



Coefficients en cohomologie de De Rham-Witt surconvergente

Ruben Munoz Bertrand

► To cite this version:

Ruben Munoz Bertrand. Coefficients en cohomologie de De Rham-Witt surconvergente. Géométrie algébrique [math.AG]. Normandie Université, 2020. Français. NNT : 2020NORMC205 . tel-02956284

HAL Id: tel-02956284

<https://theses.hal.science/tel-02956284>

Submitted on 2 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHÉMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

Coefficients en cohomologie de De Rham-Witt surconvergente

**Présentée et soutenue par
Ruben MUNOZ BERTRAND**

**Thèse soutenue publiquement le 09/07/2020
devant le jury composé de**

M. ANDREAS LANGER	Professeur des universités, Université d'Exeter	Rapporteur du jury
M. TOBIAS SCHMIDT	Professeur des universités, Université Rennes 1	Rapporteur du jury
Mme CHRISTINE HUYGHE	Chargé de recherche à l'INRA, Université de Strasbourg	Membre du jury
M. JÉRÔME POINEAU	Professeur des universités, Université Caen Normandie	Membre du jury
M. ANDREA PULITA	Professeur des universités, Université Grenoble Alpes	Membre du jury
M. DANIEL CARO	Professeur des universités, Université Caen Normandie	Directeur de thèse

Thèse dirigée par DANIEL CARO, Laboratoire de Mathématiques 'Nicolas Oresme' (Caen)



UNIVERSITÉ
CAEN
NORMANDIE



Coefficients en cohomologie de De Rham-Witt surconvergente

Rubén MUÑOZ--BERTRAND

2020

Table des matières

Introduction	3
Conventions et notations	10
1 Rappels d'algèbre	11
1.1 Vecteurs de Witt	11
1.2 Complétions faibles	15
1.3 PD-anneaux	20
2 Complexe de De Rham-Witt surconvergent	25
2.1 Algèbres PD-différentielles graduées	25
2.2 Définition du complexe de De Rham-Witt	29
2.3 Structure de $W(K)$ -module du complexe de De Rham-Witt	32
2.4 Définition du complexe de De Rham-Witt surconvergent	37
2.5 Vecteurs de Witt surconvergents	39
3 Structure du complexe de De Rham-Witt surconvergent	44
3.1 Produits et surconvergence	44
3.2 Structure modulo p	55
3.3 Décomposition de l'anneau des vecteurs de Witt surconvergents	59
3.4 Décomposition en degré strictement positif	73
4 Coefficients de la cohomologie de De Rham-Witt surconvergente	92
4.1 Connexions	92
4.2 F -isocristaux et équivalence entre connexions	101
A Propositions complémentaires mineures	111
B Compléments sur la structure modulo p	113

Introduction

Weil énonça en 1949 des conjectures liées à la fonction zêta, qui permet de compter le nombre de points d'annulation des équations définissant une variété algébrique X sur un corps fini de caractéristique $p > 0$ [46]. Notons $|X|$ l'ensemble des points fermés de X , et pour tout $x \in |X|$ notons q_x le nombre d'éléments du corps résiduel de X en x . La fonction zêta de X est :

$$\zeta(s) := \prod_{x \in |X|} \frac{1}{1 - q_x^{-s}}.$$

L'une de ces conjectures prédisait que la fonction zêta est rationnelle. Afin de démontrer la rationalité de cette fonction et d'en donner une interprétation cohomologique, Grothendieck développa d'abord la cohomologie étale ainsi que le formalisme des six foncteurs cohomologiques (image directe, image inverse, dualité, image directe extraordinaire, image inverse extraordinaire). Il généralisa la fonction zêta à des coefficients sur cette variété en introduisant les fonctions L associés aux $\mathbb{Q}_l$ -faisceaux (pour la topologie étale) constructibles sur X , où $l \neq p$ désigne un nombre premier. La fonction L du coefficient constant $\mathbb{Q}_l$ sur X est égal à la fonction zêta. Néanmoins, si la cohomologie étale l -adique permet à terme de démontrer les conjectures de Weil, celle-ci ne donne pas d'information sur la p -torsion de X ; de plus, le formalisme proposé par Grothendieck n'est plus valable lorsque $l = p$.

Dans les années 60, des cohomologies p -adiques sur des variétés algébriques sur un corps de caractéristique p furent introduites ; parmi celles-ci, Monsky et Washnitzer ont proposé une théorie cohomologique sur les schémas affines [41]. La cohomologie cristalline a également été créée par Grothendieck en caractéristique nulle [22], puis développée par Berthelot pour les variétés algébriques propres et lisses sur un corps de caractéristique positive. Cette dernière théorie possède comme catégorie de coefficients les cristaux. La définition de ces derniers fut une première étape dans la recherche d'une catégorie de coefficients imitant les propriétés des $\mathbb{Q}_l$ -faisceaux constructibles pour la cohomologie l -adique, mais désormais avec $l = p$.

Deligne a défini dans les années 70 le complexe de De Rham-Witt, qui permit à Illusie de prouver un théorème de comparaison avec la cohomologie cristalline [28]. Ce résultat fut ensuite étendu par Etesse aux coefficients [21]. Ce complexe avait pour avantage de proposer un nouveau point de vue sur la cohomologie cristalline, en offrant un complexe

construit explicitement, et défini sur l'espace topologique sous-jacent de la variété dont on cherche à calculer la cohomologie.

Afin de généraliser ces théories cohomologiques à d'autres types de variétés algébriques sur un corps de caractéristique positive, Berthelot a introduit dans les années 80 la cohomologie rigide [3] à coefficients dans les F -isocristaux, définis avec Ogus [6]. Cette théorie possède l'avantage d'être définie pour tout schéma de type fini sur un corps parfait de caractéristique positive. Toutefois, cette généralisation a un coût : on perd de nouveau des informations sur la torsion. De plus, les F -isocristaux ne sont pas non plus stables par image directe. Cependant, Berthelot proposa une généralisation en développant les $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques [4]. Il fallut attendre les années 2000 et les travaux de Caro et Tsuzuki, pour savoir que sous certaines hypothèses on a un dévissage en F -isocristaux ainsi que le formalisme des six opérations pour les $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques surholonomes [13][14].

Le développement de tous ces outils a permis la rédaction de preuves entièrement p -adiques des conjectures de Weil, mais également d'obtenir des applications pratiques de ces théories cohomologiques en cryptographie.

En 2004, Bloch démontra que le théorème de comparaison cohomologique étendu aux coefficients d'Etesse possédait une interprétation plus profonde : sous certaines conditions, on obtient en fait une équivalence de catégories entre des cristaux et des connexions de De Rham Witt [8].

Plus récemment, Davis, Langer et Zink ont introduit un complexe de De Rham-Witt surconvergent [16] et démontré des théorèmes de comparaison avec les cohomologies de Monsky-Washnitzer et rigide. Ces derniers furent ensuite étendus aux coefficients par Ertl, qui démontra notamment un quasi-isomorphisme de cohomologie avec les isocristaux surconvergents [19].

On peut alors légitimement se demander si les résultats de Bloch possèdent une variante surconvergente : c'est-à-dire que l'on aimerait pouvoir obtenir une interprétation des isocristaux surconvergents pour la cohomologie de De Rham-Witt surconvergente. On peut y parvenir en considérant des connexions de De Rham-Witt surconvergentes comme définies par Ertl, pour lesquelles on peut raisonnablement espérer retrouver les mêmes opérations cohomologiques que pour les F -isocristaux.

Cette question fut la motivation de cette thèse, et le théorème principal de ce travail y répond en partie positivement. Pour y parvenir, il est nécessaire d'explicitier la structure locale du complexe de De Rham-Witt surconvergent, et de redéfinir la notion de surconvergence afin de pouvoir mieux contrôler la convergence des produits de différentielles de De Rham-Witt.

Avant d'énoncer le théorème principal, et d'expliquer en quoi il permet de comprendre le lien entre les coefficients des cohomologies rigide et de De Rham-Witt surconvergente, nous allons présenter le plan de cette thèse qui est principalement consacrée à sa démonstration.

Le chapitre 1 ne comporte rien de nouveau, et est consacré aux rappels des notions de base indispensables pour entreprendre ce travail. La plupart des propositions y seront

exposées sans démonstration, et sont présentées ici principalement afin d'éviter les références extérieures dans la suite de la lecture, ainsi que pour fixer certaines notations.

Sont ainsi brièvement présentés les vecteurs de Witt, la complétion faible (au sens de Monsky-Washnitzer), les schémas formels faibles de Meredith, le théorème de relèvement de Elkik, les différentielles de Kähler et les PD-structures. La compréhension de ces concepts est impérative à la suite de la lecture, et cet ouvrage n'a pas la prétention d'en fournir un exposé introductif. Le lecteur désirant s'initier à ces notions est invité à consulter les références données en début de chaque section.

Le chapitre 2 est similaire au chapitre précédent dans la mesure où il est également principalement constitué de résultats déjà connus. Ici, toutes les notations et théorèmes principaux concernant le complexe de De Rham-Witt et la surconvergence sont introduits. Quelques preuves sont présentes, mais pour une introduction complète il est recommandé de commencer par lire les travaux d'Illusie et ceux de Davis, Langer et Zink sur le sujet.

On rappelle l'un des principaux théorèmes de la théorie, que l'on énonce dans cette introduction pour un anneau de polynômes $\mathbb{K}[\underline{X}] := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K}$ est un corps parfait de caractéristique p . Afin de formuler ce théorème, il est nécessaire d'introduire l'ensemble $\mathcal{P}$ constitué des couples (k, I) , où k désigne une application définie sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ à valeurs dans $\mathbb{N} \left[\frac{1}{p} \right]$, et I est un sous-ensemble de $\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid k(i) \neq 0\}$. Le complexe de De Rham-Witt sur cet anneau est noté $W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$. Alors, il existe des éléments $e(k, I) \in W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ pour tout $(k, I) \in \mathcal{P}$ (explicités dans la section 2.3), tels que l'on puisse associer à chaque élément $x \in W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ une unique fonction η :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & W(\mathbb{K}) \\ (k, I) & \mapsto & \eta_{k,I} \end{array} \quad \text{telle que :}$$

$$x = \sum_{(k,I) \in \mathcal{P}} \eta_{k,I} e(k, I). \quad (1)$$

De plus, une série de cette forme converge dans $W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $V^{u(k)}(\eta_{k,I}) \in V^m(W(\mathbb{K}))$ sauf pour un nombre fini de couples $(k, I) \in \mathcal{P}$.

Cette écriture est nécessaire à Davis, Langer et Zink pour définir le complexe de De Rham-Witt surconvergent. La définition est donnée dans la section 2.4. Rappelons ici juste brièvement qu'en employant (1), on peut construire pour tout $\varepsilon > 0$ des applications $\gamma_\varepsilon : W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Ceci nous permet de former un complexe différentiel $W^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}} \subset W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ étant constitué des différentielles $x \in W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ pour lesquelles il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_\varepsilon(x) \neq -\infty$. À partir de ce dernier, on construit canoniquement pour toute variété lisse X sur $\mathbb{K}$ un faisceau $W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}$.

Ce faisceau de complexes différentiels est celui pour lequel on aimerait obtenir une interprétation des coefficients de la cohomologie rigide, à la manière de Bloch pour le complexe de De Rham-Witt et les cristaux. Si l'on tente d'adapter directement sa preuve dans ce contexte, il semble indispensable de bien comprendre la structure locale du complexe, et de

pouvoir maîtriser la surconvergence de certains produits. On aimerait en particulier obtenir localement une écriture imitant (1).

La section 2.5 est une première étape dans cette direction, et est la seule section du chapitre contenant des résultats légèrement plus généraux que dans la littérature. Il est notamment démontré que si $R \rightarrow S$ est un morphisme étale de $\mathbb{K}$ -algèbres commutatives tel que S soit un R -module libre de rang fini, alors l'anneau des vecteurs de Witt surconvergente $W^\dagger(S) = \Gamma\left(W\Omega_{\mathrm{Spec}(S)/\mathbb{K}}^0, \mathrm{Spec}(S)\right)$ est un $W^\dagger(R)$ -module libre de rang fini. Un tel énoncé existait avec des conditions supplémentaires dans [17], nous parvenons en suivant une stratégie similaire à démontrer le résultat plus généralement.

Le chapitre 3 est le plus technique de la thèse. L'objectif de ce dernier est de démontrer toutes les propositions de structure et de contrôle de la surconvergence nécessaires à la démonstration du théorème principal.

La section 3.1 s'intéresse aux produits dans l'anneau $W^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[X]/\mathbb{K}}$. Plus particulièrement, on aimerait pouvoir contrôler la surconvergence d'un produit de deux différentielles de De Rham-Witt. Le problème de la surconvergence des produits était connu de Davis, Langer et Zink qui avaient remarqué que pour la multiplication $V([X_1^{p-1}])d(V([X_1])) = pd([X_1])$ on a :

$$\begin{aligned}\gamma_\varepsilon(V([X_1^{p-1}])) &= 1 - \varepsilon \frac{p-1}{p}, \\ \gamma_\varepsilon(d(V([X_1]))) &= 1 - \varepsilon \frac{1}{p}, \\ \gamma_\varepsilon(pd([X_1])) &= 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Cela signifie que l'on ne peut pas espérer avoir $\gamma_\varepsilon(xy) \geq \gamma_\varepsilon(x) + \gamma_\varepsilon(y)$ quels que soient $x, y \in W\Omega_{\mathbb{K}[X]/\mathbb{K}}$.

Afin de contourner ce problème, il est tout d'abord nécessaire d'avoir des formules aussi explicites que possible concernant le produit de deux éléments $e(k, I)$ et $e(l, J)$, avec $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$. La rédaction de telles formules fait alors apparaître que la valuation p -adique des produits est contrôlable. On emploie alors cette observation pour définir de nouvelles applications $\zeta_\varepsilon: W\Omega_{\mathbb{K}[X]/\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ définies pour tout $\varepsilon > 0$, et vérifiant que pour tout $x \in W\Omega_{\mathbb{K}[X]/\mathbb{K}}$ on a $x \in W^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[X]/\mathbb{K}}$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty$. L'intérêt de cette nouvelle famille d'applications, pourtant d'apparence très similaire à la définition originale de Davis, Langer et Zink, réside dans le fait que nous avons désormais quels que soient $x, y \in W\Omega_{\mathbb{K}[X]/\mathbb{K}}$:

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon(xy) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y).$$

De plus les calculs effectués dans cette section permettent, en utilisant l'écriture (1), de mettre en exergue des sous-ensembles de $W\Omega_{\mathbb{K}[X]/\mathbb{K}}$ pour lesquels cette inégalité est stricte.

Le but du restant du chapitre est donc de pouvoir généraliser ces résultats localement sur une variété lisse sur $\mathbb{K}$. En particulier, il devient nécessaire de pouvoir obtenir une description similaire à (1) des éléments du complexe afin de pouvoir définir les ensembles de différentielles pour lesquelles l'inégalité stricte voulue est vérifiée.

Pour ce faire, nous allons nous intéresser au cas où l'on dispose d'un morphisme étale de $\mathbb{K}$ -algèbres commutatives $\mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \overline{R}$ se factorisant en $\mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \mathbb{K}[\underline{X}]_P \rightarrow \overline{R}$, où la première flèche est le morphisme de localisation pour $P \in \mathbb{K}[\underline{X}]$, et où la seconde flèche est étale et fait de $\overline{R}$ un $\mathbb{K}[\underline{X}]_P$ -module libre de rang fini. Afin de pouvoir mieux comprendre la structure de $W\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}} = \Gamma\left(W\Omega_{\text{Spec}(\overline{R})/\mathbb{K}}, \text{Spec}(\overline{R})\right)$ tout en tirant profit des calculs réalisés dans la section 3.1, il est moins pertinent d'étudier la structure de $W(\mathbb{K})$ -module de ce dernier que sa structure de $R^\dagger$ -module, où $R^\dagger$ désigne une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative plate et wcfg (au sens de Monsky-Washnitzer) relevant $\overline{R}$.

Afin d'y parvenir, l'étude du complexe se fait en trois étapes. On commence tout d'abord à étudier en section 3.2 la structure de $\mathbb{K}[\underline{X}]$ -algèbre de $W^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ modulo p . Ce travail permet de déterminer un sous-ensemble de $\mathcal{P}$, que nous noterons G dans cette introduction, pour lequel toute différentielle $x \in W^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ puisse s'écrire modulo p comme une série de la forme :

$$\bar{x} = \omega + \sum_{(k,I) \in G} s_{k,I} e(k, I) + d \left(\sum_{(k,I) \in G} s'_{k,I} e(k, I) \right), \quad (2)$$

où $\omega \in \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ et les deux fonctions $s: \begin{matrix} G \rightarrow \mathbb{K}[\underline{X}] \\ (k, I) \mapsto s_{k,I} \end{matrix}$ et $s': \begin{matrix} G \rightarrow \mathbb{K}[\underline{X}] \\ (k, I) \mapsto s'_{k,I} \end{matrix}$ vérifient de certaines conditions techniques de surconvergence.

L'objectif des sections suivantes est de démontrer que l'écriture (2) se provient en fait d'une unique écriture sur $W^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$. La seconde étape de notre étude est réalisée dans la section 3.3. Afin de pouvoir étudier la structure du complexe en degré positif, il est nécessaire d'obtenir un théorème similaire en degré zéro, c'est-à-dire pour les vecteurs de Witt surconvergens. Une telle proposition est d'abord obtenue pour une algèbre polynomiale, avant d'être généralisée aux anneaux de la forme de $\overline{R}$. Cette dernière étape est la plus technique et nécessite une bonne maîtrise de la surconvergence.

Enfin, dans la section 3.4 on finit par énoncer le théorème de structure général. Comme dans la section précédente, il est d'abord nécessaire de relever la formule (2) en une unique écriture sur $W^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ en employant les résultats trouvés dans les sections précédentes. Une fois ceci réalisé, on peut généraliser cette écriture pour tous les anneaux vérifiant les conditions de $\overline{R}$. Cette étape est à nouveau très technique, mais c'est le prix à payer pour obtenir une écriture explicite : c'est le théorème 3.4.23. Ce théorème répond aux besoins que l'on a évoqué plus haut : il permet à la fois de définir de manière naturelle des sous-ensembles du complexe, et on peut alors déterminer pour lesquels d'entre eux on peut strictement contrôler la surconvergence des produits.

Avec ce théorème, on dispose désormais des outils nécessaires pour nous attaquer à

une interprétation à la Bloch des F -isocristaux surconvergents pour la cohomologie de De Rham-Witt surconvergente. Le chapitre 4 est entièrement consacré à ce problème.

Tout d'abord, dans la section 4.1 on introduit les connexions et les objets nécessaires à la rédaction de la preuve du théorème principal. Comme les connexions que nous allons devoir considérer ne sont pas forcément définies sur le complexe de De Rham mais notamment sur celui de De Rham-Witt surconvergent, il est indispensable de généraliser la notion classique de connexion. On y démontre également quelques propositions de folklore pour lesquelles on ne connaît pas de démonstration écrite, notamment concernant les matrices représentatives des connexions sur un module libre de rang fini. On définit également la notion d'action de Frobenius sur les connexions, afin d'obtenir une notion similaire à celle que l'on a dans la théorie des isocristaux surconvergents.

Pour finir, la section 4.2 contient le cœur de la preuve du théorème principal de cette thèse. La stratégie de la démonstration n'est pas différente de celle de Bloch [8], si ce n'est qu'il faut veiller à ce que les suites de matrices considérées surconvergent bien. Grâce aux travaux réalisés dans le chapitre 3, nous avons les outils nécessaires pour vérifier ce fait.

On vérifie de plus que ces résultats permettent d'obtenir un théorème similaire après avoir tensorisé par $\mathbb{Q}$. En revanche, il est nécessaire dans ce cas d'ajouter une structure de Frobenius à nos objets, sans quoi il est impossible de conclure directement.

Nous obtenons alors plusieurs équivalences de catégories avec le théorème 4.2.12. Notons $W(\mathbb{K})$ l'anneau des vecteurs de Witt sur $\mathbb{K}$, et $K := \text{Frac}(W(\mathbb{K}))$. Soit $\mathfrak{X}^\dagger$ un schéma formel faible lisse relevant la variété lisse X sur $\mathbb{K}$ et soit F un relèvement du Frobenius sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. On a alors deux équivalences de catégories :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}\text{-modules} \\ \text{localement libres de rang fini} \\ + \text{ connexion intégrable} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} W^\dagger(\mathcal{O}_X)\text{-modules} \\ \text{localement libres de rang fini} \\ + \text{ connexion de De Rham-Witt intégrable} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger} \otimes_{W(\mathbb{K})} K\text{-modules} \\ \text{localement libres de rang fini} \\ + \text{ connexion intégrable} \\ + \text{ action de Frobenius} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} W^\dagger(\mathcal{O}_X) \otimes_{W(\mathbb{K})} K\text{-modules} \\ \text{localement libres de rang fini} \\ + \text{ connexion de De Rham-Witt intégrable} \\ + \text{ action de Frobenius} \end{array} \right\}.$$

Remarquons tout d'abord que la première équivalence de catégories peut être considérée comme une version entière de la seconde. On conserve notamment des informations concernant la torsion dans la première équivalence.

La seconde équivalence répond en partie à la question que l'on s'était posée en début d'introduction. En effet, on sait d'après Berthelot que si X est affine, alors la catégorie des F -isocristaux sur un schéma affine lisse est équivalente à la catégorie des $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger} \otimes_{W(\mathbb{K})} K, \mathfrak{X}^\dagger)$ -modules de type fini munis d'une connexion intégrable et d'une action de Frobenius. Ce second théorème donne par conséquent une interprétation d'une sous-catégorie des F -isocristaux pour la cohomologie de De Rham-Witt surconvergente.

Le lecteur curieux pourra consulter les deux annexes inclus dans ce document, qui

contiennent des résultats supplémentaires non nécessaires à la preuve du théorème principal. Y est notamment présentée une étude de structure du complexe de De Rham-Witt surconvergent modulo p utilisant les travaux de Bloch. La lecture permet d'éclairer les liens entre cet ouvrage et la preuve ayant servi d'inspiration, mais cette étude ne suffit pas à démontrer le théorème principal ; c'est ce qui a motivé l'étude plus approfondie qui est présentée dans cette thèse de doctorat.

Conventions et notations

Dans toute cette thèse, p est un nombre premier fixé.

Tous les anneaux et les algèbres sur des anneaux de ce travail seront considérés unitaires et associatifs.

Soit R un anneau commutatif et $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. On adoptera les notations suivantes :

CRing	Catégorie des anneaux commutatifs
$\mathbb{N}$	Entiers naturels $\{0, 1, \dots\}$
$\mathcal{O}_X\text{-Mod}$	Catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules
Ring	Catégorie des anneaux
$R\text{-Mod}$	Catégorie des R -modules
Set	Catégorie des ensembles

Si M est un monoïde d'élément neutre e_M , on notera $M^* := M \setminus \{e_M\}$. Si M est un anneau, la structure de monoïde considérée sera celle de l'addition.

Si $\mathbf{C}$ est une catégorie et X est un objet de $\mathbf{C}$, on notera $\mathbf{C}^{\setminus X}$ la catégorie des objets de $\mathbf{C}$ en-dessous de X . Par exemple, si R est un anneau commutatif on note $\mathbf{CRing}^{\setminus R}$ la catégorie des R -algèbres commutatives.

Pour tout anneau commutatif R , on note $R^\times$ le groupe de ses éléments inversibles.

Pour tout couple $m, n \in \mathbb{Z}$ on note $\llbracket m, n \rrbracket$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \leq n\}$.

Pour tout ensemble fini E on notera $\#E$ son cardinal.

Pour tout ensemble E et tout entiers naturels $n, m \in \mathbb{N}$, on note $\text{Mat}_{n,m}(E)$ l'ensemble des matrices de taille $n \times m$ et $\text{Mat}_n(E)$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à valeurs dans E . Pour toute application $f: E \rightarrow E'$, on gardera la notation $f: \text{Mat}_n(E) \rightarrow \text{Mat}_n(E')$ pour désigner l'application induite coefficient par coefficient. Si E est un anneau, on note $I_n \in \text{Mat}_n(E)$ la matrice unité. La transposée d'une matrice M sera notée $M^{\mathbf{T}}$.

Pour tout groupe abélien G , on notera $\overline{G} := G/pG$. On conservera de telles notations pour tous les modules, anneaux, algèbres etc.

Soit X un espace topologique, F un préfaisceau sur X dans une catégorie $\mathbf{C}$. On dira que F vérifie une propriété localement si pour tout $x \in X$ il existe un ouvert $U \ni x$ de X tel que le faisceau restreint $F|_U$ vérifie cette propriété.

Chapitre 1

Rappels d'algèbre

Ce chapitre est consacré aux rappels des notions élémentaires indispensables pour l'ensemble de cet ouvrage. La majorité des propositions y seront énoncées sans preuve, et sont présentées ici dans le but d'éviter les références extérieures dans les prochains chapitres, mais également pour fixer certaines notations.

Nous présenterons ici les vecteurs de Witt, la complétion faible, les schémas formels faibles, le théorème de relèvement de Elkik, la notion de différentielle et les PD-anneaux. Ce chapitre n'ayant pas pour vocation d'introduire le lecteur néophyte à ces notions, on l'invitera dans ce but à consulter les références données tout au long de ces pages.

Aucun rappel d'algèbre commutative ou de théorie des schémas ne sera effectué. On se référera à ce propos à la littérature foisonnante [32][2][24][25][38].

1.1 Vecteurs de Witt

Dans cette section nous nous contenterons de rappeler quelques propriétés importantes concernant les vecteurs de Witt, ces dernières seront utilisées dans tout ce travail sans mention ultérieure. Le lecteur intéressé pourra se référer à [11, IX, §1], [26], [39] ou [43][Chapitre II §6] pour des définitions explicites, ainsi qu'une introduction complète.

(1.1.1) Dans toute cette section, R désigne un anneau commutatif.

Définition 1.1.2. On note $W(R)$ l'anneau des **vecteurs de Witt** à coefficients dans R , dont les éléments sont des suites de R notées $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r_0, r_1, \dots)$ (pour la structure d'anneau, voir [11, IX, §1, Théorème 1]).

(1.1.3) Nous avons un foncteur $W: \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{CRing}$ en associant à tout morphisme d'anneaux commutatifs $\varphi: R \rightarrow S$ le morphisme :

$$W(\varphi): \begin{array}{ccc} W(R) & \rightarrow & W(S) \\ (r_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (\varphi(r_n))_{n \in \mathbb{N}} \end{array} .$$

Définition 1.1.4. Une **pseudo-valuation** sur un anneau commutatif R est une fonction $v: R \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ telle que :

$$\begin{aligned} v(0_R) &= +\infty, \\ v(1_R) &= 0, \\ \forall r \in R, \quad v(r) &= v(-r), \\ \forall r, s \in R, \quad v(r+s) &\geq \min\{v(r), v(s)\}, \\ \forall r, s \in R, \quad (v(r) \neq -\infty) \wedge (v(s) \neq -\infty) &\implies (v(rs) \geq v(r) + v(s)). \end{aligned}$$

Définition 1.1.5. Une **valuation** sur un anneau commutatif R est la donnée d'une pseudo-valuation v sur R telle que :

$$\begin{aligned} \forall r \in R, \quad v(r) &\neq -\infty, \\ \forall r, s \in R, \quad v(rs) &= v(r) + v(s). \end{aligned}$$

(1.1.6) On dispose d'un morphisme de groupes additifs injectif :

$$V: \begin{array}{ccc} W(R) & \rightarrow & W(R) \\ (r_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (0, r_0, r_1, \dots) \end{array} .$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ les images itérées $V^m(W(R))$ sont des idéaux de $W(R)$, et on définit les quotients $W_m(R) := W(R)/V^m(W(R))$. On peut vérifier que $(W_m(R))_{m \in \mathbb{N}}$ forme un système projectif d'anneaux tel que $\varprojlim_{m \in \mathbb{N}} W_m(R) = W(R)$. On dispose de plus un morphisme d'anneaux $\Pi: \begin{array}{ccc} W(R) & \rightarrow & R \\ (r_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & r_0 \end{array}$, et ce dernier se factorise en un isomorphisme $W(R)/V(W(R)) \cong R$.

De plus, la fonction ci-dessous définit une pseudo-valuation sur les vecteurs de Witt (et une valuation si R est intègre) :

$$v_V: \begin{array}{ccc} W(R) & \rightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \underline{r} & \mapsto & \begin{cases} \max\{m \in \mathbb{N} \mid \underline{r} \in V^m(W(R))\} & \text{si } \underline{r} \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

(1.1.7) L'application suivante est un morphisme de monoïdes multiplicatifs :

$$[\bullet]: \begin{array}{ccc} R & \rightarrow & W(R) \\ r & \mapsto & (r, 0, 0, \dots) \end{array} .$$

On conservera la même notation lorsque ce morphisme est à image dans $W^m(R)$ quel que soit $m \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire en composant avec la projection canonique).

Définition 1.1.8. Pour tout $r \in R$ l'élément $[r] \in W(R)$ est appelé le **représentant de Teichmüller** de r .

(1.1.9) On dispose également d'un morphisme d'anneaux, défini en détails dans [11, IX, §1, (23)], noté $F: W(R) \rightarrow W(R)$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall r \in R, F([r]) &= [r^p], \\ \forall \underline{r}, \underline{s} \in W(R), \forall m \in \mathbb{N}, \underline{r} \times V^m(\underline{s}) &= V^m(F^m(\underline{r}) \times \underline{s}), \\ \forall \underline{r} \in W(R), F(V(\underline{r})) &= p\underline{r}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.10. *Si R est de caractéristique p , alors $W(R)$ est séparé et complet pour la topologie p -adique, et de caractéristique 0. De plus, $F = W(\text{Frob}_R)$ et :*

$$\forall \underline{r}, \underline{s} \in W(R), \forall m, n \in \mathbb{N}, V^m(\underline{r})V^n(\underline{s}) = V^{m+n}(F^n(\underline{r})F^m(\underline{s})), \quad (1.1.10.1)$$

$$\forall \underline{r} \in W(R), V(F(\underline{r})) = p\underline{r}, \quad (1.1.10.2)$$

$$\forall \underline{r} \in W(R), \forall k \in \mathbb{N}^*, V(\underline{r})^k = p^{k-1}V(\underline{r}^k). \quad (1.1.10.3)$$

Démonstration. La plupart de ces propriétés sont traitées dans [11, IX, §1, 8.]. La caractéristique 0 est une conséquence immédiate de (1.1.10.2) et de $F = W(\text{Frob}_R)$. La propriété (1.1.10.3) se démontre par récurrence sur k , le cas $k = 1$ étant évident, et concernant l'hérédité il suffit de remarquer que $p^{k-1}V(\underline{r}^k)V(\underline{r}) = p^{k-1}V^2(F(\underline{r}^{k+1})) = p^kV(\underline{r}^{k+1})$ d'après les propriétés ci-dessus. $\square$

Corollaire 1.1.11. *Si R est un anneau intègre de caractéristique p , alors $W(R)$ est intègre.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de (1.1.10.1). $\square$

Proposition 1.1.12. *Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique p , alors $W(\mathbb{K})$ est un anneau local séparé complet. Si de plus $\mathbb{K}$ est parfait, alors $W(\mathbb{K})$ est un anneau de valuation discrète noethérien, d'idéal maximal $pW(\mathbb{K})$.*

Démonstration. Il s'agit exactement de [11, IX, §1, Proposition 8]. $\square$

Proposition 1.1.13. *Supposons que R est sans p -torsion (c'est-à-dire que p n'est pas un diviseur de zéro). Soit $f: R \rightarrow R$ un endomorphisme de R relevant $\text{Frob}_{\overline{R}}$, en d'autres termes tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{R} & \xrightarrow{\text{Frob}_{\overline{R}}} & \overline{R} \end{array}.$$

Il existe alors un unique morphisme d'anneaux $s_f: R \rightarrow W(R)$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Id}_R & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 R & \xrightarrow{s_f} & W(R) & \xrightarrow{\Pi} & R \\
 \downarrow f & & \downarrow F & & \\
 R & \xrightarrow{s_f} & W(R) & &
 \end{array}$$

Démonstration. Un énoncé de ce théorème peut être lu dans [28, p. 508], et une preuve détaillée se trouve dans [35, VII.4] $\square$

(1.1.14) En particulier sur le localisé $\mathbb{Z}_{(p)}$ l'identité est un relèvement du Frobenius sur $\mathbb{F}_p$. D'après la proposition 1.1.13 on dispose du morphisme $s_{\text{Id}_{\mathbb{Z}_{(p)}}}: \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow W(\mathbb{Z}_{(p)})$, et par fonctorialité on en déduit que si R est une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre commutative, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ les anneaux $W(R)$ et $W_m(R)$ sont également des $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres commutatives.

Proposition 1.1.15. *Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nR = \{0\}$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a $n^m W_m(R) = \{0\}$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur m . Le cas $m = 1$ est évident car on a un isomorphisme d'anneaux $W_1(R) \cong R$. Si pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$ on vérifie pour tout $r \in W(R)$ qu'il existe $s \in W(R)$ tel que $n^m r = V^m(s)$, alors $n^{m+1}r = V^m(ns) \in V^{m+1}(R)$. $\square$

Lemme 1.1.16. *Soit $\varphi: R \rightarrow S$ un morphisme fini étale d'anneaux commutatifs de caractéristique p . Soit $(s_i)_{i \in [1, m]}$ une famille génératrice de S en tant que R -module pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $(s_i^{p^n})_{i \in [1, m]}$ est une famille génératrice de S en tant que R -module.*

Si de plus $(s_i)_{i \in [1, m]}$ est une R -base, il en va de même pour $(s_i^{p^n})_{i \in [1, m]}$.

Démonstration. On sait d'après [44, 0EBS] que le diagramme ci-dessous est un carré co-cartésien dans la catégorie des R -algèbres :

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\text{Frob}_R} & R \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\
 S & \xrightarrow{\text{Frob}_S} & S
 \end{array}$$

Le lemme en découle alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposition 1.1.17. *Soit $\varphi: R \rightarrow S$ un morphisme fini étale d'anneaux commutatifs de caractéristique p . Soit $(s_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une famille génératrice de S en tant que R -module pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Alors $W(\varphi)$ est un morphisme fini, et $([s_i])_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une famille génératrice de $W(S)$ en tant que $W(R)$ -module.*

Si de plus $(s_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une R -base de S , alors $([s_i])_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une $W(R)$ -base de $W(S)$, telle que si $n \in \mathbb{N}$, si $w \in V^n(W(S))$ et si $(w(i))_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in W(R)^m$ vérifie $w = \sum_{i=1}^m w(i)[s_i]$, alors $w(i) \in V^n(W(R))$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Démonstration. Soit $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in W(S)$. Supposons tout d'abord que $w \in V^n(W(S))$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 1.1.16, on peut donc écrire $w_n = \sum_{i=1}^m r_i s_i^{p^n}$, où

les $r_i \in R$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Nous avons alors $w - \sum_{i=1}^m V^n([r_i s_i^{p^n}]) \in V^{n+1}(W(S))$. Or

$V^n([r_i s_i^{p^n}]) = V^n([r_i])[s_i]$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, et en répétant le processus par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ on obtient la proposition par convergence p -adique.

Si de plus $(s_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une R -base de S , alors il en va de même pour $(s_i^{p^n})_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$, et dans la construction ci-dessus les choix sont uniques et vérifient la condition de l'énoncé. $\square$

1.2 Complétions faibles

Cette section est principalement dédiée à la définition de la complétion faible d'une algèbre commutative sur un anneau commutatif noethérien. Cette notion fut définie par Monsky et Washnitzer afin de définir une cohomologie sur des variétés affines en caractéristique p . Pour une introduction complète, nous invitons le lecteur à se référer à [41] et [45].

Nous rappelons également des théorèmes de relèvement dus à Elkik et Arabia, et vérifions comment ils s'appliquent aux situations que nous allons rencontrer par la suite. Nous évoquerons enfin brièvement la notion d'espace formel faible de Meredith.

Définition 1.2.1. Soit R un anneau commutatif. Sa **complétion p -adique** est l'anneau :

$$\hat{R} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R/p^n R.$$

(1.2.2) Si $\varphi: R \rightarrow S$ est un morphisme d'anneaux commutatifs, il induit naturellement des morphismes $\varphi_n: R/p^n R \rightarrow S/p^n S$ duquel on déduit canoniquement un morphisme $\hat{\varphi}: \hat{R} \rightarrow \hat{S}$ définissant un foncteur $\hat{\bullet}: \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{CRing}$.

On remarque de plus que la complétion p -adique d'un anneau commutatif est séparée et complète pour la topologie p -adique.

Définition 1.2.3. Soient K un anneau commutatif noethérien et R une K -algèbre commutative. Sa **complétion faible** (comme K -algèbre) est la K -algèbre commutative :

$$R^\dagger := \left\{ z \in \hat{R} \mid \exists n, c \in \mathbb{N}, \exists (P_j)_j \in (K[X_1, \dots, X_n])^\mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{x} \in R^n, z = \sum_{j \in \mathbb{N}} p^j P_j(\underline{x}) \\ \forall j \in \mathbb{N}, \deg(P_j) \leq c(j+1) \end{array} \right\} \right\}.$$

(1.2.4) La notion de complétion faible définie ci-dessus est relative dans le sens où elle dépend du morphisme structural $K \rightarrow R$. Par la suite, il n'y aura dans le contexte pas d'ambiguïté concernant ce morphisme, ce qui justifie dans la notion $R^\dagger$ l'absence de K .

(1.2.5) Soit K un anneau commutatif noethérien. Si $\varphi: R \rightarrow S$ est un morphisme de K -algèbres commutatives, on a $\hat{\varphi}(R^\dagger) \subset S^\dagger$ (voir [41, Theorem 1.5.]). Nous avons donc un foncteur $\bullet^\dagger: \mathbf{CRing}/K \rightarrow \mathbf{CRing}/K$. De plus, pour tout anneau commutatif R et tout $n \in \mathbb{N}$ on a un isomorphisme de $K/p^n K$ -algèbres ([41, Theorem 1.4.]) :

$$R/p^n R \cong R^\dagger/p^n R^\dagger. \quad (1.2.5.1)$$

On dispose de plus d'un morphisme de K -algèbres canonique $R \rightarrow R^\dagger$. Celui-ci est injectif si et seulement si R est séparé pour la topologie p -adique.

Définition 1.2.6. Soient K un anneau commutatif noethérien et R une K -algèbre commutative. On dit que R est **faiblement complète** si l'application canonique $R \rightarrow R^\dagger$ est une bijection. On dit que R est une K -algèbre **wcfg** (weakly complete finitely generated) si l'on a un morphisme surjectif de K -algèbres $K[X_1, \dots, X_n]^\dagger \rightarrow R$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.2.7. Soient K un anneau commutatif noethérien et $\varphi: R \rightarrow S$ un morphisme de K -algèbres commutatives wcfg. Si le morphisme canonique $\bar{\varphi}: \bar{R} \rightarrow \bar{S}$ obtenu modulo p est surjectif, alors φ est surjectif.

Démonstration. Voir [41, Theorem 3.2.]. □

Corollaire 1.2.8. Soient K un anneau commutatif noethérien et R une K -algèbre commutative de type fini. Alors $R^\dagger$ est une K -algèbre wcfg.

Démonstration. Immédiat d'après la proposition 1.2.7 et (1.2.5.1). □

(1.2.9) Soit $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p . L'anneau $W(\mathbb{K})$ joue un rôle central dans ce travail. Nous allons notamment nous intéresser aux $W(\mathbb{K})$ -algèbres commutatives lisses et à leurs complétions faibles.

Si R est une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative plate de type fini (ou *a fortiori* lisse d'après [24, Théorème (17.5.1)]), alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on sait que $R/p^n R$ est une $(W(\mathbb{K})/p^n W(\mathbb{K}))$ -algèbre plate d'après [10, chap. III, §5, Théorème 1]. Mais puisque $R/p^n R \cong R^\dagger/p^n R^\dagger$ en tant que $(W(\mathbb{K})/p^n W(\mathbb{K}))$ -algèbres d'après (1.2.5.1), donc d'après [41, Theorem 2.4.]

et le corollaire 1.2.8, $R^\dagger$ est une $W(\mathbb{K})$ -algèbre plate. On en déduit en particulier que $R^\dagger$ n'a pas de p -torsion car la multiplication par p dans $W(\mathbb{K})$ est un morphisme injectif de $W(\mathbb{K})$ -modules puisque $W(\mathbb{K})$ est intègre (corollaire 1.1.11).

De plus, on rappelle (proposition 1.1.12) que $W(\mathbb{K})$ est un anneau de valuation discrète complet et noethérien, d'idéal maximal $pW(\mathbb{K})$. Par conséquent, il est intéressant d'étudier certaines propriétés des algèbres wcfg modulo p , ainsi que des questions de relèvement.

Définition 1.2.10. Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A . Le couple (A, I) est dit **hensélien** si $I \subset J(A)$ où $J(A)$ désigne le radical de Jacobson de A , et si pour toute A -algèbre commutative étale B telle que le morphisme d'anneaux induit $A/I \rightarrow B/IB$ soit un isomorphisme il existe un morphisme de A -algèbres $B \rightarrow A$. Pour plus de détails, voir [42].

Théorème 1.2.11. Soit (A, I) un couple hensélien. Alors pour toute A/I -algèbre commutative lisse S , il existe une A -algèbre commutative lisse R telle que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/I & \longrightarrow & S \xrightarrow{\cong} R/IR \end{array}.$$

Démonstration. Il s'agit d'un théorème dû à Elkik [18, Théorème 6]. □

Corollaire 1.2.12. Soit $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p , et soit S une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative lisse. Alors il existe une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative lisse R telle que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W(\mathbb{K}) & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{K} & \longrightarrow & S \xrightarrow{\cong} \overline{R} \end{array}.$$

Démonstration. L'énoncé découle immédiatement du théorème 1.2.11 si l'on vérifie que le couple $(W(\mathbb{K}), pW(\mathbb{K}))$ est hensélien. Tout d'abord, $pW(\mathbb{K}) \subset J(W(\mathbb{K}))$ car le radical de Jacobson est l'intersection de tous les idéaux premiers de l'anneau de valuation discrète complet $W(\mathbb{K})$ d'idéal maximal $pW(\mathbb{K})$ (proposition 1.1.12). De plus, la formule (1.1.10.2) ainsi que l'hypothèse de perfection sur $\mathbb{K}$ impliquent pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $p^n W(\mathbb{K}) = V^n(W(\mathbb{K}))$. En particulier, on a $W_n(\mathbb{K}) \cong W(\mathbb{K})/p^n W(\mathbb{K})$ en tant qu'anneaux, et sur ces derniers l'idéal $pW_n(\mathbb{K})$ est un idéal nilpotent. Soit B une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative étale. Par définition, elle est formellement étale et on déduit que pour tout morphisme de $W(\mathbb{K})$ -algèbres $\varphi: B \rightarrow \mathbb{K}$, il existe un unique morphisme de $W(\mathbb{K})$ -algèbres $\varphi_n: B \rightarrow W_n(\mathbb{K})$ rendant le

diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi_n} & W_n(\mathbb{K}) \\ \parallel & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \end{array}.$$

Les morphismes φ_n étant compatibles, on en déduit par passage à la limite inductive un morphisme de $W(\mathbb{K})$ -algèbres $\tilde{\varphi}: B \rightarrow W(\mathbb{K})$ puisque $W(\mathbb{K})$ est complet pour la topologie p -adique. Le couple est donc hensélien et on peut conclure. $\square$

Proposition 1.2.13. *Soient K un anneau commutatif noethérien, et R une K -algèbre commutative faiblement complète. Tout module de type fini sur R est séparé pour la topologie p -adique.*

Démonstration. D'après [41, Theorem 1.6.] l'idéal pR est inclus dans le radical de Jacobson de R . Or cela implique la proposition d'après [10, chap. III, §3, Proposition 6.]. $\square$

(1.2.14) On déduit du corollaire 1.2.12 que pour toute $\mathbb{K}$ -algèbre commutative lisse S sur un corps parfait de caractéristique p il existe une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative wcfg (et plate d'après (1.2.9)) se réduisant à S modulo p . D'après [45, (2.4.4)], deux tels relèvements de S sont isomorphes en tant que $W(\mathbb{K})$ -algèbres, et l'on peut également relever chaque morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres commutatives lisses $\varphi: \bar{R} \rightarrow \bar{S}$ en un morphisme de $W(\mathbb{K})$ -algèbres commutatives $\tilde{\varphi}: R^\dagger \rightarrow S^\dagger$, où l'on a noté $\bar{R}$ et $\bar{S}$ des relèvements lisses respectifs de $\bar{R}$ et $\bar{S}$ déduits du corollaire 1.2.12.

En particulier, si pour toute $\mathbb{K}$ -algèbre commutative $\bar{R}$ on note $\bar{R}_{[\text{Frob}]}$ la $\mathbb{K}$ -algèbre obtenue par restriction des scalaires suivant $\text{Frob}_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, alors le Frobenius sur $\bar{R}$ définit un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres $\text{Frob}_{\bar{R}}: \bar{R} \rightarrow \bar{R}_{[\text{Frob}]}$, duquel on déduit un relèvement (non-nécessairement unique) en un morphisme de $W(\mathbb{K})$ -algèbres $f: R^\dagger \rightarrow R^\dagger_{[F]}$, où R désigne un relèvement lisse de $\bar{R}$ en $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative, et $R^\dagger_{[F]}$ désigne la $W(\mathbb{K})$ -algèbre obtenue à partir de $R^\dagger$ par restriction des scalaires suivant le morphisme d'anneaux $F: W(\mathbb{K}) \rightarrow W(\mathbb{K})$ défini en (1.1.9).

Lemme 1.2.15. *Soit $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p et $\bar{R}$ une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative lisse se relevant en une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative lisse R . Soit $f: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$ un relèvement du Frobenius sur $\bar{R}$ défini comme en (1.2.14). Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ ainsi que deux morphismes de $W(\mathbb{K})$ -algèbres $g: W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n]^\dagger \rightarrow W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n]^\dagger$ et $\varphi: W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n]^\dagger \rightarrow R^\dagger$ tels que φ soit surjectif et que le diagramme ci-dessous soit*

commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n]^\dagger & \xrightarrow{g} & W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n]^\dagger & & \\
\downarrow & \searrow \varphi & \downarrow & \searrow \varphi & \\
& R^\dagger & \xrightarrow{f} & R^\dagger & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\text{Frob}_{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]}} & \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
& \bar{R} & \xrightarrow{\text{Frob}_{\bar{R}}} & \bar{R} &
\end{array}$$

Démonstration. Puisque R est une $W(\mathbb{K})$ -algèbre lisse, elle est de type fini et $R^\dagger$ est wcfg d'après le corollaire 1.2.8, φ existe alors et est surjective par définition. Comme $\mathbb{K}$ est un corps parfait de caractéristique p , $W(\mathbb{K})$ est noethérien et d'après [1, 3.3.2. b)] le morphisme g faisant commuter le diagramme existe (on prendra garde en appliquant le théorème de bien utiliser les structures algébriques définies par restriction des scalaires suivant le Frobenius comme en (1.2.14)). $\square$

Définition 1.2.16. Soit K un anneau commutatif noethérien et local. Un K -schéma formel faible est un espace annelé $(\mathfrak{X}^\dagger, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger})$ tel que pour tout $x \in \mathfrak{X}^\dagger$ il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathfrak{X}^\dagger$ et une K -algèbre commutative R tels que $U \cong \text{Spff}(R)$ en tant qu'espaces annelés, où $\text{Spff}(R) := (\text{Spec}(\bar{R}), \mathcal{O}_{\text{Spff}(R)})$ est un espace annelé dont le faisceau structural est celui qui pour tout $f \in R^\dagger \setminus pR^\dagger$ associe à $D(\bar{f})$ l'anneau $(R^\dagger_f)^\dagger$. Un tel voisinage est appelé K -schéma formel affine faible. Consulter [40] pour plus de détails.

Proposition 1.2.17. Soient K un anneau commutatif noethérien et local et R une K -algèbre commutative. Soit $F: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$ un relèvement du Frobenius sur $\bar{R}$. Alors il existe un unique morphisme $\tilde{F}$ de faisceaux d'anneaux sur $\text{Spff}(R)$ relevant le Frobenius et dont le morphisme sur les sections globales est F .

Démonstration. Soit $g \in R^\dagger$. L'image de $F(g)$ par la composition $R^\dagger \rightarrow R^\dagger_g \rightarrow R^\dagger_g{}^\dagger$ est inversible. En effet, celle-ci est de la forme $g^p + px$ avec $x \in R^\dagger$. Or, $g^{-p} \sum_{n \in \mathbb{N}} (-pxg^{-p})^n$

est un élément de $R^\dagger_g{}^\dagger$ et est alors l'inverse de $F(g)$. Par conséquent, on a une unique factorisation :

$$\begin{array}{ccc}
R^\dagger & \xrightarrow{F} & R^\dagger \\
\downarrow & & \downarrow \\
R^\dagger_g{}^\dagger & \longrightarrow & R^\dagger_g{}^\dagger
\end{array}$$

Il est clair que la flèche du bas relève le Frobenius. De plus, en raisonnant de la même manière on peut démontrer qu'il s'agit d'un morphisme de faisceaux d'anneaux sur la base d'ouverts $(D(g))_{g \in R^\dagger}$ de $\mathrm{Spff}(R)$, ce qui suffit pour l'étendre en un morphisme de faisceaux d'anneaux sur $\mathrm{Spff}(R)$. $\square$

1.3 PD-anneaux

Dans cette section, on rappelle la notion de dérivation, de différentielle, puis celle de PD-structure, avant d'introduire dans la proposition 1.3.7 l'exemple le plus important pour la définition du complexe de De Rham-Witt. La lecture de [23] peut éclairer nos motivations.

Définition 1.3.1. Soient R un anneau commutatif, S une R -algèbre commutative. Si M est un S -module, une **R -dérivation** de S dans M est une application R -linéaire $d: S \rightarrow M$ telle que :

$$\forall x, y \in S, \quad d(xy) = xd(y) + yd(x).$$

On note $\mathrm{Der}_R(S, M)$ l'ensemble des R -dérivations de S dans M . On dispose alors d'un foncteur :

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_R(S, \bullet): \quad S\text{-Mod} &\rightarrow \mathrm{Set} \\ M &\mapsto \mathrm{Der}_R(S, M) \\ \phi &\mapsto \phi \circ \bullet \end{aligned}$$

Nous savons que ce foncteur est représentable par un S -module $\Omega_{S/R}^1$, appelé le **module des formes différentielles de Kähler de S sur R** (voir par exemple [38, 6.1.3.]). De plus, d'après [12, Proposition 19 p. III.135], cette représentation donne naissance à un foncteur :

$$\begin{aligned} \Omega_{\bullet/R}^1: \quad \mathrm{CRing}^{\setminus R} &\rightarrow R\text{-Mod} \\ S &\mapsto \Omega_{S/R}^1 \\ \phi &\mapsto \Omega_R(\phi) \end{aligned}$$

(1.3.2) Soient R un anneau commutatif, S une R -algèbre commutative, M un S -module et $d: S \rightarrow M$ une R -dérivation. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on vérifie immédiatement que pour tout n -uplet $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in S^n$ on a :

$$d\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} x_j\right) d(x_i). \quad (1.3.2.1)$$

La proposition suivante est bien connue et repose sur le théorème de Kummer.

Proposition 1.3.3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers, alors $\frac{(mn)!}{(n!)^m m!} \in \mathbb{N}$.

Cela nous permet de définir :

Définition 1.3.4. Soit R un anneau commutatif. Un **PD-idéal** de R est un idéal I de R muni d'une **PD-structure** : une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications $\gamma_n : I \rightarrow R$ telles que :

$$\forall x \in I, \gamma_0(x) = 1, \quad (1.3.4.1)$$

$$\forall x \in I, \gamma_1(x) = x, \quad (1.3.4.2)$$

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, \gamma_n(x) \in I, \quad (1.3.4.3)$$

$$\forall x, y \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \gamma_n(x + y) = \sum_{i=0}^n \gamma_i(x) \gamma_{n-i}(y), \quad (1.3.4.4)$$

$$\forall r \in R, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \gamma_n(rx) = r^n \gamma_n(x), \quad (1.3.4.5)$$

$$\forall x \in I, \forall m, n \in \mathbb{N}, \gamma_m(x) \gamma_n(x) = \binom{m+n}{m} \gamma_{m+n}(x), \quad (1.3.4.6)$$

$$\forall x \in I, \forall m, n \in \mathbb{N}, \gamma_m(\gamma_n(x)) = \frac{(mn)!}{(n!)^m m!} \gamma_{mn}(x). \quad (1.3.4.7)$$

On dira aussi que (R, I, γ) est un **PD-anneau**, on notera parfois juste (R, γ) lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible.

Si (R, I, γ) et (S, J, γ') sont deux PD-anneaux, un **PD-morphisme** est la donnée d'un morphisme d'anneaux $\varphi : R \rightarrow S$ tel que $\varphi(I) \subset J$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\gamma_n} & R \\ \downarrow \varphi|_I & & \downarrow \varphi \\ J & \xrightarrow{\gamma'_n} & S \end{array}.$$

Les PD-anneaux et les PD-morphismes forment alors une catégorie notée **PD**Ring.

Proposition 1.3.5. Soit (R, I, γ) un PD-anneau. Alors :

$$\forall x \in I, n! \gamma_n(x) = x^n.$$

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est l'égalité (1.3.4.1). Et si l'on vérifie $n! \gamma_n(x) = x^n$ pour un certain entier naturel n , alors d'après (1.3.4.2) on a $x^{n+1} = x^n \gamma_1(x)$, or d'après (1.3.4.6) on vérifie $\gamma_n(x) \gamma_1(x) = (n+1) \gamma_{n+1}(x)$, on a donc $(n+1)! \gamma_{n+1}(x) = x^{n+1}$. $\square$

Corollaire 1.3.6. Soit (R, I, γ) un PD-anneau. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nR = \{0\}$ alors I est un nilidéal (c'est-à-dire que tous ces éléments sont nilpotents).

Démonstration. D'après la proposition 1.3.5 on sait que pour tout $x \in I$ on a $n! \mid x^n$, donc $x^n = 0$. $\square$

Proposition 1.3.7. *Soit R une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre commutative. Les applications définies ci-dessous pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ forment une PD-structure sur l'idéal $V(W(R))$ de $W(R)$:*

$$\begin{aligned} V(W(R)) &\rightarrow W(R) \\ \gamma_n: \quad V(x) &\mapsto \frac{p^{n-1}}{n!} V(x^n) \end{aligned} .$$

De plus, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^$ ces applications se factorisent en passant au quotient par $V(W_m(R)) \rightarrow W_m(R)$, formant ainsi également une PD-structure sur l'idéal $V(W_m(R))$ de $W_m(R)$.*

Démonstration. Les propriétés (1.3.4.1) et (1.3.4.2) sont claires. Puisque $\frac{p^{n-1}}{n!} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la formule de Legendre, et que $W(R)$ est une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre puisque R en est une, les applications γ_n sont bien définies et on vérifie (1.3.4.3).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in W(R)$. On vérifie (1.3.4.4) comme ceci :

$$\begin{aligned} \gamma_n(V(x) + V(y)) &= \gamma_n(V(x + y)) \\ &= \frac{p^{n-1}}{n!} V((x + y)^n) \\ &= \frac{p^{n-1}}{n!} V\left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{p^{n-1}}{i!(n-i)!} V(x^i y^{n-i}) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{p^{n-2}}{i!(n-i)!} V(px^i y^{n-i}) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{p^{n-i-1+i-1}}{i!(n-i)!} V(F(V(x^i))y^{n-i}) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{p^{i-1}}{i!} V(x^i) \frac{p^{n-i-1}}{(n-i)!} V(y^{n-i}) \\ \gamma_n(V(x) + V(y)) &= \sum_{i=0}^n \gamma_i(V(x)) \gamma_{n-i}(V(y)). \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r, x \in W(R)$, on vérifie la propriété (1.3.4.5) comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_n(rV(x)) &= \gamma_n(V(F(r)x)) \\ &= \frac{p^{n-1}}{n!} V((F(r)x)^n) \\ &= \frac{p^{n-1}}{n!} V(F(r^n)x^n) \\ \gamma_n(rV(x)) &= r^n \gamma_n(V(x)). \end{aligned}$$

Si $x \in W(R)$ et $m, n \in \mathbb{N}$, on obtient la propriété (1.3.4.6) ainsi :

$$\begin{aligned}
\gamma_m(V(x))\gamma_n(V(x)) &= \frac{p^{m-1}}{m!}V(x^m)\frac{p^{n-1}}{n!}V(x^n) \\
&= \frac{p^{m+n-2}}{m!n!}V(F(V(x^m))x^n) \\
&= \binom{m+n}{m}\frac{p^{m+n-2}}{(m+n)!}V(px^mx^n) \\
\gamma_m(V(x))\gamma_n(V(x)) &= \binom{m+n}{m}\gamma_{m+n}(V(x)).
\end{aligned}$$

Et enfin pour tout $x \in W(R)$ et tout $m, n \in \mathbb{N}$ on vérifie (1.3.4.7) :

$$\begin{aligned}
\gamma_m(\gamma_n(V(x))) &= \gamma_m\left(\frac{p^{n-1}}{n!}V(x^n)\right) \\
&= \frac{p^{m-1}}{m!}V\left(\left(\frac{p^{n-1}}{n!}x^n\right)^m\right) \\
&= \frac{p^{m-1}}{(mn)!}\frac{(mn)!}{m!}V\left(\frac{p^{mn-m}}{(n!)^m}x^{mn}\right) \\
\gamma_m(\gamma_n(V(x))) &= \frac{(mn)!}{(n!)^m m!}\gamma_{mn}(x).
\end{aligned}$$

Enfin, il est clair que ces relations passent au quotient et la proposition est prouvée. $\square$

Proposition 1.3.8. *Si R une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre commutative qui n'est pas de caractéristique 0 (ce qui équivaut à dire que p est nilpotent dans R), alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ les applications canoniques $\text{Spec}(R) \rightarrow \text{Spec}(W_m(R))$ sont des homéomorphismes.*

Démonstration. Fixons un entier $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la proposition 1.1.15 $W_m(R)$ n'est pas non plus de caractéristique 0, donc d'après la proposition 1.3.7 et le corollaire 1.3.6 l'idéal $V(W_m(R))$ de $W_m(R)$ est un nilidéal, en particulier $V(W_m(R))$ est inclus dans tous les idéaux premiers de $W_m(R)$ [10, chap. II, §2, Proposition 13] et on en déduit que la projection canonique $\pi: \text{Spec}(R) \rightarrow \text{Spec}(W_m(R))$ induit un homéomorphisme d'espaces topologiques d'après [44, 00E5].

Une preuve plus directe est également consultable dans [7, Lemma (5.1)]. $\square$

Définition 1.3.9. Soient R un anneau commutatif, S une R -algèbre commutative munie d'un PD-idéal $(I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Si M est un S -module, une $(S, I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}})/R$ -**PD-dérivation** $d: S \rightarrow M$ est une R -dérivation telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in I, d(\gamma_n(i)) = \gamma_{n-1}(i)d(i).$$

Proposition 1.3.10. *Considérons le carré commutatif suivant dans CRing :*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & S' \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \longrightarrow & R' \end{array}.$$

Supposons également que S et S' possèdent respectivement des PD-idéaux $(I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $(I', (\gamma'_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tels que φ soit un PD-morphisme. Soient M un S' -module et $d: S' \rightarrow M$ une $(S', I', (\gamma'_n)_{n \in \mathbb{N}})/R'$ -PD-dérivation. Si l'on considère M comme un S -module par restriction des scalaires via φ , l'application $d \circ \varphi: S \rightarrow M$ est une $(S, I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}})/R$ -PD-dérivation.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in I$. Alors :

$$\begin{aligned} d \circ \varphi(\gamma_n(i)) &= d(\gamma'_n(\varphi(i))) \\ &= \gamma'_{n-1}(\varphi(i)) d(\varphi(i)) \\ d \circ \varphi(\gamma_n(i)) &= \varphi(\gamma_{n-1}(i)) d \circ \varphi(i). \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Complexe de De Rham-Witt surconvergent

Ce chapitre introduit le complexe de De Rham-Witt surconvergent, ainsi que l'ensemble des notations et des propositions le concernant qui seront nécessaires dans la suite de ce travail. À l'instar du premier chapitre, la plupart des notions présentées ici ne sont pas nouvelles, et les sections qui suivent n'ont pas la prétention de former un exposé exhaustif permettant d'initier le lecteur à cette théorie. Nous invitons donc le novice à consulter les références données dans les sections suivantes afin de se familiariser avec ces outils.

Bien que le complexe de De Rham-Witt fut au départ introduit par Deligne, et étudié pour ses liens avec la cohomologie cristalline par Illusie, nous avons décidé ici d'employer l'approche de Langer et Zink, équivalente dans notre situation. Ce choix provient du fait que leur construction est relative, et semble donc ici plus pertinente dans l'espoir d'obtenir généralisations ultérieures.

2.1 Algèbres PD-différentielles graduées

Cette section est dédiée à la notion d'algèbre PD-différentielle graduée, telle qu'introduite par Langer et Zink pour la définition du complexe de De Rham-Witt relatif [33]. Auparavant, quelques rappels concernant les algèbres différentielles et les algèbres graduées sont nécessaires.

Si $R \rightarrow S$ est un morphisme d'anneaux commutatifs, nous introduisons en (2.1.14) l'algèbre différentielle graduée $\Omega_{S/R}^{\text{sep}}$. Il s'agit de l'algèbre des différentielles continues sur S introduites pour la cohomologie de Monsky-Washnitzer [41], qui jouera un rôle central dans ce travail. Nous en profitons pour attirer la vigilance du lecteur sur le fait que de nombreuses références ne font pas le distinguo avec les différentielles de Kähler classiques $\Omega_{S/R}$ dans leurs notations.

Définition 2.1.1. Soit R un anneau commutatif. Une **R -algèbre graduée** S est une

R -algèbre $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$, où les S_n sont des sous- R modules de S tels que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ on a $S_i S_j \subset S_{i+j}$.

On forme une sous-catégorie $R\text{-}\mathbf{G}$ de $\text{Ring}^{\setminus R}$ dont les objets sont les R -algèbres graduées, et les morphismes $\phi: \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S'_n$ vérifient $\phi(S_n) \subset S'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2.1.2) Si S est une R -algèbre graduée, alors S_0 est une R -algèbre. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les sous-groupes S_n sont des R -modules. Enfin, pour tout morphisme de R -algèbres graduées $\phi: \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S'_n$ et tout $n \in \mathbb{N}$, les $\phi|_{S_n}$ sont R -linéaires.

Définition 2.1.3. Soit R un anneau commutatif. Une R -algèbre graduée $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$ est **anti-commutative** si elle vérifie :

$$\forall x \in S_i, \forall y \in S_j, xy = (-1)^{ij} yx.$$

(2.1.4) Soit R un anneau commutatif. Si S est une R -algèbre graduée anti-commutative, alors S_0 est une R -algèbre commutative.

Définition 2.1.5. Soit R un anneau commutatif. Soit $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$ une R -algèbre graduée. On dit que S est **alternée** (ou strictement anti-commutative) si elle est anti-commutative et qu'elle vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in S_{2k+1}, x^2 = 0.$$

On notera $R\text{-}\mathbf{G}_a$ la sous-catégorie pleine de $R\text{-}\mathbf{G}$ constituée des R -algèbres graduées alternées.

D'après [12, Propositions 1, 2 p. III.77, Corollaire 2 p. III.80], l'algèbre extérieure des R -modules fournit un foncteur $\bigwedge_R: R\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow R\text{-}\mathbf{G}_a$ pour tout anneau commutatif R .

Nous avons de plus un foncteur :

$$\begin{array}{ccc} R\text{-}\mathbf{G}_a & \rightarrow & R\text{-}\mathbf{Mod} \\ \text{For: } \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n & \mapsto & S_1 \\ & \phi \mapsto & \phi|_{S_1} \end{array} .$$

Qui est adjoint à droite de $\bigwedge_R$, c'est-à-dire que pour tout R -module M et toute R -algèbre alternée S on a :

$$\text{Hom}_{R\text{-}\mathbf{G}_a} \left(\bigwedge_R(M), \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n \right) \cong \text{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}} (M, S_1) . \quad (2.1.5.1)$$

Définition 2.1.6. Soit R un anneau commutatif et $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$ est une R -algèbre graduée. Une **différentielle** $d: S \rightarrow S$ est un opérateur de cobord (i.e. $d^2 = 0$ et $d(S_n) \subset S_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) R -linéaire tel que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in S_i, \forall y \in S, d(xy) = d(x)y + (-1)^i x d(y).$$

Définition 2.1.7. Soit R un anneau commutatif. Une R -algèbre graduée S munie d'une différentielle est appelée une **R -algèbre différentielle graduée (dga)**. Elles forment une sous-catégorie $R\text{-DG}$ de $R\text{-G}$ dont les morphismes sont ceux qui commutent avec les opérateurs de cobord. On notera $R\text{-DG}_a$ la sous-catégorie pleine de $R\text{-DG}$ des R -dgas alternées. Pour ces dernières, on peut vérifier que $d: S_0 \rightarrow S_1$ est une R -dérivation.

Si X est un espace topologique, on dira que $\mathcal{F}$ est un faisceau de R -dgas alternées s'il s'agit d'un faisceau d'anneaux tel que pour tout ouvert U de X l'anneau $\mathcal{F}(U)$ est une R -dga alternée, et que les morphismes de restriction sont des morphismes de R -dgas. On définit un morphisme de faisceaux de R -dgas alternées de manière évidente.

(2.1.8) Soit R un anneau commutatif. On remarque qu'une R -dga anti-commutative $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$ vérifie :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \forall x \in S_i, \forall y \in S_j, d(xy) = (-1)^i x d(y) + (-1)^{(i+1)j} y d(x). \quad (2.1.8.1)$$

On en déduit les lemmes suivants :

Lemme 2.1.9. Soit R un anneau commutatif. Pour toute R -dga anti-commutative $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$, tout $x \in S_0$ et tout $m \in \mathbb{N}$ on a l'égalité dans S_1 :

$$(m+1)x^m d(x) = d(x^{m+1}).$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$. Pour $m = 0$ les deux termes sont égaux. Supposons l'égalité vérifiée pour $m \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned} (m+1)x^{m+1}d(x) &= (m+1)x \times x^m d(x) \\ &= x d(x^{m+1}) \\ (m+1)x^{m+1}d(x) &= d(x^{m+2}) - x^{m+1}d(x). \end{aligned}$$

La dernière ligne se déduit de (2.1.8.1), et on en déduit le lemme. $\square$

Lemme 2.1.10. Soit R un anneau commutatif. Si $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$ est une R -dga anti-commutative, $x \in S_0$ et $m, m' \in \mathbb{N}$, alors on a l'égalité dans S_1 :

$$(m+m')x^m d(x^{m'}) = m' d(x^{m+m'}).$$

Démonstration. En utilisant deux fois de suite le lemme 2.1.9, lorsque m' est non nul on a $m'd(x^{m+m'}) = m'(m+m')x^{m+m'-1}d(x) = (m+m')x^m d(x^{m'})$, et lorsque $m' = 0$ le résultat est évident. $\square$

(2.1.11) Soient R un anneau commutatif, S une R -algèbre commutative. Un exemple important de S -algèbre graduée alternée est $\Omega_{S/R} := \bigwedge_S (\Omega_{S/R}^1)$ (voir [34, 3.2.4.] pour la différentielle et sa fonctorialité). Cela nous fournit un foncteur :

$$\begin{aligned} \text{CRing}^{\setminus R} &\rightarrow R\text{-DG}_a \\ \Omega_{\bullet/R}: \quad S &\mapsto \bigwedge_S (\Omega_{S/R}^1) \\ \phi &\mapsto (\bigwedge_S \circ \Omega_R)(\phi) \end{aligned} .$$

Nous avons de même un foncteur d'oubli :

$$\begin{aligned} R\text{-DG}_a &\rightarrow \text{CRing}^{\setminus R} \\ \text{For}: \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n &\mapsto S_0 \\ \phi &\mapsto \phi|_{S_0} \end{aligned} .$$

Proposition 2.1.12. *Avec les notations de (2.1.11), le foncteur $\Omega_{\bullet/R}$ est adjoint à gauche à For, c'est-à-dire que pour tout R -algèbre commutative S et toute R -algèbre alternée T on vérifie :*

$$\text{Hom}_{\text{CRing}^{\setminus R}}(S, T_0) \cong \text{Hom}_{R\text{-DG}_a}(\Omega_{S/R}, T) .$$

Démonstration. Soit S une R -algèbre commutative et T une R -algèbre alternée. Pour tout morphisme $\varphi: S \rightarrow T_0$ de R -algèbres, on peut voir T comme une S -algèbre alternée que nous noterons T^φ . On remarque que la donnée d'un morphisme de R -algèbres graduées $\psi: \Omega_{S/R} \rightarrow T$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de R -algèbres $\varphi: S \rightarrow T_0$ et d'un morphisme de S -algèbres graduées $\Omega_{S/R} \rightarrow T^\varphi$. On déduit de (2.1.5.1) que cette donnée est équivalente à celle d'un morphisme de R -algèbres $\varphi: S \rightarrow T_0$ et d'un morphisme de S -modules $\phi: \Omega_{S/R}^1 \rightarrow T_1^\varphi$. Si l'on suppose de plus que ψ est un morphisme de R -dgas, alors ϕ doit commuter avec d ce qui le détermine uniquement par propriété universelle de $\Omega_{S/R}^1$ et car $d \circ \varphi$ est une R -dérivation. $\square$

(2.1.13) Si R est un anneau commutatif, on remarque que quotienter modulo p nous fournit un foncteur $R\text{-DG}_a \rightarrow \overline{R}\text{-DG}_a$.

(2.1.14) Soient R un anneau commutatif, S une R -algèbre commutative. On définit la S -algèbre graduée alternée :

$$\Omega_{S/R}^{\text{sep}} := \Omega_{S/R} / \bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n \Omega_{S/R} .$$

Cette S -algèbre est un objet initial pour la catégorie des S -algèbres graduées alternées séparées pour la topologie p -adique d'après [41, Theorem 4.2.]. De plus, d'après la proposition 2.1.12 on dispose d'une bijection canonique pour toute R -algèbre alternée T séparée pour la topologie p -adique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CRing} \setminus R}(S, T_0) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{DG}_a}(\Omega_{S/R}^{\mathrm{sep}}, T). \quad (2.1.14.1)$$

Définition 2.1.15. Soit K un anneau commutatif et R une K -algèbre commutative munie d'un PD-idéal $(I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}})$. On appelle $(R, I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}) / K$ -**algèbre PD-différentielle alternée** ($(R, I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}) / K$ -**PD-dga**) toute K -dga $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$ telle qu'il existe un morphisme d'anneaux $R \rightarrow S_0$ tel que la composition $R \rightarrow S_0 \rightarrow S_1$ soit une $(R, I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}) / K$ -PD-dérivation.

On définit alors $(R, I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}) / K\text{-}\mathbf{DG}_a$ comme étant la sous-catégorie pleine de $K\text{-}\mathbf{DG}_a$ dont les objets sont les $(R, I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}) / K$ -PD-dgas.

(2.1.16) Considérons le carré commutatif suivant dans $\mathbf{CRing}$:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & R' \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & K' \end{array}.$$

Supposons également que R et R' possèdent respectivement des PD-idéaux $(I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $(I', (\gamma'_n)_{n \in \mathbb{N}})$ tels que φ soit un PD-morphisme. D'après la proposition 1.3.10, on obtient alors par restriction des scalaires un foncteur fidèle :

$$(R', I', (\gamma'_n)_{n \in \mathbb{N}}) / K\text{-}\mathbf{DG}_a \rightarrow (R, I, (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}) / K\text{-}\mathbf{DG}_a.$$

2.2 Définition du complexe de De Rham-Witt

Il existe plusieurs constructions du complexe de de Rham-Witt, d'abord introduit par Illusie [28] sur $\mathbb{F}_p$. Nous allons donner ici la construction de Langer-Zink [33] qui est relative. Les preuves données dans cette section proviennent toutes de ces articles. D'autres constructions existent également, comme [27]. On s'est également inspiré de notations de [29].

(2.2.1) Dans cette section, on fixe $K \rightarrow R$ un morphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbres commutatives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on munit $W_n(R)$ de la PD-structure $\gamma_{R,n}$ sur l'idéal $V(W_n(R))$ de la proposition 1.3.7.

Définition 2.2.2. Un R/K -**FV-procomplexe** est la donnée d'un système projectif $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $(W_n(R), V(W_n(R)), \gamma_{R,n}) / W_n(K)$ -PD-dgas (suivant les restrictions des scalaires explicitées en (2.1.16)), muni pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de deux morphismes de groupes

abéliens gradués $F: P_{n+1} \rightarrow P_n$ et $V: P_n \rightarrow P_{n+1}$ vérifiant les conditions énumérées ci-dessous :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $P_{n,[F]}$ la $W_{n+1}(R)$ -algèbre graduée obtenue par restriction des scalaires suivant $F: W_{n+1}(R) \rightarrow W_n(R)$ (dédit de $F: W(R) \rightarrow W(R)$). Alors F induit un morphisme de $W_{n+1}(R)$ -algèbres graduées $P_{n+1} \rightarrow P_{n,[F]}$.
2. Les morphismes structurels $W_n(R) \rightarrow (P_n)_0$ commutent avec F et V (définis ci-dessus pour $(P_n)_0$ et en (1.1.9) et (1.1.6) pour $W_n(R)$).
3. Les égalités ci-dessous sont vérifiées :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in P_n, F(V(a)) = pa, \quad (2.2.2.1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in P_n, F(d(V(a))) = d(a), \quad (2.2.2.2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall r \in R, F(d([r]1_{P_n})) = [r^{p-1}]1_{P_n}d([r]1_{P_n}), \quad (2.2.2.3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in P_n, \forall b \in P_{n+1}, V(aF(b)) = V(a)b. \quad (2.2.2.4)$$

Un morphisme $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \rightarrow \{P'_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de R/K -FV-procomplexes est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'un morphisme de $(W_n(R), V(W_n(R)), \gamma_{R,n})/W_n(K)$ -PD-dgas $P_n \rightarrow P'_n$ commutant avec F , V et les morphismes de transition associés aux systèmes projectifs de $(W_n(R), V(W_n(R)), \gamma_{R,n})/W_n(K)$ -PD-dgas.

Des relations de la définition l'on peut déduire d'autres relations importantes sur les R/K -FV-procomplexes :

Proposition 2.2.3. *Soit $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un R/K -FV-procomplexe. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on vérifie :*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall (a_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket} \in (P_n)^{m+1}, V\left(a_0 \prod_{i=1}^m d(a_i)\right) = V(a_0) \prod_{i=1}^m d(V(a_i)), \quad (2.2.3.1)$$

$$\forall a \in P_n, V(d(a)) = p d(V(a)), \quad (2.2.3.2)$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall a \in P_{n+1}, d(F^m(a)) = p^m F^m(d(a)), \quad (2.2.3.3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, \forall r \in R, F^m(d([r]1_{P_n})) = [r^{p^m-1}]1_{P_n}d([r]1_{P_n}). \quad (2.2.3.4)$$

Démonstration. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket} \in (P_n)^{m+1}$. Alors d'après (2.2.2.2) on a la relation :

$$V\left(a_0 \prod_{i=1}^m d(a_i)\right) = V\left(a_0 \prod_{i=1}^m F(d(V(a_i)))\right).$$

On trouve alors (2.2.3.1) grâce à (2.2.2.4) par récurrence sur m . On en déduit en particulier pour tout $a \in P_n$ que $V(d(a)) = V(1)d(V(a)) = d(V(1)V(a))$ car d est $W(K)$ -linéaire. Or d'après (2.2.2.4) on a $V(1)V(a) = V(F(V(a)))$, et par linéarité de V et (2.2.2.1) on en déduit que $V(1)V(a) = pV(a)$ puis (2.2.3.2) par linéarité de d .

L'égalité (2.2.3.3) se déduit de (2.2.2.2), on a en effet $d(F(a)) = F(d(V(F(a))))$. Il découle ensuite de (2.2.2.4) que $F(d(V(F(a)))) = F(d(V(1)a))$. Or $d(V(1)a) = V(1)d(a)$, d'où $d(F(a)) = F(V(1))F(d(a)) = pF(d(a))$. On conclut alors par récurrence sur m .

Enfin, (2.2.3.4) se déduit par récurrence sur m à partir de (2.2.2.3) car on remarque que $F([r^{p^m-1}]1_{P_n}d([r]1_{P_n})) = [r^{p^{m+1}-p}]1_{P_n}[r^{p-1}]1_{P_n}d([r]1_{P_n})$. $\square$

Proposition 2.2.4. *Supposons que R est de caractéristique p et soit $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un R/K -FV-procomplexe. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a :*

$$\forall a \in P_n, V(F(a)) = F(V(a)) = pa.$$

Démonstration. D'après (2.2.2.1) il suffit de démontrer l'égalité $V(F(a)) = pa$, or d'après (2.2.2.4) on a $V(F(a)) = V(1)a$, et on conclut car $V(1) = p$ dans $W(R)$ car R est de caractéristique p . $\square$

Nous allons énoncer des propriétés importantes du complexe de de Rham-Witt sans les démontrer ; le lecteur intéressé pourra consulter [33] pour plus de détails.

Théorème 2.2.5. *La catégorie des R/K -FV-procomplexes possède un élément initial que l'on note $\{W_n\Omega_{R/K}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.*

On dispose de plus d'un isomorphisme de R -dgas $\Omega_{R/K} \cong W_1\Omega_{R/K}$.

Démonstration. Il s'agit de [33, Proposition 1.6.] et de sa preuve. $\square$

Proposition 2.2.6. *Soit S une R -algèbre commutative étale. Si R n'est pas de caractéristique 0, alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons un isomorphisme de $(W_n(S), V(W_n(S)), \gamma_{S,n}) / W_n(K)$ -PD-dgas :*

$$W_n(S) \otimes_{W_n(R)} W_n\Omega_{R/K} \cong W_n\Omega_{S/K}.$$

Démonstration. Voir [33, Proposition 1.7]. $\square$

(2.2.7) Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -schémas avec p localement nilpotent dans Y . On sait d'après la proposition 1.3.8 que pour toute $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre commutative R et tout $n \in \mathbb{N}^*$ les espaces topologiques $\text{Spec}(W_n(R))$ coïncident si p est nilpotent dans R . La proposition 2.2.6 (appliquée aux localisations) implique alors qu'il existe un unique faisceau quasi-cohérent $W_n\Omega_{X/Y}$ de $W_n(\mathcal{O}_X)$ -algèbres sur X tel que pour tout ouverts affines $\text{Spec}(K) \subset Y$ et $U = \text{Spec}(R) \subset X$ tel que U soit envoyé sur $\text{Spec}(K)$ par f on ait $\Gamma(U, W_n\Omega_{X/Y}) = W_n\Omega_{R/K}$. Les morphismes de transition $W_{n+1}\Omega_{R/K} \rightarrow W_n\Omega_{R/K}$ s'étendent alors en un morphisme $W_{n+1}\Omega_{X/Y} \rightarrow W_n\Omega_{X/Y}$ de $W_{n+1}(\mathcal{O}_X)$ -algèbres. On définit alors :

$$W\Omega_{X/Y} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^*} W_n\Omega_{X/Y}$$

Il s'agit d'un faisceau de $W(K)$ -dgas sur X . On remarque que le passage à la limite est compatible avec les morphismes F et V . De plus, on a $W\Omega_{X/Y}^0 \cong W(\mathcal{O}_X)$ en tant que faisceaux d'anneaux sur X .

Proposition 2.2.8. *Si K est de caractéristique p , alors l'anneau $W\Omega_{R/K}$ est séparé pour la topologie p -adique.*

Démonstration. Cet anneau est séparé pour la topologie p -adique si et seulement si on a l'égalité $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n W\Omega_{R/K} = \{0\}$. Soit $(\dots, x_3, x_2, x_1) \in \prod_{n \in \mathbb{N}^*} W_n \Omega_{R/K}$ tel que $\varphi_n(x_{n+1}) = x_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, où φ_n désigne le n -ième morphisme de transition du R/K -FV-procomplexe universel. On a $px = (\dots, px_3, px_2, 0)$, et il en découle par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que $p^m x = (\dots, p^m x_{m+2}, p^m x_{m+1}, 0, \dots, 0)$ (où les m derniers termes sont nuls), ce qui conclut la preuve. $\square$

Définition 2.2.9. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on définit l'idéal :

$$\mathrm{Fil}^m W\Omega_{R/K} := \mathrm{Ker} (W\Omega_{R/K} \rightarrow W_m \Omega_{R/K}).$$

La filtration $(\mathrm{Fil}^m W\Omega_{R/K})_{m \in \mathbb{N}^*}$ d'idéaux bilatères de $W\Omega_{R/K}$ est appelée **filtration canonique**. La topologie associée, qui est séparée et complète, est appelée **topologie canonique**.

Proposition 2.2.10. *Supposons que K n'est pas de caractéristique 0 et que R est lisse sur K . On vérifie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ que :*

$$\mathrm{Fil}^m W\Omega_{R/K} = V^m (W\Omega_{R/K}) + d(V^m (W\Omega_{R/K})).$$

Démonstration. Voir [33, Proposition 2.19], ou historiquement [28, I. Proposition 3.2.]. $\square$

2.3 Structure de $W(K)$ -module du complexe de De Rham-Witt

La définition du complexe de De Rham-Witt que nous avons vu est très abstraite. Nous allons ici des notations qui seront utiles à son étude, ainsi que des résultats d'Illusie dans [28] et de Langer et Zink dans [33] qui seront pour la plupart énoncés sans démonstration.

L'énoncé le plus important de cette section est le théorème 2.3.15, qui explicite la structure du complexe de De Rham-Witt sur une algèbre de polynômes, et qui donne une unique écriture sous forme de série pour chacun de ces éléments. C'est en outre grâce à ce théorème, d'abord prouvé par Illusie puis généralisé par Langer et Zink, que l'on peut définir une notion de surconvergence sur le complexe de De Rham-Witt. De plus, cet énoncé servira de motivation au chapitre suivant : on aimerait en effet pouvoir expliciter la structure du complexe de De Rham-Witt surconvergent dans d'autres situations que celles d'un anneau polynomial.

Pour toutes ces raisons, les notations introduites dans cette section vont jouer un rôle central dans le reste de ce travail.

(2.3.1) Dans toute cette section, on suppose que K est une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre commutative qui n'est pas de caractéristique 0, et on fixe $n \in \mathbb{N}$. On notera $K[\underline{X}] := K[X_1, \dots, X_n]$. Pour tout $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et toute fonction $k: J \rightarrow \mathbb{N}$, on notera $\underline{X}^k := \prod_{j \in J} X_j^{k(j)}$.

Définition 2.3.2. Une **fonction poids** est une application $k: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{N} \left[\frac{1}{p} \right]$; ses valeurs pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ seront notées k_i . On note $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des fonctions poids. On note :

$$|k| := \sum_{i=1}^n k_i.$$

Son **support** est l'ensemble :

$$\text{Supp}(k) := \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid k_i \neq 0\}.$$

De plus, pour toute fonction poids k et tout sous-ensemble $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $k|_J$ la fonction poids définie pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par :

$$k|_J(i) = \begin{cases} k_i & \text{si } i \in J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lecteur prendra bien garde à ne pas la confondre cette définition avec la restriction au sens classique du terme : la fonction poids $k|_J$ est définie sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et non sur J .

(2.3.3) Pour toute fonction poids k et tout réels positifs $a, b \in \mathbb{R}$ on note $a \leq k < b$ pour dire que k est à valeurs dans l'intervalle $[a, b[$. On notera $\mathcal{P}'_0$ l'ensemble des fonctions poids k telles que $0 \leq k < 1$

(2.3.4) À chaque fonction poids k , on fixe pour le restant de ce travail l'ordre total $\preceq_k$ sur $\text{Supp}(k)$ (noté $\preceq$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, et $\prec_k$ ou $\prec$ lorsque l'on considèrera l'ordre total strict associé) qui vérifie :

$$\forall i, i' \in \text{Supp}(k), i \preceq_k i' \iff \begin{cases} v_p(k_i) \leq v_p(k_{i'}) \\ (v_p(k_i) = v_p(k_{i'})) \implies (i \leq i') \end{cases}.$$

On fixe une fonction poids k . Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on remarque que $\text{Supp}(k) = \text{Supp}(mk)$ et que $\preceq_k = \preceq_{mk}$. On observe également que pour tout sous-ensemble $J \subset \text{Supp}(k)$ et tout $i, i' \in J$ on a $i \preceq_{k|_J} i'$ si et seulement si $i \preceq_k i'$.

Pour chaque fonction poids k non-nulle, on notera $\min(k) \in \text{Supp}(k)$ l'unique élément tel que pour tout $i \in \text{Supp}(k)$ on ait $\min(k) \preceq i$.

Définition 2.3.5. Une **partition** d'une fonction poids k de taille $m \in \mathbb{N}$ est un sous-ensemble de $\text{Supp}(k)$ de cardinal m .

Dans ce travail, lorsque l'on écrira que $I := \{i_j\}_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une partition d'une fonction poids k , cela signifie que I est de taille m et que ses éléments vérifient $i_j \prec i_{j'}$ pour tout couple $j < j'$ de $\llbracket 1, m \rrbracket$.

On notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des couples (k, I) avec k une fonction poids et I une partition de k .

(2.3.6) Si $I := \{i_j\}_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une partition d'une fonction poids k , et si l'on adopte la convention $i_0 \preceq i$ et $i \prec i_{m+1}$ pour tout $i \in \text{Supp}(k)$, on peut définir $m+1$ sous-ensembles disjoints de $\text{Supp}(k)$ pour tout $l \in \llbracket 0, m \rrbracket$:

$$I_l := \{i \in \text{Supp}(k) \mid i_l \preceq i \prec i_{l+1}\}.$$

(2.3.7) Si $m = 0$, on remarque qu'il n'y a qu'une fonction poids $\emptyset \rightarrow \mathbb{N} \left[\frac{1}{p} \right]$, et une seule partition de cette fonction poids, qui sera de taille 0.

(2.3.8) On remarque que la donnée d'une partition d'une fonction poids k de taille $m \in \mathbb{N}$ équivaut à la donnée d'une partition en $m+1$ sous-ensembles $\{I_l\}_{l \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ de $\text{Supp}(k)$ tels que $I_l \neq \emptyset$ pour tout $l \in \llbracket 1, m \rrbracket$, et que pour tout couple $l, l' \in \llbracket 0, m \rrbracket$ tel que $l < l'$ on ait pour tout $x \in I_l$ et tout $x' \in I_{l'}$ la relation $x \prec x'$. L'équivalence est explicitée (2.3.6) et nous utiliserons les deux approches dans la suite de ce travail.

(2.3.9) On note $u(k)$ le plus petit entier naturel u tel que $p^u k_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. On notera également $v_p(k) := \min\{v_p(k_i) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. On a donc :

$$u(k) = \max\{0, -v_p(k)\}.$$

De toute évidence, $u(k) = 0$ si et seulement si k est à valeurs entières.

(2.3.10) Pour toute fonction poids k on pose :

$$f(k) := V^{u(k)} \left(\left[\underline{X}^{p^{u(k)} k} \right] \right) \in W(K[\underline{X}]).$$

Et on définit l'élément de $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^1$ ci-dessous si k n'est pas la fonction nulle :

$$g(k) := F^{u(k)+v_p(k)} \left(d \left(f \left(p^{-u(k)-v_p(k)} k \right) \right) \right).$$

Remarquons alors la formule suivante, qui découle de (2.2.3.3) :

$$d(f(k)) = p^{u(k)+v_p(k)} g(k). \tag{2.3.10.1}$$

Enfin, on définit des éléments $e(k, I) \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^m$ pour toute fonction poids k et toute partition I de k de taille m :

$$e(k, I) := f(k|_{I_0}) \times \prod_{l=1}^m g(k|_{I_l}).$$

(2.3.11) On remarque que :

$$e(k, \emptyset) = f(k) = V^{u(k)} \left(\left[\underline{X}^{p^{u(k)}} k \right] \right).$$

De plus, si k est une fonction à valeurs entières, on a :

$$\begin{aligned} f(k) &= \left[\underline{X}^k \right], \\ g(k) &= F^{v_p(k)} \left(d \left(\left[\underline{X}^{p^{-v_p(k)}} k \right] \right) \right). \end{aligned}$$

Et si k n'est pas à valeurs entières, c'est-à-dire si $u(k) \neq 0$, on a :

$$g(k) = d(f(k)) = d \left(V^{u(k)} \left(\left[\underline{X}^{p^{u(k)}} k \right] \right) \right).$$

Rappelons l'action de d , de F et de V sur ces éléments :

Proposition 2.3.12. *Soient k une fonction poids et I une partition de k . Alors :*

$$d(e(k, I)) = \begin{cases} 0 & \text{si } I_0 = \emptyset, \\ e(k, I \cup \{\min(k)\}) & \text{si } I_0 \neq \emptyset \text{ et } v_p(k) \leq 0, \\ p^{v_p(k)} e(k, I \cup \{\min(k)\}) & \text{si } I_0 \neq \emptyset \text{ et } v_p(k) > 0. \end{cases}$$

Démonstration. Voir [33, Proposition 2.6]. □

Proposition 2.3.13. *Soient k une fonction poids et I une partition de k . Alors :*

$$F(e(k, I)) = \begin{cases} p e(pk, I) & \text{si } v_p(k) < 0 \text{ et } I_0 \neq \emptyset, \\ e(pk, I) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Voir [33, Proposition 2.5]. □

Proposition 2.3.14. *Soient k une fonction poids et I une partition de k . Alors :*

$$V(e(k, I)) = \begin{cases} V(1)e\left(\frac{k}{p}, I\right) & \text{si } v_p(k) > 0, \\ p e\left(\frac{k}{p}, I\right) & \text{si } v_p(k) \leq 0 \text{ et } I_0 = \emptyset, \\ e\left(\frac{k}{p}, I\right) & \text{si } v_p(k) \leq 0 \text{ et } I_0 \neq \emptyset. \end{cases}$$

Démonstration. Voir [33, Proposition 2.5]. □

Théorème 2.3.15. *Supposons que K est un anneau parfait de caractéristique p . On peut alors associer à chaque élément $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$ une unique fonction $\eta: \mathcal{P} \rightarrow W(K)$ telle que :*

$$x = \sum_{(k,I) \in \mathcal{P}} \eta_{k,I} e(k, I). \quad (2.3.15.1)$$

De plus, une série de cette forme converge dans $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$ si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $V^{u(k)}(\eta_{k,I}) \in V^m(W(K))$ sauf pour un nombre fini de couples $(k, I) \in \mathcal{P}$ (en d'autres termes, la série converge pour la topologie canonique).

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, les éléments de $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^m$ sont les séries de la forme (2.3.15.1) sur les $(k, I) \in \mathcal{P}$ tels que $\#I = m$.

Définition 2.3.16. Soit $x = \sum_{(k,I) \in \mathcal{P}} \eta_{k,I} e(k, I)$ comme au théorème 2.3.15. Si tous les k de la série sont à valeurs entières, alors x est dit **entier**, et on note $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$ l'ensemble des $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$ entiers.

De même si tous les k vérifient $u(k) \neq 0$, on dit que x est **fractionnaire**, et l'on note $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frac}}$ l'ensemble des $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$ fractionnaires ; si de plus les (k, I) de la série vérifient $\min(k) \notin I$ on dira que x est **fractionnaire pur**, et on note $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ l'ensemble des fractionnaires purs. On conserve ces définitions et notations dans le cadre surconvergent.

(2.3.17) En vertu de la proposition 2.3.12, on vérifie que les $W(K)$ -modules $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$ et $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frac}}$ sont stables par d . En outre, pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a une décomposition en somme directe de $W(K)$ -modules :

$$W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frac}, m} = W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}, m} + d \left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}, m-1} \right),$$

la convergence de l'ensemble dérivé étant conséquence immédiate de la proposition 2.3.12.

Pour ces raisons, on remarque également que l'application $d: W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}, m-1} \rightarrow W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frac}, m}$ est injective. Nous avons donc une décomposition en $W(K)$ -modules gradués :

$$W\Omega_{K[\underline{X}]/K} = W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}} \oplus W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}} \oplus d \left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}} \right).$$

(2.3.18) Pour tout $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$, on notera $x|_{\text{int}}$ sa projection dans $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$, $x|_{\text{frac}}$ sa projection dans $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frac}}$, $x|_{\text{frp}}$ sa projection dans $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ et $x|_{d(\text{frp})}$ sa projection dans $d \left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}} \right)$.

Nous verrons que cette décomposition possède de nombreux avantages pratiques. Le but principal du chapitre suivant sera d'obtenir une décomposition similaire dans un cadre plus général.

Proposition 2.3.19. *Supposons que K est un anneau parfait de caractéristique p . Soit R est une K -algèbre commutative lisse. Alors $W\Omega_{R/K}$ n'a pas de p -torsion.*

Démonstration. Cette démonstration est calquée sur la preuve de [28, I. Proposition 3.4.]. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \text{Fil}^m W\Omega_{R/K}$. D'après la proposition 2.2.10 il existe $y, z \in W\Omega_{R/K}$ vérifiant $x = V^m(y) + d(V^m(z))$. On en déduit que $px \in \text{Fil}^{m+1} W\Omega_{R/K}$ car l'on a $px = V^m(py) + d(V^m(pz)) = V^{m+1}(F(y)) + d(V^{m+1}(F(z)))$ d'après la proposition 2.2.4. On en déduit donc que la multiplication par p dans $W\Omega_{R/K}$ induit un unique morphisme de $W_{m+1}(R)$ -modules $P_{R,m}: W_m\Omega_{R/K} \rightarrow W_{m+1}\Omega_{R/K}$. La proposition est vérifiée si $P_{R,m}$ est injective pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et cette question est locale sur $\text{Spec}(R)$, donc on peut supposer que R est étale sur $K[X_1, \dots, X_n]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. De plus, les morphismes $(P_{R,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ sont uniquement déterminés par le fait que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, si l'on note $\Pi_m: W_{m+1}\Omega_{R/K} \rightarrow W_m\Omega_{R/K}$ la projection canonique, le morphisme $\Pi_m \circ P_{R,m}$ soit la multiplication par p dans $W_m\Omega_{R/K}$, et que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W_{m+1}\Omega_{R/K} & \xrightarrow{P_{R,m+1}} & W_{m+2}\Omega_{R/K} \\ \downarrow \Pi_m & & \downarrow \Pi_{m+1} \\ W_m\Omega_{R/K} & \xrightarrow{P_{R,m}} & W_{m+1}\Omega_{R/K} \end{array} \quad .$$

D'après la proposition 2.2.6 la proposition est alors démontrée si pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ le morphisme $P_{K[\underline{X}],m}: W_m\Omega_{K[\underline{X}]/K} \rightarrow W_{m+1}\Omega_{K[\underline{X}]/K}$ est injectif. En effet, on remarque que les morphismes $(P_{K[\underline{X}],m} \otimes_{W_{m+1}(R)} W_{m+1}(R))_{m \in \mathbb{N}^*}$ vérifient la caractérisation ci-dessous. Enfin, l'injectivité des morphismes $(P_{K[\underline{X}],m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une conséquence immédiate du fait que $\text{Ker}(W\Omega_{K[\underline{X}]/K} \rightarrow W_m\Omega_{K[\underline{X}]/K}) = V^m(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}) + d(V^m(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}))$ ainsi que du théorème 2.3.15. $\square$

2.4 Définition du complexe de De Rham-Witt surconvergent

Nous allons à présent introduire le complexe de De Rham-Witt surconvergent. Aucune preuve ne sera donnée ici, nous invitons donc le lecteur rigoureux à consulter [16] pour une introduction complète.

Rappelons juste que des théorèmes de comparaisons avec la cohomologie de Monsky-Washnitzer et la cohomologie rigide ont été démontrés, puis étendus aux coefficients. Ces théorèmes sont la motivation principale de cette thèse : on aimerait pouvoir donner une interprétation des coefficients de la cohomologie rigide pour celle de De Rham-Witt surconvergente.

Aucun rappel de cohomologie rigide ni de géométrie rigide ne sera effectué dans cet ouvrage. Nous invitons donc plutôt à se référer à [5], [9] ou [36].

(2.4.1) Dans toute cette section, on reprend les notations de la section 2.3, et on suppose de plus que K est un anneau commutatif parfait intègre de caractéristique p , et on pose R une K -algèbre commutative lisse. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on note $K[\underline{X}] := K[X_1, \dots, X_n]$.

(2.4.2) Pour $\varepsilon > 0$ on définit l'application :

$$\gamma_\varepsilon : \sum_{(k,I) \in \mathcal{P}} \eta_{k,I} e(k, I) \mapsto \inf_{(k,I) \in \mathcal{P}} \{v_V(\eta_{k,I}) + u(k) - \varepsilon|k|\} .$$

Il est alors défini dans [16] :

$$W^\dagger \Omega_{K[\underline{X}]/K} := \{w \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K} \mid \exists \varepsilon > 0, \gamma_\varepsilon(w) \neq -\infty\} .$$

Soit $K[\underline{X}] \rightarrow R$ un morphisme surjectif de K -algèbres. On dispose par fonctorialité un morphisme de $W(K)$ -dgas $\varphi : W\Omega_{K[\underline{X}]/K} \rightarrow W\Omega_{R/K}$ et on définit $W^\dagger \Omega_{R/K}$ comme l'image par φ de $W^\dagger \Omega_{K[\underline{X}]/K}$. D'après [16], celle-ci ne dépend pas du morphisme surjectif choisi ce qui justifie la notation. On déduit immédiatement de la proposition 2.3.12 que :

$$\forall x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}, \gamma_\varepsilon(d(x)) \geq \gamma_\varepsilon(x). \quad (2.4.2.1)$$

De plus, les hypothèses sur K impliquent que $v_V = v_p$ dans $W(K)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}, \gamma_\varepsilon(px) &= \gamma_\varepsilon(x) + 1, \\ \forall x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}, \gamma_\varepsilon(x+y) &\geq \min\{\gamma_\varepsilon(x), \gamma_\varepsilon(y)\}. \end{aligned} \quad (2.4.2.2)$$

De plus, d'après [16, p. 5] on a :

$$\forall x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}, \gamma_\varepsilon(xy) \geq \frac{\gamma_\varepsilon(x) + \gamma_\varepsilon(y)}{2}. \quad (2.4.2.3)$$

Enfin, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on notera :

$$\text{Fil}^m W^\dagger \Omega_{R/K} := W^\dagger \Omega_{R/K} \cap \text{Fil}^m W\Omega_{R/K}.$$

Définition 2.4.3. Les éléments $w \in W\Omega_{R/K}$ tels que $x \in W^\dagger \Omega_{R/K}$ sont dits **surconvergers**.

(2.4.4) Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible sur l'anneau de base K , on notera $W^\dagger(R) := W^\dagger \Omega_{R/K}^0$. Il s'agit d'une $W(K)$ -algèbre, et si K est un corps alors $W^\dagger(R)$ est faiblement complète d'après [17, Proposition 2.28.]. On a $W^\dagger(K) = W(K)$, et $W^\dagger \Omega_{R/K}$ est une $W^\dagger(K)$ -dga alternée.

(2.4.5) Les anneaux $W^\dagger\Omega_{R/K}$ ne sont en général pas p -adiquement complets, en revanche si l'on considère une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in W^\dagger\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $C \in \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $m \in \mathbb{N}$ que $\gamma_\varepsilon(x_m) > C - m$, alors il découle de la définition de γ_ε et de (2.4.2.2) que $\gamma_\varepsilon\left(\sum_{m \in \mathbb{N}} p^m x_m\right) > C$.

(2.4.6) Si K est un corps, et $X \rightarrow \operatorname{Spec}(K)$ est une variété lisse, il est vérifié dans [16, 1.] que la règle qui associe à chaque ouvert affine $U \cong \operatorname{Spec}(R)$ la $W(K)$ -dga $W^\dagger\Omega_{R/K}$ s'étend en un unique faisceau de $W(K)$ -dgas sur X noté $W^\dagger\Omega_{X/K}$.

2.5 Vecteurs de Witt surconvergents

Les vecteurs de Witt surconvergents correspondent au degré zéro du complexe de De Rham Witt surconvergent, comme on l'a défini en (2.4.4). Ces anneaux furent étudiés en détail dans [17]. Ici, nous nous contenterons d'introduire quelques pseudo-valuations qui joueront un rôle important dans les chapitres suivants, et on propose une légère généralisation de [17, Corollary 2.46.] en suivant une argumentation similaire.

(2.5.1) Dans toute cette section, on fixe K un anneau commutatif parfait intègre de caractéristique p , et on pose R une K -algèbre commutative lisse. On considérera également $\psi: R \rightarrow S$ un morphisme de K -algèbres commutatives fini étale tel que S soit libre en tant que R -module. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on note $K[\underline{X}] := K[X_1, \dots, X_n]$.

(2.5.2) Soit $\varphi: K[\underline{X}] \rightarrow R$ un morphisme surjectif de K -algèbres. Soient $a = (a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $b = (b_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in]0, +\infty[^n$. Pour tout $P = \sum_{j \in \mathbb{N}^n} c_j \prod_{i=1}^n X_i^{j_i} \in K[\underline{X}]$, où les $c_j \in K$ pour tout $j \in \mathbb{N}^n$, on note :

$$v_a(P) := \min \left\{ - \sum_{i=1}^n a_i j_i \mid j \in \mathbb{N}^n, c_j \neq 0 \right\},$$

avec la convention $v_a(0) = +\infty$.

Posons également :

$$v_{\varphi, a}: \begin{array}{ll} R & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \\ r & \mapsto \sup\{v_a(P) \mid P \in \varphi^{-1}(\{r\})\} \end{array}.$$

On pose $m(a, b) := \min \left\{ \frac{b_i}{a_i} \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$ et $M(a, b) := \max \left\{ \frac{b_i}{a_i} \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$ deux réels strictement positifs. On vérifie immédiatement que :

$$\forall P \in K[\underline{X}], m(a, b)v_{\varphi, a}(P) \geq v_{\varphi, b}(P) \geq M(a, b)v_{\varphi, a}(P). \quad (2.5.2.1)$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ on note :

$$\gamma_{\varepsilon, \varphi, a} : \begin{array}{l} W(R) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \\ (w_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \inf\{i + \varepsilon p^{-i} v_{\varphi, a}(w_i) \mid i \in \mathbb{N}\} \end{array} .$$

D'après [17], $v_{\varphi, a}$ est une pseudo-valuation sur R , et $\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}$ est une pseudo-valuation sur $W(R)$ telle que pour tout $w \in W(R)$ on ait :

$$w \in W^\dagger(R) \iff \exists \varepsilon > 0, \exists C \in \mathbb{R}, \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) > C. \quad (2.5.2.2)$$

Il y a un lien avec l'application γ_ε précédemment définie. D'après [17, Proposition 2.18.] nous avons :

$$\forall w \in W(K[\underline{X}]), \gamma_\varepsilon(w) = \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{K[\underline{X}]}, (1, \dots, 1)}(w). \quad (2.5.2.3)$$

De plus, v_a est une valuation sur $K[\underline{X}]$, et $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{K[\underline{X}]}, a}$ est une valuation sur $W(K[\underline{X}])$. D'après (1.1.10.2), on a :

$$\forall w \in W(K[\underline{X}]), \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{K[\underline{X}]}, a}(pw) = \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{K[\underline{X}]}, a}(w) + 1. \quad (2.5.2.4)$$

Il découle de (2.5.2.1) et des définitions que :

$$\forall w \in W(R), \gamma_{m(a, b)\varepsilon, \varphi, a}(w) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, b}(w) \geq \gamma_{M(a, b)\varepsilon, \varphi, a}(w). \quad (2.5.2.5)$$

Lemme 2.5.3. *Soit $(s_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une base de S en tant que R -module pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow S$ un morphisme surjectif de K -algèbres tel que $\varphi(Y_i) = s_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et que $\varphi(K[\underline{X}]) = R \subset S$. Posons aussi $a_i := 1$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors pour $N \in \mathbb{R}$ assez grand, dépendant du choix de la base et de φ , si $a_i := N$ pour $i \in \llbracket m+1, n+m \rrbracket$, il existe $C \leq 0$ tel que pour tout $s = \sum_{i=1}^m r_i s_i$, avec $r_i \in R$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, et pour $v' := v_{\varphi|_{K[\underline{X}]}, (a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$, on ait :*

$$\min \{v'(r_i) - a_{n+i} \mid i \in \llbracket 1, m \rrbracket\} \geq v_{\varphi, a}(s) + C.$$

Démonstration. Pour tout $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, choisissons un antécédent $e_{i,j} \in \bigoplus_{i=1}^m K[\underline{X}]Y_i$ de $s_i s_j$ par φ , et posons $d \in \mathbb{N}$ le plus grand degré des polynômes obtenus. Posons aussi $a_i := 1$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $a_i := N$ pour $i \in \llbracket m+1, n+m \rrbracket$ et un certain $N \in]d-1, +\infty[$. Nous avons donc :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket, v_a(e_{i,j}) \geq -N - d + 1.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, posons $r_i \in R$. On note $s = \sum_{i=1}^m r_i s_i$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} \min \left\{ v'(r_i) - a_{n+i} \mid i \in \llbracket 1, m \rrbracket \right\} \\ &= \min \left\{ v_{\varphi|_{K[\underline{X}], (a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}}} (r_i) - a_{n+i} \mid i \in \llbracket 1, m \rrbracket \right\} \\ &= \min \left\{ \sup \{ v_a(P) \mid P \in \varphi^{-1}(\{r_i\}) \cap K[\underline{X}] \} - a_{n+i} \mid i \in \llbracket 1, m \rrbracket \right\} \\ &= \min \left\{ \sup \{ v_a(P) \mid P \in \varphi^{-1}(\{r_i s_i\}) \cap K[\underline{X}] Y_i \} \mid i \in \llbracket 1, m \rrbracket \right\} \\ &= \sup \left\{ v_a(P) \mid P \in \varphi^{-1}(\{s\}) \cap \bigoplus_{i=1}^m K[\underline{X}] Y_i \right\}. \end{aligned}$$

Soit $P \in K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ un antécédent de s par φ . Démontrons tout d'abord que l'on peut trouver un autre antécédent $Q \in K[\underline{X}] \oplus \bigoplus_{i=1}^m K[\underline{X}] Y_i$ de s par φ tel que

$v_a(Q) \geq v_a(P)$. Procédons par récurrence sur $\deg_{\underline{Y}}(P)$. Si $P \in K[\underline{X}] \oplus \bigoplus_{i=1}^m K[\underline{X}] Y_i$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, pour chaque monôme M de P tel qu'il existe $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ pour lesquels $Y_i Y_j \mid M$, on remplace l'occurrence de $Y_i Y_j$ par $e_{i,j}$ (on ne fera qu'au plus une substitution par monôme). Le nouveau polynôme R alors obtenu vérifiera alors $\varphi(R) = s$ et $v_a(R) \geq v_a(P)$ puisque v_a est une valuation et que $v_a(Y_i Y_j) = -2N < -N - d + 1 \leq v_a(e_{i,j})$; de plus on aura $\deg_{\underline{Y}}(R) < \deg_{\underline{Y}}(P)$, ce qui conclut la récurrence.

Démontrons ensuite qu'il existe $C \leq 0$ tel que pour tout $P \in K[\underline{X}]$, il existe un polynôme $Q \in \bigoplus_{i=1}^m K[\underline{X}] Y_i$ tel que $v_a(Q) \geq v_a(P) + C$ et $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Prenons un antécédent U de

1 par φ contenu dans $\bigoplus_{i=1}^m K[\underline{X}] Y_i$, et notons $C := v_a(U) \leq 0$. Alors, $Q := PU$ convient. Le lemme en découle ensuite. $\square$

Lemme 2.5.4. *Plaçons nous dans les conditions du lemme 2.5.3. Soit $l \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 1.1.16, $(s_i^{p^n})_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ est une base de S en tant que R -module. Il existe alors deux constantes $C, D \leq 0$ telles que pour tout $s = \sum_{i=0}^m r_{i,l} s_i^{p^l} \in S$, où les $r_{i,l} \in R$ pour chaque $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a $v'(r_{i,l}) \geq v_a(s) + C + p^l D$.*

Démonstration. Considérons $U = (u_{i,j})_{i,j \in \llbracket 0, m \rrbracket} \in \text{Mat}_{m+1}(R)$ l'unique matrice qui vérifie

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} s_0^{p^l} \\ \vdots \\ s_m^{p^l} \end{pmatrix}. \text{ Si l'on note } U^{[p^l]} \in \text{Mat}_m(R) \text{ la matrice obtenue en élevant chaque}$$

coefficient de U à la puissance p^l , on vérifie alors $\begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = \left(\prod_{k=0}^{l-1} U^{[p^k]} \right) \begin{pmatrix} s_0^{p^l} \\ \vdots \\ s_m^{p^l} \end{pmatrix}$. On en

déduit que $\begin{pmatrix} r_{0,l} \\ \vdots \\ r_{m,l} \end{pmatrix} := \left(\prod_{k=0}^{l-1} U^{[p^k]} \right)^{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} r_{0,[0]} \\ \vdots \\ r_{m,[0]} \end{pmatrix}$. Notons $d := \min\{v'(u_{i,j}) \mid i, j \in \llbracket 0, m \rrbracket\}$.

Pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on en déduit que $v'(r_{i,l}) \geq v'(r_i) + \sum_{k=0}^{l-1} p^k d = v'(r_i) + d \frac{p^l - 1}{p - 1}$. En utilisant le lemme 2.5.3 et le fait que $d \leq 0$, on peut trouver $C \leq 0$ tel que l'on ait $v'(r_{i,l}) \geq v_a(s) + C + p^l \frac{d}{p - 1}$. $\square$

Lemme 2.5.5. *Plaçons nous dans le cadre défini au lemme 2.5.4. Alors pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $w \in W(S)$ tels qu'il existe $(r(i))_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in W(R)^m$ vérifiant $w = \sum_{i=1}^m V^l(r(i)) [s_i]$, si $E := \min\{v_{\varphi,a}(s_i) \mid i \in \llbracket 1, m \rrbracket\}$ et $\varepsilon > 0$ vérifient $\varepsilon(C + D + E) \geq -1$, on a :*

$$\gamma_{\varepsilon, \varphi, a} \left(\sum_{i=1}^m V^l([r(i)_0]) [s_i] \right) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w).$$

Démonstration. On a $l + \varepsilon p^{-l} v_{\varphi,a}(w_l) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w)$, d'où $v_{\varphi,a}(w_l) \geq \frac{p^l}{\varepsilon} (\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) - l)$. Puisque d'après (1.1.9) on a $w_l = \sum_{i=1}^m r(i)_0 s_i p^l$, on déduit du lemme 2.5.4 et des précédentes relations que $v_{\varphi,a}(r(i)_0) \geq \frac{p^l}{\varepsilon} (\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) - l + \varepsilon(C + D))$. D'après [11, IX. §1 N°3], si l'on note $x := \sum_{i=1}^m V^l([r(i)_0]) [s_i]$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on peut écrire x_{l+k} comme un polynôme homogène de degré p^k à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en les indéterminées $r(i)_0 s_i p^l$. Puisque $v_{\varphi,a}$ est une pseudo-valuation, on obtient que $v_{\varphi,a}(x_{l+k}) \geq \frac{p^{k+l}}{\varepsilon} (\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) - l + \varepsilon(C + D + E))$. Il en découle que $k + l + \varepsilon p^{-k-l} v_{\varphi,a}(x_{l+k}) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) + k + \varepsilon(C + D + E)$. On en déduit pour $k > 0$ par définition de ε que $k + l + \varepsilon p^{-k-l} v_{\varphi,a}(x_{l+k}) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w)$. De plus, pour tout $k' \in \llbracket 0, l \rrbracket$ on a $x_{k'} = w_{k'}$, ce qui implique que $\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(x) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w)$. $\square$

Proposition 2.5.6. *Soit $(s_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une base de S en tant que R -module pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Alors le $W^\dagger(R)$ -module $W^\dagger(S)$ est fini et libre, et $([s_i])_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une $W^\dagger(R)$ -base de $W^\dagger(S)$.*

Plus précisément, si l'on se place dans le contexte du lemme 2.5.3, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$ et tout $w = \sum_{i=1}^m r(i)[s_i] \in W^\dagger(S)$, où les $r(i) \in W^\dagger(R)$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on ait $\gamma_{\varepsilon, \varphi|_{K[\underline{X}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(r(i)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) + \varepsilon C$.

Démonstration. Soit $w \in W^\dagger(S)$. D'après la proposition 1.1.17 il existe des uniques vecteurs de Witt $(r(i))_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in W(R)^m$ tels que $w = \sum_{i=1}^m r(i)[s_i]$. On peut trouver $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi: K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow S$ un morphisme surjectif de K -algèbres pour lequel $\varphi(Y_i) = s_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et que $\varphi(K[\underline{X}]) = R \subset S$. Soit $a \in]0, +\infty[^{n+m}$ vérifiant les conditions du lemme 2.5.3. On déduit alors par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$ du lemme 2.5.5 qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel $\gamma_{\varepsilon, \varphi, a} \left(\sum_{i=1}^m V^l([r(i)_l])[s_i] \right) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. En particulier, $l + \varepsilon p^{-l} v_{\varphi, a} \left(\sum_{i=1}^m r(i)_l s_i^{p^l} \right) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w)$. Donc pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on a $v_{\varphi, a} \left(r(i)_l s_i^{p^l} \right) \geq \frac{p^l}{\varepsilon} (\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) - l)$. On obtient ensuite en vertu du lemme 2.5.4 que $v_{\varphi|_{K[\underline{X}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(r(i)_l) \geq \frac{p^l}{\varepsilon} (\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) - l + \varepsilon C)$. De manière équivalente on a également $l + \varepsilon p^{-l} v_{\varphi|_{K[\underline{X}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(r(i)_l) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) + \varepsilon C$, ce qui nous permet d'avoir par définition $\gamma_{\varepsilon, \varphi|_{K[\underline{X}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(r(i)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) + \varepsilon C$ ce qui conclut la preuve de la proposition d'après (2.5.2.2). $\square$

Chapitre 3

Structure du complexe de De Rham-Witt surconvergent

Après deux chapitres d'introduction, ce chapitre est le premier comportant des travaux nouveaux. Il s'agit également de la partie la plus technique de cette thèse. L'objectif principal de ce chapitre est d'une part d'obtenir un théorème de structure inspiré du théorème 2.3.15 localement pour le complexe de De Rham-Witt surconvergent, et d'autre part de pouvoir maîtriser la surconvergence des produits.

Pour ce faire, on commence en section 3.1 par donner des formules explicites concernant des multiplications élémentaires dans ce complexe. Celles-ci permettent de mieux comprendre dans quelles circonstances on peut maîtriser la surconvergence lorsque l'on travaille sur une algèbre polynomiale. Les résultats obtenus dans ce cadre s'avérant suffisants pour donner une interprétation de certains F -isocristaux pour la cohomologie de De Rham-Witt surconvergente, le but des sections suivantes est alors de pouvoir obtenir des résultats similaires localement sur une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique positive.

La généralisation se fait en trois étapes : on cherche d'abord à comprendre la structure de module modulo p du complexe sur une algèbre polynomiale. Une fois ce travail réalisé, on étudie la structure locale des vecteurs de Witt surconvergens. Ces deux premières analyses réalisées, cela nous permet enfin d'obtenir le théorème 3.4.23 qui donne la structure locale du complexe. Tous les calculs ayant été explicités dans ce chapitre, ce théorème s'accompagne d'une description des situations pour lesquelles la surconvergence des produits peut être contrôlée, nous fournissant ainsi tous les outils nécessaires pour démontrer le théorème d'interprétation désiré.

3.1 Produits et surconvergence

Nous allons ici nous intéresser à la multiplication et la surconvergence dans le complexe de De Rham-Witt. Commençons par nous placer sur une algèbre polynomiale $K[\underline{X}]$ sur un

anneau commutatif parfait intègre de caractéristique p . Rappelons dans ce cas un exemple de Davis, Langer et Zink, qui avaient remarqué que pour le produit :

$$\begin{aligned} V([X_1^{p-1}]) d(V([X_1])) &\stackrel{(2.2.3.1)}{=} V([X_1^{p-1}] d([X_1])) \\ &\stackrel{(2.2.3.4)}{=} V(F(d([X_1]))) \\ V([X_1^{p-1}]) d(V([X_1])) &\stackrel{2.2.4}{=} pd([X_1]), \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon(V([X_1^{p-1}])) &= 1 - \varepsilon \frac{p-1}{p}, \\ \gamma_\varepsilon(d(V([X_1]))) &= 1 - \varepsilon \frac{1}{p}, \\ \gamma_\varepsilon(pd([X_1])) &= 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela implique en particulier que l'on ne peut pas en général avoir l'inégalité de pseudo-valuation $\gamma_\varepsilon(xy) \geq \gamma_\varepsilon(x) + \gamma_\varepsilon(y)$ si $x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$. Cette remarque représente un obstacle à la démonstration du théorème au prochain chapitre.

Toutefois, puisque pour tout $u \in \mathbb{N}$ on vérifie en employant les mêmes méthodes que :

$$V^u([X_1^{p^u-1}]) d(V^u([X_1])) = p^u d([X_1]).$$

On remarque alors *a priori* que la valuation p -adique du produit semble contrôlée par la valuation pour la filtration canonique des facteurs. Un tel comportement fut déjà observé en [16, Corollary 0.16.], mais nécessite de modifier les applications γ_ε définies ici dans la section 2.4 pour tout $\varepsilon > 0$. Malheureusement, les applications alternatives proposées dans *loco citato* ne semblent pas non plus répondre à notre problématique, la raison étant que les applications proposées ne donnent pas d'information concernant la surconvergence.

Le but de cette section consiste donc tout d'abord à donner des formules aussi explicites que possible concernant le produit de deux éléments $e(k, I)$ et $e(l, J)$, avec $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ comme définis en section 2.3. Les résultats les plus généraux répondant à ce besoin sont le lemme 3.1.8 et la proposition 3.1.9, qui seront pour cette raison utilisés à maintes reprises dans la suite de ce travail. Ces observations nous permettent de définir pertinemment des pseudo-valuations $\zeta_\varepsilon: W\Omega_{K[\underline{X}]/K} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ pour tout $\varepsilon > 0$. De plus, on peut vérifier pour certaines situations que l'inégalité de pseudo-valuation est stricte. Ces résultats suffisent à démontrer le théorème principal de cette thèse dans le cas d'un algèbre de polynômes, et sont résumés dans le tableau (3.1.24).

(3.1.1) Dans toute cette section, K désigne un anneau commutatif parfait intègre de caractéristique p . On fixe $n \in \mathbb{N}$, et $K[\underline{X}] := K[X_1, \dots, X_n]$. Pour tout $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et toute fonction $k: J \rightarrow \mathbb{N}$, on notera $\underline{X}^k := \prod_{j \in J} X_j^{k(j)}$.

Lemme 3.1.2. *Soit R une K -algèbre commutative. Soient $x \in R$ et $m, m' \in \mathbb{N}$ tels que $m + m' \neq 0$, et notons $a := v_p(m + m')$ et $b := p^{-a}(m + m')$. On a alors dans $W\Omega_{R/K}^1$:*

$$[x]^m d([x]^{m'}) = \frac{m'}{b} F^a \left(d([x]^b) \right).$$

Démonstration. D'après le lemme 2.1.10, on a $(m + m') [x]^m d([x]^{m'}) = m' d([x]^{m+m'})$, or $d([x]^{m+m'}) = d(F^a([x]^b)) = p^a F^a(d([x]^b))$ d'après (2.2.3.3), et il ne reste plus qu'à conclure avec le théorème 2.3.15 et le fait que $W(K)$ est une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre intègre de caractéristique 0 d'après le corollaire 1.1.11. $\square$

(3.1.3) Dans les lemmes qui suivent, nous allons nous intéresser aux produits ci-dessous définis pour chaque $(k, I) \in \mathcal{P}$ tel que k soit à valeurs entières :

$$h(k, I) := \prod_{i \in \text{Supp}(k) \setminus I} [X_i]^{k_i} \prod_{j \in I} g(k|_{\{j\}}).$$

Remarquons par exemple que :

$$h(k, \emptyset) = e(k, \emptyset) = [\underline{X}^k].$$

Le but de cette définition est le suivant : en ne considérant dans nos formules que des fonctions poids de taille 1 dans la fonction g , les produits sont plus simples à calculer comme l'on peut le voir dans la preuve de la proposition ci-dessous. Il ne restera ensuite qu'à employer cette proposition afin de se ramener aux produits d'éléments de la forme $e(k, I)$ pour $(k, I) \in \mathcal{P}$ avec k tout d'abord à valeurs entières, puis quelconque.

Proposition 3.1.4. *Soient $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$. On a :*

$$\exists m \in \mathbb{Z}_{(p)}, \quad h(k, I)h(l, J) = \begin{cases} m h(k + l, I \cup J) & \text{si } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Tout d'abord, on vérifie :

$$h(k, I)h(l, J) = \prod_{i \in \text{Supp}(k) \setminus I} [X_i]^{k_i} \prod_{i' \in I} g(k|_{\{i'\}}) \prod_{j \in \text{Supp}(l) \setminus J} [X_j]^{l_j} \prod_{j' \in J} g(l|_{\{j'\}}).$$

Puisque $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$ est alternée, ce produit est nul si $I \cap J \neq \emptyset$. Sinon, on en déduit :

$$h(k, I)h(l, J) = \prod_{i \in \text{Supp}(k+l) \setminus (I \cup J)} [X_i]^{k_i + l_i} \prod_{i' \in I} [X_{i'}]^{l_{i'}} g(k|_{\{i'\}}) \prod_{j' \in J} [X_{j'}]^{k_{j'}} g(l|_{\{j'\}}).$$

De plus, pour tout $i' \in I$ nous avons :

$$\begin{aligned} [X_{i'}]^{l_{i'}} g(k|_{\{i'\}}) &\stackrel{(2.2.3.4)}{=} [X_{i'}]^{(1-p^{-v_p(k|_{\{i'\}})})_{k_{i'}+l_{i'}}} d\left([X_i]^{p^{-v_p(k|_{\{i'\}})}_{k_{i'}}}\right) \\ &\stackrel{3.1.2}{=} \frac{p^{-v_p(k|_{\{i'\}})}_{k_{i'}}}{p^{-v_p(k_{i'}+l_{i'})} (k_{i'}+l_{i'})} g((k+l)|_{\{i'\}}). \end{aligned}$$

Par le même argument, on vérifie pour tout $j' \in J$ que :

$$[X_{j'}]^{k_{j'}} g(l|_{\{j'\}}) = \frac{p^{-v_p(l|_{\{j'\}})}_{l_{j'}}}{p^{-v_p(k_{j'}+l_{j'})} (k_{j'}+l_{j'})} g((k+l)|_{\{j'\}}).$$

□

Lemme 3.1.5. *Soit $(k, I) \in \mathcal{P}$ tel que k soit une fonction poids à valeurs entières. Alors :*

$$g(k) = \sum_{j \in \text{Supp}(k)} p^{v_p(k_j) - v_p(k)} h(k, \{j\}).$$

De plus, si l'on note P l'ensemble des partitions de $\text{Supp}(k)$ de taille $\#I$, alors il existe une fonction $s: P \rightarrow \mathbb{N}$ telle que on a :

$$e(k, I) = \sum_{J \in P} s(J) h(k, J).$$

Démonstration. Par définition $g(k) = F^{v_p(k)} \left(d \left(\left[\underline{X}^{p^{-v_p(k)}} k \right] \right) \right)$, on calcule alors :

$$\begin{aligned} &F^{v_p(k)} \left(d \left(\left[\underline{X}^{p^{-v_p(k)}} k \right] \right) \right) \\ &\stackrel{(2.2.3.4)}{=} \left[\underline{X}^{(1-p^{-v_p(k)})k} \right] d \left(\left[\underline{X}^{p^{-v_p(k)}} k \right] \right) \\ &\stackrel{(1.3.2.1)}{=} \left[\underline{X}^{(1-p^{-v_p(k)})k} \right] \sum_{j \in \text{Supp}(k)} \left(\prod_{j' \in \text{Supp}(k) \setminus \{j\}} \left[X_{j'}^{p^{-v_p(k)} k_{j'}} \right] \right) d \left(\left[X_j^{p^{-v_p(k)} k_j} \right] \right) \\ &\stackrel{(2.2.3.4)}{=} \sum_{j \in \text{Supp}(k)} \left(\prod_{j' \in \text{Supp}(k) \setminus \{j\}} \left[X_{j'}^{k_{j'}} \right] \right) F^{v_p(k)} \left(d \left(\left[X_j^{p^{-v_p(k)} k_j} \right] \right) \right) \\ &\stackrel{(2.2.3.3)}{=} \sum_{j \in \text{Supp}(k)} \left(\prod_{j' \in \text{Supp}(k) \setminus \{j\}} \left[X_{j'}^{k_{j'}} \right] \right) p^{v_p(k_j) - v_p(k)} F^{v_p(k_j)} \left(d \left(\left[X_j^{p^{-v_p(k_j)} k_j} \right] \right) \right) \\ &= \sum_{j \in \text{Supp}(k)} p^{v_p(k_j) - v_p(k)} h(k, \{j\}). \end{aligned}$$

La seconde partie de l'énoncé découle alors de ce résultat et de la proposition 3.1.4. □

Lemme 3.1.6. Soit $(k, I) \in \mathcal{P}$ tel que k soit à valeurs entières. Notons P l'ensemble des partitions de $\text{Supp}(k)$ de taille $\#I$. Alors il existe une fonction $s: P \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$h(k, I) = \sum_{J \in P} s(J) e(k, J).$$

Démonstration. Notons $m := \#I$. Si $m = 0$ on a évidemment $h(k, I) = e(k, I)$. Supposons donc que $m \neq 0$. Notons $\{i_l\}_{l \in \llbracket 1, m \rrbracket} := I$, et pour tout $j \in \text{Supp}(k)$ posons $a_j := v_p(k_j)$ et $b_j = p^{-a_j} k_j$. Par définition, $h(k, I) = \prod_{i \in S \setminus I} [X_i]^{k_i} \prod_{j \in I} F^{a_j} \left(d \left([X_j]^{b_j} \right) \right)$, ce qui nous permet d'écrire :

$$h(k, I) = h(k|_{\text{Supp}(k) \setminus I_m}, I \setminus \{i_m\}) \times \left(\prod_{i \in I_m \setminus \{i_m\}} [X_i]^{k_i} \right) \times F^{a_{i_m}} \left(d \left([X_{i_m}]^{b_{i_m}} \right) \right).$$

On vérifie de plus :

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i \in I_m \setminus \{i_m\}} [X_i]^{k_i} \right) \times F^{a_{i_m}} \left(d \left([X_{i_m}]^{b_{i_m}} \right) \right) \\ & \stackrel{(1.1.9)}{=} F^{a_{i_m}} \left(d \left([X_{i_m}]^{b_{i_m}} \right) \prod_{i \in I_m \setminus \{i_m\}} [X_i]^{p^{-a_{i_m}} k_i} \right) \\ & \stackrel{(2.1.8.1)}{=} F^{a_{i_m}} \left(d \left(\prod_{i \in I_m} [X_i]^{p^{-a_{i_m}} k_i} \right) - [X_{i_m}]^{b_{i_m}} d \left(\prod_{i \in I_m \setminus \{i_m\}} [X_i]^{p^{-a_{i_m}} k_i} \right) \right) \\ & \stackrel{(2.3.10.1)}{=} g(k|_{I_m}) - F^{a_{i_m}} \left([X_{i_m}]^{b_{i_m}} \right) \times p^{v_p(k|_{I_m \setminus \{i_m\}}) - a_{i_m}} g(k|_{I_m \setminus \{i_m\}}) \\ & \stackrel{(1.1.9)}{=} g(k|_{I_m}) - p^{v_p(k|_{I_m \setminus \{i_m\}}) - a_{i_m}} [X_{i_m}]^{k_{i_m}} g(k|_{I_m \setminus \{i_m\}}). \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} h(k, I) &= h(k|_{\text{Supp}(k) \setminus I_m}, I \setminus \{i_m\}) \times g(k|_{I_m}) \\ &\quad - p^{v_p(k|_{I_m \setminus \{i_m\}}) - a_{i_m}} h(k|_{\{i_m\} \cup \text{Supp}(k) \setminus I_m}, I \setminus \{i_m\}) \times g(k|_{I_m \setminus \{i_m\}}). \end{aligned}$$

Le lemme résulte alors d'une récurrence sur $m = \#I$. En effet, si l'on suppose que l'on peut écrire $h(k|_{\text{Supp}(k) \setminus I_m}, I \setminus \{i_m\})$ comme une combinaison linéaire d'éléments de la forme $e(k|_{\text{Supp}(k) \setminus I_m}, J')$, où J' est une partition de $\text{Supp}(k) \setminus I_m$ de taille $m - 1$, alors puisque $e(k|_{\text{Supp}(k) \setminus I_m}, J') \times g(k|_{I_m}) = e(k, J' \cup \{i_m\})$ le lemme en découle pour le premier terme de la soustraction ci-dessus, et on peut conclure pour le second terme avec le même raisonnement. $\square$

Lemme 3.1.7. Soient $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ tels que k et l soient à valeurs entières. Si l'on note P l'ensemble des partitions de $\text{Supp}(k + l)$ de taille $\#I + \#J$, alors il existe une fonction $s: P \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ telle que :

$$e(k, I)e(l, J) = \sum_{L \in P} s(L)e(k + l, L).$$

Démonstration. Par définition on a $e(k, I) = \left[\underline{X}^{k|_{I_0}} \right] \prod_{i=1}^{\#I} g(k|_{I_i})$ et une formule similaire pour $e(l, J)$. On déduit alors du lemme 3.1.5 que $e(k, I)$ est une combinaison linéaire de produits de la forme $h(k|_{I_0}, \emptyset) \prod_{i=1}^{\#I} h(k|_{I_i}, \{a_i\})$, où les $a_i \in I_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, \#I \rrbracket$. On conclut alors grâce à la proposition 3.1.4 et au lemme 3.1.6. $\square$

Lemme 3.1.8. Soient $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ tels que $u(k) \geq u(l)$ et $I_0 \neq \emptyset$. Notons P l'ensemble des partitions de taille $\#I + \#J$ de $\text{Supp}(k + l)$ et posons $v := \begin{cases} u(l) & \text{si } J_0 \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors il existe une application $s: P \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ telle que $p^{v+u(k)} \mid s(L)$ pour tout $L \in P$ tel que $L_0 = \emptyset$ et $p^{v+u(k)-u(k+l)} \mid s(L')$ pour tous les autres $L' \in P$, et :

$$e(k, I)e(l, J) = \sum_{L \in P} s(L)e(k + l, L).$$

Démonstration. Notons $\tilde{I} := \bigcup_{i \in \llbracket 1, \#I \rrbracket} I_i$. On calcule :

$$\begin{aligned} e(k, I)e(l, J) &\stackrel{(2.2.2.4)}{=} V^{u(k)} \left(\left[\underline{X}^{p^{u(k)}(k|_{I_0})} \right] F^{u(k)} (e(k|_{\tilde{I}}, I)e(l, J)) \right) \\ &\stackrel{2.3.13}{=} p^v V^{u(k)} \left(\left[\underline{X}^{p^{u(k)}(k|_{I_0})} \right] e(p^{u(k)}k|_{\tilde{I}}, I)e(p^{u(k)}l, J) \right) \\ e(k, I)e(l, J) &= p^v V^{u(k)} \left(e(p^{u(k)}k, I)e(p^{u(k)}l, J) \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1.7, il existe une application $s: P \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ telle que l'on vérifie :

$$e(k, I)e(l, J) = p^v V^{u(k)} \left(\sum_{L \in P} s(L)e(p^{u(k)}(k + l), L) \right).$$

D'après la structure de $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre de $W(K)$ étudiée en (1.1.14) et de la formule (2.2.2.4) que l'égalité peut également s'écrire :

$$e(k, I)e(l, J) = \sum_{L \in P} p^v s(L) V^{u(k)} \left(e(p^{u(k)}(k + l), L) \right).$$

On conclut alors avec la proposition 2.3.14, et le fait que $p = V(1)$ lorsque K est de caractéristique p . $\square$

Proposition 3.1.9. *Soient $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ avec $I_0 \neq \emptyset$. Notons P l'ensemble des partitions de taille $\#I + \#J$ de $\text{Supp}(k + l)$, alors il existe une fonction $s: P \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ telle que $p^{\min\{u(k), u(l)\}} \mid s(L)$ pour tout $L \in P$ vérifiant $L_0 = \emptyset$ et que $p^{\max\{u(k), u(l)\} - u(k+l)} \mid s(L)$ pour tous les autres $L \in P$, et vérifiant :*

$$e(k, I)e(l, J) = \sum_{L \in P} s(L)e(k + l, L).$$

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier du lemme 3.1.8 sauf lorsque $u(l) > u(k)$ et $J_0 = \emptyset$. Dans ce cas, alors si $J' := J \setminus \{\min(l)\}$ on déduit de la proposition 2.3.12 que :

$$\begin{aligned} e(k, I)e(l, J) &= e(k, I)d(e(l, J')) \\ &= (-1)^{\#I} (d(e(k, I)e(l, J')) - d(e(k, I))e(l, J')). \end{aligned}$$

On peut alors conclure de nouveau avec le lemme 3.1.8. $\square$

(3.1.10) Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit :

$$\zeta_\varepsilon: \sum_{(k, I) \in \mathcal{P}} \eta_{k, I} e(k, I) \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} & \\ \inf_{(k, I) \in \mathcal{P}} \{2n \vee_V(\eta_{k, I}) + \#I u(k) - \varepsilon |k|\} & \text{si } I_0 = \emptyset \\ \inf_{(k, I) \in \mathcal{P}} \{2n \vee_V(\eta_{k, I}) + (\#I + 1)u(k) - \varepsilon |k|\} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il découle immédiatement de cette définition et de la proposition 2.3.12 que si $n \neq 0$:

$$\forall x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}, \quad 2n\gamma_{\frac{\varepsilon}{2n}}(x) \geq \zeta_\varepsilon(x) \geq \gamma_\varepsilon(x), \quad (3.1.10.1)$$

$$\forall x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}, \quad \zeta_\varepsilon(x + y) \geq \min\{\zeta_\varepsilon(x), \zeta_\varepsilon(y)\}, \quad (3.1.10.2)$$

$$\forall x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}, \quad \zeta_\varepsilon(d(x)) \geq \zeta_\varepsilon(x), \quad (3.1.10.3)$$

$$\forall x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}, \quad \zeta_\varepsilon(px) = \zeta_\varepsilon(x) + 2n, \quad (3.1.10.4)$$

$$\forall x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}, \quad \forall \varepsilon' \in]0, \varepsilon], \quad \zeta_{\varepsilon'}(x) \geq \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \zeta_\varepsilon(x). \quad (3.1.10.5)$$

En particulier, on déduit de (3.1.10.1) que $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$ est surconvergent si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ et $C \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\zeta_\varepsilon(x) \geq C$.

(3.1.11) Dans la définition ci-dessus, il semblerait possible de remplacer $2n$ par n et d'obtenir également des résultats intéressants (*a priori* la propriété de pseudo-valuation), mais pas les cas où l'inégalité de pseudo-valuation devient stricte comme nous allons le voir ci-après.

Proposition 3.1.12. *Si $\varepsilon > 0$ et $x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon(xy) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y).$$

Démonstration. Notons $x = \sum_{\substack{(k,I) \in \mathcal{P} \\ u(k)=0}} \eta_{k,I}e(k,I)$ et $y = \sum_{\substack{(l,J) \in \mathcal{P} \\ u(l)=0}} \eta'_{l,J}e(l,J)$. Remarquons que

d'après le lemme 3.1.7, pour tout $(k,I), (l,J) \in \mathcal{P}$ tels que $u(k) = u(l) = 0$ on a l'inégalité $\zeta_\varepsilon\left(\eta_{k,I}e(k,I)\eta'_{l,J}e(l,J)\right) \geq 2n \vee_V(\eta_{k,I}\eta'_{l,J}) + (\#I + \#J)u(k+l) - \varepsilon|k+l|$. Puisque $u(k+l) = 0$, on peut conclure. $\square$

Proposition 3.1.13. *Si $\varepsilon > 0$, $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$ et $y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{d}(\text{frp})}) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1.$$

Démonstration. Notons $x = \sum_{\substack{(k,I) \in \mathcal{P} \\ u(k)=0}} \eta_{k,I}e(k,I)$ et $y = \sum_{\substack{(l,J) \in \mathcal{P} \\ u(l)>0 \\ J_0 \neq \emptyset}} \eta'_{l,J}e(l,J)$. Or d'après le lemme

3.1.8 on sait que pour tout $(k,I), (l,J) \in \mathcal{P}$ tels que $u(k) = 0$, $u(l) > 0$ et $J_0 \neq \emptyset$ on a $\zeta_\varepsilon\left((\eta_{k,I}e(k,I)\eta'_{l,J}e(l,J))|_{\text{d}(\text{frp})}\right) \geq 2n \left(\vee_V(\eta_{k,I}\eta'_{l,J}) + u(l)\right) + (\#I + \#J)u(k+l) - \varepsilon|k+l|$.

De plus $u(k+l) = u(l)$, donc $\zeta_\varepsilon\left((\eta_{k,I}e(k,I)\eta'_{l,J}e(l,J))|_{\text{d}(\text{frp})}\right) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1$, sauf si $n = 0$, auquel cas il n'y avait rien à démontrer. $\square$

Proposition 3.1.14. *Si $\varepsilon > 0$, $i \in \mathbb{N}$, $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int},i}$ et $y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon(xy) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + i.$$

Démonstration. Notons $x = \sum_{\substack{(k,I) \in \mathcal{P} \\ u(k)=0 \\ \#I=i}} \eta_{k,I}e(k,I)$ et $y = \sum_{\substack{(l,J) \in \mathcal{P} \\ u(l)>0 \\ J_0 \neq \emptyset}} \eta'_{l,J}e(l,J)$. Or d'après le lemme

3.1.8 on sait que pour tout $(k,I), (l,J) \in \mathcal{P}$ tels que $u(k) = 0$, $u(l) > 0$ et $J_0 \neq \emptyset$ on vérifie $\zeta_\varepsilon\left((\eta_{k,I}e(k,I)\eta'_{l,J}e(l,J))|_{\text{frp}}\right) \geq 2n \vee_V(\eta_{k,I}\eta'_{l,J}) + (\#I + \#J + 1)u(k+l) - \varepsilon|k+l|$. Puisque $u(k+l) = u(l)$, on a donc $\zeta_\varepsilon\left((\eta_{k,I}e(k,I)\eta'_{l,J}e(l,J))|_{\text{frp}}\right) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + \#I$. On conclut alors en employant la proposition 3.1.13. $\square$

Proposition 3.1.15. *Si $\varepsilon > 0$, $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$ et $y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon(xy) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y).$$

Démonstration. Remarquons que l'on peut se ramener au cas où $x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^i$, pour un certain $i \in \mathbb{N}$. Écrivons $y = y|_{\text{int}} + y|_{\text{frp}} + y|_{\text{d}(\text{frp})}$. D'après les propositions 3.1.12 et 3.1.14 ainsi que (3.1.10.2), il suffit de démontrer que $\zeta_\varepsilon(xy|_{\text{d}(\text{frp})}) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y)$. Si l'on pose $y' \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}, i-1}$ tel que $d(y') = y|_{\text{d}(\text{frp})}$, alors d'après la proposition 2.3.12 nous avons $\zeta_\varepsilon(y') = \zeta_\varepsilon(y|_{\text{frp}})$. Or $xy|_{\text{d}(\text{frp})} = (-1)^i (d(xy') - d(x)y')$, ce qui nous permet de conclure en utilisant (3.1.10.3), (3.1.10.2) ainsi que la proposition 3.1.14. $\square$

Proposition 3.1.16. *Si $\varepsilon > 0$ et $x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{frp}}) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1.$$

Démonstration. Il nous suffit de démontrer que pour tout couple $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ avec $u(k) \neq 0, I_0 \neq \emptyset, u(l) \neq 0$ et $J_0 \neq \emptyset$, et tous vecteurs de Witt $\eta_k, \eta_l \in W(K)$ on vérifie l'inégalité $\zeta_\varepsilon(\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J)) \geq \zeta_\varepsilon(\eta_k e(k, I)) + \zeta_\varepsilon(\eta_l e(l, J)) + 1$. Or d'après le lemme 3.1.8 on a :

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon((\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J))|_{\text{frp}}) &\geq \\ 2n(v_V(\eta_k \eta_l) + u(k) + u(l) - u(k+l)) &+ (\#I + \#J + 1)u(k+l) - \varepsilon|k+l|. \end{aligned}$$

En vertu de (1.1.10.1) on peut conclure si :

$$2n(u(k) + u(l) - u(k+l)) + (\#I + \#J + 1)u(k+l) \geq (\#I + 1)u(k) + (\#J + 1)u(l) + 1.$$

Remarquons que $\#I + 1 \leq n$ et $\#J + 1 \leq n$ puisque l'on a supposé que $I_0 \neq \emptyset$ et $J_0 \neq \emptyset$. Or puisque $u(k+l) \leq \max\{u(k), u(l)\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2nu(k) + 2nu(l) + (\#I + \#J + 1 - 2n)u(k+l) &\geq \\ 2n \min\{u(k), u(l)\} + (\#I + \#J + 1) \max\{u(k), u(l)\}. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve si $n \neq 0$, sachant que si l'on avait eu $n = 0$, il n'y aurait rien eu à démontrer. $\square$

Proposition 3.1.17. *Si $\varepsilon > 0$, $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ et $y \in d(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}})$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{frp}}) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y).$$

Démonstration. Il nous suffit de démontrer que pour tout couple $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ avec $u(k) \neq 0, I_0 \neq \emptyset, u(l) \neq 0$ et $J_0 = \emptyset$, et tous vecteurs de Witt $\eta_k, \eta_l \in W(K)$ on vérifie l'inégalité $\zeta_\varepsilon(\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J)) \geq \zeta_\varepsilon(\eta_k e(k, I)) + \zeta_\varepsilon(\eta_l e(l, J))$. Or d'après la proposition 3.1.9 on a :

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon((\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J))|_{\text{frp}}) &\geq \\ 2n(v_V(\eta_k \eta_l) + \max\{u(k), u(l)\} - u(k+l)) &+ (\#I + \#J + 1)u(k+l) - \varepsilon|k+l|. \end{aligned}$$

En vertu de (1.1.10.1) on peut conclure si :

$$2n(\max\{u(k), u(l)\} - u(k+l)) + (\#I + \#J + 1)u(k+l) \geq (\#I + 1)u(k) + \#Ju(l).$$

Remarquons que $\#I + 1 \leq n$ puisque l'on a supposé que $I_0 \neq \emptyset$, et $\#J \leq n$. Or puisque $u(k+l) \leq \max\{u(k), u(l)\}$, on obtient :

$$2n \max\{u(k), u(l)\} + (\#I + \#J + 1 - 2n)u(k+l) \geq (\#I + \#J + 1) \max\{u(k), u(l)\}.$$

□

Proposition 3.1.18. *Si $\varepsilon > 0$ et $x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{d}(\text{frp})}) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 2.$$

Démonstration. Il nous suffit de démontrer que pour tout couple $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ avec $u(k) \neq 0$, $I_0 \neq \emptyset$, $u(l) \neq 0$ et $J_0 \neq \emptyset$, et tous vecteurs de Witt $\eta_k, \eta_l \in W(K)$ on vérifie l'inégalité $\zeta_\varepsilon(\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J)) \geq \zeta_\varepsilon(\eta_k e(k, I)) + \zeta_\varepsilon(\eta_l e(l, J)) + 2$. Or d'après le lemme 3.1.8 on a :

$$\zeta_\varepsilon((\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J))|_{\text{d}(\text{frp})}) \geq 2n(v_V(\eta_k \eta_l) + u(k) + u(l)) + (\#I + \#J)u(k+l) - \varepsilon|k+l|.$$

En vertu de (1.1.10.1) on peut conclure si :

$$2n(u(k) + u(l)) + (\#I + \#J)u(k+l) \geq (\#I + 1)u(k) + (\#J + 1)u(l) + 2.$$

Ce qui est clair puisque $\#I + 1 \leq n$ et $\#J + 1 \leq n$ car on a supposé que $I_0 \neq \emptyset$ et $J_0 \neq \emptyset$. □

Proposition 3.1.19. *Si $\varepsilon > 0$ et $x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{int}}) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 2.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour tout $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ tels que $u(k) \neq 0$, $I_0 \neq \emptyset$, $u(l) \neq 0$ et $J_0 \neq \emptyset$, et tous vecteurs de Witt $\eta_k, \eta_l \in W(K)$ on vérifie toujours l'inégalité $\zeta_\varepsilon((\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J))|_{\text{int}}) \geq \zeta_\varepsilon(\eta_k e(k, I)) + \zeta_\varepsilon(\eta_l e(l, J)) + 2$. Or d'après le lemme 3.1.8 on a $\zeta_\varepsilon((\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J))|_{\text{int}}) \geq 2n(v_V(\eta_k \eta_l) + u(k) + u(l)) - \varepsilon|k+l|$ car dans la partie entière on a $u(k+l) = 0$, ce qui démontre la proposition puisque $n \geq \#I + 1$ et $n \geq \#J + 1$ car on a supposé $I_0 \neq \emptyset$ et $J_0 \neq \emptyset$. □

Proposition 3.1.20. *Si $\varepsilon > 0$ et $x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frac}}$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{int}}) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y).$$

Démonstration. Démontrons d'abord que pour tout $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ tels que $u(k) \neq 0$, $I_0 \neq \emptyset$ et $u(l) \neq 0$, et tous vecteurs de Witt $\eta_k, \eta_l \in W(K)$ on vérifie toujours l'inégalité $\zeta_\varepsilon((\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J))|_{\text{int}}) \geq \zeta_\varepsilon(\eta_k e(k, I)) + \zeta_\varepsilon(\eta_l e(l, J))$. Or d'après la proposition 3.1.9 on a $\zeta_\varepsilon((\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J))|_{\text{int}}) \geq 2n(v_V(\eta_k \eta_l) + \min\{u(k), u(l)\}) - \varepsilon|k + l|$ car dans la partie entière on a $u(k + l) = 0$, ce qui n'est possible que lorsque $u(k) = u(l)$, ce qui démontre ce cas particulier puisque $2n \geq (\#I + 1 + \#J)$ si $J_0 = \emptyset$ et $2n \geq (\#I + 1 + \#J + 1)$ sinon.

Le cas général s'obtient en remarquant que si $I_0 = \emptyset$, alors d'après la proposition 2.3.12 on a $e(k, I)e(l, J) = d(e(k, I \setminus \{\min(k)\})e(l, J)) - (-1)^{\#I-1}e(k, I \setminus \{\min(k)\})d(e(l, J))$, et on conclut en utilisant le premier paragraphe ainsi que (3.1.10.3). $\square$

Proposition 3.1.21. *Si $\varepsilon > 0$, $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ et $y \in d\left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}\right)$:*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{d}(\text{frp})}) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1.$$

Démonstration. Il nous suffit de démontrer que pour tout couple $(k, I), (l, J) \in \mathcal{P}$ avec $u(k) \neq 0$, $I_0 \neq \emptyset$, $u(l) \neq 0$ et $J_0 = \emptyset$, et tous vecteurs de Witt $\eta_k, \eta_l \in W(K)$ on vérifie toujours l'inégalité $\zeta_\varepsilon((\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J))|_{\text{d}(\text{frp})}) \geq \zeta_\varepsilon(\eta_k e(k, I)) + \zeta_\varepsilon(\eta_l e(l, J)) + 1$. Or d'après la proposition 3.1.9 on a :

$$\zeta_\varepsilon((\eta_k e(k, I) \eta_l e(l, J))|_{\text{d}(\text{frp})}) \geq 2n(v_V(\eta_k \eta_l) + \min\{u(k), u(l)\}) + (\#I + \#J)u(k + l) - \varepsilon|k + l|.$$

Donc en vertu de (1.1.10.1), on peut conclure si :

$$2n \min\{u(k), u(l)\} + (\#I + \#J)u(k + l) \geq (\#I + 1)u(k) + \#Ju(l) + 1.$$

Puisque $\#I + 1 \leq n$ car on a supposé que $I_0 \neq \emptyset$, que $1 \leq \#J \leq n$ car on a supposé $J_0 = \emptyset$, et que $u(k + l) \neq 0$ car l'on considère la partie fractionnaire, cette égalité devient évidente si $u(k) = u(l)$; sinon on a alors $u(k + l) = \max\{u(k), u(l)\}$, et on a terminé si $n \neq 0$ (si $n = 0$ nous n'avons rien à faire). $\square$

Proposition 3.1.22. *Si $\varepsilon > 0$ et $x, y \in d\left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}\right)$ alors :*

$$(\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{d}(\text{frp})}) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y).$$

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^i$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$. Si l'on pose $y' \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ tel que $d(y') = y$, alors d'après la proposition 2.3.12 nous avons $\zeta_\varepsilon(y') = \zeta_\varepsilon(y)$. Or $xy = (-1)^i d(xy')$, ce qui nous permet de conclure en utilisant (3.1.10.3), (3.1.10.2) ainsi que la proposition 3.1.17. $\square$

(3.1.23) Remarquons que si l'on prend $x, y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$, alors $xy \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$, donc en particulier $(xy)|_{\text{frp}} = (xy)|_{\text{d}(\text{frp})} = 0$, ce qui implique que quel que soit $\varepsilon > 0$ on a $\zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{frp}}) = \zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{d}(\text{frp})}) = +\infty$.

De manière similaire, si $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$ et $y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frac}}$, le lemme 3.1.8 implique que $\zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{int}}) = +\infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Enfin, si $x, y \in d\left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}\right)$, alors puisque xy est dans l'image de d on a $(xy)|_{\text{frp}} = 0$, ce qui implique $\zeta_\varepsilon((xy)|_{\text{frp}}) = +\infty$ pour $\varepsilon > 0$.

(3.1.24) On peut résumer l'ensemble des propositions ci-dessus concernant le comportement de l'application ζ_ε pour $\varepsilon > 0$ avec les produits dans le tableau ci-dessous (on supposera systématiquement que $\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty$ et $\zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty$).

	$\zeta_\varepsilon((xy) _{\text{int}}) \geq$	$\zeta_\varepsilon((xy) _{\text{frp}}) \geq$	$\zeta_\varepsilon((xy) _{d(\text{frp})}) \geq$
$x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$ $y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y)$	$+\infty$	$+\infty$
$x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ $y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$	$+\infty$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y)$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1$
$x \in d\left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}\right)$ $y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{int}}$	$+\infty$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y)$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y)$
$x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$ $y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 2$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 2$
$x \in d\left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}\right)$ $y \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y)$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y)$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1$
$x \in d\left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}\right)$ $y \in d\left(W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^{\text{frp}}\right)$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y)$	$+\infty$	$\zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y)$

En particulier, on en déduit le théorème ci-dessous :

Théorème 3.1.25. *Pour tout $\varepsilon > 0$, l'application ζ_ε est une pseudo-valuation.*

Démonstration. Immédiat d'après (3.1.10.2) et (3.1.24). □

3.2 Structure modulo p

Nous entamons ici notre travail pour généraliser les résultats de la section 3.1 localement sur une variété lisse sur un corps parfait $\mathbb{K}$ de caractéristique positive. On aimerait notamment pouvoir obtenir une décomposition similaire à celle vue en (2.3.17) afin de pouvoir obtenir un tableau semblable à (3.1.24). Puisque l'on peut se ramener localement au cas d'une algèbre commutative étale sur un anneau de polynômes $\mathbb{K}[\underline{X}]$, il semble alors plus pertinent en considération de la proposition 2.2.6 de bien comprendre modulo p la structure de $\mathbb{K}[\underline{X}]$ -module du complexe de De Rham-Witt surconvergent. C'est ce que nous tâchons

de faire dans cette section. L'un des objectifs des sections suivantes sera alors de relever ces résultats au complexe initial.

(3.2.1) Nous allons fixer des notations, et définir des morphismes qui seront utilisés dans toute cette section et les suivantes.

On fixe $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p ainsi que $n \in \mathbb{N}$. Nous noterons comme usuellement $\mathbb{K}[\underline{X}] := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, mais aussi $W(\mathbb{K})[\underline{X}] := W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n]$. Pour tout $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et toute fonction $k: J \rightarrow \mathbb{N}$, on notera $\underline{X}^k := \prod_{j \in J} X_j^{k(j)}$. Fixons également $\overline{R}$ une

$\mathbb{K}$ -algèbre commutative lisse se relevant en une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative lisse R . Posons $F: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$ un morphisme d'anneaux relevant le Frobenius sur $\overline{R^\dagger} \cong \overline{R}$ et compatible avec $F: W(\mathbb{K}) \rightarrow W(\mathbb{K})$ (d'après (1.2.14), un tel morphisme existe toujours). Notons $\Pi: R^\dagger \rightarrow \overline{R}$ la projection canonique. En vertu de la proposition 1.1.13 on a le morphisme d'anneaux $s_F: R^\dagger \rightarrow W(R^\dagger)$ (ce morphisme dépend du relèvement du Frobenius). On pose :

$$t_F: \begin{array}{ccc} R^\dagger & \rightarrow & W(\overline{R}) \\ r & \mapsto & W(\Pi) \circ s_F(x) \end{array} .$$

Il est démontré en [16, Proposition 3.2.] que le morphisme t_F est à valeurs dans $W^\dagger(\overline{R})$, ce qui donne par l'adjonction (2.1.14.1) un morphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas :

$$t_F: \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}} .$$

Ce dernier devient modulo p un morphisme de $\mathbb{K}$ -dgas $\overline{t_F}: \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}} \rightarrow \overline{W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}}$. Posons $I(\overline{R}) := \text{Ker}(\overline{W(R)} \rightarrow \overline{R})$ et $I^\dagger(\overline{R}) := \text{Ker}(\overline{W^\dagger(R)} \rightarrow \overline{R})$.

On en déduit immédiatement une suite exacte scindée de $\overline{R}$ -modules :

$$0 \longrightarrow I(\overline{R}) \longrightarrow \overline{W(\overline{R})} \xleftarrow[\overline{t_F}]{\quad} \overline{R} \longrightarrow 0 .$$

Puisque $\overline{t_F}$ est à valeurs dans $\overline{W^\dagger(\overline{R})}$ en degré 0, on en déduit que la suite de $\overline{R}$ -modules ci-dessous est également exacte scindée :

$$0 \longrightarrow I^\dagger(\overline{R}) \longrightarrow \overline{W^\dagger(\overline{R})} \xleftarrow[\overline{t_F}]{\quad} \overline{R} \longrightarrow 0 . \quad (3.2.1.1)$$

Nous noterons enfin $\widetilde{\text{Frob}}: W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ le relèvement de $\text{Frob}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}$ associant X_i^p à X_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$, cela nous permet de définir le morphisme de $W(\mathbb{K})$ -modules :

$$v_F: \begin{array}{ccc} \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} & \rightarrow & W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}} \\ x & \mapsto & t_F(x) - \widetilde{t_{\text{Frob}}}(x) \end{array} . \quad (3.2.1.2)$$

Lemme 3.2.2. *Soit k une fonction poids telle que $v_p(k) = 0$. Soit I une partition de k telle que $I_0 \neq \emptyset$. Soit $u \in \mathbb{N}^*$. Alors $e(k, I) \in \text{Frob}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}^u(\mathbb{K}[\underline{X}])\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\#I}$ si et seulement si l'une des conditions ci-dessous est vérifiée :*

- *Il existe $i \in \text{Supp}(k)$ tel que $k_i > p^u$.*
- *Il existe $i \in I_0$ tel que $k_i = p^u$.*
- *Il existe $l \in \llbracket 1, \#I \rrbracket$ tel que $\#I_l \geq 2$ et qu'il existe $i \in I_l$ pour lequel $k_i = p^u$.*

Plus précisément, si $e(k, I)$ est de l'une des formes ci-dessus, alors il s'agit d'une combinaison $\mathbb{K}$ -linéaire d'éléments de la forme $[X_i]^{p^u} e(l, I)$, où $(l, I) \in \mathcal{P}$ vérifie $v_p(l) = 0$ et $|k| = |l| + p^u$.

Démonstration. Vérifions que les conditions sont suffisantes. Si $i \in I_0$ vérifie $k_i \geq p^u$, alors par définition on a $[X_i]^{p^u} \mid f(k|_{I_0})$.

Si il existe $l \in \llbracket 1, \#I \rrbracket$ tel que l'on ait $i \in I_l$ vérifiant $k_i > p^u$, alors si $v_p(k|_{I_l}) = 0$ on a $g(k|_{I_l}) \equiv [X_i]^{p^u} d\left([X_i]^{k_i - p^u} \left[\underline{X}^{k|_{I_l \setminus \{i\}}}\right]\right) [p]$ par définition de g et par (2.2.2.2) ; si au contraire $v_p(k|_{I_l}) > 0$, alors $g(k|_{I_l}) = \left[\underline{X}^{(1 - p^{-v_p(k|_{I_l})})k|_{I_l}}\right] d\left(\left[\underline{X}^{p^{-v_p(k|_{I_l})}k|_{I_l}}\right]\right)$. Si $v_p(k|_{I_l}) < u$ on a d'après (2.2.2.2) :

$$d\left(\left[\underline{X}^{p^{-v_p(k|_{I_l})}k|_{I_l}}\right]\right) \equiv [X_i]^{p^{u - v_p(k|_{I_l})}} d\left([X_i]^{p^{-v_p(k|_{I_l})}(k_i - p^u)} \left[\underline{X}^{p^{-v_p(k|_{I_l})}k|_{I_l \setminus \{i\}}}\right]\right) [p].$$

On peut alors conclure car $(1 - p^{-v_p(k|_{I_l})})k_i + p^{u - v_p(k|_{I_l})} \geq p^u$. Reste le cas $v_p(k|_{I_l}) \geq u$, on a alors $k_i \geq 2p^u$ et on peut conclure car $(1 - p^{-v_p(k|_{I_l})})k_i \geq p^u$.

Enfin si il existe $l \in \llbracket 1, \#I \rrbracket$ tel que $\#I_l \geq 2$ et qu'il existe $i \in I_l$ pour lequel $k_i = p^u$, alors si $v_p(k|_{I_l}) = 0$ nous avons $g(k|_{I_l}) \equiv [X_i]^{p^u} d\left(\left[\underline{X}^{k|_{I_l \setminus \{i\}}}\right]\right) [p]$ par définition de g et par (2.2.2.2) ; sinon, alors nous aurons nécessairement $v_p(k|_{I_l}) \leq u$, ce qui implique que :

$$g(k|_{I_l}) = [X_i]^{p^u} F^{v_p(k|_{I_l})} \left(d\left(\left[\underline{X}^{\frac{k|_{I_l \setminus \{i\}}}{p^{-v_p(k|_{I_l})}}}\right]\right) \right) + \left[\underline{X}^{k|_{I_l \setminus \{i\}}}\right] F^{v_p(k|_{I_l})} \left(d\left([X_i]^{p^{u - v_p(k|_{I_l})}}\right) \right).$$

On conclut alors en vertu de (2.2.2.2). La seconde partie de l'énoncé se déduit du lemme 3.1.7.

Les conditions sont de plus nécessaires. Pour le vérifier, si l'on note pour tout sous-ensemble E de $\llbracket 1, n \rrbracket$ la fonction poids ρ_E^u égale à p^u sur E et 0 sinon, il nous suffit de prouver que pour toute fonction poids k telle que $0 \leq k < p^u$ et $v_p(k) = 0$, toute partition I de k , tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \text{Supp}(k)$ et tout sous-ensemble $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \setminus (\text{Supp}(k) \cup \{i\})$ le produit $[X_i]^{p^u} e(k, I) e(\rho_J^u, J)$ est une combinaison linéaire de l'une des formes ci-dessus. D'après le

lemme 3.1.7, si l'on note P l'ensemble des partitions de $J \cup \{i\}$ de taille $\#J$, il existe une application $s: P \rightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ telle que $[X_i]^{p^u} e(\rho_J^u, J) = \sum_{L \in P} s(L) e(\rho_{S \cup \{i\}}^u, L)$. De plus, d'après

(2.2.2.2) si $\#I \geq 1$ on vérifie que :

$$\overline{[X_{\min(\rho_{S \cup \{i\}})}]^{p^u} e(k, I)} \equiv f(k|_{I_0}) \times \left(\prod_{l=1}^{\#I-1} d(f(k|_{I_l})) \right) \times d([X_{\min(\rho_{S \cup \{i\}})}]^{p^u} f(k|_{I_{\#I}})) [p].$$

En réunissant ces deux arguments, on reconnaît alors une combinaison de formes du troisième type dans le cas $\#I \geq 1$, sinon il s'agit d'une combinaison linéaire de formes du deuxième ou troisième type. $\square$

Proposition 3.2.3. *Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $u \in \mathbb{N}^*$, notons $\rho^u: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{N} \left[\frac{1}{p} \right]$ la fonction poids constante. On a :*

$$\overline{W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{frp}, i}} = \prod_{u \in \mathbb{N}^*} \prod_{\substack{(k, I) \in \mathcal{P} \\ v_p(k)=0 \\ 0 \leq k < p^u \\ I_0 \neq \emptyset \\ \#I \leq i}} \prod_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \text{Supp}(k) \\ \#J = i - \#I}} e \left(\frac{k + \rho^u|_J}{p^u}, I \cup J \right) \mathbb{K}[\underline{X}].$$

De plus, pour tout $(l, L) \in \mathcal{P}$ tel que $u(l) \neq 0$ et $L_0 \neq \emptyset$, si en utilisant cette décomposition on écrit $\overline{e(l, L)} = \sum_{\substack{(k, I) \in \mathcal{P} \\ v_p(k)=0 \\ 0 \leq k < p^{u(l)} \\ I_0 \neq \emptyset \\ \#I \leq i}} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \text{Supp}(k) \\ \#J = i - \#I}} e \left(\frac{k + \rho^{u(l)}|_J}{p^{u(l)}}, I \cup J \right) P_{k, I, J}$, où les

$P_{k, I, J} \in \mathbb{K}[\underline{X}]$ pour tout $(k, I) \in \mathcal{P}$ et $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \text{Supp}(k)$ de la somme, alors ces derniers vérifient $\deg(P_{k, I, J}) + p^{-u}|k| + \#J = |l|$.

Démonstration. Il ne s'agit que d'une conséquence directe du lemme 3.2.2, de [16, Proposition 2.3.], de la proposition 2.3.14 et du théorème 2.3.15. La seconde partie de l'énoncé découle du lemme 3.2.2 par récurrence sur $p^{u(l)}|l|$. $\square$

Lemme 3.2.4. *Soit M un groupe abélien tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n M = \{0_M\}$, et N un groupe abélien sans p -torsion. Soit $\varphi: M \rightarrow N$ un morphisme de groupes de tel que le morphisme $\overline{\varphi}: \overline{M} \rightarrow \overline{N}$ induit modulo p soit injectif, alors φ est injectif.*

Démonstration. Soit $m \in M$ tel que $\varphi(m) = 0$. Supposons que $m \neq 0$, par hypothèse sur M il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m' \in M \setminus pM$ tel que $m = p^n m'$. On a $\varphi(m) = p^n \varphi(m') = 0$, donc

puisque N n'a pas de p -torsion cela signifie que $\varphi(m') = 0$. Or cela implique également que $\overline{\varphi}(\overline{m}') = 0$ donc que $\overline{m}' = 0$ par injectivité modulo p . Cela contredit l'hypothèse que $m' \notin pM$, donc $m = 0$ et la fonction est injective. $\square$

Proposition 3.2.5. *Le morphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas $t_{\widetilde{\text{Frob}}} : \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ est injectif et a pour image $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int}}$. De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $t_{\widetilde{\text{Frob}}}(X_i) = [X_i]$.*

Démonstration. Il s'agit de [15, Section 4.2.] et de [28, 0. (1.3.18)]. $\square$

Proposition 3.2.6. *Le morphisme $t_F : \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$ est injectif, ainsi que sa réduction modulo p . De plus si $\overline{R} = \mathbb{K}[\underline{X}]$ le morphisme $v_F : \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$ est à valeurs dans $\text{Fil}^1 W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$.*

Démonstration. Modulo p , le morphisme devient $\overline{t}_F : \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}} \rightarrow \overline{W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}}$. D'après le théorème 2.2.5 $W_1 \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}} \cong \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$, donc on obtient une flèche canonique $\overline{W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}} \rightarrow \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$, et en composant cette dernière avec $\overline{t}_F$, on a un endomorphisme $i_F : \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}} \rightarrow \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$. D'après la proposition 2.1.12, ce dernier est uniquement déterminé par le morphisme en degré 0, et par construction de t_F et la proposition 2.2.10 on vérifie qu'il s'agit de $\text{Id}_{\overline{R}}$. Par conséquent, i_F est l'identité, donc $\overline{t}_F$ est injectif et on conclut en utilisant le lemme 3.2.4 et la proposition 2.2.10. $\square$

Proposition 3.2.7. *Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. On a une suite exacte scindée dans la catégorie de $\mathbb{K}[\underline{X}]$ -modules :*

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^i \xrightarrow{\overline{t}_F} \overline{W \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^i} \longrightarrow \overline{W \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{frac}, i}} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. La proposition est une conséquence immédiate de la proposition 3.2.5 lorsque $F = \widetilde{\text{Frob}}$. Sinon, soit $x \in W \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^i$. On a $\overline{v_F(x|_{\text{int}})} \in \overline{W \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{frac}, i}}$ d'après les propositions 3.2.6 et 2.3.14, ce qui nous permet de conclure dans le cas général. $\square$

3.3 Décomposition de l'anneau des vecteurs de Witt surconvergens

Afin de pouvoir obtenir une décomposition semblable à (2.3.17) localement sur une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique positive, ainsi qu'une maîtrise de la surconvergence sur cette décomposition similaire à (3.1.24), il est d'abord nécessaire de pouvoir y parvenir en degré zéro : c'est-à-dire pour les vecteurs de Witt surconvergens. Nous allons donc dans cette section nous intéresser à la décomposition des vecteurs de Witt surconvergens en deux sous-modules, imitant les parties entière et fractionnaire de la situation. Cette décomposition va dépendre du choix du relèvement de Frobenius. Nous

allons pour ce faire commencer par démontrer la décomposition dans le cas d'une algèbre polynomiale, avant de la généraliser en fin de section.

(3.3.1) Dans cette section, nous allons conserver les notations du paragraphe (3.2.1). Nous avons donc en particulier un corps $\mathbb{K}$ parfait de caractéristique p , un entier $n \in \mathbb{N}$ et les anneaux de polynômes $\mathbb{K}[\underline{X}] = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et $W(\mathbb{K})[\underline{X}] = W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n]$. Pour tout $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et toute fonction $k: J \rightarrow \mathbb{N}$, nous conservons l'écriture $\underline{X}^k := \prod_{j \in J} X_j^{k(j)}$.

Nous avons une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative lisse R relevant une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative lisse $\bar{R}$, et $F: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$ un relèvement du Frobenius. Ce relèvement nous fournit un unique morphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas $t_F: \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow W^\dagger \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}$. Nous avons également un relèvement de Frobenius fixé $\widetilde{\text{Frob}}$ sur $W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ nous permettant de définir le morphisme de $W(\mathbb{K})$ -modules $v_F = t_F - t_{\widetilde{\text{Frob}}}$ si $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$.

On rappelle également au lecteur que nous avons défini en (2.5.2) une pseudo-valuation $\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}$ sur $W(\bar{R})$ dépendant des choix de $\varepsilon > 0$, d'un morphisme surjectif de $\mathbb{K}$ -algèbres $\varphi: \mathbb{K}[X_1, \dots, X_m]$, où $m \in \mathbb{N}$, et de $a \in]0, +\infty[^m$. On rappelle aussi que $\mathcal{P}'_0$ a été défini comme le sous-ensemble de $\mathcal{P}_0$ constitué des fonctions poids k telles que $0 \leq k < 1$.

(3.3.2) Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. Par construction de t_F on vérifie immédiatement les formules :

$$\forall x \in W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger, \quad v_F(x) \in V \left(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]) \right), \quad (3.3.2.1)$$

$$\forall x, y \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}, \quad v_F(xy) = v_F(x)v_F(y) + t_{\widetilde{\text{Frob}}}(x)v_F(y) + v_F(x)t_{\widetilde{\text{Frob}}}(y), \quad (3.3.2.2)$$

$$\forall x \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}, \quad v_F(x^p) = \sum_{q=1}^p \binom{p}{q} t_{\widetilde{\text{Frob}}}(x)^{p-q} v_F(x)^q. \quad (3.3.2.3)$$

(3.3.3) Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. Soit $a := (a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in]0, +\infty[^n$. Une conséquence de (3.3.2.1) et de $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}$ est que l'on peut toujours prendre $\varepsilon > 0$ suffisamment petit afin d'avoir :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(v_F(X_i)) \geq \frac{3}{4} - \varepsilon a_i.$$

En fait, quel que soit $\eta > 0$ on peut même trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(v_F(X_i)) \geq 1 - \eta$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ici, afin d'éviter la prolifération des variables dans la suite de la rédaction, nous considérons η comme étant égal à $\frac{3}{4}$; mais le mathématicien ayant besoin d'une version plus fine des propositions ci-dessous pourra remplacer cette constante par une autre de sa convenance.

Proposition 3.3.4. *Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. Soient l une fonction poids à valeurs entières, et $a := (a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in]0, +\infty[^n$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$ on a :*

$$\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(v_F(\underline{X}^l)) \geq \frac{3}{4} - \varepsilon \sum_{i=1}^n a_i l_i.$$

Démonstration. D'après (3.3.3), on peut toujours trouver $\delta > 0$ tel que tout $\varepsilon \in]0, \delta]$ vérifie :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(v_F(X_i)) \geq \frac{3}{4} - \varepsilon a_i.$$

Considérons de tels δ et ε .

Nous allons démontrer le lemme par récurrence sur $|l| \in \mathbb{N}$. Pour $|l| \leq 1$, il n'y a rien à faire. Supposons donc que le lemme est vérifié pour toutes les fonctions poids l' à valeurs entières telles que $|l'| \leq k \in \mathbb{N}^*$. Soient l et l' deux fonctions poids à valeurs entières telle que $|l'| = |l| - 1 = k$ et que $l - l'$ soit à valeurs dans $\mathbb{N}$; en particulier, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $l_i = l'_i + 1$. D'après (3.3.2.2) et la proposition 3.2.5, on a $v_F(\underline{X}^l) = v_F(\underline{X}^{l'} X_i) = v_F(\underline{X}^{l'}) (v_F(X_i) + [X_i]) + [\underline{X}^{l'}] v_F(X_i)$. Puisque $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}$ est une pseudo-valuation, on vérifie l'inégalité suivante qui démontre le lemme :

$$\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(v_F(\underline{X}^l)) \geq \min \left\{ \frac{3}{4} - \varepsilon \sum_{i=1}^n a_i l'_i - \varepsilon a_i, -\varepsilon \sum_{i=1}^n a_i l'_i + \frac{3}{4} - \varepsilon a_i \right\}.$$

□

Corollaire 3.3.5. *Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. En employant la proposition 3.2.5, identifications $\Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1}$ et $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, 1}$ en tant que $W(\mathbb{K})$ -modules. Soit $a \in]0, +\infty[$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$ on a :*

$$\forall x \in W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger, \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(v_F(x)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(x) + \frac{3}{4}.$$

Démonstration. On peut écrire $x \in W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ comme une série $x = \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ u(k)=0}} \eta_k \underline{X}^k$, où les

$\eta_k \in W(\mathbb{K})$ pour toute fonction poids $k \in \mathcal{P}_0$ à valeurs entières. D'après la proposition 3.3.4 et puisque $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}$ est une pseudo-valuation, on peut vérifier pour tout sous-ensemble fini $S \subset \{k \in \mathcal{P}_0 \mid u(k) = 0\}$ les inégalités :

$$\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a} \left(v_F \left(\sum_{k \in S} \eta_k \underline{X}^k \right) \right) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a} \left(\sum_{k \in S} \eta_k \underline{X}^k \right) + \frac{3}{4} \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(x) + \frac{3}{4}.$$

On conclut alors car la convergence p -adique de la série implique sa convergence V -adique, et par (2.5.2.3). □

(3.3.6) Supposons qu'il existe un morphisme étale de $\mathbb{K}$ -algèbres $\psi: \mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \overline{R}$. D'après [44, 0EBS], le diagramme ci-dessous est un carré co-cartésien dans la catégorie des $\mathbb{K}[\underline{X}]$ -algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\underline{X}] & \xrightarrow{\text{Frob}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}} & \mathbb{K}[\underline{X}] \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \overline{R} & \xrightarrow{\text{Frob}_{\overline{R}}} & \overline{R} \end{array}.$$

En particulier, puisque $\mathbb{K}$ est un corps parfait on a un isomorphisme de $\mathbb{K}[\underline{X}]$ -algèbres $\overline{R} \cong \bigoplus_{\substack{k \in \mathcal{P}'_0 \\ u(k) \leq 1}} \overline{R} \otimes_{\mathbb{K}[\underline{X}]} \underline{X}^{pk} \text{Frob}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}(\mathbb{K}[\underline{X}])$, où le terme $\overline{R} \otimes_{\mathbb{K}[\underline{X}]} \text{Frob}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}(\mathbb{K}[\underline{X}])$ correspond à l'image du Frobenius.

On définit $G_\psi := \{\psi(f(k)) \in W^\dagger(\overline{R}) \mid k \in \mathcal{P}'_0, u(k) \neq 0\}$, et pour tout entier naturel $l \in \mathbb{N}^*$ nous noterons $G_{\psi,l} := \{\psi(f(k)) \in G_\psi \mid u(k) = l\}$. Définissons enfin le $R^\dagger$ -sous module de $W^\dagger(\overline{R})$:

$$G_\psi^\dagger := \left\{ \sum_{g \in G_\psi} t_F(r_g)g \in W^\dagger(\overline{R}) \mid \forall g \in G_\psi, r_g \in R^\dagger \right\}.$$

La situation exposée dans le paragraphe ci-dessus est celle à laquelle on peut se ramener localement sur une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Le $R^\dagger$ -sous module $G_\psi^\dagger$ correspond quant à lui à la partie fractionnaire des vecteurs de Witt dans la situation classique. Le but des prochaines propositions est de démontrer que ce dernier est un facteur d'une décomposition en somme directe de $R^\dagger$ -modules de $W^\dagger(\overline{R})$.

Lemme 3.3.7. *Si l'on reprend les notations de (3.3.6), alors le morphisme de $\overline{R}$ -modules $\overline{G}_\psi^\dagger \rightarrow \overline{W}^\dagger(\overline{R})$ induit modulo p par l'injection $G_\psi^\dagger \rightarrow W^\dagger(\overline{R})$ est injectif.*

Démonstration. Soit $x = \sum_{g \in G_\psi} t_F(r_g)g \in G_\psi^\dagger$, où tous les $r_g \in R^\dagger$ pour tout $g \in G_\psi$. Supposons que x est divisible par p dans $W^\dagger(\overline{R})$, nous allons en déduire que pour tout $g \in G_\psi$ on a $p \mid r_g$, ce qui démontrera le lemme. Pour ce faire, nous allons démontrer par récurrence sur $l \in \mathbb{N}^*$ que pour $g \in G_{\psi,l}$ on a $p \mid r_g$. Pour le cas $l = 1$, remarquons que $x = \sum_{g \in G_{\psi,1}} t_F(r_g)g + \sum_{g \in G_\psi \setminus G_{\psi,1}} t_F(r_g)g$. De plus, par définition de l'ensemble $G_{\psi,1}$ et d'après (1.1.10.1) on a nécessairement $\sum_{g \in G_\psi \setminus G_{\psi,1}} t_F(r_g)g \in V^2(W^\dagger(\overline{R}))$. On déduit alors de

$$(1.1.10.2) \text{ que l'on a } \left(\sum_{g \in G_{\psi,1}} t_F(r_g)g \right)_1 = \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ 0 \leq k < 1 \\ u(k)=1}} \overline{r_{\psi(f(k))}}^p \psi(\underline{X}^{pk}) \in \text{Im}(\text{Frob}_{\overline{R}}).$$

Cela implique nécessairement que les $\overline{r_{\psi(f(k))}}$ dans la somme sont tous nuls d'après la discussion en (3.3.6), ce qui démontre le cas $l = 1$. On déduit la récurrence de la même manière, mais en se ramenant à la somme $x = \sum_{g \in G_{\psi,l}} t_F(r_g)g + \sum_{g \in \bigcup_{i=l+1}^{+\infty} G_{\psi,i}} t_F(r_g)g$ qui est divisible par p

par hypothèse de récurrence. $\square$

Lemme 3.3.8. *Dans la situation (3.3.6), le morphisme $\Pi: G_\psi^\dagger \rightarrow W^\dagger(\overline{R})/t_F(R^\dagger)$ de $R^\dagger$ -modules induit par la projection canonique $W^\dagger(\overline{R}) \rightarrow W^\dagger(\overline{R})/t_F(R^\dagger)$ est injectif.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif de $\overline{R}$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & G_{\psi}^{\dagger} & & & & \\
 & \swarrow s & \downarrow & \searrow \overline{\Pi} & & & \\
 0 & \longrightarrow & \overline{R} & \xrightleftharpoons{\overline{t}_F} & W^{\dagger}(\overline{R}) & \longrightarrow & W^{\dagger}(\overline{R})/\overline{t}_F(\overline{R}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

La ligne du bas correspondant à la suite exacte scindée (3.2.1.1) et le morphisme vertical étant injectif d'après le lemme 3.3.7, $\overline{\Pi}$ est alors injectif si l'on démontre que $s = 0$. Or, le morphisme de projection $W^{\dagger}(\overline{R}) \rightarrow \overline{R}$ correspond à l'association à un représentant de classe $w \in W^{\dagger}(\overline{R})$ l'élément $w_0 \in \overline{R}$ (ce dernier étant indépendant du choix du représentant). Or, par définition de $G_{\psi}^{\dagger}$ on déduit de (1.1.10.1) que $G_{\psi}^{\dagger} \subset V(W^{\dagger}(\overline{R}))$ ce qui implique que $s = 0$, donc que $\overline{\Pi}$ est injectif, et donc que Π est injectif d'après le lemme 3.2.4. $\square$

Proposition 3.3.9. *Plaçons nous dans les hypothèses du paragraphe (3.3.6). Considérons un élément $x = \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ 0 \leq k < 1}} t_F(r_k) \psi(f(k)) \in W^{\dagger}(\overline{R})$, où $r_k \in R^{\dagger}$ pour toute fonction poids $k \in \mathcal{P}_0$ telle que $0 \leq k < 1$. Alors pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a :*

$$x \in V^l(W^{\dagger}(\overline{R})) \iff \forall k \in \mathcal{P}_0, p^{\max\{l-u(k), 0\}} \mid r_k.$$

Démonstration. La condition est clairement suffisante d'après (1.1.10.1) et (1.1.10.2). Démontrons l'implication par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$, le cas $l = 0$ étant évident. Supposons le lemme démontré pour un certain $l \in \mathbb{N}$, et que $x = \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ 0 \leq k < 1}} t_F(r_k) \psi(f(k)) \in V^{l+1}(W^{\dagger}(\overline{R}))$.

Par hypothèse de récurrence, nous avons $r_k = p^{\max\{l-u(k), 0\}} r'_k$ pour tout k de la série, où les $r'_k \in R^{\dagger}$. Cela implique que $x_l = \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ 0 \leq k < 1 \\ u(k) \leq l}} \overline{r'_k}^{p^l} \psi(\underline{X}^{p^l k}) = 0$ d'après (1.1.10.1) et (1.1.10.2).

En particulier on en déduit que $\overline{r'_k} = 0$ pour tout k de la somme, ce qui démontre la proposition. $\square$

La prochaine proposition est le théorème de structure des vecteurs de Witt surconvergens dans le cas où $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. Sa démonstration est nécessaire avant de passer à la situation du paragraphe (3.3.6). Ensuite, la preuve se fait en deux étapes, assez techniques. La proposition 3.3.11 est d'abord démontrée afin de pouvoir se maîtriser la surconvergence si R est libre sur un certain anneau commutatif, ce qui nous permet de démontrer le résultat général : c'est la proposition 3.3.12 (énoncée de manière moins technique dans le corollaire 3.3.13).

Proposition 3.3.10. *Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. Soit $a = (a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in]0, +\infty[^n$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$ et tout $w \in W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])$, il existe une unique fonction $r : \mathcal{P}'_0 \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ telle que l'on vérifie :*

$$w = \sum_{k \in \mathcal{P}'_0} t_F(r_k) f(k),$$

$$\forall k \in \mathcal{P}'_0, \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(t_F(r_k) f(k)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(w).$$

Démonstration. L'unicité d'une telle fonction est une conséquence directe de la proposition 3.3.9, il ne reste donc qu'à prouver l'existence. Pour tout $P(\underline{X}) = \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ u(k)=0}} a_k \underline{X}^k \in \mathbb{K}[\underline{X}]$, où $a_k \in \mathbb{K}$ pour toute fonction poids $k \in \mathcal{P}_0$ à valeurs entières, on notera :

$$u_F(P(\underline{X})) := t_F \left(\sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ u(k)=0}} [a_k] \underline{X}^k \right).$$

Soit $w \in W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])$. On déduit de la proposition 3.3.4 qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour $\varepsilon \in]0, \delta]$ on ait $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(u_F(w_0)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(w)$. Par conséquent, on a $w^{(1)} := w - u_F(w_0) \in V(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]))$ et $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(w^{(1)}) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(w)$.

Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe $w^{(l)} \in V^l(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]))$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$ on ait :

$$\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(w^{(l)}) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(w),$$

et que pour tout $k \in \mathcal{P}'_0$ telle que $u(k) < l$ il existe $r_k^{(l)} \in W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ tel que :

$$\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a} \left(V([\underline{X}^k]) t_F \left(r_k^{(l)} \right) \right) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(w),$$

$$w - w^{(l)} = \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}'_0 \\ u(k) < l}} t_F(r_k^{(l)}) f(k).$$

Nous venons de vérifier l'existence de tels éléments pour $l = 1$. Comme $\mathbb{K}$ est parfait, on peut noter de manière unique $w^{(l)}_l = \sum_{i=0}^l \text{Frob}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}^i(P_{l,i}(\underline{X}))$, où les $P_{l,i}(\underline{X}) \in \mathbb{K}[\underline{X}]$ pour tout $i \in \llbracket 0, l \rrbracket$ et aucun monôme des $P_{l,i}(\underline{X})$ pour $l \neq i$ n'est dans l'image du Frobenius. En particulier, pour tout $i \in \llbracket 0, l-1 \rrbracket$ on obtient une écriture de la forme $P_{l,i}(\underline{X}) = \sum_{\substack{j \in \mathcal{P}'_0 \\ 0 < u(j) \leq l-i}} \underline{X}^{p^{l-i}j} \text{Frob}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}^{l-i}(P_{l,i,j}(\underline{X}))$, où les $P_{l,i,j}(\underline{X}) \in \mathbb{K}[\underline{X}]$ vérifient d'après

(2.5.2) que $l - \varepsilon v_a(P_{l,i,j}) - \varepsilon \sum_{t=1}^n a_t j_t \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(w)$ pour tout $i \in \llbracket 0, l-1 \rrbracket$ et toute fonction poids $j \in \mathcal{P}'_0$ telle que $0 < u(j) \leq l - i$. On a aussi $l - \varepsilon v_a(P_{l,l}) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(w)$. Nous pouvons alors trouver $w^{(l+1)} \in V^{l+1}(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]))$ tel que :

$$w^{(l)} - w^{(l+1)} = p^l u_F(P_{l,l}(\underline{X})) + \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{\substack{j \in \mathcal{P}'_0 \\ 0 < u(j) \leq l-i}} p^i V^{l-i}([\underline{X}^{p^{l-i}j}]) u_F(P_{l,i,j}(\underline{X})).$$

D'après la proposition 3.3.4 et (2.5.2.4) on peut alors conclure par récurrence sur l . $\square$

Proposition 3.3.11. *Soit L une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative lisse. Supposons que $\bar{R}$ soit une L -algèbre étale finie, libre en tant que L -module, de base $(\bar{r}_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ avec $m \in \mathbb{N}$. Alors il existe des éléments $(r_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in R^{\dagger m}$ relevant cette base tels que $W^\dagger(\bar{R}) = \bigoplus_{i=1}^m t_F(r_i) W^\dagger(L)$*

en tant que $W^\dagger(L)$ -module.

Plus précisément, si $\varphi: \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{m'}, Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow \bar{R}$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{K}$ -algèbres pour un certain $m' \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(Y_i) = \bar{r}_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et vérifiant $\varphi(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{m'}]) = L \subset \bar{R}$, et si $a = (a_i)_{i \in \llbracket 1, m+m' \rrbracket} \in]0, +\infty[^{m+m'}$ satisfait les conditions du lemme 2.5.3. Alors il existe $\delta > 0$ et $C \leq 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$, tout $u \in \mathbb{N}$ et tout $w \in V^u(W^\dagger(\bar{R}))$ tel que $\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) \neq -\infty$, il existe un unique m -uplet $(w(i))_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in W^\dagger(L)^m$ tel que :

$$w = \sum_{i=1}^m t_F(r_i) w(i),$$

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \gamma_{\varepsilon, \varphi|_{K[X_1, \dots, X_{m'}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(w(i)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) + \varepsilon C,$$

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, w(i) \in V^u(W^\dagger(L)).$$

Démonstration. Utilisons le lemme 1.2.15 afin de trouver un relèvement du Frobenius $G: W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{m'}, Y_1, \dots, Y_m]^\dagger \rightarrow W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{m'}, Y_1, \dots, Y_m]^\dagger$ ainsi qu'un relèvement surjectif $\varphi^\dagger: W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{m'}, Y_1, \dots, Y_m]^\dagger \rightarrow R^\dagger$ tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{m'}, Y_1, \dots, Y_m]^\dagger & \xrightarrow{G} & W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{m'}, Y_1, \dots, Y_m]^\dagger \\ \downarrow \varphi^\dagger & & \downarrow \varphi^\dagger \\ R^\dagger & \xrightarrow{F} & R^\dagger \end{array}.$$

De plus par functorialité [28, 0. (1.3.19)] et la proposition 3.2.6, la restriction vérifie que $W(\varphi)|_{W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{m'}, Y_1, \dots, Y_m]^\dagger} = \varphi^\dagger$. D'après la proposition 2.5.6, $W^\dagger(\bar{R}) = \bigoplus_{i=1}^m [\bar{r}_i] W^\dagger(L)$.

Pour $w \in W^\dagger(\overline{R})$, on notera

$$w = \sum_{i=1}^m [\overline{r_i}] \alpha(w, i)$$

l'unique écriture avec $\alpha(w, i) \in W^\dagger(L)$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. D'après cette même proposition, il existe $\delta > 0$ et $C \leq 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$, pour tout $w \in W^\dagger(\overline{R})$ et tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on vérifie :

$$\gamma_{\varepsilon, \varphi|_{K[X_1, \dots, X_{m'}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(\alpha(w, i)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) + \varepsilon C \quad (3.3.11.1)$$

Retenons un tel δ et fixons $\varepsilon \in]0, \delta]$. Quitte à réduire δ , on peut supposer d'après (3.3.2.1) que :

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(W(\varphi)(v_G(Y_i))) \geq -\varepsilon C. \quad (3.3.11.2)$$

Utilisons enfin la proposition 3.2.5 afin d'identifier $W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{m'}, Y_1, \dots, Y_m]^\dagger$ à un sous-ensemble de $W^\dagger(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{m'}, Y_1, \dots, Y_m])$. Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on pose :

$$r_i := \varphi^\dagger(Y_i).$$

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on notera :

$$\beta(l) := w - \sum_{i=1}^m t_F(r_i)w(l, i).$$

Soient $w \in W^\dagger(\overline{R})$ et $\varepsilon \in]0, \delta]$ tel que $\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) \neq -\infty$. Soit $l \in \mathbb{N}$. Pour tout $l' \in \llbracket 0, l \rrbracket$, on suppose donnée une fonction $w(l', \bullet) : \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow W(L)$ telle que l'on vérifie :

$$\forall l' \in \llbracket 1, l \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, w(l', i) - w(l' - 1, i) \in V^{l'-1}(W^\dagger(L)), \quad (3.3.11.3)$$

$$\beta(l) \in V^l(W^\dagger(L)), \quad (3.3.11.4)$$

$$\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(\beta(l)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w), \quad (3.3.11.5)$$

$$\forall l' \in \llbracket 1, l \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \gamma_{\varepsilon, \varphi|_{K[X_1, \dots, X_{m'}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(w(l', i)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) + \varepsilon C. \quad (3.3.11.6)$$

Remarquons que pour $l = 0$, la fonction nulle convient. En vertu de la proposition 1.1.17 et de (3.3.11.4), on vérifie $\alpha(\beta(l), i) \in V^l(W^\dagger(L))$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$; on définit alors :

$$w(l+1, i) := w(l, i) + \alpha(\beta(l), i).$$

Ces éléments vérifient trivialement (3.3.11.3) au rang $l + 1$. Nous avons en outre les égalités ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\beta(l+1) &= w - \sum_{i=1}^m t_F(r_i)(w(l, i) + \alpha(\beta(l), i)) \\
&= w - \sum_{i=1}^m t_F(r_i)w(l, i) - \sum_{i=1}^m ([\overline{r_i}] + W(\varphi)(v_G(Y_i))) \alpha(\beta(l), i) \\
&= w - \sum_{i=1}^m t_F(r_i)w(l, i) - \beta(l) + \sum_{i=1}^m W(\varphi)(v_G(Y_i)) \alpha(\beta(l), i) \\
\beta(l+1) &= \sum_{i=1}^m W(\varphi)(v_G(Y_i)) \alpha(\beta(l), i).
\end{aligned}$$

On déduit alors de (3.3.2.1) et (3.3.11.4) que $\beta(l+1) \in V^{l+1}(W^\dagger(L))$: c'est la condition (3.3.11.4). Pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, d'après (3.3.11.1) et (3.3.11.5) on a :

$$\gamma_{\varepsilon, \varphi|_{K[X_1, \dots, X_{m'}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(\alpha(\beta(l), i)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) + \varepsilon C.$$

Il découle des calculs ci-dessus, de (3.3.11.2), ainsi que du fait que $\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}$ est une pseudo-valuation (voir (2.5.2)) que $\gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(\beta(l+1)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w)$: il s'agit de la condition (3.3.11.5). Enfin, on déduit de (3.3.11.6) et de la formule ci-dessus que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on a $\gamma_{\varepsilon, \varphi|_{K[X_1, \dots, X_{m'}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(w(l+1, i)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) + \varepsilon C$: c'est la dernière condition (3.3.11.6).

On obtient alors par convergence V -adique des vecteurs $w(i) := \lim_{l \rightarrow +\infty} w(l, i)$ pour chaque $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Par construction, on a $\gamma_{\varepsilon, \varphi|_{K[X_1, \dots, X_{m'}]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}(w(i)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(x) + \varepsilon C$ ainsi que $x = \sum_{i=1}^m t_F(r_i) w(i)$. L'unicité de ces vecteurs de Witt provient de (3.3.2.1), de la proposition 2.5.6 et de la proposition 1.1.17. Enfin, le fait que les $w(i) \in V^u(W^\dagger(\overline{R}))$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ dès lors que $w \in V^u(W^\dagger(\overline{R}))$ pour tout $u \in \mathbb{N}$ est une conséquence immédiate de la construction des $(w(i))_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ et de la proposition 1.1.17. $\square$

Proposition 3.3.12. *En suivant les notations de (3.3.6), si l'on suppose que ψ se factorise en $\mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \mathbb{K}[\underline{X}]_P \rightarrow \overline{R}$, où la première flèche est le morphisme canonique de localisation pour un certain $P \in \mathbb{K}[\underline{X}]$ et la seconde est un morphisme étale fini faisant de $\overline{R}$ un $\mathbb{K}[\underline{X}]_P$ -module libre, alors on a une suite exacte scindée de $R^\dagger$ -modules :*

$$0 \longrightarrow R^\dagger \xrightarrow{t_F} W^\dagger(\overline{R}) \xrightarrow{\rho_F} G_\psi^\dagger \longrightarrow 0.$$

De plus, l'image de $G_\psi^\dagger$ en projetant modulo p dans $\overline{W}^\dagger(\overline{R})$ est $I^\dagger(\overline{R})$.

On peut préciser ce résultat comme ceci : pour un entier $m \in \mathbb{N}$ fixé, nous écrirons $\mathbb{K}[\underline{X}] := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y, Z_1, \dots, Z_m]$ et $W(\mathbb{K})[\underline{X}] := W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n, Y, Z_1, \dots, Z_m]$. Si $(\bar{b}_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est une base de $\bar{R}$ en tant que $\mathbb{K}[\underline{X}]_P$ -module, si $\varphi: \mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \bar{R}$ est le morphisme surjectif de $\mathbb{K}[\underline{X}]$ -algèbres tel que $\varphi(Y) = P^{-1}$ et $\varphi(Z_i) = \bar{b}_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, si l'on emploie le lemme 1.2.15 afin d'obtenir un relèvement du Frobenius $G: W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ compatible avec $F: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$, et si $a \in]0, +\infty[^{n+1+m}$ vérifie les conditions du lemme 2.5.3, alors pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u \in \mathbb{N}$ et tout $w \in V^u(W^\dagger(\bar{R}))$ il existe une fonction $r: \mathcal{P}'_0 \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ telle que l'on vérifie :

$$w = \sum_{k \in \mathcal{P}'_0} t_F(W(\varphi)(r_k))\psi(f(k)),$$

$$\forall \varepsilon \in]0, \delta], \forall k \in \mathcal{P}'_0, \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(t_G(r_k)f(k)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) - \eta,$$

$$\forall k \in \mathcal{P}'_0, p^{\max\{u-u(k), 0\}} \mid r_k.$$

Démonstration. On notera $\mathcal{P}_0^{X'}$ l'ensemble des fonctions poids k à $n+1+m$ variables vérifiant $0 \leq k < 1$, on identifiera $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, 0}$ avec $W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ en utilisant la proposition 3.2.5. D'après la proposition 3.3.10, quel que soit $x \in W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])$ il existe une unique fonction $r(x): \mathcal{P}_0^{X'} \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ telle que :

$$x = \sum_{k \in \mathcal{P}_0^{X'}} r(x)_k f(k). \quad (3.3.12.1)$$

Nous allons dans cette preuve considérer $\varepsilon > 0$ vérifiant les conditions suivantes : on suppose que $\varepsilon \leq \delta$, où δ est plus petit que ceux des énoncés du corollaire 3.3.5 et des propositions 3.3.10 et 3.3.11, dont nous conservons de cette dernière la constante $C \leq 0$, ainsi qu'une famille $(b_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in R^{\dagger^m}$ relevant la base $(\bar{b}_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$; en particulier, on vérifie :

$$\forall x \in W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger, \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(t_G(x)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(x), \quad (3.3.12.2)$$

$$\forall x \in W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger, \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(v_G(x)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(x), \quad (3.3.12.3)$$

$$\forall x \in W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]), \forall k \in \mathcal{P}_0^{X'}, \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(r(x)_k f(k)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(x). \quad (3.3.12.4)$$

Enfin, on fixera une famille $(\beta_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in W(\mathbb{K})[\underline{X}]^{\dagger^m}$ d'antécédents par le morphisme $W(\varphi)$ de $(b_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$. On suppose en outre que la constante

$$\zeta := \min\{\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\beta_i) \mid i \in \llbracket 1, m \rrbracket\} \quad (3.3.12.5)$$

vérifie :

$$\varepsilon(v_a(P) - a_{n+1} + C) + \zeta \geq -\frac{\eta}{4}. \quad (3.3.12.6)$$

Soient $u \in \mathbb{N}$ et $w \in V^u(W^\dagger(\overline{R}))$. On peut trouver $\rho(0) \in V^u(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]))$ tel que $W(\varphi)(\rho(0)) = w$ et $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w) - \frac{\eta}{2}$. Soit un entier $s \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $s' \in \llbracket 0, s \rrbracket$ est donnée une application $w(s')_\bullet : \mathcal{P}'_0 \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ ainsi que $\rho(s') \in W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])$ telles que pour

$$w(s') := \sum_{k \in \mathcal{P}'_0} t_G(w(s')_k) f(k) \quad (3.3.12.7)$$

et pour v_a définie en (2.5.2), les conditions ci-dessous soient vérifiées :

$$\forall s' \in \llbracket 0, s \rrbracket, \forall k \in \mathcal{P}'_0, \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(t_G(w(s')_k) f(k)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) - \frac{\eta}{2}, \quad (3.3.12.8)$$

$$\forall s' \in \llbracket 0, s \rrbracket, \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(s')) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)), \quad (3.3.12.9)$$

$$\forall s' \in \llbracket 0, s \rrbracket, W(\varphi)(w(s') + \rho(s')) = w, \quad (3.3.12.10)$$

$$\forall s' \in \llbracket 1, s \rrbracket, w(s') - w(s' - 1) \in V^{s'-1}(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])), \quad (3.3.12.11)$$

$$\forall s' \in \llbracket 1, s \rrbracket, w(s') \in V^u(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])), \quad (3.3.12.12)$$

$$\rho(s') \in V^{\max\{s', u\}}(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])). \quad (3.3.12.13)$$

Remarquons que la fonction nulle et $\rho(0)$ vérifient ces conditions pour $s = 0$. Supposons que ces conditions soient vérifiées pour un certain $s \in \mathbb{N}$ et construisons $w(s+1)$ et $\rho(s+1)$ permettant de les vérifier également au rang $s+1$.

Notons $\mathbb{K}[\underline{X}, Y] := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y]$, et $\mathcal{P}_0^{\underline{X}, Y'}$ l'ensemble des fonctions poids k à $n+1$ variables vérifiant $0 \leq k < 1$. Pour toute fonction poids $k \in \mathcal{P}_0^{\underline{X}, Y'}$, nous allons considérer $f'(k) := V^{u(k)} \left(\left[\underline{X}^{k|_{[1, n]}} P p^{u(k)(1-k_{n+1})} \right] \right)$. D'après (1.1.9), et puisque l'on a $\varphi(Y) = P^{-1}$, on vérifie que :

$$W(\varphi)(f(k)) = W(\varphi)(f'(k)[Y]), \quad (3.3.12.14)$$

$$\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(f'(k)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(f(k)) + \varepsilon v_a(P). \quad (3.3.12.15)$$

Posons :

$$D \in \left[-\frac{\eta}{4}, 0 \right]. \quad (3.3.12.16)$$

La proposition 3.3.11 affirme en vertu de (3.3.12.13) l'existence pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ de vecteurs de Witt $\rho(s, i) \in V^{\max\{s, u\}}(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}, Y]))$ tels que :

$$\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}, Y]}, (a_j)_{j \in \llbracket 1, m+1 \rrbracket}}(\rho(s, i)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(s)) + \varepsilon C + D, \quad (3.3.12.17)$$

$$W(\varphi)(\rho(s)) = \sum_{i=1}^n t_F(b_i) W(\varphi)(\rho(s, i)). \quad (3.3.12.18)$$

Puisque $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}$ est une valuation (voir (2.5.2)), on obtient pour tout $k \in \mathcal{P}_0^{\underline{X}, Y'}$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(r(\rho(s, i))_k f'(k)[Y]) &\geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(r(\rho(s, i))_k) + \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(f'(k)) - \varepsilon a_{n+1} \\ &\stackrel{(3.3.12.4)}{\geq} \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(s, i)) + \varepsilon(v_a(P) - a_{n+1}) \\ &\stackrel{(3.3.12.9)}{\geq} \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) + \varepsilon(v_a(P) - a_{n+1} + C) + D. \end{aligned} \quad (3.3.12.19)$$

Quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous allons considérer la série V -adiquement convergente $c(s, i) := \sum_{k \in \mathcal{P}_0^{\underline{X}, Y'}} r(\rho(s, i))_k f'(k)[Y]$. Par construction, on vérifie :

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(c(s, i)) &\stackrel{(3.3.12.19)}{\geq} \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) + \varepsilon(v_a(P) - a_{n+1} + C) + D, \quad (3.3.12.20) \\ W(\varphi)(c(s, i)) &\stackrel{(3.3.12.1)}{=} \stackrel{(3.3.12.14)}{=} W(\varphi)(\rho(s, i)), \\ \forall k \in \mathcal{P}_0^{\underline{X}'} \setminus \mathcal{P}'_0, \quad r(c(s, i))_k &= 0. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a d'après la proposition 3.3.9 et (3.3.12.13) :

$$c(s, i) \in V^{\max\{s, u\}}(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}, Y])). \quad (3.3.12.21)$$

Pour toute fonction poids $k \in \mathcal{P}'_0$, on définit :

$$w(s+1)_k := w(s)_k + \sum_{i=1}^n \beta_i r(c(s, i))_k. \quad (3.3.12.22)$$

Puisque $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}$ est une valuation, pour toute fonction poids $k \in \mathcal{P}'_0$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$\begin{aligned}
\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\beta_i r(c(s, i))_k f(k)) &\stackrel{(3.3.12.4)}{\geq} \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(c(s, i)) + \zeta \\
&\stackrel{(3.3.12.5)}{\geq} \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) + \varepsilon(v_a(P) - a_{n+1} + C) + D + \zeta \\
&\stackrel{(3.3.12.6)}{\geq} \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) - \frac{\eta}{2}. \\
\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\beta_i r(c(s, i))_k f(k)) &\stackrel{(3.3.12.16)}{\geq} \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) - \frac{\eta}{2}.
\end{aligned} \tag{3.3.12.23}$$

Ce qui donne d'après (3.3.12.2) et (3.3.12.8) :

$$\forall k \in \mathcal{P}'_0, \quad \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(t_G(w(s+1)_k) f(k)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) - \frac{\eta}{2}.$$

Nous avons donc vérifié la condition (3.3.12.8) au rang $s+1$. On peut définir les séries V -adiquement convergentes :

$$\begin{aligned}
w(s+1) &:= \sum_{k \in \mathcal{P}'_0} t_G(w(s+1)_k) f(k) \stackrel{(3.3.12.7)}{=} w(s) + \sum_{k \in \mathcal{P}'_0} t_G \left(\sum_{i=1}^n \beta_i r(c(s, i))_k \right) f(k), \\
\rho(s+1) &:= \sum_{i=1}^n v_G(\beta_i) c(s, i) - \sum_{k \in \mathcal{P}'_0} v_G \left(\sum_{i=1}^n \beta_i r(c(s, i))_k \right) f(k).
\end{aligned}$$

Il découle de (3.3.12.3), de (3.3.12.4) et de (3.3.12.23), et du fait que $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}$ est une valuation que :

$$\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(s+1)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) - \frac{\eta}{2}.$$

Nous avons obtenu la condition (3.3.12.9) au rang $s+1$. On a également :

$$\begin{aligned}
&W(\varphi)(w(s+1) + \rho(s+1)) \\
&\stackrel{(3.2.1.2)}{=} W(\varphi) \left(w(s) + \sum_{i=1}^n \left(v_G(\beta_i) c(s, i) + \sum_{k \in \mathcal{P}'_0} \beta_i r(c(s, i))_k f(k) \right) \right) \\
&\stackrel{(3.3.12.1)}{=} W(\varphi) \left(w(s) + \sum_{i=1}^n (v_G(\beta_i) c(s, i) + \beta_i c(s, i)) \right) \\
&\stackrel{(3.2.1.2)}{=} W(\varphi) \left(w(s) + \sum_{i=1}^n t_G(\beta_i) \rho(s, i) \right) \\
&\stackrel{(3.3.12.18)}{=} W(\varphi) (w(s) + \rho(s)) \\
&\stackrel{(3.3.12.10)}{=} w.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que nous avons vérifié la condition (3.3.12.10) au rang $s + 1$. Par (3.3.2.1), (3.3.12.13), (3.3.12.21) et la proposition 3.3.9, nous pouvons également vérifier que :

$$\begin{aligned} w(s+1) - w(s) &\in V^{\max\{s,u\}} \left(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}, Y]) \right), \\ \rho(s+1) &\in V^{\max\{s+1,u\}} \left(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}, Y]) \right). \end{aligned}$$

Ce qui implique les conditions (3.3.12.11), (3.3.12.12) et (3.3.12.13) au rang $s + 1$. Nous avons vérifié toutes les propriétés désirées par récurrence.

Par convergence V -adique, nous pouvons alors définir $\hat{w} := \lim_{s \rightarrow +\infty} w(s)$, et par construction de notre suite nous aurons alors $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\hat{w}) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) - \frac{\eta}{2}$ (utiliser (2.5.2.3)), $W(\varphi)(\hat{w}) = w$ et $\hat{w} \in V^u(W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]))$, ce qui nous donne la troisième formule de l'énoncé par la proposition 3.3.9. De plus, nous pouvons obtenir une écriture de la forme

$$\hat{w} = \sum_{k \in \mathcal{P}'_0} t_G(r_k) f(k)$$

où les $r_k \in W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ pour tout $k \in \mathcal{P}'_0$, et par construction :

$$\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(t_G(r_k) f(k)) \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X}]}, a}(\rho(0)) - \frac{\eta}{2}.$$

En particulier, on obtient la somme $W^\dagger(\bar{R}) = t_F(R^\dagger) + G_\psi^\dagger$, et la décomposition en somme directe découle du lemme 3.3.8.

Enfin, puisque le $R^\dagger$ -module $G_\psi^\dagger \subset V(W^\dagger(\bar{R}))$, l'image de celui-ci en le projetant modulo p dans $\overline{W}^\dagger(\bar{R})$ devra nécessairement être $I^\dagger(\bar{R})$ puisque l'on a une suite exacte scindée (3.2.1.1). $\square$

Corollaire 3.3.13. *Reprenons les notations de la proposition 3.3.12. Alors pour tout $w \in W^\dagger(\bar{R})$, il existe une unique fonction r :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}'_0 & \rightarrow & R^\dagger \\ k & \mapsto & r_k \end{array} \quad \text{telle que l'on vérifie :}$$

$$w = \sum_{k \in \mathcal{P}'_0} t_F(r_k) \psi(f(k)).$$

De plus, ces éléments vérifieront :

$$\forall \varepsilon \in]0, \delta], \forall k \in \mathcal{P}'_0, \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(t_F(r_k) \psi(f(k))) \geq \gamma_{\varepsilon, \varphi, a}(w).$$

Démonstration. On a unicité de l'écriture en série par la proposition 3.3.9. De plus, on sait qu'une telle écriture existe en utilisant la proposition 3.3.12, sachant que l'on peut prendre $\eta > 0$ aussi petit que l'on veut dans cet énoncé. $\square$

3.4 Décomposition en degré strictement positif

Nous entamons ici la démonstration générale du théorème de structure locale du complexe de De Rham-Witt surconvergent d'une variété lisse sur un corps parfait de caractéristique positive. Nous avons dans les sections précédentes développé tous les outils nécessaires à sa preuve. En particulier, la section 3.2 explicitait la structure modulo p du complexe sur une algèbre de polynômes. Nous allons tout d'abord démontrer que cette structure provient d'une unique écriture dans cette situation : c'est la proposition 3.4.6.

On emploie ensuite les résultats obtenus dans la section 3.3, ainsi que des arguments similaires, afin de généraliser ce résultat aux anneaux de la forme requise à l'application de la proposition 3.3.12. De nouveau, cette étape s'avère la plus technique ; cet effort s'avère toutefois fructueux, car on parvient à retrouver les résultats présentés dans la section 3.1 dans ce cadre.

(3.4.1) Dans toute cette section, on fixe un corps $\mathbb{K}$ parfait de caractéristique p , un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et on note $\mathbb{K}[\underline{X}] := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et $W(\mathbb{K})[\underline{X}] := W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n]$. Pour tout $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et toute fonction $k: J \rightarrow \mathbb{N}$, on écrira $\underline{X}^k := \prod_{j \in J} X_j^{k(j)}$. On suppose

également donné un morphisme étale de $\mathbb{K}$ -algèbres $\psi: \mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \overline{R}$, ainsi qu'une $W(\mathbb{K})$ -algèbre lisse R relevant le morphisme structural $\mathbb{K} \rightarrow \overline{R}$, et $F: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$ un relèvement du Frobenius.

Nous conservons les notations des sections précédentes, notamment l'unique morphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas $t_F: \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$ obtenu fonctoriellement à partir de F . Nous avons également un relèvement de Frobenius fixé $\widetilde{\text{Frob}}$ sur $W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ nous permettant de définir le morphisme de $W(\mathbb{K})$ -modules $v_F = t_F - t_{\widetilde{\text{Frob}}}$ si $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. On rappelle également que l'on avait noté $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des fonctions poids.

(3.4.2) Soit $i \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Notons $\rho^u: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \mathbb{N} \left[\frac{1}{p} \right]$ la fonction poids constante. On définit :

$$G(i) := \left\{ e \left(\frac{k + \rho^u|_J}{p^u}, I \cup J \right) \mid \begin{array}{l} u \in \mathbb{N}^*, (k, I) \in \mathcal{P}, J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \text{Supp}(k) \\ v_p(k) = 0, 0 \leq k < p^u, I_0 \neq \emptyset, \#I + \#J = i \end{array} \right\}.$$

Pour tout $e \in G(i)$, on note $(k(e), I(e)) \in \mathcal{P}$ le couple vérifiant $e = e(k(e), I(e))$. Par convention, on note :

$$G(-1) := \emptyset.$$

D'après la proposition 2.3.14, on remarque que si l'on garde les notations du paragraphe (3.3.6) on a $\psi(G(0)) = G_\psi$.

Proposition 3.4.3. *Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{frp}, i}$ il existe une application $r: \begin{matrix} G(i) \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger \\ e \mapsto r_e \end{matrix}$ telle que l'on ait :*

$$\begin{aligned} x &\equiv \sum_{e \in G(i)} t_F(r_e) e[p], \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \forall e \in G(i), \quad \zeta_\varepsilon(t_F(r_e)) &\geq \zeta_\varepsilon(x) - \zeta_\varepsilon(e), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \forall e \in G(i), \quad \zeta_\varepsilon(t_F(r_e)e) &\geq \zeta_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Démonstration. On considère l'application $\sigma: \sum_{\substack{j \in \mathcal{P}_0 \\ u(j)=0}} k_j \underline{X}^j \mapsto \sum_{\substack{j \in \mathcal{P}_0 \\ u(j)=0}} [k_j] \underline{X}^j$. On remarque

que pour tout $P \in \mathbb{K}[\underline{X}]$ et tout $\varepsilon > 0$ on a $\gamma_\varepsilon(\sigma(P)) \geq -\varepsilon \deg(P)$, où l'on a identifié $W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ à un sous-ensemble de $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ par la proposition 3.2.5.

Supposons ε assez petit pour vérifier la condition du corollaire 3.3.5, ou plus précisément pour tout $P \in \mathbb{K}[\underline{X}]$ on suppose d'après (3.1.10.1) que $\zeta_\varepsilon(t_F(\sigma(x))) \geq -\varepsilon \deg(P)$.

D'après la proposition 3.2.3, il existe une application $P: \begin{matrix} G(i) \rightarrow \mathbb{K}[\underline{X}] \\ e \mapsto P_e \end{matrix}$ telle que l'on ait $\bar{x} = \sum_{e \in G(i)} P_e \bar{e}$. De plus, pour tout $e \in G(i)$ cette proposition nous assure que :

$$(i+1)u(k(e)) - \varepsilon(\deg(P_e) + |k(e)|) \geq \zeta_\varepsilon(x).$$

D'après le théorème 3.1.25, on vérifie quel que soit $e \in G(i)$ que :

$$\zeta_\varepsilon(t_F(\sigma(P_e))e) \geq -\varepsilon \deg(P_e) + (i+1)u(k(e)) - \varepsilon|k(e)|.$$

On déduit de (3.3.2.1), (1.1.10.1) et (1.1.10.2) que $\overline{t_F(\sigma(P_e))e} = P_e \bar{e}$, ce qui implique que l'application $P: \begin{matrix} G(i) \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger \\ e \mapsto \sigma(P_e) \end{matrix}$ répond aux conditions de la proposition. $\square$

Lemme 3.4.4. *Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$ et toute fonction poids l à valeurs entières, on ait :*

$$\gamma_\varepsilon(v_F(\underline{X}^l)) \geq v_p(l) + \frac{1}{2} - \varepsilon|l|.$$

Démonstration. Nous allons démontrer le lemme par récurrence sur $v_p(l) \in \mathbb{N}$. Prenons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit afin de pouvoir appliquer la proposition 3.3.4; cela démontre en particulier le lemme dans le cas où $v_p(l) = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que le lemme soit vérifié pour toute fonction poids l' à valeurs entières telle que $v_p(l') \leq k$. Soit l une fonction poids à valeurs entières telle que $v_p(l) = k + 1$.

On peut alors poser $l' := \frac{l}{p}$ et on sait par hypothèse de récurrence que le $\varepsilon > 0$ choisi ci-dessus vérifie également $\gamma_\varepsilon \left(v_F \left(\underline{X}^{l'} \right) \right) \geq v_p(l') + \frac{1}{2} - \varepsilon|l'|$. On déduit de (3.3.2.3) et de la proposition 3.2.5 que $v_F \left(\underline{X}^l \right) = \sum_{q=1}^p \binom{p}{q} \left[\underline{X}^{l'} \right]^{(p-q)} v_F \left(\underline{X}^{l'} \right)^q$. Si $v_p(l') = 0$, il découle de (2.4.2.2) du fait que γ_ε est une pseudo-valuation (voir (2.5.2)), et de la proposition 3.3.4 que :

$$\gamma_\varepsilon \left(v_F \left(\underline{X}^l \right) \right) \geq \min \left\{ p \left(\frac{3}{4} - \varepsilon|l'| \right), \min_{q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket} \left\{ -\varepsilon p|l'| + \frac{3q}{4} + 1 \right\} \right\}.$$

Cela démontre le lemme pour $v_p(l) = 1$. Enfin, si $v_p(l') > 0$, on vérifie :

$$\gamma_\varepsilon \left(v_F \left(\underline{X}^l \right) \right) \geq \min \left\{ p \left(v_p(l') + \frac{1}{2} - \varepsilon|l'| \right), \min_{q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket} \left\{ -\varepsilon p|l'| + q \left(v_p(l') + \frac{1}{2} \right) + 1 \right\} \right\}.$$

Ce qui clôt la démonstration du lemme. $\square$

Lemme 3.4.5. *Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Identifions $\Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, i}$ et $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i}$ en tant que $W(\mathbb{K})$ -modules en utilisant la proposition 3.2.5. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$ et pour toute fonction poids l à valeurs entières et toute partition I de l de taille i on a :*

$$\gamma_\varepsilon (v_F(e(l, I))) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon|l|.$$

Démonstration. En vertu de (2.5.2.3), le cas $i = 0$ est une version faible de la proposition 3.3.4. Supposons $i \geq 1$. Pour toute fonction poids l à valeurs entières et toute partition I de l de taille i , par définition on a $e(l, I) = f(l|_{I_0}) \times \prod_{l=1}^i g(l|_{I_l})$. Soit $l \in \llbracket 1, i \rrbracket$.

D'après (2.3.10.1) nous avons de plus l'égalité $d(f(l|_{I_l})) = p^{v_p(l|_{I_l})} g(l|_{I_l})$, on obtient alors d'après le lemme 3.4.4 et les formules (2.4.2.1) et (2.4.2.2) que pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a $\gamma_\varepsilon(t_F(g(l|_{I_l}))) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon|l|_{I_l}$. Le même lemme nous donne pour le même ε l'inégalité $\gamma_\varepsilon(t_F(f(l|_{I_0}))) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon|l|_{I_0}$. D'après (2.4.2.3), quitte à diviser δ par 2 on déduit alors $\gamma_\varepsilon(t_F(e(l, I))) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon|l|$. $\square$

Proposition 3.4.6. *Supposons que $R = W(\mathbb{K})[\underline{X}]$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Alors quel que soit $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^i$ il existe un unique $\omega \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, i}$ ainsi qu'une unique application*

$$s: \begin{array}{ccc} G(i) \sqcup G(i-1) & \rightarrow & W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger \\ e & \mapsto & s_e \end{array} \quad \text{tels que :}$$

$$x = t_F(\omega) + \sum_{e \in G(i)} t_F(s_e)e + d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_F(s_e)e \right),$$

$$\forall l \in \mathbb{N}, p^l \mid x \iff \left((p^l \mid \omega) \wedge (\forall e \in G(i) \sqcup G(i+1), p^l \mid s_e) \right).$$

De plus, il existe $\delta > 0$ indépendant du choix de x tel que :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad \zeta_\varepsilon(\omega) &\geq \zeta_\varepsilon(x), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad \forall e \in G(i) \sqcup G(i-1), \quad \zeta_\varepsilon(t_F(s_e)) &\geq \zeta_\varepsilon(x) - \zeta_\varepsilon(e), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad \forall e \in G(i) \sqcup G(i-1), \quad \zeta_\varepsilon(t_F(s_e)e) &\geq \zeta_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$ le plus petit des δ donnés par la proposition 3.4.3 et le lemme 3.4.5. D'après ce dernier et (3.1.10.1), si $\varepsilon \in]0, \delta]$ on a $\zeta_\varepsilon(t_F(x|_{\text{int}})) \geq \zeta_\varepsilon(x)$. Notons $y := x - t_F(x|_{\text{int}})$. Il découle de la proposition 3.2.6 que l'on a $y \in pW^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i} + W^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{frac}, i}$. On a de plus $\zeta_\varepsilon(y) \geq \zeta_\varepsilon(x)$.

D'après les propositions 3.4.3 et 2.3.12, nous pouvons disposer de deux applications

$$r: \begin{array}{ccc} G(i) & \rightarrow & W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger \\ e & \mapsto & r_e \end{array} \quad \text{et } r': \begin{array}{ccc} G(i-1) & \rightarrow & W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger \\ e & \mapsto & r'_e \end{array} \quad \text{telles que celles-ci vérifient :}$$

$$\begin{aligned} y|_{\text{frp}} &\equiv \sum_{e \in G(i)} t_F(r_e)e[p], \\ \forall e \in G(i), \quad \zeta_\varepsilon(t_F(r_e)) &\geq \zeta_\varepsilon(x) - \zeta_\varepsilon(e), \\ \forall e \in G(i), \quad \zeta_\varepsilon(t_F(r_e)e) &\geq \zeta_\varepsilon(x), \\ y|_{\text{d}(\text{frp})} &\equiv d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_F(r'_e)e \right) [p], \\ \forall e \in G(i-1), \quad \zeta_\varepsilon(t_F(r'_e)) &\geq \zeta_\varepsilon(x) - \zeta_\varepsilon(e), \\ \forall e \in G(i-1), \quad \zeta_\varepsilon(t_F(r'_e)e) &\geq \zeta_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $z := y - \sum_{e \in G(i)} t_F(r_e)e - d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_F(r'_e)e \right)$ est divisible par p .

D'après la proposition 2.3.19, on peut poser $x_1 \in W^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^i$ l'unique élément tel que $z = px_1$. Par (3.1.10.4) on a $\zeta_\varepsilon(x_1) \geq \zeta_\varepsilon(x) - 2n$. On peut alors répéter l'opération par récurrence, ce qui nous confère une suite de fonctions $(s_l)_{l \in \mathbb{N}} \in \left(W(\mathbb{K})[\underline{X}]^{\dagger G(i) \sqcup G(i+1)} \right)^\mathbb{N}$.

ainsi qu'une suite $(\omega_l)_{l \in \mathbb{N}} \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, i}{}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $e \in G(i) \sqcup G(i-1)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon(\omega_l) &\geq \zeta_\varepsilon(x) - 2nl, \\ \zeta_\varepsilon(s_l(e)) &\geq \zeta_\varepsilon(x) - \zeta_\varepsilon(e) - 2nl, \\ x &\equiv \sum_{l'=0}^{l-1} \left(p^{l'} \omega_{l'} + \sum_{e \in G(i)} p^{l'} t_F(s_{l'}(e))e + d \left(\sum_{e \in G(i-1)} p^{l'} t_F(s_{l'}(e))e \right) \right) [p^l]. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure l'existence par surconvergence p -adique.

On utilise la proposition 3.2.7 afin de démontrer l'unicité. Il en découle en effet que $p \mid x$ si et seulement si $\overline{\omega_0} = 0$ et que $\overline{s_0}$ est la fonction constante égale à zéro. On en déduit par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$ que $p^l \mid x$ si et seulement si $p^l \mid \omega$ et $p^l \mid s_e$ pour tout $e \in G(i) \sqcup G(i-1)$, ce qui suffit à démontrer l'unicité via la proposition 2.2.8. $\square$

(3.4.7) Dans l'énoncé de la proposition 3.4.6, on remarque que si $F = \widetilde{\text{Frob}}$, alors d'après [16, Proposition 2.3.] ainsi que les propositions 3.2.5 et 3.1.9 on retrouve la décomposition en somme directe définie en (2.3.17). Plus précisément, si l'on reprend les notations de l'énoncé on a :

$$\begin{aligned} x|_{\text{int}} &= t_{\widetilde{\text{Frob}}}(\omega), \\ x|_{\text{frp}} &= \sum_{e \in G(i)} t_{\widetilde{\text{Frob}}}(s_e)e, \\ x|_{d(\text{frp})} &= d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_{\widetilde{\text{Frob}}}(s_e)e \right). \end{aligned}$$

Proposition 3.4.8. *Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons donné un élément $x \in W_{\overline{R}/\mathbb{K}}^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^i$ tel qu'il existe $\omega \in \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, i}$ ainsi qu'une application $s: \begin{matrix} G(i) \sqcup G(i-1) & \rightarrow & R^\dagger \\ e & \mapsto & s_e \end{matrix}$ vérifiant l'égalité*

$$x = t_F(\omega) + \sum_{e \in G(i)} t_F(s_e)e + d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_F(s_e)e \right).$$

Alors quel que soit $m \in \mathbb{N}^$ on vérifie $x \in \text{Fil}^m W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}$ si et seulement si :*

$$\begin{aligned} p^m &\mid \omega, \\ \forall e \in G(i) \sqcup G(i-1), & p^{\max\{m-u(k(e)), 0\}} \mid s_e. \end{aligned}$$

Démonstration. L'implication réciproque est évidente, il ne reste qu'à démontrer le sens direct. Démontrons-le par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $m = 1$, d'après le théorème 2.2.5

l'image de x dans $W_1\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}} = \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}$ coïncidera avec celle de $t_F(\omega)$. On conclut alors que $p \mid \omega$ grâce à la proposition 3.2.6.

Pour $m > 1$, si l'on a $x \in \text{Fil}^m W\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}$ et que l'on suppose par hypothèse de récurrence que $\omega = p^{m-1}\omega'$ pour un certain $\omega' \in \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, i}$ et $s_e = p^{\max\{m-1-u(k(e)), 0\}} s'_e$ pour tout $e \in G(i) \sqcup G(i-1)$ pour de certains $s'_e \in R^\dagger$, alors en projetant x dans $\text{Fil}^m W^\dagger\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}/\text{Fil}^{m+1} W^\dagger\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}$, que l'on peut vérifier isomorphe en tant que $\bar{R}$ -module à $\text{Ker}\left(W_{m+1}\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}} \rightarrow W_m\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}\right)$, on obtient par les propositions 2.2.6 et 3.4.3 ainsi que [16, (2.5)] que puisque x est nul dans le quotient, on a $\bar{w}' = 0$ et $\bar{s}'_e = 0$ pour tout $e \in G(i) \sqcup G(i-1)$. $\square$

(3.4.9) Nous allons supposer dans la suite que le morphisme ψ fixé en début de section se factorise en

$$\mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \mathbb{K}[\underline{X}]_P \rightarrow \bar{R}$$

où la première flèche est le morphisme canonique de localisation pour un certain $P \in \mathbb{K}[\underline{X}]$ et la seconde est un morphisme étale fini faisant de $\bar{R}$ un $\mathbb{K}[\underline{X}]_P$ -module libre.

Soit $(r_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une base de $\bar{R}$ en tant que $\mathbb{K}[\underline{X}]_P$ -module pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Nous noterons dans la suite :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[\underline{X}] &:= \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y, Z_1, \dots, Z_m], \\ \mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] &:= \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y, Z_1^p, \dots, Z_m^p], \\ W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}] &:= W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n, Y, Z_1^p, \dots, Z_m^p]. \end{aligned}$$

On notera $\varphi: \mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \bar{R}$ le morphisme surjectif de $\mathbb{K}[\underline{X}]$ -algèbres tel que $\varphi(Y) = P^{-1}$ et $\varphi(Z_i) = r_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. D'après le lemme 1.1.16, le morphisme $\varphi|_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}$ est également morphisme surjectif de $\mathbb{K}[\underline{X}]$ -algèbres. Dans la suite de cette section, on le notera $\varphi: \mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] \rightarrow \bar{R}$ sans risque de confusion dans le contexte.

Pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ on choisit des éléments $\alpha_{i,j} \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad W(\varphi)\left(t_{\text{Frob}}^{\sim}(\alpha_{0,j})\right) &= W(\varphi)(F(d(Y^j))), \\ \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad W(\varphi)\left(t_{\text{Frob}}^{\sim}(\alpha_{i,j})\right) &= W(\varphi)\left(F(d(Z_i^j))\right). \end{aligned}$$

Choisissons $\delta > 0$ assez petit afin de vérifier la condition du lemme 3.4.5, et que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$ on ait $\zeta_\varepsilon\left(t_{\text{Frob}}^{\sim}(\alpha_{i,j})\right) \geq -2n$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. En

particulier d'après (3.1.10.3), (3.1.10.4) et (2.2.3.3) on vérifie pour la pseudo-valuation ζ_ε définie sur $W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}$:

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad \zeta_\varepsilon \left(t_{\text{Frob}}^\sim (p\alpha_{0,j}) \right) &\geq \zeta_\varepsilon (d(Y^{pj})) = -\varepsilon j, \\ \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad \zeta_\varepsilon \left(t_{\text{Frob}}^\sim (p\alpha_{i,j}) \right) &\geq \zeta_\varepsilon (d(Z_i^{pj})) = -\varepsilon j, \\ \forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad W(\varphi) \left(t_{\text{Frob}}^\sim (p\alpha_{0,j}) \right) &= W(\varphi) (d(Y^{pj})), \\ \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad W(\varphi) \left(t_{\text{Frob}}^\sim (p\alpha_{i,j}) \right) &= W(\varphi) (d(Z_i^{pj})). \end{aligned}$$

Par convention, et comme au début de cette section, on considérera que les fonctions poids seront définies sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Autrement dit, pour tout $f \in \mathcal{P}_0$ on aura $f(k) \in W(\mathbb{K}[\underline{X}])$. Ainsi, on aura également $G(j) \subset W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^j$ pour tout $j \in \mathbb{R}$. Lorsque l'on voudra considérer les fonctions poids définies sur $\llbracket 1, n+1+m \rrbracket$ (c'est-à-dire liées au complexe $W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^j$),

on notera $\mathcal{P}^{\underline{X}^{(p)}}$ et $\mathcal{P}_0^{\underline{X}^{(p)}}$ les ensembles de fonctions poids que l'on devine. Similairement, si l'on considère les fonctions poids définies sur $\llbracket n+1, n+1+m \rrbracket$ (donc liées au complexe $W\Omega_{\mathbb{K}[Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p]/\mathbb{K}}^j$), on notera $\mathcal{P}^{Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p}$ les ensembles que l'on devine. On prendra garde au fait que l'on a pas défini ces fonctions poids sur $\llbracket 1, m+1 \rrbracket$, ce qui ne pose pas de problèmes en pratique bien que cela diffère des conventions précédentes ; cela nous permet notamment d'obtenir une inclusion canonique $\mathcal{P}^{Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p} \subset \mathcal{P}^{\underline{X}^{(p)}}$.

Pour toute fonction poids $k \in \mathcal{P}_0^{\underline{X}^{(p)}}$ telle que $u(k) = 0$ et $\text{Supp}(k) = \{s\}$ pour un certain $s \in \llbracket 1, n+1+m \rrbracket$, si l'on note $s' := s - n + 1$ et $v := v_p(k_s)$ et que l'on considère $(a, b) \in \mathbb{N} \times \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ l'unique paire d'entiers telle que $k_s = p^v(pa + b)$, on définit :

$$g'(k) := \begin{cases} g(k) & \text{si } s \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \frac{p(pa+b)}{b} \left[Y^{p^{v+2}a+(p^{v+1}-p)b} \right] t_{\text{Frob}}^\sim (\alpha_{0,b}) & \text{si } s = n+1 \\ \frac{p(pa+b)}{b} \left[Z_{s'}^{p^{v+2}a+(p^{v+1}-p)b} \right] t_{\text{Frob}}^\sim (\alpha_{s',b}) & \text{si } s' \in \llbracket 1, m \rrbracket. \end{cases}$$

Pour tout $(k, I) \in \mathcal{P}^{\underline{X}^{(p)}}$ avec $u(k) = 0$ on définit :

$$h'(k, I) := \prod_{i \in \text{Supp}(k) \setminus I} [X_i]^{k_i} \prod_{j \in I} g'(k|_{\{j\}}).$$

Remarquons que lorsque $I = \text{Supp}(k) = \{s\}$ comme ci-dessus, alors $h'(k, I) = g'(k)$. Cette remarque nous permet d'étendre la définition de g' sans conflit de notations à toute fonction poids $k \in \mathcal{P}_0^{\underline{X}^{(p)}}$ à valeurs entières avec la définition précédente :

$$g'(k) := \sum_{j \in \text{Supp}(k)} p^{v_p(k_j) - v_p(k)} h'(k, \{j\}).$$

(3.4.10) Soit $i \in \mathbb{N}$. Dans toute la suite de la section, P_i désignera l'ensemble des éléments de la forme $\Pi \in \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p]/\mathbb{K}}^{\text{int}, 0} \times W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i} \right)^{j(\Pi)}$ pour un entier $j(\Pi) \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, P_i est la réunion des ensembles de j -uplets de couples du produit cartésien $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p]/\mathbb{K}}^{\text{int}, 0} \times W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i}$ pour j variant parmi les entiers naturels non nuls. On définit l'application ci-dessous :

$$w: \begin{array}{ccc} P_i & \rightarrow & W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i} \\ ((a_k, b_k))_{k \in \llbracket 1, j(\Pi) \rrbracket} & \mapsto & \sum_{k=1}^{j(\Pi)} a_k b_k \end{array} .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit également :

$$\check{\zeta}_\varepsilon: \begin{array}{ccc} P_i & \rightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \\ ((a_k, b_k))_{k \in \llbracket 1, j(\Pi) \rrbracket} & \mapsto & \min\{\zeta_\varepsilon(a_k) + \zeta_\varepsilon(b_k) \mid k \in \llbracket 1, j(\Pi) \rrbracket\} \end{array} .$$

Proposition 3.4.11. *Pour toute fonction poids $k \in \mathcal{P}_0^{\underline{X}^{(p)}}$ à valeurs entières on a :*

$$W(\varphi)(g'(k)) = W(\varphi)(g(k)).$$

Il existe de plus $\Pi \in P_i$ et $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, 1}$ tels que pour le δ du paragraphe (3.4.9) on ait :

$$\begin{aligned} g'(k) &= w(\Pi) + px, \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad \check{\zeta}_\varepsilon(\Pi) &\geq \zeta_\varepsilon(g(k)), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad \zeta_\varepsilon(px) &\geq \zeta_\varepsilon(g(k)). \end{aligned}$$

En outre, $\Pi = ((0, 0))$ si $k \in \mathcal{P}_0^{Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p}$.

Démonstration. Supposons que $k \in \mathcal{P}_0^{\underline{X}^{(p)}}$ est une fonction poids telle que $u(k) = 0$ et $\text{Supp}(k) = \{s\}$ pour un certain $s \in \llbracket 1, m+1+n \rrbracket$. Dans ce cas nous pouvons alors vérifier que $W(\varphi)(g(k)) = W(\varphi)(g'(k))$. Le cas $s \in \llbracket 1, m \rrbracket$ est évident, et si $s = m+1$ remarquons en utilisant le lemme 3.1.2 que l'on a :

$$\begin{aligned} W(\varphi)(g'(k)) &= W(\varphi) \left(\frac{pa+b}{b} \left[Y^{p^{v+2}a+(p^{v+1}-p)b} \right] d(Y^{pb}) \right) \\ &= W(\varphi) \left(F^v \left(d \left(\left[Y^{p(pa+b)} \right] \right) \right) \right) \\ W(\varphi)(g'(k)) &= W(\varphi)(g(k)). \end{aligned}$$

On peut faire un raisonnement tout à fait similaire si $s \in \llbracket m+2, m+1+n \rrbracket$.

Remarquons également que l'on a $g'(k) \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^1$ si $s \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $p \mid g'(k)$ sinon, et que par la proposition 3.2.5 on a toujours $g'(k) \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, 1}$.

De plus, pour un tel k , par construction et la proposition 3.1.12 on a $\zeta_\varepsilon(g'(k)) \geq \zeta_\varepsilon(g(k))$ pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$. Le résultat général découle alors de la même proposition ainsi que du lemme 3.1.5. $\square$

Corollaire 3.4.12. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i}$ il existe $\Pi \in P_i$ et $y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i}$ tels que pour le δ du paragraphe (3.4.9) on ait :*

$$\begin{aligned} W(\varphi)(x) &= W(\varphi)(w(\Pi) + py), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad \check{\zeta}_\varepsilon(\Pi) &\geq \zeta_\varepsilon(x), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad \zeta_\varepsilon(py) &\geq \zeta_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

De plus, $\Pi = ((0, 0))$ si $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i}$, ou si $p^u \mid x$ pour un certain $u \in \mathbb{N}^*$, auquel cas $p^{u-1} \mid y$.

Démonstration. Par définition de $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i}$, l'élément x sera congru modulo p à une combinaison $W(\mathbb{K})$ -linéaire de produits de la forme $f(k_0) \prod_{j=1}^i g(k_j)$, tels que les éléments $(k_j)_{j \in \llbracket 0, i \rrbracket} \in \left(\mathcal{P}_0^{\underline{X}^{(p)}} \right)^{i+1}$ vérifient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad -\varepsilon |k_0| - \sum_{j=1}^i \varepsilon |k_j| \geq \zeta_\varepsilon(x).$$

On peut conclure en utilisant les propositions 3.4.11 et 3.1.12 ainsi que (3.1.10.1), car $f(k_0) \prod_{j=1}^i g'(k_j)$ vérifie toutes les propriétés voulues.

La seconde partie de l'énoncé provient du fait que l'on peut supposer que ces éléments vérifient $(k_j)_{j \in \llbracket 0, i \rrbracket} \in \left(\mathcal{P}_0^{Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p} \right)^{i+1}$ dès lors que $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i}$, l'autre cas étant évident. $\square$

(3.4.13) En vertu du lemme 1.2.15, nous pouvons poser pour le restant de cette section un relèvement du Frobenius $G: W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger$ commutant avec φ et F .

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on pose le $W(\mathbb{K}) \left[\underline{X}^{(p)} \right]^\dagger$ -module :

$$W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i} := \left\{ \sum_{e \in G(i)} t_G(s_e) e \mid \begin{array}{l} \exists C \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \\ \forall e \in G(i), \zeta_\varepsilon(t_G(s_e)) + \zeta_\varepsilon(e) \geq C \\ \forall e \in G(i), s_e \in W(\mathbb{K}) \left[\underline{X}^{(p)} \right]^\dagger \end{array} \right\}.$$

On définit :

$$W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X,i} := t_G \left(\Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},i} \right) + W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i} + d \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i-1} \right).$$

Lemme 3.4.14. *Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in W(\mathbb{K}) \left[\underline{X}^{(p)} \right]^\dagger$ et $y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i}$ on vérifie :*

$$t_G(x)y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i},$$

$$\forall \varepsilon > 0, (\zeta_\varepsilon(t_G(x)) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon(t_G(x)y) \geq \zeta_\varepsilon(t_G(x)) + \zeta_\varepsilon(y).$$

Démonstration. Cela est évident par définition de $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i}$ et en employant le théorème 3.1.25. $\square$

Proposition 3.4.15. *Supposons que $G = \widetilde{\text{Frob}}$. En utilisant la proposition 3.2.5, identifions les $W(\mathbb{K})$ -modules $\Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},i}$ et $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{\text{int},i}$ via $t_{\widetilde{\text{Frob}}}$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$.*

Considérons $x \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},i}$ et $y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},j}$. Alors il existe $z \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i+j}$ et $t \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i+j-1}$ tels que pour le δ du paragraphe (3.4.9) on ait :

$$W(\varphi)(xy) = W(\varphi)(z + pd(t)),$$

$$\forall \varepsilon \in]0, \delta], (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon(z) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y),$$

$$\forall \varepsilon \in]0, \delta], (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) \implies \zeta_\varepsilon(pd(t)) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1.$$

De plus, s'il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que soit x soit y appartienne à $\text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}$, alors $z, pd(t) \in \text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/\mathbb{K}}$.

Démonstration. Posons $\varepsilon \in]0, \delta]$. Appliquons le corollaire 3.4.12 à x afin de trouver $\Pi \in P_i$ et $x' \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},i}$ tels que l'on ait :

$$W(\varphi)(x) = W(\varphi)(w(\Pi) + px'),$$

$$\zeta_\varepsilon(x') \geq \zeta_\varepsilon(x),$$

$$\check{\zeta}_\varepsilon(\Pi) \geq \zeta_\varepsilon(x).$$

Écrivons $y = \sum_{e \in G(j)} s_e e$, où les $s_e \in W(\mathbb{K}) \left[\underline{X}^{(p)} \right]^\dagger$ vérifient $\zeta_\varepsilon(s_e) + \zeta_\varepsilon(e) \geq \zeta_\varepsilon(y)$ quel que soit $e \in G(j)$. En employant le corollaire 3.4.12 à nouveau, pour tout $e \in G(j)$ il existe $\Pi_e \in P_0$ et $s'_e \in W(\mathbb{K}) \left[\underline{X}^{(p)} \right]^\dagger$ tels que :

$$\begin{aligned} W(\varphi)(w(\Pi_e) + ps'_e) &= W(\varphi)(s_e), \\ \zeta_\varepsilon(ps'_e) &\geq \zeta_\varepsilon(s_e), \\ \check{\zeta}_\varepsilon(\Pi_e) &\geq \zeta_\varepsilon(s_e). \end{aligned}$$

En particulier l'élément $y' := \sum_{e \in G(j)} ps'_e e$ vérifie $y' \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},j}$ et $\zeta_\varepsilon(y') \geq \zeta_\varepsilon(y)$. On en déduit que :

$$W(\varphi)(xy) = W(\varphi) \left(p(w(\Pi)y' + x'y) + \sum_{e \in G(j)} w(\Pi)w(\Pi_e)e \right). \quad (3.4.15.1)$$

Quel que soit $e \in G(j)$, le produit $w(\Pi)w(\Pi_e)e$ est une somme finie d'éléments de la forme $aba'b'e$, où $a, a' \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p]/\mathbb{K}}^{\text{int},0}$, $b \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int},i}$ et $b' \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int},0}$. Puisque $aba'b'e = aa'bb'e$ et que $bb'e \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{i+j}$, en employant le lemme 3.1.8 et (3.4.7), on vérifie que

$$aa' \times (bb'e)|_{\text{d}(\text{frp})} = pd \left(\sum_{e' \in G(i+j-1)} aa't_{e'}e' \right) - pd(aa') \sum_{e' \in G(i+j-1)} t_{e'}e'$$

pour de certains $t_{e'} \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int},0}$ définis pour tout $e' \in G(i+j-1)$; d'après (3.1.24) ceux-ci vont vérifier :

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon(pt_{e'}) &\geq \zeta_\varepsilon((bb'e)|_{\text{d}(\text{frp})}) - \zeta_\varepsilon(e') \\ &\geq \zeta_\varepsilon(b) + \zeta_\varepsilon(b') + \zeta_\varepsilon(e) + 1 - \zeta_\varepsilon(e') \\ &\geq \check{\zeta}_\varepsilon(\Pi) - \zeta_\varepsilon(a) + \check{\zeta}_\varepsilon(\Pi_e) - \zeta_\varepsilon(a') + \zeta_\varepsilon(e) + 1 - \zeta_\varepsilon(e') \\ &\geq \zeta_\varepsilon(x) - \zeta_\varepsilon(a) + \zeta_\varepsilon(s_e) - \zeta_\varepsilon(a') + \zeta_\varepsilon(e) + 1 - \zeta_\varepsilon(e') \\ \zeta_\varepsilon(pt_{e'}) &\geq \zeta_\varepsilon(x) - \zeta_\varepsilon(a) + \zeta_\varepsilon(y) - \zeta_\varepsilon(a') + 1 - \zeta_\varepsilon(e'). \end{aligned}$$

À l'aide de (3.1.24), de (3.4.7) ainsi que du lemme 3.4.14, on en déduit alors qu'il existe $\alpha \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i+j}$ et $\beta \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i+j-1}$ et deux suites $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},i+j-1} \right)^\mathbb{N}$

et $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[Y^p, Z_1^p, \dots, Z_m^p]/\mathbb{K}}^{\text{int}, 1} \right)^\mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in G(j)} w(\Pi) w(\Pi_e) e &= \alpha + pd(\beta) + p \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k c_k, \\ \zeta_\varepsilon(\alpha) &\geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y), \\ \zeta_\varepsilon(pd(\beta)) &\geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \zeta_\varepsilon(\omega_k) + \zeta_\varepsilon(pc_k) &\geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1, \end{aligned}$$

la proposition 3.4.8 nous assurant que la convergence des séries pour la topologie canonique. En particulier, on déduit de (3.4.15.1) que :

$$W(\varphi)(xy) = W(\varphi) \left(\alpha + pd(\beta) + p \left(w(\Pi)y' + x'y + \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k c_k \right) \right).$$

On peut alors réappliquer le raisonnement que nous avons fait tout au long de cette démonstration à chacun des produits de la formule ci-dessus. En effet, tous sont des produits entre un élément de $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int}}$ et un élément appartenant soit à $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\underline{X}-\text{frp}, i+j-1}$ soit à $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\underline{X}-\text{frp}, j}$. Par récurrence et surconvergence p -adique, on peut alors conclure concernant la première partie de l'énoncé. La seconde partie, quant à elle, est immédiate par construction et d'après la proposition 3.4.8. $\square$

Corollaire 3.4.16. *Supposons que $G = \widetilde{\text{Frob}}$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. Considérons deux éléments $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int}, i}$ et $y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\underline{X}-\text{frp}, j}$. Alors il existe $z \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\underline{X}-\text{frp}, i+j}$ et $t \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}^{\underline{X}-\text{frp}, i+j-1}$ tels que pour le δ du paragraphe (3.4.9) on ait :*

$$\begin{aligned} W(\varphi)(xd(y)) &= W(\varphi)(z + d(t)), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(z) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(d(t)) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y). \end{aligned}$$

De plus, s'il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que soit x soit y appartienne à $\text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}$, alors $z, d(t) \in \text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]/\mathbb{K}}$.

Démonstration. On a $xd(y) = (-1)^i (d(xy) - d(x)y)$, il ne reste alors qu'à conclure en utilisant la proposition 3.4.15 ainsi que (3.1.10.3). $\square$

Proposition 3.4.17. *Supposons que $G = \widetilde{\text{Frob}}$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. Pour $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i}$ et $y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, j}$, il existe $z \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\text{int}, i+j}$, $t \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i+j}$ et $s \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i+j-1}$ tels que pour le δ du paragraphe (3.4.9) on ait :*

$$\begin{aligned} W(\varphi)(xy) &= W(\varphi)(pz + pt + pd(s)), \\ \forall \varepsilon > 0, (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(pz) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 2, \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(pt) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1, \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(pd(s)) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 2. \end{aligned}$$

De plus, s'il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que soit x soit y appartienne à $\text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}$, alors $z, t, d(s) \in \text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}$.

Démonstration. Notons $x = \sum_{e \in G(i)} s_e e$ et $y = \sum_{e' \in G(j)} s_{e'} e'$, où les $s_e, s_{e'} \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\text{int}, 0}$ quels que soient $e \in G(i)$ et $e' \in G(j)$. Nous sommes donc ramenés à étudier une série convergente pour la topologie canonique de produits de la forme $s_e s_{e'} e' = s_e s_{e'} e e'$, pour $e \in G(i)$ et $e' \in G(j)$. Il découle du lemme 3.1.8 que $ee' \in pW^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}] / \mathbb{K}}^{i+j}$ donc en utilisant (3.4.7) ainsi que (3.1.24) on remarque qu'il existe $\omega_{e,e'} \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\text{int}, i+j}$, $\alpha_{e,e'} \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i+j}$ ainsi que $\beta_{e,e'} \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i+j-1}$ tels que :

$$\begin{aligned} s_e s_{e'} e' &= p s_e s_{e'} \omega_{e,e'} + p s_e s_{e'} \alpha_{e,e'} + p s_e s_{e'} d(\beta_{e,e'}), \\ \forall \varepsilon > 0, \zeta_\varepsilon(p s_e s_{e'} \omega_{e,e'}) &\geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 2, \\ \forall \varepsilon > 0, \zeta_\varepsilon(p s_e s_{e'} \alpha_{e,e'}) &\geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1, \\ \forall \varepsilon > 0, \zeta_\varepsilon(p s_e s_{e'}) + \zeta_\varepsilon(d(\beta_{e,e'})) &\geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 2. \end{aligned}$$

La première partie de l'énoncé découle alors par la surconvergence dans la topologie canonique ainsi que par l'utilisation du lemme 3.4.14 et du corollaire 3.4.16.

La seconde partie de l'énoncé, quant à elle, est une conséquence immédiate de la proposition 3.4.8. $\square$

Proposition 3.4.18. *Supposons que $G = \widetilde{\text{Frob}}$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. Pour $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i}$ et $y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, j}$, il existe $z \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\text{int}, i+j}$, $t \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i+j}$ et $s \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i+j-1}$*

tels que pour le δ du paragraphe (3.4.9) on ait :

$$\begin{aligned} W(\varphi)(xd(y)) &= W(\varphi)(pz + t + pd(s)), \\ \forall \varepsilon > 0, (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(pz) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(t) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(pd(s)) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y) + 1. \end{aligned}$$

De plus, s'il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que soit x soit y appartienne à $\text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}$, alors $z, t, d(s) \in \text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}$.

Démonstration. Notons $x = \sum_{e \in G(i)} s_e e$ et $y = \sum_{e' \in G(j)} s'_e e'$, où les $s_e, s'_e \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}^{\text{int}, 0}$ quels que soient $e \in G(i)$ et $e' \in G(j)$. Nous sommes donc ramenés à étudier une série convergente pour la topologie canonique de produits de la forme

$$s_e d(s'_e e') = (-1)^i s_e d(s'_e) e e' + s_e s'_e d(e')$$

pour $e \in G(i)$ et $e' \in G(j)$. D'après la proposition 3.1.9 on a :

$$ee', ed(e') \in pW^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{int}} + W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{frp}} + pd \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^{\text{frp}} \right).$$

On peut alors conclure après avoir décomposé ces deux produits en une somme selon la remarque (3.4.7), et majoré la fonction ζ_ε sur les termes obtenus grâce au tableau (3.1.24), puis en faire de même après multiplication par les éléments de $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}^{\text{int}}$ restants grâce à la proposition 3.4.15, le corollaire 3.4.16, le lemme 3.4.14 ainsi que (3.1.10.5). La remarque concernant la filtration canonique est quant à elle une simple conséquence de la proposition 3.4.8. $\square$

Corollaire 3.4.19. *Supposons que $G = \widetilde{\text{Frob}}$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. Considérons deux éléments $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}^{\underline{X}-\text{frp}, i}$ et tout $y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}^{\underline{X}-\text{frp}, j}$. Alors il existe $z \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}^{\text{int}, i+j}$ et $t \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}^{\underline{X}-\text{frp}, i+j-1}$ tels que pour le δ du paragraphe (3.4.9) on ait :*

$$\begin{aligned} W(\varphi)(d(x)d(y)) &= W(\varphi)(pz + d(t)), \\ \forall \varepsilon > 0, (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(pz) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], (\zeta_\varepsilon(x) \neq -\infty \wedge \zeta_\varepsilon(y) \neq -\infty) &\implies \zeta_\varepsilon(d(t)) \geq \zeta_\varepsilon(x) + \zeta_\varepsilon(y). \end{aligned}$$

De plus, s'il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que soit x soit y appartienne à $\text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}$, alors $z, d(t) \in \text{Fil}^u W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}]}/\mathbb{K}$.

Démonstration. Remarquons que $d(x)d(y) = d(xd(y))$, il suffit alors de conclure en utilisant la proposition 3.4.18 et (3.1.10.3). $\square$

Lemme 3.4.20. *Supposons que $G = \widetilde{\text{Frob}}$. Soit $\eta > 0$. Il existe $\delta > 0$ et $C \in \left]0, \frac{1}{2n}\right]$ tels que pour toute fonction poids $k \in \mathcal{P}_0^{X(p)}$, il existe $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int},1} + d \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},0} \right)$ on ait :*

$$\begin{aligned} W(\varphi)(g(k)) &= W(\varphi)(x), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad \zeta_{C\varepsilon}(x) &\geq \frac{\zeta_\varepsilon(g(k))}{2n} - \eta. \end{aligned}$$

De plus, si $u(k) \neq 0$ il existe $x' \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int},0} + W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},0}$ tel que :

$$\begin{aligned} W(\varphi)(x') &= W(\varphi)(f(k)), \\ x &= d(x'), \\ \forall \varepsilon \in]0, \delta], \quad \zeta_{C\varepsilon}(x') &\geq \frac{\zeta_\varepsilon(f(k))}{2n} - \eta, \\ x, x' &\in \text{Fil}^{u(k)} W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Lorsque k est à valeurs entières, cela découle de (3.1.10.5) car on a déjà $g(k) \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int},1}$. Sinon, on a $g(k) = d(f(k))$ d'après (2.3.10.1). Si l'on pose $\eta > 0$, on sait qu'il existe $x' \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{int},0} + W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}^{X-\text{frp},0}$ et $a \in]0, +\infty[^{m+1+n}$ tels que $W(\varphi)(f(k)) = W(\varphi)(x')$, que $\gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]}, a}(x') \geq \gamma_{\varepsilon, \text{Id}_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]}, a}(f(k)) - \eta$ pour tout $\varepsilon \in]0, \delta]$, où $\delta > 0$ est indépendant du choix de k , et que $x' \in \text{Fil}^{u(k)} W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}$: c'est la proposition 3.3.12. D'après (2.5.2.5) et (2.5.2.3) on sait que l'on peut trouver $m, M \in]0, +\infty[$ tels que $\frac{m}{M} \leq 1$ et $\gamma_{m\varepsilon}(x') \geq \gamma_{M\varepsilon}(f(k)) - \eta$, et donc d'après (3.1.10.1) on vérifie que $\zeta_{m\varepsilon}(x') \geq \frac{\zeta_{2nM\varepsilon}(f(k))}{2n} - \eta$, on peut alors conclure en employant (3.1.10.3), en remarquant que $\zeta_{2nM\varepsilon}(f(k)) = \zeta_{2nM\varepsilon}(g(k))$, et en divisant δ par $2nM$. $\square$

Proposition 3.4.21. *Supposons que $G = \widetilde{\text{Frob}}$. Soit $i \in \mathbb{N}$. On a :*

$$W(\varphi) \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}^{\text{frp},i} \right) \subset W(\varphi) \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X(p)}]/\mathbb{K}}^{X,i} \right).$$

Démonstration. Soit $x \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\text{frp}, i}$. On peut écrire $x = \sum_{(k, I) \in \mathcal{P}^{\underline{X}^{(p)}}} \eta_{k, I} e(k, I)$, où les

$\eta_{k, I} \in W(\mathbb{K})$ pour tout $(k, I) \in \mathcal{P}^{\underline{X}^{(p)}}$ sont tous nuls sauf si $u(k) \neq 0$, $I_0 \neq \emptyset$ et $\#I = i$, et ces derniers vérifieront $2 \text{v}_V(\eta_{k, I}) + u(k) - \varepsilon |k| \geq \zeta_\varepsilon(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Remarquons que pour de tels (k, I) , on peut écrire $e(k, I) = f(k|_{I_0}) \times \prod_{l=1}^i g(k|_{I_l})$ et par construction ceux-ci vont vérifier :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 2n \text{v}_V(\eta_{k, I}) + \zeta_\varepsilon(f(k|_{I_0})) + \sum_{l=1}^i \zeta_\varepsilon(g(k|_{I_l})) \geq \zeta_\varepsilon(x).$$

Soit $\eta > 0$. Par application du lemme 3.4.20, nous savons alors qu'il existe un élément $y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\text{int}, 0} + W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\underline{X} - \text{frp}, 0}$, ainsi qu'un i -uplet de différentielles de De Rham-Witt

$(z_l)_{l \in \llbracket 1, i \rrbracket} \in \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\text{int}, 1} + d \left(W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\underline{X} - \text{frp}, 0} \right) \right)^i$ et des constantes $\varepsilon > 0$ et $C \in \left] 0, \frac{1}{2n} \right]$ tels que :

$$\begin{aligned} W(\varphi)(y) &= W(\varphi)(f(k|_{I_0})), \\ \forall l \in \llbracket 1, i \rrbracket, \quad W(\varphi)(z_l) &= W(\varphi)(g(k|_{I_l})), \\ \zeta_{C\varepsilon}(y) &\geq \frac{\zeta_\varepsilon(f(k|_{I_0}))}{2n} - \eta, \\ \forall l \in \llbracket 1, i \rrbracket, \quad \zeta_{C\varepsilon}(z_l) &\geq \frac{\zeta_\varepsilon(g(k|_{I_l}))}{2n} - \eta. \end{aligned}$$

Quitte à réduire ε , l'ensemble des résultats de cette section (de la proposition 3.4.15 jusqu'au corollaire 3.4.19) appliqués au produit $W(\varphi) \left(y \times \prod_{l=1}^i z_l \right) = W(\varphi)(e(k, I))$, ainsi que (3.1.10.5), nous permet de trouver un élément $e'(k, I) \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\underline{X}, i}$ tel que :

$$\begin{aligned} e'(k, I) &\in \text{Fil}^{u(k)} W \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}, \\ W(\varphi)(e'(k, I)) &= W(\varphi)(e(k, I)), \\ \zeta_{C\varepsilon}(e'(k, I)) &\geq \zeta_{C\varepsilon}(y) + \sum_{l=1}^i \zeta_{C\varepsilon}(z_l) \geq \frac{\zeta_{C\varepsilon}(x) - 2n \text{v}_V(\eta_{k, I}) - 2n(i+1)\eta}{2n}. \end{aligned}$$

La série $x' := \sum_{(k, I) \in \mathcal{P}^{\underline{X}^{(p)}}} \eta_{k, I} e'(k, I)$ converge alors pour la topologie canonique. Les inégalités ci-dessus permettent également de vérifier la surconvergence, c'est-à-dire que $x' \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{\underline{X}, i}$, et enfin on a $W(\varphi)(x) = W(\varphi)(x')$. $\square$

Corollaire 3.4.22. *Supposons que $G = \widetilde{\text{Frob}}$. On a l'égalité d'ensembles :*

$$W(\varphi) \left(\bigoplus_{i=0}^{n+1+m} W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X,i} \right) = W^\dagger \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}.$$

Plus précisément, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $x \in W^\dagger \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^i$, il existe un unique $\omega \in \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},i}$ ainsi qu'une unique application $s: G(i) \sqcup G(i-1) \rightarrow R^\dagger$ tels que :

$$e \mapsto s_e$$

$$x = t_F(\omega) + \sum_{e \in G(i)} t_F(s_e)e + d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_F(s_e)e \right).$$

Démonstration. Il s'agit d'une simple conséquence des propositions 3.4.21 et 3.4.8. $\square$

Théorème 3.4.23. *Quels que soient $i \in \mathbb{N}$ et $x \in W^\dagger \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^i$, il existe un unique $\omega \in \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},i}$ et une unique application $s: G(i) \sqcup G(i-1) \rightarrow R^\dagger$ tels que :*

$$e \mapsto s_e$$

$$x = t_F(\omega) + \sum_{e \in G(i)} t_F(s_e)e + d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_F(s_e)e \right).$$

Démonstration. Soit $x \in W^\dagger \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^i$. D'après le corollaire 3.4.22, il existe $y \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X,i}$ tel que $W(\varphi)(y) = x$. On peut en particulier d'après la proposition 3.4.6 prendre $\varepsilon > 0$, $C \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger / W(\mathbb{K})}^{\text{sep},i}$ et $s: G(i) \sqcup G(i-1) \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger$ tels que :

$$e \mapsto s_e$$

$$y = t_{\widetilde{\text{Frob}}}(\omega) + \sum_{e \in G(i)} t_{\widetilde{\text{Frob}}}(s_e)e + d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_{\widetilde{\text{Frob}}}(s_e)e \right),$$

$$\zeta_\varepsilon \left(t_{\widetilde{\text{Frob}}}(\omega) \right) \geq C,$$

$$\forall e \in G(i) \sqcup G(i-1), \zeta_\varepsilon \left(t_{\widetilde{\text{Frob}}}(s_e) \right) + \zeta_\varepsilon(e) \geq C.$$

Quitte à réduire ε , on sait d'après le lemme 3.4.5 que $\zeta_\varepsilon(v_G(\omega)) \geq C$. De plus, puisque $v_G(\omega) \in \text{Fil} \left(W \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^i \right)$ d'après (3.3.2.1), on déduit des propositions 3.4.6 et 3.4.8 que

l'on peut trouver $\omega' \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},i}$ et $s': G(i) \sqcup G(i-1) \rightarrow W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/W(\mathbb{K})$ tels que :

$$\begin{aligned} v_G(\omega) &= t_{\text{Frob}}(p\omega') + \sum_{e \in G(i)} t_{\text{Frob}}(s'_e)e + d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_{\text{Frob}}(s'_e)e \right), \\ \zeta_\varepsilon(t_{\text{Frob}}(p\omega')) &\geq C, \\ \forall e \in G(i) \sqcup G(i-1), \quad \zeta_\varepsilon(t_{\text{Frob}}(s'_e)) + \zeta_\varepsilon(e) &\geq C. \end{aligned}$$

On déduit de tout cela, ainsi que du fait que $p \mid v_F(z)e$ pour tout $z \in \Omega_{W(\mathbb{K})[\underline{X}^{(p)}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},i}$ et tout $e \in G(i) \sqcup G(i-1)$, que :

$$y \equiv t_F(\omega) + \sum_{e \in G(i)} t_F(s_e - s'_e)e + d \left(\sum_{e \in G(i-1)} t_F(s_e - s'_e)e \right) [p].$$

En particulier, on peut répéter le processus d'après la proposition 2.3.19, ce qui conclut la preuve du théorème. $\square$

(3.4.24) On définit pour tout $\varepsilon > 0$ l'application :

$$\zeta_{\varepsilon,\varphi}: \begin{array}{ll} W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}} & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \\ x & \mapsto \sup \{ \zeta_\varepsilon(y) \mid y \in W(\varphi)^{-1}(\{x\}) \} \end{array}.$$

Pour tout élément $x \in W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\zeta_{\varepsilon,\varphi}(x) \neq -\infty$. De plus, d'après [17] et le théorème 3.1.25, quel que soit $\varepsilon > 0$ l'application $\zeta_{\varepsilon,\varphi}$ est une pseudo-valuation.

En utilisant le théorème 3.4.23 et la proposition 3.4.8, il est alors clair que si l'on considère une série $y := \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ d'éléments de $W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$, convergente pour la topologie canonique, alors s'il existe $\varepsilon > 0$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que $\zeta_{\varepsilon,\varphi}(x_i) \geq C$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $y \in W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$ et $\zeta_{\varepsilon,\varphi}(y) \geq C$.

(3.4.25) À l'instar de la situation dans le cas de l'espace affine, on peut définir pour tout $i \in \mathbb{N}$ le $R^\dagger$ -module :

$$W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp},i} := \left\{ \sum_{e \in G(i)} t_F(s_e)e \mid \begin{array}{l} \exists C \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \\ \forall e \in G(i), \quad \zeta_{\varepsilon,\varphi}(t_F(s_e)) + \zeta_{\varepsilon,\varphi}(e) \geq C \\ \forall e \in G(i), \quad s_e \in W^{\dagger,\text{int},0}_{\overline{R}/\mathbb{K}} \end{array} \right\}.$$

Il s'agit de l'image par $W(\varphi)$ de $W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i}$. Le théorème 3.4.23 nous assure une décomposition en somme directe de $W(\mathbb{K})$ -modules :

$$W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^i = t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, i} \right) \oplus W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp}, i} \oplus d \left(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp}, i} \right).$$

On notera également :

$$W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frac}, i} := W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp}, i} \oplus d \left(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp}, i} \right).$$

Si $x \in W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$, on notera $x|_{\text{int}}$ la projection de x dans $t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \right)$, on notera $x|_{\text{frac}}$ la projection de x dans $W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frac}}$, on notera $x|_{\text{frp}}$ la projection de x dans $W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp}}$ et $x|_{d(\text{frp})}$ la projection de x dans $d \left(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp}} \right)$.

Ces notations dépendent du choix du relèvement de Frobenius F et du morphisme structural φ , mais en pratique cela ne sera prêté pas à confusion dans le contexte. Remarquons qu'il n'y a d'ailleurs pas de conflit avec celles introduites en (2.3.18) si l'on a $F = \widetilde{\text{Frob}}$ et $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y, Z_1]}$.

Cette décomposition est similaire à celle que nous avons introduite dans la section 2.3. Nous verrons au prochain chapitre que cette décomposition s'avère suffisante pour démontrer le théorème principal de cette thèse, notamment grâce aux résultats de contrôle de la surconvergence que nous avons obtenu ci-avant.

Proposition 3.4.26. *Soient $i, j \in \mathbb{N}$, $x \in W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp}, i}$ et $y \in W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^j$. Alors il existe $z \in W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp}, i+j}$ tel que :*

$$\begin{aligned} xy &\equiv z[p], \\ y \in W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\varphi-\text{frp}, j} &\implies z \equiv 0[p]. \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $x' \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^{X-\text{frp}, i}$ et $y' \in W^\dagger \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}^{(p)}] / \mathbb{K}}^j$ des antécédents respectifs par $W(\varphi)$ de x et y . Écrivons $x' = \sum_{e \in G(i)} t_G(s_e) e$, où $s_e \in W(\mathbb{K}) \left[\underline{X}^{(p)} \right]^\dagger$ pour tout $e \in G(i)$. Remarquons que $x' y' = \sum_{e \in G(i)} t_{\widetilde{\text{Frob}}}(s_e) e y' + \sum_{e \in G(i)} v_G(s_e) e y'$. D'après (3.3.2.1), on a $p \mid \sum_{e \in G(i)} v_G(s_e) e y'$. On peut alors conclure en employant les propositions 3.4.15, 3.4.17 et 3.4.18. $\square$

Chapitre 4

Coefficients de la cohomologie de De Rham-Witt surconvergente

Le complexe de De Rham-Witt surconvergent permet de calculer la cohomologie rigide à coefficients dans un isocrystal surconvergent [19]. Un théorème similaire avait été obtenu par Etesse pour le calcul de la cohomologie cristalline et le complexe de De Rham-Witt avec coefficients [21]. Bloch démontra ensuite une équivalence de catégories entre de certains cristaux et des connexions de De Rham-Witt localement libres [8]. On peut donc légitimement espérer généraliser ces résultats pour le complexe de De Rham-Witt surconvergent.

Nous adaptons dans ce chapitre la preuve de Bloch au cadre surconvergent. Nous obtenons ainsi une équivalence de catégories entre des connexions localement libres sur un schéma formel faible et des connexions de De Rham-Witt surconvergentes localement libres. Un tel énoncé nécessite le développement d'un formalisme plus général que celui des connexions usuelles qui est réalisée en section 4.1. Pour finir, on démontre l'équivalence de catégories dans la section 4.2.

4.1 Connexions

Nous introduisons ici la notion de connexion sur un faisceau d'algèbres différentielles graduées. On s'inspire grandement de [30] pour nombre de notations, mais les notions présentées ici sont plus générales, notamment afin de retrouver les catégories de coefficients introduites par Ertl [19][20].

On démontre également quelques résultats de folklore concernant les connexions sur un module libre et leurs matrices de représentations, ainsi que la tensorisation par $\mathbb{Q}$ de certains types faisceaux. On introduit enfin la notion de F -structure, analogue de la notion de structure de Frobenius en cohomologie rigide.

(4.1.1) Dans toute cette section, X désigne un espace topologique, R un anneau com-

mutatif et $\mathcal{F} = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n, d \right)$ un faisceau de R -dgas alternées. On notera les sections des produits tensoriels et extérieurs de faisceaux comme s'il s'agissait de préfaisceaux, la propriété universelle des faisceautisés [44, 0080] justifiant une telle notation.

(4.1.2) Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé, on définit pour tout $\mathcal{O}_X(X)$ -module M un faisceau de $\mathcal{O}_X$ -modules $\widetilde{M}$ qui est le faisceautisé du préfaisceau qui à chaque ouvert U de X associe $M \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U)$. Ce faisceau dépend évidemment de l'espace annelé considéré, mais dans le contexte la notation $\widetilde{M}$ ne devrait pas créer de confusion chez le lecteur.

D'après [44, 01BH], ce faisceau est un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$ -modules. De plus, cette construction est fonctorielle et l'on vérifie la propriété d'adjonction pour tout $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}(\widetilde{M}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(X)\text{-Mod}}(M, \mathcal{F}(X)). \quad (4.1.2.1)$$

Il est bien connu que si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma affine, alors la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents est équivalente à la catégorie des $\mathcal{O}_X(X)$ -modules, le foncteur d'équivalence étant $\widetilde{}$ et la faisceautisation dans la construction ci-dessus est inutile.

Si $(\mathfrak{X}^\dagger, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger})$ est un schéma formel faible, alors d'après [40, Theorem 3.] le foncteur $\widetilde{}$ induit une équivalence de catégories entre les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(\mathfrak{X}^\dagger)$ -modules de type fini et les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}$ -modules cohérents, et comme ci-dessus la faisceautisation dans la construction n'est pas nécessaire.

Définition 4.1.3. Une $\mathcal{F}$ -**connexion** est la donnée d'un $\mathcal{F}_0$ -module quasi-cohérent M et d'un morphisme $\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ de faisceau de groupes sur X vérifiant la règle de Leibniz pour tout ouvert U de X :

$$\forall s \in \mathcal{F}_0(U), \forall m \in M(U), \nabla(sm) = s\nabla(m) + m \otimes d(s).$$

Définition 4.1.4. Soient (M, ∇_M) et (N, ∇_N) deux $\mathcal{F}$ -connexions. Un **morphisme horizontal** $\varphi : (M, \nabla_M) \rightarrow (N, \nabla_N)$ est la donnée d'un morphisme $\tilde{\varphi} : M \rightarrow N$ de $\mathcal{F}_0$ -modules tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & N \\ \downarrow \nabla_M & & \downarrow \nabla_N \\ M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\tilde{\varphi} \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_1}} & N \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1 \end{array} .$$

Nous noterons $\mathcal{F}\text{-MC}$ la catégorie des $\mathcal{F}$ -connexions et des morphismes horizontaux.

(4.1.5) Soit $\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ une $\mathcal{F}$ -connexion. Pour tout ouvert de U on peut définir une $\mathcal{F}|_U$ -connexion notée $\nabla|_U$ en se restreignant aux ouverts de U . On peut faire de même pour les morphismes, ce qui nous donne un foncteur :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\text{-MC} & \rightarrow & \mathcal{F}|_U\text{-MC} \\ \bullet|_U : & \nabla \mapsto & \nabla|_U \\ & \varphi \mapsto & \varphi|_U \end{array} .$$

(4.1.6) Soit $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ une $\mathcal{F}$ -connexion. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en utilisant la propriété universelle des faisceautisés [44, 0080] on définit un morphisme de faisceaux de groupes sur X en posant pour tout ouvert U de X :

$$\nabla_k: \begin{array}{ccc} (M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_k)(U) & \rightarrow & (M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_{k+1})(U) \\ m \otimes s & \mapsto & (-1)^k \nabla(m) \wedge s + m \otimes d(s) \end{array} .$$

La règle de Leibniz et la définition d'une dérivation nous assure que ce morphisme est bien défini.

Définition 4.1.7. Une $\mathcal{F}$ -connexion ∇ est dite **intégrable** si $\nabla_1 \circ \nabla = 0$. On notera $\mathcal{F}\text{-MIC}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}\text{-MC}$ dont les objets sont les connexions intégrables. On notera également $\mathcal{F}\text{-MIC}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}\text{-MIC}$ des connexions sur un $\mathcal{F}_0$ -module libre de type fini, et $\mathcal{F}\text{-MIC}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}\text{-MIC}$ des connexions sur un $\mathcal{F}_0$ -module localement libre de type fini.

Définition 4.1.8. Soit ∇ une $\mathcal{F}$ -connexion sur un $\mathcal{F}_0$ -module M libre de rang $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\{m_i\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ une $\mathcal{F}_0(X)$ -base de $M(X)$. L'unique matrice $(n_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, r \rrbracket} \in \text{Mat}_r(\mathcal{F}_1)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ on ait $\nabla(m_i) = \sum_{j=1}^r m_j \otimes n_{i,j}$ est appelée la **matrice représentative** de la connexion ∇ pour la base $\{m_i\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$. Celle-ci détermine uniquement ∇ lorsque la base est fixée.

(4.1.9) Remarquons que si ∇ une $\mathcal{F}$ -connexion sur un $\mathcal{F}_0$ -module M libre de rang $r \in \mathbb{N}^*$, et que B est une $\mathcal{F}_0(X)$ -base de $M(X)$, alors la matrice représentative de ∇ pour la base B détermine uniquement la connexion : en effet, pour tout ouvert U de X la règle de Leibniz permet de déduire la valeur de la connexion pour n'importe quel élément de $M(U)$ à partir des valeurs des éléments d'une base de $M(U)$, que l'on peut obtenir par restriction à partir de la matrice représentative.

Proposition 4.1.10. Soit $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ une $\mathcal{F}$ -connexion sur un $\mathcal{F}_0$ -module libre de rang $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\{m_i\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ une $\mathcal{F}_0(X)$ -base de M . Considérons une matrice inversible $U = \{u_{i,j}\}_{i,j \in \llbracket 1, r \rrbracket} \in \text{Mat}_r(\mathcal{F}_0(X))^\times$, et $N = (n_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, r \rrbracket} \in \text{Mat}_r(\mathcal{F}_1(X))$ une matrice représentative de ∇ pour $\{m_i\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$. Alors $\left\{ \sum_{j=1}^r u_{i,j} m_j \right\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ est une base de M , et pour cette dernière la matrice représentative de ∇ est :

$$UNU^{-1} + d(U)U^{-1}.$$

Démonstration. La famille $\left\{ \sum_{j=1}^r u_{i,j} m_j \right\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ est une $\mathcal{F}_0(X)$ -base de $M(X)$ car U est

inversible. Notons $\{v_{i,j}\}_{i,j \in \llbracket 1, r \rrbracket} := U^{-1}$, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ on a alors :

$$m_i = \sum_{k=1}^r v_{i,k} \left(\sum_{j=1}^r u_{k,j} m_j \right).$$

De plus :

$$\begin{aligned} \nabla \left(\sum_{j=1}^r u_{i,j} m_j \right) &= \sum_{j=1}^r u_{i,j} \nabla(m_j) + m_j \otimes d(u_{i,j}) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^r m_k \otimes u_{i,j} n_{j,k} \right) + m_j \otimes d(u_{i,j}) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k'=1}^r m_j \otimes u_{i,k'} n_{k',j} \right) + m_j \otimes d(u_{i,j}) \\ &= \sum_{j=1}^r m_j \otimes \left(\left(\sum_{k'=1}^r u_{i,k'} n_{k',j} \right) + d(u_{i,j}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^r v_{j,k} \left(\sum_{i'=1}^r u_{k,i'} m_{i'} \right) \right) \otimes \left(\left(\sum_{k'=1}^r u_{i,k'} n_{k',j} \right) + d(u_{i,j}) \right) \\ \nabla \left(\sum_{j=1}^r u_{i,j} m_j \right) &= \sum_{k=1}^r \left(\left(\sum_{i'=1}^r u_{k,i'} m_{i'} \right) \otimes \sum_{j=1}^r \left(\left(\sum_{k'=1}^r u_{i,k'} n_{k',j} \right) + d(u_{i,j}) \right) v_{j,k} \right). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.11. *Soit $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ une $\mathcal{F}$ -connexion sur un $\mathcal{F}_0$ -module libre de rang $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\{m_i\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ une $\mathcal{F}_0(X)$ -base de M , et soit N une matrice représentative de ∇ pour cette base. Alors ∇ est intégrable si et seulement si $d(N) - N^2 = 0$.*

Démonstration. Posons $\{n_{i,j}\}_{i,j \in \llbracket 1, r \rrbracket} := N$. On sait que $\nabla(m_i) = \sum_{j=1}^r m_j \otimes n_{i,j}$ pour tout

$i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, par conséquent on vérifie :

$$\begin{aligned} \nabla_1 \circ \nabla(m_i) &= \sum_{j=1}^r (-\nabla(m_j) n_{i,j} + m_j \otimes d(n_{i,j})) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(m_j \otimes d(n_{i,j}) - \sum_{k=1}^r m_k \otimes n_{j,k} n_{i,j} \right) \\ \nabla_1 \circ \nabla(m_i) &= \sum_{j=1}^r m_j \otimes \left(d(n_{i,j}) - \sum_{l=1}^r n_{l,j} n_{i,l} \right). \end{aligned}$$

On conclut alors par définition de l'intégrabilité, et car $\{m_i\}_{i \in [1, r]}$ une $\mathcal{F}_0(X)$ -base de M . $\square$

Proposition 4.1.12. *Soit $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de R -dgas alternées, et posons $\varphi_M: (M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1)(U) \rightarrow ((M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{G}_0) \otimes_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1)(U)$ pour tout ouvert U de X . Soit $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ une $\mathcal{F}$ -connexion. Alors l'application suivante forme une $\mathcal{G}$ -connexion :*

$$\varphi(\nabla)(U): \begin{array}{ccc} (M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{G}_0)(U) & \rightarrow & ((M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{G}_0) \otimes_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1)(U) \\ m \otimes g & \mapsto & g\varphi_M(\nabla(m)) + (m \otimes 1) \otimes d(g) \end{array} .$$

Démonstration. L'application est bien définie. En effet, celle-ci est clairement bi-additive, et pour tout ouvert U de X , et tout éléments $f \in \mathcal{F}_0(U)$, $m \in M(U)$ et $g \in \mathcal{G}_0(U)$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\nabla)(U)(fm \otimes g) &= g\varphi_M(\nabla(fm)) + (fm \otimes 1) \otimes d(g) \\ &= g\varphi_M(f\nabla(m) + m \otimes d(f)) + (fm \otimes 1) \otimes d(g) \\ &= fg\varphi_M(\nabla(m)) + (m \otimes 1) \otimes g\varphi(d(f)) + (m \otimes 1) \otimes \varphi(f)d(g) \\ \varphi(\nabla)(U)(fm \otimes g) &= \varphi(\nabla)(U)(m \otimes \varphi(f)g). \end{aligned}$$

Enfin, il s'agit d'une connexion car pour tout $m \in M$ et tout $g, g' \in \mathcal{G}_0(U)$ on vérifie :

$$\begin{aligned} \varphi(\nabla)(U)(g'(m \otimes g)) &= \varphi(\nabla)(U)(m \otimes g'g) \\ &= g'g\varphi_M(\nabla(m)) + (m \otimes 1) \otimes d(g'g) \\ &= g'g\varphi_M(\nabla(m)) + (m \otimes 1) \otimes g'd(g) + (m \otimes 1) \otimes gd(g') \\ \varphi(\nabla)(U)(g'(m \otimes g)) &= g'\varphi(\nabla)(U)(m \otimes g) + (m \otimes g) \otimes d(g'). \end{aligned}$$

$\square$

(4.1.13) Soit $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de R -dgas alternées. La proposition 4.1.12 nous permet de définir le foncteur :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\text{-MC} & \rightarrow & \mathcal{G}\text{-MC} \\ \varphi: \quad \nabla & \mapsto & \varphi(\nabla) \\ & \psi & \mapsto \psi \otimes \text{Id}_{\mathcal{G}_0} \end{array} .$$

(4.1.14) Soient $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de R -dgas alternées et ∇ une $\mathcal{F}$ -connexion. Soit U un ouvert de X . Par construction on a un isomorphisme fonctoriel en ∇ de $\mathcal{G}|_U$ -connexions :

$$\varphi(\nabla)|_U \cong \varphi|_U (\nabla|_U) .$$

(4.1.15) Soit $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de R -dgas alternées. Remarquons que si $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ est une $\mathcal{F}$ -connexion sur un $\mathcal{F}_0$ -module libre de rang $r \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi(\nabla)$ sera aussi une connexion sur un module libre de rang r . De plus, si l'on considère

une base B de $M(X)$ et la matrice représentative N de ∇ associée à B , alors $\varphi(N)$ est la matrice représentative de $\varphi(\nabla)$ associée à la base $B \otimes 1$. En particulier en employant la proposition 4.1.11, on observe que le foncteur φ préserve l'intégrabilité des connexions. On obtient donc par restriction un foncteur :

$$\varphi: \mathcal{F}\text{-MIC}_f \rightarrow \mathcal{G}\text{-MIC}_f.$$

Proposition 4.1.16. *Soit $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p . Supposons que R est une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative telle que $\Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1}$ soit un R -module de type fini. Alors, on a un isomorphisme canonique de $R^\dagger$ -modules :*

$$\Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \otimes_R R^\dagger \cong \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1}.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(P_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_n])^\mathbb{N}$ tels qu'il existe $c \in \mathbb{N}$ vérifiant $\deg(P_j) \leq c(j+1)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Si $\underline{r} \in R^n$ alors $\sum_{j \in \mathbb{N}} p^j P_j(\underline{r})$ est un élément

de $R^\dagger$, et tous les éléments de cet anneau s'écrivent sous cette forme. Si $d: R \rightarrow \Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1}$ désigne la dérivation canonique, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$ il découle de (1.3.2.1) que l'on peut écrire

$$d(P_j(\underline{r})) = \sum_{i=1}^n P_{j,i}(\underline{r}) d(r_i)$$

où les $P_{j,i} \in W(\mathbb{K})[\underline{X}]$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ vérifient $\deg(P_j) \leq c(j+1) - 1$. On définit une application :

$$d': \sum_{j \in \mathbb{N}} p^j P_j(\underline{r}) \mapsto \sum_{i=1}^n d(r_i) \otimes \sum_{j \in \mathbb{N}} p^j P_{j,i}(\underline{r}) \quad .$$

Cette application ne dépend pas des choix de n , $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $\underline{r}$. En effet, par hypothèse sur R on vérifie que $\Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \otimes_R R^\dagger$ est un $R^\dagger$ -module de type fini. Il découle alors de la proposition 1.2.13 que $\Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \otimes_R R^\dagger$ est séparé pour la topologie p -adique. De ce fait, si l'on choisit d'autres $n' \in \mathbb{N}$, $(P'_j)_{j \in \mathbb{N}} \in (W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{n'}])^\mathbb{N}$ et $\underline{r}' \in R^{n'}$ vérifiant les mêmes conditions, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n d(r_i) \otimes \sum_{j \in \mathbb{N}} p^j P_{j,i}(\underline{r}) - \sum_{i=1}^{n'} d(r'_i) \otimes \sum_{j \in \mathbb{N}} p^j P'_{j,i}(\underline{r}') \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} p^j \left(\sum_{i=1}^n d(r_i) P_{j,i}(\underline{r}) - \sum_{i=1}^{n'} d(r'_i) P'_{j,i}(\underline{r}') \right) \otimes 1 \\ & \quad + p^k \sum_{j=k}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n d(r_i) \otimes p^{j-k} P_{j,i}(\underline{r}) - \sum_{i=1}^{n'} d(r'_i) \otimes p^{j-k} P'_{j,i}(\underline{r}') \right). \end{aligned}$$

On remarque ainsi que la différence entre les deux définitions sera divisible par p^k quel que soit $k \in \mathbb{N}$, l'application est de ce fait bien définie.

On vérifie que d' est une $W(\mathbb{K})$ -dérivation car, en reprenant les mêmes notations que ci-dessus, on remarque que pour tout $j, j' \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} d(P_j(r)P_{j'}(r')) &= P_j(r)d(P_{j'}(r')) + P_{j'}(r')d(P_j(r)) \\ &= \sum_{i=1}^{n'} P_j(r)P'_{j',i}(r')d(r'_i) + \sum_{i=1}^n P'_{j'}(r')P_{j,i}(r)d(r_i). \end{aligned}$$

Si l'on note $d_{\dagger}: R^{\dagger} \rightarrow \Omega_{R^{\dagger}/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1}$ la dérivation universelle, on sait alors qu'il existe un unique morphisme de $R^{\dagger}$ -modules $\varphi: \Omega_{R^{\dagger}/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \rightarrow \Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \otimes_R R^{\dagger}$ tel que $\varphi \circ d_{\dagger} = d'$. Posons $\iota: \Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \rightarrow \Omega_{R^{\dagger}/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1}$ le morphisme canonique de R -modules, on définit :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \otimes_R R^{\dagger} &\rightarrow \Omega_{R^{\dagger}/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \\ \omega \otimes r &\mapsto \iota(\omega)r \end{aligned}.$$

Remarquons que pour tout $r \in R$ on a $d'(r) = d(r) \otimes 1$, cela nous permet de vérifier que $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ d'(r) = d'(r)$ et $\varphi^{-1} \circ \varphi \circ d_{\dagger}(r) = d_{\dagger}(r)$. En écrivant des séries p -adiquement surconvergentes, on obtient des égalités similaires si $r \in R^{\dagger}$. Puisque $d'(R^{\dagger})$ engendre $\Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \otimes_R R^{\dagger}$ et $d_{\dagger}(R^{\dagger})$ engendre $\Omega_{R^{\dagger}/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1}$ en tant que $R^{\dagger}$ -modules, on peut conclure. $\square$

Corollaire 4.1.17. *Soit $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p . Supposons que R est une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative telle que $\Omega_{R/W(\mathbb{K})}^1$ soit un R -module de type fini. Alors, on a un isomorphisme canonique de $W(\mathbb{K})$ -dgas :*

$$\Omega_{R/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_R R^{\dagger} \cong \Omega_{R^{\dagger}/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}.$$

Démonstration. On applique la proposition 4.1.16 et [12, III.83, Proposition 8.]. $\square$

Proposition 4.1.18. *Soit $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p . Supposons que R est une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative lisse. Soit $(\mathfrak{X}^{\dagger}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\dagger}})$ un $W(\mathbb{K})$ -schéma formel faible tel que pour tout U de $\mathfrak{X}^{\dagger}$ qui soit un schéma formel affine faible alors le morphisme structurel $W(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\dagger}}(U)$ est plat, et que $(X, \mathcal{O}_X) := (\mathfrak{X}^{\dagger}, \overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\dagger}}})$ soit un schéma lisse sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique faisceau quasi-cohérent de $W(\mathbb{K})$ -dgas $\Omega_{\mathfrak{X}^{\dagger}/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}$ tel que pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\dagger}}(U)$ -module M et toute paire d'ouverts $V \subset U$ de $\mathfrak{X}^{\dagger}$ qui soient des K -schémas formels affines faibles on ait :*

$$\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\dagger}}|_U} \Omega_{\mathfrak{X}^{\dagger}/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}|_U(V) \cong (M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\dagger}}(U)} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\dagger}}(V)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\dagger}}(V)} \Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\dagger}}(V)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}.$$

Démonstration. Soient $V \subset U$ deux ouverts de $\mathfrak{X}^\dagger$ qui soient des K -schémas formels affines faibles. Soit M un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)$ -module. Notons $\mathcal{F}$ le faisceautisé de $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}|U} \Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(\bullet)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}$. Par hypothèse sur $(\mathfrak{X}^\dagger, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger})$, on peut relever $\mathcal{O}_X(U)$ en une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative lisse R . On aura $R^\dagger \cong \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)$ en tant que $W(\mathbb{K})$ -algèbres d'après [45, (2.4.4)]. De plus, $\Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)$ -module de type fini d'après [41, Theorem 4.5.].

On a un morphisme canonique $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)} \Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow \mathcal{F}(V)$ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)$ -modules, qui nous fournit par adjonction [44, 01BH] un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}|_V$ -modules $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)} \widetilde{\Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}} \rightarrow \mathcal{F}|_V$. Pour tout $x \in V$, ce morphisme induit un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger,x}$ -modules :

$$M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)} \Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)} \varinjlim_{x \in W \subset V} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(W) \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)} \varinjlim_{x \in W \subset V} \Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(W)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}. \quad (4.1.18.1)$$

On peut restreindre les ouverts W dans les limites ci-dessous aux ouverts standards $W = D(\bar{f})$, où $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)$ vérifie $x \in D(\bar{f})$. D'après [44, 00RT] et [12, III.83, Proposition 8.] on a un isomorphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas $\Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)_f \cong \Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)_f/W(\mathbb{K})}$ duquel on déduit que $\Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)_f \cong \Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)_f/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}$ en tant que $W(\mathbb{K})$ -dgas. En appliquant le corollaire on obtient alors 4.1.17 un isomorphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas :

$$\Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(W)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \cong \Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(W).$$

De plus, puisque le produit tensoriel commute avec les limites directes [44, 00DD] on vérifie trivialement que les morphismes (4.1.18.1) sont en fait des isomorphismes pour tout $x \in U$, donc $M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)} \widetilde{\Omega_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(V)/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}} \rightarrow \mathcal{F}|_V$ est un isomorphisme et on conclut. $\square$

(4.1.19) La proposition 4.1.18 ci-dessus implique notamment que si $\mathfrak{X}^\dagger$ est un schéma formel faible affine, alors pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(\mathfrak{X}^\dagger)$ -module M et toute connexion sur le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}$ -module quasi-cohérent $\widetilde{M}$, le foncteur section globale fournit une connexion au sens algébrique classique. De plus, si la connexion de départ est intégrable, la connexion algébrique obtenue le sera également.

(4.1.20) Soient $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p et $K := \text{Frac}(W(\mathbb{K}))$. On remarque que $K \cong W(\mathbb{K})_p$ en tant qu'anneaux ; on dispose par conséquent pour toute $W(\mathbb{K})$ -dga S d'un isomorphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas $S \otimes_{W(\mathbb{K})} K \cong S_p$. On en déduit que si S n'a pas de p torsion, le morphisme canonique de $W(\mathbb{K})$ -algèbres $S \rightarrow S \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ est injectif.

Lemme 4.1.21. *Soient $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p et $K := \text{Frac}(W(\mathbb{K}))$. Soient X un espace topologique noethérien et $\mathcal{F}$ un faisceau de $W(\mathbb{K})$ -dgas sans p -torsion. Alors le préfaisceau $\mathcal{F} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ qui à chaque ouvert U de X associe $\mathcal{F}(U) \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ est un faisceau de K -dgas sur X tel que le morphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ soit injectif.*

Démonstration. L'injectivité du morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ est une conséquence de la discussion en (4.1.20). Pour tout ensemble I et toute famille $\{U_i\}_{i \in I}$ d'ouverts de X , alors pour $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ si $w \in \mathcal{F} \otimes_{W(\mathbb{K})} K(U)$ est nul sur U_i pour tout $i \in I$, alors $w = 0$. En effet, on peut trouver $u \in \mathbb{N}$ tel que $p^u w \in \mathcal{F}(U)$, d'où $p^u w = 0$ puisque $\mathcal{F}$ est un faisceau. Puisque X est noethérien, si pour tout $i \in I$ on considère $w_i \in \mathcal{F} \otimes_{W(\mathbb{K})} K(U_i)$ tels que ces éléments coïncident sur les intersections, alors on peut considérer un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $U = \bigcup_{j \in J} U_j$. On peut trouver $u \in \mathbb{N}$ tel que $p^u w_j \in \mathcal{F}(U_j)$ pour tout $j \in J$, et on peut alors relever ces éléments en un unique $w' \in \mathcal{F}(U)$, et $w := p^{-u} w'$ relève alors les w_j pour tout $j \in J$. De plus pour tout $i \in I$, alors w relève aussi w_i car l'on aurait pu faire exactement le même raisonnement avec $J \cup \{i\}$, et le relèvement aurait été le même car nous avons démontré son unicité en début de paragraphe. $\square$

(4.1.22) Soit $\mathbb{K}$ un corps parfait de caractéristique p , et notons $K := \text{Frac}(W(\mathbb{K}))$. Si $(\mathfrak{X}^\dagger, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger})$ est un $W(\mathbb{K})$ -schéma formel faible tel que pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}^\dagger$ qui soit un schéma formel affine faible on a $W(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)$ plat et $(X, \mathcal{O}_X) := (\mathfrak{X}^\dagger, \overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}})$ est une $\mathbb{K}$ -variété lisse, alors on peut appliquer le lemme 4.1.21 aux faisceaux $W^\dagger \Omega_{X/\mathbb{K}}$ et $\Omega_{X/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}$. En effet, l'espace topologique sous-jacent de X est noethérien d'après [44, 01TS & 01OZ], et les faisceaux n'ont pas de p -torsion (voir pour le complexe de De Rham-Witt surconvergent la proposition 2.3.19).

(4.1.23) Soit $F: R \rightarrow R$ un endomorphisme d'anneaux. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de R -dgas alternées, et notons $\mathcal{F}_{[F]}$ le faisceau de R -dgas obtenu par restriction des scalaires par F . On remarque que les catégories $\mathcal{F}\text{-MC}$ et $\mathcal{F}_{[F]}\text{-MC}$, $\mathcal{F}\text{-MIC}$ et $\mathcal{F}_{[F]}\text{-MIC}$ ainsi que $\mathcal{F}\text{-MIC}_f$ et $\mathcal{F}_{[F]}\text{-MIC}_f$ sont deux à deux canoniquement équivalentes. En effet, les données nécessaires à la définition d'une connexion ne dépendent pas de la structure de R -algèbre graduée de $\mathcal{F}$, mais uniquement de sa structure d'anneau gradué qui reste inchangée dans le procédé. L'identification est alors triviale.

Définition 4.1.24. Soit $F: R \rightarrow R$ un endomorphisme d'anneaux. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de R -dgas alternées, et notons $\mathcal{F}_{[F]}$ le faisceau de R -dgas obtenu par restriction des scalaires par F . Soit $F': \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{[F]}$ un endomorphisme de R -dgas alternées. Soit ∇ une $\mathcal{F}$ -connexion. Une F' -**structure** sur ∇ est la donnée d'un isomorphisme de $\mathcal{F}$ -connexions suivant l'identification (4.1.23) :

$$F'(\nabla) \cong \nabla.$$

On notera $F'\text{-}\mathcal{F}\text{-MIC}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}\text{-MIC}_f$ dont les objets sont les $\mathcal{F}$ -connexions munies d'une F' -structure, et $F'\text{-}\mathcal{F}\text{-MIC}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}\text{-MIC}_f$ dont les objets sont les $\mathcal{F}$ -connexions munies d'une F' -structure.

(4.1.25) Plaçons nous dans la situation du paragraphe (3.2.1), c'est-à-dire que R est une $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative lisse relevant un morphisme d'anneaux lisse $\mathbb{K} \rightarrow \overline{R}$, et l'on

se donne un relèvement de Frobenius $F: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$ compatible avec $F: W(\mathbb{K}) \rightarrow W(\mathbb{K})$. Posons $\mathfrak{X}^\dagger := \text{Spff}(R)$, $K := \text{Frac}(W(\mathbb{K}))$, et notons $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K}),K,[F]}^{\text{sep}}$ le faisceau de $W(\mathbb{K})$ -dgas obtenu à partir de $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ par restriction des scalaires par F . Notons également $\Omega(F): \Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K \rightarrow \Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K}),K,[F]}^{\text{sep}}$ le morphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas obtenu par fonctorialité (2.1.11) sur le faisceau donné par la proposition 4.1.18. La donnée d'une $\Omega(F)$ -structure sur une $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -connexion correspond alors avec la notion introduite en [5, (2.5.1)].

(4.1.26) Plaçons nous dans la situation du paragraphe (4.1.25). Notons allors noter $\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K}),K}^{\text{sep}} := \Gamma\left(\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K, \mathfrak{X}^\dagger\right)$ et $R_K^\dagger := \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K}),K}^{\text{sep},0}$. Supposons donnée une connexion ∇ sur le faisceau $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ (autrement vu, sur un $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -module libre de rang 1). Notons $\omega \in \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K}),K}^{\text{sep},1}$ l'élément vérifiant $\nabla(1) = 1 \otimes \omega$. D'après la proposition 4.1.10, on vérifie pour tout $r \in R_K^\dagger$ que $\nabla(r) = r \otimes (\omega + d(r)r^{-1})$. Alors si l'on dispose d'une $\Omega(F)$ -structure sur ∇ , il découle de (4.1.15) qu'il existe $r \in R_K^\dagger$ tel que $\omega - \Omega(F)(\omega) = d(r)r^{-1}$. Quitte à multiplier par un inversible, on peut supposer sans modifier $d(r)r^{-1}$ que $r = 1 + ps$ pour un certain $s \in R_K^\dagger$. En employant la proposition 3.2.6, on remarque alors que cette formule détermine uniquement que $\omega = \sum_{l \in \mathbb{N}} \Omega(F)^l (d(r)r^{-1})$.

De plus, si l'on note $r' := \prod_{l \in \mathbb{N}} p^l F^l(s)$ on a $\omega = d(r')r'^{-1}$. Cela implique que toutes les connexions libres de rang 1 sont isomorphes à la connexion qui à 1 associe 0.

(4.1.27) Soit $F: R \rightarrow R$ un endomorphisme d'anneaux. Soit $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de R -dgas alternées. Soient $F': \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{[F]}$ et $F'': \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_{[F]}$ des endomorphismes de R -dga alternées (compatibles avec F) telles que $\varphi \circ F' = F'' \circ \varphi$. Soit $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ une $\mathcal{F}$ -connexion sur un $\mathcal{F}_0$ -module libre de rang $r \in \mathbb{N}^*$ munie d'une F -structure. Il découle des discussions en (4.1.15) et (4.1.23) que l'on peut trouver une base de $M(X)$ telle que la matrice représentative de ∇ qui lui est associée soit à valeurs dans $F(\mathcal{F}_1(X))$. On remarque également que l'on obtient par restriction un foncteur :

$$\varphi: F\text{-}\mathcal{F}\text{-MIC}_f \rightarrow G\text{-}\mathcal{G}\text{-MIC}_f.$$

4.2 F -isocristaux et équivalence entre connexions

Nous entamons désormais la démonstration de l'équivalence de catégories entre les connexions intégrables sur un complété faible et les connexions de De Rham-Witt surconvergentes. La preuve que nous proposons ici possède la même stratégie que celle de Bloch dont elle est adaptée [8]. Il faut toutefois prendre garde à ce que nos séries surconvergent bien, ce pour quoi il fut nécessaire d'entreprendre l'étude explicite du chapitre 3.

On étend également cette preuve au cas des connexions munies d'une F -structure. Cela est nécessaire afin d'obtenir une équivalence de catégories entre connexions après avoir tensorisé par $\mathbb{Q}$: on peut par un argument classique se ramener au cas entier. C'est cette remarque qui nous permet de donner une interprétation partielle des F -isocristaux surconvergents pour la cohomologie de De Rham-Witt surconvergente.

(4.2.1) Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne un corps parfait de caractéristique p . On notera $\overline{R}$ une $\mathbb{K}$ -algèbre vérifiant les conditions du paragraphe (3.4.9), c'est-à-dire telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ pour lesquels on ait un morphisme étale fini $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \overline{R}$ faisant de $\overline{R}$ un $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ -module libre. On notera R une $W(\mathbb{K})$ -algèbre lisse relevant $\overline{R}$, et $F: R^\dagger \rightarrow R^\dagger$ un relèvement du Frobenius. On pose $X := \text{Spec}(\overline{R})$ et $\mathfrak{X}^\dagger := \text{Spff}(R)$, qui ont même espace topologique sous-jacent. On notera également $K := \text{Frac}(W(\mathbb{K}))$. On rappelle que F induit une injection $t_F: \Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}$ de $W(\mathbb{K})$ -dgas. On fixera également un morphisme surjectif de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ -algèbres $\varphi: \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{n+m}] \rightarrow \overline{R}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$, nous permettant de considérer les pseudo-valuations $\zeta_{\varepsilon, \varphi}$ définies pour tout $\varepsilon > 0$ en (3.4.24).

Lemme 4.2.2. *Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \text{Mat}_r(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1)$. Alors si $U \in \text{Mat}_r(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp}, 0})$ est l'unique matrice vérifiant $d(U) = -N|_{d(\text{frp})}$ alors la matrice ci-dessous est à valeurs dans $t_F(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1}) + W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp}, 1} + pd(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp}, 1})$:*

$$(I_r + U)N(I_r + U)^{-1} + d(I_r + U)(I_r + U)^{-1}.$$

Démonstration. Posons $V := \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (-U)^i$, cette série converge pour la topologie V -adique, surconverge d'après le théorème 3.1.25, et vérifie $(I_r + U)^{-1} = I_r + V$. De plus, V est par construction à valeurs dans $pt_F(R^\dagger) + W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp}, 0}$. Calculons ensuite :

$$\begin{aligned} & (I_r + U)N(I_r + V) + d(I_r + U)(I_r + V) \\ &= (I_r + U)(N|_{\text{int}} + N|_{\text{frp}} + N|_{d(\text{frp})})(I_r + V) + d(U) + d(U)V \\ &= N|_{\text{int}} + N|_{\text{frp}} + N|_{d(\text{frp})} + UN + NV + UNV - N|_{d(\text{frp})} + d(U)V \\ &= N|_{\text{int}} + N|_{\text{frp}} + UN + NV + UNV + d(U)V. \end{aligned}$$

Mais puisque $UN + NV + UNV + d(U)V$ est congru modulo p à une somme de produits entre un élément de $W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1$ et un élément de $W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp}, 0}$, la conclusion découle alors de la proposition 3.4.26. $\square$

Lemme 4.2.3. *Soit $N \in \text{Mat}_r(t_F(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1}) + W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp}, 1} + pd(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp}, 1}))$ une matrice carrée de taille $r \in \mathbb{N}^*$ telle que $d(N) = N^2$. Alors N est en fait à valeurs dans $t_F(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1}) + pW^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1$.*

Démonstration. Tout produit de deux éléments de $t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \right) + W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp},1}$ est congru modulo p à un élément de $t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},2} \right) + W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp},2}$ d'après la proposition 3.4.26, on conclut alors du fait que $d(N) = N^2$. $\square$

Lemme 4.2.4. Soient $r, s \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \text{Mat}_r \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \right) + p^s W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1$ une matrice telle que $d(N) = N^2$. Considérons $U \in \text{Mat}_r \left(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp},0} \right)$ l'unique matrice à valeurs dans $W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp},0}$ telle que $d(p^s U) = -N|_{\text{d}(\text{frp})}$. Alors la matrice suivante est à valeurs dans $t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \right) + p^{s+1} W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1$:

$$(I_r + p^s U)N(I_r + p^s U)^{-1} + d(I_r + p^s U)(I_r + p^s U)^{-1}.$$

Démonstration. Commençons par écrire $N = E + p^s H$, où $E \in \text{Mat}_r \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \right)$ et $H \in \text{Mat}_r \left(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp},1} \right)$. On a :

$$\begin{aligned} d(E) - E^2 &= d(N) - p^s d(H) - E^2 \\ &= (E + p^s H)^2 - p^s d(H) - E^2 \\ d(E) - E^2 &= p^s (EH + HE - d(H)) + p^{2s} H^2. \end{aligned}$$

On déduit alors du théorème 3.4.23 que $d(H) \equiv (EH + HE)|_{\text{d}(\text{frp})}[p]$. Or, on sait grâce à la proposition 3.4.26 que $EH|_{\text{frp}} + H|_{\text{frp}}E$ est congrue à une matrice à valeurs dans $W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp},2}$ modulo p , donc :

$$d(H) \equiv (EH|_{\text{d}(\text{frp})} + H|_{\text{d}(\text{frp})}E)|_{\text{d}(\text{frp})}[p]. \quad (4.2.4.1)$$

De plus, la matrice $V := \sum_{i \in \mathbb{N}^*} p^{-s} (-p^s U)^i$ vérifie $(I_r + p^s U)^{-1} = I_r + p^s V$ et est à valeurs dans $W^\dagger(\overline{R})$. On vérifie ensuite :

$$\begin{aligned} (I_r + p^s U)(E + p^s H)(I_r + p^s V) + d(I_r + p^s U)(I_r + p^s V) \\ = E + p^s (UE + H + EV + d(U)) + p^{2s} (UH + UV + HV + d(U)V) + p^{3s} UHV. \end{aligned} \quad (4.2.4.2)$$

D'après la proposition 3.4.26, $UE + EV$ est congrue à une matrice à valeurs dans $W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp},1}$ modulo p . On a également :

$$d(UE + EV) = d(U)E + Ud(E) + d(E)V - Ed(V).$$

Mais par le même argument que précédemment, $Ud(E) + d(E)V$ est congrue à une matrice à valeurs dans $W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp},2}$ modulo p . De plus puisque par construction $U \equiv -V[p]$, on a :

$$d(U)E - Ed(V) \equiv -H|_{\text{d}(\text{frp})}E - EH|_{\text{d}(\text{frp})}[p].$$

On déduit alors de (4.2.4.1) que $d(UE + H + EV) \equiv 0[p]$, et en employant le théorème 3.4.23, on obtient que $(UE + H + EV)|_{\text{frp}} \equiv 0[p]$, et donc que $UE + H + EV + d(U) \equiv 0[p]$, ce qui nous permet de conclure grâce à (4.2.4.2). $\square$

(4.2.5) Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit :

$$\zeta_{\varepsilon, \varphi} : \begin{array}{ccc} \text{Mat}_r \left(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}} \right) & \rightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \\ \{x_{i,j}\}_{i,j \in \llbracket 1, r \rrbracket} & \mapsto & \min\{\zeta_{\varepsilon, \varphi}(x_{i,j}) \mid i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket\} \end{array}.$$

Lorsque $r = 1$, cette définition coïncide (à bijection près) à la définition précédente de $\zeta_{\varepsilon, \varphi}$, il n'y a donc pas de conflit avec la précédente notation.

Proposition 4.2.6. *Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \text{Mat}_r \left(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 \right)$ tel que $d(N) = N^2$. Alors il existe $U \in \text{Mat}_r \left(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp}, 0} \right)^\times$ telle que la matrice ci-dessous soit à valeurs dans $t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1} \right)$:*

$$UNU^{-1} + d(U)U^{-1}.$$

Démonstration. Tout d'abord, posons $\varepsilon > 0$ tel que $\zeta_{\varepsilon, \varphi}(N|_{\text{int}}) \geq -\frac{1}{4}$ et $\zeta_{\varepsilon, \varphi}(N|_{\text{frac}}) \geq 0$. Un tel ε existe toujours si l'on le prend assez petit.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. Supposons données $s-1$ matrices $(U_i)_{i \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket} \in \text{Mat}_r \left(W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp}, 0} \right)^{s-1}$ telles que pour $V_s := \prod_{i=1}^{s-1} (I_r + p^i U_i)$ et $N_s := V_s N V_s^{-1} + d(V_s) V_s^{-1}$ on ait :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket, \quad \zeta_{\varepsilon, \varphi}(p^i U_i) &\geq 0, \\ N_s &\in \text{Mat}_r \left(t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1} \right) + p^s W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 \right). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que $d(N_s) = N_s^2$, soit par un calcul direct soit par un argument de changement de base pour une connexion intégrable. Utilisons le lemme 1.2.15 afin de trouver un relèvement du Frobenius $G : W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{n+m}]^\dagger \rightarrow W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{n+m}]^\dagger$ compatible à F et φ . Soit $M \in \text{Mat}_r \left(\Omega_{W(\mathbb{K})[X_1, \dots, X_{n+m}]^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1} \right)$ une matrice telle que $W(\varphi)(t_G(M)) = N|_{\text{int}}$ et que $\zeta_\varepsilon(t_G(M)) \geq -\frac{1}{2}$. Quitte à réduire ε , d'après le lemme 3.4.5 on a $\zeta_\varepsilon(v_G(M)) \geq 0$. Écrivons $V_s N V_s^{-1} = V_s (W(\varphi)(t_{\widetilde{\text{Frob}}}(M)) + v_G(M)) + N|_{\text{frac}} V_s^{-1}$. Puisque $\zeta_{\varepsilon, \varphi}$ est une pseudo-valuation on a $\zeta_{\varepsilon, \varphi}(V_s (W(\varphi)(t_{\widetilde{\text{Frob}}}(M)) + v_G(M)) + N|_{\text{frac}} V_s^{-1} + d(V_s) V_s^{-1}) \geq 0$. En décomposant $V_s = V_s|_{\text{int}} + V_s|_{\text{frac}}$ et en faisant de même avec V_s^{-1} , il découle de la proposition 3.1.14 que $\zeta_{\varepsilon, \varphi} \left((V_s W(\varphi)(t_{\widetilde{\text{Frob}}}(M)) V_s^{-1})|_{\text{frac}} \right) \geq 0$. *A fortiori*, $\zeta_{\varepsilon, \varphi} \left(N_s|_{\text{d}(\text{frp})} \right) \geq 0$.

En appliquant le lemme 4.2.4, on sait que l'unique matrice $U_s \in \text{Mat}_r \left(W^\dagger \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^{\text{frp},0} \right)$ telle que $d(p^s U_s) = N_s|_{\text{d}(\text{frp})}$ vérifiera :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket, \quad \zeta_{\varepsilon, \varphi}(p^i U_i) &\geq 0, \\ (I_r + p^s U_s) N_s (I_r + p^s U_s)^{-1} + d(I_r + p^s U_s) (I_r + p^s U_s)^{-1} \\ &\in \text{Mat}_r \left(t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \right) + p^{s+1} W^\dagger \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1 \right). \end{aligned}$$

Le lemme 4.2.4 nous assurant l'existence de ces matrices pour $s = 1$ dès lors que N est à valeurs dans $t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \right) + p W^\dagger \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1$, et puisque pour $V, V' \in \text{Mat}_r \left(W^\dagger (\bar{R}) \right)$ on a

$$V'(VNV^{-1} + d(V)V^{-1})V'^{-1} + d(V')V'^{-1} = V'VN(V'V)^{-1} + d(V'V)(V'V)^{-1}.$$

Il découle alors par récurrence sur $s \in \mathbb{N}^*$ que le produit $U := \prod_{s=1}^{+\infty} (I_r + p^s U_s)$ converge pour la topologie p -adique et surconverge puisque $\zeta_{\varepsilon, \varphi}$ est une pseudo-valuation. De plus, par construction, on aura $UNU^{-1} + d(U)U^{-1} \in \text{Mat}_r \left(t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \right) \right)$. On conclut alors concernant le cas où N ne satisfait pas nécessairement les conditions du lemme 4.2.4 en nous y ramenant grâce aux lemmes 4.2.2 et 4.2.3. $\square$

Lemme 4.2.7. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $W(\mathbb{K})$ -dga alternées sur X . Soient deux $\mathcal{F}$ -connexions intégrables $\nabla_M: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ et $\nabla_N: N \rightarrow N \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1$ sur des modules libres de rang fini, et soit $\varphi: (M, \nabla_M) \rightarrow (N, \nabla_N)$ un morphisme de $\mathcal{F}$ -connexions. Soient $\{m_i\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ et $\{n_j\}_{j \in \llbracket 1, r' \rrbracket}$ des bases respectives de $M(X)$ et $N(X)$, où $r, r' \in \mathbb{N}$ désignent les rangs respectifs de M et N . Alors si $W^\dagger \Omega_{X/\mathbb{K}} \subset \mathcal{F} \subset W^\dagger \Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$, et si les matrices représentatives de M et N sont à valeurs dans $t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1} \right)$, alors il existe une matrice $(w_{i,j})_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket, j \in \llbracket 1, r' \rrbracket}^{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \in \text{Mat}_{r, r'} \left(t_F(R^\dagger) \right)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ on ait :*

$$\varphi(m_i) = \sum_{j=1}^{r'} w_{i,j} n_j.$$

Démonstration. Soit $(w_{i,j})_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket, j \in \llbracket 1, r' \rrbracket}^{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \in \text{Mat}_{r, r'}(\mathcal{F}_0(X))$ la matrice telle que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ on ait $\varphi(m_i) = \sum_{j=1}^{r'} w_{i,j} n_j$. On doit vérifier que cette matrice est en fait à valeurs dans $t_F(R^\dagger)$.

Par définition d'un morphisme horizontal, on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \downarrow \nabla_M & & \downarrow \nabla_N \\ M \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\varphi \otimes_{\mathcal{F}_0} \text{Id}_{\mathcal{F}_1}} & N \otimes_{\mathcal{F}_0} \mathcal{F}_1 \end{array} .$$

De plus, si l'on note $(e_{i,k})_{i,k \in \llbracket 1, r \rrbracket} \in \text{Mat}_r \left(t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1} \right) \right)$ la matrice représentative de ∇_M pour la base $\{m_i\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$, on vérifie par définition :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \nabla_M(m_i) = \sum_{k=1}^r m_k \otimes e_{i,k}.$$

De même, si l'on note $(f_{j,k})_{j,k \in \llbracket 1, r' \rrbracket} \in \text{Mat}_{r'} \left(t_F \left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}, 1} \right) \right)$ la matrice représentative de ∇_N pour la base $\{n_j\}_{j \in \llbracket 1, r' \rrbracket}$, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, r' \rrbracket, \nabla_N(n_j) = \sum_{l=1}^{r'} n_l \otimes f_{j,l}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, nous déduisons de ces égalités et du diagramme commutatif en appliquant les morphismes à $m_i \in M$ que :

$$\sum_{k=1}^r \varphi(m_k) \otimes e_{i,k} = \sum_{j=1}^{r'} (w_{i,j} \nabla_N(n_j) + n_j \otimes d(w_{i,j})).$$

C'est-à-dire :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \sum_{j=1}^{r'} n_j \otimes \left(\sum_{k=1}^r w_{k,j} e_{i,k} \right) = \sum_{j=1}^{r'} n_j \otimes \left(d(w_{i,j}) + \sum_{l=1}^{r'} w_{i,l} f_{l,j} \right).$$

Comme $\{n_j\}_{j \in \llbracket 1, r' \rrbracket}$ est une base du $\mathcal{F}_0$ -module libre $N(X)$, on en déduit que :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r' \rrbracket, d(w_{i,j}) = \sum_{k=1}^r w_{k,j} e_{i,k} - \sum_{l=1}^{r'} w_{i,l} f_{l,j}.$$

En raisonnant comme au paragraphe (4.1.20), on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, r' \rrbracket$ on ait $p^n w_{i,j} \in W^\dagger(\bar{R})$. Posons :

$$u := \min\{\mathbf{v}_p((p^n w_{i,j})|_{\text{frac}}) \mid i \in \llbracket 1, r \rrbracket, j \in \llbracket 1, r' \rrbracket\}.$$

Soient i, j les entiers tel que le minimum ci-dessus soit atteint pour $\mathbf{v}_p((p^n w_{i,j})|_{\text{frac}})$. Or

$d((p^n w_{i,j})|_{\text{frac}}) = \sum_{k=1}^r (p^n w_{k,j})|_{\text{frac}} e_{i,k} - \sum_{l=1}^{r'} (p^n w_{i,l})|_{\text{frac}} f_{l,j}$, et il découle de la proposition 3.4.15 que $\mathbf{v}_p(d((p^n w_{i,j})|_{\text{frac}})) = u + 1$, ce qui signifie d'après le théorème 3.4.23 que $u = u + 1 = +\infty$; en particulier, on a $w_{i,j} \in t_F(R^\dagger)$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, r' \rrbracket$. $\square$

Proposition 4.2.8. Notons $\widetilde{t}_F: \Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}$ le morphisme de faisceaux de $W(\mathbb{K})$ -dgas obtenu par fonctorialité en vertu de la proposition 1.2.17. Le foncteur

$$\widetilde{t}_F: \Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}\text{-MIC}_f \rightarrow W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}\text{-MIC}_f$$

défini en (4.1.15) est une équivalence de catégories.

Démonstration. Si $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{W^\dagger(\mathcal{O}_X)} W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}$ est un élément de $W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}\text{-MIC}_f$, alors d'après les propositions 4.1.10, 4.1.11 et 4.2.6 il existe une base de M telle que la matrice représentative de ∇ associée à cette base soit à valeurs dans $t_F\left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1}\right)$. On peut alors construire une $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}$ -connexion ∇_Ω ayant cette matrice représentative, qui par la remarque 4.1.13 vérifiera $t_F(\nabla_\Omega) \cong \nabla$ en tant que $W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}$ -connexions. Le foncteur est donc essentiellement surjectif. Sa pleine fidélité est alors une conséquence immédiate du lemme 4.2.7. $\square$

(4.2.9) Désignons par $W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K},K,[F]}$ la $W(\mathbb{K})$ -dga obtenue à partir de $W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ par restriction des scalaires par F . Notons $\sigma: W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K \rightarrow W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K},K,[F]}$ l'endomorphisme de $W(\mathbb{K})$ -algèbres graduées tel que $\sigma|_{W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}^i \otimes_{W(\mathbb{K})} K} = p^i F \otimes \text{Id}_K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. D'après (2.2.3.3) il s'agit d'un endomorphisme de $W(\mathbb{K})$ -dgas alternées. On remarque que si l'on reprend les notations du paragraphe (4.1.25) alors $t_F \circ \Omega(F) = \sigma \circ t_F$.

Proposition 4.2.10. Reprenons les notations du paragraphe (4.2.9). Considérons le morphisme de faisceaux de $W(\mathbb{K})$ -dgas $\widetilde{t}_F: \Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \rightarrow W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}$ obtenu par adjonction à partir de t_F . Le foncteur défini en (4.1.27)

$$\widetilde{t}_F \otimes \text{Id}_K: \Omega(F)\text{-}\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K\text{-MIC}_f \rightarrow \sigma\text{-}W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K\text{-MIC}_f$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. Considérons un élément $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{W^\dagger(\mathcal{O}_X) \otimes_{W(\mathbb{K})} K} (W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K)$ de $\sigma\text{-}W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K\text{-MIC}_f$. Soit N une matrice représentative de ∇ pour une certaine base. Puisque chaque élément de K peut s'écrire sous la forme $p^{-i}w$ où $i \in \mathbb{N}$ et $w \in W(\mathbb{K})$, il est alors clair que l'on peut écrire $N = p^{-i}N'$, où N' est une matrice à valeurs dans $W^\dagger\Omega_{R/\mathbb{K}}^1$. Quitte à appliquer i fois à N l'isomorphisme de connexions de la σ -structure de ∇ , suivant la discussion en (4.1.15) on peut supposer que $i = 0$, c'est-à-dire que N est à valeurs dans $W^\dagger\Omega_{R/\mathbb{K}}^1$ d'après (4.1.20). Alors d'après les propositions 4.1.10, 4.1.11 et 4.2.6 il existe une base de M telle que la matrice représentative de ∇ associée à cette base soit à valeurs dans $t_F\left(\Omega_{R^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep},1}\right)$. On peut alors construire une $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -connexion ∇_Ω ayant cette matrice représentative, qui par la remarque 4.1.13 vérifiera $(\widetilde{t}_F \otimes \text{Id}_K)(\nabla_\Omega) \cong \nabla$ en tant que $W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -connexions. Il est alors clair que l'on vérifiera de plus $(\widetilde{t}_F \otimes \text{Id}_K)(\Omega(F)(\nabla_\Omega)) \cong \sigma(\nabla)$ en tant que $W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -connexions.

Mais le lemme 4.2.7 nous assure que l'isomorphisme $\sigma(\nabla) \cong \nabla$ provient d'un isomorphisme $\Omega(F)(\nabla_\Omega) \cong \nabla_\Omega$ ce qui nous assure l'essentielle surjectivité du foncteur ; mais ce même lemme nous permet également d'en déduire que ce dernier est pleinement fidèle. $\square$

Proposition 4.2.11. *Si $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{K})$ est une variété lisse, alors on peut recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines de la forme $U \cong \text{Spec}(\overline{R})$, où $\overline{R}$ vérifie les conditions du paragraphe 3.4.9.*

Démonstration. D'après [31] on peut recouvrir X par des ouverts affines $V \cong \text{Spec}(S)$ tels qu'il existe un morphisme d'anneaux étale fini $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow S$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après [44, 02KB], S est un $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ -module localement libre, c'est-à-dire qu'il existe un $i \in \mathbb{N}$ tel que l'on peut trouver des éléments $f_1, \dots, f_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tels que pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$ le $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{f_j}$ -module S_j soit libre de rang fini. $\square$

Théorème 4.2.12. *Soit $(\mathfrak{X}^\dagger, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger})$ un $W(\mathbb{K})$ -schéma formel faible tel que pour tout ouvert U de X qui soit un $W(\mathbb{K})$ -schéma formel affine faible, le morphisme d'anneaux structural $W(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}(U)$ est plat, et $(X, \mathcal{O}_X) := (\mathfrak{X}^\dagger, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger})$ est une $\mathbb{K}$ -variété lisse. Soit $F: \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}$ un morphisme d'anneaux relevant le Frobenius. On dispose alors d'une équivalence de catégories :*

$$t_F: \Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}\text{-MIC}_{\text{lf}} \rightarrow W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}\text{-MIC}_{\text{lf}}.$$

Si l'on reprend les notations $\Omega(F)$ et σ du paragraphe (4.2.9), alors on a une équivalence de catégories :

$$\widetilde{t_F} \otimes \text{Id}_K: \Omega(F)\text{-}\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K\text{-MIC}_{\text{lf}} \rightarrow \sigma\text{-}W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K\text{-MIC}_{\text{lf}}.$$

Démonstration. Soit ∇ une $W^\dagger\Omega_{X/\mathbb{K}}$ -connexion sur un module localement libre de rang fini. Utilisons la proposition 4.2.11 afin de recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines de la forme $U \cong \text{Spec}(\overline{R})$, où $\overline{R}$ vérifie les conditions du paragraphe 3.4.9. Quitte à localiser de nouveau, on peut de plus supposer que le module de la connexion ∇ est libre sur chacun de ces ouverts. Pour chacun de ces ouverts d'après la proposition 1.2.17 on peut appliquer la proposition 4.2.8 à $t_F|_U$. On dispose donc pour chaque ouvert U d'une $\Omega_{U/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}$ -connexion intégrale libre sur un module de rang fini donc l'image par le foncteur induit par $t_F|_U$ est $\nabla|_U$. De plus, il est clair en vertu de la remarque (4.1.14) que ces connexions coïncident sur les intersections et vérifient la condition de cocycle. On peut donc recoller ces connexions en une unique $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\text{sep}}$ -connexion localement libre de type fini, antécédente de ∇ par le foncteur t_F .

Nous pouvons faire exactement le même raisonnement mais employant la proposition 4.2.10 afin d'obtenir la seconde équivalence de catégories. $\square$

(4.2.13) Dans le théorème 4.2.12, si $\mathfrak{X}^\dagger = \mathrm{Spff}(R)$ pour un certaine $W(\mathbb{K})$ -algèbre commutative lisse (auquel cas le relèvement de Frobenius F existe toujours), alors la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(X/K)$ des F -isocristaux surconvergents sur X au sens de [5] possède une interprétation pour la cohomologie de De Rham-Witt surconvergente.

On sait d'après [5, (2.5.8)] que la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(X/K)$ est équivalente à celles des $R^\dagger \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -modules M de type fini munis d'une connexion intégrable ∇ et d'un isomorphisme horizontal décrit en (4.1.25). Si (M, ∇) est un tel module à connexion, on peut lui associer le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -module quasi-cohérent $\widetilde{M}$. On munit ce module d'une $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\mathrm{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -connexion intégrable en associant à chaque $f \in R^\dagger$ l'application

$$\begin{aligned} \nabla(D(\bar{f})) : \widetilde{M}(D(\bar{f})) &\rightarrow \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}} \left(\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\mathrm{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K \right) (D(\bar{f})) \\ m \otimes r &\mapsto r \nabla(m) + m \otimes d(r) \end{aligned}$$

où $m \in M$ et $r \in R_f^\dagger$ (on vérifie avec les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 4.1.12 que cette application est bien définie et vérifie la propriété d'une connexion). Il est alors clair d'après (4.1.2.1) qu'en composant avec le foncteur $\widetilde{t}_F \otimes \mathrm{Id}_K$, on définit une équivalence de catégories entre $F\text{-Isoc}^\dagger(X/K)$ et la catégorie des $\widetilde{W^\dagger \Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K}$ -connexions intégrables sur un module de la forme $M \otimes_{R^\dagger \otimes_{W(\mathbb{K})} K} W(\bar{R}) \otimes_{W(\mathbb{K})} K$, où M est un $R^\dagger \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -module de type fini, et munies d'une σ -structure.

Le théorème 4.2.12 nous permet de préciser un peu cette équivalence à condition de se restreindre aux $W^\dagger \Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -modules localement libres de type fini. Remarquons en effet que si l'on se donne une $\Omega(F)$ - $\Omega_{\mathfrak{X}^\dagger/W(\mathbb{K})}^{\mathrm{sep}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -connexion ∇ intégrable sur un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -module M localement libre de type fini, alors d'après le lemme 4.2.7 on peut recoller localement les modules libres en un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger}$ -module M' tel que $M \cong M' \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -modules. De plus, puisque M est localement libre de type fini, il est cohérent et d'après [40, Theorem 3.] il est alors de la forme $M' = \widetilde{N}$ pour un certain $R^\dagger$ -module de type fini N . Par conséquent, on a $M \cong N \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^\dagger} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -modules. Cela signifie donc que l'image essentielle des F -isocristaux surconvergents sur X localement libres (au sens ci-dessus) est la catégorie $\sigma\text{-}W^\dagger \Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K\text{-MIC}_{\mathrm{lf}}$. Cette dernière est une sur-catégorie de la catégorie $\mathrm{Con}^\dagger(X/W(\mathbb{K}))$ définie par Ertl en [19] et [20]. Cette dernière était définie comme la catégorie des $W^\dagger \Omega_{X/\mathbb{K}}$ -connexions localement libres, quasi-nilpotentes et intégrables.

On peut alors se demander si l'image essentielle de $F\text{-Isoc}^\dagger(X/K)$ ne pourrait pas s'exprimer avec des propriétés intrinsèques de la catégorie des $W^\dagger \Omega_{X/\mathbb{K}} \otimes_{W(\mathbb{K})} K$ -connexions munies d'une σ -structure. La principale obstruction provient du fait que l'on ne peut pas se ramener au cas d'un module libre en général, notamment parce que le morphisme de schémas $t_F \otimes \mathrm{Id}_K : \mathrm{Spec}(W(\bar{R}) \otimes_{W(\mathbb{K})} K) \rightarrow \mathrm{Spec}(R^\dagger \otimes_{W(\mathbb{K})} K)$ ne semble pas adapté aux arguments présentés dans cette section.

Remarquons que la preuve proposée ici est entièrement basée sur une preuve algébrique.

Nous n'utilisons en particulier pas les définitions générales des F -isocristaux. On peut légitimement espérer pouvoir généraliser ces résultats en employant la notion de *Witt frame* qui permit à Davis, Langer et Zink de démontrer leur théorème de comparaison avec la cohomologie rigide [16], et à Ertl de généraliser cette dernière aux coefficients [19]. Une autre piste serait d'employer le site surconvergent [37] afin d'affiner ces équivalences de catégories. On remarque en effet que Ertl n'obtient dans sa construction que des connexions de De Rham-Witt surconvergentes localement libres à partir d'un isocristal surconvergent avec ces constructions plus générales.

Annexe A

Propositions complémentaires mineures

Ce premier annexe contient quelques propositions, non nécessaires à la preuve des théorèmes de la thèse, mais permettant de mieux comprendre les objets employés.

(A.0) Dans tout cet annexe K désigne un anneau commutatif parfait de caractéristique p . On notera $n \in \mathbb{N}^*$ et $K[\underline{X}] := K[X_1, \dots, X_n]$.

D'après la propriété universelle du quotient nous avons le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} W^\dagger \Omega_{K[\underline{X}]/K} & \xhookrightarrow{i} & W \Omega_{K[\underline{X}]/K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^\dagger \Omega_{K[\underline{X}]/K}/(p^n) & \xhookrightarrow{\tilde{i}} & W \Omega_{K[\underline{X}]/K}/(p^n) \end{array} \quad . \quad (\text{A.0.1})$$

Proposition A.1. *Le morphisme $\tilde{i}$ du diagramme (A.0.1) n'est pas une bijection.*

Démonstration. D'après le théorème 2.3.15, tout $x \in W \Omega_{K[\underline{X}]/K}$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{(k,I) \in \mathcal{P}} \eta_{k,I} e(k, I)$, où les $\eta_{k,I} \in W(K)$ vérifient que $V^{u(k)}(\eta_{k,I}) \in V^l(W(K))$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ sauf pour un nombre fini de couples $(k, I) \in \mathcal{P}$. En particulier, si l'on note

$$\tilde{w} := \sum_{\substack{(k,I) \in \mathcal{P} \\ v_V(\eta_{k,I})=0}} \eta_{k,I} e(k, I)$$

on a $w \equiv \tilde{w}[p]$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ on a défini $\gamma_\varepsilon(w) = \inf_{(k,I) \in \mathcal{P}} \{v_V(\eta_{k,I}) + u(k) - \varepsilon k\}$, il est alors clair que quel que soit $x \in W(K)$ on aura $\gamma_\varepsilon(\tilde{w}) \geq \gamma_\varepsilon(\tilde{w} + px)$. En particulier, il existe un élément surconvergent dans la classe de w si et seulement si $\tilde{w} \in W^\dagger \Omega_{K[\underline{X}]/K}$.

Maintenant, en posant $w = \sum_{l \in \mathbb{N}} V^l \left(X^{p^l l^2 + 1} \right)$, on a clairement $w = \tilde{w}$, or $\tilde{w}$ n'est pas surconvergent. $\square$

Proposition A.2. *Si K est intègre, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ le $W(K)$ -module $W\Omega_{K[\underline{X}]/K}^i$ est sans torsion.*

Démonstration. Soient $x \in W\Omega_{K[\underline{X}]/K}$ et $\xi \in W(K)$ tels que $\xi x = 0$. D'après le théorème 2.3.15, il existe une fonction $\eta: \mathcal{P} \rightarrow W(K)$ vérifiant l'égalité (2.3.15.1) et on a $\xi x = \sum_{(k,I) \in \mathcal{P}} \xi \eta_{k,I} e(k, I)$. Or par unicité de l'écriture, cela implique que pour tout $(k, I) \in \mathcal{P}$ on a $\xi \eta_{k,I} = 0$. Or comme K est intègre de caractéristique p , $W(K)$ est intègre, donc si $\xi \neq 0$ alors η est la fonction nulle et $x = 0$. $\square$

Proposition A.3. *Soit $\varphi: K[\underline{X}] \rightarrow R$ un morphisme surjectif de K -algèbres. Posons $x \in \overline{W(R)}$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\eta > 0$ il existe $y_\eta \in W(K[\underline{X}])$ tel que $\overline{W(\varphi)(y_\eta)} = x$ et $\gamma_\varepsilon(y_\eta) \geq C - \eta$. Alors il existe $y \in W(K[\underline{X}])$ tel que $\overline{W(\varphi)(y)} = x$ et $\gamma_\varepsilon(y) \geq C$.*

Démonstration. Soit $i \in \mathbb{N}$. Soit $\eta_i > 0$ tel qu'il n'existe pas d'entier $j \in \mathbb{N}$ tel que $C > i - \varepsilon p^{-i} j \geq C - \eta_i$ (un tel η_i existe toujours quitte à le réduire). Il existe alors un $y^{\eta_i} \in W(K[\underline{X}])$ vérifiant les conditions de l'énoncé, et d'après (2.5.2.3) et la discussion ci-dessus on a $i - \varepsilon p^{-i} \deg(y_i^{\eta_i}) \geq C$. On pose le vecteur de Witt $y := (y_i^{\eta_i})_{i \in \mathbb{N}} \in W(K[\underline{X}])$, et celui-ci vérifie bien les conditions de l'énoncé. En effet d'après (1.1.9), pour tout $i \in \mathbb{N}$ il existe $z^i \in W(R)$ tel que $W(\varphi)(y^{\eta_i}) = W(\varphi)(y^1) + F(z^i)$, et comme R est de caractéristique p cela implique que $\varphi(y_i^{\eta_i}) = \varphi(y_i^1) + \text{Frob}_R(z_i^i)$, donc si l'on pose $z := (z_i^i)_{i \in \mathbb{N}} \in W(K[\underline{X}])$ on a $W(\varphi)(y) = W(\varphi)(y^1) + F(z)$, et puisque $z_0 = 0$ alors $F(z)$ est un multiple de p et on conclut. $\square$

Annexe B

Compléments sur la structure modulo p

Cet annexe comprend une étude de la structure modulo p du complexe de De Rham-Witt surconvergent se basant exclusivement sur les résultats de [8]. Bien que l'on retrouve certains résultats, ceux-ci s'avèrent insuffisants pour la démonstration des théorèmes présents dans cette thèse ; c'est cette obstruction qui a motivé la rédaction du chapitre 3. On présente toutefois ces résultats ici afin d'avoir une démonstration différente de certaines propositions, mais également pour comprendre les liens entre les objets définis par Bloch et ceux présentés dans cet ouvrage.

(B.0) Dans tout cet annexe, on conservera les notations du paragraphe (3.2.1).

Soit $m \in \mathbb{N}$. Nous noterons $IW\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^m$ le sous- $\bar{R}$ -module de $\overline{W\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^m}$ constitué des séries convergentes pour la topologie canonique quotient de la forme $\sum_{l \in \mathbb{N}} \omega_l$, où pour tout $l \in \mathbb{N}$ on a $\omega_l \in I(\bar{R})\overline{W\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^m}$. Similairement, on notera $IW^\dagger\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^m$ le sous- $\bar{R}$ -module de $\overline{W^\dagger\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^m}$ constitué de séries surconvergentes d'éléments de $I^\dagger(\bar{R})\overline{W^\dagger\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^m}$.

On notera $\pi : \overline{W\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1} \rightarrow \overline{W\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1}/IW\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1$ la projection canonique (on conservera la notation $\pi : \overline{W^\dagger\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1} \rightarrow \overline{W^\dagger\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1}/IW^\dagger\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1$ dans le cadre surconvergent).

Il est prouvé dans [8] que la suite ci-dessous est aussi une suite exacte scindée de $\bar{R}$ -modules :

$$0 \longrightarrow I(\bar{R}) \xrightarrow{\pi \circ d} \overline{W\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1}/IW\Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1 \xleftarrow[\pi \circ \iota_F]{\quad} \Omega_{\bar{R}/\mathbb{K}}^1 \longrightarrow 0. \quad (\text{B.0.1})$$

Lemme B.1. Soient $\eta \in W(\mathbb{K})$ et $k \in \mathcal{P}_0$, alors $\eta e(k, \emptyset) \in \text{Ker}(W(\mathbb{K}[\underline{X}]) \rightarrow \mathbb{K}[\underline{X}])$ si et seulement si $\eta \in V(W(\mathbb{K}))$ ou $u(k) > 0$.

Démonstration. Par définition, $e(k, \emptyset) = V^{u(k)} \left(\left[\underline{X}^{p^{u(k)}k} \right] \right)$. On conclut parce que l'on a $\text{Ker}(W(\mathbb{K}[\underline{X}]) \rightarrow \mathbb{K}[\underline{X}]) = V(W(\mathbb{K}[\underline{X}]))$. $\square$

Lemme B.2. *Supposons que $\overline{R} = \mathbb{K}[\underline{X}]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a une suite exacte scindée de $\overline{R}$ -modules :*

$$0 \longrightarrow I^\dagger(\overline{R}) \xrightarrow{\pi \circ d} \overline{W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1} / IW^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 \xrightleftharpoons[\pi \circ t_F]{} \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^\dagger(\overline{R}) & \xrightarrow{\pi \circ d} & \overline{W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1} / IW^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 & \xrightleftharpoons[\pi \circ t_F]{} & \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & I(\overline{R}) & \xrightarrow{\pi \circ d} & \overline{W \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1} / IW \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 & \xrightleftharpoons[\pi \circ t_F]{} & \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 \longrightarrow 0 \end{array}.$$

Afin de vérifier que la première ligne est exacte, il suffit de prouver que pour tout $i \in I(\overline{R})$ tel qu'il existe $w \in \overline{W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1}$ et $j \in I(\overline{R}) \overline{W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1}$ tel que $d(i) = w + j$, alors on a $i \in I^\dagger(\overline{R})$. Soient $\tilde{w}, \tilde{j} \in W^\dagger \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1$ des représentants respectifs des classes w et j , et notons $\tilde{d}$ la différentielle de $W \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1$. D'après la suite exacte scindée (B.0.1), l'écriture $w = d(i) - j$ détermine uniquement w , pour cette raison et en vertu du théorème 2.3.15, du lemme B.1 et de la proposition 2.3.12, on peut supposer que

$$\tilde{j} = \sum_{\substack{(k,I) \in \mathcal{P} \\ I \neq \{\min(k)\}}} \eta_{k,I} e(k, I) + \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ v_p(k) \geq 0}} \eta_{k, \{\min(k)\}} e(k, \{\min(k)\})$$

où tous les $\eta_{k,I} \in W(\mathbb{K})$ vérifient pour tout $m \in \mathbb{N}$ que $V^{u(k)}(\eta_{k,I}) \in V^m(W(\mathbb{K}))$ sauf pour un nombre fini de couples $(k, I) \in \mathcal{P}$. Or, si l'on note $\tilde{w} = \sum_{(k,I) \in \mathcal{P}} \eta'_{k,I} e(k, I)$ on déduit de la discussion précédente, de la proposition 2.3.12, du lemme B.1 et du fait que $\mathbb{K}$ soit parfait qu'il existe $x \in W \Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1$ tel que :

$$\tilde{d}(\tilde{i}) = \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ v_p(k) < 0}} \eta'_{k, \{\min(k)\}} e(k, \{\min(k)\}) + px.$$

Or cette somme est surconvergente car w est un élément surconvergent. *Ipso facto*, l'élément $j := \sum_{\substack{k \in \mathcal{P}_0 \\ v_p(k) < 0}} \eta'_{k,I} e(k, \emptyset)$ est surconvergent et vérifie $j_0 = 0$. Enfin $\tilde{d}(j)$ est congru à

$\tilde{d}(\tilde{i})$ modulo p . Par conséquent $\pi(\tilde{j}) = i$, où π est la projection modulo p , car d est injective : le lemme est démontré. $\square$

Lemme B.3. Soit $\varphi: \mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \overline{R}$ un morphisme surjectif de $\mathbb{K}$ -algèbres pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors toutes les flèches verticales du diagramme commutatif ci-dessous sont surjectives :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]) & \longrightarrow & \overline{W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])} & \longrightarrow & \mathbb{K}[\underline{X}] \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow W^\dagger(\varphi) & & \downarrow \varphi \\
0 & \longrightarrow & I^\dagger(\overline{R}) & \longrightarrow & \overline{W^\dagger(\overline{R})} & \longrightarrow & \overline{R} \longrightarrow 0
\end{array}$$

Démonstration. On sait que φ est surjective par définition, ainsi que $W^\dagger(\varphi)$ et sa descente modulo p . Soit $i \in I(\overline{R}) \subset \overline{W^\dagger(\overline{R})}$ et soit $\tilde{i} \in W^\dagger(\overline{R})$ un représentant de la classe i . On sait que $i_0 = 0$ car les lignes horizontales sont exactes. Donc si $j \in W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])$ est un antécédent de $\tilde{i}$ par $W^\dagger(\varphi)$, alors $j' := j - [j_0]$ en sera également un et de plus $j'_0 = 0$, donc sera un élément du noyau de $W^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]) \rightarrow \mathbb{K}[\underline{X}]$ ce qui permet de conclure modulo p . $\square$

Proposition B.4. Reprenons les notations du paragraphe (3.2.1). On a une suite exacte scindée de $\overline{R}$ -modules :

$$0 \longrightarrow I^\dagger(\overline{R}) \xrightarrow{\pi \circ d} \overline{W^\dagger \Omega^1_{\overline{R}/\mathbb{K}}} / IW^\dagger \Omega^1_{\overline{R}/\mathbb{K}} \xrightleftharpoons[\pi \circ t_F]{} \Omega^1_{\overline{R}/\mathbb{K}} \longrightarrow 0. \quad (\text{B.4.1})$$

Démonstration. Puisque $\overline{R}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini, on peut d'après le lemme 1.2.15 trouver un $n \in \mathbb{N}$ et un morphisme surjectif de $\mathbb{K}$ -algèbres $\varphi: \mathbb{K}[\underline{X}] \rightarrow \overline{R}$ pour lequel on ait un relèvement du Frobenius sur $W(\mathbb{K})[\underline{X}]^\dagger$ compatible avec F . On a alors le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow I^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}]) & \rightarrow & \overline{W^\dagger \Omega^1_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}} / IW^\dagger \Omega^1_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}} & \longrightarrow & \Omega^1_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}} & \rightarrow & 0 \\
& \searrow & \downarrow \pi_2 & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
0 \rightarrow I(\mathbb{K}[\underline{X}]) & \xrightarrow{\quad} & \overline{W \Omega^1_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}} / IW \Omega^1_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}} & \longrightarrow & \Omega^1_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}} & \rightarrow & 0 \\
& \downarrow \pi_1 & \downarrow & \downarrow \pi_3 & \downarrow & \downarrow \pi_4 & \\
0 \rightarrow I^\dagger(\overline{R}) & \xrightarrow{\quad} & \overline{W^\dagger \Omega^1_{\overline{R}/\mathbb{K}}} / IW^\dagger \Omega^1_{\overline{R}/\mathbb{K}} & \longrightarrow & \Omega^1_{\overline{R}/\mathbb{K}} & \rightarrow & 0 \\
& \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
0 \rightarrow I(\overline{R}) & \xrightarrow{\quad} & \overline{W \Omega^1_{\overline{R}/\mathbb{K}}} / IW \Omega^1_{\overline{R}/\mathbb{K}} & \longrightarrow & \Omega^1_{\overline{R}/\mathbb{K}} & \rightarrow & 0
\end{array}$$

En lisant ce diagramme de gauche à droite, nous noterons toutes les premières flèches horizontales d . On sait par (B.0.1) et le lemme B.2, qu'hormis pour la troisième, toutes les lignes sont exactes scindées dans leurs catégories de modules respectives. Si l'on note

également σ le morphisme de $\mathbb{K}[\underline{X}]$ -modules $\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^1 \rightarrow \overline{W\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^1}/IW^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^1$, on déduit par fonctorialité du morphisme s_F étudiée dans [28], et par la discussion précédent le diagramme, que $\sigma \circ \pi_4 = \pi_3 \circ \sigma$. De plus, comme σ a des valeurs surconvergentes, pour vérifier que la suite (B.4.1) est exacte scindée il suffit de démontrer que pour tout $i \in I(\overline{R})$, si $d(i) \in \overline{W^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1}/IW^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1$ alors $i \in I^\dagger(\overline{R})$. On sait d'après le lemme B.3 que π_1 est surjective. On sait également que π_2 est surjective par définition de $W^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1$. Par conséquent, on peut remonter $d(i)$ en un élément $w \in \overline{W^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^1}/IW^\dagger\Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^1$. Nous savons que $w = d(j) + \sigma(x)$ pour un certain couple $j \in I^\dagger(\mathbb{K}[\underline{X}])$ et $x \in \Omega_{\mathbb{K}[\underline{X}]/\mathbb{K}}^1$. Puisque π_1 est surjective, on peut également choisir un $\tilde{i} \in I(\mathbb{K}[\underline{X}])$ tel que $\pi_1(\tilde{i}) = i$. Par conséquent $\pi_3(d(j - \tilde{i}) + \sigma(x)) = 0$. En particulier, $\pi_3(\sigma(x))$ est à la fois dans l'image de d et de σ , donc $\pi_3(\sigma(x)) = 0$ et $\pi_3(d(j - \tilde{i})) = 0$, ce qui implique par injectivité de d que $\tilde{i}$ est surconvergent, donc que $i \in I^\dagger(\overline{R})$. $\square$

Proposition B.5. *Conservons les notations du paragraphe (3.2.1) et considérons la projection canonique $\pi' : \overline{W^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2} \rightarrow \overline{W^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2} / \left(\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2 + IW^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2 \right)$. Dans ce cas, l'application $(\pi' \circ d)|_{IW^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1}$ est un morphisme injectif de $\overline{W^\dagger(\overline{R})}$ -modules.*

Démonstration. Remarquons que $\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2 + IW^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2$ est un sous- $\overline{W^\dagger(\overline{R})}$ -module de $\overline{W^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2}$, en effet puisque l'on a identifié $\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2$ à son image par s_F on peut conclure en utilisant la suite exacte scindée (3.2.1.1). Considérons à présent le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} IW^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 & \xrightarrow{d} & \overline{W^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2} & \xrightarrow{\pi'} & \overline{W^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2} / \left(\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2 + IW^\dagger\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2 \right) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ IW\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^1 & \xrightarrow{d} & \overline{W\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2} & \longrightarrow & \overline{W\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2} / \left(\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2 + IW\Omega_{\overline{R}/\mathbb{K}}^2 \right) \end{array}.$$

D'après [8], la composition de la ligne du bas est injective, et l'injectivité de l'application est alors immédiate. Sa $\overline{W^\dagger(\overline{R})}$ -linéarité est une conséquence de la formule (2.1.8.1) projetée dans le quotient. $\square$

Bibliographie

- [1] Alberto ARABIA : Relèvement des algèbres lisses et de leurs morphismes. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 76, 2001.
- [2] Michael ATIYAH et Ian Grant MACDONALD : *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, 1969.
- [3] Pierre BERTHELOT : Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p . *Mémoires de la Société Mathématique de France 2 e série*, 23, 1986.
- [4] Pierre BERTHELOT : Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$ -modules. In Francesco BALDASSARRI, Siegfried BOSCH et Bernard DWORK, éditeurs : *p-adic Analysis*. Springer-Verlag, 1990.
- [5] Pierre BERTHELOT : Cohomologie rigide I. *Preprint*, 1996.
- [6] Pierre BERTHELOT et Arthur OGUS : F -Isocrystals and De Rham Cohomology. I. *Inventiones mathematicae*, 72, 1983.
- [7] Spencer BLOCH : Algebraic K -theory and crystalline cohomology. *Publications mathématiques de I.H.É.S.*, 47, 1977.
- [8] Spencer BLOCH : Crystals and de Rham-Witt connections. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 3, 2004.
- [9] Siegfried BOSCH, Ulrich GÜNTZER et Reinhold REMMERT : *Non-Archimedean Analysis*. Springer-Verlag, 1984.
- [10] Nicolas BOURBAKI : *Algèbre commutative : Chapitres 1 à 4*. Springer-Verlag, 2006.
- [11] Nicolas BOURBAKI : *Algèbre commutative : Chapitres 8 et 9*. Springer-Verlag, 2006.
- [12] Nicolas BOURBAKI : *Algèbre : Chapitres 1 à 3*. Springer-Verlag, 2007.
- [13] Daniel CARO : Dévissages des F -complexes de $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques en F -isocristaux surconvergentes. *Inventiones mathematicae*, 166, 2006.
- [14] Daniel CARO et Nobuo TSUZUKI : Overholonomicity of overconvergent F -isocrystals over smooth varieties. *Annals of Mathematics*, 176, 2012.
- [15] Christopher DAVIS : *The Overconvergent de Rham-Witt Complex*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 2009.

- [16] Christopher DAVIS, Andreas LANGER et Thomas ZINK : Overconvergent de Rham-Witt cohomology. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 44, 2011.
- [17] Christopher DAVIS, Andreas LANGER et Thomas ZINK : Overconvergent Witt vectors. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 668, 2012.
- [18] Renée ELKIK : Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien. *Annales scientifiques de l'É.N.S. 4 e série*, 6, 1973.
- [19] Veronika ERTL : Comparison between Rigid and Overconvergent Cohomology with Coefficients. *Preprint*, 2016.
- [20] Veronika ERTL : Full faithfulness for overconvergent F -de Rham-Witt connections. *Comptes Rendus - Mathématique*, 354, 2016.
- [21] Jean-Yves ETESSE : Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un cristal. *Compositio Mathematica*, 66, 1988.
- [22] Alexander GROTHENDIECK : Crystals and the De Rham Cohomology of Schemes. In Alexander GROTHENDIECK et Nicolaas Hendrik KUIPER, éditeurs : *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. Masson & Cie, Editeur and North-Holland Publishing Company, 1968.
- [23] Alexander GROTHENDIECK : *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*. Les presses de l'université de Montréal, 1974.
- [24] Alexander GROTHENDIECK et Jean DIEUDONNÉ : *Éléments de Géométrie Algébrique IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*. Publications mathématiques de I.H.É.S., 1967.
- [25] Alexander GROTHENDIECK et Jean DIEUDONNÉ : *Éléments de Géométrie Algébrique I*. Springer, 1971.
- [26] Michiel HAZEWINKEL : Witt vectors. Part 1. In Michiel HAZEWINKEL, éditeur : *Handbook of Algebra : Volume 6*. Elsevier, 2009.
- [27] Lars HESSELHOLT et Ib MADSEN : On the de Rham-Witt complex in mixed characteristic.
- [28] Luc ILLUSIE : Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. *Annales scientifiques de l'É.N.S. 4 e série*, 12, 1979.
- [29] Luc ILLUSIE : De Rham-Witt complexes and p -adic Hodge theory. Pre-notes for Sapporo seminar, March 2011, 2011.
- [30] Nicholas M. KATZ : Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin. *Publications mathématiques de I.H.É.S.*, 39, 1970.
- [31] Kiran Sridhara KEDLAYA : More étale covers of affine spaces in positive characteristic. *Journal of Algebraic Geometry*, 14, 2005.
- [32] Serge LANG : *Algebra (revised third edition)*. Springer, 2002.

- [33] Andreas LANGER et Thomas ZINK : De Rham-Witt cohomology for a proper and smooth morphism. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 3, 2004.
- [34] Camille LAURENT-GENGOUX, Anne PICHEREAU et Pol VANHAECKE : *Poisson Structures*. Springer-Verlag, 2013.
- [35] Michel Paul LAZARD : *Commutative Formal Groups*. Springer, 1975.
- [36] Bernard LE STUM : *Rigid Cohomology*. Cambridge University Press, 2007.
- [37] Bernard LE STUM : The overconvergent site. *Mémoires de la Société Mathématique de France*, 127, 2011.
- [38] Qing LIU : *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press, 2006.
- [39] Saul LUBKIN : Generalization of p -adic cohomology ; bounded Witt vectors. A canonical lifting of a variety in characteristic $p \neq 0$ back to characteristic zero. *Compositio Mathematica*, 34, 1977.
- [40] David MEREDITH : Weak formal schemes. *Nagoya Mathematical Journal*, 45, 1971.
- [41] Paul MONSKY et Gerard WASHNITZER : Formal cohomology : I. *Annals of Mathematics*, 88, 1968.
- [42] Michel RAYNAUD : *Anneaux Locaux Henséliens*. Springer-Verlag, 1970.
- [43] Jean-Pierre SERRE : *Corps locaux*. Hermann Paris, 1962.
- [44] The STACKS PROJECT AUTHORS : Stacks project. <https://stacks.math.columbia.edu/>, 2020.
- [45] Marius VAN DER PUT : The cohomology of Monsky and Washnitzer. *Mémoires de la Société Mathématique de France 2 e série*, 23, 1986.
- [46] André WEIL : Number of solutions of equations in finite fields. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55, 1949.