



**HAL**  
open science

# Contribution à la robustesse et à l'optimisation fiabiliste des structures

Fatma Abid

► **To cite this version:**

Fatma Abid. Contribution à la robustesse et à l'optimisation fiabiliste des structures. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Normandie Université; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2019. Français. NNT : 2019NORMIR24 . tel-02925045

**HAL Id: tel-02925045**

**<https://theses.hal.science/tel-02925045>**

Submitted on 28 Aug 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité: MECANIQUE

Préparée au sein de  
Institut National des Sciences Appliquées de Rouen  
Et  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax

### Contribution à la robustesse et à l'optimisation fiabiliste des structures

Présentée et soutenue par

Fatma ABID

Thèse soutenue publiquement le (02/12/2019)

devant le jury composé de

M. Dimitri LEFEBVRE	Professeur des universités, Université du Havre	Président
M. Jean Luc REBIERE	Maitre de conférence HDR, Université du Maine	Rapporteur
M. Pierre Richard DAHOO	Professeur des universités, Université de Versailles	Rapporteur
M. Tahar FAKHFAKH	Professeur des universités, l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax	Examineur
M. Abdelkhalak EL HAMI	Professeur des universités, l'INSA de Rouen	Directeur de thèse
M. Tarek MERZOUKI	Maitre de conférence, Université de Versailles	Co-encadrant
M. Lassaad WALHA	Professeur des universités, l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax	Directeur de thèse
M. Mohamed HADDAR	Professeur des universités, l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax	Co-encadrant

Thèse dirigée par M. Abdelkhalak El Hami (LMN) et M. Lassaad WALHA (LA2MP)



# Résumé

La conception des ouvrages économiques a suscité de nombreux progrès dans les domaines de la modélisation et de l'optimisation, permettant l'analyse de structures de plus en plus complexes. Cependant, les conceptions optimisées sans considérer les incertitudes des paramètres, peuvent ne pas respecter certains critères de fiabilité. Pour assurer le bon fonctionnement de la structure, il est important de prendre en considération l'incertitude dès la phase de conception. Il existe plusieurs théories dans la littérature pour traiter les incertitudes. La théorie de la fiabilité des structures consiste à définir la probabilité de défaillance d'une structure par la probabilité que les conditions de bon fonctionnement ne soient pas respectées. On appelle cette étude l'analyse de la fiabilité. L'intégration de l'analyse de fiabilité dans les problèmes d'optimisation constitue une nouvelle discipline introduisant des critères de fiabilité dans la recherche de la configuration optimale des structures, c'est le domaine de l'optimisation fiabiliste (RBDO). Cette méthodologie de RBDO vise donc à considérer la propagation des incertitudes dans les performances mécaniques en s'appuyant sur une modélisation probabiliste des fluctuations des paramètres d'entrée.

Dans ce cadre, ce travail de thèse porte sur l'analyse robuste et l'optimisation fiabiliste des problèmes mécaniques complexes. Il est important de tenir compte des paramètres incertains du système pour assurer une conception robuste. L'objectif de la méthode RBDO est de concevoir une structure afin d'établir un bon compromis entre le coût et l'assurance de fiabilité. Par conséquent, plusieurs méthodes, telles que la méthode hybride et la méthode optimum safety factor, ont été développées pour atteindre cet objectif. Pour remédier à la complexité des problèmes mécaniques complexes comportant des paramètres incertains, des méthodologies spécifiques à cette problématique, tel que les méthodes de méta-modélisation, ont été développées afin de bâtir un modèle de substitution mécanique, qui satisfait en même temps l'efficacité et la précision du modèle.

**Mots clés :** Système mécanique complexe; Incertitude; Optimisation fiabiliste; Méta-modélisation.

# Abstract

The design of economic system leads to many advances in the fields of modeling and optimization, allowing the analysis of structures more and more complex. However, optimized designs can suffer from uncertain parameters that may not meet certain reliability criteria. To ensure the proper functioning of the structure, it is important to consider uncertainty from the design stage. There are several theories in the literature for dealing with uncertainties. The theory of structural reliability consists in defining the probability of failure of a structure by the probability that the conditions of good operation are not respected. This study is called the reliability analysis. The integration of reliability analysis in optimization problems is a new discipline introducing reliability criteria in the search for the optimal configuration of structures, this is the domain of reliability optimization (RBDO). This RBDO methodology aims to consider the propagation of uncertainties in the mechanical performance by relying on a probabilistic modeling of input parameter fluctuations.

In this context, this thesis focuses on a robust analysis and a reliability optimization of complex mechanical problems. It is important to consider the uncertain parameters of the system to ensure a robust design. The objective of the RBDO method is to design a structure in order to establish a good compromise between the cost and the reliability assurance. As a result, several methods, such as the hybrid method and the optimum safety factor method, have been developed to achieve this goal. To address the complexity of complex mechanical problems with uncertain parameters, methodologies specific to this issue, such as meta-modeling methods, have been developed to build a mechanical substitution model, which at the same time satisfies the efficiency and the precision of the model.

**Keywords :** Complex mechanical system ; Uncertainty ; Reliability based design optimization ; Meta-modelization.

# Remerciements

Le travail rapporté dans ce mémoire est le fruit d'une collaboration scientifique entre le Laboratoire de Mécanique de Normandie (LMN) de l'institut national des sciences appliquées de Rouen (FRANCE) avec le Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Productique (LA2MP) à l'école nationale d'ingénieurs de Sfax (TUNISIE). L'achèvement de ce travail n'aurait pas été possible sans la précieuse contribution de nombreuses personnes.

J'adresse ma profonde gratitude **M. Abdelkhalak El HAMI** de m'avoir accueilli au sein du LMN et encadré pendant ces trois années de thèse. Il a mis en place les conditions propices au bon déroulement de mes travaux au sein du LMN. Ses qualités scientifiques et humaines ainsi que sa disponibilité, nous ont permis d'avoir des échanges scientifiques sereins et efficaces, dans la bonne humeur.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à **M. Lassaad WALHA** pour m'avoir accueilli et dirigé au sein du LA2MP dans son groupe de doctorants, pendant ces trois années, ainsi que pour son soutien actif et les conseils prodigués qui ont permis l'achèvement de ce travail.

Je remercie vivement **M. Tarek MERZOUKI** et **M. Hassen TRABELSI** pour leurs encadrements, leurs encouragements et leurs conseils scientifiques tout le long de ce travail.

J'exprime ma parfaite reconnaissance à **M. Mohamed HADDAR** pour m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet passionnant et pour m'avoir suivi tout au long de cette étude.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail : en premier **M. Jean Luc REBIERE** et **M. Pierre Richard DAHOO** qui ont accepté d'être à la fois rapporteurs du manuscrit et membres du jury, **M. Dimitri LEFEBVRE** qui en a assuré la présidence et **M. Tahar FAKHFAKH** qui en a assuré l'examen.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance à ma famille pour sa confiance et pour avoir su m'épauler et surtout me supporter durant toutes mes années d'études. Je remercie également tous mes amis dans les laboratoires LA2MP et LMN pour leur soutien indéfectible et leur encouragement.

# Table des matières

Liste des abréviations	xv
Introduction générale	1
<b>1 Quantification des incertitudes et de la fiabilité des problèmes mécaniques</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Aperçu des alliages à mémoire de forme . . . . .	5
1.2.1 Transformation martensitique . . . . .	6
1.2.2 Effet mémoire de forme simple sens . . . . .	7
1.2.3 Effet mémoire de forme double sens . . . . .	9
1.2.4 Pseudoélasticité . . . . .	9
1.3 Application des alliages à mémoire de forme ( <i>AMF</i> ) . . . . .	10
1.3.1 Applications aérospatiales . . . . .	10
1.3.2 Applications biomédicales . . . . .	11
1.3.3 Applications automobiles . . . . .	13
1.3.4 Applications robotiques . . . . .	13
1.4 Propagation des incertitudes . . . . .	14
1.4.1 Sources d'incertitudes . . . . .	15
1.4.2 Méthodes de propagation des incertitudes . . . . .	15
1.5 Fiabilité des structures . . . . .	19
1.5.1 Variables de conception . . . . .	20
1.5.2 Fonction de performance . . . . .	20

1.5.3	Indice de fiabilité . . . . .	21
1.5.4	Défaillance en mécanique . . . . .	23
1.5.5	Couplage mécano-fiabiliste . . . . .	26
1.6	Conclusion . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Approche robuste basée sur le chaos polynomial généralisé des systèmes mécaniques</b>	<b>29</b>
2.1	Introduction . . . . .	30
2.2	Méthode de Monte Carlo . . . . .	30
2.3	Chaos polynômial généralisé (CPG) . . . . .	31
2.3.1	Généralités . . . . .	31
2.3.2	Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynômial généralisé . . . . .	33
2.4	Etude d'un actionneur en alliage à mémoire de forme en présence d'incertitude	36
2.4.1	Description du micro actionneur en <i>AMF</i> . . . . .	37
2.4.2	Analyse numérique de l'actionneur en <i>AMF</i> . . . . .	38
2.4.3	Résultats déterministes et discussion . . . . .	39
2.4.4	Analyse probabiliste proposée . . . . .	40
2.4.5	Distribution de probabilité optimale . . . . .	47
2.5	Etude d'une prothèse de hanche en présence d'incertitude . . . . .	48
2.5.1	Modèle et matériaux utilisés . . . . .	49
2.5.2	Conditions aux limites . . . . .	51
2.5.3	Résultats déterministes de la prothèse de hanche . . . . .	52
2.5.4	Analyse probabiliste proposée . . . . .	52
2.6	Conclusion . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Optimisation fiabiliste des systèmes mécaniques</b>	<b>58</b>

3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	Optimisation des structures . . . . .	59
3.2.1	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	60
3.2.2	Optimisation de conception déterministe ( <i>DDO</i> ) . . . . .	61
3.2.3	Exemple d'une poutre en flexion . . . . .	62
3.3	Optimisation fiabiliste ( <i>RBDO</i> ) . . . . .	63
3.3.1	Classification de l'optimisation fiabiliste . . . . .	65
3.3.2	Approche classique . . . . .	67
3.3.3	Méthode hybride (HM) . . . . .	68
3.3.4	Facteur de sécurité optimal (Optimum safety factor OSF) . . . . .	69
3.3.5	Méthode hybride robuste (RHM) . . . . .	72
3.4	Méthode OSF combinée avec le chaos polynomial généralisé appliquée à un implant dentaire en présence d'incertitudes . . . . .	74
3.4.1	Introduction . . . . .	74
3.4.2	Analyse déterministe de l'implant dentaire en 2D . . . . .	74
3.5	Optimisation fiabiliste basée sur la méthode RHM d'un treillis en alliage à mémoire de forme . . . . .	80
3.5.1	Procédures de l'optimisation de conception déterministe et de l'optimisation fiabiliste . . . . .	82
3.5.2	Résultats de l'optimisation de conception déterministe et de l'optimisation fiabiliste . . . . .	83
3.6	Conclusion . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Méta-modélisation pour l'analyse d'incertitude des systèmes mécaniques</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction . . . . .	88
4.2	Description des approches de modélisation de substitution . . . . .	89
4.3	Méthodes d'échantillonnage de l'espace de conception . . . . .	90

4.3.1	Plans d'expérience standards . . . . .	90
4.3.2	Méthodes de remplissage de l'espace de conception . . . . .	91
4.4	Construction des métamodèles . . . . .	92
4.4.1	Régression polynômiale . . . . .	93
4.4.2	Moindres carrés mobiles ( <i>MLS</i> ) . . . . .	94
4.4.3	Les fonctions à base radiale ( <i>RFB</i> ) . . . . .	95
4.4.4	Méthode de Krigeage . . . . .	96
4.5	Validation du métamodèle . . . . .	98
4.5.1	Mesures d'erreur . . . . .	99
4.5.2	Validation croisée . . . . .	100
4.6	Analyse d'incertitudes basée sur des modèles de substitution pour la micro pompe . . . . .	100
4.6.1	Simulation déterministe par la méthode éléments finis . . . . .	101
4.6.2	Analyse d'incertitude proposée basée sur un modèle de substitution . . . . .	102
4.7	Conclusion . . . . .	106
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>108</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>
	<b>Publications scientifiques</b>	<b>120</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>122</b>

# Table des figures

1.1	Les structures cristallines et les transformations de phase de l'austénite, mono-variante et multi-variante martensites. . . . .	7
1.2	Schéma de l'effet de mémoire de forme pour un <i>AMF</i> NiTi typique. . . . .	8
1.3	(a) Chargement thermique permettant d'obtenir l'effet mémoire de forme double sens, (b) Effet mémoire de forme double sens : sans contraintes externes appliquées. . . . .	9
1.4	Schéma de la pseudoélasticité pour un <i>AMF</i> NiTi polycristallin. . . . .	10
1.5	Accouplement de tube en titane. . . . .	11
1.6	Utilisation des <i>AMF</i> pour les applications biomécaniques. . . . .	12
1.7	Propagation de l'incertitude et de l'analyse de sensibilité dans le modèle mécanique. . . . .	14
1.8	Les deux sources d'incertitude. . . . .	16
1.9	Méthodes de quantification des incertitudes . . . . .	16
1.10	Domaines de sûreté et de défaillance dans le cas de deux variables de conception	21
1.11	Simulations de Monte Carlo pour la probabilité de défaillance . . . . .	24
1.12	Simulations d'importance pour la probabilité de défaillance . . . . .	24
1.13	De l'espace physique vers l'espace normé. . . . .	25
1.14	(a) Approximation <i>FORM</i> , (b) Approximation <i>SORM</i> . . . . .	26
1.15	Schéma du principe du couplage mécano-fiabiliste . . . . .	27
2.1	Croquis de la section transversale de l'actionneur <i>NiTi</i> : $e$ est l'épaisseur de la membrane, $Dm$ est le diamètre de la membrane, $Ds$ est le diamètre de l'espaceur, $Ls$ est la longueur de l'espaceur (MERZOUKI, DUVAL et ZINEB 2012). . . . .	37
2.2	Deux membranes de modèle 3D de la micro pompe. . . . .	38

2.3	Chargement thermique pour les deux membranes en <i>NiTi</i> . . . . .	39
2.4	Déplacement de l'actionneur. . . . .	40
2.5	Distribution de probabilité uniforme des paramètres du matériau. . . . .	42
2.6	Valeur moyenne de déplacement de la micro-pompe pour une distribution uniforme. . . . .	43
2.7	Écart type de déplacement de la micro-pompe pour une distribution uniforme.	43
2.8	Distribution de probabilité normale des paramètres du matériau :(gris) écart type (sd)= 5%, (bleu) écart type (sd)=10% . . . . .	45
2.9	Valeur moyenne de déplacement de la micro pompe pour une distribution normale . . . . .	46
2.10	Écart type de déplacement de la micro pompe pour une distribution normale.	46
2.11	Valeur moyenne de déplacement de la micro-pompe pour une distribution uniforme et normale . . . . .	47
2.12	Écart type de déplacement de la micro-pompe pour une distribution uniforme et normale. . . . .	48
2.13	Prothèse de hanche en 3D. . . . .	49
2.14	Tige solide 2D avec les différentes couches. . . . .	50
2.15	(a) Prothèse de hanche 2D utilisant le logiciel ANSYS (b) Modèle de maillage. . . . .	51
2.16	Conditions aux limites de la prothèse de hanche. . . . .	51
2.17	Résultats de la simulation déterministe . . . . .	52
2.18	Amplitude de la contrainte de von mises pour $p = 1$ en fonction des paramètres du matériau : $E_{cortical}$ et $E_{cancellous}$ . . . . .	54
2.19	Distribution de la probabilité du contrainte de von mises pour $p = 1$ : (a) $\sigma_1$ , (b) $\sigma_2$ . . . . .	55
2.20	Moyenne de contrainte mise en place : (a) $\sigma_1$ , (b) $\sigma_2$ . . . . .	55
3.1	Problèmes d'optimisation de structure. . . . .	60

3.2	Minimum local et minimum global. . . . .	61
3.3	Processus d'optimisation de conception déterministe. . . . .	62
3.4	Shéma de la poutre en flexion. . . . .	62
3.5	(a) Evolution de la fonction objective, (b) Evolution de la contrainte d'optimisation. . . . .	64
3.6	Processus séquentiel de l'optimisation fiabiliste de conception. . . . .	64
3.7	Classification des différentes méthodes de la RBDO. . . . .	66
3.8	Algorithme de l'approche classique de l'optimisation fiabiliste. . . . .	67
3.9	Espace hybride de conception ( <i>HDS</i> ). . . . .	69
3.10	Algorithme de la méthode hybride. . . . .	70
3.11	Algorithme de la méthode <i>OSF</i> . . . . .	71
3.12	(a) Problème rencontré de la méthode hybride classique présentée dans le <i>HDS</i> , (b) <i>RHM</i> dans le <i>HDS</i> (YAICH et al. 2017). . . . .	72
3.13	Algorithme de la méthode hybride robuste (YAICH et al. 2017). . . . .	73
3.14	(a) modèle géométrique de l'implant dentaire, (b) conditions aux limites appliqués à l'implant dentaire. . . . .	75
3.15	Algorithme de la fonction <i>OSF</i> en utilisant le méta modèle <i>CPG</i> . . . . .	77
3.16	Courbe itérative du volume de l'optimisation de l'implant dentaire par la méthode <i>DDO</i> . . . . .	78
3.17	Schéma d'un treillis en alliage à mémoire de forme (PACHIKARA 2014) . . . . .	80
3.18	Chargements appliqués à la structure. . . . .	81
4.1	Algorithme de modèles de substitution. . . . .	89
4.2	a : Plan factoriel complet, b : Plan composite centré pour 3 paramètres et 2 niveaux, c : Plan de Box-Behnken pour 3 paramètres. . . . .	91
4.3	Échantillonnage en hypercube latin pour 2 variables à 5 niveaux. . . . .	92
4.4	Micro pompe en alliage à mémoire de forme. . . . .	101

4.5	Déplacement avec les métamodèles : <i>QRS</i> , <i>RBF</i> et Krigeage . . . . .	103
4.6	Validation croisée des métamodèles. . . . .	104
4.7	Variation du choix de la fonction Kernel. . . . .	105
4.8	Valeur moyenne et ecart type du déplacement de la micro pompe. . . . .	106

# Liste des tableaux

2.1	Correspondance entre le type de la base du chaos polynômial et le type de distribution . . . . .	33
2.2	Paramètres du matériau de la structure (BISEGNA et al. 2014) . . . . .	39
2.3	Caracteristiques des paramètres du matériau incertains . . . . .	41
2.4	Paramètres du matériau pour la prothèse de hanche . . . . .	50
2.5	Paramètres de sortie de la simulation tige-os . . . . .	52
2.6	Caractéristiques des paramètres du matériau incertains . . . . .	53
2.7	Résumé des résultats de <i>MC</i> et de <i>CPG</i> . . . . .	56
3.1	Propriétés mécaniques de la poutre. . . . .	63
3.2	Résultats de l'optimisation déterministe pour la poutre en flexion. . . . .	63
3.3	Dimensions et propriétés du système . . . . .	76
3.4	Caractéristiques des paramètres incertains . . . . .	76
3.5	Résultats de <i>DDO</i> en utilisant <i>CPG</i> . . . . .	78
3.6	Résultats de <i>OSF</i> en utilisant <i>CPG</i> . . . . .	79
3.7	Comparaison du point optimal entre <i>DDO</i> et <i>OSF</i> . . . . .	79
3.8	Paramètres géométriques de la structure . . . . .	80
3.9	Paramètres du matériau de la structure . . . . .	80
3.10	Caractéristiques des variables aléatoires . . . . .	82
3.11	Résultats de l'optimisation de conception déterministe. . . . .	84
3.13	Résultat de la méthode hybride robuste . . . . .	84
3.12	Hybrid method results . . . . .	85
3.14	Résultats de la méthode de facteurs de sureté . . . . .	85

4.1	Paramètres matériels de la structure (BISEGNA et al. 2014) . . . . .	101
4.2	Caractéristiques des variables aléatoires . . . . .	102
4.3	Mesures d'erreur des métamodèles . . . . .	105

# Liste des abréviations

<b>AMA</b>	<i>Approximate moments approach</i>
<b>AMF</b>	<i>Alliage à mémoire de forme</i>
<b>CAO</b>	<i>Conception assisté par ordinateur</i>
<b>CPG</b>	<i>Chaos polynomial généralisé</i>
<b>CT</b>	<i>Temps de calcul</i>
<b>DDO</b>	<i>Deterministic design optimisation</i>
<b>DLA</b>	<i>Double level approach</i>
<b>DOE</b>	<i>Conception d'expériences</i>
<b>EMF</b>	<i>Effet mémoire de forme</i>
<b>FORM</b>	<i>First order reliability method</i>
<b>HDS</b>	<i>Espace de conception hybride</i>
<b>KKT</b>	<i>Karush Kuhn Tucker</i>
<b>LHS</b>	<i>Echantillonnage de l'hypercube latin</i>
<b>MAE</b>	<i>Erreur absolue maximale</i>
<b>MEF</b>	<i>Méthode élément fini</i>
<b>MLA</b>	<i>Mono level approach</i>
<b>MMC</b>	<i>Méthode de Monte carlo</i>
<b>MSE</b>	<i>Erreur de prédiction des carrés moyens</i>
<b>MPFP</b>	<i>Point de défaillance le plus probable</i>
<b>MPTP</b>	<i>Point cible de performance minimum</i>
<b>NISP</b>	<i>Méthode de projection spectrale non intrusive</i>
<b>NiTi</b>	<i>Nickel-Titane</i>
<b>OSF</b>	<i>Optimum safety factor</i>
<b>PE</b>	<i>Pseudoélasticité</i>
<b><math>P_f</math></b>	<i>Probabilité de défaillance</i>
<b>PMA</b>	<i>Performance measure approach</i>
<b>PRS</b>	<i>Surface de réponse polynomiale</i>
<b>QRS</b>	<i>Surface de réponse quadratique</i>
<b>RBDO</b>	<i>Optimisation fiabiliste</i>

<b>RBF</b>	<i>Fonction de base radiale</i>
<b>RHM</b>	<i>Robuste hybride method</i>
<b>RIA</b>	<i>Reliability index approach</i>
<b>RME</b>	<i>Erreur moyenne relative</i>
<b>RMSE</b>	<i>Erreur quadratique moyenne</i>
<b>RSM</b>	<i>Méthode de surface de réponse</i>
<b>SDA</b>	<i>Sequential decoupled approach</i>
<b>SFA</b>	<i>Safety factor approach</i>
<b>SLA</b>	<i>Single loop approach</i>
<b>SORA</b>	<i>Sequential approximate programming</i>
<b>SORM</b>	<i>Second order reliability method</i>
<b>SQP</b>	<i>Sequential quadratic programming</i>
<b>SVM</b>	<i>Machines à vecteurs de support</i>
<b>TM</b>	<i>Transformation martensitique</i>

# Introduction générale

Un modèle mathématique est une représentation partielle voire abstraite des lois de la nature. Depuis l'utilisation de ces modèles, les formalistes ont largement évolués. Le progrès réalisé aussi par les outils numériques et informatiques durant les quarante dernières années a permis aux scientifiques d'améliorer considérablement leur compréhension du monde. Le développement au niveau informatique a conduit les ingénieurs à traiter des problèmes de plus en plus pointus dans des nombreux domaines tels que l'aéronautique, le biomédical, la production d'énergie ou encore l'automobile. L'essor des outils informatiques a mis en place de nombreuses techniques qui permettent de trouver des solutions aux modèles mathématiques représentant la réalité. Malgré leur sophistication, ces modèles ne peuvent pas reproduire la réalité. En effet, dans la plupart de temps, un modèle fait intervenir un certain nombre de grandeurs qu'il faut ajuster. Néanmoins, il est difficile de calibrer ces paramètres. Certains facteurs évoluent dans le temps. Leur valeurs exactes sont inconnues au moment de la conception. De nombreux paramètres sont donc ajustés de façon à rapprocher les prédictions théoriques des mesures physiques.

La prise en compte des incertitudes est devenue un enjeu majeur en ingénierie. La nature incertaine des phénomènes mis en jeu sur les systèmes mécaniques tel que les variabilités des propriétés des matériaux, les imprécisions géométriques, etc a un impact significatif sur les performances du système. Aussi, il est indispensable d'intégrer cette variabilité dans le processus de conception afin de travailler sur des modélisations réalistes. Dans la démarche probabiliste, une modélisation stochastique est construite dans laquelle les données incertaines sont représentées par des variables aléatoires. L'étude des incertitudes dans l'analyse des systèmes est un domaine complexe qui englobe les étapes suivantes : l'identification et la modélisation des sources d'incertitudes, la propagation des incertitudes et le post-traitement pour mesurer l'influence de ces incertitudes sur le comportement du système. Parmi les techniques numériques utilisées pour prendre en compte ces incertitudes, on cite la simulation de Monte Carlo, qui est considérée comme référence dans ce travail. En revanche, la méthode du Chaos polynômial généralisé, qui est efficace et moins coûteuse en calcul est appliquée aussi sur des exemples mécaniques.

De plus, lors de la conception d'un produit, les constructeurs doivent optimiser ses performances. L'optimisation intervient de façon primordiale dans l'augmentation des performances. Cependant, les conceptions optimisées sans prise en considération de l'incertitude sur les paramètres peuvent ne pas respecter certains critères de fiabilité. Celle ci consiste à définir la probabilité de défaillance d'une structure par la probabilité que les conditions de bon fonctionnement ne soient pas respectées. Ainsi, l'optimisation fiabiliste constitue une nouvelle discipline qui introduit des critères de fiabilité dans la recherche de la configuration optimale. Elle a pour but de définir le meilleur compromis entre la réduction du coût

et l'assurance de la fiabilité, en intégrant les incertitudes dans les variables du système.

Le problème d'optimisation, en utilisant les approches classiques de la RBDO, nécessite un temps de calcul important. En effet, ces approches sont réalisées dans deux espaces séparés : l'espace physique et l'espace normalisé. Pour pallier à cet inconvénient, une méthode efficace appelée méthode hybride est proposée par Kharmanda (KHARMANDA et EL HAMI 2016). Cette méthode est basée sur la résolution simultanée des problèmes d'optimisation et de fiabilité, dans un seul espace, appelé espace hybride de conception. Elle permet de minimiser le temps de calcul par rapport à la méthode classique, mais le problème d'optimisation est toujours plus complexe que l'optimisation déterministe. Pour cela, Kharmanda (KHARMANDA et EL HAMI 2017) a proposé une méthode basée sur la solution semi-numérique, appelé Optimum Safety Factor (OSF). Cette méthode consiste à calculer des coefficients de sécurité déterminés à partir d'une analyse de sensibilité de la fonction d'état limite par rapport à chaque variable d'optimisation.

D'autre part, il est indispensable d'intégrer les méthodes de méta-modélisation dans l'ingénierie moderne puisqu'elles réduisent le coût de calcul des problèmes complexes. Ces méthodes consistent à construire des approximations, c'est-à-dire des modèles de substitution (*surrogate models*), développées à partir d'une série de simulations utilisant les modèles réels. L'idée provient de l'ajustement d'un modèle de substitution à une série d'expériences physiques conçues. Puisque les méta-modèles sont des approximations des modèles de simulation réels, une source supplémentaire d'erreur est introduite et le but est de garder cette erreur en un niveau acceptable pour le problème traité.

Les méthodes liées aux modèles de substitution et à leurs applications ont été largement étudiées et développées au fil des années. L'utilisation des approximations lors des études d'optimisation, appelée optimisation de la conception basée sur le méta-modèle, s'est révélée efficace dans de nombreux cas. Cependant, le sujet est toujours un domaine de recherche actif.

L'objectif principal de ces travaux de thèse vise à prendre en compte les incertitudes sur les paramètres d'entrée, essentiellement sur les propriétés mécaniques des matériaux en utilisant les approches probabilistes de propagation d'incertitudes ensuite de déterminer la meilleure méthodologie à suivre pour l'optimisation fiabiliste des problèmes mécaniques et finalement à remédier à la complexité de ces problèmes par l'utilisation des méthodes de méta-modélisation. Pour cela, ce manuscrit est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, un état d'art mené autour des approches robustes permettant la quantification des incertitudes. L'analyse des avantages et des inconvénients de chacune des méthodes relevées dans la littérature a permis d'orienter notre choix vers l'approche probabiliste en particulier vers la méthode basée sur le concept du chaos polynomial généralisé. A la fin de ce chapitre, on rappelle les notions fondamentales de la fiabilité pour les

intégrer dans l'optimisation fiabiliste dans le chapitre 3.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la technique référentielle de Monte Carlo et la théorie du chaos polynomial généralisé qui sont des approches évoquées dans le chapitre 1 et qui sont choisies pour traiter la problématique de la thèse. la description détaillée des formalismes mathématiques et des schémas numériques d'implantation est présentée. A la fin de ce chapitre, deux applications avec la prise en compte des incertitudes liées aux paramètres matériaux sont traitées. L'étude numérique est réalisée en utilisant un code developpé couplant MATLAB et ANSYS.

Dans le troisième chapitre, les différentes méthodes d'optimisation fiabiliste sont présentées. La mise en oeuvre de l'optimisation déterministe de conception (DDO) est facile à implémenter. Cette méthode garantit une conception optimale. Cependant, il est impossible contrôler le niveau de fiabilité du système. Pour remédier à ce problème, les méthodes RBDO telles que la méthode hybride et la méthode OSF sont appliquées. En comparant avec la méthode DDO, méthodes RBDO respecte un niveau de fiabilité cible. En utilisant la méthode hybride, l'algorithme peut converger vers un point optimal dans la région de défaillance et le résultat est ensuite rejeté. Une nouvelle méthode appelée Robust Hybrid Method (RHM) est donc appliquée. A la fin de ce chapitre, les différentes approches de RBDO (HM, OSF et RHM) sont testées sur plusieurs exemples de problèmes mécaniques. Les résultats montrent bien que les nouvelles conceptions présentent bien de meilleures performances. De plus, le temps de calcul de la RHM est moins coûteux que les autres approches de la RBDO.

Dans le quatrième chapitre, la construction des modèles de substitution est présentée. Elle nécessite des évaluations, du modèle réel, réalisées en un nombre limité de points de l'espace de conception. Une fois le modèle est construit, l'approximation peut fournir une réponse en un point quelconque de cet espace de conception en un temps très réduit. Par conséquent, l'objectif de ce chapitre est de construire un modèle mathématique qui assure une bonne représentativité du modèle réel obtenu par le simulateur. Afin de valider ce travail, un exemple d'application est traité par différentes méthodes de méta-modélisation.

# Quantification des incertitudes et de la fiabilité des problèmes mécaniques

---

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>Aperçu des alliages à mémoire de forme</b>	<b>5</b>
1.2.1	Transformation martensitique	6
1.2.2	Effet mémoire de forme simple sens	7
1.2.3	Effet mémoire de forme double sens	9
1.2.4	Pseudoélasticité	9
<b>1.3</b>	<b>Application des alliages à mémoire de forme (<i>AMF</i>)</b>	<b>10</b>
1.3.1	Applications aérospatiales	10
1.3.2	Applications biomédicales	11
1.3.3	Applications automobiles	13
1.3.4	Applications robotiques	13
<b>1.4</b>	<b>Propagation des incertitudes</b>	<b>14</b>
1.4.1	Sources d'incertitudes	15
1.4.2	Méthodes de propagation des incertitudes	15
<b>1.5</b>	<b>Fiabilité des structures</b>	<b>19</b>
1.5.1	Variables de conception	20
1.5.2	Fonction de performance	20
1.5.3	Indice de fiabilité	21
1.5.4	Défaillance en mécanique	23
1.5.5	Couplage mécano-fiabiliste	26
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>27</b>

---

## 1.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, les matériaux intelligents ont été l'un des sujets les plus importants en science des matériaux et en technologie. Ces matériaux, en raison de leurs propriétés uniques, ont attiré l'attention des industriels et des scientifiques vers des applications innovantes dans divers domaines. Les alliages à mémoire de forme (*AMF*) sont une classe de matériaux intelligents qui sont capables de subir une déformation récupérable par l'intermédiaire des charges thermomécaniques. Les caractéristiques les plus marquantes du comportement *AMF* sont certainement la pseudoélasticité (*PE*) et l'effet de mémoire de forme (*EMF*). Ces deux comportements ont lieu à cause d'une transformation entre les phases solides d'austénite et de martensite. Ces propriétés atypiques permettent l'utilisation des *AMF* dans diverses applications, y compris l'aérospatiale, les domaines biomédicaux, automobiles et robotiques. Parmi les alliages à mémoire de forme les plus connus, on peut citer ceux formés à base de Nickel-Titane (NiTi) ou de Cuivre-Aluminium (CuAl) ou Cuivre-Zinc (CuZn).

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux alliages à mémoire de forme en présentant les différents domaines d'utilisation de ce type de matériau. On s'intéresse aussi à leur comportement thermomécanique. On fait ensuite une revue des différentes sources d'incertitudes. On détaille ainsi la théorie de la fiabilité, les méthodes d'optimisation et d'optimisation fiabiliste.

## 1.2 Aperçu des alliages à mémoire de forme

En raison des capacités inhabituelles des alliages à mémoire de forme, La communauté scientifique a concentré ses efforts sur la recherche à propos de ce type de matériau (LAGOUDAS et al. 2012 ; XIAO 2014 ; AURICCHIO et al. 2014 ; SALEEB et al. 2015 ; MACHADO et al. 2015 ; CHATZIATHANASIOU et al. 2016 ; CISSE, ZAKI et ZINEB 2016). En 1932, Ölander a fait la première découverte d'effet de mémoire de forme sur l'alliage or-cadmium (Au-Cd). Ce type d'alliage n'a pas été utilisé comme un actionneur et donc n'a pas survécu. En 1938, cet effet a été observé sur un alliage de cuivre-zinc. Ensuite en 1963, l'effet mémoire a été prouvé sur un alliage Nickel-Titane. On peut classer les alliages à mémoire de forme en différentes familles suivant différents critères tels que la similitude de la transformation de phase, le matériau utilisé, les types d'applications, les performances, etc. Les trois grandes catégories des *AMF* les plus étudiées sont les alliages à base de *Ni-Ti*, les alliages à base de *Cu*, et les alliages à base de *Fe*. Les *AMF* basés sur le cuivre sont caractérisés par une très bonne conductivité thermique et électrique. Cependant, ils se transforment difficilement, surtout pour des points de transition à basses températures où ils sont fragiles par la forte anisotropie élastique des grains. Les alliages à base de *Fe* appelés aussi alliages à mémoire

de forme ferromagnétique sont capables de changer leur forme sous l'influence des champs magnétiques.

Quoi que les alliages à base de fer et à base de cuivre soient moins chers, les alliages à base de NiTi sont considérés comme les *AMF* les plus utilisés dans des diverses applications industrielles à cause de leur stabilité et de leur praticabilité (SAADAT et al. 2002 ; MACHADO et SAVI 2003 ; HARTL et LAGOUDAS 2007).

Les alliages à base de NiTi sont ceux qui présentent les meilleures performances (7 à 8 % de déformation réversible (contre 4 % pour les aciers et les alliages en cuivre) et une bonne tenue à la corrosion. En plus de l'effet mémoire de forme, ces alliages présentent un comportement superélastique appelé anisi pseudoélasticité. Ces deux propriétés sont à l'origine d'applications industrielles intéressantes.

Les caractéristiques inhabituelles des alliages à mémoire de forme ont attiré l'attention sur les applications innovantes des *AMF* en ingénierie tels que les arcs orthodontiques, les stents endovasculaires, les disjoncteurs intelligents, les muscles robotisés, les actionneurs de morphing de forme, etc. (WILLIAMS et ELAHINIA 2008 ; AURICCHIO, REALI et TARDUGNO 2010 ; GU et al. 2015).

### 1.2.1 Transformation martensitique

La transformation martensitique (*TM*) est une transformation de phase solide-solide d'une phase austénitique stable à haute température et à faible contrainte à une phase martensitique métastable à basse température et à forte contrainte (OTSUKA et WAYMAN 1999). L'austénite a généralement une structure cubique parfaite et elle a donc la plus haute symétrie de cristallographie, comme indiqué sur la figure 1.1. La structure cristalline de la martensite est tétragonale, orthorhombique ou une structure cristalline monoclinique et par conséquent une symétrie faible (ARGHAVANI et al. 2010). La transformation martensitique est définie comme étant une transformation qui entraîne une déformation homogène du réseau, constituée principalement par un cisaillement.

La figure 1.1 montre un diagramme de phase avec des variables de température et de contrôle de contrainte, dans lequel la *TM* se produit par différents chemins de chargement thermomécaniques. En refroidissant à une contrainte nulle (trajet 1), l'austénite se transforme en la martensite multi-variante. Ce trajet est appelée transformation directe ( $A \rightarrow M$ ). En chauffant, la martensite multi-variante se transforme en austénite, Celle ci est appelée transformation inverse ( $M \rightarrow A$ ).

La transformation directe est caractérisée par la température de démarrage de la martensite et à la température de fin de la martensite tandis que la transformation inverse est

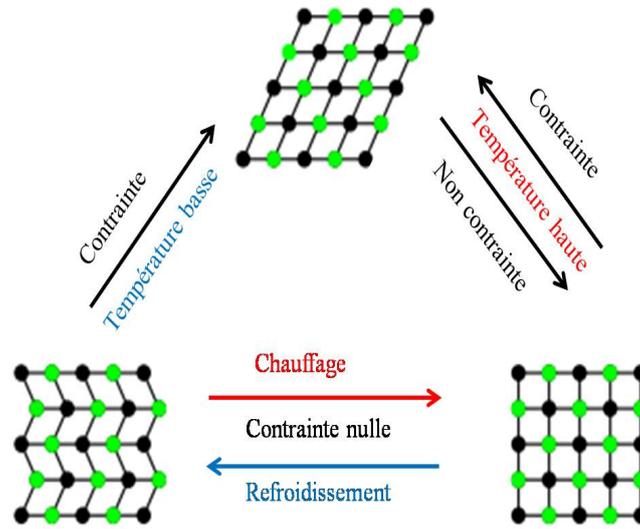


FIGURE 1.1 – Les structures cristallines et les transformations de phase de l’austénite, mono-variante et multi-variante martensites.

initiée par la température de départ de l’austénite et est terminée par la température de fin de l’austénite. Si une charge mécanique est appliquée à la martensite multi variante et à faible température (trajet 2), la martensite se défléchit en réorientant la structure martensitique dans une direction en fonction de la contrainte appliquée. La réorientation de la martensite entraîne une déformation macroscopique.

En refroidissant le matériau avec une contrainte appliquée constante, l’austénite se transforme directement en martensite à mono variant, ce qui produit une déformation macroscopique. Ce chemin est représenté sur la figure 1.1 (trajet 3). Lorsqu’on applique une contrainte mécanique suffisamment élevée, l’austénite se transforme en martensite mono variante (trajet 4). En libérant la charge, la martensite mono variante va se transformer en austénite.

### 1.2.2 Effet mémoire de forme simple sens

L’effet de mémoire de forme (*EMF*) est la propriété la plus connue des *AMF*. Cet effet est caractérisé par un recouvrement de forme sous l’influence de chauffage après une déformation en phase martensitique. Ce phénomène est illustré dans le diagramme de contrainte-déformation-température, tel qu’il est illustré à la figure 1.2.

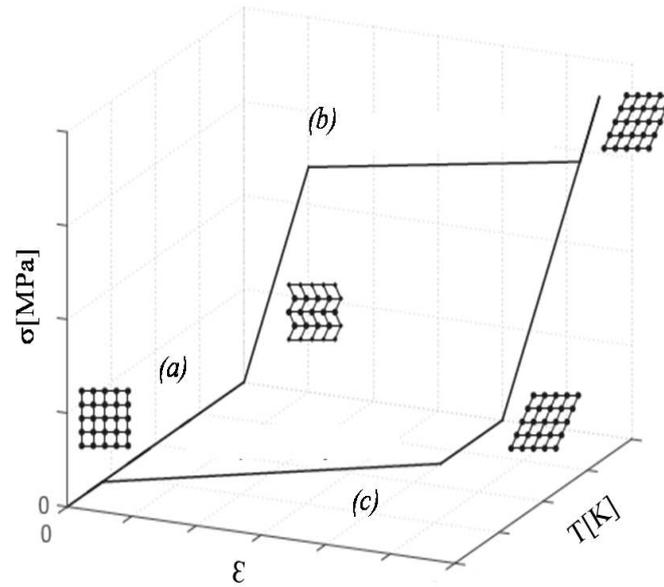


FIGURE 1.2 – Schéma de l'effet de mémoire de forme pour un *AMF* NiTi typique.

Dans le cas de l'utilisation de l'effet mémoire de forme, le matériau est initialement austénite possédant une forme donnée. Il est refroidi à une température inférieure à  $M_f$  pour devenir totalement martensitique. Il faut noter que la forme macroscopique est inchangée.

Dans cet état martensitique, une contrainte externe est appliquée et l'échantillon prend une autre forme. Cette contrainte a entraîné donc une déformation élastique et une réorientation des plaquettes de la martensite. Il suffit alors de réchauffer le matériau au-delà de  $A_f$ , pour que la transformation inverse se produise et que l'échantillon retrouve sa forme initiale. L'alliage fournit alors soit un déplacement, soit un travail ou les deux à la fois. On observe l'effet mémoire de forme lorsque l'alliage est soumis à un chargement thermomécanique qui correspond aux trajets (a)+(b)+(c).

- *Trajet (a)* : transformation martensitique complète, mais sans déformation macroscopique. Plusieurs variantes sont activées, elles génèrent des déformations microscopiques qui se compensent afin de donner une déformation macroscopique nulle.
- *Trajet (b)* : On a une réorientation des variantes sous l'augmentation des contraintes qui créent une déformation résiduelle à la décharge. On est donc en présence d'un état martensitique déformé par rapport à l'état austénitique initial.
- *Trajet (c)* : Ce chemin permet de visualiser l'effet mémoire simple sens, associé à la transformation martensitique inverse. Cette transformation provoque donc une déformation inverse de celle créée par les contraintes et l'alliage revient donc à son

état initial.

### 1.2.3 Effet mémoire de forme double sens

Des cycles thermomécaniques sont répétés un certain nombre de fois. Ce phénomène est appelé donc phénomène de conditionnement. On obtient un échantillon conditionné lorsqu'il se déforme spontanément au refroidissement et revient à sa forme initiale au chauffage au-dessus de  $A_f$ . Le comportement qu'on a décrit ne nécessite aucune contrainte extérieure. C'est l'effet mémoire double sens. L'effet mémoire double sens est observé dans les alliages présentant une transformation martensitique thermoélastique (Figure 1.3).

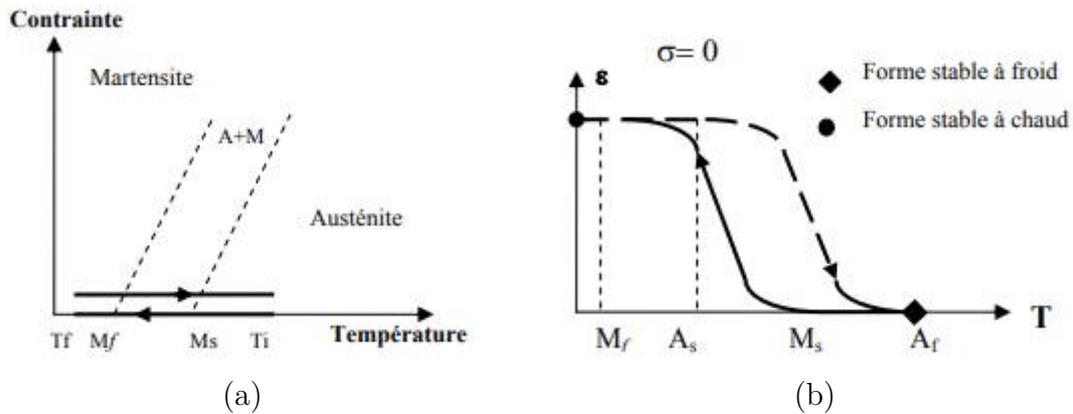


FIGURE 1.3 – (a) Chargement thermique permettant d'obtenir l'effet mémoire de forme double sens, (b) Effet mémoire de forme double sens : sans contraintes externes appliquées.

### 1.2.4 Pseudoélasticité

La pseudoélasticité (PE), on l'appelle aussi superélasticité, est l'aptitude de déformer un alliage à mémoire de forme de plusieurs pourcentages à partir d'un état initial austénitique, à une température légèrement supérieure à  $A_f$ . On applique une contrainte supérieure à une contrainte critique  $\sigma_c$ . Pour retrouver la forme initiale, il suffit de relâcher la contrainte. Au niveau de la courbe contrainte-déformation, un plateau de déformation associé à un module beaucoup plus faible que le module élastique de l'austénite est observé (Figure 1.4). L'effet pseudoélastique est utilisé pour plusieurs applications en Ni-Ti tel que les lunettes, les fils pour le textile, les prothèses dentaires. . .

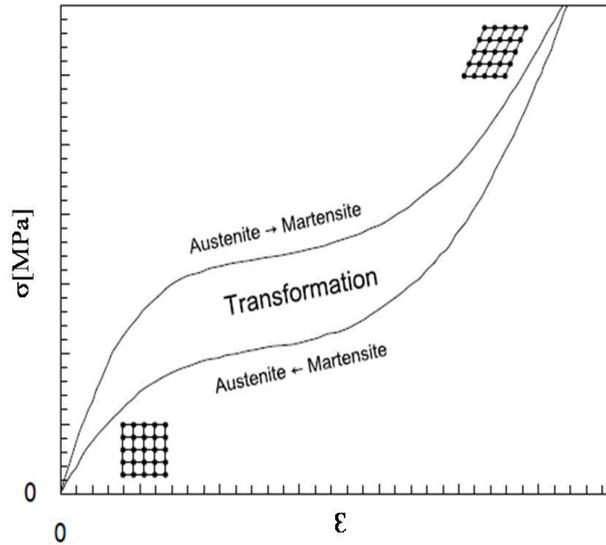


FIGURE 1.4 – Schéma de la pseudoélasticité pour un *AMF* NiTi polycristallin.

### 1.3 Application des alliages à mémoire de forme (*AMF*)

Depuis les années 1960, les *AMF* ont attiré l'attention des scientifiques du monde entier. Beaucoup de structures formés par *AMF* ont été conçus pour diverses applications. Parmi ces applications, on peut citer :

#### 1.3.1 Applications aérospatiales

Dans le domaine aérospatial, La première et la plus connue application de *AMF* était le couplage de tubes hydrauliques pour les avions de combat F-14 dans les années 1970. Cette application industrielle est apparue avec l'utilisation de manchons en alliage NiTi afin de raccorder des tuyauteries hydrauliques sur des chasseurs. Pour surmonter la difficulté d'assembler deux tubes en titane par soudage, la société Raychem propose un manchon serrant, en utilisant l'effet mémoire de forme. Le diamètre intérieur du manchon en *AMF* est initialement en phase austénitique est inférieur au diamètre du tube à raccorder. Ensuite le manchon est expansé en phase martensitique pour que son diamètre devienne supérieur à celui du tube à raccorder. Après assemblage des tubes, on chauffe le manchon pour assurer le serrage (Figure 1.5).

Les caractéristiques uniques de *AMF* ont été exploités dans d'autres applications aé-

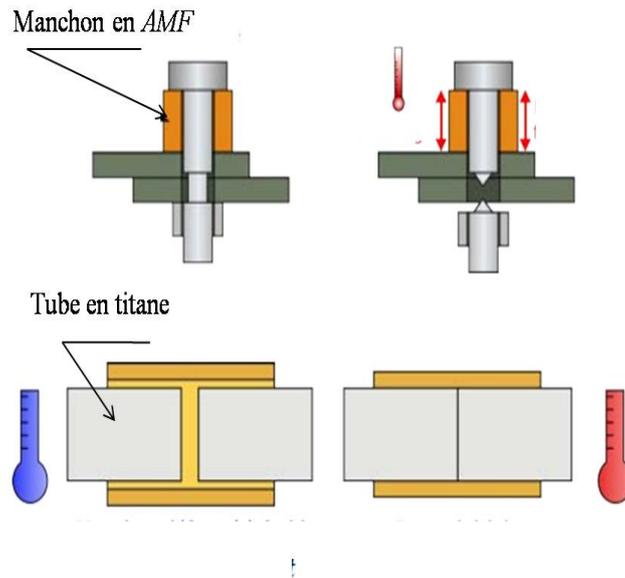


FIGURE 1.5 – Accouplement de tube en titane.

rospatiales, qui sont la plupart du temps soumis à des fortes charges dynamiques et des contraintes géométriques d'espace (JANI et al. 2014). Ces applications incluent des actionneurs (GIACOMEL 1998 ; HARTL et LAGOUDAS 2007), des mécanismes de libération ou de déploiement (HUETT et WILLEY 2000 ; CLEVELAND 2008), des amortisseurs de vibrations et des manipulateurs (BIRMAN 1997 ; PRAHLAD et CHOPRA 2001).

### 1.3.2 Applications biomédicales

La mémoire de forme et les caractéristiques pseudoélastiques font de l'alliage NiTi le matériau le plus utilisé pour les applications biomédicales, tels que les fils orthodontiques (AURICCHIO 2001 ; LAGOUDAS 2008), les filtres (POLETTI et al. 1998), les stents (DOTTER et al. 1983 ; VINOGRAD et al. 1994), l'espaceur intervertébral (DUERIG 1997, les agrafes orthopédiques (LASTER et al. 2001) et les instruments chirurgicaux (SANDERS, SANDERS et MORE 1994). Selon les différentes utilisations, ils sont classés en quatre familles : les applications orthodontiques, cardiovasculaires, orthopédiques et chirurgicales. Depuis les années 1970, les arcs orthodontiques en NiTi ont été utilisés avec succès dans divers applications. Ils ont été montrés leur efficacité par rapport à d'autres matériaux alternatifs. Une autre application dentaire la plus courante est l'utilisation de forets NiTi pour la chirurgie du canal radiculaire (CHEUNG et DARVELL 2007 ; LAGOUDAS 2008). L'avantage principale de ces forets est qu'ils supportent les rotations cycliques élevées avec de grandes déformations et flexions.



FIGURE 1.6 – Utilisation des *AMF* pour les applications biomécaniques.

L'application cardiovasculaire la plus connue est l'endoprothèse en NiTi (YANAGIHARA et al. 1997 ; PELTON et al. 2008). Ce dispositif permet de soutenir la circonférence interne des passages tubulaires dans le corps tels que les vaisseaux sanguins. En comparant les stents gonflés par des ballons conventionnels et formés en acier inoxydable, le stent en NiTi assure la dilatation de l'artère bloquée. Celui ci est inséré à basse température. Par la suite, la température du corps humain assure son échauffement. Le stent s'ouvre afin de permettre une circulation sanguine. Ce composant biomédicale utilise donc l'effet mémoire simple sens.

Pour les applications orthopédiques, les appareils en *AMF* sont principalement utilisés pour les affaiblis, les fracturés ou les blessés. Ces applications fournissent un renforcement local à la vertèbre (DUERIG 1997). Les agrafes orthopédiques sont utilisées pour fournir une force de compression à l'interface des os séparés (KRONE et al. 2005), et les plaques à mémoire de forme pour maintenir ensemble des articulations fracturées. (TAWFIK, RO et MEI 2002). En plus, plusieurs instruments chirurgicaux à base de *AMF* ont été introduits dans la chirurgie mini-invasive. Ces instruments sont insérés en premier temps à travers de petites ouvertures et après ils sont étendus à une taille désirée (LIM et al. 1996 ; SONG 2010) (Figure 1.6 ).

### 1.3.3 Applications automobiles

Dans l'industrie automobile moderne, les *AMF* ont été largement utilisés pour des applications allant des actionneurs et des capteurs aux amortisseurs de vibrations et aux utilisations d'absorption d'impact. La technologie "drive-by-wire" offre une opportunité pour les actionneurs en *AMF* pour être une alternative aux actionneurs électromagnétiques conventionnels dans les applications automobiles.

La simplicité mécanique et la compacité des actionneurs formés en *AMF* réduisent considérablement l'échelle, le poids et le coût des composants automobiles comme démontré par (NEUGEBAUER et al. 2010). Général Motors a affirmé que sa Chevrolet 2014 Corvette est devenu le premier véhicule à incorporer des actionneurs en *AMF* pour actionner l'ouverture de trappe qui libère de l'air à partir du coffre pour faciliter la fermeture du couvercle du coffre (JANI et al. 2014).

Les *AMF* peuvent également être utilisés comme des capteurs ou des actionneurs. Un ressort en *AMF* agit comme un capteur qui surveille la température et actionne une vanne à une température spécifique pour ajuster le débit d'huile (BHATTACHARYYA et al. 1995). Le comportement pseudo-élastique fournit un système efficace pour dissiper la vibration et l'impact. Parmi l'avantage de ces propriétés, l' *AMF* est utilisé dans les applications d'isolation des vibrations et d'absorption des chocs (BARNES et al. 2006).

### 1.3.4 Applications robotiques

Avec les tendances croissantes à la miniaturisation du système robotique, les *AMF* ont été exploités comme des micro-actionneurs et des muscles artificiels dans une gamme variée de systèmes robotiques commerciaux. Kheirikhah et al.(2010) (KHEIRIKHAH, RABIEE et EDALAT 2010) a récemment présenté une revue des applications de *AMF* dans les différentes branches de la robotique, telles que les robots sauteurs, les robots de fleurs, les robots de poissons, les robots marcheur.

L'idéologie de ces recherches est d'utiliser des actionneurs en *AMF* pour concevoir et développer des systèmes robotiques légers, puissants et compacts. Un nouveau système d'actionnement biomécanique pour les applications de la main robotique prothétique et portable a été présenté par Bundhoo et al. (2009) (BUNDHOO et al. 2009). Ce système est basé sur la combinaison de câbles tendeurs conformes et de fils en *AMF* unidirectionnels pour la flexion ou l'extension requise des articulations des doigts.

Ali et Takahata (2010) (ALI et TAKAHATA 2010) ont également développé des micro préhenseurs passifs qui peuvent être actionnés sans fil avec un champ magnétique. En plus de cela, plusieurs autres applications en *AMF* sont dans les robots marcheur (NISHIDA,

TANAKA et WANG 2006 ; BERRY et GARCIA 2008), et des robots volants (FURST, BUNGET et SEELECKE 2012 ; COLORADO et al. 2012).

## 1.4 Propagation des incertitudes

La modélisation robuste d'un système mécanique consiste à développer un modèle décrivant la façon la plus proche possible du comportement physique réel du système en tenant compte de différents types d'incertitudes paramétriques inhérentes au processus de fabrication et de modélisation du système. L'un des objectifs de la modélisation robuste est le dimensionnement. Celui ci consiste à déterminer un jeu de paramètres pour lequel le système mécanique reste peu sensible aux différentes variations ou fluctuations qui peuvent affecter certains paramètres. La prise en compte des incertitudes paramétriques est incontournable pour une bonne prédiction des propriétés finales. La propagation d'incertitudes comprend classiquement trois étapes :

- Identification du modèle mécanique, des variables incertaines en entrée et des quantités d'intérêt en sortie.
- Quantification des incertitudes en entrée : détermination des lois de probabilité des variables d'entrée.
- Propagation des incertitudes à travers le modèle en déterminant la loi, ou des caractéristiques, de la variable aléatoire de sortie.

Figure 1.7 illustre les étapes que comprend l'analyse d'incertitudes.

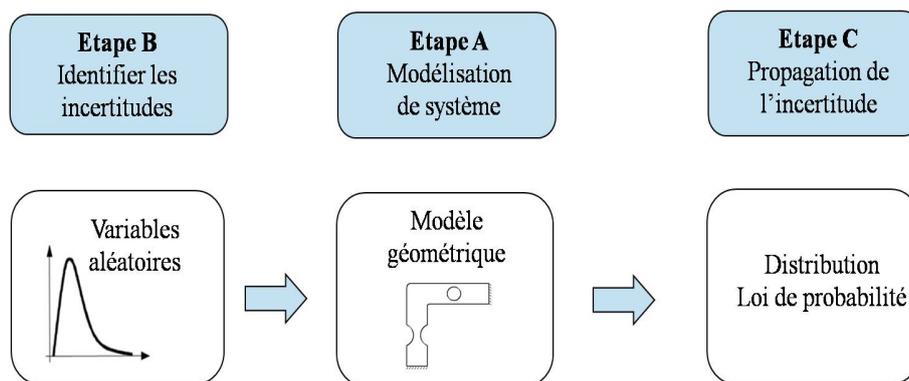


FIGURE 1.7 – Propagation de l'incertitude et de l'analyse de sensibilité dans le modèle mécanique.

## **1.4.1 Sources d'incertitudes**

Les incertitudes envisagées lors du processus de fabrication d'un système mécanique sont de différentes natures. On peut trouver la dispersion des propriétés de matériaux, les variations géométriques liées aux tolérances de fabrication, l'imprécision sur les conditions aux limites et le chargement. D'autre part, on peut avoir des erreurs liées aux problèmes numériques tel que une discrétisation appropriée, une finesse de maillage et des modèles du matériau utilisés tel que la loi de comportement. La connaissance des incertitudes et l'utilisation d'outils de simulation performants permettent un dimensionnement rigoureux d'un système mécanique.

### **1.4.1.1 Incertitudes de modélisation**

Un modèle mathématique est une simplification d'un système réel. En effet, pour construire un modèle, nous nous basons sur des hypothèses simplificatrices plus ou moins réalistes. De même, ces simplifications peuvent amener à négliger certains phénomènes physiques importants dans le comportement du système à modéliser. Aussi, dans le cas de la méthode des éléments finis, des incertitudes sont directement liées au niveau du raffinement du maillage ou de manière plus générale, au niveau du raffinement du schéma de discrétisation employé.

### **1.4.1.2 Incertitudes sur les paramètres d'entrée**

En pratique, les paramètres d'entrée (géométrie, loi de comportement, chargement) d'un modèle sont supposés parfaitement connus et maîtrisés. Or, l'estimation de ces paramètres est souvent complexe et difficile et par conséquent imprécise : les paramètres sont donc incertains. La figure 1.8 montre les deux types des incertitudes.

## **1.4.2 Méthodes de propagation des incertitudes**

Dans la figure 1.9, nous présentons les différentes méthodes permettant la modélisation et la propagation des incertitudes dans un problème mécanique. L'approche déterministe, l'approche possibiliste et l'approche probabiliste sont les plus développées en littérature.

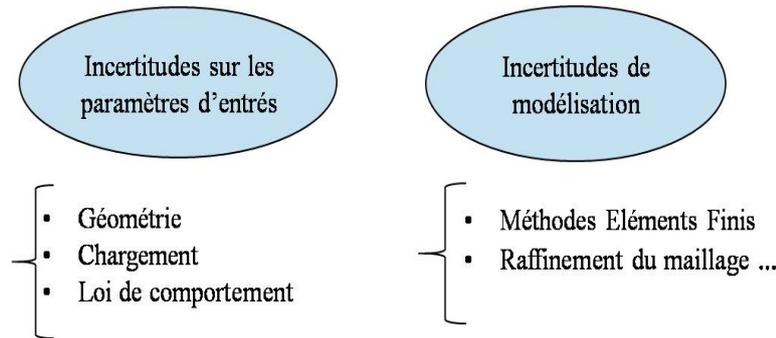


FIGURE 1.8 – Les deux sources d’incertitude.

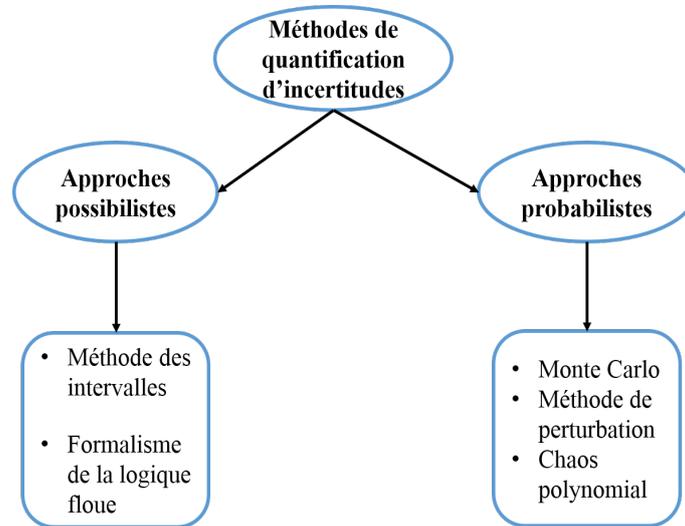


FIGURE 1.9 – Méthodes de quantification des incertitudes

### 1.4.2.1 Approche possibiliste

La méthode des intervalles et la méthode basée sur le formalisme de la logique floue sont deux types de méthodes importantes dans les approches possibilistes. Les principaux concepts de ces méthodes sont présentés dans cette section.

**Méthode des intervalles** L’idée principale de la méthode des intervalles est que les paramètres incertains sont modélisés par des intervalles fermés dont les bornes correspondent aux valeurs minimales et maximales des paramètres (MOORE 1966). La méthode est ainsi basée sur l’arithmétique des intervalles ce qui permet de traiter le problème non-linéaire d’incertitudes par des formalismes mathématiques conviviaux.

L'avantage principal de cette approche est qu'aucune information n'est nécessaire sur la nature de la dispersion, seule la connaissance des valeurs extrémales suffit. Au contraire, l'information sur les variables n'est alors que partiellement représentée. Par conséquent, il n'est plus possible de dire dans quel ensemble une variable a le plus de chance de se trouver (DESSOMBZ 2000).

**Méthodes à base de la logique floue** Ces méthodes ont été introduites en 1965 (ZADEH 1965). Elles sont basées sur la notion d'ensembles flous pour représenter et manipuler des données incertaines sans aucune information probabiliste ou statistique. L'utilisation de la logique floue est plus particulièrement appropriée à l'analyse des systèmes dans lesquels les paramètres incertains proviennent des imprécisions d'entrées plutôt que du caractère aléatoire (GUANG-YUAN et JIN-PING 1990). Le formalisme flou permet de manipuler des informations vagues, imprécises ou décrites de manière linguistique. L'incertitude est décrite par des fonctions de forme appelée fonctions d'appartenance. L'avantage principal de cette modélisation est de ne pas nécessiter des informations statistiques ou probabilistes. La détermination de la fonction d'appartenance reste par contre une difficulté considérable. En effet, elle dépend des données expérimentales dont dispose l'utilisateur ce qui rapproche sa détermination d'une démarche statistique.

#### **1.4.2.2 Approche probabiliste**

Cette approche est basée sur la caractérisation probabiliste des incertitudes qui sont modélisées par des variables aléatoires. Par la suite, la sortie d'un système est analysée de manière probabiliste et statistique. Il existe trois méthodes les plus développées dans la littérature, à savoir : la méthode de Monte Carlo, la méthode des perturbations et la méthode du chaos polynomial. Les principes sur lesquels sont basées les méthodes de Monte Carlo et du chaos polynomial sont présentés ci dessous.

**Méthode de Monte Carlo (MC)** La méthode de Monte Carlo a été présentée à partir des années 1930. Cette méthode est un outil mathématique très général et facile à utiliser avec un système déterministe qui a des paramètres incertains modélisés par des variables aléatoires. Fishman (FISHMAN 1973) et Spanos et al. (SPANOS et KONTSOS 2008) donne un aperçu de cette approche. Cette méthode fournit des résolutions successives d'un système déterministe incorporant des variables aléatoires. Cette méthode est utilisée lorsque le problème à traiter est complexe. Il génère des échantillons aléatoires pour tous les paramètres incertains et selon leurs distributions de probabilité (GUERINE et al. 2015 ; BRUYERE et al. 2007). Pour chaque échantillon, un ensemble de paramètres est obtenu et un calcul déterministe est effectué selon un modèle numérique ou analytique. Pour finir,

une caractérisation statistique et probabiliste des résultats (moments statistiques, lois de probabilité) est effectuée .

L'avantage principal de cette technique est sa facilité de mise en œuvre. Quels que soient la taille et la complexité d'un système, les résultats d'une telle méthode sont précis. Cependant, cela est souvent coûteux car une précision raisonnable nécessite un grand nombre d'échantillons. Le coût de calcul est alors prohibitif (SUDRET 2007). Dans ce travail, le Monte Carlo est considéré comme une méthode de référence pour valider l'efficacité de la méthode du chaos polynomial généralisé.

**Chaos polynomial** Le chaos polynomial formalise une séparation entre les composantes stochastiques et déterministes d'une fonction aléatoire. C'est un outil mathématique puissant développé par Wiener dans le cadre de sa théorie sur le chaos homogène, et qui est de plus en plus utilisé dans les sciences et techniques. Cette méthode est basée sur le fait que tout champ de variables stochastiques  $X(\xi)$  peut être exprimé par un développement en série de polynômes d'Hermite (WIENER 1938). La partie déterministe de ces variables est modélisée par des coefficients  $\bar{x}_j$  appelés modes stochastiques, pondérant les fonctions polynômiales d'Hermite d'ordre  $j$ ,  $\phi_j$ .

$$X(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{x}_j \phi_j(\xi) \quad (1.1)$$

La famille des polynômes d'Hermite  $\phi_j$  forme une base orthogonale qui permet une convergence optimale au sens des moindres carrés du développement pour des processus Gaussien (CAMERON et MARTIN 1947). Un schéma dit d'Askey a été défini pour généraliser ces développements en chaos à des processus non-Gaussien pour asseoir une correspondance entre des familles de polynômes orthogonaux et des lois de probabilité (ASKEY et WILSON 1985). La notion de développement en polynômes de chaos généralisé est alors définie et une convergence exponentielle est généralisée au cas de lois de probabilité arbitraires (XIU et KARNIADAKIS 2002). Les premières applications du chaos polynomial remontent aux années 1960. Ghanem et Spanos ont combiné le développement de Wiener-Hermite avec la méthode des éléments finis pour modéliser et propager les incertitudes dans des structures mécaniques (GHANEM et SPANOS 1991). L'application du chaos polynomial a été développée dans différents domaines, par exemple dans la fiabilité des structures mécaniques (SUDRET 2007 ; CRESTAUX, LE MAÎTRE et MARTINEZ 2009).

**Approche intrusive** Dans l'utilisation du chaos polynomial, les modes stochastiques  $\bar{x}_j$  doivent être calculés. Il existe deux approches pour effectuer ce calcul : intrusive et non intrusive. La première utilise des techniques de projection de Galerkin pour exprimer le

modèle incertain dans la base du chaos polynomial sous forme d'un système d'équations couplées et déterministes gardant les mêmes propriétés de linéarité que celles du système original (GHANEM et SPANOS 1991 ; BABUSKA, TEMPONE et ZOURARIS 2004). Le calcul des coefficients stochastiques passe alors par l'adaptation d'un algorithme de calcul correspondant à la nature du système d'équations résultant. Néanmoins, l'intrusivité de la méthode dans le modèle incertain lors de sa projection peut rendre l'utilisation de l'approche intrusive délicate. De plus, l'approche intrusive est très coûteuse lorsque le nombre de paramètres incertains est grand. La difficulté est accentuée dans le cas des problèmes non linéaires. Tous ces inconvénients posent un problème difficile de l'implémentation de cette méthode (XIU et KARNIADAKIS 2003). Par conséquent, des approches dites non intrusives ont été proposées.

**Approche non intrusive** Cette approche est une alternative très intéressante. Elle permet le calcul des modes stochastiques sans aucune modification du système initial. En effet, dans l'utilisation de l'approche non-intrusive, l'estimation des modes stochastiques a seulement besoin de certaines mesures en des points particuliers. Deux types de méthodes peuvent être distinguées à savoir les méthodes de projection spectrale non-intrusive (NISP) et les méthodes de régression. Dans la première famille, les méthodes de projection spectrale non-intrusive désignées par NISP procèdent par la projection de la fonction aléatoire dans la base du chaos. Le calcul des modes stochastiques est alors ramené à des calculs numériques d'intégrales. Des variantes de la méthode NISP sont définies par rapport aux techniques utilisées pour calculer les intégrales (CRESTAUX, LE MAÎTRE et MARTINEZ 2009).

La méthode de collocation de Gauss est une puissante technique de collocation probabiliste pour calculer des modes stochastiques (BABUŠKA, NOBILE et TEMPONE 2007). Les points d'intégration sont définis comme les racines des polynômes orthogonaux utilisés. Pour des systèmes complexes qui ont un grand nombre de paramètres incertains, le nombre de points de collocation devient alors rapidement important. Par conséquent, des approches de collocation à grilles creuses ont été définies et utilisées (XIU et KARNIADAKIS 2002 ; CRESTAUX, LE MAÎTRE et MARTINEZ 2009).

## 1.5 Fiabilité des structures

Satisfaire les exigences de fiabilité est nécessaire afin d'assurer un degré de sécurité suffisant au niveau de la conception. Une telle exigence peut être soit calibrée sur un niveau de sécurité obtenu à partir d'une analyse déterministe conventionnelle, soit dérivée de l'optimisation dans une analyse décisionnelle, soit par une analyse de fiabilité prévisionnelle. La seconde approche repose sur le principe que les pratiques de conception conventionnelles

conduisent à des dimensionnements optimaux vis-à-vis de l'économie et de la sécurité. La dernière approche repose sur le vieillissement physique du comportement de chaque partie du dispositif et des modèles de probabilité mathématiques. Ces modèles sont établis par retour d'expérience aussi par la réalisation d'essais visant à modéliser le comportement en fiabilité. Les résultats des calculs obtenus permettent d'estimer le taux de défaillances de systèmes mécaniques.

Selon AFNOR, la fiabilité est l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée. Le terme de fiabilité est utilisé donc comme une caractéristique désignant une probabilité de succès ou un pourcentage de succès. L'approche fiabiliste permet d'introduire une mesure quantitative du risque de défaillance, au moyen d'une démarche probabiliste par la modélisation des incertitudes et des aléas. En effet, le problème de la fiabilité des structures est basé sur deux aspects fondamentaux :

- une connaissance physique des phénomènes mécaniques et des différents mécanismes de défaillance.
- une connaissance statique des paramètres du modèle mécanique.

Avant de présenter les méthodes de fiabilité, on introduit les principes de base de la fiabilité appliquée aux problèmes de mécanique des structures. Citons par exemple la notion de scénario de défaillance, le domaines de sûreté et de défaillance, l'état limite, et l'indice de fiabilité.

### **1.5.1 Variables de conception**

$X = \{x_i\}_{i=1..n}$  est un vecteur des variables de conception  $x_i$  qui rassemble les variables aléatoires d'entrée dans un calcul de fiabilité. Chaque variable est caractérisée par une densité de probabilité  $P_i(x_i)$ . Dans ce qui suit, on va supposer que la densité de probabilité des variables de conception  $x_i$  est une loi normal caractérisé par une valeur moyenne  $m_i$  et d'un écart type  $\sigma_i$ .

### **1.5.2 Fonction de performance**

Dans l'analyse de la sécurité d'un élément de structure, il est indispensable de fixer un critère de défaillance à l'aide d'une fonction dite de performance ou d'état limite, notée  $G(X)$ . On définit le domaine de sûreté  $S$  et le domaine de défaillance  $R$  comme suit (voir figure 1.10) :

- le domaine de défaillance (R).

- le domaine de sécurité (S).

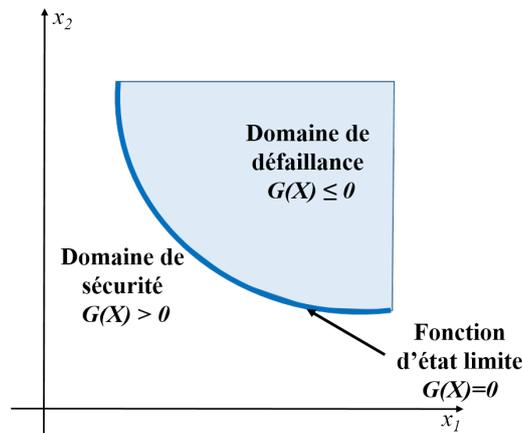


FIGURE 1.10 – Domaines de sûreté et de défaillance dans le cas de deux variables de conception

Le choix du mode de défaillance permet la mise en équation de la surface d'état limite.  $G(X) = 0$  définit la surface d'état limite. Cette surface se trouve à la frontière entre l'espace de sécurité  $S$  et l'espace de défaillance  $R$ .

$$G(X) = R(X) - S(X) = 0 \quad (1.2)$$

Lorsque  $G(X) > 0$ , la structure est dans l'espace de sécurité et lorsque  $G(X) < 0$ , elle est dans l'espace de défaillance. L'équation  $G(X) = 0$  (ensemble de réalisations des  $x_i$  correspondant à une marge nulle) définit donc une surface appelée surface d'état limite (AOUES et CHATEAUNEUF 2010).

### 1.5.3 Indice de fiabilité

Le niveau de fiabilité est estimé par un indice noté  $\beta$ . Il permet d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance  $P_f$ . Dans les algorithmes d'évaluation de l'indice de fiabilité, la fonction  $G(X)$  joue un rôle capital, d'où l'importance qu'elle ait de bonnes propriétés de régularité (continuité, dérivabilité). Il est également possible qu'on soit amené à effectuer un changement de variables, auquel cas l'expression mathématique de la fonction d'état limite devra être reformulée dans le nouvel espace. Il existe dans la littérature plusieurs types d'indices de fiabilité parmi lesquels nous citons (KHARMANDA, OLHOFF et EL-HAMI 2004; KHARMANDA et OLHOFF 2007) :

- Indice de fiabilité de Cornell
- Indice de fiabilité de Hasofer-Lind

**Indice de fiabilité de Cornell** L'indice de fiabilité de Cornell est obtenu à partir de la valeur moyenne  $\mu_G$  et de l'écart type  $\sigma_G$  de la fonction de performance :

$$\beta_c = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (1.3)$$

L'idée exprimée par cette définition est que la distance de la valeur moyenne à la surface de rupture qui est exprimée en nombre d'écart types donne une bonne mesure de la fiabilité.

Dans le cas où la fonction d'état limite  $G(X)$  est linéaire, alors  $\mu_G$  et  $\sigma_G$  peuvent être calculés à partir des caractéristiques des variables de base.

Si  $G(X)$  n'est pas linéaire, on l'approche en utilisant un développement de Taylor au premier ordre au point moyen. Cette évaluation ne nécessite que la connaissance des deux premiers moments des variables aléatoires.

**Indice de fiabilité de Hasofer-Lind** Afin de ne pas pallier la non invariance de  $\beta_c$ , Hasofer et Lind ont proposé de passer de l'espace des variables physiques vers l'espace des variables gaussiennes statistiquement indépendantes de moyennes nulles et d'écart types unitaires en effectuant un changement de variables :

$$x_i \rightarrow u_i \rightsquigarrow m_{u_i} = 0, \sigma_{u_i} = 1, \forall i. \quad (1.4)$$

Dans le cas des variables gaussiennes indépendantes, la transformation de l'espace physique vers l'espace normé s'écrit :

$$u_i = \frac{x_i - m_i}{\sigma_i}, \forall i. \quad (1.5)$$

Cette transformation conserve la linéarité de l'état limite. L'indice de fiabilité  $\beta_{hl}$  n'est que la distance minimale de l'origine de l'espace normé à la fonction d'état limite (YAICH et al. 2017).

### 1.5.4 Défaillance en mécanique

Pour une structure, l'événement indésirable est la défaillance ou bien le non respect des critères d'acceptabilité tels que la rupture ou l'état limite. On note  $P_f$  la probabilité de défaillance qui est la probabilité associée à l'environnement  $\{G(X) \leq 0\}$  soit :

$$P_f = Prob\{G(X) \leq 0\} \quad (1.6)$$

La fiabilité  $\varphi$  est définie par :

$$\varphi = 1 - P_f \quad (1.7)$$

On utilise l'indice de fiabilité  $\beta$  tel que :

$$\beta = \phi^{-1}(1 - P_f) = -\phi^{-1}(P_f) \quad (1.8)$$

Où  $\phi^{-1}$  est la fonction inverse de la loi normale centrée réduite.

La probabilité de défaillance n'est que l'intégration de la densité conjointe de probabilité sur le domaine de défaillance

$$P_f = \int_R f_X(x) \prod_{i=1}^k dx_i \quad (1.9)$$

Le calcul de cette intégrale est difficile puisque la densité conjointe est rarement connue et la fonction de performance est généralement implicite. Dans la littérature, diverses méthodes de résolution ont été développées pour pallier ces difficultés. On peut distinguer deux familles de méthodes : les méthodes de simulations et celles basées sur l'approximation de l'indice de fiabilité.

#### 1.5.4.1 Méthodes de simulations

Les méthodes de simulations sont basées sur le calcul de la fonction de performance pour un échantillon représentatif. Plusieurs travaux sont réalisés sur ces méthodes car elles sont robustes et elles restent la référence sur le résultat en probabilité de défaillance. Cependant, ces méthodes sont les plus coûteuses en temps du calcul.

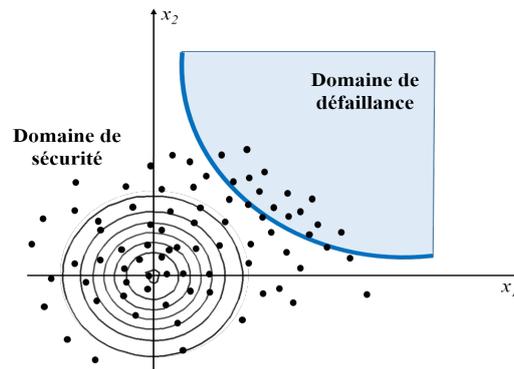


FIGURE 1.11 – Simulations de Monte Carlo pour la probabilité de défaillance

- Les simulations Monte Carlo (figure 1.11) sont largement utilisées pour estimer la fiabilité dans le domaine de calcul de structures. Le principe de cette méthode est décrit dans la section précédente. La probabilité de défaillance est le nombre de simulations défaillantes sur le nombre total de simulation. Plus le nombre de tirages aléatoires est grand plus l'estimation de la probabilité de défaillance est meilleure.
- La méthode des simulations d'importance est une amélioration de la méthode de Monte Carlo. Cette technique consiste à réduire le nombre de simulations par leurs concentrations dans les zones les plus informatives. Ainsi, on peut considérer que les tirages situés autour du point de défaillance le plus probable  $P^*$  (figure 1.12).

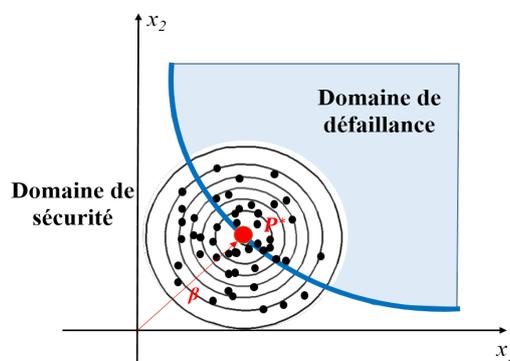


FIGURE 1.12 – Simulations d'importance pour la probabilité de défaillance

#### 1.5.4.2 Méthode d'approximation FORM/SORM

Les méthodes les plus utilisés pour le calcul de la fiabilité sont les méthodes du premier et du deuxième ordre *FORM/SORM* (First Order Reliability Method / Second Order Reliability Method). Ces méthodes sont très efficaces pour la détermination de la probabilité de défaillance. *FORM* et *SORM* se résument en trois étapes (KHARMANDA, OLHOFF

et EL-HAMI 2004) :

1. *Transformation  $T$  des variables  $x_i$  de l'espace physique vers l'espace normé* : cette étape consiste à transformer le vecteur des variables aléatoires  $X = \{x_i\}$  en un vecteur de variables aléatoires unitaires de moyenne nulle et de variance unitaire :

$$u_i = T(x_i) \rightarrow H(u_i) = G(T^{-1}(u_i)) \quad (1.10)$$

Figure 1.13 illustre la transformation de l'espace physique à l'espace normé d'une variable aléatoire.

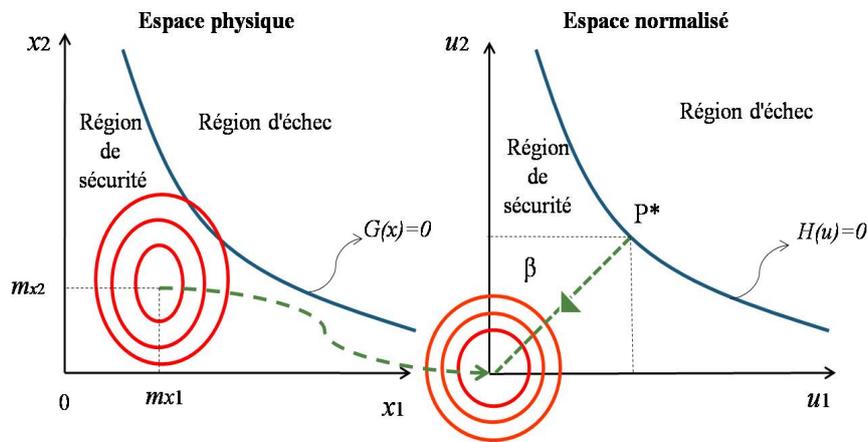


FIGURE 1.13 – De l'espace physique vers l'espace normé.

2. *Recherche du point de conception* : cette étape consiste à déterminer le point de conception ou bien le point de défaillance le plus probable  $P^*$ , (*MPFP* : Most Probable Failure Point). C'est le point le plus proche de l'origine où la fonction de performance est inférieure ou égale à zéro. Ainsi, le problème de détermination du point de conception s'écrit sous la forme :

$$\min \sqrt{\sum u_i^2} \quad (1.11)$$

sous :  $H(x, u) \leq 0$

3. *Approximation de la probabilité de défaillance* :

La méthode *FORM* consiste à remplacer l'état limite  $G$  dans l'espace normé par un hyperplan tangent au point de conception. L'approximation de la probabilité de défaillance est donnée donc par l'expression :

$$P_f = \phi(-\beta) \quad (1.12)$$

Avec  $\beta$  est l'indice de fiabilité et  $\phi(\cdot)$  est la loi de distribution normale centrée réduite.

La méthode *SORM* consiste à remplacer l'état limite  $G$  par une hypersurface quadratique tangente qui possède les mêmes courbures de la surface réelle au point de conception. L'approximation de la probabilité de défaillance est donnée donc par l'expression (BREITUNG 1984) :

$$P_f = \phi(-\beta) \left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta \kappa_i}} \right) \quad (1.13)$$

Avec  $\kappa_i$  sont les courbatures principales de la fonction  $G$ .

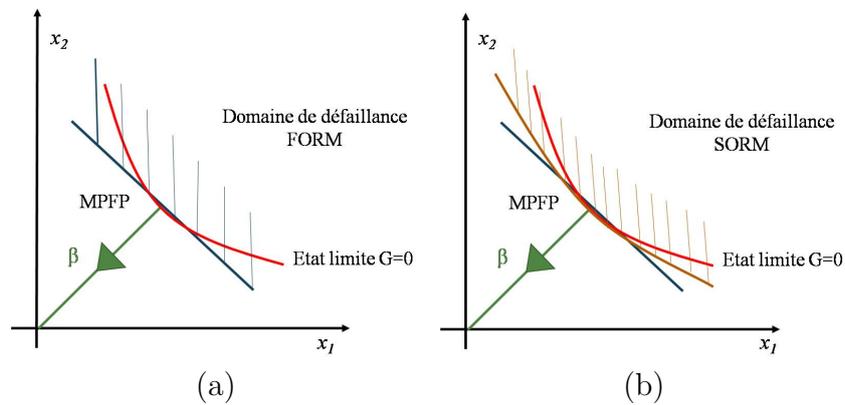


FIGURE 1.14 – (a) Approximation *FORM*, (b) Approximation *SORM*.

### 1.5.5 Couplage mécano-fiabiliste

Le couplage mécano-fiabiliste a été abordé dans plusieurs travaux de recherche afin d'assurer une conception optimale et fiable. Dans (YAICH et al. 2017), l'optimisation fiabiliste des structures soumises à des vibrations aléatoires est présentée et dans (DAMMAK et al. 2017b), la méthode de facteurs de sécurité optimaux avec le chaos polynomial généralisé a été appliquée aux systèmes vibro-acoustiques en présence d'incertitudes. Le couplage mécano-fiabiliste nécessite une coopération entre différents acteurs : le mécanicien, le fiabiliste, le probabiliste et le statisticien (figure 1.15).

l'étude mécano-fiabiliste consiste à combiner des méthodes de calcul des structures comme la méthode des éléments finis avec des algorithmes de fiabilité et d'optimisation ce qui permet d'assurer une conception optimale.

Les principales étapes du processus d'analyse de fiabilité sont les suivantes :

- établir un objectif de fiabilité ou un modèle décisionnel ;

- identifier les modes de défaillance les plus importants pour la structure ou les opérations envisagées.
- formuler un critère de défaillance en termes de la fonction d'état limite pour chaque mode de défaillance.
- identifier les variables et les paramètres aléatoires dominants des fonctions d'états limites et spécifier leur distribution probabiliste.
- calculer la fiabilité vis-à-vis de la défaillance pour chaque mode de défaillance de la structure ou de l'opération considérée.
- évaluer si la fiabilité estimée est suffisante et apporter les modifications nécessaires si besoin.

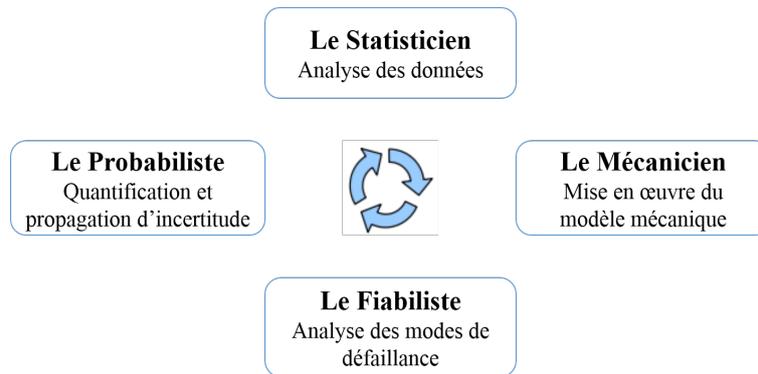


FIGURE 1.15 – Schéma du principe du couplage mécano-fiabiliste

## 1.6 Conclusion

Une synthèse bibliographique des alliages à mémoire de forme a été présentée dans ce chapitre. D'une part, le comportement de ce matériau tel que la superélasticité, l'effet mémoire de forme simple et de double sens a été défini. D'autre part, les différents domaines d'application ont été cités. Dans la deuxième partie, les différentes approches permettant une modélisation d'incertitudes ont été présentées. Le choix de la technique appropriée dépend essentiellement de la nature de ces incertitudes et aussi de la quantité d'informations disponibles. Différentes techniques ont été proposées. Certaines de ces techniques ne peuvent pas être appliquées directement vu le temps de calcul énorme qu'elles nécessitent, d'autres alternatives permettent de contourner ce type de problème tel que le chaos polynomial généralisé. Cette méthode offre un intérêt indéniable puisque elle peut être associée aux problèmes de modélisation et de prédiction avec un coût très modeste. La méthode du chaos polynomial généralisé est détaillée dans le chapitre 2 et elle est comparée à la méthode de Monte Carlo (MC). Dans la troisième partie, nous avons rappelé les notions fondamentales de la fiabilité ainsi que le couplage mécano fiabiliste. D'après cette partie, Il semble clair que la fiabilité est indispensable dans l'optimisation de la conception des

problèmes mécaniques. Cette notion est présentée dans le chapitre 3.

# Approche robuste basée sur le chaos polynomial généralisé des systèmes mécaniques

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>2.2</b>	<b>Méthode de Monte Carlo</b>	<b>30</b>
<b>2.3</b>	<b>Chaos polynômial généralisé (CPG)</b>	<b>31</b>
2.3.1	Généralités	31
2.3.2	Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynômial généralisé	33
<b>2.4</b>	<b>Etude d'un actionneur en alliage à mémoire de forme en présence d'incertitude</b>	<b>36</b>
2.4.1	Description du micro actionneur en <i>AMF</i>	37
2.4.2	Analyse numérique de l'actionneur en <i>AMF</i>	38
2.4.3	Résultats déterministes et discussion	39
2.4.4	Analyse probabiliste proposée	40
2.4.5	Distribution de probabilité optimale	47
<b>2.5</b>	<b>Etude d'une prothèse de hanche en présence d'incertitude</b>	<b>48</b>
2.5.1	Modèle et matériaux utilisés	49
2.5.2	Conditions aux limites	51
2.5.3	Résultats déterministes de la prothèse de hanche	52
2.5.4	Analyse probabiliste proposée	52
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>56</b>

## 2.1 Introduction

La modélisation robuste d'un système mécanique consiste à développer un modèle décrivant de façon la plus proche possible du comportement physique réel du système en tenant compte des incertitudes paramétriques inhérentes de processus de fabrication et de modélisation du système. Différentes techniques existent pour modéliser la propagation de l'incertitude. Ces méthodes sont classées en trois catégories : les méthodes déterministes, les méthodes possibilistes et les méthodes de perturbation. La simulation de Monte Carlo est considérée comme une méthode de référence pour le calcul des systèmes dont les paramètres sont incertains. Son inconvénient majeur est la très grande quantité de calcul qui complique son utilisation. La méthode de perturbation est basée sur un développement en série de Taylor de la réponse autour de sa moyenne. Le problème principal de cette méthode provient des conditions qui assurent la convergence de ces séries. Les variables doivent avoir une faible dispersion. La méthode adoptée pour prendre en compte l'incertitude est la méthode du chaos polynomial généralisé. L'idée fondamentale de la méthode du chaos polynomial inventée par Norbert Wiener en 1938 (WIENER 1938) est d'établir une séparation entre les composantes stochastiques de la fonction aléatoire et ses composantes déterministes. L'approche de *CPG* s'avère capable de prendre en compte un nombre assez important de paramètres incertains dans le calcul du système mécanique. Dans ce chapitre, on présente les approches probabilistes permettant la quantification et la propagation des incertitudes dans des systèmes mécaniques. Le premier objectif est de présenter le formalisme mathématique du chaos polynomial. On revient également au début du chapitre sur la méthode de référence de Monte Carlo. Enfin, on présente différentes applications mécaniques afin de montrer l'efficacité de la méthode du chaos polynomial généralisé.

## 2.2 Méthode de Monte Carlo

Comme il est mentionnée dans le premier chapitre, la méthode de Monte Carlo (MC) est un outil mathématique qui peut être appliquée dans différents domaines de la science de l'ingénieur. C'est une approche probabiliste permettant la modélisation des paramètres incertains dans des systèmes compliqués. L'algorithme fondamental de la méthode de Monte Carlo se résume en cinq étapes.

- Etape 1 : Identification probabiliste des paramètres incertains dans le modèle.
- Etape 2 : Génération aléatoire de réalisations et identification des lois probabilistes.
- Etape 3 : Propagation de l'incertitude et détermination des sorties correspondantes.
- Etape 4 : Estimation de la loi de distribution de sortie correspondantes aux échantillons.
- Etape 5 : Analyse de la convergence de la distribution de la sortie du modèle.

Soit  $M$  une fonction mathématique qui modélise un système quelconque et  $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$  un vecteur aléatoire de paramètres incertains. La réponse  $Y$  est alors la réponse aléatoire du modèle suivant :

$$Y = M(X) \quad (2.1)$$

Dans le cas général, la technique de Monte Carlo est utilisée pour estimer la loi de distribution de la sortie dont les caractéristiques statistiques sont données par la valeur moyenne  $\mu_Y$  et l'écart type  $\sigma_Y$ . Ces deux caractéristiques sont calculées à l'aide d'un ensemble de  $N$  simulations comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N M(X^{(j)}) \\ \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (M(X^j) - \hat{\mu}_Y)^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

La simplicité de la technique de Monte Carlo permet son exploitation pour les systèmes complexes. Cependant, son inconvénient majeur réside dans le fait qu'elle nécessite un grand nombre de tirages pour avoir une précision raisonnable. Par la suite, le coût de calcul est très prohibitif (DAMMAK et al. 2017a; GUERINE et al. 2016).

## 2.3 Chaos polynomial généralisé (CPG)

### 2.3.1 Généralités

Plusieurs approches sont utilisées pour étudier la propagation des incertitudes dans les systèmes mécaniques. Parmi ces approches, on trouve la théorie du chaos polynomial (*PC*). Cette théorie est une représentation spectrale basée sur la projection de grandeurs aléatoires dans un espace probabilisé. Cette méthode est basée sur la théorie du chaos homogène de Wiener selon lequel un processus stochastique du second ordre peut être exprimé en série de polynômes, fonctions orthogonales de variables aléatoires indépendantes gaussiennes (GHANEM et SPANOS 1991; NECHAK, BERGER et AUBRY 2010; NECHAK, BERGER et AUBRY 2011; GUERINE et al. 2016).

Le chaos polynomial est donc un ensemble de fonctions polynomiales de l'ensemble infini  $\{\xi_i\}$  de variables aléatoires. Dans la pratique, l'expansion du chaos polynomial est tronquée à un nombre fini de termes :

$$X(\xi) = \sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi) \quad (2.3)$$

Avec  $\bar{x}_j$  est la composante déterministe, le nombre de termes  $N_p+1$  dépend généralement du nombre de paramètres incertains  $r$  et de l'ordre du chaos polynomial généralisé  $p$ , avec  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ . Le nombre de termes  $N_p + 1$  s'écrit en fonction de  $r$  et de  $p$  et il est défini par :

$$N_p + 1 = \frac{(p+r)!}{p!r!} \quad (2.4)$$

$\{\phi_j\}$  regroupe les fonctions polynômiales orthogonales par rapport à la mesure gaussienne de probabilité. La famille  $\phi_j$  est une base orthogonale qui vérifie la condition d'orthogonalité suivante :

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \langle \phi_i, \phi_i \rangle \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.5)$$

avec  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Le produit scalaire  $\langle \phi_i, \phi_i \rangle$  est exprimé comme suit :

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \int \phi_i \phi_i W(\xi) d\xi \quad (2.6)$$

L'intégration qui est défini dans l'expression (eq.2.6) est effectuée sur un domaine déterminé par le support probabiliste du vecteur aléatoire  $\xi \in \mathbb{R}$ , où  $W(\xi)$  est la fonction densité de probabilité de  $\xi$  décrite par :

$$W(\xi) = \prod_{l=1}^r \frac{\exp(-\xi_l^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.7)$$

L'équation (2.3) montre une séparation entre le caractère déterministe et le caractère stochastique d'une variable aléatoire  $X(\xi)$  : Le caractère déterministe est modélisé par les coefficients stochastiques  $\bar{x}_j$  appelés aussi coefficient modaux. Ils représentent les coordonnées de la variable aléatoire  $X(\xi)$  dans sa base orthogonale des fonctions  $\phi_j(\xi)$ . Le caractère stochastique de la variable  $X(\xi)$  est concentré dans la base orthogonale. Le mode  $\bar{x}_0$  est la valeur moyenne de la variable aléatoire  $X(\xi)$  tandis que les modes d'ordres supérieurs donnent la mesure de la variabilité de  $X(\xi)$  autour de sa valeur moyenne. On peut

déterminer la variance de  $X$  en utilisant l'équation suivante :

$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j \langle \phi_j, \phi_j \rangle \quad (2.8)$$

Les fonctions aléatoires sont décrites par le développement de Wiener-Hermite. Par contre, dans le cas des fonctions non-gaussiennes, la précision de la convergence présentent des insuffisances. Dans ce contexte, une correspondance optimale, établie par par Xiu et Karniadakis (XIU et KARNIADAKIS 2003), généralise la notion du chaos polynômial au cas non-gaussien. Cette généralisation conduit à la notion du chaos polynômial généralisé (CPG), appelé aussi le développement de Wiener-Askey en raison de la correspondance globale définie par le schéma d'Askey (ASKEY et WILSON 1985) qui est présenté dans le tableau 2.1.

Variable aléatoire $\xi$	Wiener-Askey PC $\phi(\xi)$	Support
Gaussienne	Hermite	$] -\infty, +\infty[$
Uniforme	Legendre	$[a, b]$
Gamma	Laguerre	$[0, +\infty[$
Beta	Jacobi	$[a, b]$

TABLE 2.1 – Correspondance entre le type de la base du chaos polynômial et le type de distribution

### 2.3.2 Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynômial généralisé

Le chaos polynômial généralisé permet la quantification des incertitudes dans le système mécanique en se basant sur 3 étapes (NECHAK, BERGER et AUBRY 2011) :

– *Le choix de la base polynômiale appropriée au problème :*

Le chaos polynomial généralisé permet la représentation d'une fonction aléatoire par un développement en série de polynômes orthogonaux en liaison avec la loi de probabilité la régissant (Schéma d'Askey) qui n'est pas en général connue. Généralement, un test avec la méthode de Monte Carlo doit d'abord être réalisé pour estimer la loi de distribution de la fonction aléatoire.

– *Le choix de l'ordre de troncation  $N_p$  :*

Le choix de l'ordre du chaos  $p$  est nécessaire afin de garantir la précision de l'approximation obtenue avec chaos polynômial généralisé. En pratique, cet ordre est fixé par une étude de convergence qui évalue la qualité de la représentation avec l'augmentation de l'ordre.

– *Le calcul des coefficients stochastiques :*

Le calcul d'incertitude en utilisant le chaos polynômial généralisé nécessite la détermination de  $N_p + 1$  modes stochastiques. Deux schémas d'implémentation peuvent être utilisés : l'approche intrusive et l'approche non-intrusive. Dans l'approche intrusive, des techniques de projection de Galerkin sont utilisés afin d'exprimer le modèle incertain sous forme d'un système d'équations couplées et déterministes en gardant les mêmes propriétés de linéarité du système original (GHANEM et SPANOS 1991). Le calcul des modes stochastiques nécessite donc le passage par l'adaptation d'un algorithme de calcul correspondant à la nature du système d'équations résultant. L'avantage de cette approche est la nécessité d'un seul calcul pour la détermination des coefficients stochastiques. Cependant, dans le cas des systèmes non linéaires et des systèmes dont le nombre de paramètres incertains est grand, cette approche devient très coûteuse au sens de calcul.

Les inconvénients de l'approche non intrusive rendent la deuxième approche très intéressante. Cette dernière ne nécessite aucune modification du modèle incertain initial pour le calcul des coefficients stochastiques. L'approche non intrusive se résume à projeter directement la solution stochastique sur la base du chaos polynômial généralisé.

Dans la suite, l'approche non-intrusive est utilisée.

### 2.3.2.1 Approche non-intrusive

L'avantage principal de l'approche non-intrusive est le fait qu'elle ne nécessite que quelques calculs de solutions déterministes en un nombre fini de points du domaine de variation probabiliste. Deux techniques sont utilisées pour le calcul des coefficients stochastiques à savoir la méthode de projection spectrale non-intrusive (NISP) et la méthode de régression.

**Technique de projection spectrale non-intrusive (NISP)** Pour la méthode NISP, une fois la solution est exprimée dans la base du chaos polynômial généralisé, elle y est projetée ce qui permet de déterminer directement les coefficients stochastiques par l'équation (eq.2.9) :

$$\bar{X}_{i,j}(x) = \frac{\langle X_i(x, \xi), \phi_j(\xi) \rangle}{\langle \phi_j(\xi), \phi_j(\xi) \rangle} = \frac{1}{\langle \phi_j^2 \rangle} \int X_i(x, \xi) \cdot \phi_j(\xi) \cdot W(\xi) d\xi, j = 0, \dots, N_p \quad (2.9)$$

Le coefficient  $\bar{X}_{i,j}(x)$  mesure la corrélation entre la fonction  $X_i(x, \xi)$  et le polynôme

$\phi(\xi)$ . Le dénominateur dans l'équation (eq.2.9) est défini par des produits internes entre des polynômes identiques. Le calcul du numérateur dans l'expression (eq.2.9) passe par le calcul d'intégrales multidimensionnelles le long du support probabiliste du vecteur aléatoire  $\xi$ . Différentes méthodes sont utilisées pour approximer ces intégrales telles que les techniques numériques de Monte Carlo, la méthode de Simpson ou les méthodes de collocation de Gauss (NECHAK, BERGER et AUBRY 2010). L'approximation de l'intégrale (eq.2.9) est donnée par :

$$\bar{X}_{i,j}(x) = \frac{1}{\langle \phi_j^2 \rangle} \sum_{k=1}^Q X_i(x, \xi^k) \cdot \phi_j(\xi^k) \cdot W(\xi^k), j = 0, \dots, N_p \quad (2.10)$$

Les points  $\xi^{(k)}$  sont les points d'intégration de Gauss appelés aussi points de collocations et qui sont donnés par les racines du polynôme  $\phi_j$  de degré  $p$  tandis que les  $W(\xi^{(k)})$  représentent les poids d'intégration de Gauss.

**La technique de régression** La méthode de régression consiste à calculer les modes stochastiques de façon à minimiser, au sens des moindres carrés, l'écart  $\varepsilon$  entre la solution du modèle stochastique et son approximation (BLATMAN et SUDRET 2008).

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^Q \left[ X_i(x, \xi^{(k)}) - \sum_{j=0}^P \bar{X}_{i,j}(x) \psi_j(\xi^{(k)}) \right] \quad (2.11)$$

La méthode de régression requiert un nombre  $Q$  de simulations supérieur au nombre de coefficients modaux à calculer, d'où  $N_p + 1 < Q$ . Cette condition est nécessaire pour que la solution du problème des moindres carrés correspondant soit admissible.  $Q$  définit le nombre de simulations correspondant à un jeu de valeurs  $\xi^{(k)}$ .

En désignant  $X_i = (X_i(x, \xi^{(1)}), \dots, X_i(x, \xi^{(q)}))$  le vecteur des simulations correspondant au jeu  $\{\xi^{(q)}\}$ ,  $\bar{X}_{i,j} = \bar{X}_{i,0}, \dots, \bar{X}_{i,N_p}$  le vecteur des coefficients modaux et  $Z$  la matrice d'éléments  $z_{q,l} = \psi_l(\xi^{(q)})$  telle que la matrice  $(U^T U)$  est non singulière. La solution optimale du problème classique des moindres carrés est donc exprimée comme suit :

$$\bar{X}_{i,j} = (Z^T Z)^{-1} Z^T X_i \quad (2.12)$$

### 2.3.2.2 Critères de choix de l'ordre optimal de troncation

Un critère peut être utilisé pour choisir l'ordre optimal de troncation et qui est lié au nombre de calculs directs  $Q < N$  (nombre de points de collocation de Gauss), avec  $Q = (p + 1)^r$  et  $N$  est le nombre d'échantillons utilisés avec Monte Carlo.

## 2.4 Etude d'un actionneur en alliage à mémoire de forme en présence d'incertitude

De nombreux chercheurs ont mené des études approfondies sur la micro-technologie. Cette technique peut être utilisée pour développer de nombreux systèmes de hautes performances et de petite taille dans divers domaines tels que la communication, l'automobile, l'aérospatial, le génie civil et le domaine médical (FROTSCHER et al. 2011; KOHL et al. 2000; NISAR et al. 2008; JODWAY et HÜLSMANN 2006; SONG, MA et LI 2006; JANI, LEARY et SUBIC 2014; HONG et al. 2015; BIL, MASSEY et ABDULLAH 2013; KHEIRIKHAH, RABIEE et EDALAT 2010; PETRINI et MIGLIAVACCA 2011; SUN et al. 2012; KOHL 2004). Les matériaux intelligents tels que les matériaux piézoélectriques et les alliages à mémoire de forme (*AMF*) ont été utilisés dans la conception des micro systèmes (HUANG et al. 2004; HOXHOLD et BÜTTGENBACH 2008; PAIK, HAWKES et WOOD 2010; BELLOUARD 2008; KUILA et STAMM 2011; KONIG et al. 2010).

Le comportement de ces matériaux permet la conversion de l'énergie mécanique en énergie thermique et électrique pour les capteurs et inversement pour les actionneurs. Certains micro systèmes nécessitent un actionneur attrayant pour les applications sensibles. Les actionneurs en *AMF* semblent être les plus utilisés pour une telle application. En fait, ce matériau présente une grande déformation qui peut être converti en déplacement. Pour cette raison, l'actionneur en alliage à mémoire de forme a été utilisé pour l'application de micro pompe (2.1). Un tel actionneur convertit l'apport d'énergie thermique ou électrique en énergie mécanique. L'actionneur utilisé dans notre étude est constitué de deux membranes en *NiTi* (BENARD et al. 1997; BENARD et al. 1998; MERZOUKI, DUVAL et ZINEB 2012).

Ces deux membranes fonctionnent d'une manière antagoniste. En effet, le chauffage d'une membrane permet le déplacement de la micro pompe dans un sens et le chauffage de l'autre membrane permet le déplacement dans l'autre direction. Pendant le chauffage de n'importe quel diaphragme, l'autre est refroidi. Il est bien connu que l'étude numérique de tel actionneur en alliage à mémoire de forme sans prendre en compte les incertitudes de différents paramètres a grandement attiré l'attention des chercheurs. Cependant, les paramètres du système peuvent souffrir d'un manque de précision. En conséquence, il

existe de nombreuses sources d'incertitude, telles que les caractéristiques du matériau, que nous devons introduire dans nos travaux afin d'assurer la fiabilité des résultats (DAMMAK et al. 2017a).

### 2.4.1 Description du micro actionneur en *AMF*

L'actionneur adopté en cette étude a été analysé par la méthode des éléments finis dans (MERZOUKI, DUVAL et ZINEB 2012) comme indiqué dans la figure 2.1. Il considère deux membranes formées en *NiTi* à l'état martensitique à la température ambiante. Ils ont initialement une forme plate et sont liés ensemble par une couronne dans le contour extérieur et par une entretoise intermédiaire en silicium.

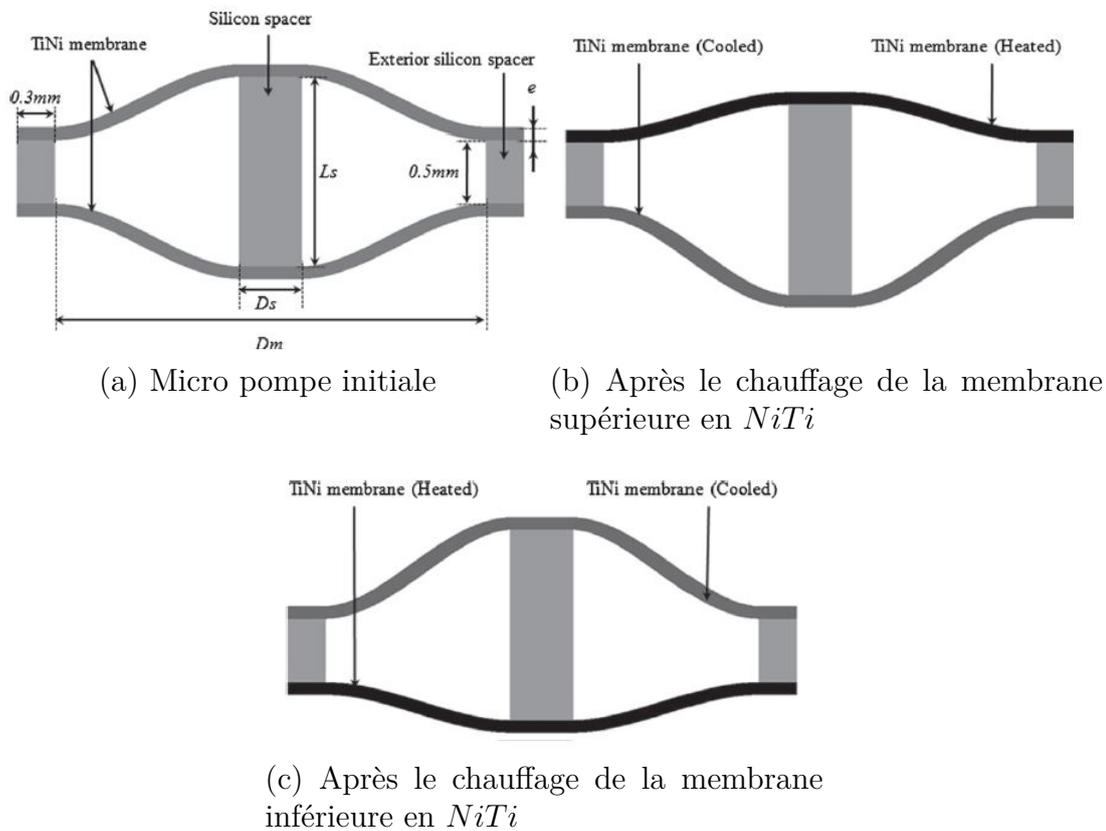


FIGURE 2.1 – Croquis de la section transversale de l'actionneur *NiTi* :  $e$  est l'épaisseur de la membrane,  $D_m$  est le diamètre de la membrane,  $D_s$  est le diamètre de l'espaceur,  $L_s$  est la longueur de l'espaceur (MERZOUKI, DUVAL et ZINEB 2012).

Cet assemblage induit un champ de contrainte de flexion sur les membranes condui-

sant à une martensite orientée et à un état de déformation récupérable par un chargement thermique induisant une transformation martensitique inverse. Lorsque la membrane supérieure est chauffée, elle devient austénitique et récupère la déformation, ainsi l'actionneur se déplace vers le bas, entraînant une déviation supplémentaire dans l'autre membrane. Le refroidissement lui permet de revenir à un état martensitique. Lorsque la membrane inférieure est chauffée, elle devient austénitique et provoque la déformation, de sorte que l'actionneur se déplace dans l'autre sens.

Le principe de l'actionneur est montré dans la figure 2.1. Dans cette étude, le chauffage de l'actionneur en *AMF* est proposé en appliquant un courant électrique. Le refroidissement se produit dans des conditions de convection libre dans l'air.

## 2.4.2 Analyse numérique de l'actionneur en *AMF*

Les paramètres géométriques de la micro pompe sont illustrés dans la figure 2.1(a). Sa forme est caractérisée par une épaisseur de 0,01mm et un diamètre de 3mm. L'espaceur intermédiaire entre les deux membranes est 1,5mm de long et 0,5mm de diamètre.

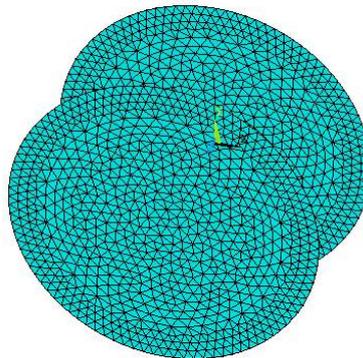


FIGURE 2.2 – Deux membranes de modèle 3D de la micro pompe.

Tout d'abord, Les membranes sont présentées dans un modèle 3D et sont maillées à l'aide de l'élément coque (Figure2.2). Chaque élément a trois nœuds avec six degrés de liberté à chaque nœud : trois translations dans les axes nodaux et trois rotations pour les trois directions. Les propriétés des matériaux considérés dans la simulation présentée sont donnés dans le tableau 2.2 qui correspond au *NiTi* alliage. Les paramètres du matériau sont respectivement : le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , le paramètre de durcissement  $h$ , la limite d'élasticité  $R$ , le paramètre d'échelle de température  $\beta$ , la température de référence  $M_f$  et la contrainte de transformation maximale  $\epsilon_L$ . Le modèle élément fini est introduit dans logiciel ANSYS en utilisant les propriétés du matériau données dans le tableau 2.2.

TABLE 2.2 – Paramètres du matériau de la structure (BISEGNA et al. 2014)

$E(MPa)$	$\nu$	$h(MPa)$	$R(MPa)$	$\beta(MPaK^{-1})$	$M_f(K)$	$\varepsilon_L$
53000	0.36	1000	50	2.1	223	0.04

Le trajet de chargement appliqué sur les deux membranes est illustré à la figure 2.3. La première étape (AB) correspond au processus d'orientation des variantes de la martensite dans les deux membranes en  $NiTi$ . La deuxième étape (BC) correspond au chargement thermique des membranes au-dessus de la température finale de l'austénite  $A_f$ . Lorsque la première membrane est librement refroidie, la seconde est chauffée comme présentée à la figure 2.3.

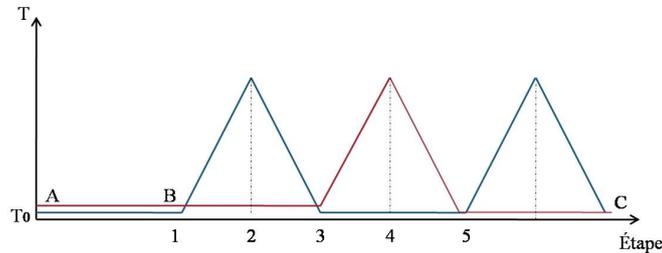
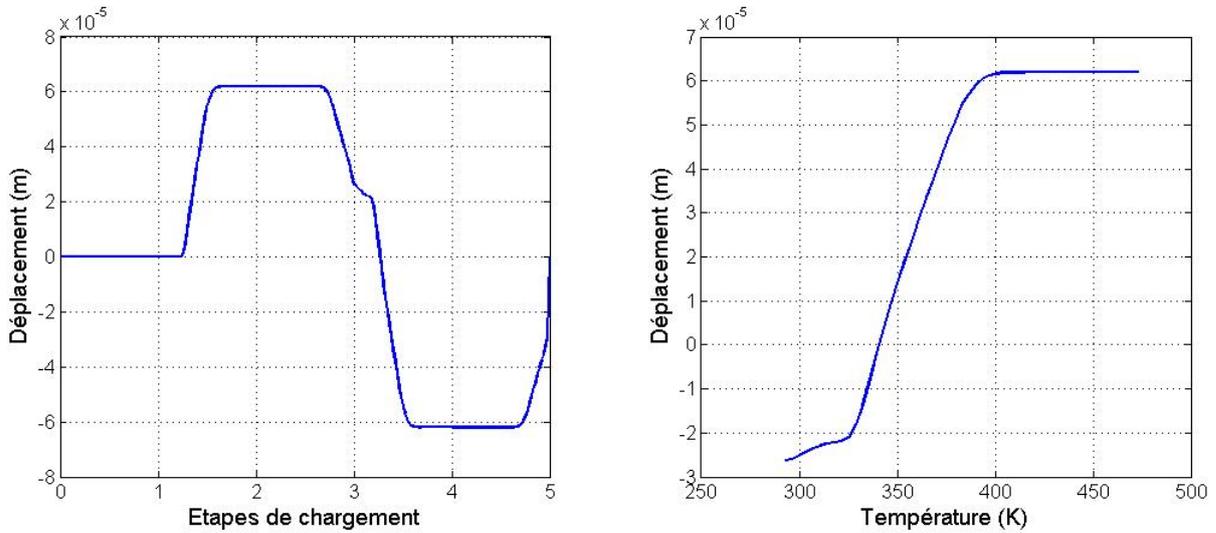


FIGURE 2.3 – Chargement thermique pour les deux membranes en  $NiTi$ .

Les étapes 1 – 2 et 2 – 3 correspondent au chauffage et au refroidissement de la membrane supérieure. Les étapes 3 – 4 et 4 – 5 correspondent au chauffage et au refroidissement de la membrane inférieure où la membrane supérieure est refroidie. Dans cette étude, la température ambiante et le niveau de chauffage étaient fixés à 293 K et 473 K respectivement.

### 2.4.3 Résultats déterministes et discussion

Figure 2.4(a) montre le déplacement de l'actionneur au cours des différentes étapes. Figure 2.4(b) donne le déplacement en fonction de la température appliquée pendant le chauffage de la membrane supérieure.



(a) Déplacement pendant les étapes : 0-5 (b) Déplacement en fonction de la température.

FIGURE 2.4 – Déplacement de l'actionneur.

Le déplacement augmente avec la température de chauffage. Il semble que l'actionneur commence à se déplacer à la température 324,5 K. On peut observer que lorsque la température de chauffage atteint 378,5 K, le déplacement sature en une valeur asymptotique en continuant d'augmenter légèrement. En fait, cela correspond à la transformation inverse complète de la martensite en austénite.

La modélisation de la micro-pompe en *NiTi* est réalisée en supposant que les paramètres du matériau sont constants mais dans la réalité, ce n'est pas le cas. Pour être plus proche de l'effet des paramètres du matériau sur la réponse de l'actionneur, ceux-ci seront utilisés comme paramètres incertains. Dans la section suivante, une analyse détaillée de la prise en compte de l'incertitude dans les paramètres du matériau est réalisée. L'objectif est de trouver la distribution de probabilité optimale afin de modéliser la propagation de l'incertitude à travers la micro pompe.

#### 2.4.4 Analyse probabiliste proposée

Dans cette section, la variabilité des paramètres incertains dans le cas de micro pompe est présentée. La méthode du chaos polynomial généralisée (*CPG*) est implémentée et intégrée dans la simulation par éléments finis. Le moyenne et l'écart type du déplacement ont été calculés. Ensuite, les résultats de *CPG* sont comparés à ceux obtenus avec la méthode

de Monte Carlo (*MC*) (1500 simulations). Les distributions de probabilité uniforme et normale sont traitées afin de décrire les paramètres aléatoires. L'objectif de cette section est de déterminer la distribution de probabilité la plus appropriée pour cette application. En réalité, aucune étude ne confirme la validité d'une distribution de probabilité clairement définie pour l'étude de ce cas. Notre jugement est basé sur les résultats de la simulation de Monte Carlo qui sont pris comme référence.

#### 2.4.4.1 Distribution uniforme de l'incertitude

Dans cette partie, une distribution de probabilité uniforme est utilisée pour introduire la dispersion des paramètres du matériau. Les paramètres sont choisis pour suivre une distribution uniforme autour de leurs valeurs nominales de 10%. Le tableau 2.3 donne une idée sur les différents paramètres incertains choisis dans cet exemple.

TABLE 2.3 – Caractéristiques des paramètres du matériau incertains

$E(MPa)$	$\nu$	$h(MPa)$	$R(MPa)$	$\beta(MPaK^{-1})$
[47700; 58300]	[0.324; 0.396]	[900; 1100]	[45; 55]	[1.89; 2.31]

Pour étudier ce système mécanique, la méthode de Monte Carlo consiste à créer dans un premier temps une grille des valeurs incertaines des paramètres, puis à calculer la quantité d'intérêt du système pour chaque valeur de la grille. Dans cette partie, la quantité d'intérêt est analysée pour 1500 simulations. Figure 2.5 présente la distribution des variables d'entrée ( $E, \nu, h, R, \beta$ ) dans le cas d'une distribution uniforme. Les polynômes de Legendre sont utilisés pour les incertitudes uniformes.

Ces polynômes sont écrits en utilisant la relation de récurrence comme suit :

$$\begin{cases} (n+1)P_{L_{n+1}}(x) = (2n+1)xP_{L_n}(x) - nP_{L_{n-1}}(x) \\ P_{L_0}(x) = 1 \\ P_{L_1}(x) = x \end{cases} \quad (2.13)$$

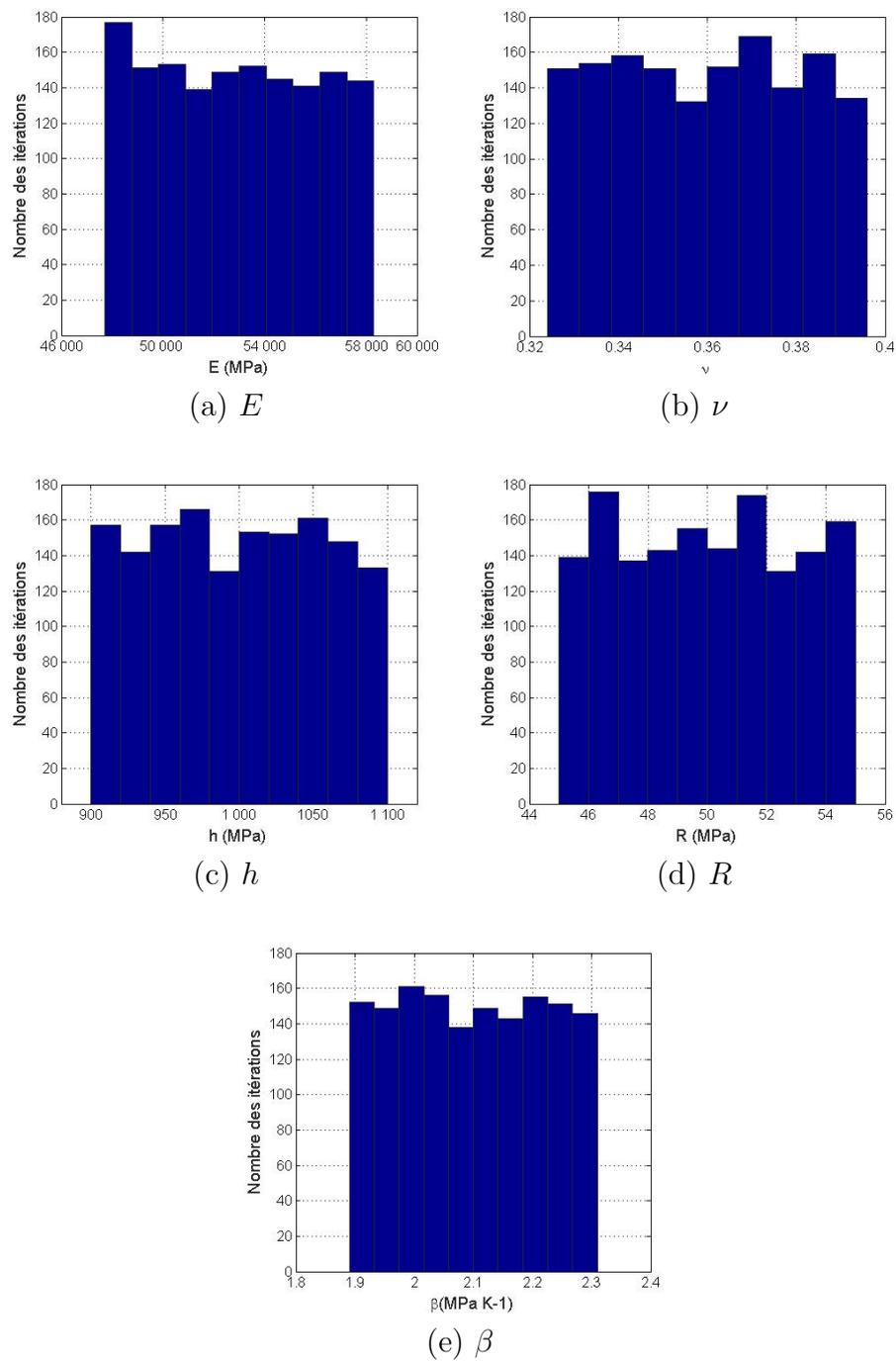


FIGURE 2.5 – Distribution de probabilité uniforme des paramètres du matériau.

La validité de la méthodologie proposée et l'influence de l'ordre  $p$  du chaos polynôme

généralisé sont étudiés. Pour atteindre cet objectif, le déplacement de la micro-pompe sera présentée en faisant varier la valeur de  $p$ .

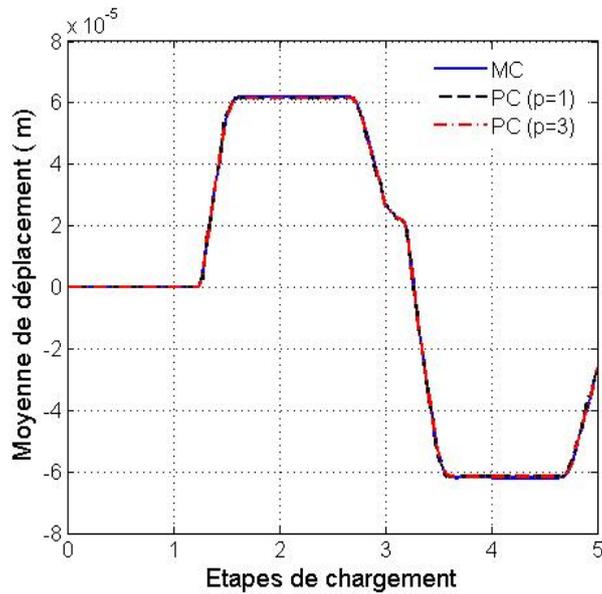


FIGURE 2.6 – Valeur moyenne de déplacement de la micro-pompe pour une distribution uniforme.

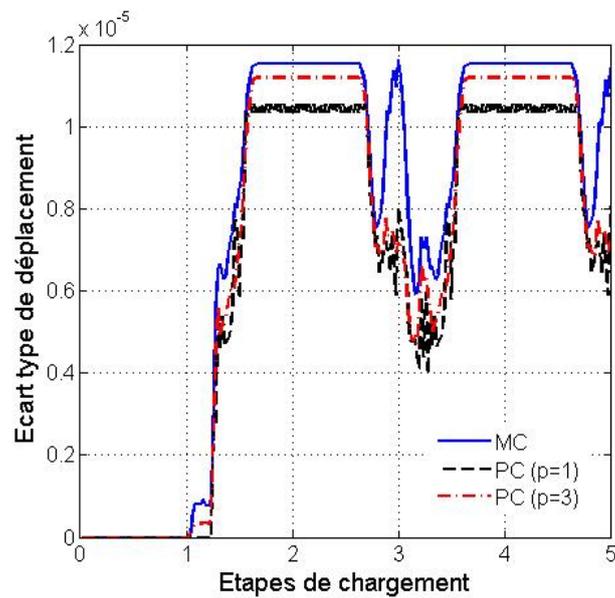


FIGURE 2.7 – Écart type de déplacement de la micro-pompe pour une distribution uniforme.

Les figures 2.6 et 2.7 montrent que dans le cas de  $p = 1$ , les courbes obtenues par la méthode *CPG* et celles obtenues par *MC* présentent une différence. En fait, il n'y a pas assez de termes de chaos pour présenter convenablement les résultats du système. Comme  $p$  augmente, les résultats obtenus par *CPG* semblent être meilleurs. En conséquence, pour  $p = 3$ , le déplacement de la micro-pompe sont proches des simulations de *MC*.

#### 2.4.4.2 Distribution normale de l'incertitude

Dans cette section, une loi de probabilité normale est utilisée pour introduire la dispersion des paramètres de matériau. Le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , le paramètre de durcissement  $h$ , la limite d'élasticité  $R$  et le paramètre d'échelle de température  $\beta$  sont supposés être des variables aléatoires et sont définis comme suit :

$$\begin{cases} E = E_0 + \sigma_E \xi \\ \nu = \nu_0 + \sigma_\nu \xi \\ h = h_0 + \sigma_h \xi \\ R = R_0 + \sigma_R \xi \\ \beta = \beta_0 + \sigma_\beta \xi \end{cases} \quad (2.14)$$

Où  $E_0, \nu_0, h_0, R_0$  et  $\beta_0$  sont les valeurs moyennes et  $\sigma_E, \sigma_\nu, \sigma_h, \sigma_R$  et  $\sigma_\beta$  sont les écarts-types associés.

Dans ce cas, les polynômes Hermite sont les mieux utilisés pour traiter les incertitudes normales. Les polynômes d'Hermite sont présentés en utilisant la relation de récurrence comme suit :

$$\begin{cases} P_{H_0}(x) = 1 \\ P_{H_n}(x) = x.P_{H_{n-1}}(x) - \frac{dP_{H_{n-1}}(x)}{dx} \end{cases} \quad (2.15)$$

La figure 2.8 présente la distribution des variables d'entrée ( $E, \nu, h, R, \beta$ ) dans le cas d'une distribution normale. Cette figure montre la distribution normale des paramètres mentionnés pour un écart type égal respectivement à 5% et 10%. La valeur moyenne et l'écart type de déplacement de la micro pompe sont calculés par la méthode du chaos polynomial généralisé.

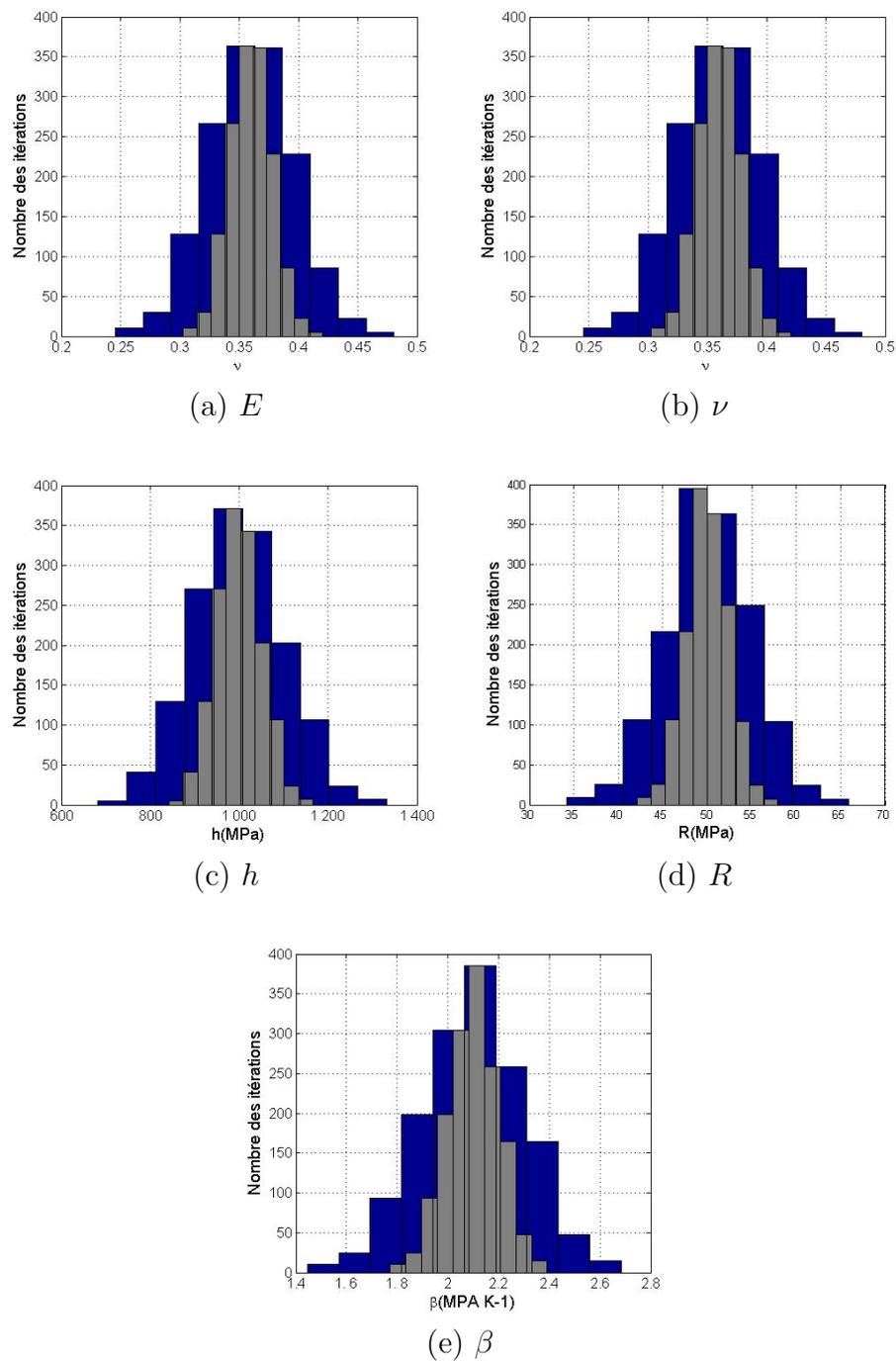


FIGURE 2.8 – Distribution de probabilité normale des paramètres du matériau :(gris) écart type (sd)= 5%, (bleu) écart type (sd)=10% .

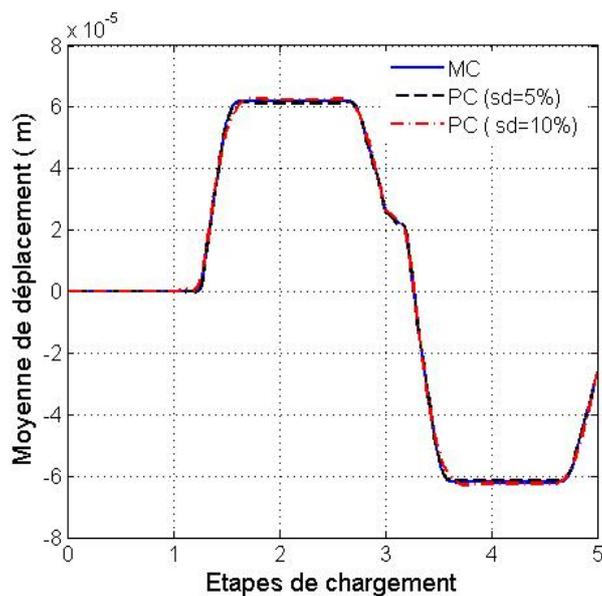


FIGURE 2.9 – Valeur moyenne de déplacement de la micro pompe pour une distribution normale

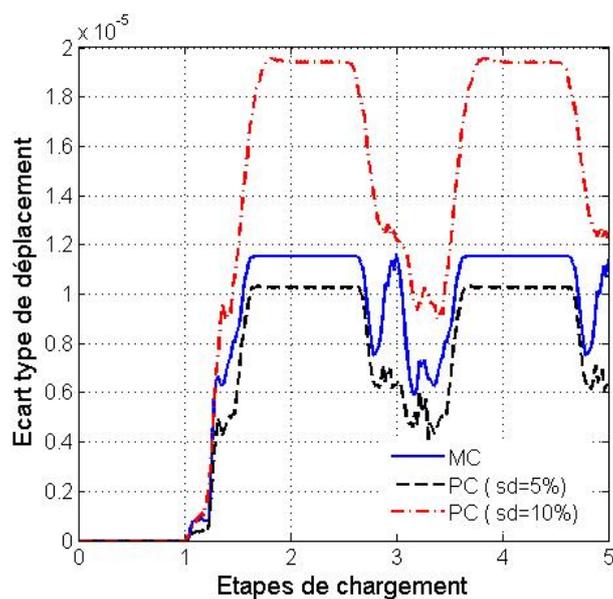


FIGURE 2.10 – Écart type de déplacement de la micro pompe pour une distribution normale.

Les résultats obtenus dans cette section sont également comparés à la méthode de Monte Carlo pour 1500 simulations. Dans la section précédente, l'ordre  $p$  du  $CPG$  est fixé

à  $p = 3$ . Dans cette partie, la sensibilité de l'écart type ( $sd$ ) de la réponse du système de la distribution normale est étudiée. Pour atteindre cet objectif, la valeur moyenne et l'écart type de déplacement est déterminé en faisant varier l'écart type de 5% à 10%. Les résultats obtenus sont comparés aux simulations de  $MC$ . D'après les figures 2.9 et 2.10, la valeur moyenne et l'écart type ( $sd$ ) de déplacement de la micro-pompe semblent fournir une bonne précision par rapport aux simulations de la méthode  $MC$  pour un écart type  $sd = 5\%$ . Lorsque nous augmentons cette valeur à  $sd = 10\%$ , l'erreur augmente.

### 2.4.5 Distribution de probabilité optimale

Le choix d'une distribution de probabilité optimale est nécessaire dans la modélisation de la propagation de l'incertitude dans un système. En général, si la plage de variation des paramètres incertains est non bornée et que la moyenne et l'écart type de ces paramètres sont connus, une loi normale doit être choisie. Dans le cas où la plage de variation est bornée, la distribution uniforme doit être utilisée (BEYAOUI et al. 2016).

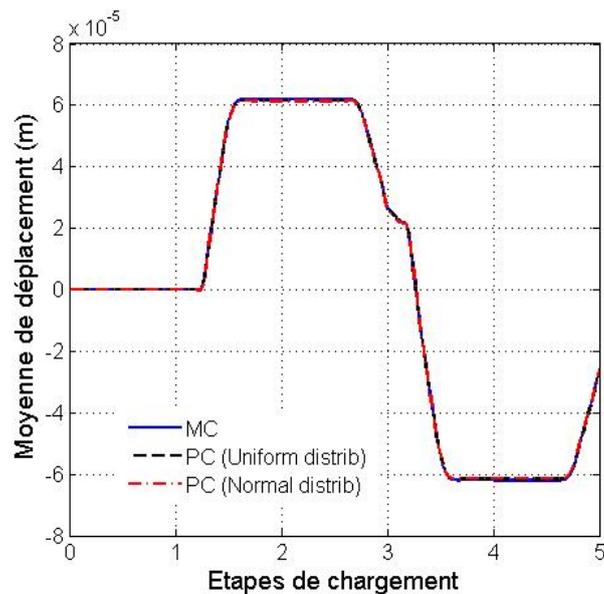


FIGURE 2.11 – Valeur moyenne de déplacement de la micro-pompe pour une distribution uniforme et normale

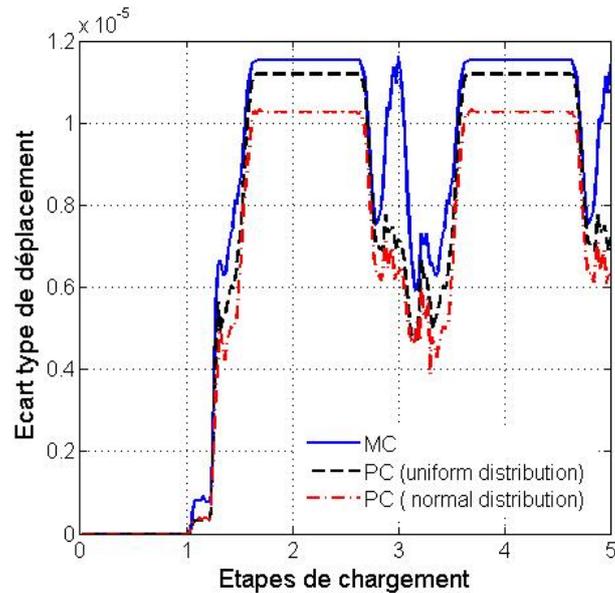


FIGURE 2.12 – Écart type de déplacement de la micro-pompe pour une distribution uniforme et normale.

Dans ce chapitre, l'actionneur est étudié avec des distributions uniformes et normales. L'ordre du chaos polynomial est fixé à ( $p = 3$ ). Les figures 2.11 et 2.12 montrent que les résultats obtenus par des distributions uniformes sont bien plus proche de ceux donnés par la méthode de Monte Carlo. En conséquence, la distribution uniforme est plus efficace pour modéliser l'incertitudes sur les paramètres du matériau pour un micro actionneur en *AMF*.

## 2.5 Etude d'une prothèse de hanche en présence d'incertitude

La prédiction du comportement mécanique d'un os est un processus complexe qui a beaucoup retenu l'attention des chercheurs dans le domaine de la biomécanique. Les propriétés de l'os changent d'un endroit à un autre. On distingue deux types principaux de tissu osseux. La partie interne est un os spongieux caractérisé par une porosité supérieure, une vascularisation plus élevée et une capacité à absorber de l'énergie avant la fracture. Ce type d'os s'appelle os spongieux. L'os de la partie externe est caractérisé par un os compact. C'est ce qu'on appelle l'os cortical (KHARMANDA 2015). La composition et la structure de l'os affectent ces paramètres du matériau. En effet, la composition dépend de la nutrition, des maladies et des propriétés mécaniques. Kopperdahl et Kevery (KOPPERDAHL

et KEAVENY 1998) ont présenté une étude expérimentale sur des spécimens bovins et humains. Les expériences montrent que le module de Young est lié à la densité osseuse. Dans (KEYAK, LEE et SKINNER 1994), les auteurs étudient la relation entre les caractéristiques mécaniques et la densité de cendres de l'os spongieux. Kharmanda (KHARMANDA 2015) a étudié la fiabilité d'une prothèse de hanche présentant de nouvelles propriétés de matériau. Kharmanda et al. (KHARMANDA 2016) intègrent également l'optimisation multi-objectifs dans une conception améliorée de prothèse de hanche sans ciment. Il est à noter que l'étude numérique d'un tel système biomécanique sans prendre en compte les incertitudes de différents paramètres a fait l'objet des nombreux publications. Néanmoins, les paramètres du matériau peuvent souffrir d'un manque de précision en raison de la mesure expérimentale de ces paramètres. Par conséquent, cette partie propose une méthodologie pour prendre en compte l'incertitude dans un matériau osseux pour un système de prothèse de hanche.



FIGURE 2.13 – Prothèse de hanche en 3D.

### 2.5.1 Modèle et matériaux utilisés

Le système biomécanique considéré consiste en une prothèse de hanche sans ciment. Pour simplifier, un modèle 2D est considéré pendant le processus d'incertitude. Une illustration de la tige étudiée est illustrée à la Figure 2.14. La simulation numérique de la réponse de la prothèse de hanche est réalisée à l'aide du logiciel commercial ANSYS. Concernant la discrétisation de ce système, 220, 699 et 557 éléments ont été adoptés respectivement pour la structure spongieuse, corticale et métallique. Le nombre d'éléments pris en compte dans cette analyse est de 1476 éléments (8 nœuds / PLANE 82) et le nombre total de nœuds est de 4825 nœuds.

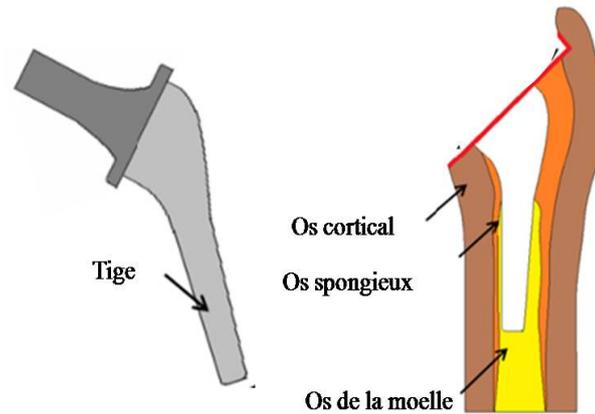


FIGURE 2.14 – Tige solide 2D avec les différentes couches.

TABLE 2.4 – Paramètres du matériau pour la prothèse de hanche

Paramètres	$E(MPa)$	$\nu$	$\sigma_y(MPa)$
Ti-6Al-4V alloy	110000	0.3	825
Cortical	17000	0.3	132
Cancellous (Trabecular)	761	0.3	10.53

D'après le tableau 2.4, l'os cortical est un matériau homogène et isotrope caractérisé par un module de Young  $E = 17GPa$ , un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et une contrainte de rendement expérimentale  $\sigma_y = 132MPa$ . Pour la couche d'os spongieux, elle est supposée être un matériau homogène et isotrope avec un module de Young  $E = 761MPa$ , un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et une contrainte de rendement expérimentale  $\sigma_y = 10,53MPa$  (KHARMANDA 2016). L'alliage de titane est considéré comme le meilleur matériau bio compatible. En conséquence, le matériau de la tige femorale est en alliage  $Ti - 6Al - 4V$ . Les caractéristiques du matériau de cette tige sont respectivement le module de Young  $E = 110GPa$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et la contrainte de rendement expérimental est  $\sigma_y = 825MPa$ . De la figure 2.15(a), nous pouvons distinguer les différentes parties qui forment la prothèse de hanche. La couche  $A_1$  présente la partie tige,  $A_2$  contient les couches spongieuses et  $A_3$  contient les couches corticales .

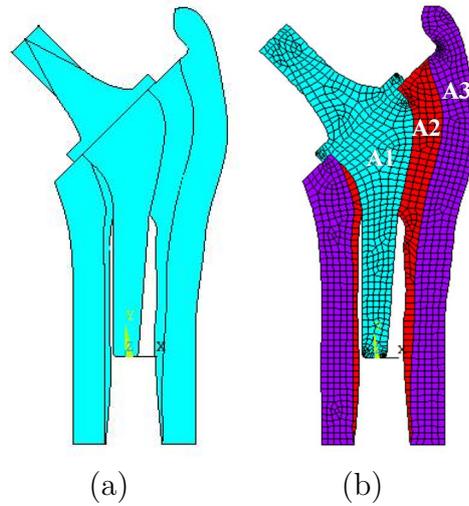


FIGURE 2.15 – (a) Prothèse de hanche 2D utilisant le logiciel ANSYS (b) Modèle de maillage.

## 2.5.2 Conditions aux limites

Dans cette étude, trois conditions de charges quotidiennes sont supposées et correspondent respectivement à la position d'une jambe (L1), au mouvement d'abduction (L2) et à l'adduction (L3), comme indiqué sur la Figure 2.16. Les conditions aux limites à l'extrémité distale n'ont aucun effet sur les contraintes dans la région proximale. La fixation est faite sur l'os cortical afin d'éviter le mouvement du corps rigide (KHARMANDA 2016).

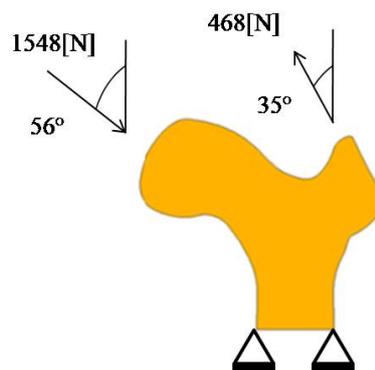


FIGURE 2.16 – Conditions aux limites de la prothèse de hanche.

### 2.5.3 Résultats déterministes de la prothèse de hanche

Dans cette partie, le système de prothèse de hanche est réalisé sans tenir compte des incertitudes. Selon (KHARMANDA 2016), le troisième cas de chargement ( $L_3$ ) est le plus critique. La figure 2.17 montre la distribution de la contrainte de von mises pour le cas d'adduction. La contrainte de von mises maximale est située dans la région inférieure droite de la couche corticale. Le tableau 2.5 montre les valeurs de contrainte de l'os de la tige étudié pour le cas de chargement ( $L_3$ ). Pour l'os spongieux, la contrainte maximale est  $\sigma_{max}^2 = 5.63$ . Pour l'os cortical, il s'agit de  $\sigma_{max}^1 = 15.59$  et pour la partie métallique,  $\sigma_{max}^M = 11.28$ . Les résultats obtenus sont conformes à Kharmanda (KHARMANDA 2016).

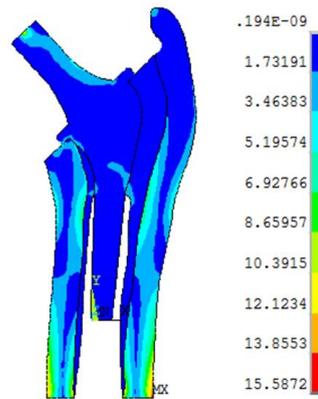


FIGURE 2.17 – Résultats de la simulation déterministe

TABLE 2.5 – Paramètres de sortie de la simulation tige-os

Paramètres de sortie (MPa)	$L_3$
$\sigma_{max}^1$	15.59
$\sigma_{max}^2$	5.63
$\sigma_{max}^M$	11.28

### 2.5.4 Analyse probabiliste proposée

Dans cette section, la variabilité des paramètres incertains dans le cas de la prothèse de hanche est présentée. La méthode du chaos polynomial généralisé (CPG) est implémentée et intégrée à la simulation par la méthode des éléments finis. L'objectif de cette partie est d'étudier la robustesse de ce système qui fonctionne en présence des incertitudes liées aux

caractéristiques des matériaux. La distribution de probabilité uniforme est utilisée dans ce cas. Les paramètres sont choisis pour suivre une distribution uniforme autour de leurs valeurs nominales  $\pm 10\%$ . Le tableau 2.6 donne une idée des différents paramètres incertains choisis. Traiter la méthode de Monte Carlo pour étudier cette prothèse de hanche consiste à créer dans un premier temps une grille de valeur à partir des paramètres incertains, puis à calculer la quantité d'intérêt du système pour chaque valeur de la grille. Dans cette partie, la quantité d'intérêt est analysée pour 200 simulations.

TABLE 2.6 – Caractéristiques des paramètres du matériau incertains

Paramètre	$E_{cortical}(MPa)$	$E_{cancellous}(MPa)$
Valeur	U[15300;18700]	U[684.9;837.1]

Dans cette partie, la validité de la méthode proposée et l'influence de l'ordre  $p$  du chaos polynomial généralisé sont étudiées. Pour atteindre cet objectif, le contrainte de von mises de la prothèse de hanche sera mise en évidence en faisant varier la valeur de  $p$ .

Les figures 2.18 (a), (b), (c) et (d) présentent l'évolution de l'amplitude de la contrainte de von mises en fonction des deux paramètres incertains par les deux méthodes stochastiques  $MC$  et  $CPG$ . En considérant le troisième cas de chargement quotidien, on peut noter une influence significative du module de Young des couches corticales et spongieuses sur les paramètres de sortie. Lorsque on augmente la valeur du module de Young de l'os cortical, la valeur maximale des contraintes de von mises augmente. En conséquence, on a une influence positive. Cependant, lorsque on augmente le module de Young de l'os spongieux, la contrainte maximale de la couche spongieuse diminue. on a donc une influence négative.

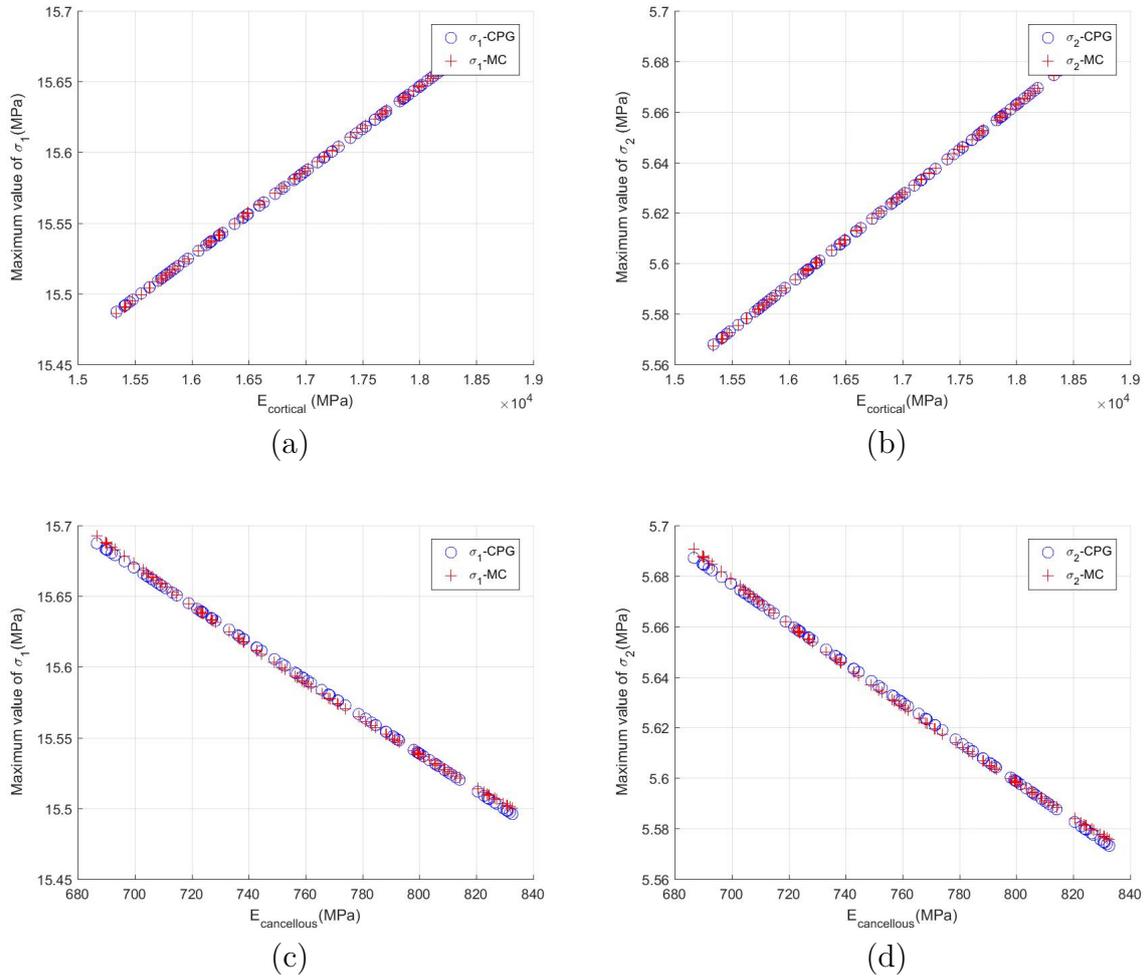


FIGURE 2.18 – Amplitude de la contrainte de von mises pour  $p = 1$  en fonction des paramètres du matériau :  $E_{cortical}$  et  $E_{cancellous}$ .

Il est intéressant de noter une différence entre les courbes obtenues par la méthode de Monte Carlo et les simulations du chaos polynomial généralisé pour une faible valeur de  $p$ . Ce résultat est plausible car il n'y a pas assez de termes de  $CPG$  pour présenter correctement la réponse incertaine de ce système biomécanique. Le résultat obtenu est évalué par (DAMMAK et al. 2017a). En augmentant l'ordre  $p$  du polynôme à 3, les courbes sont similaires à celles de référence obtenues par la méthode  $MC$ . Pour les deux paramètres incertains, nous trouvons qu'un ordre  $p = 1$  est insuffisant pour donner une réponse  $CPG$  qui suit celle obtenue par l'approche  $MC$ , comme indiqué dans la figure 2.19.

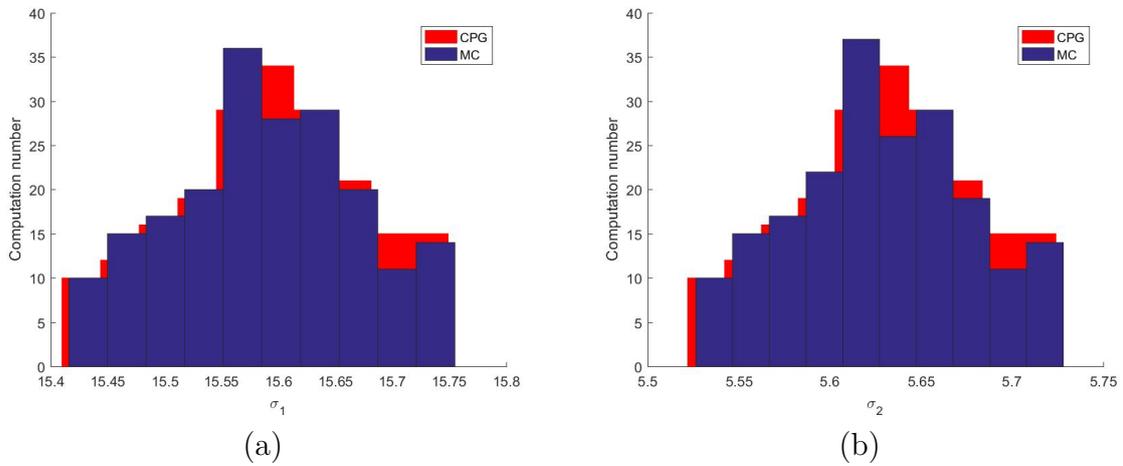


FIGURE 2.19 – Distribution de la probabilité du contrainte de von mises pour  $p = 1$  : (a)  $\sigma_1$ , (b)  $\sigma_2$

La figure 2.20 présente la valeur de le contrainte de von mises en fonction de l'ordre  $p$  pour les deux paramètres incertains avec une variation de  $\pm 10\%$ . On note une convergence des valeurs des paramètres de sortie pour un ordre  $p = 3$ .

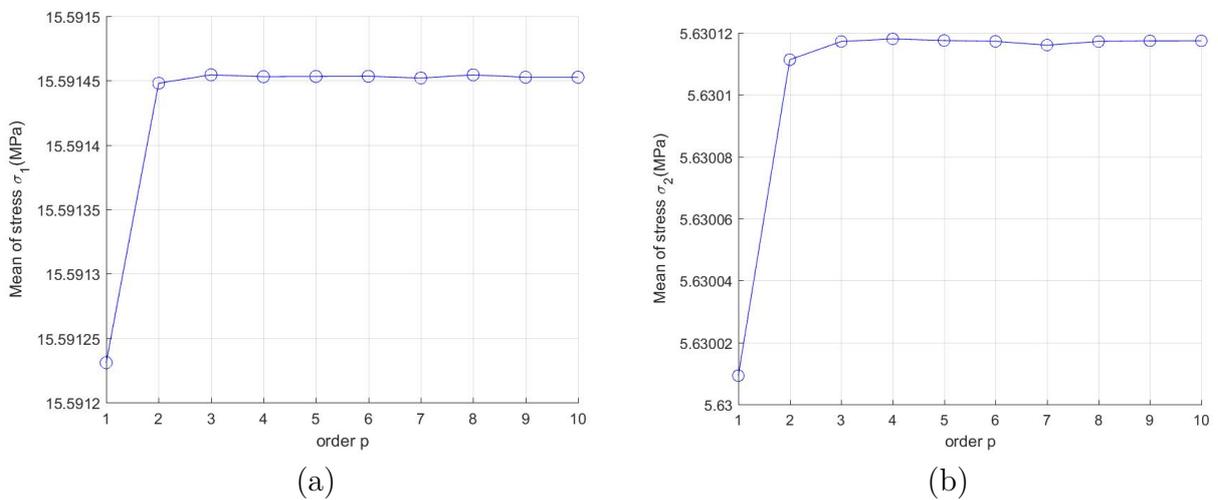


FIGURE 2.20 – Moyenne de contrainte mise en place : (a)  $\sigma_1$ , (b)  $\sigma_2$ .

Le tableau 2.7 montre les caractéristiques principales de chaque technique. Il est à noter que la technique  $MC$  est très puissante pour résoudre la complexité des systèmes avec des

paramètres aléatoires. Dans cette étude, 200 échantillons des deux variables d'entrée sont calculés. Selon les résultats de la table 2.7, cette méthode nécessite un temps de calcul élevé pour obtenir une précision raisonnable des résultats. La méthode du chaos polynomial généralisé (*CPG*) peut être considérée comme la meilleure technique pour prendre en compte les incertitudes. Cette méthode est plus efficace que la méthode de Monte Carlo.

TABLE 2.7 – Résumé des résultats de *MC* et de *CPG*

-	Monte Carlo	<i>CPG</i> (r=2, p=3)
Nombre de simulations		200
Moyenne de contrainte $\sigma^1$	15.5904	15.5903
Moyenne de contrainte $\sigma^2$	5.6295	5.6294
Ecart type de contrainte $\sigma^1$	0.068	0.068
Ecart type de contrainte $\sigma^2$	0.024	0.024
Temps <i>MC</i> (s)		663.45
Temps <i>CPG</i> (s)		2.63

## 2.6 Conclusion

La méthode de chaos polynomial est une alternative à la méthode de Monte Carlo, notamment pour le traitement des problèmes de propagation d'incertitudes dans les modèles mécaniques. Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de chaos polynomial généralisé pour la détermination des quantités d'intérêt dans le cas des systèmes mécaniques formés en alliage à mémoire de forme et des systèmes biomécaniques. Cette méthode est basée sur la projection des quantités d'intérêts dans une base stochastique particulière. Après avoir défini la notion de propagation d'incertitudes, plusieurs approches ont été introduites pour représenter cette propagation. L'étude bibliographique nous a conduit à choisir l'approche du chaos polynomial généralisé non intrusive. Cette méthode présente l'avantage de prendre en compte les incertitudes sans aucune modification du système initial. On est ensuite intéressé au développement mathématique de l'approche du chaos polynomial généralisé (*CPG*). Le *CPG* est formulé pour l'analyse de la propagation des incertitudes pour le calcul des quantités d'intérêt, où la variabilité porte sur les paramètres du matériau. Ces paramètres sont modélisés par des variables aléatoires normales et uniformes. La mise en oeuvre de la méthode et sa comparaison avec les résultats de référence obtenus par les simulations Monte Carlo montrent l'efficacité et la bonne précision de cette méthode, aussi bien pour le calcul des quantités d'intérêt linéaire que celles qui sont fortement non linéaires. Dans ces exemples d'applications, le coût de *CPG* proposé est minimal par rapport à celui des simulations de Monte Carlo. Lors de la conception d'un système, les concepteurs doivent optimiser ces performances. Cependant, la conception optimisée sans

tenir en compte de l'incertitude sur les paramètres peut ne pas respecter certains critères de fiabilité. Ainsi, l'optimisation fiabiliste est une nouvelle discipline qui consiste à trouver le compromis entre un coût minimum et une fiabilité cible. L'objectif du chapitre 3 est de déterminer la meilleure méthodologie à suivre pour l'optimisation fiabiliste des systèmes mécaniques comportant des paramètres incertains.

# Optimisation fiabiliste des systèmes mécaniques

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>59</b>
<b>3.2</b>	<b>Optimisation des structures</b>	<b>59</b>
3.2.1	Formulation du problème d'optimisation	60
3.2.2	Optimisation de conception déterministe ( <i>DDO</i> )	61
3.2.3	Exemple d'une poutre en flexion	62
<b>3.3</b>	<b>Optimisation fiabiliste (<i>RBDO</i>)</b>	<b>63</b>
3.3.1	Classification de l'optimisation fiabiliste	65
3.3.2	Approche classique	67
3.3.3	Méthode hybride (HM)	68
3.3.4	Facteur de sécurité optimal (Optimum safety factor OSF)	69
3.3.5	Méthode hybride robuste (RHM)	72
<b>3.4</b>	<b>Méthode OSF combinée avec le chaos polynomial généralisé appliquée à un implant dentaire en présence d'incertitudes</b>	<b>74</b>
3.4.1	Introduction	74
3.4.2	Analyse déterministe de l'implant dentaire en 2D	74
<b>3.5</b>	<b>Optimisation fiabiliste basée sur la méthode RHM d'un treillis en alliage à mémoire de forme</b>	<b>80</b>
3.5.1	Procédures de l'optimisation de conception déterministe et de l'optimisation fiabiliste	82
3.5.2	Résultats de l'optimisation de conception déterministe et de l'optimisation fiabiliste	83
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>86</b>

## 3.1 Introduction

La détermination de la conception optimale d'un système mécanique est l'une des préoccupations majeures pour l'ingénieur. Cette conception doit garantir plusieurs critères tel que la durabilité et la fiabilité. L'objectif de l'optimisation est donc de trouver le meilleur dimensionnement qui permet de réduire le coût et de satisfaire les performances. Généralement, l'optimisation est modélisée mathématiquement par un problème de minimisation d'une fonction objective sous des fonctions d'état limite. Cette problématique est résolue à l'aide des algorithmes itératifs.

A partir d'une conception initiale comportant des variables de conception, l'optimisation permet la détermination d'une conception optimale qui vérifie les critères de performance. L'optimisation des systèmes sans prise en compte des incertitudes peut conduire à un grand risque de défaillance de la conception c'est à dire le non respect de la fiabilité espérée. Afin de concevoir des structures fiables et économiques à la fois, plusieurs méthodes d'optimisation fiabiliste ont été développées. Ces méthodes ont été appliquées dans plusieurs domaines : le mécatronique (MAKHLOUFI, AOUES et EL HAMI 2016), le vibro-acoustique (DAMMAK et al. 2017b), l'aérodynamique (EL MAANI et al. 2018 ; EL MAANI 2016), la biomécanique (KHARMANDA et EL HAMI 2016 ; KHARMANDA et EL HAMI 2017) et le génie civil (KUSANO et al. 2014).

Dans ce chapitre, nous présentons la méthodologie de l'optimisation déterministe. Par la suite, nous développons les différentes méthodes de l'optimisation fiabiliste. Une extension de ces méthodes dans le cas des systèmes formés en alliage à mémoire de forme est proposé ensuite.

## 3.2 Optimisation des structures

L'idée de la conception optimale des structures en mécanique est l'une des préoccupations majeures pour l'ingénieur. Cette idée n'est possible que depuis quelques décennies et ceci grâce à l'avènement de l'ordinateur. Basée sur une conception initiale caractérisée par un certain nombre de paramètres appelées variables de conception, l'optimisation vise à trouver la meilleure conception au regard des critères liés à la performance de la structure. la solution trouvée est qualifiée de conception optimale.

D'après la littérature, les techniques d'optimisation peuvent être divisées en trois grandes catégories selon la nature des variables de conception :

- *Optimisation de la conception* : elle permet d'améliorer le modèle structural dont la topologie et la forme sont fixes. Les variables de conception sont donc les dimensions

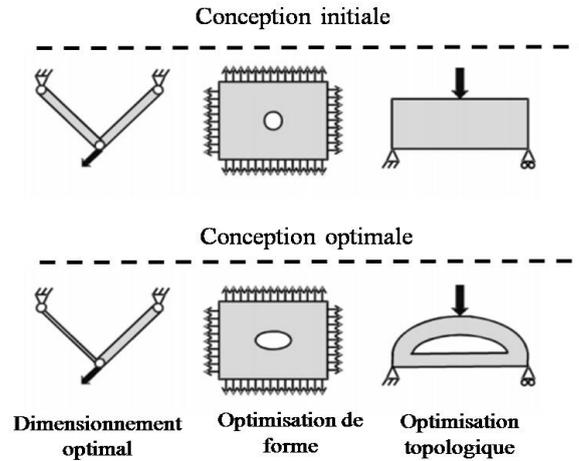


FIGURE 3.1 – Problèmes d’optimisation de structure.

transversales d’une structure telle que par exemple la section, l’épaisseur ...

- *Optimisation de forme* : elle permet de modifier la géométrie de la structure avec une topologie fixée. Les variables de conception sont donc des paramètres représentant les frontières du domaine.
- *Optimisation de la topologie* : permet de contrôler, en plus de la géométrie, la topologie de la pièce. Elle est appelée aussi optimisation de forme généralisée. elle permet de changer fondamentalement la structure d’une pièce mécanique.

### 3.2.1 Formulation du problème d’optimisation

L’optimisation de la conception consiste à trouver les paramètres intervenant dans la conception, qui minimisent une fonction objective en vérifiant des contraintes de performance mécaniques, géométriques et physiques. Le problème d’optimisation est défini par :

$$\begin{aligned} \min_x & : f(x) \\ tq : & \begin{cases} g_k(x) \leq 0, & k = 1, \dots, K \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, L \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Avec  $x$  représente le vecteur des variables d’optimisation,  $f(x)$  est la fonction objective,  $g_k$  et  $h_j$  représentent respectivement les contraintes d’inégalité et les contraintes d’égalité. Généralement, les algorithmes d’optimisation convergent vers un minimum local. En effet, le résultat peut être un minimum global, mais ce n’est pas toujours le cas. Un minimum

local représente le point où la valeur de la fonction est inférieure à celle des points voisins. Cependant, un minimum global est le point où la valeur de la fonction est inférieure à tous les autres points. Figure 3.2 présente une fonction à une variable avec un minimum global et des minimums locaux.

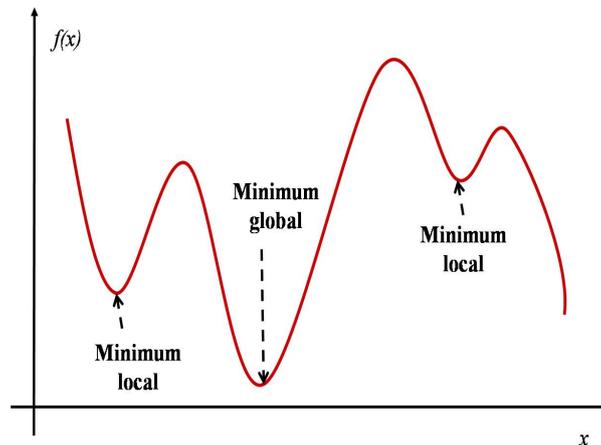


FIGURE 3.2 – Minimum local et minimum global.

Un système mécanique implique un grand nombre de variables de conception pour décrire la structure et peut contenir plusieurs modes de défaillance conduisant à une grande complexité dans la formulation de la conception optimale. Il est donc nécessaire d'introduire l'analyse de fiabilité pour pouvoir équilibrer la sûreté du système et son coût. Afin d'illustrer la différence entre l'optimisation déterministe et fiabiliste, on précise dans ce qui suit le principe de chaque approche.

### 3.2.2 Optimisation de conception déterministe (*DDO*)

Le problème d'optimisation de l'équation (3.1) ne tient pas en compte de l'incertitude des variables de conception. L'utilisation de l'approche d'optimisation déterministe (*DDO*) permet donc d'assigner des facteurs de sécurité dans les fonctions de contraintes du problème d'optimisation dans le but d'augmenter la sûreté de sa conception et de compenser la présence des incertitudes dans les variables de conception. Le choix de ces facteurs de sécurité est basé sur l'expérience, par des essais représentatifs ou bien par une calibration issue d'un schéma probabiliste. En effet, l'expérience du concepteur joue un rôle primordial afin de choisir les coefficients de sécurité. Le problème d'optimisation déterministe est illustré dans la figure 3.3. Ce problème contient trois étapes :

1. Description de la géométrie de la structure par un modèle géométrique à l'aide d'un logiciel *CAO*.

2. Analyse du modèle à l'aide d'un logiciel des éléments finis.
3. Optimisation de la structure en minimisant une fonction objective sous des contraintes données.

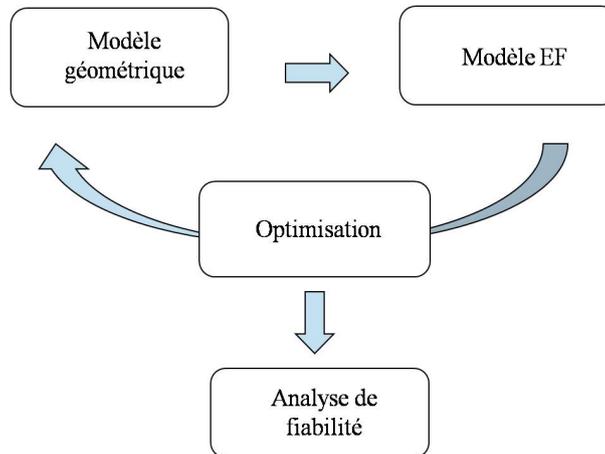


FIGURE 3.3 – Processus d'optimisation de conception déterministe.

Bien que l'optimisation structurale déterministe offre une conception optimale, des difficultés au niveau de la conception sont cependant rencontrées lors de l'introduction des incertitudes car les solutions optimales peuvent conduire à une baisse du niveau de la fiabilité (GRANDHI ET WANG 1998). Pour cela, l'optimisation fiabiliste est nécessaire pour obtenir des conceptions optimales et fiables à la fois.

### 3.2.3 Exemple d'une poutre en flexion

La figure 3.4 présente l'exemple d'une poutre en flexion soumise à une force concentrée  $F$ . Le tableau 3.1 présente les propriétés mécaniques de la poutre.

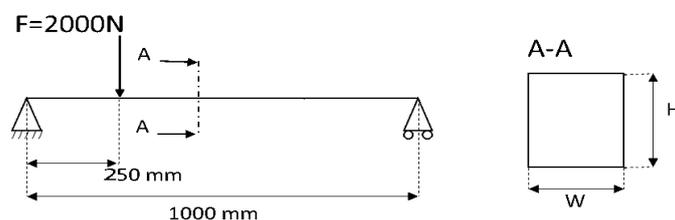


FIGURE 3.4 – Schéma de la poutre en flexion.

La poutre est en acier de forme rectangulaire et de longueur  $L = 1000\text{ mm}$ . Elle repose sur deux supports : un appui simple du côté droit et un appui double du côté gauche. Cette

TABLE 3.1 – Propriétés mécaniques de la poutre.

Module de Young ( $MPa$ )	Coefficient de poisson	Limite élastique ( $MPa$ )
$210e^3$	0.3	235

poutre est sollicitée par une force concentrée  $F = 2000N$  située au premier quart de la poutre.

L'objectif de ce problème d'optimisation est de minimiser le volume de la poutre sans dépasser la contrainte admissible. Les variables de conception sont la largeur  $W$  et la hauteur  $H$ . Pour tenir en compte les incertitudes, un coefficient de sécurité est appliqué sur la limite élastique de la poutre. La contrainte maximale dans la poutre ne doit pas dépasser  $150MPa$  et les variables de conception doivent être comprises entre  $10mm \leq W$ ;  $H \leq 50mm$ . Le problème d'optimisation est défini par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \min_{W,H} \quad & V = W \times H \times L \\
 \text{s.t.} \quad & \sigma_{adm} \leq 150 MPa \\
 & 10mm \leq W \leq 50mm \\
 & 10mm \leq H \leq 50mm
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Le tableau 3.2 présente les résultats du problème d'optimisation de l'équation (eq.3.2). D'après ce tableau, le volume de la poutre est réduit et la contrainte maximale est égale à  $150MPa$ . Les figures 3.5 (a) et 3.5 (b) montrent respectivement l'évolution de la fonction objective et de la contrainte d'optimisation en fonction du nombre d'itérations.

TABLE 3.2 – Résultats de l'optimisation déterministe pour la poutre en flexion.

	Point initial	Point optimal
$H (mm)$	20	38.73
$W (mm)$	20	10
$V (mm^3)$	$4e^5$	$3.87e^5$
$\sigma (MPa)$	281.25	150

### 3.3 Optimisation fiabiliste ( $RBDO$ )

Généralement, l'utilisation des coefficients de sécurité dans l'optimisation ne garantit pas un optimum avec un niveau de fiabilité approprié. Cela mène à un manque de robustesse de la solution optimale. L'optimisation fiabiliste s'appuie donc sur l'analyse de la défaillance

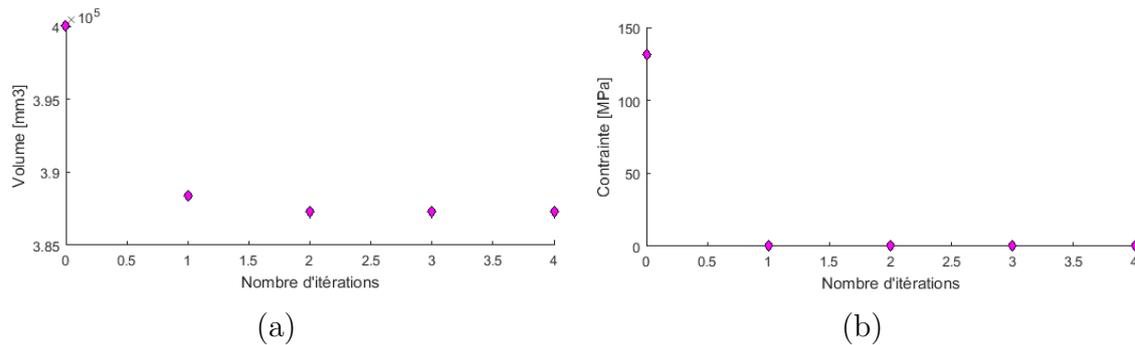


FIGURE 3.5 – (a) Evolution de la fonction objective, (b) Evolution de la contrainte d’optimisation.

à chaque itération, dans le but de déterminer les rôles des incertitudes sur le système et de concevoir des structures économiques et fiables à la fois. Les méthodes d’optimisation fiabilistes ont été appliquées dans plusieurs domaines tels que le génie civile (KUSANO et al. 2014) , le mécatronique (MAKHOULFI, AOUES et EL HAMI 2016), le vibro-acoustique (DAMMAK et al. 2017b), l’aérodynamique (EL MAANI et al. 2018 ; EL MAANI 2016) et le biomécanique (KHARMANDA et EL HAMI 2016 ; KHARMANDA et EL HAMI 2017).

Dans le processus de l’optimisation fiabiliste (Figure 3.6), on a deux boucles imbriquées : une boucle d’optimisation de la fonction objective sous des contraintes physiques, géométriques, fonctionnelles,..., et une boucle de fiabilité par une procédure d’optimisation pour un état limite donné.

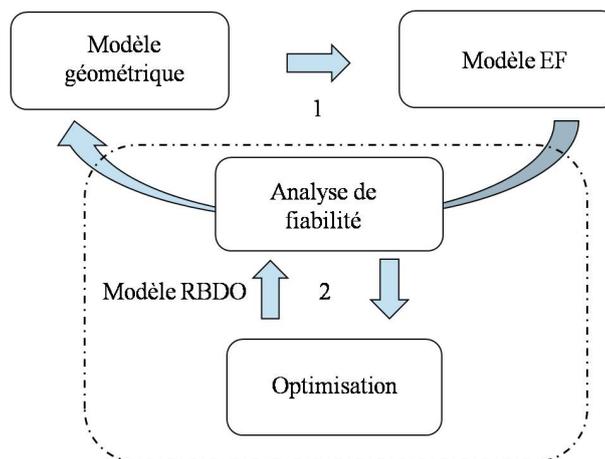


FIGURE 3.6 – Processus séquentiel de l’optimisation fiabiliste de conception.

Un problème *RBDO* est considéré comme un problème d’optimisation sous des contraintes déterministes et probabilistes. La formulation de base de la *RBDO* s’écrit sous la forme

suivante :

$$\begin{aligned} \min_x : & f(x) \\ tq : & \begin{cases} Pr[G_i(x, y) \leq 0] \leq P_i^T, & i = 1, \dots, m \\ g_k(x) \leq 0, & k = m + 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Avec  $x$  est le vecteur des variables déterministes,  $y$  est le vecteur des variables aléatoires,  $f$  est la fonction objective,  $Pr[.]$  est l'opérateur de probabilité,  $G_i$  est la fonction de performance,  $P_i^T$  est le niveau de fiabilité cible,  $g_k$  est la contrainte déterministe,  $m$  est le nombre de fonctions de performance et  $M$  est le nombre total de contraintes.

### 3.3.1 Classification de l'optimisation fiabiliste

Les méthodes d'optimisation fiabiliste peuvent être classées en trois catégories principales :

**Méthodes mono-niveau *MLA* (Mono-level Approches)** Ces méthodes évitent l'évaluation itérative des limitations fiabilistes, dans le but d'accélérer la convergence vers l'optimum en formulant le problème en une seule boucle. Ces méthodes s'appuient sur l'approximation des moments statistiques de la réponse, transformant les contraintes fiabilistes en des fonctions purement déterministes. L'analyse de fiabilité est effectuée par l'approche basée sur les conditions d'optimalité *KKT* (Karush-Kuhn-Tucker), l'approche de la mesure de performance *SLA* (Single Loop Approach), ou l'approche *AMA* (Approximate Moments Approach).

**Méthodes à deux-niveaux *DLA* (Double-level Approches)** Ces méthodes emploient deux boucles imbriquées, la boucle extérieure a pour objectif de chercher les paramètres optimaux et la boucle intérieure permet l'analyse de fiabilité de la configuration choisie. L'avantage des approches à deux niveaux réside dans la simplicité d'implémentation dans les procédures d'optimisation des structures. L'analyse de fiabilité est effectuée par l'approche de l'indice de fiabilité *RIA* (Reliability Index Approach) ou l'approche de la mesure de performance *PMA* (Performance Measure Approach).

**Méthodes séquentielles découplées *SDA* (Sequential Decoupled Approches)** Les approches séquentielles découplées visent à transformer le problème en plusieurs cycles d'optimisation déterministe résolus séquentiellement. Le lien entre les exigences de fiabilité

et d'optimisation déterministe est assuré par des approximations ou par des analyses de fiabilité exécutées séparément. En général, la conception est améliorée de cycle en cycle jusqu'à la satisfaction des critères de convergence. L'analyse de fiabilité est effectuée par la méthode *SFA* (Safety Factor Approach), la méthode *SORA* (Sequential Optimization and Reliability Assessment) ou la méthode *SPA* (Sequential Approximate Programming). Figure 3.7 montre une classification des différentes approches de la *RBDO* réalisées dans des différents travaux de recherche. Cette classification est réalisée par (AOUES et CHATEAUNEUF 2010).

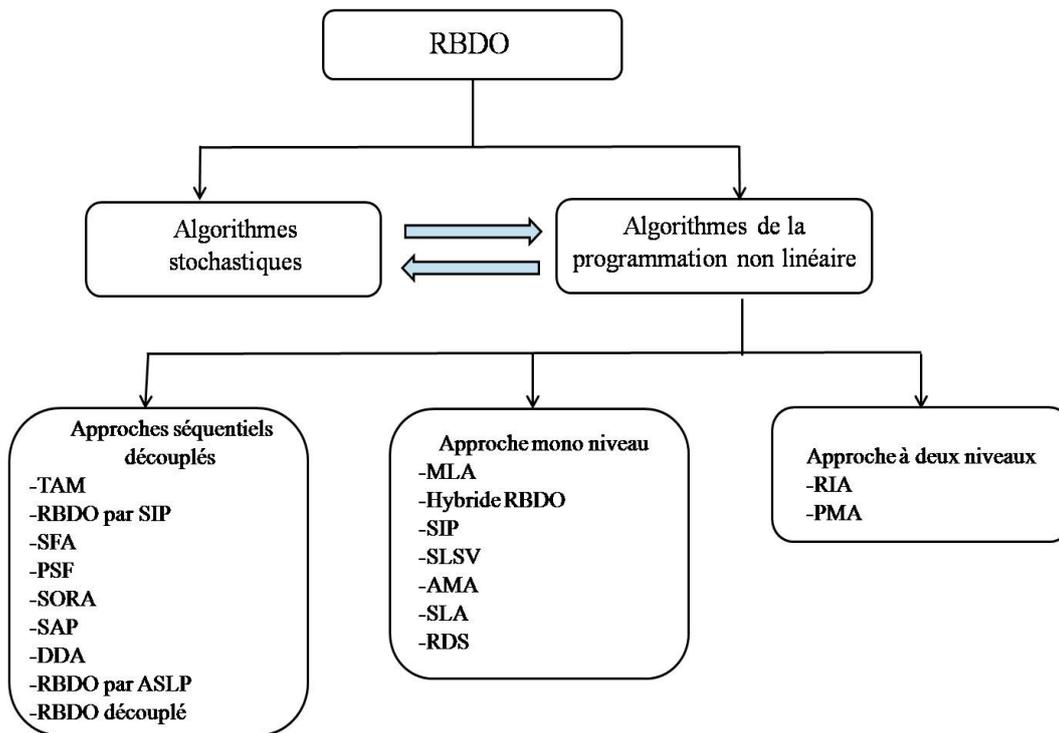


FIGURE 3.7 – Classification des différentes méthodes de la RBDO.

Dans les applications pratiques, le couplage entre les procédures d'optimisation et l'analyse de fiabilité conduit à une faible stabilité de la convergence et à des temps de calcul très élevés. Il existe donc une motivation afin de développer des techniques efficaces pour réduire le temps de calcul. Dans le but d'améliorer la performance numérique, Kharmanda et al. ont développé une méthode intitulée la méthode hybride (KHARMANDA, MOHAMED et LEMAIRE 2002 ; KHARMANDA, MOHAMED et LEMAIRE 2001 ; KHARMANDA et al. 2009). Celle-ci consiste à résoudre le problème d'optimisation et de fiabilité simultanément. La solution est réalisée dans un espace hybride de conception (*HSD*) contenant les variables déterministes et aléatoires. La méthode hybride satisfait un niveau de fiabilité donné et réduit le temps de calcul. Cependant, le problème d'optimisation fiabiliste devient plus complexe que celui déterministe. Une autre méthode intitulée facteurs de sécurité

optimal (*OSF*) a été élaborée (KHARMANDA et al. 2008 ; KHARMANDA et al. 2014). La solution optimale est obtenue en tenant compte du point de conception et des facteurs de sécurité calculés à partir de la dérivée de la fonction de contrainte. Cette méthode permet de réduire le temps de calcul par rapport à la méthode hybride. Une méthode hybride robuste (*RHM*) est ensuite proposée (YAICH et al. 2017).

### 3.3.2 Approche classique

L'optimisation fiabiliste classique consiste à effectuer une analyse de la fiabilité. La solution obtenue est utilisée dans le but de minimiser la fonction objective sous contraintes y compris la contrainte de fiabilité. la procédure de cette optimisation est effectuée dans deux espaces : l'espace physique et l'espace normé (LEMAIRE, CHATEAUNEUF et MITTEAU 2005 ; FRANGOPOL et HENDAWI 1994 ; BARAKAT, MALKAWI et RA'ED 1999). La résolution de ce problème se fait en utilisant n'importe quel algorithme en programmation non linéaire tel que la méthode *SQP*.

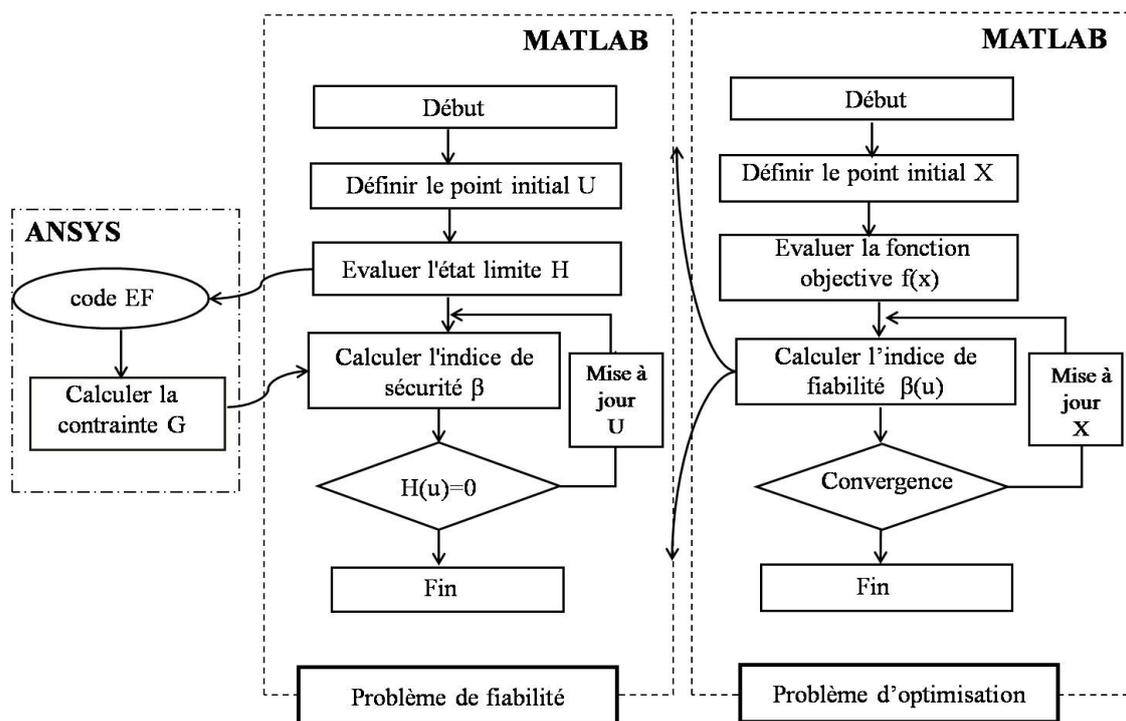


FIGURE 3.8 – Algorithme de l'approche classique de l'optimisation fiabiliste.

L'approche classique de *RBDO* est réalisée par l'intégration de deux problèmes (AOUES et CHATEAUNEUF 2010) :

1. Problème d'optimisation

Ce problème consiste à minimiser une fonction objective  $f(x)$  sous des contraintes déterministes  $g_k(x)$  ainsi les exigences de fiabilité. Il peut être défini par :

$$\begin{aligned} \min_x & : f(x) \\ tq : & \begin{cases} g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, K \\ \beta(x, u) \geq \beta^t \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Avec  $\beta(x, u)$  est l'indice de fiabilité et  $\beta^t$  est l'indice de fiabilité cible.

### 1. Problème de fiabilité

L'indice de fiabilité  $\beta$  est calculé par la résolution de la minimisation de la fonction d'état limite  $H(x, u)$  dans l'espace normalisé :

$$\begin{aligned} \min & \sqrt{\sum u_i^2} \\ tq : & H(x, u) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Avec  $\sqrt{\sum u_i^2}$  est la distance dans l'espace aléatoire normalisé. Figure 3.8 présente l'algorithme de l'approche classique. Cette approche demande un grand nombre de calcul numérique dans les deux espaces. Dans cette approche, la convergence est atteinte au bout d'un grand nombre d'itérations entre les procédures d'optimisation et de fiabilité. Pour éviter cet inconvénient, une approche appelé méthode hybride (*HM*) basée sur la solution simultanée d'optimisation et de fiabilité a été élaboré (KHARMANDA et al. 2008).

### 3.3.3 Méthode hybride (HM)

L'approche hybride consiste à minimiser une nouvelle forme de la fonction objective  $F(x, y)$  sous les contraintes d'état limite et les contraintes déterministes, ainsi que les contraintes de fiabilité. Le problème de la méthode hybride s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} & : F(x, y) = f(x) \times d_\beta(x, y) \\ tq : & \begin{cases} G(x, y) \leq 0 \\ g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, K \\ d_\beta(x, y) \geq \beta^t \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$d_\beta(x, y)$  présente la distance, dans l'espace hybride, entre le point optimal et le point de conception. La minimisation de la fonction  $F(x, y)$  est effectuée dans l'espace hybride

de conception (*HDS*) des variables déterministes  $x$  et des variables aléatoires  $y$ .

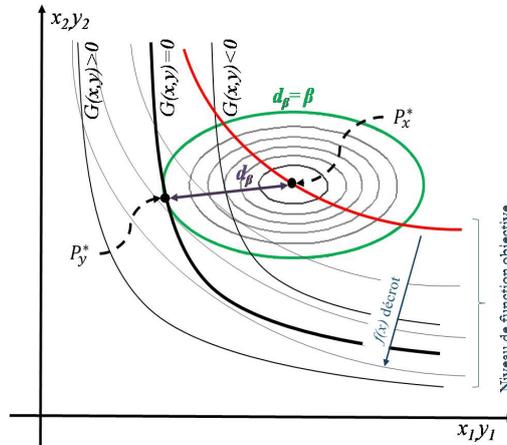


FIGURE 3.9 – Espace hybride de conception (*HDS*).

Un exemple de *HDS* est donné dans la figure 3.9. Pour une distribution normale des variables aléatoires,  $d_\beta$  sont représentés par des ellipses. On peut voir deux points importants : la solution optimale  $P_x^*$  et la solution de fiabilité  $P_y^*$  qui est basé sur l'intersection de la courbe d'état limite  $G(x, y) = 0$  et l'indice de fiabilité cible  $d_\beta = \beta^t$ .

Dans la littérature, la méthode hybride a efficacement réduit le temps de calcul par rapport à l'approche classique. Figure 3.10 présente l'algorithme d'optimisation de la méthode hybride. La première étape consiste à entrer les valeurs initiales des variables aléatoires  $y_0$  et des variable déterministe  $x_0$ . La deuxième étape consiste à évaluer la fonction objective  $F(x)$ . Ensuite, les contraintes d'optimisation ainsi que l'indice de fiabilité sont évaluées. Le programme s'arrête s'il y a convergence et toutes les conditions d'optimisation sont vérifiés. Sinon, il mettre à jour les vecteurs  $x$  et  $y$  et il répète les opérations à partir de la deuxième étape.

### 3.3.4 Facteur de sécurité optimal (Optimum safety factor OSF)

Dans l'approche d'optimisation déterminité (*DDO*), le choix du coefficient de sécurité est basé sur l'expérience de l'ingénieur et la solution obtenue ne peut pas satisfaire le niveau de fiabilité approprié requis. Cependant, lors de la conception d'un nouveau type de système, nous avons besoin habituellement d'un certain contexte expérimental pour proposer des facteurs de sécurité appropriés. Cependant, avec l'approche *OSF*, la détermination des facteurs de sécurité devrait être indépendante de l'expérience en ingénierie.

Bien que la méthode hybride conduit à améliorer le niveau de fiabilité, l'approche *OSF* conduit à minimiser le temps de calcul. Elle consiste à utiliser l'analyse de sensibilité

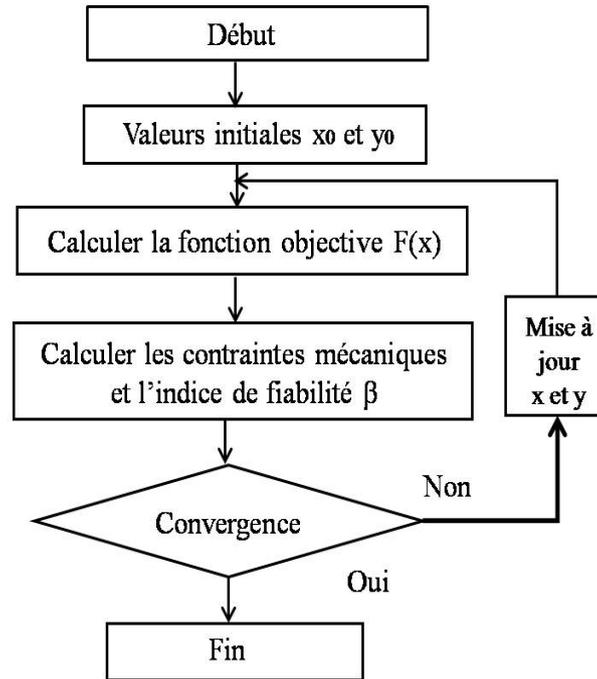


FIGURE 3.10 – Algorithme de la méthode hybride.

combinée à l'analyse de fiabilité afin d'éliminer les inconvénients de la méthode *DDO* et des méthodes *RBDO* (KHARMANDA et OLHOFF 2003 ; KHARMANDA, MOHAMED et LEMAIRE 2003 ; KHARMANDA, OLHOFF et EL-HAMI 2004 ; KHARMANDA et OLHOFF 2007).

L'algorithme de la méthode *OSF* (Figure 3.11) est composé de trois principales étapes :

*i- Détermination du point de conception*

Nous minimisons ici la fonction objective soumise à la fonction d'état limite  $G(y)$  et les contraintes déterministes. La solution résultante est conçue par le point de défaillance le plus probable (*MPFP*).

*ii- Calcul des facteurs de sécurité*

En fait, le point de conception  $y_i^*$  est lié au point optimal  $x_i^*$  comme il est montré dans l'équation (3.7).

$$y_i^* = S_f^i x_i^*, i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

Pour une distribution normale de la variable aléatoire  $y_i$ , nous considérons la transformation dans l'espace normalisé de l'espace physique tel que :

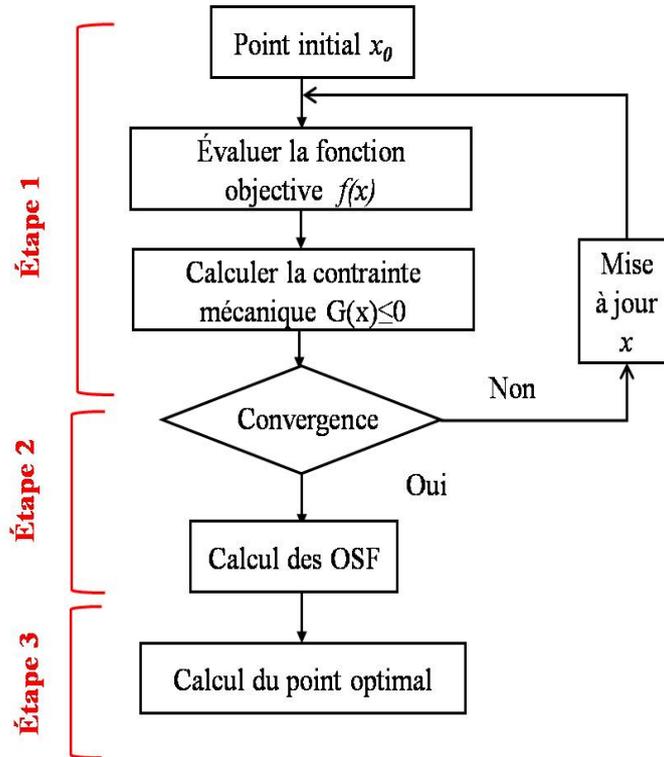


FIGURE 3.11 – Algorithme de la méthode OSF.

$$u_i = \frac{y_i - x_i}{\sigma_i}, i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Les facteurs de sécurité peuvent être donc déterminés comme montré dans l'équation 3.9 :

$$S_f^i = 1 + \gamma_i u_i^*, i = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

$\gamma_i$  est le coefficient reliant la valeur moyenne et l'écart type tel que  $\gamma_i = \frac{\sigma_i}{m_i}$ .

Selon Kharmanda (KHARMANDA et OLHOFF 2003), la valeur optimale du vecteur normalisé  $u_i^*$  peut être déterminée à partir des dérivées de la fonction d'état limite au niveau du point de conception comme suit :

$$u_i^* = \pm \beta^t \sqrt{\frac{|\frac{\partial G}{\partial y_i}|}{\sum_{j=1}^n |\frac{\partial G}{\partial y_j}|}}, i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

Avec le signe  $\pm$  dépend du signe du dérivé :

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} > 0 \rightarrow u_i^* > 0, i = 1, \dots, n \text{ et } \frac{\partial G}{\partial y_i} < 0 \rightarrow u_i^* < 0, i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

iii- Calcul de la solution optimale

Dans la dernière étape, pour déterminer la conception optimale, nous incluons les valeurs de facteurs de sécurité calculées dans la valeur de variables de conception.

### 3.3.5 Méthode hybride robuste (RHM)

L'inconvénient le plus important de la méthode hybride classique est le temps de calcul élevé. En plus de ça, elle n'est pas toujours stable et peut converger vers une solution irréalisable. D'une autre façon, la solution optimale obtenue  $P_x^*$  peut être située dans la région de défaillance  $G(x^*) > 0$  tandis que la distance entre le point optimal  $P_x^*$  et le point de conception  $P_y^*$  donne un niveau de fiabilité acceptable, comme montré dans la figure 3.12(a).

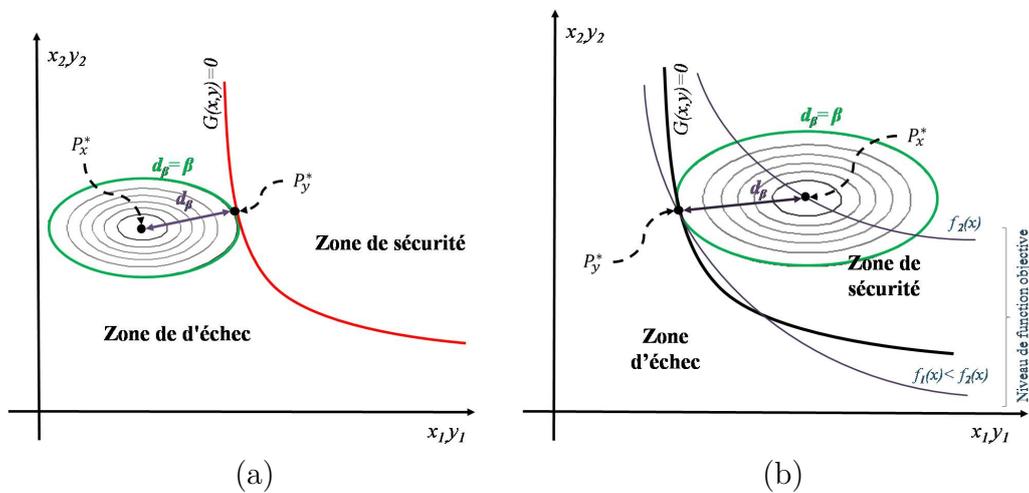


FIGURE 3.12 – (a) Problème rencontré de la méthode hybride classique présentée dans le HDS, (b) RHM dans le HDS (YAICH et al. 2017).

Une nouvelle méthode appelée méthode hybride robuste est donc développée afin de résoudre ce problème. Elle consiste à ajouter une autre contrainte, pour forcer l'algorithme d'optimisation à trouver la solution optimale dans la zone de sécurité. En effet, dans le

*HDS*, afin de garantir la fiabilité des systèmes sous incertitudes, la valeur de la fonction objective à la solution optimale devrait être supérieure à cette valeur au point de conception. La méthode hybride robuste peut alors être définie par :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} : F(x, y) &= f(x) \times d_{\beta}(x, y) \\ tq : \begin{cases} G(x, y) \leq 0 \\ g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, K \\ d_{\beta}(x, y) \geq \beta^t \\ f(x) \geq f(y) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

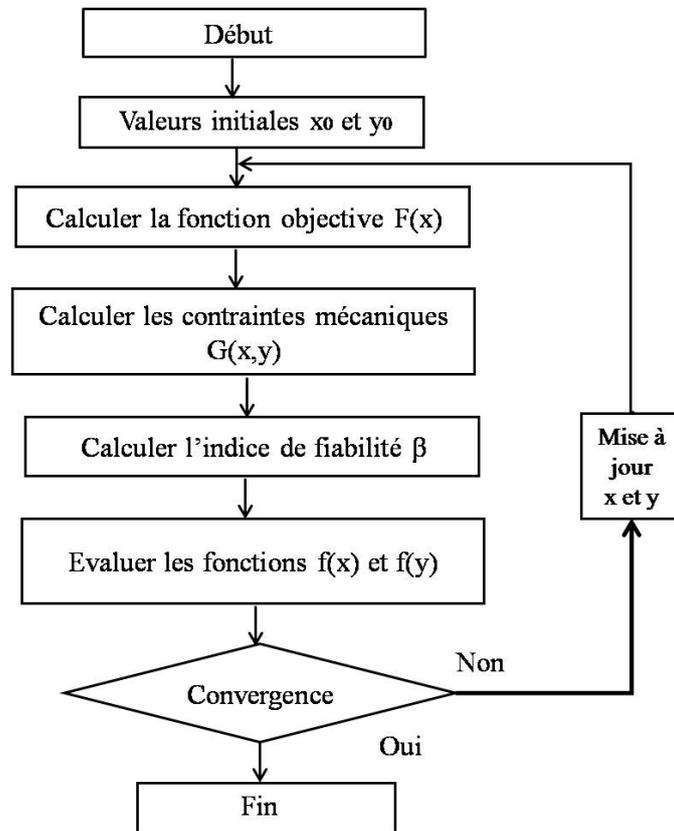


FIGURE 3.13 – Algorithme de la méthode hybride robuste (YAICH et al. 2017).

Figure 3.12(b) présente un exemple de la méthode *RHM* dans l'espace hybride de conception.  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont deux niveaux de fonction objectives qui se croisent respectivement avec le point optimal  $P_x^*$  et le point de conception  $P_y^*$ .

La méthode proposée, dont son algorithme est présenté dans la figure 3.13, ne permet pas seulement de forcer l'algorithme d'optimisation dans l'espace de conception hybride,

mais elle a également réduit le temps de calcul par rapport à la méthode hybride classique d'une façon efficace.

## 3.4 Méthode OSF combinée avec le chaos polynomial généralisé appliquée à un implant dentaire en présence d'incertitudes

### 3.4.1 Introduction

Les prothèses orthodontiques sont utilisées pour remplacer les dents, les reconstruire ou dans le cas de fractures. Un implant dentaire est généralement composé de deux parties : une racine artificielle (en titane, par exemple), qui est fixée dans l'os et sort de la gencive et sert à soutenir une dent prothétique. Proos et al. (PROOS et al. 2001) ont probablement été les premiers à utiliser des techniques d'optimisation dans la conception de restaurations dentaires. Plus récemment, Couegnat et al. (COUEGNAT et al. 2006) ont étudié l'optimisation de la forme de la préparation de la cavité. Le but de cette étude était d'utiliser la technologie d'optimisation de forme pour concevoir des formes alternatives pour les implants dentaires afin d'optimiser la répartition de contrainte le long de l'interface os-implant. Hedia (HEDIA 2011) a optimisé les implants dentaires en utilisant le concept de matériaux calibrés fonctionnellement. L'objectif de ces nouvelles conceptions optimisées est de réduire la concentration de contrainte pour maintenir l'ostéointégration des implants dentaires.

Dans cette section, une étude de l'implant dentaire est combinée à une analyse probabiliste afin de prendre en compte les incertitudes de différents paramètres, considérés comme des variables aléatoires. Dans la première partie, une étude déterministe est mise en place. Puis, une optimisation fiabiliste utilisant le chaos polynomial généralisé est adressée afin d'obtenir une conception robuste et optimale du système.

### 3.4.2 Analyse déterministe de l'implant dentaire en 2D

La figure 3.14 (a) montre un modèle géométrique simplifié de l'implant dentaire étudié. Nous considérons deux variables d'optimisation  $r$  et  $a$  qui représentent respectivement le rayon de courbure au niveau de la partie pointue de l'implant et le rayon de l'implant. Le matériau de l'implant est un alliage de titane. Les dimensions et les propriétés du système sont mentionnées dans le tableau 3.3. La simulation numérique de l'implant dentaire est réalisée à l'aide du logiciel ANSYS. Concernant la discrétisation de la structure, 2323

éléments sont adoptés pour la structure. Les conditions aux limites adoptées sont respectivement les forces  $F_x$  et  $F_y$  appliquées dans la partie supérieure de l'implant dentaire, comme indiqué dans la figure 3.14(b). Tous les nœuds de la bordure de la structure sont fixes.

Au point initial, les valeurs initiales des variables d'optimisation sont :  $r = 2,1$  mm et  $a = 1,83$  mm, ce qui donne une valeur initiale du volume structurel égale à  $V_{initiale} = 55,68mm^3$ . La valeur maximale correspondante de la contrainte de von mises est égale à  $\sigma_{max} = 179,54$  MPa. Pour le problème d'optimisation, l'objectif est de minimiser le volume  $V$  de l'implant dentaire soumis à la contrainte probabiliste liée à la condition de contrainte admissible. Nous considérons que les points de conception sont associés au rayon de courbure et au rayon de l'implant. Pour réaliser l'optimisation de conception déterministe, un facteur de sécurité  $S_f = 1.25$  est proposé sur la condition de contrainte requise.

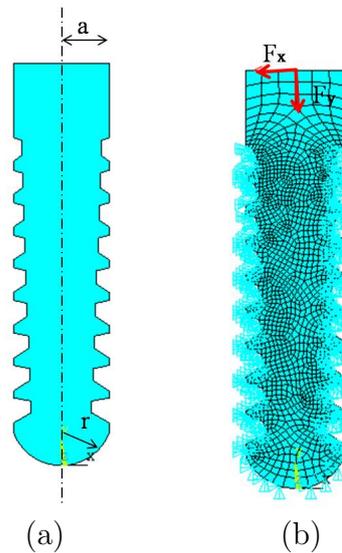


FIGURE 3.14 – (a) modèle géométrique de l'implant dentaire, (b) conditions aux limites appliquées à l'implant dentaire.

Le modèle mathématique du *DDO* est donné par :

$$\begin{aligned} \min_x V(x, \xi) \\ \text{tel que : } \sigma_{max}(x, \xi) \leq \frac{\sigma_w}{S_f} \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $\sigma_{max}$  est la valeur maximale des contraintes de von mises et  $\sigma_w$  est la contrainte

TABLE 3.3 – Dimensions et propriétés du système

Description	Paramètres	Valeur
Rayon de courbure	$r$	2.1 mm
Rayon de l'implant	$a$	1,83 mm
Module de Young	$E$	193 000 MPa
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.31
Force axiale	$F_x$	30 N
Force transversale	$F_y$	30 N

admissible, qui est égale à 185 MPa. Pour effectuer l'optimisation de la conception basée sur la fiabilité par la méthode *OSF*, la première étape consiste à obtenir le point de conception. La formulation du problème d'optimisation est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \min_y V(y, \xi) \\ \text{tel que : } \sigma_{max}(y, \xi) \leq \sigma_w = 185MPa \end{aligned} \quad (3.14)$$

La prochaine étape consiste à calculer les facteurs de sécurité et enfin à déterminer la solution optimale en divisant la valeur du point de conception par le facteur de sécurité calculé. La section suivante détaille l'algorithme de la méthode *OSF* combinée avec le chaos polynomial généralisé. Dans cet exemple, les paramètres mentionnés dans le tableau 3.4 sont choisis pour être aléatoires et pour suivre une distribution uniforme autour de leurs valeurs nominales  $\pm 1$  %.

TABLE 3.4 – Caractéristiques des paramètres incertains

Paramètres	$E$ (MPa)	$\nu$
Valeurs	U[191070,194930]	U [0.3069,0.3131]

### 3.4.2.1 Facteur de sécurité optimal (OSF) en utilisant le chaos polynomial généralisé

Comme nous avons déjà montré, dans le cas de la méthode de facteur de sécurité optimal (*OSF*), la détermination des facteurs de sécurité est indépendante de l'expérience de l'ingénieur. Ainsi, l'approche *OSF* est la meilleure méthode pour traiter ce problème puisqu'elle réduit également le temps de calcul (KHARMANDA, OLHOFF et EL-HAMI 2004 ;

KHARMANDA et OLHOFF 2007). L'algorithme du facteur de sécurité optimal (*OSF*) utilisant la méthode du chaos polynomial généralisé (*CPG*) peut être mis en œuvre en trois étapes.

*a : Détermination du point de conception* : Cette étape consiste à résoudre le problème d'optimisation en minimisant la fonction objective soumise à la fonction d'état limite, aux contraintes déterministe et probabiliste calculées à l'aide du méta-modèle *CPG* introduisant les paramètres d'incertitude. La solution résultante est conçue par le point de conception,  $y_i^*$ , également appelé le point de défaillance le plus probable.

*b : calcul des facteurs de sécurité.*

*c : calcul de la solution optimale* : Dans cette dernière étape, nous déterminons la conception optimale en incluant les facteurs de sécurité calculés dans les valeurs des variables de conception.

Le problème d'optimisation est résolu par la programmation quadratique séquentielle (*SQP*) en utilisant le logiciel MATLAB. L'approche proposée est décrite dans l'organigramme de la figure3.15.

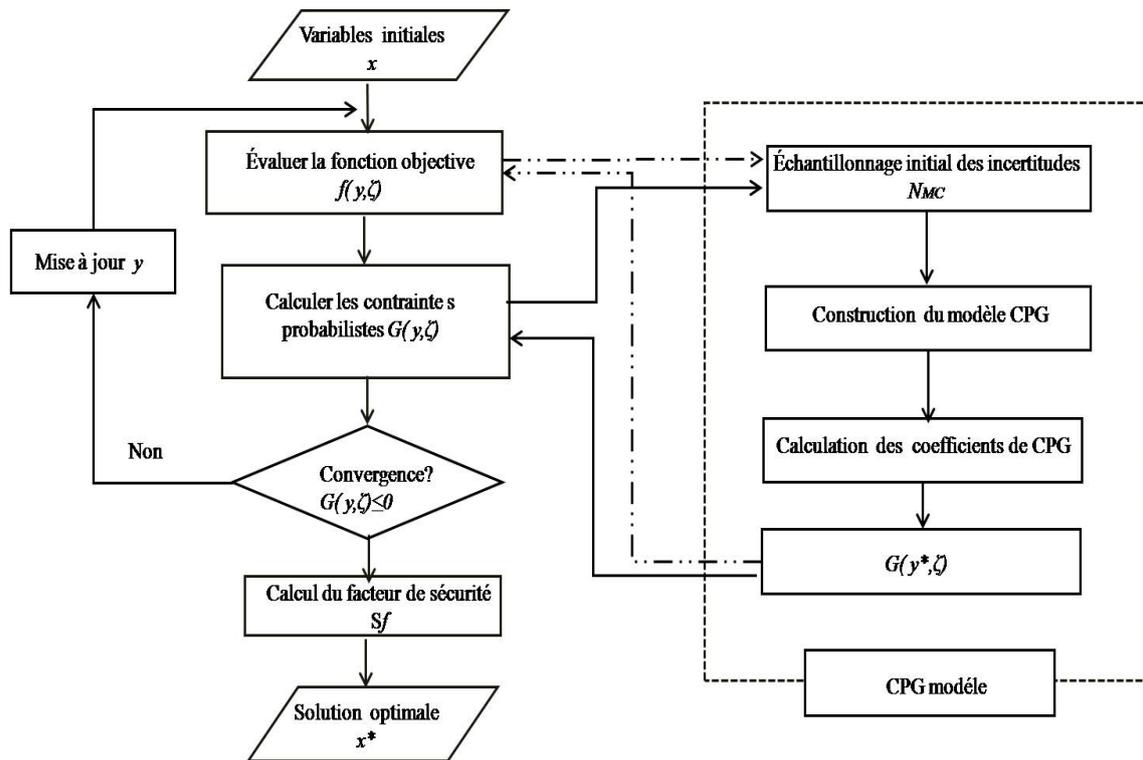


FIGURE 3.15 – Algorithme de la fonction *OSF* en utilisant le méta modèle *CPG*.

### 3.4.2.2 Méthode OSF couplée avec le chaos polynomial généralisé (CPG)

Afin d'obtenir la meilleure conception de la structure, nous introduisons l'approche *RBDO* associée à la simulation par éléments finis de l'exemple de l'implant dentaire.

Les résultats de la méthode *DDO* sont présentés dans le tableau 3.5. Il est nécessaire de mentionner que la solution optimale répond à la contrainte requise de la contrainte de von mises, mais que le niveau de fiabilité trouvé est égale à  $\beta = 1.18$  qui est inférieur au niveau de fiabilité cible  $\beta_t = 3$ .

TABLE 3.5 – Résultats de *DDO* en utilisant *CPG*

		Valeurs initiales	Point de conception $y_i^*$	Point optimal $x_i^*$
Variables de conception	r (mm)	2.1	2.13	2.12
	a (mm)	1,83	1,8	1,8
Fonction objective	$V(mm^3)$	55,68	55,19	55,19
Contrainte d'optimisation	$\sigma_{max}$ (MPa)	179.54	175.60	177.18
Indice de fiabilité	$\beta$	-	-	1.18

La figure 3.16 montre l'évolution de la fonction objective en fonction des itérations.

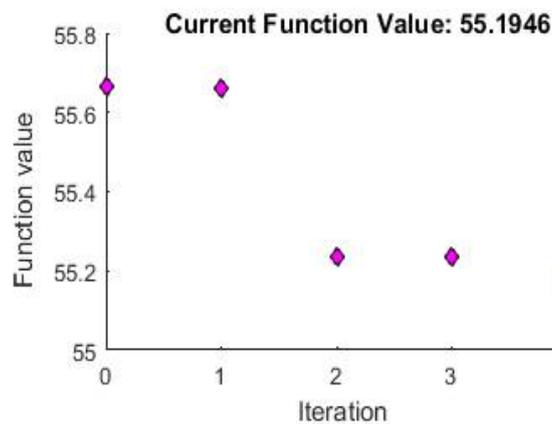


FIGURE 3.16 – Courbe itérative du volume de l'optimisation de l'implant dentaire par la méthode *DDO*.

C'est pour cette raison que la méthode, *OSF* couplé avec le *CPG* est utilisée pour assurer la robustesse et la fiabilité de notre système. Le tableau 3.6 présente les résultats de cette approche.

TABLE 3.6 – Résultats de *OSF* en utilisant *CPG*

		Valeurs initiales	Point de conception $y_i^*$	OSF $S_f$	Point optimal $x_i^*$
Variables de conception	r (mm)	2.13	2.13	0.84	2.52
	a (mm)	1,8	1,8	1,04	1,72
Fonction objective	$V(mm^3)$	55,19	55,19		53,75
Contrainte d'optimisation	$\sigma_{max}$ (MPa)	175.60	175.60		169.91
Indice de fiabilité	$\beta$	-	-	-	3

Il est remarquable qu'avec l'approche *OSF*, le coût de calcul est faible comparé à d'autres méthodes *RBDO* telles que l'approche hybride (YAICH et al. 2017). De plus, la méthode *OSF* ne nécessite pas de temps de calcul supplémentaire par rapport à la méthode *DDO*. Le tableau 3.7 montre une comparaison optimale entre *DDO* et la méthode *OSF* à l'aide du méta-modèle *CPG*.

TABLE 3.7 – Comparaison du point optimal entre *DDO* et *OSF*.

	DDO	OSF
Volume ( $mm^3$ )	55.19	53.75
Contrainte maximale (MPa)	177.18	169.91
Niveau de fiabilité	1.18	3
CPU (s)	3490.20	2055.76

A partir du tableau 3.7, nous pouvons observer que :

- Dans l'optimisation déterministe utilisant le modèle *CPG*, la contrainte maximale de von mise en place est 177.18 MPa, ce qui satisfait à la condition de contrainte (inférieure à  $\sigma_{max}/S_f$ ) et le volume structurel est 55.19  $mm^3$  mais le niveau de fiabilité est faible ( $\beta = 1.18$ ) qui ne garantit pas la cible de fiabilité requise.
- Dans l'optimisation fiabiliste (le facteur de sécurité optimal (*OSF*) utilisant le modèle *CPG*), la contrainte maximale de von mises est 169.91 MPa qui satisfait à la condition de contrainte et le volume structurel est 53.75  $mm^3$ .

Dans l'exemple précédent, une étude est effectuée avec le chaos polynomial généralisé dans la procédure d'optimisation. Dans la section suivante, la méthode *RHM* sera validée sur un exemple d'un treillis en alliage à mémoire de forme.

### 3.5 Optimisation fiabiliste basée sur la méthode RHM d'un treillis en alliage à mémoire de forme

La figure 3.17 montre un schéma d'un treillis en alliage à mémoire de forme. Nous supposons que la structure est modélisée par 10 éléments de barre soumis uniquement à des forces axiales (PACHIKARA 2014).

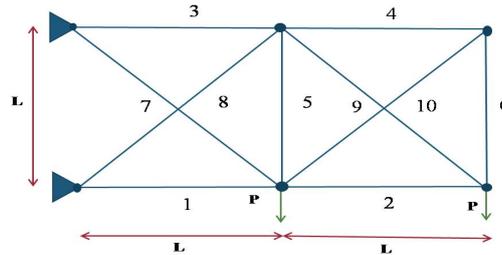


FIGURE 3.17 – Schéma d'un treillis en alliage à mémoire de forme (PACHIKARA 2014)

Les paramètres géométriques utilisés sont présentés dans le tableau 3.8. Des simulations numériques de la réponse de l'alliage à mémoire de forme sont effectuées à l'aide du logiciel commercial ANSYS.

TABLE 3.8 – Paramètres géométriques de la structure

Constante	L(m)	P(N)	$d_{i,1i} = \{1..10\}(m)$	$d_{i,2i} = \{1..10\}(m)$
Signification	Longueur des barre	Force axiale	Première dimension	Deuxième dimension
Valeur	9.144	$4.45 \times 10^5$	0.0567	0.0567

En ce qui concerne la discrétisation de la structure, des éléments du type "Beam 188" sont utilisés. Les valeurs des paramètres de matériel utilisés dans ce modèle sont données dans le tableau 3.9. Ces paramètres sont tirés de la littérature et sont respectivement : le module de Young's  $E$ , le coefficient de Poisson's  $\nu$ , le paramètre de durcissement  $h$ , la température de référence  $T_0$ , la limite élastique  $R$ , le paramètre d'échelle de température  $\beta$  et la déformation de transformation maximale  $\varepsilon_L$ .

TABLE 3.9 – Paramètres du matériau de la structure

Constante	E (MPa)	$\nu$	h (MPa)	$T_0(K)$	R (MPa)	$\beta(MPaK^{-1})$	$\varepsilon_L$
Valeur	51700	0.3	1000	248	140	5.6	0.1

Le chargement appliqué est représenté sur les figures 3.18. Initialement, le matériau est dans son état martensitique à une température initiale (étape 0). La structure est ensuite

chargée (étape 1). Le chauffage de la structure au-dessus de la température de finition austénitique induit la transformation de phase inverse et la structure en alliage à mémoire de forme se contracte pour revenir à son état austénitique (étape 2). De plus, le refroidissement en dessous de la température d'arrivée martensitique provoque la transformation de l'austénite en martensite et la structure revient en arrière (étape 3). Le cycle complet (étapes : 0-1, 1-2 et 2-3) est appelé effet de mémoire de forme (*SME*).

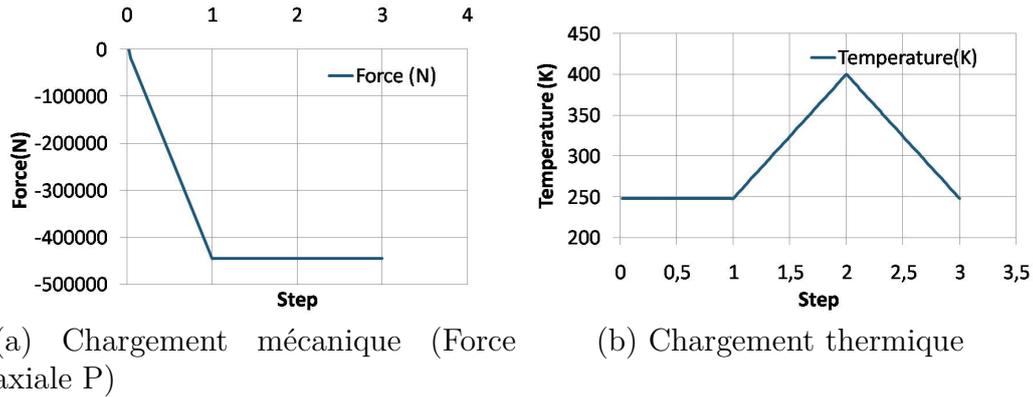


FIGURE 3.18 – Chargements appliqués à la structure.

Pour le problème d'optimisation, la fonction objective consiste à minimiser le poids total  $w$  soumise aux contraintes probabilistes liées aux contraintes mécaniques  $\sigma_j$  pour les barres diagonales avec  $j = \{7..10\}$ .

$$w = \sum_{i=1}^{10} \rho \times A_i \times L_i \quad (3.15)$$

$$s.t : |\sigma_j| \leq \sigma_{yield} \quad j = \{7..10\}$$

Où  $\rho$  est la densité du matériau,  $L_i$  est la longueur du  $i$ -ème élément et  $A_i$  est la section de le  $i$ ème élément.  $A_i$  peut être écrit comme le produit des deux dimensions de la section  $d_{i,1}$  et  $d_{i,2}$  avec  $i = \{1..10\}$ . Les variables de conception sont respectivement les première et deuxième dimensions  $d = d_{j,k}$  avec  $j = \{7, \dots, 10\}$  et  $k = \{1, 2\}$  des barres diagonales. Les variables de conception mentionnées précédemment sont normalement distribuées. On peut remarquer que  $m_d = m_{d_{j,k}}$  sont respectivement les valeurs moyennes des barres diagonales avec  $j = \{7, \dots, 10\}$  et  $k = \{1, 2\}$ . Les variables de conception sont reconsidérées comme des variables probabilistes aléatoires dont les distributions probabilistes sont listées dans le tableau 3.10.

TABLE 3.10 – Caractéristiques des variables aléatoires

Variabiles	Valeur moyenne (m)	Type de distribution
$d_{i,1i} = \{1..10\}$	0.0567	Normal
$d_{i,2i} = \{1..10\}$	0.0567	Normal

### 3.5.1 Procédures de l'optimisation de conception déterministe et de l'optimisation fiabiliste

Dans cette partie, nous notons  $x = x_{j,k}$  le vecteur des variables de conception déterministes  $d = d_{j,k}$  présenté par sa moyenne  $x = m_{d_{j,k}}$  et  $y = d_{j,k}$  est le vecteur des variables aléatoires. Nous pouvons également définir les points de départ comme suit :  $x_0 = x_{j0,k} = d_{j0,k}$ , le point de conception  $y^* = y_{j,k}^* = d_{jy,k}^*$  et les points optimaux  $x^* = x_{j,k}^* = d_{jx,k}^*$  avec  $j = \{7, \dots, 10\}$  et  $k = \{1, 2\}$ . L'approche DDO considère un facteur de sécurité global  $S_f$  appliqué aux contraintes et basé sur l'expérience d'ingénieur. Par conséquent, la conception optimale de la structure ne doit pas dépasser les valeurs maximales autorisées. Le problème d'optimisation peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \min_x w(x) \\ \text{subject to : } |\sigma_j|_{j=\{7,\dots,10\}} \leq \frac{\sigma_{yield}}{S_f} = 400 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour le problème DDO, nous ne pouvons pas contrôler le niveau de fiabilité requis en raison de l'absence de contrainte de fiabilité. Ainsi, il est nécessaire d'utiliser des méthodes RBDO. À partir de la méthode hybride (HM) définie dans l'équation (3.6), la fonction objective devient un produit du poids de la structure et de la distance dans l'espace hybride, comme indiqué dans l'équation (3.17) :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x, y) = w(x) \times d_\beta(x, y) \\ \text{s.t : } \begin{cases} |\sigma_j|_{j=\{7,\dots,10\}} \leq \sigma_{yield} = 500 \text{ MPa} \\ d_\beta(x, y) \geq \beta_{target} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Outre des contraintes de barres diagonales, la distance  $d_{beta}$  dans l'espace hybride doit être supérieure ou égale à l'indice de fiabilité cible  $beta_{cible} = 3$ . Pour éviter l'inconvénient de la méthode hybride classique dans le cas d'un matériau non linéaire, une méthode hybride robuste (RHM) est ensuite appliquée. Le problème d'optimisation (RHM) est défini ainsi :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x,y) &= w(x) \times d_\beta(x,y) \\ \text{s.t.} : \begin{cases} |\sigma_j|_{j=\{7,\dots,10\}} \leq \sigma_{yield} \\ d_\beta(x,y) \geq \beta_{target} \\ w(x) \geq w(y) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pour obtenir la solution optimale avec la méthode *OSF*, nous devons calculer le point de conception, puis déterminer la solution optimale, à savoir la division des points de conception par les facteurs de sécurité calculés. Le problème d'optimisation de la méthode *OSF* est alors :

$$\begin{aligned} \min_y w(y) \\ \text{subject to} : |\sigma_j|_{j=\{7,\dots,10\}} \leq \sigma_{yield} \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.5.2 Résultats de l'optimisation de conception déterministe et de l'optimisation fiabiliste

L'objectif de cette section est de discuter les résultats des différentes approches étudiées précédemment. Nous étudions d'abord la méthode DDO. Nous nous intéresserons ensuite à la comparaison des différentes méthodes RBDO. Le tableau 3.11 montre les résultats de la méthode DDO. La solution optimale répond aux contraintes des barres diagonales mentionnées précédemment. Cependant, le niveau de fiabilité est inférieur au niveau de fiabilité cible  $\beta_{cible}$ .

Après l'optimisation de la structure, le poids résultant de la structure est égal à  $w_{DDO} = 1512.2$  et à l'indice de fiabilité de la solution optimale  $\beta_{DDO} = 2.55 < \beta_{cible}$  (soit 15 % de la cible). De cette façon, le niveau de fiabilité ne peut pas être contrôlé. En fait, le concepteur doit modifier manuellement les paramètres de structure pour obtenir l'indice de fiabilité cible requis. Pour éviter cet obstacle, la méthode *HM* est utilisée. Cette méthode est montrée dans le tableau 3.12.

Il est clair que le point optimal se situe dans le domaine de la défaillance ( $\sigma_{10} \geq 500$  MPa), tandis que la distance entre le point de conception et le point optimal donne une fiabilité acceptable. Pour cette raison, la méthode *RHM* est nécessaire afin d'obtenir la meilleure conception du treillis en respectant le niveau de fiabilité cible. Le tableau 3.13 montre les résultats du *RHM*. Nous pouvons constater que le niveau de fiabilité est satisfait et que la solution optimale se situe dans le domaine de la sécurité. Cette méthode permet également de minimiser le coût de calcul. En fait, le temps de calcul de la méthode

TABLE 3.11 – Résultats de l’optimisation de conception déterministe.

		Valeur initiale $x_0$	Point de conception $y^*$	Solution optimale $x^*$
Variables de conception	$d_{7,1}$	0.05	0.0263	0.0287
	$d_{7,2}$	0.05	0.0263	0.025
	$d_{8,1}$	0.05	0.025	0.025
	$d_{8,2}$	0.05	0.025	0.025
	$d_{9,1}$	0.03	0.0439	0.0574
	$d_{9,2}$	0.03	0.0439	0.0439
	$d_{10,1}$	0.03	0.025	0.0251
	$d_{10,2}$	0.03	0.025	0.025
Fonction objective	$w$	1704.8	1460.4	1512.2
Contraintes d’optimisation	$\sigma_7$	57.0085	64.3132	57.3138
	$\sigma_8$	149.8332	495.1656	147.8543
	$\sigma_9$	-2.0785	-9.2829	-2.0917
	$\sigma_{10}$	725.8643	500.7626	261.8870
Niveau de fiabilité	$\beta$			2.55

proposée est d’environ 4 heures, alors que le temps de la méthode hybride classique est d’environ 5 heures sans une solution réalisable. De plus, on peut observer que la méthode *RHM* est plus fiable que la méthode *DDO*. En utilisant cette méthode, nous pouvons satisfaire le niveau de fiabilité requis.

TABLE 3.13 – Résultat de la méthode hybride robuste

		Valeur initial $y_0$	Valeur initial $x_0$	Point de conception $y^*$	Solution optimale $x^*$
Variables de conception	$d_{7,1}$	0.04	0.04	0.0256	0.0257
	$d_{7,2}$	0.04	0.04	0.0337	0.0264
	$d_{8,1}$	0.04	0.04	0.0269	0.0267
	$d_{8,2}$	0.04	0.04	0.0269	0.0257
	$d_{9,1}$	0.04	0.04	0.0421	0.0438
	$d_{9,2}$	0.04	0.04	0.0494	0.0558
	$d_{10,1}$	0.04	0.04	0.0326	0.0316
	$d_{10,2}$	0.04	0.04	0.0309	0.0317
Fonction objective	$w$	1671.5	1671.5	1527.5	1538.9
Contraintes d’optimisation	$\sigma_7$	68.8935	68.8935	61.2436	68.9451
	$\sigma_8$	222.9470	222.9470	401.9332	484.8243
	$\sigma_9$	-3.4374	-3.4374	-7.2528	-8.7304
	$\sigma_{10}$	412.7684	412.7684	470.4056	399.3062
Niveau de fiabilité	$\beta$				3.31

Les résultats de la méthode du facteur de sécurité optimal (*OSF*) sont présentés dans le tableau 3.14. On voit clairement que la solution optimale répond aux différentes contraintes. En fait, la méthode *OSF* satisfait le niveau de fiabilité requis mais elle donne un poids structurel bien supérieur au poids obtenu par la méthode *DDO* de 2,41 %. Avec la méthode *OSF*, nous obtenons un compromis optimal entre le poids de la structure et les contraintes

TABLE 3.12 – Hybrid method results

		Valeur initiale $y_0$	Valeur initiale $x_0$	Point de conception $y^*$	Solution optimale $x^*$
Variables de conception	$d_{7,1}$	0.05	0.05	0.0301	0.0303
	$d_{7,2}$	0.05	0.05	0.0356	0.0301
	$d_{8,1}$	0.05	0.05	0.034	0.0303
	$d_{8,2}$	0.05	0.05	0.0356	0.0301
	$d_{9,1}$	0.05	0.05	0.0333	0.0362
	$d_{9,2}$	0.05	0.05	0.0358	0.0365
	$d_{10,1}$	0.05	0.05	0.0329	0.0305
	$d_{10,2}$	0.05	0.05	0.0324	0.0301
Fonction objective	$w$	1971.7	1971.7	1516.3	1476.6
Contraintes d'optimisation	$\sigma_7$	57.3138	57.3138	76.0085	67.4165
	$\sigma_8$	147.8543	147.8543	311.6122	369.7436
	$\sigma_9$	-2.0917	-2.0917	-4.9115	-6.4204
	$\sigma_{10}$	261.8870	261.8870	539.3570	576.3510
Niveau de fiabilité	$\beta$				3.16

de fiabilité. Comparée à la méthode RHM, la valeur de la fonction objective du point optimal obtenue par la méthode proposée est inférieure à celle établie par la méthode *OSF*.

TABLE 3.14 – Résultats de la méthode de facteurs de sureté

		Valeur initiale $x_0$	Point de conception $y^*$	OSF $S_f$	Solution optimale $x^*$
Variables de conception	$d_{7,1}$	0.05	0.0263	1.0077	0.0261
	$d_{7,2}$	0.05	0.0263	1.0079	0.0261
	$d_{8,1}$	0.05	0.025	1.0094	0.0248
	$d_{8,2}$	0.05	0.025	1.0095	0.0248
	$d_{9,1}$	0.03	0.0439	0.8271	0.0531
	$d_{9,2}$	0.03	0.0439	0.8269	0.0531
	$d_{10,1}$	0.03	0.025	0.8766	0.0285
	$d_{10,2}$	0.03	0.025	0.0876	0.0285
Fonction objective	$w$	1704.8	1460.4		1548.7
Contraintes d'optimisation	$\sigma_7$	57.0085	64.3123		64.7381
	$\sigma_8$	149.8832	495.1656		498.140
	$\sigma_9$	-2.0785	-9.2829		-9.4348
	$\sigma_{10}$	725.8643	500.7626		344.2413
Niveau de fiabilité	$\beta$				3

On peut conclure que la méthode hybride robuste (*RHM*) fournit les meilleurs résultats par rapport aux autres méthodes, résolvant le problème d'optimisation fiabiliste d'une structure en alliage à mémoire de forme. La méthode proposée pallie le manque de niveau de fiabilité de la méthode d'optimisation de la conception déterministe (*DDO*) et évite que les points optimaux tombent dans la région de défaillance comme dans le cas de la méthode hybride (*HM*). De plus, la valeur de la fonction objective du point optimal obtenue par RHM est inférieure à celle calculée par la méthode du facteur de sécurité optimal (*OSF*).

## 3.6 Conclusion

L'objectif de l'optimisation fiabiliste est de trouver le meilleur compromis entre l'assurance de la fiabilité et la réduction du coût. Ce chapitre présente l'étude de l'optimisation fiabiliste pour des problèmes mécaniques. Dans la première partie, les différentes méthodes de l'optimisation fiabiliste sont rappelées. On a montré que la méthode *DDO* peut garantir une conception optimale. Cependant, elle ne peut pas contrôler le niveau de fiabilité. Les méthodes *RBDO* telles que la méthode hybride et la méthode OSF ont été alors appliquées. En comparant avec la méthode *DDO*, le modèle *RBDO* respecte un niveau de fiabilité cible. Avec la méthode hybride, l'algorithme peut converger vers un point optimal dans la région de défaillance, le résultat est ensuite rejeté. Une nouvelle méthode appelée Robust Hybrid Method (*RHM*) a été donc présentée. Dans une deuxième partie, nous avons appliqué les différentes approches de *RBDO* sur des exemples de problèmes mécaniques. On a considéré une application biomédicale qui tient en compte la présence d'incertitudes. L'approche proposée consiste à coupler le chaos polynômial généralisé avec la méthode OSF afin d'assurer la robustesse du système. Un autre exemple qui valorise la méthode *RHM* est étudié. Il s'agit de l'optimisation fiabiliste d'un treillis en alliage à mémoire de forme. Les résultats montrent bien que les nouvelles conceptions présentent des meilleures performances que les modèles initiaux. De plus, le temps de calcul de la *RHM* est moins coûteux que celui des autres approches de la *RBDO*. Il est clair que lors de l'utilisation des codes de simulations coûteux, il devient peu pratique d'effectuer des nombreuses simulations pour la quantification d'incertitudes ou pour l'optimisation fiabiliste. Une meilleure alternative consiste à utiliser des approximations du modèle original appelé métamodèle qui est présent dans le chapitre 4.

# Méta-modélisation pour l'analyse d'incertitude des systèmes mécaniques

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>88</b>
<b>4.2</b>	<b>Description des approches de modélisation de substitution</b>	<b>89</b>
<b>4.3</b>	<b>Méthodes d'échantillonnage de l'espace de conception</b>	<b>90</b>
4.3.1	Plans d'expérience standards	90
4.3.2	Méthodes de remplissage de l'espace de conception	91
<b>4.4</b>	<b>Construction des métamodèles</b>	<b>92</b>
4.4.1	Régression polynômiale	93
4.4.2	Moindres carrés mobiles ( <i>MLS</i> )	94
4.4.3	Les fonctions à base radiale ( <i>RFB</i> )	95
4.4.4	Méthode de Krigage	96
<b>4.5</b>	<b>Validation du métamodèle</b>	<b>98</b>
4.5.1	Mesures d'erreur	99
4.5.2	Validation croisée	100
<b>4.6</b>	<b>Analyse d'incertitudes basée sur des modèles de substitution pour la micro pompe</b>	<b>100</b>
4.6.1	Simulation déterministe par la méthode éléments finis	101
4.6.2	Analyse d'incertitude proposée basée sur un modèle de substitution	102
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>106</b>

## 4.1 Introduction

La simulation par éléments finis (*FES*) est une technique très puissante qui peut être appliquée pour obtenir une solution approximative de la réponse du système mécanique. Dans certains cas, la prévision du comportement d'un système est particulièrement difficile en raison de la variabilité induite par l'incertitude. Le défi consiste à améliorer les performances des simulations numériques du système mécanique. La prise en compte de ces incertitudes dans l'analyse des systèmes est un domaine complexe qui comprend les étapes suivantes : identification et modélisation des sources d'incertitude, propagation de l'incertitude et post-traitement pour mesurer l'influence de ces incertitudes sur le comportement du système. Récemment, la modélisation probabiliste de problèmes mécaniques a retenu l'attention de certains chercheurs. Ces derniers sont à la recherche de modèles plus robustes tenant compte de la nature aléatoire de certains paramètres : propriétés des matériaux, irrégularités géométriques, conditions limites et initiales et chargement.

La précision numérique et le contrôle d'erreur ont été utilisés dans des simulations pour des réponses dynamiques de structures. Parmi ces méthodes probabilistes, la plus fréquemment utilisée est l'approche statistique ou la technique d'échantillonnage, comme Monte carlo. Dans cette méthode, un grand nombre d'échantillons de variables d'entrée est requis pour une précision raisonnable. Le problème est alors résolu pour chaque réalisation. Cette technique est largement utilisée car elle est la plus facile à mettre en œuvre et très robuste. Toutefois, le nombre de réalisations devrait être suffisant, c'est-à-dire que des FES déterministes de  $10^5$  ou de  $10^6$  doivent être exécutées afin d'obtenir des résultats précis.

En règle générale, lorsqu'on utilise des codes de simulation coûteux en calcul dans des problèmes d'ingénierie complexes, il devient peu pratique d'effectuer un grand nombre de simulations pour la quantification de l'incertitude ou l'optimisation de la conception. Une meilleure alternative consiste à utiliser des approximations des modèles originaux, souvent appelées méta-modèles (ou modèles de substitution). Ces méta-modèles visent à construire des modèles mathématiques afin de définir la relation entre les entrées et les sorties de systèmes spécifiques. Les modèles de substitution ont été principalement développés pour approximer les simulations déterministes. Les développements récents ont exploré leur utilisation dans l'analyse probabiliste et l'optimisation de la conception. Les méthodes de méta-modélisation les plus populaires sont la méthodologie de surface de réponse polynomiale (*PRS*), le krigeage, la fonction de base radiale (*RBF*) (SIMPSON et al. 2001 ; HUSSAIN, BARTON et JOSHI 2002 ; HOU et al. 2014) et les machines à vecteurs de support (*SVM*) (GIROSI 1998 ; KROETZ, TESSARI et BECK 2017).

L'objectif de ce chapitre consiste à étudier l'applicabilité et la précision de diverses techniques de modélisation de substitution pour la quantification de l'incertitude de systèmes mécaniques. La méthodologie (*PRS*), la méthode de krigeage et l'approche *RBF*

sont examinées. Dans la méthode probabiliste proposée basée sur le modèle de substitution, des *FES* déterministes sont effectuées pour obtenir les quantités d'intérêt (réponses), puis différentes approximations du modèle original sont utilisées pour représenter la relation entre les paramètres d'entrée et les réponses, et enfin, la simulation de Monte Carlo est appliqué.

## 4.2 Description des approches de modélisation de substitution

Les techniques de métamodèles sont récemment utilisées dans les analyses des ingénieurs. Les modèles de substitution sont construits à partir d'un ensemble de données de variables de conception d'entrée  $x^i = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$  et de leurs réponses correspondantes  $y^i = f(x^i)$  où  $\kappa$  est le nombre de variables de conception,  $i = 1, \dots, n$  et  $n$  est le nombre de points de formation utilisés pour construire le métamodèle. La mise en place d'un modèle de substitution est un processus multiple. L'organigramme de ce processus est présenté dans la figure 4.1. L'approche de modélisation de substitution applique d'abord la conception d'expériences (*DOE*) telle que l'échantillonnage latin d'hypercube (*LHS*) pour répéter l'échantillonnage dans l'espace de conception (MCKAY, BECKMAN et CONOVER 2000), puis elle choisit un type de métamodèle pour représenter les données d'échantillonnage. Ainsi, le code d'analyse original peut être remplacé par le modèle de substitution pendant le processus d'incertitude.

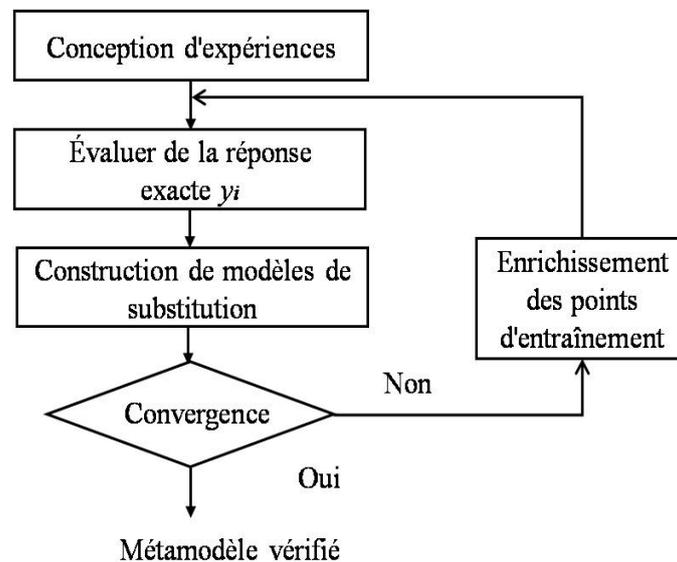


FIGURE 4.1 – Algorithme de modèles de substitution.

L'algorithme du processus d'élaboration d'un modèle de substitution est composé des étapes suivantes :

1. Une méthodologie d'échantillonnage qui permet d'obtenir un ensemble de points  $x_i$  de l'espace de conception en utilisant la méthode des plans d'expérience.
2. Une procédure d'évaluation des réponses exactes  $y_i$  de la fonction considérée aux points obtenus soit par la procédure d'enrichissement ou par la stratégie de tirages. Cette étape utilise le modèle mécanique considéré et construit la base d'apprentissage  $E_a$  composée de couples des points de l'espace de conception et de réponses  $(x_i, y_i)$ .
3. Une procédure de construction du métamodèle. Cette dernière nécessite l'emploi de méthodologies spécifiques au modèle de substitution utilisé.
4. La validation du métamodèle par la minimation de l'erreur entre le modèle exact et le modèle de substitution en quelques points.
5. Si la convergence n'est pas assurée, Une procédure d'enrichissement doit être utilisée pour ajouter des nouveaux sites dans la base d'apprentissage.

### 4.3 Méthodes d'échantillonnage de l'espace de conception

Pour construire un métamodèle, un ensemble de variables de conception et les valeurs de réponses correspondantes sont nécessaires. La théorie du plan d'expérience (Design of experiment *DOE*) est utilisée pour déterminer l'endroit où les points de conception doivent être placés dans l'espace de conception dans le but d'avoir une meilleure information possible d'une taille d'échantillon limitée. Le plan d'expérience classique est utilisé comme une base lors de la construction des métamodèles polynomiaux. Pour des métamodèles plus complexes, des autres plans d'expérience sont préférées.

#### 4.3.1 Plans d'expérience standards

La théorie des plans d'expérience provient de la planification des expériences physiques. L'idée principale de cette théorie est de recueillir plus d'informations à partir d'un nombre limité d'expérience afin d'identifier l'influence de la réponse provoquée par le changement des variables. Parmi les théories du plan d'expérience qu'on peut citer :

- *Les plans factoriels complets  $l^\kappa$*  : où l'espace de conception est rempli à l'aide d'une grille régulière. Ces plans permettent d'offrir un bon remplissage pour des faibles niveaux ( $l= 2$  ou  $3$ ) avec  $\kappa$  est le nombre de variables dans l'espace de conception.

- Les plans factoriels fractionnaires : consistent à réduire le nombre de simulation en prenant des sous ensembles des plans factoriels complets.
- Les plans composites (CDD) : Sa construction consiste à ajouter des nouveaux points au plan factoriel complet ou fractionnaire. Cette théorie améliore donc les propriétés des plans factoriels à 2 niveaux.
- Les plans de Box-Behnken (BBD) : Pour ce plan, chaque paramètre ne peut prendre que 3 niveaux. Les tirages obtenues correspondent aux milieux des arêtes et au point central de l'hypercube formé par l'espace de conception.

La figure 4.2 présente des exemples des plans d'expérience.

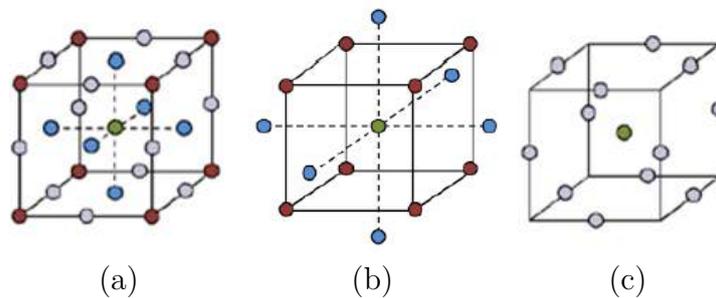


FIGURE 4.2 – a : Plan factoriel complet, b : Plan composite centré pour 3 paramètres et 2 niveaux, c : Plan de Box-Behnken pour 3 paramètres.

### 4.3.2 Méthodes de remplissage de l'espace de conception

Comme on l'a montré précédemment, la théorie des plans d'expérience standard tend à mettre les points d'échantillonnage à la frontière de l'espace de conception et ne met que quelques points à l'intérieur. Pour qu'un plan d'expérience soit approprié pour le cas des métamodèles complexes, il faut viser à étendre les points de conception dans l'espace de conception complet.

L'idée est donc de trouver un compromis entre le remplissage de l'espace, le nombre de sites fournis par la méthode et l'uniformité de ces sites. La méthode Hypercube Latin (*LHS*) est énormément utilisée, pour par exemple la construction des modèles de substitution de type krigeage. La *LHS* consiste à diviser, chacun des axes des  $\kappa$  variables, en  $n$  intervalles de même longueur, de probabilité égale et sans chevauchement. On obtient une matrice,  $S$ , de plan d'échantillonnage de dimension  $n \times \kappa$ , où les  $n$  lignes décrivent les paramètres correspondants à chacune des variables de conception les  $\kappa$  colonnes présentent les niveaux de chaque variable, comme il est indiqué dans la figure 4.3.

Pour générer un meilleur remplissage de l'espace de conception, le *LHS* peut être pris comme un plan de départ et les valeurs de chaque colonne dans la matrice de dimension  $n \times \kappa$  sont permutées afin d'optimiser certains critères. Une approche consiste à minimiser l'écart, qui représente la mesure de la non-uniformité des points de conception sur un domaine expérimental. Une autre méthode consiste à maximiser la distance minimale entre deux points quelconques à l'aide d'un algorithme d'optimisation.

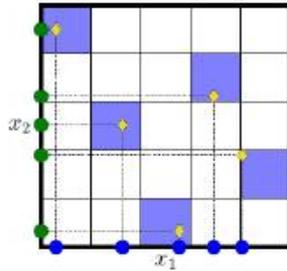


FIGURE 4.3 – Échantillonnage en hypercube latin pour 2 variables à 5 niveaux.

## 4.4 Construction des métamodèles

Aujourd'hui, les métamodèles sont largement utilisées en ingénierie. Ces techniques sont utilisées pour décrire une relation fonctionnelle entre les variables de conception et les réponses correspondantes. Dans la littérature, le nombre de métamodèles est assez important. Cependant, ils sont classés en deux catégories :

- Les métamodèles paramétriques qui nécessitent de choisir des paramètres internes de manière manuelle par un choix plus ou moins empirique ou de manière automatique en utilisant une méthodologie destinée à les fixer. Pour certains métamodèles paramétriques, le choix précis de ces paramètres est indispensable. Ces techniques nécessitent des outils adaptés tels que, un algorithme d'optimisation. Parmi les modèles paramétriques, on peut trouver les fonctions de base radiales (*RBF*), la régression à vecteur de support (*SVR*) et les modèles de type krigeage.
- Les métamodèles non-paramétriques ne requièrent aucune détermination de paramètres internes. Ce type de modèles est le premier utilisé avec la régression linéaire, quadratique et polynomiale...

### 4.4.1 Régression polynômiale

Les modèles à régression polynômiale s'inscrivent dans une démarche de modélisation par surface de réponse (Response Surface Methodology (*RSM*))(BOX et DRAPER 1987; MYERS, MONTGOMERY et ANDERSON-COOK 1995). Dans un contexte statistique et mathématique, le *RSM* est décrit par un ensemble de méthodes permettant de développer, d'améliorer et d'optimiser les processus et les produits (MYERS, MONTGOMERY et ANDERSON-COOK 1995). Les modèles sont développés à l'aide de la régression polynômiale. Cela consiste à adapter un modèle  $y = \hat{y}(x, \beta^r) + \varepsilon$  à un ensemble de données constitué de  $n$  variables de conception  $x_i$  et de leurs réponses correspondantes  $y_i$  où  $\varepsilon$  représente l'erreur aléatoire normale avec un moyenne nul et une variance  $\sigma^2$ . L'approximation du prédicteur de surface de réponse quadratique (*QRS*),  $\hat{y}(x, \beta^r)$ , peut être exprimée comme suit :

$$\hat{y}(x, \beta^r) = \beta_0^r + \sum_{i=1}^{\kappa} \beta_i^r x_i + \sum_{i=1}^{\kappa-1} \sum_{i < j=2}^{\kappa} \beta_{ij}^r x_i x_j + \sum_{i=1}^{\kappa} \beta_{ii}^r x_{ii}^2 \quad (4.1)$$

Le *QRS* est formé en utilisant *LHS*. Ils contiennent les coefficients  $\rho = (\kappa + 1)(\kappa + 2)/2$ . Ainsi, au moins  $p$  échantillonnages sont nécessaires pour construire l'approximation (*QRS*). Le modèle de régression peut être écrit sous forme de matrice :

$$y = F\beta^r + \varepsilon \quad (4.2)$$

avec  $y = [y_1, \dots, y_n]^T$  est un vecteur des  $n$  réponses,  $\beta^r = [\beta_0^r, \beta_1^r, \dots, \beta_{kk}^r]^T$  est un vecteur des  $\rho$  coefficients de régression et  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]^T$  est le vecteur des  $n$  erreurs aléatoires.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} & x_{11}x_{12} & x_{11}^2 & \dots & x_{1n}^2 \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} & x_{21}x_{22} & x_{21}^2 & \dots & x_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} & x_{n(k-1)}x_{nk} & x_{n1}^2 & \dots & x_{nn}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^T(x_1) \\ f^T(x_2) \\ \vdots \\ f^T(x_n) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$F$  représente la matrice de modèle de dimensions  $n \times \rho$  constituée de paramètres variables développés à la forme du modèle. Dans cette matrice, chaque ligne correspond à un seul point de conception et chaque colonne à un seul coefficient de régression. Les estimateurs de  $b$  par les moindres carrés peuvent être exprimés comme suit :

$$\hat{y} = Fb \quad (4.4)$$

avec :

$$b = (F^T F)^{(-1)} F^T y \quad (4.5)$$

#### 4.4.2 Moindres carrés mobiles (MLS)

La méthode des moindres carrés mobiles est devenue populaire grâce à son utilisation pour construire des fonctions de forme dans le cadre des méthodes sans maillage dans le but de résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles. La description mathématique de *MLS* peut être formulée comme (LANCASTER et SALKAUSKAS 1986) :

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{\rho} f_i(x) b_i(x) \quad (4.6)$$

où  $f$  est un vecteur des fonctions de base pour le métamodèle,  $b$  représente un vecteur des coefficients et  $\rho$  est le nombre de coefficients qui dépend de l'ordre d'approximation. La différence entre cette méthode et la régression polynomiale classique réside dans le fait que les coefficients de  $b_i$  sont dépendants du point  $x$ . Leur détermination nécessitent l'utilisation d'une méthode de type moindres carrés pondérés. On cherche alors les coefficients  $b_i$  qui minimisent l'erreur pondérée entre la réponse de la base du modèle  $y(x)$  et sa valeur approchée  $\hat{y}$  tel que :

$$\min \sum_{i=1}^n \omega_i \varepsilon_i^2 = \min \sum_{i=1}^n \omega(\|x_i - x\|) [f^T(x_i - x) b - y_i]^2 \quad (4.7)$$

où  $x$  est l'entrée de la conception  $i$  et  $n$  est le nombre de modèle d'ajustement. Le poids  $\omega_i$  diminue dans une zone fixe autour du point, appelé le domaine d'influence de  $x_i$ , s'annule à l'extérieur de cette région et prend sa valeur maximale au point  $x_i$ . Les fonctions de poids jouent un rôle important en régissant les modalités des coefficients  $b_i(x)$  qui dépendent de l'emplacement du point étudié  $x$ . La solution de la minimisation de l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$b = (X^T W X)^{-1} X^T W y \quad (4.8)$$

où :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} X(x) = \begin{bmatrix} f^T(x_1 - x) \\ \vdots \\ f^T(x_n - x) \end{bmatrix} W(x) = \begin{bmatrix} \omega(\|x_1 - x\|) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega(\|x_n - x\|) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

La méthode des moindres carrés mobiles est utilisée pour les études stochastiques, l'optimisation fiabiliste et l'approximation locale de la fonction objective.

### 4.4.3 Les fonctions à base radiale (*RFB*)

Les fonctions de base radiale consistent à construire une approximation sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions radiales (HARDY 1971 ; DUCHON 1977 ; SHAHRIARI 2007).

Les fonctions à base radiale sont exprimées en fonction de la distance radiale,  $r = \|x - x_i\|$ , à partir d'un point de donnée  $x_i$  comme :

$$\phi(x, x_i) = \phi(\|x - x_i\|) = \phi(r) \quad (4.10)$$

Où  $r$  est la distance euclidienne des points  $x$  et  $x_i$ . la méthode *RBF* peut prendre de nombreuses formes mais elle est toujours symétrique radialement. Parmi les fonctions de base  $\phi(r)$  classiques utilisées, on trouve :

- Splines linéaires :  $\phi(r) = r$
- Splines cubiques :  $\phi(r) = r^3$
- Splines en plaque mince :  $\phi(r) = r^\kappa \ln(r)$ ,  $\kappa = 2\rho + 1$  avec  $\rho \in \mathbb{N}$
- Gaussienne :  $\phi(r) = \exp(-\frac{r^2}{c})$
- Mutli-quadratiques :  $\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$
- Multi quadratiques inverses :  $\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$

Où  $c > 0$  est un paramètre de forme qui contrôle le lissage de la fonction. Afin de rapprocher les réponses complexes  $y$ , le modèle de substitution *RBF* consiste en une combinaison linéaire de la fonction de base suivante :

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^n \omega_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (4.11)$$

L'équation ci-dessus peut être écrite sous forme de matrice comme suit :

$$\hat{y} = \Phi\omega \quad (4.12)$$

Où  $\hat{y} = [\hat{y}^1, \dots, \hat{y}^n]^T$  est le vecteur de  $n$  réponses,  $w = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T$  est le vecteur des coefficients de pondération inconnus et  $\Phi$  est  $n \times n$  matrice d'interpolation symétrique :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(\|x_1 - x_1\|) & \dots & \phi(\|x_1 - x_n\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|x_n - x_1\|) & \dots & \phi(\|x_n - x_n\|) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Les estimateurs par les moindres carrés des poids  $\omega$  peuvent être analytiquement comme :

$$\omega = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y \quad (4.14)$$

#### 4.4.4 Méthode de Krigeage

De manière générale, la méthode de krigeage est très appliquée aujourd'hui en raison de sa robustesse et de la qualité de l'approximation qu'elle peut fournir. De plus, cette méthode fournit une estimation de l'erreur des moindres carrés du processus qu'il estime. Le cadre moderne du krigeage (également appelé modélisation gaussienne de processus) repose sur le fait que la fonction de substitution est supposée être la réalisation d'un processus gaussien noté  $y(x)$ . Ainsi, la réponse  $y(x)$  peut être exprimée comme suit :

$$y(x) = f(x) + Z(x) \quad (4.15)$$

Où  $f(x)$  est généralement donné comme une combinaison linéaire de fonctions polynomiales de base :

$$f(x) = \beta_0^r + \sum_{i=1}^n \beta_i^r f_i(x) \quad (4.16)$$

et  $Z(x)$  est un processus stochastique (fonction aléatoire) avec une moyenne nulle, une variance  $\sigma^2$  et une covariance non nulle donnée par :

$$Cov(Z(x) - Z(\hat{x})) = \sigma^2 R(x, \hat{x}) \quad (4.17)$$

$R(x, \hat{x})$  représente la fonction de corrélation entre les points d'échantillonnage estimés  $x$  et  $\hat{x}$  dans l'espace de conception. Cette fonction contrôle la fluidité du modèle de Krigeage résultant. D'après (CRAIG et ROUX 2002), les fonctions exponentielle et gaussienne sont couramment utilisées pour décrire la fonction de corrélation :

$$R(x, \hat{x}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{\kappa} \theta_i |x_i, \hat{x}_i|\right) \quad (4.18)$$

$$R(x, \hat{x}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{\kappa} \theta_i |x_i, \hat{x}_i|^2\right) \quad (4.19)$$

avec  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_{\kappa}]^T$  est le vecteur de paramètres inconnus de la fonction de corrélation. L'estimateur de krigeage en un point donné  $x$  est par définition une variable aléatoire gaussienne obtenue par une combinaison linéaire des observations et qui est non biaisé avec une variance minimale (FORRESTER et KEANE 2009) :

$$\hat{y} = f^T(x)\beta^r + r^T(x)R^{-1}(y - F^T\beta^r) \quad (4.20)$$

Où  $f = [1, f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$  est un vecteur correspondant à une ligne de la matrice modèle des fonctions de régression  $F$  pour  $x$ ,  $\beta^r$  est le vecteur du coefficient de régression estimé,  $r = [R(x, x_1), \dots, R(x, x_n)]^T$  représente le vecteur de fonctions de corrélation entre le point inconnu et les  $n$  points d'observation,  $R$  est la  $n \times n$  matrice de fonctions de corrélation pour l'échantillon ajusté,  $y$  est un vecteur des réponses observées qui correspond à l'ensemble des entrées et  $F$  est la matrice du modèle. Le terme  $(y - F^T\beta^r)$  représente le vecteur de résidus de l'ensemble des entrées lorsque le terme stochastique du modèle est négligé.

Afin de pouvoir construire le modèle de substitution de krigeage, nous devons tout d'abord déterminer les paramètres de corrélation du vecteur  $\theta$ , les coefficients de régression du vecteur  $\beta^r$  et la variance du modèle stochastique  $\sigma^2$ . La méthode, actuellement la plus utilisée pour déterminer tous ces paramètres, est basée sur le cadre statistique du krigeage et en particulier sur les processus gaussiens. En effet, elle propose de déterminer ces paramètres en maximisant la fonction de vraisemblance (KITANIDIS 1983 ; MARDIA et MARSHALL 1984) :

$$L(\beta^r, \sigma^2, \theta) = \frac{1}{\sqrt[2\pi\sigma^2] \sqrt{|R(\theta)|}} \exp\left[-\frac{(y - F^T\beta^r)^T R^{-1}(\theta)(y - F^T\beta^r)}{2\sigma^2}\right] \quad (4.21)$$

En pratique, on applique le logarithme népérien à l'expression de la vraisemblance et

on obtient :

$$L(n) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2}\ln(|R(\theta)|) - \frac{(y - F^T \beta^r)^T R^{-1}(\theta)(y - F^T \beta^r)}{2\sigma^2} \quad (4.22)$$

La probabilité est maximale lorsque ses dérivées concernant  $\beta^r$  et  $\sigma^2$  tendent vers zéro, donnant ainsi :

$$\beta^r = (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} y \quad (4.23)$$

avec :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(y - F^T \beta^r)^T R^{-1}(\theta)(y - F^T \beta^r)}{n} \quad (4.24)$$

Les valeurs optimales de  $\beta^r$  sont déterminées en résolvant le problème non linéaire de la maximisation de la fonction de vraisemblance :

$$\begin{aligned} \max_{\theta} : L(\theta) &= -\frac{1}{2}[n\ln(\hat{\sigma}^2) + \ln(|R|)] \\ tq : \theta_i &> 0, i = 1, \dots, \kappa \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ainsi, en résolvant ce problème d'optimisation, les estimateurs  $\hat{\beta}^r$  et  $\hat{\sigma}^2$  peuvent être calculés, puis le modèle  $\hat{y}(x)$  est complètement défini par l'équation (4.20).

## 4.5 Validation du métamodèle

Une fois le modèle de substitution est obtenu, il est nécessaire d'évaluer sa qualité. La précision du métamodèle dépend de son type, ainsi que de la qualité et de la quantité des données à partir desquelles il est construit. Plusieurs méthodes et mesures peuvent être utilisées pour tester la précision d'un modèle de substitution et le comparer à d'autres.

### 4.5.1 Mesures d'erreur

Une manière d'évaluer la précision du métamodèle consiste à étudier les résidus autrement dit la différence entre la valeur prédite à partir du métamodèle  $\hat{y}_i$  et la valeur simulée  $y_i$ . Les petits résidus montrent que le modèle présente l'ensemble de données avec plus de précision que si les résidus sont plus grands, ce que signifie que plus l'erreur est petite, plus la précision est grande.

#### 4.5.1.1 MAE, RME, RMSE

Les indicateurs les plus courants de l'erreur du métamodèle sont l'erreur absolue maximale ( $MAE$ ), l'erreur moyenne relative ( $RME$ ) et l'erreur moyenne quadratique ( $RMSE$ ). Les deux critères ( $RME$ ) et ( $RMSE$ ) servent à mesurer l'écart entre la la fonction réelle et son approchée en un ensemble de  $n$  points d'échantillonnage. Ces mesures sont exprimées comme suit :

$$RME = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \quad (4.26)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (4.27)$$

L'erreur maximum absolue ( $MAE$ ) est une mesure de précision locale. Cette mesure indique s'il existe une erreur importante dans une zone de l'espace de conception.

$$MAE = \max |y_i - \hat{y}_i|, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.28)$$

Plus ces mesures d'erreur sont faibles, plus le modèle de substitution est précis.

#### 4.5.1.2 Coefficient de corrélation linéaire $R^2$

Le coefficient de corrélation linéaire ( $R^2$ ) est une mesure de la capacité du métamodèle à saisir la variabilité dans l'ensemble de données. Ce coefficient traduit une dépendance linéaire entre deux variables en  $n$  points d'échantillonnage.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2} \quad (4.29)$$

où  $n$  est le nombre de points de conception et  $y_i$ ,  $\hat{y}_i$  et  $\bar{y}_i$  représentent la réponse réelle, prédite et moyenne respectivement. Au sens de ce critère, plus la valeur  $R^2$  est élevée, plus le modèle réduit est précis.

## 4.5.2 Validation croisée

La validation croisée (*CV*) est un autre moyen d'évaluer la qualité d'un modèle de substitution et de le comparer à d'autres modèles (MECKESHEIMER et al. 2002). Dans *CV*, les échantillons de données sont divisés en points d'entraînement, utilisés pour construire le modèle et en points de test, utilisés pour évaluer ses performances. L'erreur de généralisation, c'est à dire, l'erreur de prédiction lorsque l'erreur est décrite par le (*MSE*), peut être représentée par :

$$MSE_{CV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i^{(-i)})^2 \quad (4.30)$$

Où  $y_i$  représente la réponse à  $x_i$  à partir des données d'échantillon et  $\hat{y}_i^{(-i)}$  est la prédiction à  $x_i$  à l'aide du modèle de substitution construit à partir de tous les points d'échantillonnage, à l'exception de  $(x_i, y_i)$  (FORRESTER et KEANE 2009).

## 4.6 Analyse d'incertitudes basée sur des modèles de substitution pour la micro pompe

Dans la méthode proposée, la *FES* déterministe est utilisée pour obtenir la fonction de réponse aux points de formation générés à l'aide de l'échantillonnage latin d'hypercube (*LHS*), le métamodèle est utilisé pour illustrer la relation entre les entrées (points de conception) et les sorties (réponses). Ensuite, une analyse d'incertitude est réalisée à l'aide d'un *MCS* basé sur un modèle de substitution. Dans cette section, la faisabilité de la méthodologie proposée pour l'analyse de l'incertitude basée sur un modèle de substitution est appliquée à un modèle de micro-pompe en alliage à mémoire de forme.

### 4.6.1 Simulation déterministe par la méthode éléments finis

Le modèle déterministe consiste en une micro pompe analysée par la méthode des éléments finis dans (MERZOUKI, DUVAL et ZINEB 2012) comme indiqué dans la figure 4.4. Il considère deux membranes formées en *NiTi* à l'état martensitique et à la température ambiante.

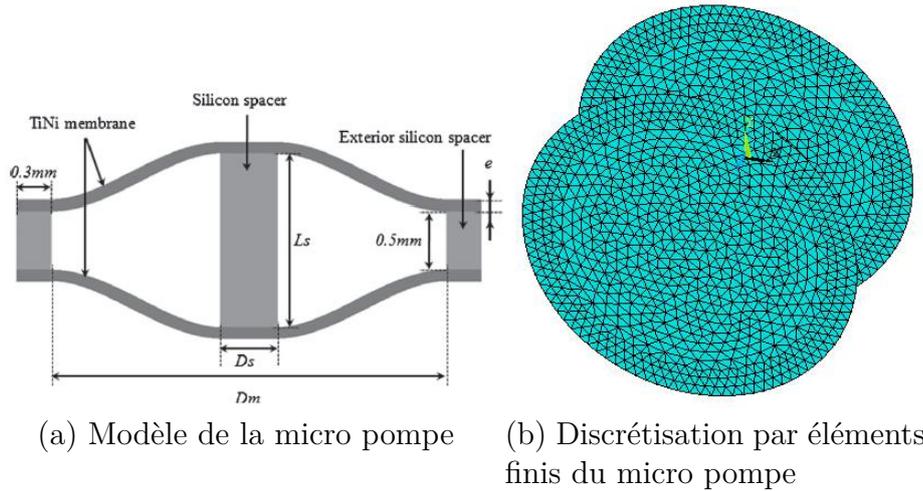


FIGURE 4.4 – Micro pompe en alliage à mémoire de forme.

Les propriétés des matériaux considérés dans la simulation présentée sont données dans le tableau 4.1 correspondant à *NiTi* alliage. Les paramètres matériels sont respectivement : le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , le paramètre de durcissement  $h$ , la limite d'élasticité  $R$ , le paramètre d'échelle de température  $\beta_s$ , la température de référence  $M_f$  et la contrainte de transformation maximale  $\epsilon_L$ . Le modèle élément fini est introduit dans le logiciel ANSYS, puis sa réponse est analysée.

TABLE 4.1 – Paramètres matériels de la structure (BISEGNA et al. 2014)

$E(MPa)$	$\nu$	$h(MPa)$	$R(MPa)$	$\beta_s(MPaK^{-1})$	$M_f(K)$	$\epsilon_L$
53000	0.36	1000	50	2.1	223	0.04

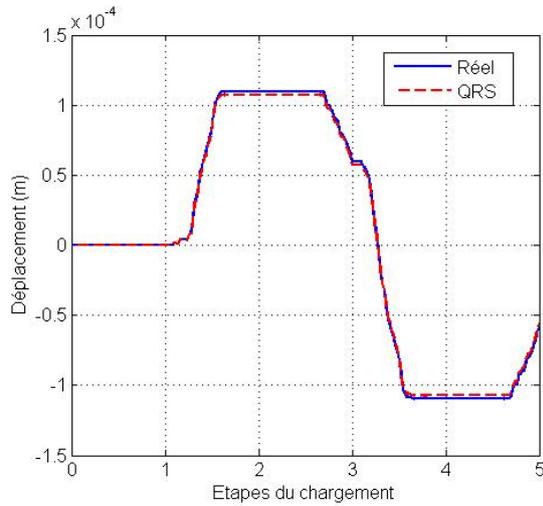
## 4.6.2 Analyse d'incertitude proposée basée sur un modèle de substitution

Pour cette application, les paramètres matériels de la micro pompe sont considérés comme des variables incertaines. Les caractéristiques probabilistes des variables aléatoires sont représentés dans le tableau 4.2.

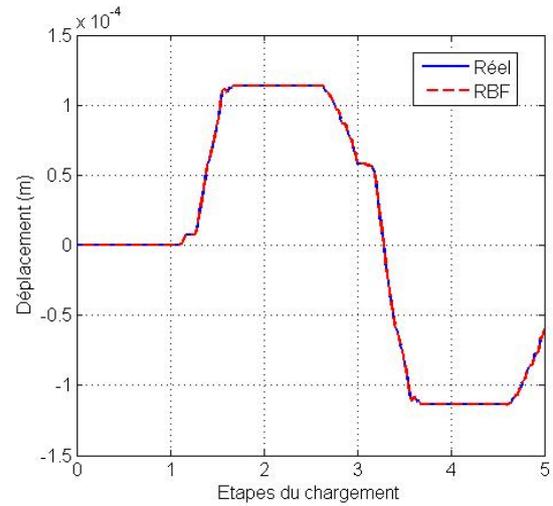
TABLE 4.2 – Caractéristiques des variables aléatoires

Variabes	Valeurs moyennes	Co-variance	Distributions
$E(MPa)$	53000	0.1	Normale
$\nu$	0.36	0.1	Normale
$h(MPa)$	1000	0.1	Normale
$M_f(K)$	223	0.1	Normale
$R(MPa)$	50	0.1	Normale

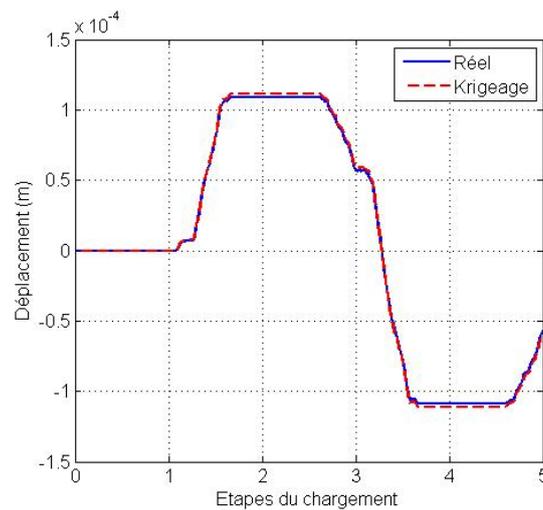
Le déplacement est approximé à l'aide des métamodèles *QRS*, *RBF* et Krigeage comme il est indiqué dans les figures 4.5(a), (b) et (c). Ici, les fonctions inverses multi quadratiques sont choisies comme les fonction Kernel pour construire le métamodèle *RBF*. Les modèles de krigeage sont construits à l'aide du code *Design and Analysis of Computer Experiments (DACE)*.



(a) Déplacement avec *QRS*



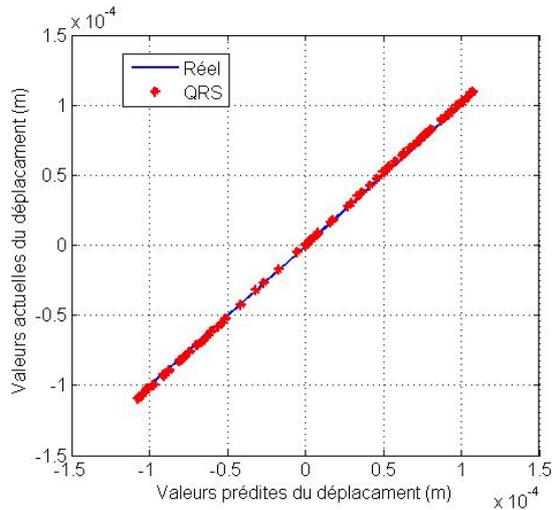
(b) Déplacement avec *RBF*



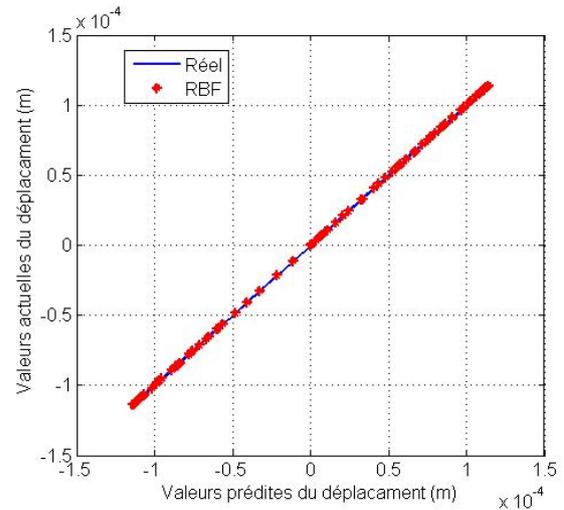
(c) Déplacement avec Krigeage

FIGURE 4.5 – Déplacement avec les métamodèles : *QRS*, *RBF* et Krigeage

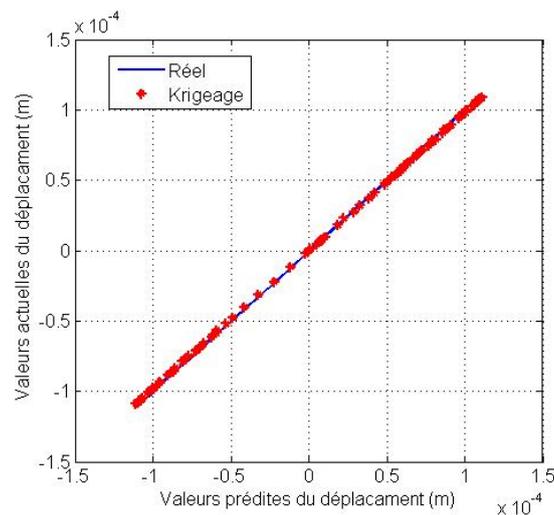
Une fonction polynomiale de second ordre de tendance globale et une fonction de corrélation exponentielle sont adoptées. Les estimateurs sont construits à travers 50 points d'échantillonnage hypercube latins (*LHS*). 50 points d'échantillonnage supplémentaires sont générés afin de valider la précision des modèles de substitution. Les FES sont effectuées à plusieurs reprises en prenant les données d'entraînement comme des entrées. Les 50 exécutions de *FES* en utilisant des points *LHS* sont implémentées en interfonctionnement entre MATLAB et ANSYS.



(a) Validation croisée avec *QRS*



(b) Validation croisée avec *RBF*



(c) Validation croisée avec Krigeage

FIGURE 4.6 – Validation croisée des métamodèles.

Après avoir généré les données d'échantillonnage, le modèle de substitution peut être interprété. Il est utilisé pour approximer la relation entre la sortie (le déplacement) et les entrées ( $E$ ,  $\nu$ ,  $h$ ,  $M_f$ ,  $R$ ).

La précision des trois types de métamodèles a été définie par leurs  $MAE$ ,  $RME$  et  $RMSE$ . Les résultats de l'analyse d'erreur des modèles de substitution sont présentés dans le tableau 4.3. Un résultat plus intuitif est montré par la validation croisée ( $CV$ ) dans

les figures 4.6(a), (b) et (c).

TABLE 4.3 – Mesures d'erreur des métamodèles

Métamodèles	$MAE$	$RME$	$RMSE$
$QRS$	$7.192e^{-5}$	30.797	$2.308e^{-4}$
$RBF$	$4.295e^{-12}$	$2.101e^{-6}$	$1.773e^{-11}$
Krigeage	$9.335e^{-5}$	35.027	$2.864e^{-4}$

Les résultats montrent que le prédicteur  $QRS$  ne fournit pas une approximation du modèle d'origine avec une grande précision. Comme le modèle  $RBF$  est extrêmement lié au choix de la fonction Kernel (Figure.4.7), nous pouvons conclure que la méthode de Krigeage fournit une meilleure approximation que les autres estimateurs. En conséquence, les modèles de Krigeage sont utilisés dans la simulation de Monte Carlo pour l'analyse des incertitudes.

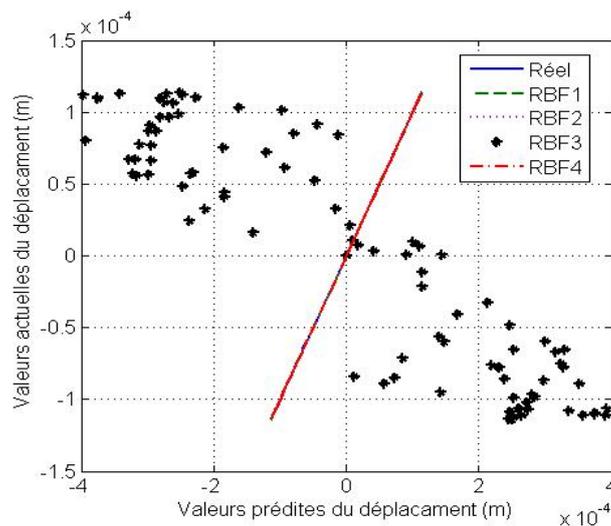
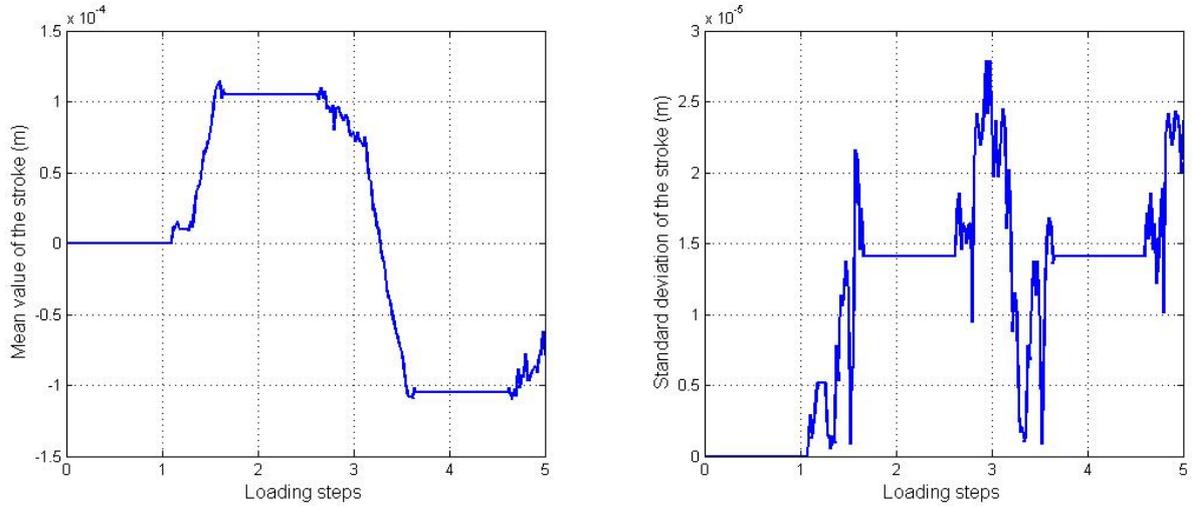


FIGURE 4.7 – Variation du choix de la fonction Kernel.

Ainsi, un ensemble d'échantillonnage avec le nombre de  $N = 1500$  pour les variables aléatoires, présenté dans le tableau 4.2 est généré, le  $MCS$  est effectué à l'aide des modèles de Krigeage. La valeur moyenne et l'écart type de sont présentés respectivement dans les figures 4.8 (a) et (b).



(a) Valeur moyenne du déplacement de la micro pompe. (b) Ecart type du déplacement de la micro pompe.

FIGURE 4.8 – Valeur moyenne et écart type du déplacement de la micro pompe.

Il convient de noter que le temps de calcul *FES* déterministes pour un échantillonnage est d'environ 4 min. Donc, si l'analyse des incertitudes est réalisée à l'aide de simulations de Monte Carlo sur la base de *FES*, le temps de calcul sera d'environ  $4 \times 1500$  min. Le *MCS* basé sur les modèles de Krigeage réduit considérablement le coût du calcul (environ 28s). En d'autres termes, la méthode proposée d'utiliser *MCS* basé sur le modèle de substitution est plus efficace que la méthode classique en utilisant les *FES* déterministes.

## 4.7 Conclusion

Les méthodes de modélisation de substitution sont devenues indispensables dans l'ingénierie moderne, car elles réduisent le coût de calcul des problèmes liés aux incertitudes. Dans ce chapitre, la méthode d'analyse de l'incertitude basée sur des modèles de substitution est appliquée sur une micro pompe formée en alliage à mémoire de forme. L'approche proposée consiste à combiner la simulation par éléments finis (*FES*), les techniques de métamodélisation et la simulation de Monte Carlo (*MCS*). Pour approximer la relation entre la réponse (sortie) et les variables de conception (entrées), des modèles *QRS*, *RBF* et krigeage sont utilisés afin de construire l'approximation. Selon les résultats des mesures d'erreur et de la validation croisée (*CV*), il a été démontré que les modèles de substitution du krigeage sont plus précis et mieux adaptés à ce système mécanique. Les résultats

montrent également que la méthode proposée est beaucoup plus simple et rapide à mettre en œuvre pour résoudre des problèmes complexes que la simulation de type Monte Carlo traditionnelle avec la méthode des éléments finis.

# Conclusions et perspectives

le développement des outils numériques permettant la quantification et la propagation d'incertitudes des systèmes mécaniques et l'introduction de la fiabilité mécanique dans l'optimisation pour assurer la robustesse de la conception sont les objectifs principales de cette thèse. Ce travail a été réalisé en collaboration avec le laboratoire de mécanique de Normandie (LMN) de l'INSA de Rouen et le laboratoire de recherche de mécanique, modélisation et production (LA2MP) de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax en tant que thèse en cotutelle internationale.

La démarche qu'on a adoptée dans le but de mener à bien ce travail a commencé par une étude bibliographique sur les alliages à mémoire de forme en énumérant les familles de ces matériaux et en citant les différentes applications industriels. On a intéressé aussi au comportement thermomécanique de ce type de matériaux intelligents. On a passé ainsi à présenter les différentes sources d'incertitudes qui interviennent dans la modélisation d'un système mécanique et on a cité les approches qui permettent la prise en compte de ces incertitudes. Puis, on a détaillé la théorie de la fiabilité et le couplage mécano fiabiliste. La synthèse de l'étude bibliographique a été présentée au *premier chapitre*.

Le *deuxième chapitre* a été consacré à la présentation de la théorie du chaos polynomial et en particulier le chaos polynomial généralisé non-intrusif ainsi qu'à la description détaillée des formalismes mathématiques et des schémas numériques d'implantation. On a revenu aussi brièvement au début du chapitre sur la méthode de référence de Monte Carlo. La simulation de Monte Carlo est couramment utilisée. L'un des principaux avantages de cette technique est qu'elle peut s'appliquer à tous les systèmes linéaires ou non linéaires. Néanmoins, la simulation de Monte Carlo pose de sérieux problèmes puisqu'elle nécessite beaucoup de tirages pour assurer une précision raisonnable. C'est pour cette raison qu'on a choisi le chaos polynomial généralisé pour traiter les incertitudes dans les exemples mécaniques. L'étude numérique a été réalisée en utilisant un code développé couplant MATLAB et ANSYS vue que la modélisation d'alliage à mémoire de forme est implicite.

L'objectif du *troisième chapitre*, était de développer une approche efficace qui nous permet d'obtenir la meilleure conception des systèmes mécaniques et en même temps de garantir un niveau de fiabilité cible. Pour atteindre ce but, les méthodes RBDO telles que la méthode hybride et la méthode OSF ont été appliquées pour avoir un niveau de fiabilité donné en le comparant avec la méthode DDO. Une nouvelle méthode appelée Robust Hybrid Method (RHM) a été appliquée afin de forcer la procédure d'optimisation à avoir une solution dans la zone de sureté. Les résultats montrent bien que les nouvelles conceptions présentent bien des meilleures performances que les modèles initiaux.

Le *quatrième chapitre* consiste à construire des métamodèles du système mécanique original. Cette approximation fournit une réponse en un point quelconque de l'espace de conception en un temps très réduit par rapport à celui d'une simulation en éléments finis. Notre objectif était donc de construire une approximation qui assure une bonne représentativité du modèle réel obtenu par élément fini, c'est-à-dire une analyse valide du problème réel. Afin de valider le travail, un exemple d'application mécanique est traité par des différentes méthodes de méta-modélisation. D'après les résultats des mesures d'erreur et de la validation croisée (CV), on a montré que les modèles de Krigeage sont les plus précis et adaptés dans les systèmes mécaniques. Les résultats ont montré également que la méthode proposée est beaucoup plus rapide à mettre en oeuvre et plus facile pour des problèmes compliqués.

Des perspectives sont envisageables à la suite de ce travail :

- Intégration des techniques de méta-modélisation dans la procédure d'optimisation fiabiliste pour minimiser le temps de calcul.
- Passer à l'optimisation multi-objectif de conception pour traiter des problèmes mécaniques complexes qui présentent plusieurs fonctions objectif.

# Bibliographie

- ALI, MS Mohamed et K TAKAHATA (2010). « Frequency-controlled wireless shape-memory-alloy microactuators integrated using an electroplating bonding process ». Dans : *Sensors and Actuators A : Physical* 163.1, p. 363–372 (cf. p. 13).
- AOUES, Younes et Alaa CHATEAUNEUF (2010). « Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization ». Dans : *Structural and multidisciplinary optimization* 41.2, p. 277–294 (cf. p. 21, 66, 67).
- ARGHAVANI, J et al. (2010). « A 3-D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings ». Dans : *International Journal of Plasticity* 26.7, p. 976–991 (cf. p. 6).
- ASKEY, Richard et James Arthur WILSON (1985). *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*. T. 319. American Mathematical Soc. (cf. p. 18, 33).
- AURICCHIO, F, A REALI et A TARDUGNO (2010). « Shape-memory alloys : effective 3D modelling, computational aspects and design of devices ». Dans : *International Journal of Computational Materials Science and Surface Engineering* 3.2-3, p. 199–223 (cf. p. 6).
- AURICCHIO, F et al. (2014). « Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation ». Dans : *International Journal of Plasticity* 59, p. 30–54 (cf. p. 5).
- AURICCHIO, Ferdinando (2001). « A robust integration-algorithm for a finite-strain shape-memory-alloy superelastic model ». Dans : *International Journal of plasticity* 17.7, p. 971–990 (cf. p. 11).
- BABUŠKA, Ivo, Fabio NOBILE et Raul TEMPONE (2007). « A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data ». Dans : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 45.3, p. 1005–1034 (cf. p. 19).
- BABUSKA, Ivo, Raúl TEMPONE et Georgios E ZOURARIS (2004). « Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations ». Dans : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 42.2, p. 800–825 (cf. p. 19).
- BARAKAT, Samer A, Abdallah I Husein MALKAWI et H Tahat RA'ED (1999). « Reliability-based optimization of laterally loaded piles ». Dans : *Structural Safety* 21.1, p. 45–64 (cf. p. 67).
- BARNES, Brian et al. (2006). « Panel deployment using ultrafast SMA latches ». Dans : *ASME 2006 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, p. 273–280 (cf. p. 13).
- BELLOUARD, Yves (2008). « Shape memory alloys for microsystems : A review from a material research perspective ». Dans : *Materials Science and Engineering : A* 481, p. 582–589 (cf. p. 36).

- BENARD, William L et al. (1998). « Thin-film shape-memory alloy actuated micropumps ». Dans : *Journal of Microelectromechanical Systems* 7.2, p. 245–251 (cf. p. 36).
- BENARD, WL et al. (1997). « A titanium-nickel shape-memory alloy actuated micropump ». Dans : *Solid State Sensors and Actuators, 1997. TRANSDUCERS'97 Chicago., 1997 International Conference on*. T. 1. IEEE, p. 361–364 (cf. p. 36).
- BERRY, Megan et Ephrahim GARCIA (2008). « Bio-inspired shape memory alloy actuated hexapod robot ». Dans : *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2008*. T. 6928. International Society for Optics et Photonics, p. 69281M (cf. p. 14).
- BEYAOUI, Moez et al. (2016). « Dynamic behaviour of a wind turbine gear system with uncertainties ». Dans : *Comptes Rendus Mécanique* 344.6, p. 375–387 (cf. p. 47).
- BHATTACHARYYA, A et al. (1995). « On the role of thermoelectric heat transfer in the design of SMA actuators : theoretical modeling and experiment ». Dans : *Smart Materials and Structures* 4.4, p. 252 (cf. p. 13).
- BIL, Cees, Kevin MASSEY et Ermira J ABDULLAH (2013). « Wing morphing control with shape memory alloy actuators ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 24.7, p. 879–898 (cf. p. 36).
- BIRMAN, Victor (1997). « Review of mechanics of shape memory alloy structures ». Dans : *Applied Mechanics Reviews* 50.11, p. 629–645 (cf. p. 11).
- BISEGNA, P et al. (2014). « A new SMA shell element based on the corotational formulation ». Dans : *Computational Mechanics* 54.5, p. 1315–1329 (cf. p. 39, 101).
- BLATMAN, Géraud et Bruno SUDRET (2008). « Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach ». Dans : *Comptes Rendus Mécanique* 336.6, p. 518–523 (cf. p. 35).
- BOX, George EP et Norman R DRAPER (1987). *Empirical model-building and response surfaces*. John Wiley & Sons (cf. p. 93).
- BREITUNG, Karl (1984). « Asymptotic approximations for multinormal integrals ». Dans : *Journal of Engineering Mechanics* 110.3, p. 357–366 (cf. p. 26).
- BRUYERE, Jerome et al. (2007). « Statistical tolerance analysis of bevel gear by tooth contact analysis and Monte Carlo simulation ». Dans : *Mechanism and Machine Theory* 42.10, p. 1326–1351 (cf. p. 17).
- BUNDHOO, Vishalini et al. (2009). « A shape memory alloy-based tendon-driven actuation system for biomimetic artificial fingers, part I : design and evaluation ». Dans : *Robotica* 27.1, p. 131–146 (cf. p. 13).
- CAMERON, Robert H et William T MARTIN (1947). « The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals ». Dans : *Annals of Mathematics*, p. 385–392 (cf. p. 18).
- CHATZIATHANASIOU, Dimitris et al. (2016). « Modeling of coupled phase transformation and reorientation in shape memory alloys under non-proportional thermomechanical loading ». Dans : *International Journal of Plasticity* 82, p. 192–224 (cf. p. 5).

- CHEUNG, GSP et BW DARVELL (2007). « Fatigue testing of a NiTi rotary instrument. Part 1 : strain–life relationship ». Dans : *International endodontic journal* 40.8, p. 612–618 (cf. p. 11).
- CISSE, Cheikh, Wael ZAKI et Tarak Ben ZINEB (2016). « A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys ». Dans : *International Journal of Plasticity* 76, p. 244–284 (cf. p. 5).
- CLEVELAND, Mark Allen (2008). *Apparatus and method for releaseably joining elements*. US Patent 7,367,738 (cf. p. 11).
- COLORADO, Julian et al. (2012). « Biomechanics of smart wings in a bat robot : morphing wings using SMA actuators ». Dans : *Bioinspiration & biomimetics* 7.3, p. 036006 (cf. p. 14).
- COUEGNAT, Guillaume et al. (2006). « Structural optimization of dental restorations using the principle of adaptive growth ». Dans : *Dental Materials* 22.1, p. 3–12 (cf. p. 74).
- CRAIG, KEN et WILLEM ROUX (2002). « LS-OPT user’s manual ». Dans : (cf. p. 97).
- CRESTAUX, Thierry, Olivier LE MAÎTRE et Jean-Marc MARTINEZ (2009). « Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis ». Dans : *Reliability Engineering & System Safety* 94.7, p. 1161–1172 (cf. p. 18, 19).
- DAMMAK, K et al. (2017a). « Numerical modelling of vibro-acoustic problem in presence of uncertainty : Application to a vehicle cabin ». Dans : *Applied Acoustics* (cf. p. 31, 37, 54).
- DAMMAK, K et al. (2017b). « Reliability based design optimization of coupled acoustic-structure system using generalized polynomial chaos ». Dans : *International Journal of Mechanical Sciences* 134, p. 75–84 (cf. p. 26, 59, 64).
- DESSOMBZ, Olivier (2000). « Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains ». Thèse de doct. Ecully, Ecole centrale de Lyon (cf. p. 17).
- DOTTER, Charles T et al. (1983). « Transluminal expandable nitinol coil stent grafting : preliminary report. » Dans : *Radiology* 147.1, p. 259–260 (cf. p. 11).
- DUCHON, Jean (1977). « Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces ». Dans : *Constructive theory of functions of several variables*. Springer, p. 85–100 (cf. p. 95).
- DUERIG, Thomas W (1997). « Superelastic nitinol for medical device. » Dans : *Medical Plastics and Biomaterials*. P. 31–42 (cf. p. 11, 12).
- EL MAANI, R et al. (2018). « Reliability-based design optimization with frequency constraints using a new safest point approach ». Dans : *Engineering Optimization*, p. 1–18 (cf. p. 59, 64).
- EL MAANI, Rabii (2016). « Étude basée sur l’optimisation fiabiliste en aérodynamique ». Thèse de doct. INSA de Rouen (cf. p. 59, 64).
- FISHMAN, GJ (1973). « Concepts and methods in discrete event digital simulation ». Dans : (cf. p. 17).

- FORRESTER, Alexander IJ et Andy J KEANE (2009). « Recent advances in surrogate-based optimization ». Dans : *Progress in aerospace sciences* 45.1-3, p. 50–79 (cf. p. 97, 100).
- FRANGOPOL, Dan M et Samer HENDAWI (1994). « Incorporation of corrosion effects in reliability-based optimization of composite hybrid plate girders ». Dans : *Structural safety* 16.1-2, p. 145–169 (cf. p. 67).
- FROTSCHER, M et al. (2011). « Achieving small structures in thin NiTi sheets for medical applications with water jet and micro machining : a comparison ». Dans : *Journal of materials engineering and performance* 20.4-5, p. 776–782 (cf. p. 36).
- FURST, Stephen J, George BUNGET et Stefan SEELECKE (2012). « Design and fabrication of a bat-inspired flapping-flight platform using shape memory alloy muscles and joints ». Dans : *Smart Materials and Structures* 22.1, p. 014011 (cf. p. 14).
- GHANEM, Roger G et Pol D SPANOS (1991). « Stochastic Finite Element Method : Response Statistics ». Dans : *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer, p. 101–119 (cf. p. 18, 19, 31, 34).
- GIACOMEL, Jeffrey A (1998). *Shape memory alloy actuator*. US Patent 5,816,306 (cf. p. 11).
- GIROSI, Federico (1998). « An equivalence between sparse approximation and support vector machines ». Dans : *Neural computation* 10.6, p. 1455–1480 (cf. p. 88).
- GRANDHI, Ramana V et Liping WANG (1998). « Reliability-based structural optimization using improved two-point adaptive nonlinear approximations ». Dans : *Finite Elements in Analysis and Design* 29.1, p. 35–48 (cf. p. 62).
- GU, Xiaojun et al. (2015). « Time integration and assessment of a model for shape memory alloys considering multiaxial nonproportional loading cases ». Dans : *International Journal of Solids and Structures* 54, p. 82–99 (cf. p. 6).
- GUANG-YUAN, Wang et Ou JIN-PING (1990). « Theory of fuzzy random vibration with fuzzy parameters ». Dans : *Fuzzy sets and systems* 36.1, p. 103–112 (cf. p. 17).
- GUERINE, A et al. (2015). « A perturbation approach for the dynamic analysis of one stage gear system with uncertain nparameters ». Dans : *Mechanism and Machine Theory* 92, p. 113–126 (cf. p. 17).
- (2016). « A polynomial chaos method for the analysis of the dynamic behavior of uncertain gear friction system ». Dans : *European Journal of Mechanics-A/Solids* 59, p. 76–84 (cf. p. 31).
- HARDY, Rolland L (1971). « Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces ». Dans : *Journal of geophysical research* 76.8, p. 1905–1915 (cf. p. 95).
- HARTL, Darren J et Dimitris C LAGOUDAS (2007). « Aerospace applications of shape memory alloys ». Dans : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering* 221.4, p. 535–552 (cf. p. 6, 11).
- HEDIA, Hassan S (2011). « Numerical optimization of dental implant through the concept of functionally graded materials ». Dans : *Materials Testing* 53.9, p. 556–563 (cf. p. 74).

- HONG, Jie et al. (2015). « Experimental investigation on the vibration tuning of a shell with a shape memory alloy ring ». Dans : *Smart Materials and Structures* 24.10, p. 105007 (cf. p. 36).
- HOU, Shujuan et al. (2014). « Optimization design of corrugated beam guardrail based on RBF-MQ surrogate model and collision safety consideration ». Dans : *Advances in Engineering Software* 78, p. 28–40 (cf. p. 88).
- HOXHOLD, Björn et Stephanus BÜTTGENBACH (2008). « Batch fabrication of micro grippers with integrated actuators ». Dans : *Microsystem Technologies* 14.12, p. 1917–1924 (cf. p. 36).
- HUANG, WM et al. (2004). « Micro NiTi–Si cantilever with three stable positions ». Dans : *Sensors and Actuators A : Physical* 114.1, p. 118–122 (cf. p. 36).
- HUETT, Brett et Cliff WILLEY (2000). « Design and development of miniature mechanisms for small spacecraft ». Dans : (cf. p. 11).
- HUSSAIN, Mohammed F, Russel R BARTON et Sanjay B JOSHI (2002). « Metamodeling : radial basis functions, versus polynomials ». Dans : *European Journal of Operational Research* 138.1, p. 142–154 (cf. p. 88).
- JANI, Jaronie Mohd, Martin LEARY et Aleksandar SUBIC (2014). « Shape Memory Alloys in Automotive Applications. » Dans : *Applied Mechanics & Materials* 663 (cf. p. 36).
- JANI, Jaronie Mohd et al. (2014). « A review of shape memory alloy research, applications and opportunities ». Dans : *Materials & Design (1980-2015)* 56, p. 1078–1113 (cf. p. 11, 13).
- JODWAY, B et M HÜLSMANN (2006). « A comparative study of root canal preparation with NiTi-TEE and K3 rotary Ni-Ti instruments ». Dans : *International endodontic journal* 39.1, p. 71–80 (cf. p. 36).
- KEYAK, JH, IY LEE et HB SKINNER (1994). « Correlations between orthogonal mechanical properties and density of trabecular bone : use of different densitometric measures ». Dans : *Journal of biomedical materials research* 28.11, p. 1329–1336 (cf. p. 49).
- KHARMANDA, G (2015). « Reliability analysis for cementless hip prosthesis using a new optimized formulation of yield stress against elasticity modulus relationship ». Dans : *Materials & Design (1980-2015)* 65, p. 496–504 (cf. p. 48, 49).
- (2016). « Integration of multi-objective structural optimization into cementless hip prosthesis design : Improved Austin-Moore model ». Dans : *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering* 19.14, p. 1557–1566 (cf. p. 49–52).
- KHARMANDA, G, A MOHAMED et M LEMAIRE (2001). « New hybrid formulation for reliability-based optimization of structures ». Dans : *Proc. The Fourth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSSMO-4)*, (eds. G. Cheng (cf. p. 66).
- (2003). « Integration of Reliability-Based Design Optimization within CAD and Finite Element Models ». Dans : *Recent Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*. Springer, p. 453–462 (cf. p. 70).

- KHARMANDA, G, A MOHAMED et Maurice LEMAIRE (2002). « Efficient reliability-based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis ». Dans : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 24.3, p. 233–245 (cf. p. 66).
- KHARMANDA, G et Niels OLHOFF (2003). « An Optimum Safety Factor Approach for Reliability-Based Optimal Design ». Dans : *An Optimum Safety Factor Approach for Reliability-Based Optimal Design* (cf. p. 70, 71).
- (2007). « Extension of optimum safety factor method to nonlinear reliability-based design optimization ». Dans : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 34.5, p. 367–380 (cf. p. 21, 70, 77).
- KHARMANDA, G, Niels OLHOFF et A EL-HAMI (2004). « Optimum values of structural safety factors for a predefined reliability level with extension to multiple limit states ». Dans : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 27.6, p. 421–434 (cf. p. 21, 24, 70, 76).
- KHARMANDA, G et al. (2009). « Reliability-Based Design Optimization using Semi-Numerical Strategies for Structural Engineering Applications ». Dans : *International Journal of CAD/CAM* 9.1, p. 1–16 (cf. p. 66).
- KHARMANDA, G et al. (2014). « Reliability-based design optimization of shank chisel plough using optimum safety factor strategy ». Dans : *Computers and electronics in agriculture* 109, p. 162–171 (cf. p. 67).
- KHARMANDA, Ghias et Abdelkhalak EL HAMI (2016). *Reliability in Biomechanics*. John Wiley & Sons (cf. p. 2, 59, 64).
- (2017). *Biomechanics : Optimization, Uncertainties and Reliability*. John Wiley & Sons (cf. p. 2, 59, 64).
- KHARMANDA, Ghias et al. (2008). « Numerical and semi-numerical methods for reliability-based design optimization ». Dans : *Structural Design Optimization Considering Uncertainties/Taylor & Francis.—2008* (cf. p. 67, 68).
- KHEIRIKHAH, Mohammad Mahdi, Samaneh RABIEE et Mohammad Ehsan EDALAT (2010). « A review of shape memory alloy actuators in robotics ». Dans : *Robot Soccer World Cup*. Springer, p. 206–217 (cf. p. 13, 36).
- KITANIDIS, Peter K (1983). « Statistical estimation of polynomial generalized covariance functions and hydrologic applications ». Dans : *Water Resources Research* 19.4, p. 909–921 (cf. p. 97).
- KOHL, M (2004). « Shape Memory Microactuators, Springer Book Series on Microtechnology and MEMS ». Dans : (cf. p. 36).
- KOHL, M et al. (2000). « SMA microgripper with integrated antagonism ». Dans : *Sensors and Actuators A : Physical* 83.1-3, p. 208–213 (cf. p. 36).
- KONIG, Dennis et al. (2010). « Micro-to nanostructured devices for the characterization of scaling effects in shape-memory thin films ». Dans : *Journal of Microelectromechanical Systems* 19.5, p. 1264–1269 (cf. p. 36).

- KOPPERDAHL, David L et Tony M KEAVENY (1998). « Yield strain behavior of trabecular bone ». Dans : *Journal of biomechanics* 31.7, p. 601–608 (cf. p. 48).
- KROETZ, Henrique M, Rodolfo K TESSARI et André T BECK (2017). « Performance of global metamodeling techniques in solution of structural reliability problems ». Dans : *Advances in Engineering Software* 114, p. 394–404 (cf. p. 88).
- KRONE, Lars et al. (2005). « The Potential of Powder Metallurgy for the Fabrication of Biomaterials on the Basis of Nickel-Titanium : A Case Study with a Staple Showing Shape Memory Behaviour ». Dans : *Advanced Engineering Materials* 7.7, p. 613–619 (cf. p. 12).
- KUILA, Biplab K et Manfred STAMM (2011). « Block copolymer–small molecule supramolecular assembly in thin film : a novel tool for surface patterning of different functional nanomaterials ». Dans : *Journal of Materials Chemistry* 21.37, p. 14127–14134 (cf. p. 36).
- KUSANO, Ibuki et al. (2014). « Reliability based design optimization of long-span bridges considering flutter ». Dans : *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 135, p. 149–162 (cf. p. 59, 64).
- LAGOUDAS, Dimitris et al. (2012). « Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys ». Dans : *International Journal of Plasticity* 32, p. 155–183 (cf. p. 5).
- LAGOUDAS, Dimitris C (2008). *Shape memory alloys : modeling and engineering applications*. Springer Science & Business Media (cf. p. 11).
- LANCASTER, Peter et Kestutis SALKAUSKAS (1986). *Curve and surface fitting : an introduction*. Academic press (cf. p. 94).
- LASTER, Z et al. (2001). « Fixation of a frontozygomatic fracture with a shape-memory staple. » Dans : *The British journal of oral & maxillofacial surgery* 39.4, p. 324 (cf. p. 11).
- LEMAIRE, Maurice, Alaa CHATEAUNEUF et Jean-Claude MITTEAU (2005). *Fiabilité des structures : Couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermès Science Publications (cf. p. 67).
- LIM, Geunbae et al. (1996). « Future of active catheters ». Dans : *Sensors and Actuators A : Physical* 56.1-2, p. 113–121 (cf. p. 12).
- MACHADO, Guilherme et al. (2015). « Superelastic cellular NiTi tube-based materials : Fabrication, experiments and modeling ». Dans : *Materials & Design (1980-2015)* 65, p. 212–220 (cf. p. 5).
- MACHADO, LG et MA SAVI (2003). « Medical applications of shape memory alloys ». Dans : *Brazilian journal of medical and biological research* 36.6, p. 683–691 (cf. p. 6).
- MAKHOLOUFI, A, Y AOUES et A EL HAMI (2016). « Reliability based design optimization of wire bonding in power microelectronic devices ». Dans : *Microsystem Technologies* 22.12, p. 2737–2748 (cf. p. 59, 64).

- MARDIA, Kanti V et Roger J MARSHALL (1984). « Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression ». Dans : *Biometrika* 71.1, p. 135–146 (cf. p. 97).
- MCKAY, Michael D, Richard J BECKMAN et William J CONOVER (2000). « A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code ». Dans : *Technometrics* 42.1, p. 55–61 (cf. p. 89).
- MECKESHEIMER, Martin et al. (2002). « Computationally inexpensive metamodel assessment strategies ». Dans : *AIAA journal* 40.10, p. 2053–2060 (cf. p. 100).
- MERZOUKI, Tarek, Arnaud DUVAL et Tarak Ben ZINEB (2012). « Finite element analysis of a shape memory alloy actuator for a micropump ». Dans : *Simulation Modelling Practice and Theory* 27, p. 112–126 (cf. p. 36, 37, 101).
- MOORE, Ramon E (1966). *Interval analysis, vol. 4* (cf. p. 16).
- MYERS, Raymond H, Douglas C MONTGOMERY et Christine M ANDERSON-COOK (1995). « Response Surface Methodology : Process and Product Optimization Using Designed Experiments (Wiley Series in Probability and Statistics) ». Dans : *Applied Probability and Statistics* (cf. p. 93).
- NECHAK, Lyes, Sébastien BERGER et Evelyne AUBRY (2010). « Robust analysis of uncertain dynamic systems : combination of the centre manifold and polynomial chaos theories ». Dans : *WSEAS Transactions on systems* 9.4, p. 386–395 (cf. p. 31, 35).
- (2011). « A polynomial chaos approach to the robust analysis of the dynamic behaviour of friction systems ». Dans : *European Journal of Mechanics-A/Solids* 30.4, p. 594–607 (cf. p. 31, 33).
- NEUGEBAUER, Reimund et al. (2010). « Numerical simulation of the activation behavior of thermal shape memory alloys ». Dans : *Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies 2010*. T. 7645. International Society for Optics et Photonics, 76450J (cf. p. 13).
- NISAR, Asim et al. (2008). « MEMS-based micropumps in drug delivery and biomedical applications ». Dans : *Sensors and Actuators B : Chemical* 130.2, p. 917–942 (cf. p. 36).
- NISHIDA, Mami, Kazuo TANAKA et Hua O WANG (2006). « Development and control of a micro biped walking robot using shape memory alloys ». Dans : *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*. IEEE, p. 1604–1609 (cf. p. 13).
- OTSUKA, Kazuhiro et Clarence Marvin WAYMAN (1999). *Shape memory materials*. Cambridge university press (cf. p. 6).
- PACHIKARA, Michele (2014). « Design Optimization of Structures with Shape Memory Alloy Member Actuators ». Thèse de doct. (cf. p. 80).
- PAIK, Jamie K, Elliot HAWKES et Robert J WOOD (2010). « A novel low-profile shape memory alloy torsional actuator ». Dans : *Smart Materials and Structures* 19.12, p. 125014 (cf. p. 36).

- PELTON, AR et al. (2008). « Fatigue and durability of Nitinol stents ». Dans : *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 1.2, p. 153–164 (cf. p. 12).
- PETRINI, Lorenza et Francesco MIGLIAVACCA (2011). « Biomedical applications of shape memory alloys ». Dans : *Journal of Metallurgy* 2011 (cf. p. 36).
- POLETTI, Pierre-Alexandre et al. (1998). « Long-term results of the Simon nitinol inferior vena cava filter ». Dans : *European radiology* 8.2, p. 289–294 (cf. p. 11).
- PRAHLAD, Harsha et Inderjit CHOPRA (2001). « Design of a variable twist tilt-rotor blade using shape memory alloy (SMA) actuators ». Dans : *Smart Structures and Materials 2001 : Smart Structures and Integrated Systems*. T. 4327. International Society for Optics et Photonics, p. 46–60 (cf. p. 11).
- PROOS, KAAREL et al. (2001). « Preliminary studies on the optimum shape of dental bridges ». Dans : *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering* 4.1, p. 77–92 (cf. p. 74).
- SAADAT, S et al. (2002). « An overview of vibration and seismic applications of NiTi shape memory alloy ». Dans : *Smart materials and structures* 11.2, p. 218 (cf. p. 6).
- SALEEB, AF et al. (2015). « On the modeling of the thermo-mechanical responses of four different classes of NiTi-based shape memory materials using a general multi-mechanism framework ». Dans : *Mechanics of Materials* 80, p. 67–86 (cf. p. 5).
- SANDERS, Albert E, James O SANDERS et Robert B MORE (1994). *Nitinol spinal instrumentation and method for surgically treating scoliosis*. US Patent 5,290,289 (cf. p. 11).
- SHAHRIARI, Kyarash (2007). « Analyse de sûreté de procédés multi-modes par des méthodes à base d’intervalles ». Theses. Université Joseph Fourier (cf. p. 95).
- SIMPSON, Timothy W et al. (2001). « Metamodels for computer-based engineering design : survey and recommendations ». Dans : *Engineering with computers* 17.2, p. 129–150 (cf. p. 88).
- SONG, Chengli (2010). « History and current situation of shape memory alloys devices for minimally invasive surgery ». Dans : *The Open Medical Devices Journal* 2.1 (cf. p. 12).
- SONG, Gangbing, N MA et H-N LI (2006). « Applications of shape memory alloys in civil structures ». Dans : *Engineering structures* 28.9, p. 1266–1274 (cf. p. 36).
- SPANOS, PD et A KONTOSOS (2008). « A multiscale Monte Carlo finite element method for determining mechanical properties of polymer nanocomposites ». Dans : *Probabilistic Engineering Mechanics* 23.4, p. 456–470 (cf. p. 17).
- SUDRET, Bruno (2007). « Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models—Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods ». Dans : *Habilitations à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France* (cf. p. 18).
- SUN, Li et al. (2012). « Stimulus-responsive shape memory materials : a review ». Dans : *Materials & Design* 33, p. 577–640 (cf. p. 36).

- TAWFIK, Mohammad, Jeng-Jong RO et Chuh MEI (2002). « Thermal post-buckling and aeroelastic behaviour of shape memory alloy reinforced plates ». Dans : *Smart Materials and Structures* 11.2, p. 297 (cf. p. 12).
- VINOGRAD, Itzhak et al. (1994). « A new intratracheal stent made from nitinol, an alloy with “shape memory effect” ». Dans : *The Journal of thoracic and cardiovascular surgery* 107.5, p. 1255–1261 (cf. p. 11).
- WIENER, Norbert (1938). « The homogeneous chaos ». Dans : *American Journal of Mathematics* 60.4, p. 897–936 (cf. p. 18, 30).
- WILLIAMS, Eric et Mohammad H ELAHINIA (2008). « An automotive SMA mirror actuator : modeling, design, and experimental evaluation ». Dans : *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 19.12, p. 1425–1434 (cf. p. 6).
- XIAO, H (2014). « An explicit, straightforward approach to modeling SMA pseudoelastic hysteresis ». Dans : *International Journal of Plasticity* 53, p. 228–240 (cf. p. 5).
- XIU, Dongbin et George Em KARNIADAKIS (2002). « Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos ». Dans : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 191.43, p. 4927–4948 (cf. p. 18, 19).
- (2003). « Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos ». Dans : *Journal of computational physics* 187.1, p. 137–167 (cf. p. 19, 33).
- YAICH, A et al. (2017). « Reliability Based Design Optimization for Multiaxial Fatigue Damage Analysis Using Robust Hybrid Method ». Dans : *Journal of Mechanics*, p. 1–16 (cf. p. 22, 26, 67, 72, 73, 79).
- YANAGIHARA, Kazuhiro et al. (1997). « Tracheal stenosis treated with self-expanding nitinol stent ». Dans : *The Annals of thoracic surgery* 63.6, p. 1786–1789 (cf. p. 12).
- ZADEH, Lofti A (1965). « Information and control ». Dans : *Fuzzy sets* 8.3, p. 338–353 (cf. p. 17).

# Publications scientifiques

Ce travail de recherche a abouti aux publications scientifiques suivantes :

## 1. Articles publiés

**A1-1.** Fatma ABID, Tarek MERZOUKI, Abdelkhalak El HAMI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, " Uncertainty of shape memory alloy micro system using generalized polynomial chaos method", *Microsystem Technologies*, Springer.

**A1-2.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, "Numerical modeling of shape memory alloy problem in presence of perturbation : application to Cu-Al-Zn-Mn specimen", *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*, 10, A7.

**A1-3.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, "An approach for the reliability based design optimisation of shape memory alloy structure", *Mechanics based design of structures and machines*.

## 2. Articles soumis

**A2-1.** Fatma ABID, Khalil DAMMAK, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, " Uncertainty based on meta-models for shape memory alloy micro-actuator", *Engeneering with computers*

**A2-2.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, " Numerical modeling of the uncertainties in hip prosthesis material parameters", *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*

## 3. Communications

**C-1.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, "Reliability based design optimization of shape memory alloy", *Internatinal confarence on acoustics and vibration*, March 19-21, 2018, Hammamet, Tunisia.

**C-2.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, "An approach for the reliability based design optimization of shape memory alloy structure", *7 éme international symposium of aircraft materials*, ACMA 2018, 24-26 April 2018, Compiégne, France.

**C-3.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI,

Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, "L'optimisation fiabiliste d'une plaque formée d'alliage de forme en utilisant l'optimisation par essais particuliers" 10<sup>ème</sup> journée d'étude technique, JET 2018, 02-04 Mai 2018, Marrakech, Maroc.

**C-4.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, "Optimisation fiabiliste d'une structure en alliage à mémoire de forme", Fifth international francophone congress of advanced mechanics, CIFMA 2018, 31 October- 2 November 2018, Beyrouth, Liban.

**C-5.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, "Numerical modeling of shape memory alloy plate in presence of perturbation», TheSecond International Conference on Advanced Materials Mechanics and Manufacturing, a3m 2018, 17-19 December 2018, Hammamet, Tunisia.

**C-6.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, " Numerical modeling of the uncertainties in hio prothesis material parameters", Computational methods in multi scale, multi uncertainty and multi physics, 15-17 July 2019, Porto, Portugal.

**C-7.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, " Reliability Based Design Optimization of dental implant using generalized polynomial chaos", The Fifth international conference of soft computing optimization in civil, environmental engineering, 16-19 September 2019, Italia.

#### **4. Chapitres**

**CH-1.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, " Optimisation fiabiliste d'une structure en alliage à mémoire de forme", MATEC Web of Conferences, 261((5)) :02001, January 2019.

**CH-2.** Fatma ABID, Abdelkhalak El HAMI, Tarek MERZOUKI, Hassen TRABELSI, Lassaad WALHA, Mohamed HADDAR, " Reliability Based Design Optimization of Shape Memory Alloy", Proceedings of the Second International Conference on Acoustics and Vibration (ICAV2018), pp 247-256, Springer.

# Annexe A

## Méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP)

La méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP) est l'une des méthodes les plus utilisées de l'optimisation non-linéaire pour résoudre un tel problème. Elle est très robuste et très efficace. Historiquement, cet algorithme peut être vu comme une extension de la méthode de Newton permettant d'intégrer des contraintes. Un tel problème peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_k(x) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \tag{A.1}$$

où  $f$  est la fonction objectif,  $\mathbf{h} = (h_1(x), \dots, h_J(x))^t$  est le vecteur des contraintes d'égalités et  $\mathbf{g} = (g_1(x), \dots, g_K(x))^t$  est celui des contraintes d'inégalités.

Il est courant d'introduire SQP comme une telle extension avant d'explicitier les principales différences avec la formulation actuelle. Considérons en premier que le problème à résoudre ne comporte que des contraintes d'égalité :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \tag{A.2}$$

La méthode SQP est basée sur la création d'une suite de vecteur convergeant vers la solution :

$$x^{it+1} = x^{it} + \alpha d^{(it)} \tag{A.3}$$

A chaque étape  $it$ , le problème initial est alors approché par un problème quadratique. Cette approximation doit être construite de façon à produire une suite qui converge rapidement vers la solution du problème. Dans le cadre sans contrainte, la méthode de Newton satisfait ces critères. C'est donc tout naturellement que cette méthode est adaptée. Considérons pour cela le lagrangien  $L$  du problème (eq.A.1) :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t \mathbf{h}(x) \tag{A.4}$$

où  $\lambda$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange et  $\mathbf{h}$  est le  $K$ -vecteur dont la composante  $k$  contient la fonction  $h_k(x)$ . Notons également  $A(x)$  la matrice jacobienne de ce vecteur des contraintes  $\mathbf{h}$ . L'application des conditions *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) du

problème (eq.A.1) à ce lagrangien donne un système  $F$  :

$$\mathbf{F}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + A(x)^t \lambda \\ \mathbf{h}(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Sous certaines hypthèses liées à l'indépendance des contraintes, le couple  $(x^*, \lambda^*)$  solution du problème initial vérifie également l'équation (eq.A.5). Le principe fondamental de la méthode SQP consiste à résoudre ce système par la méthode de Newton. Le jacobien du système est donné par :

$$\begin{bmatrix} W & A(x)^t \\ A(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

où  $W = \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda)$  est le hessien du lagrangien. La direction de descente  $d^{it}$  introduite dans l'équation (eq.A.3) est donnée par :

$$\mathbf{d}^{it} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^{it} \\ \mathbf{d}_\lambda^{it} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} W^{it} & A(x^{it})^t \\ A(x^{it}) & 0 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{F}(x^{it}, \lambda^{it}) \quad (\text{A.7})$$

Sous certaines conditions, l'itération de ce procédé fournit un algorithme convergent et performant. Cette première approche est souvent appelée méthode de Newton-Lagrange. La méthode SQP est une variante de ce schéma. Elle est basée sur une interprétation alternative du système (eq.A.7). A l'itération  $(x^{it}, \lambda^{it})^t$ , on introduit le sous-problème quadratique de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \mathbf{p}^t W^{it} \mathbf{p} + \nabla f(x^{it})^t \mathbf{p} \\ \text{s.t.} \quad & A(x^{it}) \mathbf{p} + \mathbf{h}(x^{it}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Les conditions d'optimalité permettent de mettre en correspondance les solutions  $(\mathbf{p}^*, \mu^*)$  de ce problème quadratique avec les solutions du système linéaire (eq.A.7). Ces conditions impliquent en effet les équations  $\mathbf{d}_x^{it} = \mathbf{p}^*$  et  $\lambda^{it+1} = \mu^*$ . Autrement dit, à chaque itération, la direction de descente et les nouvelles valeurs des multiplicateurs de Lagrange peuvent être obtenues en résolvant le système quadratique (eq.A.8). De nombreuses méthodes numériques permettent en effet de résoudre efficacement de tels problèmes quadratiques. Lorsque des contraintes d'inégalités doivent également être prises en compte, le sous-problème à résoudre devient alors :

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \mathbf{p}^t W^{it} \mathbf{p} + \nabla f(x^{it})^t \mathbf{p} \\ \text{s.t.} \quad & A_k(x^{it}) \mathbf{p} + \mathbf{g}_k(x^{it}) \geq 0, \quad k = 1, \dots, K \\ & A_j(x^{it}) \mathbf{p} + \mathbf{h}_j(x^{it}) = 0, \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

où  $A_k$  et  $A_j$  sont les matrices jacobiennes des vecteurs  $\mathbf{g}_k$  et  $\mathbf{h}_j$  respectivement.

Comme pour la méthode de Newton, l'algorithme SQP peut diverger si le point initial n'est suffisamment proche de l'optimum. Ce schéma est donc souvent qualifié de '*local*'. Comme pour les algorithmes n'intégrant pas les contraintes, il est possible de renforcer les propriétés de convergence de la méthode en le couplant à une étape de calcul du pas ou de région de confiance. De plus, à l'instar des méthodes de quasi-Newton, il est possible de remplacer l'évaluation coûteuse du hessien par le calcul d'une matrice approchée.

---

**Résumé** — Ce travail de thèse porte sur l'analyse robuste et l'optimisation fiabiliste des problèmes mécaniques complexes en particulier ceux formés en alliage à mémoire de forme en tenant en compte des incertitudes des paramètres d'entrée. Il est important de tenir compte de la dispersion des lois des paramètres incertains du système pour assurer une conception robuste. Le but de l'optimisation fiabiliste (RBDO) consiste à trouver un compromis entre un coût minimum et une fiabilité accrue. Par conséquent, plusieurs méthodes, telles que la méthode hybride et la méthode optimum safety factor, ont été développées pour atteindre cet objectif. Pour remédier à la complexité des problèmes mécaniques complexes comportant des paramètres incertains, des méthodologies spécifiques à cette problématique, tel que des méthodes de méta-modélisation, ont été développées afin de bâtir un modèle de substitution mécanique, qui satisfait en même temps l'efficacité et la précision du modèle.

**Mots clés :** **Système mécanique complexe ; Incertitude ; Optimisation fiabiliste ; Méta-modélisation ; Alliage à mémoire de forme.**

---

---

**Abstract** — This thesis focuses on robust analysis and reliability optimization of complex mechanical problems, in particular those formed of shape memory alloy taking into account uncertainties of the input parameters. It is important to take into account the dispersion of the laws of the uncertain parameters of the system to ensure a robust design. The goal of reliability based design optimization (RBDO) is to find a compromise between minimum cost and increased reliability. As a result, several methods, such as the hybrid method and the optimum safety factor method, have been developed to achieve this goal. To overcome the complexity of complex mechanical problems with uncertain parameters, methodologies specific to this problem, via meta-modeling methods, have been developed to build a mechanical substitution model, which at the same time satisfies the efficiency and the precision of the model.

**Keywords :** **Complex mechanical system ; Uncertainty ; Reliability based design optimization ; Meta-modelization ; Shape memory alloy.**

---