HAL
open science

CARACTERISATION DES MATERIAUX HYPERELASTIQUES INCOMPRESSIBLES PAR LA METHODE DE L'ALGORITHME GENETIQUE

Blaise Bale Baidi

To cite this version:

Blaise Bale Baidi. CARACTERISATION DES MATERIAUX HYPERELASTIQUES INCOMPRESSIBLES PAR LA METHODE DE L'ALGORITHME GENETIQUE. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Maroua (Cameroun), 2020. Français. NNT : . tel-02937256

HAL Id: tel-02937256

https://theses.hal.science/tel-02937256

Submitted on 15 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
****
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE DE MAROUA
****
FACULTE DES SCIENCES
****
UNITE DE FORMATION DOCTORALE SCIENCES FONDAMENTALES
****

THE REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland
****
THE MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
****
THE UNIVERSITY OF MAROUA
****
THE FACULTY OF SCIENCE
****
POST-GRADUATE TRAINING UNIT FUNDAMENTAL SCIENCES
****

Thèse de Doctorat / P*h*.D

CARACTERISATION DES MATERIAUX HYPERELASTIQUES INCOMPRESSIBLES PAR LA METHODE DE L'ALGORITHME GENETIQUE

Spécialité: SYSTEMES COMPLEXES

Présentée et soutenue publiquement le 21 Mai 2020

Par: BALE BAIDI BLAISE

Matricule: 16A0011ED

MASTER EN MECANIQUE ET MATERIAUX

Supervisée par:

Pr. GAMBO BETCHEWE
Maître de Conférences
Université de Maroua

Pr. BEDA TIBI
Professeur
Université de Ngaoundéré

Jury

Président: WOAFO Paul Professeur Université de Yaoundé I

Rapporteur: MOHAMADOU Alidou Professeur Université de Maroua

Membres: KOL GUY Richard Professeur Université de Maroua

MOTAPON Ousmanou Professeur Université de Maroua

Directeurs: BEDA TIBI Professeur Université de Ngaoundéré

GAMBO BETCHEWE Professeur Université de Maroua

CARACTERISATION DES MATERIAUX HYPERELASTIQUES INCOMPRESSIBLES PAR LA METHODE DE L'ALGORITHME GENETIQUE

Thèse de Doctorat / P*h*.D

Spécialité: SYSTEMES COMPLEXES

Présentée et soutenue publiquement le 21 Mai 2020

Par: BALE BAIDI BLAISE

Département de Physique,

Faculté des Sciences,

Université de Maroua, P.O. Box. 814, Cameroun

Caractérisation des matériaux hyperélastiques incompressibles par la méthode de l'algorithme génétique

15 septembre 2020

DEDICACE

- *À mes parents*
- *À mes frères*
- *À mes Sœurs*

REMERCIEMENTS

Cette thèse est le fruit de quatre années de recherche. Je remercie Dieu le tout Puissant pour la force et la santé qu'il m'a accordées durant toute cette période de thèse. La réalisation de cette thèse a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Elle n'aurait jamais abouti sans le support constant et infaillible de mes deux directeurs de thèse, le Professeur **GAMBO BETCHEWE** et le Professeur **BEDA TIBI** pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant de diriger ce travail doctoral ainsi que pour leurs multiples conseils. Ils ont su à cette occasion m'apprendre les rouages subtiles du monde de la recherche. Leurs compétences m'ont été d'une aide inestimable.

Merci au Professeur **NGO BUM Elizabeth** Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Maroua et au Professeur **MOHAMADOU Alidou** responsable de l'Unité de Formation Doctorale de la Faculté des Sciences de l'Université de Maroua, pour toutes les facilités mise en œuvre pour que cette soutenance ait lieu.

Qu'il me soit permis de remercier le Professeur **TCHANGNWA NYA Fridolin**, le chef de département de physique de l'Université de Maroua, le Professeur **NGUETCHO TCHAKOUTIO**, le professeur **ABDOULKARY SAIDOU**, le professeur **KOL GUY Richard**, le professeur **MAHAMAT SALEH**, le Docteur **NDZANA II Fabien**, le Docteur **ALIM**, le Docteur **MIBAILE Justin**, le Docteur **MALWE BODOUHE**, Docteur **ALHADJI MALLOUM** et tous les autres enseignants du département de Physique de la faculté des sciences et de l'école Normale Supérieur de Maroua pour les remarques pertinentes lors de mes différentes présentations.

J'adresse également mes sincères remerciements à tous les membres de l'Unité de Formation Doctorale de la Faculté des sciences de l'université de Maroua.

Je remercie toutes les personnes qui ont participé et rendu mon expérience doctorale agréable.

Je remercie le Professeur **GILLES MARCKMANN** de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, le Docteur **Alain NGUESSONG KENFACK** de l'Université de Ngaoundéré, le Docteur **VROUMSIA David**, le Docteur **YAOUBA AHMADOU**, le Docteur **DAWOUA KAOUTOING** pour leurs diligences et conseils.

Je remercie également mes collaborateurs de laboratoire de Mécanique de l'Université de Ngaoundéré et Maroua à savoir Monssieur **LIMAN KAOYE MADAHAN BIEN-aimé**, Monssieur **MOUSTAPHA MOHAMADOU BACHIROU** et Madame **TALAKA DYA**.

Si une thèse ne peut se réaliser hors d'un environnement scientique, le cadre humain est tout aussi indispensable. A ce titre, j'exprime toute ma reconnaissance en vers **WILHARBANG BOUBA Fidèle**. Tous mes collègues du Lycée de Moutourwa, du collège Islamique Sabil de Maroua, amis et connaissances, qui de près ou de loin m'ont soutenu moralement et spirituellement pendant la réalisation de ce travail, je témoigne ma gratitude.

J'exprime mes remerciements aux membres du jury: Monsieur le Professeur **WOAFO Paul**, Professeur titulaire à l'Université de Yaoundé I, pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance, Monsieur le Professeur **MOHAMAMADOU Alidou**, de l'Université de Maroua pour avoir bien voulu faire un rapport sur ce travail et les examinateurs Messieurs les Professeurs **KOL GUY Richard** et **MOTAPON Ousmanou** de l'Université de Maroua.

Table des matières

DEDICACE **i**

REMERCIEMENTS **ii**

Résumé **xiii**

Abstract **xiv**

Introduction générale **1**

1 REVUE DE LA LITTERATURE **5**

1.1 Le caoutchouc 6

1.1.1 Le caoutchouc naturel 7

1.1.2 Le caoutchouc synthétique 9

1.2 Sollicitations mécaniques des élastomères 10

1.2.1 Comportement statique: élasticité des élastomères 10

1.2.2 Comportement endommageable 12

1.2.3 Comportement dynamique 15

1.2.4 L'amplification des déformations 16

1.3 Mécanique des milieux continus en grandes déformations 17

1.3.1 Description du mouvement 18

1.3.2 Description des déformations 20

1.3.3 Vitesse de déformation 21

1.3.4 Description des contraintes. 22
1.3.5 Hypothèse des petites perturbations 24
1.3.6 Thermodynamique des milieux continus 24
1.4 Loi de comportement hyperelastique 26
1.4.1 Condition d'incompressibilité. 27
1.4.2 Application à différents cas de sollicitation 29
1.5 Densité d'énergie de déformation (W) 37
1.5.1 Les modèles phénoménologiques. 38
1.5.2 Les modèles moléculaires. 46
1.6 Les essais expérimentaux 49
1.6.1 Les essais de Treloar 49
1.6.2 Les essais de Nunes et de Moreira 51

2 METHODES D'OPTIMISATION DES PARAMETRES DES ENERGIES 53

2.1 Problématique d'optimisation 54
2.2 Les méthodes d'optimisation 54
2.2.1 La méthode des moindres carrés 55
2.2.2 La méthode de Levenberg-Marquardt 56
2.2.3 La méthode de Beda−Chevalier 58
2.2.4 La méthode ≪Pattern Search Algorithm≫ 59
2.2.5 La méthode de l'algorithme génétique. 61
2.3 Mise en œuvre de l'algorithme génétique. 65
2.3.1 Motivation 66
2.3.2 Méthodologie 66
2.3.3 Application de l'algorithme génétique au modèle de Ogden 68
2.3.3.1 Procédure d'optimisation 68
2.4 Comparaison des méthodes d'optimisation 73

2.4.1 Le temps de calcul 74
2.4.2 Le nombre d'iteration 76
2.4.3 Le nombre d'évaluation de la fonction objective 78
2.4.4 La précision de la fonction objective 80
2.5 Limites des algorithmes génétiques 82

3 RESULTATS ET DISCUSSIONS 84

3.1 Comparaison des méthodes d'optimisation sur les essais de Treloar 85
3.1.1 Procédure 85
3.2 Comparaison des modèles hyperélastiques 89
3.2.1 Modèles hyperélastiques retenus 90
3.2.2 Stratégie d'identification des paramètres 93
3.2.3 Comparaison des modèles hyperélastiques sur les critères théoriques 94
3.2.4 Comparaison des modèles hyperélastiques sur les Critères expérimentalement établis 99
3.3 Classement des modèles hyperélastiques 105
3.3.1 Modèles utilisables pour les très grandes déformations 105
3.3.2 Modèles utilisables pour les déformations modérées 105
3.4 Construction d'un nouveau modèle hyperélastique phénoménologique . . . 106
3.4.1 Motivation 106
3.4.2 Methodologie 106
3.4.3 Optimisation des paramètres matériau 106
3.4.4 Validation du modèle hyperélastique proposé 107

Conclusion générale et perspectives. 111

ANNEXE 125

LISTE DES PUBLICATIONS 135

Table des figures

1.1 Caoutchouc naturel [50] 7

1.2 Formule semi-développée du cis-1,4-polyisoprène. 8

1.3 Chaînes moléculaires réticulées d'un polymère a-En l'absence de contrainte, et b-Durant une déformation élastique résultant de l'application d'une contrainte de traction [51]. 8

1.4 Schéma d'un pneu adhérent [1]. 9

1.5 Contribution de l'entropie et de l'énergie interne par rapport au travail externe de l'effort total [54]. 11

1.6 Effet Mullins [61]. 13

1.7 Analyse de l'effet de Payne-évolution de propriétés mécaniques en fonction du niveau de déformation pour un élastomère SBR renforcé en silice [81]. . 16

1.8 Phénomène d'amplification de déformation [86] 17

1.9 Configurations initiale (C_0) et déformée (C(t)) 18

1.10 Sollicitation en traction uniaxiale. 29

1.11 Sollicitation en traction équibiaxiale. 31

1.12 Sollicitation en cisaillement pur. 33

1.13 Sollicitation en Cisaillement simple. 35

1.14 Courbe expérimentale de Treloar : traction uniaxiale [34]. 49

1.15 Courbe expérimentale de Treloar: traction équibiaxiale [34]. 50

1.16 Courbe expérimentale de Treloar: Cisaillement Pur [34]. 50

1.17 Cisaillement simple [17]. 51

2.1 Croisement uniforme. 64

2.2 Mutation d'un gène en codage binaire. 65

2.3 Organigramme. 67

2.4 Optimisation du modèle de Ogden par l'algorithme génétique : a)-Traction simple b)-Convergence de la fonction erreur. 72

2.5 Temps de calcul des paramètres du modèle de Mooney. 74

2.6 Temps de calcul des paramètres du modèle de Ogden. 75

2.7 Temps de calcul des paramètres du modèle de Boyce Arruda. 75

2.8 Temps de calcul des paramètres du modèle de Nguessong et al. 76

2.9 Nombre d'itérations dans le calcul des paramètres du modèle de Mooney. . 76

2.10 Nombre d'itérations dans le calcul des paramètres du modèle de Ogden. . . 77

2.11 Nombre d'itérations dans le calcul des paramètres du modèle de Boyce et Arruda. 77

2.12 Nombre d'itérations dans le calcul des paramètres du modèle de Nguessong et al. 78

2.13 Le nombre d'évaluation de la fonction objective avec le modèle de Mooney. 78

2.14 Le nombre d'évaluation de la fonction objective avec le modèle de Ogden. . 79

2.15 Le nombre d'évaluation de la fonction objective avec le modèle de Boyce et Aruda. 79

2.16 Le nombre d'évaluation de la fonction objective avec le modèle de Nguessong et al. 80

2.17 Précision de la fonction objective dans le calcul des paramètres du modèle de Mooney. 80

2.18 Précision de la fonction objective dans le calcul des paramètres du modèle de Ogden. 81

2.19 Précision de la fonction objective dans le calcul des paramètres du modèle de Boyce et Aruda. 81

2.20 Précision de la fonction objective dans le calcul des paramètres du modèle de Nguessong et al. 82

3.1 Mooney 86

3.2 Ogden 87

3.3 Boyce et Arruda 88

3.4 Nguessong et al 89

3.5 Prédiction du modèle de Beda (2007): a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur 95

3.6 Prédiction du modèle de Ogden : a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur 96

3.7 Prédiction du modèle de Mooney: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur 96

3.8 Prédiction du modèle de Boyce-Aruda: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur 97

3.9 Prédiction du modèle de HIA: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur 97

3.10 Prédiction du modèle de Gornet et al.: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur 98

3.11 Prédiction du modèle de Pucci-Saccomandi: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur 98

3.12 Prédiction du modèle de Gent-Thomas: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur 99

3.13 Prédiction du modèle de Gent-Thomas : $\frac{\partial W_{GT}}{\partial I_2}$ 100

3.14 Prédiction du modèle de Pucci et Saccomandi : $\frac{\partial W_{PS}}{\partial I_2}$ 101

3.15 Prédiction du modèle de Beda (2007) : $\frac{\partial W_{Be}}{\partial I_2}$ 102

3.16 Prédiction du modèle de Gornet et al. : $\frac{\partial W_{Be}}{\partial I_2}$ 103

3.17 Prédiction du modèle de Nguessong et al. : $\frac{\partial W_{HIA}}{\partial I_2}$ 104

3.18 Prédiction du modèle Proposé: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur 107

3.19 Prédiction du modèle Proposé: Cisaillement Simple 108

Liste des tableaux

2.1 Valeurs des Paramètres optimisés par la méthode des moindres carrés. . . . 56

2.2 Valeurs des Paramètres optimisés par la méthode Levenberg-Marquardt. . 58

2.3 Valeurs des Paramètres optimisés par la méthode de Beda−Chevalier. . . . 59

2.4 Valeurs des Paramètres optimisés par la méthode ≪Pattern Search Algorithm≫. 61

2.5 Paramètres du modèle de Ogden. 72

2.6 Critère de comparaison des méthodes d'optimisation 73

3.1 Valeurs des Paramètres optimisés par l'algorithme génétique. 94

3.2 Modèles utilisables pour les grandes déformations 105

3.3 Modèles utilisables pour les moyennes déformations 105

3.4 Valeur des paramètres du modèle proposé 107

≪Je suis reconnaissant envers ceux qui m'ont répondu ≪Non≫, Grâce à eux, je l'ai fait moi-même≫. ***Albert Einstein***

Résumé

Les travaux de cette thèse portent sur la caractérisation des matériaux hyperélastiques, isotropes et incompressibles par la méthode de l'algorithme génétique. Cette méthode permet d'optimiser les paramètres des modèles d'énergie hyperélastiques afin de décrire le comportement des matériaux caoutchouteux en grande déformation et en grand déplacement. Cette méthode d'optimisation est implémentée en mode interactif dans le logiciel de calcul Matlab. Elle est constituée de quatre grands opérateurs: la sélection, le croisement, la mutation et l'élitisme. La mise sur pied de cet algorithme dans l'optimisation des paramètres rhéologiques est la première contribution originale de ce travail de thèse. Afin d'étudier la pertinence de l'algorithme, des comparaisons sont réalisées avec les méthodes existantes: la méthode des moindres carré, la méthode de Beda-Chevalier, la méthode de Leventberg-Marquardt, la méthode de ≪pattern search algorithm≫. Ces comparaisons ont couronné l'algorithme génétique de succès. La deuxième originalité de ce travail est la construction d'une nouvelle densité d'énergie hyperélastique isotrope, incompressible et phénoménologique. L'étude de la pertinence du modèle proposé, s'est accompagnée des comparaisons avec les modèles existants (Ogden, Beda (2007), Boyce et Arruda, Nguessong et al, Gornet et al. et Pucci-Saccomandi.) sur la capacité à reproduire les données expérimentales disponibles dans la littérature (Treloar). Il ressort que le modèle proposé est le mieux adapté à reproduire la courbe expérimentale en traction simple, traction équibiaxiale et en cisaillement pur avec le même jeu de paramètre.

Mots Clés: matériaux hyperélastiques ; densité d'énergie ; algorithme génétique.

Abstract

In This work, we characterized hyperelastic isotropic and incompressible materials using genetic algorithm. This method has allowed us to optimize the parameters of the hyperelastic models of energy to describe the behavior of rubbery materials in great deformation and great displacement. This method of optimization is implemented in the interactive mode in the Matlab software. It is composed of four large operators: selection, crossing-over, mutation, and elitism. The setting-up of this algorithm in the optimization of the rheological parameters is the first original contribution of this work. To study the relevance of the algorithm, comparisons were carried out with the following methods: least squares method, Beda-Chevalier method, Leventberg-Marquardt method, pattern search algorithm method. The second originality of this work is the construction of a new hyperelastic energy density that is isotropic, incompressible and phenomenological. The study of the relevance of the model proposed is accompanied by the comparisons with the models existing (Ogden, Beda (2007), Boyce and Arruda, Nguessong et al, Gornet et al, and Pucci-Saccomandi) on their capacity to reproduce the experimental data available in the literature. At the exit of this comparison, it arises that the model suggested is best adapted to reproduce the experimental curve of Treloar in simple tension, biaxial tension and pure shear with the same set of parameters.

Keywords: hyperelastic material ; Strain energy ; genetic algorithm.

Introduction générale

Dans ce présent travail nous considérons uniquement les caoutchoucs susceptibles d'être vulcanisés et pas des caoutchoucs thermoplastiques. Pour éviter tout risque de confusion, le terme ≪**caoutchouc**≫ est réservé aux produits formulés et le terme ≪**élastomères**≫ est réservé aux polymères utilisés dans les formulations [1]. Cependant, de nos jours, les élastomères sont fréquemment utilisés dans des applications industrielles, notamment dans divers domaines de l'industrie: automobile, aéronautique (fabrication des pneumatiques, des supports moteur, etc), bâtiments (gomme d'amortissement), médecine (prothèses, implants), habillement (vêtements, chaussures, casques, etc). Les élastomères ont des propriétés mécaniques qui en font des matériaux à part (matériaux hyperélastiques). En particulier, ils ont une grande capacité de déformabilité de l'ordre de quelques centaines de pourcent associée à un comportement élastique quasi-réversible. Leurs comportements varies selon le type de sollicitation.

Un intérêt particulier est porté au comportement hyperélastique non-linéaire, isotrope et incompressible de ces matériaux dans le cadre de réponses en grandes déformations et grands déplacements. Le développement de la loi de comportement hyperélastique nécessite la maîtrise préalable de la densité d'énergie de déformation qui peut être déterminée par une approche moléculaire ou par une approche phénoménologique. Les densités moléculaires sont construites à partir de l'analyse microscopique du réseau de chaînes polymériques. Les densités sont développées en intégrant des considérations physiques, traitées soit par une distribution Gaussienne [2, 3, 4], soit par une distribution non-Gaussienne [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Quant aux densités phénoménologiques, le matériau est consi-

déré comme une boîte noire dont on ignore le fonctionnement à l'échelle microscopique et dont on essaye de reproduire le comportement à l'échelle macroscopique. Les densités phénoménologiques sont obtenues de deux manières différentes: la première manière consiste à déterminer une expression mathématique sous forme de séries polynômiales ou puissances (écrites en fonction des valeurs propres ou des invariants du tenseur de déformation) reproduisant au mieux les données expérimentales [14, 15, 16, 17, 18, 19] ; la deuxième manière consiste à déterminer directement une forme analytique reproduisant les observations expérimentales des dérivées de la densité d'énergie par rapport aux deux premiers invariants principaux du tenseur de déformation [20, 21, 22, 23, 24].

Compte tenu du nombre élevé de modèles développés dans la littérature [25, 26, 27, 28, 29, 30], il n'est pas toujours facile de sélectionner pour un ingénieur le modèle approprié correspondant à un matériau donné. De surcroit, malgré la très grande diversité de modèles disponibles, il n'est pas simple, voire dans certains cas impossible, de choisir le modèle qui décrira le mieux le comportement du matériau pour une large gamme de sollicitations [31, 32, 33]. Pour remédier à cette situation, une optimisation des paramètres matériau des modèles hyperélastiques est une solution envisageable, c'est dans ce sens que plusieurs méthodes d'optimisation sont utilisées. Dans la littérature nous avons: la méthode du gradient, la méthode de relaxation, la méthode de Newton [34] ; la méthode de Levenberg-Marquardt [34] ; la méthode des moindres carré [34] ; la méthode étape par étape [35] ; la méthode étape par étape combinée à la méthode des moindres carré [36] ; la méthode ≪pattern search algorithme≫ [37] et plus récemment la méthode de l'algorithme génétique [38, 39]. En particulier, nous proposons et nous dévéloppons dans cette thèse la méthode de l'algorithme génétique pour calculer les paramètres matériau des modèles hyperélastiques. Cette thèse s'organise en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'état de l'art sur les matériaux caoutchouteux. Dans un premier temps, l'origine, les différents comportements mécaniques (statique, dynamique, et endommageable) des caoutchoucs sont présentés. Dans un deuxième temps,

les tenseurs de déformations et de contraintes sont étudiés dans le cadre de la mécanique des milieux continus en grande déformation. L'étude de ces grandeurs permet de construire la loi de comportement hyperélastique en tenant compte des propriétés d'élasticité, de non dissipation d'énergie et de quasi incompressibilité. Par la suite, la loi de comportement est appliquée aux cas de sollicitations simples comme: la traction uniaxiale, la traction équibiaxiale, le cisaillement pur et le cisaillement simple. Les lois de comportement étant intimement liées à la densité d'énergie de déformation, une revue des densités les plus usuelles est effectuée. Enfin, en partant du constat qu'il existe un nombre élevé de densité d'énergie hyperélastique dans la littérature, nous proposons des critères de sélection de ces densités. Plusieurs de ces critères ont été reportés dans [40, 41] et sont listés ci-après:

- Couvrir l'ensemble du domaine de déformation ;
- Prédire tous les modes de déformations et avec les mêmes paramètres ;
- Vérifier les conditions de stabilité thermodynamique ;
- Vérifier les observations expérimentales de Rivlin-Saunders [19] et Treloar [42].

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des algorithmes d'optimisation des paramètres des modèles hyperélastiques, de la motivation portée sur le choix des algorithmes génétiques et de la mise en œuvre des algorithmes génétiques. Cette mise en œuvre se fait en décrivant et en implémentant les grandes parties de l'algorithme dans le logiciel Matlab à savoir: la sélection, le croisement, la mutation et l'élitisme. Il s'agit de la première contribution originale de ce travail de thèse qui a fait l'objet d'une publication d'un ouvrage dans la maison d'édition LAMBERT ACADEMIC PUBLISHING. Toujours dans cette partie nous optimisons les paramètres du modèle de Ogden par la méthode de l'algorithme génétique, Il s'agit de la deuxième contribution originale de ces travaux de thèse qui ont fait l'objet d'une publication d'un article dans une revue internationale (Applied Rheology).

Le troisième chapitre traite de la caractérisation des matériaux hyperélastiques incompressibles par la méthode de l'algorithme génétique. Dans ce chapitre nous effectuons une

comparaison des méthodes d'optimisation basées sur leurs influences à optimiser les paramètres des modèles hyperélastiques et une comparaison des modèles hyperélastiques en utilisant l'algorithme génétique pour l'optimisation de leurs paramètres. Par la suite, cette comparaison nous amène à classer les modèles capables de caractériser le comportement des matériaux caoutchouteux en grande déformation et ceux capable d'étudier le comportement en moyenne déformation. Enfin, nous proposons un nouveau modèle d'énergie phénoménologique des matériaux hyperélastiques incompressibles et isotropes. Il s'agit de la troisième orginalité de cette thèse.

Chapitre 1

REVUE DE LA LITTERATURE

Introduction

Le mot **élastomère** est constitué du préfixe ≪**élasto**≫ qui rappelle les grandes déformations élastiques possibles et du suffixe ≪**mère**≫ qui évoque la nature des polymères et la constitution macro moléculaire [34]. Ainsi, le caoutchouc, encore appelé élastomère, appartient à la famille des polymères. Leur possibilité de subir de grandes déformations et leur capacité à amortir les vibrations les destinent à de nombreuses applications, par exemple: dans le transport automobile, aérien et ferroviaire (systèmes d'amortissement), le domaine biomédical (prothèse, implant mammaire) ou le génie civil (joint d'étanchéité, gaines isolantes).

Ce chapitre est consacré à la présentation de la structure, des propriétés physicochimiques et les différents types de comportement que revêt le caoutchouc. Il est structuré en six sections.

La section 1.1 présente les types de caoutchouc qu'on rencontre dans la littérature: le caoutchouc naturel et le caoutchouc synthétique. La section 1.2 est basée sur la présentation des différents comportements des élastomères: le comportement statique, le comportement endommageable et le comportement dynamique. *À* la section 1.3 nous rappellons les fondamentaux de la mécanique des milieux continus appliquée aux grandes déformations

[43, 44, 45]. Ces rappels portent sur l'étude des tenseurs de déformation et de contrainte, ainsi que sur les propriétés d'isotropie et d'incompressibilité des élastomères. La section 1.4 présente les lois de comportement des matériaux hyperélastiques incompressibles et isotropes pour les solicitations suivantes: traction uniaxiale, traction équibiaxiale, cisaillement pur et simple. La section 1.5 est consacrée à la présentation des différents modèles d'énergie utilisées dans la caractérisation des matériaux hyperélastiques incompressibles et isotropes. Pour en finir nous consacrons la section 1.6 à la présentation des essais expérimentaux: les essais de Treloar [4] et de Nunes et Moreira [46].

1.1 Le caoutchouc

Le mot ≪**caoutchouc**≫ est né de l'union de deux mots indiens ≪**cao**≫ et ≪**tchu**≫ qui ensemble signifient ≪**bois qui pleure**≫ [1]. Le terme caoutchouc est tout à fait générique et englobe un grand nombre de familles, de propriétés et d'applications dédiées. Deux éléments particuliers le caractérisent: le rôle de la formulation qui permet l'adéquation des propriétés ou la fonction envisagée et la vulcanisation.

Les techniques de mise en forme (moulage, injection, extrusion, etc.) sont pour certaines semblables à celles des autres polymères, avec cependant des spécificités comme la confection pour les pneumatiques ou le trempé pour les gants en latex. D'un point de vue économique, on distingue deux grands domaines: le pneumatique et le caoutchouc industriel. Ce dernier recouvre par ordre décroissant d'importance: l'automobile, les transports hors automobile, les équipements industriels, le médical, le bâtiment, les demi-produits, les rubans adhésifs, les loisirs. Le caoutchouc est constitué de longues chaînes moléculaires reliées entre elles par des enchevêtrements de nœuds.

La présence des chaînes carbonées dans la structuration chimique de ces matériaux provoque un comportement hautement non-linéaire [47, 48, 49]. Dans le langage courant, le terme caoutchouc recouvre à la fois le caoutchouc naturel et le caoutchouc synthétique.

1.1.1 Le caoutchouc naturel

Le caoutchouc naturel NR (Natural Rubber), est un matériau d'origine végétale, provenant de l'hévéaculture. Par sa structure et ses propriétés, il se distingue du caoutchouc synthétique SR (Synthetic Rubber) qui lui est produit à partir de dérivés du pétrole. Le caoutchouc est récolté par saigné de l'arbre hévéa :

- Sous forme liquide, c'est le latex qui est une émulsion de 35 à 40% en masse de caoutchouc dans l'eau et stable en milieu basique. Ce latex de caoutchouc est soit concentré et conservé sous forme liquide, soit transformé en feuille par coagulation ;
- Sous forme solide en le laissant coaguler dans les godets *où* l'on réceptionne le latex.

En 2015, la production de caoutchouc naturel a été de 12,2 millions de tonnes (Mt) [1]. Elle devrait atteindre 15 Mt en 2020, celle du caoutchouc synthétique quant à elle est de 14,5 Mt actuellement [1]. *À* titre d'exemple, la Figure 1.1) présente un morceau de caoutchouc naturel avant la vulcanisation.

FIGURE 1.1 – Caoutchouc naturel [50]

Les premières méthodes de stabilisation du caoutchouc étaient opérées par enfumage, par ébullition ou en le mélangeant avec des végétaux composés d'acides et de sels organiques. *À* ce jour, le caoutchouc est obtenu à partir de l'évaporation ou de la coagulation en utilisant des acides (acide acétique, acide formique). Sa conservation à l'état liquide est assurée par de l'ammoniaque. Le caoutchouc naturel est un polymère

linéaire dénommé ≪cis-1,4-polyisoprène≫, de formule brute $(C_5H_8)_n$ et de formule semi-développée illustrée par la Figure 1.2. C'est un hydrocarbure insaturé de par les doubles liaisons carbone-carbone et formé de longues chaînes macromoléculaires enchevêtrées. Les enchevêtrements permettent le retour à l'état initial après étirement. Pendant l'extension, les chaînes macromoléculaires sont étirées, et s'orientent dans le sens de la traction (Figure 1.3) et forment des zones cristallines.

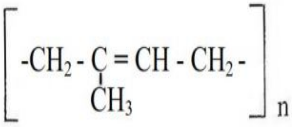

FIGURE 1.2 – Formule semi-développée du cis-1,4-polyisoprène.

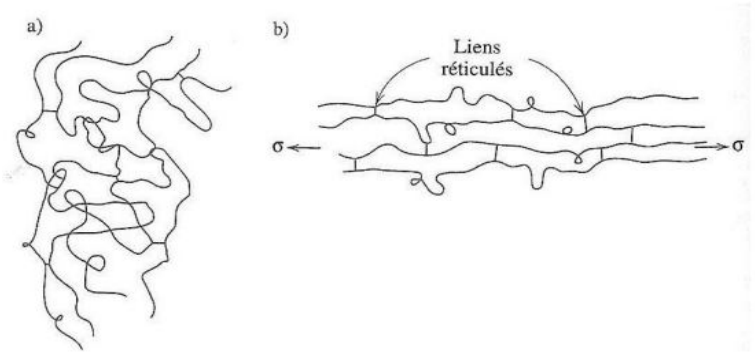

FIGURE 1.3 – Chaînes moléculaires réticulées d'un polymère a-En l'absence de contrainte, et b-Durant une déformation élastique résultant de l'application d'une contrainte de traction [51].

À l'état brut, le caoutchouc n'est pas résistant au fluage sous contrainte. Pour améliorer ses propriétés, il est vulcanisé c'est à dire malaxé avec du soufre puis chauffé. L'opération de vulcanisation permet d'améliorer la résistance thermique du caoutchouc.

1.1.2 Le caoutchouc synthétique

Les caoutchoucs synthétiques (ou artificiels) sont un type d'élastomère, invariablement polymères. Comme les matières plastiques, ils sont souvent issus d'un combustible fossile. Un élastomère possède une meilleure déformation élastique sous contrainte que la plupart des matériaux et revient à sa forme initiale sans aucune déformation permanente. Son premier usage est la fabrication de pneus (*où* l'on trouve aussi une certaine proportion de caoutchouc réalisé avec du latex naturel, notamment dans les pneus de camions).

Les élastomères synthétiques tels que les copolymères de styrène et de butadiène (SBR de l'anglais: Styrene-Butadiene Rubber) possèdent des propriétés mécaniques spécifiques intéressantes: élasticité, déformabilité, imperméabilité, bonne adhérence et capacité à absorber les irrégularités du sol et à amortir les chocs [52]. Une différence essentielle entre ces deux types de caoutchouc (naturel et synthétique) est l'hystérèse, c'est-à-dire la dissipation d'énergie lors d'un choc mécanique. En effet, le caoutchouc synthétique développe une hystérèse forte, très supérieure à celle du caoutchouc naturel, d'où son intérêt pour la fabrication des pneus adhérents.

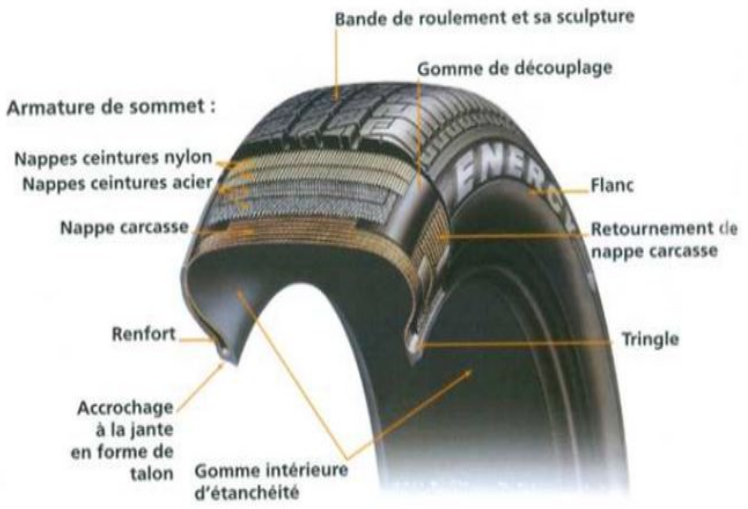

FIGURE 1.4 – Schéma d'un pneu adhérent [1].

Les possibilités offertes par le choix du monomère ou des comonomères, le mode de synthèse, la formulation (souvent complexe) et le type de vulcanisation (traditionnelle au

soufre, au peroxyde organique, etc.) expliquent qu'un très grand nombre de caoutchoucs synthétiques sont réalisables ou disponibles sur le marché. Le type le plus important économiquement est un copolymère élastomère: le styrène-butadiène (SBR), qui est adapté pour les pneus. La copolymérisation, par la grande variété de compositions possibles, permet d'obtenir un large éventail de propriétés. De plus, les caractéristiques du matériau (la masse molaire et la pureté) peuvent varier en fonction du procédé de polymérisation choisi.

Les caoutchoucs synthétiques purs sont des matériaux organiques (issu de la chimie organique) qui vieillissent mal et sont non recyclables. Pour cette raison, ils sont formulés avec des additifs protecteurs (contre le dioxygène, l'ozone, la chaleur, les ultraviolets solaires, etc.) et souvent avec des charges renforçantes. Ils sont en général vulcanisés selon des règles précises pour améliorer les propriétés mécaniques et supprimer le fluage après extrusion et au cours du temps [53].

1.2 Sollicitations mécaniques des élastomères

Nous traitons dans cette section les différents types de comportements rencontrés à l'échelle macroscopique lorsque les élastomères sont soumis à des sollicitations mécaniques. Il s'agit du comportement du matériau en régime quasi statique avec des lois élastiques non-linéaires, du comportement endommageable (effet Mullins, cristallisation, fatigue), du comportement dynamique (viscoélasticité, effets Payne et de Fletcher-Gent) et de l'amplification des déformations due à l'hétérogénéité des constituants des matériaux caoutchouteux.

1.2.1 Comportement statique: élasticité des élastomères

Le comportement statique des élastomères non dissipatifs est communément modélisé par une loi qui est qualifiée d'hyperélastique. La détermination de cette loi se fait par le biais d'une énergie de déformation généralement notée W. Le caoutchouc naturel

réticulé contient des chaînes macromoléculaires liées entre elles par des nœuds de réticulations et qui forment un réseau tridimensionnel.

L'assemblage des chaînes étant aléatoire et désordonné, une approche statistique permet de décrire la position la plus probable de la chaîne. L'énergie de déformation est directement liée à la variation de l'entropie du réseau de chaînes. Des éléments thermodynamiques permettent de montrer que la réponse est composée des contributions de la variation de l'énergie interne et de la variation de l'entropie [54]. La Figure 1.5 permet d'observer que la contribution de l'entropie est très importante par rapport à celle de l'énergie interne.

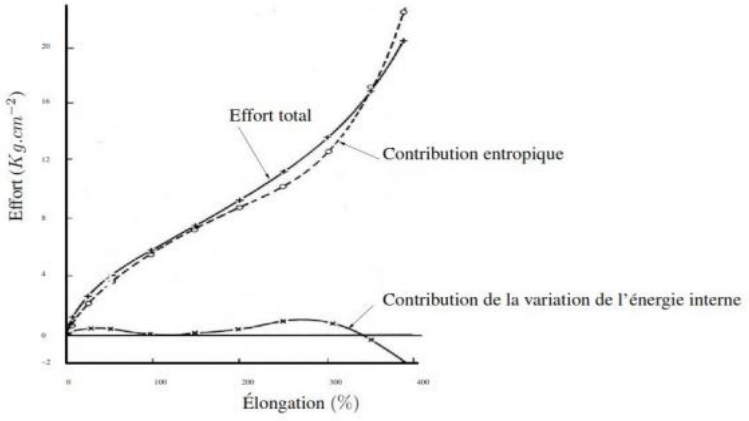

FIGURE 1.5 – Contribution de l'entropie et de l'énergie interne par rapport au travail externe de l'effort total [54].

Le réseau tridimensionnel de l'élastomère se déforme de façon réversible et la force moléculaire de rappel due à la diminution de l'entropie (c'est-à-dire la diminution du nombre de conformations possibles) est à l'origine du retour à la forme initiale.

En état non déformé, l'orientation et la distribution des chaînes macromoléculaires sont désordonnées et aléatoires. Chacune est repliée sur elle-même au repos. Sous sollicitation, le désordre des chaînes décroit et on obtient un arrangement orienté. Une analyse basée sur un calcul statistique permet de déterminer cette entropie (mesure du désordre)

du réseau de chaînes: on parle d'élasticité entropique. Les premiers développements de la théorie statistique de l'élasticité des caoutchoucs ont été menés par Meyer en 1935 [55], Kuhn et Guth en 1942 [12], James et Guth en 1943 [56], Treloar en 1944 [4], Flory en 1944-1946 [57] et Ishiara et al. en 1951 [2]. Dans les années 1940, Mooney [16] propose un modèle avec une approche phénoménologique. Cette approche est présentée par Treloar en 1975 [54] comme ≪ayant un objectif plus limité (que l'approche moléculaire) de décrire les propriétés mécaniques du caoutchouc à l'aide d'un cadre mathématique bien défini sans se soucier des interprétations moléculaires≫. Dès lors, plusieurs modèles d'énergies phénoménologiques ont été proposés [15, 17, 18, 21, 23, 25, 56, 58, 59].

1.2.2 Comportement endommageable

Un comportement endommageable est par nature irréversible. L'effet Mullins, la cristallisation sous contrainte et la fatigue entrent dans la catégorie des phénomènes irréversibles généralement observés lors de la sollicitation des élastomères. Il est à noter que ces effets ne seront pas étudier en profondeur dans cette thèse où on se limitera aux plages de sollicitation correspondant à des déformations réversibles.

1. Effet Mullins

Ce phénomène est le moins étudié et pourtant le premier auquel est confronté l'expérimentateur. Il consiste en un adoucissement de la loi de comportement après une première sollicitation. Après cette première sollicitation, le matériau peut *être* considéré comme un matériau viscoélastique non-linéaire pour des déformations inférieures à la déformation maximale de la première sollicitation. C'est pour cette raison que ce phénomène est peu étudié puisque les applications principales des caoutchoucs sollicitent le matériau sous des chargements cycliques. Le matériau est alors très vite adapté (on emploie en général le terme accommodation) à l'effet Mullins, en cinq ou six cycles, et seul le comportement stabilisé est utile pour évaluer la

raideur ou les modes de vibration des pièces mécaniques en élastomère. Cet adoucissement fut apparemment observé pour la première fois par Bouasse et Carrière [60] et a été longuement étudié par Mullins [61, 62]. Il suggéra quelques interprétations physiques de ce phénomène qui porte aujourd'hui son nom.

Ce phénomène est observable sur l'ensemble des élastomères, mais il est plus prononcé dans les élastomères chargés que dans les caoutchoucs non-chargés. Pour cette raison Bueche [63, 64] explique l'effet Mullins par un mécanisme d'endommagement de liaisons entre chaînes polymériques et charges. D'autres auteurs, comme Harwood et al. [65], Govindjee et Simo [66], Miehe [67], Ogden [68] ou bien Johnson et Beatty [69] proposent des modèles fondés ou non sur des interprétations physiques. Une bonne description du phénomène est donnée dans [69], ainsi que dans [70] et résumée sur la Figure 1.6.

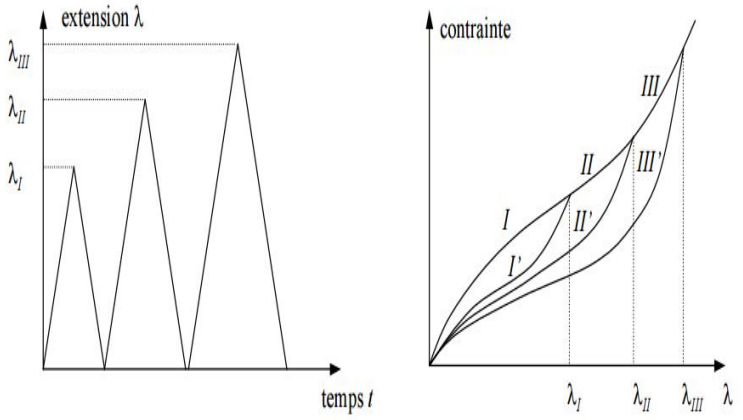

FIGURE 1.6 – Effet Mullins [61].

.

Considérons un élastomère soumis à une histoire de déformation uniaxiale quasi-statique telle que celle illustrée par le graphe de gauche de la figure 1.6. Le matériau vierge de toute déformation est d'abord étiré jusqu'à une extension λ_I. Les contraintes correspondantes suivent alors la courbe dénotée I sur le graphe de droite de la Figure 1.6. La décharge à partir de l'extension λ_I se fait en suivant la courbe I'.

Lorsqu'une deuxième charge de 0 à $\lambda_{II} > \lambda_I$ est appliquée, les contraintes suivent à nouveau le chemin I' jusqu'à $\lambda = \lambda_I$ puis suivent le chemin II qui prolonge la courbe I suivant le chemin I-II-III qui est la courbe de traction dite de première charge. La deuxième décharge, à partir de l'extension λ_{II} suit le parcours II', qui est différent de I' et situé en dessous. En poursuivant le processus, la charge correspondante à l'extension jusqu'à λ_{III} suit les courbes II'-III et la décharge suit le chemin III'. Les courbes I', II' et III' peuvent *être* considérées comme des courbes d'élasticité. En effet, si le matériau n'est plus jamais soumis à une extension supérieure à λ_{III} il se comportera de manière élastique et restera sur la courbe III'. C'est pourquoi ce type de matériau est dit pseudo-élastique.

Mullins [62] a démontré que les caoutchoucs recouvraient partiellement ou totalement leur comportement d'origine de façon lente (plusieurs jours) à température ambiante. Néanmoins, Bueche et Mullins [62, 63] observèrent que le recouvrement était grandement accéléré par la température et que 50% de la raideur était recouvrée après une heure. En fait, lors de chargements cycliques à déformation maximale constante, un adoucissement continu dans le temps est observé. Cependant 90% de l'adoucissement apparait pendant le premier cycle, puis l'adoucissement se stabilise au bout de trois à quatre cycles.

2. Cristallisation

Lorsque un élastomère est sollicité jusqu'à un certain niveau d'étirement, on observe des répartitions sous forme cristalline: il s'agit d'édifices tridimensionnels ordonnés pouvant occuper une portion significative du volume du matériau. Cette phase cristalline coexiste avec une phase amorphe. Même si le phénomène de cristallisation sous contraintes des élastomères est encore mal connu, certains travaux apportent un éclairage sur ce phénomène [71, 72, 73].

3. Fatigue

L'endommagement sous chargement cyclique est un phénomène ayant lieu dans

les élastomères chargés. La propagation de ce type d'endommagement influence sur la durée de vie du matériau. L'endommagement par fatigue des élastomères chargés lors d'un chargement cyclique regroupe des mécanismes de concentration de contraintes, de cavitation, de coalescence (accumulation des particules de noirs de carbone) et de propagation de fissures. Parmi les travaux menés sur la fatigue des élastomères chargés sous sollicitation cyclique, on peut citer : [74, 75, 76].

1.2.3 Comportement dynamique

Parmi les comportements observés lors des sollicitations dynamiques, on peut mentionner le comportement viscoélastique, l'effet Payne et l'effet Fletcher-Gent. Ces trois types de comportement dynamique sont décrits dans les sections qui suivent. Mais, comme nous considérons un régime quasi-statique dans cette thèse, aucun de ces trois types de comportement ne sera pris en compte dans les modèles hyperélastiques qui seront utilisés dans ce travail.

1. **Comportement viscoélastique**

   Les élastomères sont souvent utilisés dans le domaine antivibratoire pour leur aptitude à dissiper de l'énergie. Ce processus se traduit par une augmentation de la température sous chargement adiabatique. Ainsi, en chargement dynamique, les élastomères ont un comportement élastique caractérisé par un module d'origine entropique et un comportement visqueux plus ou moins visible caractérisé par une viscosité. L'association de ces deux réponses donne un comportement viscoélastique non-linéaire. Le partage entre la réponse élastique et visqueuse dépend étroitement de la fréquence de sollicitation et de la température. L'association de la viscosité et de l'élasticité se traduit par le phénomène de fluage sous déformation constante [25, 77] et d'hystérésis sous déformation cyclique [78].

2. **Effet Payne**

   L'effet Payne, étudié dans le domaine vibratoire, est interprété comme le pro-

cessus de rupture du réseau de charges (c'est-à-dire le réseau de particules solides introduites dans le caoutchouc lors de la vulcanisation) ou par des mécanismes de frottement mis en jeu à l'interface charge-matrice [79]. La Figure 1.7 montre un plateau caoutchoutique aux faibles déformations puis une diminution du module dynamique E' avec l'augmentation de la déformation [80]. Cette décroissance est associée à un maximum du module de perte (Figure 1.7 (b)) traduisant une dissipation d'énergie d'autant plus grande que la décroissance de E' est forte.

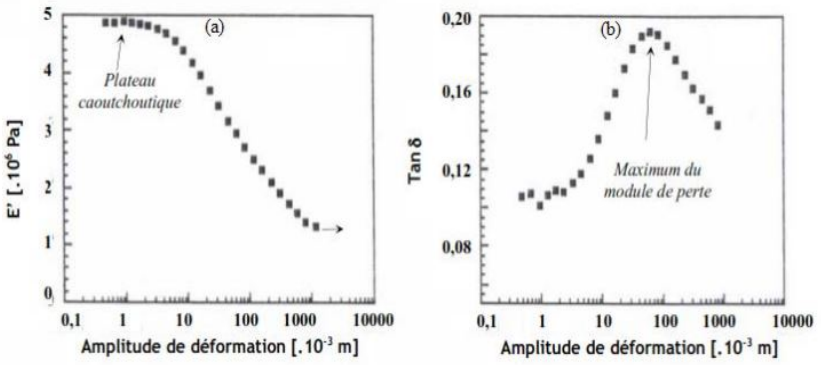

FIGURE 1.7 – Analyse de l'effet de Payne-évolution de propriétés mécaniques en fonction du niveau de déformation pour un élastomère SBR renforcé en silice [81].

L'effet Payne s'amplifie lorsqu'on augmente le taux de particules dans la matrice [82]. Kraus décrit ce phénomène en considérant un taux de rupture dans le réseau de charge proportionnel au nombre de contact entre particules [83].

3. Effet Fletcher-Gent

Il s'agit d'un effet observé par Fletcher et Gent [84] sur l'influence de la fréquence de sollicitation sur la loi de comportement. Ces deux auteurs ont constaté que la rigidité et la dissipation d'énergie du matériau augmentent avec la fréquence. Cet effet a également été étudié par d'autres auteurs dont Bukamel [85].

1.2.4 L'amplification des déformations

Comme nous l'avons signalé plus haut, la présence de noirs de carbone peut provoquer des amplifications de déformations par effet composite.

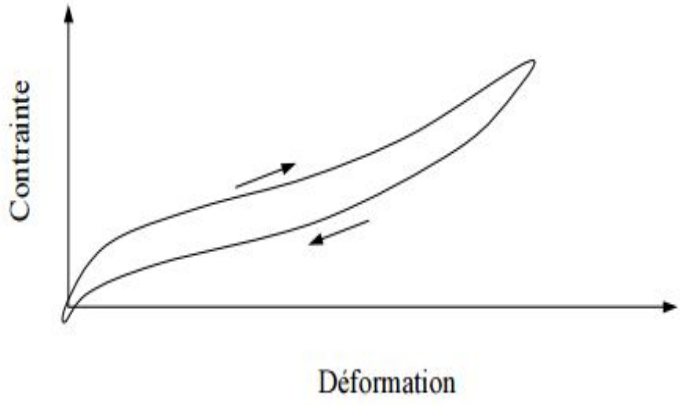

FIGURE 1.8 – Phénomène d'amplification de déformation [86]

La plupart de ces théories dérivent des travaux d'Einstein [87] sur les particules en suspension dans un liquide. Elles considèrent que les déformations macroscopiques peuvent *être* décomposées en déformation de la matrice et en déformations des charges (voir figure 1.8). Les charges (noirs de carbone) étant infiniment rigides devant la matrice polymérique, l'extension des charges λ_f (rapport de la longueur déformée sur la longueur initiale) est considérée égale à 1. La loi de comportement de la matrice étant supposée connue, trouver le comportement du matériau chargé revient à connaitre les déformations réelles de la matrice (λ_r) en fonction des déformations macroscopiques λ du matériau chargé et du taux volumique de charge.

1.3 Mécanique des milieux continus en grandes déformations

Nous introduisons dans cette partie les résultats essentiels du formalisme grandes déformations. En mécanique des grandes transformations, il est important de distinguer la configuration initiale et la configuration actuelle déformée. Les différentes mesures de déformation et de contrainte seront précisées dans chacune de ces configurations. Nous rappelons ensuite certaines propriétés qu'une loi de comportement doit nécessairement

vérifier, telles que l'objectivité et le cas échéant l'isotropie. Enfin, nous rappellerons l'inégalité de Clausius Duhem qui est à la base de l'élaboration des modèles d'énergies avec variables internes.

1.3.1 Description du mouvement

Soit un solide déformable S, évoluant dans un repère R. l'ensemble des particules P constituant le solide déformable occupe, à chaque instant, un ensemble de positions dans l'espace (voir figure 1.9). C'est la configuration du système à l'instant t. Nous utiliserons le même repère pour la configuration initiale et la configuration déformée.

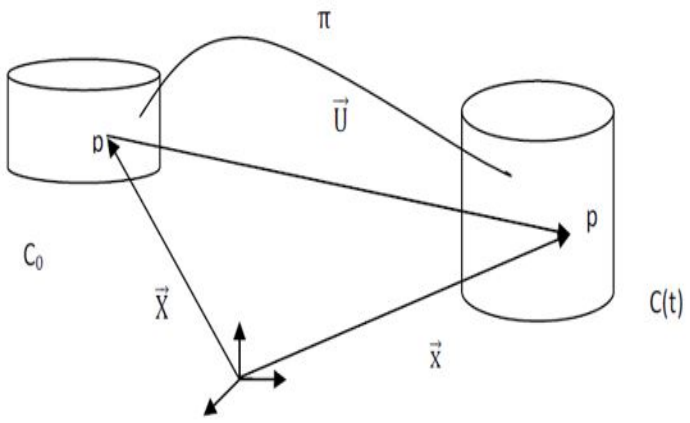

FIGURE 1.9 – Configurations initiale (C_0) et déformée (C(t))

On note C_0 la configuration initiale (où le solide S occupe le volume Ω_0), et la configuration actuelle à l'instant t (ou déformée), où le solide S occupe le volume ω. Le vecteur position de la particule P à l'instant initial est noté $\vec{X}$. On note $\vec{x}$ le vecteur position de cette particule à l'instant t. Le mouvement du milieu continu est alors défini par la donnée de la position χ.

$$\chi = \begin{cases} C_o \rightarrow C(t), \\ \vec{X} \rightarrow \vec{x} = \pi(\vec{X}, t). \end{cases} \tag{1.1}$$

L'équation 1.1 définit la transformation faisant passer de la configuration de référence C_o à la configuration actuelle $C(t)$. Pour caractériser la déformation au voisinage de la particule P, on introduit l'application linéaire tangente au mouvement, Considérons un vecteur $\overrightarrow{dX}$ dans la configuration initiale, sa transformée dans la configuration actuelle s'obtient par la relation 1.2.

$$d\vec{x_1} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} d\vec{X_j} \; de \; mme \; d\vec{X_1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} d\vec{X_j}. \tag{1.2}$$

On définit alors le tenseur gradient $\bar{\bar{F}}$ tel que

$$d\vec{x_1} = \bar{\bar{F}}_{ij} d\vec{X_j} \; avec \; \bar{\bar{F}}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \tag{1.3}$$

$$d\vec{X_1} = \bar{\bar{F}}_{ij}^{-1} d\vec{x_j} \; avec \; \bar{\bar{F}}_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \tag{1.4}$$

$$Donc \; \bar{\bar{F}} = Grad\vec{x} \; et \; \bar{\bar{F}}^{-1} = Grad\vec{X}, \tag{1.5}$$

$\bar{\bar{F}}$ est une application linéaire tangente, permettant de caractériser les diverses transformations. Si on utilise le même repère dans la configuration actuelle et la configuration de référence, il sera bon d'introduire le vecteur déplacement c'est-à-dire

$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X}. \tag{1.6}$$

En combinant le tenseur gradient des déformations 1.5 et le vecteur déplacement 1.6, on obtient le vecteur gradient de déplacement. La première possibilité est de définir la configuration initiale (description lagrangienne)

$$Grad\vec{U} = Grad\vec{x} - Grad\vec{X} = \bar{\bar{F}} - I, \tag{1.7}$$

$$et \; le \; gradient \; \bar{\bar{F}}_{ij} \; sera \; \bar{\bar{F}}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \tag{1.8}$$

$$finalement\ \bar{\bar{F}}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \tag{1.9}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Le tenseur gradient peut également être défini dans la configuration déformée (description Eulérienne), par rapport aux coordonnées spatiales χ_i

$$Grad\vec{U} = Grad\vec{x} - Grad\vec{X} = I - \bar{\bar{F}}^{-1}, \tag{1.10}$$

Ce qui donne l'inverse du tenseur gradient

$$\bar{\bar{F}}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{\partial U_i}{\partial x_i}. \tag{1.11}$$

1.3.2 Description des déformations

Pour caractériser les changements de forme entre les configurations C_0 et $C(t)$, il faut déterminer les variations de longueur et les variations d'angle, ou encore les variations de produit scalaire. On forme donc le produit scalaire de deux vecteurs matériels $d\vec{x}$, $d\vec{y}$ et on examine sa variation en fonction des vecteurs initiaux $d\vec{X}$ et $d\vec{Y}$. Selon la configuration choisie, plusieurs mesures de déformations sont possibles:

Description Lagrangienne.

En Configuration Lagrangienne (configuration C_o), on introduit le tenseur de Cauchy Green droit $C = \bar{\bar{F}}^T\bar{\bar{F}}$ symétrique et défini positif ; qui caractérise les dilatations. Dans le cas où le milieu ne subit aucune transformation, $C = I$. Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est

$$E = \frac{1}{2}(C - I)\ soit\ E = \frac{1}{2}(\bar{\bar{F}}^T\bar{\bar{F}} - I), \tag{1.12}$$

E est un tenseur Lagrangien symétrique en remplaçant $\bar{\bar{F}}_{ij}$ (equation 1.9) on a alors

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}). \tag{1.13}$$

Description Eulérienne.

Dans la configuration actuelle, on introduit le tenseur de Cauchy-Green gauche $B = \bar{\bar{F}}\bar{\bar{F}}^T$ symétrique et défini positif. Ce tenseur des déformations associé est lié à la différence de produit scalaire et le tenseur d'Euler-Almansi

$$A = \frac{1}{2}(I - B^{-1}). \tag{1.14}$$

1.3.3 Vitesse de déformation

Pour caractériser les vitesses, on introduit le vecteur $\vec{V} = d\dot{\vec{x}}$, dérivée par rapport au temps du vecteur position $\vec{x}(X, t)$. On a

$$d\dot{\vec{x}} = \dot{\bar{\bar{F}}} d\vec{X} = \bar{\bar{L}} d\vec{x}, \tag{1.15}$$

$\dot{\bar{\bar{F}}}$ mesure la vitesse de déformation entre la configuration C_o et $C(t)$. $\bar{\bar{L}} = \dot{\bar{\bar{F}}}\bar{\bar{F}}^{-1}$ est le tenseur eulérien gradient des vitesses. En notation indicielle, on a

$$d\dot{\vec{x}} = L_{ij} dx_j. \tag{1.16}$$

La relation entre $\bar{\bar{L}}$ et $\bar{\bar{F}}$ s'obtient de la manière suivante

$$L_{ij} = \frac{\partial \nu_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \dot{F_{ik}} F_{kj}^{-1}. \tag{1.17}$$

La décomposition de $\bar{\bar{L}}$ en partie symétrique et antisymétrique permet de définir le tenseur taux de déformation D, et le tenseur taux de rotation W

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2}(I + L^T), \\ \omega = \frac{1}{2}(I - L^T). \end{cases} \tag{1.18}$$

Le tenseur ω correspond au rotationnel du champ des vitesses $\vec{V}$, et décrit donc la vitesse de rotation du solide, tandis que D décrit la vitesse de déformation. On peut écrire

$$\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{y}) = 2d\vec{x}.D.d\vec{y}. \tag{1.19}$$

Ce qui montre que D mesure la vitesse de déformation dans la configuration C(t). La vitesse de déformation dans la configuration initiale s'obtient par différentiation du produit scalaire. On obtient ainsi

$$\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{y}) = 2d\vec{X}.\dot{E}.d\vec{Y}. \tag{1.20}$$

Les vitesses de déformations sont ainsi mesurées par:

- $\dot{F}$ entre la configuration C_0 et $C(t)$;
- $E = \dot{F}^T dF$ dans la configuration C_0 ;
- D dans la configuration C(t).

1.3.4 Description des contraintes.

Les contraintes sont caractérisées par des efforts intérieurs à travers un élément de surface relatif à une configuration donnée [88]. Suivant le choix de la configuration pour la mesure de l'éffort et de la surface, on pourra avoir une description Eulérienne, Lagrangienne ou mixte des contraintes.

1. **Description Eulérienne.**

   Le tenseur des contraintes le plus naturel est le tenseur, qui est un tenseur Eulérien. Il est défini par:

$$\vec{t} = \sigma\vec{n}, \tag{1.21}$$

   $\vec{t}$ est l'effort mesuré par unité de surface définie dans la configuration actuelle, s'appliquant sur l'élément de surface dS de normale extérieure $\vec{n}$. L'effort résultant agissant

sur l'élément est noté $d\vec{f}$. Cet effort est

$$d\vec{f} = \vec{t}dS \; donc \; d\vec{f} = \sigma\vec{n}dS. \tag{1.22}$$

2. Description Lagrangienne.

Pour avoir un tenseur complètement défini en fonction des variables Lagrangiennes, on transporte la force $d\vec{f}$ agissant sur le volume actuel vers la configuration initiale non déformée suivante

$$d\vec{f_o} = \bar{\bar{F}}^{-1}d\vec{f}. \tag{1.23}$$

On a une force $d\vec{f_o}$ qui n'a aucune signification physique agissant sur la surface initiale. Le tenseur de Piola Kirchhoff II est alors défini de la manière suivante

$$d\vec{f_o} = S\vec{N}dS_o, \tag{1.24}$$

S n'a aucune signification physique mais il est symétrique, et purement Lagrangien. On a la relation suivante entre le tenseur de Cauchy et le tenseur de Piola Kirchhoff

$$\sigma = \frac{1}{J}(\bar{\bar{F}}S\bar{\bar{F}}^T). \tag{1.25}$$

3. Description mixte.

On peut lier la force élémentaire $d\vec{f}$ de la configuration C(t) à l'élément d'aire dS_o de la configuration C_o par la relation

$$d\vec{f} = \vec{T}dS_o. \tag{1.26}$$

Il s'agit d'une description mixte. Le vecteur $\vec{T}$ représente le vecteur de contrainte de Piola Kirchhoff ou de Boussinesq [89]. $\vec{T}$ mesure la force par unité de surface définie dans la configuration de référence. Le vecteur $\vec{T}$ agit sur la configuration actuelle,

contrairement aux vecteurs contraintes de Cauchy, il est fonction des positions $\vec{X}$ et de la normale $\vec{N}$ à la frontière du domaine. Le tenseur de contraintes associé est le premier tenseur de Piola Kirchhoff P tel que

$$d\vec{f} = \vec{T}dS_o = P\vec{N}dS_o. \tag{1.27}$$

Tout comme $\bar{\bar{F}}$, ce tenseur P n'est ni Lagrangien, ni Eulérien, On parle alors de tenseur mixte. P est relié au tenseur de Cauchy par la relation suivante

$$J\sigma = P\bar{\bar{F}}^T oJ = det(\bar{\bar{F}}). \tag{1.28}$$

P n'est pas symétrique. Il aura dans le cas général 9 composantes indépendantes.

1.3.5 Hypothèse des petites perturbations

L'hypothèse des petites perturbations consiste à supposer que le déplacement $\vec{U}$ est petit. On peut donc confondre C_o et $C(t)$; $\vec{X}$ et $\vec{x}$. On suppose que $grad\vec{U}$ est petit, ce qui conduit à négliger les termes du second ordre dans le gradient des déplacements. Les tenseurs de déformation E et A se réduisent à ε.

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} = A_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}), \tag{1.29}$$

ε_{ij} Correspond à la partie linéaire de tenseur des déformations E et A. De même, les différents tenseurs des contraintes P, S ou σ s'identifient en petites perturbations au tenseur de Cauchy.

1.3.6 Thermodynamique des milieux continus

Sous l'hypothèse de l'état local, la loi de comportement est construite de manière phénoménologique en partant de l'inégalité de Clausius-Duhem [86] que l'on obtient

à partir du premier et second principe de la thermodynamique. En introduisant l'énergie libre spécifique de Helmholtz ω, l'inégalité de Clausius-Duhem traduit la positivité de la dissipation d'énergie. Le premier principe de la thermodynamique traduit la conservation de l'énergie totale. Le second principe traduit l'inégalité fondamentale du bilan d'entropie. En introduisant l'énergie libre de Helmholtz, on obtient l'expression de l'inégalité de Clausius-Duhem dans différentes configurations eulérienne, mixte et lagrangienne [90]

$$\begin{cases} \phi_o = -\rho_o(\dot{\psi} - S\dot{T}) - \frac{Q.GradT}{T} + P : \dot{F} \leq 0 \; en\; configuration\; mixte, \\ \phi_o = -\rho_o(\dot{\psi} - S\dot{T}) - \frac{Q.GradT}{T} + S : \dot{E} \leq 0 \; en\; configuration\; initiale, \\ \phi = -\rho_o(\dot{\psi} - S\dot{T}) - \frac{q.GradT}{T} + \sigma : D \leq 0 \; en\; configuration\; actuelle, \end{cases} \tag{1.30}$$

où ϕ_o et ϕ représentent respectivement la dissipation énergétique en configuration initiale et en configuration actuelle ; ψ est l'énergie libre spécifique de Helmoltz ; Q et q représentent les vecteurs flux de chaleur ; T est la température absolue et S l'entropie. L'énergie de déformation par unité de volume initial s'écrit:

$$W = \rho_o \psi. \tag{1.31}$$

Les inégalités de Clausius-Duhem du système (1.30) constituent un outil de construction des lois de comportement. Cette construction consiste à écrire l'énergie libre spécifique en fonction des variables introduites pour représenter les phénomènes observés. Ainsi, pour construire une loi de comportement, on doit:

- **Définir les variables d'état.**

  En effet l'axiome de l'état local postule que l'état du matériau est entièrement défini par la connaissance à un instant donné des valeurs des variables observables (température, déformations F, E ou B suivant la description privilégiée) et des variables internes qui sont introduites pour décrire des phénomènes complexes tels que la dissipation et l'endommagement ;

- **Postuler l'existence d'une fonction d'énergie thermodynamique W qui dépend des variables observables et des variables internes.**

  C'est de ce potentiel d'énergie que dérive la loi de comportement ;

- **Postuler l'existence d'un pseudo potentiel de dissipation ϕ fonction des variables de flux pour décrire l'évolution des variables associées aux processus dissipatifs.**

  L'ensemble de ces hypothèses conduit à un système d'équations dont la résolution donne l'écriture des lois de comportement.

1.4 Loi de comportement hyperelastique

Un matériau est dit élastique si le tenseur des contraintes de Cauchy à un instant t dépend uniquement de l'état de déformation à ce même instant (hypothèse de Cauchy). Il est considéré comme hyperélastique si, en plus, on considère un état de grande déformation. En particulier, nous rappelons qu'un comportement hyperélastique est défini en négligeant l'effet thermique et la dissipation interne de l'énergie dans les inégalités de Clausius-Duhem. Sur cette base, les lois de comportement des essais de traction uniaxiale, équibiaxiale, de cisaillement pur et simple sont développées. Green [45] suppose l'existence d'une fonction densité d'énergie W définie par l'expression de l'équation 1.31. Cette densité d'énergie est indispensable pour modéliser le comportement des matériaux hyperélastiques. Dans le cas d'un matériau isotrope (c'est-à-dire possédant les mêmes propriétés dans toutes les directions), l'énergie peut de surcroît être exprimée en fonction des trois invariants principaux du tenseur de Cauchy-Green C

$$W = W(I_1, I_2, I_3), \tag{1.32}$$

$$I_1 = tr(C);\ I_2 = \frac{1}{2}[(tr(C))^2 - tr(C^2)];\ I_3 = det(C), \tag{1.33}$$

où I_i et $i = 1, 2, 3$ représentent les invariants de C et de B. Soit S le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff défini par l'équation (1.34) ci-dessous

$$S = 2\frac{\partial W}{\partial C} = 2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial W}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial C}. \tag{1.34}$$

Les dérivations des invariants I_i par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit C permettent d'obtenir l'équation 1.35

$$\frac{\partial I_1}{\partial C} = I;\ \frac{\partial I_2}{\partial C} = I_1 I - C;\ \frac{\partial I_3}{\partial C} = I_3 C^{-1}. \tag{1.35}$$

En remplaçant (1.35) dans l'équation (1.34), on obtient

$$S = 2[(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2})I - \frac{\partial W}{\partial I_2}C + I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}C^{-1}]. \tag{1.36}$$

En remplaçant (1.36) dans l'équation (1.25), on obtient

$$\sigma = \frac{2}{J}[(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2})B - \frac{\partial W}{\partial I_2}B^2 + I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}I]. \tag{1.37}$$

Si on considère le théorème de Cayley-Hamilton [89]

$$B^3 - I_1 B^2 + I_2 B - I_3 I = 0 \qquad et \qquad B^2 = I_1 B - I_2 I + I_3 B^{-1}. \tag{1.38}$$

En introduisant l'équation 1.38 dans 1.37 on obtient l'équation 1.39

$$\sigma = \frac{2}{J}[(I_2\frac{\partial W}{\partial I_2} + I_3\frac{\partial W}{\partial I_3})I + \frac{\partial W}{\partial I_1}B - I_3\frac{\partial W}{\partial I_2}B^{-1}]. \tag{1.39}$$

1.4.1 Condition d'incompressibilité.

La déformation des matériaux caoutchouteux se fait à volume pratiquement constant, ce qui traduit la conservation du volume au cours de la déformation. Cette

propriété est prise en compte en considérant que le Jacobien J du tenseur gradient de déformation F est égal à 1

$$J = det(F) = 1. \tag{1.40}$$

Les déformations qui conservent le volume du solide n'étant pas entièrement libres, la cinématique de telles déformations sont soumises à certaines restrictions. On parle de liaisons internes. Pour tenir compte de ces liaisons, il faut ajouter à la forme générale de la loi de comportement une contrainte a priori indéterminée sous la forme d'une pression hydrostatique p jouant le rôle d'un multiplicateur de Lagrange

$$\sigma = \gamma(F) - PI. \tag{1.41}$$

L'aménagement des équations (1.36) et (1.37), en tenant compte de la formulation (1.41) et en supposant que W ne dépend que de I_1 et I_2, s'écrit

- **en configuration de référence**

$$S = 2[(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2})I - \frac{\partial W}{\partial I_2}C] - PC^{-1}. \tag{1.42}$$

- **en configuration actuelle**

$$\sigma = 2[(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2})B - \frac{\partial W}{\partial I_2}B^2] - PI. \tag{1.43}$$

Notons aussi que, lorsque l'énergie de déformation est exprimée en fonction des valeurs propres du tenseur gradient de déformation F, les composantes du tenseur de Cauchy sont déterminées par la relation suivante [91]

$$\sigma_i = \lambda_i\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - P\ .avec\ i = 1, 2, 3 \tag{1.44}$$

1.4.2 Application à différents cas de sollicitation

Dans cette partie, on va s'intéresser à différents types de sollicitations conduisant à des déformations homogènes. Cela signifie que le déplacement dépend des variables spatiales de manière affine, ce qui fournit des tenseurs de déformations et de contraintes constants en espace. Les déformations homogènes sont intéressantes à étudier car elles correspondent à des conditions classiques d'expérimentation. Elles permettent ainsi d'identifier les paramètres matériaux en corrélant les calculs théoriques aux mesures expérimentales. Elles permettent en outre d'exhiber des solutions analytiques qui sont utiles pour valider des solutions numériques par éléments finis.

1. **Traction uniaxiale.**

   La sollicitation en traction uniaxiale consiste à étirer suivant une direction une face d'une éprouvette de section carré comme l'illustre la Figure 1.10. Les autres facettes libres de l'éprouvette ne subissent pas d'effort extérieur et sont en état de contraintes nulles.

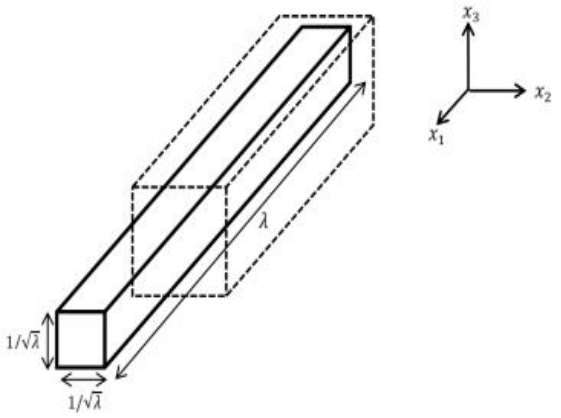

FIGURE 1.10 – Sollicitation en traction uniaxiale.

Dans le repère lié à l'éprouvette et suivant la direction d'extension, les élongations

principales dans ce mode de sollicitation s'écrivent

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda_3. \tag{1.45}$$

En tenant compte de l'incompressibilité ($\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$), la matrice F du tenseur gradient de déformation s'écrit

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}. \tag{1.46}$$

On déduit le tenseur de Cauchy-Green gauche B à partir du tenseur gradient de déformation de l'équation (1.46)

$$B = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

Les invariants définis à l'équation (1.33) s'écrivent alors dans le cas de la traction uniaxiale

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}; I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda; I_3 = 1. \tag{1.48}$$

En remplaçant les tenseurs B et B^2 de l'équation (1.47) et les invariants de l'équation (1.48) dans l'équation (1.43), on obtient les trois composantes σ_1, σ_2 et σ_3 du tenseur des contraintes de Cauchy qui est diagonal, dans ce cas

$$\sigma_1 = 2\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 4\lambda \frac{\partial W}{\partial I_2} - P, \tag{1.49}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda) \frac{\partial W}{\partial I_2} - P. \tag{1.50}$$

Compte tenu des conditions de chargement sur les faces libres d'effort, les composantes σ_2 et σ_3 du tenseur σ sont égales à zero, ce qui permet de déterminer P à partir de la seconde égalité de l'équation (1.50). En remplaçant p dans l'expression de σ_1, on obtient la loi de comportement pour un cas de chargement uniaxial homogène

$$\sigma_1 = 2(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2})(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial W}{\partial I_2}). \tag{1.51}$$

En compression uniaxiale, la forme analytique de la loi de comportement demeure la même que pour la traction uniaxiale (équation 1.51).

2. Traction équibiaxiale

La traction équibiaxiale consiste à étirer un échantillon simultanément dans deux directions, tandis que la troisième direction est libre. La sollicitation en traction équibiaxiale est illustrée sur la Figure 1.11.

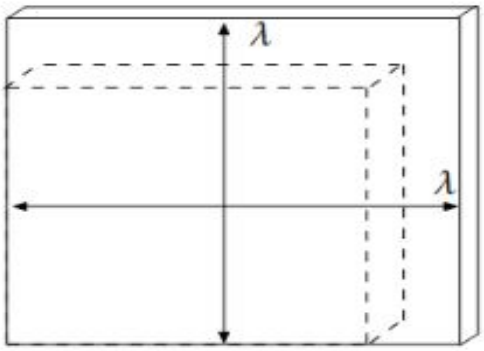

FIGURE 1.11 – Sollicitation en traction équibiaxiale.

En considérant la condition d'incompressibilité, le tenseur gradient des déformations

F s'écrit alors

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_1}^{-1}{\lambda_2}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1.52}$$

On en déduit le tenseur de Cauchy-Green gauche B

$$B = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_1}^{-2}{\lambda_2}^{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^4 & 0 \\ 0 & 0 & {\lambda_1}^{-4}{\lambda_2}^{-4} \end{pmatrix}. \tag{1.53}$$

Les invariants définis par l'équation (1.33) s'écrivent alors dans le cas de la traction biaxiale

$$I_1 = {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + \frac{1}{{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2}; I_2 = {\lambda_1}^2{\lambda_2}^2 + \frac{1}{{\lambda_1}^2} + \frac{1}{{\lambda_2}^2}; I_3 = 1. \tag{1.54}$$

En reportant les tenseurs B et B^2 de l'équation (1.53) et les invariants de l'équation (1.54) dans l'équation (1.43), on obtient les trois composantes σ_1, σ_2 et σ_3 du tenseur des contraintes de Cauchy

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2[\frac{\partial W}{\partial I_1} + ({\lambda_2}^2 + {\lambda_1}^{-2}{\lambda_2}^{-2})\frac{\partial W}{\partial I_2}]{\lambda_1}^2 - P, \\ \sigma_2 = 2[\frac{\partial W}{\partial I_1} + ({\lambda_1}^2 + {\lambda_1}^{-2}{\lambda_2}^{-2})\frac{\partial W}{\partial I_2}]{\lambda_2}^2 - P, \\ \sigma_3 = 2[\frac{\partial W}{\partial I_1} + ({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)\frac{\partial W}{\partial I_2}]{\lambda_1}^{-2}{\lambda_2}^{-2} - P. \end{cases} \tag{1.55}$$

En faisant l'hypothèse classique de contrainte plane $\sigma_3 = 0$, on déduit le multiplicateur p de la troisième équation de (1.55)

$$P = 2[\frac{\partial W}{\partial I_1} + ({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2)\frac{\partial W}{\partial I_2}]{\lambda_1}^{-2}{\lambda_2}^{-2}. \tag{1.56}$$

En reportant le p obtenu dans les deux premières équations de (1.55), on obtient

$$\sigma_1 = 2({\lambda_1}^2 - \frac{1}{{\lambda_1}^2}{\lambda_2}^2)(\frac{\partial W}{\partial I_1} + {\lambda_2}^2\frac{\partial W}{\partial I_2}); \sigma_2 = 2({\lambda_2}^2 - \frac{1}{{\lambda_1}^2}{\lambda_2}^2)(\frac{\partial W}{\partial I_1} + {\lambda_1}^2\frac{\partial W}{\partial I_2}). \quad (1.57)$$

Dans le cas d'une traction équibiaxiale, l'étirement est le même dans les deux directions, c'est-à-dire que $\lambda_1 = \lambda_2$. À partir de l'équation (1.57), cette particularité implique

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2({\lambda_1}^2 - \frac{1}{{\lambda_1}^4})(\frac{\partial W}{\partial I_1} + {\lambda_1}^2\frac{\partial W}{\partial I_2}). \quad (1.58)$$

3. Cisaillement pur.

Le cisaillement pur correspond à un essai de traction uniaxiale en déformation plane comme illustré sur la Figure 1.12.

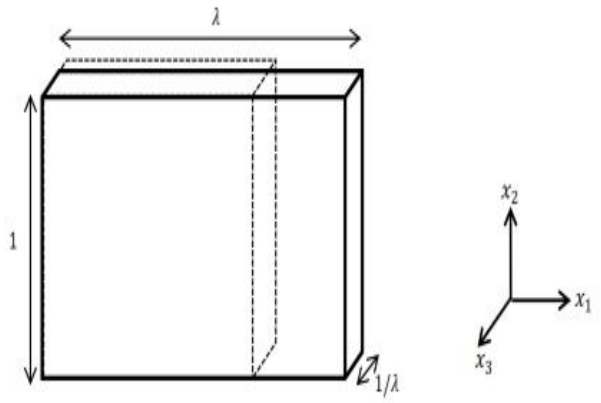

FIGURE 1.12 – Sollicitation en cisaillement pur.

Les élongations principales dans ce mode de sollicitation s'écrivent

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1 \quad et \quad \lambda_3 = \lambda^{-1}. \quad (1.59)$$

Le tenseur gradient de déformation F s'écrit

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1.60}$$

On déduit le tenseur de Cauchy-Green gauche B à partir du tenseur de déformation de l'équation (1.60)

$$B = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-4} \end{pmatrix}. \tag{1.61}$$

Les trois invariants tels que définis à l'équation (1.33) pour ce mode de sollicitation deviennent

$$I_1 = I_2 = 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}; I_3 = 1. \tag{1.62}$$

En remplaçant les expressions des tenseurs B et B^2 de l'équation (1.61) et des invariants de l'équation (1.62) dans l'équation (1.43), on obtient les trois composantes du tenseur des contraintes de Cauchy en cisaillement

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(1+\lambda^2)\frac{\partial W}{\partial I_2} - P, \\ \sigma_2 = 2\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2)\frac{\partial W}{\partial I_2} - P, \\ \sigma_3 = \frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(1+\frac{1}{\lambda^2})\frac{\partial W}{\partial I_2} - P. \end{cases} \tag{1.63}$$

L'hypothèse des contraintes planes nous permet d'écrire

$$\sigma_3 = 0 \Rightarrow P = \frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(1+\frac{1}{\lambda^2})\frac{\partial W}{\partial I_2}. \tag{1.64}$$

En reportant l'équation (1.64) dans les deux premières égalités de l'équation (1.63), on obtient les composantes σ_1 et σ_2 du tenseur de contrainte de Cauchy

$$\sigma_1 = 2(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2})(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}); \sigma_1 = 2(1 - \frac{1}{\lambda^2})(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}). \tag{1.65}$$

4. Cisaillement simple

L'essai de Cisaillement simple est illustré sur la Figure 1.13.

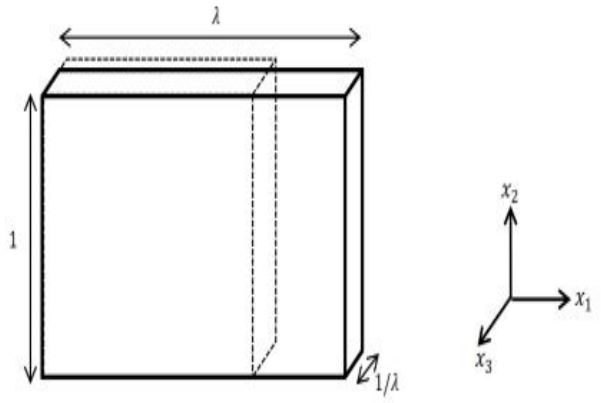

FIGURE 1.13 – Sollicitation en Cisaillement simple.

Le tenseur gradient de déformation pour ce mode de sollicitation s'écrit

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.66}$$

où γ représente l'angle de glissement. Le tenseur de Cauchy-Green gauche B est déduit de l'expression de l'équation (1.66)

$$B = \begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} (1+\gamma^2)^2+\gamma^2 & \gamma(2+\gamma^2) & 0 \\ \gamma(2+\gamma^2) & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.67}$$

Contrairement aux trois cas de sollicitation traitées précédemment, on remarque que les matrices F, B et B^2 ne sont plus diagonales. Les trois invariants du tenseur de Cauchy-Green s'écrivent

$$I_1 = I_2 = 3+\gamma^2; I_3 = 1. \tag{1.68}$$

En remplaçant les expressions des équations 1.67 et 1.68 dans l'équation (1.43), on obtient les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy en Cisaillement simple

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2[(1+\gamma^2)^2\frac{\partial W}{\partial I_1} + (2+\gamma^2)\frac{\partial W}{\partial I_2}] - P, \\ \sigma_2 = 2[\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}] - P, \\ \sigma_3 = 2[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (2+\gamma^2)\frac{\partial W}{\partial I_2}] - P, \\ \sigma_3 = 2[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}]. \end{cases} \tag{1.69}$$

Ainsi, contrairement aux trois cas traités précédemment, du fait que les déformations sont non diagonales, on voit apparaître une contrainte de cisaillement σ_{12} non nulle. En utilisant une hypothèse de contrainte plane (par rapport à la direction perpendiculaire au plan de cisaillement), on déduit le multiplicateur de Lagrange p de la troisième équation de (1.69) : $P = 2[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (2+\gamma^2)\frac{\partial W}{\partial I_2}]$. En reportant p dans les deux premières équations de (1.69), on obtient facilement

$$\sigma_1 = 2\gamma^2\frac{\partial W}{\partial I_1}; \sigma_2 = -2\gamma^2\frac{\partial W}{\partial I_2}; \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\gamma\left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\right]. \tag{1.70}$$

Finalement, comme on vient de le voir, au travers des divers exemples traités, la connaissance du comportement d'un matériau hyperélastique revient à connaître la fonction densité d'énergie W. La discussion sur la détermination de cette densité (comment l'établir ? comment la valider ? comment discriminer les différentes densités entre elles ?) fait l'objet de la fin de ce premier chapitre.

1.5 Densité d'énergie de déformation (W)

La mise en équations des relations contraintes-déformations pour différents modes de déformation rencontrées expérimentalement est relativement simple. La difficulté réside désormais dans la détermination de la forme de la fonction densité d'énergie de déformation W permettant d'évaluer au mieux les contraintes pour chaque mode rencontré. Ainsi, des formes très variées de la fonction W sont rencontrées dans la littérature. Certaines ont été élaborées à partir des considérations phénoménologiques, cherchant à reproduire d'un point de vue purement mathématique les données expérimentales sans chercher à donner un sens physique aux constantes matérielles. Cette approche revient à considérer le matériau comme une boîte noire et à rechercher la fonction W reproduisant son comportement macroscopique. Ce type d'approche peut *être* décomposé en deux sous-types. Le premier consiste à trouver une forme mathématique générale (décomposition en séries mathématiques en I_1 et I_2 ou en λ_i) reproduisant au mieux les expériences. Le deuxième consiste à rechercher directement les formes mathématiques des fonctions $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ à partir d'expériences controlant plus ou moins indépendamment les invariants I_1 et I_2.

Une autre approche (moléculaire) dans la littérature consiste à établir un modèle microscopique du réseau de chaînes polymériques et de construire le modèle macroscopique en intégrant des considérations physiques traitées de manière statistique.

1.5.1 Les modèles phénoménologiques.

1. **Le modèle de Mooney (1940)**

   Ce modèle, établi par Mooney [16], part du constat que le comportement du caoutchouc est linéaire en cisaillement simple. Mooney écrit alors W sous la forme

$$W_{Mo} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3), \tag{1.71}$$

   avec C_{10} et C_{01} les paramètres matériau. Ce modèle est bien adapté pour représenter les essais de Treloar sur le caoutchouc naturel pour des déformations modérées (inférieures à 300%).

2. **Le modèle de Rivlin (1948)**

   Le modèle de Rivlin consiste à généraliser l'écriture du modèle de Mooney comme une série polynomiale en $(I_1 - 3)$ et $(I_2 - 3)$ [92]. L'avantage de ce modèle est que l'on peut tronquer son écriture pour caractériser une sollicitation plus précise

$$W_{Ri} = \Sigma_{p,q=0}^{\infty} C_{pq}(I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q, \tag{1.72}$$

   C_{pq} désigne les paramètres matériau écris sous une forme généralisée.

3. **Le modèle de Isihara et al (1951)**

   Isihara reprend la théorie de distribution non gaussienne des chaînes et utilise la linéarisation de certaines équations [2]. Il construit ainsi un modèle de forme similaire à la série de Rivlin où W s'écrit

$$W_{Isi} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2. \tag{1.73}$$

   Son modèle est cependant développé en termes d'extensions principales et les paramètres C_{20} et C_{10} sont, en fait, liés entre eux. Ce modèle se rapproche des modèles phénoménologiques de Bidermann [14] et de Mooney-Rivlin [2]. Il permet de mieux

reproduire les comportements en extension équibiaxiale mais, contrairement au modèle de Bidermann [14], il ne permet pas de prendre en compte le raidissement final de la courbe de traction.

4. Le modèle de Gent et Thomas (1958)

Il permet de couvrir une zone de déformation un peu plus large, ce modèle mets surtout en valeur les effets du second invariant I_2 [21]. La forme d'énergie proposée par Gent et Thomas est

$$W_{GT} = K_1(I_1 - 3) + K_2 ln\frac{I_2}{3}, \tag{1.74}$$

K_1 et K_2 représentent les paramètres, Ce modèle ne s'avère cependant pas plus performant que le modèle de Mooney [16] pour reproduire les essais de Treloar.

5. Le modèle de Bidermann (1958)

Bidermann néglige les termes croisés du modèle précédent et prend une forme tronquée du modèle de Mooney-Rivlin à l'ordre 3 en I_1 et à l'ordre 1 en I_2 [14]

$$W_{Bi} = C_{10}(I_1 - 3) + \frac{C_{20}}{2}(I_1 - 3)^2 + \frac{C_{30}}{3}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3). \tag{1.75}$$

Ce modèle ne reproduit pas les courbes expérimentales de Treloar avec le même jeu de paramètre.

6. Le modèle de Hart-Smith (1966)

Hart-Smith constate, comme Rivlin et Saunders que $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ est constant pour des valeurs de I_1 inférieures à 12, mais que ce terme augmente ensuite de manière significative pour des valeurs de I_1 supérieures à 12 [23]. Il propose alors le modèle suivant

$$W_{HS} = C\int e^{\beta(I_1-3)^2} dI_1 + K ln\frac{I_2}{3}. \tag{1.76}$$

Ce modèle est adapté pour un niveau important de déformation supérieur à 500%

7. Le modèle de Fung (1967)

Le modèle de Fung s'écrit sous la forme exponentielle en tenant compte seulement du premier invariant I_1

$$W_{Fu} = C(e^{\beta(I_1-3)} - 1). \tag{1.77}$$

Ce modèle ne donne aucune information sur le raidissement final.

8. Le modèle de Alexander (1968)

Le modèle de Alexander est un modèle adapté pour des déformations modérées (550%) [93]

$$W_{Fu} = C \int e^{\beta(I_1-3)^2} dI_1 + C_2 ln \frac{I_2 - 3 + \gamma}{\gamma} + C_3(I_2 - 3). \tag{1.78}$$

9. Le modèle de Veronda et Westmann (1970)

Veronda et Westmann proposent une nouvelle écriture d'un modèle d'énergie en écrivant le premier terme de Mooney [16] sous une forme exponentielle [94]

$$W_{VW} = C_1(e^{\beta(I_1-3)} - 1) - C_2(I_2 - 3). \tag{1.79}$$

Ce modèle ne reproduit pas avec le jeu de paramètre les courbes expérimentales de Treloar.

10. Le modèle de Ogden (1972)

En 1972, Ogden introduit l'idée que W peut s'exprimer en termes de déformations généralisées et introduit une forme mathématique en série de puissances réelles, Il propose alors un modèle à 6 constantes pour reproduire les essais de Treloar avec une bonne précision en traction uniaxiale, en extension équibiaxiale et en

cisaillement pur [18]

$$W_{Og} = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mu_p}{\alpha_p}(\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3). \tag{1.80}$$

Cependant, toutes les valeurs possibles de μ_p et α_p ne sont pas possibles. Ainsi, pour que W puisse assurer une réponse physique raisonnable, il convient de vérifier qu'elle est définie positive pour toutes déformations non nulles. Ogden montre qu'il est suffisant de considérer

$\mu_p \times \alpha_p > 0$ pour $p = 1, 2...N$.

11. James et al. (1975)

Le modèle de James et al. consiste à tronquer le modèle généralisé de Mooney-Rivlin généralisé à 3 termes comme une série polynomiale, mais cette fois-ci en considérant les termes croisés $(I_1 - 3)$ et $(I_2 - 3)$ [95]

$$W_{Jaetal} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3. \tag{1.81}$$

Ce modèle ne reproduit pas la courbe équibiaxiale de Treloar.

12. Takamizawa et Hayashi (1987)

Takamizawa et Hayashi, définissent un modèle en considérant une fonction logarithmique définie dans l'intervalle]0; 1] comme une foncion inverse [96]. L'expression de cette fonction est la suivante

$$W_{TH} = -Cln(1 - (\frac{I_1 - 3}{I_m - 3})^2). \tag{1.82}$$

Ce modèle ne reproduit reproduit pas le raidissement final.

13. Yeoh (1990)

Le modèle phénoménologique de Yeoh, appliqué à des élastomères chargés en noir de carbone, est issu de la constatation expérimentale que $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ est négligeable

[58]. Yeoh a alors fait l'hypothèse simplificatrice $\frac{\partial W}{\partial I_2} = 0$ et a proposé une énergie de déformation à 3 coefficients, où le second invariant n'apparaît pas. L'énergie de déformation de Yeoh s'écrit alors

$$W_{Ye1990} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3. \tag{1.83}$$

Ce modèle ne reproduit reproduit pas le raidissement final.

14. Yeoh (1993)

En 1993, Yeoh propose une autre expression de modèle d'énergie phénoménologique, dans cette nouvelle écriture, l'auteur ajoute à son modèle de 1990 une autre expression sous la forme exponentielle [97]. Ainsi, la nouvelle expression est alors

$$W_{Ye1993} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + K(1 - e^{\frac{-H(I_1-3)}{\delta}}). \tag{1.84}$$

Ce modèle ne reproduit reproduit pas le raidissement final.

15. Gent (1996)

En 1996 Gent a proposé une forme empirique d'énergie de déformation [22]

$$W_{Ge} = -\frac{\mu}{2}(I_m - 3)ln(1 - (\frac{I_1 - 3}{I_m - 3})), \tag{1.85}$$

où E et I_m sont les deux paramètres matériau du modèle. I_m représente la valeur maximale que peut atteindre $I_1 - 3$ donc la limite d'extensibilité du matériau. Ceci est une représentation phénoménologique de la limité d'extensibilité des chaînes

16. Yeoh et Fleming (1997)

En 1997, Yeoh et Fleming ajoute à l'expression de la fonction exponentielle de Yeoh parue en 1993 l'expression de Gent précédemment citée [98]. Ainsi, cette

énergie prend alors la forme suivante

$$W_{Ge} = \frac{F}{H}\delta(1 - e^{\frac{-H(I_1-3)}{\delta}}) - D(I_m - 3)ln(1 - (\frac{I_1 - 3}{I_m - 3})). \tag{1.86}$$

Ce modèle ne reproduit reproduit pas le raidissement final.

17. Lambert-Diani et Rey (1999)

Lambert-Diani et Rey propose en 1999, un modèle d'énergie qui s'écrit cette fois comme la somme d'une fonction intégrale sous une forme exponentielle et logarithmique [30]. Avec ce modèle, l'énergie n'est pas nulle pour $I_2 = 3$

$$W_{LR} = C\int exp(\sum_{p=0}^{N} a_p(I_1 - 3)^p)dI_1 + \int exp(\sum_{p=0}^{N} b_p(lnI_2)^p)dI_2. \tag{1.87}$$

Le modèle ne reproduit pas les données expérimentales du cisaillement pur.

18. Haupt et Sedlan (2001)

En 2001 Haupt et Sedlan proposent une nouvelle expression de modèle d'énergie qui s'écrit encore comme serie de Mooney-Rivlin tronquée [99]. Ce modèle d'énergie s'écrit de la forme suivante

$$W_{HS} = C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{11}(I_1-3)(I_2-3)+C_{02}(I_2-3)^2+C_{30}(I_1-3)^3 \tag{1.88}$$

Le modèle ne reproduit pas les données expérimentales du cisaillement pur.

19. Pucci et Saccomandi (2002)

La densité d'énergie du modèle de Pucci-Saccomandi [100], provient de la combinaison du modèle de Gent et du second terme du modèle de Gent et thomas. Ce modèle adopte la forme suivante

$$W_{PS} = Kln\frac{I_2}{3} - \frac{\mu}{2}(I_m - 3)ln(1 - (\frac{I_1 - 3}{I_m - 3})), \tag{1.89}$$

où μ, I_m et K sont les paramètres matériau du modèle. Le modèle ne reproduit pas les données expérimentales de la traction équibiaxiale et du cisaillement pur.

20. Beda et Chevalier (2003)

T. Beda et Y. Chevalier proposent la formulation de l'énergie de déformation qui est une combinaison du modèle d'ogden avec le second terme du modèle de Gent-Thomas [35]. Cette énergie se présente sous la forme suivante

$$W_{BC} = K_2 ln\frac{I_2}{3} + \frac{\mu}{\alpha}(\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha - 3). \tag{1.90}$$

Ce modèle ne reproduit pas les courbes expérimentales avec le même jeu de paramètre.

21. Beda (2005)

En 2005, T. Beda propose une nouvelle forme d'énergie qui tient compte des puissances [101]. L'expression de cette densité d'énergie est donnée par

$$W_{Be2005} = \frac{C_1}{\alpha}(I_1 - 3)^{0.\alpha} + C_2(I_1 - 3) + \frac{C_3}{\beta}(I_1 - 3)^{1+\beta} + \frac{K}{\gamma}(I_2 - 3)^{0.\gamma}. \tag{1.91}$$

Dans cette expression, les conditions suivantes sont définies par l'auteur

$0 < \alpha < 1$

$0 < \beta < 1$

$1 < \gamma$

Ce modèle ne reproduit pas les courbes expérimentales avec le même jeu de paramètre.

22. Amin et al. (2006)

Le modèle de Amin et al. est une forme généralisée de Mooney-Rivlin, ce modèle est plus adapté dans la caractérisation des matériaux hyperelastiques en

traction simple [25]. L'expression du modèle est la suivante

$$W_A = C_{10}(I_1 - 3) + C_{(N+1)0}(I_1 - 3)^{N+1} + C_{(M+1)0}(I_1 - 3)^{M+1} + C_{01}(I_2 - 3), \quad (1.92)$$

avec $N \geq 0$ et $M \geq 0$. $C_{(N+1)}$ et $C_{(M+1)}$ représentent les paramètres matériau du modèle.

23. Beda (2007)

Encore appelé Gent-thomas généralisé, le modèle de Beda (2007) généralise le modèle de Gent-thomas en écrivant le terme en $(I_1 - 3)$ sous la forme d'une serie de Rivlin [20]. L'expression de ce modèle est la suivante

$$W_{Be2007} = \sum_{p=1}^{N} \frac{C_{po}}{p}(I_1 - 3)^p + Kln\frac{I_2}{3}. \quad (1.93)$$

Ce modèle est adapté pour la caractérisation en traction simple et améliore la traction équibiaxiale et le cisaillement pur.

24. Nunes (2011)

En 2011 Nunes propose un modèle d'énergie en s'inspirant du modèle de Mooneey, dans ce modèle l'auteur ajoute tout simplement le coefficient $\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{4}$ [17]

$$W_{Nu} = C_1(I_1 - 3) + \frac{4}{3}C_2(I_2 - 3)^{\frac{3}{4}}. \quad (1.94)$$

Ce modèle ne reproduit pas les courbes expérimentales avec le même jeu de paramètre.

25. Gornet et *al.* (2012)

En 2012 Gornet et *al.* propose un modèle en ajoutant au modèle de Hart-Smith un sécond terme $\frac{1}{\sqrt{I_2}}$ [102]. L'espression de leur modèle est la suivante

$$W_{GD}(I_1, I_2) = h_1 \int e^{h_3(I_1-3)^2} dI_1 + 3h_2 \int \frac{1}{\sqrt{I_2}} dI_2. \quad (1.95)$$

Ce modèle ne reproduit pas les courbes expérimentales avec le même jeu de paramètre.

26. Beda. (2014)

En 2014, Beda propose un modèle d'énergie qui consiste à généraliser le premier terme du modèle de Harth-smith en utilisant la puissance α et en ajoutant le second terme en *logarithme* de Gent-thomas [56]. L'expression de ce modèle est la suivante

$$W_{Be2014}(I_1, I_2) = C_1 \int e^{\beta(I_1-3)^\alpha} dI_1 + C_2 ln \frac{I_2}{3}. \tag{1.96}$$

Ce modèle ne reproduit pas les courbes expérimentales avec le même jeu de paramètre.

27. Hybrid Integral Approach (HIA) (2016)

En 2016, Nguessong et al. propose un modèle d'énergie hybride qui combine à la fois le modèle moléculaire et le modèle phénoménologique [103]. Dans ce modèle on note comme particularité la présence de la fonction inverse de langevin. L'expression de ce modèle est la suivante

$$W = \mu n \left[\frac{\lambda_a \beta_a - \beta_{ao}}{\sqrt{n}} + ln \left(\frac{\beta_a sinh \beta_{ao}}{\beta_{ao} sinh \beta_a} \right) \right] - \frac{\eta}{2} \int_3^{I_1} exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(u))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] du + K ln \left(\frac{I_2}{3} \right). \tag{1.97}$$

Ce modèle ne reproduit pas les courbes expérimentales avec le même jeu de paramètre.

1.5.2 Les modèles moléculaires.

Nous présentons dans cette section les différents modèles hyperélastiques fondées sur des considérations physiques. Ces travaux partent des propriétés physiques générales des polymères et utilisent les méthodes statistiques afin de modéliser le comportement moyen macroscopique de ces matériaux. Ils aboutissent néanmoins à des modèles macroscopiques différents selon les phénomènes microscopiques considérés comme prédominants.

1. **Le modèle néo-hookéen (1943)**

C'est le modèle hyperélastique le plus simple. Il correspond au modèle de Mooney-Rivlin à un seul terme, mais sa justification est plus moléculaire que phénoménologique. Le matériau est constitué d'un réseau de longues chaînes flexibles orientées aléatoirement et jointes chimiquement en certains points de jonction [52]

$$W_{NH} = \frac{1}{2} nKT(I_1 - 3), \tag{1.98}$$

où n est le nombre de chaînes par unité de volume, k est la constante de Boltzmann et T la température absolue.

2. **Le modèle 3-chaines (1943)**

James et Guth [54] élaborent un modèle non-Gaussien. Ils supposent que les chaînes se déforment de manière affine avec le milieu et que le tenseur F, gradient de la transformation macroscopique, peut *être* utilisé pour définir la déformation des chaînes. Ils font l'hypothèse supplémentaire que la déformation du réseau de chaînes orientées aléatoirement peut se ramener à un réseau de chaînes réparties suivant les trois axes du repère de déformations principales. Ce modèle permet de reproduire les essais de Treloar, en traction et en cisaillement pur, avec une bonne corrélation. Le modèle construit ainsi est alors le suivant

$$W_{3-Ch} = nKT \left[\frac{\lambda}{\sqrt{N}} \beta + ln \frac{\beta}{sinh\beta} \right] \tag{1.99}$$

avec $\beta = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\right)$

3. **Le modèle slip-link (1981)**

Ball et al [104] développent en particulier le modèle slip-link. Selon ce modèle, un lien relie deux chaînes. Les chaînes sont autorisées à glisser sur une certaine longueur de part et d'autre de ce lien. La difficulté d'un tel modèle réside dans la complexité mathématique (statistique) permettant d'établir une énergie de défor-

mation moyenne. Ainsi, le modèle d'énergie dévéloppé est le suivant

$$W = \frac{1}{2}KTN_c \sum_{i=1}^{3} {\lambda_i}^2 + \frac{1}{2}KTN_s \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{(1+\eta){\lambda_i}^2}{1+\eta{\lambda_i}^2} + ln|1+\eta{\lambda_i}^2| \right]. \tag{1.100}$$

4. Le modèle de Flory et Erman (1982) ou modèle de jonctions contraintes

Flory et al. [105] développent un modèle *où* les points de jonctions entre chaînes sont contraints de se déplacer dans un voisinage restreint du fait de la présence des autres chaînes. L'expression du modèle est la suivante

$$W_c = \frac{1}{2}KT\mu \sum_{i=1}^{3} \left[B_i + D_i - ln(B_i+1) - ln(D_i+1) \right], \tag{1.101}$$

avec $B_i = K^2({\lambda_i}^2 - 1)({\lambda_i}^2 + k)^{-2}$

et $D_i = {\lambda_i}^2 k^{-1} B_i$.

5. Le modèle 8-chaînes (1993)

Le modèle d'Arruda et Boyce (1993) est fondé sur une approche macromoléculaire [5]. Suivant la théorie de Kuhn et Grun (1942), le comportement statistique d'une chaîne est supposé non-gaussien. Le matériau est représenté par huit chaînes orientées dans les directions des diagonales d'un cube. L'énergie de déformation est ainsi donnée par

$$W^{8-ch} = \mu n \left[\frac{\lambda_a \beta_a - \beta_{ao}}{\sqrt{n}} + ln\left(\frac{\beta_a sinh\beta_{ao}}{\beta_{ao} sinh\beta_a} \right) \right], \tag{1.102}$$

avec $\lambda_a = \sqrt{\frac{I_1}{3}}$

et $\beta_a = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda_a}{\sqrt{n}}\right)$.

6. Le modèle tube étendu (1999)

La limitation du modèle tube aux déformations moyennes provient de la construction *même* du modèle qui ne fait intervenir que les contraintes d'entrelacement au détriment de l'élasticité des chaînes, et en particulier de leur limite d'extensibilité

[34]. Kaliske et Heinrich [106], conscients de ce problème, reprennent leurs travaux et remplacent leur approche Gaussienne par une approche non-Gaussienne. Ils introduisent alors un paramètre d'inextensibilité δ des chaînes. Ils aboutissent alors à la forme de l'énergie suivante

$$W = \frac{G_c}{2}\left[\frac{(1+\delta^2)(I_1-3)}{1-\delta^2(I_1-3)} + ln(1-\delta^2(I_1-3))\right]. \tag{1.103}$$

1.6 Les essais expérimentaux

Les données expérimentales utilisées dans cette thèse sont les essais de Treloar et les essais de Nunes et de Moreira [46]. Treloar utilise une éprouvette de Caoutchouc Naturel (Natural Rubber) de longueur utile égale à 10 mm, de largeur 3 mm et d'épaisseur 0,8 mm. Cette éprouvette est préétirée à 400% avant d'éffectuer les mesures à fin d'éliminer l'effet Mullins.

1.6.1 Les essais de Treloar

1. La traction simple[4]

La Figure 1.14 représente l'évolution de la contrainte nominale σ (force par unité de surface non déformée) dans la direction d'extension en fonction de λ.

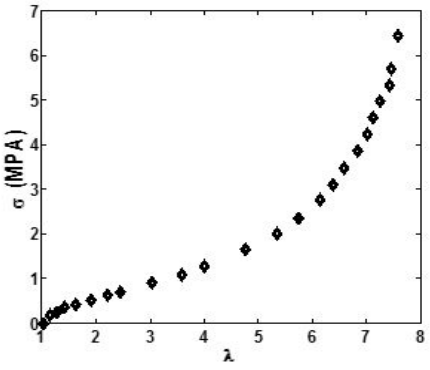

FIGURE 1.14 – Courbe expérimentale de Treloar : traction uniaxiale [34].

2. La traction équibiaxiale

Pour ce type de déformation, Treloar utilise le souflage d'une membrane circulaire de 25 mm de diamètre. La Figure 1.15 représente alors l'évolution de la contrainte nominale σ en fonction de λ.

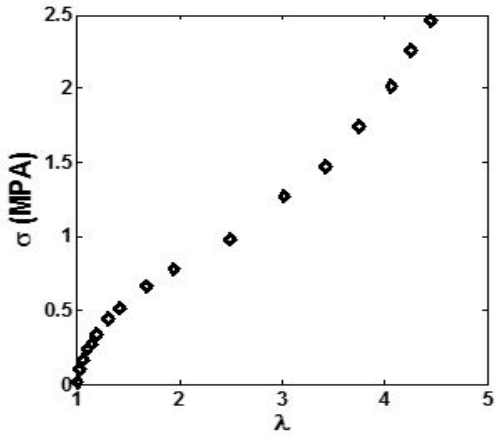

FIGURE 1.15 – Courbe expérimentale de Treloar: traction équibiaxiale [34].

3. Cisaillement Pur

L'expérience de Treloar est celle décrite par la Figure 1.16. Il utilise une éprouvette de 75 mm de largeur pour 5 mm de hauteur.

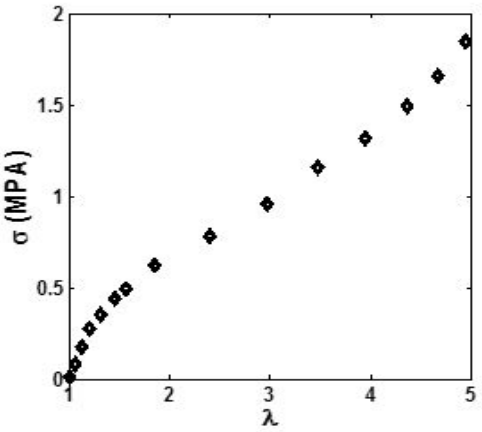

FIGURE 1.16 – Courbe expérimentale de Treloar: Cisaillement Pur [34].

1.6.2 Les essais de Nunes et de Moreira

Ces données sont obtenues à partir des essais de cisaillement simple (glissement) sur des éprouvettes élaborées à base d'adhésif de silane (Flextec FT 101) [46]. L'expérience est celle décrite par la Figure 1.17.

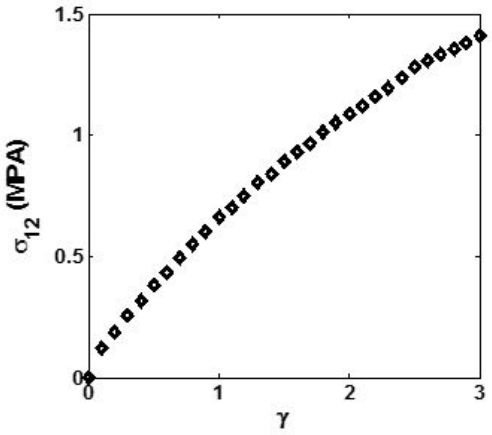

FIGURE 1.17 – Cisaillement simple [17].

Conclusion

Ce premier chapitre a présenté après une bref bibliographie, les notions générales de chimie et de physique des polymères, et plus particulièrement des élastomères, qui seront utilisées dans la suite du document.

La complexité des liaisons et des mécanismes intervenant lors de la déformation de ces matériaux expliquent qu'il n'existe pas encore actuellement de modèle unique permettant de simuler une pièce en élastomères. L'hypothèse d'un comportement de type hyperélastique est généralement admise pour modéliser le comportement élastique non-linéaire, et a permis de donner naissance a un nombre important de modèles différents fondés sur des observations expérimentales ou sur la physique des chaînes de macromolécules.

Notons finalement que, pour un mécanicien, l'existence d'un modèle ≪universel≫ n'est pas un problème en soi tant que l'on a une polydiversité des modèles dans la littérature, mais l'optimisation des paramètres de ses modèles reste encore un problème mal connu à cause du nombre limité des méthodes d'optimisations ou encore de leur non maîtrise.

Chapitre 2

METHODES D'OPTIMISATION DES PARAMETRES DES ENERGIES

Introduction

L'utilisation des élastomères dans diverses industries telles que: l'automobile, l'aéronautique, l'aérospatiale, les transports, le bâtiment, les mines, les machines-outils, la pétrochimie est soumise à de nombreux et sévères cahiers des charges, spécifications, normes, exigeant un large ensemble de propriétés, parmi lesquelles nous avons: le bon comportement aux diverses températures ; l'inertie vis-à-vis des fluides agressifs (huiles, graisses, solvants, etc.) et des produits chimiques (acides, bases, sels, etc.) ; la résistance à l'ozone et aux intempéries ; les hautes propriétés mécaniques (rupture, déchirement, abrasion, etc.) et la tenue au bon vieillissement dans les conditions de service envisagées. Cependant la prédiction du comportement mécanique des élastomères dans les logiciels de calcul par éléments finis nécessite l'utilisation des modèles de comportement fortement non linéaires: les modèles hyperélastiques.

L'un des problèmes auquel est confronté l'ingénieur mécanicien souhaitant effectuer une simulation est l'obtention des valeurs des paramètres des modèles hyperélastiques. Pour cela, il est nécessaire d'identifier ces paramètres à partir des essais expérimentaux.

Le présent chapitre s'organise de la manière suivante: la secton 2.1 est consacrée à la problématique d'optimisation ; la section 2.2 présentent les méthodes d'optimisation les plus utilisées en grande déformation ; la section 2.3 traite la mise en œuvre des algoritmes génétiques ; la section 2.4 présente une comparaison des méthodes d'optimisation basée sur: le temps de calcul, l'évaluation de la fonction objectve et la précision des résultats ; et enfin dans la section 2.5 nous présentons les limites lées à l'utilisation des algorithmes génétiques.

2.1 Problématique d'optimisation

La problématique de l'identification consiste à faire coïncider une solution theorique σ_{model} issue d'un modèle aux données expérimentales de Treloar [4] en traction simple représentées par le couple de point $(\lambda_{exp}, \sigma_{exp})$. Pour quantifier le gap entre les deux réponses, généralement on définit la fonction objective ϕ par:

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} (\sigma_{exp}(\lambda_i) - \sigma_{model}(\lambda_i))^2, \tag{2.1}$$

avec $i = 1, 2, 3....N$ le nombre de points expérimentaux.

L'optimisation consiste alors à choisir les bons paramètres tels que $\phi = 0$. Les mesures expérimentales sont souvent entachées d'une erreur de mesure, tandis que les valeurs théoriques sont sujettes à des hypothèses simplificatrices quelquefois importantes (incompressibilité par exemple). Pour identifier les paramètres matériau, il suffit alors de minimiser ϕ.

2.2 Les méthodes d'optimisation

En mathématique les méthodes d'optimisation sont nombreuses. Ces méthodes seront utilisées suivant certains critères tels que: la convergence, la vitesse de convergence,

le temps de calcul. Le principe général de ces méthodes consiste à construire une suite de points de l'espace des solutions convergentes vers un minimum de la fonction ϕ.

2.2.1 La méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés fut dévélopée par Legendre et Gauss [107]. Cette méthode prend en compte la forme particulière de la fonction ϕ. A partir de la définition de la fonction ϕ, cette méthode linéarise la fonction $\sigma_{model}(\lambda_i)$. Rapelons que la fonction σ_{model} est la contrainte nominale, c'est à dire la force qu'il faut exercer sur une section S pour produire une élongation λ. Soit N le nombre de point de mesure expérimentale dans l'espace de représentation $(\lambda_{exp}, \sigma_{exp}(\lambda_i))$, avec $m \leq N$ *où* m représente le nombre de paramètre du modèle d'énergie considéré. On cherche alors la fonction $F(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} a_k \phi_k(\lambda)$ qui minimise l'équation 2.1. Ainsi la nouvelle forme de la fonction objective devient alors

$$\psi = \Sigma_{i=1}^{N} \|\sigma_{exp}(\lambda_i) - F(\lambda_i)\|^2. \tag{2.2}$$

Il revient maintenant de déterminer les m coefficients a_k qui rendent ϕ minimale. Alors, les a_k sont tels que

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_j} = 0, \tag{2.3}$$

avec $1 \leq j \leq m$. Nous utilisons la méthode des moindres carrés décrite ci-dessus pour retrouver les paramètres des modèles de : Mooney, Ogden 3 termes, Boyce et Arruda et HIA marqués dans le tableau.

TABLE 2.1 – Valeurs des Paramètres optimisés par la méthode des moindres carrés.

Modèles	Paramètres	Valeurs	Unités
Mooney	C_{10}	0.162	MPA
	C_{01}	5.90×10^{-3}	MPA
Ogden 3 terms	μ_1	-0.011	MPA
	μ_2	0.62995	MPA
	μ_3	0.00127	MPA
	α_1	-2	/
	α_2	1.3	/
	α_3	5	/
Boyce et Arruda	μ	0.328	MPA
	n	29.5	MPA
HIA	μ	0.3874	MPA
	n	28.5	MPA
	K	0.001266	MPA
	η	0.1	MPA
	ζ	0.127	MPA
	ξ	0.418	MPA

2.2.2 La méthode de Levenberg-Marquardt

Sur la base de la méthode de Newton, Marquardt a proposé une méthode, qui prend le nom de Levenberg-Marquardt [108]. Cette méthode est beaucoup utilisée dans les problèmes de moindres carré [109, 110]. Le principe de cette méthode consiste à ajouter au problème de minimisation défini par l'équation 2.1 la contrainte $\|\delta_u\| = R_o$ et le multiplicateur de Lagrange μ. Ainsi la nouvelle fonction à optimiser devient

$$\vec{U}(\delta_u, \mu) = \Sigma_{i=1}^{N} \|\sigma_{exp}(\lambda_i) - f_o - \nabla f\|^2 + \mu(\|\delta\|^2 - \delta_o^2), \tag{2.4}$$

R_o représente un rayon arbitraire.

Considérons les données expérimentales de Treloar, representées par: $(\lambda_i, \sigma_{exp}(\lambda_i))$, i=1,2,3.....N, avec $1 \leq \lambda_i \leq \lambda_{i+1}$.

Posons $\lambda = \lambda_o + \delta\lambda$ et $\mu \to \mu + 1$. La nouvelle équation à optimiser est alors définie par

$$\sigma_{model}(\lambda_o + \delta\lambda) = \sigma_{model}(\lambda_o) + \nabla\sigma_{model}(\lambda) = \vec{f_o} + \nabla\vec{f}\vec{\delta}, \tag{2.5}$$

σ_{model} représente la contrainte nominale en traction uniaxiale du modèle d'énergie considéré.

$$\varphi = \Sigma_{i=1}^{N} \|\sigma_{exp}(\lambda_i) - f_o - \nabla f\|^2 + \mu(\|\delta\|^2 - \delta_o^2). \tag{2.6}$$

L'algorithme consiste alors à ajuster μ à chaque iteration, φ décroit entre deux itérations successives. Le minimum de φ évalut les paramètres respectivement. Sous Matlab [111] nous implémentons cet algorithme en respectant les étapes ci-dessous:

- supposons que $\mu^{(r-1)}$ représente la valeur de μ au cours de la précédente itération. Initialement posons $\mu^{(0)} = 10^{-3}$.
- lire $\varphi(\mu^{(r-1)})$ et $\varphi(\frac{\mu^{(r-1)}}{\nu})$, avec $\nu > 1$.
- si $\varphi(\frac{\mu^{(r-1)}}{\nu}) \leq \varphi^{(r)}$, si $\mu^{(r)} = \frac{\mu^{(r-1)}}{\nu}$.
- si $\varphi(\frac{\mu^{(r-1)}}{\nu}) > \varphi^{(r)}$,posons $\mu^{(r)} = \mu^{(r-1)}$.
- si $\varphi(\frac{\mu^{(r-1)}}{\nu}) > \varphi^{(r)}$, et $\varphi(\mu^{(r-1)}) > \varphi(\mu^{(r)})$.

Nous utilisons la méthode de Levenberg-Marquardt décrite ci-dessus pour retrouver les paramètres des modèles de : Mooney, Ogden 3 termes, Boyce et Arruda et HIA marqués dans le tableau.

TABLE 2.2 – Valeurs des Paramètres optimisés par la méthode Levenberg-Marquardt.

Modèles	Paramètres	Valeurs	Unités
Mooney	C_{10}	0.169	MPA
	C_{01}	5.30×10^{-4}	MPA
Ogden 3 terms	μ_1	0.45262	MPA
	μ_2	2.842×10^{-5}	MPA
	μ_3	-8.2746×10^{-3}	MPA
	α_1	1.71617	/
	α_2	6.80992	/
	α_3	-1.98197	/
Boyce et Arruda	μ	0.314	MPA
	n	28.4	MPA
HIA	μ	0.382	MPA
	n	29	MPA
	K	0.01266	MPA
	η	0.1	MPA
	ζ	0.127	MPA
	ξ	0.419	MPA

Comme inconvénient avec la méthode de Levenberg-Marquardt, le choix des points initiaux est arbitraire et cette méthode requiert une grande précision des données expérimentales.

2.2.3 La méthode de Beda−Chevalier

La méthode de Beda−Chevalier est une méthode graphique qui évalue les paramètres des modèles étape par étape [35]. La procédure est la suivante: posons, pour $x \in V_N$, $\phi_N(x)$ la fonction equivalente de y(x) donnée par l'équation ci-dessous

$$y(x) \approx a_N \phi_N(x). \tag{2.7}$$

La fonction $\phi(x)$ peut être polynômiale, exponentielle ou trigonométrique. En traçant y(x) en fonction de $\phi_N(x)$, c'est-à-dire, $(\phi_N(x), y(x))$, nous obtenons une courbe linéaire. Ainsi, en repétant cette méthode plusieurs fois, nous traçons la courbe $(\phi_k(x), y(x))$ en variant k afin d'obtenir la portion linéaire pour certaines valeurs de x. La solution partielle $\phi_k(x)$ est alors déterminée et les coefficients a_k sont déterminés par la pente de la partie linéaire de

la courbe. En repétant cette logique plusieurs fois, nous obtenons la formule de recurence suivante

$$y_k(x) = y(x) - \sum_{j=0}^{k-1} a_{N-j}\phi_{N-j}(x); \qquad k = 1, ..N, \tag{2.8}$$

$y_o(x) = y(x)$. *où* $y_k(x)$ est la fonction identifiée dans le sous domaine V_k. Nous utilisons la méthode de Beda−Chevalier décrite ci-dessus pour retrouver les paramètres des modèles de: Mooney, Ogden 3 termes, Boyce et Arruda et HIA marqués dans le tableau.

TABLE 2.3 – Valeurs des Paramètres optimisés par la méthode de Beda−Chevalier.

Modèles	Paramètres	Valeurs	Unités
Mooney	C_{10}	0.181	MPA
	C_{01}	0.0002102	MPA
Ogden 3 terms	μ_1	0.00127	MPA
	μ_2	0.597	MPA
	μ_3	-0.011	MPA
	α_1	5	/
	α_2	1.3	/
	α_3	-2	/
Boyce et Arruda	μ	0.294	MPA
	n	26.4	MPA
HIA	μ	0.3074	MPA
	n	25.5	MPA
	K	0.001266	MPA
	η	0.09	MPA
	ζ	0.0187	MPA
	ξ	0.419	MPA

Comme limite, la méthode de Beda-Chevalier est fastidieuse pour les modèles d'énergie contenant un nombre élévé des paramètres.

2.2.4 La méthode ≪Pattern Search Algorithm≫

La méthode ≪Pattern Search Algorithm≫ est une méthode basée sur la dérivée de la fonction objective. Cette méthode impose une parfaite maîtrise de la matrice generatrice et elle permet de trouver un bon résultat, c'est-à-dire la solution qui a une pétite erreur dans l'espace multidimensionel défini.

Cette méthode fut décrite dans les travaux de Davidson [112] et encore par Wu et al.

pour l'optimisation du modèle de Ogden à 4 termes [113]. Pour illustrer l'application de la méthode ≪Pattern Search Algorithm≫ considérons le modèle de Mooney-Rivlin décrit par l'équation 1.71 ; λ_i représente les données expérimentales de Treloar pour i=1,2,3.....N, avec $1 \leq \lambda_i \leq \lambda_{i+1}$. Dans ce cas la fonction objective se défini par l'équation ci-dessous

$$P_k = \Phi(\lambda_i). \tag{2.9}$$

Pour k itérations, nous définissons ${\lambda_k}^i = \lambda_k + {s_k}^i$, *où* λ_k est l'increment. ${s_k}^i$ représente l'étape intermédiaire ${s_k}^i = \triangle_k \Phi(\lambda_i)$, avec $k = 1, 2, 3....N$ et $\triangle$ représente l'opérateur naplacien. Avec le modèle de Money-Rivlin, nous implémentons cette méthode dans Matlab [111] en respectant la procèdure ci-après.

a)Lire $\Phi_k(\lambda_i)$

b) Déterminer l'étape s_k

c) Lire $\mathrm{p}_k = p_k(\lambda_k) - p_k(\lambda_k + s_k)$

d)Si $\mathrm{p}_k > 0$, et $\lambda_{k+1} = \lambda_k + s_k$, évaluer les paramètres C_{10} et C_{01}. Nous utilisons la méthode de ≪Pattern Search Algorithm≫ décrite ci-dessus pour retrouver les paramètres des modèles de : Mooney, Ogden 3 termes, Boyce et Arruda et HIA marqués dans le tableau.

TABLE 2.4 – Valeurs des Paramètres optimisés par la méthode ≪Pattern Search Algorithm≫.

Modèles	Paramètres	Valeurs	Unités
Mooney	C_{10}	0.170	MPA
	C_{01}	0.002351	MPA
Ogden 3 terms	μ_1	0.37282	MPA
	μ_2	1.0209×10^{-5}	MPA
	μ_3	-8.2747×10^{-3}	MPA
	α_1	1.8464	/
	α_2	7.29012	/
	α_3	-2.09521	/
Boyce et Arruda	μ	0.294	MPA
	n	27.4	MPA
HIA	μ	0.38	MPA
	n	28.5	MPA
	K	0.01266	MPA
	η	0.1	MPA
	ζ	0.127	MPA
	ξ	0.419	MPA

2.2.5 La méthode de l'algorithme génétique.

La méthode de l'algorithme génétique est de plus en plus utilisée dans les problèmes d'optimisation ces dernières années [34, 38, 114]. Cette méthode fut proposée par Holland [115] et quelques années plus tard elle fut largement diffusée par Goldberg [116]. Basée sur la sélection naturelle et la génétique [117], l'algorithme génétique cherche le maximum global de la fonction objective. Ces algorithmes font partie des algorithmes évolutionnaires, c'est-à-dire des stratégies de calculs évolutifs qui doivent leur nom à leur analogie avec la théorie de l'évolution développée par Charles Darwin en biologie.

Le principe est la survie et la reproduction des individus les mieux adaptés à leur environnement qui ont pour conséquence, d'une part la transmission des caractéristiques nécessaires à la survie, d'autre part la convergence évolutive des espèces. Ce principe serait incomplet si nous n'incluions pas le principe de mutation des espèces, parfois bénéfique, parfois néfaste, permettant de faire des sauts de performance en augmentant la diversité génétique. Les algorithmes génétiques sont des méthodes de convergence itérative globale d'une population et non pas d'un seul individu. Le processus de convergence n'est

alors plus déterministe mais probabiliste, à l'instar de l'évolution Darwinienne ; c'est une méthode stochastique. L'introduction du hasard confère aux algorithmes génétiques des propriétés d'exploration de l'espace de recherche ne faisant plus dépendre strictement la solution d'un point de départ.

L'un des avantages de cette méthode est de pouvoir optimiser une fonction objective quelconque sans exigence de continuité ou de dérivabilité de celle-ci, et elle est adaptée aux fonctions à variables discrètes. Leurs champs d'applications sont donc bien plus vaste que les méhodes classiques d'optimisation. Son inconvénient est son temps d'exécution souvent plus élevé et son instabilité. L'algorithme peut *être* décrit par cinq étapes s'appliquant sur une population de P individus initialement générés aléatoirement [117]:

1. **Evaluation des individus d'une population**

   Une population est l'ensemble des individus. La transmission des caractéristiques des individus parents à leurs enfants se fait par l'intermédiaire de chromosomes, par analogie avec la reproduction sexuée. Ainsi, les algorithmes génétiques opèrent sur les gènes contenus dans ces chromosomes. Les chromosomes sont la représentation codée de l'individu qui, rappelons le, n'est pas nécessairement un nombre. Nous pouvons ainsi distinguer deux espaces distincts, mais liés:

   * l'espace phénotypique: c'est l'espace sur lequel s'éffectue l'évaluation des performances permettant la sélection.
   * l'espace génotypique: c'est l'espace de représentation sur lequel s'éffectuent les croisements et les mutations (la représentation).

   La forme canonique du codage utilisée dans les algorithmes génétiques est le codage informatique binaire. Chaque chromosome est une chaîne de 0 et de 1 de taille N choisi par l'utilisateur (le programmeur). Le codage binaire d'un nombre réel passe par un entier: il y a discrétisation. L'intervalle de recherche est discrétisé en 2^N entiers compris entre 0 et $2^N - 1$. Le codage s'éffectue ensuite en décomposant l'entier en puissance de 2. Le chromosome s'écrit alors en classant les bits par puissance de

2 décroissante (arbitrairement). Le i-ème gène valant 0 si le caractère est 0 ou 2^{i-1} si le caractère est 1, cela peut se traduire mathématiquement par l'équation ci-dessous

$$01001110 = 0\times2^7+1\times2^6+0\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 78. \quad (2.10)$$

Le codage binaire offre donc le nombre maximal de schémas par bit et a été considéré pendant longtemps comme le codage le plus performant pour les algorithmes génétiques [118]. C'est pour cette raison que nous utilisons ce type de codage dans ce travail.

2. Sélection des individus

On choisit les paramètres qui évaluent la fonction objective ϕ, mais qui jusque-là ne donne pas encore une erreur assez minimale. L'étape de sélection se fait au sens probabiliste du terme. Les individus les plus performants ont une probabilité plus grande $d'être$ sélectionnés. La manière de sélectionner ces individus n'est cependant pas unique. Nous donnons, ci-dessous, une liste des types de sélections possibles : sélection par tirage uniforme, le tournoi, la troncation et le tirage à la roulette. Dans la mise en œuvre de notre algorithme nous utilisons la sélection par tirage uniforme [34].

3. Croisement des individus sélectionnés

L'opérateur de croisement permet la création de nouveaux individus selon un processus fort simple. Il permet donc l'échange d'information entre les chromosomes. Tout d'abord, deux individus, qui forment alors un couple, sont tirés au sein de la nouvelle population issue de la reproduction. Puis un site de croisement est tiré aléatoirement. Enfin, selon une probabilité P_c que le croisement s'effectue, les segments finaux des deux parents sont alors échangés autour de ce site. Cet opérateur permet la création de deux nouveaux individus. Toutefois, un individu sélectionné lors de la reproduction ne subit pas nécessairement l'action d'un croisement. Ce dernier ne s'effectue qu'avec une certaine probabilité. Plus cette probabilité est élé-

vée et plus la population subira de changement. Quoi qu'il en soit, il se peut que l'action conjointe de la reproduction et du croisement soit insuffisante pour assurer la réussite de l'algorithme génétique. Ainsi, dans le cas du codage binaire, certaines informations (caractères) peuvent disparaître de la population. Le croisement en codage binaire consiste à échanger des gènes du i-ème chromosome d'un individu X avec les mêmes gènes du i-ème chromosome d'un individu Y. Ces échanges de gènes peuvent se faire, comme en biologie, en un ou plusieurs points de croisement. Toujours pour la mise en oeuvre de notre algorithme nous utilisons un croisement uniforme représenté par:

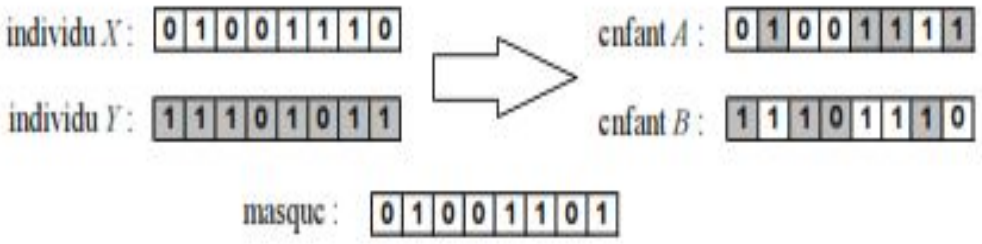

FIGURE 2.1 – Croisement uniforme.

4. Mutation des individus

Le rôle de cet opérateur est de modifier aléatoirement, avec une certaine probabilité, la valeur d'un composant de l'individu. Dans le cas du codage binaire, chaque bit a_i appartenant à $0; 1$ est remplacé selon une probabilité p_m par son inverse. C'est à dire remplacer le gène mutant par sa valeur complémentaire. Si le gène vaut 0, il est remplacé par 1 ; s'il vaut 1 il est remplacé par 0.

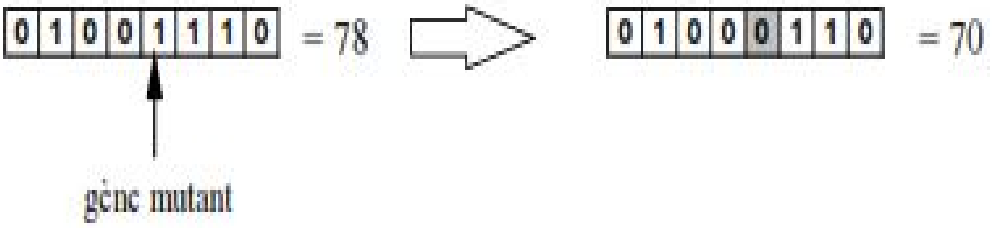

FIGURE 2.2 – Mutation d'un gène en codage binaire.

Nous venons de voir les grands principes des algorithmes génétiques. En pratique, sa mise en oeuvre pose quelques difficultés de par la nature stochastique de l'algorithme et offre des choix (codage, mode de sélection, etc.) qui ne sont pas sans conséquence sur la convergence.

2.3 Mise en œuvre de l'algorithme génétique.

Avant d'aller plus loin il nous faut définir quelques termes importants généralement définis dans la programmation des algorithmes génétiques.

- une séquence: est une suite de chiffre appartenant à l'interval $0, 1$.
- Un chromosome: est une suite de bits en codage binaire, appelée aussi chaîne binaire ou encore ≪chaîne≫ de gènes.
- Environnement: C'est l'espace de recherche.
- Population: un ensemble de chromosomes ou de points de l'espace de recherche.
- La fonction objective: est la fonction à (évaluer) optimiser.
- Individu: solution possible du problème.
- Reproduction: un enfant hérite des gènes de ses parents.
- Sélection: C'est le choix effectué entre les individus de la population. Les meilleurs individus à un instant donné sont réutilisés pour se rapprocher de la solution du problème.
- Génotype: l'ensemble des gènes représentés par un chromosome.

- Phénotype: l'ensemble des valeurs observables prises par chaque gène.
- Génération: l'ensemble de la population à un moment donné du processus.

2.3.1 Motivation

Nous cherchons, à présent, à implémenter en mode interactif l'algorithme génétique sous Matlab [111] pour résoudre notre problème d'identification de paramètres matériau. La diversité des méthodes d'optimisation présentées dans ce chapitre, la multitude des lois de comportement exposées dans la section 1.4 ainsi que les différents modes de déformation possibles (section 1.2 nous ont orientés vers un mode de programmation offrant la possibilité de faire évoluer les types de données et les types de traitement de ces données de manière indépendante. Les sections suivantes ont donc pour but de décrire les notions développées dans notre algorithme, en particulier les concepts de sélection, croisement et mutation.

2.3.2 Méthodologie

L'implémentation de notre algorithme dans Matlab tient compte des points suivants:

1. l'algorithme est stochastique itératif et opère sur des individus codés, à partir d'une population initiale.
2. Cette population évolue de la génération k à la génération $k+1$ à l'aide de trois opérateurs (Sélection, Croisement et Mutation).
3. Chaque individu est reproduit en fonction de son adaptation au problème (fonction objective).
4. On code les individus de manière à les faire évoluer grâce aux opérateurs.
5. On effectue des croisements sur les individus destinés à être reproduits.
6. On effectue des mutations aléatoires.

Pour implémenter ces différentes étapes de notre algorithme génétique définie précédemment nous respectons l'organigramme ci-dessous:

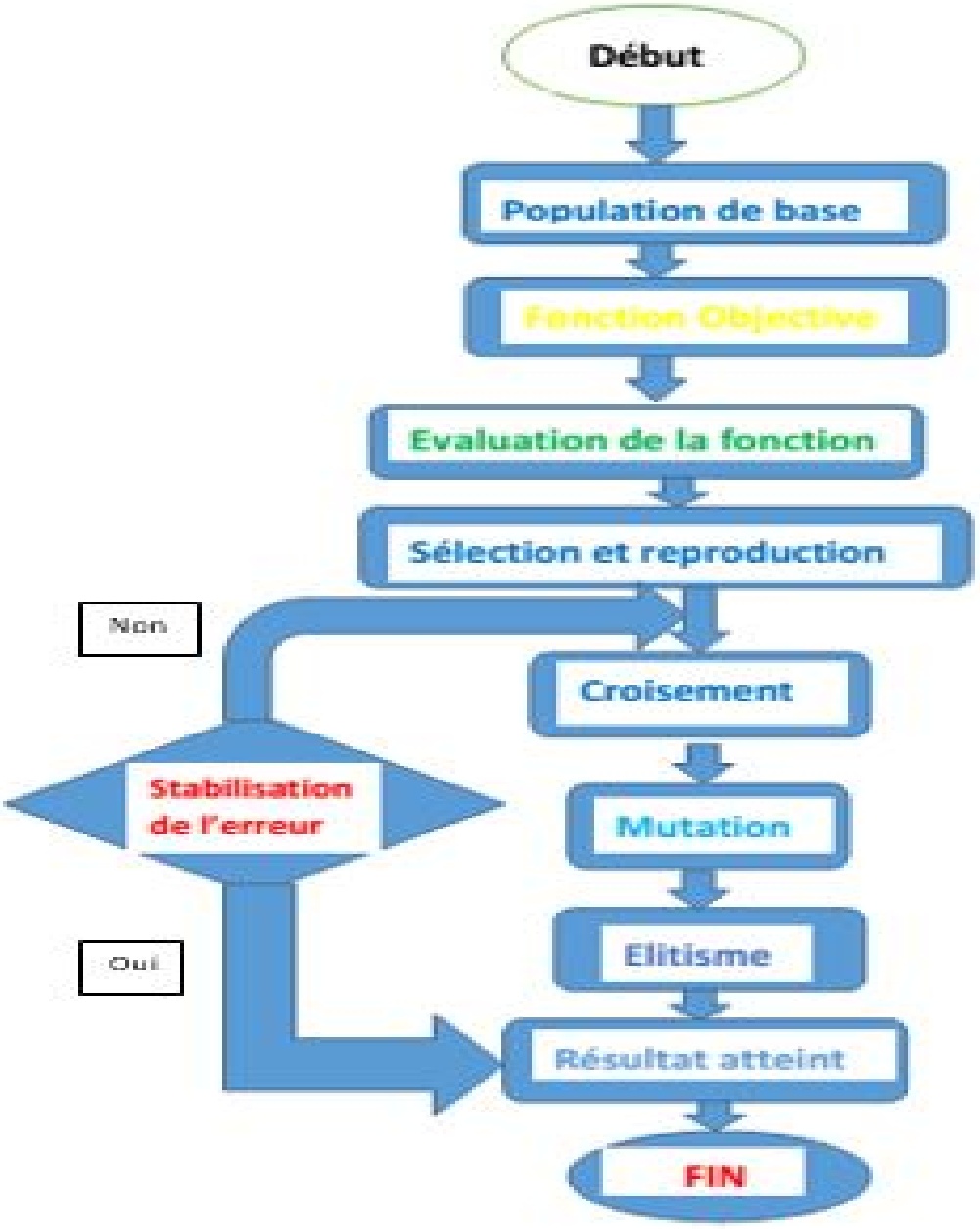

FIGURE 2.3 – Organigramme.

2.3.3 Application de l'algorithme génétique au modèle de Ogden

En hyperélasticité le modèle de Ogden est le modèle d'énergie le plus utilisé par les ingénieurs dans la caractérisation des matériaux caoutchouteux. Face aux exigences des critères mécaniques il est cependant compliqué d'optimiser les paramètres de ce modèle. C'est dans ce sens que nous optimisons dans cette section le modèle de Ogden par la méthode de l'algorithme génétique. Ainsi, soit le modèle de Ogden défini par l'équation (1.80). Pour ce modèle, la loi de comportement en traction simple est définie par:

$$\sigma = \lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda}, \tag{2.11}$$

avec

$$\lambda_1 = \lambda; \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{2.12}$$

On obtient

$$\sigma = \sum_{p=1}^{N} \mu_p (\lambda^{\alpha_p} - \lambda^{0,5\alpha_p}). \tag{2.13}$$

De l'équation (2.13) on obtient la contrainte nominale suivante pour $N = 4$,

$$\sigma_{nominale} = \mu_1(\lambda^{\alpha_1 - 1} - \lambda^{-(0,5\alpha_1+1)}) + \mu_2(\lambda^{\alpha_2 - 1} - \lambda^{-(0,5\alpha_2+1)}) + \mu_3(\lambda^{\alpha_3 - 1} - \lambda^{-(0,5\alpha_3+1)}) + \mu_4(\lambda^{\alpha_4 - 1} - \lambda^{-(0,5\alpha_4+1)}) \tag{2.14}$$

Le but de l'optimsation à ce niveau est de déterminer les paramètres μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, α_1, α_2, α_3 et α_4 de l'équation 2.14.

2.3.3.1 Procédure d'optimisation

Pour optimiser les paramètres du modèle de Ogden à 4 termes et 8 paramètres, nous utilisons la courbe expérimentale de Treloar [4] définie dans la section 1.6. L'optimisation consiste alors à identifier les bons paramètres qui minimisent l'écart entre les données exprimentales de Treloar [4] et la contrainte nominale définie par l'équation 2.14.

Cette fonction écart encore appelée fonction objective est définie par

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} (\sigma_{exp}(\lambda_i) - \sigma_{nominal}(\lambda_i))^2, \tag{2.15}$$

avec $i = 1, 2, 3....N$ le nombre de points expérimentaux.

Après avoir ressorti la fonction objective, on passe à l'utilisation des grands opérateurs de l'algorithme génétique:

- Définition des paramètres initiaux.

Le nombre de bit de chaque chromosome est définie par: $N = 512$.

La population initiale est défini par $M = 250$.

Le nombre d'évènement ayant lieu: $M_2 = M/2$.

Le nombre de générations: $gnration = 100$.

Le taux de mutation: $mutrate = 0,8$.

Le nombre de croisements ayant lieu pour les individus présents: $nmuts = mutrate \times N \times (M - 1)$.

Conversion des 8 paramètres en langage machine (code binaire):

$\mu_1 = round(rand(M, N))$; initial population ;

$\mu_2 = round(rand(M, N))$; initial population ;

$\mu_3 = round(rand(M, N))$; initial population ;

$\mu_4 = round(rand(M, N))$; initial population ;

$\alpha_1 = round(rand(M, N))$; initial population ;

$\alpha_2 = round(rand(M, N))$; initial population ;

$\alpha_3 = round(rand(M, N))$; initial population ;

$\alpha_4 = round(rand(M, N))$; initial population ;

Après avoir généré nos différents paramètres en code binaire on obtient

11011.....100010.....011111.....101000.....010011.....110000.....1.....

L'étape suivante est l'évaluation de la fonction objective (equation 2.15) et à la sélection des bons paramètres.

- Evaluation et Sélection.

Evaluation

L'évaluation consiste à calculer l'équation 2.15. Suite à ce calcul on retient la valeur qui correspond à la plus pétite valeur de ϕ (erreur minimale).

Sélection

Au cours de la sélection nous retenons les bons paramètres qui ont donné l'erreur minimale ci-dessus. Cette étape est réprésentée par:

$\mu_1 = \mu_1((1:M),:)\,;$

$\mu_2 = \mu_2((1:M),:)\,;$

$\mu_3 = \mu_3((1:M),:)\,;$

$\mu_4 = \mu_4((1:M),:)\,;$

$\alpha_1 = \alpha_1((1:M),:)\,;$

$\alpha_2 = \alpha_2((1:M),:)\,;$

$\alpha_3 = \alpha_3((1:M),:)\,;$

$\alpha_4 = \alpha_4((1:M),:)\,;$

A la sortie de cette étape nous avons les individus qui ont mieux stabilisé l'erreur, mais qui ne sont pas toujours meilleurs d'*où* l'étape de croisement.

- Croisement.

L'opération croisement permet l'échange des informations génétiques entre les précédent individus. Ce processus ce déroule en tenant compte de la probabilité $nmuts$ définie plus haut. Ainsi nous illustrons cette phase par les commandes suivantes:

$i = 1 : nmuts$

$\mu_1(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \mu_1(M2 + ic, 1 : cross(ic))\,;$

$\mu_2(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \mu_2(M2 + ic, 1 : cross(ic))\,;$

$\mu_3(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \mu_3(M2 + ic, 1 : cross(ic))\,;$

$\mu_4(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \mu_4(M2 + ic, 1 : cross(ic))\,;$

$\alpha_1(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \alpha_1(M2 + ic, 1 : cross(ic))\,;$

$\alpha_2(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \alpha_2(M2 + ic, 1 : cross(ic))$;

$\alpha_3(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \alpha_3(M2 + ic, 1 : cross(ic))$;

$\alpha_4(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \alpha_4(M2 + ic, 1 : cross(ic))$;

Pour mieux matérialiser cette situation de croisement nous considérons la population α_1.

$\alpha_1(parent_1) = 00101111001000$;

$\alpha_1(parent_2) = 11101100000001$;

$\alpha_1{}'(engendr) = 00101100000001$;

$\alpha_1{}''(engendr) = 11101111001000$;

De la population α_1, le *mâle* $\alpha_1(parent_1)$ rencontre la femmelle $\alpha_1(parent_2)$ pour procréer deux nouveaux enfants qui constitueront une nouvelle population $\alpha_1{}'$ et $\alpha_1{}''$. En appliquant cette logique aux autres 7 paramètres nous obtenons une population qui s'engagera dans le processus de mutation.

- Mutation.

Cette opération consiste à multiplier la chance d'obtenir les bons paramètres. Elle consiste à modifier les gènes de nouveaux individus en tenant compte la probabilité de mutation *mutrate*. Cette étape se traduit par le code suivant

$\alpha_1{}'(ix) = ceil(M * rand)$;

$\alpha_1{}'(iy) = ceil(M * rand)$;

$\alpha_1{}'(ix, iy) = 1 - \alpha_1{}'(ix, iy)$;

$00101100000001 = 00101000000001$.

Dans cet exemple le gène 1 est remplacé par le gène 0.

- Elitisme.

L'élitisme est une opération qui consiste a conserver les meilleurs individus de la nouvelle génération créée. En utilisant notre paramètre $\alpha_1{}'$, la mutation est implémentée par le code: $\alpha_1{}'(M2 + 1 : end, :) = \alpha_1{}'$;

Convergence

- De générations en générations la fonction d'adaptation du meilleur chromosome et la moyenne de l'ensemble de la population vont évoluer et tendre vers l'optimum (global).
- La convergence est l'augmentation progressive vers de l'uniformité.
- Un gène a convergé quand 95% de la population possède la même valeur du gène.
- La population a convergé quand tous les gènes ont convergé.

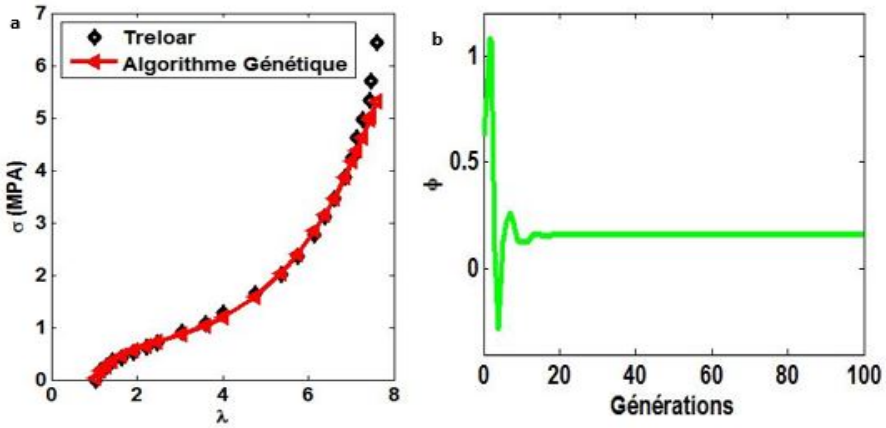

FIGURE 2.4 – Optimisation du modèle de Ogden par l'algorithme génétique : a)-Traction simple b)-Convergence de la fonction erreur.

Au cours de l'optimisation, la convergence de la fonction erreur ϕ permet d'obtenir les paramètres mentionés dans le tableau ci-dessous:

TABLE 2.5 – Paramètres du modèle de Ogden.

Modèles	Paramètres	Algorithme génétique	Unités
Ogden	μ_1	0.238×10^{-25}	MPA
	μ_2	0.00127	MPA
	μ_3	0.597	MPA
	μ_4	-0.024	MPA
	α_1	26	/
	α_2	5	/
	α_3	1.3	/
	α_4	-2	/

2.4 Comparaison des méthodes d'optimisation

Dans cette section nous effectuons la comparaison des 5 méthodes précédemment définies sur les critères suivants: Le temps de calcul, le nombre d'iteration, le nombre d'évaluation de la fonction objective et la précision de la fonction objective. Pour ce faite nous considerons les quatre modèles déjà présentés à la fin du premier chapitre: le modèle de Mooney [16], le modèle de Ogden [18], le modèle de Boyce et Arruda [5] et le modèle de Nguessong et al [103]. En respectant le principe de chacune des méthodes décrite dans la section 2, nous établissons le tableau ci-dessous:

TABLE 2.6 – Critère de comparaison des méthodes d'optimisation

Modèles	Méthodes	temps (min)			Genération			N.e.f(ϕ)			erreur finale		
		TS	TE	CP	TS	TE	CP	TS	TE	CP	TS	TE	CP
Mooney	AG	4	2.7	2	40	40	40	2	2	1	0.42	0.08	0.002
	BC	9	3.1	2.8	/	/	/	/	/	/	/	/	/
	PSA	5	2.4	1.7	40	40	40	2	2	2	0.51	0.06	0.004
	LM	4	2.9	2.4	60	60	60	1	1	1	0.53	0.073	0.0034
	MC	3	2.5	2.6	60	60	60	1	1	1	0.47	0.062	0.0026
Ogden 3 termes	AG	41	39	32	80	80	80	4	2	3	0.173	0.085	0.00381
	BC	44	42	43	/	/	/	/	/	/	/	/	/
	PSA	93	88	73	100	100	100	2	2	1	0.0598	0.0038	0.00125
	LM	40	35	28	150	100	100	1	1	1	0.129	0.0852	0.00254
	MC	30	27	21	100	100	100	1	1	1	0.271	0.0845	0.0032
Boyce Aruda	AG	14	12	16	150	150	150	5	3	2	0.00621	0.023	0.00941
	BC	24	28	21	/	/	/	/	/	/	/	/	/
	PSA	21	18	20	180	180	180	2	2	2	0.121	0.081	0.0098
	LM	28	21	19	150	150	150	1	1	1	0.0154	0.039	0.0782
	MC	28	23	22	150	150	150	1	1	1	0.703	0.959	0.0082
HIA	GA	46	42	37	200	200	200	4	3	2	0.00621	0.0321	0.0872
	BC	52	48	42	/	/	/	/	/	/	/	/	/
	PSA	37	34	35	200	200	200	2	2	2	0.0043	0.0021	0.011
	LM	39	34	33	200	200	200	1	1	1	0.00738	0.00633	0.0837
	MC	37	36.8	31	200	200	200	1	1	1	0.0020	0.0046	0.0030

2.4.1 Le temps de calcul

Nous rappelons que nous avons utilisé une machine de marque DELL, de caractéristiques suivant: 4G de RAM et 1.8GHz x 3, système 64bits pour nos différents calculs. Les calculs consistent à optimiser les paramètres des quatre modèles hyperélastiques mentionés sur les trois essais de Treloar décrits à la section 1.6.

- Le modèle de Mooney

  En traction simple et en traction équibiaxiale, la méthode des moindres carré optimise plus vite les paramètres du modèle de mooney que les quatres autres méthodes. Par contre en cisaillement pur, la méthode PSA est plus rapide dans l'optimisation des paramètres du modèle de mooney. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.5 ci-dessous.

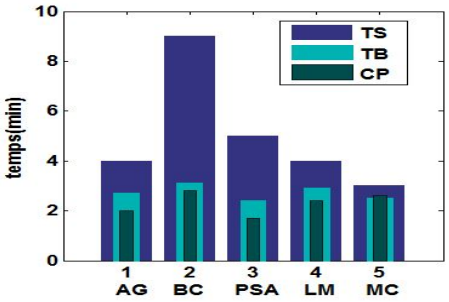

FIGURE 2.5 – Temps de calcul des paramètres du modèle de Mooney.

- Le modèle de Ogden

  En traction simple, en traction équibiaxiale et en cisaillement pur, la méthode des moindres carré optimise plus vite les paramètres du modèle de Ogden à 3 termes que les quatre autres méthodes. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.6 ci-dessous.

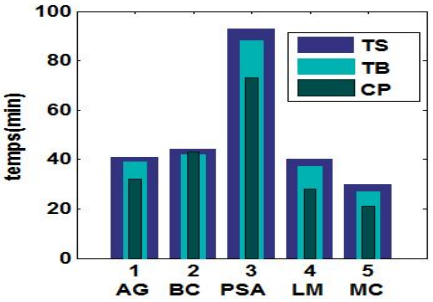

FIGURE 2.6 – Temps de calcul des paramètres du modèle de Ogden.

- Le modèle de Boyce et Arruda

En traction simple, en traction équibiaxiale et en cisaillement pur, la méthode de l'algorithme génétique optimise plus vite les paramètres du modèle de de Boyce et Arruda que les quatre autres méthodes. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.7 ci-dessous.

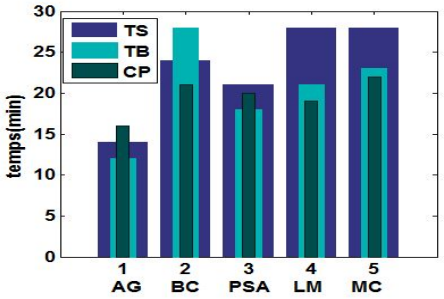

FIGURE 2.7 – Temps de calcul des paramètres du modèle de Boyce Arruda.

- Le modèle de Nguessong et al.

En traction simple la mthode PSA et la méthode des moindres carré optimisent à la même durée les paramètres du modèle de Nguessong et al. Par contre en traction équibiaxiale, en utilisant la méthode PSA et la méthode de Levengberg-Marquardt nous gagnons en temps de calcul. En cisaillement pur, c'est la méthode de Levengbert-Marquardt qui reste la plus rapide dans l'optimisation des paramètres du modèle de Nguessong et al. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.8 ci-dessous.

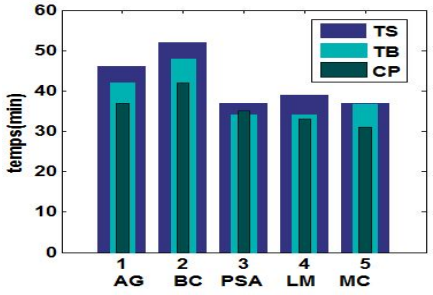

FIGURE 2.8 – Temps de calcul des paramètres du modèle de Nguessong et al.

2.4.2 Le nombre d'iteration

- Le modèle de Mooney

  Dans l'évaluations des paramètres du modèle de mooney, la méthode de levenberg-Marquardt et la la méthode des moindres carré sont les méthodes les plus itératives. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.9 ci-dessous.

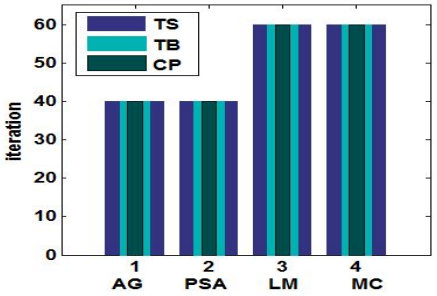

FIGURE 2.9 – Nombre d'itérations dans le calcul des paramètres du modèle de Mooney.

- Le modèle de Ogden

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de Ogden, l'algorithme génétique est la moins iterative. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.10 ci-dessous.

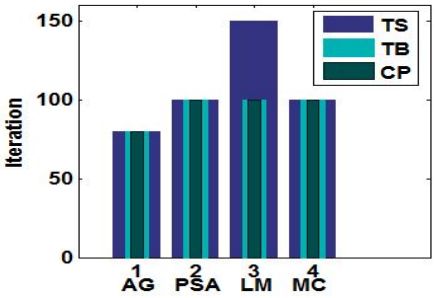

FIGURE 2.10 – Nombre d'itérations dans le calcul des paramètres du modèle de Ogden.

- Le modèle de Boyce et Arruda

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de Boyce et Arruda, la méthode PSA est la plus iterative. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.11 ci-dessous.

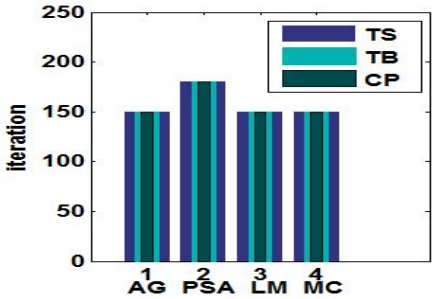

FIGURE 2.11 – Nombre d'itérations dans le calcul des paramètres du modèle de Boyce et Arruda.

- Le modèle de Nguessong et al.

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de Nguessong et al, toutes les quatre méthodes comptent le même nombre d'itération. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.12 ci-dessous.

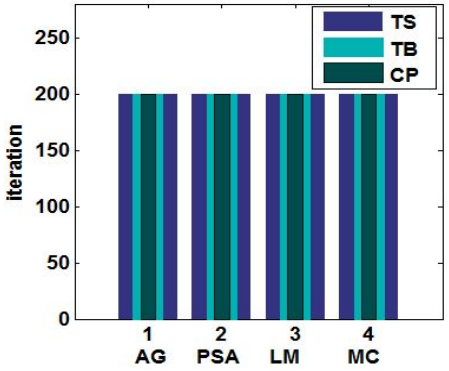

FIGURE 2.12 – Nombre d'itérations dans le calcul des paramètres du modèle de Nguessong et al.

2.4.3 Le nombre d'évaluation de la fonction objective

- Le modèle de Mooney

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de mooney, la méthode de levenberg-Marquardt et la méthode des moindres carré sont les méthodes les plus iteratives. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.13 ci-dessous.

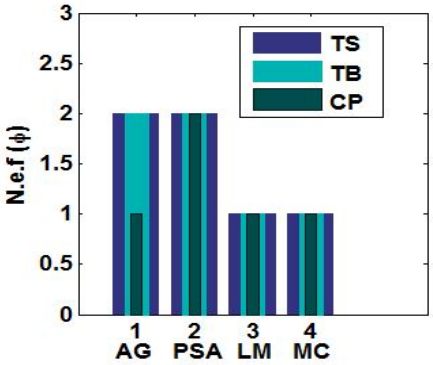

FIGURE 2.13 – Le nombre d'évaluation de la fonction objective avec le modèle de Mooney.

- Le modèle de Ogden

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de Ogden, l'algorithme génétique est la moins itérative. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.14 ci-dessous.

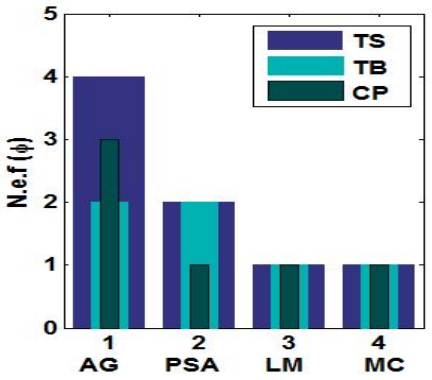

FIGURE 2.14 – Le nombre d'évaluation de la fonction objective avec le modèle de Ogden.

- Le modèle de Boyce et Arruda

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de Boyce et Arruda, la méthode PSA est la plus itérative. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.15 ci-dessous.

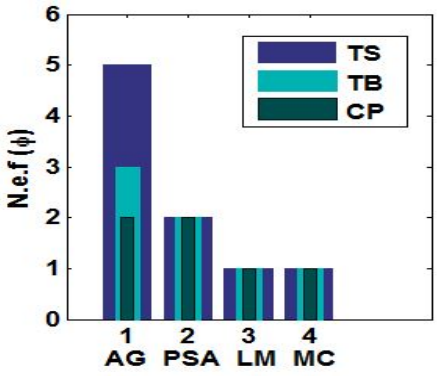

FIGURE 2.15 – Le nombre d'évaluation de la fonction objective avec le modèle de Boyce et Aruda.

- Le modèle de Nguessong et al.

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de Nguessong et al, toutes les quatre méthodes compte le même nombre d'itération. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.16 ci-dessous.

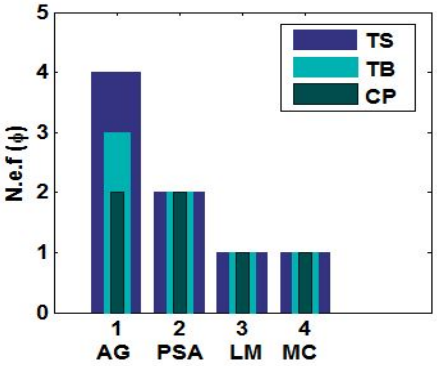

FIGURE 2.16 – Le nombre d'évaluation de la fonction objective avec le modèle de Nguessong et al.

2.4.4 La précision de la fonction objective

- Le modèle de Mooney

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de mooney, la méthode de levenberg-Marquardt et la la méthode des moindres carré sont des méthodes iteratives. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.17 ci-dessous.

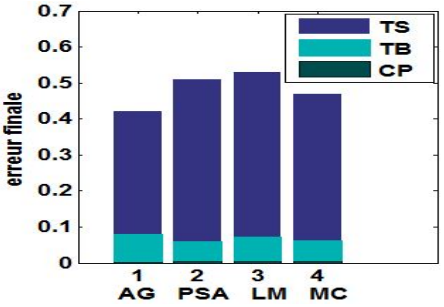

FIGURE 2.17 – Précision de la fonction objective dans le calcul des paramètres du modèle de Mooney.

- Le modèle de Ogden.

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de Ogden, l'algorithme génétique est la moins iterative. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.18 ci-dessous.

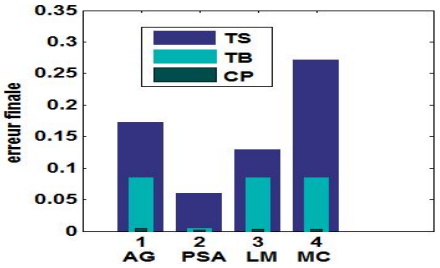

FIGURE 2.18 – Précision de la fonction objective dans le calcul des paramètres du modèle de Ogden.

- Le modèle de Boyce et Arruda.

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de Boyce et Arruda, la méthode PSA est la plus iterative. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.19 ci-dessous.

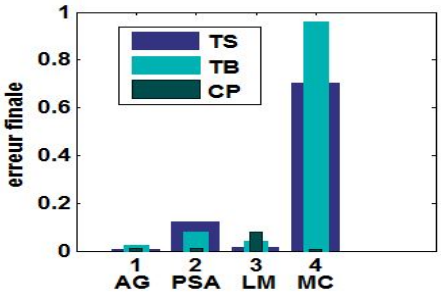

FIGURE 2.19 – Précision de la fonction objective dans le calcul des paramètres du modèle de Boyce et Aruda.

- Le modèle de Nguessong et al.

  Dans l'évaluation des paramètres du modèle de Nguessong et al, toutes les quatre méthodes compte le même nombre d'iteration. Nous illustrons cette interprétation par la Figure 2.20 ci-dessous.

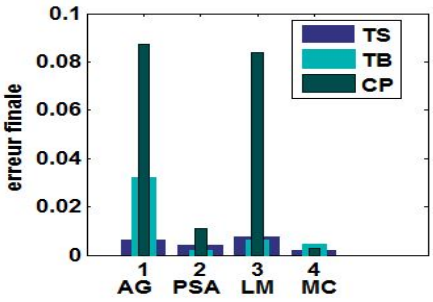

FIGURE 2.20 – Précision de la fonction objective dans le calcul des paramètres du modèle de Nguessong et al.

2.5 Limites des algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques ont, des limites qui influencent sur leurs performances. Parmi ses limites nous avons :

- le temps de calcul: le temps de calcul est parfois long lors de l'exécution de l'algorithme. Ce problème s'explique par le fait que l'algorithme contient dans sa structure l'étape de sélection, croisement, mutation et élitisme. De plus ils requiert de nombreuses itérations, ainsi que l'utilisation excessive de la fonction d'évaluation. Dans ce sens d'autres métaheuristiques tels que: les essaims de particules peuvent être plus intéressantes.
- Ils sont complexes à utiliser: des paramètres comme la taille de la population ou le taux de mutation sont parfois difficiles à déterminer. Il est également nécessaire de savoir modéliser l'architecture génétique du problème car le succès de l'évolution en dépend et plusieurs essais sont nécessaires: ce qui limite encore l'efficacité de l'algorithme.
- La fonction d'évaluation est critique, il est primordial de la définir avec soin pour prendre en compte tous les paramètres du problème. Sa complexité doit être optimale car elle est au cœur de l'algorithme.
- Les résultats sont incertains: malgré un nombre important de générations, il est impossible d'être assuré que la solution obtenue est la meilleure. On est sûr de s'être approché de la solution optimale, sans la certitude de l'avoir atteinte. Il y a le risque

des optimaux locaux qui est le résultat d'une convergence prématurée qui écarte les autres solutions potentielles.

- Enfin, ces algorithmes nécessitent une grande allocation mémoire par l'utilisation d'une grande population et de nombreuses variables lors du processus de génération.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les méthodes employées dans l'optimisation des paramètres des modèles hyperélastiques (phénoménologique et moléculaire).
L'algorithme génétique que nous avons développé dans cette présente étude permet de répondre aux exigences suivantes:

- Identifier les meilleurs paramètres positifs dans un intervalle contenant des potentiels résultats.
- Optimiser les paramètres des modèles hyperelastiques, même les plus complexes (le modèle de Ogden).
- Evaluer la foncton objective sans se soucier de sa dérivabilité.
- obtenir un point très proche de la solution pouvant servir de point de départ pour une méthode plus classique (moindres carrés, Levenberg-Marquardt, etc.) afin d'affiner la solution.

Chapitre 3

RESULTATS ET DISCUSSIONS

Introduction

Les élastomères, souvent appelés caoutchoucs dans le langage commun, sont largement utilisés dans l'industrie pour des applications anti-vibratoires, par exemple des supports moteur et d'échappement dans l'automobile, de collage souple dans les applications navales, ou encore pour les pneumatiques, l'étancheitéé, etc. Ces applications tirent profit du comportement mécanique particulier de ces matériaux, caractérisé principalement par la capacité à supporter de très grandes déformations réversibles (plusieurs pourcentage). Le comportement élastique de tels matériaux fait appel, dans une certaine mesure, à une théorie dans laquelle on est amené à trouver une nouvelle définition des déformations et des lois de comportement qui tiennent compte des déformations. Les propriétés élastiques de tels matériaux sont caractérisées par une fonction d'énergie de déformation qui permet d'établir les relations contraintes-déformations.

La théorie de l'hyperélasticité est à la base de tous les modèles de comportement pour les élastomères. Celle-ci bénéficie d'un cadre théorique rigoureux et a fait l'objet d'un très grand nombre d'études depuis 1940. À partir de ce cadre mathématique, il est possible de définir de nombreux modèles prédisant la réponse élastique en grandes déformations des élastomères. Ces modèles s'avèrent efficaces et sont largement disponibles

dans les logiciels de simulation. Toutefois, leurs utilisations par les ingénieurs dans la phase de conception nécessite: la compréhension de leur formulation théorique ; le développement et l'exploitation des essais expérimentaux associés ; la mise en œuvre de techniques d'identification des paramètres de ces modèles à partir des résultats d'essais ; la connaissance des méthodes numériques dédiées et des difficultés qu'elles induisent.

Le présent chapitre aborde ces différents aspects. Dans la section 3.1, la Comparaison des méthodes d'optimisation sur les essais de Treloar est faite, dans la section 3.2 la comparaison des modèles hyperélastiques en utilisant l'algorithme génétique est présentée ; la courbe contrainte-déformation que les modèles hyperélastiques s'attachent à reproduire est définie pour chaque modèle utilisé. Dans la section 3.3 nous effectuons un classement des modèles hyperélastiques sur leurs capacités à reproduire les grandes déformations et les déformations modérées. Dans la section 3.4 nous présentons la construction d'un nouveau modèle d'énergie phénoménologique.

3.1 Comparaison des méthodes d'optimisation sur les essais de Treloar

Dans cette partie, nous évaluons la capacité des méthodes retenues à optimiser les modèles hyperélastiques afin de mieux reproduire les données expérimentales de Treloar. A cet effet, nous retenons le modèle de Mooney, le modèle de Ogden, le modèle de Boyce et Arruda et le modèle de Nguessong et al. (HIA modèle).

3.1.1 Procédure

Pour effectuer notre comparaison nous respectons les étapes suivantes:

1. Choisir le modèle d'énergie.

   Cette étape consiste à retenir le modèle hyperélastique contenant les paramètres non identifiés.

2. Choisir la méthode d'optimisation.

   ici, nous utilisons respectivement les cinq méthodes d'optimisation présentées dans la section 2.2 avec leurs paramètres déterminés dans les tableaux 2.1 2.2 2.32.4 et 3.1.

- Le modèle de Mooney

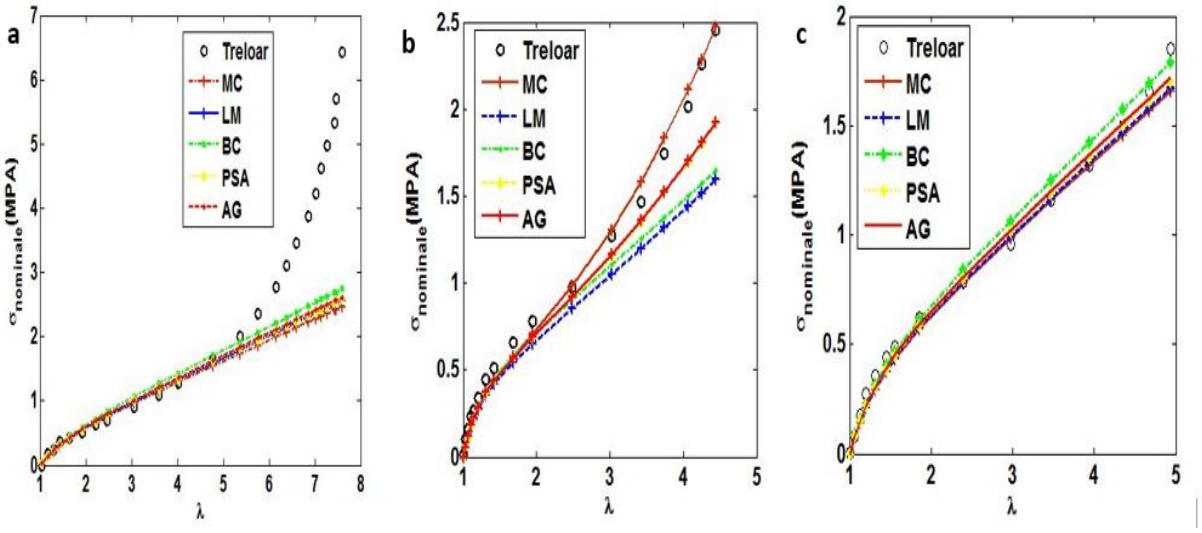

FIGURE 3.1 – Mooney

En traction simple (Figure 3.1a) les cinq méthodes d'optimisation permettent au modèle de Mooney de couvrir partiellement la courbe expérimentale. Par contre en traction équibiaxiale (Figure 3.1b) et en Cisaillement pur (Figure 3.1c) c'est la méthode de l'algorithme génétique qui permet au modèle de Mooney de mieux rapprocher les courbes expérimentales.

- Le modèle de Ogden.

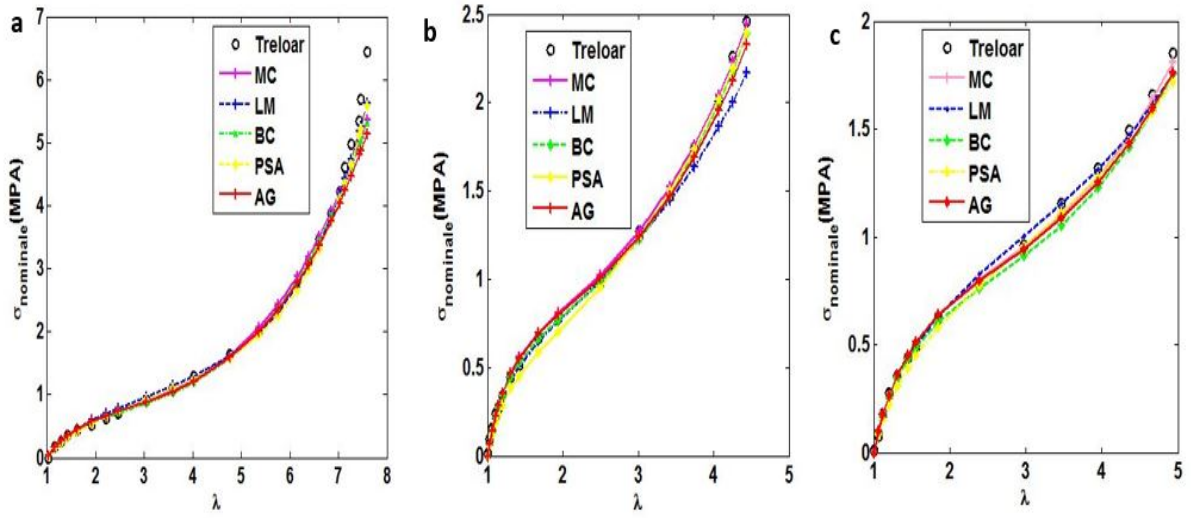

FIGURE 3.2 – Ogden

En traction simple (Figure 3.2a) les cinq méthodes d'optimisation permettent au modèle de Ogden de couvrir la courbe expérimentale jusqu'à 750% de déformation, c'est normal car les paramètres matériau sont identifiés en traction simple. Par contre en traction équibiaxiale (Figure 3.2b) la méthode de Levenberg-Marquardt se sépare de la courbe experimentale à partir de 750% de déformation et en Cisaillement pur (Figure 3.2c) la méthode Levenberg-Marquardt permet au modèle de Ogden de mieux rapprocher la courbe expérimentale.

- Le modèle de Boyce et Arruda.

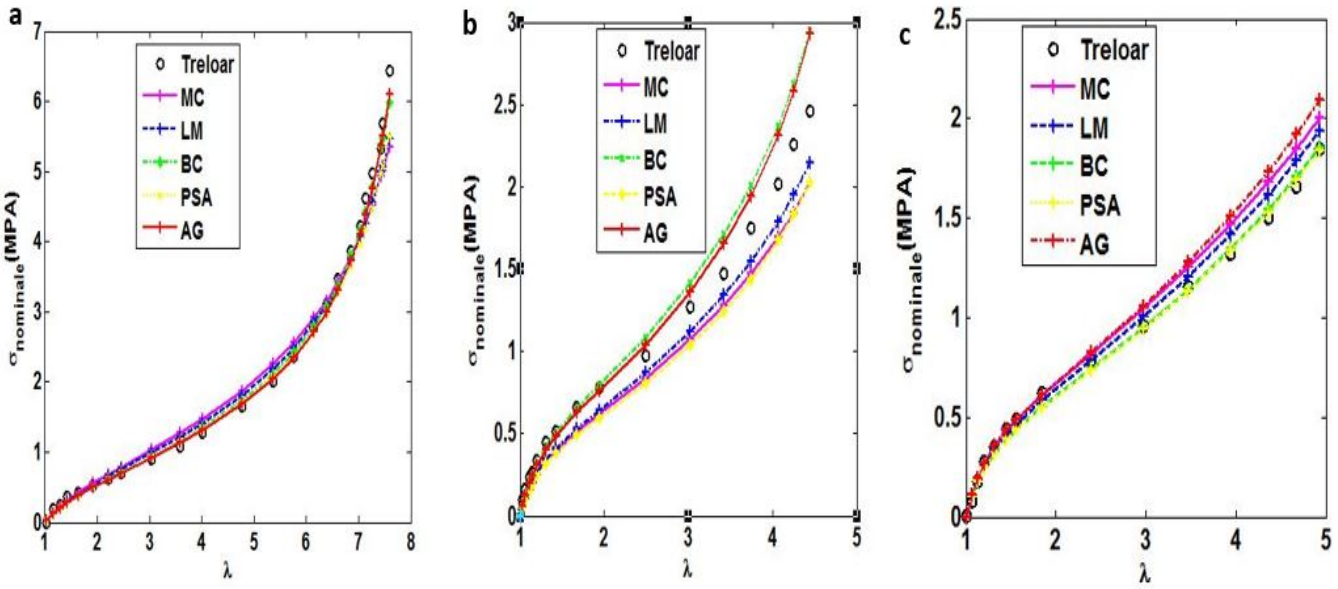

FIGURE 3.3 – Boyce et Arruda

En traction simple (Figure 3.3a) les cinq méthodes d'optimisation permettent au modèle de Ogden de couvrir la courbe expérimentale jusqu'à 750% de déformation, c'est une logique, car les paramètres matériau sont identifiés en traction simple. Par contre en traction équibiaxiale (Figure 3.3b) la méthode de l'algorithme génétique se raproche de la courbe experimentale jusqu'à 320% de déformation et en Cisaillement pur (Figure 3.3c) la méthode Beda-Chevalier et la méthode ≪pattern search algorithme≫ permettent au modèle de Boyce et Arruda de mieux se rapprocher de la courbe expérimentale.

- Le modèle de Nguessong et al.

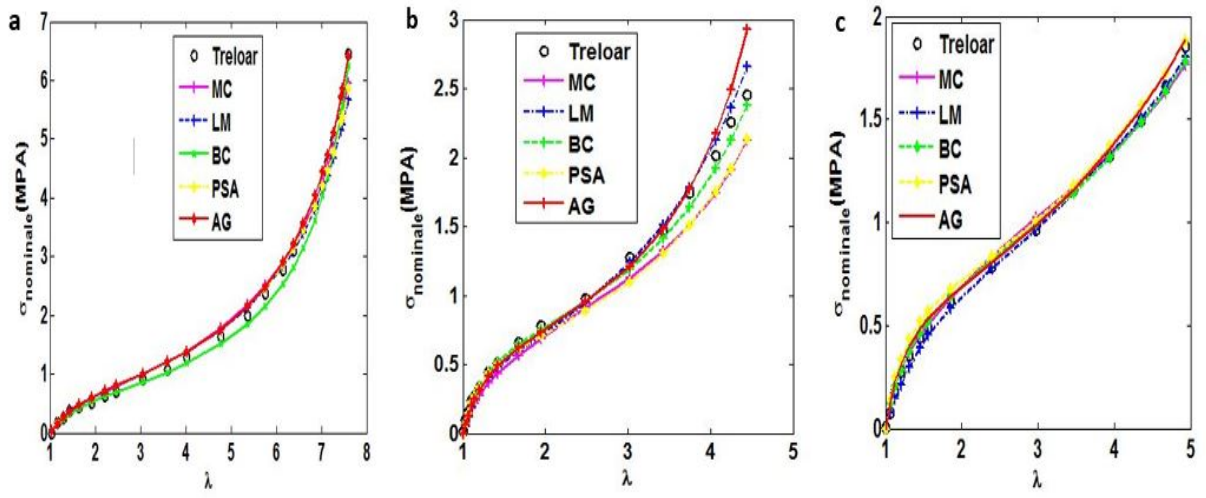

FIGURE 3.4 – Nguessong et al

En traction simple (Figure 3.4a) la méthode de Beda-Chevalier reproduit à peine la courbe expérimentale ; l'algorithme génétique permet au modèle de reproduire l'ensemble du domaine de déformation tout en reproduisant le raidissement final. Par contre en traction équibiaxiale (Figure 3.3b) la méthode de l'algorithme génétique et la méthode de Levenberg-Marquardt permettent au modèle de Nguessong et al de mieux se raprocher de la courbe experimentale jusqu'à 400% de déformation et en Cisaillement pur (Figure 3.3c) toutes les cinq méthodes permettent au modèle de Nguessong et al de mieux se rapprocher de la courbe expérimentale.

3.2 Comparaison des modèles hyperélastiques

Pour comparer les modèles hyperélastiques nous choisissons de les identifier suivant les jeux de données expérimentales issus de la littérature. Ces données proviennent des travaux de Treloar [4] très utilisés dans la bibliographie [23, 119]. Ces travaux concernent l'étude de deux types d'élastomères. Le premier est un caoutchouc à 8% de sulfure vulcanisé pendant 3 heures et le second concerne un latex [4]. Seuls les résultats

du caoutchouc seront utilisés. Celui-ci présente l'avantage *d'être* fortement élastique réversible sans présenter de cristallisation sous contrainte jusqu'à 400% d'extension. Il est donc très bien adapté pour *être* modélisé par un modèle hyperélastique. L'auteur a effectué sur ce matériau des essais de traction simple (TS), de traction équibiaxiale (EB) et de cisaillement pur (CP). Les courbes expérimentales obtenues sont reproduites dans la section 1.6 du chapitre 1 de ce mémoire.

Nous utilisons maintenant notre algorithme (algorithme génétique) dévéloppé au précédent chapitre pour identifier les paramètres des modèles hyperélastiques retenus. Le but de cette étude est de juger l'aptitude de ces modèles à reproduire les essais expérimentaux suivant différents modes de déformation. Cette étude permettra ensuite d'établir un classement de ces modèles en fonction de leur domaine de validité et du nombre de coefficients intervenant dans leur formulation.

3.2.1 Modèles hyperélastiques retenus

Dans cette section, sont choisis les modèles les plus classiques, mais aussi des modèles plus récents ayant démontré leur efficacité dans les logiciels à éléments finis. *À* cet effet, nous présentons les différents modèles hyperélastiques retenus, l'écriture de leurs différentes lois de comportement en traction simple et le nombre de paramètres à optimiser. La loi de comporetement en traction simple permet d'évaluer la fonction objective décrite par l'équation 2.1. Ainsi nous avons :

1. Le modèle de Mooney

   Défini par l'équation (1.71), sa loi de comportement(Contrainte de Cauchy) en traction simple est

   $$\sigma_{nominale} = 2(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})(C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda}). \tag{3.1}$$

   Dans ce modèle C_{10} et C_{01} sont les deux paramètres à optimiser par l'algorithme génétique.

2. Le modèle de Gent-Thomas

Défini par l'équation (1.74), sa loi de comportement (Contrainte de Cauchy) en traction simple est

$$\sigma_{nominale} = 2(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})(K_1 + K_2\frac{\lambda}{1+2\lambda^3}). \tag{3.2}$$

Dans ce modèle K_1 et K_2 sont les deux paramètres à optimiser par l'algorithme génétique.

3. Le modèle de Ogden

   Donné par l'équation (1.80), sa loi de comportement (Contrainte de Cauchy) en traction simple est

$$\sigma_{nominale} = \mu_1(\lambda^{(\alpha_1-1)} - \lambda^{-(0.5\alpha_1+1)}) + \mu_2(\lambda^{(\alpha_2-1)} - \lambda.^{-(0.5\alpha_2+1)}) + \mu_3(\lambda^{(\alpha_3-1)} - \lambda^{-(.5\alpha_3+1)}) \tag{3.3}$$

   Dans ce modèle μ_1, μ_2, μ_3, α_1, α_2 et α_3 sont les six paramètres à optimiser par l'algorithme génétique.

4. Le modèle de Pucci et Saccomandi

   Le modèle de Pucci et Saccomandi est défini par l'équation (1.89), sa loi de comportement (Contrainte de Cauchy) en traction simple est

$$\sigma_{nominale} = 2(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})(\frac{\mu}{2}\frac{I_m - 3}{I_m - \lambda^2 - \frac{2}{\lambda}} + K\frac{\lambda}{1+2\lambda^3}), \tag{3.4}$$

   μ, I_m et K, représentent les paramètres à optimiser par l'algorithme génétique.

5. Le modèle de Beda (2007)

   Défini par l'équation (1.93), sa loi de comportement (Contrainte de Cauchy) en traction simple est

$$\sigma_{nominale} = 2(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})(C_{10} + C_{20}(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3) + C_{30}(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3)^2 + K\frac{\lambda}{1+2\lambda^3}), \tag{3.5}$$

C_{10}, C_{20}, C_{30} et K représentent les paramètres à optimiser par l'algorithme génétique.

6. Le modèle de Gornet et al.

   Donné par l'équation (1.95), sa loi de comportement (Contrainte de Cauchy) en traction simple est

$$\sigma_{nominale} = 2(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})(h_1 exp(h_3(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3)^2) + \frac{h_2}{\lambda\sqrt{(\frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda)}}), \tag{3.6}$$

   h_1, h_2 et h_3 représentent les paramètres à optimiser par l'algorithme génétique.

7. Le modèle HIA

   Le modèle de Nguessong et al. est donné par l'équation (1.97), sa loi de comportement (Contrainte de Cauchy) en traction simple est

$$\sigma_{nominale} = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\mu}{6}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\lambda^2+\frac{2}{\lambda}}{3}}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2+\frac{2}{\lambda}}{3}}}{\sqrt{n}}\right) - \frac{\eta}{2}exp\left[-\left(\frac{\frac{1}{\lambda}-\zeta}{\xi}\right)^2\right] + \frac{K}{\lambda(\frac{1}{\lambda^2}+2\lambda)}\right), \tag{3.7}$$

   μ, n, K, η, ζ et ξ sont les différents paramètres matériau qui sont optimisés par l'algorithme génétique.

8. Le modèle de Boyce et Arruda

   Définie par l'équation (1.102), la loi de comportement en traction simple avec se modèle est donnée par

$$\sigma_{nominale} = \frac{\mu}{3}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\lambda^2+\frac{2}{\lambda}}{3}}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda^2+\frac{2}{\lambda}}{3}}}{\sqrt{n}}\right), \tag{3.8}$$

   μ et n sont les deux paramètres à optimiser par l'algorithme génétique.

3.2.2 Stratégie d'identification des paramètres

L'identification des paramètres est une étape très importante dans la caractérisation des matériaux hyperélastiques. Les données de Treloar en traction uniaxiale (Figure 1.14) étant utilisées. Nous cherchons alors à savoir si un *même* jeu de paramètres peut reproduire les essais des deux autres essais de Treloar (Figure 1.15 et Figure 1.16). Pour cela, nous mettons en place une méthodologie *bâtie* sur la logique suivante:

1. Les paramètres sont identifiés sur les essais de Treloar en traction uniaxiale (Figure 1.14).
2. Si la courbe du modèle corrèle mieux avec la courbe de la traction uniaxiale (Figure 1.14), les paramètres positifs sont conservés.
3. Si les deux autres modes de déformation (Figure 1.15 et Figure 1.16) ne sont pas bien reproduits, nous éliminons les paramètres conservés et nous reévaluons encore la fonction objective jusqu'à l'obtention des bons paramètres qui reproduira le mieux possible tous les trois modes de sollicitations.

La stratégie décrite ci-dessus permet ainsi d'identifier les modèles en déterminant leur domaine de validité. Ainsi, en identifiant par la méthode de l'algorithme génétique décrite ci-haut les paramètres du modèle de: Mooney ; Gent et Thomas ; Ogden ; Pucci et Saccomandi ; Beda (2007) ; Gornet et al ; Nguessong et al ; Boyce et Arruda, nous obtenons le tableau ci-dessous.

TABLE 3.1 – Valeurs des Paramètres optimisés par l'algorithme génétique.

Modèles	Paramètres	Valeurs	Unités
Mooney	C_{10}	0.1504	MPA
	C_{01}	0.014746	MPA
Gent Thomas	K_1	0.15469	MPA
	K_2	0.16039	MPA
Ogden 3 terms	μ_1	0.63	MPA
	μ_2	1.2×10^{-3}	MPA
	μ_3	-0.01	MPA
	α_1	1.3	/
	α_2	5	/
	α_3	-2	/
Pucci Saccomandi	μ	0.2456	MPA
	I_m	80.8754	MPA
	K	0.34039	MPA
Beda (2007)	C_{10}	0.121	MPA
	C_{20}	2.066×10^{-5}	MPA
	C_{30}	7.67×10^{-5}	MPA
	K	0.26	MPA
Gornet et al	h_1	0.136	MPA
	h_2	0.585×10^{-2}	MPA
	h_3	3.595×10^{-4}	MPA
HIA	μ	0.3674	MPA
	n	27	MPA
	K	0.01066	MPA
	η	0.11	MPA
	ζ	0.120	MPA
	ξ	0.399	MPA
Boyce et Arruda	μ	0.3224	MPA
	n	25.4	MPA

3.2.3 Comparaison des modèles hyperélastiques sur les critères théoriques

- Stabilité thermodynamique

La stabilité thermodynamique stipule que les paramètres matériau doivent être

positifs. Tous les paramètres présentés dans le tableau 3.1 sont positifs, à part les paramètres du modèle de Ogden qui présente une exception en vérifiant la condition $\mu \times \alpha > 0$

- Prédiction des modes de déformation

  Nous utilisons les données du tableau 3.1 pour prédire les modes de déformation des élastomères en traction simple, traction équibiaxiale et en cisaillement pur. Les Figures 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 décrivent les différents modes de déformation.

  - Le modèle de Beda (2007)

    En utilsant les paramètres du modèle de Beda (2007) mentionés dans le tableau 3.1 on a la figure des déformations pour les trois sollicitations définies.

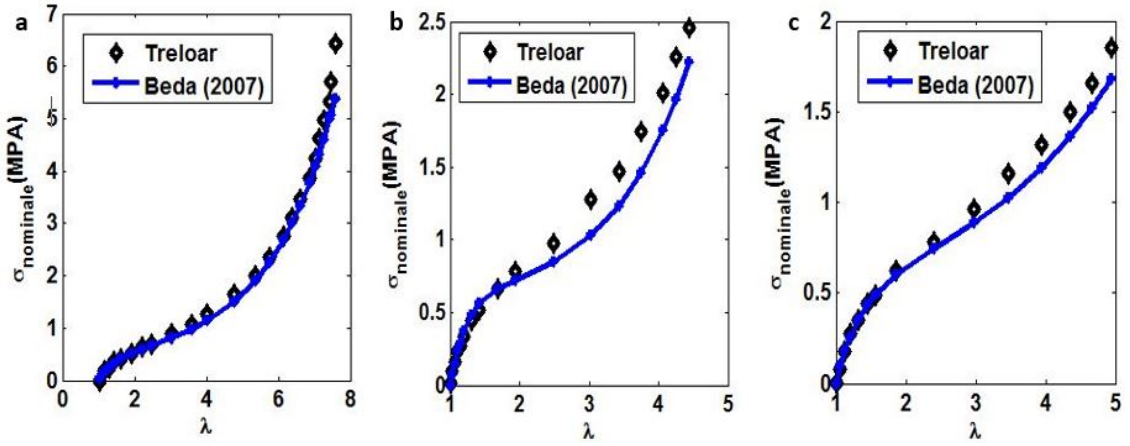

FIGURE 3.5 – Prédiction du modèle de Beda (2007): a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur

- Le modèle de Ogden

  En utilsant les paramètres du modèle de Ogden mentionés dans le tableau 3.1 on a la figure des déformations pour les trois sollicitations définies.

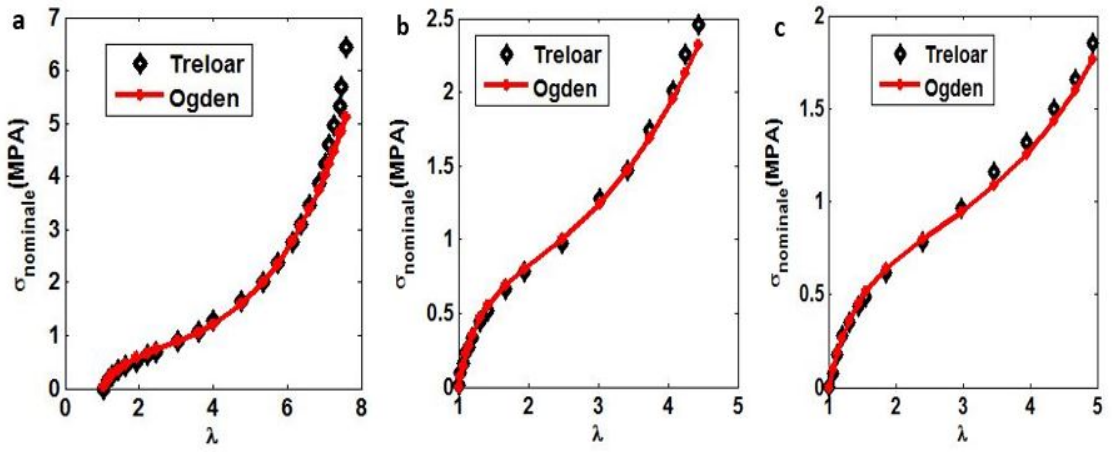

FIGURE 3.6 – Prédiction du modèle de Ogden : a)-Traction simple ; b)-Traction équi-biaxiale et c)-Cisaillement pur

- Le modèle de Mooney

  En utilsant les paramètres du modèle de Mooney mentionés dans le tableau 3.1 on a la figure des déformations pour les trois sollicitations définies.

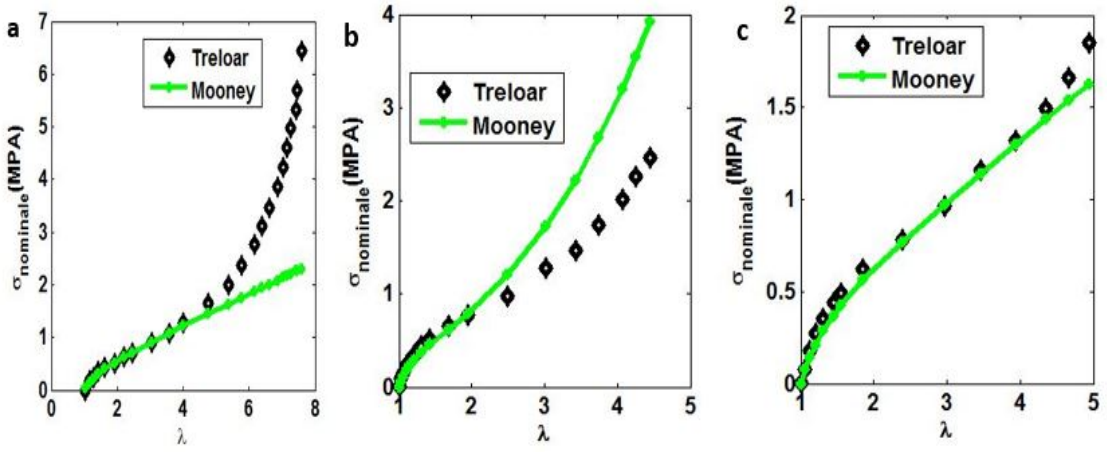

FIGURE 3.7 – Prédiction du modèle de Mooney: a)-Traction simple ; b)-Traction équi-biaxiale et c)-Cisaillement pur

- Le modèle de Boyce-Arruda

  En utilsant les paramètres du modèle de Boyce-Arruda mentionés dans le tableau 3.1 on a la figure des déformations pour les trois sollicitations définies.

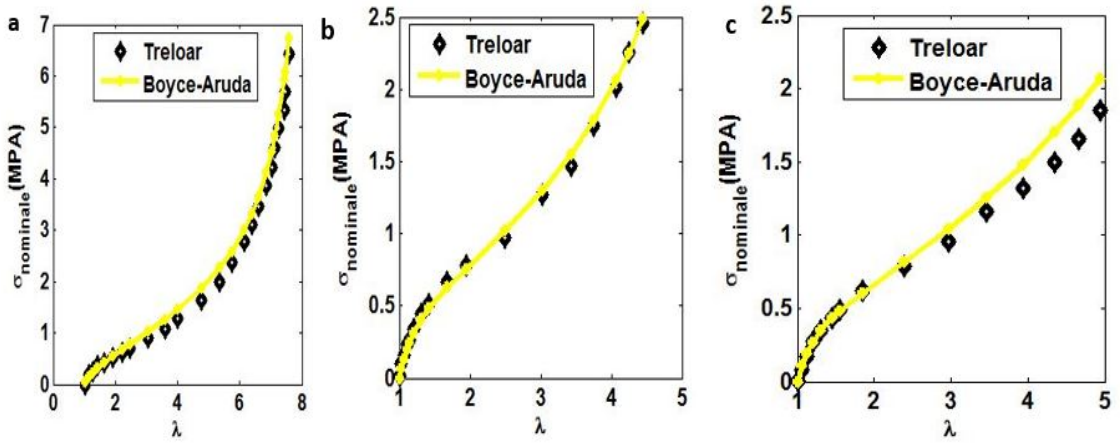

FIGURE 3.8 – Prédiction du modèle de Boyce-Aruda: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur

- Le modèle de HIA

  En utilsant les paramètres du modèle HIA mentionés dans le tableau 3.1 on a la figure des déformations pour les trois sollicitations définies.

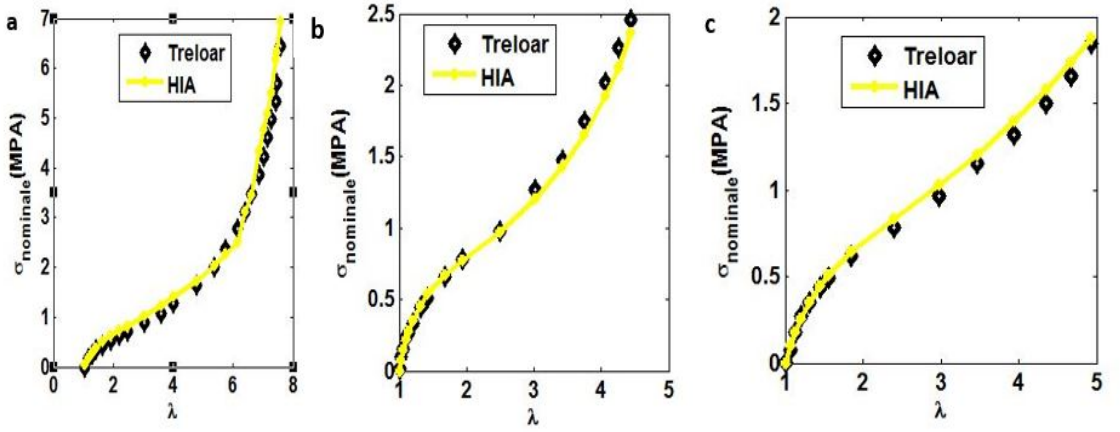

FIGURE 3.9 – Prédiction du modèle de HIA: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur

- Le modèle de Gornet et al.

  En utilsant les paramètres du modèle de Gornet et al. mentionés dans le tableau 3.1 on a la figure des déformations pour les trois sollicitations définies.

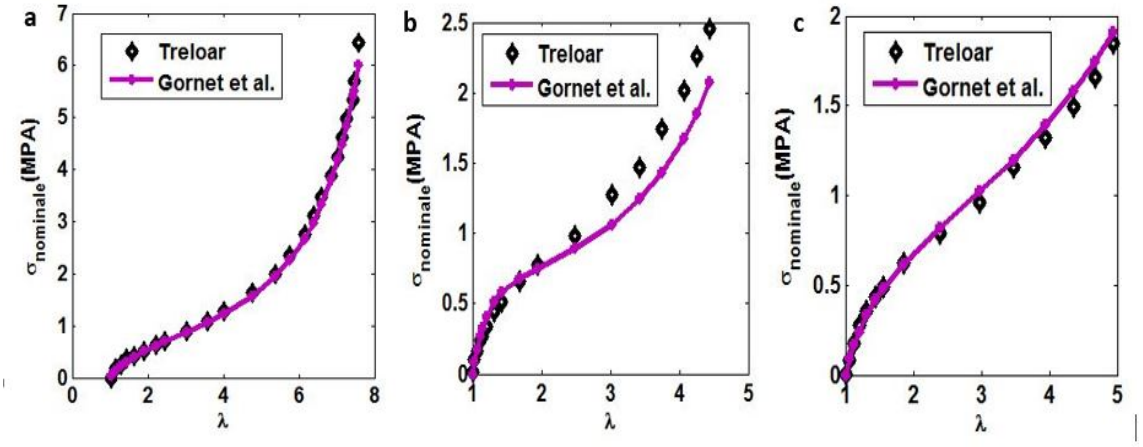

FIGURE 3.10 – Prédiction du modèle de Gornet et al.: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur

- Le modèle de Pucci et Saccomandi.

  En utilsant les paramètres du modèle de Pucci et Saccomandi. mentionés dans le tableau 3.1 on a la figure des déformations pour les trois sollicitations définies.

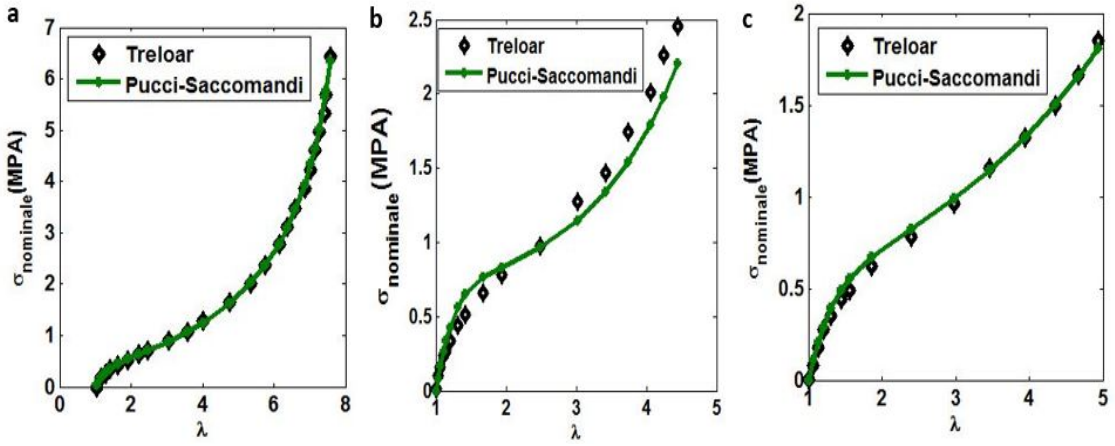

FIGURE 3.11 – Prédiction du modèle de Pucci-Saccomandi: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur

- Le modèle de Gent-Thomas.

  En utilsant les paramètres du modèle de Gent et Thomas. mentionés dans le tableau 3.1 on a la figure des déformations pour les trois sollicitations définies.

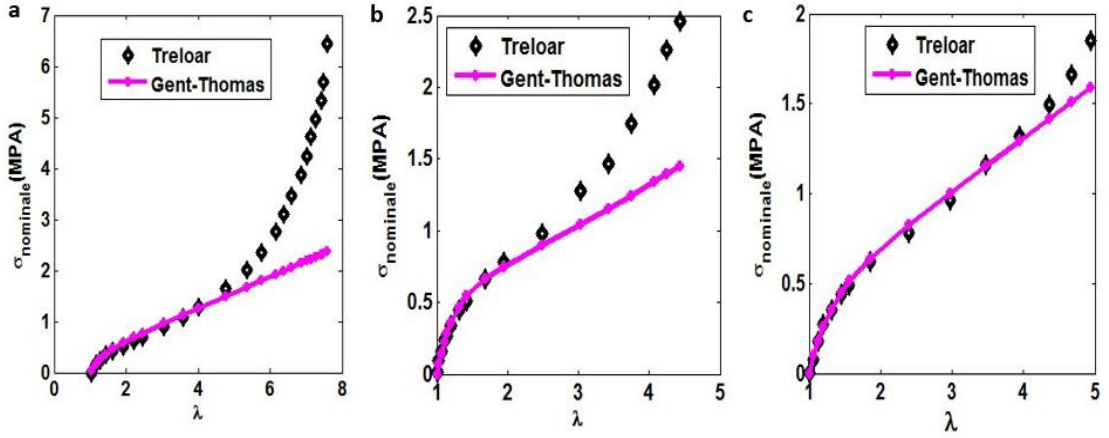

FIGURE 3.12 – Prédiction du modèle de Gent-Thomas: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur

3.2.4 Comparaison des modèles hyperélastiques sur les Critères expérimentalement établis

1. **Les observations de Rivlin-Saunders [19]**

   D'après Rivlin Saunders un modèle hyperélastique doit vérifier les observations suivantes:

   – $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ indépendant de I_1 et de I_2;

   – $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ indépendant de I_1 mais fonction décroissante de I_2;

   Ainsi, vérifions les conditions de Rivlin saunders avec les modèles hyperélastiques retenus.

- **Le modèle de Mooney**

En dérivant le modèle de Mooney par rapport à l'invariant I_1 on a

$$\frac{\partial W_{Mo}}{\partial I_1} = C_{10}. \tag{3.9}$$

D'après cette équation la première condition de Rivlin-Saunders est vérifiée. D'une autre part,

$$\frac{\partial W_{Mo}}{\partial I_2} = C_{01}. \tag{3.10}$$

Cette équation, donne une constante et par conséquence la deuxième condition de Rivlin saunders n'est pas vérifiée.

- **Le modèle de Gent et Thomas**

En dérivant le modèle de Gent et Thomas par rapport à l'invariant I_1 on a

$$\frac{\partial W_{GT}}{\partial I_1} = K_1. \tag{3.11}$$

D'après cette équation la première condition de Rivlin saunders est vérifiée. D'une autre part le modèle de Gent et Thomas par rapport à l'invariant I_2 on a,

$$\frac{\partial W_{GT}}{\partial I_2} = \frac{K_2}{I_2} = \frac{0.16039}{I_2}. \tag{3.12}$$

L'équation ci-dessus permet de tracer la figure ci-dessous.

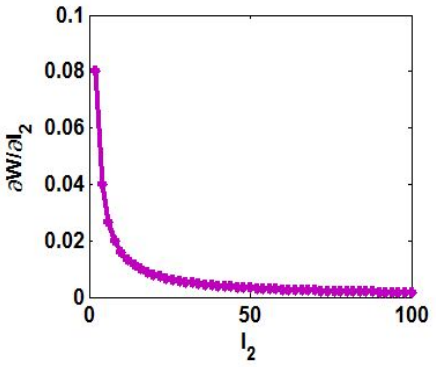

FIGURE 3.13 – Prédiction du modèle de Gent-Thomas : $\frac{\partial W_{GT}}{\partial I_2}$

Cette Figure nous permet de conclure que la deuxième condition de Rivlin Saunders est aussi vérifiée.

- **Le modèle de Pucci et Saccomandi**

$$\frac{\partial W_{PS}}{\partial I_1} = \frac{\mu}{2}\frac{I_m - 3}{I_m - I_1}. \tag{3.13}$$

D'après cette équation, la première condition de Rivlin Saunders n'est pas vérifiée. Par ailleurs,

$$\frac{\partial W_{PS}}{\partial I_2} = \frac{K}{I_2} = \frac{0.34039}{I_2}. \tag{3.14}$$

L'équation ci-dessus permet de tracer la figure ci-dessous.

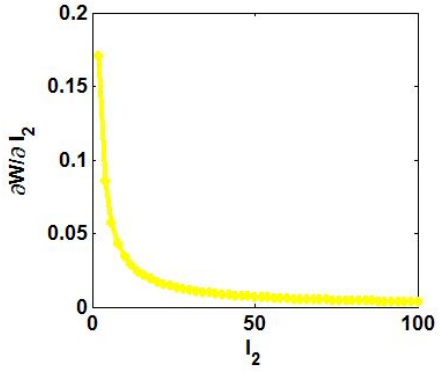

FIGURE 3.14 – Prédiction du modèle de Pucci et Saccomandi : $\frac{\partial W_{PS}}{\partial I_2}$

Cette Figure nous permet de conclure que la deuxième condition de Rivlin saunders est vérifiée avec le modèle de Pucci et Saccomandi.

- **Le modèle de Beda (2007)**

$$\frac{\partial W_{Beda}}{\partial I_1} = C_{10} + C_{20}(I_1 - 3) + C_{30}(I_1 - 3)^2. \tag{3.15}$$

D'après cette équation, la première condition de Rivlin Saunders n'est pas vérifiée. Par ailleurs,

$$\frac{\partial W_{Be}}{\partial I_2} = \frac{K}{I_2} = \frac{0.34039}{I_2}. \tag{3.16}$$

L'équation ci-dessus permet de tracer la figure ci-dessous.

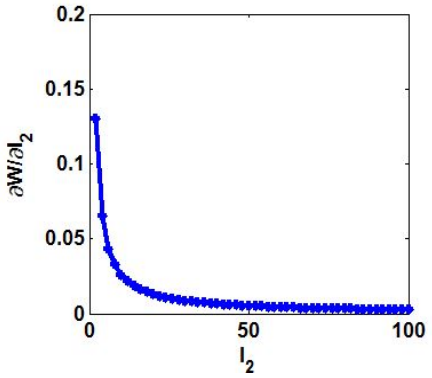

FIGURE 3.15 – Prédiction du modèle de Beda (2007) : $\frac{\partial W_{Be}}{\partial I_2}$

Cette Figure nous permet de conclure que la deuxième condition de Rivlin saunders est vérifiée avec le modèle de Beda (2007).

- **Le modèle de Gornet et al.**

$$\frac{\partial W_{Gornetetal}}{\partial I_1} = h_1 exp(h_3(I_1 - 3)^2). \tag{3.17}$$

D'après cette équation, la première condition de Rivlin Saunders n'est pas vérifiée. Par ailleur,

$$\frac{\partial W_{Gornetetal}}{\partial I_2} = \frac{h_2}{\sqrt{I_2}} = \frac{0.585 \times 10^{-2}}{I_2}. \tag{3.18}$$

L'équation ci-dessus permet de tracer la figure ci-dessous.

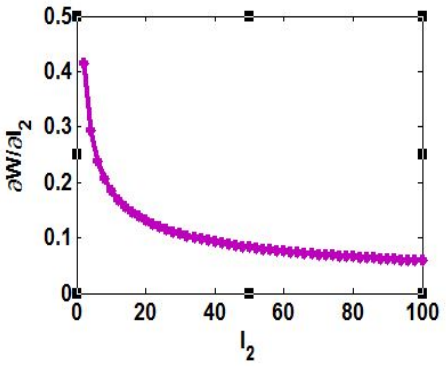

FIGURE 3.16 – Prédiction du modèle de Gornet et al. : $\frac{\partial W_{Be}}{\partial I_2}$

Cette Figure nous permet de conclure que la deuxième condition de Rivlin saunders est vérifiée avec le modèle de Gornet et al.

- **Le modèle de Nguessong et al.**

$$\frac{\partial W_{HIA}}{\partial I_1} = \left(\frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{I_1}{3}}} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\sqrt{\frac{I_1}{3}}}{\sqrt{n}} \right) \right). \tag{3.19}$$

D'après cette équation, la première condition de Rivlin Saunders n'est pas vérifiée. Par ailleurs,

$$\frac{\partial W_{HIA}}{\partial I_2} = \frac{K}{I_2} = \frac{0.01066}{I_2}. \tag{3.20}$$

L'équation ci-dessus permet de tracer la figure ci-dessous.

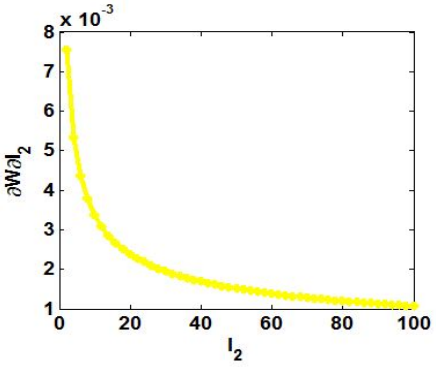

FIGURE 3.17 – Prédiction du modèle de Nguessong et al. : $\frac{\partial W_{HIA}}{\partial I_2}$

Cette Figure nous permet de conclure que la deuxième condition de Rivlin saunders est vérifiée avec le modèle de Beda Nguessong et al.

- **Le modèle de Boyce et Arruda**

  En dérivant le modèle de Boyce et Arruda par rapport à I_1 nous obtenons l'équation ci-après

$$\sigma_{nominale} = \frac{\mu}{3}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{I_1}{3}}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\frac{I_1}{3}}}{\sqrt{n}}\right). \tag{3.21}$$

  L'équation ci-dessus mentionée ne vérifie pas la première condition de Rivlin Saunders. De même, le modèle de Boyce et Arruda ne vérifie pas aussi la deuxième condition de Rivlin et Saunders, car elle n'est pas définie en I_2.

2. W couvre le domaine complet

A partir des Figures 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 tracées, nous constatons que se ne sont que les Figures 3.5, 3.6, 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 qui reproduisent l'ensemble du domaine de déformation, malgrè des légères déviation parfois observées. Ses déviations s'expliquent par l'effet mullin. Cependant une particularité est faite sur les Figures 3.8a, 3.9a et 3.11a à cause de leur capacité à reproduire le redissement final. Les Figures 3.6, 3.8 et 3.9 nous permettent aussi de remarquer que avec un même jeu de paramètres on reproduit tous les trois modes de sollicitation.

3.3 Classement des modèles hyperélastiques

L'étude présentée dans la section 3.2 nous permet de classer les 8 modèles retenus de la littérature suivant leurs aptitudes à représenter le comportement hyperélastique des élastomères étudié par Treloar [4].

Cependant, le classement des modèles est effectué en fonction de la largeur de leur domaine de validité, de la déviation et du nombre de paramètre nécessaire.

3.3.1 Modèles utilisables pour les très grandes déformations

Les figures 3.5, 3.6, 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 nous permettent de construire le tableau suivant:

TABLE 3.2 – Modèles utilisables pour les grandes déformations

	λ_{max}			Déviation			Nombre de paramètre
Modèles	TS	TE	CP	TS	TE	CP	
Ogden	7.8	4.6	5	Non	Non	légère	6
Beda (2007)	7.8	4.5	5	Non	forte	légère	4
Boyce et Arruda	7.8	4.5	5	Non	Non	légère	2
HIA	7.8	4.6	5	Non	Non	légère	6
Gornet et al	7.7	4.5	5	Non	forte	légère	3
Pucci et Saccomandi	7.8	4.5	5	Non	forte	Non	3

3.3.2 Modèles utilisables pour les déformations modérées

Les figures 3.7 et 3.12 nous permettent de construire le tableau suivant:

TABLE 3.3 – Modèles utilisables pour les moyennes déformations

	λ_{max}			Déviation			Nombre de paramètre
Modèles	TS	TE	CP	TS	TE	CP	
Mooney	4.5	2	4.5	Forte	Forte	légère	2
Gent et Thomas	4.5	2.5	4.5	Forte	Forte	légère	2

3.4 Construction d'un nouveau modèle hyperélastique phénoménologique

3.4.1 Motivation

Afin d'améliorer les déviations observées avec le modèle de Beda 2007 dans les figures 3.5b et 3.5c d'une part et d'une autre part avec le modèle de Gornet et al., nous proposons une nouvelle expression d'un modèle d'énergie phénoménologique.

3.4.2 Methodologie

La construction du nouveau modèle se fait en ajoutant à la série de Rivlin tronquée un second terme en I_2 provenant du modèle de Gornet décrit par l'équation 1.95. Ce modèle ne dépend que des deux invariants I_1 et I_2. De plus ce modèle contient cinq paramètres matériau dans son expression. Le modèle proposé a alors pour expression

$$W(I_1, I_2) = C_{10}(I_1-3)-\frac{C_{20}}{2}(I_1-3)^2+\frac{C_{30}}{3}(I_1-3)^3+\frac{C_{50}}{5}(I_1-3)^5+3K\int\frac{1}{\sqrt{I_2}}dI_2, \quad (3.22)$$

C_{10}, C_{20}, C_{30}, C_{50} et K sont les paramètres matériau.
Dans ce modèle les termes en I_1 sont utilisés pour couvrir l'ensemble du domaine non lineaire des courbes experimentales de Treloar en traction simple, traction équibiaxiale et cisaillement pur. Le terme en I_2 permet de corriger le raidissement final.

3.4.3 Optimisation des paramètres matériau

En utilisant la méthode de l'algorithme génétique décrite dans le chapitre 2, nous obtenons les résultats mentionés dans le tableau ci-après.

TABLE 3.4 – Valeur des paramètres du modèle proposé

Modèle	Paramètres (MPA)	essais de Treloar	essais de Moreira
	C_{10}	0,158	0,00328
	C_{20}	$0,0009066$	0,0007066
	C_{30}	$7,67.10^{-5}$	$7,47.10^{-4,16}$
	C_{50}	$5.07.10^{-9}$	$84.07.10^{-9}$
	K	$0,0156$	$0,2286$

3.4.4 Validation du modèle hyperélastique proposé

En s'inspirant des travaux de comparaison des modèles hyperélastiques définis dans la littérature [34, 103], nous validons notre nouveau modèle proposé par l'équation 3.22 sur les critères suivants:

La couverture de l'ensemble du domaine de déformation

Nous étudions dans ce paragraphe, la capacité du nouveau modèle défini par l'équation 3.22 à prédire le comportement hyperelastique en traction simple, traction équibiaxiale et en cisaillement pur. L'étude est faite sur les essais de Treloar et de Moreira définis dans la section 1.6.

- Les essais de Treloar [4].

En utilisant les paramètres du tableau 3.4, nous obtenons la Figure ci-après.

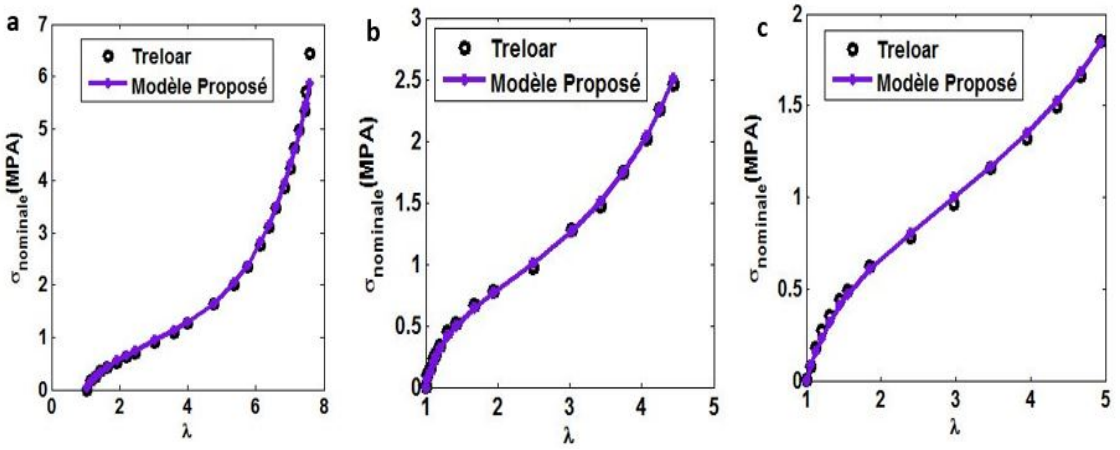

FIGURE 3.18 – Prédiction du modèle Proposé: a)-Traction simple ; b)-Traction équibiaxiale et c)-Cisaillement pur

- Les essais de Nunes et Moreira [46].

En optimisant les paramètres du modèle proposé sur la courbe de cisaillement simple, nous obtenons la Figure ci-dessous.

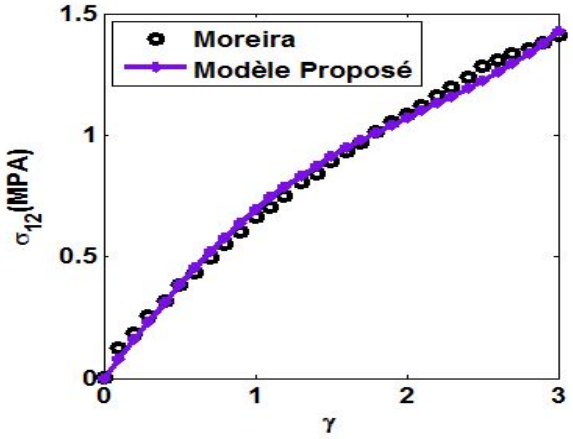

FIGURE 3.19 – Prédiction du modèle Proposé: Cisaillement Simple

La Prédiction des différentes sollicitations mécanique

Sur la Figure 3.18, nous constatons que le modèle proposé reproduit les trois modes de déformations avec le même jeu de paramètres. De même sur la Figure 3.19 le modèle proposé reproduit bien les essais de Moreira pour le cisaillement simple. La nouvelle densité d'énergie hyperélatique isotrope proposée dans ce chapitre présente des résultats satisfaisants. Cependant, au niveau des sollicitations mécaniques, le modèle proposé donne une très bonne correlation avec les essais de treloar en traction simple, traction équibiaxiale et cisaillement pur (voir Figure 3.18). Cette observation nous permet de dire que notre modèle est approprié à la caractérisation des matériaux hyperélastiques (les matériaux de Treloar). Cette affirmation tire plus son origine de l'optimisation des paramètres par la l'algorithme génétique.

Le tableau 3.2 nous amène à noter des insuffisances avec les modèles: de Ogden, Beda

(2007), Boyce et Arruda, HIA, gornet et al. et Pucci et Saccomandi. Avec ces modèles on note la reproduction des trois courbes de Treloar avec le même jeu de paramètre comme un phénomène impossible voire absent. Nous constatons que ses modèles ne peuvent que reproduire les essais de traction simple de Treloar sans avoir une quelconque déviation. La déclaration faite précédement n'est pas surprénante, car tous les paramètres matériau sont optimisés en Traction simple.

Malgrè ses irrégularités notatoires, les modèles de Boyce et Arruda, HIA et Pucci et Saccomandi se sont démarqués par leur capacité à réproduire le raidissement final. Le raidissement final permet d'étudier la contrainte des déformations affines des chaînes (modèles moléculaires).

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la caractérisation des matériaux hyperélastiques incompressibles isotropes par la méthode de l'algorithme génétique. Cette étude a été développée en considérant la méthode de l'algorithme génétique que nous avons mis sur pied au chapitre 2. La première partie de ce chapitre a été consacrée à la Comparaison des modèles hyperélastique. Dans ces modèles retenus nous avons utilisé six modèles phénoménologiques (Money, Gent et Thomas, Ogden, Pucci et Saccomandi, Beda (2007) et Gornet et al), un modèle moléculaire (Boyce et Arruda) et un modèle hybride (HIA). Les résultats de cette étude comparative nous ont permis de classer les modèles utilisables en grande déformation et les modèles utilisables en moyenne déformation.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à la construction et à la validation du modèle proposé. Ce modèle s'est révélé très performant pour plusieurs types de sollicitations homogènes: traction uniaxiale, traction équibiaxiale, cisaillement pur et cisaillement simple. Dans ces différentes situations, le modèle proposé fournit en effet des résultats plus cohérent avec les mesures, si on raisonne en termes de prédiction des déformations, que les modèles traditionnels retenus de la littérature.

Conclusion générale et perspectives.

L'objectif de ce travail de recherche était d'apporter une contribution à la caractérisation des matériaux hyperélastiques de type caoutchouc présentant des caractéristiques isotropes et incompressibles. L'étude bibliographique (premier chapitre du mémoire) a permis de rappeler les aspects constitutifs et les divers comportements liés aux matériaux caoutchouteux, à savoir les comportements statiques, endommageable et dynamique. Notre travail s'est focalisé sur le comportement statique. L'état de l'art a permis d'établir quatre critères d'appréciation des performances des matériaux hyperélastiques:

- couvrir l'ensemble du domaine de déformation ;
- prédire tous les modes de déformations avec les mêmes paramètres matériau ;
- vérifier les conditions de stabilité thermodynamique ;
- vérifier les observations expérimentale de Rivlin-Saunders ;

Une nouvelle méthode d'optimisation (les algorithmes génétiques) des paramètres matériau des modèles hyperelastiques a été dévéloppée dans le deuxième chapitre. La mise en oeuvre de cette méthode dans le logiciel Matlab a permis de prendre en considération les points clés suivants:

- Les algorithmes génétiques ont permis d'obtenir les paramètres matériau positifs qui obeissent aux critères mécaniques définis par Jonhson.
- Les algorithmes génétiques optimisent simultanément un nombre élévé des paramètres matériau. Exemple: le modèle de Ogden (6 paramètres) et le modèle de Nguessong et al. (6 paramètres).
- Les algorithmes génétiques minimisent mieux la fonction objective, cela s'explique

par la présence des opérateurs : Sélection, Croisement, mutation et élitisme dans leurs structures.

Un nouveau modèle hyperélastique phénoménologique, vérifiant les critères de validation d'un modèle, a été proposé dans le troisième chapitre du mémoire. Ce modèle a été construit en tronquant la série de Mooney-Rivlin, puis en ajoutant à cette troncature un second terme en I_2 provenant du modèle de gornet et al. Le modèle d'énergie proposé présente les avantages suivants:

- Le modèle est adapté dans la caractérisation des matériaux élastomères en grande déformation.
- Le modèle donne une très bonne correlation avec les trois courbes de Treloar.
- Le modèle par son écriture facile est une fonction dérivable et qui peut etre implémenté dans un logiciel élément fini.

Dans nos discussions, une étude comparative d'une part entre les prédictions des modèles (phénoménologique et moléculaire) provenant de la littérature a démontré que le modèle proposé reproduit mieux les données expérimentales de Treloar et de Moreira que les autres modèles retenus de la littérature. La conformité du modèle proposé avec les critères d'appréciation exhibés au chapitre 1, ainsi que des comparaisons théorie-expérience, ont permis d'établir la pertinence de ce modèle.

En termes de perspectives, dans la continuité de ces travaux, plusieurs directions peuvent être explorées:

- Application de l'algorithme génétique aux modèles visco-hyperélastiques : les développements actuels autorisent des courbes dans un espace de dimension finie. Une des variables peut donc être le temps ;
- Application de l'algorithme génétique au problème d'identification inverse: il convient pour cela de faire dialoguer notre application avec un logiciel éléments finis.
- Tester le modèle hybride dans d'autres cas de chargements non-homogènes comme un chargement en traction-torsion.

- Traiter un cas numérique complexe avec le modèle proposé, impliquant par exemple du contact et de l'impact.

Bibliographie

[1] Claude JANIN (2018), Matières premières du caoutchouc,www.techniques-ingenieur.fr, pp. 1-15.

[2] Ishiara A., Hashitsume N.,Tatibana M. (1951), Statistical theory of rubber-like elasticity IV (two dimensional stretching). J. Chem. Phys., vol. 19, pp. 1508-1512.

[3] Jernigan R. L., Flory P.J. (1969), Distribution functions for chain molecules. J. Chem. Phys., vol. 50, pp. 4185-4200.

[4] Treloar L. R. G. (1944), Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation. Trans. Faraday Soc., vol. 40, pp. 59-70.

[5] Arruda E., Boyce M. (1993), A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. J. Mech. Phys. Solids, vol. 41, pp. 389-412.

[6] Davidson J. D. Goulbourne N. C. (2013), A non-affine network model for elastomers undergoing finite deformations. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 61, pp. 1784-1797.

[7] Edwards S. F., Vilgis T. A. (1988), The tube model theory of rubber elasticity. Rep. Prog. Phy., vol. 51, pp. 243-297.

[8] Enderle H. F., Kilian H. G. (1987), General deformation modes of a van der Waals network. Prog. in Colloid and Polym. Sci., vol. 75, pp. 55-61.

[9] Flory P. J., Erman B. (1982), Theory of Elasticity of Polymer Networks. Macromolecules, vol. 15, pp. 800-806.

[10] Heinrich G., Kaliske M. (1997), Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity. Comput. Theo. Polym. Sci., vol. 7, pp. 227-241.

[11] Kroon M. (2011), An 8-chain model for rubber-like materials accounting for non-affine chain deformations and topological constraints. Jounal of Elasticity, vol. 102, pp. 99-116.

[12] Kuhn W., Guth E. (1942), Beziehungen zwichen elastischen konstanten und dehnungsdoppelbrechung hochelastischer stoffe. Kolloideitshrift, vol. 101, pp. 248-271.

[13] Mark J. E., Erman B. (1988), Rubberlike elasticity - A molecular primer. Journal Wiley Sons.

[14] Biderman V. L. (1958), Calculations of rubber parts. Rascheti na Prochnost, vol. 40.

[15] Carroll M. M. (2011), A strain energy function for vulcanized rubbers Journal Elasticity, vol. 103, pp. 173-187.

[16] Mooney M. (1940), A theory of large elastic deformation. J. Appl. Phys., vol. 11, pp. 582-592.

[17] Nunes L. C. S. (2011), Mechanical characterization of hyperelastic polydimethylsiloxane by simple shear test. Materials Science and Engineering A, vol. 528, pp. 1799-1818.

[18] Ogden R. W. (1972), Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. Proc. R. Soc. Lond. A., vol. 326, pp. 565-584.

[19] Rivlin R. S., Saunders D. W. (1951), Large elastic deformation of isotropic materialsVII experiments on the deformation rubber. Philos. T. Roy. Soc., vol.243, pp. 251-288.

[20] Beda T. (2007), Modeling hyperelastic behavior of rubber : a novel invariant-based and a review of constitutive models. Journal of polymer science : part B : polymer physics, vol. 45, 1713-1732.

[21] Gent A. N., Thomas A. G. (1958), Forms of the stored (strain) energy function for vulcanized rubber. J. Polym. Sci., vol. 28, pp. 625-637.

[22] Gent A. N. (1996), A new constitutive relation for rubber. Rubber Chem. Technol., vol. 69, pp. 59-61.

[23] Hart-Smith L. J. (1966), Elasticity parameter for finite deformations of rubber-like materials. Dpt. of Applied Mechanics, Monash University, Clayton, Victoria, vol. 17

[24] Horgan C. O., Saccomandi G. (2002), Constitutive modelling of rubber-like and biological materials with limiting chain extensibility. Mathematics and Mechanics of Solids, vol. 7, pp. 353-371.

[25] Amin A. F. M. S., Alam M. S., Okui Y. (2002), A improved hyperelasticity relation in modeling viscoelasticity response of natural and high damping rubbers in compression : experiments, parameter identification and numérical verification. Mech. Mater., vol. 34, pp. 75-95.

[26] Boyce C. M., Arruda E. M. (2000), Constitutive models of rubber elasticity : a review. Rubber Chem. Technol., vol. 73, pp. 505-523.

[27] Dannenberg E. M. (1966), Molecular slippage mechanism of reinforcement. Trans. Inst. Rubber, Ind., vol. 42.

[28] Horgan C. O., Saccomandi G. (2002), A molecular-statistical basis for the Gent constitutive model of rubber elasticity Journal of Elasticity, vol. 68, pp. 167-176.

[29] Horgan C. O., Saccomandi G. (2006), Phenomenological hyperelastic strain-stiffening constitutive models for rubber. Rubber Chem. Technol., vol. 79, pp. 152-169.

[30] Lambert-Diani J., Rey C. (1998), Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères - principe et avantages. C. R. Acad. Sci., vol. 326, pp. 483-488.

[31] Garcia R. J., Gonzalez S. Y. L. (2006), Comparison of hyperelastic material models in the analysis of fabrics. International Journal of Clothing Science and Technology, vol. 18 number 5, pp. 314-325.

[32] Steinmann P., Hossain M., Possart G. (2012), Hyperelastic models for rubber-like materials : consistent tangent operators and suitability for Treloars data. Arch. Appl. Mech. DOI 10.1007/s00419-012-0610-z

[33] Verron E., Marckmann G. (2006), Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. Rubber Chemistry and Technology, vol. 79, pp. 835-858.

[34] Marckmann G. (2004), Contribution à l'étude des élastomères et des membranes soufflées, Thèse de Doctorat PhD, Ecole Centrale de Nantes.

[35] Beda T., Y. Chevalier, (2003), Non-linear approximation method by an approach in stages, Computational Mecanics, vol 32, pp 177-184.

[36] Beda T. (2006) Combining Approach in Stages with Least Squares for fits of data in hyperelasticity, Comptes Rendus Mecanique, pp. 334-628.

[37] Wu Y., Wang H. and Li A., (2016), Parameter identification Methods for Hyperelastic and Hyper-Viscoelastic Models, Appl. Sci., pp. 3-13.

[38] Balé Baidi Blaise, Gambo Betchewe and Tibi Beda (2019), Optimization of the model of Ogden energy by the genetic algorithm method, Appl. Rheol. 29 (1), pp. 21-29.

[39] Balé Baidi Blaise, Gambo Betchewe and Tibi Beda, (2019), Optimization of the model of Ogden energy by the genetic algorithm method, Book, Lambert Academic Publishing, ISBN. 978-620-0-23092-8, pp. 1-53.

[40] Ali A., Hosseini M., Sahari B. (2010), A review and comparison on some rubber elasticity models. Journals of Scientific and Industrial Research, vol. 69, pp. 495-500.

[41] Garcia R. J., Gonzalez S. Y. L. (2006), Comparison of hyperelastic material models in the analysis of fabrics. International Journal of Clothing Science and Technology, vol. 18 number 5, pp. 314-325.

[42] Treloar L. R. G. (1973), The elasticity and related properties of rubbers, IOPscience, Rep. Prog. Phys., vol. 36, pp. 755-826.

[43] Ciarlet P. (1988), Mechanical Elasticity : three dimensional elasticity, Elsevier.

[44] Germain P. (1973), Cours de mécanique des milieux continus. Masson et Cie.

[45] Ogden R. W. (1984), Non-linear elastic deformation. Dover Publication.

[46] Nunes L. C. S., Moreira D. C. (2013), Simple shear under large deformation : experimental and theoretical analyses, European Journal of Mechanics/ A Solids, pp. 1-38.

[47] Corsaro, Sperling (1990), Sound and vibration damping with polymers. American Chemical Society.

[48] Ferry J. D. (1980), Viscoelastic properties of polymers. John Wiley and sons.

[49] Lindley P. B. (1974), Le calcul des éléments en caoutchouc naturel dans l'art de l'ingénieur. Technical report.

[50] Corbin G. (2011), Les caoutchoucs dans les collections patrimoniales - Identification et processus de dégradation. Centre National des Arts Plastiques.

[51] Callister William D. (2001), Science et génie des matériaux. Mont-Royal Éditions Modulo.

[52] Fontanille M., Gnanou Y. (2002), Chimie et physico-chimie des polymères. Dunod.

[53] Delzell. E, Sathiakumar. N, Graff. J, Macaluso. M, Maldonado. G Matthews. R (2006), An updated study of mortality among North, Res Rep Health Eff Inst, Aug, (132), pp. 1-63.

[54] Treloar L. R. G.(1975), The Physics of Rubber Elasticity, 3rd ed., Clarendon Press.

[55] Meyer K., Ferri C.(1935), Sur l'élasticité des caoutchoucs. Helv. Chim. Acta, vol. 18, pp. 570-589.

[56] James H. M., Guth E. (1943), Theory of the elastic properties of the rubber. J. Chem. Phys., vol. 11, pp. 455-481.

[57] Flory P. J. (1944), Network structure and elastic properties of vulcanized rubber. Chem Rev, vol 35, pp. 51-75.

[58] Beda T. (2014), An approach for hyperelastic model-building and parameters estimation a review of constitutive models. European Polymer Journal, vol. 50, pp. 97-108.

[59] Lambert-Diani J., Rey C. (1999), New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers. Eur. J. Mech. A/Solids, vol. 18, pp. 1027-1043.

[60] Bouasse, H. et Carrière, Z. (1903), Courbes de traction de caoutchouc vulcanisé. Ann. Fac. Sciences de Toulouse, 5, pp. 257-283.

[61] Mullins L. (1948), Effect of stretching on the properties of rubber, Rubber Chem. Technol., Vol. 21, pp. 281-300.

[62] Mullins L. (1957), Softening of rubber by deformation, Rub. Chem. Technol., Vol. 30, pp. 551-571.

[63] Bueche F. (1960), Molecular Basis for the Mullins Effect, J. Appl. Polym. Sci., Vol. IV, No. 10, pp. 107-114.

[64] Bueche F. (1961), Mullins effect and rubber-filled interaction, J. Appl. Polym. Sci., Vol. V, No. 15, pp. 271-281.

[65] Harwood J. A. C., Mullins L. (1967), et Payne A. R., Stress softenig in rubbers -A review, Journal of the IRI, Vol. 1, pp. 17-27.

[66] Govindjee S. et Simo J. C. (1991), A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins effect, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 39, No. 1, pp. 87-112.

[67] Miehe C. (1995), Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type largestrain elastic materials, Eur. J. Mech. A/Solids, Vol. 14, No. 5, pp. 697720.

[68] Ogden R. W. et Roxburgh D. G. (1999), A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 455, pp. 2861-2877.

[69] Johnson M. A. et Beatty M. F.(1993), The Mullins effect in uniaxial extension and its influence on transverse vibration of rubber string, Continuum Mech. Thermodyn., Vol. 5, pp. 83-115.

[70] Drozdov A. D. et Dorfmann A. I. (2001), Stress-strain relations in finite viscoelasto-plasticity of rigid-rod networks : applications to the Mullins effect, Continuum Mech. Thermod., Vol. 13, pp. 183-205.

[71] Legorju-jago K., Bathias C. (2006), Fatigue initiation and propagation in natural and synthetic rubbers. International Journal of Fatigue, vol. 24, pp. 85-92.

[72] Marchal J. (2006), Cristallisation des caoutchoucs chargés et non chargés sous contraintes : effet sur les chaînes amorphes. Thèse de Doctorat troisième cycle de l'Université de Paris XI.

[73] Toki S., Fujimaki T., Okuyama M. (2000), Strain-induced crystallization of natural rubber as detected real-time by wide-angle X-ray diffraction technique. Polymer, vol. 41, pp. 5423-5429.

[74] Andrieux F., Saanouni K., Sidoroff F. (1997), Sur les solides hyperélastiques à compressibilité induite par l'endommagement. C. R. Acad. Sci, vol. 324 pp. 281-288.

[75] Mars W. V., Fatemi A. (2004), A literature survey on fatigue analysis for rubber. International Journal of Fatigue, vol. 24, pp. 949-961.

[76] Rahman N., Isanasari A., Anggraeni R., Honggokusumo S., Iguchi M., Masuko T., Tashiro K. (2003), Modern interpratation on the high stretching of natural rubber attained by the classic racking method. Polymer, vol. 44, pp. 283-288.

[77] Wineman A. S., Rajagopal K. R. (2000), Mechanical response of polymers. An introduction. Cambridge University Press.

[78] Bergström J. S., Boyce M. C. (1998), Constitutive modeling of the large stain time-dependent behavior of elastomers. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 46, pp. 931-954.

[79] Ould Eyih A. (1993), Contribution à l'étude du comportement en grandes déformations des mousses - Modèle de simulation numérique de chargement dun siège par un mannequin. Thèse de lÉcole Centrale de Lyon.

[80] Vilgis T. A. (2005), Time scales in the reinforcement of elastomers. Polymer, vol. 45, pp. 4223-4229.

[81] Klüppel M. (2003), The role of disorder in filler reinforcement of elastomers on various length scales. Advances in Polymer Science, vol. 164, pp. 1-86.

[82] Ramier J. (2004), Comportement mécanique d'élastomères chargés, influence de charge-polymère, influence de la morphologie. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

[83] Kraus G. (1984), Applied polymer science. Applied Polymer Symposium, pp. 39-75.

[84] Fletcher W., Gent A. (1953), Non-linearity in the dynamic properties of vulcanised rubber compounds. IRI Transaction, pp. 266-280.

[85] Bukamel A. (2006), Modélisations mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères. PhD thesis, Université de la méditerranée Aix-Marseille II.

[86] **Nguessong Nkenfack Alain** (2015), Modélisation des matériaux caoutchouteux par une nouvelle densité hyperélastique isotrope hybride, thèse doctorat, Université de Ngaoundéré, pp. 1-11.

[87] Einstein A. (1906), Eine neue Bestimmung des Molekuldimensionen, Annalen des Physik : (Leipzig), Vol. 19, pp. 289-306.

[88] V. BOUCHART (2007), Etude expérimentale et modélisation micromécanique du comportement et de l'endommagement des élastomères renforcés, Thèse de Doctorat phD, Université de Lille I. A.

[89] BEDA. T grandes déformations hyperelasticite, cours université de ngaoundéré, pp. 1-55.

[90] GLORIA (2007), Modélisation et méthodes numériques multi échelles en élasticité non linéaire, Thèse de Doctorat phD, Ecole Centrale des Ponts et Chaussées.

[91] Holzapfel G. A. (2000), Nonlinear solid mechanics : A Continuum Approach for Engineering. John Wiley Sons.

[92] Rivlin R. S. (1948), Large elastic deformation of isotropic materials - IV. Further developments of the general theory, Philos. T. Roy. Soc. A, Vol. 241, pp. 379-397.

[93] Alexander H. (1968), A constitutive relation for rubber-like materials. Int J Eng. Sci ; 6 : pp. 54-63.

[94] Veronda D. R., Westmann R. A. (1970), Mechanical characterization of skinfinite deformations. J. Biomech. 3 ; pp. 11-24.

[95] James A. et Green A., Strain energy functions of rubber. II-The Characterization of filled vulcanizates.

[96] Takamizawa K., Hayashi K. (1987), Strain energy density function and uniform strain hypothesis for arterial mechanics. J. Biomech, 20 : pp. 7-17.

[97] Yeoh O. H. (1993) Some forms of the strain energy function for rubber. Rubber Chem Technol ; 66 (5), pp. 54-71.

[98] Yeoh O. H, Fleming P. D. (1997), A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity. J. Polym. Sci Part B : Phys ; 35(12) : pp. 19-31.

[99] Haupt P., Sedlan K. (2001), Viscoelasticity of elastomeric materials : experimental facts and constitutive modeling. Arch. Appl. Mech ; 71 : pp. 89-109.

[100] Pucci E., Saccomandi G. (2002), A note on the gent model for rubber-like materials. Rubber Chem. Technol. ; 75 : pp. 39-51.

[101] Beda T. (2005) Optimizing the Ogden strain energy expression of rubber materials. J. Eng. Mater Technol. ASME ; 127 (3) : pp. 51-3.

[102] Gornet L. and Marckmann G. (2012), A new isotropic hyperelastic strain energy function in terms of invariants and its derivation into a pseudo-elastic model for Mullins effect : Application to finite element analysis, Taylor and Francis Group, London, pp. 265-271.

[103] Nguessong Nkenfack A., Beda T., Feng Z. Q., Peyraut F. (2016), HIA : A Hybrid Integral Approach to model incompressible isotropic hyperelastic materials-Part 1 : Theory, International Journal of Non-Linear Mechanics 84, pp. 1-11.

[104] Ball R. C., Doi M., Edwards S. F., et Warner M. (1981), Elasticity of entangled networks, Polymer, Vol. 22, pp. 1010-1018.

[105] Flory P. J. et Erman B. (1982), Theory of Elasticity of Polymer Networks. 3, Macromolecules, Vol. 15, pp. 800-806.

[106] Kaliske M. et Heinrich G. (1999), An extended tube-model for rubber elasticity : stastistical-mechanical theory and finite Element implantation, Rub. Chem. Technol., Vol. 72, pp. 602-632.

[107] Morrison (1960), Methods for nonlinear least squares problems and convergence proofs, Tracking Programs and Orbit Determination, Proc. Jet Propulsion Laboratory Seminar, pp. 1-9.

[108] Donali. W., Marquardt. (1963), an algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, j. soc. Indust. Appl. Math. Vol. 11. No. 2, June, pp. 431-441.

[109] Carsten Grammes, fit. Complot source code. http ://www.gnuplot.info.

[110] Lourakis M. I. A. (2005), A brief description of Levenberg-Marquardt algorithm implemented by levmar, Tenichal Repport Institute of Computer Science, Foundation for Ressearch and Technology-Hellas.

[111] Matlab (2013), The Language of Technical Computing. Copyright (c) 1984-1999 by The MathWorks, Inc. Version 5.3.0.10183 (R11).

[112] Davidson W. C. (1991), variable metric method for minimization, SIAM journal on optimization, 1, pp. 1-17.

[113] Wu Y., Wang H. and Li A. (2016), Parameter identification Methods for Hyperelastic and Hyper-Viscoelastic Models, Appl. Sci., pp. 3-13.

[114] Harb N., Labed N., Domaszewski M., Peyraut F. (2011), A new parameter identification method of soft biological tissue combining genetic algorithm with analytical optimization, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 200, pp. 208-215.

[115] Holland J. H. (1975), Adaptation in natural and artificial systems. Ann Arbor : University of Michigan Press.

[116] David Goldberg E. (1989), Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Reading : Addison Wesley.

[117] John R. KOZA (1998), Genetic programming on the programming of computers by means of natural selection, A. Bradford Book, the MIT press cambridge, massachussetts, london, England.

[118] Zamalloa, Bordel G., Rodriguez L. J., Penagarikano M. (2006), Feature Selection Based on Genetic Algorithms for Speaker Recognition, Conf. Intl. IEEE Odyssey, vol., no. pp. 1-8.

[119] Carmichael A. J. et Holdaway H. W. (1961), Phenomenological elastomechanical behavior of rubber over wide ranges of strain, J. Appl. Phys., Vol. 32, No. 2, pp. 159-166.

[120] Klingbeil W. W. et Shield R. T. (1964), Some numerical investigations on empirical strain energy functions in the large axi-symmetric extensions of rubber membranes, Z. angew. Math. Phys., Vol. 15, pp. 608-629.

ANNEXE

MATLAB Code of the Ogden model

```
% BINARY GA WRITTEN IN MATLAB BY BALE BAIDI BLAISE
close all;
clear all;
clc
% Select GA parameters and define variables
N=2048; % number of bits in a chromosome
M=1000; % total number of chromosomes (population)-> choose an even number
M2=M/2;
last=10000; % number of generations (iterations)
mutrate=0.8; % mutation rate
nmuts=mutrate*N*(M-1); % number of mutations in the population
% create initial population : M random chromosomes with N bits
```

$\mu_1 = round(rand(M, N))$;% *initial population*

$\mu_2 = round(rand(M, N))$;% *initial population*

$\mu_3 = round(rand(M, N))$;% *initial population*

$\mu_4 = round(rand(M, N))$;% *initial population*

$\alpha_1 = round(rand(M, N))$;% *initial population*

$\alpha_2 = round(rand(M, N))$;% *initial population*

$\alpha_3 = round(rand(M, N))$;% *initial population*

$\alpha_4 = round(rand(M, N))$;% *initial population*

$chrom_{\mu_1} = \mu_1;$

$chrom_{\mu_2} = \mu_2;$

$chrom_{\mu_3} = \mu_3;$

$chrom_{\mu_4} = \mu_4;$

$chrom_{\alpha_1} = \alpha_1;$

$chrom_{\alpha_2} = \alpha_2;$

$chrom_{\alpha_3} = \alpha_3;$

$chrom_{\alpha_4} = \alpha_4;$

$bits = 8;$

$mincost = 10^{-10};$

$\%\ lo = minimum\ \ parameter\ \ value$

$\%\ hi = maximum\ \ parameter\ \ value$

$\mu_{1lo} = 0.1 * 10^{-25};$

$\mu_{1hi} = 0.36 * 10^{-25};$

$\mu_{2lo} = 0.00121;$

$\mu_{2hi} = 0.00136;$

$\mu_{3lo} = 0.421$

$\mu_{3hi} = 0.612;$

$\mu_{4lo} = -0.032;$

$\mu_{4hi} = -0.011;$

$\alpha_{1lo} = 25.97;$

$\alpha_{1hi} = 26.18;$

$\alpha_{2lo} = 4.76;$

$\alpha_{2hi} = 5.18;$

$\alpha_{3lo} = 1.1;$

$\alpha_{3hi} = 1.4;$

$\alpha_{4lo} = -2.5;$

$\alpha_{4hi} = -1.2;$

$\%\ bits = number\ \ of\ \ bits$

$\%\ \ function\ \ f = gadecode(chrom, lo, hi, bits)$

$[M, N] = size(chrom_{\mu_1});$

$[M, N] = size(chrom_{\mu_2});$

$[M, N] = size(chrom_{\mu_3});$

$[M, N] = size(chrom_{\mu_4});$

$[M, N] = size(chrom_{\alpha_1});$

$[M, N] = size(chrom_{\alpha_2});$

$[M, N] = size(chrom_{\alpha_3});$

$[M, N] = size(chrom_{\alpha_4});$

$npar = N/bits;\%\ \ number\ \ of\ \ variables$

quant=$(0.5.^{[1:bits]'})$; % quantization levels

quant=quant/sum(quant) ; % quantization levels normalized

$\mu_{1ct} = reshape(chrom'_{\mu_1}, bits, npar * M)';\%\ \ each\ \ column\ \ contains\ \ one\ \ variable$

$\mu_{2ct} = reshape(chrom'_{\mu_2}, bits, npar * M)';\%\ \ each\ \ column\ \ contains\ \ one\ \ variable$

$\mu_{3ct} = reshape(chrom'_{\mu_3}, bits, npar * M)';\%\ \ each\ \ column\ \ contains\ \ one\ \ variable$

$\mu_{4ct} = reshape(chrom'_{\mu_4}, bits, npar * M)';\%\ \ each\ \ column\ \ contains\ \ one\ \ variable$

$\alpha_{1ct} = reshape(chrom'_{\alpha_1}, bits, npar * M)';\%\ \ each\ \ column\ \ contains\ \ one\ \ variable$

$\alpha_{2ct} = reshape(chrom'_{\alpha_2}, bits, npar * M)';\%\ \ each\ \ column\ \ contains\ \ one\ \ variable$

$\alpha_{3ct} = reshape(chrom'_{\alpha_3}, bits, npar * M)';\%\ \ each\ \ column\ \ contains\ \ one\ \ variable$

$\alpha_{4ct} = reshape(chrom'_{\alpha_4}, bits, npar * M)';\%\ \ each\ \ column\ \ contains\ \ one\ \ variable$

$\mu_{1par} = ((\mu_{1ct} * quant) * (\mu_{1hi} - \mu_{1lo}) + \mu_{1lo});\%\ \ conversion\ \ and\ \ unnormalize\ \ variables$

$\mu_{2par} = ((\mu_{2ct} * quant) * (\mu_{2hi} - \mu_{2lo}) + \mu_{2lo});\%\ \ conversion\ \ and\ \ unnormalize\ \ variables$

$\mu_{3par} = ((\mu_{3ct} * quant) * (\mu_{3hi} - \mu_{3lo}) + \mu_{3lo});\%\ \ conversion\ \ and\ \ unnormalize\ \ variables$

$\mu_{4par} = ((\mu_{4ct} * quant) * (\mu_{4hi} - \mu_{4lo}) + \mu_{4lo});\%\ \ conversion\ \ and\ \ unnormalize\ \ variables$

$\alpha_{1par} = ((\alpha_{1ct} * quant) * (\alpha_{1hi} - \alpha_{1lo}) + \alpha_{1lo});\%\ \ conversion\ \ and\ \ unnormalize\ \ variables$

$\alpha_{2par} = ((\alpha_{2ct} * quant) * (\alpha_{2hi} - \alpha_{2lo}) + \alpha_{2lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$\alpha_{3par} = ((\alpha_{3ct} * quant) * (\alpha_{3hi} - \alpha_{3lo}) + \alpha_{3lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$\alpha_{4par} = ((\alpha_{4ct} * quant) * (\alpha_{4hi} - \alpha_{4lo}) + \alpha_{4lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$\mu_{1f} = reshape(\mu_{1par}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$\mu_{2f} = reshape(\mu_{2par}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$\mu_{3f} = reshape(\mu_{3par}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$\mu_{4f} = reshape(\mu_{4par}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$\alpha_{1f} = reshape(\alpha_{1par}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$\alpha_{2f} = reshape(\alpha_{2par}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$\alpha_{3f} = reshape(\alpha_{3par}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$\alpha_{4f} = reshape(\alpha_{4par}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

x=[1.0313902 1.1569507 1.2825112 1.4237669 1.6278027 1.9103138 2.2085202 2.4596412 3.0403588 3.5896862 4.013453 4.766816 5.363229 5.755605 6.147982 6.383408 6.603139 6.85426 7.026906 7.136771 7.262332 7.4349775 7.4663677 7.5919285];

$Y_{ref} = [0.0$ 0.1800643 0.24758843 0.3601286 0.42765275 0.5176849 0.63022506 0.6977492 0.90032154 1.0803858 1.28295811.6430868 2.0032156 2.363344 2.7684886 3.1061094 3.466238 3.8713827 4.231511 4.614148 4.9742765 5.334405 5.694534 6.4372993] ;

$Mat_{totcost} = zeros(1, last);$

$Mat_{erreur} = zeros(1, length(x));$

for gen=1 :last

for h=1 :length(x)

$Y_{cal} = \mu_{1f(gen)} * (x(h)^{(\alpha_{1f(gen)}-1)} - 1/x(h)^{((0.5*\alpha_{1f(gen)})+1)}) + \mu_{2f(gen)} * (x(h)^{(\alpha_{2f(gen)}-1)} - 1/x(h)^{((0.5*\alpha_{2f(gen)})+1)}) + \mu_{3f(gen)} * (x(h)^{(\alpha_{3f(gen)}-1)} - 1/x(h)^{((0.5*\alpha_{3f(gen)})+1)}) + \mu_{4f(gen)} * (x(h)^{(\alpha_{4f(gen)}-1)} - 1/x(h)^{((0.5*\alpha_{4_f(gen)})+1)});$

$cost = (Y_{cal} - Y_{ref(h)})^2;$

end

end

% cost=costfunction(pop);

% ranks results and chromosomes

[cost,ind]=sort(cost, 'descend');

minc(1)=min(cost); % minc contains min of population

meanc(1)=mean(cost);

$\mu_1 = \mu_1((1:M),:);\%\ rearrange\ population\ according\ to\ cost$

$\mu_2 = \mu_2((1:M),:);\%\ rearrange\ population\ according\ to\ cost$

$\mu_3 = \mu_3((1:M),:);\%\ rearrange\ population\ according\ to\ cost$

$\mu_4 = \mu_4((1:M),:);\%\ rearrange\ population\ according\ to\ cost$

$\alpha_1 = \alpha_1((1:M),:);\%\ rearrange\ population\ according\ to\ cost$

$\alpha_2 = \alpha_2((1:M),:);\%\ rearrange\ population\ according\ to\ cost$

$\alpha_3 = \alpha_3((1:M),:);\%\ rearrange\ population\ according\ to\ cost$

$\alpha_4 = \alpha_4((1:M),:);\%\ rearrange\ population\ according\ to\ cost$

$\mu_{1s} = \mu_1(1:M2,:);\%\ retain\ the\ top\ half\ as\ elite$

$\mu_{2s} = \mu_2(1:M2,:);\%\ retain\ the\ top\ half\ as\ elite$

$\mu_{3s} = \mu_3(1:M2,:);\%\ retain\ the\ top\ half\ as\ elite$

$\mu_{4s} = \mu_4(1:M2,:);\%\ retain\ the\ top\ half\ as\ elite$

$\alpha_{1s} = \alpha_1(1:M2,:);\%\ retain\ the\ top\ half\ as\ elite$

$\alpha_{2s} = \alpha_2(1:M2,:);\%\ retain\ the\ top\ half\ as\ elite$

$\alpha_{3s} = \alpha_3(1:M2,:);\%\ retain\ the\ top\ half\ as\ elite$

$\alpha_{4s} = \alpha_4(1:M2,:);\%\ retain\ the\ top\ half\ as\ elite$

$\mu_1 = [\mu_{1s}; \mu_{1s}];$

$\mu_2 = [\mu_{2s}; \mu_{2s}];$

$\mu_3 = [\mu_{3s}; \mu_{3s}];$

$mu_4 = [\mu_{4s}; \mu_{4s}];$

$\alpha_1 = [\alpha_{1s}; \alpha_{1s}];$

$\alpha_2 = [\alpha_{2s}; \alpha_{2s}];$

$\alpha_3 = [\alpha_{3s}; \alpha_{3s}];$

$\alpha_4 = [\alpha_{4s}; \alpha_{4s}];$

if mincost<cost

gen=gen+1 ; % increments generation counter

cross=ceil((N-1)*rand(M2,1)) ;

% pairs chromosomes and performs crossover

for ic=1 :M2

$\mu_1(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \mu_1(M2 + ic, 1 : cross(ic));$

$\mu_2(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \mu_2(M2 + ic, 1 : cross(ic));$

$\mu_3(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \mu_3(M2 + ic, 1 : cross(ic));$

$\mu_4(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \mu_4(M2 + ic, 1 : cross(ic));$

$\alpha_1(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \alpha_1(M2 + ic, 1 : cross(ic));$

$\alpha_2(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \alpha_2(M2 + ic, 1 : cross(ic));$

$\alpha_3(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \alpha_3(M2 + ic, 1 : cross(ic));$

$\alpha_4(ceil(M2 * rand), 1 : cross(ic)) = \alpha_4(M2 + ic, 1 : cross(ic));$

end

$\%mutate$

$foric = 1 : nmuts$

$ix = ceil(M * rand);$

$iy = ceil(N * rand);$

$\mu_1(ix, iy) = 1 - \mu_1(ix, iy); \mu_2(ix, iy) = 1 - \mu_2(ix, iy);$

$\mu_3(ix, iy) = 1 - \mu_3(ix, iy);$

$\mu_4(ix, iy) = 1 - \mu_4(ix, iy);$

$\alpha_1(ix, iy) = 1 - \alpha_1(ix, iy);$

$\alpha_2(ix, iy) = 1 - \alpha_2(ix, iy);$

$\alpha_3(ix, iy) = 1 - \alpha_3(ix, iy);$

$\alpha_4(ix, iy) = 1 - \alpha_4(ix, iy);$

end

end

$\%elitism$

$\mu_1(M2 + 1 : end, :) = \mu_{1s};$

$\mu_2(M2 + 1 : end, :) = \mu_{2s};$

$\mu_3(M2 + 1 : end, :) = \mu_{3s};$

$\mu_4(M2 + 1 : end, :) = \mu_{4s};$

$\alpha_1(M2 + 1 : end, :) = \alpha_{1s};$

$\alpha_2(M2 + 1 : end, :) = \alpha_{2s};$

$\alpha_3(M2 + 1 : end, :) = \alpha_{3s};$

$\alpha_4(M2 + 1 : end, :) = \alpha_{4s};$

$chrom_{\mu_1} = \mu_{1s};$

$chrom_{\mu_2} = \mu_{2s};$

$chrom_{\mu_3} = \mu_{3s};$

$chrom_{\mu_4} = \mu_{4s};$

$chrom_{\alpha_1} = \alpha_{1s};$

$chrom_{\alpha_2} = \alpha_{2s};$

$chrom_{\alpha_3} = \alpha_{3s};$

$chrom_{\alpha_4} = \alpha_{4s};$

$bits = 8;$

$[M, N] = size(chrom_{\mu_1});$

$[M, N] = size(chrom_{\mu_2});$

$[M, N] = size(chrom_{\mu_3});$

$[M, N] = size(chrom_{\mu_4});$

$[M, N] = size(chrom_{\alpha_1});$

$[M, N] = size(chrom_{\alpha_2});$

$[M, N] = size(chrom_{\alpha_3});$

$[M, N] = size(chrom_{\alpha_4});$

$npar = N/bits;\%\ number\ of\ variables$

$quant = (0.5^{[1:bits]'});\%\ quantization\ levels$

$quant = quant/sum(quant);\%\ quantization\ levels\ normalized$

$ct_{\mu_1} = reshape(chrom'_{\mu_1}, bits, npar * M)';\%\ each\ column\ contains\ one\ variable$

$ct_{\mu_2} = reshape(chrom'_{\mu_2}, bits, npar * M)';\%\ each\ column\ contains\ one\ variable$

$ct_{\mu_3} = reshape(chrom'_{\mu_3}, bits, npar * M)';\%\ each\ column\ contains\ one\ variable$

$ct_{\mu_4} = reshape(chrom'_{\mu_4}, bits, npar * M)';\%\ each\ column\ contains\ one\ variable$

$ct_{\alpha_1} = reshape(chrom'_{\alpha_1}, bits, npar * M)';\%\ each\ column\ contains\ one\ variable$

$ct_{\alpha_2} = reshape(chrom'_{\alpha_2}, bits, npar * M)';\%\ each\ column\ contains\ one\ variable$

$ct_{\alpha_3} = reshape(chrom'_{\alpha_3}, bits, npar * M)';\%\ each\ column\ contains\ one\ variable$

$ct_{\alpha_4} = reshape(chrom'_{\alpha_4}, bits, npar * M)';\%\ each\ column\ contains\ one\ variable$

$par_{\mu_{1s}} = ((ct_{\mu_1} * quant) * (\mu_{1hi} - \mu_{1lo}) + \mu_{1lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$par_{\mu_{2s}} = ((ct_{\mu_2} * quant) * (\mu_{2hi} - \mu_{2lo}) + \mu_{2lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$par_{\mu_{3s}} = ((ct_{\mu_3} * quant) * (\mu_{3hi} - \mu_{3lo}) + \mu_{3lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$par_{\mu_{4s}} = ((ct_{\mu_4} * quant) * (\mu_{4hi} - \mu_{3lo}) + \mu_{3lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$par_{\alpha_{1s}} = ((ct_{\alpha_1} * quant) * (\alpha_{1hi} - \alpha_{1lo}) + \alpha_{1lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$par_{\alpha_{2s}} = ((ct_{\alpha_2} * quant) * (\alpha_{2hi} - \alpha_{2lo}) + \alpha_{2lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$par_{\alpha_{3s}} = ((ct_{\alpha_3} * quant) * (\alpha_{3hi} - \alpha_{3lo}) + \alpha_{3lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$par_{\alpha_{4s}} = ((ct_{\alpha_1} * quant) * (\alpha_{4hi} - \alpha_{4lo}) + \alpha_{4lo});\%\ conversion\ and\ unnormalize\ variables$

$f_{\mu_{1s}} = reshape(par_{\mu_{1s}}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$f_{\mu_{2s}} = reshape(par_{\mu_{2s}}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$f_{\mu_{3s}} = reshape(par_{\mu_{3s}}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$f_{\mu_{4s}} = reshape(par_{\mu_{4s}}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$f_{\alpha_{1s}} = reshape(par_{\alpha_{1s}}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$f_{\alpha_{2s}} = reshape(par_{\alpha_{2s}}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$f_{\alpha_{3s}} = reshape(par_{\alpha_{3s}}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$f_{\alpha_{4s}} = reshape(par_{\alpha_{4s}}, npar, M)';\%\ reassemble\ population$

$forgen = 1 : last$

$forh = 1 : length(x)$

$Y_{cal} = par_{\mu_{1s}}(gen)*(x(h)^{(par_{\alpha_{1s}}(gen)-1)} - 1/x(h)^{((0.5*par_{\alpha_{1s}}(gen))+1)}) + par_{\mu_{2s}}(gen)*(x(h)^{(par_{\alpha_{2s}}(gen)-1)} - 1/x(h)^{((0.5*par_{\alpha_{2s}}(gen))+1)}) + par_{\mu_{3s}}(gen) * (x(h)^{(par_{\alpha_{3s}}(gen)-1)} - 1/x(h)^{((0.5*par_{\alpha_{3s}}(gen))+1)}) + par_{\mu_{4s}}(gen) * (x(h)^{(par_{\alpha_{4s}}(gen)-1)} - 1/x(h)^{((0.5*par_{\alpha_{4s}}(gen))+1)});$

cost=$(\mathrm{Y}_{cal} - Y_{ref(h)})^2$;

% save cost at each generation

conv(gen)=cost(1) ;

if cost<mincost

%Print solution

disp(['bestcost=' num2str(cost)]) ;

disp(['best solution']) ;

disp([num2str(par$_{\mu_{1s}}(gen)$)])

$disp([num2str(par_{\mu_{2s}}(gen))])$

$disp([num2str(par_{\mu_{3s}}(gen))])$

$disp([num2str(par_{\mu_{4s}}(gen))])$

$disp([num2str(par_{\alpha_{1s}}(gen))])$

$disp([num2str(par_{\alpha_{2s}}(gen))])$

$disp([num2str(par_{\alpha_{3s}}(gen))])$

$disp([num2str(par_{\alpha_{4s}}(gen))])$

end

end

end

LISTE DES PUBLICATIONS

ARTICLES

1. **Bale Baidi Blaise, Gambo Betchewe, and Tibi Beda (2019)** Optimization of the model of Ogden energy by the genetic algorithm method, Appl. Rheol. 29 (1), pp. 21-29.

2. **Liman Kaoye M Bien-aimé, Bale Baidi Blaise, Beda T (2019)** Comparison of Continuum Constitutive Hyperelastic Models based on Exponential Forms. International Journal of Innovative Science and Research Technology 4 :1360-1367.

3. **Bale Baidi Blaise, Liman Kaoye Madahan Bien-aimé, Gambo Betchewe, Gilles Marckmann, Tibi Beda (2020)** A phenomenological expression of strain energy in large elastic deformations of isotropic materials, Iranian Polymer Journal, pp. 1-9.

OUVRAGE

Optimization of the model of Ogden energy by the genetic algorithm method, Book, Lambert Academic Publishing, ISBN. 978-620-0-23092-8, (2019), pp. 1-53. disponible sur :

www.amazon.com

www.amazon.fr

www.bookdepository.com

www.adlibris.com

www. deutschen nationalbibliothek.com