HAL open science

Isomonodromie en théorie de Galois différentielle

Hugo Bay-Rousson

To cite this version:

Hugo Bay-Rousson. Isomonodromie en théorie de Galois différentielle. Géométrie algébrique [math.AG]. Sorbonne Université, 2019. Français. NNT : 2019SORUS044 . tel-02935860

HAL Id: tel-02935860

https://theses.hal.science/tel-02935860v1

Submitted on 10 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sorbonne Université

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Hugo Bay-Rousson

Isomonodromie en théorie de Galois différentielle

---

dirigée par Joao Pedro dos Santos

Institut de mathématiques de Jussieu-Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Sorbonne Université, Campus Pierre et Marie Curie.
École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Résumé

La première partie de cette thèse concerne la généralisation d'une caractérisation, d'un point de vu Tannakien, des suites exactes de schémas en groupoïdes affines, qui avait été esquissée par Esnault-Hai. Cette caractérisation avait été développée originellement par Duong-Hai dans le cas des schémas en groupes affine. Ceci nous permettra de démontrer une suite exacte théorie de Galois différentielle, conjecturée par Duong-Hai. De plus, cette suite exacte sera utilisée pour prouver que le groupe de Galois d'une inflation est isoconstant.

La seconde partie de cette thèse se rapproche de la théorie de Galois différentielle développée par Cassidy-Singer, puis traitée dans le cadre Tannakien par Ovchinnikov, Gillet et Gorchinsky. Ils introduisent la notion de catégories différentielles Tannakiennes, et prouvent que le groupe Tannakien associé est naturellement muni d'une connexion. En adaptant à notre contexte leurs travaux, on montre alors que le groupe de Galois d'une inflation possède naturellement une connexion. Nous démontrons que lorsque cette connexion est triviale, le groupe de Galois est constant. On retrouvera alors un analogue du fait que le groupe de Galois d'une inflation est isoconstant.

Mots-clés

Théorie Tannakienne ; représentations de schémas en groupoïdes ; théorie de Galois différentielle ; théorie Tannakienne différentielle.

Table des matières

1 Introduction **7**

2 Une suite exacte de groupoïdes **17**
2.1 Introduction 17
2.2 Schéma en groupoïdes 18
2.2.1 Morphisme quotient 24
2.3 Représentation de groupoïdes 26
2.3.1 Point fixe d'une représentation. 28
2.3.2 Restriction et Induction. 29
2.3.3 Propriétés des morphismes 31
2.4 Une caractérisation des suites exactes 33
2.5 La suite exacte d'inflation 35
2.6 Le théorème d'isomonodromie 42

3 La théorie Tannakienne différentielle **49**
3.1 Introduction 49
3.2 Compléments d'algèbre extérieure 50
3.2.1 La dérivée de Lie 51
3.3 Construction de la première classe d'Atiyah 54
3.3.1 La classe d'Atiyah relative 56
3.4 Cristaux en schémas affines 66
3.4.1 Représentation d'un schéma en groupes affine différentiel . . 69
3.4.2 Trivialisation du groupe 70
3.5 Catégories différentielles 73
3.5.1 Changement de base dans les catégories abéliennes 73
3.5.2 Les catégories différentielles 75
3.5.3 Un théorème Tannakien 78
3.6 Application à $\mathcal{C}(X/S)$ 79
3.6.1 Comparaison entre $\mathrm{Gal}'(M)$ et $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ 81
3.6.2 Le théorème d'isomonodromie 82

Chapitre 1

Introduction

Ce travail de thèse trouve son origine dans deux contextes, à priori différents, mais très ressemblants. Le premier est en théorie de Galois différentiel.

Considérons l'équation différentielle (E)

$$\frac{\delta Y}{\delta x} = A(x, t_1, \ldots, t_n)Y \tag{1.1}$$

où $A(x, t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{GL}(k)$ avec k un corps de fonctions. Ici, on voit x comme la variable principale, et $t_1, \ldots, t_n$ comme les paramètres du système. Nous avons donc une famille d'équations différentielles et on dira que ce système est complètement intégrable s'il existe $M_1, \ldots, M_n \in \mathrm{GL}(k)$ tel que le système

$$\begin{aligned} \frac{\delta Y}{\delta x} &= A(x, t_1, \ldots, t_n)Y \\ \frac{\delta Y}{\delta t_1} &= M_1(x, t_1, \ldots, t_n)Y \\ &\vdots \\ \frac{\delta Y}{\delta t_n} &= M_n(x, t_1, \ldots, t_n)Y \end{aligned}$$

soit intégrable. Dans leur article [CS05], les auteurs attachent à l'équation (1.1) un groupe algébrique $\mathrm{Gal}(E)$ appelé le groupe de Galois paramétré de l'équation. Ils lient alors la complète intégrabilité du système (E) avec une propriété du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E)$:

Théorème 1 ([CS05])**.** *Soit k un corps différentiel vérifiant certaines hypothèses, de corps des constantes C. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le système (E) est complètement intégrable.*

2. *Le groupe de Galois paramétré* $\mathrm{Gal}(E)$ *est conjugué à un groupe algébrique défini sur* C.

Un deuxième contexte où ce genre de théorème apparaît est en géométrie complexe. Il est issu des articles de Bolibrukh [Bol98] [Bol01].

Soit $\pi : X \to T$ une famille holomorphe de variétés compactes connexes paramétrée par une variété complexe connexe T avec un point base t_0. On suppose que le groupe fondamental des fibres X_t est constant, et finiment engendré.

Une déformation isomonodromique de $(E, \nabla_{X/T})$ est un fibré vectoriel E sur X muni d'une connexion relative plate $\nabla_{X/T} : E \to \Omega^1_{X/T} \otimes E$ tel que la classe de conjugaison de la monodromie définie par les sections horizontales de $\nabla_{|X_t}$ est constante.

Théorème 2 ([Bol98][Bol01])**.** *Soit* $\pi : X \to T$ *comme précédemment. Soit* $(E, \nabla_{X/T})$ *un fibré vectoriel sur* X *muni d'une connexion relative intégrable* $\nabla_{X/T}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe (localement sur* T*) une connexion absolue intégrable* $\nabla : E \to \Omega^1_{X/k} \otimes E$ *sur* E *tel que* $\nabla_{X/T}$ *est la connexion relative associée.*
2. *Le couple* $(E, \nabla_{X/T})$ *définit une déformation isomonodromique.*

Essayons de transcrire dans notre langage ces deux théorèmes. Rappelons brièvement les deux ingrédients principaux, les connexions et la dualité Tannakienne.

La dualité Tannakienne

Toute la philosophie de la dualité Tannakienne, développée à l'origine par [SR72], est de savoir quand est-ce qu'une catégorie abélienne R-linéaire est équivalente à une catégorie de représentations d'un schéma en groupes affine (c'est-à-dire aux représentations d'une algèbre de Hopf), ou plus généralement à celle des représentations d'un schéma en groupoïdes. Lorsque $R = k$ est un corps, Deligne [DM82] [Del90] a complété [SR72]. Ils obtiennent ainsi le théorème Tannakien.

Théorème 3 ([SR72][Del90]théorème 1.12)**.** *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie* k*-linéaire, tensorielle, rigide avec* $\mathrm{End}(1) = k$. *Soit* ω *un foncteur fibre de* $\mathcal{C}$ *sur un* k*-schéma* $S \neq \emptyset$.

1. *Le schéma en groupoïdes* $\underline{\mathrm{Aut}_k^{\otimes}}(\omega)$ *est fidèlement plat sur* $S \times S$.
2. *Le foncteur* ω *induit une équivalence de* $\mathcal{C}$ *avec la catégorie* $\mathrm{Rep}_S(\underline{\mathrm{Aut}_k^{\otimes}}(\omega))$ *des représentations du groupoïde* $\underline{\mathrm{Aut}_k^{\otimes}}(\omega)$.

Lorsque R n'est plus supposé un corps, des difficultés apparaissent. Nous avons néanmoins le théorème suivant [SR72, théorème II.2.3.5,II.2.6.1], [And01] [DH18, théorème 1.2.2].

Théorème 4. *Soit R un anneau noethérien, $\mathcal{C}$ une catégorie R-linéaire tensorielle abélienne munie d'un foncteur fibre $\omega : \mathcal{C} \to \mathbf{Mod}(R)$ et une sous-catégorie de définition $\mathcal{C}^\circ$. On suppose que $\mathcal{C}^\circ$ domine $\mathcal{C}$.*

1. *Le schéma en groupes $\underline{\mathrm{Aut}_R^\otimes}(\omega)$ est fidèlement plat sur R.*
2. *Le foncteur ω induit une équivalence de $\mathcal{C}$ avec la catégorie $\mathrm{Rep}_S(\underline{\mathrm{Aut}_R^\otimes}(\omega))$.*

Ce théorème présente la difficulté suivante. Il est souvent facile de trouver un bon candidat pour la catégorie de définition. En revanche, il est assez dur de montrer qu'elle domine $\mathcal{C}$.

Pour cette raison, différents auteurs ont proposé une définition alternative [Wed04] [DH18], avec en vue un théorème Tannakien, non plus avec la catégorie de toutes les représentations, mais seulement avec celle qui sont projectives. On notera alors $\mathrm{Rep}_S^\circ(G)$ la catégorie des représentations projectives de G.

Théorème 5. *Soit $\mathcal{C}$ un réseau Tannakien sur un anneau de Dedekind R et ω un foncteur fibre.*

1. *Le schéma en groupes $\underline{\mathrm{Aut}_R^\otimes}(\omega)$ est fidèlement plat sur R.*
2. *Le foncteur ω induit une équivalence de $\mathcal{C}$ avec la catégorie $\mathrm{Rep}_S^\circ(\underline{\mathrm{Aut}_R^\otimes}(\omega))$.*

Nous allons utiliser cet outil sur la catégorie des connexions $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ que nous allons maintenant introduire.

Le langage des connexions

Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse entre k schémas lisses. Soit M un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Une connexion sur M relativement à S est un morphisme ∇ de faisceaux abéliens

$$\nabla : M \to \Omega^1_{X/S} \otimes M$$

tel que pour tout ouvert U de X, tout couple de sections $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et $m \in \Gamma(U, M)$, on ait l'égalité

$$\nabla(fm) = d(f) \otimes m + f\nabla(m).$$

Les connexions relatives seront les connexions sur M relativement à S. Les connexions absolues seront les connexions sur M relativement à k.

Notons $\mathrm{Der}(X/S)$ le faisceau des dérivations de $\mathcal{O}_X$ qui sont $\mathcal{O}_S$-linéaire. Ce faisceau est naturellement un faisceau de $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$-algèbre de Lie, isomorphe comme

$\mathcal{O}_X$-module à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X)$. Comme le morphisme f est lisse, une connexion sur M est équivalent à la donnée d'un morphisme

$$\nabla : \mathrm{Der}(X/S) \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}_S}(M)$$

tel que pour tout ouvert U de X, et tout triplet de sections $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $m \in \Gamma(U, M)$, et $D \in \Gamma(U, \mathrm{Der}(X/S))$, on ait l'égalité

$$\nabla(D)(fm) = D(f)m + f\nabla(D)(m).$$

De plus, nous avons une structure d'algèbre de Lie canonique sur $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_S}(M)$. Lorsque le morphisme ∇ est un morphisme d'algèbre de Lie, on dira que la connexion ∇ est intégrable. Dans le cas affine, les connexions et les systèmes linéaires d'équations différentielles introduis précédemment coïncident.

Exemple 1.0.1. Soit $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ et $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, et soit $M = \langle m \rangle$. On pose :

$$\begin{aligned} \nabla : M &\to M \otimes \Omega^1_{X/S} \\ m &\mapsto m \otimes dx \end{aligned}$$

Ceci est la connexion associée à l'équation différentielle de l'exponentielle

$$\frac{\delta Y}{\delta x} = Y.$$

Soit (M, ∇), et (L, ∇') deux $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents munis de connexions. Une application $\mathcal{O}_X$-linéaire

$$\Phi : M \to L$$

est dite horizontale si pour tout ouvert U de X, tout couple de sections $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et $m \in \Gamma(U, M)$

$$\Phi(\nabla(D)(m)) = \nabla'(D)(\Phi(m)).$$

On notera $\mathcal{C}^\dagger(X/S)$ la catégorie des connexions sur X relativement à S dont les objets sont les couples (M, ∇) et les morphismes sont les morphismes horizontaux. On notera $\mathcal{C}(X/S)$ la catégorie sous-catégorie pleine des connexions intégrables de $\mathcal{C}^\dagger(X/S)$. On notera $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(X/S)$ des connexions sur X relativement à S dont le module sous-jacent est localement libre. Mentionnons que lorsque $S = \mathrm{Spec}(k)$, il n'y a aucune distinction à faire [Kat70].

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout à la catégorie $\mathcal{C}(X/S)$, et à sa sous-catégorie pleine $\mathcal{C}(X/S)^\circ$.

La catégorie $\mathcal{C}(X/S)$ est une catégorie abélienne, possédant un produit tensoriel, définie comme suit :

$$(M, \nabla) \otimes (L, \nabla') = (M \otimes_{\mathcal{O}_X} L, \nabla'')$$

où ∇'' est défini pour tout ouvert U de X, et tout triplet de sections $D \in \Gamma(U, \mathrm{Der}(X/S))$, $m \in \Gamma(U, M)$, et $l \in \Gamma(U, L)$

$$\nabla''(D)(m \otimes l) = \nabla(D)(m) \otimes l + m \otimes \nabla'(D)(m).$$

De plus, la catégorie $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ possède des $\mathcal{H}om$ interne, définit par

$$\mathcal{H}om((M, \nabla), (L, \nabla')) = (\mathrm{Hom}(M, L), \nabla'')$$

où ∇'' est défini pour tout ouvert U de X, et tout triplet de sections $D \in \Gamma(U, \mathrm{Der}(X/S))$, $m \in \Gamma(U, M)$, et $l \in \Gamma(U, L)$

$$\nabla''(D)(\Phi)(e) = \nabla'(D)(\Phi(e)) - \Phi(\nabla(D)(E)).$$

Comme on le verra par la suite, la catégorie $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ est un réseau Tannakien (dans le sens de [DH18, définition 2.2.2]), et la catégorie $\mathcal{C}(X/k)$ est Tannakienne(dans le sens de [SR72] [Del90]).

Ces catégories sont liées par deux foncteurs naturels. On note $i : \Omega^1_{X/k} \to \Omega^1_{X/S}$ le morphisme canonique induit par l'oubli des dérivations de S. On a un foncteur d'inflation :

$$\begin{aligned} \mathrm{Inf} : \mathcal{C}(X/k) &\to \mathcal{C}(X/S)^\circ \\ (M, \nabla) &\mapsto (M, \nabla_{/S}) \end{aligned}$$

avec

$$\nabla_{/S} : M \xrightarrow{\nabla} M \otimes \Omega^1_{X/k} \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes i} M \otimes \Omega^1_{X/S}.$$

C'est le foncteur d'oubli de l'action des dérivations de S.

Nous avons aussi un foncteur de changement de base [Kat70, partie 1]

$$f^* : \mathcal{C}(S/k) \to \mathcal{C}(X/k).$$

Soit ϵ un S-point de X, le foncteur de changement de base précédent est tensoriel et exact. En le composant avec le foncteur F d'oubli de la connexion, on obtient un foncteur fibre à valeurs dans la catégorie $\mathbf{Mod}(R)$.

Principaux résultats

Soit k un corps de caractéristique 0, et R une k-algèbre principale lisse, et on note $S = \mathrm{Spec}(R)$. Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse entre à fibres géométriquement connexes. On suppose de plus que X est propre, connexe, et possède un k-point ω, ainsi qu'un S-point ϵ.

Dans la lignée des théorèmes 1 et 2 de l'introduction, on peut maintenant énoncer la question principale de cette thèse.

Définition 1.0.2. Soit G un schéma en groupes affine sur S et $s_0 \in S(k)$. On dit que G est **isoconstant** pour une topologie $\mathcal{T}$ s'il existe $T \to S$ recouvrement (à un seul objet) tel que :

$$G \times_S T \simeq G_{s_0} \times_k T$$

Soit $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, on notera $\mathrm{Gal}(M)$ le schéma en groupes affine associé au réseau Tannakien $\langle M \rangle^{\mathbf{s}}_{\otimes}$, et $\mathrm{Gal}'(M)$ le schéma en groupes affine associé à la catégorie Tannakienne $\langle M \rangle_{\otimes}$.

Question 1.0.3. Soit $f : X \to S$ comme précédemment, et $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. La connexion relative M est une inflation.
2. Le schéma en groupes $\mathrm{Gal}'(M)$ est isoconstant.

Pour démontrer le sens direct, nous allons prouver l'exactitude d'une certaine suite de groupe-groupoïdes.

La dualité Tannakienne nous fournit $\Pi(X/k)$ et $\Pi(S/k)$ des k-schémas en groupoïdes transitifs agissant sur S. De plus, le foncteur ϵ^*(resp. F) induit une équivalence entre $\mathcal{C}(X/k)$ (resp. $\mathcal{C}(S/k)$) et $\mathrm{Rep}(\Pi(X/k))$ (resp. $\mathrm{Rep}(\Pi(S/k))$) la catégorie des représentations du groupoïde $\Pi(X/k)$ (resp. $\Pi(S/k)$).

La dualité Tannakienne pour les réseaux Tannakiens donne une équivalence entre $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ et la catégorie des représentations localement libres d'un schéma en groupes $G(X/S)$ affine et fidèlement plat sur S [DH18, théorème 2.3.2]. En voyant $G(X/S)$ comme un schéma en groupoïdes discrets (2.2.11), ces foncteurs induisent des morphismes de schémas en groupoïdes :

$$G(X/S) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \Pi(X/k) \xrightarrow{f^*} \Pi(S/k). \tag{1.2}$$

Cette suite a été étudiée dans [DH18, section 5.1.10]. Les auteurs se demandent alors si cette suite est exacte, dans un sens à définir pour les schémas en groupoïdes (cf 2.4.1).

Le premier objectif de cette thèse est d'y répondre par l'affirmative. Lorsque R est remplacé par K, cela a été prouvé dans [EH06, théorème 5.11]. Pour cela, nous prouvons le théorème de caractérisation des suites exactes de groupoïdes suivant :

Théorème A (théorème 2.4.2)**.** *Soit G, A et K des schémas en groupoïdes, $q : K \to G$ une immersion fermée et $p : G \to A$ un morphisme quotient. On suppose que K est un groupoïde discret et que A et G sont des groupoïdes transitifs.*

Alors la suite suivante :

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 1$$

est exacte si et seulement si :

1. *Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$, alors $q^*(V)$ est triviale si et seulement si $V \simeq p^*(U)$ avec $U \in \mathrm{Rep}(A)$.*
2. *Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$, W_0 le plus grand sous-objet trivial de $q^*(V)$, alors il existe V_0 sous-objet de V tel que $q^*(V_0) \simeq W_0$.*
3. *Soit $W \in \mathrm{Rep}(K)$, alors il existe $V \in \mathrm{Rep}(G)$ tel que W est un quotient de $q^*(V)$.*

Ce théorème combiné à l'étude de la catégorie $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ nous permettra d'obtenir l'exactitude de la suite 1.2

Théorème B (théorème 2.5.13)**.** *Avec les notations précédentes, la suite suivante est exacte :*

$$G(X/S) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \Pi(X/k) \xrightarrow{f^*} \Pi(S/k) \to 1.$$

Le second objectif est de comprendre le groupe de Galois des inflations $\mathrm{Gal}'(\mathrm{Inf}(M))$. On démontre que ce schéma en groupes est isoconstant, c'est-à-dire, est isomorphe, quitte à faire un revêtement (fidèlement plat quasi-compact), à un groupe algébrique sur k (définition 2.2.20).

Théorème C (théorème 2.6.12)**.** *Soit $M \in \mathcal{C}(X/k)$. Il existe $p : T \to S$ un morphisme fidèlement plat quasi-compact et $s_0 \in S(k)$ tel que :*

$$\mathrm{Gal}'(\mathrm{Inf}(M)) \times_S T \simeq \mathrm{Gal}'(\mathrm{Inf}(M))_{s_0} \times_k T.$$

Ce résultat est le sens direct de la conjecture principale 1.0.3.

Pour démontrer le sens indirect de la conjecture 1.0.3, nous avons essayé d'adapter la théorie Tannakienne différentielle développée, au commencement par [Ovc09], puis par la suite, dans [GGO13]. Ils utilisent cet outil pour démontrer un théorème similaire [GO14, théorème 6.6] au théorème de Cassidy-Singer de l'introduction.

Nous démontrons que la catégorie $\mathcal{C}(X/S)$ a une structure différentielle, donnée par le foncteur At^1 de la définition 3.3.5.

Théorème D (théorème 3.6.1)**.** *La catégorie $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ a naturellement une structure différentielle donnée par le foncteur At^1.*

Nous démontrons un théorème Tannakien différentiel dans le cas où R est une k-algèbre lisse principale.

Théorème E (théorème 3.5.13)**.** *Soit θ^i une structure différentielle sur* $\mathrm{Rep}(G)$ *tel que le foncteur d'oubli soit un foncteur différentiel. Alors le schéma en groupes affine G a naturellement une structure de schéma en groupes affine différentiel.*

Cette théorie va nous permettre d'obtenir une autre version du théorème d'isomonodromie précédent.

Théorème F (théorème 3.6.7)**.** *Avec les hypothèses précédentes, soit $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$. Si M est une inflation, alors pour $s \in S(k)$, on a*

$$\mathrm{Gal}'(M) \times_S \hat{R} \simeq \mathrm{Gal}'(M)_s \times_k \hat{R},$$

où $\hat{R}$ désigne le complété de R au point s.

Notation

Dans cette thèse, tous les anneaux seront supposés commutatifs et unitaires.

1. On notera k un corps de caractéristique 0.
2. Un anneau de Dedekind sera un anneau intègre, noethérien, intégralement clos, et où tous ses idéaux premiers non nuls sont maximaux (voir [Bou07] chapitre 7 paragraphe 2 pour des définitions équivalentes).
3. Un anneau principal est un anneau intègre, noethérien, tel que tout idéal est engendré par un seul élément.
4. Soit X un k-schéma, A une k-algèbre, on notera $X(A) = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(A), X)$.
5. Un schéma en groupes sur un anneau A sera toujours un schéma en groupes **affine** sur A.
6. Si G est un schéma en groupes sur un anneau A (resp. un k-schéma en groupoïde agissant sur $S = \mathrm{Spec}(A)$), on notera $\mathrm{Rep}(G)$ la catégorie des représentations de G, qui sont, en tant que A-module, de type fini sur A.
7. On notera $\mathrm{Rep}^\circ(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}(G)$ dont les modules sous-jacents sont localement libres.
8. Sans mention explicite du contraire, tous les produits fibrés seront pris dans la catégorie des k-schémas.
9. Soit G un schéma sur S, soit $s_0 \in S(k)$. On notera G_{s_0} désignera le schéma défini par le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} G_{s_0} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "s_0"] & S \end{tikzcd}$$

10. On notera $\mathbb{1} = 1 \otimes 1 \in \mathscr{P}^n_{X/S}$ (3.1).
11. On note $\mathcal{C}(X/S)$ la catégorie des connexions **intégrables** sur X relativement à S.
12. On note $\mathcal{C}^\dagger(X/S)$ la catégorie des connexions (non nécessairement intégrables) sur X relativement à S.
13. On note $\mathcal{C}^\circ(X/S)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(X/S)$ dont les modules sous-jacents sont localement libres.
14. Soit $M \in \mathcal{C}(X/S)$, on notera $M^\nabla = \mathrm{Ker}(\nabla)$, c'est naturellement un $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$-module sur X.

Chapitre 2

Une suite exacte de groupoïdes

2.1 Introduction

La section 2.2 de cet article est un rappel sur les schémas en groupoïdes, inspirée principalement de [Del90] et [Bro06].

La section 2.3 est réservée aux représentations de schémas en groupoïdes transitifs. On rappelle quelques constructions issues de [EH06]. On montre aussi que certaines propriétés d'un morphisme entre schémas en groupoïdes peuvent se déduire du foncteur entre leurs catégories de représentations. Lorsque G est un schéma en groupes, ces équivalences ont été démontrées dans le cas d'un corps dans [DM82, proposition 2.21], et dans le cas d'un anneau de Dedekind dans [DH18, théorème 4.1.2].

La section 2.4 est consacrée à la démonstration du théorème de caractérisation des suites exactes 2.4.2. Lorsque les schémas considérés sont des groupes algébriques, le résultat a été démontré dans [DH18, théorème 4.2.2].

On reprend les notations de l'introduction, on note k un corps de caractéristique 0, et $S = \mathrm{Spec}(R)$ une k-algèbre de Dedekind.

Théorème A. *Soit G, A et K des k-schémas en groupoïdes agissant sur S, $q : K \to G$ une immersion fermée et $p : G \to A$ un morphisme quotient. On suppose que K est un groupoïde discret et que A et G sont des groupoïdes transitifs.*

Alors la suite suivante :

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 1$$

est exacte si et seulement si :

1. *Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$, alors $q^*(V)$ est triviale si et seulement si $V \simeq p^*(U)$ avec $U \in \mathrm{Rep}(A)$.*

2. *Soit* $V \in \mathrm{Rep}(G)$*,* W_0 *le plus grand sous-objet trivial de* $q^*(V)$*, alors il existe* V_0 *sous-objet de* V *tel que* $q^*(V_0) \simeq W_0$*.*
3. *Soit* $W \in \mathrm{Rep}(K)$*, alors il existe* $V \in \mathrm{Rep}(G)$ *tel que* W *est un quotient de* $q^*(V)$*.*

Dans la section 2.5, nous démontrons que la suite 1.2 est exacte. Pour cela, nous généralisons des résultats connus sur les modules à connexions. Ils ont été démontrés lorsque R est un anneau de valuation discrète dans [DH18, section 9]. Nous pourrons alors utiliser le théorème de caractérisation précédent et obtenir 2.4.2.

Théorème B. *Avec les notations de l'introduction, la suite suivante est exacte :*

$$G(X/S) \overset{\mathrm{Inf}}{\to} \Pi(X/k) \overset{f^*}{\to} \Pi(S/k) \to 1.$$

Dans la section 2.6, nous utilisons le résultat de la section 2.5 pour démontrer que le groupe de Galois d'une inflation est isoconstant 2.6.12.

Théorème C. *Soit* $M \in \mathcal{C}(X/k)$*. Il existe* $p : T \to S$ *un morphisme fidèlement plat quasi-compact et* $s_0 \in S(k)$ *tel que :*

$$\mathrm{Gal}_{X/S}(\mathrm{Inf}(M)) \times_S T \simeq \mathrm{Gal}_{X/S}(\mathrm{Inf}(M))_{s_0} \times_k T.$$

2.2 Schéma en groupoïdes

Dans cette section, nous rappelons les définitions et propriétés de base de la théorie des schémas en groupoïdes. On suivra les définitions et notations de [Del90].

Dans la suite, k désignera un corps et S un k-schéma.

Définition 2.2.1. Un k-groupoïde agissant sur S est un schéma G sur k muni de morphismes but et source : $b, s : G \to S$ et d'une loi de composition $\circ : G \times_{s,S,b} G \to G$ qui soit un morphisme de schémas sur $S \times S$, et telle que pour tout schéma T sur k, la donnée $([G](T), \circ)$ suivante est une catégorie fibrée en groupoïdes :
Objets : $\mathrm{Hom}_k(T, S)$.
Morphismes : $\mathrm{Hom}(\phi_1, \phi_2) = \{\Psi \in \mathrm{Hom}_k(T, G)$ tel que $s(\Psi) = \phi_1$ et $b(\Psi) = \phi_2\}$.

Ceci est équivalent à la définition donnée dans [LMB00, 2.4.3] avec $X_0 = \mathrm{Hom}_k(-, S)$ et $X_1 = \mathrm{Hom}_k(-, G)$. On notera $[G]$ la catégorie fibrée en groupoïdes précédemment définie.

Définition 2.2.2. Soit G un k-groupoïde agissant sur S. Un sous-groupoïde de G est un sous-schéma $H \subset G$ tel que les morphismes $b, s, \circ$ restreints à H fassent de H un k-groupoïde.

Définition 2.2.3. Soit K un sous-groupoïde de G, on dit que K est distingué dans G si pour tout U k-schéma, pour tout $s_0, s_1 \in [G](U)$, pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{[G](U)}(s_0, s_1)$, $g.\mathrm{Aut}_{[K](U)}(s_0).g^{-1} \subset \mathrm{Aut}_{[K](U)}(s_1)$.

Une classe de groupoïdes qui va intervenir dans la suite sont les groupoïdes transitifs. Ils apparaitront naturellement lorsque nous aurons recours à la dualité Tannakienne.

Définition 2.2.4. Soit G un k-groupoïde agissant sur S, on dit que G est transitif (pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte) s'il existe T fidèlement plat quasi-compact sur $S \times S$ tel que $\mathrm{Hom}_{S\times S}(T, G)$ est non vide.

Proposition 2.2.5. *Soit G un k-groupoïde transitif agissant sur S, alors le morphisme $(b, t) : G \to S \times S$ est fidèlement plat quasi-compact.*

Démonstration. Voir [Del90, 3.6]. □

Définition 2.2.6. Soit G un k-groupoïde agissant sur S. La diagonale de G est le schéma G^Δ défini par le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} G^\Delta \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ S \arrow[r, "\Delta"] & S \times S \end{tikzcd}$$

où Δ est le morphisme diagonal.

La diagonale de G est un S-schéma en groupes, plat lorsque G est transitif. Comme nous le verrons par la suite, la diagonale de G joue un rôle important dans la théorie.

Proposition 2.2.7. *Soit G un k-groupoïde transitif agissant sur S. On suppose que G est de type fini sur $S \times S$, et que G^Δ est lisse, alors G est lisse sur $S \times S$.*

En particulier, lorsque k est de caractéristique 0, comme G^Δ est plat sur S, on obtient que G^Δ est lisse sur S, et donc G est lisse.

Démonstration. Comme G est transitif, G est fidèlement plat sur $S \times S$. Soit maintenant $(x, y) \in S \times S$, on sait que $G_{x,y}$ qui est un schéma en groupe sur $k(x) \times k(y)$ est un torseur sous $G_{x,x}$, qui est un groupe algébrique lisse par hypothèse. On obtient donc que $G_{x,y}$ est lisse ([Ray70, proposition VI 1.2]), et en utilisant le critère de lissité fibre à fibre ([Gro64, 4 17.5.1]), on obtient que G est lisse. □

Quelques exemples de schémas en groupoïdes :

Exemple 2.2.8. Soit G un schéma en groupes agissant à gauche sur S, alors $G \times S$ est un k-groupoïde agissant sur S de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(s,b) : G \times S &\to S \times S \\ (g,x) &\to (x, g * x).\end{aligned}$$

Ceci est le schéma en groupoïde issu de l'action de G sur S. Dans ce cas, G^{Δ} s'identifie au groupe des stabilisateurs.

Exemple 2.2.9. Prenons k un corps, $S = \mathbb{A}^2_k$. Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Soit G le schéma en groupoïdes suivant :

$$k[G] = k\left[X, Y, M\right]_{(\det M)} / (MX - Y)$$

C'est le groupoïde associé à l'action de $\mathrm{GL}_{2,k}$ sur l'espace affine $\mathbb{A}^2_k$.

On considère $s : k[X] \to G$ l'injection canonique, et $b : k[Y] \to G$ l'autre injection canonique.

Étant donné deux points $x, y \in S(T)$, on a $\mathrm{Hom}_{[G]}(x,y) = \{g \in G(T) \text{ tel que } g.x = y\}$, où $g.x$ est définie comme l'action de $\mathrm{GL}_{2,k}$ sur $\mathbb{A}^2_k$. La composition étant donnée par la multiplication de $\mathrm{GL}_{2,k}$.

On a $k[G^{\Delta}] = k\left[X, M\right]_{(\det M)} / (MX = X)$. Au dessus de chaque point $x \neq (0,0)$, $G_{(x,x)}$ est isomorphe au stabilisateur de x, qui est isomorphe à $\mathbf{G}_a \rtimes \mathbf{G}_{m,k}$.

De ce fait, le schéma G^{Δ} n'est pas plat sur S.

Exemple 2.2.10. Soit V un faisceau localement libre sur S. Pour tout $(f_1, f_2) : T \to S \times S$ schéma, on note :

$$\mathrm{Isom}_{S \times S}(p_1^* V, p_2^* V)(T) = \mathrm{Isom}_{Coh(T)}(f_1^* V, f_2^* V)$$

où les p_i sont les projections de $S \times S \to S$. Ce faisceau est représentable par un $S \times S$-schéma noté $\mathcal{G}L(V)$ (voir [Nit04]). Ce schéma a naturellement une structure de k-schéma en groupoïdes agissant sur S. La source et le but sont donnés par les flèches canoniques et la multiplication par la composition des morphismes.

Une autre classe de groupoïdes intéressante est celle des groupoïdes discrets. Ils apparaissent naturellement comme des noyaux de morphismes entre k-groupoïdes.

Proposition 2.2.11. *Soit G un k-groupoïde agissant sur S, les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout k-schéma T, tout $f_1, f_2 \in S(T)$, si $f_1 \neq f_2$ alors* $\mathrm{Hom}_{G(T)}(f_1, f_2)$ *est vide.*
2. *Le morphisme structural (s, b) se factorise par la diagonale de G.*
3. *On a $s = b$ et (G, s) est un schéma en groupes, identifié à la diagonale de G.*

Lorsqu'une des trois équivalences se produira, on dira que G est un k-groupoïde discret agissant sur S.

Démonstration. Montrons que (1) implique (2) :

comme $Id_G \in \mathrm{Hom}(s, b)$, on a donc que $b = s$, et donc le morphisme structural se factorise par la diagonale.

Montrons que (2) implique (3) :

soit T un S-schéma, l'ensemble $\mathrm{Hom}_S(T, G)$ est naturellement muni d'une structure de groupe. En effet, si on note $f_1 : T \to S$ le morphisme structural, $\mathrm{Hom}_S(T, G) = \mathrm{Aut}_G(f_1)$.

Montrons que (3) implique (1) :

soit $f_1, f_2 \in S(T)$, comme $s = b$, on a nécessairement $s(g) = b(g) = f_1 = f_2$. □

Remarque 2.2.12. Lorsque G est affine sur $S = \mathrm{Spec}(R)$, cela signifie que la structure de R-module définie par s est la même que celle définie par b, de sorte que la structure de $R \otimes R$-algèbre provient en fait d'une structure de R-algèbre.

Les constructions qui suivent sont explicitées dans [LMB00] en 2.4.3 et 3.4.3.

Définition 2.2.13. Soit G un k-groupoïde agissant sur S, U un k-schéma, et a, b deux objets de $S(U)$. On définit le préfaisceau :

$$\begin{aligned}\mathrm{Isom}_U^{[G]}(a, b) :&(\mathrm{Sch}\,/U) \to (Ens)\\ &(T \to \mathrm{Hom}_{[G](T)}(a_{|T}, b_{|T}).\end{aligned}$$

C'est le préfaisceau des isomorphismes entre deux objets.

On notera $\mathrm{Isom}_U(a, b)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupoïde considéré. De plus, on notera $\mathrm{Aut}_U(a) := \mathrm{Isom}_U(a, a)$.

Lemme 2.2.14. *Soit G un k-groupoïde agissant sur S, U un k-schéma, a et b deux objets de $S(U)$. Alors le préfaisceau* $\mathrm{Isom}_U(a, b)$ *est représentable par $(a, b)^*G$.*

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{[G](T)}(\phi^*a, \phi^*b) &= \mathrm{Hom}_{G(T)}(a \circ \phi, b \circ \phi)\\ &= \{g \in G(T) \text{ tel que } s \circ g = a \circ \phi \text{ et } t \circ g = b \circ \phi\}\\ &= \mathrm{Hom}_{U \times U}(T, G_{U \times U}).\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2.15. *Soit G un k-groupoïde agissant sur S, alors la catégorie fibrée en groupoïdes $[G]$ est un préchamp.*

Démonstration. Voir [Del90, partie 3]. □

On notera encore $[G]$ le champ associé au préchamp $[G]$.

Proposition 2.2.16. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le champ $[G]$ est une gerbe.*
2. *G est un k-schéma en groupoïdes transitif agissant sur S.*

Démonstration. Montrons que 1) implique 2) :

comme G est une gerbe, il existe T un $S \times_k S$ schéma fidèlement plat quasi-compact tel que $G(T)$ est non-vide, et donc par suite, $\mathrm{Hom}_{S\times_k S}(T, G)$ est non vide.

Montrons que 2) implique 1) :

si les deux projections de $S \times_k S$ sur S sont localement isomorphes alors c'est le cas pour n'importe quel objet. En effet, soit $u : U \to S$ un S-schéma, soit $w_1, w_2 \in G(U)$, il s'agit de montrer que $\mathrm{Isom}_U(w_1, w_2)$ est non vide, ce qui est le cas, car $\mathrm{Isom}_U(w_1, w_2) \simeq (w_1, w_2)^* \mathrm{Isom}_{S\times_k S}(p_1, p_2)$.

Maintenant, dire que $\mathrm{Isom}_{S\times_k S}(p_1, p_2)(T)$ pour $\phi : T \to S \times_k S$ est non vide signifie que $\mathrm{Hom}_{[G](T)}(\phi^* p_1, \phi^* p_2)$ est non vide, ce qui par définition signifie que $\mathrm{Hom}_{S\times_k S}(T, G)$ est non vide. □

Le fait que G soit un groupoïde transitif, c'est-à-dire que son champ associé soit une gerbe, permet d'obtenir des résultats de platitude concernant sa diagonale et concernant ses représentations.

Corollaire 2.2.17. *Soit G un k-groupoïde transitif agissant sur S un k-schéma, il y a un isomorphisme canonique :*

$$G \simeq \mathrm{Isom}_{S\times_k S}(p_1, p_2).$$

Démonstration. Soit T un $S \times_k S$ schéma, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Isom}_{S\times_k S}(p_1, p_2)(T) &= \{g \in G(T) \text{ tel que } s(g) = f_1, b(g) = f_2\} \\ &= G(T).\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.18. *Soit G un k-groupoïde agissant sur S, et $\phi : U \to S$. Soit $w \in [G](S)$, alors on a un isomorphisme entre $\phi^* \mathrm{Aut}_S(w)$ et $\mathrm{Aut}_U(\phi^* w)$.*

Démonstration. Soit $f : T \to U$ un morphisme de k-schémas, et notons G_w le schéma représentant $\mathrm{Aut}_S(w)$. On note $p_1 : G_w \times_S U \to G_w$ la projection canonique, et de même on note $\tilde{p_1} : G_w \to G$ le morphisme canonique. Soit $\Phi \in G_w \times_S U(T)$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "\Phi"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & & \\
& G_w \times_S U \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & G_w \arrow[r, "\tilde{p_1}"] \arrow[d] & G \arrow[d, "(s,t)"] \\
& U \arrow[r, "\phi"] & S \arrow[r, "(w,w)"] & S \times_k S.
\end{tikzcd}$$

Il est clair que $\tilde{p_1} \circ p_1 \circ \Phi$ définit un élément de $\mathrm{Aut}_U(\phi^* w)(T)$. Inversement, prenons un élément de $\Psi \in \mathrm{Aut}_U(\phi^* w)(T)$. Par définition, Ψ est un morphisme de T dans G tel que $(\Psi \circ s, \Psi \circ t) = (w \circ \phi \circ f, w \circ \phi \circ f)$, donc Ψ se relève à G_w en un g, qui lui même se relève en un Φ de $T \to G_w \times_S U$. Ces deux constructions sont alors inverses l'une de l'autre, ce qui conclut la démonstration.

□

Remarque 2.2.19. C'est en particulier le cas pour la diagonale de G. En effet, comme $G^\Delta = \mathrm{Aut}_S(\mathrm{id}_S)$, on obtient donc que pour tout $\phi : T \to S$, $\mathrm{Aut}_T(id_{S|T}) = \phi^* G^\Delta$.

Définition 2.2.20. Soit G un schéma en groupes affine sur S et $s_0 \in S(k)$. On dit que G est isoconstant pour une topologie $\mathcal{T}$ s'il existe $T \to S$ recouvrement (à un seul objet) tel que :

$$G \times_S T \simeq G_{s_0} \times_k T$$

On dira que G est isoconstant quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la topologie considérée. Dans cet article, nous travaillerons essentiellement avec la topologie fidèlement plate quasi-compacte.

Proposition 2.2.21. *Soit G un k-groupoïde transitif agissant sur S. Soit $s_0 \in S(k) \neq \emptyset$, alors G^Δ est isoconstant.*

Démonstration. Soit s_0 l'objet de $[G](k)$ correspondant à la section $s_0 : \mathrm{Spec}(k) \to S$, par le lemme 2.2.14, notons $G_{s_0} = \mathrm{Aut}_k(s_0)$ le schéma représentant ce foncteur. En utilisant le morphisme structural $u : S \to \mathrm{Spec}(k)$, on a un morphisme $u^* s_0 \in G(S)$. De plus, $G^\Delta = \mathrm{Aut}_S(Id_S)$, et comme $[G]$ est une gerbe, il existe alors $\phi : T \to S$ fidèlement plat quasi-compact tel que $\mathrm{Isom}_T(\phi^* id_S, \phi^* u^* s_0)$ soit non vide. On obtient alors que $\mathrm{Aut}_T(\phi^* Id_S) \simeq \mathrm{Aut}_T(\phi^* u^* s_0)$. Par le lemme 2.2.18, on a alors $G_{s_0,s_0} \underset{k}{\times} T \simeq G^\Delta \underset{S}{\times} T$. □

On aimerait généraliser ce résultat à n'importe quel groupoïde discret et distingué de G. Pour cela, nous aurons besoin de définir l'opérateur de conjugaison.

Soit donc K un sous-groupoïde distingué de G, soit U un k-schéma, soit w_1, w_2 deux objets de $[K](U)$.

Soit $g \in \mathrm{Isom}_U^{[G]}(w_1, w_2)$, on peut définir de manière ensembliste α_g, l'opérateur de conjugaison par :

$$\begin{aligned} \alpha_g : \mathrm{Aut}_U^{[K]}(w_1) &\to \mathrm{Aut}_U^{[K]}(w_2) \\ f &\to gfg^{-1} \end{aligned}$$

Cet opérateur est bijectif, de bijection réciproque $\alpha_{g^{-1}}$. Il fournit un isomorphisme de faisceaux en groupes :

$$\alpha_g : \mathrm{Aut}_U^{[K]}(w_1) \simeq \mathrm{Aut}_U^{[K]}(w_2).$$

Théorème 2.2.22. *Soit G un k-groupoïde transitif agissant sur S, et K un sous-groupoïde distingué de G. Soit $s_0 \in S(k) \neq \emptyset$ alors K^Δ est isoconstant.*

En particulier, si K est un sous-groupoïde discret et distingué de G alors K est isoconstant.

Démonstration. On note $f : S \to \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural. Comme G est transitif, $\mathrm{Isom}_S^{[G]}(id_S, f^*(s_0))$ est localement non-vide. Soit $h : T \to S$ fidèlement plat quasi-compacte tel que ce soit le cas, et soit $g \in \mathrm{Isom}_T^{[G]}(id_{S|T}, f^*(s_0)_{|T})(T)$. On peut alors définir l'opérateur de conjugaison $\alpha_g : \mathrm{Aut}_T^{[K]}(id_{S|T}) \simeq \mathrm{Aut}_T^{[K]}(f^*(s_0)_{|T})$. De plus, on sait que :

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_T^{[K]}(id_{S|T}) &= h^*\mathrm{Aut}_S^{[K]}(id_S) \\ &= K^\Delta \times_S T \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_T^{[K]}(f^*(s_0)_{|T}) &= h^* f^* \mathrm{Aut}_k^{[K]}(s_0) \\ &= K_{s_0}^\Delta \times_k T \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

2.2.1 Morphisme quotient

Le but de cette sous-section est de définir la notion de morphismes quotients entre groupoïdes, et d'obtenir le théorème 2.2.27.

Définition 2.2.23. Soit $p : G \to A$ un morphisme de schémas en groupoïdes, on note $\mathrm{Ker}(p)$ le schéma en groupoïdes discret défini par le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(p) \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d, "e"] \\ G \arrow[r] & A \end{tikzcd} .$$

Explicitons les points de $\mathrm{Ker}(p)$. Soit T un k-schéma, et $(s_0, s_1) \in S(T)$. On constate que si $s_0 \neq s_1$ alors $\mathrm{Hom}_{[\mathrm{Ker}(p)]}(s_0, s_1)$ est vide. Soit $s_0 : T \to S$, la définition de $\mathrm{Ker}(p)$ implique alors que $\mathrm{Ker}(p)(T) = \mathrm{Ker}(f : \mathrm{Hom}_{[G]}(s_0, s_0) \to \mathrm{Hom}_{[A]}(s_0, s_0))$.

Définition 2.2.24. Soit $f : G \to A$ un morphisme de schémas en groupoïdes, on dira que f est un morphisme quotient si f est un morphisme fidèlement plat.

Proposition 2.2.25. *Soit $p : G \to A$ un morphisme quotient de schémas en groupoïdes, alors pour tout T k-schéma, pour tous $s_0, s_1 \in S(T)$ et pour tout $a \in \mathrm{Hom}_{[A]}(s_0, s_1)$, il existe $T' \to T$ fidèlement plat et $g \in \mathrm{Hom}_{[G]}(s_0, s_1)$ tels que $p(g) = a_{|T'}$.*

Démonstration. Soit $(s_0, s_1) : T \to S \times S$ un morphisme de k-schémas, soit $a \in \mathrm{Hom}_{[A]}(s_0, s_1)$ on a donc un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \times_A T \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"] & G \arrow[d, "p"] \\ T \arrow[r, "a"] & A \end{tikzcd} .$$

Comme p est fidèlement plat, on en déduit que p_0 est fidèlement plat. En notant $T' = G \times_A T$, on a $p(p_1) = a_{|T'}$. □

Remarque 2.2.26. La proposition précédente implique que pour tout $(s_0, s_1) \in S(T)^2$ fixé, le morphisme induit sur les faisceaux $f : \mathrm{Isom}_T^{[G]}(s_0, s_1) \to \mathrm{Isom}_T^{[A]}(s_0, s_1)$ est surjectif pour la topologie fpqc.

Grossièrement, cela signifie qu'un morphisme quotient est localement surjectif sur les flèches.

Théorème 2.2.27. *Soit $p : G \to A$ un morphisme quotient de schémas en groupoïdes. Alors tout morphisme $q : G \to A'$ tel que $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$ se factorise par A.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(p) \arrow[r] \arrow[drr, "e"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"] & A \arrow[d, dashed] \\ & & A' \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $(s_0, s_1) : T \to S \times S$, on remarque que si g et g' sont deux éléments de $\mathrm{Hom}_{[G]}(s_0, s_1)$ tels que $p(g) = p(g')$ alors $g.g'^{-1} \in \mathrm{Hom}_{[\mathrm{Ker}(p)]}(s_0, s_0)$, donc par hypothèse, $q(g.g'^{-1}) = 1$ et donc $q(g) = q(g')$.

Ainsi, les deux composées

$$G \times_A G \rightrightarrows G \longrightarrow A'$$

sont égales. On obtient donc que les deux composées :

$$\mathcal{O}_G \otimes_{\mathcal{O}_A} \mathcal{O}_G \leftleftarrows \mathcal{O}_G \longleftarrow \mathcal{O}_{A'}$$

sont égales. Or, comme $\mathcal{O}_G$ est une $\mathcal{O}_A$-algèbre fidèlement plate, on sait que $\mathcal{O}_A$ s'identifie avec les éléments $g \in \mathcal{O}_G$ égalisant les deux injections canoniques. On en déduit donc que l'application $\mathcal{O}_{A'} \to \mathcal{O}_G$ se factorise via $\mathcal{O}_A$. □

2.3 Représentation de groupoïdes

Dans cette partie, nous rappelons quelques propriétés des représentations de groupoïdes. Nous reprenons un certain nombre de notions et de définitions issues de [Del90]. On désignera par k un corps, et par S un k-schéma de Dedekind.

Tous les groupoïdes considérés seront **plats** sur $S \times S$, ceci est automatique lorsqu'ils sont transitifs, ou lorsqu'ils apparaissent comme la diagonale d'un groupoïde transitif, mais ce n'est, à priori, pas le cas lorsque ce sont des sous-groupoïdes quelconques.

Définition 2.3.1. Soit G un k-schéma en groupoïdes agissant sur S, on appelle représentation linéaire de $[G]$ (à gauche) un morphisme de champs $\rho : [G] \to \mathrm{QCoh}$.

Dans le cas où $G = \mathrm{Spec}(L)$ et $S = \mathrm{Spec}(R)$, nous pouvons voir une représentation V de G comme un morphisme de R-modules :

$$\rho_V : V \to V \underset{R}{\otimes_b} L$$

muni des compatibilités à la multiplication et à l'élément neutre. (Voir [Del90, 1.6]ou [EH06, A.3])

Remarque 2.3.2. On peut aussi définir les représentations de G à droite comme étant les morphismes de champs : $\rho : [G] \to \mathrm{QCoh}^{op}$.

Dans le cas affine, avec les notations précédentes, nous pouvons le voir comme un morphisme de R-modules :

$$\rho_V : V \to V \underset{R}{\otimes_s} L.$$

Exemple 2.3.3. Avec les notations précédentes, la multiplication de G donne lieu à une représentation à gauche de G sur lui même vu comme un R-module via s :

$$c : L \to L \underset{R}{{}_s\otimes_b} L$$

De même, la multiplication de G donne lieu à une représentation à droite de G sur lui même vu comme un R-module via b :

$$c : L \to L \, {}_b\otimes_s L$$

On peut encore donner une autre interprétation des représentations. Soit V un faisceau localement libre sur S, on rappelle que V peut être vu comme un fibré vectoriel sur S. On suit les notations de [Gro61], on le notera $\mathbb{V}(V)$ et $\pi : \mathbb{V}(V) \to S$ la projection.

Soit T un k-schéma, on a une action à gauche ensembliste :

$$\begin{aligned} G(T) \underset{S(T)}{{}_s\times_\pi} \mathbb{V}(V)(T) &\to \mathbb{V}(V)(T) \\ (g, v) &\mapsto g \cdot v \end{aligned}$$

vérifiant $b(g) = \pi(g \cdot v)$. On demande de plus que cette action soit compatible au changement de base $T' \to T$.

On notera $\mathrm{Rep}(G)$ la catégorie des représentations de type fini de G, et $\mathrm{Rep}^\circ(G)$ la sous-catégorie pleine des représentations de G dont le faisceau sous-jacent est localement libre.

Dans le cas où G est un groupoïde transitif, et comme la propriété :« être localement libre » est locale pour la topologie fpqc, on trouve alors que les représentations de G sont toutes localement libres [Del90, section 3.5].

Remarque 2.3.4. Si G est un k-schéma en groupoïdes transitif agissant sur S, la définition est aussi équivalente à se donner un morphisme de schémas en groupoïdes :

$$\phi : G \to \mathrm{Isom}(p_1^* V, p_2^* V).$$

En effet, posons $V = \rho(id_S)$. C'est un faisceau localement libre sur S. Soit $(f_0, f_1) : T \to S \times S$ un morphisme de schémas, on définit :

$$\begin{aligned} \phi(T) : G(T) &\to \mathrm{Isom}(p_1^* V, p_2^* v)(T) \\ g &\to \rho_T(f_0, f_1)(g) \end{aligned}$$

Par définition, $\rho_T(f_0, f_1)(g)$ est un morphisme de ${f_0}^* V \to {f_1}^* V$. Ce morphisme est bien défini, et fournit le morphisme de groupoïdes voulu.

Exemple 2.3.5. Si G est un S-schéma en groupes, que l'on voit comme un groupoïde discret, alors une représentation du groupoïde G est la même chose qu'une représentation du groupe G.

Exemple 2.3.6. On note : $G = \mathbf{G}_{m,k} \times \mathbb{A}^1_k \rightrightarrows \mathbb{A}^1_k$ le groupoïde action de $\mathbf{G}_{m,k}$ agissant sur $\mathbb{A}^1_k$. Soit V une représentation de G. Étudions V en fonction des points de $\mathbb{A}^1_k$:

— au point 0, on a $G_{0,0} = \mathbf{G}_{m,k}$, et donc V_0 fournit une représentation de $\mathbf{G}_{m,k}$.

— au point $a \neq 0$, on a $G_{a,a} = \{1\}$, la représentation est donc aussi triviale.

L'action de $\mathbf{G}_{m,k}$ sur V_0 induit une graduation sur V_0, qui induit une graduation sur V. Cette graduation caractérise complètement V.

De manière générale, une représentation de G est la donnée d'un $k[T]$-module munie d'une graduation [Sta17, Tag 0EKJ].

Exemple 2.3.7. Soit V un faisceau localement libre sur S. Le groupoïde $\mathcal{G}L(V)$ est naturellement muni d'une action sur $\mathbb{V}(V)$.

2.3.1 Point fixe d'une représentation.

Soit K un sous-groupoïde de G, ρ une représentation de G, on peut définir la représentation des points fixes de K notée ρ^K (ou V^K) de la manière suivante :

Soit $U \in \mathrm{Sch}/S$, $x \in S(U)$, on pose $\rho(x)^K$ les points fixes de $\rho(x)$ sous l'action de $K(x)$. Sur les morphismes, on pose $\rho^K : \mathrm{Hom}(x, y) \to \mathrm{Hom}(\rho^K(x), \rho^K(y))$ égale à ρ.

Cette représentation a la propriété d'être la plus grande sous-représentation de ρ triviale.

Lorsque que l'on interprète ρ comme un morphisme de $V \to V \otimes_b \mathcal{O}_G$, on obtient alors que :

$$V^K = \{v \in V | \rho_K(v) = v \otimes 1 \in V \otimes_b \mathcal{O}_K\}.$$

Proposition 2.3.8. *Si K est distingué, ρ^K est naturellement une représentation de G.*

Démonstration. Comme G et K ont les mêmes objets, il suffit de regarder l'action sur les flèches. Soit $U \in \mathrm{Sch}/S$, x un objet de $[G](U)$, dans ce cas, il est connu que les points fixes sont munis d'une action de $\mathrm{Aut}_{[G]}(x)$ lorsque $\mathrm{Aut}_{[K]}(x)$ est distingué. Soient x, y des objets de $[G](U)$,et soit $g \in \mathrm{Hom}_{[G]}(x, y)$, il faut montrer que pour tout $k \in \mathrm{Aut}_{[K]}(y)$, $\rho(kg) = \rho(g)$, c'est-à-dire que k agit comme l'identité sur $\rho(y)$. Comme K est distingué, on a $\rho(gg^{-1}kg) = \rho(gk') = \rho(g)$ où $k' \in \mathrm{Aut}_{[K]}(x)$. $\square$

2.3.2 Restriction et Induction.

Soit K un sous-groupoïde de G distingué et discret, on peut définir la restriction de ρ à K comme la composé de l'injection canonique i de K dans G suivie de ρ. Ceci définit naturellement un foncteur :

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_K^G : \mathrm{Rep}(G) &\to \mathrm{Rep}(K) \\ V &\to i^*(V) \end{aligned}$$

Dans la suite, tous les groupoïdes envisagés seront affines, sur une base affine. Soient maintenant K un sous-groupoïde distingué discret fermé de G, et V une représentation de K localement libre. On note $\mathcal{O}_G$ la représentation régulière à gauche, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{O}_G$ est vue en tant que R-module via s. Nous pouvons alors faire opérer G de manière triviale sur V et via la représentation régulière à gauche sur $\mathcal{O}_G$. De même, nous pouvons faire opérer K à droite sur $\mathcal{O}_G$ et normalement sur V.

Définissons l'induite de V comme étant :

$$\mathrm{Ind}_K^G(V) = (V \underset{R}{\otimes_s} \mathcal{O}_G)^K.$$

Nous pouvons l'interpréter de manière ensembliste. Soit T un k-schéma, l'action de K est donnée par :

$$\begin{aligned} G(T) \underset{S(T)}{{}_s\times_b} K(T) \underset{S(T)}{{}_s\times_\pi} \mathbb{V}(V)(T) &\to G(T) \underset{S(T)}{{}_b\times_\pi} \mathbb{V}(V)(T) \\ (g,k,v) &\mapsto (gk, k^{-1}.v) \end{aligned}$$

Du point de vue ensembliste, l'induction est donc donnée par :

$$\mathrm{Ind}_K^G(V)(T) = \{(g,v) \in G(T) \underset{S(T)}{{}_s\times_\pi} \mathbb{V}(V)(T) | \forall k \in K(T),\ (g,v) = (gk, k^{-1}.v)\}.$$

Le morphisme structural est donné par :

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Ind}_K^G(V) &\to S \\ (g,v) &\mapsto b(g) \end{aligned}$$

Le groupoïde G agit maintenant sur cet ensemble de la manière suivante :

$$\begin{aligned} G(T) \underset{S(T)}{{}_s\times_\phi} \mathrm{Ind}_K^G(V) &\to \mathrm{Ind}_K^G(V) \\ (g,(x,v)) &\mapsto (gx, v) \end{aligned}$$

L'induction pour les groupoïdes a été introduite dans [EH06, section 6.2]. La plupart des résultats ci-dessous y sont démontrés dans le cas où R est un corps.

Proposition 2.3.9. *Avec les notations précédentes, soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$, et $W \in \mathrm{Rep}(K)$, il y a une bijection canonique fonctorielle :*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_K^G(V), W) \simeq \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Ind}_K^G(V))$$

Démonstration. Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$ et $W \in \mathrm{Rep}(K)$, et soit $\phi : \mathrm{Res}_K^G(V) \to W$, on considère alors le morphisme $\psi : V \to \mathrm{Ind}_K^G(W)$ donné par la composition : $(\phi \otimes \mathrm{id}) \circ \rho_V$. Inversement, prenons un morphisme $\psi : V \to \mathrm{Ind}_K^G(W)$, en composant par la section : $\mathrm{id} \otimes \epsilon$, on obtient un morphisme $\phi : \mathrm{Res}_K^G(V) \to W$. Ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. □

Lemme 2.3.10. *Soit G un k-groupoïde agissant sur S, supposons que :*

1. *les schémas S et G sont noethériens.*
2. *les morphismes s et b sont des morphismes plats, quasi-compacts, et quasi-séparés.*

Alors toute représentation de G est limite filtrante de représentations de dimension finie.

Démonstration. [Sta17, Tag 07TU] Lemme 38.15.3 □

Proposition 2.3.11. *On a un isomorphisme entre :*

$$\mathrm{Ind}_{G^\Delta}^G(-) \underset{R\otimes R}{\otimes} \mathcal{O}_G \simeq (-) \underset{R}{\otimes_s} \mathcal{O}_G.$$

En particulier, si G est transitif, le foncteur $\mathrm{Ind}_{G^\Delta}^G$ est fidèle sur la catégorie des représentations de G^Δ localement libres.

Démonstration. Passons en notation ensembliste, ceci vaut pour T un k-schéma. Considérons le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \Phi : (G \underset{S}{{}_s\times_\pi} V) \underset{S\times S}{\times} G &\to V \underset{S}{\times_s} G \\ (x_0, v, x_1) &\mapsto ((x_1^{-1}x_0).v, x_1). \end{aligned}$$

L'action de G^Δ sur $(G \underset{S}{{}_s\times_\pi} V) \underset{S\times S}{\times} G$ est la suivante :

$$\begin{aligned} G^\Delta \times (G \underset{S}{{}_s\times_\pi} V) \underset{S\times S}{\times} G &\to (G \underset{S}{{}_s\times_\pi} V) \underset{S\times S}{\times} G \\ (g, x_0, v, x_1) &\mapsto (x_0.g, g^{-1}.v, x_1). \end{aligned}$$

On remarque que Φ est invariant pour l'action de G^Δ (en prenant l'action triviale de G^Δ sur le membre de droite). Ainsi on obtient un isomorphisme entre :

$$\Phi : (G \underset{S}{{}_s\times_\pi} V)^{G^\Delta} \underset{S\times S}{\times} G \to V \underset{S}{\times_s} G.$$

On en déduit un isomorphisme de foncteurs :

$$\mathrm{Ind}_{G^\Delta}^G(-) \underset{R\otimes R}{\otimes} \mathcal{O}_G \simeq (-) \underset{R}{\otimes_s} \mathcal{O}_G.$$

Comme G est un groupoïde transitif, $\mathcal{O}_G$ est fidèlement plat sur R, on en déduit donc que l'induction est exacte et fidèle. □

On pourra consulter [Jan87, section 3] pour un rappel sur l'adjonction induction restriction pour des groupes affines sur une base quelconque.

Corollaire 2.3.12. *Soit G un k-groupoïde transitif agissant sur S, et soit K un sous-groupoïde discret, fermé et distingué de G. Soit $V \in \mathrm{Rep}^\circ(K)$, alors il existe $W \in \mathrm{Rep}(G)$ tel que $\mathrm{Res}(W) \twoheadrightarrow V$. Par dualité, il existe $W \in \mathrm{Rep}(G)$ tel que $V \hookrightarrow \mathrm{Res}(W)$.*

Démonstration. Comme $\mathrm{Res}_{G^\Delta}^G \circ \mathrm{Res}_K^{G^\Delta} = \mathrm{Res}_K^G$, on en déduit que $\mathrm{Ind}_{G^\Delta}^G \circ \mathrm{Ind}_K^{G^\Delta} = \mathrm{Ind}_K^G$ est l'adjoint à droite de Res_K^G. Dans [DH18, théorème 4.2.2], il est démontré que $\mathrm{Ind}_K^{G^\Delta}$ est fidèle, on en déduit que Ind_K^G est fidèle. La représentation $W = \mathrm{Res}_K^G \circ \mathrm{Ind}_K^G(V)$ fournit naturellement un épimorphisme $W \twoheadrightarrow V$ (voir [ML10, Chap 4 Part 3]). Or, par le lemme 2.3.10, on peut trouver une représentation $\tilde{W}$ de dimension finie telle que $\mathrm{Res}_K^G(\tilde{W}) \twoheadrightarrow V$. □

Remarque 2.3.13. Le corollaire précédent s'applique en particulier à $K = G^\Delta$. On obtient que toutes les représentations localement libres de G^Δ sont quotient d'une représentation de G.

2.3.3 Propriétés des morphismes

Dans la suite, tous les schémas en groupoïdes considérés seront affines sur un k-schéma de Dedekind lisse $S = \mathrm{Spec}(R)$.

Dans Deligne-Milne [DM82] pour les schémas en groupes sur des corps, puis dans Duong-Hai [DH18] pour les anneaux de Dedekind, les auteurs proposent une caractérisation d'être une immersion fermée ou fidèlement plat en fonction de propriétés des foncteurs induisent sur les catégories de représentations.

Le but de cette partie est de prolonger ces caractérisations lorsque les groupes considérés sont des groupoïdes. Ces résultats seront utiles dans la démonstration du théorème 2.5.13.

Lemme 2.3.14. *Soit $p : G \to A$ un morphisme de groupoïdes quotients, on note $K = \mathrm{Ker}(p)$, et $q : K \to G$ le morphisme induit alors les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Pour tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$, $q^*(V)$ est triviale si et seulement si $V \simeq p^*(U)$.*
2. *Pour tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$, W_0 le plus grand sous-objet trivial de $q^*(V)$, alors il existe V_0 sous-objet de V tel que $q^*(V_0) \simeq W_0$.*

Démonstration. La première partie est une reformulation du passage au quotient. Le sens direct est évident car K est le noyau de p. Le sens indirect provient de 2.2.27. Soit V une représentation de G, considérons les invariants de V sous K. C'est le plus grand sous-objet trivial de $q^*(V)$, il a un relèvement naturel par la proposition 2.3.8. □

On rappelle le critère suivant pour les groupes, dont la démonstration peut être trouvée dans [DH18, théorème 4.1.2].

Théorème 2.3.15. *Soit $f : G \to H$ un morphisme de S-schémas en groupes affines et plats. Alors :*

1. *le morphisme f est fidèlement plat si et seulement si f^* est stable par sous-objet et pleinement fidèle*
2. *le morphisme f est une immersion fermée si et seulement si tout $V \in \mathrm{Rep}^\circ(G)$ est isomorphe à un sous-quotient spécial d'un $f^*(W)$ où $W \in \mathrm{Rep}^\circ(H)$.*

Proposition 2.3.16. *Soit $f : K \to G$ un morphisme de k-groupoïdes agissant sur S, on suppose de plus que K est discret et G est transitif. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est une immersion fermée.*
2. *Pour tout $V \in \mathrm{Rep}^\circ(K)$, il existe $W \in \mathrm{Rep}(G)$ tel que V soit isomorphe à un sous-quotient spécial de $f^*(W)$.*

Démonstration. Comme K est discret, on sait que le morphisme f se factorise à travers G^Δ, notons $\tilde{f}$ le morphisme induit. De plus, le morphisme canonique de $i : G^\Delta \to G$ est une immersion fermée, car S est séparé.

Montrons que 1) implique 2) :

comme f est une immersion fermée, $\tilde{f}$ l'est aussi. Soit $V \in \mathrm{Rep}^\circ(K)$, par le critère sur les groupes 2.3.15, on obtient qu'il existe $W \in \mathrm{Rep}(G^\Delta)$ et $U \in \mathrm{Rep}(K)$ spécial tel que :

$$\tilde{f}^*(W) \twoheadrightarrow U \hookleftarrow V.$$

Or, d'après le corollaire 2.3.12, il existe $V' \in \mathrm{Rep}(G)$ tel que $\mathrm{Res}^G_{G^\Delta}(V') \twoheadrightarrow W$, on obtient ainsi 2).

Montrons que 2) implique 1) :

soit $V \in \mathrm{Rep}^\circ(K)$, par 2), il existe $W \in \mathrm{Rep}(G)$ et $U \in \mathrm{Rep}(K)$ spécial, tel que :

$$f^*(W) \twoheadrightarrow U \hookleftarrow V.$$

On obtient donc que :

$$\tilde{f}^*(\mathrm{Res}^G_{G^\Delta}(W)) \twoheadrightarrow U \hookleftarrow V.$$

On peut appliquer le critère pour les groupes 2.3.15, et obtenir que $\tilde{f}$ est une immersion fermée. □

2.4 Une caractérisation des suites exactes

Le but de cette partie est de donner une caractérisation des suites exactes de groupoïdes via la théorie des représentations. Un énoncé similaire pour les groupes a été démontré dans Duong-Hai [DH18]. Une version similaire pour les groupoïdes a été écrite dans Esnault - Hai [EH06].

Dans la suite, on fixe k un corps de caractéristique 0, $S = \mathrm{Spec}(R)$ un k-schéma de Dedekind. Tous les groupoïdes considérés sont affines et agissent sur S.

Définition 2.4.1. Soit K, G, et A des schémas en groupoïdes, et $q : K \to G$ et $p : G \to A$ deux morphismes de schéma en groupoïdes. On dit que la suite :

$$1 \to K \to G \to A \to 1$$

est exacte si q est une immersion fermée, p est un morphisme quotient, et $\mathrm{Ker}(p) = K$.

Théorème 2.4.2. *Soit G, A et K des schémas en groupoïdes, $q : K \to G$ et $p : G \to A$ avec p un morphisme quotient, q une immersion fermée et K un sous-groupoïde discret de G. On suppose de plus que A et G sont des schémas en groupoïdes transitifs.*

La suite suivante est exacte :

$$1 \to K \to G \to A \to 1$$

si et seulement si :

SE1. *pour tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$, alors $q^*(V)$ est trivial si et seulement s'il existe $U \in \mathrm{Rep}(A)$ tel que $V \simeq p^*(U)$.*

SE2. *pour tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$, on note W_0 le plus grand sous-objet trivial de $q^*(V)$, alors il existe V_0 sous-objet de V tel que $q^*(V_0) \simeq W_0$.*

SE3. *pour tout* $W \in \mathrm{Rep}^\circ(K)$*, il existe* $V \in \mathrm{Rep}(G)$ *tel que* W *est un quotient de* $q^*(V)$*.*

Démonstration. Le sens direct est donné par les propositions suivantes : (1) et (2) par 2.3.14 et (3) par 2.3.12.

Pour le sens indirect, on note $N = \mathrm{Ker}(p)$. Par 1), on sait que pour tout $V \in \mathrm{Rep}(A)$, $q^* \circ p^*(V)$ est trivial, on a donc une factorisation $q : K \to N \to G$, on note i le morphisme $K \to N$. On note $i^* : \mathrm{Rep}(N) \to \mathrm{Rep}(K)$ le morphisme induit sur les catégories de représentations, on souhaite montrer que i est fidèlement plat. Par la proposition 2.3.15, il s'agit de montrer que le morphisme i^* est pleinement fidèle et stable par sous-objets. Dans un premier temps, montrons que i^* est pleinement fidèle. Soit W_0 et W_1 deux représentations de N, et $\Phi : i^*(W_0) \to i^*(W_1)$ un morphisme de K-représentations, par le corollaire 2.3.12, il existe $V_0, V_1 \in \mathrm{Rep}(G)$ et $\pi : \mathrm{Res}_N^G(V_0) \twoheadrightarrow W_0$ et $j : W_1 \hookrightarrow \mathrm{Res}_N^G(V_1)$ deux morphismes de N-représentations. En composant, on obtient un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} W_0 \arrow[r, "\Phi"] & W_1 \arrow[d, hook, "j"] \\ \mathrm{Res}_N^G(V_0) \arrow[u, two heads, "\pi"] \arrow[r, "\Psi"] & \mathrm{Res}_N^G(V_1) \end{tikzcd}$$

L'application Ψ ainsi obtenue est un morphisme entre représentations de K.

On va montrer que Ψ est un morphisme de N-représentations. Par dualité, on peut supposer que $V_0 = 1$. Comme $K \subset N$, on sait que $\mathrm{Res}_N^G(V_1)^N \subset \mathrm{Res}_K^G(V_1)^K$. Par hypothèse, $\mathrm{Res}_K^G(V_1)^K$ se relève, il existe $M \in \mathrm{Rep}(G)$ tel que $\mathrm{Res}_K^G(M) = \mathrm{Res}_K^G(V_1)^K$. Par l'hypothèse **SE**1, il existe $U \in \mathrm{Rep}(A)$ tel que $p^*(U) \simeq M$, et donc par le lemme 2.3.14, $\mathrm{Res}_K^G(M)$ est une représentation triviale de N.

On en déduit que Ψ est un morphisme entre représentations de N, et donc Φ aussi.

Il reste à montrer que i^* est stable par sous-objet. Soit W une représentation de N localement libre, et $V \in \mathrm{Rep}^\circ(K)$ un sous-objet de $i^*(W)$. Par **SE**3, il existe $V_0 \in \mathrm{Rep}(G)$ tel que $q^*(V_0) \twoheadrightarrow W$, et donc il existe $\tilde{V_0} \in \mathrm{Rep}(N)$ tel que :

$$\phi : \ i^*(\tilde{V_0}) \twoheadrightarrow V \hookrightarrow i^*W$$

Comme i^* est pleinement fidèle, ϕ se relève, et de plus, on a $\mathrm{Im}(\phi) = V$.

□

2.5 La suite exacte d'inflation

Soit k un corps de caractéristique 0, R est une k-algèbre principale lisse, $S = \mathrm{Spec}(R)$ et $f : X \to S$ un S-schéma lisse à fibres géométriquement connexes. On suppose de plus que X est connexe et muni d'un S-point noté ϵ, ainsi que d'un k-point noté ω.

On note $\mathcal{C}(X/S)$ la catégorie des faisceaux cohérents sur X munis d'une connexion intégrable relative, et $\mathcal{C}(X/k)$ la catégorie des faisceaux cohérents sur X muni d'une connexion intégrable. On suppose que le faisceau $\mathrm{Ker}\, d_{X/S}$ est le faisceau $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$. C'est une façon de supposer que le faisceau des fonctions constantes est donné par S.

On note de plus $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ la catégorie des faisceaux localement libres munis d'une connexion intégrable. Nous avons deux foncteurs naturels :

$$\begin{aligned} \mathrm{Inf} : \mathcal{C}(X/k) &\to \mathcal{C}(X/S)^\circ \\ (M, \nabla) &\to (M, \nabla_{/S}) \end{aligned}$$

où $\nabla_{/S} : M \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_{X/k} \otimes M \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_M} \Omega^1_{X/S} \otimes M$.

On a un autre foncteur naturel $\mathcal{C}(S/k) \xrightarrow{f^*} \mathcal{C}(X/k)$ [Kat70, section 1.0]. De plus, tous les objets de $\mathcal{C}(X/k)$ et de $\mathcal{C}(S/k)$ sont localement libres [Kat70, 8.8]. Ceci nous permet d'utiliser la dualité Tannakienne développée pour les corps dans [SR72], et sur les anneaux de Dedekind dans [DHdS18]. Nous pouvons définir :

1. $G(X/S)$ le groupe associé au réseau Tannakien $(\mathcal{C}(X/S)^\circ, \epsilon^*)$ [DH18, définition 2.2.2]).
2. $\Pi(X/k)$ le schéma en groupoïdes associé à la catégorie Tannakienne non neutre $(\mathcal{C}(X/k), \epsilon^*)$.
3. $\Pi(S/k)$ le schéma en groupoïdes associé à la catégorie Tannakienne non neutre $(\mathcal{C}(S/k), F)$, où F est le foncteur d'oubli.

La suite exacte cotangente nous permet d'affirmer que $\mathrm{Inf} \circ f^*$ est triviale, ce qui nous permet de considérer la suite de schémas en groupoïdes suivante :

$$G(X/S) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \Pi(X/k) \xrightarrow{f^*} \Pi(S/k)$$

Le but de cette section est de prouver que la suite précédente est exacte, c'est l'objet du théorème 2.5.13. Pour cela, le but est de transposer les hypothèses du théorème 2.4.2 dans ce contexte.

Un objet clé pour la suite est l'existence d'une connexion sur $H^0_{DR}(X/S, M) = f_*(\mathrm{Ker}(\mathrm{Inf}(\nabla)))$, la connexion de Gauss-Manin [Kat70, section 2.0]. Ceci permet

de définir un foncteur :

$$\begin{aligned} H^0_{DR}(X/S,.) : \mathcal{C}(X/k) &\to \mathcal{C}(S/k) \\ (M,\nabla) &\to (f_*(\mathrm{Ker}(\mathrm{Inf}(\nabla))), \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Rappelons brièvement comment est construite la connexion de Gauss-Manin $\mathcal{G}$. Soit $D \in \mathrm{Der}(S/k)$, d'après la suite exacte cotangente :

$$0 \to \mathrm{Der}(X/S) \to \mathrm{Der}(X/k) \to f^*(\mathrm{Der}(S/k)) \to 0$$

on peut trouver $\tilde{D} \in \mathrm{Der}(X/k)$ relevant D. Définissons alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \mathrm{Der}(S/k) &\to \mathrm{End}(H^0_{DR}(X/S,M)) \\ D &\mapsto \nabla(\tilde{D}). \end{aligned}$$

Ceci ne dépend pas du relevé, en effet, deux relevés diffèrent par un élément de $\mathrm{Der}(X/S)$ qui est envoyé sur l'endomorphisme nul par $\mathrm{Inf}(\nabla)$.

Théorème 2.5.1. *Soit $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *M est un sous-objet de $(\mathcal{O}_X^n, d_{X/S})$.*
2. *M est isomorphe à $(\mathcal{O}_X^m, d_{X/S})$ avec $m \leq n$.*
3. *Le morphisme canonique $f^*f_*(M^\nabla) \to M$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Montrons que (1) implique (2). On sait que la catégorie $\langle M \rangle_\otimes$ est Tannakienne, et on note ω l'équivalence entre $\langle M \rangle_\otimes$ et $\mathrm{Gal}(M)$. Comme R est principal, on sait que $\omega(M)$ est libre sur R. De plus, comme M est un sous objet de $(\mathcal{O}_X^n, d_{X/S})$, on en déduit que la représentation M est triviale, donc $\omega(M) = 1^m$. Comme ω est un foncteur fibre, il envoie l'objet unité sur l'objet unité, on en déduit que $M \simeq (\mathcal{O}_X^m, d_{X/S})$.

Montrons que (2) implique (3). Si M est isomorphe à $(\mathcal{O}_X^m, d_{X/S})$, alors, d'après nos hypothèses sur X, le module à connexion M^∇ est isomorphe à $\mathcal{O}_S^m$. On en déduit directement l'isomorphisme (3).

Montrons que (3) implique (1). Comme $f^*f_*(M^\nabla)$ est isomorphe à M, il est en particulier cohérent, et donc par descente fidèlement plate [Gro64, proposition 2.5.2], le module $f_*(M^\nabla)$ est de type fini sur R, sans-torsion, il est donc libre de rang fini. On obtient ainsi que M est isomorphe à un $(\mathcal{O}_X^n, d_{X/S})$.

□

Définition 2.5.2. Lorsque l'une des conditions équivalentes du théorème précédent sera vérifiée, on dira que M est un module à connexion triviale. On remarque que ceci se réinterprète en disant qu'un module à connexion est trivial s'il provient de la base.

Lemme 2.5.3. *Soit* $(M, \nabla) \in \mathcal{C}(X/k)$ *tel que* $\mathrm{Inf}(M, \nabla)$ *soit trivial, alors* $(M, \nabla) \simeq f^*(H^0_{DR}(X/S, (M, \nabla)))$.

Démonstration. Comme $\mathrm{Inf}(M, \nabla)$ est trivial, et comme M est localement libre, le théorème précédent implique que $M \simeq f^* H^0_{DR}(X/S, (M, \nabla))$. Ce morphisme est horizontal par définition de la connexion de Gauss-Manin. □

Proposition 2.5.4. *Soit* $(M, \nabla) \in \mathcal{C}(X/k)$, *la flèche naturelle :*

$$\rho : f^*(H^0_{DR}(X/S, (M, \nabla)) \to M$$

est injective. De plus, elle identifie l'image de ρ *avec le plus grand sous-objet trivial de* $\mathrm{Inf}(M)$.

Démonstration. L'injectivité se montrant fibre à fibre, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(R)$ est un anneau de valuation discrète. Dans ce cas, on sait que $H^0_{DR}(X/S, M)$ est un R-module libre. De plus, on a une identification canonique :

$$H^0_{DR}(X/S, M) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Inf}(M))(X)) \otimes_R \mathcal{O}_S.$$

On obtient alors que ρ s'identifie à :

$$\rho : f^*(H^0_{DR}(X/S, (M, \nabla) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Inf}(M))(X) \otimes_R \mathcal{O}_X \to M.$$

Soit maintenant U un ouvert affine connexe, on note $S = \mathrm{Spec}(R)$, $U = \mathrm{Spec}(A)$ et $M^{\nabla/S} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Inf}(M))$. On veut montrer que l'application :

$$\rho : M^{\nabla/S} \otimes_R A \to M$$

est injective.

Procédons par récurrence sur la dimension minimale d'une famille libre de $M^{\nabla/S}$. Le cas $n = 1$ étant immédiat, supposons le vrai pour toutes familles libres de $n - 1$ vecteurs.

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille de n vecteurs libres de $M^{\nabla/S}$. Considérons une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n f_i e_i = 0$ avec $f_i \in A$.

Sur $A_{(f_1)}$, on obtient que :

$$-e_1 = \sum_{i=2}^n \frac{f_i}{f_1} e_i.$$

En appliquant $D \in \mathrm{Der}(U/S)$, on obtient alors :

$$\sum_{i=2}^n D\left(\frac{f_i}{f_1}\right) e_i = 0.$$

Par récurrence, on obtient alors que $D\left(\frac{f_i}{f_1}\right) = 0$, donc $f_i \in f_1 R$. Comme A est lisse sur une base régulière et connexe, il est intègre, donc l'égalité $f_1 r_i = f_i$ qui a lieu dans $A_{(f_1)}$ a aussi lieu dans A.

On en déduit alors que :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i e_i = f_1 \sum_{i=1}^{n} r_i e_i = 0$$

Comme M est localement libre, donc sans torsion, on obtient que :

$$\sum_{i=1}^{n} r_i e_i = 0.$$

Comme on a supposé que les e_i étaient libres sur R, on obtient donc que tous les r_i sont nuls et donc que tous les f_i sont nuls. Par récurrence, on en déduit que l'application ρ est injective.

Montrons que l'image de ρ s'identifie avec le plus grand sous-objet trivial de $\mathrm{Inf}(M)$. Soit N un sous-objet trivial de $\mathrm{Inf}(M)$, par le théorème 2.5.1, on sait que $N \simeq f_* f^*(N^\nabla)$. De plus, on a que $f_*(N^\nabla)$ est un sous-objet de $H^0_{DR}(X/S, M)$, et donc par platitude de f, on obtient que $f^* f_*(N^\nabla)$ est un sous-objet de $f^*(H^0_{DR}(X/S, M))$, et donc l'inclusion $N \subset \mathrm{Inf}(M)$ factorise à travers ρ. □

Remarque 2.5.5. Dans [And01], l'auteur démontre un énoncé similaire au précédent. En effet, lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et lisse, A est un anneau différentiel simple par couche (définition 2.1.3.6). Dans ce cas, l'auteur démontre l'injectivité de la flèche précédente à la proposition 3.1.2.2.

Ce théorème est aussi démontré dans [AB12, proposition 2.3.1] et dans [Zha14, corollaire 3.2] lorsque X est propre sur S.

Corollaire 2.5.6. *Soit $M \in \mathcal{C}(X/k)$, le R-module $H^0_{DR}(X/S, (M, \nabla))$ est de type fini.*

Démonstration. La question étant locale, on est ramené au cas où X est affine, et où M^∇ est libre. On note $X = \mathrm{Spec}(A)$. Dans ce cas l'injectivité de

$$\rho : M^\nabla \otimes_R A \to M$$

démontre que M^∇ est de type fini car M l'est. □

Des cas analogues à la traduction de **SE**3 du théorème 2.4.2 peuvent être trouvés dans plusieurs articles, comme [EH06, théorème 5.10] ou [DHdS18]. L'essence de la preuve étant due à Deligne. On adapte la preuve donnée dans [DHdS18] pour un anneau principal.

Définition 2.5.7. Soit $\alpha : L \to E$ un monomorphisme dans $\mathcal{C}(X/S)$, avec L et E localement libre. Si $\mathrm{Coker}(\alpha)$ est aussi localement libre, on dira que α est un monomorphisme **spécial**. On dira aussi que L est un sous-objet spécial de E.

Théorème 2.5.8. *Soit $M \in \mathcal{C}(X/k)$ et $V \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$ un sous-objet spécial de $\mathrm{Inf}(M)$. Alors il existe $W \in \mathcal{C}(X/k)$ et un épimorphisme :*

$$\mathrm{Inf}(W) \twoheadrightarrow V.$$

De plus, W peut être choisi dans $\langle M \rangle_\otimes$.

Le théorème suivant permet de détecter quand est ce qu'un sous-objet d'une inflation est une inflation.

Théorème 2.5.9. *Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$ un k-schéma lisse tel que $\Omega^1_{S/k}$ soit libre de rang m. Soit $M \in \mathcal{C}(X/k)$, et $E \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$ un sous-objet de $\mathrm{Inf}(M)$. Si*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(X/S)}(E, \mathrm{Inf}(M)/E) = 0$$

alors E est un sous-objet de M dans $\mathcal{C}(X/k)$.

En particulier, E est une inflation.

Démonstration. On suit la preuve donnée dans [DHdS18, théorème 9.4].

Soit $U = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de X et $\{x_1, \dots, x_n\}$ des coordonnées locales de sorte que :

1. $\Omega^1_{U/S}$ est engendré par $\{dx_1, \dots, dx_n\}$.
2. $\Omega^1_{S/k}$ est engendré par $\{dt_1, \dots, dt_m\}$.
3. $\Omega^1_{U/k}$ est engendré par $\{dx_1, \dots, dx_n, dt_1 \dots, dt_m\}$.

On notera δ_{x_i} (resp. δ_{t_i}) la dérivation duale associée à dx_i (resp. dt_i). Par définition, E est stable par $\nabla(\delta_{x_j})$. Il reste à montrer que E est stable par $\nabla(\delta_{t_i})$. Considérons le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \phi_{t_i} : E(U) &\to M/E(U) \\ e &\to \nabla(\delta_{t_i})(e). \end{aligned}$$

Ce morphisme est A-linéaire, en effet, pour tout $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} \phi_{t_i}(ae) &= \nabla(\delta_{t_i})(ae) \\ &= \delta_{t_i}(a)e + a\nabla(\delta_{t_i})(e) \\ &= a\nabla(\delta_{t_i})(e) \bmod E. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\phi_{t_i}(\nabla(\delta_{x_j})(e)) &= \nabla(\delta_{t_i})(\nabla(\delta_{x_j})(e)) \\ &= \nabla(\delta_{x_j})(\nabla(\delta_{t_i})(e)) \\ &= \nabla(\delta_{x_j})(\phi_{t_i}(e))\end{aligned}$$

par intégrabilité de ∇. Ce morphisme est indépendant du relevé de l'élément δt_i choisi. En effet, soit $\delta t_i'$ un autre relevé, par la suite exacte cotangente, on aurait $\delta_{t_i} - \delta_{t_i'} \in \mathrm{Der}(U/S)$. On en déduit que $\nabla(\delta_{t_i} - \delta_{t_i'})$ laisse stable E, et donc ϕ_{t_i} est égale à $\phi_{t_i'}$ sur U.

Ceci nous permet de construire le morphisme ϕ_{t_i} globalement, c'est-à-dire dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(X/S)}(E, \mathrm{Inf}(M)/E)$.

Le morphisme ϕ_{t_i} est donc nul par hypothèse, on en déduit donc que E est stable par $\nabla(\delta_{t_i})$, et donc E est une inflation. □

La preuve du théorème 2.5.8 est basée sur le concept de socle rappelé ici.

Définition 2.5.10. Soit $E, L \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, avec L localement libre de rang un , on définit :

$$\mathrm{Soc}_E(L) \subset E$$

comme la somme de tous les sous-objets de E isomorphes à L. C'est un sous-module localement libre de E.

Remarque 2.5.11. Par convention, s'il n'y a pas de sous-objets de E isomorphe à L, on pose $\mathrm{Soc}_E(L) = \{0\}$.

Lemme 2.5.12. *Soient $E, L \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, on suppose que L est un sous-objet spécial de E alors $\mathrm{Soc}_E(L)$ est un sous-objet spécial de E, isomorphe à L^r pour un certain r.*

Démonstration. La preuve est similaire à [DHdS18, Lemme 9.3]. Supposons que L est le module trivial $(\mathcal{O}_X, d_{/S}) \in \mathcal{C}(X/S)$. D'après la théorie Tannakienne, la catégorie $\langle E \rangle_\otimes$ muni du foncteur fibre ϵ^* est équivalente à la catégorie des représentations d'un schéma en groupes G affine et plat sur S. Via cette équivalence, $\mathrm{Soc}_E(L)$ s'identifie aux points fixes de la représentation E. Comme R est principal, cette représentation est libre et triviale, et donc s'identifie à L^r. Le cas général se traite en prenant $L^\vee \otimes E$.

□

Démonstration de 2.5.8. La preuve suivante est tirée de [DHdS18], recopiée pour la commodité du lecteur. Soit $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$ et $V \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$ un sous-objet spécial

de $\mathrm{Inf}(M)$. On suppose de plus que V est localement libre de rang un. On pose $\mathrm{Soc}^1(V) = \mathrm{Soc}_M(V)$, et on définit la suite des socles :

$$\mathrm{Soc}^{i+1}(V) = \pi_i^{-1}\,\mathrm{Soc}_V(M/\,\mathrm{Soc}^i(V))$$

où $\pi_i : M \to M/\,\mathrm{Soc}^i(V)$ est la projection canonique. De plus, on a :

$$\mathrm{Soc}^{i+1}(V)/\,\mathrm{Soc}^i(V) \simeq \mathrm{Soc}_V(M/\,\mathrm{Soc}^i(V)).$$

Par le lemme 2.5.12, le socle est un sous-objet spécial, on en déduit que $\mathrm{Soc}^i(V)$ est aussi un sous-objet spécial. Comme M est de type fini, la suite des socles stationne, et il existe r tel que :

$$\mathrm{Soc}^r(V) = \mathrm{Soc}^{r+1}(V) = \dots$$

On en déduit alors que $\mathrm{Soc}_V(M/\,\mathrm{Soc}^r(V)) = \{0\}$, et donc que :

$$\mathrm{Hom}(V, M/\,\mathrm{Soc}^r(V)) = 0.$$

Maintenant, comme $\mathrm{Soc}^1(V)$ est isomorphe à V^n, on en déduit que :

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Soc}^1(V), M/\,\mathrm{Soc}^r(V)) = 0.$$

Puis par induction, comme $\mathrm{Soc}^i(V)/\,\mathrm{Soc}^{i+1}$ est isomorphe à V^m, on en déduit que que :

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Soc}^r(V), M/\,\mathrm{Soc}^r(V)) = 0.$$

Par le théorème 2.5.9, on en déduit que $\mathrm{Soc}^r(V)$ est une inflation, et $\mathrm{Soc}^r(V)$ est un sous-objet spécial de M. De plus, V est un quotient de $\mathrm{Soc}^r(V)$. On en déduit que $V \in \langle M\rangle_\otimes$. Ceci achève la démonstration pour V localement libre de rang un.

Pour le cas général, on note $n = \dim V$ et soit $W \in \mathcal{C}(X/k)$ tel que $\mathrm{Inf}(W) \twoheadrightarrow \det(V)$. On a un isomorphisme :

$$V \simeq \{\wedge^{n-1}V\}^\vee \otimes \det(V).$$

On obtient donc que V est un quotient de $M^\vee \otimes \mathrm{Inf}(W)$. □

Nous pouvons maintenant prouver le théorème principal de cette partie.

Théorème 2.5.13. *Avec les hypothèses précédentes, la suite suivante est exacte :*

$$G(X/S) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \Pi(X/k) \xrightarrow{f^*} \Pi(S/k) \to 1.$$

Démonstration. On note $\langle \mathrm{Inf}\rangle^{\mathbf{s}}_\otimes$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(X/S)$ dont les objets sont les sous-objets spéciaux d'une inflation. Cette catégorie est un réseau Tannakien.

On note $G(\mathrm{Inf})$ le schéma en groupes associé à ce réseau Tannakien. On souhaite montrer que la suite suivante est exacte :

$$1 \to G(\mathrm{Inf}) \overset{\mathrm{Inf}}{\to} \Pi(X/k) \overset{f^*}{\to} \Pi(S/k) \to 1.$$

Le lemme 2.5.4 et le lemme 2.5.3 sont les reformulations exactes de **SE**1 et **SE**2 du théorème 2.4.2. De plus, le théorème 2.5.8 démontre **SE**3.

En utilisant [DH18, proposition 3.2.1], l'inclusion $\langle \mathrm{Inf} \rangle_{\otimes}^{\mathbf{s}} \subset \mathcal{C}(X/S)^{\circ}$ donne lieu à un morphisme surjectif de schéma en groupes $G(X/S) \to G(\mathrm{Inf})$.

On obtient alors que la suite suivante est exacte :

$$G(X/S) \overset{\mathrm{Inf}}{\to} \Pi(X/k) \overset{f^*}{\to} \Pi(S/k) \to 1.$$

Remarque 2.5.14. La flèche d'inflation $G(X/S) \to G(\mathrm{Inf})$ n'est à priori pas fidèlement plate. Nous allons démontrer dans la section suivante qu'elle l'est lorsque X est de plus supposé propre.

□

2.6 Le théorème d'isomonodromie

Dans cette section, nous nous intéressons au cas d'une seule connexion $(N, \nabla) \in \mathcal{C}(X/S)^{\circ}$, et allons étudier son groupe de Galois différentiel. On va s'intéresser en particulier au cas où $N = \mathrm{Inf}(M)$ avec $M \in \mathcal{C}(X/k)$.

On suppose toujours que k est un corps de caractéristique 0 et X est un k-schéma lisse connexe sur $S = \mathrm{Spec}(R)$ une k-algèbre principale lisse et connexe possédant un k-point ω, et un S-point ϵ. On suppose de plus que le morphisme f est à fibres géométriquement connexe.

Soit $M \in \mathcal{C}(X/k)$, on note $\mathrm{Gal}_{X/k}(M)$ le schéma en groupoïdes de Galois de M associé à la catégorie Tannakienne $\langle M \rangle_{\otimes} \subset \mathcal{C}(X/k)$ muni du foncteur fibre ϵ^*. De même, on note $\mathrm{Gal}_{S/k}(H^0_{DR}(X/S, M))$ celui associé à la catégorie Tannakienne $\langle H^0_{DR}(X/S, M) \rangle_{\otimes} \subset \mathcal{C}(S/k)$ muni du foncteur d'oubli.

On rappelle que le schéma en groupoïdes $\mathrm{Gal}_{X/k}(M)$ est de type fini sur $S \times_k S$ ([Del90, proposition 6.19]).

Soit G un schéma en groupes (ou en groupoïdes) affine, on notera $\mathrm{Rep}^{\circ}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}(G)$ dont les modules sous-jacents sont localement libres.

On reprend la définition des objets spéciaux issue de [DHdS18, définition 7.4].

Définition 2.6.1. Soit $\alpha : M' \to M$ un monomorphisme dans $\mathcal{C}(X/S)$, avec M et M' localement libre. Si $\mathrm{Coker}(\alpha)$ est aussi localement libre, on dira que α est

un monomorphisme **spécial**. Un objet M'' dans $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ sera un sous-quotient **spécial** s'il existe un monomorphisme spécial $M' \to M$ et un épimorphisme de $M' \to M''$.

Soit $(N, \nabla) \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, on considère la sous-catégorie pleine $\langle N \rangle_\otimes^{\mathbf{s}}$ de tous les sous-quotients spéciaux d'une somme directe de produits tensoriels de la forme

$$T^{a,b} := N^{\otimes a} \otimes N^{\vee \otimes b}.$$

D'après [DH18, définition 5.1.3], c'est un réseau Tannakien.

De même, on note $\langle N \rangle_\otimes$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(X/S)$ ayant comme objets tous les sous-quotients d'une somme directe de produits tensoriels $T^{a,b}$.

C'est une catégorie Tannakienne (voir [DH18, théorème 1.2.6] ou [And01, théorème 3.2.1.1]), on a le théorème de structure suivant :

Théorème 2.6.2. *Soit $N \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, le R-point ϵ induit une équivalence de catégories :*

$$\epsilon^* : \langle N \rangle_\otimes \to \mathrm{Rep}_R(\mathrm{Gal}'(N))$$

où $\mathrm{Gal}'(N)$ est un schéma en groupes affine et plat sur R.

Il induit aussi une équivalence :

$$\epsilon^* : \langle N \rangle_\otimes^{\mathbf{s}} \to \mathrm{Rep}_R^\circ(\mathrm{Gal}(N))$$

où $\mathrm{Gal}(N)$ est un schéma en groupes affine, de type fini, et plat sur R.

On appelle $\mathrm{Gal}'(N)$ "the full Galois group of N", et $\mathrm{Gal}(N)$ le groupe de Galois restreint.

Remarque 2.6.3. En général, il n'y a pas égalité entre $\mathrm{Gal}(N)$ et $\mathrm{Gal}'(N)$ [DHdS18, exemple 7.9].

Théorème 2.6.4. *Soit $M \in \mathcal{C}(X/k)$. On suppose de plus que le morphisme f est propre. Alors, avec les notations précédentes, le morphisme*

$$\phi : \mathrm{Gal}'(\mathrm{Inf}(M)) \to \mathrm{Gal}(\mathrm{Inf}(M))$$

est un isomorphisme.

Dans la suite, on notera $G = \mathrm{Gal}(\mathrm{Inf}(M))$ et $G' = \mathrm{Gal}'(\mathrm{Inf}(M))$. En utilisant la dualité Tannakienne, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}_R(G') \arrow[d, equal] & \mathrm{Rep}_R^\circ(G) \arrow[l, "\omega_\phi"'] \arrow[d, equal] \\ \langle \mathrm{Inf}(M) \rangle_\otimes & \langle \mathrm{Inf}(M) \rangle_\otimes^s \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Pour $\mathcal{C}$ une catégorie R-linéaire et $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ un point fermé, on note $\mathcal{C}_{k(\mathfrak{p})}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ des objets W tel que $\mathfrak{p} \subset \mathrm{Ann}(W)$.

On a alors le diagramme commutatif suivant (voir [DHdS18, diagramme 4.2]) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_R(G')_{k(\mathfrak{p})} \arrow[d, equal] & \mathrm{Rep}_R(G)_{k(\mathfrak{p})} \arrow[l, "\omega_{\phi_{k(\mathfrak{p})}}"'] \arrow[d, dashed] \\
\langle \mathrm{Inf}(M) \rangle_{\otimes, k(\mathfrak{p})} & \langle V \otimes k(\mathfrak{p}) \rangle_{\otimes} \arrow[l] \arrow[dl, "\tilde{\omega_{\phi_{k(\mathfrak{p})}}}"] \\
\langle \mathrm{Inf}(M)_{|X_{\mathfrak{p}}} \rangle \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

où l'on note V la représentation associée à $\mathrm{Inf}(M)$. On sait que V est une représentation fidèle du groupe G, et donc $V \otimes k(\mathfrak{p})$ est une représentation fidèle du schéma en groupes affine $G_{k(\mathfrak{p})}$. De plus, d'après [Jan87, Part I, 10.1, p. 162], on sait que $\mathrm{Rep}_R(G)_{k(\mathfrak{p})}$ correspond à la catégorie des représentations du schéma en groupes affine $G_{k(\mathfrak{p})}$. On en déduit alors que la flèche en pointillé du diagramme précédent existe et rend commutatif le diagramme.

L'idée de la preuve est de montrer que le morphisme ϕ est fidèlement plat au dessus de tous les points de S, et de conclure par un lemme de théorie des schémas en groupes.

Au-dessus du point générique, c'est une conséquence de [DHdS18, section 4].

Au-dessus d'un point fermé s, c'est le théorème suivant :

Théorème 2.6.5. *Soit s un point fermé de S, le foncteur :*

$$\tilde{\omega_\phi} : \mathrm{Rep}_{k(s)}(G_{k(s)}) \to \langle Inf(M)_{|X_s} \rangle_{\otimes}$$

est une équivalence de catégorie.

La preuve est une conséquence des lemmes suivants :

Lemme 2.6.6. *Soit s un point fermé de S, soit $W_0, W_1 \in \langle M \rangle_{\otimes}$, et soit :*

$$\theta : Inf(W_0)_{|X_s} \to Inf(W_1)_{|X_s}$$

un morphisme dans $\mathcal{C}(X_s/k(s))$. Alors il existe un morphisme $\tilde{\theta}$ dans $\mathcal{C}(X/S)$ relevant θ.

Démonstration. Notons $W = W_1 \otimes {W_0}^{\vee}$. Par définition, θ est un élément de $W^{\nabla}_{|X_s}$.

On note T le plus grand sous-objet trivial de $W_{|X_s}$, par la suite exacte fondamentale ([Zha14, Théorème 1.1] ou voir [dS15, Théorème 1] avec la correspondance

énoncée dans [DH18, Théorème 4.2.2]), il existe $\tilde{T} \in \mathcal{C}(S/k)$ tel que $f^*(\tilde{T})_{|X_s} = T$. On en déduit que θ se relève en un morphisme :

$$\tilde{\theta} : f^*(\mathcal{O}_S) \to f^*(\tilde{T})$$

Comme f est propre, fidèlement plat, et géométriquement connexe, on a $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$, et donc f^* est un foncteur pleinement fidèle sur la catégorie des modules localement libres. On en déduit donc que $\tilde{\theta}$ provient de la base et s'écrit $f^*(\tau)$ pour $\tau : \mathcal{O}_S \to \tilde{T}$. Ainsi $\theta = f^*(\tau)$ est un morphisme dans $\mathcal{C}(X/S)$. □

Lemme 2.6.7. *Soit $V \in \langle Inf(M)_{|X_s}\rangle$ alors il existe $W_0, W_1 \in \langle Inf(M)\rangle^{\mathbf{s}}_{\otimes}$ et $\theta : W_0 \to W_1$ tels que $V = \mathrm{Coker}(\theta_{|X_s} : W_{0|X_s} \to W_{1|X_s})$. Par dualité, V est un sous-objet d'un $W_0 \in \langle Inf(M)\rangle^{\mathbf{s}}_{\otimes}$.*

Démonstration. Par la suite exacte fondamentale, il existe $U_1 \in \langle M\rangle_{\otimes}$ tel que $U_{1|X_s} \twoheadrightarrow V$. De même, en appliquant la suite exacte au noyau du morphisme précédent, on obtient qu'il existe $U_0 \in \langle M\rangle$ tel que $U_{0|X_s} \twoheadrightarrow K \hookrightarrow U_{1|X_s} \twoheadrightarrow V$ et donc $V = \mathrm{Coker}(\theta : U_{0|X_s} \to U_{1|X_s})$.

En posant $W_0 = \mathrm{Inf}(U_0)$ et $W_1 = \mathrm{Inf}(U_1)$, et par le lemme 2.6.6, il existe un morphisme $\tilde{\theta}$ tel que $V = \mathrm{Coker}(\tilde{\theta}_{|X_s} : W_{0|X_s} \to W_{1|X_s})$. □

Démonstration de 2.6.5. Le lemme 2.6.7 montre que $\tilde{\omega_\phi}$ est essentiellement surjectif

Il reste à montrer que $\tilde{\omega_\phi}$ est pleinement fidèle, il suffit de montrer qu'il est plein.

Soient V, $W \in \mathrm{Rep}_{k(s)}(G_{k(s)})$, et $\mu : \tilde{\omega_\phi}(V) \to \tilde{\omega_\phi}(W)$. En utilisant le lemme 2.6.7, il existe $V_0, W_0 \in \langle Inf(M)\rangle^{\mathbf{s}}_{\otimes}$ tels que $W_{0|X_s} \twoheadrightarrow \tilde{\omega_\phi}(W)$ et $\tilde{\omega_\phi}(V) \hookrightarrow V_{0|X_s}$.

On a un diagramme :

$$\begin{tikzcd} V_{0|X_s} \arrow[r, "\theta"] & W_{0|X_s} \arrow[d, two heads] \\ \tilde{\omega_\phi}(V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mu"] & \tilde{\omega_\phi}(W) \end{tikzcd}$$

Il suffit de montrer que θ se relève, on peut alors conclure par le lemme 2.6.6. □

Lemme 2.6.8. *Soit $\phi : G' \to G$ un morphisme de S-schémas en groupes affines. On suppose de plus que G et G' sont plats sur S. Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $\phi_{k(\mathfrak{p})} : G' \times k(\mathfrak{p}) \to G \times k(\mathfrak{p})$ est fidèlement plat.*
2. *Le morphisme $\phi_K : G' \times \mathrm{Frac}(R) \to G \times \mathrm{Frac}(R)$ est un isomorphisme.*

Alors ϕ est un isomorphisme.

Démonstration. On note $A = \mathcal{O}_G$, $B = \mathcal{O}_{G'}$. On a le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \otimes K \arrow[r, "\phi_K"] & B \otimes K \end{tikzcd} .$$

Les flèches verticales sont injectives, et par hypothèse, ϕ_K l'est aussi, on en déduit donc que $A \subset B$.

On suppose que R est local et principal, et on note K le corps des fractions de R, et π l'uniformisante, et k le corps résiduel.

Soit $b \in B$, comme $A \otimes K = B \otimes K$, il existe $l \in K$, $a \in A$ tel que $la = b$. Comme R est principal et local, il reste à traiter le cas où $\pi^n a = b$ ou $a = \pi^n b$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Pour le premier cas, comme A est une R-algèbre, on en déduit directement que $b \in A$. Pour le second cas, comme $A \otimes k \subset B \otimes k$, on en déduit que $a = 0$ dans $A \otimes k$, et donc $a = \pi a'$. Par suite, on en déduit que $b \in A$.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $R_{\mathfrak{p}}$ étant local et principal, en utilisant le raisonnement précédent, on en déduit que $A_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}$, et donc $A = B$.

□

Démonstration de 2.6.4. Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ un point fermé, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}(\mathrm{Gal}'(\mathrm{Inf}(M))_{k(\mathfrak{p})} & \mathrm{Rep}(\mathrm{Gal}(\mathrm{Inf}(M)))_{k(\mathfrak{p})} \arrow[l, "\tilde{\omega}_{\phi_{k(\mathfrak{p})}}"'] \arrow[dl, "\tilde{\omega}_{\phi_{k(\mathfrak{p})}}"] \\ \langle \mathrm{Inf}(M)_{|X_{\mathfrak{p}}} \rangle \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

On a montré que $\tilde{\omega}_{\phi_{k(\mathfrak{p})}}$ était une équivalence de catégories. La flèche verticale est stable par sous-objet et pleinement fidèle. On en déduit que le morphisme entre les schémas en groupes est fidèlement plat.

Le lemme 2.6.8 permet de conclure la démonstration. □

Corollaire 2.6.9. *Avec les hypothèses du théorème 2.6.4, on a* $\langle \mathrm{Inf}(M) \rangle^{\mathbf{s}}_{\otimes} = \langle \mathrm{Inf}(M) \rangle^{\circ}_{\otimes}$.

Démonstration. Avec les notations précédentes, cela provient immédiatement du diagramme 2.1, et du fait que G est isomorphe à G'. □

Théorème 2.6.10. *La suite suivante de schémas en groupoïdes est exacte :*

$$1 \to \mathrm{Gal}_{X/S}(\mathrm{Inf}(M)) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{Gal}_{X/k}(M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Gal}_{S/k}(H^0_{DR}(X/S, M)) \to 1.$$

De plus, lorsque f est propre et géométriquement connexe, la suite suivante est exacte :

$$1 \to \mathrm{Gal}'_{X/S}(\mathrm{Inf}(M)) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{Gal}_{X/k}(M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Gal}_{S/k}(H^0_{DR}(X/S, M)) \to 1.$$

Démonstration. La suite précédente provient par dualité Tannakienne de celle ci dessous :

$$\langle H^0_{DR}(X/S, M)\rangle_\otimes \xrightarrow{f^*} \langle M\rangle_\otimes \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \langle \mathrm{Inf}(M)\rangle^{\mathbf{s}}_\otimes$$

Montrons que la flèche d'inflation est une immersion fermée.

Pour cela, on utilise le critère 2.3.16. Soit V un sous-quotient spécial d'un $\mathrm{Inf}(L)$ où $L \in \langle M\rangle_\otimes$. Il existe donc U sous-objet spécial tel que :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Inf}(L) \\ V & \end{tikzcd}$$

Par le théorème 2.5.8, il existe $W \in \langle M\rangle_\otimes$ complétant le diagramme précédent :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Inf}(W) \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & U \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Inf}(L) \\ & V & \end{tikzcd}$$

On en déduit que V est un quotient d'un $\mathrm{Inf}(W)$, donc en particulier, c'est un sous-quotient spécial d'un $\mathrm{Inf}(W)$. On en déduit que l'inflation est une immersion fermée.

Comme $\langle H^0_{DR}(X/S, M)\rangle_\otimes$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(S/k)$, on en déduit que f^* est fidèlement plate.

Il suffit maintenant de vérifier les hypothèses du théorème 2.4.2, qui découle immédiatement des lemmes 2.5.4 et 2.5.3 et du théorème 2.5.8.

□

On peut maintenant énoncer une version raffinée du théorème 2.5.13 :

Théorème 2.6.11. *Avec les notations du théorème 2.5.13, la suite suivante est exacte :*

$$G(X/S) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \Pi(X/k) \xrightarrow{f^*} \Pi(S/k) \to 1.$$

De plus, lorsque f est propre et géométriquement connexe, le morphisme Inf *est plat.*

Démonstration. En reprenant la preuve de 2.5.13, il s'agit de montrer que l'inclusion $\langle \mathrm{Inf}\rangle^{\mathbf{s}}_\otimes \subset \mathcal{C}(X/S)^\circ$ donne lieu par dualité, à un morphisme fidèlement plat. En

utilisant le lemme 2.3.15, il s'agit de montrer que l'inclusion est stable par sous-objet. Or, le corollaire 2.6.9 nous indique justement qu'un sous-objet localement libre d'une inflation est spécial. □

Théorème 2.6.12. *Sous les hypothèses précédentes,* $\mathrm{Gal}_{X/S}(\mathrm{Inf}(M))$ *est isoconstant 2.2.20 pour la topologie fidèlement plate de présentation finie.*

Démonstration. Faisons le dans un premier temps pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte.

On sait que $\mathrm{Gal}_{X/S}(\mathrm{Inf}(M))$ est un sous-groupoïde discret et distingué de $\mathrm{Gal}^{\Delta}_{X/k}(M)$. On sait aussi que $\mathrm{Gal}^{\Delta}_{X/k}(M)$ est isoconstant, cela provient du corollaire 2.2.21. Par le corollaire 2.2.22, on obtient alors que $\mathrm{Gal}_{X/S}(\mathrm{Inf}(M))$ est isoconstant.

Comme $\mathrm{Gal}_{X/S}(\mathrm{Inf}(M))$ est de type fini, on peut utiliser le théorème de comparaison ([SR72, Chap 2 3.1.2]), on obtient ainsi le résultat.

□

On voudrait maintenant rajouter des hypothèses sur la base pour que $\mathrm{Gal}_{X/S}(\mathrm{Inf}(M))$ soit constant, et non plus isoconstant. Pour cela, supposons de plus que S est strictement hensélien de caractéristique résiduelle 0.

Théorème 2.6.13. *Le schéma en groupes diagonal* $\mathrm{Gal}^{\Delta}_{X/k}(M)$ *de* $\mathrm{Gal}_{X/k}(M)$ *est constant, et par suite* $\mathrm{Gal}_{X/S}(\mathrm{Inf}(M))$ *l'est aussi.*

Démonstration. Comme précédemment, il suffit de montrer que $\mathrm{Gal}^{\Delta}_{X/k}(M)$ est constant. Comme $\mathrm{Gal}_{X/k}(M)$ est lisse, il possède un k-point w, qui se relève en un R-point. De plus, $\mathrm{Gal}_{X/k}(M) \simeq \mathrm{Isom}^{\otimes}(w \otimes R, \epsilon)$, et donc ce G_w-torseur possède un point. On obtient alors que $\mathrm{Gal}^{\Delta}_{X/k}(M) \simeq G_w \times_k S$. □

Chapitre 3

La théorie Tannakienne différentielle

3.1 Introduction

La première partie est un rappel des constructions classiques d'algèbre extérieure. Les résultats sont habituellement démontrés pour les variétés différentielles mais ils s'adaptent sans problème aux variétés algébriques lisses. Ces constructions conduisent à une définition, dans le cadre algébrique, de la dérivé de Lie, ainsi que ces principales propriétés, démontrées au théorème 3.2.10. Ce théorème sera utile dans la suite pour la construction de la première classe d'Atiyah.

La seconde partie est consacrée à un rappel de la construction de la première classe d'Atiyah. Elle a été introduite dans [Ati57] afin de mesurer l'obstruction à un fibré à posséder une connexion. Dans cette partie, en s'inspirant du travail de [GGO13], nous définissons une classe d'Atiyah pour les fibrés à connexion relative, c'est-à-dire pour la catégorie $\mathcal{C}(X/S)$. Comme le montre le théorème 3.3.14, l'annulation de cette nouvelle classe d'Atiyah mesure l'obstruction à ce que qu'une connexion relative proviennent d'une connexion absolue.

C'est autour de ce théorème que va se baser la suite de la thèse. Le but est de transférer cette propriété, via la théorie Tannakienne, à une propriété portant sur le groupe différentiel Tannakien.

La troisième partie porte sur la définition des schémas en groupes affines différentiels. Ces objets seront vus comme des cristaux sur le site infinitésimal $\mathrm{Inf}(X/S)$, comme le suggère [BO15] et [Sim94]. Ces constructions coïncident avec la notion d'algèbre différentielle développée dans [CS05] [Ovc09][GGO13]. On décrit aussi dans cette partie quelles seront les représentations de ces schémas en groupes différentiels. On mettra l'accent sur le théorème 3.4.18 indiquant quand un schéma en groupes affine différentiel est constant, au sens de 3.4.12. Ce résultat sera mis en parallèle avec le théorème 3.3.14 de la partie précédente en dernière partie.

La quatrième partie est une adaptation de la théorie Tannakienne différen-

tielle développée dans [GGO13]. Cette théorie pourrait être résumée par "Peut-on donner une définition correcte des cristaux en catégories ?". Une première étape dans cette direction est de construire un changement de base dans les catégories abéliennes. Cette construction a été faite par plusieurs auteurs [SR72] [Del90]. On démontre aussi dans cette partie un lemme de changement de base dans les catégories de représentations 3.5.3. Ce lemme sera utile lors de la démonstration de la correspondance Tannakienne différentielle, qui sera le résultat principal de cette partie.

Théorème A (théorème 3.5.13)**.** *Soit θ^i une structure différentielle sur* $\mathrm{Rep}(G)$ *tel que le foncteur d'oubli soit un foncteur différentiel. Alors le schéma en groupes affine G a naturellement une structure de schéma en groupes affine différentiel.*

Ce théorème a été démontré lorsque $R = k$ un corps différentiel dans [Ovc09], et sous cette forme dans [GGO13].

La dernière partie de cette thèse est l'application des résultats précédents à la catégorie des connexions relatives $\mathcal{C}(X/S)$. On montre que cette catégorie est une catégorie différentielle. Elle n'est à priori pas Tannakienne dans notre sens, car elle n'admet pas de catégorie de définition évidente. En revanche, lorsque nous prenons la catégorie différentielle engendrée par un seul objet $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, celle-ci devient Tannakienne. On peut appliquer le théorème précédent 3.5.13, et ainsi obtenir un schéma en groupes affine différentiel. En utilisant le théorème de comparaison 2.6.4, on obtient d'une seconde manière le théorème d'isomonodromie. On reprend les notations du chapitre précédent.

Soit k un corps de caractéristique 0, soit R une k-algèbre principale lisse, on note $S = \mathrm{Spec}(R)$ et $f : X \to S$ un morphisme lisse à fibres géométriquement connexes entre k-schémas connexes. On suppose de plus que X est propre et possède un k-point ω, ainsi qu'un S-point ϵ.

Théorème B (théorème 3.6.7)**.** *Avec les notations précédentes, soit $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$. Si M est une inflation, alors pour $s \in S(k)$ un point rationnel, on a*

$$\mathrm{Gal}'(M) \times_S \hat{R} \simeq \mathrm{Gal}'(M)_k \times_k \hat{R},$$

où $\hat{R}$ désigne le complété de R au point s.

3.2 Compléments d'algèbre extérieure

On rappelle dans cette partie les principaux résultats concernant les algèbres extérieurs. Soit X un k-schéma, et E un faisceau localement libre sur X.

Définition 3.2.1. On note $\bigwedge^p E$ le faisceau associé au préfaisceau suivant $U \mapsto \bigwedge^p \Gamma(U, E)$. C'est la puissance extérieure p-ème de E. On notera

$$\bigwedge E = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \wedge^p E.$$

On vérifie que $\bigwedge E$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre localement libre, associative, unitaire, graduée, et anticommutative. Lorsque $U = \mathrm{Spec}(A)$ est un ouvert affine, on a $\bigwedge^p E_{|U} = (\bigwedge^p(\Gamma(U, E)))^\sim$.

Proposition 3.2.2. *Soit F un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, on a une bijection canonique de $\mathcal{O}_X$-module entre $\mathcal{H}om(\bigwedge^p E, F)$ et les applications p-linéaires alternées de E^p dans F.*

Soit U un ouvert de X, soit $\alpha \in \Gamma(U, \mathcal{H}om(\bigwedge^p E, \mathcal{O}_X))$ une p-forme extérieure sur $\Gamma(U, E)$, et $x \in \Gamma(U, E)$, alors

$$i(x)(\alpha) : (e_1, \ldots, e_p) \to \alpha(x, e_1, \ldots, e_{p-1}).$$

est une $(p-1)$-forme extérieure de $\Gamma(U, E)$. L'application $i(x)$ définit une application linéaire de $\Gamma(U, \bigwedge^p E)$ dans $\Gamma(U, \bigwedge^{p-1} E)$. On obtient un morphisme de faisceaux :

$$i : E \times \mathcal{H}om(\bigwedge^p E, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}om(\bigwedge^{p-1} E, \mathcal{O}_X)$$

Définition 3.2.3. L'endomorphisme $i(x)$ de $\bigwedge E$ est appelé le produit intérieur par l'élément x de E.

Proposition 3.2.4. *Soit U un ouvert de X, et soient x et y deux sections de $\Gamma(U, E)$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $i(x + y) = i(x) + i(y)$.
2. *pour toute section* $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X), i(fx) = fi(x)$.
3. $i(x)i(y) = -i(y)i(x)$.
4. $i(x)i(x) = 0$.

Proposition 3.2.5. *Soit U un ouvert affine de X, et soit α une p-forme extérieure et β une q-forme extérieure de $\Gamma(U, \bigwedge E)$, et x un élément de $\Gamma(U, E)$, on a*

$$i(x)(\alpha \wedge \beta) = (i(x)(\alpha)) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i(x)(\beta)).$$

3.2.1 La dérivée de Lie

Soit k un corps de caractéristique 0 et soit $f : X \to S$ un morphisme lisse de k-schémas, de sorte que $\Omega^1_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini.

On note :

$$\Omega^{\bullet}_{X/S} = \bigwedge \Omega^1_{X/S}$$

le complexe de De Rham relatif. On rappelle que $\Omega^{1^\vee}_{X/S} = Der(X/S)$. On a le théorème suivant [Gro64, théorème 16.6.2].

Théorème 3.2.6. *Il existe un endomorphisme d et un seul de faisceaux en groupes additifs $\Omega^{\bullet}_{X/S}$ ayant les propriétés suivantes :*

- $d \circ d = 0$.
- *pour tout ouvert U de X, et $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, on a $d(f) = d_{X/S}(f)$.*
- *pour tout ouvert U de X, tout couple d'entiers p, q, et tout couple de sections $\alpha_p \in \Gamma(U, \Omega^p_{X/S})$, $\beta_q \in \Gamma(U, \Omega^q_{X/S})$, on a*

$$d(\alpha_p \wedge \beta_q) = d(\alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge d(\beta_q).$$

De plus, d est un endomorphisme de $f^*(\mathcal{O}_S)$-modules gradués de degré $+1$.

Corollaire 3.2.7. *Soit U un ouvert affine de X. Soit $\alpha \in \Gamma(U, \Omega^p_{X/S})$, et $\{D_1, \ldots, D_{p+1}\}$ des dérivations dans $\Gamma(U, Der(X/S))$ alors on a :*

$$\begin{aligned}(d\alpha)(D_1, \ldots, D_{p+1}) = &\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} D_i \alpha(D_1, \ldots, \hat{D}_i, \ldots, D_{p+1}) + \\ &\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([D_i, D_j], D_1, \ldots, \hat{D}_i, \ldots, \hat{D}_j, \ldots, D_{p+1})\end{aligned}$$

Démonstration. La formule de droite définit une dérivation de degré $+1$ sur $\Omega^{\bullet}_{X/S}$ ayant les propriétés du théorème précédent. □

Remarque 3.2.8. En particulier, lorsque α est une 1-forme, on a la formule suivante :

$$(d\alpha)(D, D') = D.\alpha(D') - D'.\alpha(D) - \alpha([D, D']).$$

Soit U un ouvert de X, et soit $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$, et $\alpha \in \Gamma(U, \Omega^p_{X/S})$,

$$L_D : \alpha \mapsto d \circ i(D)(\alpha) + i(D) \circ d(\alpha)$$

est une dérivation de degré 0 de $\Omega^{\bullet}_{X/S}$. De plus, elle commute avec la dérivée extérieure d. Soit $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, et $D \in \Gamma(U, Der_{X/S})$, cette dérivation est caractérisée par les relations suivantes :

1. $L_D(f) = D(f)$.
2. $L_D(df) = d(D(f))$.

Définition 3.2.9. L'endomorphisme L_D de $\Omega^\bullet_{X/S}$ est appelé la dérivée de Lie selon le champ de vecteurs D.

On en déduit en particulier une application :

$$L : Der(X/S) \to \mathcal{E}nd(\Omega^1_{X/S}).$$

Théorème 3.2.10. *Le morphisme L est un morphisme de faisceaux en groupes additifs ayant les propriétés suivantes :*

1. *pour tout ouvert U de X, et tout couple de sections $D, D' \in \Gamma(U, Der(X/S))$, on a*
$$L_{[D,D']} = L_D \circ L_{D'} - L_{D'} \circ L_D.$$
2. *pour tout ouvert U de X, et tout triplet de sections $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$, on a*
$$L_{fD} = fL_D + d(f) \wedge i_D.$$
3. *pour tout ouvert U de X, et tout triplet de sections $\omega \in \Gamma(U, \Omega^1_{X/S})$, $D, D' \in \Gamma(U, Der(X/S))$, on a*
$$L_D(\omega)(D') = D(\omega(D')) - \omega([D, D']).$$
4. *soit U un ouvert affine de X tel que $\Omega^1_{X/S}$ est libre de base $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$, de base duale $\{\frac{\delta}{\delta x_1}, \ldots, \frac{\delta}{\delta x_n}\}$. Soit $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ on a*
$$L_{\frac{\delta}{\delta x_i}}(f dx_k) = \frac{\delta f}{\delta x_i} dx_k.$$

Démonstration. Soit U un ouvert affine de X, toute section de $\Omega^1_{X/S}$ au dessus de U est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de la forme fdg où f et g sont des sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U.

Démontrons (1). Soit $D, D' \in \Gamma(U, Der(X/S))$, $L_{[D,D']}$ et $[L_D, L_{D'}]$ sont deux dérivations de degré 0 sur $\Omega^1_{X/S}$, il suffit de vérifier qu'elles prennent les mêmes valeurs sur les formes $f \in \Gamma(U, X)$ et $df \in \Gamma(U, \Omega^1_{X/S})$. On a :

$$\begin{aligned} L_{[D,D']}(f) &= [D, D'](f), \\ [L_D, L_{D'}] &= D \circ D'(f) - D' \circ D(f) \\ &= [D, D'](f). \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} L_{[D,D']}(df) &= d([D,D'](f)), \\ [L_D, L_{D'}](df) &= L_D \circ d(D'(f)) - L_{D'} \circ d(D(f)) \\ &= d(L_D(D'(f)) - L_{D'}(D(f)) \\ &= d([D,D'](f)). \end{aligned}$$

La démonstration de (2) et de (4) est une application directe des formules.

Démontrons (3). En utilisant la formule de la remarque 3.2.8, on obtient que :

$$\begin{aligned} L_D(\omega)(D') &= D'.(\omega(D)) + i(D)(d\omega)(D') \\ &= D'.(\omega(D)) + d\omega(D \wedge D') \\ &= D'.(\omega(D)) + D.\omega(D') - D'.\omega(D) - \omega([D,D']) \\ &= D.\omega(D') - \omega([D,D']). \end{aligned}$$

□

3.3 Construction de la première classe d'Atiyah

Soit k un corps de caractéristique 0, et soit $f : X \to S$ un morphisme lisse entre k-schémas lisses. On reprend les notations de [Gro64]. On note $X^{(n)}_{\Delta_f}$ le n-ème voisinage infinitésimal de X pour le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$, par $h_n : X^{(n)}_{\Delta_f} \to X \times_S X$ le morphisme canonique, et on note les deux morphismes composés :

$$p_1^{(n)} : X^{(n)}_{\Delta_f} \to^{h_n} X \times_S X \to^{p_1} X \text{ et } p_2^{(n)} : X^{(n)}_{\Delta_f} \to^{h_n} X \times_S X \to^{p_2} X.$$

Comme $X^{(n)}_{\Delta_f}$ et X ont le même espace sous-jacent, on peut écrire

$$\mathscr{P}^n_{X/S} = (p_2^{(n)})_*(p_1^{(n)})^*(\mathcal{O}_X). \tag{3.1}$$

C'est un faisceau quasi-cohérent sur X. Plus généralement, on peut poser pour $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent :

$$\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) = (p_2^{(n)})_*(p_1^{(n)})^*(\mathscr{F}).$$

De plus, on peut voir que

$$\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathcal{O}_X)$$

où $\mathscr{P}^n_{X/S}$ est muni de sa structure de $\mathcal{O}_X$-module via ${p_1}^{(n)} : \mathcal{O}_X \to \mathscr{P}^n_{X/S}$, c'est-à-dire pour tout triplet d'éléments $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $a \otimes b \in \Gamma(U, \mathscr{P}^n_{X/S})$, $t \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, on a :

$$(ft \otimes (a \otimes b)) = (t \otimes (fa \otimes b))$$

De plus, le faisceau $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathcal{F})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{P}^n_{X/S}$-module.

Explicitons les deux structures de $\mathcal{O}_X$-module de $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$. On notera à gauche celle de ces structures provenant du morphisme structural ${p_1}^{(n)} : \mathcal{O}_X \to \mathscr{P}^n_{X/S}$, et à droite celle provenant du morphisme ${p_2}^{(n)} : \mathcal{O}_X \to \mathscr{P}^n_{X/S}$. Pour tout ouvert U de X, et tout triplet d'éléments $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $x \in \Gamma(U, \mathscr{P}^n_{X/S})$, $t \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, on a :

$$a.(t \otimes x) = p_1^{(n)}(a).(t \otimes x) = t \otimes ((a \otimes 1)x) = at \otimes x$$

et

$$(t \otimes x).a = p_2^{(n)}(a).(t \otimes x) = (1 \otimes a).(t \otimes x) = t \otimes ((1 \otimes a)x)$$

Dans la suite, on notera $\mathbb{1} = 1 \otimes 1 \in \mathscr{P}^n_{X/S}$.

Proposition 3.3.1. *Si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent alors $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ l'est aussi. Si de plus $\mathscr{F}$ est de type fini (resp. de présentation finie) et $f : X \to S$ est localement de type fini (resp. de présentation finie), alors $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ est de type fini (resp. de présentation finie).*

Le module $\mathscr{P}^1_{X/S}$ (vu comme un $\mathcal{O}_X$-module à droite) s'inscrit naturellement dans une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-module :

$$0 \to \Omega^1_{X/S} \to \mathscr{P}^1_{X/S} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent plat, en tensorisant la suite précédente, on a une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules :

$$0 \to \mathscr{F} \otimes \Omega^1_{X/S} \to \mathscr{P}^1_{X/S}(\mathscr{F}) \to \mathscr{F} \to 0. \tag{3.2}$$

Cette suite donne canoniquement lieu à un élément $\mathcal{A}(\mathscr{F})$ dans $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{F}, \Omega^1_{X/S} \otimes \mathscr{F})$.

Définition 3.3.2. L'extension $\mathcal{A}(\mathscr{F})$ est appelée la classe d'Atiyah de $\mathscr{F}$.

Cette classe a été définie dans [Ati57]. Elle mesure l'obstruction d'un fibré vectoriel à posséder une connexion.

Proposition 3.3.3. *La classe d'Atiyah est nulle si et seulement si $\mathscr{F}$ admet une connexion.*

Démonstration. Il s'agit essentiellement de [BO15, proposition 2.9] ainsi que [Ati57]. Étant donnée une section s_M, on peut poser $\nabla(m) = s_M(m) - (m \otimes \mathbb{1})$. □

Remarque 3.3.4. La proposition précédente nous fournit une connexion, mais qui n'a aucune raison d'être intégrable.

La connexion triviale sur $\mathcal{O}_X$ est donnée par la dérivée extérieure $d_{X/S} = p_2^{(1)} - p_1^{(1)}$. La suite exacte 3.2 se scinde. On obtient un isomorphisme de faisceaux en groupes abéliens :

$$\mathscr{P}^1_{X/S} = \mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_{X/S}. \tag{3.3}$$

La dérivée de Lie définie à la section précédente fournit une dérivation de degré 0 sur $\mathscr{P}^1_{X/S}$.

On peut donner une seconde interprétation de la dérivée de Lie sur les 1-formes. Soit U un ouvert de X, et un couple de sections $a \otimes b \in \Gamma(U, \mathscr{P}^1_{X/S})$ et $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$, on pose

$$\tilde{L}_D(a \otimes b) = D(a) \otimes b + a \otimes D(b).$$

En reprenant la décomposition 3.3 de $\mathscr{P}^1_{X/S}$, un calcul direct montre que pour tout couple de sections $(a, b) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$

$$\tilde{L}_D(a) = D(a)$$
$$\tilde{L}_D(d(b)) = d(D(b))$$

ce qui est exactement les relations de la dérivée de Lie L_D définie précédemment.

3.3.1 La classe d'Atiyah relative

Le but de cette section est de montrer l'existence d'une classe d'Atiyah relative, afin de répondre à la question suivante : "Étant donné $M \in \mathcal{C}(X/S)$ un module à connexion intégrable relatif, existe-t'il une connexion absolue sur M prolongeant la précédente ?". Cette question a été étudiée dans [GGO13] et [GO14] dans le cas d'extension de corps différentiel.

On rappelle que

$$M \otimes \mathscr{P}^1_{X/k} = (p_2^{(1)})_*(p_1^{(1)})^*(M).$$

On suit les notations de [GGO13, théorème 5.1]. Soit $(M, \nabla) \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$ un module

à connexion intégrable, considérons l'application :

$$\begin{aligned} \lambda : M \otimes \mathscr{P}^1_{X/k} &\to \Omega^1_{X/S} \otimes M \\ (m \otimes a \otimes 1) + \sum m_i \otimes \omega_i &\mapsto \nabla(am) - \sum [\omega_i] \otimes m_i \end{aligned}$$

où $[\omega_i]$ représente l'image de ω_i par l'application canonique $\Omega^1_{X/k} \to \Omega^1_{X/S}$. Le morphisme λ est bien $\mathcal{O}_X$-linéaire. Pour toute section $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, on a :

$$\begin{aligned} (1 \otimes f).((m \otimes a \otimes 1) + \sum m_i \otimes \omega_i) &= m \otimes a \otimes f + \sum m_i \otimes f\omega_i \\ &= (am \otimes f \otimes 1) + am \otimes df + \sum m_i \otimes f\omega_i. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \lambda((1 \otimes f).((m \otimes a \otimes 1) + \sum m_i \otimes \omega_i)) &= \nabla(fam) - df \otimes am - \sum [\omega_i] \otimes fm_i \\ &= f\nabla(am) + df \otimes am - df \otimes am - \sum [\omega_i] \otimes fm_i \\ &= f.(\nabla(am) - \sum [\omega_i] \otimes m_i). \end{aligned}$$

Définition 3.3.5. On définit la classe d'Atiyah de M relativement à $\mathcal{C}(X/S)$ le faisceau $\mathrm{At}^1(M) = \mathrm{Ker}(\lambda)$.

Par définition, c'est un sous-module quasi-cohérent de $M \otimes \mathscr{P}^1_{X/k}$. Soit $x = m \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes \omega_i \in M \otimes \mathscr{P}^1_{X/k}$, on voit immédiatement que x est dans $\mathrm{At}^1(M)$ si et seulement si pour toute section $D \in Der(X/S)$

$$\nabla(D)(m) = \sum \omega_i(D) m_i. \tag{3.4}$$

De manière équivalente, on peut voir $\mathrm{At}^1(M)$ de la façon suivante. Comme $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, la connexion sur M induit une section $s_M : M \to M \otimes \mathscr{P}^1_{X/S}$ de la suite exacte d'Atiyah. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \otimes \Omega^1_{X/S} \arrow[r] & M \otimes \mathscr{P}^1_{X/S} \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s_M"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \otimes \Omega^1_{X/k} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \pi_0"] & M \otimes \mathscr{P}^1_{X/k} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \pi_1"] & M \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

où l'on note $\pi_0 : \Omega^1_{X/k} \to \Omega^1_{X/S}$ et $\pi_1 : \mathscr{P}^1_{X/k} \to \mathscr{P}^1_{X/S}$ les morphismes canoniques induits. On observe alors que $\mathrm{At}^1(M) = (\mathrm{id} \otimes \pi_1)^{-1}(s_M(M))$.

Théorème 3.3.6. *Le faisceau* $\mathrm{At}^1(M)$ *est naturellement muni d'une connexion intégrable relative : pour tout* U *ouvert de* X*, pour tous* $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$*,* $m \in \Gamma(U, M)$*, et toutes familles* $\omega_i \in \Gamma(U, \Omega^1_{X/k})$ *et* $m_i \in \Gamma(U, M)$*, on pose :*

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(m \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes \omega_i) \\ = \nabla(D)(m) \otimes \mathbb{1} + \sum \nabla(D)(m_i) \otimes \omega_i + m_i \otimes L_D(\omega_i).\end{aligned}$$

Démonstration. Soit U ouvert affine de X, il faut montrer que l'application ∇_{At^1} est bien définie, $\mathcal{O}_X$-linéaire, vérifie la règle de Leibniz, et enfin est un morphisme d'algèbres de Lie.

Commençons par montrer que la connexion ∇_{At^1} est bien définie. Soient $D, D' \in \Gamma(U, Der(X/S))$, et $x = m \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes \omega_i \in \mathrm{At}^1(M)$. En reprenant la caractérisation (3.4) de $\mathrm{At}^1(M)$ définit précédemment, il faut montrer que :

$$\nabla(D') \circ \nabla(D)(m) = \sum \omega_i(D')\nabla(D)(m_i) + L_D(\omega_i)(D').m_i. \tag{3.6}$$

Or, on a, par le théorème 3.2.10,

$$\begin{aligned}\sum \omega_i(D').\nabla(D)(m_i) + L_D(\omega_i)(D').m_i \\ = \sum \omega_i(D').\nabla(D)(m_i) + D.\omega_i(D').m_i - \omega_i([D', D]).m_i.\end{aligned} \tag{3.7}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\nabla(D) \circ \nabla(D')(m) &= \nabla(D)(\sum \omega_i(D').m_i) \\ &= \sum D.\omega_i(D')m_i + \omega_i(D')\nabla(D)(m_i).\end{aligned} \tag{3.8}$$

En réinjectant 3.8 dans 3.7, on obtient

$$\begin{aligned}\sum \omega_i(D').\nabla(D)(m_i) + L_D(\omega_i)(D').m_i \\ = \nabla(D) \circ \nabla(D')(m) - \nabla([D, D'])(m).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Finalement, par intégrabilité de la connexion ∇, on obtient l'égalité (3.6).

Montrons que l'application ∇_{At^1} est $\mathcal{O}_X$-linéaire. Soit un couple de sections $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, et $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$, il s'agit de montrer que $\nabla_{\mathrm{At}^1}(f.D) = \nabla_{\mathrm{At}^1}(D).f$.

On a

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathrm{At}^1}(f.D)(m\otimes \mathbb{1}+\sum m_i\otimes\omega_i)\\
&\quad=\nabla(f.D)(m)\otimes\mathbb{1}+\sum\nabla(f.D)(m_i)\otimes\omega_i+m_i\otimes L_{f.D}(\omega_i)\\
&\quad=f.\nabla(D)(m)\otimes\mathbb{1}+\sum f.\nabla(D)(m_i)\otimes\omega_i+m_i\otimes(f.L_D(\omega_i)+\omega_i(D).df)\\
&\quad=f.\nabla(D)(m)\otimes\mathbb{1}+\sum f.\nabla(D)(m_i)\otimes\omega_i+m_i\otimes f.L_D(\omega_i)+m_i\otimes\omega_i(D).df\\
&\quad=f.\nabla(D)(m)\otimes\mathbb{1}+\nabla(D)(m)\otimes df+\sum f.\nabla(D)(m_i)\otimes\omega_i+m_i\otimes f.L_D(\omega_i)\\
&\quad=(1\otimes f).\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(m\otimes\mathbb{1}+\sum m_i\otimes\omega_i).
\end{aligned}$$

Montrons que l'application ∇_{At^1} vérifie la règle de Leibniz. Soit un triplet de sections $f\in\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$, $D\in\Gamma(U,Der(X/S))$ et $x=m\otimes\mathbb{1}+\sum m_i\otimes\omega_i\in\mathrm{At}^1(M)$, il s'agit de montrer que $\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(fx)=(1\otimes f).\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(x)+(1\otimes D(f)).x$.

On a

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(fm\otimes\mathbb{1}+m\otimes df+\sum m_i\otimes f\omega_i)\\
&\quad=\nabla(D)(fm)\otimes\mathbb{1}+\nabla(D)(m)\otimes df+m\otimes L_D(df)+\sum\nabla(D)(m_i)\otimes f\omega_i+m_i\otimes L_D(f.\omega_i)\\
&\quad=f.\nabla(D)(m)\otimes\mathbb{1}+D(f)m\otimes\mathbb{1}+\nabla(D)(m)\otimes df+m\otimes L_D(df)\\
&\qquad\qquad+\sum\nabla(D)(m_i)\otimes f.\omega_i+m_i\otimes f.L_D(\omega_i)+m_i\otimes D(f).\omega_i\\
&\quad=f.\nabla(D)(m)\otimes\mathbb{1}+\nabla(D)(m)\otimes df+\sum\nabla(D)(m_i)\otimes f.\omega_i+m_i\otimes f.L_D(\omega_i)\\
&\qquad\qquad+D(f)m\otimes\mathbb{1}+m\otimes d(D(f))+\sum m_i\otimes D(f).\omega_i\\
&\quad=(1\otimes f).\nabla_{\mathrm{At}_1}(m\otimes 1+\sum m_i\otimes\omega_i)+(1\otimes D(f)).(m\otimes 1+\sum m_i\otimes\omega_i)\\
&\quad=(1\otimes f).\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(x)+(1\otimes D(f)).x.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la connexion ∇_{At^1} est intégrable. Soit un couple de sections $D,D'\in\Gamma(U,Der(X/S))$. Il s'agit de montrer que $\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)\circ\nabla_{\mathrm{At}^1}(D')-\nabla_{\mathrm{At}^1}(D')\circ\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)=\nabla_{\mathrm{At}^1}([D,D'])$.

Soit $x=m\otimes\mathbb{1}+\sum m_i\otimes\omega_i\in\mathrm{At}^1(M)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)\circ\nabla_{\mathrm{At}^1}(D')(m\otimes\mathbb{1}+\sum m_i\otimes\omega_i)\\
&=\nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(\nabla(D')(m)\otimes\mathbb{1}+\sum\nabla(D')(m_i)\otimes\omega_i+m_i\otimes L_{D'}(\omega_i))\\
&=\nabla(D)\circ\nabla(D')(m)\otimes\mathbb{1}+\sum\nabla(D)\circ\nabla(D')(m_i)\otimes\omega_i+\nabla(D')(m_i)\otimes L_D(\omega_i)\\
&\qquad+\sum\nabla(D)(m_i)\otimes L_{D'}(\omega_i)+m_i\otimes L_D\circ L_{D'}(\omega_i)
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathrm{At}^1}(D') \circ \nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(m \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes \omega_i) \\
&= \nabla(D') \circ \nabla(D)(m) \otimes \mathbb{1} + \sum \nabla(D') \circ \nabla(D)(m_i) \otimes \omega_i + \nabla(D)(m_i) \otimes L_{D'}(\omega_i) \\
&\qquad + \sum \nabla(D')(m_i) \otimes L_D(\omega_i) + m_i \otimes L_{D'} \circ L_D(\omega_i).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi que

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathrm{At}^1}(D) \circ \nabla_{\mathrm{At}^1}(D') - \nabla_{\mathrm{At}^1}(D') \circ \nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(m \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes \omega_i) \\
&= \nabla(D) \circ \nabla(D')(m) - \nabla(D') \circ \nabla(D)(m) \otimes \mathbb{1} \\
&+ \sum \nabla(D) \circ \nabla(D')(m_i) - \nabla(D') \circ \nabla(D)(m_i) \otimes \omega_i + m_i \otimes L_D \circ L_{D'}(\omega_i) - L_{D'} \circ L_D(\omega_i).
\end{aligned}$$

Par intégrabilité de ∇, on a $\nabla(D) \circ \nabla(D') - \nabla(D') \circ \nabla(D) = \nabla([D, D'])$. De même, par le théorème 3.2.10, on a $L_D \circ L_{D'} - L_{D'} \circ L_D = L_{[D,D']}$.

On obtient donc que la connexion ∇_{At^1} est intégrable. □

On a un morphisme naturel :

$$\begin{aligned}
\pi_M : \mathrm{At}^1(M) &\to M \\
m \otimes 1 + \sum m_i \otimes \omega_i &\mapsto m.
\end{aligned}$$

On peut alors considérer la suite suivante dans $\mathcal{C}(X/S)$:

$$0 \to M \otimes f^*(\Omega^1_{S/k}) \to \mathrm{At}^1(M) \to M \to 0 \tag{3.10}$$

où le terme de gauche est muni de la connexion induite par ∇_{At^1}.

Lemme 3.3.7. *La suite précédente 3.10 est une suite exacte.*

Démonstration. Le morphisme π_M est clairement surjectif, il suffit de montrer que son noyau s'identifie avec le terme de gauche.

En effet, si $x \in \mathrm{At}^1(M)$ tel que $\pi_M(x) = 0$, alors par le diagramme (3.5), on a $x \in M \otimes \Omega^1_{X/k}$. De plus, en conservant les notations du diagramme (3.5), on a $(\mathrm{id} \otimes \pi_1)(x) = s_M(0) = 0$. On en déduit que $(\mathrm{id} \otimes \pi_0)(x) = 0$, et donc comme la suite

$$0 \to M \otimes f^*(\Omega^1_{S/k}) \to M \otimes \Omega^1_{X/k} \to M \otimes \Omega^1_{X/S} \to 0$$

est exacte, on en déduit que $x \in M \otimes f^*(\Omega^1_{S/k})$. □

Cette suite donne lieu à un élément $\mathscr{A}_{X/S}(M)$ de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(X/S)}(M, M \otimes f^*(\Omega^1_{S/k}))$.

Définition 3.3.8. L'extension $\mathscr{A}_{X/S}(M)$ est appelée la classe d'Atiyah relative à $\mathcal{C}(X/S)$ de M.

Remarque 3.3.9. Lorsque $M = (\mathcal{O}_X, d_{X/S})$, on a $\mathrm{At}^1(\mathcal{O}_X) = f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})$. En effet, on a

$$\lambda(f \otimes 1 + \sum f_i \otimes \omega_i) = [df] \otimes 1 - \sum f_i \otimes [\omega_i].$$

On obtient que $[df] - \sum f_i[\omega_i] = 0$, et donc appartient à $f^*(\Omega^1_{S/k})$. La classe d'Atiyah est alors nulle, le scindage étant donné par $s_M(a) = a \otimes 1 + d(a) = p_2^{(1)}(a)$. On rappelle que $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$.

Remarque 3.3.10. En prenant $S = X$ et $f = id_X$, on retrouve la classe d'Atiyah définie en 3.3.2.

Lemme 3.3.11. *Soit $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, le module $\mathrm{At}^1(M)$ a naturellement une structure $f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})$-module, donnée par la multiplication à droite.*

Démonstration. Soit U un ouvert affine de X, on a vu $\mathrm{At}^1(M)$ était un $\mathcal{O}_X$-module pour la multiplication à droite, donc c'est en particulier un $f^*(\mathcal{O}_S)$-module. Il reste à voir que la multiplication $\eta \in f^*(\Omega^1_{S/k})$ laisse stable $\mathrm{At}^1(M)$. En effet, soit $x = m \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes \omega_i \in \mathrm{At}^1(M)$, comme $\omega_i.\eta = 0$ dans $\mathscr{P}^1_{X/k}$, on a

$$x.\eta = m \otimes \eta.$$

Or, comme $\eta \in f^*(\Omega^1_{S/k})$, on a pour toute dérivation $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$, $\nabla(D)(0) = 0 = m.\eta(D)$, et donc vérifie la caractérisation (3.4). □

Lemme 3.3.12. *Soient $M, N \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, on a un isomorphisme naturel de $f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})$-module*

$$\mathrm{At}^1(M) \otimes_{f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})} \mathrm{At}^1(N) \simeq \mathrm{At}^1(M \otimes_{\mathcal{O}_X} N)$$

Démonstration. On a un morphisme naturel

$$(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^1_{X/k}) \otimes_{\mathscr{P}^1_{X/k}} (N \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^1_{X/k}) \to (M \otimes_{\mathcal{O}_X} N) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^1_{X/k}.$$

Cette isomorphisme induit un morphisme

$$\Psi : \mathrm{At}^1(M) \otimes_{f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})} \mathrm{At}^1(N) \to (M \otimes_{\mathcal{O}_X} N) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^1_{X/k}.$$

Montrons que l'image du morphisme Ψ est contenu dans $\mathrm{At}^1(M \otimes N)$. Soit U un ouvert de X, notons $x = m \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes \omega_i \in \Gamma(U, \mathrm{At}^1(M))$, et $y = n \otimes \mathbb{1} + \sum n_i \otimes$

$\omega_i' \in \Gamma(U, \mathrm{At}^1(N))$, alors on a

$$\Psi(x \otimes y) = (m \otimes n) \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes n \otimes \omega_i + \sum m \otimes n_i \otimes \omega_i'.$$

Par définition de la connexion sur $M \otimes N$, pour tout $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$, on a

$$\begin{aligned}\nabla(D)(m \otimes n) &= \nabla_M(D)(m) \otimes n + m \otimes \nabla_N(D)(n) \\ &= \sum \omega_i(D) m_i \otimes n + \sum m \otimes \omega_i'(D) n_i.\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule (3.4) pour x et y. On en déduit que l'élément $\Psi(x \otimes y)$ est dans $\Gamma(U, \mathrm{At}^1(M \otimes N))$.

On obtient ainsi que Ψ est un morphisme naturel de $f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})$-module

$$\Psi : \mathrm{At}^1(M) \otimes_{f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})} \mathrm{At}^1(N) \to \mathrm{At}^1(M \otimes N).$$

Soit $x = m \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes \omega_i \in \Gamma(U, \mathrm{At}^1(M))$, et $y = n \otimes \mathbb{1} + \sum n_i \otimes \omega_i \in \Gamma(U, \mathrm{At}^1(N))$, on suppose alors que

$$\Psi(x \otimes y) = 0.$$

On a donc

$$(m \otimes n) \otimes \mathbb{1} + \sum m_i \otimes n \otimes \omega_i + \sum m \otimes n_i \otimes \omega_i' = 0$$

On en déduit que $m \otimes n \otimes \mathbb{1} = 0$, et donc $m = 0$ ou $n = 0$. Supposons que $m = 0$, dans ce cas $x = \sum m_i \otimes \omega_i$ où $\omega_i \in f^*(\Omega^1_{S/k})$. On en déduit aussi que

$$\sum m_i \otimes n \otimes \omega_i = 0.$$

Donc, pour tout $D \in \Gamma(U, f^*(Der(S/k))$, on a

$$\sum m_i \otimes n \omega_i(D) = n \otimes \sum w_i(D) m_i = 0.$$

On en déduit alors que $\sum m_i \otimes \omega_i = 0$ ou $n = 0$. Si $\sum m_i \otimes \omega_i = 0$ alors $x = 0$ et par suite $x \otimes y = 0$. Il reste alors $n = 0$, et donc $y = \sum n_i \otimes \omega_i'$ avec $\omega_i' \in f^*(\Omega^1_{S/k})$. On a alors

$$\begin{aligned}x \otimes y &= \sum m_i \otimes \omega_i \bigotimes_{f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})} \sum n_j \otimes \omega_j' \\ &= \sum_{i,j} (m_i \otimes \omega_i \bigotimes_{f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})} n_j \otimes \omega_j')\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j} (m_i \otimes \mathbb{1} \bigotimes_{f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})} n_j \otimes \omega_i \omega'_j)$$
$$= 0.$$

Montrons qu'il est surjectif.

On note p la composition $\pi_{M\otimes N} \circ \Psi$. Il est clair que p est un morphisme surjectif, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(p) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathrm{At}^1(M) \otimes_{f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})} \mathrm{At}^1(N) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & M \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (M \otimes N) \otimes f^*(\Omega^1_{S/k}) \arrow[r] & \mathrm{At}^1(M \otimes N) \arrow[r, "\pi_{M\otimes N}"] & M \otimes N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Il suffit de montrer que ϕ est surjectif. Soit $m \otimes n \otimes \omega \in \Gamma(U, (M \otimes N) \otimes f^*(\Omega^1_{S/k}))$, comme pour tout $D \in Der(X/S)$, on a $\omega(D) = 0$, on en déduit que $m \otimes \omega$, comme le morphisme π_M est surjectif, on peut trouver $x \in \mathrm{At}^1(M)$ tel que $\pi_M(m) = m$. On note alors $x = m \otimes 1 + \sum m_i \otimes \omega_i$.

L'élément $x \otimes_{f^*(\Omega^1_{S/k})} (n \otimes \omega)$ appartient à $\mathrm{At}^1(M) \otimes \mathrm{At}^1(N)$.

De plus, on a

$$\Psi(x \otimes_{f^*(\Omega^1_{S/k})} (n \otimes \omega)) = m \otimes n \otimes \omega.$$

On en déduit que ϕ est surjectif, et donc que Ψ est surjectif. □

Lemme 3.3.13. *Le foncteur* At^1 *est un foncteur exact.*

Démonstration. Comme X est lisse sur k, le $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{P}^1_{X/k}$ est localement libre, donc plat. Notons $\pi : \Omega^1_{X/k} \to \Omega^1_{X/S}$ la projection.

Soit $\phi \in Hom_{\mathcal{C}(X/S)}(N, M)$, on a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
N \otimes \mathscr{P}^1_{X/k} \arrow[r, "\phi\otimes\mathrm{id}"] & M \otimes \mathscr{P}^1_{X/k} \\
\mathrm{At}^1(N) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{At}^1(\phi)"] & \mathrm{At}^1(M) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Si ϕ est injectif, alors $\phi \otimes \mathrm{id}$ est injectif, et donc $\mathrm{At}^1(\phi)$ est injectif.

Supposons désormais que ϕ est surjectif. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \otimes f^*(\Omega^1_{S/k}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi\otimes\mathrm{id}"] & \mathrm{At}^1(N) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{At}^1(\phi)"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \otimes f^*(\Omega^1_{S/k}) \arrow[r] & \mathrm{At}^1(M) \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On sait que les lignes sont exactes par le lemme 3.3.7, et par hypothèse, ϕ et $\phi \otimes \mathrm{id}$ sont surjectifs, on en déduit que $\mathrm{At}^1(\phi)$ est surjectif. $\square$

Théorème 3.3.14. *Soit $M \in \mathcal{C}(X/S)$, la classe $\mathcal{A}_{X/S}(M)$ est nulle si et seulement si M se prolonge en une connexion absolue telle que pour tout couple de sections $D \in Der(X/S)$, $D' \in Der(X/k)$, on a*

$$\nabla([D, D']) = \nabla(D) \circ \nabla(D') - \nabla(D') \circ \nabla(D). \tag{3.11}$$

De plus, si $\dim \Omega^1_{S/k} = 1$, M se prolonge en une connexion intégrable.

Démonstration. Soit U un ouvert de X. Si M est une inflation, il existe $\nabla' \in \mathcal{C}^\dagger(X/k)$ un connexion absolue prolongeant ∇ et vérifiant la condition 3.11. On peut considérer le morphisme qui a une section $m \in \Gamma(U, M)$ associe

$$s_M(m) = m \otimes \mathbb{1} + \nabla'(m).$$

Comme M est une inflation, le morphisme s_M est bien défini dans $\mathrm{At}^1(M)$. De plus, pour tout couple de sections $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$ et $m \in \Gamma(U, M)$, on a

$$s_M(\nabla(D)(m)) = \nabla(D)(m) \otimes \mathbb{1} + \nabla'(\nabla(D)(m)). \tag{3.12}$$

D'autre part, en notant $\nabla'(m) = \sum m_i \otimes \omega_i \in M \otimes \Omega^1_{X/k}$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(s_M(m)) &= \nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(m \otimes \mathbb{1} + \nabla'(m)) \\ &= \nabla(D)(m) \otimes \mathbb{1} + \sum \nabla(D)(m_i) \otimes \omega_i + m_i \otimes L_D(\omega_i). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Il faut montrer l'égalité de 3.12 et 3.13, ce qui revient à montrer l'égalité

$$\sum \nabla(D)(m_i) \otimes \omega_i + m_i \otimes L_D(\omega_i) = \nabla'(\nabla(D)(m)). \tag{3.14}$$

Soit $D' \in \Gamma(U, Der(X/k))$, par l'égalité 3.9 et par le théorème 3.2.10, on a

$$\begin{aligned} \sum \nabla(D)(m_i) \otimes \omega_i(D') + m_i \otimes L_D(\omega_i)(D') \\ = \nabla'(D) \circ \nabla'(D')(m) - \nabla'([D, D'])(m). \end{aligned} \tag{3.15}$$

D'autre part, on a

$$\nabla'(\nabla(D)(m))(D') = \nabla(D') \circ \nabla(D)(m).$$

Finalement, comme ∇' est vérifie la condition (3.11), on obtient l'égalité 3.14, et donc s_M est un morphisme de $\mathcal{C}(X/S)$.

Supposons qu'il existe s_M une section de π_M dans $\mathcal{C}(X/S)$. Comme le suggèrent les égalités précédentes, posons

$$\nabla'(m) = s_M(m) - m \otimes \mathbb{1}.$$

On notera que ∇' est une connexion. En effet, comme s_M est une section de π_M, l'image de l'application ∇' est contenue dans $M \otimes \Omega^1_{X/k}$. De plus, pour tout couple de section $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et $m \in \Gamma(U, M)$, on a

$$\begin{aligned}
\nabla'(fm) &= s_M(fm) - fm \otimes \mathbb{1} \\
&= f s_M(m) - m \otimes 1 \otimes f \\
&= (1 \otimes f).s_M(m) - m \otimes 1 \otimes f + m \otimes f \otimes 1 - m \otimes f \otimes 1 \\
&= (1 \otimes f).(s_M(m) - m \otimes \mathbb{1}) + m \otimes (1 \otimes f - f \otimes 1) \\
&= f\nabla'(m) + m \otimes df.
\end{aligned}$$

Par construction de $\mathrm{At}^1(M)$, pour toute section $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$, on a

$$\nabla'(D)(m) = \nabla(D)(m).$$

En effet, comme $m \otimes \mathbb{1} + \nabla'(m) \in \mathrm{At}^1(M)$, en utilisant la condition 3.4, on doit avoir $\nabla'(D)(m) = \nabla(D)(m)$.

Soit un couple de sections $D \in \Gamma(U, Der(X/S))$ et $D' \in \Gamma(U, Der(X/k))$, on veut montrer que

$$\nabla'([D, D']) = \nabla'(D) \circ \nabla'(D') - \nabla'(D') \circ \nabla'(D). \tag{3.16}$$

Comme s_M commute à l'action de ∇ et ∇_{At^1}, on a l'égalité suivante

$$s_M(\nabla(D)(m))(D') = \nabla_{\mathrm{At}^1}(D)(s_M(m))(D').$$

En reprenant les deux égalités (3.13) et (3.12) précédentes, on obtient l'égalité

$$\sum \nabla(D)(m_i) \otimes \omega_i + m_i \otimes L_D(\omega_i) = \nabla'(\nabla(D)(m)).$$

En utilisant l'égalité 3.15, on obtient alors

$$\nabla'(D')(\nabla(D)(m)) = \nabla'(D) \circ \nabla'(D')(m) - \nabla'([D, D'])(m).$$

Lorsque $\dim \Omega^1_{X/S} = 1$, le lemme 3.3.15 nous donne que ∇' est intégrable. □

Lemme 3.3.15. *Supposons que* $\dim \Omega^1_{S/k} = 1$. *Soit* $(M, \nabla) \in \mathcal{C}^\dagger(X/k)$ *vérifiant les hypothèses du théorème 3.3.14 alors la connexion* ∇ *est intégrable.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la connexion ∇ est intégrable localement en tout point x de X. Comme f est lisse, il existe U un ouvert de X contenant x tel que la suite exacte

$$0 \to Der(X/S) \to Der(X/k) \to f^*(Der(S/k)) \to 0$$

soit scindée [Gro64, proposition 17.2.3]. De plus comme S est lisse sur k, on peut supposer que $\Gamma(U, f^*(Der(S/k))$ est libre de rang 1, engendré par D_0. Soit un couple de sections $D, D' \in \Gamma(U, Der(X/k))$, il existe $\delta, \delta' \in \Gamma(U, Der(X/S))$ et $f_0, f_1 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ tel que

$$D = \delta + f_0.D_0$$
$$D' = \delta' + f_1.D_0$$

De plus, on a

$$[D, D'] = [\delta, f_1 D_0] + [\delta, \delta'] + [f_0 D_0, \delta'] + [f_0 D_0, f_1 D_0].$$

Un calcul direct montre que

$$\nabla([f_0 D_0, f_1 D_0]) = \nabla(f_0 D_0) \circ \nabla(f_1 D_0) - \nabla(f_1 D_0) \circ \nabla(f_0 D_0).$$

Enfin, en utilisant l'hypothèse pour calculer respectivement $\nabla([\delta, f_1 D_0])$, $\nabla([\delta, \delta'])$ et $\nabla([f_0 D_0, \delta'])$, on obtient que ∇ est intégrable. □

3.4 Cristaux en schémas affines

Soient k un corps de caractéristique 0, et R une k-algèbre lisse principale, et on note $S = \mathrm{Spec}(R)$. On reprend les notations de [BO15], [Sim94, Partie 8] et on note $\mathrm{Inf}(S/k)$ le site infinitésimal.

Définition 3.4.1. Un cristal en schémas affines sera un faisceau en schémas affines sur le site infinitésimal tel que les applications de transition sont des isomorphismes. On notera $\mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Sch}^{\mathrm{Aff}})$ la catégorie des cristaux en schémas affines.

On reprend les notations de la partie 3.3, et on note $p_1^{(n)}$ et $p_2^{(n)}$ les deux projections. Soit $\mathcal{F}$ un cristal en schémas affines, pour tout n, on obtient deux isomorphismes :

$$\Phi(p_1^{(n)}) : \mathcal{F}(S^{(n)}) \simeq (p_1^{(n)})^*(\mathcal{F}(S)).$$

ainsi que

$$\Phi(p_2^{(n)}) : \mathcal{F}(S^{(n)}) \simeq (p_2^{(n)})^*(\mathcal{F}(S)).$$

En composant ces isomorphismes, on obtient des isomorphismes

$$\epsilon_n : (p_2^{(n)})^*(\mathcal{F}(S)) \simeq (p_1^{(n)})^*(\mathcal{F}(S)).$$

D'après [BO15], ces morphismes forment une stratification sur l'algèbre $\mathcal{F}(S)$. De plus, comme ces données sont des morphismes de $\mathscr{P}^1_{S/k}$-algèbres, la stratification est compatible à la multiplication, c'est-à-dire, si on note

$$\nabla = \epsilon^1(p_1) - p_2$$

on obtient que pour tout couple de sections $a, b \in \Gamma(\mathcal{F}(S), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(S)})$

$$\nabla(ab) = (1 \otimes a)\nabla(b) + (1 \otimes b)\nabla(a).$$

Dans le langage de [GO14] ou [GGO13], l'algèbre $\Gamma(\mathscr{F}(S), \mathcal{O}_{\mathscr{F}(S)})$ est une D_S-algèbre.

On a naturellement un foncteur d'oubli vers les schémas affines sur S :

$$\begin{aligned} U : \mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Sch}^{\mathrm{Aff}}) &\to \mathbf{SchA}_{/S} \\ \mathcal{F} &\to \mathcal{F}(S). \end{aligned}$$

D'après [Gil02], ce foncteur a un adjoint à droite :

$$\begin{aligned} J : \mathbf{SchA}_{/S} &\to \mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Sch}^{\mathrm{Aff}}) \\ \mathrm{Spec}(A) &\to J(A). \end{aligned}$$

En reprenant les notations de [GO14], on a de plus le foncteur "constant" $-^{\mathbf{c}}$:

$$\begin{aligned} -^{\mathbf{c}} : \mathbf{SchA}_{/k} &\to \mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Sch}^{\mathrm{Aff}}) \\ X &\to X^{\mathbf{c}} = (X \times S, \nabla_{X^{\mathbf{c}}}) \end{aligned}$$

Il est muni de la différentielle triviale, c'est-à-dire, pour $X = \mathrm{Spec}(A)$, $S = \mathrm{Spec}(R)$ et pour tout élément $a \otimes r \in A \otimes R$, on a

$$\nabla_{X^{\mathbf{c}}}(r \otimes a) = d(r) \otimes a.$$

Définition 3.4.2. Un schéma en groupes affine différentiel G est un cristal en schémas en groupes affines. On notera $\mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Grp}^{\mathrm{Aff}}_{\mathrm{plat}})$ la catégorie des schémas en groupes affines plats différentiels.

Remarque 3.4.3. Dans la suite, tous les groupes considérés seront toujours plats.

Remarque 3.4.4. Cette définition est aussi compatible au fait qu'un schéma en groupes affine différentiel est un objet en groupes dans la catégorie $\mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Sch}^{\mathrm{Aff}})$.

Les morphismes de transitions sont des isomorphismes de schémas en groupes affines, c'est-à-dire les ϵ^n sont des isomorphismes de $\mathscr{P}^n_{S/k}$-schémas en groupes.

Lorsque k est de caractéristique 0, on ne fera pas la différence entre les cristaux en schéma en groupes différentiels et les algèbres de Hopf différentielles.

On rappelle qu'une algèbre de Hopf différentielle A est une R-algèbre de Hopf telle que les applications de comultiplication, counité, et l'antipode sont des morphismes d'algèbres différentielles [GGO13].

Exemple 3.4.5. Soit V un R-module libre, on peut considérer le foncteur

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V) : \mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Sch}^{\mathrm{Aff}}) &\to \mathbf{Ens} \\ \mathcal{F} &\to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}(S)}-\mathbf{Mod}}(V \otimes_{\mathcal{O}_S} \Gamma(\mathcal{F}(S), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(S)})). \end{aligned}$$

Ce schéma en groupes affine différentiel est représentable et on note $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$ son représentant. En terme d'algèbre, il s'agit de

$$R\{X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}\}_{(det)}$$

où l'on suit la notation de [Ovc09]. C'est l'algèbre engendrée par les $X_{i,j}$, ainsi que toutes leurs dérivées formelles $\delta X_{i,j}$ où l'élément $\{\delta\}$ engendre $\mathrm{Der}(S/k)$.

En utilisant le fait que J est un adjoint au foncteur d'oubli, on peut construire directement $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V) = J(\mathrm{GL}(V))$.

Exemple 3.4.6. Soit $(V, \nabla) \in \mathcal{C}(S/k)$ un module à connexion sur R, on peut considérer le foncteur

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(V, \nabla) : \mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Sch}^{\mathrm{Aff}}) &\to \mathbf{Ens} \\ \mathcal{F} &\to Aut_{\mathcal{C}(\mathcal{F}(S)/k)}(V \otimes_{\mathcal{O}_S} \Gamma(\mathcal{F}(S), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(S)})). \end{aligned}$$

où Aut représente les automorphismes internes dans la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{F}(S)/k)$.

Ce foncteur est un sous-foncteur de $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$. Il est aussi représentable. On peut construire l'algèbre de $\mathrm{GL}(V, \nabla)$ en considérant dans $\mathcal{C}(S/k)$ l'algèbre $Sym(M \otimes M^\vee)$ et de localiser par le déterminant.

On peut aussi donner une version explicite de la construction précédente. Soit $\{\delta\}$ une base de $\mathrm{Der}(S/k)$, et $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de V. On note M_δ la matrice de la connexion dans la base $\mathcal{B}$. Pour qu'un endomorphisme ϕ soit compatible à l'action, il faut et il suffit que la matrice N représentative de ϕ dans la base $\mathcal{B}$

vérifie

$$\delta(N) = M_\delta.N(v_i) - N.M_\delta(v_i). \tag{3.17}$$

On en déduit que $\mathrm{GL}(V, \nabla)$ est le sous-schéma fermé de $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$ défini par les équations 3.17.

De plus, lorsque V est muni de la connexion triviale, ce foncteur est représentable par $\mathrm{GL}(V^\nabla)^{\mathbf{c}}$.

Concluons avec deux lemmes d'algèbres commutatif, qui seront utile lors de la construction de la stratification sur le groupe Tannakien.

Lemme 3.4.7. *Soit A un anneau commutatif, I un idéal de carré nul, M un A-module et $f \in \mathrm{End}_A(M)$. On suppose que*

$$f \otimes \mathrm{id}_{A/I} : M \otimes A/I \to M \otimes A/I$$

est le morphisme identité. Alors f est un automorphisme.

Démonstration. Remarquons que pour tout $m \in M$, on a $f(m) - m \in IM$, et notons $h(m)$ cet élément. De plus, pour $i \in I$, on a $f(im) = if(m) = i(m + h(m)) = im$. On en déduit que f est l'identité sur IM.

Soit $m \in M$ tel que $f(m) = 0$, on en déduit que $m \in IM$, et donc $m = 0$.

On peut déduire de [Bou07, chapitre 2 paragraphe 3 partie 2 corrolaire 1] que f est surjectif. □

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.8. *Soit B une $\mathscr{P}^1_{S/k}$-algèbre, et $f : B \to B$ un morphisme de $\mathscr{P}^1_{S/k}$-algèbre. On suppose que*

$$f \otimes \mathrm{id}_{A/I} : B \otimes \mathscr{P}^1_{S/k}/\Omega^1_{S/k} \to B \otimes \mathscr{P}^1_{S/k}/\Omega^1_{S/k}$$

est le morphisme identité. Alors f est un automorphisme.

3.4.1 Représentation d'un schéma en groupes affine différentiel

Soient G un schéma en groupes différentiel, et V un $\mathcal{O}_S$-module localement libre. Comme dans le cas standard, une représentation de V sera la donnée pour tout schéma différentiel affine $\mathcal{F}$ d'une action :

$$G(\mathcal{F}) \times V \otimes \Gamma(\mathcal{F}(S), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(S)}) \to V \otimes \Gamma(\mathcal{F}(S), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(S)}).$$

munie des contraintes de fonctorialité. Cette action donne canoniquement lieu à un morphisme :

$$G(\mathcal{F}) \to \mathrm{Aut}(V \otimes \Gamma(\mathcal{F}(S), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(S)})).$$

Par fonctorialité, on en déduit un morphisme de schémas en groupes différentiels :

$$G \to \mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V) = J(\mathrm{GL}(V)).$$

Par adjonction, on en déduit un morphisme de schémas en groupes affines :

$$U(G) = G \to \mathrm{GL}(V).$$

On voit alors que les représentations d'un schéma en groupes affine différentiel sont équivalentes à la donnée d'une représentation du schéma en groupes affine sous-jacent. On notera alors $\mathrm{Rep}(G)$ la catégorie des représentations du schéma en groupes différentiels G.

Exemple 3.4.9. Lorsque V est libre, le morphisme canonique, déduit par adjonction, est donné en termes d'algèbres

$$\begin{gathered} R[X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}]_{(det)} \to R\{X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}\}_{(det)} \\ X_{i,j} \mapsto X_{i,j}. \end{gathered}$$

3.4.2 Trivialisation du groupe

On reprend les notations précédentes, et on note k un corps de caractéristique 0, et R une k-algèbre lisse principal, et on note S le spectre de R.

Définition 3.4.10. Soit $G \in \mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Grp}^{\mathrm{Aff}}_{\mathrm{plat}})$ un schéma en groupes différentiel plat. On dit que G est d-algébrique s'il existe V un $\mathcal{O}_S$-module libre, et une immersion fermée différentielle

$$i : G \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V).$$

On dira alors que V est une représentation d-fidèle de V.

Remarque 3.4.11. Le schéma en groupes différentiel $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$ est d-algébrique, mais n'est pas de type fini.

On suit la terminologie de [GGO13] [GO14].

Définition 3.4.12. On dit que G est conjugué à un sous-groupe constant de $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$ s'il existe un k-espace vectoriel V_0 tel que $V = V_0 \otimes R$ et une immersion fermée

$$i : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V_0)^{\mathbf{c}} \subset \mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V).$$

Remarque 3.4.13. Ceci est la même définition que [GO14, définition 4.1]. Les auteurs montrent que cette définition coïncide dans leurs cas avec la définition naïve.

Lemme 3.4.14. *Si G est conjugué à un sous-groupe constant dans $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$, il est constant, c'est à dire $G \simeq (G_0)^c$ où G_0 est un schéma en groupes sur k.*

Démonstration. En effet, remarquons que si $f : \mathcal{O}_H \twoheadrightarrow \mathcal{O}_G$ et $\mathcal{O}_H = \mathcal{O}_H^{\nabla} \otimes_k R$, alors $f(\mathcal{O}_H^{\nabla}) \subset \mathcal{O}_G^{\nabla}$, et on en déduit que le morphisme $f(\mathcal{O}_H^{\nabla}) \otimes_k R \to \mathcal{O}_G$ est surjectif. De plus, il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{O}_G^{\nabla} \otimes_k R \to \mathcal{O}_G$ est injectif. Ceci se déduit de la preuve du théorème 2.5.4, ou de [And01, proposition 3.1.2.1]. □

Remarque 3.4.15. L'inverse n'est pas forcément vrai, voir [GO14, exemple 4.2].

Soit $G \in \mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Grp}_{\mathrm{plat}}^{\mathrm{Aff}})$ un schéma en groupes affine différentiel, et soit $(V, \nabla) \in \mathcal{C}(S/k)$ un module à connexion sur S.

On suppose de plus que (V, ρ) est une représentation de G. On dira alors que l'action de G est compatible à la connexion ∇ si pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Sch}^{\mathrm{Aff}})$, et pour tout $g \in G(\mathcal{F})$, et $v \in V \otimes \Gamma(\mathcal{F}(S), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(S)})$, on a

$$\nabla_V(g.v) = \nabla_G(g)v + g\nabla_V(v).$$

ou de manière équivalente, pour $D \in Der(S/k)$ que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\nabla_V(D)"] & V \otimes \mathcal{O}_G \arrow[d, "(\nabla_V \otimes \nabla_G)(D)"] \\ V \arrow[r, "\rho"] & V \otimes \mathcal{O}_G \end{tikzcd} .$$

Définition 3.4.16. On notera $\mathcal{C}(S/k, G)$ la catégorie dont les objets sont les triplets (V, ∇, ρ) où ∇ est une connexion sur V, ρ une représentation de G telle que ρ est compatible à la connexion ∇.

Lemme 3.4.17. *Soit $G \in Cris(S/k, Grp_{plat}^{Aff})$ un schéma en groupes affine différentiel et $V \in \mathcal{C}(S/k, G)$ tel que $i : G \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$ soit une immersion différentielle. Alors le morphisme $i : G \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$ se factorise par $\mathrm{GL}(V, \nabla)$.*

Démonstration. Pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Cris}(S/k, \mathrm{Sch}^{\mathrm{Aff}})$, le morphisme

$$G(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(V \otimes \Gamma(\mathcal{F}(S), \mathcal{O}_{\mathcal{F}(S)}))$$

se factorise alors par

$$\begin{tikzcd}
G(\mathcal{F}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Aut(V \otimes \Gamma(\mathscr{F}(S), \mathcal{O}_{\mathscr{F}(S)})) \\
Aut_{\mathcal{C}(\mathcal{F}(S)/k)}(V \otimes \Gamma(\mathscr{F}(S), \mathcal{O}_{\mathscr{F}(S)})) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}.$$

On en déduit donc directement que le morphisme se factorise par $\mathrm{GL}(V, \nabla)$. □

Théorème 3.4.18. *Soit $G \in Cris(S/k, Grp^{Aff}_{plat})$ un schéma en groupes affine différentiel et $V \in \mathrm{Rep}(G)$ tel que $i : G \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$ soit une immersion fermée différentielle.*

Alors G est conjugué à un sous-groupe constant dans $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$ si et seulement si $V \in \mathcal{C}(S/k, G)$ tel que la connexion sous-jacente est triviale.

Démonstration. Si G est conjugué à un sous-groupe constant, il existe V_0 tel que G se plonge dans $\mathrm{GL}(V_0)^{\mathbf{c}}$. Comme $V = V_0 \otimes R$, il existe bien une connexion sur V triviale.

Inversement, si on suppose que V est trivial comme module à connexion, on a alors $V = V^{\nabla} \otimes R$. En utilisant le lemme précédent, on obtient que G factorise par $\mathrm{GL}(V, \nabla)$ qui est constant car V est trivial. □

Théorème 3.4.19. *Soit $G \in Cris(S/k, Grp^{Aff}_{plat})$ un schéma en groupes affine différentiel et $V \in \mathcal{C}(S/k, G)$ tel que $i : G \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V)$ soit une immersion fermée différentielle.*

Soit R' une R-algèbre différentielle de même corps des constantes k telle que $V \otimes R'$ soit triviale comme R'-module à connexion. Alors $G_{R'}$ est conjugué à un sous-groupe constant dans $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(V \otimes R')$.

Démonstration. On sait que le morphisme i se factorise par $\mathrm{GL}(V, \nabla)$, on obtient donc un morphisme

$$i_{R'} : G_{R'} \hookrightarrow \mathrm{GL}(V, \nabla)_{R'}.$$

On sait que $\mathrm{GL}(V, \nabla)$ s'identifie à l'algèbre différentielle $R\{X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}\}_{(det)}/I$ où I est l'idéal différentiel défini par les équations 3.17. On en déduit que $\mathrm{GL}(V, \nabla)_{R'}$ s'identifie à $R'\{X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}\}_{(det)}/I$. Comme on a supposé que $V \otimes R'$ est trivial comme R'-module à connexion, il existe V_0 tel que $V = V_0 \otimes_k R'$. Dans ce cas, on peut trouver une base $\mathcal{B}$ de $V_0 \otimes_k R'$ telle que dans cette base, la connexion $\nabla_{R'}$ soit donnée par la matrice identité. Dans ce cas, on en déduit des équations 3.17 que le groupe $\mathrm{GL}(V_{R'}, \nabla_{R'})$ est constant, et donc $G_{R'}$ est conjugué à un sous-groupe constant. □

Exemple 3.4.20. Le schéma en groupes différentiels $G_m^{\mathbf{diff}}$ n'est pas constant, en effet, on a $\nabla(\delta)(z) = \delta z$. D'un autre coté, la proposition précédente nous donne une

autre manière de la voir. Le schéma $G_m^{\mathbf{diff}}$ est naturellement un groupe d-algébrique différentiel. Il a une représentation naturelle V de dimension 1. Essayons de trouver ∇ une connexion sur $V = \langle v \rangle$ compatible à la loi de groupe. Le diagramme suivant serait alors commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\nabla(\delta)"] & V \otimes \mathcal{O}_{G_m^{\mathbf{diff}}} \arrow[d, "\nabla_V \otimes \nabla_{G_m^{\mathbf{diff}}}(\delta)"] \\ V \arrow[r, "\sigma"] & V \otimes \mathcal{O}_{G_m^{\mathbf{diff}}} \end{tikzcd} .$$

D'un coté, on a

$$\sigma(\nabla_V(\delta)(v)) = \nabla_V(\delta)(v) \otimes z.$$

D'un autre coté, on a

$$\begin{aligned} \nabla_V \otimes \nabla_{G_m^{\mathbf{diff}}}(\delta)(\sigma(v)) &= \nabla_V \otimes \nabla_{G_m^{\mathbf{diff}}}(\delta)(v \otimes z) \\ &= \nabla(\delta)(v) \otimes z + v \otimes \delta z. \end{aligned}$$

On ne peut alors avoir égalité que si δz est nul, ce qui n'est pas le cas ici.

3.5 Catégories différentielles

3.5.1 Changement de base dans les catégories abéliennes

On reprend les notations de [GGO13] et de [SR72].

Dans la suite, on note $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et tensorielle R-linéaire. De plus, on notera $\mathrm{Fun}_R^{r,\otimes}$ la catégorie des foncteurs tensoriels R-linéaires et exacts à droite.

Soit X un objet de $\mathcal{C}$, et M un R-module, on définit le produit tensoriel de M et de X comme étant l'objet représentant le foncteur suivant :

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)).$$

On le note alors $X \otimes M$. Si $\mathcal{C}$ a des limites directes, alors ce produit tensoriel existe.

On suppose désormais que la catégorie $\mathcal{C}$ possède des limites directes.

Soit $f : R \to R'$ un morphisme fini d'anneaux, on aimerait construire l'extension des scalaires de $\mathscr{C}$ sur R'.

On notera $\mathcal{C}_{(R')}$ la catégorie définit de la manière suivante : les objets sont les couples (X, α_X) où X est un objet de $\mathcal{C}$, et $\alpha : R' \to \mathrm{End}(X)$ est un morphisme de R-algèbre. Les morphismes $(X, \alpha_X) \to (Y, \alpha_Y)$ sont les morphismes $f : X \to Y$

commutant à l'action de R'. On notera aussi cette catégorie $f^*\mathcal{C}$ lorsque il est important de garder en tête le morphisme f.

On a deux foncteurs naturels :

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{C} &\to \mathcal{C}_{(R')} \\ X &\mapsto (X \otimes_R R', r \mapsto \mathrm{id}_X \otimes m(r)) \end{aligned}$$

où on note $m(r)$ la multiplication par r, et

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{C}_{(R')} &\to \mathcal{C} \\ (X, \alpha_X) &\mapsto X. \end{aligned}$$

La catégorie $\mathcal{C}_{(R')}$ est notée $\mathcal{C} \otimes R'$ dans [GGO13] dont on conservera la notation dans la suite. Le foncteur f_* correspond au foncteur d'oubli de la structure R'-linéaire, c'est-à-dire, on voit la catégorie $C_{(R')}$ comme une catégorie R-linéaire via f.

On note $\mathrm{Fun}_R^{r,\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ la catégorie des foncteurs R-linéaires exacts à droites et tensoriels.

Proposition 3.5.1. *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie R'-linéaire. Le foncteur f^* induit une équivalence*

$$\mathrm{Fun}_{R'}^{r,\otimes}(f^*(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \simeq \mathrm{Fun}_R^{r,\otimes}(\mathcal{C}, f_*(\mathcal{D})).$$

Démonstration. Il s'agit de [SR72, proposition 1.5.3.1] □

Soit maintenant ω un foncteur R-linéaire de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. On peut définir le foncteur noté $\omega_{(R')}$ dans [SR72] de la manière suivante

$$\omega_{(R')}(X, \alpha_X) = (\omega(X), r' \mapsto \omega(\alpha_X(r')).$$

Encore une fois, lorsque qu'il est important de garder en mémoire le morphisme f, on notera $f^*(\omega) := \omega_{(R')}$.

Exemple 3.5.2. Si $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}(R)$, alors la catégorie $\mathcal{C} \otimes R'$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{Mod}(R')$.

Lemme 3.5.3. *Soit R un anneau de Dedekind. Soit $G = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma en groupes affine sur R, et soit R' une R-algèbre fini. Alors, on a une équivalence de catégories entre*

$$\mathrm{Rep}_R(G)_{(R')} \simeq \mathrm{Rep}_{R'}(G \times R').$$

De plus, en notant ω le foncteur d'oubli, le foncteur

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_{(R')}) : \mathbf{Alg}(R') &\to \mathbf{Ens} \\ L &\mapsto \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{(R')} \otimes_{R'} L)\end{aligned}$$

est représentable par $G \times R'$.

Démonstration. La première partie du lemme est une conséquence de [SR72, paragraphe 2.0]. Notons que le foncteur $\omega_{(R')}$ s'identifie au foncteur oubli de $\mathrm{Rep}_{R'}(G \times R')$. En reprenant les notations de [SR72, paragrahe 2.1 p 113], considérons le morphisme fonctoriel en L une R'-algèbre :

$$\begin{aligned}\alpha : G \times R'(L) &\to \underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(\omega_{(R')} \otimes_{R'} L) \\ g &\mapsto \lambda_V\end{aligned}$$

où pour toute représentation (V, ρ), l'endomorphisme λ_V est défini de la manière suivante :

$$\lambda_V : V \otimes_{R'} L \xrightarrow{\rho} V \otimes_{R'} L \otimes'_R (R' \otimes_R \mathcal{O}_G) \xrightarrow{\mathrm{id}_{V \otimes_{R'} L} \otimes g} V \otimes_{R'} L \otimes L \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes m} V \otimes_{R'} L.$$

où $m : L \otimes L \to L$ désigne la multiplication. Comme $\mathrm{Rep}_R(G)_{(R')}$ s'identifie naturellement aux représentations de $G \times R'$ de type fini sur R', d'après [SR72, proposition 2.2.3.1], α est un isomorphisme.

Il s'agit maintenant de montrer que le morphisme λ_V ainsi construit est un automorphisme, ce qui se déduit de [SR72, scholie 3.1.1], et de [SR72, proposition 3.1.2.1].

Le morphisme α nous donne alors que $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_{(R')})$ est représentable par $G \times_R R'$. □

3.5.2 Les catégories différentielles

On peut maintenant donner la définition d'une catégorie différentielle au sens de [GGO13]. Il s'agit essentiellement de la définition d'une stratification au sens de [BO15]. Comme dans le cas des modules, on notera

$$\mathcal{C} \otimes \mathscr{P}^i_{S/k} = p_{2\,*}^{(i)} p_1^{(i)*}(\mathcal{C})$$

la catégorie $p_1^{(n)*}(\mathcal{C})$ vu comme une catégorie R-linéaire via le morphisme $p_2^{(n)}$.

Définition 3.5.4. Une catégorie différentielle sur R est une catégorie $\mathcal{C}$ abélienne, tensorielle et R-linéaire munie pour tout $i \in [[0, 2]]$ de foncteurs R-linéaires tensoriels

exacts à droite

$$\theta^i : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathscr{P}^i_{S/k},$$

compatible avec les restrictions $\mathscr{P}^i_{S/k} \to \mathscr{P}^j_{S/k}$ pour $i > j$ et avec $\theta^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. On suppose de plus que le diagramme suivant soit commutatif à un isomorphisme de foncteur Φ^i

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\theta^i"] \arrow[d, "\theta^{j+i}"] & \mathcal{C} \otimes \mathscr{P}^i_{S/k} \arrow[d, "\theta^j \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{P}^i_{S/k}}"] \\
\mathcal{C} \otimes \mathscr{P}^{j+i}_{S/k} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \otimes \delta^{j,i}"'] & \mathcal{C} \otimes \mathscr{P}^j_{S/k} \otimes \mathscr{P}^i_{S/k}.
\end{tikzcd}$$

En utilisant la proposition 3.5.1, les foncteurs θ^i donnent lieu à des foncteurs $\mathscr{P}^i_{S/k}$-linéaire exacts à droite

$$\epsilon^i : (p_2^{(i)})^* \mathcal{C} = \mathscr{P}^i_{S/k} \otimes \mathcal{C} \to (p_1^{(i)})^* \mathcal{C} = \mathcal{C} \otimes \mathscr{P}^i_{S/k}.$$

Définition 3.5.5. Soit $(\mathcal{C}, \theta^i)$ une catégorie différentielle, on notera

$$\mathrm{At}^i = {p_2^{(i)}}_* \circ \theta^i$$

le i-ème foncteur d'Atiyah associé à la structure différentielle θ^i.

Remarque 3.5.6. Lorsque S est supposé de dimension 1, comme ce sera le cas dans la suite, d'après [GGO13, remarque 4.21], il suffit de regarder θ_1. De plus en utilisant encore [GGO13, preuve lemme 4.14 et proposition 3.40], le foncteur ϵ^1 est une équivalence de catégories.

Exemple 3.5.7. La catégorie $\mathbf{Mod}(R)$ des R-modules a une structure différentielle donnée par l'extension des scalaires, c'est-à-dire donnée par le morphisme $\theta_i = (p_1^{(i)})^*$. Dans ce cas, le foncteur $\mathrm{At}^i_{can}(M) = M \otimes \mathscr{P}^i_{R/k}$.

Exemple 3.5.8. La catégorie des représentations d'un schéma en groupes différentielle $\mathrm{Rep}(G)$ est naturellement muni d'une structure différentielle [GO14, exemple 4.8]. On suppose que $\Omega^1_{S/k}$ est libre, engendré par un élément noté dt. Soit $V \in \mathrm{Rep}(G)$, on peut mettre une structure de comodule sur $V \otimes \mathscr{P}^1_{S/k}$. Pour cela, on considère la composition suivante

$$\rho_{\mathrm{At}} : V \otimes \mathscr{P}^i_{S/k} \xrightarrow{\rho \otimes \mathrm{id}} V \otimes A \otimes \mathscr{P}^i_{S/k} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes {\epsilon^1_A}^{-1}} V \otimes \mathscr{P}^1_{S/k} \otimes A.$$

Explicitons que ce que vaut cette composition. Soit $v \in V$, on note

$$\rho(v) = \sum v_i \otimes a_i$$

On a alors

$$\rho(v \otimes \mathbb{1}) = \sum (a_i \otimes \mathbb{1}) \bigotimes_{\mathscr{P}^1_{S/k}} (v_i \otimes \mathbb{1}).$$

En composant avec $\mathrm{id} \otimes {\epsilon^1_A}^{-1}$, on a alors

$$(\mathrm{id} \otimes {\epsilon^1_A}^{-1}) \circ \rho(v \otimes \mathbb{1}) = \sum v_i \otimes \mathbb{1} \bigotimes_{\mathscr{P}^1_{S/k}} \mathbb{1} \otimes a_i - dt \otimes \nabla(\delta_t)(a_i)$$

et donc, on a finalement

$$(\mathrm{id} \otimes {\epsilon^1_A}^{-1}) \circ \rho(v \otimes \mathbb{1}) = \sum v_i \otimes \mathbb{1} \otimes a_i - \sum (v_i \otimes dt \otimes \nabla_G(\delta_t)(a_i)).$$

Ceci définit une structure différentielle sur $\mathrm{Rep}(G)$. On notera alors $\mathrm{Rep}^{\mathbf{Diff}}(G)$ le couple $(\mathrm{Rep}(G), \theta^1)$.

Définition 3.5.9. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories différentielles. Un foncteur différentiel est une famille (F, Π^i_F) où $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur R-linéaire tensoriel exact à droite tel que le diagramme suivant soit commutatif à un isomorphisme Π^i_F de foncteur

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\theta^i_{\mathcal{C}}"] & \mathcal{D} \arrow[d, "\theta^i_{\mathcal{D}}"] \\
\mathcal{C} \otimes \mathscr{P}^i_{S/k} \arrow[r, "F \otimes \mathrm{id}"] & \mathcal{D} \otimes \mathscr{P}^i_{S/k}.
\end{tikzcd}$$

Exemple 3.5.10. En reprenant la structure différentielle sur $\mathrm{Rep}^{\mathbf{Diff}}(G)$, on remarque que l'oubli est un foncteur différentiel de $\mathrm{Rep}^{\mathbf{Diff}}(G) \to \mathbf{Mod}(R)$ où la catégorie $\mathbf{Mod}(R)$ est munie de sa structure différentielle naturelle.

Lorsque $\mathcal{C}$ a une structure différentielle, on peut donner une définition d'objet muni d'une connexion dans $\mathcal{C}$. C'est ce que [GGO13] appelle des $\mathcal{D}_R$-objet.

Définition 3.5.11. Une connexion sur un objet $V \in \mathcal{C}$ est la donnée d'une section du morphisme canonique $\mathrm{At}^1(V) \to V$.

Exemple 3.5.12.

1. Lorsque $\mathcal{C}$ est $\mathbf{Mod}(R)$, on retrouve la notion usuelle de connexions.
2. Lorsque $\mathcal{C}$ est $\mathcal{C}(X/S)$, les objets avec connexion sont les connexions relatives provenant de connexions absolues.
3. Lorsque $\mathcal{C}$ est $\mathrm{Rep}(G)$, les objets à connexions sont les objets munis d'une connexion usuelle, munis des contraintes de compatibilités à l'action de G [GO14, paragraphe 4].

3.5.3 Un théorème Tannakien

Soient k un corps de caractéristique 0, et R une k-algèbre lisse principal, et on note $S = \mathrm{Spec}(R)$, et soit G un S-schéma en groupes affine.

Théorème 3.5.13. *Soit θ^i une structure différentielle sur* $\mathrm{Rep}(G)$ *tel que le foncteur d'oubli soit un foncteur différentiel. Alors le schéma en groupes affine G a naturellement une structure de schéma en groupes affine différentiel.*

Démonstration. On note $G = \mathrm{Spec}(A)$ où A une R-algèbre de Hopf, et on note ω le foncteur d'oubli de $\mathrm{Rep}(G)$ vers $\mathbf{Mod}(R)$. En utilisant la théorie Tannakienne sur les anneaux de Dedekind [SR72] [DH18], on sait que A représente le foncteur suivant

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega) : \mathbf{Alg}(R) &\to \mathbf{Ens} \\ R' &\mapsto \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{R'}). \end{aligned}$$

où l'on note $\omega_{R'}$ le foncteur qui a $V \in \mathrm{Rep}(G)$ associe $\omega(V) \otimes_R R'$. Comme la dimension de S est 1, d'après [GGO13, remarque 4.21], il suffit de regarder θ_1. En utilisant le lemme 3.5.1, on obtient un foncteur $\epsilon^1 : {p^{(1)}}_2^*(\mathrm{Rep}(G)) \to {p_2^{(2)}}^*(\mathrm{Rep}(G))$. Comme ω est un foncteur différentiel, on a un isomorphisme de foncteurs

$$\Pi^1_\omega : (p_2^{(1)})^*\omega \simeq (p_1^{(1)})^*\omega \circ \epsilon^1.$$

Cet isomorphisme de foncteurs nous fournit un morphisme de foncteurs

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}((p_2^{(1)})^*\omega) \to \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}((p_1^{(1)})^*\omega).$$

En utilisant le lemme 3.5.3, on obtient un morphisme

$$\epsilon^1_A : (p_2^{(1)})^*A \to (p_1^{(1)})^*A.$$

Par hypothèse, le foncteur θ_1 est compatible aux restrictions, c'est-à-dire, si on note $e : \mathscr{P}^1_{S/k} \to \mathcal{O}_S = \mathscr{P}^1_{S/k}/(\Omega^1_{S/k})$ la restriction, la composition

$$\mathrm{Rep}(G) \xrightarrow{\theta_1} \mathrm{Rep}(G) \otimes \mathscr{P}^1_{S/k} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{Rep}(G)} \otimes e} \mathrm{Rep}(G)$$

est isomorphe au foncteur $\mathrm{id}_{\mathrm{Rep}(G)}$. De plus, le foncteur $\mathrm{id}_{\mathrm{Rep}(G)} \otimes e$ s'identifie au foncteur e^*. On a de même un diagramme commutatif (à un isomorphisme de

foncteurs prés)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(G) \arrow[r, "\theta^1"] \arrow[d, "(p_2^{(1)})^*"] & \mathrm{Rep}(G) \otimes \mathscr{P}^1_{S/k} \arrow[r, "e^*"] & \mathrm{Rep}(G) \\
\mathscr{P}^1_{S/k} \otimes \mathrm{Rep}(G) \arrow[r, "e^*"] \arrow[ur, "\epsilon^1"] & \mathrm{Rep}(G) \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathrm{Rep}(G)}"] &
\end{tikzcd}$$

En réutilisant le lemme 3.5.3, on en déduit que

$$e^*(\epsilon^1_A) : e^*(p_2^{(1)})^* A \to e^*(p_1^{(1)})^* A.$$

est l'identité. En notant $\sigma^1 : \mathscr{P}^1_{S/k} \to \mathscr{P}^1_{S/k}$ la symétrie, on obtient que $\sigma^1 \otimes \mathrm{id}_A \circ \epsilon^1$ est σ^1-linéaire, et donc $(\sigma^1 \otimes \mathrm{id}_A \circ \epsilon^1)^2$ est $\mathscr{P}^1_{S/k}$-linéaire. En utilisant le lemme 3.4.8, on en déduit que $(\sigma^1 \otimes \mathrm{id}_A \circ \epsilon^1)^2$ est un isomorphisme, et donc ϵ^1_A est un isomorphisme.

Ainsi, on obtient une stratification sur l'agèbre de Hopf de A. □

On peut donner la définition d'une catégorie différentielle Tannakienne, comme celle donnée dans [GGO13, definition 4.22].

Définition 3.5.14. Une catégorie différentielle Tannakienne neutre $\mathcal{C}$ sur R est une catégorie Tannakienne neutre [DH18, définition 1.2.5] munie d'une structure différentielle (définition 3.5.4) telle que le foncteur fibre ω est un foncteur différentiel.

3.6 Application à $\mathcal{C}(X/S)$

Soit k un corps de caractéristique 0, soit R une k-algèbre principale lisse, et on note $S = \mathrm{Spec}(R)$. Soit $f : X \to S$ un morphisme lisse à fibres géométriquement connexes. Dans la suite, on notera ϵ un S-point de X.

On note $\mathcal{C}(X/S)$ la catégorie des faisceaux cohérent sur X munis d'une connexion relativement à S.

De plus, on a défini à la partie 3.3 une structure différentielle sur la catégorie $\mathcal{C}(X/S)$. Comme S est de dimension 1, il suffit de construire le foncteur θ_1.

Théorème 3.6.1. *La catégorie $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ a naturellement une structure différentielle donnée par le foncteur* At^1.

Démonstration. On a vu que At^1 était naturellement muni d'une structure de $f^*(\mathscr{P}^1_{S/k})$-module à droite, et donc est un foncteur :

$$\mathrm{At}^1 : \mathcal{C}(X/S)^\circ \to \mathcal{C}(X/S)^\circ \otimes \mathscr{P}^1_{S/k}.$$

De plus, on sait que le foncteur At^1 est exact (lemme 3.3.7) et tensoriel (lemme 3.3.12). Enfin , il s'agit de voir qu'il y a un isomorphisme de foncteur Φ^1 :

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}(X/S)} \simeq (\mathrm{id}_{\mathcal{C}(X/S)} \otimes e) \circ \mathrm{At}^1$$

où $e : \mathscr{P}^1_{S/k} \to \mathcal{O}_S$ est le morphisme d'anneau canonique. Ceci découle alors de la suite exacte 3.10.

□

Lemme 3.6.2. *Le foncteur ϵ^* est un foncteur différentiel pour $(\mathcal{C}(X/S)^\circ, \mathrm{At}^1)$ et $(\mathbf{Mod}(S), \mathrm{At}^1_{can})$.*

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, il faut montrer qu'il y a un isomorphisme canonique

$$\epsilon^*(\mathrm{At}^1(M)) \simeq \epsilon^*(M) \otimes \mathscr{P}^1_{S/k}.$$

On a un morphisme naturel

$$\epsilon^*(M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{P}^1_{X/k}) \to \epsilon^*(\mathscr{P}^1_{X/k}).$$

On a de plus un morphisme naturel [Gro64, partie 4, 16.4.3.3]

$$\epsilon^*(\mathscr{P}^1_{X/k}) \to \mathscr{P}^1_{S/k}.$$

On obtient donc un morphisme

$$\Phi : \epsilon^*(\mathrm{At}^1(M)) \to \epsilon^*(M) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{P}^1_{S/k}.$$

En utilisant la suite exacte 3.10, et le fait que le foncteur ϵ^* est exact et tensoriel, on obtient que la suite

$$0 \to (\epsilon \circ f)^*(\Omega^1_{S/k}) \otimes \epsilon^*(M) \to \epsilon^*(\mathrm{At}^1(M)) \to \epsilon^*(M) \to 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{O}_S$-modules.

Ce morphisme s'insère dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^1_{S/k} \otimes \epsilon^*(M) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \epsilon^*(\mathrm{At}^1(M)) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & \epsilon^*(M) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_{S/k} \otimes \epsilon^*(M) \arrow[r] & \epsilon^*(M) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{P}^1_{S/k} \arrow[r] & \epsilon^*(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On en déduit donc que le morphisme Φ est un isomorphisme.

□

3.6.1 Comparaison entre $\mathrm{Gal}'(M)$ et $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$

Reprenons le cas d'une seule connexion $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, et étudions les conséquences du théorème précédent.

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des sous-catégories pleines $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}(X/S)^\circ$ contenant $\mathbb{1}$ et M et ayant les deux propriétés suivantes : (1) $\mathcal{C}$ est stable par $\oplus$, $\otimes$ et $(-)^\vee$; (2) $\mathcal{C}$ est stable par At^1.

Il est clair que $\mathfrak{S}$ contient un plus petit élément, qu'on appelle $\mathcal{I}$. Soit maintenant $\mathcal{I}^*$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(X/S)$ dont les objets sont des sous-quotients des éléments de $\mathcal{I}$. On vérifie facilement que $\mathcal{I}^*$ est une catégories Tannakienne différentielle, stable par sous-quotients dans $\mathcal{C}(X/S)$, et contenant M. De plus, si $\mathcal{C}$ est une autre catégorie Tannakienne différentielle, stable par sous-quotients dans $\mathcal{C}(X/S)$, alors $\mathcal{C} \supset \mathcal{I}^*$. On notera alors $\langle M\rangle_\otimes^{\mathbf{diff}}$ la catégorie I^*.

Définition 3.6.3. On appelle $\langle M\rangle_\otimes^{\mathbf{diff}}$ la catégorie Tannakienne différentielle engendrée par M.

La catégorie $\langle M\rangle_\otimes^{\mathbf{diff}}$ a maintenant naturellement une structure de catégorie différentielle, et on a vu en 3.6.2 que le foncteur fibre ϵ^* est un foncteur différentiel. On peut donc construire le groupe Tannakien différentiel associé à $\langle M\rangle_\otimes^{\mathbf{diff}}$ et on le note $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$. On peut de même construire le groupe Tannakien associé à la catégorie Tannakienne $\langle M\rangle_\otimes$, et on le note $\mathrm{Gal}'(M)$.

Théorème 3.6.4. *On suppose que M est une inflation, alors les schémas en groupes affines $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ et $\mathrm{Gal}'(M)$ sont canoniquement isomorphes.*

En particulier, le schéma en groupes affine $\mathrm{Gal}'(M)$ est naturellement doté d'une structure différentielle.

Démonstration. Si V est une inflation, en utilisant le théorème 3.3.14, on sait que la suite exacte 3.10 se scinde. En particulier, on a que

$$\mathrm{At}^1(V) \simeq (f^*(\Omega^1_{S/k}) \otimes V) \oplus V$$

en tant qu'objet dans $\mathcal{C}(X/S)$. Soit $T^{a,b}(M) = M^{\otimes a} \otimes M^{\vee\otimes b}$, comme $T^{a,b}(M)$ est une inflation, par l'argument précédent, $\mathrm{At}^1(T^{a,b}(M)) \in \langle M\rangle_\otimes$.Comme le foncteur At^1 est exact, on en déduit que si N est un sous-objet (resp. un quotient) d'un $T^{a,b}(M)$, alors $\mathrm{At}^1(N)$ est un sous-objet (resp. un quotient) de $\mathrm{At}^1(T^{a,b}(M))$. De plus, si W est un sous-quotient d'un $\mathrm{At}^1(V) \twoheadrightarrow \mathrm{At}^1(W)$, comme on a montré que $\mathrm{At}^1(V)$ et $\mathrm{At}^1(W)$ sont dans déjà dans $\langle M\rangle_\otimes$, on en déduit que W est dans $\langle M\rangle_\otimes$. On en déduit que le foncteur At^1 stabilise $\langle M\rangle_\otimes$.

Par induction, on en déduit que $\mathrm{At}^{\circ i}(T^{a,b}(M)) \in \langle M\rangle_\otimes$. On obtient ainsi que les catégories $\langle M\rangle_\otimes$ et $\langle M\rangle_\otimes^{\mathbf{diff}}$ sont égales. En utilisant la théorie Tannakienne, on en déduit que les schémas en groupes affines $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ et $\mathrm{Gal}'(M)$ sont canoniquement isomorphes. $\square$

Cette connexion va permettre d'affiner le théorème 2.6.12. En effet, elle va nous fournir dans certains cas une trivialisation du groupe de Galois.

3.6.2 Le théorème d'isomonodromie

Soit k un corps de caractéristique 0, soit R une k-algèbre principale lisse, on note $S = \mathrm{Spec}(R)$ et $f : X \to S$ un morphisme lisse à fibres géométriquement connexe entre k-schémas lisses et connexes. On suppose de plus que X possède un k-point ω, ainsi qu'un S-point ϵ. Soit $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$, on note $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ le schéma en groupes affine différentiel associé à la catégorie Tannakienne différentielle $\langle M\rangle_\otimes^{\mathbf{diff}}$ et $\mathrm{Gal}'(M)$ le schéma en groupes affine associé à la catégorie Tannakienne $\langle M\rangle_\otimes$.

On dira que $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ est d-algébrique relativement à M si $\epsilon^*(M)$ est une représentation d-fidèle de $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ (définition 3.4.10).

Théorème 3.6.5. *On suppose que* $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ *est d-algébrique relativement à M. Alors M est une inflation tel que la connexion induite par la section de la suite d'Atiyah dans* $\mathrm{Rep}(\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M))$ *est triviale si et seulement si* $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ *est conjugué à un sous-groupe constant dans* $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(M)$.

Démonstration. Lorsque M est une inflation, d'après le théorème 3.3.14, la suite exacte d'Atiyah est scindée. Dans ce cas, le module $\epsilon^*(M)$ est naturellement muni d'une connexion dans $\mathrm{Rep}(\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M))$, cette connexion est triviale par hypothèse. En utilisant le théorème 3.4.18, on obtient que $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ est conjugué à un sous-groupe constant de $\mathrm{GL}^{\mathbf{diff}}(M)$.

Inversement, supposons que $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ est conjugué à un sous-groupe constant dans $\mathrm{GL}(M)$, d'après le théorème 3.4.18, on obtient que M est muni d'une connexion triviale, c'est à dire la suite exacte d'Atiyah se scinde dans $\mathrm{Rep}(\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M))$. On en déduit donc qu'elle se scinde aussi dans $\mathcal{C}(X/S)$, et donc que M est une inflation d'après le théorème 3.3.14. □

Remarque 3.6.6. Ce théorème s'appuie essentiellement sur le fait que le groupe de Galois est d-algébrique relativement à M. On connait des exemples [And01, exemple 3.2.1.5] [DHdS18, exemple 1.2] où ce n'est pas le cas.

En particulier, on retrouve un analogue du théorème 2.6.12.

Théorème 3.6.7. *Avec les notations précédentes, on suppose de plus que X est propre et soit $M \in \mathcal{C}(X/S)^\circ$. Si M est une inflation, alors pour $s \in S(k)$ un point rationnel, on a*

$$\mathrm{Gal}'(M) \times_S \hat{R} \simeq \mathrm{Gal}'(M)_s \times_k \hat{R},$$

où $\hat{R}$ désigne le complété de R en s.

Démonstration. Comme M est une inflation, la suite exacte d'Atiyah est scindé dans $\mathcal{C}(X/S)$, et donc dans $\mathrm{Rep}(\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M))$. On en déduit que $\epsilon^*(M)$ est naturellement muni d'une connexion. On sait que les groupes $\mathrm{Gal}'(M)$ et $\mathrm{Gal}^{\mathbf{diff}}(M)$ sont égaux. De plus, comme X est propre, on sait que $\mathrm{Gal}'(M)$ est égal à $\mathrm{Gal}(M)$ 2.6.4, qui admet $\epsilon^*(M)$ comme représentation fidèle [DH18, proposition 4.10].

On note $\hat{\delta}$ la dérivation de $\hat{R}$ continue prolongeant δ, tel que $\mathrm{Ker}(\hat{\delta}) = k$ et de sorte que le morphisme $R \hookrightarrow \hat{R}$ soit différentiel. On sait alors que la connexion induite sur $\epsilon^*(M) \otimes \hat{R}$ est triviale [Kat70, proposition 8.9]. On en déduit par le théorème 3.4.19 que $\mathrm{Gal}'(M) \times \mathrm{Spec}(\hat{R})$ est conjugué à un sous-groupe constant et donc est constant par le lemme 3.4.14. $\square$

Bibliographie

[AB12] Yves André and Francesco Baldassarri, *De Rham cohomology of differential modules on algebraic varieties*, vol. 189, Birkhäuser, 2012.

[And01] Yves André, *Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, vol. 34, 2001, pp. 685–739.

[Ati57] M. F. Atiyah, *Complex Analytic Connections in Fibre Bundles*, Transactions of the American Mathematical Society **85** (1957), no. 1, 181–207.

[BO15] Pierre Berthelot and Arthur Ogus, *Notes on Crystalline Cohomology.(MN-21)*, Princeton University Press, 2015.

[Bol98] A. A. Bolibrukh, *On isomonodromic confluences of Fuchsian singularities*, Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni V. A. Steklova. Rossiiskaya Akademiya Nauk **221** (1998), 127–142. MR 1683690

[Bol01] ———, *Regular singular points as isomonodromic confluences of Fuchsian singularities*, Rossiiskaya Akademiya Nauk. Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskikh Nauk **56** (2001), no. 4(340), 135–136. MR 1861445

[Bou07] Nicolas Bourbaki, *Algèbre commutative : Chapitres 5 à 7*, Springer Science & Business Media, 2007.

[Bro06] Ronald Brown, *Topology and groupoids*, rev., updated, and extended version ed., www.groupoids.org, Deganwy, 2006 (eng), OCLC : 846096246.

[CS05] Phyllis J. Cassidy and Michael F. Singer, *Galois theory of parameterized differential equations and linear differential algebraic groups*, arXiv preprint math/0502396 (2005).

[Del90] Pierre Deligne, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Springer, 1990, pp. 111–195.

[DH18] Nguyen Dai Duong and Phùng Hô Hai, *Tannakian duality over Dedekind rings and applications*, Mathematische Zeitschrift **288** (2018), no. 3-4, 1103–1142. MR 3778991

[DHdS18] Nguyen Dai Duong, Phung Ho Hai, and João Pedro P. dos Santos, *On the structure of affine flat group schemes over discrete valuation rings, I*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V **18** (2018), no. 3, 977–1032. MR 3807593

[DM82] P. Deligne and J. S. Milne, *Tannakian Categories*, Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, 1982, pp. 101–228 (en).

[dS15] João Pedro dos Santos, *The homotopy exact sequence for the fundamental group scheme and infinitesimal equivalence relations*, Algebraic Geometry **2** (2015), no. 5, 535–590. MR 3421782

[EH06] Hélène Esnault and Phung Hô Hai, *The Gauss-Manin connection and Tannaka duality*, International Mathematics Research Notices **2006** (2006).

[GGO13] Henri Gillet, Sergey Gorchinskiy, and Alexey Ovchinnikov, *Parameterized Picard-Vessiot extensions and Atiyah extensions*, Advances in Mathematics **238** (2013), 322–411. MR 3033637

[Gil02] Henri Gillet, *Differential Algebra a scheme theory approach*, Differential algebra and related topics, World Scientific, 2002, pp. 95–123.

[GO14] Sergey Gorchinskiy and Alexey Ovchinnikov, *Isomonodromic differential equations and differential categories*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série **102** (2014), no. 1, 48–78. MR 3212248

[Gro61] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques (1961), no. 8, 222. MR 0163909

[Gro64] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I*, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques (1964), no. 20, 259. MR 0173675

[Jan87] Jens Carsten Jantzen, *Representations of algebraic groups*, no. 131, American Mathematical Soc., 1987.

[Kat70] Nicholas M. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin*, Publ. Math. IHES **39** (1970), 175–232.

[LMB00] Gérard Laumon and Laurent Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Springer, Berlin ; New York, 2000 (French).

[ML10] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2nd. ed., softcover version of original hardcover edition 1998 ed., Graduate texts

in mathematics, no. 5, Springer, New York, NY, 2010 (eng), OCLC : 772909196.

[Nit04] Nitin Nitsure, *Representability of Hom implies flatness*, Indian Academy of Sciences. Proceedings. Mathematical Sciences **114** (2004), no. 1, 7–14. MR 2040596

[Ovc09] Alexey Ovchinnikov, *Differential Tannakian categories*, Journal of Algebra **321** (2009), no. 10, 3043–3062. MR 2512641

[Ray70] Michel Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 119, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. MR 0260758

[Sim94] Carlos T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety II*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **80** (1994), 5–79 (fr).

[SR72] Neantro Saavedra Rivano, *Catégories tannakiennes.*, Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1972 (French).

[Sta17] Stacks Project Authors, *Stacks Project*, 2017.

[Wed04] Torsten Wedhorn, *On Tannakian duality over valuation rings*, Journal of Algebra **282** (2004), no. 2, 575–609 (en).

[Zha14] Lei Zhang, *The homotopy sequence of the algebraic fundamental group*, International Mathematics Research Notices. IMRN (2014), no. 22, 6155–6174. MR 3283001