

Traitements correctifs des effets de décohérence acoustique induits par les fluctuations du milieu de propagation: algorithmes d'estimation bayésienne des directions d'arrivée en milieu fluctuant

Guillaume Beaumont

▶ To cite this version:

Guillaume Beaumont. Traitements correctifs des effets de décohérence acoustique induits par les fluctuations du milieu de propagation : algorithmes d'estimation bayésienne des directions d'arrivée en milieu fluctuant. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Ecole nationale supérieure Mines-Télécom Atlantique, 2020. Français. NNT : 2020IMTA0200 . tel-02928359

HAL Id: tel-02928359 https://theses.hal.science/tel-02928359

Submitted on 2 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPERIEURE MINES-TELECOM ATLANTIQUE BRETAGNE PAYS DE LA LOIRE - IMT ATLANTIQUE

ECOLE DOCTORALE N° 601 Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication Spécialité : Signal, Image, Vision

Par Guillaume BEAUMONT

Traitement correctif des effets de décohérence acoustique induits par les fluctuations du milieu de propagation

Algorithmes d'estimation bayésienne des directions d'arrivée en milieu fluctuant

Thèse présentée et soutenue à Brest, le 16 juillet 2020 Unité de recherche : Lab-STICC UMR CNRS 6285 Thèse N° : 2020IMTA0200

Rapporteurs avant soutenance :

Jérôme MARS Pascal LARZABAL Professeur, Grenoble INP Professeur, Université Paris-Saclay

Composition du Jury :

Président :	Laurent DAUDET	Professeur, Paris VII
Examinateurs :	Jérôme MARS Pascal LARZABAL Gaultier REAL Florent LE COURTOIS	Professeur, Grenoble-INP Professeur, Université Paris-Saclay Expert, DGA Techniques Navales Expert, Service Hydrographique et Océanographique de la Marine
Dir. de thèse :	Ronan FABLET	Professeur, IMT-Atlantique

Encadrante : Angélique DRÉMEAU Enseignante-Chercheuse, ENSTA Bretagne



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

Résumé

L'objectif de ces travaux de thèse est de proposer des approches bayésiennes "physiquement informées" pour l'estimation de directions d'arrivée de sources acoustiques sous-marines dans un milieu océanique fluctuant. Dans un premier temps nous verrons donc comment décrire ces fluctuations comme perturbation locale de la célérité du milieu pour ensuite décrire leur impact sur la propagation d'une onde et la mesure de celle-ci. Ce faisant nous pourrons décrire la dégradation subie par le signal, motivant la création d'un modèle statistique pour décrire cette perturbation.

Après un état de l'art sur les méthodes d'estimation des directions d'arrivées (DOA), tout d'abord en milieu constant, puis en milieu incertain, nous définirons une modélisation de ces fluctuations sous forme d'un bruit de phase structuré selon une distribution gaussienne multivariée. Nous verrons que ce choix nous rapproche du modèle théorique de structure défini dans le premier chapitre. Cette modélisation nous permet alors de proposer la méthode paSAMP, algorithme d'*Approximate Message Passing*, inspirée des méthodes de reconstruction de phase et se révélant plus robuste au bruit additif, ainsi qu'au bruit de phase structuré, que les méthodes d'estimation des DOA classiques.

Dans un deuxième temps, nous proposerons de réviser notre modélisation statistique et de considérer un bruit de phase distribuée selon une loi de Von Mises multivariée. Cette distribution permet une modélisation plus fidèle des bruits de phase. Considérant ce nouveau modèle, nous dériverons deux nouvelles méthodes : VitAMin et VistaBEM, respectivement extensions de paSAMP et paVBEM, déjà présent dans la littérature et reposant sur une autre approximation variationnelle bayésienne. Les premiers résultats, réalisés sur des données synthétiques considérant un modèle plus simple de Von Mises unidimensionnel, s'avèrent prometteurs quant à la bonne intégration des modèles considérés et ainsi à leur robustesse au bruit de phase distribué selon ce modèle.

Pour finir nous verrons que par le traitement de données réelles, il nous est possible d'extraire les mêmes grandeurs caractéristiques que celles décrites par le modèle théorique, mais également d'identifier certaines ondes internes spécifiques. Ceci à des fins de caractérisation rapide des fluctuations du milieu par méthode passive ou encore pour une initialisation informée des algorithmes proposés.

Mots clés : approches bayésiennes, propagation en milieu fluctuant, algorithme de reconstruction de phase, ondes internes.

Remerciements

Tout d'abord je souhaiterais remercier les membres du jury pour avoir accepté de juger ces travaux de thèse et la pertinence de leurs remarques et questions lors de la soutenance. Merci à Laurent Daudet d'en avoir accepté la présidence, Pascal Larzabal et Jérôme Mars d'avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux et enfin merci à Florent Le Courtois et Gaultier Real d'avoir accepté d'être mes examinateurs.

Ensuite, je tenais à remercier Ronan Fablet pour l'encadrement de ces travaux de thèse et le recul qu'il m'a permis d'avoir au cours de nos entrevues et ses conseils pertinents. Je suis particulièrement reconnaissant envers Angélique, la "chère Docteure Drémeau", pour sa patience, pour m'avoir fait découvrir le monde merveilleux des approximations variationnelles bayésiennes (ce monde "fin et délicat") et pour son soutien indéfectible durant ces trois années (tout en s'occupant de deux autres bébés).

Un grand merci aux coruscants Clément Dorffer, Cédric Herzet et Charles Vanwynsberghe, aux membres de l'équipe SISO : à notre capitaine Flore Samaran, à Julie, Maëlle, Manue, Paul, Dorian, Milan, Gaëtan, Fabio, Juliette et ses tartes et Julien qui m'a fait comprendre que le monde de l'acoustique est vraiment très petit.

Toute ma gratitude également envers Morgane Meillour et Thomas Paviet-Salomon et Samuel Pinson pour leurs bons et loyaux services comme collègues de bureau, en espérant qu'ils puissent retrouver une activité professionnelle normale après avoir partagé la mienne.

Des remerciements s'imposent également aux experts du SHOM et de la DGA Techniques Navales, à savoir Florent Le Courtois, Gaultier Real et Dominique Fattaccioli, pour les échanges fructueux et les travaux communs sur les données ALMA pour lesquelles mon intérêt se poursuivra dans de prochaines aventures (même si je persiste à penser que LAMA fait un bien meilleur acronyme).

Mention spéciale aux "collègues" du GdR ISIS, au centurion Ludivinus, Clémence, Torea, Hugo et aux autres que j'oublie forcément. Nul doute que nous nous recroiserons au détour d'un Gretsi (Nancy 2021!).

Un énorme merci à ma compagne Fanny, qui a su me supporter dans les bons comme dans les mauvais moments sans trop me taper dessus. Merci également au reste de la famille Aulanier et al. pour son soutien (me rappelant encore une fois que le monde est petit).

Enfin un grand merci à ma famille pour leurs encouragements et pour m'avoir permis

de faire ce qui me plaît aujourd'hui. À ma soeur Pauline, son soutien et son mental en quartz, à mes parents sans qui je ne serais pas là aujourd'hui, qui ont su me donner goût aux sciences et suffisamment confiance en moi pour mes études. Pour finir, je souhaitais remercier mon oncle Hervé. Sans lui et son exemple, je n'aurais jamais tenté de pousser mes études scientifiques pour en arriver là où j'en suis aujourd'hui.

Liste des acronymes

Acoustic Laboratory for Marine Application
Approximate Message Passing
Banc d'Essai
Belief Propagation
Classical Beam-Forming
COvariance Matching Estimation Techinque
Direction Of Arrival ou directions d'arrivée
Expectation Maximization ou Espérance Maximisation
Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
Generalized Approximate Message Passing
Generalized Linear Model
Iterative Quadratic Maximum Likelihood
Maximum a posteriori
Mutual Coherence Function ou Fonction de cohérence mutuelle
Maximum Likelihood ou maximum de vrasemblance
Method Of Direction Estimation
MUltiple SIgnal Classification
Minimum Variance Distortionless Response
Orthogonal Matching Pursuit
Préfixe pour les méthodes Phase Aware
Préfixe pour les méthodes de Phase Retrieval
RAdio Detection And Ranging
relaxed Belief Propagation
Space-Alternating Generalized EM
Swept Approximate Message Passing
Sparse Bayesian Learning
Signal to Noise Ratio ou rapport signal à bruit
Vector Approximate Message Passing
Variationnal Bayesian Expectation Maximization
Von mISes variaTionnAl Bayesian Expectation Maximization
Von mIses swepT Approximate Message passINg
Wave Propagation in Random Media

Notations

Relations d'ordre

$x \propto y$	proportionnalité entre x et y
$x \triangleq y$	définition de x par y
$x = \mathcal{O}(y)$	x est de l'ordre de y
$x \sim y$	équivalence entre x et y

Vecteurs et matrices	
x	scalaire
x	vecteur
X	matrice
Ŷ	estimation du vecteur ${\bf x}$
Â	estimation de la matrice \mathbf{X}
\mathbf{x}^T	transposée de \mathbf{x}
\mathbf{X}^T	transposée de \mathbf{X}
\mathbf{x}^*	conjuguée de \mathbf{x}
\mathbf{X}^*	conjuguée de \mathbf{X}
\mathbf{x}^{H}	hermitien de ${\bf x}$ (transposée conjuguée)
\mathbf{X}^{H}	hermitien de \mathbf{X} (transposée conjuguée)
\mathbf{X}^{-1}	inverse de \mathbf{X}
\mathbf{X}^+	pseudo-inverse de Moore-Penrose de ${\bf X}$ [96]
	si $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ est de rang plein,
	$\mathbf{X}^{+} = \mathbf{X}^{T} \left(\mathbf{X} \mathbf{X}^{T} \right)^{-1}$ si $N > M$
	$\mathbf{X}^{+} = \left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}$ si $M > N$
$\ \mathbf{x}\ _p$	(pseudo-)norme ℓ_p de \mathbf{x} :
	$\left(\sum_{i=1}^{M} x_i ^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 0$
	$\left(\sum_{i=1}^{M} \frac{ x_i }{ x_i }\right) \forall x_i \neq 0 \text{ si } p = 0$
$\operatorname{tr}(\mathbf{X})$	trace de la matrice \mathbf{X}
\mathbf{I}_N	matrice identité de dimensions $N\times N$
$\mathbf{X}\odot\mathbf{Y}$	produit de Schur-Hadamard de ${\bf X}$ et ${\bf Y}$
XØY	inverse du produit de Schur-Hadamard de ${\bf X}$ et ${\bf Y}$

Probabilités et statistiques	
$\mathrm{E}[X]$	espérance de X
$\operatorname{var}[X]$	variance de X
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	distribution gaussienne de moyenne μ de variance σ^2
$\mathcal{CN}(\mu,\sigma^2)$	distribution circulaire-gaussienne de moyenne μ
	et de variance σ^2
$\delta_a(x)$	distribution de Dirac décentrée $\delta_a(x) = \delta(x-a)$
Ensembles	
N	Ensemble des entiers positifs
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
Opérateurs	
$\mathcal{F}(.)$	opérateur de transformée de Fourier
abla.	opérateur laplacien
$\Re(.)$	partie réelle

A noter : dans le présent document, et notamment le chapitre 5, certaines notations identiques sont utilisées pour désigner des objets différents. Ce choix délibéré est motivé par la nécessité de ne pas noyer le lecteur sous des notations se rapportant à des quantités de même nature (e.g., moyenne a posteriori d'un bruit de phase, estimée selon une approximation de champ moyen ou de Bethe). Il est appuyé par le contexte qui permet de lever toute ambiguïté.

Table des matières

Ré	ésume	é		1
Re	emero	ciement	S	4
Li	ste de	es acro	nymes	5
N	otatio	ons		7
Та	able d	les mat	ières	9
Та	able d	les figu	res	13
Li	ste de	es table	aux	17
1	Intr	oductio	n	19
2	Pro	pagatio	n acoustique en milieu océanique fluctuant	23
	2.1	Génér	alités	24
		2.1.1	Propagation d'onde acoustique en milieu non perturbé	24
		2.1.2	Les ondes internes	26
		2.1.3	Modélisation spatiale du champ de perturbations	28
	2.2	Simula	ation des fluctuations spatiales	30
		2.2.1	Génération des fluctuations	31
		2.2.2	Propagation par <i>multiple phase screen</i>	31
	2.3	Impac	t des fluctuations spatiales sur un signal haute fréquence	34
		2.3.1	Régimes de saturation et diagramme $\Lambda - \Phi$	35
		2.3.2	Modélisation des régimes saturés et fonction de cohérence mutuelle	38
		2.3.3	Proposition de modèle de bruit de phase	39
	2.4	Conclu	lsions	40
3	Арр	roxima	tions variationnelles bayésiennes	43
	3.1	Génér	alités	43
	3.2	Appro	ximation de champ moyen	44
	3.3	Appro	ximation de Bethe	46

	3.4	Partic	cularisation au problème de décomposition parcimonieuse	49
		3.4.1	Approximation de champ moyen	50
		3.4.2	Approximation de Bethe	53
	3.5	Concl	usions	62
4	Esti	mation	de directions d'arrivée : un état de l'art	63
	4.1	Estim	ation de directions d'arrivée en milieu non fluctuant	64
		4.1.1	Modèle d'observation	64
		4.1.2	Formation de voies	67
		4.1.3	Approches basées sous-espace	68
		4.1.4	Approches paramétriques	70
		4.1.5	Approches parcimonieuses	76
	4.2	Estim	ation de directions d'arrivée en milieu fluctuant	78
		4.2.1	Modélisation par marginalisation de loi de probabilité	79
		4.2.2	Modélisation par bruit multiplicatif	80
		4.2.3	Modélisation par bruit additif	82
		4.2.4	Algorithmes de reconstruction de phase	83
	4.3	Concl	usions	89
5	Nou	ivelles	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée	
5	Nou en r	ıvelles nilieu f	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée luctuant	91
5	Nou en r 5.1	ivelles nilieu f Modè	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation .	91 92
5	Nou en r 5.1 5.2	ivelles nilieu f Modè Modè	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation . le gaussien	91 92 93
5	Nou en r 5.1 5.2	ivelles nilieu f Modè Modè 5.2.1	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivéefluctuantle d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimationle gaussienApproximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature	91 92 93 94
5	Nou en r 5.1 5.2	ivelles nilieu f Modè Modè 5.2.1 5.2.2	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivéefluctuantle d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimationle gaussienApproximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature .Approximation de Bethe : paSAMP	91 92 93 94 97
5	Nou en r 5.1 5.2	velles nilieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP	91 92 93 94 97
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3	ivelles nilieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP le de Von Mises	91 92 93 94 97 100 101
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3	velles milieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè 5.3.1	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP le de Von Mises Approximation de champ moyen : VistaBEM	91 92 93 94 97 100 101
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3	velles milieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè 5.3.1 5.3.2	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP le de Von Mises Approximation de champ moyen : VistaBEM Approximation de Bethe : vitAMin	91 92 93 94 97 100 101 102 104
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3	velles nilieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè 5.3.1 5.3.2 5.3.3	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP le de Von Mises Approximation de champ moyen : VistaBEM Approximation de Bethe : VitAMin Approximation de sethe : VitAMin	91 92 93 94 97 100 101 102 104
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3	velles nilieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè 5.3.1 5.3.2 5.3.3 Évalu	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP le de Von Mises Approximation de Champ moyen : VistaBEM Approximation de Bethe : VitAMin Approximation de Sethe : VitAMin	91 92 93 94 97 100 101 102 104 106 107
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3 5.3	velles nilieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè 5.3.1 5.3.2 5.3.3 Évalu 5.4.1	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP le de Von Mises Approximation de champ moyen : VistaBEM Approximation de champ moyen : VistaBEM Approximation de sethe : VitAMin Analyse critique des méthodes VistaBEM Approximation de Bethe : VitAMin Analyse critique des méthodes VistaBEM Approximation de Bethe : VitAMin Analyse critique des méthodes VistaBEM et VitAMin Approximation de Bethe : NitaBEM et VitAMin Analyse critique des méthodes VistaBEM et VitAMin	91 92 93 94 97 100 101 102 104 106 107
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3 5.4	velles nilieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè 5.3.1 5.3.2 5.3.3 Évalu 5.4.1 5.4.2	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP le de Von Mises Approximation de Bethe : VitAMin Analyse critique des méthodes VistaBEM et VitAMin Analyse critique des méthodes proposées Ation des performances des méthodes proposées Plan d'expériences Métriques de performances	91 92 93 94 97 100 101 102 104 106 107 107
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3 5.4	velles nilieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè 5.3.1 5.3.2 5.3.3 Évalu 5.4.1 5.4.2 5.4.3	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP le de Von Mises Approximation de champ moyen : VistaBEM Approximation de champ moyen : VistaBEM Approximation de sethe : VitAMin Approximation de Bethe : VitAMin Approximation de sethe : VitAMin Approximation de Bethe : VitAMin Approximation de Bethe : VitAMin Approximation de Bethe : VitAMin Analyse critique des méthodes VistaBEM et VitAMin Analyse critique des méthodes proposées Ation des performances des méthodes proposées Plan d'expériences Métriques de performances Critères d'arrêt	91 92 93 94 97 100 101 102 104 106 107 107 107
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3 5.4	velles nilieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè 5.3.1 5.3.2 5.3.3 Évalu 5.4.1 5.4.2 5.4.3 5.4.3	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivéefluctuantle d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimationle gaussienApproximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature .Approximation de Bethe : paSAMPAnalyse critique des méthodes paVBEM et paSAMPle de Von MisesApproximation de champ moyen : VistaBEMApproximation de champ moyen : VistaBEMApproximation de Bethe : VitAMinApproximation de Bethe : VitAMinAnalyse critique des méthodes VistaBEM et VitAMinAnalyse critique des méthodes ProposéesAnalyse critique des méthodes ProposéesAnalyse critique des méthodes ProposéesAnalyse critique des méthodes ProposéesAnalyse critique des méthodes ProposéesCritères d'arrêtÉvaluation des performances de paSAMP	91 92 93 94 97 100 101 102 104 106 107 107 107 108 109
5	Nou en r 5.1 5.2 5.3 5.4	velles nilieu f Modè 5.2.1 5.2.2 5.2.3 Modè 5.3.1 5.3.2 5.3.3 Évalu 5.4.1 5.4.2 5.4.3 5.4.4 5.4.4	approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée fluctuant le d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation le gaussien Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature . Approximation de Bethe : paSAMP Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP Approximation de champ moyen : VistaBEM Approximation de Bethe : vitAMin Approximation de champ moyen : VistaBEM Approximation de Bethe : VitAMin Approximation de sethe : VitAMin Approximation de Bethe : VitAMin Approximation de Bethe : VitAMin Approximation de Bethe : VitAMin Analyse critique des méthodes VistaBEM et VitAMin Analyse critique des méthodes proposées Analyse critique des méthodes proposées Analyse de performances des méthodes proposées Plan d'expériences Critères d'arrêt Évaluation des performances de paSAMP Évaluation des performances de VistaBEM et VitAMin	91 92 93 94 97 100 101 102 104 106 107 107 107 108 109 119

6	Trai	itement de la campagne ALMA : de l'observation des statistiques de	
	fluc	tuations à l'interprétation physique	129
	6.1	Présentation de la campagne ALMA 2017	130
		6.1.1 Lieu de la campagne	131
		6.1.2 Présentation du système de mesure	131
	6.2	Mise en évidence et caractérisation des fluctuations du milieu océanique	133
		6.2.1 Dynamique des fluctuations	134
		6.2.2 Estimation de la longueur de cohérence de l'onde mesurée	139
		6.2.3 Influences des paramètres physiques sur le signal mesuré	141
	6.3	Discussion sur l'applicabilité des méthodes proposées	142
7	Con	clusion et perspectives	145
	7.1	Conclusion	145
	7.2	Perspectives	146
		7.2.1 Modélisation	147
		7.2.2 Algorithmes et échantillonneurs	147
		7.2.3 Validation	148
		7.2.4 Prise en compte d'autres phénomènes de fluctuations	148
A	NNE:	XES	148
A	Dér	ivation de l'algorithme paSAMP	149
	Α	Calcul de la marginale $p(y_m)$	150
	В	Calcul de $E[z_m y_m;\omega,V]$	151
	\mathbf{C}	Calcul de var $[z_m y_m;\omega,V]$	154
В	Dér	ivation de l'algorithme VistaBEM	157
	Α	Distribution a posteriori des bruits de phase ψ	159
	В	Distribution a posteriori des coefficients ${\bf x}$	160
C	Per	formances des algorithmes phase aware : indice de Jaccard	163
D	Арр	lication de l'algorithme d'OMP pour l'identification d'ondes internes	
	base	ses-tréquences	167
Bi	bliog	raphie	169

Table des figures

2.1	Classification des processus ondulatoires dans l'océan selon leur échelle spatiale et fréquentielle (<i>source : Applied turbulence modelling in marine</i>	
	waters, Hans Buchard, 2002)	27
2.2	Première tentative de classification spectrale des ondes internes (source :	
	Walter H. Munk, Origin and Generation of Waves, First Conference on	
	Coastal Engineering, 1950)	28
2.3	Champ de perturbation de la célérité (en m/s) généré pour un bassin de	
	200 m de profondeur et 600 m de longueur, soumis à une perturbation	
	suivant le spectre de Garrett-Munk	33
2.4	Retards de phase (en radians) observés sur une onde de fréquence 500 Hz	
	pour des distances de propagation de 0, 300 et 600 mètres	34
2.5	Diagramme $\Lambda - \Phi$ pour la discrimination des régimes de saturation (source :	01
	John A Colosi Sound propagation through the stochastic ocean Cambridge	
	University Press 2016)	36
2.6	Schémas des différents régimes de saturation en présence d'inhomogénéités	00
2.0	dans le milieu de propagation (source : Caultier Real An ultrasonic test-	
	hench for reproducing the degradation of sonar performance in a fluctuating	
	ocean manuscrit de thèse 2015)	37
27	Fonction de cohérence mutuelle en fonction de la distance intercenteur	01
2.1	pormalisée $c = \Delta/\lambda$	30
	$\text{ normaliser } s = \Delta / \lambda. \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots $	09
3.1	Exemple de graphe factoriel pour la distribution de probabilité jointe	
	$p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{Z} f_1(u_1) f_2(u_2) f_3(u_1, u_2, u_3) f_4(u_3, u_4) f_5(u_3, u_5).$	47
3.2	Graphe factoriel attaché au problème de décomposition parcimonieuse.	53
4.1	Schéma de fonction de l'approche bayésienne appliquée au Matched Field	
	$Processing (adapté de [72]) \dots \dots$	80
5.1	Graphe factoriel du modèle génératif pour un cas de bruit de phase multivarie	97
5.2	Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et	
0	paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beam-	
	forming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges poirs). Cas sous-	
	déterminé une source sur jeu de données RE1	119
		114

5.3	Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et	
	paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beam-	
	forming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas sous-	
	déterminé, deux sources sur jeu de données BE1	113
5.4	Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et	
	paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beam-	
	forming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas sous-	
	déterminé, cinq sources sur jeu de données BE1.	114
5.5	Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et	
	paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beam-	
	forming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas sur-	
	déterminé, une source sur jeu de données BE1.	115
5.6	Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et	
	paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beam-	
	forming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas sur-	
	déterminé, deux sources sur jeu de données BE1	116
5.7	Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et	
	paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beam-	
	forming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas sur-	
	déterminé, cinq sources sur jeu de données BE1.	117
5.8	Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin	
	(carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique	
	(triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sous-déterminé, une	
	source sur jeu de données BE2	120
5.9	Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin	
	(carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique	
	(triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sous-déterminés, deux	
	sources sur jeu de données BE2	121
5.10	Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin	
	(carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique	
	(triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sous-déterminé, cinq	
	source sur jeu de données BE2	122
5.11	Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin	
	(carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique	
	(triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sur-déterminé, une	
	source sur jeu de données BE2	124

5.12	Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin (carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique	
	(triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sur-déterminés, deux sources sur jeu de données BE2	125
5.13	Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin	
	(triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sur-déterminé, cinq	
	source sur jeu de données BE2	126
6.1	Sortie du modèle de prédiction MARC de courants de surface pour la Corse, en rouge la zone d'expérimentation choisie dans le cadre de la	
	campagne ALMA 2017^1	130
6.2	Spectrogramme de la séquence émise par les sources large-bande S1 et S2 $$	132
6.3	Profil de célérité mesuré le 5 octobre 2017 sur la zone d'expérimentation.	133
6.4	Observation de la célérité extraite des mesures effectuées par la chaine de thermistance pour l'intégralité de la campagne ALMA 2017	125
6.5	Observation de l'écart-type des variations de célérité extraite de la mesure	100
	de thermistance.	136
6.6	Densité spectrale de puissance de la célérité calculée à partir des mesures	
	de température du capteur 24 de la chaine de thermistance $(i.e.$ le plus	
	profond). Comparaison avec les frequences connues de maree diurne (O1), semi-diurnes (M2, N2, S2) et leurs multiples ainsi qu'avec les fréquences	
	limites théoriques des ondes internes : la fréquence de Coriolis et la	
	fréquence de Brunt-Vaisala.	137
6.7	Densité spectrale de puissance du déplacement vertical estimé à partir des	
	températures mesurées par le capteur 16 de la chaine de thermistance.	190
6.8	Superposition avec la droite de reference de pente ω^{-2}	139
0.0	pour la durée de la phase étudiée. Les fréquences considérées sont respec-	
	tivement 1 kHz (a), 2 kHz (b) et 5 kHz (c)	140
6.9	Fonction de cohérence mutuelle moyennée pour l'intégralité de la phase 5	
0.10	pour 1 kHz (bleu), 2 kHz (rouge) et 5 kHz (noir).	141
6.10	Transformee de Fourier des variations du Rayon de coherence pour la durée de la phase étudiée. Les fréquences considérées sont respectivement	
	1 kHz (a), 2 kHz (b) et 5 kHz (c). $\dots \dots \dots$	141
6.11	Comparaison du spectre des variations du rayon de cohérence pour le	
	signal de fréquence 5 kHz et du spectre de Garrett-Munk reconstruit.	
	Superposition avec deux droites de pente ω^{-2}	142

C.1	Evaluation des performances des algorithmes <i>phase aware</i> : paSAMP (car-	
	rés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes	
	de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs).	
	Cas une source sur jeu de données BE1	164
C.2	Evaluation des performances des algorithmes $phase aware : paSAMP$ (car-	
	rés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes	
	de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs).	
	Cas deux sources sur jeu de données BE1	165
C.3	Evaluation des performances des algorithmes $phase aware : paSAMP$ (car-	
	rés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes	
	de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs).	
	Cas cinq sources sur jeu de données BE1	166
D.1	Spectre reconstruit par l'algorithme OMP du signal de mesure de célérité	
	pour 24 h de mesures. On observe ici la présence des composantes diurnes	
	(O1) et semi diurnes (M2,S2 ou N2) ainsi qu'une composante d'interaction	
	entre la marée semi-diurne et la fréquence de Coriolis.	168
D.2	Spectre des variations du rayon de cohérence reconstruit au moyen de	
	l'algorithme OMP. Comparaison aux ondes des marées diurnes et semi-	
	diurnes principales.	168

Liste des tableaux

5.1	Paramètres o	de simulation	pour les	données	de type BE	1	. 110
-----	--------------	---------------	----------	---------	------------	---	-------

1. Introduction

Cette thèse a pour objet l'estimation de la position de P sources à partir de mesures prises sur une antenne de M capteurs. Lorsque l'on se limite à l'estimation de la directions des sources par rapport à une direction de référence, ce problème est communément connu sous le nom d'"estimation de directions d'arrivée" (DOA pour *directions-of-arrival* en anglais) dans la littérature. Il est au coeur de nombreux domaines d'applications (radar, télécommunications...). Dans cette thèse, nous nous concentrons sur son application dans le domaine de l'acoustique sous-marine.

Communément, le modèle d'observation considéré dans le problème d'estimation de DOA s'écrit comme

$$\mathbf{y} = \sum_{p=1}^{P} \mathbf{d}(\theta_p) \ x_p + \mathbf{n},\tag{1.1}$$

où $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ est le vecteur constitué de la mesure de l'antenne, $\mathbf{d}(\theta_p) \in \mathbb{C}^M$ (resp. $x_p \in \mathbb{C}$) est le vecteur dit de pointage explicitant la forme et la direction d'arrivée θ_p de la *p*-ième onde incidente (resp. son amplitude complexe). Ce modèle repose sur un certain nombre d'hypothèses : *i*) les ondes incidentes sont de même pulsation ω , *ii*) elles évoluent à vitesse constante dans le milieu de propagation, et selon le modèle d'onde plane classiquement considéré, *iii*) la (ou les) source(s) se trouve(nt) très éloignée(s) de l'antenne réceptrice. En acoustique sous-marine, l' hypothèse *ii*) peut être non-respectée : les mouvements des masses d'eau (les ondes internes, conséquences de divers forçages tels que les ondes gravitationnelles (marées, force de Coriolis)) altèrent la vitesse de propagation des ondes, menant à une déviation substantielle du modèle idéal.

Contributions de la thèse Un premier objectif de la thèse est de comprendre ces processus et leurs impacts sur le signal mesuré, afin de proposer un modèle d'observation alternatif prenant en compte ces perturbations. Ce travail est présenté dans le chapitre 2. En sus du travail bibliographique relatif à cette tâche, nous avons réalisé une étude numérique de l'impact des ondes internes sur la solution de l'équation des ondes (en terme de déviation par rapport à la solution idéale). Une des observations de cette étude est que les perturbations liées aux ondes internes se traduisent notamment par une variation de la phase du signal observé. Plus spécifiquement, le modèle standard (1.1)

peut être corrigé en première approximation comme suit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{P} \sum_{p=1}^{P} \mathbf{d}(\theta_p) \ x_p + \mathbf{n}, \tag{1.2}$$

où $\mathbf{P} = \text{diag}(e^{i\psi_1}, \dots, e^{i\psi_M})$ avec ψ_m bruit de phase corrompant le signal mesuré au capteur m.

Un deuxième objectif de la thèse est la conception de procédures numériques permettant d'estimer précisément les directions d'arrivée à partir des données mesurées en présence de bruit de phase. L'approche que nous avons considérée repose sur une prise en compte du modèle (1.2) et d'hypothèses probabilistes sur les bruits de phase $\{\psi_m\}_{m\in\{1,\ldots,M\}}$ inspirées de l'étude menée dans le chapitre 2. Pour mener à bien cette approche, nous avons proposé le recours à des approximations variationelles bayésiennes. Ce travail est présenté dans le chapitre 5.

Les algorithmes proposés supposent la connaissance a priori de paramètres physiques permettant d'informer au mieux le modèle de bruit de phase considéré. Un dernier travail a donc été de s'intéresser à l'extraction de paramètres physiques pertinents. Nous nous sommes pour cela penchés sur des données acquises en milieu océanique, issues de campagnes en mer menées par la DGA. C'est l'objet du chapitre 6.

Organisation du manuscrit Outre le chapitre présent d'introduction, la thèse est organisée autour de 6 chapitres. Les trois premiers peuvent être vus comme des états de l'art de trois domaines différents de la littérature :

- Le chapitre 2 fait le point sur les connaissances que nous avons de la propagation acoustique en milieu océanique (fluctuant) et de l'impact des fluctuations sur les statistiques des signaux acoustiques mesurés. Cette étude, appuyée par l'adaptation et l'implémentation d'un simulateur simple, motive le modèle de bruit de phase considéré par la suite.
- Le chapitre 3 introduit les approximations variationnelles bayésiennes sur lesquelles s'appuient nos contributions algorithmiques. Deux approximations sont en particulier présentées : l'approximation de champ moyen et l'approximation de Bethe. Ces approximations bien connues de la littérature ont récemment suscité l'intérêt pour leur performance dans le problème d'acquisition compressée et plus largement celui de la reconstruction parcimonieuse.
- Le chapitre 4 dresse un panorama des principales techniques d'estimation de DOA avant de s'intéresser à celui, plus restreint, des procédures prenant en compte des incertitudes sur le milieu de propagation. A ce dernier groupe, nous proposons d'intégrer les algorithmes de reconstruction de phase, qui, privés de l'information de phases sur les mesures, peuvent être vus comme des procédures d'estimation

robustes aux bruits de phase.

Les deux chapitres suivants réunissent nos principales contributions :

- Le chapitre 5 propose trois nouvelles procédures algorithmiques permettant de prendre en compte le modèle de bruit de phase informé présenté dans les chapitres précédents. Ces procédures reposent sur des approximations variationnelles bayésiennes, de champ moyen et de Bethe. Deux distributions de probabilité sont envisagées pour modéliser les bruits de phase : une distribution gaussienne multivariée et une distribution de Von Mises multivariée. Les dérivations mathématiques de ces nouvelles procédures sont presentées en annexes de la thèse, de même que des résultats expérimentaux supplémentaires.
- Le chapitre 6 s'intéresse au traitement de données acquises en milieu océanique. On propose ainsi une procédure simple permettant d'extraire de ces données les paramètres physiques nécessaires à l'initialisation des modèles probabilistes considérés comme a priori dans les algorithmes proposés.

Enfin, le chapitre 7 synthétise les contributions de cette thèse et ouvre sur quelques axes de recherche qu'il semble pertinent d'explorer dans le cadre de travaux futurs.

2. Propagation acoustique en milieu océanique fluctuant

Sommaire

2.1	Généra	Généralités				
	2.1.1	Propagation d'onde acoustique en milieu non perturbé	24			
	2.1.2	Les ondes internes	26			
	2.1.3	Modélisation spatiale du champ de perturbations	28			
2.2	Simulation des fluctuations spatiales					
	2.2.1	Génération des fluctuations	31			
	2.2.2	Propagation par <i>multiple phase screen</i>	31			
2.3	Impact des fluctuations spatiales sur un signal haute fréquence					
	2.3.1	Régimes de saturation et diagramme $\Lambda-\Phi$	35			
	2.3.2	Modélisation des régimes saturés et fonction de cohérence mutuelle	38			
	2.3.3	Proposition de modèle de bruit de phase	39			
2.4	Conclu	usions	40			

Les océans sont le théâtre de nombreux phénomènes physiques aléatoires pouvant altérer sa nature et la façon dont l'onde acoustique se propage dans celui-ci. Parmi ces phénomènes, les ondes internes, conséquences de divers forçages tels que les ondes gravitationnelles (marées, force de Coriolis) en présence d'un milieu stratifié, rendent le milieu de propagation fortement instable. Le caractère aléatoire ainsi qu'une mauvaise connaissance de l'origine de ces phénomènes peuvent mettre en échec les traitements classiques utilisés pour l'estimation de directions d'arrivée ou la correction de gain d'antenne [104].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la caractérisation des ondes internes en nous appuyant sur les travaux de Garrett et Munk [87][51] sur les ondes internes linéaires (section 2.1) puis à l'étude de leur impact statistique sur la mesure du signal acoustique au travers des travaux de Dashen et al. [25] et Colosi [20] (sous-sections 2.3.1 et 2.3.2). Sur la base de ces études, nous proposons une première ébauche de simulateur de propagation acoustique en milieu océanique fluctuant (section 2.2) et introduisons le modèle de bruit de phase sur lequel nous élaborerons ensuite nos algorithmes d'estimation de directions d'arrivée (sous-section 2.3.3).

2.1. Généralités

La présence d'ondes internes induit des fluctuations aléatoires dans le milieu de propagation. En ce sens, nous parlerons de champ perturbé quand celui-ci sera soumis à la présence d'ondes internes. Cette présence peut être modélisée et prise en compte dans les équations de propagation classiques. Plus précisément, après avoir présenté ces équations, nous introduirons les ondes internes comme variations locales de la célérité dans un milieu supposé homogène et stationnaire. Ensuite, nous détaillerons la modélisation spectrale des ondes internes considérant le modèle de Garrett-Munk [51] et tâcherons de prendre en compte ce phénomène au travers d'une méthode explicitée dans les travaux de Colosi [21].

2.1.1. Propagation d'onde acoustique en milieu non perturbé

Considérant les équations d'ondes d'un champ de pression en absence de source, tout point du champ de pression p aux coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) à l'instant t est solution de l'équation différentielle,

$$\nabla^2 p(r,\phi,z,t) - \frac{1}{c^2(r,\phi,z)} \frac{\partial^2 p(r,\phi,z,t)}{\partial t^2} = 0$$
(2.1)

avec c le champ de célérité dépendant de la température, de la salinité et de la densité du milieu¹. En l'absence de fluctuations, la célérité du milieu à entropie s constante est donnée par la relation,

$$c^{-2}(r,\phi,z) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}(r,\phi,z)\right)_{s=\text{const}}$$
(2.2)

avec ρ la densité du milieu.

Du passage de (2.1) dans le domaine de Fourier résulte l'équation de Helmholtz homogène : on obtient pour une onde de pulsation ω

$$\left[\nabla^2 + k^2(r,\phi,z)\right] p(r,\phi,z,\omega) = 0$$
(2.3)

où ∇^2 est l'opérateur laplacien et $k(r,\phi,z) \triangleq \omega/c(r,\phi,z)$ le nombre d'onde moyen au

^{1.} On suppose ici un milieu stationnaire donc indépendant du temps.

point de coordonnées (r, ϕ, z) . Pour une distance r > 0, le laplacien peut s'écrire

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$
(2.4)

En combinant (2.3) et (2.4), on peut exprimer l'équation de Helmholtz en trois dimensions pour un champ de pression dans un milieu de densité constante :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p(r,\phi,z,\omega)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p(r,\phi,z,\omega)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p(r,\phi,z,\omega)}{\partial z^2} + k^2(r,\phi,z)p(r,\phi,z,\omega) = 0$$
(2.5)

Sous hypothèse d'indépendance au paramètre ϕ , le champ de pression s'écrit en deux dimensions selon l'équation de Helmholtz standard :

$$\frac{\partial^2 p(r,z,\omega)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p(r,z,\omega)}{\partial r} + \frac{\partial^2 p(r,z,\omega)}{\partial z^2} + k^2(r,z)p(r,z,\omega) = 0.$$
(2.6)

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles et décrire la propagation d'onde, plusieurs méthodes ont été proposée dans la littérature, *e.g.*, l'approche par rayons [67], par équations paraboliques [120], par modes normaux [95], par éléments finis [112],[95] ou par intégration du nombre d'onde [11]. Chacune de ces techniques se distingue par l'approximation faite sur la nature des sources acoustiques considérées (haute/basse fréquence), sur le milieu de propagation (propagation champ proche/champ lointain, profondeur du canal) ou sur la méthode de discrétisation des équations de propagation (éléments finis, différences finies). Dans les travaux rapportés dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés aux deux premières approches, également les plus répandues dans la communauté acoustique sous-marine, pour deux raisons :

- L'approche par rayons propose un formalisme qui, grâce aux travaux sur la propagation en milieu fluctuant de Dashen et al. [25], permet une formulation de la propagation dite *path integral* [47] permettant de décrire les statistiques de perturbation de l'onde acoustique que nous utiliserons par la suite comme a priori sur le modèle génératif des mesures de l'onde par une antenne (voir section 2.3.2). De plus, c'est sur la base du calcul de certaines grandeurs caractéristiques du signal perturbé issues de ce formalisme que repose la discrimination des fluctuations du milieu selon trois différents "régimes". Nous utiliserons ces "régimes" pour délimiter nos hypothèses de travail.
- L'approche par équations paraboliques constitue une approche de résolution peu limitative quant à la nature des sources ou du milieu de propagation. On la sollicitera pour expliciter une méthode de simulation de propagation en milieu fluctuant suffisamment générique pour intéresser des signaux couvrant un large spectre fréquentiel (voir section 2.3.1).

2.1.2. Les ondes internes

Le phénomène des ondes internes, sur lequel nous nous focalisons dans ces travaux, est la conséquence d'interactions entre des ondes issues de forçages comme la marée ou la force de Coriolis dans un milieu stratifié [87]. Ces phénomènes ondulatoires sont présents dans un milieu fluctuant à différentes échelles spatiales et fréquentielles selon différents processus. Les travaux [13] permettent de situer ces ondes internes comme des phénomènes ayant une période d'ondulation comprise entre 10^3 et 10^5 secondes (voir figure 2.2). Ces phénomènes de déplacements peuvent être discriminés en deux catégories :

Les ondes internes non-linéaires surviennent lors de certaines interactions entre un milieu fortement stratifié, une forte variation de la bathymétrie et /ou d'importants courants. De nombreux paquets d'ondes d'amplitudes importantes aussi appelés "solitons" apparaissent alors, générant des ondes pouvant être visibles à l'oeil nu et, dans des cas plus rares mais aussi plus impressionnants, la création de "vagues scélérates". Ces paquets d'ondes sont impossibles à décrire avec une modélisation linéaire. On fait donc appel à des modèles non linéaires comme les équations de Korteweg-de Vries [1] pour décrire l'apparition et la propagation de ces solitons.

Les ondes internes linéaires peuvent être décrites par une équation différentielle linéaire classique. Elles sont caractérisées par un champ de déplacement vertical ζ , générant un champ de perturbation de la célérité δ_c . De tels déplacements évoluent à des fréquences comprises entre f_c la fréquence de Coriolis, résultant de la rotation de la Terre, et N(z)la fréquence de flottabilité de la particule de fluide dans la colonne d'eau, ou fréquence de Brunt-Vaïsala. Dans ce spectre basse fréquence, allant d'un cycle par jour à une dizaine de cycles par heure, il est possible d'identifier les différents phénomènes de forçage comme effectué dans les travaux de Munk [87] (voir figure 2.2). Par la suite, les travaux de Garrett et Munk [51] et la récente correction apportée par Levine [73] ont permis la mise en équation de la densité spectrale de puissance du déplacement vertical, aussi appelée spectre de Garrett-Munk (voir équation (2.9)). Ce spectre peut être également obtenu par observation directe du champ de déplacement vertical comme effectué dans [22], nous reviendrons plus en détails sur ces travaux dans les sections suivantes. Notons qu'à de pareilles fréquences, d'autres phénomènes susceptibles de déplacer des masses d'eau et de modifier la célérité locale du milieu peuvent apparaitre, tels que des tourbillons ou des fronts thermiques (voir figure 2.1).



FIGURE 2.1. – Classification des processus ondulatoires dans l'océan selon leur échelle spatiale et fréquentielle (source : Applied turbulence modelling in marine waters, Hans Buchard, 2002)

Les ondes internes linéaires constituent des phénomènes aléatoires courants en comparaison aux ondes internes non-linéaires. Dans cette thèse, nous nous limiterons donc à leur étude afin de prendre en compte l'impact statistique de celles-ci sur un signal acoustique mesuré.



FIGURE 2.2. – Première tentative de classification spectrale des ondes internes (source : Walter H. Munk, Origin and Generation of Waves, First Conference on Coastal Engineering, 1950)

2.1.3. Modélisation spatiale du champ de perturbations

Considérons le champ de célérité comme la somme d'un profil moyen c_p et d'un terme de perturbation locale δ_c . Si nous modélisons ce champ dans un repère cartésien de coordonnées (x, y, z), nous pouvons écrire

$$c(x, y, z, t) = c_p(z) + \delta_c(x, y, z, t).$$
(2.7)

La perturbation $\delta_c(x, y, z, t)$ est induite par le déplacement vertical des masses d'eau suivant l'équation suivante [20] :

$$\delta_c(x, y, z, t) = \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{\text{pot}} \zeta(x, y, z, t) \approx c(x, y, z, t) \frac{\mu}{g} N(z)^2 \zeta(x, y, z, t)$$
(2.8)

où $(\partial c/\partial z)_{\text{pot}}$ est le gradient de célérité potentielle que l'on peut approcher par une composée de l'accélération gravitationnelle g, d'une fonction dépendant des fréquences de flottabilité des particules d'eau notée N(z) (nous y revenons un peu plus loin), d'une constante adimensionnelle $\mu = 24.5$ et de la célérité du milieu c(x, y, z, t). Il nous faut alors modéliser les statistiques du champ de déplacement vertical $\zeta(x, y, z, t)$.

D'après [51], le champ de déplacement vertical peut être représenté dans le domaine de Fourier par une somme de J modes $F_{\zeta}(\omega) = \sum_{j=1}^{J} F_{\zeta}(j,\omega)$ où

$$F_{\zeta}(j,\omega) = \frac{2B^2 E}{\pi M} \frac{N_0}{N(z)} \frac{f_c}{\omega^3} \left(\omega^2 - f_c^2\right)^{1/2} \frac{1}{(j^2 + j_*^2)}$$
(2.9)

avec $j_* = 3$ et $E = 6.3 \times 10^{-5}$ deux constantes sans dimension, f_c est la fréquence de Coriolis, B est la limite basse de la couche thermocline (i.e. la couche de mélange entre eaux de surfaces et eaux profondes), N_0 la fréquence de flottabilité en surface et $M = \sum_{j=1}^{\infty} (j^2 + j_*^2)^{-1} \approx \frac{1}{2} j_*^{-2} (\pi j_* - 1)$ une constante de normalisation.

Avec un nombre suffisant de modes pour décrire le phénomène, nous obtenons un spectre du déplacement vertical induit par les ondes internes, aussi appelé spectre de Garrett-Munk.

Une variable importante ici est la fonction N(z), fonction des fréquences de flottabilité des particules d'eau. Une définition commune consiste à considérer que cette fonction suit un "profil de Garrett-Munk", i.e. selon une décroissance exponentielle avec la profondeur

$$N(z) = N_0 \exp(z/B).$$
 (2.10)

On choisit alors de réécrire le spectre en fonction des nombres d'onde horizontaux $k_r = \left(k_x^2 + k_y^2\right)^{1/2}$ et verticaux k_z des modes. Pour cela on utilise la relation de dispersion [39]

$$\omega^2 = N(z)^2 \frac{k_r^2}{k_r^2 + k_z^2} + f_c^2 \frac{k_z^2}{k_r^2 + k_z^2} \approx \left(\frac{N_0 B}{j\pi}\right)^2 k_r^2 + f_c^2.$$
(2.11)

Posant $k_j \triangleq (f_c/N_0) (\pi j/B)$, appliquant le changement de variable et après une étape de normalisation assurant la conservation d'énergie du champ de déplacement vertical [21], on obtient une nouvelle formulation du spectre :

$$F_{\zeta}(j,k_x,k_y) = \frac{B^2 E}{\pi^2 M} \frac{N_0^2}{N(z)} \frac{1}{(j^2 + j_*^2)} \frac{k_j \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\left(k_x^2 + k_y^2 + k_j^2\right)^2}.$$
(2.12)

Ce spectre décrit les fluctuations des ondes internes en trois dimensions, la propagation horizontale étant pilotée par les nombres d'ondes k_x et k_y proportionnellement au "profil de Garrett-Munk". Afin de correspondre à la géométrie de notre problème, nous considérons uniquement une propagation en deux dimensions (x, z) soumises aux fluctuations spatiales. Alors en intégrant le spectre sur les nombres d'ondes k_y , nous obtenons le spectre 2D du déplacement vertical

$$F_{\zeta}(j,k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_y F_{\zeta}(j,k_x,k_y) = \frac{I(j,k_x)}{j^2 + j_*^2} \frac{B^2 E}{\pi^2 M} \frac{N_0}{N(z)}$$
(2.13)

avec

$$I(j,k_x) = \frac{k_j}{k_x^2 + k_j^2} + \frac{1}{2} \frac{k_x^2}{\left(k_x^2 + k_j^2\right)^{3/2}} \ln\left(\frac{\sqrt{k_x^2 + k_j^2 + k_j}}{\sqrt{k_x^2 + k_j^2 - k_j}}\right).$$
 (2.14)

Nous obtenons ainsi une représentation spectrale des fluctuations du milieu de propagation. Afin de synthétiser un champ aléatoirement perturbé, il convient donc d'effectuer plusieurs opérations :

- introduire une perturbation aléatoire du spectre de la forme $e^{i\varphi(j,k_x)}$ avec $\varphi(j,k_x)$ suivant une loi uniforme entre 0 et 2π afin d'induire un retard entre les différentes composantes modales,
- effectuer la transformée de Fourier inverse afin d'obtenir le champ de déplacement vertical selon (x, z).

En introduisant un facteur de normalisation

$$\xi(z) = \frac{1}{N_0 B} \int_{-h}^{z} N(z') \, dz', \qquad (2.15)$$

on peut finalement décrire le champ "gelé", à un instant t fixé donc variant uniquement dans l'espace, défini dans [21]

$$\zeta(x,z) = \\ \Re\left[\frac{2B}{\pi} \left(\frac{E}{M}\right)^{1/2} \left(\frac{N_0}{N(z)}\right)^{1/2} (\Delta k_x)^{1/2} \sum_j \frac{\sin(j\pi\xi(z))}{(j^2+j_*^2)^{1/2}} \sum_{k_x} (I(j,k_x))^{1/2} e^{i\varphi(j,k_x)} e^{ik_x x}\right]$$
(2.16)

avec Δk_x le pas de nombre d'onde utilisé pour modéliser les fluctuations. L'équation (2.16) décrit alors un milieu de propagation dans le plan (x, z) soumis à des fluctuations de type ondes internes suivant le spectre de Garrett-Munk.

Une fois ce champ de déplacement vertical généré, il suffit d'utiliser (2.8) pour obtenir le champ de perturbation de célérité. Pour finir, l'équation (2.7) permet de générer un champ de célérité fluctuant en tout point correspondant au plan (x, z) utilisé par la suite dans les équations de propagation et dans le simulateur proposé et présenté dans la section suivante.

2.2. Simulation des fluctuations spatiales

Dans un souci de contrôle et visualisation des perturbations du milieu, difficiles à obtenir avec des données réelles exceptées celles reproduites en cuve [107], nous proposons

d'utiliser une méthode simple de propagation dans un milieu stationnaire ². Cette méthode exploitant l'algorithme de *Split-Step Fourier Algorithm* présenté dans les travaux de Jensen [63] a été porté à notre connaissance au travers des travaux effectués à l'Institut franco-allemand de recherche pour la défense de Saint-Louis ³ [38] en acoustique aérienne en milieu perturbé. Le choix a été fait d'adapter ces méthodes à la propagation acoustique sous marine.

2.2.1. Génération des fluctuations

A l'image du Random Fluctuations Generator [49], nous proposons de générer un champ de fluctuations suivant les statistiques et une tendance décrites dans les travaux de Garrett et Munk [51]. Pour générer ce champ de perturbations fluctuant spatialement, nous nous appuyons sur les équations (2.7) à (2.16) permettant, comme décrit dans [21], de générer une "tranche" de champ de déplacement vertical $\zeta(x, z)$.

Ainsi, en fixant profondeur et distance de propagation, nous obtenons une grille du champ de célérité (avec l'équation 2.8) dans un nouveau repère aux coordonnées cylindriques (r, z). L'idée est alors d'effectuer une propagation rapide d'une onde plane dans ce champ de fluctuations simulé. Pour ce faire, nous utiliserons les équations paraboliques, dont la formulation va nous permettre une propagation en fonction de la distance (indépendamment du temps).

2.2.2. Propagation par multiple phase screen

Les équations paraboliques ont été introduites en acoustique sous-marine dans les années 1970 par Hardin et Tappert [119]. Elles sont très largement utilisées pour la résolution des équations de propagation en fonction de la distance à la source r. La solution à l'équation (2.6) s'écrit sous la forme d'une onde cylindrique

$$p(r,z) = \psi(r,z)H_0^{(1)}(k_0 r)$$
(2.17)

composée d'un mode normal $H_0^{(1)}(k_0 r)$, faisant appel à une fonction de Hankel du premier type à l'ordre 0, et d'une enveloppe $\psi(r, z)$ (fonction variant peu en r).

Une première approximation va être de remplacer cette fonction de Hankel par sa forme asymptotique

$$H_0^{(1)}(k_0 r) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \mathrm{e}^{i\left(k_0 r - \frac{\pi}{4}\right)}.$$
 (2.18)

En remplaçant cette solution dans l'équation d'Helmholtz (2.3) et en considérant le cas d'une propagation en champ lointain, $k_0 r \gg 1$, la distance de propagation est très grande

^{2.} Rappelons que nous considérons un milieu perturbé spatialement mais temporellement stable.

^{3.} Nous remercions en particulier S. Cheinet et L. Ehrhardt pour les échanges fructueux sur le sujet.

devant la longueur d'onde propagée, on obtient l'équation de propagation simplifiée d'une onde elliptique

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 \left(n^2 - 1\right)\psi = 0.$$
(2.19)

Une dernière approximation est l'approximation paraxiale, supposant de faibles variations du champ de pression

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \ll 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$
(2.20)

On obtient alors l'équation parabolique standard telle qu'introduite par Hardin et Tappert [119] :

$$2ik_0\frac{\partial\psi(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi(r,z)}{\partial z^2} + k_0^2\left(n^2 - 1\right)\psi(r,z) = 0.$$
(2.21)

Nous allons ensuite propager une onde plane dans la direction r, on procède à une transformée de Fourier en z du champ ψ . Par propriété de la transformée de Fourier que l'on retrouve aisément en intégrant par parties,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \psi(r,z)}{\partial z^2} e^{-ik_z z} dz = -k_z^2 \psi(r,k_z)$$
(2.22)

avec k_z le nombre d'onde vertical, nous allons pouvoir appliquer le "Split-Step Fourier Algorithm" [63] : on injecte cette dernière solution dans l'équation parabolique et on factorise par ψ :

$$\frac{\partial \psi(r,k_z)}{\partial r} + \frac{k_0^2 \left(n^2 - 1\right) - k_z^2}{2ik_0} \psi(r,k_z) = 0.$$
(2.23)

On obtient une équation différentielle du premier ordre avec, pour solution, une fonction de r et k_z

$$\psi(r,k_z) = \psi(r_0,k_z) e^{-\frac{k_0^2(n^2-1)-k_z^2}{2ik_0}(r-r_0)},$$
(2.24)

et, en effectuant la transformée de Fourier inverse :

$$\psi(r,z) = e^{\frac{ik_0}{2}(n^2 - 1)(r - r_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r_0, k_z) e^{-\frac{i(r - r_0)}{2k_0}k_z^2} e^{ik_z z} dk_z.$$
(2.25)

Notant $\Delta_r = r - r_0$ et \mathcal{F} (resp. \mathcal{F}^{-1}) la transformée de Fourier (resp. inverse) dans le domaine en z, on peut alors écrire la forme compacte de l'algorithme de propagation

$$\psi(r,z) = e^{\frac{ik_0}{2} \left[n^2(r_0,z) - 1 \right] \Delta_r} \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-\frac{i\Delta r}{2k_0} k_z^2} \mathcal{F} \left\{ \psi\left(r_0,z\right) \right\} \right\}.$$
 (2.26)

Nous obtenons ainsi la formulation mathématique de la propagation d'onde dans un milieu où l'indice de réfraction n(r, z) fluctue spatialement en raison d'un champ de célérité perturbé, décrit par les équations (2.7) et (2.16) (grâce à la relation $n(r, z) = c_0/c(r, z)$). Nous proposons alors une implémentation MATLAB pour simuler une propagation d'onde acoustique physiquement cohérente avec le phénomène induit par la présence d'onde plane dans le milieu de propagation.

Du fait de l'utilisation de la transformée de Fourier inverse, le champ généré par cet algorithme est ici continu aux extrémités du guide. Cette condition aux bords n'est pas réaliste et nécessite d'être améliorée pour pouvoir observer des effets de surface et de fond cohérents avec la propagation réelle. Toutefois, elle est suffisante pour donner une idée de la déformation induite par les ondes internes.

Ci-dessous nous montrons le résultat de simulation d'une onde de fréquence 500 Hz⁴ dans un milieu soumis à des ondes internes suivant un profil de Garrett-Munk classique, le tout dans un milieu reproduisant les conditions de la campagne ALMA 2017 (voir chapitre 6). La figure 2.3 représente la perturbation du champ de célérité (en mètres par seconde) due aux mouvements verticaux induits par des ondes internes.



FIGURE 2.3. – Champ de perturbation de la célérité (en m/s) généré pour un bassin de 200 m de profondeur et 600 m de longueur, soumis à une perturbation suivant le spectre de Garrett-Munk

On constate sur cette figure que la perturbation est maximale à une profondeur de 80 mètres ainsi que la présence de fluctuations spatiales du milieu de propagation. Une fois propagée une onde plane de fréquence 500 Hz dans ce milieu perturbé, on peut visualiser le retard de phase afin de constater les déformations du front d'onde après correction du profil de célérité. En particulier, pour des distances de propagation de 0, 300 et 600 mètres, nous observons les déformations suivantes reproduites sur la figure 2.4.

On constate bien une perte de cohérence spatiale au fur et à mesure que l'onde se propage dans le milieu de propagation conformément au modèle théorique, où la cohérence décroit avec l'augmentation de la distance de propagation R (voir les équations (2.27) et (2.28)).

Bien que ne modélisant pas les effets d'interactions surface/fond, cette simulation nous permet d'observer les effets de la présence d'ondes internes dans le milieu de propagation

^{4.} On choisit volontairement une fréquence basse pour des raisons d'observabilité.


FIGURE 2.4. – Retards de phase (en radians) observés sur une onde de fréquence 500 Hz pour des distances de propagation de 0, 300 et 600 mètres.

sans que ces observations ne soient influencées par d'autres phénomènes. Il s'agit là de motiver le besoin de prendre en compte un modèle de perturbation pour effectuer une localisation de source robuste à ce phénomène. En effet, on observe bien sur la figure 2.4 qu'en fonction de la taille de l'antenne et de la position de la colonne d'eau, le front perçu n'est pas soumis à un retard de moyenne nulle. Il sera ainsi difficile de compenser cette déviation sans tenir compte des statistiques de fluctuations du milieu de propagation.

2.3. Impact des fluctuations spatiales sur un signal haute fréquence

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la prise en compte des phénomènes physiques (ondes internes) et leur effet sur le milieu de propagation (champ de déplacement vertical) est délicate et nécessite des dérivations mathématiques poussées. Dans cette section, nous cherchons un modèle simple expliquant les déformations attendues sur les signaux mesurés.

A cet égard, nous nous sommes intéressés aux travaux initiés par Dashen et al. [25] ainsi qu'à ceux plus récents de Colosi [20] caractérisant l'impact des fluctuations du milieu de propagation sur la mesure d'un signal acoustique. Plus particulièrement, la "théorie simplifiée" présentée dans [25] propose une quantification de cet impact et introduit une classification en trois régimes, différentiables dans un espace $\Lambda - \Phi$, respectivement paramètre de diffraction et paramètre de force de fluctuations mesurées.

Nous irons ensuite plus en détails sur les caractéristiques des régimes dits "saturés" et notamment sur l'information que transporte la "pollution" du signal sur la nature des fluctuations du milieu de propagation. Nous reviendrons plus particulièrement sur une grandeur statistique caractérisant les régimes saturés appelée rayon de cohérence.

Cette longueur de corrélation du signal est fonction des grandeurs de fluctuations et contient donc une information sur la taille des fluctuations du milieu. Nous proposerons dans la suite d'intégrer cette information sous la forme d'un a-priori statistique que nous pourrons ensuite implémenter dans nos algorithmes d'estimation des directions d'arrivée.

2.3.1. Régimes de saturation et diagramme $\Lambda-\Phi$

Les travaux de Dashen, Flatté et co-auteurs [25] ont pour objectif de décrire les fluctuations du milieu de propagation et leur impact en termes de statistiques sur un signal propagé. Leur étude est basée sur une approche par rayons, valide et limitée aux signaux haute-fréquence. Cette approche est particulièrement bien adaptée à la description du phénomène de déviation locale du rayon et du retard impactant le signal acoustique traversant un milieu perturbé. Ces calculs peuvent ensuite être étendus sur la totalité de la distance de propagation et une approche asymptotique de cette extension permet alors d'obtenir les statistiques de déviation des rayons. Considérant des perturbations dues à la présence d'ondes internes [25], la déviation verticale $\langle Z^2 \rangle$ d'un rayon propagé à une distance de propagation R s'exprime alors comme

$$\left\langle Z^2 \right\rangle \simeq \frac{R^3 \left\langle \gamma(z)^2 \right\rangle L_r}{3L_z^2},$$
(2.27)

et la déviation horizontale $\langle X^2 \rangle$

$$\left\langle X^2 \right\rangle \simeq R \left\langle \gamma(z)^2 \right\rangle L_r$$
 (2.28)

avec $\langle \gamma(z)^2 \rangle$ variance du champ de perturbation normalisé $\gamma(r, z, t) \triangleq \delta_c(r, z, t)/c_0$, L_z et L_r les longueurs de cohérences verticales et horizontales des ondes internes. On peut désormais exprimer la longueur de cohérence dans la direction du rayon propagé en fonction du spectre de Garrett-Munk (voir équation (2.9)) :

$$L_p(z,\theta) = \frac{1}{\langle \gamma^2(z) \rangle} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\omega_L}^N \frac{2N_0 B}{\pi j} \frac{F_{\zeta}(j,\omega)}{\left(\omega^2 - \omega_L^2\right)^{1/2}} d\omega$$
(2.29)

avec la fréquence limite $\omega_L^2 = f_c^2 + N(z)^2 \tan^2 \theta$, θ étant la direction du rayon considéré. On utilisera par la suite pour $\langle \gamma^2(z) \rangle$ une forme canonique ne dépendant que de la profondeur z:

$$\left\langle \gamma^2(z) \right\rangle = \gamma_0^2 \frac{N^3(z)}{N_0^3} \tag{2.30}$$

avec $\gamma_0^2 \simeq 6.26 \times 10^{-8}$ et $N_0 = 3$ cph la fréquence de flottabilité des eaux de surface (obtenue expérimentalement). La grandeur L_p permet alors d'évaluer localement la cohérence d'un rayon lors de sa propagation. Elle est en effet utilisée dans [25] pour

définir les grandeurs relatives aux fluctuations Λ et Φ :

$$\Phi^{2} = q_{0}^{2} \int_{\Gamma} ds \left\langle \gamma^{2}(z) \right\rangle L_{p}(\theta, z)$$

$$\Lambda = \frac{q_{0}^{2}}{\Phi^{2}} \int_{\Gamma} ds \left\langle \gamma^{2}(z) \right\rangle L_{p}(\theta, z) \frac{\{m^{2}\} R_{f}^{2}(s)}{2\pi}$$
(2.31)

avec $q_0 = \omega/c_0$, $\{m^2\}$ la moyenne quadratique des amplitudes spectrales du spectre de Garrett-Munk et $R_f(s)$ le rayon de Fresnel à un point *s* du trajet Γ . Nous pouvons interpréter physiquement Φ comme l'intensité de la dispersion du rayon, augmentant avec la fréquence, la distance de propagation ainsi que l'amplitude des ondes internes. Ce dernier influence également le paramètre de diffraction Λ , dépendant de la moyenne des rayons de Fresnel sur le trajet et de l'amplitude spectrale des ondes internes. Alors en étudiant les différents comportements de diffraction d'un rayon au regard de ces deux paramètres, il est possible de discriminer trois régimes de fluctuations dans le plan $\Lambda - \Phi$ (voir figure 2.5).



FIGURE 2.5. – Diagramme $\Lambda - \Phi$ pour la discrimination des régimes de saturation (source : John A. Colosi, Sound propagation through the stochastic ocean, Cambridge University Press, 2016)

Ces trois régimes de fluctuations peuvent se décrire aisément par le prisme de l'optique géométrique :

— Le régime non saturé (*unsaturated regime*) : les variations du milieu de propagation sont trop faibles pour causer un phénomène de diffraction. Le rayon

émis reste donc cohérent tout le long du trajet.

- Le régime partiellement saturé (partially saturated regime) : les variations sont suffisantes pour que l'on observe un phénomène de diffraction. Toutefois la dispersion de ces micro-multi-trajets reste inférieure au rayon de cohérence du trajet principal. Nous sommes donc en présence d'une structure de cohérence des rayons. On peut visualiser ce régime (figure 2.6) comme si chaque multi-trajet traversait la même zone d'inhomogénéités.
- Le régime totalement saturé (totally saturated regime) : l'intensité des fluctuations provoque la dispersion des multi-trajets hors du rayon de cohérence, on a alors perte d'une information commune sur la perturbation du milieu de propagation.



FIGURE 2.6. – Schémas des différents régimes de saturation en présence d'inhomogénéités dans le milieu de propagation (source : Gaultier Real, An ultrasonic testbench for reproducing the degradation of sonar performance in a fluctuating ocean, manuscrit de thèse, 2015)

Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous portons une attention particulière sur les régimes saturés, notamment le régime partiellement saturé. En effet, l'information présente dans la structure de cohérence des multi-trajets constitue un intérêt double pour l'estimation des directions d'arrivée :

--La structure de corrélation du régime saturé peut être modélisée en tant qu'a priori

probabiliste, ajoutant une information sur les fluctuations du milieu au problème d'estimation des directions d'arrivée.

— En considérant cette information dans un algorithme d'estimation, il est alors possible de relier la structure de perturbation avec les fluctuations du milieu et ainsi procéder à une évaluation des fluctuations du milieu de propagation par acoustique passive.

Dans la suite, nous nous intéressons donc à la modélisation de la structure de la perturbation suivant les régimes saturés en nous basant sur les travaux de Dashen et al. [25].

2.3.2. Modélisation des régimes saturés et fonction de cohérence mutuelle

La plupart des travaux menés sur la caractérisation des régimes saturés visent à calculer empiriquement les statistiques du champ acoustique perturbé par la présence d'ondes internes. Ici nous nous arrêterons sur le modèle issu du formalisme de *Path integral theory*. Ce formalisme, basé sur le principe des intégrales de Feynmann [79], permet de décrire le champ acoustique en un point comme l'intégrale de tous les trajets possibles entre la source acoustique et ce point, permettant alors de modéliser la présence d'un trajet principal et la présence des micro-multi-trajets évoluant autour de ce dernier.

Utilisant ce formalisme pour la résolution des équations paraboliques, les travaux de Flatté et Esswein [40] ont permis d'exprimer les moments d'ordre 2 du champ acoustique reçu par deux capteurs espacés d'une distance Δ . Cette méthode nous permet d'obtenir l'expression de $\Gamma(\Delta)$ fonction de cohérence mutuelle (MCF pour *Mutual Coherence Function*), ou corrélation normalisée dépendant de l'espacement intercapteur Δ , dont le module peut être approximé par une structure gaussienne [47][46] :

$$|\Gamma(\Delta)| \simeq \exp\left(-\frac{D(\Delta)}{2}\right).$$
 (2.32)

On constate ici que la structure de corrélation décrivant les régimes saturés est uniquement une fonction d'une structure de phase $D(\Delta)$. Ce résultat est dû à l'utilisation d'une approximation haute fréquence, négligeant les effets des inhomogénéités sur l'amplitude. En passant par une approximation quadratique de cette fonction, $D(\Delta)$ s'écrit :

$$D(\Delta) = \Delta^2 v_\delta^2, \tag{2.33}$$

avec v_{δ} un taux de phase dont l'expression varie selon la séparation δ (spatiale, temporelle ou fréquentielle) étudiée. Nous nous intéresserons ici uniquement aux cohérences spatiales des signaux. Considérant un milieu stationnaire, on obtient les deux expressions suivantes :

$$v_z = \frac{\Phi}{\hat{L}_z}, \quad v_y = \frac{\Phi}{\hat{L}_r} \tag{2.34}$$

où \hat{L}_z et \hat{L}_r sont respectivement les longueurs de cohérence effectives verticale et horizontale des ondes internes. Par la suite nous désignerons par "rayon de cohérence" vertical R_c l'écart-type de cette structure gaussienne, à savoir $R_c = 1/v_z$. Cet écart-type peut être directement mesuré par une étude des statistiques du signal observé. On peut alors l'exploiter de deux façons :

- en le considérant comme référence afin de juger de la bonne modélisation de la perturbation du signal. On pourra en particulier l'utiliser pour valider le choix d'un a priori gaussien multivarié ou celui de Von Mises multivarié.
- en calculant la corrélation normalisée du signal mesuré, on peut récupérer les grandeurs relatives aux fluctuations du milieu de propagation. Par exemple l'estimation des longueurs de cohérence verticales et les grandeurs Λ et Φ nous permet une évaluation des fluctuations par acoustique passive.



FIGURE 2.7. – Fonction de cohérence mutuelle en fonction de la distance intercapteur normalisée $s = \Delta/\lambda$.

2.3.3. Proposition de modèle de bruit de phase

En considérant le cas du régime partiellement saturé ($\Lambda < 1$), les travaux de [25][20] permettent de décrire la perturbation par le prisme de l'optique géométrique : la corrélation entre deux mesures complexes du champ de pression par deux capteurs espacés de Δ peut être décrite par un terme de bruit phase pour seule représentation des perturbations du milieu de propagation.

On peut alors écrire le champ acoustique mesuré par le capteur m comme

$$y_m = e^{i\psi_m} \tilde{y}_m \tag{2.35}$$

où \tilde{y}_m serait le champ reçu si le milieu ne présentait aucune fluctuation et ψ_m représente le bruit de phase résultant des fluctuations. Considérant dans une première approximation que seule ψ_m est aléatoire, nous pouvons écrire le coefficient de corrélation Γ_{ml} entre deux capteurs m et l comme⁵

$$\Gamma_{ml} = \frac{\mathrm{E}[(y_m - \mathrm{E}[y_m])^*(y_l - \mathrm{E}[y_l])]}{\sqrt{\mathrm{E}[(y_m - \mathrm{E}[y_m])^*(y_m - \mathrm{E}[y_m])]}\sqrt{\mathrm{E}[(y_l - \mathrm{E}[y_l])^*(y_l - \mathrm{E}[y_l])]}},$$
(2.36)

$$= \frac{y_m^* y_l}{|\tilde{y}_m| |\tilde{y}_l|}$$

$$\times \frac{\mathrm{E}\left[\left(e^{i\psi_m} - \mathrm{E}\left[e^{i\psi_m}\right]\right)^* \left(e^{i\psi_l} - \mathrm{E}\left[e^{i\psi_l}\right]\right)\right]}{\sqrt{\mathrm{E}\left[\left(e^{i\psi_m} - \mathrm{E}\left[e^{i\psi_m}\right]\right)^* \left(e^{i\psi_m} - \mathrm{E}\left[e^{i\psi_m}\right]\right)\right]}\sqrt{\mathrm{E}\left[\left(e^{i\psi_l} - \mathrm{E}\left[e^{i\psi_l}\right]\right)^* \left(e^{i\psi_l} - \mathrm{E}\left[e^{i\psi_l}\right]\right)\right]}}$$

$$(2.37)$$

$$(2.37)$$

$$(2.37)$$

$$(2.37)$$

Une confrontation entre (2.32) et (2.38) nous permettra de valider ou non le choix de la distribution appliquée sur le bruit de phase. Nous nous intéresserons par la suite à deux d'entres elles.

2.4. Conclusions

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la caractérisation des fluctuations océaniques et leurs impacts à la fois sur la propagation d'une onde acoustique et sur les pressions acoustiques mesurées *in fine* par une antenne.

Notre étude nous a ainsi menés à considérer le phénomène des ondes internes linéaires comme principale composante des fluctuations océaniques. Leur modélisation sous la forme d'un champ de déplacement vertical rend possible leur prise en compte dans les équations de propagation acoustique, ainsi que leur caractérisation fréquentielle via le spectre de Garrett-Munk. Ces dérivations mathématiques sont à la base de la proposition d'un simulateur, inspiré et adapté des travaux [38].

Bien que ne modélisant pas les effets d'interactions surface/fond, ce premier simulateur permet d'appréhender les retards de phase attendus sur un signal acoustique traversant un milieu de propagation fluctuant. Forts de ces observations et nous appuyant sur les travaux [25] et [20], nous proposons alors de modéliser les déformations du signal induites par les fluctuations par un bruit de phase aléatoire, dont la structure de corrélation

^{5.} Par souci de simplicité, variable aléatoire et réalisation sont représentées sous la même notation.

pourra être reliée à un modèle théorique de corrélation du champ acoustique reçu faisant appel à des grandeurs physiques quantifiant les fluctuations.

3. Approximations variationnelles bayésiennes

Sommaire

3.1	Généralités	43		
3.2	Approximation de champ moyen			
3.3	Approximation de Bethe			
3.4	Particularisation au problème de décomposition parcimonieuse	49		
	3.4.1 Approximation de champ moyen	50		
	3.4.2 Approximation de Bethe	53		
3.5	Conclusions	62		

Ce chapitre rappelle brièvement les principes fondamentaux des approximations variationnelles bayésiennes au coeur de nos contributions algorithmiques (*cf.* chapitre 5). Nous les présentons ici d'un point de vue général, à savoir sans considération d'un modèle probabiliste particulier, exceptée pour la section 3.4 qui s'intéresse à une application de ces méthodes au problème de décomposition parcimonieuse. Toutes les approximations variationnelles bayésiennes ne sont pas abordées ; nous focalisons notre propos sur les deux approximations sur lesquelles reposent nos contributions : l'approximation de champ moyen (section 3.2) et l'approximation de Bethe (section 3.3). Nous renvoyons cependant le lecteur intéressé à l'article [130] dressant un aperçu plus complet de ces approximations.

3.1. Généralités

La conception d'estimateurs bayésiens nécessite le calcul de lois a posteriori. Ces lois ont rarement des formes analytiques simples, et leur calcul s'avère rapidement fastidieux. Classiquement, on a recours aux méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov, méthodes d'échantillonnage générant des échantillons tendant asymptotiquement vers des réalisations de la loi cible. Mais ces approches présentent elles-mêmes l'inconvénient d'être coûteuses en temps de calcul et de ne pas proposer d'expression explicite des lois a posteriori auxquelles elles s'intéressent. Les méthodes variationnelles bayésiennes constituent alors une alternative appréciable dans le sens où, à défaut de calculer explicitement les distributions désirées, elles proposent de calculer des approximations de celles-ci sous des formes permettant un calcul moins fastidieux.

Formellement, notant $\mathbf{u} \triangleq [u_1, \dots u_I]^T$ la variable (de dimension I) de dépendance des observations \mathbf{y} , ces méthodes se proposent de calculer une approximation $q(\mathbf{u})^*$ de la loi a posteriori $p(\mathbf{u}|\mathbf{y})$ comme la solution d'un problème d'optimisation

$$q(\mathbf{u})^{\star} = \operatorname*{arg\,min}_{q \in \mathcal{Q}} \int_{\mathbf{u}} q(\mathbf{u}) \log \frac{q(\mathbf{u})}{p(\mathbf{u}|\mathbf{y})} d\mathbf{u}, \tag{3.1}$$

où \mathcal{Q} représente un ensemble de contraintes sur l'espace des densités de probabilité. Une approximation variationnelle bayésienne sera donc définie comme la distribution minimisant la divergence de Kullback-Leibler avec la distribution a posteriori $p(\mathbf{u}|\mathbf{y})$ et satisfaisant les contraintes \mathcal{Q} . Selon cet ensemble \mathcal{Q} , la minimisation (3.1) donne lieu à des approximations différentes. De façon triviale, si \mathcal{Q} englobe l'ensemble des distributions de probabilité, la résolution résultera en un calcul exact de la distribution a posteriori $p(\mathbf{u}|\mathbf{y})$. Dans ces travaux de thèse, nous nous intéressons à deux approximations particulières : l'approximation dite de champ moyen et l'approximation de Bethe. Ces deux approximations sont bien connues de la littérature et présentent l'intérêt d'être calculables par des procédures efficaces.

3.2. Approximation de champ moyen

L'approximation de champ moyen fait l'hypothèse d'une indépendance a posteriori de tous les éléments de ${\bf u}$:

$$\mathcal{Q}_{\rm MF} = \left\{ q \middle| q(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{I} q_i(u_i) \right\}.$$
(3.2)

Algorithme VBEM La minimisation (3.1) sous la contrainte (3.2) peut être effectuée par un algorithme de descente par coordonnée, *i.e.* en minimisant successivement la divergence de Kullback-Leibler par rapport à un seul facteur, par exemple $q_i(u_i)$. Cette procédure se traduit par les équations de mise à jour suivantes :

$$q_{1}^{(k+1)}(u_{1}) \propto \exp\left(\left\langle \log p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \right\rangle_{\prod_{j \neq I} q_{j}^{(k)}(u_{j})}\right),$$

$$\vdots$$

$$q_{i}^{(k+1)}(u_{i}) \propto \exp\left(\left\langle \log p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \right\rangle_{\prod_{j < i} q_{j}^{(k+1)}(u_{j})}\right),$$

$$\vdots$$

$$q_{I}^{(k+1)}(u_{I}) \propto \exp\left(\left\langle \log p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \right\rangle_{\prod_{j \neq I} q_{j}^{(k+1)}(u_{j})}\right),$$
(3.3)

où

$$\langle \log p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \rangle_{q_i(u_i)} \triangleq \int_{u_i} q_i(u_i) \log p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) du_i,$$
 (3.4)

et k est l'indice d'itération courant. Notons que nous avons supposé ici que les facteurs $\{q_i(u_i)\}_i$ sont mis à jour à chaque itération, l'un après l'autre, dans un ordre croissant de leur indice. Cependant, l'extension à d'autres ordres de mise à jour est immédiate.

Convergence La procédure décrite en (3.3) est habituellement appelée algorithme *Variational Bayesian Expectation-Maximization* (VBEM) dans la littérature [48]. L'algorithme VBEM est assuré de converger vers un point-selle ou un maximum (local ou global) du problème (3.1) sous la contrainte (3.2).

Liens avec l'algorithme EM L'appellation "VBEM" provient de la relation étroite de la procédure ci-dessus avec le célèbre algorithme EM $[27]^1$. La relation entre les deux algorithmes peut être vue en imposant une contrainte supplémentaire à certains facteurs :

$$q_i(u_i) = \delta(u_i - \hat{u}_i), \qquad (3.5)$$

où $\delta(\cdot)$ représente la distribution de Dirac. Minimiser la divergence de Kullback-Leibler par rapport au facteur $q_i(u_i)$ sous la contrainte (3.5) revient à optimiser la valeur de \hat{u}_i . Ainsi, pour les facteurs $q_i(u_i)$ soumis à (3.5), l'équation de mise à jour (3.3) peut être réécrite comme

$$\hat{u}_{i}^{(k+1)} = \underset{u_{i}}{\arg\max} \left\{ \left\langle \log p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \right\rangle \prod_{\substack{j > i \\ j < i}} q_{j}^{(k)}(u_{j})} \right\}.$$
(3.6)

^{1.} Nous revenons plus en détails sur l'algorithme EM dans le chapitre suivant consacré à l'état de l'art en estimation de directions d'arrivée.

Supposons maintenant que $\mathbf{u}_{\neq i}$ désigne le vecteur composé des u_j pour $j \neq i$. Si un seul élément de la partition $\{u_i\}_{i=1}^{I}$, disons u_j , n'est pas soumis à (3.5), on peut montrer [89] que les équations de mise à jour (3.3)-(3.6) définissent un algorithme EM visant la résolution du problème

$$\hat{\mathbf{u}}_{\neq j} = \operatorname*{arg\,max}_{\mathbf{u}_{\neq j}} \log p(\mathbf{u}_{\neq j} | \mathbf{y}), \tag{3.7}$$

où u_j est considéré comme une variable cachée. L'étape E correspond alors à l'estimation de $q(u_j)$ selon (3.3), *i.e.* $p(u_j|\mathbf{y}, \mathbf{u}_{\neq j})$ dans ce cas particulier, alors que l'étape M évalue l'équation (3.6) pour tout $i \neq j$, *i.e.* maximise l'espérance $\mathbf{E}_{u_j}[\log p(\mathbf{u}, \mathbf{y})]$ par rapport aux paramètres $\hat{\mathbf{u}}_{\neq j}$. Le cas général où plusieurs u_i ne sont pas soumis à (3.5) (par opposition au cas présenté ci-dessus où tous les u_i sauf un sont soumis à (3.5)) ne correspond plus à un algorithme EM car l'étape E ne se réduit plus à l'estimation d'une seule probabilité a posteriori mais approche une probabilité jointe au moyen d'une approximation de champ moyen.

3.3. Approximation de Bethe

L'approximation de Bethe exploite l'hypothèse que la distribution jointe $p(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ admet une factorisation reposant sur une partition en E régions des variables d'intérêt $\{u_i\}_{i=1}^{I}$, soit

$$p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{Z} \prod_{\epsilon=1}^{E} f_{\epsilon}(\mathbf{u}_{\epsilon}), \qquad (3.8)$$

où Z est une constante de normalisation et les facteurs $f_{\epsilon}(\mathbf{u}_{\epsilon})$ dépendent des \mathbf{u}_{ϵ} , sousensembles de $\{u_i\}_{i=1}^{I}$ et des observations \mathbf{y} que l'on omet de noter par souci de simplicité. Sous cette hypothèse, l'approximation de Bethe propose de définir l'espace des contraintes $\mathcal{Q}_{\text{Bethe}}$ comme

$$\mathcal{Q}_{\text{Bethe}} = \left\{ q \middle| q(\mathbf{u}) = \frac{\prod_{\epsilon=1}^{E} q_{\epsilon}(\mathbf{u}_{\epsilon})}{\prod_{i=1}^{I} q_{i}(u_{i})^{(d_{i}-1)}} \right\},\tag{3.9}$$

où d_i est le degré de la variable u_i (*i.e.*, le nombre de facteurs f_{ϵ} dépendant de la variable u_i). L'approximation de Bethe est exacte sous certaines conditions que l'on verra par la suite.

La minimisation (3.1) sous la contrainte (3.9) peut être résolue par des outils classiques d'optimisation. En pratique, elle est souvent effectuée par un outil heuristique bien connu de la littérature, l'algorithme par propagation de croyance (belief propagation).



FIGURE 3.1. – Exemple de graphe factoriel pour la distribution de probabilité jointe $p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{Z} f_1(u_1) f_2(u_2) f_3(u_1, u_2, u_3) f_4(u_3, u_4) f_5(u_3, u_5).$

Algorithme par propagation de croyance Cet algorithme repose sur des "messages" transmis d'un noeud à un autre noeud d'un "graphe factoriel". Commençons par introduire ces deux notions.

Un graphe factoriel [129] est un graphe bipartite exprimant la structure de factorisation de la probabilité jointe (3.8). Il possède un noeud variable (que l'on représente par un cercle) pour chaque variable u_i , un nœud facteur (que l'on représente par un carré) pour chaque fonction f_{ϵ} et une arête reliant le noeud facteur ϵ au noeud variable i si et seulement si f_{ϵ} dépend de u_i . Par exemple, le graphe factoriel correspondant à la distribution jointe

$$p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \frac{1}{Z} f_1(u_1) f_2(u_2) f_3(u_1, u_2, u_3) f_4(u_3, u_4) f_5(u_3, u_5)$$
(3.10)

est représenté sur la figure 3.1.

Deux types de "messages" circulent sur un graphe factoriel. On note $m_{\epsilon \to i}(u_i)$ le message d'un noeud facteur ϵ vers un noeud variable i et $n_{i \to \epsilon}(u_i)$ le message d'un noeud variable i vers un noeud facteur ϵ . Tous deux sont définis comme des fonctions des réalisations possibles² de u_i et sont calculés sur la base des règles itératives suivantes³:

$$n_{i \to \epsilon}(u_i) \triangleq \prod_{\nu \in \mathcal{V}(i) \setminus \epsilon} m_{\nu \to i}(u_i) \tag{3.11}$$

$$m_{\epsilon \to i}(u_i) \triangleq \sum_{\mathbf{u}_{\epsilon} \setminus u_i} f_{\epsilon}(\mathbf{u}_{\epsilon}) \prod_{j \in \mathcal{V}(\epsilon) \setminus i} n_{j \to \epsilon}(u_j)$$
(3.12)

où $\mathcal{V}(i)\setminus\epsilon$ représente l'ensemble des noeuds voisins du noeud *i* privés du noeud ϵ et $\sum_{\mathbf{u}_{\epsilon}\setminus u_i}$ la somme sur l'ensemble des réalisations que peut prendre \mathbf{u}_{ϵ} privé de u_i . Les messages sont initialisés à $m_{\epsilon \to i}(u_i) = n_{i \to \epsilon}(u_i) = 1$, pour tous les noeuds facteurs ϵ , les noeuds variables *i* et les réalisations u_i . Si les messages n'ont pas vraiment de consistence physique, on peut néanmoins tenter une intuition. Ainsi, le message $m_{\epsilon \to i}(u_i)$ peut être interprété comme une information du nœud facteur ϵ au noeud variable *i* sur les

^{2.} Par souci de simplicité, nous utiliserons la même notation pour variable aléatoire et réalisation.

^{3.} L'ordonnancement des règles itératives sera discuté plus loin dans ce chapitre.

probabilités relatives des différentes réalisations de u_i selon la fonction f_{ϵ} . Le message $n_{i\to\epsilon}(u_i)$ du noeud variable *i* vers le noeud facteur f_{ϵ} peut à son tour être interprété comme une information sur les probabilités relatives des différentes réalisations de u_i , basée cette fois sur toutes les informations dont le noeud *i* dispose, excepté f_{ϵ} .

Convergence La mise à jour des messages (3.11)-(3.12) est réalisée de façon séquentielle, jusqu'à obtention d'un potentiel point fixe. Si le graphe factoriel étudié est sans cycle (*i.e.*, il a la structure d'un arbre, comme celui de la figure 3.1), un point fixe est atteint en un nombre fini de mises à jour. En revanche, lorsqu'il présente des cycles, la convergence vers un point fixe n'est pas garantie par la théorie. En pratique, on pourra tout de même espérer l'atteindre en jouant sur deux paramètres : l'ordre dans lequel les messages seront mis à jour selon (3.11)-(3.12), et l'ajout d'une opération de "damping" (amortissement).

Le damping repose sur le calcul d'une combinaison convexe des messages estimés. Formellement, soit $\lambda \in (0, 1]$ et $m_{\epsilon \to i}^{(k)}(u_i)$ le message transmis du noeud ϵ au noeud i à l'itération k, le damping ajuste cette estimée comme

$$m_{\epsilon \to i}^{(k)}(u_i) = \lambda m_{\epsilon \to i}^{(k-1)}(u_i) + (1-\lambda)m_{\epsilon \to i}^{(k)}(u_i).$$
(3.13)

Le facteur d'amortissement λ représente le poids accordé aux estimées obtenues dans les itérations précédentes au regard de l'estimation courante. On note ainsi que pour $\lambda = 0$, on retrouve la propagation de croyance standard. En pratique, λ est souvent (*cf. e.g.*, [19]) choisi proche de 1. Le damping est très couramment combiné à la propagation de croyance afin de diminuer l'effet de la propagation cyclique de l'information. En équilibrant le poids du nouveau calcul effectué à chaque itération et le poids des calculs effectués dans les itérations précédentes, on observe de fait une augmentation des chances de convergence.

Solution du problème (3.1) sous contrainte (3.9) Les points fixes de l'algorithme par propagation de croyance correspondent aux points stationnaires du problème de minimisation (3.1) sous la contrainte d'approximation de Bethe (3.9) [129]. Ainsi, à convergence de l'algorithme (s'il converge), on peut calculer une approximation des distributions marginales a posteriori $q_i(u_i)^*$ en fonction des estimées courantes des messages selon

$$q_i(u_i)^* \propto \prod_{\epsilon \in \mathcal{V}(i)} m_{\epsilon \to i}(u_i).$$
 (3.14)

où $\mathcal{V}(i)$ est l'ensemble des noeuds voisins de i.

L'approximation $q_i(u_i)$ est une estimation exacte de la marginale a posteriori $p(u_i|\mathbf{y})$ lorsque le graphe factoriel est sans cycle. Dans ce cas, l'algorithme par propagation de croyance est bien connu de la littérature, notamment à travers ses particularisations à des cas gaussiens. Ainsi, si le graphe est une chaîne de Markov, il donnera lieu à l'algorithme de Kalman [65] dans le cas de variables continues gaussiennes, ou à l'algorithme BCJR [2] (pour Bahl, Cocke, Jelinek et Raviv, ses inventeurs) dans le cas de variables discrètes. En revanche, lorsque le graphe factoriel présente des cycles, il n'existe aucune garantie de la qualité de l'approximation obtenue. Seuls des résultats empiriques pourront alors permettre une validation de l'approche.

Cas des variables continues Si les variables $\{u_i\}_{i=1}^{I}$ sont continues, la mise à jour des messages (3.11)-(3.12) peut rendre l'implémentation complexe. Lorsque les messages s'écrivent naturellement sous une forme paramétrée ⁴, ce sont leurs paramètres qui sont estimés et "circulent" au travers du graphe factoriel. Mais dans le cas général, on doit "forcer" la paramétrisation. L'opération ne dégrade pas les propriétés de convergence de l'algorithme sur un graphe factoriel sans cycle (*i.e.*, on obtiendra un point fixe en un nombre fini de mises à jour), en revanche l'estimée (3.14) devient à son tour une approximation (et non un calcul exact) de la marginale a posteriori $p(u_i|\mathbf{y})$.

3.4. Particularisation au problème de décomposition parcimonieuse

Les approximations variationnelles bayésiennes ont notamment été considérées pour la recherche de décompositions parcimonieuses. Classiquement, le problème peut se poser de la façon suivante :

$$\mathbf{x}^{\star} = \operatorname*{arg\,min}_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{x}\|_{2}^{2} + \lambda \|\mathbf{x}\|_{0}$$
(3.15)

où **D** est une matrice dite de mesure, de dimension $M \times N$ avec M < N, $\|\mathbf{x}\|_0$ est la pseudo-norme ℓ_0 quantifiant la parcimonie de $\mathbf{x} - i.e.$, comptant le nombre de coefficients non-nuls de $\mathbf{x} - \text{et } \lambda$ est ici un paramètre de régularisation, établissant le compromis entre l'erreur d'attache aux données $\|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2$ et le taux de parcimonie de \mathbf{x} . D'un point de vue bayésien, le problème (3.15) peut être reformulé sous la forme d'un problème d'estimation au sens du maximum a posteriori (MAP) ou du minimum d'erreur quadratique moyenne (MMSE pour minimum mean square error) :

$$\mathbf{x}_{\text{MAP}}^{\star} = \underset{\mathbf{x}}{\arg\max} \ \log p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \tag{3.16}$$

$$\mathbf{x}_{\text{MMSE}}^{\star} = \underset{\tilde{\mathbf{x}}}{\arg\min} \int_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{2}^{2} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}.$$
(3.17)

^{4.} C'est le cas si toutes les variables $\{u_i\}_{i=1}^{I}$ sont gaussiennes par exemple.

Dans les deux cas, l'accès à une estimée de la distribution a posteriori $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ est indispensable.

De nombreuses contributions se sont intéressées à l'estimation bayésienne dans le cadre des décompositions parcimonieuses. Elles se distinguent principalement par le modèle posé a priori sur \mathbf{x} , le problème d'estimation considéré (MAP ou MMSE) et le type d'outils statistiques qu'elles appliquent pour le résoudre (*cf. e.g.*, [36] pour une brève vue d'ensemble). Celles reposant sur des approximations variationnelles bayésiennes exploitent pour la plupart un modèle Bernoulli-gaussien sur les variables d'intérêt \mathbf{x} et un modèle gaussien sur les observations⁵, soit

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{D}\mathbf{x}, \sigma^2 I_M), \qquad (3.18)$$

et $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi} \odot \mathbf{s}$ avec \odot produit terme-à-terme entre $\boldsymbol{\chi}$ variable gaussienne et \mathbf{s} variable de Bernoulli (de réalisations dans $\{0,1\}^N$) :

$$p(\boldsymbol{\chi}) = \prod_{i=1}^{N} p(\chi_i) \text{ où } p(\chi_i) = \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2), \qquad (3.19)$$

$$p(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^{N} p(s_i) \text{ où } p(s_i) = \text{Ber}(\rho).$$
(3.20)

Notons qu'il découle de (3.19)-(3.20) que $p(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i)$ avec

$$p(x_i) = \rho \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2) + (1 - \rho)\delta_0.$$
(3.21)

C'est ce modèle que nous allons considérer dans la suite de ce chapitre pour exposer la particularisation des deux approximations introduites dans les sections précédentes au cas de la recherche d'une décomposition parcimonieuse. Notons que, par simplicité, nous supposerons dans la suite les variables à réalisations dans \mathbb{R} mais l'extension au cas complexe est immédiate.

3.4.1. Approximation de champ moyen

L'approximation de champ moyen peut être appliquée au problème de décompositions parcimonieuses de différentes manières ⁶ (*cf.* par exemple [61] et [36]). Celle ayant donné de bons résultats au regard d'autres algorithmes de la littérature considère la

^{5.} Notons qu'il a été prouvé dans [118, 60] que le problème d'estimation MAP exploitant ce modèle avec $\mu_x = 0$ partage des connections avec le problème (3.15).

^{6.} L'approximation de champ moyen suppose l'indépendance des facteurs variables a posteriori mais rien n'empêche de considérer des sous-ensembles de plusieurs variables. Dans la littérature, cette acception élargie se trouve parfois désignée sous le vocable d'approximation de champ moyen "structurée".

factorisation :

$$q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) = \prod_{i}^{N} q(\chi_{i}, s_{i}).$$
(3.22)

Particularisées à ce cas et pour $\mu_x = 0$, les équations de mise à jour du VBEM (3.3) s'écrivent⁷ : $\forall i \in \{1, ..., N\}$,

$$q(\chi_i, s_i) \propto \exp\left(\sum_{\mathbf{s} \neq i} \int_{\boldsymbol{\chi} \neq i} \prod_{j \neq i} q(\chi_i, s_i) \log p(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \mathbf{y}) d\boldsymbol{\chi}_{\neq i}\right),$$
(3.23)

où $\chi_{\neq i}$ (resp. $\mathbf{s}_{\neq i}$) désigne le vecteur composé des χ_j (resp. s_j) pour $j \neq i$. La dérivation du calcul de marginalisation après explicitation de la distribution $p(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \mathbf{y})$ donne de façon immédiate :

$$q(\chi_i, s_i) = q(\chi_i | s_i) \ q(s_i), \tag{3.24}$$

avec

$$q(\chi_i|s_i) = \mathcal{N}(m(s_i), \Sigma(s_i)), \qquad (3.25)$$

$$q(s_i) \propto \sqrt{\Sigma(s_i)} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{|m(s_i)|^2}{\Sigma(s_i)}\right) p(s_i)$$
 (3.26)

 et

$$\Sigma(s_i) = \frac{\sigma_x^2 \sigma^2}{\sigma^2 + s_i \sigma_x^2 \mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i},\tag{3.27}$$

$$m(s_i) = s_i \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2 + s_i \sigma_x^2 \mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i} \langle \mathbf{r}_i \rangle^T \mathbf{d}_i, \qquad (3.28)$$

$$\langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{y} - \sum_{j \neq i} q(s_j = 1) \ m(s_j = 1) \ \mathbf{d}_j.$$
(3.29)

Les équations (3.24)-(3.29) ont donné naissance à l'algorithme SoBaP (pour soft bayesian pursuit algorithm) [36]. En pratique, la procédure itère la mise à jour des quantités (3.26), (3.83) et (3.28) jusqu'à atteindre un certain critère d'arrêt, par exemple un nombre d'itérations donné ou un seuil minimal posé sur la diminution attendue de la divergence de Kullback-Leibler entre l'estimée courante $q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s})$ et la distribution vraie $p(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}|\mathbf{y})$.

Notons enfin que pour aider à la vitesse de convergence de l'algorithme, une étape d'estimation de la variance de bruit σ^2 est souvent adjointe à la procédure, selon une

^{7.} Ici encore, nous abandonnons les indices d'itérations pour la simplicité de notation.

étape M d'un algorithme EM, i.e.,

$$\sigma^{2} = \operatorname*{arg\,max}_{\sigma^{2}} \left\{ \sum_{\mathbf{s}} \int_{\boldsymbol{\chi}} \prod_{i} q(\chi_{i}, s_{i}) \log p(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \mathbf{y} | \sigma^{2}) \, d\boldsymbol{\chi} \right\},$$
(3.30)

$$= \frac{1}{M} \left\langle \|\mathbf{y} - \sum_{i} s_{i} \chi_{i} \mathbf{d}_{i}\|^{2} \right\rangle_{\prod_{i} q(\chi_{i}, s_{i})}$$
(3.31)

$$= \frac{1}{M} (\mathbf{y}^{T}\mathbf{y} - 2\sum_{i} q(s_{i} = 1)m(s_{i} = 1)\mathbf{y}^{T}\mathbf{d}_{i}$$

+ $\sum_{i} \sum_{j \neq i} q(s_{i} = 1)q(s_{j} = 1)m(s_{i} = 1)m(s_{j} = 1)\mathbf{d}_{i}^{T}\mathbf{d}_{j}$
+ $\sum_{i} q(s_{i} = 1)(\Sigma(s_{i} = 1) + |m(s_{i} = 1)|^{2})\mathbf{d}_{i}^{T}\mathbf{d}_{i}).$ (3.32)

Dans [36], les auteurs considèrent, au lieu des problèmes (3.16)-(3.17), le problème d'estimation MAP marginalisé

$$s_i^{\star} = \arg\max_{\mathbf{x}} p(s_i | \mathbf{y}), \tag{3.33}$$

où

$$p(s_i|\mathbf{y}) = \int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s} \neq i} p(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}|\mathbf{y}) \simeq \int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s} \neq i} \prod_j q(\chi_j, s_j) \simeq q(s_i).$$
(3.34)

On voit alors que l'approximation de champ moyen permet de simplifier la résolution de (3.33), puisqu'une simple opération de seuillage peut ensuite être appliquée : $s_i^* = 1$ si $q(s_i) > T$ et $s_i^* = 0$ sinon, avec T idéalement fixé à 0.5. Une estimation de \mathbf{x}^* peut alors être réalisée par estimation MAP étant donné le support \mathbf{s}^* , soit

$$\mathbf{x}^{\star} = \arg\max_{\mathbf{x}} \log p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{s}^{\star}). \tag{3.35}$$

La solution de ce dernier problème s'exprime comme

$$\mathbf{x}_{\mathbf{s}^{\star}}^{\star} = (\mathbf{D}_{\mathbf{s}^{\star}}^{T} \mathbf{D}_{\mathbf{s}^{\star}} + \Omega)^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{s}^{\star}}^{T} \mathbf{y}$$
(3.36)

et
$$x_i^* = 0$$
 si $s_i^* = 0$, (3.37)

où Ω est une matrice diagonale dont le *i*-ème élément est $\frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}$ et $\mathbf{x}_{\mathbf{s}^\star}^\star$ (resp. $\mathbf{D}_{\mathbf{s}^\star}$) représente \mathbf{x}^\star (resp. \mathbf{D}) restreint au support \mathbf{s}^\star . Lorsque $\sigma_x^2 \to +\infty$, on obtient simplement

$$\mathbf{x}_{\mathbf{s}^{\star}}^{\star} = \mathbf{D}_{\mathbf{s}^{\star}}^{+} \mathbf{y} \tag{3.38}$$

et
$$x_i^* = 0$$
 si $s_i^* = 0$, (3.39)



FIGURE 3.2. – Graphe factoriel attaché au problème de décomposition parcimonieuse.

où $\mathbf{D}_{\mathbf{s}^{\star}}^{+}$ est la pseudo-inverse de $\mathbf{D}_{\mathbf{s}^{\star}}$.

3.4.2. Approximation de Bethe

Le modèle (3.18)-(3.20) implique une factorisation de la distribution jointe comme

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$$
(3.40)

$$=\prod_{\epsilon=1}^{M} p(y_{\epsilon}|\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{N} p(x_i), \qquad (3.41)$$

où

$$p(y_{\epsilon}|\mathbf{x}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y_{\epsilon} - \sum_{i} d_{\epsilon i} x_i|^2\right) \triangleq f_{\epsilon}(\mathbf{x})$$
(3.42)

avec $y_{\epsilon} \epsilon$ -ième élément de \mathbf{y} , $d_{\epsilon i}$ élément de \mathbf{D} situé à la ϵ -ième ligne et *i*-ième colonne, et $p(x_i) = \rho \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2) + (1 - \rho)\delta_0$. Classiquement, le problème de décomposition parcimonieuse fait appel à des matrices de mesure denses, le graphe factoriel associé à (3.41) est donc entièrement connecté – et présente a fortiori des cycles – comme l'illustre la figure 3.2. Ce premier constat nous amène à l'observation que nous ne pourrons espérer qu'une approximation de la distribution a posteriori $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$.

Les noeuds facteurs correspondant aux a priori $p(x_i)$ mis à part (leur cas est assez simple à gérer puisqu'ils sont chacun attachés à un seul noeud variable), deux types de messages vont nous intéresser : les messages notés $m_{\epsilon \to i}(x_i)$, qui vont des noeuds facteurs ϵ vers les noeuds variables *i* sont dits "entrants"; les messages notés $n_{i\to\epsilon}(x_i)$ qui vont des noeuds variables *i* vers les noeuds facteurs ϵ sont dits "sortants". Ils sont indiqués sur la figure 3.2. Le graphe étant entièrement connecté, une transposition immédiate des récurrences (3.11)-(3.12) donne :

$$n_{i \to \epsilon}(x_i) = \prod_{\nu \neq \epsilon} m_{\nu \to i}(x_i) \tag{3.43}$$

$$m_{\epsilon \to i}(x_i) = \sum_{\mathbf{x} \setminus x_i} f_{\epsilon}(\mathbf{x}) \prod_{j \neq i} n_{j \to \epsilon}(x_j)$$
(3.44)

Rexaled belief propagation Comme le modèle (3.18)-(3.20) considéré ne permet pas une expression "naturellement" paramétrée des messages, une première approximation consiste à la "forcer". Ainsi, l'algorithme par propagation de croyance relachée (relaxed belief propagation, notée rBP dans la suite de ce manuscrit) [101] considère une mise à jour des moments d'ordre 1 et 2 des messages, que l'on peut interpréter comme une "gaussianisation" des messages. Par souci d'homogénéisation, nous adoptons les notations proposées dans [78], qui facilitent l'interprétation et l'écriture des récurrences. Ainsi, nous posons

$$n_{i \to \epsilon}(x_i) \propto e^{-\frac{1}{2v_{i \to \epsilon}}x_i^2 + \frac{a_{i \to \epsilon}}{2v_{i \to \epsilon}}x_i}$$
(3.45)

$$m_{\epsilon \to i}(x_i) \propto e^{-\frac{A_{\epsilon \to i}}{2}x_i^2 + B_{\epsilon \to i}x_i},\tag{3.46}$$

de paramètres $a_{i\to\epsilon}$, $v_{i\to\epsilon}$, $A_{\epsilon\to i}$ et $B_{\epsilon\to i}$. En particularisant les règles (3.43)-(3.44), contraintes par (3.45)-(3.46), au modèle (3.18)-(3.20), on obtient la mise à jour suivante des paramètres [68] :

$$A_{\epsilon \to i} = \frac{d_{\epsilon i}^2}{\sigma^2 + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^2 v_{j \to \epsilon}}$$
(3.47)

$$B_{\epsilon \to i} = \frac{d_{\epsilon i}(y_{\epsilon} - \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j} a_{j \to \epsilon})}{\sigma^2 + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^2 v_{j \to \epsilon}}$$
(3.48)

pour les paramètres attachés à la mise à jour des messages entrants $m_{\epsilon \to i}(x_i)$, et

$$a_{i \to \epsilon} = g_1 \left(\frac{\sum_{\nu \neq \epsilon} B_{\nu \to i}}{\sum_{\nu \neq \epsilon} A_{\nu \to i}}, \frac{1}{\sum_{\nu \neq \epsilon} A_{\nu \to i}} \right)$$
(3.49)

$$v_{i \to \epsilon} = g_2 \left(\frac{\sum_{\nu \neq \epsilon} B_{\nu \to i}}{\sum_{\nu \neq \epsilon} A_{\nu \to i}}, \frac{1}{\sum_{\nu \neq \epsilon} A_{\nu \to i}} \right)$$
(3.50)

pour les paramètres attachés à la mise à jour des messages sortants $n_{i\to\epsilon}(x_i)$ avec

$$g_1(a,v) \triangleq \int x_i \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}(x_i - a)^2} p(x_i) dx_i, \qquad (3.51)$$

$$g_2(a,v) \triangleq \int x_i^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}(x_i-a)^2} p(x_i) dx_i - g_1^2(a,v), \qquad (3.52)$$

$$= v \frac{\partial g_1}{\partial a}(a, v). \tag{3.53}$$

Particularisées au modèle Bernoulli-gaussien (3.21), ces deux fonctions s'écrivent

$$g_1(a,v) = \rho \frac{\sqrt{2\pi\gamma}}{Z_x} \exp\left(-\frac{|\mu_x - a|^2}{2(\sigma_x^2 + v)}\right) \alpha, \qquad (3.54)$$

$$g_2(a,v) = \rho \frac{\sqrt{2\pi\gamma}}{Z_x} \exp\left(-\frac{|\mu_x - a|^2}{2(\sigma_x^2 + v)}\right) (\gamma + |\alpha|^2) - g_1(a,v)^2,$$
(3.55)

avec

$$Z_x = \rho \sqrt{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{|\mu_x - a|^2}{2(\sigma_x^2 + v)}\right) + (1 - \rho) \exp\left(-\frac{|a|^2}{2v}\right),$$
 (3.56)

$$\alpha = \frac{a\sigma_x^2 + \mu_x v}{v + \sigma_x^2}, \qquad \gamma = \frac{v\sigma_x^2}{v + \sigma_x^2}.$$
(3.57)

Classiquement, deux ordres de mise à jour des messages sont considérés pour rBP : la première approche consiste à mettre à jour l'ensemble des paramètres $a_{i\to\epsilon}$, $v_{i\to\epsilon}$ d'une part, et $A_{\epsilon\to i}$ et $B_{\epsilon\to i}$ d'autre part, en parallèle, la seconde repose sur une mise à jour séquentielle aléatoire, où l'on prend un seul indice i et l'on met à jour tous les messages qui lui correspondent.

A convergence de l'algorithme (s'il converge), l'approximation des distributions marginales a posteriori $q_i(u_i)^*$ est alors donnée par

$$q_i(x_i)^* = \mathcal{N}(a_i, v_i) \tag{3.58}$$

avec

$$a_i = g_1 \left(\frac{\sum_{\nu} B_{\nu \to i}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}} \right), \tag{3.59}$$

$$v_{i} = g_{2} \left(\frac{\sum_{\nu} B_{\nu \to i}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}} \right).$$
(3.60)

De par la gaussiannisation (3.58), le résultat des problèmes d'estimation MAP (3.16) et MMSE (3.17) est alors immédiat : on obtient $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$

$$(x_{\text{MAP}}^{\star})_i = (x_{\text{MMSE}}^{\star})_i = a_i.$$
 (3.61)

(Swept) approximate message passing La paramétrisation "forcée" des messages peut être vue comme une première relaxation de la procédure d'optimisation initiale de propagation de croyance. Cependant, la forte connectivité du graphe factoriel (*cf.* Fig. 3.2) implique la transmission de 2*MN* messages à chaque iteration. Pour des problèmes de grandes dimensions, la procédure peut vite s'avérer lourde en temps de calculs. L'approche par "propagation de message approchée" (*approximate message passing* [31], notée AMP dans la suite du manuscrit) et, par extension, l'approche par propagation de message approchée "balayée" (*swept approximate message passing* [78], notée SwAMP dans la suite du manuscrit) proposent d'aller plus loin encore dans la simplification des messages transmis au travers du graphe. Nous la détaillons ci-après.

Partons d'une hypothèse de mise à jour des messages en parallèle (*i.e.*, l'ensemble des messages entrants, puis l'ensemble des messages sortants).

A l'itération courante k, on a

$$a_{i \to \epsilon}^{(k+1)} = g_1 \left(\frac{\sum_{\nu \neq \epsilon} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu \neq \epsilon} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu \neq \epsilon} A_{\nu \to i}^{(k)}} \right)$$
(3.62)

$$v_{i \to \epsilon}^{(k+1)} = g_2 \left(\frac{\sum_{\nu \neq \epsilon} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu \neq \epsilon} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu \neq \epsilon} A_{\nu \to i}^{(k)}} \right)$$
(3.63)

$$A_{\epsilon \to i}^{(k+1)} = \frac{d_{\epsilon i}^2}{\sigma^2 + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^2 v_{j \to \epsilon}^{(k+1)}}$$
(3.64)

$$B_{\epsilon \to i}^{(k+1)} = \frac{d_{\epsilon i}(y_{\epsilon} - \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j} a_{j \to \epsilon}^{(k+1)})}{\sigma^2 + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^2 v_{j \to \epsilon}^{(k+1)}}.$$
(3.65)

Pour la suite des calculs, nous définissons également

$$a_i^{(k+1)} = g_1 \left(\frac{\sum_{\nu} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}} \right),$$
(3.66)

$$v_i^{(k+1)} = g_2 \left(\frac{\sum_{\nu} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}} \right),$$
(3.67)

les estimées courantes des paramètres des marginales (3.58).

Supposant que les éléments de la matrice **D** sont d'amplitude $\mathcal{O}(1\sqrt{N})$, pour N grand on peut poser $\frac{1}{\sum_{\nu \neq \epsilon} A_{\nu \to i}^{(k)}} \sim \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}$. Il vient alors

$$a_{i \to \epsilon}^{(k+1)} \sim g_1 \bigg(\frac{\sum_{\nu \neq \epsilon} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}} \bigg),$$
(3.68)

puis, par développement de Taylor-Young à l'ordre 1 au point $\left(\frac{\sum_{\nu} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}\right)$,

$$a_{i \to \epsilon}^{(k+1)} \sim g_1 \left(\frac{\sum_{\nu \neq \epsilon} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}} \right)$$
(3.69)

$$\sim a_{i}^{(k+1)} - \left(\frac{B_{\epsilon \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}\right) \frac{\partial g_{1}}{\partial a} \left(\frac{\sum_{\nu} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}\right) + o\left(\frac{B_{\epsilon \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}\right)$$
(3.70)

$$\sim a_i^{(k+1)} - B_{\epsilon \to i}^{(k)} g_2 \left(\frac{\sum_{\nu} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}} \right) + o \left(\frac{B_{\epsilon \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}} \right)$$
(3.71)

$$\sim a_i^{(k+1)} - B_{\epsilon \to i}^{(k)} v_i^{(k+1)} + o\left(\frac{B_{\epsilon \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}\right).$$
(3.72)

Au même ordre d'approximation, on a immédiatement que

$$v_{i \to \epsilon}^{(k+1)} \sim g_2 \bigg(\frac{\sum_{\nu \neq \epsilon} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}, \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}} \bigg),$$
(3.73)

$$\sim v_i^{(k+1)} + o\left(\frac{B_{\epsilon \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}\right).$$
 (3.74)

Ces approximations impactent les estimées de $A_{\epsilon \to i}^{(k+1)}$ et $B_{\epsilon \to i}^{(k+1)}$: à l'ordre $o(d_{\epsilon i}^2)$, on obtient

$$A_{\epsilon \to i}^{(k+1)} = \frac{d_{\epsilon i}^2}{\sigma^2 + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^2 v_{j \to \epsilon}^{(k+1)}}$$
(3.75)

$$\sim \frac{d_{\epsilon i}^2}{\sigma^2 + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^2 v_j^{(k+1)}} \tag{3.76}$$

$$\sim \frac{d_{\epsilon i}^2}{\sigma^2 + \sum_j d_{\epsilon j}^2 v_j^{(k+1)}} \left(1 + \frac{d_{\epsilon i}^2 v_i^{(k+1)}}{\sigma^2 + \sum_j d_{\epsilon j}^2 v_j^{(k+1)}} + o(d_{\epsilon i}^2) \right)$$
(3.77)

$$\sim \frac{d_{\epsilon i}^2}{\sigma^2 + \sum_j d_{\epsilon j}^2 v_j^{(k+1)}} + o(d_{\epsilon i}^2), \qquad (3.78)$$

$$B_{\epsilon \to i}^{(k+1)} = \frac{d_{\epsilon i}(y_{\epsilon} - \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j} a_{j \to \epsilon}^{(k+1)})}{\sigma^2 + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^2 v_{j \to \epsilon}^{(k+1)}}$$
(3.79)

$$= \frac{d_{\epsilon i}}{\sigma^2 + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^2 v_{j \rightarrow \epsilon}^{(k+1)}} (y_{\epsilon} - \sum_j d_{\epsilon j} a_{j \rightarrow \epsilon}^{(k+1)} + d_{\epsilon i} a_{i \rightarrow \epsilon}^{(k+1)})$$
(3.80)

$$= \frac{d_{\epsilon i}}{\sigma^{2} + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^{2} v_{j \rightarrow \epsilon}^{(k+1)}} (y_{\epsilon} - \sum_{j} d_{\epsilon j} a_{j \rightarrow \epsilon}^{(k+1)}) + \frac{d_{\epsilon i}^{2}}{\sigma^{2} + \sum_{j \neq i} d_{\epsilon j}^{2} v_{j \rightarrow \epsilon}^{(k+1)}} a_{i \rightarrow \epsilon}^{(k+1)}$$

$$\sim \frac{d_{\epsilon i}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\epsilon j}^{2} v_{j}^{(k+1)}} (y_{\epsilon} - \sum_{j} d_{\epsilon j} a_{j \rightarrow \epsilon}^{(k+1)})$$

$$+ \frac{d_{\epsilon i}^{2}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\epsilon j}^{2} v_{j}^{(k+1)}} (a_{i}^{(k+1)} - B_{\epsilon \rightarrow i}^{(k)} v_{i}^{(k+1)}) + o(d_{\epsilon i}^{2}) \qquad (3.81)$$

$$\approx \frac{d_{\epsilon i}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\epsilon j}^{2} v_{j}^{(k+1)}} (u_{\epsilon j} - \sum_{j} d_{\epsilon j} a_{\epsilon j}^{(k+1)}) + \frac{d_{\epsilon i}^{2}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\epsilon j}^{2} v_{j}^{(k+1)}} (u_{\epsilon j} - \sum_{j} d_{\epsilon j} a_{\epsilon j}^{(k+1)}) + \frac{d_{\epsilon i}^{2}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\epsilon j}^{2} v_{j}^{(k+1)}} + o(d_{\epsilon j}^{2})$$

$$\sim \frac{d_{\epsilon i}}{\sigma^2 + \sum_j d_{\epsilon j}^2 v_j^{(k+1)}} (y_{\epsilon} - \sum_j d_{\epsilon j} a_{j \to \epsilon}^{(k+1)}) + \frac{d_{\epsilon i}^2}{\sigma^2 + \sum_j d_{\epsilon j}^2 v_j^{(k+1)}} a_i^{(k+1)} + o(d_{\epsilon i}^2).$$
(3.82)

Les algorithmes AMP [31] et SwAMP [78] diffèrent principalement de par l'ordonnancement des mises à jour ci-dessus. Pour bien les décrire, on procède d'abord à la définition de nouvelles variables. On pose

$$\Sigma_{i}^{(k+1)} \triangleq \frac{1}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}} \sim \left[\sum_{\nu} \frac{d_{\nu i}^{2}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\nu j}^{2} v_{j}^{(k)}} \right]^{-1},$$
(3.83)

$$R_i^{(k+1)} \triangleq \frac{\sum_{\nu} B_{\nu \to i}^{(k)}}{\sum_{\nu} A_{\nu \to i}^{(k)}}$$
(3.84)

$$\sim \Sigma_{i}^{(k)} \left[\sum_{\nu} \frac{d_{\nu i}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\nu j}^{2} v_{j}^{(k)}} (y_{\nu} - \sum_{j} d_{\nu j} a_{j \to \nu}^{(k)}) + \sum_{\nu} \frac{d_{\nu i}^{2}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\nu j}^{2} v_{j}^{(k)}} a_{i}^{(k)} \right]$$
(3.85)

$$\sim \Sigma_i^{(k)} \left[\sum_{\nu} \frac{d_{\nu i}}{\sigma^2 + \sum_j d_{\nu j}^2 v_j^{(k)}} (y_\nu - \sum_j d_{\nu j} a_{j \to \nu}^{(k)}) + (\Sigma_i^{(k)})^{-1} a_i^{(k)} \right]$$
(3.86)

$$\sim a_i^{(k)} + \Sigma_i^{(k)} \bigg[\sum_{\nu} \frac{d_{\nu i}}{\sigma^2 + \sum_j d_{\nu j}^2 v_j^{(k)}} (y_\nu - \sum_j d_{\nu j} a_{j \to \nu}^{(k)}) \bigg].$$
(3.87)

Les estimées courantes des paramètres des marginales (3.66)-(3.67) s'écrivent alors

$$a_i^{(k+1)} = g_1 \left(R_i^{(k+1)}, \Sigma_i^{(k+1)} \right), \tag{3.88}$$

$$v_i^{(k+1)} = g_2\left(R_i^{(k+1)}, \Sigma_i^{(k+1)}\right),\tag{3.89}$$

et permettent à leur tour de définir

$$V_{\epsilon}^{(k+1)} \triangleq \sum_{i} d_{\epsilon i}^2 v_i^{(k+1)} \tag{3.90}$$

$$\omega_{\epsilon}^{(k+1)} \triangleq \sum_{i}^{k} d_{\epsilon i} a_{i \to \epsilon}^{(k+1)} \tag{3.91}$$

$$\sim \sum_{i} d_{\epsilon i} (a_i^{(k+1)} - B_{\epsilon \to i}^{(k)} v_i^{(k+1)})$$
(3.92)

$$\sim \sum_{i} d_{\epsilon i} a_{i}^{(k+1)} - \sum_{i} d_{\epsilon i} v_{i}^{(k+1)} \left(\frac{d_{\epsilon i}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\epsilon j}^{2} v_{j}^{(k)}} (y_{\epsilon} - \sum_{j} d_{\epsilon j} a_{j \to \epsilon}^{(k)}) + \frac{d_{\epsilon i}^{2}}{\sigma^{2} + \sum_{j} d_{\epsilon j}^{2} v_{j}^{(k)}} a_{i}^{(k)} \right)$$

$$\sim \sum_{i} d_{\epsilon i} a_i^{(k+1)} - \frac{(y_{\epsilon} - \sum_j d_{\epsilon j} a_{j \to \epsilon}^{(\kappa)})}{\sigma^2 + \sum_j d_{\epsilon j}^2 v_j^{(k)}} \sum_{i} d_{\epsilon i}^2 v_i^{(k+1)} + o(d_{\epsilon i}^2)$$

$$(3.93)$$

$$\sim \sum_{i} d_{\epsilon i} a_{i}^{(k+1)} - \frac{(y_{\epsilon} - \omega_{\epsilon}^{(k)})}{\sigma^{2} + V_{\epsilon}^{(k)}} V_{\epsilon}^{(k+1)} + o(d_{\epsilon i}^{2}), \qquad (3.94)$$

où l'on a fait apparaître les dernières notations introduites.

L'algorithme AMP procède par mise à jour parallèle des quantités (3.83)-(3.94). Plus exactement, une itération élémentaire d'AMP est constituée de la mise à jour de l'ensemble des $\{R_i^{(k+1)}, \Sigma_i^{(k+1)}\}_i$ puis des $\{a_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)}\}_i$ et ensuite des $\{\omega_{\epsilon}^{(k+1)}, V_{\epsilon}^{(k+1)}\}_{\epsilon}$. En cela, AMP conserve la "philosophie" de l'approche rBP.

Dans [5, 30], des résultats théoriques ont été dérivés pour quantifier les performances d'AMP dans le cas où les éléments de la matrice \mathbf{D} sont indépendamment et identiquement distribués (*i.i.d.*) ou *i.i.d.* par bloc. De fait, AMP présente une bonne convergence pour des matrices *i.i.d.* de moyenne nulle. En revanche, dès lors que l'on s'éloigne de ces scénarios simples, ses performances théoriques chutent drastiquement. Pour des matrices *i.i.d.* ayant une petite moyenne positive par exemple, l'algorithme peut diverger rapidement, entraînant de mauvais résultats de reconstruction [14]. Dans [14], les auteurs incriminent la structure d'AMP : la mise à jour en parallèle des quantités (3.83)-(3.94) ne permettrait pas la généralisation de l'algorithme à des cas plus complexes.

Pour remédier à ce problème de convergence, plusieurs stratégies peuvent être envisagées. Une première stratégie est de recourir à une opération de damping comme celle évoquée précédemment dans le cas général (3.13), que l'on appliquerait cette fois-ci sur les paramètres, et notamment sur (3.88), sur lequel repose le résultat final à convergence (3.61). Cette option est notamment envisagée dans [70]. En pratique néanmoins, comme nous l'avons mentionné précédemment, le facteur d'amortissement doit être en général choisi très élevé, ceci implique un coût prohibitif en termes de nombre d'itérations jusqu'à la convergence. En outre, la manière de déterminer un facteur d'amortissement optimal pour assurer la convergence reste très empirique.

L'algorithme SwAMP [78] se propose comme stratégie alternative. L'idée générale est

de réaliser quelques unes des mises à jour (3.83)-(3.94) séquentiellement afin d'éviter autant que possible une divergence de la procédure itérative. L'approche est empirique et revendiquée comme telle par les auteurs : aucun résultat théorique n'étaye leur contribution, en revanche, les expériences menées montrent des propriétés de convergence intéressantes. L'observation clé dans la dérivation de SwAMP est que l'équation (3.94) fait apparaître naturellement différents indices de temps : tandis que les quantités $a_i^{(k+1)}$ et $v_i^{(k+1)}$ sont les "nouveaux estimés", la fraction $\frac{(y_e - \omega_e^{(k)})}{\sigma^2 + V_e^{(k)}}$ repose sur les estimées à l'itération précédente. Cela implique que si $\sum_i d_{ei}a_i^{(k+1)}$ et $V_e^{(k+1)}$ doivent être recalculés au fur et à mesure que les quantités dépendant de l'indice *i* sont mises à jour, le terme $\frac{(y_e - \omega_e^{(k)})}{\sigma^2 + V_e^{(k)}}$ ne doit pas l'être. La procédure résultante est résumée dans le pseudo-code 1 ci-contre avec $g_e(\omega, V) = \frac{(y_e - \omega)}{\sigma^2 + V_e}$.

Pseudo-code 1 Algorithme GSwAMP

Entrées : y, **D**, σ^2 , k_{max} **Initialisation :** $\{a_i^{(0)}, v_i^{(0)}\}_{i \in \{1, \dots, N\}}, \{\omega_{\epsilon}^{(0;N+1)}, V_{\epsilon}^{(0;N+1)}\}_{\epsilon \in \{1, \dots, M\}}, k = 0$ 1: while $k < k_{max}$ do for $\epsilon = 1 \dots M$ do $V_{\epsilon}^{(k+1;1)} = \sum_{i} d_{\epsilon i}^{2} v_{i}^{(k)}$ $\omega_{\epsilon}^{(k+1;1)} = \sum_{i} d_{\epsilon i} a_{i}^{(t)} - V_{\epsilon}^{(k+1;1)} g_{\epsilon} (\omega_{\epsilon}^{(k;N+1)}, V_{\epsilon}^{(k;N+1)})$ 2: 3: 4: end for 5:6: $\mathbf{p} = \text{permute}([1, 2, \dots N])$ for $j = 1 \dots N$ do 7: $i = p_i$ 8: $\Sigma_i^{(k+1)} = \left[\sum_{\epsilon} d_{\epsilon i}^2 \left(-\frac{\partial g_{\epsilon}}{\partial \omega} (\omega_{\epsilon}^{(k+1;j)}, V_{\epsilon}^{(k+1;j)}) \right) \right]^{-1}$ 9: $R_{i}^{(k+1)} = a_{i}^{(k)} + \Sigma_{i}^{(k+1)} \left[\sum_{\epsilon} d_{\epsilon i} g_{\epsilon}(\omega_{\epsilon}^{(k+1;1)}, V_{\epsilon}^{(k+1;1)}) \right]$ 10: $a_i^{(k+1)} = g_1(R_i^{(k+1)}, \Sigma_i^{(k+1)})$ $v_i^{(k+1)} = g_2(R_i^{(k+1)}, \Sigma_i^{(k+1)})$ 11: 12: $\begin{aligned} \mathbf{for} \ \epsilon &= 1 \dots M \ \mathbf{do} \\ V_{\epsilon}^{(k+1;j+1)} &= V_{\epsilon}^{(k+1;j)} + d_{\epsilon i}^2 (v_i^{(k+1)} - v_i^{(k)}) \\ \omega_{\epsilon}^{(k+1;j+1)} &= \omega_{\epsilon}^{(k+1;j)} + d_{\epsilon i} (a_i^{(k+1)} - a_i^{(k)}) \\ &- g_{\epsilon} (\omega_{\epsilon}^{(k+1;1)}, V_{\epsilon}^{(k+1;1)}) . (V_{\epsilon}^{(k+1;j+1)} - V_{\epsilon}^{(k+1;j)}) \end{aligned}$ 13:14:15:end for 16:end for 17:k = k + 118:19: end while Sorties : $\{a_i^{(k_{max})}\}_i$

Generalized (swept) approximate message passing Au delà du modèle d'observation gaussien (3.42), les procédures (Sw)AMP ont été étendues au modèle linéaire généralisé (GLM pour *generalized linear model* [29]). Ce modèle suppose les trois éléments suivants :

- la distribution de probabilité $p(y_{\epsilon}|\mathbf{x})$ appartient à la famille exponentielle,
- il existe un prédicteur linéaire, ici

$$z_{\epsilon} \triangleq \sum_{i} d_{\epsilon i} x_{i},$$

— et une fonction dite "de lien" que nous noterons $h_{\epsilon}, \forall \epsilon \in \{1, \ldots, M\}$, tels que

$$\mathbf{E}[y_{\epsilon}|\mathbf{x}] = h_{\epsilon}(z_{\epsilon}).$$

Considérant un tel modèle, les expressions des mises à jour restent sensiblement les mêmes, nonobstant deux modifications :

— le terme $\frac{(y_{\epsilon}-\omega_{\epsilon}^{(k)})}{\sigma^2+V_{\epsilon}^{(k)}}$ dans (3.87) et (3.94) est remplacé par $g_{\epsilon}(\omega_{\epsilon}^{(k)}, V_{\epsilon}^{(k)})$, fonction dépendant de $p(y_{\epsilon}|\mathbf{x})$ selon

$$g_{\epsilon}(\omega, V) \triangleq \int_{z_{\epsilon}} \left(\frac{z_{\epsilon} - \omega}{V}\right) e^{-\frac{1}{V}|z_{\epsilon} - \omega|^2} p(y_{\epsilon}|\mathbf{x}) dz_{\epsilon}, \qquad (3.95)$$

résultant en

$$R_i^{(k+1)} = a_i^{(k)} + \Sigma_i^{(k)} \left[\sum_{\nu} d_{\nu i} g_{\epsilon}(\omega_{\epsilon}^{(k)}, V_{\epsilon}^{(k)}) \right],$$
(3.96)

$$\omega_{\epsilon}^{(k+1)} = \sum_{i} d_{\epsilon i} a_{i}^{(k+1)} - g_{\epsilon}(\omega_{\epsilon}^{(k)}, V_{\epsilon}^{(k)}) V_{\epsilon}^{(k+1)}, \qquad (3.97)$$

— le terme
$$\frac{1}{\sigma^2 + \sum_j d_{\nu_j}^2 v_j^{(k)}}$$
 dans (3.83) est remplacé par $-\frac{\partial g_{\epsilon}}{\partial \omega}(\omega_{\epsilon}^{(k)}, V_{\epsilon}^{(k)})$, résultant en

$$\Sigma_i^{(k+1)} = \left[\sum_{\nu} d_{\nu i}^2 \left(-\frac{\partial g_{\epsilon}}{\partial \omega} (\omega_{\epsilon}^{(k)}, V_{\epsilon}^{(k)}) \right) \right]^{-1}.$$
 (3.98)

Ces extensions ont notamment donné naissance aux algorithmes GAMP (pour generalized AMP [102]) et GSwAMP (pour generalized SwAMP [78]) dont nous donnons le pseudo-code ci-dessus. Nous verrons des particularisations de ces approches dans les deux chapitres suivants.

Vector approximate message passing Notons enfin que pour pallier au problème de convergence d'AMP, une alternative a été proposée à SwAMP : l'algorithme VAMP (pour *vector approximate message passing* [103]). Si le constat à la base de la dérivation des deux approches est le même (la parallélisation des mises à jour des messages conduit à des

problèmes de convergence), VAMP propose de conserver certains liens de dépendances entre les variables en considérant des noeuds variables vectoriels plutôt que scalaires. Confrontée à des données simulées, l'approche s'avère efficace [103]. A l'image de GAMP et GSwAMP, elle a été étendue récemment aux modèles linéaires généralisés [115].

3.5. Conclusions

S'intéressant à l'estimation de distribution a posteriori, les algorithmes variationnels bayésiens présentent une bonne alternative aux algorithmes d'échantillonnage, offrant un bon compromis entre complexité calculatoire et approximation maîtrisée. En particulier, les approximations de champ moyen et de Bethe constituent des approches éprouvées et bien connues de la littérature. Si l'algorithme VBEM, procédure itérative permettant le calcul de l'approximation de champ moyen, présente des garanties de convergence, il n'en est pas de même pour les approches par propagation de message s'attachant à résoudre l'approximation de Bethe. Dérivé dans le contexte particulier de l'acquisition compressée, l'algorithme SwAMP qui a retenu notre attention présente néanmoins des résultats empiriques prometteurs. Il semble en effet plus robuste à l'utilisation de matrices plus complexes que seulement *i.i.d.* au contraire de l'antérieur AMP, et présente, comme lui, des facilités de généralisation à des modèles d'observation autres que linéaires.

VBEM et SwAMP offrent des pistes intéressantes au regard de notre problème d'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant. Nous souhaitons en effet un cadre probabiliste permettant d'intégrer facilement les statistiques des fluctuations du milieu ainsi qu'une procédure présentant de bonnes propriétés de convergence en présence de matrices fortement corrélées (les dictionnaires de directions d'arrivée le sont malheureusement). Dans le chapitre 5, nous proposons ainsi de nous pencher sur des particularisations de ces deux approches.

4. Estimation de directions d'arrivée : un état de l'art

Sommaire

4.1	Estim	ation de directions d'arrivée en milieu non fluctuant	64
	4.1.1	Modèle d'observation	64
	4.1.2	Formation de voies	67
	4.1.3	Approches basées sous-espace	68
	4.1.4	Approches paramétriques	70
	4.1.5	Approches parcimonieuses	76
4.2	Estim	ation de directions d'arrivée en milieu fluctuant	78
	4.2.1	Modélisation par marginalisation de loi de probabilité	79
	4.2.2	Modélisation par bruit multiplicatif	80
	4.2.3	Modélisation par bruit additif	82
	4.2.4	Algorithmes de reconstruction de phase	83
		4.2.4.1 Approches déterministes	84
		4.2.4.2 Approches bayésiennes	84
4.3	Concl	usions	89

Commun à une large communauté en traitement du signal (acoustique sous-marine et aérienne, RADAR, télécommunications, biomédical...), le problème d'estimation de directions d'arrivée (DOA pour *direction-of-arrival*) jouit d'une littérature conséquente d'algorithmes exploitant différentes approximations sur la nature du signal mesuré ou du bruit polluant la mesure. Ce chapitre résume les principales contributions dans ce domaine.

Guidés par notre objectif, nous avons divisé notre étude bibliographique en deux grandes sections.

La section 4.1 fait le point sur les approches supposant un milieu de propagation connu et stable. En préambule, nous rappelons le modèle d'observation exploité classiquement avant de dresser une liste (non-exhaustive) des principaux algorithmes du domaine. La section 4.2 s'attache à recenser les procédures se proposant de résoudre le problème d'estimation de DOA dans des contextes de milieux de propagation entachés d'incertitudes. Nous verrons que plusieurs modèles d'observation peuvent être considérés, chacun posant des hypothèses sur les éventuelles perturbations subies par le milieu de propagation. Nous terminerons ce chapitre en mentionnant les approches de reconstruction de phase comme procédures envisageables dans certains cas de fluctuations.

4.1. Estimation de directions d'arrivée en milieu non fluctuant

Les algorithmes présentés ici permettent l'estimation des directions d'arrivée à partir de la mesure passive effectuée par une antenne de capteurs mesurant les variations de pression générées par la propagation d'une onde depuis sa source jusqu'à l'antenne réceptrice. Avant de procéder à l'inversion acoustique de mesure et par conséquent l'estimation des directions d'arrivée, il convient de définir le modèle génératif à partir duquel nous allons effectuer cette inversion.

4.1.1. Modèle d'observation

Le modèle d'onde plane est le plus généralement considéré dans le problème d'estimation de directions d'arrivée à partir d'une antenne, *i.e.*, d'un réseau de capteurs. C'est celui que nous retiendrons et détaillerons dans ce manuscrit 1 .

Onde plane L'onde plane est une solution à l'équation de propagation (2.1) sous hypothèse de source lointaine. Elle s'écrit :

$$p(\mathbf{r},t) = A \exp\left[i\omega\left(t - \left(\frac{\mathbf{k}}{\omega}\right)^T \mathbf{r}\right)\right]$$
(4.1)

où r est un vecteur de coordonnées spatiales et k est appelé vecteur d'onde, orienté dans la direction de propagation de l'onde et de norme égale au nombre d'onde désigné par kprécédemment. Ainsi, dans un repère cartésien (x, y),

$$\boldsymbol{k} = -\frac{\omega}{c} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$
(4.2)

où θ est l'angle d'incidence de l'onde, c la célérité (ici constante) et ω la pulsation de l'onde propagée.

^{1.} Notons cependant que la plupart des méthodes présentées peuvent être généralisées à d'autres modèles d'ondes (par exemple sphériques).

Signal reçu sur une antenne Considérons maintenant une antenne de M capteurs et supposons P ondes planes se propageant selon l'équation (2.1). On peut écrire le signal temporel reçu au m-ième capteur de coordonnées spatiales r_m comme

$$p(\boldsymbol{r}_m, t) = \sum_{p=1}^{P} A_p \exp\left[i\omega \left(t - \left(\frac{\boldsymbol{k}_p}{\omega}\right)^T \boldsymbol{r}_m\right)\right] + \epsilon_m(t)$$
(4.3)

où \boldsymbol{k}_p est le vecteur d'onde attaché à la *p*-ième onde incidente et $\epsilon_m(t)$ un bruit additif. Appliquant une transformée de Fourier à ce signal mesuré, le retard $\left(\frac{\boldsymbol{k}_p}{\omega}\right)^T \boldsymbol{r}_m$ devient le déphasage $\exp(-i\boldsymbol{k}_p^T\boldsymbol{r}_m)$ et le signal reçu sur l'antenne est décrit par le vecteur

$$\mathbf{y}(\omega) \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{F}(p(\mathbf{r}_1, t)) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(p(\mathbf{r}_M, t)) \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^{P} \mathbf{d}(\theta_p) \ x_p(\omega) + \mathbf{n}(\omega), \tag{4.4}$$

où \mathcal{F} représente l'opérateur de transformée de Fourier, $\mathbf{d}(\theta_p)$ contient le déphasage attaché à la *p*-ième onde incidente évalué en chaque capteur, *i.e.*,

$$\mathbf{d}(\theta_p) = \begin{bmatrix} e^{-ik_p^T \mathbf{r}_1} \\ \vdots \\ e^{-ik_p^T \mathbf{r}_M} \end{bmatrix}, \qquad (4.5)$$

tandis $x_p(\omega)$ contient son amplitude complexe².

Dans la littérature, $\mathbf{d}(\theta_p)$ est appelé vecteur de "pointage" (*steering vector*). Si l'antenne considérée est linéaire uniforme et échantillonnant régulièrement l'axe Oy de ses Mcapteurs, on peut poser $\mathbf{r}_m = (0, (m-1)\Delta)$ et

$$\mathbf{d}(\theta_p) = \begin{bmatrix} 1\\ \vdots\\ e^{i\frac{\omega}{c}(M-1)\Delta\sin\theta_p} \end{bmatrix},\tag{4.6}$$

où l'on a utilisé l'expression (4.2).

Le bruit additif \mathbf{n} est classiquement considéré comme blanc gaussien dans la littérature. L'hypothèse sous-jacente est qu'il est le résultat d'une infinité de phénomènes aléatoires produisant un signal non-informatif dans nos mesures. Appliquant le théorème central limite, la distribution de ce bruit, somme de nombreux phénomènes aléatoires, est une distribution normale avec une moyenne considérée nulle. Il est supposé complexe, de

^{2.} Rappelons ici que le retard $\left(\frac{k_p}{\omega}\right)^T r_m$ ne peut être estimé que "relativement" à un capteur de référence, les amplitudes seront donc complexes car contenant la différence au retard "absolu".

sorte que ses composantes sont distribuées selon une loi circulaire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 .

Modèle exploité Le problème d'estimation de DOA s'attache à estimer le nombre P et les angles θ_p des ondes incidentes. En l'absence d'a priori, la plupart des approches de la littérature propose des procédures de recherche dans un dictionnaire d'angles (plus ou moins) finement discrétisé. Notant $N \ge P$ la dimension de ce dictionnaire, on pose

$$\mathbf{D} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{d}(\theta_1) & \cdots & \mathbf{d}(\theta_N) \end{bmatrix}.$$
(4.7)

Dans la majorité des approches d'estimation de DOA, la discrétisation des angles θ_p dans **D** est fixée et connue³, c'est pourquoi nous omettons de noter explicitement sa dépendance. Cependant, il ne faudra pas l'oublier, notamment lorsque nous présenterons les méthodes paramétriques.

Cette notation en tête, l'équation (4.4) s'écrit alors sous la forme matricielle

$$\mathbf{y}(\omega) = \mathbf{D}\mathbf{x}(\omega) + \mathbf{n}(\omega) \tag{4.8}$$

où $\mathbf{x}(\omega) \triangleq [x_1(\omega), \dots, x_N(\omega)]^T$ contient des éléments nuls ou très faibles pour les directions ne correspondant à aucune onde incidente.

Partant du modèle (4.8), de nombreuses méthodes d'estimation des directions d'arrivée reposent sur un calcul empirique de la covariance des signaux $\mathbf{y}(\omega)$ et $\mathbf{x}(\omega)$. Considérant que les signaux et le bruit sont indépendants, stationnaires et suivent des processus aléatoires de moyenne nulle, on peut définir les matrices de covariance $\mathbf{R}_{\mathbf{x}} \triangleq \mathbf{E} \left[\mathbf{x}(\omega) \mathbf{x}(\omega)^H \right]$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{n}} \triangleq \mathbf{E} \left[\mathbf{n}(\omega) \mathbf{n}(\omega)^H \right]$ avec .^H l'opérateur hermitien. Alors la matrice de corrélation associée à la mesure \mathbf{y} s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}} \triangleq \mathbf{E}\left[\mathbf{y}(\omega)\mathbf{y}(\omega)^{H}\right] = \mathbf{D}\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{D}^{H} + \mathbf{R}_{\mathbf{n}}.$$
(4.9)

Si les composantes du bruit **n** sont distribuées selon une loi gaussienne centrée et de variance σ^2 , on a $\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = \sigma^2 \mathbf{I}_M$, où \mathbf{I}_M est la matrice identité de dimension $M \times M$.

Définissons ensuite le rapport signal à bruit (ou SNR pour Signal to Noise Ratio), quantifiant la qualité de mesure du signal par rapport au bruit additif de moyenne nulle de variance σ^2 . Notant $\mathbf{h}(\omega) = \mathbf{D}\mathbf{x}(\omega)$ le signal dit "utile", *i.e.*, se rapportant au champ acoustique généré uniquement par les ondes incidentes, le rapport signal à bruit se défini par :

$$\operatorname{SNR} \triangleq \frac{\operatorname{E}\left[\mathbf{h}(\omega)^{H}\mathbf{h}(\omega)\right]}{\sigma^{2}} \tag{4.10}$$

^{3.} ET l'on suppose en outre que les directions d'arrivée $\{\theta_p\}_p$ "vraies" sont contenues dans le dictionnaire de recherche.

Dans la suite de cette section, nous présentons différentes méthodes de la littérature exploitant ce modèle d'observation pour estimer les directions d'arrivée de P ondes incidentes.

4.1.2. Formation de voies

Les méthodes de formation de voies effectuent une estimation des directions d'arrivée en estimant le filtrage spatial optimal du signal de manière à maximiser la puissance du signal pour les directions correspondant aux directions d'arrivée des sources. Dans la suite, par souci de simplicité et de clarté, nous omettrons la dépendance en ω dans nos notations, considérant des sources monochromatiques de pulsation connue.

Formation de voies classique La formation de voies (beamforming) classique [64] consiste à définir un filtre spatial, opérateur de combinaison linéaire, des signaux mesurés y pour obtenir une estimation $\{\hat{x}_p\}_p$ des amplitudes complexes des signaux sources. Formellement, le problème d'estimation s'écrit sous forme de minimisation de l'erreur quadratique, $\forall p \in \{1, \ldots, N\}$

$$\hat{x}_p = \underset{x_p}{\operatorname{arg\,min}} \|\mathbf{y} - \mathbf{d}(\theta_p) x_p\|_2^2, \tag{4.11}$$

et présente la solution analytique

$$\hat{x}_p = \frac{\mathbf{d}(\theta_p)^H}{\mathbf{d}(\theta_p)^H \mathbf{d}(\theta_p)} \mathbf{y}.$$
(4.12)

Si les vecteurs de pointage sont normalisés (*i.e.*, $\mathbf{d}(\theta_p)^H \mathbf{d}(\theta_p) = 1$), on a plus simplement

$$\hat{x}_p = \mathbf{d}(\theta_p)^H \mathbf{y}.$$
(4.13)

Classiquement, on définit alors le filtre $\boldsymbol{w}_{\mathrm{BF}}(\theta_p) \triangleq \mathbf{d}(\theta_p)$. Et le spectre de puissance à partir de cette opération de filtrage spatial est, pour chaque direction d'observation θ_p :

$$P_{\rm BF}(\theta_p) = \mathbf{E}\left[\hat{x}_p \hat{x}_p^*\right] = \boldsymbol{w}_{\rm BF}(\theta_p)^H \mathbf{\hat{R}}_y \boldsymbol{w}_{\rm BF}(\theta_p)$$
(4.14)

où .* représente le conjugué complexe et $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$ est l'estimation empirique de la matrice de covariance de \mathbf{y} à partir de T mesures de l'antenne (appelées snapshots dans la littérature). Notant $\{\mathbf{y}_t\}_{t=1...T}$ ces mesures, on a

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^H.$$
(4.15)

Pour une antenne linéaire uniforme, cette puissance permet d'observer un faisceau (beam

pattern) composé d'un lobe principal et de lobes secondaires. L'épaisseur de ce premier vient limiter la résolution spatiale de la solution et les lobes secondaires peuvent être interprétés comme des maxima locaux et par conséquent des directions d'arrivée multiples et ainsi induire en erreur l'estimation.

Formation de voies par MVDR Pour répondre à cette limitation en résolution spatiale de la formation de voies classique, la formation de voies par MVDR [16] (pour *Minimum Variance Distortionless Response*) propose un nouveau problème d'estimation sous contrainte de minimisation de la distorsion entre le filtre $\boldsymbol{w}(\theta_p)$ et le vecteur de pointage $\mathbf{d}(\theta_p)$

$$\boldsymbol{w}_{\text{MVDR}}(\theta_p) = \underset{\boldsymbol{w}(\theta_p)}{\operatorname{arg\,min}} \boldsymbol{w}(\theta_p)^H \mathbf{\hat{R}}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{w}(\theta_p) \text{ soumis à } \boldsymbol{w}(\theta_p)^H \mathbf{d}(\theta_p) = 1.$$
(4.16)

La solution à ce problème d'estimation s'écrit

$$\boldsymbol{w}_{\text{MVDR}}(\theta_p) = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}^{-1} \mathbf{d}(\theta_p)}{\mathbf{d}(\theta_p)^H \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}^{-1} \mathbf{d}(\theta_p)}$$
(4.17)

Les résultats liés à ces travaux montrent une amélioration de la résolution spatiale de la solution, toutefois, ces performances se dégradent avec le rapport signal à bruit. De plus, ces algorithmes de formation de voies s'appuient sur une hypothèse de stationnarité des mesures \mathbf{y}_t pour l'estimation empirique de la matrice de covariance $\mathbf{\hat{R}}_{\mathbf{y}}$, et, de fait, en cas de perte de cohérence, on observe également une baisse des performances [124][110].

4.1.3. Approches basées sous-espace

Parmi les autres méthodes proposées pour lever la limite de résolution de la formation de voies classiques, certaines exploitent les structures propres des signaux et les propriétés supposées sur ces dernières. En rappelant qu'en tant que matrice de corrélation, $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$ est une matrice hermitienne et symétrique, elle admet donc une base orthonormée de vecteurs propres, on peut alors discriminer les sous-espaces propres relatifs aux signaux et au bruit additif. Posons $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{n}}$ les matrices diagonales des valeurs propres associées aux sous-espaces propres $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{U}_{\mathbf{n}}$, attachés respectivement au signal utile et au bruit. Soit la décomposition en éléments propres de l'équation (4.9) :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}} = \mathbf{U}_{\mathbf{x}} \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}} \mathbf{U}_{\mathbf{x}}^{\ H} + \mathbf{U}_{\mathbf{n}} \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{n}} \mathbf{U}_{\mathbf{n}}^{\ H}$$
(4.18)

les vecteurs propres associés au signal utile sont alors ceux associés aux P plus grandes valeurs propres et ceux du bruit les M - P valeurs propres les moins importantes. Ces

sous-espaces propres ont les propriétés relatives à la matrice ${\bf D}$:

$$\operatorname{sp}(\mathbf{U}_{\mathbf{x}}) = \operatorname{sp}(\mathbf{D}), \quad \operatorname{sp}(\mathbf{U}_{\mathbf{n}}) \perp \operatorname{sp}(\mathbf{D}).$$
(4.19)

Le sous-espace propre associé au signal utile est donc colinéaire au sous-espace défini par la matrice de vecteurs de pointage tandis que le sous-espace associé au bruit est orthogonal à celui-ci.

Algorithme MUSIC L'algorithme MUSIC (pour *MUltiple SIgnal Classification* [113]) exploite cette propriété d'orthogonalité. Un vecteur de pointage dans la direction θ_p vérifie alors :

$$\mathbf{d}(\theta_p)^H \mathbf{U_n} = \mathbf{0}.\tag{4.20}$$

Supposant une matrice de mesure bien conditionnée, le spectre de puissance estimé par l'algorithme MUSIC est de la forme :

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta_p) = \frac{1}{\mathbf{d}(\theta_p)^H \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}}^H \mathbf{d}(\theta_p)}$$
(4.21)

où $\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}}$ est la matrice des vecteurs propres associés au bruit, estimés à partir de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$. En présence d'un SNR important et de signaux sources non-corrélés, MUSIC estime les directions d'arrivée avec une meilleure résolution que les techniques de formation de voies classiques. Cependant cette technique repose sur l'hypothèse d'orthogonalité des sous-espaces propres, rapidement mise en échec en cas de signaux corrélés, de matrice de mesure mal conditionnée ou de mauvais rapport signal à bruit. De plus, étant donné que l'algorithme effectue une décomposition en sous-espaces propres, il nécessite d'importants calculs et une capacité de stockage relativement importante.

Algorithme ESPRIT C'est pour palier à ce conséquent besoin en calculs que la méthode ESPRIT (pour *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) a été proposée [94]. Exploitant la propriété d'invariance par rotation de deux sous-antennes, l'idée est de diviser l'antenne en deux sous-antennes, les mesures de ces deux sousantennes auront alors théoriquement les mêmes propriétés en terme de valeurs propres et sous-espaces propres associés. Rappelons que les vecteurs propres associés au signal utile et la matrice de vecteurs de pointage évoluent dans le même sous-espace (équation (4.19)), on peut donc écrire l'équation de passage suivante :

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Phi} \tag{4.22}$$
avec Φ une transformation linéaire. Alors les deux sous-antennes ont des espaces propres suivants :

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}1} = \mathbf{D}_1 \mathbf{\Phi}, \quad \mathbf{U}_{\mathbf{x}2} = \mathbf{D}_2 \mathbf{\Phi} \tag{4.23}$$

et on peut définir une matrice de passage de $\mathbf{U}_{\mathbf{x}1}$ à $\mathbf{U}_{\mathbf{x}2}$:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}2} = \mathbf{U}_{\mathbf{x}1} \boldsymbol{\Psi}.\tag{4.24}$$

La matrice Ψ a pour valeurs propres l'ensemble $\{e^{i\frac{\omega}{c}\Delta\sin(\theta_p)}\}_{p=1}^{P}$ correspondant aux déphasages des P ondes incidentes entre les deux sous-antennes (distantes de Δ , écart entre deux capteurs consécutifs). Une estimation par moindres carrés permet d'obtenir l'estimée $\hat{\Psi}$ et ainsi de retrouver les directions d'arrivée des P ondes incidentes. Cette division en sous-antennes permet d'alléger le calcul de matrice de covariance et des sousespaces propres associés, notamment en présence d'une antenne composée d'un nombre de capteurs importants. Toutefois, la double estimation des sous-antennes peut s'avérer lourde si des calculs intermédiaires ne sont pas effectués [57]. Ces méthodes peuvent être mises en échec en cas de signaux corrélés, la séparation des sous-espaces signaux s'avérant alors plus complexe. En effet, le rang de la matrice de covariance \mathbf{R}_x n'est alors plus égal au nombre de signaux sources et l'hypothèse selon laquelle les vecteurs propres liés aux signaux sont dans le même sous-espace que le repère des directions d'arrivée ne tient plus. Pour résoudre ce problème ont été proposées des opérations de moyennage de la matrice de covariance par méthode "forward-backward" [108] ou par lissage spatial [116] pour filtrer les pics de corrélation non-diagonaux dans la matrice de covariance.

4.1.4. Approches paramétriques

Les méthodes présentées jusqu'ici n'exploitant pas la composante aléatoire des signaux perçus, celles-ci sont mises en échec en présence de signaux corrélés ou de mauvais rapports signal à bruit. Ces mauvaises performances sont dues au fait que, n'exploitant pas les statistiques sur le bruit additif, ces méthodes sont très sensibles à l'échantillon de mesure considéré. En intégrant les statistiques au problème d'estimation, nous reposons moins sur l'exploitation d'hypothèses sur la structure des signaux ou de l'antenne, ceci permettant de bons résultats en présence de signaux corrélés ou dans le cas de rapports signal à bruit faibles.

Selon le modèle d'observation (4.8) et sans autre a priori que la considération d'un bruit additif blanc gaussien $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, le problème revient donc à une estimation du maximum de vraisemblance entre la mesure et le signal reconstruit par l'estimation et la mesure réelle. Puisque le signal \mathbf{x} est considéré comme déterministe et inconnu, la mesure \mathbf{y} suit une distribution normale $\mathbf{y} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{D}\mathbf{x}, \sigma^2 \mathbf{I})$. Si on considère T mesures indépendantes, le problème s'écrit :

$$(\hat{\mathbf{x}}_{1,ML},\ldots,\hat{\mathbf{x}}_{T,ML},\hat{\sigma}_{ML}^2) = \underset{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_T,\sigma^2}{\arg\max} \,\ell(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_T;\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_T,\sigma^2),\tag{4.25}$$

$$= \underset{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_T,\sigma^2}{\operatorname{arg\,max}} \prod_{t=1}^T p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t, \sigma^2), \qquad (4.26)$$

$$= \underset{\mathbf{x}_{1},\dots,\mathbf{x}_{T},\sigma^{2}}{\arg\max_{t=1}} \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt[M]{2\pi\sigma^{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{2}} \|\mathbf{y}_{t} - \mathbf{D}\mathbf{x}_{t}\|_{2}^{2}\right). \quad (4.27)$$

On utilise généralement la log-vraisemblance, permettant d'obtenir la même solution tout en étant plus aisément dérivable :

$$(\hat{\mathbf{x}}_{1,ML},\ldots,\hat{\mathbf{x}}_{T,ML},\hat{\sigma}_{ML}^2) = \underset{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_T,\sigma^2}{\arg\max} \mathcal{L}(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_T;\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_T,\sigma^2),$$
(4.28)

$$= \underset{\mathbf{x}_{1},...,\mathbf{x}_{T},\sigma^{2}}{\arg\max} \ln\left(\prod_{t=1}^{T} p(\mathbf{y}_{t}|\mathbf{x}_{t},\sigma^{2})\right),$$
(4.29)

$$= \underset{\mathbf{x}_{1},\dots,\mathbf{x}_{T},\sigma^{2}}{\arg\max} \sum_{t=1}^{T} \ln\left(p(\mathbf{y}_{t}|\mathbf{x}_{t},\sigma^{2})\right), \qquad (4.30)$$

$$= \underset{\mathbf{x}_{1},...,\mathbf{x}_{T},\sigma^{2}}{\arg\max} - \frac{MT}{2}\ln(\sigma^{2}) - \frac{1}{2\sigma^{2}}\sum_{t=1}^{T} \|\mathbf{y}_{t} - \mathbf{D}\mathbf{x}_{t}\|_{2}^{2}.$$
 (4.31)

L'estimation des deux variables $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\sigma}^2$ peut se faire séparément. On commence par $\hat{\mathbf{x}}_{t,\text{ML}}, \forall t = \{1, \dots, T\}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t,\mathrm{ML}} = (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \mathbf{y}_t, \qquad (4.32)$$

où l'on reconnaît l'équivalence avec l'estimée au sens des moindres carrés $^4.$ Puis, on estime $\hat{\sigma}_{\rm ML}^2$:

$$\hat{\sigma}_{\rm ML}^2 = \frac{1}{MT} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{y}_t - \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}_{t,\rm ML}\|_2^2, \qquad (4.33)$$

$$= \frac{1}{M} \operatorname{tr} \left(\left(\mathbf{I}_{M} - \mathbf{D} (\mathbf{D}^{H} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^{H} \right) \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} \right), \qquad (4.34)$$

où \mathbf{I}_M est la matrice identité de dimension $M \times M$.

Suivant le même raisonnement, la méthode peut s'étendre à la discrétisation du dictionnaire de directions d'arrivée **D** (*cf.* définition (4.7)). Ainsi, si $\boldsymbol{\theta} \triangleq [\theta_1, \dots, \theta_N]^T$, on

^{4.} On suppose $N \leq M$.

peut réécrire le problème initial (4.28) en intégrant θ comme paramètre d'estimation :

$$(\hat{\mathbf{x}}_{1,\mathrm{ML}},\ldots,\hat{\mathbf{x}}_{T,\mathrm{ML}},\hat{\sigma}_{\mathrm{ML}}^{2},\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}) = \operatorname*{arg\,max}_{\mathbf{x},\sigma^{2},\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\mathbf{y}_{1},\ldots,\mathbf{y}_{T};\mathbf{x}_{1},\ldots,\mathbf{x}_{T},\sigma^{2},\boldsymbol{\theta}), \qquad (4.35)$$

et un estimateur au sens du maximum de vraisemblance de θ s'obtient alors en combinant (4.32) et (4.34) dans (4.35), soit :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} -\frac{MT}{2} \ln(\hat{\sigma}_{\mathrm{ML}}^2) - \frac{1}{2\hat{\sigma}_{\mathrm{ML}}^2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{y}_t - \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}_{t,\mathrm{ML}}\|_2^2, \quad (4.36)$$

$$= \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{arg\,min}} \operatorname{tr} \left(\mathbf{D} \left(\mathbf{D}^{H} \mathbf{D} \right)^{-1} \mathbf{D}^{H} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} \right).$$
(4.37)

La fonction de coût à minimiser ici n'est pas linéaire. La littérature propose alors plusieurs méthodes pour maximiser la vraisemblance de manière itérative. Par exemple, l'algorithme de projections alternées estime un paramètre à la fois en maximisant une fonction appelée vraisemblance concentrée, calculée en fixant tous les autres paramètres [132]. Une autre méthode itérative proposée dans [97] initialise la matrice de covariance du bruit pour ensuite alterner l'estimation des vecteurs \mathbf{x} et $\boldsymbol{\theta}$. Fixer certains paramètres pour ensuite les ré-estimer dans une méthode itérative peut cependant s'avérer source d'instabilités, conduisant à des problèmes de convergence des algorithmes. Les méthodes que nous présentons dans la suite de cette section visent à simplifier et stabiliser ce calcul.

Algorithme Espérance-Maximisation (EM) L'algorithme EM [27] est une méthode itérative permettant de résoudre des problèmes d'estimation au sens du maximum de vraisembance impliquant des variables cachées. L'algorithme alterne entre deux étapes. Dans l'étape E (pour espérance ou *expectation*), une borne inférieure sur la fonction objectif que l'on cherche à maximiser est calculée en utilisant la valeur courante des paramètres d'intérêt en compte et en marginalisant sur les variables cachées. La valeur des paramètres est ensuite mise à jour en maximisant la borne inférieur (constituant l'étape M pour maximisation).

Dans le cas de l'estimation de DOA, le choix peut être fait de considérer \mathbf{x} comme variable cachée et d'estimer les paramètres $\boldsymbol{\beta} \triangleq (\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$. La fonction de vraisemblance

qui nous intéresse peut donc s'écrire comme

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ML}} = \operatorname*{arg\,max}_{\boldsymbol{\beta}} \mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T; \boldsymbol{\beta}), \tag{4.38}$$

$$= \arg\max_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{t=1}^{T} \ln\left(p(\mathbf{y}_t|\boldsymbol{\beta})\right), \tag{4.39}$$

$$= \arg\max_{\beta} \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}_t, \mathbf{x}|\boldsymbol{\beta}) d\mathbf{x}\right), \qquad (4.40)$$

$$= \arg\max_{\beta} \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\mathbb{E}_{\mathbf{x}} \left[p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}, \beta) \right] \right).$$
(4.41)

L'inégalité de Jensen (la fonction l
n est concave) nous fournit la borne inférieure à maximiser. Ainsi, à l'itération
 k, on aura

— étape E : calcul de l'espérance

$$Q\left(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\beta}^{(k)}\right) = \mathbf{E}_{\mathbf{x}|\boldsymbol{\beta}^{(k)}}\left[\sum_{t=1}^{T} \ln p\left(\mathbf{y}_{t}|\mathbf{x},\boldsymbol{\beta}\right)\right]$$
(4.42)

— étape M : maximisation de l'espérance

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \operatorname*{arg\,max}_{\boldsymbol{\beta}} Q\left(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^{(k)}\right) \tag{4.43}$$

Ainsi, pour des problèmes où la log-vraisemblance est une fonction concave sur tout l'espace des paramètres β , la convergence de l'algorithme vers une solution est garantie, quelle que soit l'initialisation choisie [127]. L'intérêt ici réside dans l'utilisation du vecteur augmenté β permettant de s'affranchir d'un calcul de dérivées partielles selon chaque paramètre. Toutefois l'algorithme EM souffre d'une lenteur de convergence, ceci dû au fait qu'on maximise sur une espérance. Pour pallier à ce problème, l'algorithme SAGE [42] propose de diviser ce vecteur augmenté et d'appliquer les étapes E et M sur des sous-vecteurs. Pour certains types de découpage du vecteur de paramètres, l'estimation est alors accélérée par rapport à l'algorithme EM classique.

Algorithme IQML La méthode IQML [74] (pour Iterative Quadratic Maximum Likelihood) exploite la géométrie de l'antenne linéaire uniforme. En définissant le polynôme dont les racines sont l'ensemble $\{z_p \triangleq e^{i\frac{\omega}{c}\Delta\sin(\theta_p)}\}_{p=1}^P$, *i.e.*, tel que pour $z \in \mathbb{C}$, il existe un ensemble de P coefficients $\{b_p\}_{p=1}^P$

$$b(z) = z^{P} + b_{1}z^{P-1} + \dots + b_{P} = \prod_{p=1}^{P} \left(z - e^{i\frac{\omega}{c}\Delta\sin(\theta_{p})} \right)$$
(4.44)

alors on peut construire une matrice de Toeplitz \mathbf{B}^{H} :

$$\mathbf{B}^{H} = \begin{pmatrix} b_{P} & b_{P-1} & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ & \ddots & \ddots & & \ddots & 0\\ 0 & & b_{P} & b_{P-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
(4.45)

telle que $\mathbf{B}^H \mathbf{D} = 0$, *i.e.*, orthogonale à la matrice de vecteurs de pointage. Exploitant cette représentation polynomiale, le problème d'estimation des angles $\boldsymbol{\theta}$ peut se reformuler comme l'estimation des coefficients $\mathbf{b} \triangleq [b_1, \ldots, b_P]^T$ telle que

$$\hat{\mathbf{b}} = \underset{\mathbf{b}}{\operatorname{arg\,min}} \operatorname{tr} \left(\mathbf{B} \left(\mathbf{B}^{H} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^{H} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} \right)$$
(4.46)

où l'on reconnait une forme similaire à (4.37) et où l'on est alors confronté au même problème d'optimisation.

L'algorithme IQML est un algorithme itératif qui à chaque itération k propose une estimation en deux étapes :

- calculer $\mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)H}\mathbf{B}^{(k)}$
- estimer $\hat{\mathbf{b}}^{(k+1)} = \arg\min_{\mathbf{b}} \operatorname{tr} \left(\mathbf{B} \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{B}^{H} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} \right)$

Cette méthode est très dépendante de la géométrie de l'antenne au travers de la condition d'orthogonalité $\mathbf{B}^H \mathbf{D} = 0$, de plus elle est sensible à la présence de minima locaux qui peuvent ne pas être nécessairement des solutions au problème d'estimation des directions d'arrivée.

Estimation par ajustement des sous-espaces Exploitant les performances de l'estimation paramétrique, la méthode de *subspace fitting* ou d'ajustement des sous-espaces propose de l'appliquer au sein d'une méthode basée sur les propriétés des sous-espaces attachés au signal utile et au bruit tels qu'exploités dans l'algorithme ESPRIT. Rappelant l'hypothèse (4.22), l'approche propose de s'intéresser au problème

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{SSF}}, \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{SSF}}) = \underset{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Phi}}{\arg\min} \| \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}} - \mathbf{D} \boldsymbol{\Phi} \|^2, \qquad (4.47)$$

où $\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}$ est la matrice des vecteurs propres associés au signal utile, calculés à partir de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$. En remplaçant $\boldsymbol{\Phi}$ par la solution au sens des moindres carrés pour $\boldsymbol{\theta}$ fixé, *i.e.*, $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\text{SSF}} = \mathbf{D}^+ \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}$ (où .⁺ représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose [96]) et introduisant $\mathbf{P} \triangleq \mathbf{DD}^+$, on obtient pour $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{SSF}}$ la solution au sens des moindres carrés pondérés par la matrice \mathbf{W} des $\boldsymbol{\theta}$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{SSF}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \operatorname{tr} \left(\mathbf{P}^{\perp} \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}} \mathbf{W} \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}^{H} \right)$$
(4.48)

avec $\mathbf{P}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$. Choisissant la matrice de poids optimale à ce problème d'estimation $\mathbf{W}_{\text{opt}} = \tilde{\Lambda}^2 \hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}^{-1}$ avec $\tilde{\Lambda} = \hat{\Lambda}_{\mathbf{x}} - \sigma^2 \mathbf{I}$ où $\hat{\Lambda}_{\mathbf{x}}$ est la matrice diagonale des valeurs propres attachées au signal utiles estimées à partir de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$, la solution proposée par l'algorithme MODE (ou *Method Of Direction Estimation*) est donc :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MODE}} = \underset{\theta}{\operatorname{arg\,min}} \operatorname{tr} \left(\mathbf{P}^{\perp} \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}} \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbf{x}}^{-1} \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}^{H} \right)$$
(4.49)

Cette formulation s'avère particulièrement efficace quand le nombre de capteurs est très grand devant le nombre de directions à estimer. Une implémentation itérative de MODE a également été proposée pour optimiser les calculs de minimisation de la trace (4.49) [74], offrant de meilleures performances que IQML. Toutefois de mauvaises performances sont toujours observées en cas de signaux corrélés (en présence par exemple de multitrajets).

Algorithme de *covariance matching* Considérons ici l'équation (4.9) avec toujours un a priori blanc gaussien sur le bruit additif, alors en vectorisant les colonnes de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$ on peut proposer la décomposition suivante :

$$\mathbf{r}_{\mathbf{y}} \triangleq \operatorname{vec}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\right) = \boldsymbol{\Upsilon}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\sigma}^{2} = \left[\boldsymbol{\Upsilon}\boldsymbol{\Sigma}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\sigma}^{2} \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha}$$
(4.50)

où $\Upsilon \mu$ correspond au terme relatif à la matrice de covariance vectorisée du signal et $\Sigma \sigma^2$ relatif au bruit. Dans la majorité des cas d'estimation des DOA, cette dernière matrice représente une transformation non-linéaire des θ . En estimant $\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}})$, l'ajustement des mesures au modèle génératif, et donc par conséquent l'estimation des directions d'arrivée, se fait par estimation au sens des moindres carrés pondérés suivant le critère

$$(\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}} - \mathbf{r}_{\mathbf{y}})^{H} \widehat{\mathbf{W}}^{-1} (\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}} - \mathbf{r}_{\mathbf{y}}) = \left\| \widehat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}} - \widehat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \Phi \boldsymbol{\alpha} \right\|^{2}$$
(4.51)

où la matrice de poids $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}^T \odot \widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$ est une estimation de la covariance de $(\widehat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}} - \mathbf{r}_{\mathbf{y}})$. Alors en minimisant cette nouvelle fonction de coût, on obtient d'abord le vecteur des paramètres :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \left[\boldsymbol{\Phi}^{H}\widehat{\mathbf{W}}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\right]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{H}\widehat{\mathbf{W}}^{-1}\widehat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}}$$
(4.52)

et pour finir l'estimation des directions d'arrivée :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{arg\,min}} \ \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}}^{H} \widehat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\Phi} \right) \widehat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{y}}$$
(4.53)

avec la matrice de projection $\mathbf{P}_{\Phi} = \widehat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \Phi \left[\Phi^H \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \Phi \right]^{-1} \Phi^H \widehat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}}$. Appliquant ces différentes étapes de calcul, les algorithmes de classe COMET (pour *COvariance Matching Estimation Techniques* [92]) permettent une estimation considérant les statistiques d'ordre

2 liées au modèle tout en proposant un coût calculatoire moins élevé que les méthodes par maximisation de vraisemblance plus classiques. Cependant, reposant sur l'estimation empirique de matrices de covariances, ces méthodes sont mises en échec en cas de mauvais échantillons, comme dans des cas de mauvais SNR et dans des mesures impliquant peu d'observations.

4.1.5. Approches parcimonieuses

Nous l'avons vu dans les précédentes sections, la prise en compte d'informations supplémentaires sur la nature du signal mesuré ou sur les statistiques du bruit augmente les performances d'estimation en résolution aussi bien qu'en terme de robustesse au bruit additif. Ici nous proposons donc de supposer à l'instar des travaux [50][122][76] que le nombre de signaux sources est en général faible (ce qui n'est pas applicable en télécommunications). On dit qu'il est "parcimonieux" ou admet une "représentation parcimonieuse". Formellement, l'a priori parcimonieux sur le nombre de sources peut être intégré au problème d'estimation de directions d'arrivée par l'ajout d'un terme de régularisation introduisant la pseudo-norme ℓ_0 . Plusieurs formulations de ce problème peuvent être rencontrées dans la littérature. La plus commune, considérant un dictionnaire de directions d'arrivée **D** très résolu (de dimensions $M \times N$ avec M < N) s'écrit :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{arg\,min}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{x}\|_{2}^{2} + \eta \|\mathbf{x}\|_{0}$$
(4.54)

où $\|\mathbf{x}\|_0$ est la pseudo-norme ℓ_0 , "comptant" le nombre de composantes non nulles de \mathbf{x} et η est un multiplicateur de Lagrange. Les méthodes proposées par la suite proposent de résoudre l'équation (4.54) selon différentes approches, permettant une estimation hyper-résolue des directions d'arrivée.

Algorithmes basés sur une relaxation convexe Les travaux [122] mettent en avant la complexité combinatoire d'une estimation minimisant la norme ℓ_0 et proposent d'utiliser la norme ℓ_1 comme relaxation convexe de la norme ℓ_0 :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 + \eta \|\mathbf{x}\|_1$$
(4.55)

Alors la résolution de ce nouveau problème peut être effectuée en utilisant des méthodes de régression classiques comme par exemple le *Basis Pursuit* [17] ou encore le *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator* (LASSO) [121].

Notons que ces approches ont fait l'objet d'une contribution spécifique baptisée Compressive Beamforming [128]. Méthodes par seuillage Ces méthodes reposent sur un débruitage des signaux en s'appuyant sur des seuillages successifs afin de reconstituer le vecteur **x**. On peut distinguer ici deux méthodes, la première méthode dite de *Hard Thresholding* [10] résolvant le problème de minimisation selon la norme ℓ_0 ainsi que la méthode dite de *Soft Thresholding* [26] basée sur l'utilisation de la version relaxée du problème d'estimation (*i.e.*, l'équation (4.55)).

Méthodes de type *pursuit* Les méthodes de type *pursuit* visent à estimer $\hat{\mathbf{x}}$ par une succession de calculs itératifs dits "gloutons", *i.e.*, par une succession de décisions locales sur le "support" de la représentation parcimonieuse (ici les directions d'arrivée des ondes incidentes).

Très populaire, l'algorithme OMP (pour Orthogonal Matching Pursuit [123]) est dérivé de l'algorithme MP (pour Matching Pursuit [77]) introduit à l'origine pour l'estimation temps-fréquence. Il consiste à trouver la colonne de la matrice \mathbf{D} (*i.e.*, le vecteur de pointage) la plus corrélée avec le signal reçu \mathbf{y} . La contribution de cette colonne est soustraite au signal \mathbf{y} et le résidu est à nouveau confronté à la matrice \mathbf{D} afin d'en déterminer la seconde colonne la plus corrélée. Cette opération se répète jusqu'à l'obtention d'un résidu trop faible pour être considéré comme représentatif du signal. On obtient alors P vecteurs de \mathbf{D} correspondant aux directions d'arrivée des sources.

Egalement très utilisée, la méthode OLS (pour *Orthogonal Least Square*) propose une méthode itérative afin de déterminer les P composantes maximisant la projection de **D** sur le signal par moindres carrés [18].

Ces deux algorithmes résolvent le problème de recherche de décomposition parcimonieuse, composante par composante, *i.e.*, direction d'arrivée par direction d'arrivée. Afin de palier à cette relative complexité (qu'ils ont cependant linéaire), d'autres méthodes ont pu être proposées comme les algorithmes *Stagewise OMP* [32], *Subspace Pursuit* [24] ou encore *Compressive Sampling Matching Pursuit* (CoSaMP) [90], qui sélectionnent plusieurs colonnes du dictionnaire simultanément.

Algorithmes bayésiens D'autres méthodes proposent de considérer le problème d'estimation de directions d'arrivée en utilisant la loi de Bayes et reformulant le problème d'estimation des composantes de \mathbf{x} comme un problème d'inférence sur sa distribution ⁵. Les méthodes issues de cette nouvelle formulation diffèrent principalement selon les outils statistiques utilisés pour résoudre ce problème d'inférence ou encore l'a priori considéré pour modéliser la distribution de \mathbf{x} . Pour prendre en compte la parcimonie, plusieurs distributions peuvent en effet être envisagées. Toutes ont en commun d'être à queues lourdes et de présenter un pic localisé en zéro pour représenter une grande probabilité

^{5.} Nous reviendrons plus en détail sur le formalisme bayésien pour l'estimation des directions d'arrivée dans le chapitre suivant.

d'être nul pour une composante de \mathbf{x} . On peut ainsi citer la distribution de Cauchy [91], de Laplace [55], de Student [43] ou encore de Jeffrey [44].

Parmi ces nombreuses distributions, le modèle Bernoulli-gaussien, qui modélise les composantes de \mathbf{x} comme le produit d'une variable gaussienne par une variable de Bernoulli, retient particulièrement l'attention : les travaux [118] montrent en effet qu'un problème d'estimation par moindres carrés avec contrainte de minimisation de la norme ℓ_0 est équivalent à la formulation bayésienne d'un problème de maximisation a posteriori avec un a priori Bernoulli-gaussien sur le vecteur \mathbf{x} . Avec une telle modélisation, on considère que les composantes de \mathbf{x} sont majoritairement nulles, excepté un faible nombre de composantes d'amplitudes gaussiennes. L'exploitation de cet a priori a fait l'objet de nombreuses contributions (*cf. e.g.*, [131, 3, 61, 118, 70]). Chacune propose une procédure différente, recourant ou non à un outil probabiliste. La section 3.4 du chapitre précédent fait un rapide point sur celles basées sur des approximations variationnelles bayésiennes.

4.2. Estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant

Les algorithmes présentés jusqu'ici sont conçus pour résoudre un problème d'estimation de directions d'arrivée dans le cas d'un modèle linéaire classique, à savoir que les seules perturbations prises en compte sont la présence d'un bruit additif et/ou de sources corrélées. Lors de perturbations non prises en compte dans un modèle, l'estimation est effectuée dans un contexte de *model mismatch* ou mauvais choix de modèle. Dans [82], les auteurs s'intéressent à la dégradation des performances des algorithmes d'estimation de DOA dans ce contexte. De la même manière, les travaux présentés dans [23] démontrent la dégradation des performances en présence de signaux non-cohérents non pris en compte dans le modèle génératif. Ainsi, selon la perturbation considérée, différentes modélisations et méthodes peuvent être proposées afin d'estimer correctement les directions d'arrivée.

Dans cette section, nous présentons certains algorithmes prenant en compte un bruit non-additif dans le modèle génératif des données, aussi bien sous forme de bruit multiplicatif qu'en décomposant le modèle linéaire pour y faire figurer un terme de perturbation. Parmi les modélisations de l'incertitude considérées nous retiendrons trois modèles d'intérêt. Le premier consiste à considérer la matrice de mesure \mathbf{D} juste mais une perturbation du signal mesuré sous forme d'une matrice de bruit multiplicatif \mathbf{G} sur chacun des termes de \mathbf{D} . Une seconde proposition consiste à considérer une décomposition sous forme additive de chaque terme de la matrice \mathbf{D} , donc supposant que la matrice de mesure admet une décomposition en somme des termes d'incertitude sur \mathbf{D} et de la matrice "vraie". Enfin, une dernière modélisation, particularisation de la première, consiste à considérer une perturbation de phase sur les capteurs de l'antenne, entrainant une perte d'information sur celle-ci. Ainsi le modèle de perturbation se présente sous la forme de bruit de phase multiplicatif sur \mathbf{y} représenté par une matrice diagonale \mathbf{P} . Ce modèle est similaire à celui (explicitement ou implicitement) considéré dans les méthodes de reconstruction de phase (ou *phase retrieval*). Bien que manquant de généralité quant à la prise en compte de l'incertitude sur le modèle de mesure, nous verrons qu'il peut servir de base pour l'élaboration d'un modèle plus fin.

Exception parmi les différentes contributions que nous avons pu relever, les travaux [72] proposent d'intégrer les incertitudes relatives au milieu de propagation sous forme d'a priori que l'on cherchera ensuite à marginaliser. Nous les traitons à part, en tête de notre état de l'art.

4.2.1. Modélisation par marginalisation de loi de probabilité

Dans [72], les auteurs développent une approche bayésienne considérant la fonction de Green (que l'on peut définir comme la réponse impulsionnelle du milieu de propagation vu comme système linéaire et que l'on peut identifier au vecteur de pointage $\mathbf{d}(\theta)$) comme un vecteur aléatoire dont la densité de probabilité prend en compte l'incertitude de l'environnement. Cette variable aléatoire est considérée comme cachée, et marginalisée dans le processus d'estimation des directions d'arrivée, selon

$$p(\theta|\mathbf{y}) \propto \int p(\mathbf{y}|\mathbf{d},\theta) \, p(\mathbf{d}|\theta) \, d\mathbf{d} \, p(\theta).$$
 (4.56)

Ainsi, le vecteur de pointage est supposé dépendre de l'angle θ selon une relation probabiliste et non déterministe.

La méthode propose ensuite une procédure de type *matched field* (que l'on pourrait traduire par "appariement de champs" [12]) pour résoudre le problème. Cette approche consiste à re-simuler le milieu de propagation en présence de sources actives jusqu'à maximiser la vraisemblance entre les signaux simulés à partir d'un modèle et le signal mesuré et ainsi estimer la position de la source et/ou certains paramètres physiques. La figure 4.1 illustre l'approche.

Aidée de la marginalisation, l'estimation est plus robuste aux variations des paramètres physiques ainsi qu'à l'erreur de modèle, à laquelle les méthodes de *matched field processing* sont particulièrement sensibles. Le cadre bayésien permet en outre de fournir des prédictions des performances de localisation. Toutefois la méthode est très lourde en temps de calculs de par la nécessité d'effectuer une simulation de propagation par itération (voir figure 4.1), en fonction du milieu et des géométries de problème considérées. Les moyens nécessaires peuvent être prohibitifs selon l'application qui est faite de la méthode.



FIGURE 4.1. – Schéma de fonction de l'approche bayésienne appliquée au *Matched Field Processing* (adapté de [72])

4.2.2. Modélisation par bruit multiplicatif

Algorithme de Paulraj-Kailath Une des premières méthodes proposées pour l'estimation des directions d'arrivée en présence d'incertitudes a été celle proposée par Paulraj et Kailath [93]. Cette méthode vise à améliorer la méthode MUSIC (cf. section 4.1.3) en présence de signaux non-cohérents en ré-exprimant le calcul de covariance et en considérant la présence d'un bruit multiplicatif sur la mesure. Ainsi soit une matrice de mesure bruitée telle que

$$\mathbf{y} = (\mathbf{G} \odot \mathbf{D})\mathbf{x} + \mathbf{n} \tag{4.57}$$

avec \odot le produit de Schur-Hadamard et **G** une matrice de perturbation telle que les éléments \mathbf{G}_{ik} sont complexes, supposés indépendants et identiquement distribués. Considérant (4.57), la matrice de covariance du signal perturbé $\mathbf{R}_{\mathbf{y}-\mathbf{pert}}$ s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}-\mathbf{pert}} = \mathbf{E}\left[\mathbf{y}\mathbf{y}^{H}\right] = \left(\mathbf{D}\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{D}^{H}\right) \odot \mathbf{B} + \sigma^{2}\mathbf{I}_{M}$$
(4.58)

où les composantes de **B** sont les $b_{ij} = \mathbb{E}\left[[\mathbf{G}]_{ik} [\mathbf{G}]_{jk}^*\right]$ (on suppose ici une perte de cohérence isotrope, c'est-à-dire que la perturbation est identique pour tous les fronts d'onde, indépendamment de leur DOA). En normalisant cette matrice de manière à ce que $\mathbf{I}_M \odot \mathbf{B} = \mathbf{I}_M$, on peut écrire

$$\mathbf{R_{y-pert}} = \mathbf{R_y} \odot \mathbf{B}$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$ est défini en (4.9).

La méthode de Paulraj et Kailath propose d'utiliser cette matrice de covariance perturbée dans le problème d'estimation de MUSIC (*cf.* section 4.1.3). Remplaçons alors la matrice $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$ par :

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}-\mathbf{pert}} \varnothing \mathbf{B} \tag{4.59}$$

avec \varnothing l'inverse du produit de Schur-Hadamard (équivalent à une division terme à terme). En "débruitant" le signal, on retrouve les structures orthogonales des sousespaces propres nécessaires au bon fonctionnement de MUSIC. Le principal inconvénient de cette approche est l'exigence d'une connaissance exacte de la matrice **B** : en pratique, cette condition peut être irréaliste. Avec une connaissance imprécise de la matrice **B**, de graves problèmes peuvent survenir, en particulier lorsque certains éléments de cette matrice sont proches de zéro [54].

Algorithme de matrix fitting Pour répondre aux limitations de l'algorithme de Paulraj et Kailath, les travaux [54] proposent une méthode dite de matrix fitting (ajustement de matrice) pour résoudre le problème d'estimation des DOA en l'absence de connaissance de **B**. Le problème est exprimé comme la recherche des paramètres du modèle minimisant l'erreur avec la mesure selon

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{\beta}} \operatorname{tr}\left((\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}-\mathbf{pert}} \oslash \mathbf{B} - \mathbf{R}_{\mathbf{y}})^2 \right)$$
(4.60)

où β est le vecteur des paramètres du modèle, contenant les M - 1 termes indépendants de la matrice **B** ainsi que des N directions d'arrivée θ .

Les auteurs de [54] proposent le recours à un algorithme génétique pour résoudre le problème, qui est en soi très coûteux en temps de calcul. Ainsi, si l'approche est de fait très générique et permet une grande représentativité des perturbations, son exigence calculatoire peut la rendre prohibitive.

Algorithme de covariance matching Des travaux similaires [111] proposent également d'exploiter un modèle de bruit multiplicatif terme-à-terme sur la matrice \mathbf{D} mais cette fois dans une approche de covariance matching (cf. section 4.1.4). La matrice de covariance des signaux mesurés en présence de perturbations est définie comme

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}-\mathbf{pert}} = \mathbf{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H] \tag{4.61}$$

$$= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{p=1}^{N} (\mathbf{g}_p \odot \mathbf{d}(\theta_p)) x_p + \mathbf{n}\right) \left(\sum_{p=1}^{N} (\mathbf{g}_p \odot \mathbf{d}(\theta_p)) x_p + \mathbf{n}\right)^H\right],$$
(4.62)

où \mathbf{g}_p est le vecteur de perturbation de coefficients complexes attachés spécifiquement à la direction d'arrivée θ_p . En supposant que les sources sont non corrélées, $\mathbf{E}\left[x_p x_l^*\right] = \sigma_p^2 \delta_l(p)$,

avec σ_p^2 la variance de la *p*-ième source et $\delta_l(p)$ une distribution de Dirac (égale à 1 pour p = l, nulle partout ailleurs), les calculs se poursuivent de la façon suivante :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}-\mathbf{pert}} = \sum_{p=1}^{N} \sigma_p^2 \mathbf{B}_p \odot \mathbf{H}_p + \sigma^2 \mathbf{I}$$
(4.63)

avec $\mathbf{H}_p \triangleq \mathbf{d}(\theta_p)\mathbf{d}(\theta_p)^H$ et $\mathbf{B}_p \triangleq \mathrm{E}[\mathbf{g}_p\mathbf{g}_p^H]$. Notons que $\forall p \in \{1, \ldots, N\}$, \mathbf{B}_p est de la forme :

$$\mathbf{B}_{p} = \begin{bmatrix} 1 & b_{p}(1) & \dots & b_{p}(M-1) \\ b_{p}^{*}(1) & 1 & \dots & b_{p}(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p}^{*}(M-1) & b_{p}^{*}(M-2) & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$
 (4.64)

A la différence des deux approches précédentes, aucune hypothèse d'isotropie n'est posée : chaque direction d'arrivée peut être perturbée différemment. En posant $\boldsymbol{\beta} \triangleq [\boldsymbol{\theta}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\sigma}]^T$ avec $\mathbf{b} = [b_1(1), \ldots, b_1(M-1), \ldots, b_P(1), \ldots, b_N(M-1)]^T$ et $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1^2, \ldots, \sigma_N^2, \sigma^2]^T$, le problème d'estimation des directions d'arrivée se résume donc à

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{arg\,min}} \|\operatorname{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}-\mathbf{pert}}) - \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{b})\boldsymbol{\sigma}\|^2$$
(4.65)

avec $\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{b}) \triangleq [\operatorname{vec}(\mathbf{B}_1 \odot \mathbf{D}_1), \dots, \operatorname{vec}(\mathbf{B}_P \odot \mathbf{D}_P), \operatorname{vec}(\mathbf{I})].$

Avec cette nouvelle formulation, la résolution successive des variables de β permet de retrouver les directions d'arrivée des sources en présence d'un bruit multiplicatif inconnu. Toutefois, les calculs reposent sur l'a-priori non-cohérent des sources, hypothèse rapidement mise en échec en cas de multitrajets, phénomène fréquent en propagation acoustique. De plus cette méthode repose encore sur l'estimation empirique de la matrice mesure, les performances sont donc fortement dépendantes des échantillons considérés dès lors qu'on ne formule pas d'a-priori sur les perturbations impactant la mesure.

4.2.3. Modélisation par bruit additif

Parallèlement au modèle de bruit multiplicatif, d'autres contributions (*cf. e.g.*, [59, 88]) se sont intéressées à une modélisation des perturbations sous forme de bruit additif sur la matrice de mesure, soit

$$\mathbf{y} = (\mathbf{D}^o + \mathbf{D}^e) \mathbf{x} + \mathbf{n} = \mathbf{D}^o \mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta}$$
(4.66)

où \mathbf{D}^{o} est la matrice de mesure connue, \mathbf{D}^{e} est une perturbation inconnue de cette matrice et $\boldsymbol{\zeta}$ est défini comme $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{D}^{e}\mathbf{x} + \mathbf{n}$.

Moyennant un ajustement des a-priori posés sur le terme de bruit additif, le problème d'estimation de directions d'arrivée se formule ensuite de la même façon que classiquement et on pourra avoir recours a priori à beaucoup des algorithmes présentés dans la section 4.1. Les contributions [59] et [88] font par exemple le choix d'exploiter un a-priori parcimonieux sur \mathbf{x} . Les approches diffèrent par les algorithmes considérés : algorithme basé sur une relaxation convexe pour [59] et procédure bayésienne pour [88].

Intuitivement, le modèle (4.66) présente ainsi l'intérêt d'exprimer assez simplement les incertitudes sur le milieu de propagation et l'avantage de permettre l'utilisation d'algorithmes classiques de la littérature. Il peut néanmoins être questionné quant à son utilité dans notre cas : les études menées dans [25, 20] justifiant plutôt le modèle de bruit multiplicatif (*cf.* section 2.3.3).

4.2.4. Algorithmes de reconstruction de phase

Si le modèle de bruit multiplicatif semble pertinent au regard des études statistiques réalisées sur les perturbations du milieu océanique, il est par ailleurs très lourd et difficile à interpréter et informer physiquement. Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.3.3, un simple bruit de phase devrait déjà nous permettre de prendre en compte les fluctuations du milieu à travers certaines de ses grandeurs physiques. Dans le cas le plus pessimiste, les perturbations du milieu sont telles qu'elles engendrent des bruits de phase distribués selon une loi uniforme; les déphasages observés sont alors inexploitables. C'est le scénario envisagé dans le problème dit de reconstruction de phase.

Ici, les observations sont supposées être générées selon le modèle

$$\mathbf{y} = |\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{n}|,\tag{4.67}$$

et l'on cherche à retrouver \mathbf{x} à partir de \mathbf{y} . Ce problème a fait l'objet de nombreuses contributions et a été observé dans de nombreux cas applicatifs. On peut ainsi citer l'imagerie diffractive [126], la cristallographie [58] ou encore l'imagerie optique dans des milieux diffusifs [66]. Il s'agit d'un problème d'optimisation non convexe notoirement difficile à résoudre. Plusieurs méthodes ont pu être développées pour y répondre. Pour notre propos, nous les catégorisons en deux classes :

- les approches déterministes,
- les approches bayésiennes.

Notations Les algorithmes de reconstruction de phase ayant été développés indépendamment du problème d'estimation de directions d'arrivée en milieu perturbé, nous adopterons pour les présenter l'écriture simplifiée suivante :

— les vecteurs de pointage $\mathbf{d}(\theta_p)$ seront simplement notés \mathbf{d}_p ,

— les éléments de la matrice **D** de dimension $M \times N$ seront appelés $\{d_{mn}\}_{m,n}$. Nous maintiendrons ensuite cette écriture pour tout le reste du manuscrit.

4.2.4.1. Approches déterministes

Les approches déterministes peuvent être distinguées en deux familles.

La première repose sur l'utilisation de projections alternées de \mathbf{y} sur l'image de \mathbf{D} et sur l'ensemble des vecteurs dont le module est égal à $|\mathbf{Dx}|$. L'exploitation de ces projections a donné par exemple les algorithmes de Gerchberg-Saxton [52] et sa version relaxée proposée par Fienup [45]. Cependant, la seconde projection s'effectuant dans un espace non-convexe, il n'y a pas de garantie de convergence de ces algorithmes, lacune palliée par l'algorithme de projection dans un espace convexe (*projections onto convex* set) [4] qui reformule le problème d'estimation dans un espace convexe, garantissant alors une solution unique et une convergence des méthodes. Une autre méthode proposée par Griffin et Lim [56] propose quant à elle d'estimer le signal \mathbf{x} en minimisant la différence entre les transformées de Fourier à court terme des mesures et de leurs estimées.

La seconde catégorie de méthodes repose sur l'approche du problème par des versions dites "relaxés" pouvant être résolues par des procédures d'optimisation standard. Les deux principales approches de ce type, *PhaseLift* [15] et *PhaseCut* [125], reposent plus particulièrement sur la programmation semi-définie (ou *semi-definite programming*).

Ces algorithmes étant sensibles au conditionnement de la matrice \mathbf{D} et au bruit additif, de récentes méthodes ont proposé d'intégrer des informations a priori sur le modèle génératif au problème d'estimation. Ainsi des méthodes améliorées de *semi-definite programming* [62], de projections alternées [85] et d'algorithmes gloutons [117] ont été mises en place en tenant compte d'un a priori parcimonieux sur le vecteur \mathbf{x} . Plus récemment, les travaux [109] permettent la résolution du problème de reconstruction de phase en proposant une approximation de la fonction de coût du problème par une somme de fonctions convexe et concave, permettant de partitionner le problème d'estimation.

4.2.4.2. Approches bayésiennes

Les approches bayésiennes proposent de contourner la non-linéarité du module par l'introduction de variables cachées. Les procédures envisagées dans la littérature reposent en outre sur des approximations variationnelles bayésiennes, nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 pour un bref exposé de ces outils.

Modèle d'observation Replaçant le modèle (4.67) dans un cadre bayésien, l'idée est d'introduire de nouvelles variables modélisant les phases manquantes des observations. Ainsi, chaque mesure en module y_m pour $m \in \{1, \ldots, M\}$ est exprimé comme

$$y_m = e^{i\psi_m} \sum_{n=1}^N d_{mn} x_n + n_m, \qquad (4.68)$$

où $\psi_m \in [0, 2\pi]$ représente sa phase manquante conjuguée. Sous une formulation matricielle, le modèle s'écrit simplement

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{n} \tag{4.69}$$

où $\mathbf{P} = \text{diag}\left(\left[e^{i\psi_1}, \ldots, e^{i\psi_M}\right]\right)$ est une matrice diagonale dont les éléments contiennent les phases manquantes des observations.

Classiquement, le bruit **n** est considéré circulaire gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 . On suppose de plus que les phases $\{\psi_m\}_m$ suivent une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Sous ces hypothèses, l'absence de phases dans les observations est naturellement prise en compte dans le modèle puisque la marginalisation sur ψ_m conduit à une distribution sur y_m qui ne dépend que des modules de y_m et $z_m \triangleq \sum_{n=1}^N d_{mn} x_n$, plus spécifiquement

$$p(y_m|\mathbf{x}) = \int_{\psi_m} p(y_m, \psi_m|\mathbf{x}) \, d\psi_m, \tag{4.70}$$

$$\propto I_0 \left(2 \frac{|y_m| |z_m|}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{|y_m|^2 + |z_m|^2}{\sigma^2} \right),$$
 (4.71)

où $I_0(.)$ est la fonction de Bessel modifiée de premier type à l'ordre 0 (*cf.* équation (4.85) ci-après).

Dans ce contexte, le problème d'estimation (ici de directions d'arrivée) peut se poser classiquement au sens du maximum a posteriori ou du minimum d'erreur quadratique moyenne

$$\mathbf{x}_{\mathrm{MAP}}^{\star} = \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{arg\,max}} \log p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \tag{4.72}$$

$$\mathbf{x}_{\text{MMSE}}^{\star} = \arg\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \int_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{2}^{2} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}.$$
(4.73)

Dans les deux cas, une connaissance de la distribution a posteriori $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ est nécessaire. Les contributions se distinguent alors selon l'a-priori posé sur \mathbf{x} , l'approximation variationnelle considérée et la procédure d'optimisation mise en place pour la résoudre.

Approximation de champ moyen Dans [37], les auteurs considèrent une approximation de champ moyen et implémentent un algorithme VBEM (*cf.* section 3.2). L'a priori sur les inconnues \mathbf{x} est supposé gaussien :

$$p(\mathbf{x}) = \prod_{n=1}^{N} p(x_n) \quad \text{avec} \quad p(x_i) = \mathcal{CN}(0, \sigma_x^2)$$
(4.74)

où σ_x^2 est la variance des composantes de **x**.

L'approximation de champ moyen suppose une indépendance a posteriori des variables.

Dans [37], les auteurs traitent la factorisation suivante

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi} | \mathbf{y}) \simeq q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) = q(\boldsymbol{\psi}) \ q(\mathbf{x}) = \prod_{m} q(\psi_{m}) \prod_{n} q(x_{n}).$$
(4.75)

Particularisées à ce cas, les équations de mise à jour du VBEM (3.3) s'écrivent⁶ : $\forall n \in \{1, ..., N\}, \forall m \in \{1, ..., M\},$

$$q(\psi_m) \propto \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \int_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) \log p(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\psi}_{\neq m} \, d\mathbf{x}\right),\tag{4.76}$$

$$\propto p(\psi_m) \, \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \int_{\mathbf{x}} q(\mathbf{x}) \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\psi}_{\neq m} \, d\mathbf{x}\right), \qquad (4.77)$$

$$q(x_n) \propto \exp\left(\int_{\boldsymbol{\psi}} q(\boldsymbol{\psi}) \int_{\mathbf{x}_{\neq n}} \prod_{k \neq n} q(x_k) \log p(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x}_{\neq n}\right),\tag{4.78}$$

$$\propto p(x_n) \, \exp\left(\int_{\boldsymbol{\psi}} q(\boldsymbol{\psi}) \int_{\mathbf{x}\neq n} \prod_{k\neq n} q(x_k) \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x}_{\neq n}\right), \tag{4.79}$$

où $\psi_{\neq m}$ (resp. $\mathbf{x}_{\neq n}$) désigne le vecteur composé des ψ_l (resp. x_k) pour $l \neq m$ (resp. $k \neq n$).

Soit, finalement,

$$q\left(\psi_{m}\right) = \frac{1}{2\pi I_{0}\left(\frac{2}{\sigma^{2}}\left|y_{m}^{*}\left\langle z_{m}\right\rangle\right|\right)}\exp\left(\frac{2}{\sigma^{2}}\Re\left(y_{m}^{*}\left\langle z_{m}\right\rangle e^{i\psi_{m}}\right)\right)$$
(4.80)

 et

$$q(x_n) = \mathcal{CN}(m_n, \Gamma_n), \qquad (4.81)$$

avec les variables

$$\Gamma_{n} = \frac{\sigma^{2} \sigma_{x}^{2}}{\sigma^{2} + \sigma_{x}^{2} \mathbf{d}_{n}^{H} \mathbf{d}_{n}}$$

$$m_{n} = \frac{\sigma_{x}^{2}}{\sigma^{2} + \sigma_{x}^{2} \mathbf{d}_{n}^{H} \mathbf{d}_{n}} \langle \mathbf{r}_{n} \rangle^{H} \mathbf{d}_{n}$$

$$\langle \mathbf{r}_{n} \rangle = \overline{\mathbf{y}} - \sum_{k \neq n} m_{k} \mathbf{d}_{k}$$
(4.82)

 et

$$\overline{\mathbf{y}} = \left[y_m e^{(i \arg(y_m^* \langle z_m \rangle))} R_0 \left(\frac{2}{\sigma^2} \left| y_m^* \langle z_m \rangle \right| \right) \right]_{m = \{1...M\}}$$
(4.83)

$$\langle z_m \rangle = \sum_{n=1}^N m_n d_{mn} \tag{4.84}$$

^{6.} Ici encore, nous abandonnons les indices d'itérations pour la simplicité de notation.

avec $R_0 \triangleq I_1/I_0$ et I_k la fonction de Bessel modifiée de première espèce à l'ordre k:

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \phi} \cos(k\phi) d\phi.$$
(4.85)

Revenant au problème d'estimation ⁷ (4.72), l'estimation des composantes de \mathbf{x} s'obtient après convergence grâce au calcul de la moyenne a posteriori $q(\mathbf{x})$:

$$\hat{x}_n = \operatorname*{arg\,max}_{x_n} q\left(x_n\right) = m_n. \tag{4.86}$$

Les équations (4.80)-(4.84) ont donné naissance à l'algorithme prVBEM (pour *phase retrieval VBEM*) [37]. Après tests sur données simulées, les auteurs montrent que prVBEM s'avère plus performant que les algorithmes classiques n'intégrant pas d'a priori probabiliste sur le modèle génératif tels que l'algorithme de *PhaseCut* ou Gerchberg-Saxton, notamment en terme de robustesse au bruit additif.

Approximation de Bethe Comme nous l'avons vu au chapitre 3, un autre type d'approximation variationnelle bayésienne, l'approximation de Bethe, est assez couramment envisagé et peut être efficacement implémenté. En particulier, dans le contexte de reconstruction de phases, les approches d'AMP dites "généralisées" (*cf.* section 3.4.2 paragraphe **Generalized (swept) approximate message passing**) ont fait l'objet de nombreuses contributions de la littérature [114, 84, 100].

Le modèle (4.68) présenté dans le paragraphe **Modèle d'observation** satisfait en effet tous les éléments constitutifs des modèles linéaires généralisés :

- la distribution de probabilité $p(y_m | \mathbf{x})$ appartient à la famille exponentielle, comme l'exprime formellement l'équation (4.71),
- il existe un prédicteur linéaire, ici

$$z_m \triangleq \sum_n d_{mn} x_n,$$

— et une fonction de lien h_m , $\forall m \in \{1, \ldots, M\}$, tels que

$$\mathbf{E}[y_m|\mathbf{x}] = h_m(z_m) = e^{i\psi_m} z_m.$$

En outre, les approches proposées ont comme point commun de considérer un a-priori Bernoulli-gaussien sur \mathbf{x} , *i.e.*,

$$p(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i)$$
 avec $p(x_i) = \rho C \mathcal{N}(0, \sigma_x^2) + (1 - \rho) \delta_0,$ (4.87)

^{7.} Notons que la distribution a posteriori calculée selon l'approximation de champ moyen étant ici gaussienne, on obtient la même solution sous le critère du minimum de l'erreur quadratique moyenne.

où ρ est le paramètre de Bernoulli, que l'on peut identifier au taux de parcimonie et définir comme $\rho = K/N$ où K est le nombre de coefficients non nuls de \mathbf{x} , soit ici, le nombre de directions d'arrivée effectives.

Ainsi les procédures G(Sw)AMP s'obtiennent en particularisant la quantité

$$g_m(\omega, V) = \int_{z_m} \left(\frac{z_m - \omega}{V}\right) e^{-\frac{1}{V}|z_m - \omega|^2} p(y_m | \mathbf{x}) \, dz_m, \tag{4.88}$$

que l'on peut réécrire comme

$$g_m(\omega, V) = \frac{1}{V} \left(\int_{z_m} z_m \, p(z_m | y_m) dz_m - \omega \right) \tag{4.89}$$

$$= \frac{1}{V} \left(\mathbb{E}[z_m | y_m; \omega, V] - \omega \right), \qquad (4.90)$$

avec $\mathbb{E}[z_m|y_m;\omega,V]$ espérance mathématique de z_m a posteriori où l'on suppose une distribution a priori de z_m telle que $p(z_m;\omega,V) \propto e^{-\frac{|z_m-\omega|^2}{V}}$. Le terme $\frac{\partial g_{\text{out}}}{\partial \omega}(\omega,V)$ quant à lui peut s'écrire :

$$\frac{\partial g_m}{\partial \omega}(\omega, V) = \int p(y_m | z_m) \frac{\partial}{\partial \omega} \left[e^{-\frac{|z_m - \omega|^2}{V}} \left(\frac{z_m - \omega}{V}\right) \right] dz_m \tag{4.91}$$

$$= \int_{z_m} p(y_m | z_m) \left[e^{-\frac{|z_m - \omega|^2}{V}} \left| \frac{z_m - \omega}{V} \right|^2 - e^{-\frac{|z_m - \omega|^2}{V}} \frac{1}{V} \right] dz_m$$
(4.92)

$$= \frac{1}{V^2} \int_{z_m} |z_m - \omega|^2 p(z_m | y_m) dz_m - \frac{1}{V}$$
(4.93)

$$= \frac{1}{V^2} \operatorname{var}[z_m | y_m; \omega, V] - \frac{1}{V}$$
(4.94)

avec var $[z_m|y_m;\omega,V]$ variance de z_m a posteriori où l'on suppose une distribution a priori de z_m telle que $p(z_m;\omega) \propto e^{-\frac{|z_m-\omega|^2}{V}}$. Considérant le modèle (4.68), on obtient ainsi pour $\mathbf{E}[z_m|y_m;\omega,V]$ et var $[z_m|y_m;\omega,V]$ (*cf.* [114] pour un développement détaillé des calculs) :

$$\mathbf{E}[z_m|y_m;\omega,V] = \left(\frac{|y_m|}{1+\sigma^2/V}R_0\left(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}\right) + \frac{|\omega|}{V/\sigma^2+1}\right)\frac{\omega}{|\omega|}$$
(4.95)

$$\operatorname{var}[z_m|y_m;\omega,V] = \frac{|y_m|^2}{\left(1+\sigma^2/V\right)^2} + \frac{|\omega|^2}{\left(V/\sigma^2+1\right)^2} + \frac{1+\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}R_0(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2})}{1/\sigma^2+1/V}$$
(4.96)

$$+ |\mathbf{E}[z_m|y_m;\omega,V]|^2 \tag{4.97}$$

avec $R_0 \triangleq I_1/I_0$ ratio des fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordre 1 et 0. En injectant ces résultats dans les équations (4.90) et (4.94), on obtient alors la mise à jour itérative des variables R_n , ω_m et Σ_n (*cf.* équations (3.96)-(3.98) section 3.4.2 paragraphe **Generalized (swept) approximate message passing**). Selon la stratégie de mise à jour des quantités choisie (*cf.* section 3.4.2), ces dérivations ont donné lieu aux algorithmes prGAMP (pour *phase retrieval generalized approximate message passing* [114]), prSAMP (pour *phase retrieval swept approximate message passing* [100]) et prVAMP (pour *phase retrieval vector approximate message passing* [84]) respectivement extensions des algorithmes AMP, SwAMP et VAMP.

Si l'algorithme prGAMP a montré ses faiblesses face à l'approche prVBEM [37] en terme de robustesse au bruit additif, prSAMP [99] présente de meilleures performances d'estimation, notamment dans les cas de problèmes sous-déterminés. Son pseudo-code correspond à la particularisation de l'algorithme 1 aux équations (4.90)-(4.97).

4.3. Conclusions

Ce chapitre sur l'état de l'art des méthodes d'estimation des directions d'arrivée nous a permis d'observer que l'évolution et l'amélioration de ces méthodes passent par l'exploitation d'a priori sur le signal ou sur les incertitudes du milieu de propagation mais également d'une estimation sous contrainte autre que l'erreur classique de reconstruction (minimisation de la distorsion, d'erreur de projection).

Les méthodes paramétriques d'estimation montrent quant à elles l'intérêt d'exploiter l'information sur les statistiques des variables aléatoires considérées dans le modèle génératif pour effectuer une estimation au sens du maximum de vraisemblance, plus robuste au bruit additif et aux incertitudes sur le modèle.

Par la suite, nous avons pu voir l'intérêt d'exploiter un a priori parcimonieux sur le vecteur \mathbf{x} et les méthodes issues de cette approximation. En considérant un faible nombre de sources dans le milieu, a priori compatible avec notre application en acoustique sous-marine⁸, il est possible d'estimer les composantes de \mathbf{x} de manière robuste et ce même dans des cas de problèmes sous-déterminés.

Ensuite nous avons vu les méthodes proposées pour prendre en compte les incertitudes sur le modèle. En premier lieu les méthodes déterministes, proposant une réécriture du modèle génératif afin de prendre en compte ces incertitudes et d'estimer empiriquement les grandeurs statistiques de celles-ci pour réaliser leur estimation. Nous avons également vu les méthodes bayésiennes d'estimation, qui, prenant en compte non pas les grandeurs statistiques des incertitudes mais les densités de probabilité des variables aléatoires du modèle, permettent une formulation bayésienne d'estimation de \mathbf{x} , et ainsi une estimation des directions d'arrivée robuste à l'incertitude, si tant est que ces incertitudes soient modélisées correctement.

Pour finir, nous avons vu qu'en particularisant le modèle de perturbation au cas d'un bruit de phase sur les mesures, nous obtenons un problème utilisé dans des problématiques

^{8.} Nous entendons par là qu'il est plus fréquent de devoir retrouver un ou peu de signaux dans un bruit de fond en acoustique sous marine que dans des problématiques d'imagerie.

de *phase retrieval*. Après une rapide revue des méthodes déterministes pour résoudre ce problème, nous avons pu voir différentes méthodes basées sur des approximations variationnelles bayésiennes pour la recontruction de phase. Parmi ces méthodes, les algorithmes prVBEM et prSAMP présentent un intérêt particulier du fait de leurs performances au regard notamment de l'approche prGAMP, et de leur adaptabilité à un modèle de bruit de phase plus complexe que celui employé ici, permettant alors d'intégrer les informations sur la fluctuation dans le modèle a priori.

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant

Sommaire

5.1	Modèl	e d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation .	92
5.2	Modèle gaussien		93
	5.2.1	Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature .	94
	5.2.2	Approximation de Bethe : paSAMP	97
	5.2.3	Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP	100
5.3	Modèle de Von Mises		101
	5.3.1	Approximation de champ moyen : VistaBEM	102
	5.3.2	Approximation de Bethe : VitAMin	104
	5.3.3	Analyse critique des méthodes VistaBEM et VitAMin	106
5.4	Évaluation des performances des méthodes proposées		107
	5.4.1	Plan d'expériences	107
	5.4.2	Métriques de performances	107
	5.4.3	Critères d'arrêt	108
	5.4.4	Évaluation des performances de paSAMP	109
	5.4.5	Évaluation des performances de VistaBEM et VitAMin	119
5.5	Conclusion		

Focalisant chacun sur un domaine différent de la littérature (propagation acoustique, inférence bayésienne et traitement d'antenne), les chapitres précédents mettent en évidence quelques points de convergence :

 le chapitre 2 souligne la pertinence d'un modèle probabiliste de bruit de phase structuré pour la prise en compte des déformations du front d'onde incident (*cf.* section 2.3.3),

- le chapitre 3 dresse un portrait des algorithmes variationnels bayésiens les plus populaires, plus spécifiquement ceux résolvant l'approximation de champ moyen et l'approximation de Bethe,
- le chapitre 4 expose en particulier, dans sa dernière section, une utilisation de ces approches pour le problème de reconstruction de phase que l'on peut voir comme une première réponse au problème d'estimation de directions d'arrivée en milieu océanique fluctuant.

Dans ce chapitre, nous présentons nos propositions algorithmiques au regard de cet état de l'art. Adoptant le modèle de bruit de phase, deux distributions probabilistes sont considérées : le modèle gaussien et le modèle de Von Mises [80][81]. Pour chacune, des procédures bayésiennes sont développées, basées sur l'approximation de champ moyen et l'approximation de Bethe.

Ainsi, le chapitre est découpé en quatre grandes sections : après une formalisation du modèle d'observation et du problème d'estimation d'intérêt (section 5.1), les sections 5.2 et 5.3 traitent chacune d'un des deux modèles a priori considérés pour le bruit de phase et des procédures algorithmiques mises en oeuvre pour les exploiter, tandis que la section 5.4 propose un ensemble d'expériences numériques visant à comparer et évaluer les algorithmes proposés.

5.1. Modèle d'observation, a priori parcimonieux et problème d'estimation

La prise en compte du modèle de bruit de phase (2.35) adjoint au modèle linéaire "classique" (4.8) considéré en estimation de DOA résulte naturellement dans un modèle similaire à celui considéré en reconstruction de phase : $\forall m \in \{1, \ldots, M\}$, on modélise le champ acoustique mesuré par le *m*-ième capteur comme

$$y_m = e^{i\psi_m} \sum_{n=1}^N d_{mn} x_n + n_m,$$
 (5.1)

où $\psi_m \in [0, 2\pi]$ représente cette fois, le bruit de phase perturbant la mesure. Sous une formulation matricielle, le modèle s'écrit simplement

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{n} \tag{5.2}$$

où $\mathbf{P} = \text{diag}\left(\left[e^{i\psi_1}, \ldots, e^{i\psi_M}\right]\right)$ est une matrice diagonale dont les éléments contiennent les phases manquantes des observations.

Tout comme en reconstruction de phase, le bruit **n** est considéré circulaire gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 . Par ailleurs, en accord avec les conclusions de l'état

de l'art en estimation de directions d'arrivée (*cf.* chapitre 4), un a priori parcimonieux - plus précisément Bernoulli-gaussien - est posé sur le vecteur \mathbf{x} : on le suppose ainsi s'exprimant comme $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi} \odot \mathbf{s}$ avec \odot produit terme-à-terme entre $\boldsymbol{\chi}$ variable gaussienne et \mathbf{s} variable de Bernoulli (de réalisations dans $\{0, 1\}^N$) :

$$p(\boldsymbol{\chi}) = \prod_{i=1}^{N} p(\chi_i) \text{ où } p(\chi_i) = \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2),$$
(5.3)

$$p(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^{N} p(s_i) \text{ où } p(s_i) = \text{Ber}(\rho).$$
(5.4)

Rappelons qu'il en découle que $p(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i)$ avec

$$p(x_i) = \rho \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2) + (1 - \rho)\delta_0.$$
(5.5)

La différence majeure avec les algorithmes de reconstruction de phase exposés dans le chapitre précédent tient dans les modèles a-priori posés sur la variable $\{\psi_m\}_m$: tandis qu'elles sont supposées suivre une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ dans le problème de reconstruction de phase, nous proposons ici de les considérer comme obéissant à des lois informées par la physique de la propagation.

Enfin, plusieurs formulations du problème d'estimation de directions d'arrivée peuvent là encore être considérées. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, on peut classiquement s'intéresser à la solution au sens du maximum a posteriori (MAP) ou du minimum d'erreur quadratique moyenne (MMSE)

$$\mathbf{x}_{\mathrm{MAP}}^{\star} = \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{arg\,max}} \log p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \tag{5.6}$$

$$\mathbf{x}_{\text{MMSE}}^{\star} = \arg\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \int_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{2}^{2} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}.$$
 (5.7)

Dans les deux cas, une connaissance de la distribution a posteriori $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ est nécessaire.

5.2. Modèle gaussien

Dans un premier temps et dans la continuité des travaux [34] présentés ci-après, nous nous sommes intéressés à un modèle de phase gaussien multivarié, *i.e.*,

$$p(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} |\Lambda_{\boldsymbol{\psi}}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\psi}})^T \Lambda_{\boldsymbol{\psi}}^{-1} (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\psi}})}$$
(5.8)

où μ_{ψ} et Λ_{ψ} sont respectivement les moyenne et matrice de covariance de la distribution, et |.| représente le déterminant matriciel.

Ce modèle gaussien présente plusieurs intérêts :

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant

- suivant la structure de la matrice de covariance, des relations de dépendance entre les bruits de phase perturbant les mesures de différents capteurs peuvent être prises en compte,
- le modèle est simple et peut être facilement intégré dans les procédures algorithmiques de la littérature.

Dans [34], les auteurs considèrent le cas particulier ¹ d'une chaîne de Markov, *i.e.*,

$$p(\psi) = \prod_{m=2}^{M} p(\psi_{m}|\psi_{m-1}) p(\psi_{1})$$
(5.9)

avec $p(\psi_m|\psi_{m-1}) = \mathcal{N}(\psi_{m-1}, \sigma_{\psi}^2), \forall m \in \{2, \ldots, M\}$ et $p(\psi_1) = \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$. Ré-exprimée dans le modèle général (5.8), la chaîne de Markov correspond à une moyenne μ_{ψ} nulle et une matrice de covariance Λ_{ψ} telle que

$$\Lambda_{\psi}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{1}^{2}} + \frac{1}{\sigma_{\psi}^{2}} & -\frac{1}{\sigma_{\psi}^{2}} & 0 & 0\\ -\frac{1}{\sigma_{\psi}^{2}} & \frac{1}{\sigma_{\psi}^{2}} & \ddots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\sigma_{\psi}^{2}}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sigma_{\psi}^{2}} & \frac{1}{\sigma_{\psi}^{2}} \end{pmatrix}.$$
 (5.10)

Concrètement, ce modèle décrit le bruit de phase engendré par les fluctuations spatiales du milieu de propagation tout au long de l'antenne selon une dépendance consécutive des capteurs. L'intensité des fluctuations peut être liée à la valeur du paramètre σ_{ψ}^2 . C'est ce modèle particulier que nous proposons également de considérer dans ce premier temps de notre étude. Dans la suite de cette section, nous supposerons donc le modèle (5.8) avec $\mu_{\psi} = \mathbf{0}_M$.

5.2.1. Approximation de champ moyen : paVBEM, dans la littérature

La contribution [34] présente une procédure VBEM exploitant le modèle d'observation (5.2) et les a priori (5.3)-(5.8). L'algorithme résultant, appelé paVBEM (pour *phase aware Variational Bayesian Expectation Maximisation*), s'appuie sur des mises à jour similaires à celles développées dans le cadre des décompositions parcimonieuses (*cf.* section 3.4.1) et dans le cadre de la reconstruction de phase (*cf.* section 4.2.4.2).

Ainsi, l'approximation de champ moyen considérée s'énonce comme

$$p(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi} | \mathbf{y}) \simeq q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) = q(\boldsymbol{\psi}) \ q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) = \prod_{m} q(\psi_{m}) \prod_{n} q(\chi_{n}, s_{n}).$$
(5.11)

^{1.} Cependant sans perte de généralité, car l'algorithme proposé n'exploite pas la structure particulière de $\Lambda_{\psi}.$

Particularisées à ce cas, les équations de mise à jour du VBEM (3.3) s'écrivent² : $\forall n \in \{1, ..., N\}, \forall m \in \{1, ..., M\},$

$$q(\psi_m) \propto \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\chi} \, d\boldsymbol{\psi}_{\neq m}\right), \quad (5.12)$$
$$\propto p(\psi_m) \, \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\chi} \, d\boldsymbol{\psi}_{\neq m}\right), \quad (5.13)$$

$$q(\chi_n, s_n) \propto \exp\left(\int_{\boldsymbol{\psi}} q(\boldsymbol{\psi}) \int_{\boldsymbol{\chi}_{\neq n}} \sum_{\mathbf{s}_{\neq n}} \prod_{k \neq n} q(\chi_k, s_k) \log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\chi}_{\neq n} \, d\boldsymbol{\psi}\right), \quad (5.14)$$
$$\propto p(\chi_n) p(s_n) \exp\left(\int_{\boldsymbol{\psi}} q(\boldsymbol{\psi}) \int_{\boldsymbol{\chi}_{\neq n}} \sum_{\mathbf{s}_{\neq n}} \prod_{k \neq n} q(\chi_k, s_k) \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) d\boldsymbol{\chi}_{\neq n} d\boldsymbol{\psi}\right) \quad (5.15)$$

où $\psi_{\neq m}$ (resp. $\chi_{\neq n}$ et $\mathbf{s}_{\neq n}$) désigne le vecteur composé des ψ_l (resp. χ_k et s_k) pour $l \neq m$ (resp. $k \neq n$).

On obtient finalement (cf. rapport technique [35] pour le détail des calculs)

— pour la distribution a posteriori de ψ :

$$q\left(\boldsymbol{\psi}\right) = \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\boldsymbol{\psi}}, \Sigma_{\boldsymbol{\psi}}) \tag{5.16}$$

avec

$$\Sigma_{\psi}^{-1} = \Lambda_{\psi}^{-1} + \Lambda^{-1}$$

$$\mathbf{m}_{\psi} = \Sigma_{\psi} \Lambda^{-1} \left[\arg(y_1 \langle z_1 \rangle^*), \dots, \arg(y_M \langle z_M \rangle^*) \right]^T$$
(5.17)

où $\Lambda^{-1} \triangleq \operatorname{diag}\left(\frac{2}{\sigma^2}[|y_1\langle z_1\rangle^*|,\ldots,|y_M\langle z_M\rangle^*|]^T\right), \langle z_m\rangle \triangleq \sum_n q(s_n = 1)m_{\chi}(s_n = 1)d_{mn}, \operatorname{avec}\left\{m_{\chi}(s_n)\right\}_n \operatorname{et}\left\{q(s_n)\right\}_n \operatorname{respectivement}$ liés aux distributions a posteriori des variables χ et \mathbf{s} ,

— pour la distribution a posteriori de $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi} \odot \mathbf{s}$:

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \qquad q(\chi_n, s_n) = q(\chi_n | s_n) q(s_n),$$
 (5.18)

^{2.} Ici encore, nous abandonnons les indices d'itérations pour la simplicité de notation.

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant

avec

$$q(\chi_n|s_n) = \mathcal{CN}(m_{\chi}(s_n), \Sigma_{\chi}(s_n)), \qquad (5.19)$$

$$q(s_n) \propto \sqrt{\Sigma_{\chi}(s_n)} \exp\left(\frac{|m_{\chi}(s_n)|^2}{\Sigma_{\chi}(s_n)}\right) p(s_n)$$
 (5.20)

 et

$$\Sigma_{\chi}(s_n) = \frac{\sigma_x^2 \sigma^2}{\sigma^2 + s_n \sigma_x^2 \mathbf{d}_n^H \mathbf{d}_n},$$
(5.21)

$$m_{\chi}(s_n) = s_n \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2 + s_n \sigma_x^2 \mathbf{d}_n^H \mathbf{d}_n} \langle \mathbf{r}_n \rangle^H \mathbf{d}_n, \qquad (5.22)$$

$$\langle \mathbf{r}_n \rangle = \overline{\mathbf{y}} - \sum_{k \neq n} q(s_k = 1) \ m_{\chi}(s_k = 1) \ \mathbf{d}_k, \tag{5.23}$$

$$\overline{\mathbf{y}} = \left[y_m e^{-im_{\psi_m}} R_0\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_m}}\right) \right]_{m=\{1\dots M\}},\tag{5.24}$$

où m_{ψ_m} (respectivement Σ_{ψ_m}) est le *m*-ième élément de \mathbf{m}_{ψ} (respectivement de la diagonale de Σ_{ψ}).

En sus des mises à jour consécutives (5.16)-(5.24), une étape d'estimation de la variance de bruit peut être ajoutée pour aider à la convergence de l'algorithme :

$$\hat{\sigma}^{2} = \arg\max_{\sigma^{2}} \int_{\boldsymbol{\psi}} \int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\psi}) \ q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \ d\boldsymbol{\chi} \ d\boldsymbol{\psi}$$
(5.25)
$$= \frac{1}{M} \Big(\mathbf{y}^{H} \mathbf{y} - 2 \sum_{n} \Re \Big\{ q(s_{n} = 1) \ m_{\chi}(s_{n} = 1) \ \overline{\mathbf{y}}^{H} \mathbf{d}_{n} \Big\}$$
$$+ \sum_{n} \sum_{k \neq n} q(s_{n} = 1) \ m_{\chi}(s_{n} = 1)^{*} \ q(s_{k} = 1) \ m_{\chi}(s_{k} = 1) \ \mathbf{d}_{n}^{H} \mathbf{d}_{k}$$
$$+ \sum_{n} q(s_{n} = 1) \Big(\Sigma_{\chi}(s_{n} = 1) + m_{\chi}(s_{n} = 1)^{*} m_{\chi}(s_{n} = 1) \Big) \mathbf{d}_{n}^{H} \mathbf{d}_{n} \Big).$$
(5.26)

Revenant au problème (5.7), l'estimation des composantes de \mathbf{x} s'obtient après convergence selon l'expression

$$\hat{x}_n = q(s_n = 1) \ m_{\chi}(s_n = 1), \qquad \forall n = \{1, \dots, N\}.$$
 (5.27)

Confrontée à des données simulées, l'approche s'avère prometteuse : l'intégration de la distribution a priori sur le bruit de phase permet une meilleure robustesse de l'estimation en comparaison à d'autres algorithmes classiques handicapés par des a priori non-informés.

5.2.2. Approximation de Bethe : paSAMP

Dans la continuité de paVBEM, nous proposons une méthode basée sur l'approximation variationnelle de Bethe prenant en compte un a priori gaussien sur le bruit de phase généré par les fluctuations du milieu de propagation. Présenté sous la forme d'un graphe factoriel, le modèle (5.2)-(5.8) est donné dans la figure 5.1. On y voit les dépendances entre les bruits de phases qui sont problématiques pour une application directe des méthodes AMP généralisées (*cf.* section 3.4.2 paragraphe **Generalized (swept) approximate message passing**).



FIGURE 5.1. – Graphe factoriel du modèle génératif pour un cas de bruit de phase multivarié

Pour contourner cet écueil, une première approximation consiste à calculer les marginales $p(\psi_m)$ des distributions a priori des ψ_m . Dans le cas gaussien, elles s'expriment alors simplement comme $\forall m \in \{1, \ldots, M\}$

$$p(\psi_m) = \mathcal{N}(\mu_{\psi_m}, \Lambda_{\psi_m}) \tag{5.28}$$

avec μ_{ψ_m} (respectivement Λ_{ψ_m}) le *m*-ième élément du vecteur μ_{ψ} (respectivement de la diagonale de Λ_{ψ}).

Au sein des méthodes AMP et comme nous l'avons exposé dans le chapitre 3, les travaux [14] montrent que les algorithmes de propagation de messages "classiques" (*cf.* section 3.4.2 paragraphe (Swept) approximate message passing), du fait de la mise à jour en parallèle des variables, souffrent de problèmes de convergence pour des cas de matrices de mesures s'éloignant de scénarios simples. Cette sensibilité à la matrice de mesure nous suggère d'utiliser la méthode *swept approximate message passing* afin d'avoir une meilleure garantie de convergence de l'algorithme ³.

C'est donc cette approche que nous choisissons d'implémenter pour traiter de l'approximation de Bethe dans le contexte particulier qui nous intéresse ici.

^{3.} Notons que l'approche VAMP (*cf.* section 3.4.2 paragraphe Vector approximate message passing) semble également prometteuse, nous n'avons malheureusement pas eu le temps de nous y pencher plus en détail dans cette thèse.

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant

Particularisation de l'algorithme GSwAMP Dans la lignée de prSAMP (*cf.* section 4.2.4.2 paragraphe **Approximation de Bethe**) et gardant en tête le pseudo-code générique 1, la particularisation de l'algorithme GSwAMP s'obtient en calculant, pour le modèle (5.2)-(5.8) les quantités

$$g_m(\omega, V) = \int_{z_m} \left(\frac{z_m - \omega}{V}\right) e^{-\frac{1}{V}|z_m - \omega|^2} p(y_m | \mathbf{x}) dz_m,$$
(5.29)

$$= \frac{1}{V} \left(\mathbf{E}[z_m | y_m; \omega, V] - \omega \right), \tag{5.30}$$

$$\frac{\partial g_m}{\partial \omega}(\omega, V) = \int p(y_m | z_m) \frac{\partial}{\partial \omega} \left[e^{-\frac{|z_m - \omega|^2}{V}} \left(\frac{z_m - \omega}{V} \right) \right] dz_m, \tag{5.31}$$

$$= \frac{1}{V^2} \operatorname{var}[z_m | y_m; \omega, V] - \frac{1}{V}, \qquad (5.32)$$

avec $\mathbb{E}[z_m|y_m;\omega,V]$ (resp. var $[z_m|y_m;\omega,V]$) espérance mathématique (resp. variance) de $z_m = \sum_n d_{mn} x_n$ a posteriori où l'on suppose une distribution a priori de z_m telle que $p(z_m;\omega,V) \propto e^{-\frac{|z_m-\omega|^2}{V}}$.

On obtient ainsi

$$\mathbf{E}[z_m|y_m;\omega,V] = \frac{V}{\sigma^2 + V} y_m e^{-im_{\psi_m}} R_0\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_m}}\right) + \frac{\omega\sigma^2}{\sigma^2 + V}$$
(5.33)

 et

$$\operatorname{var}[z_{m}|y_{m};\omega,V] = \frac{2V\sigma^{2}|y_{m}||\omega|}{(\sigma^{2}+V)^{2}} \cos(\arg(y_{m}^{*}\omega)+m_{\psi_{m}})R_{0}\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_{m}}}\right) + \frac{\sigma^{2}V}{V+\sigma^{2}} + \frac{|Vy_{m}|^{2}+|\sigma^{2}\omega|^{2}}{(\sigma^{2}+V)^{2}} - |\operatorname{E}[z_{m}|y_{m};\omega,V]|^{2}.$$
(5.34)

avec

$$m_{\psi_m} \triangleq \frac{-\arg(y_m^*\omega)}{1 + \frac{V + \sigma^2}{2|y_m||\omega|\Lambda_{\psi_m}}} \text{ et } \Sigma_{\psi_m} \triangleq \frac{\Lambda_{\psi_m}(V + \sigma^2)}{2|y_m||\omega|\Lambda_{\psi_m} + V + \sigma^2}.$$
(5.35)

Les détails des calculs sont donnés en annexe A du manuscrit.

Estimation de la variance du bruit additif On ajoute également une étape optionnelle d'estimation de la variance de bruit additif. D'une manière similaire à celle des travaux de l'algorithme paVBEM [34], ce calcul nous permet d'être plus robuste au bruit additif, plus particulièrement en cas de mauvaise modélisation a priori de celui-ci. Dans [34], elle repose naturellement sur l'utilisation d'une approximation de champ-moyen. Ici, on

choisit une façon simple de l'estimer :

$$\hat{\sigma}^2 = \operatorname*{arg\,max}_{\sigma^2} \log p(\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{z}};\sigma^2), \tag{5.36}$$

où $\tilde{\mathbf{z}}$ est l'estimée courante du vecteur composé des $\{z_m\}_m$, prédicteur linéaire attaché au modèle linéaire généralisé considéré. Par la gaussiannisation des messages sous-tendant l'algorithme SwAMP (*cf.* section 3.4.2 paragraphe **Rexaled belief propagation**), on a $\tilde{\mathbf{z}} \triangleq [\mathbf{E}[z_1|y_1;\omega,V],\ldots,\mathbf{E}[z_M|y_M;\omega,V]]^T$ avec ω et V paramètres ajustés selon l'itération (*cf.* pseudo-code 2). On obtient finalement

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M} \left(\mathbf{y}^H \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{z}}^H \tilde{\mathbf{z}} - 2\Re\{\overline{\mathbf{y}}^H \tilde{\mathbf{z}}\} \right), \tag{5.37}$$

avec

$$\overline{\mathbf{y}} \triangleq \left[y_m e^{-im_{\psi_m}} \right]_{m=\{1\dots M\}}.$$
(5.38)

Utilisation du damping Après convergence (si l'algorithme converge), le résultat des estimations (5.6)-(5.7) est donné par l'espérance mathématique de la marginale a posteriori des $\{x_n\}_n$, notée a_n (cf. équation (3.61)). Comme nous l'avons exposé dans le chapitre 3, parmi les stratégies proposées dans la littérature pour améliorer la convergence des algorithmes AMP, l'utilisation d'un amortissement (ou damping, cf. équation (3.13)), bien que ne disposant pas de motivations théoriques, s'avère efficace. Nous faisons ainsi le choix d'appliquer un facteur noté λ sur les solutions a_n tel qu'à l'itération k:

$$a_n^{(k)} = \lambda a_n^{(k-1)} + (1-\lambda)a_n^{(k)}.$$
(5.39)

Ainsi, pour un fort facteur de *damping*, l'estimation évoluera de manière plus stable, mais avec possiblement un nombre d'itérations avant convergence plus important.

L'algorithme ainsi obtenu est baptisé paSAMP (pour *phase-aware Swept Approximate Message Passing*). Ses itérations sont présentées de façon synthétique dans le pseudo-code 2.

Nous proposerons dans la section 5.4 d'évaluer une implémentation MATLAB de cet algorithme. Nous regarderons plus particulièrement la robustesse de cette méthode au bruit additif ainsi qu'au bruit multiplicatif. On peut toutefois émettre quelques critiques en considérant la modélisation utilisée dans paSAMP.

Cet algorithme et de premiers résultats ont fait l'objet de publications aux conférences Latent Variable Analysis and Signal Separation [6] et Gretsi [7].

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant

Pseudo-code 2 Algorithme paSAMP

Entrées : y, D, σ^2 , k_{max} , λ , $\{\Lambda_{\psi_m}\}_{m=\{1,...,M\}}$ Initialisation : $\{a_n^{(0)}, v_n^{(0)}\}_{n\in\{1,...,N\}}$, $\{\omega_m^{(0;N+1)}, V_m^{(0;N+1)}\}_{m\in\{1,...,M\}}$, k = 01: while $k < k_{max}$ do for m = 1...M do $V_m^{(k+1;1)} = \sum_n d_{mn}^2 v_n^{(k)}$ $\omega_m^{(k+1;1)} = \sum_n d_{mn} a_n^{(t)} - V_m^{(k+1;1)} g_m (\omega_m^{(k;N+1)}, V_m^{(k;N+1)})$ selon (5.30) et (5.33) 2: 3: 4: end for 5: $\mathbf{p} = \text{permute}([1, 2, \dots N])$ 6: for $j = 1 \dots N$ do 7: $n = p_i$ 8: $\Sigma_n^{(k+1)} = \left[\sum_m d_{mn}^2 \left(-\frac{\partial g_m}{\partial \omega} (\omega_m^{(k+1;j)}, V_m^{(k+1;j)}) \right) \right]^{-1} \text{ selon } (5.32) \text{ et } (5.34)$ 9: $R_n^{(k+1)} = a_n^{(k)} + \Sigma_n^{(k+1)} \left[\sum_m d_{mn} g_m(\omega_m^{(k+1;1)}, V_m^{(k+1;1)}) \right]$ 10: $a_n^{(k+1)} = g_1(R_n^{(k+1)}, \Sigma_n^{(k+1)}) \text{ selon } (3.54)$ $v_n^{(k+1)} = g_2(R_n^{(k+1)}, \Sigma_n^{(k+1)}) \text{ selon } (3.55)$ 11: 12: $for \ \epsilon = 1 \dots M \ do$ $V_{\epsilon}^{(k+1;j+1)} = V_{m}^{(k+1;j)} + d_{mn}^{2} (v_{n}^{(k+1)} - v_{n}^{(k)})$ $\omega_{m}^{(k+1;j+1)} = \omega_{m}^{(k+1;j)} + d_{mn} (a_{n}^{(k+1)} - a_{n}^{(k)})$ $-g_{m} (\omega_{m}^{(k+1;1)}, V_{m}^{(k+1;1)}) \cdot (V_{m}^{(k+1;j+1)} - V_{m}^{(k+1;j)}) \text{ selon (5.30) et (5.33)}$ 13:14:15:end for 16:**Optionel :** mise à jour de σ^2 selon (5.37) et (5.38) 17:end for 18:**Optionel :** $a_n^{(k+1)} = \lambda a_n^{(k)} + (1-\lambda)a_n^{(k+1)}$ (damping) 19:20: k = k + 121: end while Sorties : $\{a_n^{(k_{max})}\}_n$

5.2.3. Analyse critique des méthodes paVBEM et paSAMP

Au vu des approximations considérées, aussi bien sur la modélisation des fluctuations dans le modèle génératif que dans les algorithmes paVBEM et paSAMP, nous pouvons anticiper les limitations des performances de ces méthodes :

— Telles quelles, les approches G(Sw)AMP sont critiquables au regard du modèle (5.2)-(5.8), car le modèle multidimensionnel ne peut être incorporé et exploité directement. Le choix de la marginalisation est le plus intuitif, mais il doit être vu comme une approximation d'ordre 1 et conduit à une perte de l'information a priori de corrélation entre les bruits de phase ψ_m . Cependant, les méthodes AMP et notamment SwAMP ont prouvé leur intérêt dans le problème d'acquisition comprimée et plus largement de reconstruction parcimonieuse. Elles surpassent en particulier les performances de VBEM dans de nombreux cas pratiques [71].

— De son côté, si l'approximation de champ-moyen exploite bien le modèle multidimensionnel, elle impose en revanche une indépendance *a posteriori* des bruits de phase ψ_m .

Ces faiblesses structurelles seront à garder en tête lors de l'analyse expérimentale de paVBEM et paSAMP.

Par ailleurs, indépendamment des outils algorithmiques mis en oeuvre, la considération d'un a priori gaussien pour modéliser un bruit de phase est également questionnable : il est en effet intrinsèquement inadapté à la description d'une variable aléatoire à réalisations sur $[0, 2\pi]$. Dans le deuxième temps de cette thèse, nous nous sommes donc intéressés aux statistiques directionnelles.

5.3. Modèle de Von Mises

Actant de l'inadéquation du modèle gaussien pour la modélisation de phase, la recherche d'un nouveau modèle conduit naturellement aux statistiques directionnelles [80]. Parmi celles-ci, la plus connue est probablement la distribution de Von Mises, définie indépendamment pour chaque variable $\psi_m, \forall m \in \{1, \ldots, M\}$ selon

$$p(\psi_m) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_m)} \exp(\kappa_m \cos(\psi_m - \mu_{\psi_m}))$$
(5.40)

où $\kappa_m \in \mathbb{R}$ et $\mu_{\psi_m} \in]-\pi,\pi]$ sont les paramètres de la distribution, et I_0 est la fonction de Bessel modifiée du premier type d'ordre 0. Cette distribution a fait l'objet de nombreuses contributions dans la littérature, *cf.* par exemple [53]. Dans la pratique, elle est bien adaptée aux situations où l'on veut prendre en compte des informations a priori (comme la moyenne par le paramètre μ_{ψ_m} ou la variance par κ_m) sur les phases indépendamment les unes des autres. Il est par ailleurs intéressant de noter qu'il existe un lien entre la loi gaussienne et la loi de Von Mises que nous exploiterons à plusieurs reprises dans nos dérivations algorithmiques : pour de grandes valeurs de κ_m , la contribution du terme $\cos(\psi_m - \mu_{\psi_m})$ s'amenuise et un développement limité à l'ordre 1 peut être proposé :

$$\exp(\kappa_m \cos(\psi_m - \mu_{\psi_m})) \sim \exp\left(\kappa_m \left(1 - \frac{(\psi_m - \mu_{\psi_m})^2}{2}\right)\right)$$
(5.41)

$$\sim e^{\kappa_m} \exp\left(-\frac{\kappa_m}{2}(\psi_m - \mu_{\psi_m})^2\right).$$
 (5.42)

Par identification des paramètres et réécriture des facteurs de normalisation, on obtient

$$\frac{1}{2\pi I_0(1/a)} \exp\left(\frac{1}{a}\cos(x-y)\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left(-\frac{1}{2a}(x-y)^2\right)$$
(5.43)

pour de faibles a, paramètre homogène à une variance dans la loi gaussienne.

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant

L'extension de la loi de Von Mises (5.40) au cas multivarié n'est pas simple et peut prendre différentes formes [81]. Dans nos travaux, nous considérons que ψ est distribué selon

$$p(\boldsymbol{\psi}) \propto \exp\left(\boldsymbol{\kappa}^{T} \mathbf{c}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\psi}}) - \mathbf{s}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\mu})^{T} \Lambda_{\boldsymbol{\psi}}^{-1} \mathbf{s}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\psi}}) - \mathbf{c}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\psi}})^{T} \Lambda_{\boldsymbol{\psi}}^{-1} \mathbf{c}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\psi}})\right) \quad (5.44)$$

avec

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\psi}}) \triangleq \left[\cos\left(\psi_1 - \mu_{\psi_1}\right), \dots, \cos\left(\psi_M - \mu_{\psi_M}\right)\right]^T, \qquad (5.45)$$

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\psi}}) \triangleq \left[\sin\left(\psi_1 - \mu_{\psi_1}\right), \dots, \sin\left(\psi_M - \mu_{\psi_M}\right)\right]^T, \tag{5.46}$$

où κ , Λ_{ψ} et μ_{ψ} sont les paramètres de la distribution. La matrice Λ_{ψ}^{-1} est symétrique à valeurs réelles et nulles sur sa diagonale. Elle peut être assimilée à une matrice de précision, représentant les dépendances entre les bruits de phases. Sans perte de généralité⁴, nous supposerons dans la suite que $\mu_{\psi} = [0, \ldots, 0]^T \triangleq \mathbf{0}_M$. Cette extension multivariée de la distribution de Von Mises a été suggérée dans la conclusion de [81], mais, à notre connaissance, ne semble pas avoir été étudiée ou utilisée de manière approfondie.

Ce modèle est intéressant de par son lien avec la distance de Mahalanobis : posant $\Psi \triangleq [e^{i\psi_1}, \ldots, e^{i\psi_M}]^T$, les travaux [33] ont en effet mis en évidence que

$$||\Psi - \mathbf{1}_M||_{\Gamma_{\Psi}}^2 \propto -\log(p(\psi)) \tag{5.47}$$

avec

$$\left(\Gamma_{\Psi}^{-1}\right)_{ik} = \begin{cases} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{ik} & \text{pour } k \neq i\\ \frac{1}{2}\kappa_i - \sum_{l \neq i} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{il} & \text{pour } k = i \end{cases}$$
(5.48)

Cette relation est doublement intéressante : d'une part elle laisse entrevoir une identification facilitée des paramètres de la distribution de Von Mises avec les paramètres physiques de fluctuation, d'autre part elle semble un bon point de départ pour le développement d'un algorithme d'échantillonnage propre à générer des bruits de phase selon (5.44). Ces deux tâches n'ont malheureusement pas pu être traitées dans le temps consacré à cette thèse.

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{MVM}(\psi; \mu_{\psi}, \kappa, \Lambda_{\psi}^{-1})$ la distribution de Von Mises multivariée (5.44) de paramètres $\mu_{\psi}, \kappa, \Lambda_{\psi}^{-1}$.

5.3.1. Approximation de champ moyen : VistaBEM

A l'instar des calculs permettant d'obtenir la méthode paVBEM [34] présentée dans la section 5.2.1, nous proposons ici de reconsidérer les étapes de calcul de la procédure

^{4.} Supposer $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\psi}} \neq [0, \dots, 0]^T$ revient à considérer le modèle d'observation $\mathbf{y} = \mathbf{M}^H \mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{n}$ avec $\mathbf{M} = \text{diag}([e^{i\mu_{\psi_1}}, \dots, e^{i\mu_{\psi_M}}]).$

VBEM (*cf.* section 3.2) afin d'y intégrer le nouvel a priori de Von Mises multivarié (5.44). L'approximation de champ moyen considérée est la même que pour paVBEM :

$$p(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi} | \mathbf{y}) \simeq q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) = q(\boldsymbol{\psi}) \ q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) = \prod_{m} q(\psi_{m}) \prod_{n} q(\chi_{n}, s_{n}).$$
(5.49)

résultant en une même écriture des équations de mises à jour (B.3)-(B.5).

Particularisées à la distribution de Von Mises multivariée (5.44), on obtient finalement — pour la distribution a posteriori de ψ :

$$q(\psi_m) = \frac{1}{2\pi I_0(A_{\psi_m})} \exp\left(A_{\psi_m} \cos(\psi_m - m_{\psi_m})\right) \quad \forall m \in \{1, \dots, M\}$$
(5.50)

avec

$$A_{\psi_m} = |\alpha_1 e^{-i \arg(y_m^* \langle z_m \rangle)} + (\kappa_m - \alpha_3) - \alpha_2 e^{i\pi/2}|$$
(5.51)

$$m_{\psi_m} = \arg(\alpha_1 e^{-i\arg(y_m^*\langle z_m \rangle)} + (\kappa_m - \alpha_3) - \alpha_2 e^{i\pi/2}), \qquad (5.52)$$

 κ_m , *m*-ième élément de κ , $\langle z_m \rangle \triangleq \sum_n q(s_n = 1)m_{\chi}(s_n = 1)d_{mn}$ avec $\{m_{\chi}(s_n)\}_n$ et $\{q(s_n)\}_n$ respectivement liés aux distributions a posteriori des variables χ et \mathbf{s} , et

$$\alpha_1 \triangleq \frac{2}{\sigma^2} |y_m| |\langle z_m \rangle| \tag{5.53}$$

$$\alpha_2 \triangleq 2\sum_{k \neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{mk} \sin(m_{\psi_k}) R_0(A_{\psi_k}), \qquad \alpha_3 \triangleq 2\sum_{k \neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{mk} \cos(m_{\psi_k}) R_0(A_{\psi_k}).$$

— pour la distribution a posteriori de $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi} \odot \mathbf{s}$:

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \qquad q(\chi_n, s_n) = q(\chi_n | s_n) q(s_n),$$
 (5.54)

avec

$$q(\chi_n|s_n) = \mathcal{CN}(m_{\chi}(s_n), \Sigma_{\chi}(s_n)), \qquad (5.55)$$

$$q(s_n) \propto \sqrt{\Sigma_{\chi}(s_n)} \exp\left(\frac{|m_{\chi}(s_n)|^2}{\Sigma_{\chi}(s_n)}\right) p(s_n)$$
 (5.56)

 et

$$\Sigma_{\chi}(s_n) = \frac{\sigma_x^2 \sigma^2}{\sigma^2 + s_n \sigma_x^2 \mathbf{d}_n^H \mathbf{d}_n},\tag{5.57}$$

$$m_{\chi}(s_n) = s_n \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2 + s_n \sigma_x^2 \mathbf{d}_n^H \mathbf{d}_n} \langle \mathbf{r}_n \rangle^H \mathbf{d}_n, \qquad (5.58)$$

$$\langle \mathbf{r}_n \rangle = \overline{\mathbf{y}} - \sum_{k \neq n} q(s_k = 1) \ m_{\chi}(s_k = 1) \ \mathbf{d}_k, \tag{5.59}$$

$$\overline{\mathbf{y}} = \left[y_m e^{-im_{\psi_m}} R_0(A_{\psi_m}) \right]_{m = \{1...M\}}.$$
(5.60)

De la même manière que pa VBEM, l'estimation des composantes de ${\bf x}$ s'obtient après convergence se lon l'expression

$$\hat{x}_n = q(s_n = 1) \ m_{\chi}(s_n = 1), \qquad \forall n = \{1, \dots, N\}.$$
 (5.61)

Comme attendu, il est intéressant de remarquer que l'algorithme VistaBEM "casse" a posteriori les dépendances entre les bruits de phase ψ (*cf.* équation (5.50)) : pour chaque ψ_m , la distribution a posteriori est une Von Mises unidimensionnelle (*cf.* équation (5.40)).

Le détail des dérivations mathématiques menant aux mises à jour (5.50)-(5.60) est inséré en annexe B. A l'instar de paVBEM, une étape d'estimation de la variance de bruit peut être ajoutée pour aider à la convergence de l'algorithme, selon la même expression (5.26).

L'algorithme ainsi obtenu est baptisé VistaBEM (pour Von mISes variaTionnAl Bayesian Expectation Maximization). Ses itérations sont présentées de façon synthétique dans le pseudo-code 3.

5.3.2. Approximation de Bethe : VitAMin

Le modèle de Von Mises multivarié (5.44) présente le même inconvénient aux yeux des méthodes G(Sw)AMP que le modèle gaussien multivarié (5.8) : les dépendances a priori entre les bruits de phase ψ_m sont un frein à une identification immédiate avec un modèle linéaire généralisé.

De même que pour le modèle gaussien, une première approximation de la distribution

Pseudo-code 3 Algorithme VistaBEM

Entrées : y, D, σ^2 , Λ_{u}^{-1} , κ , ρ , k_{max} **Initialisation :** $\{q^{(0)}(s_n), m_{\chi}^{(0)}(s_n)\}_{s_n \in \{0,1\}, n \in \{1,...,N\}}, \{m_{\psi_m}^{(0)}, A_{\psi_m}^{(0)}\}_{m \in \{1,...,M\}}, k = 0$ 1: while $k < k_{max}$ do for $m = 1 \dots M$ do 2: $\langle z_m \rangle^{(k+1)} = \sum_n q^{(k)} (s_n = 1) m_{\chi}^{(k)} (s_n = 1) d_{mn}$ $\alpha_1^{(k+1)} = \frac{2}{\sigma^2} |y_m| |\langle z_m \rangle^{(k+1)} |$ (i) 3: 4:
$$\begin{split} \alpha_{1} &= \overline{\sigma^{2}} |y_{m}|| \langle x_{m} \rangle^{(k+1)} \\ \alpha_{2}^{(k+1)} &= 2 \sum_{l \neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{ml} \sin(m_{\psi_{l}}^{(j)}) R_{0}(A_{\psi_{l}}^{(j)}) \\ & \text{avec } j = k + 1 \text{ si } l < m \text{ et } j = k \text{ si } l > m \\ \alpha_{3}^{(k+1)} &= 2 \sum_{l \neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{ml} \cos(m_{\psi_{l}}^{(j)}) R_{0}(A_{\psi_{l}}^{(j)}) \\ & \text{avec } j = k + 1 \text{ si } l < m \text{ et } j = k \text{ si } l > m \\ A_{\psi_{m}}^{(k+1)} &= |\alpha_{1}^{(k+1)} e^{-i \arg(y_{m}^{*}(z_{m})^{(k+1)})} + (\kappa_{m} - \alpha_{3}^{(k+1)}) - \alpha_{2} e^{i\pi/2}| \\ m_{\psi_{m}}^{(k+1)} &= \arg(\alpha_{1}^{(k+1)} e^{-i \arg(y_{m}^{*}(z_{m})^{(k+1)})} + (\kappa_{m} - \alpha_{3}^{(k+1)}) - \alpha_{2} e^{i\pi/2}) \\ \mathbf{d} \text{ for } \end{split}$$
5:6: 7:8: 9: end for $\overline{\mathbf{y}}^{(k+1)} = \left[y_m e^{-im_{\psi_m}^{(k+1)}} R_0(A_{\psi_m}^{(k+1)}) \right]_{m=\{1\dots M\}}$ 10: for $n = 1 \dots N$ do 11: $\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_n \rangle^{(k+1)} &= \overline{\mathbf{y}}^{(k+1)} - \sum_{l \neq n} q^{(j)}(s_l = 1) \ m_{\chi}^{(j)}(s_l = 1) \ \mathbf{d}_l \\ & \text{avec } j = k+1 \ \text{si} \ l < n \ \text{et} \ j = k \ \text{si} \ l > n \\ \end{aligned}$ $\begin{aligned} \mathbf{Optionel: si \ mise \ à \ jour \ de \ \sigma^2, \ \Sigma_{\chi}^{(k+1)}(s_n) = \frac{\sigma_x^2 \sigma^2}{\sigma^2 + s_n \sigma_x^2 \mathbf{d}_n^H \mathbf{d}_n} \ \text{pour } s_n \in \{0, 1\} \end{aligned}$ 12:13: $m_{\chi}^{(k+1)}(s_n) = s_n \frac{\sum_{\chi}^{(k+1)}(s_n)}{\sigma^2} (\langle \mathbf{r}_n \rangle^{(k+1)})^H \mathbf{d}_n \text{ pour } s_n \in \{0,1\}$ $q^{(k+1)}(s_n) \propto \sqrt{\sum_{\chi}^{(k+1)}(s_n)} \exp\left(\frac{|m_{\chi}^{(k+1)}(s_n)|^2}{\sum_{\chi}^{(k+1)}(s_n)}\right) p(s_n) \text{ pour } s_n \in \{0,1\}$ 14:15:end for 16:**Optionel :** mise à jour de σ^2 selon (5.26). 17:18: k = k + 119: end while Sorties: $\{q^{(k_{max})}(s_n = 1), m_{\chi}^{(k_{max})}(s_n = 1)\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$

a priori (5.44) peut être envisagée sous la forme d'une marginalisation :

$$p(\psi_m) = \int_{\psi_{\neq m}} p(\psi) d\psi_{\neq m}, \qquad (5.62)$$

$$= \int_{\psi_{\neq m}} \mathcal{MVM}(\psi; \mathbf{0}_M, \boldsymbol{\kappa}, \Lambda_{\psi}) d\psi_{\neq m}, \qquad (5.63)$$

$$\propto \exp\left(\kappa_m \cos(\psi_m)\right) \int_{\psi_{\neq m}} \exp\left(\sum_{l\neq m} \kappa_l \cos(\psi_l) - \sum_{l\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{kl} \sin(\psi_l) \sin(\psi_k) - \sum_{l\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{kl} \cos(\psi_l) \cos(\psi_k)\right)$$
(5.64)

$$\exp\left(-2\sin(\psi_m)\sum_{l\neq m}(\Lambda_{\psi}^{-1})_{ml}\sin(\psi_l)-2\cos(\psi_m)\sum_{l\neq m}(\Lambda_{\psi}^{-1})_{ml}\cos(\psi_l)\right)d\psi_{\neq m}.$$
5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant

Par identification, on a

$$p(\psi_m) \propto \exp\left(\kappa_m \cos(\psi_m)\right) \int_{\psi_{\neq m}} \mathcal{MVM}(\psi_{\neq m}; \mathbf{0}_{M-1}, \kappa_{\neq m}, \Lambda_{\psi_{\neq m}})$$
$$\exp\left(-2\sum_{l\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{ml} \cos(\psi_m - \psi_l)\right) d\psi_{\neq m}.$$
(5.65)

Aller au delà de cette équivalence nécessite malheureusement des approximations supplémentaires. Une première peut être de considérer de petites différences d'angle $\psi_m - \psi_l$ et de recourir à un développement limité :

$$p(\psi_m) \stackrel{\sim}{\propto} \exp\left(\kappa_m \cos(\psi_m)\right) \int_{\psi_{\neq m}} \mathcal{MVM}(\psi_{\neq m}; \mathbf{0}_{M-1}, \kappa_{\neq m}, \Lambda_{\psi_{\neq m}})$$
$$\exp\left(-2\sum_{l\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{ml}\right) d\psi_{\neq m}.$$
(5.66)

On obtient finalement que la marginale a priori de ψ_m peut être approchée par une distribution de Von Mises mono-dimensionnelle (5.40) :

$$p(\psi_m) \stackrel{\sim}{\propto} \exp\left(\kappa_m \cos(\psi_m)\right).$$
 (5.67)

Cette approximation est très grossière et mériterait là-encore d'être approfondie. Elle présente toutefois l'avantage de pouvoir être immédiatement exploitée par l'algorithme paSAMP moyennant l'équivalence (5.43), dont les conditions sont déjà requises pour élaborer les dérivations mathématiques de la procédure (cf. annexe A). La combinaison du prior (5.67) et de la procédure paSAMP est baptisée VitAMin dans la suite du manuscrit.

De premiers résultats sur données synthétiques montrant les performances de l'algorithme VitAMin ont été présentés à l'*Underwater Acoustics Conference and Exhibition* [9].

5.3.3. Analyse critique des méthodes VistaBEM et VitAMin

Les même faiblesses comparatives que celle relevées entre les algorithmes paSAMP et paVBEM peuvent également être mentionnées ici : VistaBEM fait le pari d'une approximation forte sur les distributions a posteriori des bruits de phase, tandis que VitAMin s'appuie sur une approximation forte de la distribution a priori de ces bruits de phase. Si cette dernière stratégie semble bien hasardeuse au vu de notre objectif, il est bon encore de rappeler que VitAMin peut faire valoir de meilleures performances sur l'estimation des coefficients \mathbf{x} . Il est ainsi difficile d'anticiper le comportement des algorithmes au regard de simulations numériques.

5.4. Évaluation des performances des méthodes proposées

Cette section se propose d'évaluer les performances des méthodes élaborées sur des données synthétiques. Elle est structurée en trois grandes parties. La première décrit les différentes configurations d'expériences considérées, les métriques utilisées ainsi que les critères d'arrêt proposés pour évaluer les algorithmes. La seconde présente une comparaison des méthodes dites *phase-aware* (paVBEM et paSAMP), tandis que la dernière s'intéresse plus particulièrement aux méthodes VistaBEM et VitAMin.

5.4.1. Plan d'expériences

Pour évaluer les performances de nos algorithmes, nous avons fait le choix de les confronter à des données générées selon les modèles probabilistes exploités par les algorithmes. Ce choix nous permet de bien contrôler tous les paramètres en jeux et ainsi de juger de la bonne intégration des modèles considérés dans les différentes procédures.

Deux modèles probabilistes sont envisagés pour le bruit de phase. Nous proposons donc deux jeux de simulations pour nos algorithmes :

- Le modèle gaussien multivarié exploité dans paVBEM et paSAMP sera testé via le modèle de Markov (5.9)-(5.10).
- Le modèle de Von Mises multivarié exploité dans VistaBEM et VitAMin sera testé via une version 1D de cette distribution (*cf.* équation (5.40)).

Ce dernier jeu de simulations est insatisfaisant dans la mesure où les interactions entre les bruits de phase ne peuvent pas être modélisées. Le travail de dérivation et d'implémentation d'un échantillonneur permettant de générer des réalisations issues d'une distribution de Von Mises multivariée reste à faire. Néanmoins, nous verrons que la considération d'une distribution de Von Mises unidimensionnelle permet déjà une étude de performance intéressante des algorithmes.

Dans toutes les configurations d'expériences considérées, on supposera que les angles d'arrivée des K ondes incidentes peuvent s'écrire comme $\theta_k = -\frac{\pi}{2} + \alpha_k \frac{\pi}{50}$ avec $\alpha_k \in [1, 50]$, $\forall k \in \{1, \ldots, K\}$. Le dictionnaire **D** est défini selon le modèle d'onde plane (4.6) dans l'ensemble des angles $\{\theta_k = -\frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{50}\}_{\alpha \in \{1, \ldots, 50\}}$ et avec $\Delta/\lambda = 1/4$ avec Δ distance inter-capteur et λ longueur d'onde.

5.4.2. Métriques de performances

Pour juger de la performance de nos approches, nous proposons deux métriques : la corrélation normalisée et l'indice de Jaccard.

La corrélation normalisée La corrélation normalisée nous permettra d'évaluer la qualité de reconstruction du support **x**, aussi bien la position des directions d'arrivée telles

qu'indexées dans le dictionnaire que l'amplitude des x_i estimés. Le calcul de cette quantité se fait après convergence de l'algorithme vers une solution $\hat{\mathbf{x}}$, la corrélation normalisée s'exprime donc :

$$Corr_{norm} = \frac{|\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{x}}|}{\|\mathbf{x}\| \| \hat{\mathbf{x}} \|}$$
(5.68)

Largement utilisée comme métrique de performances pour les algorithmes de reconstruction de phase, la corrélation normalisée restera néanmoins sensible aux résidus sur les composantes supposées non-nulles de $\hat{\mathbf{x}}$ et sur les amplitudes estimées.

L'indice de Jaccard La seconde métrique utilisée est une métrique de détection, il s'agit de l'indice de Jaccard (ou Jaccard Index [28]). Initialement considéré pour des ensembles binaires, le calcul repose sur trois grandeurs. Appliquant une détection des pics sur le support estimé de $\hat{\mathbf{x}}$ on définit alors :

- M_{10} : l'ensemble des pics de détection dans $\hat{\mathbf{x}}$ absents dans \mathbf{x} , ou fausses détections.
- M_{01} : l'ensemble des pics de détection dans **x** absents dans $\hat{\mathbf{x}}$, ou détections manquées.

 $-M_{11}$: l'ensemble des pics de détection dans $\hat{\mathbf{x}}$ présents dans \mathbf{x} , ou bonnes détections. L'indice de Jaccard se calcule de manière suivante :

$$JI = \frac{M_{11}}{M_{10} + M_{01} + M_{11}}$$
(5.69)

On obtient alors un indice relatif à la statistique de détection correcte de chaque algorithme. Bien qu'on perde l'information sur la qualité de reconstruction de l'amplitude de \mathbf{x} , on y trouve une métrique plus adaptée pour les problématiques de détection et d'estimation de directions d'arrivée. Nous sommes néanmoins dépendants de la qualité de détection des pics d'amplitude du support reconstruit, ainsi pour un nombre de sources important, cette métrique n'est plus représentative de la qualité de reconstruction du vecteur \mathbf{x} .

5.4.3. Critères d'arrêt

Le critère d'arrêt des algorithmes afin d'évaluer les performances de reconstruction de \mathbf{x} est ici une valeur de corrélation normalisée fixée empiriquement à $\epsilon_{conv} = 1 - 10^{-15}$. Ainsi à l'itération k si

$$\frac{|(\hat{\mathbf{x}}^{(k)})^H \hat{\mathbf{x}}^{(k-1)}|}{\|\hat{\mathbf{x}}^{(k)}\|\| \|\hat{\mathbf{x}}^{(k-1)}\|} > \epsilon_{conv}$$

$$(5.70)$$

- avec $\hat{\mathbf{x}}^{(k)} \triangleq [\hat{x}_1^{(k)}, \dots, \hat{x}_M^{(k)}]^T$ et $\hat{x}_n^{(k)} = q^{(k)}(s_n = 1) m_{\chi}^{(k)}(s_n = 1)$ pour les algorithmes VBEM et $\hat{x}_n^{(k)} = a_n^{(k)}$ pour les algorithmes de propagation de croyance - on considère alors que l'algorithme exécuté a convergé vers la solution $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$. On fait le choix d'utiliser ce critère au lieu d'un nombre de d'itération fixé, dépendant de la manière dont les algorithmes sont implémentés et de leur stabilité. Cependant, si ce critère de convergence n'est pas atteint, on fixe un nombre d'itération maximal à $k_{max} = 800$ itérations, là aussi fixé empiriquement au vu des temps de calcul par itération.

5.4.4. Évaluation des performances de paSAMP

Considérant le modèle gaussien (5.9)-(5.10), nous proposons d'évaluer la robustesse de nos approches au regard de trois paramètres :

- la variance du bruit additif σ^2 , modélisant l'énergie du signal perçu par l'antenne qui n'est pas un signal d'intérêt. Les performances des algorithmes d'inversion tendent à se dégrader avec une diminution du rapport signal à bruit.
- la variance de transition σ_{ψ}^2 du bruit de phase multiplicatif, l'augmentation de cette dernière diminuera la cohérence spatiale, à terme, la distribution $p(\psi)$ tendra vers une loi uniforme.
- le nombre K de sources, et par extension le taux de parcimonie ρ . Une augmentation du nombre de sources vient augmenter la quantité d'information disponible (diminuer le rapport signal à bruit) et faciliter l'estimation de **x**.

Le choix est fait de générer ces données, baptisées BE1 (pour banc d'essai 1), en variant progressivement ces trois variables. Ainsi, le nombre de sources K augmente progressivement jusqu'à avoir un vecteur \mathbf{x} plein, les variances des bruits de phase et des bruits additifs évolueront respectivement suivant les vecteurs $\sigma_{\psi}^2 = 10^{[-2,...,0]}$ et $\sigma^2 = 10^{[-2,...,1]}$. L'intégralité des paramètres du modèle est résumée dans le tableau 5.1.

Nous commencerons donc par une évaluation des performances de l'algorithme paSAMP. Nous chercherons alors vérifier deux hypothèses ayant motivé ces travaux. Premièrement l'amélioration significative des performances de reconstruction de \mathbf{x} en apportant une information supplémentaire sur le bruit de phase, mais également de meilleures performances que les méthodes basées sur l'approximation de Bethe. En effet, comme montré dans [99] dans un contexte d'acquisition comprimée, les performances (en terme de corrélation normalisée) des algorithmes de phase retrieval sont meilleures pour l'algorithme prSAMP que l'algorithme prVBEM. On s'attend donc à des comportements similaires dans un contexte *phase-aware*. Nous comparons ici l'algorithme paSAMP avec trois autres méthodes de la littérature :

- paVBEM [34], comme expliqué précédemment, intègre le même modèle de bruit mais repose sur une approximation de champ-moyen.
- prSAMP [99], intègre le modèle classique de *phase-retrieval*, *i.e.*, une loi uniforme sur le bruit de phase ψ , afin de constater l'apport d'un nouveau modèle.
- la formation de voie classique (notée CBF pour *conventional beamforming*), comme référence des méthodes classiques, afin d'observer la dégradation des performances de ces méthodes en présence d'un bruit structuré.

paramètre	grandeur associée	valeur
	paramètres dimensionnels	
K	nombre de sources	[1, 2,, N]
M	nombre de capteurs	30 ou 100
N	nombre de directions d'arrivée du dictionnaire	50
λ	facteur d'amortissement	0.75
n_{iter}	nombre d'itérations de Monte Carlo	200
	paramètres du prior sur le bruit de phase ${\bf P}$	
$\overline{\sigma_0}$	variance de phase à $\delta = 0$	10
σ_ψ^2	variance du bruit de phase	$10^{[-2,,0]}$
	paramètres du bruit additif	
σ^2	variance du bruit additif	$10^{[-3,,1]}$
	paramètres du prior sur \mathbf{x}	
$\overline{\mu_x}$	moyenne des coefficients non-nuls de \mathbf{x}	0
σ_x^2	variance des coefficients non-nuls de ${\bf x}$	10
$m_x^{(0)}$	initialisation de \mathbf{x}	0.01 + i0.01

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant

TABLE 5.1. – Paramètres de simulation pour les données de type BE1

Enfin, deux cas d'application sont considérés : le cas sous-déterminé (avec 30 capteurs et un dictionnaire contenant 50 directions d'arrivée) et le cas sur-déterminé (avec 100 capteurs et un dictionnaire de 50 directions d'arrivée).

Les résultats de simulations selon la configuration BE1 sont les moyennes et variances de la corrélation normalisée et de l'indice de Jaccard dans une configuration de bruit multiplicatif fixée. Nous effectuons ces calculs sur 200 réalisations correspondant chacune à une réalisation de vecteur \mathbf{x} et d'un bruit additif afin de récupérer les statistiques d'ordre 1 et 2 des performances des algorithmes. Les résultats sont discutés ci-après.

Cas sous-déterminé Les figures 5.2, 5.3 et 5.4 présentent les résultats obtenus pour le cas M = 30 capteurs et N = 50 directions d'arrivée possibles.

On y observe d'abord une prédominance des algorithmes paSAMP et paVBEM, allant dans le sens d'une bonne intégration des a priori probabilistes sur les bruits de phase : prSAMP et CBF privés tous deux de l'information de bruit de phase présentent de très mauvaises performances. De même, on peut acter de la tendance générale des algorithmes à voir leurs performances se dégrader lorsque la variance du bruit additif σ^2 augmente.

Par ailleurs, on constate que si paVBEM atteint une meilleure corrélation pour de petites variances de transition (*e.g.*, $\sigma_{\psi}^2 = 10^{-3}$), il est dépassé par paSAMP dès lors que cette variance augmente. Ceci s'explique par les hypothèses posées par les algorithmes.

Ainsi, on peut comprendre que l'approximation d'indépendance a priori des bruits de phase sur laquelle repose paSAMP le pénalise fortement en présence de bruit fortement structuré (*i.e.*, pour de petites variances de transition). En revanche, lorsque cette variance augmente (*e.g.*, $\sigma_{\psi}^2 = 10^{-1}$), la structure en chaîne de Markov devient moins informative et le modèle gaussien indépendant devient moins grossier. Dans ce contexte, c'est la stratégie d'approximation de la distribution a posteriori des **x** qui devient prépondérante, et il n'est pas étonnant alors de voir paSAMP réaliser de meilleures performances que paVBEM, comme prSAMP vis à vis de prVBEM [99].

Cependant, ces observations sont à pondérer par l'écart-type mesuré sur les métriques : pour le cas $\sigma_{\vartheta} = 10^{-3}$ notamment, l'incertitude sur les performances est telle qu'il ne nous est pas possible d'avoir une conclusion sûre à propos des meilleures performances supposées de paVBEM, l'intervalle défini par l'écart type de corrélation normalisé étant trop important pour être interprétable.

Notons enfin qu'un comportement similaire est observé quel que soit le nombre de sources que nous avons considéré dans nos simulations.

L'indice de Jaccard (voir annexe C) présente des résultats similaires : les performances de paSAMP, bien que parfois moins bonnes si l'on se réfère à la valeur moyenne, sont néanmoins plus robustes au bruit multiplicatif et présentent moins d'incertitudes que paVBEM. Cette métrique n'apporte cependant pas d'informations supplémentaires sur la qualité de reconstruction de \mathbf{x} et est fortement dépendante de la détection des pics sur le support de ce vecteur, nous nous abstiendrons donc de présenter cette métrique pour les évaluations suivantes.

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant



FIGURE 5.2. – Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas sousdéterminé, une source sur jeu de données BE1.



FIGURE 5.3. – Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas sousdéterminé, deux sources sur jeu de données BE1.

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant



FIGURE 5.4. – Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas sousdéterminé, cinq sources sur jeu de données BE1.



Cas sur-déterminé Les figures 5.5, 5.6 et 5.7 présentent les résultats obtenus pour le cas M = 100 capteurs et N = 50 directions d'arrivée possibles.

FIGURE 5.5. – Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas surdéterminé, une source sur jeu de données BE1.

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant



FIGURE 5.6. – Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas surdéterminé, deux sources sur jeu de données BE1.



FIGURE 5.7. – Évaluation des performances des algorithmes paSAMP (carrés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas surdéterminé, cinq sources sur jeu de données BE1.

Dans le cas sur-déterminé, on peut observer que l'algorithme paVBEM a en moyenne de meilleures performances que paSAMP. Cet écart de performances augmente avec le nombre de sources à localiser, toutefois l'écart-type plus important de paVBEM ne nous permet pas de tirer de conclusions fortes.

Interpréter ces comportements s'avère une tâche ardue. On peut avancer que paVBEM tire davantage partie des mesures supplémentaires pour améliorer l'estimation de la distribution a posteriori sur \mathbf{x} , qu'il y trouve une compensation à l'approximation d'indépendance posée a posteriori.

Il est à noter également que dans ce cas, le nombre de directions d'arrivée recherchées peut impacter les performances : plus le nombre de sources est important, meilleurs semblent les résultats. Ce comportement contre-intuitif est typique des problèmes de reconstruction de phase. En fait, il est facile de voir que, lorsqu'aucune information sur la phase n'est disponible (*i.e.*, ψ_m suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$), seul le module de y_m fournit des informations sur $z_m = \sum_n d_{mn}x_n$. Dans ce cas, la situation la plus défavorable se produit lorsque K = 1 puisque tous les éléments de **D** ont le même module et que les observations ne fournissent donc aucune information sur les z_m . Ici, le bruit de phase est informé rendant possible l'estimation, mais elle est davantage aidée en présence de plusieurs sources. Ce raisonnement vaut également pour le cas sous-déterminé mais dans ce cas, l'estimation est handicapée par le manque d'observations, "cachant" cette propriété.

paramètre	grandeur associée	valeur
	paramètres dimensionnels	
K	nombre de sources	[1, 2,, N]
M	nombre de capteurs	30 ou 100
N	nombre de directions d'arrivée	50
λ	facteur d'amortissement	0.75
n_{iter}	nombre d'itérations de Monte Carlo	20
	paramètres du prior sur le bruit de phase ${\bf P}$	
$\overline{\kappa_m = \kappa, \forall m}$	paramètre de précision de Von Mises	$2 \times 10^{[0,,2]}$
	paramètres du bruit additif	
σ^2	variance du bruit additif	$10^{[-3,,1]}$
	paramètres du prior sur ${\bf x}$	
μ_x	moyenne des coefficients non-nuls de ${\bf x}$	0
σ_x	variance des coefficients non-nuls de ${\bf x}$	10
m_x	initialisation de \mathbf{x}	0.01 + i0.01

TABLE 5.2. – Paramètres de simulation pour les données de type BE2

5.4.5. Évaluation des performances de VistaBEM et VitAMin

Nous nous attachons dans cette sous-section à évaluer les performances des algorithmes VistaBEM et VitAMin. Pour ce faire, comme nous l'avons mentionné précédemment, nous ne considérerons qu'une distribution de Von Mises unidimensionnelle (5.40).

De la même manière que pour le jeu de données BE1, nous faisons varier le nombre de sources ainsi que la variance du bruit additif afin d'évaluer la robustesse de nos approches au regard de ces deux paramètres courants. En outre, nous faisons varier le paramètre κ_m de la distribution de Von Mises (5.67), que nous supposerons identique pour tous les bruits de phase ψ_m , *i.e.*, $\kappa_m = \kappa$, $\forall m$. L'identification (5.47) nous permet alors de lier le paramètre κ avec la variance d'un bruit gaussien unidimensionnel avec, pour de faibles variances de bruit, $\kappa \triangleq 2/\sigma_{\psi}^2$. Ainsi, nous faisons varier κ pour obtenir l'équivalent de variances σ_{ψ}^2 dans l'intervalle $10^{[-2,...,0]}$. Le set-up de simulation est résumé dans le tableau 5.2. Nous le baptisons BE2.

De la même façon que pour les expériences menées sur paSAMP, deux cas sont considérés : le cas sous-déterminé (30 capteurs et un dictionnaire de 50 directions d'arrivée) et le cas sur-déterminé (100 capteurs et un dictionnaire de 50 directions d'arrivée). Les algorithmes proposés VistaBEM et VitAMin sont comparés à des approches non-informées, la formation de voies classique (CBF) et l'approche VBEM pour la reconstruction de phase (prVBEM). Les résultats sont discutés ci-après.

Cas sous-déterminé Les figures 5.8, 5.9 et 5.10 illustrent les performances obtenues pour VistaBEM et VitAMin dans le cas sous-déterminé. Sans dépendance entre les bruits de phase, on s'attend à un bon comportement de VitAMin : aucune approximation n'est alors nécessaire pour intégrer le prior dans la structure d'un GSwAMP. VitAMin part donc a priori gagnant puisque reposant sur une approximation et une procédure d'optimisation ayant montré leur supériorité dans la littérature.

C'est effectivement la première observation que l'on peut faire : dans toutes les configurations que nous avons considérées pour le cas de Von Mises unidimensionnel, VitAMin présente les meilleures performances. Il est suivi par VistaBEM dont le bon comportement nous amène tout de même à conclure à une bonne intégration de l'a priori de Von Mises, notamment au regard des approches non-informées CBF et prVBEM.

Par ailleurs, on peut constater que lorsqu'on diminue le paramètre κ , les performances des algorithmes proposés diminuent également. L'interprétation sous forme de variance de ce paramètre permet de comprendre ce comportement : lorsque κ diminue, la variance "équivalente" σ_{ψ}^2 augmente, jusqu'à *in fine* tendre vers une loi uniforme. Privés d'information, les algorithmes voient logiquement leurs performances chuter (ils tendent vers les performances de prVBEM).

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant



FIGURE 5.8. – Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin (carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sous-déterminé, une source sur jeu de données BE2



FIGURE 5.9. – Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin (carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sous-déterminés, deux sources sur jeu de données BE2

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant



FIGURE 5.10. – Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin (carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sous-déterminé, cinq source sur jeu de données BE2

Enfin, il est intéressant de noter que, à l'instar des expériences menées précédemment, lorsque le nombre de sources augmente, les performances des algorithmes s'améliorent légèrement. C'est d'autant plus visible dans le cas $\kappa = 2$, où les algorithmes tirent parti des contributions des sources pour compenser la perte d'information sur les bruits de phase : ainsi, pour $\kappa = 2$ et $\sigma^2 = 10^{-1}$, on lit une corrélation normalisée de 0.4 pour VitAMin en présence d'une source, et de 0.5 en présence de cinq sources, tandis que VistaBEM passe lui de 0.1 à 0.2 approximativement.

Cas sur-déterminé Les figures 5.11, 5.12 et 5.13 illustrent les performances obtenues par les approches proposés dans le cas sur-déterminé. D'une façon générale, ces résultats confortent les observations menées dans le cas sous-déterminé. On constate les mêmes tendances, avec une prédominance de VitAMin au regard des autres méthodes et de fait, les mêmes interprétations peuvent être conduites.

Nous noterons cependant que l'écart entre les deux algorithmes proposés semblent dans le cas sur-déterminé se réduire. De même que dans l'expérience précédente, menée dans le cas gaussien, VistaBEM semble tirer parti des mesures supplémentaires pour compenser l'approximation d'indépendance a posteriori posée sur les variables d'intérêt.

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant



FIGURE 5.11. – Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin (carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sur-déterminé, une source sur jeu de données BE2



FIGURE 5.12. – Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin (carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sur-déterminés, deux sources sur jeu de données BE2

5. Nouvelles approches bayésiennes pour l'estimation de directions d'arrivée en milieu fluctuant



FIGURE 5.13. – Évaluation des performances de VistaBEM (cercles rouges) et VitAMin (carrés bleus). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prVBEM (losanges noirs). Cas sur-déterminé, cinq source sur jeu de données BE2

5.5. Conclusion

Ce chapitre présente nos contributions algorithmiques au problème d'estimation de directions d'arrivée dans des environnements fluctuants. Plus spécifiquement, le modèle de bruit de phase est adopté, traité au travers de deux distributions probabilistes différentes et exploité dans des procédures d'approximations variationnelles bayésiennes.

Nos dérivations mathématiques ont donné naissance à trois algorithmes :

- paSAMP, reposant sur une procédure de propagation de message et exploitant un a priori gaussien sur les bruits de phase,
- VistaBEM, reposant sur un procédure VBEM et exploitant un a priori de Von Mises,
- VitAMin, pendant de paSAMP, mais interprété selon le formalisme de la distribution de Von Mises.

Si les expériences menées pour valider les algorithmes ont montré une bonne intégration des a priori considérés et un bon comportement général au regard de ce que l'on pouvait en attendre, elles demeurent néanmoins préliminaires. Il reste en effet à les valider au regard de modèles plus complexes et notamment d'une distribution de Von Mises multivariée pour laquelle le développement d'un échantillonneur est nécessaire, avant *in fine* de les confronter à des données réelles.

Enfin, un champ important d'investigation reste ouvert sur la possibilité pour les algorithmes par propagation de message de prendre en compte des distributions multivariées. La marginalisation que nous avons ici proposée a permis de montrer la force de ces méthodes qui malgré cette approximation présentent des performances honorables. Ces résultats prometteurs doivent encourager à approfondir davantage encore ces approximations.

6. Traitement de la campagne ALMA : de l'observation des statistiques de fluctuations à l'interprétation physique

Sommaire

	101
	131
	131
3.2 Mise en évidence et caractérisation des fluctuations du milieu océanique	
	134
surée	139
uré	141
	142
	u océanique surée uré

En parallèle de nos recherches sur l'amélioration des traitements d'antenne dans des milieux océaniques fluctuants, nous nous sommes penchés sur des données réelles, et notamment celles acquises lors des campagnes ALMA (pour Acoustic Laboratory for Marine Applications) portées par la Direction Générale de L'Armement (DGA). Ces campagnes ont en effet pour objectif d'observer et de mettre en évidence les phénomènes de fluctuations océaniques et leurs impacts sur la propagation d'une onde acoustique par le biais d'un système d'émission/réception et de mesures *in situ*. Préalablement à l'application des méthodes proposées précédemment, nous avons cherché à extraire les grandeurs statistiques des fluctuations susceptibles d'êtres intégrées au problème d'estimation ainsi qu'à observer les variations des ces grandeurs durant la campagne de mesure.

Ce chapitre fait le point sur ces travaux ainsi que sur les perspectives qu'ils ouvrent au regard de l'application effective des algorithmes à des données réelles. Nous nous arrêtons plus particulièrement sur les traitements effectuées sur les données acquises en 2017 impliquant des phases d'émissions de signaux acoustique spécifiquement conçus pour la caractérisation de l'altération du signal acoustique en présence de fluctuations du milieu de propagation.



FIGURE 6.1. – Sortie du modèle de prédiction MARC de courants de surface pour la Corse, en rouge la zone d'expérimentation choisie dans le cadre de la campagne ALMA 2017^1

6.1. Présentation de la campagne ALMA 2017

L'objectif des campagnes de mesure ALMA est d'acquérir des données visant à l'identification et à la caractérisation de la variabilité du milieu de propagation. Cette caractérisation se fait via deux moyens, par la mesure *in situ* de ces variations à l'aide de sondes de type chaine de thermistance et par l'analyse de données acoustiques. La présente étude s'intéresse en particulier à la campagne menée en 2017.

^{1.} Données issues des simulations des modèles MARS3D, projet « Modélisation et Analyse pour le Recherche Côtière » (MARC) https ://marc.ifremer.fr, Ifremer, University of Brest, CNRS, IRD, Laboratoire d'Océanographie Physique et Spatiale (LOPS), IUEM, Brest, France

6.1.1. Lieu de la campagne

L'acquisition a été faite au large des côtes Nord Ouest de la Corse, dans le Golf de Saint Florent. Cette zone géographique au sud de la mer Ligurienne présente un intérêt notable pour l'étude de variabilités dans la colonne d'eau : la présence de nombreux courants issus de la circulation géostrophique (*i.e.* induites par la rotation de la Terre) et induits par les vents en font une importante zone de mélange de masses d'eau de densités différentes. Plus particulièrement, c'est dans cette région que se rencontrent les eaux atlantiques remontant du détroit de Gibraltar et les eaux méditerranéennes mises en mouvement par le courant nord méditerranéen. Notons également la présence d'une circulation cyclonique entre la côte Nord de la Corse et le golfe de Gêne. C'est cette circulation entre masses d'eaux de différentes densités ainsi que la topographie du milieu qui font de la zone de déploiement une zone propice à la génération d'ondes internes.

6.1.2. Présentation du système de mesure

Le matériel utilisé pour réaliser les mesures que nous étudierons sont divisibles en trois catégories distinctes : le matériel destiné à l'émission, à la mesure passive et à la mesure *in situ* du milieu.

Système d'émission Le modèle défini par la *Simplified Theory* [25] montre une forte dépendance entre la perturbation subie par un signal et la longueur d'onde de celui-ci. En effet, un signal de faible longueur d'onde sera plus sensible aux perturbations de petite taille, à la fréquence spatiale plus élevée. A contrario, un signal de grande longueur d'onde sera sensible aux fluctuations basse-fréquence. Il nous faut alors avoir une parfaite connaissance du signal source pour en caractériser les déformations. Pour ce faire, la campagne ALMA 2017 [105] offre le choix de deux sources actives large bande pour effectuer une émission quasi-continue d'un signal connu.

La figure 6.2 présente le spectrogramme de la séquence émise par les sources actives. Cette séquence est divisée en plusieurs signaux dans la bande 1 - 13 kHz :

- une impulsion de Ricker,
- un signal modulé en fréquence de type "Chirp",
- sept signaux à fréquence constante,
- un signal multi-fréquentiel émis aux mêmes fréquences que les sept signaux précédents,
- un bruit blanc.

Notons que dans un souci de discrimination des sources, les signaux émis par la seconde source (S2) sont de 100 Hz supérieurs aux signaux de la première (S1). Pour ces deux sources d'émission, les émetteurs sont placés à deux profondeurs différentes, soit de 170 mètres pour S1 et de 130 mètres puis 50 mètres pour S2 suite à une remontée du matériel.



FIGURE 6.2. – Spectrogramme de la séquence émise par les sources large-bande S1 et S2

Nous précisons plus bas la position des sources dans la colonne d'eau, notamment vis à vis du profil de célérité, et ce que cela implique au niveau des mesures.

Dans ces travaux, nous avons porté un intérêt particulier au signal multi-fréquentiel, permettant d'observer la corruption du signal sur différentes fréquences soumis à une même fluctuation à un instant donné.

Antenne acoustique L'antenne acoustique utilisée au cours de cette campagne est composée de quatre sous-antennes linéaires uniformes (ULA pour Uniform Linear Array) de 32 capteurs avec un espacement inter-capteur δ_z de quinze centimètres. Cette configuration d'antenne va nous servir à mesurer la longueur de cohérence verticale de l'onde acoustique reçue (cf. section 6.2). Ici l'antenne est immergée à une profondeur de 140 mètres, soit sous la profondeur de la thermocline (i.e. la couche de la colonne d'eau ou le gradient de célérité est le plus important).

Mesure *in-situ* Afin d'observer les variations dans la colonne d'eau, deux mesures sont utilisées. La première est une mesure de la célérité via une sonde CTD (pour *Conductivity Temperature Depth*) déployée environ une fois par jour. Cette mesure permet de situer la thermocline dans la colonne d'eau et d'observer le profil de célérité pour avoir une estimation de la propagation globale dans le milieu. La figure 6.3 représente le profil mesuré au 5 octobre 2017, on peut constater une forte stratification ainsi qu'une thermocline située à une profondeur entre 50 et 100 mètres.

Toutefois la faible résolution temporelle des mesures de célérité ne nous permet pas d'étudier avec précision les variations du milieu de propagation. C'est pour cette raison que nous exploiterons principalement les mesures effectuées par la chaine de thermistance déployée dans la zone de levé (section 6.2). Cette chaine de thermistance équipée de 24 capteurs nous permet d'effectuer une mesure des variations de température sur les



FIGURE 6.3. – Profil de célérité mesuré le 5 octobre 2017 sur la zone d'expérimentation.

150 premiers mètres de la colonne d'eau, avec un échantillonnage effectué toutes les 3 secondes. Cette fréquence de mesure nous permet alors d'effectuer une observation plus fine des fluctuations du milieu de propagation.

6.2. Mise en évidence et caractérisation des fluctuations du milieu océanique

Cette section a pour but de présenter quelques résultats cherchant à mettre en évidence l'observabilité des ondes internes à partir des mesures effectuées par l'antenne passive. De précédents traitements sur les données issues de campagnes antérieures ont permis de constater la présence de fluctuations du milieu au moyen du calcul de rayon de cohérence [106] et ses effets en terme de dégradation du gain d'antenne. Les travaux effectués ici ont pour objectif d'effectuer une identification du type d'ondes internes auxquelles le milieu de propagation est soumis et d'observer quelle est l'influence des variations du milieu de propagation sur la cohérence du signal mesuré.

Le système déployé lors de la campagne ALMA va nous permettre d'effectuer une

double évaluation de la présence de fluctuations dans le milieu de propagation. Dans un premier temps, nous utiliserons les mesures effectuées par la chaine de thermistance. Nous commencerons par une analyse spectrale du champ de célérité calculé à partir de ces mesures de température, ce champ de célérité pouvant par la suite être comparé à des simulations. Une conversion de la température en champ de déplacement vertical est possible moyennant certaines hypothèses sur la nature des phénomènes régissant le déplacement vertical d'un milieu fluctuant. Après détails des calculs permettant cette conversion, nous verrons qu'il nous est possible de retrouver le spectre type de déplacement vertical en présence d'ondes internes, le spectre de Garrett-Munk.

Une fois ce spectre de référence calculé, il convient de le comparer avec des statistiques du signal mesuré par l'antenne passive. Les travaux de Dashen et al. [25] nous permettent de retenir la longueur de cohérence comme grandeur sensible aux fluctuations du milieu de propagation. Nous proposons d'effectuer l'analyse spectrale des variations de cette grandeur afin de visualiser l'impact des ondes internes.

Enfin, nous verrons qu'il est possible de lever certaines limitations de résolution fréquentielle en utilisant des méthodes de représentation parcimonieuse pour une estimation précise des composantes diurnes et semi-diurnes.

6.2.1. Dynamique des fluctuations

Afin d'observer les dynamiques de fluctuation du milieu de propagation, nous considérons ici les mesures effectuées par les sondes de la chaine de thermistance. En exploitant les variations de température et considérant qu'elles sont directement dues à des fluctuations de masses d'eau de densités différentes, nous espérons observer directement la présence d'ondes internes. Les premières observations issues du modèle de prédiction MARC (Modélisation et Analyse pour la Recherche Côtière, cf. figure ??) font état de la présence d'une gyre anticyclonique dans le golfe de Saint-Florent, ce phénomène périodique engendre donc des mélanges susceptibles d'induire des variations de densité. Un autre phénomène dominant observable sera l'effet des marées semi-diurnes. Nous pouvons également nous attendre à d'autres phénomènes induits par la bathymétrie de type "canyon" de la zone d'étude.

Traitement des données de la chaine de thermistance Dans un premier temps nous observons la variabilité du milieu pendant l'intégralité de la campagne. Afin d'avoir une grandeur directement liée à la propagation du signal dans le milieu, nous faisons le choix de considérer la célérité estimée à partir des mesures de la chaine de thermistance. Nous procédons alors à une conversion de la mesure de la température en célérité, en



FIGURE 6.4. – Observation de la célérité extraite des mesures effectuées par la chaine de thermistance pour l'intégralité de la campagne ALMA 2017

considérant une salinité moyenne de 39 psu intégrée dans un modèle de Medwin [83] :

$$c = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^{2} + 0.00029T^{3} + (1.34 - 0.010T)(S - 35) + 0.016D \quad (6.1)$$

où S est la salinité dans le milieu (ici fixée à 39 psu), D la profondeur en mètres (ici les profondeurs d'immersion des capteurs) et T la température mesurée par la chaine de thermistance. Une fois le modèle de Medwin appliqué, nous disposons d'une estimation de la célérité avec une meilleure résolution temporelle que les mesures effectuées par la sonde CTD. On visualise ses variations temporelles sur la figure 6.4. Pendant toute la durée de la campagne, nous conservons une stratification similaire à celle observée sur le profil de célérité, cependant nous sommes en présence d'importants mouvements de la thermocline pouvant aller jusqu'à 20 mètres de déplacement (selon la position dans la colonne d'eau), témoignant de la présence de mélanges dans la zone où la mesure est effectuée. Pour mieux les visualiser, nous calculons l'écart-type des variations de célérité autour d'un profil moyen (cf. figure 6.5). On constate que les plus grandes variations de célérité ont lieu autour de l'interface entre la thermocline et les eaux de surface : le fort gradient de température implique des gradients de densité importants, c'est à cette interface que surviennent les mélanges.



FIGURE 6.5. – Observation de l'écart-type des variations de célérité extraite de la mesure de thermistance.

Bien que ne disposant pas de mesures effectuées par un courantomètre à effet Doppler (ADCP, pour Acoustic Current Doppler Profiler), nous conservons le même raisonnement que celui effectué dans [51], à savoir une analyse spectrale de nos mesures afin d'en identifier des composantes relatives à des phénomènes d'ondes internes. La mesure étant continue du 5 au 11 octobre 2017 à une période d'échantillonnage de 3 secondes, on peut effectuer le calcul de sa densité spectrale de puissance. La figure 6.6 présente les résultats obtenus par traitement du capteur le plus profond de la chaine de thermistance afin d'éviter les phénomènes locaux de mélange. On constate la présence d'ondes internes diurnes et semi-diurnes importantes avec un pic de présence aux fréquences correspondant aux composantes semi-diurnes M2, S2, N2. La faible résolution en fréquence ne nous permet pas d'identifier avec précision les ondes diurnes avec cette méthode.



FIGURE 6.6. – Densité spectrale de puissance de la célérité calculée à partir des mesures de température du capteur 24 de la chaine de thermistance (*i.e.* le plus profond). Comparaison avec les fréquences connues de marée diurne (O1), semi-diurnes (M2, N2, S2) et leurs multiples ainsi qu'avec les fréquences limites théoriques des ondes internes : la fréquence de Coriolis et la fréquence de Brunt-Vaisala.

Reconstruction du spectre de Garrett-Munk à partir des mesures de température Dans ce paragraphe nous montrons qu'il est possible, moyennant certaines approximations sur la nature des variations de températures, d'extraire le champ de déplacement vertical des mesures de température effectuées par la chaine de thermistance. Pour ce faire, nous nous basons sur les travaux de Lynch et al. [75]. Ces derniers considèrent que les variations verticales de température sont principalement induites par les ondes internes et le phénomène d'advection. Selon cette hypothèse, la mesure de température T se décompose en trois termes, une température moyenne T_m , un terme d'advection T_c et un terme d'ondes internes T':

$$T = T_m + T_c + T'. (6.2)$$

Posant $T_i \triangleq T - T_c$, le champ de température déduit de la composante d'advection et considérant que les variations de température mesurées sont dominées par le déplacement vertical des masses d'eau $\xi(z, t)$, nous pouvons écrire ce champ sous la forme :

$$T_i(z,t) = T_m(z + \xi(z,t)),$$
(6.3)

où z est la profondeur du capteur considéré. Cette relation, simple, est intéressante : à la condition que le profil moyen de température soit monotone, une inversion directe terme-à-terme est possible. Ainsi pour chaque profondeur de capteur, on peut estimer la série temporelle correspondant au déplacement vertical des masses d'eau :

$$\xi(z,t) = T_m^{-1} \left(T_i(z,t) \right) - z. \tag{6.4}$$

Le problème que soulève cette nouvelle équation est l'identification du champ de température dû à l'advection. En effet, sans autre mesure *in-situ* permettant de discriminer les variations de déplacement des masses d'eau induites par l'advection des autres, nous ne pouvons reposer que sur l'observation, reportée dans les travaux de Lynch [75], que le champ associé à l'advection correspond approximativement à la composante diurne du champ de température. Selon cette approximation, revenant à considérer que le phénomène thermique dominant est la chaleur du soleil suivant une composante diurne (la campagne se déroulant aux alentours de l'équinoxe, l'approximation diurne est plausible), filtrer les séries temporelles de température en utilisant un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure à 1 cycle par jour (cpd pour *cycle per day*) nous permet de séparer la composante d'advection de la composante dûe aux ondes internes. Théoriquement, ce filtrage n'affectera pas l'information portée par la présence d'ondes internes. En effet le profil de Garrett-Munk et ses récentes propositions de modifications [73] montrent que la limite basse d'existence des ondes internes est la fréquence de Coriolis, fréquence résultant de la rotation de la terre à une fréquence Ω pour une latitude φ donnée :

$$f_{\rm Coriolis} = 2\Omega \sin \varphi. \tag{6.5}$$

Pendant toute la durée de la campagne ALMA, les systèmes sont déployés à une latitude d'environ 42.4 degrés Nord, correspondant à une fréquence de 1.35 cpd. Ainsi filtrer les composantes diurnes n'affectera pas l'information sur des ondes internes. Revenons à la quantité $\xi(z,t)$. Elle représente la série temporelle des estimations de déplacement vertical pour un capteur de la chaine de thermistance à la profondeur z. La densité spectrale de puissance de cette grandeur nous permet théoriquement de retrouver un spectre de Garrett-Munk. Nous souhaitons que ce spectre nous serve de référence pour l'identification des ondes internes à partir des mesures de l'antenne acoustique. En conséquence, nous visons un capteur avoisinant la profondeur d'immersion de l'antenne passive (110 m) : la figure 6.7 montre la densité spectrale de puissance du déplacement vertical pour le capteur 16, estimé à une profondeur d'immersion de 107,6 mètres.



FIGURE 6.7. – Densité spectrale de puissance du déplacement vertical estimé à partir des températures mesurées par le capteur 16 de la chaine de thermistance. Superposition avec la droite de référence de pente ω^{-2} .

On constate sur ce spectre la présence de nombreux pics d'énergie, notamment aux fréquences semi-diurnes et aux multiples de celles-ci. Nous remarquons également un maximum global aux environs de 10 cpd; et, au-delà de cette fréquence, une décroissance en ω^{-2} , typique des profils de Garrett-Munk et déjà notée dans d'autres expérimentations [22]. Ces observations allant dans le sens du spectre de Garrett-Munk, nous l'adoptons comme référence pour l'identification d'ondes internes à partir d'autres mesures. Maintenant que nous avons défini une référence à partir de mesures *in-situ*, nous allons chercher à retrouver ces composantes dans les variations de paramètres relatifs au signal mesuré par l'antenne acoustique passive. Pour cela, nous prendrons en compte la longueur de cohérence telle que définie dans [25].

6.2.2. Estimation de la longueur de cohérence de l'onde mesurée

Défini dans le modèle théorique simplifié dans [25], le rayon de cohérence, que nous noterons R_c dans la suite, est une quantité extraite du calcul de corrélation normalisée en fonction de l'espacement inter-capteur. En discrétisant la fonction de cohérence mutuelle, la formule s'écrit :

$$|\Gamma_{mn}| = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{((m-n)\Delta)^2}{R_c^2}\right)$$
(6.6)

où Δ est l'espacement inter-capteur de l'antenne (ici 15 cm) et (m, n) les indices des capteurs considérés. Empiriquement, nous pouvons évaluer cette quantité à partir des mesures effectuées lors de phases d'émission en continu des sources actives S1 et S2. Nous nous intéressons à une phase se déroulant du 9 au 11 octobre 2017 pour une durée d'enregistrement continu d'environ 31 heures et 30 minutes. Pour chaque détection de la séquence multi-tonale émise par S1 ou S2, nous notons Y_m et Y_n les signaux complexes reçus par les capteurs m et n respectivement. Leur corrélation normalisée peut alors s'estimer selon

$$\left|\hat{\Gamma}_{mn}\right| = \left|\left\langle \frac{Y_n Y_m}{|Y_n| |Y_m|} \right\rangle_{N_s}\right| \tag{6.7}$$

où N_s est le nombre de snapshots. Considérant l'égalité entre $|\Gamma_{mn}|$ et $|\hat{\Gamma}_{mn}|$, on peut proposer une identification du rayon de cohérence R_c comme la distance pour laquelle $|\hat{\Gamma}_{mn}|$ est égale à exp(-0.5). La figure 6.8 présente le résultat de cette estimation pour les signaux à 1 kHz, 2 kHz et 5 kHz. On observe sur ces résultats des similarités au niveau



FIGURE 6.8. – Evolution temporelle de l'estimation du rayon de cohérence (en mètres) pour la durée de la phase étudiée. Les fréquences considérées sont respectivement 1 kHz (a), 2 kHz (b) et 5 kHz (c).

des tendances de variation du rayon de cohérence, avec toutefois une perte de cohérence globale avec la fréquence du signal. Cette perte peut être visualisée plus précisément en regardant également la fonction de cohérence mutuelle moyenne pour l'intégralité de la phase 5 figure 6.9. Sur cette figure, on observe bien la dégradation de la cohérence avec l'augmentation de la fréquence. En effet, les hautes fréquences sont plus sensibles aux phénomènes de petites tailles avec des vitesses de déplacement plus élevées comme des gyres dues au mélange ou des interactions avec le fond et la surface. Le rayon de cohérence est donc d'une façon générale diminué par la présence en plus grand nombre de perturbations de fréquences spatiales et temporelles plus élevées. Par la suite nous allons chercher à savoir si la dynamique des variations du rayon de cohérence permet l'observabilité des fluctuations du milieu de propagation.



FIGURE 6.9. – Fonction de cohérence mutuelle moyennée pour l'intégralité de la phase 5 pour 1 kHz (bleu), 2 kHz (rouge) et 5 kHz (noir).

6.2.3. Influences des paramètres physiques sur le signal mesuré

La densité spectrale de puissance du rayon de cohérence R_c estimé dans la section précédente est présentée dans la figure 6.10. On y observe une forte variabilité basse-



FIGURE 6.10. – Transformée de Fourier des variations du Rayon de cohérence pour la durée de la phase étudiée. Les fréquences considérées sont respectivement 1 kHz (a), 2 kHz (b) et 5 kHz (c).

fréquence, avec des composantes semi-diurnes et d'autres de périodes plus longues. Nous notons également la présence de pics à certains multiples de la marée et une décroissance générale de l'amplitude pour les fréquences plus élevées. Superposons alors le spectre du rayon de cohérence pour la fréquence 5 kHz avec le spectre de référence (fig. 6.7) afin d'en observer les similarités.

La figure 6.11 qui en résulte nous permet d'observer l'influence directe des variations du milieu de propagation sur les variations du rayon de cohérence. En effet les spectres


FIGURE 6.11. – Comparaison du spectre des variations du rayon de cohérence pour le signal de fréquence 5 kHz et du spectre de Garrett-Munk reconstruit. Superposition avec deux droites de pente ω^{-2}

partagent des tendances très similaires. On identifie notamment clairement le maximum global commun à 11 cpd mais également des maximas locaux à 3.18 et 5.2 cpd. Après calculs, ces pics semblent être le résultat de l'interaction entre les multiples de l'onde semi-diurne de marée et la fréquence de Coriolis : le maximum global correspond à $5 \times M2 + f_{\text{Coriolis}} = 11.01$ cpd, l'onde approximativement localisée à 5.2 cpd peut être identifiée à $2 \times M2 + f_{\text{Coriolis}} = 5.21$ cpd, et le pic à 3.18 cpd à $N2 + f_{\text{Coriolis}} = 3.24$ cpd, même si la faible résolution de la densité spectrale de puissance du rayon de cohérence ne nous permet pas de les identifier avec certitude. Des interactions similaires entres ondes de Coriolis et ondes diurnes ont pu être observées dans de précédents travaux [86].

En annexe D nous proposons d'utiliser la méthode de représentation parcimonieuse *Orthogonal Matching Pursuit* pour l'estimation de composantes spectrales. Là où l'analyse spectrale directe est limitée par la durée des séquence étudiées, les méthodes de représentation parcimonieuse nous permettent d'estimer des composantes dans un cas sous-déterminé. Les composantes basses-fréquences étant les plus énergétiques du spectre de Garrett-Munk, on s'attend donc à une meilleure estimation de celles-ci contrairement à une"simple" analyse spectrale.

Ces résultats sont préliminaires. Afin de certifier de l'identifiabilité du spectre complet des ondes internes, il nous faudrait répéter ces calculs sur plusieurs jours de mesures et identifier clairement la pente de décroissance d'énergie en ω^{-2} comme correspondant bien à celle d'un spectre de Garrett-Munk.

6.3. Discussion sur l'applicabilité des méthodes proposées

Notre contribution ici est l'étude des variations du rayon de cohérence à l'aide d'outils d'analyse spectrale. Ces traitements, publiés et présentés lors de la conférence UACE [8],

montrent la possibilité d'identifier certaines composantes basses-fréquences du spectre de Garrett-Munk. Les composantes de marée, fortement énergétiques et facilement identifiables car largement observées dans la littérature, sont particulièrement visibles sur le spectre de Garrett-Munk ainsi que sur le spectre des variations du rayon de cohérence. Les composantes hautes-fréquences des variations du rayon de cohérence sont quant à elles plus difficiles à rattacher au phénomène d'ondes internes car, malgré une décroissance en ω^{-2} observée figure 6.11, d'autres phénomènes semblent influencer les variations du rayon de cohérence. De plus les données actuelles sur lesquelles ont étés effectués ces traitements ne nous permettent pas de conclure sur l'identifiabilité sure des ondes internes, notamment sur le paquet haute-fréquence avec décroissance des amplitudes spectrales en ω^{-2} . En effet, en plus de n'avoir un résultat que sur une phase de plusieurs heures, la figure 2.1 nous rappelle également que les composantes hautesfréquences mesurées dans notre spectre peuvent également être dues à des turbulences aux interfaces (décrites par un spectre de Kolmogorov) et non à des ondes internes (décrites par un spectre de Garrett-Munk). Des études similaires sur des mesures plus longues et/ou employant des capteurs pour la mesure in situ quantifiant directement le champ de déplacement des masses d'eau (tel qu'un profiler acoustique doppler ou ADCP) pourraient toutefois permettre de lever ces incertitudes sur l'identifiabilité des ondes internes par acoustique passive.

Cette étude permet d'une part d'identifier les phénomènes océaniques impliqués dans les modifications de la cohérence du signal, d'autre part d'estimer le rayon de cohérence des signaux mesurés pouvant, à terme, nous permettre d'avoir un a priori "informé" des altérations du signal afin d'effectuer une estimation des directions d'arrivée sur données réelles.

A cette fin, il reste encore à relier le rayon de cohérence extrait de cette étude avec les paramètres des distributions a priori considérées dans les méthodes algorithmiques proposées. Dans la section 2.3.3, nous avons mis en évidence une identification possible via le calcul de la corrélation entre deux capteurs. Dans le temps imparti pour cette thèse, il ne nous a malheureusement pas été possible de dériver cette identification pour les deux distributions considérées (gaussienne et de Von Mises). Ce point reste donc à creuser. Cependant la configuration de la campagne traitée, bien qu'adaptée à l'observation des variabilités du milieu de propagation, semble peu propice à des travaux de localisation de sources. En effet, la présence de sous-antennes verticales nous permettra de déterminer la profondeur des sources S1 et S2, cependant celles-ci seront fortement rapprochées de par leur distance à l'antenne. Pour de meilleurs résultats, l'utilisation d'antennes horizontales pour une localisation et discrimination azimutales est plus adaptée.

7. Conclusion et perspectives

Sommaire

7.1	Conch	usion	145
7.2	Perspe	ectives	146
	7.2.1	Modélisation	147
	7.2.2	Algorithmes et échantillonneurs	147
	7.2.3	Validation	148
	7.2.4	Prise en compte d'autres phénomènes de fluctuations	148

Ce chapitre dresse le bilan des travaux menés et en propose quelques perspectives.

7.1. Conclusion

Ces travaux de thèse ont pu mettre en lumière l'importance de la prise en compte du phénomène de déformation du front d'onde dû aux ondes internes, la possibilité de modéliser cette déformation sous la forme d'un bruit de phase informé et son exploitation dans des algorithmes variationnels bayésiens.

Le chapitre 2, avec une synthèse des travaux [87] ainsi que [25] et [20], nous a montré qu'il est possible de modéliser ce phénomène de fluctuations du milieu de propagation via un spectre de fluctuations, mais également de prédire à partir de cette donnée l'intensité des déformations du front d'onde propagé dans ce milieu. L'intérêt de formuler mathématiquement ce phénomène de fluctuation est double. D'une part il est alors possible de relier les grandeurs de fluctuations du milieu avec les "degrés" de *corruption* du signal, de l'autre il nous permet de mettre en place une simulation simple, nous permettant d'observer l'impact de cette déformation sur une onde plane afin de motiver le besoin d'une modélisation appropriée de cette déformation pour, à terme, obtenir des traitements robustes à ce phénomène.

Le chapitre 3 a permis d'expliciter les méthodes variationnelles bayésiennes, et notamment celles basées sur les approximations de champ moyen et de Bethe. Ces méthodes populaires notamment en traitement de l'information et en physique statistique, ont connu un succès récent pour leur performance dans la résolution du problème d'acquisition compressée (*cf. e.g.*, [69]). Elles souffrent cependant souvent d'une méconnaissance théorique et d'une utilisation hasardeuse. Nous espérons avoir proposé ici une exposition claire et intuitive de ces méthodes.

Le chapitre 4 avait pour objectif, au travers d'un état de l'art des méthodes d'estimation des directions d'arrivée, de montrer l'importance d'exploiter les informations disponibles sur la nature du signal et/ou de la perturbation subie par le signal. Une approximation particulièrement puissante que nous avons exploitée est la parcimonie considérée sur le nombre de directions d'arrivée, permettant une estimation hautement résolue des DOA et plus robuste au bruit additif. Nous avons aussi pu constater l'importance de modéliser les incertitudes liées au modèle au travers de méthodes d'estimation en milieu incertain. A cet égard, les méthodes s'attachant à la reconstruction de phase ouvrent des perspectives prometteuses qu'il nous a semblé intéressant de poursuivre.

Les deux chapitres suivants portent nos contributions : contributions algorithmiques pour le chapitre 5 et traitements préliminaires de données réelles au chapitre 6.

Dans le chapitre 5, nous avons en particulier cherché à proposer des méthodes permettant d'exploiter le modèle de bruit de phase informé mis en évidence dans le premier chapitre et esquissé dans le chapitre 4 à travers les méthodes de reconstruction de phase. Les procédures élaborées reposent sur des approximations variationnelles bayésiennes et considèrent deux modèles probabilistes de bruit de phase : le modèle gaussien multivarié et le modèle de Von Mises multivarié. En vue de leur évaluation empirique, nous avons proposé des jeux de données synthétiques et les y avons confrontées.

Par ailleurs, les paramètres des modèles probabilistes exploités doivent être physiquement informés. A cet égard, le chapitre 6 a montré la possibilité d'extraire les quantités relatives au modèle théorique directement à partir de statistiques extraites de la mesure passive du signal acoustique mais également d'observer s'il est possible de relier ces quantités au phénomène physique. Ces résultats préliminaires montrent qu'il est possible d'identifier certaines composantes basses fréquences comme la marée mais également d'observer une décroissance de l'énergie spectrale caractéristique au modèle de Garrett-Munk [51]. Toutefois ces résultats ne nous permettent pas d'affirmer avec certitude qu'il est possible d'identifier un spectre de Garrett-Munk à partir des statistiques du signal.

7.2. Perspectives

Ces travaux nous ont permis de dégager plusieurs perspectives pour continuer sur cette thématique de localisation de sources en milieux fluctuants. Nous les avons structurées en quatre grands axes de recherche, qui pourront être considérés à plus ou moins long terme.

7.2.1. Modélisation

Si l'intuition permet de motiver le recours aux modèles probabilistes proposés, gaussien et Von Mises multivarié, pour modéliser les bruits de phase dûs aux fluctuations du milieu océanique, il ne nous a pas encore été possible de valider ces modèles au vu des études statistiques portant sur les champs acoustiques propagés dans un tel milieu et notamment d'identifier les paramètres des modèles aux paramètres physiques et notamment le rayon de cohérence (*cf.* section 2.3.3). Cette étude est accessible dans le cas du modèle gaussien¹, en revanche, elle nécessite plus de réflexion dans le cas de distribution de Von Mises multivarié. A cet égard, et comme nous l'avons mentionné dans la section 5.3, nous espérons pouvoir exploiter le lien existant avec la distance de Mahalanobis (5.47).

Par ailleurs, le modèle de bruit de phase est construit via une approximation hautefréquence, il est particulièrement bien adapté au régime partiellement saturé (*cf.* chapitre 2) mais peut s'avérer limité pour d'autres régimes de fluctuation. Les travaux [104] ont notamment montré également la présence d'un phénomène d'atténuation variable dû à la présence d'onde internes. Il serait donc intéressant dans un deuxième temps de considérer un bruit multiplicatif complexe permettant de prendre en compte les variations d'amplitude en plus de la perturbation de phase, permettant alors d'être plus robuste à ce phénomène.

7.2.2. Algorithmes et échantillonneurs

Durant le temps imparti dans cette thèse, il ne nous a pas été possible de réaliser un échantillonneur de la distribution de Von Mises multivariée. L'évaluation des algorithmes VistaBEM et VitAMin reste donc encore à mener de façon plus approfondie.

Par ailleurs, si les algorithmes paSAMP et VitAMin n'ont pas à rougir de leur performance en comparaison de leurs homologues basés VBEM, leur faiblesse intrinsèque doit être levée : approcher les distributions multivariées par des marginales nous a certes permis d'exploiter et de particulariser l'approche GSwAMP de façon immédiate, mais elle n'est pas satisfaisante puisqu'elle se prive de l'information de corrélation entre capteurs, objet de cette thèse. Aller au delà de cette première approximation nécessite néanmoins une étude plus poussée. Une piste de recherche serait de combiner une approximation de champ moyen posée sur les bruits de phase et une approximation de Bethe sur le modèle linéaire porteur de la parcimonie. Ce faisant, on devrait pouvoir prendre le "meilleur des deux mondes" et espérer obtenir de bonnes performances à la fois dans la modélisation des bruits de phase et dans l'estimation des directions d'arrivée. Cependant la formalisation de cette combinaison n'est pas immédiate et se fera dans un temps plus long.

^{1.} C'est un travail en cours et nous espérons converger assez rapidement à ce sujet.

7.2.3. Validation

Esquissé dans le chapitre 2, un simulateur de données physiquement cohérent plus complet peut être étudié. Il serait possible par exemple de considérer les interactions surface/fond et les variabilités de la bathymétrie, ce afin d'obtenir un programme plus complet permettant un contrôle complet des conditions sur le milieu de propagation afin d'observer l'impact de chacun des paramètres physiques du milieu sur les déformations observables sur le signal. Ce problème doit faire l'objet d'un stage de fin d'étude co-encadré avec la DGA et le SHOM. Il est en particulier envisagé le recours au logiciel BELLHOP [98] qui permet de calculer la trajectoire, la perte d'énergie et le temps de trajet de rayons pour un profil de célérité donné et une topographie de fond marin donnés. Dans ce stage, nous chercherons notamment à reproduire les acquisitions de la campagne ALMA menée par la DGA en 2017 [41] en introduisant un aléa sur la célérité moyenne mesurée par les capteurs lors de la campagne. Une comparaison entre données in-situ et données simulées permettra de valider cette première approche.

En sus des données issues de ce simulateur, il reste par ailleurs à confronter nos algorithmes à des données réelles.

7.2.4. Prise en compte d'autres phénomènes de fluctuations

Au vue de la possibilité de calculer le rayon de cohérence à partir du spectre de Garrett-Munk, une perspective intéressante est de considérer un modèle similaire pour d'autres phénomènes physiques ondulatoires tels que les tourbillons et gyres océaniques. Phénomènes à plus hautes fréquences (voir figure 2.1) indépendants des ondes internes, il serait néanmoins possible d'intégrer le spectre de Kolmogorov associé à ces turbulences au calcul de rayon de cohérence afin d'obtenir les a priori adaptés pour effectuer une estimation des directions d'arrivée robuste aux tourbillons et aux gyres. On pourrait par exemple exprimer le champ de perturbations induit par la présence de ces phénomènes de plus petite échelle spatiale et ainsi retrouver une expression liant le spectre de Kolmogorov avec un rayon de cohérence associé, nous permettant alors de conserver le même modèle génératif et les mêmes méthodes d'estimation.

A. Dérivation de l'algorithme paSAMP

Sommaire

Α	Calcul de la marginale $p(y_m)$	150
В	Calcul de $E[z_m y_m;\omega,V]$	151
С	Calcul de var $[z_m y_m;\omega,V]$	154

Rappelons que nous considérons le modèle d'observation (5.2) sous les hypothèses a priori (5.3)-(5.4) et (5.8).

Exploitant une approximation de Bethe via une procédure GSwAMP (section 3.4.2 paragraphe Generalized (swept) approximate message passing), il s'agit de particulariser les quantités

$$\mathbf{E}[z_m|y_m;\omega,V] \triangleq \int_{z_m} z_m p(z_m|y_m) \, dz_m \tag{A.1}$$

$$\operatorname{var}[z_m|y_m;\omega,V] \triangleq \int_{z_m} z_m^2 p(z_m|y_m) \, dz_m - \operatorname{E}[z_m|y_m;\omega,V]^2 \tag{A.2}$$

avec

$$p(z_m|y_m) = \frac{1}{p(y_m)}p(y_m, z_m)$$
 (A.3)

$$=\frac{1}{p(y_m)}\int_{\psi_m}p(y_m, z_m, \psi_m)d\psi_m,\tag{A.4}$$

$$=\frac{1}{p(y_m)}\int_{\psi_m} p(y_m|z_m,\psi_m)p(z_m)p(\psi_m)d\psi_m,\tag{A.5}$$

où $p(\psi_m)$ est définie dans (5.28) et $p(z_m)$ est supposé gaussien complexe de moyenne ω et de variance V.

Pour développer ces quantités, il s'agit donc d'abord d'exprimer la marginale $p(y_m)$.

A. Calcul de la marginale $p(y_m)$

Par définition :

$$p(y_m) \tag{A.6}$$

$$= \int_{\psi_m} \int_{z_m} p(y_m, z_m, \psi_m) d_{z_m} d_{\psi_m}$$
(A.7)

$$= \int_{\psi_m} \int_{z_m} p(y_m | z_m, \psi_m) p(z_m) p(\psi_m) d_{z_m} d_{\psi_m}$$
(A.8)

$$= \int_{\substack{\psi_m \\ \sigma}} \int_{z_m} \mathcal{CN}(y_m; z_m e^{i\psi_m}, \sigma^2) \mathcal{CN}(z_m; \omega, V) \mathcal{N}(\psi_m; 0, \Lambda_{\psi_m}) d_{z_m} d_{\psi_m}$$
(A.9)

$$= \int_{\psi_m} \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m}; \omega, V + \sigma^2) \mathcal{N}(\psi_m; 0, \Lambda_{\psi_m})$$
$$\int_{z_m} \mathcal{CN}\left(z_m; \frac{V y_m e^{-i\psi_m} + \sigma^2 \omega}{\sigma^2 + V}, \frac{\sigma^2 V}{V + \sigma^2}\right) d_{z_m} d_{\psi_m}$$
(A.10)

$$= \int_{\psi_m} \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m}; \omega, V + \sigma^2) \mathcal{N}(\psi_m; 0, \Lambda_{\psi_m}) d_{\psi_m}.$$
 (A.11)

Développons $\mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m};\omega,V+\sigma^2)$:

$$\mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m}; \omega, V + \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi(V + \sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2 + |\omega|^2}{V + \sigma^2}\right)$$
(A.12)

$$\exp\left(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}\cos(\psi_m + \arg(y_m^*\omega))\right) \tag{A.13}$$

Par l'approximation (5.43), on obtient alors pour des petites valeurs de $\frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}$:

$$\mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m}; \omega, V + \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi(V + \sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2 + |\omega|^2}{V + \sigma^2}\right)$$
(A.14)

$$2\pi I_0 \left(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}\right) \mathcal{N}\left(\psi_m; -\arg(y_m^*\omega), \frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right) \quad (A.15)$$

Réinjectant cette dernière expression dans (A.11), on a

$$p(y_m) = \int_{\psi_m} \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m}; \omega, V + \sigma^2) \mathcal{N}(\psi_m; 0, \Lambda_{\psi_m}) d_{\psi_m},$$
(A.16)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(V+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2 + |\omega|^2}{V+\sigma^2}\right) 2\pi I_0\left(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}\right)$$
(A.17)

$$\int_{\psi_m} \mathcal{N}\Big(\psi_m; -\arg(y_m^*\omega), \frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}\Big) \mathcal{N}(\psi_m; 0, \Lambda_{\psi_m}) d_{\psi_m}, \tag{A.18}$$

$$=\frac{2\pi I_0\left(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^2)}}\exp\left(-\frac{|y_m|^2+|\omega|^2}{V+\sigma^2}\right)\mathcal{N}\left(-\arg(y_m^*\omega);0,\Lambda_{\psi_m}+\frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right)$$
$$\int_{\psi_m}\mathcal{N}\left(\psi_m;\frac{-\arg(y_m^*\omega)}{1+\frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|\Lambda_{\psi_m}}},\frac{\Lambda_{\psi_m}(V+\sigma^2)}{2|y_m||\omega|\Lambda_{\psi_m}+V+\sigma^2}\right)d_{\psi_m},\tag{A.19}$$

Soit finalement

$$p(y_m) = \frac{2\pi I_0 \left(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2 + |\omega|^2}{V+\sigma^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \left(\Lambda_{\psi_m} + \frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right)}} \exp\left(-\frac{(\arg(y_m^*\omega))^2}{\Lambda_{\psi_m} + \frac{V+\sigma^2}{|y_m||\omega|}}\right)$$
(A.20)

B. Calcul de $E[z_m|y_m; \omega, V]$

Par définition :

$$E[z_m|y_m;\omega,V] \triangleq \int_{z_m} z_m p(z_m|y_m) dz_m$$

$$= \frac{1}{n(u_m)} \int \int_{z_m} z_m p(y_m|z_m,\psi_m) p(z_m) p(\psi_m) d\psi_m dz_m.$$
(A.22)

$$= \frac{1}{p(y_m)} \int_{z_m} \int_{\psi_m} z_m p(y_m | z_m, \psi_m) p(z_m) p(\psi_m) d\psi_m dz_m.$$
(A.22)

En nous inspirant des lignes (A.8)-(A.10), on obtient de la même façon :

$$\begin{split} \mathbf{E}[z_m|y_m;\omega,V] & (A.23) \\ &= \frac{1}{p(y_m)} \int_{\psi_m} \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m};\omega,V+\sigma^2)\mathcal{N}(\psi_m;0,\Lambda_{\psi_m}) \\ &\int_{z_m} z_m \mathcal{CN}\left(z_m; \frac{Vy_m e^{-i\psi_m}+\sigma^2\omega}{\sigma^2+V}, \frac{\sigma^2 V}{V+\sigma^2}\right) d_{z_m} d_{\psi_m} \\ &= \frac{1}{p(y_m)} \int_{\psi_m} \frac{Vy_m e^{-i\psi_m}+\sigma^2\omega}{\sigma^2+V} \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m};\omega,V+\sigma^2)\mathcal{N}(\psi_m;0,\Lambda_{\psi_m}) d_{\psi_m} \\ &= \frac{1}{p(y_m)} \int_{\psi_m} \frac{Vy_m e^{-i\psi_m}}{\sigma^2+V} \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m};\omega,V+\sigma^2)\mathcal{N}(\psi_m;0,\Lambda_{\psi_m}) d_{\psi_m} + \frac{\sigma^2\omega}{\sigma^2+V}. \end{split}$$
(A.25)

Puis, en nous inspirant des lignes (A.16)-(A.19), on a :

$$E[z_m|y_m;\omega,V] = \frac{1}{p(y_m)} \frac{2\pi I_0\left(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2+|\omega|^2}{V+\sigma^2}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_m^*\omega);0,\Lambda_{\psi_m} + \frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right)$$
$$\int_{\psi_m} \frac{Vy_m e^{-i\psi_m}}{\sigma^2+V} \mathcal{N}\left(\psi_m;\frac{-\arg(y_m^*\omega)}{1+\frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|\Lambda_{\psi_m}}},\frac{\Lambda_{\psi_m}(V+\sigma^2)}{2|y_m||\omega|\Lambda_{\psi_m}+V+\sigma^2}\right) d_{\psi_m}$$
$$+\frac{\sigma^2\omega}{\sigma^2+V}.$$
(A.26)

On pose

$$m_{\psi_m} \triangleq \frac{-\arg(y_m^*\omega)}{1 + \frac{V + \sigma^2}{2|y_m||\omega|\Lambda_{\psi_m}}} \text{ et } \Sigma_{\psi_m} \triangleq \frac{\Lambda_{\psi_m}(V + \sigma^2)}{2|y_m||\omega|\Lambda_{\psi_m} + V + \sigma^2}$$
(A.27)

Alors, recourant à l'approximation (5.43), on obtient finalement, pour de petits Σ_{ψ_m} :

$$E[z_m|y_m;\omega,V] \tag{A.28}$$

$$2\pi I_0 \left(\frac{2|y_m||\omega|}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{p(y_m)} \frac{2\pi I_0\left(\frac{|\psi_m|^2}{|V+\sigma^2|}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2+|\omega|^2}{|V+\sigma^2|}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_m^*\omega); 0, \Lambda_{\psi_m} + \frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right)$$
$$\int_{\psi_m} \frac{Vy_m e^{-i\psi_m}}{\sigma^2+V} \frac{1}{2\pi I_0(1/\Sigma_{\psi_m})} \exp\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_m}}\cos(\psi_m - m_{\psi_m})\right) d_{\psi_m} + \frac{\sigma^2\omega}{\sigma^2+V}, \quad (A.29)$$

$$= \frac{1}{p(y_m)} \frac{2\pi I_0\left(\frac{-iy_m|i^{-1}}{V+\sigma^2}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2+|\omega|^2}{V+\sigma^2}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_m^*\omega); 0, \Lambda_{\psi_m} + \frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right)$$
$$\frac{Vy_m}{\sigma^2+V} \frac{1}{2\pi I_0(1/\Sigma_{\psi_m})} \int_{\psi_m} e^{-i\psi_m} \exp(\frac{1}{\Sigma_{\psi_m}}\cos(\psi_m - m_{\psi_m})) d_{\psi_m} + \frac{\sigma^2\omega}{\sigma^2+V}, \quad (A.30)$$

$$= \frac{1}{p(y_m)} \frac{2\pi I_0\left(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2+|\omega|^2}{V+\sigma^2}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_m^*\omega); 0, \Lambda_{\psi_m} + \frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right)$$
$$\frac{Vy_m e^{-im_{\psi_m}}}{\sigma^2+V} \frac{1}{2\pi I_0(1/\Sigma_{\psi_m})} \int_{\psi_m} e^{-i\psi_m} \exp(\frac{1}{\Sigma_{\psi_m}}\cos(\psi_m)) d_{\psi_m} + \frac{\sigma^2\omega}{\sigma^2+V}, \quad (A.31)$$

so t finalement :

$$E[z_m|y_m;\omega,V]$$

$$= \frac{1}{p(y_m)} \frac{2\pi I_0\left(\frac{2|y_m||\omega|}{V+\sigma^2}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2+|\omega|^2}{V+\sigma^2}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_m^*\omega);0,\Lambda_{\psi_m}+\frac{V+\sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right)$$

$$\frac{Vy_m e^{-im_{\psi_m}}}{\sigma^2+V} R_0\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_m}}\right) + \frac{\sigma^2\omega}{\sigma^2+V}.$$
(A.32)
(A.33)

Injecter (A.20) dans (A.33) donne le résultat :

$$E[z_m|y_m;\omega,V] = \frac{V}{\sigma^2 + V} y_m e^{-im_{\psi_m}} R_0\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_m}}\right) + \frac{\sigma^2\omega}{\sigma^2 + V}$$
(A.34)

avec m_{ψ_m} et Σ_{ψ_m} définis en (A.27).

C. Calcul de $var[z_m|y_m; \omega, V]$

Par définition :

$$\operatorname{var}[z_m|y_m;\omega,V] \tag{A.35}$$

$$\triangleq \int_{z_m} z_m^2 p(z_m | y_m) \, dz_m - |\operatorname{E}[z_m | y_m; \omega, V]|^2 \tag{A.36}$$

$$= \frac{1}{p(y_m)} \int_{z_m} \int_{\psi_m} z_m^2 p(y_m | z_m, \psi_m) p(z_m) p(\psi_m) d\psi_m dz_m - |\operatorname{E}[z_m | y_m; \omega, V]|^2.$$
(A.37)

En nous inspirant des lignes (A.8)-(A.10), on obtient de la même façon :

$$\operatorname{var}[z_m|y_m;\omega,V] \tag{A.38}$$

$$= \frac{1}{p(y_m)} \int_{z_m} \int_{\psi_m} z_m^2 p(y_m | z_m, \psi_m) p(z_m) p(\psi_m) d\psi_m dz_m - |\mathbf{E}[z_m | y_m; \omega, V]|^2,$$
(A.39)

$$= \frac{1}{p(y_m)} \int_{\psi_m} \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m}; \omega, V + \sigma^2) \mathcal{N}(\psi_m; 0, \Lambda_{\psi_m})$$
$$\int_{z_m} z_m^2 \mathcal{CN}\left(z_m; \frac{Vy_m e^{-i\psi_m} + \sigma^2 \omega}{\sigma^2 + V}, \frac{\sigma^2 V}{V + \sigma^2}\right) d_{z_m} d_{\psi_m} - |\operatorname{E}[z_m | y_m; \omega, V]|^2,$$
(A.40)

$$= \frac{1}{p(y_m)} \int_{\psi_m} \left[\frac{\sigma^2 V}{V + \sigma^2} + \left| \frac{V y_m e^{-i\psi_m} + \sigma^2 \omega}{V + \sigma^2} \right|^2 \right] \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m}; \omega, V + \sigma^2) \mathcal{N}(\psi_m; 0, \Lambda_{\psi_m}) d_{\psi_m}$$
$$- |\operatorname{E}[z_m | y_m; \omega, V]|^2, \tag{A.41}$$

$$= \frac{\sigma^2 V}{V + \sigma^2} + \frac{1}{p(y_m)} \int_{\psi_m} \left| \frac{V y_m e^{-i\psi_m} + \sigma^2 \omega}{V + \sigma^2} \right|^2 \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m}; \omega, V + \sigma^2) \mathcal{N}(\psi_m; 0, \Lambda_{\psi_m}) d_{\psi_m},$$

$$- |\mathbf{E}[z_m | y_m; \omega, V]|^2. \tag{A.42}$$

$$= \frac{\sigma^{2}V}{V + \sigma^{2}} + \frac{1}{p(y_{m})} \int_{\psi_{m}} \left[\frac{|Vy_{m}|^{2} + |\sigma^{2}\omega|^{2}}{(\sigma^{2} + V)^{2}} + \frac{2V\sigma^{2}|y_{m}||\omega|}{(\sigma^{2} + V)^{2}} \cos(\psi_{m} + \arg(y_{m}^{*}\omega)) \right]$$

$$\mathcal{CN}(y_{m}e^{-i\psi_{m}};\omega, V + \sigma^{2})\mathcal{N}(\psi_{m};0,\Lambda_{\psi_{m}})d_{\psi_{m}} - |\operatorname{E}[z_{m}|y_{m};\omega,V]|^{2}, \qquad (A.43)$$

$$\sigma^{2}V + \frac{|Vy_{m}|^{2} + |\sigma^{2}\omega|^{2}}{1 - 2V\sigma^{2}|y_{m}||\omega|} \int_{\omega_{m}} \operatorname{Erg}(\psi_{m} + \operatorname{Erg}(\psi_{m}^{*},\omega))$$

$$= \frac{\sigma V}{V + \sigma^2} + \frac{(V y_m) + (\sigma \omega)}{(\sigma^2 + V)^2} + \frac{1}{p(y_m)} \frac{2V \sigma (y_m) (\omega)}{(\sigma^2 + V)^2} \int_{\psi_m} \cos(\psi_m + \arg(y_m^*\omega)) \mathcal{CN}(y_m e^{-i\psi_m}; \omega, V + \sigma^2) \mathcal{N}(\psi_m; 0, \Lambda_{\psi_m}) d_{\psi_m} - |\mathbf{E}[z_m | y_m; \omega, V]|^2.$$
(A.44)

Puis, en nous inspirant des lignes (A.16)-(A.19), on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{var}[z_{m}|y_{m};\omega,V] & (A.45) \\ &= \frac{\sigma^{2}V}{V+\sigma^{2}} + \frac{|Vy_{m}|^{2} + |\sigma^{2}\omega|^{2}}{(\sigma^{2}+V)^{2}} + \frac{1}{p(y_{m})} \frac{2V\sigma^{2}|y_{m}||\omega|}{(\sigma^{2}+V)^{2}} \int_{\psi_{m}} \cos(\psi_{m} + \arg(y_{m}^{*}\omega)) \\ \mathcal{CN}(y_{m}e^{-i\psi_{m}};\omega,V + \sigma^{2})\mathcal{N}(\psi_{m};0,\Lambda_{\psi_{m}})d_{\psi_{m}} - |\operatorname{E}[z_{m}|y_{m};\omega,V]|^{2}, \\ &= \frac{\sigma^{2}V}{V+\sigma^{2}} + \frac{|Vy_{m}|^{2} + |\sigma^{2}\omega|^{2}}{(\sigma^{2}+V)^{2}} + \frac{1}{p(y_{m})} \frac{2V\sigma^{2}|y_{m}||\omega|}{(\sigma^{2}+V)^{2}} \\ \frac{2\pi I_{0}\left(\frac{2|y_{m}||\omega|}{V+\sigma^{2}}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^{2})}} \exp\left(-\frac{|y_{m}|^{2} + |\omega|^{2}}{V+\sigma^{2}}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_{m}^{*}\omega);0,\Lambda_{\psi_{m}} + \frac{V+\sigma^{2}}{2|y_{m}||\omega|}\right) \\ \int_{\psi_{m}} \cos(\psi_{m} + \arg(y_{m}^{*}\omega)) \mathcal{N}\left(\psi_{m};m_{\psi_{m}},\Sigma_{\psi_{m}}\right) d_{\psi_{m}} \\ &- |\operatorname{E}[z_{m}|y_{m};\omega,V]|^{2}, \end{aligned}$$

avec m_{ψ_m} et Σ_{ψ_m} définis en (A.27).

Alors, recourant à l'approximation (5.43), on obtient finalement, pour de petits Σ_{ψ_m} :

$$\begin{aligned} \operatorname{var}[z_{m}|y_{m};\omega,V] & (A.47) \\ &= \frac{\sigma^{2}V}{V+\sigma^{2}} + \frac{|Vy_{m}|^{2} + |\sigma^{2}\omega|^{2}}{(\sigma^{2}+V)^{2}} + \frac{1}{p(y_{m})} \frac{2V\sigma^{2}|y_{m}||\omega|}{(\sigma^{2}+V)^{2}} \\ \frac{2\pi I_{0}\left(\frac{2|y_{m}||\omega|}{V+\sigma^{2}}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^{2})}} \exp\left(-\frac{|y_{m}|^{2} + |\omega|^{2}}{V+\sigma^{2}}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_{m}^{*}\omega);0,\Lambda_{\psi_{m}} + \frac{V+\sigma^{2}}{2|y_{m}||\omega|}\right) \\ \int_{\psi_{m}} \cos(\psi_{m} + \arg(y_{m}^{*}\omega)) \frac{1}{2\pi I_{0}(1/\Sigma_{\psi_{m}})} \exp\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_{m}}}\cos(\psi_{m} - m_{\psi_{m}})\right) d_{\psi_{m}} - |\operatorname{E}[z_{m}|y_{m};\omega,V]|^{2}, \end{aligned}$$
(A.48)

$$\begin{split} &= \frac{\sigma^2 V}{V + \sigma^2} + \frac{|Vy_m|^2 + |\sigma^2 \omega|^2}{(\sigma^2 + V)^2} + \frac{1}{p(y_m)} \frac{2V\sigma^2 |y_m||\omega|}{(\sigma^2 + V)^2} \\ &\frac{2\pi I_0 \left(\frac{2|y_m||\omega|}{V + \sigma^2}\right)}{\sqrt{\pi(V + \sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2 + |\omega|^2}{V + \sigma^2}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_m^*\omega); 0, \Lambda_{\psi_m} + \frac{V + \sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right) \frac{1}{2\pi I_0(1/\Sigma_{\psi_m})} \\ &\int_{\psi_m} \cos(\psi_m + \arg(y_m^*\omega) + m_{\psi_m}) \exp\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_m}}\cos(\psi_m)\right) d_{\psi_m} - |\operatorname{E}[z_m|y_m; \omega, V]|^2, \quad (A.49) \\ &= \frac{\sigma^2 V}{V + \sigma^2} + \frac{|Vy_m|^2 + |\sigma^2 \omega|^2}{(\sigma^2 + V)^2} + \frac{1}{p(y_m)} \frac{2V\sigma^2 |y_m||\omega|}{(\sigma^2 + V)^2} \\ &\frac{2\pi I_0 \left(\frac{2|y_m||\omega|}{V + \sigma^2}\right)}{\sqrt{\pi(V + \sigma^2)}} \exp\left(-\frac{|y_m|^2 + |\omega|^2}{V + \sigma^2}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_m^*\omega); 0, \Lambda_{\psi_m} + \frac{V + \sigma^2}{2|y_m||\omega|}\right) \frac{1}{2\pi I_0(1/\Sigma_{\psi_m})} \\ &\cos(\arg(y_m^*\omega) + m_{\psi_m}) \int_{\psi_m} \cos(\psi_m) \exp\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_m}}\cos(\psi_m)\right) d_{\psi_m} - |\operatorname{E}[z_m|y_m; \omega, V]|^2. \quad (A.50) \end{split}$$

Soit finalement

$$\begin{aligned} \operatorname{var}[z_{m}|y_{m};\omega,V] & (A.51) \\ &= \frac{\sigma^{2}V}{V+\sigma^{2}} + \frac{|Vy_{m}|^{2} + |\sigma^{2}\omega|^{2}}{(\sigma^{2}+V)^{2}} + \frac{1}{p(y_{m})} \frac{2V\sigma^{2}|y_{m}||\omega|}{(\sigma^{2}+V)^{2}} \\ &\frac{2\pi I_{0}\left(\frac{2|y_{m}||\omega|}{V+\sigma^{2}}\right)}{\sqrt{\pi(V+\sigma^{2})}} \exp\left(-\frac{|y_{m}|^{2} + |\omega|^{2}}{V+\sigma^{2}}\right) \mathcal{N}\left(-\arg(y_{m}^{*}\omega);0,\Lambda_{\psi_{m}} + \frac{V+\sigma^{2}}{2|y_{m}||\omega|}\right) \\ &\cos(\arg(y_{m}^{*}\omega) + m_{\psi_{m}})R_{0}\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_{m}}}\right) - |\operatorname{E}[z_{m}|y_{m};\omega,V]|^{2}. \end{aligned}$$

Injecter (A.20) dans (A.33) donne le résultat :

$$\operatorname{var}[z_{m}|y_{m};\omega,V] = \frac{2V\sigma^{2}|y_{m}||\omega|}{(\sigma^{2}+V)^{2}} \operatorname{cos}(\operatorname{arg}(y_{m}^{*}\omega)+m_{\psi_{m}})R_{0}\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_{m}}}\right) + \frac{\sigma^{2}V}{V+\sigma^{2}} + \frac{|Vy_{m}|^{2}+|\sigma^{2}\omega|^{2}}{(\sigma^{2}+V)^{2}} - |\operatorname{E}[z_{m}|y_{m};\omega,V]|^{2}.$$
(A.53)

avec m_{ψ_m} et Σ_{ψ_m} définis en (A.27).

B. Dérivation de l'algorithme VistaBEM

Sommaire

Α	Distribution a posteriori des bruits de phase ψ	159
В	Distribution a posteriori des coefficients \mathbf{x}	160

Rappelons que nous considérons le modèle d'observation (5.2) sous les hypothèses a priori (5.3)-(5.4) et (5.44).

L'approximation de champ moyen pose l'indépendance a posteriori des variables χ , s et ψ . On considère en particulier la factorisation suivante :

$$p(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi} | \mathbf{y}) \simeq q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) = q(\boldsymbol{\psi}) \ q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) = \prod_{m} q(\psi_{m}) \prod_{n} q(\chi_{n}, s_{n}).$$
(B.1)

Selon ce modèle, les équations de mise à jour (3.3) se particularisent comme¹ : $\forall n \in \{1, ..., N\}, \forall m \in \{1, ..., M\},$

$$q(\psi_m) \propto \exp\bigg(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \int_{\chi} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\chi} \, d\boldsymbol{\psi}_{\neq m}\bigg), \tag{B.2}$$

$$\propto p(\psi_m) \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) d\boldsymbol{\chi} d\boldsymbol{\psi}_{\neq m}\right), \quad (B.3)$$

$$q(\chi_n, s_n) \propto \exp\bigg(\int_{\boldsymbol{\psi}} q(\boldsymbol{\psi}) \int_{\boldsymbol{\chi}_{\neq n}} \sum_{\mathbf{s}_{\neq n}} \prod_{k \neq n} q(\chi_k, s_k) \log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \ d\boldsymbol{\chi}_{\neq n} \ d\boldsymbol{\psi}\bigg), \tag{B.4}$$

$$\propto p(\chi_n)p(s_n)\exp\left(\int_{\boldsymbol{\psi}} q(\boldsymbol{\psi})\int_{\boldsymbol{\chi}_{\neq n}\mathbf{s}_{\neq n}} \prod_{k\neq n} q(\chi_k, s_k)\log p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi})d\boldsymbol{\chi}_{\neq n}d\boldsymbol{\psi}\right)$$
(B.5)

où $\psi_{\neq m}$ (resp. $\chi_{\neq n}$ et $\mathbf{s}_{\neq n}$) désigne le vecteur composé des ψ_l (resp. χ_k et s_k) pour $l \neq m$ (resp. $k \neq n$).

Pour aller plus loin dans la dérivation des mises à jour des distributions $q(\psi_m)$ et

^{1.} Ici encore, nous abandonnons les indices d'itérations pour la simplicité de notation.

 $q(\chi_n,s_n),$ il convient d'abord de rappeler que

$$\log p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) = \sum_{m} \log p(y_m | \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \psi_m),$$
(B.6)

$$\propto \sum_{m} -\frac{1}{\sigma^2} \left(y_m^* y_m + z_m^* z_m - 2 \, \Re(y_m^* z_m e^{i\psi_m}) \right), \tag{B.7}$$

$$\propto \sum_{m} -\frac{1}{\sigma^{2}} \left(y_{m}^{*} y_{m} + \sum_{n} \sum_{k} s_{n} s_{k} \chi_{n}^{*} \chi_{k} d_{mn}^{*} d_{mk} - e^{-i\psi_{m}} y_{m} \sum_{n} s_{n} \chi_{n}^{*} d_{mn}^{*} - e^{i\psi_{m}} y_{m}^{*} \sum_{n} s_{n} \chi_{n} d_{mn} \right).$$
(B.8)

On obtient ainsi :

$$q(\psi_m) \propto \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \log p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \, d\psi_{\neq m} \, d\boldsymbol{\chi}\right),$$

$$\propto \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \left[\log p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) + \log p(\boldsymbol{\psi})\right] \, d\psi_{\neq m} \, d\boldsymbol{\chi}\right),$$

$$\propto \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \log p(\boldsymbol{\psi}) \, d\psi_{\neq m} + \int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \log p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\chi}\right),$$

$$\propto \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \log p(\boldsymbol{\psi}) \, d\psi_{\neq m}\right) \exp\left(\int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \log p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\chi}\right),$$

$$\propto \exp\left(\int_{\psi_{\neq m}} \prod_{l \neq m} q(\psi_l) \log p(\boldsymbol{\psi}) \, d\psi_{\neq m}\right) \exp\left(\int_{\boldsymbol{\chi}} \sum_{\mathbf{s}} q(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}) \log p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\chi}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\psi}) \, d\boldsymbol{\chi}\right),$$

$$(B.9)$$

$$q(\chi_n, s_n) \propto p(\chi_n) \, p(s_n)$$

$$\exp\left(-\frac{1}{\sigma^{2}}\left(s_{n}\chi_{n}\sum_{k\neq n}\langle s_{k}\chi_{k}^{*}\rangle \mathbf{d}_{k}^{H}\mathbf{d}_{n}+s_{n}\chi_{n}^{*}\sum_{k\neq n}\langle s_{k}\chi_{k}\rangle \mathbf{d}_{n}^{H}\mathbf{d}_{k}+s_{n}\chi_{n}^{*}\chi_{n} \mathbf{d}_{n}^{H}\mathbf{d}_{n}\right)$$
$$-2\sum_{m}\langle\Re(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}e^{i\psi_{m}})\rangle\right),$$
$$\propto p(\chi_{n}) p(s_{n})$$
(B.10)
$$\exp\left(-\frac{1}{\sigma^{2}}\left(2s_{n}\Re(\chi_{n}\sum_{k\neq n}\langle s_{k}\chi_{k}^{*}\rangle \mathbf{d}_{k}^{H}\mathbf{d}_{n})+s_{n}\chi_{n}^{*}\chi_{n}\mathbf{d}_{n}^{H}\mathbf{d}_{n}-2\sum_{m}\langle\Re(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}e^{i\psi_{m}})\rangle\right)\right),$$

où on introduit les notations

$$\langle s_n \chi_n \rangle \triangleq \int_{\chi_n} \sum_{s_n} s_n \chi_n \ q(\chi_n, s_n) \ d\chi_n = q(s_n = 1) \ m_{\chi}(s_n = 1), \tag{B.11}$$

$$\langle z_m \rangle \triangleq \sum_n \langle s_n \chi_n \rangle d_{mn} = \sum_n q(s_n = 1) \ m_\chi(s_n = 1) \ d_{mn}.$$
 (B.12)

A. Distribution a posteriori des bruits de phase ψ

Particularisé au modèle de Von Mises multivarié, on obtient :

$$\begin{split} q(\psi_m) \\ &\propto \exp\left(\int_{\psi\neq m} \prod_{l\neq m} q(\psi_l) \log p(\psi) \ d\psi_{\neq m}\right) \ \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re(y_m^*(z_m)e^{i\psi_m})\right), \\ &\propto \exp\left(\int_{\psi\neq m} \prod_{l\neq m} q(\psi_l) \left[\kappa_m \cos(\psi_m) - 2\sin(\psi_m) \sum_{k\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{km} \sin(\psi_k) - 2\cos(\psi_m) \sum_{k\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{km} \cos(\psi_k)\right] \ d\psi_{\neq m}\right) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re(y_m^*(z_m)e^{i\psi_m})\right), \\ &\propto \exp\left(\kappa_m \cos(\psi_m) - 2\sin(\psi_m) \sum_{k\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{km} \int_{\psi_k} \sin(\psi_k)q(\psi_k) \ d\psi_k - 2\cos(\psi_m) \sum_{k\neq m} (\Lambda_{\psi_k}^{-1})_{km} \int_{\psi_k} \sin(\psi_k) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re(y_m^*(z_m)e^{i\psi_m})\right), \\ &\propto \exp\left(\kappa_m \cos(\psi_m) - 2\sin(\psi_m) \sum_{k\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{km} \sin(m_{\psi_k}) \frac{I_1(A_{\psi_k})}{I_0(A_{\psi_k})} - 2\cos(\psi_m) \sum_{k\neq m} (\Lambda_{\psi_k}^{-1})_{km} \sin(m_{\psi_k}) \frac{I_1(A_{\psi_k})}{I_0(A_{\psi_k})}\right) \\ &- 2\cos(\psi_m) \sum_{k\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{km} \cos(m_{\psi_k}) \frac{I_1(A_{\psi_k})}{I_0(A_{\psi_k})} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \Re(y_m^*(z_m)e^{i\psi_m})\right), \\ &\propto \exp\left(\cos(\psi_m) \left(\kappa_m - 2\sum_{k\neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{km} \cos(m_{\psi_k}) \frac{I_1(A_{\psi_k})}{I_0(A_{\psi_k})}\right) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} |y_m||\langle z_m \rangle|\cos(\psi_m + \arg(y_m^*(z_m)\rangle))\right)\right), \\ &\propto \exp\left((\kappa_m - \alpha_3)\cos(\psi_m) - \alpha_2\cos(\psi_m - \pi/2) + \alpha_1\cos(\psi_m + \arg(y_m^*(z_m))))\right), \end{aligned}$$
(B.13)

où

$$\alpha_{1} = \frac{2}{\sigma^{2}} |y_{m}|| \langle z_{m} \rangle|, \quad \alpha_{2} = 2 \sum_{k \neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{km} \sin(m_{\psi_{k}}) \frac{I_{1}(A_{\psi_{k}})}{I_{0}(A_{\psi_{k}})}, \quad \alpha_{3} = 2 \sum_{k \neq m} (\Lambda_{\psi}^{-1})_{km} \cos(m_{\psi_{k}}) \frac{I_{1}(A_{\psi_{k}})}{I_{0}(A_{\psi_{k}})}.$$
(B.14)

Finalement, on déduit

$$q(\psi_m) \propto \exp\left(\frac{e^{i\psi_m}}{2} [\alpha_1 e^{i\arg(y_m^*\langle z_m \rangle)} + (\kappa_m - \alpha_3) - \alpha_2 e^{-i\pi/2}] + \frac{e^{-i\psi_m}}{2} [\alpha_1 e^{-i\arg(y_m^*\langle z_m \rangle)} + (\kappa_m - \alpha_3) - \alpha_2 e^{i\pi/2}]\right),$$
(B.15)

de sorte que

$$q(\psi_m) = \frac{1}{2\pi I_0(A_{\psi_m})} \exp\left(A_{\psi_m} \cos(\psi_m - m_{\psi_m})\right)$$

avec

$$A_{\psi_m} = |\alpha_1 e^{-i \arg(y_m^* \langle z_m \rangle)} + (\kappa_m - \alpha_3) - \alpha_2 e^{i\pi/2}| \tag{B.16}$$

$$m_{\psi_m} = \arg(\alpha_1 e^{-i \arg(y_m^* \langle z_m \rangle)} + (\kappa_m - \alpha_3) - \alpha_2 e^{i\pi/2}) \tag{B.17}$$

B. Distribution a posteriori des coefficients $\boldsymbol{\mathrm{x}}$

Les ψ_m 's suivent donc une distribution a posteriori de Von Mises (mono-dimensionnelle). Ceci nous aide à développer l'équation (B.10) où

$$\begin{split} \langle \Re(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}e^{i\psi_{m}})\rangle &= \int_{\psi_{m}}q(\psi_{m})\Re(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}e^{i\psi_{m}}) d\psi_{m}, \\ &= \frac{1}{2\pi I_{0}(A_{\psi_{m}})}\int_{\psi_{m}}\exp\left(A_{\psi_{m}}\cos(\psi_{m}-m_{\psi_{m}})\right)\Re(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}e^{i\psi_{m}}) d\psi_{m}, \\ &= \frac{1}{2\pi I_{0}(A_{\psi_{m}})}\int_{\psi_{m}}\exp\left(A_{\psi_{m}}\cos(\psi_{m}-m_{\psi_{m}})\right) \\ &\quad |y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}|\cos(\psi_{m}+\arg(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn})) d\psi_{m}, \\ &= \frac{1}{2\pi I_{0}(A_{\psi_{m}})}|y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}|\int_{\psi_{m}}\exp\left(A_{\psi_{m}}\cos(\psi_{m})\right) \\ &\quad \cos(\psi_{m}+\arg(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn})+m_{\psi_{m}}) d\psi_{m}, \\ &= \frac{1}{2\pi I_{0}(A_{\psi_{m}})}|y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}| \\ &\left[\cos(\arg(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn})+m_{\psi_{m}})\int_{\psi_{m}}\exp\left(A_{\psi_{m}}\cos(\psi_{m})\right)\cos(\psi_{m}) d\psi_{m}\right] \\ &\quad -\sin(\arg(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn})+m_{\psi_{m}})\int_{\psi_{m}}\exp\left(A_{\psi_{m}}\cos(\psi_{m})\right)\sin(\psi_{m}) d\psi_{m}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi I_{0}(A_{\psi_{m}})}|y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}|\cos(\arg(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn})+m_{\psi_{m}}) \\ &\int_{\psi_{m}}\exp\left(\frac{1}{\Sigma_{\psi_{m}}}\cos(\psi_{m})\right)\cos(\psi_{m}) d\psi_{m}, \\ &= \frac{I_{1}(A_{\psi_{m}})}{I_{0}(A_{\psi_{m}})}\Re(y_{m}^{*}s_{n}\chi_{n}d_{mn}e^{im_{\psi_{m}}}). \end{split}$$

Insérant cette expression dans (B.10) on obtient

$$\begin{aligned} q(\chi_{n}, s_{n}) \\ \propto p(\chi_{n}) p(s_{n}) \\ \exp\left(-\frac{1}{\sigma^{2}} \left(2s_{n} \Re(\chi_{n} \sum_{k \neq n} \langle s_{k} \chi_{k}^{*} \rangle \mathbf{d}_{k}^{H} \mathbf{d}_{n}) + s_{n} \chi_{n}^{*} \chi_{n} \mathbf{d}_{n}^{H} \mathbf{d}_{n} - 2 \sum_{n} \frac{I_{1}(A_{\psi_{m}})}{I_{0}(A_{\psi_{m}})} \Re(y_{m}^{*} s_{n} \chi_{n} d_{mn} e^{im_{\psi_{m}}})\right) \right), \\ \propto p(\chi_{n}) p(s_{n}) \\ \exp\left(-\frac{1}{\sigma^{2}} s_{n} \chi_{n}^{*} \chi_{n} \mathbf{d}_{n}^{*} \mathbf{d}_{n} + \frac{2}{\sigma^{2}} s_{n} \Re\left(\chi_{n} \sum_{n} \left(y_{m}^{*} d_{mn} e^{im_{\psi_{m}}} \frac{I_{1}(A_{\psi_{m}})}{I_{0}(A_{\psi_{m}})} - \sum_{k \neq n} \langle s_{k} \chi_{k}^{*} \rangle d_{nk}^{*} d_{mn}\right) \right) \right), \\ \propto p(s_{n}) \\ \exp\left(-\chi_{n}^{*} \chi_{n} \left(\frac{1}{\sigma_{x}^{2}} + \frac{1}{\sigma^{2}} s_{n} \mathbf{d}_{n}^{H} \mathbf{d}_{n}\right) + \frac{2}{\sigma^{2}} s_{n} \Re\left(\chi_{n} \sum_{n} \left(y_{m}^{*} d_{mn} e^{im_{\psi_{m}}} \frac{I_{1}(A_{\psi_{m}})}{I_{0}(A_{\psi_{m}})} - \sum_{k \neq n} \langle s_{k} \chi_{k}^{*} \rangle d_{nk}^{*} d_{mn}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Par identification avec les paramètres d'une loi gaussienne, on obtient finalement

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \qquad q(\chi_n, s_n) = q(\chi_n | s_n) \ q(s_n), \tag{B.19}$$

avec

$$q(\chi_n|s_n) = \mathcal{CN}(m_{\chi}(s_n), \Sigma_{\chi}(s_n)), \tag{B.20}$$

$$q(s_n) \propto \sqrt{\Sigma_{\chi}(s_n)} \exp\left(\frac{|m_{\chi}(s_n)|^2}{\Sigma_{\chi}(s_n)}\right) p(s_n)$$
 (B.21)

 et

$$\Sigma_{\chi}(s_n) = \frac{\sigma_x^2 \sigma^2}{\sigma^2 + s_n \sigma_x^2 \mathbf{d}_n^H \mathbf{d}_n},$$
(B.22)

$$m_{\chi}(s_n) = s_n \frac{\sigma_x^2}{\sigma^2 + s_n \sigma_x^2 \mathbf{d}_n^H \mathbf{d}_n} \langle \mathbf{r}_n \rangle^H \mathbf{d}_n, \qquad (B.23)$$

$$\langle \mathbf{r}_n \rangle = \overline{\mathbf{y}} - \sum_{k \neq n} q(s_k = 1) \ m_\chi(s_k = 1) \ \mathbf{d}_k, \tag{B.24}$$

$$\overline{\mathbf{y}} = \left[y_m e^{-im_{\psi_m}} R_0(A_{\psi_m}) \right]_{m = \{1...M\}}$$
(B.25)

avec $R_0 = I_1 / I_0$.

C. Performances des algorithmes *phase aware* : indice de Jaccard



(a) Cas une source et un bruit multiplicatif avec variance de transition $\sigma_\vartheta=10^{-3}$



(b) Cas une source et un bruit multiplicatif avec variance de transition $\sigma_\vartheta=10^{-2}$



(c) Cas une source et un bruit multiplicatif avec variance de transition $\sigma_\vartheta = 10^{-1}$

FIGURE C.1. – Evaluation des performances des algorithmes *phase aware* : paSAMP (carrés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas une source sur jeu de données BE1.



(a) Cas deux sources et un bruit multiplicatif avec variance de transition $\sigma_\vartheta=10^{-3}$



(b) Cas deux sources et un bruit multiplicatif avec variance de transition $\sigma_\vartheta=10^{-2}$



(c) Cas deux sources et un bruit multiplicatif avec variance de transition $\sigma_\vartheta=10^{-1}$

FIGURE C.2. – Evaluation des performances des algorithmes phase aware : paSAMP (carrés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas deux sources sur jeu de données BE1.



(a) Cas cinq sources et un bruit multiplicatif avec variance de transition $\sigma_{\vartheta}=10^{-3}$



(b) Cas cinq sources et un bruit multiplicatif avec variance de transition $\sigma_\vartheta=10^{-2}$



(c) Cas cinq sources et un bruit multiplicatif avec variance de transition $\sigma_\vartheta=10^{-1}$

FIGURE C.3. – Evaluation des performances des algorithmes phase aware : paSAMP (carrés bleus) et paVBEM (cercles rouges). Comparaison avec les algorithmes de beamforming classique (triangles noirs) et prSAMP (losanges noirs). Cas cinq sources sur jeu de données BE1.

D. Application de l'algorithme d'OMP pour l'identification d'ondes internes basses-fréquences

Le profil de Garett-Munk montre que les composantes basses-fréquences sont les plus énergétiques du spectre des ondes internes. En supposant que le spectre de célérité suive la même tendance, nous allons chercher une meilleure manière d'identifier les ondes internes basses-fréquences. Le problème soulevé ici est un problème de taille des données. En effet, pour retrouver des composantes spectrales de l'ordre du diurne et semi-diurne, il est nécessaire d'avoir une quinzaine de jours d'enregistrement. Ici nous proposons d'appliquer une méthode issue de l'acquisition comprimée pour pallier à ce manque de mesures. Ces méthodes, moyennant un a priori parcimonieux sur le nombre de composantes non nulles, permettent une reconstruction dans un système sous-déterminé.

Parmi les différentes méthodes à notre disposition, nous proposons d'utiliser l'algorithme d'*Orthogonal Matching Pursuit* (OMP) [122]. Cet algorithme est bien connu dans la littérature des méthodes d'acquisition comprimée pour son bon compromis complexité calculatoire/performances.

La figure D.1 présente le résultat de reconstruction du spectre des variations de célérité via OMP (avec ici une contrainte de limitation à 20 composantes non nulles sur le spectre estimé). On y observe une estimation des composantes dominantes ¹ : à savoir les composantes principales diurnes et semi-diurnes ainsi qu'une composante visiblement résultant d'une interaction entre la marée semi-diurne et la fréquence de Coriolis.

Afin de déterminer si une identifiabilité des ondes internes est possible au regard des variations du rayon de cohérence avec cette méthode, nous effectuons la même estimation avec la série temporelle des rayons de cohérence calculés pour le signal de 5kHz. Avec les mêmes critères sur le nombre de composantes spectrales non nulles, l'utilisation de l'algorithme OMP nous permet d'estimer le spectre donné en figure D.2.

^{1.} Par dominante, nous entendons ici les composantes dont l'amplitude est le plus importante.



FIGURE D.1. – Spectre reconstruit par l'algorithme OMP du signal de mesure de célérité pour 24 h de mesures. On observe ici la présence des composantes diurnes (O1) et semi diurnes (M2,S2 ou N2) ainsi qu'une composante d'interaction entre la marée semi-diurne et la fréquence de Coriolis.



FIGURE D.2. – Spectre des variations du rayon de cohérence reconstruit au moyen de l'algorithme OMP. Comparaison aux ondes des marées diurnes et semidiurnes principales.

On retrouve alors certaines composantes communes dont la composante diurne, mais également la composante d'interaction entre l'onde de Coriolis et une composante semidiurne. Cependant, ce traitement est pour le moment trop dépendant des paramètres liés à l'utilisation d'OMP pour juger de la fiabilité de la méthode. Elle permet néanmoins de mettre en avant la présence d'une variation diurne du rayon de cohérence qui n'a pas pu être observée à partir des traitements précédents du fait des approximations utilisées pour convertir le champ de température en célérité.

Bibliographie

- John R. APEL et Chris JACKSON. « A new analytical model for internal solitons in the ocean ». In : *Journal of Physical Oceanography* 33.11 (2003), p. 2247–2269.
 ISSN : 00223670. DOI : 10.1175/1520-0485(2003)033<2247 : ANAMFI>2.0.CO;2.
- [2] Lalit BAHL et al. « Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate (corresp.) » In : *IEEE Transactions on information theory* 20.2 (1974), p. 284–287.
- [3] Dror BARON, Shriram SARVOTHAM et Richard G BARANIUK. « Bayesian compressive sensing via belief propagation ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 58.1 (2009), p. 269–280.
- [4] Heinz H BAUSCHKE, Patrick L COMBETTES et D Russell LUKE. « Phase retrieval, error reduction algorithm, and Fienup variants : a view from convex optimization ». In : JOSA A 19.7 (2002), p. 1334–1345.
- [5] Mohsen BAYATI et Andrea MONTANARI. « The dynamics of message passing on dense graphs, with applications to compressed sensing ». In : *IEEE Transactions* on Information Theory 57.2 (2011), p. 764–785. ISSN : 00189448. DOI : 10.1109/ TIT.2010.2094817.
- [6] Guillaume BEAUMONT, Ronan FABLET et Angélique DRÉMEAU. « An Approximate Message Passing Approach for DOA Estimation in Phase Noisy Environments ». In : International Conference on Latent Variable Analysis and Signal Separation. Springer. 2018, p. 385–394.
- [7] Guillaume BEAUMONT, Ronan FABLET et Angélique DRÉMEAU. « Approche de type message passing pour la localisation de source en milieu fluctuant ». In : 27ème colloque du Gretsi. GdR ISIS. 2019.
- [8] Guillaume BEAUMONT et al. « At-sea experimental evaluation of the influence of environmental fluctuations on the acoustic coherence radius ». In : *Proceeding of* the Underwater Acoustics Conference and Exhibition (UACE). 2019.
- [9] Guillaume BEAUMONT et al. « Von Mises prior for phase-noisy DOA estimation : the VitAMin algorithm ». In : Proceeding of the Underwater Acoustics Conference and Exhibition (UACE). 2019.

- [10] Thomas BLUMENSATH et Mike E DAVIES. « Iterative hard thresholding for compressed sensing ». In : Applied and computational harmonic analysis 27.3 (2009), p. 265–274.
- [11] Roo BORTFELD. « Elastic Waves in Layered Media ». In : Geophysical Prospecting 15.4 (1967), p. 644–650. ISSN : 13652478. DOI : 10.1111/j.1365-2478.1967.
 tb01808.x.
- [12] Homer P BUCKER. « Use of calculated sound fields and matched-field detection to locate sound sources in shallow water ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 59.2 (1976), p. 368–373.
- [13] Hans BURCHARD. Applied turbulence modelling in marine waters. T. 100. Springer Science et Business Media, 2002.
- [14] Francesco CALTAGIRONE, Lenka ZDEBOROVÁ et Florent KRZAKALA. « On convergence of approximate message passing ». In : 2014 IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE. 2014, p. 1812–1816.
- [15] Emmanuel J CANDES, Thomas STROHMER et Vladislav VORONINSKI. « Phaselift : Exact and stable signal recovery from magnitude measurements via convex programming ». In : Communications on Pure and Applied Mathematics 66.8 (2013), p. 1241–1274.
- [16] Jack CAPON. « High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis ». In : *Adaptive Antennas for Wireless Communications*. 2009. ISBN : 978-0-470-54407-5. DOI : 10.1109/9780470544075.ch2.
- [17] Scott Shaobing CHEN, David L DONOHO et Michael A SAUNDERS. « Atomic decomposition by basis pursuit ». In : SIAM review 43.1 (2001), p. 129–159.
- [18] Sheng CHEN, Colin FN COWAN et Peter M GRANT. « Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks ». In : *IEEE Transactions* on neural networks 2.2 (1991), p. 302–309.
- [19] Liel COHEN et Roie ZIVAN. « Max-sum revisited : The real power of damping ». In : International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems. Springer. 2017, p. 111–124.
- [20] John A. COLOSI. Sound propagation through the stochastic ocean. Cambridge University Press, 2016. ISBN : 978-1-139-68041-7. DOI : 10.1017/CB09781139680417.
- John A. COLOSI et Michael G. BROWN. « Efficient numerical simulation of stochastic internal-wave-induced sound-speed perturbation fields ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 103.4 (1998), p. 2232-2235. ISSN : 0001-4966. DOI : 10.1121/1.421381. URL : http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/103/4/10.1121/1.421381.

- [22] John A. COLOSI et al. « Observations of sound-speed fluctuations in the western Philippine Sea in the spring of 2009 ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 134.4 (2013), p. 3185–3200. ISSN : 0001-4966. DOI : 10.1121/1.4818784.
- [23] Henry Cox. « Line array performance when the signal coherence is spatially dependent ». In : The Journal of the Acoustical Society of America 54.6 (1973), p. 1743–1746.
- [24] Wei DAI et Olgica MILENKOVIC. « Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction ». In : *IEEE transactions on Information Theory* 55.5 (2009), p. 2230–2249.
- [25] Roger DASHEN, Walter H MUNK et Kenneth M WATSON. Sound transmission through a fluctuating ocean. Cambridge University Press, 2010.
- [26] Ingrid DAUBECHIES, Michel DEFRISE et Christine DE MOL. « An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* 57.11 (2004), p. 1413–1457.
- [27] Arthur P. DEMPSTER, Nan M. LAIRD et Donald B. RUBIN. « Maximum Likelihood from Incomplete Data Via the EM Algorithm ». In : Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological) 39.1 (1977), p. 1–22. DOI : 10.1111/j.2517-6161.1977.tb01600.x.
- [28] Quentin DENOYELLE. « Theoretical and Numerical Analysis of Super-Resolution Without Grid ». Thèse de doct. Université Paris Dauphine-PSL, 2018.
- [29] Annette J. DOBSON. An introduction to generalized linear models 2nd edition. Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [30] David L DONOHO, Adel JAVANMARD et Andrea MONTANARI. « Informationtheoretically optimal compressed sensing via spatial coupling and approximate message passing ». In : *IEEE transactions on information theory* 59.11 (2013), p. 7434–7464.
- [31] David L DONOHO, Arian MALEKI et Andrea MONTANARI. « Message-passing algorithms for compressed sensing ». In : Proceedings of the National Academy of Sciences 106.45 (2009), p. 18914–18919.
- [32] David L DONOHO et al. « Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit ». In : *IEEE transactions on Information Theory* 58.2 (2012), p. 1094–1121.

- [33] Angelique DREMEAU et Antoine DELEFORGE. « Phase retrieval with a multivariate von Mises prior : From a Bayesian formulation to a lifting solution ». In : ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing -Proceedings (2017), p. 4596–4600. ISSN : 15206149. DOI : 10.1109/ICASSP.2017. 7953027.
- [34] Angelique DREMEAU et Cedric HERZET. « DOA estimation in structured phasenoisy environments ». In : ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings March (2017), p. 3176–3180. ISSN : 15206149. DOI : 10.1109/ICASSP.2017.7952742.
- [35] Angelique DREMEAU et Cedric HERZET. DOA estimation in structured phasenoisy environments : technical report. Rapp. tech. arXiv :1609.03503, 2017. URL : http://arxiv.org/abs/1609.03503.
- [36] Angélique DREMEAU, Cédric HERZET et Laurent DAUDET. « Boltzmann machine and mean-field approximation for structured sparse decompositions ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 60.7 (2012), p. 3425–3438. ISSN : 1053587X. DOI : 10.1109/TSP.2012.2192436.
- [37] Angélique DREMEAU et Florent KRZAKALA. « Phase recovery from a Bayesian point of view : The variational approach ». In : ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings 2015-Augus.4 (2015), p. 3661–3665. ISSN : 15206149. DOI : 10.1109/ICASSP.2015.7178654.
- [38] Loïc EHRHARDT et al. « Evaluating a linearized Euler equations model for strong turbulence effects on sound propagation ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 133.4 (2013), p. 1922–1933. ISSN : 0001-4966. DOI : 10.1121/1.4792150. URL : http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/23556562.
- [39] Michael EPSTEIN. Buoyancy-driwen exchange flow through small openings in horizontal partitions. T. 110. 4. 1988. ISBN : 0-12-178251-4. DOI : 10.1115/1.
 3250589.
- [40] Robert ESSWEIN et Stanley M. FLATTE. « Calculation of the strength and diffraction parameters in oceanic sound transmission ». In : Journal of the Acoustical Society of America 67.5 (1980), p. 1523–1531. ISSN : NA. DOI : 10.1121/1.384324.
- [41] Dominique FATTACCIOLI et Gaultier REAL. « A brief five-year progress report on the DGA ALMA project : scientific program and projects, at-sea campaigns and data collected, system evolutions and improvements ». In : *Proceeding of the Underwater Acoustics Conference and Exhibition (UACE)*. 2019.
- [42] Jeffrey A FESSLER et Alfred O HERO. « Penalized maximum-likelihood image reconstruction using space-alternating generalized EM algorithms ». In : *IEEE Transactions on Image Processing* 4.10 (1995), p. 1417–1429.

- [43] Cedric FEVOTTE et Simon J GODSILL. « A Bayesian approach for blind separation of sparse sources ». In : *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing* 14.6 (2006), p. 2174–2188.
- [44] Cédric FÉVOTTE et Simon J GODSILL. « Blind separation of sparse sources using Jeffrey's inverse prior and the EM algorithm ». In : International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation. Springer. 2006, p. 593– 600.
- [45] James R FIENUP. « Phase retrieval algorithms : a comparison ». In : Applied optics 21.15 (1982), p. 2758–2769.
- [46] Stanley M. FLATTÉ et Stephen A. REYNOLDS. « Path-integral treatment of acoustic mutual coherence functions for rays in a sound channel ». In : *Journal* of the Acoustical Society of America 77.5 (1985), p. 1716–1722. ISSN : NA. DOI : 10.1121/1.391920.
- [47] Stanley M. FLATTÉ, Stephen A. REYNOLDS et Roger DASHEN. « Path-integral treatment of intensity behavior for rays in a sound channel ». In : Journal of the Acoustical Society of America 82.3 (1987), p. 967–972. ISSN : NA. DOI : 10.1121/1.395296.
- [48] Charles W FOX et Stephen J ROBERTS. « A tutorial on variational Bayesian inference ». In : Artificial intelligence review 38.2 (2012), p. 85–95.
- [49] Rod FREHLICH, Larry CORNMAN et Robert SHARMAN. « Simulation of threedimensional turbulent velocity fields ». In : Journal of Applied Meteorology 40.2 (2001), p. 246–258.
- [50] Jean-Jacques FUCHS. « On the use of the global matched filter for DOA estimation in the presence of correlated waveforms ». In : 2008 42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. IEEE. 2008, p. 269–273.
- [51] Christopher GARRETT et Walter MUNK. « Space-Time scales of internal waves ». In : Geophysical Fluid Dynamics 3.1 (1972), p. 225–264. ISSN : 0016-7991. DOI : 10.1080/03091927208236082.
- [52] Ralph W GERCHBERG. « A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures ». In : *Optik* 35 (1972), p. 237–246.
- [53] Timo GERKMANN. « Bayesian estimation of clean speech spectral coefficients given a priori knowledge of the phase ». In : 62.16 (2014), p. 4199–4208.
- [54] Alex B GERSHMAN, Christoph F MECKLENBRAUKER et Johann F BOHME. « Matrix fitting approach to direction of arrival estimation with imperfect spatial coherence of wavefronts ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 45.7 (1997), p. 1894–1899.

- [55] Mark GIROLAMI. « A variational method for learning sparse and overcomplete representations ». In : *Neural computation* 13.11 (2001), p. 2517–2532.
- [56] Daniel GRIFFIN et Jae LIM. « Signal estimation from modified short-time Fourier transform ». In : *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 32.2 (1984), p. 236–243.
- [57] Martin HAARDT et Josef A. NOSSEK. « Unitary ESPRIT : How to obtain increased estimation accuracy with a reduced computational burden ». In : Wiley-IEEE Press, jan. 2009, p. 286–296. ISBN : 978-0-470-54407-5. DOI : 10.1109/ 9780470544075.ch2.
- [58] Robert W HARRISON. « Phase problem in crystallography ». In : JOSA a 10.5 (1993), p. 1046–1055.
- [59] Matthew A HERMAN et Thomas STROHMER. « High-resolution radar via compressed sensing ». In : *IEEE transactions on signal processing* 57.6 (2009), p. 2275– 2284.
- [60] Cédric HERZET et Angélique DRÉMEAU. « Bayesian pursuit algorithms ». In : 2010 18th European Signal Processing Conference. IEEE. 2010, p. 1474–1478.
- [61] Cédric HERZET et Angélique DRÉMEAU. « Sparse representation algorithms based on mean-field approximations ». In : 2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE. 2010, p. 2034–2037.
- [62] Kishore JAGANATHAN, Samet OYMAK et Babak HASSIBI. « Sparse phase retrieval : Convex algorithms and limitations ». In : 2013 IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE. 2013, p. 1022–1026.
- [63] Finn B. JENSEN et al. Computational Ocean Acoustics. T. 97. 5. 1995. DOI : 10.1121/1.411832.
- [64] Don H JOHNSON et Dan E DUDGEON. « Array Signal Processing : Concepts and Techniques ». In : (1992).
- [65] Rudolph Emil KALMAN. « A new approach to linear filtering and prediction problems ». In : (1960).
- [66] Ori KATZ et al. « Non-invasive single-shot imaging through scattering layers and around corners via speckle correlations ». In : *Nature photonics* 8.10 (2014), p. 784.
- [67] Joseph B. KELLER. « Rays, waves and asymptotics ». In : Bulletin of the American Mathematical Society 84.5 (1978), p. 727–750. ISSN : 02730979. DOI : 10.1090/ S0002-9904-1978-14505-4.

- [68] Florent KRZAKALA et al. « Probabilistic reconstruction in compressed sensing : algorithms, phase diagrams, and threshold achieving matrices ». In : Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment 2012.08 (2012), P08009.
- [69] Florent KRZAKALA et al. « Probabilistic reconstruction in compressed sensing : Algorithms, phase diagrams, and threshold achieving matrices ». In : Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment 2012.8 (2012), p. 1–42. ISSN : 17425468. DOI : 10.1088/1742-5468/2012/08/P08009.
- [70] Florent KRZAKALA et al. « Statistical-physics-based reconstruction in compressed sensing ». In : *Physical Review X* 2.2 (2012), p. 021005.
- [71] Florent KRZAKALA et al. « Variational free energies for compressed sensing ». In : *IEEE International Symposium on Information Theory - Proceedings* 0.3 (2014), p. 1499–1503. ISSN : 21578095. DOI : 10.1109/ISIT.2014.6875083.
- [72] Yann LE GALL et al. « Bayesian source localization with uncertain Green's function in an uncertain shallow water ocean ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 139.3 (2016), p. 993–1004.
- [73] Murray D. LEVINE. « A modification of the Garrett-Munk internal wave spectrum ». In : Journal of Physical Oceanography 32.11 (2002), p. 3166–3181. ISSN : 00223670. DOI : 10.1175/1520-0485(2002)032<3166:AMOTGM>2.0.CO;2.
- [74] Jian LI, Petre STOICA et Zheng-She LIU. « Comparative study of IQML and MODE direction-of-arrival estimators ». In : *IEEE Transactions on Signal Pro*cessing 46.1 (1998), p. 149–160.
- [75] James F LYNCH et al. « Acoustic travel-time perturbations due to shallow-water internal waves and internal tides in the Barents Sea Polar Front : Theory and experiment ». In : The Journal of the Acoustical Society of America 99.2 (1996), p. 803–821.
- [76] Dmitry M. MALIOUTOV, Sujay R. SANGHAVI et Alan S. WILLSKY. « Sequential compressed sensing ». In: *IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing* 4.2 (2010), p. 435–444. ISSN: 19324553. DOI: 10.1109/JSTSP.2009.2038211.
- [77] Stéphane G MALLAT et Zhifeng ZHANG. « Matching pursuits with time-frequency dictionaries ». In : *IEEE Transactions on signal processing* 41.12 (1993), p. 3397– 3415.
- [78] Andre MANOEL et al. « Swept approximate message passing for sparse estimation ».
 In : International Conference on Machine Learning (2015), p. 1123–1132.
- [79] Efstratios MANOUSAKIS. « Quantum mechanics and path integrals ». In : Practical Quantum Mechanics. 2015. DOI : 10.1093/acprof:oso/9780198749349.003. 0013.

- [80] Kanti V MARDIA et Peter E JUPP. Directional statistics. T. 494. John Wiley & Sons, 2009.
- [81] Kanti V. MARDIA et al. « A multivariate von Mises distribution with applications to bioinformatics ». In : *Canadian Journal of Statistics* 36 (2008), p. 99–109. ISSN : 03195724. DOI : 10.1002/cjs.5550360110.
- [82] Gordon MARTIN. « Degradation of angular resolution for eigenvector-eigenvalue (EVEV) high-resolution processors with inadequate estimation of noise coherence ».
 In : ICASSP'84. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. T. 9. IEEE. 1984, p. 758–761.
- [83] Herman MEDWIN. « Speed of sound in water : A simple equation for realistic parameters ». In : The Journal of the Acoustical Society of America 58.6 (1975), p. 1318–1319.
- [84] Christopher A METZLER et al. « Coherent inverse scattering via transmission matrices : Efficient phase retrieval algorithms and a public dataset ». In : 2017 IEEE International Conference on Computational Photography (ICCP). IEEE. 2017, p. 1–16.
- [85] Subhadip MUKHERJEE et Chandra Sekhar SEELAMANTULA. « An iterative algorithm for phase retrieval with sparsity constraints : application to frequency domain optical coherence tomography ». In : 2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE. 2012, p. 553–556.
- [86] Malte MÜLLER et al. « Toward an internal gravity wave spectrum in global ocean models ». In : Geophysical Research Letters 42.9 (2015), p. 3474–3481.
- [87] Walter H. MUNK. « Origin and Generation of Waves ». In : Coastal Engineering Proceedings 1.1 (2010), p. 1. ISSN : 0589-087X. DOI : 10.9753/icce.v1.1.
- [88] Santosh NANNURU, Peter GERSTOFT et Kay L. GEMBA. « Sparse bayesian learning with uncertain sensing matrix ». In : ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings (2017), p. 3964–3968.
- [89] Radford M NEAL et Geoffrey E HINTON. « A view of the EM algorithm that justifies incremental, sparse, and other variants ». In : Learning in graphical models. Springer, 1998, p. 355–368.
- [90] Deanna NEEDELL et Joel A TROPP. « CoSaMP : iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples ». In : Communications of the ACM 53.12 (2010), p. 93–100.
- [91] Bruno A OLSHAUSEN et David J FIELD. « Sparse coding with an overcomplete basis set : A strategy employed by V1? » In : Vision research 37.23 (1997), p. 3311–3325.

- [92] Björn OTTERSTEN, Peter STOICA et Richard ROY. « Covariance matching estimation techniques for array signal processing applications ». In : *Digital Signal Processing* 8.3 (1998), p. 185–210.
- [93] Arogyaswami PAULRAJ et Thomas KAILATH. « Direction of arrival estimation by eigenstructure methods with imperfect spatial coherence of wave fronts ». In : The Journal of the Acoustical Society of America 83.3 (1988), p. 1034–1040.
- [94] Arogyaswami PAULRAJ, Richard ROY et Thomas KAILATH. « Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques-ESPRIT ». In : Conference Record Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. 1985, p. 83–89. ISBN : 0-8186-0729-7. DOI : 10.1109/ACSSC.1985.671426.
- [95] Chaim Leib PEKERIS. « Theory of propagation of explosive sound in shallow water ». In : Memoir of the Geological Society of America 27 (1948), p. 1–116. ISSN : 00721069. DOI : 10.1130/MEM27-2-p1.
- [96] Roger PENROSE. « A generalized inverse for matrices ». In : Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society. T. 51. 3. Cambridge University Press. 1955, p. 406–413.
- [97] Marius PESAVENTO, Alex B GERSHMAN et Martin HAARDT. « Unitary root-MUSIC with a real-valued eigendecomposition : A theoretical and experimental performance study ». In : *IEEE transactions on signal processing* 48.5 (2000), p. 1306–1314.
- [98] Michael B PORTER et Yong-Chun LIU. « Finite-element ray tracing ». In : Theoretical and computational acoustics 2 (1994), p. 947–956.
- [99] Boshra RAJAEI et al. « Intensity-only optical compressive imaging using a multiply scattering material and a double phase retrieval approach ». In : ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings 2016-May (2016), p. 4054–4058. ISSN : 15206149. DOI : 10.1109/ICASSP.2016. 7472439.
- [100] Boshra RAJAEI et al. « Robust Phase Retrieval with the Swept Approximate Message Passing (prSAMP) Algorithm ». In : Image Processing On Line 7 (2017), p. 43–55.
- [101] Sundeep RANGAN. « Estimation with random linear mixing, belief propagation and compressed sensing ». In : 2010 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems, CISS 2010 (2010), p. 1–6. DOI : 10.1109/CISS.2010.5464768. URL : http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber= 5464768.
- [102] Sundeep RANGAN. « Generalized approximate message passing for estimation with random linear mixing ». In : *IEEE International Symposium on Information Theory - Proceedings* (2011), p. 2168–2172. ISSN : 21578104. DOI : 10.1109/ISIT. 2011.6033942.
- [103] Sundeep RANGAN, Philip SCHNITER et Alyson K. FLETCHER. « Vector approximate message passing ». In : *IEEE International Symposium on Information Theory - Proceedings*. 2017, p. 1588–1592. ISBN : 978-1-5090-4096-4. DOI : 10. 1109/ISIT.2017.8006797.
- [104] Gaultier REAL. « An ultrasonic testbench for emulating the degradation of sonar performance in fluctuating media ». PhD Thesis. Aix-Marseille Université, 2015. DOI: 10.3813/AAA.919028.
- [105] Gaultier REAL et Dominique FATTACCIOLI. « Acoustic Laboratory for Marine Applications : Overview of the ALMA system and data analysis. » In : OCEANS 2018 MTS/IEEE Charleston. 2018, p. 1–7. DOI : 10.1109/OCEANS.2018.8604481.
- [106] Gaultier REAL et al. « Influence of de-coherence effects on sonar array gain : scaled experiment, simulations and simplified theory comparison ». In : Underwater Acoustics Conference and Exhibition. 2016.
- [107] Gaultier REAL et al. « Decoherence effects in 3D fluctuating environments : Numerical and experimental study ». In : Proceedings of Meetings on Acoustics 173EAA 30.1 (2017), p. 070009.
- [108] SS REDDI. « Multiple source location-a digital approach ». In : IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 1 (1979), p. 95–105.
- [109] Audrey REPETTI. « Algorithmes d'optimisation en grande dimension : applications à la résolution de problèmes inverses ». Thèse de doct. Université Paris-Est, 2015.
- [110] Christ D RICHMOND. « Response of sample covariance based MVDR beamformer to imperfect look and inhomogeneities ». In : *IEEE Signal Processing Letters* 5.12 (1998), p. 325–327.
- [111] JOERG RINGELSTEIN, Alex B GERSHMAN et JF BOHME. « Direction finding in random inhomogeneous media in the presence of multiplicative noise ». In : *IEEE* Signal Processing Letters 7.10 (2000), p. 269–272.
- [112] Henrik SCHMIDT. « Self-consistent perturbation approach to rough surface scattering in stratified elastic media ». In : Journal of the Acoustical Society of America 86.4 (1989), p. 1511–1522. ISSN : NA. DOI : 10.1121/1.398712.
- [113] Ralph O. SCHMIDT. « Multiple emitter location and signal parameter estimation ». In : Adaptive Antennas for Wireless Communications. 2009. ISBN : 978-0-470-54407-5. DOI : 10.1109/9780470544075.ch2.

- [114] Philip SCHNITER et Sundeep RANGAN. « Compressive phase retrieval via generalized approximate message passing ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 63.4 (2015), p. 1043–1055. ISSN : 1053587X.
- [115] Philip SCHNITER, Sundeep RANGAN et Alyson K. FLETCHER. « Vector approximate message passing for the generalized linear model ». In : Conference Record Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. 2017, p. 1525–1529. ISBN : 978-1-5386-3954-2. DOI : 10.1109/ACSSC.2016.7869633.
- [116] Tie-Jun SHAN, Mati WAX et Thomas KAILATH. « On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals ». In : *IEEE Transactions on* Acoustics, Speech, and Signal Processing 33.4 (1985), p. 806–811.
- [117] YOAV SHECHTMAN et al. « Phase retrieval with application to optical imaging : a contemporary overview ». In : *IEEE signal processing magazine* 32.3 (2015), p. 87–109.
- [118] Charles SOUSSEN et al. « From Bernoulli-Gaussian deconvolution to sparse signal restoration ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 59.10 (2011), p. 4572– 4584. ISSN : 1053587X. DOI : 10.1109/TSP.2011.2160633.
- [119] F. D. TAPPERT et R. H. HARDIN. « Computer Simulation of Long-Range Ocean Acoustic Propagation Using the Parabolic Equation Method. » In : Int Congr on Acoust, 8th, Contributed Pap. 1974, p. 452.
- [120] Fred D. TAPPERT. « The parabolic approximation method ». In : Wave Propagation and Underwater Acoustics. 2008, p. 224–287. DOI : 10.1007/3-540-08527-0_5.
- [121] Robert TIBSHIRANI. « Regression shrinkage and selection via the lasso ». In : Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological) 58.1 (1996), p. 267–288.
- Joel A. TROPP. « Just relax : Convex programming methods for identifying sparse signals in noise ». In : *IEEE Transactions on Information Theory* 52.3 (2006), p. 1030–1051. ISSN : 00189448. DOI : 10.1109/TIT.2005.864420.
- [123] Joel A TROPP et Anna C GILBERT. « Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit ». In : *IEEE Transactions on information theory* 53.12 (2007), p. 4655–4666.
- [124] Chandra VAIDYANATHAN et Kevin M BUCKLEY. « Performance analysis of the MVDR spatial spectrum estimator ». In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 43.6 (1995), p. 1427–1437.

- [125] Irène WALDSPURGER, Alexandre D'ASPREMONT et Stéphane MALLAT. « Phase recovery, maxcut and complex semidefinite programming ». In : *Mathematical Programming* 149.1-2 (2015), p. 47–81.
- [126] Garth J WILLIAMS et al. « Coherent diffractive imaging and partial coherence ». In : Physical Review B 75.10 (2007), p. 104102.
- [127] CF Jeff WU et al. « On the convergence properties of the EM algorithm ». In : The Annals of statistics 11.1 (1983), p. 95–103.
- [128] Angeliki XENAKI, Peter GERSTOFT et Klaus MOSEGAARD. « Compressive beamforming ». In : The Journal of the Acoustical Society of America 136.1 (2014), p. 260-271. ISSN : 0001-4966. DOI : 10.1121/1.4883360. URL : http://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.4883360.
- [129] Jonathan S YEDIDIA, Jinghu CHEN et Marc PC FOSSORIER. « Generating code representations suitable for belief propagation decoding ». In : Proceedings of the annual Allerton Conference on Communication Control and Computing. T. 40. 1. The University; 1998. 2002, p. 447–456.
- Jonathan S. YEDIDIA, William T. FREEMAN et Yair WEISS. « Constructing freeenergy approximations and generalized belief propagation algorithms ». In: *IEEE Transactions on Information Theory* 51.7 (2005), p. 2282-2312. ISSN: 00189448.
 DOI: 10.1109/TIT.2005.850085. URL: http://www.merl.com/papers/docs/ TR2001-16.pdf.
- [131] Hadi ZAYYANI, Massoud BABAIE-ZADEH et Christian JUTTEN. « Bayesian pursuit algorithm for sparse representation ». In : 2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE. 2009, p. 1549–1552.
- [132] Ilan ZISKIND et Mati WAX. « Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection ». In : *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and* Signal Processing 36.10 (1988), p. 1553–1560.





Titre : Traitement correctif des effets de décohérence acoustique induits par les fluctuations du milieu de propagation.

Mots clés : Estimation des directions d'arrivée, propagation en milieu fluctuant, approches bayésiennes, ondes internes, reconstruction de phase.

Résumé : L'objectif de ces travaux de thèse est de proposer des approches bayésiennes "physiquement informées" pour l'estimation de directions d'arrivée de sources acoustiques sous-marines dans un milieu océanique fluctuant. Dans un premier temps nous verrons donc comment décrire ces fluctuations comme perturbation locale de la célérité du milieu pour ensuite décrire leur impact sur la propagation d'une onde et la mesure de celle-ci. Ce faisant nous pourrons décrire la dégradation subie par le signal, motivant la création d'un modèle statistique pour décrire cette perturbation.

Après un état de l'art sur les méthodes d'estimation des directions d'arrivées (DOA), tout d'abord en milieu constant, puis en milieu incertain, nous définirons une modélisation de ces fluctuations sous forme d'un bruit de phase structuré selon une distribution gaussienne multivariée. Nous verrons que ce choix nous rapproche du modèle théorique de structure défini dans le premier chapitre. Cette modélisation nous permet alors de proposer la méthode paSAMP, algorithme d'Approximate Message Passing, inspirée des méthodes de reconstruction de phase et se révélant plus robuste au bruit additif, ainsi qu'au bruit de phase structuré, que les méthodes d'estimation des DOA classiques.

Dans un deuxième temps, nous proposerons de réviser notre modélisation statistique et de considérer un bruit de phase distribuée selon une loi de Von Mises multivariée. Cette distribution permet une modélisation plus fidèle des bruits de phase. Considérant ce nouveau modèle, nous dériverons deux nouvelles méthodes : VitAMin et VistaBEM, respectivement extensions de paSAMP et paVBEM, déjà présent dans la littérature et reposant sur une autre approximation variationnelle bayésienne. Les premiers résultats, réalisés sur des données synthétiques considérant un modèle plus simple de Von Mises unidimensionnel, s'avèrent prometteurs quant à la bonne intégration des modèles considérés et ainsi à leur robustesse au bruit de phase distribué selon ce modèle.

Pour finir nous verrons que par le traitement de données réelles, il nous est possible d'extraire les mêmes grandeurs caractéristiques que celles décrites par le modèle théorique, mais également d'identifier certaines ondes internes spécifiques. Ceci à des fins de caractérisation rapide des fluctuations du milieu par méthode passive ou encore pour une initialisation informée des algorithmes proposés.

Title : Variationnal bayesian methods for DOA estimation in a fluctuating medium.

Keywords : DOA estimation, Wave Propagation in Random Media, Bayesian Approaches, Internal Waves, Phase Retrieval

Abstract : The purpose of these works is to propose new "physically informed" bayesian algorithms for DOA estimation in presence of random fluctuations due to the presence of internal waves in the propagation medium. First we will see how to describe these fluctuations as a local perturbation of the celerity of the medium and then the impact of such waves on a propagated signal. In doing so, we are able to observe the corruption of this signal and to propose a statistical model of this perturbation.

After a state of the art of DOA estimation techniques in both constant an uncertain media, we will propose a modelization of the fluctuations as a multiplicative phase noise following a multivariate gaussian distribution. Very close to the theoretical model, this distribution allows us to develop the paSAMP algorithm, an Approximate Message Passing technique inspired form phase retrieval litterature which integrates this multiplicative phase noise model. In order to get closer to the theoretical model, we propose to upgrade the phase noise prior using a multivariate Von Mises prior, allowing us to propose new bayesian methods for DOA estimation such as the VitAMin and the VistaBEM algorithms as extensions of resp. the paSAMP and the paVBEM algorithms. The first results on synthetic measurement considering a univariate Von Mises phase noise seems are promising regarding the robustness of these algorithms to this new noise model.

To conclude, we will see with the processing of real data from the ALMA campaign that it is possible to retrieve quantities from the theoretical model through signal statistics. Moreover, these quantities allow us to identify known phenomenon in the propagation medium with only passive measurement. Such knowledge can then be use for tomography or as "smart initialization" of the different algorithms.