



**HAL**  
open science

# Modélisation dynamique des systèmes non-holonomes intermittents : application à la bicyclette

Johan Raphaël Mauny

► **To cite this version:**

Johan Raphaël Mauny. Modélisation dynamique des systèmes non-holonomes intermittents : application à la bicyclette. Automatique / Robotique. Ecole nationale supérieure Mines-Télécom Atlantique, 2018. Français. NNT : 2018IMTA0113 . tel-02940450

**HAL Id: tel-02940450**

**<https://theses.hal.science/tel-02940450v1>**

Submitted on 16 Sep 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPERIEURE MINES-TELECOM ATLANTIQUE  
BRETAGNE PAYS DE LA LOIRE - IMT ATLANTIQUE  
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : Automatique, Productique et Robotique

Par

**Johan MAUNY**

## **Modélisation dynamique des systèmes non-holonomes intermittents Application à la bicyclette**

Thèse présentée et soutenue à l'IMT Atlantique le 14 décembre 2018

Unité de recherche : LS2N

Thèse N° : 2018IMTA0113

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Denis FAVIER            Professeur, Grenoble INP  
Jean LERBET            Professeur, Université d'Evry

### **Composition du Jury :**

Présidente :	Christine CHEVALLEREAU	Directrice de Recherche CNRS, LS2N
Examineurs :	Fabien CANDELIER	Maître de Conférences, HDR, Université d'Aix-Marseille
	Denis FAVIER	Professeur, Grenoble INP
	Jean LERBET	Professeur, Université d'Evry
Dir. de thèse :	Frédéric BOYER	Professeur, IMT Atlantique
Co-encadrant :	Vincent LEBASTARD	Maître assistant, IMT Atlantique

### **Invités**

Etienne DOMBRE	Directeur de Recherche CNRS, LIRMM
Luc JAULIN	Professeur, ENSTA-Bretagne
Mathieu POREZ	Maître assistant en disponibilité chez PA.COTTE France



## Remerciements

Comme attendu, je vais profiter de cet espace afin de présenter mes remerciements aux personnes qui ont permis de donner vie à cette thèse. Les quelques phrases présentes ci-dessous sont certes convenues mais elles n'en demeurent pas moins sincères et leur concision ne saurait les en amputer.

Ainsi, je commencerai par remercier mon directeur de thèse, Monsieur *Frédéric BOYER*, pour avoir permis à cette thèse de voir le jour. Sa patience et ses conseils m'ont certes permis d'achever cette thèse, ils m'ont surtout permis d'enrichir et de parfaire mes connaissances ainsi que de développer mon intérêt pour le domaine.

Mes remerciements vont également à Monsieur *Vincent LEBASTARD*, mon co-encadrant, dont l'engagement et la gentillesse m'ont permis de mener à bien ce travail dans les meilleures conditions.

Je remercie également chacun des membres de mon jury pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de lire et d'évaluer cette thèse et j'ai été particulièrement heureux que Madame *Christine CHEVALLEREAU* préside ce jury. Je tiens également à remercier Messieurs *Etienne DOMBRE* et *Luc JAULIN* pour leur présence en tant qu'invités.

Dans un autre registre, je remercie mes amis pour m'avoir permis de m'échapper le temps d'une soirée, d'un week-end, ou juste le temps d'une discussion.

Pour finir, je remercie particulièrement ma compagne qui m'a soutenu et épaulé tout au long de cette thèse.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>13</b>
<b>1 Modélisation de la dynamique de la locomotion</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction . . . . .	20
1.2 Définitions . . . . .	22
1.3 Problème général . . . . .	27
1.4 Dynamique directe de la locomotion : le cas cinématique . . . . .	29
1.5 La dynamique directe de la locomotion : le cas général . . . . .	35
1.6 La dynamique inverse en couple . . . . .	46
1.7 Application de la méthode générale à un robot grimpeur bio-inspiré : le ROCR . . . . .	47
1.8 Conclusion . . . . .	64
<b>2 Dynamique réduite de la Bicyclette non-holonome de Whipple</b>	<b>71</b>
2.1 Introduction . . . . .	72
2.2 Paramétrisation des systèmes mobiles multi-corps - Application à la bicyclette . . . . .	75
2.3 Dynamique des systèmes mobiles multi-corps soumis à des contacts permanents . . . . .	77
2.4 Modèle géométrique des contacts de la bicyclette tri-dimensionnelle .	83
2.5 Cinématique de la bicyclette . . . . .	91
2.6 Dynamique de la bicyclette . . . . .	94
2.7 Applications Numériques . . . . .	101
2.8 Conclusion . . . . .	115
<b>3 Modélisation des systèmes locomoteurs intermittents</b>	<b>121</b>
3.1 Introduction . . . . .	122
3.2 La physique de l'impact . . . . .	123

3.3	Modélisation de l'impact . . . . .	125
3.4	Paramétrage et notations . . . . .	129
3.5	Topologie des contacts pour une description événementielle . . . . .	130
3.6	Géométrie des contacts . . . . .	131
3.7	Définition des événements discrets . . . . .	132
3.8	Cinématique des contacts . . . . .	133
3.9	Dynamique continue d'un système mobile multi-corps . . . . .	140
3.10	Dynamique discontinue . . . . .	141
3.11	Résolution de la dynamique continue et discontinue . . . . .	142
3.12	Le cas des impacts plastiques . . . . .	144
3.13	Illustration de systèmes soumis à des contraintes intermittentes . . . . .	147
3.14	Interprétation géométrique . . . . .	150
3.15	Conclusion . . . . .	154
<b>4</b>	<b>Dynamique réduite de la Bicyclette soumise à des contacts inter-</b>	
	<b>mittents</b>	<b>159</b>
4.1	Introduction . . . . .	159
4.2	Application à la bicyclette . . . . .	161
4.3	Tests numériques . . . . .	170
4.4	Conclusion . . . . .	190
	<b>Conclusion générale</b>	<b>195</b>
	<b>A Dynamique libre de la bicyclette</b>	<b>201</b>
	<b>B Calcul du noyau des contraintes</b>	<b>203</b>
	<b>C Modèles dynamiques de la bicyclette soumise à des contacts in-</b>	
	<b>termittents</b>	<b>207</b>
C.1	Free Flight model . . . . .	207
C.2	Front wheel model . . . . .	210
C.3	Rear wheel model . . . . .	211
C.4	Two wheels model . . . . .	211
	<b>D Calcul des points de pré-contact et du gap associé - exemple 2D</b>	<b>213</b>

# Liste des figures

## Chapitre 1

1.1	Le robot serpent ACM-III . . . . .	21
1.2	Le robot serpent ACM-R5 . . . . .	21
1.3	Robot volant inspiré de l'insecte . . . . .	21
1.4	Le robot nard Tartaruga . . . . .	21
1.5	Espace des configurations d'un système locomoteur : fibré principal. . . . .	26
1.6	Le problème général : synoptique de simulation. . . . .	27
1.7	Connexion entre les vitesses ( $\dot{r}$ ) de $\mathcal{S}$ et les vitesses ( $\eta$ ) de $G$ . . . . .	30
1.8	Connexion sur le fibré principal $G \times \mathcal{S}$ . . . . .	30
1.9	Connexion sur le fibré tangent $TM$ de la variété $M$ . . . . .	30
1.10	Théorème de Gauss-Bonnet illustré sur la sphère $S^2$ . . . . .	31
1.11	Un changement cyclique de forme provoque un déplacement rigide d'ensemble dans $G$ . . . . .	31
1.12	Exemples de connexions mécaniques. . . . .	32
1.13	Exemples de connexions cinématiques. . . . .	35
1.14	Illustration de la nage du poisson. . . . .	42
1.15	Systèmes non-holonomes sous-contraints. . . . .	45
1.16	Paramètre du ROCR . . . . .	48
1.17	Algorithme de simulation du ROCR. . . . .	56
1.18	Résultats de la recherche de cycles limites. . . . .	58
1.19	Instantanés des allures sélectionnées. . . . .	60
1.20	Plans de phase des allures sélectionnées. . . . .	61
1.21	Couples d'actionnement des allures sélectionnées. . . . .	62
1.22	Forces appliquées sur le système d'accroche pour chacune des allures sélectionnées. . . . .	63

## Chapitre 2

2.1	Système mobile multi-corps en contact ponctuel avec un substrat ri- gide. . . . .	76
2.2	Repères et paramètres de la bicyclette tri-dimensionnelle. . . . .	77
2.3	Paramétrage d'un disque en contact avec un plan. . . . .	85



2.4	Vue de dessus et de coté de la roue arrière faisant apparaître l'angle de lacet ( $\psi$ ) et de tangage ( $\pi - \alpha_0$ ) dans le repère de contact. . . . .	89
2.5	Iso-valeurs des angles $\alpha_1$ , $\alpha_0$ , $\psi$ et $\beta$ (en degrés) dans le plan $(\phi_0, r_1)$ . Angle de la fourche : $\mu = \pi/10$ rad . . . . .	97
2.6	Iso-valeurs des angles $\alpha_1$ , $\alpha_0$ (en degrés) dans le plan $(\phi_0, r_1)$ . Angle de la fourche : $\mu = 0$ rad . . . . .	98
2.7	Vues de dessus de la bicyclette pour différentes valeurs de $(\phi_0, r_1)$ . . . . .	99
2.8	Vues de face tri-dimensionnelles de la bicyclette pour différentes valeurs de $(\phi_0, r_1)$ . . . . .	100
2.9	Instantanés de la bicyclette initialement cabrée, dans le plan $x-y$ . . . . .	102
2.10	Instantanés de la phase ascendante d'une bicyclette passive lancée sur un sol incliné. . . . .	104
2.11	Trajectoire de la bicyclette dans le plan $y-z$ , dans le contexte de l'étude de stabilisation asymptotique. . . . .	106
2.12	Vitesse de roulis $\Omega_2$ , vitesse d'avance $V_2$ et vitesse angulaire du guidon $\dot{r}_1$ en fonction du temps $t$ . . . . .	106
2.13	Angle de roulis $\phi_0$ et angle de lacet $\psi$ en fonction du temps $t$ . . . . .	106
2.14	Évolution temporelle de la position angulaire du point de contact de la roue avant $\alpha_1$ durant la stabilisation asymptotique passive de la bicyclette. . . . .	107
2.15	Évolution temporelle de la position angulaire du point de contact de la roue arrière $\alpha_0$ durant la stabilisation asymptotique passive de la bicyclette. . . . .	107
2.16	Évolution temporelle de $\lambda_4$ , la force appliquée sur la roue arrière interdisant la pénétration et le décollement de la roue par rapport au sol. . . . .	107
2.17	Évolution temporelle de l'altitude des points de contact $C_0$ et $C_1$ dans le cas de l'auto-stabilisation de la bicyclette . . . . .	108
2.18	Logarithme décimal de la différence entre $\Omega_2$ avec et sans correction de la dérive ( $\epsilon = 0.01$ ). . . . .	109
2.19	Logarithme décimal de la différence entre $\dot{r}_1$ avec et sans correction de la dérive ( $\epsilon = 0.01$ ). . . . .	109
2.20	Évolution temporelle de l'énergie cinétique, potentielle et totale de la bicyclette roulant sur un sol incliné. . . . .	110
2.21	Évolution temporelle de $V_2$ , $\Omega_2$ et $\dot{r}_1$ de la bicyclette roulant sur un sol incliné. . . . .	110
2.22	Évolution temporelle de $\dot{r}_2$ et $\dot{r}_3$ de la bicyclette roulant sur un sol incliné. . . . .	110
2.23	Trajectoire de la bicyclette dans le plan $y-z$ lors de l'exécution d'un virage contrôlé. . . . .	112
2.24	Angle de roulis $\phi_0$ et angle de lacet $\psi$ en fonction du temps $t$ . . . . .	113

2.25	Évolution temporelle de l'angle de braquage $r_1$ par rapport à la valeur souhaitée $f_s r_{1d}$ .	113
2.26	Évolution temporelle de la vitesse de la roue arrière $\dot{r}_3$ par rapport à la consigne $\dot{r}_{3d}$ .	113
2.27	Évolution temporelle des vitesses de roulis $\Omega_2$ , de direction $\dot{r}_1$ et d'avance $V_2$ pendant la manœuvre de virage.	114
2.28	Évolution temporelle du couple de direction $\tau_1$ .	114
2.29	Évolution temporelle du couple moteur $\tau_3$ .	114
2.30	Évolution temporelle de la position angulaire du point de contact sur la roue arrière, $\alpha_0$ , pendant la manœuvre de virage.	115
2.31	Évolution temporelle de la position angulaire du point de contact sur la roue avant, $\alpha_1$ , pendant la manœuvre de virage.	115

### Chapitre 3

3.1	Illustration de la démarche de marche sur un demi cycle.	122
3.2	Déformation, au cours du temps, due à l'impact.	124
3.3	Modèle d'impact de Hunt-Crossley	127
3.4	Système mobile multi-corps soumis à des contacts intermittents.	130
3.5	Géométrie du pré-contact.	133
3.6	Balle percutant une barre en double support.	138
3.7	Graphe état-transition générique.	139
3.8	Détails du changement de dimension des sous-espaces des vitesses admissibles $H$ et interdites $\mathbb{C}^\top$ lors d'une collision.	148
3.9	Représentation d'une collision douce suivie d'un décollement.	149
3.10	Évolution temporelle de la configuration $x$ d'un MMS soumis à une collision dure.	149
3.11	Interprétation géométrique des projections sur le noyau des contraintes et son complément.	153

### Chapitre 4

4.1	Paramètres géométriques de la bicyclette.	162
4.2	Repères associés au sol et à chacun des corps rigides de la bicyclette.	162
4.3	Position des points de pré-contact $(C_{ij}, C'_{ij})$ et gap $\Phi_{ij}$ par rapport à la face $j$ définie par ses trois sommets $P_{1j}$ , $P_{2j}$ et $P_{3j}$ .	165
4.4	Les quatre configurations de contact de la bicyclette.	166
4.5	Graphe événementiel des configurations de contact de la bicyclette.	167
4.6	Adaptation du pas de temps de l'intégrateur.	168
4.7	Test 1 : graphe état-transition.	172
4.8	Test 1 : instantanés.	173
4.9	Test 1 : gaps.	173

4.10	Test 1 : énergies. . . . .	173
4.11	Test 2 : graphe état-transition. . . . .	174
4.12	Test 2 : instantanés. . . . .	175
4.13	Test 2 : forces de réaction normale . . . . .	176
4.14	Test 2 : gaps. . . . .	176
4.15	Test 2 : énergies. . . . .	176
4.16	Test 2 : Mouvement piloté de la bicyclette durant une phase de vol. . . . .	177
4.17	Test 3 : graphe état-transition. . . . .	178
4.18	Test 3 : instantanés. . . . .	179
4.19	Test 3 : couples d'actionnement . . . . .	179
4.20	Test 3 : forces de réaction normale . . . . .	179
4.21	Test 3 : gaps. . . . .	180
4.22	Test 2 : énergies. . . . .	180
4.23	Test 4 : graphe prédiction/correction. . . . .	183
4.24	Test 4 : instantanés. . . . .	183
4.25	Test 4 : décollement de la roue arrière. . . . .	183
4.26	Test 4 : gaps. . . . .	184
4.27	Test 4 : forces de réaction normales . . . . .	184
4.28	Test 4 : forces de réaction tangentielles . . . . .	184
4.29	Test 5 : bicyclette cabrée maintenant son équilibre en dépit d'une perturbation extérieure sur son guidon. . . . .	185
4.30	Test 5 : bicyclette cabrée subissant une perturbation extérieure. . . . .	186
4.31	Test 5 : bicyclette cabrée, roue avant tournant à grande vitesse et subissant une perturbation extérieure. . . . .	187
4.32	Test 5 : bicyclette cabrée et complètement commandée subissant une perturbation extérieure sur son guidon. . . . .	188

**Annexe D**

D.1	Le cas à résoudre. . . . .	213
D.2	Premier cas pathologique . . . . .	214
D.3	Second cas pathologique . . . . .	215
D.4	Calcul de la position du point de pré-contact $C$ le plus proche du bord du segment 1. . . . .	215
D.5	Calcul final du gap pour la scène. . . . .	216

# Liste des tableaux

## Chapitre 1

1.1 Paramètres de simulation du ROCR. . . . .	58
---	----

## Chapitre 2

2.1 Paramètres de simulation de la bicyclette. . . . .	102
2.2 Vitesse de dérive du point de contact de la roue avant $C_1$ en fonction du pas de temps d'intégration pour l'exemple de stabilisation asymptotique passive. . . . .	108
2.3 Paramètres de simulation de la manœuvre de virage contrôlé. . . . .	111

## Chapitre 4

4.1 Paramètres de la bicyclette. . . . .	162
4.2 Test 1 : paramètres d'état initiaux. . . . .	171
4.3 Test 2 : paramètres d'état initiaux. . . . .	174
4.4 Test 3 : paramètres d'état initiaux. . . . .	181
4.5 Test 4 : paramètres d'état initiaux. . . . .	182
4.6 Test 5 : paramètres d'état initiaux. . . . .	185



## Introduction générale

Depuis ses débuts, la robotique s'inspire, consciemment ou non, de la nature. Typiquement, les premiers robots, dédiés à des tâches de manipulation, possèdent une structure sérielle semblable à celle des bras humains. On qualifie même leur organe terminal de poignet en raison de sa similitude avec le poignet humain. Actuellement les roboticiens se heurtent à des problématiques fortes d'efficacité énergétique et d'adaptation à l'environnement pour lesquelles la nature a déjà su trouver des réponses. Chaque être vivant apporte une solution différente, souvent simple et efficace, à des problèmes souvent étonnamment complexes. Par exemple, il suffit d'examiner les différentes méthodes élaborées par le monde végétal afin de disperser ses graines pour s'en convaincre. La morphologie de la samare d'érable [Azuma et Yasuda 1989; Yasuda et Azuma 1997] lui permet de planer à la façon d'un autogire pour que la graine puisse pousser hors de l'ombre de son parent et coloniser de nouveaux espaces. Cette intelligence incarnée, encodée dans la morphologie, est donc devenue une source d'inspiration grandissante dans divers domaines tels que la robotique [Müller et Hoffmann 2017] mais également celui de l'architecture [Mazoleni 2013], de l'aéronautique, de l'art, etc. Ainsi, dans le domaine de la robotique, on s'orientera par exemple vers des modes de locomotion bio-inspirés tels la locomotion à pattes avec la marche bipède et quadrupède ou la locomotion inspirée des serpents.

La locomotion est l'une des préoccupations dominantes de la robotique. Ce problème nécessite des solutions aussi variées qu'il existe d'environnements différents. La locomotion jouant un rôle important dans la survie de nombreuses espèces, le vivant fourmille de types de locomotion efficaces adaptés à presque tous les environnements. Toutefois, le transfert du vivant aux robots de telles capacités nécessite d'en comprendre le fonctionnement. En effet, la morphologie d'un être vivant est la réponse à un ensemble de plusieurs problématiques dont la locomotion n'est qu'une

partie. Ainsi, une étude est nécessaire afin d'extraire de l'observation d'un être vivant, les points clef de l'efficacité et de l'efficacité de sa locomotion afin de les reproduire sur un robot. Cette étape passe donc par l'observation du vivant mais également par la modélisation mathématique et l'étude des modèles obtenus, que ce soit pour la conception ou la commande

Cette thèse traite de la modélisation des systèmes mobiles multi-corps non-holonomes à contacts intermittents. Elle s'inscrit dans la continuité des thèses sur la nage tridimensionnelle anguilliforme [Porez 2007], la locomotion des serpents [Ali 2011] et le vol battant [Belkhiri 2013]. Dans [Ali 2011] les serpents sont traités, dans un premier temps, comme des systèmes multi-corps plans. Puis la modélisation est étendue au cas des systèmes continus par l'approche Cosserat. La locomotion est, quant à elle, entièrement gouvernée par la cinématique au travers de contraintes engendrant des connexions cinématiques. À l'opposé, le vol battant des insectes [Belkhiri 2013], est traité comme un système tri-dimensionnel libéré de toutes contraintes. Dans ce type de système, l'effet des degrés de liberté internes passifs a été étudié de manière à modéliser le twist de l'aile et la récupération d'énergie dans les compliances de l'aile. Dans cette dernière thèse [Belkhiri 2013], un autre sujet d'intérêt est celui du rôle joué par les degrés de liberté internes de roues passives. Ceci a permis de revenir sur l'étude des serpents et des systèmes tels que l'ACM-III [Hirose 1993] en modélisant, cette fois, l'effet dynamique des roues. C'est avec ces derniers développements que l'intérêt pour la bicyclette a commencé à germer.

Tous ces travaux, ainsi que la présente thèse, partagent des outils de modélisation qui sont rappelés dans le [chapitre 1](#). Tout d'abord, des outils géométriques hérités de l'école américaine de mécanique géométrique [Marsden 1992] qui permettent d'exhiber la structure géométrique commune, sous-jacente aux différents modes de locomotion. Ensuite, une modélisation structurée en deux étages : un étage dynamique traduisant la physique du système et un étage cinématique dit de reconstruction. Enfin une méthode de réduction de la dynamique par projection dans l'espace des vitesses admissibles, développée dans les thèses de S. Ali et A. Belkhiri.

Tout ces outils géométriques exploitent la structure de fibrés principaux, produit direct d'une variété (l'espace des formes du système) et d'un groupe de Lie : la fibre (définissant la transformation rigide d'un corps de référence du système dans l'espace ambiant), pour définir l'espace des configurations des systèmes locomoteurs. Ils ont l'avantage de produire des modèles dynamiques intrinsèques, dans le sens où ils s'affranchissent de tous systèmes de paramétrage de type coordonnée généralisées. En conséquent, toutes les non-linéarités introduites artificiellement par ces paramétrages disparaissent de l'étage dynamique et se retrouvent déportées au niveau cinématique de la reconstruction, traité par un calculateur. L'étage dynamique s'exprime alors en termes des vitesses d'ensembles rigides du système et

prend alors sa forme la plus simple en exploitant les propriétés de symétrie du système ou "invariance gauche" [Boyer et Porez 2015]. La dynamique peut ainsi être écrite symboliquement, y compris dans le cas de systèmes jusque là inaccessibles tels la bicyclette. De plus, l'expression de la dynamique en termes de vitesses non intégrables permet d'y intégrer les contraintes non-holonomes de manière naturelle. La méthode de réduction par projection exploite cet état de fait. Dans le cas de la bicyclette, nous verrons qu'en dépouillant la cinématique des non-linéarités de paramétrage, il devient alors possible de calculer symboliquement les expressions du noyau de ses contraintes sans singularités. La méthode de réduction permettra alors d'obtenir une formulation simple de sa dynamique contrainte en projetant sa dynamique libre, exprimée sur le fibré principal de ses configurations, dans l'espace des vitesses admissibles définies par ce noyau.

Ainsi, cette thèse poursuit la démarche engagée dans les thèses [Porez 2007; Ali 2011; Belkhiri 2013]. Après avoir, tour à tour, été appliqués à la nage, la reptation et au vol, les outils résumés ci-dessus ont été appliqués à l'objet technologique "bicyclette". Initialement pensé comme un cas illustratif dans [Belkhiri 2013], ce système est devenu, pour nous [Mauny et al. 2017; Boyer et al. 2017], une sorte de vitrine de notre savoir-faire en matière de modélisation et de simulation de la locomotion. A ce sujet, il est important de noter que la littérature sur le vélo ne propose pas, en dehors des récents travaux numériques de [Meijaard et al. 2007], de modèle satisfaisant, et qu'aucun modèle symbolique complet n'a, à ce jour été proposé. Les modèles de la bicyclette sont généralement simplifiés, et ce, dès l'étape géométrique. En effet, l'inclinaison de la fourche n'est souvent pas prise en compte et les points de contact roue/sol sont définis comme la projection des moyeux des roues sur le sol [Getz et Marsden 1995; Consolini et Maggiore 2013; Boyer et Belkhiri 2014]. Comme nous le verrons dans le chapitre 2, en réalité, la position de ces points de contact évolue avec de la pose du vélo. Ainsi, dans ce chapitre, nous établirons, en exploitant les outils susmentionnés, un modèle explicite, géométriquement exacte, des contacts. Conséquence de ce modèle, les contraintes de la bicyclette ne seront plus invariantes à gauche, comme c'est couramment le cas dans la littérature sur les systèmes non-holonomes [Bloch et al. 2015]. D'autre part, en utilisant le groupe  $SE(3)$  comme fibre, nous pourrons, dans le chapitre 4, traiter le cas de la bicyclette intermittente. Il s'agit, à notre connaissance, d'une première modélisation d'un système locomoteur tri-dimensionnel, non-holonome, intermittent qui exploite la structure de fibré principal. Dans ce domaine, une autre contribution de cette thèse concerne la modélisation des impacts en eux-mêmes. En effet, le chapitre 3 présente une extension de la méthode projective de réduction sur le noyau des contraintes au cas des impacts plastiques. Cette nouvelle formulation réduite des impacts, appliquée à la bicyclette au chapitre 4, bénéficie des mêmes avantages que la dynamique réduite, à savoir un coût de calcul réduit par rapport à la résolution classiquement rencontrée dans la littérature sur les systèmes intermittents.



## Contributions

Les travaux présentés dans cette thèse ont donné lieu à trois publications :

Une publication en conférence :

- Mauny, J., Porez, M. et Boyer, F., *Symbolic Dynamic Modelling of Locomotion Systems with Persistent Contacts - Application to the 3D Bicycle*, IFAC-PapersOnLine, 2017, 50, 7598 - 7605

Deux publications en journal ;

- Chevallereau, C., Boyer, F., Porez, M., Mauny, J. et Aoustin, Y., *Morphological self stabilization of locomotion gaits : illustration on a few examples from bio-inspired locomotion*, Bioinspiration & Biomimetics, 2017, 12
- Boyer, F., Porez, M. et Mauny, J., *Reduced Dynamics of the Non-holonomic Whipple Bicycle*, Journal of Nonlinear Science, 2017

## Bibliographie

- Ali S. *Newton-Euler approach for bio-robotics locomotion dynamics : from discrete to continuous systems*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Nantes, 2011. [14](#), [15](#)
- Azuma A. et Yasuda K. Flight performance of rotary seeds. *Journal of Theoretical Biology*, 138(1) :23 – 53, 1989. [13](#)
- Belkhiri A. *Modélisation dynamique de la locomotion compliant : Application au vol battant bio-inspiré de l'insecte*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Nantes, 2013. [14](#), [15](#)
- Bloch A.M., Baillieul J., Crouch P.E., Marsden J.E., et Zenkov D. *Nonholonomic Mechanics and Control*, tome 24 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, 2015. [15](#)
- Boyer F. et Belkhiri A. Reduced locomotion dynamics with passive internal dofs : Application to nonholonomic and soft robotics. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(3) :578–592, 2014. [15](#)
- Boyer F. et Porez M. Multibody system dynamics for bio-inspired locomotion : from geometric structures to computational aspects. *Bioinspiration & Biomimetics*, 10(2) :1–21, 2015. [15](#)
- Boyer F., Porez M., et Mauny J. Reduced dynamics of the non-holonomic whipple bicycle. *Journal of Nonlinear Science*, 2017. [15](#)
- Consolini L. et Maggiore M. Control of a bicycle using virtual holonomic constraints. *Automatica*, 49(9) :2831–2839, 2013. [15](#)
- Getz N.H. et Marsden J.E. Control for an autonomous bicycle. Dans *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, tome 2, pages 1397–1402 vol.2. 1995. [15](#)
- Hirose S. *Biologically inspired robots : Snake-like locomotors and manipulators*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1993. [14](#)
- Müller V.C. et Hoffmann M. What is morphological computation ? on how the body contributes to cognition and control. *Artificial Life*, 23(1) :1–24, 2017. [13](#)
- Marsden J.E. *Lectures on Mechanics (London Mathematical Society Lecture Note Series)*, tome 174. Cambridge University Press, 1992. [14](#)
- Mauny J., Porez M., et Boyer F. Symbolic dynamic modelling of locomotion systems with persistent contacts - application to the 3d bicycle. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :7598 – 7605, 2017. 20th IFAC World Congress. [15](#)

- Mazzoleni I. *Architecture Follows Nature-Biomimetic Principles for Innovative Design*. CRC Press, 2013. [13](#)
- Meijaard J., Papadopoulos J.M., Ruina A., et Schwab A. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle : a benchmark and review. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2084) :1955–1982, 2007. [15](#)
- Porez M. *Modèle dynamique analytique de la nage tridimensionnelle anguilliforme pour la robotique*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2007. [14](#), [15](#)
- Yasuda K. et Azuma A. The autorotation boundary in the flight of samaras. *Journal of Theoretical Biology*, 185(3) :313 – 320, 1997. [13](#)

# Modélisation de la dynamique de la locomotion

## Sommaire

---

1.1	Introduction . . . . .	20
1.2	Définitions . . . . .	22
1.2.1	Définition des systèmes mobiles multi-corps . . . . .	23
1.2.2	Espace des configurations d'un système mobile multicorps . . . . .	24
1.3	Problème général . . . . .	27
1.4	Dynamique directe de la locomotion : le cas cinématique . . . . .	29
1.4.1	Cas 1 : Connexion mécanique . . . . .	33
1.4.2	Cas 2 : Connexion cinématique . . . . .	34
1.5	La dynamique directe de la locomotion : le cas général . . . . .	35
1.5.1	Cas 1 : Lorsque les efforts extérieurs dérivent d'un Lagrangien (invariant gauche) . . . . .	38
1.5.2	Cas 2 : Lorsque les forces externes sont des multiplicateurs de Lagrange d'un ensemble de contraintes cinématiques . . . . .	41
1.6	La dynamique inverse en couple . . . . .	46
1.7	Application de la méthode générale à un robot grimpeur bio-inspiré : le ROCR . . . . .	47
1.7.1	Paramétrage du ROCR . . . . .	48
1.7.2	Modélisation . . . . .	49
1.7.3	Contraintes . . . . .	52
1.7.4	Modèle réduit de la dynamique du ROCR . . . . .	53
1.7.5	Modèle d'impact . . . . .	54
1.7.6	Exploitation du modèle . . . . .	55
1.7.7	Recherche de cycles limites . . . . .	56

1.7.8 Résultats de simulation . . . . .	57
1.8 Conclusion . . . . .	64

---

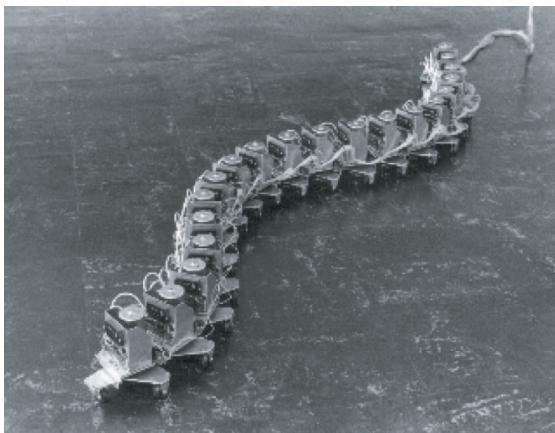
## 1.1 Introduction

Les animaux font preuve de performances dynamiques, tout particulièrement sur le plan de l'efficacité énergétique et de la manœuvrabilité dont nous, roboticiens, ne pouvons que rêver [Alexander 1990; Dickinson et al. 2000]. Les serpents, notamment, ont su dompter tous les types d'environnement. Ainsi, il est possible de trouver des serpents capables de ramper, présentant d'ailleurs plusieurs types de reptation différents pour ce seul mode de locomotion [Gray 1946; Jayne 1986; Dowling 1997], mais également de nager et de planer ; ceci en dépit d'une géométrie extrêmement simple. Les poissons présentent, pour leur part, une manœuvrabilité et une efficacité sans égale dans leur environnement, capables de brusques changements de direction sans décélération et de nager avec aisance dans des courants tumultueux. Les insectes [Willmott et Ellington 1997a,b; Ravi et al. 2013] et colibris [Chai et Millard 1997; Tobalske et al. 2007; Cheng et al. 2016] sont capables de danses aériennes impressionnantes dont les chorégraphies atteignent des précisions millimétriques. De plus, ils ont su, tout comme les poissons, optimiser leur performance en développant des stratégies leur permettant de recapturer une partie de l'énergie qui serait autrement dissipée dans l'environnement [Beal et al. 2006]. Certains singes comme les gibbons et les orangs-outans se déplacent avec dextérité dans le chaos de branches qu'est la canopée en exploitant la gravité comme une ressource d'énergie potentielle externe. Pour finir, nous mêmes, humains, sommes capables de nous déplacer avec facilité sur des terrains relativement accidentés. Ces quelques exemples des prouesses de la nature justifient à eux seuls l'intérêt de concevoir une nouvelle génération de robots locomoteurs bio-inspirés.

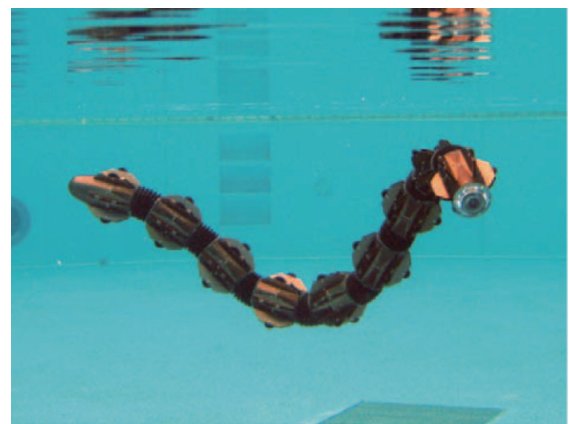
Pionnier dans son domaine, le robot serpent ACM-III [Hirose 1993; Hirose et Yamada 2009] (voir la figure 1.1) posa la première pierre de la locomotion terrestre bio-inspirée en 1972. Ce robot de 2 m est constitué de vingt corps rigides liés entre eux par des liaisons motorisées. Le contact avec le sol se fait au travers de roues passives et le mouvement d'ensemble du robot est obtenu grâce aux ondulations latérales de son corps, à la manière des serpents. Ce robot étant limité aux mouvements bi-dimensionnels, il fut suivi en 2001 par l'ACM-R3 puis par l'ACM-R5 capable d'évoluer sur terre mais également dans l'eau (voir figure 1.2). Une meilleure compréhension de la locomotion animale, ici celle du serpent, a permis l'augmentation des performances et une adaptation à différents types d'environnement. De manière similaire, tout un bestiaire robotique a vu le jour, puisant son inspiration des insectes [Wood 2008] et des colibris [Keennon et al. 2012; Karásek et al. 2013],

des poissons tel que le robotna du MIT et l'Amphibot, des tortues marines [Siegenthaler et al. 2013] (voir figure 1.4) et de l'humain avec une multitude de robots humanoïdes. Cette liste non exhaustive montre l'attrait que portent les roboticiens aux modes de locomotion bio-inspirée. Maintenant, afin d'affiner notre compréhension de ces modes de locomotion et ainsi permettre l'amélioration des performances des robots les exploitant, il est nécessaire de pousser plus avant la modélisation en perçant les détails des interactions de ces systèmes avec leur environnement.

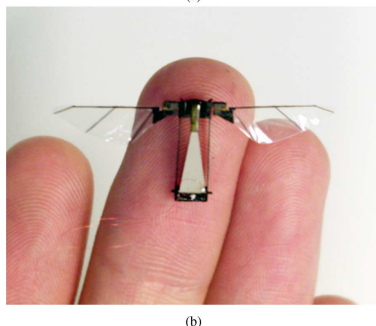
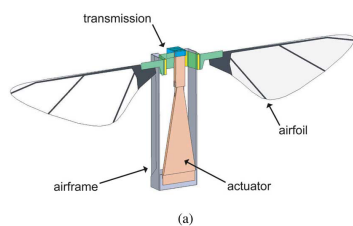
Ce document dans sa globalité est entièrement dédié à la modélisation de systèmes mobiles multi-corps soumis à des contacts potentiellement intermittents. Les



**Figure 1.1** – Le robot serpent ACM-III (Figure extraite de [Hirose et Yamada 2009]).



**Figure 1.2** – Le robot serpent ACM-R5 (Figure extraite de [Hirose et Yamada 2009]).



**Figure 1.3** – Robot volant inspiré de l'insecte (Figure extraite de [Wood 2008]).



**Figure 1.4** – Le robot nario Tartaruga (Figure extraite de [Siegenthaler et al. 2013]).

applications de la méthode exposée sont variées, s’appliquant à tous types de locomotion bio-inspirée mais également aux systèmes mécaniques classiques tel que la bicyclette qui sera d’ailleurs le fil conducteur de ce document.

Dans le présent chapitre, nous nous attacherons à poser le cadre général de la modélisation dynamique des *systèmes mobiles multi-corps ou mobile multi-body systems* (MMSs). Ainsi ce chapitre se structure comme suit. Nous commencerons dans la [section 1.2](#) par définir ce qu’est un MMS ainsi que son espace des configurations. En [section 1.3](#), le problème général que l’on cherche à résoudre avec notre méthode de modélisation sera exposé. Ensuite, avant de traiter le cas général ([section 1.5](#)), nous traiterons le cas particulier où la dynamique de la locomotion est entièrement gouvernée par un modèle cinématique du système au travers d’une connexion mécanique ([section 1.4.1](#)) ou d’une connexion cinématique ([section 1.4.2](#)). Ceci fait, nous nous attacherons en [section 1.5](#) à présenter le cas général où la locomotion nécessite un modèle dynamique afin d’être résolue. Dans cette section, nous mettrons en lumière deux cas particuliers. Tout d’abord celui où les efforts extérieurs dérivent d’un Lagrangien invariant gauche ([section 1.5.1](#)), comme nous pouvons l’observer dans le cas de la nage. Puis le cas qui se révèle être le point de départ de cette thèse, où les forces extérieures au système découlent d’un ensemble de contraintes cinématiques. Ces forces sont les multiplicateurs de Lagrange forçant les contraintes. La dynamique inverse permettant d’obtenir les couples d’actionnement internes nécessaires à l’obtention d’un mouvement désiré est, quant à elle, exposée en [section 1.6](#). La théorie ayant été présentée nous finirons le chapitre par une illustration à un système holonome intermittent : l’application de la méthode sur un robot pendulaire, le ROCR ([section 1.7](#)).

## 1.2 Définitions

La locomotion de tout système, qu’il soit vivant ou artificiel, peut être expliquée grâce aux trois lois du mouvement exprimées par Isaac Newton dans *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Si la première loi, « Tout corps persévère dans l’état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n’agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d’état » et la seconde, « Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et le sont dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée », expriment la relation qu’il existe entre les forces s’appliquant sur un système et son mouvement d’ensemble, la troisième, « L’action est toujours égale et opposée à la réaction ; c’est-à-dire, que les actions de deux corps l’un sur l’autre sont toujours égales, et dans des directions contraires », est clairement le levier de la locomotion. En effet, afin qu’un système puisse se mouvoir, celui-ci doit pouvoir

exercer sur son environnement une force qui, par réaction, s'applique sur ledit système modifiant ainsi son mouvement (cf. la première et seconde loi du mouvement). Dans le détail, un tel système change sa configuration interne, c'est-à-dire sa forme, et sollicite ainsi l'environnement (cf. la troisième loi du mouvement). Cette réponse de l'environnement génère des forces dont la résultante produit alors un mouvement d'ensemble du système, c'est-à-dire un changement de sa position et son orientation dans l'espace tri-dimensionnel ambiant.

Dans la présente section nous allons édifier un cadre général unifié, s'appuyant sur le modèle des systèmes multi-corps et sur l'approche Lagrangienne, afin de modéliser la locomotion en robotique.

### 1.2.1 Définition des systèmes mobiles multi-corps

Un *système multi-corps ou multi-body system* (MS) est un système matériel constitué d'un ensemble de corps matériels reliés entre eux par des liaisons internes, et avec le reste du monde par des liaisons ou des contacts externes (modélisés par des densités ponctuelles, superficielles et/ou volumiques de forces et couples externes). Sur la base de ce modèle, nous examinerons le cas des MSs constitués d'un ensemble fini de corps rigides. Il est possible d'étendre ce modèle au cas rigide mais continu et enfin aux robots souples avec organes compliants [Boyer et Belkhir 2014]. Le modèle conventionnel des MSs rigides est bien développé dans le contexte de la manipulation, mais beaucoup moins dans celui de la locomotion. Contrairement aux MSs classiques, tout corps inclus dans un système locomoteur se déplace généralement, non seulement par rapport aux autres corps, mais effectue également des mouvements rigides d'ensemble, c'est-à-dire des déplacements de sa structure dans l'espace ambiant. De plus, ces mouvements d'ensemble ne sont généralement pas imposés par des lois horaires explicites, comme ce peut être le cas pour un manipulateur monté sur une plate-forme roulante, mais sont produits à tout instant par les forces de contact appliquées sur le système en entier. Nous définissons ceci comme la dynamique de locomotion du système. Par extension de la terminologie actuelle, tout au long de cette thèse, nous nommerons un tel système MMS pour le distinguer d'un MS classique. En dépit de cette distinction sémantique, un MS peut être vu comme un cas particulier de MMS dont le mouvement rigide d'ensemble est fixé par des lois temporelles. Ainsi le cadre méthodologique que nous allons développer pour les MMSs sera aussi valable pour tous MSs. Enfin, se référant aux conceptions robotiques habituelles, les MMSs incluront de nombreux systèmes robotiques, du système totalement contraint (tel qu'une plate-forme à roues) à un système flottant (navettes spatiales et satellites) en passant par les manipulateurs industriels conventionnels, les systèmes non holonomes sous-contraints (par exemple, le snakeboard, le trikke), etc.



### 1.2.2 Espace des configurations d'un système mobile multi-corps

Nous qualifions de *Lagrangienne* une théorie qui cherche à dériver entièrement la dynamique d'un système mécanique à partir d'une unique fonction de l'état du système : le Lagrangien. D'un point de vue mathématique, une telle théorie bénéficie de bases géométriques solides prenant ses racines dans la théorie de la géométrie des variétés Riemanniennes. En mécanique, la définition clef de ce modèle est le concept de variété des configurations ou, plus simplement, d'espace des configurations. L'espace des configurations  $\mathcal{C}$  d'un système matériel est un espace géométrique dont les points ont pour coordonnées les paramètres cinématiques (aussi nommées *coordonnées généralisées*) du système matériel. En conséquence,  $\mathcal{C}$  est un espace abstrait, c'est-à-dire un espace différent de l'espace physique dans lequel le système évolue, dont la dimension est égale au nombre de *degrés de liberté* (ddls) du système. Les *coordonnées généralisées* du système matériel définissent pour  $\mathcal{C}$  un système de coordonnées locales, de cartes, ce qui donne à  $\mathcal{C}$  la structure de variété<sup>1</sup>. Chaque point de cet espace abstrait correspond à une et une seule configuration<sup>2</sup> du système (dans son ensemble) dans l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ . Pour un MS, tel qu'un manipulateur à  $p$  liaisons pivots paramétré par le vecteur des variables angulaires<sup>3</sup>  $r = (r_1, r_2, \dots, r_p)^\top$ , chaque  $r_i$  étant une coordonnée sur le cercle  $S^1$ , l'espace des configurations est alors un hyper-tore de dimension  $p$  défini tel que  $\mathcal{C} = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = (S^1)^p$ . Ainsi, tout point de  $\mathcal{C}$  correspond à une configuration, ou forme (shape), du MS dans l'espace 3D. Dans le cas des MMSs, le paramétrage du système ne requiert pas seulement de tenir compte de la forme (que nous nommerons *espace des formes* et que nous dénoterons  $\mathcal{S}$ ) mais également de la position et orientation absolue du système dans l'espace ambiant. Ainsi, un MMS a des ddls internes qui définissent sa forme et des ddls externes qui correspondent à sa position et orientation d'ensemble par rapport à un repère externe lié à l'espace ambiant. Dans l'interprétation Lagrangienne de la mécanique géométrique, les ddls externes sont paramétrés par la transformation  $g$  permettant de passer du repère lié à l'espace ambiant à celui, mobile, lié au MMS et définissant la référence du mouvement rigide d'ensemble du système dans l'espace ambiant. Ce repère mobile est nommé *repère de référence* et est généralement attaché à un des corps du MMS, choisi arbitrairement et dénommé *corps de référence*. Bien sur, le choix de ce repère de référence n'est pas unique. Pour les systèmes bio-

---

1. Un  $n$ -variété est un espace topologique (un ensemble de points) identifiable localement à  $\mathbb{R}^n$  grâce à un ensemble de cartes, un atlas, le recouvrant (prenons à titre d'exemple la terre, qui est un 2-variété nommée  $\mathcal{S}^2$ , avec son atlas de cartes locales, les cartes géographiques, qui sont une partie de  $\mathbb{R}^2$ ) [Spivak 1999].

2. En mécanique, une configuration est définie par l'ensemble des positions des points matériels du système par rapport au repère attaché à l'espace tri-dimensionnel ambiant (en bref, il s'agit d'un instantané du système dans le laboratoire).

3. Ici, les liaisons pivots sont prises à titre d'exemple, des liaisons glissières pourraient tout aussi bien être utilisées.

inspirés, il est souvent choisi d'attacher le repère de référence au corps embarquant les capteurs extéroceptifs. Il est également envisageable de définir un repère dont les vecteurs définissant la base seraient attachés au corps de référence mais dont l'origine serait liée à un point non matériel tel que le centre de gravité global du MMS. Dans un tel cas, le repère de référence flotte dans l'espace ambiant et est donc qualifié de *repère flottant* [Canavin et Likins 1977].

Du point de vue de la géométrie, les transformations  $g$ , appelées *transformations rigides*, sont des éléments d'un groupe de Lie  $G$ , c'est-à-dire un groupe de transformations doté d'une structure de variété<sup>4</sup> [Murray et al. 1994; Chevallier et Lerbet 2018]. Un tel groupe peut être défini différemment en fonction du cas étudié. Par exemple, quand les déplacements du repère de référence se limitent à des translations 1D,  $G = \mathbb{R}$ . Pour des translations dans le plan,  $G = \mathbb{R}^2$ . Dans le cas des translations mais également des rotations planes,  $G$  est nommé *groupe des déplacements Euclidiens de  $\mathbb{R}^2$*  et sera dénoté  $G = SE(2)$ . Pour les translations et les rotations dans l'espace tri-dimensionnel,  $G$  sera défini comme  $G = \mathbb{R}^3$  et  $G = SO(3)$ , respectivement. Tous ces cas de figure et même d'autres sont inclus dans le groupe plus général  $G = SE(3)$  qui définit l'espace des configurations d'un corps rigide évoluant librement dans l'espace 3D ambiant. L'élément de transformation  $g$  de dernier groupe peut être représenté par une matrice homogène  $4 \times 4$  :

$$g = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où  $R$  et  $p$  désignent respectivement les parties rotation et translation de la transformation. Dans son groupe de configurations, le mouvement d'un corps rigide est défini par une courbe paramétrée par le temps  $t \mapsto g(t)$  dont les vecteurs tangents  $\dot{g}$  définissent la vitesse de transformation. La composition  $hg$  de deux transformations  $h$  et  $g$  agissant sur  $\mathbb{R}^3$  correspond, dans le groupe, à la transformation de  $g$  par  $h$  sur la gauche, ou de  $h$  par  $g$  sur la droite. Pour de telles translations, qui définissent des applications non linéaires de point en point dans  $G$ , nous pouvons calculer leurs applications tangentes linéaires (leurs Jacobiennes) et les utiliser pour translater les vecteurs tangents au groupe (les vitesses de transformation). Par exemple, en utilisant l'application tangente de la transformation gauche susmentionnée, il est possible de déplacer  $\dot{g}$  de son point d'application initial  $g$  vers n'importe quel point  $hg$  de  $G$  pour obtenir  $h\dot{g}$ . En particulier, la translation gauche de  $\dot{g}$  par  $h = g^{-1}$  déplace les points d'application de  $\dot{g}$  de  $g$  vers l'élément neutre de  $G$  (c'est-à-dire l'identité), et définit ainsi le twist du corps rigide exprimé dans son repère mobile,

---

4. Les transformations  $g$  de  $G$ , qui peuvent être composées avec la loi de composition interne de  $G$ , sont aussi des points qui peuvent être localisés dans une carte de  $G$ . Par exemple, les angles d'Euler peuvent être utilisés pour définir des cartes du groupe de Lie  $SO(3)$  des rotations 3D.

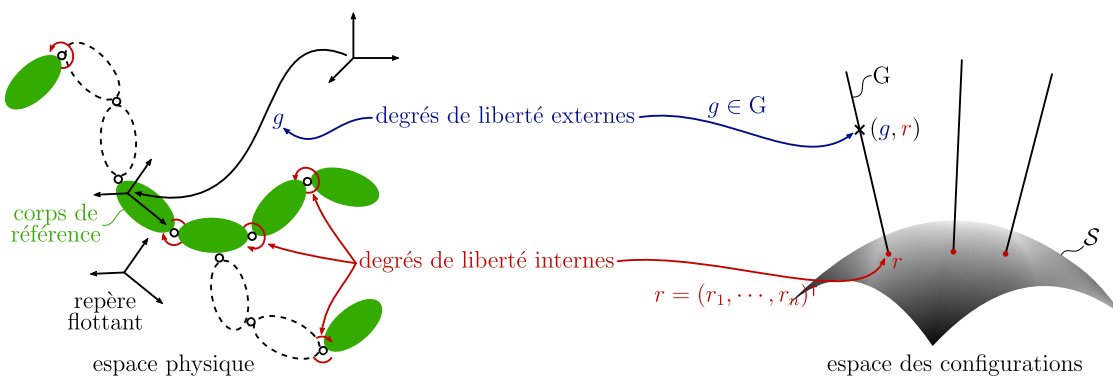
ou *twist matériel*<sup>5</sup>  $\eta$ , qui, pour  $G = \text{SE}(3)$  s'écrit :

$$g^{-1}\dot{g} = \begin{pmatrix} \Omega & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \eta, \quad (1.1)$$

où  $\Omega$  et  $V$  représentent respectivement les vitesses angulaires et linéaires du corps, exprimées dans son repère mobile<sup>6</sup>. L'ensemble des twists génère l'espace tangent à  $G$  en  $g = \text{Id}$ , noté  $T_{\text{Id}}G$ . Une fois doté d'un commutateur tel que, pour tout  $\eta_1, \eta_2 \in T_{\text{Id}}G$ ,  $[\eta_1, \eta_2] = \eta_1\eta_2 - \eta_2\eta_1$ , cet espace définit aussi l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe  $G$ , dénoté  $\text{se}(3)$  dans le cas de  $\text{SE}(3)$ . Maintenant que nous avons défini la structure géométrique permettant de définir la forme d'un MMS (un point  $r$  dans la variété  $\mathcal{S}$ ) et sa position et son orientation d'ensemble (un point  $g$  dans le groupe de Lie des déplacements du corps de référence  $G$ ), nous pouvons introduire la définition de l'espace des configurations d'un MMS subissant à la fois une modification de sa forme et un mouvement d'ensemble rigide. Ainsi, dans le cas du MMS présenté en [figure 1.5](#), chaque configuration du système correspond à une paire  $(g, r)$ , qui est un point dans l'espace des configurations :

$$\mathcal{C} = G \times \mathcal{S}.$$

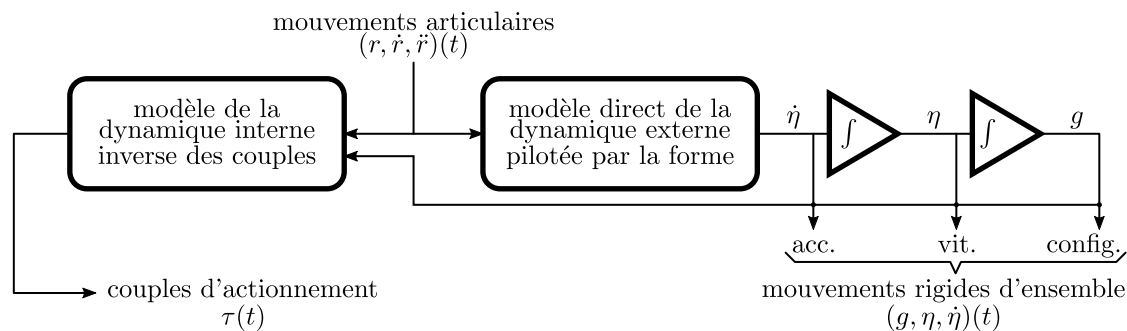
Un tel espace (représenté dans la [figure 1.5](#)) est connu, en géométrie différentielle, sous le nom de *fibré principal*. Dans cette théorie, un fibré est une variété définie (au moins localement) par le produit direct d'une variété appelée *variété de base* et d'un espace nommé *fibre* doté d'une structure algébrique [Spivak 1999]. Par exemple, si la fibre est un espace vectoriel, alors le fibré sera un *fibré vectoriel* (et de manière plus générale, un *fibré tensoriel*). Si, comme c'est le cas ici, la fibre est un groupe de Lie, alors le fibré est appelé *fibré principal*. Enfin, un riche corpus de résultats existe



**Figure 1.5** – Espace des configurations d'un système locomoteur : fibré principal.

5. Le twist matériel est parfois appelé *twist du corps* ou plus simplement *vitesse du corps*.

6. Nous ne distinguons pas la matrice antisymétrique des vitesses angulaires de son vecteur  $3 \times 1$ , pas plus que nous ne distinguons, dans le cas de  $\text{SE}(3)$ , la matrice  $4 \times 4$   $\eta$  du vecteur  $6 \times 1$   $(V^\top, \Omega^\top)^\top$ .



**Figure 1.6** – Le problème général : synoptique de simulation.

en physique géométrique où la structure de fibré principal joue un rôle crucial en théorie de jauge et en relativité générale [Frankel 1998], par exemple.

Ainsi, une des forces de l’approche Lagrangienne, dont certains résultats clefs seront examinés ici, est d’avoir exploité cette richesse au bénéfice de la locomotion en robotique. Dans le modèle géométrique de la physique, un objet géométrique est intimement lié au concept de fibré et joue un rôle même plus important que ce dernier, celui de *connexion*. Cependant, avant d’introduire ce concept et son utilité dans la locomotion, nous allons tout d’abord établir le problème général que nous traiterons dans ce chapitre.

### 1.3 Problème général

Le problème général de la locomotion peut être envisagé sous différents angles. Dans ce chapitre, nous l’aborderons comme suit. Connaissant l’évolution temporelle des liaisons internes  $t \mapsto r(t)$ , nous chercherons à établir un modèle capable de retourner (voir figure 1.6) :

1. Les mouvements externes d’ensemble, ce qui correspond à résoudre le modèle direct de la dynamique externe piloté par la forme.
2. Les couples articulaires, ce qui correspond à calculer la dynamique interne inverse des couples.

La dérivation de ces deux modèles est le but du développement ultérieur, mais avant, nous marquons une pause afin de faire quelques remarques.

#### Remarque 1.1 :

Le premier modèle dynamique (c’est-à-dire le modèle dynamique direct) est qualifié de modèle de la locomotion car, liant les ddls internes et externes, il implique le modèle des forces de contact, qui est le fondement de la locomotion. Le second (c’est-à-dire le modèle dynamique inverse), est classiquement utilisé pour

les MSs tels que les manipulateurs industriels où il trouve son application dans l'algorithme du couple calculé ou *computed torque*.

**Remarque 1.2 :**

De l'énoncé précédent, une question émerge naturellement : pourquoi avons-nous opté pour les mouvements internes comme entrées et non pour les couples d'actionnements ? Il y a deux raisons à cela. Premièrement, il est facile de spécifier les mouvements d'un robot locomoteur en termes de ses mouvements internes, mais il est, par contre, clairement moins facile d'inférer les couples à appliquer sur les liaisons actionnées afin d'obtenir le mouvement désiré. Deuxièmement, ce problème (et sa solution) peut être couplé à des expériences basées sur des films de locomotion d'animaux. Après que les mouvements internes aient été extraits de tels films, ils peuvent être imposés comme entrées de l'algorithme qui renverra les mouvements externes (modélisés). Ceux-ci pourront alors être comparés aux mouvements externes extraits des films. La comparaison des mouvements mesurés (sur les films) et de ceux calculés (par le modèle dynamique) est un outil précieux pour l'étude du modèle de contact<sup>7</sup>, qui est de loin la plus grosse difficulté dans la modélisation de la dynamique de la locomotion. En prime, la dynamique inverse (en couple) permet d'évaluer en parallèle la faisabilité des mouvements internes imposés par rapport aux ressources des actionneurs.

**Remarque 1.3 :**

Un autre problème lié à la locomotion est d'inverser le modèle de la locomotion susmentionnée afin de trouver quels mouvements internes (de forme) produiront le mouvement externe (d'ensemble) désiré. La solution à ce problème est liée au contrôle en boucle ouverte et peut être utilisée pour la planification de mouvements ou pour de la recherche d'allures. On notera cependant que l'algorithme de locomotion inverse, qui en résulte, peut être contourné en traitant le contrôle en boucle ouverte comme un problème d'optimisation basé sur l'utilisation du modèle de locomotion direct ci-dessus énoncé. Dans ce cas, l'idée repose sur la minimisation de l'erreur entre les valeurs actuelles et désirées du mouvement externe, en jouant sur les mouvements internes (de forme) inconnus [Chevallereau et Austin 2001].

Finalement, si la solution algorithmique au problème général que nous venons d'évoquer est un outil utile pour la conception d'allures et de manœuvres transitoires,

---

7. Cette approche requiert que les positions, les vitesses et les accélérations externes (d'ensemble) et internes (de forme) soient d'abord mesurées et/ou estimées. Puis, connaissant les inerties du système, on peut insérer ces variables cinématiques dans les équations de la dynamique pour estimer les valeurs des forces de contacts s'appliquant sur le système (toutes les autres contributions étant des forces inertielles connues). [Bimbard et al. 2013; Horstmann et al. 2014] illustrent cette approche.

la résolution de la dynamique inverse (c'est-à-dire avec les couples comme entrées et les mouvements internes et externes comme sorties) présente un intérêt en soi pour modéliser les déformations internes passives des corps constituant le système en cas la locomotion compliant.

## 1.4 Dynamique directe de la locomotion : le cas cinématique

Basé sur ces concepts, le mouvement de la forme d'un MMS définit un mouvement sur la variété  $\mathcal{S}$ , tandis qu'un mouvement rigide du corps de référence définit un mouvement dans le groupe de Lie  $G$ . Par conséquent, pour résoudre la dynamique directe de la locomotion pilotée par la forme, nous devons développer une relation entre ces deux types de mouvements du fibré principal  $G \times \mathcal{S}$ . En général, de telles relations sont données par un modèle dynamique liant forces et accélérations. Dans ce cas, la dynamique des contacts entre le système et son environnement doit être résolue, comme nous l'évoquerons dans la prochaine section. Cependant, il existe un cas particulièrement élégant où la locomotion est entièrement réglée par la cinématique, c'est-à-dire par des relations entre la forme et les vitesses d'ensemble. Dans ce cas, le modèle de contact est encodé dans ce que nous nommerons une connexion sur le fibré principal des configurations [Ehresmann 1950]. Dans la théorie de la locomotion, de telles connexions existent quand :

- (i) Il existe une relation linéaire entre un petit déplacement  $dr$  de  $\mathcal{S}$  (de forme) et un petit déplacement  $dg$  de  $G$ .
- (ii) Le twist matériel  $g^{-1}dg$  est indépendant de  $g$  (invariance gauche).

En remplaçant les petits déplacements par les vitesses dans cette définition, une connexion lie directement les vitesses d'ensembles<sup>8</sup>  $\eta$  aux vitesses internes (de forme)  $\dot{r}$  via un modèle cinématique de la forme :

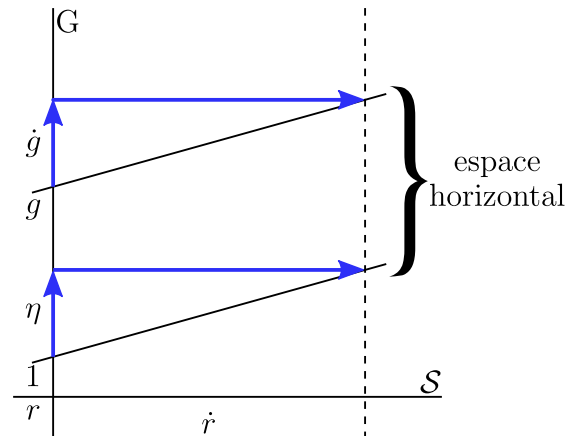
$$\eta + \mathcal{A}(r)\dot{r} = 0 . \tag{1.2}$$

Cela s'applique en tous points  $(g, r)$  du fibré principal à travers  $\text{Ad}_g(\eta + \mathcal{A}(r)\dot{r}) = 0$ <sup>9</sup>, qui définit l'espace des mouvements admissibles du système ou, dans le langage de la géométrie différentielle, une distribution particulière sur  $\mathcal{C} = G \times \mathcal{S}$  appelée espace horizontal, tel qu'illustré en [figure 1.7](#). Dans la littérature en mécanique géométrique,  $\mathcal{A}(r)$  est connue comme la 1-forme locale de la connexion ou plus simplement

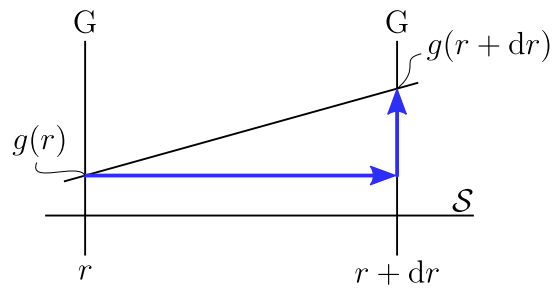
---

8. Elles sont définies dans la [section 1.2.2](#) comme les vitesses du corps de référence, c'est-à-dire, dans le cas de  $\text{SE}(3)$  comme (1.1), avec  $g$  la configuration du corps de référence.

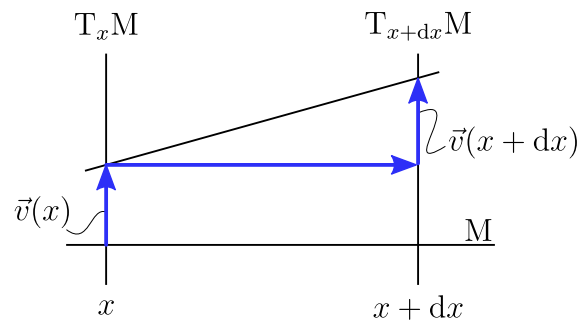
9.  $\text{Ad}_g$  est un opérateur appelé *adjoint de*  $G$ . Il transporte un twist d'un repère à un autre, avec  $g$  la transformation qui mappe le premier repère sur le second.



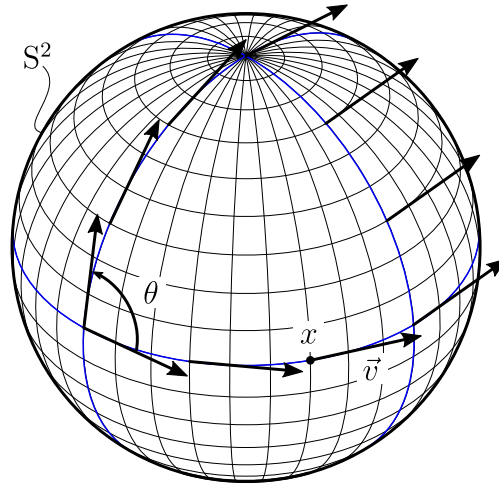
**Figure 1.7** – Connexion entre les vitesses ( $\dot{r}$ ) de  $\mathcal{S}$  et les vitesses ( $\eta$ ) de  $G$ .



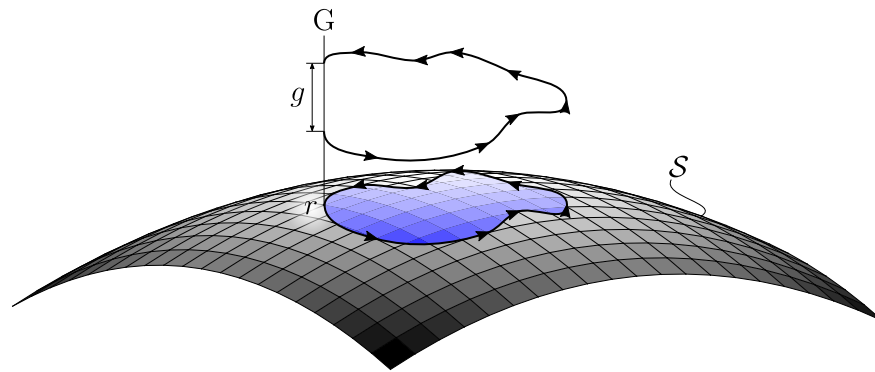
**Figure 1.8** – Connexion sur le fibré principal  $G \times \mathcal{S}$ .



**Figure 1.9** – Connexion sur le fibré tangent  $TM$  de la variété  $M$ .



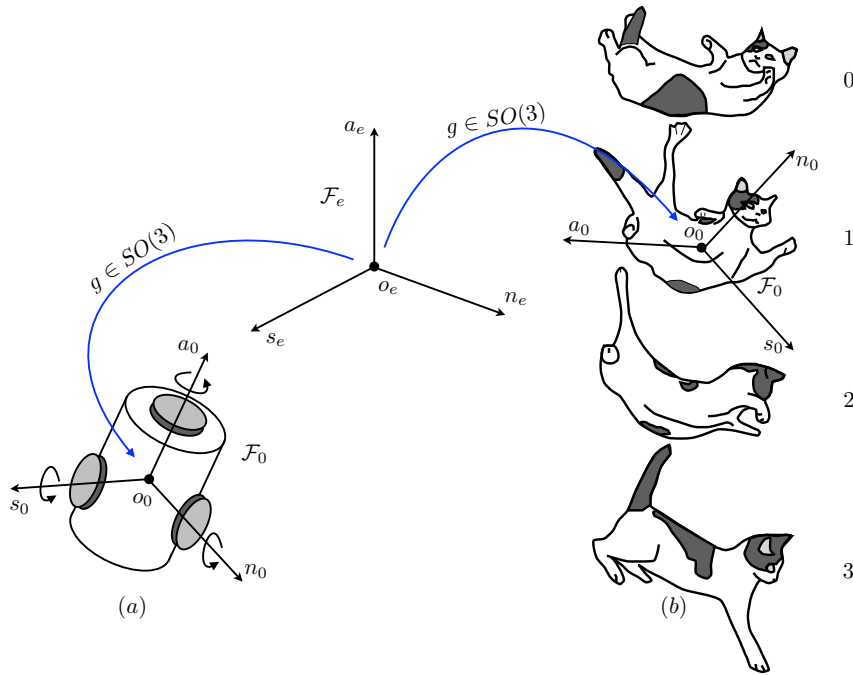
**Figure 1.10** – Théorème de Gauss-Bonnet illustré sur la sphère  $S^2$ .



**Figure 1.11** – Un changement cyclique de forme provoque un déplacement rigide d'ensemble dans  $G$ .

la forme locale de la connexion. C'est une fonction des variables de forme  $r$  seulement en vertu de la condition (ii) susmentionnée. De façon générale, une connexion associe de manière univoque un élément de la fibre au-dessus d'un point de la variété de base avec un autre élément de la fibre au-dessus d'un point, de la variété de base, infiniment proche du premier [Coquereaux 2002]. Cet appariement est illustré en figure 1.8 pour le fibré principal et pour l'espace tangent  $M$  en figure 1.9. Ce dernier contexte est bien connu en géométrie Riemannienne, où toute métrique est naturellement associée à une connexion  $\omega$  connue sous le nom de connexion de Levi-Civita, qui permet de transporter parallèlement à lui-même tout vecteur tangent à la variété le long des géodésiques de la métrique [Cartan 1946]. Pour illustrer une telle connexion Riemannienne, nous allons considérer le cas de la 2-sphère  $S^2$  dotée de la métrique Euclidienne induite par  $\mathbb{R}^3$ . Le long de tout segment d'un grand cercle (les grands cercles sont les géodésiques de  $S^2$ ), un vecteur tangent à la sphère peut être transporté parallèlement d'un point à un autre [Arnold 1989]. Enfin, en considérant toute courbe de  $S^2$  comme un ensemble infini de morceaux de géodésiques infinitésimales, le transport parallèle peut alors être défini pour toute courbe de  $S^2$ ,





**Figure 1.12** – Connexion mécanique : cas du chat tombant et du satellite en orbite avec rotors.

en particulier pour les courbes closes commençant et finissant au même point de  $S^2$ . Quand un vecteur est ainsi transporté parallèlement le long d'un chemin clos, après avoir été transporté sur la totalité du chemin, le vecteur se trouve tourné d'un angle  $\theta$  par rapport à son orientation initiale. En vertu du théorème de Gauss-Bonnet [Spivak 1999], cette différence d'orientation est proportionnelle à l'aire de la surface délimitée par le chemin ainsi que la courbure de la sphère (voir figure 1.10). Autrement dit, cette différence d'orientation est une manifestation de la courbure d'une variété et nous avons :

$$\theta = \int_{\text{Chemin}} \omega = \int_{\text{Aire}} d\omega ,$$

qui est un cas particulier du théorème de Stokes où  $d\omega$  est la 2-forme de courbure de la variété Riemannienne. Remarquablement, cette image géométrique s'applique également dans le cas du fibré principal d'un MMS lorsque la fibre est commutative (voir la figure 1.11). Dans ce cas, on peut associer à l'équation (1.2) une courbure de forme 2 nommée  $d\mathcal{A}$  qui lie des chemins clos infiniment petits dans l'espace des formes aux déplacements rigides d'ensemble correspondant dans la fibre [Bloch et al. 2015]. Cette image géométrique est un outil précieux pour la synthèse d'allure en robotique [Bloch et al. 2015; Hatton et Choset 2011] car elle donne une relation directe entre les mouvements cycliques de forme d'une allure et le mouvement d'ensemble qu'elle produit. Nous allons maintenant passer en revue les deux cas en robotique où la dynamique directe de la locomotion pilotée par la forme peut être modélisée dans ce cadre cinématique par une connexion.

### 1.4.1 Cas 1 : Connexion mécanique

Nous allons ici prendre le cas du chat tombant ou du système de réorientation d'un satellite comme présenté en [figure 1.12](#). Il est bien connu qu'un chat, initialement maintenu les pattes en haut va, en effectuant de complexes mouvements de corps (mouvements internes de forme) durant sa chute, pouvoir se réorienter afin d'atterrir sur ses pattes. Le chat résout donc un problème de locomotion sans aucun contact, l'air n'ayant pas d'influence sur son mouvement. À la manière d'un satellite en orbite équipé de volants d'inertie, le chat réalise un transfert de moment cinétique entre ses ddls internes et externes afin de se réorienter. Du point de vue géométrique, l'espace de configuration de ces systèmes (le chat et le satellite) est un fibré principal  $G \times \mathcal{S}$  avec  $\mathcal{S}$  l'espace de forme du squelette du chat, ou un tore tri-dimensionnel dans le cas du satellite complètement actionné<sup>10</sup>, et avec  $G = \text{SO}(3)$  dans les deux cas. Plus précisément, nous prenons le repère flottant comme repère de référence. Un tel repère a ses vecteurs de base attachés au corps de référence (la tête du chat, la caisse du satellite) tandis que son origine est centrée sur le centre de gravité du système. Dans ces conditions, l'orientation de ce repère par rapport à un repère fixé à l'espace est notée  $R \in \text{SO}(3)$ . Appliquons à présent la loi de conservation du moment cinétique sur le fibré  $\text{SO}(3) \times \mathcal{S}$ . Puisque aucune force externe ne s'applique sur le système, celui-ci reste nul pendant tout le mouvement et la locomotion est entièrement régie par la relation suivante :

$$\sigma = \sigma_{\text{rigide}} + \sigma_{\text{forme}} = 0 ,$$

où  $\sigma_{\text{rigide}}$  est le moment cinétique induit par les mouvements du repère flottant (c'est-à-dire les mouvements rigides d'ensemble du repère de référence du MMS), et  $\sigma_{\text{forme}}$  est la contribution au moment cinétique apportée par les mouvements internes de forme. Les théorèmes classiques de la mécanique des corps rigides donnent le moment cinétique comme suit :

$$R^T \sigma = I_{\text{lock}}(r) \Omega + I_r(r) \dot{r} = 0 ,$$

où  $\Omega$  est le vecteur des vitesses angulaires du repère de référence dans sa base mobile,  $I_{\text{lock}}$  est la matrice d'inertie du système rigidifié dans sa forme actuelle  $r$ , nommé aussi *locked inertia matrix* [[Bloch et al. 2015](#)], et  $I_r$  est la matrice d'inertie de couplage entre les accélérations internes et externes. La relation précédente étant invariante gauche (puisque  $I_{\text{lock}}$  et  $I_r$  ne dépendent pas de  $R$ ) et linéaire par rapport aux vitesses, elle définit une connexion de forme locale suivante :

$$\mathcal{A}(r) = I_{\text{lock}}^{-1}(r) I_r(r) . \tag{1.3}$$

---

10. On notera qu'en cas de défaillance des volants d'inertie, des problèmes intéressants d'accessibilité au contrôle se posent.

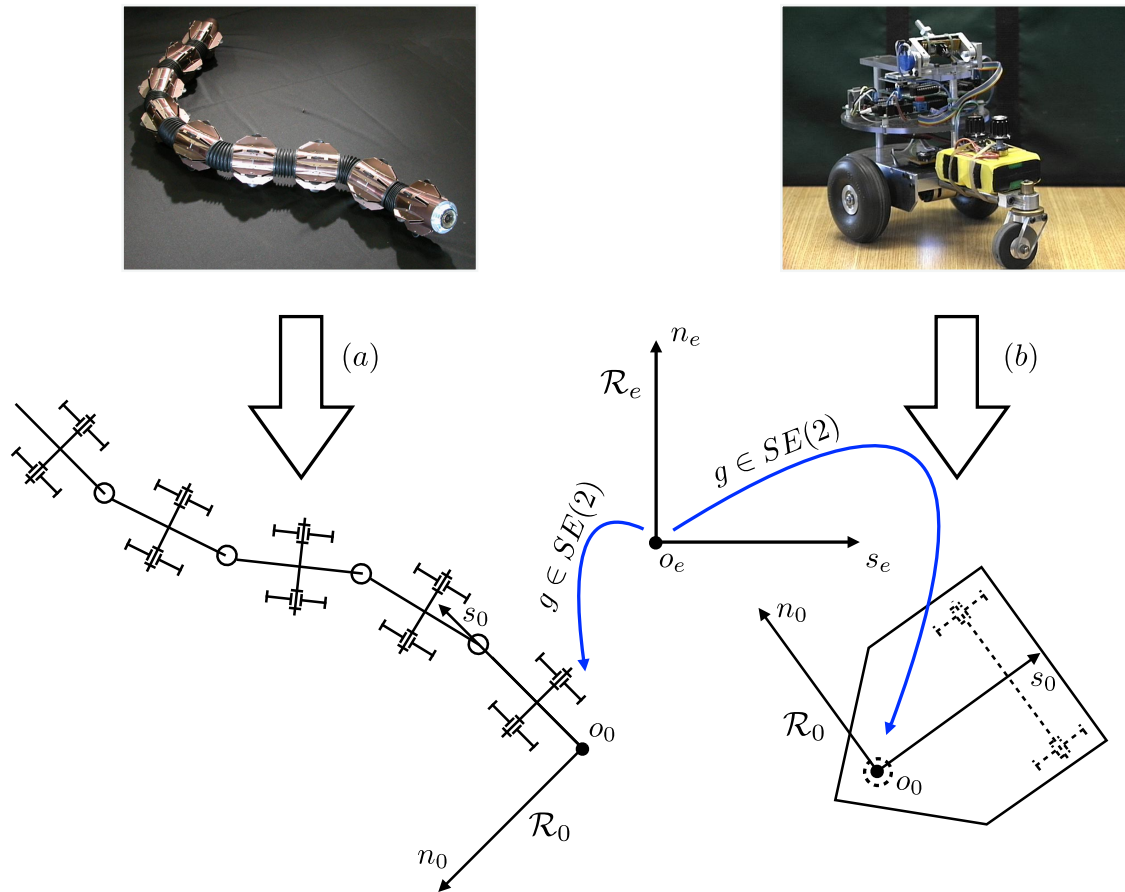
Dans la littérature en mécanique géométrique, une telle connexion est connue sous le nom de *connexion mécanique* [Montgomery 1993]. Elle encode toutes les informations concernant les échanges cinétiques entre les ddls internes et externes. En référence à nos considérations introductives sur la locomotion animale, le mécanisme de locomotion utilisé par le chat s’appuie encore sur le principe d’action-réaction, pour lequel les forces d’inertie (Coriolis et centrifuges) tiennent lieu de forces externes dans le contexte général. Pour en finir avec cet exemple, nous noterons qu’en appliquant les mêmes considérations aux translations du repère flottant, nous obtiendrions, en utilisant le théorème du centre de masse :  $\mathcal{A}(r) = 0$ , puisque aucune force externe ne s’applique sur le système. Ainsi, dans ce deuxième cas, les mouvements de forme internes ne peuvent pas agir sur les mouvements linéaires du repère flottant, ce qui signifie qu’il n’y a pas de « connexion » entre ces mouvements.

### 1.4.2 Cas 2 : Connexion cinématique

Nous considérons à présent les exemples d’un serpent se déplaçant par ondulation latérale et d’une plate-forme non-holonome à roues, tels que ceux présentés en figure 1.13. Le repère de référence est attaché à la tête du serpent dans un cas, et à la plate-forme dans l’autre. Comme ces deux systèmes évoluent dans le plan, le fibré principal de leurs configurations est  $SE(2) \times \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  définit dans le premier cas l’espace des formes du squelette du serpent, et un tore de dimension deux dans le second. Cette fois encore, il existe une connexion entre les mouvements de forme, internes, et les mouvements rigides d’ensemble, externes, de ces deux systèmes [Kelly et Murray 1995; Ostrowski et Burdick 1998; Shamma et al. 2005]. Cette connexion est ici déduite en supposant que les contacts entre le sol et les écailles du serpent, ou les roues de la plate-forme, sont modélisés par des conditions idéales de non-dérapiage et de roulement sans glissement<sup>11</sup>. Pour obtenir l’expression de cette connexion, il faut introduire le mouvement du repère de référence dans les conditions de non-dérapiage et de roulement sans glissement et établir un jeu de trois contraintes non-holonomes indépendantes (une pour chaque dimension de  $G = SE(2)$ ) sur le fibré principal. De cette façon nous obtenons le modèle cinématique de la plate-forme mobile de la forme (1.2) où, une fois encore, la matrice  $\mathcal{A}(r)$ , indépendante de  $g$ , représente la forme locale d’une connexion, nommée *connexion cinématique principale* [Bloch et al. 2015]. Notons que, dans le cas d’un robot serpent tel que l’ACM-R5, cette connexion s’écrit à partir des contraintes latérales de non-dérapiage (les roues étant passives), tandis que dans le cas de la plate-forme mobile, elle s’écrit en utilisant également les contraintes de roulement sans glissement des deux roues. Ces contraintes non-holonomes seront évoquées avec plus de détails dans la prochaine section (section 1.5.2), consacrée à la dynamique des systèmes

---

11. Dans le cas du serpent, la forte anisotropie de frottement de sa peau le long des directions axiale et latérale justifie de telles hypothèses.



**Figure 1.13** – Connexions cinématiques : (a) le robot serpent ACM-R5 de Hirose-Fukushima Robotics Lab. (b) la plate-forme mobile nBot du Geological Science’s Center of Southern Methodist University.

constraints.

## 1.5 La dynamique directe de la locomotion : le cas général

Comme il a été mentionné plus tôt, la dynamique est en général requise pour résoudre le modèle direct de la locomotion pilotée par la forme. En raison de la structure de fibré principal, la dérivation de la dynamique nécessite une attention particulière. La structure de groupe de Lie signifie que le calcul variationnel standard (duquel dérivent les équations de Lagrange) appliqué aux cartes de n’importe quelle variété doit être remplacé par un calcul intrinsèque appliqué directement sur le groupe. Un tel calcul a l’avantage de fournir une formulation de la dynamique présentant un minimum de non-linéarité. En effet, dans une telle approche, toutes les non-linéarités introduites par les mouvements rigides sont dues à la courbure

du groupe (qui peut être intuitivement considéré comme la manifestation géométrique de la non-commutativité du côté algébrique) et non au paramétrage. Euler a exploré cela avant l'émergence des groupes de Lie à partir du cas de la toupie [Arnold 1966]. Cependant, un long moment s'écoula avant que la vision géométrique de l'approche Eulérienne de la dynamique soit complètement élucidée par Poincaré suivi par Chetaev [Chetaev 1927], Rumyantsev [Rumyantsev 1998] et Arnold [Arnold 1966] du côté Russe et par l'école américaine de mécanique géométrique à la suite de Marsden [Marsden et Ratiu 1999]. L'idée de Poincaré fut d'appliquer le principe variationnel de Hamilton à l'action d'un système directement défini en fonction de ses transformations et non en fonction de ses paramètres, ce qui était l'approche adoptée par Lagrange [Boyer et Primault 2005]. Suivant ce point de vue, l'action d'un MMS est définie ici comme :

$$\int_{t_1}^{t_2} L(g, r, \dot{g}, \dot{r}) = \int_{t_1}^{t_2} (T(g, r, \dot{g}, \dot{r}) - U(g, r)) dt , \quad (1.4)$$

où  $L$ ,  $T$  et  $U$  désignent le Lagrangien, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, respectivement, dans le fibré principal des configurations. Puis, postulant le principe d'Hamilton, la trajectoire du système entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  doit satisfaire à la condition de stationnarité dans laquelle  $\forall \delta g$  tel que  $\delta g(t_1) = \delta g(t_2) = 0$  :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(g, r, \dot{g}, \dot{r}) = - \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{\text{ext}} dt ,$$

où  $\delta W_{\text{ext}}$  représente le travail virtuel d'éventuelles forces extérieures non-conservatives exercées par les contacts. Maintenant, en remplaçant les déplacements virtuels et les vitesses de transformations réelles par un torseur cinématique des déplacements virtuels  $\delta \zeta = g^{-1} \delta g$  et les vitesses réelles  $\eta = g^{-1} \dot{g}$ , et en dénotant  $L(g, r, g\eta, \dot{r}) = l(g, r, \eta, \dot{r})$ , nous pouvons ré-établir la condition précédente de sorte que pour tout  $\delta \zeta$  tel que  $\delta \zeta(t_1) = \delta \zeta(t_2) = 0$  :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} l(g, r, \eta, \dot{r}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{\text{ext}} dt , \quad (1.5)$$

où  $\delta W_{\text{ext}} = \delta \zeta^\top f_c$  et  $l(g, r, \eta, \dot{r})$  est nommé Lagrangien réduit à gauche du système, et prend la forme générale suivante :

$$l(g, r, \eta, \dot{r}) = \frac{1}{2} (\eta^\top, \dot{r}^\top) \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} - U(g, r) , \quad (1.6)$$

où  $\mathcal{M}$ ,  $M$  et  $m$  sont des matrices d'inertie indépendantes de  $g$ . Enfin, quand l'énergie potentielle  $U$  est indépendante de  $g$ , le Lagrangien est dit invariant gauche puisque dans un tel cas nous avons :

$$L(g, r, \dot{g}, \dot{r}) = L(hg, r, h\dot{g}, \dot{r}) , \forall h \in G ,$$

et en particulier pour  $h = g^{-1}$ ,  $L(1, r, g^{-1}\dot{g}, \dot{r}) = l(r, \eta, \dot{r})$ . De la même manière, toute force de contact  $f_c$  qui, exprimée dans le repère de référence, ne dépend pas explicitement de  $g$  est dite invariante à gauche. Cette propriété est en fait une propriété de symétrie fréquemment vérifiée par les forces externes exercées sur un MMS. Maintenant, pour finaliser le calcul de (1.5), nous devons exploiter deux propriétés supplémentaires, toutes deux résultantes du fait que la variation  $\delta$  est appliquée tandis que le temps n'évolue pas. Premièrement,  $r$  et  $\dot{r}$  étant considérés comme des entrées dont l'évolution temporelle est connue, nous avons  $\delta r = \delta \dot{r} = 0$ . Deuxièmement, nous avons nécessairement  $\delta(dg/dt) = d(\delta g)/dt$ , ce qui conduit à :

$$\delta \eta = \frac{d\delta \zeta}{dt} + [\eta, \delta \zeta] .$$

Cette relation, qui gouverne la commutation entre variation et dérivation, joue un rôle clef dans le calcul variationnel sur les groupes de Lie. En effet, elle rend possible la poursuite du calcul (1.4) par une classique intégration par partie comme pour le calcul des variations standard attribué à Lagrange [Goldstein et al. 2001]. Enfin, sur la base de ces propriétés, il est possible de montrer que toutes solutions au principe variationnel précédent sont aussi solutions des équations de Poincaré :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \eta} \right) - \text{ad}_{\eta}^T \left( \frac{\partial l}{\partial \eta} \right) = X_g(U) + f_c , \quad (1.7)$$

où  $\text{ad}_{(\cdot)}^T(\cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}^*$  est la co-adjointe de  $G$ , c'est-à-dire le dual de l'adjointe<sup>12</sup> de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{g}$  noté  $\text{ad}_{(\cdot)}(\cdot)$  et défini par  $\text{ad}_{\eta_1}(\eta_2) = [\eta_1, \eta_2]$ ;  $X_g(U)$  modélise les forces externes conservatrices, et  $f_{\text{ext}} = f_c + X_g(U)$ . Notons que  $X_g(U)$  représente les éventuels défauts de symétrie du système Lagrangien dont l'expression est détaillée dans [Boyer et Primault 2005], dans sa forme intrinsèque. Enfin, appliquer (1.7) au Lagrangien réduit précédemment défini donne la dynamique directe de la locomotion :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{F} \\ g\eta \end{pmatrix} , \quad (1.8)$$

où  $\mathcal{M}$  est le tenseur d'inertie verrouillé (la généralisation de  $I_{\text{lock}}$  de l'exemple du chat tombant) car il correspond au tenseur d'inertie du MMS vu comme un corps rigide figé dans sa configuration (forme) actuelle, tandis que, de la même manière,  $\mathcal{F} = f_{\text{ext}} + f_{\text{inertielle}}$  dénote le torseur des actions mécaniques des forces externes et inertielles verrouillées (incluant celles induites par les accélérations internes). La seconde ligne de l'équation précédente (1.8) est l'équation de reconstruction qui permet de reconstruire, grâce à une intégration numérique en temps, la trajectoire du

---

12.  $\mathfrak{g}^*$  dénote l'espace dual de l'algèbre de Lie des torseurs cinématiques matériels. C'est l'espace des torseurs des actions mécaniques matérielles  $f$ . Dans le cas de  $G = \text{SE}(3)$ , chaque  $f$  est un vecteur  $6 \times 1$  regroupant la résultante et le moment des forces exercées sur le corps rigide et exprimé dans son propre repère mobile tandis que  $\text{ad}_{\eta}$  est une matrice  $6 \times 6$  dont l'expression détaillée est donnée dans [Murray et al. 1994].

corps de référence  $t \mapsto g(t)$  à partir de l'évolution temporelle de  $\eta$ , elle-même obtenue par intégration de la première ligne de (1.8). Pour aller plus avant dans la dynamique Lagrangienne, le point dur réside désormais au niveau du modèle des forces externes, dont le calcul requiert de résoudre la dynamique des contacts physiques existants entre le système et son environnement. Cela peut être particulièrement difficile, car elles sont typiquement régies par les propriétés :

- du sol (dynamique non régulière, tribologie, etc).
- du fluide (impliquant les équations de Navier-Stokes).
- d'environnement plus exotique tel que les matériaux granulaires (rhéologie).

Par exemple, dans le cas de la nage, le calcul de  $f_{\text{ext}}$  requiert de résoudre la dynamique du fluide à chaque pas de temps de la boucle d'intégration. Évidemment, un tel calcul est incompatible avec les contraintes de temps réel imposées par les applications robotiques. Aussi, l'art de la modélisation physique consiste à résoudre ce problème au cas par cas. Cependant, deux sous-cas n'exigent que la géométrie (et pas de physique) pour résoudre le modèle de locomotion. Ces cas géométriques apparaissent quand  $f_{\text{ext}}$  est invariant gauche et Lagrangien [Birkhoff 1950] ou quand  $f_{\text{ext}}$  est généré par un ensemble de multiplicateurs de Lagrange forçant les contraintes, c'est-à-dire quand les contacts peuvent être modélisés par des contraintes cinématiques idéales. Nous allons maintenant développer brièvement ces deux sous-cas et voir comment ils sont liés à la locomotion cinématique précédemment introduite mais dans un sens plus large que celui abordé précédemment dans la [section 1.4](#).

### 1.5.1 Cas 1 : Lorsque les efforts extérieurs dérivent d'un Lagrangien (invariant gauche)

Ce cas a été introduit par Birkhoff dans [Birkhoff 1950] et traduit le fait qu'il existe une fonction Lagrangienne telle que :

$$F_{\text{ext}} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l_{\text{ext}}}{\partial \eta} \right) + \text{ad}_{\eta}^{\top} \left( \frac{\partial l_{\text{ext}}}{\partial \eta} \right) ,$$

de sorte que le modèle dynamique de la locomotion puisse être réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(l + l_{\text{ext}})}{\partial \eta} \right) - \text{ad}_{\eta}^{\top} \left( \frac{\partial(l + l_{\text{ext}})}{\partial \eta} \right) = 0 .$$

De plus, si initialement, le système est au repos, c'est-à-dire, si nous sommes dans la situation suivante  $t = 0$  :  $\partial(l + l_{\text{ext}})/\partial \eta = 0$ , alors :

$$\frac{\partial(l + l_{\text{ext}})}{\partial \eta} = 0 , \forall t > 0 . \tag{1.9}$$

Par exemple, dans le cas de la nage 3D à haut nombre de Reynolds, si un MMS est immergé dans un fluide idéal (c'est-à-dire un fluide non compressible, non visqueux)

avec un écoulement irrotationnel, initialement au repos, les forces hydrodynamiques exercées sur le système découlent d'un Lagrangien qui s'identifie à l'énergie cinétique ajoutée<sup>13</sup> de l'écoulement potentiel correspondant [Lamb 1932] :

$$l_{\text{ext}}(g, r, \eta, \dot{r}) = \frac{1}{2} (\eta^\top, \dot{r}^\top) \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\text{add}} & M_{\text{add}}^\top \\ M_{\text{add}} & \mathbf{m}_{\text{add}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} .$$

Ceci implique, en utilisant (1.9) avec  $l$  ayant la forme de (1.6) et avec  $U = 0$ , la conservation de l'énergie cinétique :

$$\widetilde{\mathcal{M}}\dot{\eta} + \widetilde{M}\dot{r} = 0 , \quad (1.10)$$

où  $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \mathcal{M}_{\text{add}}$  et  $\widetilde{M} = M + M_{\text{add}}$ . Nous retrouvons alors une structure similaire à celle du chat tombant (section 1.4.1), c'est-à-dire un modèle cinématique de la forme (1.2), avec  $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{M}}^{-1}\widetilde{M}$ . Cette connexion est parfois nommée *connexion hydrodynamique* car elle encode les échanges des quantités cinétiques entre le corps et le fluide environnant [Kelly et Murray 1996; Marsden 1992; Kanso et al. 2005; Melli et al. 2006].

**Remarque 1.4 :**

Puisque dans (1.10)  $\eta \in \text{se}(3)$  et que les matrices masse ne sont pas creuses, la connexion hydrodynamique, contrairement à la connexion mécanique du chat tombant ou du satellite en orbite, peut changer à la fois la position et l'orientation du système. En conséquence, ce modèle simple peut expliquer comment, à haut nombre de Reynolds, un MMS peut nager dans un fluide initialement au repos.

**Remarque 1.5 :**

La nage à faible nombre de Reynolds peut aussi être modélisée en utilisant une connexion appelée connexion de Stokes [Hatton et al. 2011]. Ce contexte a même été la première application de la théorie de jauge et de la structure de fibré principal à un cas de locomotion animale par Shapere et Wilczek [Shapere et Wilczek 1989]. L'intuition suggère que dans ce cas les forces d'inertie exercées sur le corps par le fluide sont négligeables comparées aux forces visqueuses. Ainsi, la résultante des forces visqueuses, qui sont essentiellement proportionnelles au champ de vitesse le long du corps, est nulle. Lorsqu'elles sont exprimées dans le fibré principal des configurations, ces vitesses sont linéaires par rapport à  $\dot{r}$  et  $\eta$ , conduisant ainsi à la connexion de Stokes.

**Remarque 1.6 :**

Le théorème de la coquille Saint-Jacques stipule que tout animal n'ayant qu'un seul degré de liberté interne ne peut pas se déplacer dans un fluide idéal initialement au repos [Purcell 1977]. En ouvrant sa coquille, un tel coquillage perdrait le déplacement rigide d'ensemble qu'il avait gagné en se refermant, ce qui entraîne-

13. Le terme « ajoutée » signifie que l'énergie cinétique correspond celle de la masse de fluide accélérée par le corps, de sorte qu'elle puisse simplement être ajoutée à celle du corps.



rait un mouvement rigide d'ensemble nul après un cycle complet. La modélisation de ce mode de locomotion à l'aide de la *connexion hydrodynamique* permet une interprétation géométrique directe de ce résultat. En se remémorant le théorème de Gauss-Bonnet exposé en [section 1.4](#), on s'aperçoit qu'un chemin fermé sur une variété  $\mathcal{S}$  de dimension 1 enfermerait une surface d'aire nulle, résultant en un déplacement rigide d'ensemble nul en fin de cycle.

**Remarque 1.7 :**

Dans un fluide visqueux réel, les détachements tourbillonnaires en aval du bord de fuite de la coquille génèrent des variations de quantité cinétique dans le fluide. En effet, la loi de conservation du moment cinétique appliquée à l'ensemble (corps + fluide) peut être étendue au cas des écoulements rotationnels en ajoutant la contribution de la vorticité à l'équilibre des quantités cinétiques (1.10) [Kanso 2009]. Dans ce cas, l'équilibre des quantités cinétiques appliquées au système (corps + fluide) prend la forme de la somme des torseurs cinétiques (quantités de mouvement et moments cinétiques regroupés dans un vecteur noté  $w \in \mathbb{R}^6$ ) :

$$\begin{pmatrix} p_{\text{forme}} \\ \sigma_{\text{forme}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{\text{rigide}} \\ \sigma_{\text{rigide}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_v \\ \sigma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

où les deux premiers termes sont ceux impliqués dans le contexte d'un écoulement potentiel mais exprimés dans le repère fixe, c'est-à-dire  $\text{Ad}_g^\top(\widetilde{\mathcal{M}}\eta + \widetilde{M}\dot{r}) = w_{\text{forme}} + w_{\text{rigide}}$ , alors que le troisième terme définit la contribution de la vorticité à l'équation d'équilibre des quantités cinétiques :

$$\begin{pmatrix} p_v \\ \sigma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\partial B} x \times (n \times u_\omega) da + \frac{1}{2} \int_F x \times \omega dv \\ -\frac{1}{2} \int_{\partial B} x^2 (n \times u_\omega) da - \frac{1}{2} \int_F x^2 \omega dv \end{pmatrix},$$

avec  $\times$  le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\omega$  le champ de vorticité,  $u_\omega$  la vitesse du fluide induite (par une relation de type Helmholtz) par le champ de vorticité, et  $x$  le vecteur position dans le repère fixe. Dans la nature, la plupart des animaux volants ou nageants ne font pas que produire de la vorticité, ils la contrôlent afin de produire une poussée, de la portance ou contrôler leur direction d'avance. Mathématiquement, ils utilisent le premier terme de (1.11) pour générer et contrôler<sup>14</sup> le troisième terme de (1.11) et ainsi contrôler leurs mouvements rigides d'ensemble au travers du second terme. Pour illustrer ce principe, considérons le poisson présenté en [figure 1.14](#). Lorsqu'il tourne, le poisson tord tout d'abord son corps, modifiant ainsi  $w_{\text{forme}}$ . Cela crée une structure tourbillonnante autour de lui, nommé *proto vortex* [Müller et al. 1997, 2001]. En se d  pla  nt, le *proto vortex* glisse le long du corps du poisson avant d'atteindre le bord de fuite de sa nageoire caudale, où il devient un véritable tourbillon qui se perd dans le sillage (modélisé par  $w_v$ ). Après que le tourbillon eut été lâ  ch   dans le sillage, l'apparition d'un terme tourbillonnaire supplémentaire dans la loi de conservation modifie la

composante  $w_{\text{rigide}}$  et provoque ainsi la rotation du poisson. Plus généralement, les animaux produisent de la vorticité pour générer une portance utilisée pour la sustentation ou la poussée pour lutter contre la traînée et la gravité. Pour se convaincre de la relation entre vorticité et portance, il suffit de se rappeler l’image basique de l’aérodynamique d’une aile d’avion, dite de Kutta où un tourbillon de départ lâ  ch   derrière une aile rigide génère une circulation autour de celle-ci, et finalement une portance proportionnelle à celle-ci. Plus récemment, les biologistes et les hydrodynamiciens ont découvert que les animaux peuvent interagir avec la vorticité environnante pour préserver l’énergie utile à leur locomotion. C’est le cas d’un poisson qui interagit avec son propre sillage afin d’en extraire l’énergie qui serait gaspillée autrement [Triantafyllou et al. 2000], ou d’un papillon sphinx en vol stationnaire qui récupère un vortex à chaque battement d’aile [Dickinson et al. 1999]. Plus remarquablement, un poisson mort placé dans une allée de vortex de K  rman peut nager à contre-courant sans consommer la moindre énergie, c’est-à-dire de manière purement passive en extrayant l’énergie des tourbillons qui l’environnent [Beal et al. 2006] comme illustré en figure 1.14.

### 1.5.2 Cas 2 : Lorsque les forces externes sont des multiplicateurs de Lagrange d’un ensemble de contraintes cinématiques

Nous considérons ici le cas où les contacts entre le système et son environnement (typiquement le sol) peuvent être modélisés par des contraintes cinématiques idéales. En pratique, ces contraintes sont déduites en forçant à zéro la vitesse des points matériels du système en contact avec le sol. Selon la mécanique Lagrangienne, ces contraintes sont imposées par des multiplicateurs de Lagrange qui sont les vecteurs duals des vitesses forc  es    zéro [Goldstein et al. 2001]. Dans notre contexte, ces multiplicateurs de Lagrange représentent physiquement les forces de réaction externes transmises au système au travers des points de contact<sup>15</sup>. Cette sous-classe de modèle joue un rôle primordial dans la locomotion terrestre des robots marcheurs ou serpents. En effet, dans ces cas, les contraintes cinématiques imposées par les contacts peuvent être exprimées sur le fibré principal des configurations sous la forme générale [Boyer et Ali 2011] :

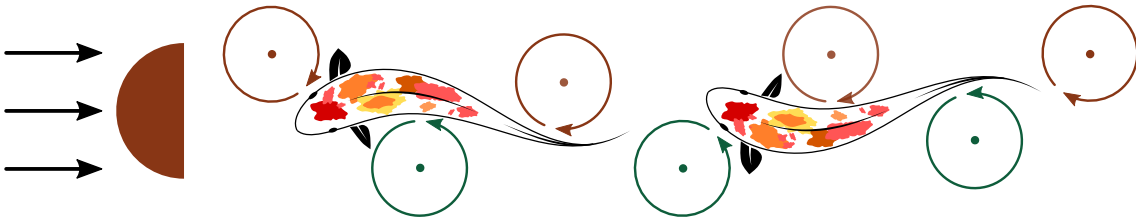
$$0_m = A(r)\eta + B(r)\dot{r} , \quad (1.12)$$

14. Il convient de noter ici que si (1.11) peut modéliser les transferts de quantité cinétique entre le corps et la vorticité dans l’environnement, elle ne peut expliquer la génération de tourbillons en elle-même, ce qui nécessite un modèle des couches limites où la vorticité est produite.

15. Ceci s’applique également aux vitesses angulaires pour lesquelles les multiplicateurs de Lagrange sont des couples de réaction externes.



(A) Un poisson tourne en contrôlant la vorticité.



(B) Un poisson nageant passivement en aval d'un obstacle en forme de demi cercle.

**Figure 1.14** – Illustration de la nage du poisson. Les tourbillons sont dessinés sous forme de points entourés de cercles orientés.

où, si on note  $n = \dim(G)$ , et  $m$  le nombre de contraintes indépendantes imposées par les contacts,  $A$  et  $B$  sont respectivement des matrices  $m \times n$  et  $m \times p$ , et  $0_m$  un vecteur de  $m \times 1$  zéros. Dans ce système de contraintes, nous rencontrons deux cas qui dépendent des valeurs relatives de  $\text{rang}(A)$  et  $n$ . Dans le premier cas,  $\text{rang}(A) = n$  et (1.12) peut être partitionné en blocs de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 0_{(m-n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \tilde{A} \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} \bar{B} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \dot{r}, \quad (1.13)$$

avec  $\bar{A}$  une matrice inversible carrée  $n \times n$ . Dans ce cas, la matrice  $\bar{A}$  étant inversible,  $\eta$  est complètement défini par l'évolution temporelle  $r(t)$  à travers le modèle cinématique  $\eta = -\mathcal{A}\dot{r}$ , où  $\mathcal{A} = \bar{A}^{-1}\bar{B}$  définit la forme locale d'une connexion (cinématique) sur le fibré principal des configurations. De plus, si  $m = n$ , alors le système mobile multi-corps peut toujours bouger ; tandis que si  $m > n$ , les  $m - n$  équations résiduelles de (1.13) peuvent être utilisées pour trouver les vitesses articulaires  $\dot{r}$  qui préservent la mobilité du système global, c'est-à-dire vérifiant l'équation de compatibilité suivante :  $(\bar{B} - \tilde{A}\mathcal{A})(r)\dot{r} = 0$ , qui n'admet des solutions non triviales ( $\dot{r} \neq 0$ ) que si le mouvement est possible. Enfin, dans ce premier cas, il existe suffisamment de contraintes indépendantes pour permettre de résoudre le problème de la dynamique par un modèle cinématique. Dans le second cas, en revanche, nous avons

$\text{rang}(A) < n$ , et le mécanisme a des contraintes en nombre insuffisant pour pouvoir définir les mouvements rigides d'ensemble uniquement en utilisant la cinématique. Dans ce cas, une analyse plus poussée donc est nécessaire. À cet égard, l'application de l'inversion généralisée à (1.12) permet d'énoncer :

$$\eta = H(r)\eta_r + J(r)\dot{r} , \quad (1.14)$$

où, si on définit  $A^{(-1)}$  comme l'inverse généralisée de  $A$ ,  $J = -A^{(-1)}B$ , et  $H$  est une matrice  $n \times (n - m)$  dont les colonnes génèrent le noyau de  $A$ , c'est-à-dire le noyau des contraintes verrouillées. Par conséquent,  $\eta_r$  définit le vecteur  $(6 + n - m) \times 1$  nommé torseur cinématique réduit. Il définit les vitesses compatibles avec les contraintes. Maintenant, en projetant la dynamique non contrainte (1.8) sur le noyau des contraintes verrouillées, nous obtenons la dynamique réduite du système :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_r^{-1} \mathcal{F}_r \\ g(H\eta_r + J\dot{r}) \end{pmatrix} , \quad (1.15)$$

qui gouverne l'évolution temporelle de  $\eta_r$ , où  $\mathcal{M}_r = H^\top \mathcal{M} H$  et  $\mathcal{F}_r = H^\top (\mathcal{F} - \mathcal{M}(\dot{H}\eta_r + \dot{J}\dot{r} + J\ddot{r}))$ .

**Remarque 1.8 :**

Quand  $J = 0$  et  $H = 1$ , nous retrouvons le cas non-contraint (cas décrit en [section 1.4.1](#)), tandis que quand  $H = 0$ , le modèle cinématique général (1.14) dégénère en un modèle cinématique (cas décrit en [section 1.4.2](#)) avec la connexion cinématique  $J = \mathcal{A}$ . De ce point de vue, les cas cinématique ([section 1.4.2](#)) et dynamique ([section 1.4.1](#)) sont les deux cas extrêmes d'un même contexte, où le nombre des contraintes induites par les contacts sur la fibre est respectivement maximum et minimum. En effet, dans le premier cas, le nombre de contraintes indépendantes est égal à la dimension de la fibre, tandis que dans le second, le nombre de contraintes indépendantes est nul car les contacts n'introduisent aucune contrainte <sup>16</sup>.

**Remarque 1.9 :**

Il est, à présent, aisé d'imaginer des MMSs qui appartiennent à un cas intermédiaire où le système est contraint par un nombre de contraintes n'excédant pas la dimension de la fibre. Un cas particulier de tels systèmes, pertinent pour la robotique ainsi que pour la biomécanique du sport, est celui où le système locomoteur est gouverné en partie par des échanges cinétiques entre ddls internes et externes mais également par la cinématique des contacts. Le cas de MMSs gouvernés par de telles équations comprend tous les systèmes dont le principe de locomotion repose sur le transfert de moment cinétique des ddls internes vers ceux externes via les contraintes non-holonomes, tel que le snakeboard, le trikke (voir la [figure 1.15](#)), un skieur glissant le long d'une pente raide ou un patineur effectuant une

16. Cela ne signifie pas que le MMS ne subit aucun contact. Ceux-ci, s'ils existent, sont en réalité modélisés par des efforts gouvernés par la physique du contact tels que des forces de Coulomb.

chorégraphie. Dans ce dernier cas, le patineur utilise une connexion mécanique quand il saute et une version contrainte de celle-ci lorsqu'il est en contact avec la glace. Ces derniers exemples montrent pourquoi dans les théories de la locomotion Lagrangienne de Marsden, le torseur cinématique réduit  $\eta_r$  est remplacé par un moment cinétique réduit  $p = \frac{\partial l}{\partial \eta_r}$ , avec  $l$  le Lagrangien réduit (1.6), tandis que l'équation de reconstruction est, elle, remplacée par une équation de connexion [Ostrowski 1999].

**Remarque 1.10 :**

Les robots serpents à roues tels que le robot ACM-R5 font partie de la classe des systèmes sur-contraints. Dans leurs cas, la locomotion est entièrement gouvernée par une connexion cinématique  $\mathcal{A} = \bar{A}^{-1}\bar{B}$ . De plus, construire  $\bar{A}$  à partir des trois premières contraintes des trois premiers corps définit le mouvement rigide d'ensemble à partir du mouvement des trois premières liaisons. Pour les autres liaisons, l'intégration des équations de compatibilité résiduelle permet d'obtenir le mouvement de leader/suiveur observé dans le mouvement d'ondulation latérale des serpents, où chaque section du corps suit le chemin tracé par la tête du serpent [Ostrowski 1999].

**Remarque 1.11 :**

Un unique système peut présenter plusieurs cas différents lorsque sa configuration change. Par exemple, dans certaines configurations singulières,  $\text{rang}(A)$  peut diminuer, entraînant un changement brutal d'un cas où les mouvements rigides d'ensemble sont entièrement définis par la cinématique à un autre où la dynamique est requise. Ce cas se présente, en particulier, pour le robot serpent ACM-R5 lorsqu'il présente une courbure constante de son corps (globalement). Les robots marcheurs, quant à eux, présentent tous les cas et sous-cas mentionnés, y compris le cas non contraint (phase de vol), le cas entièrement contraint (phase de support unique), le cas sur-contraint (phase de double support) et même le cas sous-contraint (dans les cas plus exotiques comme la danse sur les points ou en utilisant les modèles dégénérés du pied) [Grizzle et al. 2010].

**Remarque 1.12 :**

Dans [Boyer et Belkhir 2014], le contexte précédent a été étendu aux systèmes ayant des degrés de liberté internes passifs tels que ceux introduits par les roues passives et les organes compliants dont les déformations sont décrites dans l'approche cadre flottant de la dynamique des systèmes multi-corps flexibles [Cana-  
vin et Likins 1977]. Dans de tels cas, les vitesses internes passives sont ajoutées à celles externes dans (1.14) et (1.15), tandis que le noyau des vitesses admissibles contient maintenant des mouvements internes (de forme) dont l'évolution nécessite un modèle dynamique.



(A) Le trikke.



(B) Le snakeboard.

**Figure 1.15** – Systèmes non-holonomes sous-contraints.**Remarque 1.13 :**

Revenant à notre problème dynamique de départ, il est important de noter que le calcul des mouvements rigides d'ensemble à partir des mouvements internes de forme ne signifie pas que ces mouvements soient réalisables. En fait, les actionneurs doivent être capables de fournir les couples internes désirés pour assurer la faisabilité de ces mouvements. Dans la même veine, dans le cas de contraintes unilatérales, comme dans le cas de la locomotion à pattes ou de l'ondulation latérale des serpents dans les arbres, les contraintes bilatérales de (1.12) doivent être activées ou désactivées selon le signe des forces de réaction qu'elles transmettent. Ce dernier point sera évoqué en [section 1.6](#) et traité en détail dans le [chapitre 3](#) puis appliqué au cas de la bicyclette soumise à des contacts intermittents au [chapitre 4](#).

**Remarque 1.14 :**

Un contact est sans impact lorsque la contrainte cinématique qu'il introduit est satisfaite juste avant que le contact ne se produise (c'est le cas d'un serpent changeant doucement ses appuis lors de ses ondulations latérales). Dans ce cas, le contexte précédent, qui relève du domaine de la dynamique régulière, est valide. Cependant, lorsque la contrainte n'est pas satisfaite avant que le contact ne se produise, comme dans le cas de la locomotion à pattes, elle génère un impact qui peut être modélisé en changeant l'équilibre dynamique des forces du système (1.8) en un équilibre des moments cinétiques utilisant le concept d'impulsion et de coefficients de restitution, ou encore en utilisant un modèle régularisé des forces de contact, fonction des déformations entre les jambes et le sol [[Chevallereau et al. 2009](#)].

Ces deux dernières remarques ([remarque 1.13](#) et [remarque 1.14](#)) sont la motivation de cette thèse, dans laquelle nous allons étendre le cadre géométrique aux cas des systèmes non-holonomes soumis à des contacts intermittents. Nous commen-

cerons d'ailleurs, dans le présent chapitre (section 1.7), par une illustration de ces outils dans le cas d'un système holonome : le ROCR.

## 1.6 La dynamique inverse en couple

Nous discuterons ici du second modèle, c'est-à-dire du modèle dynamique inverse en couple de la section 1.3, qui calcule les couples internes du système locomoteur. Comme  $(g, \eta, \dot{\eta})$  peut être calculé à chaque instant à partir de la résolution de la dynamique directe de la locomotion, nous sommes potentiellement capables de reconstruire les couples internes requis à chaque instant du mouvement. Pour ce faire, nous reconsidérons le Lagrangien (1.6) auquel nous appliquons les équations de Poincaré au groupe de Lie  $G \times \mathbb{R}^n$ , où  $\mathbb{R}^n$  est un système de coordonnées sur  $\mathcal{S}$ . Ceci donne la dynamique suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ Q + \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{\text{ext}} \\ Q_{\text{ext}} \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

où nous reconnaissons dans la première ligne (ligne supérieure) la dynamique externe avec  $r$  maintenant gouverné par la deuxième ligne (ligne inférieure) de (1.16) (c'est-à-dire, la dynamique interne de forme), à partir de laquelle nous pouvons extraire l'expression des couples moteurs :

$$\tau = M(\mathcal{M}^{-1}\mathcal{F}) + m\ddot{r} - Q - Q_{\text{ext}}, \quad (1.17)$$

où nous avons utilisé l'expression des accélérations rigides d'ensemble donnée par (1.8). En particulier, dans le cas contraint où les forces externes sont produites par des multiplicateurs de Lagrange, on a  $f_{\text{ext}} = A^\top \lambda$  et  $Q_{\text{ext}} = B^\top \lambda$ , avec  $\lambda$  l'ensemble des forces de réaction forçant les contraintes (1.12). En conséquence, une inversion généralisée de la première ligne de (1.16) donne :

$$\lambda = (A^\top)^{(-1)} h(r, \dot{r}, \ddot{r}) + \lambda_{\text{stat}} = \lambda_{\text{kin}} + \lambda_{\text{stat}}, \quad (1.18)$$

avec  $h = \mathcal{M}\dot{\eta} - f + M^\top \ddot{r}$  et  $\dot{\eta}$  donné par la différentiation temporelle de (1.14) et où  $\lambda_{\text{kin}}$  et  $\lambda_{\text{stat}}$  sont les forces de réaction dues aux effets cinématiques et statiques, respectivement. En réinjectant (1.18) dans la deuxième ligne de (1.16), on obtient alors :

$$\tau = M\dot{\eta} + m\ddot{r} - Q - B^\top(\lambda_{\text{kin}} + \lambda_{\text{stat}}) = \tau_{\text{kin}} + \tau_{\text{stat}}, \quad (1.19)$$

où  $\tau_{\text{kin}}$  est la composante cinématique du couple total entièrement explicable par le mouvement, alors que  $\tau_{\text{stat}} = -B^\top \lambda_{\text{stat}}$  (avec  $\lambda_{\text{stat}} \in \ker(A^\top)$ ) correspond à des chargements statiques, qui ne produisent aucun mouvement rigide d'ensemble observable. En effet, ils génèrent les contraintes internes subies par le robot du fait de l'hyperstatisme des contacts. Ces contraintes internes sont disponibles en tant que

ddls de locomotion supplémentaires et peuvent être modulées pour améliorer des critères supplémentaires tels que l'adhérence. En référence à la [remarque 1.13](#) de la [section 1.5.1](#), ces contraintes internes peuvent être choisies pour rendre le mouvement dynamiquement réalisable. Par exemple, lorsque les contacts sont unilatéraux, comme dans le cas de l'ondulation latérale du serpent, celui-ci peut jouer avec son  $\lambda_{\text{stat}}$  afin de préserver le signe de chaque composante de  $\lambda$ , faute de quoi il doit changer ses supports afin de supprimer les contraintes correspondantes de (1.12). Dans [\[Boyer et Belkhiri 2014\]](#), les dynamiques internes inverses (1.19) ont été étendues au cas de systèmes contenant des degrés de liberté internes passifs.

## 1.7 Application de la méthode générale à un robot grimpeur bio-inspiré : le ROCR

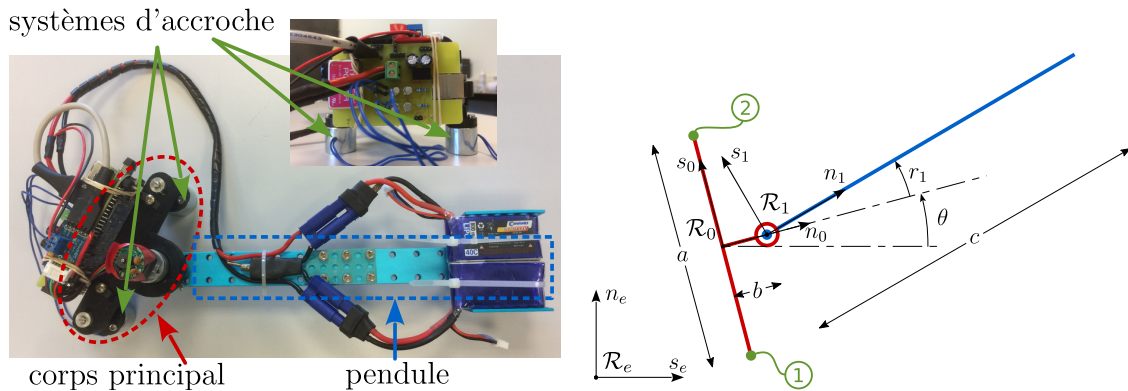
Dans la suite de cette thèse, nous allons étendre le cadre géométrique précédent au cas des systèmes non-holonomes avec contacts intermittents. Pour introduire cette généralisation nous commencerons par illustrer ces outils avec un système holonome très simple : le ROCR. Le système sélectionné est un robot grimpeur dont la locomotion est inspirée de celle employée par les grands singes arboricoles, tels que les gibbons ou les orangs-outangs, pour se déplacer dans la canopée : la brachiation. Conçu par le département d'ingénierie mécanique de l'université de l'Utah [\[Jensen-Segal et al. 2008; Provancher et al. 2011\]](#), il porte le nom de ROCR qui est un acronyme récursif signifiant : « ROCR is an Oscillating Climbing Robot ». Ce robot pendulaire, présenté de manière schématique en [figure 1.16](#), est uniquement composé de deux corps : un corps principal, équipé de deux systèmes d'accroche, et une queue pendulaire. Ces deux corps sont liés entre eux par une unique liaison pivot motorisée. Afin de gravir des surfaces verticales, le robot alterne son point d'accroche au rythme des oscillations de son pendule (voir [figures 1.19](#)). Cette stratégie d'escalade, à la fois simple et efficace [\[Jensen-Segal et al. 2008; Provancher et al. 2011\]](#), fait de ce robot une solution de principe idéale pour l'inspection et la surveillance autonome de grandes surfaces telles que les vitres d'un buildings ou les parois d'un tanker. La première version du ROCR fut conçue avec un système d'accroche magnétique commandable [\[Jensen-Segal et al. 2008\]](#) lui permettant d'évoluer sur des surfaces métalliques tout en choisissant les instants de commutation des points d'accroche. La seconde version [\[Provancher et al. 2011\]](#) est, quant à elle, munie de griffes lui permettant d'escalader uniquement des surfaces présentant des aspérités ou des surfaces textiles. Il n'est ainsi pas possible de contrôler les instants de commutation de ces points d'accroche. Par conséquent, cette version du robot est uniquement capable de grimper. Pour notre part, nous avons modélisé la première version du robot et établi une loi de commande. Puis, nous avons mené une étude de l'impact de sa morphologie sur la stabilité de ses deux familles d'allures (pendule droit et



pendule inversé). Ces résultats ont fait l'objet d'une contribution dans la publication [Chevallereau et al. 2017].

### 1.7.1 Paramétrage du ROCR

Afin de modéliser un tel système, nous commencerons par le paramétrer tel que présenté en figure 1.16. Tout d'abord nous lions à la surface verticale un repère  $\mathcal{R}_e$  tel que  $a_e$  soit la normale à la surface et que  $n_e$  soit de même direction mais de sens opposé à la gravité. Le corps principal est choisi comme corps de référence  $\mathcal{B}_0$  auquel nous lions le repère de référence (direct)  $\mathcal{R}_0$ . Le centre  $O_0$  de ce repère se situe au centre du segment défini par les deux points d'accroche.  $n_0$  est porté par ce segment et  $a_0$  est choisi de telle sorte qu'il soit normal et sortant à la paroi. Le repère direct  $\mathcal{R}_1$  est lié, quant à lui, au pendule. Son centre  $O_1$  coïncide avec le centre de la liaison liant le pendule au corps principal et  $a_1$  porte l'axe de celle-ci et est de même sens que  $a_0$ . L'axe  $s_1$  coïncide, quant à lui, avec la tige du pendule. La masse du corps principal est notée  $m_0$  et celle du pendule,  $m_1$ . Les moments d'inertie du corps principal et du pendule sont notés  $J_0$  et  $J_1$ , respectivement. De la même manière, leurs premiers moments d'inertie seront notés  $MS_0$  et  $MS_1$ . L'espace des configurations de ce système est, comme pour la plate-forme mobile de la section 1.4.2,  $\mathcal{C} = \text{SE}(2) \times \mathcal{S}$  où  $\text{SE}(2)$  est le groupe structural (la fibre) et  $\mathcal{S} = \text{S}^1$  la variété de base. À chaque instant  $t$ , la configuration du système est entièrement définie par



(A) Prototype de ROCR conçu par nos soins. (B) Représentation schématique du ROCR.

**Figure 1.16** – Paramètres du ROCR. Le repère de référence  $\mathcal{R}_0$  est lié au corps de référence (en rouge) tandis que le repère  $\mathcal{R}_1$  est lié au pendule (en bleu). Les systèmes d'accroche (en vert) sont vus comme des masses ponctuelles ajoutées au corps de référence.

$(g, r)$  où  $g$  est une transformation homogène de  $\mathbb{R}^2$  :

$$g = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui définit la position  $(x, y)$  et l'orientation  $\theta$  de  $\mathcal{R}_0$  dans  $\mathcal{R}_e$  et où  $r = r_1 \in \mathcal{S}$  est la variable articulaire de l'unique liaison mesurée autour de  $a_1$ . Avec un tel paramétrage, les vitesses du corps rigide exprimées dans le repère mobile  $\mathcal{R}_0$ , s'expriment comme suit (1.1) :

$$g^{-1}\dot{g} = \begin{pmatrix} \Omega & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}.$$

avec  $V = (V_x, V_y)^\top$  et  $\Omega = \Omega_z$  les vitesses linéaires et angulaires du corps de référence  $\mathcal{B}_0$  par rapport à  $\mathcal{R}_e$ , exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_0$  qui lui est attaché.

### 1.7.2 Modélisation

Nous cherchons à établir la dynamique externe pilotée par la forme (1.8) ainsi que la dynamique interne inverse des couples (1.17) d'un système holonome, le ROCR, soumis à des contacts intermittents. En général, les systèmes holonomes, tels que le ROCR, dont la configuration des contacts change au cours du temps, sont modélisés par reparamétrage complet du système<sup>17</sup>. Un tel reparamétrage nécessite d'écrire pour chaque configuration de contact un modèle dynamique dédié. L'approche présentée dans ce chapitre et exploitée tout au long de cette thèse permet d'éviter un tel reparamétrage. Pour ce faire, les mouvements sont décrits non pas par des paramètres de configuration (coordonnées généralisées) mais par des vitesses et par un unique corps de référence. Dans le cas du ROCR, nous commençons par exprimer la dynamique directe libre du ROCR sous la forme (1.16), rappelée ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ Q + \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{\text{ext}} \\ Q_{\text{ext}} \end{pmatrix}.$$

Puis nous établissons les contraintes qui s'appliquent au ROCR lorsque celui-ci est fixé à la paroi par l'un puis l'autre de ses points d'accroche. Ensuite nous procédons à la réduction du modèle de la dynamique libre par projection dans les sous-espaces des vitesses admissibles engendrés par le noyau des contraintes. La réduction permet de tenir compte des contraintes holonomes dues aux contacts sans nécessiter un paramétrage différent par point d'accroche. Enfin, lors du changement de point

---

17. Dans ces approches, le changement de configuration de contact entraîne un reparamétrage, mais également un changement des indices des corps pour respecter la numérotation croissante des corps composant la structure arborescente du système, le premier corps étant celui où le contact a lieu.

d'accroche, de brusques changements peuvent se produire et seront, ici, modélisés par un modèle de l'impact que nous qualifierons de *complet*, en opposition à un second, présenté au [chapitre 3](#) tirant profit de la réduction projective et qualifié de *réduit*.

Pour obtenir un tel modèle, nous commencerons par calculer l'énergie cinétique sur  $SE(2) \times \mathbb{R}$  réduite dans son algèbre de Lie :

$$\begin{aligned} T(\eta, \dot{r}, r) = & \frac{1}{2}(m_0 V_x^2 + m_0 V_y^2 + J_0 \Omega_z^2) + MS_0 V_y \Omega_z \\ & + \frac{1}{2}(m_1 V_x^2 + m_1 (V_y + b \Omega_z)^2 + J_1 (\Omega_z + \dot{r}_1)^2) \\ & + MS_1 (\Omega_z + \dot{r}_1) ((V_y + b \Omega_z) \cos(r_1) - V_x \sin(r_1)) , \end{aligned}$$

ainsi que l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} U(g, r) = & -\gamma_0 m_0 (\sin(\theta)x + \cos(\theta)y) - \gamma_0 MS_0 \sin(\theta) \\ & - \gamma_0 m_1 (\sin(\theta)x + \cos(\theta)y) - \gamma_0 MS_1 \sin(\theta + r_1) - \gamma_0 m_1 b \sin(\theta) , \end{aligned}$$

où  $MS_0$  et  $MS_1$  sont les premiers moments, et  $\gamma_0$  est l'accélération de la pesanteur. Ces expressions permettent d'écrire le Lagrangien réduit ([1.6](#)) comme suit :

$$l(g, r, \eta, \dot{r}) = \frac{1}{2} (\eta^\top, \dot{r}^\top) \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} - U(g, r) = T(\eta, \dot{r}, r) - U(g, r) .$$

On notera, ici, que le Lagrangien réduit n'est pas invariant gauche du fait de la gravité qui brise la symétrie du système. En accord avec la [section 1.5](#), on obtient les équations de la dynamique de ce système en appliquant les équations de Poincaré ([1.7](#)) aux variables externes et celles de Lagrange aux variables de forme. Ceci donne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \eta} \right) - \text{ad}_\eta^\top \left( \frac{\partial l}{\partial \eta} \right) - X_g(U) = 0 , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial l}{\partial r} = 0 , \end{cases}$$

avec [[Murray et al. 1994](#)] :

$$\text{ad}_\eta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\eta)} = [\eta, \cdot] = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & V_y \\ \Omega_z & 0 & -V_x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ainsi, dans le cas du ROCR, la matrice d'inertie ( $3 \times 3$ ) du système, dénoté  $\mathcal{M}$ , s'écrit :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_0 + m_1 & 0 & -MS_1 \sin(r_1) \\ 0 & m_0 + m_1 & MS_0 + m_1 b + MS_1 \cos(r_1) \\ -MS_1 \sin(r_1) & MS_0 + m_1 b + MS_1 \cos(r_1) & b(m_1 b + 2MS_1 \cos(r_1)) + J_1 + J_0 \end{pmatrix} ,$$

tandis que la matrice  $(1 \times 3)$  couplant les ddls internes et externes s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} -MS_1 \sin(r_1) \\ MS_1 \cos(r_1) \\ J_1 + bMS_1 \cos(r_1) \end{pmatrix},$$

et  $m = J_1$  est la matrice d'inertie  $(1 \times 1)$  du ddl interne.

Concernant les forces généralisées du système, elles sont regroupées ainsi :

$$f = -f_{\Omega_z^2} \Omega_z^2 - f_{r_1^2} r_1^2 - 2f_{\Omega_z r_1} \Omega_z r_1 + f_{\Omega_z V_x} \Omega_z V_x + f_{\Omega_z V_y} \Omega_z V_y,$$

où :

$$f_{\Omega_z^2} = \begin{pmatrix} MS_0 - m_1 b - MS_1 \cos(r_1) \\ MS_1 \cos(r_1) \\ 0 \end{pmatrix}, f_{\Omega_z V_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 + m_0 \\ MS_0 + m_1 b + MS_1 \cos(r_1) \end{pmatrix},$$

$$f_{r_1^2} = \begin{pmatrix} MS_1 \cos(r_1) \\ MS_1 \sin(r_1) \\ MS_1 b \sin(r_1) \end{pmatrix}, f_{\Omega_z r_1} = \begin{pmatrix} MS_1 \cos(r_1) \\ MS_1 \sin(r_1) \\ MS_1 b \sin(r_1) \end{pmatrix}, f_{\Omega_z V_y} = \begin{pmatrix} -(m_1 + m_0) \\ 0 \\ MS_1 \sin(r_1) \end{pmatrix},$$

et :

$$Q = -MS_1 b \sin(r_1) \Omega_z^2 + MS_1 \cos(r_1) \Omega_z V_x + MS_1 \sin(r_1) \Omega_z V_y.$$

Les forces externes s'appliquant sur le système sont divisées en deux parties. La première est la force de gravité appliquée sur le système, et la seconde est un frottement visqueux au niveau du point d'accroche modélisé par un simple coefficient de frottement  $C_v$ . Ces deux forces s'expriment ainsi :

$$f_{ext} = f_{\gamma_0} \gamma_0 + f_{C_v} C_v$$

avec :

$$f_{\gamma_0} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_0) \sin(\theta) \\ (m_1 + m_0) \cos(\theta) \\ (MS_0 + m_1 b) \cos(\theta) + MS_1 \cos(\theta + r_1) \end{pmatrix}, f_{C_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_z \end{pmatrix},$$

et

$$Q_{ext} = MS_1 \cos(\theta + r_1) \gamma_0.$$

Ceci achève de définir la dynamique libre du ROCR. Dans la suite, nous projetons cette dynamique dans le sous-espace des vitesses admissibles engendré par le noyau des contraintes. Pour ce faire, nous allons définir les contraintes et leur noyaux.

### 1.7.3 Contraintes

Comme nous l'avons précédemment mentionné, la stratégie employée par le ROCR pour gravir une paroi verticale consiste à changer de point d'accroche au rythme des oscillations de son pendule. Ainsi le ROCR peut être fixé à la paroi par le système d'accroche numéroté 1 ou 2 sur la [figure 1.16](#). Par exemple, lorsque le ROCR est fixé à la paroi par le système d'accroche 1, il est soumis à des contraintes holonomes lui autorisant seulement les rotations autour de ce point d'accroche, les translations étant alors interdites. Les contraintes associées s'écrivent alors très simplement sur  $SE(2) \times \mathcal{S}$ , sous forme non-holonome, en fonction de  $\eta = (V_x, V_y, \Omega_z)^\top$  et de  $\dot{r} = (\dot{r}_1)$  :

$$V_x + \frac{a}{2}\Omega_z = 0, V_y = 0,$$

qui, peuvent être mises sous la forme (1.12), avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'indice 1 indiquant le point d'accroche considéré. Le noyau des contraintes  $H_1 = \ker(A_1, B_1)$  qui engendre l'espace des vitesses admissibles par le système sous le joug de ces contraintes, s'obtient de manière triviale et s'écrit dans ce cas :

$$H_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous écrivons tout aussi simplement les contraintes imposées au ROCR lorsque celui-ci est fixé à la paroi par le système d'accroche 2 :

$$V_x - \frac{a}{2}\Omega_z = 0, V_y = 0.$$

Ce qui nous permet d'écrire  $A_2, B_2$  et  $H_2 = \ker(A_2, B_2)$  comme suit :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous venons d'explicitier, pour chaque point d'accroche, les contraintes s'appliquant sur le ROCR ainsi que leurs noyaux respectifs. Ces noyaux engendrent les sous-espaces des vitesses admissibles du système. Nous allons donc à présent projeter la dynamique libre du ROCR précédemment présentée ([section 1.7.2](#)) dans le sous-espace des vitesses admissibles engendré par  $H_1$  et  $H_2$  afin d'obtenir, pour chaque point d'accroche, un modèle dynamique réduit du système.

### 1.7.4 Modèle réduit de la dynamique du ROCR

En projetant la dynamique libre (section 1.7.2) dans le sous-espace des vitesses admissibles engendré par  $H$  ( $H = H_1$  si le ROCR est fixé à la paroi par le point d'accroche 1 et  $H = H_2$  s'il est fixé par le point d'accroche 2), nous obtenons le modèle dynamique réduit suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_r & M_r^\top \\ M_r & m_r \end{pmatrix}^{-1} F_r ,$$

avec  $(\eta_r^\top, r_r^\top)^\top$  les vitesses externes et internes réduites tel que  $(\eta^\top, r^\top)^\top = H(\eta_r^\top, r_r^\top)^\top$  et où :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_r & M_r^\top \\ M_r & m_r \end{pmatrix} = H^\top \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} H ,$$

est la matrice des inerties réduites, tandis que :

$$F_r = H^\top \left( \begin{pmatrix} f \\ Q + \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{\text{ext}} \\ Q_{\text{ext}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \dot{H} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} \right)$$

est le vecteur des forces généralisées réduites. Cette dynamique réduite de la locomotion couplée à l'équation de reconstruction permet d'écrire le modèle dynamique direct réduit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_r & M_r^\top \\ M_r & m_r \end{pmatrix}^{-1} F_r , \\ \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \left( H \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} \right)^\wedge . \end{cases} \quad (1.20)$$

Dans le cas du ROCR, ce modèle s'instancie de deux façons différentes selon que le robot est fixé à la paroi par son système d'accroche 1 ( $H = H_1$ ) ou 2 ( $H = H_2$ ). En revanche,  $(\eta_r^\top, r_r^\top)^\top$  reste identique pour chacune de ces deux configurations, c'est-à-dire  $\eta_r = \Omega_z$  et  $\dot{r}_r = \dot{r}_1$  pour  $H = H_1$  et  $H = H_2$ . Par exemple, lorsque le ROCR est fixé par le système d'accroche 1 ( $H = H_1$ ), nous obtenons une matrice d'inertie réduite de dimension  $(2 \times 2)$  avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r &= MS_1 a \sin(r_1) + 2MS_1 b \cos(r_1) + b^2 m_1 + \frac{a^2}{4} (m_0 + m_1) + J_0 + J_1 , \\ M_r &= \frac{a}{2} MS_1 \sin(r_1) + MS_1 b \cos(r_1) + J_1 , \text{ et} \\ m_r &= J_1 . \end{aligned}$$

On notera également que, dans le cas du ROCR,  $\dot{H} = 0_{4 \times 2}$ , ce qui donne une expression plus simple de  $F_r$  qui, toujours dans le cas où le robot est fixé par le système d'accroche 1, s'instancie comme suit :

$$F_r = F_{r, \Omega_z^2} \Omega_z^2 + F_{r, r_1^2} \dot{r}_1^2 + F_{r, \Omega_z r_1} \Omega_z \dot{r}_1 + F_{r, \Omega_z V_x} \Omega_z V_x + F_{r, \Omega_z V_y} \Omega_z V_y - F_{r, \gamma_0} \gamma_0 ,$$

avec :

$$\begin{aligned}
 F_{r,\Omega_z^2} &= \begin{pmatrix} \frac{a}{2}(MS_1 \cos(r_1) + bm_1 + MS_0) \\ MS_1 b \sin(r_1) \end{pmatrix}, \quad F_{r,r_1^2} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}MS_1 \cos(r_1) - MS_1 b \sin(r_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 F_{r,\Omega_z r_1} &= \begin{pmatrix} MS_1 a \cos(r_1) - 2MS_1 b \sin(r_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_{r,\Omega_z V_x} = \begin{pmatrix} MS_1 \cos(r_1) + bm_1 + MS_0 \\ MS_1 \cos(r_1) \end{pmatrix}, \\
 F_{r,\Omega_z V_y} &= \begin{pmatrix} MS_1 \sin(r_1) + \frac{a}{2}(m_0 + m_1) \\ MS_1 \sin(r_1) \end{pmatrix}, \\
 F_{r,\gamma_0} &= \begin{pmatrix} \gamma_\theta \sin(\theta) + \gamma_{r_1} \cos(r_0) + MS_1 \cos(\theta + r_1) \\ MS_1 \cos(\theta + r_1) \end{pmatrix}, \\
 \gamma_\theta &= (m_0 + m_1)(y + \frac{a}{2}), \\
 \gamma_{r_1} &= ((m_0 + m_1)x - (bm_1 + MS_1)).
 \end{aligned}$$

Le modèle dynamique réduit du ROCR fixé par le système d'accroche 2 se déduit de même manière en posant cette fois  $H = H_2$ .  $H_1$  et  $H_2$  étant différents, les modèles dynamiques réduits obtenus le sont également.

### 1.7.5 Modèle d'impact

Lors du changement de point d'accroche, un impact peut se produire si les vitesses relatives entre le nouveau point d'accroche et la paroi sont non nulles à l'instant même du changement (voir [remarque 1.14](#)). Afin de modéliser ces impacts, nous allons ici utiliser l'approche classique telle qu'utilisée dans [[Rosa et al. 2012](#)] par exemple. Le lecteur pourra se référer au [chapitre 3](#) pour une présentation des différentes modélisations de l'impact ainsi qu'au [chapitre 4](#) pour une application à la bicyclette. Ici, nous soulignerons seulement que cette approche pose deux hypothèses fortes. Premièrement que l'impact est plastique, c'est-à-dire que la totalité de l'énergie cinétique du point de contact, ici le point d'accroche, se dissipe lors de l'impact. Il est important de noter que cela n'implique en rien la dissipation totale de l'énergie cinétique du système dans sa globalité. La seconde hypothèse est que l'impact est instantané. Ainsi, lors de l'impact, la configuration du système dans l'espace reste fixe tandis que nous observons un changement des vitesses instantané. Cette deuxième hypothèse permet d'écrire la dynamique du système comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_+ - \eta_- \\ \dot{r}_+ - \dot{r}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_+^\top \\ B_+^\top \end{pmatrix} \Lambda,$$

où les indices  $+$  et  $-$  font référence aux instants post et pré impact, respectivement. Ainsi  $(\eta_+^\top, \dot{r}_+^\top)^\top$  correspond aux vitesses recherchées, c'est-à-dire aux vitesses post-impact tandis que  $(\eta_-^\top, \dot{r}_-^\top)^\top$  correspond à celles pré-impact, connues.

Les contraintes de la configuration de contact post-impact sont représentées par  $(A_+^\top, B_+^\top)^\top$  et  $\Lambda$  est le vecteur des forces impulsionnelles engendrant le saut de vitesses observé lors de l'impact. Ainsi, lorsque le ROCR passe du système d'accroche 1 à 2,  $(A_+^\top, B_+^\top)^\top = (A_2^\top, B_2^\top)^\top$  et  $(A_+^\top, B_+^\top)^\top = (A_1^\top, B_1^\top)^\top$ , s'il passe du système d'accroche 2 à 1. Appliquant la méthode exposée dans [Rosa et al. 2012], il est possible d'obtenir une expression des vitesses post-impact, dépendante uniquement de celles pré-impact :

$$\begin{pmatrix} \eta_+ \\ \dot{r}_+ \end{pmatrix} = \left( \text{Id} - \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_+^\top \\ B_+^\top \end{pmatrix} \right) \left( (A_+, B_+) \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_+^\top \\ B_+^\top \end{pmatrix} \right)^{-1} (A_+, B_+) \begin{pmatrix} \eta_- \\ \dot{r}_- \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

Dans la suite, cette méthode de résolution des impacts sera appelée *complète* et opposée à une seconde, présentée au chapitre 3, appelée *réduite*. Cette méthode de résolution *réduite* est une contribution de la thèse, et prolonge la méthode de réduction par projection au cas des systèmes à contacts intermittents.

### 1.7.6 Exploitation du modèle

Disposant des deux modèles dynamiques réduits (1.20) du ROCR ainsi que des deux modèles d'impacts (1.21) permettant le changement de système d'accroche, nous allons à présent illustrer la locomotion d'un tel système. Pour cela nous imposons comme loi de commande des systèmes d'accroche la loi suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } kT < t < T/2 + kT, k \in \mathbb{N} \rightarrow \text{système d'accroche 1} \\ \text{Si } T/2 + kT < t < T + kT, k \in \mathbb{N} \rightarrow \text{système d'accroche 2} \end{cases} \quad (1.22)$$

Tandis que le pendule est commandé par une simple fonction cosinus définie par :

$$r_1(t) = \mathbb{A} \cos(2\pi ft + \phi), \quad (1.23)$$

où  $\mathbb{A}$  est l'amplitude de battement du pendule,  $f = 1/T$  est la fréquence d'oscillation et où  $\phi$  est le déphasage entre la commande du pendule et les instants de commutation des systèmes d'accroche. Cet ensemble de lois de commande, très simple, permet d'imiter la brachiation des singes qui changent de main d'accroche au rythme des oscillations de leur corps. Pour analyser numériquement les mouvements cycliques de ce robot, nous avons conçu un simulateur sous Matlab. La figure 1.17 présente l'algorithme utilisé. Cet algorithme est divisé en deux branches discrètes qui correspondent aux deux modèles dynamiques réduits (1.20) obtenus avec  $H = H_1$  et  $H = H_2$ . La loi de commande du pendule (1.23) définit le mouvement du pendule  $r_1(t)$  ainsi que ses dérivées première et seconde en temps. Ces trois entrées de contrôle  $(r_1(t), \dot{r}_1(t), \ddot{r}_1(t))$  complétées de l'état réduit  $\{\Omega_z, \theta\}$ , sont les entrées des modèles dynamiques réduits.  $\ddot{r}_1$  étant imposé par (1.23), et par conséquent connu,



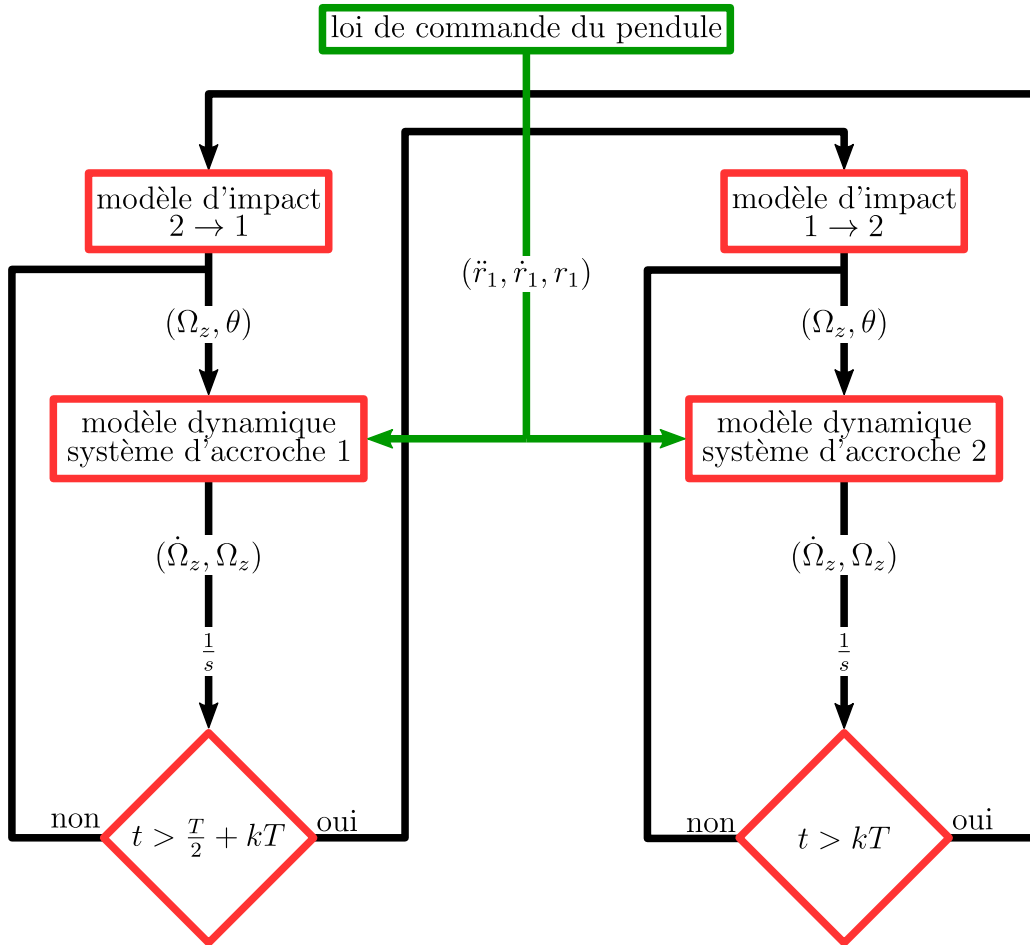


Figure 1.17 – Algorithme de simulation du ROCR.

seule la première ligne des modèles dynamiques (1.20) est utilisée afin de calculer  $\dot{\Omega}_z$ . La seconde ligne permet quant à elle de calculer le couple d'actionnement du pendule comme suit :

$$\tau_1 = \mathcal{M}_{r,21}\dot{\Omega}_z + \mathcal{M}_{r,22}\ddot{r}_1 + F_{r,2} . \quad (1.24)$$

Les conditions  $t > \frac{T}{2} + kT$  et  $t > kT$ , avec  $k \in \mathbb{N}$  reflètent les conditions de changement de système d'accroche (1.22). Lorsque l'une de ces conditions est valide, elle entraîne le changement instantané du point d'accroche. Le simulateur calcule alors la nouvelle vitesse  $\Omega_z$  au moyen des modèles d'impact (1.21) définissant l'état réduit initial du modèle dynamique de la nouvelle configuration de contact (voir figure 1.17).

### 1.7.7 Recherche de cycles limites

Comme nous l'avons constaté empiriquement, en raison de la périodicité des lois de contrôle, l'état du système, que nous noterons ici  $X$ , est lui-même périodique,

c'est-à-dire :

$$X(t + nT) = X(t) , \text{ with } n \in \mathbb{N}.$$

En construisant, pour un ensemble de paramètres de commande  $(A, f, \phi)$ , une application de Poincaré [Guckenheimer et Holmes 1983; Tucker 2002; Parker et Chua 2012], nous proposons d'étudier le mouvement cyclique de ce robot, effectué lors d'une oscillation du pendule ( $n = 1$ ). Pour ce faire, nous définissons une section de Poincaré  $S = \{(X, t) | t = kT, k \in \mathbb{N}\}$  et nous construisons l'application de Poincaré  $P : S \rightarrow S$  en partant d'un état initial  $X \in S$ , et en calculant le nouvel état après un cycle d'oscillation du pendule. Par conséquent,  $P(X(t)) = X(t + T)$ . Nous appelons points fixes de l'application de Poincaré les points qui obéissent à  $P(X) - X = 0$ . Ils définissent des cycles limites, c'est-à-dire des mouvements qui peuvent être répétés indéfiniment. En pratique, nous avons choisi de définir notre section de Poincaré juste après l'impact du système d'accroche numéroté 1 et les points fixes sont calculés en minimisant la fonction d'erreur  $P(X) - X$ .

De plus, nous avons évalué la sensibilité aux perturbations d'un cycle par un critère de stabilité. Pour ce faire, nous construisons une matrice jacobienne en perturbant chaque composant de  $X$  selon :

$$\mathcal{J}_i = \frac{\mathcal{P}(X + \delta x_i e_i) - \mathcal{P}(X - \delta x_i e_i)}{2\delta x_i e_i} ,$$

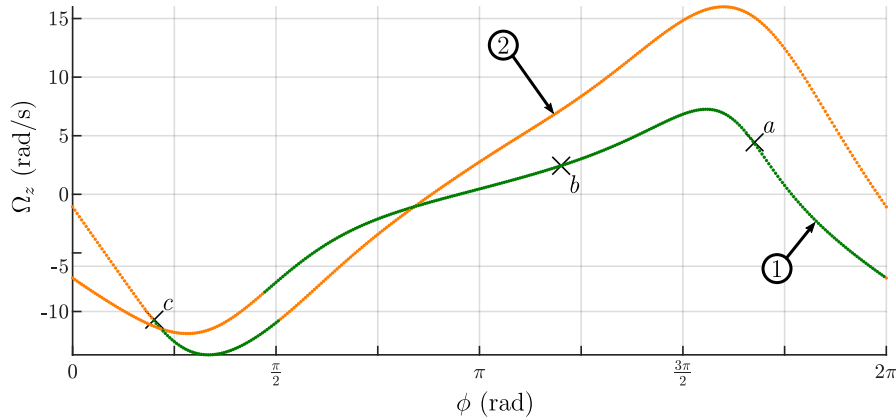
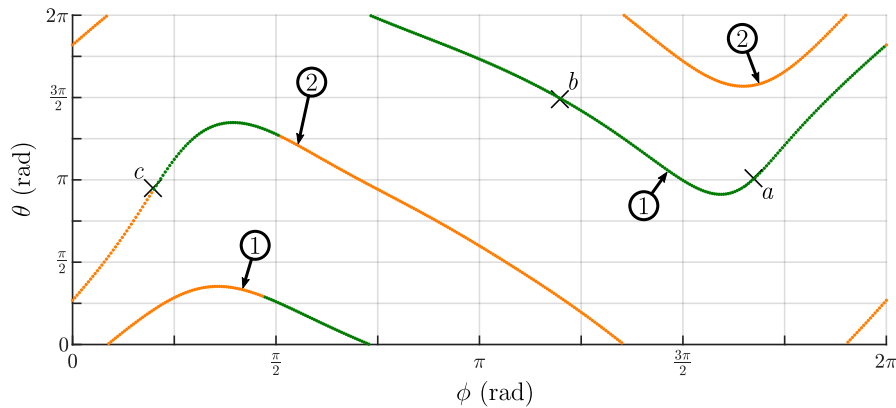
où  $\mathcal{J}_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice jacobienne et  $\delta x_i e_i$  est une petite variation de la  $i^{\text{ème}}$  composante de l'état  $X$ . Les valeurs propres de cette matrice jacobienne quantifient la stabilité du cycle défini par  $X$ . En effet, si toutes les normes des valeurs propres sont strictement inférieures à 1, nous considérons que le cycle est stable.

### 1.7.8 Résultats de simulation

Nous avons choisi de tester notre simulateur sur des allures dynamiques (telles que celles présentées dans [Jensen-Segal et al. 2008; Provancher et al. 2011]), c'est-à-dire dans les conditions que nous estimons être les plus critiques pour le dimensionnement de l'actionneur et des systèmes d'accroche du robot, en raison des importants effets d'inertie impliqués dans ces types d'allures. Les paramètres du ROCR utilisés pendant les simulations sont résumés en [tableau 1.1](#). Par conséquent, nous avons réglé arbitrairement la fréquence de la loi de commande (1.23) du pendule à 1.5 Hz, son amplitude à 60° et nous avons réalisé une recherche de cycles limites en faisant varier le paramètre  $\phi$  afin d'étudier l'influence de ce paramètre sur les allures du robot. Enfin, nous avons limité notre recherche aux cycles où le robot se déplace uniquement suivant la verticale et qui s'exécutent en une seule oscillation du pendule.

Les résultats sont présentés dans les [figures 1.18](#). Comme expliqué précédem-

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$a$	10 cm	$b$	2 cm
$c$	20 cm	$C_v$	$0.03 \text{ kg rad}^{-1} \text{ s}^{-1}$
$m_0$	199 g	$m_1$	100 g
$MS_0$	3.5 g m	$MS_1$	30 g m
$J_0$	$1.3 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-2}$	$J_1$	$9 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-2}$

**Tableau 1.1** – Paramètres de simulation du ROCR.

**(A)**  $\Omega_z$  en fonction de  $\phi$ .

**(B)**  $\theta$  en fonction de  $\phi$ .

**Figure 1.18** – Résultats de la recherche de cycles limites. Cycles limites stables (en vert) et instables (en orange) en fonction de  $\phi$  pour  $f = 1.5 \text{ Hz}$  et  $\mathbb{A} = 60^\circ$ . Les marqueurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les allures sélectionnées.

ment, un cycle limite est défini par  $X = (\Omega_z, \theta) \in S$ , c'est-à-dire par la valeur de  $\Omega_z$  et  $\theta$  en début d'un cycle de l'allure ( $t = 0$ ). Ces valeurs étant dépendantes de  $\phi$ , nous présentons  $\Omega_z(t = 0)$  en fonction de  $\phi$  en [figure 1.18A](#), tandis que la [figure 1.18B](#) présente  $\theta(t = 0)$  en fonction de  $\phi$ . Notons que, pour chaque valeur  $\phi$  donnée, nous avons trouvé deux cycles limites. Pour la valeur de déphasage  $\phi = 3\pi/2 \text{ rad}$ , nous avons ainsi les deux cycles limites suivants (voir [figures 1.18](#)) :  $X_1 = (6.5 \text{ rad s}^{-1}, \pi \text{ rad})$

et  $X_2 = (15 \text{ rad s}^{-1}, 7\pi/4 \text{ rad})$ . Le premier cycle est un cycle limite stable (en vert sur les figures 1.18) au vu du critère de stabilité exposé en section 1.7.7 tandis que le second est un cycle limite instable (en orange sur les figures 1.18). De plus, nous avons pu observer que ces deux cycles limites appartiennent à deux familles d'allures différentes. La première famille, représentée par les courbes numérotées 1 sur les figures 1.18, est la famille des allures dites *droites*. La seconde famille, numérotée 2 sur les figures 1.18, est celle des allures dites *inversées*.

Afin d'illustrer les allures possibles du ROCR, nous en avons sélectionnées trois, désignées par les marqueurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sur les figures 1.18. Les allures  $a$  et  $b$  appartiennent à la famille des allures *droites* (courbes numérotées 1 sur les figures 1.18) tandis que  $c$  illustre les allures *inversées* (courbes numérotées 2 sur les figures 1.18).

Chacune de ces trois allures est stable au regard des critères explicités en section 1.7.7. Des instantanés de ces allures sont présentés en figures 1.19 et pour chacune, les figures 1.20 présentent les plans de phase, les figures 1.21, les couples d'actionnement et les figures 1.22, les efforts calculés au niveau des systèmes d'accroche. Dans chacune de ces figures, les courbes en rouge correspondent à la configuration où le robot est fixé à la paroi par le système d'accroche 1 et celles en bleu au robot fixé par le système d'accroche 2.

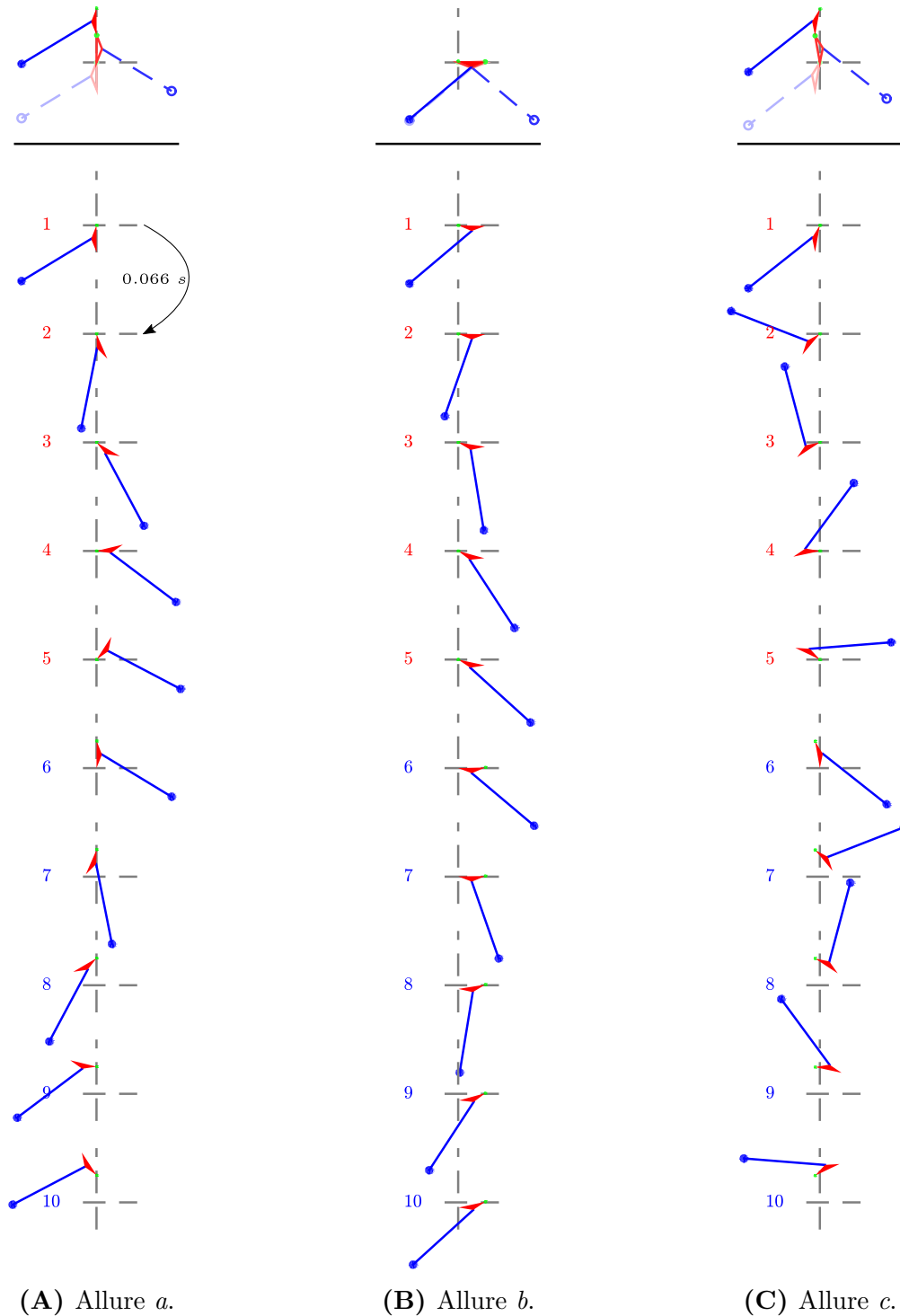
L'allure  $a$  est celle permettant au robot de grimper le plus rapidement. On peut remarquer sur le plan de phase (voir figure 1.20A), que le corps principal (c'est-à-dire le corps  $\mathcal{B}_0$ ) fait des rotations de presque  $\pi$  rad avec une vitesse de près de  $10 \text{ rad s}^{-1}$ . La période d'oscillation du pendule étant fixe, la vitesse d'ascension du robot est directement liée à l'angle du corps principal en début de cycle  $\theta(t=0)$  par la relation suivante :

$$\dot{y} = \frac{-2a \cos(\theta(t=0))}{T}, \quad (1.25)$$

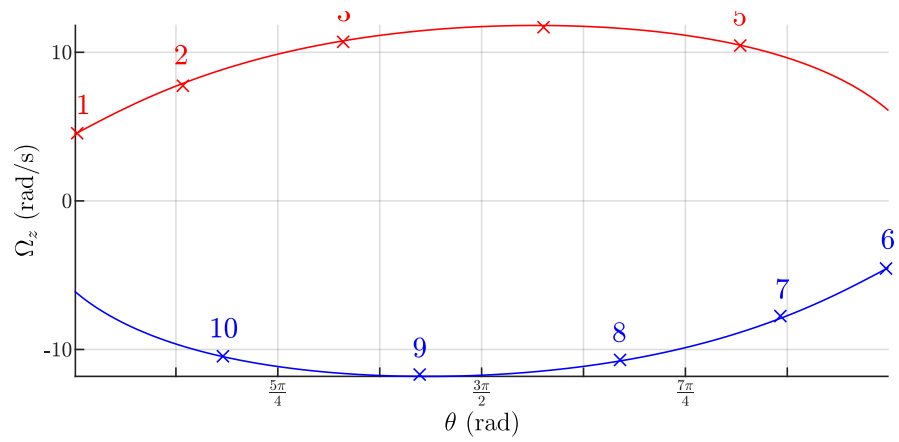
et vaut  $0.3 \text{ m s}^{-1}$  pour cette allure.

L'équation (1.25) lie la vitesse de grimpe  $\dot{y}$  (c'est-à-dire la vitesse de  $O_0$  par rapport à  $\mathcal{R}_e$ , suivant la verticale) à l'angle du corps principal  $\mathcal{B}_0$  en début de cycle. En conséquence, le robot monte à vitesse maximale quand  $\theta(t=0) = \pi$  rad (cas de l'allure  $a$ ), descend à vitesse maximale pour  $\theta(t=0) = 0$  rad ou  $\theta(t=0) = 2\pi$  rad et a une vitesse nulle quand  $\theta(t=0)$  vaut  $\frac{\pi}{2}$  rad ou  $\frac{3\pi}{2}$  rad (cas de l'allure  $b$ ). Ainsi, pour la famille des allures *droites* (numéroté 1 sur les figures 1.18) il est, par exemple, possible de faire varier  $\phi$  afin de faire varier continûment la vitesse de grimpe  $\dot{y}$ , de  $\dot{y} = -0.3 \text{ m s}^{-1}$ , pour  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  rad, à  $\dot{y} = 0$ , pour  $\phi = 3.76$  rad (cas de l'allure  $b$ ), et enfin, à  $\dot{y} = 0.3 \text{ m s}^{-1}$ , pour  $\phi = \frac{3\pi}{2}$  rad

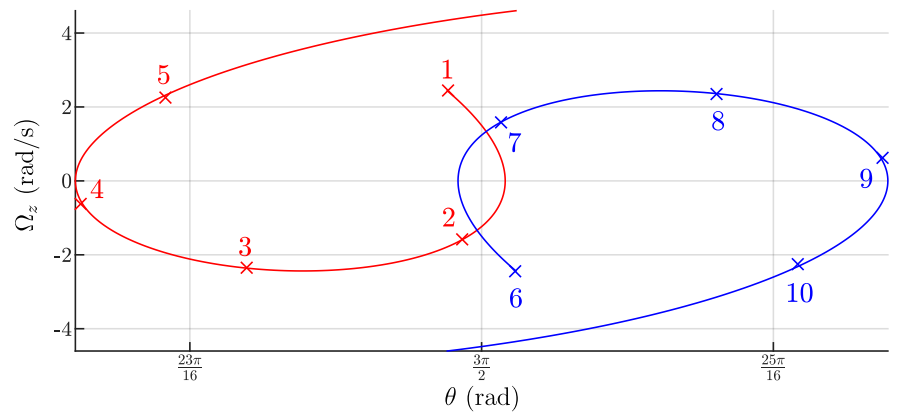
L'allure  $c$ , quant à elle, est un exemple d'allure *inversée* appartenant aux courbes numérotées 2 sur les figures 1.18. Ces allures font évoluer le robot avec le pendule passant au-dessus du corps. Cependant, de telles allures sont inobservables en pratique. Étant majoritairement instables, ces allures n'existent numériquement



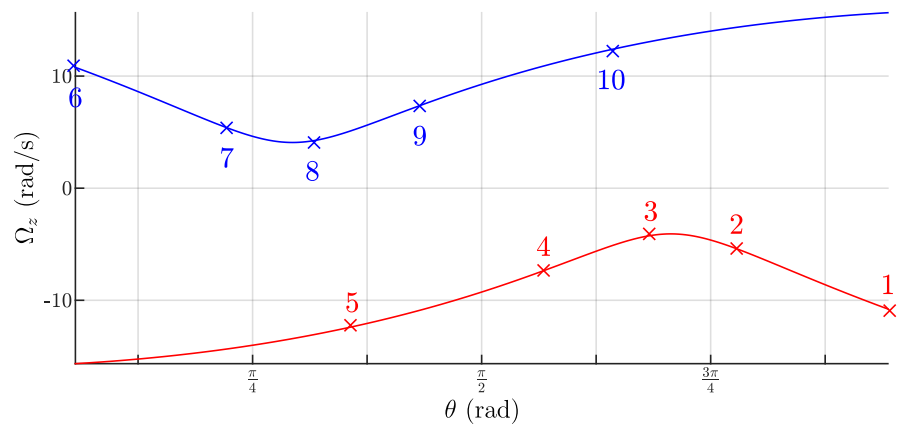
**Figure 1.19** – Instantanés des allures sélectionnées. Les instantanés où le robot est fixé par le système d'accroche 1 sont numérotés en rouge et en bleu si le robot est fixé par le système d'accroche 2. Une superposition des instantanés pris aux instants de commutation des systèmes d'accroche est présenté en haut de chaque figures.



(A) Allure *a*.

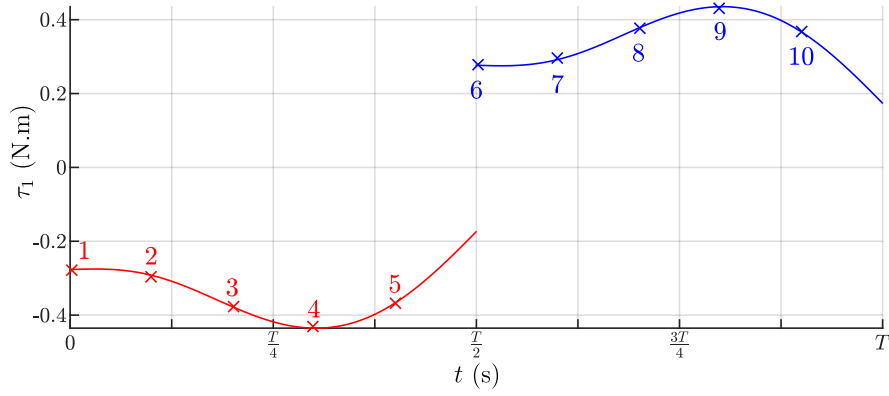


(B) Allure *b*.

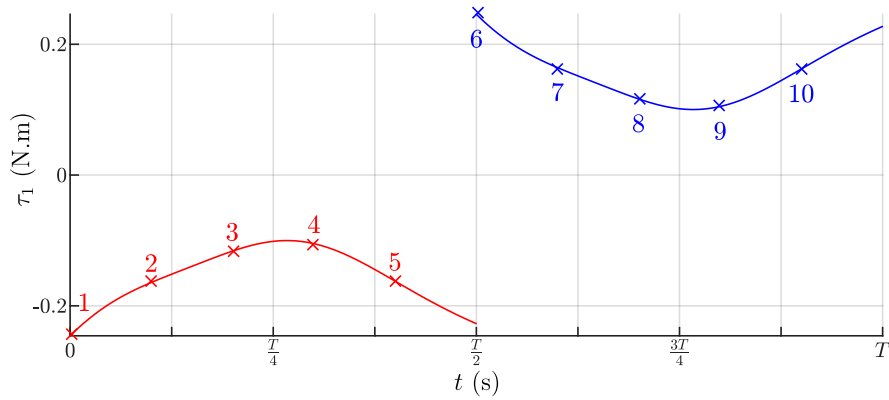


(C) Allure *c*.

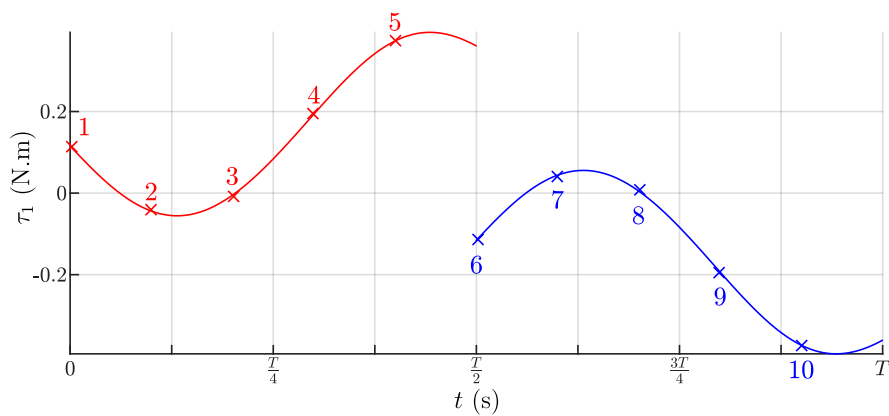
**Figure 1.20** – Plans de phase des allures sélectionnées.



(A) Allure a.

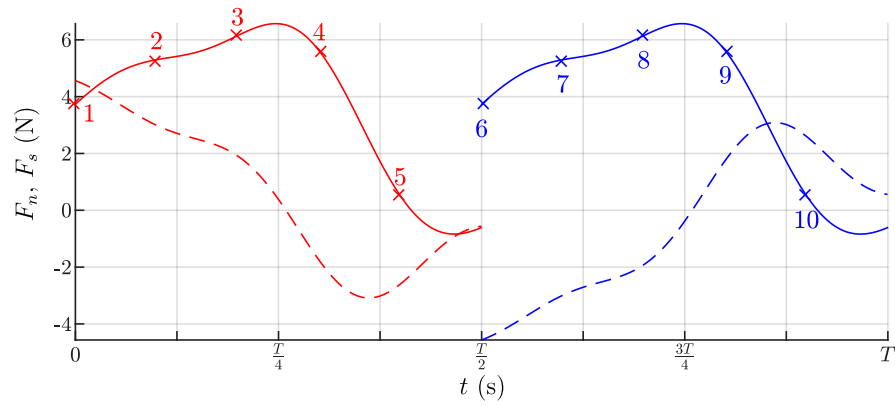


(B) Allure b

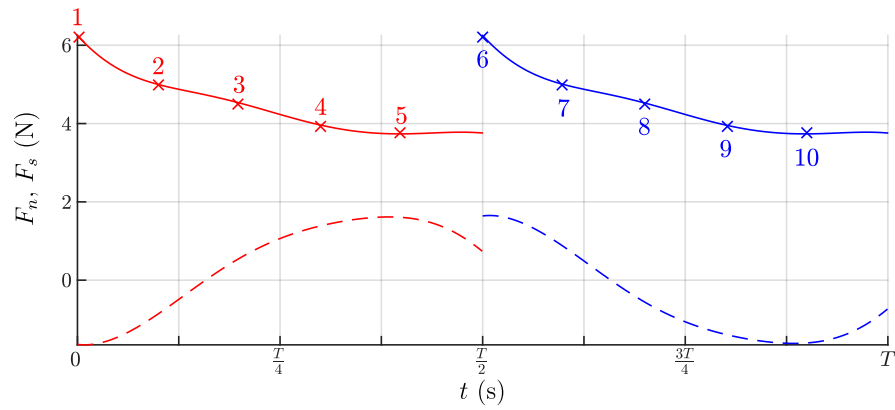


(C) Allure c.

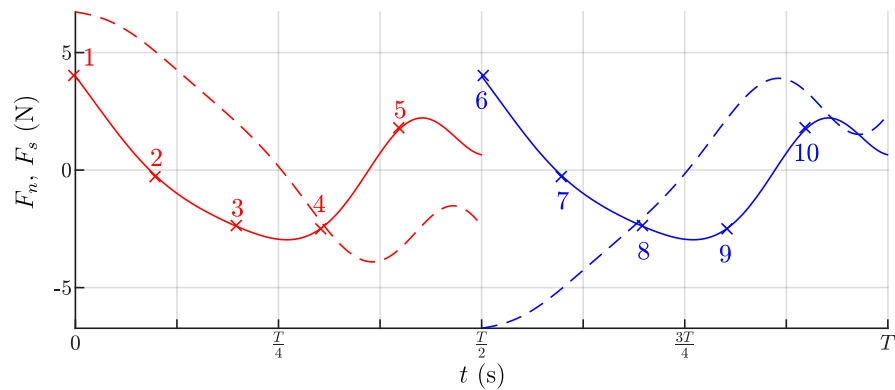
**Figure 1.21** – Couples d'actionnement des allures sélectionnées.



(A) Allure a.



(B) Allure b.



(C) Allure c.

**Figure 1.22** – Forces appliquées sur le système d'accroche pour chacune des allures sélectionnées. Les courbes pleines représentent la force suivant la verticale ( $F_n$ ) et celles en pointillés, celle suivant l'horizontale ( $F_s$ ).



qu'en raison de l'isotropie du frottement et de la simplicité du modèle d'impact utilisé.

Pour compléter l'illustration remarquons que le modèle dynamique inverse (1.24) permet d'obtenir, à chaque instant  $t$ , les couples d'actionnement de chacune de ces allures (voir figures 1.21). Ainsi on se rend compte qu'un moteur capable de fournir un couple de  $0.5 \text{ N m}$  est suffisant, même pour l'allure  $a$ . Cependant, les impacts peuvent induire des impulsions de couple (non traitées ici) et doivent être pris en compte pour un véritable dimensionnement du moteur. De plus, en raison de la symétrie du mouvement du ROCR, on constate, comme attendu, que l'évolution du couple d'actionnement  $\tau_1$  est la même (au signe près), que le robot soit fixé par le système d'accroche 1 (courbes en rouge sur les figures 1.21) ou 2 (courbes en bleu sur les figures 1.21). Enfin, il est également possible de calculer la valeur des multiplicateurs de Lagrange s'appliquant au point d'accroche qui, projetée dans le repère lié à la paroi, donne  $F_n$  et  $F_s$ , les efforts s'appliquant sur les systèmes d'accroche, suivant la verticale et l'horizontale respectivement (voir figures 1.22). Du point de vue du dimensionnement du robot, ces figures permettent d'estimer qu'en raison des effets d'inertie, les systèmes d'accroche doivent être capables de supporter plus de deux fois le poids du robot (sans tenir compte de l'impact). Pour finir, on remarquera que, comme pour les couples d'actionnement présentés en figures 1.21, les forces s'appliquant sur le système d'accroche 1 durant la première demi période du cycle se répètent sur le système d'accroche 2 durant la seconde demi période, au signe près pour  $F_s$ .

## 1.8 Conclusion

Ce chapitre introductif pose les bases de la méthode de modélisation de la dynamique des MMSs. Pour cela nous avons commencé par définir leur espace des configurations comme un fibré principal. Nous avons ensuite défini le problème général de la locomotion que nous cherchons à résoudre, à savoir calculer les mouvements rigides d'ensemble connaissant l'évolution temporelle des liaisons internes, mais également calculer les couples articulaires nécessaires à l'obtention de ces mouvements. Pour ce faire, nous avons abordé la dynamique directe de la locomotion en évoquant tout d'abord deux cas particuliers où celle-ci est entièrement définie par la cinématique du système. Premièrement, nous avons présenté le cas de la connexion mécanique en prenant l'exemple du chat tombant. Cette connexion encode les informations concernant les échanges cinétiques entre les ddls internes et externes et permet d'écrire les contraintes s'appliquant sur le système sous la forme (1.2) avec  $\mathcal{A}(r)$  ayant la forme (1.3). Le second cas particulier est celui de la connexion cinématique où les contraintes, supposées idéales, permettent si elles sont assez nombreuses de réduire la dynamique d'un système à un problème cinématique. Ces deux cas particuliers présentés, nous avons ensuite introduit le cas général de la dynamique

directe de la locomotion d'un MMS, qui, lui-même, fait apparaître deux sous cas. Tout d'abord celui où les forces extérieures s'appliquant sur le système dérivent d'un Lagrangien comme nous pouvons l'observer dans le cas de la nage. Puis celui où les forces externes sont les multiplicateurs de Lagrange forçant un ensemble de contraintes cinématiques. Ce dernier cas pose le cadre utilisé tout au long de cette thèse pour la modélisation des systèmes non-holonomes tels que la bicyclette et également celle du robot grimpeur qui illustre la fin du présent chapitre. Avant d'atteindre cette dernière section nous avons également traité de la dynamique inverse permettant de résoudre le second point du problème général de la locomotion à savoir le calcul des couples d'actionnement internes. Ce chapitre se clôt donc sur la modélisation d'un robot grimpeur : le ROCR. Son modèle dynamique libre est construit à partir du Lagrangien réduit. Il est ensuite projeté dans l'espace des vitesses admissibles  $H = \ker(A, B)$  où  $(A, B)$  représente l'ensemble des contraintes décrivant le contact entre le robot et la paroi verticale. Cette projection permet d'obtenir un modèle dynamique réduit. Lorsque le robot change de point d'accroche avec la paroi, le modèle dynamique réduit change en conséquence. Il est alors nécessaire d'utiliser un modèle d'impact afin de gérer ce changement. Dans les chapitres suivants nous tirerons parti du cadre présenté ici afin de modéliser la bicyclette de Whipple. Dans un premier temps ([chapitre 2](#)) nous établirons le modèle dynamique géométriquement exact de la bicyclette en tant que système non-holonyme soumis à des contacts persistants. Puis, après avoir présenté les différentes méthodes permettant de modéliser des systèmes soumis à des contacts intermittents ([chapitre 3](#)) nous étendrons le modèle dynamique de la bicyclette à ce cas ([chapitre 4](#)). Pour cela, la réduction par projection dans le noyau des contraintes sera étendue aux phases d'impacts.

## Bibliographie

- Alexander R.M. *Animals*. Cambridge University Press (CUP), 1990. [20](#)
- Arnold V.I. Sur la géométrie différentielle des groupes de lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Annales de l'institut Fourier*, 16(1) :319–361, 1966. [36](#)
- Arnold V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York, 1989. [31](#)
- Beal D.N., Hover F.S., Triantafyllou M.S., Liao J.C., et Lauder G.V. Passive propulsion in vortex wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 549 :385–402, 2006. [20](#), [41](#)
- Bimbard G., Kolomenskiy D., Bouteleux O., Casas J., et Godoy-Diana R. Force balance in the take-off of a pierid butterfly : relative importance and timing of leg impulsion and aerodynamic forces. *Journal of Experimental Biology*, 216(18) :3551–3563, 2013. [28](#)
- Birkhoff G. *Hydrodynamics a Study in Logic, Fact, and Similitude*. Dover Publications, 1950. [38](#)
- Bloch A.M., Baillieul J., Crouch P.E., Marsden J.E., et Zenkov D. *Nonholonomic Mechanics and Control*, tome 24 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, 2015. [32](#), [33](#), [34](#)
- Boyer F. et Ali S. Recursive inverse dynamics of mobile multibody systems with joints and wheels. *IEEE Transactions on Robotics*, 27(2) :215–228, 2011. [41](#)
- Boyer F. et Belkhir A. Reduced locomotion dynamics with passive internal dofs : Application to nonholonomic and soft robotics. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(3) :578–592, 2014. [23](#), [44](#), [47](#)
- Boyer F. et Primault D. The poincaré-chetayev equations and flexible multibody systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69(6) :925–942, 2005. [36](#), [37](#)
- Canavin J.R. et Likins P.W. Floating reference frames for flexible spacecraft. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 14(12) :724–732, 1977. [25](#), [44](#)
- Cartan E. *Lecons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris, 2<sup>e</sup> édition, 1946. [31](#)
- Chai P. et Millard D. Flight and size constraints : hovering performance of large hummingbirds under maximal loading. *Journal of Experimental Biology*, 200(21) :2757–2763, 1997. [20](#)

- Cheng B., Tobalske B.W., Powers D.R., Hedrick T.L., Wethington S.M., Chiu G.T.C., et Deng X. Flight mechanics and control of escape manoeuvres in hummingbirds. i. flight kinematics. *Journal of Experimental Biology*, 219(22) :3518–3531, 2016. [20](#)
- Chetaev N.G. Sur les Équations de Poincaré. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1927. [36](#)
- Chevallereau C. et Aoustin Y. Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot. *Robotica*, 19(5) :557–569, 2001. [28](#)
- Chevallereau C., Bessonnet G., Abba G., et Aoustin Y. *Bipedal Robots : Modeling, Design and Walking Synthesis*. Wiley-ISTE, 2009. [45](#)
- Chevallereau C., Boyer F., Porez M., Mauny J., et Aoustin Y. Morphological self stabilization of locomotion gaits : illustration on a few examples from bio-inspired locomotion. *Bioinspiration & Biomimetics*, 12(4) :046006, 2017. [48](#)
- Chevallier D.P. et Lerbet J. *Multi-Body Kinematics and Dynamics with Lie Groups*. Elsevier, 2018. [25](#)
- Coquereaux R. *Espace fibrés et connexions*, 3<sup>rd</sup> ed. Centre de Physique Théorique de Luminy, Marseille, 2002. [31](#)
- Dickinson M.H., Farley C.T., Full R.J., Koehl M.A., Kram R., et Lehman S. How animals move : An integrative view. *Science*, 288(5463) :100–106, 2000. [20](#)
- Dickinson M.H., Lehmann F.O., et Sane S.P. Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight. *Science*, 284 :1954–1960, 1999. [41](#)
- Dowling K.J. *Limbless locomotion : learning to crawl with a snake robot*. Ph.d. thesis, The Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1997. [20](#)
- Ehresmann C. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. *Séminaire Bourbaki*, 1 :153–168, 1950. [29](#)
- Frankel T. *The Geometry of Physics : An Introduction*, 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. [27](#)
- Goldstein H., Poole C.P., et Safko J.L. *Classical Mechanics*, 3<sup>rd</sup> ed. Pearson, 2001. [37](#), [41](#)
- Gray J. The mechanism of locomotion in snakes. *Journal of Experimental Biology*, 23(2) :101–120, 1946. [20](#)
- Grizzle J.W., Chevallereau C., Ames A.D., et Sinnet R.W. 3d bipedal robotic walking : Models, feedback control, and open problems. *IFAC Proceedings Volumes*, 43(14) :505–532, 2010. 8<sup>th</sup> IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. [44](#)

- Guckenheimer J. et Holmes P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, tome 42. Springer Science & Business Media, 1983. [57](#)
- Hatton R.L., Burton L.J., Hosoi A.E., et Choset H. Geometric maneuverability with applications to low reynolds number swimming. Dans *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3893–3898. 2011. [39](#)
- Hatton R.L. et Choset H. Geometric motion planning : The local connection, stokes' theorem, and the importance of coordinate choice. *The International Journal of Robotics Research*, 30(8) :988–1014, 2011. [32](#)
- Hirose S. *Biologically inspired robots : Snake-like locomotors and manipulators*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1993. [20](#)
- Hirose S. et Yamada H. Snake-like robots [tutorial]. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 16(1) :88–98, 2009. [20](#), [21](#)
- Horstmann J.T., Henningsson P., Thomas A.L.R., et Bomphrey R.J. Wake development behind paired wings with tip and root trailing vortices : Consequences for animal flight force estimates. *PLOS ONE*, 9(3) :1–9, 2014. [28](#)
- Jayne B.C. Kinematics of terrestrial snake locomotion. *Copeia*, 1986(4) :915–927, 1986. [20](#)
- Jensen-Segal S., Virost S., et Provancher W.R. Rocr : Dynamic vertical wall climbing with a pendular two-link mass-shifting robot. Dans *Robotics and Automation, 2008. ICRA 2008. IEEE International Conference on*, pages 3040–3045. IEEE, 2008. [47](#), [57](#)
- Kanso E. Swimming due to transverse shape deformations. *Journal of Fluid Mechanics*, 631 :127–148, 2009. [40](#)
- Kanso E., Marsden J.E., Rowley C.W., et Melli-Huber J.B. Locomotion of articulated bodies in a perfect fluid. *Journal of Nonlinear Science*, 15(4) :255–289, 2005. [39](#)
- Karásek M., Nan Y., Romanescu I., et Preumont A. Pitch moment generation and measurement in a robotic hummingbird. *International Journal of Micro Air Vehicles*, 5(4) :299–309, 2013. [20](#)
- Keennon M., Klingebiel K., et Won H. Development of the nano hummingbird : A tailless flapping wing micro air vehicle. Aerospace Sciences Meetings. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012. [20](#)
- Kelly S.D. et Murray R.M. Geometric phases and robotic locomotion. *Journal of Robotic Systems*, 12(6) :417–431, 1995. [34](#)

- 
- Kelly S.D. et Murray R.M. The geometry and control of dissipative systems. Dans *Proceedings of 35<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, tome 1, pages 981–986. 1996. [39](#)
- Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932. [39](#)
- Marsden J.E. *Lectures on Mechanics (London Mathematical Society Lecture Note Series)*, tome 174. Cambridge University Press, 1992. [39](#)
- Marsden J.E. et Ratiu T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2<sup>nd</sup> ed. Springer New York, 1999. [36](#)
- Melli J.B., Rowley C.W., et Rufat D.S. Motion planning for an articulated body in a perfect planar fluid. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 5(4) :650–669, 2006. [39](#)
- Montgomery R. Gauge theory of the falling cat. 1, 1993. [34](#)
- Müller U.K., Smit J., Stamhuis E.J., et Videler J.J. How the body contributes to the wake in undulatory fish swimming. *Journal of Experimental Biology*, 204(16) :2751–2762, 2001. [40](#)
- Müller U.K., van den Heuvel B.L.E., Stamhuis E.J., et Videler J.J. Fish foot prints : morphology and energetics of the wake behind a continuously swimming mullet (*chelon labrosus risso*). *Journal of Experimental Biology*, 200(22) :2893–2906, 1997. [40](#)
- Murray R.M., Li Z., et Sastry S.S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC PRESS INC., 1994. [25](#), [37](#), [50](#)
- Ostrowski J.P. Computing reduced equations for robotic systems with constraints and symmetries. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(1) :111–123, 1999. [44](#)
- Ostrowski J.P. et Burdick J. The geometric mechanics of undulatory robotic locomotion. *The International Journal of Robotics Research*, 17(7) :683–701, 1998. [34](#)
- Parker T.S. et Chua L. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer Science & Business Media, 2012. [57](#)
- Provancher W.R., Jensen-Segal S., et Fehlbeg M.A. Rocr : An energy-efficient dynamic wall-climbing robot. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 16(5) :897–906, 2011. [47](#), [57](#)
- Purcell E.M. Life at low reynolds number. *American Journal of Physics*, 45(1) :3–11, 1977. [39](#)
-

- Ravi S., Crall J.D., Fisher A., et Combes S.A. Rolling with the flow : bumblebees flying in unsteady wakes. *Journal of Experimental Biology*, 216(22) :4299–4309, 2013. [20](#)
- Rosa N., Barber A., Gregg R.D., et Lynch K.M. Stable open-loop brachiation on a vertical wall. Dans *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1193–1199. IEEE, 2012. [54](#), [55](#)
- Rumyantsev V.V. On the poincaré and chetayev equations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 62(4) :495–502, 1998. [36](#)
- Shammas E., Choset H., et Rizzi A. Natural gait generation techniques for principally kinematic mechanical systems. Dans *In Proceedings of Robotics : Science and Systems*. 2005. [34](#)
- Shapere A. et Wilczek F. Geometry of self-propulsion at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 198 :557–585, 1989. [39](#)
- Siegenthaler C., Pradalier C., Günther F., Hitz G., et Siegwart R. System integration and fin trajectory design for a robotic sea-turtle. Dans *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3790–3795. 2013. [21](#)
- Spivak M.D. *A comprehensive introduction to differential geometry*, 3<sup>rd</sup> ed. Publish or Perish, Wilmington, DE, 1999. [24](#), [26](#), [32](#)
- Tobalske B.W., Warrick D.R., Clark C.J., Powers D.R., Hedrick T.L., Hyder G.A., et Biewener A.A. Three-dimensional kinematics of hummingbird flight. *Journal of Experimental Biology*, 210(13) :2368–2382, 2007. [20](#)
- Triantafyllou M.S., Triantafyllou G.S., et Yue D.K.P. Hydrodynamics of fishlike swimming. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32(1) :33–53, 2000. [41](#)
- Tucker W. Computing accurate poincaré maps. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 171(3) :127–137, 2002. [57](#)
- Willmott A.P. et Ellington C.P. The mechanics of flight in the hawkmoth *manduca sexta*. i. kinematics of hovering and forward flight. *Journal of Experimental Biology*, 200(21) :2705–2722, 1997a. [20](#)
- Willmott A.P. et Ellington C.P. The mechanics of flight in the hawkmoth *manduca sexta*. ii. aerodynamic consequences of kinematic and morphological variation. *Journal of Experimental Biology*, 200(21) :2723–2745, 1997b. [20](#)
- Wood R.J. The first takeoff of a biologically inspired at-scale robotic insect. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(2) :341–347, 2008. [20](#), [21](#)

## Dynamique réduite de la Bicyclette non-holonome de Whipple

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	72
2.2	Paramétrisation des systèmes mobiles multi-corps - Application à la bicyclette . . . . .	75
2.3	Dynamique des systèmes mobiles multi-corps soumis à des contacts permanents . . . . .	77
2.3.1	Dynamique d'un système mobile multi-corps dans son fibré principal des configurations . . . . .	77
2.3.2	Dynamique réduite d'un système mobile multi-corps contraint . . . . .	80
2.4	Modèle géométrique des contacts de la bicyclette tri- dimensionnelle . . . . .	83
2.4.1	Calcul préliminaire . . . . .	83
2.4.2	Énoncé du problème de contact . . . . .	84
2.4.3	Calcul des points de contact . . . . .	84
2.5	Cinématique de la bicyclette . . . . .	91
2.5.1	Cinématique implicite de la bicyclette . . . . .	91
2.5.2	Cinématique explicite de la bicyclette . . . . .	93
2.6	Dynamique de la bicyclette . . . . .	94
2.6.1	Calcul de la dynamique libre de la bicyclette . . . . .	94
2.6.2	Dynamique réduite de la bicyclette . . . . .	95
2.7	Applications Numériques . . . . .	101
2.7.1	Reconstruction cinématique . . . . .	102
2.7.2	Mouvement passif sur un plan incliné . . . . .	104



2.7.3	Stabilisation asymptotique passive de la bicyclette . . .	105
2.7.4	Mouvement passif et chute sur un plan incliné . . . . .	109
2.7.5	Manceuvre de virage contrôlé . . . . .	111
2.8	Conclusion . . . . .	115

---

## 2.1 Introduction

Depuis sa création, la bicyclette a su attirer l'attention des scientifiques avec les travaux pionniers de la fin du dix-neuvième siècle [Rankine 1869; Bourlet 1899; Boussinesq 1899; Whipple 1899; Carvallo 1901] jusqu'aux travaux les plus récents sur le sujet [Basu-Mandal et al. 2007; Meijaard et al. 2007; Consolini et Maggiore 2013], en incluant les avancées importantes faites par [Jones 1942; Timoshenko et Young 1948; Klein et Sommerfeld 1965; Le Hénaff 1987; Franke et al. 1990] pour ne citer que quelques noms parmi les plus importants. En particulier, il est bien connu que le modèle de la bicyclette, modélisé par quatre corps rigides et dont les roues sont des disques indéformables, introduit pour la première fois par Whipple [Whipple 1899], est un système non-holonome, c'est-à-dire un système dont la description du mouvement requiert plus de coordonnées généralisées qu'il ne possède de vitesses admissibles. Originellement étudiés par Hertz [Hertz 1894], Appell [Appell 1931] et Chaplygin [Chaplygin 2008], les systèmes non-holonomes connaissent actuellement un renouveau d'intérêt dans le contexte de la robotique mobile des véhicules plans à roues tels que les monocycles et les plates-formes à roues [Kelly et Murray 1995; Champion et al. 1996; Morin et Samson 2009]. Bien que partageant la non-holonomie avec ces systèmes, la bicyclette en diffère par le fait que contrairement à un simple monocycle, sa dynamique de locomotion contrôlée par la forme ne peut pas être entièrement décrite avec un modèle cinématique mais nécessite un modèle dynamique. En tant que tel, le vélo appartient à la sous-classe moins commune des systèmes dynamiques non-holonomes qui ont été étudiés ces dernières années dans la communauté de la mécanique géométrique [Cendra et al. 2001], du contrôle géométrique [Bloch et al. 1996], avec des applications aux systèmes ondulatoires plans tels que le snake-board [Ostrowski et al. 1994, 1995; Ostrowski et Burdick 1998]. Pour ce dernier système (le snake-board), la locomotion est due aux transferts des moments cinétiques depuis les *degrés de liberté* (ddls) internes (de forme) vers ceux externes via les conditions de non-dérapage imposées par les roues [Boyer et Porez 2015]. Bien qu'elle soit un système dynamique locomoteur non-holonome comme le snake-board ou le récent trikke [Chitta et al. 2005], la bicyclette diffère de ces systèmes ondulants par plusieurs aspects, ce qui en fait un système unique en son genre. En effet, les roues de la bicyclette n'ont pas pour fonction de permettre un échange de moments cinétiques entre les ddls internes et externes, mais plutôt pour assurer l'auto stabilité du système, une propriété fondamentale pour la théorie du contrôle [Letov 1959;

Getz et Marsden 1995; Astrom et al. 2005; Aström et Murray 2010] qui explique certainement le succès empirique de la bicyclette [Kooijman et al. 2011]. Du point de vue de la modélisation, la bicyclette étant par essence un objet tri-dimensionnel, la dérivation de sa dynamique se trouve être nettement plus complexe que celle des systèmes non-holonomes plans usuels. Au-delà des non-linéarités géométriques inhérentes à la dynamique, des difficultés de modélisation apparaissent dès les étapes de modélisation géométrique et cinématique. En particulier, la position des points de contacts roues/sol dans le repère attaché à la bicyclette dépend de la configuration de la bicyclette (c'est-à-dire qu'elle change dépendamment de la position, l'orientation et la forme de la bicyclette) et requiert, par conséquent, un modèle de contact qui est, la plupart du temps, évincé des littératures traitant du sujet. L'autre point névralgique de la modélisation de la bicyclette est lié aux indispensables contraintes holonomes modélisant la non-pénétration et le non-décollement des roues suivant la normale au sol. Ces contraintes introduisent une boucle cinématique couplant l'altitude de la bicyclette avec son inclinaison ainsi qu'avec l'angle de son guidon, créant un système algébrique non-linéaire implicite qui ne peut être résolu explicitement afin de réduire le nombre de coordonnées généralisées [Psiaki 1979]. Toutes ces difficultés expliquent probablement pourquoi la majorité des modèles dynamiques de la bicyclette proposés jusque-là soient basés sur des modèles géométriques simplifiés ainsi que sur des approximations inertielles et cinématiques. En particulier, le complexe couplage cinématique induit par la boucle cinématique sus-mentionnée ainsi que la dépendance de la position des points de contact roues/sol à la configuration du vélo, sont, le plus souvent, ignorés et remplacés par une cinématique découplée, approximative, où la position des points de contact ne dépend que de paramètres géométriques liés au design de la bicyclette [Timoshenko et Young 1948; Getz et Marsden 1995; Boyer et Belkhir 2014, 2015]. Au-delà de ces modèles analytiques approximatifs, les progrès récents de la dynamique computationnelle des systèmes multi-corps ont permis de fournir une solution définitive à la dynamique non-linéaire de la bicyclette de Whipple et d'en proposer un benchmark [Meijaard et al. 2007]. Cela a ouvert la voie à l'explication de l'auto-stabilité de la bicyclette [Kooijman et al. 2011], une question qui a soulevé de nombreux débats tout au long de son histoire. Dans le présent chapitre, nous abordons la question de la modélisation tri-dimensionnelle de la dynamique non-linéaire exacte de la bicyclette de Whipple. À la différence des travaux menés précédemment sur le sujet, nous aborderons le problème à l'aune de la théorie géométrique de la locomotion sur le fibré principal, tel que développé au cours de ces dernières années dans les domaines de la mécanique géométrique et de la robotique [Kelly et Murray 1995; Ostrowski 1999; Boyer et Perez 2015; Chevallier et Lerbet 2018]. Ainsi, en respectant ce contexte, la dynamique de la bicyclette s'étudie dans l'espace des configurations  $SE(3) \times \mathcal{S}$ , où  $SE(3)$  fait référence au groupe de Lie Spécial Euclidien des mouvements rigides d'ensemble de la bicyclette dans l'espace ambiant et  $\mathcal{S}$ , à l'espace des formes de ses ddls internes. La dynamique est, dans un premier temps, établie dans  $(SE(3) \times \mathcal{S}) \times (se(3) \times TS/\mathcal{S})$

puis, par le jeu de l'approche de réduction présenté dans [Boyer et Belkhirri 2014], se retrouve projetée dans  $(SE(3) \times \mathcal{S}) \times (\ker(A, B))$ , où  $\ker(A, B)$  représente le noyau de l'ensemble des contraintes cinématiques des contacts roues/sol, modélisées sous l'aspect de vitesses relatives nulles. Ces contraintes cinématiques susmentionnées incluent les conditions de non-pénétration et non-décollement, ce qui a pour effet de transformer la réduction des coordonnées du système, analytiquement irréalisable, en une réduction de ses vitesses réalisable. La position des points de contact roues/sol est exacte et obtenue, ici, par l'inversion d'un ensemble de conditions algébriques imposant le parallélisme des plans tangents aux roues avec celui du sol. Les solutions de ce problème de contact étant dépendantes de la position et de l'orientation de la bicyclette dans  $SE(3)$ , les contraintes cinématiques ne sont, par conséquence, pas symétriques par rapport au groupe structurant, suivant la fibre de  $SE(3) \times \mathcal{S}$ . Cependant, tirer parti des avantages intrinsèques de la modélisation dans  $SE(3)$  permet de faire fi de toutes non-linéarités introduites artificiellement par les mouvements tri-dimensionnels de corps rigides, telles que celles traditionnellement introduites par les angles d'Euler, les reléguant alors à un ensemble d'équations de reconstruction intégrable numériquement. En fin de compte, cette approche fait apparaître une forme symbolique et close de la dynamique réduite de la bicyclette dont les solutions satisfont, à tout instant, les contraintes, du moment que celles-ci aient été initialement satisfaites, c'est-à-dire que la configuration initiale de la bicyclette respecte les contraintes holonomes de non-pénétration et non-décollement des roues. Les équations finales sont entièrement non-linéaires et peuvent être qualifiées de *géométriquement exactes* dans le sens où aucune ne nécessite les simplifications habituellement mises en place afin de traiter de ce système. À des fins de validation, ce chapitre sera illustré d'exemples de simulations du modèle dynamique réduit de la bicyclette qui seront comparées au benchmark numérique proposé dans [Meijaard et al. 2007]. Ces résultats, obtenus via l'approche projective, se trouvent être comparables à ceux exposés dans [Meijaard et al. 2007] et tendent à démontrer qu'une forme close de la dynamique entièrement non-linéaire de la bicyclette de Whipple tri-dimensionnelle, du moins pour de simples designs, est atteignable. Pour résumer, les objectifs de ce travail sont doubles. D'une part, il fournit une nouvelle formulation (intrinsèque) de la dynamique de la bicyclette. D'autre part, il illustre comment certaines des techniques de réduction mises au point ces dernières années peuvent être appliquées à la bicyclette de Whipple tri-dimensionnelle.

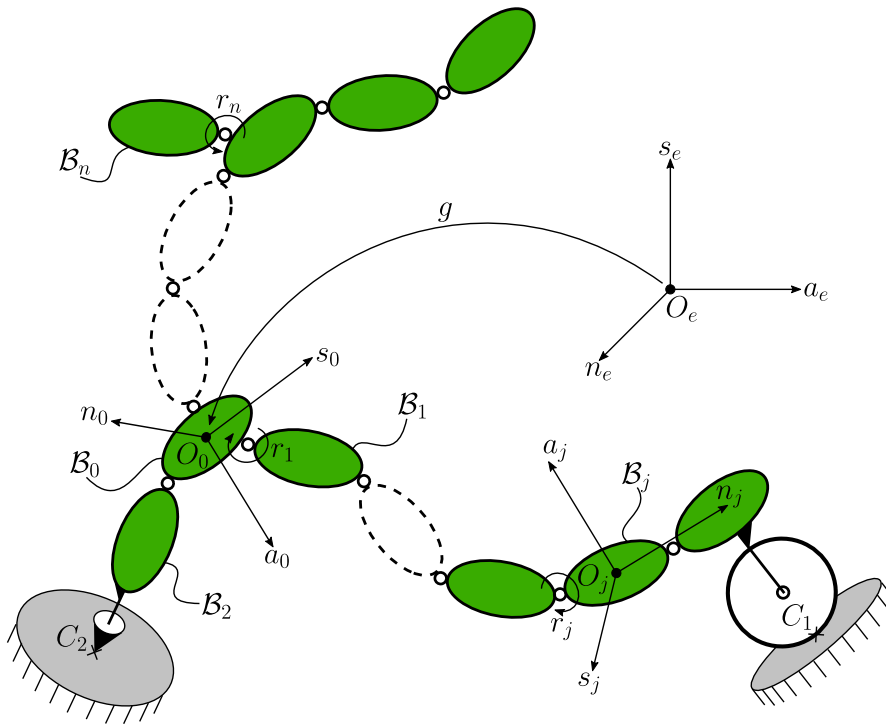
Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de deux publications [Boyer et al. 2017; Mauny et al. 2017].

Le chapitre arborera la structure suivante. Nous débuterons, dans la [section 2.2](#), par la présentation de la paramétrisation de la bicyclette ainsi que des notations usitées dans le présent chapitre. La [section 2.3](#) aura pour tâche de présenter l'algorithme générique permettant de dériver, de façon systématique, le modèle dynamique réduit d'un *système mobile multi-corps ou mobile multi-body system* (MMS) soumis

à des contacts permanents, à la suite de quoi les trois sections suivantes en feront l'application au cas de la bicyclette de Whipple tri-dimensionnelle. Ainsi, la [section 2.4](#) traitera le modèle géométrique des contacts roues/sol. S'ensuivra, en [section 2.5](#), le modèle cinématique, pour finir par le modèle dynamique, en [section 2.6](#). Une fois le modèle obtenu, il sera numériquement testé en [section 2.7](#) puis le chapitre prendra fin par la conclusion se trouvant en [section 2.8](#).

## 2.2 Paramétrisation des systèmes mobiles multi-corps - Application à la bicyclette

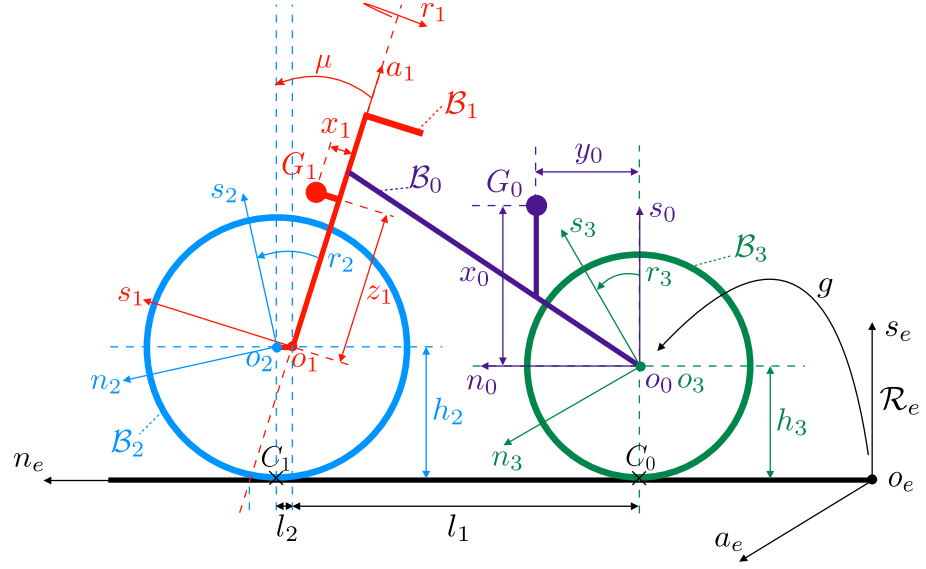
La bicyclette de Whipple sera, ici, modélisée comme un MMS (introduit en [section 1.2.1](#)), aux corps supposés rigides, interagissant avec un substrat fixe et rigide, au travers de contacts idéaux et persistants. Un tel système (voir la [figure 2.1](#)) est constitué d'une arborescence de  $n + 1$  corps rigides dénommés  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$  interconnectés par  $n$  liaisons pivots. Le MMS est alors paramétré par le vecteur  $r = (r_1, \dots, r_n)^\top$  définissant la position angulaire entre chaque corps, suivant l'axe de la liaison. De plus, le système, dans sa globalité, évolue dans l'espace Euclidien ambiant, c'est-à-dire dans l'espace physique, doté d'un repère orthonormé  $\mathcal{R}_e = (O_e, s_e, n_e, a_e)$  nommé repère spatial. Le corps  $\mathcal{B}_0$  est le corps de référence, c'est-à-dire le corps arbitrairement choisi dont les mouvements dans l'espace ambiant définissent les mouvements rigides d'ensemble du MMS. Les mouvements des corps les uns par rapport aux autres définissent quant à eux l'évolution temporelle de la forme du MMS, c'est-à-dire les mouvements de forme. Ainsi, à chaque instant, la configuration d'un MMS se définit par l'instance courante du vecteur  $r = (r_1, \dots, r_n)^\top$ , un point de la variété  $\mathcal{S} = (\mathbb{S}^1)^n$ , complété de la matrice des transformations homogènes  $g \in \text{SE}(3)$  du corps  $\mathcal{B}_0$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_e$ . L'ensemble  $\text{SE}(3)$  est le groupe de Lie des déplacements Euclidiens dans  $\mathbb{R}^3$ . L'espace des configurations d'un MMS,  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times \mathcal{S}$ , est alors un fibré principal défini par le produit de  $\mathcal{S}$ , une variété de base, et du groupe structurant  $\text{SE}(3)$ , la fibre. Dans  $\mathcal{C}$ , une configuration du MMS est alors définie par le couple  $(g, r)$  et l'application  $(g, r) \mapsto (hg, r)$ , pour tout  $h \in \text{SE}(3)$ , est l'action (à gauche) de  $\text{SE}(3)$  sur  $\mathcal{C}$  [[Bloch et al. 2015](#); [Chevallier et Lerbet 2018](#)]. L'évolution temporelle de  $r \in \mathbb{R}^n$  définit les mouvements du MMS dans son espace des formes  $\mathcal{S}$ , tandis que celle de  $g \in \text{SE}(3)$  définit ses mouvements rigides d'ensemble. Tout mouvement arbitraire d'un MMS est, alors, une composition de ces deux types de mouvements. À tout moment  $t$ , les contacts sont supposés s'exercer à travers un ensemble discret de points géométriques définis comme l'intersection de la configuration actuelle du MMS avec le substrat (voir [section 2.4](#)). En chacun de ces points, la vitesse linéaire par rapport au substrat est contrainte d'être nulle le long d'un ensemble de directions définies dans  $\mathcal{R}_0$ .



**Figure 2.1** – Système mobile multi-corps en contact ponctuel avec un substrat rigide.

La [figure 2.2](#) présente l'application du modèle général introduit ci-dessus au cas de la bicyclette de Whipple tri-dimensionnelle [[Whipple 1899](#)]. Il en résulte un MMS composé de quatre corps, à savoir le cadre,  $\mathcal{B}_0$ , l'ensemble fourche et guidon,  $\mathcal{B}_1$ , la roue avant,  $\mathcal{B}_2$  et la roue arrière,  $\mathcal{B}_3$ . Ces corps sont liés entre eux par  $n = 3$  liaisons pivots paramétrées par  $r = (r_1, r_2, r_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  où  $r_j$  est l'angle entre  $\mathcal{B}_{j-1}$  et  $\mathcal{B}_j$ . Le système est en contact avec un sol plat auquel le repère  $\mathcal{R}_e = (O_e, s_e, n_e, a_e)$  est fixé et dont  $s_e$  définit la normale sortante du plan. On pourra d'ailleurs souligner que la fourche de la bicyclette est inclinée, par rapport à la verticale, d'un angle dénoté  $\mu$ . En accord avec la [figure 2.2](#), chaque corps  $\mathcal{B}_j$  est équipé d'un repère mobile orthonormé  $\mathcal{R}_{0j} = (O_j, s_j, n_j, a_j)$  dont le centre  $O_j$  coïncide avec le centre de la liaison  $j$  et dont  $a_j$  est l'axe.

Tout tenseur  $T_j$  relatif au corps  $\mathcal{B}_j$ , exprimé dans un repère  $\mathcal{R}_i$  sera précédé de l'indice dudit repère en tant qu'exposant, tel que  ${}^i T_j$ . À des fins d'alléger la notation, un tel indice pourra être omis si le repère dans lequel  $T_j$  est exprimé, est celui du corps  $\mathcal{B}_j$ . Dans un tel cas nous écrirons  $: T_j = {}^j T_j$ . La position d'un point  $P$  dans le repère  $\mathcal{R}_j$  dont l'origine est noté  $O_j$  sera simplement noté  $p_j(P)$ . Pour finir, nous utiliserons la notation *point* pour faire référence à la dérivée par rapport au temps.



**Figure 2.2** – Repères et paramètres de la bicyclette tri-dimensionnelle.  $\mathcal{B}_0$ ,  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_3$  dénotent respectivement le cadre, la fourche, la roue avant et la roue arrière de la bicyclette.

## 2.3 Dynamique des systèmes mobiles multi-corps soumis à des contacts permanents

Dans la présente section, nous allons aborder le processus de réduction de la dynamique d'un MMS assujéti à des contacts permanents avec un substrat rigide. Ce processus fut déjà introduit dans [Boyer et Belkhiri 2014] pour les cas de systèmes possiblement soumis à des mouvements internes imposés. Il sera ici appliqué aux cas où seules les forces internes peuvent être imposées. Ce qui est le cas de la bicyclette dès lors que le guidon et la roue arrière sont contrôlés en couple. De plus, la modélisation exacte des contacts nécessitera d'étendre le modèle de contraintes introduit dans [Boyer et Belkhiri 2014] dans un sens que nous détaillerons par la suite.

### 2.3.1 Dynamique d'un système mobile multi-corps dans son fibré principal des configurations

Dans les développements suivants, nous utiliserons la notation  $\hat{U} = U^\wedge$  afin de définir une matrice dont la définition dépend de la dimension du vecteur  $U$ . Ainsi, si  $U$  représente un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\hat{U} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  définit la matrice antisymétrique telle que  $\hat{U}W = U \times W$  pour  $\forall W \in \mathbb{R}^3$ . Dans le cas où  $U = (V^\top, W^\top)^\top$ , un vecteur

de  $\mathbb{R}^6$ , avec  $V$  et  $W$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , alors :

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{W} & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4 .$$

Enfin, si  $U = (V^\top, W^\top)^\top \in \mathbb{R}^{6+n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^6$ , et  $W \in \mathbb{R}^n$ , avec  $n$  le nombre de liaisons internes du MMS considéré, alors on définira  $\hat{U}$  de la façon suivante :

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{V} \\ W \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4) \times \mathbb{R}^n , \quad (2.1)$$

c'est-à-dire, comme la concaténation de la matrice  $\hat{V}$  de dimension  $4 \times 4$  et du vecteur de dimension  $n$ ,  $W$ .

En accord avec notre modèle général, la bicyclette sera vue comme un MMS contraint soumis à des contacts ponctuels persistants que nous supposerons idéaux (cas brièvement dépeint en [section 1.5.2](#)). Dans son fibré principal des configurations  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times \mathcal{S}$ , les courbes  $t \mapsto (g, r)(t)$  dans  $\mathcal{C}$  sont régies par une dynamique de la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^\top \\ B^\top \end{pmatrix} \lambda , \\ \dot{g} = g\hat{\eta} . \end{cases} \quad (2.2a)$$

$$(2.2b)$$

L'équation (2.2b) représente le modèle cinématique permettant de reconstruire la trajectoire du MMS dans  $\mathcal{C}$  à partir de l'évolution temporelle de ses vitesses  $(\eta^\top, \dot{r}^\top)^\top \in \text{se}(3) \times T_r\mathcal{S}$ , qui sont, elles-mêmes, gouvernées par l'équation (2.2a). Concernant l'équation (2.2a), elle se compose, en partant de la gauche vers la droite, de la matrice d'inertie du système en  $(\text{se}(3)^* \times \mathbb{R}^n) \otimes (\text{se}(3) \times \mathbb{R}^n)$ , du vecteur des accélérations en  $\text{se}(3) \times \mathbb{R}^n$ , du vecteur des forces inertielles, externes et de commande qui se détaille comme suit :

$$\begin{pmatrix} f \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{in} \\ Q_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{ext} \\ Q_{ext} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_6 \\ \tau \end{pmatrix} , \quad (2.3)$$

avec  $(f_{in}^\top, Q_{in}^\top)^\top$  le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis,  $(f_{ext}^\top, Q_{ext}^\top)^\top$  celui des forces externes, à l'exception de celles dues aux contacts, et  $(0_6^\top, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^\top$  le vecteur des forces de commande. Chacune de ces forces s'exprimant dans  $\text{se}(3)^* \times \mathbb{R}^n$ . Enfin, dans la partie droite de l'équation (2.2a), se trouve le vecteur des forces généralisées (appartenant à  $\text{se}(3)^* \times \mathbb{R}^n$ ) imposées par les contacts supposés idéaux, où  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (voir [section 1.5.2](#)) modélisant les forces de réaction qui s'exercent, dans l'espace physique, par le substrat sur le MMS à travers les points de contact. Ces contacts sont modélisés par  $m$  contraintes cinématiques indépendantes de la forme générale suivante :

$$0_m = A(g, r)\eta + B(g, r)\dot{r} , \quad (2.4)$$

avec  $A$  et  $B$  des matrices déduites des conditions de vitesse nulle au niveau des points de contact entre le substrat et le système, et tel que  $m = \text{rang}(A, B)$ .

**Remarque 2.1 :**

En pratique, afin de dériver les contraintes (2.4), nous considérons premièrement un ensemble de  $p$  points de contact  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Ce sont des points géométriques définis comme l'intersection du MMS, dans sa configuration courante, avec le substrat rigide. Ces points sont paramétrés par leur position  $p_0(C_i)$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$ . En chacun de ces points, le contact interdit les translations du MMS par rapport au substrat, suivant  $m_i$  directions notées  $u_l(C_i)$ ,  $l = 1, 2, \dots, m_i \leq 3$ , où chaque  $u_l$  est un vecteur unitaire de l'espace physique tri-dimensionnelle  $\mathbb{R}^3$  exprimé dans le repère  $\mathcal{R}_0$ . Ainsi, nous partons des relations suivantes, dans l'espace physique :

$$u_l^T(C_i)v(p_0(C_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad l = 1, 2, \dots, m_i,$$

dans lesquelles il nous suffit d'incorporer les champs de position et de vitesse du MMS dans  $\mathcal{R}_0$ , noté  $p_0$  et  $v$ , comme des fonctions de  $(g, \eta, r, \dot{r})$ , pour obtenir un ensemble de  $\sum_{i=1}^p m_i$  contraintes sur  $\text{SE}(3) \times \text{se}(3)^* \times \text{T}^*\mathcal{S}$  desquelles on extrait les  $m$  contraintes indépendantes (2.4).

**Remarque 2.2 :**

L'application associant chaque configuration du système avec les  $p$  couples  $(p_0(C_i), u(C_i))$ , où  $u(C_i) = (u_1(C_i), u_2(C_i), \dots, u_{m_i}(C_i))$ , définit le modèle géométrique des contacts d'un MMS soumis à des contacts persistants. Elle est définie, de manière formelle, comme :

$$\begin{pmatrix} (p_0, u)(C_1) \\ \dots \\ (p_0, u)(C_p) \end{pmatrix} = F_c(g, r). \quad (2.5)$$

**Remarque 2.3 :**

Contrairement à [Boyer et Belkhir 2014], ici, les matrices  $A$  et  $B$  de (2.4) dépendent possiblement de  $g$ . Quand ce n'est pas le cas, les contraintes sont dites invariantes à gauche. Du point de vue de la physique, cela signifie que les contraintes ne sont affectées par aucune transformation rigide appliquée au repère fixe de l'espace (le repère attaché au sol dans le cas de la bicyclette), ou, de manière équivalente, qu'elles ne dépendent pas de la position-orientation  $g$  de  $\mathcal{B}_0$  dans l'espace ambiant lorsqu'elles sont exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , en termes de  $\hat{\eta} = g^{-1}\dot{g}$ . Dans l'espace dual, si  $A$  et  $B$  sont dépendants de  $g$ , c'est-à-dire que les contraintes ne sont pas invariantes gauche, les forces de réaction  $\lambda$  présentes dans la partie droite de (2.2a) ne le sont également pas. Dans le cas de la bicyclette, nous verrons que les contraintes imposées par les contacts roue-sol ne sont intrinsèquement pas invariants gauche dans  $\text{SE}(3)$  dès l'instant où le cadre de la bicyclette est incliné et son guidon tourné. Enfin, nous noterons, d'après la remarque 2.1, que cette dépendance des contraintes à  $g$  ne survient que si et



seulement si les directions  $u(C_i)$  et/ou les positions des points de contact dans  $\mathcal{R}_0$ , c'est-à-dire  $p_0(C_i)$  sont elles-mêmes dépendantes de  $g$ . Dans le cas de la bicyclette, comme nous le verrons, c'est à cause de la seconde de ces raisons ( $p_0(C_i)$  dépendant de  $g$ ) que les contraintes (2.4) ne sont pas invariantes gauche. Pour finir, on notera également que pour la bicyclette, la dépendance en  $g$  s'exprime également au travers des forces externes de gravité, c'est-à-dire dans le vecteur  $(f^\top, Q^\top)^\top$  de (2.2).

### 2.3.2 Dynamique réduite d'un système mobile multi-corps contraint

La dynamique d'un MMS peut être réduite par projection de (2.2a) dans le noyau des contraintes (2.4) (voir section 1.5.2). En pratique, cette réduction consiste premièrement à calculer le noyau  $\ker(A, B)$  de (2.4), qui représente le sous-espace des vitesses admissibles. Ensuite, les vitesses ainsi que les accélérations sont réexprimées en utilisant ce sous-espace via les relations :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} = H(g, r) \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = H(g, r) \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{r}_r \end{pmatrix} + \dot{H}(g, r) \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

avec :

$$\dot{H}(g, r) = \left( \frac{d}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} H(g \exp(\epsilon \hat{\eta}), r + \epsilon \dot{r}). \quad (2.8)$$

Du point de vue géométrique, les colonnes  $H_k$  de  $H(g, r)$  définissent en ensemble de  $n + 6 - m$  champs vectoriels indépendants  $H_k : (g, r) \in \text{SE}(3) \times \mathcal{S} \mapsto H_k(g, r) \in \text{se}(3) \times \text{T}_r \mathcal{S}$  générant  $\ker(A, B)(g, r)$ , et nous écrirons de façon plus concise  $H = \ker(A, B)$ . Les composantes des vitesses du MMS dans cet ensemble de champs de vecteurs, ou distribution, sont regroupées dans  $(\eta_r^\top, \dot{r}_r^\top)^\top$  qui définit un nouveau vecteur de  $\mathbb{R}^{6+n-m}$  nommé vecteur des vitesses réduites. Deuxièmement, nous introduisons (2.7) dans (2.2a) que nous projetons dans l'espace des vitesses qui, étant compatible avec les contacts, satisfont également (2.6). Ensuite, puisque nous avons  $H^\top(A, B)^\top = 0$ ,  $\lambda$  disparaît de la partie droite de (2.2a) et nous obtenons la dynamique réduite, de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_r & M_r^\top \\ M_r & \mathfrak{m}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{r}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_r \\ Q_r \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

qui doit être complétée de l'équation de reconstruction réduite, obtenue en utilisant (2.1) et  $g^{-1}\dot{g} = \hat{\eta}$  dans (2.6) :

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \left( H \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} \right)^\wedge. \quad (2.10)$$

Dans (2.9), nous avons introduit les matrices réduites suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_r & M_r^\top \\ M_r & m_r \end{pmatrix} = H^\top \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} H, \quad (2.11)$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ Q_r \end{pmatrix} = H^\top \left( \begin{pmatrix} f \\ Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} \dot{H} \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} \right). \quad (2.12)$$

Les relations ci-dessus représentent la projection de la dynamique (2.2) dans le noyau des contraintes  $H$ . Puisque  $\lambda$  ne joue aucun rôle dans ces relations, elles peuvent être interprétées, alternativement, comme la projection sur  $H$  de la dynamique du système libre de tout contact, ou plus concisément, de la dynamique libre donnée par (2.2) dans laquelle  $\lambda = 0$ .

**Remarque 2.4 :**

Les équations (2.9) et (2.10) définissent un ensemble clos d'équations différentielles dont l'intégration temporelle à partir des conditions initiales donne les trajectoires d'un MMS contraint, dans son espace de configuration  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times \mathcal{S}$ . Il est intéressant de noter qu'elles s'appliquent aussi bien aux systèmes non-holonomes qu'aux systèmes holonomes. Cependant, alors que dans le premier cas, les contraintes (2.4) ne sont pas intégrables, dans le second, elles dérivent d'un ensemble de contraintes géométriques  $\Phi(g, r) = 0_m$ , selon :

$$\dot{\Phi} = \left( \frac{d}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} \Phi(g \exp(\epsilon \hat{\eta}), r + \epsilon \dot{r}) = A(g, r)\eta + B(g, r)\dot{r} = 0_m.$$

Par conséquent, il convient, ici, de noter que le remplacement des contraintes géométriques par ces contraintes cinématiques est équivalent si et seulement si le système dynamique (2.9), (2.10) est intégré en commençant dans la sous-variété de contraintes  $\Phi(g, r) = 0_m$  de  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire, si  $\Phi(g(t_0), r(t_0)) = 0_m$  où  $t_0$  est l'instant initial du mouvement. Puisque l'équation de reconstruction (2.10) progresse le long des vitesses se trouvant dans les espaces tangents à la sous-variété feuilletée des contraintes, le système restera prisonnier de la feuille de cette sous-variété, respectant ainsi  $\Phi(g, r) = \Phi(g(t_0), r(t_0))$ , pour tout  $t$  (voir l'essai présenté en section 2.7.1). Ce contexte s'applique au cas de la bicyclette tri-dimensionnelle puisque les contacts roue-sol imposent des contraintes non-holonomes mais également holonomes.

**Remarque 2.5 :**

Bien que mathématiquement, la sous-variété des contraintes définie par les  $m$  contraintes holonomes  $\Phi(g, r) = 0_m$  soit préservée par (2.9) et (2.10), numériquement, l'intégration temporelle de l'équation de reconstruction (2.10) introduit une légère dérive non maîtrisée, qui, progressivement, finit par violer les contraintes géométriques. Comme nous l'illustrerons plus tard (voir section 2.7.3), dans le cas de la bicyclette, cette dérive peut être supprimée par l'ajout d'une compo-

sante numérique rapide à l'équation de reconstruction (2.10) (comme présenté en section 2.7.1). Ce terme correctif vise à forcer les contraintes holonomes de non-pénétration et non-décollement entre les deux roues et le sol sans perturber la lente dynamique réduite du vélo.

**Remarque 2.6 :**

Le processus de réduction ci-dessus peut être généralisé à plusieurs autres contextes. Par exemple, lorsque tout ou partie des variables de forme internes, ou les poses d'un ensemble d'obstacles rigides, sont prescrites au travers d'évolutions temporelles connues. Dans ce cas, la cinématique réduite (2.6) contient une partie supplémentaire qui n'est pas régie par un modèle dynamique (tel que (2.9)) mais par un modèle cinématique, tenant compte des relations entre les vitesses prescrites et celles du MMS. De plus, pour ces systèmes, le nombre de variables de forme prescrites peut être tel que  $\ker(A, B) = 0$ . Dans un tel cas, le MMS est entièrement gouverné par un modèle cinématique sous réserve que les contraintes remplissent certaines conditions de mobilité. C'est par exemple le cas des plates-formes non-holonomes tel le monocycle ou les plates-formes apparentées à des voitures [Campion et al. 1996].

**Remarque 2.7 :**

Le processus de réduction ci-dessus représente un algorithme de modélisation structuré en trois phases et en plusieurs étapes. La première phase, en une seule étape, consiste à dériver le modèle géométrique des contacts (2.5). Ceci correspond, dans le cas de la bicyclette, à déterminer les points des roues avant et arrière en contact avec le sol en fonction de la configuration de la bicyclette dans  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times (\text{S}^1)^3$ . La deuxième phase commence par la dérivation du modèle de contraintes (2.4), qui représente un modèle cinématique implicite. Dans la seconde étape, un modèle explicite de la forme (2.6) est déduit par le calcul du noyau des contraintes. La phase suivante traite de la dynamique et commence par le calcul du modèle de la dynamique libre, donné par (2.2), dans lequel les forces de réaction généralisées sont supprimées (c'est-à-dire que nous forçons  $\lambda = 0$ ). Ensuite, ces dynamiques libres sont réduites selon les formules de projection (2.11) et (2.12). Enfin, les équations dynamiques réduites (2.9) régissant l'évolution temporelle des vitesses réduites doivent être complétées par les équations de reconstruction (2.10) où apparaît le modèle cinématique explicite (réduit) de la deuxième phase. Ici, nous appliquons cette approche multi-phase à la bicyclette présentée en figure 2.2. Dans ce cas, nous verrons que, les contacts introduisant  $m = 6$  contraintes de la forme (2.4), l'algorithme génère alors  $6 + n - m = 3$  équations du type (2.9), et  $6 + n = 9$  équations de reconstruction (2.10).

## 2.4 Modèle géométrique des contacts de la bicyclette tri-dimensionnelle

Dans la continuité de la [remarque 2.2](#), pour la bicyclette, en chacun des deux points de contact, les vitesses roue-sol sont réduites à zéro dans n'importe quelle direction de  $\mathcal{R}_0$ . Ainsi, par *modèle de contacts*, nous entendons un modèle permettant de calculer uniquement les positions des points de contact, c'est-à-dire une fonction de la forme :

$$\begin{pmatrix} p_0(C_0) \\ p_0(C_1) \end{pmatrix} = F_c(g, r) , \quad (2.13)$$

où  $p_0(C_0)$  (respectivement,  $p_0(C_1)$ ) représente la position dans  $\mathcal{R}_0$  du point de contact  $C_0$  (respectivement,  $C_1$ ) entre la roue arrière (respectivement, avant) et le sol supposé plat et horizontal. Le but de la section suivante est de dériver l'expression de  $F_c$ .

### 2.4.1 Calcul préliminaire

En raison de la symétrie matérielle des deux roues, le modèle de contact [\(2.13\)](#) ne dépend aucunement de  $r_2$  ou  $r_3$ . En d'autres termes, lors de l'élaboration de ce modèle, nous pouvons considérer une bicyclette équivalente où les deux roues matérielles seraient remplacées par deux disques géométriques coïncidant, à tout instant, avec les roues. Les roues arrière et avant étant attachées au cadre  $\mathcal{B}_0$  et à la fourche  $\mathcal{B}_1$ , ces deux disques seront naturellement dénommés  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$  respectivement. Ils sont liés par la transformation notée  $g^*$ , qui, en se référant à la [figure 2.2](#), mappe  $\mathcal{R}_0 = (O_0, s_0, n_0, a_0)$  sur  $(O_2, s_1, n_1, a_1)$ , c'est-à-dire sur un repère attaché à la fourche dont l'origine coïncide avec le centre de la roue avant. Cette transformation est détaillée comme suit :

$$g^* = \begin{pmatrix} s_\mu c_{r_1} & -s_\mu s_{r_1} & c_\mu & h_2 - h_3 + l_2 s_\mu c_\mu (c_{r_1} - 1) \\ c_\mu c_{r_1} & -c_\mu s_{r_1} & -s_\mu & l_1 + l_2 (c_{r_1} c_\mu^2 + s_\mu^2) \\ s_{r_1} & c_{r_1} & 0 & l_2 c_\mu s_{r_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (2.14)$$

qui dépend de la configuration au travers de la variable de forme  $r_1$ , seulement. On notera que nous avons, ici, introduit une notation compacte où  $s_x = \sin(x)$  et  $c_x = \cos(x)$ .

### 2.4.2 Énoncé du problème de contact

Dans cette sous-section, nous abordons le problème géométrique suivant. Considérons les deux disques géométriques  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$  précédemment définis. Connaissant la transformation (2.14) qui mappe  $\mathcal{D}_0$  sur  $\mathcal{D}_1$ , que nous écrirons de manière générique :

$$g^* = \begin{pmatrix} R^* & p^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^* & R_{12}^* & R_{13}^* & p_1^* \\ R_{21}^* & R_{22}^* & R_{23}^* & p_2^* \\ R_{31}^* & R_{32}^* & R_{33}^* & p_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ainsi que l'orientation-position  $g$  du  $\mathcal{R}_0$  dans l'espace, que nous détaillons comme :

$$g = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & p_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & p_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans de telles conditions, nous cherchons à résoudre le problème qui pourrait être énoncé comme suit : quelle est la position, dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , des points  $C_0 \in \partial\mathcal{D}_0$  et  $C_1 \in \partial\mathcal{D}_1$  par lesquels passe un plan  $\mathcal{P}$ , tangent à la fois à  $\partial\mathcal{D}_0$  et  $\partial\mathcal{D}_1$  et coïncidant, de plus, avec le plan du sol ?

### 2.4.3 Calcul des points de contact

Nous commençons par localiser  $C_0$  et  $C_1$  dans le repère du disque auquel ils appartiennent, comme suit :

$$p_0(C_0) = \rho_0 = \begin{pmatrix} h_3 c_{\alpha_0} \\ h_3 s_{\alpha_0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$${}^1p_2(C_1) = \rho_1 = \begin{pmatrix} h_2 s_{\alpha_1} \\ 0 \\ h_2 c_{\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

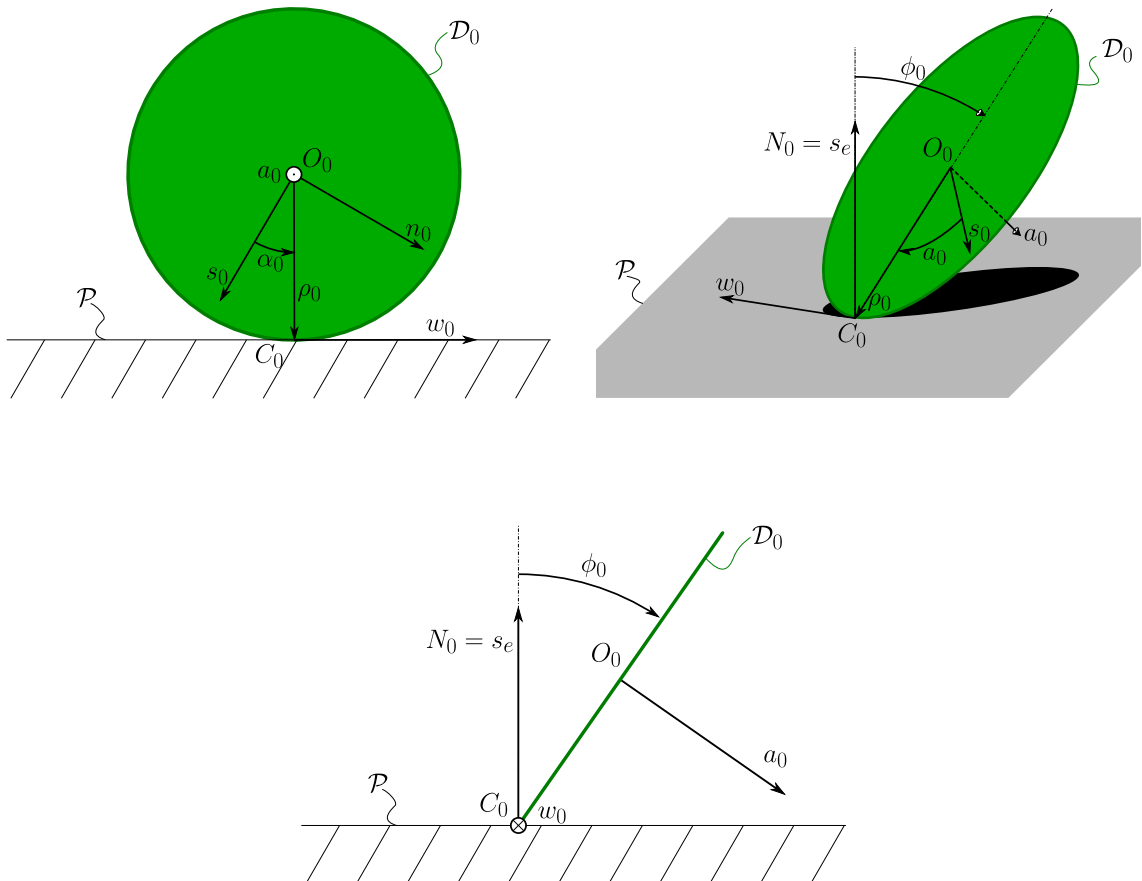
où, en accord avec la figure 2.2,  $h_3$  et  $h_2$  dénotent les rayons des disques  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$  de centres  $O_0$  et  $O_2$  et de normales  $a_0$  et  $n_1$ , respectivement. Dans (2.15) (respectivement, 2.16),  $\alpha_0$  (respectivement,  $\alpha_1$ ) dénote l'angle entre le vecteur  $\overrightarrow{O_0C_0}$  (respectivement,  $\overrightarrow{O_2C_1}$ ) et  $s_0$  (respectivement,  $a_1$ ), l'angle étant orienté positivement autour de  $a_0$  (respectivement  $n_1$ ). Une fois ces vecteurs définis, nous en déduisons les vecteurs tangents à  $\partial\mathcal{D}_0$  et  $\partial\mathcal{D}_1$  aux points  $C_0$  et  $C_1$  respectivement. Ces vecteurs tangents, notés  $w_0$  et  $w_1$ , sont donnés par :

$$w_0 = \frac{a_0 \times \rho_0}{h_3},$$

$$w_1 = \frac{n_1 \times \rho_1}{h_2}.$$

Maintenant, nous considérons tous les plans, notés  $\mathcal{P}_0$ , contenant la ligne  $(C_0, \vec{w}_0)$  et tous les plans, notés  $\mathcal{P}_1$ , contenant  $(C_1, \vec{w}_1)$ . Tous les plans  $\mathcal{P}_0$  (respectivement, tous les plans  $\mathcal{P}_1$ ) diffèrent les uns des autres par leur rotation autour de  $(C_0, \vec{w}_0)$  (autour,  $(C_1, \vec{w}_1)$ , respectivement). Chacune de ces rotations est paramétrée par un seul angle, nommé angle de roulis et noté  $\phi_0$  pour  $\mathcal{D}_0$ , et  $\phi_1$  pour  $\mathcal{D}_1$ . Chaque angle  $\phi_i \in ]-\pi/2, \pi/2[$  est défini comme l'angle mesuré entre le plan contenant le disque  $\mathcal{D}_i$  et la normale  $N_i$  du plan de contact  $\mathcal{P}_i$ , selon le contexte de la [figure 2.3](#). En résumé, c'est l'angle de rotation autour de  $(C_i, \vec{w}_i)$  qui doit être appliqué à  $\vec{N}_i$  pour le mettre dans le plan du disque. Avec ce choix, l'angle de roulis est nul lorsque le disque est orthogonal à son plan de contact, et nous avons plus généralement :

$$\begin{aligned} N_0 &= -s_{\phi_0} a_0 - c_{\phi_0} (\rho_0/h_3), \\ N_1 &= -s_{\phi_1} n_1 - c_{\phi_1} (\rho_1/h_2), \end{aligned}$$



**Figure 2.3** – Paramétrage d'un disque (ici la roue arrière) en contact avec un plan (le sol).

ou bien encore, dans le repère associé à chacun des disques :

$$N_0 = \begin{pmatrix} -c_{\phi_0} c_{\alpha_0} \\ -c_{\phi_0} s_{\alpha_0} \\ -s_{\phi_0} \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} -c_{\phi_1} s_{\alpha_1} \\ -s_{\phi_1} \\ -c_{\phi_1} c_{\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

Enfin, nous cherchons les conditions que  $(\phi_0, \phi_1, \alpha_0, \alpha_1)$  ont à satisfaire afin d'assurer  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ , où  $\mathcal{P}$  est le plan du sol auquel le repère  $(O_e, s_e, n_e, a_e)$  est attaché et dont  $s_e$  est la normale unitaire sortante.

Pour trouver ces conditions, il nous faut imposer que les trois plans soient coïncidents, c'est-à-dire qu'ils soient parallèles entre eux sans aucune différence d'altitude (suivant  $s_e$ ). Ceci se traduit en termes mathématiques par :

$$N_0 = {}^0N_1 = {}^0s_e,$$

et par :

$${}^0s_e^\top(p_0(C_0) - p_0(O_e)) = {}^0s_e^\top(p_0(C_1) - p_0(C_0)) = 0,$$

respectivement. Ces conditions se détaillent donc sous la forme de deux équations d'orientation :

$$\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{\phi_0} c_{\alpha_0} \\ -c_{\phi_0} s_{\alpha_0} \\ -s_{\phi_0} \end{pmatrix}, \quad (2.17a)$$

$$\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^* & R_{12}^* & R_{13}^* \\ R_{21}^* & R_{22}^* & R_{23}^* \\ R_{31}^* & R_{32}^* & R_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_{\phi_1} s_{\alpha_1} \\ -s_{\phi_1} \\ -c_{\phi_1} c_{\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad (2.17b)$$

qui assurent le parallélisme des trois plans, ainsi que deux équations de position :

$${}^0s_e^\top(\rho_0 + R^\top p) = 0, \quad (2.18a)$$

$${}^0s_e^\top(\rho_0 - R^* \rho_1 - p^*) = 0, \quad (2.18b)$$

qui assurent une différence d'altitude nulle entre chacun des trois plans.

Bien que (2.17) et (2.18) soient essentielles pour assurer que les trois plans (celui du sol et ceux de contact de chacune des roues) soient confondus, le statut de ces deux ensembles d'équations diffère dans notre approche de modélisation. Les deux équations scalaires de positions (2.18) étant de la forme générale :

$$\Phi_p(g, r) = 0_2, \quad (2.19)$$

ce sont deux contraintes holonomes qui, comme le souligne la [remarque 2.4](#), sont satisfaites tout au long de l'intégration de la dynamique réduite dès l'instant où les conditions initiales du système les ont satisfaites. Pour leur part, les deux équations d'orientation (2.17) ne représentent pas des équations de contraintes mais plutôt le

modèle de contact recherché. Elles nous permettent de trouver la position des points de contact  $C_0$  et  $C_1$  à partir de la connaissance de la position-orientation et de la forme  $(g, r_1)$  (les variables de forme étant ici réduites à  $r_1$ , les roues étant remplacées par des disques fixes dans le repère du corps parent,  $r_2$  et  $r_3$  n'apparaissent pas). Elles définissent un ensemble de quatre conditions scalaires indépendantes liées aux quatre angles  $(\phi_0, \phi_1, \alpha_0, \alpha_1)$ . Pour résoudre (2.17), nous commencerons par considérer les deux premiers composants de (2.17a) desquels nous extrayons :

$$\alpha_0 = \text{atan2}(-R_{12}; -R_{11}) , \quad (2.20)$$

qui nécessite  $c_{\phi_0} > 0$ , condition systématiquement satisfaite puisque  $\phi_0 \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . De plus, (2.20) ne présente aucune singularité puisque  $R_{11} = {}^e s_0^T s_e$  n'est nulle que si et seulement si le plan de la roue et celui du sol sont confondus, ce que nous interdisons. Appliquer le même processus de calcul à (2.17b) nous permet, cette fois-ci, d'obtenir une expression de l'angle  $\alpha_1$  :

$$\alpha_1 = \text{atan2}(-(R_{11}^* R_{11} + R_{21}^* R_{12} + R_{31}^* R_{13}); -(R_{13}^* R_{11} + R_{23}^* R_{12} + R_{33}^* R_{13})) , \quad (2.21)$$

dans laquelle nous pouvons introduire l'expression (2.14) de  $g^*$  pour obtenir :

$$\alpha_1 = \text{atan2}(-c_{r_1}(R_{11}s_\mu + R_{12}c_\mu) - s_{r_1}R_{13}; R_{12}s_\mu - R_{11}c_\mu) . \quad (2.22)$$

### Remarque 2.8 :

Dans le contexte de l'intégration de la dynamique de la bicyclette et connaissant à chaque instant la valeur courante de  $(g, r_1)$  qui satisfait (2.18), les expressions (2.20) et (2.22) seront utilisées à chaque instant de la simulation pour calculer la position des deux points de contact  $C_0$  et  $C_1$ . Plus formellement, utiliser (2.20) et (2.22) dans (2.15) et (2.16) permet d'obtenir l'expression du modèle de contacts (2.13) où  $F_c$  représente une fonction numérique ou symbolique. Par conséquent, par la suite, ces deux points sont supposés connus et seront utilisés dans la [section 2.5](#) pour dériver un modèle cinématique de la bicyclette.

### Remarque 2.9 :

Bien que seuls  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  soient requis par la formulation de la dynamique, la résolution du modèle des contacts (2.17) permet d'extraire également les deux angles de roulis  $\phi_0$  et  $\phi_1$ . Ceci s'explique de manière simple par le fait que l'information de roulis de la roue arrière se trouve entièrement contenue dans  $g$  tandis que le modèle géométrique entre les deux disques,  $g^*$ , est suffisant pour déduire l'angle de roulis d'un disque à partir de la connaissance de l'autre. Pour obtenir l'expression de  $\phi_0$ , il faut, tout d'abord, faire la somme des deux premières composantes de (2.17a) élevées au carré. Cela permet d'écrire :

$$c_{\phi_0} = \pm \left( (R_{12})^2 + (R_{11})^2 \right)^{1/2} ,$$

qui, combinée à la troisième composante de (2.17a) permet d'obtenir l'expression



de  $\phi_0$  :

$$\phi_0 = \operatorname{atan2} \left( -R_{13}; \left( (R_{11})^2 + (R_{12})^2 \right)^{1/2} \right), \quad (2.23)$$

qui, pour les mêmes raisons que précédemment, n'admet aucune singularité et par conséquent,  $c_{\phi_0} > 0$ . En appliquant la même suite d'opération à (2.17b), nous obtenons :

$$\phi_1 = \operatorname{atan2} \left( R_{12}^* R_{11} + R_{22}^* R_{12} + R_{32}^* R_{13}; \left( (R_{11}^* R_{11} + R_{21}^* R_{12} + R_{31}^* R_{13})^2 + (R_{13}^* R_{11} + R_{23}^* R_{12} + R_{33}^* R_{13})^2 \right)^{1/2} \right),$$

que nous pouvons, grâce à l'expression (2.14) de  $g^*$ , réécrire sous la forme :

$$\phi_1 = \operatorname{atan2} \left( -s_{\mu} s_{r_1} R_{11} - c_{\mu} s_{r_1} R_{12} + c_{r_1} R_{13}; \left( (c_{r_1} (s_{\mu} R_{11} + c_{\mu} R_{12}) + s_{r_1} R_{13})^2 + (c_{\mu} R_{11} - s_{\mu} R_{12})^2 \right)^{1/2} \right).$$

**Remarque 2.10 :**

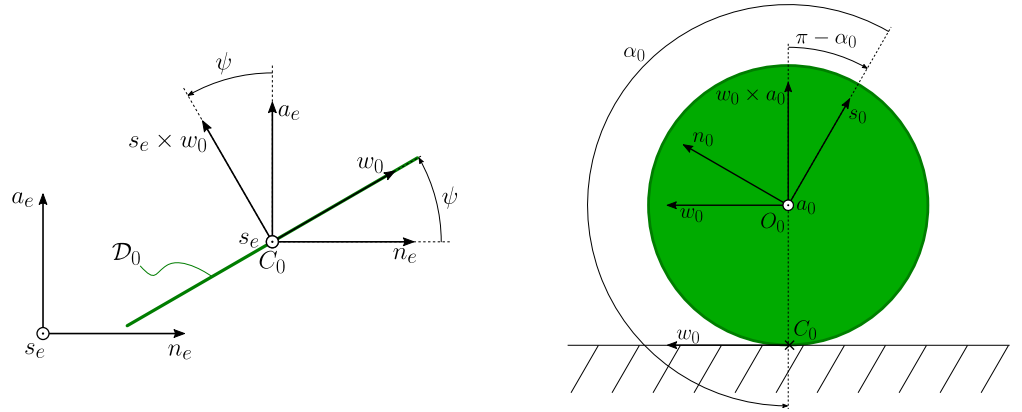
Suite à la [remarque 2.3](#), le modèle des contacts  $F_c$  étant dépendant de  $g$ , nous verrons que les contraintes cinématiques (2.4) de la bicyclette ne sont pas invariantes gauche dans  $\operatorname{SE}(3)$ . De plus, l'examen des expressions (2.20) et (2.21) montre que cette dépendance est due à  $(R_{11}, R_{12}, R_{12}, R_{13})^\top = {}^0s_e$ , c'est-à-dire qu'elle se produit naturellement à travers la direction verticale du sol dans le repère de la bicyclette, ce qui rompt la symétrie spatiale. Ainsi cette perte de symétrie est liée au caractère tri-dimensionnel de la bicyclette et ne devrait pas contredire la symétrie dans le plan du sol. Cette symétrie, plus faible, peut être démontrée en remplaçant  $\operatorname{SE}(3)$  par  $\operatorname{SE}(2)$  dans la définition de notre espace des configurations. Ceci peut être accompli en reconsidérant le paramétrage des disques en contact avec le sol et en remarquant que les angles  $\phi_0$  et  $\alpha_0$  dont les expressions, fonctions de  $R$ , sont données par (2.23) et (2.20), sont en fait les deux derniers angles d'Euler de la séquence suivante :

$$R = \exp(\psi \hat{s}_e) \exp(\phi_0 \hat{w}_0) \exp((\pi - \alpha_0) \hat{a}_0), \quad (2.24)$$

où  $\psi \in [0, 2\pi[$  représente l'angle de lacet entre  $n_e$  et  $w_0$  qui est défini comme :

$$\psi = \operatorname{atan2} (-R_{23}; R_{32}),$$

et où  $(\pi - \alpha_0) \in [0, 2\pi[$  représente l'angle de tangage entre l'axe  $n_0$  du repère de la bicyclette et la référence du sol  $w_0$ . Cette remarque permet d'introduire un paramétrage naturel alternatif de la cinématique de la bicyclette où les rotations de roulis et de tangage se retrouvent extraites de la fibre de  $\operatorname{SE}(3) \times \mathcal{S}$  et insérées dans l'espace des formes de  $\operatorname{SE}(2) \times \mathcal{S}$ . Avec ce nouveau paramétrage, les points de  $\mathcal{S}$  sont maintenant paramétrés par  $(\phi_0, \pi - \alpha_0, r_1, r_2, r_3)$  et les transformations



**Figure 2.4** – Vue de dessus et de coté de la roue arrière faisant apparaître l’angle de lacet ( $\psi$ ) et de tangage ( $\pi - \alpha_0$ ) dans le repère de contact.

de  $SE(2)$  s’écrivent simplement :

$$g = \begin{pmatrix} \exp(\psi \hat{s}_e) & p_e(C_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Ainsi, dans cet autre paramétrage, qui est permis par le fait que les deux contraintes unilatérales de non-pénétration et non-décollement ont été remplacées par des contraintes bilatérales d’iso-altitude, le repère de référence n’est plus attaché au cadre de la bicyclette mais est défini comme le repère de contact  $\mathcal{R}_0 = (C_0, s_e, w_0, s_e \times w_0)$  de la [figure 2.4](#). Il est remarquable que si, dans le paramétrage tri-dimensionnel  $\alpha_0$  représente une observable cinématique du modèle de contacts, dans le paramétrage plan,  $\alpha_0$  représente une coordonnée de forme généralisée. Cela n’est, cependant, qu’une question d’interprétation, comme l’illustre la [figure 2.4](#) où, selon que l’observateur est attaché au repère de contact de la roue arrière ou au cadre de la bicyclette,  $\alpha_0$  mesure le tangage du cadre de la bicyclette par rapport au sol, ou l’angle de contact de la roue arrière par rapport au repère de la bicyclette.

**Remarque 2.11 :**

Notons que notre approche de réduction peut tout aussi bien être appliquée au paramétrage  $(g, r)$  avec  $g \in SE(2)$  et  $r = (\phi_0, \pi - \alpha_0, r_1, r_2, r_3)^\top$  proposé en [remarque 2.10](#). Avec un tel paramétrage, la bicyclette a alors  $\dim(\mathcal{C}) = \dim(G) + \dim(\mathcal{S}) = 3 + 5 = 8$  ddls qui sont localement contraints par deux contraintes en  $C_0$ , à savoir une de roulement sans glissement et une de non-dérapiage, ainsi que trois contraintes en  $C_1$ , une contrainte de roulement sans glissement et une de non-dérapiage auxquelles s’ajoute la contrainte de non-pénétration et non-décollement de la roue avant. Ainsi, nous retrouvons bien  $\text{rang}(H) = 8 - 5 = 3$  vitesses indépendantes. Toutes ces contraintes sont non-holonomes excepté celle

de non-pénétration et non-décollement en  $C_1$ , toujours données par (2.18b) et qui se détaillent maintenant comme :

$$\begin{pmatrix} -c_{\phi_0} c_{\alpha_0} \\ -c_{\phi_0} s_{\alpha_0} \\ -s_{\phi_0} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} s_{\mu} c_{r_1} h_2 s_{\alpha_1} + c_{\mu} h_2 c_{\alpha_1} + h_2 c_{\alpha_0} + h_2 - h_3 + l_2 s_{\mu} c_{\mu} (c_{r_1} - 1) \\ c_{\mu} c_{r_1} h_2 s_{\alpha_1} - s_{\mu} h_2 c_{\alpha_1} + h_2 s_{\alpha_0} + l_1 + l_2 (c_{r_1} c_{\mu}^2 + s_{\mu}^2) \\ s_{r_1} h_2 s_{\alpha_1} + l_2 c_{\mu} s_{r_1} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.26)$$

qui est de la forme  $\Phi_p(g, r) = 0_1$  et remplace (2.19) de notre paramétrage initial dans  $SE(3) \times \mathcal{S}$ . Concernant le modèle des contacts (2.13), avec ce paramétrage, il prend la forme  $p_0(C_1) = F_C(g, r)$  où  $p_0(C_1)$  fait maintenant référence à la position de  $C_1$  dans le repère de contact  $(C_0, s_e, w_0, w_0 \times s_e)$ . Introduire (2.24) dans (2.22), permet alors de détailler ce modèle comme suit :

$$\alpha_1 = \text{atan2} \left( c_{r_1} s_{(\alpha_0 + \mu)} - s_{r_1} t_{(\phi_0)} ; c_{(\alpha_0 + \mu)} \right). \quad (2.27)$$

Enfin, intégrer la dynamique réduite (2.9), (2.10) obtenue avec ce paramétrage permet de reconstruire la configuration complète  $(g, \phi_0, \pi - \alpha_0, r_1, r_2, r_3)$ , avec  $g$  donné par (2.25). Cette configuration alimente le modèle de contacts ci-dessus (2.27), qui, en retour, fournit l'angle  $\alpha_1$ , permettant alors d'obtenir une formulation close de la dynamique de la bicyclette dans  $SE(2) \times \mathcal{S}$ .

### Remarque 2.12 :

Dans la littérature sur la bicyclette, bien que le repère de contact de la roue arrière soit presque systématiquement utilisé comme repère de référence  $\mathcal{R}_0$ , l'angle de tangage  $\alpha_0$  ainsi que l'angle définissant la position du point de contact de la roue avant  $\alpha_1$ , qui sont tous deux des sorties du modèle de contact et ce dans les deux paramétrages présentés ici, sont la plupart du temps ignorés. De plus, utiliser (2.27) dans (2.26), ou de manière équivalente, reconsidérer l'inversion de (2.17) pour obtenir  $c_{\alpha_1}$  et  $s_{\alpha_1}$  en termes des coordonnées de configuration seulement, permet de réécrire (2.26) sous la forme d'une équation algébrique non-linéaire qui ne peut être résolue explicitement afin de faire disparaître  $\alpha_0$  de la formulation. Une telle équation non linéaire est dérivée dans [Psiaki 1979] et mentionnée dans [Meijaard et al. 2007] comme étant l'obstacle majeur à la dérivation explicite d'une forme close de dynamique de la bicyclette. Dans ce qui suit, bien que cette paramétrisation alternative ( $SE(2) \times \mathcal{S}$ ) soit occasionnellement utilisée, nous utiliserons de préférence notre définition initiale de l'espace des configurations  $\mathcal{C} = SE(3) \times \mathcal{S}$ . Ce choix a l'avantage de supprimer les non-linéarités géométriques qui seraient introduites en déplaçant le roulis et le tangage vers l'espace de forme, et de les reléguer à l'intégration numérique de l'équation de reconstruction (2.10). Enfin, il fournit une formulation plus générale qui ouvre la voie à la modélisation de la bicyclette soumise à des contacts unilatéraux.

## 2.5 Cinématique de la bicyclette

Dans la présente section nous dérivons le modèle cinématique de la bicyclette dans son fibré principal des configurations  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times \mathcal{S}$ . Nous commencerons par dériver le modèle sous la forme implicite (2.4), à partir de laquelle un modèle cinématique explicite de la forme (2.6) (2.7) sera déduit.

### 2.5.1 Cinématique implicite de la bicyclette

Dans ce qui suit, nous supposons que les deux angles  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont connus grâce au modèle de contacts de la section précédente (cf. remarque 2.10). Ensuite, en considérant la bicyclette de la figure 2.2, les contraintes cinématiques sont dérivées en imposant les relations vectorielles ci-dessous :

$$\begin{aligned} v(p_0(C_1)) &= V + \Omega \times p_0(C_1) + \dot{r}_1^0 a_1 \times {}^0 p_1(C_1) + \dot{r}_2^0 a_2 \times {}^0 p_2(C_1) = 0, \\ v(p_0(C_0)) &= V + \Omega \times p_0(C_0) + \dot{r}_3^0 a_3 \times {}^0 p_3(C_0) = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

où  $(V^\top, \Omega^\top)^\top = \eta$  et  $v(p_0(C_0)) = 0$  (respectivement  $v(p_0(C_1)) = 0$ ) représente la vitesse relative roue-sol, nulle, en  $C_0$  (respectivement  $C_1$ ), exprimée dans le repère de référence  $\mathcal{R}_0$ . Ces deux équations vectorielles fournissent  $m = 6$  contraintes scalaires qui modélisent le roulement sans glissement, le non-dérapiage, et la non-pénétration et non-décollement de chacune des deux roues par rapport au sol. Quelques manipulations algébriques simples, basées sur la cinématique des corps rigides montrent que ces contraintes peuvent être écrites sous la forme implicite générale (2.4) qui ici est exprimée en fonction de  $V = (V_1, V_2, V_3)^\top$  et  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^\top$  :

$$V_1 + A_{15}\Omega_2 + A_{16}\Omega_3 + B_{11}\dot{r}_1 + B_{12}\dot{r}_2 = 0, \quad (2.29a)$$

$$V_2 + A_{24}\Omega_1 + A_{26}\Omega_3 + B_{21}\dot{r}_1 + B_{22}\dot{r}_2 = 0, \quad (2.29b)$$

$$V_3 + A_{34}\Omega_1 + A_{35}\Omega_2 + B_{31}\dot{r}_1 + B_{32}\dot{r}_2 = 0, \quad (2.29c)$$

$$V_1 + A_{46}\Omega_3 + B_{43}\dot{r}_3 = 0, \quad (2.29d)$$

$$V_2 + A_{56}\Omega_3 + B_{53}\dot{r}_3 = 0, \quad (2.29e)$$

$$V_3 + A_{64}\Omega_1 + A_{65}\Omega_2 = 0, \quad (2.29f)$$

où les composantes de  $A$  et  $B$  sont définies comme suit :

$$A_{26} = -A_{35} = (s_{\alpha_1} c_{r_1} h_2 + (l_2 c_{r_1} - l_2) c_\mu) s_\mu + c_{\alpha_1} h_2 c_\mu - h_3 + h_2, \quad (2.30a)$$

$$A_{34} = -A_{16} = (s_{\alpha_1} c_{r_1} h_2 + (l_2 c_{r_1} - l_2) c_\mu) c_\mu - c_{\alpha_1} h_2 s_\mu + l_2 + l_1, \quad (2.30b)$$

$$A_{15} = -A_{24} = l_2 s_{r_1} c_\mu + s_{\alpha_1} s_{r_1} h_2, \quad (2.30c)$$

$$A_{56} = -A_{65} = h_3 c_{\alpha_0}, \quad (2.30d)$$

$$A_{64} = -A_{46} = h_3 s_{\alpha_0}, \quad (2.30e)$$

$$B_{11} = -s_\mu s_{r_1} (l_2 c_\mu + h_2 s_{\alpha_1}) , \quad (2.30f)$$

$$B_{21} = -c_\mu s_{r_1} (l_2 c_\mu + h_2 s_{\alpha_1}) , \quad (2.30g)$$

$$B_{31} = c_{r_1} (l_2 c_\mu + h_2 s_{\alpha_1}) , \quad (2.30h)$$

$$B_{12} = h_2 (c_{r_1} c_{\alpha_1} s_\mu - s_{\alpha_1} c_\mu) , \quad (2.30i)$$

$$B_{22} = h_2 (c_{r_1} c_{\alpha_1} c_\mu + s_{\alpha_1} s_\mu) , \quad (2.30j)$$

$$B_{32} = h_2 s_{r_1} c_{\alpha_1} , \quad (2.30k)$$

$$B_{43} = -h_3 s_{\alpha_0} , \quad (2.30l)$$

$$B_{53} = h_3 c_{\alpha_0} . \quad (2.30m)$$

**Remarque 2.13 :**

Comme attendu par la [remarque 2.10](#), les composantes de  $A$  et  $B$  dépendent à la fois des variables de forme et de celles de la fibre. Pour entrer plus profondément dans les détails, les expressions sus-mentionnées dépendent explicitement de la forme, au travers de  $r_1$ , et implicitement de  $g$ , au travers des expressions de  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  données par (2.20) et (2.22), respectivement. Comme annoncé en [remarque 2.9](#), cette seconde dépendance correspond à la perte de symétrie induite par le modèle géométrique des contacts qui alimente les conditions cinématiques (2.28) au travers des vecteurs position de  $C_0$  et  $C_1$ .

**Remarque 2.14 :**

Comme le souligne la [remarque 2.4](#), deux des contraintes cinématiques ci-dessus peuvent être déduites par la dérivation des deux contraintes holonomes (2.18) de la forme  $\Phi_p(g, r) = 0_2$ , qui imposent le contact entre les roues et le sol, en un point. Pour le confirmer, calculons tout d'abord la dérivée temporelle de (2.20) et (2.22). Nous obtenons ainsi, pour  $i = 0, 1$  :

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\dot{a}_i b_i - \dot{b}_i a_i}{a_i^2 + b_i^2} , \quad (2.31)$$

où nous avons introduit les notations :

$$\begin{aligned} a_0 &= -R_{12} , \\ b_0 &= -R_{11} , \\ a_1 &= -c_{r_1} (R_{11} s_\mu + R_{12} c_\mu) - s_{r_1} R_{13} , \\ b_1 &= R_{12} s_\mu - R_{11} c_\mu , \end{aligned} \quad (2.32)$$

ainsi que leurs dérivées temporelles :

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_0 &= R_{11}\Omega_3 - R_{13}\Omega_1 , \\
 \dot{b}_0 &= R_{13}\Omega_2 - R_{12}\Omega_3 , \\
 \dot{a}_1 &= \dot{r}_1 s_{r_1} (R_{11}s_\mu + R_{12}c_\mu) - s_{r_1} (R_{11}\Omega_2 - R_{12}\Omega_1) - \dot{r}_1 c_{r_1} R_{13} + c_{r_1} s_\mu \dot{b}_0 + c_{r_1} c_\mu \dot{a}_0 , \\
 \dot{b}_1 &= (R_{13}\Omega_1 - R_{11}\Omega_3)s_\mu - (R_{12}\Omega_3 - R_{13}\Omega_2)c_\mu ,
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

obtenues par la relation  $(\dot{R}_{11}, \dot{R}_{12}, \dot{R}_{13})^\top = (R_{11}, R_{12}, R_{13})^\top \times \Omega$ . Puis, utiliser les expressions ci-dessus de  $\dot{\alpha}_0$  et  $\dot{\alpha}_1$  dans la dérivée temporelle de (2.18) donne :

$$\begin{aligned}
 {}^0s_e^\top v(p_0(C_0)) &= 0 , \\
 {}^0s_e^\top (v(p_0(C_1)) - v(p_0(C_0))) &= 0 .
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Comme attendu, (2.34) qui est une combinaison linéaire des expressions (2.29), définit les deux contraintes cinématiques qui forcent à zéro les vitesses relatives roues-sol, suivant la normale au sol, c'est-à-dire la verticale.

## 2.5.2 Cinématique explicite de la bicyclette

Suivant l'algorithme général de modélisation résumé en [remarque 2.7](#), dans la présente section, nous allons calculer le noyau des contraintes cinématiques (2.29) à partir des équations (2.30). Ce calcul représente une inversion généralisée du modèle cinématique implicite des contraintes. Par conséquent, elle peut introduire des singularités qui doivent être traitées séparément. Dans le cas de la bicyclette, de telles singularités n'existent pas, et l'inversion de (2.29) donne, après une succession d'opérations algébriques simples, détaillée en [annexe B](#), le modèle cinématique explicite du vélo sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} = H(g, r) \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \dot{r}_1 \\ \dot{r}_3 \end{pmatrix} ,$$

qui correspond à l'instanciation de la forme générale (2.6) pour la bicyclette. En se référant aux calculs de l'[annexe B](#),  $H$  peut être détaillé comme suit :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{15} \\ H_{25} \\ H_{35} \\ H_{45} \\ 1 \\ H_{65} \\ 0 \\ H_{85} \\ 0 \end{pmatrix} \Omega_2 + \begin{pmatrix} H_{17} \\ H_{27} \\ H_{37} \\ H_{47} \\ 0 \\ H_{67} \\ 1 \\ H_{87} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{r}_1 + \begin{pmatrix} H_{19} \\ H_{29} \\ H_{39} \\ H_{49} \\ 0 \\ H_{69} \\ 0 \\ H_{89} \\ 1 \end{pmatrix} \dot{r}_3 , \tag{2.35}$$

dont les composantes dépendent de  $g$  au travers des angles  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  et de  $r$  au travers de  $r_1$ .

## 2.6 Dynamique de la bicyclette

Selon la [remarque 2.7](#), notre algorithme général poursuit par le calcul de la dynamique libre, c'est-à-dire la dynamique (2.2) avec  $\lambda = 0$  dont nous déduisons finalement la dynamique réduite du vélo. Cette dynamique réduite sera, par la suite, intégrée numériquement lors des simulations illustratives de la [section 2.7](#).

### 2.6.1 Calcul de la dynamique libre de la bicyclette

Parmi les différentes méthodes menant à l'obtention de la dynamique libre, nous pourrions user des équations de Poincaré sur le groupe de Lie  $G \times \mathbb{R}^n$  avec une loi de composition interne  $(g, r) \circ (g', r') = (gg', r + r')$  comme présentée dans [[Boyer et Primault 2005](#)]. Bien que conceptuellement directe, nous préférons opter pour une approche informatiquement plus efficace, basée sur la formulation récursive Newton-Euler des systèmes multi-corps [[Featherstone 2008](#)]. Avec cette approche, en supposant que les corps soient numérotés par ordre croissant de  $\mathcal{B}_0$  aux extrémités de chacune des branches<sup>1</sup> et en dénotant  $j$  le corps courant et  $i = a(j)$  son antécédent, la dynamique du MMS présenté en [figure 2.1](#) peut être reformulée, avec une définition alternative de l'espace de configuration  $\mathcal{C} = (\text{SE}(3))^{n+1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For } j = n, \dots, 0 : f_j = \mathcal{M}_j \dot{\eta}_j - f_{in,j} - f_{ext,j} + \sum_{k|a(k)=j} \text{Ad}_{g_j}^T f_k, \\ \text{For } j = 1, \dots, n : \begin{array}{l} {}^e \dot{g}_0 = {}^e g_0 \hat{\eta}_0, \\ {}^e g_j = {}^e g_i {}^i g_j(r_j), \\ \eta_j = \text{Ad}_{g_i} \eta_i + \dot{r}_j A_j, \end{array} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.36a) \\ (2.36b) \end{array}$$

dont (2.36a) représente l'équilibre des forces s'appliquant sur un corps isolé dans la structure, tandis que dans (2.36b) nous trouvons, de haut en bas, l'équation de reconstruction du corps de référence à laquelle s'ajoute les contraintes géométrique et cinématique imposées par les liaisons holonomes qui inter-connectent les corps. Pour entrer plus en détail,  $\eta_j \in \text{se}(3)$  dénote les vitesses du corps  $\mathcal{B}_j$  dans le repère  $\mathcal{R}_j$ ,  $A_j \in \text{se}(3)$  est la vitesse unitaire supportée par l'axe de la  $j^{\text{ème}}$  liaison.  $\mathcal{M}_j$  est la matrice d'inertie du corps  $\mathcal{B}_j$  dans  $\text{se}(3) \otimes \text{se}(3)^*$  tandis que  $f_j, f_{in,j}, f_{ext,j} \in \text{se}(3)^*$  dénotent, respectivement, le torseur des forces inter-corps exercées par  $\mathcal{B}_{j-1}$  sur  $\mathcal{B}_j$ ,

---

1. On notera que le paramétrage de la bicyclette présentée en [figure 2.2](#) obéit à cette convention.

celui des forces inertielles (Coriolis et centrifuge) et celui des forces externes exercées sur le corps  $\mathcal{B}_j$ .  $Ad_g$  est l'adjointe de tout  $g \in \text{SE}(3)$  sur  $\text{se}(3)$  et, dans le contexte ci-dessus,  $Ad_{j_{g_i}}$  permet de faire passer une vitesse dans  $\text{se}(3)$  du repère  $\mathcal{R}_i$  au repère  $\mathcal{R}_j$ . La différentiation temporelle des contraintes cinématiques donne de nouvelles équations liant les accélérations de corps consécutifs dans la structure arborescente du MMS :

$$\text{Pour } j = 1, \dots, n : \dot{\eta}_j = Ad_{j_{g_i}} \dot{\eta}_i + \zeta_j + \ddot{r}_j A_j, \quad (2.37)$$

où  $\zeta_j = \dot{Ad}_{j_{g_i}} \eta_i$  est détaillé plus amplement en [annexe A](#). Maintenant nous considérons (2.36a) pour  $j = 0$ , et sa projection sur  $A_j$  pour  $j \neq 0$ , où nous remarquons que  $\tau_j = A_j^\top f_j$ . Puis, en utilisant récursivement (2.37) et (2.36a), nous pouvons éliminer toute occurrence de  $f_j$  et  $\dot{\eta}_j$  pour  $j \neq 0$  de ces équations selon le processus présenté en [annexe A](#). Finalement, nous obtenons un modèle dynamique inverse de la forme :

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & \mathfrak{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_0 \\ \ddot{r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_{in} \\ Q_{in} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_{ext} \\ Q_{ext} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

où  $f_0$  et  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)^\top = (A_1^\top f_1, \dots, A_n^\top f_n)^\top$  représentent le torseur des forces appliquées sur le  $\mathcal{B}_0$  et le vecteur des couples articulaires qui devraient être appliqués au MMS afin qu'il se meuve, respectant  $({}^e g_0, \eta_0, \dot{\eta}_0, r, \dot{r}, \ddot{r})$ . Puisque  $({}^e g_0, \eta_0, \dot{\eta}_0, r, \dot{r}, \ddot{r}) = (g, \eta, \dot{\eta}, r, \dot{r}, \ddot{r})$ , l'élimination récursive sus-mentionnée fournit au final les expressions attendues de toutes les matrices de la dynamique libre (2.2) avec  $\lambda = 0$ . Ces expressions sont détaillées, pour le cas de la bicyclette, en [annexe A](#).

## 2.6.2 Dynamique réduite de la bicyclette

Appliquer les relations de projection (2.11) et (2.12) à la dynamique libre (2.2) donne la dynamique réduite attendue :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{r}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_r & M_r^\top \\ M_r & \mathfrak{m}_r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_r \\ Q_r \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (2.39a)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \left( H \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} \right)^\wedge. \end{cases} \quad (2.39b)$$

Se référant à la [remarque 2.4](#) et à la [remarque 2.7](#), cette dynamique doit être initialisée par un état réduit  $(g, r, \eta_r, \dot{r}_r)$  ( $t = 0$ ) dont la configuration initiale satisfait (2.19). Parmi les configurations initiales compatibles, la plus simple est celle donnée par la [figure 2.2](#) c'est-à-dire celle définie par la paire  $(g, r)$  avec  $r = (0, r_2, r_3)$  et  $g = (R, p)$  où  $R = \text{Id}_3$  et  $p = (h_3, y, z)$ ;  $r_2, r_3, y$  et  $z$  pouvant être choisis arbitrairement. Cette configuration initiale, simple, étant également équilibrée statiquement, sera systématiquement utilisée pour initialiser les simulations dynamiques de la [section 2.7](#).



**Remarque 2.15 :**

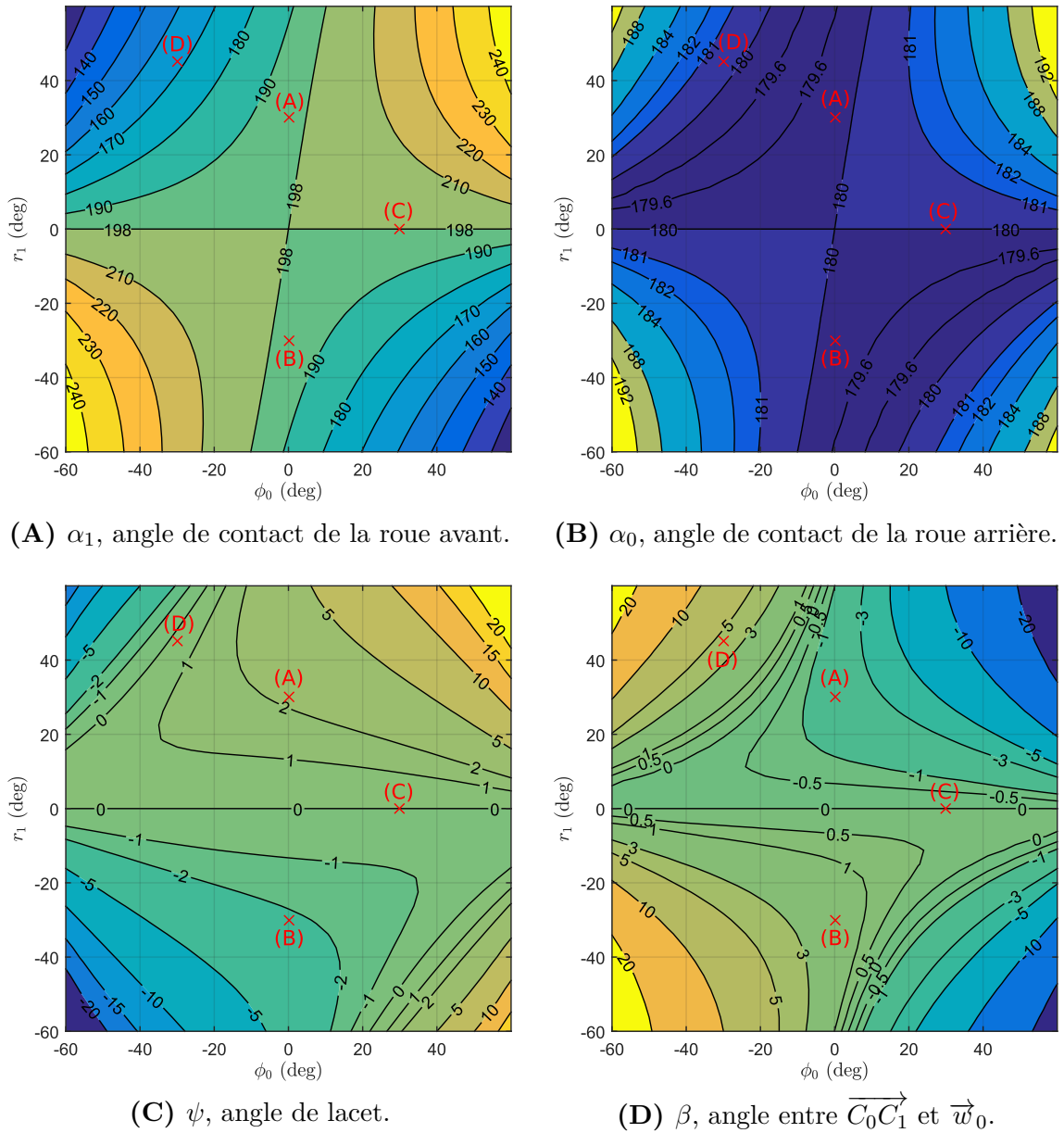
Afin de trouver d'autres configurations initiales compatibles, il est possible, à partir de la configuration initiale de la [figure 2.2](#), de faire cabrer et s'incliner la bicyclette en usant seulement de la partie cinématique du modèle (2.39b) :

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \left( H(g, r) \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \dot{r}_1 \\ \dot{r}_3 \end{pmatrix} \right)^\wedge. \quad (2.40)$$

En fait, cette partie du modèle pourrait être interprétée comme un système cinématique contrôlé où  $(\Omega_2, \dot{r}_1, \dot{r}_3)$  représente un ensemble d'entrées de contrôle. Ensuite, il est facile de trouver toute autre configuration compatible en intégrant (2.40) à partir de la configuration initiale de la [figure 2.2](#) tandis que  $\dot{r}_3$  est fixé à zéro. Par exemple, on peut imposer une séquence de deux manœuvres. La première manœuvre consiste à tourner le guidon de  $r_1 = 0$  à une position angulaire souhaitée  $r_{1d}$  avec  $\Omega_2 = 0$ . La seconde consiste à maintenir  $r_1 = r_{1d}$  tout en inclinant le cadre en appliquant la commande  $\Omega_2 = K_\phi(\phi_0 - \phi_{0d})$  dans (2.40), avec  $\phi_{0d}$  une valeur désirée de l'angle de roulis de la roue arrière. Alternativement, on peut directement imposer  $\dot{r}_3 = 0$ ,  $\dot{r}_1 = K_1(r_1 - r_{1d})$  et  $\Omega_2 = K_\phi(\phi_0 - \phi_{0d})$  dans (2.40). Ces deux commandes permettent de piloter (2.40) de la configuration compatible initiale de la [figure 2.2](#) à une configuration désirée qui soit compatible, c'est-à-dire qui satisfasse  $\Phi_p(g, r) = 0_2$  pour  $r_1 = r_{1d}$  et  $\phi_0 = \phi_{0d}$ . Tout au long de l'intégration temporelle de (2.40) contrôlée par cette loi de commande, les deux angles  $\alpha_0$  (qui paramètre le tangage du cadre) et  $\alpha_1$  (qui paramètre le point de contact de la roue avant) changent avec la configuration  $g$  jusqu'à atteindre leur valeur finale.

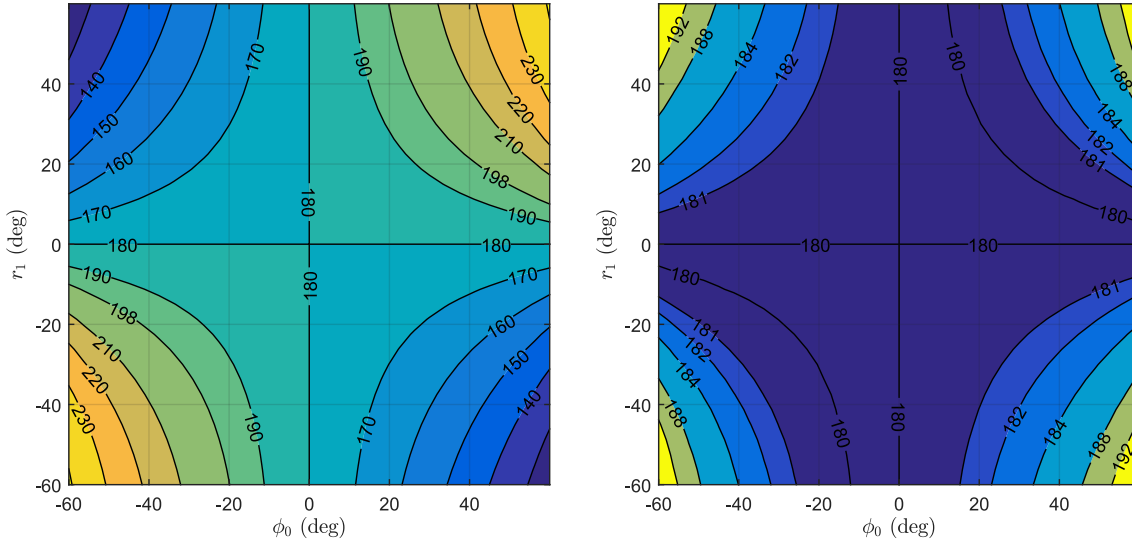
**Remarque 2.16 :**

La [figure 2.5A](#) et la [figure 2.5B](#) présentent, respectivement, les iso-valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_0$ , en fonction de l'angle de roulis  $\phi_0$  et de l'angle au guidon  $r_1$ , obtenues numériquement après convergence de la loi de commande cinématique sus-mentionnée (voir [remarque 2.15](#)). À des fins d'illustration, quatre configurations particulières, repérées par les points A, B, C et D sur les [figures 2.5](#), sont exposées dans les [figures 2.7](#) et les [figures 2.8](#). Notons que les points centraux de la [figure 2.5A](#) et de la [figure 2.5B](#) dépeignent la configuration initiale de la bicyclette, telle que présentée en [figure 2.2](#), pour laquelle  $\alpha_1 = \pi + \mu$  avec  $\mu$  l'angle d'inclinaison de la fourche valant, dans notre cas,  $\mu = \pi/10$  rad. Sur ces figures, se décaler le long de la verticale  $\phi_0 = 0$ , en augmentant  $r_1$ , correspond à tourner le guidon vers la gauche tout en maintenant la bicyclette droite. Ce mouvement fait se déplacer les points de contact  $C_1$  et  $C_0$  vers l'avant des roues avant et arrière, respectivement. L'angle  $\beta$  entre le vecteur définissant la droite passant par les points de contact  $\overrightarrow{C_0C_1}$  et la direction de roulement de la roue arrière  $\vec{w}_0$  s'ouvre à mesure que  $r_1$



**Figure 2.5** – Iso-valeurs des angles  $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $\psi$  et  $\beta$  (en degrés) dans le plan  $(\phi_0, r_1)$ . Angle de la fourche :  $\mu = \pi/10$  rad

augmente comme l'illustrent la [figure 2.7A](#) et la [figure 2.7B](#), qui présentent des vues de dessus de la bicyclette pour lesquelles le couple  $(\phi_0, r_1)$  vaut, respectivement  $(\phi_0, r_1) = (0^\circ, 30^\circ)$  et  $(\phi_0, r_1) = (0^\circ, -30^\circ)$ . Si l'on se décale toujours suivant la verticale  $\phi_0 = 0$  mais cette fois-ci en diminuant  $r_1$ , c'est-à-dire en tournant le guidon vers la droite, on remarquera que les points de contact  $C_0$  et  $C_1$  se déplacent toujours vers l'avant des roues et que l'angle  $\beta$  s'ouvre également, avec la même valeur mais de signe opposé, comme on pouvait s'y attendre. Dans le cas particulier où la bicyclette est verticale  $\phi_0 = 0$  et que l'angle de la fourche est nulle ( $\mu = 0$ ),  $C_0$  et  $C_1$  deviennent indépendants de  $r_1$ ,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  restent alors



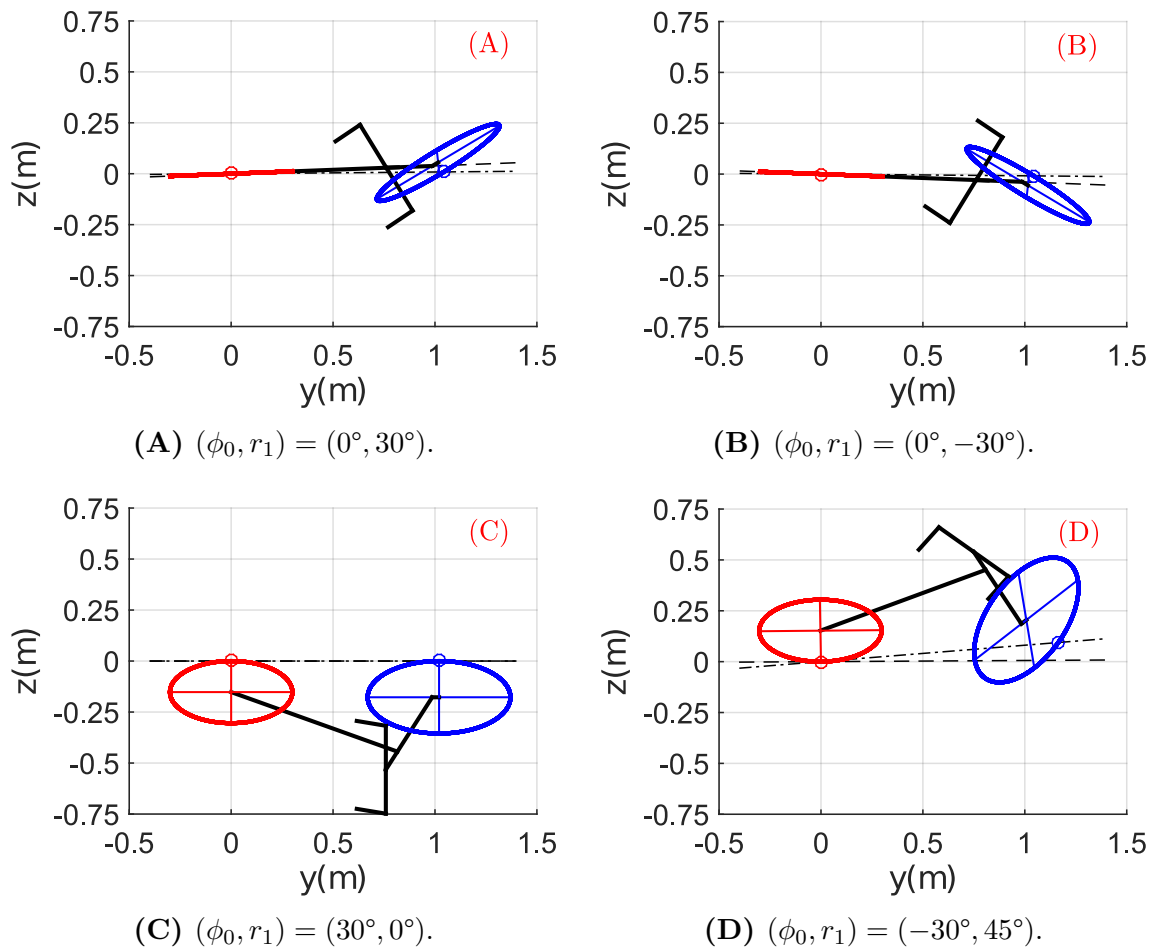
(A)  $\alpha_1$ , angle de contact de la roue avant. (B)  $\alpha_0$ , angle de contact de la roue arrière.

**Figure 2.6** – Iso-valeurs des angles  $\alpha_1$ ,  $\alpha_0$  (en degrés) dans le plan  $(\phi_0, r_1)$ .  
Angle de la fourche :  $\mu = 0$  rad

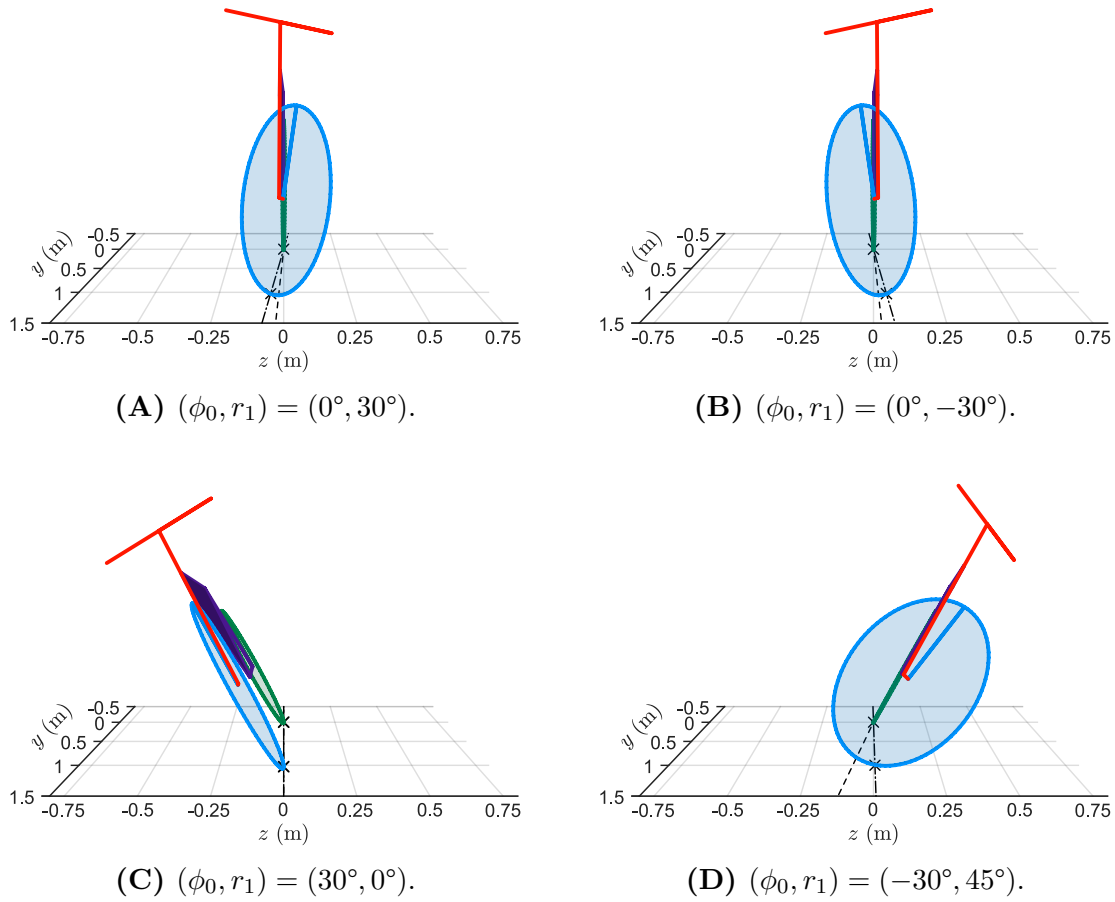
égaux à leur valeur initiale, à savoir  $\pi$  et  $\pi + \mu = \pi$ , respectivement, pour tout  $r_1$ . Dans ce cas de figure particulier, la [figure 2.5A](#) et la [figure 2.5B](#) se retrouvent redressées (voir les [figures 2.6](#)). Si maintenant, pour  $\mu \neq 0$  ([figures 2.5](#)), on se décale le long de  $r_1 = 0^\circ$ , on incline la bicyclette par rapport à la normale au sol. Ceci est illustré par la [figure 2.7C](#) dans laquelle la bicyclette est inclinée de  $\phi_0 = 30^\circ$  tout en maintenant  $r_1 = 0$ . Dans ce cas, aucun des deux points de contact  $C_0$  et  $C_1$  ne se déplace, ni le long de la périphérie des roues, ni sur le sol. Les autres points des [figures 2.5](#) représentent la combinaison de ces deux tendances comme l'illustre la [figure 2.7D](#) dans laquelle la bicyclette est inclinée de  $\phi_0 = -30^\circ$  tandis que le guidon est tourné de  $r_1 = 45^\circ$ . Enfin, la [figure 2.5C](#) et la [figure 2.5D](#) présentent respectivement l'angle de lacet  $\psi$  et l'angle  $\beta$  entre la droite passant par les points de contact et la direction de roulement de la roue arrière, dans le plan  $(\phi_0, r_1)$ . Ces figures montrent comment la direction de roulement de la roue arrière évolue ainsi que comment  $\overrightarrow{C_0C_1}$  dévie de celle-ci lorsque l'on incline la bicyclette et que l'on tourne son guidon. On pourra également noter que, puisque  $\pi - \alpha_0$  est une mesure du tangage du cadre de la bicyclette, la [figure 2.5B](#) est également image du tangage.

**Remarque 2.17 :**

Le calcul des forces d'inertie réduites (2.12) nécessite de dériver  $\dot{H}$  qui représente une des plus complexes expressions du modèle de la bicyclette. Puisque dans notre modèle de contacts, la dépendance en  $g$  apparaît au travers des deux angles  $\alpha_0$



**Figure 2.7** – Vues de dessus de la bicyclette pour différentes valeurs de  $(\phi_0, r_1)$ . (—) direction de roulement de la roue arrière. (---) ligne passant par les points de contact  $c_0$  et  $c_1$ .



**Figure 2.8** – Vues de face tri-dimensionnelles de la bicyclette pour différentes valeurs de  $(\phi_0, r_1)$ . (—) direction de roulement de la roue arrière. (---) ligne passant par les points de contact  $c_0$  et  $c_1$ .

et  $\alpha_1$ , la formulation générale (2.8) s'écrira, dans notre cas :

$$\dot{H} = \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha_0} \right) \dot{\alpha}_0 + \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha_1} \right) \dot{\alpha}_1 + \left( \frac{\partial H}{\partial r_1} \right) \dot{r}_1 ,$$

où  $\dot{\alpha}_0$  et  $\dot{\alpha}_1$  sont donnés par (2.31), (2.32) et (2.33).

## 2.7 Applications Numériques

Dans la présente section nous appliquons notre approche de modélisation à la bicyclette de la figure 2.2. Celle-ci est paramétrée par les 26 paramètres listés en tableau 2.1 qui sont exactement ceux du benchmark proposé dans [Meijaard et al. 2007] mais traduits pour correspondre à notre cadre de modélisation. Au-delà des paramètres géométriques précédemment introduits, dans le tableau 2.1,  $m_0$  (respectivement,  $m_1$ ) et  $(x_0, y_0, 0)^\top$  (respectivement,  $(x_1, 0, z_1)^\top$ ) désignent la masse et la position du centre de masse  $G_0$  (respectivement,  $G_1$ ) du cadre de la bicyclette (respectivement, de sa fourche) dans le repère  $\mathcal{R}_0$  (respectivement,  $\mathcal{R}_1$ ). Les deux matrices :

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_{0xx} & I_{0xy} & 0 \\ I_{0xy} & I_{0yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{0zz} \end{pmatrix} ,$$

$$I_1 = \begin{pmatrix} I_{1xx} & 0 & I_{1zx} \\ 0 & I_{1yy} & 0 \\ I_{1zx} & 0 & I_{1zz} \end{pmatrix} ,$$

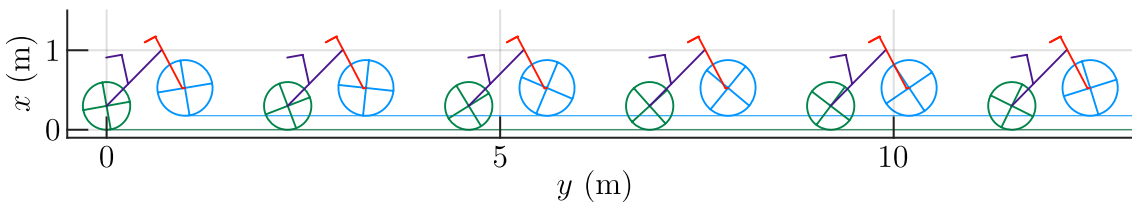
désignent les matrices d'inertie du cadre et de la fourche exprimées dans leur propre repère mobile  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$ . Les roues avant et arrière sont modélisées par deux disques homogènes de masse  $m_2$  et  $m_3$ . Leur centre de masse se situe au centre des roues et leurs matrices d'inertie sont diagonales, avec pour la roue avant (respectivement, pour la roue arrière), le moment d'inertie axial noté  $I_{2zz}$  (respectivement,  $I_{3zz}$ ) et ceux radiaux notés  $I_{2xx} = I_{2yy}$  ( $I_{3xx} = I_{3yy}$ , respectivement). L'application de l'algorithme présenté précédemment nous a permis d'obtenir une forme symbolique du modèle dynamique réduit. En utilisant un paramétrage avec des quaternions pour la reconstruction, le modèle est intégré numériquement dans Matlab avec une méthode prédicteur-correcteur (une méthode explicite de quatrième ordre pour l'étape de prédiction (Adams-Bashforth) et une méthode implicite de quatrième ordre pour l'étape de correction (Adams-Moulton)). Au final, la bicyclette peut être simulée en temps réel (avec Matlab), sur une machine équipée d'un processeur Intel i7@3 GHz (5 s de simulation sont calculées en moins de 2.6 s avec un pas de temps de 0.005 s).

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$m$	6	$n$	4
$l_1$	0.986 m	$\gamma_g$	9.81 m s <sup>-2</sup>
$l_2$	0.0337 m	$I_{2xx} = I_{2yy}$	0.141 kg m <sup>2</sup>
$\mu$	$\pi/10$ rad	$I_{2zz}$	0.28 kg m <sup>2</sup>
$h_2$	0.35 m	$I_{3xx} = I_{3yy}$	0.0603 kg m <sup>2</sup>
$h_3$	0.3 m	$I_{3zz}$	0.12 kg m <sup>2</sup>
$x_0$	0.6 m	$I_{0xx}$	2.8 kg m <sup>2</sup>
$y_0$	0.3 m	$I_{0yy}$	9.2 kg m <sup>2</sup>
$x_1$	0.0288 m	$I_{0zz}$	11.0 kg m <sup>2</sup>
$z_1$	0.368 m	$I_{0xy}$	-2.4 kg m <sup>2</sup>
$m_0$	85 kg	$I_{1xx}$	0.0584 kg m <sup>2</sup>
$m_1$	4 kg	$I_{1yy}$	0.06 kg m <sup>2</sup>
$m_2$	3 kg	$I_{1zz}$	0.0076 kg m <sup>2</sup>
$m_3$	2 kg	$I_{1zx}$	-0.0091 kg m <sup>2</sup>

**Tableau 2.1** – Paramètres de simulation de la bicyclette.

### 2.7.1 Reconstruction cinématique

Comme l'a souligné la [remarque 2.4](#), les solutions de (2.39) doivent préserver l'altitude initiale des deux points de contact (par rapport au sol). Cette prévision est confirmée par la simulation numérique ci-dessus. À des fins d'illustration, nous considérons ici le cas où la simulation débute avec la bicyclette, guidon droit ( $r_1 = 0$ ), légèrement cabrée tel que  ${}^0s_e(t=0) = (-c_{\alpha_0}, s_{\alpha_0}, 0)^\top$ , c'est-à-dire avec un tangage initial de  $\pi - \alpha_0 = -10^\circ$ . La bicyclette est alors lancée avec une vitesse d'avance initiale (dans le plan du sol)  $V = (V_1^2 + V_2^2)^{1/2} = 4.6 \text{ m s}^{-1}$ . La simulation est jouée pendant 5 s avec un pas de temps de 0.001 s. Comme le montre la [figure 2.9](#), les deux points de contact se déplacent en ligne droite tout en conservant leur altitude initiale, durant tout le mouvement. Pour entrer dans les détails, le modèle de contact (2.13) alimenté avec la configuration initiale ( $g(0), r(0)$ ) calcule les deux angles de contact  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  qui sont utilisés pour calculer l'espace des vitesses admissibles  $H$ , ces vitesses assurant à chacune des deux roues d'évoluer sur un plan parallèle au sol,



**Figure 2.9** – Instantanés de la bicyclette initialement cabrée, dans le plan  $x-y$ . L'intervalle de temps entre deux instantanés consécutifs est de 0.5 s.

à altitude constante. Dans le cas présent, comme  $\Phi_p(g(0), r(0)) \neq 0_2$ , ces plans ne coïncident pas avec celui du sol mais ont une altitude fixée par les conditions initiales. Suivant cette constatation, pour toutes les simulations suivantes, la dynamique réduite sera initialisée avec la configuration statiquement équilibrée illustrée dans la [figure 2.2](#), qui satisfait trivialement les deux contraintes holonomes d'altitude zéro (2.19). Cependant, comme cela est mentionné dans la [remarque 2.5](#), l'intégration numérique de l'équation de reconstruction introduit une légère dérive des contraintes (2.19) qui fait progressivement décoller le vélo du sol. Bien qu'étant minuscule (voir [tableau 2.2](#) qui illustre cette dérive dans le cas de l'autostabilisation de la bicyclette présentée en [section 2.7.3](#)), cette dérive peut toutefois être supprimée en remplaçant l'équation de reconstruction (2.39b) par sa version corrigée :

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \left( H \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}^0A_N^\top \\ {}^0B_N^\top \end{pmatrix} K {}^0\Phi_p \right)^\wedge, \quad (2.41)$$

où  $K$  est une matrice  $6 \times 6$  positive de gains élevés, et  ${}^0\Phi_p$  et  $({}^0A_N, {}^0B_N)$  modélisent les contraintes géométriques et cinématiques imposées par les 2 conditions de non-pénétration et non-décollement des roues suivant la normale au sol, mais exprimées dans le repère de référence  $\mathcal{R}_0$ . Pour obtenir  $({}^0A_N, {}^0B_N)$  et  ${}^0\Phi_p$  nous pouvons nous référer à (2.18) et (2.34), et écrire :

$${}^0\Phi_p = \begin{pmatrix} R^\top \begin{pmatrix} {}^0s_e^\top(p_0(C_1) - p_0(C_0)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ R^\top \begin{pmatrix} {}^0s_e^\top(p_0(C_0) - p_0(O_e)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$${}^0A_N\eta + {}^0B_N\dot{r} = \begin{pmatrix} R^\top \begin{pmatrix} {}^0s_e^\top(v(p_0(C_1)) - v(p_0(C_0))) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ R^\top \begin{pmatrix} {}^0s_e^\top v(p_0(C_0)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

où les facteurs de  ${}^0s_e^\top$  peuvent être facilement exprimés en termes de  $(g, r)$  et  $(\eta, \dot{r})$  en utilisant (2.18) et (2.28). Maintenant, si les composantes de  $K$  sont suffisamment élevées, la dynamique corrigée, c'est-à-dire, l'ensemble des équations différentielles (2.39) avec un étage dynamique inchangé et un étage cinématique remplacé par l'équation de reconstruction corrigée (2.41), peut être interprétée comme un système à deux échelles de temps avec  $(g, r)$  et  $(\eta_r, \dot{r}_r) = (\Omega_2, \dot{r}_1, \dot{r}_2)$  les composantes rapides et lentes, respectivement [Lobry et Sari 2005]. Ainsi,  $(g, r)$  est dirigé très rapidement vers la variété lente  $\Phi_p = 0_2$ , tandis qu'un mouvement lent a lieu sur la variété lente en fonction de la dynamique non corrigée (2.39). En bref, le terme de correction à



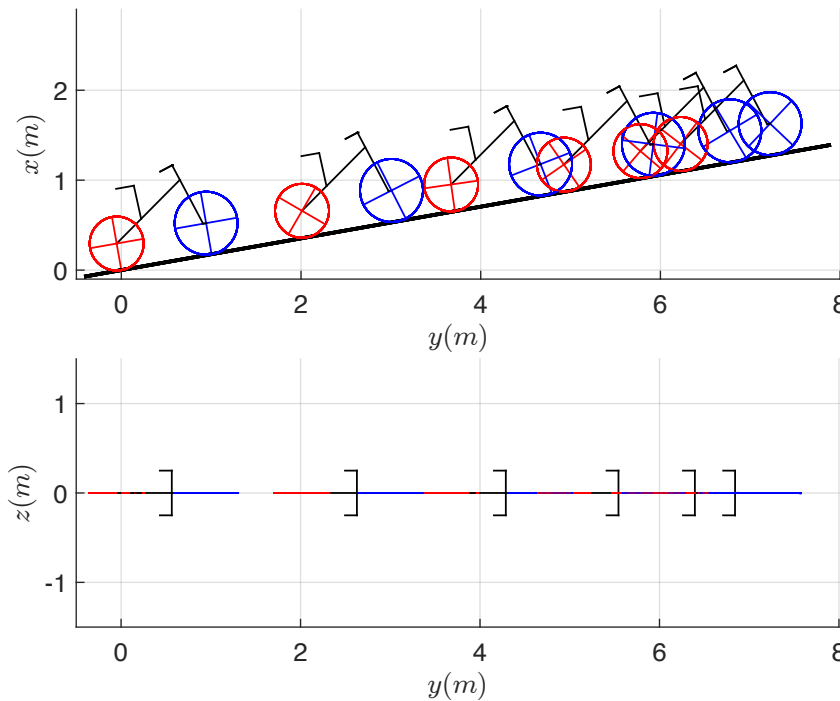
gain élevé de (2.41) assure la satisfaction numérique des deux contraintes holonomes sans perturber la dynamique du vélo. En pratique, nous avons pris en compte pour les simulations ultérieures :

$$K = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 10\text{Id}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre de réglage que nous avons fixé à  $\epsilon = 0.01$ . Cette correction de la dérive sera amplement illustrée sur le cas de l'autostabilisation de la bicyclette en section 2.7.3.

### 2.7.2 Mouvement passif sur un plan incliné

Dans ce premier exemple dynamique, la bicyclette est passive (c'est-à-dire,  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ ) et lancée dans sa configuration verticale droite, guidon droit, avec une vitesse initiale avant de  $V_2 = 4.6 \text{ m s}^{-1}$  le long d'un plan incliné de  $10^\circ$ . La simulation est réalisée sur une durée de 4 s dont les premières 2.5 s sont exposées en figure 2.10 avec des instantanés échantillonnés tous les 0.5 s. La bicyclette monte d'abord la pente en décélérant. Elle s'arrête autour de  $t = 3.40 \text{ s}$ , puis redescend la pente en accélérant. L'équation de reconstruction étant initialisée dans la configuration verticale droite avec  $(\alpha_0, \alpha_1) = (\pi, \mu + \pi)$ , la direction et l'inclinaison sont



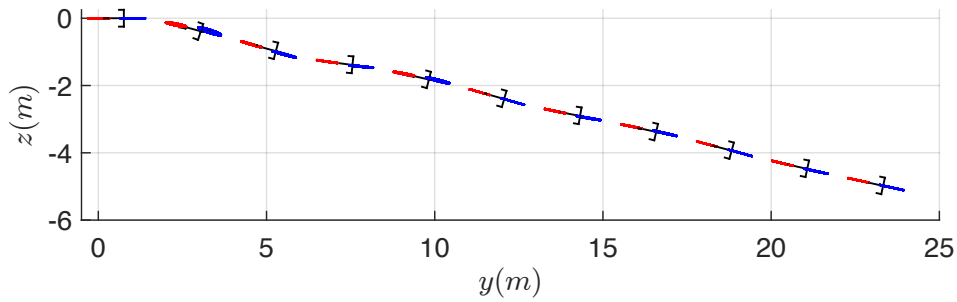
**Figure 2.10** – Instantanés de la phase ascendante d'une bicyclette passive lancée sur un sol incliné. Le temps entre deux instantanés consécutifs est de 0.5 s.

structurellement découplées de la dynamique de roulement ainsi l'excitation de la dynamique de roulement n'affecte pas les deux autres. Par conséquent, la bicyclette reste droite et verticale tout au long de la simulation.

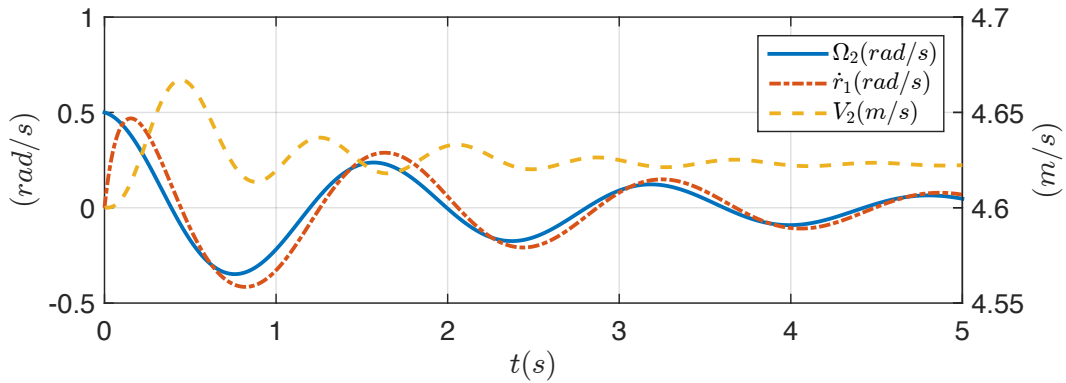
### 2.7.3 Stabilisation asymptotique passive de la bicyclette

Pour ce deuxième exemple dynamique, nous avons choisi de reproduire la simulation présentée dans [Meijaard et al. 2007]. Il est lié à la stabilisation asymptotique d'une bicyclette passive et donc, comme dans le test précédent,  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ . Pour ce faire, les conditions initiales sont choisies comme suit. La vitesse le long de  $n_0$  (vitesse de roulement) est fixée à  $V_2 = 4.6 \text{ m s}^{-1}$  alors que la vitesse angulaire autour de  $n_0$  (vitesse angulaire de roulis) est fixée à  $\Omega_2 = 0.5 \text{ rad s}^{-1}$ . Une vue de dessus du mouvement de la bicyclette est présentée en figure 2.11. La figure 2.12 présente l'évolution temporelle de la vitesse de roulement  $\Omega_2$  et de la vitesse d'avance  $V_2$  du cadre, ainsi que la vitesse angulaire du guidon  $\dot{r}_1$  pour ce test. À partir de leurs valeurs initiales, les courbes de la figure 2.12, qui correspondent exactement aux résultats numériques fournis dans [Meijaard et al. 2007], montrent clairement que la bicyclette s'auto-stabilise au cours du temps. De plus, on peut remarquer que, à mesure que le temps passe, les valeurs de  $\Omega_2$  et  $\dot{r}_1$  tendent vers zéro tandis que la vitesse d'avance du cadre de la bicyclette augmente jusqu'à atteindre une valeur constante proche de  $V_2 = 4.622 \text{ m s}^{-1}$  qui est supérieure à la condition initiale. Comme mentionné par [Meijaard et al. 2007], cela témoigne de la conservation de l'énergie totale du système, une propriété satisfaite par la simulation jusqu'à la précision machine. La figure 2.14 et la figure 2.15 montrent les positions angulaires des points de contact  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sur les roues avant et arrière respectivement. Au long de la simulation, en raison de l'inclinaison du cadre de la bicyclette, les deux points de contact se déplacent d'abord le long de la périphérie des roues avant de retrouver leur position initiale (indiquée par la ligne pointillée rouge dans la figure 2.14 et la figure 2.15) lorsque la bicyclette converge vers sa configuration verticale droite et stable. Le simulateur offre également la possibilité de calculer les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes. Dans notre cas, il y a six multiplicateurs, trois par roue. À fins d'illustration, la figure 2.16 montre l'évolution temporelle de  $\lambda_4$  qui représente la force exercée le long de l'axe  $s_0$  sur la roue arrière, au point de contact. Cette force de réaction assure la non-pénétration et le non-décollement de la roue arrière par rapport au sol. Notons que les multiplicateurs sont tous exprimés dans le repère  $\mathcal{R}_0$  (celui attaché au cadre du vélo) mais peuvent être facilement exprimés dans le repère attaché au sol, pour les besoins de l'étude des interactions sol-pneus, par exemple.

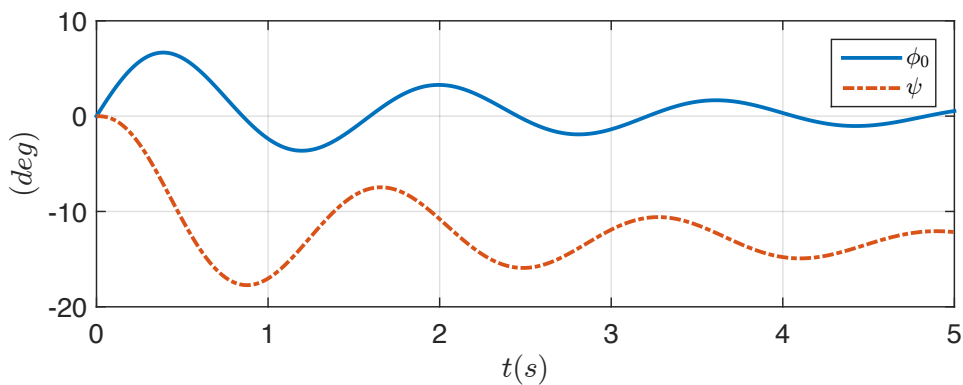
Enfin, nous terminons cet exemple par une brève étude de la dérive et de sa correction. La figure 2.17 présente l'évolution temporelle de l'altitude des deux points



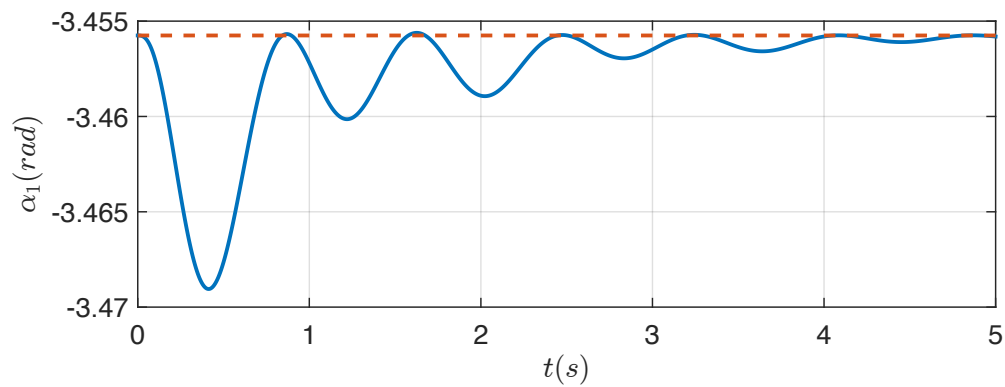
**Figure 2.11** – Trajectoire de la bicyclette dans le plan  $y$ - $z$  (vue de dessus), dans le contexte de l'étude de stabilisation asymptotique. L'intervalle de temps entre chaque instantané est égal à 0.5 s.



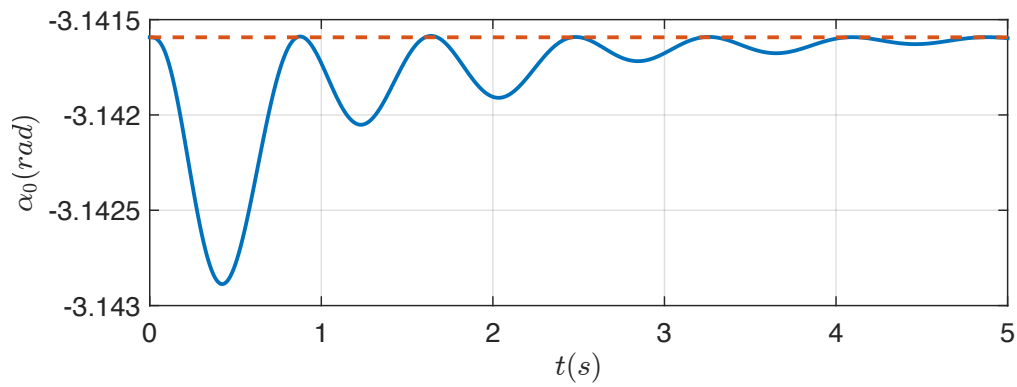
**Figure 2.12** – Vitesse de roulis  $\Omega_2$ , vitesse d'avance  $V_2$  et vitesse angulaire du guidon  $\dot{r}_1$  en fonction du temps  $t$ .



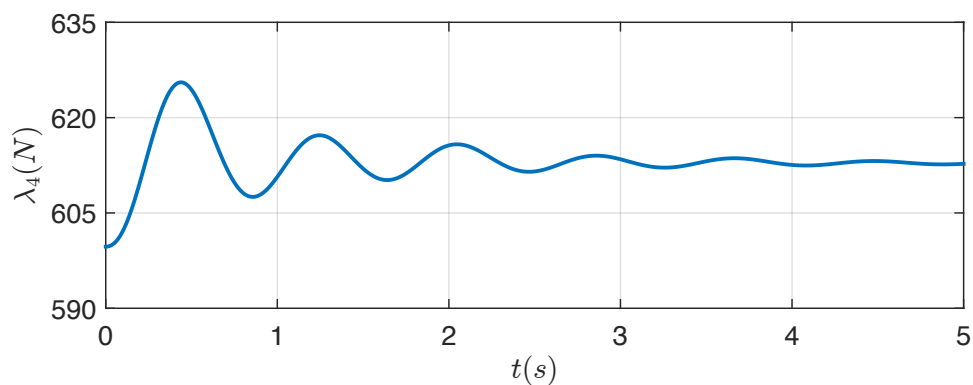
**Figure 2.13** – Angle de roulis  $\phi_0$  et angle de lacet  $\psi$  en fonction du temps  $t$ .



**Figure 2.14** – Évolution temporelle de la position angulaire du point de contact de la roue avant  $\alpha_1$  durant la stabilisation asymptotique passive de la bicyclette.

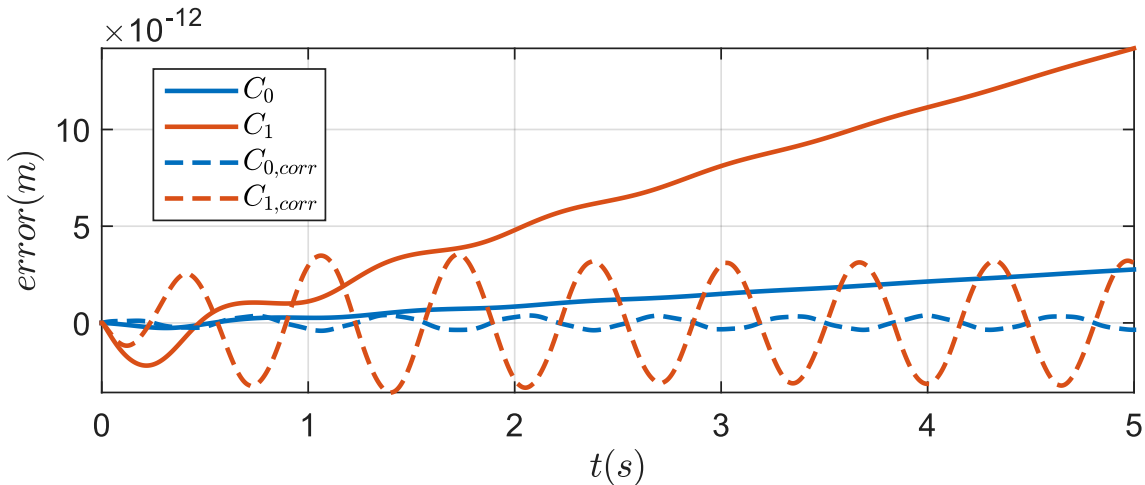


**Figure 2.15** – Évolution temporelle de la position angulaire du point de contact de la roue arriere  $\alpha_0$  durant la stabilisation asymptotique passive de la bicyclette.



**Figure 2.16** – Évolution temporelle de  $\lambda_4$ , la force appliquée sur la roue arriere interdisant la pénétration et le décollement de la roue par rapport au sol.

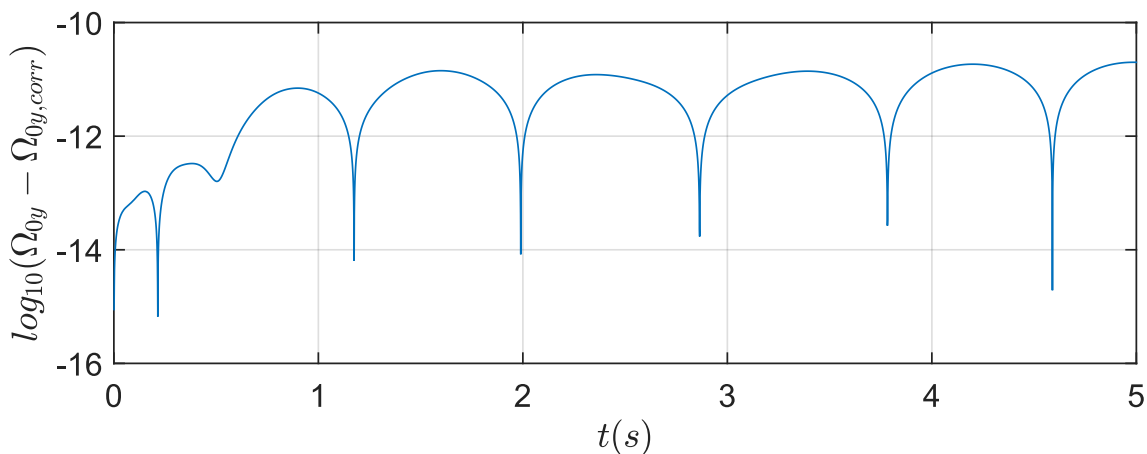
de contact avec et sans correction lorsque  $\epsilon = 0.01$  (2.42), avec un pas de temps de 0.001 s. Comme attendu, sans correction, les courbes de la figure 2.17, qui sont représentatives de toutes nos simulations, montrent une légère dérive de l'altitude des points de contact, qui augmente presque linéairement avec le temps. La deuxième colonne du tableau 2.2 donne la vitesse verticale moyenne  $\langle {}^0s_e^T v(p_0(C_1)) \rangle$  du point de contact de la roue avant  $C_1$  en fonction du pas de temps d'intégration. Comme prévu, la dérive diminue avec le pas de temps et est très faible pour des pas de temps raisonnablement petits. Notez aussi qu'avec  $\epsilon = 0.01$  (2.42), la dérive présentée en figure 2.17 reste de l'ordre de  $10^{-12}$  m, ce qui, pour un pas de temps de 0.001 s, se situe dans la gamme de précision de notre intégrateur d'ordre 4. Enfin, comme prévu, la correction de la dérive n'affecte pas l'évolution temporelle de la dynamique lente comme l'illustrent les graphiques de la figure 2.18 et de la figure 2.19 qui montrent que les variables lentes corrigées et non corrigées  $\Omega_2$  et  $\dot{r}_1$  sont identiques jusqu'à la 10<sup>ème</sup> décimale.



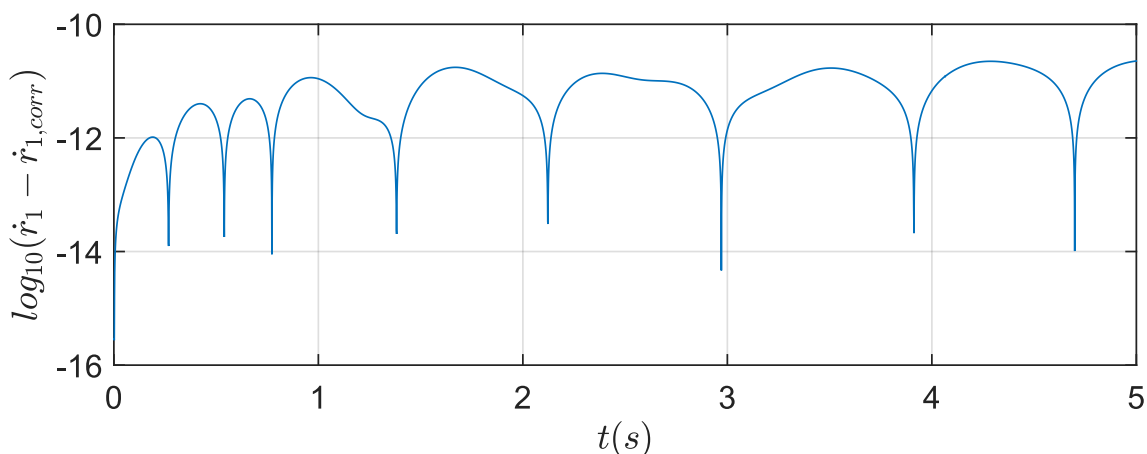
**Figure 2.17** – Évolution temporelle de l'altitude des points de contact  $C_0$  et  $C_1$  dans le cas de l'auto-stabilisation de la bicyclette sans correction, en ligne pleine, et avec correction de la dérive, en pointillé. Pas de temps d'intégration : 0.001 s,  $\epsilon = 0.01$ .

Pas de temps (s)	$\langle {}^0s_e^T v(p_0(C_1)) \rangle$ ( $\mu\text{m s}^{-1}$ )
0,01	0.0655 (1mm en 4.24 heures)
0,005	0.0030815 (1mm en 3.76 jours)
0,0025	0.00015257 (1mm en 2.59 mois)
0,001	0.00000321 (1mm en 9.87 années)
0,0005	0.00000018434 (1mm en 171.9 années)

**Tableau 2.2** – Vitesse de dérive du point de contact de la roue avant  $C_1$  en fonction du pas de temps d'intégration pour l'exemple de stabilisation asymptotique passive.



**Figure 2.18** – Logarithme décimal de la différence entre  $\Omega_2$  avec et sans correction de la dérive ( $\epsilon = 0.01$ ).

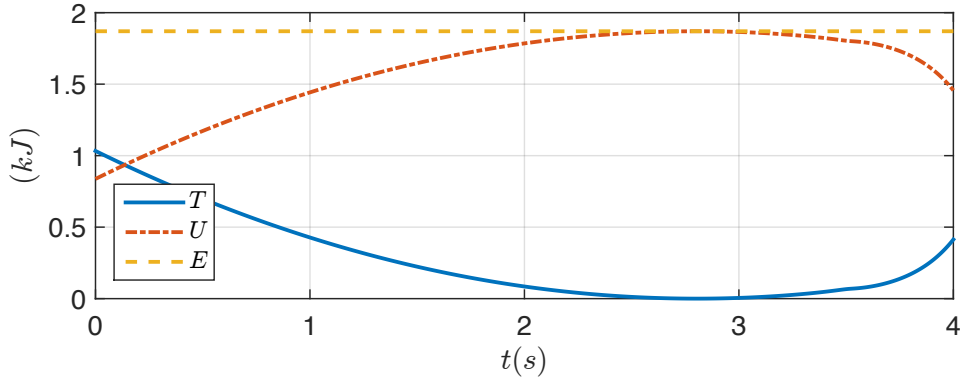


**Figure 2.19** – Logarithme décimal de la différence entre  $r_1$  avec et sans correction de la dérive ( $\epsilon = 0.01$ ).

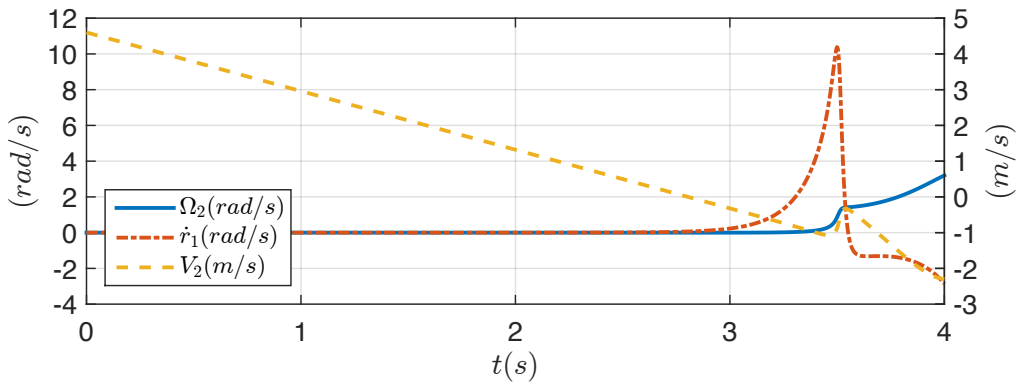
### 2.7.4 Mouvement passif et chute sur un plan incliné

Dans ce troisième exemple dynamique, la bicyclette est lancée avec les mêmes conditions initiales que le test de la [section 2.7.2](#), excepté que  $r_1$  est maintenant initialisé à la valeur infime de  $r_1 = 10^{-8}$  rad. Ceci introduit une très légère asymétrie dans la configuration qui suffit à provoquer la chute de la bicyclette. En effet, alors que la bicyclette monte d'abord la pente comme dans le test de la [section 2.7.2](#), au lieu de redescendre en configuration verticale droite ( $r_1 = 0$ ), son guidon tourne rapidement tandis que la bicyclette s'incline brutalement et finit par tomber. Comme les contraintes sont persistantes (et non intermittentes), en cas de chute, les deux roues ne peuvent pas se soulever du sol. Comme le montre la [figure 2.20](#), tout au long de la simulation (y compris pendant la phase de chute), l'énergie mécanique totale  $E$  est conservée et préserve sa valeur initiale  $E = T + U = 1870$  J dans notre cas.

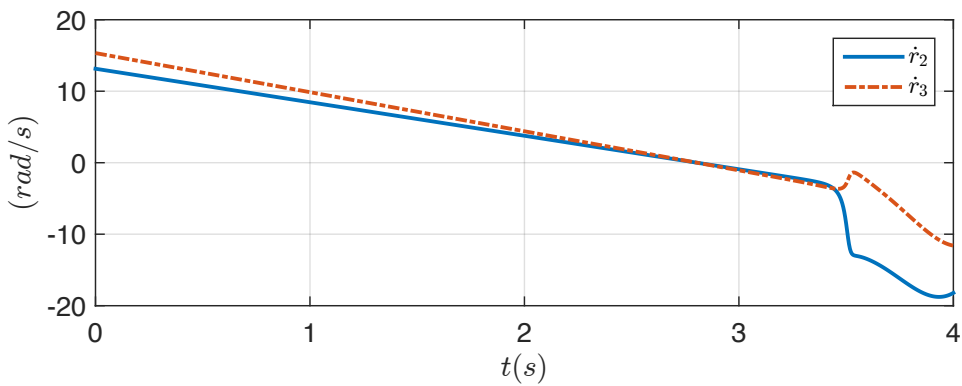
Pendant la chute, puisque la bicyclette prend des configurations tri-dimensionnelles complètes, les deux points de contact s'éloignent rapidement de leur position initiale (voir les parties finales des courbes de la [figure 2.21](#) et de la [figure 2.22](#)).



**Figure 2.20** – Évolution temporelle de l'énergie cinétique, potentielle et totale de la bicyclette roulant sur un sol incliné.



**Figure 2.21** – Évolution temporelle de  $V_2$ ,  $\Omega_2$  et  $\dot{r}_1$  de la bicyclette roulant sur un sol incliné.



**Figure 2.22** – Évolution temporelle de  $\dot{r}_2$  et  $\dot{r}_3$  de la bicyclette roulant sur un sol incliné.

## 2.7.5 Manœuvre de virage contrôlé

Dans ce dernier exemple numérique, le guidon et la roue arrière sont actionnés pour permettre à la bicyclette d'effectuer un virage à une vitesse d'avance contrôlée. Pour ce faire, nous utilisons de simples contrôleurs proportionnel-intégral en couple :

$$e_1(t) = f_s(t, t_1, t_2)r_{1d} - r_1 ,$$

et

$$\tau_1(t) = -K_{ps}e_1(t) - K_{is} \int_0^t e_1(\xi)d\xi ,$$

où  $K_{ps}$  est un gain proportionnel de direction,  $K_{is}$  est un gain intégral de direction,  $r_{1d}$  est l'angle de direction désiré,  $t_1 \leq t_2$  sont des temps de commutation utilisés pour effectuer une trajectoire courbe, et  $f_s(t, t_i, t_f)$  est une fonction définie comme suit :

Si  $t \leq t_i$  :

$$f_s = 0 .$$

Sinon si  $t_i < t \leq t_f$  :

$$f_s = \frac{t - t_i}{t_f - t_i} - \frac{1}{2\pi} \sin \left( 2\pi \frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right) .$$

Sinon :

$$f_s = 1 .$$

où  $t_i$  et  $t_f$  sont les instants de début et de fin de la pente respectivement. De même, le couple appliqué sur la roue arrière est défini comme suit :

$$e_3 = \dot{r}_{3d} - \dot{r}_3 ,$$

$$\tau_3 = K_{pd}e_3 + K_{id} \int_0^t e_3(\xi)d\xi ,$$

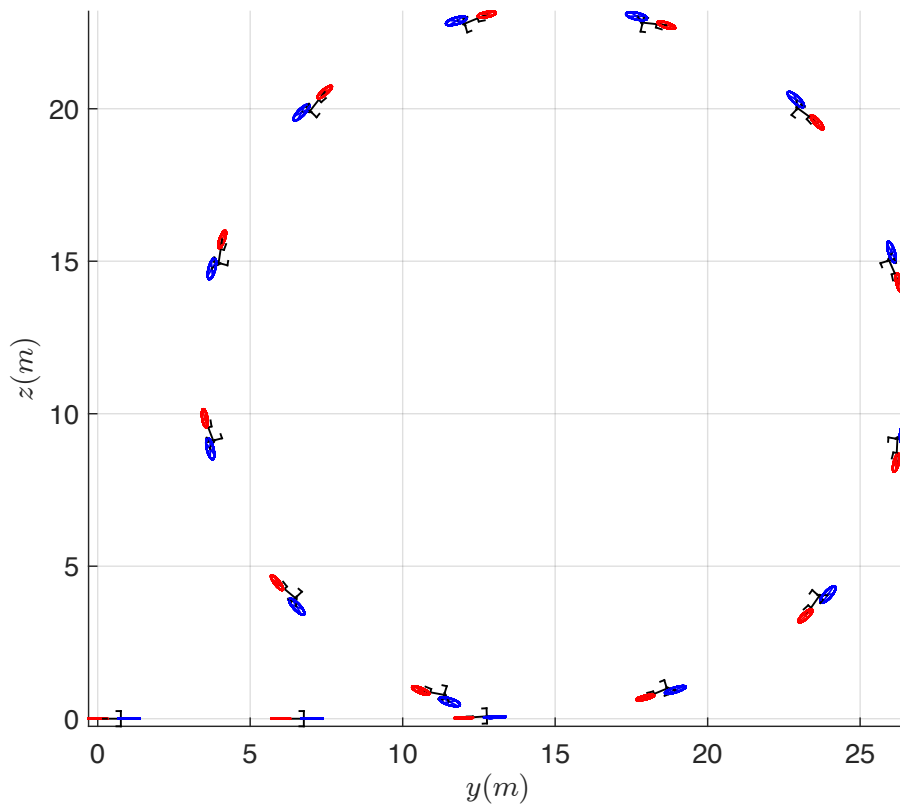
où  $K_{pd}$ ,  $K_{id}$  représentent, respectivement, le gain proportionnel et le gain intégral, tandis que  $\dot{r}_{3d}$  est la vitesse angulaire souhaitée pour la roue arrière. Les valeurs des paramètres du régulateur sont indiquées dans le [tableau 2.3](#). Comme le montre la

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$K_{ps}$	10 N m	$K_{is}$	35 N m s <sup>-1</sup>
$K_{pd}$	20 N m s	$K_{id}$	100 N m
$r_{1d}$	$\pi/36$ rad	$\dot{r}_{3d}$	20 rad s <sup>-1</sup>
$t_1$	0 s	$t_2$	5 s

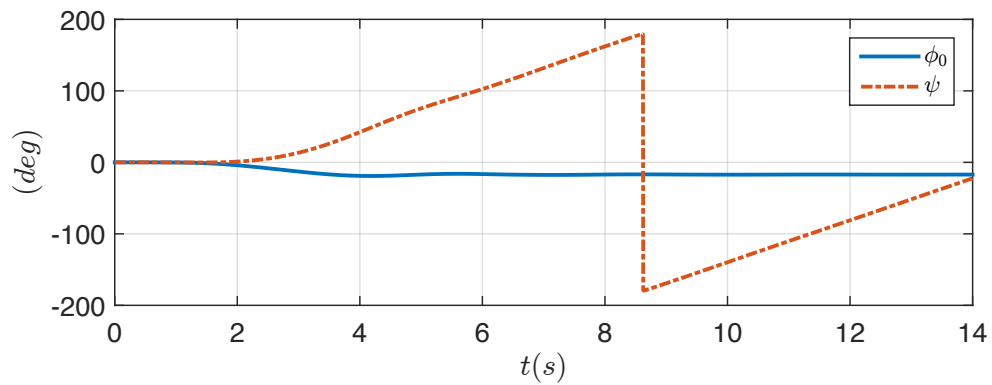
**Tableau 2.3** – Paramètres de simulation de la manœuvre de virage contrôlé.



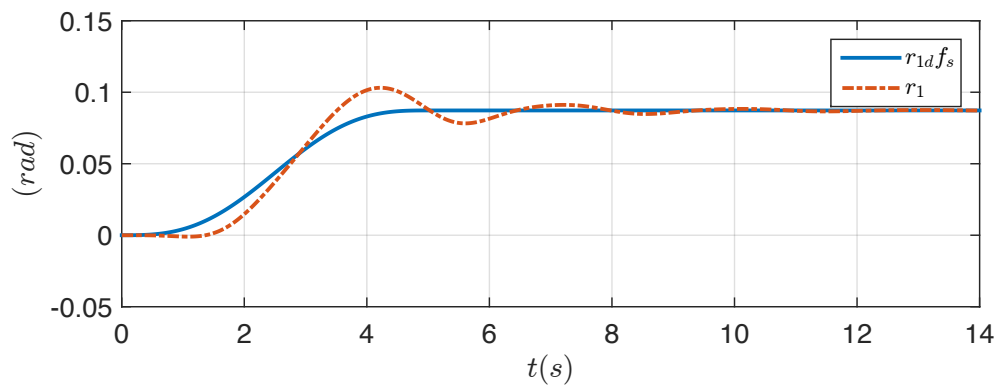
figure 2.23, la bicyclette part d'une configuration verticale droite avec une vitesse d'avance initiale  $V_2 = \dot{r}_{3d}h_3 = 6 \text{ m s}^{-1}$ , et effectue un virage avec un rayon prescrit de 11.6 m et une vitesse d'avance constante (voir la figure 2.26). Lorsque l'angle du guidon commence à augmenter en suivant la pente de  $r_1 = 0$  à  $r_1 \cong r_{1d}$  (voir la figure 2.25), le vélo s'incline naturellement (passivement) vers le centre de la courbe. Pour illustrer cela, la figure 2.27 présente l'évolution temporelle des vitesses de roulis, de l'angle au guidon et d'avance qui se stabilisent avec le temps. En ce qui concerne les couples d'actionnement, la figure 2.28 et la figure 2.29 présentent l'évolution temporelle des couples appliqués au guidon ( $\tau_1$ ) et à la roue arrière ( $\tau_3$ ). On notera que pour amorcer le virage, le cycliste doit appliquer un couple de signe opposé à celui de l'angle de braquage. Puis, une fois l'angle de braquage souhaité atteint, pour maintenir son virage, le couple et l'angle de braquage doivent être de même signe. L'évolution temporelle des positions angulaires des points de contact entre le sol et les roues avant et arrière est représentée sur la figure 2.30 et la figure 2.31, respectivement.



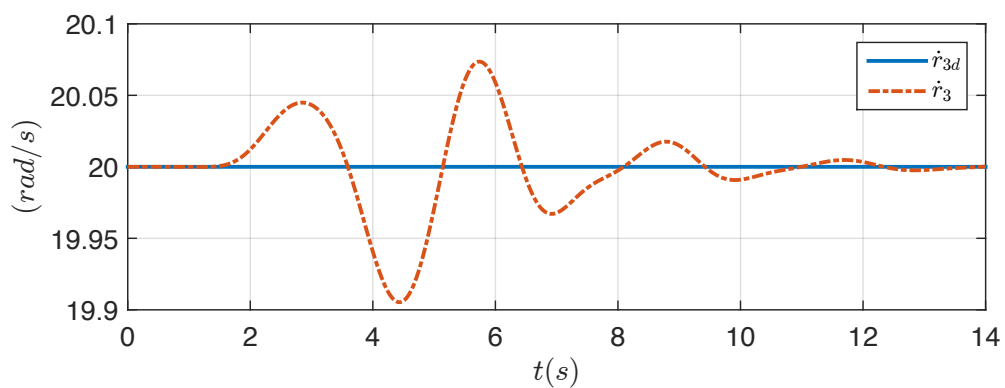
**Figure 2.23** – Trajectoire de la bicyclette dans le plan  $y$ - $z$  lors de l'exécution d'un virage contrôlé. L'intervalle de temps entre les instantanés est égal à 1 s.



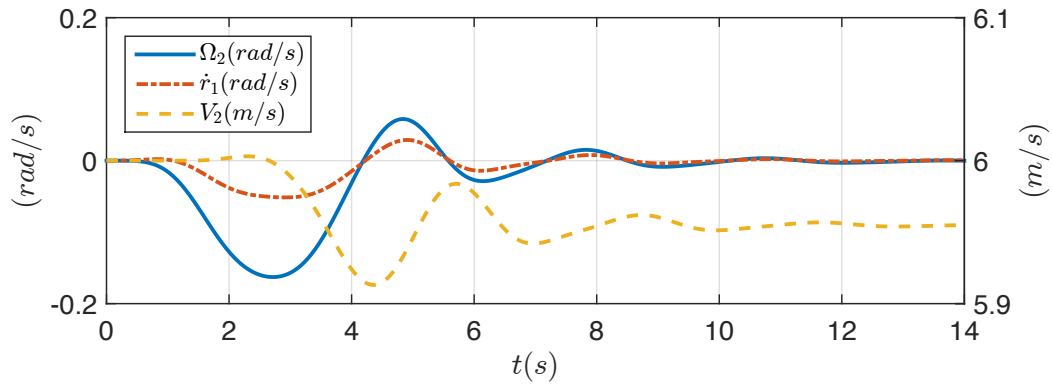
**Figure 2.24** – Angle de roulis  $\phi_0$  et angle de lacet  $\psi$  en fonction du temps  $t$ .



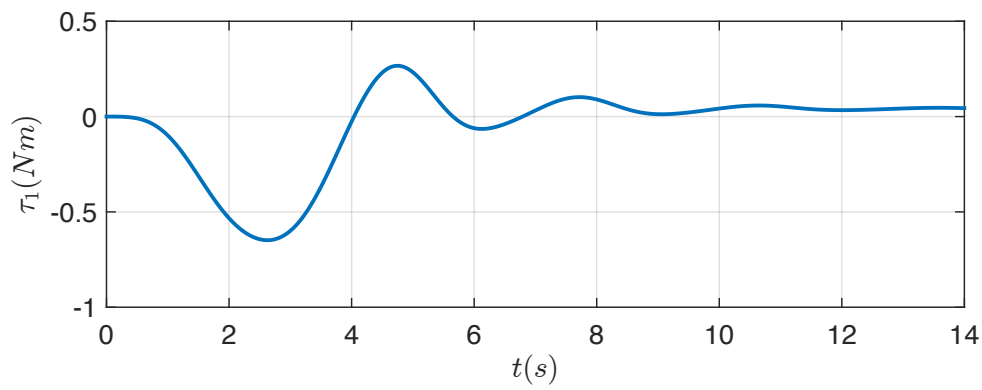
**Figure 2.25** – Évolution temporelle de l'angle de braquage  $r_1$  par rapport à la valeur souhaitée  $f_s r_{1d}$ .



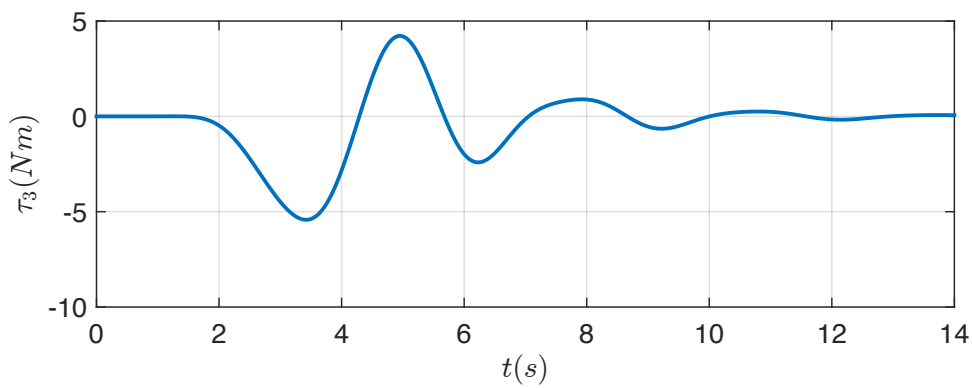
**Figure 2.26** – Évolution temporelle de la vitesse de la roue arrière  $\dot{r}_3$  par rapport à la consigne  $\dot{r}_{3d}$ .



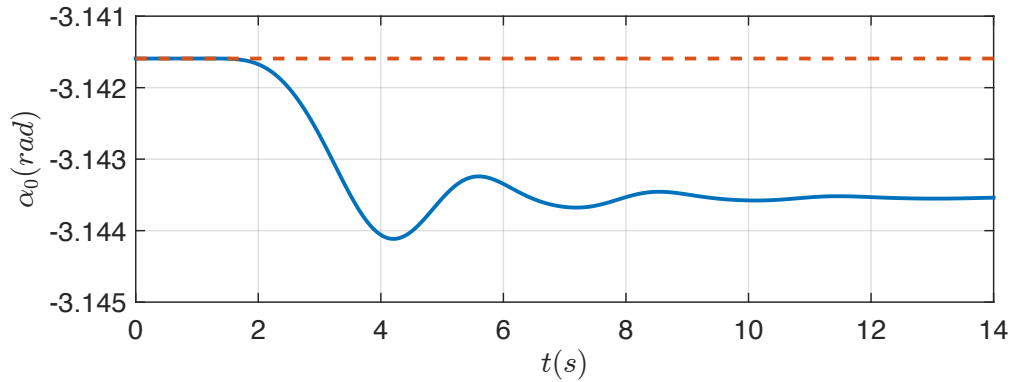
**Figure 2.27** – Évolution temporelle des vitesses de roulis  $\Omega_2$ , de direction  $\dot{r}_1$  et d'avance  $V_2$  pendant la manoeuvre de virage.



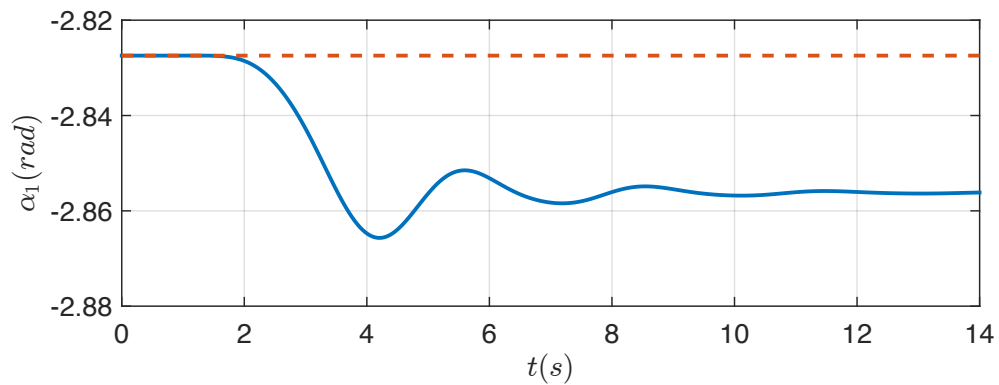
**Figure 2.28** – Évolution temporelle du couple de direction  $\tau_1$ .



**Figure 2.29** – Évolution temporelle du couple moteur  $\tau_3$ .



**Figure 2.30** – Évolution temporelle de la position angulaire du point de contact sur la roue arrière,  $\alpha_0$ , pendant la manœuvre de virage.



**Figure 2.31** – Évolution temporelle de la position angulaire du point de contact sur la roue avant,  $\alpha_1$ , pendant la manœuvre de virage.

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle formulation de la dynamique de la bicyclette tri-dimensionnelle de Whipple. L'approche est basée sur la mécanique géométrique de la locomotion des systèmes multi-corps dans leur fibré principal des configurations  $G \times \mathcal{S}$ . Exploitant le caractère intrinsèque de la mécanique géométrique, la plupart des non-linéarités géométriques rencontrées dans la modélisation habituelle de ce type de système sont ici déplacées vers l'intégration numérique d'un ensemble d'équations de reconstruction de l'espace des vitesses admissibles à  $G \times \mathcal{S}$  (voir [section 2.3](#)). À partir de cette idée, nous avons utilisé  $G = SE(3)$  pour supprimer les non-linéarités géométriques tri-dimensionnelles de la bicyclette, et remplacé ses deux contraintes holonomes de non-pénétration et non-décollement par leur forme cinématique en termes de vitesses non intégrables. Cela nous permet de dériver la forme close de la dynamique non-linéaire complète de la bicyclette sous la forme d'un ensemble d'équations de dynamique réduite dans le noyau des contraintes imposées par les contacts entre les roues et le sol. Ces équations sont exactes pour toute

configuration initiale de la bicyclette satisfaisant les deux contraintes holonomes. La dérivation de ces équations est réalisée en suivant un algorithme de modélisation générale en plusieurs étapes qui commence par le modèle géométrique des contacts ([section 2.4](#)), et se poursuit avec le modèle cinématique implicite des contraintes, le modèle cinématique explicite ou cinématique réduite ([section 2.5](#)), et enfin le modèle dynamique du système libre de contraintes dans  $SE(3) \times \mathcal{S}$  et sa projection dans le noyau de contraintes ([section 2.6](#)). En conséquence, ce chapitre illustre le cadre général sur un système concret non-trivial tout en donnant une formulation alternative de la dynamique de la bicyclette tri-dimensionnelle de Whipple. De ce point de vue, nous avons tenté de privilégier l'obtention d'équations symboliques plutôt que numériques. En fin de compte, la dynamique réduite a été obtenue sous une forme symbolique close et intégrée numériquement sur plusieurs scénarios représentatifs de la dynamique de la bicyclette (voir [section 2.7](#)), y compris celui d'auto-stabilisation présenté dans [[Meijaard et al. 2007](#)]. Toutes ces simulations numériques montrent que l'approche préserve les contraintes et l'énergie telle qu'attendue pour ce type de système.

## Bibliographie

- Appell P. *Traité de mécanique rationnelle*. Gauthier-Villars et Cie., Paris, 1931. [72](#)
- Astrom K.J., Klein R.E., et Lennartsson A. Bicycle dynamics and control : adapted bicycles for education and research. *IEEE Control Systems*, 25(4) :26–47, 2005. [73](#)
- Aström K.J. et Murray R.M. *Feedback systems : an introduction for scientists and engineers*. Princeton university press, 2010. [73](#)
- Basu-Mandal P., Chatterjee A., et Papadopoulos J. Hands-free circular motions of a benchmark bicycle. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2084) :1983–2003, 2007. [72](#)
- Bloch A.M., Baillieul J., Crouch P.E., Marsden J.E., et Zenkov D. *Nonholonomic Mechanics and Control*, tome 24 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, 2015. [75](#)
- Bloch A.M., Krishnaprasad P.S., Marsden J.E., et Murray R.M. Nonholonomic mechanical systems with symmetry. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 136(1) :21–99, 1996. [72](#)
- Bourlet C. Étude théorique sur la bicyclette. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 27 :76–96, 1899. [72](#)
- Boussinesq J. Aperçu sur la théorie de la bicyclette. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 5 :117–136, 1899. [72](#)
- Boyer F. et Belkhir A. Reduced locomotion dynamics with passive internal dofs : Application to nonholonomic and soft robotics. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(3) :578–592, 2014. [73](#), [74](#), [77](#), [79](#)
- Boyer F. et Belkhir A. Erratum to "reduced locomotion dynamics with passive internal dofs : Application to nonholonomic and soft robotics" [jun 14 578-592]. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(3) :805–805, 2015. [73](#)
- Boyer F. et Porez M. Multibody system dynamics for bio-inspired locomotion : from geometric structures to computational aspects. *Bioinspiration & Biomimetics*, 10(2) :1–21, 2015. [72](#), [73](#)
- Boyer F., Porez M., et Mauny J. Reduced dynamics of the non-holonomic whipple bicycle. *Journal of Nonlinear Science*, 2017. [74](#)
- Boyer F. et Primault D. The poincaré-chetayev equations and flexible multibody systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69(6) :925–942, 2005. [94](#)

- Campion G., Bastin G., et D'Andréa-Novel B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1) :47–62, 1996. [72](#), [82](#)
- Carvallo E. Théorie du mouvement du monocycle part 2 : Théorie de la bicyclette. *Journal de l'École Polytechnique*, 6 :1–118, 1901. [72](#)
- Cendra H., Marsden J.E., et Ratiu T.S. *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*, chapitre Geometric mechanics, Lagrangian reduction, and nonholonomic systems, pages 221–273. Springer-Verlag, 2001. [72](#)
- Chaplygin S. On the theory of motion of nonholonomic systems. the reducing-multiplier theorem. *Regular and Chaotic Dynamics*, 13(4) :369–376, 2008. [72](#)
- Chevallier D.P. et Lerbet J. *Multi-Body Kinematics and Dynamics with Lie Groups*. Elsevier, 2018. [73](#), [75](#)
- Chitta S., Cheng P., Frazzoli E., et Kumar V. Robotrikke : A novel undulatory locomotion system. Dans *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1597–1602. 2005. [72](#)
- Consolini L. et Maggiore M. Control of a bicycle using virtual holonomic constraints. *Automatica*, 49(9) :2831–2839, 2013. [72](#)
- Featherstone R. *Rigid Body Dynamics Algorithms*. Springer, 2008. [94](#)
- Franke G., Suhr W., et Riess F. An advanced model of bicycle dynamics. *European Journal of Physics*, 11(2) :116–121, 1990. [72](#)
- Getz N.H. et Marsden J.E. Control for an autonomous bicycle. Dans *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, tome 2, pages 1397–1402 vol.2. 1995. [73](#)
- Hertz H. *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*. Gesammelte Werke, Band III. Leipzig, 1894. [72](#)
- Jones A.T. Physics and bicycles. *American Journal of Physics*, 10(6) :332–333, 1942. [72](#)
- Kelly S.D. et Murray R.M. Geometric phases and robotic locomotion. *Journal of Robotic Systems*, 12(6) :417–431, 1995. [72](#), [73](#)
- Klein F. et Sommerfeld A. Über die theorie des kreisels. *Über die Theorie des Kreisels, by Klein, Felix ; Sommerfeld, Arnold*. New York : Johnson Reprint Corp., 1965. *Bibliotheca mathematica Teubneriana ; Bd. 1, 4*, 1965. [72](#)

- 
- Kooijman J.D.G., Meijaard J.P., Papadopoulos J.M., Ruina A., et Schwab A.L. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects. *Science*, 332(6027) :339–342, 2011. [73](#)
- Le Hénaff Y. Dynamical stability of the bicycle. *European Journal of Physics*, 8(3) :207–210, 1987. [72](#)
- Letov A. Stability of an automatically controlled bicycle moving on a horizontal plane. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23(4) :934–942, 1959. [72](#)
- Lobry C. et Sari T. Singular perturbation methods in control theory. Dans *Contrôle Non Linéaire et Applications, Cours du CIMPA, Collection Travaux en Cours*, pages 155–182. Hermann, Paris, 2005. [103](#)
- Mauny J., Porez M., et Boyer F. Symbolic dynamic modelling of locomotion systems with persistent contacts - application to the 3d bicycle. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :7598 – 7605, 2017. 20th IFAC World Congress. [74](#)
- Meijaard J., Papadopoulos J.M., Ruina A., et Schwab A. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle : a benchmark and review. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2084) :1955–1982, 2007. [72](#), [73](#), [74](#), [90](#), [101](#), [105](#), [116](#)
- Morin P. et Samson C. Control of nonholonomic mobile robots based on the transverse function approach. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(5) :1058–1073, 2009. [72](#)
- Ostrowski J.P. Computing reduced equations for robotic systems with constraints and symmetries. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(1) :111–123, 1999. [73](#)
- Ostrowski J.P., Burdick J. and Lewis A.D., et Murray R.M. The mechanics of undulatory locomotion : the mixed kinematic and dynamic case. Dans *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, tome 2, pages 1945–1951 vol.2. 1995. [72](#)
- Ostrowski J.P. et Burdick J. The geometric mechanics of undulatory robotic locomotion. *The International Journal of Robotics Research*, 17(7) :683–701, 1998. [72](#)
- Ostrowski J.P., Lewis A., Murray R.M., et Burdick J. Nonholonomic mechanics and locomotion : the snakeboard example. Dans *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 2391–2397 vol.3. 1994. [72](#)
- Psiaki M. Bicycle stability : A mathematical and numerical analysis. undergraduate thesis. *Physics Dept., Princeton University, NJ*, 1979. [73](#), [90](#)
-



Rankine W.J.M. On the dynamical principles of the motion of velocipedes. *The Engineer*, 28(79) :129, 1869. [72](#)

Timoshenko S.P. et Young D.H. *Advanced dynamics*. McGraw-Hill, 1948. [72](#), [73](#)

Whipple F.J. The stability of the motion of a bicycle. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 30(120) :312–348, 1899. [72](#), [76](#)

## Modélisation des systèmes locomoteurs intermittents

### Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	122
3.2	La physique de l'impact . . . . .	123
3.3	Modélisation de l'impact . . . . .	125
3.3.1	Modèle continu . . . . .	125
3.3.2	Modèle discret . . . . .	127
3.4	Paramétrage et notations . . . . .	129
3.5	Topologie des contacts pour une description événementielle . . .	130
3.6	Géométrie des contacts . . . . .	131
3.7	Définition des événements discrets . . . . .	132
3.8	Cinématique des contacts . . . . .	133
3.8.1	Cinématique des points de pré-contact . . . . .	134
3.8.2	Cinématique des contacts persistants . . . . .	135
3.8.3	Cinématique des contacts intermittents . . . . .	136
3.9	Dynamique continue d'un système mobile multi-corps . . . . .	140
3.10	Dynamique discontinue . . . . .	141
3.11	Résolution de la dynamique continue et discontinue . . . . .	142
3.11.1	Résolution de la dynamique continue . . . . .	142
3.11.2	Résolution de la dynamique discontinue . . . . .	143
3.12	Le cas des impacts plastiques . . . . .	144
3.12.1	Dynamique réduite d'un système mobile multi-corps soumis à des impacts plastiques . . . . .	145

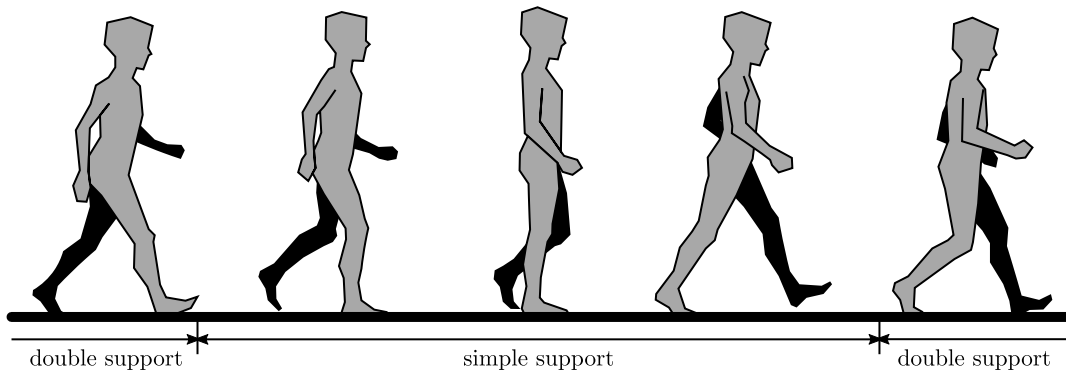
3.13 Illustration de systèmes soumis à des contraintes intermittentes . 147  
 3.14 Interprétation géométrique . . . . . 150  
 3.15 Conclusion . . . . . 154

---

### 3.1 Introduction

Bien que certains modes de locomotion tels la nage et le vol s’expriment au travers de contacts permanents entre les différents corps d’un système et leur environnement (le fluide dans lequel le système est plongé), la locomotion d’un système est le plus souvent constituée de phases de contact (où la configuration des contacts reste inchangée) entrecoupées de phases transitoires de faible durée (comparativement à la durée des phases de contact). Ces évènements transitoires pourraient même être qualifiés de clef de voûte de la locomotion tant ils se révèlent être au centre de bien des types de locomotion.

Par exemple, dans le cas de la marche humaine, nous sommes tout d’abord en appui sur notre jambe gauche (respectivement droite) quand survient la collision du talon droit (respectivement gauche) suivi par le décollement du pied gauche (respectivement droit) (voir [figure 3.1](#)). Ce processus est alors répété symétriquement par la jambe opposée créant ainsi un cycle complet de marche. Ici ce sont les colli-



**Figure 3.1** – Illustration de la démarche de marche sur un demi cycle.

sions qui permettent de passer des phases simple support (un seul pied de l’individu en contact avec le sol) aux phases double support (les deux pieds de l’individu en contact avec le sol) tandis que les décollements permettent de revenir sur les phases simple support. Ce sont ces transitions qui permettent à l’individu de changer de support (de jambe d’appui) créant ainsi le mouvement d’ensemble.

Concernant les systèmes locomoteurs mécaniques à roues, tels que la bicyclette, les évènements transitoires que sont les décollements et les collisions ne se trouvent

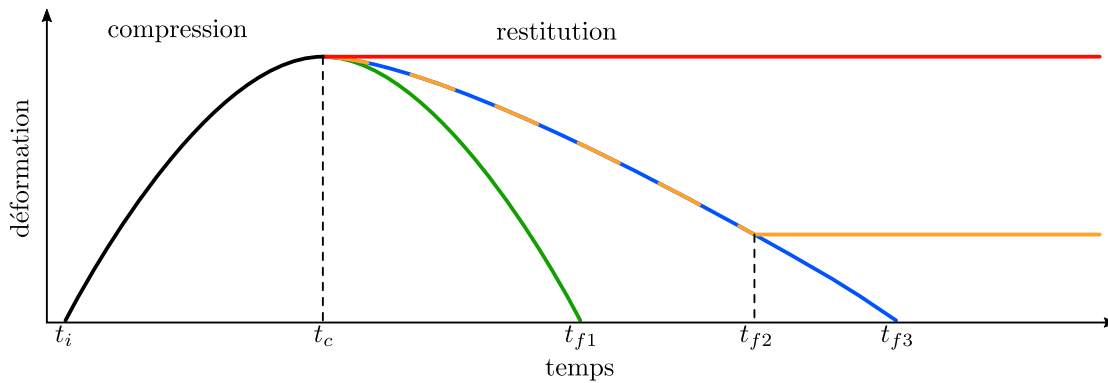
pas être des conditions *sine qua non* à la locomotion, comme le montrent les applications numériques (section 2.7) du chapitre 2. Toutefois, ce sont des événements courants lors de l'utilisation quotidienne de tels systèmes. Lorsqu'un cycliste descend un trottoir en bicyclette, chacune des roues subira un décollement suivi d'un impact lorsque chaque roue touchera le sol de nouveau.

En conséquence, dans ce chapitre dédié à la modélisation des *systèmes mobiles multi-corps ou mobile multi-body systems* (MMSs) soumis à des contacts holonomes et non-holonomes intermittents, nous commencerons par évoquer les différentes façons de traiter la collision (ou impact) en section 3.3. Contrairement aux décollements qui, comme nous le verrons en section 3.8.3 sont totalement transparents pour la dynamique du système (l'état du système reste continu), les collisions entraînent de brusques variations de vitesses ainsi que de force de réaction importantes qui nécessitent d'être modélisées. Ce court état de l'art sur la physique de l'impact (section 3.2) et sa modélisation (section 3.2) réalisés, nous nous attacherons à présenter notre modélisation des MMSs soumis à des contacts holonomes et non-holonomes intermittents. Ainsi, le chapitre se poursuivra par un court rappel du paramétrage d'un MMS (section 3.4) puis enchaînera en apportant les définitions nécessaires à la description événementielle du problème (section 3.5). S'ensuit alors la section 3.6 qui présente la géométrie du contact permettant ainsi de définir les différents types d'événements discrets (section 3.7). La section 3.8 découle de la géométrie des contacts exposée en section 3.6 et décrit la cinématique des contacts persistants puis celle des contacts intermittents. La dynamique du MMS est alors abordée, en traitant premièrement de la dynamique continue (section 3.9) puis de la dynamique discontinue (section 3.10) pour finir par une résolution que nous qualifierons de *complète*, en section 3.11. Considérant le cas idéal de l'impact purement plastique nous proposerons ensuite une résolution alternative des dynamiques continues (précédemment utilisée au chapitre 2 sur la bicyclette soumise à des contacts persistants) et discontinues, basée sur la réduction projective (section 3.12) Cette méthode que nous qualifierons de *réduite* sera exploitée, par la suite, pour modéliser la bicyclette soumise à des contacts intermittents au chapitre 4. Enfin ce chapitre se conclura, en section 3.14, en montrant que les deux méthodes présentées, celle *complète* et celle *réduite* partagent une interprétation géométrique commune.

## 3.2 La physique de l'impact

Avant d'entrer à proprement parler dans la modélisation de l'impact (section 3.3), nous allons nous attarder sur les différents phénomènes physiques qui entrent en jeu durant celui-ci. Tout d'abord, lors d'une collision entre deux corps, peut survenir des phénomènes de déformation élasto-plastique. Ceux-ci expliquent, du

moins en partie, la dissipation d'énergie observée durant les impacts. De manière générique, nous décomposerons la durée d'impact en deux phases distinctes, une première phase dite phase de compression et une seconde dite de restitution (voir figure 3.2) [Brach 1991; Wang et Mason 1992]. La première phase, la compression,



**Figure 3.2** – Déformation, au cours du temps, due à l'impact.

commence à l'instant  $t_i$  lorsque la surface des corps en collision entre en contact, et se termine lorsque la vitesse relative des points de contact, suivant la normale aux surfaces de contact, est nulle. À cet instant, dénoté  $t_c$  sur la figure 3.2, la déformation maximale est atteinte. S'ensuit alors la phase de restitution, commençant à l'instant  $t_c$ , où plusieurs cas de figure sont possibles. Premier cas de figure, la totalité de l'énergie emmagasinée lors de la phase de compression est restituée. La phase de restitution et, par conséquent, l'impact prennent fin à l'instant  $t_{f1}$ . Ce cas de figure est celui de l'impact dit parfaitement élastique (en vert sur la figure 3.2). Autre cas de figure extrême, celui de l'impact dit parfaitement plastique (en rouge sur la figure 3.2). Dans ce cas, la totalité de l'énergie stockée lors de la phase de compression est transformée en déformation plastique permanente. L'impact prend ainsi fin directement à la fin de la phase de compression, c'est-à-dire à l'instant  $t_c$ . Entre ces deux cas de figure extrêmes, il existe une infinité de cas qui sont divisibles en deux catégories. D'une part, la catégorie des impacts partiellement élastiques où aucune déformation rémanente n'existe, même s'il y a eu, tout de même, une perte d'énergie (en bleu sur la figure 3.2). L'impact se terminant alors à l'instant  $t_{f3}$  avec une déformation finale nulle. D'autre part, celle des impacts dit partiellement plastiques (en jaune sur la figure 3.2) où, bien que les corps aient subi une déformation permanente durant l'impact, toute l'énergie accumulée durant la phase de compression n'a pas été dissipée durant celle de restitution. L'impact se terminant alors à l'instant  $t_{f2}$  avec une déformation finale permanente.

La perte d'énergie peut, en partie, être expliquée par les déformations plastiques qui surviennent durant l'impact. Toutefois, le cas d'impacts partiellement élastiques, met en lumière l'existence d'autres mécanismes de dissipation d'énergie puisqu'il ne résulte, de tels impacts, aucune déformation plastique. Si maintenant nous ne

considérons plus les corps en collision comme des corps totalement rigides, ce qui est vraisemblablement plus proche de la réalité, il est possible d'admettre que lors de l'impact, des ondes de contrainte, parcourant les corps, sont créées [Stronge 2000; Barkan 1974]. Ainsi durant un impact, une partie de l'énergie cinétique des corps est convertie en énergie associée à ces vibrations. Le ratio entre le temps d'impact et la période des modes propres des corps en collision permet d'ailleurs de quantifier cette perte d'énergie. La dissipation est d'autant plus faible que ce ratio est grand [Gilardi et Sharf 2002].

Au-delà de la déformation plastique et de la propagation d'onde de contrainte, la dissipation d'énergie qui survient lors de l'impact peut également prendre la forme de chaleur [Whittaker 1904; Lankarani et Nikravesh 1990; Gilardi et Sharf 2002] ou être due à l'amortissement intrinsèque des matériaux [Hunt et Crossley 1975].

### 3.3 Modélisation de l'impact

L'impact est un phénomène extrêmement complexe et le modéliser avec exactitude est une entreprise ardue si ce n'est impossible. Elle nécessiterait, *a minima*, une connaissance approfondie de la géométrie et de la cinématique de l'impact ainsi que des matériaux des corps en présence. De plus, ces informations sont des données empiriques qui ne peuvent être connues que *a posteriori*. Ainsi, on s'appuie généralement sur un modèle simplifié rendant compte de l'impact dans ses grandes lignes. Il existe principalement deux façons de traiter l'impact [Chatterjee 1997; Gilardi et Sharf 2002]. La première façon consiste à s'appuyer sur une loi constitutive, héritée des travaux de Hertz, qui lie la force de contact à la déformation subie par les corps en collision. Ces modèles permettent ainsi de calculer des forces extérieures s'appliquant sur le système modifiant la dynamique de celui-ci. Ainsi, lorsqu'une collision est détectée, on pourra intégrer la dynamique du système pendant tout le temps que dure l'impact, jusqu'au décollement des corps. La seconde façon consiste à considérer l'impact comme un événement discret, l'état du système post impact étant déduit, grâce à un système algébrique, de l'état pré impact. Cette méthode s'appuie sur un modèle dynamique impulsionnel allié à une loi constitutive de l'impact.

#### 3.3.1 Modèle continu

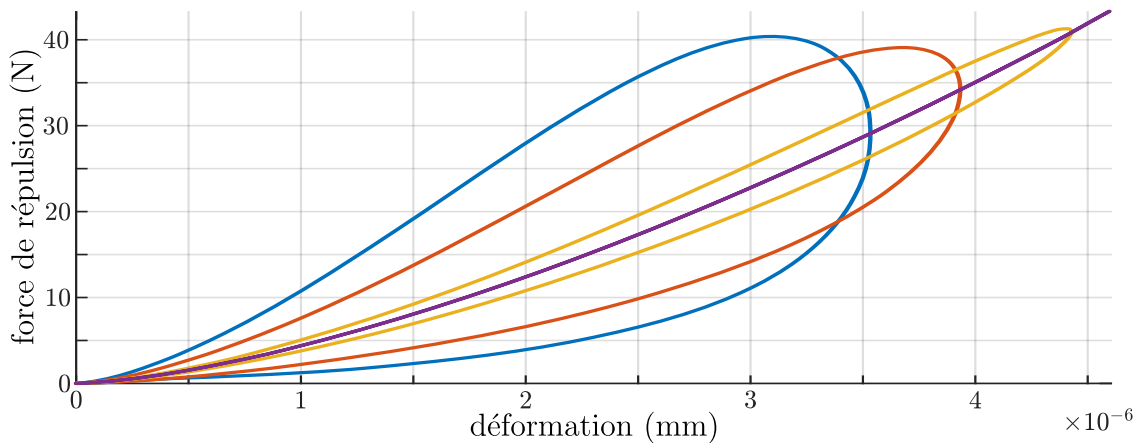
Le modèle continu qui reflète au mieux la physique de l'impact fait intervenir la *méthode des éléments finis* (MEF) [Kane et al. 1999; Pandolfi et Ortiz 2007]. Cette méthode permet de prendre en compte des situations de contact complexes et de la possible fragmentation des corps en collision au détriment d'un temps de calcul et

d'un besoin en ressources qui peuvent être excessifs. De plus, les résultats obtenus par une telle modélisation requièrent une connaissance approfondie de la géométrie ainsi que des matériaux des corps en collision sous peine de fournir des résultats approchés. Ipso facto, nous évacuerons cette méthode pour nous concentrer sur des modélisations de l'impact, plus légères, compatibles avec une simulation temps réel, ou proche du temps réel, de la dynamique des systèmes étudiés.

Les modèles continus, ou modèles des forces continues, cherchent à modéliser les forces de contact survenant lors de l'impact. Ces forces, appliquées comme forces extérieures s'appliquant sur le système, permettent d'intégrer la dynamique du système pendant tout le temps que dure l'impact. Ces modèles continus de l'impact prennent leurs racines dans les travaux de Hertz [[Hertz 1896a,b](#)]. Celui-ci a développé un modèle de ressort non-linéaire liant la force de contact normale à la surface des deux corps à la déformation élastique locale de ces corps. La rigidité généralisée d'un tel ressort dépend des propriétés des matériaux ainsi que de la forme de la surface de contact. Dans [[Goldsmith 1960](#)], Goldsmith exprime ce coefficient pour plusieurs cas de contact et fait apparaître sa dépendance au coefficient de Poisson et au module de Young des objets en contact.

Cette première loi modélise l'impact sous la forme d'un ressort non-linéaire. En conséquence, elle se limite au cas des collisions élastiques et ne permet donc pas la dissipation d'énergie lors de l'impact. Pour palier ce défaut, un modèle de Kelvin-Voigt est utilisé, modélisant la force de contact normal sous la forme d'un ressort (linéaire dans un premier temps puis non-linéaire) et d'un amortisseur linéaire mis en parallèle [[Goldsmith 1960](#); [Dubowsky et Freudenstein 1971](#); [Flores et al. 2011](#)]. Bien que cette loi constitutive fasse apparaître de la dissipation, point important et manquant de la loi de Hertz, elle présente tout de même des aspects problématiques du point de vue physique. En effet, à l'instant initial de la collision, lorsque la déformation est nulle, la vitesse relative des points de contact est, elle, non nulle; la force de contact subissant alors une brusque variation. De même, après l'impact, à l'instant où le contact se rompt, bien que la déformation soit nulle, la vitesse relative des points de contact est, cette fois, négative. Il en résulte, toujours en raison de l'amortisseur, une force négative traduisant une adhérence des corps en collision, ce qui va à l'encontre du phénomène attendu [[Johnson 1982](#); [Marhefka et Orin 1999](#)].

En réponse à ces problèmes, et après avoir montré que le modèle avec amortisseur linéaire ne représente pas fidèlement les échanges d'énergie lors de l'impact, [[Hunt et Crossley 1975](#)] proposent un nouveau modèle alliant la théorie de Hertz sur le contact à un amortisseur non-linéaire défini comme une fonction de la déformation ainsi que de la vitesse de déformation (voir figure 3.3). Exprimant l'amortissement comme une fonction, entre autre, de la déformation, ce modèle ne fait plus apparaître de discontinuité en force lorsque le contact se crée ou se rompt (c'est-à-dire lorsque la déformation est nulle, voir figure 3.3).



**Figure 3.3** – Force de répulsion en fonction de la déformation. Modélisation de Hunt-Crossley pour deux sphères d'acier ( $R_1 = R_2 = 1$  cm,  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0.28$ ) entrant en collision avec une vitesse initiale de déformation de  $\dot{\delta}^- = 10$  cm s<sup>-1</sup> pour différents coefficients de restitution :  $\varepsilon = 0$  (en bleu),  $\varepsilon = 0.5$  (en orange),  $\varepsilon = 0.9$  (en jaune),  $\varepsilon = 1$  (en violet).

Enfin, [Lankarani et Nikravesch 1994] proposent un nouveau modèle faisant apparaître, cette fois, une déformation résiduelle aux suites de l'impact. Ainsi la collision se termine et le contact se rompt, non plus quand la déformation résiduelle est nulle, mais quand la force de répulsion est nulle. Cela permet alors de traduire une déformation permanente des corps en collision lors d'un impact plastique.

### 3.3.2 Modèle discret

La formulation discrète de l'impact s'appuie sur l'hypothèse que l'impact a lieu instantanément. Il en résulte que les corps en collision subissent une discontinuité de vitesse. Ainsi les accélérations et les forces réactions sont infinies et représentées par des impulsions de Dirac. De plus, le phénomène étant supposé instantané, la configuration du système dans son ensemble reste inchangée. Cette modélisation est principalement utilisée dans le cas d'impact entre corps supposés rigides.

L'intégration entre les instants avant et après impact de la dynamique permet d'établir un jeu d'équations algébriques faisant intervenir les quantités cinétiques et les réactions de contact impulsives [Whittaker 1904]. Afin d'être résolubles, ces équations doivent être augmentées des équations de comportement des contacts tel que la loi de frottement d'Amontons-Coulomb et la loi de restitution de Newton, Poisson ou Stronge [Stronge 1990] paramétrées par les coefficients du même nom.

Les coefficients intervenant dans ces lois de restitution sont définis de diverses manières dont la première, historiquement, est attribuée à Newton. Newton intro-



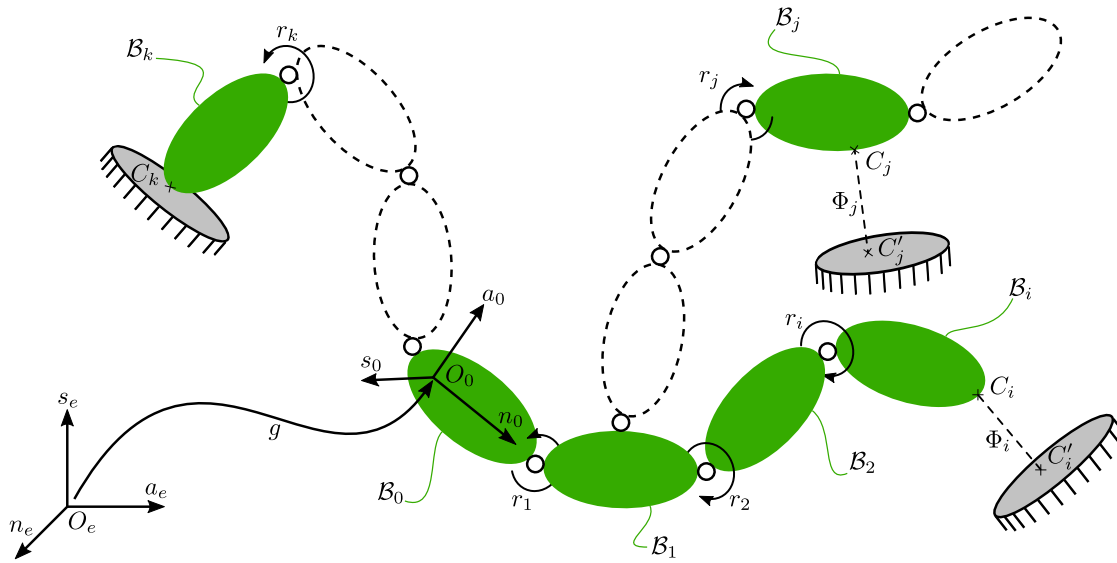
duit ce coefficient afin d'étendre les lois du choc de Huygens au cas des impacts non parfaitement élastiques. Le coefficient de restitution de Newton, ou coefficient de restitution cinématique, est défini comme le ratio entre les vitesses post et pré-impact. Newton réalise des essais et mesure la perte d'énergie lors de la collision entre deux billes de matériau identique et présume, faussement, que ce coefficient est une propriété intrinsèque au matériau, ne dépendant donc ni de la géométrie, des surfaces ni des vitesses des corps en contact. Le coefficient de restitution peut également être défini comme le ratio entre la force normale impulsionnelle de la phase de compression et celle de restitution. Ce coefficient de restitution cinétique est attribué à Poisson par Routh dans [Routh 1897], qui le nomme le coefficient de restitution de Poisson. Dans [Stronge 1991], Stronge propose une formulation du coefficient de restitution qu'il définit comme la racine carrée du ratio de l'énergie restituée lors de la phase de restitution sur celle absorbée durant la phase de compression. Cette définition du coefficient de restitution se trouve être similaire à celle suggérée par Boulanger dans [Boulanger 1939; Stronge 1994]. Stronge [Stronge 1990, 2000] montre que les définitions cinématiques (Newton), cinétiques (Poisson) et énergétiques (Stronge) du coefficient de restitution sont équivalentes si l'on tient compte de la friction et que la direction du glissement varie au cours de la collision.

De ces lois de comportement émanent différents modèles discrets de l'impact. Whittaker [Whittaker 1904] traite l'impact, tant suivant la normale au contact que dans le plan de celui-ci, au moyen de la loi de restitution de Newton. Ce modèle de l'impact peut aboutir à une surestimation des vitesses post-impact, en particulier du fait qu'il ne tienne pas compte du possible changement de direction du glissement tangentiel durant l'impact [Kane et Levinson 1985; Stronge 1991]. Pour combler le problème de gain d'énergie, Brach [Brach 1989, 1991, 1998] propose une alternative pour tenir compte de la composante tangentielle de la force de réaction impulsionnelle en introduisant un ratio entre celle-ci et la composante normale. Brach montre que ce ratio, assimilable à un coefficient de frottement est borné par des valeurs qui correspondent à l'absence de glissement lors de la séparation des corps et à la conservation de l'énergie [Brach 1989]. Pour sa part, Keller [Keller 1986] opte pour une vision où l'impact est vu comme un processus évolutif paramétré par la force impulsionnelle normale au contact. Il propose donc un modèle d'impact différentiel utilisant la loi de restitution de Poisson couplée à la loi de frottement d'Amontons-Coulomb. Ce modèle permet de déterminer les variations de direction de glissement durant l'impact et, ainsi, de calculer le frottement impulsionnel. De plus, Keller montre que, lorsque la direction de glissement est constante tout au long de la collision, son modèle aboutit aux mêmes résultats que ceux obtenus avec le modèle de Whittaker [Whittaker 1904]. Le modèle d'impact de Keller est par la suite généralisé au cas multi-contact par Hurmuzlu et Marghitu [Hurmuzlu et Marghitu 1994] qui, de plus, proposent une formulation intégrée du modèle d'impact différentiel [Hurmuzlu et Marghitu 1994; Miossec 2004].

Dans le contexte de cette thèse, la modélisation de systèmes holonomes et non-holonomes est basée sur la réduction projective. Pour cela, les contacts sont pris en compte sous la forme de contraintes cinématiques (voir [chapitre 2](#)). Ces contraintes définissent pour une configuration  $x = (g, r)$  les vitesses interdites et se marient donc tout naturellement avec la modélisation discrète de l'impact (voir [section 3.10](#)). De plus nous avons pris le parti de nous focaliser sur l'impact purement plastique ce qui nous permet de proposer une formulation réduite du modèle d'impact et de nous assurer d'obtenir des vitesses compatibles avec les contraintes post-impact.

### 3.4 Paramétrage et notations

Afin de traiter le cas des MMSs soumis à des contacts intermittents, on reconsidère le paramétrage et les notations usitées au [chapitre 2](#) en les incluant dans le contexte plus général des contacts intermittents. Ainsi, nous avons défini un MMS comme un système composé de  $n+1$  corps  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$  liés entre eux par  $n$  liaisons pivots à un seul *degré de liberté* (ddl) (voir la [figure 3.4](#)). Contrairement aux *systèmes multi-corps ou multi-body systems* (MSs) habituels, un MMS n'est pas seulement soumis à des variations de forme interne, mais aussi à des mouvements rigides régis par un modèle de locomotion dans l'espace galiléen ambiant doté d'un repère orthonormé fixe  $\mathcal{R}_e = (O_e, s_e, n_e, a_e)$ . Chaque corps  $\mathcal{B}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , avec  $\mathbb{N} = \{0, \dots, n\}$  l'ensemble des indices des corps, est équipé d'un repère orthonormé,  $\mathcal{R}_i = (O_i, s_i, n_i, a_i)$ , qui lui est rigidement attaché. L'un de ces corps,  $\mathcal{B}_0$ , est arbitrairement choisi et considéré comme étant le corps de référence. Ainsi, les mouvements rigides d'ensemble du MMS sont ceux de  $\mathcal{B}_0$  tandis que les variations de sa forme sont mesurées par rapport à son repère  $\mathcal{R}_0$  qui prend, alors, le statut de repère de référence. Toute pose du corps de référence, par rapport au repère  $\mathcal{R}_e = (O_e, s_e, n_e, a_e)$ , est décrite par une transformation de corps rigide  $g \in \text{SE}(3)$ . Un mouvement rigide d'ensemble du MMS est défini par une courbe paramétrée dans le temps  $t \mapsto g(t) \in \text{SE}(3)$  tandis que  $\hat{\eta} = g^{-1}\dot{g} \in \text{se}(3)$  définit la vitesse d'ensemble du MMS, avec  $\eta \in \mathbb{R}^6$  qui regroupe les vitesses rigides linéaires et angulaires globales du MMS. En ce qui concerne les variations de forme, elles engendrent la variété des formes, ou espace des formes,  $\mathcal{S} = (\text{S}^1)^n$ , paramétré par le vecteur des coordonnées angulaires des liaisons  $r = (r_1, \dots, r_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ . Ensemble, la transformation de corps rigide  $g$  et le vecteur de forme  $r$  définissent la configuration du MMS, c'est-à-dire un point dénoté  $x = (g, r)$  sur son fibré des configurations, ou espace des configurations,  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times \mathcal{S}$ . Dans l'espace tri-dimensionnel ambiant, le MMS est entouré d'obstacles que l'on supposera rigides ainsi qu'immobiles. L'union de tous les obstacles est dénoté  $\mathcal{O}$ . Pour des raisons de simplicité, nous supposons qu'en raison de la géométrie des corps et des obstacles, chacun des corps constitutifs du MMS ne peut être en contact avec  $\mathcal{O}$  qu'en un seul point (voir la [figure 3.4](#)).



**Figure 3.4** – Système mobile multi-corps soumis à des contacts intermittents. Les corps  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{B}_j$  sont en pré-contact tandis que le corps  $\mathcal{B}_k$  est en contact avec un obstacle.

### 3.5 Topologie des contacts pour une description événementielle

À tout instant  $t$ , certains des corps constitutifs du MMS sont en contact avec les obstacles, alors que d'autres ne le sont pas. Cette topologie variable dans le temps du MMS par rapport à  $\mathcal{O}$  est nommée *configuration des contacts* et est définie à chaque instant par :

$$\mathbb{N}_a = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathcal{B}_i \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}, \quad (3.1)$$

qui représente le sous-ensemble des indices des corps en contact avec les obstacles. Nous supposons, en outre, que ces changements sont instantanés. En conséquence, il est possible de partitionner l'axe temporel comme suit :

$$\mathbb{R}^+ = ]t_i, t_j[ \cup \{t_j\} \cup ]t_j, t_k[ \cup \{t_k\} \cdots \mid t_i < t_j < t_k \cdots, \quad (3.2)$$

où  $]t_i, t_j[$  et  $]t_j, t_k[$  sont des intervalles de temps continus tandis que  $\{t_j\}$  et  $\{t_k\}$  représentent des singletons discrets correspondant aux instants où  $\mathbb{N}_a$  change subitement. Pour des raisons de concision, nous utiliserons parfois les notations :

$$\mathbb{R}^+ = T_C \cup T_D, \quad (3.3)$$

où  $T_C$  et  $T_D$  représentent les ensembles, union des sous-ensembles continu et discret de (3.2), respectivement. Les changements soudains de configuration des contacts sont nommés *événements discrets*. Considérant tout instant  $t_j$  où un évènement

discret se produit, c'est-à-dire tel que  $t_j \in T_D$ , il est alors possible de définir les instants pré/post événement discret  $t_{j-} = t_j - \epsilon$  et  $t_{j+} = t_j + \epsilon$ , respectivement, tel que  $\epsilon > 0$  et  $\epsilon \rightarrow 0$ . Par extension, les indices  $\pm$  sont utilisés pour indiquer la valeur de toute variable dépendante du temps juste avant et après un temps discret  $t \in T_D$ . Comme première illustration de l'utilisation de ces notations, remarquons qu'en raison du caractère instantané des événements discrets, nous avons :

$$(g, r)_+ = (g, r)_- ,$$

ce qui signifie qu'un événement discret ne peut introduire aucune discontinuité de configuration du MMS. A contrario, un événement discret peut générer une discontinuité de vitesses, c'est-à-dire :

$$(\eta, \dot{r})_+ \neq (\eta, \dot{r})_- . \quad (3.4)$$

Dans de tels cas, les événements discrets seront nommés *impacts*, et il devient alors naturel d'introduire une seconde partition de l'axe temporel :

$$\mathbb{R}^+ = T_S \cup T_I ,$$

où  $T_I$  représente le sous-ensemble des événements discrets  $T_D$  correspondant aux impacts, c'est-à-dire satisfaisant (3.4) et  $T_S = T_C \cup T_D \setminus T_I$ , le sous-ensemble des instants ne satisfaisant pas (3.4). En d'autres termes, dans la partition ci-dessus, tous les instants discrets  $t \notin T_I$  sont rassemblés avec les intervalles continus de (3.3).

Dans la suite de ce chapitre, nous développons des modèles et des algorithmes de simulation d'un MMS soumis à des contacts holonomes et non-holonomes intermittents. Pour ce faire, nous adopterons une approche événementielle, considérant le MMS comme un système hybride gouverné par une dynamique continue pendant les intervalles de temps  $T_S$  et par une dynamique discrète aux instants  $T_I$ .

## 3.6 Géométrie des contacts

Pour des raisons de simplicité, nous supposons, tout d'abord, que les frontières des corps ainsi que celles des obstacles sont convexes. Il en résulte que, pour tout corps  $\mathcal{B}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , on peut définir une normale  $N_i$ , commune à  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{O}$ , qui pointe vers l'extérieur de  $\mathcal{O}$ , ainsi qu'un ensemble de deux points  $(C_i, C'_i) \in \mathcal{B}_i \times \mathcal{O}$  tel que :

$$(C_i, C'_i) = \arg \min_{(C_i, C'_i) \in \mathcal{B}_i \times \mathcal{O}} ({}^j N_i^T [p_j(C'_i) - p_j(C_i)]) , \quad (3.5)$$

où  $j$  est l'indice d'un repère  $\mathcal{R}_j$ , arbitrairement choisi. En d'autres termes,  $(C_i, C'_i)$  sont deux points matériels appartenant aux frontières de  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{O}$ , respectivement,

ainsi qu'à la droite supportée par leur normale commune, comme illustré par la [figure 3.5](#). Lorsque  $p_j(C_i) = p_j(C'_i)$ ,  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{O}$  sont en contact en un point unique nommé *point de contact*. Lorsque  $p_j(C_i) \neq p_j(C'_i)$ , le corps  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{O}$  ne se touchent pas et les points  $(C_i, C'_i)$  sont nommés *points de pré-contact*. Ces deux situations peuvent également être discriminées au moyen de la valeur du minimum de (3.5), qui définit ce que nous nommerons une *fonction gap* :

$${}^j N_i^T [p_j(C'_i) - p_j(C_i)] = \Phi_i(g, r) \geq 0, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

En utilisant de telles fonctions gap, lorsqu'un corps  $\mathcal{B}_i$  est en contact avec  $\mathcal{O}$ ,  $\Phi_i = 0$ , et le contact est dit *actif*. Par contre, lorsque  $\Phi_i > 0$ , le contact entre  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{O}$  est dit *inactif*. Cette considération vaut pour tous les corps du MMS. Aussi, à chaque instant  $t$ , on peut énoncer une définition géométrique de la configuration des contacts, alternative à la définition topologique (3.1) :

$$\mathbb{N}_a = \{i \in \mathbb{N} \mid \Phi_i = 0\}.$$

Lorsque le contact  $i$  est actif,  $\mathcal{O}$  applique une force de réaction sur  $\mathcal{B}_i$  afin de prévenir l'interpénétration du corps dans l'obstacle. Noté  $f_{N_i}$ , cette force non-négative s'exerce suivant la normale au contact,  $N_i$ . Quand le contact est actif,  $f_{N_i} > 0$ , tandis que quand le contact est inactif  $f_{N_i} = 0$ . Pour résumer, le couple  $(f_{N_i}, \Phi_i)$  peut être considéré comme une paire de variables duales définissant l'état mécanique du contact entre  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{O}$ , suivant la normale au contact. Pour toutes configurations, l'état  $(f_{N_i}, \Phi_i)$  sera qualifié de *compatible* s'il remplit les conditions suivantes :

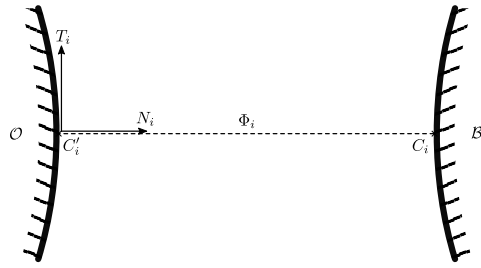
$$f_{N_i} \Phi_i = 0, \quad \Phi_i \geq 0, \quad f_{N_i} \geq 0. \quad (3.7)$$

### Remarque 3.1 :

Une fois que  $(C_i, C'_i)$  et  $N_i$  ont été définis, il nous est possible de construire un repère local direct  $\mathcal{R}_{ci} = (C'_i, N_i, T_i, B_i)$ , attaché à l'obstacle en  $C'_i$ , tel que  $T_i$  et  $B_i = N_i \times T_i$  soient deux vecteurs tangents unitaires de  $T_{C'_i} \partial \mathcal{O}$ . Un tel repère est nommé *repère de (pré) contact* et est illustré en [figure 3.5](#).

## 3.7 Définition des événements discrets

Classons maintenant les événements discrets comme suit. L'activation soudaine d'un contact définit une *collision*, tandis que sa désactivation soudaine définit un *décollement*. Une collision entre un corps  $\mathcal{B}_i$  et un obstacle se définit telle que, alors que le corps s'approche de l'obstacle, il le touche soudainement. D'un point de vue mathématique, une telle transition est assurée lorsque les deux conditions  $\Phi_i = 0$  et  $\dot{\Phi}_i \leq 0$  sont remplies. Le décollement, quant à lui, survient quand, alors que  $\Phi_i = 0$



**Figure 3.5** – Géométrie du pré-contact entre le corps  $\mathcal{B}_i$  et un obstacle. La fonction gap  $\Phi_i$  représente la distance signée entre les deux points de pré-contact  $C_i$  et  $C'_i$  qui appartiennent respectivement à  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{O}$ . Cette distance est mesurée le long de  $N_i$ , le premier vecteur du repère de contact  $\mathcal{R}_{c_i} = (C'_i, N_i, T_i, B_i)$  se déplaçant le long des frontières de  $\mathcal{O}$ .

et  $f_{N_i} > 0$ , soudainement on observe  $\Phi_i > 0$  ou  $f_{N_i} = 0$ . La proposition « alors que ..., soudainement ... » étant supportée par un graphe état-transition orienté (voir la figure 3.7).

**Remarque 3.2 :**

Dans le cas de la collision, il nous est possible de définir deux sous-cas qui dépendent de  $\dot{\Phi}$ , c'est-à-dire si, à l'instant où  $\Phi_i = 0$ ,  $\dot{\Phi}_i < 0$  ou  $\dot{\Phi}_i = 0$ . Dans le premier sous-cas, la collision introduit une brusque discontinuité des vitesses de contact consécutivement à l'impact et sera alors qualifiée de *collision dure*. Dans le second sous-cas, le corps du MMS touche l'obstacle avec une vitesse relative des points de pré-contact nulle, ne produisant, par conséquent, aucun saut de vitesse de contact. Cette dernière collision est alors qualifiée de *douce* ou sans impact. Concernant les décollements, il est également possible de distinguer deux sous-cas selon que le corps du MMS se détache de l'obstacle via la condition  $\Phi_i > 0$ , ou bien que  $f_{N_i} = 0$ . Dans le premier sous-cas, l'obstacle se dérobe soudainement sous le corps tandis que dans le second, le corps se décolle, à proprement parler, de l'obstacle. Par conséquent, tout comme dans le cas de la collision, nous qualifierons le premier sous-cas de décollement *dur* et le second, de décollement *doux*.

### 3.8 Cinématique des contacts

Dans la section précédente, nous avons fourni un modèle géométrique des contacts. Dans cette section, nous présentons leur modèle des vitesses en l'intégrant au modèle cinématique d'un MMS sujet à des contacts intermittents. Pour ce faire, nous commencerons par introduire le modèle cinématique des points de pré-contact sur lesquels les autres modèles cinématiques sont basés. Ensuite, nous

considérerons le cas où le système est sujet à des contacts persistants (c'est-à-dire,  $t \in T_C$ ), puis dériverons le modèle cinématique des contacts intermittents, c'est-à-dire quand  $t \in T_D$ . Dans ce dernier cas, nous aborderons les deux sous-cas, que sont les événements discrets avec et sans discontinuité de vitesse, c'est-à-dire lorsque  $t = t_c \in T_D \setminus T_I$  et  $t_c \in T_I$  respectivement.

### 3.8.1 Cinématique des points de pré-contact

La différentiation temporelle du vecteur  $p_e(C_i) - p_e(C'_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , où  $\mathcal{R}_e$  est le repère Galiléen attaché à l'obstacle, fixe dans l'espace ambiant, fournit un modèle cinématique des points de pré-contact. Un tel modèle peut être obtenu directement en termes de vitesse à travers les expressions :

$${}^j\gamma_i = {}^jv(C_i \in \mathcal{B}_i) - {}^jv(C'_i \in \mathcal{O}) , i \in \mathbb{N} , \quad (3.8)$$

où  ${}^jv(C_i \in \mathcal{B}_i)$  et  ${}^jv(C'_i \in \mathcal{O})$  dénotent les vitesses Galiléennes de  $C_i \in \mathcal{B}_i$  et  $C'_i \in \mathcal{O}$ , respectivement, toutes deux exprimées dans le même repère arbitrairement choisi  $\mathcal{R}_j$ . Bien que les points  $C'_i$  évoluent sur la surface  $\partial\mathcal{O}$  en respectant (3.5), comme  $\mathcal{O}$  est immobile dans l'espace, (3.8) peut s'écrire plus simplement comme suit :

$${}^j\gamma_i = {}^jv(C_i \in \mathcal{B}_i) , i \in \mathbb{N} . \quad (3.9)$$

Dans  $SE(3) \times \mathcal{S}$ ,  ${}^j\gamma_i$  est une fonction linéaire des vitesses rigides d'ensemble et des vitesses de forme, dépendante de  $(g, r)$ , de la forme suivante :

$${}^j\gamma_i(g, r) = {}^jA_i(g, r)\eta + {}^jB_i(g, r)\dot{r} , i \in \mathbb{N} . \quad (3.10)$$

#### Remarque 3.3 :

Le modèle des vitesses relatives (3.10) est, bien entendu, indépendant du repère dans lequel il est exprimé. Ainsi  ${}^jA_i$  et  ${}^jB_i$  peuvent être exprimés dans n'importe quel autre repère, de la manière suivante :

$${}^kA_i = {}^kR_j {}^jA_i , \text{ and } {}^kB_i = {}^kR_j {}^jB_i ,$$

où  ${}^kR_j$  est la matrice de rotation appliquant  $\mathcal{R}_k$  sur  $\mathcal{R}_j$ . En particulier, dans le cas de la bicyclette,  $A_i$  et  $B_i$  seront, de préférence, exprimés, soit dans le repère de référence du MMS, soit dans le repère de contact  $\mathcal{R}_{c_i}$ , selon le contexte.

#### Remarque 3.4 :

Lorsque, dans (3.10), nous imposons  $\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_{c_i}$ , la première composante du vecteur  ${}^{c_i}\gamma_i$ , dénommée  $\gamma_{N_i}$ , est liée à la fonction gap  $\Phi_i$  suivant la relation :

$$\gamma_{N_i} = A_{N_i}(g, r)\eta + B_{N_i}(g, r)\dot{r} = \dot{\Phi}_i(g, r) ,$$

qui traduit le fait que les vitesses normales de pré-contact, ou autrement dit les

*vitesses d'approche*, sont les dérivées temporelles des fonctions gap. Bien sûr, les deux autres composantes de  ${}^c\gamma_i$  ne peuvent être déduites d'une différentiation temporelle similaire. Autrement dit, elles sont fondamentalement non intégrables (non-holonomes) et ne peuvent être définies que par (3.8) qui dans le repère  $\mathcal{R}_{c_i}$  donne :

$$\begin{aligned}\gamma_{T_i} &= A_{T_i}(g, r)\eta + B_{T_i}(g, r)\dot{r} , \\ \gamma_{B_i} &= A_{B_i}(g, r)\eta + B_{B_i}(g, r)\dot{r} ,\end{aligned}$$

avec  ${}^c\gamma_i = (\gamma_{N_i}, \gamma_{T_i}, \gamma_{B_i})^\top$ .

### 3.8.2 Cinématique des contacts persistants

En tout instant  $t$  de  $T_C$ , les contacts actifs sont persistants et modélisés par des contraintes bilatérales du même type que dans le chapitre 2 (voir section 2.3.1). En particulier, les contraintes cinématiques normales peuvent être directement déduites du modèle cinématique ci-dessus en forçant les vitesses de pré-contact et les fonctions gap à zéro. Nous avons donc :

$$\forall t \in T_C, \forall i \in \mathbb{N}_a : \begin{cases} \Phi_i(g, r) = 0 , \\ \dot{\Phi}_i(g, r) = A_{N_i}(g, r)\eta + B_{N_i}(g, r)\dot{r} = 0 , \end{cases}$$

où l'on reconnaît de haut en bas, la contrainte géométrique bilatérale de non-pénétration et non-décollement du corps  $\mathcal{B}_i$  en contact persistant avec l'obstacle  $\mathcal{O}$ , ainsi que sa forme cinématique. On notera que, bien que cette dernière contrainte cinématique soit de nature géométrique, c'est-à-dire qu'elle découle d'une contrainte holonome, sa forme cinématique étant exprimée dans  $SE(3) \times se(3) \times T\mathcal{S}$ , elle n'est pas intégrable au sens de la dérivée dans  $\mathbb{R}^n$ . Notons également qu'un contact actif,  $i \in \mathbb{N}_a$ , peut impliquer entre une et deux contraintes cinématiques supplémentaires, tangentes aux obstacles, par exemple, en forçant  $\gamma_{T_i}$  et  $\gamma_{B_i}$  à zéro, ce qui donne :

$$\forall t \in T_C : \begin{cases} A_{T_i}(g, r)\eta + B_{T_i}(g, r)\dot{r} = 0 , \\ A_{B_i}(g, r)\eta + B_{B_i}(g, r)\dot{r} = 0 . \end{cases}$$

Dans ce cas, ces deux conditions représentent deux contraintes cinématiques intrinsèquement non-holonomes telles que celles imposées par les conditions de non-dérapiage et de roulement sans glissement d'un contact roue-sol idéal. En considérant maintenant le MMS dans sa globalité, la totalité des corps en contact permanent va imposer un ensemble de  $m$  contraintes cinématiques indépendantes qui peuvent être assemblées sous la forme matricielle générale suivante :

$$\forall t \in T_C : {}^cA(g, r)\eta + {}^cB(g, r)\dot{r} = 0, \quad (3.11)$$

où  ${}^cA$  et  ${}^cB$  sont des matrices, exprimées dans les repères de contact, obtenues en concaténant toutes les contraintes persistantes présentées ci-dessus et en éliminant



les possibles redondances introduites par le design du MMS, ou par l'une de ses éventuelles configurations singulières.

### 3.8.3 Cinématique des contacts intermittents

Nous allons maintenant investiguer le modèle cinématique d'un MMS lorsque le système transite par un événement discret, c'est-à-dire lorsqu'il traverse un instant de  $T_D$ . Pour les événements discrets réguliers, c'est-à-dire  $t \in T_S = \mathbb{R}^+ \setminus T_I$ , le MMS est sujet aux décollements et aux collisions douces. Dans ces cas de figure, l'état du MMS reste continu<sup>1</sup> et son modèle cinématique est toujours régi par un modèle de la forme (3.11), dans lequel nous supprimons ou ajoutons les contraintes des contacts selon qu'ils soient soudainement désactivés ou activés respectivement. En résumé, pour tout  $t_c \in T_D \setminus T_I$ , le modèle cinématique régulier (3.11) peut être prolongé de  $]t_{c+}, \cdot[$  à  $[t_c, \cdot[$  et enfin de  $T_C$  à  $T_S = \mathbb{R}^+ \setminus T_I$ . En revanche, lorsque  $t = t_c \in T_I$ , nous avons besoin d'un modèle supplémentaire régissant le saut des vitesses générées par un contact soudain entre un (un seul, par hypothèse) des corps constitutifs, disons  $\mathcal{B}_i$ , avec  $\mathcal{O}$ . En utilisant une fois de plus la définition des vitesses de pré-contact (3.8), le modèle le plus simple d'un tel impact est dû à Newton et est donné, dans le repère de contact  $\mathcal{R}_{c_i}$ , par :

$${}^{c_i}\gamma_{i+} = -\epsilon_i {}^{c_i}\gamma_{i-} , \quad (3.12)$$

où  $\epsilon_i$  est une matrice diagonale  $3 \times 3$  de paramètres empiriques nommés les *coefficients de restitution*. Tout comme dans le cas des contacts persistants, nous séparons cette relation en trois parties, une première liée à la normale au contact  $N_i$ , les deux autres s'exprimant dans le plan tangent  $T_{C'_i}\partial\mathcal{O}$ . De plus, nous supposons que (3.12) est découplée le long de ces trois dimensions. Avec une telle séparation,  $\epsilon_i$  peut être détaillé comme  $\epsilon_i = \text{diag}(\epsilon_{N_i}, \epsilon_{T_i}, \epsilon_{B_i})$ . Par souci de simplicité, nous supposons ici que  $\epsilon_i$  est isotrope dans  $T_{C'_i}\partial\mathcal{O}$ . Par conséquent,  $\epsilon_i = \text{diag}(\epsilon_{N_i}, \epsilon_{T_i}, \epsilon_{T_i})$  avec  $0 \leq \epsilon_{N_i} \leq 1$  et  $-1 \leq \epsilon_{T_i} \leq 1$ . En introduisant (3.10) dans (3.12) on obtient le saut de vitesse au point de contact  $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{O}$  exprimé dans l'espace de configuration du MMS  $\text{SE}(3) \times \mathcal{S}$  sous la forme :

$${}^{c_i}A_{I,i}\eta_{i+} + {}^{c_i}B_{I,i}\dot{r}_{i+} = -\epsilon_i ({}^{c_i}A_{I,i}\eta_{i-} + {}^{c_i}B_{I,i}\dot{r}_{i-}) ,$$

où, dans cette équation, l'indice  $I$  signifie que  ${}^{c_i}A_{I,i}$  et  ${}^{c_i}B_{I,i}$  sont tous deux exprimés à l'instant d'un impact  $t_c \in T_I$ . Enfin, si l'on considère le MMS dans son intégralité, quand  $t \in T_I$ , alors que l'un des contacts subit une collision dure, tous les autres

---

1. Ceci est motivé par des raisons dynamiques qui seront introduites par la suite (voir la [remarque 3.9](#)).

sont, en premier lieu, supposés rester persistants<sup>2</sup> de sorte à satisfaire :

$${}^c_i\gamma_{j+} = {}^c_i\gamma_{j-} = 0, j \in \mathbb{N}_a, j \neq i.$$

Ainsi, en définissant pour chacun des corps  $\mathcal{B}_i$  du MMS un coefficient de restitution  $\epsilon_i$ , il devient évident que (3.12) reste valable pour les contacts persistants à tout moment  $t_c \in T_I$ . Dans de telles conditions, le modèle des contacts intermittents avec impacts s'écrit :

$$\forall t \in T_I : {}^cA_I\eta_+ + {}^cB_I\dot{r}_+ = -E({}^cA_I\eta_- + {}^cB_I\dot{r}_-), \quad (3.13)$$

où  $E = \text{diag}(\epsilon_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}_a$ , et  $({}^cA_I, {}^cB_I)$  désigne la matrice de toutes les contraintes indépendantes imposées par les contacts actifs au temps  $t_c \in T_I$ , toutes ces contraintes étant exprimées dans les repères de contact.

**Remarque 3.5 :**

Les coefficients de restitution  $\epsilon_{N_i}$  et  $\epsilon_{T_i}$  imagent la perte d'énergie lors des impacts. Par exemple, avec  $\epsilon_{N_i} = 1$  et  $\epsilon_{T_i} = 1$ , toute l'énergie cinétique est restituée au système après l'impact qui est dit *élastique*. Au contraire, lorsque  $\epsilon_{N_i} = 0$  et  $\epsilon_{T_i} = 0$ , l'impact est dit *plastique* et l'énergie cinétique avant impact est partiellement dissipée. Enfin, lorsque  $\epsilon_{T_i} = -1$ , il n'y a aucune perte d'énergie due aux collisions tangentielles, et contrairement au cas  $\epsilon_{T_i} = 1$ , les vitesses tangentielles avant et après impact restent identiques.

**Remarque 3.6 :**

Dans le modèle de cinématique d'impact ci-dessus, nous avons supposé que tout contact persistant avant l'impact le reste après l'impact. Cette hypothèse peut être contredite dans des situations multi-contacts simples comme celle mentionnée par [Glocker 2006], qui est illustrée par la figure 3.6. Dans ce cas, lorsque la bille qui tombe touche la barre, elle génère un contact impulsif à l'intersection de la bille et de la barre. À cet instant, bien que le premier contact avec les obstacles reste persistant, ce n'est pas le cas du second, qui fait l'objet d'un décollement soudain et le modèle (3.13) échoue. Pour éliminer ces incohérences, il faut un modèle dynamique de l'impact. Un tel modèle permet de surveiller l'état mécanique  $(\Phi_i, f_{N_i})$  de tous les contacts et de vérifier s'ils sont compatibles avec les exigences (3.7). Dès que ce n'est plus le cas, l'hypothèse de persistance des contacts après l'impact doit être reconsidérée afin de rétablir la compatibilité de tous les contacts violés. Dans le cas de la figure 3.6, les deux contacts avec le sol sont d'abord considérés comme persistants avant et après l'impact entre la balle et la barre. Dans ces premières conditions, un modèle dynamique va fournir des forces de contact impulsives telles que  $f_{N_1} > 0$  et  $f_{N_2} < 0$ . Par conséquent, les contraintes bilatérales du contact 2 se devront d'être supprimées du modèle

2. Il convient de noter que cette hypothèse est une prédiction qui peut faire l'objet d'une correction (voir la remarque 3.6).

■ (3.13) avant de rejouer le modèle dynamique de l'impact.

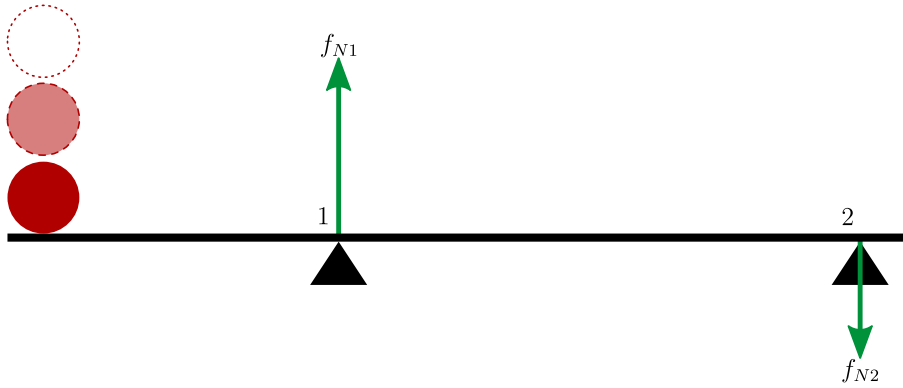


Figure 3.6 – Balle percutant une barre en double support.

**Remarque 3.7 :**

On notera que, dans (3.12),  $\epsilon_{Ni}, \forall i \in \mathbb{N}_{a+}$  doit être égal à zéro afin que les contacts restent activés après la collision faute de quoi, les points de contact, et par conséquent, le MMS dans son ensemble, rebondira sur les obstacles. Par conséquent, seuls les impacts *plastiques* peuvent changer la configuration des contacts d'un MMS. Les impacts *élastiques* laissent le MMS dans sa configuration de contact pré-impact, les contacts n'étant activés que brièvement au moment de l'impact. De même, lorsqu'il est appliqué à une roue en contact avec le sol,  $\epsilon_{Ti} = 0$  assurera l'activation de la condition de roulement sans glissement dans la direction de roulement de la roue, et celle de non-dérapiage dans la direction orthogonale. Par conséquent, prendre  $E = 0$  en (3.13) permet de modéliser un MMS non-holonome à roues soumis à des impacts plastiques, et dans ce cas nous aurons  $({}^cA, {}^cB)(t_c) = ({}^cA, {}^cB)(t_{c+}) = ({}^cA_+, {}^cB_+)$  dans (3.13).

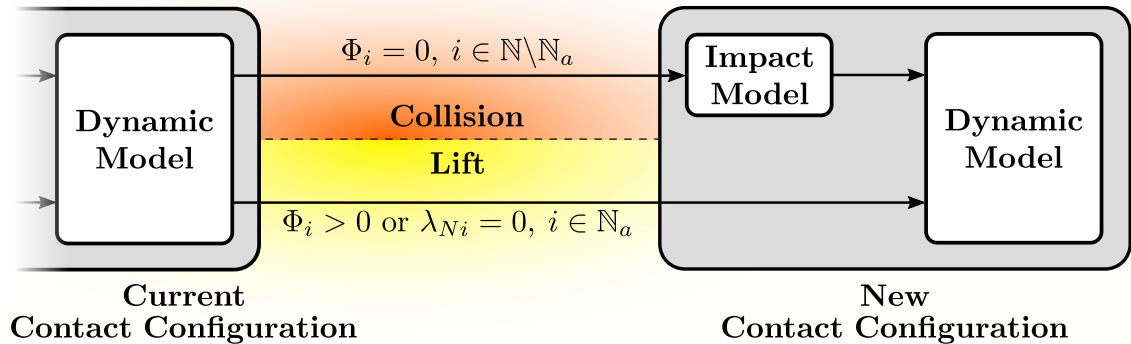
**Remarque 3.8 :**

Comme c'est le cas dans sa direction normale, chaque point de contact  $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{O}$  peut transmettre des forces tangentielles le long de  $T_i$  et  $B_i$  dénoté  $f_{T_i}$  et  $f_{B_i}$  respectivement, les deux étant régis par un modèle tribologique. Dans notre cas, les contacts étant supposés idéaux, lorsqu'ils sont persistants (c'est-à-dire pour  $t \in T_S$ ) la puissance produite par les forces qu'ils transmettent, doit être nulle, c'est-à-dire  $(f_{N_i}, f_{T_i}, f_{B_i})^{c_i} \gamma_i = 0, i \in \mathbb{N}_a$ . Cela signifie que des vitesses tangentielles relatives nulles, comme dans le cas d'un contact roue-sol idéal, autorisent des forces tangentielles duales  $(f_{T_i}, f_{B_i})$  qui ne le soient pas. Réciproquement, des vitesses tangentielles relatives non nulles, telles que celles que l'on peut observer le long de la direction de glissement d'un patin à glace, impliquent des forces tangentielles duales inexistantes. Ces considérations peuvent être étendues au cas des contacts intermittents en remarquant qu'un frottement tangentiel persistant nul correspond au cas  $\epsilon_{Ti} = -1$ , tandis que  $\epsilon_{Ti} = 0$  sature le frottement tangentiel comme dans le cas d'un contact roue-sol (roulement sans glissement

et non-dérapage) idéal. Dans tous les cas, les contacts transmettent des forces instantanées aux instants  $t_k \in T_I$ . Ces forces *impulsives* se superposent à celles générées durant  $T_S$ , pour construire l'évolution temporelle des forces de contact sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall t_k \in T_I : \begin{pmatrix} f_{N_i} \\ f_{T_i} \\ f_{B_i} \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} \lambda_{N_i} \\ \lambda_{T_i} \\ \lambda_{B_i} \end{pmatrix} (t) + \sum_{t_k \in T_I} \begin{pmatrix} \Lambda_{N_i} \\ \Lambda_{T_i} \\ \Lambda_{B_i} \end{pmatrix} \delta_{t_k}(t) = {}^{c_i} \lambda_i(t) + \sum_{t_k \in T_I} {}^{c_i} \Lambda_i \delta_{t_k}(t) \quad (3.14)$$

qui est valide pour tous  $i \in \mathbb{N}$  et où  $\delta_{t_k}(t) = \delta(t - t_k)$  est la distribution de Dirac à l'instant  $t_k$  de l'impact. Dans (3.14),  ${}^{c_i} \lambda_i$  et  ${}^{c_i} \Lambda_i$  définissent, respectivement, les multiplicateurs de Lagrange non-impulsionnels (tenant compte des fonctions de Heaviside dues aux décollements durs) et impulsionnels forçant les contraintes persistantes et intermittentes (3.11) et (3.13). Une fois concaténés pour tous les  $i \in \mathbb{N}_a$ , ils forment deux vecteurs  $\lambda$  et  $\Lambda$  dont l'évolution temporelle sera décrite dans la prochaine section consacrée à la dynamique.



**Figure 3.7** – Graphe état-transition générique. Dans sa configuration actuelle des contacts, un MMS peut être sujet à des *décollements* et des *collisions*. Dans le cas d'une *collision*, les vitesses post-impact de la nouvelle configuration de contact sont obtenues via un modèle d'impact et sont fonction des vitesses pré-impact. Dans le cas d'un *décollement*, un ou des corps du MMS se détachent de l'obstacle et, par conséquent, les contraintes associées sont instantanément retirées du modèle cinématique. On passe alors d'un modèle dynamique continu à un autre.

### 3.9 Dynamique continue d'un système mobile multi-corps

Dans la continuité du chapitre précédent, entre deux évènements discrets consécutifs, la dynamique d'un MMS, dans son fibré principal des configurations  $SE(3) \times \mathcal{S}$ , prend la forme contrainte générale suivante :

$$\forall t \in T_C : \begin{cases} \mathbb{M} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \mathbb{F} + \mathbb{C}^\top \lambda , & (3.15a) \\ \mathbb{C} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} = 0 , & (3.15b) \\ \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}^\wedge . & (3.15c) \end{cases}$$

La formulation de la dynamique (3.15), précédemment présentée en [section 2.3.1](#) du [chapitre 2](#), est celle d'un système contraint où, dans (3.15a),  $\lambda$  est le vecteur des  $m$  multiplicateurs de Lagrange forçant le MMS à satisfaire les  $m$  contraintes  $\mathbb{C} = ({}^cA, {}^cB)$  (3.15b) définies par (3.11). Enfin, (3.15c) est l'équation de reconstruction additionnelle permettant de reconstituer l'évolution temporelle de la configuration du MMS  $x = (g, r)$  à partir de ses vitesses dans  $se(3) \times T\mathcal{S}/\mathcal{S}$ . Nous avons également profité de (3.15a) pour introduire des notations plus compactes utilisées dans la suite :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & m \end{pmatrix} , \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} f \\ Q + \tau \end{pmatrix} , \quad (3.16)$$

où  $\mathcal{M}$  est la matrice d'inertie ( $6 \times 6$ ) du MMS,  $M$  est la matrice ( $n \times 6$ ) couplant les ddls externes et internes et  $m$  la matrice d'inertie ( $n \times n$ ) des ddls internes. Toujours dans (3.16),  $f$  et  $Q$  sont les vecteurs ( $6 \times 1$ ) et ( $n \times 1$ ) des forces externes (à l'exception de celles imposées par les contacts) et des forces inertielles (Coriolis, centrifuge), respectivement. Pour sa part,  $\tau$  est le vecteur ( $n \times 1$ ) des couples de commande du MMS.

#### Remarque 3.9 :

Comme pour le modèle cinématique (voir le début de la [section 3.8.3](#)), la dynamique continue (3.15) peut être naturellement prolongée de  $T_C$  à  $T_S = \mathbb{R}^+ \setminus T_I$ . En d'autres termes, ce modèle reste valable pour les évènements réguliers (n'impliquant pas de saut en vitesse) tels que les décollements et les collisions douces. Pour un décollement, certains des multiplicateurs de Lagrange sont soudainement nuls et les contraintes correspondantes doivent être supprimées de (3.15). Réciproquement, durant une collision douce, la fonction gap et sa dérivée temporelle sont soudainement nulles et les contraintes associées doivent être ajoutées à la matrice  $\mathbb{C}$ . En conséquence, ces deux types d'évènements affectent seulement

l'étage cinématique ( $\mathbb{C}$ ) de la formulation (3.15), qui reste valide puisque ces changements de la matrice  $\mathbb{C}$  n'ont aucune incidence sur la continuité de l'évolution temporelle de l'état du système. En particulier, même dans le cas d'une annulation brutale des forces de réaction normales due à un décollement dur (voir le test de la section 4.3.2), celle-ci introduit des sauts d'accélération qui, une fois intégrés, ne produisent aucune discontinuité de l'état du système.

## 3.10 Dynamique discontinue

En cas de collision, les vitesses relatives aux points de collision sont sujettes à de brusques discontinuités, modélisées par le modèle cinématique des impacts (3.13). Pour décrire dynamiquement un tel phénomène instantané, le modèle continu précédent (3.15) doit être changé en un bilan d'impulsions (discrètes). Ces impulsions représentent les forces de réaction, ainsi que les accélérations, infinies instantanées qui se produisent au moment d'une collision. Pour obtenir un tel modèle, sans recourir à la théorie de la mesure, il est courant d'utiliser un processus de passage à la limite temporelle consistant à multiplier (3.15), évalué à l'instant  $t_c \in T_I$ , par  $\Delta t$  et à faire tendre  $\Delta t$  vers zéro. Les accélérations,  $(\dot{\eta}^\top, \dot{r}^\top)^\top$  se changent alors en  $(\eta_+^\top, \dot{r}_+^\top)^\top - (\eta_-^\top, \dot{r}_-^\top)^\top$ , et, en reprenant le modèle des efforts de contact (3.14), le caractère impulsif des forces de contact est modélisé par des distributions de Dirac  $\Lambda \delta(t - t_c)$  avec  $t_c$ , l'instant d'une collision et  $\Lambda$ , le vecteur des multiplicateurs de Lagrange impulsifs. Ce processus simple transforme finalement la dynamique continue (3.15), en une autre discontinue (discrète) :

$$\forall t_c \in T_I : \begin{cases} \mathbb{M} \begin{pmatrix} \eta_+ - \eta_- \\ \dot{r}_+ - \dot{r}_- \end{pmatrix} = \mathbb{C}_I^\top \Lambda, & (3.17a) \\ \mathbb{C}_I \begin{pmatrix} \eta_+ \\ \dot{r}_+ \end{pmatrix} = -E \mathbb{C}_I \begin{pmatrix} \eta_- \\ \dot{r}_- \end{pmatrix}, & (3.17b) \\ \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}_+ = \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}_-, & (3.17c) \end{cases}$$

où, dans les deux premières équations (3.17a) et (3.17b),  $\mathbb{C}_I = ({}^c A_I, {}^c B_I)$  représente la matrice des contraintes cinématiques des points de contact définis par (3.13) et par la remarque 3.6. Notons ici que (3.17) possède la même structure que (3.15). En particulier, tout comme les forces de réaction  $\lambda$  forcent les contraintes persistentes idéales  $\mathbb{C}(\eta, \dot{r})^\top = 0$  (3.15b), les forces de réaction impulsives  $\Lambda$  forcent la discontinuité de vitesse imposée par la loi de Newton  $\mathbb{C}_I(\eta_+, \dot{r}_+)^\top = -E(\mathbb{C}_I(\eta_-, \dot{r}_-)^\top)$  (3.17b). Enfin, la troisième équation (3.17c) impose la continuité de configuration du MMS et remplace ainsi l'équation de reconstruction (3.15c).

### 3.11 Résolution de la dynamique continue et discontinue

Dans cette section nous présentons la méthode classiquement utilisée pour résoudre la dynamique des systèmes multi-corps soumis à des contacts intermittents [Hurmuzlu et Marghitu 1994; Murray et al. 1994; Chemori 2005; Chemori et Almir 2006; Glocker 2006; Rosa et al. 2012]. Ici appliquée aux systèmes non-holonomes, elle consiste à résoudre les dynamiques continues (3.15) et discontinues (3.17) des vitesses d'un MMS dans les espaces tangents à son fibré des configurations  $SE(3) \times \mathcal{S}$ . Cette méthode adoptant comme inconnues cinématiques le vecteur complet des vitesses  $(\eta^\top, \dot{r}^\top)^\top$  dans  $se(3) \times T\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}$ , nous la nommons *approche complète*. Bien qu'ayant l'avantage d'être simple dans son principe et compatible avec n'importe quelles valeurs de coefficient de restitution, cette première approche a le défaut d'être lourde en calculs. Afin de palier ce défaut, nous proposerons par la suite, une seconde résolution de (3.15) et (3.17), dite *réduite* car basée sur la réduction projective. Précédemment utilisée avec succès dans le cas des contacts persistants en chapitre 2, cette seconde résolution sera étendue, dans ce chapitre, aux cas des contacts plastiques intermittents en section 3.12.

#### 3.11.1 Résolution de la dynamique continue

La résolution complète de (3.15) consiste à éliminer les multiplicateurs de Lagrange en utilisant la séquence de manipulations algébriques et différentielles suivantes. Tout d'abord, on isole les accélérations dans (3.15a) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} = M^{-1} (C^\top \lambda + F) , \quad (3.18)$$

et l'on dérive (3.15b) par rapport au temps :

$$C \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{r} \end{pmatrix} + \dot{C} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} = 0 . \quad (3.19)$$

Puis, introduisant (3.18) dans (3.19) nous obtenons :

$$CM^{-1} (C^\top \lambda + F) + \dot{C} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} = 0 ,$$

de laquelle nous extrayons  $\lambda$  :

$$\lambda = -(CM^{-1}C^\top)^{-1} \left( CM^{-1}F + \dot{C} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} \right) . \quad (3.20)$$

Enfin, la réintroduction de (3.20) dans (3.18) donne, pour  $\forall t \in T_S$  :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \mathbb{M}^{-1} \left( (\mathbb{I} - \mathbb{C}^\top (\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}^\top)^{-1} \mathbb{C}\mathbb{M}^{-1}) \mathbb{F} - \mathbb{C}^\top (\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}^\top)^{-1} \dot{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \eta \\ r \end{pmatrix} \right), & (3.21a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ r \end{pmatrix}^\wedge, & (3.21b) \end{cases}$$

où nous avons adjoint l'équation de reconstruction de  $\text{se}(3) \times \text{TS}/\mathcal{S}$  dans  $\text{SE}(3) \times \mathcal{S}$  afin de clore la formulation dynamique.

### 3.11.2 Résolution de la dynamique discontinue

Une séquence similaire de manipulation peut être appliquée à (3.17) pour produire une expression des vitesses post-impact d'un MMS. En effet, l'inversion de (3.17a) donne :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}_+ = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}_- + \mathbb{M}^{-1} \mathbb{C}_I^\top \Lambda, \quad (3.22)$$

qui, une fois introduite dans le modèle cinématique discret (3.17b), donne :

$$\mathbb{C}_I \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}_- + \mathbb{C}_I \mathbb{M}^{-1} \mathbb{C}_I^\top \Lambda = -E \mathbb{C}_I \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}_-,$$

de laquelle, nous pouvons déduire une expression de  $\Lambda$ , en termes des vitesses avant impact :

$$\Lambda = -(\mathbb{C}_I \mathbb{M}^{-1} \mathbb{C}_I^\top)^{-1} (\mathbb{I} + E) \mathbb{C}_I \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}_-. \quad (3.23)$$

Enfin, l'introduction de cette dernière expression de  $\Lambda$  dans (3.22) nous permet d'exprimer les vitesses après impact en termes de leurs homologues avant impact :

$$\forall t \in T_I : \begin{cases} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}_+ = (\mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{C}_I^\top (\mathbb{C}_I \mathbb{M}^{-1} \mathbb{C}_I^\top)^{-1} (\mathbb{I} + E) \mathbb{C}_I) \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}_-, & (3.24a) \\ \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}_+ = \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}_-, & (3.24b) \end{cases}$$

où la matrice multipliant les vitesses pré-impact est souvent appelée matrice de transition. La formulation close de la dynamique discrète est obtenue, cette fois, par l'ajout de la condition de continuité de configuration du MMS (3.24b). En accord avec l'approche événementielle, pour être implémentés dans l'algorithme de simulation d'un MMS, les deux ensembles d'équations (3.21) et (3.24) doivent être pilotés par les collisions et les décollements auxquels le MMS est soumis. Pour cela, les fonctions gap sont évaluées et monitorées à l'aide d'un modèle de l'environnement couplé à des algorithmes de détection de collisions tels que développés ces dernières



années en infographie et conception assistée par ordinateur. De manière duale, les décollements sont détectés par le monitoring des forces de réaction transmises par les contacts au système à l'aide des équations (3.20) et (3.23) (voir remarque 3.6).

### 3.12 Le cas des impacts plastiques

Pour résoudre la dynamique continue, l'emploi de la méthode complète rappelée ci-dessus, requiert douze multiplications de matrices, deux soustractions et l'inversion d'une matrice de dimension  $((6+n) \times (6+n))$  et d'une matrice  $(m \times m)$  (dans le cas d'un MMS composé de  $n+1$  corps soumis à  $m \leq 6+n$  contraintes). Comme nous le verrons ci-après, dans le cas de la méthode réduite, cette complexité est réduite de moitié puisque seules six multiplications, une soustraction et l'inversion d'une seule matrice, de dimension  $(m \times m)$  qui plus est, sont requises. Ce constat reste le même dans le cas de la dynamique discontinue puisque la méthode réduite ne nécessite que cinq multiplications et l'inversion d'une matrice  $(m \times m)$  là où la méthode complète demande cinq multiplications, une soustraction et surtout l'inversion d'une matrice  $((6+n) \times (6+n))$  et d'une matrice  $(m \times m)$ . Bien que valable pour n'importe quel coefficient de restitution, l'approche de résolution complète conduit donc à des calculs lourds qui peuvent être contournés dès lors que les impacts sont supposés plastiques. À ce sujet, il convient de noter que parmi toutes les possibilités offertes par le modèle d'impacts de Newton [Whittaker 1904]<sup>3</sup>, le modèle des impacts plastiques est de loin le plus cohérent avec la réalité physique des MMS non-holonomes habituels comme la bicyclette. De plus, par analogie avec le cas des contacts persistants, nous pouvons le comparer au modèle de la liaison idéale, puisque, comme ce dernier, c'est le seul modèle d'impact ne nécessitant aucune mesure physique ( $\epsilon = 0$ ). Pour ces raisons, dans la section suivante, nous considérons ce modèle de l'impact et montrons que dans ce cas, il devient possible de développer une alternative à la résolution complète précédente. Basée sur l'approche projective appliquée dans le chapitre 2 au cas des systèmes non-holonomes avec contacts persistants, cette alternative conduit à une formulation dynamique réduite, par morceaux, d'un MMS non-holonyme sujet à des impacts plastiques. L'idée maîtresse d'une telle réduction est de calculer les noyaux des contraintes de toutes les configurations de contacts du MMS afin de projeter sa dynamique dans chacun de ces noyaux et d'établir les équations de saut de vitesse entre ces différents noyaux.

---

3. Contrairement à l'idée de Newton, encore assez répandue de nos jours, le coefficient de restitution  $\epsilon$  n'est pas une constante inhérente aux matériaux des corps en contact. Ce coefficient devrait être vu comme une mesure de la dissipation due à un impact et dépend, certes, des matériaux des corps en contact, mais également de leurs géométries, de leur vitesse relative et de leurs états de surface [Goldsmith 1960], entre autres.

### 3.12.1 Dynamique réduite d'un système mobile multi-corps soumis à des impacts plastiques

Comme annoncé, cette approche est basée sur la projection de la dynamique sur le sous-espace des vitesses admissibles généré par  $\text{span}(H) = \ker(\mathbb{C})$  où  $\mathbb{C}$  est la matrice des contraintes imposées par les contacts actifs. Bien que déjà présentée dans le [chapitre 2 \(section 2.3.2\)](#), la démarche de réduction continue est ici brièvement rappelée afin de garantir l'autonomie du présent chapitre et d'introduire les notations adoptées par la suite. Ainsi, dans (3.15a),  $\mathbb{C}^\top \lambda$  est éliminé par la projection ( $H^\top \mathbb{C}^\top = (\mathbb{C}H)^\top = 0$ ) et nous pouvons écrire une formulation réduite de la dynamique continue (3.15), ayant la forme :

$$\begin{cases} \mathbb{M}_r \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} = \mathbb{F}_r, & (3.25a) \\ \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}, & (3.25b) \\ \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \left( H \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} \right)^\wedge, & (3.25c) \end{cases}$$

où nous avons introduit le vecteur des vitesses réduites  $(\eta_r^\top, \dot{r}_r^\top)^\top$  ainsi que la matrice d'inertie réduite correspondante et le vecteur réduit des forces externes et inertielles, qui peuvent être détaillés comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_r &= H^\top \mathbb{M} H, \\ \mathbb{F}_r &= H^\top \left( \mathbb{F} - \mathbb{M} \dot{H} \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Afin d'étendre cette approche au cas discontinu, nous commençons tout d'abord par exprimer les vitesses pré/post-impact dans leur noyau respectif :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}_- &= H_- \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}_-, \\ \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix}_+ &= H_+ \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}_+, \end{aligned} \quad (3.26)$$

où  $H_-$  et  $H_+$  représentent les noyaux des contraintes pré et post-impacts, respectivement. Puis, en introduisant ces deux cinématiques réduites dans (3.17) que nous projetons ensuite sur le noyau des contraintes après impact, on obtient la dynamique réduite de l'impact, sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbb{M}_{r++} \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}_+ = \mathbb{M}_{r-+} \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}_-, \\ \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}_+ = \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}_-, \end{cases}$$

où l'on a exploité le fait que  $\mathbb{C}_I = \mathbb{C}_+$  et  $H_+^\top \mathbb{C}_+^\top = 0$ . Dans ces expressions, nous avons introduit les notations supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{r++} &= H_+^\top \mathbb{M} H_+ , \\ \mathbb{M}_{r+-} &= H_+^\top \mathbb{M} H_- ,\end{aligned}$$

qui permettent de définir la matrice de transition réduite  $\mathbb{M}_{r++}^{-1} \mathbb{M}_{r+-}$  liant les vitesses post-impact à celles pré-impact (voir (3.28a)).

On notera également qu'en introduisant les deux cinématiques réduites (3.26) dans 3.17b, nous avons fait disparaître la partie gauche de l'équation ( $\mathbb{C}_+ H_+ = 0$ ) qui devient alors :

$$0 = -E \mathbb{C}_+ H_- \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}_- ,$$

ce qui impose que  $E$  soit une matrice nulle ou que les vitesses pré-impact soient elles-mêmes nulles afin de satisfaire 3.17b. Autrement dit, la méthode réduite impose que l'impact soit plastique ( $E$  nulle) ou que nous traitions d'un impact doux (vitesses pré-impact nulles), c'est-à-dire sans saut de vitesse.

En résumé, les inconnues de réaction,  $\lambda$  et  $\Lambda$ , ont été supprimées par le processus de projection dans les cas continus et discrets. *In fine*, il suffit de concaténer les deux formulations réduites en incluant leurs équations respectives de reconstruction et de continuité pour obtenir une forme close réduite de la dynamique d'un MMS soumis à des contacts intermittents :

$$\forall t \in T_S : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{r}_r \end{pmatrix} = \mathbb{M}_r^{-1} \mathbb{F}_r , \\ \begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \left( H \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} \right)^\wedge . \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\forall t \in T_I : \begin{cases} \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}_+ = \mathbb{M}_{r++}^{-1} \mathbb{M}_{r+-} \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}_- , \\ \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}_+ = \begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix}_- . \end{cases} \quad (3.28a)$$

$$(3.28b)$$

Enfin, le passage d'une dynamique réduite à l'autre nécessite également de superviser les forces de réaction,  $\lambda$  et  $\Lambda$  (voir la remarque 3.6), en parallèle de l'intégration numérique de la dynamique dans le temps. Afin d'obtenir une expression des forces de réaction (3.20) et (3.23) réduites, il nous est possible de projeter, au sens du produit Euclidien  $\mathbb{R}^{6+n} \cong \text{se}(3) \times \text{TS}/\mathcal{S}$ , les dynamiques originelles (3.15) et (3.17) de  $(\text{se}(3) \times \text{TS}/\mathcal{S})$  dans le plan orthogonal à celui généré par les contraintes. Cette opération géométrique est simplement réalisée au travers des relations matricielles

suivantes :

$$\lambda = (\mathbb{C}\mathbb{C}^\top)^{-1}\mathbb{C} \left( \mathbb{M}\mathbb{H}\mathbb{M}_r^{-1}\mathbb{F}_r + \mathbb{M}\dot{H} \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix} - \mathbb{F} \right), \quad (3.29)$$

$$\Lambda = (\mathbb{C}_I\mathbb{C}_I^\top)^{-1}\mathbb{C}_I\mathbb{M} \left( H_+ \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}_+ - H_- \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{r}_r \end{pmatrix}_- \right), \quad (3.30)$$

l'équation (3.30) étant le pendant impulsif de l'équation (3.29) dévolue aux forces de réaction continues.

### 3.13 Illustration de systèmes soumis à des contraintes intermittentes

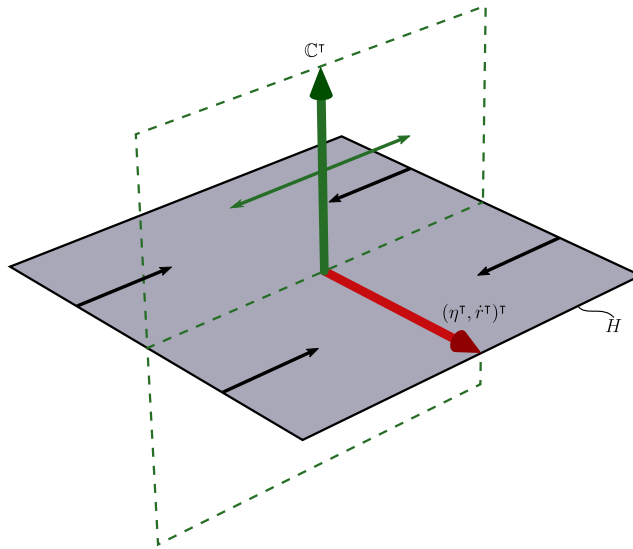
Pour une configuration  $x \in \mathcal{C}$ , les vitesses d'un MMS à  $6 + n$  ddls soumis à  $m$  contraintes indépendantes évolueront dans un sous-espace (des vitesses admissibles) de dimension  $6+n-m$ . En tout point  $x \in \mathcal{C}$  l'espace des vitesses d'un tel système peut être défini comme l'union des sous-espaces de ses vitesses interdites et admissibles :  $\forall x \in \mathcal{C} : T_x\mathcal{C} = \text{span}(\mathbb{C}^\top) \cup \text{span}(H)$ .

La figure 3.8 illustre ces changements de dimension des sous-espaces des vitesses interdites et admissibles dans le cas d'une collision. Dans ce cas, le contact des corps en collision implique l'ajout de nouvelles contraintes, ce qui a pour effet d'étendre l'espace engendré par  $\mathbb{C}^\top$  et, par conséquent, de réduire celui engendré par  $H$ .

La figure 3.9 illustre l'évolution temporelle de la configuration  $x = (g, r) \in \mathcal{C}$  d'un système, décrite par une dynamique réduite basée sur l'approche projective, soumise à une collision douce puis à un décollement. Plusieurs instants, indicés de  $t_1$  à  $t_7$  présentent la configuration  $x$  de ce système complété de ses vitesses  $(\eta^\top, \dot{r}^\top)^\top$  (représentées sous la forme d'une flèche rouge sur la figure 3.9). Ces dernières appartiennent au sous-espace des vitesses admissibles engendré par  $H$  (représenté sous la forme d'un plan gris sur la figure 3.9), lui-même orthogonal au sous-espace engendré par les contraintes du système, représenté sous la forme d'une flèche verte sur la figure 3.9, et noté ici  $\mathbb{C}^\top$ . Sur cette figure, seuls les changements de dimension du sous-espace des vitesses admissibles découlant de la collision douce (instant  $t_3$ ) et du décollement (instant  $t_5$ ) sont représentés par souci de lisibilité. La dimension du sous-espace des vitesses interdites (non représentée) évolue, bien entendu, en conséquence afin de satisfaire  $T_x\mathcal{C} = \text{span}(\mathbb{C}^\top) \cup \text{span}(H)$ .

Pour finir, la figure 3.10 illustre une collision plastique dure. Ici, ni le changement de dimension du sous-espace des vitesses admissibles ni celui des vitesses interdites n'est représenté, l'accent étant mis sur la discontinuité de vitesse au mo-

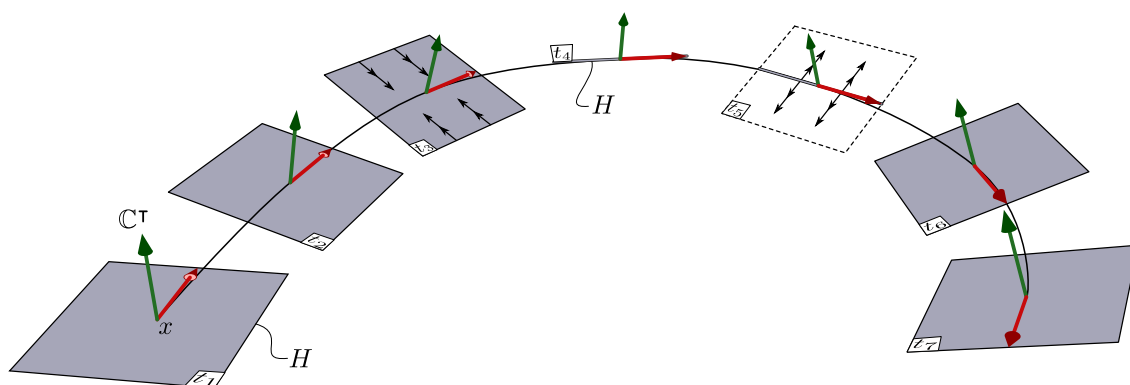
ment de l'impact. La collision survient à l'instant compris entre  $t_4$ , l'instant pré-collision et l'instant  $t_5$ , celui post-collision. Tout d'abord, puisque nous supposons que la collision a lieu instantanément, la configuration du système reste inchangée  $x_+ = x_-$ . Ensuite, les vitesses  $(\eta^\top, \dot{r}^\top)^\top$  n'étant pas compatibles avec les contraintes post-impact (c'est-à-dire  $\mathbb{C}_+(\eta^\top, \dot{r}^\top)^\top \neq 0$ ), le système subit un brusque saut de vitesse, la collision est dite dure. En conséquence, de nouvelles vitesses post-collision, compatibles avec les contraintes  $\mathbb{C}_+$ , doivent être calculées (à partir de celles pré-collision) en utilisant (3.24a) dans le cas de l'approche complète, ou en utilisant (3.28a) dans le cas de l'approche réduite.



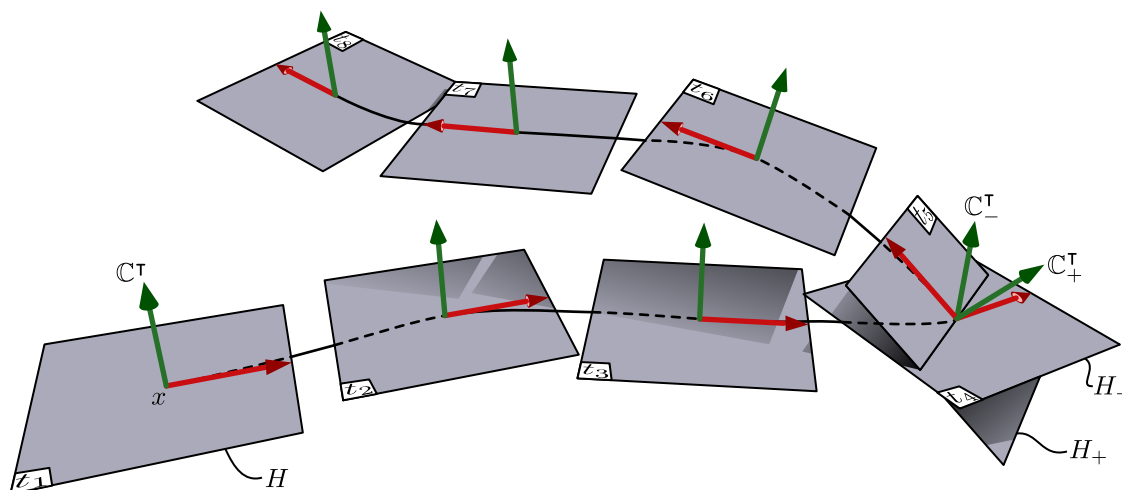
**Figure 3.8** – Détails du changement de dimension des sous-espaces des vitesses admissibles  $H$  et interdites  $\mathbb{C}^\top$  lors d'une collision. L'ajout de contraintes dues à l'impact étend le sous-espace des vitesses interdites et réduit celui des vitesses admissibles.

**Remarque 3.10 :**

Lors d'un impact élastique, la dimension du sous-espace des vitesses admissibles,  $H$ , (et conséquemment celle du sous-espace des vitesses interdites,  $\mathbb{C}^\top$ ) est la même avant et après collision, c'est à dire  $\dim(H_-) = \dim(H_+)$ . En effet, la perte de dimension de  $H$  se produisant lors de l'impact est instantanée ( $t \in T_I$ ) et n'est, par conséquent, pas vue par le modèle discret de l'impact puisque seuls les instants pré et post-impact apparaissent dans la formulation de son modèle (3.17), laissant l'instant précis de l'impact dans l'ombre. De plus, les contraintes activées lors du contact des corps en collision étant celles désactivées dès la séparation des corps, les sous-espaces des vitesses interdites et admissibles sont exactement les mêmes avant et après impact, c'est-à-dire  $H_- = H_+$ . Le test de la [section 4.3.1](#) présente ce cas de figure.



**Figure 3.9** – Représentation d’une collision douce suivie d’un décollement. Détail sur l’évolution du sous-espace des vitesses admissibles engendré par  $H$ . Des instantanés chronologiquement étiquetés de  $t_1$  à  $t_7$  présentent l’évolution de la configuration  $x$  d’un MMS subissant une collision suivie d’un décollement. Lors de la collision (instant  $t_3$ ), le sous-espace des vitesses admissibles engendré par  $H$  se réduit. Lors du décollement (instant  $t_5$ ), le sous-espace des vitesses admissibles engendré par  $H$  augmente.



**Figure 3.10** – Évolution temporelle de la configuration  $x$  d’un MMS soumis à une collision dure. Les instantanés sont chronologiquement étiquetés de  $t_1$  à  $t_8$ .  $\mathcal{C}^\top$  représente le sous-espace des vitesses interdites dans lequel s’expriment les forces de réaction généralisées.  $H$  représente le sous-espace des vitesses admissibles. Entre les instants  $t_4$  et  $t_5$ , le système est sujet à une collision qui le fait instantanément changer de sous-espace des vitesses admissibles.

**Remarque 3.11 :**

La conservation des dimensions des sous-espaces des vitesses interdites et admissibles peut également survenir dans le cas de collisions plastiques. Comme le souligne la [remarque 3.6](#) et le test de la [section 4.3.4](#), une collision peut entraîner un décollement et donc la disparition d'un nombre de contraintes équivalentes à celles gagnées à la suite d'une collision plastique. Dans ce cas de figure, bien que  $\dim(H_-) = \dim(H_+)$ ,  $H_- \neq H_+$  puisque les contraintes pré et post-impact sont différentes. À titre illustratif, ce cas est présenté en [figure 3.10](#).

**Remarque 3.12 :**

On pourra remarquer que lors de la collision présentée en [figure 3.9](#), les vitesses du système ne semblent pas impactées par celle-ci. Ce cas de figure peut survenir lors de collisions douces (voir [remarque 3.2](#)). Lors d'une collision douce entre un corps  $\mathcal{B}_i$  et un obstacle  $\mathcal{O}$ , supposé par simplicité statique, la vitesse relative des points de pré-contact est nulle, c'est-à-dire  $\gamma_i = 0$ . Le fait que  $\gamma_i$  puisse s'exprimer en fonction des vitesses réduites  $(\eta_r^\top, \dot{r}_r^\top)^\top$  et des futures contraintes (3.10) signifie que les vitesses du système sont compatibles avec les futures contraintes additionnelles avant même que la collision ne survienne. Ainsi, il ne se produit aucune discontinuité des vitesses du système.

### 3.14 Interprétation géométrique

Nous cherchons ici à établir les liens existants entre l'approche complète présentée en [section 3.11](#) [[Kovecses et al. 2003](#); [Kövecses 2008a,b](#); [Bauchau 2011](#)] et l'approche réduite présentée en [section 3.12.1](#). Nous allons voir que ces deux approches partagent une même interprétation géométrique et ne diffèrent que par la métrique utilisée.

Les deux approches partent de la même définition des contraintes (3.11). Géométriquement, ces contraintes définissent, en chaque point  $x = (g, r)$  de  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times \mathcal{S}$ , un ensemble de  $m$  1-formes, chacune ayant pour expression générale  $\omega_i dx^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Toutefois, ces 1-formes vivent dans  $T_x^* \mathcal{C}$  et n'ont aucune relation avec  $T_x \mathcal{C}$  si ce n'est d'agir sur des vecteurs pour fournir un scalaire. En particulier, en reconsidérant la définition mécanique du sous-espace des vitesses admissibles comme le noyau des contraintes, avec la dualité seulement, ce sous-espace est défini comme l'annihilateur des  $m$  1-formes, sans qu'il soit possible d'identifier ces 1-formes avec un sous-ensemble de vecteurs de  $T\mathcal{C}$ . Une telle identification est fournie en dotant  $\mathcal{C} = \text{G} \times \mathcal{S}$  d'une métrique, c'est-à-dire en le dotant d'une forme bilinéaire, non dégénérée et définie positive,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , sur son fibré tangent  $T\mathcal{C}$ . Dans ces conditions, pour toute 1-forme  $\omega \in T_x^* \mathcal{C}$ , il existe un unique  $I(\omega) \in T_x \mathcal{C}$  tel que :

$$\omega(v) = \langle I(\omega), v \rangle, \forall v \in T_x \mathcal{C}. \quad (3.31)$$

Avec une telle structure il devient possible d'identifier  $T_x\mathcal{C}$  et  $T_x^*\mathcal{C}$  grâce à l'isomorphisme  $I : T_x^*\mathcal{C} \rightarrow T_x\mathcal{C}$ . Dans notre cas, puisque les vitesses et les forces généralisées sont respectivement des vecteurs et des 1-formes de dimension  $(6+n)$ , nous pouvons utiliser la structure Euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^{6+n}$  afin d'identifier  $T\mathcal{C}$  avec  $T^*\mathcal{C}$ . Ainsi, la formule générale (3.31) est instanciée en la forme matricielle suivante :

$$\omega(v) = \langle I_{\mathbb{I}}(\omega), v \rangle = I_{\mathbb{I}}(\omega)^{\top} v, \forall v \in T_x\mathcal{C},$$

où  $\mathbb{I}$  est une matrice identité de dimension  $(6+n) \times (6+n)$  qui, ici, représente la matrice de la métrique Euclidienne,  $I_{\mathbb{I}}$  instancie l'isomorphisme du cas général (3.31), et  $I_{\mathbb{I}}(\omega)$  est le vecteur colonne  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{(6+n)})^{\top}$  des composantes de la 1-forme  $\omega = \omega_i dx^i$ . En résumé, avec cette métrique simple, l'isomorphisme transforme un vecteur ligne  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{(6+n)})$ , considéré comme étant les composantes de  $\omega_i dx^i$ , en un vecteur colonne  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{(6+n)})^{\top}$ , considéré comme les composantes de  $\omega_i \delta^{ij} \partial x^j$ . C'est exactement ce que nous faisons en écrivant les contraintes sous la forme  $\mathbb{C}\mathbb{V} = 0$ ,  $\mathbb{V} = (\eta^{\top}, \dot{r}^{\top})^{\top}$ , puisque, dans ce contexte, les lignes de la matrice  $\mathbb{C}$  définissent les vecteurs de  $T\mathcal{C}$  associés aux 1-formes originelles des contraintes via la métrique Euclidienne de  $\mathbb{R}^{6+n}$ , c'est-à-dire que toute ligne  $\mathbb{C}_i$  de  $\mathbb{C}$  est interprétée comme  $\mathbb{C}_i^{\top} = I_{\mathbb{I}}^{-1}(\omega_i)$  avec  $\omega_i$  1-forme originelle des contraintes. Avec cette image en tête, on peut aller plus loin dans la géométrie et remarquer que l'approche projective consiste à découper  $T\mathcal{C}$  en deux sous-espaces en somme directe valable en chaque point  $x = (g, r)$  de  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times \mathcal{S}$  :

$$T_{(g,r)}(\text{SE}(3) \times \mathcal{S}) \cong \text{se}(3) \times T_r\mathcal{S} = \text{span}(\mathbb{C}^{\top}) \oplus \text{span}(H). \quad (3.32)$$

où, grâce à la métrique Euclidienne,  $\text{span}(\mathbb{C}^{\top})$  représente le complément orthogonal à  $\text{span}(H) = \ker(\mathbb{C})$  dans  $T\mathcal{C}$ . Conformément à ce contexte géométrique, la matrice  $H$  (3.25) est construite comme le complément orthogonal des lignes de  $\mathbb{C}$  par rapport à la métrique Euclidienne de  $\mathbb{R}^{6+n}$ , c'est-à-dire  $\text{span}(H) = \text{span}(\mathbb{C}^{\top})^{\perp}$ . En accord avec ce point de vue géométrique, les forces de réactions généralisées continues (3.29) et impulsives (3.30) sont fournies, dans le cas de l'approche projective, par les expressions :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\top}\lambda &= \mathbb{C}^{\top}(\mathbb{C}\mathbb{C}^{\top})^{-1}\mathbb{C}(\mathbb{M}\dot{\mathbb{V}} + \mathbb{F}), \\ \mathbb{C}_I^{\top}\Lambda &= \mathbb{C}_I^{\top}(\mathbb{C}_I\mathbb{C}_I^{\top})^{-1}\mathbb{C}_I\mathbb{M}(\mathbb{V}_+ - \mathbb{V}_-), \end{aligned}$$

dans lesquelles nous pouvons reconnaître le projecteur Euclidien  $\mathbb{C}^{\top}(\mathbb{C}\mathbb{C}^{\top})^{-1}\mathbb{C}$  de  $T\mathcal{C}$  sur le sous-espace des vitesses contraintes  $\text{span}(\mathbb{C}^{\top})$ . L'image ci-dessus, qui est utilisée dans la formulation réduite, peut être instanciée pour n'importe quelle métrique sur  $T\mathcal{C}$ . Comme nous allons maintenant le voir, cette image est également le fondement de la résolution complète présentée en section 3.11. Cependant, dans ce second cas, la métrique Euclidienne doit être remplacée par celle de l'énergie cinétique du MMS. En effet, en utilisant comme métrique le tenseur d'inertie  $\mathbb{M}$  de l'énergie cinétique



du MMS sur  $SE(3) \times \mathcal{S}$ , l'isomorphisme (3.31) devient alors :

$$\omega(v) = \langle I_{\mathbb{M}}(\omega), v \rangle = I_{\mathbb{I}}(\omega)^{\top} \mathbb{M}v = (\mathbb{M}I_{\mathbb{I}}(\omega))^{\top} v = I_{\mathbb{M}}(\omega)^{\top} v, \forall v \in \mathcal{TC},$$

où l'on voit apparaître l'identité  $I_{\mathbb{M}} = \mathbb{M}I_{\mathbb{I}}$ , qui, en pratique, signifie que les composantes d'un 1-forme contenues dans un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^{6+n}$  doivent être pré-multipliées, à gauche, par  $\mathbb{M}$  avant de pouvoir être identifiées avec un vecteur de  $\mathcal{TC}$ . Plus généralement, pour tout vecteur  $u \in T_x\mathcal{C}$ , on peut associer un vecteur  $p$  dont les composantes obéissent aux mêmes règles de changement de coordonnées que celles d'un 1-forme. Défini par la relation d'appariement  $p = \mathbb{M}u$ , un tel vecteur est nommé co-vecteur et est considéré comme un élément de  $T_x^*\mathcal{C}$ . Poursuivant l'image, ce second choix de métrique conduit à une autre décomposition orthogonale (3.32) où les deux sous-espaces sont maintenant orthogonaux pour la métrique  $\mathbb{M}$ . En fait, remarquons tout d'abord que pour deux vecteurs  $u_1, u_2$  de  $T_x\mathcal{C}$  on a :

$$\langle u_1, u_2 \rangle = u_1^{\top} \mathbb{M}u_2 = (\mathbb{M}^{-1}p_1)^{\top} \mathbb{M}(\mathbb{M}^{-1}p_2) = p_1^{\top} \mathbb{M}^{-1}p_2, \quad (3.33)$$

où nous avons introduit les deux co-vecteurs  $p_1 = \mathbb{M}u_1$  et  $p_2 = \mathbb{M}u_2$ , appartenant tous deux à  $T_x^*\mathcal{C}$ . La relation (3.33) signifie que le produit interne de deux vecteurs peut être calculé alternativement comme le produit interne de leurs deux co-vecteurs appariés en prenant comme matrice métrique  $\mathbb{M}^{-1}$  au lieu de  $\mathbb{M}$ . Ainsi, contrairement à la métrique Euclidienne où le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{C}^{\top}$  était le même pour les vecteurs et les co-vecteurs, dans ce second cas, nous aurons les deux opérateurs suivants :

$$P_c : \mathcal{TC} \rightarrow \text{span}(\mathcal{C}^{\top}), \mathbb{V}_c = (\mathcal{C}^{\top}(\mathbb{C}\mathbb{M}\mathcal{C}^{\top})^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M})\mathbb{V},$$

qui projette  $\mathbb{V} \in T_x\mathcal{C}$  sur  $\mathbb{V}_c \in \text{span}(\mathcal{C}^{\top})$ , et :

$$P_c^* : T^*\mathcal{C} \rightarrow \text{span}(\mathcal{C}^{\top})^*, \mathbb{P}_c = (\mathcal{C}^{\top}(\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1}\mathcal{C}^{\top})^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1})\mathbb{P},$$

qui projette  $\mathbb{P} \in T_x^*\mathcal{C} \cong \text{se}(3)^* \times T_r^*\mathcal{S}$  sur  $\mathbb{P}_c \in \text{span}(\mathcal{C}^{\top})$ . Réciproquement, on peut définir les projecteurs complémentaires de  $\mathcal{TC}$  et  $T^*\mathcal{C}$  dans  $\text{span}(H)$  :

$$P_a : \mathcal{TC} \rightarrow \ker(\mathbb{C}), \mathbb{V}_a = (\mathbb{I} - (\mathcal{C}^{\top}(\mathbb{C}\mathbb{M}\mathcal{C}^{\top})^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M}))\mathbb{V},$$

et :

$$P_a^* : T^*\mathcal{C} \rightarrow \ker(\mathbb{C})^*, \mathbb{P}_a = (\mathbb{I} - \mathcal{C}^{\top}(\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1}\mathcal{C}^{\top})^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1})\mathbb{P}.$$

Enfin, nous pouvons facilement faire apparaître les projecteurs de co-vecteurs dans les expressions des forces généralisées de contraintes continues et impulsives de la méthode complète de résolution. Dans le cas impulsif par exemple, (3.23) peut être réécrit pour les impacts plastiques ( $E = 0$ ) comme :

$$\mathbb{C}_I^{\top} \Lambda = -(\mathbb{C}_I^{\top}(\mathbb{C}_I \mathbb{M}^{-1} \mathbb{C}_I^{\top})^{-1} \mathbb{C}_I \mathbb{M}^{-1}) \mathbb{M} \mathbb{V}_- = -P_c^* \mathbb{M} \mathbb{V}_-, ,$$

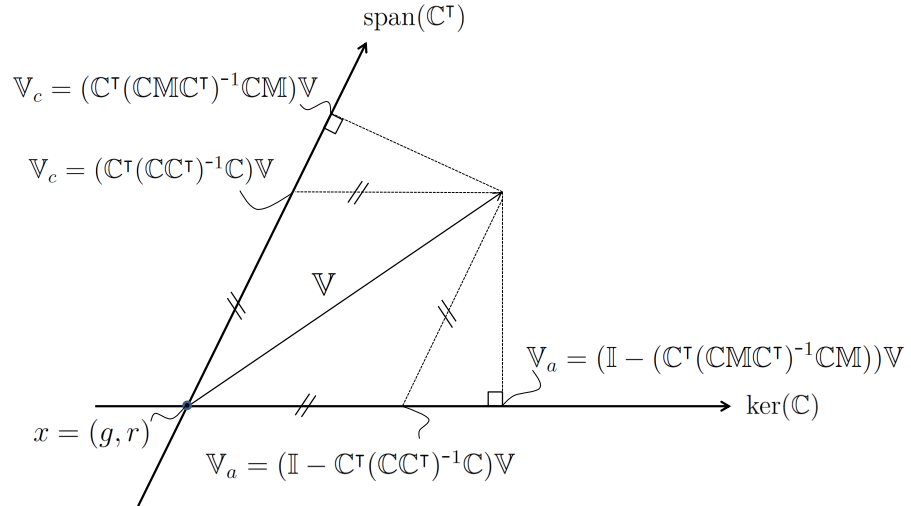
tandis que le projecteur complémentaire apparaît dans l'équation impulsive (3.24) qui peut être réécrit (avec  $E = 0$ ) :

$$\mathbb{M}\mathbb{V}_+ = (\mathbb{I} - \mathbb{C}_I^T(\mathbb{C}_I\mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}_I)^{-1}\mathbb{C}_I\mathbb{M}^{-1})\mathbb{M}\mathbb{V}_- = P_a^*\mathbb{M}\mathbb{V}_-, \quad (3.34)$$

De même, dans le cas continue (3.20) et (3.21) peuvent être réécrites :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^T\lambda &= P_c^*(\mathbb{M}\dot{H}\mathbb{V}_r - \mathbb{F}), \\ \mathbb{M}\dot{\mathbb{V}} &= P_a^*(\mathbb{M}\dot{H}\mathbb{V}_r + \mathbb{F}), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que  $\dot{\mathbb{C}}H = -\mathbb{C}\dot{H}$  ainsi que  $\mathbb{V} = H\mathbb{V}_r$  pour simplifier les expressions. En résumé, les deux approches (complète et réduite) partagent un contexte géométrique commun mais avec des métriques différentes. Notons en particulier que dans les équations de suivi des forces de réaction ( $\lambda$  et  $\Lambda$ ), l'opérateur de projection de la méthode complète peut être directement déduit de celui de la méthode réduite en remplaçant simplement  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1}$  dans (3.29) et  $\mathbb{C}_I$  par  $\mathbb{C}_I\mathbb{M}^{-1}$  dans (3.30). D'autre part, en ce qui concerne les équations de mouvement des deux approches, alors que dans l'approche réduite (projective), l'espace des vitesses admissibles est directement déduit en construisant explicitement (analytiquement) une base orthogonale Euclidienne de  $\text{span}(\mathbb{C}^T)$  en  $\mathbb{R}^{6+n}$ , dans l'approche complète, l'espace admissible est défini en utilisant le projecteur numérique complémentaire de (3.34). Cette image géométrique est illustrée dans la figure 3.11.



**Figure 3.11** – Interprétation géométrique des projections sur le noyau des contraintes et son complément.

### 3.15 Conclusion

Le présent chapitre a exposé le cadre théorique de la modélisation événementielle des MMSs soumis à des contacts intermittents. Celui-ci sera, dans le prochain chapitre ([chapitre 4](#)), appliqué à la bicyclette de Whipple déjà vu en [chapitre 2](#) dans le cas de contacts persistants. Après un court état de l'art sur l'impact ([section 3.3](#)) et un rappel du paramétrage d'un MMS ([section 3.4](#)) nous avons introduit les définitions nécessaires afin de traiter le problème sous sa forme événementielle. Ainsi nous avons défini un premier découpage de l'axe temporel en intervalles de temps continus entrecoupés d'instantanés discrets (voir [section 3.5](#)) liés aux décollements et aux impacts. En remarquant que les décollements ne produisent aucune discontinuité de vitesse, contrairement aux impacts, nous avons introduit un second partitionnement de l'axe temporel. Il différencie les intervalles de temps où le système est régi par une dynamique continue ([section 3.9](#)), des instantanés discrets où le système subit de brusques discontinuités de vitesses dictées par une dynamique discontinue (collisions) ([section 3.10](#)). La [section 3.6](#) présente ensuite la géométrie du contact et permet ainsi de donner une définition précise des deux types d'événements que sont les décollements et les collisions ([section 3.7](#)). La cinématique des contacts est exposée en [section 3.8](#). Elle présente le modèle cinématique d'un MMS durant les intervalles de temps continus ([section 3.8.2](#)) mais également lorsque celui-ci transite par un événement discret ([section 3.8.3](#)). De ces modèles découlent les contraintes cinématiques qui permettent d'écrire le modèle dynamique continu ([section 3.9](#)) et discontinu ([section 3.10](#)) d'un MMS soumis à des contacts intermittents. Suite à la formulation de ces deux dynamiques, continue et discontinue, nous présentons deux résolutions possibles. La première ([section 3.11](#)), dénommée *méthode complète*, s'appuie sur une succession de manipulations algébriques afin d'obtenir une formulation de la dynamique exempte des inconnues que sont les multiplicateurs de Lagrange et de leur pendant impulsionnel dans le cas de la dynamique discontinue. La seconde ([section 3.12.1](#)) se base quant-à elle sur la réduction projective déjà utilisée au [chapitre 4](#). Cette résolution est étroitement liée à l'hypothèse d'idéalité des liaisons, ce qui se traduit, dans le cas discontinu, par des impacts purement plastiques. Le chapitre prend fin en discutant le lien unissant ces deux méthodes ([section 3.14](#)). En effet, celles-ci partagent une interprétation géométrique commune et ne diffèrent que par la métrique utilisé.

## Bibliographie

- Barkan P. Impact design. *Mechanical Design and Systems Handbook*, 31, 1974. [125](#)
- Bauchau O.A. *Flexible Multibody Dynamics*. Springer Netherlands, 2011. [150](#)
- Boulanger G. Sur le choc avec frottement des corps non parfaitement élastiques. *Revue Scientifique*, 77 :325–327, 1939. [128](#)
- Brach R.M. Rigid body collisions. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1) :133–138, 1989. [128](#)
- Brach R.M. *Mechanical impact dynamics : rigid body collisions*. John Wiley & Sons, 1991. [124](#), [128](#)
- Brach R.M. Formulation of rigid body impact problems using generalized coefficients. *International Journal of Engineering Science*, 36(1) :61 – 71, 1998. [128](#)
- Chatterjee A. *Rigid body collisions : some general considerations, new collision laws, and some experimental data*. Thèse de doctorat, Cornell, 1997. [125](#)
- Chemori A. *Quelques contributions à la commande non linéaire des robots marcheurs bipèdes sous-actionnés*. Theses, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2005. [142](#)
- Chemori A. et Alamir M. Multi-step limit cycle generation for rabbit's walking based on a nonlinear low dimensional predictive control scheme. *Mechatronics*, 16(5) :259 – 277, 2006. [142](#)
- Dubowsky S. et Freudenstein F. Dynamic analysis of mechanical systems with clearances–part 1 : Formation of dynamic model. *Journal of Engineering for Industry*, 93(1) :305–309, 1971. [126](#)
- Flores P., Machado M., Silva M.T., et Martins J.M. On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 25(3) :357–375, 2011. [126](#)
- Gilardi G. et Sharf I. Literature survey of contact dynamics modelling. *Mechanism and Machine Theory*, 37(10) :1213–1239, 2002. [125](#)
- Glocker C. An introduction to impacts. Dans *Nonsmooth Mechanics of Solids*, pages 45–101. Springer, 2006. [137](#), [142](#)
- Goldsmith W. *Impact The Theory And Physical Behaviour Of Colliding Solids*. Arnold, Edward, 1960. [126](#), [144](#)

- Hertz H. *Miscellaneous Papers*, chapitre On the contact of elastic solids, pages 146–162. Macmillan, London, 1896a. [126](#)
- Hertz H. *Miscellaneous Papers*, chapitre On the Contact of Rigid Elastic Solids and on Hardness, pages 163–183. Macmillan, London, 1896b. [126](#)
- Hunt K.H. et Crossley F.R.E. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*, 42(2) :440–445, 1975. [125](#), [126](#)
- Hurmuzlu Y. et Marghitu D.B. Rigid body collisions of planar kinematic chains with multiple contact points. *The international journal of robotics research*, 13(1) :82–92, 1994. [128](#), [142](#)
- Johnson K.L. One hundred years of hertz contact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 196(1) :363–378, 1982. [126](#)
- Kane C., Repetto E.A., Ortiz M., et Marsden J.E. Finite element analysis of nonsmooth contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 180(1) :1–26, 1999. [125](#)
- Kane T.R. et Levinson D.A. *Dynamics : Theory and Applications (Series in Mechanical Engineering)*. McGraw-Hill College, 1985. [128](#)
- Kövecses J. Dynamics of mechanical systems and the generalized free-body diagram—part i : General formulation. *Journal of Applied Mechanics*, 75(6) :061012–061012–12, 2008a. [150](#)
- Kövecses J. Dynamics of mechanical systems and the generalized free-body diagram—part ii : Imposition of constraints. *Journal of Applied Mechanics*, 75(6) :061013–061013–8, 2008b. [150](#)
- Keller J.B. Impact with friction. *Journal of Applied Mechanics*, 53(1) :1–4, 1986. [128](#)
- Kovecses J., Piedboeuf J., et Lange C. Dynamics modeling and simulation of constrained robotic systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 8(2) :165–177, 2003. [150](#)
- Lankarani H.M. et Nikravesh P.E. A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems. *Journal of Mechanical Design*, 112(3) :369–376, 1990. [125](#)
- Lankarani H.M. et Nikravesh P.E. Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 5(2) :193–207, 1994. [127](#)
- Marhefka D.W. et Orin D.E. A compliant contact model with nonlinear damping for simulation of robotic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A : Systems and Humans*, 29(6) :566–572, 1999. [126](#)

- Miossec S. *A contribution to the study of biped walk*. Theses, Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2004. [128](#)
- Murray R.M., Li Z., et Sastry S.S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC PRESS INC., 1994. [142](#)
- Pandolfi A. et Ortiz M. Finite element analysis of nonsmooth frictional contact. 3, 2007. [125](#)
- Rosa N., Barber A., Gregg R.D., et Lynch K.M. Stable open-loop brachiation on a vertical wall. Dans *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1193–1199. IEEE, 2012. [142](#)
- Routh E.J. *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Macmillan, Macmillan, London, 6<sup>e</sup> édition, 1897. [128](#)
- Stronge W.J. Rigid body collisions with friction. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 431(1881) :169–181, 1990. [127](#), [128](#)
- Stronge W.J. Unraveling paradoxical theories for rigid body collisions. *Journal of Applied Mechanics*, 58(4) :1049–1055, 1991. [128](#)
- Stronge W.J. Swerve during three-dimensional impact of rough rigid bodies. *Journal of Applied Mechanics*, 61(3) :605–611, 1994. [128](#)
- Stronge W.J. *Impact Mechanics*. Cambridge University Press, 2000. [125](#), [128](#)
- Wang Y. et Mason M.T. Two-dimensional rigid-body collisions with friction. *Journal of Applied Mechanics*, 59(3) :635–642, 1992. [124](#)
- Whittaker E.T. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particules and Rigid Bodies*. Cambridge University Press, 1904. [125](#), [127](#), [128](#), [144](#)



# Dynamique réduite de la Bicyclette soumise à des contacts intermittents

## Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	159
4.2	Application à la bicyclette . . . . .	161
4.2.1	Paramétrage de la bicyclette . . . . .	161
4.2.2	Géométrie des contacts . . . . .	163
4.2.3	Description événementielle de la bicyclette . . . . .	166
4.2.4	Dynamique de la bicyclette avec contacts intermittents . . . . .	168
4.3	Tests numériques . . . . .	170
4.3.1	Test 1 : Rebonds élastiques 3D d'une bicyclette tombant sur un sol incliné . . . . .	171
4.3.2	Test 2 : Saut d'une rampe inclinée . . . . .	172
4.3.3	Test 3 : Bicyclette sujette aux décollements de chacune de ses roues. . . . .	175
4.3.4	Test 4 : Décollement d'une roue aux suites d'une collision . . . . .	181
4.3.5	Test 5 : Wheeling commandé de la bicyclette . . . . .	182
4.4	Conclusion . . . . .	190

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité du [chapitre 2](#) qui traitait de la dynamique de la bicyclette soumise aux contacts persistants de ses deux roues avec le sol [[Boyer et al. 2017](#); [Mauny et al. 2017](#)]. En [section 2.4](#), nous avons établi un modèle explicite des contacts dépendant de la pose  $(g, r)$  de la bicyclette. Ce modèle des contacts



entraînant alors l'écriture d'un modèle de contraintes, lesquelles, contrairement à ce qui avait été présenté en [section 1.5.2 \(chapitre 1\)](#), ne se trouvent pas être invariantes à gauche, c'est-à-dire où  $A$  et  $B$ , une fois exprimées dans le repère de référence, sont, non seulement, dépendantes de  $r$  mais également de  $g$ , la position et l'orientation du corps de référence dans l'espace ambiant. Le [chapitre 2](#) a également livré un calcul du noyau des contraintes  $H = \ker(A, B)$  (détaillé en [annexe B](#)) sans singularité. Grâce à la dynamique libre et à ce noyau, il nous a été possible d'écrire un modèle dynamique unique basé sur la réduction projective décrite dans la [section 2.6.2](#).

Le présent chapitre se propose d'étendre la dynamique de la bicyclette au cas des contacts intermittents. Il tire ainsi partie de la méthodologie présentée au [chapitre 3](#) afin de traiter des *systèmes mobiles multi-corps ou mobile multi-body systems* (MMSs) soumis à des contacts intermittents. Le problème est traité par l'approche événementielle où les transitions entre deux états continus consécutifs sont vues comme des événements discrets.

Ce chapitre sera découpé en deux parties principales distinctes. La première partie de ce chapitre traite de l'application de la méthode exposée au [chapitre 3](#) à la bicyclette intermittente de Whipple. La structure de cette partie se veut être, par conséquent, le reflet de celle du [chapitre 3](#). Ainsi, la [section 4.2.1](#) fera le rappel du paramétrage de la bicyclette, déjà présenté dans le [chapitre 2](#). Puis la [section 4.2.2](#) présentera un court état de l'art des différentes méthodes permettant la détection de collision et se terminera par la présentation de l'algorithme utilisé. Les différentes configurations de contact entrant en jeu dans le cas de la bicyclette seront ensuite présentées en [section 4.2.3](#), nous permettant de finir cette partie par la présentation des modèles dynamiques gouvernant chacune de ces configurations ([section 4.2.4](#)) dans le cadre de l'approche réduite. Enfin, le présent chapitre se clôt, en seconde partie, par la série de tests numériques présentés en [section 4.3](#). La conservation de l'énergie totale du système lors de chocs purement élastiques sera tout d'abord illustrée en [section 4.3.1](#). Hormis ce premier essai numérique, tous les autres essais utiliseront le modèle de l'impact plastique et profiteront de l'approche de réduction par projection. Les deux exemples suivants illustreront le décollement des roues à la suite du retrait du sol (saut depuis une rampe en [section 4.3.2](#)) ou de brusques accélérations et décélérations ([section 4.3.3](#)). S'ensuivra alors un focus sur le cas particulier mis en lumière par la [remarque 3.6](#) où la collision d'une des roues provoque le décollement de l'autre ([section 4.3.4](#)). Cette partie, ainsi que ce chapitre, se terminera par une illustration de la bicyclette entièrement commandée roulant sur sa roue arrière tout en maintenant son équilibre en dépit d'une perturbation extérieure ([section 4.3.5](#)).

## 4.2 Application à la bicyclette

Pour illustrer le cadre général du [chapitre 3](#), nous l'appliquons au cas de la bicyclette non-holonome de Whipple se déplaçant sur un sol modélisé par un ensemble d'obstacles. Les contacts sont alors intermittents, évoluant au gré des collisions et des décollements entre les roues et les obstacles. Afin de garantir l'autonomie du chapitre, nous allons à présent rappeler le paramétrage de la bicyclette, précédemment présenté dans le [chapitre 2](#).

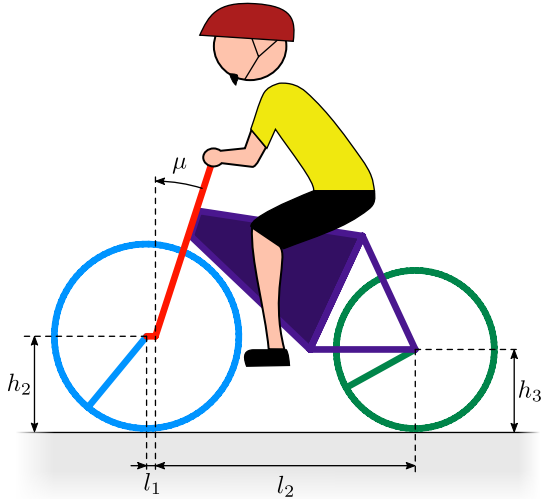
### 4.2.1 Paramétrage de la bicyclette

La bicyclette (voir la [figure 4.1](#) et la [figure 4.2](#)) est un MMS sujet à des contraintes non-holonomes intermittentes. Se référant au cadre général établi en [section 3.4](#), elle est constituée de quatre corps rigides  $\mathcal{B}_i$  ( $i \in \mathbb{N} = 0, 1, 2, 3$ ) reliés entre eux par des liaisons pivot à 1 *degré de liberté* (ddl).  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$  sont, respectivement, le cadre de la bicyclette, sa fourche, sa roue avant et enfin sa roue arrière. Le conducteur est réduit à une masse ponctuelle fixée rigidement au cadre de la bicyclette  $\mathcal{B}_0$ . Comme nous pouvons le voir en [figure 4.1](#), la roue avant et la roue arrière ont deux rayons différents notés  $h_2$  et  $h_3$  respectivement. La fourche est légèrement inclinée d'un angle noté  $\mu$ , tandis que l'extrémité de la fourche est déportée par rapport au centre de la roue avant d'une distance notée  $l_1$ . Bien qu'ayant de faibles valeurs, ces deux paramètres de conception génèrent des déplacements des points de contact le long des roues avant et arrière lorsque le guidon tourne et/ou que la bicyclette s'incline, comme l'a souligné la [remarque 2.16](#) du [chapitre 2](#). À chacun des quatre corps, dénotés  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}_3$ , un repère orthonormal direct est attaché (voir la [figure 4.2](#)). Le cadre de la bicyclette représente le corps de référence  $\mathcal{B}_0$  auquel le repère de référence  $\mathcal{R}_0 = (O_0, s_0, n_0, a_0)$  est attaché. De même, les repères  $\mathcal{R}_1 = (O_1, s_1, n_1, a_1)$ ,  $\mathcal{R}_2 = (O_2, s_2, n_2, a_2)$  et  $\mathcal{R}_3 = (O_3, s_3, n_3, a_3)$  sont attachés aux corps  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ , et  $\mathcal{B}_3$ . Comme prescrit dans la [section 3.4](#),  $a_1, a_2$  et  $a_3$  supportent l'axe de rotation des articulations reliant deux corps constitutifs du MMS. Chaque corps  $\mathcal{B}_i$  a une masse dénotée  $m_i$  et un centre de masse  $G_i$  d'emplacement  $p_0(G_0) = (x_0, y_0, 0)^\top$ ,  $p_1(G_1) = (x_1, 0, z_1)^\top$ ,  $p_2(G_2) = p_2(O_2)$  et  $p_3(G_3) = p_3(O_3)$  pour le cadre, la fourche et les roues avant et arrière, respectivement. Les matrices d'inertie de chaque corps  $\mathcal{B}_i$ , dans le repère  $\mathcal{R}_i$ , sont définies par :

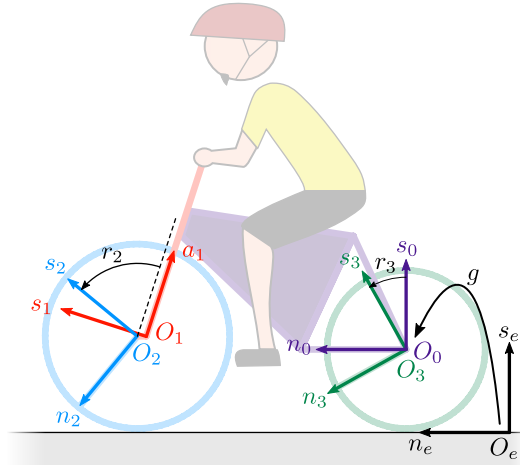
$$I_0 = \begin{pmatrix} I_{0xx} & I_{0xy} & 0 \\ I_{0xy} & I_{0yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{0zz} \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} I_{1xx} & 0 & I_{1zx} \\ 0 & I_{1yy} & 0 \\ I_{1zx} & 0 & I_{1zz} \end{pmatrix},$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} I_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2zz} \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} I_{3xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{3yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3zz} \end{pmatrix}.$$

Dans les simulations de la [section 4.3](#), les valeurs des paramètres inertiels ci-dessus sont celles rapportées dans le [tableau 4.1](#). Elles correspondent à celles du benchmark introduit dans [\[Meijaard et al. 2007\]](#) et sont également celles utilisées précédemment, en [chapitre 2](#), pour l'analyse de la dynamique réduite de la bicyclette soumise à des contacts persistants.



**Figure 4.1** – Paramètres géométriques de la bicyclette.



**Figure 4.2** – Repères associés au sol et à chacun des corps rigides de la bicyclette.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$m$	6	$n$	4
$l_1$	0.986 m	$\gamma_g$	9.81 m s <sup>-2</sup>
$l_2$	0.0337 m	$I_{2xx} = I_{2yy}$	0.141 kg m <sup>2</sup>
$\mu$	$\pi/10$ rad	$I_{2zz}$	0.28 kg m <sup>2</sup>
$h_2$	0.35 m	$I_{3xx} = I_{3yy}$	0.0603 kg m <sup>2</sup>
$h_3$	0.3 m	$I_{3zz}$	0.12 kg m <sup>2</sup>
$x_0$	0.6 m	$I_{0xx}$	2.8 kg m <sup>2</sup>
$y_0$	0.3 m	$I_{0yy}$	9.2 kg m <sup>2</sup>
$x_1$	0.0288 m	$I_{0zz}$	11.0 kg m <sup>2</sup>
$z_1$	0.368 m	$I_{0xy}$	-2.4 kg m <sup>2</sup>
$m_0$	85 kg	$I_{1xx}$	0.0584 kg m <sup>2</sup>
$m_1$	4 kg	$I_{1yy}$	0.06 kg m <sup>2</sup>
$m_2$	3 kg	$I_{1zz}$	0.0076 kg m <sup>2</sup>
$m_3$	2 kg	$I_{1zx}$	-0.0091 kg m <sup>2</sup>

**Tableau 4.1** – Paramètres de la bicyclette.

## 4.2.2 Géométrie des contacts

Dans la [section 3.7](#), nous avons montré que le gap  $\Phi$ , sa dérivée première en temps, ainsi que les forces de contact permettent de déterminer s'il y a transition ainsi que son type (collision ou décollement). La [section 3.8](#) met, quant à elle, en avant l'usage des points de pré-contact  $(C, C')$  et de leur dérivée première en temps dans la détermination du modèle cinématique des contraintes (non-pénétration, non-dérapiage et roulement sans glissement dans le cas de la bicyclette). Dans cette section nous chercherons donc à déterminer ces points de pré-contacts  $(C, C')$  ainsi que leur gap associé  $\Phi$ .

La [section 3.6](#) du [chapitre 3](#) donne une expression des points de pré-contact [\(3.5\)](#) et du gap [\(3.6\)](#). La première expression [\(3.5\)](#) définit les points de pré-contact du corps  $\mathcal{B}_i$  comme étant la paire de points appartenant à la surface de  $\mathcal{B}_i$  et à la surface des obstacles  $\mathcal{O}$  minimisant le gap. La seconde expression [\(3.6\)](#) définit le gap comme étant la distance entre les deux points de la paire de points de pré-contact. Ces deux expressions se trouvent donc être inexploitable en pratique puisqu'elles s'impliquent l'une l'autre. Il est donc nécessaire de trouver une méthode permettant de déterminer la position des points de pré-contact sans s'appuyer sur la définition du gap. Des algorithmes de détection de collision tels que ceux développés ces dernières années en infographie et conception assistée par ordinateur permettent de déterminer la position des points de contact entre deux corps en collision. C'est pourquoi cette section commencera par un court état de l'art sur la détection de collision avant de présenter l'algorithme utilisé.

Les algorithmes classiques de détection de collisions utilisent une approche divisée en deux phases [[Cohen et al. 1995](#); [Mirtich 1997](#); [Lin et Gottschalk 1998](#); [Lehericey 2016](#)]. La première, la *broad phase*, vise à éliminer efficacement les paires d'objets qui n'entrent pas en collision afin de réduire la quantité de travail laissée à la deuxième phase [[Avril et al. 2010](#)]. Ceci est réalisé classiquement par des algorithmes *sweep and prune* sur les volumes englobant les objets [[Gottschalk et al. 1996](#)] ou en partitionnant l'espace [[Bandi et Thalmann 1995](#)]. La seconde phase, la *narrow phase*, vise à calculer précisément la position des points de contact et l'écart de pénétration possible de chaque paire d'objets susceptibles d'entrer en collision. Cette phase utilise des algorithmes qui peuvent être classifiés en cinq catégories [[Teschner et al. 2005](#); [Kockara et al. 2007](#); [Lehericey 2016](#)]. Les "algorithmes basés sur les caractéristiques" s'appliquent aux modèles polygonaux convexes et utilisent les primitives (c'est-à-dire les sommets, les arêtes et les faces) pour tester la collision. Les "algorithmes basés simplexe" fonctionnent sur les volumes englobants convexes (*convex hulls*) des objets et découlent de l'algorithme GJK (Gilbert-Johnson-Keerthi) [[Gilbert et al. 1988](#)]. Les "algorithmes basés image" fonctionnent sur les objets convexes mais également concaves en créant des couches d'images de profondeur [[Shade et al.](#)

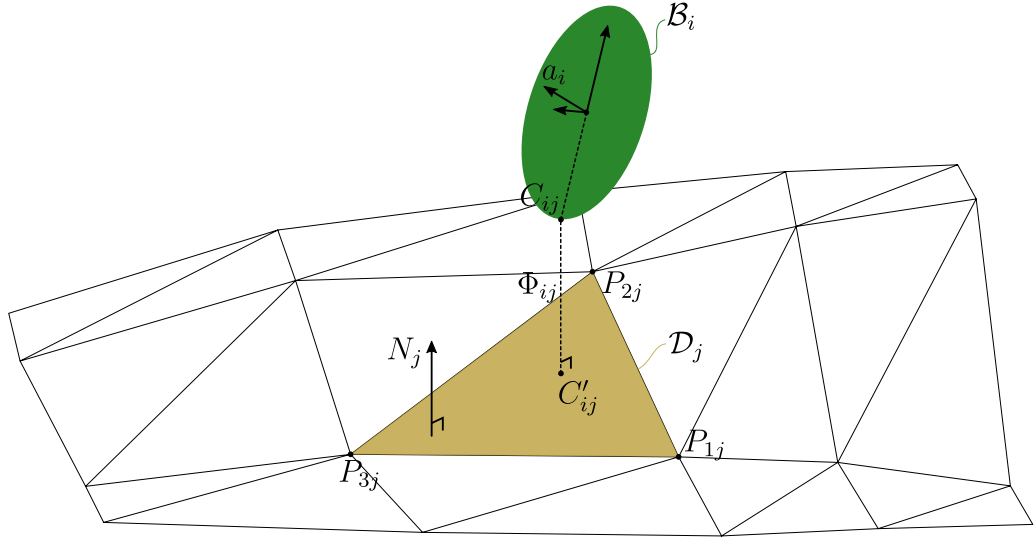
1998] ou en utilisant des techniques de *ray tracing* [Lehericey 2016]. Les modèles polygonaux et non polygonaux sont pris en charge, dans la mesure où ils peuvent être rendus à l'image. L'inconvénient de cette catégorie d'algorithmes est que les objets sont discrétisés, ce qui conduit à des collisions éventuellement mal détectées. Les "algorithmes à hiérarchie de volume englobant" subdivisent les objets en volumes englobant des sous-parties de l'objet, un volume parent englobant ses volumes enfants en totalité. Puis l'algorithme parcourt les arbres ainsi construits pour chacun des objets potentiellement en collision jusqu'à découverte, s'il y a lieu, des nœuds en collision. Enfin, les "algorithmes basés champs de distance" utilisent, pour chaque objet, une structure de grille spatiale qui stocke la distance entre une cellule de la structure (c'est-à-dire un point dans l'espace) et la surface de l'objet. Le calcul et le stockage de cette structure est particulièrement complexe, c'est pourquoi les objets mobiles et/ou déformables constituent le principal inconvénient de cette catégorie d'algorithmes. Il est important de noter que presque toutes les méthodes de détection de collisions fonctionnent exclusivement avec des objets polygonaux convexes [Fares et Hamam 2005]. Toutefois, il existe des solutions permettant de décomposer les objets concaves en un ensemble d'objets convexes [Mamou et Ghorbel 2009].

Dans le cas de la bicyclette, nous supposons que seules les collisions entre les roues et les obstacles  $\mathcal{O}$  sont possibles. Ainsi, nous définissons le sous-ensemble de l'index des corps qui peuvent potentiellement toucher les obstacles comme  $\mathbb{N}_c = \{2, 3\}$  avec  $\mathbb{N}_a \subseteq \mathbb{N}_c$ . Les roues sont définies comme des disques, tandis que les limites des obstacles sont discrétisées en une *polygon soup* de  $p$  triangles  $\mathcal{D}_j$  ( $\partial\mathcal{O} = \cup_{j=1}^p \mathcal{D}_j$ ) dont les sommets  $(P_{1j}, P_{2j}, P_{3j})$  sont listés dans un ordre tel que la normale du triangle  $\mathcal{D}_j$ , pointant vers l'extérieur du sol, soit donnée, dans tout repère  $\mathcal{R}_k$ , par :

$${}^k N_j = (p_k(P_{2j}) - p_k(P_{1j})) \times (p_k(P_{3j}) - p_k(P_{2j})) .$$

En raison de la nature géométrique des objets potentiellement en contact (modèle non polygonal des roues, et les obstacles sont modélisés par un ensemble non nécessairement convexe de triangles non ordonnés), aucun des algorithmes de détection de collisions précédemment présentés ne peut être employé tel quel. Aussi nous a-t-il fallu développer un algorithme dédié à notre problème. De plus, notre besoin de monitorer à chaque instant la position des points de pré-contact ainsi que leur gap nous oblige à faire fi de la *broad phase* et de calculer le gap pour chacun des triangles composant les obstacles.

En nous appuyant sur la modélisation des roues et des obstacles présentée ci-dessus, il nous faut déterminer, pour toute configuration  $(g, r)$  de la bicyclette, la paire de points les plus proches  $(C_i, C'_i) \in \mathcal{B}_i \times \mathcal{O}$  pour  $i \in \mathbb{N}_c$ . Pour résoudre ce problème, l'algorithme doit être capable de calculer pour chaque triangle  $\mathcal{D}_j$  discrétisant l'obstacle, et chacune des deux roues  $\mathcal{B}_i$  (dont la configuration est définie par  $(g, r)$ ), la paire de points les plus proches  $(C_{ij}, C'_{ij}) \in \mathcal{B}_i \times \mathcal{D}_j$  et leur gap associé



**Figure 4.3** – Position des points de pré-contact  $(C_{ij}, C'_{ij})$  et gap  $\Phi_{ij}$  par rapport à la face  $j$  définie par ses trois sommets  $P_{1j}$ ,  $P_{2j}$  et  $P_{3j}$ .

$\Phi_{ij}$ . Une fois appliqué à tous les triangles discrétisant les obstacles, il devient facile de trouver la paire de points les plus proches. Cet algorithme est basé sur la remarque que, pour tout triangle  $\mathcal{D}_j$ , le point  $C'_{ij}$  peut être soit un point à l'intérieur du triangle, soit un point sur l'une de ses trois arêtes, soit directement l'un de ses trois sommets. Par conséquent, l'algorithme commence par calculer, pour chaque triangle  $\mathcal{D}_j$ , le point le plus bas de chaque roue le long de la normale  $N_j$  de  $\mathcal{D}_j$  comme suit :

$$p_j(C_{ij}) = p_j(O_i) + h_i \hat{a}_i \hat{N}_j^j a_i ,$$

avec  $O_i$  la position du centre de la roue  $i$ ,  $h_i$  son rayon et  $a_i$  son axe de rotation, et  $N_j$  la normale du triangle considéré<sup>1</sup>. Ce point est noté  $C_{ij}$  avec  $i$  l'index de la roue. Ensuite,  $C_{ij}$  est projeté parallèlement à  $N_j$  sur le plan affine prolongeant  $\mathcal{D}_j$ . Le résultat est alors dénoté  $P_{N_j}(C_{ij})$ . Si  $P_{N_j}(C_{ij}) \in \mathcal{D}_j$ , alors  $P_{N_j}(C_{ij}) = C'_{ij}$  et nous calculons le gap :

$$\Phi_{ij} = \left( (p_j(C_{ij}) - p_j(C'_{ij}))^\top (p_j(C_{ij}) - p_j(C'_{ij})) \right)^{1/2} .$$

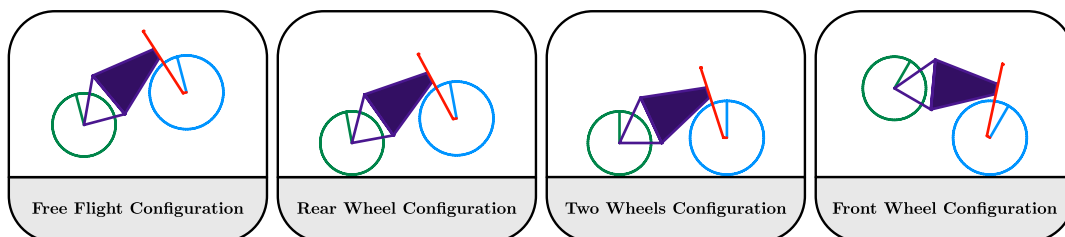
Si  $P_{N_j}(C_{ij})$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}_j$ , l'algorithme calcule, pour la roue  $i$ , le point le plus proche appartenant à la ligne prolongeant l'arête du triangle la plus proche de  $P_{N_j}(C_{ij})$ . Cette deuxième projection est la même que pour l'étape précédente, mais avec  $N_j$  remplacé par le vecteur unitaire supportant la normale unique à l'arête passant par le centre de la roue. Comme à l'étape précédente, si le point projeté appartient à l'arête, il définit  $C'_{ij}$  ainsi que le gap  $\Phi_{ij}$ . S'il n'appartient pas à l'arête, le processus est répété avec les sommets du triangle remplaçant les arêtes, c'est-à-dire que nous calculons pour la roue  $i$ , son point le plus proche de chacun des

1. Lorsque nous recalculons la position du point  $C_i$  par rapport à une arête du triangle  $\mathcal{D}_j$ , la normale  $N_j$  est remplacée par la normale à l'arête pointant vers le centre de la roue.

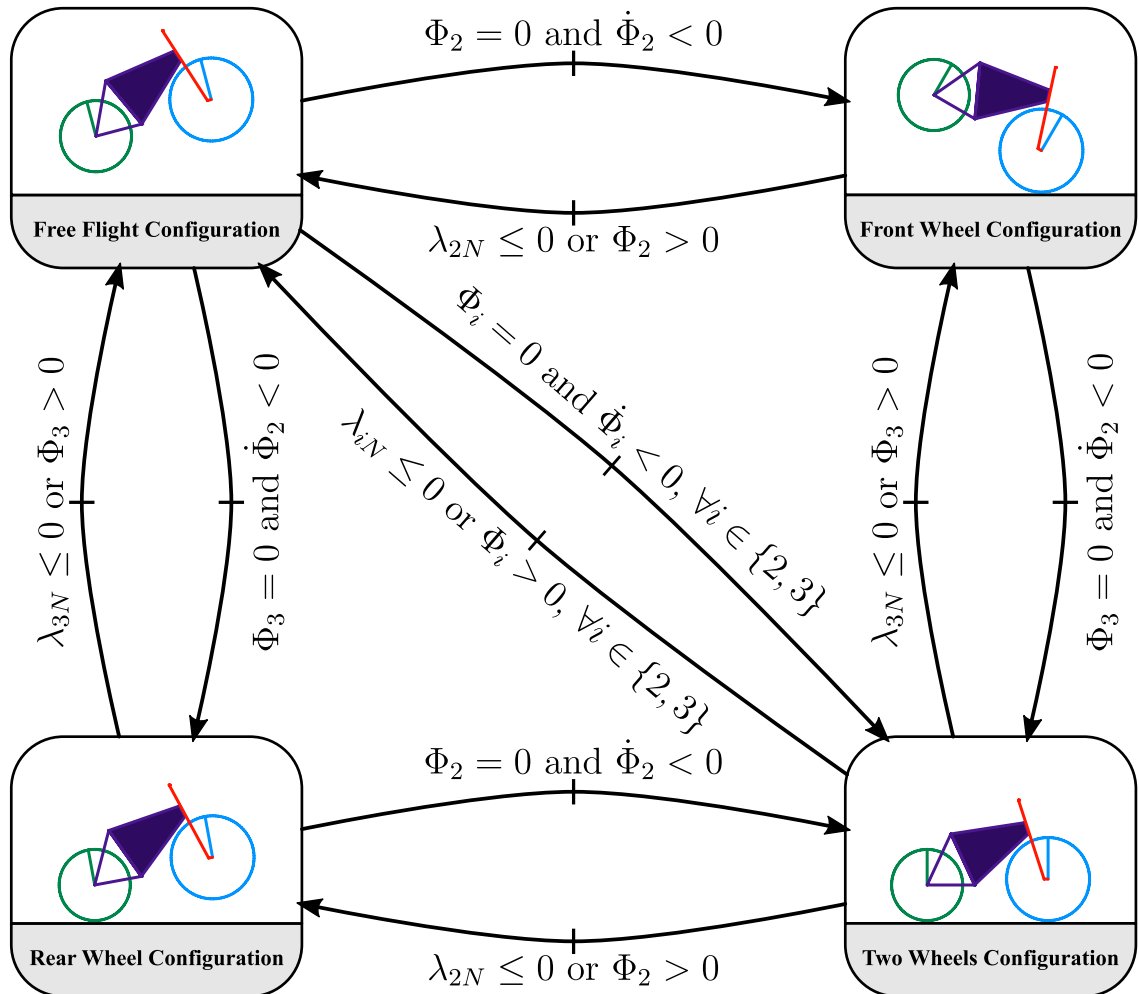
sommets de  $\mathcal{D}_j$  et le gap correspondant. Notons que lorsque l'on teste ces trois possibilités, le point  $C_{ij}$  est libre de se mouvoir sur le pourtour du corps  $\mathcal{B}_i$ . Enfin, lorsqu'un couple de point  $(C_{ij}, C'_{ij})$  a été sélectionné pour chaque triangle, les valeurs des fonctions gap  $\Phi_{ij}$  associées sont calculées et stockées pour tous triangles de la *polygon soup*. À la fin, l'algorithme sélectionne le triangle  $\mathcal{D}_j$  et la primitive (face, arête, sommet) pour lesquels le gap est minimal. La position des points de la roue  $C_2$  et  $C_3$  ainsi que leurs gaps associés  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  sont les sorties de l'algorithme. La nécessité de calculer la position des points de contact et leur gap associé par rapport aux différentes primitives des facettes discrétisant les obstacles est mise en lumière sur un cas bi-dimensionnel en [annexe D](#).

### 4.2.3 Description événementielle de la bicyclette

Puisque nous avons supposé que seules les roues peuvent être en contact avec les obstacles, la bicyclette a un total de quatre configurations de contact représentées dans la [figure 4.4](#). Ces configurations sont dénommées *Free Flight Configuration*, *Rear Wheel Configuration*, *Two Wheels Configuration* et *Front Wheel Configuration*. Selon l'approche événementielle, les mouvements de la bicyclette sont régis par un modèle dynamique pour chacune de ces configurations de contact ainsi que les transitions entre elles. Pour entrer plus en détail, avec la partition de l'axe des temps  $\mathbb{R}^+ = T_S \cup T_I$ , sur les intervalles de temps continus de  $T_S$ , les mouvements de la bicyclette sont régis par des dynamiques continues du type (3.27) avec des changements possibles de la configuration des contacts entraînés par les décollements (voir la [section 3.9](#)). Par contre, sur  $T_I$ , les collisions de la bicyclette sont modélisées par des impacts régis par une dynamique discrète, impulsive du type de (3.28) (voir la [section 3.10](#)). La [figure 4.5](#) représente le graphe des états, avec les transitions permettant de passer d'une configuration de contact à une autre. Les deux types de transitions de la [section 3.7](#), décollements et collisions, vont de pair, puisque, pour toute collision, il existe un décollement qui renvoie le MMS dans sa configuration de contact originelle. Les transitions entre deux configurations de contact (n'importe quel ensemble de deux vignettes de la [figure 4.5](#)) peuvent être détaillées telles qu'indiquées sur la [figure 3.7](#). Dans toutes les simulations présentées ci-après, les

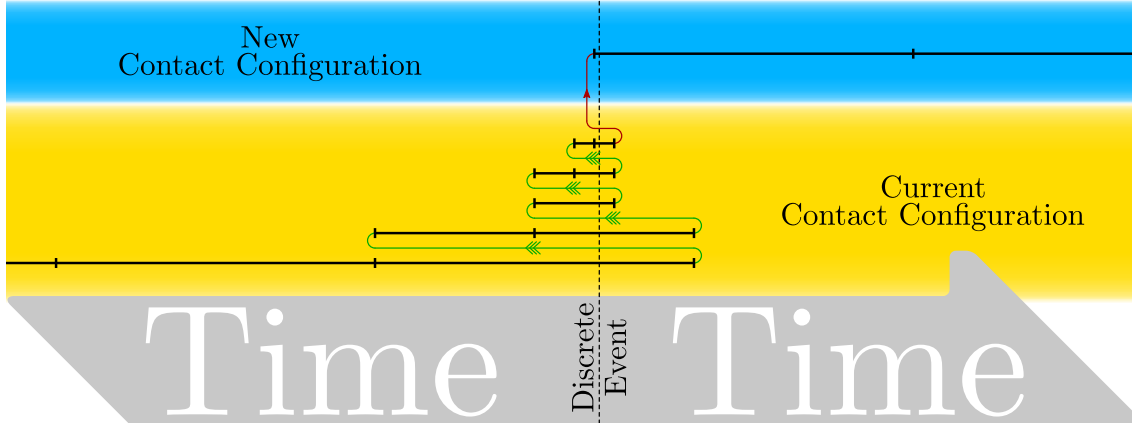


**Figure 4.4** – Les quatre configurations de contact de la bicyclette.



**Figure 4.5** – Graphe événementiel des quatre configurations de contact de la bicyclette ainsi que des conditions pour passer d'une configuration à l'autre.





**Figure 4.6** – Adaptation du pas de temps de l’intégrateur. Lorsqu’un événement discret est détecté, le pas de temps est réduit et la simulation est rebobinée (en vert). Lorsque le pas de temps minimal est atteint, la simulation est rebobinée une dernière fois avant de changer de configuration de contact (en rouge).

dynamiques continues sont intégrées dans le temps à l’aide d’un intégrateur à pas fixe. Aussi, l’intégrateur va généralement au-delà des instants lors desquels un événement discret se produit. Par conséquent, lorsqu’un événement discret est détecté, la simulation doit être rebobinée à l’étape d’intégration précédente dans laquelle le MMS était compatible avec les hypothèses (non-interpénétration des corps, pas de forces maintenant le contact actif), puis rejouée avec un pas de temps plus fin. Comme présenté dans la [figure 4.6](#), l’événement discret est ainsi rejoué plusieurs fois, jusqu’à ce que le pas de temps minimal soit atteint et que la simulation continue avec la nouvelle configuration de contact (après l’événement discret).

#### 4.2.4 Dynamique de la bicyclette avec contacts intermittents

Une fois les points de pré-contact et leur gap connus en chaque instant grâce à l’algorithme de la [section 4.2.2](#), il faut calculer la vitesse de ces points (3.9). En appliquant la cinématique multi-corps standard, la vitesse linéaire des points de pré-contact se déplaçant sur chacune des deux roues, s’écrit, dans le fibré principal des configurations de la bicyclette sous la forme :

$${}^0\gamma_2 = {}^0v(C_2 \in \mathcal{B}_2) = V + \Omega \times {}^0p_0(C_2) + \dot{r}_1 {}^0a_1 \times {}^0p_1(C_2) + \dot{r}_2 {}^0a_2 \times {}^0p_2(C_2) , \quad (4.1)$$

pour la roue avant, et :

$${}^0\gamma_3 = {}^0v(C_3 \in \mathcal{B}_3) = V + \Omega \times {}^0p_0(C_3) + \dot{r}_3 {}^0a_3 \times {}^0p_3(C_3) , \quad (4.2)$$

pour la roue arrière, avec  $(V^\top, \Omega^\top)^\top = \eta \in \text{se}(3)$  et  $(\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{r}_3)^\top = \dot{r} \in \text{TS}/\mathcal{S}$ , les vitesses rigides d’ensemble et les vitesses de forme du MMS, respectivement.

Comme présenté dans la [section 3.8](#), le modèle cinématique de la bicyclette doit être alimenté avec (4.1) et (4.2) dont les expressions sont détaillées dans le [chapitre 2](#).

Dans les simulations suivantes, nous privilégierons le modèle d'impacts plastiques qui est le plus réaliste dans le cas de la bicyclette. Cependant, pour illustrer l'approche dans son ensemble et tester l'algorithme sous l'angle de la conservation de l'énergie, nous commencerons par un exemple de vélo soumis à des impacts élastiques. En conséquence<sup>2</sup>, nous considérons ci-dessous à la fois la dynamique complète et réduite de la [section 3.11](#) et de la [section 3.12](#), respectivement. Dans ce contexte général, on peut calculer les quatre dynamiques continues, c'est-à-dire pour  $\forall t \in T_S$ , comme suit :

- Cas 1 : *Free Flight Configuration* ( $\mathbb{N}_a = \emptyset$ ) : La bicyclette est libre de toute contrainte. Sa dynamique est gouvernée par (3.21) avec  $\mathbb{C} = 0$  ou, dans sa forme réduite, par (3.27) avec  $H = \text{Id}_{9 \times 9}$ . Dans les deux cas, le modèle résultant est le même et est entièrement déduit de la matrice masse ( $9 \times 9$ ) dans  $(\text{se}(3) \times \text{TS}/\mathcal{S})^* \otimes (\text{se}(3) \times \text{TS}/\mathcal{S})$  dont l'expression est détaillée en [annexe C.1](#).
- Cas 2 : *Front wheel configuration* ( $\mathbb{N}_a = \{2\}$ ). Dans ce cas, la bicyclette se tient sur sa roue avant, uniquement, et les contraintes sont définies par :

$${}^0\gamma_2 = \mathbb{C}_2 \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} = 0_{3 \times 1} ,$$

dont le noyau est dénoté  $H_2(g, r)$  (avec  $\mathbb{C}_2 H_2 = 0$ ) et est détaillé en [annexe C.2](#). Pour toute loi d'impact (en particulier  $E \neq 0$ ), la dynamique continue de la bicyclette est donnée, dans ce cas, par (3.21) avec  $\mathbb{C} = \mathbb{C}_2$ . Si l'impact est plastique, c'est-à-dire  $E = 0$ , la dynamique est également gouvernée par la forme réduite (3.27) avec  $H = H_2$ .

- Cas 3 : *Rear wheel configuration* ( $\mathbb{N}_a = \{3\}$ ). Dans ce troisième cas, la bicyclette se tient sur sa roue arrière uniquement et les contraintes sont définies par :

$${}^0\gamma_3 = \mathbb{C}_3 \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} = 0_{3 \times 1} ,$$

dont le noyau est dénoté  $H_3(g, r)$  (avec  $\mathbb{C}_3 H_3 = 0$ ) et est détaillé en [annexe C.3](#). Pour toute loi d'impact (en particulier  $E \neq 0$ ), la dynamique continue de la bicyclette est donnée, dans ce cas, par (3.21) avec  $\mathbb{C} = \mathbb{C}_3$ . Si l'impact est plastique, c'est-à-dire  $E = 0$ , la dynamique est également gouvernée par la forme réduite (3.27) avec  $H = H_3$ .

---

2. Rappelons ici que si le modèle plastique se prête à la réduction projective, le modèle élastique réclame d'invoquer la méthode complète de résolution.

- Cas 4 : *Two wheels configuration* ( $\mathbb{N}_a = \{2, 3\}$ ). Dans ce quatrième cas, la bicyclette est dans sa configuration usuelle où les roues sont, toutes deux, en contact avec le sol. Les contraintes sont alors définies par :

$$\begin{pmatrix} {}^0\gamma_2 \\ {}^0\gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_2 \\ \mathbb{C}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{r} \end{pmatrix} = 0_{6 \times 1},$$

dont le noyau est dénoté  $H_{23}(g, r)$  (avec  $\mathbb{C}_{23}H_{23} = 0$ ) et est détaillé en [annexe C.4](#). Pour toute loi d'impact (en particulier  $E \neq 0$ ), la dynamique continue de la bicyclette est donnée par (3.21) avec  $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{23}$ . Si l'impact est plastique, c'est-à-dire  $E = 0$ , la dynamique est également gouvernée par la forme réduite (3.27) avec  $H = H_{23}$ .

Entre les phases le long desquelles les mouvements de la bicyclette sont régis par une dynamique continue, c'est-à-dire pour  $\forall t \in T_I$ , les mouvements du vélo sont réglés par la dynamique de transition complète (3.24) valable pour tout  $E$ , ou alternativement par la dynamique de transition réduite (3.28) lorsque  $E = 0$  (cas des impacts plastiques). Dans ces deux formulations,  $\mathbb{C}_I$ ,  $H_-$  et  $H_+$  doivent être instanciés par  $\mathbb{C}_2$ ,  $\mathbb{C}_3$  ou  $\mathbb{C}_{23}$  et  $H_2$ ,  $H_3$  ou  $H_{23}$ , respectivement, selon les configurations de contact avant et après impact.

Pour finir, l'algorithme de simulation doit surveiller les forces de réaction transmises par le sol aux roues par l'intermédiaire des contacts. Ceci est réalisé grâce à (3.20) et (3.23) dans l'approche complète ou avec les deux expressions (3.29) et (3.30) dans l'approche réduite. Quelle que soit l'approche, dans ces expressions  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}_I$  doivent être instanciées par  $\mathbb{C}_2$ ,  $\mathbb{C}_3$  ou  $\mathbb{C}_{23}$  selon les configurations de contact aux instants  $t \in T_S$  et  $t \in T_I$ , respectivement. Monitorer  $\lambda$  permet de détecter un décollement durant les phases continues. En effet, dès que la composante suivant  $N_i$  de  $\lambda$  devient nulle, les contraintes associées à ce contact doivent être désactivées. Monitorer  $\Lambda$  pendant une collision permet de vérifier le signe des forces de réaction impulsives dans les cas de contacts multiples. Comme le souligne la [remarque 3.6](#), si nécessaire, la compatibilité des contacts est rétablie en libérant les contraintes responsables de certaines forces d'adhérence irréalistes.

### 4.3 Tests numériques

Nous présentons maintenant quelques simulations tests dans le but d'illustrer les possibilités de l'algorithme appliqué à la bicyclette. À l'exception du test numéro 1, toutes les autres simulations sont réalisées avec un algorithme unique basé sur les modèles de l'approche réduite (3.27) et des impacts plastiques (3.28). L'intégration temporelle est réalisée avec une méthode Runge-Kutta de quatrième ordre explicite. Bien que dans le modèle simulé l'orientation de la bicyclette soit définie par la

partie rotation de  $g$ , c'est-à-dire par l'orientation du référentiel  $\mathcal{R}_0$  par rapport au référentiel terre  $\mathcal{R}_e$ , pour présenter les résultats, cette matrice de rotation est paramétrée par une séquence d'angles roulis, tangage, lacet  $(\phi, \theta, \psi)$  autour des vecteurs  $n_0$ ,  $a_0$  et  $s_0$  de  $\mathcal{R}_0$  représenté sur la [figure 4.2](#).

### 4.3.1 Test 1 : Rebonds élastiques 3D d'une bicyclette tombant sur un sol incliné

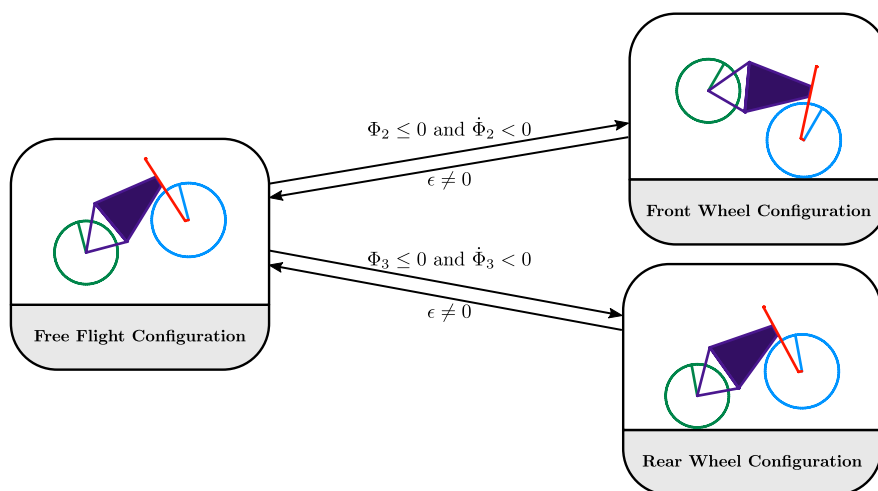
Ce premier exemple est le seul réalisé avec une loi de restitution élastique  $\varepsilon_i = \text{Id}_{3 \times 3}$ ,  $i \in \mathbb{N}_c$ . Bien qu'il ne soit pas réaliste, ce choix permet d'évaluer le simulateur hybride (discret - continu) avec l'approche de résolution complète ainsi que de tester le bilan énergétique qui doit être préservé dans ce cas (voir la [remarque 3.5](#)). Les conditions du test sont les suivantes. À l'instant initial, dénoté  $t_1$  sur les figures, la bicyclette se trouve guidon droit ( $r_1 = 0$ ) et légèrement inclinée ( $\phi_0(t_0) = 10^\circ$ ). Elle est alors lancée avec une vitesse linéaire  $V_0(t_0) = (0, 3, 0)^\top \text{m s}^{-1}$  sur un sol incliné de  $15^\circ$  (la totalité de l'état initial de la bicyclette est résumé dans le [tableau 4.2](#)). L'angle d'inclinaison initiale rompt la symétrie de la bicyclette par rapport au sol et la fait tomber au sol selon un mouvement tridimensionnel complexe régi par le graphe présenté en [figure 4.7](#) et illustré par les différents instantanés de la [figure 4.8](#). Comme l'illustre l'évolution temporelle des deux fonctions gap  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  de la [figure 4.9](#), ce mouvement comprend plusieurs collisions. Ces collisions se produisent aux moments  $t_2$  et  $t_4$  pour la roue arrière, et  $t_3$ ,  $t_5$  et  $t_6$  pour la roue avant. La [figure 4.10](#) présente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique  $E_k$ , potentielle  $E_p$  et totale  $E_t$  de la bicyclette pendant ce mouvement. Comme attendu, en dépit de la complexité du mouvement effectué, l'énergie totale du système reste constante durant toute la simulation, en raison des coefficients de restitution.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$V_s$	$0 \text{ m s}^{-1}$	$P_s$	$0.4 \text{ m}$
$V_n$	$3 \text{ m s}^{-1}$	$P_n$	$0 \text{ m}$
$V_a$	$0 \text{ m s}^{-1}$	$P_a$	$0 \text{ m}$
$\Omega_s$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\psi$	$0 \text{ rad}$
$\Omega_n$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\phi$	$0.174 \text{ rad}$
$\Omega_a$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\theta$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_1$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$r_1$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_2$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$r_2$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_3$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$r_3$	$0 \text{ rad}$

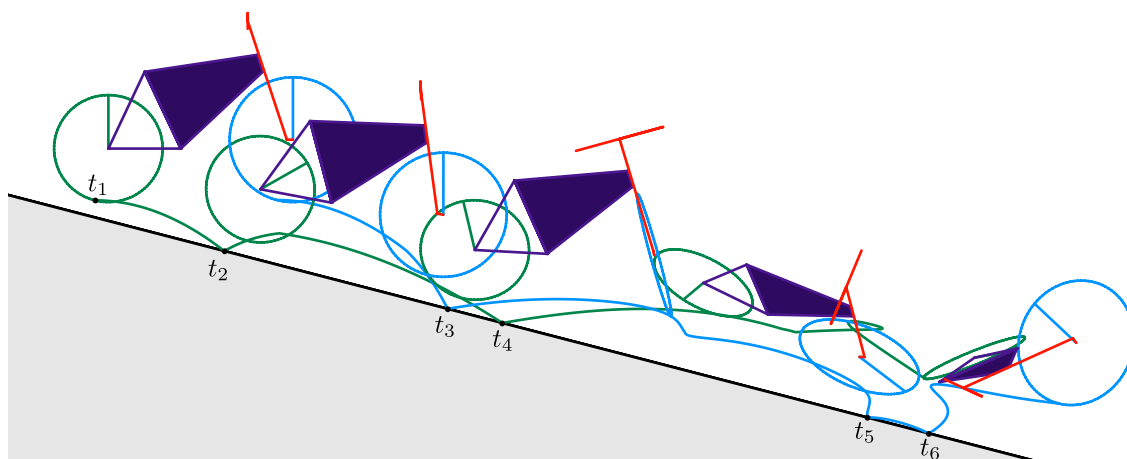
**Tableau 4.2** – Paramètres d'état initiaux du test Rebonds élastiques 3D d'une bicyclette tombant sur un sol incliné.

### 4.3.2 Test 2 : Saut d'une rampe inclinée

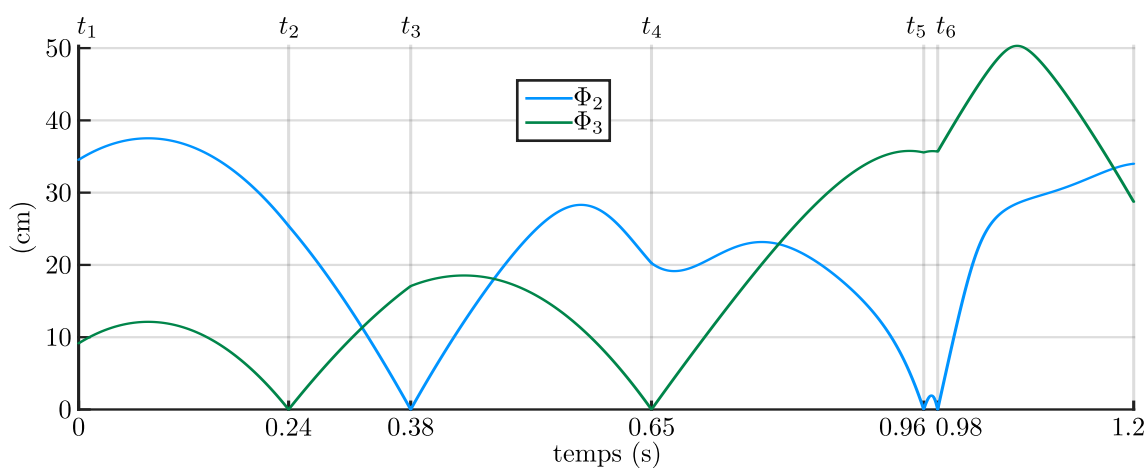
Dans cette simulation ainsi que dans toutes les simulations qui suivent, la loi d'impact est plastique, c'est-à-dire  $\varepsilon_i = 0$  pour  $i \in \mathbb{N}_c$ . Le sol est ici divisé en deux parties : une rampe inclinée de  $10^\circ$  suivie d'un plan horizontal reposant à 50 cm sous le rebord de la rampe (voir la [figure 4.12](#)). Dans la configuration initiale résumée dans le [tableau 4.3](#), la bicyclette est lancée, droite, les deux roues en contact avec la rampe, à une vitesse  $V_0(t_0) = (0, 10, 0)^\top \text{m s}^{-1}$ . Les deux roues touchant la rampe, leurs vitesses angulaires  $\dot{r}_2$  et  $\dot{r}_3$  sont initialisées en accord avec la vitesse de la bicyclette. Tout au long de ce test, la bicyclette n'est pas actionnée, c'est-à-dire  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ . Plusieurs instantanés de la bicyclette en mouvement sont présentés en [figure 4.12](#). Bien que bidimensionnelle (la scène étant symétrique par rapport au plan vertical contenant initialement la bicyclette), le mouvement de la bicyclette est régi par les quatre configurations de contact et les deux types de transition (voir la [figure 4.11](#)). Aux instants  $t_2$  et  $t_3$ , des décollements se produisent en raison de la disparition du sol sous la roue avant, d'abord, puis sous la roue arrière. Aux instants  $t_4$  et  $t_5$ , les roues avant puis arrière retouchent le sol, successivement, lorsque la bicyclette atterrit. Ces deux événements correspondent à des collisions dures avec des impacts plastiques. Tous ces événements discrets sont séparés par des phases continues. Pour entrer dans les détails, nous noterons que l'évolution temporelle des gaps présentée en [figure 4.14](#) montre qu'entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  les gaps sont nuls, tandis que les forces de réaction normales présentées en [figure 4.13](#) restent constantes. Durant la première phase, c'est-à-dire de l'instant  $t_1$  à l'instant  $t_2$ , lorsque la bicyclette gravit la rampe, l'énergie totale du système reste constante et nous assistons à un lent échange entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.



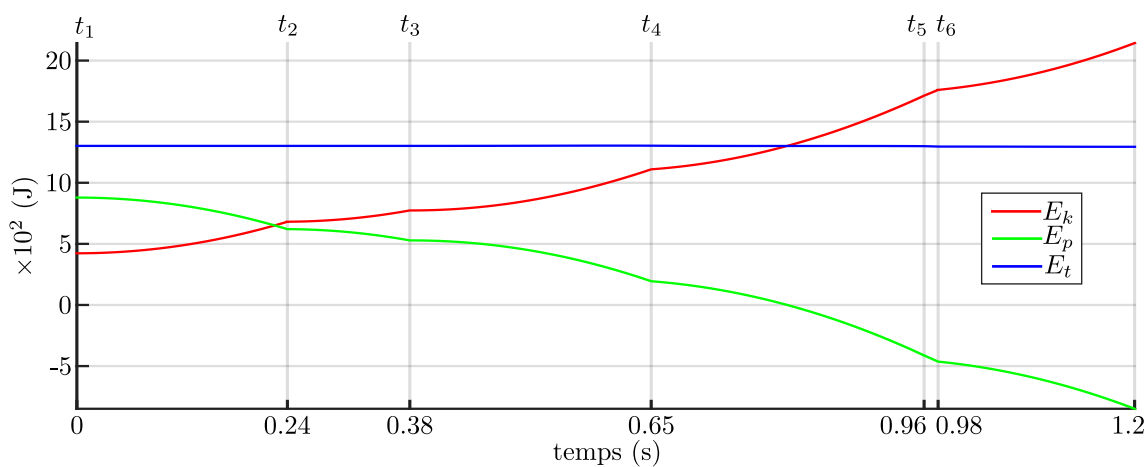
**Figure 4.7** – Graphe état-transition du test 1. Les trois configurations de contact ainsi que les conditions de transitions impliquées dans le test Rebonds élastiques 3D d'une bicyclette tombant sur un sol incliné.



**Figure 4.8** – Instantanés de la bicyclette rebondissant sur un plancher incliné. L'intervalle de temps entre deux instantanés consécutifs est de 0.3 s.



**Figure 4.9** – Gap entre le sol et la roue avant ( $\Phi_2$ ) et entre le sol et la roue arrière ( $\Phi_3$ ) en fonction du temps.

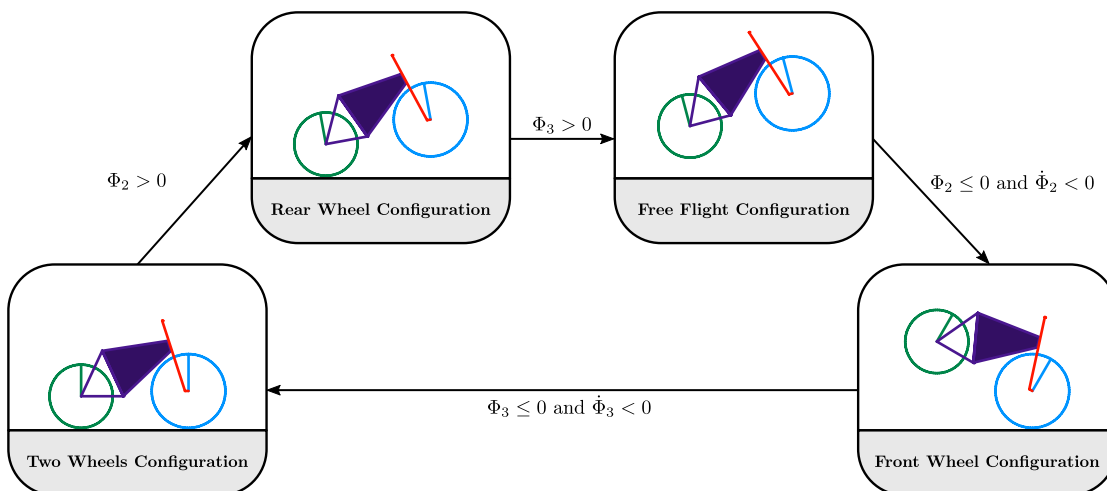


**Figure 4.10** – Énergie cinétique ( $E_k$ ), énergie potentielle ( $E_p$ ) et énergie totale ( $E_t$ ) en fonction du temps.

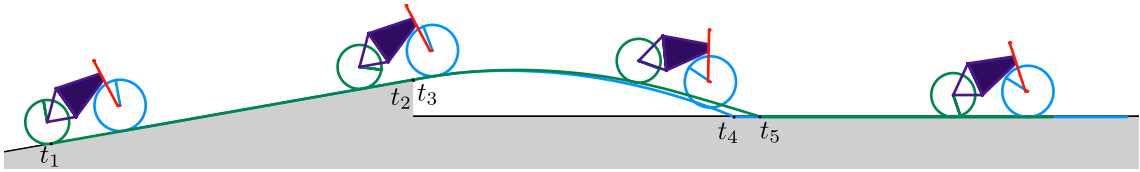
Durant la phase d’envol de la bicyclette, les décollements des roues impliquent un retrait instantané des forces de réaction normales appliquées à celles-ci (voir la [figure 4.13](#)). Réciproquement, chaque collision réintroduit instantanément ces forces de réaction. On remarquera, à l’instant  $t_2$ , que suite au décolllement de la roue avant, un saut de la force de réaction normale appliqué à la roue arrière apparaît en raison de la réévaluation de l’équilibre des forces dû à la disparition des contraintes, et conséquemment des forces de réaction, de la roue avant. À l’instant  $t_5$ , on pourra également remarquer un saut de la force de réaction normale appliquée à la roue avant, en raison cette fois, de la collision de la roue arrière. Comme attendu, la [figure 4.15](#) souligne que le décolllement d’une roue ne change pas l’énergie totale du système tandis qu’un impact plastique introduit une perte d’énergie (voir les instants  $t_4$  et  $t_5$  sur la [figure 4.15](#)).

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$V_s$	$1.74 \text{ m s}^{-1}$	$P_s$	$-0.577 \text{ m}$
$V_n$	$9.85 \text{ m s}^{-1}$	$P_n$	$-5 \text{ m}$
$V_a$	$0 \text{ m s}^{-1}$	$P_a$	$0 \text{ m}$
$\Omega_s$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\psi$	$0 \text{ rad}$
$\Omega_n$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\phi$	$0 \text{ rad}$
$\Omega_a$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\theta$	$-0.174 \text{ rad}$
$\dot{r}_1$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$r_1$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_2$	$28.6 \text{ rad s}^{-1}$	$r_2$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_3$	$33.3 \text{ rad s}^{-1}$	$r_3$	$0 \text{ rad}$

**Tableau 4.3** – Paramètres d’état initiaux du test Saut d’une rampe inclinée.



**Figure 4.11** – Les quatre configurations de contact ainsi que les conditions de transitions impliquées dans le test Saut d’une rampe inclinée.



**Figure 4.12** – Instantanés de la bicyclette sautant d'une rampe inclinée. L'intervalle de temps entre deux instantanés consécutifs est de 0.5 s.

Avec des conditions initiales semblables, il est possible d'illustrer les effets des ddls internes de la bicyclette sur ses ddls externes, lui permettant ainsi de se réorienter durant une phase de vol. Les figures 4.16 présentent un tel cas. Ici la simulation débute dans les mêmes conditions que précédemment excepté que la rampe se situe à deux mètres du sol (voir figure 4.16A). Puis à l'instant  $t_4$ , lorsque la bicyclette a quitté la rampe et se trouve en phase de vol, la commande suivante est appliquée à la roue arrière :

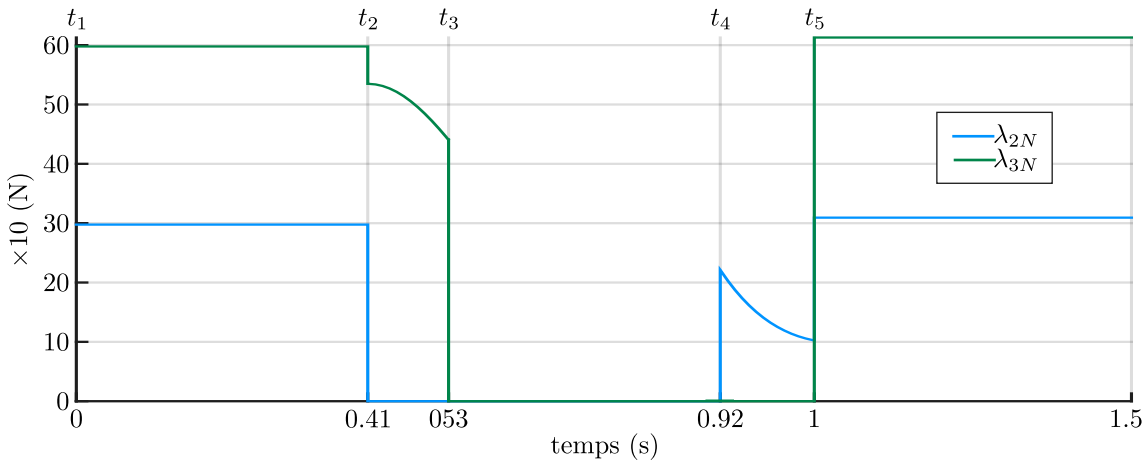
$$\tau_3 = 2000(\theta_d - \theta) + 300\Omega_a ,$$

avec  $\theta$  l'angle de tangage de la bicyclette et  $\Omega_a$  la vitesse associée. Cette commande pilote le couple appliqué à la roue arrière (voir figure 4.16B) afin de cabrer la bicyclette d'un angle  $\theta_d = 45^\circ$  (voir figure 4.16C), ce qui se produit bien que la bicyclette soit en phase de vol et qu'aucun contact ne subsiste avec l'environnement. Ce phénomène illustre la connexion mécanique introduite en chapitre 1, section 1.4.1. Comme dans le cas du chat tombant, la bicyclette peut modifier son orientation grâce à ses ddls internes au travers de la conservation des quantités cinétiques sur le fibré principal.

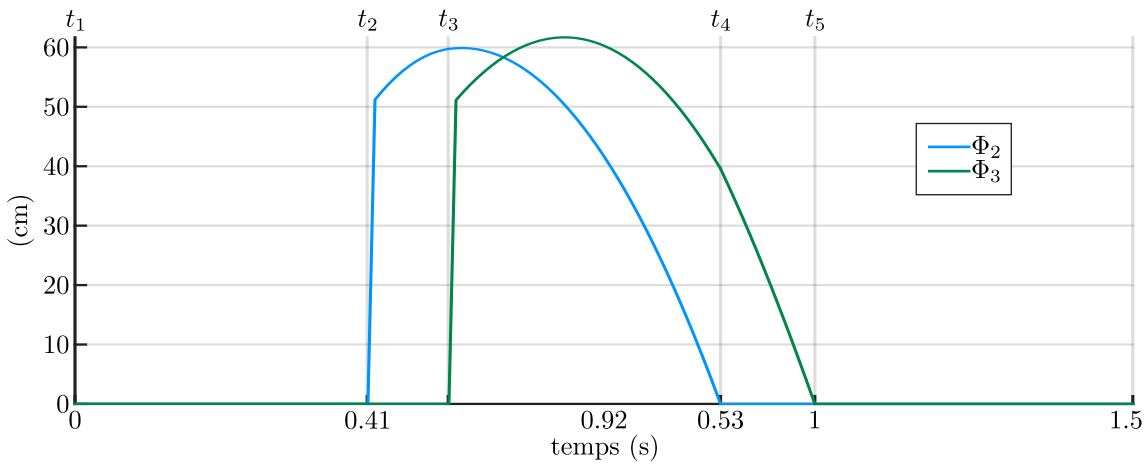
### 4.3.3 Test 3 : Bicyclette sujette aux décollements de chacune de ses roues.

Dans l'exemple précédent, la surveillance des gaps a été mise en œuvre pour déclencher le décollement des roues. Nous considérons maintenant un test dans lequel les décollements sont déclenchés par l'annulation de la force de réaction normale (voir la figure 4.17). Cela peut être provoqué simplement en freinant brusquement la roue avant ou en accélérant brusquement la roue arrière. Dans ce test le sol est plat et horizontal. Les conditions initiales du test sont les suivantes (voir le tableau 4.4). La bicyclette est lancée droite, guidon droit ( $r_1 = 0$ ), les deux roues au sol, avec une vitesse linéaire  $V_0 = (0, 4.6, 0.15)^T \text{ m s}^{-1}$ . Les vitesses angulaires des roues sont initialisées en accord avec la vitesse linéaire. De plus, dans le but d'obtenir un mouvement tri-dimensionnel plus riche, la bicyclette est également animée d'une vitesse de roulis  $\Omega_0 = (0, -0.5, 0)^T \text{ rad s}^{-1}$  (cette vitesse de roulis justifie la vitesse de  $0.15 \text{ m s}^{-1}$  suivant l'axe  $a_0$ ). Bien que la bicyclette soit initialement

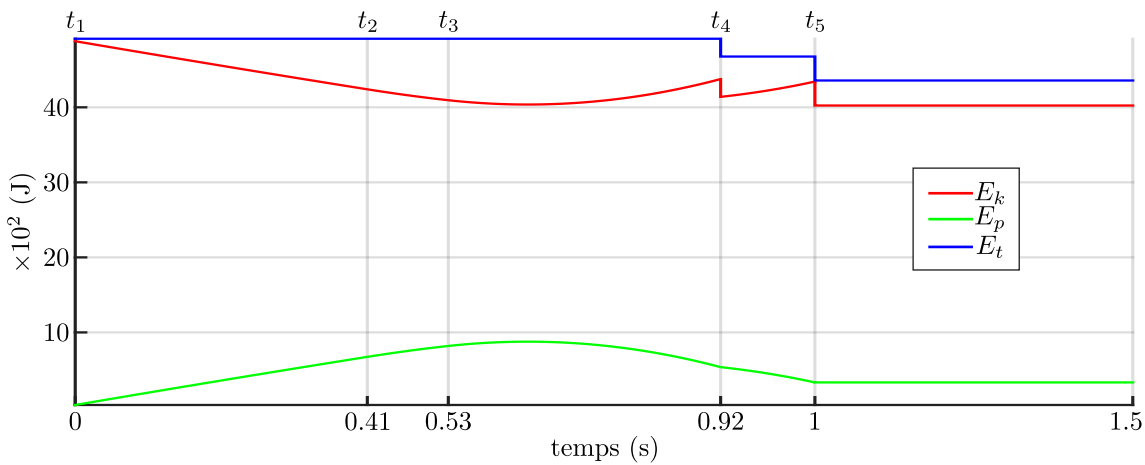




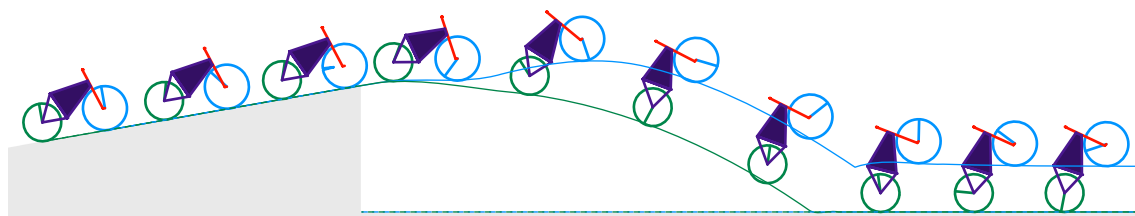
**Figure 4.13** – Forces de réaction normales appliquées à la roue avant ( $\lambda_{2N}$ ) et à la roue arrière ( $\lambda_{3N}$ ) en fonction du temps.



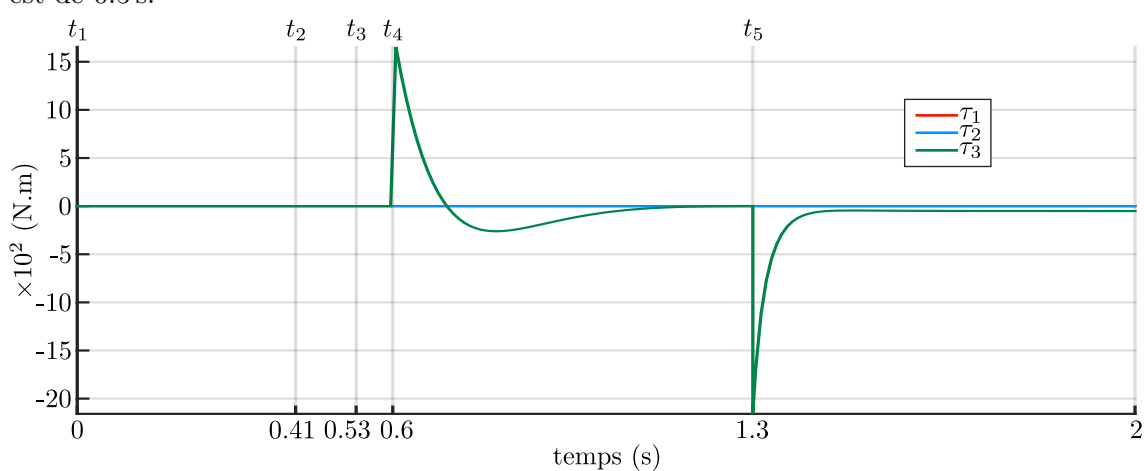
**Figure 4.14** – Gap entre le sol et la roue avant ( $\Phi_2$ ) et entre le sol et la roue arrière ( $\Phi_3$ ) en fonction du temps.



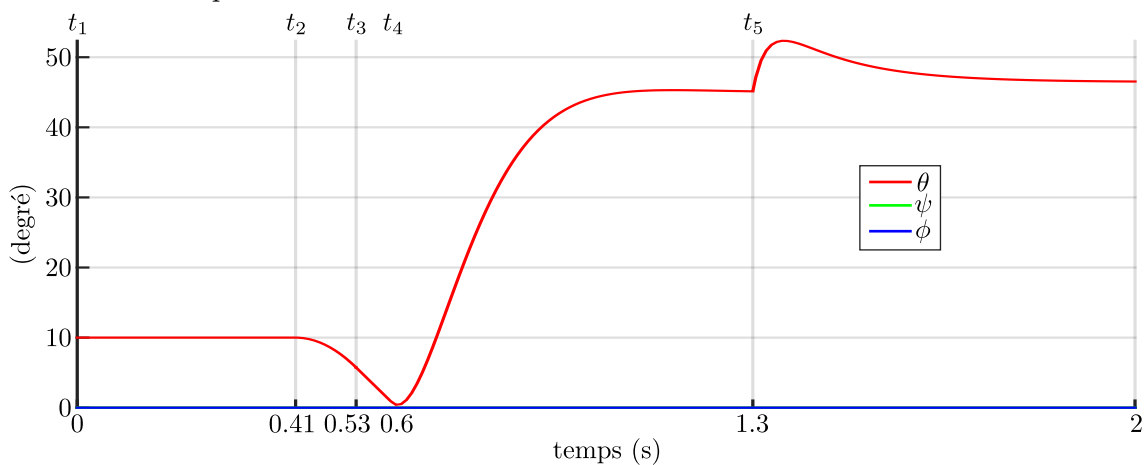
**Figure 4.15** – Énergie cinétique ( $E_k$ ), énergie potentielle ( $E_p$ ) et énergie totale ( $E_t$ ) en fonction du temps.



(A) Instantanés de la bicyclette. L'intervalle de temps entre deux instantanés consécutifs est de 0.5 s.



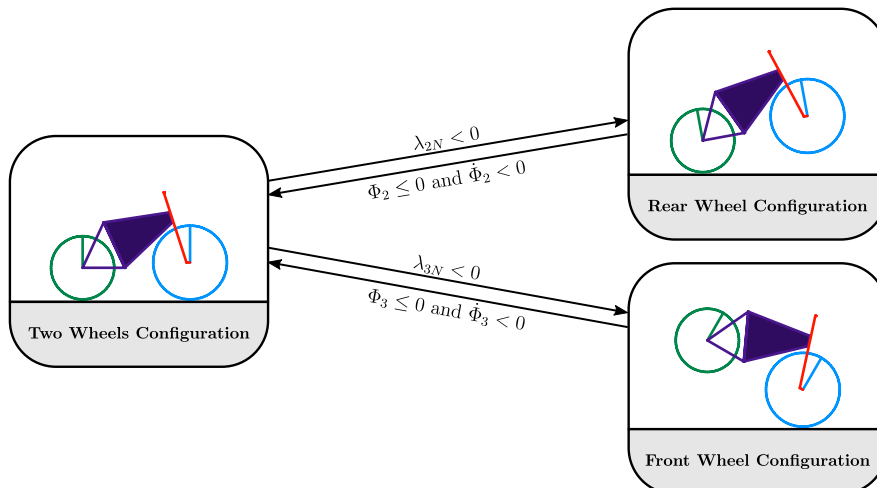
(B) Couples appliqués sur le guidon ( $\tau_1$ ), la roue avant ( $\tau_2$ ) et la roue arrière ( $\tau_3$ ) en fonction du temps.



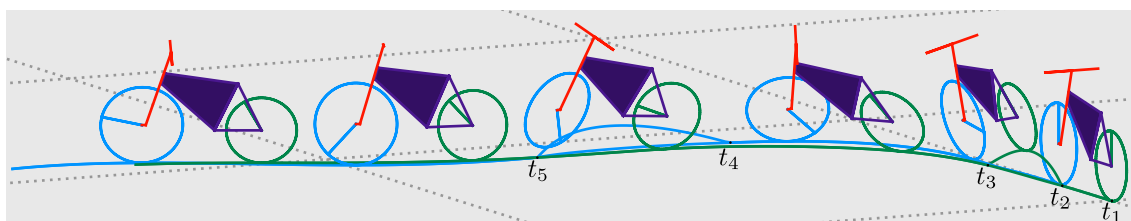
(C) Angles de roulis ( $\phi$ ), tangage ( $\theta$ ), lacet ( $\psi$ ) de la bicyclette en fonction du temps.

**Figure 4.16** – Mouvement piloté de la bicyclette durant une phase de vol.

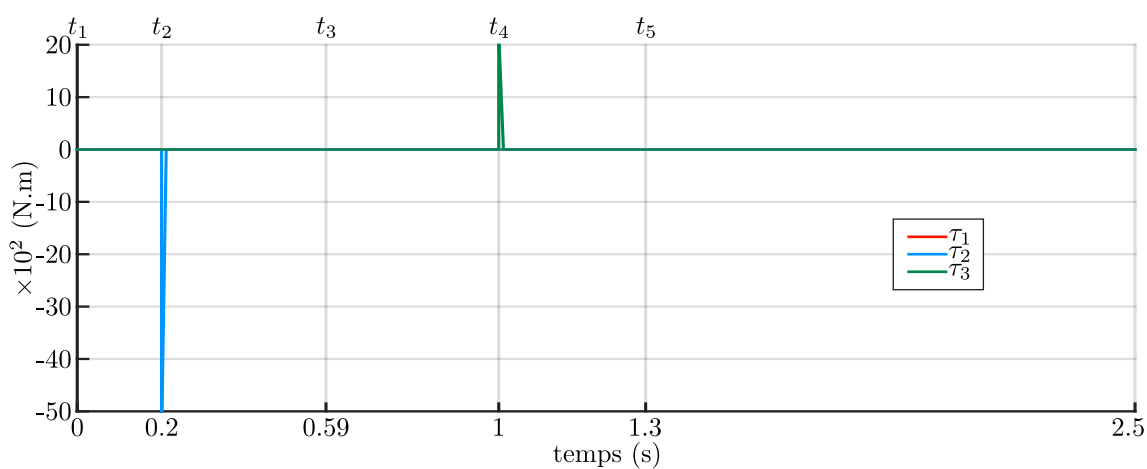
droite, cette vitesse de roulis perturbe les mouvements de la bicyclette qui tend à s'auto-stabiliser avec le temps. Ce test d'auto-stabilisation a déjà été étudié dans le chapitre 2 (ainsi que dans [Meijaard et al. 2007], [Boyer et al. 2017]) mais uniquement dans le contexte de contacts persistants. Dans le présent contexte, nous appliquons, aux instants  $t_2$  et  $t_4$  des couples brusques sur la roue avant et arrière, respectivement. Comme illustré en figure 4.19, le signe de ces couples d'actionnement est tel que, à l'instant  $t_2$  la roue avant est brusquement décélérée tandis que, à l'instant  $t_4$ , la roue arrière est brusquement accélérée. On notera, sur la figure 4.20, que la soudaine décélération de la roue avant à l'instant  $t_2$  provoque, sur celle-ci, une brusque force de réaction  $\lambda_{2N}$  ainsi que l'annulation instantanée de la force de réaction normale  $\lambda_{3N}$  de la roue arrière. En raison du caractère presque impulsif de ce phénomène, le décollerment de la roue arrière est décrété après la détection d'une valeur négative, non admissible, de la force de réaction  $\lambda_{3N}$ . La simulation est alors restaurée dans son dernier état compatible (voir la figure 4.6) avant d'être rejouée en libérant la contrainte imposant le contact de la roue arrière. Ceci déclenche le décollerment de la roue arrière à l'instant  $t_2$ , comme l'illustre le gap sur la figure 4.21. Toujours à l'instant  $t_2$ , la figure 4.22 présente un soudain changement d'énergie cinétique, dû au couple de freinage, dissipatif, compensé, en partie, par une augmentation de l'énergie potentielle provoquée par l'inclinaison de la bicyclette. Plus tard, à l'instant  $t_3$  la roue arrière se repose au sol ce qui, à nouveau, génère une perte impulsive d'énergie cinétique due, cette fois, à la collision plastique. On pourra noter, toutefois, qu'entre chacun de ces sauts d'énergie, l'énergie totale du système reste constante. Enfin, aux instants  $t_4$  et  $t_5$ , des mécanismes similaires se produisent, déclenchés, cette fois, par le couple d'actionnement positif appliqué sur la roue arrière provoquant le décollerment de la roue avant.



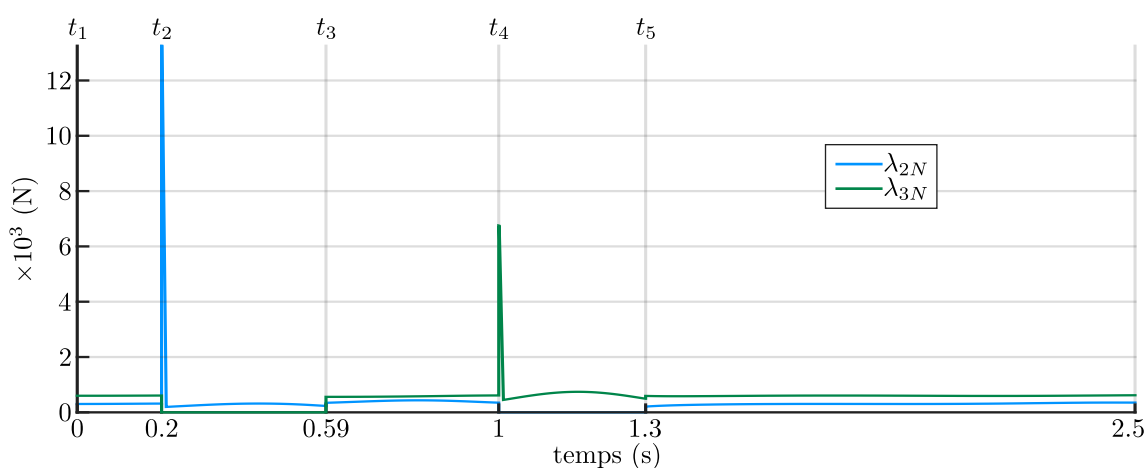
**Figure 4.17** – Graphe état-transition du test 3. Les trois configurations de contact ainsi que les conditions de transitions impliquées dans le test Bicyclette sujette à des décollerments de chacune de ses roues.



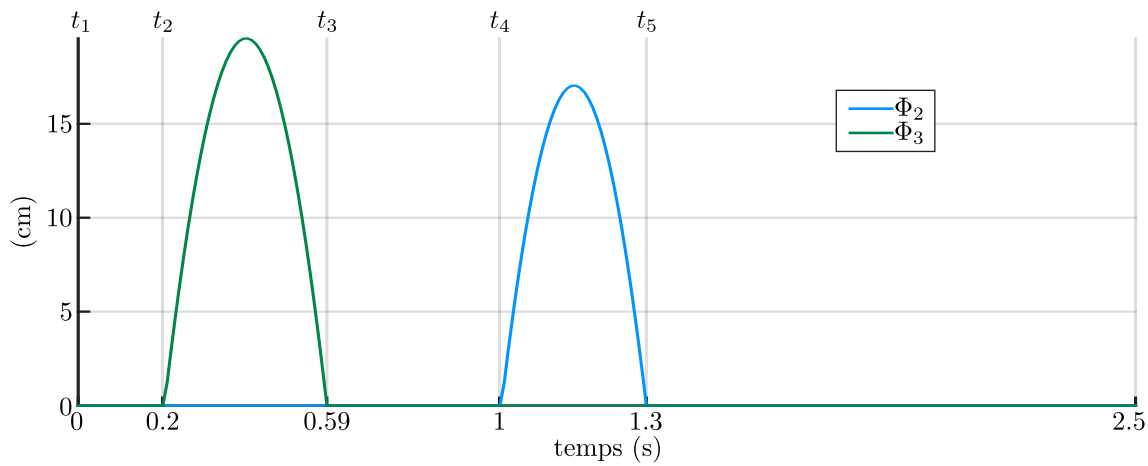
**Figure 4.18** – Instantanés de la bicyclette évoluant sur un sol plat et horizontal. L'intervalle de temps entre deux instantanés consécutifs est de 0.45 s.



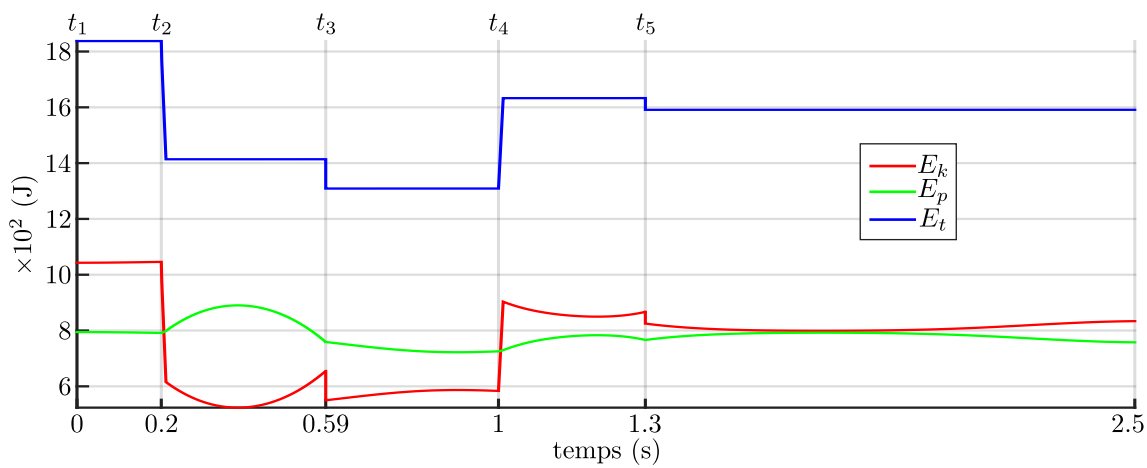
**Figure 4.19** – Couples appliqués sur le guidon ( $\tau_1$ ), la roue avant ( $\tau_2$ ) et la roue arrière ( $\tau_3$ ) en fonction du temps.



**Figure 4.20** – Forces de réaction normales appliquées à la roue avant ( $\lambda_{2N}$ ) et à la roue arrière ( $\lambda_{3N}$ ) en fonction du temps.



**Figure 4.21** – Gap entre le sol et la roue avant ( $\Phi_2$ ) et entre le sol et la roue arrière ( $\Phi_3$ ) en fonction du temps.



**Figure 4.22** – Énergie cinétique ( $E_k$ ), énergie potentielle ( $E_p$ ) et énergie totale ( $E_t$ ) en fonction du temps.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$V_s$	$0 \text{ m s}^{-1}$	$P_s$	$0.3 \text{ m}$
$V_n$	$4.6 \text{ m s}^{-1}$	$P_n$	$0 \text{ m}$
$V_a$	$0.15 \text{ m s}^{-1}$	$P_a$	$0 \text{ m}$
$\Omega_s$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\psi$	$0 \text{ rad}$
$\Omega_n$	$-0.5 \text{ rad s}^{-1}$	$\phi$	$0 \text{ rad}$
$\Omega_a$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\theta$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_1$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$r_1$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_2$	$13.1 \text{ rad s}^{-1}$	$r_2$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_3$	$15.3 \text{ rad s}^{-1}$	$r_3$	$0 \text{ rad}$

**Tableau 4.4** – Paramètres d’état initiaux du test Bicyclette sujette à des décollements de chacune de ses roues.

#### 4.3.4 Test 4 : Décollement d’une roue aux suites d’une collision

Ce nouveau scénario a pour but d’illustrer et d’investiguer plus profondément les collisions multi-contacts telles que celles mentionnées en [remarque 3.6](#). Ici, la collision d’une roue avec le sol génère le décollement de la seconde roue. Dans le cas de la bicyclette soumise à des impacts plastiques, cet effet peut être produit dans les conditions initiales résumées dans la [tableau 4.5](#). Ainsi, la bicyclette débute la simulation avec uniquement sa roue arrière en contact avec le sol ( $\theta = 10^\circ$ ). Ensuite, elle est libérée dans la gravité avec sa roue avant tournant à grande vitesse  $\dot{r}_2 = -200 \text{ rad s}^{-1}$ . Le sol est parfaitement horizontal et tous les couples internes sont nuls. Dans de telles conditions, la [figure 4.26](#) fait apparaître un décollement de la roue arrière à l’instant  $t_2$ , c’est-à-dire à l’instant exact où la roue avant entre en collision avec le sol. Ce décollement est généré par l’algorithme selon le sous-graphique de la [figure 4.23](#) et peut être expliqué comme suit. Lorsque la roue avant entre en collision avec le sol, l’algorithme fait une première prédiction de la configuration de contact après impact où les deux roues seraient fixées au sol (vignette en haut à droite sur la [figure 4.23](#)). Ensuite, sur la base de cette prédiction, les forces de réaction normales impulsives  $\Lambda_{2N}$  et  $\Lambda_{3N}$  sont calculées en utilisant (3.30). Enfin, la compatibilité entre ces forces de réaction impulsives  $\Lambda_{2N}$  et  $\Lambda_{3N}$  et la prédiction est testée, telle que mentionnée dans la [remarque 3.6](#). Dans le cas présent, à l’instant de la collision de la roue avant (dénote  $B$ ), l’algorithme retourne  $\Lambda_{2N} = 126.6 \text{ N s}$  et  $\Lambda_{3N} = -66.8 \text{ N s}$ , et l’état de la roue arrière n’est donc pas compatible avec la loi de contact normal (3.7). Par conséquent, cette prédiction est rejetée par l’algorithme qui revient à l’état de la bicyclette avant impact et rejoue la loi d’impact réduit (3.28) dans la configuration de contact de roue avant seulement, c’est-à-dire avec  $H_+ = H_2$  au lieu de  $H_+ = H_{23}$ . La nouvelle prédiction stipule donc que seule la roue avant restera

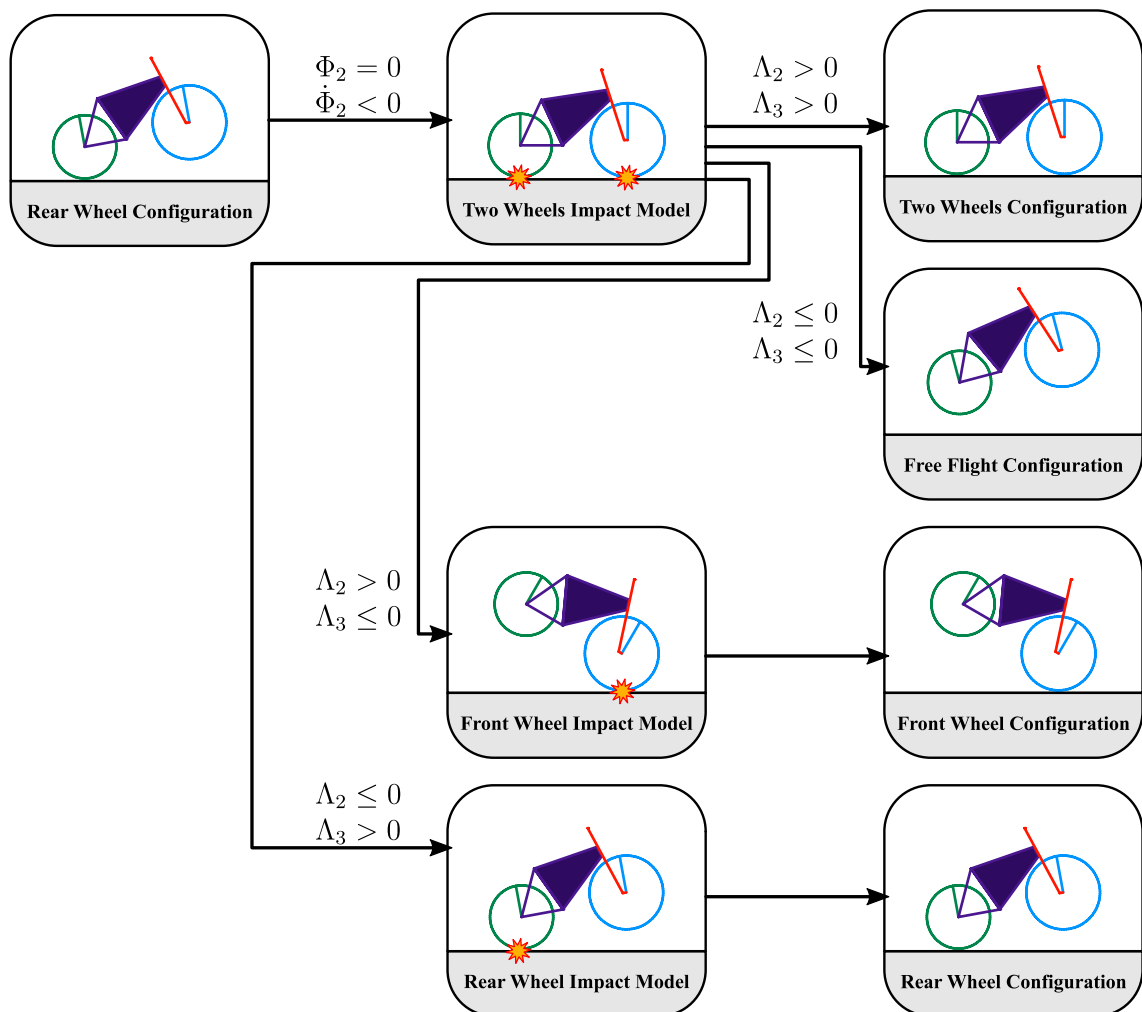
en contact avec le sol après impact. Le calcul des forces de réaction impulsionnelles (3.30) retourne, pour cette nouvelle prédiction :  $\Lambda_{2N} = 133.3 \text{ N s}$  et  $\Lambda_{3N} = 0 \text{ N s}$  (voir la figure 4.27 à l'instant  $t_2$ ). Ces nouvelles forces de réaction impulsionnelles confirme la nouvelle prédiction faite, et la compatibilité des contacts étant restaurée, le décollement de la roue arrière est décrété par l'algorithme. Physiquement, ce décollement peut être expliqué par la figure 4.25 qui montre qu'une force tangentielle soudaine appliquée au point de contact de la roue avant génère un moment sur le cadre qui provoque le décollement de la roue arrière. À l'instant  $t_3$ , quand la roue arrière entre, à son tour, en collision avec le sol, la résolution de l'impact est traité de manière identique. La roue avant étant déjà en contact avec le sol, la prédiction initiale est donc la même que dans le cas précédent, à savoir que les deux roues vont rester collées au sol après impact. Cependant, contrairement au premier impact, à l'instant  $t_3$  la loi réduite de l'impact (3.28) avec  $H_+ = H_{23}$  retourne, grâce à (3.30),  $\Lambda_{2N} = 5.8 \text{ N s}$  et  $\Lambda_{3N} = 67.8 \text{ N s}$ , deux forces de réaction impulsionnelles compatibles avec la prédiction initiale, l'algorithme la validant en conséquence. Enfin, la simulation se termine alors que la bicyclette a ses deux roues au sol.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$V_s$	$0 \text{ m s}^{-1}$	$P_s$	$0.3 \text{ m}$
$V_n$	$0 \text{ m s}^{-1}$	$P_n$	$0 \text{ m}$
$V_a$	$0 \text{ m s}^{-1}$	$P_a$	$0 \text{ m}$
$\Omega_s$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\psi$	$0 \text{ rad}$
$\Omega_n$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\phi$	$0 \text{ rad}$
$\Omega_a$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\theta$	$-0.174 \text{ rad}$
$\dot{r}_1$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$r_1$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_2$	$-200 \text{ rad s}^{-1}$	$r_2$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_3$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$r_3$	$0 \text{ rad}$

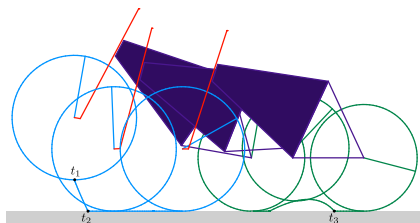
**Tableau 4.5** – Paramètres d'état initiaux du test Décollement d'une roue aux suites d'une collision.

#### 4.3.5 Test 5 : Wheeling commandé de la bicyclette

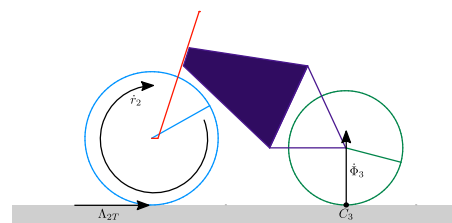
Dans ce dernier exemple (voir figure 4.29), la bicyclette est contrôlée afin de se cabrer et de le rester en dépit de perturbations extérieures appliquées sur le guidon. La loi de contrôle imposée est un retour d'état de l'orientation du cadre de la bicyclette. L'état est paramétré par la vitesse angulaire du cadre  $\Omega_0 = (\Omega_s, \Omega_n, \Omega_a)^\top$  et ses angles roulis, tangage, lacet ( $\phi, \theta, \psi$ ). Notons qu'avec le paramétrage de la figure 4.2,  $\Omega_n, \Omega_a$  et  $\Omega_s$  représentent respectivement les vitesses angulaires de roulis, tangage et lacet autour de la configuration verticale droite de la bicyclette. Plutôt



**Figure 4.23** – Graphe prédiction/correction dans le cas de l’impact de la roue avant. La correction de la prédiction initiale est effectuée dépendamment de la valeur des forces de réaction normales impulsionnelles.

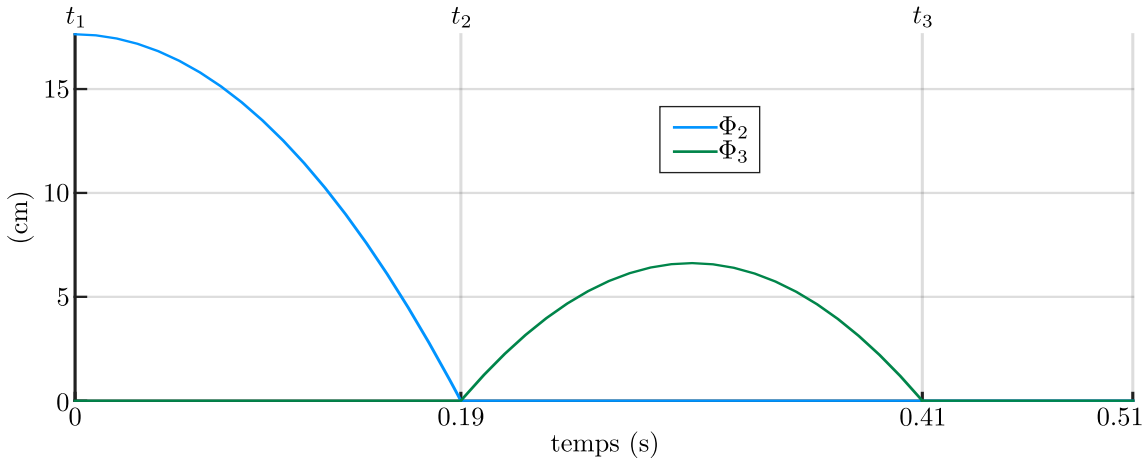


**Figure 4.24** – Instantanés de la bicyclette. 0.25s entre deux instantanés consécutifs.

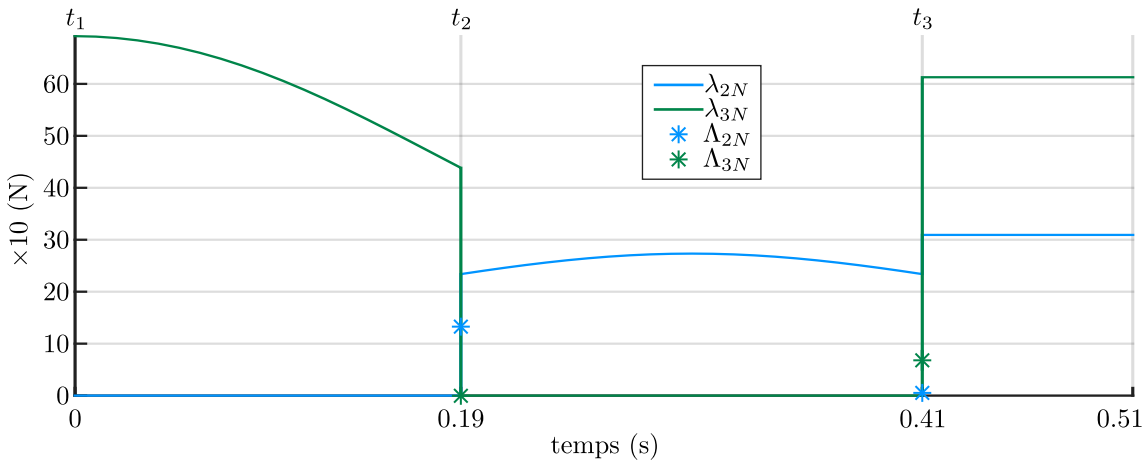


**Figure 4.25** – Bicyclette à l’instant de l’impact.

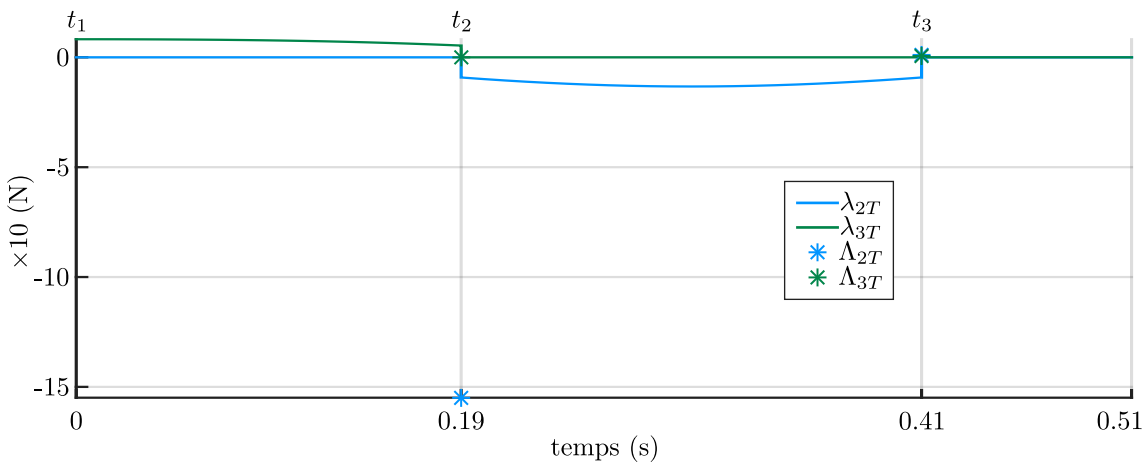




**Figure 4.26** – Gap entre le sol et la roue avant ( $\Phi_2$ ) et entre le sol et la roue arrière ( $\Phi_3$ ) en fonction du temps.



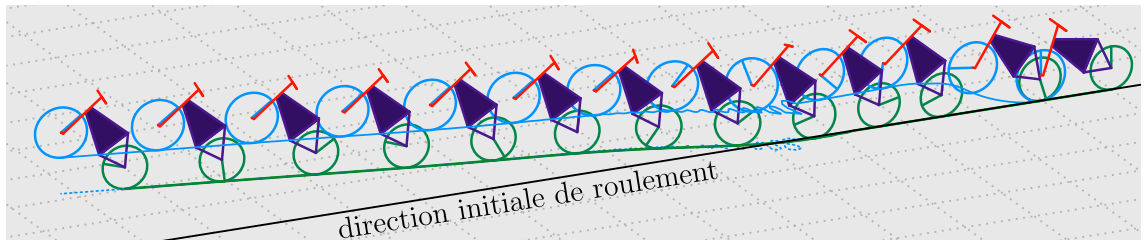
**Figure 4.27** – Forces de réaction normales (et leurs pendants impulsionnels) appliquées à la roue avant  $\lambda_{2N}$  ( $\Lambda_{2N}$ ) et à la roue arrière  $\lambda_{3N}$  ( $\Lambda_{3N}$ ) en fonction du temps.



**Figure 4.28** – Forces de réaction tangentielles (et leurs pendants impulsionnels) appliquées à la roue avant  $\lambda_{2T}$  ( $\Lambda_{2T}$ ) et à la roue arrière  $\lambda_{3T}$  ( $\Lambda_{3T}$ ) en fonction du temps.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$V_s$	$0 \text{ m s}^{-1}$	$P_s$	$0.3 \text{ m}$
$V_n$	$1 \text{ m s}^{-1}$	$P_n$	$0 \text{ m}$
$V_a$	$0 \text{ m s}^{-1}$	$P_a$	$0 \text{ m}$
$\Omega_s$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\psi$	$0 \text{ rad}$
$\Omega_n$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\phi$	$0 \text{ rad}$
$\Omega_a$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$\theta$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_1$	$0 \text{ rad s}^{-1}$	$r_1$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_2$	$2.86 \text{ rad s}^{-1}$	$r_2$	$0 \text{ rad}$
$\dot{r}_3$	$3.33 \text{ rad s}^{-1}$	$r_3$	$0 \text{ rad}$

**Tableau 4.6** – Paramètres d'état initiaux du test Wheeling commandé de la bicyclette.



**Figure 4.29** – Bicyclette cabrée complètement commandée subissant une perturbation extérieure sur son guidon.

que de concevoir un contrôleur réalisable, notre but consiste à étudier les possibilités offertes par le modèle et l'algorithme. Par conséquent, les deux roues et le guidon sont considérés comme actionnés, et  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^T$  définit le vecteur d'entrées de contrôle. Avec cet actionnement, la bicyclette peut être pilotée et cabrée comme illustré dans la figure 4.29. Ce mouvement est obtenu grâce à des contrôleurs en boucle fermée dont les valeurs de commandes, obtenues empiriquement, sont constantes par morceaux. Afin d'expliquer ce mouvement complexe de la bicyclette, nous allons subdiviser cet exemple en trois phases incrémentales.

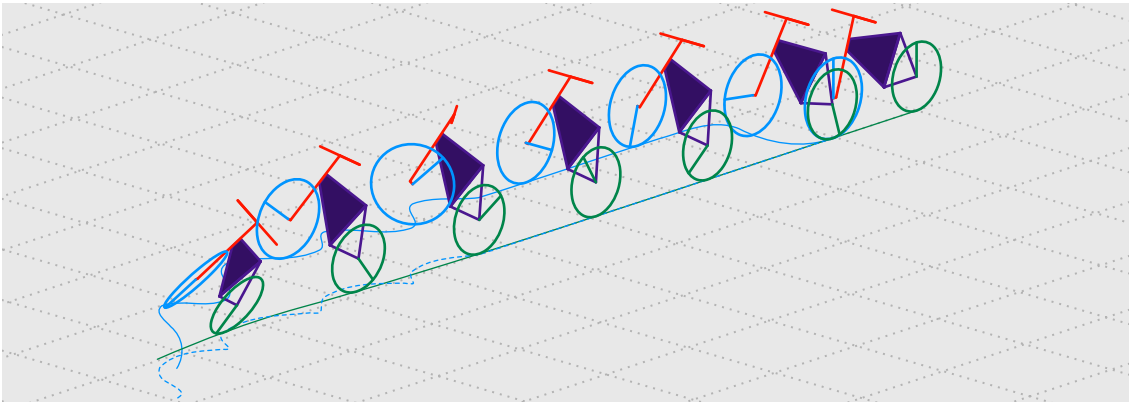
Tout d'abord, les figures 4.30 présentent la bicyclette se cabrant à l'instant  $t_1$  puis subissant un impact perturbateur sur le guidon à l'instant  $t_2$ . Afin de produire le mouvement désiré, le couple d'actionnement de la roue arrière  $\tau_3$  est utilisé dans le but de provoquer le décollement de la roue avant à l'instant  $t_1$ . En désignant l'angle de tangage désiré par  $\theta_d$ , la loi de commande du couple d'actionnement de roue arrière est <sup>3</sup> :

$$\tau_3 = 2000(\theta_d - \theta) + 200\Omega_a ,$$

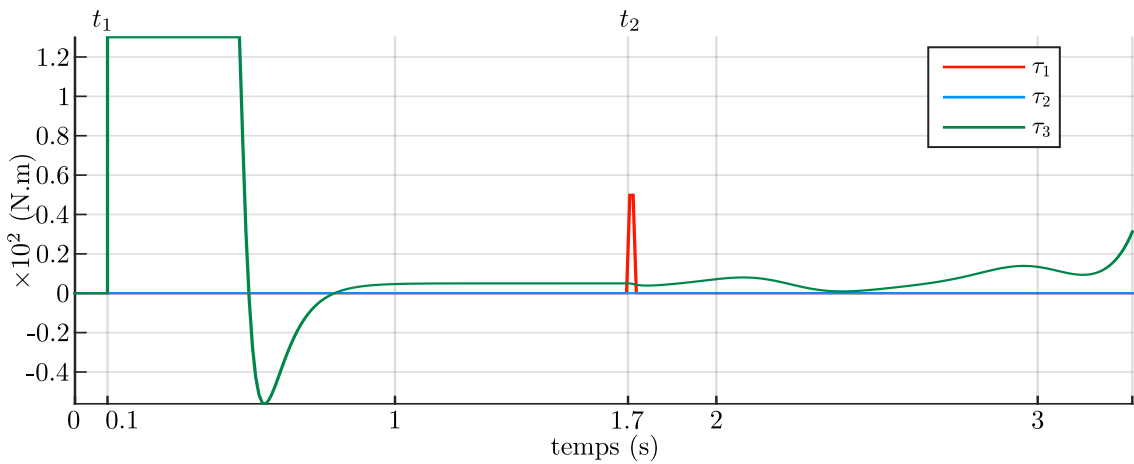
avec  $\theta_d$  défini comme suit :

— si  $t > t_1 = 0.1 \text{ s}$  :  $\theta_d = 30^\circ$ ,

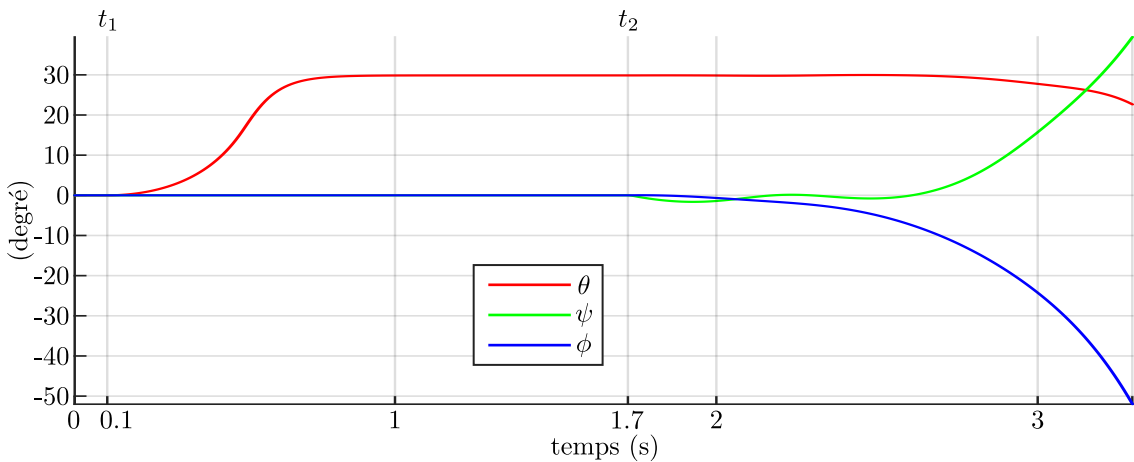
3. Notons que ce couple est saturé entre  $-130 \text{ N m}$  et  $130 \text{ N m}$ .



(A) Instantanés de la bicyclette. L'intervalle de temps entre deux instantanés consécutifs est de 0.5 s.

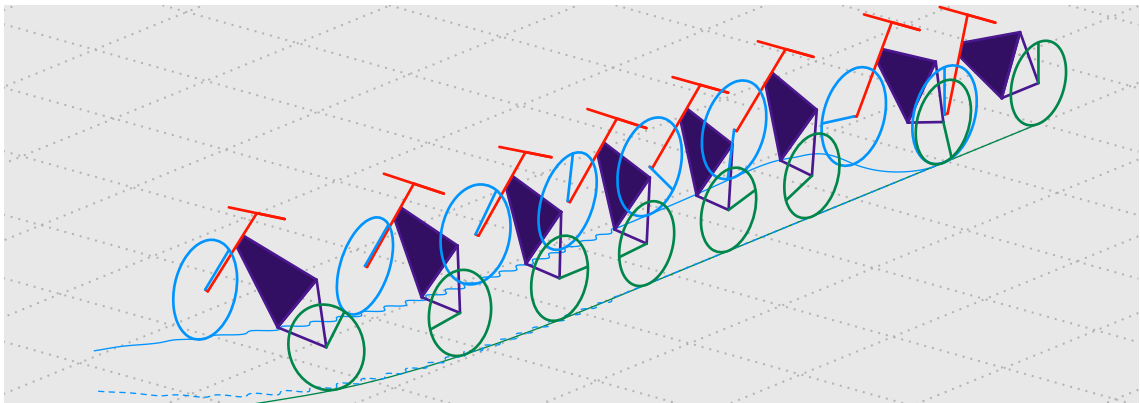


(B) Couples appliqués sur le guidon ( $\tau_1$ ), la roue avant ( $\tau_2$ ) et la roue arrière ( $\tau_3$ ) en fonction du temps.

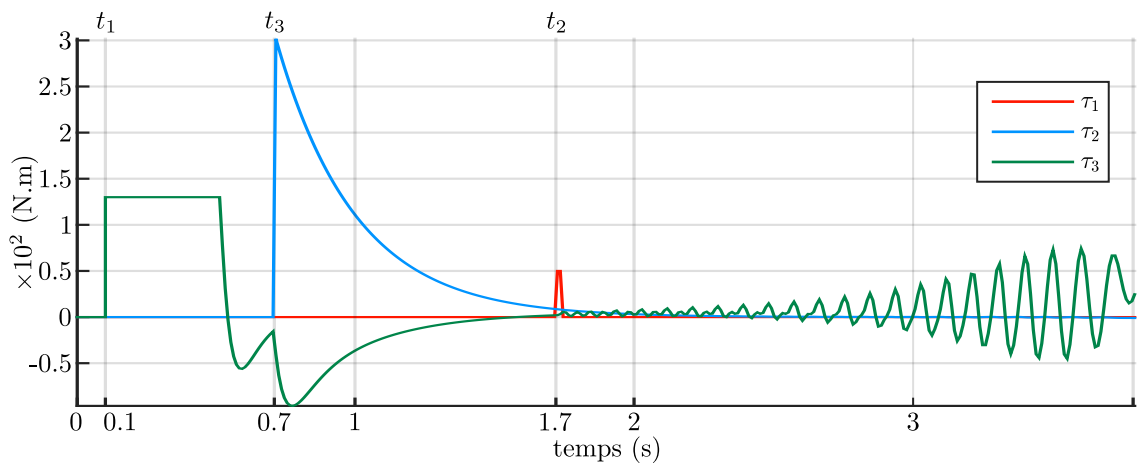


(C) Angles de roulis ( $\phi$ ), tangage ( $\theta$ ), lacet ( $\psi$ ) de la bicyclette en fonction du temps.

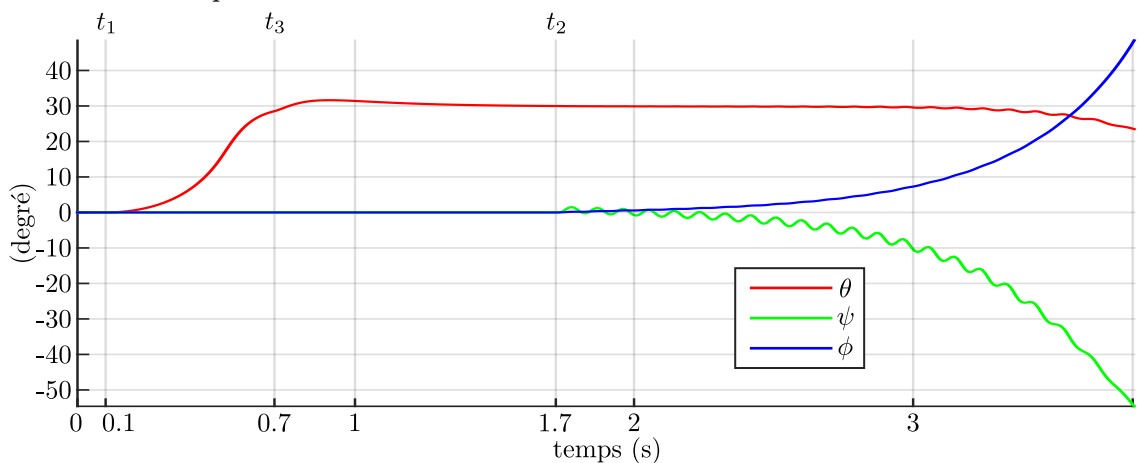
**Figure 4.30** – Bicyclette évoluant sur sa roue arrière. La commande en couple de la roue arrière permet de maintenir la bicyclette cabrée de  $30^\circ$ . Une perturbation extérieure provoque la chute.



(A) Instantanés de la bicyclette. L'intervalle de temps entre deux instantanés consécutifs est de 0.5 s.

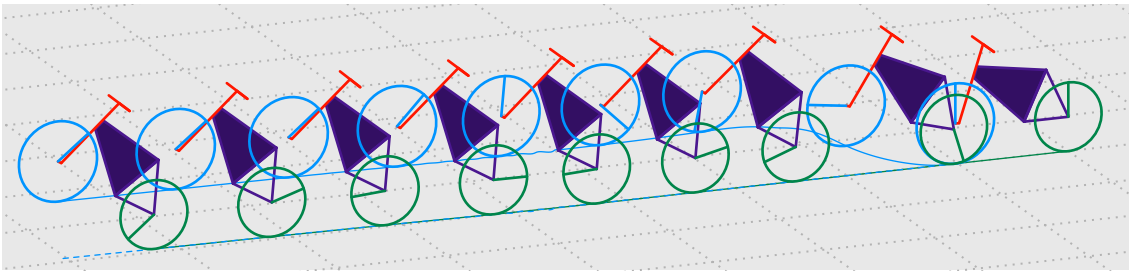


(B) Couples appliqués sur le guidon ( $\tau_1$ ), la roue avant ( $\tau_2$ ) et la roue arrière ( $\tau_3$ ) en fonction du temps.

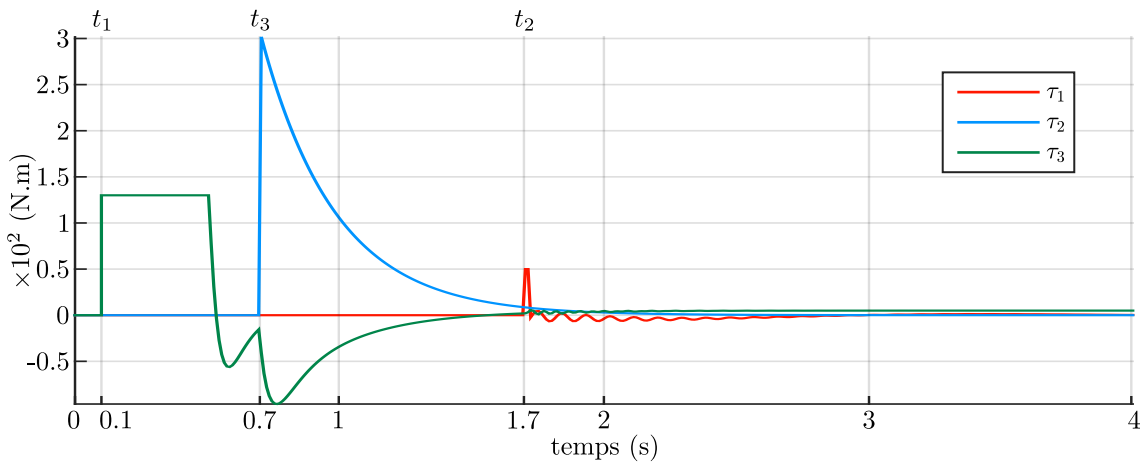


(C) Angles de roulis ( $\phi$ ), tangage ( $\theta$ ), lacet ( $\psi$ ) de la bicyclette en fonction du temps.

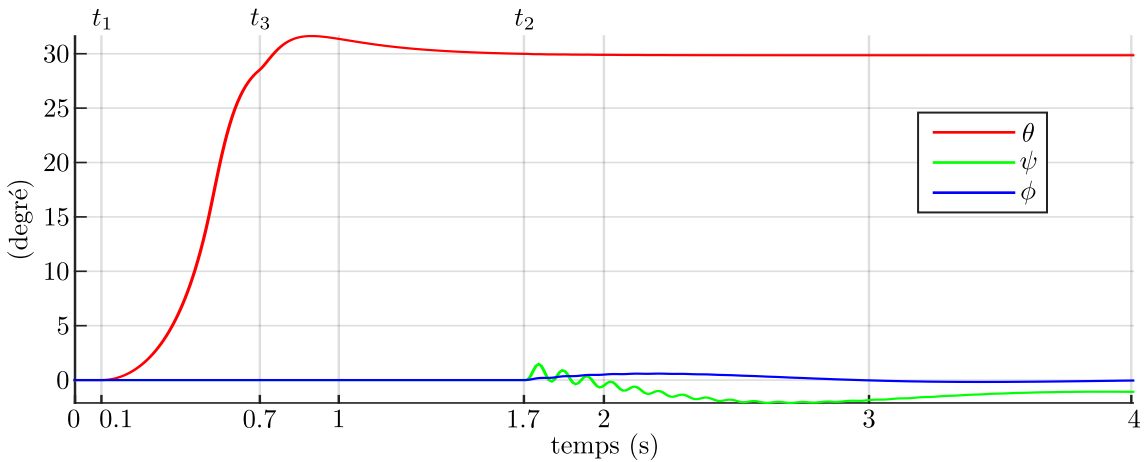
**Figure 4.31** – Bicyclette évoluant sur sa roue arrière. La commande en couple de la roue arrière permet de maintenir la bicyclette cabrée de  $30^\circ$ . Une perturbation extérieure provoque la chute en dépit de l'utilisation de la roue avant en tant que gyroscope.



(A) Instantanés de la bicyclette. L'intervalle de temps entre deux instantanés consécutifs est de 0.5 s.



(B) Couples appliqués sur le guidon ( $\tau_1$ ), la roue avant ( $\tau_2$ ) et la roue arrière ( $\tau_3$ ) en fonction du temps.



(C) Angles de roulis ( $\phi$ ), tangage ( $\theta$ ), lacet ( $\psi$ ) de la bicyclette en fonction du temps.

**Figure 4.32** – Bicyclette évoluant sur sa roue arrière. La commande des couples  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  permet de maintenir la bicyclette cabrée en dépit de perturbations extérieures appliquées sur le guidon.

— sinon :  $\theta_d = 0^\circ$ .

Ainsi commandée, la bicyclette atteint son angle de tangage désiré en moins d'une seconde (figure 4.30C) et est capable de rester cabrée indéfiniment en raison de sa symétrie dans le plan vertical (vélo droit  $\phi = 0$  avec un angle au guidon  $r_1 = 0$ ). La chute de la bicyclette observée en figure 4.30A est produite, quant-à-elle, par l'introduction d'une perturbation extérieure, à l'instant  $t_2$ , modélisée par un couple  $\tau_1 = 50 \text{ N m}$  appliqué sur le guidon pendant  $0.02 \text{ s}$  (figure 4.30B). Cette perturbation fait entrer le guidon en rotation ( $r_1 \neq 0$ ), brise la symétrie verticale de la bicyclette et provoque sa chute ( $\phi \neq 0$ ). Sur la figure 4.30C, dû au signe de la perturbation, on observera que l'inclinaison ( $\phi$ ) diminue tandis que l'angle de lacet ( $\psi$ ) augmente, la bicyclette chute et tourne sur sa gauche.

Afin de lutter contre la chute de la bicyclette, un cycliste réagirait en déplaçant son centre de masse. Toutefois, puisque notre modèle considère le cycliste comme une masse ponctuelle ajoutée au cadre, il est nécessaire de trouver un palliatif alternatif. Ainsi on proposera d'user de la roue avant à présent libre comme d'un gyroscope (voir figures 4.31). Dans ce but, le couple  $\tau_2$  (figure 4.31B) est utilisé pour accélérer la roue avant, à partir de l'instant  $t_3$ , jusqu'à ce que  $\dot{r}_2$  atteigne une valeur souhaitée  $\dot{r}_{2,d} = 100\pi \text{ rad s}^{-1}$ . Cette commande répond à la loi de commande suivante :

$$\tau_2 = \dot{r}_{2,d} - \dot{r}_2 .$$

En dépit, de l'utilisation de la roue avant comme un gyroscope, le résultat escompté n'est pas obtenu. Toutefois, la roue avant agit belle et bien tel un gyroscope en cherchant à maintenir son orientation dans l'espace. La perturbation appliquée au guidon se transmet à la roue avant. Cette perturbation appliquée perpendiculairement à l'axe de rotation de la roue provoque un mouvement de précession faisant s'incliner et virer la bicyclette sur la droite (comme en atteste la valeur de  $\phi$  qui augmente et celle de  $\psi$  qui diminue en figure 4.31C). La bicyclette chute, pliant au niveau de l'axe du guidon (figure 4.31A) sous la contrainte de la roue avant qui cherche à garder son orientation.

Pour restaurer l'équilibre, on considère maintenant un cycliste plus actif, agissant sur le guidon dans l'espoir d'éviter la chute (figure 4.32). Son action est modélisée par le couple appliqué au guidon  $\tau_1$  et respecte la loi de commande suivante à chaque instant de la simulation :

$$\tau_1 = -400\phi - \dot{r}_1 .$$

Puisque l'inclinaison  $\phi$  de la bicyclette, initialement nulle (bicyclette initialement parfaitement droite), est modifiée par la perturbation appliquée au guidon, les effets de cette commande ne sont visibles qu'à partir de l'instant  $t_2$  (figure 4.32B). Comme pour le sous-exemple précédent, l'effet gyroscopique tend à provoquer l'inclinaison ( $\phi$ ) et le changement de direction ( $\psi$ ) de la bicyclette. Cependant, la loi de commande du couple  $\tau_1$  étant fonction de l'inclinaison  $\phi$ , elle évite à la bicyclette de plier

au niveau du guidon et lui permet même de retrouver la posture verticalement symétrique lui assurant de poursuivre, sans chuter, *ad vitam aeternam* (figure 4.32C). La perturbation appliquée au guidon ne s'évapore toutefois pas sous l'effet des lois de commande appliquées à  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$ . En effet, puisque la loi de commande de  $\tau_3$  régule l'angle de tangage ( $\theta$ ) et que l'action combinée des lois de commande de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  permet d'agir sur l'inclinaison ( $\phi$ ) de la bicyclette, l'effet de la perturbation n'est plus que visible sur l'angle de lacet ( $\psi$ ) et entraîne un changement de direction proportionnel à l'amplitude de la perturbation. Une perturbation modélisée par un couple de 50 N m entraîne une déviation de la direction de roulement de un à deux degrés (voir figure 4.32A et figure 4.32C) tandis qu'une perturbation plus importante (500 N m) entraîne une déviation de plus de dix degrés comme l'illustre la figure 4.29 introduisant cette section.

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre propose une extension de la modélisation dynamique de la bicyclette du chapitre 2 au cas des contacts intermittents. Le point clef de l'application pratique se révèle être la détermination des points de pré-contact et de leur gap. Dans le cas de la bicyclette, cela est traité en section 4.2.2 au travers d'un algorithme *ad hoc* permettant de monitorer la position des points de pré-contact et leur gap associé à chaque instant. Cette seconde partie présente aussi les quatre configurations de contact considérées dans l'application à la bicyclette (section 4.2.3) et les modèles dynamiques qui en découlent (section 4.2.4).

Pour finir, le chapitre se termine par un ensemble de cinq essais numériques usant du modèle de la bicyclette soumise à des contacts intermittents (section 4.3). Ils illustrent la conservation d'énergie dans le cas de l'impact élastique (section 4.3.1), mais également les mécanismes de décollements des roues doux (section 4.3.2), durs (section 4.3.3) ou dus à une collision (voir remarque 3.6) (section 4.3.4) et se terminent par un essai numérique montrant une bicyclette maintenant son équilibre sur la roue arrière en dépit de perturbations extérieures (section 4.3.5).

On notera que les essais numériques font apparaître des valeurs de couple importantes. La réorientation de la bicyclette durant la phase de vol (section 4.3.2) nécessite un couple impulsif de plus de 1500 N m tandis que faire cabrer la bicyclette (section 4.3.5) demande un couple de près de 150 N m. À titre de comparaison, la société Heinzmann Motor produit un moteur roue PR1 180-30<sup>4</sup> capable de fournir un couple nominal de 50 N m et un couple impulsif de 60 N m destiné à des bicyclettes électriques. Certes de tels moteurs ne sont pas destinés à permettre

---

4. [datasheet](#) du PRA 180-30 consultée le 25/09/2018.

des acrobaties telles que celles exposées dans ce chapitre. Toutefois, on notera qu'il n'existe qu'un facteur trois entre le couple nominal de ce moteur et le couple requis pour faire se cabrer la bicyclette dans l'essai présenté en [section 4.3.5](#). Dans le cas de la réorientation durant la phase de vol ([section 4.3.2](#)), le facteur est par contre beaucoup plus important. Cette différence est imputable au fait que l'on cherche à réaliser le mouvement rapidement (en 0.7 s) sans l'aide du pilote. En effet, le modèle considère le pilote comme une masse ponctuelle liée au cadre, il ne peut ainsi pas agir sur la bicyclette en déplaçant sa masse. Un modèle de la bicyclette plus complexe contenant un modèle plus réaliste du pilote nous permettrait de réaliser ces mouvements sans, ou avec des couples d'actionnement réduits.



## Bibliographie

- Avril Q., Gouranton V., et Arnaldi B. A Broad Phase Collision Detection Algorithm Adapted to Multi-cores Architectures. Dans S.R..A. Shirai, rédacteur, *VRIC*, tome 12, page 95. Laval, France, 2010. [163](#)
- Bandi S. et Thalmann D. An adaptive spatial subdivision of the object space for fast collision detection of animated rigid bodies. *Computer Graphics Forum*, 14(3) :259–270, 1995. [163](#)
- Boyer F., Porez M., et Mauny J. Reduced dynamics of the non-holonomic whipple bicycle. *Journal of Nonlinear Science*, 2017. [159](#), [178](#)
- Cohen J., Lin M., Manocha D., et Ponamgi M. *I-COLLIDE : An interactive and exact collision detection system for large-scale environments*, pages 189–196. ACM, 1995. [163](#)
- Fares C. et Hamam A. Collision detection for rigid bodies : A state of the art review. Dans *In GraphiCon*. 2005. [164](#)
- Gilbert E.G., Johnson D.W., et Keerthi S.S. A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 4(2) :193–203, 1988. [163](#)
- Gottschalk S., Lin M., et Manocha D. *OBBTree : A hierarchical structure for rapid interference detection*, pages 171–180. 1996. [163](#)
- Kockara S., Halic T., Iqbal K., Bayrak C., et Rowe R. Collision detection : A survey. Dans *2007 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 4046–4051. 2007. [163](#)
- Lehericey F. *Ray-traced collision detection : Quest for performance*. Theses, INSA de Rennes, 2016. [163](#), [164](#)
- Lin M.C. et Gottschalk S. Collision detection between geometric models : A survey. Dans *In Proc. of IMA Conference on Mathematics of Surfaces*, pages 37–56. 1998. [163](#)
- Mamou K. et Ghorbel F. A simple and efficient approach for 3d mesh approximate convex decomposition. Dans *2009 16th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 3501–3504. 2009. [164](#)
- Mauny J., Porez M., et Boyer F. Symbolic dynamic modelling of locomotion systems with persistent contacts - application to the 3d bicycle. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :7598 – 7605, 2017. 20th IFAC World Congress. [159](#)

- Meijaard J., Papadopoulos J.M., Ruina A., et Schwab A. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle : a benchmark and review. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2084) :1955–1982, 2007. [162](#), [178](#)
- Mirtich B. Efficient algorithms for two-phase collision detection. Rapport technique, 1997. [163](#)
- Shade J., Gortler S., He L.w., et Szeliski R. Layered depth images. Dans *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 231–242. ACM, 1998. [163](#)
- Teschner M., Kimmerle S., Heidelberger B., Zachmann G., Raghupathi L., Fuhrman A., Cani M.P., Faure F., Magnenat-Thalmann N., Strasser W., et Volino P. Collision Detection for Deformable Objects. *Computer Graphics Forum*, 2005. [163](#)



## Conclusion générale et perspectives

Nous avons traité dans cette thèse de la modélisation des systèmes locomoteurs et en particulier des systèmes non-holonomes soumis à des contacts intermittents. Ce type de systèmes englobe les locomoteurs exploitant des modes de locomotion bio-inspirés tels que la marche ou la brachiation mais également des systèmes artificiels tels que la bicyclette. Pour de tels systèmes, nous avons cherché à produire des modèles capables d'intégrer les mouvements externes d'ensemble, ainsi que de calculer les couples articulaires nécessaires pour les produire.

Pour cela, nous avons reconduit un ensemble d'outils (rappelé en [chapitre 1](#)) utilisés et développés dans les travaux sur la nage tri-dimensionnelle anguilliforme [[Porez 2007](#)], la reptation des serpents [[Ali 2011](#)] et le vol battant des insectes [[Belkhir 2013](#)], en les adaptant au cas des systèmes non-holonomes intermittents. Ces outils utilisent la structure de fibré principal  $SE(3) \times \mathcal{S}$  pour définir l'espace des configurations d'un système locomoteur et s'appuient sur la notion de connexion lorsque la dynamique de la locomotion peut être réduite à un cas cinématique. Dans le cas le plus général, un modèle dynamique est requis pour modéliser la locomotion, et les efforts extérieurs peuvent alors prendre la forme des multiplicateurs de Lagrange d'un ensemble de contraintes appliquées au système. Dans ce cas, qui est celui de la bicyclette, une méthode de réduction par projection permet d'obtenir un modèle dynamique simplifié dans le noyau de ces contraintes.

Dans un premier temps, nous avons illustré ces outils sur un système simple dont la locomotion est inspirée de la brachiation des grands singes : le ROCR. Il s'agit d'un système locomoteur holonome intermittent capable de gravir des parois verticales en changeant de point d'accroche tout en balançant sa queue pendulaire dans la gravité. En employant la méthode de réduction par projection, nous avons écrit le modèle symbolique de sa dynamique continue tandis que sa dynamique discontinue a été traitée par une méthode classique telle que celle utilisée dans

[Rosa et al. 2012]. Afin d’illustrer l’utilité d’un tel modèle, nous avons présenté ici une étude des différentes allures de ce système pour lequel nous avons mené une recherche de cycles limites paramétrée par le déphasage entre deux oscillateurs, l’un commandant les balancements du pendule et l’autre, les instants de commutation des points d’accroche. Sur la base du même modèle, l’étude du rôle de la morphologie du ROCR dans la stabilité de ses allures a, quant à elle, fait l’objet d’une contribution dans la publication [Chevallereau et al. 2017].

Dans un second temps, nous avons employé nos outils géométriques afin de proposer un modèle symbolique de la bicyclette de Whipple soumise à des contacts persistants (chapitre 2). Par souci de réalisme, nous avons également étendu ces outils afin de traiter du cas plus difficile des systèmes mobiles multi-corps soumis à des contacts intermittents (chapitre 3). Cette extension a ensuite été appliquée au cas de la bicyclette intermittente tri-dimensionnelle (3D) (chapitre 4).

Pour produire le modèle symbolique de la bicyclette soumise à des contacts persistants, une étape décisive a consisté à établir un modèle géométriquement exact des points de contact roue/sol prenant en compte les poses 3D de la bicyclette. Sur la base de ce modèle géométrique, nous avons ensuite établi un modèle symbolique des contraintes s’appliquant sur chacune des roues. Conséquence du modèle des contacts, les contraintes ne sont plus invariantes à gauche comme c’est souvent le cas dans la littérature sur le sujet [Bloch et al. 2015]. En somme, pour la bicyclette, les contraintes dépendent de la pose via le modèle géométrique de ses contacts. Ces contraintes y compris celles de non-décollement, de nature holonome, ont été exprimées sous une forme non-intégrable, en fonction des vitesses du corps de référence dans son repère mobile. Ainsi, profitant de la structure de fibré principal, nous avons pu en donner une expression simplifiée exempte des non-linéarités traditionnellement dues à un paramétrage de type coordonnées généralisées. Cette expression intrinsèque des contraintes nous a permis d’obtenir leur noyau sous une forme symbolique, simple et sans singularité. Profitant de ces avantages, nous avons produit un modèle symbolique de la dynamique de la bicyclette persistante soumise aux contraintes de non-décollement, non-dérapiage et roulement sans glissement de chacune de ses roues en utilisant la méthode de réduction par projection de la dynamique libre dans le sous-espace des vitesses admissibles engendré par le noyau de ses contraintes. Les difficultés ici surpassées par le modèle géométriquement exact des contacts et les outils géométriques intrinsèques susmentionnés expliquent sûrement pourquoi il n’existe pas, à notre connaissance, d’autre formulation symbolique close de la bicyclette tri-dimensionnelle.

Le modèle symbolique ainsi obtenu a ensuite été testé et les résultats obtenus en simulation ont été comparés à ceux présentés dans les récents travaux (en coordonnées) de [Meijaard et al. 2007]. Contrepartie de notre méthode, le modèle en vitesse introduit d’inévitables dérives en configuration hors des contraintes holonomes. Ce

phénomène, ici nommé "dérive" a été corrigé par une approche simple consistant à changer l'étage de reconstruction en un système à deux échelles de temps. Cette version corrigée de l'équation de reconstruction nous a permis d'obtenir l'effet attendu sans perdre pour autant les avantages de la réduction opérée sur l'étage dynamique.

Autre conséquence de notre modélisation de la bicyclette, le choix de  $SE(3)$  comme fibre du fibré principal des configurations nous a permis de traiter la dynamique de la bicyclette intermittente, un sujet à notre connaissance inexploré jusque-là. Pour atteindre cet objectif, nous avons étendu nos outils au cas des systèmes mobiles multi-corps soumis à des contacts intermittents en adoptant une approche événementielle. Dans ce contexte, il nous a fallu tout d'abord étendre le modèle géométrique des contacts, qui étant intermittents, peuvent alors être rompus ou ré-établis au cours du temps. En accord avec la littérature sur ce sujet, nous avons défini les points de pré-contact ainsi que leurs gaps associés dans  $SE(3) \times \mathcal{S}$ . Ces définitions nous ont alors permis de classer les événements discrets en deux catégories : les décollements et les collisions. Si les décollements ont pu être intégrés à la dynamique continue du système, les collisions ont, en revanche, nécessité l'usage d'un modèle dynamique discontinu. Ces dynamiques continue et discontinue ont été traitées par deux approches différentes. Une première approche classiquement utilisée dans la littérature, que nous avons qualifiée de "complète", et une seconde, dite "réduite" puisque basée sur la réduction par projection telle qu'introduite dans le cas du vélo persistant ([chapitre 2](#)). Pour initier notre démarche, nous nous sommes tout d'abord intéressé à la méthode complète pour traiter les impacts discrets, méthode que nous avons précédemment utilisée dans le cas du ROCR. Ensuite, en adoptant le modèle physique de l'impact plastique, nous avons étendu la méthode de réduction par projection. Comme dans le cas persistant, cette formulation alternative permet de réduire la complexité du modèle résultant. À notre connaissance, cette seconde approche est l'une des contributions de ce travail et fera l'objet d'une publication à venir. Nous avons alors montré que ces deux approches "complète" et "réduite", partageaient une interprétation géométrique commune en termes de projecteurs, et ne différaient que par la métrique utilisée pour les définir. Ces outils ont été finalement appliqués à la simulation de la bicyclette intermittente, nous permettant ainsi d'illustrer la richesse de sa dynamique ainsi que les mécanismes de décollements et collisions qui la sous-tendent.

## Perspectives

Comme nous avons pu le voir dans le [chapitre 4](#), la dynamique du vélo est très riche. Avec le modèle proposé, utilisant  $SE(3)$  comme fibre, il a été possible de traiter sa dynamique intermittente et ainsi d'illustrer ses phases de vol et ses phases simple et double support. Une première perspective serait d'employer le modèle proposé afin de faire progresser la compréhension des propriétés dynamiques de la bicyclette et d'étudier sa commande. En effet, la stabilité de la bicyclette reste encore à ce jour un problème ouvert. À titre d'exemple, une explication couramment admise pour justifier son auto-stabilisation est qu'elle est causée par le mouvement de précession engendré par l'effet gyroscopique de la roue avant. Or, cette explication a récemment été réfutée dans [[Kooijman et al. 2011](#)]. Une autre perspective prometteuse serait d'étendre la correction de la dérive via l'équation de reconstruction, à d'autres systèmes afin de tester son degré de généralité. Il serait également pertinent d'étendre le modèle de la bicyclette en y ajoutant un modèle plus détaillé du cycliste. Le modèle actuel considérant celui-ci comme une masse ponctuelle ajoutée au cadre, cette limitation se fait ressentir dans la dynamique du système. Avec un tel modèle augmenté, il serait alors possible d'explorer les synergies dynamiques existantes entre le cycliste et son vélo. Enfin, une autre perspective serait d'étendre le modèle de la bicyclette en considérant, cette fois, ses corps déformables en appliquant, par exemple, la méthode modale couplée au repère flottant telle que proposée dans [[Belkhiri et al. 2012](#)]. Ainsi, il deviendrait possible d'étudier et de comprendre finement le phénomène mystérieux de guidonnage ("speed wobble" ou "shimmy" en anglais) afin de proposer une nouvelle morphologie de la bicyclette permettant de le faire disparaître ou à défaut de le limiter.

## Bibliographie

- Ali S. *Newton-Euler approach for bio-robotics locomotion dynamics : from discrete to continuous systems*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Nantes, 2011. [195](#)
- Belkhiri A. *Modélisation dynamique de la locomotion compliant : Application au vol battant bio-inspiré de l'insecte*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Nantes, 2013. [195](#)
- Belkhiri A., Porez M., et Boyer F. A hybrid dynamic model of an insect-like MAV with soft wings. Dans *2012 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pages 108–115. IEEE, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2012. [198](#)
- Bloch A.M., Baillieul J., Crouch P.E., Marsden J.E., et Zenkov D. *Nonholonomic Mechanics and Control*, tome 24 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, 2015. [196](#)
- Chevallereau C., Boyer F., Porez M., Mauny J., et Aoustin Y. Morphological self stabilization of locomotion gaits : illustration on a few examples from bio-inspired locomotion. *Bioinspiration & Biomimetics*, 12(4) :046006, 2017. [196](#)
- Kooijman J.D.G., Meijaard J.P., Papadopoulos J.M., Ruina A., et Schwab A.L. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects. *Science*, 332(6027) :339–342, 2011. [198](#)
- Meijaard J., Papadopoulos J.M., Ruina A., et Schwab A. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle : a benchmark and review. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2084) :1955–1982, 2007. [196](#)
- Porez M. *Modèle dynamique analytique de la nage tridimensionnelle anguilliforme pour la robotique*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2007. [195](#)
- Rosa N., Barber A., Gregg R.D., et Lynch K.M. Stable open-loop brachiation on a vertical wall. Dans *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1193–1199. IEEE, 2012. [196](#)





## Dynamique libre de la bicyclette

Cette annexe est dédiée au calcul de la dynamique libre de la bicyclette sous sa forme symbolique. Pour ce faire, nous commencerons par calculer l'accélération des quatre corps composant la bicyclette dans leur espace des configurations  $\mathcal{C} = \text{SE}(3) \times \mathcal{S}$ . En retirant toutes les accélérations  $\dot{\eta}_j$ , pour  $j \neq 0$ , de la récursion sur les accélérations (2.37), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_0 &= \dot{\eta}_0 , \\ \dot{\eta}_1 &= \text{Ad}_{1_{g_0}} \dot{\eta}_0 + \ddot{r}_1 A_1 + \zeta_1 , \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\dot{\eta}_2 = \text{Ad}_{2_{g_0}} \dot{\eta}_0 + \text{Ad}_{2_{g_1}} A_1 \ddot{r}_1 + A_2 \ddot{r}_2 + \text{Ad}_{2_{g_1}} \zeta_1 + \zeta_2 , \tag{A.2}$$

$$\dot{\eta}_3 = \text{Ad}_{3_{g_0}} \dot{\eta}_0 + A_3 \ddot{r}_3 + \zeta_3 , \tag{A.3}$$

qui nécessitent l'utilisation de l'adjointe ainsi que de sa dérivé temporelle, dont les expressions sont détaillées ci-après.

$$\text{Ad}_{j_{g_i}} = \begin{pmatrix} {}^j R_i & {}^j R_i \hat{p}_i(O_j)^\top \\ 0 & {}^j R_i \end{pmatrix} , \quad \zeta_j = \begin{pmatrix} ({}^j V_i + p_j(O_i) \times {}^j \Omega_i) \times \dot{r}_j a_j \\ {}^j \Omega_i \times \dot{r}_j a_j \end{pmatrix} ,$$

et où  $A_j = (0_3^\top, a_j^\top)^\top$  est le vecteur unitaire ( $6 \times 1$ ) portant l'axe de la liaison  $j$ . En réécrivant (2.36a) pour chacun des corps de la structure arborescente, de l'extrémité des branches à la racine, et en notant  $k$  l'indice de tous corps subséquents au corps  $\mathcal{B}_j$ , nous obtenons pour chacun des quatre corps de la bicyclette :

$$f_3 = \mathcal{M}_3 \dot{\eta}_3 + f_{\text{in},3} + f_{\text{ext},3} , \tag{A.4}$$

$$f_2 = \mathcal{M}_2 \dot{\eta}_2 + f_{\text{in},2} + f_{\text{ext},2} , \tag{A.5}$$

$$f_1 = \mathcal{M}_1 \dot{\eta}_1 + f_{\text{in},1} + f_{\text{ext},1} + \text{Ad}_{2_{g_1}}^\top f_2 , \tag{A.6}$$

$$f_0 = \mathcal{M}_0 \dot{\eta}_0 + f_{\text{in},0} + f_{\text{ext},0} + \text{Ad}_{3_{g_0}}^\top f_3 + \text{Ad}_{1_{g_0}}^\top f_1 , \tag{A.7}$$

qui nécessitent les expressions détaillées :

$$\mathcal{M}_j = \begin{pmatrix} m_j 1_{3 \times 3} & \hat{M} S_j^\top \\ \hat{M} S_j & I_j \end{pmatrix} , \quad f_{\text{in},j} = \begin{pmatrix} (M S_j \times \Omega_j) \times \Omega_j + \Omega_j \times (m_j V_j) \\ \Omega_j \times (I_j \Omega_j) + M S_j \times (\Omega_j \times V_j) \end{pmatrix} ,$$

où  $m_j 1_{3 \times 3}$  et  $I_j$  sont les matrices des inerties linéaires et angulaires tandis que  $MS_j = m_j p_j(G_j)$  est le vecteur des premiers moments d'inertie qui couplent les accélérations linéaires et angulaires, pour le corps  $\mathcal{B}_j$ . Ensuite en insérant (A.6), (A.5), (A.4), (A.1), (A.2) et (A.3) dans (A.7), que nous identifions à la première ligne de (2.38), nous obtenons :

$$\mathcal{M} = \sum_{i=0}^3 \text{Ad}_{i_{g_0}}^\top \mathcal{M}_i \text{Ad}_{i_{g_0}} , \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} M^T &= \left( \sum_{i=1}^2 \text{Ad}_{i_{g_0}}^\top \mathcal{M}_i \text{Ad}_{i_{g_1}} A_1 , \text{Ad}_{2_{g_0}}^\top \mathcal{M}_2 A_2 , \text{Ad}_{3_{g_0}}^\top \mathcal{M}_3 A_3 \right) , \\ f_{\text{in}} &= \sum_{i=0}^3 \text{Ad}_{i_{g_0}}^\top f_{\text{in},i} + \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=j}^2 \text{Ad}_{i_{g_0}}^\top \mathcal{M}_i \text{Ad}_{i_{g_j}} \right) \zeta_j + \text{Ad}_{3_{g_0}}^\top \mathcal{M}_3 \zeta_3 , \\ f_{\text{ext}} &= \sum_{i=0}^3 \text{Ad}_{i_{g_0}}^\top f_{\text{ext},i} . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Puis, introduire (A.4)-(A.7) dans  $\tau_j = A_j^\top f_j$ , donne :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= A_1^\top (\mathcal{M}_1 \eta_1 + f_{\text{in},1} + f_{\text{ext},1} + \text{Ad}_{2_{g_1}}^\top (\mathcal{M}_2 \eta_2 + f_{\text{in},2} + f_{\text{ext},2})) , \\ \tau_2 &= A_2^\top (\mathcal{M}_2 \eta_2 + f_{\text{in},2} + f_{\text{ext},2}) , \\ \tau_3 &= A_3^\top (\mathcal{M}_3 \eta_3 + f_{\text{in},3} + f_{\text{ext},3}) , \end{aligned}$$

qui, une fois identifié avec la deuxième ligne de (2.38), donne les expressions ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^2 A_1^\top \text{Ad}_{i_{g_1}}^\top \mathcal{M}_i \text{Ad}_{i_{g_1}} A_1 & A_1^\top \text{Ad}_{2_{g_1}}^\top \mathcal{M}_2 A_2 & 0 \\ A_2^\top \mathcal{M}_2 \text{Ad}_{2_{g_1}} A_1 & A_2^\top \mathcal{M}_2 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^\top \mathcal{M}_3 A_3 \end{pmatrix} , \\ Q_{\text{in}} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^2 A_1^\top \text{Ad}_{i_{g_1}}^\top f_{\text{in},i} + \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=j}^2 A_1^\top \text{Ad}_{i_{g_1}}^\top \mathcal{M}_i \text{Ad}_{i_{g_j}} \right) \zeta_j \\ A_2^\top f_{\text{in},2} + \sum_{i=1}^2 A_2^\top \mathcal{M}_2 \text{Ad}_{2_{g_i}} \zeta_i \\ A_3^\top f_{\text{in},3} + A_3^\top \mathcal{M}_3 \zeta_3 \end{pmatrix} , \quad Q_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^2 A_1^\top \text{Ad}_{i_{g_1}}^\top f_{\text{ext},i} \\ A_2^\top f_{\text{ext},2} \\ A_3^\top f_{\text{ext},3} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Enfin, une fois complétées par le modèle géométrique récursif  ${}^e g_j = {}^e g_i^i g_j(r_j)$  et le modèle cinématique (2.36b), les expressions ci-dessus ainsi que (A.8-A.9) définissent toutes les matrices de la dynamique libre, autrement dit, les parties gauches de (2.2) et (2.3).

## Calcul du noyau des contraintes

Dans la présente annexe nous détaillons le calcul de  $H = \ker(A, B)$  pour la configuration de contact où les deux roues de la bicyclette sont en contact avec le sol. Ce calcul se fait en inversant symboliquement le système que nous avons réécrit sous la forme  $D = (A, B)(\eta^\top, \dot{r}^\top)^\top = 0_6$  où  $D$  est un vecteur  $6 \times 1$  dont les composantes  $D_i, i = 1, \dots, 6$ , forment la partie gauche des équations (2.29a à 2.29f).

Nous commencerons par extraire de  $D_4, D_5$  et  $D_6$  les vitesses linéaires  $V_1, V_2$  et  $V_3$ , respectivement, afin d'obtenir :

$$V_1 = T_{16}\Omega_3 + T_{19}\dot{r}_3, \quad (\text{B.1})$$

$$V_2 = T_{26}\Omega_3 + T_{29}\dot{r}_3, \quad (\text{B.2})$$

$$V_3 = T_{34}\Omega_1 + T_{35}\Omega_2, \quad (\text{B.3})$$

où nous avons introduit les notations suivantes :

$$T_{16} = -A_{46}, T_{19} = -B_{43}, \quad (\text{B.4})$$

$$T_{26} = -A_{56}, T_{29} = -B_{53}, \quad (\text{B.5})$$

$$T_{34} = -A_{64}, T_{35} = -A_{65}. \quad (\text{B.6})$$

En insérant (B.3) dans  $D_3$ , nous pouvons obtenir l'expression de  $\Omega_1$  suivante :

$$\Omega_1 = T_{45}\Omega_2 + T_{47}\dot{r}_1 + T_{48}\dot{r}_2, \quad (\text{B.7})$$

avec :

$$T_{45} = -\frac{A_{35} + T_{35}}{T_{34} + A_{34}}, T_{47} = -\frac{B_{31}}{T_{34} + A_{34}}, T_{48} = -\frac{B_{32}}{T_{34} + A_{34}}. \quad (\text{B.8})$$

De façon similaire, insérer (B.1) dans  $D_1$  donne :

$$\dot{r}_2 = T_{85}\Omega_2 + T_{86}\Omega_3 + T_{87}\dot{r}_1 + T_{89}\dot{r}_3, \quad (\text{B.9})$$

avec :

$$T_{85} = -\frac{A_{15}}{B_{12}}, T_{86} = -\frac{A_{16} + T_{16}}{B_{12}}, T_{87} = -\frac{B_{11}}{B_{12}}, T_{89} = -\frac{T_{19}}{B_{12}}. \quad (\text{B.10})$$

Enfin, insérer (B.9), (B.1) et (B.7) dans  $D_2$  permet d'obtenir  $\Omega_3$  comme suit :

$$\Omega_3 = H_{65}\Omega_2 + H_{67}\dot{r}_1 + H_{69}\dot{r}_3, \quad (\text{B.11})$$

avec :

$$H_{65} = -\frac{A_{24}T_{45} + (A_{24}T_{48} + B_{22})T_{85}}{(B_{22} + A_{24}T_{48})T_{86} + T_{26} + A_{26}}, \quad (\text{B.12})$$

$$H_{67} = -\frac{B_{21} + A_{24}T_{47} + (A_{24}T_{48} + B_{22})T_{87}}{(B_{22} + A_{24}T_{48})T_{86} + T_{26} + A_{26}}, \quad (\text{B.13})$$

$$H_{69} = -\frac{T_{29} + (A_{24}T_{48} + B_{22})T_{89}}{(B_{22} + A_{24}T_{48})T_{86} + T_{26} + A_{26}}. \quad (\text{B.14})$$

En insérant maintenant (B.11) dans (B.1), (B.2) et (B.9), nous pouvons les réécrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} V_1 &= H_{15}\Omega_2 + H_{17}\dot{r}_1 + H_{19}\dot{r}_3, \\ V_2 &= H_{25}\Omega_2 + H_{27}\dot{r}_1 + H_{29}\dot{r}_3, \\ \dot{r}_2 &= H_{85}\Omega_2 + H_{87}\dot{r}_1 + H_{89}\dot{r}_3, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

avec :

$$H_{15} = T_{16}H_{65}, H_{17} = T_{16}H_{67}, H_{19} = T_{16}H_{69} + T_{19}, \quad (\text{B.16})$$

$$H_{25} = T_{26}H_{65}, H_{27} = T_{26}H_{67}, H_{29} = T_{26}H_{69} + T_{29}, \quad (\text{B.17})$$

$$H_{85} = T_{86}H_{65} + T_{85}, H_{87} = T_{86}H_{67} + T_{87}, H_{89} = T_{86}H_{69} + T_{89}. \quad (\text{B.18})$$

Puis, utilisant (B.15) dans (B.7), nous obtenons :

$$\Omega_1 = H_{45}\Omega_2 + H_{47}\dot{r}_1 + H_{49}\dot{r}_3, \quad (\text{B.19})$$

avec :

$$H_{45} = T_{48}H_{85} + T_{45}, H_{47} = T_{48}H_{87} + T_{47}, H_{49} = T_{48}H_{89}. \quad (\text{B.20})$$

Enfin, en insérant (B.19) dans (B.3), nous trouvons :

$$V_3 = H_{35}\Omega_2 + H_{37}\dot{r}_1 + H_{39}\dot{r}_3,$$

avec :

$$H_{35} = T_{34}H_{45} + T_{35}, H_{37} = T_{34}H_{47}, H_{39} = T_{34}H_{49}. \quad (\text{B.21})$$

---

En résumé, tout vecteur généré par le noyau des contraintes peut s'écrire sous la forme suivante (2.35) :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{15} \\ H_{25} \\ H_{35} \\ H_{45} \\ 1 \\ H_{65} \\ 0 \\ H_{85} \\ 0 \end{pmatrix} \Omega_2 + \begin{pmatrix} H_{17} \\ H_{27} \\ H_{37} \\ H_{47} \\ 0 \\ H_{67} \\ 1 \\ H_{87} \\ 0 \end{pmatrix} \dot{r}_1 + \begin{pmatrix} H_{19} \\ H_{29} \\ H_{39} \\ H_{49} \\ 0 \\ H_{69} \\ 0 \\ H_{89} \\ 1 \end{pmatrix} \dot{r}_3 ,$$

qui nécessite le calcul préalable de (B.4), (B.5), (B.6), (B.8), (B.10), (B.12), (B.13), (B.14), (B.16), (B.17), (B.18), (B.20), (B.21), dans l'ordre.





## Modèles dynamiques de la bicyclette soumise à des contacts intermittents

Cette annexe expose les expressions du modèle dynamique libre de la bicyclette ainsi que celles des contraintes et de leurs noyaux pour chacune des quatre configurations de contact de la bicyclette intermittente. Dans le cas des configurations de contact *Front wheel model* (section C.2) et *Rear wheel model* (section C.3), le calcul du noyau des contraintes est trivial, aussi nous n'avons pas jugé utile d'en détailler le calcul. Nous en donnons ainsi l'expression directement. La configuration de contact *Two wheels model* (section C.4) correspond quant à elle au cas de la bicyclette soumise à des contacts persistants. Les expressions des contraintes et de leur noyau, rassemblées ici, ont été détaillées en chapitre 2 et en annexe B, respectivement.

### C.1 Free Flight model

Le modèle *Free flight model* décrit la dynamique de la bicyclette ne subissant aucune contrainte. Ainsi, dans ce cas de figure, les contraintes  $\mathbb{C} = 0_{1 \times 9}$  et  $H = \ker(\mathbb{C}) = \text{Id}_{9 \times 9}$ . L'expression développée de :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & M^\top \\ M & \mathfrak{m} \end{pmatrix}$$

est donnée ci-dessous tandis que nous demanderons au lecteur de se référer à l'annexe A pour le calcul de :

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} f \\ Q + \tau \end{pmatrix}.$$



$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & M_{15} & M_{16} & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & M_{22} & 0 & M_{24} & 0 & M_{26} & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & M_{33} & M_{34} & M_{35} & 0 & M_{37} & 0 & 0 \\ & & \ddots & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} & M_{48} & 0 \\ & & & \ddots & M_{55} & M_{56} & M_{57} & M_{58} & 0 \\ & & & & \ddots & M_{66} & M_{67} & M_{68} & M_{69} \\ & \text{sym.} & & & & \ddots & M_{77} & 0 & 0 \\ & & & & & & \ddots & M_{88} & 0 \\ & & & & & & & \ddots & M_{99} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = M_2 = M_{33} = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$$

$$M_{15} = -M_{24} = s_{r_1} x_1 m_1 + c_\mu s_{r_1} l_2 m_2$$

$$M_{16} = -M_{34} = -y_0 m_0 + (-l_1 - c_\mu c_{r_1} x_1 + s_\mu z_1) m_1 \\ + (-l_1 - c_\mu^2 c_{r_1} l_2 + c_\mu^2 l_2 - l_2) m_2$$

$$M_{26} = -M_{35} = x_0 m_0 + (h_2 - h_3 + s_\mu c_{r_1} x_1 + c_\mu z_1) m_1 \\ + (s_{2\mu} c_{r_1} l_2 - s_{2\mu} l_2 + 2h_2 - 2h_3) m_2 / 2$$

$$M_{37} = c_{r_1} x_1 m_1 + c_\mu c_{r_1} l_2 m_2$$

$$M_{44} = y_0^2 m_0 + (l_1^2 - 2s_\mu z_1 (l_1 + c_\mu c_{r_1} x_1) + 2c_\mu c_{r_1} x_1 l_1 \\ - (s_\mu c_{r_1} - 1) (s_\mu c_{r_1} + 1) x_1^2 + s_\mu^2 z_1^2) m_1 \\ + (l_1^2 + s_\mu^2 l_2 (2l_1 - l_2) - 2(s_\mu - 1) (s_\mu + 1) c_{r_1} l_2 (l_1 + s_\mu^2 l_2) \\ + (s_\mu - 1) s_\mu^2 (s_\mu + 1) c_{r_1}^2 l_2^2 + s_\mu^4 l_2^2 + l_2^2) m_2 + I_{0xx} \\ + s_\mu^2 c_{r_1}^2 I_{1xx} - s_\mu^2 (c_{r_1} - 1) (c_{r_1} + 1) I_{1yy} - (s_\mu - 1) (s_\mu + 1) I_{1zz} \\ + 2c_\mu s_\mu c_{r_1} I_{1zx} + (s_\mu^2 c_{r_1}^2 - s_\mu^2 + 1) I_{2xx} \\ - s_\mu^2 (c_{r_1} - 1) (c_{r_1} + 1) I_{2zz} + I_{3xx}$$

$$M_{45} = -y_0 x_0 m_0 + (-h_2 l_1 + h_3 l_1 - s_\mu c_{r_1} x_1 l_1 - c_\mu z_1 l_1 - c_\mu c_{r_1} x_1 h_2 \\ + s_\mu z_1 h_2 + c_\mu c_{r_1} x_1 h_3 - s_\mu z_1 h_3 - c_\mu s_\mu c_{r_1}^2 x_1^2 \\ + 2s_\mu^2 c_{r_1} z_1 x_1 - c_{r_1} z_1 x_1 + c_\mu s_\mu z_1^2) m_1 \\ - (c_\mu s_\mu c_{r_1} l_2 - c_\mu s_\mu l_2 + h_2 - h_3) (l_1 - s_\mu^2 c_{r_1} l_2 + c_{r_1} l_2 + s_\mu^2 l_2) m_2 \\ + I_{0xy} + c_\mu s_\mu c_{r_1}^2 I_{1xx} - c_\mu s_\mu (c_{r_1} - 1) (c_{r_1} + 1) I_{1yy} - c_\mu s_\mu I_{1zz} \\ - (2s_\mu^2 - 1) c_{r_1} I_{1zx} + c_\mu s_\mu (c_{r_1} - 1) (c_{r_1} + 1) I_{2xx} \\ - c_\mu s_\mu (c_{r_1} - 1) (c_{r_1} + 1) I_{2zz}$$

$$M_{46} = -s_{r_1} x_1 (h_2 - h_3 + s_\mu c_{r_1} x_1 + c_\mu z_1) m_1 \\ - c_\mu s_{r_1} l_2 (c_\mu s_\mu c_{r_1} l_2 - c_\mu s_\mu l_2 + h_2 - h_3) m_2 + s_\mu c_{r_1} s_{r_1} I_{1xx}$$

$$\begin{aligned}
& -s_\mu c_{r_1} s_{r_1} I_{1yy} + c_\mu s_{r_1} I_{1zx} + s_\mu c_{r_1} s_{r_1} I_{2xx} - s_\mu c_{r_1} s_{r_1} I_{2zz} \\
M_{47} = & x_1 (c_{r_1} l_1 + c_\mu x_1 - s_\mu c_{r_1} z_1) m_1 + c_\mu l_2 (c_{r_1} l_1 + s_\mu^2 c_{r_1} l_2 + c_\mu^2 l_2) m_2 \\
& + c_\mu I_{1zz} + s_\mu c_{r_1} I_{1zx} + c_\mu I_{2xx} \\
M_{48} = & -s_\mu s_{r_1} I_{2zz} \\
M_{55} = & x_0^2 m_0 + (h_2^2 + 2c_\mu z_1 (h_2 - h_3 + s_\mu c_{r_1} x_1) + 2s_\mu c_{r_1} x_1 (h_2 - h_3) \\
& - 2h_3 h_2 + h_3^2 - (c_\mu c_{r_1} - 1) (c_\mu c_{r_1} + 1) x_1^2 + c_\mu^2 z_1^2) m_1 \\
& + (-c_\mu^4 c_{r_1}^2 l_2^2 + 2c_\mu^4 c_{r_1} l_2^2 - 2c_\mu^2 c_{r_1} l_2^2 - c_\mu^4 l_2^2 + 2c_\mu^2 l_2^2 \\
& + 2c_\mu s_\mu c_{r_1} h_2 l_2 - 2c_\mu s_\mu h_2 l_2 - 2c_\mu s_\mu c_{r_1} h_3 l_2 + 2c_\mu s_\mu h_3 l_2 \\
& + h_2^2 - 2h_3 h_2 + h_3^2) m_2 + I_{0yy} + c_\mu^2 c_{r_1}^2 I_{1xx} \\
& - c_\mu^2 (c_{r_1} - 1) (c_{r_1} + 1) I_{1yy} - (c_\mu - 1) (c_\mu + 1) I_{1zz} - 2c_\mu s_\mu c_{r_1} I_{1zx} \\
& + (c_\mu^2 c_{r_1}^2 - c_\mu^2 + 1) I_{2xx} - c_\mu^2 (c_{r_1} - 1) (c_{r_1} + 1) I_{2zz} + I_{3xx} \\
M_{56} = & -x_1 (2s_{r_1} l_1 + c_\mu s_{2r_1} x_1 - 2s_\mu s_{r_1} z_1) m_1/2 - l_2 (8c_\mu s_{r_1} l_1 + c_{3\mu} s_{2r_1} l_2 \\
& + 3c_\mu s_{2r_1} l_2 - 2c_{3\mu} s_{r_1} l_2 + 2c_\mu s_{r_1} l_2) m_2/8 + c_\mu s_{2r_1} I_{1xx}/2 \\
& - c_\mu s_{2r_1} I_{1yy}/2 + -s_\mu s_{r_1} I_{1zx} + c_\mu s_{2r_1} I_{2xx}/2 - c_\mu s_{2r_1} I_{2zz}/2 \\
M_{57} = & -x_1 (c_{r_1} h_2 - c_{r_1} h_3 + s_\mu x_1 + c_\mu c_{r_1} z_1) m_1 \\
& + c_\mu l_2 (c_\mu s_\mu c_{r_1} l_2 - c_\mu s_\mu l_2 - c_{r_1} h_2 + c_{r_1} h_3) m_2 \\
& - s_\mu I_{1zz} + c_\mu c_{r_1} I_{1zx} - s_\mu I_{2xx} \\
M_{58} = & -c_\mu s_{r_1} I_{2zz} \\
M_{66} = & (x_0^2 + y_0^2) m_0 + (l_1^2 - 2z_1 (s_\mu l_1 - c_\mu h_2 + c_\mu h_3) \\
& + 2c_{r_1} x_1 (c_\mu l_1 + s_\mu h_2 - s_\mu h_3) + h_2^2 \\
& - 2h_3 h_2 + h_3^2 + c_{r_1}^2 x_1^2 + z_1^2) m_1 \\
& + (l_1^2 + 2c_\mu c_{r_1} l_2 (c_\mu l_1 + s_\mu h_2 - s_\mu h_3) - c_\mu^2 l_2 (2l_1 + l_2) + 2l_2 l_1 \\
& + c_\mu^2 c_{r_1}^2 l_2^2 + l_2^2 - s_{2\mu} (h_2 - h_3) l_2 + h_2^2 - 2h_3 h_2 + h_3^2) m_2 \\
& + I_{0zz} - (c_{r_1} - 1) (c_{r_1} + 1) I_{1xx} + c_{r_1}^2 I_{1yy} - (c_{r_1} - 1) (c_{r_1} + 1) I_{2xx} \\
& + c_{r_1}^2 I_{2zz} + I_{3zz} \\
M_{67} = & s_{r_1} x_1 (s_\mu l_1 - c_\mu h_2 + c_\mu h_3 - z_1) m_1 \\
& + c_\mu s_{r_1} l_2 (s_\mu l_1 + s_\mu l_2 - c_\mu h_2 + c_\mu h_3) m_2 + s_{r_1} I_{1zx} \\
M_{68} = & c_{r_1} I_{2zz} \\
M_{69} = & M_{99} = I_{3zz} \\
M_{77} = & x_1^2 m_1 + c_\mu^2 l_2^2 m_2 + I_{1zz} + I_{2xx} \\
M_{88} = & I_{2zz}
\end{aligned}$$

## C.2 Front wheel model

Le modèle *Front wheel model* décrit la dynamique de la bicyclette dont uniquement la roue avant est en contact avec le sol. Ainsi, dans ce cas de figure, les contraintes sont :

$$\mathbb{C}_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \end{pmatrix} ,$$

avec :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & A_{15} & A_{16} \\ 0 & 1 & 0 & A_{24} & 0 & A_{26} \\ 0 & 0 & 1 & A_{34} & A_{35} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{26} = -A_{35} = (s_{\alpha_1} c_{r_1} h_2 + (l_2 c_{r_1} - l_2) c_{\mu}) s_{\mu} + c_{\alpha_1} h_2 c_{\mu} - h_3 + h_2 ,$$

$$A_{34} = -A_{16} = (s_{\alpha_1} c_{r_1} h_2 + (l_2 c_{r_1} - l_2) c_{\mu}) c_{\mu} - c_{\alpha_1} h_2 s_{\mu} + l_2 + l_1 ,$$

$$A_{15} = -A_{24} = l_2 s_{r_1} c_{\mu} + s_{\alpha_1} s_{r_1} h_2 ,$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = -s_{\mu} s_{r_1} (l_2 c_{\mu} + h_2 s_{\alpha_1}) ,$$

$$B_{21} = -c_{\mu} s_{r_1} (l_2 c_{\mu} + h_2 s_{\alpha_1}) ,$$

$$B_{31} = c_{r_1} (l_2 c_{\mu} + h_2 s_{\alpha_1}) ,$$

$$B_{12} = h_2 (c_{r_1} c_{\alpha_1} s_{\mu} - s_{\alpha_1} c_{\mu}) ,$$

$$B_{22} = h_2 (c_{r_1} c_{\alpha_1} c_{\mu} + s_{\alpha_1} s_{\mu}) ,$$

$$B_{32} = h_2 s_{r_1} c_{\alpha_1} ,$$

Le noyau de ces contraintes s'écrit alors :

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & -A_{15} & -A_{16} & -B_{11} & -B_{12} & 0 \\ -A_{24} & 0 & -A_{26} & -B_{21} & -B_{22} & 0 \\ -A_{34} & -A_{35} & 0 & -B_{31} & -B_{32} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### C.3 Rear wheel model

Le modèle *Rear wheel model* décrit la dynamique de la bicyclette dont uniquement la roue arrière est en contact avec le sol. Ainsi, dans ce cas de figure, les contraintes sont :

$$\mathbb{C}_3 = (A_3 \ B_3) ,$$

avec :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{46} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & A_{56} \\ 0 & 0 & 1 & A_{64} & A_{65} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{56} = -A_{65} = h_3 c_{\alpha_0} ,$$

$$A_{64} = -A_{46} = h_3 s_{\alpha_0} .$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{43} \\ 0 & 0 & B_{53} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{43} = -h_3 s_{\alpha_0} ,$$

$$B_{53} = h_3 c_{\alpha_0} .$$

Le noyau de ces contraintes s'écrit alors :

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A_{46} & 0 & 0 & -B_{43} \\ 0 & 0 & -A_{56} & 0 & 0 & -B_{53} \\ -A_{64} & -A_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### C.4 Two wheels model

Le modèle *Two wheels model* décrit la dynamique de la bicyclette dont les deux roues sont simultanément en contact avec le sol. Ainsi, dans ce cas de figure, les contraintes s'expriment comme la concaténation des contraintes des modèles *Front wheel model* et *Rear wheel model* :

$$\mathbb{C}_{23} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_2 \\ \mathbb{C}_3 \end{pmatrix} ,$$

Le calcul du noyau des contraintes pour cette configuration de contact a été détaillé en [annexe B](#). Le résultat est rappelé ci-dessous :

$$H_{23} = \begin{pmatrix} H_{15} & H_{17} & H_{19} \\ H_{25} & H_{27} & H_{29} \\ H_{35} & H_{37} & H_{39} \\ H_{45} & H_{47} & H_{49} \\ 1 & 0 & 0 \\ H_{65} & H_{67} & H_{69} \\ 0 & 1 & 0 \\ H_{85} & H_{87} & H_{89} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_{16} &= -A_{46} , & T_{26} &= -A_{56} , & T_{34} &= -A_{64} , \\ T_{19} &= -B_{43} , & T_{29} &= -B_{53} , & T_{35} &= -A_{65} , \\ T_{45} &= \frac{-T_{35} - A_{35}}{A_{34} + T_{34}} , & T_{47} &= \frac{-B_{31}}{A_{34} + T_{34}} , & T_{48} &= \frac{-B_{32}}{A_{34} + T_{34}} , \end{aligned}$$

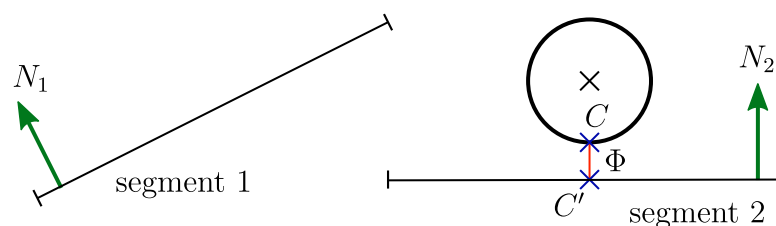
$$\begin{aligned} T_{85} &= \frac{-A_{15}}{B_{12}} , & T_{86} &= \frac{-T_{16} - A_{16}}{B_{12}} , \\ T_{87} &= \frac{-B_{11}}{B_{12}} , & T_{89} &= \frac{-T_{19}}{B_{12}} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{65} &= \frac{-(B_{22} + A_{24} T_{48}) T_{85} - A_{24} T_{45}}{A_{26} + T_{26} + (A_{24} T_{48} + B_{22}) T_{86}} , \\ H_{67} &= \frac{-(B_{22} + A_{24} T_{48}) T_{87} - A_{24} T_{47} - B_{21}}{A_{26} + T_{26} + (A_{24} T_{48} + B_{22}) T_{86}} , \\ H_{69} &= \frac{-(B_{22} + A_{24} T_{48}) T_{89} - T_{29}}{A_{26} + T_{26} + (A_{24} T_{48} + B_{22}) T_{86}} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{15} &= T_{16} H_{65} , & H_{17} &= T_{16} H_{67} , & H_{19} &= T_{16} H_{69} + T_{19} , \\ H_{25} &= T_{26} H_{65} , & H_{27} &= T_{26} H_{67} , & H_{29} &= T_{26} H_{69} + T_{29} , \\ H_{85} &= T_{86} H_{65} + T_{85} , & H_{87} &= T_{86} H_{67} + T_{87} , & H_{89} &= T_{86} H_{69} + T_{89} , \\ H_{45} &= T_{48} H_{85} + T_{45} , & H_{47} &= T_{48} H_{87} + T_{47} , & H_{49} &= T_{48} H_{89} , \\ H_{35} &= T_{34} H_{45} + T_{35} , & H_{37} &= T_{34} H_{47} , & H_{39} &= T_{34} H_{49} . \end{aligned}$$

## Calcul des points de pré-contact et du gap associé - exemple 2D

Cette annexe présente l'application de l'algorithme permettant de déterminer la paire de points de pré-contact  $(C, C')$  et le gap  $\Phi$  associé, dans le cas d'un exemple bi-dimensionnel simple (voir [figure D.1](#)). Dans cet exemple, l'obstacle est discrétisé en deux segments numérotés 1 et 2. Pour chaque segment, un vecteur normal à celui-ci est connu et noté  $N_1$  et  $N_2$  pour les segments 1 et 2 respectivement. La roue est représentée, quant à elle, par un cercle dont nous ne connaissons que le centre  $O$ , l'axe de rotation (normal au plan du problème dans notre cas bi-dimensionnel) et le rayon  $h$ . Dans le cas exposé en [figure D.1](#), on reconnaîtra instinctivement que les points  $C$ , appartenant à la roue, et  $C'$ , appartenant au segment 2, sont le couple de points de pré-contact recherché avec  $\Phi$  le gap qui leur est associé.



**Figure D.1** – Le cas à résoudre.

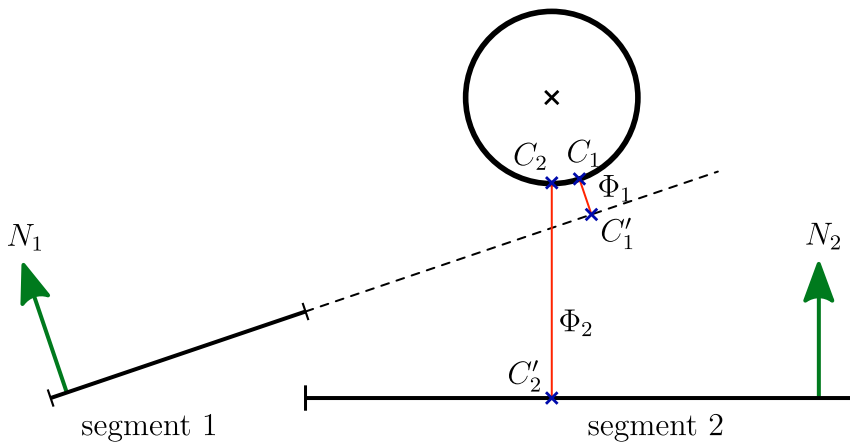
Numériquement, pour trouver cette paire de points de pré-contact et leur gap associé nous procédons, pour chaque segment, comme suit :

1. Nous calculons la position, dans le repère sol  $\mathcal{R}_e$ , du point de pré-contact appartenant à la roue :  $p_e(C_i) = p_e(O) - h {}^e N_i$  où  $O$  est le centre de la roue,  $r$  son rayon et  $i$  l'indice du segment considéré.
2. Nous projettons le point  $C$  orthogonalement sur le segment considéré pour obtenir  $C'$ .

3. Nous calculons la distance  $CC'$ .

Cette démarche nous permet de calculer la distance  $CC'$  pour chaque couple roue/segment. Le gap étant alors la plus petite de ces distances et le couple de point de pré-contact est celui associé à ce gap.

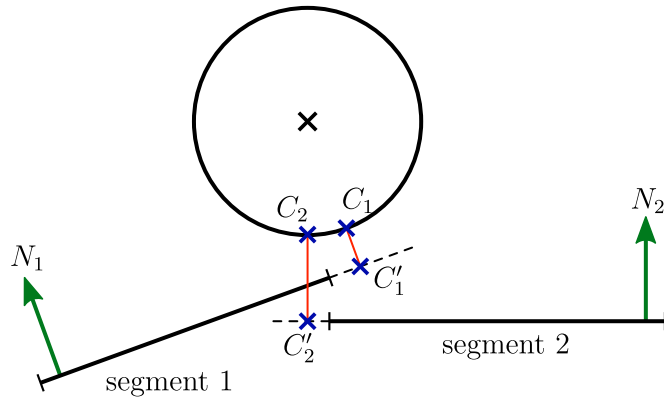
Malheureusement, cette démarche fort simple fait, très vite, apparaître des cas pathologiques. La [figure D.2](#) expose un cas où la démarche précédente aboutirait à des valeurs de gap et des positions de points de pré-contact erronées. En employant la démarche exposée ci-dessus, les deux paires de points de pré-contact,  $(C_1, C'_1)$  et  $(C_2, C'_2)$ , seraient déterminées. Par contre, puisque le gap  $\Phi_1$  est inférieur à  $\Phi_2$ , l'algorithme finirait par statuer que la paire  $(C_1, C'_1)$  est la paire de points de pré-contact recherchée. Or, ce sont les points  $(C_2, C'_2)$  et  $\Phi_2$ , qui sont de toute évidence les véritables points de pré-contact et véritable gap. Cette erreur, poussée à l'extrême, pourrait statuer d'un contact fictif entre la roue et le segment 1 si  $C_1$  et  $C'_1$  étaient confondus. Pour palier cette erreur, nous vérifions que le point  $C'_i$  appartient bien au segment  $i$  lors de la démarche de calcul. Si ce n'est pas le cas, les points de pré-contact et la distance associée sont alors rejetés.



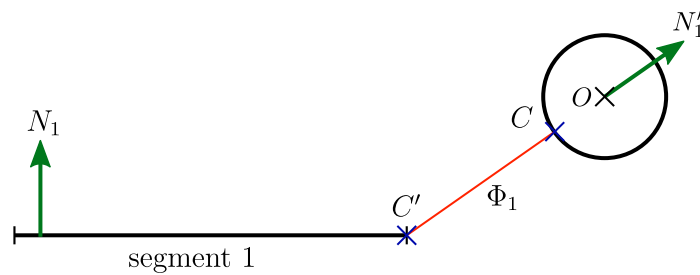
**Figure D.2** – Premier cas pathologique

Cette première correction fait à son tour apparaître un cas problématique, celui présenté dans la [figure D.3](#). Dans ce cas de figure, aucun gap et point de pré-contact ne peut être déterminé, puisque nous rejetons tous les couples de points de pré-contact dont le point  $C'_i$  n'appartient pas au segment  $i$ . Il est donc nécessaire de trouver un moyen permettant d'assurer, à chaque instant, la continuité de l'information de gap et de position des points de pré-contact. Ainsi, dans un tel cas, nous définirons donc le gap comme la distance minimale liant une extrémité du segment à un point de la roue (voir [figure D.4](#)). Nous devons alors redéfinir le point  $C$  appartenant à la roue, le plus proche de l'extrémité du segment considéré :

$$p_e(C_i) = p_e(O) - h \, {}^e N'_i, \quad N'_i = \frac{\overrightarrow{C'_i O}}{\|\overrightarrow{C'_i O}\|},$$



**Figure D.3** – Second cas pathologique

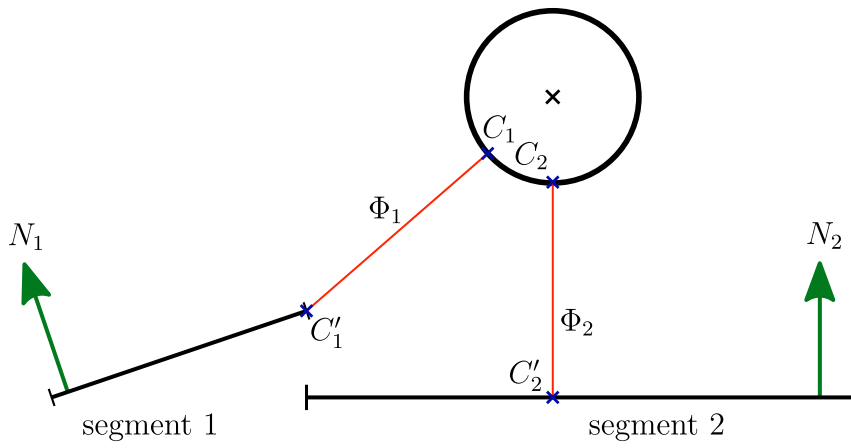


**Figure D.4** – Calcul de la position du point de pré-contact  $C$  le plus proche du bord du segment 1.

où  $O$  est le centre de la roue et  $C'$  l'extrémité du segment la plus proche de la roue, et, par définition, le deuxième point de pré-contact.

Pour finir, nous sommes maintenant capable de calculer la position des couples de points de pré-contact pour chaque segment décrivant l'obstacle, et ce, à chaque instant. La [figure D.5](#) présente donc deux potentiels gaps,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . Le premier est calculé par rapport à l'extrémité du segment 1 tandis que le second est la distance orthogonale au segment 2. Ces deux distances étant des candidates valables, nous avons choisi de prendre comme valeur de gap la valeur minimale de toutes les distances en privilégiant les distances calculées par rapport aux segments par rapport à celles calculées par rapport à leurs extrémités. Cette façon de procéder offre une discontinuité brusque lorsqu'une roue de la bicyclette quitte la rampe de saut, facilitant la détection de changement de configuration de contact. Ainsi, dans le cas présenté en [figure D.5](#), l'algorithme sélectionnera  $\Phi_2$  comme gap  $\Phi$ .





**Figure D.5** – Calcul final du gap pour la scène.



---

**Titre :** Modélisation dynamique des systèmes non-holonomes intermittents – Application à la bicyclette

**Mots clés :** Systèmes non-holonomes, bicyclette de Whipple, mécanique géométrique, fibré principal, dynamique réduite

**Résumé :** Cette thèse traite de la modélisation dynamique des systèmes non-holonomes intermittents et de son application à la bicyclette 3D de Whipple. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur un ensemble d'outils en mécanique géométrique (réduction Lagrangienne et projection dans le noyau des contraintes cinématiques essentiellement). Dans un premier temps, nous avons traité le cas de la bicyclette persistante. En définissant l'espace des configurations du vélo comme un fibré principal de groupe structural  $SE(3)$ , nous avons obtenu un modèle des points de contact et des contraintes exempt de toute non-linéarité associée à un paramétrage de type coordonnées généralisées. Cette formulation nous a permis d'obtenir le noyau des contraintes sous une forme symbolique sans singularité. Nous avons alors produit un modèle symbolique de la dynamique de la bicyclette

persistante en utilisant la méthode de réduction par projection de sa dynamique libre dans le sous-espace de ses vitesses admissibles. Cette approche étend le cadre général mis au point ces dernières années pour la locomotion bio-inspirée. Profitant de la structure de  $SE(3)$ , un modèle de la bicyclette intermittente a été proposé dans le cadre d'une approche événementielle. L'adoption du modèle physique de l'impact plastique, nous a permis d'étendre la méthode de réduction par projection au cas intermittent. Nous avons alors comparé notre approche "réduite" à l'approche classiquement utilisée et avons montré qu'elles partageaient une interprétation géométrique commune. Ces outils ont finalement été appliqués à la simulation de la bicyclette intermittente afin d'illustrer la richesse de sa dynamique.

---

**Title :** Dynamic modelling of intermittent non-holonomic systems - Application to the bicycle

**Keywords :** Non-holonomic systems, Whipple's bicycle, geometric mechanics, principal fiber bundle, reduced dynamic

**Abstract :** This thesis deals with the dynamic modelling of intermittent non-holonomic systems and its application to the Whipple 3D bicycle. To that end, we relied on a set of tools in geometric mechanics (mainly Lagrangian reduction and the projection in the kernel of the kinematic constraints). In the first instance, we have addressed the case of the bicycle subjected to persistent contacts. By defining the space of the bicycle configurations as a principal fibre bundle with  $SE(3)$  as structural group, we obtained a model of the contact points and of the constraints free of any non-linearities associated with a generalized coordinate type configuration. This formulation allowed us to obtain the kernel of the constraints in a symbolic form without singularity. We then produced a symbolic model of the dynamics of

the bicycle subjected to persistent contacts using the projection reduction method of its free dynamics in the subspace of its permissible speeds. This approach extends the general framework developed in recent years for bio-inspired locomotion. Taking advantage of the structure of  $SE(3)$ , a model of the intermittent bicycle was proposed as part of an event-driven approach. Moreover, the adoption of the physical model of plastic impact has allowed us to extend the projection reduction method to the intermittent case. We then compared our "reduced" approach to the conventional approach and showed that they shared a common geometric interpretation. These tools were finally applied to the simulation of the intermittent bicycle to illustrate its rich dynamics.