtenu est le suivant ([26]) :

**Théorème 1 (Rice, 1945)**

$$\text{On a } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\{\exists s \in [t, t+\varepsilon[ : x_s = 0\} = \frac{\omega}{\pi}.$$

Cette limite représente en fait la valeur en 0 de la densité de la variable aléatoire  $\tau_0$ , à savoir  $\frac{d}{dt} P\{\tau_0 < t\} \big|_{t=0}$ .

On peut encore rattacher cette expression au nombre de zéros  $N$  du processus  $(x_t)_{t \geq 0}$  dans l'intervalle temporel  $[0, 1]$  ([25]) :

**Théorème 2 (Rice, 1945)**

$$\text{Le nombre moyen de zéros du processus } (x_t)_{t \geq 0} \text{ dans l'intervalle } [0, 1] \text{ vaut } \frac{\omega}{\pi}.$$

La limite  $(\mathcal{L}_2)$  est déterminée par le théorème suivant :

**Théorème 3 (Rice, 1945)**

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \eta \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\{\exists s \in [t, t+\varepsilon[ : x_s = 0 \mid \exists u \in [0, \eta[ : x_u = 0\} = \\ = \frac{1}{\pi\omega} \frac{\sqrt{a(t)^2 - b(t)^2}}{[c(0)^2 - c(t)^2]^{3/2}} \left[ 1 + \frac{b(t)}{\sqrt{a(t)^2 - b(t)^2}} \operatorname{Arctg} \frac{b(t)}{\sqrt{a(t)^2 - b(t)^2}} \right]. \end{aligned}$$



Cette expression peut s'interpréter comme étant l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(N \mid \tau_0 = 0)$ .

#### b) Rigueur des calculs de S.O. Rice

Par un procédé d'approximation des trajectoires du processus  $(x_t)_{t \geq 0}$ , H. Cramer et M.R. Leadbetter ([4]) ont justifié rigoureusement les résultats de S.O. Rice et les ont de plus complétés de la manière suivante :

#### Théorème 4 (Cramer et Leadbetter, 1965)

*Le moment factoriel d'ordre  $n$  de  $N$  est donné par la formule :*

$$\mathbb{E}[N(N-1) \dots (N-n+1)] =$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |y_1 \dots y_n| p_{t_1, \dots, t_n}(0, y_1; \dots; 0, y_n) dy_1 \dots dy_n.$$

*En particulier le nombre quadratique de zéros du processus  $(x_t)_{t \geq 0}$  dans l'intervalle  $[0,1]$  vaut :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N^2] = & \frac{\omega}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 (1-t) \frac{\sqrt{a(t)^2 - b(t)^2}}{[c(0)^2 - c(t)^2]^{3/2}} \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{b(t)}{\sqrt{a(t)^2 - b(t)^2}} \operatorname{Arctg} \frac{b(t)}{\sqrt{a(t)^2 - b(t)^2}} \right] dt. \end{aligned}$$

#### c) L'approche de M. Kac

Par une technique d'équations intégrale, de type Feynman-Kac, faisant appel à l'opérateur différentiel  $\mathfrak{D}$ , M. Kac a ramené le calcul du moment quadratique du nombre de zéros  $N$  à un problème d'optimisation. Son résultat est le suivant ([10], [11]) :

**Théorème 5 (Kac, 1962)**

$$\text{On a } \mathbb{E}[N^2] = \frac{2\pi}{\omega} \inf_{f \in \Lambda} \mathfrak{Z}(f),$$

$\mathfrak{Z}$  désignant la forme quadratique

$$\mathfrak{Z}(f) = \int_0^{+\infty} f(y)^2 p(0,y) y \, dy + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(y) f(z) L(y,z) dy \, dz$$

$$\text{où } L(y,z) = 2yz \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{D(t)}} e^{-\frac{a(t)}{2D(t)}(y^2+z^2)} \operatorname{ch}\left(\frac{b(t)}{D(t)} yz\right) - p(0,y)p(0,z) \right] dt,$$

$$\text{et } \Lambda = \left\{ f \in L^2([0, +\infty[) : \int_0^{+\infty} f(y)^2 p(0,y) y \, dy < +\infty \text{ et } \int_0^{+\infty} f(y) p(0,y) y \, dy = \frac{1}{2} \right\}.$$

## CHAPITRE II

### ETUDE D'UN CAS PARTICULIER : L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

#### INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'étude de la solution de l'équation de Langevin se présentant sous sa forme la plus simple :

$$\frac{d^2 x_t}{dt^2} = V_t ,$$

où  $(V_t)_{t \geq 0}$  désigne un bruit blanc gaussien.

Le processus en question s'écrit alors sous la forme

$$x_t = \int_0^t B_s ds + x_0 + ty_0$$

$$\text{où } y_t = \frac{dx_t}{dt} = B_t + y_0 .$$

En vertu du choix  $\beta = 0$ ,  $\omega^2 = 0$ , l'étude faite au chapitre précédent ne s'applique pas au processus  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$ . Dans ce cas particulier, le problème de la détermination de la loi du premier zéro du processus  $(x_t)_{t \geq 0}$  (encore ouvert dans le cas général) a pu être résolu par H.P. McKean, qui a obtenu, en 1963, la distribution conjointe du premier zéro positif de  $(x_t)_{t \geq 0}$  et de la position de  $(y_t)_{t \geq 0}$  relative à cet instant, conditionnellement à l'événement  $\{x_0 = 0\}$  ([24]).



Dans les paragraphes 1, 2 et 4.1 nous rappelons les principaux résultats connus (M. Goldman [7], Ju.P. Gor'kov [8], H.P. Mc Kean [24], M. Lefèvre [21], M. Lefèvre et E. Léonard [22], E. Wong [29]). Les paragraphes 3 et 4.2 sont consacrés à la description de nos travaux.

## NOTATIONS

Posons  $X_t = \int_0^t B_s ds$ . Le processus gaussien bidimensionnel  $U_t = (X_t, B_t)$ ,  $t \geq 0$ , est temporellement homogène et fortement markovien, ces deux propriétés s'exprimant plus précisément par l'identité matricielle entre processus :

$$\begin{pmatrix} X_{t_0+t} \\ B_{t_0+t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}_t \\ \tilde{B}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t_0} \\ B_{t_0} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0,$$

où :

- a)  $t_0$  désigne un temps d'arrêt adapté à la filtration  $\sigma\{U_s, 0 \leq s \leq t\}$ ,
- b)  $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien linéaire indépendant de  $(B_t)_{0 \leq t \leq t_0}$ ,
- c)  $\tilde{X}_t = \int_0^t \tilde{B}_s ds$ ,

et ses probabilités de transition sont définies par :

$$\begin{aligned} p_t(x, y ; u, v) &= P\{U_{s+t} \in du dv \mid U_s = (x, y)\} / du dv, \quad s > 0, \\ &= P\{(X_t + x + ty, B_t + y) \in du dv\} / du dv \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3} (u - x - ty)^2 + \frac{6}{t^2} (u - x - ty)(v - y) - \frac{2}{t} (v - y)^2\right]. \end{aligned}$$

Nous noterons par  $P_{(x,y)}$  la probabilité conditionnelle associée.

Le générateur infinitésimal du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  coïncide avec l'opérateur différentiel :

$$D = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial x},$$

admettant pour adjoint

$$D^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

$$\text{Soit } \Phi_\lambda(x, y; u, v) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_t(x, y; u, v) dt \quad (\text{resp. } \Phi_\lambda^*(x, y; u, v) = \Phi_\lambda(u, v; x, y))$$

la solution élémentaire de l'opérateur  $\lambda - D$  (resp.  $\lambda - D^*$ ), c'est-à-dire :

$$\left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi_\lambda(x, y; u, v) = \lambda \Phi_\lambda(x, y; u, v) - \delta_{(u, v)}(x, y).$$

Nous définissons enfin :

a) le premier instant d'atteinte d'un seuil fixé  $a$  par le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  :

$$\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\} = \inf\{t > 0 : U_t \in \{a\} \times \mathbb{R}\};$$

b) le premier instant de passage en  $b$  par  $(B_t)_{t \geq 0}$  :

$$\sigma_b = \inf\{t > 0 : B_t = b\} = \inf\{t > 0 : U_t \in \mathbb{R} \times \{b\}\};$$

c) le premier instant d'atteinte de la barrière bilatère  $\{a, b\}$  par  $(B_t)_{t \geq 0}$  :

$$\sigma_{ab} = \inf\{t > 0 : B_t \in \{a, b\}\} = \inf\{t > 0 : U_t \in \mathbb{R} \times \{a, b\}\},$$

(avec la convention habituelle  $\inf \emptyset = +\infty$ ).

Remarquons que la borne inférieure définissant l'instant  $\tau_a$  est, sous la probabilité  $P_{(a, y)}$ ,  $y \neq 0$ , du fait de la dérivabilité de la fonction  $t \mapsto X_t$ , un minimum :

$$\tau_a = \min\{t > 0 : X_t = a\} > 0.$$

Cette observation est absolument essentielle dans toute l'étude de ce processus ; plus particulièrement elle nous permettra de définir les temps de passages successifs sur l'axe  $x = a$ .



# 1. LA LOI CONJOINTE DU COUPLE $(\tau_a, B_{\tau_a})$ SOUS LA PROBABILITE $P_{(a,y)}$

## a) La formule de McKean

Le résultat de base, dû à H.P. McKean ([24]), s'énonce comme suit (du fait de l'égalité des probabilités  $(\tau_a, B_{\tau_a})(P_{(a,y)}) = (\tau_0, B_{\tau_0})(P_{(0,y)})$ , nous supposons que  $a = 0$ ) :

### Théorème 1 (McKean, 1963)

i) La loi conjointe du couple  $(\tau_0, B_{\tau_0})$  sous la probabilité  $P_{(0,y)}$ ,  $y \neq 0$ , s'explicite selon la formule suivante :

$$P_{(0,y)}\{\tau_0 \in dt, B_{\tau_0} \in dz\} = \frac{3|z|}{\pi\sqrt{2}t^2} e^{-\frac{2}{t}(z^2-|yz|+y^2)} \int_0^{\frac{4|yz|}{t}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{A_y}(z) dt dz$$

avec la notation

$$A_y = ]0, +\infty[ \text{ si } y < 0, A_y = ]-\infty, 0[ \text{ si } y > 0.$$

ii) En particulier la loi de la variable aléatoire  $B_{\tau_0}$  s'exprime selon :

$$P_{(0,y)}\{B_{\tau_0} \in dz\} = \frac{3}{2\pi} \frac{|y|^{1/2} |z|^{3/2}}{|z|^3 + |y|^3} \mathbb{1}_{A_y}(z) dz.$$

La preuve de ce résultat repose essentiellement sur le caractère fortement markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , menant à une équation intégrale non triviale dont la résolution présente une difficulté. H.P. McKean a pu contourner cet obstacle par le biais d'une transformation fonctionnelle peu usitée : la transformation de Kontorovich - Lebedev ([6]), dont l'intervention dans ce problème est actuellement encore inexpliquée.

## b) La suite des temps d'enlacement autour de l'origine

L'existence, déjà observée au paragraphe 2 du chapitre I, de points irréguliers pour le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  permet de définir les temps de passages successifs en zéro par



$(X_t)_{t \geq 0}$  (voir [24]). Dans le cas exceptionnel  $y = 0$ , le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  prend dans tout intervalle  $[0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , une infinité de valeurs positives et une infinité de valeurs négatives (ce qui se vérifie aisément à l'aide de la loi du zéro-un de Blumenthal). On est donc amené à considérer les deux suites des temps de passages successifs en zéro de  $(X_t)_{t \geq 0}$  postérieurs et antérieurs à l'instant déterministe  $t = 1$  :

$$\tau_1^+ = \min\{t > 1 : X_t = 0\}$$

$$\tau_{n+1}^+ = \min\{t > \tau_n^+ : X_t = 0\}, \quad n \geq 1,$$

et

$$\tau_1^- = \max\{t < 1 : X_t = 0\}$$

$$\tau_{n+1}^- = \max\{t < \tau_n^- : X_t = 0\}, \quad n \geq 1,$$

puis celles des positions de  $(B_t)_{t \geq 0}$  relatives à ces instants :

$$\beta_n^+ = B_{\tau_n^+}, \quad n \geq 1$$

et

$$\beta_n^- = B_{\tau_n^-}, \quad n \geq 1.$$

Les suites  $(\tau_n^+, \beta_n^+)_{n \geq 1}$  et  $(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1}$  ont les propriétés remarquables (découvertes par H.P. McKean, [24]) suivantes :

**Théorème 2 (Mc Kean, 1963)**

Les suites  $(\tau_n^+, |\beta_n^+|)_{n \geq 1}$  et  $(\tau_n^-, |\beta_n^-|)_{n \geq 1}$  sont des chaînes de Markov de probabilités de transition respectives :

$$i) p^+(s, y; t, z) = P\{\tau_{n+1}^+ \in dt, |\beta_{n+1}^+| \in dz \mid \tau_n^+ = s, |\beta_n^+| = y\} / dt dz$$

$$= \frac{3z}{\pi\sqrt{2}(t-s)^2} e^{-\frac{2}{t-s}(z^2-yz+y^2)} \int_0^{4yz} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{[s, +\infty[}(t) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(y) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(z) ;$$

$$ii) p^-(s, y; t, z) = P\{\tau_{n+1}^- \in dt, |\beta_{n+1}^-| \in dz \mid \tau_n^- = s, |\beta_n^-| = y\} / dt dz$$

$$= \frac{\frac{z}{t^2} e^{-\frac{2z^2}{t}}}{\frac{y}{s^2} e^{-\frac{2y^2}{s}}} \times \frac{3z}{\pi\sqrt{2}(s-t)^2} e^{-\frac{2}{s-t}(z^2-yz+y^2)} \int_0^{4yz} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{[0, s[}(t) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(y) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(z) .$$

Ces formules dérivent essentiellement de l'expression de la loi conjointe du couple  $(\tau_0, B_{\tau_0})$  relativement à la probabilité  $P_{(0,v)}$ ,  $v \neq 0$ .

Ne connaissant pas la distribution générale du couple  $(\tau_0, B_{\tau_0})$  sous la probabilité  $P_{(u,v)}$ ,  $(u,v) \neq (0,0)$ , H.P. McKean n'a pas pu obtenir les lois absolues des chaînes de Markov  $(\tau_n^+, |\beta_n^+|)_{n \geq 1}$  et  $(\tau_n^-, |\beta_n^-|)_{n \geq 1}$ , c'est-à-dire les lois conjointes des couples  $(\tau_1^+, |\beta_1^+|)$  et  $(\tau_1^-, |\beta_1^-|)$ .

Dans les travaux [12] et [13] nous avons justement déterminé la distribution du couple  $(\tau_0, B_{\tau_0})$  relativement à la probabilité  $P_{(u,v)}$  dans le cas général où  $(u,v) \neq (0,0)$ , et nous en avons déduit les lois absolues des chaînes de Markov  $(\tau_n^+, \beta_n^+)_{n \geq 1}$  et  $(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1}$ .

On pourra également trouver dans le travail de H.P. McKean [24], certains résultats concernant le comportement asymptotique des suites  $(\tau_{n \geq 1}^+)$  et  $(\beta_{n \geq 1}^+)$ .

### c) une équation de Langevin particulière

Par analogie avec le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, associé au mouvement brownien ordinaire, introduisons le processus  $(e^{\alpha t} X_{e^{\beta t}})_{t \geq 0}$ , et déterminons les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  de sorte que le processus ainsi obtenu soit stationnaire.

Sa fonction de covariance s'explicite, pour  $0 \leq s \leq t$ , selon :

$$\mathbb{E}[e^{\alpha s} X_{e^{\beta s}} \cdot e^{\alpha t} X_{e^{\beta t}}] = \frac{1}{2} e^{(\alpha+2\beta)s+(\alpha+\beta)t} - \frac{1}{6} e^{(\alpha+3\beta)s+\alpha t}.$$

Elle ne dépend donc que de  $t-s$  à la seule condition que la relation  $-2\alpha = 3\beta$  soit satisfaite.

Posons alors  $\alpha = -3\gamma$ ,  $\beta = 2\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , et soit  $Y_t = e^{-3\gamma t} X_{e^{2\gamma t}}$ ,  $t \geq 0$ , le processus associé.

La fonction de corrélation du processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  :

$$c(t) = \mathbb{E}(Y_s Y_{s+t}) = \frac{1}{2} e^{-\gamma t} - \frac{1}{6} e^{-3\gamma t},$$

est précisément la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2 c}{dt^2} + 4\gamma \frac{dc}{dt} + 3\gamma^2 c = 0$$

satisfaisant aux conditions initiales :

$$c(0) = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{dc}{dt}(0) = 0.$$

Considérons maintenant l'équation de Langevin correspondante. Elle s'écrit :

$$(L) \quad \frac{d^2 x_t}{dt^2} + 4\gamma \frac{dx_t}{dt} + 3\gamma^2 x_t = \sqrt{2D} V_t$$



où  $V_t$  désigne un bruit blanc gaussien, soit, formellement  $V_t dt = dW_t$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  étant un mouvement brownien linéaire.

Nous avons déterminé au chapitre I un processus markovien stationnaire s'exprimant sous la forme d'une intégrale stochastique, qui est solution de (L) :

$$x_t = \sqrt{2D} \int_0^t \frac{e^{-\gamma(t-u)} - e^{-3\gamma(t-u)}}{2\gamma} dW_u + 3\left(\frac{1}{2} e^{-\gamma t} - \frac{1}{6} e^{-3\gamma t}\right)x_0 + \frac{1}{2\gamma} (e^{-\gamma t} - e^{-3\gamma t})y_0.$$

Dans cette expression  $x_0$  et  $y_0 = \frac{dx_0}{dt}$  sont des variables aléatoires gaussiennes centrées, mutuellement indépendantes (de variances respectives  $\mathbb{E}(x_0^2) = \frac{D}{12\gamma^3}$ ,  $\mathbb{E}(y_0^2) = \frac{D}{4\gamma}$ ), et indépendantes du mouvement brownien  $(W_t)_{t \geq 0}$ .

Les processus  $(x_t)_{t \geq 0}$  et  $(X_t)_{t \geq 0}$  sont liés par la relation suivante (E. Wong [29]), découlant de la propriété de Markov forte du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  :

**Proposition 1 (Wong)**

*Le processus  $(x_t)_{t \geq 0}$  conditionné par l'événement  $(x_0, y_0) = (x, y)$ ,  $(x, y)$  étant un point fixé, coïncide en loi avec le processus*

$$\left(\frac{1}{2} \frac{D^{1/2}}{\gamma^{3/2}} e^{-3\gamma t} X_{e^{2\gamma t}-1} + 3\left(\frac{1}{2} e^{-\gamma t} - \frac{1}{6} e^{-3\gamma t}\right)x + \frac{1}{2\gamma} (e^{-\gamma t} - e^{-3\gamma t})y\right)_{t \geq 0}.$$

Cette remarque permet d'exprimer la loi de la distance temporelle  $T$  entre deux zéros consécutifs du processus stationnaire  $(x_t)_{t \geq 0}$  en fonction de celle du premier instant de passage en zéro,  $\tau_0$ , du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Le lien est le suivant :

### Proposition 2 (Wong)

*La relation suivante est satisfaite :*

$$P\{T < t\} = \int_0^{+\infty} P_{(0,y/2)}\{\tau_0 < e^{2\gamma t} - 1\} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

En s'appuyant sur une technique "extrêmement" calculatoire, E. Wong ([29]) a réussi à expliciter la loi de la variable aléatoire  $T$ . Elle s'exprime en termes d'intégrales elliptiques de la manière suivante :

### Théorème 3 (Wong, 1966)

*La distribution de la variable aléatoire  $T$  s'explicite selon la formule :*

$$P\{T < t\} = 1 - \frac{3}{2\pi} \frac{1}{2 + e^{-\gamma t}} \left[ e^{-\frac{3\gamma}{2}t} \Pi_1\left(-\frac{2 + e^{-\gamma t}}{2}, \sqrt{\frac{1 - e^{-\gamma t}}{2}}\right) + \right. \\ \left. + 2e^{-\frac{\gamma}{2}t} K\left(\sqrt{\frac{1 - e^{-\gamma t}}{2}}\right) \right]$$

où  $\Pi_1$  et  $K$  désignent les intégrales elliptiques complètes de première et troisième espèces ([5]).

### d) La transformée de Laplace de la probabilité $B_{\tau_0}(P_{(0,y)})$

Dans [22], M. Lefèvre et E. Léonard donnent une expression, obtenue à partir de la formule de Mc Kean, de la transformée de Laplace de la variable aléatoire  $|B_{\tau_0}|$  sous la probabilité  $P_{(0,y)}$ ,  $y \neq 0$ .



**Théorème 4 (Lefèvre et Léonard, 1989)**

*On a l'égalité :*

$$\mathbb{E}_{(0,y)}[e^{-\mu B_{\tau_0}}] = \frac{1}{2} e^{\mu|y|} \operatorname{erfc}(\sqrt{\mu|y|}) - e^{-\frac{\mu|y|}{2}} \cos(\mu|y|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}) - \\ - 2\sqrt{\frac{\mu|y|}{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\mu|y|)^n}{(2n+1)n!} \cos(\mu|y|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2n\pi}{3}),$$

*erfc désignant la fonction d'erreur usuelle ([1]).*

Ultérieurement, suite au travail de H.P. Mc Kean, les tentatives de recherche de la distribution du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  relativement à  $P_{(x,y)}$  dans le cas général où  $x \neq a$  ont progressé grâce aux travaux de M. Goldman ([7]) qui, en 1971, détermina la loi de la variable aléatoire  $\tau_a$  sous  $P_{(x,y)}$  lorsque  $x < a, y \leq 0$  (ou encore  $x > a, y \geq 0$ ), et de H.P. Gor'kov ([8]) qui obtint en 1975 celle de la variable aléatoire  $B_{\tau_a}$  relativement à  $P_{(x,y)}$  dans le cas  $x \neq a$ . Nous avons complètement résolu ce problème pour  $(x,y)$  quelconque.

Nous présentons succinctement dans la partie II les résultats de M. Goldman et H.P. Gor'kov, puis dans la partie III nos travaux concernant la loi conjointe du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}$ .

## 2. LES LOIS DES VARIABLES ALEATOIRES $\tau_a$ ET $B_{\tau_a}$ SOUS LA PROBABILITE $P_{(x,y)}$

### a) La distribution de $\tau_a$ sous $P_{(x,y)}$ , $x < a, y \leq 0$

Par une technique d'équations intégrales, M. Goldman ([7]) obtint la loi de  $\tau_a$  sous  $P_{(x,y)}$ . Une difficulté technique l'a conduit à se limiter aux cas  $x < a, y \leq 0$  et  $x > a, y \geq 0$ . Son résultat s'énonce comme suit :



### Théorème 5 (Goldman, 1971)

Pour  $x < a, y \leq 0$  on a :

$$P_{(x,y)} \{ \tau_a \in dt \} / dt = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left( \frac{3}{2} \frac{a-x}{t^{5/2}} - \frac{1}{2} \frac{y}{t^{3/2}} \right) e^{-\frac{3(a-x-ty)^2}{2t^3}} + \\ + \int_0^{+\infty} z dz \int_0^t P_{(0,-z)} \{ \tau_0 \in ds \} q_{t-s}(x,y; a,z),$$

avec

$$P_{(0,-z)} \{ \tau_0 \in ds \} = \int_0^{+\infty} \frac{3\zeta}{\pi\sqrt{2} s^2} e^{-\frac{2}{s}(\zeta^2 - z\zeta + z^2)} d\zeta \int_0^{\frac{4z\zeta}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} ds, \quad z > 0,$$

et

$$q_t(x,y; u,v) = p_t(x,y; u,v) - p_t(x,y; u, -v).$$

On pourra également trouver dans l'article de M. Goldman [7] le comportement asymptotique de la densité  $P_{(x,0)} \{ \tau_a \in dt \} / dt$  de  $\tau_a$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , ainsi qu'une estimation numérique de la probabilité  $P_{(0,0)} \{ \max_{0 \leq s \leq t} X_s = X_t \}$ .

#### b) La distribution de $B_{\tau_a}$ sous $P_{(x,y)}$

En résolvant un problème aux limites associé à l'opérateur aux dérivées partielles  $D$ , Ju.P. Gor'kov ([8]) a obtenu la loi de la variable aléatoire  $B_{\tau_a}$  relativement à la probabilité  $P_{(x,y)}$ ,  $x \neq a$ . Elle s'exprime sous la forme suivante :

### Théorème 6 (Gor'kov, 1975)

On a pour  $x \neq a$  l'égalité :

$$P_{(x,y)} \{ B_{\tau_a} \in dz \} = |z| \left[ \Phi_0(x,y; a,z) - \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{3/2}}{\zeta^{3+1}} \Phi_0(x,y; a, -\zeta z) \right] \mathbb{1}_A(z) dz,$$

avec  $A = ]0, +\infty[$  si  $x < a$  et  $A = ]-\infty, 0[$  si  $x > a$ .

### 3. LA LOI CONJOINTE DU COUPLE $(\tau_a, B_{\tau_a})$ SOUS LA PROBABILITE $P_{(x,y)}$

Dans ce paragraphe nous rassemblons nos travaux concernant la distribution du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}$ . Faisons un résumé des résultats obtenus :

- a) Dans nos deux premiers articles ([12] et [13]) nous déterminons explicitement la loi conjointe du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  relativement à  $P_{(x,y)}$ . Notre approche a consisté à faire appel au caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  (ce qui a déjà été observé par H.P. Mc Kean, [24]). Ceci nous a permis d'exprimer la distribution du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  comme solution du problème aux limites

$$\begin{cases} Du(x,y) &= \lambda u(x,y), (x,y) \in ]-\infty, a[ \times ]-\infty, +\infty[ \\ u(a,y) &= \varphi(y), y > 0. \end{cases}$$

Nous obtenons en corollaire la distribution du maximum  $\max_{0 \leq s \leq t} X_s$  du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et nous retrouvons les lois connues (M. Goldman [7], Ju.P. Gor'kov [8]) des variables aléatoires  $\tau_a$  et  $B_{\tau_a}$  (sous  $P_{(x,y)}$ ).

Dans les mêmes travaux, nous présentons une autre preuve faisant appel à la fonctionnelle de Feynman-Kac d'un résultat de M. Lefebvre (cf. § 4.1) concernant la loi conjointe du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  relativement à  $P_{(x,y)}$ . Cette méthode nous a permis d'expliciter plus généralement la loi du couple  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$ .

- b) Dans la publication suivante - " *Sur les temps de passages successifs de l'intégrale du mouvement brownien*" ([14]) - nous apportons des informations complémentaires sur les propriétés des suites des instants de passages successifs sur la droite  $\{0\} \times \mathbb{R}$  du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ . En effet H.P. Mc Kean a obtenu en [24] les densités des probabilités de transition des chaînes de Markov  $(\tau_n^\pm, \beta_n^\pm)_{n \geq 1}$  et  $(\beta_n^\pm)_{n \geq 1}$ . La connaissance de la loi  $(\tau_0, B_{\tau_0})$  ( $P_{(x,y)}$ ) nous a permis d'expliciter leurs distributions absolues.
- c) Dans la note " *Dernier instant de passage pour l'intégrale du mouvement brownien* " ([15]), nous nous intéressons au dernier instant d'atteinte du seuil



a, par le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , antérieur à un instant déterministe fixé T :

$$\tau_{a,T}^- = \max\{t \in [0, T] : X_t = a\}$$

(avec la convention habituelle  $\max \emptyset = -\infty$ ).

Nous relions les temps d'arrêt  $\tau_{a,T}^-$  et  $\tau_a$  et déterminons en exploitant le caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  la loi (sous  $P_{(x,y)}$ ) du triplet  $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$  où

$$\tau_{a,T}^+ = \min\{t \geq T : X_t = a\}$$

(avec la convention  $\min \emptyset = +\infty$ ).

- d) N'ayant pu déterminer, lors du travail précédent, la distribution du quadruplet  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$  (la méthode utilisée s'avérant inopérante), nous avons été naturellement amenés à étudier les excursions du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  "encadrant" l'instant déterministe T. Plus précisément par une technique de retournement du temps et en faisant appel aux processus dual et absorbé associés à  $(U_t)_{t \geq 0}$ , nous avons pu obtenir la loi du processus d'excursion de  $(X_t)_{t \geq 0}$  encadrant T, c'est-à-dire la distribution du vecteur aléatoire. Nous explicitons la distribution du vecteur aléatoire

$$(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}, U_{\tau_{a,T}^- + t_1}, \dots, U_{\tau_{a,T}^- + t_n}, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}),$$

pour  $0 < t_1 < \dots < t_n < \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-$ , laquelle nous fournit en particulier celle du quadruplet  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$ . Cette étude est décrite dans l'article intitulé "Les excursions de l'intégrale du mouvement brownien" ([16], [17]).

- e) Enfin, le processus absorbé associé à  $(X_t)_{t \geq 0}$  (introduit dans le sous-paragraphe précédent) nous a permis de calculer analytiquement les moments



successifs de la variable aléatoire  $T_{a,b} = \int_0^{\tau_b} 1_{[a,+\infty[}(X_t)dt$ ,  $b > a$  donnant le temps de séjour relatif à l'intervalle de temps  $[0, \tau_b]$  du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  dans la demi-droite  $[a, +\infty[$ . Ce travail fait l'objet de la note " *Les moments du temps de séjour de l'intégrale du mouvement brownien* " ([18]).

# SUR L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

par Aimé LACHAL

Université de LYON I

Institut de Mathématiques et Informatique

Laboratoire d'Analyse et Probabilités

## RESUME

Considérons le processus stochastique bidimensionnel  $U_t = (X_t + x + ty, B_t + y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $(B_t)_{t \geq 0}$  étant le mouvement brownien standard,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive et  $x, y$  deux réels quelconques. Dans cette note nous déterminons la distribution conjointe de  $\tau_a$  et  $U_{\tau_a}$  où  $\tau_a$  est le premier instant de passage sur la droite  $\{a\} \times \mathbb{R}$  du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ . Nous donnons également une preuve simplifiée (ainsi qu'une extension) d'un résultat récent de M. Lefèvre (théorèmes 1 et 3 de [6]).

## I. INTRODUCTION

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien standard,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive, et  $U_t = (X_t + x + ty, B_t + y)$ ,  $t \geq 0$ , le processus bidimensionnel associé. Le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  intervient dans divers domaines des mathématiques appliquées, notamment en mécanique, ([4], [7], [8], [10]), optimisation ([6]), statistiques ([1]), biologie ([9]).

Plus particulièrement on est amené à rechercher la distribution conjointe de  $\tau_a$  et  $U_{\tau_a}$  avec  $\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t + x + ty = a\}$ , ou, ce qui revient au même, celle du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  (où ici  $B_{\tau_a}$  désigne la valeur à l'instant  $\tau_a$  de la seconde composante du processus  $U_t$ ).

La loi conjointe du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  a été déterminée par H.P. McKean ([7]) dans le cas particulier  $x = a$ .

Les distributions des variables aléatoires  $\tau_a$  et  $B_{\tau_a}$  ont été calculées dans le cas  $x < a$ ,  $y \leq 0$  par M. Goldman [2] et J.U.P. Gor'kov [3].

Dans cette note nous explicitons la loi conjointe du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  dans le cas général où  $x$  et  $y$  sont des réels quelconques (c'est-à-dire dans le cas  $x \neq a$  jusqu'à présent non résolu).

Nous indiquons également une généralisation d'un résultat de M. Lefèbvre (théorèmes 1 et 3 de [6]) en présentant une preuve simplifiée.

## II. LA DISTRIBUTION CONJOINTE DU COUPLE $(\tau_a, B_{\tau_a})$ .

Introduisons les notations suivantes :

$$P_{(x,y)}\{X_t \in du, B_t \in dv\} = P\{X_{t+x+ty} \in du, B_{t+y} \in dv\} = p_t(x,y; u,v)dudv,$$

où  $p_t(x,y; u,v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp \left[ -\frac{6}{t^3} (u-x-ty)^2 + \frac{6}{t^2} (u-x-ty)(v-y) - \frac{2}{t} (v-y)^2 \right]$  désigne la densité de transition du processus  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ .

Notre résultat s'énonce comme suit :

### Théorème 1.

*La distribution conjointe du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  est donnée par la formule*

$$(1) P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\} = |z| \left[ p_t(x,y; a,z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} P_{(0,-|z|)}\{\tau_0 \in ds, B_{\tau_0} \in d\zeta\} p_{t-s}(x,y; a, -\varepsilon\zeta) \right] \mathbb{1}_A(z) dt dz$$

*avec*

$$(2) P_{(0,-|z|)}\{\tau_0 \in ds, B_{\tau_0} \in d\zeta\} = \frac{3\zeta}{\pi\sqrt{2}s^2} e^{-\frac{2}{s}(z^2-|z|\zeta+\zeta^2)} \int_0^{\frac{4|z|\zeta}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\zeta) ds d\zeta$$

*et les conventions d'écriture*

$$A = ]0, +\infty[ \text{ si } x < a, A = ]-\infty, 0[ \text{ si } x > a, \\ \varepsilon = \text{signe de } (a-x).$$

### Preuve.

Nous présentons les points essentiels de la démonstration sous forme de lemmes en donnant quelques indications sur leurs preuves.



**Lemme 1.**

*La loi de la variable aléatoire  $B_{\tau_a}$  est portée par l'intervalle  $[0, +\infty[$  (resp.  $]-\infty, 0]$ ) lorsque  $x < a$  (resp.  $x > a$ ).*

**Lemme 2.**

*La limite suivante est satisfaite :*

(3)  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \tau_a = 0$  (resp.  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \tau_a = 0$ ), lorsque  $y > 0$  (resp.  $y < 0$ ).

**Lemme 3.**

*La transformée de Laplace du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  définie par*

$$u(x, y) = \mathbb{E}_{(x, y)}[e^{-\lambda \tau_a - \mu B_{\tau_a}}] \text{ pour } x < a, -\infty < y < +\infty$$

(resp.  $u(x, y) = \mathbb{E}_{(x, y)}[e^{-\lambda \tau_a + \mu B_{\tau_a}}] \text{ pour } x > a, -\infty < y < +\infty$ ),  $\lambda > 0, \mu > 0$ ,

*est solution du problème aux limites suivant :*

(4) 
$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lambda u(x, y), & x < a \text{ (resp. } x > a), -\infty < y < +\infty, \\ u(a^-, y) = e^{-\mu y}, & y > 0 \text{ (resp. } u(a^+, y) = e^{\mu y}, y < 0), \end{cases}$$

$u(a^-, y)$  (resp.  $u(a^+, y)$ ) désignant la limite à gauche  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} u(x, y)$  (resp. à droite

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} u(x, y)$ ).

**Lemme 4.**

*Le problème aux limites (4) admet une solution bornée unique donnée par*

$$(5) \quad u(x,y) = \int_0^{+\infty} z e^{-\mu z} G_{\lambda,a}^-(x,y; z) dz, \quad x < a, -\infty < y < +\infty$$

$$(resp. \quad u(x,y) = \int_{-\infty}^0 |z| e^{\mu z} G_{\lambda,a}^+(x,y; z) dz, \quad x > a, -\infty < y < +\infty)$$

avec

$$G_{\lambda,a}^- = \Phi_{\lambda}(x,y; a,z) - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_{(a,-z)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in d\zeta\} \Phi_{\lambda}(x,y; a,-\zeta),$$

$$x < a, -\infty < y < +\infty, z > 0$$

$$(resp. \quad G_{\lambda,a}^+ = \Phi_{\lambda}(x,y; a,z) - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_{(a,z)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in d\zeta\} \Phi_{\lambda}(x,y; a,\zeta),$$

$$x > a, -\infty < y < +\infty, z < 0),$$

$$\Phi_{\lambda}(x,y; u,v) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_t(x,y; u,v) dt,$$

la loi conjointe  $P_{(a,-|z|)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in d\zeta\}$  étant indépendante de  $a$  et s'exprimant par la formule (2).

**Preuve des lemmes 1 et 2.** L'étude du sens de variation de la fonction  $t \in [0, +\infty[ \rightarrow X_t$  nous donne immédiatement le support de la variable aléatoire  $B_{\tau_a}$  ainsi que la limite (3).  $\square$

**Preuve du lemme 3.** Le lemme 3 découle d'un résultat classique sur les processus stochastiques généraux et du lemme 2.  $\square$

**Preuve du lemme 4.** On montre que la solution  $u(x,y)$  du problème aux limites (4) relatif au domaine  $]-\infty, a[ \times ]-\infty, +\infty[$  s'exprime, en fonction de la solution élémentaire de l'opérateur  $\lambda - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial x}\right)$ , selon la formule

$$(6) \quad u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} z u(a^-, z) \Phi_{\lambda}(x,y; a,z) dz, \quad x < a, -\infty < y < +\infty.$$

La transformation de Kontorovich-Lebedev appliquée à la fonction  $v(y) = u(a^-, -y)$ ,  $y > 0$ , solution de l'équation intégrale déduite de (6) après avoir fait tendre  $x$  vers  $a$ ,  $x < a$ , soit :

$$v(y) = \int_0^{+\infty} ze^{-\mu z} \Phi_\lambda(a, -y; a, z) dz - \int_0^{+\infty} zv(z) \Phi_\lambda(a, -y; a, -z) dz, \quad y > 0,$$

nous conduit, après calculs, à la solution (5) annoncée (l'étude du problème (4) relatif au domaine  $]a, +\infty[ \times ]-\infty, +\infty[$  se déduisant aisément du cas précédent).  $\square$

**Fin de la preuve du théorème 1.** Une inversion de la double transformée de Laplace de la loi du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  fournie par le lemme 4 nous donne le résultat (1) annoncé.  $\square$

**Corollaire 1.**

$$P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt\} = \varepsilon \left[ \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left( \frac{3}{2} \frac{a-x}{t^{5/2}} - \frac{1}{2} \frac{y}{t^{5/2}} \right) e^{-\frac{3(a-x-ty)^2}{2t^3}} + \int_0^{+\infty} zdz \int_0^t P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in ds\} q_{t-s}(x,y; a,z) \right] dt$$

avec  $q_t(x,y; u,v) = p_t(x,y; u,v) - p_t(x,y; u,-v)$  et  $\varepsilon = \text{signe de } (a-x)$ .

**Corollaire 2.**

$$P_{(x,y)}\{B_{\tau_a} \in dz\} = |z| \left[ \Phi_0(x,y; a,z) - \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{3/2}}{\zeta^{3+1}} \Phi_0(x,y; a, -\zeta z) d\zeta \right] \mathbb{1}_A(z) dz$$

avec  $A = ]0, +\infty[$  si  $x < a$ ,  $A = ]-\infty, 0[$  si  $x > a$ .



### Corollaire 3.

$$P_{(x,y)}\left\{\max_{0 \leq s \leq t} X_s \in da\right\} = \left[\sqrt{\frac{3}{2\pi t^3}} e^{-\frac{3(a-x-ty)^2}{2t^3}} + \int_0^{+\infty} zdz \int_0^t ds \int_0^s P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in d\sigma\} \Psi_{s-\sigma}(x,y; a,-z)\right] \mathbb{1}_{]x,+\infty[}(a) da$$

$$\text{avec } \Psi_s(x,y; u,v) = \frac{\partial}{\partial u} p_s(x,y; u,v) - \frac{\partial}{\partial v} p_s(x,y; u,v).$$

$$P_{(x,0)}\left\{\max_{0 \leq s \leq t} X_s \in da\right\} = \frac{2}{3} \frac{t}{a-x} \frac{P_{(x,0)}\{\tau_a \in dt\}}{dt} \mathbb{1}_{]x,+\infty[}(a) da.$$

### III. EXTENSION D'UN RESULTAT DE M. LEFEBVRE.

M. Lefèvre a déterminé la transformée de Laplace de la loi conjointe du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  avec  $\sigma_b = \inf\{t > 0 : B_t = b\}$  ([6], théorèmes 1 et 3).

Nous explicitons plus généralement celle de la distribution conjointe du couple  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$  avec  $\sigma_{ab} = \inf\{t > 0 : B_t \in \{a,b\}\}$ .

## Théorème 2.

Fixons le point  $(x,y) \in ]-\infty, +\infty[ \times ]a,b[$ .

La transformée de Laplace du couple  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$  est caractérisée par

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} + \varepsilon_n \mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{\varepsilon_n \mu x} F_n(a,b; y), \lambda > 0, \mu \in A_n,$$

avec les conventions d'écriture

$n = 1$  si  $b > a > 0$ ,  $n = 2$  si  $a < b < 0$ ,  $n = 3$  si  $a < 0 < b$ ,

$\varepsilon_1 = -1$ ,  $\varepsilon_2 = +1$ ,  $\varepsilon_3 = i$ ,

$A_1 = ]0, +\infty[$ ,  $A_2 = ]-\infty, 0[$ ,  $A_3 = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ,

$$F_n(a,b; y) = \frac{\frac{A_n(y)}{A_n(a)} - \frac{B_n(y)}{B_n(a)}}{\frac{A_n(b)}{A_n(a)} - \frac{B_n(b)}{B_n(a)}} + \frac{\frac{A_n(y)}{A_n(b)} - \frac{B_n(y)}{B_n(b)}}{\frac{A_n(a)}{A_n(b)} - \frac{B_n(a)}{B_n(b)}},$$

$$A_n(y) = \text{Ai}\left(\eta_n 2^{1/3} \frac{\lambda - \varepsilon_n \mu y}{\mu^{2/3}}\right), \quad B_n = \text{Bi}\left(\eta_n 2^{1/3} \frac{\lambda - \varepsilon_n \mu y}{\mu^{2/3}}\right),$$

$$\eta_1 = \eta_2 = +1, \quad \eta_3 = e^{\text{sgn } \mu \cdot i\pi/3},$$

$\text{Ai}$  et  $\text{Bi}$  désignant les fonctions d'Airy usuelles.

### Preuve.

La formule de Feynman-Kac nous assure que la fonction

$$u_n(y) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_{ab} + \varepsilon_n \mu \int_0^{\sigma_{ab}} B_t dt} \mid B_0 = y\right] \text{ vérifie le problème de Sturm-Liouville suivant :}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^2 u_n}{dy^2}(y) = (\lambda - \varepsilon_n \mu y) u_n(y), & a < y < b, \\ u_n(a) = u_n(b) = 1 \end{cases}$$

dont la solution est précisément  $F_n(a,b; y)$ .

On conclut en notant l'égalité triviale  $\mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} + \varepsilon_n \mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{\varepsilon_n \mu x} u_n(y)$ .  $\square$

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- [1] GANI, J. and McNEIL, D.R. : Adv. Appl. Proba. 3 (1971), pp. 339-352.
- [2] GOLDMAN, M. : Ann. Math. Stat. 42 (1971), pp. 2150-2155.
- [3] GOR'KOV, Ju. P. : Soviet Math. Dokl. 16 (1975), pp. 904-908.
- [4] KAC, M. : SIAM Rev. 4 (1962), pp. 1-11.
- [5] LACHAL, A. : *Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, (proposé).
- [6] LEFEBVRE, M. : SIAM J. Appl. Math. 49 (1989), pp. 1514-1523.
- [7] Mc KEAN, H.P. Jr. : J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [8] POTTER, J. : *Some statistical properties of the notion of an oscillator driven by a white noise*. M.I.T. doctoral dissertation.
- [9] PURI, P.S. : Biometrika 53 (1966), pp. 61-71. Fifth Berk. Symp. Math. Stat. Prob., vol. IV (1967), pp. 511-535.
- [10] RICE, S.O. : Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.



# SUR LE PREMIER INSTANT DE PASSAGE DE L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

par A. LACHAL

Laboratoire d'Analyse et Probabilités  
Institut de Mathématiques et Informatique  
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I  
43, boulevard du 11 Novembre 1918  
69622 VILLEURBANNE CEDEX (France)

## RESUME

Considérons le processus stochastique bidimensionnel  $U_t = (X_t + x + ty, B_t + y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $(B_t)_{t \geq 0}$  étant le mouvement brownien standard,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  et  $x, y$  deux réels quelconques. Dans cette note nous déterminons la distribution conjointe de  $\tau_\alpha$  et  $U_{\tau_\alpha}$  où  $\tau_\alpha$  est le premier instant de passage sur la droite  $\{\alpha\} \times \mathbb{R}$  du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ . Nous donnons également une preuve élémentaire (ainsi qu'une généralisation) d'un résultat récent de M. Lefèvre (théorèmes 1 et 3 de [15]).

## INTRODUCTION

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien standard,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive et  $U_t = (X_t + x + ty, B_t + y)$  le processus bidimensionnel associé. Le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  intervient naturellement dans divers domaines des mathématiques appliquées, notamment en mécanique (Rice [23], Potter [20], Kac [12], McKean [19]), optimisation (Lefèvre [15] et [16]), statistiques (Gani et McNeil [8]), biologie (Puri [21] et [22]).

Plus particulièrement on est amené à rechercher la distribution des fonctionnelles suivantes :

1.  $\tau_\alpha = \inf\{t > 0 : X_t + x + ty = \alpha\}$  : premier instant de passage en  $\alpha$  de la première composante de  $(U_t)_{t \geq 0}$  ;

2.  $B_{\tau_{\alpha}}$  : position de la deuxième composante de  $(U_t)_{t \geq 0}$  à l'instant où la première atteint le point  $\alpha$  ;
3. le couple  $(\tau_{\alpha}, B_{\tau_{\alpha}})$  ;
4.  $X_{\sigma_b}$  avec  $\sigma_b = \inf\{t > 0 : B_t + y = b\}$  : position de la première composante à l'instant où la deuxième atteint le point  $b$  ;
5. le couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  ;
6. le couple  $(\sigma_{\alpha b}, X_{\sigma_{\alpha b}})$  avec  $\sigma_{\alpha b} = \inf\{t > 0 : B_t + y \in \{\alpha, b\}\}$ .

Certaines distributions ont pu être obtenues explicitement. Rappelons les résultats connus jusqu'à présent : dans ce qui suit nous désignerons par

$$P_{(x,y)}\{X_t \in du, B_t \in dv\} = P\{X_t + x + ty \in du, B_t + y \in dv\} = p_t(x, y ; u, v) du dv$$

où  $p_t(x, y ; u, v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3}(u-x-ty)^2 + \frac{6}{t^2}(u-x-ty)(v-y) - \frac{2}{t}(v-y)^2\right]$  est la densité de transition du processus  $(X_t, B_t)$ .

A . La loi conjointe du couple  $(\tau_{\alpha}, |B_{\tau_{\alpha}}|)$  a été calculée par H.P. McKean ([19]) dans le cas particulier  $x=\alpha$ . Elle s'exprime par la formule suivante :

$$(1) \quad P_{(\alpha, y)}\{\tau_{\alpha} \in dt, |B_{\tau_{\alpha}}| \in dz\} = \frac{3z}{\pi\sqrt{2}t^2} e^{-\frac{2}{t}(y^2 - |y|z + z^2)} \int_0^{\frac{4|y|z}{t}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(z) dt dz$$

et en particulier :

$$(2) \quad P_{(\alpha, y)}\{|B_{\tau_{\alpha}}| \in dz\} = \frac{3}{2\pi} \frac{|y|^{1/2} z^{3/2}}{z^3 + |y|^3} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(z) dz ;$$

B . Ju.P. Gor'kov a déterminé la loi de la variable aléatoire  $B_{\tau_{\alpha}}$  dans le cas plus général  $x < \alpha$ ,  $y \leq 0$  ([10]). Elle est donnée par l'expression suivante :

$$(3) \quad P_{(x,y)}\{|B_{\tau_{\alpha}}| \in dz\} = z\left[\Phi(\alpha, -z ; x, -y) - \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{3/2}}{\zeta^3 + 1} \Phi(\alpha, \zeta z ; x, -y) d\zeta\right] \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(z) dz$$

$$\text{avec } \Phi(x, y ; u, v) = \int_0^{+\infty} p_t(x, y ; u, v) dt ;$$



C. M. Goldman a déterminé la distribution de la variable aléatoire  $\tau_\alpha$  dans le cas  $x < \alpha$ ,  $y \leq 0$  sous la forme ([9]) :

$$(4) \quad P_{(x,y)}\{\tau_\alpha \in dt\} = \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi t^3}} \left( \frac{3(\alpha-x)}{t} - y \right) e^{-\frac{3(\alpha-x-ty)^2}{2t^3}} + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} z \, dz \int_0^t \int_0^{+\infty} P_{(0,z)}\{\tau_0 \in ds, |B_{\tau_0}| \in d\zeta\} q_{t-s}(x,y; \alpha, z) \right] dt$$

avec  $q_t(x,y; u,v) = p_t(x,y; u,v) - p_t(x,y; u,-v)$  ;

D. Enfin M. Lefèvre a obtenu la transformée de Laplace du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  en termes de fonctions d'Airy ([15]) :

$$(5) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_b - \mu X_{\sigma_b}}] = e^{-\mu x} \cdot \frac{\text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y}{\mu^{2/3}}\right)}{\text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda + \mu b}{\mu^{2/3}}\right)} \quad \text{si } y \geq b \geq 0, \lambda > 0,$$

$\mu > 0,$

$$(5') \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_b - i\mu X_{\sigma_b}}] = e^{-i\mu x} \cdot \frac{\text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda + i\mu y}{\mu^{2/3}} e^{i\pi/3}\right)}{\text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda + i\mu b}{\mu^{2/3}} e^{i\pi/3}\right)} \quad \text{si } y \geq b, b < 0,$$

$\lambda > 0,$   
 $\varepsilon = -1$  si  $\mu > 0,$   
 $\varepsilon = 1$  si  $\mu < 0,$

Ai désignant la fonction d'Airy usuelle ([1]). Dans le cas  $b=0$  il obtient la distribution de  $X_{\sigma_0}$  :

$$(6) \quad P_{(x,y)}\{X_{\sigma_0} \in d\xi\} = \frac{\Gamma(2/3)}{\pi^{1/2} 2^{2/3} 3^{1/6}} \frac{|y|}{|\xi-x|^{4/3}} e^{-2|y|^3/9|\xi-x|} \mathbb{1}_A(\xi) d\xi,$$

avec  $A = ]x, +\infty[$  si  $y > 0$ ,  $A = ]-\infty, x[$  si  $y < 0$ .

On notera que (5) et (5') ont été récemment redémontrées par Ph. Biane et M. Yor ([2]) et (2) par P. McGill ([17],[18]) à l'aide de techniques différentes faisant appel au temps local du mouvement brownien et à la méthode de Wiener-Hopf.



On pourra également remarquer que l'intervention de la fonction d'Airy dans ce type de problème n'est pas nouvelle ; voir par exemple M. Kac ([12], [13]) en 1946, L.A. Shepp ([24]) en 1982 et P. Grøneboom ([11]) en 1989.

Dans cette note nous nous proposons de compléter ces résultats en explicitant la distribution conjointe du couple  $(\tau_\alpha, B_{\tau_\alpha})$  dans le cas général où  $x$  et  $y$  sont des réels quelconques (c'est-à-dire dans le cas  $x \neq \alpha$ , jusqu'à présent non résolu).

Nous indiquerons également une preuve très simple des résultats de M. Lefebvre (formules (5) et (5')), qui nous permettra d'obtenir en plus la transformée de Laplace du couple  $(\sigma_{\alpha b}, X_{\sigma_{\alpha b}})$ .

## I. LA DISTRIBUTION CONJOINTE DU COUPLE $(\tau_\alpha, B_{\tau_\alpha})$

Notre résultat s'énonce comme suit :

### Théorème 1.

*La distribution conjointe du couple  $(\tau_\alpha, B_{\tau_\alpha})$  est donnée par la formule*

$$(7) \quad P_{(x,y)}\{\tau_\alpha \in dt, B_{\tau_\alpha} \in dz\} = |z| \left[ p_t(x,y; \alpha, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} P_{(0,-|z|)}\{\tau_0 \in ds, B_{\tau_0} \in d\zeta\} p_{t-s}(x,y; \alpha, -\varepsilon\zeta) \right] \mathbb{1}_A(z) dt dz$$

*avec*

$$(8) \quad P_{(0,-|z|)}\{\tau_0 \in ds, B_{\tau_0} \in d\zeta\} = \frac{3\zeta}{\pi\sqrt{2}s^2} e^{-\frac{2}{s}(z^2 - |z|\zeta + \zeta^2)} \int_0^{\frac{4|z|\zeta}{s}} \frac{4|z|\zeta}{s} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{\left(\frac{\zeta}{|0,+\infty[}\right)} ds d\zeta$$

*et les conventions d'écriture*

$$A = ]0, +\infty[ \text{ si } x < \alpha, \quad A = ]-\infty, 0[ \text{ si } x > \alpha, \\ \varepsilon = \text{signe de } (\alpha - x).$$

**Preuve.** Notre démarche est sensiblement la même que celle de Ju.P. Gor'kov ([10]), l'innovation par rapport à cette dernière consistant à utiliser au cours de la démonstration la technique employée par H.P. McKean pour déterminer la distribution du couple

$(\tau_\alpha, B_{\tau_\alpha})$  dans le cas  $x=\alpha$  ([19]), et de lever par ce biais l'obstacle auquel Ju.P. Gor'kov s'était heurté.

Enonçons les points essentiels de la démonstration sous forme de lemmes que nous démontrerons au paragraphe III, la difficulté essentielle se situant au niveau du lemme 4.

### Lemme 1

*La loi de la variable aléatoire  $B_{\tau_\alpha}$  est portée par l'intervalle  $[0, +\infty[$  (resp.  $]-\infty, 0]$ ) lorsque  $x < \alpha$  (resp.  $x > \alpha$ ).*

### Lemme 2

*La limite suivante est satisfaite :*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} \tau_\alpha = 0 \quad (\text{resp.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} \tau_\alpha = 0) \text{ lorsque } y > 0 \text{ (resp. } y < 0).$$

### Lemme 3

La transformée de Laplace du couple  $(\tau_\alpha, B_{\tau_\alpha})$  définie par

$$u(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\tau_\alpha - \mu B_{\tau_\alpha}}] \text{ pour } x < \alpha, -\infty < y < +\infty$$

$$(\text{resp. } u(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\tau_\alpha + \mu B_{\tau_\alpha}}] \text{ pour } x > \alpha, -\infty < y < +\infty), \lambda > 0, \mu > 0,$$

est solution du problème aux limites suivant :

$$(9) \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + y \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lambda u(x,y), x < \alpha \text{ (resp. } x > \alpha), -\infty < y < +\infty, \\ u(\alpha^-, y) = e^{-\mu y}, y > 0 \text{ (resp. } u(\alpha^+, y) = e^{\mu y}, y < 0), \end{cases}$$

$u(\alpha^-, y)$  (resp.  $u(\alpha^+, y)$ ) désignant la limite à gauche  $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} u(x,y)$  (resp. à droite

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} u(x,y)).$$

Ju.P. Gor'kov n'a pu résoudre le problème (9) que dans le cas particulier où  $\lambda=0$  (à l'aide de la transformation de Mellin) et n'a donc pu obtenir de ce fait que l'expression de la distribution de la variable aléatoire  $B_{\tau_\alpha}$  et non celle du couple  $(\tau_\alpha, B_{\tau_\alpha})$ .

En fait nous résolvons le problème (9) dans le cas général  $\lambda > 0$  en utilisant la transformation de Kontorovich-Lebedev.

La solution est fournie par le lemme 4.



#### Lemme 4

Le problème aux limites (9) admet une solution bornée unique donnée par la formule suivante :

$$(10) \quad u(x,y) = \int_0^{+\infty} z e^{-\mu z} G_{\lambda,\alpha}^-(x,y; z) dz, \quad x < \alpha, -\infty < y < +\infty$$

$$(10') \quad (\text{resp. } u(x,y) = \int_{-\infty}^0 |z| e^{\mu z} G_{\lambda,\alpha}^+(x,y; z) dz, \quad x > \alpha, -\infty < y < +\infty)$$

avec

$$G_{\lambda,\alpha}^-(x,y; z) = \Phi_{\lambda}(x,y; \alpha, z) - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_{(\alpha, -z)}\{\tau_{\alpha} \in dt, B_{\tau_{\alpha}} \in d\zeta\} \Phi_{\lambda}(x,y; \alpha, -\zeta), \\ x < \alpha, -\infty < y < +\infty, z > 0$$

$$(\text{resp. } G_{\lambda,\alpha}^+(x,y; z) = \Phi_{\lambda}(x,y; \alpha, z) - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_{(\alpha, z)}\{\tau_{\alpha} \in dt, B_{\tau_{\alpha}} \in d\zeta\} \Phi_{\lambda}(x,y; \alpha, \zeta), \\ x > \alpha, -\infty < y < +\infty, z < 0),$$

$$\Phi_{\lambda}(x,y; u,v) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_t(x,y; u,v) dt,$$

la loi conjointe  $P_{(\alpha, -|z|)}\{\tau_{\alpha} \in dt, B_{\tau_{\alpha}} \in d\zeta\}$  étant indépendante de  $\alpha$  et s'exprimant par la formule (8).

Les fonctions auxiliaires  $G_{\lambda,\alpha}^-(x,y; z)$  et  $G_{\lambda,\alpha}^+(x,y; z)$  intervenant en (10) et (10')

peuvent s'écrire sous la forme d'une transformée de Laplace :

$$(11) \quad G_{\lambda,\alpha}^-(x,y; z) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} H_{\alpha}^-(x,y; z, t) dt, \quad x < \alpha, -\infty < y < +\infty, z > 0,$$

$$(11') \quad G_{\lambda,\alpha}^+(x,y; z) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} H_{\alpha}^+(x,y; z, t) dt, \quad x > \alpha, -\infty < y < +\infty, z < 0,$$

avec

$$(12) \quad H_{\alpha}^-(x,y; z, t) = p_t(x,y; \alpha, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} P_{(\alpha, -z)}\{\tau_{\alpha} \in ds, B_{\tau_{\alpha}} \in d\zeta\} p_{t-s}(x,y; \alpha, -\zeta),$$

$$(12') \quad H_{\alpha}^{+}(x,y ; z,t) = p_t(x,y ; \alpha,z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} P_{(\alpha,z)}\{\tau_{\alpha} \in ds, B_{\tau_{\alpha}} \in d\zeta\} p_{t-s}(x,y ; \alpha,\zeta).$$

Ainsi pour accéder au résultat annoncé (7), nous sommes ramenés à une inversion immédiate de la double transformée de Laplace de la loi du couple  $(\tau_{\alpha}, B_{\tau_{\alpha}})$ .

### Corollaire 1.

*La distribution de la variable aléatoire  $\tau_{\alpha}$  est donnée par la formule suivante :*

$$(13) \quad P_{(x,y)}\{\tau_{\alpha} \in dt\} = \varepsilon \left[ \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left( \frac{3}{2} \frac{\alpha-x}{t^{5/2}} - \frac{1}{2} \frac{y}{t^{3/2}} \right) e^{-\frac{3(\alpha-x-ty)^2}{2t^3}} + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} z dz \int_0^t P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in ds\} q_{t-s}(x,y ; \alpha,z) \right] dt$$

avec

$$P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in ds\} = \int_0^{+\infty} \frac{3\zeta}{\pi\sqrt{2}s^2} e^{-\frac{2}{s}(z^2-\zeta z+\zeta^2)} d\zeta \int_0^s \frac{4\zeta z}{s} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} ds, \quad z > 0,$$

$$q_t(x,y ; u,v) = p_t(x,y ; u,v) - p_t(x,y ; u,-v),$$

et

$$\varepsilon = \text{signe de } (\alpha-x).$$

**Preuve.** Nous avons d'après (7), (12) et (12') :

$$(14) \quad P_{(x,y)}\{\tau_{\alpha} \in dt\} = \int_0^{+\infty} z H_{\alpha}^{-}(x,y ; z,t) dz dt \quad \text{si } x < \alpha, \quad -\infty < y < +\infty,$$

$$(14') \quad P_{(x,y)}\{\tau_{\alpha} \in dt\} = \int_{-\infty}^0 |z| H_{\alpha}^{+}(x,y ; z,t) dz dt \quad \text{si } x > \alpha, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Les expressions (14) et (14') font intervenir l'intégrale  $\int_0^{+\infty} z p_t(x,y ; \alpha,z) dz$  dont le calcul présente une difficulté. Pour contourner cet obstacle nous allons donner une représentation différente des fonctions  $H_{\alpha}^{-}(x,y ; z,t)$  et  $H_{\alpha}^{+}(x,y ; z,t)$  faisant intervenir l'intégrale élémentaire  $\int_{-\infty}^{+\infty} z p_t(x,y ; \alpha,z) dz$  et ceci à l'aide du lemme suivant :



**Lemme 5.**

*Les égalités suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned}
 (15) \quad p_t(x, y ; \alpha, -z) &= \int_0^t \int_0^{+\infty} P(\alpha, -z) \{ \tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in d\zeta \} p_{t-s}(x, y ; \alpha, \zeta) \\
 &\quad \text{si } x < \alpha, -\infty < y < +\infty, z > 0, \\
 (15') \quad p_t(x, y ; \alpha, -z) &= \int_0^t \int_0^{+\infty} P(\alpha, z) \{ \tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in d\zeta \} p_{t-s}(x, y ; \alpha, -\zeta) \\
 &\quad \text{si } x > \alpha, -\infty < y < +\infty, z < 0.
 \end{aligned}$$

Le lemme 5 sera démontré au paragraphe III.

En ajoutant alors les égalités (12) et (15) d'une part, (12') et (15') d'autre part, nous obtenons une nouvelle représentation des fonctions  $H_\alpha^-(x, y ; z, t)$  et  $H_\alpha^+(x, y ; z, t)$ , soit :

$$\begin{aligned}
 (16) \quad H_\alpha^-(x, y ; z, t) &= q_t(x, y ; \alpha, z) + \int_0^t \int_0^{+\infty} P(\alpha, -z) \{ \tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in d\zeta \} q_{t-s}(x, y ; \alpha, \zeta) \\
 &\quad \text{si } x < \alpha, -\infty < y < +\infty, z > 0, \\
 (16') \quad H_\alpha^+(x, y ; z, t) &= q_t(x, y ; \alpha, z) + \int_0^t \int_0^{+\infty} P(\alpha, z) \{ \tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in d\zeta \} q_{t-s}(x, y ; \alpha, -\zeta) \\
 &\quad \text{si } x > \alpha, -\infty < y < +\infty, z < 0, \\
 &\quad \text{avec } q_t(x, y ; u, v) = p_t(x, y ; u, v) - p_t(x, y ; u, -v).
 \end{aligned}$$

Nous déduisons ainsi de (14), (14'), (16), (16') et (8) la formule

$$\begin{aligned}
 P_{(x, y)} \{ \tau_\alpha \in dt \} &= \left[ \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} z p_t(x, y ; \alpha, z) dz + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{+\infty} z dz \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^t \frac{3}{\pi \sqrt{2} s^2} e^{-\frac{2}{s}(z^2 - z\zeta + \zeta^2)} ds \int_0^{\frac{4\zeta z}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} q_{t-s}(x, y ; \alpha, \varepsilon\zeta) \right] dt \\
 &= \varepsilon \left[ \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left( \frac{3}{2} \frac{\alpha - x}{t^{5/2}} - \frac{1}{2} \frac{y}{t^{3/2}} \right) e^{-\frac{3(\alpha - x - ty)^2}{2t^3}} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \zeta d\zeta \int_0^t ds \left[ \int_0^{+\infty} \frac{3z}{\pi \sqrt{2} s^2} e^{-\frac{2}{s}(z^2 - z\zeta + \zeta^2)} \int_0^{\frac{4\zeta z}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} dz \right] q_{t-s}(x, y ; \alpha, \zeta) \right] dt
 \end{aligned}$$

qui coïncide précisément avec le résultat (13) annoncé.  $\square$



**Remarque 1.** Nous retrouvons ainsi par une autre méthode la formule que M. Goldman ([9]) avait trouvée à l'aide d'une technique d'équations intégrales.

**Corollaire 2.**

*La distribution de la variable aléatoire  $B_{\tau_{\alpha}}$  est donnée par la formule suivante :*

$$(17) P_{(x,y)}\{B_{\tau_{\alpha}} \in dz\} = |z| \left[ \Phi_0(x,y; \alpha, z) - \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{3/2}}{\zeta^3 + 1} \Phi_0(x,y; \alpha, -\zeta z) d\zeta \right] \mathbb{1}_A(z) dz$$

avec

$$\Phi_0(x,y; u,v) = \int_0^{+\infty} p_t(x,y; u,v) dt,$$

et les conventions d'écriture

$$A = ]0, +\infty[ \text{ si } x < \alpha, \quad A = ]-\infty, 0[ \text{ si } x > \alpha.$$

**Preuve**

Nous avons d'après (7), (11), (11'), (12) et (12') :

$$\begin{aligned} P_{(x,y)}\{B_{\tau_{\alpha}} \in dz\} &= \left[ \int_0^{+\infty} z H_{\alpha}^{-}(x,y; z,t) dt \right] \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z) dz \\ &= z G_{0,\alpha}^{-}(x,y; z) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z) dz \end{aligned}$$

dans le cas  $x < \alpha$ ,  $-\infty < y < +\infty$ , et

$$\begin{aligned} P_{(x,y)}\{B_{\tau_{\alpha}} \in dz\} &= \left[ \int_{-\infty}^0 |z| H_{\alpha}^{+}(x,y; z,t) dt \right] \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(z) dz \\ &= |z| G_{0,\alpha}^{+}(x,y; z,t) \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(z) dz \end{aligned}$$

lorsque  $x > \alpha$ ,  $-\infty < y < +\infty$ ,

avec

$$\begin{aligned} G_{0,\alpha}^{-}(x,y; z) &= \Phi_0(x,y; \alpha, z) - \int_0^{+\infty} P_{(\alpha, -z)}\{B_{\tau_{\alpha}} \in d\zeta\} \Phi_0(x,y; \alpha, -\zeta), \\ &\quad x < \alpha, \quad -\infty < y < +\infty, \quad z > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{0,\alpha}^{+}(x,y; z) &= \Phi_0(x,y; \alpha, z) - \int_0^{+\infty} P_{(\alpha, z)}\{B_{\tau_{\alpha}} \in d\zeta\} \Phi_0(x,y; \alpha, \zeta), \\ &\quad x > \alpha, \quad -\infty < y < +\infty, \quad z < 0. \end{aligned}$$

Or d'après (8) nous avons :

$$P_{(\alpha, -|z|)}\{B_{\tau_\alpha} \in d\zeta\} = \left[ \int_0^{+\infty} \frac{3\zeta}{\pi\sqrt{2}t^2} e^{-\frac{2}{t}(z^2 - |z|\zeta + \zeta^2)} \int_0^{\frac{4|z|\zeta}{t}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} dt \right] \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(\zeta) d\zeta$$

$$= \frac{3}{2\pi} \frac{|z|^{1/2} \zeta^{3/2}}{\zeta^3 + |z|^3} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(\zeta) d\zeta,$$

la dernière égalité provenant de l'identité triviale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \int_0^{\beta t} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{2\beta}{2\alpha + 3\beta} \right)^{1/2}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Le changement de variable  $\zeta \longmapsto |z|\zeta$  nous permet alors de conclure.  $\square$

**Remarque 2.** Nous retrouvons la loi de  $B_{\tau_\alpha}$  donnée par H.P. McKean dans le cas  $x=\alpha$  (formule (2)) grâce à l'identité élémentaire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{3/2} d\zeta}{(\zeta^3 + 1)(\zeta^2 z^2 - \zeta y z + y^2)} = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} \frac{1}{y^2 + yz + z^2} & \text{si } yz > 0 \\ \frac{2\pi}{3} \frac{1}{y^2 + yz + z^2} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{|yz|^{1/2}}{|y|^3 + |z|^3} & \text{si } yz < 0. \end{cases}$$

**Corollaire 3.**

La distribution du maximum  $\max_{0 \leq s \leq t} X_s$  est donnée par la formule suivante :

$$(18) \quad P_{(x,y)}\left\{ \max_{0 \leq s \leq t} X_s \in d\alpha \right\} = \left[ \sqrt{\frac{3}{2\pi t^3}} e^{-\frac{3(\alpha-x-ty)^2}{2t^3}} + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} z \, dz \int_0^t ds \int_0^s P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in d\sigma\} \Psi_{s-\sigma}(x,y; \alpha, -z) \right] \mathbb{1}_{]x, +\infty[}(\alpha) d\alpha$$

avec

$$P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in d\sigma\} = \left[ \int_0^{+\infty} \frac{3\zeta}{\pi\sqrt{2}\sigma^2} e^{-\frac{2}{\sigma}(z^2 - z\zeta + \zeta^2)} d\zeta \int_0^\sigma \frac{4\zeta z}{\sigma} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \right] d\sigma, \quad z > 0,$$

et

$$\Psi_s(x,y; u,v) = \frac{\partial}{\partial u} p_s(x,y; u,v) - \frac{\partial}{\partial u} p_s(x,y; u,-v).$$

Lorsque  $y = 0$  la formule (18) s'écrit plus simplement :

$$(19) \quad P_{(x,0)}\left\{ \max_{0 \leq s \leq t} X_s \in d\alpha \right\} = \frac{2}{3} \frac{t}{\alpha-x} \frac{P_{(x,0)}\{\tau_\alpha \in dt\}}{dt} \mathbb{1}_{]x, +\infty[}(\alpha) d\alpha.$$

**Preuve.** Nous avons trivialement :

$$P_{(x,y)}\left\{ \max_{0 \leq s \leq t} X_s < \alpha \right\} = P_{(x,y)}\{\tau_\alpha > t\} \mathbb{1}_{]x, +\infty[}(\alpha),$$

donc

$$(20) \quad P_{(x,y)}\left\{ \max_{0 \leq s \leq t} X_s \in d\alpha \right\} = \left[ - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \alpha} P_{(x,y)}\{\tau_\alpha \in ds\} \right] \mathbb{1}_{]x, +\infty[}(\alpha) d\alpha,$$

et (18) découle aisément de (20) et (13) après avoir remarqué l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \sqrt{\frac{3}{2\pi t^3}} e^{-\frac{3(\alpha-x-ty)^2}{2t^3}} \right] = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left( \frac{3}{2} \frac{\alpha-x}{t^{5/2}} - \frac{1}{2} \frac{y}{t^{3/2}} \right) e^{-\frac{3(\alpha-x-ty)^2}{2t^3}} \right].$$



D'autre part, en écrivant l'identité (20) sous la forme équivalente

$$(20') \quad P_{(x,y)}\left\{\max_{0 \leq s \leq t} X_s \in d\alpha\right\} = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_t^{+\infty} P_{(x,y)}\{\tau_\alpha \in ds\}\right] \mathbb{1}_{]x, +\infty[}(\alpha) d\alpha,$$

nous en déduisons, d'après (13), l'égalité :

$$P_{(x,y)}\left\{\max_{0 \leq s \leq t} X_s \in d\alpha\right\} = \left[\sqrt{\frac{3}{2\pi t^3}} e^{-\frac{3(\alpha-x-ty)^2}{2t^3}} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_t^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} zdz \int_0^s P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in d\sigma\} q_{s-\sigma}(x,y; \alpha, z)\right] \mathbb{1}_{]x, +\infty[}(\alpha) d\alpha.$$

Lorsque  $x < \alpha$  et  $y = 0$  les changements de variables successifs

$$\begin{aligned} s \in ]t, +\infty[ &\longrightarrow u \in ]0, \alpha-x[, \quad s = t\left(\frac{\alpha-x}{u}\right)^{2/3}, \\ \sigma \in ]0, t(\frac{\alpha-x}{u})^{2/3}[ &\longrightarrow \sigma' \in ]0, t[, \quad \sigma = \left(\frac{\alpha-x}{u}\right)^{2/3} \sigma', \\ z \in ]0, +\infty[ &\longrightarrow z' \in ]0, +\infty[, \quad z = \left(\frac{\alpha-x}{u}\right)^{1/3} z', \end{aligned}$$

et les égalités

$$P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in cd\sigma\} = P_{(0,-z/c^{1/2})}\{\tau_0 \in d\sigma\}$$

$$\text{et} \quad p_{ct}(x, 0; \alpha, z) = \frac{1}{c^2} p_t\left(0, 0; \frac{\alpha-x}{c^{3/2}}, \frac{z}{c^{1/2}}\right), \quad c > 0,$$

nous fournissent l'identité

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} ds \int_0^{+\infty} zdz \int_0^s P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in d\sigma\} q_{s-\sigma}(x, 0; \alpha, z) &= \\ &= \frac{2t}{3} \int_0^{\alpha-x} \frac{du}{u} \int_0^{+\infty} z' dz' \int_0^t P_{(0,-z')}\{\tau_0 \in d\sigma'\} q_{t-\sigma'}(0, 0; u, z'). \end{aligned}$$

Une dérivation immédiate par rapport à  $\alpha$  nous conduit alors au résultat annoncé

(19).  $\square$

## II. PREUVES DES LEMMES 1, 2, 3, 4 et 5

### 1. Preuve du lemme 1

Nous nous limiterons au cas  $x < \alpha$ , le cas  $x > \alpha$  se traitant de manière analogue.

Du fait de l'identité  $\frac{dX_t}{dt} = B_t$ , le signe de  $B_t$  nous indique le sens de variation de la fonction  $t \in [0, +\infty[ \mapsto X_t$ .

Ainsi, si nous avons  $B_{\tau_\alpha} < 0$ , la fonction  $t \mapsto X_t$  serait décroissante au voisinage de  $\tau_\alpha$  et par conséquent nous aurions  $X_{\tau_\alpha - \varepsilon} > X_{\tau_\alpha} = \alpha$  pour un  $\varepsilon > 0$  pris suffisamment petit.

Or  $X_0 = x < \alpha$ , donc par continuité des trajectoires il existerait un instant  $\tau \in ]0, \tau_\alpha - \varepsilon[$  pour lequel  $X_\tau = \alpha$ , ce qui contredirait la définition de  $\tau_\alpha$ .

Le lemme 1 est donc démontré.  $\square$

### 2. Preuve du lemme 2.

Considérons le cas  $y > 0$  (le cas  $y < 0$  se traitant de la même manière).

Le fait que  $B_0 = y > 0$  nous assure que la fonction  $t \mapsto X_t$  est croissante au voisinage de 0, et qu'il existe  $\varepsilon > 0$ , suffisamment petit, de sorte que  $\alpha = \min_{0 \leq t \leq \varepsilon} B_t > 0$ .

Nous en déduisons la minoration  $X_t \geq x + \alpha t$  pour  $t \in [0, \varepsilon]$ , et nous avons donc  $x = X_0 < \alpha < x + \alpha \varepsilon \leq X_\varepsilon$  pour  $x \in ]\alpha - \alpha \varepsilon, \alpha[$ , d'où  $0 < \tau_\alpha < \varepsilon$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} \tau_\alpha = 0$ .  $\square$

### 3. Preuve du lemme 3.

Un résultat classique concernant les processus stochastiques généraux nous assure que la fonction

$$u(x, y) = \mathbb{E}_{(x, y)} [e^{-\lambda \tau_\alpha - \mu B_{\tau_\alpha}}]$$

(resp.  $u(x, y) = \mathbb{E}_{(x, y)} [e^{-\lambda \tau_\alpha + \mu B_{\tau_\alpha}}]$ )

vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lambda u(x, y), \quad x < \alpha \text{ (resp. } x > \alpha), -\infty < y < +\infty$$

(consulter par exemple [4] pp. 230-231, [5] pp. 46-47 ou [7] ch. 13), la condition aux limites



$$u(\alpha^-, y) = e^{-\mu y}, y > 0 \text{ (resp. } u(\alpha^+, y) = e^{\mu y}, y < 0)$$

découlant du lemme 2.  $\square$

**Remarque 3.** Notons à ce propos que nous ne pouvons prescrire les valeurs  $u(\alpha^-, y), y < 0$  (resp.  $u(\alpha^+, y), y > 0$ ), ceci étant dû au mouvement de rotation du processus  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

Plus précisément, pour  $x < \alpha$  et  $y < 0$  par exemple, la fonction  $t \mapsto X_t$  est décroissante sur l'intervalle de temps  $[0, \sigma_0]$  où  $\sigma_0 = \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$ , ce qui entraîne l'inégalité  $\tau_\alpha > \sigma_0$ . Ainsi  $\tau_\alpha$  ne tend pas vers zéro et de ce fait nous ne connaissons pas a priori les valeurs  $u(\alpha^-, y), y < 0$ .

Cependant ces valeurs  $u(\alpha^-, y), y < 0$ , ont été déterminées par H.P. McKean ([19]), et nous nous en servons pour déterminer explicitement toutes les autres valeurs  $u(x, y), x < \alpha, -\infty < y < +\infty$ .

#### 4. Preuve du lemme 4.

La preuve de ce lemme étant particulièrement technique, nous commençons d'abord par en présenter les principales étapes.

Nous étudions tout d'abord le problème aux limites (9) sur le domaine  $]-\infty, \alpha[ \times ]-\infty, +\infty[$  (une symétrie élémentaire ramènera ensuite le problème (9) relatif au domaine  $]\alpha, +\infty[ \times ]-\infty, +\infty[$  au cas précédent).

Dans un premier temps nous écrirons la solution  $u(x, y)$  du problème (9) en fonction des valeurs aux limites  $u(\alpha^-, y), -\infty < y < +\infty$ .

Nous déterminerons ensuite les valeurs  $u(\alpha^-, y), y < 0$ , en fonction des valeurs connues  $u(\alpha^-, y) = e^{-\mu y}, y > 0$ .

Enfin nous expliciterons la solution du problème aux limites (9).

Précisons toutes ces étapes sous forme de lemmes. Pour cela convenons des notations suivantes :

$D = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  désigne l'opérateur aux dérivées partielles associé au processus  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ ,

$D^* = -y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  désigne l'opérateur adjoint de  $D$ ,



$\Phi_\lambda(x,y ; u,v) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_t(x,y ; u,v) dt$  est la solution élémentaire de l'opérateur  $\lambda$ -D, c'est-à-dire

$$D\Phi_\lambda(x,y ; u,v) = \lambda\Phi_\lambda(x,y ; u,v) - \delta_{(u,v)}(x,y),$$

$\Phi_\lambda^*(x,y ; u,v) = \Phi_\lambda(u,v ; x,y) = \Phi_\lambda(x,-y ; u,-v)$  est la solution élémentaire de l'opérateur  $\lambda$ -D\*.

**Lemme 6.**

*Toute fonction bornée  $u(x,y)$  vérifiant l'équation aux dérivées partielles*

$$Du(x,y) = \lambda u(x,y), \quad x < \alpha, \quad -\infty < y < +\infty,$$

*admet la représentation*

$$(21) \quad u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} zu(\alpha^-, z) \Phi_\lambda(x,y ; \alpha, z) dz, \quad x < \alpha, \quad -\infty < y < +\infty.$$

**Preuve.** Il suffit d'intégrer par parties l'expression :

$$u(\xi, \eta) D^* \Phi_\lambda^*(\xi, \eta ; x, y) - \Phi_\lambda^*(\xi, \eta ; x, y) Du(\xi, \eta) = -\delta_{(x,y)}(\xi, \eta)$$

sur le domaine  $\xi < \alpha, -\infty < \eta < +\infty$ , en remarquant que

$$\lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty} \Phi_\lambda^*(\xi, \eta ; x, y) = \lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty} \frac{\partial \Phi_\lambda^*}{\partial \eta}(\xi, \eta ; x, y) = 0. \quad \square$$

**Lemme 7.**

Posons  $v(y) = u(\alpha^-, -y)$ ,  $y > 0$ ,  $u$  étant la fonction définie par (21) et vérifiant la condition aux limites  $u(\alpha^-, y) = e^{-\mu y}$ ,  $y > 0$ .

La fonction  $v(y)$  s'écrit comme suit :

$$(22) \quad v(y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - \mu z} P_{(\alpha, -y)}\{\tau_\alpha \in dt, B_{\tau_\alpha} \in dz\}$$

avec

$$P_{(\alpha, -y)}\{\tau_\alpha \in dt, B_{\tau_\alpha} \in dz\} = \left[ \frac{3z}{\pi\sqrt{2}t^2} e^{-\frac{2}{t}(y^2 - yz + z^2)} \int_0^{\frac{4yz}{t}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \right] 1_{]0, +\infty[}(z) dt dz.$$

**Preuve.** Ecrivons (21), après avoir posé  $\varphi(z) = e^{-\mu z}$ ,  $z > 0$ , sous la forme

$$(23) \quad u(x, y) = \int_0^{+\infty} z\varphi(z)\Phi_\lambda(x, y; \alpha, z)dz - \int_0^{+\infty} zu(\alpha^-, -z)\Phi_\lambda(x, y; \alpha, -z)dz,$$

puis faisons tendre  $x$  vers  $\alpha$ ,  $x < \alpha$ ; nous obtenons :

$$(24) \quad v(y) = \int_0^{+\infty} z\varphi(z)\Phi_\lambda(\alpha, -y; \alpha, z)dz - \int_0^{+\infty} zv(z)\Phi_\lambda(\alpha, -y; \alpha, -z)dz, \quad y > 0,$$

avec

$$\Phi_\lambda(\alpha, -y; \alpha, z) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\sqrt{8\lambda} K_1[\sqrt{8\lambda}(y^2 - yz + z^2)]}{\sqrt{y^2 - yz + z^2}},$$

$$\Phi_\lambda(\alpha, -y; \alpha, -z) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\sqrt{8\lambda} K_1[\sqrt{8\lambda}(y^2 + yz + z^2)]}{\sqrt{y^2 + yz + z^2}},$$

$K_1$  désignant la fonction de Bessel modifiée usuelle ([1]).

L'écriture des fonctions  $\Phi_\lambda(\alpha, -y; \alpha, z)$  et  $\Phi_\lambda(\alpha, -y; \alpha, -z)$ , ainsi que les formules ([6])

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{8\lambda} K_1[\sqrt{8\lambda}(y^2 \pm yz + z^2)]}{\sqrt{y^2 \pm yz + z^2}} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z) dz = \\ = C_{i\gamma}^{\pm} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} y)}{y}, \quad y > 0, \quad -\infty < \gamma < +\infty, \end{aligned}$$

$$C_{i\gamma}^+ = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + 2\operatorname{ch} \frac{2\pi\gamma}{3}}, \quad C_{i\gamma}^- = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3} C_{i\gamma}^+,$$

nous incitent à employer la transformation de Kontorovich-Lebedev, caractérisée par les formules de réciprocity ([6])

$$\hat{f}(\gamma) = \int_0^{+\infty} f(z) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z) dz, \quad \gamma > 0,$$

$$f(z) = \frac{2}{\pi^2 z} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\gamma) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z) \gamma \operatorname{sh} \pi\gamma d\gamma, \quad z > 0.$$

En appliquant cette transformation à l'équation intégrale (24) nous obtenons :

$$\hat{v}(\gamma) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} C_{i\gamma}^+ \hat{v}(\gamma) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} C_{i\gamma}^- \hat{\phi}(\gamma), \quad \gamma > 0,$$

soit encore :

$$\hat{v}(\gamma) = \frac{1}{2\operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \hat{\phi}(\gamma), \quad \gamma > 0,$$

puis en inversant nous en déduisons l'identité

$$(25) \quad v(y) = \frac{2}{\pi^2 y} \int_0^{+\infty} \hat{\phi}(\gamma) \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} y) d\gamma, \quad y > 0.$$

On termine en remarquant que l'expression (25) s'écrit sous la forme d'une transformée de Laplace. Pour le voir, on fera appel aux formules classiques ([6]) :

$$K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} y) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - 2 \frac{y^2 + z^2}{t}} K_{i\gamma}\left(\frac{4yz}{t}\right) \frac{dt}{2t}$$

et

$$\int_0^{+\infty} K_{i\gamma}(\alpha) \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma}{\operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} d\gamma = \frac{3\pi\alpha}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\alpha} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}. \quad \square$$



**Lemme 8.**

*La solution du problème aux limites (9) relatif au domaine  $] -\infty, \alpha[ \times ] -\infty, +\infty[$  est donnée par la formule (10).*

**Preuve.** C'est une conséquence immédiate de (22) et (23).  $\square$

**Fin de la preuve du lemme 4.** Il nous reste à examiner le problème (9) sur le domaine  $] \alpha, +\infty[ \times ] -\infty, +\infty[$ . Pour cela il suffit de remarquer que la symétrie  $(x, y) \in ] \alpha, +\infty[ \times ] -\infty, +\infty[ \mapsto (2\alpha - x, -y) \in ] -\infty, \alpha[ \times ] -\infty, +\infty[$  nous ramène au cas précédent.

En effet, posons  $u(x, y) = \mathbb{E}_{(x, y)}[e^{-\lambda \tau_\alpha + \mu B_{\tau_\alpha}}]$ ,  $x > \alpha$ ,  $-\infty < y < +\infty$ . Alors la fonction  $w(x, y) = u(2\alpha - x, -y)$ ,  $x < \alpha$ ,  $-\infty < y < +\infty$ , vérifie le problème aux limites

$$\begin{cases} Dw(x, y) = \lambda w(x, y), & x < \alpha, -\infty < y < +\infty, \\ w(\alpha^-, y) = e^{-\mu y}, & y > 0. \end{cases}$$

Le lemme 8 nous fournit l'expression de  $w(x, y)$ , d'où nous en déduisons celle de  $u(x, y)$ , à savoir :

$$u(x, y) = w(2\alpha - x, -y) = \int_{-\infty}^0 |z| e^{\nu z} G_{\lambda, \alpha}^+(x, y; z) dz, \quad x > \alpha, -\infty < y < +\infty,$$

avec

$$G_{\lambda, \alpha}^+(x, y; z) = G_{\lambda, \alpha}^-(2\alpha - x, -y; -z).$$

En remarquant que  $\Phi_\lambda(2\alpha - x, -y; \alpha, -z) = \Phi_\lambda(x, y; \alpha, z)$  nous voyons que nous avons obtenu la formule (10') souhaitée.

Le théorème 1 est ainsi complètement démontré.  $\square$

**5. Preuve du lemme 5.**

Les égalités (15) et (15') résultent de la propriété de Markoff forte du processus

$(X_t, B_t)_{t \geq 0}$  :

$$P_{(x, y)}\{X_t > u, B_t > v\} = \mathbb{E}_{(x, y)}[P_{(\alpha, B_{\tau_\alpha})}\{X_{t-\tau_\alpha} > u, B_{t-\tau_\alpha} > v\}],$$

$$x < \alpha < u \text{ (resp. } u < \alpha < x), -\infty < y, v < +\infty,$$

soit, en passant aux densités de transition :

$$(26) \quad p_t(x, y ; u, v) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} P_{(x, y)}\{\tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in d\zeta\} p_{t-s}(\alpha, \zeta ; u, v),$$

$$x < \alpha < u \text{ (resp. } u < \alpha < x), -\infty < y, v < +\infty.$$

De (26) et de l'égalité  $p_t(x, y ; u, v) = p_t(u, -v ; x, -y)$  nous obtenons une nouvelle forme de (26) :

$$(26') \quad p_t(x, y ; u, -v) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} P_{(u, -v)}\{\tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in d\zeta\} p_{t-s}(x, y ; \alpha, -\zeta),$$

$$u < \alpha < x \text{ (resp. } x < \alpha < u), -\infty < y, v < +\infty.$$

Un passage à la limite immédiat dans (26') lorsque  $u$  tend vers  $\alpha$ ,  $u < \alpha$  (resp.  $u > \alpha$ ) nous fournit le résultat escompté (15') (resp. (15)) après avoir noté l'égalité évidente

$$P_{(\alpha^-, v)}\{\tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in d\zeta\} = P_{(\alpha, v)}\{\tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in d\zeta\} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(\zeta), v < 0)$$

$$(\text{resp. } P_{(\alpha^+, v)}\{\tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in d\zeta\} = P_{(\alpha, -v)}\{\tau_\alpha \in ds, B_{\tau_\alpha} \in -d\zeta\} \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(\zeta), v > 0).$$

Le lemme 5 est ainsi prouvé.  $\square$

### III. AUTRE PREUVE ET GENERALISATION DES RESULTATS (5) ET (5') DE LEFEBVRE

Nous nous plaçons dans le cas  $y \geq b \geq 0$ .

Considérons la fonction

$$u(y) = \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda \sigma_b - \mu \int_0^{\sigma_b} B_t dt} \mid B_0 = y \right] = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^{\sigma_b} (\lambda + \mu B_t) dt} \mid B_0 = y \right].$$

D'après la formule de Feynman-Kac (voir par exemple [3]) nous savons que  $u(y)$  est solution du problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dy^2}(y) = (\lambda + \mu y)u(y), y > b, \\ u(b) = 1, u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

soit explicitement :

$$u(y) = \frac{\text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y}{\mu^{2/3}}\right)}{\text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda + \mu b}{\mu^{2/3}}\right)}, \quad y \geq b.$$

Nous retrouvons alors (5) en notant l'identité triviale

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda \sigma_b - \mu X_{\sigma_b}}] = e^{-\mu x} u(y)$$

(le cas  $y \geq b, b < 0$  se traite de manière analogue).

Cette même technique nous permet d'obtenir plus généralement la transformée de Laplace de la loi du couple  $(\sigma_{a,b}, X_{\sigma_{a,b}})$  où  $\sigma_{a,b}$  est le premier instant de passage en  $a$  ou  $b$  du mouvement brownien démarrant du point  $y$ . Elle s'explique comme suit :



## Théorème 2

Fixons le point  $(x,y) \in ]-\infty, +\infty[ \times ]a,b[$ .

La transformée de Laplace du couple  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$  est caractérisée par les formules suivantes :

si  $b > a > 0$  :

$$(27) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab}-\mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{-\mu x} F_1(a,b; y), \quad \lambda, \mu > 0;$$

si  $a < b < 0$  :

$$(27') \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab}+\mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{\mu x} F_2(a,b; y), \quad \lambda, \mu > 0;$$

si  $a < 0 < b$  :

$$(27'') \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab}+i\mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{i\mu x} F_3(a,b; y), \quad \lambda > 0, \mu \neq 0,$$

avec

$$F_n(a,b; y) = \frac{\frac{A_n(y)}{A_n(a)} - \frac{B_n(y)}{B_n(a)}}{\frac{A_n(b)}{A_n(a)} - \frac{B_n(b)}{B_n(a)}} + \frac{\frac{A_n(y)}{A_n(b)} - \frac{B_n(y)}{B_n(b)}}{\frac{A_n(a)}{A_n(b)} - \frac{B_n(a)}{B_n(b)}}, \quad n = 1, 2, 3,$$

et

$$A_1(y) = \text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda+\mu y}{\mu^{2/3}}\right), \quad B_1(y) = \text{Bi}\left(2^{1/3} \frac{\lambda+\mu y}{\mu^{2/3}}\right), \quad \lambda, \mu > 0,$$

$$A_2(y) = \text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda-\mu y}{\mu^{2/3}}\right), \quad B_2(y) = \text{Bi}\left(2^{1/3} \frac{\lambda-\mu y}{\mu^{2/3}}\right), \quad \lambda, \mu > 0,$$

$$A_3(y) = \text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda-i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3}\right), \quad B_3(y) = \text{Bi}\left(2^{1/3} \frac{\lambda-i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3}\right), \quad \lambda > 0, \mu \neq 0,$$

$\varepsilon = \text{signe de } \mu$ ,

Ai et Bi désignant les fonctions d'Airy usuelles ([1]).

Avant d'aborder la preuve de ce théorème, faisons un certain nombre de remarques.

**Remarque 4.** L'inégalité  $X_{\sigma_{\alpha b}} > x$  (resp.  $X_{\sigma_{\alpha b}} < x$ ) due à la croissance (resp. décroissance) de la fonction  $t \mapsto X_t$  sur l'intervalle  $[0, \sigma_{\alpha b}]$  lorsque  $\alpha > 0$  (resp.  $b < 0$ ) explique la présence du signe - (resp. +) devant le coefficient de  $X_{\sigma_{\alpha b}}$  dans (27) (resp. (27')).

Dans le cas  $\alpha < 0 < b$  la variable aléatoire  $X_{\sigma_{\alpha b}}$  n'a a priori pas de signe déterminé, d'où l'apparition du coefficient  $i$  devant  $X_{\sigma_{\alpha b}}$  dans (27'').

**Remarque 5.** Les formules (5) et (5') de Lefebvre se déduisent aisément de (27) et (27'') après passage à la limite lorsque  $b$  tend vers  $+\infty$ .

**Remarque 6.** En faisant tendre  $\mu$  vers zéro nous retrouvons la transformée de Laplace bien connue de l'instant de passage en  $\alpha$  ou  $b$  du mouvement brownien démarrant du point  $y \in [\alpha, b]$ , à savoir :

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \sigma_{\alpha b}} | B_0 = y] = \frac{\text{ch } \sqrt{2\lambda} (y - \frac{\alpha+b}{2})}{\text{ch } \sqrt{2\lambda} \frac{(b-\alpha)}{2}},$$

ceci se vérifiant facilement à l'aide des équivalents asymptotiques ([1])

$$Ai(z) \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow +\infty, \text{ larg } z < \frac{2\pi}{3},$$

$$Bi(z) \sim \frac{e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}}{\sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow +\infty, \text{ larg } z < \frac{\pi}{3}.$$

Abordons maintenant la preuve du théorème 2.

**Preuve du théorème 2.** Nous nous limiterons au cas  $b > \alpha > 0$ , les autres se traitant de la même façon. Posons :

$$u(y) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda \sigma_{\alpha b} - \mu \int_0^{\sigma_{\alpha b}} B_t dt} \mid B_0 = y\right].$$

La formule de Feynman-Kac ([3]) nous assure que  $u(y)$  est solution du problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dy^2}(y) = (\lambda + \mu y)u(y), & a < y < b, \\ u(a) = u(b) = 1, \end{cases}$$

soit explicitement :

$$(28) \quad u(y) = \alpha A_1(y) + \beta B_1(y), \quad a \leq y \leq b,$$

avec

$$\alpha = \frac{B_1(b) - B_1(a)}{A_1(a)B_1(b) - A_1(b)B_1(a)},$$

$$\beta = \frac{A_1(a) - A_1(b)}{A_1(a)B_1(b) - A_1(b)B_1(a)}.$$

La formule (28) nous conduit au résultat annoncé (26), après avoir noté l'égalité évidente

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda \sigma_{ab} - \mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{-\mu x} u(y),$$

et le théorème 2 est démontré.  $\square$

## REMERCIEMENTS.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers le Professeur A. GOLDMAN pour l'attention qu'il a prêtée à la rédaction de cette note.



## REFERENCES

- [1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Wiley, New-York, 1972.
- [2] BIANE, Ph. et YOR, M. : *Valeurs principales associées aux temps locaux browniens*, Bull. Sc. Math., 2<sup>e</sup> série, 111 (1987), pp. 23-101.
- [3] CHUNG, K.L. : *Lectures from Markov processes to Brownian motion*, Springer Verlag, Berlin, 1982.
- [4] COX, D.R. and MILLER, H.D. : *The theory of stochastic processes*, Methuen, London, 1965.
- [5] DYNKIN, E.B. : *Markov processes*, vol. 2, Springer Verlag, Berlin, 1965.
- [6] ERDELYI, A. : *Tables of integral transforms*, vol. 1 and 2, McGraw-Hill, New-York, 1954.
- [7] FRIEDMAN, A. : *Stochastic differential equations and applications*, vol. 2, Academic Press, New-York, 1976.
- [8] GANI, J. and McNEIL, D.R. : *Joint distributions of random variables and their integrals for certain birth-death and diffusion processes*, Adv. Appl. Prob. 3 (1971), pp. 339-352.
- [9] GOLDMAN, M. : *On the first passage of the integrated Wiener process*, Ann. Math. Stat. 42 (1971), pp. 2150-2155.
- [10] GOR'KOV, JU.P. : *A formula for the solution of a certain boundary value problem for the stationary equation of brownian motion*, Soviet. Math. Dokl. 16 (1975), pp. 904-908.
- [11] GRØNEBOOM, P. : *Brownian Motion with a parabolic drift and Airy functions*, Prob. Th. Rel. Fields 81 (1989), pp. 79-109.
- [12] KAC, M. : *On the average of a certain Wiener functional and a related limit theorem in calculus of probability*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 59 (1946), pp. 401-414.
- [13] KAC, M. : *On distributions of certain Wiener functional*, Trans. Amer. math. Soc., vol. 65 (1949), pp. 1-13.
- [14] KAC, M. : *Probability theory : its role and its impact*, SIAM Rev. 4 (1962), pp. 1-11.

- [15] LEFEBVRE, M. : *First passage densities of a two-dimensional process*, SIAM J. Appl. Math. 49 (1989), pp. 1514-1523.
- [16] LEFEBVRE, M. and LEONARD, E. : *On the first hitting place of the integrated Wiener process*, Adv. Appl. Prob. 21 (1989), pp. 945-948.
- [17] MCGILL, P. : *Some eigenvalue identities for Brownian motion*, Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 105 (1989), pp. 587-596.
- [18] MCGILL, P. : *Wiener-Hopf factorisation of Brownian motion*, Prob. Th. Rel. Fields 83 (1989), pp. 355-389.
- [19] McKEAN, H.P. JR. : *A winding problem for a resonator driven by a white noise*, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [20] POTTER, J. : *Some statistical properties of the motion of an oscillator driven by a white noise*, M.I.T. doctoral dissertation.
- [21] PURI, P.S. : *On the homogeneous birth-and-death process and its integral*, Biometrika 53 (1966), pp. 61-71.
- [22] PURI, P.S. : *A class of stochastic models of response to injection of virulent bacteria in the absence of defense mechanism*, Fifth Berk. Symp. Math. Stat. Prob., vol. IV (1967), pp. 511-535.
- [23] RICE, S.O. : *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.
- [24] SHEPP, L.A. : *On the integral of the absolute value of the pinned Wiener process*, Ann. of Prob., vol. 10, n° 1 (1982), pp. 234-239.



# SUR LES TEMPS DE PASSAGES SUCCESSIFS DE L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

Aimé LACHAL

Institut de Mathématiques et Informatique  
Université Claude Bernard - Lyon I  
43, boulevard du 11 Novembre 1918  
69622 VILLEURBANNE CEDEX

## Résumé

Soient  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien standard,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive, et  $\tau_1^\pm = \min_{\max} \{t \geq 1 : X_t = 0\}$ ,  $\tau_{n+1}^\pm = \min_{\max} \{t \geq \tau_n^\pm : X_t = 0\}$ ,  $n \geq 1$ , les instants de passages successifs en zéro de  $(X_t)_{t \geq 0}$ , postérieurs et antérieurs à l'instant 1. Dans cette note nous explicitons les distributions absolues des chaînes de Markov  $(\tau_n^+, B_{\tau_n^+})_{n \geq 1}$ ,  $(\tau_n^-, B_{\tau_n^-})_{n \geq 1}$ ,  $(B_{\tau_n^+})_{n \geq 1}$  et  $(B_{\tau_n^-})_{n \geq 1}$ .

## INTRODUCTION

Soient  $(B_t)_{t \geq 0}$ , le mouvement brownien standard,

$X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive,

$\tau_1^+ = \min\{t > 1 : X_t = 0\}$  (resp.  $\tau_1^- = \max\{t < 1 : X_t = 0\}$ ),

$\tau_{n+1}^+ = \min\{t > \tau_n^+ : X_t = 0\}$  (resp.  $\tau_{n+1}^- = \max\{t < \tau_n^- : X_t = 0\}$ ),  $n \geq 1$ ,

la suite des temps de passages successifs en zéro du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , postérieurs (resp. antérieurs) à l'instant déterministe 1.



Désignons par  $\beta_n^+ = B_{\tau_n^+}^+$  (resp.  $\beta_n^- = B_{\tau_n^-}^-$ ),  $n \geq 1$ , les positions de  $(B_t)_{t \geq 0}$  relatives à ces instants.

Dans un article déjà ancien ([7]), H.P. McKean s'est intéressé au processus bidimensionnel  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ , lequel apparaît naturellement dans divers domaines de mathématiques appliquées, et notamment en mécanique statistique et optimisation (voir par exemple [1], [5], [6], [7] et [8]). Il a étudié les suites  $(\tau_n^+, |\beta_n^+|)_{n \geq 1}$ ,  $(\tau_n^-, |\beta_n^-|)_{n \geq 1}$ , et montré que ces dernières sont des chaînes de Markov, de probabilités de transition respectives :

$$(1) \quad p^+(s, y; t, z) = P\{\tau_{n+1}^+ \in dt, |\beta_{n+1}^+| \in dz \mid \tau_n^+ = s, |\beta_n^+| = y\} / dt dz$$

$$= \frac{3z}{\pi\sqrt{2}(t-s)^2} e^{-\frac{2}{t-s}(z^2-yz+y^2)} \int_0^{\frac{4yz}{t-s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{]s, +\infty[}(t) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(y) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(z),$$

$$(2) \quad p^-(s, y; t, z) = P\{\tau_{n+1}^- \in dt, |\beta_{n+1}^-| \in dz \mid \tau_n^- = s, |\beta_n^-| = y\} / dt dz$$

$$= \frac{\frac{z}{t^2} e^{-2\frac{z^2}{t}}}{\frac{y}{s^2} e^{-2\frac{y^2}{s}}} \times \frac{3z}{\pi\sqrt{2}(s-t)^2} e^{-\frac{2}{s-t}(z^2-yz+y^2)} \int_0^{\frac{4yz}{s-t}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{]0, s[}(t) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(y) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(z).$$

Ces formules s'obtiennent à partir de l'expression explicite de la loi conjointe du couple  $(\tau_0^{(0,y)} \mid B_{\tau_0^{(0,y)}}^y)$  (avec les notations générales :

$$\tau_a^{(x,y)} = \min\{t > 0 : X_t + x + ty = a\},$$

$$B_{\tau_a^{(x,y)}}^y = B_{\tau_a^{(x,y)}} + y),$$

que nous rappelons :

$$(3) \quad q_t(y,z) = P\{\tau_0^{(0,y)} \in dt, |B_{\tau_0^{(0,y)}}^y| \in dz\} / dt dz$$

$$= \frac{3z}{\pi\sqrt{2}t^2} e^{-\frac{2}{t}(z^2-|y|z+y^2)} \int_0^t \frac{4|y|z}{t} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z).$$

Rappelons également la densité de la loi de la variable aléatoire  $|B_{\tau_0^{(0,y)}}^y|$  :

$$q(y,z) = P\{|B_{\tau_0^{(0,y)}}^y| \in dz\} / dz$$

$$= \frac{3}{2\pi} \frac{|y|^{1/2} z^{3/2}}{|y|^3 + z^3} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z).$$

La formule (3) ne permet pas d'accéder aux distributions absolues des chaînes  $(\tau_n^+, \beta_n^+)_{n \geq 1}$ ,  $(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1}$ , c'est-à-dire aux lois des premiers termes  $(\tau_1^+, \beta_1^+)$ ,  $(\tau_1^-, \beta_1^-)$ , celles-ci nécessitant en fait la connaissance de la distribution explicite du couple  $(\tau_a^{(x,y)}, B_{\tau_a^{(x,y)}}^y)$  dans le cas général  $x \neq a$ .

Dans un travail récent ([2], [3]), nous avons obtenu l'expression générale de la loi conjointe du couple  $(\tau_a^{(x,y)}, B_{\tau_a^{(x,y)}}^y)$ , et en avons par conséquent déduit celles de  $(\tau_1^+, \beta_1^+)$ ,  $(\tau_1^-, \beta_1^-)$ ,  $\beta_1^+$  et  $\beta_1^-$ .

Nous rappelons, pour mémoire, notre résultat principal pour la présente étude :

$$(4) \quad P\{\tau_a^{(x,y)} \in dt, B_{\tau_a^{(x,y)}}^y \in dz\} = |z| [p_t(x,y; a, z) -$$

$$- \int_0^t \int_0^{+\infty} q_s(z, \zeta) p_{t-s}(x, y; a, -\varepsilon_{x-a} \zeta) ds d\zeta] \mathbb{1}_{A_{x-a}}(z) dt dz$$

où

$$p_t(x, y; u, v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3}(u-x-ty)^2 + \frac{6}{t^2}(u-x-ty)(v-y) - \frac{6}{t}(v-y)^2\right]$$

désigne les probabilités de transition du processus bidimensionnel  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ ,

$$\varepsilon_{x-a} = \text{signe de } (a-x)$$

$$A_{x-a} = ]0, +\infty[ \text{ si } x < a \text{ et } A_{x-a} = ]-\infty, 0[ \text{ si } x > a.$$

Dans la suite nous utiliserons en fait l'expression "symétrisée" de la loi du couple  $(\tau_a^{(x,y)}, B_{\tau_a}^{(x,y)})$  suivante :

### Théorème

$$(5) \quad P\{\tau_a^{(x,y)} \in dt, B_{\tau_a}^{(x,y)} \in dz\} = |z|[\pi_t(x,y; a, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} q_s(z, \zeta) \pi_{t-s}(x, y; a, \zeta) ds d\zeta] \mathbb{1}_{A_{x-a}}(z) dt dz$$

avec  $\pi_t(x, y; u, v) = p_t(x, y; u, v) + p_t(x, y; u, -v)$ .

### Preuve

Dans [3] (lemme 5) nous avons déduit du caractère markovien du processus  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$  la relation suivante, valable pour  $z \in A_x$  :

$$(6) \quad 0 = p_t(x, y; a, -z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} q_s(z, \zeta) p_{t-s}(x, y; a, \varepsilon_{x-a} \zeta) ds d\zeta.$$

En additionnant membre à membre les égalités (4) et (6) nous tirons, après avoir noté la parité de la fonction  $v \mapsto \pi_t(x, y; u, v)$ , la formule annoncée (5).  $\square$



# I. LES LOIS DU COUPLE $(\tau_1^+, \beta_1^+)$ ET DE LA VARIABLE ALEATOIRE $\beta_1^+$

## Théorème 1

1.

$$(7) \quad P\{\tau_1^+ \in dt, \beta_1^+ \in dz\} = [p_t(z) - \int_0^{t-1} \int_0^{+\infty} q_s(\zeta, |z|) p_{t-s}(\zeta) ds d\zeta] \mathbb{1}_{]1, +\infty[}(t) dt dz$$

$$\text{avec } p_t(z) = \frac{\sqrt{3}|z|}{\pi t^2} e^{-2\frac{z^2}{t}}.$$

2.

$$(8) \quad P\{\beta_1^+ \in dz\} = [p^+(z) - \int_0^{+\infty} q(\zeta, |z|) p^+(\zeta) d\zeta] dz$$

$$\text{avec } p^+(z) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi|z|} (1 - e^{-2z^2}).$$

## Preuve

1) Nous démontrons la première formule en nous appuyant sur la propriété de Markov du processus  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$  (voir [4]). En introduisant l'expression (4) de la loi de  $(\tau_0^{(x,y)}, B_{\tau_0^{(x,y)}}^y)$ , pour  $t > 1$ , nous avons :

$$P\{\tau_1^+ \in dt, \beta_1^+ \in dz\} / dt dz = \mathbb{E}[P\{\tau_0^{(X_1, B_1)} \in dt-1, B_{\tau_0^{(X_1, B_1)}}^{B_1} \in dz\} / dt dz]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(0,0; x,y) dx dy \times |z| [\pi_{t-1}(x,y; 0,z) - \int_0^{t-1} \int_0^{+\infty} q_s(z,\zeta) \pi_{t-1-s}(x,y; 0,\zeta) ds d\zeta] \mathbb{1}_{A_x}(z)$$

$$= |z| \left[ \int_{A_z} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(0,0; x,y) \pi_{t-1}(x,y; 0,z) dx dy - \int_0^{t-1} \int_0^{+\infty} q_s(z,\zeta) ds d\zeta \int_{A_z} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(0,0; x,y) \pi_{t-1-s}(x,y; 0,\zeta) dx dy \right].$$

Le résultat souhaité découle alors des trois identités générales :

$$i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x,y; w,z) p_{t-s}(w,z; u,v) dw dz = p_t(x,y; u,v), \quad 0 < s < t,$$

$$ii) \quad \int_A \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(0,0; w,z) \pi_{t-s}(w,z; 0,v) dw dz = p_t(0,0; 0,v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} e^{-2\frac{v^2}{t}}, \quad 0 < s < t,$$

avec  $A = ]-\infty, 0]$  ou  $A = [0, +\infty[$ ,

$$\text{iii) } zq_s(z, \zeta) = \zeta q_s(\zeta, z), \quad z > 0, \quad \zeta > 0,$$

la première traduisant le caractère markovien du processus  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ , la seconde se déduisant de la précédente en faisant appel à la relation triviale  $p_t(-x, -y; -u, -v) = p_t(x, y; u, v)$ , et la dernière provenant de l'écriture explicite (3) de la loi du couple  $(\tau_0^{(0,z)}, |B_{\tau_0^{(0,z)}}^z|)$ .

2) Une simple intégration de la formule (7) par rapport à  $t$  sur  $]1, +\infty[$  nous permet d'obtenir (8), après avoir remarqué que  $p^+(z) = \int_1^{+\infty} p_t(z) dt$ .  $\square$

## II. LES LOIS DU COUPLE $(\tau_1^-, \beta_1^-)$ ET DE LA VARIABLE ALEATOIRE $\beta_1^-$

En procédant à un changement de temps, nous pouvons déduire de la distribution de  $(\tau_1^+, \beta_1^+)$  précédente, celle du couple  $(\tau_1^-, \beta_1^-)$ . Tout repose sur l'identité suivante :

### Lemme 1

*On a l'identité en loi de processus :*

$$(X_t, B_t)_{t \geq 0} \equiv (t^3 X_{1/t}, 3t^2 X_{1/t} - tB_{1/t})_{t \geq 0}$$

**Preuve.** Il est aisé de montrer que les processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(t^3 X_{1/t})_{t \geq 0}$  ont la même fonction de covariance, à savoir  $E(X_s X_t) = (s \wedge t)^2 (\frac{s \vee t}{2} - \frac{s \wedge t}{6})$ , ce qui permet, après avoir noté l'égalité triviale  $\frac{d}{dt} (t^3 X_{1/t}) = 3t^2 X_{1/t} - tB_{1/t}$ , de conclure.  $\square$

**Lemme 2**

*On a l'identité en loi de chaînes :*

$$(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1} \equiv \left( \frac{1}{\tau_n^+}, \frac{\beta_n^+}{\tau_n^+} \right)_{n \geq 1}$$

**Preuve.** D'après le lemme 1, nous avons, pour tout  $t > 0$ , l'égalité :

$$(X_t, B_t) = (t^3 \tilde{X}_{1/t}, 3t^2 \tilde{X}_{1/t} - t \tilde{B}_{1/t}),$$

$(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)_{t > 0}$  désignant une copie du processus  $(X_t, B_t)_{t > 0}$ .

Définissons alors les temps de passages successifs en zéro relatifs au processus  $(\tilde{X}_t)_{t > 0}$ , ainsi que les positions de  $(\tilde{B}_t)_{t > 0}$  correspondantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1^+ &= \min\{t > 1 : \tilde{X}_t = 0\} \\ \tilde{\tau}_{n+1}^+ &= \min\{t > \tilde{\tau}_n^+ : \tilde{X}_t = 0\}, \quad n \geq 1, \\ \tilde{\beta}_n^+ &= \tilde{B}_{\tilde{\tau}_n^+}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Avec ces notations nous obtenons les égalités :

$$\begin{aligned} \tau_1^- &= \max\{t < 1 : X_t = 0\} \\ &= \max\{t < 1 : \tilde{X}_{1/t} = 0\} \\ &= [\min\{t > 1 : \tilde{X}_t = 0\}]^{-1} \\ &= \frac{1}{\tilde{\tau}_1^+}, \end{aligned}$$

Supposons l'égalité  $\tau_n^- = \frac{1}{\tilde{\tau}_n^+}$  satisfaite ; nous en déduisons :



$$\begin{aligned}
\tau_{n+1}^- &= \max\{t < \tau_n^- : X_t = 0\} \\
&= [\min\{t > 1/\tau_n^- : X_{1/t} = 0\}]^{-1} \\
&= [\min\{t > \tilde{\tau}_n^+ : \tilde{X}_t = 0\}]^{-1} \\
&= \frac{1}{\tilde{\tau}_{n+1}^+},
\end{aligned}$$

ce qui démontre, par récurrence, la relation  $\tau_n^- = \frac{1}{\tilde{\tau}_n^+}$ , valable pour tout  $n \geq 1$ .

Notons enfin que

$$\begin{aligned}
\beta_n^- &= B_{\tau_n^-} \\
&= B_{1/\tilde{\tau}_n^+} \\
&= \frac{3}{\tilde{\tau}_n^{+2}} \tilde{X}_{\tilde{\tau}_n^+} - \frac{1}{\tilde{\tau}_n^+} \tilde{B}_{\tilde{\tau}_n^+} \\
&= - \frac{\tilde{\beta}_n^+}{\tilde{\tau}_n^+},
\end{aligned}$$

ce qui, avec la symétrie de la variable aléatoire  $\tilde{\beta}_n^+$ , achève la preuve du lemme.  $\square$

**Remarque 1.** Cette identité générale permet de déterminer les probabilités de transition  $p^-$ , (2) en fonction des  $p^+$ , (1). Ici nous n'utiliserons, en fait, cette relation qu'au premier rang :  $(\tau_1^-, \beta_1^-) \equiv (\frac{1}{\tau_1^+}, \frac{\beta_1^+}{\tau_1^+})$ .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

## Théorème 2

$$1. (9) \quad P\{\tau_1^- \in dt, \beta_1^- \in dz\} = [p_t(z) - \int_0^{t-t^2} \int_0^{+\infty} q_s(\zeta, z) p_{t-s}(\zeta) ds d\zeta] \mathbb{1}_{]0,1[}(t) dt dz$$

$$\text{avec } p_t(z) = \frac{\sqrt{3}|z|}{\pi t^2} e^{-2 \frac{z^2}{t}}.$$

$$2. (10) \quad P\{\beta_1^- \in dz\} = [p^-(z) - \int_0^{1/4} \int_0^{+\infty} q_s(\zeta, z) f_s(\zeta) ds d\zeta] dz$$

$$\text{avec } p^-(z) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi|z|} e^{-2z^2} \text{ et } f_s(\zeta) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\zeta} [e^{-8\zeta^2/(1+\sqrt{1-4s})^2} - e^{-8\zeta^2/(1-\sqrt{1-4s})^2}],$$

$$0 < s < \frac{1}{4}.$$

## Preuve

1) Le lemme 2 et le théorème 1 nous fournissent les égalités, valables pour  $0 < t < 1$  suivantes :

$$\begin{aligned} P\{\tau_1^- \in dt, \beta_1^- \in dz\} / dt dz &= P\{\tau_1^+ \in d(\frac{1}{t}), \beta_1^+ \in d(\frac{z}{t})\} / dt dz \\ &= \frac{1}{t^3} [p_{1/t}(\frac{z}{t}) - \int_0^{1/t-1} \int_0^{+\infty} q_s(\zeta, \frac{z}{t}) p_{1/t-s}(\zeta) ds d\zeta]. \end{aligned}$$

On accède facilement à l'expression souhaitée (9) à l'aide du changement de variables  $(s, \zeta) = (\frac{s'}{t^2}, \frac{\zeta'}{t})$  et des identités

$$p_{c^2 t}(cz) = \frac{1}{c^3} p_t(z),$$

$$\text{et } q_{c^2 s}(c\zeta, cz) = \frac{1}{c^3} q_s(\zeta, z), c > 0,$$

cette dernière découlant trivialement de la représentation (3).

2) La formule (10) s'obtient en intégrant (9) par rapport à  $t$  sur  $[0,1]$ . Le calcul étant moins aisé que celui de la loi de  $\beta_1^+$ , nous le détaillons complètement.

Afin de simplifier l'intégrale

$$\int_0^1 dt \int_0^{t-t^2} \int_0^{+\infty} q_s(\zeta, z) p_{t-s}(\zeta) ds d\zeta,$$

nous effectuons le changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} (s, t) \\ 0 < s < t-t^2 \\ 0 < t < 1 \end{array} \right. \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} (s', t') = (s, t-s) \\ 0 < s' < \frac{1}{4} \\ \left(\frac{1-\sqrt{1-4s'}}{2}\right)^2 < t' < \left(\frac{1+\sqrt{1-4s'}}{2}\right)^2. \end{array} \right.$$

Nous obtenons ainsi la nouvelle intégrale

$$\int_0^{1/4} \int_0^{+\infty} q_{s'}(\zeta, z) ds' d\zeta \int_{(1-\sqrt{1-4s'})^2/4}^{(1+\sqrt{1-4s'})^2/4} p_{t'}(\zeta) dt',$$

de laquelle on déduit, grâce à l'égalité  $\frac{\zeta}{t^2} e^{-2\frac{\zeta^2}{t}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\zeta} e^{-2\frac{\zeta^2}{t}} \right)$ , le résultat escompté (10).  $\square$

**Remarque 2.** La présence de la borne  $t-t^2$  dans l'intégrale figurant dans (9) nous empêche apparemment de simplifier la formule (10), et nous n'avons pu de ce fait, obtenir une expression analogue à (8). Ceci s'explique en fait par l'apparition, dans l'identification  $\beta_1^- \equiv \beta_1^+/\tau_1^+$ , de l'instant  $\tau_1^+$  qui amène une complication supplémentaire par rapport au calcul de la loi de  $\beta_1^+$ .



## Bibliographie

- [1] KAC, M. : *Probability theory : its role and its impact*, SIAM Rev. 4 (1962), pp. 1-11.
- [2] LACHAL, A. : *Sur l'intégrale du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sci. Paris t. 311, série I (1990), pp. 461-464.
- [3] LACHAL, A. : *Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, Ann. I.H.P. sect. B, vol. 27, n° 3 (1991), pp. 385-405.
- [4] LACHAL, A. : Thèse de Doctorat : *Etude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien*, (à paraître).
- [5] LEFEBVRE, M. : *First passage densities for a two-dimensional process*, SIAM J. Appl. Math. vol. 49, n° 5 (1989), pp. 1514-1523.
- [6] LEFEBVRE, M. and WHITTLE, P. : *Survival optimization for a dynamic system*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 12, n° 1 (1988), pp. 101-119.
- [7] Mc KEAN, H.P. Jr. : *A winding problem for a resonator driven by a white noise*, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [8] RICE, S.O. : *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.

# DERNIER INSTANT DE PASSAGE POUR L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

Aimé LACHAL

Université Claude Bernard - Lyon I  
Institut de Mathématiques et Informatique  
43, boulevard du 11 Novembre 1918  
69622 VILLEURBANNE CEDEX (France)

## Résumé

Soit  $(B_t + y)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire démarrant de  $y$ ,  
 $\tau_{a,T}^- = \max\{t \in [0, T] : \int_0^t B_s ds + x + ty = a\}$  et  $\tau_{a,T}^+ = \min\{t \geq T : \int_0^t B_s ds + x + ty = a\}$ .

Dans cette note nous déterminons la loi du vecteur aléatoire  $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$ .

## INTRODUCTION

Soient  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive, et  
 $U_t(x, y) = (X_t + x + ty, B_t + y)$ ,  $t \geq 0$ , le processus bidimensionnel associé, démarrant du  
point  $(x, y)$ .

Le processus  $(U_t(x, y))_{t \geq 0}$  a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs, et  
intervient dans divers domaines des mathématiques appliquées (voir [1] à [10]).

Dans cette note nous considérons respectivement le dernier et le premier instant,  
avant et après un temps déterministe  $T$ , où le processus  $(U_t(x, y))_{t \geq 0}$  atteint la droite  
 $\{a\} \times \mathbb{R}$  :

$$\tau_{a,T}^- = \max\{t \in [0, T] : X_t + x + ty = a\},$$

$$\tau_{a,T}^+ = \min\{t \geq T : X_t + x + ty = a\}$$

(avec les conventions usuelles  $\max \emptyset = -\infty$ ,  $\min \emptyset = +\infty$ ).

Nous désignerons par  $\theta_t$  la translation opérant sur les trajectoires du processus  $(U_s)_{s \geq 0}$  de la manière suivante :

$$U_s \circ \theta_t = U_{s+t},$$

et par  $\tau_a$  le premier instant d'atteinte de la droite  $\{a\} \times \mathbb{R}$  par le processus  $(U_t(x,y))_{t \geq 0}$  :

$$\tau_a = \min\{t > 0 : X_t + x + ty = a\}.$$

Partant de l'équivalence essentielle

$$(1) \quad \tau_{a,T}^- < t \Leftrightarrow \tau_a \circ \theta_t > T-t,$$

nous allons obtenir la distribution de la variable aléatoire  $\tau_{a,T}^-$ , et plus généralement celle du triplet  $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$ .

## I. NOTATIONS

Notons  $U_t = (X_t, B_t)$ . Le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  est temporellement homogène et markovien ([6], [9]). Désignons par  $P_{(x,y)}$  les probabilités conditionnelles correspondantes et par  $p_t(x,y; u,v)$  ses densités de transition définies selon

$$p_t(x,y; u,v) = P_{(x,y)}\{U_t \in du dv\}/dudv = P\{U_t(x,y) \in du dv\}/dudv$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3}(u-x-ty)^2 + \frac{6}{t^2}(u-x-ty)(v-y) - \frac{2}{t}(v-y)^2\right].$$

Le semi-groupe naturellement associé au processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  :

$$(T_t f)(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[f(U_t)] = \mathbb{E}[f(U_t(x,y))],$$

admet pour générateur infinitésimal l'opérateur aux dérivées partielles



$$D_{(x,y)} = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

Nous introduisons également l'opérateur adjoint :

$$D_{(x,y)}^* = -y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} ,$$

intervenant dans l'équation de Fokker-Planck, satisfaite par les probabilités de transition, suivante :

$$(2) \quad D_{(u,v)}^* p_t(x,y ; u,v) = \frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y ; u,v).$$

Soient enfin :

- i)  $\tau_a = \min\{t > 0 : X_t = a\}$
- ii)  $\tau_{a,T}^- = \max\{t \in [0,T] : X_t = a\}$
- iii)  $\tau_{a,T}^+ = \min\{t \geq T : X_t = a\}.$

Nous rappelons deux résultats essentiels, obtenus dans un travail antérieur ([2] et [3]), à propos du premier instant de passage en  $a$  du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

i) La densité  $f_{a,t}(x,y; z) = P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\}/dtdz$  du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  relativement à la probabilité  $P_{(x,y)}$  s'explicite selon la formule :

$$(3) \quad f_{a,t}(x,y; z) = |z| [p_t(x,y; a, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} f_s(-|z|; \zeta) p_{t-s}(x,y; a, -\varepsilon \zeta)] \mathbb{1}_A(z)$$

avec

$$f_s(z; \zeta) = P_{(0,z)}\{\tau_0 \in ds, B_{\tau_0} \in d\zeta\}/ds d\zeta$$

$$= \frac{3|\zeta|}{\pi\sqrt{2} s^2} e^{-\frac{2}{s}(\zeta^2 - |z\zeta| + z^2)} \int_0^{\frac{4|z\zeta|}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{A_z}(\zeta)$$

et les conventions d'écriture :

$$A = ]0, +\infty[ \quad \text{si } x < a, \quad A = ]-\infty, 0[ \quad \text{si } x > a,$$

$$A_z = ]0, +\infty[ \quad \text{si } z < 0, \quad A_z = ]-\infty, 0[ \quad \text{si } z > 0,$$

et  $\varepsilon = \text{signe de } (a-x)$ .

ii) La distribution  $g_{a,t}(x,y) = P_{(x,y)}\{\tau_a > t\} = \int_t^{+\infty} \int_A f_{a,s}(x,y; z) ds dz$  de la variable aléatoire  $\tau_a$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}$ , ainsi que la fonction  $f_{a,t}(x,y; z)$  définie en i), sont solutions des équations aux dérivées partielles (de Kolmogorov) respectives :

$$(4.1) \quad D_{(x,y)} g_{a,t}(x,y) = \frac{\partial}{\partial t} g_{a,t}(x,y), \quad t > 0, x \neq a, y \in \mathbb{R},$$

$$(4.2) \quad D_{(x,y)} f_{a,t}(x,y; z) = \frac{\partial}{\partial t} f_{a,t}(x,y; z), \quad t > 0, x \neq a, y \in \mathbb{R}, z \in A.$$

## II. LA LOI DE $\tau_{a,T}^-$ SOUS LA PROBABILITE $P_{(x,y)}$

Notre premier résultat s'énonce comme suit :

### Théorème 1

*La distribution de la variable aléatoire  $\tau_{a,T}^-$  relativement à  $P_{(x,y)}$  admet la représentation suivante :*

$$(5) \quad P_{(x,y)} \{ \tau_{a,T}^- \in dt \} = \left[ \int_0^{+\infty} g_{T-t}(v) \pi_t(x,y ; a,v) v \, dv \right] \mathbb{1}_{]0,T[}(t) dt,$$

avec

$$g_{T-t}(v) = P_{(0,v)} \{ \tau_0 > T-t \} = \int_{T-t}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_s(-|v| ; z) ds \, dz$$

et

$$\pi_t(x,y ; u,v) = p_t(x,y ; u,v) + p_t(x,y ; u,-v).$$

### Preuve

Partant de l'équivalence fondamentale (1), nous obtenons une représentation intégrale intermédiaire de la loi de  $\tau_{a,T}^-$ .

### Lemme 1

*On a l'égalité suivante, valable pour  $t \in ]0,T[$  :*

$$(5') \quad P_{(x,y)} \{ \tau_{a,T}^- < t \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,T-t}(u,v) p_t(x,y ; u,v) du \, dv.$$



## Preuve du lemme 1

Il suffit d'appliquer la propriété de Markov du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  au calcul de la probabilité  $P_{(x,y)} \{ \tau_{a,T}^- < t \}$  sous la forme :

$$P_{(x,y)} \{ \tau_{a,T}^- < t \} = P_{(x,y)} \{ \tau_a \circ \theta_t > T-t \} = \mathbb{E}_{(x,y)} [P_{U_t} \{ \tau_a > T-t \}],$$

ce qui prouve (5').  $\square$

## Suite de la preuve du théorème 1

Faisant appel aux équations aux dérivées partielles (2) et (4.1) respectivement vérifiées par  $p_t(x,y ; u,v)$  et  $g_{a,t}(u,v)$ , nous réduisons la quantité (5'), après l'avoir dérivée par rapport à  $t$ . Ceci donne :

$$\begin{aligned} P_{(x,y)} \{ \tau_{a,T}^- \in dt \} / dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [g_{a,T-t}(u,v) \frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y ; u,v) + \\ &\quad + p_t(x,y ; u,v) \frac{\partial}{\partial t} (g_{a,T-t}(u,v))] du dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [g_{a,T-t}(u,v) D_{(u,v)}^* p_t(x,y ; u,v) - \\ &\quad - p_t(x,y ; u,v) D_{(u,v)} g_{a,T-t}(u,v)] du dv. \end{aligned}$$

L'identité élémentaire

$$\varphi D^* \psi - \psi D \varphi = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right] - v \frac{\partial}{\partial u} [\varphi \psi]$$

nous conduit, en prenant soin d'intégrer par rapport à la variable  $u$  séparément sur les intervalles  $]-\infty, a[$  et  $]a, +\infty[$  (du fait de la singularité en  $u=a$  de la fonction  $g_{a,t}(u,v)$ ), à une expression plus simple de la densité de  $\tau_{a,T}^-$  :

$$(5'') \quad P_{(x,y)} \{ \tau_{a,T}^- \in dt \} / dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [g_{a,T-t}(a^+, v) - g_{a,T-t}(a^-, v)] p_t(x,y ; a, v) v dv.$$

En observant que l'on a nécessairement

$$P_{(a^+,v)}\{\tau_a > t\} = P_{(a^-,v)}\{\tau_a > t\} = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ P_{(a,v)}\{\tau_a > t\} & \text{si } v > 0 \end{cases}$$

(ce qui résulte du mouvement "rotationnel orienté" des trajectoires du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  ([3], [9])), nous ramenons (5") à une intégrale restreinte à l'intervalle  $[0, +\infty[$ . On conclut finalement en remarquant que la fonction  $g_{a,t}(a,v)$  ne dépend pas de  $a$ , et coïncide de ce fait avec  $g_t(v)$ .  $\square$

Dans le cas particulier où  $(x,y) = (0,0)$  et  $a = 0$  nous avons plus explicitement :

### Corollaire 1

i) La loi de la variable aléatoire  $\tau_{0,T}^-$  (sous  $(P_{(0,0)})$ ) admet pour densité, pour  $t \in ]0, T[$  :

$$(6) \quad P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- \in dt\}/dt = \frac{3^{3/2}\sqrt{T}}{\pi^2\sqrt{2}t^{3/2}} \int_0^{+\infty} K_1(4z\sqrt{\frac{T}{t}}) e^{2z} dz \int_0^{4z} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

ii) La fonction de répartition de  $\tau_{0,T}^-$  s'exprime, pour  $t \in ]0, T[$ , selon la formule :

$$(6') \quad P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- < t\} = \frac{(3/2)^{3/2}}{\pi^2} \int_0^{+\infty} K_0(4z\sqrt{\frac{T}{t}}) e^{2z} \frac{dz}{z} \int_0^{4z} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}},$$

$K_0$  et  $K_1$  désignant les fonctions de Bessel modifiées usuelles ([11]).

### Preuve

i) En remplaçant dans l'égalité (5) les fonctions  $g_{T-t}(v)$  et  $\pi_t(0,0; 0,v)$  par leurs valeurs explicites, nous obtenons

$$\begin{aligned}
P_{(0,0)}\{\tau_{0,T} \in dt\}/dt &= \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{3}}{\pi t^2} v e^{-2\frac{v^2}{t}} dv \int_{T-t}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{3z}{\pi\sqrt{2}s^2} e^{-\frac{2}{s}(v^2-vz+z^2)} ds dz \times \\
&\quad \times \int_0^{\frac{4vz}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \\
&= \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 t^2} \int_{T-t}^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} vz e^{-\frac{2}{s}(\frac{s+t}{t}v^2-vz+z^2)} dv dz \int_0^{\frac{4vz}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} .
\end{aligned}$$

Effectuons dans l'intégrale double le changement de variables  $(v,z) \mapsto (w,\zeta)$  défini par  $v = \sqrt{s} w$  et  $z = \sqrt{s} \frac{\zeta}{w}$ . On en tire alors :

$$\begin{aligned}
P_{(0,0)}\{\tau_{0,T} \in dt\}/dt &= \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 t^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta}{w} e^{2\zeta - 2\frac{\zeta^2}{w^2}} dw d\zeta \int_{T-t}^{+\infty} e^{-2\frac{s+t}{t}w^2} ds \times \\
&\quad \times \int_0^{4\zeta} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \\
&= \frac{33/2}{\pi^2 \sqrt{2}t} \int_0^{+\infty} \zeta e^{2\zeta} d\zeta \int_0^{+\infty} e^{-2(\frac{T}{t}w^2 + \frac{\zeta^2}{w^2})} \frac{dw}{w^3} \times \int_0^{4\zeta} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} .
\end{aligned}$$

Le changement de variable  $w = \sqrt{\eta}$  fournit l'identité

$$\int_0^{+\infty} e^{-2(\frac{T}{t}w^2 + \frac{\zeta^2}{w^2})} \frac{dw}{w^3} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2(\frac{T}{t}\eta + \frac{\zeta^2}{\eta})} \frac{d\eta}{\eta^2} .$$

La valeur de cette dernière intégrale s'exprime à l'aide de la fonction de Bessel modifiée  $K_1$  selon la relation ([11], formule 15, p. 183) :

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2(\frac{T}{t}\eta + \frac{\zeta^2}{\eta})} \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\frac{T}{t}} K_1(4\zeta \sqrt{\frac{T}{t}}) ,$$

laquelle permet d'obtenir finalement (6).



- ii) Intégrons la formule (6) par rapport à  $t$ . En faisant appel aux relations bien connues ([11])  $K'_0 = -K_1$  et  $K_0(+\infty) = 0$ , desquelles nous tirons l'identité

$$\int_0^t \frac{\sqrt{T}}{s^{3/2}} K_1(4z \sqrt{\frac{T}{s}}) ds = \frac{1}{2z} K_0(4z \sqrt{\frac{T}{t}}),$$

nous en déduisons (6').  $\square$

En exploitant plus en profondeur l'équivalence (1) nous obtenons, au paragraphe suivant, plus généralement la distribution conjointe du triplet  $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$ .

### III. LA LOI CONJOINTE DU TRIPLET $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$ SOUS LA PROBABILITE $P_{(x,y)}$

#### Théorème 2

*La distribution conjointe du triplet  $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$  s'explicite comme suit :*

$$(7) \quad P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in ds, \tau_{a,T}^+ \in dt, B_{\tau_{a,T}^+} \in dz\} = \left[ \int_{A_z} f_{t-s}(v; z) p_s(x, y; a, v) |v| dv \right] \times \\ \times \mathbb{1}_{]0, T[}(s) \mathbb{1}_{]T, +\infty[}(t) ds dt dz.$$

#### Preuve

Notre démarche est semblable à la précédente. Nous avons tout d'abord :

## Lemme 2

On a pour  $s \in ]0, T[$  l'identité suivante :

$$(7') \quad P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- < s, \tau_{a,T}^+ \in dt, B_{\tau_{a,T}^+} \in dz\} = \\ = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x,y; u,v) f_{a,t-s}(u,v; z) du dv \right] \mathbb{1}_{]T, +\infty[}(t) dt dz.$$

### Preuve du lemme 2

La propriété de Markov du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  appliquée à l'égalité ensembliste (valable pour  $0 < s < T < t$ )

$$\{\tau_{a,T}^- < s, \tau_{a,T}^+ > t, B_{\tau_{a,T}^+} \in C\} = \{\tau_a > t-s, B_{\tau_a} \in C\} \circ \theta_s,$$

C désignant un borélien de  $\mathbb{R}$ , nous donne les relations suivantes :

$$P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- < s, \tau_{a,T}^+ > t, B_{\tau_{a,T}^+} \in C\} = \mathbb{E}_{(x,y)} [P_{U_s}\{\tau_a > t-s, B_{\tau_a} \in C\}] \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x,y; u,v) du dv \int_{t-s}^{+\infty} \int_C f_{a,\sigma}(u,v; z) d\sigma dz.$$

Une dérivation de cette dernière égalité par rapport à  $t$  fournit le résultat annoncé (7').  $\square$

### Suite de la preuve du théorème 2

Des calculs analogues à ceux figurant dans la preuve du théorème 1, exploitant cette fois les équations (2) et (4.2) respectivement vérifiées par les densités  $p_t(x,y; u,v)$  et  $f_{a,t}(u,v; z)$ , nous mènent à l'expression, valable pour  $0 < s < T < t$  :

$$P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in ds, \tau_{a,T}^+ \in dt, B_{\tau_{a,T}^+} \in dz\}/ds dt dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x,y; a,v) [f_{a,t-s}(a^+,v; z) - f_{a,t-s}(a^-,v; z)] v dv.$$

Enfin les observations suivantes :

- i) si  $v > 0$  :  $P_{(a^+,v)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\} = P_{(a,v)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\} \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(z)$   
et  $P_{(a^-,v)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\} = 0$ ,
- ii) si  $v < 0$  :  $P_{(a^-,v)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\} = P_{(a,v)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(z)$   
et  $P_{(a^+,v)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\} = 0$ ,

iii)  $P_{(a,v)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\} = P_{(0,v)}\{\tau_0 \in dt, B_{\tau_0} \in dz\} = f_t(v,z) \mathbb{1}_{A_z}(v) dt dz,$

permettent de conclure.  $\square$

## Corollaire 2

*La loi conjointe du couple  $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+)$  s'exprime selon la formule suivante :*

$$(8) \quad P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in ds, \tau_{a,T}^+ \in dt\} = \left[ \int_0^{+\infty} -\frac{\partial}{\partial t} g_{t-s}(v) \pi_s(x,y; a,v) v dv \right] \mathbb{1}_{]0,T[}(s) \mathbb{1}_{]T,+\infty[}(t) ds dt$$

avec

$$-\frac{\partial}{\partial t} g_{t-s}(v) = P_{(0,v)}\{\tau_0 \in dt - s\}/dt = \int_0^{+\infty} f_{t-s}(-|v|, z) dz.$$

## Preuve

En intégrant (7) par rapport à  $z$  et en permutant les intégrales ainsi obtenues, on trouve successivement, pour  $0 < s < T < t$  :



$$\begin{aligned}
P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in ds, \tau_{a,T}^+ \in dt\}/ds dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{A_z} f_{t-s}(v; z) p_s(x, y; a, v) |v| dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x, y; a, v) |v| dv \int_{A_v} f_{t-s}(v; z) dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial}{\partial t} g_{t-s}(v) p_s(x, y; a, v) |v| dv.
\end{aligned}$$

La distribution recherchée (8) se déduit de cette dernière égalité en notant la parité de la fonction  $v \mapsto g_t(v)$ .  $\square$

Nous avons en particulier pour  $(x, y) = (0, 0)$  et  $a = 0$  :

### Corollaire 3

i) La distribution du couple  $(\tau_{0,T}^-, \tau_{0,T}^+)$  relativement à  $P_{(0,0)}$  admet pour densité, pour  $0 < s < T < t$  :

$$\begin{aligned}
(9) \quad P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- \in ds, \tau_{0,T}^+ \in dt\}/ds dt &= \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 s^2} \int_0^{+\infty} K_0(4z \sqrt{\frac{t}{s}}) e^{2z} z dz \times \\
&\quad \times \int_0^{4z} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.
\end{aligned}$$

ii) Pour  $0 < s < T < t$  on a :

$$(9') \quad P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- < s, \tau_{0,T}^+ > t\} = \frac{(3/2)^{3/2}}{\pi^2} \int_0^{+\infty} K_0(4z \sqrt{\frac{t}{s}}) e^{2z} \frac{dz}{z} \int_0^{4z} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

### Preuve

i) La démonstration de la formule (9) est analogue à celle de (6). Explicitons (8) dans le cas particulier où  $(x, y) = (0, 0)$  et  $a = 0$ . Cela donne :

$$\begin{aligned}
P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- \in ds, \tau_{0,T}^+ \in dt\}/ds dt &= \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{3}}{\pi s^2} v e^{-2\frac{v^2}{s}} dv \times \\
&\times \int_0^{+\infty} \frac{3z}{\pi\sqrt{2}(t-s)^2} e^{-\frac{2}{t-s}(v^2-vz+z^2)} dz \int_0^{+\infty} \frac{4vz}{t-s} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \\
&= \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 s^2 (t-s)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} vz e^{-\frac{2}{t-s}(\frac{t}{s}v^2-vz+z^2)} dv dz \times \\
&\times \int_0^{+\infty} \frac{4vz}{t-s} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} .
\end{aligned}$$

Le changement de variables, dans l'intégrale double,  $(v,z) \mapsto (w,\zeta)$  défini par  $v = \sqrt{t-s} w$  et  $z = \sqrt{t-s} \frac{\zeta}{w}$  nous conduit à l'égalité :

$$\begin{aligned}
P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- \in ds, \tau_{0,T}^+ \in dt\}/ds dt &= \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 s^2} \int_0^{+\infty} e^{2\zeta} \zeta d\zeta \int_0^{+\infty} e^{-2(\frac{t}{s}w^2 + \frac{\zeta^2}{w^2})} \frac{dw}{w} \times \\
&\times \int_0^{+\infty} \frac{4\zeta}{w} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} .
\end{aligned}$$

L'intégrale intermédiaire s'exprime à l'aide de la fonction  $K_0$  ([11], formule 15 p. 183) selon :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2(\frac{t}{s}w^2 + \frac{\zeta^2}{w^2})} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2(\frac{t}{s}\eta + \frac{\zeta^2}{\eta})} \frac{d\eta}{\eta^2} = K_0(4z\sqrt{\frac{t}{s}}) ,$$

ce qui permet de conclure.

- ii) Intégrons l'identité (9) par rapport à  $s$  et  $t$ . Pour en tirer la formule (9') il suffit de voir que l'on a la relation

$$\int_0^s \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2} K_0(4z\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}) d\sigma d\tau = \frac{1}{4z^2} K_0(4z\sqrt{\frac{t}{s}}) .$$

Cette dernière égalité se vérifie facilement en dérivant les deux membres successivement par rapport à  $s$  et  $t$ , puis en faisant appel à l'équation différentielle satisfaite par la fonction  $K_0$  ([11]) :

$$wK_0''(w) + K_0'(w) + wK_0(w) = 0,$$

ainsi qu'à la limite  $K_0(+\infty) = 0$ .  $\square$

### Remarque

Le procédé utilisé dans cet article, à savoir l'exploitation de l'équivalence (1), ne permet pas de déterminer la loi du couple  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-})$ , ni celle du quadruplet

$(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$ . Néanmoins, nous avons récemment obtenu par une technique

différente l'expression de ces distributions ; ceci fera l'objet d'une publication ultérieure ([5]).



## REFERENCES

- [1] KAC, M. : *Probability theory : its role and its impact*, SIAM Rev. 4 (1962), pp. 1-11.
- [2] LACHAL, A. : *Sur l'intégrale du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 311, série I (1990), pp. 461-464.
- [3] LACHAL, A. : *Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, Ann. I.H.P. sect. B, vol. 27, n° 3 (1991), pp. 385-405.
- [4] LACHAL, A. : *Sur les temps de passages successifs de l'intégrale du mouvement brownien*, (proposé).
- [5] LACHAL, A. : *Les excursions de l'intégrale du mouvement brownien*, (proposé).
- [6] LACHAL, A. : Thèse de Doctorat : *Etude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien*, (à paraître).
- [7] LEFEBVRE, M. : *First passage densities for a two-dimensional process*, SIAM J. Appl. Math. vol. 49, n° 5 (1989), pp. 1514-1523.
- [8] LEFEBVRE, M. and WHITTLE, P. : *Survival optimization for a dynamic system*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 12, n° 1 (1988), pp. 101-119.
- [9] Mc KEAN, H.P. Jr. : *A winding problem for a resonator driven by a white noise*, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [10] RICE, S.O. : *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.
- [11] WATSON, G.N. : *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press (1952).

# SUR LES EXCURSIONS DE L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

par Aimé LACHAL

Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle et Probabilités

Institut de Mathématiques et Informatique

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

43, boulevard du 11 Novembre 1918

69622 VILLEURBANNE CEDEX (France)

## Résumé

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  un point fixé. Dans cette note nous explicitons la loi du processus d'excursion de  $(\int_0^t B_s ds + x + ty)_{t \geq 0}$ , encadrant un instant déterministe  $T$ .

## INTRODUCTION

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive, et  $U_t(x, y) = (X_t + x + ty, B_t + y)$ ,  $t \geq 0$ , le processus bidimensionnel associé démarrant du point  $(x, y)$ . Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  intervient en mécanique statistique et en optimisation (voir références [3] à [11] et [14]).

Dans cette note nous considérons le processus d'excursion  $(Z_t(x, y))_{t \geq 0}$  selon  $Z_t(x, y) = U_{t+\tau^-}(x, y)$  pour  $0 \leq t \leq \tau^+ - \tau^-$ , où  $\tau^- = \max\{t \in [0, T] : X_t + x + ty = a\}$  et  $\tau^+ = \min\{t \geq T : X_t + x + ty = a\}$  désignent respectivement le dernier et le premier instants d'atteinte de la droite  $\{a\} \times \mathbb{R}$ , antérieur et postérieur au temps fixé  $T$ , par le processus  $(U_t(x, y))_{t \geq 0}$ .

Par une technique analogue à celle employée par K.L. Chung ([1]), et P. Hsu ([2]), lors de l'étude des excursions respectives du mouvement brownien linéaire et du

mouvement brownien multi-dimensionnel réfléchi, nous explicitons la distribution du processus d'excursion  $(Z_t(x,y))_{t \geq 0}$ . Nous étant heurtés à une difficulté supplémentaire, provenant de la dissymétrie du processus  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ , nous avons été amenés à introduire divers processus associés à ce dernier permettant de lever cet obstacle.

## I. PRELIMINAIRES

Posons  $U_t = (X_t, B_t)$ . Le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  est homogène et markovien ([8], [11]), et ses probabilités de transition sont définies par

$$\begin{aligned} p_t(x,y ; u,v) &= P_{(x,y)}\{U_t \in du dv\}/du dv = P\{U_t(x,y) \in du dv\}/du dv \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3}(u-x-ty)^2 + \frac{6}{t^2}(u-x-ty)(v-y) - \frac{2}{t}(v-y)^2\right]. \end{aligned}$$

Dans un travail antérieur ([4], [5]), nous avons obtenu la loi conjointe du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}$ , où  $\tau_a = \min\{t > 0 : X_t = a\}$ . Nous en rappelons l'expression ci-dessous. Nous posons à cet effet :

$$f_{a,t}(x,y ; z) = P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\}/dt dz.$$



## Théorème

La probabilité  $(\tau_a, B_{\tau_a})(P_{(x,y)})$  est entièrement déterminée par les formules suivantes :

(1) (H.P. McKean)

$$f_{0,t}(x,y; z) = \frac{3|z|}{\pi\sqrt{2} t^2} e^{-\frac{2}{t}(z^2 - |yz| + y^2)} \int_0^{\frac{4|yz|}{t}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{A_y}(z)$$

avec  $A_y = ]0, +\infty[$  si  $y < 0$  et  $A_y = ]-\infty, 0[$  si  $y > 0$ .

(2) (A. Lachal)

$$f_{a,t}(x,y; z) = |z| [p_t(x,y; a, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} f_{0,s}(0, -|z|; \zeta) p_{t-s}(x,y; a, -\varepsilon\zeta) ds d\zeta] \mathbb{1}_A(z)$$

avec  $A = ]0, +\infty[$  si  $x < a$ ,  $A = ]-\infty, 0[$  si  $x > a$  et  $\varepsilon = \text{signe de } (a-x)$ .

Soient enfin  $\tau_{a,T}^- = \max\{t \in [0, T] : X_t = a\}$  et  $\tau_{a,T}^+ = \min\{t \geq T : X_t = a\}$ , avec

les conventions habituelles  $\max \emptyset = -\infty$ ,  $\min \emptyset = +\infty$ .

### Définition 1

Nous appelons processus d'excursion a-verticale encadrant  $T$ , le processus  $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-}$  défini par l'identité :  $Z_t = U_{t + \tau_{a,T}^-}$ ,  $0 \leq t \leq \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-$ .

En vue d'expliciter la loi du processus  $Z$ , nous introduisons trois autres processus apparaissant naturellement lors de la description géométrique des excursions.

## Définition 2

Le processus absorbé verticalement en  $a$  (associé à  $(U_t)_{t \geq 0}$ ) est le processus  $(U_t)_{0 \leq t \leq \tau_a}$ . Ce processus est homogène et markovien, de densités de transition définies, pour  $x, u < a$ , ou  $x, u > a$ , par

$$\bar{p}_{a,t}(x,y; u,v) = P_{(x,y)}\{U_t \in du dv, t \leq \tau_a\} / du dv.$$

## Proposition 1

$$(3) \quad \bar{p}_{a,t}(x,y; u,v) = p_t(x,y; u,v) - \int_0^t \int_A f_{a,s}(x,y; z) p_{t-s}(a,z; u,v) ds dz.$$

## Preuve

La formule (3) se déduit de la propriété de Markov du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ .

## Définition 3

Le processus dual  $U_t^* = (X_t^*, B_t^*)$ ,  $t \geq 0$  (associé à  $(U_t)_{t \geq 0}$ ), est le processus temporellement homogène et markovien dont les probabilités de transition sont définies selon ([13]) :

$$(4) \quad p_t^*(x,y; u,v) = p_t(u,v; x,y) = p_t(x,-y; u,-v).$$

Notons par  $P_{(x,y)}^*$  la famille des probabilités conditionnelles correspondantes. Le lien entre les processus duaux  $(U_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_t^*)_{t \geq 0}$  est immédiat :

## Proposition 2

Le processus dual  $(U_t^*)_{t \geq 0}$  peut être obtenu par symétrie des trajectoires du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  par rapport à la droite  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . Plus précisément, l'identité en loi suivante (de processus) est satisfaite :  $(X_t^*, B_t^*)_{t \geq 0} \equiv (X_t, -B_t)_{t \geq 0}$ .

Enonçons deux autres résultats faisant apparaître le rôle joué par le processus dual, et intervenant de manière cruciale lors de l'obtention de la loi du processus d'excursion  $Z$ .



### Proposition 3

*On a l'identité en loi de processus conditionnés suivante ([12]) :*

$$(5) \quad [U_{T-t} | U_0 = (x,y) \text{ et } U_t = (u,v)]_{0 \leq t \leq T} \equiv [U_t^* | U_0^* = (u,v) \text{ et } U_T^* = (x,y)]_{0 \leq t \leq T}.$$

### Preuve

L'identité (5) repose sur le caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ .

### Proposition 4

*L'identité en loi suivante est satisfaite :*

$$(6) \quad [(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}^-) | U_0 = (x,y), U_t = (u,v), \tau_{a,T}^- > -\infty] \equiv \\ \equiv [(T-\tau_a^*, B_{\tau_a^*}^*) | U_0^* = (u,v), U_T^* = (x,y), \tau_a^* \leq T],$$

où  $\tau_a^* = \min\{t > 0 : X_t^* = a\}$ .

### Preuve

La relation (6) dérive de (5) après introduction du processus intermédiaire défini par  $\tilde{U}_t = U_{T-t}$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

### Définition 4

*Le processus dual absorbé en a est le processus markovien homogène  $(U_T^*)_{0 \leq t \leq \tau_a^*}$ . Notons  $\bar{p}_{a,t}^*(x,y; u,v)$  ses fonctions de transition.*

### Proposition 5

$$(7) \quad \text{On a } \bar{p}_{a,t}^*(x,y; u,v) = \bar{p}_{a,t}(x,-y; u,-v) = \bar{p}_{a,t}(u,v; x,y).$$



## Preuve

L'égalité (7) est basée sur la relation (4) et sur l'approximation classique

$$\bar{p}_{a,t}(u,v; x,y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{(u,v)} \{ U_t \in dx dy, \forall k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} U_{kt/2^n} \in ]-\infty, a] \times \mathbb{R} \} / dx dy,$$

la probabilité figurant au second membre se calculant à l'aide de la propriété de Markov du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ .

## II. LA LOI DU PROCESSUS D'EXCURSION Z

Notre résultat s'énonce comme suit :

### Théorème

*Fixons  $0 < t_1 < \dots < t_n$  la distribution du processus d'excursion Z est complètement déterminée par la formule :*

$$(8) \quad P_{(x,y)} \{ (\tau_{a,t}^-, B_{\tau_{a,t}^-}) \in ds dz, Z_{t_1} \in dx_1 dy_1, \dots, Z_{t_n} \in dx_n dy_n, \\ t_n < \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-, (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}) \in d\sigma d\zeta \} \\ = p_s(x,y; a,z) f_{a,t_1}(x_1, -y_1; -z_1) \bar{p}_{a,t_2-t_1}(x_1, y_1; x_2, y_2) \dots \bar{p}_{a,t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, y_{n-1}; x_n, y_n) \times \\ \times f_{a,\sigma-s-t_n}(x_n, y_n; \zeta) \mathbb{1}_{[0,T[}(s) \mathbb{1}_{]Tv(s+t_n), +\infty[}(\sigma) ds dz dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n d\sigma d\zeta.$$

Mentionnons deux lemmes utiles pour la démonstration de ce théorème.

### Lemme 1

*Les processus conditionnés  $(U_t | U_T = (u,v))_{0 \leq t \leq T}$  et  $(U_t | U_T = (u,v))_{t \geq T}$  sont mutuellement indépendants.*

### Preuve

Une nouvelle application de la propriété de Markov du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  démontre l'assertion.

### Lemme 2

$$\text{On a l'identité } P_{(x,y)}^* \{ \tau_a^* \in dt, B_{\tau_a^*}^* \in dz \} = P_{(x,-y)} \{ \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in -dz \}.$$

### Preuve

Il suffit d'écrire la définition de  $\tau_a^*$ .

### Preuve du théorème

Notre démarche comporte trois étapes.

La première consiste à séparer le processus d'excursion  $(U_t)_{\tau_{a,T}^- \leq t \leq \tau_{a,T}^+}$  en deux processus,  $(U_t)_{\tau_{a,T}^- \leq t \leq T}$  et  $(U_t)_{T \leq t \leq \tau_{a,T}^+}$ , lesquels sont, d'après le lemme 1, mutuellement indépendants.

Dans un deuxième temps nous ramenons l'étude du processus  $(U_t)_{T \leq t \leq \tau_{a,T}^+}$  à celle du processus absorbé  $(U_t)_{0 \leq t \leq \tau_a}$  démarrant du point aléatoire  $U_T$ .

Enfin "la première partie"  $(U_t)_{\tau_{a,T}^- \leq t \leq T}$  s'étudie, par un retournement de temps, au travers du processus dual absorbé  $(U_t^*)_{0 \leq t \leq \tau_a^*}$  démarrant du point  $U_T$ , en faisant appel aux propositions 2 à 5 et au lemme 2.

En intégrant convenablement l'expression (8), nous déduisons les formules (9), (10) et (11) ci-après :

### Corollaire 1

$$(9) \quad P_{(x,y)}\{(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}) \in ds dz, (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}) \in d\sigma d\zeta\} = \\ = p_s(x,y; a,z) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,T-s}(u,v; -z) f_{a,\sigma-T}(u,v; \zeta) du dv \mathbb{1}_{]0,T[}(\sigma) \mathbb{1}_{]T,+\infty[}(\zeta) ds dz d\zeta.$$

### Corollaire 2

*La distribution du couple  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-})$  est donnée par la formule suivante :*

$$(10) \quad P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in ds, B_{\tau_{a,T}^-} \in dz\} = |z| p_s(x,y; a,z) P_{(0,z)}\{\tau_0 > T-s\} \mathbb{1}_{]0,T[}(s) ds dz.$$

### Corollaire 3

*La loi de la variable aléatoire  $\tau_{a,T}^-$  s'exprime selon :*

$$(11) \quad P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in ds\} = \left[ \int_0^{+\infty} z \pi_s(x,y; a,z) P_{(0,z)}\{\tau_0 > T-s\} dz \right] \mathbb{1}_{]0,T[}(s) ds$$

avec  $\pi_s(x,y; a,z) = p_s(x,y; a,z) + p_s(x,y; a,-z)$ .



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] CHUNG, K.L. : *Excursions in Brownian motion*, Ark. Mat. 14 (1976), pp. 155-177.
- [2] HSU, P. : Trans. Amer. Math. Soc. 296, n° 1 (1986), pp. 239-264.
- [3] KAC, M. : SIAM Rev. 4 (1962), pp. 1-11.
- [4] LACHAL, A. : *Sur l'intégrale du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 311, série I (1990), pp. 461-464.
- [5] LACHAL, A. : *Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, Ann. I.H.P. sect. B, vol. 27, n° 3 (1991), pp. 385-405.
- [6] LACHAL, A. : *Sur les temps de passages successifs de l'intégrale du mouvement brownien*, (proposé).
- [7] LACHAL, A. : *La distribution du dernier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, (proposé).
- [8] LACHAL, A. : Thèse de Doctorat : *Etude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien*, (à paraître).
- [9] LEFEBVRE, M. : SIAM J. Appl. Math. vol. 49, n° 5 (1989), pp. 1514-1523.
- [10] LEFEBVRE, M. and WHITTLE, P. : Ann. Sc. Math. Québec, vol. 12, n° 1 (1988), pp. 101-119.
- [11] Mc KEAN, H.P. Jr. : J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [12] NAGAZAWA, M. : Nagoya Math. J. 24 (1964), pp. 177-204.
- [13] NELSON, E. : Duke Math. J. 25 (1958), pp. 671-690.
- [14] RICE, S.O. : Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.

# LES EXCURSIONS DE L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

par Aimé LACHAL

Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle et Probabilités  
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I  
Institut de Mathématiques et Informatique  
43, boulevard du 11 Novembre 1918  
69622 VILLEURBANNE CEDEX

## Résumé

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire et  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  un point fixé. Dans cet article nous déterminons explicitement la loi du processus d'excursion de  $(\int_0^t B_s ds + x + ty)_{t \geq 0}$ , encadrant un instant déterministe  $T$ .

## INTRODUCTION

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive, et  $U_t(x,y) = (X_t + x + ty, B_t + y)$ ,  $t \geq 0$ , le processus bidimensionnel associé démarrant du point  $(x,y)$ . Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  intervient naturellement en mécanique statistique et en optimisation, et a déjà fait l'objet de nombreuses recherches (voir références).



Dans ce travail nous explicitons (par une technique analogue à celle utilisée par K.L. Chung ([1]) pour le mouvement brownien linéaire, et P. Hsu ([2]) dans le cas du mouvement brownien multidimensionnel réfléchi) la distribution du processus d'excursion  $(Z_t(x,y))_{t \geq 0}$  défini de la manière suivante :

$$Z_t(x,y) = U_{t+\tau^-}(x,y), \text{ pour } 0 \leq t \leq \tau^+ - \tau^-,$$

où

$$\tau^- = \max\{t \in [0, T] : X_t + x + ty = a\}$$

et

$$\tau^+ = \min\{t \geq T : X_t + x + ty = a\}$$

(avec les conventions usuelles  $\max \emptyset = -\infty$  et  $\min \emptyset = +\infty$ ) désignent respectivement le dernier et le premier instant d'atteinte de la droite  $\{a\} \times \mathbb{R}$ , antérieur et postérieur au temps fixé  $T$ , par le processus  $(U_t(x,y))_{t \geq 0}$ .

Dans les études faites par K.L. Chung et P. Hsu, la symétrie des densités de transition du processus absorbé intervient de manière cruciale. On ne retrouve pas une telle symétrie dans le cas que nous étudions. Nous avons été amenés à introduire le processus dual  $(U_t^*(x,y))_{t \geq 0}$  du processus  $U_t(x,y)_{t \geq 0}$ , lequel permet de contourner cet obstacle. A ce propos, nous utiliserons des résultats généraux concernant les processus duaux et, par soucis de complétude, en indiquerons des preuves adaptées à notre étude particulière.

## I. PRELIMINAIRES

### Notations

Le processus  $U_t = (X_t, B_t)$ ,  $t \geq 0$ , est markovien, temporellement homogène ([8], [11]), et ses probabilités de transition s'écrivent selon :

$$\begin{aligned} p_t(x,y ; u,v) &= P_{(x,y)}\{U_t \in du dv\}/du dv = P\{U_t(x,y) \in du dv\}/du dv \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3}(u-x-ty)^2 + \frac{6}{t^2}(u-x-ty)(v-y) - \frac{2}{t}(v-y)^2\right]. \end{aligned}$$

Nous rappelons un résultat fondamental, obtenu dans un travail antérieur ([4], [5], [6]), concernant ce processus :



## Théorème

Soit  $\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\} = \min\{t > 0 : X_t = a\}$  le premier instant de passage en  $a$  de  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Posons

$$f_{a,t}(x,y; z) = P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dz\}/dt dz.$$

- i) Le temps  $\tau_a$  est  $P_{(x,y)}$ -presque sûrement fini.
- ii) La distribution conjointe du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  relativement à la probabilité  $P_{(x,y)}$  s'explique comme suit :

$$(1) f_{a,t}(x,y; z) = |z| [p_t(x,y; a, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} f_s(z; \zeta) p_{t-s}(x,y; a, -\varepsilon_{x-a} \zeta) ds d\zeta] \mathbb{1}_{A_{x-a}}(z)$$

$$(1') = |z| [\pi_t(x,y; a, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} f_s(z; \zeta) \pi_{t-s}(x,y; a, \zeta) ds d\zeta] \mathbb{1}_{A_{x-a}}(z)$$

avec

$$f_s(z; \zeta) = \frac{3|\zeta|}{\pi\sqrt{2} s^2} e^{-\frac{2}{s}(\zeta^2 - |z\zeta| + z^2)} \int_0^{\frac{4|z\zeta|}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}},$$

$$\pi_t(x,y; u,v) = p_t(x,y; u,v) + p_t(x,y; u,-v)$$

et les conventions d'écriture

$$A_{x-a} = ]0, +\infty[ \text{ si } x < a, \quad A_{x-a} = ]-\infty, 0[ \text{ si } x > a,$$

$$\varepsilon_{x-a} = \text{signe de } (a-x).$$

Enfin, désignons respectivement par  $\tau_{a,T}^-$  et  $\tau_{a,T}^+$  les dernier et premier instants de passage en  $a$ , avant et après  $T$  du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , soit :

$$\tau_{a,T}^- = \max\{t \in [0, T] : X_t = a\},$$

$$\tau_{a,T}^+ = \min\{t \geq T : X_t = a\},$$

avec les conventions habituelles  $\max \emptyset = -\infty$ ,  $\min \emptyset = +\infty$ .

### Définition 1

Nous appelons processus d'excursion a-verticale encadrant T le processus

$Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-}$  défini par l'identité :

$$Z_t = U_{t + \tau_{a,T}^-}, \quad 0 \leq t \leq \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-.$$

En vue d'expliciter la loi du processus Z nous introduisons trois autres processus apparaissant naturellement lors de la description géométrique des excursions.

#### 1) Le processus absorbé

### Définition 2

Nous appelons processus absorbé en a le processus restreint  $(U_t)_{0 \leq t \leq \tau_a}$ .

Il est clair que ce processus est homogène et markovien, avec une durée de vie presque-sûrement finie. Désignons par  $\bar{p}_{a,t}(x, y; u, v)$  ses densités de transitions, définies pour  $x, u < a$  ou  $x, u > a$ , c'est-à-dire :

$$\bar{p}_{a,t}(x, y; u, v) = P_{(x,y)}\{U_t \in du \, dv, t \leq \tau_a\} / du \, dv.$$

Le résultat fondamental rappelé (1) nous permet d'obtenir une représentation intégrale de  $\bar{p}_{a,t}(x, y; u, v)$ . Elle est fournie par la proposition suivante :

### Proposition 1

*Les densités de transition du processus absorbé admettent la représentation suivante (valable pour  $x, u < a$  ou  $x, u > a$ ) :*

$$(2) \quad \bar{p}_{a,t}(x,y ; u,v) = p_t(x,y ; u,v) - \int_0^t \int_{A_{x-a}} f_{a,s}(x,y ; z) p_{t-s}(a,z ; u,v) ds dz.$$

### Preuve

En utilisant le caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_{(x,y)}\{U_t \in du dv, t \leq \tau_a\} &= P_{(x,y)}\{U_t \in du dv\} - P_{(x,y)}\{U_t \in du dv, \tau_a < t\} \\ &= p_t(x,y ; u,v) du dv - \mathbb{E}_{(x,y)} [\mathbb{1}_{\{\tau_a < t\}} P_{(a, B_{\tau_a})}\{U_{t-\tau_a} \in du dv\}] \\ &= [p_t(x,y ; u,v) - \int_0^t \int_{A_{x-a}} p_{t-s}(a,z ; u,v) P_{(x,y)}\{\tau_a \in ds, B_{\tau_a} \in dz\}] du dv. \end{aligned}$$

Cette dernière expression coïncide bien avec la représentation (2) annoncée.  $\square$

### 2) Le processus dual

Nous introduisons la notion classique de processus dual ([13]).

### Définition 3

*Le processus dual  $U_t^* = (X_t^*, B_t^*)$ ,  $t \geq 0$ , est le processus temporellement homogène et markovien dont les probabilités de transition sont définies selon :*

$$(3) \quad p_t^*(x,y ; u,v) = p_t(u,v ; x,y) = p_t(x,-y ; u,-v).$$

Notons par  $P_{(x,y)}^*$  la famille des probabilités conditionnelles correspondantes.

Le lien entre les processus duaux  $(U_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_t^*)_{t \geq 0}$  est immédiat :



## Proposition 2

*Le processus dual  $(U_t^*)_{t \geq 0}$  peut être obtenu par symétrie des trajectoires du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  par rapport à la droite  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . Plus précisément on a l'identité en loi de processus suivante :*

$$(X_t^*, B_t^*)_{t \geq 0} \equiv (X_t, -B_t)_{t \geq 0}.$$

### Preuve

Il suffit d'écrire les égalités successives, valables pour  $0 < t_1 < \dots < t_n$  :

$$\begin{aligned} P\{(X_{t_1}, -B_{t_1}) \in dx_1 dy_1, \dots, (X_{t_n}, -B_{t_n}) \in dx_n dy_n\} &= \\ &= p_{t_1}(0,0; x_1, -y_1) p_{t_2-t_1}(x_1, -y_1; x_2, -y_2) \dots p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, -y_{n-1}; x_n, -y_n) \\ &= p_{t_1}^*(0,0; x_1, y_1) p_{t_2-t_1}^*(x_1, y_1; x_2, y_2) \dots p_{t_n-t_{n-1}}^*(x_{n-1}, y_{n-1}; x_n, y_n) \\ &= P\{(X_{t_1}^*, B_{t_1}^*) \in dx_1 dy_1, \dots, (X_{t_n}^*, B_{t_n}^*) \in dx_n dy_n\}. \quad \square \end{aligned}$$

Nous énonçons maintenant deux résultats essentiels, justifiant d'une part l'apparition du processus dual, et indispensables d'autre part à l'obtention de la loi du processus d'excursion  $Z$ .

Le premier, bien connu ([12]), indique la transformation du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  lors d'un retournement du temps :

## Théorème 1

*L'identité en loi de processus conditionnés suivante est vérifiée :*

$$(4) \quad [U_{T-t} \mid U_0 = (x,y) \text{ et } U_T = (u,v)]_{0 \leq t \leq T} \equiv [U_t^* \mid U_0^* = (u,v) \text{ et } U_T^* = (x,y)]_{0 \leq t \leq T}$$

### Preuve

Fixons  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ . Nous montrons l'égalité des probabilités conditionnelles

$$P_1 = P\{U_{T-t_1} \in dx_1 dy_1, \dots, U_{T-t_n} \in dx_n dy_n \mid U_0 = (x,y) \text{ et } U_T = (u,v)\}$$

et

$$P_2 = P\{U_{t_1}^* \in dx_1 dy_1, \dots, U_{t_n}^* \in dx_n dy_n \mid U_0^* = (u,v) \text{ et } U_T^* = (x,y)\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{(x,y)}\{U_{T-t_n} \in dx_n dy_n, \dots, U_{T-t_1} \in dx_1 dy_1, U_T \in du dv\} / P_{(x,y)}\{U_T \in du dv\} \\ &= p_{T-t_n}(x, y ; x_n, y_n) p_{t_n-t_{n-1}}(x_n, y_n ; x_{n-1}, y_{n-1}) \dots p_{t_1}(x_1, y_1 ; u, v) / p_T(x, y ; u, v) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_2 &= P_{(u,v)}^*\{U_{t_1}^* \in dx_1 dy_1, \dots, U_{t_n}^* \in dx_n dy_n, U_T^* \in dx dy\} / P_{(u,v)}^*\{U_T^* \in dx dy\} \\ &= p_{t_1}^*(u, v ; x_1, y_1) p_{t_2-t_1}^*(x_1, y_1 ; x_2, y_2) \dots p_{T-t_n}^*(x_n, y_n ; x, y) / p_T^*(u, v ; x, y). \end{aligned}$$

Finalement  $P_1$  et  $P_2$  coïncident en vertu de la relation (3).  $\square$

Un deuxième résultat important relativement aux lois mutuelles des processus duaux  $(U_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_t^*)_{t \geq 0}$  relie, via le retournement du temps  $t \in [0, T] \mapsto T-t \in [0, T]$ , les instants  $\tau_{a,T}^-$  et  $\tau_a^* = \min\{t > 0 : X_t^* = a\}$ .

## Théorème 2

*Les couples aléatoires conditionnels*

$$[(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}) \mid U_0 = (x,y), U_T = (u,v), \tau_{a,T}^- > -\infty]$$

et

$$[(T - \tau_a^*, B_{\tau_a^*}^*) \mid U_0^* = (u,v), U_T^* = (x,y), \tau_a^* \leq T]$$

*ont la même distribution de probabilité.*

### Preuve

Nous introduisons les notations intermédiaires suivantes :

$$\tilde{U}_t = (\tilde{X}_t, \tilde{B}_t) = U_{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\tilde{\tau}_{a,T}^+ = \min\{s \in [0, T] : \tilde{X}_s = a\} \quad (\text{en posant } \min \emptyset = +\infty).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \tau_{a,T}^- &= \max\{s \in [0, T] : X_s = a\} \\ &= T - \min\{s \in [0, T] : X_{T-s} = a\} \\ &= T - \tilde{\tau}_{a,T}^+, \end{aligned}$$

ces égalités restant encore valables, avec les conventions posées ( $\min \emptyset = +\infty$ ,  $\max \emptyset = -\infty$ , dans le cas où l'ensemble  $\{s \in [0, T] : X_s = a\}$  est vide).

De la relation  $\tau_{a,T}^- = T - \tilde{\tau}_{a,T}^+$  nous obtenons la suivante :

$$\begin{aligned} [(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}) \mid U_0 = (x,y), U_T = (u,v), \tau_{a,T}^- > -\infty] \\ = [(T - \tilde{\tau}_{a,T}^+, \tilde{B}_{\tilde{\tau}_{a,T}^+}^*) \mid \tilde{U}_0 = (u,v), \tilde{U}_T = (x,y), \tilde{\tau}_{a,T}^+ < +\infty]. \end{aligned}$$

Enfin l'identité en loi (4) et la suivante :



$$\tilde{\tau}_{a,T}^+ \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}_{a,T}^+ < +\infty\}} \equiv \tau_a^* \mathbb{1}_{\{\tau_a^* \leq T\}},$$

nous permettent de conclure.  $\square$

### 3) Le processus dual absorbé

#### Définition 4

*Le processus dual absorbé en  $a$  est le processus  $(U_t^*)_{0 \leq t \leq \tau_a^*}$ .*

Notons  $\bar{p}_{a,t}^*(x,y ; u,v)$  les fonctions de transition du processus markovien et homogène  $(U_t^*)_{0 \leq t \leq \tau_a^*}$ .

La principale propriété concernant ce processus est la suivante :

#### Proposition 3

*Les densités de transition des processus duaux absorbés  $(U_t)_{0 \leq t \leq \tau_a}$  et  $(U_t^*)_{0 \leq t \leq \tau_a^*}$  sont liés selon les égalités :*

(5)  $\bar{p}_{a,t}^*(x,y ; u,v) = \bar{p}_{a,t}(x,-y ; u, -v) = \bar{p}_{a,t}(u,v ; x,y).$

#### Preuve

La première égalité provient trivialement de la définition du processus dual  $(U_t^*)_{t \geq 0}$ .

Pour obtenir la deuxième, en nous limitant au cas  $x,u < a$  par exemple, nous approchons la densité

$$P_{(u,v)}\{U_t \in dx dy, t \leq \tau_a\}/dx dy$$

par la quantité :

$$\begin{aligned}
p^{(n)}(u,v ; x,y) &= P_{(u,v)}\{U_t \in dx dy \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, 2^n-1\} \ U_{kt/2^n} \in ]-\infty, a] \times \mathbb{R}\} / dx dy \\
&= \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{+\infty} p_{t/2^n}(u,v ; x_1, y_1) p_{t/2^n}(x_1, y_1 ; x_2, y_2) \dots p_{t/2^n}(x_{2^n-1}, y_{2^n-1} ; x, y) \times \\
&\quad \times dx_1 dy_1 \dots dx_{2^n-1} dy_{2^n-1} .
\end{aligned}$$

Cette approximation peut se justifier à l'aide des égalités ensemblistes :

$$\{\tau_a \geq t\} = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \leq a \right\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left\{ \sup_{k \in \{0, \dots, 2^n-1\}} X_{kt/2^n} \leq a \right\},$$

reposant sur la continuité du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  et la densité de l'ensemble  $\{kt/2^n, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}, n \in \mathbb{N}\}$  dans l'intervalle  $[0, t]$ .

De même, la relation limite suivante est satisfaite :

$$P_{(x,y)}^*\{U_t^* \in du dv, t \leq \tau_a^*\} / du dv = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)*}(x,y ; u,v)$$

où

$$\begin{aligned}
p^{(n)*}(x,y ; u,v) &= P_{(x,y)}^*\{U_t^* \in du dv \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, 2^n-1\} \ U_{kt/2^n}^* \in ]-\infty, a] \times \mathbb{R}\} / du dv \\
&= \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{+\infty} p_{t/2^n}^*(x,y ; u_1, v_1) p_{t/2^n}^*(u_1, v_1 ; u_2, v_2) \dots p_{t/2^n}^*(u_{2^n-1}, v_{2^n-1} ; u, v) \times \\
&\quad \times du_1 dv_1 \dots du_{2^n-1} dv_{2^n-1} .
\end{aligned}$$

Enfin la relation (3)  $p_s^*(x,y ; u,v) = p_s(u,v ; x,y)$  montre, via le changement de variable  $(x_1, y_1 ; \dots ; x_{2^n-1}, y_{2^n-1}) = (u_{2^n-1}, v_{2^n-1} ; \dots ; u_1, v_1)$ , que les intégrales  $p^{(n)*}(x,y ; u,v)$  et  $p^{(n)}(u,v ; x,y)$ , coïncident pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

## II. LA LOI DU PROCESSUS D'EXCURSION Z

Notre principal résultat s'énonce comme suit :

### Théorème 3

Soient  $0 < t_1 < \dots < t_n$ .

La distribution conjointe des couples aléatoires :

$$(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}^-), Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}, (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}^+), t_n < \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-,$$

s'explicitent selon la formule :

$$\begin{aligned} (6) \quad P_{(x,y)} \{ (\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}^-) \in ds dz, Z_{t_1} \in dx_1 dy_1, \dots, Z_{t_n} \in dx_n dy_n, t_n < \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-, \\ (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}^+) \in d\sigma d\zeta \} = \\ = p_s(x, y; a, z) f_{a,t_1}(x_1, -y_1; -z) \bar{p}_{a,t_2-t_1}(x_1, y_1; x_2, y_2) \dots \bar{p}_{a,t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, y_{n-1}; x_n, y_n) \times \\ \times f_{a,\sigma-s-t_n}(x_n, y_n; \zeta) \mathbb{1}_{[0,T]}(s) \mathbb{1}_{[Tv(s+t_n), +\infty]}(\sigma) ds dz dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n d\sigma d\zeta. \end{aligned}$$

### Preuve

Notre démarche comporte deux étapes.

La première consiste à distinguer le processus d'excursion  $(U_t)_{\tau_{a,T}^- \leq t \leq T}$  antérieur à l'instant T du processus  $(U_t)_{T \leq t \leq \tau_{a,T}^+}$  postérieur à l'instant T. Ces deux processus sont mutuellement indépendants.

Dans un deuxième temps, nous ramenons l'étude du processus  $(U_t)_{T \leq t \leq \tau_{a,T}^+}$  à celle du processus absorbé  $(U_t)_{0 \leq t \leq \tau_a}$  démarré du point aléatoire  $U_T$ . Concernant  $(U_t)_{\tau_{a,T}^- \leq t \leq T}$ , le retournement de temps  $t \mapsto T-t$  nous confronte cette fois au processus



dual  $(U_t^*)_{t \geq 0}$ , démarré du point  $U_T$ , conditionné par l'atteinte du point  $(x,y)$  à l'instant  $T$ , puis absorbé par l'axe  $\{a\} \times \mathbb{R}$ .

Abordons maintenant la preuve du théorème. Nous nous limiterons, sans nuire à la généralité, au cas  $n=2$ .

Posons, afin de simplifier les notations,  $s_1 = t_1 + s$ ,  $s_2 = t_2 + s$ .

Nous avons tout d'abord l'égalité évidente :

$$\begin{aligned} P_{(x,y)}\{(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}) \in ds dz, Z_{t_1} \in dx_1 dy_1, Z_{t_2} \in dx_2 dy_2, t_2 < \tau_{a,T}^+ - \tau_{a,T}^-, \\ (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}) \in d\sigma d\zeta\} = \\ = P_{(x,y)}\{(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}) \in ds dz, U_{s_1} \in dx_1 dy_1, U_{s_2} \in dx_2 dy_2, (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}) \in d\sigma d\zeta\} \\ \times \mathbb{1}_{[s_2, +\infty[}(\sigma). \end{aligned}$$

Notons par  $Q$  cette quantité.

- 1) En conditionnant le vecteur aléatoire  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}, U_{s_1}, U_{s_2}, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$  apparaissant dans l'expression  $Q$  par rapport à  $U_T$  nous obtenons pour  $\sigma > s_2$  :

$$\begin{aligned} Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{(x,y)}\{(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}) \in ds dz, U_{s_1} \in dx_1 dy_1, U_{s_2} \in dx_2 dy_2, \\ (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}) \in d\sigma d\zeta \mid U_T = (u,v)\} P_{(x,y)}\{U_T \in du dv\}. \end{aligned}$$

Le lemme suivant nous permet de décomposer la probabilité figurant sous l'intégrale précédente.

## Lemme 1

*Les processus restreints et conditionnés*

$$(U_t \mid U_T = (u,v))_{0 \leq t \leq T} \text{ et } (U_t \mid U_T = (u,v))_{t \geq T}$$

*sont mutuellement indépendants.*

### Preuve du lemme 1

Soient  $0 < t_1 < \dots < t_k < T < t_{k+1} < \dots < t_\ell$ .

Nous comparons les deux expressions :

$$Q_1 = P_{(x,y)} \{ U_{t_1} \in dx_1 dy_1, \dots, U_{t_\ell} \in dx_\ell dy_\ell \mid U_T = (u,v) \}$$

et

$$Q_2 = P_{(x,y)} \{ U_{t_1} \in dx_1 dy_1, \dots, U_{t_k} \in dx_k dy_k \mid U_T = (u,v) \} \times \\ \times P_{(x,y)} \{ U_{t_{k+1}} \in dx_{k+1} dy_{k+1}, \dots, U_{t_\ell} \in dx_\ell dy_\ell \mid U_T = (u,v) \}.$$

La première s'écrit, à l'aide de la propriété de Markov du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  :

$$Q_1 = p_{t_1}(x,y ; x_1,y_1) p_{t_2-t_1}(x_1,y_1 ; x_2,y_2) \dots p_{T-t_k}(x_k,y_k ; u,v) p_{t_{k+1}-T}(u,v ; x_{k+1},y_{k+1}) \times \\ \times \dots \times p_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{\ell-1},y_{\ell-1} ; x_\ell,y_\ell) / p_T(x,y ; u,v) dx_1 dy_1 \dots dx_\ell dy_\ell$$

tandis que la deuxième se calcule selon :

$$Q_2 = p_{t_1}(x,y ; x_1,y_1) p_{t_2-t_1}(x_1,y_1 ; x_2,y_2) \dots p_{T-t_k}(x_k,y_k ; u,v) / p_T(x,y ; u,v) \\ \times p_{t_{k+1}-T}(u,v ; x_{k+1},y_{k+1}) \dots p_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{\ell-1},y_{\ell-1} ; x_\ell,y_\ell) dx_1 dy_1 \dots dx_\ell dy_\ell.$$

Nous avons ainsi l'égalité  $Q_1 = Q_2$  qui démontre bien l'assertion du lemme.

### Retour à la preuve du théorème 3

D'après le lemme 1 on peut écrire :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{(x,y)} \{ (\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}^-) \in ds dz, U_{s_1} \in dx_1 dy_1 \mid U_T = (u,v) \} \times \\ \times P_{(x,y)} \{ U_{s_2} \in dx_2 dy_2, (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}^+) \in d\sigma d\zeta \mid U_T = (u,v) \} P_{(u,v)} \{ U_T \in du dv \}.$$

2) Nous déterminons maintenant les probabilités conditionnelles :

$$\Pi^- = P_{(x,y)} \{ (\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}^-) \in ds dz, U_{s_1} \in dx_1 dy_1 \mid U_T = (u,v) \}$$

$$\text{et } \Pi^+ = P_{(x,y)} \{ U_{s_2} \in dx_2 dy_2, (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}^+) \in d\sigma d\zeta \mid U_T = (u,v) \}.$$

a) Le calcul de la première repose sur les théorèmes 1 et 2. Nous avons dès lors :

$$\begin{aligned} \Pi^- &= P_{(u,v)}^* \{ (\tau_a^*, B_{\tau_a^*}^*) \in (T-ds)dz, U_{T-s_1}^* \in dx_1 dy_1 \mid U_T^* = (x,y) \} \\ &= P_{(u,v)}^* \{ U_{T-s_1}^* \in dx_1 dy_1, \tau_a^* > T-s_1; (\tau_a^*, B_{\tau_a^*}^*) \in (T-ds)dz, U_T^* \in dx dy \} / \\ &\quad / P_{(u,v)}^* \{ U_T^* \in dx dy \} \end{aligned}$$

Le caractère markovien du processus dual  $(U_t^*)_{t \geq 0}$  nous donne la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \Pi^- &= P_{(u,v)}^* \{ U_{T-s_1}^* \in dx_1 dy_1, \tau_a^* > T-s_1 \} P_{(x_1,y_1)}^* \{ (\tau_a^*, B_{\tau_a^*}^*) \in (s_1-ds)dz \} \times \\ &\quad \times P_{(a,z)}^* \{ U_s^* \in dx dy \} / P_{(u,v)}^* \{ U_T^* \in dx dy \}. \end{aligned}$$

Nous exprimons enfin la probabilité  $P_{(x_1,y_1)}^* \{ (\tau_a^*, B_{\tau_a^*}^*) \in (s_1-ds)dz \}$  à l'aide de la loi

de  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  :



## Lemme 2

La relation suivante est satisfaite :

$$(7) \quad P_{(x,y)}^* \{ \tau_a^* \in dt, B_{\tau_a^*}^* \in dz \} = P_{(x,y)} \{ \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in -dz \}$$

### Preuve du lemme 2

Il suffit d'écrire les identités en lois, en introduisant la notation intermédiaire  $\bar{\tau}_a(x,y) = \min\{t > 0 : X_t + x - ty = a\}$  :

$$\begin{aligned} ((\tau_a^*, B_{\tau_a^*}^*) \mid U_0^* = (x,y)) &\equiv (\bar{\tau}_a(x,y), -B_{\bar{\tau}_a(x,y)} + y) \\ &\equiv ((\tau_a, -B_{\tau_a}) \mid U_0 = (x,-y)). \quad \square \end{aligned}$$

Les relations (3), (5) et (7) fournissent l'expression finale de  $\Pi^-$  :

$$(8^-) \quad \Pi^- = p_s(x,y ; a,z) f_{a,s_1-s}(x_1,-y_1 ; -z) \bar{p}_{a,T-s_1}(x_1,y_1 ; u,v) / p_T(x,y ; u,v) ds dz dx_1 dy_1.$$

b) Le calcul de la deuxième probabilité  $\Pi^+$  est plus aisé. Il repose sur le caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , ainsi que sur l'observation de l'égalité  $\tau_{a,T}^+ = \tau_a \circ \theta_T + T$ .

Tout ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= P_{(x,y)} \{ U_T \in dudv \} P_{(u,v)} \{ U_{s_2-T} \in dx_2 dy_2, \tau_a > s_2 - T \} P_{(x_2,y_2)} \{ (\tau_a, B_{\tau_a}) \in (d\sigma - s_2) d\zeta \} / \\ &\quad / P_{(x,y)} \{ U_T \in dudv \} \end{aligned}$$

soit :

$$(8^+) \quad \Pi^+ = \bar{p}_{a,s_2-T}(u,v ; x_2,y_2) f_{a,\sigma-s_2}(x_2,y_2 ; \zeta) dx_2 dy_2 d\sigma d\zeta.$$

c) Des expressions (8<sup>-</sup>) et (8<sup>+</sup>) de  $\Pi^-$  et  $\Pi^+$  nous déduisons finalement la représentation de Q suivante :

$$Q = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x, y; a, z) f_{a, s_1-s}(x_1, y_1; -z) \bar{p}_{a, T-s_1}(x_1, y_1; u, v) \times \right. \\ \left. \times \bar{p}_{a, s_2-T}(u, v; x_2, y_2) f_{a, \sigma-s_2}(x_2, y_2; \zeta) du dv \right] ds dz dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 d\sigma d\zeta,$$

qui, en faisant appel à l'équation de Chapman-Kolmogorov du processus absorbé  $(U_t)_{0 \leq t \leq \tau_a}$ , à savoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}_{a, T-s_1}(x_1, y_1; u, v) \bar{p}_{a, s_2-T}(u, v; x_2, y_2) du dv = \bar{p}_{a, s_2-s_1}(x_1, y_1; x_2, y_2),$$

coïncide précisément avec (6).  $\square$

### Corollaire 1

*La loi conjointe des couples  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-})$ ,  $(\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$  admet la représentation suivante :*

$$(9) \quad P_{(x,y)}\{(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}) \in ds dz, (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}) \in d\sigma d\zeta\} = \\ = p_s(x, y; a, z) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a, T-s}(u, v; -z) f_{a, \sigma-T}(u, v; \zeta) du dv \mathbb{1}_{]0, T[}(s) \mathbb{1}_{]T, +\infty[}(\sigma) ds dz d\sigma d\zeta.$$

### Preuve

Il suffit d'intégrer l'expression (6), avec le choix  $n=2$  et  $t_1 = T-s$ , par rapport à  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , après avoir noté les identités suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}_{a, t_2-t_1}(x_1, y_1; x_2, y_2) f_{a, \sigma-s-t_2}(x_2, y_2; \zeta) dx_2 dy_2 = \\ = \mathbb{E}_{(x_1, y_1)} [\mathbb{1}_{\{\tau_a > t_2-t_1\}} P_{U_{t_2-t_1}}\{\tau_a \in d\sigma - s - t_2, B_{\tau_a} \in d\zeta\} / d\sigma d\zeta] \\ = P_{(x_1, y_1)}\{\tau_a \in d\sigma - s - t_1, B_{\tau_a} \in d\zeta\} / d\sigma d\zeta \\ = f_{a, \sigma-T}(x_1, y_1; \zeta),$$

l'avant-dernière égalité résultant du caractère markovien de  $(U_t)_{t \geq 0}$ .  $\square$

## Corollaire 2

On a l'écriture explicite suivante :

$$\begin{aligned}
 (10) \quad P_{(x,y)}\{(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}) \in ds dz, (\tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}) \in d\sigma d\zeta\} = \\
 = |z\zeta| p_s(x,y;a,z) \left[ \pi_{\sigma-s}(z; \zeta) - \int_0^{T-s} \int_0^{+\infty} f_\alpha(z; w) \pi_{\sigma-s-\alpha}(w; \zeta) d\alpha dw - \right. \\
 \left. - \int_0^{\sigma-T} \int_0^{+\infty} f_\alpha(z; w) \pi_{\sigma-s-\alpha}(w; \zeta) d\alpha dw + \right. \\
 \left. + \int_0^{T-s} \int_0^{+\infty} \int_0^{\sigma-T} \int_0^{+\infty} f_\alpha(z; w) f_\beta(\zeta; \eta) \pi_{\sigma-s-\alpha-\beta}(w; \eta) d\alpha dw d\beta d\eta \right] \times \\
 \times \mathbb{1}_{]0,T[}(s) \mathbb{1}_{]T,+\infty[}(\sigma) \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(z\zeta) ds dz d\sigma d\zeta
 \end{aligned}$$

avec

$$\pi_t(z; \zeta) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi t^2} e^{-\frac{2}{t}(z^2 + \zeta^2)} \operatorname{ch}\left(\frac{2z\zeta}{t}\right)$$

et

$$f_t(z; \zeta) = \frac{3|\zeta|}{\pi\sqrt{2} t^2} e^{-\frac{2}{t}(z^2 - |z\zeta| + \zeta^2)} \int_0^{\frac{4|z\zeta|}{t}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

## Preuve

En insérant les expressions "symétrisées" (1') des densités  $f_{a,T-s}(u,-v; -z)$  et  $f_{a,\sigma-T}(u,v; \zeta)$  dans la quantité (9), nous sommes confrontés à des intégrales du type

$$\iint_D \pi_\alpha(u,-v; a,w) \pi_\beta(u,v; a,\eta) du dv$$



avec  $D^- = ]-\infty, a[ \times ]-\infty, +\infty[$  ou  $D = ]a, +\infty[ \times ]-\infty, +\infty[$ , dont les valeurs sont fournies par le lemme suivant :

### Lemme 3

$$(11) \quad \iint_D \pi_\alpha(u, -v ; a, w) \pi_\beta(u, v ; a, \eta) du dv = \pi_{\alpha+\beta}(w ; \eta).$$

Il suffit alors de reporter l'expression (11) dans (9) pour en déduire la formule (10).  $\square$

### Preuve du lemme 3

Posons  $D^+ = ]a, +\infty[ \times ]-\infty, +\infty[$  et  $D^- = ]-\infty, a[ \times ]-\infty, +\infty[$ .

Nous calculons l'intégrale (11) seulement dans le cas où  $D = D^+$  (le cas  $D = D^-$  est analogue et conduit au même résultat). Remplaçons les fonctions  $\pi_\alpha$  et  $\pi_\beta$  par leurs expressions en termes de  $p_\alpha$  et  $p_\beta$ . Ceci donne :

$$\begin{aligned} \iint_{D^+} \pi_\alpha(u, -v ; a, w) \pi_\beta(u, v ; a, \eta) du dv &= \iint_{D^+} p_\alpha(u, -v ; a, w) p_\beta(u, v ; a, \eta) du dv \\ &+ \iint_{D^+} p_\alpha(u, -v ; a, -w) p_\beta(u, v ; a, \eta) du dv \\ &+ \iint_{D^+} p_\alpha(u, -v ; a, w) p_\beta(u, v ; a, -\eta) du dv \\ &+ \iint_{D^+} p_\alpha(u, -v ; a, -w) p_\beta(u, v ; a, -\eta) du dv. \end{aligned}$$

Effectuons dans les deux dernières intégrales la symétrie

$(u, v) \in D^+ \mapsto (2a-u, -v) \in D^-$ . On obtient, après avoir noté les identités élémentaires  $p_\alpha(2a-u, v ; a, w) = p_\alpha(u, -v ; a, -w) = p_\alpha(a, w ; u, v)$  et  $D^+ \cup D^- = \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}
\iint_{D^+} \pi_{\alpha}(u, -v ; a, w) \pi_{\beta}(u, v ; a, \eta) du dv &= \iint_{D^+} p_{\alpha}(a, -w ; u, v) p_{\beta}(u, v ; a, \eta) du dv \\
&+ \iint_{D^+} p_{\alpha}(a, w ; u, v) p_{\beta}(u, v ; a, \eta) du dv \\
&+ \iint_{D^-} p_{\alpha}(a, w ; u, v) p_{\beta}(u, v ; a, \eta) du dv \\
&+ \iint_{D^-} p_{\alpha}(a, -w ; u, v) p_{\beta}(u, v ; a, \eta) du dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\alpha}(a, -w ; u, v) p_{\beta}(u, v ; a, \eta) du dv \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\alpha}(a, w ; u, v) p_{\beta}(u, v ; a, \eta) du dv .
\end{aligned}$$

L'équation de Chapman-Kolmogorov du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , à savoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x, y ; w, z) p_t(w, z ; u, v) dw dz = p_{s+t}(x, y ; u, v),$$

permet alors d'achever le calcul de l'intégrale (11) :

$$\begin{aligned}
\iint_{D^+} \pi_{\alpha}(u, -v ; a, w) \pi_{\beta}(u, v ; a, \eta) du dv &= \\
&= p_{\alpha+\beta}(a, -w ; a, \eta) + p_{\alpha+\beta}(a, w ; a, \eta) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi(\alpha+\beta)^2} \left[ e^{-\frac{2}{\alpha+\beta}(w^2+w\eta+\eta^2)} + e^{-\frac{2}{\alpha+\beta}(w^2-w\eta+\eta^2)} \right]. \\
&= \pi_{\alpha+\beta}(w ; \eta). \quad \square
\end{aligned}$$

### Corollaire 3

La distribution du couple  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-})$  est donnée par la formule

$$(12) \quad P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in ds, B_{\tau_{a,T}^-} \in dz\} = |z| p_s(x,y; a,z) P_{(0,z)}\{\tau_0 > T \cdot s\} \mathbb{1}_{]0,T[}(s) ds dz.$$

#### Preuve

Intégrons la quantité (9) par rapport à  $(\sigma, \zeta)$ . En remarquant que l'on a trivialement

$$\int_T^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,\sigma-T}(u,v; \zeta) d\sigma d\zeta = 1,$$

on obtient :

$$P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in ds, B_{\tau_{a,T}^-} \in dz\} = p_s(x,y; a,z) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,T-s}(u,-v; -z) du dv \mathbb{1}_{]0,T[}(s) ds dz.$$

L'intégrale double figurant au second membre de cette dernière égalité se calcule en faisant appel à l'expression "symétrisée" (1') de la loi du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  sous  $P_{(u,-v)}$ .

Cela donne :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,T-s}(u,-v; -z) du dv &= |z| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\pi_{T-s}(u,-v; a,z) - \\ &\quad - \int_0^{T-s} \int_0^{+\infty} f_\alpha(z; w) \pi_{T-s-\alpha}(u,-v; a,w) d\alpha dw] \mathbb{1}_{A_{u-a}}(z) du dv \\ &= |z| [1 - \int_0^{T-s} \int_0^{+\infty} f_\alpha(z; w) d\alpha dw]. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé, dans la dernière identité, la relation élémentaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_t(u,-v; a,z) \mathbb{1}_{A_{u-a}}(z) du dv = 1.$$

On conclut finalement en notant que l'on a d'après la définition de la fonction



$f_{\alpha}(z; w) :$

$$\int_0^{T-s} \int_0^{+\infty} f_{\alpha}(z; w) d\alpha dw = P_{(0,z)} \{ \tau_0 \leq T-s \} . \quad \square$$

En choisissant  $(x,y) = (0,0)$ ,  $a = 0$  et  $T = 1$  dans la formule (12), nous obtenons après avoir posé  $\tau_1^- = \tau_{0,1}^-$  et  $\beta_1^- = B_{\tau_{0,1}^-}$  :

#### Corollaire 4

$$(13) \quad P_{(0,0)} \{ \tau_1^- \in ds, \beta_1^- \in dz \} = p_s(z) P_{(0,z)} \{ \tau_0 > 1-s \} \mathbb{1}_{]0,1[}(s) ds dz$$

avec 
$$p_s(z) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{|z|}{s^2} e^{-2 \frac{z^2}{s}} .$$

#### Remarque 1

Nous avons obtenu dans une publication antérieure ([6]) par une inversion du temps  $s \mapsto \frac{1}{s}$  l'expression suivante de la densité (13) :

$$(13') \quad P_{(0,0)} \{ \tau_1^- \in ds, \beta_1^- \in dz \} = \left[ p_s(z) - \int_0^{s-s^2} \int_0^{+\infty} f_{\alpha}(w; z) p_{s-\alpha}(w) d\alpha dw \right] \mathbb{1}_{]0,1[}(s) ds dz.$$

Vérifions l'identité des formules (13) et (13'). Il suffit de montrer l'égalité :

$$\int_0^{s-s^2} \int_0^{+\infty} f_{\alpha}(w; z) p_{s-\alpha}(w) d\alpha dw = \int_0^{1-s} \int_0^{+\infty} f_{\alpha}(z; w) p_s(z) d\alpha dw$$

ou encore, explicitement, la suivante :

$$\int_0^{s-s^2} \int_0^{+\infty} \frac{|z|w}{\alpha^2(s-\alpha)^2} e^{-\frac{2}{\alpha}(\frac{s}{s-\alpha}w^2 - |z|w + z^2)} d\alpha dw \int_0^{\frac{4|z|w}{\alpha}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} =$$

$$= \int_0^{1-s} \int_0^{+\infty} \frac{|z|\eta}{\beta^2 s^2} e^{-\frac{2}{\beta}(\eta^2 - |z|\eta + \frac{\beta+s}{s}z^2)} d\beta d\eta \int_0^{\frac{4|z|\eta}{\beta}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} .$$

Cette dernière se justifie en effectuant le changement de variables  $(\alpha, w) \in ]0, s-s^2[ \times ]0, +\infty[ \mapsto (\beta, \eta) \in ]0, 1-s[ \times ]0, +\infty[$  défini selon la relation  $(\alpha, w) = (\frac{s\beta}{\beta+s}, \frac{s\eta}{\beta+s})$ .  $\square$

### Corollaire 5

*La loi de la variable aléatoire  $\tau_{a,T}^-$  s'exprime selon :*

$$(14) \quad P_{(x,y)} \{ \tau_{a,T}^- \in ds \} = \left[ \int_0^{+\infty} z \pi_s(x,y; a,z) P_{(0,z)} \{ \tau_0 > T-s \} dz \right] \mathbb{1}_{]0,T[}(s) ds .$$

### Preuve

L'identité (14) s'obtient en intégrant la quantité (12) par rapport à  $z$  sur  $]-\infty, +\infty[$  après avoir noté la parité de la fonction  $z \mapsto P_{(0,z)} \{ \tau_0 > t-s \}$ .  $\square$

### Remarque 2

Nous retrouvons la loi de la variable aléatoire  $\tau_{a,T}^-$  déjà obtenue dans un travail antérieur ([7]). Dans ce même travail nous avons déterminé plus généralement la distribution conjointe du triplet  $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}^-)$  en faisant appel à une autre technique, laquelle ne permettait pas d'obtenir celle de  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}^-)$ . L'introduction des processus dual et absorbé nous a permis d'obtenir la loi conjointe du vecteur  $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+}^-)$ .



## Bibliographie

- [1] CHUNG, K.L. : *Excursions in Brownian motion*, Ark. Mat. 14 (1976), pp. 155-177.
- [2] HSU, P. : *On excursions of reflecting Brownian motion*, Trans. Amer. Math. Soc. 296, n° 1 (1986), pp. 239-264.
- [3] KAC, M. : *Probability theory : its role and its impact*, SIAM Rev. 4 (1962), pp. 1-11.
- [4] LACHAL, A. : *Sur l'intégrale du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 311, série I (1990), pp. 461-464.
- [5] LACHAL, A. : *Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, Ann. I.H.P. 27, sect. B, n° 3 (1991), pp. 385-405.
- [6] LACHAL, A. : *Sur les temps de passages successifs de l'intégrale du mouvement brownien*, (proposé).
- [7] LACHAL, A. : *La distribution du dernier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, (proposé).
- [8] LACHAL, A. : Thèse de Doctorat : *Etude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien* (à paraître).
- [9] LEFEBVRE, M. : *First passage densities for a two-dimensional process*, SIAM J. Appl. Math. vol. 49, n° 5 (1989), pp. 1514-1523.
- [10] LEFEBVRE, M. and WHITTLE, P. : *Survival optimization for a dynamic system*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 12, n° 1 (1988), pp. 101-119.
- [11] Mc KEAN, H.P. Jr. : *A winding problem for a resonator driven by a white noise*, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [12] NAGAZAWA, M. : *Time reversions of Markov processes*, Nagoya Math. J. 24 (1964), pp. 177-204.
- [13] NELSON, E. : *The adjoint Markov process*, Duke Math. J. 25 (1958), pp. 671-690.
- [14] RICE, S.O. : *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.



# LES MOMENTS DU TEMPS DE SEJOUR DE L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

Par Aimé LACHAL

Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle et Probabilités  
Université Claude Bernard - Lyon I  
Institut de Mathématiques et Informatique  
43, boulevard du 11 Novembre 1918  
69622 VILLEURBANNE CEDEX

## Résumé

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive,  $\tau_b(x,y) = \min \{t > 0 : X_t + x + ty = b\}$  et  $T_{a,b}(x,y) = \int_0^{\tau_b(x,y)} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(X_t + x + ty) dt$  le temps de séjour dans l'intervalle  $[a,+\infty[$  du processus  $(X_t + x + ty)_{t \geq 0}$  avant d'atteindre le seuil  $b$  ( $b > a$ ), le point  $(x,y) \in ]-\infty, b[ \times ]-\infty, +\infty[$  étant fixé. Dans cette note nous explicitons les moments successifs de la variable aléatoire  $T_{a,b}(x,y)$ .

## INTRODUCTION

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive,  $U_t(x,y) = (X_t + x + ty, B_t + y)$ ,  $t \geq 0$ , le processus bidimensionnel associé démarrant du point  $(x,y)$ . Le processus  $(U_t(x,y))_{t \geq 0}$  intervient en mécanique statistique et en optimisation, et a fait l'objet de nombreuses recherches (voir références [1] à [11]).

Soit  $\tau_b(x,y) = \min \{t > 0 : X_t + x + ty = b\}$  le premier instant d'atteinte du point  $b$  par le processus  $(X_t + x + ty)_{t \geq 0}$ , et  $T_{a,b}(x,y) = \int_0^{\tau_b(x,y)} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(X_t + x + ty) dt$  le temps de séjour dans l'intervalle  $[a,+\infty[$  du processus  $(X_t + x + ty)_{t \geq 0}$  avant d'atteindre le point  $b$ . Dans cette publication nous déterminons les moments de la variable aléatoire  $T_{a,b}(x,y)$  dans le cas  $a < b$ ,  $(x,y) \in ]-\infty, b[ \times ]-\infty, +\infty[$ . Nous mentionnons également une équation intégrale satisfaite par sa transformée de Laplace.

## I. NOTATIONS

Posons  $U_t = (X_t, B_t)$ . Le processus bidimensionnel  $(U_t)_{t \geq 0}$  est markovien homogène et ses probabilités de transition sont définies selon les égalités ([7], [10]) :

$$p_t(x,y; u,v) = P_{(x,y)}\{U_t \in du dv\}/du dv = P\{U_t(x,y) \in du dv\}/du dv$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3}(u-x-ty)^2 + \frac{6}{t^2}(u-x-ty)(v-y) - \frac{2}{t}(v-y)^2\right].$$

Le semi-groupe naturellement associé au processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  :

$$(T_t f)(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[f(U_t)] = \mathbb{E}[f(U_t(x,y))],$$

admet pour générateur infinitésimal l'opérateur aux dérivées partielles

$$D = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial x},$$

dont la solution élémentaire est la fonction

$$-\Phi(x,y; u,v) = - \int_0^{+\infty} p_t(x,y; u,v) dt.$$

Soient :

$$\tau_b = \min\{t > 0 : X_t = b\}$$

et

$$T_{a,b} = \int_0^{\tau_b} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(X_t) dt.$$

Nous introduisons également le processus absorbé par la droite  $\{b\} \times \mathbb{R} : (U_t)_{0 \leq t \leq \tau_b}$ . Ce processus est markovien homogène de probabilités de transitions définies pour  $x, u < b$  par ([5], [6]) :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{b,t}(x,y ; u,v) &= P_{(x,y)}\{U_t \in du dv, t \leq \tau_b\}/du dv \\ &= p_t(x,y ; u,v) - \int_0^t \int_0^{+\infty} f_{b,s}(x,y ; z) p_{t-s}(b,z ; u,v) ds dz \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f_{b,s}(x,y ; z) &= P_{(x,y)}\{\tau_b \in ds, B_{\tau_b} \in dz\}/ds dz \\ &= z[p_t(x,y ; b,z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} f_s(z ; \zeta) p_{t-s}(x,y ; b,-\zeta) d\zeta] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_s(z ; \zeta) &= P_{(0,-z)}\{\tau_0 \in ds, B_{\tau_0} \in d\zeta\}/ds d\zeta \\ &= \frac{3\zeta}{\pi\sqrt{2} s^2} e^{-\frac{2}{s}(z^2 - z\zeta + \zeta^2)} \int_0^{\frac{4z\zeta}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} , \quad z, \zeta > 0. \end{aligned}$$

Notons enfin, pour  $x, u < b$ , par

$$\bar{\Phi}_b(x,y ; u,v) = \int_0^{+\infty} \bar{p}_{b,t}(x,y ; u,v) dt$$

la fonction de Green du problème aux limites ([1]) :

$$\begin{cases} Du(x,y) = -f(x,y), & (x,y) \in ]-\infty, b[ \times ]-\infty, +\infty[, \\ u(b^-, y) = 0, & y > 0. \end{cases}$$

Son expression est donnée par la formule suivante :



$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_b(x,y ; u,v) &= \Phi(x,y ; u,v) - \int_0^{+\infty} \Phi(x,y ; b,z)\Phi(b,z ; u,v)z \, dz + \\ &+ \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{3/2} z^{3/2}}{\zeta^3 + z^3} \Phi(x,y ; b,-\zeta)\Phi(b,z ; u,v)d\zeta \, dz.\end{aligned}$$

## II. LES MOMENTS DE $T_{a,b}$

Notre résultat s'énonce comme suit :

### Théorème 1

*Les moments de la variable aléatoire  $T_{a,b}$  sont finis et s'explicitent selon la formule :*

$$\begin{aligned}(1) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}(T_{a,b}^n) &= n! \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}_b(x,y ; x_1, y_1) \times \dots \times \\ &\times \bar{\Phi}_b(x_{n-1}, y_{n-1} ; x_n, y_n) dx_1 \, dy_1 \dots dx_n \, dy_n.\end{aligned}$$

### Preuve

Nous partons de l'identité triviale :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{(x,y)}(T_{a,b}^n) &= \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} P_{(x,y)}\{X_{t_1} > a, t_1 < \tau_b, \dots, X_{t_n} > a, t_n < \tau_b\} dt_1 \dots dt_n \\ (2) \quad &= n! \int_{\{0 < t_1 < \dots < t_n\}} \dots \int P_{(x,y)}\{X_{t_1} > a, \dots, X_{t_n} > a, t_n < \tau_b\} dt_1 \dots dt_n.\end{aligned}$$

Pour montrer la finitude de l'intégrale (2) nous aurons besoin de la majoration suivante :

### Lemme 1

L'inégalité suivante est satisfaite pour  $(x,y) \in ]-\infty, b[ \times ]-\infty, +\infty[$  et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  :

$$(3) \quad P_{(x,y)}\{X_{t_1} > a, \dots, X_{t_n} > a, t_n < \tau_b\} \leq \prod_{i=1}^n \min\left[\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{b-a}{(t_i - t_{i-1})^{3/2}}, 1\right].$$

### Preuve du lemme 1

Pour  $(x,y) \in ]-\infty, b[ \times ]-\infty, +\infty[$  et  $0 < t_1 < \dots < t_n$  on a :

$$P_{(x,y)}\{X_{t_1} > a, \dots, X_{t_n} > a, t_n < \tau_b\} \leq P_{(x,y)}\{X_{t_1} \in ]a, b[, \dots, X_{t_n} \in ]a, b[ \}$$

$$(4) \quad \leq \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} p_{t_1}(x,y; x_1, y_1) p_{t_2-t_1}(x_1, y_1; x_2, y_2) \times \dots \times p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, y_{n-1}; x_n, y_n) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n.$$

Mais, pour  $\xi, \eta$  quelconques, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(\xi, \eta; u, v) du dv &= P_{(\xi, \eta)}\{X_t \in ]a, b[ \} \\ &= \int_a^b e^{-\frac{3(u-\xi-\eta)^2}{2t^3}} \frac{du}{\sqrt{2\pi t^3/3}} \\ &\leq \min\left(\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{b-a}{t^{3/2}}, 1\right). \end{aligned}$$

En itérant cette majoration indépendante de  $(\xi, \eta)$  dans l'intégrale (4) on obtient le résultat souhaité (3).  $\square$

## Lemme 2

On a la majoration indépendante de  $(x,y) \in ]-\infty, b[ \times ]-\infty, +\infty[$  suivante :

$$(5) \quad \frac{1}{n!} \mathbb{E}_{(x,y)}(T_{a,b}^n) \leq \left[ \frac{3^{4/3}}{(2\pi)^{1/3}} (b-a)^{2/3} \right]^n.$$

## Preuve du lemme 2

Il suffit d'intégrer l'inégalité (3) par rapport à  $(t_1, \dots, t_n)$  sur l'ensemble  $\{0 < t_1 < \dots < t_n\}$  et d'utiliser la représentation (2) du moment  $\mathbb{E}_{(x,y)}(T_{a,b}^n)$ .  $\square$

La majoration (5) démontre ainsi la finitude des moments de  $T_{a,b}$ . Nous l'utiliserons également au paragraphe III pour prouver la convergence uniforme d'une série représentant la transformée de Laplace de  $T_{a,b}$ .

## Fin de la preuve du théorème 1

La probabilité figurant sous l'intégrale (2) fait intervenir le processus absorbé  $(U_t)_{0 \leq t \leq \tau_b}$ . Elle s'exprime en termes de ses probabilités de transition de la manière suivante :

$$(6) \quad \begin{aligned} P_{(x,y)}\{X_{t_1} > a, \dots, X_{t_n} > a, t_n < \tau_b\} &= P_{(x,y)}\{X_{t_1} \in ]a, b[, \dots, X_{t_n} \in ]a, b[, t_n < \tau_b\} \\ &= \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}_{b,t_1}(x,y; x_1, y_1) \bar{p}_{b,t_2-t_1}(x_1, y_1; x_2, y_2) \times \dots \times \\ &\quad \times \bar{p}_{b,t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, y_{n-1}; x_n, y_n) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n. \end{aligned}$$

Il suffit alors, pour accéder à la formule (1), d'intégrer par rapport à  $(t_1, \dots, t_n)$  sur  $\{0 < t_1 < \dots < t_n\}$  la quantité (6) en faisant apparaître la fonction de Green  $\bar{\Phi}_b(x,y; u,v)$ .  $\square$

## Remarque 1

En remplaçant dans la formule (1) la fonction de Green  $\bar{\Phi}_b(x,y; u,v)$  par la solution élémentaire  $\Phi(x,y; u,v)$  de l'opérateur différentiel  $-D$ , nous obtenons



l'expression du n<sup>e</sup> moment du temps de séjour  $S_{a,b} = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(X_t) dt$  dans l'intervalle borné  $[a,b]$  du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  :

$$\mathbb{E}_{(x,y)}(S_{a,b}^n) = n! \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,y; x_1, y_1) \times \dots \times \\ \times \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}; x_n, y_n) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n$$

cette intégrale étant convergente pour tout point  $(x,y)$  et tout entier  $n \geq 0$ . La preuve de ce résultat est similaire à la précédente, voire plus simple puisqu'elle ne fait intervenir aucune absorption.

## Remarque 2

Nous ne nous intéressons pas au cas  $b = +\infty$ , puisque le temps de séjour correspondant (non absorbé)  $T_a^+ = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(X_t) dt$  est presque sûrement infini. En effet : on a, pour tout  $\alpha$  réel, l'identité

$$P_{(x,y)}\{T_\alpha^+ = +\infty\} = P_{(x,y)}\{T_a^+ = +\infty\}.$$

Ceci résulte de la relation (en supposant par exemple  $a < \alpha$ ) :

$$T_a^+ - T_\alpha^+ = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,\alpha[}(X_t) dt = S_{a,\alpha} \quad \text{p.s.}$$

et de la finitude presque sûre évoquée dans la remarque 1 du temps de séjour  $S_{a,\alpha}$ . En particulier pour  $\alpha = -a$  on obtient

$$P_{(x,y)}\{T_a^+ = +\infty\} = P_{(x,y)}\{T_{-a}^+ = +\infty\}.$$

En faisant alors appel à la symétrie du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et en introduisant le temps de séjour "complémentaire"  $T_a^- = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]-\infty,a]}(X_t) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[-a,+\infty[}(-X_t) dt$ , nous en déduisons :

$$P_{(x,y)}\{T_a^+ = +\infty\} = P_{(x,y)}\{T_a^- = +\infty\}.$$

Enfin l'égalité  $T_a^+ + T_a^- = +\infty$  fournit :

$$P_{(x,y)}\{T_a^+ = +\infty\} \geq \frac{1}{2}$$

ce qui, en vertu de la loi du zéro-un de Blumenthal pour le mouvement brownien (après avoir noté l'identité des tribus  $\sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\} = \sigma\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$ ), permet de conclure.

### III. L'EQUATION INTEGRALE SATISFAITE PAR LA TRANSFORMEE DE LAPLACE DE $T_{a,b}$

Notons  $\varphi_\lambda(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}(e^{-\lambda T_{a,b}})$ ,  $\lambda > 0$ ,  $(x,y) \in ]-\infty, b[ \times ]-\infty, +\infty[$ , la transformée de Laplace de la variable aléatoire  $T_{a,b}$ . En nous inspirant d'une technique élaborée par M. Kac ([2], chap. I) lors de l'étude du mouvement brownien tridimensionnel, nous avons obtenu le résultat suivant :

#### Théorème 2

*La fonction  $\varphi_\lambda(x,y)$  vérifie l'équation intégrale, valable pour  $(x,y) \in ]-\infty, b[ \times ]-\infty, +\infty[$  :*

$$(7) \quad \varphi_\lambda(x,y) = 1 - \lambda \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}_b(x,y; u,v) \varphi_\lambda(u,v) du dv.$$

#### Preuve

L'idée consiste à développer la fonction  $\varphi_\lambda(x,y)$  en série de Taylor faisant ainsi apparaître les moments successifs de la variable aléatoire  $T_{a,b}$ . Ceci donne d'après (1) :

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi_\lambda(u,v) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathbb{E}_{(u,v)}(T_{a,b}^n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}_b(u,v; x_1 y_1) \times \dots \times \\ &\quad \times \bar{\Phi}_b(x_{n-1}, y_{n-1}; x_n, y_n) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n. \end{aligned}$$



La majoration (5) nous assure la convergence uniforme de la série (8) dans le demi-plan  $(u,v) \in ]-\infty, b] \times ]-\infty, +\infty[$ , au moins pour  $|\lambda| < \frac{1}{C}$ , où  $C = \frac{3^{4/3}}{(2\pi)^{1/3}} (b-a)^{2/3}$ .

Multiplions l'égalité (8) par  $\bar{\Phi}_b(x,y ; u,v)$  et intégrons-la par rapport à  $(u,v)$  sur  $[a,b] \times ]-\infty, +\infty[$ . On obtient après interversion des signes  $\Sigma$  et  $\int$ , ce qui est licite en vertu de la convergence uniforme de la série (8), l'équation intégrale recherchée (7) :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}_b(x,y ; u,v) \varphi_\lambda(u,v) du dv &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Phi}_b(x,y ; x_1 y_1) \times \dots \times \\ &\quad \times \bar{\Phi}_b(x_n, y_n ; x_{n+1}, y_{n+1}) dx_1 dy_1 \dots dx_{n+1} dy_{n+1} \\ &= \frac{1}{\lambda} [1 - \varphi_\lambda(x,y)]. \end{aligned}$$

Cette relation est valable pour tout  $\lambda$  réel, et même complexe, tel que  $0 < |\lambda| < \frac{1}{C}$ . Or, les fonctions en  $\lambda$  figurant dans les deux membres de l'égalité (7) étant trivialement holomorphes pour  $\lambda$  complexe,  $\text{Re } \lambda > 0$ , nous en déduisons par prolongement analytique la validité de (7) pour tout  $\lambda$  complexe tel que  $\text{Re } \lambda > 0$ .  $\square$

La quantité  $\bar{\Phi}_b(x,y ; u,v)$  représentant la fonction de Green de l'opérateur différentiel  $-D$  relative au domaine  $]-\infty, b] \times ]-\infty, +\infty[$ , nous en tirons immédiatement le résultat suivant :

### Corollaire

*La fonction  $\varphi_\lambda(x,y)$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles*

$$D\varphi_\lambda(x,y) = \begin{cases} \lambda \varphi_\lambda(x,y) & \text{si } (x,y) \in ]a,b[ \times ]-\infty, +\infty[ \\ 0 & \text{si } (x,y) \in ]-\infty, a[ \times ]-\infty, +\infty[ \end{cases}$$

*avec conditions aux limites :*

$$\varphi_\lambda(b^-, y) = 0, \quad y > 0.$$

Nous ne savons actuellement pas résoudre cette équation.



## REFERENCES

- [1] GOR'KOV, Ju.P. : *A formula for the solution of a certain boundary value problem for the stationary equation of brownian motion*, Soviet. Math. Dokl. 16 (1975), pp. 904-908.
- [2] KAC, M. : *Aspects probabilistes de la théorie du potentiel*, Presses Univ. Montréal (1970).
- [3] LACHAL, A. : *Sur l'intégrale du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 311, série I (1990), pp. 461-464.
- [4] LACHAL, A. : *Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, Ann. I.H.P. sect. B, vol. 27, n° 3 (1991), pp. 385-405.
- [5] LACHAL, A. : *Sur les excursions de l'intégrale du mouvement brownien*, (proposé).
- [6] LACHAL, A. : *Les excursions de l'intégrale du mouvement brownien*, (proposé).
- [7] LACHAL, A. : *Thèse de Doctorat : Etude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien*, (à paraître).
- [8] LEFEBVRE, M. : *First passage densities for a two-dimensional process*, SIAM J. Appl. Math. vol. 49, n° 5 (1989), pp. 1514-1523.
- [9] LEFEBVRE, M. and WHITTLE, P. : *Survival optimization for a dynamic system*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 12, n° 1 (1988), pp. 101-119.
- [10] Mc KEAN, H.P. Jr. : *A winding problem for a resonator driven by a white noise*, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [11] RICE, S.O. : *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.

#### 4. LES LOIS CONJOINTES DES COUPLES $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$ et $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$ SOUS LA PROBABILITE $P_{(x,y)}$

##### 4.1 Un problème d'optimisation

a) Nous exposons ici un problème typique de contrôle optimal (voir par exemple [28]).  
Considérons le système dynamique linéaire stochastique :

$$(S) \quad \frac{dz_t}{dt} = Az_t + Bu_t + \varepsilon_t ,$$

où :

- 1)  $z$  désigne la variable d'état du système,  $z_t \in \mathbb{R}^n$  ;
- 2)  $u$  est la variable contrôlée (déterministe),  $u_t \in \mathbb{R}^m$  ;
- 3)  $\varepsilon$  représente un processus gaussien centré de matrice (d'ordre  $n \times n$ ) de covariance  $\Gamma$  ;
- 4)  $A$  et  $B$  sont deux matrices d'ordres respectifs  $n \times n$  et  $n \times m$  .

Au système (S) on associe une fonction de coût

$$C = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_D} u_t^* Q u_t dt + K(\tau_D, z_{\tau_D})$$

avec :

- i)  $\tau_D$  : premier instant de sortie d'un domaine fixé  $D \subset \mathbb{R}^n$  pour le processus  $(z_t)_{t \geq 0}$  ;
- ii)  $K$  : coût terminal (au temps de sortie de  $D$ ) ;
- iii)  $Q$  : matrice symétrique définie positive d'ordre  $m \times m$  .

On se propose de déterminer un contrôle optimal  $\bar{u}$  minimisant le coût moyen  $E(C)$ . La solution est fournie par le théorème suivant ([28]) :



### Théorème 7 (Whittle)

Supposons la relation  $\Gamma = \alpha BQ^{-1}B^*$  satisfaite. Alors le contrôle optimal  $\bar{u}$  est donné par la formule

$$\bar{u}_t = -Q^{-1}B^* \nabla F(z_t),$$

où  $F$  est la fonction définie par l'identité

$$e^{-\frac{1}{\alpha}F(z)} = \mathbb{E}_z \left[ e^{-\frac{1}{\alpha}K(\tilde{\tau}_D, \tilde{z}_{\tilde{\tau}_D})} \right], \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

$(\tilde{z}_t)_{t \geq 0}$  désignant le processus "non contrôlé" défini selon

$$\frac{d\tilde{z}_t}{dt} = A\tilde{z}_t + \varepsilon_t,$$

et  $\tilde{\tau}_D$  le temps de sortie correspondant.

Nous illustrons maintenant cette théorie par l'exemple d'un modèle simplifié de l'atterrissage d'un avion (voir [21], [23]). Introduisons à cet effet l'altitude  $-x$  de l'avion, sa vitesse verticale  $v$ , et son accélération verticale (contrôlée)  $u$  à laquelle se superpose une perturbation aléatoire due aux turbulences atmosphériques, modélisée par un bruit blanc gaussien  $(V_t)_{t \geq 0}$ . Les équations régissant le mouvement de l'avion s'écrivent alors :

$$(S') \quad \begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = v_t \\ \frac{dv_t}{dt} = u_t + V_t. \end{cases}$$

On obtient ainsi une forme particulière du système (S) avec les choix

$$z = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{pmatrix} 0 \\ V_t \end{pmatrix}, \quad \alpha = Q \text{ et } \tau_D = \inf\{t > 0 : v_t = b\},$$

$b$  étant un nombre positif fixé.



Le système non contrôlé associé à (S') s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_t}{dt} = \tilde{v}_t \\ \frac{d\tilde{v}_t}{dt} = V_t \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} \tilde{x}_t = X_t + \tilde{x}_0 + t \tilde{v}_0 \\ \tilde{v}_t = B_t + \tilde{v}_0 \end{cases}$$

où  $B_t = \int_0^t V_s ds$ ,  $t \geq 0$ , est le mouvement brownien standard et  $X_t = \int_0^t B_s ds$ .

Le contrôle optimal recherché vaut donc (d'après le théorème 7) :

$$\bar{u}_t = -\frac{1}{Q} \frac{\partial f}{\partial v}(x_t, v_t)$$

$f$  désignant la fonction définie par

$$e^{-\frac{1}{Q} f(x,v)} = \mathbb{E}_{(x,v)} \left[ e^{-\frac{1}{Q} K(\sigma_b, U_{\sigma_b})} \right],$$

et

$$\sigma_b = \inf\{t > 0 : B_t = b\}.$$

On voit donc que tout revient finalement à déterminer la loi  $(\sigma_b, X_{\sigma_b}) (P_{(x,v)})$ .

## b) La formule de Lefèvre

En résolvant par une technique purement analytique "l'équation de la chaleur" associée à l'opérateur aux dérivées partielles  $D$ , M. Lefèvre ([21]) a exprimé la double transformée de Laplace-Fourier de la probabilité  $(\sigma_b, X_{\sigma_b}) (P_{(x,y)})$  en termes

de fonctions d'Airy ([1]). Il a pu également expliciter la distribution de la variable aléatoire  $X_{\sigma_b}$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}$ . Nous rassemblons ses principaux résultats dans le théorème suivant :

**Théorème 8 (Lefèbvre, 1989)**

i) Lorsque  $y \geq b \geq 0$  ou  $y \leq b \leq 0$ , la variable aléatoire  $X_{\sigma_b}$  est respectivement portée par les intervalles  $[x, +\infty[$  et  $]-\infty, x]$ , et la double transformée de Laplace de la probabilité  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  ( $P_{(x,y)}$ ) s'exprime par la formule suivante :

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_b - \mu X_{\sigma_b}}] = e^{-\mu x} \frac{\text{Ai}(2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y}{\mu^{2/3}})}{\text{Ai}(2^{1/3} \frac{\lambda + \mu b}{\mu^{2/3}})}, \lambda > 0, \begin{cases} \mu > 0 & \text{si } y \geq b \geq 0 \\ \mu < 0 & \text{si } y \leq b \leq 0. \end{cases}$$

ii) Dans les cas  $y > b, b < 0$  et  $y < b, b > 0$ , la variable  $X_{\sigma_b}$  est portée par  $\mathbb{R}$  tout entier et la transformée de Laplace-Fourier du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}$  s'explicite selon :

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_b + i\mu X_{\sigma_b}}] = e^{i\mu x} \frac{\text{Ai}(2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu y}{\mu^{2/3}} e^{i\pi/3})}{\text{Ai}(2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu b}{\mu^{2/3}} e^{i\pi/3})}, \lambda > 0, \mu \neq 0,$$

avec  $\varepsilon = \text{signe de } \mu(y-b)$ .

iii) Dans le cas particulier où  $b = 0$ , la distribution de la variable aléatoire de  $X_{\sigma_0}$  s'écrit :

$$P_{(x,y)}\{X_{\sigma_0} \in d\xi\} = \frac{\Gamma(2/3)}{\pi 2^{2/3} 3^{1/6}} \frac{|y|}{|\xi - x|^{4/3}} e^{-2|y|^3/9|\xi - x|} \mathbb{1}_A(\xi) d\xi,$$

avec  $A = ]x, +\infty[$  si  $y > 0$ ,  $A = ]-\infty, x[$  si  $y < 0$ .

## 4.2 Extensions diverses

a) Dans le travail - "A propos de l'intégrale du mouvement brownien" ([19]) -, nous présentons une nouvelle méthode reposant sur le caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , permettant d'obtenir la loi conjointe du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  (sous  $P_{(x,y)}$ ) (nous avons déjà mentionné dans les articles [12] et [13] une preuve élémentaire faisant appel à la fonctionnelle de Feynman-Kac du mouvement brownien). Cette même technique nous a également permis de déterminer la distribution  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})(P_{(x,y)})$  et  $(\sigma_a, X_{\sigma_a}, \sigma_b, X_{\sigma_b})(P_{(x,y)})$ .

b) Nous étendons enfin tous ces résultats, en exploitant la formule de Cameron-Martin, au cas du processus  $(X_t + \frac{t^2}{2}z + \frac{t^3}{6}w, B_t + tz + \frac{t^2}{2}w)_{t \geq 0}$  déduit du mouvement brownien par les adjonctions d'une dérive linéaire  $tz$  et d'une dérive parabolique  $\frac{t^2}{2}w$ . Nous retrouvons en particulier la loi du premier instant de passage pour le mouvement brownien soumis à une dérive parabolique, explicitée par P. Grøeneboom ([9], 1989) en termes de fonctions d'Airy. Ceci fait l'objet de la note " *Sur la distribution de certaines fonctionnelles de l'intégrale du mouvement brownien avec dérives parabolique et cubique* " ([20]).



# A PROPOS DE L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN

par Aimé LACHAL  
Université Claude Bernard - LYON I  
Institut de Mathématiques et Informatique  
Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle et Probabilités  
43, Boulevard du 11 Novembre 1918  
69622 VILLEURBANNE CEDEX (France)

## Résumé

Soient  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire démarrant de l'origine,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive et  $U_t = (X_t + x + ty, B_t + y)$ ,  $t \geq 0$ , le processus bidimensionnel associé démarrant d'un point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Dans ce travail nous présentons un procédé élémentaire permettant de retrouver la formule de M. Lefebvre donnant la transformée de Laplace-Fourier de la distribution du couple  $(\sigma_a, U_{\sigma_a})$ , ainsi que les formules de A. Lachal explicitant la transformée de Laplace-Fourier de la loi du couple  $(\sigma_{ab}, U_{\sigma_{ab}})$ ,  $\sigma_a$  et  $\sigma_{ab}$  désignant respectivement le premier instant d'atteinte de la droite  $\mathbb{R} \times \{a\}$  et le premier instant d'atteinte de la barrière bilatère  $\mathbb{R} \times \{a, b\}$  par le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ . Cette méthode qui unifie et qui simplifie très considérablement les preuves de ces résultats est en fait une extension "vectorielle" de la technique classique de D.A. Darling et A.J.F. Siegert ([2]). Elle repose sur l'observation essentielle, faite dans [6], du caractère markovien du processus bidimensionnel  $(U_t)_{t \geq 0}$ .

Nous déterminons ensuite par ce même procédé la transformée de Laplace-Fourier de la loi conjointe du quadruplet  $(\sigma_a, U_{\sigma_a}, \sigma_b, U_{\sigma_b})$ .

## INTRODUCTION

Soient  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien standard,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive, et  $U_t(x,y) = (X_{t+x+ty}, B_{t+y})$  le processus bidimensionnel associé. On désigne par  $\sigma_a$  (resp.  $\sigma_{ab}$ ) le premier instant de passage en  $a$  (resp.  $a$  ou  $b$ ) du mouvement brownien démarrant de  $y$  :  $\sigma_a$  (resp.  $\sigma_{ab}$ ) =  $\inf\{t > 0 : B_t + y = a$  (resp.  $\in \{a,b\}\})$ .

Le processus  $(U_t(x,y))_{t \geq 0}$  intervient classiquement dans divers domaines des mathématiques appliquées, notamment en mécanique statistique et optimisation (voir par exemple [3], [7], [8], [9] et [10]).

Dans [7] M. Lefèvre obtient la transformée de Laplace-Fourier de la loi du couple  $(\sigma_a, X_{\sigma_a} + x + \sigma_a y)$  en termes de fonctions d'Airy en résolvant, par une méthode classique purement analytique, "l'équation de la chaleur"  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}$  associée au processus  $U_t = (X_t, B_t)$ ,  $t \geq 0$ .

Dans [4] et [5] nous avons donné une preuve différente de cette formule, ainsi que la transformée de Laplace-Fourier de la loi de  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}} + x + \sigma_{ab} y)$ , en faisant appel à la fonctionnelle de Feynman-Kac du mouvement brownien.

La nouvelle démonstration que nous présentons ici a l'avantage de reposer sur le caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , et constitue de fait une extension de la technique de D.A. Darling et A.J.F. Siegert ([2]), appliquée à un processus de Markov bidimensionnel. Cette méthode, dans ce cas plus général, nous permet d'obtenir la transformée de Laplace-Fourier de la loi cherchée encore sous la forme d'un quotient de deux autres transformées du même type.

Cette même technique nous permet également d'explicitier la transformée de Laplace-Fourier de la distribution du quadruplet :

$$(\sigma_a, X_{\sigma_a} + x + \sigma_a y, \sigma_b, X_{\sigma_b} + x + \sigma_b y).$$

Le résultat ainsi obtenu est énoncé au paragraphe III.



Nous introduisons les notations suivantes :

$$P_{(x,y)}\{X_t \in du, B_t \in dv\} = P\{X_t + x + ty \in du, B_t + y \in dv\} = p_t(x,y;u,v) du dv$$

où

$$p_t(x,y ; u,v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3} (u-x-ty)^2 + \frac{6}{t^2} (u-x-ty)(v-y) - \frac{2}{t} (v-y)^2\right]$$

est la densité de transition du processus  $(X_t, B_t)$  ([9]),

$$\Psi_{\lambda,\mu}(x ; y,v) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t + i\mu u} p_t(x,y ; u,v) dt du$$

désigne la transformée de Laplace-Fourier de la fonction  $(t,u) \mapsto p_t(x,y ; u,v)$ .



# I. LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE-FOURIER DU COUPLE

$(\sigma_a, X_{\sigma_a})$  SOUS LA PROBABILITE  $P_{(x,y)}$

## Théorème 1

La transformée de Laplace-Fourier de  $(\sigma_a, X_{\sigma_a})$  s'exprime selon la formule suivante :

$$(1) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a}}] = e^{i\mu x} \frac{\text{Ai}[2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3}]}{\text{Ai}[2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu a}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3}]}, \quad \lambda > 0, \mu \neq 0,$$

où  $\varepsilon = \text{signe de } \mu(y-a)$ .

Dans les cas  $y \geq a \geq 0$  et  $y \leq a \leq 0$  la loi de  $X_{\sigma_a}$  est portée respectivement par les demi-axes  $[x, +\infty[$  et  $]-\infty, x]$ , et la double transformée de Laplace de  $(\sigma_a, X_{\sigma_a})$  s'écrit :

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_a - \mu X_{\sigma_a}}] = e^{-\mu x} \frac{\text{Ai}[2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y}{|\mu|^{2/3}}]}{\text{Ai}[2^{1/3} \frac{\lambda + \mu a}{|\mu|^{2/3}}]}, \quad \lambda > 0, \begin{cases} \mu > 0 & \text{si } y \geq a \geq 0 \\ \mu < 0 & \text{si } y \leq a \leq 0. \end{cases}$$

Ai désigne la fonction d'Airy usuelle (voir par exemple [1]).

## Preuve

Nous nous bornerons à ne démontrer que la première formule, la deuxième s'en déduisant par prolongement analytique. Nous nous limiterons de plus au cas  $y > a$ , le cas  $y < a$  se traitant par un procédé analogue.

Partant de l'observation, faite dans [6], du caractère fortement markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , nous pouvons écrire les égalités suivantes, valables pour  $v < a < y$  :

$$\begin{aligned} P_{(x,y)}\{U_t \in ]-\infty, u[ \times ]-\infty, v[\} &= P_{(x,y)}\{\sigma_a < t, U_{(t-\sigma_a)+\sigma_a} \in ]-\infty, u[ \times ]-\infty, v[\} \\ &= \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_a < t\}} P_{(X_{\sigma_a}, a)}\{U_{t-\sigma_a} \in ]-\infty, u[ \times ]-\infty, v[\}] \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} P_{(\xi,a)} \{ U_{t-s} \in ]-\infty, u[ \times ]-\infty, v[ \} \times \\ \times P_{(x,y)} \{ \sigma_a \in ds, X_{\sigma_a} \in d\xi \}.$$

Ainsi, après avoir remarqué l'égalité  $p_t(x,y ; u,v) = p_t(0,y ; u-x,v)$ , nous obtenons l'identité convolutive :

$$p_t(x,y ; u,v) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} p_{t-s}(0,a ; u-\xi,v) P_{(x,y)} \{ \sigma_a \in ds, X_{\sigma_a} \in d\xi \},$$

qui se transcrit, après application de la transformation de Laplace-Fourier, sous la forme d'un simple produit algébrique :

$$\Psi_{\lambda,\mu}(x ; y,v) = \Psi_{\lambda,\mu}(0 ; a,v) \mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a}}].$$

Nous obtenons ainsi l'espérance recherchée :

$$(1') \quad \mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a}}] = \frac{\Psi_{\lambda,\mu}(x ; y,v)}{\Psi_{\lambda,\mu}(0 ; a,v)}.$$

Notons que cette expression ne dépend pas de  $v \in ]-\infty, a[$ .

On pourra aussi comparer cette égalité avec la formule (3.1) de D.A. Darling et A.J.F. Siegert ([2]).

L'obtention de l'écriture explicite de la fonction  $\Psi_{\lambda,\mu}$  étant technique, nous en présentons les principales étapes sous forme de lemmes.

Posons  $\Psi(v) = \Psi_{\lambda,\mu}(x ; y,v)$ .

### Lemme 1

La fonction  $\Psi$  vérifie le problème aux limites suivant :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^2 \Psi}{dv^2}(v) = (\lambda - i\mu v) \Psi(v) - e^{i\mu x} \delta_y(v) \\ (2.2) \quad \Psi(-\infty) = \Psi(+\infty) = 0. \end{cases}$$

La solution du système (2.1), (2.2) a la forme suivante :

### Lemme 2

On a :

$$(3) \quad \Psi(v) = \begin{cases} \alpha A(v) & \text{si } v > y \\ \beta A(v) & \text{si } v < y \end{cases}$$

avec

$$A(v) = \text{Ai} \left[ 2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu v}{|\mu|^{2/3}} e^{i\mu/3} \right],$$

avec  $\varepsilon = \text{signe de } \mu(v-y)$ .

Les valeurs des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont fournies par le lemme suivant :

### Lemme 3

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{4\pi}{|2\mu|^{1/3}} e^{i\mu x} A(y^-) \\ \beta = \frac{4\pi}{|2\mu|^{1/3}} e^{i\mu x} A(y^+) \end{cases}.$$

Nous déduisons alors des lemmes 2 et 3 l'expression de la fonction  $\Psi_{\lambda,\mu}$  :



#### Lemme 4

La fonction  $\Psi_{\lambda,\mu}$  s'explicite selon :

$$(5) \quad \Psi_{\lambda,\mu}(x; y, v) = \frac{4\pi}{|2\mu|^{1/3}} e^{i\mu x} \text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{-\varepsilon i\pi/3}\right] \text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu v}{|\mu|^{2/3}} e^{\varepsilon i\pi/3}\right]$$

avec  $\varepsilon = \text{signe de } \mu(v-y)$  (dans le cas où  $v=y$ , on peut choisir indifféremment  $\varepsilon = \pm 1$ ).

En substituant la quantité (5) dans l'égalité (1'), nous obtenons immédiatement la formule (1).  $\square$

Nous donnons ci-dessous les preuves des lemmes 1 à 4.

#### Preuve du lemme 1

En faisant appel à l'opérateur différentiel associé au processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  nous voyons que  $p_t(x, y; u, v)$  vérifie le système :

$$\begin{cases} (6.1) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} - v \frac{\partial}{\partial u} \right) p_t(x, y; u, v) = \frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y; u, v) \text{ (équation de Fokker-Planck)} \\ (6.2) \lim_{t \rightarrow 0^+} p_t(x, y; u, v) = \delta_{(x,y)}(u, v) \\ (6.3) \lim_{u^2 + v^2 \rightarrow +\infty} p_t(x, y; u, v) = 0. \end{cases}$$

La relation (6.1) nous fournit la dérivée seconde de la fonction  $\Psi$  :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Psi}{dv^2}(v) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t + i\mu u} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial u} \right) p_t(x, y; u, v) dt du.$$

En intégrant deux fois par parties et en utilisant les limites (6.2) et (6.3), nous obtenons l'équation (2.1).

Enfin les conditions aux limites (2.2) résultent de (6.3).  $\square$

### Preuve du lemme 2

Isolant la singularité  $v=y$ , le changement de variable  $z = 2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu v}{|\mu|^{2/3}} e^{\varepsilon i\pi/3}$ ,  $\varepsilon = \text{signe de } \mu(v-y)$ , nous conduit à l'équation d'Airy ([1]) :

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}}{dz^2}(z) = z \tilde{\Psi}(z),$$

dont un système fondamental de solutions est constitué des fonctions d'Airy classiques Ai et Bi.

Des conditions aux limites (2.2) et des équivalences asymptotiques ([1]) :

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow +\infty, \arg z < \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{Bi}(z) \sim \frac{e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}}{\sqrt{\pi} z^{1/4}} \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow +\infty, \arg z < \frac{\pi}{3},$$

nous tirons les expressions (3) où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes (dépendant de  $\lambda, \mu, x$  et  $y$ ) que nous déterminons ci-dessous.  $\square$

### Preuve du lemme 3

L'équation "distributionnelle" (2.1) fournit l'égalité suivante, valable pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  à support compact :

$$(7) \quad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(v) \frac{d^2 \varphi}{dy^2}(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - i\mu v) \Psi(v) \varphi(v) dv - e^{i\mu x} \varphi(y).$$

Deux intégrations par parties successives permettent d'écrire le premier membre de l'identité (7) de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(v) \frac{d^2 \varphi}{dy^2}(v) dv = \frac{1}{2} \beta \int_{-\infty}^y A(v) \frac{d^2 \varphi}{dv^2}(v) dv + \frac{1}{2} \alpha \int_y^{+\infty} A(v) \frac{d^2 \varphi}{dv^2}(v) dv$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \beta [A(y^-) \varphi'(y) - A'(y^-) \varphi(y) + \int_{-\infty}^y A''(v) \varphi(v) dv] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \alpha [-A(y^+) \varphi'(y) + A'(y^+) \varphi(y) + \int_y^{+\infty} A''(v) \varphi(v) dv] \\
&= \frac{1}{2} [\beta A(y^-) - \alpha A(y^+)] \varphi'(y) + \frac{1}{2} [\alpha A'(y^+) - \beta A'(y^-)] \varphi(y) + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - i\mu v) \Psi(v) \varphi(v) dv,
\end{aligned}$$

ce qui fournit, après identification avec le second membre de (7), le système linéaire

$$\begin{cases} \alpha A(y^+) - \beta A(y^-) = 0 \\ \alpha A'(y^+) - \beta A'(y^-) = -2e^{i\mu x}. \end{cases}$$

L'identité bien connue ([1]) :

$$\text{Wronskien}(Ai(z), Ai(ze^{2i\pi/3})) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\pi/6}$$

nous permet d'obtenir les valeurs (4) des constantes  $\alpha$  et  $\beta$ .  $\square$

#### Preuve du lemme 4

Insérons les valeurs (4) de  $\alpha$  et  $\beta$  dans les égalités (3). Nous en déduisons finalement l'expression globale de la fonction  $\Psi$  :

$$\Psi(y) = \frac{4\pi}{|2\mu|^{1/3}} e^{i\mu x} A[(y \vee v)^+] A[(y \wedge v)^-]$$

qui coïncide précisément avec (5).  $\square$



## II. LA TRANSFORMEE DE LAPLACE-FOURIER DU COUPLE ( $\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}}$ ) SOUS LA PROBABILITE $P_{(x,y)}$

### Théorème 2

La transformée de Laplace-Fourier de  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$  est déterminée, pour  $a < y < b$ , par :

$$(8) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab}+i\mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{i\mu x} \frac{[B_1(a)-B_1(b)]B_2(y) - [B_2(a)-B_2(b)]B_1(y)}{B_1(a)B_2(b) - B_2(a)B_1(b)}, \quad \lambda > 0$$

$$\text{avec } B_1(y) = \text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda-i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{-\beta i\pi/3}\right]$$

$$B_2(y) = \text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda-i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{\beta i\pi/3}\right]$$

$$\beta = \text{signe de } \mu.$$

### Preuve

Notre démarche est semblable à la précédente. Nous exploitons encore le caractère markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , en distinguant, pour les trajectoires démarrant du point  $(x,y)$ ,  $a < y < b$ , l'ordre d'atteinte des barrières  $y = a$  et  $y = b$ . Introduisons à cet effet les quantités suivantes :

$$\Phi_a(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_a+i\mu X_{\sigma_a}}]$$

$$\Phi_{ab}^+(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_a < \sigma_b\}} e^{-\lambda\sigma_a+i\mu X_{\sigma_a}}] = \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_{ab}=\sigma_a\}} e^{-\lambda\sigma_{ab}+i\mu X_{\sigma_{ab}}}]$$

$$\Phi_{ab}^-(x,y) = \Phi_{ba}^+(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_{ab}=\sigma_b\}} e^{-\lambda\sigma_{ab}+i\mu X_{\sigma_{ab}}}]$$

$$\Phi_{ab}(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab}+i\mu X_{\sigma_{ab}}}] = \Phi_{ab}^+(x,y) + \Phi_{ab}^-(x,y).$$

On a entre les fonctions  $\Phi_a$ ,  $\Phi_{ab}^+$  et  $\Phi_{ab}^-$  les relations suivantes :

## Lemme 5

$$\begin{cases} (9.1) \quad \Phi_a(x,y) = \Phi_{ab}^+(x,y) + \Phi_{ab}^-(x,y)\Phi_a(0,b), \\ (9.2) \quad \Phi_b(x,y) = \Phi_{ab}^-(x,y) + \Phi_{ab}^+(x,y)\Phi_b(0,a). \end{cases}$$

### Preuve du lemme 5

Nous avons la "décomposition" suivante :

$$(10) \quad \Phi_a(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_a < \sigma_b\}} e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a}}] + \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_a > \sigma_b\}} e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a}}].$$

En remarquant que sur l'ensemble  $\{\sigma_a > \sigma_b\}$  on a  $\sigma_a = \sigma_b + \theta_{\sigma_b} \sigma_a$  et  $X_{\sigma_a} = \theta_{\sigma_b} X_{\sigma_a}$  (le symbole  $\theta_t$  désignant la translation opérant sur les trajectoires du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  définie selon  $U_s \circ \theta_t = U_{s+t}$ ), la propriété de Markov appliquée à la dernière espérance figurant dans (10) nous fournit la relation :

$$(10') \quad \Phi_a(x,y) = \Phi_{ab}^+(x,y) + \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_a > \sigma_b\}} e^{-\lambda\sigma_b} \Phi_a(X_{\sigma_b}, b)].$$

Insérons alors l'identité évidente  $\Phi_a(u,v) = e^{i\mu u} \Phi_a(0,v)$  dans l'égalité (10'). Nous obtenons ainsi la formule (9.1).

Enfin la deuxième formule (9.2) se déduit de la précédente (9.1) en inversant les rôles de  $a$  et  $b$ .  $\square$

Les expressions explicites des espérances  $\Phi_{ab}^+(x,y)$  et  $\Phi_{ab}^-(x,y)$  sont données par le lemme suivant :

## Lemme 6

$$\left\{ \begin{array}{l} (11.1) \quad \Phi_{ab}^+(x,y) = e^{i\mu x} \frac{\frac{B_1(y)}{B_1(b)} - \frac{B_2(y)}{B_2(b)}}{\frac{B_1(a)}{B_1(b)} - \frac{B_2(a)}{B_2(b)}} \\ (11.2) \quad \Phi_{ab}^-(x,y) = e^{i\mu x} \frac{\frac{B_1(y)}{B_1(a)} - \frac{B_2(y)}{B_2(a)}}{\frac{B_1(b)}{B_1(a)} - \frac{B_2(b)}{B_2(a)}} \end{array} \right.$$

les fonctions  $B_1$  et  $B_2$  étant définies dans l'énoncé du théorème 2.

## Preuve du lemme 2

La solution du système linéaire (9.1), (9.2) s'exprime selon les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{ab}^+(x,y) = \frac{\Phi_a(x,y) - \Phi_a(0,b)\Phi_b(x,y)}{1 - \Phi_a(0,b)\Phi_b(0,a)} \\ \Phi_{ab}^-(x,y) = \frac{\Phi_b(x,y) - \Phi_b(0,a)\Phi_a(x,y)}{1 - \Phi_a(0,b)\Phi_b(0,a)} \end{array} \right.,$$

lesquelles, coïncident d'après le théorème 1, avec (11.1) et (11.2).  $\square$

## Fin de la preuve du théorème 2

La relation  $\Phi_{ab} = \Phi_{ab}^+ + \Phi_{ab}^-$  nous donne finalement le résultat annoncé (8).  $\square$

## Remarque 1

1. On pourra encore comparer ces résultats avec les formules générales (3.2), (3.3) et (3.4), relatives aux processus markoviens unidimensionnels, de D.A. Darling et A.J.F. Siegert ([2]).
2. L'égalité suivante, reliant les fonctions d'Airy  $Ai$  et  $Bi$  ([1]) :

$$Ai(ze^{2i\pi/3}) = \frac{1}{2} e^{i\pi/3} [Ai(z) - iBi(z)]$$



permet de retrouver notre formule (27'') énoncée dans un travail antérieur ([5]), et d'obtenir de fait, par prolongement analytique, une expression réelle (et non imaginaire) de la double transformée de Laplace de  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$  dans les cas particuliers  $b > a \geq 0$  et  $a < b \leq 0$  (formules (27) et (27') de [5]).

### III. LA TRANSFORMEE DE LAPLACE-FOURIER DU QUADRUPLLET ( $\sigma_a, X_{\sigma_a}, \sigma_b, X_{\sigma_b}$ ) SOUS LA PROBABILITE $P_{(x,y)}$

#### Théorème 3

*La transformée de Laplace-Fourier de ( $\sigma_a, X_{\sigma_a}, \sigma_b, X_{\sigma_b}$ ) ( $a < b$ ) s'explicite  
comme suit :*

i) si  $y \leq a$  :

$$(12.1) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a} - v\sigma_b + i\eta X_{\sigma_b}}] = e^{i(\mu+\eta)x} \frac{A_1(y)}{A_1(a)} \times \frac{C(a)}{C(b)},$$

ii) si  $y \geq b$  :

$$(12.2) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a} - v\sigma_b + i\eta X_{\sigma_b}}] = e^{i(\mu+\eta)x} \frac{A_2(y)}{A_2(b)} \times \frac{B(b)}{B(a)},$$

iii) si  $a \leq y \leq b$  :

$$(12.3) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a} - v\sigma_b + i\eta X_{\sigma_b}}] = e^{i(\mu+\eta)x} \left[ \frac{\frac{A_1(y)}{A_1(b)} - \frac{A_2(y)}{A_2(b)}}{\frac{A_1(a)}{A_1(b)} - \frac{A_2(a)}{A_2(b)}} \times \frac{C(a)}{C(b)} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{A_1(y)}{A_1(a)} - \frac{A_2(y)}{A_2(a)}}{\frac{A_1(b)}{A_1(a)} - \frac{A_2(b)}{A_2(a)}} \times \frac{B(b)}{B(a)} \right],$$

avec  $\lambda, \mu > 0, \mu, v \neq 0$ ,

$$A_1(y) = \text{Ai}\left[2^{2/3} \frac{(\lambda+v) - i(\mu+\eta)y}{|\mu+\eta|^{2/3}} e^{-\alpha i\pi/3}\right]$$

,  $\alpha = \text{signe de } (\mu+\eta)$ ,

$$A_2(y) = \text{Ai}\left[2^{2/3} \frac{(\lambda+v) - i(\mu+\eta)y}{|\mu+\eta|^{2/3}} e^{\alpha i\pi/3}\right]$$

$$B(y) = \text{Ai}\left[2^{2/3} \frac{\lambda - i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{\beta i\pi/3}\right], \quad \beta = \text{signe de } \mu,$$

$$C(y) = \text{Ai}\left[2^{2/3} \frac{v - i\eta y}{|\eta|^{2/3}} e^{-\gamma i\pi/3}\right], \quad \gamma = \text{signe de } \eta.$$

## Preuve

Nous distinguons, comme dans la preuve du théorème 2, l'ordre d'atteinte des barrières  $y = a$  et  $y = b$  par les trajectoires du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ . Ceci nous donne en faisant de nouveau appel à la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a} - \nu\sigma_b + i\eta X_{\sigma_b}}] &= \\ &= \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_a < \sigma_b\}} e^{-(\lambda+\nu)\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a}} \mathbb{E}_{(X_{\sigma_a}, a)}(e^{-\nu\sigma_b + i\eta X_{\sigma_b}})] + \\ &+ \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_a > \sigma_b\}} e^{-(\lambda+\nu)\sigma_b + i\eta X_{\sigma_b}} \mathbb{E}_{(X_{\sigma_b}, b)}(e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a}})]. \end{aligned}$$

Le théorème 1 nous fournit les expressions des transformées de Laplace-Fourier intermédiaires, à savoir :

$$\mathbb{E}_{(X_{\sigma_a}, a)}(e^{-\nu\sigma_b + i\eta X_{\sigma_b}}) = e^{i\eta X_{\sigma_a}} \frac{C(a)}{C(b)},$$

$$\mathbb{E}_{(X_{\sigma_b}, b)}(e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a}}) = e^{i\mu X_{\sigma_b}} \frac{B(b)}{B(a)},$$

les fonctions  $B$  et  $C$  étant définies dans l'énoncé du théorème 3.

Nous obtenons ainsi l'identité :

$$\begin{aligned} (13) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_a + i\mu X_{\sigma_a} - \nu\sigma_b + i\eta X_{\sigma_b}}] &= \\ &= \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_a < \sigma_b\}} e^{-(\lambda+\nu)\sigma_a + i(\mu+\eta)X_{\sigma_a}}] \frac{C(a)}{C(b)} + \\ &+ \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\sigma_a > \sigma_b\}} e^{-(\lambda+\nu)\sigma_b + i(\mu+\eta)X_{\sigma_b}}] \frac{B(b)}{B(a)}. \end{aligned}$$



1. Dans le cas  $y \leq a$  (resp.  $y \geq b$ ) on a  $\sigma_a < \sigma_b$  (resp.  $\sigma_a > \sigma_b$ ). Ainsi la deuxième (resp. première) espérance apparaissant dans le second membre de (13) s'annule. Quant à la première (resp. deuxième), elle coïncide avec la transformée de Laplace-Fourier du couple  $(\sigma_a, X_{\sigma_a})$  (resp.  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$ ) associée aux paramètres  $\lambda + \nu$  et  $\mu + \eta$ , dont l'expression, fournie par le théorème 1, conduit au résultat escompté (12.1) (resp. (12.2)).
2. Dans le cas  $a \leq y \leq b$ , les deux espérances figurant au second membre de (13) égalent respectivement les fonctions  $\Phi_{ab}^+(x, y)$  et  $\Phi_{ab}^-(x, y)$  (définies dans la preuve du théorème 2) associées aux paramètres  $\lambda + \nu$  et  $\mu + \eta$ . Leurs expressions, déduites des formules (11.1) et (11.2), après avoir remplacé le paramètre  $\mu$  par  $\mu + \eta$  et les fonctions  $B_1, B_2$  respectivement par  $A_1, A_2$ , nous permettent finalement d'obtenir (12.3).  $\square$

### Remarque 2

Faisons tendre  $\mu$  et  $\eta$  vers zéro dans les formules (12.1), (12.2) et (12.3). L'équivalence asymptotique ([1]) :

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}}, \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow +\infty, \text{ larg } z < \frac{2\pi}{3},$$

nous fournit les limites suivantes (lorsque  $\mu, \eta \rightarrow 0$ ) :

$$\frac{A_1(y)}{A_1(v)} \longrightarrow e^{\sqrt{2(\lambda+\nu)}(y-v)},$$

$$\frac{A_2(y)}{A_2(v)} \longrightarrow e^{-\sqrt{2(\lambda+\nu)}(y-v)},$$

$$\frac{B(y)}{B(v)} \longrightarrow e^{-\sqrt{2\lambda}(y-v)},$$

$$\frac{C(y)}{C(v)} \longrightarrow e^{\sqrt{2\nu}(y-v)}.$$

Nous retrouvons ainsi les formules bien connues :

i) si  $y \leq a$  :

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda \sigma_a - \nu \sigma_b} | B_0 = y] = e^{-\sqrt{2(\lambda+\nu)} |y-a| - \sqrt{2\nu} (b-a)} ,$$

ii) si  $y \geq b$  :

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda \sigma_a - \nu \sigma_b} | B_0 = y] = e^{-\sqrt{2(\lambda+\nu)} |y-b| - \sqrt{2\lambda} (b-a)} ,$$

iii) si  $a \leq y \leq b$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-\lambda \sigma_a - \nu \sigma_b} | B_0 = y] = & e^{-\sqrt{2\lambda} (b-a)} \frac{\text{sh} \sqrt{2(\lambda+\nu)} (y-a)}{\text{sh} \sqrt{2(\lambda+\nu)} (b-a)} + \\ & + e^{-\sqrt{2\nu} (b-a)} \frac{\text{sh} \sqrt{2(\lambda+\nu)} (b-y)}{\text{sh} \sqrt{2(\lambda+\nu)} (b-a)} . \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. : *Handbook of mathematical functions with formulas, and mathematical tables*, Wiley, New-York, 1972.
- [2] DARLING, D.A. and SIEGERT, A.J.F. : *The first passage problem for a continuous Markov process*, Ann. Math. Stat. 24 (1953), pp. 624-639.
- [3] KAC, M. : *Probability theory : its role and its impact*, SIAM Rev. 4 (1962), pp. 1-11.
- [4] LACHAL, A. : *Sur l'intégrale du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 311, série I (1990), pp. 461-464.
- [5] LACHAL, A. : *Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, Ann. I.H.P., sect. B, vol. 27, n° 3 (1991), pp. 385-405.
- [6] LACHAL, A. : Thèse de Doctorat : *Etude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien*, (à paraître).
- [7] LEFEBVRE, M. : *First passage densities for a two-dimensional process*, SIAM J. Appl. Math. vol. 49, n° 5 (1989), pp. 1514-1523.
- [8] LEFEBVRE, M. and WHITTLE, P. : *Survival optimization for a dynamic system*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 12, n° 1 (1988), pp. 101-119.
- [9] Mc KEAN, H.P. Jr. : *A winding problem for a resonator driven by a white noise*, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [10] RICE, S.O. : *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.



# SUR LA DISTRIBUTION DE CERTAINES FONCTIONNELLES DE L'INTEGRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN AVEC DERIVES PARABOLIQUE ET CUBIQUE

par Aimé LACHAL

Université Claude Bernard - LYON I  
Institut de Mathématiques et Informatique  
43, boulevard du 11 Novembre 1918  
69622 VILLEURBANNE CEDEX

**Résumé.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien standard. On considère le processus bidimensionnel  $U_t^{z,w}(x,y) = (\int_0^t B_s ds + x + ty + \frac{t^2}{2} z + \frac{t^3}{6} w, B_t + y + tz + \frac{t^2}{2} w)$  constitué du mouvement brownien démarrant du point  $y$  auquel se superpose une dérive parabolique  $tz + \frac{t^2}{2} w$ , et de sa primitive démarrant du point  $x$  soumise à une dérive cubique  $ty + \frac{t^2}{2} z + \frac{t^3}{6} w$ .

Dans cette note nous déterminons explicitement les lois des couples

$$(\tau_a, U_{\tau_a}^{z,w}(x,y)), (\sigma_b, U_{\sigma_b}^{z,w}(x,y)) \text{ et } (\sigma_{ab}, U_{\sigma_{ab}}^{z,w}(x,y)),$$

où  $\tau_a = \inf\{t > 0 : U_t^{z,w}(x,y) \in \{a\} \times \mathbb{R}\}$ ,  $\sigma_b = \inf\{t > 0 : U_t^{z,w}(x,y) \in \mathbb{R} \times \{b\}\}$  et  $\sigma_{ab} = \inf\{t > 0 : U_t^{z,w}(x,y) \in \mathbb{R} \times \{a,b\}\}$  désignent respectivement les premiers instants d'atteinte des droites  $\{a\} \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \times \{b\}$ , ainsi que de la barrière bilatère  $\mathbb{R} \times \{a,b\}$  pour le processus  $(U_t^{z,w}(x,y))_{t \geq 0}$ .

## INTRODUCTION

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien linéaire,  $X_t = \int_0^t B_s ds$  sa primitive et  $U_t(x,y) = (X_t+x+ty, B_t+y)$ ,  $t \geq 0$ , le processus bidimensionnel associé démarrant du point  $(x,y)$ . Le processus  $(U_t(x,y))_{t \geq 0}$  intervient naturellement dans divers domaines des mathématiques appliquées, et notamment en mécanique statistique et optimisation (voir par exemple [5], [10], [11], [12] et [13]).

L'étude des distributions des premiers instants d'atteinte des droites  $\{a\} \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \times \{b\}$  a fait récemment l'objet de nombreuses recherches (voir [6] à [9]) ; au paragraphe I sont rappelés les principaux résultats obtenus.

Dans cet article nous considérons le processus

$$U_t^{z,w}(x,y) = (X_t+x+ty + \frac{t^2}{2}z + \frac{t^3}{6}w, B_t+y+tz + \frac{t^2}{2}w), \quad t \geq 0,$$

se déduisant du mouvement brownien  $(B_t+y+tz + \frac{t^2}{2}w)_{t \geq 0}$  démarrant de  $y$  avec une dérive parabolique  $tz + \frac{t^2}{2}w$ . Nous déterminons pour ce nouveau processus les distributions des premiers instants d'atteinte des droites  $\{a\} \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \times \{b\}$ , ainsi que de la barrière bilatère  $\mathbb{R} \times \{a,b\}$ .

## I. NOTATIONS ET RAPPELS

Posons  $U_t = (X_t, B_t)$ . Le processus bidimensionnel  $(U_t)_{t \geq 0}$  est markovien et homogène ([9]). Désignons par  $P_{(x,y)}$  les probabilités conditionnelles associées, et par  $p_t(x,y ; u,v)$  ses probabilités de transition définies selon :

$$\begin{aligned} p_t(x,y ; u,v) &= P_{(x,y)}\{U_t \in du dv\}/du dv = P\{(X_t+x+ty, B_t+y) \in du dv\}/du dv \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3}(u-x-ty)^2 + \frac{6}{t^2}(u-x-ty)(v-y) - \frac{2}{t}(v-y)^2\right]. \end{aligned}$$

Introduisons des notations similaires relatives au processus  $U_t^{z,w} = (X_t + \frac{t^2}{2}z + \frac{t^3}{6}w, B_t + tz + \frac{t^2}{2}w)$ ,  $t \geq 0$ . Ce dernier est également



markovien (ce qui résulte de l'identité en loi de processus  $(U_{t+t_0}^{z,w})_{t \geq 0} = (\tilde{U}_t^{z,w}(U_{t_0}^{z,w}))_{t \geq 0}$  où  $(\tilde{U}_t^{z,w})_{t \geq 0}$  désigne une copie de  $(U_t^{z,w})_{t \geq 0}$ , indépendante du processus  $(U_t^{z,w})_{0 \leq t \leq t_0}$ ).

Désignons par  $P_{(x,y)}^{z,w}$  la famille de ses probabilités conditionnelles. Un calcul élémentaire montre que les probabilités de transition correspondantes  $p_t^{z,w}(x,y; u,v)$ , définies par :

$$\begin{aligned} p_t^{z,w}(x,y; u,v) &= P_{(x,y)}^{z,w} \{U_t \in du dv\} / du dv \\ &= P\{(X_t+x+ty + \frac{t^2}{2}z + \frac{t^3}{6}w, B_t+y+tz + \frac{t^2}{2}w) \in du dv\} / du dv \end{aligned}$$

sont reliées à celles du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  selon :

$$p_t^{z,w}(x,y; u,v) = e^{-\frac{t^3}{6}w^2 - \frac{t}{2}wz - \frac{t}{2}z^2 + z(v-y) + w(tv-u+x)} p_t(x,y; u,v).$$

En particulier :

$$p_t^{z,0}(x,y; u,v) = e^{-\frac{t}{2}z^2 + z(v-y)} p_t(x,y; u,v),$$

$$p_t^{0,w}(x,y; u,v) = e^{-\frac{t^3}{6}w^2 + w(tv-u+x)} p_t(x,y; u,v).$$

Nous définissons enfin les premiers instants d'atteinte des ensembles respectifs  $\{a\} \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \times \{b\}$  et  $\mathbb{R} \times \{a,b\}$  pour le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  :

- 1)  $\tau_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\},$
- 2)  $\sigma_b = \inf\{t > 0 : B_t = b\},$
- 3)  $\sigma_{ab} = \inf\{t > 0 : B_t \in \{a,b\}\}.$

Rappelons les principaux résultats connus concernant les lois conjointes des couples  $(\tau_a, B_{\tau_a})$ ,  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  et  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$  relativement à la probabilité  $P_{(x,y)}$  ([6], [7], [8] et [9]) :

$$\begin{aligned} (I-1) \quad P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv\} &= |v| [p_t(x,y; a,v) - \int_0^t \int_0^{+\infty} P_{(0,-|v|)}\{\tau_0 \in ds, B_{\tau_0} \in d\zeta\} \times \\ &\quad \times p_{t-s}(x,y; a, -\epsilon\zeta)] \mathbb{1}_A(v) dt dv \end{aligned}$$



avec

$$P_{(0,-|v|)}\{\tau_0 \in ds, B_{\tau_0} \in d\zeta\} = \frac{3\zeta}{\pi\sqrt{2}s^2} e^{-\frac{2}{s}(\zeta^2 - |v|\zeta + v^2)} \int_0^{\frac{4|v|\zeta}{s}} e^{-\frac{3\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\zeta) ds d\zeta$$

et les conventions d'écriture

$$A = ]0, +\infty[ \text{ si } x < a, \quad A = ]-\infty, 0[ \text{ si } x > a, \\ \text{et } \varepsilon = \text{signe de } (a-x).$$

$$(I-2) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_b + i\mu X_{\sigma_b}}] = e^{i\mu x} \frac{\text{Ai}[2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3}]}{\text{Ai}[2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu b}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3}]}, \quad \lambda > 0, \mu \neq 0,$$

Ai désignant la fonction d'Airy usuelle ([1]) et  $\varepsilon = \text{signe de } \mu(y-b)$ .

Dans les cas où  $y > b > 0$  et  $y < b < 0$ , la variable aléatoire  $X_{\sigma_b}$  prend ses valeurs respectivement dans les intervalles  $[x, +\infty[$  et  $]-\infty, x]$ , et on a :

$$(I-2') \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_b + i\mu X_{\sigma_b}}] = e^{-\mu x} \frac{\text{Ai}[2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y}{|\mu|^{2/3}}]}{\text{Ai}[2^{1/3} \frac{\lambda + \mu b}{|\mu|^{2/3}}]}, \quad \lambda > 0, \quad \begin{cases} \mu > 0 & \text{si } b > 0 \\ \mu < 0 & \text{si } b < 0 \end{cases}.$$

Pour  $a < y < b$  :

$$(I-3) \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} + i\mu X_{\sigma_{ab}}}] = \Phi_{ab}^+(x,y) + \Phi_{ab}^-(x,y), \quad \lambda > 0, \mu \neq 0,$$

avec

$$(I-3.1) \quad \Phi_{ab}^+(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} + i\mu X_{\sigma_{ab}}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{ab} = \sigma_a\}}] = e^{i\mu x} \frac{\frac{A_1(y)}{A_1(b)} - \frac{A_2(y)}{A_2(b)}}{\frac{A_1(a)}{A_1(b)} - \frac{A_2(a)}{A_2(b)}},$$

$$(I-3.2) \quad \Phi_{ab}^-(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} + i\mu X_{\sigma_{ab}}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{ab} = \sigma_b\}}] = e^{i\mu x} \frac{\frac{A_1(y)}{A_1(a)} - \frac{A_2(y)}{A_2(a)}}{\frac{A_1(b)}{A_1(a)} - \frac{A_2(b)}{A_2(a)}},$$

les fonctions  $A_1$  et  $A_2$  étant définies par :

$$A_1(y) = \text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3}\right],$$

$$A_2(y) = \text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda - i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{-i\pi/3}\right],$$

avec  $\varepsilon = \text{signe de } \mu$ .

Dans les cas où  $0 < a < y < b$  et  $a < y < b < 0$ , la variable aléatoire  $X_{\sigma_{ab}}$  prend ses valeurs respectivement dans les intervalles  $[x, +\infty[$  et  $]-\infty, x]$ , et on a :

$$(I-3') \quad \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} - \mu X_{\sigma_{ab}}}] = \Psi_{ab}^+(x,y) + \Psi_{ab}^-(x,y), \quad \lambda > 0, \quad \begin{cases} \mu > 0 & \text{si } a > 0 \\ \mu < 0 & \text{si } b < 0 \end{cases}.$$

avec

$$(I-3.1') \quad \Psi_{ab}^+(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} - \mu X_{\sigma_{ab}}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{ab} = \sigma_a\}}] = e^{-\mu x} \frac{\frac{A(y)}{A(b)} - \frac{B(y)}{B(b)}}{\frac{A(a)}{A(b)} - \frac{B(a)}{B(b)}},$$

$$(I-3.2') \quad \Psi_{ab}^-(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\sigma_{ab} - \mu X_{\sigma_{ab}}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{ab} = \sigma_b\}}] = e^{-\mu x} \frac{\frac{A(y)}{A(a)} - \frac{B(y)}{B(a)}}{\frac{A(b)}{A(a)} - \frac{B(b)}{B(a)}},$$

les fonctions  $A$  et  $B$  étant définies par :

$$A(y) = \text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y}{|\mu|^{2/3}}\right],$$

$$B(y) = \text{Bi}\left[2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y}{|\mu|^{2/3}}\right],$$

$\text{Bi}$  désignant la deuxième fonction d'Airy ([1]).

## II. LA RELATION FONDAMENTALE ENTRE LES PROBABILITES $P_{(x,y)}$ ET $P_{(x,y)}^{z,w}$

La formule de Cameron-Martin ([2]), dont nous rappelons l'énoncé plus loin, permet d'exprimer la dérivée de Radon-Nikodym de la probabilité  $P_{(x,y)}^{z,w}$  par rapport à  $P_{(x,y)}$ . Nous pouvons alors rattacher, par ce biais, les probabilités recherchées  $(\tau_a, B_{\tau_a})(P_{(x,y)}^{z,w})$ ,  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})(P_{(x,y)}^{z,w})$  et  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})(P_{(x,y)}^{z,w})$  aux probabilités connues (I-1), (I-2) et (I-3). Le résultat de base est le suivant :

### Théorème 1

*La dérivée de Radon-Nikodym de  $P_{(x,y)}^{z,w}$  par rapport à  $P_{(x,y)}$ , relativement à la sous-tribu  $\mathcal{F}_t = \sigma\{U_s, 0 \leq s \leq t\}$ , s'exprime selon*

$$(II-1) \quad \frac{dP_{(x,y)}^{z,w}}{dP_{(x,y)}} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} wz - \frac{t}{2} z^2 + z(B_t - y) + w(tB_t - X_t + x)}.$$

### Preuve

Nous utilisons le lemme suivant ([1]) :

### Lemme (formule de Cameron-Martin)

*Soient  $f$  une fonction définie sur  $[0, +\infty[$ , continûment dérivable, s'annulant en zéro,  $P$  (resp.  $P^f$ ) la probabilité associée au mouvement brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  (resp. au mouvement brownien translaté  $(B_t + f(t))_{t \geq 0}$ ). Alors la dérivée de Radon-Nikodym de  $P^f$  par rapport à  $P$ , relativement à la sous-tribu  $\mathcal{G}_t = \sigma\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$ , est donnée par la formule :*

$$(II-2) \quad \frac{dP^f}{dP} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^t f'(s)^2 ds + \int_0^t f'(s) dB_s \right].$$



L'égalité (II-2) appliquée à la fonction  $f(t) = tz + \frac{t^2}{2} w$  fournit la densité suivante, relativement à la sous-tribu  $\mathcal{G}_t$  :

$$\frac{dP^f}{dP} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} w z - \frac{t}{2} z^2 + zB_t + w(tB_t - X_t)}.$$

Ainsi pour toute fonctionnelle continue  $F$  définie sur l'espace des applications continues de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F((X_s + x + sy + \frac{s^2}{2} z + \frac{s^3}{6} w, B_s + y + sz + \frac{s^2}{2} w)_{0 \leq s \leq t})] = \\ = \mathbb{E}[e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} w z - \frac{t}{2} z^2 + zB_t + w(tB_t - X_t)} F((X_s + x + sy, B_s + y)_{0 \leq s \leq t})], \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore en termes d'espérances conditionnelles :

$$\mathbb{E}_{(x,y)}^{z,w}[F((U_s)_{0 \leq s \leq t})] = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} w z - \frac{t}{2} z^2 + z(B_t - y) + w(tB_t - X_t + x)} F((U_s)_{0 \leq s \leq t})].$$

Cette relation et l'identité des filtrations  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  et  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  démontrent alors le théorème.  $\square$

Une conséquence fondamentale du théorème 1 est le résultat suivant :

## Corollaire 1

Soit  $\tau$  un temps d'arrêt adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . On suppose qu'il existe une mesure  $m$  sur  $\mathbb{R}^2$  de sorte que la probabilité  $(\tau, U_\tau)(P_{(x,y)})$  soit absolument continue par rapport à  $\lambda \otimes m$ ,  $\lambda$  désignant la mesure de Lebesgue sur  $[0, +\infty[$ .

Sous cette hypothèse les lois du couple  $(\tau, U_\tau)$  relativement aux probabilités  $P_{(x,y)}$  et  $P_{(x,y)}^{z,w}$  sont liées par l'identité suivante :

$$(II-3) \quad P_{(x,y)}^{z,w} \{ \tau \in dt, U_\tau \in m(du dv) \} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} wz - \frac{t}{2} z^2 + z(v-y) + w(tv-u+x)} \times \\ \times P_{(x,y)} \{ \tau \in dt, U_\tau \in m(du dv) \}.$$

### Preuve

Soit  $C$  un sous-ensemble Lebesgue-mesurable de  $\mathbb{R}^2$ .

D'après (II-1) nous pouvons écrire :

$$P_{(x,y)}^{z,w} \{ \tau < t, U_\tau \in C \} = \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} wz - \frac{t}{2} z^2 + z(B_t - y) + w(tB_t - X_t + x)} \mathbb{1}_{\{ \tau < t, U_\tau \in C \}} \right].$$

Faisant appel au caractère fortement markovien du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  ([8], [9]), cette espérance peut se calculer de la manière suivante :

$$\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} wz - \frac{t}{2} z^2 + z(B_t - y) + w(tB_t - X_t + x)} \mathbb{1}_{\{ \tau < t, U_\tau \in C \}} \right] = \\ = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} wz - \frac{t}{2} z^2 - zy + wx} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ \mathbb{1}_{\{ \tau < t, U_\tau \in C \}} \mathbb{E}_{U_\tau} \left[ e^{zB_{t-\tau} + w(tB_{t-\tau} - X_{t-\tau})} \right] \right] \\ = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} wz - \frac{t}{2} z^2 - zy + wx} \int_0^t \int_C \mathbb{E}_{(u,v)} \left[ e^{(z+tw)B_{t-s} - wX_{t-s}} \right] \times \\ \times P_{(x,y)} \{ \tau \in ds, U_\tau \in m(du dv) \}.$$

On achève les calculs en faisant appel à l'identité bien connue  $\mathbb{E}(e^Z) = e^{\frac{\sigma^2}{2} + m}$  valable pour toute variable aléatoire gaussienne  $Z$  de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  (qui fournit l'égalité :

$$\mathbb{E}_{(u,v)}[e^{(z+tw)B_{t-s} - wX_{t-s}}] = e^{\frac{t^3-s^3}{6}w^2 + \frac{t^2-s^2}{2}wz + \frac{t-s}{2}z^2 + zv + w(sv-u)}.$$

On obtient ainsi la relation (II-3).  $\square$



### III. APPLICATIONS DE LA FORMULE (II-3)

La formule (II-3) conduit immédiatement aux résultats suivants :

#### Théorème 2

*Les distributions des couples  $(\tau_a, B_{\tau_a})$ ,  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  et  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$  relatives à la probabilité  $P_{(x,y)}^{z,w}$  s'explicitent respectivement selon les relations suivantes :*

$$(III-1) \quad P_{(x,y)}^{z,w} \{ \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv \} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} wz - \frac{t}{2} z^2 + z(v-y) + w(tv-a+x)} \times P_{(x,y)} \{ \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv \},$$

$$(III-2) \quad P_{(x,y)}^{z,w} \{ \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du \} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} wz - \frac{t}{2} z^2 + z(b-y) + w(tb-u+x)} \times P_{(x,y)} \{ \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du \},$$

$$(III-3) \quad P_{(x,y)}^{z,w} \{ \sigma_{ab} \in dt, X_{\sigma_{ab}} \in du \} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 - \frac{t^2}{2} wz - \frac{t}{2} z^2 - zy - w(u-x)} \times [e^{(z+tw)a} P_{(x,y)} \{ \sigma_a < \sigma_b, \sigma_a \in dt, X_{\sigma_a} \in du \} + e^{(z+tw)b} P_{(x,y)} \{ \sigma_a > \sigma_b, \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du \}],$$

*l'expression de la probabilité  $P_{(x,y)} \{ \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv \}$  étant fournie par la formule (I-1) et celle des probabilités  $P_{(x,y)} \{ \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du \}$ ,*

*$P_{(x,y)} \{ \sigma_a < \sigma_b, \sigma_a \in dt, X_{\sigma_a} \in du \}$  et  $P_{(x,y)} \{ \sigma_a > \sigma_b, \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du \}$  étant données implicitement par leurs transformées de Laplace-Fourier respectives (I-2), (I-3.1) et (I-3.2).*

Nous examinons maintenant plus en détails les deux cas particuliers  $w = 0$  et  $z = 0$ .

#### IV. CAS OU $w = 0$

Dans tout ce paragraphe nous poserons  $P_{(x,y)}^z = P_{(x,y)}^{z,0}$ .

##### 1) La loi du couple $(\tau_a, B_{\tau_a})$ sous la probabilité $P_{(x,y)}^z$ .

##### Théorème 3

*La distribution du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  relative à la probabilité  $P_{(x,y)}^z$  s'explicite selon :*

$$(IV-1) \quad P_{(x,y)}^z \{ \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv \} = e^{-\frac{t}{2}z^2 + z(v-y)} P_{(x,y)} \{ \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv \}.$$

##### Remarque 1

Lorsque  $z > 0$  et  $x < a$ , ou lorsque  $z < 0$  et  $x > a$ , alors l'inégalité  $\inf\{t > 0 : X_t + x + ty + \frac{t^2}{2}z = a\} \leq \inf\{t > 0 : X_t + x + ty = a\}$ , et la finitude  $P_{(x,y)}$ -presque sûre de  $\tau_a$  ([12]) assurent l'égalité  $P_{(x,y)}^z \{ \tau_a < +\infty \} = 1$ .

Dans les cas  $z > 0$  et  $x > a$ , ou  $z < 0$  et  $x < a$ , nous déduisons de (IV-1) l'identité :

$$P_{(x,y)}^z \{ \tau_a < +\infty \} = \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-\frac{\tau_a}{2}z^2 + z(B_{\tau_a} - y)} \right].$$

Nous n'avons pas pu obtenir la valeur explicite de cette espérance. La parabole  $t \mapsto (\frac{t^2}{2}z, tz)$  ayant tendance à "éloigner" les trajectoires du processus  $(U_t(x,y))_{t \geq 0}$  de la droite  $\{a\} \times \mathbb{R}$ , il est très probable que l'on puisse avoir dans ce cas  $P_{(x,y)}^z \{ \tau_a = +\infty \} > 0$ .

2) La transformée de Laplace-Fourier du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}^z$

**Théorème 4**

*La transformée de Laplace-Fourier de la loi du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  (sous  $P_{(x,y)}^z$ ) est donnée par la formule :*

(IV-2)

$$\mathbb{E}_{(x,y)}^z [e^{-\lambda \sigma_b + i\mu X_{\sigma_b}} \mathbb{1}_{\{\sigma_b < +\infty\}}] = e^{z(b-y) + i\mu x} \frac{\text{Ai}(2^{1/3} \frac{\lambda + \frac{z^2}{2} - i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3})}{\text{Ai}(2^{1/3} \frac{\lambda + \frac{z^2}{2} - i\mu b}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3})}, \quad \lambda > 0, \mu \neq 0,$$

avec  $\varepsilon = \text{signe de } \mu(y-b)$ .

**Preuve**

De la relation (III-2) nous déduisons l'identité :

$$P_{(x,y)}^z \{\sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du\} = e^{-\frac{t}{2} z^2 + z(b-y)} P_{(x,y)} \{\sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du\}.$$

L'application de la transformation de Laplace-Fourier fournit alors, en utilisant le fait bien connu que  $\sigma_b$  est fini  $P_{(x,y)}$ -presque sûrement ([3]) :

$$\mathbb{E}_{(x,y)}^z [e^{-\lambda \sigma_b + i\mu X_{\sigma_b}} \mathbb{1}_{\{\sigma_b < +\infty\}}] = e^{z(b-y)} \mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-(\lambda + \frac{z^2}{2}) \sigma_b + i\mu X_{\sigma_b}}].$$

Le résultat escompté provient alors de l'écriture explicite (I-2) de la transformée de Laplace-Fourier de la probabilité  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})(P_{(x,y)})$ .  $\square$



## Remarque 2

En faisant tendre  $\mu$  vers zéro dans (IV-2), l'équivalence asymptotique ([1]) :

$$\text{Ai } z \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} \text{ lorsque } |z| \rightarrow +\infty, \text{ larg } z < \frac{2\pi}{3},$$

nous permet de retrouver le résultat classique ([3], p. 27) suivant :

$$\mathbb{E}_y^z [e^{-\lambda \sigma_b} \mathbb{1}_{\{\sigma_b < +\infty\}}] = e^{z(b-y) - \sqrt{2\lambda + z^2} |b-y|},$$

$\mathbb{E}_y^z$  désignant l'espérance conditionnelle relative au mouvement brownien démarrant de  $y$  avec la dérive linéaire  $tz$ .

Notons aussi les égalités, utiles pour la suite :

$$P_y^z \{\sigma_b < +\infty\} = 1 \quad \text{si } z(b-y) \geq 0,$$

$$P_y^z \{\sigma_b < +\infty\} = e^{2z(b-y)} \quad \text{si } z(b-y) \leq 0.$$

### 3) La transformée de Laplace-Fourier du couple $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$ sous la probabilité $P_{(x,y)}^z$

#### Théorème 5

Fixons  $x \in \mathbb{R}$  et  $a < y < b$ .

Le temps d'atteinte  $\sigma_{ab}$  est  $P_{(x,y)}^z$ -presque sûrement fini, et la transformée de Laplace-Fourier du couple  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$ , relativement à la probabilité  $P_{(x,y)}^z$ , s'explicite selon la formule suivante :

(IV-3) :

$$\mathbb{E}_{(x,y)}^z [e^{-\lambda \sigma_{ab} + i\mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{i\mu x} \left[ e^{z(a-y)} \frac{\frac{A_1(y)}{A_1(b)} - \frac{A_2(y)}{A_2(b)}}{\frac{A_1(a)}{A_1(b)} - \frac{A_2(a)}{A_2(b)}} + e^{z(b-y)} \frac{\frac{A_1(y)}{A_1(a)} - \frac{A_2(y)}{A_2(a)}}{\frac{A_1(b)}{A_1(a)} - \frac{A_2(b)}{A_2(a)}} \right],$$

avec

$$A_1(y) = \text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda + \frac{z^2}{2} - i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{i\pi/3}\right),$$

$$A_2(y) = \text{Ai}\left(2^{1/3} \frac{\lambda + \frac{z^2}{2} - i\mu y}{|\mu|^{2/3}} e^{-i\pi/3}\right)$$

et

$\varepsilon = \text{signe de } \mu$ .

#### Preuve

1) La finitude,  $P_{(x,y)}^z$ -presque sûre, de  $\sigma_{ab} = \sigma_a \wedge \sigma_b$  dans le cas  $a < y < b$  résulte du fait que l'un des deux instants  $\sigma_a$  ou  $\sigma_b$  est nécessairement fini (voir remarque 2).

2) D'après la relation (III-3), nous avons, en distinguant l'ordre d'atteinte des barrières  $\{a\} \times \mathbb{R}$  et  $\{b\} \times \mathbb{R}$ , l'égalité

$$\begin{aligned}
P_{(x,y)}^z \{ \sigma_{ab} \in dt, X_{\sigma_{ab}} \in du \} &= e^{z(a-y)} e^{-\frac{t}{2} z^2} P_{(x,y)} \{ \sigma_a \in dt, X_{\sigma_a} \in du, \sigma_a < \sigma_b \} + \\
&+ e^{z(b-y)} e^{-\frac{t}{2} z^2} P_{(x,y)} \{ \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du, \sigma_a > \sigma_b \}.
\end{aligned}$$

La transformation de Laplace-Fourier appliquée à cette identité fournit la suivante :

$$\mathbb{E}_{(x,y)}^z [e^{-\lambda \sigma_{ab} + i\mu X_{\sigma_{ab}}}] = e^{z(a-y)} \Phi_{ab,z}^+(x,y) + e^{z(b-y)} \Phi_{ab,z}^-(x,y)$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi_{ab,z}^+(x,y) &= \mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-(\lambda+z^2/2)\sigma_{ab} + i\mu X_{\sigma_{ab}}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{ab}=\sigma_a\}}], \\
\Phi_{ab,z}^-(x,y) &= \mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-(\lambda+z^2/2)\sigma_{ab} + i\mu X_{\sigma_{ab}}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{ab}=\sigma_b\}}],
\end{aligned}$$

qui conduit, à l'aide des formules (I-3.1) et (I-3.2) au résultat souhaité (IV-3).  $\square$

### Remarque 3

La formule (IV-3) et l'équivalence asymptotique mentionnée dans la remarque 2 redonnent, après avoir fait tendre  $\mu$  vers zéro, le résultat connu ([14]) :

$$\mathbb{E}_y^z [e^{-\lambda \sigma_{ab}}] = e^{z(a-y)} \frac{\text{sh } \sqrt{2\lambda+z^2} (b-y)}{\text{sh } \sqrt{2\lambda+z^2} (b-a)} + e^{z(b-y)} \frac{\text{sh } \sqrt{2\lambda+z^2} (y-a)}{\text{sh } \sqrt{2\lambda+z^2} (b-a)}.$$

## V. CAS OU $z = 0$

Dans cette partie nous posons  $P_{(x,y)}^w = P_{(x,y)}^{0,w}$ .



1) La loi du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}^w$ .

#### Théorème 6

*La distribution du couple  $(\tau_a, B_{\tau_a})$  relative à  $P_{(x,y)}^w$  s'explicite selon :*

$$(V-1) \quad P_{(x,y)}^w \{ \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv \} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 + w(tv - a + x)} P_{(x,y)} \{ \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv \}.$$

#### Remarque 4

Un raisonnement analogue à celui fait dans la remarque 1 nous assure, lorsque  $w > 0$  et  $x < a$ , ou  $w < 0$  et  $x > a$ , que  $P_{(x,y)}^w \{ \tau_a < +\infty \} = 1$ .

Dans les cas  $w > 0$  et  $x > a$ , ou  $w < 0$  et  $x < a$ , nous avons d'après (V-1) l'égalité :

$$P_{(x,y)}^w \{ \tau_a < +\infty \} = \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-\frac{\tau_a^3}{6} w^2 + w(\tau_a B_{\tau_a} - a + x)} \right].$$

Nous n'avons pas pu calculer cette espérance. La cubique  $t \mapsto (\frac{t^3}{6} w, \frac{t^2}{2} w)$  ayant tendance à "éloigner" les trajectoires du processus  $(U_t(x,y))_{t \geq 0}$  de la droite  $\{a\} \times \mathbb{R}$ , il est très probable que l'on puisse avoir dans ce cas  $P_{(x,y)}^w \{ \tau_a = +\infty \} > 0$ .

2) La transformée de Laplace du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}^w$ .

### Théorème 7

Dans les cas  $y > b > 0$  et  $y < b < 0$  la loi du couple  $(\sigma_b, X_{\sigma_b})$  sous  $P_{(x,y)}^w$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$(V-2) \quad P_{(x,y)}^w \{ \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du \} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2} \varphi_{b,t,u}^w(x,y) \mathbb{1}_A(u) dt du,$$

avec la notation  $A = ]x, +\infty[$  si  $b > 0$ ,  $A = ]-\infty, x[$  si  $b < 0$ , la fonction  $\varphi_{b,t,u}^w(x,y)$  admettant pour double transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{b,\lambda,\mu}^w(x,y) &= \int_0^{+\infty} \int_A e^{-\lambda t - \mu u} \varphi_{b,t,u}^w(x,y) dt du \\ &= e^{-\mu x} \frac{\text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y + w(y-b)}{|\mu + w|^{2/3}}\right]}{\text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda + \mu b}{|\mu + w|^{2/3}}\right]}, \quad \lambda > bw, \quad \begin{cases} \mu > -w & \text{si } b > 0 \\ \mu < -w & \text{si } b < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

### Preuve

D'après (III-2) nous avons la relation

$$P_{(x,y)}^w \{ \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du \} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2 + w(tb - u + x)} P_{(x,y)} \{ \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du \}.$$

Nous en déduisons alors l'identité suivante :

$$\hat{\varphi}_{b,\lambda,\mu}^w(x,y) = e^{wx} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-(\lambda - bw)\sigma_b - (\mu + w)X_{\sigma_b}} \right],$$

l'expression de l'espérance figurant au second membre étant donnée par la formule (I-2'). On obtient ainsi le résultat annoncé.  $\square$

### Remarque 5

En faisant  $\mu = 0$  dans (V-2) nous obtenons dans les cas  $y > b > 0$  et  $w > 0$ , ou  $y < b < 0$  et  $w < 0$ , la formule de P. Groeneboom ([4]) :

$$P_y^w(\sigma_b \in dt) = e^{-\frac{t^3}{6} w^2} \varphi_{b,t}^w(y) dt,$$

$P_y^w$  désignant la probabilité associée au mouvement brownien démarrant de  $y$  avec la dérive parabolique  $\frac{t^2}{2} w$ , et la fonction  $\varphi_{b,t}^w(y)$  admettant pour transformée de Laplace :

$$\hat{\varphi}_{b,\lambda}^w(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \varphi_{b,t}^w(y) dt = \frac{\text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda + w(y-b)}{|w|^{2/3}}\right]}{\text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda}{|w|^{2/3}}\right]}, \quad \lambda > bw.$$



3) La transformée de Laplace du couple  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$  sous la probabilité  $P_{(x,y)}^w$ .

### Théorème 8

Dans les cas  $0 < a < y < b$  et  $a < y < b < 0$  la loi du couple  $(\sigma_{ab}, X_{\sigma_{ab}})$  sous  $P_{(x,y)}^w$  peut s'exprimer sous la forme :

$$(V-3) \quad P_{(x,y)}^w\{\sigma_{ab} \in dt, X_{\sigma_{ab}} \in du\} = e^{-\frac{t^3}{6}w^2} \phi_{ab,t,u}^w(x,y) \mathbb{1}_A(u) dt du,$$

avec la notation  $A = ]x, +\infty[$  si  $a > 0$ ,  $A = ]-\infty, x[$  si  $b < 0$ , la fonction  $\phi_{ab,t,u}^w(x,y)$  étant définie par sa double transformée de Laplace, pour  $\lambda > \max(aw, bw)$ , et  $\mu > -w$  si  $a > 0$ ,  $\mu < -w$  si  $b < 0$ , selon :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{ab,\lambda,\mu}^w(x,y) &= \int_0^{+\infty} \int_A e^{-\lambda t - \mu u} \phi_{ab,t,u}^w(x,y) dt du \\ &= e^{-\mu x} \left[ \frac{\frac{A_1(y)}{A_1(b)} - \frac{B_1(y)}{B_1(b)}}{\frac{A_1(a)}{A_1(b)} - \frac{B_1(a)}{B_1(b)}} + \frac{\frac{A_2(y)}{A_2(a)} - \frac{B_2(y)}{B_2(a)}}{\frac{A_2(b)}{A_2(a)} - \frac{B_2(b)}{B_2(a)}} \right], \end{aligned}$$

avec

$$A_1(y) = \text{Ai} \left[ 2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y + w(y-a)}{|\mu+w|^{2/3}} \right], \quad A_2(y) = \text{Ai} \left[ 2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y + w(y-b)}{|\mu+w|^{2/3}} \right],$$

$$B_1(y) = \text{Bi} \left[ 2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y + w(y-a)}{|\mu+w|^{2/3}} \right], \quad B_2(y) = \text{Bi} \left[ 2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y + w(y-b)}{|\mu+w|^{2/3}} \right].$$

### Preuve

En vertu de (III-3) nous avons l'égalité suivante :

$$P_{(x,y)}^w \{ \sigma_{ab} \in dt, X_{\sigma_{ab}} \in du \} = e^{-\frac{t^3}{6} w^2} \left[ e^{w(ta-u+x)} P_{(x,y)} \{ \sigma_a < \sigma_b, \sigma_a \in dt, X_{\sigma_a} \in du \} + e^{w(tb-u+x)} P_{(x,y)} \{ \sigma_a > \sigma_b, \sigma_b \in dt, X_{\sigma_b} \in du \} \right],$$

de laquelle nous déduisons :

$$\hat{\phi}_{ab,\lambda,\mu}^w(x,y) = e^{wx} [\Psi_{ab,w}^+(x,y) + \Psi_{ab,w}^-(x,y)]$$

avec

$$\Psi_{ab,w}^+(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-(\lambda-aw)\sigma_{ab} - (\mu+w)X_{\sigma_{ab}}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{ab} = \sigma_a\}} \right],$$

$$\Psi_{ab,w}^-(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-(\lambda-bw)\sigma_{ab} - (\mu+w)X_{\sigma_{ab}}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{ab} = \sigma_b\}} \right].$$

Nous en tirons alors, en faisant appel aux formules (I-3.1') et (I-3.2') le résultat escompté (V-3).  $\square$

Faisons enfin  $\mu = 0$  dans (V-3). Cela donne :

## Corollaire 2

Lorsque  $0 < a < y < b$  et  $w > 0$ , ou  $a < y < b < 0$  et  $w < 0$ , la distribution de la variable aléatoire  $\sigma_{ab}$  relative à la probabilité  $P_y^w$  s'exprime selon :

$$P_y^w\{\sigma_{ab} \in dt\} = e^{-\frac{t^3}{6}w^2} \varphi_{ab,t}^w(y)dt,$$

$$\text{où } \hat{\varphi}_{ab,\lambda}^w(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \varphi_{ab,t}^w(y)dt$$

$$= \frac{\frac{A_1(y)}{A_1(b)} - \frac{B_1(y)}{B_1(b)}}{\frac{A_1(a)}{A_1(b)} - \frac{B_1(a)}{B_1(b)}} + \frac{\frac{A_2(y)}{A_2(a)} - \frac{B_2(y)}{B_2(a)}}{\frac{A_2(b)}{A_2(a)} - \frac{B_2(b)}{B_2(a)}}, \quad \lambda > \max(aw, bw),$$

avec

$$A_1(y) = \text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda+w(y-a)}{|w|^{2/3}}\right], \quad A_2(y) = \text{Ai}\left[2^{1/3} \frac{\lambda+w(y-b)}{|w|^{2/3}}\right],$$

$$B_1(y) = \text{Bi}\left[2^{1/3} \frac{\lambda+w(y-a)}{|w|^{2/3}}\right], \quad B_2(y) = \text{Bi}\left[2^{1/3} \frac{\lambda+w(y-b)}{|w|^{2/3}}\right].$$

## Remarque 6

En ajoutant au mouvement brownien une dérive parabolique, la formule de Cameron-Martin a fait apparaître l'intégrale stochastique  $\int_0^t s dB_s$ , laquelle s'exprime en fonction des composantes du processus bidimensionnel  $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ . Cette observation essentielle nous a permis, dans ce travail, d'étendre certains résultats concernant le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  au processus  $(U_t^{z,w})_{t \geq 0}$ .

On pourrait alors s'intéresser au processus obtenu après adjonction au mouvement brownien d'une dérive polynomiale de degré  $n \geq 3$ . Toutefois, dans ce cas plus général, le théorème de Cameron-Martin nous confronte à l'intégrale stochastique  $\int_0^t s^{n-1} dB_s$ . Cette dernière s'explicite en fonction des primitives itérées jusqu'à l'ordre  $n-1$  du mouvement brownien, lesquelles ne semblent avoir fait jusqu'à présent l'objet d'aucune recherche.



## REFERENCES

- [1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. : *Handbook of mathematical functions with formulas, and mathematical tables*, Wiley, New-York, 1972.
- [2] CAMERON, R.M. and MARTIN, W.T. : *Transformations of Wiener integrals under translations*, Ann. Math. 45, n° 2 (1944), pp. 386-396.
- [3] DURRETT, R. : *Brownian motion and martingales in analysis*, Wadworth, Belmont (1984).
- [4] GRÉNEBOOM, P. : *Brownian Motion with a parabolic drift and Airy functions*, Prob. Th. Rel. Fields 81 (1989), pp. 79-109.
- [5] KAC, M. : *Probability theory : its role and its impact*, SIAM Rev. 4 (1962), pp. 1-11.
- [6] LACHAL, A. : *Sur l'intégrale du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 311, série I (1990), pp. 461-464.
- [7] LACHAL, A. : *Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, Ann. I.H.P. sect. B, vol. 27, n° 3 (1991), pp. 385-405.
- [8] LACHAL, A. : *A propos de l'intégrale du mouvement brownien*, à paraître dans Adv. Appl. Prob. .
- [9] LACHAL, A. : Thèse de Doctorat : *Etude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien*, (à paraître).
- [10] LEFEBVRE, M. : *First passage densities for a two-dimensional process*, SIAM J. Appl. Math. vol. 49, n° 5 (1989), pp. 1514-1523.
- [11] LEFEBVRE, M. and WHITTLE, P. : *Survival optimization for a dynamic system*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 12, n° 1 (1988), pp. 101-119.
- [12] Mc KEAN, H.P. Jr. : *A winding problem for a resonator driven by a white noise*, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [13] RICE, S.O. : *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.
- [14] STERN, F. : *An independence in Brownian motion with constant drift*, Ann. Proba. 5 (1977), pp. 571-572.

## CHAPITRE III

### PROBLEMES OUVERTS

Dans ce dernier chapitre nous mentionnons quelques problèmes ouverts ayant trait à l'intégrale du mouvement brownien, et allant dans le prolongement de nos travaux. Nous conservons ici les notations du chapitre II.

#### 1. PREMIER INSTANT D'ATTEINTE D'UNE BARRIERE BILATERE $\{a,b\}$ POUR LE PROCESSUS $(X_t)_{t \geq 0}$

Soit  $\tau_{ab} = \min\{t > 0 : X_t \in \{a,b\}\}$ . La loi du couple  $(\tau_{ab}, X_{\tau_{ab}})$  sous  $P_{(x,y)}$  (pour  $a < x < b$ ) reste actuellement encore inconnue.

Une approche possible est la technique familière d'équation aux dérivées partielles. Notons par

$$\varphi(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-\lambda \tau_{ab} - \mu |B_{\tau_{ab}}|} \right]$$

la transformée de Laplace de la probabilité  $(\tau_{ab}, |B_{\tau_{ab}}|)(P_{(x,y)})$ . La fonction  $\varphi$  vérifie le problème aux limites



$$\begin{cases} D\varphi(x,y) &= \lambda\varphi(x,y), \quad (x,y) \in ]a,b[ \times ]-\infty,+\infty[ , \\ \varphi(a^+,y) &= e^{\mu y} , \quad y < 0, \\ \varphi(b^-,y) &= e^{-\mu y} , \quad y > 0. \end{cases}$$

La difficulté réside dans la résolution de ce problème, la transformation de Kontorovich-Lebedev utilisée dans le cas d'une barrière unilatère semblant ici inefficace.

On pourrait aborder le problème d'une autre manière, en faisant appel à une technique de martingale. On montre facilement, grâce à la formule de Itô, que le processus

$$M_t = e^{-\lambda t - \mu X_t} A_{\lambda,\mu}(B_t), \quad t > 0,$$

(où l'on a posé  $A_{\lambda,\mu}(y) = \text{Ai}[2^{1/3} \frac{\lambda + \mu y}{|\mu|^{2/3}}]$  pour  $\lambda > 0$  et  $\mu \neq 0$  fixés) est, relativement à la filtration naturelle associée à  $(U_t)_{t \geq 0}$ , une martingale. Le théorème d'arrêt de Doob appliqué au temps d'arrêt  $\tau_{ab}$  fournit alors l'identité

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[M_{\tau_{ab}}] = \mathbb{E}_{(x,y)}[M_0],$$

soit encore :

### Proposition

$$e^{-\mu x} A_{\lambda,\mu}(y) = e^{-\mu a} \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\tau_{ab}=\tau_a\}} e^{-\lambda \tau_{ab}} A_{\lambda,\mu}(B_{\tau_{ab}})] + \\ + e^{-\mu b} \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\tau_{ab}=\tau_b\}} e^{-\lambda \tau_{ab}} A_{\lambda,\mu}(B_{\tau_{ab}})] .$$

Malheureusement, cette équation à elle seule ne permet pas de déterminer la transformée de "Laplace-Airy"  $\mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda \tau_{ab}} A_{\lambda,\mu}(B_{\tau_{ab}})]$  du couple  $(\tau_{ab}, B_{\tau_{ab}})$ .



## 2. PREMIER INSTANT DE SORTIE D'UN QUADRANT POUR LE PROCESSUS $(U_t)_{t \geq 0}$

En vue d'améliorer le modèle statistique, proposé par M. Lefèvre ([21]), du problème d'optimisation évoqué dans le chapitre II § 4, on pourrait faire intervenir simultanément les premiers instants de passage relatifs aux deux composantes "vitesse-altitude". Cette observation nous incite ainsi à considérer le quadruplet  $(\tau_a, B_{\tau_a}, \sigma_b, X_{\sigma_b})$ , dont la détermination de la loi conjointe se ramène à celle du couple  $(\rho_{ab}, U_{\rho_{ab}})$ , où  $\rho_{ab} = \tau_a \wedge \sigma_b$  représente le premier instant de sortie, pour le processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ , du quadrant  $A \times B$ , avec  $A = ]-\infty, a]$  ou  $A = [a, +\infty[$ , et  $B = ]-\infty, b]$  ou  $B = [b, +\infty[$  (selon la position du point de départ  $(x, y)$ ). Ceci peut se voir en utilisant par exemple la propriété de Markov comme suit :

$$\begin{aligned}
 P_{(x,y)}\{\tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv, \sigma_b \in ds, X_{\sigma_b} \in du\} &= \\
 &= P_{(x,y)}\{\tau_a < \sigma_b, \tau_a \in dt, B_{\tau_a} \in dv\} P_{(a,v)}\{\sigma_b \in ds-t, X_{\sigma_b} \in du\} + \\
 &+ P_{(x,y)}\{\sigma_b < \tau_a, \sigma_b \in ds, X_{\sigma_b} \in du\} P_{(u,b)}\{\tau_a \in dt-s, B_{\tau_a} \in dv\} \\
 &= P_{(x,y)}\{\rho_{ab} = \tau_a \in dt, U_{\rho_{ab}} \in \{a\} \times dv\} P_{(a,v)}\{\sigma_b \in ds-t, X_{\sigma_b} \in du\} + \\
 &+ P_{(x,y)}\{\rho_{ab} = \sigma_b \in ds, U_{\rho_{ab}} \in du \times \{b\}\} P_{(u,b)}\{\tau_a \in dt-s, B_{\tau_a} \in dv\}.
 \end{aligned}$$

Hormis les cas  $(x, y) \in ]-\infty, a] \times ]-\infty, b]$ ,  $b \leq 0$ , et  $(x, y) \in [a, +\infty[ \times [b, +\infty[$ ,  $b \geq 0$ , où l'on a  $\rho_{ab} = \sigma_b$ , le calcul des probabilités

$$P_{(x,y)}\{\rho_{ab} = \tau_a \in dt, U_{\rho_{ab}} \in \{a\} \times dv\} \text{ et } P_{(x,y)}\{\rho_{ab} = \sigma_b \in ds, U_{\rho_{ab}} \in du \times \{b\}\}$$

reste aujourd'hui un problème ouvert.

Signalons deux approches éventuelles. Nous nous limitons au cas où par exemple  $(x, y) \in ]a, +\infty[ \times ]-\infty, b[$ .

i) La technique usuelle d'équation aux dérivées partielles conduit au problème aux limites, vérifié par la triple transformée de Laplace

$$\psi(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\rho_{ab}-\mu X_{\rho_{ab}}+\nu B_{\rho_{ab}}}], \lambda, \mu, \nu > 0 :$$

$$\begin{cases} D\psi(x,y) &= \lambda\psi(x,y), (x,y) \in ]a, +\infty[ \times ]-\infty, b[, \\ \psi(a^+, y) &= e^{-\mu a + \nu y}, y < b \wedge 0, \\ \psi(x, b^-) &= e^{-\mu x + \nu b}, x > a. \end{cases}$$

Nous ne savons pas résoudre ce problème.

ii) Dans la perspective de déterminer la transformée de "Laplace-Airy"

$$\mathbb{E}_{(x,y)}[e^{-\lambda\rho_{ab}-\mu X_{\rho_{ab}}} A_{\lambda,\mu}(B_{\rho_{ab}})]$$

du triplet  $(\rho_{ab}, X_{\rho_{ab}}, B_{\rho_{ab}})$ , nous invoquons la martingale  $(M_t)_{t \geq 0}$  (introduite au paragraphe 1) pour en déduire l'équation suivante :

### Proposition

$$\begin{aligned} e^{-\mu x} A_{\lambda,\mu}(y) = e^{-\mu a} \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\rho_{ab}=\tau_a\}} e^{-\lambda\rho_{ab}} A_{\lambda,\mu}(B_{\rho_{ab}})] + \\ + A_{\lambda,\mu}(b) \mathbb{E}_{(x,y)}[\mathbb{1}_{\{\rho_{ab}=\sigma_b\}} e^{-\lambda\rho_{ab}-\mu X_{\rho_{ab}}}] . \end{aligned}$$

Cette seule équation est insuffisante pour répondre à la question posée.



### 3. TEMPS DE SEJOUR DU PROCESSUS $(X_t)_{t \geq 0}$

Le problème tout-à-fait naturel de l'étude du temps de séjour pour le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  ne semble, à notre connaissance, avoir fait jusqu'à présent l'objet d'aucune recherche. Nous présentons deux exemples typiques.

#### a) Temps de séjour dans $[a, +\infty[$ avant d'atteindre $b$

Soit  $T_{a,b} = \int_0^{\tau_b} \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(X_s) ds$ . Nous supposons par exemple que  $a < b$ .

Dans [18] nous avons prouvé que la transformée de Laplace de la variable aléatoire  $T_{a,b}$

$$f(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-\lambda T_{a,b}}]$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles :

$$Df(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in ]-\infty, a[ \times ]-\infty, +\infty[ \\ \lambda f(x,y) & \text{si } (x,y) \in ]a, b[ \times ]-\infty, +\infty[ \end{cases}$$

avec la condition :

$$f(b^-, y) = 0 \quad \text{si } y > 0.$$

Nous avons été alors confrontés à deux difficultés :

- l'absence de conditions initiales relatives à l'axe  $\{a\} \times \mathbb{R}$  ;
- l'apparition de la bande  $]a, b[ \times \mathbb{R}$ , laquelle nous renvoie au problème de la détermination de la loi de  $\tau_{ab}$  énoncé au paragraphe 1.

Toutefois, en faisant appel à la distribution du couple  $(\tau_b, B_{\tau_b})$ , nous avons obtenu une représentation intégrale des moments de la variable aléatoire  $T_{a,b}$ . Ce résultat fait l'objet de la publication intitulée " *Les moments du temps de séjour de l'intégrale du mouvement brownien* " ([18]), que nous avons insérée dans le chapitre précédent.



**b) Temps de séjour dans  $[a, +\infty[$  durant l'intervalle de temps  $[0, t]$**

Nous nous intéressons ici au temps de séjour  $T_{a,t} = \int_0^t \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(X_s) ds$  du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  dans la demi-droite  $[a, +\infty[$  durant l'intervalle de temps  $[0, t]$ , où  $t$  est un instant déterministe fixé. La loi de la variable aléatoire  $T_{a,t}$  demeure actuellement inconnue. Mentionnons à titre indicatif une approche possible.

Notons  $g(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-\mu T_{a,t}}] dt$  la transformée de Laplace itérée de  $T_{a,t}$ .

**Proposition**

*La fonction  $g(x, y)$  satisfait à l'équation intégrale :*

$$(EI) \quad g(x, y) = \frac{1}{\lambda} - \mu \int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\lambda(x, y; u, v) g(u, v) du dv.$$

**Preuve**

L'intégrale double figurant au second membre de (EI) se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\lambda(x, y; u, v) g(u, v) du dv &= \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(s+t)} ds dt \int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x, y; u, v) \mathbb{E}_{(u,v)} [e^{-\mu T_{a,s}}] du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(s+t)} \mathbb{E}_{(x,y)} [\mathbb{1}_{[a, +\infty[}(X_t) \mathbb{E}_{U_t} [e^{-\mu T_{a,s}}]] ds dt. \end{aligned}$$

La propriété de Markov du processus  $(U_t)_{t \geq 0}$  fournit, après avoir remarqué que  $\theta_t T_{a,s} = T_{a,t+s} - T_{a,t}$ , l'identité :

$$\mathbb{E}_{(x,y)} [\mathbb{1}_{[a, +\infty[}(X_t) \mathbb{E}_{U_t} [e^{-\mu T_{a,s}}]] = \mathbb{E}_{(x,y)} [\mathbb{1}_{[a, +\infty[}(X_t) e^{\mu T_{a,t}} e^{-\mu T_{a,t+s}}].$$

Ainsi, après avoir effectué le changement de variable  $s = \sigma - t$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\lambda(x, y; u, v) g(u, v) du dv &= \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_{(x, y)} [\mathbb{1}_{[a, +\infty[}(X_t) e^{\mu T_{a, t}} \int_t^{+\infty} e^{-\lambda \sigma - \mu T_{a, \sigma}} d\sigma] dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \sigma} \mathbb{E}_{(x, y)} [e^{-\mu T_{a, \sigma}} \int_0^\sigma \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(X_t) e^{\mu T_{a, t}} dt] d\sigma. \end{aligned}$$

En remarquant que l'on a, pour  $\sigma \in [0, +\infty[ \setminus \Delta$  où  $\Delta$  est une partie au plus dénombrable de  $[0, +\infty[$ , l'égalité :

$$\int_0^\sigma \mathbb{1}_{[a, +\infty[}(X_t) e^{\mu T_{a, t}} dt = \frac{e^{\mu T_{a, \sigma}} - 1}{\mu},$$

on en tire l'équation annoncée (EI).  $\square$

Le noyau  $\Phi_\lambda(x, y; u, v)$  représentant la fonction élémentaire de l'opérateur différentiel  $\lambda - D$ , nous déduisons immédiatement de (EI) le corollaire suivant :

### Corollaire

*La fonction  $g(x, y)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :*

$$(EDP) \quad Dg(x, y) = \begin{cases} \lambda g(x, y) - 1 & \text{si } (x, y) \in ]-\infty, a[ \times ]-\infty, +\infty[ \\ (\lambda + \mu)g(x, y) - 1 & \text{si } (x, y) \in ]a, +\infty[ \times ]-\infty, +\infty[ \end{cases}.$$

L'absence de condition aux limites sur la fonction  $g$  (on ne connaît pas a priori les valeurs  $\mathbb{E}_{(a, y)} [e^{-\lambda T_{a, t}}]$ ) nous empêche de résoudre l'équation (EDP).

#### 4. PRIMITIVES ITERÉES DU MOUVEMENT BROWNIEN

Dans l'article [20] la formule de Cameron-Martin nous a permis d'obtenir, entre autre, la distribution du premier instant de passage en un point par le mouvement brownien auquel se superpose une dérive parabolique. Qu'en advient-il lorsque le mouvement brownien est soumis à une dérive polynomiale de degré  $n \geq 3$  ? La formule de Cameron-Martin fait apparaître alors l'intégrale stochastique  $\int_0^t s^{n-1} dB_s$ , laquelle s'exprime en fonction des primitives itérées du mouvement brownien. Cette observation nous amène à étudier le processus  $n$ -dimensionnel

$$U_t^{(n)} = (X_t^{(n-1)}, X_t^{(n-2)}, \dots, X_t^{(1)}, X_t^{(0)}), t \geq 0,$$

constitué des primitives successives du mouvement brownien

$$X_t^{(k)} = \frac{1}{k!} \int_0^t (t-s)^k dB_s, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Le processus  $U_t^{(n)}$  est markovien et admet pour générateur infinitésimal l'opérateur différentiel

$$D^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

La recherche du premier instant de passage pour le processus  $(X_t^{(n-1)})_{t \geq 0}$  nous confronte ainsi à un problème aux limites de la forme suivante :

$$\begin{cases} D^{(n)} u(x_1, \dots, x_n) = \lambda u(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in ]-\infty, a[ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ u(a^-, x_2, \dots, x_n) = v(x_2, \dots, x_n), (x_2, \dots, x_n) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^{n-2}. \end{cases}$$

La solution de ce problème est actuellement encore inconnue.

Nous terminons enfin ce travail en évoquant un problème d'une nature différente des précédents, non moins intéressant.



## 5. L'OPERATEUR DIFFERENTIEL $d^4/dx^4$

Il apparaît que la fonction de covariance du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  dont nous rappelons l'expression :

$$c(x,y) = \mathbb{E}(X_x X_y) = (x \wedge y)^2 \left( \frac{x \vee y}{2} - \frac{x \wedge y}{6} \right),$$

coïncide avec la fonction de Green de l'opérateur différentiel  $d^4/dx^4$  sur l'intervalle  $[0,1]$  assorti de certaines conditions aux limites. Plus précisément on vérifie facilement que la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{d^4 u}{dx^4} = f & \text{sur } ]0,1[ \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0 \end{cases}$$

s'exprime sous la forme :

$$u(x) = \int_0^1 c(x,y)f(y)dy.$$

On pressent là un lien possible avec le problème de Lauricella en dimension  $n \geq 2$  (généralisant le problème unidimensionnel précédent), à savoir trouver une fonction  $u$  définie sur un domaine borné  $D \subset \mathbb{R}^n$  et vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } D \\ u = g & \text{sur } \partial D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g, h : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  étant des fonctions données.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Wiley, New-York, 1972.
- [2] CHANDRASEKHAR, S. : *Stochastic problems in physics and astronomy*, Rev. Mod. Phys. 15, n° 1 (1943), pp. 1-89.
- [3] CHUNG, K.L. : *Lectures from Markov processes to Brownian motion*, Springer Verlag, Berlin, 1982.
- [4] CRAMER, H. and LEADBETTER, M.R. : *Stationary and related stochastic processes : sample function properties and their applications*, Wiley, New-York, 1967.
- [5] ERDELYI, A. : *Higher transcendental functions*, vol. 2, Mc Graw-Hill, New-York, 1953.
- [6] ERDELYI, A. : *Tables of integral transforms*, vol. 2, McGraw-Hill, New-York, 1954.
- [7] GOLDMAN, M. : *On the first passage of the integrated Wiener process*, Ann. Math. Stat. 42 (1971), pp. 2150-2155.
- [8] GOR'KOV, Ju.P. : *A formula for the solution of a certain boundary value problem for the stationary equation of brownian motion*, Soviet. Math. Dokl. 16 (1975), pp. 904-908.
- [9] GRÖNEBOOM, P. : *Brownian Motion with a parabolic drift and Airy functions*, Prob. Th. Rel. Fields 81 (1989), pp. 79-109.
- [10] KAC, M. : *Probability theory : its role and its impact*, SIAM Rev. 4 (1962), pp. 1-11.



- [11] KAC, M. : *Aspects probabilistes de la théorie du potentiel*. Les presses de l'Université de Montréal, 1970.
- [12] LACHAL, A. : *Sur l'intégrale du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 311, série I (1990), pp. 461-464.
- [13] LACHAL, A. : *Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien*, Ann. I.H.P. sect. B, vol. 27, n° 3 (1991), pp. 385-405.
- [14] LACHAL, A. : *Sur les temps de passages successifs de l'intégrale du mouvement brownien*, proposé.
- [15] LACHAL, A. : *Dernier instant de passage pour l'intégrale du mouvement brownien*, proposé.
- [16] LACHAL, A. : *Sur les excursions du mouvement brownien*, proposé.
- [17] LACHAL, A. : *Les excursions du mouvement brownien*, proposé.
- [18] LACHAL, A. : *Les moments du temps de séjour de l'intégrale du mouvement brownien*, proposé.
- [19] LACHAL, A. : *A propos de l'intégrale du mouvement brownien*, à paraître dans Adv. Appl. Prob. .
- [20] LACHAL, A. : *Sur la distribution de certaines fonctionnelles de l'intégrale du mouvement brownien avec dérivées parabolique et cubique*, proposé.
- [21] LEFEBVRE, M. : *First passage densities of a two-dimensional process*, SIAM J. Appl. Math. 49 (1989), pp. 1514-1523.
- [22] LEFEBVRE, M. and LEONARD, E. : *On the first hitting place of the integrated Wiener process*, Adv. Appl. Prob. 21 (1989), pp. 945-948.
- [23] LEFEBVRE, M. and WHITTLE, P. : *Survival optimization for a dynamic system*, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 12, n° 1 (1988), pp. 101-119.
- [24] Mc KEAN, H.P. Jr. : *A winding problem for a resonator driven by a white noise*, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963), pp. 227-235.
- [25] ORNSTEIN, L.S. and UHLENBECK, G.E. : *On the theory of the Brownian motion*, Phys. Rev. 36, n° 3 (1930), pp. 823-841.
- [26] RICE, S.O. : *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. 23 (1944), pp. 282-332 ; 24 (1945), pp. 46-156.
- [27] UHLENBECK, G.E. and WANG, M.C. : *On the theory of the Brownian motion II*, Rev. Mod. Phys. 17 (1945), pp. 323-342.
- [28] WHITTLE, P. : *Optimization over time*, vol. 1, Wiley, Chichester, 1982.
- [29] WONG, E. : *Some results concerning the zero-crossings of gaussian noise*, SIAM J. Appl. Math. 14, n° 6 (1966), pp. 1246-1254.